

Київський національний університет імені Тараса Шевченка  
Міністерство освіти і науки України

Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України

Кваліфікаційна наукова праця  
на правах рукопису

**Карпенко Владислав Олександрович**

УДК 538.9, 539.1

## Дисертація

### Фазові переходи у щільних системах взаємодіючих бозе-частинок

01.04.02 Теоретична фізика

10 Природничі науки (104 Фізика та астрономія)

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

---

(підпис, ініціали та прізвище здобувача)

Науковий керівник:

доктор фіз.-мат. наук,

старший науковий співробітник

**Анчишкін Дмитро Владленович**

# Анотація

*Карпенко В.О. Фазові переходи у щільних системах взаємодіючих бозе-частинок. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.*

*— Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 104 Фізика та астрономія — Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, 2020-2024. — Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, Київ, 2025.*

Дисертаційна робота присвячена дослідженню фазових переходів і термодинамічних властивостей систем взаємодіючих бозонів, що складаються з частинок і античастинок за ненульових ізоспінових густин. У центрі уваги —  $\pi$ -мезонні системи, які виступають природною моделлю для вивчення сильно взаємодіючої матерії при високих густинах і температурах, характерних для процесів у ранньому Всесвіті, нейтронних зірках і релятивістських зіткненнях важких іонів.

Актуальність теми зумовлена потребою у глибшому розумінні фазової структури адронної матерії, зокрема поведінки мезонних систем при скінченних температурах та ізоспінових густинах. Піони, як найлегші адрони з ненульовим ізотопічним зарядом, є ідеальними об'єктами для вивчення явищ бозе-айнштайнівської конденсації в умовах сильної взаємодії. Теоретичні та експериментальні дослідження вказують, що за певних умов  $\pi$ -мезони можуть формувати бозе-конденсат, який потенційно впливає на еволюцію густої адронної матерії.

Метою роботи є побудова узгодженої термодинамічної моделі, здатної описати поведінку багатокомпонентної системи бозонів у широкому діапазоні температур і густин, з урахуванням відштовхувальних і притягальних взаємодій між частинками. Для досягнення цієї мети розв'язано такі завдання:

- встановлено умови утворення бозе-конденсату у системі частинок і античастинок при збереженні ізоспінової густини;
- досліджено характер фазових переходів і вплив співвідношення між силами притягання та відштовхування;
- порівняно ефективність канонічного та великого канонічного ансамблів у описі систем із конденсатом;
- побудовано фазові діаграми типу «рідина–газ» для взаємодіючих бозонних систем;
- оцінено внесок електричної взаємодії в енергетичний баланс системи.

Методологічно робота спирається на термодинамічну модель середнього поля, параметризовану по типу моделі Скірма, де середнє поле має вигляд  $U(n) = -An + Bn^2$ , а параметри  $A$  і  $B$  відповідають силам притягання та відштовхування. Для числових розрахунків використовувались системи рівнянь, отримані з умов термодинамічної самозгодженості, а також методи чисельного інтегрування нелінійних рівнянь стану.

У першому розділі розроблено аналітичний формалізм моделі середнього поля для системи частинок і античастинок із фіксованою ізоспіновою густиною. Визначено вирази для тиску, хімічного потенціалу, густини енергії та вільної енергії через інтеграли від функцій розподілу Бозе–Айнштейна.

Розглянуто умову Бозе-конденсації за скінченних температур, коли густина домінуючої зарядової компоненти досягає критичного значення. Показано, що при “слабкому” притяганні або його відсутності система утворює конденсат лише для зарядово-домінуючої компоненти (наприклад,  $\pi^-$ -мезонів).

Числові розрахунки продемонстрували залежності густини частинок, енергії та теплоємності від температури такого виду, що підтверджують існування фазового переходу другого роду. Виявлено також, що в певних діапазонах коефіцієнта притягання фазовий перехід може відбуватись кілька разів послідовно, що свідчить про складну структуру рівноважних станів системи.

Одним з найважливіших проміжних результатів наведених у першому розділі є те, що для частинок компоненти високої густини система утворює конденсат незалежно від параметрів середнього поля.

Другий розділ присвячено дослідженню фазових переходів за різної інтенсивності взаємодій. Обговорюється два підходи: опис через канонічний ансамбль (з фіксованим числом частинок) та великий канонічний ансамбль (з фіксованим хімічним потенціалом). Крім того, порівнюються результати отримані в рамках напівкласичної термодинамічної моделі середнього поля з моделлю скалярного самодіючого поля.

Показано, що у випадку слабкої взаємодії система має фазовий перехід другого роду, пов'язаний з утворенням конденсату зарядової компоненти. При цьому індикатором таких фазових переходів є перетин кривих густини частинок з критичною кривою

У режимі “сильного” притягання з'являється фазовий перехід першого роду, коли конденсацію одночасно зазнають частинки й античастинки. Такий подвійний конденсат характеризується нульовим хімічним потенціалом навіть за ненульової ізоспінової густини. Такий ефект не може бути описаний великим канонічним ансамблем, позаяк різним станам системи (різним густинам, тискам) може відповідати єдине постійне значення хімічного потенціалу. Це доводить, що лише канонічний ансамбль здатен коректно описати ці стани, оскільки великий канонічний ансамбль призводить до термодинамічної невизначеності.

Також виявлено “віртуальний” фазовий перехід другого роду — перехід між фазами без утворення конденсату, який існує лише при певному співвідношенні між параметрами взаємодії.

У третьому розділі побудовано узагальнення правил Максвелла для систем, що складаються з частинок і античастинок, і досліджено фазові переходи типу “рідина–газ”. Розглянуто систему, коли природнім вільним параметром системи є густина заряду  $n_I$ .

На основі отриманих рівнянь стану побудовано фазові діаграми в координатах  $(n_I, P)$  та  $(1/n_I, P)$ , які демонструють наявність критичної точки і області співіснування фаз. У межах фазового переходу “рідина–газ” визначено об’ємний модуль стискання та показано, що взаємодія частинок і античастинок впливає на наявність області метастабільності.

Важливим результатом цього розділу є виявлення спільного опису бозе-конденсації та переходів “рідина–газ” у єдиній моделі середнього поля.

Четвертий розділ розширює модель, враховуючи внесок електричної взаємодії. Визначено поправки до хімічного потенціалу, тиску та енергії внаслідок кулонівського відштовхування між зарядженими  $\pi$ -мезонами.

Обґрунтовано можливу оцінку енергії кулонівського внеску при фіксованій густині заряду. Стверджується, що цей ефект може зміщати фазову діаграму.

Підсумовуючи, основними результатами роботи є наступні:

- Розроблено самозгоджену термодинамічну модель середнього поля для системи взаємодіючих  $\pi$ -мезонів з урахуванням відштовхування та притягання, придатну для опису як бозе-конденсації, так і фазових переходів типу “рідина–газ”.
- Розділено режими “слабкого” і “сильного” притягання між піонами, які визначають тип наявних фазових переходів: другий рід при

слабкій взаємодії і перший рід при сильній.

- Показано наявність в модельній системі з комбінації різного виду піонів наявність фазових переходів, які можуть зачіпати лише одну з компонент.
- Описано “віртуальний” фазовий перехід другого роду без утворення параметра порядку.
- Показано можливість утворення подвійного конденсату, і що подвійний конденсат частинок та античастинок існує за нульового хімічного потенціалу.
- Побудовано узагальнені правила Максвелла і фазові діаграми системи, які враховують наявність конденсату та фазового переходу типу “рідина-газ”.
- Обговорено межі застосовності канонічного і великого канонічного ансамблів, показано, що останній некоректний у фазі конденсату.
- Запропоновано модифікацію моделі через додавання електричної взаємодії, оцінено вплив електричної взаємодії на термодинамічні характеристики системи.

Хоча дослідження має теоретичний характер, його результати можуть бути застосовані для:

- моделювання гарячої та густої адронної матерії у зіткненнях важких іонів (LHC, RHIC);
- аналізу станів речовини в нейтронних зорях;
- побудови космологічних моделей раннього Всесвіту;

- подальшого розвитку ефективних теорій сильної взаємодії (QCD) на низьких енергіях.

Робота сформувала послідовну теоретичну картину фазових переходів у системах взаємодіючих бозонів при ненульових ізоспінових густинах. Виявлені ефекти (подвійний конденсат, віртуальний перехід і специфіка поведінки ансамблів) становлять важливий внесок у статистичну фізику та теорію сильно взаємодіючої матерії.

Розроблена модель може слугувати базою для подальших досліджень багатокомпонентних бозонних систем та їх застосувань у фізиці високих енергій і астрофізиці.

**Ключові слова:** конденсат Бозе-Айнштейна, модель середнього поля, газ мезонів, релятивістські частинки, скалярні поля, фазовий перехід, фазові діаграми, статистична фізика

# Abstract

*Karpenko V.O. Phase transitions in dense systems of interacting*

**Bose particles** — *Qualifying scientific work on manuscript rights*

– *Dissertation for the Doctor of Philosophy degree in specialty 104 Physics and Astronomy — Taras Shevchenko Kyiv National University, Kyiv, 2024 — Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the NAS of Ukraine, Kyiv, 2025.*

The dissertation is devoted to the study of phase transitions and thermodynamic properties of interacting boson systems consisting of particles and antiparticles at nonzero isospin densities. The focus is on  $\pi$ -meson systems, which serve as a natural model for studying strongly interacting matter at high densities and temperatures characteristic of processes in the early universe, neutron stars, and relativistic heavy ion collisions.

The relevance of the topic is determined by the need for a deeper understanding of the phase structure of hadronic matter, in particular the behavior of meson systems at finite temperatures and isospin densities. Pions, as the lightest hadrons with nonzero isotopic charge, are ideal objects for studying Bose-Einstein condensation phenomena under conditions of strong interaction. Theoretical and experimental studies indicate that under certain conditions,  $\pi$ -mesons can form a Bose condensate, which potentially affects the evolution of dense hadronic matter.

The aim of this work is to construct a consistent thermodynamic model capable of describing the behavior of a multicomponent boson system over a wide range of temperatures and densities, taking into account repulsive and attractive interactions between particles. To achieve this goal, the following tasks were solved:



- the conditions for the formation of a Bose condensate in a system of particles and antiparticles with conservation of isospin density were established;
- the nature of phase transitions and the influence of the ratio between attractive and repulsive forces were investigated;
- the effectiveness of canonical and grand canonical ensembles in describing systems with condensate was compared;
- liquid-gas phase diagrams were constructed for interacting boson systems;
- the contribution of electrical interaction to the energy balance of the system was estimated.

Methodologically, the work is based on a thermodynamic model of the mean field, parameterized according to the Skirna model, where the mean field has the form  $U(n) = -An + Bn^2$ , and the parameters  $A$  and  $B$  correspond to the forces of attraction and repulsion. For numerical calculations, systems of equations obtained from the conditions of thermodynamic self-consistency were used, as well as methods of numerical integration of nonlinear equations of state.

In the first section, we develop an analytical formalism of the mean-field model for a system of particles and antiparticles with a fixed isospin density. We determine expressions for pressure, chemical potential, energy density, and free energy through integrals of Bose–Einstein distribution functions.

The condition for Bose condensation at finite temperatures is considered, when the density of the dominant charge component reaches a critical value. It is shown that with “weak” attraction or its absence, the system forms a condensate only for the charge-dominant component (for example,  $\pi^-$  mesons).

Numerical calculations have demonstrated the dependence of particle density, energy, and heat capacity on temperature in such a way that confirms

the existence of a second-order phase transition. It has also been found that in certain ranges of the attraction coefficient, the phase transition can occur several times in succession, which indicates the complex structure of the equilibrium states of the system.

One of the most important intermediate results presented in the first chapter is that for particles of high density, the system forms a condensate regardless of the parameters of the mean field.

The second section is devoted to the study of phase transitions at different interaction intensities. Two approaches are discussed: description through a canonical ensemble (with a fixed number of particles) and a large canonical ensemble (with a fixed chemical potential). In addition, the results obtained within the framework of the semi-classical thermodynamic model of the mean field are compared with the model of the scalar self-acting field.

It is shown that in the case of weak interaction, the system undergoes a second-order phase transition associated with the formation of a charge condensate. In this case, the indicator of such phase transitions is the intersection of particle density curves with the critical curve.

In the “strong” attraction mode, a first-order phase transition occurs when particles and antiparticles undergo condensation simultaneously. Such a double condensate is characterized by zero chemical potential even at non-zero isospin density. This effect cannot be described by a large canonical ensemble, since different states of the system (different densities, pressures) can correspond to a single constant value of chemical potential. This proves that only a canonical ensemble can correctly describe these states, since a large canonical ensemble leads to thermodynamic uncertainty.

A “virtual” second-order phase transition has also been discovered — a transition between phases without the formation of a condensate, which exists only at a certain ratio between the interaction parameters.

The third section generalizes Maxwell's rules for systems consisting of particles and antiparticles and investigates liquid-gas phase transitions. We consider a system where the natural free parameter of the system is the charge density  $n_I$ .

Based on the obtained equations of state, phase diagrams are constructed in the coordinates  $(n_I, P)$  and  $(1/n_I, P)$ , which demonstrate the presence of a critical point and a region of phase coexistence. Within the framework of the liquid-gas phase transition, the bulk compressibility modulus is determined and it is shown that the interaction of particles and antiparticles affects the presence of a metastable region.

An important result of this section is the discovery of a common description of Bose condensation and liquid-gas transitions in a single mean-field model.

The fourth section extends the model by taking into account the contribution of electrical interaction. Corrections to the chemical potential, pressure, and energy due to Coulomb repulsion between charged  $\pi$ -mesons are determined.

A possible estimate of the Coulomb contribution energy at a fixed charge density is justified. It is claimed that this effect can shift the phase diagram.

In summary, the main results of the work are as follows:

- A self-consistent thermodynamic model of the mean field for a system of interacting  $\pi$ -mesons has been developed, taking into account repulsion and attraction, suitable for describing both Bose condensation and liquid-gas phase transitions.
- The modes of “weak” and “strong” attraction between pions, which determine the type of phase transitions present, have been separated: second order for weak interaction and first order for strong interaction.
- The presence of phase transitions in a model system consisting of a

combination of different types of pions, which can affect only one of the components, is shown.

- A “virtual” second-order phase transition without the formation of an order parameter is described.
- The possibility of double condensate formation is shown, and that the double condensate of particles and antiparticles exists at zero chemical potential.
- Generalized Maxwell rules and phase diagrams of the system are constructed, which take into account the presence of condensate and a “liquid-gas” phase transition.
- The limits of applicability of the canonical and grand canonical ensembles are discussed, and it is shown that the latter is incorrect in the condensate phase.
- A modification of the model by adding electrical interaction is proposed, and the influence of electrical interaction on the thermodynamic characteristics of the system is evaluated.

Although the research is theoretical in nature, its results can be applied to:

- modeling hot and dense hadronic matter in heavy ion collisions (LHC, RHIC);
- analyzing the states of matter in neutron stars;
- constructing cosmological models of the early universe;
- further developing effective theories of strong interaction (QCD) at low energies.

The work has formed a consistent theoretical picture of phase transitions in systems of interacting bosons at nonzero isospin densities. The effects identified (double condensate, virtual transition, and specific behavior of ensembles) constitute an important contribution to statistical physics and the theory of strongly interacting matter.

The developed model can serve as a basis for further research on multicomponent boson systems and their applications in high-energy physics and astrophysics.

**Key words:** Bose-Einstein condensate, mean field model, meson gas, relativistic particles, scalar fields, phase transition, phase diagrams, statistical physics

# Публікації:

1. “Relativistic Selfinteracting Particle-Antiparticle System of Bosons”  
Anchishkin, V. Gnatovskyy, D. Zhuravel, V. Karpenko. J. of Phys. and Electr.  
28, No. 2, p.3-18 (2020) [DOI: <https://doi.org/10.15421/332016>]
2. “Phase Diagram of the Selfinteracting Particle-Antiparticle Boson System”  
D. Anchishkin, V. Gnatovskyy, D. Zhuravel, V. Karpenko J. of Phys. and  
Electr., 29, No. 1, p.5-14 (2021) [DOI: <https://doi.org/10.15421/332101>]
3. “Self-interacting particle-antiparticle system of bosons” D. Anchishkin,  
V. Gnatovskyy, D. Zhuravel, V. Karpenko Phys. Rev. C 105, 045205 (2022)  
[DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.105.045205>]. (Q1)
4. “Phase Transitions in the Interacting Relativistic Boson Systems”  
D. Anchishkin, V. Gnatovskyy, D. Zhuravel, V. Karpenko, I. Mishustin and  
H. Stoecker. Universe 9, 411 (2023)  
[DOI: <https://doi.org/10.3390/universe9090411>]. (Q1)
5. “Canonical Ensemble vs. Grand Canonical Ensemble in the Description of  
Multicomponent Bosonic Systems.” D. Anchishkin, V. Gnatovskyy,  
D. Zhuravel, V. Karpenko, I. Mishustin and H. Stoecker Ukr. J. Phys 69, No.1  
(2024) [DOI: <https://doi.org/10.15407/ujpe69.1.3>]

# Зміст

<b>Вступ</b>	<b>18</b>
<b>Розділ 1. Мультикомпонентна система взаємодіючих бозонів</b>	<b>24</b>
1.1 Вступ . . . . .	24
1.2 Модель середнього поля для системи взаємодіючих бозе-частинок . . . . .	25
1.3 Скірма-подібна параметризація середнього поля . . . . .	32
1.4 Термодинамічні властивості системи бозе-частинок і античастинок у випадку “слабкого” притягання . . . . .	35
1.4.1 Числові результати . . . . .	38
1.5 Проміжні висновки . . . . .	48
<b>Розділ 2. Фазові переходи у взаємодіючих релятивістських бозонних системах</b>	<b>51</b>
2.1 Вступ . . . . .	51
2.2 Канонічний ансамбль: конденсація в ідеальному бозонному газі	54
2.3 Самодіюче скалярне поле . . . . .	57
2.3.1 Ефективний Лагранжіан у наближенні середнього поля	59
2.3.2 Густина Гамільтоніана в наближенні середнього поля	60
2.3.3 Бозонна система з $\varphi^4 + \varphi^6$ самовзаємодією . . . . .	63
2.4 Взаємодіюча система бозонів в термодинамічній моделі середнього поля . . . . .	64
2.4.1 Параметризація взаємодії . . . . .	67
2.5 Конденсація взаємодіючих бозонів за скінченних температур	68

2.6	Система частинок та античастинок зі збереженням густини ізоспіну (заряду) . . . . .	72
2.6.1	Отримання основних рівнянь . . . . .	72
2.6.2	Числові результати: фазовий перехід другого роду утворений частинками носіями домінуючого заряду .	74
2.7	Порівняння канонічного ансамблю і великого канонічного ансамблю, опис систем бозонів за умови наявності конденсату . . . . .	80
2.7.1	Збереження числа частинок в ідеальній однокомпонентній бозонній системі . . . . .	80
2.7.2	Збереження заряду у бозонній системі частинок та античастинок що взаємодіє . . . . .	83
2.8	Інші приклади . . . . .	88
2.9	Проміжні висновки . . . . .	90

### **Розділ 3. Фазові діаграми системи бозонів частинок і античастинок** **92**

3.1	Вступ . . . . .	92
3.2	Фазовий перехід рідина-газ: правила Максвелла в системі із збереженням заряду . . . . .	94
3.2.1	Фазовий перехід рідина-газ у фазі Бозе-конденсату, узагальнення правил Максвелла . . . . .	97
3.3	Тиск у системі частинок та античастинок . . . . .	101
3.3.1	Термодинамічні величини . . . . .	103
3.4	Густина частинок і середнє поле . . . . .	106
3.5	Фазові діаграми мультикомпонентної бозонної системи . . .	108
3.5.1	Особливості фазового переходу рідина-газ в багатоконпонентній системі бозонів . . . . .	112
3.5.2	Об'ємний модуль стискання . . . . .	118
3.6	Проміжні висновки . . . . .	120

### **Розділ 4. Електрична взаємодія в системі частинки-античастинки** **123**

4.1	Вступ . . . . .	123
-----	-----------------	-----



4.2	Хімічний потенціал . . . . .	123
4.3	Функція розподілу . . . . .	125
4.4	Тиск . . . . .	126
4.5	Середнє поле . . . . .	127
4.6	Оцінка енергії електричної взаємодії . . . . .	128
4.7	Вплив наявності електричної взаємодії за умови фіксованої густини заряду . . . . .	129
4.8	Проміжні висновки . . . . .	130
<b>Висновки</b>		<b>132</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</b>		<b>141</b>
<b>Додаток 1. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ</b>		<b>142</b>

# Вступ

## **Актуальність теми.**

Знання фазової структури систем мезонів при скінченних температурах та скінченних ізоспінових густинах відіграє вирішальне значення для розуміння широкого кола явищ у фізиці гарячої та густої адронної матерії, які мають місце в процесі ядер-ядерних зіткнень, в гіпотетичних нейтронних зірках та в деяких інших космологічних моделях. Результати дослідження систем адронів або баріонів методами квантової хромодинаміки демонструють фазову структуру матерії за скінченних температур та густин, та пояснюють перехід від адронного газу до кварк-глюонної плазми, порушення хіральної симетрії [1].

Дослідження фундаментальних фізичних властивостей матерії в експериментах на сучасних прискорювачах частинок і атомних ядер та у програмах з дослідження матерії, що існувала у ранньому Всесвіті, є зараз одним із основних напрямів у сучасній світовій науці. Густини енергії та густини частинок, що виникають на прискорювачах у “малих вибухах”, порівняльні з тими, що існували в перші мікросекунди після космологічного Великого Вибуху. При цьому в процесі еволюції матерія зазнає фазових переходів між її різними станами, такими як кварк-глюонна плазма, адронна матерія, тощо.

Водночас дослідження мезонних систем мають свою специфіку, зумовлену можливістю бозе-айнштайнівської конденсації взаємодіючих частинок. Це явище в бозонних системах має тривалу історію досліджень,

починаючи з робіт Н.Н. Боголюбова [2], де такі системи вдалось звести до системи невзаємодіючих квазічастинок. Як було показано в роботах [2, 3, 4], для достатньо слабких взаємодій можна в якості хвильової функції конденсату брати безпосередньо середнє поле. Таку ідею висловив ще Дірак [5], а Н.Н. Боголюбов розвинув її для опису надплинності та конденсації Бозе-Айншттайна. Але подібні наближення не застосовні у випадку щільних систем зважаючи, щонайменше, на дві причини. Перша - високі густини кількості частинок означають і високі температури, де теплові частинки більше не можна розглядати як малу флуктуацію порівняно з густиною частинок конденсованих. Друга причина полягає в тому, що насправді ми маємо справу не стільки зі збереженням числа частинок, скільки зі збереженням різниць між кількостями частинок та античастинок [6], через що ми обов'язково мусимо враховувати в розрахунках і античастинки.

Бозе-айнштайнівську конденсацію в системі  $\pi$ -мезонів було теоретично досліджено в роботах А.Б. Мігдала (див. [7]). Пізніше це явище активно досліджувалось багатьма авторами з використанням різних моделей та методів. Формування класичних піонних полів у зіткненнях важких іонів обговорювалося в статтях [8, 9, 10, 11], а системи піонів та К-мезонів зі скінченним ізоспіновим хімічним потенціалом були розглянуті в більш пізніх роботах [12, 13, 14, 15, 16, 17]. Низку нових результатів, що стосуються щільних піонних систем, було нещодавно отримано за допомогою ґраткових методів (lattice methods) [18, 19, 20], які вважаються найбільш коректними для дослідження подібних систем при ненульових температурах. Тому важливо дослідити феномен Бозе-Айнштайнівської конденсації у системах із сильною взаємодією, які описуються квантовою хромодинамікою (КХД). Ефективними низькоенергетичними ступенями вільності в КХД є пі-мезони, тобто три псевдо-голдстоунівських бозона у

фазі конфайнменту. Пі-мезони підкоряються статистиці Бозе-Айнштейна, тому поява бозе-конденсату пі-мезонів можлива і передбачається при великих значеннях ізоспінового хімічного потенціалу, як в ефективних КХД-теоріях, так і у моделюванні КХД з перших принципів, наприклад у розрахунках на ґратці. У природі пі-мезонний бозе-конденсат може виникати під час охолодження раннього Всесвіту, у гравітаційно зв'язаних пі-мезонних зірках або як нерівноважне явище при зіткненнях важких іонів. Гіпотетичні бозонні зірки можуть існувати і бути кандидатами на роль темної матерії у Всесвіті. При всіх процесах у перерахованих об'єктах виникає висока ізоспінова асиметрія, яка визначається зарядженими пі-мезонними ступенями вільності. Саме тому і виникає ідея дослідження фазової діаграми на всій площині ізоспінового хімічного потенціалу і температури. Більшість макроскопічних системи, в яких між частинками існує відштовхувальна і притягальна взаємодії, демонструють фазовий перехід рідина-газ першого роду, який закінчується критичною точкою. Отже, ці явища можна очікувати і для взаємодіючих пі-мезонів на додаток до виникнення бозе-конденсату. Природа надає нам системи з ненульовим ізотопічним хімпотенціалом у вигляді ізоспін-асиметричної речовини. Такі системи завжди містять як ізоспінову, так і баріонну щільність. Однак в цій роботі розглянуто ідеалізацію, в якій ізотопічний хімпотенціал відмінний від нуля, а баріонний нульовий. Така система є нестійкою щодо слабких розпадів, які не зберігають ізоспін. Однак, оскільки нас цікавить лише динаміка сильної взаємодії, можна прийняти, що всі відносно повільні електрослабкі ефекти вимкнені. У цьому наближенні наша система піддається аналітичному і чисельному дослідженню при різних цікавих умовах.

### **Мета і задачі дослідження.**

В роботі досліджується система бозе-частинок, яка складається з  $\pi^+$

та  $\pi^-$ -мезонів що взаємодіють. Метою роботи є дослідження властивостей такої системи в залежності від співвідношення між притяганням та відштовхуванням між частинками.

Для її досягнення було поставлено наступні задачі:

- знайти залежності густини кількості частинок, хімічного потенціалу, енергії та теплоємності від температури в системі за умови збереження ізотопічного заряду для різних співвідношень між коефіцієнтами притягання та відштовхування між частинками;
- дослідити умови виникнення бозе-конденсату в системі взаємодіючих частинок та античастинок в залежності від величини ізотопічного заряду та співвідношення між коефіцієнтами притягання та відштовхування між частинками;
- класифікувати фазові переходи, які відбуваються в системі взаємодіючих бозе-частинок та античастинок;
- дослідити переходи типу рідина-газ в подібних системах в залежності від величини ізотопічного заряду та сили притягання між частинками, побудувати фазові діаграми для таких переходів;

*Об'єктом дослідження* є система взаємодіючих  $\pi^+$  та  $\pi^-$ -мезонів, в якій зберігається ізотопічний заряд.

*Об'єктом дослідження* є властивості термодинамічних величин таких систем, умови виникнення бозе-конденсату, фазові переходи та переходи типу рідина-газ в системах взаємодіючих бозе-частинок.

### **Методи дослідження.**

Дослідження властивостей системи бозе-частинок що взаємодіють проведено за допомогою термодинамічної моделі середнього поля Скірма. Таке поле залежить тільки від повної густини частинок і враховує дві

компоненти - квадратичне відштовхування та лінійне по густині частинок притягання. Числовими методами розв'язується рівняння залежності термодинамічних величин від температури.

### **Наукова новизна одержаних результатів.**

В дисертаційній роботі отримано наступні оригінальні результати:

1. Показано, що в системі яка складається з бозе-частинок та античастинок, і в якій ізоспінова густина  $n_I$  не дорівнює нулю за умови “слабкого” притягання завжди існує бозе-айнштейнівський конденсат в температурному інтервалі  $0 \leq T \leq T_c$ , який є результатом фазового переходу другого роду в системі, що відбувається при температурі  $T_c$ , а густина конденсату є параметром порядку.
2. Показано, що в бозе-системі може виникнути фазовий перехід першого роду для достатньо сильного притягання між частинками, утворюючи бозе-конденсат.
3. Показано, що за наявності конденсату великий канонічний ансамбль не описує системи бозе-частинок і античастинок адекватно.

Коректний опис таких систем можна провести в рамках канонічного ансамблю, в якому хімічний потенціал є термодинамічною величиною, що залежить від відповідних канонічних змінних.

### **Особистий внесок здобувача.**

В роботах [1, 3, 4] в рамках моделі середнього поля розраховані термодинамічні величини системи взаємодіючих бозе-частинок та античастинок, такі як хімічний потенціал, енергія та теплоємність, досліджено властивості фазових переходів в таких системах. В роботі [2] побудовано фазові діаграми для бозе-систем без взаємодії та із взаємодією.

В роботі [5] показано, що великий канонічний ансамбль не дає адекватного опису систем бозе-частинок за наявності конденсату.

### **Практичне значення отриманих результатів.**

Робота має теоретичний характер та орієнтована на фундаментальні дослідження, а отримані результати не передбачають комерційного використання. Однак ці результати можуть виявитися важливими і для інших аспектів життя у близькому майбутньому. Системи та методи їхнього дослідження широко використовуються при розв'язуванні задач теоретичної фізики, а отриманні результати, ймовірно, будуть використані як нові принципи завдяки глибоким аналогіям між розглянутими системами та об'єктами, які виникають в задачах квантової фізики при екстремальних умовах.

### **Апробація результатів дисертації.**

Результати освітлені у дисертації доповідалися на семінарах Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова Національної академії наук України, а також міжнародних конференціях, що проводились у Будапешті та Києві.

### **Публікації.**

Результати дисертаційної роботи представлено у 5 журнальних публікаціях [1–5].

### **Структура дисертації та об'єм дисертації.**

Дисертаційна робота складається із вступу, чотирьох (4) розділів, висновків та бібліографії, яка містить п'ятдесят (50) посилань. Дисертація включає двадцять вісім (28) рисунків. Загальний обсяг роботи становить сто сорок три (143) сторінки друкованого тексту.

# Розділ 1. Мультикомпонентна система взаємодіючих бозонів

## 1.1 Вступ

В цьому розділі розглянуто систему взаємодіючих бозе-частинок та античастинок (піонів) при сталій ізоспіновій густині  $n_I$  та скінченних температурах. Такий вибір зумовлений тим, що заряджені  $\pi$ -мезони є найлегшими адронами з ізотопічним зарядом (ізоспіновим хімічним потенціалом) та, з іншого боку, є найлегшими ядерними бозонами, а дослідження “температурного народження” пар частинка-античастинка є актуальною проблемою, що ґрунтується на квантово-статистичному підході.

Щоб врахувати взаємодію між бозонами, введемо феноменологічне Скірма-подібне середнє поле  $U(n)$ , яке залежить лише від повної густини мезонів  $n$ . Це середнє поле радше відображає присутність у системі інших сильно взаємодіючих частинок, наприклад  $\rho$ -мезонів та нуклон-антинуклонних пар при низьких температурах або глюонів і кварк-антикваркових пар при високих температурах,  $T > T_{\text{qgp}} \approx 160$  MeV. Розрахунки для невзаємодіючого адронного резонансного газу показують, що густина частинок може досягати значень  $(0.1 - 0.2) \text{ fm}^{-3}$  при температурах  $100 - 160$  MeV, які є нижчими за температуру деконфайнмента фазового переходу, див. напр. [21, 22].



В основі даної роботи лежать методи та підходи, запропоновані в статті [7], в якій було досліджено систему взаємодіючих бозе-частинок та античастинок з нульовим ізотопічним хімічним потенціалом, тобто з нульовою густиною ізотопічного заряду. Ми дослідили термодинамічні властивості системи мезонів за допомогою канонічного ансамбля, в якому канонічними змінними є температура  $T$  та ізоспінова густина  $n_I$  ( $n_I = n_{\pi}^{(-)} - n_{\pi}^{(+)} > 0$ , де  $n_{\pi}^{(\mp)}$  - густина числа частинок  $\pi^{\mp}$  мезонів, відповідно), а також конденсацію Бозе-Айнштейна та фазові переходи в такій системі у широкому діапазоні температур і густин.

У секції 1.2 розвинуто формалізм термодинамічної моделі середнього поля [23] для опису бозонної системи частинок і античастинок, який буде використано в наведених розрахунках. У секції 1.3 описана Скірма-подібна параметризація середнього поля. У секції 1.4 досліджена Бозе-конденсація та фазові переходи в системі за умови “слабкого” притягання. Висновки розділу підсумовано в секції 1.5.

## 1.2 Модель середнього поля для системи взаємодіючих бозе-частинок

В цій частині досліджено термодинамічні властивості системи взаємодіючих частинок та античастинок при скінченних температурах в рамках термодинамічної моделі середнього поля, яка була введена в роботах [24, 25] та розвинута в роботі [23]. Вважається, що в системі зберігається ізотопічний заряд і при фіксованій температурі частинки та античастинки перебувають у динамічній рівновазі відносно теплового народження та анігіляції пар.

