Національна академія наук України
Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова

На правах рукопису

Скрипник Тарас Володимирович

УДК 530.145; 531.01; 517.958

Метод некососиметричних r-матриць та нові інтегровні класичні і квантові системи

01.04.02 — теоретична фізика

Автореферат дисертації
на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ – 2020

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова Національної академії наук України.

Офіційні опоненти:
доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент НАНУ
Нікітін Анатолій Глібович,

доктор фізико-математичних наук, професор
Самойленко Валерій Григорович,

доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент НАНУ
Іванов Борис Олексійович.

Захист відбудеться “ 25 ” березня 2021 р. о(б) 11 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.191.01 в Інституті теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова Національної академії наук України (03680, м. Київ, вул. Метрологічна, 14-б).

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України (03680, м. Київ, вул. Метрологічна, 14-б).

Автореферат розісланий “ 18 ” лютого 2021 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
доктор фіз.-мат. наук В.Є. КУЗЬМИЧЕВ

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Цілком інтегровні гамільтонові системи грають важливу роль в теоретичній та математичній фізиці починаючи з 19 сторіччя з часів робіт Ліувіля, Неймана, Клебша та Ковалевської.

Сильним поштовхом для розвитку теорії інтегровних систем та їх застосувань було відкриття у 70-х роках XX сторіччя рівнянь солітонного типу та їх цілковитої інтегровності як нескінченновимірних гамільтонових систем. Це привело до ряду фундаментальних теоретичних наслідків як в класичній, так і в квантовій теорії нелінійних полів у двох вимірах а також до стрімкого розвитку асоційованої теорії скінченновимірних класичних та квантових гамільтонових систем.

Одною з важливих технічних знахідок цієї теорії було відкриття комутаторного представлення для відповідних рівнянь руху — так званого представлення Лакса, що існує як для рівнянь солітонного типу, так і для скінченновимірних гамільтонових систем. Це дозволило пов'язати данну теорію з теорією рівнянь типу Ейлера–Арнольда на скінченно- і нескінченновимірних алгебрах Лі "прихованих симетрій".

Іншою ключовою знахідкою було відкриття класичних r-матриць що слугують для задання дужки Пуассона між матричними елементами матриці Лакса. Ця знахідка є основою не лише теорії класичних інтегровних систем, а і для їх квантових аналогів що одержуються методом квантування квадратичних дужок Пуассона. Це призвело до відкриття так званих квантових R-матриць та теорії квантових груп.

Довгий час в теорії "Лакс – інтегровних" гамільтонових систем основна увага приділялася, так званим, кососиметричним класичним r-матрицям, оскільки з такими r-матрицями можна асоціювати не лише лінійну, а й квадратичну Пуассонову структуру, яка після деформаційного квантування приводить до структури квантової групи. Теорія класичних інтегровних систем, а також рівнянь солітонного типу що базується на класичних некососиметричних r-матрицях та сама теорія таких r-матриць залишалася слабо розробленою. Тому важливою задачею є розвиток такої теорії, а також побудова фізично цікавих прикладів відповідних скінченновимірних систем та рівняннь солітонного типу. Цьому присвячена перша частина дисертації.

В спеціальній літературі широко побутувала думка що квантова інтегровність систем з лінійною r-матричною структурою є, свого роду, "артефактом" квантової інтегровності систем що базуються на квантових групах і квантових R-матрицях і що, в наслідок цього, квантові інтегровні системи асоційовані лише з кососиметричними r-матрицями. Проте, як було показано автором дисертаційного дослідженння квантові інтегровні системи асоціюються також з загальними некососиметричними r-матрицями, що жодним чином не пов'язані з квантовими групами. Викладу цих результатів, їх застосувань до фізично цікавих моделей, зокрема до моделей типу БКШ та розвитку методів точного розв'язку відповідних квантово – інтегровних систем присвячена друга части дисертаційного дослідженння.

Актуальність теми.

Однією з важливих задач сучасної теоретичної фізики є розробка методів дослідження моделей класичної та квантової механіки і класичної та квантової теорії поля поза рамками теорії збурень. Класичні та квантові інтегровні моделі є прикладами моделей, в дослідженні яких можна суттєво просунутись і набути необхідний для цієї мети досвід. Особливістю цих моделей є наявність прихованих симетрій, які дозволяють використовувати сучасні алгебраїчні методи для їх досліджень. Актуальність тематики дисертаційної роботи обумовлена тим, що в ній представлено побудова і вивчення алгебр Лі прихованих симетрії, їх застосування до знаходження нових класичних і квантових інтегровних систем і розвиток алгебраїчних методів обрахунку спектру гамільтоніанів побудованих квантових систем.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Результати, що увійшли в дисертаційну роботу, були отримані в рамках планової наукової тематики відділу математичних методів в теоретичній фізиці Інституту теоретичної фізики НАН України тема "Квантові симетрії і властивості інтегровних та квантово-польових систем", 2001–2004 рр., шифр 1.2.2, 1.4.7, № д.р. в УкрІНТЕІ 0101U000331; тема "Симетрії, інтегровні системи, класичні і квантові поля", 2005–2007 рр., шифр 1.4.7, № д.р. в УкрІНТЕІ 0101U006883; тема "Методи теорії симетрій та проблеми нелінійної динаміки в сучасній теорії поля та теорії елементарних частинок”, 2007–2011 рр., шифр 1.4.7, № д.р. в УкрІНТЕІ 0106U007885, тема “Нелінійні квантові осцилятори, інтегровні моделі та квантово-польові системи”, 2012–2016 рр., шифр 1.4.7, № д.р. в УкрІНТЕІ 0112U000052, тема “Симетрії, деформації та інтегровність в моделях квантових полів і частинок”, 2017–2021 рр., шифр 1.4.7, № д.р. в УкрІНТЕІ 0117U000238.

Мета і задачі дослідження.

Метою дисертаційної роботи є розвиток теорії класичних та квантових інтегровних систем що базуються на теорії некососиметричних r-матриць та відповідних нескінченновимірних алгебр Лі.

Зокрема, розв'язувалися наступні задачі:

- Розвиток методів побудови класичних r-матриць зі спектральними параметрами та побудова нових класів некососиметричних r-матриць.
- Побудова нескінченновимірних алгебр прихованих симетрій стартуючи з данної класичної r-матриці.
- Побудова всеможливих матриць Лакса що відповідають данній r-матриці, аналіз відповідних скінченновимірних гамільтонових систем та виявлення нових фізично цікавих прикладів таких систем.
- Побудова ієрархій солітонних рівняннь що відповідають данній класичній r-матриці зі спектральними параметрами та знаходження нових цікавих прикладів солітонних рівняннь у двох вимірах.
- Побудова квантових інтегровних систем що базуються на класичних некососиметричних r-матрицях, знаходження фізично цікавих прикладів таких систем.
- Розвиток методів точного знаходження спектру квантово – інтегровних систем та знаходження спектру конкретних моделей пов'язаних з некососиметричними r-матрицями.

Об'єктами дослідження є класичні та квантові інтегровні гамільтонові системи та алгебри їх симетрій.

Предметом дослідження є методи побудови класичних та квантових інтегровних систем та рівняннь солітонного типу, а також методи знаходження спектру квантово–інтегровних систем.

В роботі було застосовано наступні **методи дослідження**: метод класичної r-матриці, метод алгебраїчного та ієрархічного анзаців Бете.

Наукова новизна одержаних результатів.

В дисертаційній роботі вперше:

1. Побудовані нові класи класичних некососиметричних r-матриць зі спектральними параметрами.
2. Доведено, що з кожною невиродженою класичною r-матрицею зі спектральними параметрами можна асоціювати нескінченновимірну квазігардуйовану алгебру прихованих симетрій відповідних інтегровних гамільтонових систем. Явно побудовані базиси в цих алгебрах та обраховані відповідні комутаційні співвідношення.
3. Пред'явлено конструктивний спосіб побудови по данній r-матриці всіх мероморфних оператовів Лакса скінченновимірних гамільтонових систем, що їй відповідають. Побудовані нові приклади інтегровних систем що одержуються цим методом.
4. Розвинуто метод побудови інтегровних ієрархій рівняннь солітонного типу по данній класичній r-матриці та пред'явлено конструктивний метод побудови $U-V$–пар для відповідних рівняннь нульової кривизни. Побудовано нові приклади таких рівнянь.
5. Показано, що редукція в теорії солітонних рівняннь та теорії скінченновимірних гамільтонових систем пов'язана зі спеціальними точками класичних r-матриць в яких вони стають виродженими або сингулярними.
6. Побудована теорія квантово–інтегровних систем, що базується на класичних некососиметричних r-матрицях. Побудовані нови приклади таких систем. Зокрема, побудовані інтегровні узагальнення:
   (a) спінових ланцюжків Годена.
   (b) спінових ланцюжків Годена у зовнішньому полі.
   (c) спін – бозонних моделей типу Джейнса – Камінгса – Діке (ДКД).
   (d) бозонних моделей типу димерів Бозе – Хаббарда.

7. Побудовані спінові ланцюжки застосовані до конструювання інтегровних ферміонних моделей типу БКШ – Річардсона. Побудовано $p_x + ip_y$ – аналоги моделей Річардсона з одним та багатьма типами ферміонів та знайдено їх спектр методом анзацу Бете.

8. Метод алгебраїчного анзацу Бете розширено на клас квантово – інтегровних систем пов'язаних з некососиметричними r-матрицями. Показано, що у випадку алгебр $gl(n)$ ієрархічних анзац Бете може бути застосований до нестандартних ланцюжків вкладених підалгебр що включають вкладення $gl(n) \supset gl(n-k) \oplus gl(k)$. Таким чином, знайдено спектр квантово – інтегровних моделей що базуються на алгебрі $gl(n)$, зокрема, Z_p – градуйованих моделей типу Годена та типу Годена у зовнішньому магнітному полі, а також узагальнених моделей ДКД та узагальнених димерів Бозе – Хаббарда (випадок $p = 2$).

Практичне значення одержаних результатів.

Результаті, отримані в дисертації, є важливими в:

1. В теорії магнетизму (теорії рівнянь типу Ландау – Ліфшиця, що описує динаміку вектора намагніченості).

2. У фізиці конденсованого стану (теорії надпровідності малих металевих гранул).

3. В ядерній фізиці (теорії протон – нейтронних взаємодій).

