

Київський національний університет імені Тараса Шевченка  
Міністерство освіти і науки України

Інститут Теоретичної Фізики імені М. М. Боголюбова  
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**Вовченко Володимир Юрійович**

УДК 539.141, 539.17

**ДИСЕРТАЦІЯ**  
**ЕВОЛЮЦІЯ ВЗАЄМОДІЮЧОЇ БАГАТОЧАСТИНКОВОЇ**  
**СИСТЕМИ, ЩО ВИНΙΚАЄ У ЗІТКНЕННЯХ**  
**РЕЛЯТИВІСТСЬКИХ ЯДЕР**

01.04.02 – теоретична фізика

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

---

Науковий керівник

Анчишкін Дмитро Владленович,  
доктор фіз.-мат. наук, с.н.с.

Київ – 2018



## АНОТАЦІЯ

**Вовченко В. Ю. Еволюція взаємодіючої багаточастинкової системи, що виникає у зіткненнях релятивістських ядер. - Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.**

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 «Теоретична фізика». - Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України, Київ, 2018.

Дисертація присвячена теоретичному вивченню системи сильно-взаємодіючих частинок, що утворюється в процесі зіткнення релятивістських ядер, а також аналізу та інтерпретації нових експериментальних даних по імпульсним розподілам адронів.

В дисертації проведено симуляції ядро-ядерних та протон-протонних релятивістських зіткнень у діапазоні енергій прискорювачу SPS методом ультра-релятивістської квантової молекулярної динаміки (UrQMD). Для того, щоб охарактеризувати загальні властивості еволюції системи, що утворюється у зіткненнях ядер, побудовано просторово-часові поверхні так званого піонного фронту. Ці гіперповерхні визначаються рівнянням  $n_{\pi}(t, r, z) = n_c$ , де  $t$  є часовою координатою в системі центра мас двох ядер,  $r$  і  $z$  є поперечними і поздовжніми координатами, відповідно. Отримані гіперповерхні найбільш повно характеризують часові та просторові масштаби для різних енергій зіткнення.

Проведено аналіз нових експериментальних даних колаборації NA61/SHINE по вимірюванню кількості народжених у непружних протон-протонних зіткненнях пі-мезонів при енергіях зіткнення  $\sqrt{s} = 6.3 - 17.3$  GeV. Проведено порівняння із відповідними експериментальними даними колаборації NA49 по зіткненню ядер свинцю при тих самих енергіях зіткнення. Теоретичний аналіз, проведений в рамках кінетичної моделі UrQMD, показав, що відмінність між кількістю народжених  $\pi^-$  мезонів по відношенню на один нуклон-учасник у протон-протонних та ядро-ядерних зіткненнях при енергіях експерименту NA61/SHINE можна більшою мірою пояснити врахуванням ізоспінових ефектів. Це означає, що різниця між даними протон-протонних та ядро-ядерними зіткненнями в основному спричинена відмінностями між протон-протонними,

протон-нейтронними, та нейтрон-нейтронними зіткненнями, а не так званими ефектами середовища у ядро-ядерних зіткненнях.

В результаті детального теоретичного аналізу протон-протонних зіткнень було показано, що для таких адронів як  $\pi^+$ ,  $K^+$ ,  $\Lambda$  та  $p$ , може виникати немонотонна залежність середньої поперечної маси у центральному діапазоні рапідностей від енергії зіткнення. Цей ефект виникає як наслідок комбінації вкладів від процесів зі збудженням та розпадом адронних резонансів та струн. Вказано на те, що цей ефект є досить чутливим до властивостей важких резонансів, які на даний момент є досить маловідомими і, як наслідок, можуть бути більш точно визначені у відповідних експериментах із протон-протонних зіткнень. Відповідні експериментальні дослідження нині проводяться колаборацією NA61/SHINE.

В роботі проведено аналіз процесу розділення системи на спектатори та учасники, що відбувається на початковій стадії зіткнення релятивістських ядер. Зокрема, побудовано спрощену аналітичну модель для опису процесу розділення. Аналітичний опис отримано на основі кінетичного рівняння Больцмана, використовуючи той факт, що спектатори завжди рухаються із відомою початковою швидкістю, і припущенням, що весь процес розділення відбувається внаслідок нуклон-нуклонних зіткнень на початковій стадії. Модель добре узгоджується із Монте-Карло симуляціями в рамках кінетичної моделі UrQMD, і показує, що процес розділення закінчується при часі  $t \approx 1.5 t_c$ , де  $t_c$  – час максимального перекриття ядер, що визначається початковою швидкістю ( $t = 0$  відповідає моменту “дотику” налітаючих ядер). Отримано, що у нецентральных зіткненнях ядер система учасників набуває великого моменту імпульсу, який необхідно враховувати у гідродинамічному описі. Також показано, що модель співпадає з ейкональною моделлю Глаубера-Ситенка у границі  $t \rightarrow \infty$ .

Окрему увагу у роботі приділено питанню флуктуацій системи центру мас учасників. В середньому система центра мас учасників співпадає із системою центру мас двох налітаючих ядер, але внаслідок флуктуацій ця тотожність не виконується на рівні окремих подій. Тому ці флуктуації можуть мати суттєву роль при порівнянні експериментальних даних по розподілам по рапідності із відповідними обчисленнями у гідродинамічних моделях, які описують еволюцію системи учасників. В роботі побудовано спрощену аналітичну модель для

розрахунку флуктуацій рапідності центру мас системи учасників, вважаючи що кількість нуклонів-учасників із кожного із ядер можна наблизити біноміальним розподілом. Отримано, що у випадку зіткнень важких ядер ці флуктуації описуються розподілом Гаусса із шириною, що є монотонно зростаючою функцією прицільного параметру зіткнення. Вказано, що флуктуації центру мас учасників є меншими у центральних зіткненнях більш легких ядер у порівнянні із нецентральними зіткненнями з тою самою середньою кількістю учасників більш важких ядер. Розподіл Гауса для флуктуацій рапідності центра мас учасників було згодом підтверджено експериментально колаборацією ALICE на Великому Адронному Колайдері.

