

Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України
Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Єременко Іван Сергійович

УДК 535.14, 530.145, 535.1

Дисертація

Реалістичні вимірювання багатомодового квантового світла

104 Фізика та астрономія
10 Природничі науки

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

(підпис, ініціали та прізвище здобувача)

Науковий керівник:
доктор наук з галузі “Природничі науки”,
старший науковий співробітник
Семенов Андрій Олександрович

Київ 2026

Анотація

Єременко І. С. Реалістичні вимірювання багатомодового квантового світла. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 104 — Фізика та астрономія. — Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова Національної академії наук України, Київ, 2026.

Сучасна квантова оптика дедалі частіше працює з багатомодовими станами світла, у яких квантові властивості проявляються не лише в окремих модах, а й у складних кореляціях між ними. Такі стани є основою для квантових комунікацій, квантових обчислень, задач вибірки з оптичних розподілів та експериментальної перевірки неklasичної поведінки світла. Водночас інформація про квантовий стан стає доступною лише через конкретну схему вимірювання. Тому послідовний опис вимірювального процесу є не менш важливим, ніж опис самого стану.

У дисертації розглянуто два рівні такого опису. У задачі гібридних вимірювань основну роль відіграє явне врахування конкретних вимірювальних приладів: збалансованого гомодинного детектування в одному каналі та порогового фотодетектування після фазово-просторового зміщення в іншому. У задачі гаусівської бозонної вибірки центральним є вже детальний опис неідеального фотонного підрахунку, зокрема скінченної здатності детекторів до розрізнення чисел фотонів, мертвого часу та релаксаційних ефектів. Саме в цьому випадку обмеження реальних фотодетекторів можуть істотно змінювати статистику вихідних подій і впливати на процедури валідації.

Метою дисертаційної роботи є розвиток теоретичного опису вимірювань багатомодового квантового світла та застосування цього опису до двох задач: аналізу гібридних вимірювальних схем для виявлення неklasичних кореляцій світла та опису гаусівської бозонної вибірки з реалістичним розрізненням чисел фотонів. Для досягнення цієї мети використано операторний опис багатомодових квантових станів, формалізм додатних операторнозначних мір, характеристичні функції гаусівських станів, фазово-просторові представлення Кехілла–Глаубера та статистичні методи аналізу вимірювальних результатів.

У дисертації послідовно викладено теоретичний апарат, необхідний для

опису багатомодових оптичних станів і вимірювань. Сформульовано базовий операторний опис оптичних мод, багатомодових станів, гаусівських станів та їхніх коваріаційних матриць. Окрему увагу приділено опису квантових вимірювань через додатні операторнозначні міри, оскільки саме цей підхід дозволяє однаково описувати як неперервні, так і дискретні вимірювальні результати, а також урахувати неідеальності фотодетекторів у задачах фотонного підрахунку. У фазово-просторовому представленні правило Борна записано в інтегральній формі, що встановлює зв'язок між квазіймовірнісним описом стану та фазово-просторовими символами елементів додатних операторнозначних мір. Такий підхід є спільною теоретичною основою для подальшого аналізу гібридних вимірювань і гаусівської бозонної вибірки. Це дозволяє розглядати не лише стан сам по собі, а й вимірювальну поведінку, тобто статистику результатів для заданого набору локальних налаштувань. Саме на рівні такої поведінки порівнюються локально-реалістичний опис і фазово-просторово класичне відтворення статистики.

У першій частині роботи розглянуто гібридну схему вимірювання, у якій одна мода світла аналізується за допомогою збалансованого гомодинного детектування, а друга — за допомогою порогового фотодетектування після фазово-просторового зміщення. Така схема поєднує неперервну змінну, представлену квадратурою поля, і дискретну змінну, що відповідає неспрацьовуванню або спрацьовуванню порогового детектора. Для цієї схеми сформульовано простір локальних налаштувань і результатів, записано спільні ймовірності вимірювань та показано, як ці ймовірності можуть бути представлені у фазово-просторовій формі через символи відповідних елементів додатних операторнозначних мір.

Як показовий приклад у дисертації розглянуто двомодовий стиснений вакуумний стан. Його окремі моди мають тепловий, тобто локально класичний, вигляд, тоді як повний двомодовий стан містить некласичні міжмодові кореляції. Для цього прикладу проаналізовано статистику гібридного вимірювання та її залежність від параметра стиснення і локальних налаштувань. Показано, що відповідна поведінка не демонструє порушення локального реалізму у сенсі нелокальності Белла, але порушує більш слабку модель класичного фазово-просторового опису. Отже, гібридне вимірювання дозволяє виявляти некласичні кореляції світла на рівні конкретної вимірювальної статистики.

Інша частина дисертації присвячена гаусівській бозонній вибірці за умов

реалістичного розрізнення чисел фотонів під час детектування. Гаусівська бозонна вибірка є спеціалізованою моделлю неуніверсальних квантових обчислень: вона не призначена для виконання довільного квантового алгоритму, а реалізує конкретну задачу вибірки з розподілу фотонних подій на виході лінійного інтерферометра. У цій схемі на входи інтерферометра подаються гаусівські стани світла, а на виході реєструються фотонні події. Події з кратною реєстрацією, тобто події з більш ніж одним фотоном у певній вихідній моді, є відносно рідкісними, але саме вони можуть нести важливу інформацію для валідації експерименту. Тому обмежена здатність реалістичних детекторів розрізняти сусідні числа фотонів має принципове значення для правильної інтерпретації вихідної статистики.

У роботі побудовано загальний опис фотолічильної статистики на виході гаусівської бозонної вибірки для довільних детекторів, які описуються елементами додатної операторнозначної міри. Отримано компактку формулу для ймовірності реєстрації заданого патерну, у якій результат виражається через функціонал матриці, пов'язаної з коваріаційною матрицею Q -представлення вихідного гаусівського стану. Цей підхід узагальнює відомі результати для детекторів з ідеальним розрізненням чисел фотонів і порогових детекторів. У відповідних граничних випадках загальний матричний функціонал зводиться до відомих структур, зокрема до хафніана для детекторів з ідеальним розрізненням чисел фотонів та торонтоніана для порогових детекторів. При цьому принципово розрізняються фотонний патерн перед детектуванням і зареєстрований патерн результатів, оскільки реалістичний фотодетектор повертає результат власної вимірювальної процедури, а не обов'язково істинне число фотонів у моді. Це розрізнення є важливим для інтерпретації експериментально доступної статистики, оскільки модель детектора визначає, які властивості початкового багатифотонного розподілу залишаються спостережуваними, а які втрачаються на етапі реєстрації. Тому реалістичне детектування входить у теорію не як другорядна поправка, а як невід'ємна частина переходу від вихідного квантового стану до вимірюваної статистики.

Окремо розглянуто реалістичні моделі детектування з розрізненням чисел фотонів. Для масивів порогових детекторів отримано відповідний матричний функціонал, що враховує скінченну кількість елементарних порогових детекторів у масиві. Для фотодетектування на основі підрахунку імпульсів фотоструму

розглянуто моделі з мертвим часом, характерні для лавинних фотодіодів, а також моделі з релаксаційним часом, важливі для надпровідникових нанодіодних однофотонних детекторів. Для окремих важливих режимів отримано аналітичні спрощення, придатні для подальшого використання у задачах гаусівської бозонної вибірки.

На основі розробленого формалізму проаналізовано задачу валідації гаусівської бозонної вибірки за наявності реалістичного розрізнення чисел фотонів. Оскільки повний розподіл вихідних патернів у великих багатомодових системах є надто складним для прямого відновлення й порівняння, у роботі використано згруповані статистики. Зокрема, розглянуто орбіти — класи зареєстрованих патернів, які переходять один в один перестановками мод, а також статистики подій із кратною реєстрацією. Такі величини можуть бути оцінені з експериментальних даних і водночас залишаються чутливими до відмінностей між квантовою статистикою та класичними моделями.

Для оцінювання орбітальних ймовірностей розглянуто пряме сумування за патернами та фазово-просторові методи моделювання на основі додатного P -представлення. Показано, що фазово-просторовий підхід є придатним для оцінювання згрупованих статистик у режимах із великою кількістю вихідних мод і фотонних подій, де прямі методи стають обчислювально складними. На цій основі сформульовано процедури валідації гаусівської бозонної вибірки з використанням критерію Пірсона χ^2 та баєсівського тесту. Порівняння проводиться між статистикою цільових термалізованих стиснених станів і статистиками класичних еталонних моделей, зокрема теплових та сплюснених гаусівських станів. Така валідація не є повною сертифікацією квантової переваги, але дає практичний спосіб перевіряти узгодженість доступних згрупованих статистик із цільовою моделлю та класичними еталонними альтернативами. Зокрема, вона дозволяє аналізувати, які сектори згрупованого розподілу залишаються інформативними для заданої моделі детектора і як часткове розрізнення чисел фотонів змінює розрізнявальну здатність статистичних тестів. Це особливо важливо в режимах, де окремі вихідні патерни є надто рідкісними для надійного оцінювання, тоді як згруповані орбітальні статистики залишаються експериментально доступними.

У чисельних прикладах показано, що реалістична здатність детекторів до розрізнення чисел фотонів істотно впливає на орбітальні ймовірності та на ефе-

ктивність валідаційних тестів. Навіть мінімальне розрізнення чисел фотонів, доступне для масивів порогових детекторів або для детекторів із підрахунком імпульсів фотоструму, може підвищувати впевненість у розрізненні квантової статистики гаусівської бозонної вибірки від класичних альтернатив. Водночас моделі з мертвим часом і релаксацією можуть суттєво змінювати результати, тому використання ідеалізованих моделей детекторів може призводити до некоректної оцінки вихідної статистики та результатів валідації.

Наукова новизна дисертації полягає у демонстрації неklasичних кореляцій світла в гібридній схемі вимірювання, що поєднує збалансоване гомодинне детектування та порогове фотодетектування після фазово-просторового зміщення; у виведенні загального матрично-функціонального виразу для фотолічильної статистики гаусівської бозонної вибірки з довільними реалістичними фотодетекторами; у конкретизації цього виразу для основних моделей детектування з розрізненням чисел фотонів; а також у формулюванні валідаційних процедур для гаусівської бозонної вибірки, які безпосередньо враховують неідеальну здатність детекторів розрізняти числа фотонів.

Теоретичне значення отриманих результатів полягає у побудові послідовного опису взаємодії багатомодових квантових станів із реалістичними вимірювальними пристроями. Запропонований підхід може бути використаний для аналізу фотонних експериментів, у яких важливу роль відіграють втрати, скінченна здатність до розрізнення чисел фотонів, мертвий час і релаксаційні ефекти детекторів. Практичне значення результатів пов'язане з можливістю коректнішої інтерпретації експериментів із гаусівської бозонної вибірки та з побудовою методів її валідації, які враховують фактичні характеристики використовуваних фотодетекторів.

У підсумку в дисертації показано, що реалістичний опис вимірювання є необхідною складовою аналізу багатомодового квантового світла. Для гібридних вимірювань він дозволяє виявляти неklasичні кореляції, які не зводяться до нелокальності Белла. Для гаусівської бозонної вибірки він приводить до узагальненого опису фотолічильної статистики та демонструє, що навіть часткова здатність до розрізнення чисел фотонів може суттєво впливати на валідацію квантових оптичних пристроїв.

Ключові слова: квантова оптика, багатомодове квантове світло, фазово-просторовий формалізм, додатні операторнозначні міри, гаусівські стани, роз-

різнень чисел фотонів, реалістичні фотодетектори, гомодинне детектування, порогове детектування, некласичні кореляції, гаусівська бозонна вибірка, валідація квантових пристроїв, матричні функціонали.

Список публікацій здобувача за темою дисертації:

- [I] V. S. Kovtoniuk, I. S. Yeremenko, S. Ryl, W. Vogel, and A. A. Semenov, “Nonclassical correlations of radiation in relation to Bell nonlocality”, *Phys. Rev. A* **105**, 063722 (2022), doi: 10.1103/PhysRevA.105.063722. (Q1)
- [II] I. S. Yeremenko, M. A. Dmytruk, and A. A. Semenov, “Realistic photon-number resolution in Gaussian boson sampling”, *Phys. Rev. A* **110**, 043715 (2024), doi: 10.1103/PhysRevA.110.043715. (Q1)

Abstract

Yeremenko I. S. Realistic measurements of multimode quantum light. — Qualifying scientific work in manuscript form. Thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy in specialty 104 — Physics and Astronomy. — Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2026.

Modern quantum optics is increasingly concerned with multimode states of light, in which quantum properties are manifested not only in individual modes but also in complex correlations between them. Such states form the basis for quantum communication, quantum computation, sampling from optical probability distributions, and experimental tests of the nonclassical behavior of light. At the same time, information about a quantum state becomes accessible only through a specific measurement scheme. Therefore, a consistent description of the measurement process is no less important than the description of the state itself.

This thesis considers two aspects of such a description. In the problem of hybrid measurements, the central role is played by the explicit treatment of specific measurement devices: balanced homodyne detection in one channel and displaced threshold photodetection, i.e. unbalanced homodyne detection, in the other. In the problem of Gaussian boson sampling, the central issue is a detailed description of realistic photocounting, in particular the finite photon-number resolution of detectors, dead time, and relaxation effects. In this case, the limitations of realistic photodetectors can substantially modify the statistics of output events and affect validation procedures.

The aim of the thesis is to develop a theoretical description of measurements of multimode quantum light and to apply this description to two problems: the analysis of hybrid measurement schemes for detecting nonclassical correlations of light, and the description of Gaussian boson sampling with realistic photon-number resolution. To achieve this aim, the thesis uses the operator description of multimode quantum states, the formalism of positive operator-valued measures, characteristic functions of Gaussian states, Cahill–Glauber phase-space representations, and statistical methods for analyzing measurement outcomes.

The thesis consistently presents the theoretical framework necessary for describing multimode optical states and measurements. The basic operator description

of optical modes, multimode states, Gaussian states, and their covariance matrices is formulated. Special attention is paid to the description of quantum measurements in terms of positive operator-valued measures, since this approach makes it possible to describe both continuous and discrete measurement outcomes in the same framework and to account for imperfections of photodetectors in photon-counting problems. In the phase-space representation, the Born rule is written in an integral form, which establishes a connection between the quasiprobability description of a state and the phase-space symbols of the elements of positive operator-valued measures. This approach provides a common theoretical basis for the subsequent analysis of hybrid measurements and Gaussian boson sampling. It makes it possible to consider not only the state itself but also the measurement behavior, that is, the statistics of outcomes for a given set of local settings. It is at the level of such behavior that the local-realistic description and the phase-space classical reconstruction of statistics are compared.

The first part of the thesis considers a hybrid measurement scheme in which one mode of light is analyzed by balanced homodyne detection, while the other is analyzed by displaced threshold photodetection. This scheme combines a continuous variable, represented by a field quadrature, and a discrete variable corresponding to the no-click or click event of a threshold detector. For this scheme, the space of local settings and outcomes is formulated, joint measurement probabilities are written, and it is shown how these probabilities can be represented in phase-space form through the symbols of the corresponding elements of positive operator-valued measures.

As an illustrative example, the thesis considers a two-mode squeezed vacuum state. Its individual modes are thermal, and therefore locally classical, whereas the full two-mode state contains nonclassical intermode correlations. For this example, the statistics of the hybrid measurement and its dependence on the squeezing parameter and local settings are analyzed. It is shown that the corresponding behavior remains compatible with local realism in the sense of Bell nonlocality, while nevertheless violating an inequality associated with a weaker model of a classical phase-space description. Thus, hybrid measurement makes it possible to reveal nonclassical correlations of light at the level of specific measurement statistics.

The other part of the thesis is devoted to Gaussian boson sampling under conditions of realistic photon-number resolution in detection. Gaussian boson sampling is a specialized model of non-universal quantum computation: it is

not intended to perform an arbitrary quantum algorithm but realizes a specific sampling task from the distribution of photocounting events at the output of a linear interferometer. In this scheme, Gaussian states of light are injected into the inputs of the interferometer, and photon events are registered at the output. Collision events, that is, events with more than one photon in a certain output mode, are relatively rare, but they can carry important information for experimental validation. Therefore, the limited ability of realistic detectors to distinguish adjacent photon numbers is of fundamental importance for the correct interpretation of the output statistics.

The thesis constructs a general description of the photocounting statistics at the output of Gaussian boson sampling for arbitrary detectors described by the elements of a positive operator-valued measure. A compact formula is obtained for the probability of registering a given pattern, in which the result is expressed through a functional of a matrix associated with the Q -function covariance matrix of the output Gaussian state. This approach generalizes known results for ideal photon-number-resolving detectors and threshold detectors. In the corresponding limiting cases, the general matrix functional reduces to known structures, in particular to the hafnian for ideal photon-number-resolving detectors and to the Torontonian for threshold detectors. At the same time, photon patterns before detection and registered outcome patterns are distinguished in this formalism, since a realistic photodetector returns the result of its own measurement procedure and not necessarily the true photon number in a mode. This distinction is essential for the interpretation of experimentally accessible statistics, because the detector model determines which features of the underlying multiphoton distribution remain observable and which are lost at the registration stage. Therefore, realistic detection enters the theory not as a secondary correction, but as an intrinsic part of the mapping from the output quantum state to the measured statistics.

Realistic models of detection with photon-number resolution are considered separately. For multiplexed arrays of threshold detectors, the corresponding matrix functional is obtained, taking into account the finite number of elementary threshold detectors in the array. For photodetection based on counting photocurrent pulses, models with dead time, typical for avalanche photodiodes, as well as models with relaxation time, important for superconducting nanowire single-photon detectors, are considered. For several important regimes, analytical simplifications suitable for further use in Gaussian boson sampling problems are obtained.

On the basis of the developed formalism, the problem of validating Gaussian boson sampling in the presence of realistic photon-number resolution is analyzed. Since the full distribution of output patterns in large multimode systems is too complex for direct reconstruction and comparison, grouped statistics are used in the thesis. In particular, orbits are considered, that is, classes of registered patterns that are transformed into one another by permutations of modes, as well as statistics of collision events. Such quantities can be estimated from experimental data and at the same time remain sensitive to differences between quantum statistics and classical models.

To estimate orbital probabilities, direct summation over patterns and phase-space simulation methods based on the positive- P representation are considered. It is shown that the phase-space approach is suitable for estimating grouped statistics in regimes with a large number of output modes and photon events, where direct methods become computationally complicated. On this basis, validation procedures for Gaussian boson sampling are formulated using Pearson's χ^2 test and a Bayesian test. The comparison is performed between the statistics of target thermalized squeezed states and the statistics of classical reference models, in particular thermal and squashed Gaussian states. Such validation is not a full certification of quantum advantage, but it provides a practical way to test the consistency of accessible grouped statistics with the target model and with classical reference alternatives. In particular, it makes it possible to analyze which sectors of the grouped distribution remain informative under a given detector model and how partial photon-number resolution changes the discrimination power of the statistical tests. This is especially relevant in regimes where individual output patterns are too rare to be estimated reliably, while grouped orbital statistics remain experimentally accessible.

Numerical examples show that realistic photon-number resolution of detectors substantially affects orbital probabilities and the efficiency of validation tests. Even minimal photon-number resolution, available for arrays of threshold detectors or for detectors based on counting photocurrent pulses, can increase confidence in distinguishing the quantum statistics of Gaussian boson sampling from classical alternatives. At the same time, models with dead time and relaxation can substantially change the results; therefore, the use of overly idealized detector models can lead to an incorrect assessment of the output statistics and validation results.

The scientific novelty of the thesis lies in demonstrating nonclassical

correlations of light in a hybrid measurement scheme combining balanced homodyne detection and displaced threshold photodetection; in deriving a general matrix-functional expression for the photocounting statistics of Gaussian boson sampling with arbitrary realistic photodetectors; in specifying this expression for the main models of detection with photon-number resolution; and in formulating validation procedures for Gaussian boson sampling that directly account for the imperfect ability of detectors to distinguish photon numbers.

The theoretical significance of the obtained results lies in constructing a consistent description of the interaction between multimode quantum states and realistic measurement devices. The proposed approach can be used to analyze photonic experiments in which losses, finite photon-number resolution, dead time, and detector relaxation effects play an important role. The practical significance of the results lies in enabling a more accurate interpretation of Gaussian boson sampling experiments and in developing validation methods that take into account the actual characteristics of the photodetectors used.

In summary, the thesis shows that a realistic description of measurement is a necessary component in the analysis of multimode quantum light. For hybrid measurements, it enables the detection of nonclassical correlations that are not reducible to Bell nonlocality. For Gaussian boson sampling, it leads to a generalized description of photocounting statistics and demonstrates that even partial photon-number resolution can substantially affect the validation of quantum optical devices.

Keywords: quantum optics, multimode quantum light, phase-space formalism, positive operator-valued measures, Gaussian states, photon-number resolution, realistic photodetectors, homodyne detection, threshold detection, nonclassical correlations, Gaussian boson sampling, validation of quantum devices, matrix functionals.

List of publications of the applicant on the topic of the thesis:

- [I] V. S. Kovtoniuk, I. S. Yeremenko, S. Ryl, W. Vogel, and A. A. Semenov, “Nonclassical correlations of radiation in relation to Bell nonlocality”, *Phys. Rev. A* **105**, 063722 (2022), doi: 10.1103/PhysRevA.105.063722. (Q1)
- [II] I. S. Yeremenko, M. A. Dmytruk, and A. A. Semenov, “Realistic photon-number resolution in Gaussian boson sampling”, *Phys. Rev. A* **110**, 043715 (2024), doi: 10.1103/PhysRevA.110.043715. (Q1)

Зміст

Анотація	1
Abstract	7
Перелік умовних позначень і скорочень	16
Вступ	17
1 Багатомодові квантові стани, оптичні вимірювання, реалістичні фотодетектори та фазово-просторовий формалізм	24
1.1 Багатомодові квантові стани: операторний опис і базові властивості	24
1.2 Квантові вимірювання та додатні операторнозначні міри	28
1.3 Характеристичні функції та гаусівські стани	31
1.3.1 Оператор зміщення і характеристична функція	31
1.3.2 Операторне впорядкування та s -параметризована характеристична функція	31
1.3.3 Багатомодовий випадок	32
1.3.4 Гаусівські стани та коваріаційні матриці	33
1.3.5 Стандартні приклади гаусівських станів	35
1.3.6 Лінійно-оптичні перетворення та втрати для гаусівських станів	37
1.4 Фазово-просторові представлення Кехілла–Глаубера	38
1.4.1 Від характеристичної функції до фазово-просторової функції стану	38
1.4.2 Функції Глаубера–Сударшана, Вігнера та Хусімі–Кано	39
1.4.3 Перехід між різними параметрами впорядкування	40
1.4.4 Багатомодовий фазовий простір	41
1.4.5 Коваріаційна матриця Q -функції	42
1.4.6 Класичність стану у фазово-просторовому описі	43
1.5 Інтегральна форма правила Борна у фазовому просторі	43

1.5.1	Від операторного правила Борна до фазово-просторового інтеграла	43
1.5.2	Багатомодовий і локальний випадки	46
1.5.3	Конфігурації результатів фотодетектування	47
1.5.4	Символи ДОЗМ для гомодинного детектування	48
1.6	Реалістичні моделі детектування з розрізненням чисел фотонів .	49
1.6.1	Загальний опис детектування з розрізненням чисел фотонів	49
1.6.2	Детектор з ідеальним розрізненням чисел фотонів і втрати	50
1.6.3	Пороговий фотодетектор	51
1.6.4	Масиви порогових фотодетекторів	52
1.6.5	Підрахунок імпульсів фотоструму: мертвий час і релаксація	53
1.6.6	Модель лавинного фотодіода з мертвим часом	54
1.7	Спільні статистики вимірювань	56
1.7.1	Локальні налаштування та спільні ймовірності	56
1.7.2	Маргінальні розподіли та кореляції	57
1.7.3	Локально-реалістичне відтворення статистики	58
1.7.4	Спільний розподіл для всіх можливих результатів	59
1.7.5	Фазово-просторова класична симульованість	61
1.7.6	Розмежування понять класичної симульованості	62
2	Гібридні вимірювання і некласичні кореляції світла	64
2.1	Локальний реалізм і фазово-просторова некласичність	64
2.2	Гібридна схема вимірювання	69
2.3	Фазово-просторовий запис статистики	73
2.4	Двомодовий стиснений вакуум у гібридній схемі	76
2.5	Локально-реалістичний опис гібридної поведінки	83
2.6	Виявлення некласичних кореляцій у гібридній схемі	85
2.7	Висновки до розділу	92
3	Гаусівська бозонна вибірка з реалістичним розрізненням чисел фотонів	95
3.1	Мотивація та межі розгляду	95
3.2	Фізична модель гаусівської бозонної вибірки	99
3.2.1	Схема та позначення мод	100

3.2.2	Вихідний гаусівський стан і втрати	101
3.2.3	Фотонні патерни, патерни детектування та кратна реєстрація	102
3.2.4	Вихідне вимірювання та ймовірність патерну	104
3.3	Матрично-функціональний формалізм для гаусівської бозонної вибірки	105
3.3.1	Ідеальне вимірювання числа фотонів як вихідний випадок	106
3.3.2	Відгук реалістичного фотодетектора	106
3.3.3	Згортка з фотонним розподілом	107
3.3.4	Загальний матричний функціонал	108
3.4	Матричні функціонали для реалістичних моделей детектування	110
3.4.1	Допоміжні матриці та позначення	110
3.4.2	Спільна допоміжна формула	112
3.4.3	Детектори з ідеальним розрізненням чисел фотонів . . .	114
3.4.4	Порогові фотодетектори	115
3.4.5	Масиви порогових фотодетекторів	116
3.4.6	Підрахунок імпульсів фотоструму з мертвим і релаксаційним часом	119
3.4.7	ЛФД у підпросторі подій без кратної реєстрації	121
3.4.8	Порівняння отриманих функціоналів	123
3.5	Задача валідації в гаусівській бозонній вибірці	124
3.6	Згруповані статистики для валідації гаусівської бозонної вибірки	129
3.6.1	Орбіти патернів детектування	129
3.6.2	Орбітальні ймовірності	132
3.6.3	Статистики кратної реєстрації за реалістичного фотодетектування	133
3.7	Оцінювання величин для валідації	137
3.7.1	Пряме та вибіркове оцінювання орбітальних ймовірностей	138
3.7.2	Оцінювання через характеристичну функцію орбіт . . .	140
3.8	Протоколи валідації за реалістичного розрізнення чисел фотонів	146
3.8.1	Постановка валідаційного порівняння та моделі станів .	147
3.8.2	Критерій Пірсона для умовних орбітальних розподілів .	151
3.8.3	Баєсівський тест за орбітальними подіями	152
3.9	Чисельні приклади та порівняння моделей детекторів	155

3.9.1	Параметри та моделі фотодетектування	155
3.9.2	Кількісні валідаційні показники	157
3.9.3	Наочні орбітальні розподіли	160
3.10	Висновки до розділу	163
Загальні висновки		166
Список використаних джерел		171
A	Список публікацій, конференцій та наукових семінарів	179
	Список публікацій здобувача за темою дисертації	179
	Апробація результатів дисертації	179

Перелік умовних позначень і скорочень

ГБВ	гаусівська бозонна вибірка;
ДОЗМ	додатна операторнозначна міра;
ЛФД	лавинний фотодіод;
ННОФД	надпровідниковий нанодротовий однофотонний детектор;
ДМСВС	двомодовий стиснений вакуумний стан;
ЧВВ	часове вікно вимірювання;
КХШХ	Клаузер–Хорн–Шимоні–Хольт.

Вступ

Актуальність і мотивація

У квантовій оптиці результат експерименту спостерігається не безпосередньо як квантовий стан, а як статистика результатів певної вимірювальної процедури. Тому для опису багатомодового квантового світла недостатньо задати лише стан поля або його перетворення в оптичній схемі. Не менш важливо визначити, які саме фізичні величини вимірюються, які результати реєструються та якою є модель вимірювального пристрою. У випадку багатомодових систем це питання стає особливо суттєвим, оскільки фізична інформація міститься не тільки в окремих модах, а й у спільних розподілах та кореляціях між ними.

Багатомодові стани світла використовуються для дослідження неklasичних кореляцій, для перевірки меж класичного опису оптичного випромінювання та для реалізації спеціалізованих квантово-обчислювальних схем. У кожній із цих задач вимірювання відіграє не допоміжну, а визначальну роль. Один і той самий квантовий стан може давати різну експериментальну статистику залежно від того, чи вимірюється квадратура поля, чи реєструється лише факт спрацьовування фотодетектора, чи доступне розрізнення числа фотонів. Через це послідовний опис вимірювання є необхідною частиною теоретичної моделі.

Перший аспект цієї проблеми пов'язаний із гібридними вимірювальними схемами. У них різні підсистеми аналізуються фізично різними приладами: наприклад, одна мода вимірюється за допомогою збалансованого гомодинного детектування, тоді як інша — за допомогою порогового фотодетектора після фазово-просторового зміщення. Такий підхід поєднує неперервні та дискретні результати вимірювання. Він є корисним для дослідження неklasичних кореляцій світла, оскільки ці кореляції можуть проявлятися не як порушення локального реалізму у сенсі нелокальності Белла, а як неможливість відтворити спільну статистику за допомогою класичних фазово-просторових розподілів.

Другий аспект пов'язаний із гаусівською бозонною вибіркою. Ця модель є спеціалізованою задачею вибірки з розподілу фотонних подій на виході лінійного інтерферометра, на входи якого подаються гаусівські стани світла. Її

експериментальна цінність значною мірою залежить від того, наскільки надійно можна порівнювати отримані дані з теоретичною моделлю та відрізнити їх від класичних альтернатив. Повний розподіл вихідних патернів у великих системах недоступний для прямого аналізу, тому особливого значення набувають згруповані статистики, зокрема орбітальні ймовірності та статистики колізійних подій.

У цьому контексті обмежена здатність фотодетекторів розрізняти числа фотонів стає принциповою. Пороговий детектор розрізняє лише відсутність або наявність фотонів у моді. Масиви порогових детекторів дають лише наближене розрізнення числа фотонів. Детектори, що працюють через підрахунок імпульсів фотоструму, можуть втрачати частину подій через мертвий час або релаксацію. Такі ефекти змінюють не тільки ймовірності окремих патернів, а й ті згруповані величини, які використовуються для валідації гаусівської бозонної вибірки. Отже, модель детектора має бути включена у теоретичний опис від самого початку.

Актуальність дисертаційної роботи полягає в побудові послідовного опису вимірювань багатомодового квантового світла, придатного як для гібридних схем із неперервними та дискретними результатами, так і для задач фотонного підрахунку з реалістичним розрізненням числа фотонів. Такий опис об'єднує операторний формалізм, додатні операторнозначні міри, фазово-просторові представлення та статистичні методи аналізу експериментально доступних величин.

Мета і задачі дослідження

Метою дисертаційної роботи є розвиток теоретичного опису вимірювань багатомодового квантового світла та застосування цього опису до двох задач: аналізу гібридної схеми вимірювання як прикладу виявлення некласичних кореляцій світла та опису гаусівської бозонної вибірки з реалістичним розрізненням числа фотонів.

Для досягнення цієї мети було поставлено такі задачі:

- описати гібридну вимірювальну схему, у якій поєднуються збалансоване гомодинне детектування та порогове фотодетектування після фазово-просторового зміщення, і застосувати її до аналізу некласичних кореляцій

у двомодовому стисненому вакуумному стані;

- побудувати загальну формулу для фотолічильної статистики на виході гаусівської бозонної вибірки для довільних детекторів, що описуються елементами додатної операторнозначної міри;
- конкретизувати отриманий матрично-функціональний формалізм для детекторів з ідеальним розрізненням числа фотонів, порогових детекторів, масивів порогових детекторів, а також для моделей фотодетектування з мертвим часом і релаксаційним часом;
- сформулювати процедури валідації гаусівської бозонної вибірки за умов реалістичного розрізнення числа фотонів на основі згрупованих статистик, орбітальних ймовірностей, критерію Пірсона та баєсівського тесту;
- проаналізувати вплив неідеального розрізнення числа фотонів на статистику вихідних подій і на можливість відрізнити квантову статистику гаусівської бозонної вибірки від класичних еталонних моделей.

Методи дослідження

У роботі використано методи теоретичної квантової оптики, операторний формалізм багатомодових квантових станів, формалізм додатних операторнозначних мір та фазово-просторові представлення Кехілла–Глаубера. Для опису гаусівських станів застосовано характеристичні функції, коваріаційні матриці та відповідні фазово-просторові розподіли. Такий апарат дозволяє пов'язати статистику вимірювань із властивостями станів і фазово-просторовими символами елементів вимірювання.

Для аналізу гібридної схеми вимірювання використано опис збалансованого гомодинного детектування через квадратурні розподіли та опис порогового фотодетектування після фазово-просторового зміщення. Спільні ймовірності результатів вимірювання розглянуто в термінах поведінки у сенсі теорії нерівностей Белла, тобто як сімейство умовних розподілів, що залежать від локальних налаштувань вимірювальних приладів. Для інтерпретації некласичних кореляцій застосовано фазово-просторовий підхід, який дозволяє перевірити, чи може така поведінка бути відтворена в межах слабшої моделі класичного фазово-просторового опису.

Для дослідження гаусівської бозонної вибірки використано матрично-функціональний підхід до фотолічильної статистики багатомодових гаусівських станів. Ймовірності вихідних патернів виражено через функціонали матриці, пов'язаної з коваріаційною матрицею Q -представлення вихідного стану. У граничних випадках цей підхід відтворює відомі структури, зокрема хафніан для ідеального детектування з розрізненням числа фотонів і торонто-ніан для порогових детекторів.

Для врахування реалістичних фотодетекторів використано моделі масивів порогових детекторів, моделі підрахунку імпульсів фотоструму з мертвим часом, а також моделі з релаксаційним часом. Валідація гаусівської бозонної вибірки аналізується за допомогою згрупованих статистик, орбітальних ймовірностей, фазово-просторового моделювання на основі позитивного P -представлення, критерію Пірсона та баєсівського тесту.

Наукова новизна отриманих результатів

У дисертації отримано такі основні наукові результати:

- продемонстровано неklasичні кореляції світла в гібридній схемі вимірювання, що поєднує збалансоване гомодинне детектування в одній моді та порогове фотодетектування після фазово-просторового зміщення в іншій моді; зокрема, на прикладі двомодового стисненого вакуумного стану показано, що такі кореляції можуть виявлятися навіть у випадку, коли відповідна статистика не демонструє нелокальності Белла;
- виведено загальний матрично-функціональний вираз для фотолічильної статистики на виході гаусівської бозонної вибірки для довільних детекторів, які описуються елементами додатної операторнозначної міри;
- отримано матрично-функціональні вирази для реалістичних моделей розрізнення числа фотонів, включаючи масиви порогових детекторів, підрахунок імпульсів фотоструму з мертвим часом та моделі з релаксаційним часом;
- адаптовано процедури валідації гаусівської бозонної вибірки до випадку реалістичного розрізнення числа фотонів, зокрема через орбітальні ймовірності, згруповані статистики, критерій Пірсона та баєсівський тест;

- показано, що навіть часткове розрізнення числа фотонів може істотно впливати на вихідну статистику гаусівської бозонної вибірки та підвищувати ефективність відрізнєння квантової статистики від класичних еталонних моделей.

Практичне значення отриманих результатів

Практичне значення результатів дисертації пов'язане з можливістю коректнішого опису та інтерпретації сучасних експериментів із багатомодовим квантовим світлом. Запропонований формалізм дозволяє враховувати реальні властивості вимірювальних пристроїв і тому може бути використаний для аналізу експериментальних схем із реалістичними фотодетекторами.

Для гібридних вимірювань отримані результати показують, що некласичні кореляції можна досліджувати за допомогою схем, які поєднують неперервні та дискретні результати вимірювання. Це є корисним для побудови експериментальних тестів некласичності світла, що не обмежуються перевіркою нелокальності Белла.

Для гаусівської бозонної вибірки результати дисертації мають значення для валідації квантових оптичних пристроїв. Оскільки повний розподіл вихідних патернів у великих системах практично недоступний для прямого аналізу, згруповані статистики та орбітальні ймовірності є зручними величинами для порівняння експериментальних даних із теоретичними моделями. Урахування конкретної моделі детектора дозволяє уникнути помилок, пов'язаних із використанням надто ідеалізованого опису вимірювання.

Отримані результати можуть бути використані для подальшого розвитку методів валідації гаусівської бозонної вибірки, аналізу схем із реалістичними фотодетекторами та дослідження некласичних кореляцій у багатомодових оптичних системах.

Особистий внесок здобувача¹

Дисертаційна робота ґрунтується на результатах, опублікованих у спіль-

¹ В усіх випадках результати, що належать співавторам, використано з відповідними посиланнями на спільні публікації. У дисертації власні публікації здобувача цитуються римськими цифрами, тоді як інші джерела наводяться арабськими цифрами у списку використаних джерел.

них наукових працях [I, II]. У праці [I] особистий внесок здобувача полягав у формулюванні постановки задачі для гібридної вимірювальної схеми та в аналізі прикладу, що демонструє неklasичні кореляції у двомодовому стисненому вакуумному стані. Результати роботи обговорювалися зі співавторами.

У праці [II] здобувачем виконано основну частину теоретичного аналізу гаусівської бозонної вибірки з реалістичним розрізненням числа фотонів. Зокрема, здобувач брав участь у формулюванні фізичної моделі, побудові матрично-функціонального опису фотолічильної статистики, аналізі моделей детектування з розрізненням числа фотонів та формулюванні підходів до валідації гаусівської бозонної вибірки. Безпосереднє написання програмного коду для чисельних розрахунків не належить до особистого внеску здобувача.

Список публікацій

- [I] V. S. Kovtoniuk, I. S. Yeremenko, S. Ryl, W. Vogel, and A. A. Semenov, “Nonclassical correlations of radiation in relation to Bell nonlocality”, *Phys. Rev. A* **105**, 063722 (2022), doi: 10.1103/PhysRevA.105.063722. (Q1)
- [II] I. S. Yeremenko, M. A. Dmytruk, and A. A. Semenov, “Realistic photon-number resolution in Gaussian boson sampling”, *Phys. Rev. A* **110**, 043715 (2024), doi: 10.1103/PhysRevA.110.043715. (Q1)

Апробація матеріалів дисертації

Основні результати дисертаційної роботи були представлені та обговорені на українських і міжнародних наукових конференціях:

1. I. S. Yeremenko, “Realistic Photon-Number Resolution and Its Impact on Gaussian Boson Sampling”, oral presentation at the 25th Symposium on Photonics and Optics (SPO 2024), Kyiv, Ukraine, November 4–8, 2024.
2. I. S. Yeremenko, M. A. Dmytruk, and A. A. Semenov, “Advancing Gaussian Boson Sampling with Realistic Photon-Number-Resolving Detectors”, poster presentation at Quantum 2025: From Foundations of Quantum Mechanics to Quantum Information and Quantum Metrology & Sensing, Turin, Italy, May 18–24, 2025.

Структура та обсяг дисертації

Дисертаційна робота складається зі вступу, трьох (3) розділів, загальних висновків, списку використаних джерел та одного (1) додатка. Список використаних джерел містить сто тринадцять (113) найменувань. Дисертація включає дванадцять (12) рисунків. Загальний обсяг роботи становить сто вісімдесят (180) сторінок друкованого тексту.

Зв'язок роботи з науковими програмами, темами та грантами

Дисертаційну роботу виконано в Інституті теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова Національної академії наук України. Робота пов'язана з такими науковими програмами, темами та грантами:

1. Науково-дослідна відомча тема Відділення фізики і астрономії Національної академії наук України “Індуковані шумом динаміка та кореляції в нерівноважних системах”, номер державної реєстрації 0120U101347.
2. Науково-дослідна відомча тема Відділення фізики і астрономії Національної академії наук України “Стохастичні процеси в конденсованих середовищах, біологічних системах та полях випромінювання”, номер державної реєстрації 0125U000031.
3. Проєкт Національного фонду досліджень України № 2020.02/0111 “Некласичні та гібридні кореляції квантових систем за реалістичних умов”.
4. Проєкт Національного фонду досліджень України № 2023.03/0165 “Квантові кореляції електромагнітного випромінювання”.
5. Міжнародний проєкт Фонду Саймонса SFI-PD-Ukraine-00014573.

1 Багатомодові квантові стани, оптичні вимірювання, реалістичні фотодетектори та фазово-просторовий формалізм

У цьому розділі вводяться основні позначення та формалізм, які використовуються в подальших розділах. Спочатку розглядається операторний опис багатомодового квантового світла, після чого вводяться додатні операторнозначні міри (ДОЗМ) як загальна мова опису квантових вимірювань. Далі подано характеристичні функції, гаусівські стани та фазово-просторові представлення Кехілла–Глаубера. Після цього правило Борна переписується в інтегральній фазово-просторовій формі, що дозволяє описувати стани та вимірювання в єдиній мові. Окрему увагу приділено реалістичним моделям детектування з розрізненням чисел фотонів, оскільки саме вони визначають зв'язок між квантовим станом і реально спостережуваною статистикою. Наприкінці розділу введений апарат застосовується до опису спільних статистик локальних вимірювань.

1.1 Багатомодові квантові стани: операторний опис і базові властивості

Оптичне поле далі розглядається як скінченна багатомодова бозонна система. Такий опис є природним для багатомодових лінійно-оптичних схем, задач фотодетектування та аналізу кореляцій між окремими модами випромінювання [1–3]. У цьому підрозділі фіксуються основні операторні позначення, які надалі використовуватимуться для опису станів, лінійно-оптичних перетворень, каналів втрат і вимірювань.

Кожній моді відповідають оператори знищення та народження $\hat{a}_k$ і $\hat{a}_k^\dagger$, які задовольняють стандартні бозонні комутаційні співвідношення:

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0, \quad [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0. \quad (1.1)$$

Для системи з M модами ці оператори зручно зібрати у вектор:

$$\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_M)^T. \quad (1.2)$$

Надалі цей векторний запис дозволить компактно описувати багатомодові пе-

ретворення.

Оператор числа фотонів у k -й моді визначається через відповідні оператори народження та знищення:

$$\hat{n}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k. \quad (1.3)$$

Повний оператор числа фотонів у всій багатомодовій системі дорівнює сумі модових операторів числа фотонів:

$$\hat{N} = \sum_{k=1}^M \hat{n}_k. \quad (1.4)$$

Ці оператори задають природну мову для опису фотонних конфігурацій, які надалі будуть пов'язані з результатами фотодетектування.

Багатомодовий фоківський стан позначатимемо як

$$|\mathbf{n}\rangle = |n_1, \dots, n_M\rangle, \quad \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_M). \quad (1.5)$$

Він задається дією операторів народження на багатомодовий вакуум:

$$|\mathbf{n}\rangle = \prod_{k=1}^M \frac{(\hat{a}_k^\dagger)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} |0\rangle. \quad (1.6)$$

Для цього стану повний оператор числа фотонів має власне значення $|\mathbf{n}|$:

$$\hat{N}|\mathbf{n}\rangle = |\mathbf{n}| |\mathbf{n}\rangle, \quad |\mathbf{n}| = \sum_{k=1}^M n_k. \quad (1.7)$$

Отже, вектор $\mathbf{n}$ має безпосередній статистичний зміст: він задає фотонну конфігурацію або конфігурацію результатів фотодетектування у відповідних модах.

Загальний стан M -модової системи описується оператором густини $\hat{\rho}$, який є ермітовим, додатним і нормованим на одиничний слід:

$$\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}, \quad \hat{\rho} \geq 0, \quad \text{Tr } \hat{\rho} = 1. \quad (1.8)$$

У фоківському базисі цей оператор можна записати як

$$\hat{\rho} = \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \rho_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} |\mathbf{m}\rangle \langle \mathbf{n}|. \quad (1.9)$$

Діагональні елементи такого розкладу задають фотонну статистику, тоді як не-діагональні елементи описують когерентності між різними фоківськими конфігураціями.

Як орієнтир для подальшого опису фотодетектування наведемо ідеальний випадок. Якщо стан вимірюється у фоківському базисі, то ймовірність отримати конфігурацію $\mathbf{n}$ дорівнює

$$P(\mathbf{n}) = \langle \mathbf{n} | \hat{\rho} | \mathbf{n} \rangle. \quad (1.10)$$

Надалі цей вираз буде узагальнено на реалістичні фотодетектори, для яких елементи вимірювання не є проєкторами на фоківські стани. У цьому ж операторному записі середнє значення довільного оператора $\hat{O}$ у стані $\hat{\rho}$ визначається правилом:

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{O}). \quad (1.11)$$

Ця формула фіксує стандартний зв'язок між операторним описом стану та середніми значеннями спостережуваних величин.

Для подальшого фазово-просторового опису важливими є когерентні стани. Одномодовий когерентний стан $|\alpha\rangle$ визначається як власний стан оператора знищення:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (1.12)$$

Для M мод вводимо багатомодовий когерентний стан:

$$|\boldsymbol{\alpha}\rangle = |\alpha_1\rangle \otimes \cdots \otimes |\alpha_M\rangle, \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_M)^T. \quad (1.13)$$

Саме ці стани надалі будуть використані при введенні фазово-просторових функцій та символів елементів ДОЗМ.

У лінійно-оптичній схемі без втрат вхідні та вихідні оператори мод пов'язані унітарним перетворенням. Для M мод це перетворення можна

записати у вигляді

$$\hat{\mathbf{b}} = U\hat{\mathbf{a}}, \quad \hat{b}_i = \sum_{j=1}^M U_{ij}\hat{a}_j. \quad (1.14)$$

Збереження комутаційних співвідношень (1.1) вимагає унітарності матриці перетворення:

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I. \quad (1.15)$$

Отже, за відсутності втрат схема змішує моди між собою, але не порушує бозонні комутаційні співвідношення.

Втрати можна врахувати як взаємодію з додатковими модами оточення. Для однієї моди стандартна модель має вигляд

$$\hat{b} = \sqrt{\eta}\hat{a} + \sqrt{1-\eta}\hat{e}, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad (1.16)$$

де η є ефективністю пропускання, а $\hat{e}$ є оператором моди оточення. У багатомодовому випадку аналогічне перетворення можна записати як

$$\hat{\mathbf{b}} = T\hat{\mathbf{a}} + R\hat{\mathbf{e}}, \quad (1.17)$$

де збереження комутаційних співвідношень вимагає

$$TT^\dagger + RR^\dagger = I. \quad (1.18)$$

Якщо моди оточення не вимірюються, їх виключають за допомогою часткового сліду, тому втрати можна розглядати як канал, що діє на стан перед вимірюванням.

Отже, у цьому підрозділі зафіксовано операторну мову для опису багатомодових станів, лінійно-оптичних перетворень і втрат. Введені позначення дозволяють однаково описувати ідеальні модові перетворення, канали втрат та подальші реалістичні моделі фотодетектування. Надалі ці позначення використовуватимуться при введенні квантових вимірювань, характеристичних функцій та фазово-просторового формалізму.