Розглянемо систему, що складається з двох типів частинок. Для такої

системи вільну енергію та її диференціал можна записати як

$$F(N_1, N_2, T, V) = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 - pV, \quad (1.1)$$

$$dF = \mu_1 dN_1 + \mu_2 dN_2 - SdT - pdV, \quad (1.2)$$

де  $N_{1,2}$  кількість частинок першого та другого типів,  $\mu_{1,2}$  їхні хімічні потенціали,  $p$  – тиск,  $S$  та  $V$  – ентропія та об’єм системи. Диференціал густини вільної енергії (ГВЕ), яка у випадку однорідних систем визначається як  $\Phi = F/V$ , має вигляд

$$d\Phi(n_1, n_2, T) = \mu_1 dn_1 + \mu_2 dn_2 - sdT, \quad (1.3)$$

де  $s = S/V$ ,  $n_{1,2} = N_{1,2}/V$  густина ентропії та кількості частинок в системі. Хімічний потенціал частинок кожного типу визначається як

$$\mu_1 = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} \right)_T, \quad (1.4)$$

$$\mu_2 = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n_2} \right)_T. \quad (1.5)$$

Припустимо, що густину вільної енергії системи взаємодіючих частинок можна представити у вигляді суми ГВЕ системи без взаємодії  $\Phi_1^{(0)} + \Phi_2^{(0)}$  та доданку  $\Phi_{\text{int}}$ , який описує взаємодію між частинками та залежить лише від повної густини частинок в системі  $n = n_1 + n_2$ ,

$$\Phi(n_1, n_2, T) = \Phi_1^{(0)}(n_1, T) + \Phi_2^{(0)}(n_2, T) + \Phi_{\text{int}}(n_1 + n_2, T). \quad (1.6)$$

У відповідності до рівнянь (1.4) та (1.5), вирази для хімічних потенціалів

частинок обох типів можна записати у вигляді

$$\mu_1 = \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial n_1} + \frac{\partial \Phi_{\text{int}}}{\partial n} = \mu_1^{(0)} + \frac{\partial \Phi_{\text{int}}}{\partial n}, \quad (1.7)$$

$$\mu_2 = \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial n_2} + \frac{\partial \Phi_{\text{int}}}{\partial n} = \mu_2^{(0)} + \frac{\partial \Phi_{\text{int}}}{\partial n}. \quad (1.8)$$

Тиск в системі складається з тиску за відсутності взаємодії (дві перші дужки) та тиску, який виникає внаслідок взаємодії між частинками (третя дужка)

$$\begin{aligned} p(n_1, n_2, T) &= \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2 - \Phi(n_1, n_2, T) \\ &= \left\{ \mu_1^{(0)} n_1 - \Phi_1^{(0)} \right\} + \left\{ \mu_2^{(0)} n_2 - \Phi_2^{(0)} \right\} + \left\{ n \frac{\partial \Phi_{\text{int}}}{\partial n} - \Phi_{\text{int}} \right\} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Введемо середнє поле та надлишковий тиск в системі у вигляді наступних співвідношень:

$$U(n, T) = \left[ \frac{\partial \Phi_{\text{int}}(n, T)}{\partial n} \right]_T, \quad (1.10)$$

$$P(n, T) = n \left[ \frac{\partial \Phi_{\text{int}}(n, T)}{\partial n} \right]_T - \Phi_{\text{int}}(n, T). \quad (1.11)$$

З цих виозначень маємо диференціальне співвідношення, що

$$n \frac{\partial U(n, T)}{\partial n} = \frac{\partial P(n, T)}{\partial n}. \quad (1.12)$$

В рівнянні (1.9) ми використали вирази для тиску одночастинкового ідеального газу:

$$p_1^{(0)} = \mu_1^{(0)} n_1 - \Phi_1^{(0)} = \frac{g}{3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{\omega_{\mathbf{k}}} f(\omega_{\mathbf{k}}; \mu_1^{(0)}), \quad (1.13)$$

$$p_2^{(0)} = \mu_2^{(0)} n_2 - \Phi_2^{(0)} = \frac{g}{3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{\omega_{\mathbf{k}}} f(\omega_{\mathbf{k}}; \mu_2^{(0)}), \quad (1.14)$$

де  $f(\omega_{\mathbf{k}}; \mu^{(0)})$  – функція розподілу Бозе-Айнштейна для ідеального газу

$$f(\omega_{\mathbf{k}}; \mu^{(0)}) = \left\{ \exp \left[ \frac{\omega_{\mathbf{k}} - \mu^{(0)}}{T} \right] - 1 \right\}^{-1}, \quad \omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}. \quad (1.15)$$

Записавши співвідношення (1.7) та (1.8) у вигляді

$$\mu_1^{(0)} = \mu_1 - U(n), \quad (1.16)$$

$$\mu_2^{(0)} = \mu_2 - U(n), \quad (1.17)$$

та підставивши їх у вирази (1.13) та (1.14), отримуємо для повного тиску у системі формулу

$$p(T, n_1, n_2) = \frac{g}{3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{\omega_{\mathbf{k}}} [f(E(\mathbf{k}, n); \mu_1) + f(E(\mathbf{k}, n); \mu_2)] + \quad (1.18)$$

$$+ P(T, n),$$

в якій  $g$  – ступінь виродження,  $E(\mathbf{k}, n) = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} + U(T, n)$  – ефективна енергія частинки, а  $P(T, n)$  – надлишковий тиск. Щоб отримати самоузгоджене рівняння для повної густини частинок  $n$  в системі, зручно перейти від змінних  $(T, n_1, n_2)$  до змінних  $(T, \mu_1, \mu_2)$ . В такому випадку повна густина кількості частинок  $n$  також стає функцією нових змінних  $(T, \mu_1, \mu_2)$ . Тоді для  $n$  отримуємо

$$n = n_1 + n_2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \mu_1} \right)_T + \left( \frac{\partial p}{\partial \mu_2} \right)_T$$

$$= g \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} [f(E(\mathbf{k}, n); \mu_1) + f(E(\mathbf{k}, n); \mu_2)]. \quad (1.19)$$

Для густини вільної енергії (див. рівняння (1.1)) маємо вираз:

$$\Phi = \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2 - p. \quad (1.20)$$

## Система частинок та античастинок

Хімічний потенціал  $\mu$  включає в себе доданки, пов'язані з різними квантовими числами

$$\mu = B\mu_B + S\mu_S + Q\mu_Q + I\mu_I + \dots, \quad (1.21)$$

де  $B$ ,  $S$ ,  $Q$  and  $I$  відповідають баріонному квантовому числу, дивності, електричному заряду та ізоспіну. Розглядаючи в якості бозе-частинок та античастинок  $\pi^-$  та  $\pi^+$ -мезони, беремо їхні хімічні потенціали  $\mu_1$  та  $\mu_2$  з протилежними знаками [23]

$$\mu_1 = -\mu_2 \equiv \mu_I. \quad (1.22)$$

Зауважимо, що в даному випадку ізотопічний заряд та електричний можна ототожнити в виду очевидної їх пропорційності. Вимагаючи збереження ізотопічного спіну (заряду)  $n_I$  в системі, отримуємо наступні самоузгоджені рівняння:

$$n = g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [f(E(\mathbf{k}, n); \mu_I) + f(E(\mathbf{k}, n); -\mu_I)], \quad (1.23)$$

$$n_I = g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [f(E(\mathbf{k}, n); \mu_I) - f(E(\mathbf{k}, n); -\mu_I)], \quad (1.24)$$

в яких функція розподілу Бозе-Айнштайна має вигляд

$$f(E(\mathbf{k}, n); \mu_I) = \left\{ \exp \left[ \frac{\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} + U(T, n) - \mu_I}{T} \right] - 1 \right\}^{-1}. \quad (1.25)$$

Систему утворену з рівнянь (1.23) та (1.24) можна розв'язати відносно термодинамічних величин  $n$  та  $\mu_I$  для фіксованих значень канонічних змінних  $T$  та  $n_I$ . В результаті будемо мати залежності

$$n = n(T, n_I), \quad \mu_I = \mu_I(T, n_I). \quad (1.26)$$

В даній роботі взаємодія між частинками описується за допомогою середнього поля Скірма

$$U(n) = -An + Bn^2, \quad (1.27)$$

яке залежить тільки від повної густини частинок  $n$  в системі. Використовуючи самоузгоджені розв'язки  $n(T, n_I)$  та  $\mu_I(T, n_I)$  системи рівнянь (1.23) та (1.24), отримуємо вирази для повного тиску та густини вільної енергії системи взаємодіючих бозе-частинок

$$p = \frac{g}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{\omega_{\mathbf{k}}} [f(E(\mathbf{k}, n); \mu_I) + f(E(\mathbf{k}, n); -\mu_I)] + P(n), \quad (1.28)$$

$$\Phi = n_I \mu_I(T, n_I) - p(T, n_I), \quad (1.29)$$

де  $E(\mathbf{k}, n) = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} + U(n)$ . Маючи густину вільної енергії, легко обчислити теплоємність  $c_V$

$$c_V = -T \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2}. \quad (1.30)$$

Співвідношення Ейлера включатиме лише ізоспінову густину  $n_I =$

$n^{(-)} - n^{(+)}$  таким чином

$$\varepsilon + p = T s + \mu_I n_I, \quad (1.31)$$

де  $n^{(-)}$  - густина кількості частинок, а  $n^{(+)}$  - густина кількості античастинок. Надалі ми розглядатимемо систему зі сталою густиною ізоспіну  $n_I$ , тоді як повна густина кількості частинок  $n = n^{(-)} + n^{(+)}$  є термодинамічною величиною, що залежить від  $T$  та  $n_I$ . (Динамічне збереження загальної кількості піонів у насиченій піонами системі, що утворюється на проміжній стадії зіткнення важких іонів, розглянуто в посиланнях [26, 27, 28])

У такому підході хімічний потенціал контролює різницю кількості частинок та античастинок  $\mu_I \rightarrow (N^{(-)} - N^{(+)})$ , тоді як загальна кількість частинок контролюється температурою  $T \rightarrow (N = N^{(-)} + N^{(+)})$ . Дійсно, якщо було утворено деяку додаткову кількість пар частинка-античастинка рівну  $M$  до вже існуючих частинок  $N^{(-)}$  і  $N^{(+)}$  у замкненій системі, то та сама величина  $\mu_I$  знаходиться у відповідності  $\mu_I \rightarrow [(N^{(-)} + M) - (N^{(+)} + M)]$ , але  $T' \rightarrow (N^{(-)} + M + N^{(+)} + M)$ , де  $T' > T$ . Це якісне міркування вказує на існування однозначної відповідності незалежних пар змінних  $(T, \mu_I) \Leftrightarrow (N, n_I)$ . Неважко показати, що останнє твердження справедливе в ідеальному квантовому газі частинок та античастинок. Строге доведення незалежності термодинамічних змінних  $n$  і  $n_I$  у більш загальному випадку, коли середні поля, які залежать від цих змінних, присутні в системі (див. [29]), не є простим.

У загальному випадку середнє поле  $U$  залежить від обох незалежних змінних  $n$ ,  $n_I$ , тобто  $U(n, n_I)$ . Як було доведено в [29], середнє поле  $U(n, n_I)$  можна розділити на  $n$ -залежні та  $n_I$ -залежні частини для частинок та

античастинок, причому

$$U^{(-)}(n, n_I) = U(n) - U_I(n_I), \quad (1.32)$$

$$U^{(+)}(n, n_I) = U(n) + U_I(n_I). \quad (1.33)$$

Знаки в рівняннях (1.32) і (1.33) зумовлені тим, що  $U_I(n_I)$  мусить бути непарною функцією від ізоспінового числа  $n_I$ .

В даній роботі було знехтувано тією частиною середнього поля, яка залежить від густини ізоспіну, тобто покладено  $U_I(n_I) = 0$ . За таких умов надлишковий тиск  $P(n)$  також залежить тільки від повної густини частинок  $n$ . Окремо зауважимо, що в термодинамічній моделі середнього поля ми не враховували можливу залежність середнього поля від температури, як у випадку наближення Гартрі (Hartree).

айншта

## 1.3 Скірма-подібна параметризація середнього поля

Термодинамічна модель середнього поля була застосована для кількох фізично цікавих систем, а саме, адронно-резонансного газу [23] та піонного газу [30] у випадку відсутності ізотопічного заряду в системи, тобто при  $\mu_I = 0$ . Було показано, що в подібних системах може утворюватись бозе-конденсат [7, 31].

У цій роботі досліджуються системи бозе-частинок ( $\pi^-$  та  $\pi^+$ -мезонів) за умови збереження ізоспінової густини заряду  $n_I = \text{const}$ . Як зазначалося в попередній секції, середнє поле може бути розбите на дві частини, одна з яких залежить від загальної густини частинок  $n$ , а друга - від ізоспінової густини  $n_I$  (див. (1.32) та (1.33)). На першому етапі нашого дослідження ми



припускаємо, що взаємодія між частинками описується Скірма-подібним середнім полем, яке залежить тільки від повної густини числа частинок  $n$ . Умовно кажучи, ми беремо до уваги лише сильну взаємодію. Отже, вважатимемо, що середнє поле має вигляд

$$U(n) = -An + Bn^2, \quad (1.34)$$

де  $A$  і  $B$  - параметри моделі, які необхідно задати. Деякий додатковий внесок у притягальне середнє поле при високих температурах, ( $T \propto 100 - 160$  MeV), можуть давати інші адрони, присутні у системі, такі як  $\rho$ -мезони [32] або баріон-антибаріонні пари [33]. Як було зазначено у вступі, дослідження властивостей густого і гарячого піонного газу є актуальним внаслідок утворення середовища з низькими баріонними числами середньої рапідності (midrapidity), що було підтверджено в експериментах на RHIC та LHC [34, 35].

Тому при веденні розрахунків ми розглядаємо загальний випадок  $A > 0$ , щоб дослідити бозонну систему з притягальним і відштовхувальним внесками в середнє поле (1.34). Для коефіцієнта відштовхування  $B$  ми використовуємо фіксоване значення, отримане з оцінки на основі віріального розкладу [36],  $B = 10mv_0^2$  при  $v_0$ , що дорівнює чотирикратному власному об'єму частинки, тобто  $v_0 = 16\pi r_0^3/3$ . У наших чисельних розрахунках ми беремо  $v_0 = 0.45 \text{ fm}^3$ , що відповідає “радіусу частинки”  $r_0 \approx 0.3 \text{ fm}$ . Чисельні розрахунки будуть продовжуватись для бозонів з масою  $m = 139 \text{ MeV}$ , які ми умовно називаємо “піонами”. У цьому випадку коефіцієнт відштовхування дорівнює  $B/m = 2.025 \text{ fm}^6$ , і він залишається постійним у всіх наведених розрахунках. (Наприклад, у роботі [37] автори використовують значення  $B/m = 21.6 \text{ fm}^6$ ). Водночас коефіцієнт  $A$ , який визначає величину притягання середнього поля (1.34),

змінюватиметься. Доцільно параметризувати коефіцієнт  $A$ . Ми виконаємо параметризацію, скориставшись розв'язками рівняння  $U(n) + m = 0$ , подібно до параметризації, прийнятої в [7, 31]. Для заданого середнього поля (1.34) існує два корені цього рівняння:

$$n_{1,2} = (A \mp \sqrt{A^2 - 4mB})/2B, \quad (1.35)$$

або:

$$n_1 = \sqrt{\frac{m}{B}} \left( \kappa - \sqrt{\kappa^2 - 1} \right), \quad n_2 = \sqrt{\frac{m}{B}} \left( \kappa + \sqrt{\kappa^2 - 1} \right), \quad (1.36)$$

де

$$\kappa \equiv \frac{A}{2\sqrt{mB}}. \quad (1.37)$$

Тоді можна параметризувати коефіцієнт притягання як  $A = \kappa A_c$  де  $A_c = 2\sqrt{mB}$ . Як ми покажемо нижче, безрозмірний параметр  $\kappa$  є параметром масштабу моделі. Коли ми задаємо конкретне значення ізоспінової густини, параметр  $\kappa$  визначає фазову структуру системи.

Як видно з рівняння (1.36) для значень параметра  $\kappa < 1$  дійсних коренів не існує. Критичне значення  $A_c$  маємо тоді, коли обидва корені збігаються, тобто коли  $\kappa = \kappa_c = 1$ , то  $A = A_c = 2\sqrt{mB}$ . У загальному випадку можна виділити два інтервали параметра  $\kappa$ :

1. Перший інтервал відповідає  $\kappa \leq 1$ , тут немає дійсних коренів рівняння  $U(n) + m = 0$ . Ми пов'язуємо ці значення  $\kappa$  із “слабкою” притягальною взаємодією, і в цій частині роботи ми розглядаємо варіації коефіцієнта притягання  $A$  для значень  $\kappa$  лише з цього інтервалу.
2. Другий інтервал відповідає  $\kappa > 1$ , тут існують два дійсні корені

рівняння  $U(n) + m = 0$ . Цей інтервал ми пов'язуємо з “сильною” притягальною взаємодією. Цей випадок буде розглянуто нижче.

Якщо припустити можливість бозе-айнштейнівської конденсації у двокомпонентній системі, то корисно класифікувати фазову структуру системи за двома основними комбінаціями, які визначають для “слабкого” притягання різні термодинамічні стани:

1. Обидві компоненти, або бозонні частинки та бозонні античастинки, тобто  $\pi^-$  і  $\pi^+$ -мезони, перебувають у тепловій (кінетичній) фазі;
2. Частинки ( $\pi^-$ -мезони) перебувають у конденсатній фазі, а античастинки ( $\pi^+$ -мезони) перебувають у тепловій (кінетичній) фазі - таку комбінацію можна назвати “перехресним” станом.

Слід зазначити, що вираз “частинки перебувають у конденсатній фазі” є умовним. Тому що, по суті, це фаза суміші, де при фіксованій температурі частина  $\pi^-$ -мезонів перебуває в теплових станах з імпульсом  $|\mathbf{k}| > 0$ , а інша частина цієї  $\pi^-$ -компоненти належить до бозе-айнштейнівського конденсату, де всі  $\pi^-$ -мезони мають нульовий імпульс,  $\mathbf{k} = 0$ .

Розглянемо ці основні термодинамічні стани системи послуговуючись моделлю середнього поля (1.34).

## 1.4 Термодинамічні властивості системи бозе-частинок і античастинок у випадку “слабкого” притягання

У наближенні середнього поля поведінка системи в тепловій (кінетичній) фазі визначається сукупністю двох трансцендентних рівнянь

(зберігаємо  $n_I = \text{const}$ )

$$n = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [f(E(k, n), \mu_I) + f(E(k, n), -\mu_I)] , \quad (1.38)$$

$$n_I = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [f(E(k, n), \mu_I) - f(E(k, n), -\mu_I)] , \quad (1.39)$$

де функція розподілу Бозе-Айнштейна  $f(E, \mu_I)$  визначена в (1.25) і  $E(k, n) = \omega_k + U(n)$ . Систему рівнянь (1.38)-(1.39) слід розв'язувати відносно відносно  $n$  та  $\mu_I$  для заданої температури  $T$  з урахуванням  $n_I = \text{const}$ . Наразі ми розглядаємо систему бозонів у канонічному ансамблі, де незалежними канонічними змінними є  $T$  і  $n_I$ , а спіні частинок дорівнює нулю. У цьому підході хімічний потенціал  $\mu_I$  є термодинамічною величиною, яка залежить від канонічних змінних, тобто  $\mu_I(T, n_I)$ .

У випадку перехресного стану, коли частинки, тобто  $\pi^-$ -мезони, перебувають у конденсатній фазі, а античастинки все ще в тепловій (кінетичній) фазі, рівняння (1.38) та (1.39) мусять бути адаптовані, щоб включити конденсатну складову  $n_{\text{cond}}^{(-)}$ . Крім того, слід врахувати, що частинки ( $\pi^-$  або компонента високої густини) можуть перебувати в конденсованому стані лише за необхідної умови:

$$U(n) - \mu_I = -m . \quad (1.40)$$

Зі зменшенням температури від великих значень, коли і  $\pi^-$ , і  $\pi^+$  перебувають у тепловій фазі, густина  $\pi^-$ -компоненти, а саме  $n^{(-)}(T, \mu_I)$ , перетинає критичну криву при температурі  $T_c^{(-)}$ , де виконується умова (1.40). Останнє означає, що крива  $n_{\text{lim}}^{(\text{id})}(T)$ , яка визначається як

$$n_{\text{lim}}^{(\text{id})}(T) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(\omega_k, \mu_I) \Big|_{\mu_I=m} , \quad (1.41)$$

це критична крива для  $\pi^-$ -мезонів (або компоненти високої густини). Тут  $f(\omega_k, \mu_I)$  – функція розподілу Бозе-Айнштайна, визначена у (1.25). Як бачимо, функція (1.41) представляє максимальну густину теплових (кінетичних) бозонних частинок ідеального газу при температурі  $T$ , коли  $\mu_I = m$ . Звідси випливає, що критична крива в наближенні середнього поля, яку ми розглядаємо, для бозонних частинок збігається з критичною кривою для ідеального газу.

З урахуванням рівнянь (1.40) і (1.41) запишемо узагальнення системи рівнянь (1.38), (1.39)

$$n = n_{\text{cond}}^{(-)}(T) + n_{\text{lim}}^{(\text{id})}(T) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(E(k, n), -\mu_I), \quad (1.42)$$

$$n_I = n_{\text{cond}}^{(-)}(T) + n_{\text{lim}}^{(\text{id})}(T) - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(E(k, n), -\mu_I). \quad (1.43)$$

Тим часом, використовуючи співвідношення (1.40) між середнім полем і хімічним потенціалом, дану систему рівнянь можна звести до одного рівняння для  $n^{(+)}$ :

$$n^{(+)} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(E(k, n), -\mu_I) \Big|_{\mu_I=U(n)+m}, \quad (1.44)$$

де  $U(n) = U(2n^{(+)} + n_I)$  і  $E(k, n) = \omega_k + U(2n^{(+)} + n_I)$ . Розв'язок рівняння (1.44) для температур  $T$  з інтервалу  $T < T_c^{(-)}$  дає густину  $n^{(+)}(T)$   $\pi^+$ -мезонів. З рівнянь (1.42) та (1.43) видно, що густина частинок  $n^{(+)}$  зумовлена лише тепловими  $\pi^+$ -мезонами. Тоді як густина  $n^{(-)}$  формується двома складовими: конденсовані частинки ( $\pi^-$ -мезони при  $\mathbf{k} = 0$ ) з густиною частинок  $n_{\text{cond}}^{(-)}(T)$  та теплові  $\pi^-$ -мезони при  $|\mathbf{k}| > 0$  з густиною частинок  $n_{\text{lim}}^{(\text{id})}(T)$ . Правило суми густин частинок для цієї фази  $\pi^-$ -мезонів

в інтервалі  $T < T_c^{(-)}$  має вигляд

$$n^{(-)} = n_{\text{cond}}^{(-)}(T) + n_{\text{lim}}^{(\text{id})}(T). \quad (1.45)$$

### 1.4.1 Числові результати

При високих температурах, тобто  $T \geq T_c^{(-)}$ , обидві компоненти системи перебувають у тепловій фазі, і термодинамічні властивості системи визначаються системою рівнянь (1.38) та (1.39). Розв'язуючи цю систему для заданих значень  $T$  і  $n_I$ , отримаємо функції  $\mu_I(T, n_I)$  і  $n(T, n_I)$ , а потім інші термодинамічні величини.

При зменшенні температури, після переходу через значення  $T = T_c^{(-)}$  частинки, які належать до компоненти високої густини (або  $\pi^-$ -мезони), починають “падати вниз” у стан конденсату, який характеризується значенням імпульсу  $\mathbf{k} = 0$ . У граничному випадку, коли  $T = 0$ , всі частинки компоненти високої густини, тобто  $\pi^-$ -мезони, перебувають у конденсованому стані і  $n^{(-)} = n_I$ . У той же час частинки компоненти низької густини, або  $\pi^+$ -мезони що перебувають у тепловій фазі, втрачають густину  $n^{(+)}$  зі зменшенням температури, і вона стає строго нульовою при  $T = 0$ . Для інтервалу температур  $T < T_c^{(-)}$  рівняння (1.38), (1.39) слід узагальнити і тепер термодинамічні властивості системи визначаються (1.44), де враховано, що  $\mu_I = -U(n) + m$  для всіх температур цього інтервалу, якщо тільки компонента високої густини  $n^{(-)}$  не перебуває в конденсованому стані. В іншому випадку необхідно розв'язати систему рівнянь (3.150) та (3.151) для області, де  $n^{(-)}$  знову з'являється в тепловій (кінетичній) фазі.

Для параметрів  $n_I = 0.1 \text{ fm}^{-3}$ ,  $\kappa = 0.5$  і  $\kappa = 1.0$  розв'язуємо систему рівнянь (1.38), (1.39) для теплової фази та рівняння (1.44) для

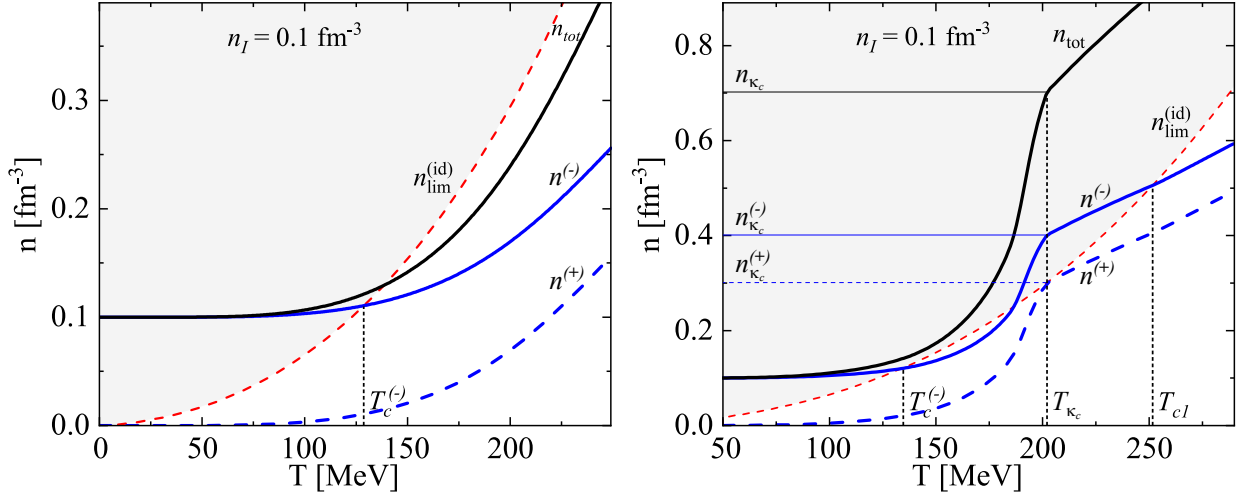


Рис. 1.1: *Ліва панель:* Густини числа частинок  $n^{(+)}$ ,  $n^{(-)}$  та  $n_{\text{tot}} = n^{(+)} + n^{(-)}$  від температури для взаємодіючих  $\pi^+$ - $\pi^-$  піонних газів у моделі середнього поля. Повна ізоспінова густина залишається сталою,  $n_I = 0.1 \text{ fm}^{-3}$ , а параметр притягання дорівнює  $\kappa = 0.5$ . Максимальна густина  $n_{\text{lim}}^{(\text{id})}$  ідеального газу теплових піонів при  $\mu_I = m_\pi$  показана червоною пунктирною лінією. Заштрихована область показує можливі стани конденсованих частинок. Бозе-Айнштайнівська конденсація  $\pi^-$ -мезонів відбувається при температурі  $T_c = T_c^{(-)}$ .

*Права панель:* Те саме, що й на лівій панелі, але з параметром  $\kappa = \kappa_c = 1$ . Тут  $n_1 = n_2 \equiv n_{\kappa_c}$  (див. рівняння (1.36)),  $n_{\kappa_c}^{(-)} = (n_{\text{tot}} + n_I)/2$ ,  $n_{\kappa_c}^{(+)} = (n_{\text{tot}} - n_I)/2$  та  $T_{\kappa_c}$  - температура, при якій крива  $n^{(+)}(T)$  торкається критичної кривої  $n_{\text{lim}}^{(\text{id})}$ .

“крос-” термодинамічного стану. Поведінка густини  $n^{(+)}$   $\pi^+$ -мезонів та густини  $n^{(-)}$   $\pi^-$ -мезонів зображено рис. 1.1. На цьому рисунку ми також зобразили поведінку повної густини мезонів  $n = n^{(+)} + n^{(-)}$  в залежності від температури (на графіку, цю густину позначено як  $n_{\text{tot}}$ ).

Аналізуючи поведінку утворення конденсату (див. рис. 1.1), необхідно зазначити, компонента високої густини  $n^{(-)}$  газу частинок і античастинок зазнає фазового переходу в конденсат Бозе-Айнштайна. Якщо застосувати наші міркування до піонного газу з  $n_I = n_\pi^{(-)} - n_\pi^{(+)} > 0$  це означає, що  $\pi^-$ -компонента зазнає фазового переходу до конденсату Бозе-Айнштайна, а компонента низької густини або  $\pi^+$ -мезони можуть існувати лише у тепловій фазі для всього діапазону температур. Отже, у ґраткових (lattice) розрахунках та в експерименті, наприклад, у зіткненнях важких іонів, існує сенс розглядати  $T_c = T_c^{(-)}$  для конденсату Бозе-Айнштайна лише з  $\pi^-$ -

мезонів .

Водночас температурна поведінка густини числа частинок  $n^{(+)}$  (див. Рис. 1.1) дуже подібна до поведінки густини піонів  $n(T)$  для  $\kappa \leq 1$ , отриманої в роботі [7], де піонна система при  $\mu_I = 0$ . Зауважимо, що в цій роботі ми розглядаємо систему піонів лише для “слабкого” притягання, тобто при  $\kappa \leq 1$ . Як було показано в роботі [7], поведінка системи при  $\kappa > 1$  кардинально змінюється. У цьому випадку зі збільшенням температури при  $T = T_{cd} < T_c$ , система зазнає фазового переходу першого роду.

## Критична температура

Рівняння (1.42) можна використати для визначення критичної температури  $T_c^{(-)}$ . Дійсно, візьмемо до уваги, що в точці перетину з критичною кривою густина конденсату поки що дорівнює нулю,  $n_{\text{cond}}^{(-)}(T_c^{(-)}) = 0$ , і густина теплових  $\pi^-$  частинок стає рівною  $n^{(-)}(T_c^{(-)}) = n_{\text{lim}}^{(\text{id})}(T_c^{(-)})$ . Тоді, при цій температурі  $T = T_c^{(-)}$  з лівого боку рівняння (1.42) маємо  $n = 2n_{\text{lim}}^{(\text{id})}(T_c^{(-)}) - n_I$ , і тепер у цій температурній точці на критичній кривій рівняння (1.42) відносно  $T$  має вигляд:

$$n_{\text{lim}}^{(\text{id})}(T) - n_I = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(E(k, n), -\mu_I) \Big|_{\mu_I=U(n)+m} \quad (1.46)$$

Розв’язавши рівняння (1.46) при  $n_I = 0.1 \text{ fm}^{-3}$ , для  $\kappa = 0.5$  і  $\kappa = \kappa_c = 1$  та  $E(k, n) = \omega_k + U(2n_{\text{lim}}^{(\text{id})} - n_I)$  отримаємо  $T_c^{(-)} = 129 \text{ MeV}$  та  $T_{c1}^{(-)} = 251 \text{ MeV}$ , відповідно. Ці результати зображено на рис. 1.1 ліворуч та праворуч, відповідно.

Виявляється, що  $T_c^{(-)}$  є критичною температурою, яка визначає фазовий перехід з утворенням БЕК для всієї піонної системи, оскільки античастинки або  $\pi^+$ -мезони, які представляють компоненту низької густини  $n^{(+)}(T)$ , повністю перебувають у тепловому стані для всіх



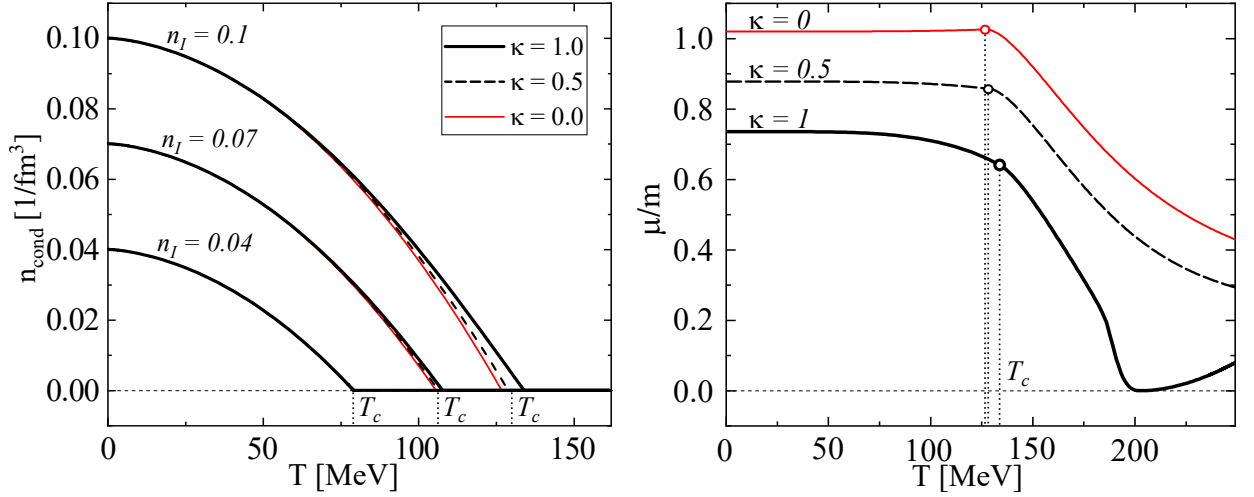


Рис. 1.2: *Ліва панель:* Залежність густини конденсату від температури в системі частинки та античастинки, що взаємодіють між собою, для трьох значень ізоспінової густини,  $n_I = 0.04, 0.07, 0.1 \text{ fm}^{-3}$ .

*Права панель:* Залежність хімічного потенціалу від температури при значеннях параметра притягання  $\kappa = 0, 0.1, 0.5, 1.0$  та густини ізоспіну  $n_I = 0.1 \text{ fm}^{-3}$ . Позначені точки на кривих відповідають критичній температурі  $T_c^{(-)}$ . На обох графіках задано  $T_c = \langle T_c^{(-)} \rangle$ .

температур.

Густини конденсату як функції температури, отримані в рамках нашої моделі для трьох значень параметра притягання,  $\kappa = 0, 0.5, 1.0$  і для трьох значень ізоспінової густини,  $n_I = 0.04, 0.07, 0.1 \text{ fm}^{-3}$ , зображено на Рис. 1.2, ліва панель. Зафіксовано мінімальну відмінність критичної температури  $T_c^{(-)}$  при зміні параметра притягання  $\kappa$ , різниця не перевищує 4 MeV при  $n_I = 0.1 \text{ fm}^{-3}$ . Ця різниця значно менша, як ми бачимо на Рис. 1.2 для менших густин ізоспінів. Тоді було б корисно визначити лише одне середнє значення  $T_c^{(-)}$  як

$$T_c = \langle T_c^{(-)} \rangle. \quad (1.47)$$

Наприклад, для  $n_I = 0.1 \text{ fm}^{-3}$  середнє значення дає  $T_c \approx 129 \text{ MeV}$ . Температура  $T_c$  “сигналізує” про утворення конденсату коли температура зменшується і перетинає це значення. Зауважимо, що критична

температура  $T_c$  практично не залежить від параметра притягання  $A$  середнього поля (1.34). Іншими словами, притягання між частинками в системі має слабкий вплив на критичну температуру.

Залежність хімічного потенціалу від температури зображено на Рис. 1.2 на правій панелі за трьох значень параметра притягання,  $\kappa = 0, 0.1, 0.5, 1.0$ . Насамперед зауважимо, що хімічний потенціал майже не залежить від температури, коли в системі існує конденсат, тобто в інтервалі  $0 < T \leq T_c$ . Величина  $\mu_I$  змінюється від  $1.02m_\pi$  при відсутності притягання,  $\kappa = 0$ , до  $\mu_I = 0.74m_\pi$  для критичного параметра притягання  $\kappa = 1.0$ . Отже, для  $0 \leq \kappa \leq 1$  хімічний потенціал лежить у діапазоні  $103 \leq \mu_I \leq 142$  MeV. Принагідно зазначимо, що вже перші спроби підігнати спектри  $p_T$   $\pi^-$ -мезонів у зіткненнях O+Au при 200 AGeV/нуклон (при мідрapidності) за розподілом Бозе-Айнштейна для ідеального газу дають значення  $\mu \approx 126$  MeV,  $T \approx 167$  MeV а в S+S зіткненнях при 200 AGeV/нуклон дає значення  $\mu \approx 118$  MeV,  $T \approx 164$  MeV [38]. Отже, для узгодження даних потрібен хімічний потенціал піона в діапазоні  $\mu \approx 115 - 130$  MeV, що ми можемо формально порівняти зі значеннями хімічного потенціалу отриманими в нашій моделі.

## Теплоємність системи

Похідна хімічного потенціалу від температури має стрибок в точках позначених на кривих маленькими чорними кружечками (див. Рис. 1.2, права панель). Ці точки на кривих  $\mu_I(T)$  відповідають  $T_c^{(-)}$ , значення яких відрізняються одне від одного не більше, ніж на  $\Delta T = 4$  MeV. Як ми зробили висновок раніше, це температура фазового переходу (див. (1.47)), яка практично не залежить від величини притягання. Щоб довести, що це справді фазовий перехід другого роду, спочатку обчислимо теплоємність  $c_v$  як (Насправді, тут ми обчислюємо об'ємну теплоємність,

тобто теплоємність  $C_V$  системи, поділену на об'єм  $V$ , тобто  $c_v = C_V/V$ .)

$$c_v = -T \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2}, \quad (1.48)$$

де  $\Phi(T, n_I) = -p(T, n_I) + n_I \mu_I(T, n_I)$  – густина вільної енергії. Ми обчислимо  $\Phi(T, n_I)$  для двох термодинамічних сценаріїв, коли  $T \geq T_c$  і коли  $T < T_c$ .

Розв'язавши рівняння (1.38), (1.39), можна обчислити тиск для випадку, коли частинки й античастинки перебувають у тепловій фазі, тобто  $T \geq T_c$ . У цьому випадку густина вільної енергії має вигляд

$$\begin{aligned} \Phi = & n_I \mu_I(T, n_I) - \\ & - \frac{1}{3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{\omega_k} [f(E(k, n), \mu_I) + f(E(k, n), -\mu_I)] + \\ & + P(n), \end{aligned} \quad (1.49)$$

де відомі функції  $n(T, n_I)$  та  $\mu_I(T, n_I)$ . Надлишковий тиск  $P(n)$  знаходимо інтегруванням рівняння (1.12) для Скірма-подібної параметризації середнього поля (1.34):

$$P(n) = -\frac{A}{2} n^2 + \frac{2B}{3} n^3, \quad (1.50)$$

де використано очевидну умову  $P(n=0) = 0$ .

Для температур менших за  $T_c$ , коли компонента високої густини піонного газу ( $\pi^-$ -мезони) перебуває у фазі конденсату, а компонента низької густини піонного газу ( $\pi^-$ -мезонів) перебуває в конденсатній фазі, а компонентна низької густини ( $\pi^+$ -мезонів) – у тепловій фазі, густина

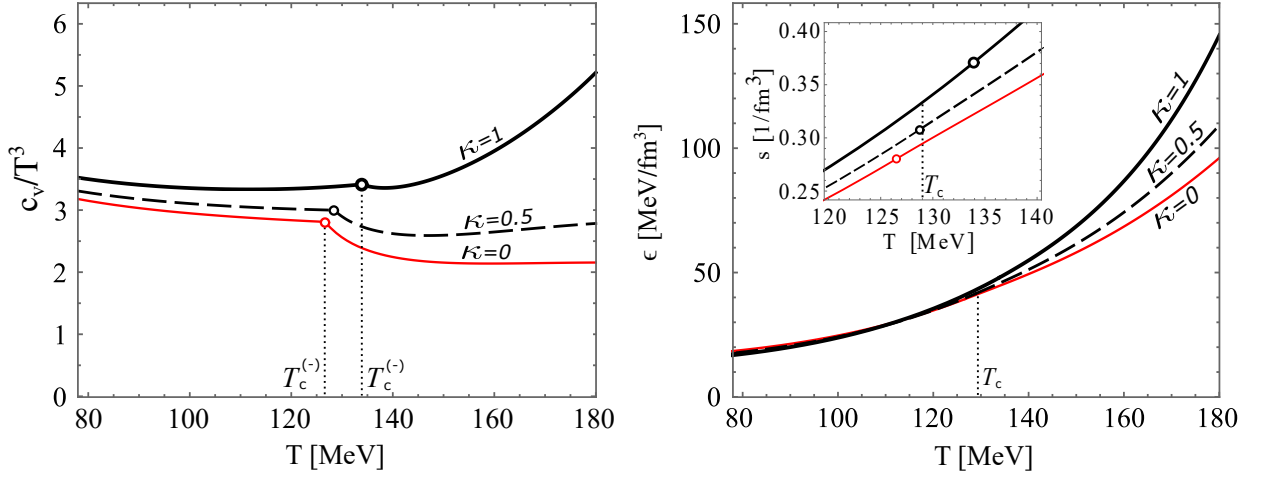


Рис. 1.3: *Ліва панель:* Теплоємність, нормована на  $T^3$ , як функція температури в системі мезонів  $\pi^- - \pi^+$ , що взаємодіють між собою. Ізоспінкову густина покладено сталою,  $n_I = 0.1 \text{ fm}^{-3}$ . Криві відмічені параметром притягання  $\kappa$ . *Права панель:* Залежність густини енергії від температури для тієї самої мезонної системи і тих самих умов, що й на лівій панелі. Залежність густини ентропії від температури в околі  $T_c$  показано в маленькому вікні для параметрів притягання  $\kappa = 0, 0.5, 1.0$ . Поставимо  $T_c = \langle T_c^{(-)} \rangle$ .