В дисертації також досліджуються рівноважні властивості нагрітої адронної матерії. Добре відомо, що множинності різних сортів адронів, поміряних в експериментах із зіткнення ядер при різних енергіях, непогано (на рівні 10%) описуються моделлю адронно-резонансного (АРГ) газу. Модель АРГ являє собою багатокомпонентний невзаємодіючий газ експериментально відомих адронів і резонансів, що знаходяться у хімічній рівновазі. За допомогою формалізму  $S$  матриці можна показати, що модель АРГ враховує взаємодії типу притягання, які призводять до формування вузьких резонансів. У той же час, у стандартному варіанті моделі АРГ не враховано відштовхувальні взаємодії, наприклад відштовхування типу твердої серцевини, що притаманне нуклон-нуклонній взаємодії. Для врахування такого типу взаємодій в роботі проведено узагальнення підходу термодинамічного середнього поля на випадок багатокомпонентних систем. За конструкцією, цей підхід задовольняє вимогам термодинамічної самоузгодженості. В рамках формалізму середнього поля враховано взаємодію типу твердої серцевини у моделі АРГ, зокрема, вперше використано наближення Карнагена-Старлінга, яке є більш точним за широко вживану модель ван дер Ваальса. Показано, що модель ван дер Ваальса є придатною для опису феноменології хімічного фрізауту у зіткненнях релятивістських ядер за умови  $r \lesssim 0.5$  фм, де  $r$  – параметр радіусу твердої серцевини адрона, який тут вважається однаковим для всіх адронів.

Модель АРГ із взаємодією типу твердої серцевини використано для аналізу рівняння стану адронної матерії у контексті відповідного рівняння стану

отриманого нещодавно із перших принципів, в рамках КХД на гратці. Показано, що при занадто малому значенні адронного радіусу,  $r \lesssim 0.13$  фм, тиск у моделі АРГ перевищує тиск вільного газу кварків та глюонів, що призвело б до домінування адронного газу над фазою кварк-глюонної плазми при високих температурах. З іншого боку показано, що при занадто великому значенні адронного радіусу,  $r \gtrsim 0.40$  фм, неможливо описати дані КХД на гратці при температурах  $T \lesssim 160$  МеВ, де очікується фаза адронного газу. З цих двох спостережень отримано наступне обмеження на величину “середнього” радіусу адрона:  $0.13 \lesssim r \lesssim 0.40$  фм.

**Ключові слова:** ядро-ядерні зіткнення, протон-протонні зіткнення, імпульсні розподіли, кінетичний опис, флуктуації, рівняння стану, адронно-резонансний газ, модель твердих сфер, середнє поле.

#### Список публікацій:

1. Д. Анчишкін, А. Мускеєв, В. Вовченко, та С. Єжов, “Просторово-часова структура релятивістських ядро-ядерних зіткнень,” Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика **29**, 124 (2011).
2. D. V. Anchishkin, A. O. Muskeyev, V. Y. Vovchenko, and S. N. Yezhov, “Evolution of the Hadronic System Created in Relativistic Heavy-Ion Collisions,” Problems of Atomic Science and Technology **77**, 115 (2012).
3. D. Anchishkin, V. Vovchenko, and L. P. Csernai, “Pionic freeze-out hypersurfaces in relativistic nucleus-nucleus collisions,” Physical Review C **87**, 014906 (2013).
4. D. Anchishkin, V. Vovchenko, and S. Yezhov, “Hadronic Reaction Zones in Relativistic Nucleus–Nucleus Collisions,” International Journal of Modern Physics E **22**, 1350042 (2013).
5. V. Vovchenko, D. Anchishkin, and L. P. Csernai, “Longitudinal fluctuations of the center of mass of the participants in heavy-ion collisions,” Physical Review C **88**, 014901 (2013).
6. V. Y. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, “System-size and energy dependence of particle momentum spectra: The UrQMD analysis of

- p+p and Pb+Pb collisions,” *Physical Review C* **90**, 024916 (2014).
7. V. Vovchenko, D. Anchishkin, and L. P. Csernai, “Time dependence of partition into spectators and participants in relativistic heavy-ion collisions,” *Physical Review C* **90**, 044907 (2014).
  8. V. Y. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, “Mean transverse mass of hadrons in proton-proton reactions,” *Nuclear Physics A* **936**, 1 (2015).
  9. D. Anchishkin and V. Vovchenko, “Mean-field approach in the multi-component gas of interacting particles applied to relativistic heavy-ion collisions,” *Journal of Physics G Nuclear Physics* **42**, 105102 (2015).
  10. V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, “Hadron resonance gas equation of state from lattice QCD,” *Physical Review C* **91**, 024905 (2015).
  11. R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, “Quantum van der Waals and Walecka models of nuclear matter,” *International Journal of Modern Physics E* **26**, 1750061 (2017).
  12. D. Anchishkin, A. Muskeyev, V. Vovchenko, and S. Yezhov, “The space-time structure of relativistic nucleus-nucleus collisions,” in *Proceedings of the International School-seminar “New Physics and Quantum Chromodynamics at External Conditions”*, Dnipropetrovsk, Ukraine, 3-6 May 2011, pp. 5-12.
  13. D. Anchishkin, A. Muskeyev, V. Vovchenko, and S. Yezhov, “Zone of reactions as a tool in studying the space-time structure of relativistic nucleus-nucleus collisions,” in *Book of abstracts of XX International School-Seminar of Galyna Puchkovska “Spectroscopy of Molecules and Crystals”*, Beregove, Crimea, Ukraine, September 20-27, 2011, p.23.
  14. В. Вовченко, Д. Анчишкін, “Гіперповерхні піонного фрizaуту в релятивістських ядро-ядерних зіткненнях,” *Збірник тез Наукової конференції молодих учених «Наука ХХІ сторіччя»*, Київ, Україна, 15-16 травня, 2013, с. 5–6.
  15. V. Vovchenko, D. Anchishkin, and L. Csernai, “Time dependence of partition into spectators and participants in relativistic heavy-ion collisions,” in *Book of abstracts of the VI Young scientists conference “Problems of Theoretical Physics”*, Kyiv, Ukraine, November 25-27, 2014, pp. 17–18.
  16. V. Vovchenko, I. Kisel, and D. Anchishkin, “Event-by-event extraction of ki-