4. Квантовій оптиці (теорії взаємодії світла з речовиною).

Значна частина результатів має загальний характер і є важливою при побудові та аналізі інтегровних систем будь якої інтерпритації.

Особистий внесок здобувача.

Подавляюча більшість публікацій виконана автором без співавторів.

Апробація роботи.

Матеріали дисертації пройшли апробацію на семінарах ІТФ НАН України (Київ, 2000-2018), Інст. математики НАН України, університетів м. Анжер (Франція), м. Тур (Франція), м. Париж VI-VII (Франція), м. Ліон (Франція), м. Утрехт (Голандія), м. Мілан (Італія), м. Рим (Італія), м. Катанья (Італія), Міжнародного Інституту СІССА (м. Трієст, Італія), доповідалися на IV, V, VI, VII міжнародних конференціях “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics” (Київ, червень 2001; 2003; 2005; 2007), міжнародному колоквіумі “Теоретико-групові методи у фізиці” (Дубна, серпень 2000), XIII Гуцулській робочій нараді “Методи теоретичної та математичної фізики” (Київ, вересень 2000), Робочій нараді НАТО “Некомутативні структури у фізиці і математиці” (Київ, вересень 2000), міжнародній конф. з бі-гамільтонових систем (Бедлево, Польша, серпень 2001), міжнародній конф. “Квантові групи та інтегровні системи” (Прага, Чехія, червень 2002), міжнародній конф. “Квантові групи та інтегровні системи” (Прага, Чехія, червень 2003), міжнародній нараді “Classical and Quantum Integrable Systems” (Дубна, Росія, 22-25 січня 2007), “The 2007 Twente Conference on Lie Groups” (Енсхеде, Нідерланди, 12-14 грудня, 2007), міжнародній конф. “ 30 років бі-гамільтонових систем” (Бедлево, Польша, серпень 2008), міжнародній конф. проекту ЕНІГМА (Трієст, Італія, жовтень 2008), міжнародній конф. “Квантові групи та інтегровні системи” (Прага, Чехія, червень 2009), наукових зборах ІТФ НАНУ (Київ, Україна, березень 2010), міжнародній конф. проекту ДІАДЕМ (Анжер, Франція, вересень 2012), міжнародній конф. з квантових інтегровних систем (Київ, Україна, червень 2013), міжнародній конф. памя’ті П.І.Голода (Київ, Україна, липень 2014), міжнародній конф. ”Фізика і математика нелінійних феноменів”, (Галіполі, Італія, червень 2015), міжнародній конф. “ Інтегровні системи і споріднені математичні структури (Геттінген, Німеччина, березень 2016), міжнародній конф. ”50 років методу оберненої задачі”, (Галіполі, Італія, червень 2017).

Публікації.

За матеріалами дисертації опубліковано 53 наукових статті.

Структура та обсяг дисертації.

Дисертаційна робота містить 307 сторінок; складається із Вступу, 8 Розділів, Висновків, Списку використаних джерел з 115 найменувань.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ

У Вступі дана загальна характеристика роботи: обгрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету роботи та ін.

У першому розділі — " Класичні r-матриці зі спектральними параметрами" — розглядається теорія загальних кососиметричних та некососиметричних класичних r-матриць, їх аналітична структура та влативості. Розділ носить вступний характер. Оригінальна частина розділу базується на роботах автора [43], [52].

В підрозділі 1.2 дано основні позначення та визначення. Основним об'єктом розгляду є класична r-матриця — елемент тензорного добутку $g \otimes g$ напівпростих (редуктивних) алгебр Лі g що задовольняє наступному рівнянню

$$[r_{12}(u_1,u_2), r_{13}(u_1,u_3)] = [r_{23}(u_2,u_3), r_{12}(u_1,u_2)] - [r_{32}(u_3,u_2), r_{13}(u_1,u_3)],$$

де $r_{12}(u_1,u_2) \equiv \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{\dim g} r^{\alpha\beta}(u_1,u_2) X_\alpha \otimes X_\beta \otimes 1$ і т.д.

В підрозділі 1.3 розглянуто некососиметричний аналог аналітичної поведінки класичних r-матриць в точках загального положення, а саме існування в деякій відкритій області $U \times U \subset C^2$ наступного розкладу

$$r(u,v) = \frac{\Omega}{(u-v)} + r_0(u,v), \tag{1}$$

де $r_0(u,v)$ регулярна в $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ - функція а $\Omega \in g \otimes g$ – тензорний Казимір.

В підрозділі також сформульовано гіпотезу про аналітичну поведінку класичних r-матриць в околі особливих точок.

Другий розділ дисертації називається "Методи побудови класичних r-матриць". В ньому наведені методи побудови класичних r-матриць та розглянуті їх конкретні приклади. Результати, що отримані автором по темі цього розділу і виносяться на захист, опубліковані в роботах [1, 2- 14, 16-19,20, 21, 25, 33, 42].

У підрозділі 2.2 окреслена загальна схема зв'язку класичних r- матриць з теорією класичних R-операторів.

У підрозділах 2.3-2.4 побудовані "деформовані" класичні r-матриці наступного вигляду:

$$r_{\Phi}(u,v) = \frac{\sum\limits_{\alpha=1}^{\dim g} \Phi(u)(X_{\alpha}) \otimes (\Phi(v)^{-1})^{*}(X^{\alpha})}{(u-v)},$$

де X_{α} базис в алгебрі Лі g і відображення $\Phi(u) : g \to g$, $\Phi(u) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \Phi_k u^k$, задовольняє рівняння

$$\Phi(u)([X,Y] + u\delta\Phi_1(X,Y)) = [\Phi(u)(X), \Phi(u)(Y)],$$

де $\delta\Phi_1(X,Y) = [\Phi_1(X),Y] + [X,\Phi_1(Y)] - \Phi_1([X,Y])$.

У підрозділі 2.4 побудовані "зкручені деформовані" класичні r-матриці наступного вигляду:

$$r^{\sigma}_{\Phi}(u,v) = \Phi(u) \otimes (\Phi^{-1}(v))^{*} \frac{(\sum\limits_{j=0}^{p-1} u^j v^{p-j} \sum\limits_{\alpha=1}^{\dim g_{\bar{j}}} X_{\bar{j},\alpha} \otimes X^{\overline{-j},\alpha})}{(u^p - v^p)},$$

де $X_{\bar{j},\alpha}$ — базисний елемент підпростору $g_{\bar{j}}$ і $X^{\overline{-j},\alpha}$ — базисний елемент дуального підпростору, $g = \sum\limits_{k=0}^{p-1} g_{\overline{k}}$ – Z_p-градуювання алгебри g що відповідає автоморфізму σ порядку p і відображення $\Phi(u)$ комутує з σ.

У підрозділі 2.5 описано метод "редукцій" r-матриць по дії групи автоморфізмів що приводить до r-матриць з попереднього підрозділу.

У підрозділі 2.6 описано метод K- або σ- зкруту r-матриць. Побудовані некососиметричні класичні r-матриці наступного вигляду:

$$r^{\sigma}_{12}(u_1,u_2) = r_{12}(u_1-u_2) - \widetilde{\sigma}_2(u_2) r_{12}(u_1-u_2),$$

де $r_{12}(u_1-u_2)$ — кососиметрична класична r-матриця і однопараметрична сім'я автоморфізмів $\sigma(u)$ алгебри g задовільняє наступну умову:

$$r_{12}(u_1-u_2)+\widetilde{\sigma}_1(u_1)\widetilde{\sigma}_2(u_2)r_{12}(u_1-u_2) = \widetilde{\sigma}_1(u_1)r_{12}(u_1-u_2)+\widetilde{\sigma}_2(u_2)r_{12}(u_1-u_2).$$

Третій розділ дисертаційної роботи має назву “Нескінченно-вимірні алгебри Лі і класичні r-матриці”. Результати, що отримані автором по темі розділу і виносяться на захист опубліковані в роботах [43], [44], [52].

У підрозділі 3.2 описані однополюсні r-матричні алгебри g_r^- в регулярних точках. Зоокрема, по r-матриці побудований базис алгебри g_r^- наступного вигляду

$$X^{(m),\alpha}(u) = \frac{1}{m!}\partial_v^m (r_{12}(u,v), X_2^\alpha)_2|_{v=0} = \frac{1}{m!}\sum_{\beta=1}^{\mathrm{dim} g} \partial_v^m (r^{\beta\alpha}(u,v))|_{v=0} X_\beta,$$

де $m \geq 0, \alpha \in \overline{1, \mathrm{dim} g}$, $\{X_\alpha\}$, $\{X^\alpha\}$ – дуальні базиси в g. Також явно описані фільтровані комутаційні співвідношення алгебри g_r^-

$$[X^{(m),\beta}(u), X^{(l),\gamma}(u)] = \sum_{\alpha=1}^{\mathrm{dim} g} C_\delta^{\beta\gamma} X^{(l+m+1),\delta}(u) + \sum_{s=0}^{m}\sum_{\delta,\kappa=1}^{\mathrm{dim} g} \frac{1}{s!l!} C^\beta_{\delta\kappa}(\partial_1^s \partial_2^l r_0)^{\delta\gamma} X^{(m-s),\kappa}(u)$$

$$-\sum_{s=0}^{l}\sum_{\delta,\kappa=1}^{\mathrm{dim} g} \frac{1}{s!m!} C^\gamma_{\delta\kappa}(\partial_1^s \partial_2^m r_0)^{\delta\beta} X^{(l-s),\kappa}(u),$$

де $\partial_1^l \partial_2^m r_0 = (\partial_1^l \partial_2^m r_0(u,v)|_{u=0,v=0}$, $C^\gamma_{\alpha\beta}$ — структурні константи алгебри g.

У підрозділі 3.3 описана квазіградуйована структура алгебри g_r^- та побудовані доповняльна підалгебра g_r^+ та повна r-матрична алгебра g_r. Центральним моментом підрозділу є поняття мультиплікатора, тобто такої мероморфної функції $f(u)$ що $f(u) g_r^- \subset g_r^-$.

У підрозділі 3.4 побудована явна формула квазіградуйованих комутаційних співвідношень в алгебрі g_r та її підалгебрах g_r^-, g_r^+. Тип квазіградуювання при цьому залежить від порядку мультиплікатора.