вільної енергії має вигляд

$$\begin{aligned}
 \Phi = & n_I [U(n) + m] - \\
 & - \frac{1}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{\omega_k} f(\omega_k, \mu_I) \Big|_{\mu_I=m} - \\
 & - \frac{1}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{\omega_k} f(E(k, n), -\mu_I) \Big|_{\mu_I=U(n)+m} - \\
 & - P(n).
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

Тут повна густина піонів  $n = 2n^{(+)} + n_I$ ,  $\mu = U(n) + m$ , як у рівнянні (1.44),  $E(k, n) = \omega_k + U(n)$  і  $n^{(+)}(T, n_I)$  є розв'язком рівняння (1.44).

Використовуючи густину вільної енергії (1.49) праворуч від  $T_c$  і (1.51) ліворуч від  $T_c$ , відповідно, ми обчислюємо теплоємність, нормовану на  $T^3$ , як функцію температури при  $n_I = 0.1 \text{ fm}^{-3}$  для трьох значень параметра притягання  $\kappa = 0, 0.5, 1.0$ . Ці залежності зображено на Рис. 1.3 на лівій панелі. Температурна залежність теплоємності є неперервною функцією. Однак, похідна цієї функції має скінченний розрив, що свідчить

про фазовий перехід другого роду, де густина конденсату є параметром порядку (строго кажучи, це фазовий перехід третього роду). Щоб переконатися, що це дійсно фазовий перехід другого роду без виділення прихованої теплоти при температурі  $T_c$ , обчислимо густину енергії  $\varepsilon$  для того самого набору параметрів  $\kappa$ , функції  $\varepsilon(T)$  показано на Рис. 1.3 на правій панелі. Щоб переконатися, що перша похідна вільної енергії є гладкою функцією, обчислимо густину ентропії  $s = -\partial\Phi(T, n_I)/\partial T$ , її залежність від температури в околі  $T_c$  показано у маленькому вікні на Рис. 1.3 на правій панелі для трьох значень параметра притягання  $\kappa = 0, 0.5, 1.0$ . Справді, можна бачити, що температурні залежності густини енергії та густини ентропії неперервні та гладкі при  $T = T_c$ , що доводить, що при цій температурі в системі відбувається фазовий перехід другого роду. Цікаво також відзначити, що густина енергії в інтервалі температур  $0 < T \leq T_c$  практично не залежить від сили притягання (в діапазоні  $0 \leq \kappa \leq 1$ ) між частинками.

Відзначимо тепер деяку подібність між картиною, отриманою вище для взаємодіючої двокомпонентної системи частинок та античастинок, коли  $n_I = \text{const}$  та однокомпонентним ідеальним газом, де ми залишаємо незмінною густину кількості частинок  $n$ . По-перше, поведінка компоненти з високою густиною в “конденсатному” температурному інтервалі  $T \leq T_c$  у системі зі взаємодією подібна до поведінки однокомпонентного ідеального газу ( $m = m_\pi$ ) коли  $n_I = n = \text{const}$ . Справді, це видно, якщо порівняти залежність  $n = n^{(-)}(T)$  на Рис. 1.1 і залежність  $n = \text{const}$  на Рис. 1.4 на лівій панелі. Далі ми порівняємо теплоємності в цих двох бозонних системах,

Особливий інтерес викликає поведінка теплоємності при критичній температурі. Для ідеального газу природно розглядати задачу в канонічному ансамблі, де вільними канонічними змінними є  $T$  і  $n$ .

Критична температура  $T_c$  є початковою точкою для початку конденсації при зниженні температури. Для заданої густини  $n$  критичну температуру можна визначити як розв'язок трансцендентного рівняння  $n = n_{\text{lim}}^{(\text{id})}(T_c)$ , де  $n_{\text{lim}}^{(\text{id})}(T)$  визначено у (1.41).

Густина енергії в конденсатній фазі складається з двох доданків і для ідеального газу вона має вигляд

$$\varepsilon = m n_{\text{cond}}(T) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k f(\omega_k, \mu) \Big|_{\mu=m}, \quad (1.52)$$

де  $n_{\text{cond}}(T) = n - n_{\text{lim}}^{(\text{id})}(T)$ . Обчислення теплоємності  $c_v = \partial\varepsilon(T, n)/\partial T$  в фазі конденсату дає наступний вираз

$$c_v^{(\text{cond})} = \frac{1}{4T^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \frac{E_{\text{kin}}}{\sinh(E_{\text{kin}}/T)} \right]^2, \quad (1.53)$$

де  $E_{\text{kin}} = \omega_k - m$  - одночастинкова кінетична енергія. Видно, що залежність теплоємності  $c_v^{(\text{cond})}(T)$  у фазі конденсату має універсальний характер. У цій фазі теплоємність ідеального газу не залежить від густини частинок  $n$ . Для кожного конкретного значення  $n$  крива  $c_v^{(\text{cond})}(T)$ , описана у вигляді (1.53), обмежена на правому кінці значенням  $T_c$ , яке, у свою чергу, залежить від заданої густини частинок  $n$ . Цю особливість видно на рис. 1.4 на центральній панелі, де ми розглядаємо два випадки густини  $n = 0.1, 0.2 \text{ fm}^{-3}$ . Очевидно, що похідна теплоємності має скінченний розрив, що може свідчити про фазовий перехід третього роду. Щоб переконатися в цьому, обчислимо густину енергії для тих самих вибірок густини кількості частинок, функції  $\varepsilon(T)$  показано на рис. 1.4 на правій панелі. Ми бачимо, що ці функції є неперервними і гладкими при  $T = T_c$ , і це доводить відсутність виділення прихованої теплоти за критичної температури.

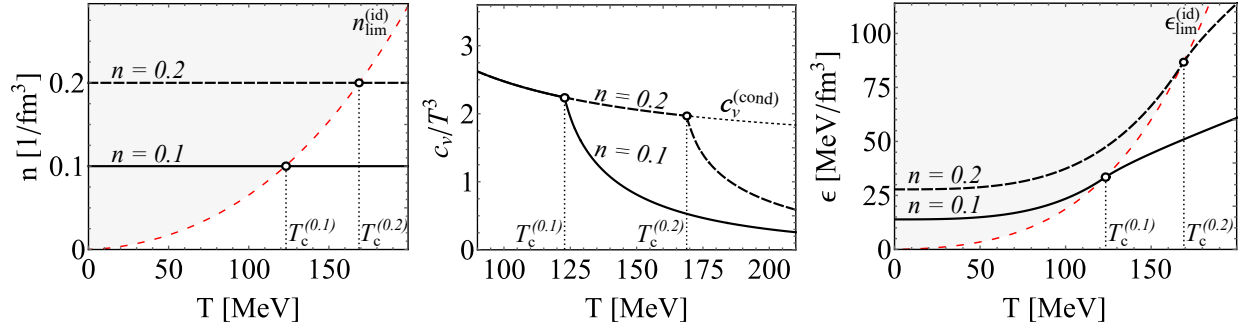


Рис. 1.4: *Ліва панель:* Залежність густини частинок від температури в ідеальному однокомпонентному газі. Горизонтальні лінії представляють два приклади з постійною густиною кількості частинок  $n = 0.1, 0.2 \text{ fm}^{-3}$ , що відповідають критичним температурам  $T_c^{(0.1)}$  і  $T_c^{(0.2)}$ , відповідно.

*Середня панель:* Теплоємність, нормована на  $T^3$  як функція температури в ідеальному однокомпонентному газі, де густина кількості частинок залишається сталою.

*Права панель:* Залежність густини енергії від температури для тієї самої системи та умов, що й на лівій панелі. Червона пунктирна лінія, позначена як  $\epsilon_{\text{lim}}^{(\text{id})}$ , показує густину енергії таких станів, які належать до критичної кривої  $n_{\text{lim}}^{(\text{id})}$  зображених на лівій панелі.

Коротко підсумуємо результати, отримані для взаємодіючої бозонної системи частинка-античастинка, в якій густина ізоспіну (заряду)  $n_I$  зберігається, та для однокомпонентного ідеального газу, де густина кількості частинок  $n$  залишається сталою. Перш за все ми стверджуємо, що вони обидві мають однакову критичну криву  $n_{\text{lim}}^{(\text{id})}(T)$ . Крім того, коли  $n^{(-)}(T)$ , отримана для взаємодіючої системи, і  $n(T)$ , отримана для ідеального газу, перетинає критичну криву  $n_{\text{lim}}^{(\text{id})}(T)$ , відповідно, обидві системи зазнають фазового переходу другого роду або, за класифікацією Еренфеста, третього роду.

Давно відомо, див. посилання [39], що конденсація Бозе-Айнштайна дійсно є фазовим переходом третього роду згідно з першою загальною класифікацією типів переходів між фазами матерії, запровадженою Полом Еренфестом у 1933 році [40, 41]. Відтак за сучасною термінологією, отримана температура  $T_c$  насправді є температурою фазового переходу другого роду, а густина конденсату  $n_{\text{cond}} = n_{\text{cond}}^{(-)}$ , яку забезпечують  $\pi^-$  мезонів виступає в ролі параметру порядку.

## 1.5 Проміжні висновки

У цьому розділі ми представили термодинамічно узгоджений метод для опису бозонної системи, яка складається з взаємодіючих частинок та античастинок з фіксованою ізоспіновою густиною  $n_I$  при скінченних температурах.

Введена безрозмірна величина  $\kappa = A/2\sqrt{mB}$ , яка сама є комбінацією параметрів середнього поля  $A$ ,  $B$  і значення маси частинки, є масштабним параметром моделі. Крім того, він визначає різні можливі фазові сценарії, які відбуваються в бозонній системі частинка-античастинка. Коефіцієнт притягання  $A = \kappa A_c$ , де  $A_c \equiv 2\sqrt{mB}$ , було параметризовано через  $\kappa$  з  $\kappa = 1$  - критичним значенням, що відокремлює режим “слабкого притягання” ( $\kappa \leq 1$ ), який було розглянуто в даному розділі, від режиму “сильного притягання” ( $\kappa > 1$ ).

Показано, що в системі частинка-античастинка, в якій ізоспінова густина  $n_I$  зберігається, в температурному інтервалі  $0 \leq T \leq T_c$  існує бозе-айнштайнівський конденсат, що є результатом фазового переходу другого роду в системі, який відбувається при температурі  $T_c$ . При тому густина конденсату є параметром порядку. (Зауважимо, хіральна теорія збурень передбачає, що перехід між вакуумом та БЕК має другий клас універсальності  $O(2)$  [12].) Це твердження суперечить висновку, наведеному в [7, 31, 37, 42], де досліджено систему з нульовим хімічним потенціалом,  $\mu_I = 0$ . Дійсно, в тих роботах було показано, що у випадку достатньо сильного середнього притягального поля ( $\kappa > 1$ ) система допускає фазовий перехід першого роду, що приводить до утворення бозе-конденсату, починаючи з певної температури.

Ми отримали, що конденсат Бозе лише для частинок компоненти високої густини система утворює незалежно від параметрів середнього



поля. Це означає, що в піонному газі, де  $n_I = n_{\pi}^{(-)} - n_{\pi}^{(+)} > 0$ , лише мезони  $\pi^-$  зазнають фазового переходу до конденсату Бозе-Айнштайна. Водночас мезони  $\pi^+$  існують лише в тепловій фазі для всього діапазону температур. Тоді для експериментальних досліджень є сенс шукати бозе-айнштайнівський конденсат, який утворюють саме  $\pi^-$ -мезони.

Для опису термодинамічних властивостей системи використано канонічний ансамбль, в якому хімічний потенціал  $\mu_I$  є термодинамічною величиною, що залежить від канонічних змінних  $(T, n_I)$ . Ми розрахували залежність хімічного потенціалу від температури для різних параметрів притягання  $\kappa$ , які показують, що  $\mu_I \approx \text{const}$  в “конденсатному” інтервалі температур  $0 \leq T \leq T_c$ , де ці константи залежать від величини притягання.

Між тим, температура  $T_c^{(-)}$  фазового переходу до бозе-айнштайнівського конденсату для  $\pi^-$  мезонів (компонент високої густини) виявляє слабку залежність від величини  $\kappa$  - параметру притягання, як видно з лівої панелі на Рис. 1.2. Так для всіх значень  $0 \leq \kappa \leq 1$ , які ми розглядали, ці критичні температури відрізняються одна від одної не більше, ніж на 4 МеВ, що дає можливість ввести деяке середнє значення  $T_c = \langle T_c^{(-)} \rangle$  фазового переходу в Бозе-Айнштайнівський конденсат.

Отримані результати узгоджуються з відомою особливістю ідеального бозе-газу: згідно з класифікацією фазових переходів Еренфеста, конденсат Бозе-Айнштайна являє собою фазовий перехід третього роду (розрив похідної від теплоємності) [39]. В рамках представленої моделі ми отримали, що похідна теплоємності зазнає розриву при температурі  $T_c$ , як це видно на лівій панелі на Рис. 1.3. Гладкі залежності густини енергії та густини ентропії від температури і відсутність прихованої теплоти при  $T_c$  зображені на правій панелі Рис. 1.3. Це доводить, що система насправді зазнає фазового переходу другого роду за цієї температури.

Врахування наявності нейтральних піонів, а також середнього поля,

яке може залежати від густини ізотопічного заряду  $n_I$ , на термодинамічні властивості системи планується розглянути в наступних роботах.

## Розділ 2. Фазові переходи у взаємодіючих релятивістських бозонних системах

### 2.1 Вступ

Розуміння фазової структури мезонних систем у режимі скінченних температур та ізоспінових густин має важливе значення для розуміння широкого спектру явищ, від ядро-ядерних зіткнень до нейтронних зірок, а також космології. Ця галузь є важливою частиною досліджень гарячої та щільної адронної матерії. Водночас, вивчення мезонних систем має свою специфіку через можливість бозе-айнштайнівської конденсації бозонних частинок. Метою цієї глави є дослідження термодинамічних властивостей багаточастинкової бозонної системи, зокрема характеру фазових переходів під час бозе-айнштайнівської конденсації бозонних частинок за високих густин. Така умова означає, що взаємодія в бозонній системі відіграє суттєву роль.

Проблема конденсації Бозе-Айнштейна в системах де частинки взаємодіють, вивчалася й раніше, починаючи з піонерських робіт Н.Н. Боголюбова [2], де він досліджував неідеальний газ бозонів і описував системи взаємодіючих бозонів у термінах невзаємодіючих квазічастинок. Починаючи з цього підходу, дослідження взаємодіючих бозонів при температурах близьких до нуля отримало потужний імпульс з боку підходу середнього поля. Справді, якщо взаємодії в розріджених атомних газах

достатньо слабкі, можна стверджувати, що середнє поле саме собою може бути хвильовою функцією конденсату, як це було показано в [2, 3, 4]. Ця ідея сягає своїм корінням роботи [5], де у розділі 63 монографії Дірак проаналізував систему багатьох тіл у рамках вторинного квантування. Боголюбов розвинув ідею Дірака для вивчення бозе-конденсації та надплинності. Тоді, нехтуючи флуктуаціями, можна вивести рівняння руху для хвильової функції середнього поля, тобто для хвильової функції конденсату. Це приводить до нелінійного рівняння Шредінґера, або рівняння Гросса-Пітаєвського [43, 44]. Згодом ці підходи були доповнені низкою плідних узагальнень.

Однак ці методи і підходи не є придатними для дослідження конденсації Бозе-Айнштейна за високих густин. На те є дві важливі причини. По-перше, високі густини означають, що можливі стани конденсату знаходяться в області високих температур, де густина теплових частинок більше не може розглядатися як мала флуктуація порівняно з густиною конденсату. По-друге, як зазначав Керсон Хуанг у своєму підручнику [6], справжній закон збереження має справу зі збереженням числа, що є різницею між кількістю частинок і античастинок. Ось чому будь-яке дослідження конденсації Бозе-Айнштейна у релятивістському бозе-газі має враховувати античастинки. Вперше це було обговорено в роботі [45]. Більше того, як показано в [46] у випадку “слабкого” притягання в системі та заряду що зберігається лише частинки набувають конденсатних станів, а античастинки перебувають у тепловому стані у всьому діапазоні температур, починаючи від нуля.

У цьому дослідженні ми зосереджуємося насамперед на мезонних системах. Знання фазової структури мезонних систем у режимі скінченних температур та ізотопічних спінових (ізоспінових) густин має вирішальне значення для розуміння широкого кола явищ, починаючи від ядро-ядерних

зіткнень до нейтронних зірок і космології. Ця галузь є важливою частиною досліджень гарячої та густої адронної матерії, яка є об'єктом активних досліджень [1]. Специфіка досліджень мезонних систем зумовлена можливістю бозе-айнштайнівської конденсації взаємодіючих бозонних частинок. У нашій роботі ми називаємо бозонні частинки “піонами” лише умовно. Перевагу надано саме цим частинкам по тій причині, що заряджені  $\pi$ -мезони є найлегшими адронами які описуються ізоспіновим хімічним потенціалом. Водночас піони є найлегшими частинками серед ядерних бозонів, а отже, пояснення “температурного народження” пар частинка-античастинка є актуальною задачею квантової статистики, яка широко використовується в цій роботі. Проблема бозе-айнштайнівської конденсації  $\pi$ -мезонів вивчалася раніше, починаючи з піонерських робіт А.Б. Мігдала та його колег (див. [7] для посилань). Формування класичних піонних полів у зіткненнях важких іонів обговорювалося в [8, 9, 10, 11], а системи піонів та  $K$ -мезонів зі скінченим ізоспіновим хімічним потенціалом були розглянуті в більш пізніх роботах [12, 13, 14, 15, 16]. Першопринципові ґраткові розрахунки забезпечують ґрунтовну основу для наших знань про режим скінчених температур. Цікаві нові результати, що стосуються густих піонних систем [18, 19], були отримані нещодавно за допомогою ґраткових методів. Фактично, ефективна динаміка заряджених піонів описується хіральною теорією збурень [12].

Представлене дослідження пов'язане з підходом, запропонованим в роботі [46], де розглянуто систему бозонів, коли взаємодія притягання між частинками є “слабкою”.

Тут ми переходимо до дослідження термодинамічних властивостей взаємодії частинка-античастинка-мезон за умов збереження ізоспінової густини в рамках канонічного ансамблю, використовуючи модель середнього поля. У цій главі ми вивчаємо також бозонні системи, в

яких притягальна взаємодія між частинками є “сильною”. (Безпосередні означення “слабкої” та “сильної” притягальної взаємодії будуть наведені далі). Ми розглядаємо досліджувану самовзаємодіючу багаточастинкову систему як іграшкову модель, яка може допомогти нам зрозуміти конденсацію Бозе-Ейнштейна та фазові переходи в широкому діапазоні температур і густин.

Глава організована наступним чином. У частині 2.2 коротко описано термодинамічні властивості та конденсацію в ідеальному бозонному газі при збереженні числа частинок. У частині 2.3 ми вводимо скалярну модель середнього поля, яку потім використано для дослідження утворення конденсату в бозонній системі частинок та античастинок. Аналогічний опис бозонної системи частинок і античастинок, але в рамках термодинамічної моделі середнього поля, наведено в частині розділу 2.4. У частині 2.5 порівнюються результати, отримані в перших двох підходах для опису бозонної системи та утворення конденсату при нульовому повному заряді. в секції 2.6 вивчено фазові переходи в системі частинка-античастинка з фіксованою ізоспіновою (зарядовою) густиною. Секція 2.7 є заключною, де порівнюється опис бозонних систем у присутності конденсату в рамках Канонічного ансамблю та Великого канонічного ансамблю.

## 2.2 Канонічний ансамбль: конденсація в ідеальному бозонному газі

Для довідки нагадаємо основні властивості бозе-конденсації в однокомпонентному ідеальному газі зі сталою густиною числа частинок  $n$ . Цей процес зображено на рис. 2.5, де наведено два приклади густини частинок  $n = 0.1, 0.2 \text{ fm}^{-3}$ . Червона пунктирна лінія -

критична крива  $n_{\text{lim}}^{(\text{id})}$ , яка визначає критичну температуру  $T_c$ . Критична крива - це залежність густини теплових частинок від температури при максимальному значенні хімічного потенціалу, який дорівнює масі частинки,  $\mu = m$  (У нерелятивістському випадку, де  $\mu_{\text{nonrel}} = \mu - m$ , максимальне значення густини теплових частинок досягається при нульовому хімічному потенціалі). Таким чином, формула, що визначає критичну криву, має вигляд

$$n_{\text{lim}}^{(\text{id})} = g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f_{\text{BE}}(E, \mu) \Big|_{\mu=m}, \quad (2.54)$$

де  $E = \omega_k = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$  та

$$f_{\text{BE}}(E, \mu) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} - 1}. \quad (2.55)$$

На рис. 2.5 і далі в тексті залежність  $n(T)$ , задана у рівнянні (2.54), записується як  $n = n_{\text{lim}}^{(\text{id})}(T)$ . Розв'язок рівняння (2.54) відносно температури для заданої густини частинок  $n$  визначає критичну температуру  $T_c(n)$ .

У фазі конденсату узагальнення рівняння (2.54) має вигляд

$$n = n_{\text{cond}}(T) + g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f_{\text{BE}}(E, \mu) \Big|_{\mu=m}, \quad (2.56)$$

Результати розрахунку густини енергії та теплоємності, представлені на рис. 2.6, наочно показують, що в точці перетину кривої густини частинок з критичною кривою відбувається фазовий перехід другого роду. Дійсно, спостерігається скінченний розрив похідної теплоємності в точках  $T_c$  і плавна поведінка залежності густини енергії в цих точках, тобто не відбувається вивільнення прихованої теплоти.

Коротко обговоримо результати, отримані для однокомпонентного

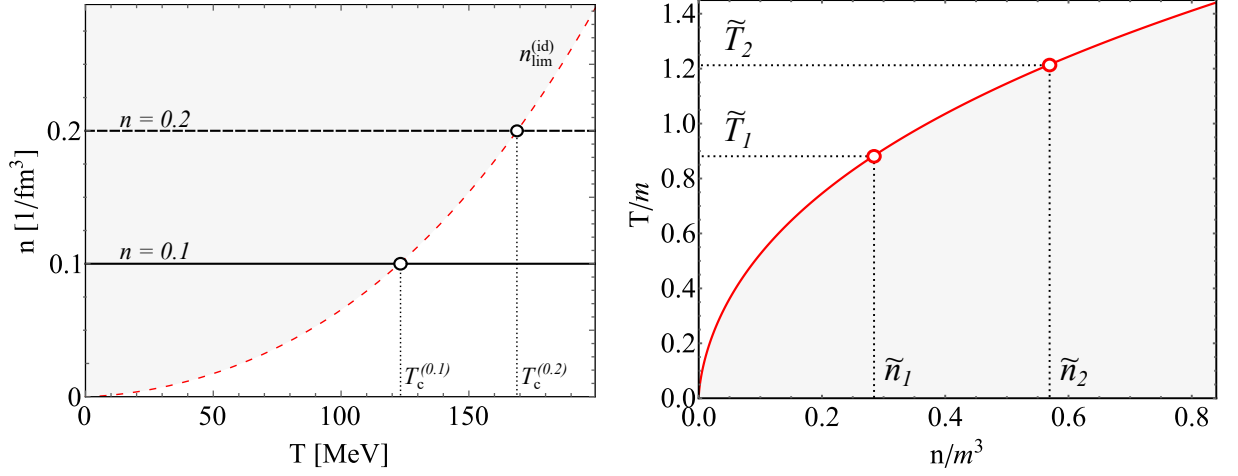


Рис. 2.5: *Ліва панель:* Залежність густини частинок від температури в ідеальному однокомпонентному газі. Горизонтальні лінії представляють два приклади постійної густини частинок,  $n = 0.1, 0.2 \text{ fm}^{-3}$ , які відповідають критичним температурам  $T_c^{(0.1)}$  і  $T_c^{(0.2)}$ , відповідно. Тут критична крива  $n_{\text{lim}}^{(\text{id})}(T)$  визначається так (2.54).

*Права панель:* Нормована критична температура  $\tilde{T} = T/m$  в залежності від нормованої густини частинок  $\tilde{n} = n/m^3$  в ідеальному однокомпонентному газі.

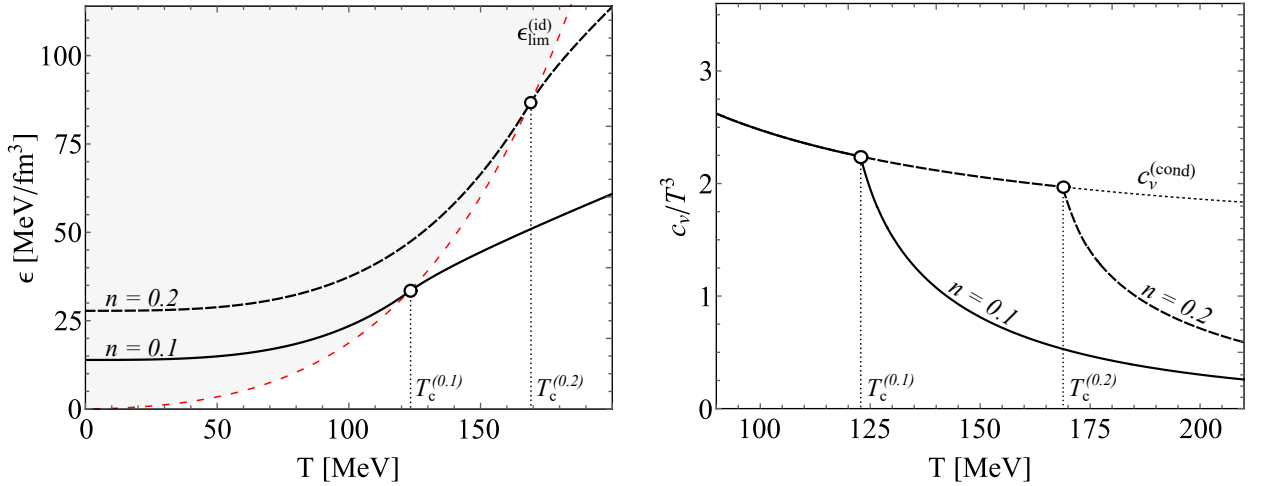


Рис. 2.6: *Ліва панель:* Густина енергії від температури для тієї самої системи і умов, що й на Рис. 2.5. Червона пунктирна лінія, позначена як  $\epsilon_{\text{lim}}^{(\text{id})}$  представляє густину енергії станів, які належать до критичної кривої  $n_{\text{lim}}^{(\text{id})}$ .

*Права панель:* Теплоємність, нормована до  $T^3$ , як функція температури в ідеальному однокомпонентному газі, який має фіксовану густину частинок.



ідеального газу, де густина числа частинок  $n$  залишається сталою. Перш за все, зафіксуємо, що коли пряма  $n(T) = \text{const}$  перетинає критичну криву  $n_{\text{lim}}^{(\text{id})}(T)$ , системи проходять фазовий перехід другого роду або, за класифікацією Еренфеста, третього роду. Давно відомо, див. посилання [39], що конденсація Бозе-Айнштейна справді є фазовим переходом третього роду згідно з першою загальною класифікацією типів переходів між фазами матерії, введеною Полом Еренфестом у 1933 році [40, 41]. Так отримана температура  $T_c$  насправді є температурою фазового переходу другого роду (за сучасною термінологією), а густина конденсату  $n_{\text{cond}}$  є параметром порядку. Далі ми покажемо, що така сама поведінка характерна і для випадку взаємодіючої двокомпонентної системи з накладеною умовою збереження густини заряду.

## 2.3 Самодіюче скалярне поле

Почнемо наш розгляд із густини Лагранжіану самовзаємодіючого дійсного скалярного поля

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \left[ \partial_\mu \hat{\phi}(x) \partial^\mu \hat{\phi}(x) - m^2 \hat{\phi}^2(x) \right] + \mathcal{L}_{\text{int}}[\hat{\phi}^2(x)] \quad (2.57)$$

де  $x = (t, \mathbf{r})$ . Використаємо позначення:

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}) = \phi_{\text{cond}} + \hat{\psi}(\mathbf{r}), \quad \text{where} \quad \langle \hat{\psi}(\mathbf{r}) \rangle = 0. \quad (2.58)$$

Тут ми використовуємо відомий розклад Боголюбова для оператора поля на два внески [2, 3, 4]:

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} a_0 + \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} / \hbar}. \quad (2.59)$$

Врахувавши, що при  $T \rightarrow 0$  у неідеальному бозе-газі кількість частинок в основному стані  $N_0$  приблизно дорівнює загальній кількості частинок  $N$ ,

$$N_0 = \langle a_0^+ a_0 \rangle \approx N, \quad (2.60)$$

величини  $a_0$  і  $a_0^+$  можна розглядати як класичні значення.

Представлення Гейзенберга:

$$\hat{\phi}(x) = e^{iHt} \hat{\phi}(\mathbf{r}) e^{-iHt} = \phi_{\text{cond}} + \hat{\psi}(x) \quad \text{with} \quad \langle \hat{\psi}(x) \rangle = 0, \quad (2.61)$$

$$\left[ \hat{\psi}(t, \mathbf{r}), \frac{\partial \hat{\psi}(t, \mathbf{r}')}{\partial t} \right] = \left[ \hat{\phi}(t, \mathbf{r}), \frac{\partial \hat{\phi}(t, \mathbf{r}')}{\partial t} \right] = i\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.62)$$

Отже, квантові флуктуації поля  $\hat{\psi}(x)$  мають такі самі комутаційні співвідношення як і повне поле  $\hat{\phi}(x)$ . Розклад по розв'язках рівняння Клейна-Гордона виглядає так:

$$\hat{\psi}(x) = \int_{|\mathbf{p}| \neq 0} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\omega_p} (a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^+ e^{ip \cdot x}) \Big|_{p^0 = \omega_p}, \quad (2.63)$$

де

$$[a_k, a_p^+] = (2\pi)^3 2\omega_p \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \quad [a_k, a_p] = 0. \quad (2.64)$$

Для дисперсії поля ми отримуємо наступний розклад:

$$\langle \hat{\phi}^2(x) \rangle = \langle \phi_{\text{cond}}^2 + 2\phi_{\text{cond}} \hat{\psi} + \hat{\psi}^2 \rangle = \phi_{\text{cond}}^2 + \langle \hat{\psi}^2 \rangle. \quad (2.65)$$

Можна бачити, що дисперсія поля також може бути розкладена на класичну і квантову частини.

### 2.3.1 Ефективний Лагранжіан у наближенні середнього поля

Ми збираємося розглянути Бозе-Айнштайнівську конденсацію скалярного поля (детальніше див. [42])

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \left[ \partial_\mu \hat{\phi}(x) \partial^\mu \hat{\phi}(x) - m^2 \hat{\sigma}(x) \right] + \mathcal{L}_{\text{int}}(\hat{\sigma}), \quad (2.66)$$

де введено позначення

$$\hat{\sigma}(x) = \hat{\phi}^2(x). \quad (2.67)$$

Використаємо квантово статистичне усереднення для оператора  $\hat{A}$ :

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left[ e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} \hat{A} \right], \quad Z = \text{Tr} \left[ e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} \right] \quad (2.68)$$

Далі можна ввести середнє значення  $\sigma$  оператору  $\hat{\sigma}$

$$\sigma = \langle \hat{\sigma} \rangle, \quad \delta \hat{\sigma} = \hat{\sigma} - \sigma. \quad (2.69)$$

Тут  $\delta \hat{\sigma}$  - відхилення оператора  $\hat{\sigma}$  від його середнього значення. Таким чином Лагранжіан (2.66) може бути розкладений в ряд по змінній  $\hat{\sigma}$  навколо значення  $\sigma$ :

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(\hat{\sigma}) \simeq \mathcal{L}_{\text{int}}(\sigma) + \delta \hat{\sigma} \mathcal{L}'_{\text{int}}(\sigma) = \mathcal{L}_{\text{int}}(\sigma) + \hat{\sigma} \mathcal{L}'_{\text{int}}(\sigma) - \sigma \mathcal{L}'_{\text{int}}(\sigma), \quad (2.70)$$

де штрих означає похідну відносно  $\sigma$ . Так ми приходимо до ефективного Лагранжіана в наближенні середнього поля:

$$\mathcal{L}(x) \simeq \frac{1}{2} \left[ \partial_\mu \hat{\phi}(x) \partial^\mu \hat{\phi}(x) - M^2(\sigma) \hat{\phi}^2(x) \right] + P_{\text{ex}}(\sigma), \quad (2.71)$$

де було введено наступні позначення:

$$P_{\text{ex}}(\sigma) \equiv \mathcal{L}_{\text{int}}(\sigma) - \sigma \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{int}}(\sigma)}{\partial \sigma}, \quad \hat{M}^2(\sigma) = m^2 + 2U(\sigma), \quad (2.72)$$

та:

$$U(\sigma) \equiv - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{int}}(\sigma)}{\partial \sigma}. \quad (2.73)$$

З вищезгаданих визначень випливає диференціальне співвідношення між надлишковим тиском  $P_{\text{ex}}(\sigma)$  і середнім полем  $U(\sigma)$

$$\sigma \frac{\partial U(\sigma)}{\partial \sigma} = \frac{\partial P_{\text{ex}}(\sigma)}{\partial \sigma}. \quad (2.74)$$

### 2.3.2 Густина Гамільтоніана в наближенні середнього поля

Оператор імпульсу  $\hat{\pi}$  задовольняє рівночасові комутаційні співвідношення

$$\hat{\pi}(x) = \partial_t \hat{\phi}(x), \quad \left[ \hat{\phi}(t, \mathbf{r}), \hat{\pi}(t, \mathbf{r}') \right] = i\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.75)$$

Густина Гамільтона  $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\pi} \partial_t \hat{\phi} - \mathcal{L}$  має наступний вигляд

$$\hat{\mathcal{H}} \simeq \frac{1}{2} \left[ \hat{\pi}^2(x) + \nabla \hat{\phi}(x) \cdot \nabla \hat{\phi}(x) + M^2(\sigma) \hat{\phi}^2(x) \right] - P_{\text{ex}}(\sigma). \quad (2.76)$$

Використавши розв'язки рівняння Клейна-Гордона

$$\partial^\mu \partial_\mu \hat{\phi} + M^2(\sigma) \hat{\phi} = 0, \quad (2.77)$$

можна представити скалярне поле  $\hat{\phi}(x)$  як

$$\hat{\phi}(x) = g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} [a_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} + a_{\mathbf{k}}^+ e^{ik \cdot x}] , \quad (2.78)$$

де  $k^0 = \omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + M^2(\sigma)}$  і оператори народження та знищення задовольняють стандартні комутаційні співвідношення

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^+] = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = [a_{\mathbf{k}}^+, a_{\mathbf{k}'}^+] = 0. \quad (2.79)$$

Як перший крок буде розглянуто бозонну систему з нульовою густиною ізоспіну (заряду)  $n_I = 0$ , тобто кількість частинок і античастинок рівні між собою. У цьому випадку Гамільтоніан в рамках наближення середнього поля (MF) запишеться як

$$\hat{H} = \int d^3x \hat{\mathcal{H}} = V \left[ g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} - P_{\text{ex}}(\sigma) \right]. \quad (2.80)$$

У наближенні середнього поля рівноважний розподіл імпульсу збігається з розподілом ідеального газу бозонів що мають ефективну масу  $M(\sigma)$

$$n_{\mathbf{k}}(\sigma) \equiv \langle a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} \rangle = (e^{\beta \omega_{\mathbf{k}}} - 1)^{-1}, \quad \beta = 1/T, \quad k_{\text{B}} = 1, \quad \mu_I = 0, \quad (2.81)$$

де  $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{M^2(\sigma) + \mathbf{k}^2}$  з  $M^2(\sigma) = m^2 + 2U(\sigma)$ .