1.2 Квантові вимірювання та додатні операторнозначні міри

Після введення операторного опису багатомодових станів перейдемо до загальної мови вимірювань. Для подальшого опису реалістичних фотодетекторів і спільних статистик важливо використовувати не лише проєктивні вимірювання, а формалізм ДОЗМ [4]. Цей формалізм дозволяє описувати ідеалізовані та реалістичні вимірювальні схеми в єдиній операторній мові.

Квантове вимірювання у загальному випадку описується ДОЗМ, тобто набором додатних операторів $\{\hat{\Pi}_x\}$, які відповідають можливим результатам вимірювання x . Для дискретного набору результатів ці оператори задовольняють умови

$$\hat{\Pi}_x \geq 0, \quad \sum_x \hat{\Pi}_x = \hat{I}. \quad (1.19)$$

Додатність забезпечує невід'ємність ймовірностей, а умова повноти відповідає нормуванню всіх можливих результатів. Для неперервної множини результатів сума замінюється інтегралом,

$$\int dx \hat{\Pi}_x = \hat{I}. \quad (1.20)$$

Ця форма буде потрібна для опису вимірювань із неперервним результатом, зокрема гомодинного детектування.

Ймовірність отримати результат x у стані $\hat{\rho}$ визначається правилом Борна [5],

$$P(x) = \text{Tr} \left(\hat{\rho} \hat{\Pi}_x \right). \quad (1.21)$$

Отже, статистика результатів задається не лише станом $\hat{\rho}$, а й конкретними елементами ДОЗМ, які описують вимірювальний пристрій. Саме ця форма правила Борна буде використовуватися нижче для ідеальних і реалістичних моделей фотодетектування. Проєктивне вимірювання є частинним випадком опису через ДОЗМ: у цьому випадку елементи ДОЗМ є ортогональними проєкторами,

$$\hat{\Pi}_x = \hat{P}_x, \quad \hat{P}_x \hat{P}_{x'} = \delta_{xx'} \hat{P}_x. \quad (1.22)$$

Однак для реальних оптичних вимірювань проєктивного формалізму загалом

недостатньо. Фотодетектор із втратами, пороговий фотодетектор або детектор з обмеженим розрізненням чисел фотонів у загальному випадку не відповідає проекторам на фоківські стани. Тому надалі вимірювання описуються саме через елементи ДОЗМ.

Для багатомодової системи результат вимірювання може бути заданий набором результатів, отриманих в окремих модах,

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_M), \quad (1.23)$$

де x_k відповідає результату, зареєстрованому в k -й моді. Якщо кожна мода вимірюється окремо, відповідний елемент ДОЗМ має добуткову структуру

$$\hat{\Pi}_{\mathbf{x}} = \bigotimes_{k=1}^M \hat{\Pi}_{x_k}^{(k)}. \quad (1.24)$$

Добуткова структура стосується вимірювання, тоді як сам стан $\hat{\rho}$ може містити кореляції між модами. Тоді з правила Борна (1.21) отримуємо

$$P(\mathbf{x}) = \text{Tr} \left[\hat{\rho} \left(\bigotimes_{k=1}^M \hat{\Pi}_{x_k}^{(k)} \right) \right]. \quad (1.25)$$

Ця формула задає ймовірність повної конфігурації результатів у багатомодовому вимірюванні.

Для подальшого опису спільних статистик зафіксуємо також двопідсистемний запис. Результат вимірювання є випадковою величиною, яка реєструється в експерименті, тоді як налаштування задає вибір конкретного локального вимірювання. Нехай підсистеми позначено як $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$, локальні налаштування — як a і b , а відповідні результати — як $x_{\mathcal{A}}$ і $x_{\mathcal{B}}$. Тоді елементи ДОЗМ локальних вимірювань мають вигляд $\hat{\Pi}_{\mathcal{A}}(x_{\mathcal{A}}|a)$ та $\hat{\Pi}_{\mathcal{B}}(x_{\mathcal{B}}|b)$, а спільна ймовірність дорівнює

$$P(x_{\mathcal{A}}, x_{\mathcal{B}}|a, b) = \text{Tr} \left[\hat{\rho} \hat{\Pi}_{\mathcal{A}}(x_{\mathcal{A}}|a) \otimes \hat{\Pi}_{\mathcal{B}}(x_{\mathcal{B}}|b) \right]. \quad (1.26)$$

Формула (1.26) є вихідною для опису спільних статистик вимірювань і кореляцій між модами.

Важливим прикладом є вимірювання числа фотонів. Для однієї моди іде-

альне вимірювання числа фотонів описується проєкторами на фоківські стани,

$$\hat{\Pi}_n = |n\rangle\langle n|, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.27)$$

Ці елементи задовольняють умову повноти

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \hat{I}. \quad (1.28)$$

Отже, оператори проєктування на стани з визначеним числом фотонів утворюють частинний випадок ДОЗМ. Для M мод ідеальне вимірювання фотонної конфігурації $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_M)$ задається оператором

$$\hat{\Pi}_{\mathbf{n}} = |\mathbf{n}\rangle\langle \mathbf{n}| = \bigotimes_{k=1}^M |n_k\rangle\langle n_k|. \quad (1.29)$$

Відповідна ймовірність отримується з правила Борна,

$$P(\mathbf{n}) = \text{Tr} \left(\hat{\rho} \hat{\Pi}_{\mathbf{n}} \right) = \langle \mathbf{n} | \hat{\rho} | \mathbf{n} \rangle. \quad (1.30)$$

Тому ідеальний фотонний підрахунок безпосередньо відтворює діагональні елементи оператора густини у фоківському базисі.

У реалістичному випадку результат детектора не завжди збігається з числом фотонів на вході. Тому замість проєктора $|n\rangle\langle n|$ використовується елемент ДОЗМ $\hat{\Pi}_{\mathbf{n}}$, який описує саме результат фотодетектора. Для багатомодової схеми тоді маємо

$$\hat{\Pi}(\mathbf{n}) = \bigotimes_{k=1}^M \hat{\Pi}_{n_k}^{(k)}. \quad (1.31)$$

Ймовірність зареєструвати конфігурацію результатів $\mathbf{n}$ дорівнює

$$P(\mathbf{n}) = \text{Tr} \left[\hat{\rho} \hat{\Pi}(\mathbf{n}) \right]. \quad (1.32)$$

Формула (1.32) зберігає загальну структуру правила Борна (1.21), але конкретна модель детектора входить у вигляд елементів $\hat{\Pi}_{n_k}^{(k)}$. У підрозділі 1.6 ці елементи буде записано для основних моделей детектування з розрізненням чисел фото-

нів.

1.3 Характеристичні функції та гаусівські стани

У цьому підрозділі вводиться опис квантових станів через характеристичні функції. Спочатку характеристична функція визначається для довільного стану, а потім гаусівські стани розглядаються як важливий частинний випадок, у якому вся інформація про стан задається першими та другими моментами [1–3, 6].

1.3.1 Оператор зміщення і характеристична функція

Оператор густини $\hat{\rho}$ є повним описом квантового стану, однак у квантовій оптиці часто зручно використовувати еквівалентний опис через характеристичні функції. Для однієї моди введемо оператор зміщення

$$\hat{D}(\beta) = \exp(\beta \hat{a}^\dagger - \beta^* \hat{a}), \quad \beta \in \mathbb{C}, \quad (1.33)$$

який є унітарним і зміщує оператор знищення на комплексну амплітуду β ,

$$\hat{D}^\dagger(\beta) \hat{D}(\beta) = \hat{I}, \quad (1.34)$$

$$\hat{D}^\dagger(\beta) \hat{a} \hat{D}(\beta) = \hat{a} + \beta. \quad (1.35)$$

Отже, параметр β має зміст комплексного зміщення амплітуди моди у фазовому просторі. Симетрично впорядкована характеристична функція довільного стану $\hat{\rho}$ визначається співвідношенням

$$\chi(\beta) = \text{Tr} [\hat{\rho} \hat{D}(\beta)] = \text{Tr} [\hat{\rho} \exp(\beta \hat{a}^\dagger - \beta^* \hat{a})]. \quad (1.36)$$

Функція $\chi(\beta)$ є еквівалентним способом подання оператора густини $\hat{\rho}$. Нижче буде виділено важливий клас станів, для яких характеристична функція має простий гаусівський вигляд.

1.3.2 Операторне впорядкування та s -параметризована характеристична функція

На відміну від класичних комплексних амплітуд, оператори $\hat{a}$ і $\hat{a}^\dagger$ не комутують. Тому під час переходу від операторного опису до функцій на фазовому просторі-

рі потрібно фіксувати порядок операторів у добутках. Для оператора зміщення нормальна та антинормальна форми запису мають вигляд

$$e^{\beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a}} = e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} e^{\beta\hat{a}^\dagger} e^{-\beta^*\hat{a}}, \quad (1.37)$$

$$e^{\beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a}} = e^{\frac{1}{2}|\beta|^2} e^{-\beta^*\hat{a}} e^{\beta\hat{a}^\dagger}. \quad (1.38)$$

Формула (1.37) відповідає нормальному впорядкуванню, а формула (1.38) — антинормальному. Ці різні варіанти впорядкування зручно об'єднати за допомогою s -параметризованої характеристичної функції Кехілла–Глаубера [7, 8],

$$\chi_s(\beta) = e^{\frac{s}{2}|\beta|^2} \text{Tr} \left[\hat{\rho} e^{\beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a}} \right], \quad -1 \leq s \leq 1. \quad (1.39)$$

Тут s задає вибір операторного впорядкування,

$$\begin{aligned} s = 1 & \quad \text{відповідає нормальному впорядкуванню,} \\ s = 0 & \quad \text{відповідає симетричному впорядкуванню,} \\ s = -1 & \quad \text{відповідає антинормальному впорядкуванню.} \end{aligned} \quad (1.40)$$

Фазово-просторові функції, пов'язані з χ_s , буде введено в підрозділі про представлення Кехілла–Глаубера.

1.3.3 Багатомодовий випадок

Для M мод введемо вектор комплексних змінних

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_M)^T. \quad (1.41)$$

Тоді багатомодовий оператор зміщення записується як

$$\hat{D}(\boldsymbol{\beta}) = \exp(\boldsymbol{\beta}^T \hat{\mathbf{a}}^\dagger - \boldsymbol{\beta}^\dagger \hat{\mathbf{a}}), \quad (1.42)$$

де

$$\boldsymbol{\beta}^T \hat{\mathbf{a}}^\dagger - \boldsymbol{\beta}^\dagger \hat{\mathbf{a}} = \sum_{k=1}^M \left(\beta_k \hat{a}_k^\dagger - \beta_k^* \hat{a}_k \right). \quad (1.43)$$

Цей запис є прямим узагальненням одномодового оператора зміщення на випадок кількох незалежних мод. Багатомодова s -параметризована характеристична функція визначається як

$$\chi_s(\beta) = \exp\left(\frac{s}{2}\beta^\dagger\beta\right) \text{Tr}\left[\hat{\rho}\hat{D}(\beta)\right]. \quad (1.44)$$

Для системи, що складається з кількох підсистем, можна також використовувати різні параметри впорядкування для різних підсистем. Наприклад, для двох мод або двох підсистем $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ маємо

$$\chi_{s_{\mathcal{A}}, s_{\mathcal{B}}}(\beta_{\mathcal{A}}, \beta_{\mathcal{B}}) = \exp\left(\frac{s_{\mathcal{A}}}{2}|\beta_{\mathcal{A}}|^2 + \frac{s_{\mathcal{B}}}{2}|\beta_{\mathcal{B}}|^2\right) \text{Tr}\left[\hat{\rho}\hat{D}_{\mathcal{A}}(\beta_{\mathcal{A}})\hat{D}_{\mathcal{B}}(\beta_{\mathcal{B}})\right]. \quad (1.45)$$

Формула (1.45) буде корисною для ситуацій, у яких для різних підсистем зручно використовувати різні параметри операторного впорядкування.

1.3.4 Гаусівські стани та коваріаційні матриці

Гаусівським називається стан, для якого характеристична функція є експонентою квадратичної форми від фазово-просторових змінних [9]. Для компактного запису введемо подвоєний комплексний вектор

$$\xi = (\beta_1, \dots, \beta_M, \beta_1^*, \dots, \beta_M^*)^T. \quad (1.46)$$

Для гаусівського стану без когерентного зміщення характеристична функція записується у формі

$$\chi_s(\beta) = \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^\dagger\sigma_s\xi\right), \quad (1.47)$$

де σ_s є матрицею, що визначає квадратичну форму для вибраного впорядкування. Якщо стан має ненульове когерентне зміщення, у показнику експоненти додатково з'являються лінійні доданки за β та β^* . Отже, довільний квантовий стан у загальному випадку потребує повної характеристичної функції або повного оператора густини. Натомість гаусівський стан повністю задається першими моментами та матрицею других моментів. Саме ця властивість спрощує аналіз перетворення гаусівських станів у багатомодових лінійно-оптичних схемах.

Коваріаційну матрицю можна також ввести через квадратурні оператори

$$\hat{x}_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger), \quad \hat{p}_k = \frac{1}{i\sqrt{2}} (\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger), \quad (1.48)$$

та відповідний вектор

$$\hat{\mathbf{R}} = (\hat{x}_1, \hat{p}_1, \dots, \hat{x}_M, \hat{p}_M)^T. \quad (1.49)$$

У цих позначеннях коваріаційна матриця визначається співвідношенням

$$V_{jk} = \frac{1}{2} \langle \Delta \hat{R}_j \Delta \hat{R}_k + \Delta \hat{R}_k \Delta \hat{R}_j \rangle, \quad \Delta \hat{R}_j = \hat{R}_j - \langle \hat{R}_j \rangle. \quad (1.50)$$

Матриця V містить другі моменти квадратурних операторів. Фізично допустима коваріаційна матриця повинна задовольняти співвідношення невизначеностей

$$V + \frac{i}{2} \Omega \geq 0, \quad (1.51)$$

де симплектична форма дорівнює

$$\Omega = \bigoplus_{k=1}^M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.52)$$

У задачах, що розглядаються далі, гаусівські стани не мають когерентного зміщення. У цьому випадку вся інформація про стан міститься у відповідній коваріаційній матриці. Матрицю V використовуватимемо для квадратурного базису, тобто для вектора операторів $\hat{\mathbf{R}}$. Натомість малу літеру σ використовуватимемо для комплексного фазово-просторового представлення, пов'язаного зі змінними β, β^* або α, α^* . Зокрема, $\sigma \equiv \sigma_0$ відповідатиме симетрично впорядкованому представленню. Коваріаційна матриця, пов'язана з Q -функцією, буде введена нижче після означення самої Q -функції.

1.3.5 Стандартні приклади гаусівських станів

Найпростішим гаусівським станом є вакуумний стан

$$\hat{\rho}_{\text{vac}} = |0\rangle\langle 0|. \quad (1.53)$$

Його s -параметризована характеристична функція має вигляд

$$\chi_s^{\text{vac}}(\beta) = \exp\left(-\frac{1-s}{2}|\beta|^2\right). \quad (1.54)$$

Когерентний стан задається оператором густини

$$\hat{\rho}_{\alpha_0} = |\alpha_0\rangle\langle\alpha_0|, \quad (1.55)$$

де, згідно з (1.12), $\hat{a}|\alpha_0\rangle = \alpha_0|\alpha_0\rangle$. Його характеристична функція відрізняється від вакуумної лише лінійним фазовим множником,

$$\chi_s^{\alpha_0}(\beta) = \exp(\beta\alpha_0^* - \beta^*\alpha_0) \exp\left(-\frac{1-s}{2}|\beta|^2\right). \quad (1.56)$$

Тепловий стан із середнім числом фотонів $\bar{n}$ є змішаним станом, діагональним у фоківському базисі,

$$\hat{\rho}_{\text{th}} = \frac{1}{\bar{n} + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1}\right)^n |n\rangle\langle n|, \quad (1.57)$$

а його характеристична функція дорівнює

$$\chi_s^{\text{th}}(\beta) = \exp\left[-\left(\bar{n} + \frac{1-s}{2}\right)|\beta|^2\right]. \quad (1.58)$$

На відміну від когерентного зміщення, параметр $\bar{n}$ змінює саму ширину гаусівської характеристичної функції.

Одномодовий стиснений вакуумний стан можна записати як

$$\hat{\rho}_{\text{sq}} = \hat{S}(r)|0\rangle\langle 0|\hat{S}^\dagger(r), \quad (1.59)$$

де оператор стиснення визначається формулою

$$\hat{S}(r) = \exp \left[\frac{r}{2} (\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2}) \right]. \quad (1.60)$$

У відповідному квадратурному базисі коваріаційна матриця цього стану дорівнює

$$V_{\text{sq}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-2r} & 0 \\ 0 & e^{2r} \end{pmatrix}. \quad (1.61)$$

Вона відображає зменшення флуктуацій однієї квадратури та збільшення флуктуацій спряженої квадратури.

Для двох мод важливим прикладом є двомодовий стиснений вакуумний стан

$$|\text{TMSV}\rangle = \frac{1}{\cosh r} \sum_{n=0}^{\infty} (-\tanh r)^n |n\rangle_A |n\rangle_B, \quad (1.62)$$

з оператором густини

$$\hat{\rho}_{\text{TMSV}} = |\text{TMSV}\rangle \langle \text{TMSV}|. \quad (1.63)$$

У квадратурному базисі

$$\hat{\mathbf{R}} = (\hat{x}_A, \hat{p}_A, \hat{x}_B, \hat{p}_B)^T \quad (1.64)$$

його коваріаційна матриця записується як

$$V_{\text{TMSV}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cosh 2r & 0 & \sinh 2r & 0 \\ 0 & \cosh 2r & 0 & -\sinh 2r \\ \sinh 2r & 0 & \cosh 2r & 0 \\ 0 & -\sinh 2r & 0 & \cosh 2r \end{pmatrix}. \quad (1.65)$$

Недіагональні блоки матриці (1.65) описують кореляції між двома модами.

1.3.6 Лінійно-оптичні перетворення та втрати для гаусівських станів

Гаусівські стани зберігають гаусівську форму під дією лінійно-оптичних перетворень. Нехай вхідні та вихідні оператори мод пов'язані унітарним перетворенням (1.14). Тоді характеристична функція вихідного стану дорівнює

$$\chi_{\text{out}}(\beta) = \chi_{\text{in}}(U^\dagger \beta). \quad (1.66)$$

У комплексному подвоєному представленні відповідна матриця перетворення має блочний вигляд

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U^* \end{pmatrix}, \quad (1.67)$$

а коваріаційна матриця фазово-просторової функції перетворюється за правилом

$$\sigma_{\text{out}} = \mathcal{U} \sigma_{\text{in}} \mathcal{U}^\dagger. \quad (1.68)$$

Отже, лінійно-оптичне перетворення задає лінійне перетворення коваріаційної матриці.

Канал втрат також не виводить гаусівський стан за межі гаусівського класу. Для однієї моди канал втрат з ефективністю η можна подати у вигляді (1.16). Якщо мода оточення перебуває у вакуумному стані, то у симетрично впорядкованому коваріаційному представленні

$$\sigma_{\text{out}} = \eta \sigma_{\text{in}} + \frac{1 - \eta}{2} I. \quad (1.69)$$

Для багатомодового випадку з різними ефективностями η_k у різних модах введемо діагональну матрицю

$$\mathcal{L} = \text{diag}(\sqrt{\eta_1}, \dots, \sqrt{\eta_M}, \sqrt{\eta_1}, \dots, \sqrt{\eta_M}). \quad (1.70)$$

Тоді для вакуумних мод оточення

$$\sigma_{\text{out}} = \mathcal{L} \sigma_{\text{in}} \mathcal{L}^\dagger + \frac{1}{2} (I - \mathcal{L} \mathcal{L}^\dagger). \quad (1.71)$$

Формула (1.71) є багатомодовим узагальненням одноканальної моделі втрат. Таким чином, лінійно-оптичні перетворення та втрати можна враховувати без виходу за межі гаусівського класу станів. Це дозволяє описувати підготовку, перетворення і подальше вимірювання багатомодового гаусівського світла в термінах характеристичних функцій та коваріаційних матриць. У подальших застосуваннях важливо фіксувати одну конвенцію: або втрати враховуються в стані перед вимірюванням, або вони включаються в елементи ДОЗМ, що описують детектор. Одночасне використання обох описів без відповідної перенормалізації призводить до подвійного врахування втрат.

Введена в цьому підрозділі s -параметризована характеристична функція є вихідним об'єктом для фазово-просторових представлень Кехілла–Глаубера. Далі з неї буде отримано відповідні фазово-просторові функції стану, зокрема функції Глаубера–Сударшана, Вігнера та Хусімі–Кано.

1.4 Фазово-просторові представлення Кехілла–Глаубера

Характеристична функція, введена в підрозділі 1.3, є зручною проміжною формою опису квантового стану. Однак для аналізу класичності, фотодетектування та інтегральної форми правила Борна корисно перейти від характеристичної функції до функції на фазовому просторі. У цьому підрозділі вводяться s -параметризовані фазово-просторові представлення Кехілла–Глаубера та їхні основні частинні випадки [7, 8].

1.4.1 Від характеристичної функції до фазово-просторової функції стану

Для однієї моди s -параметризована фазово-просторова функція визначається комплексним перетворенням Фур'є характеристичної функції

$$P(\alpha; s) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\beta \chi_s(\beta) \exp(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta). \quad (1.72)$$

Тут $\alpha \in \mathbb{C}$ є комплексною амплітудою фазового простору, а $d^2\beta$ позначає інтегрування за дійсною та уявною частинами змінної β . Функція $P(\alpha; s)$ є іншим представленням того самого квантового стану $\hat{\rho}$. У загальному випадку вона не є звичайною ймовірністю: вона може набувати від'ємних значень або бути сингулярною узагальненою функцією.

Нормування фазово-просторової функції відповідає нормуванню оператора густини,

$$\int d^2\alpha P(\alpha; s) = 1. \quad (1.73)$$

Отже, фазово-просторове представлення не вводить нового фізичного стану, а лише задає іншу мову для опису того самого оператора густини. Перевага цієї мови полягає в тому, що вона дозволяє порівнювати квантові стани з класичними розподілами у фазовому просторі.

1.4.2 Функції Глаубера–Сударшана, Вігнера та Хусімі–Кано

Особливе значення мають три значення параметра s ,

$$s = 1, \quad s = 0, \quad s = -1. \quad (1.74)$$

При $s = 1$ отримуємо функцію Глаубера–Сударшана

$$P(\alpha; 1) \equiv P(\alpha). \quad (1.75)$$

Вона задає розклад оператора густини через когерентні стани [10, 11]

$$\hat{\rho} = \int d^2\alpha P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha|. \quad (1.76)$$

Саме функція Глаубера–Сударшана є основою для фазово-просторового означення класичності оптичного стану. Це питання буде розглядатися далі окремо нижче.

При $s = 0$ отримуємо функцію Вігнера

$$P(\alpha; 0) \equiv W(\alpha). \quad (1.77)$$

Функція Вігнера відповідає симетричному операторному впорядкуванню. Вона є зручною для опису гаусівських станів, оскільки для такого стану функція Вігнера також має гаусівську форму. Водночас функція Вігнера, як і інші квазіймовірнісні розподіли, у загальному випадку може набувати від’ємних значень.

При $s = -1$ отримуємо функцію Хусімі–Кано

$$P(\alpha; -1) \equiv Q(\alpha). \quad (1.78)$$

З операторного ядра випливає стандартний вираз

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle. \quad (1.79)$$

Функція Хусімі–Кано завжди є невід’ємною,

$$Q(\alpha) \geq 0. \quad (1.80)$$

Водночас вона є згладженим представленням стану, тому її невід’ємність сама по собі не є критерієм класичності. Її важливість для подальшого викладу пов’язана з тим, що антинормальне впорядкування природно поєднується з описом фотодетектування через середні за когерентними станами.

1.4.3 Перехід між різними параметрами впорядкування

Фазово-просторові функції з різними параметрами s пов’язані між собою гаусівським згладжуванням [7, 8]. Перехід від більшого значення s до меншого робить представлення менш сингулярним і менш чутливим до тонких квантових особливостей стану. Тому послідовність

$$P(\alpha) \longrightarrow W(\alpha) \longrightarrow Q(\alpha) \quad (1.81)$$

можна розуміти як послідовне згладжування фазово-просторового опису. У зворотному напрямку потрібна деконволюція, яка може бути сингулярною, тому функція Глаубера–Сударшана є найбільш чутливим, але й найбільш математично складним представленням. Саме тому можливість подати P -функцію як невід’ємний класичний розподіл має фізичний зміст для аналізу класичності оптичного стану.

1.4.4 Багатомодовий фазовий простір

Для M мод введемо вектори комплексних амплітуд

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_M)^T, \quad \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_M)^T, \quad (1.82)$$

а також міру інтегрування

$$d^{2M}\boldsymbol{\alpha} = \prod_{k=1}^M d^2\alpha_k. \quad (1.83)$$

Багатомодова s -параметризована фазово-просторова функція визначається як

$$P(\boldsymbol{\alpha}; s) = \frac{1}{\pi^{2M}} \int d^{2M}\boldsymbol{\beta} \chi_s(\boldsymbol{\beta}) \exp(\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\beta}^* - \boldsymbol{\alpha}^\dagger \boldsymbol{\beta}). \quad (1.84)$$

Вона задовольняє нормуванню

$$\int d^{2M}\boldsymbol{\alpha} P(\boldsymbol{\alpha}; s) = 1. \quad (1.85)$$

У багатомодовому випадку функція Глаубера–Сударшана задає розклад

$$\hat{\rho} = \int d^{2M}\boldsymbol{\alpha} P(\boldsymbol{\alpha}) |\boldsymbol{\alpha}\rangle \langle \boldsymbol{\alpha}|, \quad (1.86)$$

де багатомодовий когерентний стан $|\boldsymbol{\alpha}\rangle$ визначено у (1.13). Для системи, що складається з кількох підсистем, іноді зручно задавати різні параметри впорядкування для різних підсистем. Наприклад, для двох мод $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ можна використовувати функцію

$$P(\alpha_{\mathcal{A}}, \alpha_{\mathcal{B}}; s_{\mathcal{A}}, s_{\mathcal{B}}). \quad (1.87)$$

Така форма дозволяє незалежно вибирати тип впорядкування для кожної підсистеми. Вона буде корисною при записі фазово-просторової форми правила Борна для локальних вимірювань.

1.4.5 Коваріаційна матриця Q -функції

Для опису фотодетектування особливо зручним є антинормальне впорядкування, тобто випадок $s = -1$. Відповідна фазово-просторова функція є функцією Хусімі–Кано, або Q -функцією. Після введення функції Хусімі–Кано зафіксуємо її гаусівську форму, яка буде використовуватися далі для опису вимірювань з розрізненням чисел фотонів.

Для багатомодового гаусівського стану без когерентного зміщення Q -функція може бути записана як

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi^M \sqrt{|\sigma_Q|}} \exp \left(-\frac{1}{2} \zeta^\dagger \sigma_Q^{-1} \zeta \right), \quad (1.88)$$

де

$$\zeta = (\alpha_1, \dots, \alpha_M, \alpha_1^*, \dots, \alpha_M^*)^T, \quad (1.89)$$

а σ_Q є коваріаційною матрицею Q -функції у комплексному подвоєному представленні. Якщо σ позначає коваріаційну матрицю, що відповідає симетрично впорядкованому представленню в тих самих комплексних змінних, то

$$\sigma_Q = \sigma + \frac{1}{2}I. \quad (1.90)$$

Для каналу втрат з ефективністю η і вакуумною модою оточення Q -коваріаційна матриця перетворюється як

$$\sigma_{Q,\text{out}} = \eta \sigma_{Q,\text{in}} + (1 - \eta)I. \quad (1.91)$$

У багатомодовому випадку з діагональною матрицею втрат $\mathcal{L}$, введеною у (1.70), маємо

$$\sigma_{Q,\text{out}} = \mathcal{L} \sigma_{Q,\text{in}} \mathcal{L}^\dagger + (I - \mathcal{L} \mathcal{L}^\dagger). \quad (1.92)$$

Матриця σ_Q у формулах (1.88)–(1.92) буде використовуватися далі при записі статистики вимірювань з розрізненням чисел фотонів для багатомодових гаусівських станів.

1.4.6 Класичність стану у фазово-просторовому описі

Фазово-просторовий формалізм дає природне означення класичності оптичного стану. Якщо багатомодова функція Глаубера–Сударшана є невід’ємною,

$$P(\alpha) \geq 0, \quad (1.93)$$

то оператор густини у (1.86) можна інтерпретувати як статистичну суміш когерентних станів [1, 2, 10, 11]. У цьому випадку комплексні амплітуди α відіграють роль класичних випадкових змінних.

Якщо ж невід’ємне представлення такого типу неможливе, то стан вважається некласичним у сенсі Глаубера–Сударшана. Це твердження стосується саме класичності стану. Коли розглядається реальна вимірювальна статистика, потрібно враховувати не лише фазово-просторову функцію стану, а й фазово-просторове подання елементів ДОЗМ. До цього питання перейдемо нижче.

1.5 Інтегральна форма правила Борна у фазовому просторі

У попередніх підрозділах фазово-просторові функції було введено для опису квантових станів. Однак на фазово-просторовій мові можна описувати не лише оператор густини $\hat{\rho}$, а й елементи вимірювання. Це дозволяє переписати правило Борна як інтеграл за фазовим простором і використовувати один формалізм для різних типів оптичних вимірювань [4, 5, 7, 8].

1.5.1 Від операторного правила Борна до фазово-просторового інтеграла

Для результату вимірювання x , якому відповідає елемент ДОЗМ $\hat{\Pi}_x$, операторна форма правила Борна дає

$$P(x) = \text{Tr} \left(\hat{\rho} \hat{\Pi}_x \right). \quad (1.94)$$

Фазово-просторове подання цього виразу можна отримати, якщо перейти від операторів до їхніх характеристичних функцій. Для стану вже було введено s -параметризовану характеристичну функцію

$$\chi_s(\beta) = e^{\frac{s}{2}|\beta|^2} \text{Tr} \left[\hat{\rho} \hat{D}(\beta) \right], \quad (1.95)$$

а для елемента ДОЗМ $\hat{\Pi}_x$ використаємо дуальну характеристичну функцію

$$\chi_{\Pi_x}(\beta; -s) = e^{-\frac{s}{2}|\beta|^2} \text{Tr} \left[\hat{\Pi}_x \hat{D}(\beta) \right]. \quad (1.96)$$

Тут знак $-s$ означає, що елемент ДОЗМ береться у впорядкуванні, дуальному до того, яке вибрано для стану. Ця дуальність потрібна для того, щоб правило Борна зберігало просту інтегральну форму.

Оператори зміщення утворюють повну систему в просторі операторів, тому слід у правилі Борна можна записати через характеристичні функції стану та елемента ДОЗМ:

$$\text{Tr} \left(\hat{\rho} \hat{\Pi}_x \right) = \frac{1}{\pi} \int d^2\beta \chi_s(\beta) \chi_{\Pi_x}(-\beta; -s). \quad (1.97)$$

Формула (1.97) є операторним аналогом переходу до Фур'є-представлення. У цьому записі роль базисних об'єктів відіграють не вектори стану, а оператори зміщення $\hat{D}(\beta)$.

Переходячи від характеристичних функцій до функцій на фазовому просторі, для стану маємо

$$P(\alpha; s) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\beta \chi_s(\beta) \exp(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta), \quad (1.98)$$

а для елемента ДОЗМ вводимо дуальний фазово-просторовий символ

$$\Pi_x(\alpha; -s) = \frac{1}{\pi} \int d^2\beta \chi_{\Pi_x}(-\beta; -s) \exp(-\alpha\beta^* + \alpha^*\beta). \quad (1.99)$$

На відміну від $P(\alpha; s)$, який описує стан, функція $\Pi_x(\alpha; -s)$ є фазово-просторовим образом елемента ДОЗМ для результату x .

Підставляючи (1.98) та (1.99) у (1.97), отримуємо фазово-просторову форму правила Борна:

$$P(x) = \text{Tr} \left(\hat{\rho} \hat{\Pi}_x \right) = \int d^2\alpha P(\alpha; s) \Pi_x(\alpha; -s). \quad (1.100)$$

Отже, фазово-просторовий формалізм не змінює правило Борна, а лише переписує його у вигляді інтеграла за фазовим простором. У цій формі стан і вимірювання описуються різними, але дуальними фазово-просторовими об'єктами.

Особливо просту інтерпретацію має випадок $s = 1$, коли стан записано через функцію Глаубера–Сударшана

$$\hat{\rho} = \int d^2\alpha P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha|. \quad (1.101)$$

Тоді з правила Борна одразу отримуємо

$$\begin{aligned} P(x) &= \text{Tr} \left[\left(\int d^2\alpha P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| \right) \hat{\Pi}_x \right] \\ &= \int d^2\alpha P(\alpha) \langle \alpha | \hat{\Pi}_x | \alpha \rangle. \end{aligned} \quad (1.102)$$

Отже, для $s = 1$ дуальний символ вимірювання зводиться до середнього по когерентних станах

$$\Pi_x(\alpha; -1) = \langle \alpha | \hat{\Pi}_x | \alpha \rangle. \quad (1.103)$$

Це саме той випадок, який надалі буде важливим для фотодетекторів. Оскільки $\hat{\Pi}_x$ є додатним оператором, величина (1.103) завжди невід’ємна.

Для дискретного набору результатів умова повноти ДОЗМ,

$$\sum_x \hat{\Pi}_x = \hat{I}, \quad (1.104)$$

переходить у нормування символів

$$\sum_x \Pi_x(\alpha; -s) = 1. \quad (1.105)$$

Для неперервного результату відповідно маємо

$$\int dx \Pi_x(\alpha; -s) = 1. \quad (1.106)$$

Якщо символи $\Pi_x(\alpha; -s)$ є невід’ємними для всіх результатів x і всіх значень α , їх можна інтерпретувати як умовні ймовірності результатів вимірювання за заданої фазово-просторової амплітуди α .

1.5.2 Багатомодовий і локальний випадки

Для M мод формула (1.100) узагальнюється до вигляду

$$P(\mathbf{x}) = \int d^{2M} \alpha P(\alpha; s) \Pi_{\mathbf{x}}(\alpha; -s), \quad (1.107)$$

де

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_M). \quad (1.108)$$

Якщо вимірювання має добуткову структуру

$$\hat{\Pi}_{\mathbf{x}} = \bigotimes_{k=1}^M \hat{\Pi}_{x_k}^{(k)}, \quad (1.109)$$

то його фазово-просторовий символ також факторизується,

$$\Pi_{\mathbf{x}}(\alpha; -s) = \prod_{k=1}^M \Pi_{x_k}^{(k)}(\alpha_k; -s). \quad (1.110)$$

Тоді з (1.107) отримуємо

$$P(\mathbf{x}) = \int d^{2M} \alpha P(\alpha; s) \prod_{k=1}^M \Pi_{x_k}^{(k)}(\alpha_k; -s). \quad (1.111)$$

Ця формула показує, як добуткова структура локальних вимірювань входить у фазово-просторову форму правила Борна.

Для двох підсистем $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ з локальними налаштуваннями a та b маємо

$$\begin{aligned} P(A, B|a, b) &= \int d^2 \alpha_{\mathcal{A}} d^2 \alpha_{\mathcal{B}} P(\alpha_{\mathcal{A}}, \alpha_{\mathcal{B}}; s_{\mathcal{A}}, s_{\mathcal{B}}) \\ &\quad \times \Pi_{\mathcal{A}}(A|a; \alpha_{\mathcal{A}}; -s_{\mathcal{A}}) \Pi_{\mathcal{B}}(B|b; \alpha_{\mathcal{B}}; -s_{\mathcal{B}}). \end{aligned} \quad (1.112)$$

Формула (1.112) є фазово-просторовою формою правила Борна для спільної статистики локальних вимірювань. Вона показує, що спостережувана ймовірність визначається не лише фазово-просторовою функцією стану, а й символами конкретних локальних елементів ДОЗМ.

1.5.3 Конфігурації результатів фотодетектування

Для детектування з розрізненням чисел фотонів результатом є конфігурація

$$\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_M), \quad (1.113)$$

де n_i позначає результат детектування в i -й моді. У загальному випадку це може бути число фотонів, кількість спрацювань порогових фотодетекторів або кількість зареєстрованих імпульсів фотоструму. Операторний запис ймовірності такої конфігурації має вигляд

$$P(\mathbf{n}) = \text{Tr} \left[\hat{\rho} \hat{\Pi}(\mathbf{n}) \right], \quad \hat{\Pi}(\mathbf{n}) = \bigotimes_{i=1}^M \hat{\Pi}_{n_i}^{(i)}. \quad (1.114)$$

У фазово-просторовому представленні відповідна ймовірність є спеціальним випадком (1.111):

$$P(\mathbf{n}) = \int d^{2M} \boldsymbol{\alpha} P(\boldsymbol{\alpha}; s) \prod_{i=1}^M \Pi_{n_i}^{(i)}(\alpha_i; -s). \quad (1.115)$$

Для вимірювань з розрізненням чисел фотонів особливо важливим є символ елемента ДОЗМ, заданий середнім за когерентним станом,

$$\Pi_n(\alpha^*, \alpha) = \langle \alpha | \hat{\Pi}_n | \alpha \rangle. \quad (1.116)$$

Надалі для цього символу, визначеного як середнє за когерентним станом, не будемо явно писати аргумент -1 , використовуючи скорочене позначення $\Pi_n(\alpha^*, \alpha)$. Цей символ є невід'ємним для будь-якого додатного елемента ДОЗМ,

$$\Pi_n(\alpha^*, \alpha) \geq 0, \quad (1.117)$$

а для багатомодового добуткового фотодетектування він факторизується:

$$\Pi_n(\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\alpha}) = \prod_{i=1}^M \Pi_{n_i}^{(i)}(\alpha_i^*, \alpha_i). \quad (1.118)$$

Формули (1.115)–(1.118) показують, що перехід від ідеального детектора з роз-

різненням чисел фотонів до реалістичного детектора змінює не загальну структуру правила Борна, а конкретний вигляд символів $\Pi_{n_i}^{(i)}$. Конкретні вирази для таких символів для основних моделей фотодетектування буде записано в підрозділі 1.6.

1.5.4 Символи ДОЗМ для гомодинного детектування

Окремим класом оптичних вимірювань є гомодинне детектування [2, 12–16]. Для збалансованого гомодинного детектування результатом є власне значення оператора квадратури

$$\hat{x}_\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}e^{-i\varphi} + \hat{a}^\dagger e^{i\varphi}), \quad (1.119)$$

де φ є фазою локального осцилятора. Фазово-просторовий символ елемента ДОЗМ для такого вимірювання в s -представленні можна записати як

$$\Pi_s(x|\varphi; \alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi s}} \exp \left[-\frac{(x - \sqrt{2} \operatorname{Re}(\alpha e^{-i\varphi}))^2}{s} \right], \quad s > 0. \quad (1.120)$$

Тут s позначає параметр фазово-просторового представлення, а не окремий фізичний параметр детектора. У випадку $s = 0$ отримуємо символ Вейля елемента ДОЗМ ідеального вимірювання квадратури,

$$\Pi_W(x|\varphi; \alpha) = \delta \left(x - \sqrt{2} \operatorname{Re}(\alpha e^{-i\varphi}) \right). \quad (1.121)$$

Незбалансовану гомодинну схему можна описувати як фотодетектування після когерентного зміщення моди [17, 18]. Якщо зміщення задається амплітудою γ , а після нього виконується порогове фотодетектування, то для результатів $n = 0, 1$ відповідний символ ДОЗМ дорівнює

$$\Pi(n|\gamma; \alpha) = \left(1 - e^{-|\alpha - \gamma|^2} \right)^n e^{-|\alpha - \gamma|^2(1-n)}. \quad (1.122)$$

Тут $n = 0$ відповідає відсутності спрацювання, а $n = 1$ — наявності спрацювання; для стислості записано випадок одиничної ефективності. Параметр γ є налаштуванням вимірювання і задає точку фазового простору, відносно якої виконується фотодетектування. Втрати можна врахувати так само, як у моделях

фотодетекторів нижче.

Отже, інтегральна форма правила Борна дозволяє описувати стани та елементи ДОЗМ в єдиній фазово-просторовій мові. У цьому підрозділі було введено дуальні символи елементів ДОЗМ та наведено приклади для детектування з розрізненням чисел фотонів і гомодинного детектування. Нижче ця загальна схема буде конкретизована для основних моделей реалістичного детектування з розрізненням чисел фотонів.

1.6 Реалістичні моделі детектування з розрізненням чисел фотонів

Після введення загального формалізму ДОЗМ та фазово-просторових представлень станів перейдемо до моделей фотодетекторів. У подальшому нас цікавлять не лише ідеальні вимірювання числа фотонів, а й реалістичні схеми детектування з розрізненням чисел фотонів, у яких результат детектора може відрізнитися від фактичного числа фотонів на вході. Для моделей, що розглядаються нижче, елементи ДОЗМ зручно задавати двома взаємно пов'язаними способами: через фоківські умовні ймовірності та через Q -символи елементів ДОЗМ [1, 19].

1.6.1 Загальний опис детектування з розрізненням чисел фотонів

Загальний опис детектування через елементи ДОЗМ уже було задано в (1.32). Тепер конкретизуємо елементи $\hat{\Pi}_n$ для різних моделей фотодетекторів. У загальному випадку результат n не обов'язково збігається з числом фотонів на вході. Для детектора з ідеальним розрізненням чисел фотонів результат n збігається з числом фотонів. У реалістичних моделях той самий індекс n позначає зареєстрований результат: кількість спрацювань у масиві порогових детекторів, кількість імпульсів фотоструму або іншу дискретну величину, яку видає конкретна модель детектора.

Для моделей детектування з розрізненням чисел фотонів, у яких елементи ДОЗМ комутують з оператором числа фотонів, зручно використовувати фоківське представлення. Позначимо

$$P_{n|m} = \langle m | \hat{\Pi}_n | m \rangle. \quad (1.123)$$

Величина $P_{n|m}$ має зміст умовної ймовірності отримати результат n за умови, що на вхід детектора потрапило m фотонів, тому елемент ДОЗМ можна записа-

ТИ ЯК

$$\hat{\Pi}_n = \sum_{m=0}^{\infty} P_{n|m} |m\rangle \langle m|. \quad (1.124)$$

Якщо модель не включає темнові відліки, післяімпульси та інші події, не пов'язані безпосередньо з поглиненими фотонами, то

$$P_{n|m} = 0, \quad m < n. \quad (1.125)$$

Для подальшого фазово-просторового опису використовуватимемо Q -символ елемента ДОЗМ, означений у (1.116). Використовуючи розклад когерентного стану у фоківському базисі, з (1.124) отримуємо

$$\Pi_n(\alpha^*, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2m}}{m!} e^{-|\alpha|^2} P_{n|m}. \quad (1.126)$$

Отже, модель фотодетектора можна задавати або через умовні ймовірності $P_{n|m}$, або через Q -символи $\Pi_n(\alpha^*, \alpha)$. Перше представлення безпосередньо пов'язане з фоківською статистикою, а друге є зручним для фазово-просторового опису й обчислення ймовірностей конфігурацій результатів фотодетектування.

1.6.2 Детектор з ідеальним розрізненням чисел фотонів і втрати

Детектор з ідеальним розрізненням чисел фотонів описується проєкторами на фоківські стани

$$\hat{\Pi}_k = |k\rangle \langle k|, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.127)$$

У цьому випадку результат детектора точно збігається з числом фотонів на вході,

$$P_{k|m} = \delta_{km}. \quad (1.128)$$

Втрати з ефективністю $\eta \in [0, 1]$ можна включити у модель детектування за допомогою нормально впорядкованого оператора [1, 19]

$$\hat{F}_k(\eta) =: \frac{(\eta \hat{n})^k}{k!} e^{-\eta \hat{n}} ;, \quad (1.129)$$

де

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (1.130)$$

а символ $: \dots :$ позначає нормальне впорядкування. За одиничної ефективності оператор (1.129) переходить у проєктор на фоківський стан,

$$\hat{F}_k(1) = |k\rangle \langle k|. \quad (1.131)$$

Тому втрати можна враховувати двома еквівалентними способами: або включити їх у канал, який діє на стан перед вимірюванням, або залишити стан незмінним, але використовувати елементи ДОЗМ $\hat{F}_k(\eta)$. Надалі вибір способу є питанням зручності, якщо він використовується послідовно. Q -символ елемента ДОЗМ (1.129) має вигляд

$$F_k(\eta; \alpha^*, \alpha) = \langle \alpha | \hat{F}_k(\eta) | \alpha \rangle = \frac{(\eta |\alpha|^2)^k}{k!} e^{-\eta |\alpha|^2}. \quad (1.132)$$

Формула (1.132) показує, що для когерентного стану розподіл зареєстрованих фотонів має пуассонівську форму з середнім значенням $\eta |\alpha|^2$.

1.6.3 Пороговий фотодетектор

Пороговий фотодетектор розрізняє лише дві події: відсутність спрацювання та наявність спрацювання. За одиничної ефективності його елементи ДОЗМ можна записати як

$$\hat{\Pi}_0 = |0\rangle \langle 0| =: e^{-\hat{n}} ;, \quad (1.133)$$

$$\hat{\Pi}_1 = \hat{I} - |0\rangle \langle 0| = \hat{I} - : e^{-\hat{n}} :. \quad (1.134)$$

Тут результат $n = 0$ відповідає відсутності спрацювання, а $n = 1$ — наявності спрацювання. Для ефективності η маємо

$$\hat{\Pi}_0 =: e^{-\eta\hat{n}} :, \quad \hat{\Pi}_1 = \hat{I} - : e^{-\eta\hat{n}} :. \quad (1.135)$$

Умовні ймовірності для такого детектора дорівнюють

$$P_{0|m} = (1 - \eta)^m, \quad P_{1|m} = 1 - (1 - \eta)^m, \quad (1.136)$$

а відповідні Q -символи мають вигляд

$$\Pi_0(\alpha^*, \alpha) = e^{-\eta|\alpha|^2}, \quad \Pi_1(\alpha^*, \alpha) = 1 - e^{-\eta|\alpha|^2}. \quad (1.137)$$

За одиничної ефективності будь-яке ненульове число фотонів приводить до спрацювання. Однак пороговий фотодетектор не розрізняє, скільки саме фотонів потрапило на вхід.

1.6.4 Масиви порогових фотодетекторів

Наближене розрізнення чисел фотонів можна реалізувати за допомогою масиву порогових фотодетекторів. У такій схемі одна оптична мода розділяється на K підмод, кожна з яких вимірюється пороговим фотодетектором, а результатом вимірювання є кількість спрацьованих детекторів [20–24]. Для ідеалізованого рівномірного розділення на K каналів елемент ДОЗМ для k спрацьованих детекторів має вигляд [24]

$$\hat{\Pi}_k = \binom{K}{k} : \left(1 - e^{-\frac{\hat{n}}{K}}\right)^k e^{-\frac{\hat{n}(K-k)}{K}} :, \quad k = 0, \dots, K. \quad (1.138)$$

Тут для стислості втрати не записано явно. Їх можна врахувати або як канал перед вимірюванням, або заміною $\hat{n} \rightarrow \eta\hat{n}$ у нормально впорядкованому виразі (1.138). При $K = 1$ формула (1.138) переходить у випадок одного порогового фотодетектора. Для $K > 1$ результат k частково відображає число фотонів на вході, але не збігається з ним точно, оскільки кілька фотонів можуть потрапити в один і той самий підканал і дати лише одне спрацювання.