netic and chemical freeze-out properties in the CBM experiment,” in Book of abstracts of the “Quark Matter 2015” conference, Kobe, Japan, September 27–October 3, 2015, p. 137.

17. V. Vovchenko, “Critical fluctuations in models with van der Waals interactions,” in Book of abstracts of the “Critical Point and Onset of Deconfinement 2016” conference, Wroclaw, Poland, May 30 – June 4, 2016, pp. 5–6.
18. V. Vovchenko and H. Stoecker, “Analysis of hadron yield data within hadron resonance gas model with multi-component eigenvolume corrections,” in Book of abstracts of the “Strangeness in Quark Matter 2016” conference, Berkeley, CA, USA, June 26 – July 1, 2016, pp. 4–5.



## ABSTRACT

**Vovchenko V. Yu. Evolution of interacting many-particle system created in relativistic heavy-ion collisions. - Manuscript.**

Thesis for the Doctor of Philosophy degree (Candidate of Physico-Mathematical Sciences) in the specialty 01.04.02 «theoretical physics». - Taras Shevchenko National University of Kyiv, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018.

The thesis deals with the theoretical description of the strongly interacting many-particle system created in heavy-ion collisions, as well as the analysis and interpretation of new experimental data on momentum spectra of hadrons.

Simulations of relativistic nucleus-nucleus and proton-proton collisions in the framework of ultrarelativistic quantum molecular dynamics (UrQMD) were performed in the present work. The so-called pionic freeze-out hypersurfaces were used to characterize the general features of the evolution of the system created in heavy-ion collisions. The hypersurfaces are defined through the equation  $n_\pi(t, r, z) = n_c$ , where  $t$  is the time variable,  $r$  and  $z$  are transverse and longitudinal center-of-mass coordinates, respectively. The constructed hypersurfaces yield the most general picture of the temporal and spatial scales of heavy-ion collisions for various collision energies.

The manuscript presents a detailed analysis of the new pion production data of the NA61/SHINE collaboration for proton-proton collisions at  $\sqrt{s} = 6.3 - 17.3$  GeV. In particular, the new p-p data are contrasted with the old Pb-Pb data of the NA49 collaboration. The UrQMD model analysis shows that differences between p-p and Pb-Pb collisions regarding the  $\pi^-$  production per wounded nucleon at NA61/SHINE energies can be largely accounted for through the isospin effects. This means that differences in the  $\pi^-$  production between p-p, p-n, and n-n collisions, rather than some medium effects, are likely responsible for the observed difference between the p-p and Pb-Pb data.

The UrQMD model analysis of p-p collisions at NA61/SHINE energies suggests a possibility of a non-monotonous collision energy dependence of the mean transverse mass of  $\pi^+$ ,  $K^+$ ,  $\Lambda$ , and  $p$  at mid-rapidity. This effect results from the energy-dependent interplay of resonance and string excitation processes. It is found that

the effect is rather sensitive to the details of how the poorly known, higher-mass resonances are modeled. The corresponding p-p measurement can therefore constrain the poorly known properties of these higher-mass resonance. These measurements are presently being performed by the NA61/SHINE collaboration.

The process of partition into spectators and participants at an early stage of nucleus-nucleus collisions is studied in some detail in this thesis. In particular, a simplified analytic model to describe the partition process is presented. The analytic description is obtained on the basis of the kinetic Boltzmann equation, using the fact that spectators always move with the known, initial velocity, and assuming that the partition takes place through the first-chance nucleon-nucleon collisions at an early stage. The obtained model is well consistent with UrQMD Monte Carlo simulation results. The model shows that the partition process becomes complete at time  $t \approx 1.5 t_c$ , where  $t_c$  – is the maximum nuclei overlap time, defined by the initial nuclei velocity ( $t = 0$  corresponds to the initial time moment when the colliding nuclei “touch” each other). It is shown that the participant system attains a sizable angular momentum in mid-central collisions, which should be taken into account in the hydrodynamic description. It is also shown that the model reproduces the eikonal Glauber-Sitenko model in the limit  $t \rightarrow \infty$ .

A special attention is paid to the fluctuations of the center of mass of the participants. The center of mass of the participant system coincides with the collider center of mass system on average. However, due to fluctuations this not the case of the event-by-event basis. These fluctuations can therefore have an important effect on comparison of rapidity-dependent observables between hydro simulations, which describe the evolution of the participant system, and experiment. This work presents a simplified analytic model to calculate the fluctuations of the rapidity of the center of mass of the participants. The model predictions are obtained by assuming that participant number distribution for each of the colliding nuclei is given by the binomial distribution. In the case of the collisions of heavy nuclei, the participant rapidity fluctuations are shown to be described by the Gaussian distribution. The width of this distribution is a monotonically increasing function of the impact parameter. It is pointed out that participant center of mass fluctuations are smaller in central collisions of smaller nuclei than in non-central collisions of heavier nuclei with the same mean

number of participants. The Gaussian distribution of the participant center of mass rapidity fluctuations was later confirmed experimentally by the ALICE collaboration at the Large Hadron Collider.