Термодинамічний опис системи може бути отриманий з розв'язку самоузгоджених рівнянь для термічної фази та фази конденсату відносно скалярної густини  $\sigma = \langle \hat{\phi}^2 \rangle$ . (Слід зауважити, що «фазою конденсату» в даному випадку називається термодинамічний стан системи, коли та містить теплові й зконденсовані частинки одночасно.) У тепловій фазі дане

рівняння виглядає наступним чином

$$\sigma = g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{n_{\mathbf{k}}(\sigma)}{\omega_{\mathbf{k}}}. \quad (2.82)$$

У конденсатній фазі слід враховувати необхідну умову утворення конденсату  $M^2(\sigma) = 0$  і включити її в рівняння відносно густини скалярного конденсату. Таким чином самоузгоджене рівняння має вигляд

$$\sigma = \sigma_{\text{cond}} + g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{n_{\mathbf{k}}(\sigma)}{\omega_{\mathbf{k}}} \Big|_{M^2(\sigma)=0}, \quad (2.83)$$

де у випадку  $\mu_I = 0$  (або  $n_I = 0$ ) залишається лише одна канонічна змінна  $T$ . Останнє рівняння відповідає співвідношенню

$$\langle \hat{\phi}^2 \rangle = \phi_{\text{cond}}^2 + \langle \hat{\psi}^2 \rangle, \quad (2.84)$$

яке було отримано в результаті розкладання оператора поля (2.58) та особливостей квантових флуктуацій, див. рівняння (2.65).

Інші термодинамічні величини, що характеризують систему квазічастинкових бозонів можна отримати звичайним способом в рамках квантової статистики. Тиск запишеться як

$$p = p_{\text{kin}}(T, \sigma) + P_{\text{ex}}(\sigma), \quad (2.85)$$

де кінетичний тиск у тепловій фазі

$$p_{\text{kin}}(T, \sigma) = \frac{g}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{\omega_{\mathbf{k}}} n_{\mathbf{k}}(\sigma). \quad (2.86)$$

У свою чергу, кінетичний тиск у фазі конденсату запишеться як

$$p_{\text{kin}}(T, \sigma) = \frac{g}{3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{\omega_{\mathbf{k}}} n_{\mathbf{k}}(\sigma) \Big|_{M^2(\sigma)=0}. \quad (2.87)$$

Густина енергії та густина ентропії  $s = (\varepsilon + p)/T$  у тепловій фазі має вигляд

$$\varepsilon = g \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}(\sigma) - P_{\text{ex}}(\sigma), \quad (2.88)$$

$$s = \frac{g}{T} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left( \omega_{\mathbf{k}} + \frac{k^2}{3\omega_{\mathbf{k}}} \right) n_{\mathbf{k}}(\sigma). \quad (2.89)$$

Густина енергії та густина ентропії у фазі конденсату:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{cond}} + g \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}(\sigma) \Big|_{M^2(\sigma)=0} - P_{\text{ex}}(\sigma), \quad (2.90)$$

$$s = s_{\text{cond}} + \frac{g}{T} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left( \omega_{\mathbf{k}} + \frac{k^2}{3\omega_{\mathbf{k}}} \right) n_{\mathbf{k}}(\sigma) \Big|_{M^2(\sigma)=0}. \quad (2.91)$$

### 2.3.3 Бозонна система з $\varphi^4 + \varphi^6$ самовзаємодією

Для чисельних розрахунків введемо наступну параметризацію частини Лагранжіана, яка відповідає за взаємодію

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(\hat{\phi}^2(x)) = \frac{a}{4} \hat{\phi}^4(x) - \frac{b}{6} \hat{\phi}^6(x). \quad (2.92)$$

У такому випадку середнє поле і надлишковий тиск запишуться як

$$U(\sigma) = -\frac{1}{2}a\sigma + \frac{1}{2}b\sigma^2, \quad P_{\text{ex}}(\sigma) = -\frac{a}{4}\sigma^2 + \frac{b}{3}\sigma^3, \quad (2.93)$$

Такий вигляд середнього поля значить, що в досліджуваній системі бозонів одночасно присутні притягання та відштовхування між частинками.

Функція розподілу  $n_{\mathbf{k}} = [\exp(\sqrt{\mathbf{k}^2 + M^2}/T) - 1]^{-1}$  має сенс, коли

аргумент є додатньою величиною, тобто

$$M^2(\sigma) = m^2 + 2U(\sigma) = m^2 - a\sigma + b\sigma^2 \geq 0. \quad (2.94)$$

Граничним випадком у цьому співвідношенні є умова початку виникнення скалярного конденсату:

$$M^2(\sigma) = m^2 - a\sigma + b\sigma^2 = 0. \quad (2.95)$$

Розв'язками цього рівняння є

$$\sigma_{1,2} = \frac{m}{\sqrt{b}} \left( \kappa \mp \sqrt{\kappa^2 - 1} \right), \quad (2.96)$$

де введено безрозмірний параметр  $\kappa$ :

$$\kappa = \frac{a}{2m\sqrt{b}}, \quad \rightarrow \quad a = \kappa a_c, \quad a_c = 2m\sqrt{b}. \quad (2.97)$$

Таким чином, приходимо до висновку, що при  $\kappa > 1$  ефективна маса квазічастинки стає уявною ( $M^2 < 0$ ), а система стає нестійкою. Стійкість відновлюється шляхом утворення бозе-конденсату.

## 2.4 Взаємодіюча система бозонів в термодинамічній моделі середнього поля

Розглянемо бозонну систему при великих густинах в рамках квантово-статистичного підходу і порівняємо його з теоретико-польовим, який було розглянуто вище. Для початку припустимо, що вільна енергія системи взаємодіючих бозонів  $F(T, N, V)$  може бути записана у вигляді “вільної”



частини та частини, що відповідає за взаємодію

$$F(T, N, V) = F_0 + F_{\text{int}} . \quad (2.98)$$

Або для величини густини вільної енергії  $\Phi(T, n) = \Phi_0 + \Phi_{\text{int}}$ , де  $\Phi(T, n) = F(T, N, V)/V$ . Далі можна ввести наступні важливі позначення (детальніше див. [23]):

$$U(n, T) = \left[ \frac{\partial \Phi_{\text{int}}(n, T)}{\partial n} \right]_T , \quad (2.99)$$

$$P_{\text{ex}}(n, T) = n \left[ \frac{\partial \Phi_{\text{int}}(n, T)}{\partial n} \right]_T - \Phi_{\text{int}}(n, T) . \quad (2.100)$$

Ці величини пов'язані між собою диференціальним співвідношенням

$$n \frac{\partial U(n, T)}{\partial n} = \frac{\partial P_{\text{ex}}(n, T)}{\partial n} . \quad (2.101)$$

У даних позначеннях тиск у системі можна записати як

$$p(T, \mu_I) = \frac{g}{3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}} f_{\text{BE}}(E_k(n), \mu_I) + P_{\text{ex}}(n) , \quad (2.102)$$

де  $g$  — коефіцієнт виродження,  $E_k(n) = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} + U(n)$  — ефективна енергія однієї частинки,  $\mu_I$  — хімічний ізоспіновий потенціал, а  $f_{\text{BE}}$  — функція розподілу Бозе-Айнштайна

$$f_{\text{BE}}(E, \mu) = \left\{ \exp \left[ \frac{E - \mu}{T} \right] - 1 \right\}^{-1} . \quad (2.103)$$

Для системи частинок-античастинок співвідношення Ейлера запишеться як  $\varepsilon + p = Ts + \mu_I n_I$ , де  $n_I$  — густина ізоспіну (заряду). Розглянемо спочатку випадок нульової густини заряду, тобто  $n_I = 0$ , що відповідає  $\mu_I = 0$  у великому канонічному ансамблі.

Модель середнього поля передбачає термодинамічний опис системи, який отримано за допомогою самоузгодженого підходу. В даному випадку це досягається за допомогою самоузгоджених рівнянь для повної густини частинок  $n$ , які слід роз'язувати окремо в термічній і конденсатній фазах. У тепловій фазі це рівняння має вигляд  $n = n_{\text{th}}(T, n)$ . Воно має бути розв'язано відносно повної густини частинок  $n$  для кожного фіксованого значення  $T$ ,

$$n = g \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} f_{\text{BE}}(E_k(n)) , \quad (2.104)$$

де  $f_{\text{BE}}(E) = [\exp(E/T) - 1]^{-1}$ . Розв'язавши рівняння (2.104) у тепловій фазі можна отримати явну залежність  $n = n(T)$ , яка в загальному випадку відрізняється від такої ж залежності в ідеальному газі,  $n_0(T)$ . Функція  $n(T)$  дає можливість отримати рівняння стану шляхом прямого розрахунку інших термодинамічних величин таких як тиск, густина енергії, густина ентропії тощо.

У конденсатній фазі слід враховувати умову конденсації при  $\mu_I = 0$ ,  $U(n) + m = 0$ , що призводить до виникнення певної “критичної” густини  $n_c$ , яка є дійсним коренем цього рівняння. Розв'язок цього рівняння має таку структуру, що  $n_c = n_{\text{cond}}(T) + n_{\text{th}}(T)$ , де густина конденсатної компоненти  $n_{\text{cond}}$  являє собою новий ступінь свободи. Таким чином, у фазі конденсату самоузгоджене рівняння для  $n_{\text{cond}}$  може бути записане як

$$n_c = n_{\text{cond}} + g \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} f_{\text{BE}}(E_{\text{kin}}) , \quad (2.105)$$

де  $E_{\text{kin}} = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} - m$ .

### 2.4.1 Параметризація взаємодії

Для того, аби мати змогу порівняти метод середнього поля із теоретико-польовим підходом, використаємо наступне співвідношення між скалярною густиною  $\langle \phi^2 \rangle$  і густиною числа частинок  $n$ , які збігаються між собою в нерелятивістській межі. Далі, використовуючи відповідність  $\varphi^4 \rightarrow n^2$  і  $\varphi^6 \rightarrow n^3$ , запишемо надлишковий тиск і відповідне йому середнє поле (див. диференційне співвідношення (2.101)) як

$$P_{\text{ex}}(n) = -\frac{1}{2} A n^2 + \frac{2}{3} B n^3, \quad \rightarrow \quad U(n) = -A n + B n^2, \quad (2.106)$$

де додатньо визначений параметр  $A$ , що множиться на густину частинок, відповідає за притягання між частинками, а додатньо визначений параметр  $B$ , що множиться на квадрат густини, відповідає за відштовхування в системі бозоннів (докладніше див. [7]). В даному дослідженні параметр  $A$  буде варіюватись, тоді як параметр  $B$ , який пов'язаний з жорстким відштовхування (модель жорстких сфер), буде вважатись сталим. Зручно параметризувати  $A$  наступним способом: використавши розв'язки рівняння  $U(n) + m = 0$ , що визначає умову утворення конденсату (аналогічно до того, як це було зроблено у частині 2.3.3 цього тексту та в роботах [7, 31]). Для заданого середнього поля (2.106) є два корені цього рівняння

$$n_1 = \sqrt{\frac{m}{B}} \left( \kappa - \sqrt{\kappa^2 - 1} \right), \quad n_2 = \sqrt{\frac{m}{B}} \left( \kappa + \sqrt{\kappa^2 - 1} \right), \quad (2.107)$$

де введено безрозмірний параметр  $\kappa$ :

$$\kappa \equiv \frac{A}{2\sqrt{mB}}. \quad (2.108)$$

Тоді коефіцієнт притягання можна параметризувати як  $A = \kappa A_c$  з  $A_c = 2\sqrt{mB}$ . Як буде видно, параметр  $\kappa$  є параметром масштабу, що визначає фазову структуру системи. Розглянемо два інтервали параметра  $\kappa$ :

1. “слабке” притягання, що відповідає  $\kappa < 1$ , тобто  $n_{1,2}$  не є дійсними коренями,
2. “сильне” притягання, що відповідає  $\kappa > 1$ , тобто  $n_{1,2}$  — дійсні корені.

Критичне значення  $A_c$  отримується з умови, коли обидва корені збігаються, тобто коли  $\kappa = 1$ , тоді  $A = A_c = 2\sqrt{mB}$ .

## 2.5 Конденсація взаємодіючих бозонів за скінченних температур

У цій секції ми порівнюємо чисельні результати, отримані в рамках двох підходів: польово-теоретичного, який базується на моделі скалярного середнього поля, та квантово-статистичного, який базується на моделі термодинамічного середнього поля. Тут наша мета - дослідити вплив притягання і відштовхування між частинками на термодинамічні властивості бозонної системи, особливо за присутності конденсату. В обох випадках ми залишимо постійним член відштовхування, а притягальну взаємодію будемо варіювати змінюючи параметр  $\kappa$ . Крім того, буде наведено розв’язки самоузгоджених рівнянь для різних значень коефіцієнта притягання  $a$  у моделі скалярного середнього поля, за умови фіксованого значення коефіцієнту відштовхування  $b = 25 m_\pi^{-2}$ . Те саме робиться для моделі термодинамічного середнього поля, де ми варіюємо коефіцієнт притягання  $A$ , а коефіцієнт відштовхування фіксуємо як  $B/m_\pi = 10v_0^2$ . Слід зазначити, що ці варіації коефіцієнтів притягання

здійснюються однаково в обох підходах за допомогою безрозмірного параметра  $\kappa$ : у моделі скалярного середнього поля як  $a = \kappa a_c$ , де  $a_c = 2m\sqrt{b}$ , а в моделі термодинамічного середнього поля як  $A = \kappa A_c$ , де  $A_c = 2\sqrt{mB}$ . Назвемо бозонні частинки “піонами” і візьмемо за їхню масу  $m = m_\pi = 139 \text{ MeV}$ , для фактора виродження  $g = 3$ . У моделі скалярного середнього поля критична крива отримується при  $M^2 = m^2 + 2U(n) = 0$  і має вигляд

$$\sigma_{\text{lim}} = g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left( e^{k/T} - 1 \right)^{-1} = \frac{g}{12} T^2. \quad (2.109)$$

У випадку моделі термодинамічного середнього поля існує аналогічна умова для визначення критичної кривої,  $m + U(n) = 0$ , що виглядає як наявність ефективного хімічного потенціалу  $\mu = m$ . Так критична крива у випадку термодинамічної моделі середнього поля виглядає наступним чином

$$n_{\text{lim}} = g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \exp \left[ \frac{\sqrt{m^2 + k^2} - m}{T} \right] - 1 \right\}^{-1}. \quad (2.110)$$

Результати чисельних розрахунків залежності густини частинок від температури для моделей скалярного середнього поля і термодинамічного середнього поля представлені на рис. 2.7 на лівій та правій панелях, відповідно. Розрахунки виконано для різних значень коефіцієнтів притягання  $a$  і  $A$ , які в обох моделях параметризуються параметром  $\kappa$ . Ми називаємо  $\kappa < 1$  “слабким” притяганням, а  $\kappa > 1$  - “сильним” притяганням. Видно, що для “слабкого” притягання скалярні густини та густини чисел частинок знаходяться в тепловій фазі. При  $\kappa = \kappa_c = 1$  криві густин мають одну спільну точку з критичною кривою. Сама критична крива  $\sigma_{\text{lim}}(T)$  зображена червоною штрих-пунктирною лінією на лівій панелі рис. 2.7, а критична крива  $n_{\text{lim}}(T)$  зображена червоною пунктирною лінією на правій

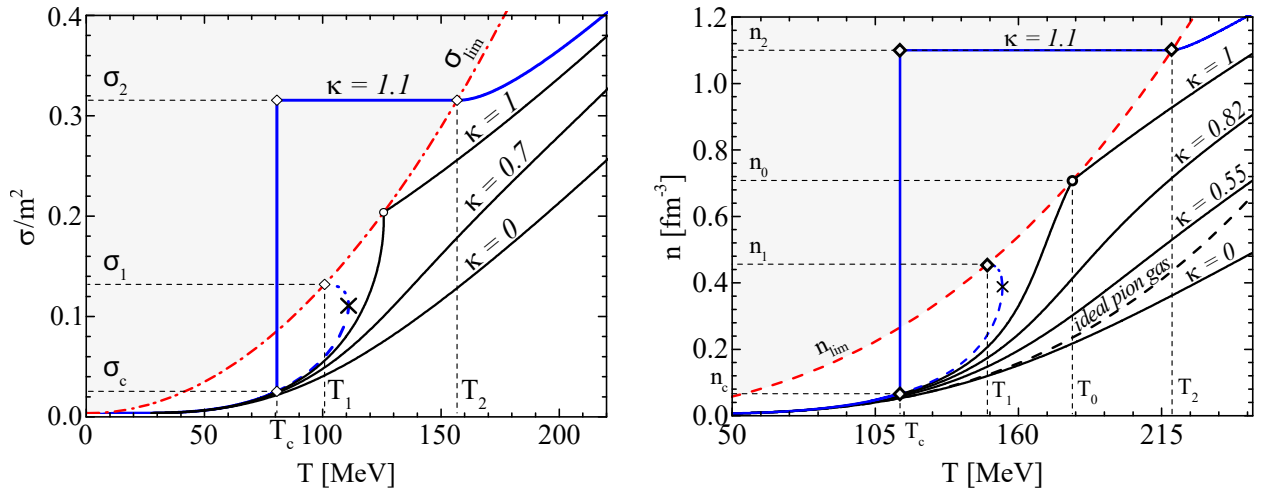


Рис. 2.7: Ліва панель: Залежність скалярної густини від температури,  $b = 25 m_\pi^{-2}$ ,  $a = \kappa a_c$ ,  $a_c = 2m\sqrt{b}$ .

Права панель: Залежність густини числа частинок від температури,  $B = 10m_\pi v_0^2$ ,  $A = \kappa A_c$ ,  $A_c = 2\sqrt{mB}$ .

На обидвох графіках затінений регіон позначає наявність конденсату Бозе-Айнштайна.

панелі рис. 2.7. В обох підходах при “сильному” притяганні,  $\kappa > 1$ , існує фазовий перехід першого роду при  $T = T_c$  з утворенням конденсату. Це результат конкуренції тисків, що відповідають двом різним розв’язкам самоузгодженого рівняння в тепловій та конденсатній фазах.

У моделі скалярного середнього поля ми розв’язуємо рівняння (2.82) для отримання скалярної густини  $\sigma = \sigma_{\text{therm}}(T)$  у тепловій (“рідинно-газовій”) фазі та відповідного їй тиску  $p_{lg}(T)$ . З іншого боку, рівняння (2.83) для конденсату (суміші) фази (насправді, назва “конденсатна фаза” є умовною, оскільки ця фаза є сумішшю теплових (кінетичних) частинок та частинок, що конденсуються) характеризується двома сталими розв’язками  $\sigma = \sigma_1$  та  $\sigma = \sigma_2$ , див. рис. 2.7, ліва панель. Далі порівнюємо відповідні до  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  залежності тиску  $p_{\text{mix}}^{(1)}(T)$  і  $p_{\text{mix}}^{(2)}(T)$  між собою і з  $p_{lg}(T)$ . Результат цього порівняння зображено на рис. 2.8 на лівій панелі суцільною синьою лінією. Видно, що при  $T = T_c$  тиск  $p_{\text{mix}}^{(2)}(T)$  стає переважаючим, що і визначає фазовий перехід першого роду з утворенням скалярного конденсату (детальніше див. [42]).

Такий самий аналіз зроблено і для термодинамічної моделі середнього поля. Розв'яжемо рівняння (2.104), щоб отримати залежність густини частинок  $n = n_{\text{therm}}(T)$  та відповідний тиск  $p_{\text{lg}}(T)$  у тепловій (рідина-газ) фазі. Рівняння (2.105) має два дійсні корені  $n_{c1}$  і  $n_{c2}$  та два відповідні тиски. Результат цього порівняння зображено на правій панелі Рис. 2.8 суцільною синьою лінією.

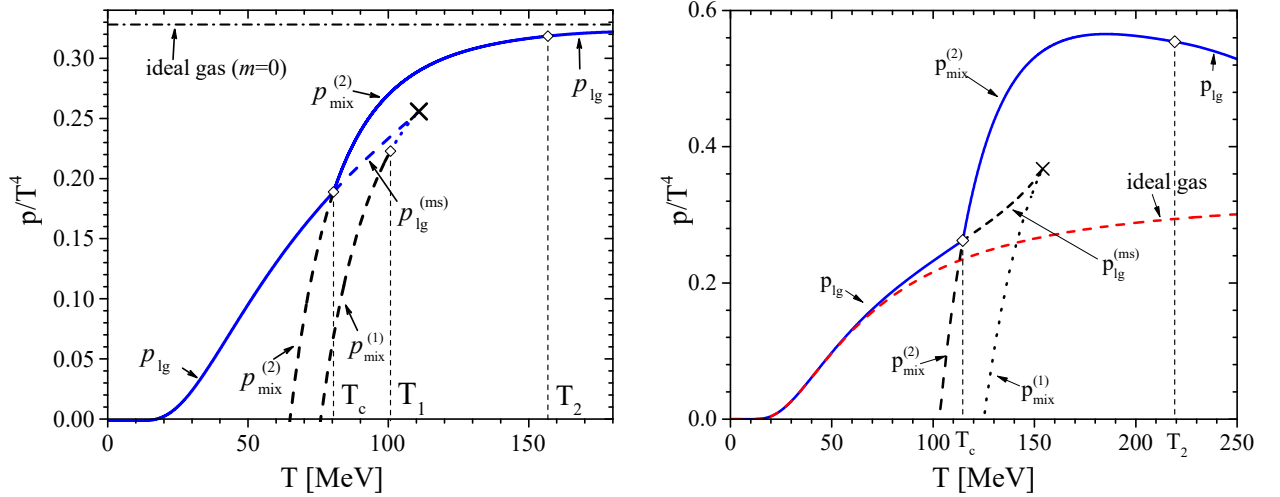


Рис. 2.8: На обох панелях: Залежність тиску від температури для надкритичного притягання,  $\kappa = 1.1$ . Суцільна синя лінія, яка складається з двох відрізків,  $p_{\text{lg}}$  і  $p_{\text{mix}}^{(2)}$ , є остаточним рівнянням стану,  $T_c$  - критична температура, яка вказує на фазовий перехід першого роду.

Ліва панель: Модель скалярного середнього поля. Тиск  $p_{\text{mix}}^{(1)}$  відповідає скалярній густині  $\sigma_1$ .

Права панель: Термодинамічна модель середнього поля. Тиск  $p_{\text{mix}}^{(1)}$  відповідає густині числа частинок  $n_1$ .

З порівняння результатів, зображених Рис. 2.7 та на Рис. 2.8 видно, що обидві моделі демонструють дуже схожу поведінку. Тому надалі ми розглядатимемо лише термодинамічну модель середнього поля, припускаючи, що її використання забезпечує коректний опис бозонної системи за високих густин.

## 2.6 Система частинок та античастинок зі збереженням густини ізоспіну (заряду)

### 2.6.1 Отримання основних рівнянь

Розглянемо однорідну систему зі збереженим зарядом (ізоспіном). Опис такої системи можна зробити в рамках канонічного ансамблю з вільними канонічними змінними  $(T, n_I)$ . Тут  $n_I = n^{(-)} - n^{(+)}$  - різниця між густинами  $\pi^-$  та  $\pi^+$  мезонів. Зауважимо, що тепер ми використовуємо термодинамічну модель середнього поля (TMF) для багатокomпонентної бозонної системи. Спершу розглянемо “слабке” притягання між частинками, тобто  $\kappa \leq 1$ . У такому випадку маємо дві пари самоузгоджених рівнянь, перша пара рівнянь описує систему, коли обидві компоненти, тобто і  $\pi^-$  і  $\pi^+$  мезони, перебувають у тепловій фазі (високі температури). Друга група рівнянь описує систему за низьких температур, коли мезони  $\pi^-$  перебувають у конденсатній фазі, а мезони  $\pi^+$  - у тепловій (кінетичній) фазі (докладніше див. за посиланням [46]).

Для високих температур маємо пару рівнянь наступного виду:

$$n = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [f_{\text{BE}}(E(k, n), \mu_I) + f_{\text{BE}}(E(k, n), -\mu_I)] , \quad (2.111)$$

$$n_I = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [f_{\text{BE}}(E(k, n), \mu_I) - f_{\text{BE}}(E(k, n), -\mu_I)] , \quad (2.112)$$

де функція розподілу Бозе-Айнштайна  $f_{\text{BE}}(E, \mu)$  означена у (2.55) і  $E(k, n) = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} + U(n)$ . Ці рівняння слід розв'язувати відносно густини частинок  $n$  та хімічного потенціалу  $\mu_I$ . Далі використовуємо ту саму параметризацію, що й у випадку нульової густини заряду (див. секцію 2.4.1), середнє поле залежить від повної густини числа частинок  $n$ :  $P_{\text{ex}}(n) = -(1/2)An^2 + (2/3)Bn^3 \rightarrow U(n) = -An + Bn^2$ . Власне, така



параметризація взаємодії є аналогією до польово-теоретичного підходу з відповідністю  $\langle \varphi^+ \varphi \rangle \leftrightarrow n$ , таким же чином можна писати:  $\varphi^4 \rightarrow n^2$  та  $\varphi^6 \rightarrow n^3$ .

Однією з основних цілей цього дослідження є вивчення впливу притягання і відштовхування між частинками на термодинамічні властивості бозонної системи, особливо в присутності конденсату. У цій роботі ми задаємо однаковою відштовхувальну взаємодію в системі, але варіюємо величину притягання між частинками. Як і у випадку нульової ізоспінової густини [7], ми використовуємо таку ж параметризацію коефіцієнта притягання  $A$ , послуговуючись розв'язками (2.107) рівняння  $U(n) + m = 0$ . Потім, тим самим способом, ми вводимо безрозмірний коефіцієнт  $\kappa \equiv A/(2\sqrt{mB})$ , який параметризує величину  $A$  як  $A = \kappa A_c$  при  $A_c = 2\sqrt{mB}$ . Нижче ми використаємо параметр  $\kappa$  для зміни притягання між частинками.

Якщо одна з компонент системи частинок та античастинок знаходиться в конденсатній фазі (для нашого вибору повного заряду системи це  $\pi^-$  мезони), тоді самоузгоджені рівняння, які визначають термодинамічну структуру системи за низьких температур мають вигляд:

$$n = n_{\text{cond}}^{(-)}(T) + n_{\text{lim}}(T) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f_{\text{BE}}(E(k, n), -\mu_I) \Big|_{\mu_I=m+U(n)} \quad (2.113)$$

$$n_I = n_{\text{cond}}^{(-)}(T) + n_{\text{lim}}(T) - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f_{\text{BE}}(E(k, n), -\mu_I) \Big|_{\mu_I=m+U(n)} \quad (2.114)$$

де припускається, що конденсований стан  $\pi^-$  мезонів утворюється за (необхідної) умови:

$$m + U(n) - \mu_I = 0. \quad (2.115)$$

Для густини теплових частинок на початку конденсації ми

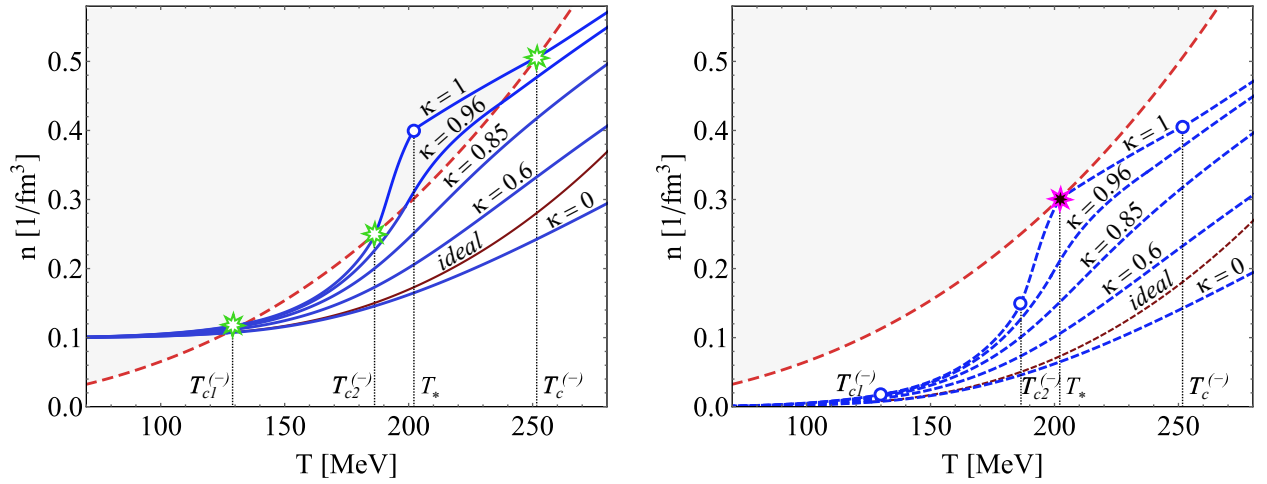


Рис. 2.9: *Ліва панель:* Густина числа частинок  $n^{(-)}$  мезонів  $\pi^-$  від температури для системи взаємодіючих  $\pi^+$  -  $\pi^-$  мезонів при фіксованій ізоспінній густині  $n_I = 0.1 \text{ fm}^{-3}$  та наборі “слабких” параметрів притягання  $\kappa = 0, 0.6, 0.85, 0.96, 1$ . Червона пунктирна крива  $n_{\text{lim}}$  відображає максимальну густину теплових  $\pi^-$  мезонів (або  $\pi^+$  мезонів) в ідеальному газі  $\pi^+$  -  $\pi^-$ . Затіненою зоною позначено фазу з конденсованими частинками. Порожні зірочки показують початок фазового переходу другого роду для мезонів  $\pi^-$ .

*Права панель:* Густина числа частинок  $n^{(+)}$   $\pi^+$ -мезонів у залежності від температури при тому самому наборі параметрів, що й на лівій панелі. “Темна” зірка, що відповідає температурі  $T_*$ , вказує на “віртуальний” фазовий перехід другого роду компоненти  $\pi^+$  що відбувається без утворення конденсату.

використовуємо співвідношення:

$$n_{\text{lim}}(T) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f_{\text{BE}}(\omega_k, \mu_I) \Big|_{\mu_I=m}, \quad (2.116)$$

що задає критичну криву.

## 2.6.2 Числові результати: фазовий перехід другого роду утворений частинками носіями домінуючого заряду

Розв’язки рівнянь (2.111), (2.112) та (2.113), (2.114) зображено на Рис. 2.9 як залежність густини частинок  $\pi^-$  мезонів (ліва панель) та  $\pi^+$  мезонів (права панель) за фіксованої ізоспінної густини  $n_I = 0.1 \text{ fm}^{-3}$  та для набору параметрів притягання  $\kappa = 0, 0.6, 0.85, 0.96, 1$ . Червоні

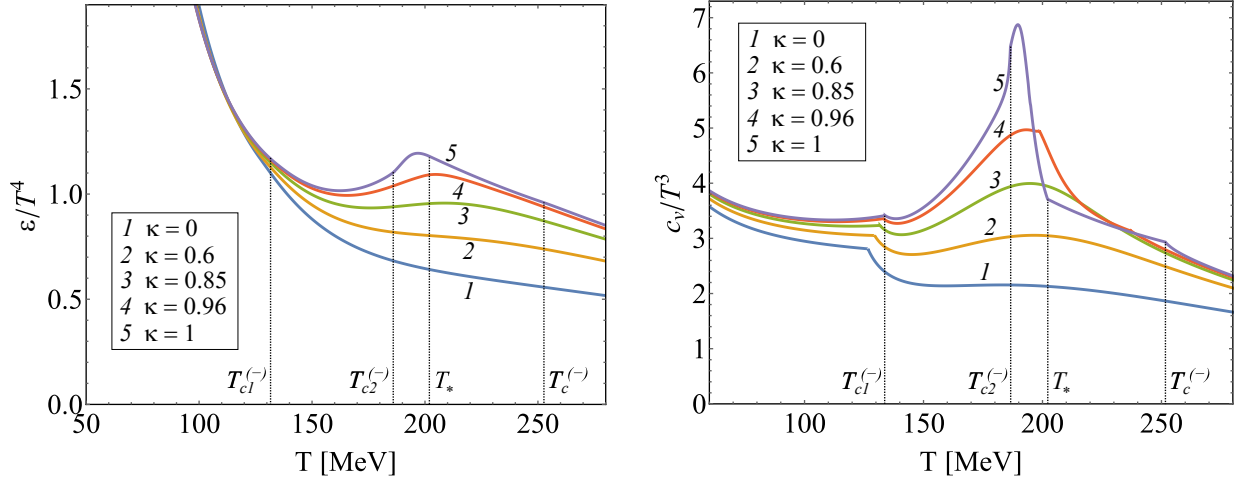


Рис. 2.10: *Ліва панель:* Залежність густини енергії від температури у взаємодіючій системі піонів при  $\kappa = 0, 0.6, 0.85, 0.96, 1$ . Густина ізоспіну (заряду) залишається сталою,  $n_I = 0.1 \text{ fm}^{-3}$ . Точки фазового переходу другого роду позначено відповідними температурами  $T_{c1}^{(-)}$ ,  $T_{c2}^{(-)}$ ,  $T_*$ ,  $T_c^{(-)}$ .

*Права панель:* Теплоємність як функція температури для тієї ж системи та умов, що і на лівій панелі.

пунктирні лінії на обох панелях - це критичні криві  $n_{\text{lim}}$ , які відображають максимальну густину теплових  $\pi^-$  піонів (ліва панель) або  $\pi^+$  піонів (права панель). Затіненою областю позначено фазу з конденсованими частинками. Порожні зірочки на лівій панелі вказують на бозе-конденсацію як фазовий перехід другого роду в  $\pi^-$  компоненті, де  $T_c^{(-)}$  - температура бозе-конденсації  $\pi^-$ -мезонів. “Темна” зірка на правій панелі вказує на віртуально-подібний фазовий перехід другого роду, створений мезонною підсистемою  $\pi^+$  за значення параметра притягання  $\kappa = 1$ . Кожна “зірочка” на графіках відповідає фазовому переходу другого роду. Грубо кажучи, кожен перетин кривої густини частинок з критичною кривою відповідає фазовому переходу другого роду.

Виявляється, що фазову структуру  $\pi^-$  мезонів (частинок з домінуючим зарядом) можна розділити на два типи: (а) крива  $n = n^{(-)}(T)$  має один перетин з критичною кривою  $n_{\text{lim}}(T)$ , і (б) крива  $n = n^{(-)}(T)$  має три перетини з критичною кривою. Звичайна поведінка або тип (а) має місце, коли параметр  $\kappa$  лежить у діапазоні низьких значень  $0 \leq \kappa < \kappa_s$ , де

$\kappa_s \approx 0.93$ . У цьому випадку  $\pi^-$  мезони для  $T < T_{c1}^{(-)}$  перебувають у конденсатній фазі, а в інтервалі температур  $T > T_{c1}^{(-)}$  вони перебувають у тепловій фазі, див. рис. 2.9, ліва панель.

Отже, для  $\kappa$  типу (а) температура фазового переходу  $T_c$  у всій системі визначається як  $T_c = T_{c1}^{(-)}$ , іншими словами, це звичайний фазовий перехід другого роду. Дійсно, на рис. 2.10 можна явно бачити скінченний розрив похідної від теплоємності (ліва панель) і відсутність виділення або поглинання прихованої теплоти (права панель) при температурі  $T_c$ .

Так, у випадку (а) залежність  $n^{(-)}(T)$ , яка відображає поведінку густини  $\pi^-$  мезонів (рис. 2.9, ліва панель), виглядає дуже подібно до поведінки за сталої густини частинок в однокомпонентній системі, принаймні в конденсатній фазі, тобто для температур  $0 \leq T \leq T_c$ , див. рис. 2.5 в розділі 2.2. З іншого боку, залежність  $n^{(+)}(T)$  (рис. 2.9, права панель), яка відображає поведінку густини частинок  $\pi^+$ , виглядає дуже схожою на залежність густини частинок при  $n_I = 0$  і  $\kappa < 1$ , показану на рис. 2.7 в правій панелі. Обидві ці особливості можна пояснити подібними початковими умовами при  $T = 0$  і повільним процесом утворення теплових піонних пар за низьких температур.

Коли параметр притягання  $\kappa$  збільшується і стає (б) типу, тобто  $\kappa_s < \kappa \leq 1$ , фазова структура домінуючої за зарядом компоненти ( $\pi^-$  мезонів) є складнішою. У цьому випадку крива  $n^{(-)}(T)$  послідовно перетинає критичну криву  $n_{\text{lim}}(T)$  тричі при температурах  $T_{c1}^{(-)} < T_{c2}^{(-)} < T_c$ , див. рис. 2.9, ліва панель. Очевидно, що це явище пояснюється збереженням заряду. Дійсно, для достатньо великих значень  $\kappa$ , скажімо,  $\kappa > \kappa_s$ , густина  $\pi^+$  наближається до критичної кривої (див. рис. 2.9, права панель) і просто “витискає” на інший бік критичної кривої густину  $\pi^-$ , оскільки її значення мають бути більшими на  $n_I$  за  $\pi^+$ -густину. Тобто,  $\pi^-$  мезони повторно “переходять” у конденсатну фазу. Як видно

з Рис. 2.10, кожен перетин кривої  $n^{(-)}(T)$  з критичною кривою  $n_{\text{lim}}(T)$  відповідає фазовому переходу другого роду, позаяк на правій панелі можна побачити скінченний розрив похідної від теплоємності за температур  $T_{c1}^{(-)}$ ,  $T_{c2}^{(-)}$ ,  $T_*$  і  $T_c$ . Водночас, на лівій панелі Рис. 2.10 ми не бачимо стрибків, що відповідали б прихованій теплоті за цих температур. Отже, можна зробити висновок, що через збереження заряду поряд з регулярним фазовим переходом другого роду, в системі частинок і античастинок можуть відбуватися також повторні “слабкі” фазові переходи.