Q -символ елемента ДОЗМ (1.138) отримується заміною нормально впо-

рядкової функції оператора $\hat{n}$ на відповідну функцію $|\alpha|^2$,

$$P_k(\alpha^*, \alpha) = \binom{K}{k} \left(1 - e^{-\frac{|\alpha|^2}{K}}\right)^k e^{-\frac{|\alpha|^2(K-k)}{K}}. \quad (1.139)$$

Якщо втрати включаються в елемент ДОЗМ, у (1.139) потрібно виконати заміну $|\alpha|^2 \rightarrow \eta|\alpha|^2$. Формула (1.139) є зручною для подальшого запису ймовірностей конфігурацій результатів фотодетектування у фазово-просторовій формі правила Борна.

1.6.5 Підрахунок імпульсів фотоструму: мертвий час і релаксація

Інший клас технік детектування з розрізненням чисел фотонів базується на підрахунку імпульсів фотоструму в межах часового вікна вимірювання тривалості τ_m . Кожен зареєстрований імпульс відповідає поглинанню фотона, однак після реєстрації фотона детектор протягом певного часу не може зареєструвати наступний фотон. Цей інтервал називається мертвим часом і позначається через τ_d [25–27]. Для деяких типів однофотонних детекторів потрібно також враховувати релаксаційний час τ_r , протягом якого ефективність детектора відновлюється не миттєво, а поступово [28]. У загальному випадку елемент ДОЗМ для реєстрації n імпульсів можна записати у нормально впорядкованій формі [29]

$$\hat{P}_n =: \hat{n}^n \int_{T_n} d^n t I_n(\mathbf{t}) \exp[-\hat{n}\Xi_n(\mathbf{t})] : . \quad (1.140)$$

Тут

$$\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n), \quad (1.141)$$

а інтегрування виконується за впорядкованою областю

$$T_n : 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq \tau_m. \quad (1.142)$$

Функція $I(t)$ задає нормований часовий профіль моди в межах вікна вимірювання. Для послідовності зареєстрованих імпульсів вводиться

$$I_n(\mathbf{t}) = I(t_1) \prod_{i=2}^n I(t_i) \xi(t_i - t_{i-1}), \quad (1.143)$$

де $\xi(t)$ описує часову залежність ефективності після попередньої реєстрації. Величина $\Xi_n(t)$ у (1.140) має вигляд

$$\begin{aligned} \Xi_n(t) = & \int_0^{t_1} dt I(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} dt I(t) \xi(t - t_i) \\ & + \int_{t_n}^{\tau_m} dt I(t) \xi(t - t_n). \end{aligned} \quad (1.144)$$

Для моделі з мертвим часом і плавною релаксацією можна використовувати

$$\xi(t) = \theta(t - \tau_d) \eta_r(t - \tau_d), \quad (1.145)$$

де $\theta(t)$ є функцією Гевісайда, а $\eta_r(t)$ задає відновлення ефективності. Один із простих варіантів має вигляд

$$\eta_r(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right). \quad (1.146)$$

Таким чином, мертвий час і релаксаційний час входять безпосередньо в елементи ДОЗМ. Це відрізняє такий опис від детектора з ідеальним розрізненням чисел фотонів, де кожен фотон незалежно і миттєво перетворюється на окремий результат. Оскільки елемент ДОЗМ (1.140) задано у нормально впорядкованому вигляді, його Q -символ отримується заміною $\hat{n} \rightarrow |\alpha|^2$,

$$\Pi_n(\alpha^*, \alpha) = |\alpha|^{2n} \int_{T_n} d^n t I_n(t) \exp[-|\alpha|^2 \Xi_n(t)]. \quad (1.147)$$

Формула (1.147) є фазово-просторовою формою опису підрахунку імпульсів фотоструму з урахуванням мертвого часу та релаксації.

1.6.6 Модель лавинного фотодіода з мертвим часом

Для лавинного фотодіода часто використовують спрощення, у якому після завершення мертвого часу детектор відновлюється миттєво. Це відповідає границі, у якій релаксаційний час можна не враховувати. Якщо додатково вважати часовий профіль моди прямокутним,

$$I(t) = \frac{1}{\tau_m}, \quad (1.148)$$

то елементи ДОЗМ можна записати через оператори $\hat{F}_k(\lambda)$, аналогічні до (1.129), але з ефективним параметром λ замість η [25–27, 29]. У простій дискретній моделі максимальна кількість інтервалів мертвого часу, які можуть розміститися у вікні вимірювання, задається як

$$K = \left\lfloor \frac{\tau_m}{\tau_d} \right\rfloor. \quad (1.149)$$

Це число визначає найбільшу кількість послідовних імпульсів, для яких у моделі ще можна відстежувати зменшення доступної частини часового вікна. Нехай η позначає квантову ефективність детектування без урахування мертвого часу. Тоді ефективний параметр, що враховує доступну частину часового вікна після k зареєстрованих імпульсів, запишемо як

$$\lambda_k = \eta \frac{\tau_m - k\tau_d}{\tau_m}, \quad k = 0, \dots, K. \quad (1.150)$$

Для відсутності зареєстрованого імпульсу маємо

$$\hat{\Pi}_0 = \hat{F}_0(\lambda_0). \quad (1.151)$$

Для $k = 1, \dots, K$ елементи ДОЗМ мають вигляд

$$\hat{\Pi}_k = \sum_{l=0}^k \hat{F}_l(\lambda_k) - \sum_{l=0}^{k-1} \hat{F}_l(\lambda_{k-1}), \quad (1.152)$$

а для останнього результату

$$\hat{\Pi}_{K+1} = \hat{I} - \sum_{l=0}^K \hat{F}_l(\lambda_K). \quad (1.153)$$

Параметр λ_k поєднує квантову ефективність η та частку часового вікна, яка залишається доступною після k зареєстрованих імпульсів. Тому навіть за наявності багатьох фотонів кількість зареєстрованих імпульсів може бути меншою через мертвий час.

Використовуючи (1.132), можна записати відповідні Q -символи. Для ну-

льового результату

$$\Pi_0(\alpha^*, \alpha) = F_0(\lambda_0; \alpha^*, \alpha), \quad (1.154)$$

для $k = 1, \dots, K$

$$\Pi_k(\alpha^*, \alpha) = \sum_{l=0}^k F_l(\lambda_k; \alpha^*, \alpha) - \sum_{l=0}^{k-1} F_l(\lambda_{k-1}; \alpha^*, \alpha), \quad (1.155)$$

а для останнього результату

$$\Pi_{K+1}(\alpha^*, \alpha) = 1 - \sum_{l=0}^K F_l(\lambda_K; \alpha^*, \alpha). \quad (1.156)$$

Таким чином, модель лавинного фотодіода з мертвим часом зводиться до різниць розподілів виду (1.132) з різними ефективними параметрами λ_k .

У цьому підрозділі детектори з розрізненням чисел фотонів було описано в єдиній мові ДОЗМ. Для подальших розрахунків важливими є два представлення цих елементів: фоківське представлення через умовні ймовірності $P_{n|m}$ у (1.123) та фазово-просторове представлення через Q -символи $\Pi_n(\alpha^*, \alpha)$ у (1.116). Оскільки інтегральну форму правила Борна вже введено вище, отримані символи можна безпосередньо використовувати для обчислення ймовірностей конфігурацій результатів фотодетектування.

1.7 Спільні статистики вимірювань

У попередніх підрозділах було введено операторний опис станів, ДОЗМ, фазово-просторові функції станів та фазово-просторові символи елементів ДОЗМ. Тепер зафіксуємо загальну мову для опису спільних статистик локальних вимірювань. Ця мова буде потрібна для аналізу кореляцій між різними модами або підсистемами, а також для формулювання питання про класичне відтворення вимірювальної статистики [30, 31].

1.7.1 Локальні налаштування та спільні ймовірності

Розглянемо дві підсистеми, які позначимо як $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$. Нехай a та b позначають локальні налаштування вимірювальних пристроїв, а A та B — відповідні ре-

зультати вимірювань. Результати можуть бути дискретними, неперервними або змішаного типу, тому надалі суми за результатами слід розуміти як відповідні суми або інтеграли залежно від типу змінних.

Якщо локальні вимірювання описуються елементами ДОЗМ

$$\hat{\Pi}_A(A|a), \quad \hat{\Pi}_B(B|b), \quad (1.157)$$

то спільна ймовірність отримати результати A і B за налаштувань a і b задається правилом Борна

$$P(A, B|a, b) = \text{Tr} \left[\hat{\rho} \hat{\Pi}_A(A|a) \otimes \hat{\Pi}_B(B|b) \right]. \quad (1.158)$$

Тут $\hat{\rho}$ є оператором густини спільної системи. Отже, статистика $P(A, B|a, b)$ визначається не лише станом, а всією вимірювальною ситуацією: станом, вибором локальних налаштувань і відповідними елементами ДОЗМ.

Для більшої кількості підсистем аналогічно вводиться статистика

$$P(x_1, \dots, x_N | a_1, \dots, a_N), \quad (1.159)$$

де a_j є налаштуванням вимірювання в j -й підсистемі, а x_j — відповідним результатом. Такий запис буде використовуватися як загальна форма для спільних розподілів, незалежно від того, чи результати є дискретними, неперервними або змішаними.

1.7.2 Маргінальні розподіли та кореляції

Для кожної пари налаштувань a і b спільна статистика нормована,

$$\sum_{A,B} P(A, B|a, b) = 1. \quad (1.160)$$

Якщо один або обидва результати є неперервними, відповідні суми в (1.160) замінюються інтегралами. Маргінальні розподіли отримуються підсумовуванням

за результатами іншої підсистеми,

$$P_A(A|a) = \sum_B P(A, B|a, b), \quad (1.161)$$

$$P_B(B|b) = \sum_A P(A, B|a, b). \quad (1.162)$$

Для локальних квантових вимірювань на різних підсистемах маргінальний розподіл однієї підсистеми не залежить від вибору налаштування в іншій. Це впливає з умови повноти локальних ДОЗМ,

$$\sum_B \hat{\Pi}_B(B|b) = \hat{I}_B, \quad \sum_A \hat{\Pi}_A(A|a) = \hat{I}_A. \quad (1.163)$$

Тому праві частини означень (1.161) і (1.162) не залежать відповідно від b та a . Це відображає той факт, що саме локальне вимірювання в одній підсистемі не змінює маргінальну статистику віддаленої підсистеми.

Якщо спільна статистика не містить кореляцій між двома підсистемами, вона має факторизований вигляд

$$P_{\text{prod}}(A, B|a, b) = P_A(A|a)P_B(B|b). \quad (1.164)$$

У загальному випадку

$$P(A, B|a, b) \neq P_A(A|a)P_B(B|b). \quad (1.165)$$

Саме відмінність від факторизованої форми (1.164) описує наявність кореляцій між підсистемами. Однак сам факт наявності кореляцій ще не визначає, чи мають вони класичне або квантове походження. Для цього потрібно уточнити, чи допускає статистика класичне відтворення.

1.7.3 Локально-реалістичне відтворення статистики

Одним із класичних способів пояснення спільної статистики є локально-реалістична модель [31, 32]. У такій моделі припускається, що результати вимірювань можна описати за допомогою деякої класичної змінної ω , яка характеризує стан джерела в класичному описі. Ця змінна набуває значень у

просторі Ω і має невід’ємний нормований розподіл

$$\rho_{\text{cl}}(\omega) \geq 0, \quad \int_{\Omega} d\omega \rho_{\text{cl}}(\omega) = 1. \quad (1.166)$$

Вимірювальні пристрої в локально-реалістичній моделі описуються локальними функціями відгуку

$$F_{\mathcal{A}}(A|a; \omega), \quad F_{\mathcal{B}}(B|b; \omega). \quad (1.167)$$

Для кожного значення ω ці функції є ймовірнісними розподілами,

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{A}}(A|a; \omega) &\geq 0, & \sum_A F_{\mathcal{A}}(A|a; \omega) &= 1, \\ F_{\mathcal{B}}(B|b; \omega) &\geq 0, & \sum_B F_{\mathcal{B}}(B|b; \omega) &= 1. \end{aligned} \quad (1.168)$$

Тоді локально-реалістичне відтворення спільної статистики записується як

$$P(A, B|a, b) = \int_{\Omega} d\omega \rho_{\text{cl}}(\omega) F_{\mathcal{A}}(A|a; \omega) F_{\mathcal{B}}(B|b; \omega). \quad (1.169)$$

Змінна ω у (1.169) описує класичні параметри, спільні для обох підсистем. Локальність полягає в тому, що функція відгуку на стороні $\mathcal{A}$ не залежить від налаштування b , а функція відгуку на стороні $\mathcal{B}$ не залежить від налаштування a . Якщо для заданої статистики існує представлення (1.169) з невід’ємними величинами (1.166) і (1.168), то статистика допускає локально-реалістичне відтворення; якщо такого представлення не існує, статистика не може бути пояснена в межах локального реалізму.

1.7.4 Спільний розподіл для всіх можливих результатів

Еквівалентний спосіб сформулювати локально-реалістичний опис полягає у введенні спільного ймовірнісного розподілу для всіх результатів, які могли б бути отримані при всіх можливих локальних налаштуваннях вимірювань [33, 34]. Розглянемо для визначеності випадок двох можливих налаштувань з кожного боку,

$$a_1, a_2, \quad b_1, b_2. \quad (1.170)$$

Нехай A_1 та A_2 позначають можливі результати вимірювання в підсистемі $\mathcal{A}$ для налаштувань a_1 та a_2 , а B_1 та B_2 — можливі результати в підсистемі $\mathcal{B}$ для налаштувань b_1 та b_2 . У класичному локально-реалістичному описі можна припустити, що всі ці величини мають спільний розподіл ймовірностей $W(A_1, A_2, B_1, B_2)$.

Для того щоб W мав зміст звичайного класичного розподілу ймовірностей, він повинен бути невід’ємним і нормованим,

$$W(A_1, A_2, B_1, B_2) \geq 0, \quad (1.171)$$

$$\sum_{A_1, A_2, B_1, B_2} W(A_1, A_2, B_1, B_2) = 1. \quad (1.172)$$

Тоді спостережувана статистика для кожної пари локальних налаштувань повинна відтворюватися як відповідний маргінальний розподіл. Для налаштувань a_i та b_j маємо

$$P(A, B|a_i, b_j) = \sum_{A_1, A_2, B_1, B_2} W(A_1, A_2, B_1, B_2) \delta_{A, A_i} \delta_{B, B_j}, \quad i, j = 1, 2. \quad (1.173)$$

Спільний розподіл W задає ймовірності для всіх можливих результатів, тоді як у конкретному експерименті спостерігається лише одна пара результатів, що відповідає реально вибраним налаштуванням. Формула (1.173) вибирає з W потрібний маргінальний розподіл. Якщо деякі результати є неперервними, відповідні суми у (1.172) та (1.173) замінюються інтегралами, а дельти Кронекера — дельта-функціями Дірака.

Важливо, що істотною умовою локально-реалістичного опису є саме невід’ємність розподілу W . Формально можна побудувати знакопечергову функцію W , маргінали якої відтворюють додатні спостережувані ймовірності $P(A, B|a_i, b_j)$. Однак така функція вже не має інтерпретації класичного ймовірнісного розподілу. Вона є квазіймовірнісним представленням, подібним за змістом до фазово-просторових квазіймовірностей, і не задає локально-реалістичну модель.

Отже, вимірювана статистика допускає локально-реалістичне відтворення тоді, коли існує невід’ємний нормований розподіл $W(A_1, A_2, B_1, B_2)$, маргі-

нали якого дають усі спостережувані ймовірності для різних пар налаштувань. Якщо ж такого невід’ємного розподілу не існує, статистика не має локально-реалістичного відтворення, навіть якщо її можна формально записати через знакопочергову квазіймовірнісну функцію. Це розділяє звичайну класичну ймовірнісну модель і формальне квазіймовірнісне представлення тієї самої статистики.

1.7.5 Фазово-просторова класична симульованість

Крім локально-реалістичного опису, у квантовій оптиці важливим є інший тип класичного пояснення статистики: відтворення за допомогою невід’ємних фазово-просторових функцій [7, 8, 10, 11]. У цьому випадку прихованими змінними виступають комплексні амплітуди фазового простору, а локальні функції відгуку задаються фазово-просторовими символами елементів ДОЗМ. Використовуючи фазово-просторову форму правила Борна, записану в (1.112), спільну статистику двох локальних вимірювань можна подати як

$$P(A, B|a, b) = \int_{\mathbb{C}^2} d^2\alpha_A d^2\alpha_B P(\alpha_A, \alpha_B; s_A, s_B) \times \Pi_A(A|a; \alpha_A; -s_A) \Pi_B(B|b; \alpha_B; -s_B). \quad (1.174)$$

Тут $P(\alpha_A, \alpha_B; s_A, s_B)$ є s -параметризованою фазово-просторовою функцією стану, а

$$\Pi_A(A|a; \alpha_A; -s_A), \quad \Pi_B(B|b; \alpha_B; -s_B) \quad (1.175)$$

є відповідними фазово-просторовими символами елементів ДОЗМ. Якщо всі множники під інтегралом у (1.174) можна вибрати невід’ємними,

$$P(\alpha_A, \alpha_B; s_A, s_B) \geq 0, \quad (1.176)$$

$$\Pi_A(A|a; \alpha_A; -s_A) \geq 0, \quad \Pi_B(B|b; \alpha_B; -s_B) \geq 0, \quad (1.177)$$

то формула (1.174) має вигляд класичної статистичної моделі. У такому випадку змінні α_A і α_B відіграють роль класичних прихованих змінних, а символи (1.175) — роль локальних функцій відгуку.

У цьому сенсі статистика є класично симульованою у фазово-просторовому описі, якщо її можна відтворити за допомогою невід’ємної фазово-просторової функції стану та невід’ємних символів локальних елементів ДОЗМ [35–38]. Якщо такого представлення немає, говоритимемо про фазово-просторову несимульованість відповідної вимірювальної статистики. Це поняття не зводиться лише до некласичності стану, оскільки у фазово-просторовому записі важливими є також символи конкретних вимірювань.

Фазово-просторова класична симульованість не є тотожною локально-реалістичному опису (1.169). Локально-реалістична модель вимагає існування деякого невід’ємного розподілу прихованих змінних і локальних функцій відгуку. Фазово-просторове відтворення є конкретнішою вимогою: приховані змінні повинні мати інтерпретацію фазово-просторових амплітуд, а функції відгуку повинні бути фазово-просторовими символами реальних елементів ДОЗМ.

Тому одна і та сама статистика може допускати локально-реалістичний опис, але не допускати фазово-просторової класичної симульованості. У такому випадку некласичність проявляється не обов’язково як порушення локального реалізму, а як неможливість подати статистику через невід’ємні фазово-просторові функції стану та елементів ДОЗМ. Саме це розмежування буде важливим для аналізу гібридної схеми вимірювання в наступному розділі.

1.7.6 Розмежування понять класичної симульованості

У цьому підрозділі термін “класична симульованість” використовується щодо можливості класичного відтворення саме вимірювальної статистики. Йдеться про те, чи можна подати спільні ймовірності $P(A, B|a, b)$ через невід’ємний класичний розподіл та локальні функції відгуку, або через невід’ємні фазово-просторові функції стану та елементів ДОЗМ. У такому контексті питання полягає не в обчислювальній складності, а в тому, чи допускає статистика класичну ймовірнісну інтерпретацію.

Це поняття слід відрізняти від обчислювальної класичної симульованості, яка виникає в задачах вибірки з багатомодових розподілів. В обчислювальному сенсі класична симульованість означає існування ефективного класичного алгоритму, який генерує вибірки з відповідного розподілу результатів або з достатньо близького до нього розподілу. У задачах на зразок гаусівської бозонної вибірки зазвичай не вимагається явно обчислити весь розподіл імовірностей,

оскільки кількість вихідних конфігурацій швидко зростає з числом мод і фотонів. Натомість центральним є питання, чи може класичний алгоритм ефективно відтворити саму процедуру вибірки.

Таким чином, у подальших розділах ці два значення терміна “симульованість” використовуватимуться в різних контекстах. У розділі 2, що ґрунтується на роботі [I], основним є питання некласичності кореляцій: чи можна пояснити спільну статистику вимірювань за допомогою невід’ємного класичного або фазово-просторового розподілу. Тут ідеться не про обчислювальну складність, а про можливість або неможливість класичної ймовірнісної інтерпретації вимірювальної статистики.

Натомість у розділі 3, що ґрунтується на роботі [II], розглядається гаусівська бозонна вибірка як задача вибірки з багатомодового фотолічильного розподілу. У цьому випадку питання класичного відтворення пов’язане насамперед з можливістю ефективно генерувати вибірки з відповідного або близького до нього розподілу. Основну увагу приділено не доведенню обчислювальної складності, а побудові фотолічильної статистики для реалістичних моделей детекторів та аналізу впливу обмеженого розрізнення чисел фотонів на валідацію гаусівської бозонної вибірки.

Отже, у цьому розділі було введено загальний теоретичний апарат, потрібний для подальшого викладу. Операторний опис задає стани та вимірювання, фазово-просторовий формалізм дає мову для класичного або некласичного відтворення статистики, а спільні ймовірності $P(A, B|a, b)$ дозволяють формулювати питання про кореляції. У наступних розділах ці загальні конструкції буде застосовано до конкретних задач: некласичних кореляцій у гібридних вимірювальних схемах та реалістичного детектування з розрізненням чисел фотонів у багатомодових гаусівських схемах.

2 Гібридні вимірювання і неklasичні кореляції світла

У цьому розділі розглядається перша прикладна задача дисертації — аналіз гібридної схеми вимірювання двомодового квантового світла [I]. На відміну від попереднього розділу, де було введено загальний операторний, вимірювальний та фазово-просторовий формалізм, тут цей апарат застосовується до конкретної ситуації: одна мода вимірюється за допомогою збалансованого гомодинного детектування, а друга — за допомогою порогового фотодетектування після когерентного зміщення. Така схема поєднує неперервний квадратурний результат і дискретний результат фотодетектора, тому є природним прикладом змішаної неперервно-дискретної вимірювальної статистики.

Основним об'єктом аналізу в цьому розділі є не лише двомодовий квантовий стан сам по собі, а повна вимірювальна поведінка, тобто сукупність умовних ймовірностей результатів для різних локальних налаштувань. Такий підхід дозволяє відокремити властивості стану від властивостей конкретної схеми вимірювання. Це особливо важливо для аналізу неklasичних кореляцій, оскільки один і той самий стан може по-різному проявляти себе залежно від доступних локальних вимірювань.

Спочатку буде уточнено співвідношення між локальним реалізмом, фазово-просторовою класичністю та неklasичними кореляціями світла. Після цього буде описано гібридну вимірювальну схему, записано її статистику в операторній та фазово-просторовій формах і застосовано цей опис до двомодового стисненого вакуумного стану (ДМСВС). Для цього стану буде розглянуто ситуацію, у якій гібридна поведінка не виявляє нелокальності Белла, але водночас не допускає класичної фазово-просторової симуляції. Ключовим кроком є побудова тестової функції, яка задає лінійну комбінацію вимірюваних ймовірностей і виявляє неklasичні кореляції світла в цій гібридній схемі.

2.1 Локальний реалізм і фазово-просторова неklasичність

У попередньому розділі було введено загальний формалізм опису локальних квантових вимірювань, фазово-просторової форми правила Борна та спільних статистик вимірювальних результатів, див. підрозділи 1.2, 1.5 та 1.7. У цьому

підрозділі уточнимо поняття, які потрібні для подальшої інтерпретації гібридної поведінки: статистичні кореляції, локально-реалістичний опис, нелокальність Белла та фазово-просторову неklasичність.

Для двох підсистем $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ спільна ймовірність результатів локальних вимірювань має вигляд

$$P(A, B|a, b) = \text{Tr} \left[\hat{\rho} \hat{\Pi}_{\mathcal{A}}(A|a) \otimes \hat{\Pi}_{\mathcal{B}}(B|b) \right]. \quad (2.1)$$

Тут a і b позначають локальні налаштування вимірювальних пристроїв, A і B — відповідні результати, а $\hat{\Pi}_{\mathcal{A}}(A|a)$ і $\hat{\Pi}_{\mathcal{B}}(B|b)$ — локальні елементи ДОЗМ. Формула (2.1) є спеціалізацією загального правила Борна для локальних вимірювань, записаного у (1.158).

У подальшому нас цікавитиме не лише сам двомодовий стан $\hat{\rho}$, а повна вимірювальна статистика, яка формується цим станом і вибраними локальними вимірюваннями. Сукупність умовних ймовірностей

$$\{P(A, B|a, b)\}_{A, B, a, b} \quad (2.2)$$

називатимемо поведінкою вимірювальної схеми [30, 31]. Цей термін підкреслює, що об'єктом аналізу є не тільки квантовий стан, а пара “стан плюс вибрана схема локальних вимірювань”. Один і той самий стан може проявляти різні типи кореляцій залежно від того, які саме локальні вимірювання застосовуються. Навпаки, навіть неklasичний стан не обов'язково призводить до порушення нерівностей Белла для довільної вибраної схеми вимірювання.

У контексті перевірки локального реалізму вважається, що локальні налаштування a і b можуть вибиратися незалежно на двох сторонах. Саме тому кореляції в поведінці $P(A, B|a, b)$ не можна пояснювати безпосереднім впливом одного вимірювального пристрою на інший. Потрібно з'ясувати, чи можуть вони бути відтворені за допомогою спільних класичних параметрів джерела.

У цьому розділі важливо розрізнати три рівні опису. Найслабшим твердженням є сама наявність статистичних кореляцій, тобто нефакторизованість спільної статистики, як у (1.165). Такі кореляції можуть мати як квантове, так і цілком класичне походження, наприклад бути зумовленими спільною класичною випадковою змінною. Сильнішим твердженням є відсутність локально-реалістичного опису, тобто неможливість відтворити спостережувану статистику

ку за допомогою локальної моделі з прихованими змінними. Саме це відповідає нелокальності Белла [31, 32]. Окремо від цього існує фазово-просторова неklasичність. Вона пов'язана не з довільною локальною моделлю з прихованими змінними, а з питанням, чи можна відтворити статистику вимірювань у межах класичного фазово-просторового опису, тобто за допомогою невід'ємних фазово-просторових функцій стану та невід'ємних символів елементів вимірювання. Локально-реалістичний опис поведінки було введено в загальному вигляді у (1.169). Він означає, що існує набір прихованих змінних $\omega \in \Omega$ з невід'ємним нормованим розподілом, а локальні вимірювальні пристрої описуються невід'ємними нормованими функціями відгуку. Якщо таке подання існує, то спостережувана статистика може бути пояснена локально-реалістичною моделлю. Якщо ж такого подання не існує, то поведінка є нелокальною у сенсі Белла [31, 32]. Практично це встановлюється через порушення нерівностей Белла або їх узагальнень [31, 39].

Еквівалентно, для скінченного набору локальних налаштувань локально-реалістичний опис можна сформулювати як існування невід'ємного спільного розподілу для всіх можливих результатів вимірювань [33, 34, 40, 41]. У загальному вигляді цей підхід було описано у підрозділі 1.7. Конкретний спільний розподіл для гібридної схеми, де результати однієї сторони є неперервними, а іншої — дискретними, буде введено нижче.

Нелокальність Белла не вичерпує всі можливі прояви неklasичності світла. У квантовій оптиці природним є інший критерій класичності, пов'язаний із можливістю подати стан як статистичну суміш когерентних станів із невід'ємною функцією Глаубера–Сударшана [10, 11]. У багатомодовому випадку такий розклад було введено у (1.86). Якщо відповідна функція є невід'ємною, комплексні амплітуди фазового простору можна інтерпретувати як класичні випадкові змінні, а стан — як класичну статистичну суміш когерентних станів.

Для вимірювальної статистики, однак, потрібно враховувати не лише фазово-просторову функцію стану, а й фазово-просторові символи ДОЗМ. Нагадуючи фазово-просторову форму правила Борна (1.174), для двох локальних вимірювань маємо

$$P(A, B|a, b) = \int d^2\alpha_A d^2\alpha_B P(\alpha_A, \alpha_B; s_A, s_B) \times \Pi_A(A|a; \alpha_A; -s_A) \Pi_B(B|b; \alpha_B; -s_B). \quad (2.3)$$



Рис. 2.1 — Співвідношення між локально-реалістичними та фазово-просторово класичними поведінками. Класичний фазово-просторовий опис задає локально-реалістичну модель, але обернене твердження загалом не виконується.

Тут $P(\alpha_A, \alpha_B; s_A, s_B)$ є s -параметризованою фазово-просторовою функцією стану [7, 8], а Π_A і Π_B є дуальними фазово-просторовими символами локальних елементів ДОЗМ. Якщо всі множники під інтегралом у (2.3) можна вибрати невід’ємними і локальні символи нормовані як умовні ймовірності, то така статистика має вигляд класичного усереднення за фазово-просторовими амплітудами. Надалі цей фазово-просторовий опис буде використано як спеціальний клас класичних симуляцій, у якому прихованими змінними є амплітуди фазового простору, а локальні функції відгуку задаються символами ДОЗМ [35]. У двомодовому випадку саме порівняння такого опису з довільним локально-реалістичним описом дозволяє аналізувати некласичні кореляції вимірювальної поведінки [1].

Звідси випливає важливе співвідношення між фазово-просторовою класичністю та локальним реалізмом. Якщо поведінку можна подати в класичній фазово-просторовій формі, тобто через невід’ємну фазово-просторову функцію стану та невід’ємні нормовані локальні символи елементів ДОЗМ, то така поведінка автоматично має локально-реалістичну модель. У цій моделі роль прихованих змінних відіграють амплітуди α_A і α_B , а роль локальних функцій відгуку — символи ДОЗМ Π_A і Π_B . Обернене твердження, однак, у загальному випадку не є правильним. Поведінка може мати локально-реалістичну модель, але водночас не допускати моделювання за допомогою класичних фазово-просторових функцій стану та вимірювань. Схематично це співвідношення показано на рис. 2.1.

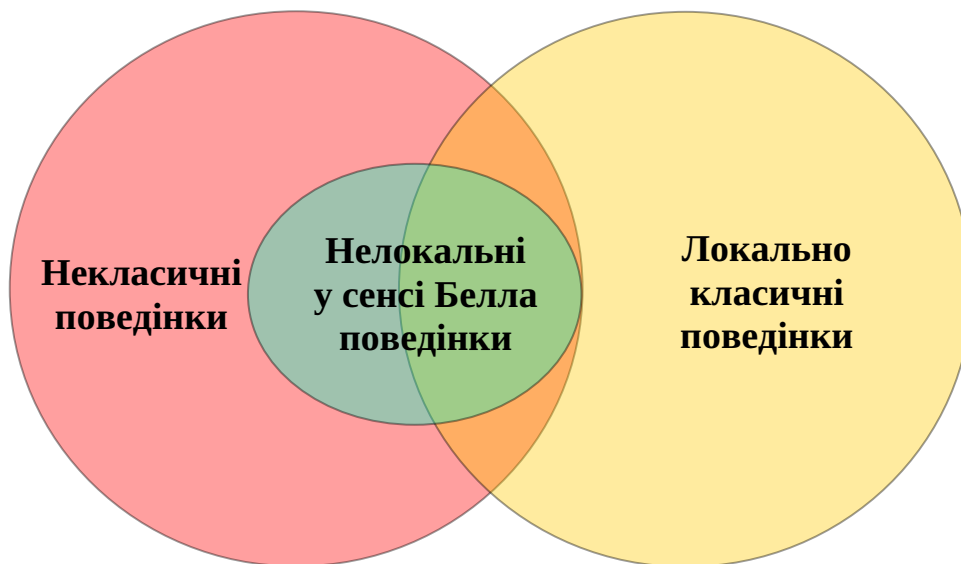


Рис. 2.2 — Схематичне співвідношення між фазово-просторово некласичними, локально класичними та нелокальними у сенсі Белла поведінками. Перетин фазово-просторово некласичних і локально класичних поведінок відповідає некласичним кореляціям без локальної некласичності окремих підсистем.

Саме ця різниця є центральною для подальшого викладу. Нелокальність Белла відповідає неможливості будь-якого локально-реалістичного опису поведінки. Фазово-просторова некласичність відповідає неможливості спеціального класичного опису, у якому світло моделюється класичними фазово-просторовими функціями, а вимірювання — невід’ємними локальними символами. Тому некласичні кореляції світла можуть бути виявлені навіть тоді, коли поведінка не порушує нерівностей Белла [1].

Для того щоб відокремити некласичність саме кореляцій від локальної некласичності окремих підсистем, надалі порівнюватимемо повний двомодовий опис із локальними редукованими описами. На рівні стану це означає, що редуковані стани окремих мод можуть бути фазово-просторово класичними, тоді як повний двомодовий стан не має класичного фазово-просторового представлення. На рівні вимірювань аналогічна ідея проявляється в тому, що локальні статистики можуть бути класично відтворюваними, тоді як повна поведінка не допускає класичної фазово-просторової симуляції. У такій ситуації джерелом некласичності є саме кореляції між модами [36–38]. Схематично це співвідношення між різними класами поведінок показано на рис. 2.2.

У цьому розділі така ситуація буде розглянута на прикладі гібридної схеми вимірювання. В одній моді виконуватиметься вимірювання квадратури за допомогою збалансованого гомодинного детектування, а в іншій — порогове фо-

тодетектування після когерентного зміщення, тобто незбалансоване гомодинне детектування. Така схема поєднує неперервний результат вимірювання з дискретним результатом типу “немає спрацювання” або “є спрацювання” і тому є зручним прикладом застосування фазово-просторового формалізму ДОЗМ до змішаної неперервно-дискретної статистики [1].

Основну увагу буде приділено постановці цієї гібридної вимірювальної задачі, фазово-просторовому опису відповідної статистики та прикладу ДМСВС. Загальні критерії локального реалізму та фазово-просторової класичної симульованості використовуватимуться як інструменти для інтерпретації отриманої поведінки. Для ДМСВС буде показано, що розглянута гібридна схема не виявляє порушення локального реалізму у сенсі Белла, однак дозволяє виявити фазово-просторову неklasичність поведінки. Ключову роль у цьому відіграватиме побудова тестової функції для цієї поведінки, яка задає лінійну комбінацію вимірюваних імовірностей і виявляє неklasичні кореляції світла навіть за відсутності порушення нерівностей Белла [1].

2.2 Гібридна схема вимірювання

Розглянемо двомодову оптичну систему, у якій дві просторово розділені моди світла аналізуються двома локальними вимірювальними пристроями. Першу моду позначатимемо як моду $\mathcal{A}$, а другу — як моду $\mathcal{B}$. Стан цих двох мод описується оператором густини $\hat{\rho}_{AB}$, що діє у добутку відповідних гільбертових просторів. Надалі для стислості сторону $\mathcal{A}$ називатимемо “Alice/Аліса”, а сторону $\mathcal{B}$ — “Bob/Боб”.

Далі розглянемо схему, у якій на стороні Аліси виконується вимірювання квадратури, а на стороні Боба — порогове фотодетектування після когерентного зміщення. Така схема називається гібридною, оскільки вона поєднує два різні типи результатів вимірювання: на стороні Аліси результатом є неперервна змінна $x \in \mathbb{R}$, тоді як на стороні Боба результатом є дискретна змінна $n \in \{0, 1\}$. Тут $n = 0$ відповідає відсутності спрацювання фотодетектора, а $n = 1$ — наявності спрацювання.

Фізично ця схема відповідає поєднанню збалансованого гомодинного детектування в одному каналі [2, 6, 12–16] та незбалансованого гомодинного детектування в іншому [17, 18]. У збалансованому гомодинному детектуванні мода $\mathcal{A}$ змішується з сильним локальним осцилятором, після чого вимірюється різни-

цевий фотострум. Як і в загальному описі гомодинного вимірювання (1.119), результат відповідає квадратурі поля

$$\hat{x}_\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{a}_\mathcal{A} e^{-i\varphi} + \hat{a}_\mathcal{A}^\dagger e^{i\varphi} \right), \quad (2.4)$$

де $\hat{a}_\mathcal{A}$ і $\hat{a}_\mathcal{A}^\dagger$ є операторами знищення та народження для моди $\mathcal{A}$, а φ є фазою локального осцилятора. Отже, для Аліси локальним налаштуванням є $a = \varphi$, результатом вимірювання є $A = x$, а відповідний елемент ДОЗМ позначатимемо як $\hat{\Pi}_\mathcal{A}(x|\varphi)$.

На стороні Боба реалізується незбалансоване гомодинне детектування: поле інтерферує з локальним осцилятором, що задає комплексне налаштування γ , після чого виконується порогове фотодетектування. У вибраній конвенції ефективні елементи ДОЗМ для цього вимірювання мають вигляд

$$\hat{\Pi}_\mathcal{B}(0|\gamma) = |\gamma\rangle_{\mathcal{B}\mathcal{B}}\langle\gamma|, \quad (2.5)$$

$$\hat{\Pi}_\mathcal{B}(1|\gamma) = \hat{I}_\mathcal{B} - |\gamma\rangle_{\mathcal{B}\mathcal{B}}\langle\gamma|. \quad (2.6)$$

Тут

$$|\gamma\rangle_\mathcal{B} = \hat{D}_\mathcal{B}(\gamma)|0\rangle_\mathcal{B}, \quad \hat{D}_\mathcal{B}(\gamma) = \exp\left(\gamma\hat{a}_\mathcal{B}^\dagger - \gamma^*\hat{a}_\mathcal{B}\right), \quad (2.7)$$

є когерентним станом моди $\mathcal{B}$. Еквівалентно можна сказати, що таке вимірювання перевіряє, наскільки стан моди $\mathcal{B}$ близький до когерентного стану з амплітудою γ . У фазово-просторовому описі цей самий вимірювальний блок відповідає символу незбалансованого гомодинного детектування, наведеному в (1.122). Тому для Боба локальним налаштуванням є $b = \gamma$, а результатом вимірювання є $B = n$, де $n \in \{0, 1\}$.

Таким чином, у гібридній схемі Аліса вимірює неперервну квадратурну змінну, тоді як Боб вимірює дискретний результат зміщеного порогового фотодетектування. Схематично ця конфігурація показана на рис. 2.3. Фазово-просторові символи елементів ДОЗМ для цих двох локальних вимірювань було введено в попередньому розділі; у наступному підрозділі вони будуть використані для запису статистики $P(x, n|\varphi, \gamma)$.

Для аналізу кореляцій розглядатимемо два можливі налаштування на кожній стороні: фази локального осцилятора φ_1, φ_2 для Аліси та амплітуди зміще-

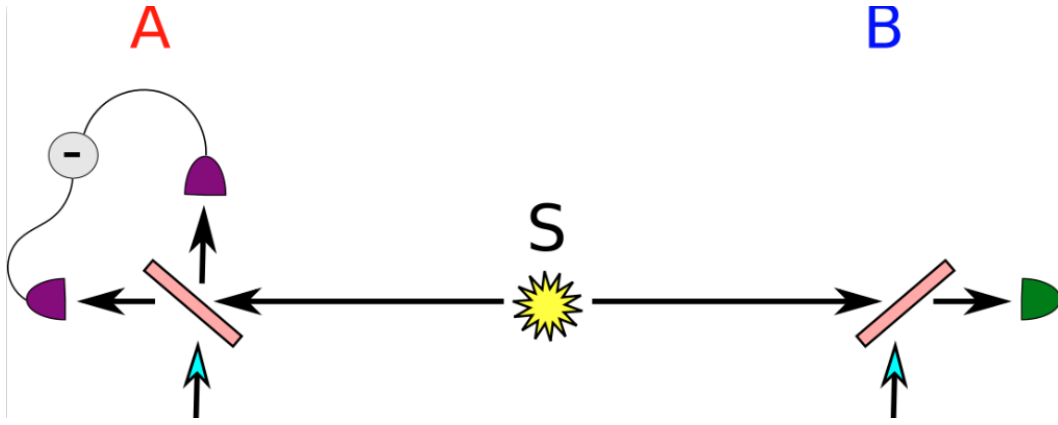


Рис. 2.3 — Гібридна схема вимірювання двомодового стану $\hat{\rho}_{AB}$. У каналі $\mathcal{A}$ виконується збалансоване гомодинне детектування з фазою локального осцилятора φ_i та неперервним результатом $x \in \mathbb{R}$. У каналі $\mathcal{B}$ виконується когерентне зміщення, ефективно задане амплітудою γ_j , з подальшим пороговим фотодетектуванням, результатом якого є $n = 0$ або $n = 1$.

ння γ_1, γ_2 для Боба. Отже, кожен експериментальний запуск відповідає одній з чотирьох пар налаштувань (φ_i, γ_j) , де $i, j = 1, 2$. Для кожної такої пари вимірюється спільний розподіл результатів

$$P(x, n | \varphi_i, \gamma_j), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \{0, 1\}. \quad (2.8)$$

У термінах правила Борна ця ймовірність має вигляд

$$P(x, n | \varphi_i, \gamma_j) = \text{Tr} \left[\hat{\rho}_{AB} \hat{\Pi}_A(x | \varphi_i) \otimes \hat{\Pi}_B(n | \gamma_j) \right]. \quad (2.9)$$

Ця формула є конкретизацією загального правила Борна для локальних вимірювань (1.158) для випадку $A = x$, $a = \varphi_i$, $B = n$ та $b = \gamma_j$.

Завдяки повноті локальних ДОЗМ спільна статистика нормована,

$$\sum_{n=0}^1 \int_{\mathbb{R}} dx P(x, n | \varphi_i, \gamma_j) = 1 \quad (2.10)$$

для всіх $i, j = 1, 2$. Маргінальні розподіли мають вигляд

$$P_A(x | \varphi_i) = \sum_{n=0}^1 P(x, n | \varphi_i, \gamma_j), \quad (2.11)$$

$$P_B(n | \gamma_j) = \int_{\mathbb{R}} dx P(x, n | \varphi_i, \gamma_j). \quad (2.12)$$

Як і в загальному випадку локальних вимірювань, маргінальний розподіл однієї сторони не залежить від налаштування іншої сторони: $P_A(x|\varphi_i)$ не залежить від γ_j , а $P_B(n|\gamma_j)$ не залежить від φ_i .

Сукупність розподілів $P(x, n|\varphi_i, \gamma_j)$ для $x \in \mathbb{R}$, $n \in \{0, 1\}$ та $i, j = 1, 2$ утворює поведінку гібридної вимірювальної схеми. Саме ця поведінка є основним об'єктом подальшого аналізу, оскільки вона містить інформацію про кореляції між результатами двох локальних вимірювань. Її особливість полягає у змішаному неперервно-дискретному характері: для кожної фази φ_i результат Аліси задається неперервною змінною x , тоді як для кожного зміщення γ_j результат Боба має лише два можливі значення $n = 0, 1$. Тому стандартні схеми з двома дискретними результатами на обох сторонах тут не застосовуються безпосередньо, хоча загальний підхід через поведінки та локальні елементи ДОЗМ залишається незмінним.

Для подальшого аналізу локального реалізму конкретизуємо загальну конструкцію спільного розподілу для всіх можливих результатів, введену в (1.171)–(1.173). У гібридній схемі для Аліси такими можливими результатами є дві неперервні змінні x_1 і x_2 , які відповідають фазам φ_1 і φ_2 . Для Боба це дві дискретні змінні n_1 і n_2 , які відповідають зміщенням γ_1 і γ_2 . Тоді спільний розподіл для всіх цих величин можна позначити як

$$W(x_1, x_2, n_1, n_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad n_1, n_2 \in \{0, 1\}. \quad (2.13)$$

Якщо поведінка має локально-реалістичний опис, то такий розподіл можна вважати невід'ємним:

$$W(x_1, x_2, n_1, n_2) \geq 0. \quad (2.14)$$

Спостережувані розподіли (2.8) мають бути маргіналами цього спільного розподілу:

$$P(x, n|\varphi_i, \gamma_j) = \sum_{n_1=0}^1 \sum_{n_2=0}^1 \int_{\mathbb{R}} dx_1 \int_{\mathbb{R}} dx_2 \delta(x - x_i) \delta_{n, n_j} W(x_1, x_2, n_1, n_2). \quad (2.15)$$

Ця формула фіксує простір результатів для гібридної схеми та підготовлює подальшу інтерпретацію цієї поведінки з погляду локального реалізму та

фазово-просторової неklasичності. У наступному підрозділі операторну статистику (2.9) буде переписано у фазово-просторовій формі з використанням символів збалансованого та незбалансованого гомодинного вимірювання.

2.3 Фазово-просторовий запис статистики

У попередньому підрозділі гібридну схему вимірювання було описано в операторній формі, див. (2.9). Для аналізу класичної симульованості та неklasичних кореляцій цю статистику зручно переписати у фазово-просторовій формі, використовуючи s -параметризоване представлення Кехілла–Глаубера [7, 8], введене в підрозділі 1.4, та фазово-просторову форму правила Борна з підрозділу 1.5.

Для двомодового стану $\hat{\rho}_{AB}$ відповідну фазово-просторову функцію позначимо як

$$P(\alpha_A, \alpha_B; s_A, s_B), \quad (2.16)$$

де $\alpha_A, \alpha_B \in \mathbb{C}$ є комплексними амплітудами двох мод, а s_A і s_B задають тип операторного впорядкування в кожному каналі. Елементом ДОЗМ відповідають дуальні фазово-просторові символи

$$\Pi_A(x|\varphi_i; \alpha_A; -s_A), \quad \Pi_B(n|\gamma_j; \alpha_B; -s_B). \quad (2.17)$$

Після уточнення загальної фазово-просторової форми правила Борна (1.112) для випадку $A = x$, $a = \varphi_i$, $B = n$ та $b = \gamma_j$ отримуємо

$$P(x, n|\varphi_i, \gamma_j) = \int_{\mathbb{C}} d^2\alpha_A \int_{\mathbb{C}} d^2\alpha_B P(\alpha_A, \alpha_B; s_A, s_B) \times \Pi_A(x|\varphi_i; \alpha_A; -s_A) \Pi_B(n|\gamma_j; \alpha_B; -s_B). \quad (2.18)$$

У гібридній схемі дві сторони описуються різними типами локальних символів. Для збалансованого гомодинного детектування у каналі A використаємо дуальний символ у представленні з параметром s_A :

$$\Pi_A(x|\varphi_i; \alpha_A; -s_A) = \frac{1}{\sqrt{\pi s_A}} \exp \left[-\frac{(x - \sqrt{2} \operatorname{Re}(\alpha_A e^{-i\varphi_i}))^2}{s_A} \right], \quad s_A \in (0, 1]. \quad (2.19)$$

Тут $s_{\mathcal{A}}$ не є новим фізичним параметром детектора, а задає вибір фазово-просторового представлення для стану та дуального символу ДОЗМ. Цей символ описує умовний розподіл результату квадратурного вимірювання для заданої фазово-просторової амплітуди $\alpha_{\mathcal{A}}$. Його максимум відповідає класичному значенню квадратури

$$x_{\text{cl}} = \sqrt{2} \operatorname{Re} (\alpha_{\mathcal{A}} e^{-i\varphi_i}) . \quad (2.20)$$

У граничному випадку $s_{\mathcal{A}} \rightarrow 0$ символ (2.19) перетворюється в символ Вейля елемента ДОЗМ ідеального вимірювання квадратури.