У підрозділі 3.5 побудована “канонічна” форма класичних r-матриць:

$$r(u,v) = \frac{\sum\limits_{\gamma=1}^{\mathrm{dim} g}\sum\limits_{j=1}^{n} X^{(j-1),\gamma}(u) \otimes Y_\gamma^{(n-i)}(v)}{f(u) - f(v)},$$

де $f(u)$ — мультиплікатор вигляду $f(u) = u^{-n} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k u^k$, n — порядок мультиплікатора, $X^{(j),\alpha}(u)$ визначено як вище а

$$Y_{\alpha}^{(j)}(v) \equiv \sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim g} \frac{1}{j!}(\partial_u^j r_{\alpha\beta}(u,v))|_{u=0} X^{\beta}.$$

У підрозділі 3.6 описані дуальні простори до алгебр g_r^-, g_r^+ та g_r. Показано що базис в цих просторах складається з елементів $f^k(v)Y_{\alpha}^{(j)}(v)$, $j \in \overline{1,n}$, де $n \geq 0$, $n < 0$ і $n \in Z$ відповідно.

У підрозділі 3.6 описані багатополюсні r-матричні алгебри в регулярних точках та відповідні комутаційні співвідношення.

У підрозділах 3.7- 3.8 описані одно- та багатополюсні r-матричні алгебри в особливих точках та відповідні комутаційні співвідношення.

Четвертий розділ дисертаційної роботи має назву “Інтегровні системи та класичні r-матриці”. В данному розділі побудовані матриці Лакса і інтеграли руху класично – інтегровних гамільтонових систем пов’язаних з класичним r-матрицями. Результати, що отримані автором по темі цього розділу і виносяться на захист опубліковані в роботах [16, 20, 24, 27, 28, 32, 36, 43, 45, 46, 47, 52].

У підрозділі 4.2 описані перша r-матрична дужка Лі-Пуасона та комутативна алгебра інтегралів руху “Лакс-інтегровних” систем.

У підрозділі 4.3 описаний загальний спосіб побудови матриць Лакса по класичних r-матрицях зі спектральними параметрами. Таким чином побудовані, зоокрема, матриці Лакса що відповідають неособливим точкам класичних r-матриць і мають вигляд

$$L^{u_1,\ldots,u_N}(v) = \sum_{l=1}^{N} \sum_{m_l=0}^{M_l} \sum_{\alpha=1}^{\dim g} L^{(m_l),u_l,\alpha} Y_{\alpha}^{(m_l,u_l)}(v),$$

де

$$Y_{\alpha}^{(m_l,u_l)}(v) \equiv \sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim g} \frac{1}{m_l!}(\partial_u^{m_l} r_{\alpha\beta}(u,v))|_{u=u_l} X^{\beta},$$

а дужки Пуасона мають вигляд

$$\{L^{(m_l),u_l,\alpha}, L^{(n_m),u_m,\beta}\} = \delta_{ml} C_{\gamma}^{\alpha\beta} L^{(m_l+n_l),u_l,\alpha}.$$

Зоокрема, матриці Лакса узагальнених моделей Годена відповідають випадку $M_l = 0$, $l \in \overline{1, N}$:

$$L^G(v) = \sum_{l=1}^{N} \sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} S^{(l),\alpha} r_{\alpha\beta}(u,v)|_{u=u_l} X^{\beta},$$

де

$$\{S^{(l),\alpha}, S^{(m),\beta}\} = \delta^{ml} C^{\alpha\beta}_{\gamma} S^{(m),\gamma}.$$

Також в цьому підрозділі описані матриці Лакса що відповідають особливим точкам класичних r-матриць. Таким чином побудовані, зоокрема, матриці Лакса моделей типу Джейнса – Каммінгса – Діке, багатобозонних моделей, моделей Тоди та їх деформацій. Зоокрема, матриці Лакса деформованих моделей Тоди записуються наступним чином

$$L^{dT}(v) = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} (p_i + \sum_{\alpha \in P \cup -\theta} e^{\alpha(q)} (\Phi_1^*)^i_{-\alpha})(\Phi^{-1}(v))^*(H_i) + v^{-1} \sum_{\alpha \in P \cup -\theta} e^{\alpha(q)} (\Phi^{-1}(v))^*(X_{-\alpha})$$

$$+ v \sum_{\alpha \in P \cup -\theta} \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} (\Phi_1')^i_{-\alpha} c_i (\Phi^{-1}(v))^*(X_{\alpha}),$$

де $c_\alpha \equiv \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} (\Phi_1')^i_{-\alpha} c_i$. Вони відповідають зкрученій коксетерівським автоморфізмом деформрваній r-матриці та її спеціальним точкам $v = 0$ і $v = \infty$. Відповідний гамільтоніан типу Тоди

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} (p_i - \sum_{\alpha \in P \cup -\theta} e^{\alpha(q)} (\Phi_1^*)^{\alpha}_i)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} (\sum_{\alpha \in P \cup -\theta} e^{\alpha(q)} (\Phi_1^*)^{\alpha}_i)^2 -$$

$$- \sum_{\alpha,\beta \in P \cup -\theta} e^{\alpha(q)+\beta(q)} (\Phi_2^*)^{\beta}_{-\alpha} + \sum_{\alpha \in P \cup -\theta} c_\alpha e^{\alpha(q)}$$

є "магнітною" деформацією звичайного гамільтоніану Тоди, де параметри деформації є матричні елементи тензорів Φ_1^*, Φ_2^*.

П'ятий розділ дисертаційної роботи має назву "Солітонні рівняння: загальна схема." В данному розділі описаний загальний метод побудови солітонних рівнянь в двох вимірах, що базується на класичних r-матрицях зі спектральними параметрами. Викладено приклади застосування цього методу до нових солітонних рівнянь відкритих автором (анізотропне рівняння НШ з похідною, модифіковані абелева та неабелеві ієрархії Тоди, "подвоєна" векторна ієрархія Ландау – Ліфшиця, анізотропна ієрархія з двома зсувами та ін.).

Результати, що отримані автором по темі цього розділу і виносяться на захист опубліковані в роботах [8, 10, 11, 13, 14, 17, 18, 19, 26, 43, 44, 53].

У підрозділах 5.2-5.3 описані матриці Лакса, друга r-матрична дужка Лі-Пуасона та комутатавна алгебра інтегралів руху.

У підрозділі 5.4 описані рівняння нульової кривизни з загальними $U-V$ парами зі значеннями в багатополюсних r-матричних алгебрах.

У підрозділі 5.5 описані інтегровні ієрархії з загальними $U-V$ парами зі значеннями в r-матричних алгебрах в регулярних точках. Вони співпадають з узагальненою ієрархією рівнянь типу Ландау-Лівшиця та ієрархією узагальненого кірального поля. Зоокрема, $U-V$ – пара узагальненого рівняння Ландау –Лівшиця має вигляд:

$$U^{u_k}(u)=\sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} l_{\alpha}^{(0),u_k}X^{(0),u_k,\alpha}(u),$$

$$V^{u_k}(u)=\sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}}(l_{\alpha}^{(0),u_k}X^{(1),u_k,\alpha}(u)+l_{\alpha}^{(1),u_k}X^{(0),u_k,\alpha}(u)),$$

де

$$X^{(m),u_k,\alpha}(u)=\frac{1}{m!}\sum_{\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}}\partial_v^m(r^{\beta\alpha}(u,v))|_{v=u_k}X_{\beta},$$

а $U-V$ пара узагальненого кірального поля наступна

$$U(u)=\sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} l_{\alpha}^{(0),u_k}X^{(0),u_k,\alpha}(u),\ \ V(u)=\sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} l_{\alpha}^{(0),u_l}X^{(0),u_l,\alpha}(u).$$

Самі рівняння узагальненого кірального поля мають вигляд

$$\partial_{x_l}L^{(0),u_k}=-[L^{(0),\nu_k},r(u_k,u_l)(L^{(0),u_l})],$$

$$\partial_{x_k}L^{(0),u_l}=-[L^{(0),\nu_l},r(u_l,u_k)(L^{(0),u_k})],$$

де $r(u_k,u_l)(L^{(0),u_l}) \equiv \sum\limits_{\gamma,\delta=1}^{\mathrm{dimg}} r^{\delta\gamma}(u_k,u_l) l_\gamma^{(0),u_l} X_\delta$, $L^{(0),u_k} = \sum\limits_{\beta=1}^{\mathrm{dimg}} l_\beta^{(0),u_k} X^\beta$, і т.д.

У підрозділі 5.6-5.10 описані інтегровні ієрархії з загальними $U-V$ парами зі значеннями в r-матричних алгебрах в сингулярних точках.

У підрозділі 5.6-5.7 описані "зсунуті" r-матричні дужки Лі-Пуасона та "зсунуті" інтеграли руху.

У підрозділах 5.8-5.9 описані "малі" інтегровні ієрархії в сингулярних точках та наведено їх приклади: ієрархія анізотропного двокомпонентного рівняння НШ з похідною, векторне узагальнення ієрархії рівняння Ландау-Лівшиця. Зоокрема, анізотропне двокомпонентне рівняння НШ з похідною це нелінійне диференційне рівняння в часткових похідних для двокомпонентного вектору $\vec{s}$:

$$\partial_t \vec{s} - A^{-2}(\partial_x \vec{s}) = \frac{1}{a_1 a_2 c} J(\partial_x^2 \vec{s}) - \frac{1}{c^2}\partial_x((\vec{s},\vec{s})\vec{s}),$$

де J симплектична два на два матриця, $A = \mathrm{diag}(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2)$, c — довільна константа. Це рівняння відповідає скрученій еліптичній r-матриці

$$r(u,v) = \sum_{k=1}^{3} \frac{u_i u_j v_k}{(u^2 - v^2)} X_k \otimes X_k,$$

де $u_k^2 = u^2 - a_k^2$, $v_k^2 = v^2 - a_k^2$ і спеціальній точці $v = a_3$ де покладено $a_3 = 0$.