У той же час, античастинки або  $\pi^+$  мезони перебувають у тепловій фазі для всього діапазону температур, див. Рис. 2.9, права панель. Лише при критичному значенні  $\kappa = \kappa_c = 1$  густина  $n^{(+)}(T)$  торкається критичної кривої  $n_{\text{lim}}(T)$  за температури  $T = T_*$ . Для цього окремого випадку  $\kappa = 1$  ми обчислили теплоємність та її похідну, див. Рис. 2.11. Можна бачити, що теплоємність (ліва панель) має яскраво виражений пік при відносно високій температурі  $\sim 190$  MeV.

Слід зазначити, що теплоємність і густина енергії це фізичні величини, які відображають інтегральну поведінку повної системи частинок та античастинок. Тому криві  $c_v(T)$  і  $\varepsilon(T)$  є носіями специфічних особливостей, які зумовлені сукупною поведінкою частинок та античастинок. Це добре видно на Рис. 2.11, для  $\kappa = 1$ . Справді, ми бачимо три фазові переходи другого роду при  $T = T_{c1}$ ,  $T_{c2}$ ,  $T_c$ , які зумовлені поведінкою  $\pi^-$  мезонів при  $\kappa = 1$ . Тим часом для  $\pi^+$ -мезонної підсистеми при  $\kappa = 1$  можна побачити віртуальний фазовий перехід другого роду при  $T = T_*$ , позначений заповненою зіркою на критичній кривій на Рис. 2.9, права панель. Це специфічний фазовий перехід другого роду, оскільки в ньому не відбувається утворення конденсату в обох напрямках в околі температури  $T_*$ . Через що ми назвали його віртуальним фазовим переходом другого роду. Характер цього фазового переходу добре видно на Рис. 2.11, у

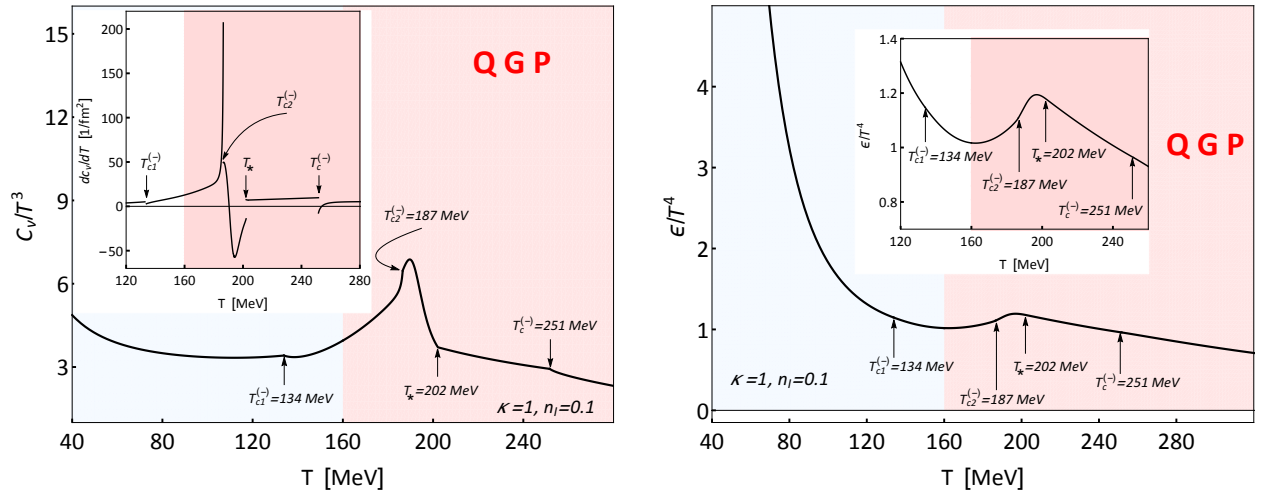


Рис. 2.11: *Ліва панель:* Теплоємність, нормована на  $T^3$ , як функція температури у взаємодіючій системі частинок та античастинок при  $\kappa = 1$  (чорна суцільна крива). Густина ізоспіну (заряду) залишається сталою,  $n_I = 0.1 \text{ fm}^{-3}$ . Похідна теплоємності показана у маленькому віконці.

*Правая панель:* Залежність густини енергії, нормованої на  $T^4$ , від температури для тієї самої системи та умов, що й на лівій панелі (чорна суцільна крива). Збільшена центральна область графіка показана в маленькому вікні.

маленькому вікні на лівій панелі, як розрив похідної теплоємності при  $T = T_*$ . У той же час ми бачимо плавну поведінку густини енергії при цій температурі, див. маленьке вікно на правій панелі Рис. 2.11.

Так маємо, що всі перетини залежностей  $n^{(-)}(T)$  і  $n^{(+)}(T)$  з критичною кривою  $n_{\text{lim}}(T)$  проявляються, зокрема, як скінченний розрив похідних від теплоємності  $c_v(T)$  при температурах  $T = T_{c1}, T_{c2}, T_*, T_c$ , див. ліву панель на Рис. 2.11. На правій панелі цього рисунку зображено густину енергії. Можна стверджувати, що в цих чотирьох температурних точках відбуваються фазові переходи саме другого роду, оскільки залежність густини енергії,  $\epsilon(T)$ , є дійсно неперервною і без виділення прихованої теплоти.

Отже, для термодинамічної поведінки бозонної системи з частинок та античастинок при “слабкому” притяганні ( $\kappa \leq 1$ ) ми виявили фазові переходи другого роду в кожній точці перетину густини частинок  $n^{(-)}(T)$  з критичною кривою  $n_{\text{lim}}(T)$ , визначеною в рівнянні (2.116). Для параметра

$\kappa$  в інтервалі  $0 \leq \kappa < \kappa_s$  зафіксовано початок конденсації при температурі  $T = T_c^{(-)}$ , що відповідає фазовому переходу другого роду. Але для значень параметра  $\kappa$  в інтервалі  $\kappa_s < \kappa \leq 1$ , знаходимо виникнення конденсації за трьох температур  $T_{c1}^{(-)}$ ,  $T_{c2}^{(-)}$  і  $T_c$  завдяки осцилюючій поведінці кривої  $n^{(-)}(T)$  вздовж лінії  $n_{\text{lim}}(T)$ . Таку поведінку при  $\kappa = 1$  можна побачити на Рис. 2.14 на лівій панелі, де показано густину конденсату (синя заштрихована область). На цій панелі ми бачимо, що бозе-конденсат дійсно утворюється у двох різних температурних діапазонах винятково завдяки принципу збереження заряду.

Залежність густини  $n^{(+)}(T)$  мезонів  $\pi^+$  при  $\kappa = 1$  має помітну особливість, яку ми вже відзначали вище. Як видно на Рис. 2.9 на правій панелі, при температурі  $T_* = 202$  MeV крива  $n^{(+)}(T)$ , обчислена при  $\kappa = 1$ , торкається критичної кривої  $n_{\text{lim}}(T)$ , але не перетинає її. Розглянемо це детальніше. Для значення  $\kappa = 1$  корені (2.107) рівняння  $U(n) + m = 0$  збігаються:  $n_1 = n_2 \equiv n_*$ , де  $n_* = \sqrt{m/B}$ . За цієї густини, оскільки виконується  $U(n_*) + m = 0$ , умова (2.115) утворення конденсату призводить до нульового значення хімічного потенціалу, тобто  $\mu_I = 0$ , але  $U(n_*) = -m$ . Тому для стану з густиною кількості частинок  $n = n_*$  аргументи у функціях розподілу Бозе-Айнштейна  $n^{(+)}$  та  $n_{\text{lim}}$  збігаються і набувають значення  $(\omega_k - m)/T$ . Отже, можна обчислити температуру, яка відповідає повній густині частинок  $n_*$ , розв'язавши рівняння:  $n_{\text{lim}}(T_*) = (n_* - n_I)/2$ . Поведінку хімічного потенціалу в залежності від температури при  $\kappa = 1$  можна побачити на Рис. 2.14 на лівій панелі у вигляді синьої суцільної кривої (вісь, що вказує значення хімічного потенціалу, знаходиться праворуч від графіка). Хімічний потенціал падає до нуля в одній точці  $T = T_*$ , де густина мезонів  $\pi^+$  торкається критичної кривої, див. Рис. 2.9, права панель. Як видно з рис. 2.11 на лівій панелі, спільної точки лінії  $n^{(+)}(T)$  з лінією  $n_{\text{lim}}(T)$  достатньо,

щоб створити скінченний розрив похідної теплоємності з неперервною поведінкою густини енергії, тобто призвести до фазового переходу другого порядку за температури  $T_*$ . Як вже було зазначено вище, ми називаємо це явище віртуальним фазовим переходом другого роду, оскільки воно не призводить до утворення конденсату, який мав би відігравати роль параметра порядку.

Завершуючи цю секцію, ми можемо сформулювати теорему: *Кожен перетин кривої густини частинок  $n^{(\pm)}(T)$  з критичною кривою  $n_{\text{lim}}(T)$  (або навіть дотик до критичної кривої) призводить до фазового переходу другого роду при температурі, яка відповідає точці цього перетину. При температурі  $T_*$ , що відповідає точці дотику, відбувається віртуальний фазовий перехід другого роду без утворення конденсату, тобто без утворення параметру порядку.*

## **2.7 Порівняння канонічного ансамблю і великого канонічного ансамблю, опис систем бозонів за умови наявності конденсату**

### **2.7.1 Збереження числа частинок в ідеальній однокомпонентній бозонній системі**

Припустимо, що у випадку зі збереженням заряду ми хочемо описати бозонну систему в рамках великого канонічного ансамблю, де вільні канонічні змінні наступні:  $(T, \mu)$ . Для початку розглянемо ізольований ідеальний однокомпонентний бозонний газ зі сталим числом частинок. (Далі в рамках великого канонічного ансамблю буде розглянуто бозонну



систему “частинка-античастинка” зі сталою густиною заряду).

Виявляється, що навіть у цьому випадку загальна процедура не є однозначною. Перш за все, слід скоригувати хімічний потенціал при високих температурах  $T$ , де в системі відсутній конденсат, при заданій густині частинок  $n$ , яку слід розглядати як середнє значення. У канонічному ансамблі, де вільною змінною є густина частинок  $n$ , хімічний потенціал знаходиться з рівняння

$$n = g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f_{\text{BE}}(\omega_k, \mu). \quad (2.117)$$

З іншого боку, це можна інтерпритувати навпаки: при деякій заданій температурі  $T'$  і хімічному потенціалі  $\mu'$ , використовуючи рівняння (2.117), можна обчислити середнє значення  $\bar{n}$ , яке буде прийнято як густина чисел частинок у канонічному ансамблі, яка зберігається. Але далі, для інших температур, відмінних від  $T'$ , треба знати хімічний потенціал, який узгоджується з тією самою густиною частинок  $n$ . І знову маємо необхідність розв'язати рівняння (2.117) відносно хімічного потенціалу, щоб отримати залежність  $\mu(T, n)$ . Розв'язок рівняння (2.117) зображено на рис. 2.12 у лівій частині. Ці розв'язки отримані для двох густин  $n = 0.1 \text{ fm}^{-3}$  і  $n = 0.2 \text{ fm}^{-3}$ , де критична крива це  $n_{\text{lim}}^{(\text{id})}$ . Слід зазначити, що в конденсованій фазі  $T < T_c$  хімічний потенціал дорівнює максимальному значенню, і що ним є маса частинок  $\mu = m$ . Тоді в конденсатній фазі змінні  $(T, \mu)$  визначають лише густину теплових частинок у цьому інтервалі температур, див. два приклади кривих на Рис. 2.12 на правій панелі. Окремо слід зазначити, що позаяк хімічний потенціал бере участь в умові утворення конденсату, тобто  $\mu = m$ , то з формальної точки зору він не може бути вільною змінною в конденсатній фазі.

Тому, якщо ми продовжуємо досліджувати збереження числа частинок

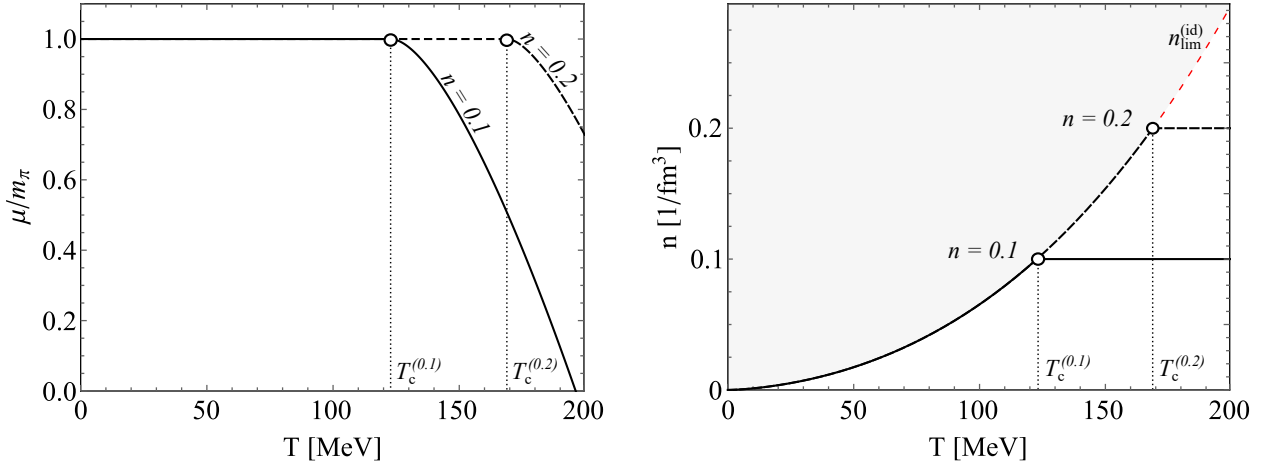


Рис. 2.12: *Ліва панель:* Залежність хімічного потенціалу від температури в ідеальному однокомпонентному бозонному газі при сталому середньому значенні густини числа частинок для двох значень:  $n = 0.1 \text{ fm}^{-3}$  з  $T_c^{(0.1)}$  (чорна суцільна лінія) та  $n = 0.2 \text{ fm}^{-3}$  при  $T_c^{(0.2)}$  (чорна пунктирна лінія). Відрізок  $\mu = m$  належить конденсатній фазі. *Права панель:* Залежність густини теплових частинок від температури в ідеальному однокомпонентному бозонному газі. Критична крива  $n_{\text{lim}}^{(\text{id})}$  визначена в (2.54). (Ті самі позначення, що й на лівій панелі).

в однокомпонентному ідеальному газі в широкому діапазоні температур, мизобов'язані використовувати профіль хімічного потенціалу, зображений на лівій панелі Рис. 2.12. Тоді, справді, якщо ми використаємо цю функцію  $\mu(T, n)$  в рівнянні (2.117) для обчислення густини частинок, то отримана залежність  $n(T)$  фактично залишається сталою,  $n(T) = \bar{n} = \text{const.}$  Але, по суті, це не використання великого канонічного ансамблю, де дві вільні змінні  $(T, \mu)$  повинні визначати термодинамічний стан системи, ми бачимо, що профіль хімічного потенціалу обчислюється за допомогою деякого значення  $n$ . Особливо це стосується конденсатної фази, де хімічний потенціал обмежений умовою утворення конденсату, тобто  $\mu = m$ .

Отримана картина стає ще більш разючою, коли ми вивчаємо збереження заряду в релятивістському ідеальному бозонному газі частинок і античастинок при  $n_I \neq 0$ . Справді, якщо припустити, що частинки й античастинки одночасно перебувають у фазі конденсату, то одночасно мають виконуватися дві умови:  $m - \mu_I = 0$  і  $m + \mu_I = 0$ , де  $\mu_I$  - ізоспіновий хімічний потенціал, який відповідає  $n_I$ . Це приводить до двох рівностей:

$m = 0$  і  $\mu_I = 0$ . Як бачимо, перше рівняння неможливе або нефізичне. Тобто, може виконуватись лише одна умова, наприклад,  $m - \mu_I = 0$ . Отже, ми можемо сформулювати теорему: *в релятивістському бозонному ідеальному газі з частинок та античастинок і за умови збереження заряду  $n_I \neq 0$ , лише один компонент системи може утворювати конденсатну фазу.* Знак надлишкового заряду, модуль якого дорівнює  $n_I$ , визначає відповідь, який компонент системи, частинки чи античастинки, може перебувати в конденсаті.

## 2.7.2 Збереження заряду у бозонній системі частинок та античастинок що взаємодіє

Аналогічна парадоксальна картина виникає при розгляді бозонної системи взаємодіючих частинок та античастинок за скінченної густини ізоспіну (заряду)  $n_I \neq 0$  в межах великого канонічного ансамблю.

Як ми бачили у попередній секції 2.6.1, зі “слабким” притяганням, бозонна система має різну фазову структуру в різних температурних інтервалах. При “сильній” взаємодії виникає додатковий термодинамічний стан, коли обидві компоненти, тобто частинки і античастинки, можуть одночасно перебувати у конденсатній фазі. Тому, якщо  $\kappa > 1$ , необхідно послідовно розв’язати три набори рівнянь, кожне з яких відповідає певній термодинамічній фазі:

- (а) за низьких температур, коли домінує зарядовий компонент система частинок і античастинок перебуває у фазі конденсату (Для нашого вибору повного заряду системи це  $\pi^-$  мезони) а компонент низької густини перебуває лише в тепловій фазі, то це сукупність рівнянь (2.113), (2.114);
- (б) коли обидві компоненти, тобто мезони  $\pi^-$  і  $\pi^+$ , перебувають у конденсатній фазі, необхідно модифікувати набір (а), див. нижче;

(с) при високих температурах - це сукупність рівнянь (2.111), (2.112), які визначають стан, коли обидва компоненти системи, тобто частинки і античастинки, перебувають лише у тепловій фазі.

Існує делікатне питання, коли і частинки, і античастинки піддаються конденсації Бозе-Айнштейна одночасно. У цьому випадку, на додаток до умови конденсату (2.115) для  $\pi^-$  мезонів, аргумент функції розподілу для  $\pi^+$  мезонів має задовольняти аналогічну умову, щоб гарантувати перебування цього компонента системи в конденсаті за тієї самої температури  $T$  і при хімічному потенціалі  $\mu$ . Отже, коли частинки та античастинки перебувають у конденсаті, ми отримуємо дві умови одночасно:

$$\begin{cases} U(n) - \mu_I + m = 0, & (2.118) \\ U(n) + \mu_I + m = 0. & (2.119) \end{cases}$$

Тоді рівняння (2.113), (2.114) слід модифікувати, щоб врахувати ці умови. Треба включити конденсатну компоненту  $n_{\text{cond}}^{(+)}$  з  $\pi^+$  мезонів, враховуючи, що густина теплових  $\pi^+$  мезонів тепер дорівнює  $n_{\text{lim}}(T)$ , так само як і густина теплових  $\pi^-$  мезонів. Отже, коли в конденсаті присутні обидва компоненти, система самоузгоджених рівнянь має вигляд (випадок (b))

$$n = n_{\text{cond}}^{(-)}(T) + n_{\text{cond}}^{(+)}(T) + 2n_{\text{lim}}(T), \quad (2.120)$$

$$n_I = n_{\text{cond}}^{(-)}(T) - n_{\text{cond}}^{(+)}(T). \quad (2.121)$$

Виявляється, що розв'язки варіантів (a) та (b) існують в одному і тому ж температурному інтервалі. Дійсно, крім самоузгоджених розв'язків рівнянь (a), існують ще дві гілки розв'язків:  $(n_1^{(-)} = \text{const}, n_1^{(+)} = \text{const})$  та  $(n_2^{(-)} = \text{const}, n_2^{(+)} = \text{const})$ , які задовольняють рівняння (2.120), (2.121). Можна показати, що гілка  $(n_2^{(-)} = (n_2 + n_I)/2, n_2^{(+)} = (n_2 - n_I)/2)$ , де  $n_2$  є коренем (2.107) рівняння  $U(n) + m = 0$ , та реалізується через більший

тиск, що відповідає цим станам.

Конкуренція між гілками (а) і (b) вирішується стандартним чином за критерієм Гіббса: в термодинамічній реалізації перевага надається стану, що відповідає найбільшому тиску. Використовуючи це правило, знаходимо температуру  $T_{cd}$  з рівняння  $p_{(a)}(T, n_I) = p_{(b)}(T, n_I)$ , де тиск  $p_{(a)}(T, n_I)$  відповідає розв'язкам системи рівнянь (а), а  $p_{(b)}(T, n_I)$  відповідає розв'язкам системи рівнянь (b). Для температур вище  $T_{cd}$  домінує тиск, який відповідає станам, що визначаються множиною (b), тобто  $p_{(b)}(T, n_I) > p_{(a)}(T, n_I)$ . Це призводить до переходу від гілки (а) до гілки (b) самоузгоджених розв'язків, що призводить до фазового переходу першого роду при температурі  $T = T_{cd}$ .

Множину рівнянь (2.118) та (2.119) можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} \mu_I = 0, & (2.122) \\ U(n) + m = 0. & (2.123) \end{cases}$$

Зауважимо, що в роботі [7] система піонів досліджувалась у Великому канонічному ансамблі при  $\mu_I = 0$  у наближенні середнього поля і умова настання конденсатної фази приводить до того самого рівняння  $U(n) + m = 0$ .

Результати чисельного розв'язування систем рівнянь (а), (b) та (c) для густини частинок при  $\kappa = 1.1$  показано на Рис. 2.13 на лівій панелі. Густина  $n^{(-)}(T)$  мезонів  $\pi^-$  представлена суцільною синьою кривою яка складається з кількох горизонтальних відрізків і одного вертикального, що відображає фазовий перехід першого роду. Густина  $n^{(+)}(T)$  мезонів  $\pi^+$  зображена штриховою блакитною кривою, яка також складається з кількох горизонтальних відрізків і одного вертикального, який так само відображає фазовий перехід першого роду. З рисунка видно, що

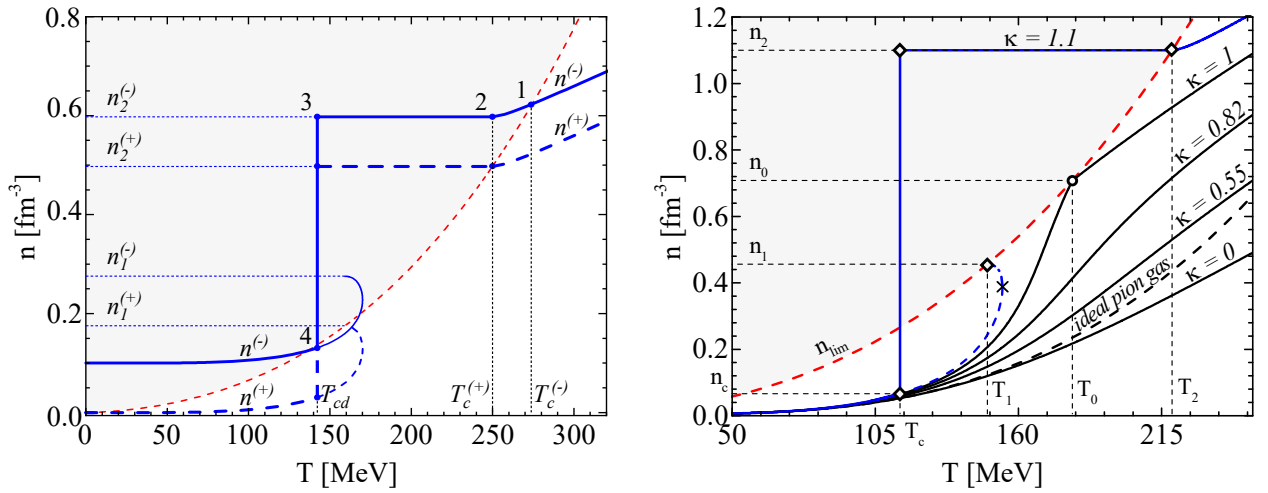


Рис. 2.13: Взаємодіюча бозонна система частинок та античастинок в термодинамічній моделі середнього поля.

*Ліва панель:* Залежність густини частинок від температури при збереженні густини ізоспіну (заряду)  $n_I = 0.1$  fm<sup>-3</sup> у вигляді суцільної синьої лінії, що складається з кількох відрізків ( $\pi^-$  мезони) та пунктирною блакитною лінією, що складається з кількох відрізків ( $\pi^+$  мезони). Вертикальний відрізок на обох залежностях вказує на фазовий перехід першого роду з утворенням конденсату. У фазі конденсату  $\mu_I = 0$ . Пунктирна червона лінія - критична крива  $n_{lim}(T)$ , див. рівняння (2.116).

*Права панель:* Залежність густини частинок від температури при  $n_I = 0$  (або при  $\mu_I = 0$ ): 1) випадок з надкритичним притяганням  $\kappa = 1.1$  показано суцільною синьою лінією, що складається з кількох відрізків; вертикальний відрізок (суцільна синя лінія) вказує на фазовий перехід першого роду з утворенням конденсату; 2) густини частинок при “слабкому” притяганні  $\kappa \leq 1$  показані суцільними чорними лініями в тепловій фазі. Пунктирна червона лінія - критична крива.

густина ізоспіну (заряду) в системі бозонів, що розглядається, залишається сталою. Справді, для кожної температурної точки на графіку видно, що  $n^{(-)}(T) - n^{(+)}(T) = 0.1$  fm<sup>-3</sup>. Для наочного порівняння на правій панелі на рис. 2.13 зображено праву панель рис. 2.7 ще раз. Хочемо підкреслити, що у фазі конденсату обидві системи характеризуються нульовим хімічним потенціалом незалежно від того, чи має система частинок та античастинок, описана на лівій панелі, скінченну густину заряду, тобто  $n_I = 0.1$  fm<sup>-3</sup>, тоді як система частинка-античастинка, описана на правій панелі, характеризується нульовою густиною заряду, тобто  $n_I = 0$ . Отже, якщо ми хочемо вивчати обидві системи, одну систему зі скінченною густиною заряду а іншу з нульовою густиною заряду в межах великого канонічного ансамблю, то вільні канонічні змінні мають бути

$(T, \mu_I = 0)$  при описі конденсатної фази в обох системах.

Здається, ми приходимо до своєрідного протиріччя, оскільки в підручниках сказано, що хімічний потенціал має відображати збереження заряду або числа густини частинок, як ми бачили у попередній секції. 2.7.1. Розв’язання цієї суперечності відбувається у відповідності до твердження, що *великий канонічний ансамбль з канонічними змінними  $(T, \mu)$  є придатним для опису лише теплової фази або для опису частинок які перебувають у кінетичних станах, але не у конденсованих*. Ми переконалися, що це справедливо для випадку збереження числа частинок ідеального газу бозонів, де з канонічними змінними  $(T, \mu)$  у конденсатній фазі ми змогли описати лише кінетичні частинки, див. розділ 2.7.1.

Аналогічне також має місце і в нашому розгляді релятивістської системи бозонів частинок та античастинок зі збереженим ізоспіновим зарядом  $n_I$ . Справді, можна бачити (на Рис. 2.13 на лівій панелі в температурному інтервалі, що відповідає конденсатній фазі, тобто між точками 2 і 3 на графіку), що для кожної температури з конденсатного інтервалу тепла густина  $\pi^-$  мезонів дорівнює тепловій густині мезонів  $\pi^+$ , оскільки ці дві густини дорівнюють  $n_{\text{lim}}(T)$ . Іншими словами, ці кінетичні густини дорівнюють густині критичної кривої. Отже, густина заряду, яка визначається тільки тепловими частинками і античастинками, дорівнює нулю. Відповідно, хімічний потенціал, який відповідає тому заряду системи, що визначається тільки тепловими частинками, також дорівнює нулю. І ми бачимо, що хімічний потенціал  $\mu_I$  дійсно корисний для опису тільки теплових або кінетичних частинок. Власне, це можна було зрозуміти з самого початку, бо хімічний потенціал “працює” в інтегралі (у функції розподілу), який визначає тільки густину кінетичних частинок.

Результати розв’язання самоузгоджених рівнянь для  $\kappa = 1.1$  показано на Рис. 2.14 на правій панелі (вісь що відповідає за значення хімічного

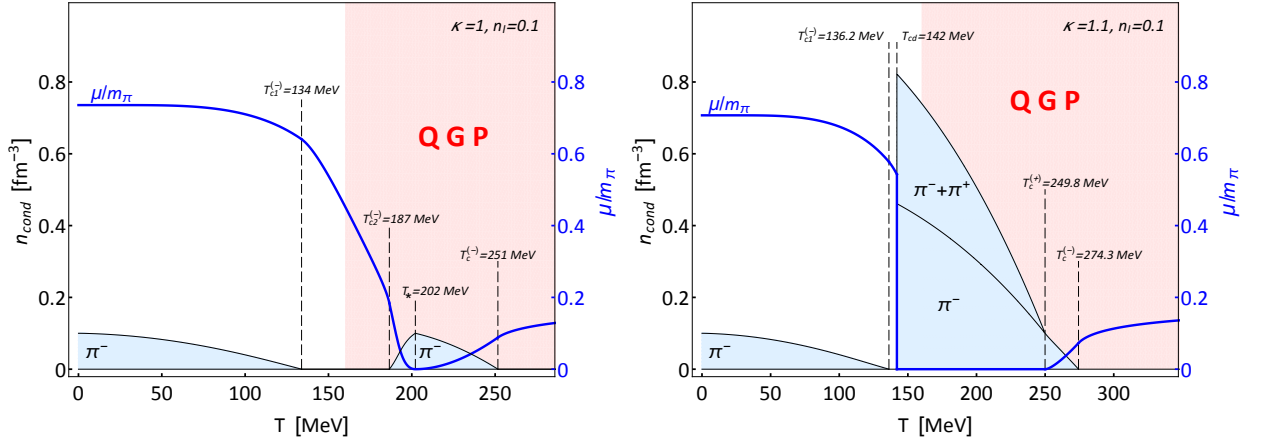


Рис. 2.14: *Ліва панель:* Густина конденсату  $\pi^-$ -мезонів як функція температури у взаємодіючому газі частинок та античастинок при  $\kappa = 1$ . Густина ізоспіну (заряду) залишається сталою,  $n_l = 0.1 \text{ fm}^{-3}$ . Синя суцільна лінія показує поведінку хімічного потенціалу. Червона область вказує на можливе утворення кварк-глюонної плазми при  $T > 160 \text{ MeV}$ .

*Права панель:* Те саме, що й на лівій панелі, але для  $\kappa = 1.1$ . Вітрилоподібна заштрихована область вказує на конденсатні стани, створені  $\pi^-$ -мезонами та  $\pi^+$ -мезонами одночасно. Розрив хімічного потенціалу при  $T = T_{cd}$  відображає фазовий перехід першого роду, який приводить до утворення конденсату мезонів  $\pi^-$  і  $\pi^+$ .

потенціалу знаходиться з правого боку графіка). Можна побачити поведінку хімічного потенціалу, значення якого тотожно дорівнює нулю у фазі, що в ній частинки і античастинки перебувають у конденсованому стані. Бачимо, що хімічний потенціал падає до нуля при температурі  $T_{cd}$ , що вказує на фазовий перехід першого роду. На Рис. 2.14 на правій панелі ми також маємо змогу бачити, як конденсат утворюється в двох різних температурних інтервалах, за низьких температур наявність конденсату зумовлена виключно збереженням заряду, але при вищих температурах утворення конденсату спричинене надкритичним ( $\kappa > 1$ ) притяганням між частинками.

## 2.8 Інші приклади

Розглянемо термодинамічну модель середнього поля, де середнє поле також залежить від густини ізоспіну. Як показано в роботі [35], оскільки



$n$  і  $n_I$  є незалежними термодинамічними змінними, потенціал цього середнього поля має наступний вигляд:  $U^{(\mp)}(n, n_I) = U(n) \mp U_I(n_I)$ , де  $U_I(n_I)$  — непарна функція, наприклад  $U_I(n_I) \propto n_I$ , поле  $U^{(-)}$  діє на  $\pi^-$ -мезони, а  $U^{(+)}$  діє на  $\pi^+$ -мезони. Тоді, якщо  $\pi^-$  і  $\pi^+$ -мезони знаходяться у фазі конденсату, повинні виконуватись дві необхідні умови, перша:  $m + U(n) - U_I(n_I) - \mu_I = 0$ , і друга:  $m + U(n) + U_I(n_I) + \mu_I = 0$ . Звідки можна отримати еквівалентні рівняння:  $m + U(n) = 0$  і  $\mu_I = -U_I(n_I)$ . Отже, хімічний потенціал фіксується умовою утворення конденсату і визначається густиною ізоспіну, яка залишається сталою. Отже, коли середнє поле в системі залежить від густини ізоспіну (заряду), отримуємо аналогічний результат, що  $\mu_I$  не може бути вільною змінною за наявності конденсату, а отже, великий канонічний ансамбль незастосовний у фазі конденсату.

При описі взаємодіючої бозонної системи частинка-античастинка зі скінченною густиною ізоспіну (заряду)  $n_I \neq 0$  у теоретико-польовому підході, сформульованому в частині 2.3 цієї роботи, ми стикаємося з тим самим парадоксом. Дійсно, для утворення конденсату як частинками так і античастинками, необхідно виконати дві умови:  $M^2 - \mu_I = 0$  і  $M^2 + \mu_I = 0$ , де  $M$  — ефективна маса квазічастинки. За повною аналогією з випадком, розглянутим у попередньому абзаці, ці умови призводять до двох рівнянь:  $M^2 = 0$  і  $\mu_I = 0$ . Отже, виходить, що система зі скінченною густиною заряду  $n_I \neq 0$  характеризується нульовим значенням хімічного потенціалу. З іншого боку, легко бачити, що за наявності конденсату густина теплових частинок однакова в негативно та позитивно заряджених компонентах системи, тобто  $n_{\text{th}}^{(-)}(T) = n_{\text{th}}^{(+)}(T)$ . Отже, проблему можна вирішити, якщо прийняти той факт, що хімічний потенціал відповідає лише за теплові (кінетичні) частинки.

## 2.9 Проміжні висновки

Отже, у цій главі ми досліджували релятивістську взаємодію системи бозе-частинок та античастинок, які ми умовно назвали “піонами” через нульовий спін і масу  $m = 139 \text{ MeV}/c^2$ . Відштовхування між частинками було фіксованим (жорстке відштовхування), але притягання між частинками, яке параметризувалося безрозмірним параметром  $\kappa$ , змінюється від нуля ( $\kappa = 0$ ) до деякого надкритичного значення ( $\kappa > 1$ ).

Ми довели, і тим самим підтвердили висновок, отриманий в [46], що при “слабкому” притяганні ( $\kappa \leq 1$ ) лише  $\pi^-$  компонент системи може утворювати конденсат Бозе-Айнштайна, а  $\pi^+$  компонент перебуває в тепловій фазі для всіх температур. Ми показали, що для  $0.93 \leq \kappa \leq 1$  у доповнення до конденсації мезонів  $\pi^-$  за низьких температур, може бути повторна конденсація в деякому інтервалі за вищих температур. Крім того:

- Точки перетину кривих густини частинок з критичною кривою вказують на фазові переходи другого роду в системі.
- У точці, де густина частинок  $\pi^+$  мезонів торкається критичної кривої, з’являється віртуальний фазовий перехід другого роду, тобто фазовий перехід без утворення параметру порядку.
- У мезонній системі відбувається фазовий перехід першого роду для достатньо сильних притягальних взаємодій, утворюючи бозе-конденсат і вивільняючи таким чином приховану теплоту. Модель передбачає, що конденсована фаза характеризується постійною повною густиною частинок.
- Великий канонічний ансамбль не може бути застосований для опису стану конденсату, оскільки хімічний потенціал  $\mu_I$  суттєво залежить

від умов утворення конденсату, тож його не можна використовувати як вільну змінну, якщо система перебуває в конденсованій фазі. Саме тому великий канонічний ансамбль є *непридатним* для опису багатокomпонентної системи у фазі конденсату, навіть якщо тільки один з компонентів перебуває в конденсаті.