Для незбалансованого гомодинного детектування у каналі $\mathcal{B}$ використаємо символ (1.122). Після зміщення, заданого амплітудою γ_j , пороговий детектор має два результати: $n = 0$ та $n = 1$. Відповідний фазово-просторовий символ має вигляд

$$\Pi_{\mathcal{B}}(n|\gamma_j; \alpha_{\mathcal{B}}; -1) = \left(1 - e^{-|\alpha_{\mathcal{B}} - \gamma_j|^2}\right)^n e^{-|\alpha_{\mathcal{B}} - \gamma_j|^2(1-n)} . \quad (2.21)$$

Тут для каналу $\mathcal{B}$ використовується значення $s_{\mathcal{B}} = 1$, тобто у формулі (2.18) входить дуальний символ з параметром $-s_{\mathcal{B}} = -1$. Зокрема,

$$\Pi_{\mathcal{B}}(0|\gamma_j; \alpha_{\mathcal{B}}; -1) = e^{-|\alpha_{\mathcal{B}} - \gamma_j|^2} , \quad (2.22)$$

$$\Pi_{\mathcal{B}}(1|\gamma_j; \alpha_{\mathcal{B}}; -1) = 1 - e^{-|\alpha_{\mathcal{B}} - \gamma_j|^2} . \quad (2.23)$$

Отже, для фіксованої амплітуди $\alpha_{\mathcal{B}}$ результат $n = 0$ є найбільш імовірним тоді, коли $\alpha_{\mathcal{B}}$ близька до зміщення γ_j , тоді як зі збільшенням $|\alpha_{\mathcal{B}} - \gamma_j|$ зростає ймовірність отримати результат $n = 1$.

Підставляючи спеціалізовані символи локальних елементів ДОЗМ (2.19) та (2.21) у (2.18), отримуємо робочу формулу для гібридної статистики:

$$\begin{aligned} P(x, n|\varphi_i, \gamma_j) &= \int_{\mathbb{C}} d^2\alpha_{\mathcal{A}} \int_{\mathbb{C}} d^2\alpha_{\mathcal{B}} P(\alpha_{\mathcal{A}}, \alpha_{\mathcal{B}}; s_{\mathcal{A}}, 1) \\ &\times \frac{1}{\sqrt{\pi s_{\mathcal{A}}}} \exp \left[-\frac{(x - \sqrt{2} \operatorname{Re} (\alpha_{\mathcal{A}} e^{-i\varphi_i}))^2}{s_{\mathcal{A}}} \right] \\ &\times \left(1 - e^{-|\alpha_{\mathcal{B}} - \gamma_j|^2}\right)^n e^{-|\alpha_{\mathcal{B}} - \gamma_j|^2(1-n)} . \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ця формула показує, що спостережувана поведінка $P(x, n|\varphi_i, \gamma_j)$ формується

трьома об'єктами: фазово-просторовою функцією двомодового стану, символом квадратурного вимірювання у каналі $\mathcal{A}$ та символом зміщеного порогового фотодетектування у каналі $\mathcal{B}$.

Як спеціальний випадок загальних умов нормування символів ДОЗМ (1.105)–(1.106), у гібридній схемі маємо

$$\int_{\mathbb{R}} dx \Pi_{\mathcal{A}}(x|\varphi_i; \alpha_{\mathcal{A}}; -s_{\mathcal{A}}) = 1, \quad \sum_{n=0}^1 \Pi_{\mathcal{B}}(n|\gamma_j; \alpha_{\mathcal{B}}; -1) = 1. \quad (2.25)$$

Разом із нормуванням фазово-просторової функції стану це забезпечує нормування поведінки, записане раніше у (2.10).

Формула (2.18) також показує, коли гібридна статистика має класичне фазово-просторове тлумачення. Якщо фазово-просторова функція стану є невід'ємною, а дуальні символи локальних елементів ДОЗМ можна розглядати як невід'ємні функції відгуку, то спільна статистика має вигляд класичного усереднення за прихованими фазово-просторовими змінними $(\alpha_{\mathcal{A}}, \alpha_{\mathcal{B}})$. Зокрема, коли для обох мод використовується нормальне впорядкування, $s_{\mathcal{A}} = s_{\mathcal{B}} = 1$, фазово-просторова функція стану є функцією Глаубера–Сударшана. Якщо ця функція є невід'ємною, а дуальні символи ДОЗМ також невід'ємні, така статистика допускає фазово-просторову класичну симуляцію, зокрема симуляцію статистичною сумішшю когерентних станів у представленні Глаубера–Сударшана [35]. У двомодовому випадку відсутність такого опису може бути використана як критерій некласичних кореляцій поведінки [I].

Цей самий фазово-просторовий запис можна пов'язати зі спільним розподілом для всіх можливих результатів, введеним у (2.13). Для двох налаштувань φ_1, φ_2 та γ_1, γ_2 фазово-просторове представлення задає частинний розв'язок задачі маргіналізації [I]:

$$\begin{aligned} W_p(x_1, x_2, n_1, n_2) = & \int_{\mathbb{C}} d^2\alpha_{\mathcal{A}} \int_{\mathbb{C}} d^2\alpha_{\mathcal{B}} P(\alpha_{\mathcal{A}}, \alpha_{\mathcal{B}}; s_{\mathcal{A}}, 1) \\ & \times \Pi_{\mathcal{A}}(x_1|\varphi_1; \alpha_{\mathcal{A}}; -s_{\mathcal{A}}) \Pi_{\mathcal{A}}(x_2|\varphi_2; \alpha_{\mathcal{A}}; -s_{\mathcal{A}}) \\ & \times \Pi_{\mathcal{B}}(n_1|\gamma_1; \alpha_{\mathcal{B}}; -1) \Pi_{\mathcal{B}}(n_2|\gamma_2; \alpha_{\mathcal{B}}; -1). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Через нормування символів ДОЗМ (2.25) цей розв'язок відтворює потрібні мар-

гінали:

$$P(x, n | \varphi_i, \gamma_j) = \sum_{n_1=0}^1 \sum_{n_2=0}^1 \int_{\mathbb{R}} dx_1 \int_{\mathbb{R}} dx_2 \delta(x - x_i) \delta_{n, n_j} W_p(x_1, x_2, n_1, n_2). \quad (2.27)$$

Якщо $W_p(x_1, x_2, n_1, n_2)$ є невід’ємним, то він сам може бути використаний як спільний розподіл усіх можливих результатів, і поведінка має локально-реалістичне пояснення, яке безпосередньо походить із фазово-просторового класичного опису. Якщо ж W_p набуває від’ємних значень, це означає, що саме цей фазово-просторовий частинний розв’язок не може бути інтерпретований як класичний спільний розподіл. Однак із цього ще не випливає автоматично порушення локального реалізму, оскільки може існувати інший розв’язок

$$W(x_1, x_2, n_1, n_2) = W_p(x_1, x_2, n_1, n_2) + W_h(x_1, x_2, n_1, n_2), \quad (2.28)$$

який є невід’ємним завдяки додаванню розв’язку однорідної задачі W_h [42]. Тут W_h є таким доданком, який не змінює жодного зі спостережуваних маргіналів (2.15), тобто має нульовий внесок у всі вимірювані розподіли $P(x, n | \varphi_i, \gamma_j)$.

Отже, класичний фазово-просторовий опис є достатньою умовою локально-реалістичного відтворення поведінки, але не є необхідною умовою. Поведінка може мати локально-реалістичну модель і водночас не допускати відтворення в межах класичного фазово-просторового опису, тобто через невід’ємну фазово-просторову функцію стану та невід’ємні символи ДОЗМ. Саме ця різниця буде використана нижче для розділення нелокальності Белла та некласичних кореляцій світла.

У наступних підрозділах запис (2.24) буде застосовано до ДМСВС. Це дозволить окремо проаналізувати локально-реалістичність відповідної поведінки та її фазово-просторову некласичність. Надалі саме ця різниця буде використана так: локально-реалістичний аналіз слугуватиме контекстом, тоді як основним об’єктом буде перевірка неможливості класичної фазово-просторової симуляції для конкретної поведінки ДМСВС.

2.4 Двомодовий стиснений вакуум у гібридній схемі

Як тестовий приклад для гібридної схеми вимірювання використаємо ДМСВС [43, 44], введений у (1.62). У цьому розділі запишемо його в позначеннях

мод $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$:

$$|r\rangle = \frac{1}{\cosh r} \sum_{m=0}^{\infty} (-\tanh r)^m |m\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |m\rangle_{\mathcal{B}}, \quad (2.29)$$

де $r \geq 0$ є параметром стиснення. Знак у коефіцієнтах розкладу фіксує фазову конвенцію для двох мод. Саме ця конвенція буде використовуватися нижче при записі коваріаційної матриці та статистики гібридного вимірювання.

Цей стан є зручним тестовим прикладом, оскільки його локальні редуковані стани є термальними, тоді як неklasичність повного стану пов'язана саме з міжмодовими кореляціями. Тому ДМСВС дозволяє відокремити локальну неklasичність окремих мод від неklasичності кореляцій між ними.

У квадратурному базисі (1.48) для мод $k = \mathcal{A}, \mathcal{B}$ використаємо вектор

$$\hat{\mathbf{R}} = (\hat{x}_{\mathcal{A}}, \hat{p}_{\mathcal{A}}, \hat{x}_{\mathcal{B}}, \hat{p}_{\mathcal{B}})^T. \quad (2.30)$$

Для стану (2.29) середні значення квадратур дорівнюють нулю, $\langle \hat{\mathbf{R}} \rangle = 0$, тому стан повністю задається своєю коваріаційною матрицею.

У вибраній фазовій конвенції коваріаційна матриця має блочний вигляд

$$V_{\text{TMSV}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cosh 2r I_2 & C(r) \\ C(r) & \cosh 2r I_2 \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

де

$$C(r) = \begin{pmatrix} -\sinh 2r & 0 \\ 0 & \sinh 2r \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Еквівалентно, у повному квадратурному записі

$$V_{\text{TMSV}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cosh 2r & 0 & -\sinh 2r & 0 \\ 0 & \cosh 2r & 0 & \sinh 2r \\ -\sinh 2r & 0 & \cosh 2r & 0 \\ 0 & \sinh 2r & 0 & \cosh 2r \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Порівняно з коваріаційною матрицею (1.65), тут використано еквівалентну фазову конвенцію, яка змінює знак кореляційного блока. Така зміна відповідає ло-

кальному фазовому зсуву однієї з мод і не змінює фізичних властивостей стану.

Діагональні блоки у (2.31) описують локальні флуктуації кожної моди. Вони однакові для мод $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ та пропорційні одиничній матриці. Недіагональні блоки $C(r)$ описують міжмодові кореляції. Саме ці блоки зникають при $r = 0$ і зростають за модулем зі збільшенням параметра стиснення.

У випадку $r = 0$ стан (2.29) переходить у добуток вакуумних станів:

$$|r = 0\rangle = |0\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |0\rangle_{\mathcal{B}}, \quad (2.34)$$

а коваріаційна матриця має лише вакуумні діагональні блоки. При $r > 0$ з'являються ненульові міжмодові кореляції, і стан уже не є добутковим.

Важливу роль відіграють редуковані стани окремих мод. Взявши частковий слід за модою $\mathcal{B}$, маємо

$$\hat{\rho}_{\mathcal{A}} = \text{Tr}_{\mathcal{B}}(|r\rangle\langle r|) = \frac{1}{\cosh^2 r} \sum_{m=0}^{\infty} \tanh^{2m} r |m\rangle_{\mathcal{A}\mathcal{A}}\langle m|. \quad (2.35)$$

Аналогічно,

$$\hat{\rho}_{\mathcal{B}} = \text{Tr}_{\mathcal{A}}(|r\rangle\langle r|) = \frac{1}{\cosh^2 r} \sum_{m=0}^{\infty} \tanh^{2m} r |m\rangle_{\mathcal{B}\mathcal{B}}\langle m|. \quad (2.36)$$

Ці редуковані стани є термальними станами з середнім числом фотонів

$$\bar{n} = \sinh^2 r. \quad (2.37)$$

Справді, формулу (2.35) можна переписати як

$$\hat{\rho}_{\mathcal{A}} = \frac{1}{1 + \bar{n}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^m |m\rangle_{\mathcal{A}\mathcal{A}}\langle m|, \quad (2.38)$$

що збігається із загальним виглядом термального стану (1.57). Аналогічний вираз виконується для моди $\mathcal{B}$.

Отже, локально кожна мода має вигляд звичайного термального світла. Згідно з критерієм фазово-просторової класичності (1.93), такі редуковані стани є класичними, оскільки для $\bar{n} > 0$ їхні функції Глаубера–Сударшана мають

додатний гаусівський вигляд:

$$P_{\mathcal{A}}(\alpha_{\mathcal{A}}) = \frac{1}{\pi\bar{n}} \exp\left(-\frac{|\alpha_{\mathcal{A}}|^2}{\bar{n}}\right), \quad P_{\mathcal{B}}(\alpha_{\mathcal{B}}) = \frac{1}{\pi\bar{n}} \exp\left(-\frac{|\alpha_{\mathcal{B}}|^2}{\bar{n}}\right). \quad (2.39)$$

У границі $\bar{n} \rightarrow 0$ ці функції переходять у дельта-подібне P -представлення вакуумного когерентного стану.

Інша ситуація виникає для повного двомодового стану. Хоча функція Вігнера ДМСВС є додатною гаусівською функцією, його функція Глаубера–Сударшана не є невід’ємною звичайною ймовірнісною функцією. Тому цей приклад добре ілюструє різницю між додатністю певного фазово-просторового представлення та класичністю у сенсі Глаубера–Сударшана.

Для гаусівських станів можливість додатного P -представлення зручно перевіряти через нормально впорядковану коваріаційну матрицю: вона має бути додатною напіввизначеною. У використаній нормалізації вакуумна коваріаційна матриця дорівнює $I_4/2$, тому відповідна нормально впорядкована матриця для стану (2.29) має вигляд

$$V_{\text{TMSV}} = \frac{1}{2}I_4. \quad (2.40)$$

Для будь-якого $r > 0$ ця матриця має від’ємний власний напрям. Отже, повний двомодовий стан не може бути поданий як статистична суміш добутків когерентних станів

$$|\alpha_{\mathcal{A}}\rangle\langle\alpha_{\mathcal{A}}| \otimes |\alpha_{\mathcal{B}}\rangle\langle\alpha_{\mathcal{B}}| \quad (2.41)$$

з невід’ємною вагою.

Таким чином, маємо саме ту структуру, яка потрібна для аналізу неklasичних кореляцій. Окремі моди є локально класичними термальними станами, але повний двомодовий стан є неklasичним через міжмодові кореляції. Схематично ця структура показана на рис. 2.4.

Тепер застосуємо до стану (2.29) гібридну схему вимірювання, описану в підрозділі 2.2. На стороні $\mathcal{A}$ вимірюється квадратура з фазою локального осцилятора φ , а на стороні $\mathcal{B}$ виконується зміщене порогове фотодетектування з ам-

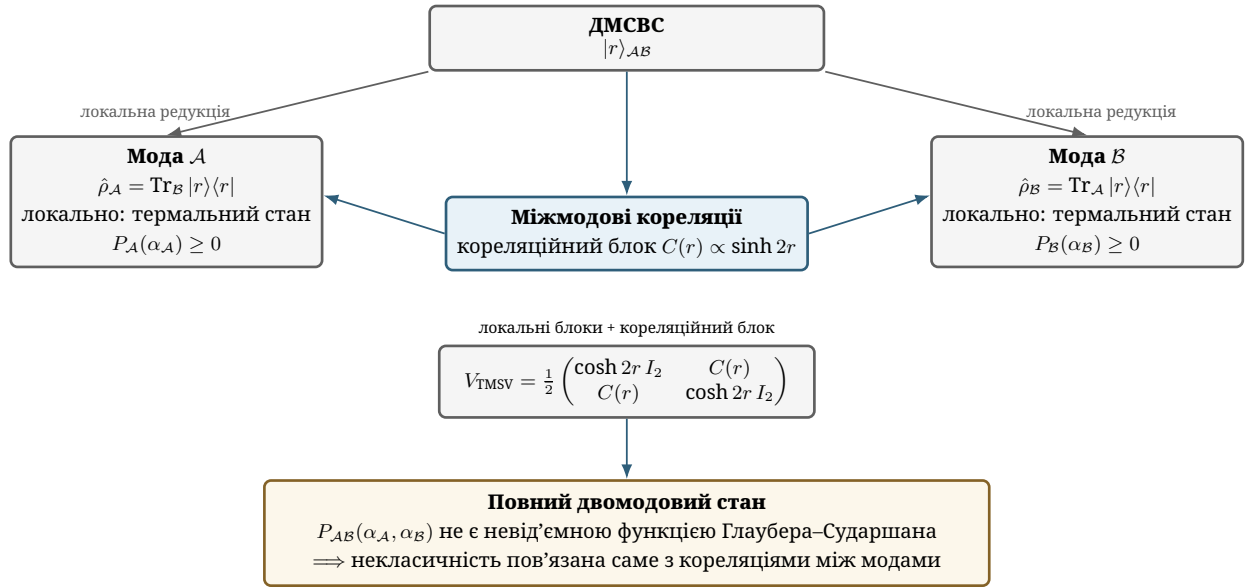


Рис. 2.4 — Концептуальна структура ДМСВС. Кожна окрема мода після редукції має термальний, фазово-просторово класичний вигляд. Некласичність повного стану пов'язана з кореляційним блоком коваріаційної матриці, тобто з кореляціями між модами A і B .

плітудою зміщення γ . Відповідна поведінка має вигляд

$$P(x, n|\varphi, \gamma), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \{0, 1\}. \quad (2.42)$$

Обчислення за робочою фазово-просторовою формулою (2.24) дає явний вираз для цієї поведінки [I]. Спочатку розглянемо маргінальний розподіл результату квадратурного вимірювання на стороні Аліси. Оскільки локальний стан Аліси є термальним і фазово-інваріантним, цей розподіл не залежить від фази φ :

$$P_A(x|\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi \cosh 2r}} \exp\left(-\frac{x^2}{\cosh 2r}\right). \quad (2.43)$$

При $r = 0$ ця формула переходить у вакуумний розподіл квадратури

$$P_A(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \quad (2.44)$$

Зі збільшенням r розподіл (2.43) розширюється, що відповідає зростанню локального термального шуму.

Для результату $n = 0$, тобто для відсутності спрацювання у зміщеному

пороговому детекторі Боба, спільна густина ймовірності має вигляд

$$P(x, 0|\varphi, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cosh^2 r} \exp \left[-\frac{|\gamma|^2}{\cosh^2 r} - \left(x + \sqrt{2} \operatorname{Re} (\gamma e^{i\varphi}) \tanh r \right)^2 \right]. \quad (2.45)$$

Відповідна густина ймовірності для результату $n = 1$ визначається нормуванням за результатами Боба:

$$P(x, 1|\varphi, \gamma) = P_A(x|\varphi) - P(x, 0|\varphi, \gamma). \quad (2.46)$$

Еквівалентно поведінку для $n = 0, 1$ можна записати в компактній формі

$$P(x, n|\varphi, \gamma) = n \frac{1}{\sqrt{\pi} \cosh 2r} \exp \left(-\frac{x^2}{\cosh 2r} \right) + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{\pi} \cosh^2 r} \exp \left[-\frac{|\gamma|^2}{\cosh^2 r} - \left(x + \sqrt{2} \operatorname{Re} (\gamma e^{i\varphi}) \tanh r \right)^2 \right], \quad (2.47)$$

де $n = 0, 1$.

Формула (2.47) є явним виразом для поведінки ДМСВС у гібридній схемі. Вона показує, як параметр стиснення r , фаза гомодинного вимірювання φ та зміщення γ входять у спостережувану статистику. Особливо важливим є кореляційний зсув

$$\sqrt{2} \operatorname{Re} (\gamma e^{i\varphi}) \tanh r. \quad (2.48)$$

Його знак залежить від вибраної фазової конвенції, але суттєвим є те, що він пропорційний $\tanh r$ і тому зникає при $r = 0$. Цей зсув зв'язує локальне налаштування Боба, тобто зміщення γ , з квадратурним результатом Аліси.

Якщо $r = 0$, то $\tanh r = 0$, і кореляційний зсув зникає. У цьому випадку стан є добутком вакуумів, а спільна статистика факторизується:

$$P(x, n|\varphi, \gamma) = P_A(x|\varphi) P_B(n|\gamma), \quad (2.49)$$

що відповідає загальній факторизованій формі (1.164). При $r > 0$ величина $\tanh r$ стає ненульовою, і спільний розподіл уже не зводиться до добутку локаль-

них маргіналів. Це є прямим проявом міжмодових кореляцій у вимірювальній статистиці.

Маргінальна ймовірність відсутності спрацювання у Боба отримується інтегруванням (2.45) за x :

$$P_B(0|\gamma) = \int_{\mathbb{R}} dx P(x, 0|\varphi, \gamma) = \frac{1}{\cosh^2 r} \exp\left(-\frac{|\gamma|^2}{\cosh^2 r}\right). \quad (2.50)$$

Ця величина не залежить від фази φ , що узгоджується із загальною умовою незалежності маргіналів від віддалених налаштувань. Ймовірність спрацювання дорівнює

$$P_B(1|\gamma) = 1 - \frac{1}{\cosh^2 r} \exp\left(-\frac{|\gamma|^2}{\cosh^2 r}\right). \quad (2.51)$$

З формул (2.43) та (2.50) видно, що локальна статистика кожної сторони повністю узгоджується з термальним характером редукованих станів. Водночас спільна статистика (2.47) містить кореляційний член, який залежить від спільної комбінації параметрів φ , γ та r .

Щоб виділити саме кореляційну частину, можна порівняти повну поведінку з факторизованою поведінкою

$$P_u(x, n|\varphi, \gamma) = P_A(x|\varphi)P_B(n|\gamma). \quad (2.52)$$

Для результату $n = 0$ різниця між повною та факторизованою поведінкою має вигляд

$$\Delta P_0(x|\varphi, \gamma) = P(x, 0|\varphi, \gamma) - P_A(x|\varphi)P_B(0|\gamma). \quad (2.53)$$

Саме ця різниця описує кореляції, які доступні у гібридній схемі вимірювання. При $r = 0$ вона дорівнює нулю для всіх x , φ та γ , а при $r > 0$ в загальному випадку є ненульовою.

Таким чином, ДМСВС у гібридній схемі має дві важливі властивості. Локально кожна мода поводить себе як термальне світло, тобто не демонструє локальної неklasичності. Однак повна поведінка містить міжмодові кореляції, пов'язані з недіагональним блоком коваріаційної матриці (2.32). Тому цей стан є природним прикладом для перевірки того, чи здатна гібридна схема виявляти

саме неklasичні кореляції світла, а не просто неklasичність окремих локальних мод.

У наступних підрозділах поведінка (2.47) буде розглянута з двох боків: спочатку з погляду локального реалізму, а потім з погляду фазово-просторової неklasичності. Отриманий явний вираз (2.47) буде основою для побудови спеціальної тестової комбінації ймовірностей, яка виявляє фазово-просторову неklasичність цієї поведінки [1].

2.5 Локально-реалістичний опис гібридної поведінки

У попередньому підрозділі було отримано явний вираз для поведінки ДМСВС в гібридній схемі вимірювання,

$$P(x, n | \varphi, \gamma), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \{0, 1\}. \quad (2.54)$$

Ця поведінка містить міжмодові кореляції: при $r > 0$ спільний розподіл результатів не зводиться до добутку локальних розподілів, як це відбувається у факторизованому випадку (2.49). Однак сама наявність кореляцій ще не означає порушення локального реалізму. Тому перед аналізом фазово-просторової неklasичності потрібно з'ясувати, чи може поведінка $P(x, n | \varphi_i, \gamma_j)$ бути описана локально-реалістичною моделлю.

Для цього використаємо спільний розподіл усіх можливих результатів

$$W(x_1, x_2, n_1, n_2), \quad (2.55)$$

введений у (2.13). Як було зазначено в (2.14)–(2.15), локально-реалістичний опис відповідає існуванню такого невід'ємного розподілу, маргіналами якого є всі спостережувані розподіли $P(x, n | \varphi_i, \gamma_j)$. Якщо такий розподіл існує, то поведінка є локально-реалістичною; якщо ні, то вона є нелокальною у сенсі Белла.

У стандартному сценарії Клаузера–Хорна–Шимоні–Хольта (КХШХ) обидві сторони мають дискретні результати [31, 39]. У розглянутій гібридній схемі результат Аліси є неперервною змінною x , тоді як результат Боба є дискретним, $n \in \{0, 1\}$. Тому стандартну дискретну форму КХШХ-нерівностей не можна застосувати безпосередньо. Натомість використовується узагальнена умова ти-

пу КХШХ для змішаного неперервно-дискретного випадку [31, 39, 45]. Її зміст полягає в тому, що неперервний результат Аліси може бути оптимально дихотомізований, а умова локальності зводиться до перевірки існування невід’ємного розподілу $W(x_1, x_2, n_1, n_2)$.

Для поведінки ДМСВС (2.47) узагальнені нерівності типу КХШХ не порушуються. Іншими словами, для розглянутої гібридної поведінки не знаходиться такого набору локальних налаштувань $\varphi_1, \varphi_2, \gamma_1, \gamma_2$, який би приводив до додатного порушення локально-реалістичної межі. Аналітичний розгляд однієї області параметрів разом із глобальною чисельною оптимізацією в решті області дає нульове максимальне порушення відповідних нерівностей [I]:

$$\max_{\varphi_1, \varphi_2, \gamma_1, \gamma_2} \mathcal{G}_{\text{LR}}(\varphi_1, \varphi_2, \gamma_1, \gamma_2; r) = 0. \quad (2.56)$$

Тут $\mathcal{G}_{\text{LR}}$ позначає максимальне перевищення локально-реалістичної межі для узагальненої умови типу КХШХ. Нульове значення (2.56) означає, що відповідні нерівності можуть лише насичуватися, але не порушуються.

Отже, для ДМСВС у розглянутій гібридній схемі існує локально-реалістичний опис поведінки. Цей результат можна записати коротко:

ДМСВС + гібридні вимірювання $\implies$ локально-реалістична поведінка.

Тому схема, у якій Аліса виконує збалансоване гомодинне вимірювання, а Боб — зміщене порогове фотодетектування, не виявляє нелокальності Белла для ДМСВС.

Цей висновок важливий саме як контекст для подальшого аналізу. Він показує, що наявні у поведінці (2.47) кореляції не є проявом нелокальності Белла. Проте локально-реалістичність не означає фазово-просторової класичності. У термінах попереднього підрозділу це означає, що навіть якщо для поведінки існує невід’ємний спільний розподіл $W(x_1, x_2, n_1, n_2)$, це ще не гарантує існування класичного фазово-просторового опису через функцію стану та локальні символи ДОЗМ.

Таким чином, гібридна схема має природну межу як тест нелокальності Белла для ДМСВС. У наступному підрозділі буде показано, що ця межа не заважає виявити інший тип некласичності: для тієї самої поведінки можна побудувати тестову функцію, яка демонструє неможливість класичної фазово-

просторової симуляції і тим самим виявляє неklasичні кореляції світла.

2.6 Виявлення неklasичних кореляцій у гібридній схемі

У попередньому підрозділі було розглянуто локально-реалістичний опис гібридної поведінки ДМСВС,

$$P(x, n | \varphi_i, \gamma_j), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \{0, 1\}. \quad (2.57)$$

Для цієї поведінки не виявляється порушення локального реалізму у сенсі Белла. Однак це не означає, що така поведінка є фазово-просторово класичною. Як було пояснено в підрозділі 2.1, локально-реалістичний опис є ширшим поняттям: він вимагає існування деякої класичної моделі, але не вимагає, щоб приховані змінні були саме фазово-просторовими амплітудами світла. Тому далі перевіримо сильнішу вимогу: чи може поведінка (2.47) бути відтворена класичною фазово-просторовою симуляцією.

У цьому підрозділі використовується тестова функція λ , яка для поведінки (2.47) приводить до порушення нерівності для класичної фазово-просторової симуляції. Саме ця побудова є ключовим кроком у виявленні неklasичних кореляцій у розглянутій гібридній схемі [I].

Вихідною точкою є фазово-просторовий запис статистики, отриманий у (2.18). Якщо існує одна класична фазово-просторова функція стану, яка разом із дуальними символами локальних елементів ДОЗМ відтворює всю поведінку $P(x, n | \varphi_i, \gamma_j)$ одночасно для всіх вибраних пар налаштувань (φ_i, γ_j) , то така поведінка допускає класичне фазово-просторове моделювання. У випадку $s_A = s_B = 1$ це, зокрема, означає можливість симуляції статистичною сумішшю когерентних станів. Якщо ж такого класичного фазово-просторового опису не існує, то поведінка є неklasичною у фазово-просторовому сенсі.

Загальний дуальний підхід до перевірки класичної фазово-просторової симуляції було сформульовано в роботі [35]. У цьому розділі використовується його двомодова версія для гібридної поведінки, розглянута в [I]. За структурою вона подібна до нерівностей Белла, але клас допустимих моделей тут вужчий: це не всі локально-реалістичні моделі, а лише моделі, у яких приховані змінні є фазово-просторовими амплітудами, а локальні функції відгуку задаються фазово-просторовими символами елементів ДОЗМ. Нехай $\lambda(x, n, \varphi_i, \gamma_j)$ є те-

стовою функцією результатів і налаштувань. Ця функція не є новим фізичним вимірюванням; вона задає лінійну комбінацію вже вимірюваних імовірностей, яка служить свідком неможливості класичного фазово-просторового опису.

Визначимо середнє значення цієї функції за реальною поведінкою:

$$E(\lambda|\varphi_i, \gamma_j) = \sum_{n=0}^1 \int_{\mathbb{R}} dx \lambda(x, n, \varphi_i, \gamma_j) P(x, n|\varphi_i, \gamma_j). \quad (2.58)$$

Для фазово-просторової класичної симуляції аналогічне середнє за фіксованими амплітудами α_A і α_B має вигляд

$$E(\lambda|\varphi_i, \gamma_j; \alpha_A, \alpha_B; s_A, s_B) = \sum_{n=0}^1 \int_{\mathbb{R}} dx \lambda(x, n, \varphi_i, \gamma_j) \times \Pi_A(x|\varphi_i; \alpha_A; -s_A) \Pi_B(n|\gamma_j; \alpha_B; -s_B). \quad (2.59)$$

Якщо класична фазово-просторова симуляція існує, то для будь-якої тестової функції λ має виконуватися нерівність

$$\sum_{i,j=1}^2 E(\lambda|\varphi_i, \gamma_j) \leq \sup_{\alpha_A, \alpha_B} \sum_{i,j=1}^2 E(\lambda|\varphi_i, \gamma_j; \alpha_A, \alpha_B; s_A, s_B). \quad (2.60)$$

Якщо ця нерівність порушується, то спостережувана поведінка не може бути пояснена класичною фазово-просторовою моделлю. Водночас таке порушення не є порушенням локального реалізму у сенсі Белла, оскільки права частина (2.60) оптимізується не за всіма локально-реалістичними моделями, а лише за моделями спеціального фазово-просторового типу [35]. Саме застосування цієї ідеї до двомодової гібридної поведінки та некласичних кореляцій використовується в [I].

Ключовим кроком є вибір тестової функції, чутливої саме до міжмодових кореляцій ДМСВС у гібридній статистиці. Для поведінки (2.47) побудуємо тестову функцію [I], яка використовує подію відсутності спрацювання у зміщеному пороговому детекторі Боба:

$$\lambda(x, n, \varphi, \gamma) = \delta(x - x_0) \delta_{\varphi, \varphi_0} \left[\delta_{n,0} \chi(\gamma; \alpha_0) - \frac{D}{2} \right]. \quad (2.61)$$

Тут x_0 та α_0 є дійсними параметрами, які вибираються для оптимізації поруше-

ння, а φ_0 є фіксованою фазою локального осцилятора на стороні Аліси. Символ $\delta_{\varphi, \varphi_0}$ слід розуміти як індикатор вибраного налаштування серед скінченного набору фаз, а не як дельта-функцію за неперервним параметром. Іншими словами, в цій тестовій комбінації використовується лише одне налаштування Аліси. Амплітуди зміщення Боба беруться з двох можливих значень γ_1 і γ_2 , які для цього тесту можна вибрати дійсними.

Такий вибір λ не є довільним. Він виділяє лінійну комбінацію ймовірностей події $n = 0$ для двох зміщень Боба при фіксованому значенні квадратури Аліси. Саме ця частина гібридної статистики є чутливою до кореляційного зсуву в (2.48), який зникає при $r = 0$ і стає ненульовим для стисненого стану.

Функція $\chi(\gamma; \alpha_0)$ визначається на двох значеннях зміщення:

$$\chi(\gamma_1; \alpha_0) = -(\alpha_0 - \gamma_2)e^{-|\alpha_0 - \gamma_2|^2}, \quad (2.62)$$

$$\chi(\gamma_2; \alpha_0) = (\alpha_0 - \gamma_1)e^{-|\alpha_0 - \gamma_1|^2}. \quad (2.63)$$

Коефіцієнт D задається як

$$D = \sup_{\alpha \in \mathbb{C}} \sum_{j=1}^2 \chi(\gamma_j; \alpha_0) \Pi_B(0|\gamma_j; \alpha), \quad (2.64)$$

де

$$\Pi_B(0|\gamma_j; \alpha) = e^{-|\alpha - \gamma_j|^2} \quad (2.65)$$

є символом події відсутності спрацювання для зміщеного порогового фотодетектування, див. (2.22). Отже, D є фазово-просторовою класичною верхньою межею для відповідної лінійної комбінації локальних функцій відгуку на стороні Боба. Саме тому після віднімання $D/2$ у тестовій функції права частина нерівності (2.60) не може бути додатною.

Для вибору (2.61) ліва частина загальної нерівності (2.60) набуває вигляду

$$\sum_{i,j=1}^2 E(\lambda|\varphi_i, \gamma_j) = \sum_{j=1}^2 \chi(\gamma_j; \alpha_0) P(x_0, 0|\varphi_0, \gamma_j) - D P(x_0|\varphi_0). \quad (2.66)$$

Тут

$$P(x_0|\varphi_0) = \sum_{n=0}^1 P(x_0, n|\varphi_0, \gamma_j) \quad (2.67)$$

є маргінальним розподілом квадратури Аліси. Через незалежність локального маргіналу від віддаленого налаштування, як було пояснено в підрозділі 1.7, ця величина не залежить від вибору γ_j .

Водночас права частина нерівності (2.60) для тестової функції (2.61) дорівнює нулю:

$$\sup_{\alpha_A, \alpha_B} \sum_{i,j=1}^2 E(\lambda|\varphi_i, \gamma_j; \alpha_A, \alpha_B; s_A, 1) = 0. \quad (2.68)$$

Це впливає з означення D у (2.64): для будь-якого значення α_B вираз у квадратних дужках, який залишається після підсумовування за двома зміщеннями Боба, не перевищує нуля, а символ квадратурного вимірювання Аліси є невід'ємним. Тому загальна нерівність для фазово-просторово класичної симуляції зводиться до практичного критерію для гібридної поведінки ДМСВС [I]:

$$\sum_{j=1}^2 \chi(\gamma_j; \alpha_0) P(x_0, 0|\varphi_0, \gamma_j) \leq D P(x_0|\varphi_0). \quad (2.69)$$

Нерівність (2.69) має операційний зміст, оскільки містить тільки величини, які визначаються зі спостережуваної поведінки: густини ймовірності $P(x_0, 0|\varphi_0, \gamma_1)$ і $P(x_0, 0|\varphi_0, \gamma_2)$, маргінальний розподіл $P(x_0|\varphi_0)$ та коефіцієнт D , що визначається символом локального вимірювання Боба. У практичній реалізації густина в точці x_0 оцінюється через малий інтервал значень квадратури. Якщо нерівність (2.69) порушується, то спостережувана поведінка не може бути змодельована класичною фазово-просторовою функцією разом із невід'ємними локальними символами ДОЗМ.

Важливо, що нерівність (2.69) не залежить від параметра впорядкування в каналі $\mathcal{A}$. Тому її порушення виключає не лише симуляцію статистичною сумішшю когерентних станів, що відповідає $s_A = s_B = 1$, а й ширший клас симуляцій за допомогою невід'ємних s -параметризованих фазово-просторових функцій для цієї гібридної схеми.

Для кількісного опису порушення зручно ввести відносне порушення [I]

$$\mathcal{R} = \frac{\sum_{j=1}^2 \chi(\gamma_j; \alpha_0) P(x_0, 0 | \varphi_0, \gamma_j) - D P(x_0 | \varphi_0)}{D P(x_0 | \varphi_0)}. \quad (2.70)$$

Додатне значення $\mathcal{R}$ означає порушення нерівності (2.69) і, відповідно, неможливість фазово-просторово класичної симуляції.

Підставлення явної поведінки ДМСВС (2.47) у побудовану нерівність дає залежність $\mathcal{R}$ від параметра стиснення r . Параметри x_0 та α_0 вибираються так, щоб максимізувати порушення для кожного значення r . У розрахунках зручно фіксувати

$$\varphi_0 = 0, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 1. \quad (2.71)$$

Під час оптимізації параметрів x_0 та α_0 доцільно не використовувати області надто малих значень маргінального розподілу $P(x_0 | \varphi_0)$, щоб відносне порушення не визначалося статистично незначущими хвостами розподілу. Після оптимізації отримується область додатного відносного порушення, яка відповідає неможливості класичної фазово-просторової симуляції. За наявності втрат додатне порушення може з'являтися лише після певного значення параметра стиснення, що й буде видно на рис. 2.5. Отже, побудована тестова функція виявляє фазово-просторову некласичність гібридної поведінки ДМСВС [I].

Скінченні ефективності детектування η_A і η_B можна врахувати як втрати перед відповідними вимірювальними блоками. Для побудови нерівності (2.69) потрібні лише дві величини: $P_\eta(x, 0 | \varphi, \gamma)$ та $P_\eta(x | \varphi)$. У вибраній фазовій конвенції вони мають вигляд

$$\begin{aligned} P_\eta(x, 0 | \varphi, \gamma) = & \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma_1\sigma_3}} \exp \left[-\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \left(\operatorname{Re}(\gamma e^{i\varphi}) + x \sqrt{\frac{\eta_A \eta_B}{2}} \frac{\sinh 2r}{\sigma_2} \right)^2 \right] \\ & \times \exp \left[-\frac{[\operatorname{Im}(\gamma e^{i\varphi})]^2}{\sigma_3} \right] \exp \left[-\frac{x^2}{\sigma_2} \right], \end{aligned} \quad (2.72)$$

де

$$\sigma_1 = \eta_B \cosh^2 r + (1 - \eta_B) (1 + 2\eta_A \sinh^2 r), \quad (2.73)$$

$$\sigma_2 = 1 + 2\eta_A \sinh^2 r, \quad (2.74)$$

$$\sigma_3 = 1 + \eta_B \sinh^2 r. \quad (2.75)$$

Маргінальний розподіл Аліси дорівнює

$$P_\eta(x|\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma_2}} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma_2}\right). \quad (2.76)$$

У границі $\eta_A = \eta_B = 1$ формули (2.72)–(2.76) переходять у відповідні ідеальні вирази (2.45) та (2.43). Саме ці розподіли з втратами підставляються в (2.70) при аналізі неідеального детектування [I].

Результат доцільно подати графічно через залежність $\mathcal{R}(r)$. На рис. 2.5 показано відносне порушення (2.70) як функцію параметра стиснення для кількох пар ефективностей, зокрема

$$(\eta_A, \eta_B) = (0.7, 0.6), \quad (0.7, 0.7), \quad (0.8, 0.7). \quad (2.77)$$

Аналіз із втратами показує, що для цих значень ефективностей порушення нерівності (2.69) зберігається у скінченній області значень параметра стиснення. Для наведених кривих додатне порушення з'являється приблизно при $r \simeq 0.42$ для $(\eta_A, \eta_B) = (0.7, 0.6)$, при $r \simeq 0.37$ для $(0.7, 0.7)$ та при $r \simeq 0.18$ для $(0.8, 0.7)$. Отже, висновок про фазово-просторову неklasичність не є наслідком ідеалізації детекторів.

Фізичний зміст цього результату полягає в тому, що гібридна схема виявляє саме неklasичні кореляції світла. Локальні редукції ДМСВС є термальними й допускають класичне фазово-просторове представлення, як було показано в (2.39). Водночас повна поведінка $P(x, n|\varphi, \gamma)$ порушує нерівність (2.69). Отже, вона не може бути відтворена класичною фазово-просторовою функцією для двох мод разом із локальними символами вибраних елементів ДОЗМ.

Цей висновок не суперечить результату попереднього підрозділу. Там було встановлено, що для цієї самої поведінки існує локально-реалістична модель. Тут же показано, що така локально-реалістична модель не може бути вибрана у спеціальній фазово-просторово класичній формі. У термінах (2.28) це означає,

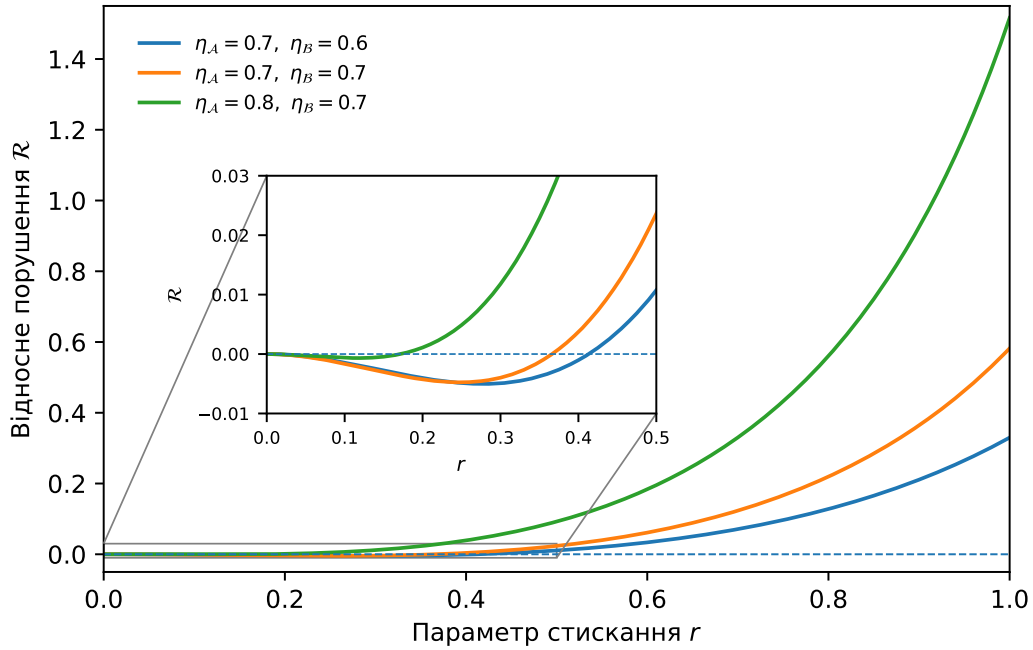


Рис. 2.5 — Відносне порушення $\mathcal{R}$ нерівності (2.69) для ДМСВС у гібридній схемі вимірювання. Вставка показує область малих r , де додатне порушення ще відсутнє. Додатне значення $\mathcal{R}$ відповідає неможливості класичної фазово-просторової симуляції. Параметри вимірювання: $\varphi_0 = 0$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$; x_0 та α_0 оптимізуються для кожного r .

що повний спільний розподіл $W = W_p + W_h$ можна зробити невід’ємним, але фазово-просторовий частинний опис, пов’язаний із класичною функцією стану та локальними символами елементів ДОЗМ, для цієї поведінки неможливий.

Варто також підкреслити, що нерівність (2.69) перевіряє саме поведінку для скінченного набору вимірювальних налаштувань, а не виконує повну томографічну реконструкцію стану [36, 38, 46]. Тому цей підхід природно узгоджується з логікою всього розділу: об’єктом аналізу є не лише двомодовий стан сам по собі, а пара “стан плюс вибрана гібридна схема вимірювання”.

Отже, для ДМСВС у гібридній схемі маємо ситуацію

$$\text{ДМСВС} + \text{гібридні вимірювання} \implies \begin{array}{l} \text{локально-реалістична,} \\ \text{але фазово-просторово} \\ \text{некласична поведінка.} \end{array}$$

Саме це є головним результатом цього розділу. Гібридна схема не виявляє нелокальності Белла для ДМСВС, але побудована тестова функція (2.61) виявляє некласичні кореляції світла в його гібридній поведінці [I]. Тому некласичні кореляції є ширшим поняттям, ніж нелокальність Белла: вони можуть проявлятися

у вимірювальній статистиці навіть тоді, коли ця статистика допускає локально-реалістичне пояснення.

2.7 Висновки до розділу

У цьому розділі було розглянуто гібридну схему вимірювання двомодового світла, у якій одна мода аналізується збалансованим гомодинним детектуванням, а друга — пороговим фотодетектуванням після когерентного зміщення [1]. Така схема поєднує неперервний результат $x \in \mathbb{R}$, що відповідає квадратурі поля, та дискретний результат $n \in \{0, 1\}$, який описує відсутність або наявність спрацювання фотодетектора. Було показано, що навіть для такої змішаної неперервно-дискретної статистики формалізм ДОЗМ дає природний і послідовний опис вимірювання.

Фазово-просторовий запис правила Борна, отриманий у (2.18), дозволив інтерпретувати гібридну статистику як задачу відтворення поведінки через фазово-просторові амплітуди та локальні символи елементів ДОЗМ. Якщо вся поведінка може бути подана через класичну фазово-просторову функцію стану та невід’ємні локальні символи вимірювань, то вона допускає фазово-просторово класичне моделювання. Такий опис автоматично задає локально-реалістичну модель, однак не вичерпує всіх можливих локально-реалістичних описів.

Як тестовий приклад було використано ДМСВС. Цей стан є зручним для аналізу некласичних кореляцій, оскільки його локальні редуковані стани мають тепловий вигляд і допускають невід’ємне представлення Глаубера–Сударшана, див. (2.39). Отже, кожна окрема мода локально не проявляє фазово-просторової некласичності, а некласичні властивості повного двомодового стану пов’язані саме з міжмодовими кореляціями.

Для ДМСВС було отримано явний вираз для поведінки в гібридній схемі вимірювання, див. (2.47). Ця поведінка містить кореляційний зсув, пропорційний $\tanh r$, який зникає за відсутності стиснення і стає ненульовим при $r > 0$. Тому параметр стиснення визначає не лише локальний тепловий шум, а й силу кореляцій між модами, доступних у вибраній схемі вимірювання.