The thesis also deals with the equilibrium properties of hadronic matter. It is well known that mean multiplicities of many hadron species measured in heavy-ion collisions at various collision energies are described on a 10% level by the hadron resonance gas (HRG) model. The standard HRG model is multi-component gas of non-interacting experimentally charted hadrons and resonances, which are in the state of chemical equilibrium. It can be shown within the S matrix approach to statistical mechanics that the attractive interactions resulting in the formation of narrow resonances are accounted for in the HRG model. At the same time, the standard HRG model cannot account for repulsive interactions, such as the hard-core type interaction present in the nucleon-nucleon potential. To take these repulsive interactions into account, the present work employs the thermodynamic mean field approach, generalized here to the of multi-component systems. The approach preserves the thermodynamic consistency by construction. The mean-field approach is then used to include hard-core hadron-hadron interactions into the HRG model. In particular, the Carnahan-Starling approach is applied within the HRG model for the first time, which yields an improved accuracy compared to the commonly used van der Waals model. It is shown that the van der Waals excluded volume model is appropriate to describe the heavy-ion collisions chemical freeze-out phenomenology when  $r \lesssim 0.5$  fm, where  $r$  is the hadron hard-core radius parameter, assumed to be the same for all hadron species.

The HRG model with hard-core interactions is also applied to study the equation of state of hadronic matter at zero chemical potentials. This is done in the context of the recent, first-principle lattice QCD data. It is shown that the pressure of the hadronic matter overshoots the Stefan-Boltzmann limit of massless quarks and gluons if the hadron hard-core radius is too small,  $r \lesssim 0.13$  fm. In such a case one would expect the hadronic phase to be dominant at high temperatures – a picture not supported by lattice QCD results. On the other hand, for a too large hadron radii,  $r \gtrsim 0.40$  fm, it becomes impossible to describe the lattice QCD data at temperatures  $T \lesssim 160$  MeV, where a hadronic gas phase is expected. These considerations lead to the following

restriction on the mean hadron radius:  $0.13 \lesssim r \lesssim 0.40$  fm.

**Keywords:** nucleus-nucleus collisions, proton-proton collisions, momentum spectra, kinetic description, fluctuations, equation of state, hadron resonance gas, hard-core interactions, mean field.

**List of publications:**

1. D. Anchishkin, A. Muskeyev, V. Vovchenko, and S. Yezhov, “The Space-Time Structure of Relativistic Nucleus-Nucleus Collisions,” *Uzhgorod University Herald. Physics Series* **29**, 124 (2011) [in Ukrainian].
2. D. V. Anchishkin, A. O. Muskeyev, V. Y. Vovchenko, and S. N. Yezhov, “Evolution of the Hadronic System Created in Relativistic Heavy-Ion Collisions,” *Problems of Atomic Science and Technology* **77**, 115 (2012).
3. D. Anchishkin, V. Vovchenko, and L. P. Csernai, “Pionic freeze-out hypersurfaces in relativistic nucleus-nucleus collisions,” *Physical Review C* **87**, 014906 (2013).
4. D. Anchishkin, V. Vovchenko, and S. Yezhov, “Hadronic Reaction Zones in Relativistic Nucleus–Nucleus Collisions,” *International Journal of Modern Physics E* **22**, 1350042 (2013).
5. V. Vovchenko, D. Anchishkin, and L. P. Csernai, “Longitudinal fluctuations of the center of mass of the participants in heavy-ion collisions,” *Physical Review C* **88**, 014901 (2013).
6. V. Y. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, “System-size and energy dependence of particle momentum spectra: The UrQMD analysis of p+p and Pb+Pb collisions,” *Physical Review C* **90**, 024916 (2014).
7. V. Vovchenko, D. Anchishkin, and L. P. Csernai, “Time dependence of partition into spectators and participants in relativistic heavy-ion collisions,” *Physical Review C* **90**, 044907 (2014).
8. V. Y. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, “Mean transverse mass of hadrons in proton-proton reactions,” *Nuclear Physics A* **936**, 1 (2015).
9. D. Anchishkin and V. Vovchenko, “Mean-field approach in the multi-component gas of interacting particles applied to relativistic heavy-ion collisi-

- ons,” *Journal of Physics G Nuclear Physics* **42**, 105102 (2015).
10. V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, “Hadron resonance gas equation of state from lattice QCD,” *Physical Review C* **91**, 024905 (2015).
  11. R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, “Quantum van der Waals and Walecka models of nuclear matter,” *International Journal of Modern Physics E* **26**, 1750061 (2017).
  12. D. Anchishkin, A. Muskeyev, V. Vovchenko, and S. Yezhov, “The space-time structure of relativistic nucleus-nucleus collisions,” in *Proceedings of the International School-seminar “New Physics and Quantum Chromodynamics at External Conditions”*, Dnipropetrovsk, Ukraine, 3-6 May 2011, pp. 5-12.
  13. D. Anchishkin, A. Muskeyev, V. Vovchenko, and S. Yezhov, “Zone of reactions as a tool in studying the space-time structure of relativistic nucleus-nucleus collisions,” in *Book of abstracts of XX International School-Seminar of Galyna Puchkovska “Spectroscopy of Molecules and Crystals”*, Beregove, Crimea, Ukraine, September 20-27, 2011, p.23.
  14. V. Vovchenko, D. Anchishkin, “Pionic freeze-out hypersurfaces in relativistic nucleus-nucleus collisions,” in *Book of abstracts of the Young scientists conference «Science of the XXI century»*, Kyiv, Ukraine, 15-16 May, 2013, pp. 5-6 [in Ukrainian].
  15. V. Vovchenko, D. Anchishkin, and L. Csernai, “Time dependence of partition into spectators and participants in relativistic heavy-ion collisions,” in *Book of abstracts of the VI Young scientists conference “Problems of Theoretical Physics”*, Kyiv, Ukraine, November 25-27, 2014, pp. 17–18.
  16. V. Vovchenko, I. Kisel, and D. Anchishkin, “Event-by-event extraction of kinetic and chemical freeze-out properties in the CBM experiment,” in *Book of abstracts of the “Quark Matter 2015” conference*, Kobe, Japan, September 27–October 3, 2015, p. 137.
  17. V. Vovchenko, “Critical fluctuations in models with van der Waals interactions,” in *Book of abstracts of the “Critical Point and Onset of Deconfinement 2016” conference*, Wroclaw, Poland, May 30 – June 4, 2016, pp. 5–6.
  18. V. Vovchenko and H. Stoecker, “Analysis of hadron yield data within hadron resonance gas model with multi-component eigenvolume corrections,” in *Book*