## Розділ 3. Фазові діаграми системи бозонів частинок і античастинок

### 3.1 Вступ

Загальноновизнано, що КХД демонструє багату фазову структуру при скінченних температурах та густинах баріонів, наприклад, перехід від адронного газу до кварк-глюонної плазми, перехід від стану порушення хіральної симетрії до стану її відновлення [1]. Останнім часом дослідження фазової структури КХД поширено на скінченну ізоспінову густину [12, 13, 14, 15, 16, 17]. Фізична мотивація вивчення КХД за скінченної ізоспінової густини відповідної піонної системи пов'язана з дослідженням компактних зірок, ізоспіново-асиметричної ядерної матерії та зіткнень важких іонів. У ранніх дослідженнях щільної ядерної матерії та компактних зірок було припущено, що заряджені піони і навіть каони конденсуються при досить високих густинах. Цікаві нові результати, що стосуються щільних піонних систем, були отримані нещодавно за допомогою ґраткових методів [18, 19, 20]. Отже, знання фазової структури мезонних систем у режимі скінченних температур та ізоспінових густин має вирішальне значення для розуміння широкого кола явищ від ядер-ядерних зіткнень до утворення бозонних або нейтронних зірок.

Ця галузь є важливою частиною досліджень гарячої та щільної адронної адронної матерії, яка є предметом активних досліджень. Водночас

дослідження мезонних систем має свою специфіку, зумовлену можливістю бозе-айнштайнівської конденсації (БЕК) взаємодіючих бозонних частинок.

У цій главі розглядається взаємодіюча система частинок і античастинок, бозонна система зі змінною ізоспіною (зарядовою) густиною  $n_I$  і скінченною температурою  $T$ . Ми умовно називаємо бозонні частинки “піонами”. Перевагу цим частинкам надано тому, що заряджені  $\pi$ -мезони є найлегшими серед адронів які описуються ізоспіновим хімічним потенціалом. З іншого боку, піони є найлегшими частинками серед ядерних бозонів, а отже, пояснення “температурного народження” пар частинка-античастинка є актуальною проблемою з точки зору квантової статистики.

Щоб врахувати взаємодію між бозонами, введемо феноменологічне Скірма-подібне середнє поле  $U(n)$ , яке залежить лише від повної густини мезонів  $n$ . Ми розглядаємо таку багаточастинкову систему, що самовзаємодіє, як іграшкову модель, що може допомогти нам зрозуміти механізм утворення БЕК (Бозе-Айнштайнівський конденсат) і фазові переходи в широкому діапазоні температур і густин. Середнє поле  $U(n)$  радше відображає присутність інших сильно взаємодіючих частинок у системі, наприклад  $\rho$ -мезонів і нуклон-antinуклонних пар при низьких температурах або глюонів і кварк-антикваркових пар при високих температурах  $T > T_{\text{qgp}} \approx 160 \text{ MeV}$ .

Представлена робота є продовженням циклу робіт, розпочатого дослідженням взаємодіючої бозонної системи частинок і античастинок при нульовій ізоспіновій густині [7, 42, 31, 37]. Розвиток теми було подано в роботах [47, 48], де ту саму систему бозонів розглянуто в рамках канонічного ансамблю з канонічними змінними  $T, n_I$ , тобто температурою та ізоспіною густиною. В цих роботах було розраховано температурні характеристики неідеального гарячого “піонного” газу з фіксованою ізоспіною густиною  $n_I = n^{(-)} - n^{(+)} > 0$ , де  $n^{(\mp)}$  - густина

числа частинок  $\pi^-$  та  $\pi^+$  мезонів, відповідно.

У цьому дослідженні ми продовжимо використовувати канонічний ансамбль, але тепер ми зосереджуємося на ізоспін-густинних залежностях термодинамічних величин при фіксованій температурі.

## 3.2 Фазовий перехід рідина-газ: правила Максвелла в системі із збереженням заряду

Щоб визначити точки  $v = 1/n_I$ , які задовольняють правила Максвелла, потрібно розв'язати систему двох рівнянь відносно точки  $v_{x1} = 1/n_{I2}$  і  $v_{x2} = 1/n_{I1}$  (варто зауважити, що тиск розглядається як функція  $n_I$ , тобто  $p(n_I)$ ). У випадку однорідної системи для ізотермічного процесу  $T = \text{const}$  маємо

$$dp = sdT + n_I d\mu_I \quad \rightarrow \quad dp = n_I d\mu_I. \quad (3.124)$$

Тоді (1):

$$d\mu_I = 0 \quad \rightarrow \quad dp = 0 \quad \rightarrow \quad \int_1^2 dp = 0 \quad \rightarrow \quad p_1 = p_2. \quad (3.125)$$

Тоді (2):

$$\frac{1}{n_I} dp = d\mu_I, \quad d\mu_I = 0 \quad \rightarrow \quad \int_1^2 \frac{1}{n_I} dp = 0. \quad (3.126)$$

Запишемо ці два рівняння (3.125), (3.126) як систему відносно  $v_1$  і  $v_2$ ,

$$p(1/v_1) = p(1/v_2), \quad (3.127)$$

$$\int_{v_1}^{v_2} dv p(1/v) = (v_2 - v_1) p(1/v_1), \quad (3.128)$$

де останнє рівняння можна записати у вигляді

$$\int_{v_1}^{v_2} dv [p(1/v) - p(1/v_1)] = 0. \quad (3.129)$$

Тоді, отримавши розв'язок, можна визначити значення  $n_{I1} = 1/v_2$  і  $n_{I2} = 1/v_1$ .

Графічні приклади застосування цього алгоритму зображені на Рис. 3.15-3.18 для набору температур  $T = 40, 80, 100$  MeV і двох значень параметра  $\kappa = 0, 1$  і  $\kappa = 0, 2$ .

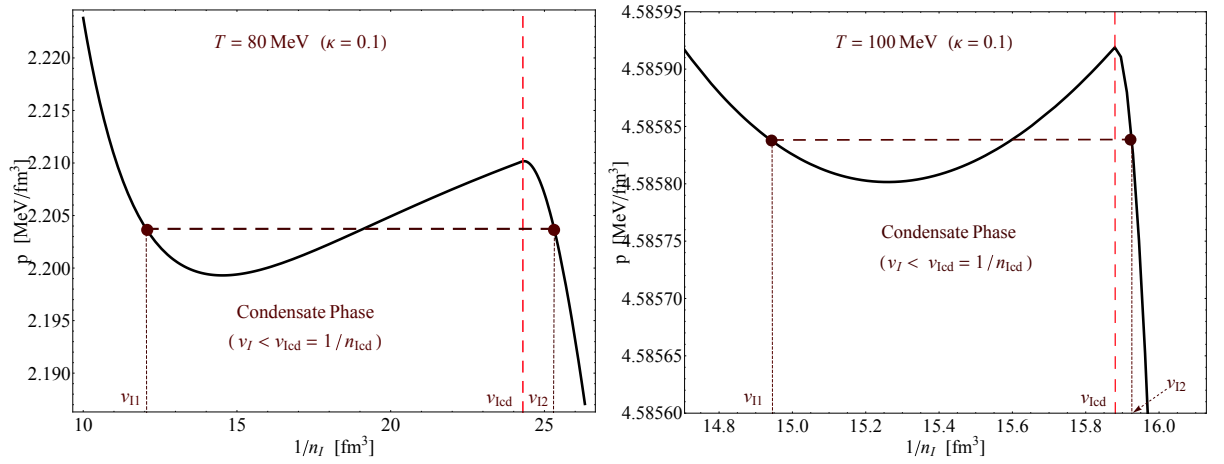


Рис. 3.15: Залежність тиску від оберненої ізоспінової густини  $1/n_I$  у взаємодічій  $\pi^+ \pi^-$  піонній системі в рамках моделі середнього поля при  $\kappa = 0, 1$ . Початок фазового переходу рідина-газ визначається за правилом Максвелла.

На графіках залежності тиску від оберненої ізоспінової густини  $1/n_I$  (Рис. 3.15-Рис. 3.16) горизонтальна пунктирна лінія відповідає тиску, розрахованому за правилом Максвелла. Зрозуміло, що зі збільшенням температури область аномальної поведінки тиску звужується, як і амплітуда коливань тиску відносно пунктирної лінії. Зліва від червоної пунктирної лінії знаходиться область значень оберненої ізоспінової густини, за яких в системі частинок та античастинок утворюється бозе-конденсат.

Залежності повного тиску в системі від величини ізоспінової  $n_I$  ілюструють Рис. 3.17 та Рис. 3.18. При малих значеннях ізоспінової густини

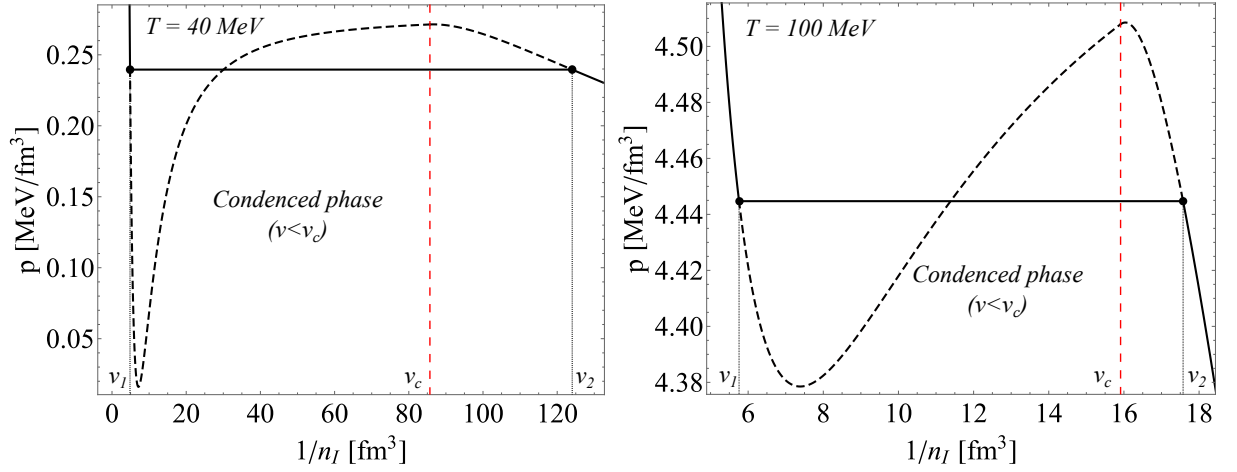


Рис. 3.16: Залежність тиску від оберненої ізоспінової густини  $1/n_I$  у взаємодіючій  $\pi^+$ - $\pi^-$  піонній системі в рамках моделі середнього поля для  $\kappa = 0, 2$ . Початок фазового переходу рідина-газ визначається за правилом Максвелла.

в системі, які знаходяться лівіше від чарвоної пунктирної лінії, бозе-конденсат відсутній. Справа від цієї лінії знаходиться область значень  $n_I$ , за яких в системі завжди є бозе-конденсат.

Методи розрахунку критичного значення ізоспінової густини  $n_I$  при заданому співвідношенні між притяганням та відштовхуванням в системі  $\kappa$  та заданій температурі  $T$ , за якого в системі починає утворюватись конденсат, детально розглянуто у наступній частині роботи.

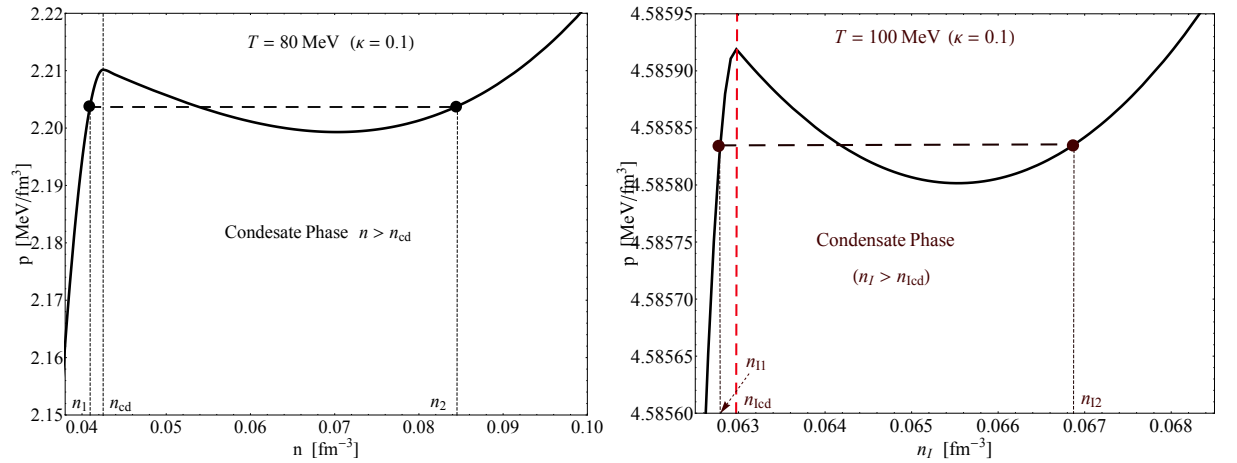


Рис. 3.17: Залежність тиску від ізоспінової густини  $n_I$  у взаємодіючій  $\pi^+$ - $\pi^-$  піонній системі в рамках моделі середнього поля при  $\kappa = 0, 1$ .



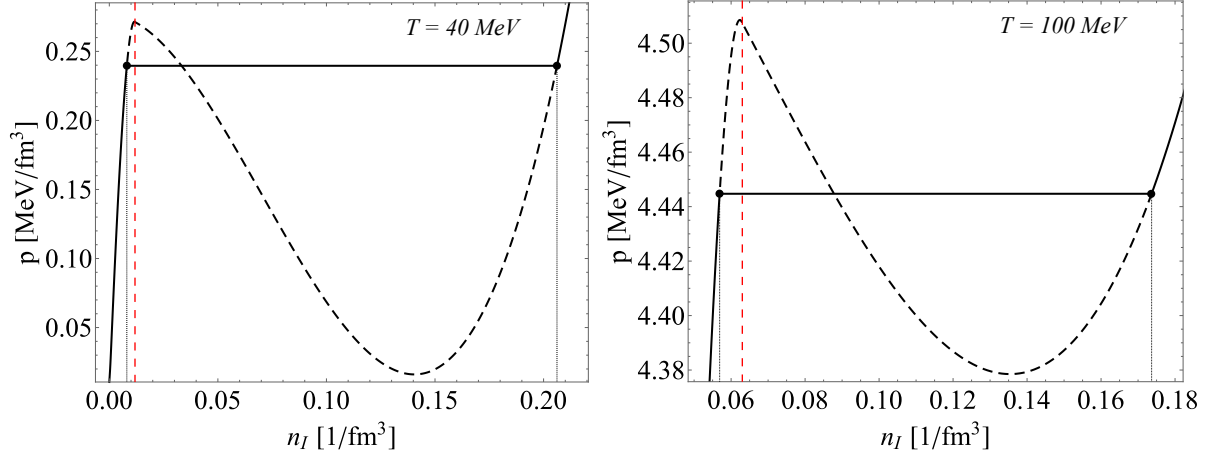


Рис. 3.18: Залежність тиску від ізоспінової густини  $n_I$  у взаємодіючій  $\pi^+\pi^-$  піонній системі в рамках моделі середнього поля при  $\kappa = 0, 2$ .

### 3.2.1 Фазовий перехід рідина-газ у фазі Бозе-конденсату, узагальнення правил Максвелла

Запишемо вираз для внутрішньої енергії зі співвідношення Ейлера та перший закон термодинаміки:

$$E = TS - pV + \mu_I N_I, \quad (3.130)$$

$$dE = TdS - pdV + \mu_I dN^{(-)} - \mu_I dN^{(+)} . \quad (3.131)$$

Якщо взяти диференціал у першому рівнянні, можна отримати

$$dE = TdS + SdT - Vdp - pdV + \mu_I dN_I + N_I d\mu_I, \quad (3.132)$$

$$dE = TdS - pdV + \mu_I dN_I. \quad (3.133)$$

Віднявши друге рівняння від першого, отримуємо

$$Vdp = SdT + N_I d\mu_I. \quad (3.134)$$

У випадку однорідної системи можна переписати рівняння (3.134) як

$$dp = sdT + n_I d\mu_I. \quad (3.135)$$

Коли ми розглядаємо ізотермічний процес  $T = \text{const}$ , це призводить до

$$dp = n_I d\mu_I. \quad (3.136)$$

Якщо розглянути всі вищезгадані термодинамічні рівності за наявності фази конденсату, то відповідно до рівняння (3.152) справедливі наступні співвідношення

$$\mu_I = m + U(n), \quad \rightarrow \quad d\mu_I = dU. \quad (3.137)$$

Отже, за наявності в системі бозе-айнштайнівського конденсату отримуємо наступну умову

$$dp = n_I dU. \quad (3.138)$$

Доведемо, що в рамках моделі середнього поля ця рівність виконується. Для цього скористаємося виразами зі статистичної механіки для кожної фізичної величини (тиск, середнє поле). Спочатку запишемо формулу для тиску:

$$p = \frac{1}{3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{\omega_k} \left[ f_{\text{BE}}(\omega_k, m_\pi) + f_{\text{BE}}(E(k, n), -\mu_I) \Big|_{\mu_I = U(n) + m} \right] + P(n), \quad (3.139)$$

тоді:

$$\begin{aligned} dp &= \frac{1}{3} d \left[ \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{\omega_k} f_{\text{BE}}(E(k, n), -\mu_I) \Big|_{\mu_I=U(n)+m} \right] + dP(n) \\ &= dp^{(+)} + dP(n), \end{aligned} \quad (3.140)$$

де введено позначення

$$p^{(+)} = \frac{1}{3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{\omega_k} f_{\text{BE}}(E(k, n), -\mu_I) \Big|_{\mu_I=U(n)+m}. \quad (3.141)$$

Загальна густина частинок і античастинок має вигляд

$$n = n_I + 2n^{(+)}(n_I). \quad (3.142)$$

Підставивши рівняння (3.140) і (3.142) в рівняння (3.138) можна отримати

$$dp^{(+)} + dP(n) = (n - 2n^{(+)}) dU. \quad (3.143)$$

Тепер використаємо рівняння (1.12):

$$n \frac{dU(n)}{dn} = \frac{dP(n)}{dn} \quad \rightarrow \quad n dU(n) = dP(n). \quad (3.144)$$

З урахуванням цієї рівності можна переписати рівняння (3.143) як

$$dp^{(+)} = -2n^{(+)} dU. \quad (3.145)$$

Цей результат був отриманий з використанням двох наступних умов: умова Хіббса-Гюгеля, що реалізується за наявності конденсату, див. рівняння (3.138) і умову термодинамічної узгодженості (1.12) в рамках теорії середнього поля. Далі, використовуючи підхід середнього поля, перевіримо рівняння (3.145).

Якщо температура стала, можна переписати вираз (3.145) наступним чином:

$$\frac{\partial p^{(+)}}{\partial n} dn = -2n^{(+)} \frac{\partial U}{\partial n} dn. \quad (3.146)$$

Відповідно до рівнянь (1.28) та (3.139) парціальний тиск  $p^{(+)}$  запишеться як

$$p^{(+)}(T, n) = -T \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \ln \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} + 2U(n) + m}{T} \right) \right] \quad (3.147)$$

Тоді похідна від парціального тиску  $p^{(+)}$  по змінній  $n$  запишеться як

$$\frac{dp^{(+)}(n)}{dn} = -2 \frac{dU(n)}{dn} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ \exp \left( \frac{\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} + 2U(n) + m}{T} \right) - 1 \right]^{-1} \quad (3.148)$$

І нарешті отримуємо

$$\frac{dp^{(+)}(n)}{dn} = -2n^{(+)} \frac{dU(n)}{dn}. \quad (3.149)$$

Так, для ізотерми  $T = \text{const}$  при

$$dn = \frac{\partial n(T, n_I)}{\partial n_I} dn_I,$$

з рівності похідних (3.149) випливає вираз (3.145). Дійсно, це доводить, що рівність (3.145) справедлива для станів системи з конденсатом.

Отже, в рамках моделі середнього поля, яка використовується в даному підході було показано, що рівність (3.138) справедлива, і може бути використана як узагальнені правила Максвелла.

### 3.3 Тиск у системі частинок та античастинок

У термодинамічній моделі середнього поля поведінка бозонної системи частинка-античастинка, коли обидва компоненти знаходяться в тепловій (кінетичній) фазі, визначається набором двох рівнянь

$$n = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [f_{\text{BE}}(E(k, n), \mu_I) + f_{\text{BE}}(E(k, n), -\mu_I)] , \quad (3.150)$$

$$n_I = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [f_{\text{BE}}(E(k, n), \mu_I) - f_{\text{BE}}(E(k, n), -\mu_I)] , \quad (3.151)$$

де функція розподілу Бозе-Айнштайна  $f_{\text{BE}}(E, \mu_I)$  була означена раніше співвідношенням (2.103),  $E(k, n) = \omega_k + U(n)$ ,  $P(T, n)$  – надлишковий тиск у системі. Ступінь виродження беремо  $g = 1$ . Хімічний потенціал  $\mu_I$  є термодинамічною величиною, що залежить від канонічних змінних температури  $T$  та густини ізотопічного заряду  $n_I$ , тобто  $\mu_I(T, n_I)$ .

У випадку, коли античастинки ( $\pi^+$ -мезони) перебувають у кінетичній фазі, а частина  $\pi^-$ -мезонів перейшла у конденсат, в рівняння (3.150), (3.151) необхідно додати густину  $n_{\text{cond}}^{(-)}$  конденсованих частинок. Умова переходу  $\pi^-$ -мезонів у конденсат має вигляд

$$U(n) - \mu_I = -m . \quad (3.152)$$

При зниженні температури від високих значень, коли  $\pi^-$  і  $\pi^+$  знаходяться в термічній фазі, густина  $\pi^-$ -компоненти  $n^{(-)}(T, n_I)$  спочатку досягає критичної кривої при температурі  $T_{\text{cd}}$ , де в точці перетину виконується умова (3.152), але густина конденсату в цій точці дорівнює нулю  $n_{\text{cond}} = 0$ . Це означає, що крива  $n_{\text{lim}}(T)$

$$n_{\text{lim}}(T) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f_{\text{BE}}(\omega_k, \mu_I) \Big|_{\mu_I=m} , \quad (3.153)$$

є критичною кривою для частинок ( $\pi^-$ -мезонів). Крім того, функція задана виразом (3.153) визначає максимальну густину теплових (кінетичних) бозе-частинок ідеального газу при температурах  $T \leq T_{\text{cd}}$ , оскільки хімічний потенціал має максимальне дозволене значення  $\mu_I = m$ . Звідси маємо, що розрахована в підході середнього поля критична крива системи частинок та античастинок співпадає з критичною кривою для ідеального газу.

Враховувавши наявність конденсату та вирази (3.152), (3.153) система рівнянь (3.150), (3.151) переписується у вигляді

$$n = n_{\text{cond}}^{(-)}(T) + n_{\text{lim}}(T) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f_{\text{BE}}(E(k, n), -\mu_I), \quad (3.154)$$

$$n_I = n_{\text{cond}}^{(-)}(T) + n_{\text{lim}}(T) - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f_{\text{BE}}(E(k, n), -\mu_I). \quad (3.155)$$

З рівнянь (3.154), (3.155) можна побачити, що густина частинок  $n^{(+)}$  визначається лише тепловими  $\pi^+$ -мезонами, тоді як в  $n^{(-)}$  входить густина  $\pi^-$ -мезонів, які перебувають в конденсованому стані (при  $\mathbf{k} = 0$ )  $n_{\text{cond}}^{(-)}(T)$  і теплових  $\pi^-$  мезонів при  $|\mathbf{k}| > 0$  із густиною числа частинок  $n_{\text{lim}}(T)$ . Отже, правило суми густини частинок для фази  $\pi^-$ -мезонів в інтервалі  $T < T_{\text{cd}}$  має вигляд

$$n^{(-)} = n_{\text{cond}}^{(-)}(T) + n_{\text{lim}}(T). \quad (3.156)$$

Слід повторно зазначити, що вираз “частинки знаходяться у фазі конденсату” є умовним, оскільки це фаза суміші, де при фіксованій температурі деяка частка частинок, тобто  $\pi^-$ -мезонів, належить до теплової фази з імпульсом  $|\mathbf{k}| > 0$ , а інша частка  $\pi^-$ -мезонів належить до бозе-айнштайнівського конденсату, де всі  $\pi^-$ -мезони мають нульовий імпульс  $\mathbf{k} = 0$ .

Для побудови фазових діаграм необхідно знати тиск в системі. Спочатку запишемо вираз для повного тиску, коли  $\pi^-$  та  $\pi^+$ -мезони

знаходяться в тепловій фазі

$$p = \frac{1}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{\omega_k} [f_{\text{BE}}(E(k, n), \mu_I) + f_{\text{BE}}(E(k, n), -\mu_I)] + P_{\text{ex}}(n), \quad (3.157)$$

де  $n(T, n_I)$  є розв'язком системи (3.150), (3.151).

У випадку, коли  $\pi^-$  знаходяться в конденсаті, а  $\pi^+$ -мезони в тепловій фазі, з урахуванням співвідношень (3.152) та (3.153), вираз для тиску в системі має вигляд

$$p = \frac{1}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{\omega_k} [f_{\text{BE}}(E(k, n), \mu_I) + f_{\text{BE}}(E(k, n), -\mu_I)]_{\mu_I=U(n)+m} + P_{\text{ex}}(n), \quad (3.158)$$

де  $\mu_I = U(n) + m$ , і при такому значенні хімічного потенціалу отримуємо  $E(k, n) - \mu_I = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} - m$ . Також беремо до уваги, що загальна густина частинок  $n$  складається з трьох компонент,  $n = n_{\text{cond}}^{(-)} + n_{\text{th}}^{(-)} + n^{(+)}$ . Оскільки у фазі конденсату  $n_{\text{th}}^{(-)} = n_{\text{lim}}$ , густину конденсату розраховуємо за допомогою виразу  $n_{\text{cond}}^{(-)} = n^{(-)} - n_{\text{lim}}$ . Тоді вираз для повного тиску в системі можна записати у вигляді

$$p = \frac{1}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{\omega_k} [f_{\text{BE}}(\omega_k, m) + f_{\text{BE}}(E(k, n), -\mu_I)] + P_{\text{ex}}(n), \quad (3.159)$$

де  $\mu_I = U(n) + m$ .

### 3.3.1 Термодинамічні величини

Далі ми задаємо фіксоване значення коефіцієнта відштовхування  $B$  середнього поля (1.34). Змінюватись буде коефіцієнт  $A$ , який визначає інтенсивність притягання середнього поля (1.34). Коефіцієнт  $B$  отримано з оцінки на основі віріального розкладу [36],  $B = 10mv_0^2$ , де  $v_0$  рівне

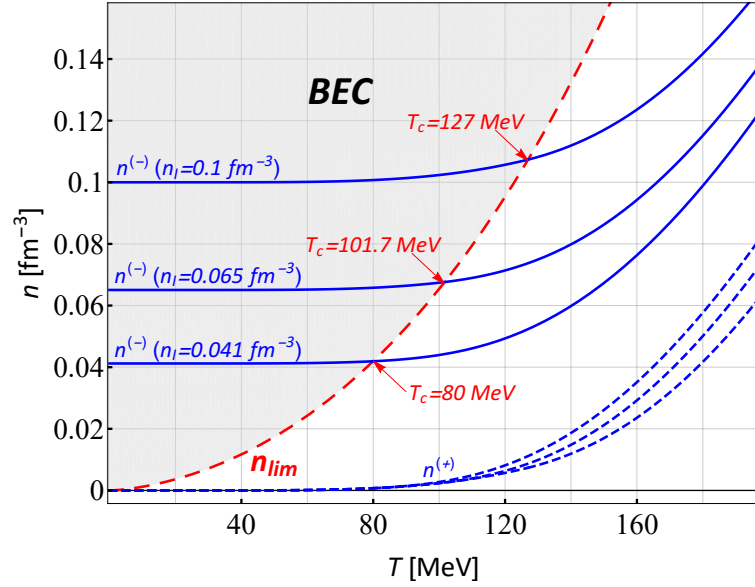


Рис. 3.19: Температурна залежність густини  $\pi^-$ -мезонів,  $n^{(-)}$  (сині суцільні лінії), і  $\pi^+$ -мезонів,  $n^{(+)}$  (блакитні пунктирні лінії), для взаємодіючого  $\pi^+-\pi^-$  піонного газу при  $\kappa = 0.1$  і  $n_I = 0.041, 0.065, 0.1 \text{ fm}^{-3}$ . Червона пунктирна лінія – це критична крива, яка фіксує густину частинок однокомпонентного ідеального газу при  $\mu = m_\pi$ . Затінена частина рисунку, позначена “BEC”, відповідає області, де частина  $\pi^-$ -мезонів утворюють конденсат Бозе-Айнштейна.

чотирикратному власному об’єму частинки, тобто  $v_0 = 16\pi r_0^3/3$ . Ми беремо  $v_0 = 0.45 \text{ fm}^3$ , що відповідає “радіусу частинки”  $r_0 \approx 0.3 \text{ fm}$ . Чисельні розрахунки будуть проведені для бозонів з масою  $m = 139 \text{ MeV}$ , які ми називаємо “піонами”. У цьому випадку коефіцієнт відштовхування становить  $B/m = 2.025 \text{ fm}^6$  і він залишається постійним у всіх розрахунках.

При високих температурах, тобто  $T \geq T_{\text{cd}}$ , обидві компоненти бозонної системи частинка-античастинка знаходяться в тепловій фазі, а термодинамічні властивості системи визначаються набором рівнянь (3.150) і (3.151). Розв’язуючи цю систему для заданих значень  $T$  і  $n_I$ , ми отримуємо залежності  $\mu_I(T, n_I)$  і  $n(T, n_I)$  від температури та ізоспінової густини, а потім інші термодинамічні величини, такі як тиск та модуль всебічного стиску.

Зі зниженням температури густина частинок  $n^{(-)}(T)$  перетинає критичну криву в точці, що відповідає значенню  $T = T_{\text{cd}}$ , див.



Рис. 3.19. Залежність густини  $\pi^-$ -мезонів від температури зображено синьою суцільною лінією, залежність густини  $\pi^+$ -мезонів — блакитною пунктирною лінією, а повна густина  $n = n_{\text{tot}}$  у вигляді чорної суцільної лінії.

При подальшому зниженні температури в інтервалі  $T < T_{\text{cd}}$   $\pi^-$ -мезони починають “опускатися” в стан конденсату, який характеризується значенням імпульсу  $\mathbf{k} = 0$ . (Ми застосовуємо наші міркування до піонного газу з  $n_I = n^{(-)} - n^{(+)} > 0$ .) В границі, коли  $T = 0$ , усі частинки високощільної складової, тобто  $\pi^-$ -мезони, будуть у фазі конденсату. У той же час густина компоненти низької густини або  $\pi^+$ -мезонів, які знаходяться в тепловій фазі, зменшується зі зниженням температури і дорівнює нулю при  $T = 0$ . Для температур менших за критичну, тобто  $T < T_{\text{cd}}$ , термодинамічні властивості системи визначаються рівняннями (3.154) та (3.155), де враховано, що  $\mu_I = -U(n) + m$  для всіх температур цього інтервалу, якщо компонент високої щільності  $n^{(-)}$  знаходиться в конденсованому стані.

Рівняння (3.155) можна використовувати для визначення критичної температури  $T_{\text{cd}}$ . Дійсно, візьмемо до уваги, що в точці перетину з критичною кривою густина конденсату поки дорівнює нулю,  $n_{\text{cond}}^{(-)}(T_{\text{cd}}) = 0$ , а густина теплових  $\pi^-$ -мезонів стає рівною  $n^{(-)}(T_{\text{cd}}) = n_{\text{lim}}(T_{\text{cd}})$ . Тоді при цій температурі  $T = T_{\text{cd}}$  у правій частині рівняння (3.155) ми маємо  $n = 2n_{\text{lim}}(T_{\text{cd}}) - n_I$ , зважаючи на що маємо вираз

$$n_{\text{lim}}(T) - n_I = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(E(k, n), -\mu_I) \Big|_{\mu_I = U(n) + m} \quad (3.160)$$

де  $E(k, n) = \omega_k + U(2n_{\text{lim}} - n_I)$ . Розв’язавши рівняння (3.160) при  $n_I = 0.1 \text{ fm}^{-3}$  для  $\kappa = 0.5$  та  $\kappa = 1.0$  отримуємо  $T_{\text{cd}} = 128.8 \text{ MeV}$  та  $T_{\text{cd}} = 251 \text{ MeV}$ , відповідно. Температура  $T_{\text{cd}}$  визначає фазовий перехід до БЕК

для всієї системи піонів. Античастинки ( $\pi^+$ -мезони) знаходяться повністю в тепловому стані в усьому діапазоні температур, а конденсат створюють лише частинки компоненти високої щільності  $n^{(-)}(T)$ . Тоді повна густина конденсату в двокомпонентній системі піонів при “слабкому” притяганні, тобто при  $\kappa \leq 1$ , твориться лише  $\pi^-$ -мезонами  $n_{\text{cond}} = n_{\text{cond}}^{(-)}$ , і ця густина числа частинок відіграє роль параметра порядку.

### 3.4 Густина частинок і середнє поле

Дослідимо фазову структуру система частинка-античастинка відносно канонічної змінної  $n_I$ . Як перший крок доцільно отримати залежності густин  $n^{(-)}$ ,  $n^{(+)}$  і середнього поля  $U$  відносно  $n_I$ , коли фіксуємо температуру  $T$ . Кожна ізотерма перетинає дві різні фази, тому для кожної конкретної фази ми повинні розв’язати відповідну окрему систему рівнянь:

1. коли обидві компоненти піонного газу знаходяться в теплових (кінетичних) станах, необхідно розв’язати рівняння (3.150), (3.151);
2. коли  $\pi^-$ -компонента газу містить внесок конденсату, рівняння (3.154), (3.155).

Для обраної ізотерми  $T$  точка  $n_I = n_{\text{Ic}}$  ділить вісь  $n_I$  на дві частини. Коли  $n_I \leq n_{\text{Ic}}$ ,  $\pi^-$ - і  $\pi^+$ -мезони знаходяться в тепловій фазі. У той час як для  $n_I > n_{\text{Ic}}$ ,  $\pi^-$ -мезони мають внесок конденсату, а  $\pi^+$ -мезони повністю знаходяться в тепловій фазі.

Залежність середнього поля від  $n_I$  для трьох значень температури,  $T = 40, 80, 100$  MeV, показано на Рис. 3.20 на лівій панелі. Видно, що різниця у кривих, пов’язаних з різними температурами, дуже слабка після мінімуму функції  $U(n(T, n_I))$ . У точці  $n_I = n_{\text{I0}}$ , де  $U(n_{\text{I0}}) = 0$ , середнє

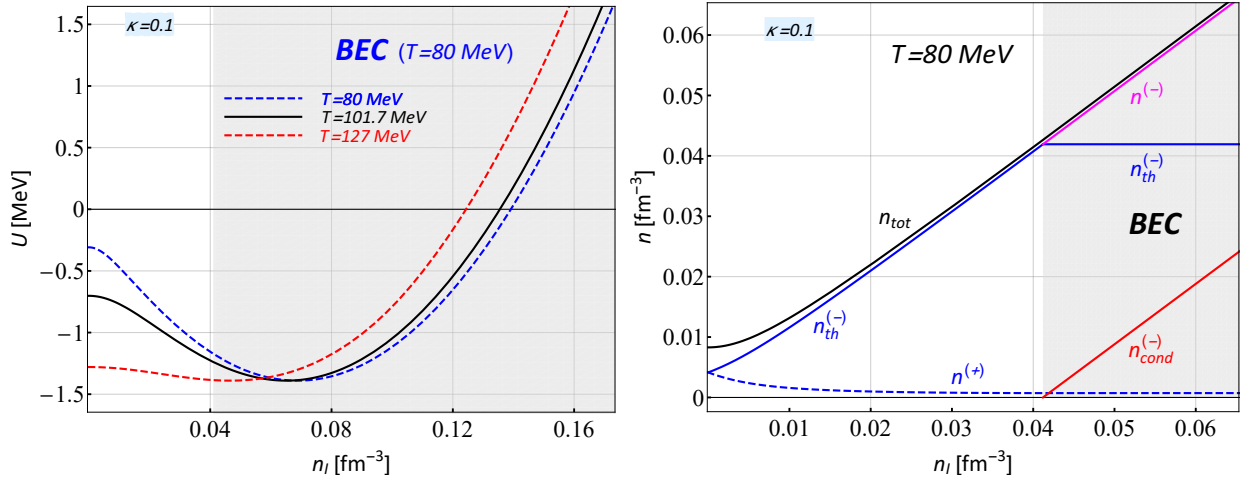


Рис. 3.20: На обох панелях затінена область, позначена як “BEC”, представляє стани з наявністю конденсату взаємодіючого  $\pi^+\pi^-$  піонного газу в моделі середнього поля. *Ліва панель:* Залежність середнього поля  $U(n)$  від ізоспінової густини  $n_I$  при  $\kappa = 0.1$  та  $T = 80, 101.7, 127$  MeV. *Права панель:* Залежності густини кількості частинок  $n^{(+)}$ ,  $n^{(-)}$  та  $n_{tot} = n^{(+)} + n^{(-)}$  від ізоспінової густини  $n_I$  при  $T = 80$  MeV та  $\kappa = 0.1$ . Тут  $n_{th}^{(-)}$  та  $n_{cond}^{(-)}$  - густина кількості  $\pi^-$ -мезонів у теплової фазі та в конденсаті.