Для коректної інтерпретації цієї поведінки було окремо проаналізовано питання локального реалізму. У гібридній схемі з неперервним результатом Аліси та дискретним результатом Боба використовується узагальнена умова типу

КХШХ, еквівалентна існуванню невід'ємного спільного розподілу всіх можливих результатів. Застосування цього критерію до поведінки ДМСВС показує, що порушення локального реалізму у сенсі Белла не виявляється; відповідне максимальне порушення дорівнює нулю, див. (2.56). Отже, у розглянутій гібридній схемі статистика ДМСВС допускає локально-реалістичний опис.

Цей результат не заперечує наявності неklasичних кореляцій, а лише показує, що вони не проявляються як нелокальність Белла. Ключовим кроком для їх виявлення стала побудова тестової функції λ для поведінки ДМСВС, див. (2.61). Ця функція задає лінійну комбінацію вимірюваних імовірностей, яка порушує нерівність для класичної фазово-просторової симуляції [I]. У результаті нерівність (2.69) можна використовувати як критерій фазово-просторової неklasичності саме для поведінки (2.47).

Додатне відносне порушення (2.70) означає, що отриману поведінку неможливо відтворити за допомогою класичної фазово-просторової функції стану та невід'ємних локальних символів ДОЗМ. Аналіз зі скінченними ефективностями детектування η_A і η_B показує, що для наведених прикладів це порушення зберігається [I]. Тому висновок про неklasичність не є наслідком лише ідеалізованого опису вимірювання.

Таким чином, у розділі одна й та сама мова поведінок, ДОЗМ і спільних розподілів була використана для двох різних рівнів аналізу. Перший рівень відповідає питанню про існування довільного локально-реалістичного опису спостережуваної статистики. Другий рівень стосується можливості відтворити цю саму статистику через класичні фазово-просторові амплітуди світла та невід'ємні локальні функції відгуку вимірювальних пристроїв. Для ДМСВС у розглянутій гібридній схемі відповідь на перше питання є додатною, а на друге — від'ємною.

Головний результат розділу можна сформулювати так: ДМСВС у вибраній гібридній схемі дає локально-реалістичну, але фазово-просторово неklasичну поведінку [I]. Це означає, що неklasичні кореляції світла не обов'язково потребують заперечення всіх можливих локально-реалістичних моделей. Достатньо показати, що поведінку неможливо подати у спеціальній фазово-просторово класичній формі, тобто через класичну фазово-просторову функцію стану та невід'ємні локальні символи елементів ДОЗМ.

Важливо, що отриманий критерій застосовується до вимірювальної пове-

дінки для скінченного набору локальних налаштувань, а не до повної томографічної реконструкції двомодового стану. Тому об'єктом аналізу є не лише стан сам по собі, а пара “стан плюс вибрана схема вимірювання”. Саме такий підхід дозволяє розділити властивості стану, локальних вимірювань і спостережуваної статистики.

Отже, розглянутий приклад демонструє відмінність між нелокальністю Белла та фазово-просторовою неklasичністю. Нелокальність Белла означає неможливість будь-якого локально-реалістичного опису поведінки, тоді як фазово-просторова неklasичність означає неможливість описати цю поведінку через класичні фазово-просторові функції стану та вимірювань. Тому неklasичні кореляції можуть проявлятися у статистиці конкретної вимірювальної схеми навіть тоді, коли ця статистика залишається локально-реалістичною.

Крім того, цей розділ показує роль фазово-просторового формалізму ДОЗМ як єдиної мови для різних типів оптичних вимірювань. У цьому формалізмі однаково природно описуються неперервні гомодинні результати, дискретні результати порогового фотодетектування та їхня спільна статистика. У наступному розділі той самий підхід буде використано для опису багатомодових фотолічильних статистик у гаусівській бозонній вибірці з реалістичним розрізненням чисел фотонів.

3 Гаусівська бозонна вибірка з реалістичним розрізненням чисел фотонів

У цьому розділі апарат, введений у першому розділі, застосовується до задачі гаусівської бозонної вибірки (ГБВ) з реалістичним фотодетектуванням. На відміну від другого розділу, де основну роль відігравала гібридна схема з неперервним і дискретним результатами вимірювання, тут розглядається багатомодова фотолічильна статистика на виході лінійного інтерферометра. Основним об'єктом аналізу є повна вимірювальна схема: вхідні гаусівські стани, інтерферометр, втрати та локальні фотодетектори.

Ключова особливість цієї задачі полягає в тому, що реалістичний фотодетектор не завжди повертає істинне число фотонів у моді. Зареєстрований результат може означати кількість спрацювань, кількість спрацьованих піддетекторів або кількість імпульсів фотоструму. Тому фотонний патерн перед вимірюванням і патерн, зареєстрований детекторами, у загальному випадку є різними об'єктами. Саме це робить необхідним опис фотодетектування через елементи ДОЗМ.

Розділ ґрунтується на результатах роботи [II]. Спочатку буде сформульовано фізичну модель ГБВ. Далі буде отримано загальний матрично-функціональний запис фотолічильних імовірностей для гаусівських вихідних станів. Після цього цей запис буде конкретизовано для ідеального детектора як граничного випадку та для основних моделей реалістичного фотодетектування: порогових фотодетекторів, масивів порогових фотодетекторів і схем підрахунку імпульсів фотоструму. У другій частині розділу отриманий формалізм буде використано для задачі валідації ГБВ.

3.1 Мотивація та межі розгляду

Бозонна вибірка була запропонована як спеціалізована модель квантової вибірки, яка у відповідному режимі параметрів вважається складною для ефективного класичного відтворення [47]. Важливо, що вона є неуніверсальною моделлю квантових обчислень, яка задає спеціалізовану задачу вибірки з багатомодового фотолічильного розподілу. ГБВ є близькою за ідеєю моделлю, але замість

однофотонних вхідних станів вона використовує неklasичні гаусівські стани, зокрема стиснені стани [48]. Ця заміна є суттєвою з експериментальної точки зору, оскільки підготовка багатомодових гаусівських станів у лінійно-оптичних схемах є природнішою для сучасних фотонних платформ, ніж масштабована підготовка великої кількості незалежних однофотонних станів. Саме тому ГБВ стала основою для низки великомасштабних фотонних експериментів, спрямованих на демонстрацію квантової переваги [49–52].

У стандартній постановці ГБВ гаусівські стани без когерентного зміщення подаються на входи лінійного інтерферометра. Після проходження через інтерферометр і канал втрат вихідний багатомодовий стан залишається гаусівським і може бути описаний відповідною коваріаційною матрицею. Дискретна статистика з'являється на етапі фотодетектування, коли в кожній вихідній моді реєструється певний результат. Для детекторів з ідеальним розрізненням чисел фотонів цей результат збігається з фактичним числом фотонів у відповідній моді. У реалістичному випадку таке ототожнення вже не є правильним: результат детектора є експериментальною величиною, яка лише статистично пов'язана з числом фотонів на його вході.

Загальний опис моделей фотодетектування через умовні ймовірності та Q -символи елементів ДОЗМ було введено в підрозділі 1.6. У цьому розділі ці моделі не виводяться повторно, а використовуються як вхідні дані для побудови фотолічильного розподілу ГБВ. Нижче розглядатимуться детектори з ідеальним розрізненням чисел фотонів як граничний випадок, порогові фотодетектори, масиви порогових фотодетекторів, а також моделі підрахунку імпульсів фотоструму з мертвим і релаксаційним часом. Нас цікавитиме не лише вигляд самих елементів ДОЗМ, а те, як вони породжують різні матричні функціонали для ймовірностей зареєстрованих патернів.

Історично в теоретичному описі ГБВ найчастіше використовувалися дві ідеалізовані межі детектування. Перша межа відповідає детекторам з ідеальним розрізненням чисел фотонів, для яких імовірності фотонних конфігурацій виражаються через хафніани [48]. Друга межа відповідає пороговим фотодетекторам, які розрізняють лише відсутність і наявність спрацювання; у цьому випадку відповідні ймовірності описуються через торонтоніани [53]. Реалістичні схеми з частковим розрізненням чисел фотонів займають проміжне положення між цими двома межами. Саме вони є важливими для експериментальних пла-

тформ, де детектор може зберігати частину інформації про кількість фотонів або спрацювань, але не реалізує ідеальне проєктивне вимірювання у фоківському базисі [51, 52, 54, 55].

Питання реалістичного фотодетектування пов'язане не лише з точністю обчислення окремих імовірностей. Воно безпосередньо впливає на валідацію ГБВ. У міру збільшення розміру експериментальних схем повна сертифікація стає практично недосяжною, оскільки повний розподіл за всіма можливими патернами має надто велику розмірність, а повний класичний еталонний розподіл для прямого порівняння з квантовим пристроєм у загальному випадку недоступний. Тому замість повної сертифікації розглядають валідацію, тобто перевірку узгодженості експериментальних даних із цільовою моделлю та відкидання певних класичних альтернатив. Для цього використовують різні підходи: наближені класичні симуляції [56–63], аналіз впливу розрізняюваності фотонів [52, 64–67], втрат [68–73], баєсівські тести [74–76], кореляційні критерії [74, 77–79], а також згруповані та маргінальні ймовірності [66, 80–85]. У цьому розділі особлива увага буде приділена згрупованим статистикам, які чутливі до обмеженого розрізнення чисел фотонів.

Особливу роль у цьому контексті відіграють події з кратною реєстрацією. У деяких асимптотичних постановках основну увагу приділяють подіям без кратної реєстрації. Однак для параметрів, релевантних до реалістичних схем ГБВ, події з кратною реєстрацією можуть давати помітний внесок або навіть ставати типовими. Кількісне пояснення цього факту на основі оцінки, аналогічної до задачі про дні народження, буде наведено нижче в підрозділі 3.5. З погляду валідації такі події важливі тому, що вони несуть додаткову інформацію про вихідну статистику і безпосередньо залежать від здатності детектора розрізняти кілька подій в одній вихідній моді.

Для детекторів з ідеальним розрізненням чисел фотонів було запропоновано використовувати компоненти векторів ознак графів, або орбіти патернів, як інструмент валідації [86–88]. У реалістичному випадку цей зв'язок із графовими характеристиками загалом не переноситься безпосередньо, оскільки зареєстрований патерн уже не тотожний істинному фотонному патерну. Тому орбітальні ймовірності та інші згруповані статистики мають обчислюватися з урахуванням конкретної моделі ДОЗМ фотодетектора.

Реалістичне розрізнення чисел фотонів важливе також для потенційних

застосувань ГБВ. Багато пропозицій застосування цієї моделі формуються в припущенні ідеального або майже ідеального фотодетектування з розрізненням чисел фотонів. Це стосується, зокрема, задач теорії графів [86, 87, 89–91], точкових процесів [92], квантової хімії [93] та молекулярного стикування для задач пошуку ліків [94]. Однак недосконале розрізнення чисел фотонів може змінювати вихідні статистики таких схем. Тому практичне використання ГБВ потребує моделі, у якій фотодетектування описується не ідеалізовано, а через реальний вимірювальний процес.

У межах цього розділу ГБВ розглядається як фізична вимірювальна схема з реалістичним фотодетектуванням, а не як самостійна задача доведення обчислювальної складності. Тому тут не доводиться класична складність задачі вибірки, не формулюється новий критерій квантової переваги і не аналізуються умови, за яких втрати, розрізнюваність фотонів або інші експериментальні недосконалості можуть змінювати складність класичної симуляції. Відповідні результати теорії складності та експериментальні демонстрації використовуються як мотиваційний контекст [47–52]. Основною задачею є інша: побудувати послідовний опис спостережуваної фотолічильної статистики тоді, коли детектори мають реалістичне, тобто недосконале, розрізнення чисел фотонів.

Також у цьому розділі не ставиться задача повної сертифікації великомасштабного пристрою ГБВ. Повна сертифікація вимагала б прямого порівняння експериментальної вибірки з повним цільовим розподілом за всіма патернами, що в масштабованому режимі є практично недоступним. Натомість розглядається задача валідації: перевірка узгодженості певних згрупованих статистик із цільовою моделлю та порівняння цих статистик з альтернативними класичними моделями. У цьому сенсі валідаційні протоколи, розглянуті далі, не є доведенням квантової переваги, а є практичним інструментом для перевірки того, чи відповідають отримані дані моделі ГБВ із заданими реалістичними детекторами.

Технічні межі розгляду також фіксуються наперед. Розглядаються багатомодові гаусівські стани без когерентного зміщення, які проходять через лінійний інтерферометр і канал втрат. Втрати в інтерферометрі та втрати детектування включаються в ефективну коваріаційну матрицю стану перед вимірюванням. Це відповідає конвенції, введеній у підрозділі 1.3, і дозволяє уникнути подвійного врахування втрат у стані та в елементах ДОЗМ. Якщо втрати явно

включаються в модель ДОЗМ детектора, це буде зазначено окремо.

Крім того, вважається, що фотодетектори діють локально на окремі вихідні моди, тому багатомодовий елемент ДОЗМ має добуткову структуру за модами. Темнові відліки, післяімпульси, нестабільність інтерферометра, спектральна або просторова розрізняюваність фотонів та інші додаткові експериментальні недосконалості не є основним предметом аналізу в цьому розділі. У термінах умовних імовірностей це відповідає припущенню, що без додаткових процесів, не пов'язаних із поглиненими фотонами, неможливо зареєструвати більше подій, ніж було фотонів на вході відповідного детектора, тобто $P_{n|m} = 0$ для $m < n$.

Таким чином, у цьому розділі ГБВ розглядається не як абстрактна вибірка з ідеального фотонного розподілу, а як реальна вимірювальна схема, у якій вихідна статистика визначається одночасно гаусівським станом, лінійним інтерферометром, втратами та елементами ДОЗМ фотодетекторів. Саме такий підхід дозволяє перейти від матричних формул для ймовірностей окремих подій до статистик, придатних для валідації експериментальних даних. У наступних підрозділах ця ідея буде реалізована через матрично-функціональний запис фотолічильних імовірностей та згруповані статистики зареєстрованих патернів.

3.2 Фізична модель гаусівської бозонної вибірки

У цьому підрозділі апарат, введений у першому розділі, спеціалізується до схеми ГБВ. Нижче використовуються позначення для лінійно-оптичних перетворень і втрат з підрозділу 1.1, опис гаусівських станів через коваріаційні матриці з підрозділу 1.3, а також фазово-просторові позначення, пов'язані з Q -представленням, з підрозділу 1.4. Конкретні моделі реалістичного фотодетектування використовуються в тому сенсі, у якому вони були введені в підрозділі 1.6. Метою цього підрозділу є не повторення загального формалізму, а фіксація фізичної схеми, позначень і конвенцій, які будуть використані при виведенні фотолічильних імовірностей.

3.2.1 Схема та позначення мод

Розглянемо лінійно-оптичну схему з M вхідними та M вихідними модами. Вхідні моди описуються вектором операторів знищення

$$\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_M)^T, \quad (3.1)$$

а вихідні моди після інтерферометра позначатимемо як

$$\hat{\mathbf{b}} = (\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_M)^T. \quad (3.2)$$

За відсутності втрат інтерферометр задається унітарною матрицею U ,

$$\hat{\mathbf{b}} = U\hat{\mathbf{a}}, \quad \hat{b}_i = \sum_{j=1}^M U_{ij}\hat{a}_j. \quad (3.3)$$

Цей запис фіксує домовленість щодо того, як матриця U пов'язує вхідні та вихідні оператори мод. Надалі втрати буде враховано окремо, тому унітарне перетворення (3.3) описує лише ідеальну лінійно-оптичну частину схеми.

У стандартній схемі ГБВ на входи інтерферометра подаються гаусівські стани без когерентного зміщення [48]. Частина вхідних мод може містити стиснені або термалізовані стиснені стани, тоді як решта мод можуть перебувати у вакуумному стані. Якщо кількість невакуумних вхідних мод дорівнює M' , то типову вхідну конфігурацію можна записати у вигляді

$$\hat{\rho}_{\text{in}} = \left(\bigotimes_{j=1}^{M'} \hat{\rho}_j^{(G)} \right) \otimes \left(\bigotimes_{j=M'+1}^M |0\rangle_j \langle 0| \right), \quad (3.4)$$

де $\hat{\rho}_j^{(G)}$ є одномодовим гаусівським станом без когерентного зміщення. Запис (3.4) не є найзагальнішою формою багатомодового гаусівського стану, але він відповідає звичайній фізичній постановці ГБВ. Схематично відповідну модель ГБВ з реалістичним фотодетектуванням показано на рис. 3.1. Після інтерферометра враховуються втрати, позначені блоком $\mathcal{L}$. У фотонному представленні перед вимірюванням можна розглядати фотонний патерн $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_M)$ на вході фотодетекторів, тоді як локальні фотодетектори формують зареєстрований патерн $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_M)$. У реалістичному випадку зареєстровані резуль-

тати n_i загалом не збігаються з істинними числами фотонів m_i , оскільки вони визначаються також моделлю фотодетектування.

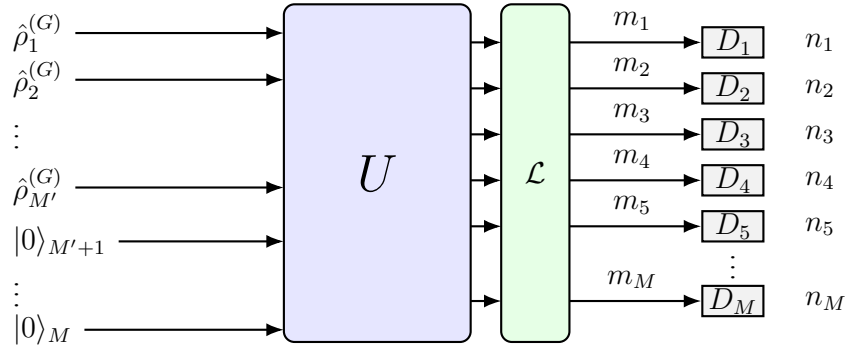


Рис. 3.1 — Схема ГБВ з реалістичним фотодетектуванням. Вхідні гаусівські та вакуумні стани проходять через інтерферометр U , канал втрат $\mathcal{L}$ і локальні фотодетектори D_i , які перетворюють фотонний патерн m на зареєстрований патерн n .

Після проходження через інтерферометр і канал втрат стан залишається гаусівським, а нетривіальна дискретна статистика з'являється саме на етапі фотолічильного вимірювання.

3.2.2 Вихідний гаусівський стан і втрати

Для подальшого запису використовуватимемо комплексне подвоєне представлення. Унітарному перетворенню U відповідає матриця

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U^* \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Ця матриця діє на подвоєний вектор комплексних амплітуд або операторів, у якому разом записуються змінні та їх комплексно-спряжені компоненти. Таке представлення є зручним для подальшого запису гаусівських коваріаційних матриць і матричних функціоналів.

Нехай $\sigma_{Q,\text{in}} \in Q$ -коваріаційною матрицею вхідного гаусівського стану. Втрати в інтерферометрі та втрати детектування включатимемо в ефективний гаусівський стан перед вимірюванням. Для модозалежних втрат введемо діагональну матрицю

$$\mathcal{L} = \text{diag}(\sqrt{\eta_1}, \dots, \sqrt{\eta_M}, \sqrt{\eta_1}, \dots, \sqrt{\eta_M}), \quad (3.6)$$

де η_i є ефективністю пропускання для i -ї вихідної моди. Тоді для вакуумних мод оточення Q -коваріаційна матриця стану на вході фотодетекторів має вигляд

$$\sigma_Q = \mathcal{L}\mathcal{U}\sigma_{Q,\text{in}}\mathcal{U}^\dagger\mathcal{L}^\dagger + (I - \mathcal{L}\mathcal{L}^\dagger). \quad (3.7)$$

У подальшому під σ_Q будемо розуміти саме коваріаційну матрицю вихідного стану на вході фотодетекторів. Відповідний стан позначатимемо як $\hat{\rho}_{\text{out}}$. Якщо всі вихідні канали мають однакову ефективність, то

$$\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_M = \eta. \quad (3.8)$$

Зручно також ввести матрицю

$$A = I - \sigma_Q^{-1}. \quad (3.9)$$

Вона буде основним матричним аргументом у наступному підрозділі, де ймовірності фотолічильних патернів буде записано у вигляді матричних функціоналів. На цьому етапі важливо лише зафіксувати, що інформація про вхідний гаусівський стан, інтерферометр і втрати входить у подальші формули через σ_Q , або еквівалентно через матрицю A . Натомість конкретна модель фотодетектора буде входити через елементи ДОЗМ і відповідні Q -символи.

3.2.3 Фотонні патерни, патерни детектування та кратна реєстрація

У подальшому розрізнятимемо два типи дискретних конфігурацій. Фотонний патерн

$$\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_M) \quad (3.10)$$

задає фактичне число фотонів у вихідних модах перед детектуванням. Патерн результатів детектування

$$\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_M) \quad (3.11)$$

задає експериментально зареєстрований результат. Для детекторів з ідеальним розрізненням чисел фотонів ці два патерни збігаються, тобто $\mathbf{n} = \mathbf{m}$. У реалістичному випадку це вже не так: n_i може означати кількість спрацювань,

кількість спрацьованих піддетекторів або кількість зареєстрованих імпульсів фотоструму.

Повну кількість зареєстрованих подій у патерні позначатимемо як

$$|\mathbf{n}| = \sum_{i=1}^M n_i, \quad (3.12)$$

а повне число фотонів у фотонному патерні — як

$$|\mathbf{m}| = \sum_{i=1}^M m_i. \quad (3.13)$$

Ці дві величини мають різний фізичний зміст, якщо фотодетектор має обмежене розрізнення чисел фотонів. Зокрема, зареєстрована кількість подій може бути меншою за істинне число фотонів через насичення, мертвий час, обмежену кількість піддетекторів або інші особливості вимірювальної моделі.

Для подальших формул корисно ввести множину вихідних мод з ненульовим результатом:

$$S(\mathbf{n}) = \{i \mid n_i \neq 0\}. \quad (3.14)$$

Якщо

$$S(\mathbf{n}) = \{l_1, \dots, l_N\}, \quad (3.15)$$

то $N = |S(\mathbf{n})|$ є кількістю вихідних мод, у яких було зареєстровано ненульовий результат. Для цих мод позначатимемо ненульові значення патерну як

$$c_j = n_{l_j}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.16)$$

Таке позначення дозволяє працювати лише з тими модами, які реально дають внесок у зареєстрований патерн. Це буде особливо зручно в матричних функціоналах, де використовуються підматриці, пов'язані з множиною $S(\mathbf{n})$.

Патерн називатимемо патерном без кратної реєстрації, якщо в кожній ви-

хідній моді зареєстровано не більше однієї події:

$$n_i \in \{0, 1\} \quad \text{для всіх } i = 1, \dots, M. \quad (3.17)$$

Подією з кратною реєстрацією називатимемо патерн, для якого існує хоча б одна мода з більш ніж одним зареєстрованим результатом:

$$\exists i : \quad n_i \geq 2. \quad (3.18)$$

Для детекторів з ідеальним розрізненням чисел фотонів це означення безпосередньо відповідає випадку, коли в одній вихідній моді міститься більше одного фотона. Для реалістичних детекторів воно стосується саме зареєстрованого патерну. Наприклад, у схемі з пороговими фотодетекторами зареєстровані події з кратною реєстрацією недоступні, навіть якщо у вихідному стані декілька фотонів потрапили в одну й ту саму моду.

3.2.4 Вихідне вимірювання та ймовірність патерну

Фотодетектування на виходах інтерферометра описуватимемо через локальні елементи ДОЗМ. Загальний формалізм таких вимірювань було введено в підрозділі 1.2, а конкретні моделі детекторів з реалістичним розрізненням чисел фотонів — у підрозділі 1.6. У цьому підрозділі вони використовуються як локальні вимірювання вихідних мод ГБВ. Тут і далі $\mathbf{n}$ позначає саме зареєстрований патерн результатів детектування.

Для патерну $\mathbf{n}$ багатомодовий елемент ДОЗМ має добуткову структуру

$$\hat{\Pi}(\mathbf{n}) = \bigotimes_{i=1}^M \hat{\Pi}_{n_i}^{(i)}, \quad (3.19)$$

де $\hat{\Pi}_{n_i}^{(i)}$ є елементом ДОЗМ для фотодетектування в i -й вихідній моді. Якщо всі вихідні детектори описуються однаковою моделлю, верхній індекс (i) можна опускати. Добуткова структура в (3.19) означає, що фотодетектори діють локально на окремі вихідні моди і не створюють додаткових міжмодових кореляцій на етапі вимірювання.

Імовірність зареєструвати патерн $\mathbf{n}$ задається правилом Борна,

$$P(\mathbf{n}) = \text{Tr} \left[\hat{\rho}_{\text{out}} \hat{\Pi}(\mathbf{n}) \right]. \quad (3.20)$$

У цій формулі $\hat{\rho}_{\text{out}}$ містить інформацію про вхідний гаусівський стан, інтерферометр і втрати, тоді як $\hat{\Pi}(\mathbf{n})$ містить інформацію про модель фотодетектування. Саме тому один і той самий вихідний гаусівський стан може давати різні спостережувані розподіли залежно від того, які елементи ДОЗМ описують детектори.

Втрати в інтерферометрі та втрати детектування вже включені в ефективний вихідний стан $\hat{\rho}_{\text{out}}$ через коваріаційну матрицю σ_Q . Тому в елементах ДОЗМ, які використовуються далі, ефективність детектування не записується повторно, якщо це не зазначено окремо.

Отже, фізична модель ГБВ, яка використовується далі, задається трьома основними складовими. Першою є вихідна Q -коваріаційна матриця σ_Q , яка містить інформацію про вхідний гаусівський стан, інтерферометр і втрати. Другою є добутковий елемент ДОЗМ $\hat{\Pi}(\mathbf{n})$, який описує локальне фотодетектування у вихідних модах. Третьою є зареєстрований патерн $\mathbf{n}$. У наступному підрозділі буде показано, як для такої моделі ймовірність $P(\mathbf{n})$ можна записати у вигляді матричного функціоналу від матриці $A = I - \sigma_Q^{-1}$.

3.3 Матрично-функціональний формалізм для гаусівської бозонної вибірки

Тепер перейдемо від операторного правила Борна до матрично-функціонального запису фотолічильних імовірностей. Основним матричним аргументом буде матриця

$$A = I - \sigma_Q^{-1}, \quad (3.21)$$

введена в (3.9). Стан, інтерферометр і втрати входять у подальші формули через Q -коваріаційну матрицю σ_Q , тоді як конкретна модель фотодетектування входить через Q -символи елементів ДОЗМ.

3.3.1 Ідеальне вимірювання числа фотонів як вихідний випадок

Почнемо з випадку, коли вихідні моди вимірюються детекторами з ідеальним розрізненням чисел фотонів. Тоді зареєстрований патерн збігається з фотонним патерном, і для гаусівського стану без когерентного зміщення ймовірність конфігурації $\mathbf{n}$ має вигляд [48]

$$P^{(\text{id})}(\mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{|\sigma_Q|}} \prod_{i=1}^M \frac{1}{n_i!} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_i^* \partial \alpha_i} \right)^{n_i} \exp \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^\dagger A \boldsymbol{\xi} \right) \Big|_{\boldsymbol{\xi}=0}, \quad (3.22)$$

де

$$\boldsymbol{\xi} = (\alpha_1, \dots, \alpha_M, \alpha_1^*, \dots, \alpha_M^*)^T \quad (3.23)$$

є подвоєним вектором комплексних амплітуд. У цьому розділі символ $|\cdot|$ для матриці позначає визначник. Формула (3.22) показує, що для гаусівського вихідного стану фотонна статистика може бути отримана диференціюванням однієї гаусівської експоненти. Уся залежність від вхідного стану, інтерферометра та втрат міститься в матриці A .

Нижче формула (3.22) буде використана як вихідний крок для побудови статистики реалістичного фотодетектування. У частинних випадках відповідні диференціальні вирази зводяться до спеціальних матричних функцій, зокрема хафніана, торонтоніана та їх узагальнень. Узагальнення подібної похідної формули на негаусівські стани розглянуто в [95]; у цьому розділі ми обмежуємося гаусівськими вихідними станами.

3.3.2 Відгук реалістичного фотодетектора

Загальний опис фотодетектування через елементи ДОЗМ було введено в підрозділі 1.6. Тут використаємо лише ті співвідношення, які потрібні для виведення матричного функціонала. Для моделей, що розглядаються в цьому розділі, елементи ДОЗМ комутують з оператором числа фотонів. Тому одномодовий елемент ДОЗМ $\hat{\Pi}_n$ можна характеризувати умовними ймовірностями

$$P_{n|m} = \langle m | \hat{\Pi}_n | m \rangle, \quad (3.24)$$

де $P_{n|m}$ задає ймовірність отримати результат n , якщо на вхід детектора потрапило m фотонів. Для детектора з ідеальним розрізненням чисел фотонів умовні ймовірності переходять у частинний випадок, наведений у (1.128). Еквівалентний опис через Q -символи елементів ДОЗМ було введено в (1.116), а їхній зв'язок з умовними ймовірностями $P_{n|m}$ наведено в (1.126). Саме цей зв'язок надалі використовується для переходу від матриці відгуку детектора до диференціального оператора, який діє на гаусівську експоненту.

Якщо модель не містить темнових відліків, післяімпульсів або інших подій, не пов'язаних безпосередньо з поглиненими фотонами, то

$$P_{n|m} = 0, \quad m < n. \quad (3.25)$$

Ця умова фіксує клас моделей, які розглядаються далі: детектор може втрачати інформацію про фотони або об'єднувати кілька фотонів в один зареєстрований результат, але не створює додаткових відліків без відповідних фотонних подій.

3.3.3 Згортка з фотонним розподілом

Нехай $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_M)$ є істинним фотонним патерном у вихідних модах перед детектуванням. Ідеальний фотонний розподіл для такого патерну задається формулою (3.22) із заміною $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{m}$. Реалістичний детектор перетворює фотонний патерн $\mathbf{m}$ у зареєстрований патерн $\mathbf{n}$ статистично. Оскільки вимірювання є локальним за вихідними модами, відповідна умовна ймовірність факторизується:

$$P(\mathbf{n}|\mathbf{m}) = \prod_{i=1}^M P_{n_i|m_i}. \quad (3.26)$$

Тому розподіл зареєстрованих результатів має вигляд згортки

$$P(\mathbf{n}) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_M=0}^{\infty} P_{n_1|m_1} \cdots P_{n_M|m_M} P^{(\text{id})}(\mathbf{m}). \quad (3.27)$$

Фізично формула (3.27) означає, що спочатку вихідний гаусівський стан задає розподіл істинних фотонних патернів, а потім кожний локальний детектор перетворює число фотонів у своїй моді на зареєстрований результат згідно зі своїм відгуком. Отже, у реалістичному випадку спостерігається не сам ідеаль-

ний фотонний розподіл, а його образ під дією фотодетекторів. Аналогічний підхід до врахування реалістичного розрізнення чисел фотонів використовується також для звичайної бозонної вибірки [96].

У граничному випадку детекторів з ідеальним розрізненням чисел фотонів умова (1.128) зводить (3.27) до стандартного розподілу

$$P(\mathbf{n}) = P^{(\text{id})}(\mathbf{n}). \quad (3.28)$$

Тому всі відмінності між ідеальним і реалістичним випадками в цій постановці зосереджені в умовних імовірностях $P_{n|m}$ або, еквівалентно, у Q -символах елементів ДОЗМ.

3.3.4 Загальний матричний функціонал

Підставимо похідну форму ідеального розподілу (3.22) у згортку (3.27). Для кожної моди виникає операторна сума

$$\sum_{m_i=0}^{\infty} \frac{P_{n_i|m_i}}{m_i!} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_i^* \partial \alpha_i} \right)^{m_i}. \quad (3.29)$$

Зі співвідношення (1.126) випливає, що цю суму можна записати через Q -символ елемента ДОЗМ:

$$\sum_{m_i=0}^{\infty} \frac{P_{n_i|m_i}}{m_i!} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_i^* \partial \alpha_i} \right)^{m_i} = \Pi_{n_i} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_i^*}, \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \right) \exp \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_i^* \partial \alpha_i} \right). \quad (3.30)$$

Ця заміна переводить інформацію про фотодетектор у диференціальний оператор. Після цього різні моделі детектування можуть бути враховані в одному матрично-функціональному записі.

Після виконання цієї заміни для всіх мод отримуємо загальний вираз для ймовірності зареєстрованого патерну:

$$P(\mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{|\sigma_Q|}} \mathcal{F}_n^{\Pi}[A]. \quad (3.31)$$

Тут

$$\mathcal{F}_n^\Pi[A] = \left[\prod_{i=1}^M \Pi_{n_i} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_i^*}, \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \right) \exp \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_i^* \partial \alpha_i} \right) \right] \exp \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^\dagger A \boldsymbol{\xi} \right) \Big|_{\boldsymbol{\xi}=0}. \quad (3.32)$$

Такий матрично-функціональний запис для ГБВ з реалістичним розрізненням чисел фотонів було отримано в роботі [II]. Він відокремлює внесок гаусівського стану від внеску фотодетектора: стан, інтерферометр і втрати задають матрицю A , а модель детектування задає функціонал $\mathcal{F}_n^\Pi[A]$.

У формулі (3.32) запис

$$\Pi_{n_i} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_i^*}, \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \right) \quad (3.33)$$

означає, що у Q -символі $\Pi_{n_i}(\alpha_i^*, \alpha_i)$ змінні α_i^* та α_i замінюються відповідними похідними. Усі диференціальні оператори діють на одну спільну гаусівську експоненту

$$\exp \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^\dagger A \boldsymbol{\xi} \right), \quad (3.34)$$

після чого всі змінні α_i та α_i^* покладаються рівними нулю. Тому функціонал $\mathcal{F}_n^\Pi[A]$ є компактним способом обчислення фотолічильної статистики для заданої моделі ДОЗМ.

Отже, обчислення ймовірності патерну можна подати як послідовність

$$\sigma_Q \longrightarrow A = I - \sigma_Q^{-1} \longrightarrow \Pi_n(\alpha^*, \alpha) \longrightarrow \mathcal{F}_n^\Pi[A] \longrightarrow P(\mathbf{n}). \quad (3.35)$$

Цей запис підкреслює основну перевагу формалізму. Після побудови вихідної Q -коваріаційної матриці різні фізичні моделі детекторів враховуються через заміну функціонала $\mathcal{F}_n^\Pi[A]$. Тому одна й та сама схема ГБВ може бути проаналізована для різних фотодетекторів без повторного виведення всього розподілу з нуля.

У частинних випадках функціонал (3.32) переходить у відомі або спеціально побудовані матричні функції. Для детекторів з ідеальним розрізненням чисел фотонів він пов'язаний із хафніаном. Для порогових фотодетекторів він переходить до функціонала, пов'язаного з торонтоніаном. Для масивів порого-

вих фотодетекторів та для моделей підрахунку імпульсів фотоструму виникають інші функціонали, що враховують обмежене розрізнення чисел фотонів, мертвий час і релаксацію детектора. Ці конкретні випадки буде розглянуто в наступному підрозділі.

3.4 Матричні функціонали для реалістичних моделей детектування

Згідно з формулою (3.31), ймовірність зареєстрованого патерну в ГБВ має вигляд

$$P(\mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{|\sigma_Q|}} \mathcal{F}_n^{\Pi}[A], \quad A = I - \sigma_Q^{-1}.$$

У цьому підрозділі цей запис конкретизується для основних моделей фотодетектування. Елементи ДОЗМ цих моделей уже були введені в підрозділі 1.6; тут нас цікавить те, як їхні Q -символи породжують відповідні матричні функціонали від матриці A . Отже, стан, інтерферометр і втрати визначають матрицю σ_Q , а модель фотодетектора визначає функціонал $\mathcal{F}_n^{\Pi}[A]$. Нижче буде розглянуто детектори з ідеальним розрізненням чисел фотонів, порогові фотодетектори, масиви порогових фотодетекторів і моделі підрахунку імпульсів фотоструму.

3.4.1 Допоміжні матриці та позначення

Нехай

$$S(\mathbf{n}) = \{l_1, \dots, l_N\} \quad (3.36)$$

є множиною вихідних мод, у яких зареєстровано ненульовий результат. Як і раніше, через

$$c_j = n_{l_j}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.37)$$

позначатимемо ненульові значення патерну. Матрицю, отриману з A залишенням рядків і стовпців, що відповідають модам із множини $S(\mathbf{n})$, позначатимемо як

$$A_{S(\mathbf{n})}. \quad (3.38)$$

У подвоєному комплексному представленні це означає, що залишаються рядки і стовпці з індексами

$$l_1, \dots, l_N, \quad l_1 + M, \dots, l_N + M. \quad (3.39)$$

Ці позначення дозволяють записувати функціонали лише через ті моди, у яких зареєстровано ненульові результати.

Для детекторів з ідеальним розрізненням чисел фотонів потрібна також матриця A_n . Вона утворюється з матриці A так само, але кожна пара рядків і стовпців, пов'язана з i -ю модою, повторюється n_i разів. Якщо повна кількість зареєстрованих фотонів дорівнює

$$n = |\mathbf{n}| = \sum_{i=1}^M n_i, \quad (3.40)$$

то A_n має розмір $2n \times 2n$. Таке повторення рядків і стовпців є матричним способом врахування кратного фотонного заповнення, тобто випадків, коли в одній вихідній моді міститься більше одного фотона.

Також використовуватимемо матрицю обміну блоків

$$X_N = \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ I_N & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

де I_N є одиничною матрицею розміру $N \times N$. Якщо розмір зрозумілий із контексту, індекс біля X_N опускаємо. Для діагональних матриць у подвоєному просторі використовуватимемо домовленість

$$\text{diag}(b_i) = \begin{pmatrix} \text{diag}(b_1, \dots, b_N) & 0 \\ 0 & \text{diag}(b_1, \dots, b_N) \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Це позначення буде використовуватися для скороченого запису функціоналів масивів порогових фотодетекторів, лавинних фотодіодів (ЛФД) та надпровідникових нанодротових однофотонних фотодетекторів (ННОФД).

3.4.2 Спільна допоміжна формула

Виведення функціоналів для різних моделей детектування зручно виконувати через одну допоміжну формулу. Вона виникає тоді, коли після підстановки Q -символу елемента ДОЗМ у загальний функціонал з'являються оператори вигляду

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_i^*} \right)^{m_i} \exp \left(a_i \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_i^*} \right), \quad (3.43)$$

які діють на спільну гаусівську експоненту. Розглянемо допоміжний функціонал

$$\mathcal{G}(W, \mathbf{m}, \mathbf{a}) = \prod_{i=1}^L \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_i^*} \right)^{m_i} \exp \left(a_i \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_i^*} \right) \right] \exp \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^\dagger (I - W) \boldsymbol{\xi} \right] \Big|_{\boldsymbol{\xi}=0}. \quad (3.44)$$

Тут

$$\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_L), \quad \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_L), \quad 0 \leq a_i \leq 1, \quad (3.45)$$

а W є матрицею розміру $2L \times 2L$. У подальших застосуваннях m_i визначатиме кількість степеневих похідних, а a_i відповідатиме параметрам, що виникають із Q -символів елементів ДОЗМ.

Для дії експоненти від диференціального оператора можна використати перетворення Вейерштраса. Для $0 \leq a_i < 1$ у потрібній нам формі воно дає

$$\begin{aligned} & \exp \left(a_i \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_i^*} \right) \exp (\alpha_i^* \beta_i - \beta_i^* \alpha_i + |\alpha_i|^2) \\ &= \frac{1}{1 - a_i} \exp \left[\frac{\alpha_i^* \beta_i - \beta_i^* \alpha_i + |\alpha_i|^2}{1 - a_i} \right]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Випадок $a_i = 1$ у формулах нижче слід розуміти як границю $a_i \rightarrow 1^-$. У подальших застосуваннях така границя виникає лише в окремих крайових випадках і не змінює кінцевих функціоналів. Після застосування співвідношення (3.46) для всіх мод допоміжний функціонал можна подати через гаусівський інтеграл,

а подальша зміна змінних приводить до виразу

$$\mathcal{G}(W, \mathbf{m}, \mathbf{a}) = \prod_{i=1}^L (1 - a_i)^{m_i} \left(\frac{\partial^2}{\partial \mu_i \partial \mu_i^*} \right)^{m_i} \exp [\boldsymbol{\mu}^\dagger \Omega(W, \mathbf{a}) \boldsymbol{\mu}] \Big|_{\boldsymbol{\mu}=0}, \quad (3.47)$$

де

$$\Omega(W, \mathbf{a}) = I - \left[D_{\mathbf{a}}^{(-)} W^{-1} D_{\mathbf{a}}^{(-)} + D_{\mathbf{a}} \right]^{-1}, \quad (3.48)$$

а для компактності введено позначення

$$D_{\mathbf{a}} = \text{diag}(a_i), \quad D_{\mathbf{a}}^{(-)} = \text{diag}(\sqrt{1 - a_i}). \quad (3.49)$$

Ця форма є зручною для переходу від диференціального запису до матричних функцій.

Оскільки похідні від гаусівської експоненти породжують суму за всіма попарними скороченнями, функціонал (3.44) можна також записати через хафніан:

$$\mathcal{G}(W, \mathbf{m}, \mathbf{a}) = \frac{\text{Haf}[X \Omega_{\mathbf{m}}(W, \mathbf{a})]}{\sqrt{|I - D_{\sqrt{\mathbf{a}}}(I - W) D_{\sqrt{\mathbf{a}}}|}}. \quad (3.50)$$

Тут Haf позначає хафніан, тобто суму за всіма попарними розбиттями індексів симетричної матриці. Для симетричної матриці B парного розміру це можна коротко записати як

$$\text{Haf}(B) = \sum_{\mathcal{M}} \prod_{(p,q) \in \mathcal{M}} B_{pq}, \quad (3.51)$$

де сума береться за всіма повними попарними розбиттями $\mathcal{M}$ множини індексів. Якщо розмір матриці є непарним, хафніан вважається рівним нулю. У формулі (3.50)

$$D_{\sqrt{\mathbf{a}}} = \text{diag}(\sqrt{a_i}), \quad (3.52)$$

а матриця

$$\Omega(W, \mathbf{a}) = D_{1-\mathbf{a}} - \left[W^{-1} + \text{diag} \left(\frac{a_i}{1 - a_i} \right) \right]^{-1} \quad (3.53)$$

після цього зводиться до матриці $\Omega_m(W, \mathbf{a})$ повторенням рядків і стовпців відповідно до чисел m_i . Формула (3.50) є технічним ядром подальших виведень: у кожній конкретній моделі потрібно лише визначити параметри m_i , a_i та матрицю W , що виникають після підстановки Q -символу відповідного елемента ДОЗМ.

3.4.3 Детектори з ідеальним розрізненням чисел фотонів

Для детекторів з ідеальним розрізненням чисел фотонів елемент ДОЗМ є проєктором на фоківський стан. Тому загальний функціонал переходить до стандартної хафніанової форми [48]:

$$\mathcal{F}_n^{(\text{id})}[A] = \frac{1}{n!} \text{Haf}[X A_n], \quad (3.54)$$

де

$$n! = \prod_{i=1}^M n_i!. \quad (3.55)$$

Матриця A_n враховує кратне фотонне заповнення вихідних мод шляхом повторення рядків і стовпців. Якщо в i -й вихідній моді зареєстровано n_i фотонів, то відповідні рядки і стовпці матриці A входять у A_n рівно n_i разів. Саме це повторення дозволяє однією формулою описувати як патерни без кратного фотонного заповнення, так і патерни з декількома фотонами в одній моді.

Формула (3.54) є ідеалізованою межею, яка буде використовуватися як еталон для порівняння з реалістичними моделями. У цих моделях зареєстрований результат не обов'язково збігається з істинним числом фотонів, тому змінюється не лише числове значення ймовірності, а й сам матричний функціонал.

3.4.4 Порогові фотодетектори

Пороговий фотодетектор розрізняє лише два результати: відсутність спрацювання і наявність спрацювання. Тому для такого детектора зареєстрований патерн має компоненти

$$n_i \in \{0, 1\}. \quad (3.56)$$

Він зберігає лише множину спрацьованих мод, але не зберігає інформацію про кратність фотонів у цих модах.

Функціонал для порогових фотодетекторів залежить тільки від множини спрацьованих мод $S(n)$. Підстановка відповідного Q -символу елемента ДОЗМ у загальну формулу приводить до функціонала порогової моделі, який позначатимемо індексом "пор":

$$\mathcal{F}_n^{(\text{пор})}[A] = \text{Tor} [A_{S(n)}]. \quad (3.57)$$

Торнтоніан можна розглядати як матричну функцію, що виникає при сумуванні гаусівських імовірностей за всіма ненульовими фотонними заповненнями у вибраній множині мод. Для матриці B розміру $2N \times 2N$ його зручно записати як

$$\text{Tor}(B) = \sum_{Z \subseteq [N]} \frac{(-1)^{|Z|}}{\sqrt{|I - B_Z|}}, \quad (3.58)$$

де $[N] = \{1, \dots, N\}$, а B_Z є підматрицею, що відповідає підмножині Z . Внесок порожньої підмножини відповідає одиниці. На відміну від формули (3.54), тут рядки і стовпці не повторюються, оскільки пороговий фотодетектор не розрізняє кількості фотонів у спрацьованій моді.

Пороговий фотодетектор можна розглядати як окремий випадок масиву порогових фотодетекторів із кількістю піддетекторів $K = 1$. Тому формула (3.57) буде отримана як граничний випадок загальнішого функціонала в наступному підрозділі.

3.4.5 Масиви порогових фотодетекторів

Масив порогових фотодетекторів реалізує недосконале розрізнення чисел фотонів шляхом розщеплення однієї оптичної моди на K підмод, кожна з яких аналізується пороговим фотодетектором. Результатом вимірювання є не істинне число фотонів, а кількість спрацьованих піддетекторів. Тому для однієї вихідної моди можливі результати

$$n_i = 0, 1, \dots, K. \quad (3.59)$$

Така модель займає проміжне положення між пороговим фотодетектором і детектором з ідеальним розрізненням чисел фотонів: вона зберігає частину інформації про кратні події, але не дозволяє однозначно відновити істинне число фотонів у моді.