У підрозділі 5.10 описані "великі" інтегровні ієрархії в сингулярних точках та наведено їх приклади: анізотропна ієрархія з двома зсувами, подвоєна векторна ієрархія рівнянь Ландау-Лівшиця, модифіковані абелеві і неабелеві рівняння Тоди. Зоокрема рівняння анізотропної ієрархії з двома зсувамизаписуються на два вектори з компонентами (S_2, S_3), (T_1, T_3) та мають вигляд

$$\partial_{t_2} S_2 = -(\sqrt{a_3^2 - a_1^2} S_3 T_1 - c_1 \frac{\sqrt{a_2^2 - a_3^2}}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2}} T_3),$$

$$\partial_{t_2} S_3 = -(-\sqrt{a_3^2 - a_1^2} S_2 T_1 + c_1 c_2 \frac{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}}{(a_1^2 - a_2^2)}),$$

$$\partial_{t_1} T_1 = (\sqrt{a_3^2 - a_2^2} S_2 T_3 + c_2 \frac{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}}{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}} S_3),$$

$$\partial_{t_1} T_3 = (-\sqrt{a_3^2 - a_2^2} S_2 T_1 + c_1 c_2 \frac{\sqrt{a_2^2 - a_3^2}}{(a_2^2 - a_1^2)}).$$

Вони відповідають скрученій еліптичній r-матриці і її спеціальним точкам $v = a_1$ та $v = a_2$, а c_1, c_2 — це параметри зсувів.

Найпростіше рівняння "подвоєної" векторної ієрархії Ландау-Лівшиця записується на два $n-2$-компонентних вектора $\vec{s}^{\pm}$, і має вигляд:

$$\partial_{t_1} s_i^- = \sqrt{c_- - \langle \overrightarrow{s^-}, \overrightarrow{s^-} \rangle} j_i s_i^+, \ \partial_{t_n} s_i^+ = \sqrt{c_+ - \langle \overrightarrow{s^+}, \overrightarrow{s^+} \rangle} j_i^{-1} s_i^-$$

де $j_i = \frac{\sqrt{a_i^2 - a_n^2}}{\sqrt{a_1^2 - a_i^2}}$. Вони відповідають "гіпереліптичній" r-матриці зі значеннями в $so(n) \otimes so(n)$ наступного вигляду

$$r(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{u_i u_j}{v_i v_j} \frac{X_{ij} \otimes X_{ij}}{(u^2 - v^2)},$$

де $u_k^2 = u^2 - a_k^2$, $v_k^2 = v^2 - a_k^2$ і її спеціальним точкам $v = a_1$ та $v = a_n$.

Модифіковані неабелеві рівняння Тоди мають вигляд

$$\partial_t((\partial_x g_0) g_0^{-1}) = -\delta \Phi_1((\partial_x g_0) g_0^{-1}, g_0 C^{(-1)} g_0^{-1}),$$

де $\delta \Phi_1(X, Y) \equiv [\Phi_1(X), Y] + [X, \Phi_1(Y)] - \Phi_1([X, Y])$, g_0 елемент підрупи G_0 постійної відносно автоморфізму σ скінченного порядку, $C^{(-1)} \in g_{-1}$ це постійна матриця. В випадку кокстерівського автоморфізму після заміни $g_0 = \exp \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{rankg}} \phi_i H_{\alpha_i}$ відповідні рівняння набувають наступного вигляду:

$$\partial_{tx}^2 \phi_k = -\sum_{i=1}^{\mathrm{rankg}} \sum_{\alpha_j \in P \bigcup -\Theta} \langle \delta \Phi_1(H_{\alpha_i}, X_{-\alpha_j}), H_{\alpha_k} \rangle c_{\alpha_j}^{(-1)} \partial_x \phi_i e^{-\alpha_j(\phi)}.$$

Ці рівняння є найбільш загальними модифікованими рівняннями Тоди.

Шостий розділ дисертаційної роботи має назву "Квантові інтегровні системи та класичні r-матриці". В данному розділі побудовано широкий клас квантово – інтегровних моделей, що базуються на класичних некососиметричних r-матрицях. Зокрема, побудовані квантово – інтегровні моделі типу Годена та Годена у зовнішньому магнітному полі, квантово –

інтегровні моделі типу Джейнса-Камінгса-Діке та квантово – інтегровні багатобозонні моделі, що узагальнюють димери Бозе – Хаббарда.

Результати, отримані автором по темі цього розділу і виносяться на захист опубліковані в роботах [21, 24, 27, 28, 32, 33, 36, 42, 46, 47, 49, 50].

У підрозділі 6.2 описані квантово – інтегровні моделі типу Годена що базуються на класичних некососиметричних r-матрицях. Детальніше, якщо $r(u,v)$ – класична r-матриця з розкладом (1) і $r_0(u,v)$ – її регулярна частина, $u_k \in U$, $\hat{S}_\alpha^{(k)}$ — узагальнені спінові оператори, що відповідають точці u_k, тоді оператори $\hat{H}_l^G$, $l=\overline{1,N}$ вигляду:

$$\hat{H}_l^G = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\mathrm{dim g}} \sum_{k\neq l}^{N} r^{\alpha,\beta}(u_k,u_l)\hat{S}_\alpha^{(k)}\hat{S}_\beta^{(l)} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta=1}^{\mathrm{dim g}} r_0^{\alpha,\beta}(u_l,u_l)(\hat{S}_\alpha^{(l)}\hat{S}_\beta^{(l)} + \hat{S}_\beta^{(l)}\hat{S}_\alpha^{(l)}),$$

утворюють комутативну підалгебру в універсальній огортуючий алгебрі і є узагальненими гамільтоніанами Годена.

У підрозділі 6.3 описані квантово – інтегровні моделі Годена у зовнішньому магнітному полі що базуються на класичних некососиметричних r-матрицях. Детальніше, якщо $r(u,v)$ – класична r-матриця з розкладом (1) і $r_0(u,v)$ – її регулярна частина, $u_l \in U$, $c(u) = \sum\limits_{\alpha=1}^{\mathrm{dim g}} c^\alpha(u_l)X_\alpha$ — елемент зсуву, тобто задовільняє рівнянню

$$[r_{12}(u,v), c_1(u)] - [r_{21}(v,u), c_2(v)] = 0,$$

тоді оператори $\hat{H}^l$, $l=\overline{1,N}$ вигляду:

$$\hat{H}_l^{G,c} = \hat{H}_l^G + \sum_{\alpha=1}^{\mathrm{dim g}} c^\alpha(u_l)\hat{S}_\alpha^{(l)}$$

утворюють комутативну підалгебру в універсальній огортуючий алгебрі і є узагальненими гамільтоніанами Годена у зовнішньому магнітному полі.

У підрозділі 6.4 описані квантово–інтегровні моделі типу Джейнса-Камінгса-Діке що базуються на класичних некососиметричних r-матрицях. Відповідні спін-бозонні гамільтоніани записуються наступним чином

$$\hat{H}_l^{JCD} = \hat{H}_l^G + \sum_{i=1}^{\mathrm{rank g}} \sum_{b=1}^{\mathrm{dim g}} \frac{1}{2} k_i \hat{S}_b^{(l)} \partial_u^2 r^{ib}(u,u_l)|_{u=u_0} + \sum_{a=1}^{\mathrm{dim g}^0_{u_0}} \sum_{b=1}^{\mathrm{dim g}} \hat{l}_a^{(0)}(\hat{b}_\beta^-, \hat{b}_\alpha^+)\hat{S}_b^{(l)} r^{ab}(u_0,u_l)$$

$$+\sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+}\sum_{b=1}^{\mathrm{dimg}}(\sqrt{\alpha(K)}\hat{S}_b^{(l)}(\hat{b}_\alpha^+\partial_u r^{\alpha b}(u,u_l)|_{u=u_0}+\hat{b}_\alpha^-\partial_u r^{-\alpha b}(u,u_l)|_{u=u_0}),$$

де u_0 — спеціальна точка класичної r-матриці, що пов'язана з деякою підалгеброю $g^0_{u_0}\subset g_K$ певної редуктивної підалгебри g_K, $\hat{b}^+_\alpha$, $\hat{b}^-_\alpha$ — бозонні оператори народження-знищення і $\hat{l}^{(0)}_a$ виражається через $\hat{b}^-_\beta$, $\hat{b}^+_\alpha$ за допомогою узагальнених формул Йордана-Швінгера [29].

У підрозділі 6.5 описані детально додаткові лінійні інтеграли Лакс-інтегровних моделей що базуються на симетріях класичної r-матриці.

У підрозділі 6.6 детально описані раціональні моделі типу Джейнса-Камінгса-Діке. Відповідні спін-бозонні гамільтоніани мають вигляд:

$$\hat{H}_l^{JCD}=\hat{H}_l^G+\sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+}\sqrt{\alpha(K)}(\hat{b}_\alpha^+\hat{S}_{-\alpha}^{(l)}+\hat{b}_\alpha^-\hat{S}_\alpha^{(l)})+\sum_{i=1}^{\mathrm{rankg}}(c_i+u_lk_i)\hat{S}_i^{(l)}+\sum_{\alpha\in\Delta_K}c_\alpha\hat{S}_\alpha^{(l)},$$

де K — постійний елемент підалгебри Картана, Δ_K — множина коренів його централізатора, Δ — множина коренів алгебри g.

У підрозділі 6.7 детально описані Z_2-градуйовані моделі типу Джейнса-Камінгса-Діке. Відповідні спін-бозонні гамільтоніани мають вигляд:

$$\hat{H}_l^{JCD}=\hat{H}_l^G+u_l\sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+}\sqrt{\alpha(K)}(\hat{b}_\alpha^+\hat{S}_{-\alpha}^{(l)}+\hat{b}_\alpha^-\hat{S}_\alpha^{(l)})+u_l^2\sum_{i=1}^{\mathrm{rankg}}k_i\hat{S}_i^{(l)}+\sum_{i=1}^{\mathrm{rankg}}c_i\hat{S}_i^{(l)}.$$

У підрозділі 6.8 описані узагальнені багатобозонні димери Бозе- Хаббарда. Відповідні гамільтоніани є індивідуальними для кожної r-матриці.

Сьомий розділ дисертаційної роботи має назву "Анзац Бете та класичні r-матриці." В цьому розділі алгебраїчний анзац Бете поширено на випадок квантово–інтегровних систем пов'язаних з класичними некососиметричними r-матрицями. У випадку алгебр Лі серії $gl(n)$ ієрархічний анзац Бете узагальнено на нестандартні ланцюжки вкладених підалгебр. Використовуючи його діагоналізовано Z_p–градуйовані гамільтоніани Годена та узагальнені моделі типу Джейнса-Камінгса-Діке та димерів Бозе–Хаббарда, що базуються на Z_2–градуйованих r-матрицях. Результати, що отримані автором по темі цього розділу і виносяться на захист опубліковані в роботах [23,29,48,51].