of abstracts of the “Strangeness in Quark Matter 2016” conference, Berkeley, CA, USA, June 26 – July 1, 2016, pp. 4–5.

# Зміст

<b>Перелік умовних позначень</b>	<b>18</b>
<b>Вступ</b>	<b>19</b>
<b>Розділ 1: Фізика зіткнення релятивістських ядер</b>	<b>25</b>
1.1 Загальні уявлення .....	25
1.2 Основні теоретичні підходи для опису зіткнення релятивістських ядер .....	28
1.2.1 Теплова модель .....	29
1.2.2 Мікроскопічні кінетичні моделі .....	30
1.2.3 Гідродинамічні моделі .....	31
1.2.4 Гібридні моделі .....	32
1.3 Процес фрізауту та просторово-часова структура системи .....	33
1.4 Відкриті питання .....	35
<b>Розділ 2: Імпульсні спектри адронів у протон-протонних та ядро-ядерних зіткненнях</b>	<b>37</b>
2.1 Вступ .....	37
2.2 Моделювання в UrQMD .....	38
2.3 Множинність пі-мезонів та ізоспінові ефекти .....	39
2.4 Втрата енергії налітаючих нуклонів .....	44
2.5 Імпульсні спектри пі-мезонів .....	46
2.5.1 Розподіл по рапідності .....	46
2.5.2 Розподіли по поперечній масі .....	48
2.6 Резонансні та струнні вклади у процеси народження пі-мезонів в протон-протонних реакціях .....	52
2.7 Середня поперечна маса адронів у протон-протонних реакціях ..	56
2.8 Висновки до 2-го розділу .....	59

<b>Розділ 3: Особливості процесу утворення системи учасників на початковій стадії зіткнення ядер</b>	<b>61</b>
3.1 Вступ .....	61
3.2 Аналітична модель опису процесу розділення на учасники та спектатори .....	62
3.2.1 Початкові умови та балістичний режим .....	62
3.2.2 Розділення на спектатори та учасники .....	66
3.2.3 Поперечний розподіл спектаторів .....	68
3.2.4 Густина бінарних реакцій .....	70
3.3 Часова залежність різних величин на стадії розділення.....	73
3.3.1 Кількість учасників .....	74
3.3.2 Момент імпульсу .....	75
3.3.3 Завихреність .....	79
3.4 Порівняння із іншими моделями початкової стадії.....	83
3.5 Поздовжні флуктуації системи центру мас учасників .....	84
3.5.1 Визначення рапідності системи учасників через кількість спектаторів .....	85
3.5.2 Імовірність кількості спектаторів .....	86
3.5.3 Гаусова апроксимація та розподіл рапідності учасників ..	87
3.5.4 Ультрарелятивістська границя та розподіл у центральному діапазоні рапідностей .....	89
3.6 Результати розрахунків для флуктуацій рапідності системи центру мас .....	92
3.6.1 Оцінки із інших теоретичних моделей .....	94
3.7 Висновки до 3-го розділу .....	97
<b>Розділ 4: Підхід середнього поля у статистичних системах і його застосування у моделі адронно-резонансного газу</b>	<b>99</b>
4.1 Вступ .....	99
4.2 Термодинамічна теорія середнього поля для однокомпонентного газу .....	100
4.3 Одночастинкове представлення взаємодіючого класичного газу ..	104
4.3.1 Відповідність гамільтоніану середнього поля .....	106



4.4	Модель середнього поля для мультикомпонентного газу . . . . .	108
4.4.1	Збереження зарядів . . . . .	110
4.5	Процедура виключеного об'єму . . . . .	111
4.5.1	Середні поля, які пропорційні температурі . . . . .	111
4.5.2	Однокомпонентний газ . . . . .	114
4.5.3	Віріальний розклад для мультикомпонентного газу . . . . .	118
4.5.4	Виключений об'єм у мульти-компонентному газі: проце- дура ван дер Ваальса I . . . . .	119
4.5.5	Виключений об'єм у мульти-компонентному газі: проце- дура ван дер Ваальса II . . . . .	121
4.6	Підхід середнього поля у моделі адронно-резонансного газу . . . . .	123
4.7	АРГ із виключеним об'ємом на стадії фрізауту . . . . .	125
4.8	Порівняння взаємодіючого АРГ із даними КХД на ґратці . . . . .	130
4.9	Висновки до 4-го розділу . . . . .	132
	<b>Висновки</b>	<b>135</b>
	<b>Список використаних джерел</b>	<b>137</b>
	<b>Додатки</b>	<b>156</b>
A	Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації . . . . .	156