Елемент ДОЗМ для реєстрації c спрацювань у масиві з K порогових фотодетекторів має нормально впорядкований вигляд [24]

$$\hat{\Pi}_c^{(K)} = \binom{K}{c} : \left(1 - e^{-\hat{n}/K}\right)^c e^{-\hat{n}(K-c)/K} : . \quad (3.60)$$

Оскільки вираз нормально впорядкований, його Q -символ отримується заміною $\hat{n} \rightarrow |\alpha|^2$:

$$\Pi_c^{(K)}(\alpha^*, \alpha) = \binom{K}{c} \left(1 - e^{-|\alpha|^2/K}\right)^c e^{-|\alpha|^2(K-c)/K}. \quad (3.61)$$

Розкриваючи степінь за біномом, маємо

$$\Pi_c^{(K)}(\alpha^*, \alpha) = \binom{K}{c} \sum_{k=0}^c \binom{c}{k} (-1)^k \exp \left[-\frac{K-c+k}{K} |\alpha|^2 \right]. \quad (3.62)$$

Після підстановки в загальний функціонал (3.32) множник

$$\exp \left[-\frac{K-c+k}{K} |\alpha|^2 \right] \quad (3.63)$$

перетворюється на диференціальний оператор

$$\exp \left[-\frac{K - c + k}{K} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right]. \quad (3.64)$$

Разом із додатковим множником

$$\exp \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right) \quad (3.65)$$

із загального функціонала це дає

$$\exp \left[\frac{c - k}{K} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right]. \quad (3.66)$$

Для всіх ненульових мод отримуємо проміжний вираз

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n^{(K)}[A] &= \prod_{i=1}^N \binom{K}{c_i} \sum_{k_1=0}^{c_1} \cdots \sum_{k_N=0}^{c_N} \prod_{i=1}^N \binom{c_i}{k_i} (-1)^{k_i} \\ &\times \prod_{i=1}^N \exp \left[\frac{c_i - k_i}{K} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_i^*} \right] \exp \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^\dagger A_{S(n)} \boldsymbol{\xi} \right] \Big|_{\boldsymbol{\xi}=0}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Тепер використаємо допоміжну формулу (3.50) у випадку без додаткових степених похідних, тобто з $m_i = 0$. Для цього потрібно покласти

$$W = I - A_{S(n)}, \quad a_i = \frac{c_i - k_i}{K}. \quad (3.68)$$

У результаті кожен доданок у (3.67) набуває вигляду

$$\frac{1}{\sqrt{\left| I - B_{S(n)}^{(k)} \right|}}, \quad (3.69)$$

де

$$B_{S(n)}^{(k)} = D_{\mathbf{k}} A_{S(n)} D_{\mathbf{k}}, \quad (3.70)$$

а

$$D_{\mathbf{k}} = \text{diag} \left(\sqrt{\frac{c_i - k_i}{K}} \right). \quad (3.71)$$

Отже, функціонал масиву порогових фотодетекторів можна записати як

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n^{(K)}[A] &= \prod_{i=1}^N \binom{K}{c_i} \sum_{k_1=0}^{c_1} \cdots \sum_{k_N=0}^{c_N} \prod_{i=1}^N \binom{c_i}{k_i} (-1)^{k_i} \\ &\times \frac{1}{\sqrt{|I - B_{S(n)}^{(\mathbf{k})}|}}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Цей вираз можна переписати через торонтоніан. Групуючи доданки за підмножинами ненульових мод, отримуємо функціонал, який у цьому розділі позначатимемо як кенсингтоніан:

$$\mathcal{F}_n^{(K)}[A] = \text{Ken}_{\mathbf{c}}^{(K)} [A_{S(n)}]. \quad (3.73)$$

Тут верхній індекс K підкреслює залежність від кількості порогових піддетекторів у масиві, а нижній індекс $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N)$ — залежність від ненульових значень зареєстрованого патерну. У цьому розділі кенсингтоніан визначається формулою

$$\begin{aligned} \text{Ken}_{\mathbf{c}}^{(K)} [A_{S(n)}] &= \prod_{i=1}^N \binom{K}{c_i} \sum_{k_1=0}^{c_1-1} \cdots \sum_{k_N=0}^{c_N-1} \prod_{i=1}^N \binom{c_i}{k_i} (-1)^{k_i} \\ &\times \text{Tor} [B_{S(n)}^{(\mathbf{k})}]. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Тут матриця $B_{S(n)}^{(\mathbf{k})}$ задається формулами (3.70)–(3.71). У такій формі функціонал для масивів порогових фотодетекторів було використано для опису ГБВ з реалістичним розрізненням чисел фотонів у роботі [II]. Близькі узагальнення торонтоніана для задач із бінованим фотодетектуванням також обговорювалися в [97].

При $K = 1$ кожна ненульова компонента патерну дорівнює одиниці, і формула (3.74) переходить у торонтоніан (3.57). Таким чином, порогові фотодетектори є частинним випадком масивів порогових фотодетекторів. Фізично

формула (3.73) показує, що масив порогових фотодетекторів зберігає частину інформації про числа фотонів у вихідних модах. Однак ця інформація не є точною істинному числу фотонів, оскільки декілька фотонів можуть потрапити в один і той самий піддетектор і дати лише одне спрацювання.

3.4.6 Підрахунок імпульсів фотоструму з мертвим і релаксаційним часом

Розглянемо тепер схему, у якій результатом вимірювання є кількість імпульсів фотоструму, зареєстрованих у ЧВВ тривалості τ_m . Кожен імпульс відповідає поглинанню фотона. Після реєстрації імпульсу детектор протягом певного часу може бути нечутливим до наступних фотонів. Для ННОФД, крім мертвого часу, потрібно враховувати також поступове відновлення чутливості, тобто релаксаційний час [28]. Отже, на відміну від простих порогових моделей, тут результат залежить не лише від кількості фотонів, а й від часової структури процесу реєстрації.

Елемент ДОЗМ для реєстрації c імпульсів можна записати у нормально впорядкованому вигляді

$$\hat{\Pi}_c =: \hat{n}^c \int_{T_c} d^c t \mathcal{I}_c(t) \exp[-\hat{n} \Xi_c(t)] : . \quad (3.75)$$

Область T_c задає впорядковані моменти часу,

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_c \leq \tau_m. \quad (3.76)$$

Функція $\mathcal{I}_c(t)$ описує густину появи послідовності імпульсів, а $\Xi_c(t)$ враховує часову залежність чутливості детектора після попередніх реєстрацій. Ці функції мають той самий зміст, що й у підрозділі 1.6, де було введено модель підрахунку імпульсів фотоструму з мертвим і релаксаційним часом.

Оскільки (3.75) є нормально впорядкованим виразом, його Q -символ отримується заміною $\hat{n} \rightarrow |\alpha|^2$:

$$\Pi_c(\alpha^*, \alpha) = |\alpha|^{2c} \int_{T_c} d^c t \mathcal{I}_c(t) \exp[-|\alpha|^2 \Xi_c(t)] . \quad (3.77)$$

Підстановка (3.77) у загальний функціонал дає для кожної ненульової моди опе-

ратор

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_i^*} \right)^{c_i} \exp \left[(1 - \Xi_{c_i}(\mathbf{t}_i)) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_i^*} \right]. \quad (3.78)$$

Тому для всього патерну маємо проміжний вираз

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n^{(\text{pulse})}[A] &= \int_{T_{c_1}} d^{c_1} \mathbf{t}_1 \cdots \int_{T_{c_N}} d^{c_N} \mathbf{t}_N \prod_{j=1}^N \mathcal{I}_{c_j}(\mathbf{t}_j) \\ &\times \prod_{j=1}^N \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_j \partial \alpha_j^*} \right)^{c_j} \exp \left([1 - \Xi_{c_j}(\mathbf{t}_j)] \frac{\partial^2}{\partial \alpha_j \partial \alpha_j^*} \right) \right] \\ &\times \exp \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^\dagger A_{S(n)} \boldsymbol{\xi} \right] \Big|_{\boldsymbol{\xi}=0}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Цей вираз має форму допоміжного функціонала (3.44). Для застосування допоміжної формули потрібно покласти

$$W = I - A_{S(n)}, \quad m_i = c_i, \quad a_i = 1 - \Xi_{c_i}(\mathbf{t}_i). \quad (3.80)$$

Тоді з (3.50) отримуємо

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n^{(\text{pulse})}[A] &= \int_{T_{c_1}} d^{c_1} \mathbf{t}_1 \cdots \int_{T_{c_N}} d^{c_N} \mathbf{t}_N \prod_{j=1}^N \mathcal{I}_{c_j}(\mathbf{t}_j) \\ &\times \frac{\text{Haf}[X \Omega_{S(n),n}]}{\sqrt{|I - D_{1-\Xi} A_{S(n)} D_{1-\Xi}|}}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Тут введено позначення

$$D_{1-\Xi} = \text{diag} \left(\sqrt{1 - \Xi_{c_i}(\mathbf{t}_i)} \right), \quad (3.82)$$

а матриця $\Omega_{S(n),n}$ отримується з матриці

$$\begin{aligned} \Omega_{S(n)} &= \text{diag} (\Xi_{c_i}(\mathbf{t}_i)) \\ &- \left[(I - A_{S(n)})^{-1} + \text{diag} \left(\frac{1}{\Xi_{c_i}(\mathbf{t}_i)} - 1 \right) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (3.83)$$

повторенням рядків і стовпців відповідно до чисел c_i . Функціонал (3.81) містить

інформацію не лише про кількість зареєстрованих імпульсів, але й про часову форму моди та часову залежність відновлення чутливості детектора.

У випадку ННОФД часову залежність чутливості можна моделювати через функцію

$$\xi(t) = \theta(t - \tau_d)\eta_r(t - \tau_d), \quad \eta_r(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right), \quad (3.84)$$

де τ_d є мертвим часом, а τ_r — релаксаційним часом. Така модель описує ситуацію, у якій після реєстрації імпульсу детектор спочатку є нечутливим, а потім поступово відновлює ефективність. Саме ця часова пам'ять робить функціонал (3.81) складнішим за функціонали порогових фотодетекторів і масивів порогових фотодетекторів.

3.4.7 ЛФД у підпросторі подій без кратної реєстрації

ЛФД можна розглядати як частинний випадок попередньої моделі. Для нього релаксаційний час є нехтовно малим, а часова форма моди часто наближається прямокутним профілем. Така модель підрахунку імпульсів фотоструму для ЛФД використовувалася, зокрема, в роботах [25–27, 29, 98–101]. У цьому випадку

$$I(t) = \frac{1}{\tau_m}. \quad (3.85)$$

Часові інтеграли у (3.81) можна виконати аналітично для підпростору подій без кратної реєстрації,

$$n_i \in \{0, 1\}. \quad (3.86)$$

Тобто наведена нижче формула не є загальною формулою для довільного патерну ЛФД, а застосовується саме тоді, коли в кожній моді зареєстровано не більше одного імпульсу.

Для однієї спрацьованої моди в цьому підпросторі відповідний операторний множник у функціоналі має вигляд

$$\left[\left(1 + \eta_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_i^*} \right) \exp \left([1 - \eta_1] \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_i^*} \right) - 1 \right]. \quad (3.87)$$

Тут

$$\eta_1 = \frac{\tau_m - \tau_d}{\tau_m} \quad (3.88)$$

є часовою ефективністю, пов'язаною з мертвим часом після першої реєстрації. Цю величину не слід змішувати з оптичними втратами, які в нашій конвенції вже включені в σ_Q . Вона описує саме втрату чутливості в межах одного ЧВВ.

Для всього патерну без кратної реєстрації отримуємо

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n^{(\text{APD})}[A] &= \prod_{i=1}^N \left[\left(1 + \eta_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_i^*} \right) \exp \left([1 - \eta_1] \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_i^*} \right) - 1 \right] \\ &\times \exp \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^\dagger A_{S(n)} \boldsymbol{\xi} \right] \Big|_{\boldsymbol{\xi}=0}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Розкриття добутку у (3.89) приводить до суми за підмножинами множини

$$[N] = \{1, \dots, N\}. \quad (3.90)$$

Позначимо множину всіх підмножин $[N]$ через $\mathcal{P}([N])$. Після застосування допоміжної формули до кожного доданка отримуємо

$$\mathcal{F}_n^{(\text{APD})}[A] = \sum_{Z \in \mathcal{P}([N])} \frac{(-1)^{|Z|} \text{Haf}[D_{S(n),Z}]}{\sqrt{|I - (1 - \eta_1)A_{S(n),Z}|}}. \quad (3.91)$$

Тут $|Z|$ є кількістю елементів підмножини Z , а матриця $A_{S(n),Z}$ отримується з $A_{S(n)}$ залишенням лише тих рядків і стовпців, які відповідають елементам Z . Матриця в чисельнику задається як

$$D_{S(n),Z} = X_{|Z|} \left\{ 2I - \left[\eta_1 (I - A_{S(n),Z})^{-1} + (1 - \eta_1)I \right]^{-1} \right\}. \quad (3.92)$$

Формула (3.91) є аналітичним спрощенням загального інтегрального функціонала (3.81). Вона показує, що навіть у підпросторі подій без кратної реєстрації мертвий час змінює матричний функціонал і, відповідно, вихідні ймовірності. Тому ЛФД не можна ототожнювати з ідеальним пороговим фотодетектором, якщо часові ефекти в межах ЧВВ є суттєвими.

3.4.8 Порівняння отриманих функціоналів

Отримані вирази мають спільну структуру

$$P(\mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{|\sigma_Q|}} \mathcal{F}_n[A].$$

Відмінність між моделями полягає у виборі функціонала, який діє на матрицю A . Це дозволяє порівнювати ідеалізовані та реалістичні моделі фотодетектування в межах однієї фізичної схеми ГБВ.

Табл. 3.1 — Матричні функціонали для основних моделей фотодетектування в ГБВ

Модель детектування	Зареєстрований результат	Функціонал
Ідеальне розрізнення чисел фотонів	число фотонів у моді	хафніан
Пороговий фотодетектор	наявність або відсутність спрацювання	торонтоніан
Масив порогових фотодетекторів	кількість спрацьованих піддетекторів	кенсингтоніан
Підрахунок імпульсів фотоструму з мертвим і релаксаційним часом	кількість імпульсів у ЧВВ	інтегральний функціонал
ЛФД у підпросторі подій без кратної реєстрації	нуль або один імпульс у моді	сума за підмножинами

Для детекторів з ідеальним розрізненням чисел фотонів функціонал зберігає повну інформацію про фотонну конфігурацію, а кратне фотонне заповнення вихідних мод враховується повторенням рядків і стовпців у матриці A_n . Для порогових фотодетекторів така інформація втрачається: функціонал залежить лише від множини спрацьованих мод. Масиви порогових фотодетекторів займають проміжне положення, оскільки вони дають часткову інформацію про кількість спрацювань. Моделі підрахунку імпульсів фотоструму додатково враховують часову структуру вимірювання, зокрема мертвий і релаксаційний час. У випадку ЛФД навіть обмеження до підпростору подій без кратної реєстрації не повертає ідеальну порогову модель, якщо мертвий час у межах ЧВВ суттєво впливає на реєстрацію імпульсів.

Таким чином, реалістичне фотодетектування змінює не лише числові значення ймовірностей окремих патернів, а й саму форму матричного функціонала. Це буде важливо в подальшій валідаційній частині: теоретичні значення згрупо-

ваних статистик мають обчислюватися з функціоналом, що відповідає реальній моделі фотодетектора.

3.5 Задача валідації в гаусівській бозонній вибірці

У попередніх підрозділах було отримано фотолічильний розподіл зареєстрованих патернів для ГБВ з реалістичними фотодетекторами. Далі використовуватимемо загальний результат (3.31) як модельний розподіл

$$P^{(\Pi)}(\mathbf{n}), \quad (3.93)$$

де верхній індекс Π підкреслює залежність статистики від моделі фотодетектування. У цьому позначенні $\mathbf{n}$ є саме патерном зареєстрованих результатів, а не обов'язково істинним фотонним патерном. Тому в реалістичному випадку об'єктом валідації є спостережувана статистика результатів детектування, яка вже містить вплив елементів ДОЗМ фотодетектора.

Нехай експериментальна реалізація пристрою дає вибірку зареєстрованих патернів

$$\mathcal{D} = \left\{ \mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}, \dots, \mathbf{n}^{(N_{\text{samp}})} \right\}, \quad (3.94)$$

де N_{samp} є кількістю експериментальних запусків. Для окремого патерну $\mathbf{n}$ відповідна емпірична частота дорівнює

$$\hat{P}_{\mathcal{D}}(\mathbf{n}) = \frac{1}{N_{\text{samp}}} \sum_{s=1}^{N_{\text{samp}}} \mathbf{1} \left[\mathbf{n}^{(s)} = \mathbf{n} \right], \quad (3.95)$$

де $\mathbf{1}[\dots]$ дорівнює одиниці, якщо умова в дужках виконується, і нулю в іншому випадку.

Формально можна було б порівнювати $\hat{P}_{\mathcal{D}}(\mathbf{n})$ з модельним розподілом $P^{(\Pi)}(\mathbf{n})$ для всіх патернів. Однак такий прямий підхід практично непридатний для масштабованої ГБВ з двох причин. По-перше, експеримент дає лише скінченну кількість запусків N_{samp} . Навіть якщо ця кількість є дуже великою, наприклад становить мільйони або мільярди реалізацій, вона залишається незрівнянно меншою за кількість можливих патернів у масштабованій схемі ГБВ. По-друге, кількість можливих патернів зростає комбінаторно з кількістю мод і за-

реєстрованих подій.

Для події або класу патернів із сумарною ймовірністю p статистична похибка емпіричної частоти має порядок

$$\Delta p \simeq \sqrt{\frac{p(1-p)}{N_{\text{samp}}}}, \quad (3.96)$$

а відносна похибка для малої ймовірності p має порядок

$$\frac{\Delta p}{p} \simeq \frac{1}{\sqrt{N_{\text{samp}}p}}. \quad (3.97)$$

Отже, надійно оцінюються лише ті події, для яких виконується умова $N_{\text{samp}}p \gg 1$. Ймовірності окремих патернів у великих схемах зазвичай є настільки малими, що окремі патерни майже ніколи не повторюються у вибірці. Саме тому експериментальна валідація має спиратися не на окремі патерни, а на згруповані статистики з достатньо великою сумарною ймовірністю.

Якщо повна кількість зареєстрованих подій фіксована і дорівнює n , то для необмеженого розрізнення чисел фотонів кількість можливих патернів дорівнює

$$\binom{M+n-1}{n}. \quad (3.98)$$

Це відповідає кількості способів розподілити n однакових подій між M вихідними модами з урахуванням можливої кратної реєстрації. Навіть у підобласті без кратної реєстрації, де в кожній моді реєструється не більше однієї події, кількість патернів дорівнює

$$\binom{M}{n}. \quad (3.99)$$

Отже, проблема полягає не лише у складності обчислення окремих ймовірностей, а й у тому, що експериментальна вибірка не може надійно покрити весь простір можливих патернів.

Для оцінки масштабу наведемо два характерні набори параметрів, які відповідатимуть чисельним режимам, розглянутим нижче. У першому наборі кількість вихідних мод дорівнює $M = 400$, а середня кількість фотонів після втрат

становить приблизно 20. Якщо розглядати сектор із $n = 20$ зареєстрованими подіями, то навіть у підпросторі подій без кратної реєстрації кількість можливих патернів дорівнює

$$\binom{400}{20} \simeq 2.8 \times 10^{33}. \quad (3.100)$$

Якщо ж дозволити події з кратною реєстрацією, то відповідна кількість патернів становить

$$\binom{400 + 20 - 1}{20} = \binom{419}{20} \simeq 7.2 \times 10^{33}. \quad (3.101)$$

У другому наборі параметрів кількість вихідних мод дорівнює $M = 144$, а характерна кількість зареєстрованих подій є значно більшою, наприклад $n = 55$. Тоді вже кількість патернів без кратної реєстрації дорівнює

$$\binom{144}{55} \simeq 2.6 \times 10^{40}, \quad (3.102)$$

а з урахуванням кратної реєстрації

$$\binom{144 + 55 - 1}{55} = \binom{198}{55} \simeq 4.0 \times 10^{49}. \quad (3.103)$$

Ці оцінки показують, що повна реконструкція розподілу за окремими патернами не є реалістичною стратегією валідації. Тому задача валідації має формулюватися через статистики, які агрегують багато патернів і мають достатньо велику ймовірність для практичного оцінювання.

Окремо слід пояснити, чому події з кратною реєстрацією не можна просто відкинути. Це можна зрозуміти за аналогією із задачею про дні народження: у групі лише з 23 людей ймовірність того, що принаймні двоє мають однаковий день народження, вже перевищує 50%, хоча 23 значно менше за кількість днів у році. Причина полягає в тому, що збіг може виникнути не для однієї фіксованої людини, а в будь-якій парі людей, а кількість таких пар дорівнює $n(n - 1)/2$. У нашому випадку аналогічну роль відіграють n зареєстрованих подій і M вихідних мод: кратна реєстрація виникає тоді, коли дві або більше подій потрапляють в одну й ту саму моду. Тому навіть при $n \ll M$ такі події можуть давати

помітний внесок. Якщо грубо розглядати n зареєстрованих подій як незалежні та рівномірно розподілені між M вихідними модами, то ймовірність відсутності кратної реєстрації дорівнює

$$P_{\text{no mult}}(M, n) = \frac{M(M-1) \cdots (M-n+1)}{M^n} \simeq \exp \left[-\frac{n(n-1)}{2M} \right]. \quad (3.104)$$

Ця оцінка не враховує повної структури ГБВ-розподілу та використовується лише як просте комбінаторне пояснення того, чому кратна реєстрація може з'являтися навіть при $n \ll M$. Для $M = 400$ і $n = 20$ вона дає

$$P_{\text{no mult}}(400, 20) \simeq 0.62, \quad 1 - P_{\text{no mult}}(400, 20) \simeq 0.38. \quad (3.105)$$

Отже, навіть при $n \ll M$ події з кратною реєстрацією вже не є зовсім нехтовними. Середня кількість пар подій, що потрапляють в одну моду в такій простій моделі, має порядок

$$\lambda \simeq \frac{n(n-1)}{2M}. \quad (3.106)$$

Для $M = 400$ і $n = 20$ маємо $\lambda \simeq 0.48$, тому природно очікувати, що найбільший внесок дадуть сектори без кратної реєстрації та з малою кількістю мод, у яких зареєстровано по дві події. Нижче саме ці сектори буде формалізовано як перші родини орбітальних статистик.

Для другого набору параметрів, де $M = 144$ і $n = 55$, точна добуткова формула дає

$$P_{\text{no mult}}(144, 55) \simeq 6.6 \times 10^{-6}. \quad (3.107)$$

У такому режимі кратна реєстрація є типовою, а статистики, що враховують лише малу кількість мод із подвійною реєстрацією, вже не описують увесь розподіл. Їх слід розглядати не як повну характеристику статистики, а як низькопорядкові діагностичні статистики, чутливі до якості розрізнення чисел фотонів.

Тому валідація не зводиться до повної реконструкції розподілу $P^{(\Pi)}(\mathbf{n})$. У цьому розділі валідація розуміється як перевірка узгодженості експериментально доступних статистик із цільовою моделлю ГБВ та їх порівняння з вибраними альтернативними моделями. Подібна логіка використовується в експеримен-

тальній і теоретичній літературі з бозонної вибірки та ГБВ [66, 74–76, 80, 81, 85]. У цій роботі відповідна постановка адаптується до випадку реалістичного розрізнення чисел фотонів [II].

Для цього перейдемо від окремих патернів до згрупованих подій. Нехай $\mathcal{C}_r$ позначає деякий клас патернів детектування. Тоді модельна ймовірність такої згрупованої події визначається як

$$P^{(\Pi)}(\mathcal{C}_r) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{C}_r} P^{(\Pi)}(\mathbf{n}). \quad (3.108)$$

Відповідна емпірична оцінка з вибірки (3.94) має вигляд

$$\hat{P}_{\mathcal{D}}(\mathcal{C}_r) = \frac{1}{N_{\text{samp}}} \sum_{s=1}^{N_{\text{samp}}} \mathbf{1} \left[\mathbf{n}^{(s)} \in \mathcal{C}_r \right]. \quad (3.109)$$

На відміну від імовірності окремого патерну, така величина може мати достатньо велику ймовірність для надійного оцінювання з експериментальних даних. Саме тому згруповані події є природним об'єктом практичної валідації.

Важливо, що групування в (3.108) виконується за патернами зареєстрованих результатів $\mathbf{n}$. Якщо детектор має обмежене розрізнення чисел фотонів, то один і той самий фотонний патерн може приводити до різних зареєстрованих результатів, а різні фотонні патерни можуть давати однаковий результат детектування. Тому теоретична величина $P^{(\Pi)}(\mathcal{C}_r)$ повинна обчислюватися з тим самим матричним функціоналом, який відповідає фізичній моделі детектора.

Зручно зібрати набір згрупованих імовірностей у вектор

$$\mathbf{p}^{(\Pi)} = \left(P^{(\Pi)}(\mathcal{C}_1), P^{(\Pi)}(\mathcal{C}_2), \dots, P^{(\Pi)}(\mathcal{C}_R) \right), \quad (3.110)$$

а відповідні емпіричні оцінки — у вектор

$$\hat{\mathbf{p}}_{\mathcal{D}} = \left(\hat{P}_{\mathcal{D}}(\mathcal{C}_1), \hat{P}_{\mathcal{D}}(\mathcal{C}_2), \dots, \hat{P}_{\mathcal{D}}(\mathcal{C}_R) \right). \quad (3.111)$$

Задача валідації полягає в тому, щоб порівняти $\hat{\mathbf{p}}_{\mathcal{D}}$ з відповідними векторами, отриманими для цільової моделі та для альтернативних моделей. Конкретний спосіб такого порівняння залежить від вибраного статистичного тесту і буде заданий нижче. Такий векторний запис дозволяє працювати не з повним розпо-

ділом, а з обмеженим набором інформативних статистик.

Таким чином, перехід до згрупованих статистик виконує дві функції. По-перше, він замінює практично недоступне порівняння повного розподілу порівнянням скінченного набору статистик, які можна оцінити з даних. По-друге, він дозволяє зберегти інформацію, чутливу до подій з кратною реєстрацією та до якості розрізнення чисел фотонів. Далі як конкретний клас таких статистик розглядатимемо орбіти патернів детектування.

3.6 Згруповані статистики для валідації гаусівської бозонної вибірки

Після загального означення класів патернів C_r перейдемо до спеціального групування, яке буде використано в подальших валідаційних тестах. Це групування задається орбітами патернів детектування. Під орбітою тут розумітимемо множину патернів, що мають однакову структуру зареєстрованих результатів, але відрізняються перестановкою вихідних мод. Отже, ідея орбіт полягає в тому, щоб групувати патерни не за конкретними номерами вихідних мод, а за набором зареєстрованих значень.

У задачах бозонної вибірки та ГБВ споріднені згруповані або маргінальні статистики використовуються тоді, коли повний розподіл за всіма патернами є недоступним [66, 80–85]. Для орбіт таке групування характеризує загальну структуру патерну, зокрема кількість порожніх виходів, кількість одиничних результатів і кількість мод із кратною реєстрацією.

У випадку ідеальних детекторів з розрізненням чисел фотонів такі орбіти можуть бути пов'язані з компонентами векторів ознак графів [86–91]. У реалістичному випадку цей графовий зміст загалом не переноситься безпосередньо, оскільки зареєстрований патерн не обов'язково збігається з істинним фотонним патерном. Тому нижче орбіти розглядаються не як графові характеристики, а як згруповані статистики зареєстрованих результатів детектування [II].

3.6.1 Орбіти патернів детектування

Нехай

$$\mathbf{n}_0 = (n_{0,1}, \dots, n_{0,M}) \quad (3.112)$$

є деяким зареєстрованим патерном. Орбітою цього патерну називатимемо множину всіх патернів, які можна отримати перестановками його компонентів [86–88]:

$$\mathcal{O}_{[n_0]} = \{ (n_{0,\pi(1)}, \dots, n_{0,\pi(M)}) \mid \pi \in S_M \}, \quad (3.113)$$

де S_M є групою перестановок M елементів. Квадратні дужки в позначенні $\mathcal{O}_{[n_0]}$ підкреслюють, що орбіта залежить не від конкретного порядку компонентів, а від мультимножини значень у патерні. Отже, усі патерни з однієї орбіти мають однакові числа компонентів із кожним можливим значенням результату.

Наприклад, для $M = 6$ патерни

$$(2, 1, 1, 0, 0, 0), \quad (1, 2, 0, 1, 0, 0), \quad (0, 1, 2, 0, 1, 0) \quad (3.114)$$

належать до однієї орбіти. Усі вони містять один зареєстрований результат 2, два зареєстровані результати 1 і три нульові результати. У цьому прикладі компонент $n_i = 2$ означає кратну реєстрацію в одній вихідній моді. Отже, орбіта не фіксує конкретні номери мод, а фіксує лише структуру зареєстрованого патерну.

На рис. 3.2 показано загальну схему формування зареєстрованих патернів у ГБВ. Цей рисунок не задає конкретної орбіти, а лише ілюструє, що після фотодетектування в кожній вихідній моді формується компонент зареєстрованого патерну n . Компоненти з кратною реєстрацією в такому патерні надалі використовуватимуться для побудови орбітальних статистик.

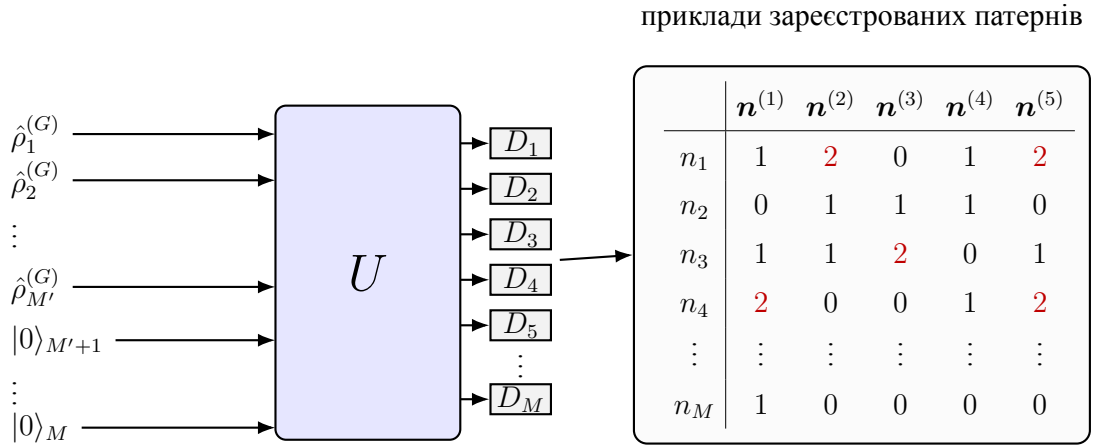


Рис. 3.2 — Загальна схема формування зареєстрованих патернів у ГБВ. Після проходження через інтерферометр U та локального фотодетектування на виходах $D_1, D_2, \dots, D_M$ формується зареєстрований патерн $\mathbf{n}$. Справа схематично показано кілька можливих реалізацій такого патерну; рядки відповідають вихідним модам, а стовпці — окремим реалізаціям. Червоним позначено компоненти з кратною реєстрацією.

Для підрахунку кількості патернів у довільній орбіті введемо числа

$$r_q(\mathbf{n}_0) = |\{i \mid n_{0,i} = q\}|, \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (3.115)$$

Тут $r_q(\mathbf{n}_0)$ є кількістю мод, у яких зареєстровано результат q . Оскільки

$$\sum_{q=0}^{\infty} r_q(\mathbf{n}_0) = M, \quad (3.116)$$

кількість різних патернів в орбіті дорівнює

$$|\mathcal{O}_{[\mathbf{n}_0]}| = \frac{M!}{\prod_{q \geq 0} r_q(\mathbf{n}_0)!}. \quad (3.117)$$

У добутку в знаменнику фактично присутні лише ті q , для яких $r_q(\mathbf{n}_0) \neq 0$. Ця формула є звичайним комбінаторним множником для перестановок із повтореннями. Вона буде корисною нижче, коли орбіти використовуватимуться як згруповані події для валідації.

Означення (3.113) стосується саме зареєстрованих патернів детектування. В ідеальному випадку така орбіта збігається з орбітою фотонних конфігурацій, але для реалістичних детекторів вона описує групу експериментальних результатів. Тому орбітальні статистики нижче обчислюються з урахуванням ДОЗМ

фотодетектора.

3.6.2 Орбітальні ймовірності

Орбіта є частинним випадком згрупованої події. Тому її модельна ймовірність визначається як сума ймовірностей усіх патернів, що входять до цієї орбіти:

$$\mathcal{P}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_{[n_0]}) = \sum_{n \in \mathcal{O}_{[n_0]}} P^{(\Pi)}(n). \quad (3.118)$$

Тут $P^{(\Pi)}(n)$ є розподілом зареєстрованих патернів, обчисленим з урахуванням конкретної моделі фотодетектора. Позначення $\mathcal{P}^{(\Pi)}$ використовуватимемо для ймовірностей орбіт, щоб відрізнити їх від ймовірностей окремих патернів. Отже, орбітальна ймовірність є не новою ймовірнісною моделлю, а сумою вже визначених ймовірностей зареєстрованих результатів.

Те саме означення можна записати в операторній формі. Згрупованій події $\mathcal{O}_{[n_0]}$ відповідає елемент ДОЗМ

$$\hat{\Pi}_{\mathcal{O}_{[n_0]}} = \sum_{n \in \mathcal{O}_{[n_0]}} \hat{\Pi}(n). \quad (3.119)$$

Тоді орбітальна ймовірність має вигляд

$$\mathcal{P}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_{[n_0]}) = \text{Tr} \left[\hat{\rho}_{\text{out}} \hat{\Pi}_{\mathcal{O}_{[n_0]}} \right]. \quad (3.120)$$

Отже, орбітальна статистика є укрупненням результатів тієї самої вимірювальної схеми. Оператор (3.119) є сумою елементів ДОЗМ для окремих патернів, тому орбітальна ймовірність залишається звичайною ймовірністю результату вимірювання [80–84].

Слід підкреслити, що різні патерни в одній орбіті загалом не мають однакових ймовірностей. Для фіксованого інтерферометра ймовірність патерну залежить від того, в яких саме вихідних модах зареєстровано події. Тому орбітальна ймовірність (3.118) є саме сумою індивідуальних ймовірностей, а не добутком розміру орбіти на ймовірність одного довільно вибраного патерну. Множник розміру орбіти виникатиме лише в наближених процедурах оцінювання, коли патерни з орбіти вибираються випадково.

Для вибірки (3.94) емпірична оцінка орбітальної ймовірності має вигляд

$$\hat{\mathcal{P}}_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}_{[n_0]}) = \frac{1}{N_{\text{samp}}} \sum_{s=1}^{N_{\text{samp}}} \mathbf{1} \left[\mathbf{n}^{(s)} \in \mathcal{O}_{[n_0]} \right]. \quad (3.121)$$

Ця величина може бути оцінена значно надійніше, ніж ймовірність одного конкретного патерну, якщо сама орбіта має достатньо велику сумарну ймовірність. Саме це робить орбітальні ймовірності зручними для практичної валідації, де кількість експериментальних запусків завжди є скінченною [81, 86, 88].

Набір доступних орбіт залежить від моделі фотодетектування. Для порогового фотодетектора компоненти $\mathbf{n}$ можуть набувати лише значень 0 та 1. Для масиву порогових фотодетекторів вони описують кількість спрацьованих піддетекторів [20–24], а для підрахунку імпульсів фотоструму — кількість зареєстрованих імпульсів у ЧВВ [28, 29]. Тому порівняння різних детекторів має виконуватися на рівні зареєстрованих патернів.

3.6.3 Статистики кратної реєстрації за реалістичного фотодетектування

Для подальшої валідації розглядатимемо не всі можливі орбіти, а спеціальний клас орбіт, який містить події без кратної реєстрації та події з малою кількістю мод, у яких зареєстровано дві події. Використання таких орбіт мотивоване підходом, запропонованим у роботі [88], де для ідеальних детекторів з розрізненням чисел фотонів розглядалися орбіти, пов'язані з компонентами графових ознак. У цьому розділі цей підхід використовується вже для зареєстрованих патернів і реалістичних моделей фотодетектування [II]. Такі статистики є чутливими до здатності детектора розрізняти різні числа зареєстрованих подій в одній моді.

Для патерну $\mathbf{n}$ введемо кількість мод, у яких зареєстровано значення q :

$$\nu_q(\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^M \mathbf{1} [n_i = q]. \quad (3.122)$$

Тоді повна кількість зареєстрованих подій дорівнює

$$|\mathbf{n}| = \sum_{q=0}^{\infty} q \nu_q(\mathbf{n}). \quad (3.123)$$

Цей запис відокремлює загальну кількість зареєстрованих подій від того, як саме ці події розподілені між вихідними модами. Саме розподіл за числами ν_q визначає орбіту патерну.

Надалі розглядатимемо орбіти, у яких компоненти патерну набувають лише значень 0, 1 та 2. Позначатимемо таку орбіту як $\mathcal{O}_l^n$, де n є повною кількістю зареєстрованих подій, а l є кількістю вихідних мод, у яких зареєстровано дві події. Інакше кажучи,

$$\nu_2 = l, \quad \nu_1 = n - 2l, \quad \nu_0 = M - n + l, \quad \nu_q = 0 \quad (q \geq 3). \quad (3.124)$$

Це означення виділяє події без кратної реєстрації та події з невеликою кількістю мод, у яких зареєстровано дві події. Такі орбіти є простими для інтерпретації, але водночас чутливими до обмеженого розрізнення чисел фотонів.

Окремі значення l мають просту інтерпретацію. Орбіта $\mathcal{O}_0^n$ відповідає зареєстрованим патернам без кратної реєстрації, у яких n вихідних мод дали одиничний результат. Орбіта $\mathcal{O}_1^n$ містить патерни, у яких в одній моді зареєстровано результат $n_i = 2$, а ще $n - 2$ мод дали одиничні результати. Орбіта $\mathcal{O}_2^n$ містить патерни з двома модами, у яких зареєстровано по дві події. На рис. 3.3 наведено кілька представників таких орбіт для $M = 6$ і $n = 4$.

(а) Орбіта $\mathcal{O}_0^4$							(б) Орбіта $\mathcal{O}_1^4$						
	$n^{(1)}$	$n^{(2)}$	$n^{(3)}$	$n^{(4)}$	$n^{(5)}$	$n^{(6)}$		$n^{(1)}$	$n^{(2)}$	$n^{(3)}$	$n^{(4)}$	$n^{(5)}$	$n^{(6)}$
n_1	1	1	1	0	1	0	n_1	2	1	1	0	0	1
n_2	1	1	1	1	0	1	n_2	1	2	0	1	0	0
n_3	1	1	0	1	1	0	n_3	1	0	2	0	1	0
n_4	1	0	1	0	0	1	n_4	0	1	0	2	1	1
n_5	0	1	0	1	1	1	n_5	0	0	1	1	2	0
n_6	0	0	1	1	1	1	n_6	0	0	0	0	0	2

0 мод із кратною реєстрацією 1 мода з кратною реєстрацією

(в) Орбіта $\mathcal{O}_2^4$						
	$n^{(1)}$	$n^{(2)}$	$n^{(3)}$	$n^{(4)}$	$n^{(5)}$	$n^{(6)}$
n_1	2	2	0	0	2	0
n_2	2	0	2	0	0	0
n_3	0	2	0	2	0	0
n_4	0	0	2	0	0	2
n_5	0	0	0	2	0	2
n_6	0	0	0	0	2	0

2 моди з кратною реєстрацією

Рис. 3.3 — Приклади представників орбіт патернів детектування для $M = 6$ і $n = 4$. У кожній таблиці рядки відповідають шести вихідним модам, а стовпці — окремим представникам відповідної орбіти. Орбіта $\mathcal{O}_0^4$ містить патерни без кратної реєстрації, $\mathcal{O}_1^4$ — патерни з однією модою з кратною реєстрацією, а $\mathcal{O}_2^4$ — патерни з двома такими модами. Показано лише кілька представників кожної орбіти; решта патернів отримується перестановками компонентів.

Надалі використовуються не три окремі орбіти, а три родини орбіт:

$$\{\mathcal{O}_0^n\}_n, \quad \{\mathcal{O}_1^n\}_n, \quad \{\mathcal{O}_2^n\}_n. \quad (3.125)$$

Вони відповідають секторам без кратної реєстрації, з однією модою з результатом 2 та з двома такими модами. Для режимів із помірною кількістю зареєстрованих подій, таких як $M = 400$ і $n \simeq 20$, ці сектори природно виникають з

оцінки типу парадоксу днів народження і охоплюють основні низькопорядкові внески кратної реєстрації. Для режимів із більшою кількістю зареєстрованих подій вони не є повним описом розподілу, але залишаються зручними діагностичними статистиками для порівняння моделей фотодетектування [II].

У термінах загального означення орбіти це можна записати як

$$\mathcal{O}_l^n = \mathcal{O}_{[\underbrace{2, \dots, 2}_l, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-2l}, \underbrace{0, \dots, 0}_{M-n+l}]} \quad (3.126)$$

Це означення має сенс за умов

$$0 \leq l \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad n - l \leq M. \quad (3.127)$$

Якщо ці умови не виконуються, відповідну орбіту вважаємо порожньою. Перша умова означає, що кількість мод із двома подіями не може перевищувати половину повної кількості подій. Друга умова означає, що загальна кількість зайнятих вихідних мод не може перевищувати M .

Кількість патернів у такій орбіті дорівнює

$$|\mathcal{O}_l^n| = \frac{M!}{(M - n + l)!(n - 2l)!l!}. \quad (3.128)$$

Ця формула відповідає вибору l мод із двома зареєстрованими подіями, $n - 2l$ мод з однією зареєстрованою подією та решти мод із нульовим результатом. Вона є частинним випадком загальної формули (3.117). Надалі ця кількість може використовуватися при вибіркового оцінюванні орбітальних імовірностей.

Для цих орбіт орбітальну ймовірність записуватимемо як

$$\mathcal{P}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_l^n) = \sum_{\mathbf{n}' \in \mathcal{O}_l^n} P^{(\Pi)}(\mathbf{n}'). \quad (3.129)$$

У скороченому записі іноді зручно розглядати цю величину як функцію двох індексів:

$$\mathcal{P}_l^{(\Pi)}(n) \equiv \mathcal{P}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_l^n). \quad (3.130)$$

Індекс n фіксує повну кількість зареєстрованих подій, а індекс l фіксує кількість мод із результатом 2. Тому величини $\mathcal{P}_l^{(\Pi)}(n)$ дають компактний опис статистики

кратної реєстрації для заданої моделі фотодетектування.

Фізичний зміст індексу l залежить від моделі детектора. Для детекторів з ідеальним розрізненням чисел фотонів значення l дорівнює кількості вихідних мод, у яких було зареєстровано два фотони. Для реалістичних детекторів l означає кількість вихідних мод, у яких було зареєстровано два результати детектування. Ці два твердження збігаються лише в ідеальному випадку. Наприклад, для масиву порогових фотодетекторів значення $n_i = 2$ означає спрацювання двох піддетекторів [24], а для підрахунку імпульсів фотоструму — реєстрацію двох імпульсів у відповідному ЧВВ [28, 29].

Для порогових фотодетекторів доступною є лише статистика з $l = 0$, оскільки такий детектор не розрізняє одну і кілька подій в одній моді. Для масивів порогових фотодетекторів з $K \geq 2$, для детекторів з ідеальним розрізненням чисел фотонів, а також для схем підрахунку імпульсів фотоструму можуть бути доступні орбіти з $l \geq 1$. Тому порівняння ймовірностей $\mathcal{P}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_l^n)$ для різних l безпосередньо відображає, як обмежене розрізнення чисел фотонів змінює валідаційні статистики. Це робить орбіти $\mathcal{O}_l^n$ зручним інструментом для аналізу саме реалістичних фотодетекторів.

Отже, орбіти $\mathcal{O}_l^n$ задають компактний набір згрупованих статистик, який зберігає інформацію про повну кількість зареєстрованих подій і про кількість мод із кратною реєстрацією. У наступному підрозділі буде розглянуто, як такі орбітальні ймовірності можна обчислювати або оцінювати: прямим вибіркоvim сумуванням за патернами орбіти [86, 102] та за допомогою фазово-просторового методу на основі додатного P -представлення [81, 103–105]. Саме ці методи дозволять перейти від формального означення орбіт до практичних валідаційних процедур для ГВВ з реалістичним розрізненням чисел фотонів [II].

3.7 Оцінювання величин для валідації

Після введення орбіт $\mathcal{O}_l^n$ потрібно обчислити їхні ймовірності для заданої моделі стану, інтерферометра та фотодетекторів. Позначатимемо таку теоретичну ймовірність як

$$\mathcal{P}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_l^n), \tag{3.131}$$

де верхній індекс (Π) підкреслює залежність від моделі ДОЗМ фотодетектора. Саме ці величини надалі входять у статистичні процедури порівняння цільової моделі з альтернативними моделями.

Нижче розглянемо два способи отримання $\mathcal{P}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_l^n)$. Перший ґрунтується на прямому або вибіркового сумуванні ймовірностей окремих патернів усередині орбіти [86, 102]. Другий використовує характеристичну функцію орбіт і фазово-просторове моделювання в додатному P -представленні [81, 103–105]. Перший спосіб є зручним контрольним методом для малих значень n , тоді як другий є основним для масштабованого оцінювання орбітальних ймовірностей у великих схемах ГБВ [II].

3.7.1 Пряме та вибіркве оцінювання орбітальних ймовірностей

Найпряміше означення орбітальної ймовірності полягає в сумуванні ймовірностей усіх патернів, що належать відповідній орбіті. Для орбіти $\mathcal{O}_l^n$ маємо

$$\mathcal{P}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_l^n) = \sum_{n \in \mathcal{O}_l^n} P^{(\Pi)}(n), \quad (3.132)$$

де $P^{(\Pi)}(n)$ є ймовірністю конкретного зареєстрованого патерну. Ця ймовірність обчислюється за матрично-функціональною формулою, отриманою вище, з тим функціоналом $\mathcal{F}_n^{\Pi}[A]$, який відповідає вибраній моделі фотодетектора. Отже, навіть у прямому сумуванні всі патерни оцінюються саме як зареєстровані результати, а не як приховані істинні фотонні конфігурації.

Для орбіт $\mathcal{O}_l^n$, які містять l вихідних мод із двома зареєстрованими подіями та $n - 2l$ вихідних мод з одиничним результатом, кількість патернів дорівнює

$$|\mathcal{O}_l^n| = \frac{M!}{(M - n + l)! (n - 2l)! l!}. \quad (3.133)$$

Тут $M - n + l$ є кількістю вихідних мод з нульовим результатом. Ця формула показує, що навіть одна згрупована подія може містити дуже велику кількість окремих патернів. Саме тому пряме використання означення (3.132) швидко стає обчислювально непридатним.

У режимах, розглянутих нижче, такі орбіти можуть містити астрономічно велику кількість патернів. Тому повне пряме сумування за формулою (3.132) практично непридатне для великих систем. У цьому випадку потрібні або ви-

біркові оцінки, або методи, які обчислюють згруповані ймовірності без явного перебору всіх патернів орбіти.

Один із можливих наближених підходів полягає у випадковому виборі скінченної кількості представників орбіти [86]. Нехай $\mathbf{n}^{(s)}$, $s = 1, \dots, N_S$, є патернами, незалежно та рівномірно вибраними з множини $\mathcal{O}_l^n$. Тоді орбітальну ймовірність можна оцінити як

$$\hat{\mathcal{P}}_{\text{dir}}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_l^n) = \frac{|\mathcal{O}_l^n|}{N_S} \sum_{s=1}^{N_S} P^{(\Pi)}(\mathbf{n}^{(s)}). \quad (3.134)$$

Ця оцінка є природним вибіркоvim наближенням повної суми (3.132). Її точність залежить від числа вибраних патернів, розміру орбіти та розкиду індивідуальних імовірностей $P^{(\Pi)}(\mathbf{n})$ усередині орбіти. Для великих орбіт множник $|\mathcal{O}_l^n|$ може бути дуже великим, тому статистичні флуктуації середнього за вибраними патернами помітно впливають на кінцеву оцінку. Оцінювання похибки таких вибірових процедур для графових статистик обговорювалося, зокрема, на основі результатів роботи [102].