поле змінює знак і стає повністю відштовхуючим, при  $\kappa = 0.1$  ми отримали  $n_{I0} \approx 0,14$  fm $^{-3}$ .

Результати розрахунку густини кількості частинок  $n^{(-)}$ ,  $n^{(+)}$  і  $n \equiv n_{tot} = n^{(-)} + n^{(+)}$  як функції ізоспінової густини  $n_I$  за температури  $T = 101,7$  MeV,  $\kappa = 0,1$  зображені на правій панелі Рис. 3.20. Видно, що густина  $\pi^+$ -мезонів зменшується зі збільшенням  $n_I$ , а потім стає приблизно постійною. Насправді, ця поведінка цілком зрозуміла. Дійсно, відповідно до системи рівнянь (3.150) і (3.151) або системи (3.154) і (3.155) (безвідносно яку пару рівнянь ми візьмемо)  $n^{(+)} = (n - n_I)/2$ . Але, як ми бачимо, зростання загальної густини частинок  $n$  на початку значно менша ніж  $n_I$ , тому зі збільшенням  $n_I$  густина частинок  $\pi^+$ -мезонів спочатку зменшується, а потім стає приблизно постійною.

### 3.5 Фазові діаграми мультикомпонентної бозонної системи

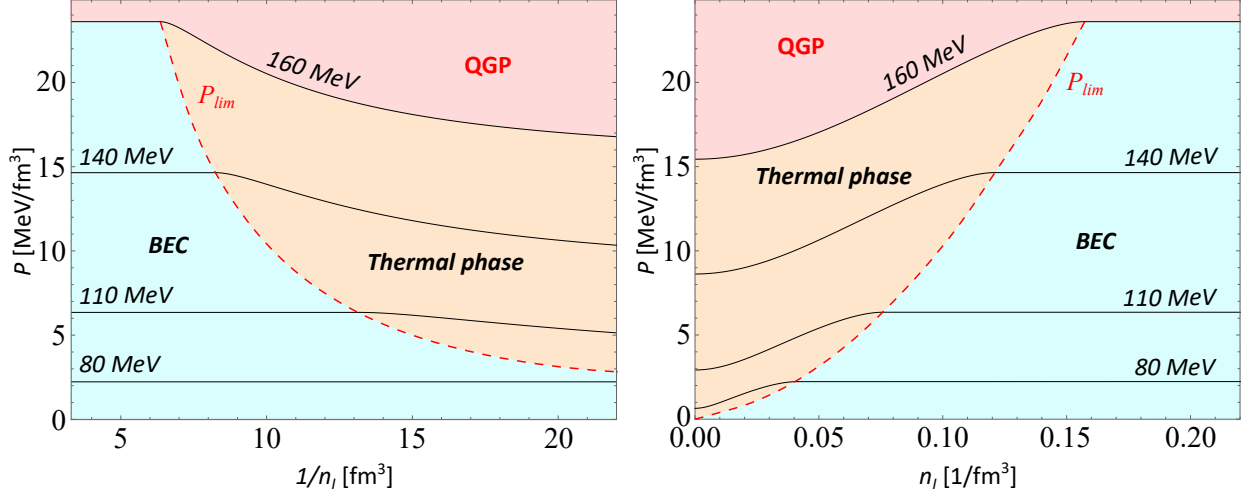


Рис. 3.21: Фазові діаграми в ідеальному газі  $\pi^- - \pi^+$ . Залежність тиску від оберненої густини ізоспіну  $v = 1/n_I$  (ліва панель) і від густини ізоспіну  $n_I$  (права панель). Ізотерма  $T = 160$  MeV є межею фази кварк-глюонної фази (QGP). Червона пунктирна крива  $p_{lim}$  вказує на тиск ідеального газу при  $\mu_I = m$  і відокремлює чисто термічну фазу від фази з наявністю БЕК.

Для аналізу фазової структури системи частинка-античастинка будемо шукати залежність тиску  $p(T, n_I)$  від ізоспінової густини  $n_I$  при фіксованій температурі  $T$ , тобто досліджуємо поведінку тиску на ізотермі.

На початку, як перший крок, ми перевіряємо ідеальний газ мезонів  $\pi^- - \pi^+$  як точку відліку. Фазова структура системи в цьому випадку зображена на Рис. 3.21 для залежностей  $p = p(v_I)$  і  $p = p(n_I)$ , де  $v_I = 1/n_I$ . На цьому малюнку ізотерма  $T_{qgp} = 160$  MeV розділяє стани кварк-глюонної плазми (QGP), а затінена синім ділянка, позначена “BEC”, представляє стани Бозе-Айнштайнівського конденсату. Ми бачимо, що жодного фазового переходу рідина-газ тут немає, а тиск ідеального газу природним чином зростає зі збільшенням  $n_I$  у тепловій фазі, але стає постійним у конденсованій фазі. Цей ефект виникає тому, що в багаточастинковій системі без взаємодії тиск існує лише за рахунок кінетичного руху теплових частинок з ненульовим імпульсом  $\mathbf{k} \neq 0$ . Коли ми збільшуємо густину частинок від нуля та йдемо

уздовж певної ізотерми  $T$ , ми приходимо до точки  $n_{cd}$  на критичній кривій. Так ми досягаємо максимальної щільності теплових частинок. Подальше збільшення щільності частинок відбувається лише за рахунок збільшення щільності частинок конденсату, які характеризуються постійною щільністю кожної компоненти при фіксованій температурі. Так зі збільшенням  $n_I$  загальна густина частинок у системі зростає лише за рахунок збільшення густини конденсованих частинок із  $\mathbf{k} = 0$ , що не змінює тиск. (Значення  $T_{cd}$  і  $n_{cd}$  відповідають одній точці на критичній кривій  $n_{lim}(T)$ ). Позначення  $T_c$  зарезервовано для критичної ізотерми в описі фазового переходу рідина-газ.)

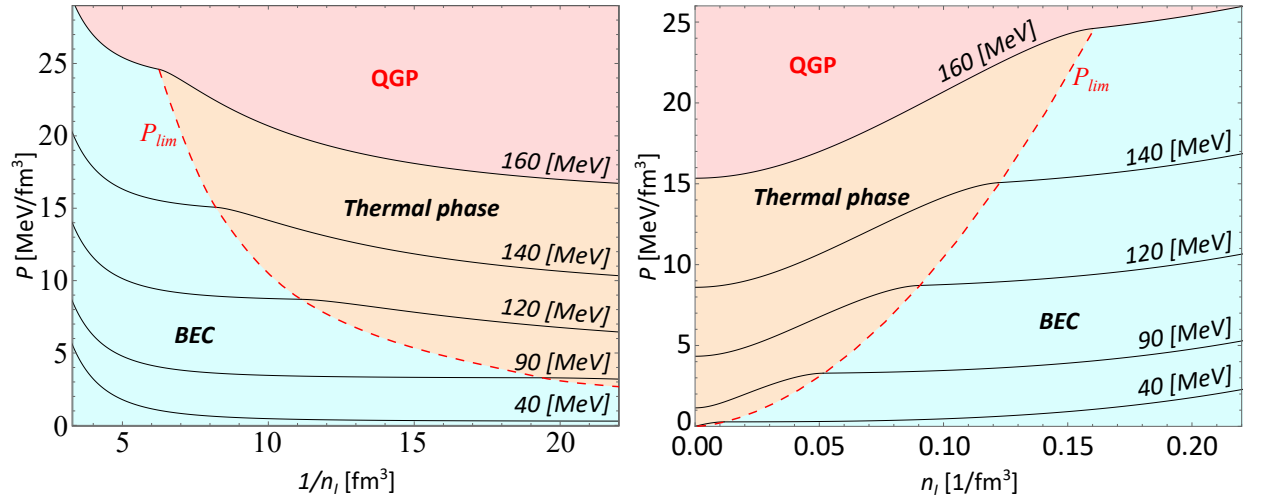


Рис. 3.22: Фазові діаграми системи  $\pi^- - \pi^+$  лише з відштовхуванням між частинками, тобто при  $\kappa = 0$  (ті самі позначення, що й на попередньому Рис. 3.21).

На наступному кроці розглядалася система лише з відштовхуванням між частинками, тобто  $\kappa = 0$ . Фазова структура системи в цьому випадку зображена на рис. 3.22 для залежностей  $p = p(v_I)$  та  $p = p(n_I)$ , де  $v_I = 1/n_I$ . На кожній панелі ми бачимо три різні фази: (1) “Теплова фаза” - як частинки, так і античастинки знаходяться в теплових станах; (2) “BEC” - підсистема частинок має внесок бозе-айнштайнівського конденсату та підсистема античастинки,  $\pi^+$ -мезони, знаходиться в тепловій фазі; (3) “QGP” - фаза, де виникає кварк-глюонна плазма. Ця фаза розділена

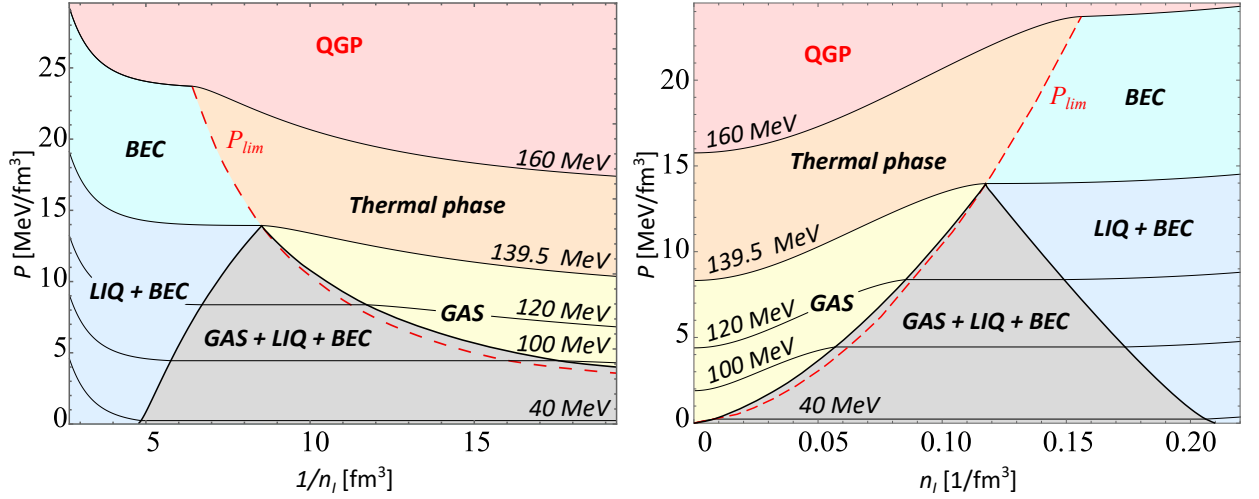


Рис. 3.23: Фазові діаграми: залежність тиску від оберненої густини ізоспіну  $v = 1/n_I$  (ліва панель) та від густини ізоспіну  $n_I$  (права панель) у взаємодіючій системі  $\pi^- - \pi^+$  при  $\kappa = 0.2$ . Ізотерма  $T_{\text{qgp}} = 160$  MeV розділяє фазу QGP. Червона пунктирна крива  $p_{\text{lim}}$  вказує на тиск ідеального газу при  $\mu = m$  і відокремлює теплову фазу від фази BEC. Сірий пунктирний “трикутник” представляє змішану фазу газу та рідини, яка майже знаходиться в  $\pi^-$ -мезонному конденсаті.

ізотермою  $T = T_{\text{qgp}} = 160$  MeV (ми припускаємо плавлення всіх піонних станів при температурах  $T > T_{\text{qgp}}$ ).

Лінія  $p_{\text{lim}}$  — тиск  $\pi^-$  мезонів на критичній кривій  $n_{\text{lim}}$ . Як наочно видно в області “конденсату” поведінка ізотерм, які перетинають криву  $p_{\text{lim}}$ , відрізняється від ізотерм в ідеальному газі: тиск зростає зі збільшенням густини ізоспіну. Цей ефект зумовлений наявністю позитивного надлишкового тиску  $P_{\text{ex}}(n)$  як додаткового внеску поряд із кінетичним тиском у системі.

Якщо між частинками існує притягання, то ізотерми для температур з інтервалу  $T < T_c$  показують “синусоїдальну” поведінку в кінцевому інтервалі  $n_I$ . Відповідно до стандартного термодинамічного підходу, цю специфічну поведінку ізотерми можна розглядати як фазовий перехід рідина-газ. Щоб розв’язати проблему, ми застосовуємо узагальнені правила Максвелла, які, на відміну від підручника, стосуються ізоспінової (зарядової) густини, а не повної густини частинок. Як впливає з узагальнених правил Максвелла, тиск, пов’язаний із ізотермами, які

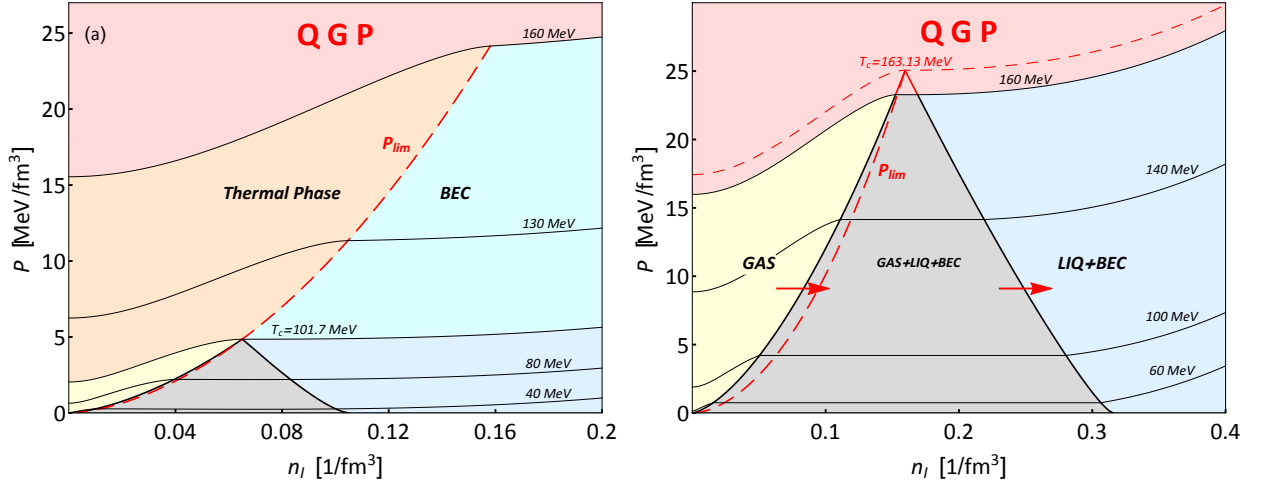


Рис. 3.24: Фазові діаграми: залежність тиску від ізоспінової густини у взаємодіючій системі  $\pi^-$ - $\pi^+$  при  $\kappa = 0.1$ . Нижче критичної ізотерми  $T_c$  відбувається фазовий перехід рідина-газ ( $T_c = 101.7$  MeV). Ізотерма  $T = 160$  MeV є межею фази КГП. Червона пунктирна крива  $p_{lim}$  відділяє теплову фазу від фази BEC. На правій панелі при  $\kappa = 0.3$  віртуальна критична ізотерма  $T_c = 163$  MeV лежить у фазі QGP, яка обмежена ізотермою  $T_c = 160$  MeV.

перетинають змішану рідинно-газову фазу, має постійне значення, як і хімічний потенціал. В результаті отримуємо бінодаль, яка визначає область фазового переходу рідина-газ подібно до того, як це було зроблено в роботах [49, 50]. Отримана фазова діаграма показана на рис. 3.23 як дві панелі, які відрізняються одна від одної лише масштабом. Змішана рідинно-газова фаза (заштрихована сіра зона) з'являється майже повністю у фазі конденсату (позначена GAS+RIQ+BEC на правій панелі). Нагадаємо, що густина конденсату в двокомпонентній системі піонів створюється лише  $\pi^-$  мезонами, тобто  $n_{cond} = n_{cond}^{(-)}$ . Це означає, що певна частина  $\pi^-$  мезонів складається з частинок з  $\mathbf{k} = 0$ . При цьому теплові  $\pi^-$ -мезони разом із  $\pi^+$ -мезонами створюють суміш газу та рідини.

### 3.5.1 Особливості фазового переходу рідина-газ в багатоконпонентній системі бозонів

Якщо при розгляді фазового переходу рідина-газ враховувати квантову статистику, то через появу конденсату ситуація стає іншою, ніж у випадку статистики Больцмана. Виявляється, наявність конденсату сильно впливає на положення локального максимуму тиску. Дійсно, цей максимум зараз локалізований на кривій  $p_{\text{lim}}(n_I)$ , яка представляє тиск у системі, який визначається станами, що належать критичній кривій  $n_{\text{lim}}(T)$  підсистеми  $\pi^-$ -мезонів. Нагадуємо, що тільки ця підсистема мезонів розвиває бозе-конденсат у разі слабкого притягання з  $n^{(-)}|_{\text{crit.curve}} = n_{\text{lim}}(T)$ . Стани  $(T, n_{\text{lim}}(T))$  визначають загальну густину частинок  $n = 2n_{\text{lim}}(T) - n_I$  при температурі  $T$ . Таким чином, загальний тиск у цих станах стає

$$p_{\text{lim}}(n_I) = p_{\text{kin}}(T, n_I) + P_{\text{ex}}(n), \quad (3.161)$$

де кінетичний тиск у станах  $(T, n_{\text{lim}}(T))$  має вигляд

$$p_{\text{kin}} = \frac{1}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{\omega_k} [f_{\text{BE}}(\omega_k, m) + f_{\text{BE}}(E(k, n), -\mu_I)] \quad (3.162)$$

з  $E(k, n) = \omega_k + U(n)$  і  $\mu_I = U(n) + m$ . Крива  $p_{\text{lim}}(n_I)$  відокремлює тиск, який відповідає станам конденсату (заштрихована область, позначена як ВЕС), від тиску, який відповідає тепловим станам бозонної системи, див. Рис. 3.22-3.24.

Далі ми збираємося довести дві особливості, властиві поведінці тиску у фазі конденсату. Перша особливість: кінетичний тиск уздовж кожної ізотерми у фазі конденсату приблизно постійний

$$p_{\text{kin}}(T, n_I)|_{T=\text{const}} \approx \text{const}. \quad (3.163)$$



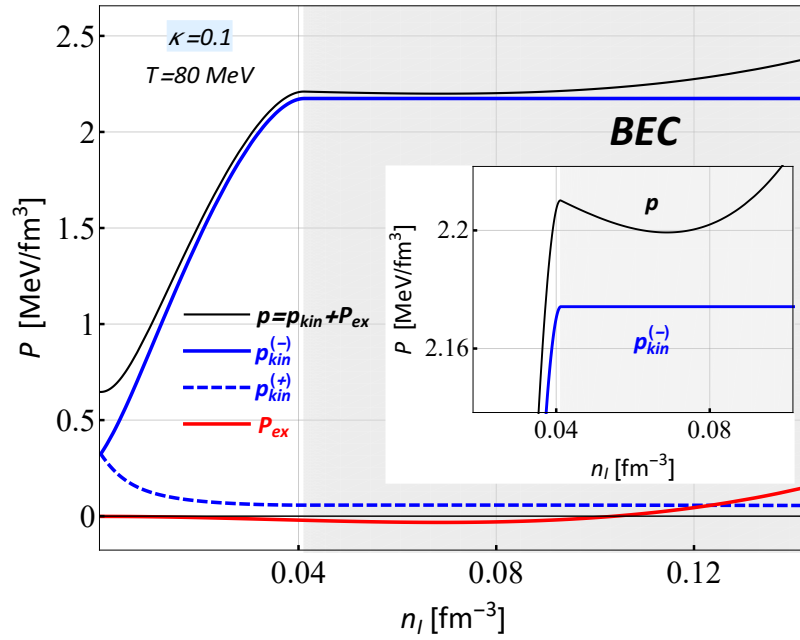


Рис. 3.25: Залежність тиску від густини ізоспіну у взаємодіючій системі  $\pi^-$ - $\pi^+$  мезонів при  $T = 80$  MeV і  $\kappa = 0.1$ . У маленькому вікні показано локальний максимум на краю області конденсату та локальний мінімум, який зумовлений сегментами метастабільного та нефізичного тиску. Затінена область вказує на стани Бозе-Айнштейнового конденсату (БЕК).

а) Це буде точна рівність за відсутності взаємодії між частинками, коли рівняння  $p = p_{\text{kin}} + P_{\text{ex}}$  зводиться до  $p = p_{\text{kin}}(T, n_I)$ . Тиск двокомпонентного ідеального газу зображено на рис. 3.21. Ми бачимо постійний тиск у фазі конденсату (заштрихована синя область). Ефект, який вказано в рів. (3.163), тобто  $p_{\text{kin}}(T, n_I) = \text{const}$   $T = \text{const}$ , виникає через те, що зростання величини  $n_I$  у фазі конденсату може відбуватися лише за рахунок збільшення конденсованих частинок, тоді як щільність теплових частинок залишається постійною вздовж ізотерми (в області конденсату). Але збільшення кількості частинок у системі з нульовим імпульсом  $\mathbf{k} = 0$  не робить внеску в кінетичний тиск. Тут ми обговорювали тиск  $\pi^-$ -мезонів, які утворюють конденсатні стани при  $T < T_c$ . Парціальний тиск  $\pi^+$  мезонів на тій самій ізотермі  $T$  розраховується для  $\mu = m$  і створюється лише тепловими частинками, густина яких також постійна у фазі конденсату. Цим ми доводимо строгу справедливість рів. (3.163) в ідеальній мезонній

системі  $\pi^- - \pi^+$ .

б) У системі з взаємодією наближено справедлива рівність (3.163). Кінетичний парціальний тиск  $\pi^+$  мезонів, які знаходяться в тепловій фазі, пригнічується, оскільки функція розподілу має вигляд  $f_{\text{BE}} = 1/\{\exp[\omega_k + 2U(n) + m] - 1\}$  а внесок  $\pi^+$  мезонів у кінетичний тиск не більше 2 %. Отже, ми можемо прийняти, що у фазі конденсату кінетичний тиск у  $\pi^- - \pi^+$  мезонній системі постійний з хорошою точністю, а тому рів. (3.163) теж з хорошою точністю наближено справедливе.

Друга особливість: у взаємодіючій системі твердження рівняння (3.163) все ще є дійсним. Надлишковий тиск  $P_{\text{ex}}$ , див. рів. (2.106), що є другим внеском у загальний тиск у системі, є негативним, як це видно на рис. 3.17 ( $U(n)$  і  $P_{\text{ex}}$  мають однаковий знак). Завдяки цьому зі збільшенням  $n_I$  тиск на кожній ізотермі  $T < T_c$  починає знижуватися у фазі конденсату після перетину лінії  $p_{\text{lim}}(n_I)$ . Це зниження тиску відбувається до точки деякого локального мінімуму. На цьому рисунку представлено результати розрахунку кінетичного тиску  $p_{\text{kin}}^{(-)}$  мезонів  $\pi^{(-)}$ ,  $p_{\text{kin}}^{(+)}$  мезонів  $\pi^{(+)}$  і надлишковий тиск  $P_{\text{ex}}$ .

Фазовий перехід рідина-газ відбувається, коли тиск у системі має спочатку локальний максимум, а потім локальний мінімум, коли густина ізоспіну  $n_I$  зростає. Розглянемо структуру тиску в області конденсату. Для похідної повного тиску після деякої алгебри ми отримуємо

$$\frac{\partial p(T, n_I)}{\partial n_I} = \left(1 - \frac{2n^{(+)}}{n}\right) \frac{\partial P_{\text{ex}}(n)}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial n_I} = 0. \quad (3.164)$$

Тут ми використовуємо що

$$\partial p_{\text{kin}}^{(-)}(T, n_I)/\partial n_I = 0.$$

Для додатного значення дужки  $(1 - 2n^{(+)} / n) > 0$ , де  $n = 2n^{(+)} + n_I$ , тож вираз (3.164) дає наступне

$$\frac{\partial P_{\text{ex}}(n)}{\partial n} = 0 \quad \rightarrow \quad n(-A + 2Bn) = 0, \quad (3.165)$$

де для другого рівняння ми використовуємо явну форму  $P_{\text{ex}}$ , наведену раніше в (1.50). Отже, мінімум тиску знаходиться в точці

$$n^{(\min)} = \frac{A}{2B} = \kappa \sqrt{\frac{m}{B}}, \quad (3.166)$$

де  $A = 2\kappa\sqrt{mB}$ . Дійсно, це мінімум, оскільки знак другої похідної в цій точці додатний,  $\frac{\partial^2 P_{\text{ex}}(n)}{\partial n^2} = A > 0$ . Для температури  $T = T_c$ , тобто на критичній ізотермі, ця повна густина частинок, отримана з рівняння. (3.166), або точка  $(T_c, n^{(\min)})$ , визначає критичну точку. Можна виконати перетворення:

$$(T_c, n^{(\min)}) \rightarrow (T_c, n_I^{(\min)}) ,$$

і таким чином буде визначена критична точка в  $(T, n_I)$ -площині.

Критичну температуру можна знайти як розв'язок рівняння, коли  $p_{\text{max}}$  збігається з  $p_{\text{min}}$

$$p_{\text{max}}(T_c) = p_{\text{min}}(T_c) . \quad (3.167)$$

Однак у разі присутності конденсату неможливо визначити максимальний тиск за допомогою рівнянь  $\left[ \frac{\partial p(T, n)}{\partial n} \right]_T = 0$  та  $\left[ \frac{\partial^2 p(T, n)}{\partial n^2} \right]_T = 0$ , оскільки ізотерма не є гладкою функцією на краю конденсату. Дотримуючись процедури наведеної у підручнику з математичного аналізу, щоб знайти максимум і мінімум гладкої функції в області з границями, потрібно порівняти значення тиску, задані розв'язками рівняння (3.164) із

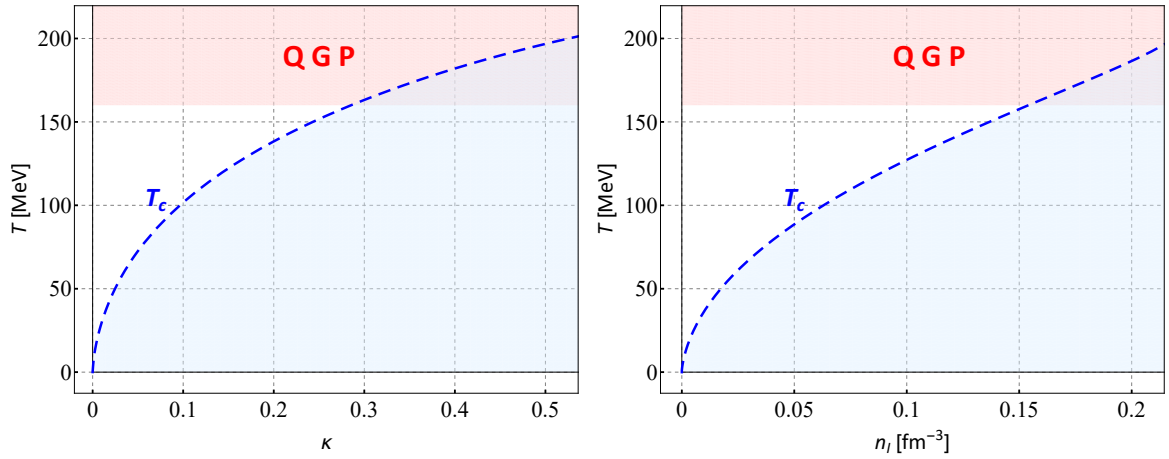


Рис. 3.26: *Ліва панель:* Залежність критична температура  $T_c$  фазового переходу рідина-газ від параметра притягання  $\kappa$ . *Права панель:* Критична температура  $T_c$  фазового переходу рідина-газ від ізоспінової критичної густини  $n_{lc}$ .

значеннями тиску на краях області. Як ми стверджували вище, рівняння (3.164) визначає лише локальний мінімум тиску, тоді як локальний максимум знаходиться на краю області конденсату, яка знаходиться ліворуч від локального мінімуму, дивіться рис. 3.20, ліва панель. На графіках фазових діаграм, див. рис. 3.24, межа між термічною фазою та фазою конденсату позначена як тиск  $p_{\text{lim}}(n_I)$ , що відповідає станам  $(T, n_{\text{lim}}(T))$  на критичній кривій  $n_{\text{lim}}(T)$  (дивіться червону пунктирну лінію на рис. 1.1, 2.9, 2.13). Отже, локальний максимум кожної ізотерми  $T \leq T_c$  належить кривій  $p_{\text{lim}}(n_I)$ .

Зараз ми обговоримо алгоритм розрахунку критичної температури  $T_c$ . Повна густина частинок у бозонній системі, яка складається з частинок і античастинок має вигляд

$$n(T) = n^{(-)}(T) + n^{(+)}(T). \quad (3.168)$$

Для станів на критичній кривій, де конденсат зникає, для будь-якої температури маємо  $n^{(-)}(T) = n_{\text{lim}}(T)$ . Оскільки густина  $\pi^{(-)}$  мезонів при критичній температурі  $T_c$  також належить до критичної кривої, де

конденсат зникає, ми отримуємо у цій точці

$$n^{(-)}(T_c) = n_{\text{lim}}(T_c) .$$

Отже, при критичній температурі можна переписати рівняння (3.168) як

$$n(T_c) = n_{\text{lim}}(T_c) + n_{\text{th}}^{(+)}(T_c) , \quad (3.169)$$

де  $n_{\text{th}}^{(+)}$  – густина теплових  $\pi^+$  мезонів. Нагадаємо, що у фазі конденсату

$$n_{\text{lim}}(T) + n_{\text{cond}}(T) = n^{(-)}(T) = n_I + n_{\text{th}}^{(+)}(T) ,$$

але в точці  $T = T_c$  густина конденсату дорівнює нулю. Як ми стверджували, густина  $n(T_c)$ , визначена у рів. (3.169), відповідає локальному максимуму тиску ізотерми. З подальшим збільшенням  $n_I$  ми переходимо до фази конденсату, де тиск зменшується, оскільки  $p_{\text{kin}} = \text{const}$  і  $P_{\text{ex}} < 0$ . При фазовому переході рідина-газ критична ізотерма перетинає точку, де локальний максимум збігається з локальним мінімумом тиску, тобто температура ізотерми дорівнює критичній температурі  $T_c$ . Таким чином, якщо замість  $n(T_c)$  у рівнянні (3.169) поставити густину  $n^{(\text{min})}$  з рів. (3.166), ми приходимо до рівняння, яке визначає  $T_c$ :

$$n_{\text{lim}}(T_c) + n_{\text{th}}^{(+)}(T_c) = n^{(\text{min})} \quad (3.170)$$

де ми використовували для станів на критичній кривій:

$$n_{\text{lim}}(T) = n^{(-)}(T) = n_I + n_{\text{th}}^{(+)}(T) ,$$

коли  $n_{\text{cond}}(T) = 0$ . Або в більш детально

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp[(\omega_k - m)/T_c] - 1} + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp\left\{[\omega_k + 2U(n^{(\min)}) + m]/T_c\right\} - 1} = n^{(\min)}, \quad (3.171)$$

де  $n^{(\min)} = A/2B = \kappa\sqrt{m/B}$ , і ми використовуємо визначення  $n_{\text{lim}}$ , наведене в рів. (3.153). Розв'язок цього рівняння визначає криву  $T_c(\kappa)$ , яка зображена на рис. 3.26 на правій панелі суцільною лінією. Якщо врахувати, що другий інтеграл у правій частині рів. (3.171), який представляє  $n_{\text{th}}^{(+)}$ , є малим у порівнянні з першим членом і тому ми можемо знехтувати ним, тоді можна отримати наближене рішення. Ця приблизна залежність зображена на тій же панелі чорним пунктиром. Бачимо, що в інтервалі параметра притягання  $0 \leq \kappa \leq 1,5$  впливом  $\pi^+$  мезонів на критичну температуру можна знехтувати.

### 3.5.2 Об'ємний модуль стискання

Об'ємний модуль  $K$  речовини характеризує, як змінюється тиск під час стиснення при постійній температурі або він визначає міру того, наскільки ця речовина стійка до стиснення. Тобто, модуль можна означити як відношення нескінченно малого збільшення тиску до відносного зменшення об'єму системи, і в канонічному ансамблі це має вигляд

$$K \equiv -V \left[ \frac{\partial p(T, N_I, V)}{\partial V} \right]_T. \quad (3.172)$$

Оскільки об'єм обернено пропорційний загальній густині числа частинок  $n$ , можна переписати вираз (3.172) у термінах повної густини числа частинок

$$K = n \left[ \frac{\partial p(T, n_I)}{\partial n} \right]_T = n(T, n_I) \frac{\left[ \frac{\partial p(T, n_I)}{\partial n_I} \right]_T}{\left[ \frac{\partial n(T, n_I)}{\partial n_I} \right]_T}. \quad (3.173)$$

У той же час, ми можемо означити модуль стиснення відносно ізоспінової або зарядової густини, яка зберігається,

$$K_I = n_I \left[ \frac{\partial p(T, n_I)}{\partial n_I} \right]_T. \quad (3.174)$$

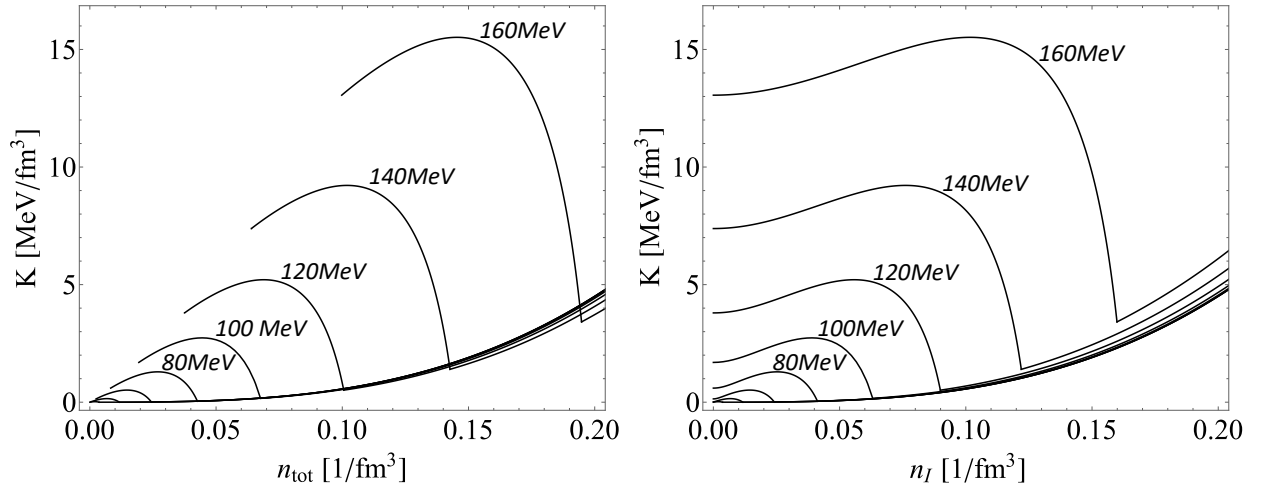


Рис. 3.27: Піонний газ із відштовхуванням між частинками,  $\kappa = 0$  (без притягання).  
*Ліва панель:* Залежність об'ємного модуля від повної густини частинок  $n_{\text{tot}} = n$ , див. першу частину рівняння (3.173).  
*Права панель:* Залежність об'ємного модуля від ізоспінової густини  $n_I$ , див. другу частину рів. (3.173).