У підрозділі 7.2 розглянуто алгебраїчний анзац Бете у найпростішому випадку $g = sl(2)$. Показано що

$$\hat{\tau}(u) = \hat{L}_3^2(u) + \frac{1}{2}(\hat{L}_-(u)\hat{L}_+(u) + \hat{L}_+(u)\hat{L}_-(u))$$

є генеруючою функцією квантових інтегралів руху та знайдено її спектр на векторах Бете у випадку діагональних r-матриць вигляду

$$r(u,v) = \frac{1}{2}(r^{(-)}(u,v)X_+ \otimes X_- + r^{(+)}(u,v)X_- \otimes X_+) + r^{(3)}(u,v)X_3 \otimes X_3.$$

А саме, показано, що якщо параметри v_i задовольняють рівнянням Бете:

$$\Lambda_3(v_i) - \sum_{j=1, j\neq i}^{M} r^{(3)}(v_j, v_i) = (r_0^{(3)}(v_i,v_i) - \frac{1}{2}(r_0^{(+)}(v_i,v_i) + r_0^{(-)}(v_i,v_i))),\ i \in \overline{1,M}.$$

Тоді вектори

$$|v_1 v_2 \cdots v_M\rangle = \hat{L}_-(v_1)\hat{L}_-(v_2)\cdots\hat{L}_-(v_M)|0\rangle,$$

де $|0\rangle$ — вакуумний вектор, є власними векторами генеруючої функції $\hat{\tau}(u)$ з наступними власними значеннями:

$$\Lambda(u,\{v_i\}) = (\Lambda_3(u) - \sum_{i=1}^{M} r^{(3)}(v_i,u))^2 - \sum_{i=1}^{M} r^{(+)}(v_i,u) r^{(-)}(v_i,u) + \partial_u \Lambda_3(u)$$
$$+ (r_0^{(-)}(u,u) + r_0^{(+)}(u,u))\Lambda_3(u).$$

Тут $\Lambda_3(u)$ — власне значення оператора $\hat{L}_3(u)$ на вакуумному векторі.

У підрозділі 7.3 розглянуто алгебраїчний анзац Бете у випадку $g = gl(n)$ та стандартного ланцюжка вкладених підалгебр $gl(n) \supset gl(n-1) \supset gl(n-2) \supset ... \supset gl(1)$. Показано що метод застосовний у випадку діагональних r-матриць вигляду

$$r(u_1,u_2) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} r_{ji}(u_1,u_2) X_{ij} \otimes X_{ji}$$

таких що

$$(i)\ r_{ji}(u,v) = r_{-,i}(u,v),\ \ r_{ij}(u,v) = r_{+,i}(u,v)\ \forall j \in \overline{i+1,n}, \forall i \in \overline{1,n-1},$$

$$(ii)\ r_{22}(u,v) = r_{33}(u,v) = ... = r_{nn}(u,v).$$

Розглянуто три параметричних сімейства таких r-матриць і відповідні квантові інтегровні моделі та їх точний розв'язок методом анзацу Бете.

У підрозділі 7.4 розглянуто алгебраїчний анзац Бете у випадку $g = gl(n)$ та нестандартного ланцюжка вкладених підалгебр що включають обмеження $gl(n) \supset gl(n_1) \oplus gl(n-n_1)$ Показано що метод застосовний у випадку діагональних r-матриць при умові що їх компоненти задовольняють наступним рівностям

$$(i) r_{ji}(u,v) = r_{-,n_1}(u,v),\ r_{ij}(u,v) = r_{+,n_1}(u,v),\ \forall i \in \overline{1,n_1},\ j \in \overline{n_1+1,n}.$$

$$(ii) r_{aa}(u,v) = r_{bb}(u,v), \forall a,b \in \overline{1,n_1},\ r_{kk}(u,v) = r_{ll}(u,v), \forall k,l \in \overline{n_1+1,n}.$$

Знайдено у загальному вигляді спектр генеруючої функції квадратичних квантових інтегралів:

$$\hat{\tau}_n(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \hat{L}_{ij}(u)\hat{L}_{ji}(u).$$

У підрозділі 7.5 розвинутий метод застосовано до випадку квантових систем Годена базованих на Z_p-градуйованих класичних r-матрицях.

У підрозділі 7.6 розвинутий метод застосовано до випадку квантових моделей Джейнса-Камінгса-Діке та узагальнених димерів Бозе–Хаббарда базованих на Z_2-градуйованих класичних r-матрицях. Зоокрема показано що власні значення генеруючої функції $\hat{\tau}_n(u)$ мають вигляд:

$$\Lambda_n(u,\{v_j^{(k)}\}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{ii}^2(u) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)(u^2\partial_{u^2}-1)\Lambda_{ii}(u) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\Lambda_{kk}(u)\Big(\sum_{i=1}^{M_{k-1}}\frac{u^2}{(v_i^{(k-1)})^2-u^2} - \sum_{i=1}^{M_k}\frac{u^2}{(v_i^{(k)})^2-u^2}\Big)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{M_k}\frac{u^4}{((v_i^{(k)})^2-u^2)((v_j^{(k)})^2-u^2)} - \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{M_k}\sum_{j=1}^{M_{k+1}}\frac{u^4}{((v_i^{(k)})^2-u^2)((v_j^{(k+1)})^2-u^2)}$$

$$-\frac{n}{2}\sum_{j=1}^{M_{n_1}}\frac{u^2}{(v_i^{(n_1)})^2-u^2} + \frac{1}{2}\Big((n-n_1)\sum_{i=1}^{n_1}\Lambda_{ii}(u) - n_1\sum_{i=n_1+1}^{n}\Lambda_{ii}(u)\Big),$$

де $M_0 = M_n = 0$, M_k, $k \in \overline{1, n-1}$ – невід'ємні цілі числа і бистроти $v_i^{(k)}$, $k \in \overline{1, n-1}$, $i \in \overline{1, M_k}$ задовільняють наступні рівняння Бете:

$$\Lambda_{kk}(v_i^{(k)})-\Lambda_{k+1k+1}(v_i^{(k)})+\frac{n}{2}\delta_{kn_1} = \sum_{j=1;j\neq i}^{M_k} \frac{2(v_i^{(k)})^2}{(v_j^{(k)})^2-(v_i^{(k)})^2} - \sum_{j=1}^{M_{k-1}} \frac{(v_i^{(k)})^2}{(v_j^{(k-1)})^2-(v_i^{(k)})^2}$$

$$-\sum_{j=1}^{M_{k+1}} \frac{(v_i^{(k)})^2}{(v_j^{(k+1)})^2-(v_i^{(k)})^2},\ k \in \overline{1, n-1}$$

а $\Lambda_{ii}(u)$ — власні значення $L_{ii}(u)$ на вакуумному векторі.

Восьмий розділ дисертаційної роботи має назву "Інтегровні ферміонні моделі і класичні r-матриці." В данному розділі будується сімейство інтегровних ферміонних моделей типу БКШ з кількома типами ферміонів та гамільтоніанами s- та p_x+ip_y – типу. Результати, що отримані автором по темі цього розділу і виносяться на захист опубліковані в роботах [30, 29, 31, 38,39, 40, 41].

У підрозділі 8.2 описана "ферміонізація" простих алгебри Лі.

Підрозділ 8.3 присвячений інтегровним ферміонним моделям s–типу що базуються на раціональних r-матрицях. Показано що існує три типи таких гамільтоніанів, що містять m типів ферміонів, а саме

$$1)\hat{H}^s_{gBCS} = \sum_{l=1}^{N} \epsilon_l \sum_{i=1}^{m}(c^\dagger_{l,i,-}c_{l,i,-} + c^\dagger_{l,i,+}c_{l,i,+}) - g\sum_{k,l=1}^{N}\sum_{i,j=1}^{m} c^\dagger_{l,j,+}c^\dagger_{l,i,-}c_{k,i,-}c_{k,j,+},$$

$$2)\hat{H}^s_{gBCS} = \sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{m} \epsilon_l(c^\dagger_{l,i,-}c_{l,i,-} + c^\dagger_{l,i,+}c_{l,i,+}) - 2g\sum_{k,l=1}^{N}\sum_{i=1}^{m} c^\dagger_{l,i,+}c^\dagger_{l,i,-}c_{l,i,-}c_{l,i,+}-$$

$$-g\sum_{k,l=1}^{N}\sum_{i,j=1,i<j}^{m}(c^\dagger_{l,j,+}c^\dagger_{l,i,-} + c^\dagger_{l,i,+}c^\dagger_{l,j,-})(c_{k,i,-}c_{k,j,+} + c_{k,j,-}c_{k,i,+}),$$

$$3)\hat{H}^s_{gBCS} = \sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{m} \epsilon_l(c^\dagger_{l,i,-}c_{l,i,-} + c^\dagger_{l,i,+}c_{l,i,+})-$$

$$-g\sum_{k,l=1}^{N}\sum_{i,j=1,i<j}^{m}(c^\dagger_{l,i,+}c^\dagger_{l,j,-} - c^\dagger_{l,j,+}c^\dagger_{l,i,-})(c_{k,j,-}c_{k,i,+} - c_{k,i,-}c_{k,j,+}).$$

Вони повязані з алгебрами $gl(2m)$, $sp(2m)$ та $so(2m)$ відповідно.

У випадку $m = 2$ отримані моделі інтерпритуються як $N = Z$ інтегровні протон-нейтронні моделі s-типу.