Для малих значень n такий підхід є корисним, оскільки ймовірності окремих патернів можна обчислювати безпосередньо через відповідні матричні функціонали. Для детекторів з ідеальним розрізненням чисел фотонів використовується хафніанова форма [48]. Для порогових фотодетекторів виникає торонтоніан [53], а для масивів порогових фотодетекторів — відповідний функціонал, що враховує кількість спрацьованих піддетекторів [97]. У роботі [II] такий підхід використовувався як контрольний для перевірки результатів, отриманих масштабованішим методом оцінювання орбітальних імовірностей.

Важливо, що пряме оцінювання не змінює фізичної моделі детектування. Воно лише замінює повну суму за всіма патернами орбіти на суму за випадково вибраною підмножиною її представників. Тому кожна ймовірність $P^{(\Pi)}(\mathbf{n}^{(s)})$ має обчислюватися з тією самою моделлю ДОЗМ, яка описує реальний фотодетектор. У цьому сенсі вибірове пряме оцінювання є не фізичним наближенням, а лише обчислювальною процедурою для наближення суми за орбітою.

3.7.2 Оцінювання через характеристичну функцію орбіт

Для великих значень M та n зручніший підхід полягає в тому, щоб не перебирати окремі патерни, а одразу працювати з характеристичною функцією згрупованого розподілу за орбітами. Такий метод особливо добре пристосований до орбіт $\mathcal{O}_l^n$, які розрізняють кількість мод з одиничним результатом та кількість мод з двома зареєстрованими подіями. Нижче цей підхід використовується як фазово-просторова процедура оцінювання орбітальних імовірностей [80–83, 103].

Оскільки для орбіт $\mathcal{O}_l^n$ враховуються лише результати 0, 1 та 2, їх зручно параметризувати числами ν_1 та ν_2 . Тут ν_1 є кількістю вихідних мод, у яких зареєстровано одну подію, а ν_2 — кількістю вихідних мод, у яких зареєстровано дві події. Тоді

$$l = \nu_2, \quad n = \nu_1 + 2\nu_2, \quad \mathcal{O}_l^n = \mathcal{O}_{\nu_2}^{\nu_1+2\nu_2}. \quad (3.135)$$

У цій параметризації орбіта задається не повним патерном, а лише двома числами ν_1 і ν_2 . Якщо $\nu_1 + \nu_2 > M$, відповідна орбіта порожня, і її ймовірність вважається рівною нулю. Отже, змінні ν_1 та ν_2 задають двовимірний дискретний розподіл за класами зареєстрованих патернів.

Оператор, що відповідає такій згрупованій події, можна записати як суму елементів ДОЗМ за всіма патернами орбіти:

$$\hat{\Gamma}_{\nu_1, \nu_2}^{(\Pi)} = \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{O}_{\nu_2}^{\nu_1+2\nu_2}} \hat{\Pi}(\mathbf{n}). \quad (3.136)$$

Тоді орбітальна ймовірність має операторний вигляд

$$\mathcal{P}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_{\nu_2}^{\nu_1+2\nu_2}) = \text{Tr} \left[\hat{\rho}_{\text{out}} \hat{\Gamma}_{\nu_1, \nu_2}^{(\Pi)} \right]. \quad (3.137)$$

Цей запис є прямим узагальненням правила Борна на згруповані події. Він також підкреслює, що орбіта є не новим типом вимірювання, а сумою звичайних локальних фотолічильних результатів. Така форма потрібна для переходу від явної суми за патернами до компактнішого запису через характеристичну функцію.

Введемо дискретну характеристичну функцію розподілу за змінними ν_1

та ν_2 :

$$C^{(\Pi)}(k_1, k_2) = \sum_{\nu_1=0}^M \sum_{\nu_2=0}^M \mathcal{P}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_{\nu_2}^{\nu_1+2\nu_2}) e^{-i(k_1\nu_1+k_2\nu_2)\theta}, \quad (3.138)$$

де

$$\theta = \frac{2\pi}{M+1}, \quad k_1, k_2 = 0, \dots, M. \quad (3.139)$$

Період дискретного перетворення вибрано так, щоб значення ν_1 та ν_2 однозначно відновлювалися в межах $0, \dots, M$. Обернене дискретне перетворення Фур'є потім відновлює орбітальні ймовірності з характеристичної функції.

Використання характеристичної функції має просту комбінаторну причину. Орбіта $\mathcal{O}_{\nu_2}^{\nu_1+2\nu_2}$ задається лише тим, скільки мод дали результат 1 і скільки мод дали результат 2, але не тим, у яких саме вихідних модах ці результати з'явилися. Тому замість явного перебору всіх перестановок вводяться фазові множники: $e^{-ik_1\theta}$ для моди з результатом 1 і $e^{-ik_2\theta}$ для моди з результатом 2. Після розкриття добуткового оператора член із ν_1 одиничними результатами та ν_2 результатами, рівними 2, отримує множник

$$e^{-i(k_1\nu_1+k_2\nu_2)\theta}. \quad (3.140)$$

Коефіцієнт при цьому множнику є сумою ймовірностей усіх патернів з даними ν_1 та ν_2 , тобто шуканою орбітальною ймовірністю. Обернене дискретне перетворення Фур'є виділяє саме цей коефіцієнт.

Використовуючи добуткову структуру елементів ДОЗМ, характеристичну функцію можна переписати без явного сумування за орбітами:

$$C^{(\Pi)}(k_1, k_2) = \text{Tr} \left[\hat{\rho}_{\text{out}} \bigotimes_{i=1}^M \left(\hat{\Pi}_0^{(i)} + \hat{\Pi}_1^{(i)} e^{-ik_1\theta} + \hat{\Pi}_2^{(i)} e^{-ik_2\theta} \right) \right]. \quad (3.141)$$

Якщо всі вихідні фотодетектори описуються однаковими елементами ДОЗМ, цей вираз зводиться до коротшої форми

$$C^{(\Pi)}(k_1, k_2) = \text{Tr} \left[\hat{\rho}_{\text{out}} \left(\hat{\Pi}_0 + \hat{\Pi}_1 e^{-ik_1\theta} + \hat{\Pi}_2 e^{-ik_2\theta} \right)^{\otimes M} \right]. \quad (3.142)$$

Ця формула замінює суму за великою кількістю патернів одним середнім значенням добуткового оператора. Сума за перестановками компонентів патерну вже врахована аналітично через розкриття тензорного добутку.

Формули (3.141) та (3.142) описують згрупований розподіл для підмножини подій, у яких кожна мода дає результати 0, 1 або 2. Якщо конкретна модель детектора допускає результати $n_i \geq 3$, то такі події не входять до розглянутих орбіт $\mathcal{O}_l^n$. У цьому випадку нормування за вибраною підмножиною орбіт виконується вже під час побудови конкретного валідаційного тесту. Для порогових фотодетекторів елемент $\hat{\Pi}_2$ відсутній, тому його можна формально покласти рівним нулю, і ненульовими залишаються лише орбіти з $l = 0$.

Для чисельного оцінювання характеристичної функції зручно використати додатне P -представлення. На відміну від звичайної функції Глаубера–Сударшана, яка для стиснених та інших неklasичних гаусівських станів може бути сингулярною, додатне P -представлення працює в подвоєному фазовому просторі [104, 105]. У ньому замість однієї комплексної змінної α та її комплексно-спряженої α^* використовуються дві незалежні комплексні змінні α та β . Для багатомодового стану це означає перехід до пари незалежних векторів

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_M)^T, \quad \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_M)^T. \quad (3.143)$$

Схематично густинний оператор можна подати у вигляді

$$\hat{\rho}_{\text{out}} = \int d^{2M} \boldsymbol{\alpha} d^{2M} \boldsymbol{\beta} P_+(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \hat{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \quad (3.144)$$

де $P_+(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ є додатним розподілом у подвоєному фазовому просторі, а $\hat{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ є ядром, побудованим з когерентних станів. Точний вигляд ядра залежить від вибраної домовленості щодо позначень. Важливо, що додатність P_+ тут є чисельною властивістю розширеного представлення і не означає класичності стану в сенсі звичайної функції Глаубера–Сударшана.

У цій процедурі не симулюються окремі зареєстровані патерни $\mathbf{n}$ і не перебирається конкретна орбіта як множина перестановок. Симулюються фазово-просторові амплітуди вихідного гаусівського стану в подвоєному фазовому просторі. Для кожної вибіркової реалізації ці амплітуди підставляються в локальні символи елементів ДОЗМ, після чого обчислюється один внесок у характери-

стичну функцію $C^{(\Pi)}(k_1, k_2)$.

Для термалізованих стиснених станів, що розглядаються в чисельних прикладах, вибірки комплексних амплітуд можна генерувати на вході інтерферометра [81]. Після цього вони переносяться на вихід за допомогою тієї самої матриці U , що описує інтерферометр. Для кожної вибіркової реалізації λ це має вигляд

$$\alpha^{(\lambda)} = U\tilde{\alpha}^{(\lambda)}, \quad \beta^{(\lambda)} = U^*\tilde{\beta}^{(\lambda)}. \quad (3.145)$$

Така форма є зручною, оскільки дія інтерферометра на фазово-просторові амплітуди має такий самий лінійний характер, як і дія інтерферометра на модові оператори. У такий спосіб інформація про інтерферометр входить у фазово-просторову вибірку без явного побудування всіх індивідуальних фотонних патернів.

Схематично обчислювальну процедуру можна записати як послідовність

$$\hat{\rho}_{\text{in}} \longrightarrow P_+(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \longrightarrow (\alpha, \beta) \longrightarrow C^{(\Pi)}(k_1, k_2) \longrightarrow \mathcal{P}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_l^n). \quad (3.146)$$

Перший перехід означає вибіркоче моделювання вхідного гаусівського стану. Другий перехід відповідає дії інтерферометра на фазово-просторові амплітуди. Третій перехід використовує локальні символи елементів ДОЗМ фотодетекторів. Останній перехід є оберненим дискретним перетворенням Фур'є, яке відновлює орбітальні ймовірності.

Формулу (3.141) можна переписати в додатному P -представленні як середнє за вибірками α та β :

$$C^{(\Pi)}(k_1, k_2) = \left\langle \prod_{i=1}^M [\pi_i(0|\alpha_i, \beta_i) + \pi_i(1|\alpha_i, \beta_i)e^{-ik_1\theta} + \pi_i(2|\alpha_i, \beta_i)e^{-ik_2\theta}] \right\rangle_{P_+}. \quad (3.147)$$

Тут $\langle \cdots \rangle_{P_+}$ означає середнє за додатним P -представленням, а

$$\pi_i(q|\alpha_i, \beta_i) = \frac{\langle \beta_i^* | \hat{\Pi}_q^{(i)} | \alpha_i \rangle}{\langle \beta_i^* | \alpha_i \rangle} \quad (3.148)$$

є нормованим недіагональним фазово-просторовим символом елемента ДОЗМ

у цій домовленості щодо позначень. На відміну від Q -символу, який є діагональним когерентним матричним елементом, тут виникає матричний елемент між двома когерентними станами. Нормувальний множник у знаменнику пов'язаний із вибором ядра додатного P -представлення і забезпечує правильне відтворення середніх значень операторів [104, 105].

Для скінченної кількості E_S вибірових реалізацій характеристична функція оцінюється як

$$C^{(\Pi)}(k_1, k_2) \approx \frac{1}{E_S} \sum_{\lambda=1}^{E_S} \prod_{i=1}^M \left[\pi_i(0|\alpha_i^{(\lambda)}, \beta_i^{(\lambda)}) + \pi_i(1|\alpha_i^{(\lambda)}, \beta_i^{(\lambda)})e^{-ik_1\theta} + \pi_i(2|\alpha_i^{(\lambda)}, \beta_i^{(\lambda)})e^{-ik_2\theta} \right]. \quad (3.149)$$

Ця формула показує, що в кожній реалізації потрібно обчислити лише добуток локальних внесків від усіх вихідних мод. Після усереднення за реалізаціями отримується оцінка характеристичної функції. Уся залежність від моделі фотодетектора входить через символи $\pi_i(q|\alpha_i, \beta_i)$.

Після оцінювання характеристичної функції орбітальні ймовірності відновлюються оберненим дискретним перетворенням Фур'є:

$$\mathcal{P}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_{\nu_2}^{\nu_1+2\nu_2}) = \frac{1}{(M+1)^2} \sum_{k_1=0}^M \sum_{k_2=0}^M C^{(\Pi)}(k_1, k_2) e^{i(k_1\nu_1+k_2\nu_2)\theta}. \quad (3.150)$$

Ця формула повертає саме ті згруповані ймовірності, які потрібні для подальших валідаційних процедур. Якщо розглядається лише підмножина орбіт з результатами 0, 1 та 2 в окремій моді, то відповідне нормування може виконуватися вже на рівні конкретного тесту. Таке нормування буде використане нижче при переході від орбітальних імовірностей до статистичних критеріїв порівняння.

Метод Монте-Карло все одно має вибірову похибку, яка зменшується зі збільшенням кількості реалізацій. Однак у цьому підході оцінюється не ймовірність окремого рідкісного патерну, а характеристична функція згрупованого розподілу, у якій внески всіх перестановок уже зібрані разом. Тому не потрібно окремо вибирати представників орбіти та множити середнє на великий фактор $|\mathcal{O}_l^n|$. Саме це робить метод характеристичної функції придатним для більших систем, ніж пряме сумування за патернами [81, 103]. У роботі [II] така фазово-

просторова процедура використовувалася для оцінювання орбітальних імовірностей у режимах, недоступних для повного перебору патернів.

Роботу методу через характеристичну функцію орбіт можна наочно проілюструвати на прикладі ГБВ-схеми з великою кількістю вихідних мод. Розглянемо схему з $M = 400$ вихідними модами, у якій невакуумні гаусівські стани подаються у $M' = 200$ вхідних портів, а решта входів перебуває у вакуумному стані. Для цього прикладу середня кількість фотонів після втрат становить приблизно 20. Детальні числові параметри стану, втрат та інтерферометра будуть задані нижче в чисельному підрозділі; тут важливо лише показати, як після відновлення орбітальних імовірностей можна одночасно аналізувати різні родини орбіт і порівнювати їх для різних моделей фотодетектування.

Для кожного значення повної кількості зареєстрованих подій n розглянемо трійку орбітальних імовірностей

$$\left(\mathcal{P}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_0^n), \mathcal{P}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_1^n), \mathcal{P}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_2^n) \right). \quad (3.151)$$

Ця трійка не є окремим валідаційним критерієм. Вона показує, що метод характеристичної функції дозволяє отримати ймовірності для секторів без кратної реєстрації, з однією модою з результатом 2 та з двома такими модами.

На рис. 3.4 показано ці орбітальні ймовірності для термалізованих стиснених вакуумних станів на вході та кількох моделей фотодетектування. Сині кола відповідають ідеальному детектору з розрізненням чисел фотонів. Червоні трикутники відповідають підрахунку імпульсів фотоструму за допомогою ЛФД у ЧБВ з мертвим часом $\tau_d = 0.05\tau_m$. Фіолетові зірки відповідають підрахунку імпульсів фотоструму за допомогою ННОФД з тим самим мертвим часом $\tau_d = 0.05\tau_m$ та релаксаційним часом $\tau_r = 0.2\tau_m$. Помаранчеві хрестики та зелені квадрати відповідають масивам порогових фотодетекторів з $K = 2$ та $K = 3$ піддетекторами відповідно.

Рис. 3.4 не є самостійним тестом валідації і не порівнює ГБВ-статистику з класичними альтернативами. Він показує інше: для однієї й тієї самої вхідної ГБВ-схеми різні моделі фотодетектування дають різні орбітальні ймовірності. Зокрема, детектори з частковим розрізненням чисел фотонів відкривають доступ до орбіт $\mathcal{O}_1^n$ та $\mathcal{O}_2^n$, які містять інформацію про кратні зареєстровані події. Саме такі орбітальні ймовірності далі використовуються як вхідні величини для протоколів валідації.

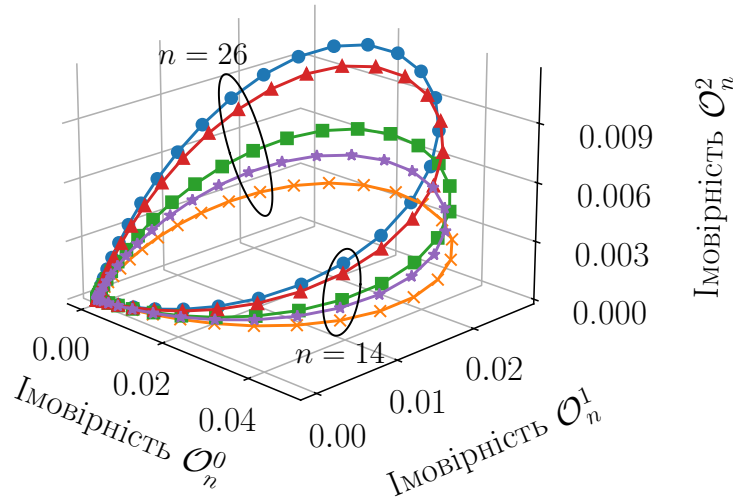


Рис. 3.4 — Орбітальні ймовірності $\mathcal{P}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_0^n)$, $\mathcal{P}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_1^n)$ та $\mathcal{P}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_2^n)$ для ГБВ-схеми з $M = 400$ вихідними модами, $M' = 200$ невакуумними входами та середньою кількістю фотонів після втрат близько 20. На вході використовуються термалізовані стиснені вакуумні стани. Кожна точка відповідає певному значенню повної кількості зареєстрованих подій n та певній моделі фотодетектування.

У межах цього підрозділу пряме вибіркове оцінювання і метод характеристичної функції виконують різні ролі. Прямий метод є прозорим і корисним для контролю в режимах з малим числом зареєстрованих подій. Метод через характеристичну функцію є основним для отримання орбітальних ймовірностей у великих схемах ГБВ [II].

3.8 Протоколи валідації за реалістичного розрізнення чисел фотонів

Отримані орбітальні ймовірності використаємо для побудови валідаційних протоколів. Мета полягає в перевірці того, чи узгоджуються згруповані статистики зареєстрованих результатів із цільовою моделлю ГБВ та чи відрізняються вони від вибраних класичних альтернатив. Такий підхід є природним для великих схем бозонної вибірки та ГБВ, де повний розподіл за всіма патернами практично недоступний, а згруповані або маргінальні статистики можуть бути оцінені з експериментальних даних [47, 48, 53, 66, 80–85].

Основними величинами в цьому підрозділі будуть орбітальні ймовірності

$$\mathcal{P}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_l^n), \quad (3.152)$$

де верхній індекс (Π) нагадує, що ймовірність обчислюється для конкретної моделі фотодетектування. У цьому записі n є повною кількістю зареєстрованих подій, а l є кількістю вихідних мод, у яких зареєстровано дві події. Такі орбіти є природними для аналізу впливу обмеженого розрізнення чисел фотонів, оскільки вони явно відокремлюють події без кратної реєстрації від подій із кратною реєстрацією в одній вихідній моді. Для ідеальних детекторів подібні орбіти використовувалися у зв'язку з графовими ознаками та валідаційними статистиками ГБВ [86–88]. У цьому розділі вони застосовуються вже до зареєстрованих патернів за реалістичного фотодетектування [II].

Валідаційні протоколи мають будуватися саме для спостережуваної статистики. Тому в них не можна безпосередньо використовувати ідеальний фотонний розподіл, якщо реальний детектор повертає кількість спрацювань, кількість імпульсів фотоструму або кількість спрацьованих піддетекторів. Коректним об'єктом порівняння є розподіл зареєстрованих патернів, обчислений за правилом Борна з тими елементами ДОЗМ, які відповідають реальній моделі фотодетектора. Необхідність такої адаптації валідаційних методів до реалістичних фотодетекторів є однією з основних ідей роботи [II].

3.8.1 Постановка валідаційного порівняння та моделі станів

Розглянемо дві групи гіпотез про джерело зареєстрованих даних. Першу гіпотезу позначатимемо як H_{tar} . Вона відповідає цільовій моделі ГБВ, у якій на входи інтерферометра подаються неklasичні гаусівські стани, а на виході використовується задана модель реалістичного фотодетектування. У чисельних прикладах нижче роль такої цільової моделі виконуватимуть термалізовані стиснені вакуумні стани.

Другу групу гіпотез позначатимемо як H_{cl} . Вона відповідає альтернативним класичним моделям, які мають невід'ємну функцію Глаубера–Сударшана і тому допускають класичне фазово-просторове моделювання [106]. У цьому розділі як такі альтернативи використовуватимуться теплові стани та сплюснені гаусівські стани. Подібні класичні альтернативи використовуються у валідаційних задачах для порівняння з ГБВ-статистикою [82, 106]. Ці моделі слугують характерними класичними наближеннями, з якими можна порівнювати орбітальні статистики цільової ГБВ-моделі.

Для конкретизації моделей, які порівнюються у валідаційних тестах, за-

дамо відповідні одномодові блоки комплексної коваріаційної матриці σ . Це та сама матриця σ , яка була введена в підрозділі 1.3 для комплексного фазово-просторового представлення гаусівських станів. Отже, наведені нижче матриці не вводять нового формалізму, а лише задають конкретні гаусівські вхідні стани, що використовуються в цьому розділі.

Для однієї вхідної моди термалізований стиснений вакуумний стан задаватимемо блоком

$$\sigma_{\text{tsv}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cosh 2r & (1 - \epsilon) \sinh 2r \\ (1 - \epsilon) \sinh 2r & \cosh 2r \end{pmatrix}. \quad (3.153)$$

Тут r є параметром стиснення, а ϵ описує термалізацію, тобто зменшення кореляцій порівняно з чистим стисненим вакуумним станом. При $\epsilon = 0$ отримуємо ідеалізований стиснений вакуумний стан у цій комплексній конвенції. При ненульовому ϵ стан залишається гаусівським, але стає змішаним. Саме така модель використовується нижче як цільова модель у чисельних прикладах [II].

Теплова класична альтернатива задається блоком

$$\sigma_{\text{th}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 2n_{\text{th}} & 0 \\ 0 & 1 + 2n_{\text{th}} \end{pmatrix}, \quad (3.154)$$

де n_{th} є середнім числом теплових фотонів у відповідній моді. Цей стан не містить кореляцій між компонентами в комплексному представленні й має невід'ємну функцію Глаубера–Сударшана. Тому він є природною простою класичною альтернативою до термалізованого стисненого стану.

Друга класична альтернатива задається блоком

$$\sigma_{\text{sq}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 2n_{\text{th}} & 2n_{\text{th}} \\ 2n_{\text{th}} & 1 + 2n_{\text{th}} \end{pmatrix}. \quad (3.155)$$

Надалі цей стан називатимемо сплющеним гаусівським станом. Він має кореляції між компонентами в комплексному представленні, але залишається класичним у сенсі невід'ємної функції Глаубера–Сударшана. Саме тому така модель є сильнішою класичною альтернативою, ніж простий тепловий стан: вона може імітувати частину статистичних особливостей стиснених станів, не будучи некласичною [82, 106].

У повній схемі ГБВ ці одномодові блоки розміщуються у вхідній багатомодовій коваріаційній матриці для тих M' портів, у які подаються невакуумні стани. Решта $M - M'$ вхідних мод перебуває у вакуумному стані. Після цього багатомодова коваріаційна матриця перетворюється інтерферометром і каналами втрат за загальними правилами, введеними в підрозділі 1.3. Тому в цьому підрозділі достатньо зафіксувати, які саме вхідні гаусівські блоки використовуються для цільової та класичних моделей.

У всіх порівняннях параметри класичних альтернатив потрібно вибирати так, щоб вони мали той самий характерний масштаб інтенсивності, що й цільова модель. Зокрема, параметр n_{th} підбирається так, щоб середня кількість фотонів після інтерферометра та втрат збігалася із середньою кількістю фотонів для термалізованих стиснених станів. Таке узгодження потрібне для того, щоб валідаційний тест розрізняв не просто різну яскравість джерел, а саме різну структуру багатомодової статистики [II].

Для цих моделей вводимо відповідні орбітальні ймовірності

$$\mathcal{P}_{\text{tar}}^{(\text{II})}(\mathcal{O}_l^n), \quad \mathcal{P}_{\text{th}}^{(\text{II})}(\mathcal{O}_l^n), \quad \mathcal{P}_{\text{sq}}^{(\text{II})}(\mathcal{O}_l^n). \quad (3.156)$$

Тут індекс tar відповідає термалізованим стисненим станам, індекс th — тепловим станам, а індекс sq — сплющеним гаусівським станам. Узагальнене позначення $\mathcal{P}_{\text{cl}}^{(\text{II})}(\mathcal{O}_l^n)$ використовуватимемо тоді, коли формула однакова для будь-якої з класичних альтернатив. Верхній індекс (II) підкреслює, що всі ці ймовірності обчислюються після однієї й тієї самої моделі фотодетектування.

Ця вимога є принциповою для коректної валідації. Порівнюються спостережувані статистики, отримані після одного й того самого інтерферометра, тих самих втрат і тієї самої моделі ДОЗМ фотодетектора. Змінюється лише вхідний стан, тоді як вимірювальна процедура залишається однаковою. Саме таке порівняння використовується у валідаційній частині роботи [II].

Експериментальна вибірка складається із зареєстрованих патернів

$$\mathbf{n}^{(r)}, \quad r = 1, \dots, N_{\text{samp}}, \quad (3.157)$$

де N_{samp} є загальним числом зареєстрованих реалізацій. Кожний патерн можна віднести до певної орбіти $\mathcal{O}_l^n$. Для цього визначають повну кількість зареєстро-

ваних подій

$$n(\mathbf{n}^{(r)}) = \sum_{i=1}^M n_i^{(r)} \quad (3.158)$$

та кількість мод з двома зареєстрованими подіями

$$l(\mathbf{n}^{(r)}) = \left| \left\{ i \in \{1, \dots, M\} : n_i^{(r)} = 2 \right\} \right|. \quad (3.159)$$

Отже, у валідаційних тестах реально вимірюється не прихований фотонний патерн перед детектуванням, а пара величин (n, l) , отримана із зареєстрованого патерну. Це саме ті дані, які залишаються після згрупування повної фотолічильної статистики за орбітами.

Емпіричну орбітальну ймовірність можна оцінити за частотою появи відповідної орбіти:

$$\hat{\mathcal{P}}_{\text{exp}}(\mathcal{O}_l^n) = \frac{1}{N_{\text{samp}}} \left| \left\{ r \in \{1, \dots, N_{\text{samp}}\} : \mathbf{n}^{(r)} \in \mathcal{O}_l^n \right\} \right|. \quad (3.160)$$

Саме такі емпіричні частоти можуть порівнюватися з теоретичними орбітальними ймовірностями. У чисельному моделюванні замість експериментальної вибірки можна використовувати вибірку, згенеровану з однієї з гіпотез. У цьому випадку протокол перевіряє, наскільки добре орбітальні статистики цільової моделі відрізняються від орбітальних статистик вибраної класичної альтернативи.

У подальшому будемо використовувати два типи тестів. Перший тест ґрунтується на критерії Пірсона для умовного розподілу повної кількості зареєстрованих подій n за фіксованого числа мод із двома зареєстрованими подіями l . Подібне використання критерію Пірсона для згрупованих імовірностей застосовувалося у валідаційних задачах ГБВ [81]. Другий тест є баєсівським і використовує логарифмічне відношення правдоподібностей для пар (n, l) . Баєсівські підходи є поширеним інструментом для валідації бозонної вибірки та ГБВ [50, 74–76, 107]. Обидва тести працюють не з повними патернами, а з орбітальними подіями.

3.8.2 Критерій Пірсона для умовних орбітальних розподілів

Перший протокол використовує умовний розподіл повної кількості зареєстрованих подій n за фіксованого значення l . Для цільової моделі цей розподіл визначимо як

$$\mathcal{P}_{\text{tar}}(n|l) = \frac{\mathcal{P}_{\text{tar}}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_l^n)}{\sum_{n' \in \mathcal{N}_l} \mathcal{P}_{\text{tar}}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_l^{n'})}. \quad (3.161)$$

Тут $\mathcal{N}_l$ є множиною значень n , які включаються в тест для заданого l . Аналогічно для теплової або сплющеної класичної альтернативи маємо

$$\mathcal{P}_{\text{cl}}(n|l) = \frac{\mathcal{P}_{\text{cl}}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_l^n)}{\sum_{n' \in \mathcal{N}_l} \mathcal{P}_{\text{cl}}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_l^{n'})}. \quad (3.162)$$

Таке нормування означає, що для кожного фіксованого l порівнюється форма розподілу за n , а не повна ймовірність появи всіх подій з цим l . Це зручно, коли різні значення l аналізуються окремо.

На практиці до тесту включають лише ті орбіти, для яких статистика є достатньою. Наприклад, можна вимагати, щоб відповідна орбіта з'являлася у вибірці не менше певного мінімального числа разів. Такий відбір потрібний для того, щоб оцінки рідкісних орбіт не визначалися випадковими флуктуаціями малої вибірки [II]. Позначимо кількість орбіт, що залишилися після такого відбору для фіксованого l , через k_l . Занумеруємо ці орбіти індексом

$$i = 1, \dots, k_l, \quad n[i] \in \mathcal{N}_l. \quad (3.163)$$

Тут $n[i]$ є повною кількістю зареєстрованих подій для i -ї орбіти з фіксованим значенням l .

Визначимо статистику

$$\chi^2(l) = N_l \sum_{i=1}^{k_l} \frac{[\mathcal{P}_{\text{tar}}(n[i]|l) - \mathcal{P}_{\text{cl}}(n[i]|l)]^2}{\mathcal{P}_{\text{tar}}(n[i]|l)}. \quad (3.164)$$

Тут N_l є кількістю подій у вибірці, які належать до орбіт із заданим значенням l і були включені в аналіз. У чисельному порівнянні N_l задає масштаб очікуваних статистичних флуктуацій. Якщо замість класичної моделі використовується ре-

альна експериментальна вибірка, то в чисельнику можна замінити $\mathcal{P}_{\text{cl}}(n[i]|l)$ на відповідну емпіричну оцінку $\hat{\mathcal{P}}_{\text{exp}}(n[i]|l)$. Ця форма є адаптацією критерію Пірсона до умовних орбітальних розподілів [81], використаних в [II].

Якщо дві статистики узгоджуються в межах вибірових флуктуацій, то очікується

$$\frac{\chi^2(l)}{k_l} \approx 1. \quad (3.165)$$

Якщо ж розподіли суттєво відрізняються, то має виконуватися

$$\frac{\chi^2(l)}{k_l} \gg 1. \quad (3.166)$$

Отже, величина $\chi^2(l)/k_l$ є зручним індикатором того, наскільки умовний орбітальний розподіл класичної альтернативи відрізняється від умовного орбітального розподілу цільової моделі.

Цей критерій не слід інтерпретувати як абсолютне доведення квантової переваги. Його значення залежить від вибраного набору орбіт, кількості реалізацій, способу оцінювання орбітальних імовірностей і конкретної класичної альтернативи. Тому $\chi^2(l)/k_l$ найкраще використовувати як порівняльний інструмент для фіксованої постановки задачі. У такій ролі він показує, чи дають орбітальні статистики достатньо сильну відмінність між цільовою моделлю ГБВ і вибраною класичною моделлю.

З погляду реалістичного фотодетектування цей тест має важливу особливість. Для порогових фотодетекторів доступним є лише випадок $l = 0$, оскільки один вихідний канал не може дати результат 2. Натомість детектори з частковим розрізненням чисел фотонів, наприклад масиви порогових фотодетекторів або схеми підрахунку імпульсів фотоструму, відкривають доступ до статистик з $l = 1, 2, \dots$ [24, 28, 29]. Тому навіть недосконале розрізнення чисел фотонів може збільшувати кількість незалежних орбітальних ознак, які використовуються у валідації.

3.8.3 Баєсівський тест за орбітальними подіями

Другий протокол ґрунтується на баєсівському порівнянні двох гіпотез [50, 107]. На відміну від попереднього тесту, тут одночасно використовуються пари (n, l) ,

тобто повна кількість зареєстрованих подій і кількість мод із двома зареєстрованими подіями. Кожна подія в такому тесті описується не повним патерном n , а лише тим, до якої орбітальної групи вона належить. Це знову дозволяє працювати зі згрупованими статистиками замість повного розподілу за патернами.

Нехай $\mathcal{S}_{\text{orb}}$ є множиною пар (n, l) , які включаються в баєсівський тест. Для цільової моделі введемо нормований розподіл на цій множині:

$$\mathcal{P}_{\text{tar}}(n, l) = \frac{\mathcal{P}_{\text{tar}}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_l^n)}{\sum_{(n', l') \in \mathcal{S}_{\text{orb}}} \mathcal{P}_{\text{tar}}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_{l'}^{n'})}. \quad (3.167)$$

Для класичної альтернативи аналогічно маємо

$$\mathcal{P}_{\text{cl}}(n, l) = \frac{\mathcal{P}_{\text{cl}}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_l^n)}{\sum_{(n', l') \in \mathcal{S}_{\text{orb}}} \mathcal{P}_{\text{cl}}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_{l'}^{n'})}. \quad (3.168)$$

Обидва розподіли нормуються на тій самій множині орбітальних подій. Якщо певна орбіта має нульову або надто малу ймовірність в одній з моделей, її потрібно або виключити з аналізу, або ввести однакове мале регуляризаційне значення. Це необхідно для того, щоб логарифмічне відношення правдоподібностей було коректно визначеним.

Нехай вибірка орбітальних подій має вигляд

$$\{(n_{(j)}, l_{(j)})\}_{j=1}^{N_0}, \quad (3.169)$$

де N_0 є кількістю подій, використаних у баєсівському тесті. У реальному експерименті ці пари отримуються безпосередньо з зареєстрованих патернів. У чисельному моделюванні їх можна генерувати з нормованого орбітального розподілу цільової моделі. У такому підході не потрібно симулювати повний патерн n , якщо для задачі достатньо знати лише пару (n, l) . Саме такий підхід використовується для баєсівського порівняння в роботі [II].

Баєсівський показник визначимо як середнє логарифмічне відношення правдоподібностей:

$$\Delta H = \frac{1}{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} \ln \frac{\mathcal{P}_{\text{tar}}(n_{(j)}, l_{(j)})}{\mathcal{P}_{\text{cl}}(n_{(j)}, l_{(j)})}. \quad (3.170)$$

Ця величина є логарифмічним відношенням правдоподібностей у розрахунку на одну орбітальну подію [50, 107]. Якщо $\Delta H > 0$, то вибірка краще узгоджується з цільовою моделлю, ніж із класичною альтернативою. Якщо $\Delta H < 0$, то перевагу має класична альтернатива. Чим більшою є додатна величина ΔH , тим сильніше орбітальні дані підтримують цільову модель у межах вибраного набору гіпотез.

У цій формі баєсівський тест є зручним для порівняння детекторів з різним ступенем розрізнення чисел фотонів. Для кожної моделі фотодетектування спочатку обчислюються або оцінюються орбітальні ймовірності $\mathcal{P}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_l^n)$. Після цього з них будуються нормовані розподіли $\mathcal{P}_{\text{tar}}(n, l)$ та $\mathcal{P}_{\text{cl}}(n, l)$. Нарешті, за формулою (3.170) оцінюється, наскільки орбітальні події розрізняють дві гіпотези.

Порівняно з критерієм Пірсона, баєсівський тест не фіксує окреме значення l . Він використовує спільний розподіл за парами (n, l) , тому може одночасно враховувати орбіти без кратної реєстрації та орбіти з кратною реєстрацією. Якщо детектор дає доступ до результатів $n_i = 2$, то до тесту можна включити додаткові орбіти з $l > 0$, які недоступні для порогової моделі. Тому навіть мінімальне розрізнення чисел фотонів може підвищити впевненість у баєсівському порівнянні цільової моделі з класичною альтернативою [II].

Отже, обидва протоколи мають спільну структуру. Спочатку за вибраною моделлю стану, інтерферометра, втрат і фотодетектора обчислюються орбітальні ймовірності $\mathcal{P}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_l^n)$. Потім ці ймовірності перетворюються або на умовні розподіли $\mathcal{P}(n|l)$ для критерію Пірсона, або на спільні розподіли $\mathcal{P}(n, l)$ для баєсівського тесту. Після цього цільова модель порівнюється з тепловою або сплющеною класичною альтернативою за тими самими спостережуваними орбітальними величинами.

Головний висновок цього підрозділу полягає в тому, що модель фотодетектування входить у валідацію не як зовнішня поправка. Вона визначає самі орбітальні ймовірності, з яких будуються статистичні тести. Тому протоколи валідації мають застосовуватися до зареєстрованих патернів і відповідних елементів ДОЗМ, а не до ідеального фотонного розподілу.

3.9 Чисельні приклади та порівняння моделей детекторів

У цьому підрозділі застосуємо побудований вище підхід до конкретних чисельних прикладів. Спочатку задамо фізичні параметри ГБВ-схем і моделі фотодетектування, які використовуються в подальшому аналізі. Після цього наведемо кількісні валідаційні показники у вигляді таблиць. Наприкінці подамо наочні графіки орбітальних розподілів, які ілюструють, як змінюється форма згрупованої статистики для різних моделей фотодетектування.

Такий порядок потрібний тому, що основним результатом цього підрозділу є кількісне порівняння цільової ГБВ-моделі з класичними альтернативами. Графіки, наведені нижче, виконують допоміжну роль. Вони не є прямим графічним поданням табличних чисел, а показують форму орбітальних розподілів $\mathcal{P}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_l^n)$ як функції повної кількості зареєстрованих подій n . Тому параметри для табличних розрахунків і параметри для ілюстративних графіків будуть задані окремо у відповідних підпунктах.

Надалі цільовою моделлю є ГБВ з термалізованими стисненими вакуумними станами на вході. Для валідаційного порівняння використовуються класичні альтернативи у вигляді теплових станів та сплюснених гаусівських станів. Основне питання полягає в тому, як конкретна модель фотодетектування і, зокрема, наявність часткового розрізнення чисел фотонів змінюють орбітальні статистики та впливають на здатність відрізнити цільову модель від класичних альтернатив.

3.9.1 Параметри та моделі фотодетектування

Розглянемо дві конфігурації ГБВ, які позначатимемо як випадки А та В. Вони відрізняються кількістю вихідних мод, кількістю вхідних стиснених станів та параметром стиснення. Ці два приклади вибрані тому, що вони відповідають різним режимам орбітальної статистики.

У випадку А маємо велику кількість вихідних мод і помірне стиснення. Цей режим використовується для порівняння умовних орбітальних розподілів за критерієм Пірсона. Він є зручним для такого аналізу, оскільки події без кратної реєстрації та події з малою кількістю мод із результатом 2 мають помітну статистичну вагу.

Випадок В відповідає меншій кількості вихідних мод і більшому пара-

метру стиснення. Цей режим використовується для баєсівського порівняння. У ньому порогове фотодетектування втрачає більше інформації про кратність подій, тому навіть обмежене розрізнення чисел фотонів може давати помітну перевагу.

В обох випадках термалізовані стиснені вакуумні стани подаються у M' вхідних портів інтерферометра з M вихідними портами. Решта $M - M'$ вхідних мод перебуває у вакуумному стані. Одномодові блоки комплексної коваріаційної матриці для термалізованих стиснених станів, теплових станів і сплюснених станів було задано в підрозділі 3.8.1, тому тут ці матриці повторно не наводимо.

Для кількісних валідаційних розрахунків, що відповідають роботі [II], використовуються параметр термалізації $\epsilon = 0.1$ та загальна ефективність $\eta = 0.8$, яка включає втрати в інтерферометрі та втрати детектування. Для цього набору параметрів середнє число фотонів після усіх втрат визначається як $n_{\text{ph}} = \eta M' \sinh^2 r$. Саме ці значення n_{ph} наведено в табл. 3.2. Для ілюстративних графіків нижче використовуються ті самі структурні параметри M , M' та r , але інші значення ϵ та η . Тому відповідні середні числа фотонів після втрат будуть вказані окремо в підпункті з графіками.

Табл. 3.2 — Параметри чисельних прикладів А та В для валідаційних розрахунків

Випадок	M	M'	r	n_{ph}
А	400	200	0.3466	20
В	144	50	1	55.24

Примітка. Тут M є кількістю вихідних портів, M' — кількістю вхідних портів, у які подаються термалізовані стиснені стани, r — параметром стиснення, а n_{ph} — середнім числом фотонів після усіх втрат для $\epsilon = 0.1$ та $\eta = 0.8$.

У чисельних порівняннях розглядатимемо такі моделі фотодетектування: ідеальний детектор з розрізненням чисел фотонів, пороговий фотодетектор, масиви порогових фотодетекторів з $K = 2$ та $K = 3$, підрахунок імпульсів фотоструму за допомогою ЛФД та підрахунок імпульсів фотоструму за допомогою ННОФД. Масиви порогових фотодетекторів описують схеми з частковим розрізненням чисел фотонів, у яких світло розділяється між кількома пороговими піддетекторами [20–24]. Підрахунок імпульсів фотоструму для ЛФД описується з урахуванням мертвого часу [25–27, 29, 98–101], а для ННОФД додатково враховується релаксаційний час [28, 108–113].

Для порівняння за критерієм Пірсона у випадку А використовуємо ЛФД з мертвим часом $\tau_d = 0.05\tau_m$, де τ_m є тривалістю ЧВВ. Для ННОФД у тому самому випадку додатково враховується релаксаційний час $\tau_r = 0.2\tau_m$. У баєсівському порівнянні для випадку В розглядаються, зокрема, ЛФД з мертвим часом $\tau_d = \tau_m/3$ та ЛФД з мертвим часом $\tau_d = 0.25\tau_m$. Ці параметри потрібні для того, щоб порівняти не абстрактні межі детектування, а різні фізично мотивовані моделі реалістичного розрізнення чисел фотонів.

3.9.2 Кількісні валідаційні показники

Спочатку розглянемо кількісні валідаційні показники для параметрів табл. 3.2, тобто для $\epsilon = 0.1$ та $\eta = 0.8$. У цьому підпункті використовуються саме ті значення n_{ph} , які наведено в табл. 3.2. Тому результати цього підпункту слід розглядати як кількісну частину валідаційного аналізу, а не як числове продовження ілюстративних графіків, наведених далі.

Цільовою моделлю є ГБВ з термалізованими стисненими вакуумними станами на вході. Класичними альтернативами є теплові стани та сплюснені гаусівські стани, визначені в підрозділі 3.8.1. В обох класичних моделях параметр n_{th} вибирається так, щоб середнє число фотонів після усіх втрат збігалось з n_{ph} для відповідного випадку А або В.

Спочатку порівняємо орбітальні статистики цільової моделі з класичними альтернативами за критерієм Пірсона. Для кількісного порівняння використаємо статистику Пірсона, введену в підрозділі 3.8.2, подібно до того, як згруповані ймовірності використовувалися для валідації в роботі [81]. У випадку А класичні вибірки будувалися окремо для різних моделей фотодетектування. Для підрахунку імпульсів фотоструму за допомогою ННОФД використовувалося 10^5 патернів, а для інших моделей детектування — 10^7 патернів. До аналізу включалися лише ті орбіти, для яких відповідні патерни з'являлися у вибірці більше ніж десять разів. Це обмеження потрібне для того, щоб емпіричні оцінки класичних орбітальних імовірностей не визначалися надто рідкісними подіями.

Результати для величини χ^2/k_l наведено в табл. 3.3. Порожні місця для порогового фотодетектора означають, що відповідні орбіти недоступні в цій моделі. Пороговий фотодетектор має лише результати 0 та 1, тому він не може зареєструвати подію з $n_i = 2$ і, відповідно, не дає доступу до орбіт із $l > 0$.

Табл. 3.3 — Статистика Пірсона χ^2/k_l для різних моделей фотодетектування у випадку А

Модель фотодетектування	Теплові стани			Сплющені стани		
	$\mathcal{O}_0^n$	$\mathcal{O}_1^n$	$\mathcal{O}_2^n$	$\mathcal{O}_0^n$	$\mathcal{O}_1^n$	$\mathcal{O}_2^n$
Детектор з ідеальним розрізненням чисел фотонів	1.1×10^4	5.3×10^3	3.1×10^3	7.9×10^3	3.6×10^3	2.1×10^3
Пороговий фотодетектор	2.0×10^4	—	—	1.5×10^4	—	—
Масив порогових фотодетекторів, $K = 2$	1.4×10^4	5.5×10^3	2.4×10^3	9.8×10^3	3.8×10^3	1.6×10^3
Масив порогових фотодетекторів, $K = 3$	1.3×10^4	5.5×10^3	2.8×10^3	9.0×10^3	3.8×10^3	1.9×10^3
Підрахунок імпульсів фотоструму ЛФД	1.2×10^4	5.3×10^3	3.2×10^3	8.4×10^3	3.7×10^3	2.1×10^3
Підрахунок імпульсів фотоструму ННОФД	1.7×10^2	6.3×10^1	3.4×10^1	1.2×10^2	4.3×10^1	1.9×10^1

Примітка. Порівнюється орбітальна статистика термалізованих стиснених станів із тепловими та сплющеними класичними альтернативами. Параметри відповідають табл. 3.2: $\epsilon = 0.1$ та $\eta = 0.8$.

Для всіх розглянутих моделей фотодетектування значення χ^2/k_l суттєво перевищують одиницю. Це означає, що умовні орбітальні розподіли цільової ГБВ-моделі помітно відрізняються від відповідних розподілів теплової та сплющеної класичних альтернатив. Отже, орбітальні статистики можуть бути використані як практичний інструмент валідації.

Водночас ці числа не слід інтерпретувати як абсолютну міру переваги одного детектора над іншим. Величина χ^2/k_l залежить від кількості вибраних орбіт, обсягу вибірки, значення N_l , способу відбору подій і конкретної класичної альтернативи. Тому пряме порівняння числових значень між різними рядками таблиці має лише обмежений зміст. Коректний висновок полягає не в тому, що певний детектор завжди є кращим за інший за значенням χ^2/k_l , а в тому, що моделі з частковим розрізненням чисел фотонів відкривають доступ до додаткових орбітальних статистик.

Особливо важливою є різниця між пороговим фотодетектуванням і моделями з частковим розрізненням чисел фотонів. Пороговий фотодетектор дозволяє використовувати лише орбіти з $l = 0$. Натомість масиви порогових фотодетекторів, ЛФД та ННОФД дають доступ до орбіт з $l = 1$ та $l = 2$. Ці орбіти містять інформацію про кратні зареєстровані події і тому можуть підсилювати валідаційне порівняння.

Далі розглянемо баєсівський показник ΔH , визначений у підрозділі 3.8.3; подібні баєсівські критерії застосовувалися для валідації бозонної вибірки та ГБВ [50, 107]. Для цього використовується випадок В. У цьому порівнянні цільовою моделлю знову є термалізовані стиснені вакуумні стани, а класичною альтернативою є сплющені стани. Баєсівський тест будується не за повними патернами, а за парами (n, l) , які визначають відповідні орбіти. Такі пари ге-

неруються з нормованого орбітального розподілу, введеного в підрозділі 3.8.3. Аналогічний розподіл будується для сплющеної класичної альтернативи.