# Перелік умовних позначень

- КГП - кварк-глюонна плазма
- КХД - квантова хромодинаміка
- с.ц.м. – система центру мас
- CERN – Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire (Європейський центр ядерних досліджень)
- BNL – Brookhaven National Laboratory (Брукхевенська національна лабораторія)
- FAIR – Facility for Antiproton and Ion Research (Центр досліджень антипротонів та іонів)
- JINR – Joint Institute for Nuclear Research (Об'єднаний інститут ядерних досліджень)
- AGS – Alternating Gradient Synchrotron
- SPS – Super Proton Synchrotron
- RHIC – Relativistic Heavy Ion Collider (Релятивістський колайдер важких іонів)
- LHC – Large Hadron Collider (Великий адронний колайдер)
- CBM – Compressed Baryonic Matter
- UrQMD – Ultra-relativistic Quantum Molecular Dynamics (Ультрарелятивістська квантова молекулярна динаміка)
- PHSD – Parton Hadron String Dynamics (Партонно-адронна струнна динаміка)
- АРГ – Адронно-Резонансний Газ

# Вступ

**Актуальність теми.** Дослідження властивостей процесу зіткнення релятивістських ядер є одним із актуальних напрямів сучасної фізики високих енергій, як з теоретичної, так і з експериментальної точки зору. При зіткненні ядер утворюється сильновзаємодіюча система при високих значеннях густини енергії. Вважається, що при достатньо великих енергіях у процесі зіткнення на деякий час утворюється стан матерії, що зветься кварк-глюонною плазмою (КГП). Основними ступенями вільності у КГП є кварки і глюони, які, згідно квантової хромодинаміки (КХД), є елементарними частинками, що беруть участь у сильній взаємодії. Згідно сучасних космологічних уявлень, подібний стан матерії був домінуючим у Всесвіті протягом перших мікросекунд після Великого Вибуху. Експериментально, зіткнення важких ядер досліджуються вже протягом близько 40 років, починаючи з експериментів у Берклівській національній лабораторії і закінчуючи експериментами на Великому Адронному Колайдері в CERN. Крім того, існує декілька проектів експериментів на майбутніх прискорювачах, що знаходяться на стадії конструкції або планування. Основними задачами цих експериментів є перевірка базових властивостей КХД, а також вивчення явищ, які на даний момент не можуть бути описані із перших принципів через технічні складнощі.

Система, яка утворюється у зіткненнях релятивістських ядер, швидко розширюється у вакуумі і з часом переходить у систему адронів, що далі розповсюджуються вільно і у підсумку реєструються у детекторі. Через явище так званого конфайнменту кварки і глюони не можуть бути задетектовані напряму, що робить неможливим прямий експериментальний аналіз властивостей КГП. Експериментально визначаються середні числа адронів, що народжуються у зіткненні ядер, їх імпульсні розподіли, а також кореляції та флуктуації цих величин. Фізичний аналіз процесу зіткнення, як правило, здійснюється за допомогою різних феноменологічних моделей опису зіткнення ядер, які, використовуючи різні фізичні припущення, передбачають значення різних величин, що вимірюються експериментально.

Серед основних підходів до опису еволюції системи, що виникає у зіткненнях релятивістських ядер можна виділити кінетичні моделі та методи релятивістської гідродинаміки. Також набувають поширення моделі, які комбінують ці два класи. У той же час, стадія хімічного фрізауту, тобто середні виходи різних адронів, як правило, добре описується аналітичною моделлю адронно-резонансного газу, для роботи з якою необхідно використовувати методи релятивістської статистичної фізики, деякі з яких ще не є повністю розробленими.

**Зв'язок з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота є частиною досліджень кафедри теоретичної фізики фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Зміст роботи узгоджений з планом роботи по бюджетній темі №11БФ051-01, підрозділ 3 "Взаємодія частинок і електромагнітного випромінювання з конденсованим середовищем і наноструктурами".

**Мета і задачі дослідження.** Метою досліджень, представлених у дисертації, є вивчення процесу еволюції системи сильно-взаємодіючих частинок, що утворюється в процесі зіткнення релятивістських іонів, а також фізичний аналіз та інтерпретація імпульсних спектрів адронів, які вимірюються на експерименті.

Для досягнення мети було поставлено наступні задачі:

1. Проаналізувати та порівняти імпульсні розподіли адронів у ядро-ядерних та протон-протонних зіткненнях з точки зору теоретичного моделювання та нових експериментальних даних колаборацій NA49 та NA61/SHINE.
2. Дослідити процес утворення системи учасників на початковій стадії ядро-ядерних зіткнень.
3. Проаналізувати вплив флуктуацій поздовжньої рапідності системи центру мас учасників при різних центральностях зіткнення на спостережувані.
4. Модифікувати формалізм середнього поля для опису статистичних систем та використати його у моделі адронно-резонансного газу для того, щоб врахувати ван дер Ваальсівські взаємодії між адронами.

*Об'єктом дослідження* є утворення та процес еволюції системи сильно-взаємодіючих адронів, що утворюється у зіткненнях релятивістських ядер.

*Предметом дослідження* є рівноважні та нерівноважні властивості взаємодіючої системи адронів.

*Методами дослідження* є релятивістська транспортна теорія, методи Монте-Карло та методи релятивістської статистичної фізики.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Показано, що відмінність між кількістю народжених  $\pi^-$  мезонів по відношенню на один нуклон-учасник у протон-протонних та ядро-ядерних зіткненнях при енергіях експерименту NA61/SHINE можна в основному пояснити врахуванням ізоспінових ефектів.