Підрозділ 8.4 присвячений інтегровним ферміонним моделям $p_x + ip_y$–типу що базуються на Z_2-градуйованих r-матрицях. Показано що існує три типи таких гамільтоніанів, що містять m типів ферміонів, а саме

$$1)\hat{H}^{p_x+ip_y}_{gBCS} = \sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}\epsilon_l(c^{\dagger}_{l,i,-}c_{l,i,-}+c^{\dagger}_{l,i,+}c_{l,i,+})-g\sum_{k,l=1}^{N}\sqrt{\epsilon_k}\sqrt{\epsilon_l}\sum_{i,j=1}^{m}c^{\dagger}_{l,j,+}c^{\dagger}_{l,i,-}c_{k,i,-}c_{k,j,+},$$

$$2)\hat{H}^{p_x+ip_y}_{gBCS} = \sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}\epsilon_l(c^{\dagger}_{l,i,-}c_{l,i,-}+c^{\dagger}_{l,i,+}c_{l,i,+})-2g\sum_{k,l=1}^{N}\sqrt{\epsilon_k}\sqrt{\epsilon_l}\sum_{i=1}^{m}c^{\dagger}_{l,i,+}c^{\dagger}_{l,i,-}c_{k,i,-}c_{k,i,+}$$

$$-g\sum_{k,l=1}^{N}\sqrt{\epsilon_k}\sqrt{\epsilon_l}\sum_{i,j=1,i<j}^{m}(c^{\dagger}_{l,j,+}c^{\dagger}_{l,i,-}+c^{\dagger}_{l,i,+}c^{\dagger}_{l,j,-})(c_{k,i,-}c_{k,j,+}+c_{k,j,-}c_{k,i,+}),$$

$$3)\hat{H}^{p_x+ip_y}_{gBCS} = \sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}\epsilon_l(c^{\dagger}_{l,i,-}c_{l,i,-}+c^{\dagger}_{l,i,+}c_{l,i,+})-$$

$$-g\sum_{k,l=1}^{N}\sqrt{\epsilon_k}\sqrt{\epsilon_l}\sum_{i,j=1,i<j}^{m}(c^{\dagger}_{l,i,+}c^{\dagger}_{l,j,-}-c^{\dagger}_{l,j,+}c^{\dagger}_{l,i,-})(c_{k,j,-}c_{k,i,+}-c_{k,i,-}c_{k,j,+}),$$

Вони повязані з алгебрами $gl(2m)$, $sp(2m)$ та $so(2m)$ відповідно.

У випадку $m = 2$ отримані моделі інтерпритуються як $N = Z$ інтегровні протон-нейтронні моделі $p_x + ip_y$-типу.

Підрозділ 8.5 присвячений діагоналіції отриманих інтегровних ферміонних гамільтоніанів методом аналітичного анзацу Бете. Ми показуємо, зоокрема, що спектр гамільтоніанів з Підрозділу 8.3 має вигляд

$$h^{s}_{gBCS} = 2\sum_{i=1}^{M_m}v^{(m)}_i,$$

де бистроти $v^{(k)}_i$, $i \in \overline{1, M_k}$ задовольняють наступним рівнянням Бете:

$$(K,\alpha_i)+\sum_{l=1}^{N}\frac{(\lambda^{(l)},\alpha_i)}{v^{(i)}_k-\epsilon_l} = \sum_{l=1,l\neq k}^{M_i}\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{v^{(i)}_k-v^{(i)}_l}+\sum_{j=1,j\neq i}^{\mathrm{rankg}}\sum_{l=1}^{M_j}\frac{(\alpha_i,\alpha_j)}{v^{(i)}_k-v^{(j)}_l},$$

ϵ_l — вільна енергія l- того ферміона, α_i, $i \in \overline{1, \mathrm{rankg}}$ прості корені алгебри Лі g, $\lambda^{(1)} = ... = \lambda^{(N)} = \lambda$, $K = g^{-1}\lambda$, де $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{\mathrm{rankg}})$ — характер фундаментального представлення алгебри g, а саме

1. $\lambda_1 = ... = \lambda_m = 1, \lambda_{m+1} = ... = \lambda_{2m} = 0$ у випадку алгебри Лі $gl(2m)$,
2. $\lambda_1 = ... = \lambda_m = 1$ у випадку алгебр Лі $sp(2m)$ і $so(2m)$.

У Підрозділі 8.5 показоно також що спектр гамільтоніанів з Підрозділу 8.4 має вигляд:

$$h^{p_x+ip_y}_{gBCS} = 2\sum_{i=1}^{M_m}(v_i^{(m)})^{-2}, \tag{2}$$

де бистроти $v_i^{(k)}$, $i \in \overline{1, M_k}$ задовольняють наступним рівнянням Бете:

$$\sum_{l=1}^{N}\frac{(\lambda^{(l)}, \alpha_i)}{\epsilon_l^{-1} - (v_k^{(i)})^2} + \frac{1}{4(v_k^{(i)})^2}(2K + \rho_K - \rho^K, \alpha_i) =$$

$$= \sum_{l=1, l\neq k}^{M_i}\frac{(\alpha_i, \alpha_i)}{(v_l^{(i)})^2 - (v_k^{(i)})^2} - \frac{(\alpha_i, \alpha_i)}{4(v_k^{(i)})^2} + \sum_{j=1, j\neq i}^{\mathrm{rankg}}\sum_{l=1}^{M_j}\frac{(\alpha_j, \alpha_i)}{(v_l^{(j)})^2 - (v_k^{(i)})^2}, \quad i \in \overline{1, \mathrm{rankg}},$$

де α_i — прості корені, $\rho^K = \sum\limits_{\alpha\in(\Delta_K)_+}\alpha$, $\rho_K = \sum\limits_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+}\alpha$, $\lambda^{(1)} = ... = \lambda^{(N)} = \lambda$, $K = k\lambda$, де $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{\mathrm{rankg}})$ — характер фундаментального представлення алгебри g, що визначається як і в s-випадку, $g = 2(k+m)^{-1}$ у випадку алгебри Лі $gl(2m)$, $g \equiv 2(k + m + 1)^{-1}$ у випадку алгебри Лі $sp(2m)$, $g \equiv 2(k + m - 1)^{-1}$ у випадку алгебри Лі $so(2m)$.

Нарешті, у Висновках наведено основні результати дисертації.

ВИСНОВКИ

1. Запропоновано новий метод побудови класичних r-матриць зі спектральними параметрами шляхом інфенітезимальних деформацій алгебр петель. Таким чином побудовано широкий клас класичних r-матриць, що є деформаціями стандартних раціональних r-матриць. Також об'єднано метод "деформацій" з методом "зсуву" та "зкруту" r-матриць за допомогою автоморфізму та одержані "зсунуті" та "зкручені" деформовані r-матриці.

2. Побудовано алгебри Лі прихованих симетрій стартуючи з класичної r-матриці зі спектральними параметрами. Показано, що класична r-матриця породжує пучок нескінченновимірних алгебр Лі що нумерується другим спектральним параметром r-матриці. Доведено, що, в так званих, неособливих точках пучка відповідні r-матричні алгебри мають квазіградуйовану структуру та побудовано їх розширення — квазіградуйовані алгебри Лі з розкладом Костанта – Адлера – Саймса, що є узгодженим з квазіградуйованням. Показано, що в особливих точках, де r-матриця вироджується, структура відповідних r-матричних алгебр змінюється.

3. Розроблено метод побудови матриць Лакса стартуючи з даної класичної r-матриці зі спектральними параметрами. Показано, що кожній r-матриці відповідає пучок матриць Лакса, що нумерується першим спектральним параметром r-матриці. Показано, що існують неособливі значення спектрального параметра при яких матриця Лакса описує гамільтонові системи типу Ейлера – Арнольда на "підстилаючій" напівпростій алгебрі Лі g та її розширеннях типу навівпрямої суми та що існують особливі значення спектрального параметра при якому структура матриць Лакса змінюється. Досліджено структуру матриць Лакса в особливих точках, зокрема, описані, так звані, елементи зсуву, а також бозонні Лаксові матриці. Досліджена структура багатополюсних матриць Лакса. Показано, що у випадку коли всі полюси матриць Лакса неособливі, то їм відповідають узагальнені

системи Годена та їх розширення. Показано, що матрицям Лакса зі спеціальними полюсами відповідають, зокрема, узагальнені системи Гордена у зовнішньому магнітному полі, спін-бозонні моделі типу Джейнса-Каммінгса-Діке, багатобозонні моделі типу димерів Бозе – Хаббарда та узагальнені ланцюжки Тоди.

4. Розроблено метод побудови інтегровних рівнянь в часткових похідних в просторі розмірності два стартуючи з класичної r-матриці зі спектральними параметрами. Представлені явні формули $U - V$ – пар в найпростіших "номінуючих" рівнянь відповідних ієрархій. Показано, що існують два типи ієрархій: так звані "малі" ієрархії, що включають лише рівняння еволюційного типу і "великі" ієрархії, що містять рівняння "малих" ієрархій та їх, так звані, негативні потоки. Показано, що редукції в інтегровних ієрархіях пов'язані з особливими точками r-матриць, в яких вони стають сингулярними або виродженеми. Побудовані загальні інтегровні ієрархії що пов'язані з неособливими точками r-матриць. Показано, що відповідні "малі" ієрархії співпадають з різноманітними узагальненими рівняннями Ландау – Ліфшиця, а "великі" ієрархії – з узагальненими ієрархіями типу кірального поля. Досліджено також редуковані інтегровні ієрархії пов'язані з особливими точками r-матриць і побудовані приклади таких ієрархій. Показано, що рівняння "великих" інтегровних ієрархій можна виписати в загальному вигляді без специфікації конкретної форми r-матриць. Показано, що існує три типи таких ієрархій: редуковані рівняння типу анізатропного кірального поля, r-матричне узагальнення абелевих та неабелевих рівнянь Тоди та новий клас інтегровних рівнянь які ми називаємо "ієрархіями з подвійним зсувом". Побудовано приклади таких рівняннь.

5. Показано, що з класичними некососиметричними r-матрицями зі спектральними параметрами можна асоціювати квантові інтегровні системи. Зокрема, показано, що з довільними класичними некососиметричними r-матрицями можна асоціювати інтегровні узагальнення квантових ланцюжків Годена. Показано також, що з класичними r-матрицями які мають нетривіальні елементи зсуву можна асоціювати квантові інтегровні ланцюжки Годена у зовнішньому магнітному полі, з класичними r-матрицями, що мають особливі точки бозонного типу, можна асоціювати квантові інтегровні системи типу

Джейнса-Каммінгса-Діке і квантові багатобозонні моделі типу димерів Бозе-Хаббарда. Розглянуто приклади алгебр $gl(n)$ та раціональних і Z_2-градуйованих r-матриць.