Якщо загальна густина частинок залежить від просторових змінних, то об'ємний модуль також залежить від просторових змінних і, таким чином, відображає просторові властивості багаточастинкової системи. Результати розрахунку модуля об'ємної пружності згідно зі співвідношенням (3.173) при  $\kappa = 0$  для різних температур зображено на Рис. 3.27. Як видно, коли  $\kappa = 0$  об'ємний модуль відчуває розрив у точці переходу ВЕС. Коли

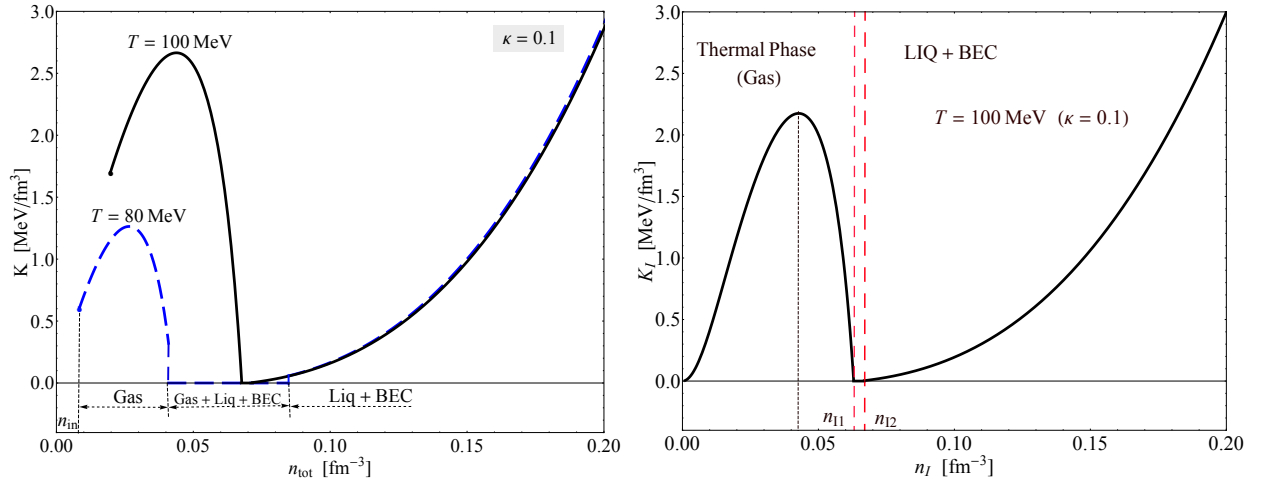


Рис. 3.28: Піонний газ із відштовхуванням і притяганням між частинками,  $\kappa = 0, 1$ .  
*Ліва панель:* Залежність об'ємного модуля від загальної густини числа частинок при  $T = 80, 100$  MeV,  $\kappa = 0, 1$  (див. рів. (3.173)).  
*Права панель:* Залежність об'ємного модуля від ізоспінової густини при  $T = 100$  MeV,  $\kappa = 0, 1$  (див. рівняння (3.174)). Фаза Рідина+Газ+БЕК знаходиться між червоними пунктирними вертикальними лініями, де тиск постійний, тому  $K = 0$ .

ми “вмикаємо” притягання в системі, об'ємний модуль дорівнює нулю в області, де відбувається фазовий перехід рідина-газ, тобто для ізотерм  $T < T_c$ . Цей ефект зображено на двох панелях Рис. 3.28. Айнштайна

### 3.6 Проміжні висновки

У цій главі представлено термодинамічно узгоджений метод опису щільної бозонної системи взаємодіючих  $\pi^-$ -мезонів та  $\pi^+$ -мезонів.

Розглянуто систему мезонних частинок з  $m = m_\pi$  і нульовим спіном, бо заряджені  $\pi$ -мезони є найлегшими ядерними частинками і найлегшими адронами, що мають стосунок до ізоспінового числа.

Опис термодинамічних властивостей системи виконано в рамках канонічного ансамблю, де хімічний потенціал  $\mu$  є термодинамічною величиною, що залежить від канонічних змінних  $(T, n_I)$ . Для отримання фазових діаграм розраховано залежність тиску від ізоспінової густини для різних значень  $T$ .



Показано, що залежності  $n^{(-)}(n_I)$  і  $n_{tot}(n_I)$  від  $n_I$  майже лінійні і близькі одна до другої при  $n_I > n_{Ic}$  оскільки для кожного фіксованого  $T$  значення густини теплових частинок  $n_{th}^{(-)}$  не змінюється [48] і значення  $n^{(+)}$  є приблизно сталим (див. рис. 3.20). Оскільки лише  $\pi^-$  мезони зазнають фазового переходу до конденсату Бозе-Айнштайна, зростання густин  $n^{(-)}$  і  $n_{tot}$  для  $n_I > n_{Ic}$  зумовлене зростанням густини конденсату.

Фазові діаграми представлено на рис. 3.21, 3.22, 3.23 та 3.24. Масштабний параметр моделі  $\kappa = A/(2\sqrt{mB})$ , який сам по собі є комбінацією параметрів середнього поля  $A$  і  $B$  ( $U(n) = -An + Bn^2$ ) та маси частинки, визначає різні можливі фазові сценарії, що відбуваються в бозонній системі частинок і античастинок. Коли коефіцієнт притягання  $A = \kappa A_c$ , де  $A_c \equiv 2\sqrt{mB}$ , дорівнює нулю (тобто  $\kappa = 0$ ), система може перебувати лише в тепловій фазі або у фазі конденсату. У випадку  $\kappa > 0$  в системі відбувається фазовий перехід рідина-газ, і перехід з теплової фази в конденсатну можливий як шляхом переходу рідина-газ, за умови, що  $T < T_c$ , так і без нього, коли  $T \geq T_c$ . Іншими словами, на фазовій діаграмі існує область, де БЕК і змішана газорідинна фаза існують одночасно (сіра область внизу на рис. 3.23, 3.24). Подібна ситуація описана в [50], де було досліджено бозе-айнштайнівську конденсацію та рідинно-газовий фазовий перехід у  $\alpha$ -речовині. Область над ізотермою  $T = T_{qgp} = 160$  MeV (QGP) є фазою, де виникає кварк-глюонна плазма. Ми вважаємо це одним з ключових обмежень нашої моделі, оскільки за температур вищих  $T_{qgp}$  відбувається руйнування всіх піонів.

У частині 3.5.2 ми описали обчислення модуля всебічного тиску (bulk modulus) системи взаємодіючих піонів. Як видно з рис. 3.28 при  $\kappa = 0$  модуль всебічного тиску зазнає розриву в точці переходу БЕК. Як тільки ми “вмикаємо” притягання ( $\kappa > 0$ ) і відбувається перехід рідина-газ, модуль всебічного тиску в цій області дорівнює нулю. Причиною цього є

постійність тиску згідно з правилами Максвелла. У першому випадку ( $\kappa = 0$ ), особлива поведінка модуля всебічного тиску може бути використана для визначення ВЕС переходу в системі з відштовхуванням між частинками. У другому випадку ( $\kappa > 0$ ) падіння модуля всебічного тиску до нуля свідчить про наявність фазового переходу рідина-газ у бозонній системі.

## Розділ 4. Електрична взаємодія в системі частинки-античастинки

### 4.1 Вступ

У цій роботі розглянуто взаємодію між частинками-піонами. Вона описується у вигляді Скірма-подібної моделі, що включає дві складові: відштовхування та притягання. Обидві ці складові явно залежать від густини частинок і можуть інтерпретуватися як ефективний опис сильної взаємодії. Водночас модельні частинки піони та антипіони мають електричний заряд, тож коректне моделювання повинно враховувати електромагнітну взаємодію.

Для подальшого аналізу ми будемо ототожнювати електричний заряд системи з густиною ізотопічного спіну, оскільки у нашому випадку взаємозв'язком між цими величинами є пряма пропорційність. Тож нахай тепер густина вільної енергії має наступний розширений вид:

$$\Phi = \Phi_1^{(0)}(n_1) + \Phi_2^{(0)}(n_2) + \Phi_n(n) + \Phi_q(n_q) \quad (4.175)$$

### 4.2 Хімічний потенціал

У наведеному співвідношенні (4.175),  $\Phi_{1,2}^{(0)}$  - це складова вільної енергії яка не залежить від взаємодії, густина вільної енергії ідеалізованої системи;

$\Phi_n(n)$  - це складова вільної енергії яка залежить від густини частинок безвідносно їх сорту, пов'язана з сильною (ядерною) взаємодією;  $\Phi_q(n_q)$  - складова вільної енергії пов'язана з наявністю електричного заряду в системі. Очевидно, для двокомпонентної системи різнойменно заряджених частинок  $n = n_1 + n_2$  та  $n_q = n_1 - n_2$ .

Користуючись  $\mu = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_T$  маємо:

$$\mu_1 = \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial n_1} + \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial n_1} + \frac{\partial \Phi_q}{\partial n_q} \frac{\partial n_q}{\partial n_1} \quad (4.176)$$

$$\mu_2 = \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial n_2} + \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial n_2} + \frac{\partial \Phi_q}{\partial n_q} \frac{\partial n_q}{\partial n_2} \quad (4.177)$$

Або, зважаючи на співвідношення між  $n$ ,  $n_q$ ,  $n_1$  та  $n_2$ :

$$\mu_1 = \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial n_1} + \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} + \frac{\partial \Phi_q}{\partial n_q} \quad (4.178)$$

$$\mu_2 = \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial n_2} + \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} - \frac{\partial \Phi_q}{\partial n_q} \quad (4.179)$$

Де  $\frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial n_1}$  та  $\frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial n_2}$  - ідеалізовані хімічні потенціали. Вводимо наступні позначення:

$$U_n(n) = \frac{\partial \Phi_n}{\partial n}(n) \quad (4.180)$$

$$U_q(n_q) = \frac{\partial \Phi_q}{\partial n_q}(n_q) \quad (4.181)$$

Так маємо вирази:

$$\mu_1 = \mu_1^{(0)} + U_n(n) + U_q(n_q) \quad (4.182)$$

$$\mu_2 = \mu_2^{(0)} + U_n(n) - U_q(n_q) \quad (4.183)$$

### 4.3 Функція розподілу

Наступним кроком використаємо отримані вирази для перетворення рівноважної функції розподілу частинок ідеального бозе-газу на таку, яка буде враховувати взаємодію:

$$f = \left[ \exp \left( \frac{\omega_k - \mu^{(0)}}{T} \right) - 1 \right]^{-1} \quad (4.184)$$

Для частинок першого і другого сорту:

$$f_1 = \left[ \exp \left( \frac{\omega_k - (\mu_1 - U_n(n) - U_q(n_q))}{T} \right) - 1 \right]^{-1} \quad (4.185)$$

$$f_2 = \left[ \exp \left( \frac{\omega_k - (\mu_2 - U_n(n) + U_q(n_q))}{T} \right) - 1 \right]^{-1} \quad (4.186)$$

Перегрупуємо доданки в чисельнику показника експоненти аби отримати  $E_1 = \omega_k + U_n + U_q$  та  $E_2 = \omega_k + U_n - U_q$  і отримуємо модифіковану версію функції розподілу, яка враховує внески потенціальної енергії пов'язаної з сильною взаємодією та взаємодією електричною:

$$f_1 = \left[ \exp \left( \frac{E_1 - \mu_1}{T} \right) - 1 \right]^{-1} \quad (4.187)$$

$$f_2 = \left[ \exp \left( \frac{E_2 - \mu_2}{T} \right) - 1 \right]^{-1} \quad (4.188)$$

## 4.4 Тиск

Ще однією важливою величиною, вираз для якої необхідно отримати, є тиск. Скористаємось опіввідношенням Ейлера та означенням густини вільної енергії:

$$\epsilon = Ts + \mu n - p \quad (4.189)$$

$$\Phi = \epsilon - Ts \quad (4.190)$$

Так отримуємо наступне співвідношення:

$$p = \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2 - \Phi \quad (4.191)$$

Далі використовуємо отримані вище формули для хімічних потенціалів:

$$\begin{aligned} p = & \mu_1^{(0)} n_1 + U_n n_1 + U_q n_1 + \\ & \mu_2^{(0)} n_2 + U_n n_2 - U_q n_2 - \\ & - \Phi_1^{(0)} - \Phi_2^{(0)} - \Phi_n - \Phi_q \end{aligned} \quad (4.192)$$

Враховуючи  $n_1 + n_2 = n$  та  $n_1 - n_2 = n_q$ , перегрупуємо доданки:

$$\begin{aligned} p = & (\mu_1^{(0)} n_1 - \Phi_1^{(0)}) + (\mu_2^{(0)} n_2 - \Phi_2^{(0)}) + \\ & + (U_n n - \Phi_n) + (U_q n_q - \Phi_q) \end{aligned} \quad (4.193)$$

Бачимо, що після перестановок і злиття можна утворити два доданки, які відповідають парціальним тискам та ще два - які відповідають додатковому (надлишковому або надмірному) тиску, пов'язаному з

наявністю взаємодії в системі.

$$p = p_1 + p_2 + p_n^{ex} + p_q^{ex} \quad (4.194)$$

## 4.5 Середнє поле

Нарешті, нам потрібно конкретизувати вигляд  $U_n = U_n(n)$  та  $U_q = U_q(n_q)$ . В отриманих рівняннях ця величина має сенс енергії частинки, пов'язаної з середнім полем. Цю величину ми не задаємо безпосередньо, а отримуємо як наслідок заданої відповідної компоненти вільної енергії.

Очевидно, відносно  $n_q$  густина вільної енергії  $\Phi$  мусить бути парною функцією позаяк система мусить бути симетричною стосовно перетворення яке змінює знаки зарядів на протилежний. З іншого боку,  $U_q$  мусить бути непарним, зважаючи на те, що при зміні заряду середовища окрема взята частинка матиме протилежну за знаком потенціальну енергію пов'язану з електричною взаємодією. Так найбільш простою опцією буде степенева залежність виду:

$$\Phi_q(n_q) = \frac{c}{2} n_q^2 \quad (4.195)$$

Відповідно, для енергії частинки в середньому полі буде:

$$U_q(n_q) = c n_q \quad (4.196)$$

Окремо можна відмітити, що наявність такої компоненти взаємодії значить наявність додаткових сил відштовхування в модельній системі та, за заданої густини частинок, призводить до збільшення густини вільної енергії і збільшення тиску. Тиск збільшується на величину:

$$p_q^{ex} = U_q n_q - \Phi_q = \frac{c}{2} n_q^2 \quad (4.197)$$

## 4.6 Оцінка енергії електричної взаємодії

Найбільш примітивною опцією є розглянути енергію взаємодії точкового заряду з зарядом розподіленим по середовищу:

$$U = \frac{q}{4\pi} \iiint_V \frac{n_q(r)}{r} dV \quad (4.198)$$

В нашому випадку з фіксованою густиною заряду:

$$U = \left( \frac{q}{4\pi} \iiint_V \frac{1}{r} dV \right) n_q \quad (4.199)$$

де множник з інтегралом є коефіцієнтом  $c$  з формули (4.195). Очевидно, що такий інтеграл для нескінченного середовища має нескінченно велике значення:

$$\begin{aligned} c &= \frac{q}{4\pi} \iiint_V \frac{1}{r} dV = \\ &= \frac{q}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^R r dr = \\ &= \frac{q}{2} R^2 \end{aligned} \quad (4.200)$$

Але зрозуміло, що в дійсності ми ніколи не маємо справи з дійсно нескінченними системами, особливо в контексті ядерно-ядерних зіткнень. Так ми можемо ввести модельне обмеження на розміри, беручи за точку відліку розміри фаєрболу або якісь інші характерні для подальшої еволюції



розміри. Варто також зазначити, що тут у нас є дві опції для інтерпретації цього коефіцієнту: перший - самодія досліджуваної системи, друга - електрична дія окремої підсистеми, вплив якої пов'язаний з наявністю заряджених частинок третього сорту, але для яких ми з певних причин нехтуємо сильною ядерною взаємодією.

## 4.7 Вплив наявності електричної взаємодії за умови фіксованої густини заряду

Розглянемо функції розподілу (4.185) та (4.186) за умови що ми вважаємо температуру  $T$  та густину заряду  $n_q$  певними параметрами, які задаються наперед. Крім того, накладається ще одна умова - умова реакції типу анігіляції між частинками першого і другого сорту. Якщо ми вважаємо що продукт реакції надзвичайно швидко покидає систему або з якихось інших міркувань не вносить суттєвого вкладу в стан системи, маємо:

$$\mu_2 = -\mu_1 \quad (4.201)$$

Зважаючи на наведені міркування, перепишемо функції розподілу наступним чином:

$$f_1 = \left[ \exp \left( \frac{\omega_k + U_n(n) - (\mu_1 - U_q(n_q))}{T} \right) - 1 \right]^{-1} \quad (4.202)$$

$$f_2 = \left[ \exp \left( \frac{\omega_k + U_n(n) + (\mu_1 - U_q(n_q))}{T} \right) - 1 \right]^{-1} \quad (4.203)$$

Якщо  $n_q$  - фіксована величина, то і  $U_q(n_q)$  теж константа, а отже ми можемо переозначити хімічний потенціал з врахуванням зсуву на цю

величину  $\mu = \mu_1 - U_q(n_q)$ . В підсумку маємо:

$$f_1 = \left[ \exp \left( \frac{\omega_k + U_n(n) - \mu}{T} \right) - 1 \right]^{-1} \quad (4.204)$$

$$f_2 = \left[ \exp \left( \frac{\omega_k + U_n(n) + \mu}{T} \right) - 1 \right]^{-1} \quad (4.205)$$

Отримані співвідношення ідентичні тим, які ми мали без жодної електричної взаємодії. Це означає, що рівняння на їх основі можуть бути розв'язані в точності так само як це було зроблено раніше. Щоправда, для отриманого розв'язку потрібно буде виконати обернене перетворення хімічного потенціалу  $\mu_1 = \mu + U_q(n_q)$ . В підсумку маємо, що залежності густини частинок від температури, за заданого фіксованого значення, є однаковими як у випадку наявності електричної взаємодії, так і коли її нема. Натомість, хімічний потенціал буде паралельно зсунутий.

Крім того, паралельного зсуву зазнають густина вільної енергія  $\Phi$  та тиск  $p$  на величини  $\Phi_q(n_q)$  та  $p_q^{ex}(n_q)$  відповідно. Цікаво, що за таких умов, усі величини, які можуть бути виражені через лінійні комбінації похідних по температурі від вільної енергії, хімічного потенціалу та тиску, залишаться такими ж як і у випадку без електричної взаємодії.

## 4.8 Проміжні висновки

У цьому розділі було розширено Скірма-подібну модель, якою описувалась взаємодія піонів, шляхом включення до загальної густини вільної енергії компоненти відповідальної за електричну взаємодію. Нова складова залежить від густини заряду в системі, і, в загальному випадку, мусить бути парною функцією відносно величини густини заряду, а її похідна - непарною. Ми обрали квадратичну залежність.

Описана модифікація, зокрема, призводить до змін у хімічному потенціалі, у функції розподілу та в тиску. Вирази для хімічних потенціалів частинок  $\mu_1$  та античастинок  $m\mu_2$  отримують додаткові доданки, які враховують внесок електричної складової середнього поля. Функції розподілу  $f_1$  та  $f_2$  тепер містять нову компоненту в тій частині, яка відповідає за енергію частинки в середньому полі. Тиск отримав нову поправку у вигляді ще одного доданку до виразу надлишкового тиску  $p^{ex}$ .

Показано, що за умови фіксованої густини заряду, електрична взаємодія призводить тільки до паралельного зсуву хімічного потенціалу, вільної енергії та тиску. З іншого боку, залежності густини частинок від заряду лишаються такими ж, як і в системі без електричної взаємодії.

Запропоновано вводити обмеження на фізичний розмір системи в частині пов'язаній з електричною взаємодією.

## Висновки

В роботі представлено термодинамічно узгоджений підхід до опису щільних бозонних систем за скінченних температур та за заданої густини заряду (ізоспінового заряду)  $n_I$ . Досліджувався вплив притягання і відштовхування між частинками на термодинамічні властивості системи. Було введено параметр  $\kappa = A/2\sqrt{mB}$ , який характеризує інтенсивність притягання між частинками і є загалом визначальним для фазової структури системи.

В роботі показано, що в системі частинок і античастинок з фіксованою ізоспіною густиною існує конденсат Бозе-Айнштайна в діапазоні температур від нуля до деякого критичного  $T_c$  значення. Доведено, що при цій температурі, має місце фазовий перехід другого роду (неперервний фазовий перехід), в якому параметром порядку виступає густина конденсату. Були обчислені залежності густини енергії, тиску, густини ентропії та теплоємності (рис. 1.3) від температури, які наочно доводять наявність фазового переходу другого роду.

Показано, що незалежно від параметрів середнього поля мультибозонна система утворює конденсат Бозе-Айнштайна для компоненти системи, яка має більшу густину (в нашому випадку  $\pi^-$  мезони). За малих значень притягання  $\kappa < 1$  частинки компоненти, яка має меншу густину ( $\pi^+$  мезони), перебувають виключно в тепловій фазі для всього діапазону температур. Отже, фазовий перехід другого роду (при температурі  $T_c$ ) визначається тільки  $\pi^-$ -мезонною підсистемою та слабо залежить від

параметрів середнього поля.

Отримано, що для значень параметру притягання в околі 1 ( $\kappa \lesssim 1$ )  $\pi^-$  мезони мають два інтервали конденсації. Так при збільшенні температури відбувається спочатку вихід системи зі стану конденсату з повторним утворенням конденсату при подальшому збільшенні температури. В той же час,  $\pi^+$  мезони перебувають в тепловій фазі.

Показано, що точки перетину залежності густини частинок ( $\pi^-$  мезонів) від температури з критичною кривою завжди відповідають фазовим переходам другого роду і задають температуру  $T_c$ , яка була обрахована в роботі (формально, це фазовий перехід третього роду)

Показано наявність віртуального (або точкового) фазового переходу при  $\kappa = 1$ , коли залежність густини античастинок ( $\pi^+$  мезонів) “торкається” критичної кривої, але не перетинає її. Отримано, що це також фазовий перехід другого роду (третього роду - якщо судити за розривом третьої похідної від вільної енергії), але при ньому не відбувається утворення параметру порядку, тобто при цьому фазовому переході не утворюється конденсат.

Показано, що при збільшенні інтенсивності притягання між частинками в системі, коли  $\kappa > 1$ , відбувається фазовий перехід першого роду, при якому обидві компоненти системи утворюють конденсат. При цьому стрибком змінюється внутрішня енергія і відбуваються вивільнення (або поглинання) прихованої теплоти. Зроблено висновок, що у випадку, коли обидві компоненти системи знаходяться в конденсаті, великий канонічний ансамбль не є адекватним для термодинамічного опису системи. Це випливає з того факту, що хімічний потенціал задіяний в умові утворення конденсату обох компонент, тим самим його значення фіксоване, через що він не може слугувати вільною змінною за наявності конденсату. Так фіксованому значенню хімічного потенціалу може відповідати цілий

діапазон значень густин заряду (ізоспіну), що не дає однозначного термодинамічного опису станів системи. Тому зроблено висновок, що адекватний опис системи за умови наявності конденсату можливий в рамках канонічного ансамблю але неможливий при використанні великого канонічного ансамблю.

В системі з збереженням ізоспінового (електричного) заряду в рамках запропонованої моделі отримано залежність повної густини частинок від величини заряду при фіксованій температурі  $n(T, n_I)|_{T=const}$ , які виглядають як лінійні в широкому діапазоні температур (рис. 3.20).

Зроблено узагальнення правил Максвела фазових переходів рідина-газ для релятивістської системи частинок та античастинок в термінах залежностей від густини заряду  $n_I$ , обраховано фазові діаграми (рис. 3.21, 3.22, 3.23, 3.24) за різних значень параметра  $\kappa$ . Отримано, що при наявності притягання в системі ( $\kappa > 0$ ) відбувається фазовий перехід рідина-газ. На отриманих діаграмах представлено результати розрахунку розподілу фаз газу, рідини та змішаної, та як цей розподіл накладається на фазу конденсату Бозе-Айнштайна. Як окремий результат, важливо відмітити зону накладання рідинної та змішаної фаз на фазу конденсату. При цьому, межа розділення між змішаною і газовою фазами проходить дуже близько до критичної кривої Бозе-конденсації. Зона існування рідинної фази тяжіє бути в зоні конденсату Бозе-Айнштайна.

Встановлено, що обчислений в роботі модуль всебічного тиску (bulk modulus) системи частинок і античастинок показує наявність відповідних фазових переходів (рис. 3.28). Показано, що за відсутності притягання в системі ( $\kappa = 0$ ) модуль всебічного тиску зазнає розриву в точці утворення конденсату Бозе-Айнштайна. Коли в системі присутнє притягання між частинками ( $\kappa > 0$ ) показано що величина модулю всебічного тиску падає до нуля, чим засвідчує наявність фазового переходу рідина-газ.

Продemonстровано можливість розширення моделі середнього поля шляхом включення електричної взаємодії. Удосконалена модель враховує додаткову складову вільної енергії, яка залежить від густини електричного заряду та забезпечує парність функції вільної енергії відносно зміни знаку заряду. Введена квадратична залежність електричного внеску призводить до корекцій у хімічному потенціалі, функціях розподілу та тиску, зберігаючи при цьому саму структуру термодинамічних рівнянь.

Аналіз показує, що при фіксованій густині заряду електрична взаємодія викликає лише паралельний зсув термодинамічних потенціалів без суттєвої зміни густин частинок та античастинок. Це означає, що кулонівський внесок не впливає на характер фазових переходів. Запропоновано також фізичне обмеження на розміри системи, що враховує довжину дії електричної взаємодії, — воно необхідне для коректного опису  $\pi$ -мезонної матерії в умовах наявності розподіленого середовищем заряду.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Adam Bzdak, Shin'ichi Esumi, Volker Koch, Jinfeng Liao, Mikhail Stephanov, and Nu Xu. Mapping the phases of quantum chromodynamics with beam energy scan. *Physics Reports*, 853:1–87, April 2020.
- [2] N Bogoliubov. On the theory of superfluidity. *J. Phys*, 11(1):23, 1947.
- [3] N.N. Bogoliubov. Energy levels of the imperfect bose-einstein gas. *Bull. Moscow State Univ.*, 1947.
- [4] N.N. Bogoliubov. *Lectures on Quantum Statistics*. Number т. 1 in Lectures on Quantum Statistics. Gordon and Breach science publishers, 1967.
- [5] Dirac P. A.M. *The Principles of Quantum Mechanics, 2nd ed.* Oxford: Clarendon, 1935.
- [6] Kerson Huang. *Statistical Mechanics*. John Wiley & Sons, Nashville, TN, 2 edition, April 1987.
- [7] D Anchishkin, I Mishustin, and H Stoecker. Phase transition in an interacting boson system at finite temperatures. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 46(3):035002, February 2019.
- [8] A.A. Anselm and M.G. Ryskin. Production of classical pion field in heavy ion high energy collisions. *Physics Letters B*, 266(3–4):482–484, August 1991.
- [9] Jean-Paul Blaizot and André Krzywicki. Soft-pion emission in high-energy heavy-ion collisions. *Physical Review D*, 46(1):246–251, July 1992.



- [10] J.D. BJORKEN. A full-acceptance detector for ssc physics at low and intermediate mass scales: An expression of interest to the ssc. *International Journal of Modern Physics A*, 07(18):4189–4257, July 1992.
- [11] I N Mishustin and W Greiner. Multipion droplets. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 19(7):L101–L109, July 1993.
- [12] D. T. Son and M. A. Stephanov. Qcd at finite isospin density. *Physical Review Letters*, 86(4):592–595, January 2001.
- [13] J. B. Kogut and D. Toublan. Qcd at small nonzero quark chemical potentials. *Physical Review D*, 64(3), July 2001.
- [14] D Toublan and J.B Kogut. Isospin chemical potential and the qcd phase diagram at nonzero temperature and baryon chemical potential. *Physics Letters B*, 564(3–4):212–216, July 2003.
- [15] Andrea Mammarella and Massimo Mannarelli. Intriguing aspects of meson condensation. *Physical Review D*, 92(8), October 2015.
- [16] Stefano Carignano, Luca Lepori, Andrea Mammarella, Massimo Mannarelli, and Giulia Pagliaroli. Scrutinizing the pion condensed phase. *The European Physical Journal A*, 53(2), February 2017.
- [17] Massimo Mannarelli. Meson condensation. *Particles*, 2(3):411–443, September 2019.
- [18] Bastian Brandt and Gergely Endrodi. Qcd phase diagram with isospin chemical potential. In *Proceedings of 34th annual International Symposium on Lattice Field Theory — PoS(LATTICE2016)*, LATTICE2016. Sissa Medialab, January 2017.
- [19] Bastian B. Brandt, Gergely Endrődi, and Sebastian Schmalzbauer. Qcd at finite isospin chemical potential. *EPJ Web of Conferences*, 175:07020, 2018.
- [20] B.B. Brandt, G. Endrődi, and S. Schmalzbauer. Qcd phase diagram for nonzero isospin-asymmetry. *Physical Review D*, 97(5), March 2018.

- [21] L. M. Satarov, M. N. Dmitriev, and I. N. Mishustin. Equation of state of hadron resonance gas and the phase diagram of strongly interacting matter. *Physics of Atomic Nuclei*, 72(8):1390–1415, August 2009.
- [22] Volodymyr Vovchenko, Anton Motornenko, Paolo Alba, Mark I. Gorenstein, Leonid M. Satarov, and Horst Stoecker. Multicomponent van der waals equation of state: Applications in nuclear and hadronic physics. *Physical Review C*, 96(4), October 2017.
- [23] D Anchishkin and V Vovchenko. Mean-field approach in the multi-component gas of interacting particles applied to relativistic heavy-ion collisions. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 42(10):105102, September 2015.
- [24] D.V. Anchishkin. Particle finite-size effects as a mean-field approximation. *Sov. Phys. JETP*, 75(102):195, September 1992.
- [25] D. Anchishkin and E. Suhonen. Generalization of mean-field models to account for effects of excluded volume. *Nuclear Physics A*, 586(4):734–754, April 1995.
- [26] E.E. Kolomeitsev and D.N. Voskresensky. Fluctuations in non-ideal pion gas with dynamically fixed particle number. *Nuclear Physics A*, 973:89–103, May 2018.
- [27] Evgeni E. Kolomeitsev, Maxim E. Borisov, and Dmitry N. Voskresensky. Particle number fluctuations in a non-ideal pion gas. *EPJ Web of Conferences*, 182:02066, 2018.
- [28] E. E. Kolomeitsev, D. N. Voskresensky, and M. E. Borisov. Charge and isospin fluctuations in a non-ideal pion gas with dynamically fixed particle number. *The European Physical Journal A*, 57(4), April 2021.
- [29] D. Anchishkin, V. Gnatovskyy, D. Zhuravel, and V. Karpenko. Bose-einstein condensation in interacting boson particle-antiparticle system. To be published.

- [30] R V Poberezhnyuk, V Vovchenko, D V Anchishkin, and M I Gorenstein. Limiting temperature of pion gas with the van der waals equation of state. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 43(9):095105, August 2016.
- [31] D. Anchishkin, I. Mishustin, O. Stashko, D. Zhuravel, and H. Stoecker. Finite-temperature bose-einstein condensation in interacting boson system. *Ukrainian Journal of Physics*, 64(12):1118, December 2019.
- [32] E.V. Shuryak. Collective interaction of mesons in hot hadronic matter. *Nuclear Physics A*, 533(4):761–788, November 1991.
- [33] J. Theis, G. Graebner, G. Buchwald, J. Maruhn, W. Greiner, H. Stöcker, and J. Polonyi. Phase transition of the nucleon-antinucleon plasma in a relativistic mean-field theory. *Physical Review D*, 28(9):2286–2290, November 1983.
- [34] L. Adamczyk (STAR Collaboration) et al. Bulk properties of the medium produced in relativistic heavy-ion collisions from the beam energy scan program. *Physical Review C*, 96(4), October 2017.
- [35] B. Abelev (ALICE Collaboration) et al. Pion, kaon, and proton production in central pb-pb collisions at  $\sqrt{s_{nn}} = 2.76$  tev,. *Physical Review Letters*, 109(25), December 2012.
- [36] J.P. Hansen and I.R. McDonald. *Theory of Simple Liquids*. Elsevier Science, 2006.
- [37] O S Stashko, D V Anchishkin, O V Savchuk, and M I Gorenstein. Thermodynamic properties of interacting bosons with zero chemical potential. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 48(5):055106, April 2021.
- [38] M. Kataja and P.V. Ruuskanen. Non-zero chemical potential and the shape of the pt-distribution of hadrons in heavy-ion collisions. *Physics Letters B*, 243(3):181–184, June 1990.

- [39] F. LONDON. The  $\lambda$ -phenomenon of liquid helium and the bose-einstein degeneracy. *Nature*, 141(3571):643–644, April 1938.
- [40] P. Ehrenfest. *Phasenumwandlungen im ueblichen und erweiterten Sinn, classifiziert nach den entsprechenden Singularitaeten des thermodynamischen Potentials*. N. V. Noord-Hollandsche Uitgevers Maatschappij, 1933.
- [41] Gregg Jaeger. The ehrenfest classification of phase transitions: Introduction and evolution. *Archive for History of Exact Sciences*, 53(1):51–81, May 1998.
- [42] I. N. Mishustin, D. V. Anchishkin, L. M. Satarov, O. S. Stashko, and H. Stoecker. Condensation of interacting scalar bosons at finite temperatures. *Physical Review C*, 100(2), August 2019.
- [43] VL Ginzburg and LP Pitaevskii. On the theory of superfluidity. *Sov. Phys. JETP*, 7(5):858–861, 1958.
- [44] Eugene P. Gross. Hydrodynamics of a Superfluid Condensate. *Journal of Mathematical Physics*, 4(2):195–207, 02 1963.
- [45] Howard E. Haber and H. Arthur Weldon. Thermodynamics of an ultrarelativistic ideal bose gas. *Phys. Rev. Lett.*, 46:1497–1500, Jun 1981.
- [46] D. Anchishkin, V. Gnatovskyy, D. Zhuravel, and V. Karpenko. Self-interacting particle-antiparticle system of bosons. *Phys. Rev. C*, 105:045205, Apr 2022.
- [47] D. Anchishkin, V. Gnatovskyy, D. Zhuravel, and V. Karpenko. Relativistic selfinteracting particle-antiparticle system of bosons. *Journal of Physics and Electronics*, 28(2):3–18, dec 2020.
- [48] D. Anchishkin, V. Gnatovskyy, D. Zhuravel, and V. Karpenko. Selfinteracting particle-antiparticle system of bosons, 2021.
- [49] S. J. Lee and A. Z. Mekjian. Nuclear chemical and mechanical instability and the liquid-gas phase transition in nuclei, 2008.

- [50] L M Satarov, M I Gorenstein, A Motornenko, V Vovchenko, I N Mishustin, and H Stoecker. Bose–einstein condensation and liquid–gas phase transition in strongly interacting matter composed of  $\alpha$  particles. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 44(12):125102, November 2017.

# Додаток 1. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ

## Публікації:

1. “Relativistic Selfinteracting Particle-Antiparticle System of Bosons”  
Anchishkin, V. Gnatovskyy, D. Zhuravel, V. Karpenko. J. of Phys. and Electr.  
28, No. 2, p.3-18 (2020) [DOI: <https://doi.org/10.15421/332016>]
2. “Phase Diagram of the Selfinteracting Particle-Antiparticle Boson System”  
D. Anchishkin, V. Gnatovskyy, D. Zhuravel, V. Karpenko J. of Phys. and  
Electr., 29, No. 1, p.5-14 (2021) [DOI: <https://doi.org/10.15421/332101>]
3. “Self-interacting particle-antiparticle system of bosons” D. Anchishkin,  
V. Gnatovskyy, D. Zhuravel, V. Karpenko Phys. Rev. C 105, 045205 (2022)  
[DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.105.045205>]. (Q1)
4. “Phase Transitions in the Interacting Relativistic Boson Systems”  
D. Anchishkin, V. Gnatovskyy, D. Zhuravel, V. Karpenko, I. Mishustin and  
H. Stoecker. Universe 9, 411 (2023)  
[DOI: <https://doi.org/10.3390/universe9090411>]. (Q1)
5. “Canonical Ensemble vs. Grand Canonical Ensemble in the Description of  
Multicomponent Bosonic Systems.” D. Anchishkin, V. Gnatovskyy,  
D. Zhuravel, V. Karpenko, I. Mishustin and H. Stoecker Ukr. J. Phys 69, No.1  
(2024) [DOI: <https://doi.org/10.15407/ujpe69.1.3>]

# Апробація:

Матеріали роботи доповідалися на конференціях:

- D. Zhuravel, D. Anchyskin, V. Gnatovsky, V. Karpenko, Selfinteracting Particle-Antiparticle System of Bosons: the Bose-Einstein Condensation as a Second-Order Phase Transition, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv, February 16, 2021.
- D. Zhuravel, D. Anchyskin, V. Gnatovsky, V. Karpenko, Self-interacting relativistic system of bosonic particles and antiparticles, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv, October 17, 2022.
- D. Anchyskin, V. Gnatovsky, D. Zhuravel, V. Karpenko, Phase transitions in relativistic meson systems, 22nd Zimanyi School - Winter Workshop on Heavy Ion Physics, Budapest, Hungary, December 5-9, 2022.
- D. Anchyskin, V. Gnatovsky, D. Zhuravel, V. Karpenko, Phase transitions in a system of self-interacting particle-antiparticle, XIII Conference of Young Scientists “Problems of Theoretical Physics”, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv, Ukraine, December 21, 2022.
- D. Anchyskin, I. Mishustin, H. Stöcker, L. Satarov, V. Gnatovskii, D. Zhuravel, V. Karpenko, “A scalar model of an interacting boson system at high temperatures”, Conference in memory of Petro Fomin, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv, July 4, 2023.
- V. Karpenko, D. Anchyskin, D. Zhuravel, V. Gnatovsky, A question concerning phase transitions in a pion system of particles and antiparticles, XV Conference of Young Scientists “Problems of Theoretical Physics”, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv, Ukraine, June 10, 2025.