Для протон-протонних реакцій показано, що у залежностях середньої поперечної маси адронів  $\pi^+$ ,  $K^+$ ,  $\Lambda$  та  $p$  у центральному діапазоні рапідностей від енергії може виникати немонотонність як наслідок комбінації вкладів від процесів зі збудженням та розпадом адронних резонансів та струн. Також вказано на те, що цей ефект є досить чутливим до властивостей важких резонансів, які на даний момент є досить маловідомими і, як наслідок, можуть бути більш точно визначені у відповідних експериментах із протон-протонних зіткнень.

Побудовано аналітичну модель для опису розділення системи на учасники та спектатори на початковій стадії зіткнення ядер і показано, що цей процес розділення закінчується при часі  $t \approx 1.5t_c$ , де  $t_c$  – час максимального перекриття ядер, що визначається початковою швидкістю ядер. Показано, що модель співпадає з ейкональною моделлю Глаубера-Ситенка у границі  $t \rightarrow \infty$ .

Побудовано спрощену аналітичну модель для розрахунку флуктуацій рапідності центру мас системи учасників та показано, що ці флуктуації описуються розподілом Гаусса із шириною, що визначається прицільним параметром зіткнення. Вказано на необхідність врахування цих флуктуацій при аналізі залежних від рапідності величин, що вимірюються в експерименті.

Сформульовано формалізм середнього поля для врахування взаємодії між частинками у одно- та багато-компонентному релятивістському газі. В рамках запропонованого формалізму враховано взаємодію типу твердої серцевини у моделі адронно-резонансного газу. Зокрема, вперше використано наближення Карнагена-Старлінга, яке є більш точним за широко вживану модель ван дер

Ваальса, у моделі адронно-резонансного газу. Також отримано обмеження на величину радіусу твердої серцевини адронів із порівняння моделі АРГ із розрахунками КХД на ґратці при нульовому хімічному потенціалі.

### **Практичне значення одержаних результатів.**

- Правильне врахування ізоспінових ефектів, яке було запропоноване в роботі, може бути використане у теперішніх та майбутніх експериментах при порівнянні виходів адронів у протон-протонних та ядро-ядерних зіткненнях.
- Отримані у моделі для опису розділення на спектатори та учасники результати дозволяють накладати обмеження на мінімальний початковий час та початковий профіль швидкостей у гідродинаміці.
- Отриманий розподіл флуктуацій поздовжньої рапідності системи центра мас учасників може бути використаний для коректного порівняння спостережуваних величин розрахованих у гідродинамічних моделях із експериментом.
- Побудований у роботі формалізм середнього поля може бути використаний для ефективного врахування ван дер Ваальсівських взаємодій у моделях адронного рівняння стану.

### **Особистий внесок здобувача.** Результати опубліковано в роботах [1–11].

- В роботах [1–4, 6, 8] здобувачем проведені симуляції зіткнень релятивістських ядро-ядерних та протон-протонних зіткнень у діапазоні енергій прискорювача SPS методом ультра-релятивістської квантової молекулярної динаміки. Побудовано просторово-часові гіперповерхні, що найбільш повно характеризують просторово-часову структуру системи, що утворюється у зіткненнях релятивістських ядер при цих енергіях. Також в рамках цієї моделі автором проведено розрахунки імпульсних спектрів різних адронів та проведено порівняння із новими експериментальними даними колаборації NA61/SHINE.
- В роботах [5, 7] автором побудовано аналітичну модель для визначення густини розподілу флуктуацій рапідності системи центру мас учасників.

В рамках моделі проведено розрахунки та показано, що ці флуктуації є суттєвими у периферійних зіткненнях ядер.

- В роботах [9, 10] автором розвинено формалізм середнього поля для врахування взаємодій між адронами у термодинамічних моделях адронного рівняння стану, та досліджено роль взаємодії типу твердої серцевини у моделі АРГ у контексті порівняння із даними КХД на ґратці, а також стадії хімічного фрізауту у зіткненнях ядер. В роботі [11] цей формалізм застосовано для опису ядерної матерії.

Автор брав участь у постановці задач досліджень, обговоренні результатів і написанні всіх робіт [1–11].

**Апробація результатів роботи.** Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на наукових семінарах кафедри теоретичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України (м. Київ, Україна), Інституту важких йонів ім. Гельмгольца (м. Дармштадт, Німеччина), Франкфуртського інституту перспективних досліджень, Інституту теоретичної фізики університету імені Гете (м. Франкфурт, Німеччина), Брукхейвенської Національної Лабораторії (м. Аптон, Нью-Йорк, США), а також були представлені на наукових конференціях та зборах:

- Науковій конференції молодих вчених «Наука XXI сторіччя», Київ, Україна, 12-14 Травня 2010
- Науковій конференції студентів, аспірантів та молодих учених «Сучасні проблеми фізики», Київ, Україна, 11-13 Травня 2011
- International School-Seminar «New Physics and Quantum Chromodynamics at External Conditions», Dnipropetrovsk, Ukraine, 3-6 May 2011
- XX International School-Seminar of Galyna Puchkovska «Spectroscopy of Molecules and Crystals», Beregove, Ukraine, 22-29 September 2011
- Науковій конференції молодих учених «Наука XXI сторіччя», Київ, Україна, 15-16 травня 2013

- 24th CBM Collaboration Meeting, Krakow, Poland, 8-12 September 2014
- VI Young scientists conference “Problems of Theoretical Physics” dedicated to the 105-th anniversary of M.M. Bogolyubov, Kyiv, Ukraine, 25-27 November 2014
- 26th CBM Collaboration Meeting, Prague, Czech Republic, 14-18 September 2015
- Critical Point and Onset of Deconfinement 2016, 30 May-4 June 2016, Wroclaw, Poland
- Strangeness in Quark Matter 2016, 26 June - 1 July 2016, Berkeley, CA, USA

**Публікації.** Представлені у дисертації матеріали опубліковано у 18 роботах. Серед них 11 статей в провідних українських та міжнародних реферованих журналах [1–11] та 7 друкованих матеріалів конференцій [12–18]

**Структура дисертаційної роботи.** Робота складається із вступу, 4 розділів, висновків, списку використаних джерел (177 найменувань). Обсяг дисертації складає 157 сторінок машинописного тексту, містить 46 рисунків та 1 таблицю.