6. Розвинуто метод алгебраїчного анзацу Бете (його Лі–алгебраїчна версія), що базується на класичних некососиметричних r-матрицях. У випадку алгебр $gl(n)$ розвинуто метод ієрархічного анзацу Бете що базується на ланцюжку вкладених підалгебр. Розглянуто випадки стандартного ланцюжка вкладених підалгебр $gl(n) \supset gl(n-1) \supset ... \supset gl(1)$ та нестандартних ланцюжків що базуються на редукціях типу $gl(n) \supset gl(n-p) \oplus gl(p)$. Розвинутий метод застосовано до Z_p–градуйованих r-матриць та відповідних моделей типу Годена і (у випадку $p = 2$) до моделей ДКД та димерів Бозе-Хаббарда.

7. Базуючись на зконструйованих гамільтоніанах Годена у зовнішньому магнітному полі, побудовані інтегровні ферміонні моделі типу БКШ-Річардсона. З цією метою побудовані формули ферміонізації спінових операторів фундаментальних представлень класичних матричних алгебр $gl(n)$, $so(2n)$ та $sp(2n)$. Використовуючи їх та узагальнені гамільтоніани Годена у зовнішньому полі, побудовані інтегровні ферміонні гамільтоніани типу БКШ-Річардсона. Показано, що існує два типи *точних* аналогів гамільтоніанів Річардсона – так звані "s" та "$p_x + ip_y$" – типи, що базуються на раціональних та Z_2 – градуйованих r-матрицях. Показано, що у випадку алгебр рангу один, узагальнені гамільтоніани Річардсона містять лише один тип ферміонів, в той час, як у випадку алгебр Лі вищих рангів відповідні моделі містять багато типів ферміонів. Інтегровні моделі що базуються на алгебрах $gl(4)$, $sp(4)$ та $so(4)$ містять два типи ферміонів і інтерпритуються як інтегровні протон–нейтронні моделі.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Голод П. Анізотропні квазіградуйовані алгебри на алгебраїчних кривих та інтегровні гамільтонові системи/ П.І.Голод, Т.В. Скрипник// Наукові записки НАУКМА -сер. фіз.мат. наук- 2000 - Т. 18.-С. 20-25.

2. Skrypnyk T. Quasi-graded Lie algebras on hyperelliptic curves and classical integrable systems/ T.Skrypnyk// Journal of Math.Phys - 2001 - Vol. 42.- No 9.- P. 4570-4581.

3. Skrypnyk T. Integrable hamiltonian systems via quasigraded Lie algebras/T. Skrypnyk// Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine - 2001 - Vol. 32. - No II.

4. Skrypnyk T. Generalized Clebsh and Neuman integrable systems from the special quasigraded Lie algebras on the higher genus curves/ T. Skrypnyk// Ukr. Phys. Jour. . - 2002.- Vol. 37. - No 3. - P. 293-301.

5. Skrypnyk T. Euler equations on the Lie algebras: new interpretation and isomorphism of the integrable cases/ T.Skrypnyk// Reports in Math. Phys. - 2002 - Vol. 50. - Issue 3. - P. 299-305.

6. Skrypnyk T. Lie algebras on hyperelliptic curves and finite-dimensional integrable systems/ T. Skrypnyk// Yadernaya Physica - 2002- Vol. 65 - No 6. - P. 1141-1145.

7. Skrypnyk T. Quasigraded deformations of loop algebras, "deformed" Lax representation and classical integrable systems/ T.Skrypnyk// Czech J. Phys. - 2002 - Vol. 52.- No 11.- 1283-1288.

8. Skrypnyk T. Quasigraded deformations of loop algebras, and hierarchies of integrable equations/ T.Skrypnyk// *Czech J. Phys.* -2003 - Vol. 53 - No 11. - P. 1119-1124.

9. Skrypnyk T. Integrable spin generalization of the generalized Clebsh and Neuman integrable systems/ T.Skrypnyk// J. Phys. A - 2003 - Vol. 36. - P. 4407-4416.

10. Skrypnyk T. Matrix generalization of Landau-Lifshitz equation/ T.Skrypnyk// Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine - 2004 - part 1. - p. 462-469.

11. Skrypnyk T. "Doubled" Landau-Lifshiz hierarchy and special quasigraded Lie algebras/ T.Skrypnyk// Journal of Physics A - 2004 - Vol. 37 - No 31. - C. 7755-7768.

12. Skrypnyk T. Deformations of the loop algebras and classical integrable systems: finite-dimensional integrable systems/ T. Skrypnyk// Reviews in Mathematical Physics - 2004 - Vol. 16 - No 7 .- P. 823-844.

13. Skrypnyk T. Deformations of the loop algebras and hierarchies of integrable equations / T. Skrypnyk // J. Math. Phys . - 2004 - Vol. 45. - No 12. - P. 4578-4595.

14. Skrypnyk T. Quasigraded lie algebras, Kostant–Adler scheme, and integrable hierarchies/ T. Skrypnyk// Teoret. Mat. Fiz.-2005. - Vol. 142.- No 2.- P. 329–345.

15. Skrypnyk T. Dual R-matrix integrability/ T. Skrypnyk // Teoret. Mat. Fiz. - 2005 - Vol. 155.- No 1. - P. 147–160.

16. Skrypnyk T. Integrable deformation of the Toda chain and quasigraded Lie algebras / T. Skrypnyk //J. Phys. A: Math. Gen - 2005 - Vol. A 38.- No 44.- P. 9665.

17. Skrypnyk T. Integrable deformations of the mKdV and SG hierarchies and quasigraded Lie algebras/ T. Skrypnyk// Physica D - 2006 - Vol. 216 - No 2. - P. 247-260.

18. Skrypnyk T. Quasigraded Lie algebras and modified Toda field equations / T.Skrypnyk // SIGMA - 2006 - Vol. 2. - Paper 043. - 14 pages.

19. Skrypnyk T. Modified non-abelian Toda field equations and twisted quasigraded Lie algebras/ T. Skrypnyk // Journal of Mathematical Physics - 2006 - Vol. 47. - No 3. - P. 063509.

20. Skrypnyk T. New integrable Gaudin-type systems, classical r-matrices and quasigraded Lie algebras/ T. Skrypnyk //Phys.Lett. - 2005 - Vol. A 334.- Issues 5-6. - P. 390-399.

21. Skrypnyk T. Integrable quantum spin chains, non-skew symmetric r-matrices and quasigraded Lie algebras/ T.Skrypnyk // Journal of Geometry and Physics - 2006 - Vol. 57. - No 1. - P. 53–67.

22. Skrypnyk T. Generalized quantum Gaudin spin chains, involutive automorphisms and 'twisted' classical r-matrices/T.Skrypnyk //Journal of Mathematical Physics - 2006 - Vol. 47. - Issue 3. - P. 033511.

23. Skrypnyk T. Quantum integrable systems, non-skew symmetric r-matrices and algebraic Bethe anzatz/ T. Skrypnyk // J. Math. Phys. - 2007 - Vol. 48. - No 2. - 023506.

24. Skrypnyk T. Generalized Gaudin systems in the external magnetic field and non-skew-symmetric classical r-matrices/ T. Skrypnyk// J. Phys. - 2007 - Vol. A 40. - P. 13357-13352.

25. Skrypnyk T. Generalized Gaudin spin chains, non-skew symmetric r-matrices and Reflection Equation Algebras./ T. Skrypnyk // Jour. Math. Phys. - 2007 - Vol. 48.. - No 11.- 113521.

26. Skrypnyk T. Classical R-operators and integrable Thirring-type equations/ T.Skrypnyk // Symmetry, Integrability and Geometry - 2008 - Vol. 4. -Paper 011.- 19 p.

27. Skrypnyk T. Generalized n-level Jaynes-Cummings and Dicke models, classical rational r-matrices and nested Bethe ansatz / T.Skrypnyk // J. Phys. A - 2008 - Vol. 41. - p.475202.

28. Skrypnyk T. Integrability and superintegrability of the generalized n-level many-mode Jaynes-Cummings and Dicke models/ T. Skrypnyk// J. Math. Phys. - 2009 - Vol. 50. - No. 10.- P. 103523.

29. Skrypnyk T. Non-skew-symmetric classical r-matrices, algebraic Bethe ansatz and BCS-type systems/ T.Skrypnyk // J. Math. Phys. - 2009 - Vol. 50. - No. 3. - P. 033504.

30. T.Skrypnyk, Spin chains in magnetic field, non-skew-symmetric classical r-matrices and BCS-type integrable systems/ T.Skrypnyk // Nuclear Physics - 2009 - Vol. B 806. - No 3. - P.504-528.

31. Skrypnyk T., Non-skew-symmetric classical r-matrices and integrable cases of the reduced BCS model/ T. Skrypnyk// J. Phys. A - 2009 - Vol. 42. - No. 47. - P.472004.

32. Skrypnyk T., Integrable modifications of Dicke and Jaynes-Cummings models, Bose-Hubbard dimers and classical r-matrices / T. Skrypnyk// J. Phys. A - 2010 - Vol. 43. - No. 20. - P.205205.

33. Skrypnyk T., Lie algebras with triangular decompositions, non-skew-symmetric classical r-matrices and Gaudin-type integrable systems / T. Skrypnyk// J. Geom. Phys. - 2010 - Vol. 60. - No. 3. - P. 491–500.

34. Skrypnyk T. Quasi-periodic functions on the torus and sl(n)-elliptic Lie algebra/ T.Skrypnyk// J. Math. Phys. - 2012 - Vol. 53 - No. 2. - P. 023502.

35. Dubrovin B., Classical double, R-operators, and negative flows of integrable hierarchies/ B. Dubrovin, T. Skrypnyk// Teoret. Mat. Fiz. - 2012 - Vol. 172. - No 1. - P. 40–63.

36. Skrypnyk T. Elliptic three-boson system, "two-level three-mode" JCD-type models and non-skew-symmetric classical r-matrices. / T.Skrypnyk //*Nuclear Phys. B* - 2012 - Vol 856 - No. 2. - P. 552–576.

37. Skrypnyk T. Quasigraded bases in loop algebras and classical rational r-matrices/ T.Skrypnyk// J. Math. Phys. - 2012 - Vol. 53. - No. 8. - P. 083501.

38. Skrypnyk T. Rational r-matrices, higher rank Lie algebras and integrable proton-neutron BCS models/ T. Skrypnyk// Nuclear Phys. - 2012 - Vol. B 863. - No 2. - P. 435–469.

39. Skrypnyk T. Non-skew-symmetric classical r -matrices and integrable "$p_x + ip_y$" proton–neutron BCS models/ T.Skrypnyk// Nuclear Physics B - 2012 - Vol. 864 - No 3. - P. 770–805.