Результати для випадку В наведено в табл. 3.4. У всіх рядках таблиці використовується одна й та сама пара гіпотез: термалізовані стиснені стани проти сплюснених станів. Відрізняється лише модель фотодетектування.

Табл. 3.4 — Баєсівський показник ΔH для відрізнєння орбітальної статистики у випадку В

Модель фотодетектування	ΔH
Пороговий фотодетектор	0.0035
Масив порогових фотодетекторів, $K = 2$	0.013
Масив порогових фотодетекторів, $K = 3$	0.017
Підрахунок імпульсів фотоструму ЛФД, $\tau_d = \tau_m/3$	0.011
Підрахунок імпульсів фотоструму ЛФД, $\tau_d = 0.25\tau_m$	0.015
Детектор з ідеальним розрізнєнням чисел фотонів	0.026

Примітка. Показник ΔH використано для відрізнєння орбітальної статистики термалізованих стиснених станів від сплюснених станів. Кількість орбітальних подій у вибірці дорівнює $N_O = 10^7$. Параметри відповідають табл. 3.2: $\epsilon = 0.1$ та $\eta = 0.8$.

Значення ΔH для порогового фотодетектора є додатним, але малим. Це означає, що орбітальні дані в середньому підтримують цільову модель, однак відмінність від сплющеної класичної альтернативи є слабкою. Натомість уже масив порогових фотодетекторів з $K = 2$ суттєво збільшує баєсівський показник. Подальше збільшення до $K = 3$ дає ще більшу величину ΔH . Подібне покращення спостерігається і для підрахунку імпульсів фотоструму за допомогою ЛФД, особливо при меншому відношенні τ_d/τ_m .

Ідеальний детектор з розрізнєнням чисел фотонів дає найбільше значення ΔH серед наведених моделей. Це очікувано, оскільки такий детектор зберігає максимальну інформацію про кратність подій у вихідних модах. Проте головний висновок полягає не лише в перевазі ідеального детектора. Важливішим є те, що навіть недосконале розрізнєння чисел фотонів помітно збільшує баєсівську впевненість порівняно з пороговою моделлю.

Отже, кількісні результати показують два важливі висновки. По-перше, модель фотодетектування істотно змінює орбітальні ймовірності, зокрема для орбіт із кратними зареєстрованими подіями. По-друге, ця зміна безпосередньо впливає на валідаційні протоколи. Порогове фотодетектування вже може давати помітну відмінність між цільовою ГБВ-статистикою та класичними альтернати-

вами, але реалістичне розрізнення чисел фотонів додає нові орбітальні ознаки і може підвищити впевненість у баєсівському порівнянні.

3.9.3 Наочні орбітальні розподіли

Після кількісного порівняння наведемо додаткові графічні ілюстрації орбітальних розподілів. Для цих рисунків використано ті самі структурні параметри схем, тобто ті самі значення M , M' та r , але інші значення параметра термалізації та загальної ефективності: $\epsilon = 0.08$ та $\eta = 0.7$. Зменшення η змінює середнє число фотонів після втрат, тоді як зміна ϵ змінює кореляційну структуру термалізованих стиснених станів. Для цих параметрів середнє число фотонів після втрат становить $n_{\text{ph}}^{(A)} = 0.7 \cdot 200 \sinh^2(0.3466) \approx 17.50$ та $n_{\text{ph}}^{(B)} = 0.7 \cdot 50 \sinh^2(1) \approx 48.34$. Отже, ці графіки належать до тих самих типів схем А та В, але не є прямим графічним поданням чисел з табл. 3.3 та табл. 3.4. Крім того, для графічних прикладів з ЛФД явно використовується мертвий час $\tau_d = 0.25\tau_m$. Роль цих графіків полягає в тому, щоб наочно показати, як модель фотодетектування змінює форму орбітальних розподілів $\mathcal{P}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_0^n)$, $\mathcal{P}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_1^n)$ та $\mathcal{P}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_2^n)$ як функцій повної кількості зареєстрованих подій n .

Для порогового фотодетектора доступною є лише родина орбіт $\mathcal{O}_0^n$, оскільки така модель не розрізняє одну та кілька подій в одній моді. Тому пороговий випадок не дає повної трійки орбітальних розподілів. Натомість моделі з частковим розрізненням чисел фотонів дають доступ також до орбіт $\mathcal{O}_1^n$ та $\mathcal{O}_2^n$, які містять інформацію про моди з результатом 2. Саме тому нижче основну увагу приділено моделям, для яких можна порівняти всі три родини орбіт.

Як перший приклад розглянемо масив порогових фотодетекторів з $K = 3$. Ця модель є простою реалізацією часткового розрізнення чисел фотонів: результат у кожній моді відповідає кількості спрацьованих піддетекторів. На рис. 3.5 показано три орбітальні розподіли для цієї моделі в конфігурації А.

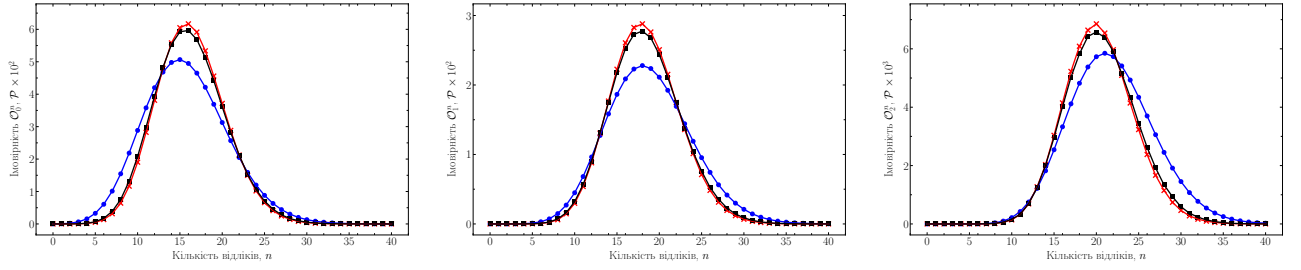


Рис. 3.5 — Ілюстративні орбітальні розподіли для масиву порогових фотодетекторів з $K = 3$ у конфігурації А при $\epsilon = 0.08$, $\eta = 0.7$ та $n_{\text{ph}} \approx 17.50$. Зліва направо показано $\mathcal{P}^{(\text{II})}(\mathcal{O}_0^n)$, $\mathcal{P}^{(\text{II})}(\mathcal{O}_1^n)$ та $\mathcal{P}^{(\text{II})}(\mathcal{O}_2^n)$ як функції повної кількості зареєстрованих подій n . Різні криві відповідають цільовій ГБВ-моделі та класичним альтернативам.

Другий приклад відповідає підрахунку імпульсів фотоструму за допомогою ЛФД з мертвим часом $\tau_d = 0.25\tau_m$. На відміну від масиву порогових фотодетекторів, тут обмеження на розрізнення чисел подій виникає не через поділ світла між піддетекторами, а через часову структуру реєстрації. Після реєстрації однієї події ЛФД протягом часу τ_d не може зареєструвати наступну подію, що змінює статистику кратних результатів. Тому така модель є фізично іншою реалізацією неповного розрізнення чисел фотонів.

На рис. 3.6 показано відповідні орбітальні розподіли в конфігурації А. Порівняння з рис. 3.5 демонструє, що різні механізми реалістичного фотодетектування можуть давати різні форми розподілів навіть для тих самих родин орбіт.

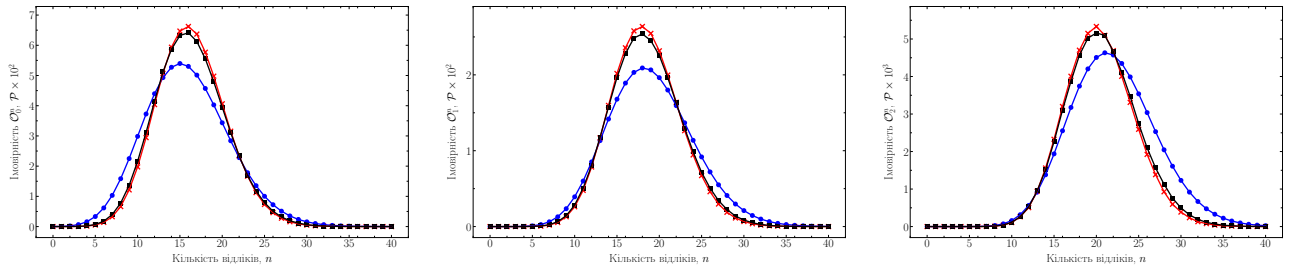


Рис. 3.6 — Ілюстративні орбітальні розподіли для підрахунку імпульсів фотоструму за допомогою ЛФД з мертвим часом $\tau_d = 0.25\tau_m$ у конфігурації А при $\epsilon = 0.08$, $\eta = 0.7$ та $n_{\text{ph}} \approx 17.50$. Зліва направо показано $\mathcal{P}^{(\text{II})}(\mathcal{O}_0^n)$, $\mathcal{P}^{(\text{II})}(\mathcal{O}_1^n)$ та $\mathcal{P}^{(\text{II})}(\mathcal{O}_2^n)$. Порівняння з масивом порогових фотодетекторів показує, що фізичний механізм фотодетектування впливає на форму орбітальних розподілів та на відносну вагу орбіт з кратною реєстрацією.

Вплив навіть обмеженого розрізнення чисел фотонів у реалістичній моделі ЛФД можна наочно побачити, якщо порівняти її з пороговим фотодетектуванням. Розглянемо для цього конфігурацію В з $M = 144$. Цей приклад відповідає

параметрам $\epsilon = 0.08$ та $\eta = 0.7$, тому середнє число фотонів після втрат становить $n_{\text{ph}} \approx 48.34$. На рис. 3.7 порівнюються розподіли $\mathcal{P}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_0^n)$ для порогового фотодетектора та для підрахунку імпульсів фотоструму за допомогою ЛФД з мертвим часом $\tau_d = 0.25\tau_m$. Це порівняння показує, що навіть у родині орбіт $\mathcal{O}_0^n$, яка доступна пороговому детектору, реалістичне розрізнення чисел фотонів змінює форму орбітального розподілу.

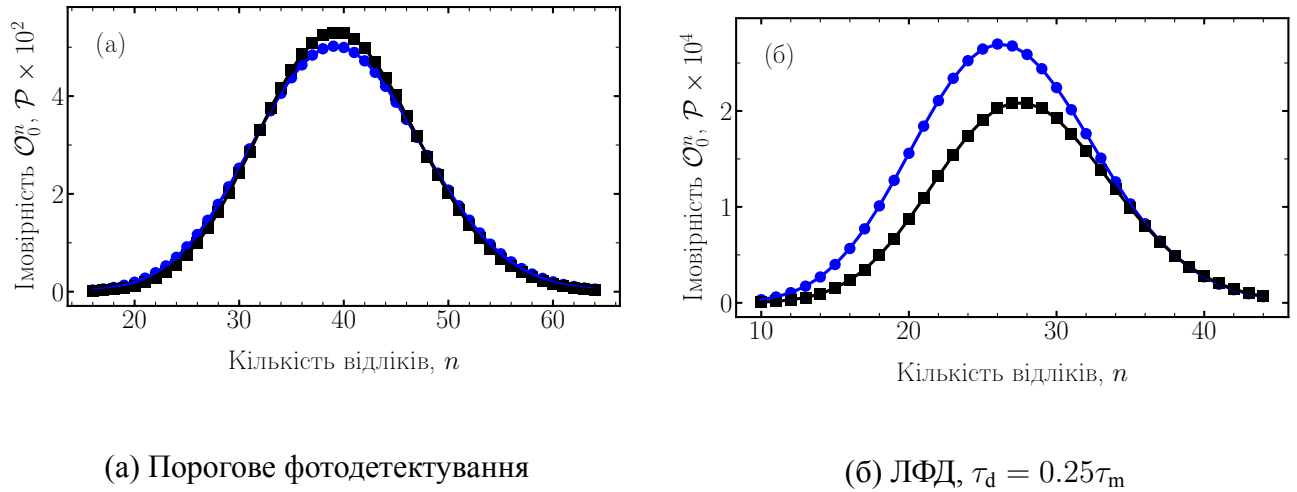


Рис. 3.7 — Орбітальні ймовірності $\mathcal{P}^{(\Pi)}(\mathcal{O}_0^n)$ для конфігурації В з $M = 144$ при $\epsilon = 0.08$, $\eta = 0.7$ та $n_{\text{ph}} \approx 48.34$. На панелі (а) показано результат для порогового фотодетектування, а на панелі (б) — для підрахунку імпульсів фотоструму за допомогою ЛФД з мертвим часом $\tau_d = 0.25\tau_m$. Порівняння показує, що навіть для родини $\mathcal{O}_0^n$ форма згрупованого розподілу залежить від моделі фотодетектора.

Наведені графіки доповнюють кількісні результати, подані вище. Вони показують, що перехід від порогового фотодетектування до моделей з частковим розрізненням чисел фотонів змінює форму орбітальних розподілів. Для таких моделей стають доступними орбіти $\mathcal{O}_1^n$ та $\mathcal{O}_2^n$, які не можна використати в пороговій схемі. Ці додаткові орбітальні родини містять інформацію про кратні зареєстровані події і розширюють набір ознак, за якими можна порівнювати цільову ГБВ-модель з класичними альтернативами.

Порівняння для конфігурації В також показує, що навіть у межах родини $\mathcal{O}_0^n$ розподіл для порогового фотодетектора і для ЛФД з мертвим часом $\tau_d = 0.25\tau_m$ має різну форму. Отже, навіть обмежене розрізнення чисел фотонів у реалістичній моделі ЛФД може робити відмінність між цільовою ГБВ-моделлю та класичною альтернативою помітнішою. Саме тому моделі з реалістичним, але неідеальним, розрізненням чисел фотонів є корисними для валідації: вони да-

ють не лише точніший опис експерименту, а й додаткові орбітальні статистики для розрізнення цільової та класичних моделей.

3.10 Висновки до розділу

У цьому розділі було розглянуто гаусівську бозонну вибірку за умов реалістичного фотодетектування на виході багатомодового інтерферометра. Основна увага була зосереджена не на доведенні обчислювальної складності задачі вибірки і не на повній сертифікації пристрою, а на послідовному описі спостережуваної фотолічильної статистики. На відміну від ідеалізованої постановки, у якій результат вимірювання ототожнюється з істинним фотонним патерном, у цьому розділі розрізнялися фотонні патерни перед вимірюванням і зареєстровані патерни, що реально формуються фотодетекторами. Саме такий підхід дозволяє включати втрати, обмежене розрізнення чисел фотонів, мертвий час, релаксаційний час і різні моделі фотодетектування через відповідні елементи ДОЗМ.

Спочатку було сформульовано фізичну модель ГБВ з багатомодовими гаусівськими станами на вході, лінійним інтерферометром, втратами та локальним фотодетектуванням на виходах. У цій моделі стан, що надходить до детекторів, задає розподіл істинних фотонних конфігурацій, тоді як спостережуваними величинами є результати конкретного процесу детектування. У реалістичному випадку зареєстрований результат може відповідати не числу фотонів у моді, а кількості спрацювань, кількості спрацьованих піддетекторів або кількості імпульсів фотоструму. Тому ймовірність зареєстрованого патерну було записано через правило Борна з елементами ДОЗМ, які описують саме вибрану модель фотодетектора.

Далі було отримано загальний матрично-функціональний запис фотолічильних імовірностей для гаусівського вихідного стану. У цьому записі стан, інтерферометр і втрати входять через Q -коваріаційну матрицю σ_Q та матрицю $A = I - \sigma_Q^{-1}$, тоді як модель фотодетектора задається через Q -символи елементів ДОЗМ. Такий поділ є важливим, оскільки він відокремлює підготовку та перетворення багатомодового стану від фізичної моделі його вимірювання. У відповідних граничних випадках отриманий формалізм відтворює відомі вирази для ідеального розрізнення чисел фотонів і порогового фотодетектування, а також дозволяє описувати масиви порогових фотодетекторів і схеми підрахунку

імпульсів фотоструму.

Для конкретних моделей детектування було показано, що зміна фотодетектора змінює не лише числові значення ймовірностей, а й сам матричний функціонал, через який ці ймовірності обчислюються. У випадку ідеального розрізнення чисел фотонів виникає хафніанова форма. Для порогових фотодетекторів відповідний функціонал пов'язаний із торонтоніаном. Для масивів порогових фотодетекторів функціонал додатково враховує скінченну кількість елементарних піддетекторів у масиві. Для схем підрахунку імпульсів фотоструму у формалізм входять часові параметри вимірювання, зокрема мертвий час, а для надпровідникових нанодротових однофотонних детекторів також релаксаційний час.

Після побудови фотолічильної статистики було розглянуто задачу валідації ГБВ у реалістичній постановці. Було підкреслено, що повна реконструкція розподілу за окремими патернами є практично недоступною для великих багатомодових систем через швидке зростання кількості можливих подій. Тому замість повного розподілу було використано згруповані статистики зареєстрованих патернів. Таке групування дозволяє працювати з імовірностями, які можуть бути оцінені з експериментальної вибірки і водночас залишаються чутливими до моделі фотодетектування.

Як конкретний клас згрупованих статистик було введено орбіти зареєстрованих патернів. Такі орбіти групують патерни не за конкретними номерами вихідних мод, а за набором зареєстрованих значень. Особливу роль відіграють орбіти $\mathcal{O}_l^n$, де n є повною кількістю зареєстрованих подій, а l є кількістю вихідних мод із двома зареєстрованими подіями. Ці орбіти є зручними для аналізу кратної реєстрації в даних і безпосередньо відображають можливості конкретного фотодетектора. Для порогового фотодетектування доступною залишається лише статистика без розрізнення кратності в окремій моді, тоді як детектори з частковим розрізненням чисел фотонів відкривають доступ до орбіт із $l > 0$.

Було також розглянуто способи оцінювання орбітальних імовірностей. Пряме або вибіркове сумування за патернами орбіти є прозорим методом і може використовуватися як контрольний підхід для малих значень повної кількості зареєстрованих подій. Однак у великих системах кількість патернів в одній орбіті швидко зростає, тому повне пряме сумування стає практично

непридатним. Масштабованим підходом є оцінювання через характеристичну функцію орбіт із використанням фазово-просторового моделювання в додатному P -представленні. У цьому підході безпосередньо оцінюється не ймовірність окремого патерну, а згрупований розподіл, який потім відновлюється оберненим дискретним перетворенням Фур'є.

На основі орбітальних імовірностей було сформульовано два валідаційні протоколи. Перший протокол використовує критерій Пірсона для умовного розподілу повної кількості зареєстрованих подій n за фіксованого значення l . Другий протокол є баєсівським і ґрунтується на логарифмічному відношенні правдоподібностей для пар (n, l) . В обох випадках порівнюються не ідеальні фотонні розподіли, а саме спостережувані орбітальні статистики, отримані для одного й того самого інтерферометра, однакових втрат і однакової моделі фотодетектування. Як цільова модель використовувалися термалізовані стиснені вакуумні стани, а як класичні альтернативи — теплові та сплюснені гаусівські стани.

Чисельні приклади показали, що модель фотодетектора суттєво впливає на орбітальні ймовірності. Ідеальні детектори з розрізненням чисел фотонів зберігають найбільше інформації про кратність подій у вихідних модах. Масиви порогових фотодетекторів і схеми підрахунку імпульсів фотоструму дають лише часткове розрізнення чисел фотонів, але навіть таке обмежене розрізнення змінює доступні орбітальні статистики. Зокрема, воно робить доступними статистики з $l > 0$, які не можуть бути отримані зі звичайного порогового фотодетектування. Це підвищує інформативність порівняння цільової ГБВ-моделі з класичними альтернативами, особливо в баєсівському тесті.

Таким чином, у межах цього розділу показано, що реалістичне фотодетектування з неідеальним або частковим розрізненням чисел фотонів не можна розглядати як другорядну технічну поправку до ідеальної ГБВ. Воно впливає на розподіл зареєстрованих патернів, форму матричного функціонала, набір доступних згрупованих статистик і кількісні результати валідаційних тестів. Тому коректний аналіз ГБВ з реалістичними детекторами має формулюватися на рівні конкретної ДОЗМ фотодетектора та реально спостережуваних результатів вимірювання. Основні результати цього розділу ґрунтуються на роботі [II].

Загальні висновки

У дисертаційній роботі досліджено вимірювальну статистику багатомодового квантового світла у задачах, де спостережуваний результат істотно залежить від конкретної схеми вимірювання. Основну увагу приділено двом напрямам: виявленню неklasичних кореляцій світла в гібридній неперервно-дискретній схемі та опису фотолічильної статистики гаусівської бозонної вибірки за наявності реалістичного розрізнення чисел фотонів. Для цього використано операторний опис квантових станів, формалізм додатних операторнозначних мір та фазово-просторові представлення. Такий підхід дозволяє аналізувати не лише квантові стани, а й вимірювальну поведінку, тобто статистику результатів, що формується парою “стан плюс вибрана схема вимірювання”.

Гібридні вимірювання та неklasичні кореляції світла. Продемонстровано неklasичні кореляції світла в гібридній схемі, що поєднує збалансоване годинне детектування в одній моді та порогове фотодетектування після фазово-просторового зміщення в іншій моді. Ця схема має змішаний характер: результат однієї сторони є неперервною квадратурною змінною, а результат іншої сторони є дискретним і відповідає відсутності або наявності спрацювання фотодетектора. Для такої схеми записано спільну статистику результатів у формалізмі ДОЗМ та у фазово-просторовій формі правила Борна, що дає змогу перевіряти можливість її класичного фазово-просторового відтворення.

Як тестовий приклад використано двомодовий стиснений вакуумний стан. Його локальні редуковані стани мають тепловий вигляд і допускають додатне представлення Глаубера–Сударшана, тому окремі моди локально не демонструють фазово-просторової неklasичності. Водночас повний двомодовий стан містить міжмодові кореляції, які не зводяться до класичної суміші добутоків когерентних станів. Для цього стану отримано явний вираз для гібридної поведінки $P(x, n|\varphi, \gamma)$. Кореляційна частина цієї поведінки визначається параметром стиснення і зникає при переході до добутку вакуумних станів. Отже, у розглянутому прикладі нетривіальна статистика пов’язана саме з міжмодовими кореляціями, а не з локальною неklasичністю окремих мод.

Для цієї поведінки проаналізовано питання локального реалізму. У змішаному неперервно-дискретному випадку використано узагальнену умову типу

Клаузера–Хорна–Шимоні–Хольта, еквівалентну існуванню невід’ємного спільного розподілу всіх можливих результатів. Застосування цього критерію показує, що в розглянутій гібридній схемі поведінка двомодового стисненого вакуумного стану не демонструє порушення локального реалізму у сенсі нелокальності Белла. Отже, наявні кореляції не проявляються як заперечення всіх можливих локально-реалістичних моделей.

Водночас для тієї самої поведінки побудовано тестову функцію, яка задає лінійну комбінацію вимірюваних імовірностей і перевіряє можливість невід’ємної фазово-просторової симуляції. Порушення відповідної нерівності показує, що гібридна поведінка двомодового стисненого вакуумного стану не може бути відтворена через невід’ємну фазово-просторову функцію стану та невід’ємні локальні символи елементів ДОЗМ. Таким чином, у цій схемі поведінка залишається локально-реалістичною, але є фазово-просторово неklasичною. Це демонструє, що неklasичні кореляції світла можуть проявлятися на рівні конкретної вимірювальної статистики навіть тоді, коли ця статистика не демонструє нелокальності Белла.

Матрично-функціональний опис гаусівської бозонної вибірки з реалістичними фотодетекторами. Для гаусівської бозонної вибірки виведено загальний матрично-функціональний вираз для фотолічильної статистики на виході багатомодового інтерферометра за наявності локальних фотодетекторів, описаних елементами ДОЗМ. У цьому описі розрізняються фотонний патерн перед детектуванням і зареєстрований патерн результатів. Це розрізнення є суттєвим, оскільки реалістичний детектор може повертати не істинне число фотонів у моді, а кількість спрацювань, кількість спрацьованих піддетекторів або кількість імпульсів фотоструму. Тому вихідна статистика ГБВ має описуватися на рівні конкретної ДОЗМ фотодетектора, а не через ототожнення зареєстрованого результату з фотонним числом.

У загальному записі інформація про гаусівський стан, лінійний інтерферометр і втрати входить через Q -коваріаційну матрицю σ_Q та матрицю $A = I - \sigma_Q^{-1}$. Модель фотодетектування входить через Q -символи елементів ДОЗМ і визначає матричний функціонал, який діє на A . Такий поділ дозволяє аналізувати одну й ту саму схему ГБВ для різних моделей фотодетекторів без повторного виведення всієї статистики. Він також показує, що реалістичне фотодетектування змінює не лише числові значення ймовірностей, а й саму форму функціонала,

через який ці ймовірності обчислюються.

Отриманий вираз конкретизовано для основних моделей детектування. Для ідеального розрізнення чисел фотонів відтворюється хафніанова форма ймовірностей. Для порогових фотодетекторів функціонал переходить до форми, пов'язаної з торонтоніаном, і залежить лише від множини спрацьованих мод. Для масивів порогових детекторів отримано функціонал, що описує часткове розрізнення чисел фотонів через кількість спрацювань у масиві. Для схем підрахунку імпульсів фотоструму отримано функціонали, які містять часові параметри вимірювання, зокрема мертвий час, а для моделей ННОФД також релаксаційний час.

Порівняння цих моделей показує, що різні фотодетектори приводять до різних спостережуваних розподілів навіть для одного й того самого вихідного гаусівського стану. Ідеальний детектор зберігає повну інформацію про число фотонів у кожній моді, пороговий детектор втрачає інформацію про кратність подій, а масиви та часові схеми зберігають лише частину цієї інформації. Отже, реалістична модель фотодетектора є невід'ємною частиною теоретичного опису ГБВ і не може розглядатися як другорядна поправка до ідеалізованої моделі.

Валідація гаусівської бозонної вибірки та роль часткового розрізнення чисел фотонів. На основі отриманого опису фотолічильних ймовірностей адаптовано процедури валідації ГБВ до випадку реалістичного розрізнення чисел фотонів. Об'єктом валідації при цьому є не ідеальні фотонні патерни, а зареєстровані патерни, сформовані конкретними фотодетекторами. Оскільки у великих багатомодових системах повна реконструкція розподілу за окремими патернами є практично недоступною, у роботі використано згруповані статистики, які агрегують багато патернів і можуть бути надійніше оцінені зі скінченної вибірки.

Як конкретний клас згрупованих статистик розглянуто орбітальні ймовірності. Орбіти групують зареєстровані патерни не за номерами вихідних мод, а за набором зареєстрованих значень у цих модах. Особливу роль відіграють орбіти, що характеризуються повною кількістю зареєстрованих подій та кількістю мод із двома зареєстрованими подіями. Такі статистики відображають, яку інформацію про кратну реєстрацію здатна зберегти конкретна модель фотодетектора. Для порогового фотодетектування ці статистики недоступні, тоді як детектори з частковим розрізненням чисел фотонів відкривають доступ до

додаткових орбітальних секторів.

Для оцінювання орбітальних імовірностей розглянуто пряме та вибіркоче сумування за патернами орбіти, а також масштабований підхід через характеристичну функцію орбіт і фазово-просторове моделювання в додатному P -представленні. Пряме сумування є корисним для контрольних розрахунків у малих секторах, але стає непридатним для великих систем. Підхід через характеристичну функцію дозволяє оцінювати згрупований розподіл за орбітами без явної реконструкції повного розподілу за патернами.

На основі орбітальних імовірностей сформульовано дві процедури валідації. Перша використовує критерій Пірсона для умовних розподілів повної кількості зареєстрованих подій за фіксованої кількості мод із подвійною реєстрацією. Друга є баєсівською і ґрунтується на логарифмічному відношенні правдоподібностей для згрупованих статистик. В обох випадках порівнюються спостережувані статистики, отримані для одного й того самого інтерферометра, однакових втрат і однакової моделі фотодетектування. Як цільову модель розглянуто ГБВ з термалізованими стисненими вакуумними станами, а як класичні еталонні альтернативи — теплові та сплющені гаусівські стани. Така постановка не є повною сертифікацією квантової переваги, але дає практичний спосіб перевіряти узгодженість експериментально доступних статистик із цільовою моделлю.

Чисельні приклади показують, що навіть часткове розрізнення чисел фотонів може істотно впливати на вихідну статистику ГБВ. Масиви порогових фотодетекторів і схеми підрахунку імпульсів фотоструму роблять доступними статистики кратної реєстрації, відсутні для простих порогових детекторів. Ця додаткова інформація може підвищувати ефективність відрізнєння квантової статистики від класичних еталонних моделей, особливо в баєсівському тесті. Водночас мертвий час і релаксація детектора можуть суттєво змінювати кількісні результати валідації. Отже, реалістичне фотодетектування змінює розподіл зареєстрованих патернів, набір доступних згрупованих статистик і висновки статистичних тестів.

Отримані результати можуть бути використані для теоретичного аналізу багатомодових оптичних схем, у яких спостережувана статистика істотно залежить від конкретного способу вимірювання. Для гібридних неперервно-дискретних вимірювань вони дають змогу описувати некласичні кореляції світла на рівні вимірювальної поведінки, без зведення такого аналізу лише до

перевірки нелокальності Белла. Для ГБВ отримані результати задають спосіб обчислення фотолічильної статистики з урахуванням реалістичних моделей розрізнення чисел фотонів, зокрема масивів порогових фотодетекторів, підрахунку імпульсів фотоструму, мертвого часу та релаксаційного часу. Також вони можуть бути використані для побудови процедур валідації, що працюють не з ідеалізованими фотонними патернами, а із зареєстрованими патернами детектування та їхніми згрупованими статистиками. Подальше застосування цього підходу може бути пов'язане з використанням орбітальних статистик для аналізу конкретних схем ГБВ та для порівняння цільової квантової моделі з класичними еталонними моделями.

Бібліографія

- [1] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [2] W. Vogel and D.-G. Welsch, *Quantum Optics* (Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2006).
- [3] G. S. Agarwal, *Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2013).
- [4] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2010).
- [5] M. Born, Z. Physik **37**, 863 (1926).
- [6] W. P. Schleich, *Quantum optics in phase space* (Wiley–WCH, Berlin, 2001).
- [7] K. E. Cahill and R. J. Glauber, Phys. Rev. **177**, 1882 (1969).
- [8] K. E. Cahill and R. J. Glauber, Phys. Rev. **177**, 1857 (1969).
- [9] C. Weedbrook, S. Pirandola, R. García-Patrón, N. J. Cerf, T. C. Ralph, J. H. Shapiro, and S. Lloyd, Rev. Mod. Phys. **84**, 621 (2012).
- [10] R. J. Glauber, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).
- [11] E. C. G. Sudarshan, Phys. Rev. Lett. **10**, 277 (1963).
- [12] H. Yuen and J. Shapiro, IEEE Trans. Inf. Theory **26**, 78 (1980).
- [13] H. P. Yuen and V. W. S. Chan, Opt. Lett. **8**, 177 (1983).
- [14] B. L. Schumaker, Opt. Lett. **9**, 189 (1984).
- [15] B. Yurke and D. Stoler, Phys. Rev. A **36**, 1555 (1987).
- [16] D.-G. Welsch, W. Vogel, and T. Opatrný (Elsevier, 1999) pp. 63 – 211.
- [17] S. Wallentowitz and W. Vogel, Phys. Rev. A **53**, 4528 (1996).

- [18] S. Mancini, P. Tombesi, and V. I. Man'ko, *Europhys. Lett.* **37**, 79 (1997).
- [19] P. L. Kelley and W. H. Kleiner, *Phys. Rev.* **136**, A316 (1964).
- [20] H. Paul, P. Törmä, T. Kiss, and I. Jex, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2464 (1996).
- [21] D. Achilles, C. Silberhorn, C. Śliwa, K. Banaszek, and I. A. Walmsley, *Opt. Lett.* **28**, 2387 (2003).
- [22] M. J. Fitch, B. C. Jacobs, T. B. Pittman, and J. D. Franson, *Phys. Rev. A* **68**, 043814 (2003).
- [23] J. Řeháček, Z. Hradil, O. Haderka, J. Peřina, and M. Hamar, *Phys. Rev. A* **67**, 061801(R) (2003).
- [24] J. Sperling, W. Vogel, and G. S. Agarwal, *Phys. Rev. A* **85**, 023820 (2012).
- [25] L. M. Ricciardi and F. Esposito, *Kybernetik* **3**, 148 (1966).
- [26] M. C. Teich, L. Marin, and B. I. Cantor, *J. Opt. Soc. Am.* **68**, 386 (1978).
- [27] J. Rapp, Y. Ma, R. M. A. Dawson, and V. K. Goyal, *IEEE Trans. Signal Process.* **67**, 3471 (2019).
- [28] V. A. Uzunova and A. A. Semenov, *Phys. Rev. A* **105**, 063716 (2022).
- [29] A. A. Semenov, J. Samelin, C. Boldt, M. Schünemann, C. Reiher, W. Vogel, and B. Hage, *Phys. Rev. A* **109**, 013701 (2024).
- [30] B. S. Tsirelson, *Hadronic J. Suppl.* **8**, 329 (1993).
- [31] N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani, and S. Wehner, *Rev. Mod. Phys.* **86**, 419 (2014).
- [32] J. S. Bell, *Physics (Long Island City, N.Y.)* **1**, 195 (1964).
- [33] E. P. Wigner, *Am. J. Phys.* **38**, 1005 (1970).
- [34] A. Fine, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 291 (1982).
- [35] A. A. Semenov and A. B. Klimov, *New J. Phys.* **23**, 123046 (2021).
- [36] E. Agudelo, J. Sperling, and W. Vogel, *Phys. Rev. A* **87**, 033811 (2013).

- [37] F. Shahandeh, A. P. Lund, and T. C. Ralph, Phys. Rev. Lett. **119**, 120502 (2017).
- [38] S. Köhnke, E. Agudelo, M. Schünemann, O. Schlettwein, W. Vogel, J. Sperling, and B. Hage, Phys. Rev. Lett. **126**, 170404 (2021).
- [39] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, Phys. Rev. Lett. **23**, 880 (1969).
- [40] D. Kaszlikowski, P. Gnaciński, M. Żukowski, W. Miklaszewski, and A. Zeilinger, Phys. Rev. Lett. **85**, 4418 (2000).
- [41] S. Abramsky and A. Brandenburger, New J. Phys. **13**, 113036 (2011).
- [42] G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications* (Harcourt, Brace, Jovanovich, Publishers, 1988).
- [43] A. Heidmann, R. J. Horowicz, S. Reynaud, E. Giacobino, C. Fabre, and G. Camy, Phys. Rev. Lett. **59**, 2555 (1987).
- [44] A. Dutt, K. Luke, S. Manipatruni, A. L. Gaeta, P. Nussenzveig, and M. Lipson, Phys. Rev. Applied **3**, 044005 (2015).
- [45] S. Pironio, J. Phys. A: Math. Theor. **47**, 424020 (2014).
- [46] T. Kiesel, W. Vogel, B. Hage, and R. Schnabel, Phys. Rev. Lett. **107**, 113604 (2011).
- [47] S. Aaronson and A. Arkhipov, Theory Comput. **9**, 143 (2013).
- [48] C. S. Hamilton, R. Kruse, L. Sansoni, S. Barkhofen, C. Silberhorn, and I. Jex, Phys. Rev. Lett. **119**, 170501 (2017).
- [49] H.-S. Zhong *et al.*, Science **370**, 1460 (2020).
- [50] H.-S. Zhong *et al.*, Phys. Rev. Lett. **127**, 180502 (2021).
- [51] L. S. Madsen, F. Laudenbach, M. F. Askarani, F. Rortais, T. Vincent, J. F. F. Bulmer, F. M. Miatto, L. Neuhaus, L. G. Helt, M. J. Collins, A. E. Lita, T. Gerrits, S. W. Nam, V. D. Vaidya, M. Menotti, I. Dhand, Z. Vernon, N. Quesada, and J. Lavoie, Nature **606**, 75 (2022).

- [52] Y.-H. Deng *et al.*, Phys. Rev. Lett. **131**, 150601 (2023).
- [53] N. Quesada, J. M. Arrazola, and N. Killoran, Phys. Rev. A **98**, 062322 (2018).
- [54] A. E. Lita, A. J. Miller, and S. W. Nam, Opt. Express **16**, 3032 (2008).
- [55] J. M. Arrazola *et al.*, Nature **591**, 54–60 (2021).
- [56] P. Clifford and R. Clifford, The classical complexity of boson sampling, in *Proceedings of the 2018 Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)* (SIAM, Philadelphia, PA, 2018) pp. 146–155.
- [57] N. Quesada and J. M. Arrazola, Phys. Rev. Res. **2**, 023005 (2020).
- [58] N. Quesada, R. S. Chadwick, B. A. Bell, J. M. Arrazola, T. Vincent, H. Qi, and R. García-Patrón, PRX Quantum **3**, 010306 (2022).
- [59] C. Oh, Y. Lim, B. Fefferman, and L. Jiang, Phys. Rev. Lett. **128**, 190501 (2022).
- [60] J. F. F. Bulmer, B. A. Bell, R. S. Chadwick, A. E. Jones, D. Moise, A. Rigazzi, J. Thorbecke, U.-U. Haus, T. V. Vaerenbergh, R. B. Patel, I. A. Walmsley, and A. Laing, Sci. Adv. **8**, eabl9236 (2022).
- [61] A. S. Popova and A. Rubtsov, in *Quantum 2.0 Conference and Exhibition* (Optica Publishing Group, 2022) p. QW2A.15.
- [62] D. Cilluffo, N. Lorenzoni, and M. B. Plenio, Simulating Gaussian Boson Sampling with tensor networks in the heisenberg picture (2023), arXiv:2305.11215 .
- [63] C. Oh, M. Liu, Y. Alexeev, B. Fefferman, and L. Jiang, Nat. Phys. **20**, 1461 (2024).
- [64] J. J. Renema, A. Menssen, W. R. Clements, G. Triginer, W. S. Kolthammer, and I. A. Walmsley, Phys. Rev. Lett. **120**, 220502 (2018).
- [65] A. E. Moylett, R. García-Patrón, J. J. Renema, and P. S. Turner, Quantum Sci. Technol. **5**, 015001 (2019).
- [66] J. J. Renema, Phys. Rev. A **101**, 063840 (2020).

- [67] J. Shi and T. Byrnes, npj Quantum Inf. **8**, 54 (2022).
- [68] M. Oszmaniec and D. J. Brod, New J. Phys. **20**, 092002 (2018).
- [69] R. García-Patrón, J. J. Renema, and V. Shchesnovich, Quantum **3**, 169 (2019).
- [70] D. J. Brod and M. Oszmaniec, Quantum **4**, 267 (2020).
- [71] H. Qi, D. J. Brod, N. Quesada, and R. García-Patrón, Phys. Rev. Lett. **124**, 100502 (2020).
- [72] C. Oh, K. Noh, B. Fefferman, and L. Jiang, Phys. Rev. A **104**, 022407 (2021).
- [73] M. Liu, C. Oh, J. Liu, L. Jiang, and Y. Alexeev, Phys. Rev. A **108**, 052604 (2023).
- [74] Y. Wu *et al.*, Phys. Rev. Lett. **127**, 180501 (2021).
- [75] N. Spagnolo *et al.*, Nat. Photonics **8**, 615 (2014).
- [76] J. Martínez-Cifuentes, K. M. Fonseca-Romero, and N. Quesada, Quantum **7**, 1076 (2023).
- [77] M. Walschaers, J. Kuipers, J.-D. Urbina, K. Mayer, M. C. Tichy, K. Richter, and A. Buchleitner, New J. Phys. **18**, 032001 (2016).
- [78] D. S. Phillips, M. Walschaers, J. J. Renema, I. A. Walmsley, N. Treps, and J. Sperling, Phys. Rev. A **99**, 023836 (2019).
- [79] T. Giordani, F. Flamini, M. Pompili, N. Viggianiello, N. Spagnolo, A. Crespi, R. Osellame, N. Wiebe, M. Walschaers, A. Buchleitner, and F. Sciarrino, in *Frontiers in Optics / Laser Science* (Optica Publishing Group, 2018) p. JTu3A.60.
- [80] A. Dellios, P. D. Drummond, B. Opanchuk, R. Y. Teh, and M. D. Reid, Physics Letters A **429**, 127911 (2022).
- [81] P. D. Drummond, B. Opanchuk, A. Dellios, and M. D. Reid, Phys. Rev. A **105**, 012427 (2022).

- [82] A. S. Delliios, B. Opanchuk, M. D. Reid, and P. D. Drummond, Validation tests of GBS quantum computers give evidence for quantum advantage with a decoherent target (2023), arXiv:2211.03480 .
- [83] A. S. Delliios, M. D. Reid, and P. D. Drummond, AAPPS Bulletin **33**, 31 (2023).
- [84] G. Bressanini, B. Seron, L. Novo, N. J. Cerf, and M. S. Kim, Gaussian boson sampling validation via detector binning (2024), arXiv:2310.18113 .
- [85] B. Villalonga, M. Y. Niu, L. Li, H. Neven, J. C. Platt, V. N. Smelyanskiy, and S. Boixo, Efficient approximation of experimental Gaussian Boson Sampling (2022), arXiv:2109.11525 .
- [86] M. Schuld, K. Brádler, R. Israel, D. Su, and B. Gupt, Phys. Rev. A **101**, 032314 (2020).
- [87] K. Brádler, S. Friedland, J. Izaac, N. Killoran, and D. Su, Spec. Matrices **9**, 166 (2021).
- [88] T. Giordani, V. Mannucci, N. Spagnolo, M. Fumero, A. Rampini, E. Rodolà, and F. Sciarrino, Quantum Sci. Technol. **8**, 015005 (2023).
- [89] J. M. Arrazola and T. R. Bromley, Phys. Rev. Lett. **121**, 030503 (2018).
- [90] K. Bradler, P.-L. Dallaire-Demers, P. Rebentrost, D. Su, and C. Weedbrook, Phys. Rev. A **98**, 032310 (2018).
- [91] K. Bradler, R. Israel, M. Schuld, and D. Su, A duality at the heart of Gaussian boson sampling (2019), arXiv:1910.04022 .
- [92] S. Jahangiri, J. M. Arrazola, N. Quesada, and N. Killoran, Phys. Rev. E **101**, 022134 (2020).
- [93] J. Huh, G. G. Guerreschi, B. Peropadre, J. R. McClean, and A. Aspuru-Guzik, Nat. Photonics **9**, 615–620 (2015).
- [94] L. Banchi, M. Fingerhuth, T. Babej, C. Ing, and J. M. Arrazola, Sci. Adv. **6**, eaax1950 (2020).

- [95] C. S. Hamilton and I. Jex, Phys. Rev. A **109**, 052427 (2024).
- [96] V. Y. Len, M. M. Byelova, V. A. Uzunova, and A. A. Semenov, Phys. Scr. **97**, 105102 (2022).
- [97] G. Bressanini, H. Kwon, and M. S. Kim, Phys. Rev. A **109**, 023708 (2024).
- [98] J. W. Müller, Nucl. Instrum. Methods **112**, 47 (1973).
- [99] J. W. Müller, Nucl. Instrum. Methods **117**, 401 (1974).
- [100] B. I. Cantor and M. C. Teich, J. Opt. Soc. Am. **65**, 786 (1975).
- [101] G. Vannucci and M. C. Teich, Opt. Commun. **25**, 267 (1978).
- [102] N. Shervashidze, S. Vishwanathan, T. Petri, K. Mehlhorn, and K. Borgwardt, in *Proceedings of the Twelfth International Conference on Artificial Intelligence and Statistics*, Proceedings of Machine Learning Research, Vol. 5, edited by D. van Dyk and M. Welling (PMLR, 2009) pp. 488–495.
- [103] B. Opanchuk, L. Rosales-Zárate, M. D. Reid, and P. D. Drummond, Phys. Rev. A **97**, 042304 (2018).
- [104] P. D. Drummond and C. W. Gardiner, J. Phys. A **13**, 2353 (1980).
- [105] P. D. Drummond, C. W. Gardiner, and D. F. Walls, Phys. Rev. A **24**, 914 (1981).
- [106] S. Rahimi-Keshari, T. C. Ralph, and C. M. Caves, Phys. Rev. X **6**, 021039 (2016).
- [107] M. Bentivegna, N. Spagnolo, C. Vitelli, D. J. Brod, A. Crespi, F. Flamini, R. Ramponi, P. Mataloni, R. Osellame, E. F. Galvao, and F. Sciarrino, Int. J. Quant. Inf. **12**, 1560028 (2014).
- [108] A. D. Semenov, G. N. Gol'tsman, and A. A. Korneev, Phys. C (Amsterdam, Neth.) **351**, 349 (2001).
- [109] G. N. Gol'tsman, O. Okunev, G. Chulkova, A. Lipatov, A. Semenov, K. Smirnov, B. Voronov, A. Dzardanov, C. Williams, and R. Sobolewski, Appl. Phys. Lett. **79**, 705 (2001).

- [110] C. M. Natarajan, L. Zhang, H. Coldenstrodt-Ronge, G. Donati, S. N. Dorenbos, V. Zwiller, I. A. Walmsley, and R. H. Hadfield, *Opt. Express* **21**, 893 (2013).
- [111] L. You, *Nanophotonics* **9**, 2673 (2020).
- [112] H. Zhang, L. Xiao, B. Luo, J. Guo, L. Zhang, and J. Xie, *J. Phys. D* **53**, 013001 (2019).
- [113] I. Esmail Zadeh, J. Chang, J. W. N. Los, S. Gyger, A. W. Elshaari, S. Steinhauer, S. N. Dorenbos, and V. Zwiller, *Applied Physics Letters* **118**, 190502 (2021).

А Список публікацій, конференцій та наукових семінарів

Список публікацій здобувача за темою дисертації

- I V. S. Kovtoniuk, I. S. Yeremenko, S. Ryl, W. Vogel, and A. A. Semenov, “Nonclassical correlations of radiation in relation to Bell nonlocality”, *Phys. Rev. A* **105**, 063722 (2022), doi: 10.1103/PhysRevA.105.063722. (Q1)
- II I. S. Yeremenko, M. A. Dmytruk, and A. A. Semenov, “Realistic photon-number resolution in Gaussian boson sampling”, *Phys. Rev. A* **110**, 043715 (2024), doi: 10.1103/PhysRevA.110.043715. (Q1)

Апробація результатів дисертації

Результати дисертаційної роботи були представлені на семінарах Інституту теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України, а також на українських і міжнародних конференціях.

1. I. S. Yeremenko, “Realistic Photon-Number Resolution and Its Impact on Gaussian Boson Sampling”, oral presentation at the 25th Symposium on Photonics and Optics (SPO 2024), Kyiv, Ukraine, November 4–8, 2024.
2. I. S. Yeremenko, M. A. Dmytruk, and A. A. Semenov, “Advancing Gaussian Boson Sampling with Realistic Photon-Number-Resolving Detectors”, poster presentation at Quantum 2025: From Foundations of Quantum Mechanics to Quantum Information and Quantum Metrology & Sensing, Turin, Italy, May 18–24, 2025.