40. Skrypnyk T. Classical r-matrices and integrable BCS models with many types of fermions/ T.Skrypnyk// J. Phys. A - 2012 - Vol. 45. - No. 41. - P. 415203.

41. Skrypnyk T. "Z2-graded" Gaudin models and analytical Bethe ansatz/ T.Skrypnyk// Nuclear Phys. B.- 2013 - Vol. 870. - No 3. - 495–529.

42. Skrypnyk T. Decompositions of quasigraded Lie algebras, non-skew-symmetric classical r-matrices and generalized Gaudin models/T. Skrypnyk // J. Geom. Phys. - 2014 - Vol. 75. - 98–112.

43. Skrypnyk T. Infinite-dimensional Lie algebras, classical r-matrices, and Lax operators: two approaches/ T. Skrypnyk// J. Math. Phys. - 2013 - Vol. 54. - No. 10.- P. 103507-103532.

44. Skrypnyk T. “Many-poled” r-matrix Lie algebras, Lax operators, and integrable systems / T. Skrypnyk// J. Math. Phys. - 2014 - Vol. 55 . - No. 8.- P. 083507.

45. Skrypnyk T. Generalized shift elements and classical r-matrices: construction and applications/ T. Skrypnyk// J. Geom. Phys. - 2014 - Vol. 80. - P. 71–87.

46. Skrypnyk T. General integrable n-level, many-mode Janes-Cummings-Dicke models and classical r-matrices with spectral parameters / T. Skrypnyk// J. Math. Phys. - 2015 - Vol. 56. - No. 2.- P. 023511.

47. Skrypnyk T. Quantum integrable models of interacting bosons and classical r-matrices with spectral parameters/ T. Skrypnyk// J. Geom. Phys. - 2015 - Vol. 97. - P. 133–155.

48. Skrypnyk T. Gaudin-type models, non-skew-symmetric classical r-matrices and nested Bethe ansatz/ T.Skrypnyk// Nuclear Physics B - 2015 - Vol B 891. - No 2. - P. 200-229.

49. Skrypnyk T. Twisted"rational r-matrices and algebraic Bethe ansatz: applications to generalized Gaudin, Bose-Hubbard dimer and Jaynes-Cummings-Dicke-type models/ T.Skrypnyk// Theoretical and Mathematical Physics - 2015 - Vol. 189 - No 1. - P. 125-146.

50. Skrypnyk T. Z_2-graded classical r-matrices and algebraic Bethe ansatz: applications to integrable models of quantum optics and nuclear physics/ T.Skrypnyk// Journal of Physics A. - 2016 - Vol. 49 . - No 36.

51. Skrypnyk T. “Generalized” algebraic Bethe ansatz, Gaudin-type models and Z_p-graded classical r-matrices/ T. Skrypnyk // Nuclear Physics - 2016 - Vol. B. 913 - No. 12 - P. 327-356.

52. Skrypnyk T. Reductions in finite-dimensional integrable systems and special points of classical r-matrices/ T. Skrypnyk// J. Math. Phys. - 2016 - Vol. 57 . - No. 12.- P. 123504.

53. Skrypnyk T. Reductions in soliton hierarchies and special points of classical r-matrices/ T. Skrypnyk// J. Geom. Phys. - 2018 - Vol. 130 . - No. 8 - P. 260-287.

Скрипник Т. В. *Метод некососиметричних r-матриць та нові інтегровні класичні і квантові системи* — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 — теоретична фізика. — Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, Київ, 2020.

Дисертація присвячена теорії класичних та квантових інтегровних систем та рівнянь солітонного типу.В дисертації побудовані нові класи класичних некососиметричних r-матриць $r(u, v)$. Отримані явні формули для всеможливих матриць Лакса скінченно-вимірних інтегровних систем та для $U - V$–пар рівнянь солітонного типу пов'язаних з данною класичною r-матрицею. Показано, що редукція, як в скінченно-вимірних інтегровних системах, так і в рівняннях солітонного типу, пов'язана з особливими значеннями спектральних параметрів при яких r-матриця стає виродженою. Доведено, що квантові інтегровні системи також асоціюються з некососиметричними r-матрицями $r(u, v)$. Побудовані нові приклади таких систем.

Ключові слова: інтегровні системи, класичні r-матриці, нескінченновимірні алгебри Лі, солітонні рівняння, анзац Бете.

Скрипник Т. В. *Метод некососиметрических r-матриц и новые интегрируемые классические и квантовые системи* — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 — теоретическая физика. — Институт теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова НАНУ, Киев, 2020.

Диссертация посвящена теории классических и квантовых интегрируемых систем и уравнений солитонного типа. В диссертации построены новые классы классических некососиметрических r-матриц $r(u, v)$. Построены явные формулы для всевозможных матриц Лакса конечномерных интегрируемых систем и для $U - V$ – пар уравнений солитонного типа ассоциированных с данной классической r-матрицей. Показано, что редукция как в конечномерных интегрируемых системах, так и в уравнениях солитонного типа связана со специальными значениями спектральных параметров при которых r-матрица становится вырожденной. Доказано, что квантовые интегрируемые системы ассоциируются с некососиметрическими r-матрицами $r(u, v)$. Построены новые примеры таких систем.

Ключевые слова: интегрируемые системи, классические r-матрицы, бесконечномерные алгебры Ли, солитонные уравнения, анзац Бете.

Skrypnyk T.V. *The method of non-skew-symmetric r-matrices and new integrable classical and quantum systems.* — Manuscript.

Thesis for a habilitated doctor of science degree by speciality 01.04.02 — theoretical physics. — Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2020.

The thesis is devoted to elaboration of the methods of the theory of finite-dimensional classical and quantum integrable systems, of the theory of soliton equations and of the theory of infinite-dimensional Lie algebras of their hidden symmetries. The key object in the proposed investigations is classical — non-skew-symmetric in general — r-matrix $r(u, v)$ with spectral parameters. With its help we have explicitly constructed infinite-dimensional quasi-graded Lie algebras with the Kostant-Adler-Symmes decomposition, that serve as the algebras of the hidden symmetries of a wide class of the classical integrable system admitting Lax representation. We have constructed the explicit formulae for all possible meromorphic Lax matrices of the finite-dimensional integrable systems and $U - V$ pairs of soliton equations, that are connected with the given classical r-matrix. We have shown that *reduction* both in finite-dimensional integrable systems and hierarchies of soliton equations is connected with special points of the classical r-matrices were they become degenerated. We have constructed new interesting examples of finite-dimensional integrable systems and soliton equations associated with the given classical r-matrices. In particular, we have constructed integrable modifications of the Toda chains and integrable modifications of the abelian and non-abelian two-dimensional Toda field theories. We have also constructed many new classes of non-skew-symmetric classical r-matrices. Among them there are "deformed" rational r-matrices, "shifted" and "twisted" rational r-matrices, deformed twisted rational r-matrices, general r-matrices connected with reflection equation algebras etc.

In the thesis considerable attention is devoted to quantum integrable systems. It was known in the literature that quantum integrable systems are connected with classical skew-symmetric r-matrices. In the thesis we have shown that quantum integrable systems can be associated also with general non-skew-symmetric classical r-matrices with spectral parameters. We have constructed a lot of new classes of such the systems. Among them there are integrable spin chains with the long-ranged interaction among the spins of the chain — generalized Gaudin systems and generalized Gaudin systems in

an external magnetic field; integrable spin-boson models, namely, generalized n-level, many-mode Jaynes-Cummings-Dicke models; integrable boson models, namely, many-boson generalizations of Bose-Hubbard dimmers. We have considered concrete classes of examples of such new quantum integrable systems associated with Lie algebra $gl(n)$ and certain classes of general classical r-matrices with spectral parameters. In particular, we have considered Z_p-graded classical r-matrices, i.e. rational r-matrices twisted with the help of the automorphism of the order p and constructed the corresponding generalized Gaudin models. In the case $p = 2$ we have explicitly constructed Jaynes-Cummings-Dicke models and many-boson generalizations of Bose-Hubbard dimmer models.

In the case of the Lie algebra $gl(n)$ we have developed the algebraic ansatz method based on the general non-skew-symmetric classical r-matrices with spectral parameters. In the case $n = 2$ we have generalized usual algebraic Bethe ansatz onto the non-skew-symmetric case. In the case $n > 2$ and general non-skew-symmetric r-matrices we have generalized hierarchical (nested) Bethe ansatz that is based both on the standard chain of subalgebras $gl(n) \supset gl(n-1) \supset ... \supset gl(1)$ and non-standard chains of subalgebras compatible with different restrictions of the type $gl(n) \supset gl(n-k) \oplus gl(k)$. With the help of this method we have found the spectra of the wide class of quantum -integrable models. In particular, we have found the spectra of Z_p-graded models of the Gaudin-type, of Z_2-graded Jaynes-Cummings-Dicke models and of many-boson generalizations of Bose-Hubbard dimmer model.

Using the classical r-matrices and the corresponding generalized Gaudin models we have obtained new integrable cases of the pairing BCS hamiltonians containing several types of fermions and, in general, possessing non-uniform coupling constants. We have shown that there exist three classes of such the integrable models associated with rational skew-symmetric r-matrices and Lie algebras $gl(2m)$, $sp(2m)$ and $so(2m)$ and Z_2-graded non-skew-symmetric classical r-matrices and Lie algebras $gl(2m)$, $sp(2m)$ and $so(2m)$ respectively. The proposed models are higher rank generalizations of the s and $p_x + ip_y$ one-type of fermion ($m = 1$) BCS-Richardson model. In the partial case of two types of fermions ($m = 2$) the obtained models may be interpreted as $N = Z$, s and $p_x + ip_y$-type integrable proton-neutron models. We find the spectrum of the constructed hamiltonians in terms of solutions of nested Bethe equations.

Key words: integrable systems, classical r-matrices, infinite-dimensional Lie algebras, soliton equations, Bethe ansatz.

Скрипник Тарас Володимирович

Метод некососиметричних r-матриць та нові інтегровні класичні і квантові системи
(Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук.)

Зам.- 1	Формат $60 \times 84/16$	Обл.-вид.арк.- 1.86
Підписано до друку	12 січня 2021 р.	Тираж 100 прим.

Поліграфічна дільниця ІТФ ім. М.М. Боголюбова НАН України,
03680, м. Київ, вул. Метрологічна, 14-б