# Розділ 1

## Фізика зіткнення релятивістських ядер

### 1.1 Загальні уявлення

В експериментах із зіткнення релятивістських ядер проводяться дослідження властивостей сильно-взаємодіючої матерії при високих температурах та значеннях густини речовини та енергії [19]. Згідно сучасних космологічних уявлень, подібний стан матерії домінував у ранньому Всесвіті протягом перших мікросекунд після Великого Вибуху. Основними задачами таких експериментів є перевірка базових властивостей квантової хромодинаміки (КХД) – теорії сильної взаємодії, яка є частиною Стандартної Моделі елементарних частинок. Також інтерес представляє вивчення явищ, які на даний момент не можуть бути описані в рамках КХД із перших принципів через технічні складнощі та обмежену обчислювальну спроможність. Результати експериментів дають змогу накладати обмеження на різноманітні феноменологічні підходи опису властивостей КХД, та поглибити рівень розуміння теорії сильної взаємодії. Активно проводиться дослідження фазових переходів у КХД: згідно сучасній парадигмі при високих температурах та густинах система переходить у стан так званої кварк-глюонної плазми (КГП) – стану речовини у якому ступенями вільності у явному вигляді є кварки та глюони. Окремий інтерес також представляє процес спонтанного порушення кіральної симетрії, якою з досить високою точністю характеризується Лагранжیان КХД. Вважається, що цей процес є відповідальним за генерацію домінуючої частки маси нуклонів, і, відповідно, мас атомних ядер та макроскопічних об'єктів, що з них складаються.

Сучасні прискорювачі здатні розганяти ядра до релятивістських швидкостей, із кінетичною енергією, яка є значно більшою за масу ядра. При зіткненні таких ядер утворюється сильно збуджена матерія із баріонною густиною, яка в декілька разів більша за густину матерії в атомному ядрі. Характерним енергетичним масштабом для релятивістських ядро-ядерних зіткнень є гіга-електрон-

вольт (GeV):  $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$ . Типовою одиницею довжини є фемтометр (фм):  $1 \text{ фм} = 10^{-15} \text{ м}$ . За таких масштабів природно працювати у системі одиниць, де швидкість світла  $c$  та приведена стала Планка  $\hbar = h/(2\pi)$  є безрозмірними одиницями, тобто  $\hbar = c = 1$ . У такій системі одиницею маси або імпульсу є енергія, час можна вимірювати у фемтометрах, а добуток одиниць енергії та довжини є безрозмірною величиною:  $1 \text{ GeV} \cdot \text{фм} \simeq 5.07$ . Для зручності також покладемо рівною одиниці сталу Больцмана  $k_B = 1$ .

В Табл. 1.1 наведено характеристики основних існуючих та майбутніх прискорювачів для проведення експериментів із зіткнення релятивістських ядер.

Табл. 1.1: Прискорювачі, на яких проводяться експерименти по зіткненню релятивістських ядер

Прискорювач	тип ядер	діапазон енергій	
BNL-AGS	Au+Au	$E_{\text{kin}} = 2 - 10.8A \text{ GeV}$	$\sqrt{s_{\text{NN}}} = 2.7 - 5 \text{ GeV}$
CERN-SPS	Pb+Pb	$E_{\text{kin}} = 20 - 200A \text{ GeV}$	$\sqrt{s_{\text{NN}}} = 6 - 19 \text{ GeV}$
BNL-RHIC	Au+Au	$E_{\text{kin}} = 0 - 21.3A \text{ TeV}$	$\sqrt{s_{\text{NN}}} = 2 - 200 \text{ GeV}$
CERN-LHC	Pb+Pb	$E_{\text{kin}} \simeq 10^5 A \text{ TeV}$	$\sqrt{s_{\text{NN}}} \simeq 14 \text{ TeV}$
GSI-FAIR (майб.)	Au+Au	$E_{\text{kin}} = 10 - 40A \text{ GeV}$	$\sqrt{s_{\text{NN}}} = 4.7 - 9 \text{ GeV}$
JINR-NICA (майб.)	U+U	$E_{\text{kin}} = 7 - 60A \text{ GeV}$	$\sqrt{s_{\text{NN}}} \simeq 4 - 11 \text{ GeV}$

Величини  $E_{\text{kin}}$  і  $\sqrt{s_{\text{NN}}}$  у Табл. 1.1 визначають енергію зіткнення ядер.  $E_{\text{kin}}$  – кінетична енергія нуклона з ядра-снаряду у лабораторній системі (у лабораторній системі ядро-мішень знаходиться в стані спокою), а  $\sqrt{s_{\text{NN}}}$  – сумарна енергія пари нуклонів з налітаючих ядер в системі центра мас ядер. Величини  $E_{\text{kin}}$  і  $\sqrt{s_{\text{NN}}}$  пов'язані між собою співвідношенням:  $\sqrt{s_{\text{NN}}} = \sqrt{2m(E_{\text{kin}} + 2m)}$ , де  $m = 938 \text{ MeV}/c^2$  – маса нуклона.

Вигляд можливої фазової діаграми сильно-взаємодіючої матерії наведено на Рис. 1.1 у координатах  $T$  (температура) та  $\mu_B$  (баріонний хімічний потенціал). Цей схематичний вигляд було запропоновано у роботі Фукусіми та Хатсуді [20]. Зображена фазова діаграма є дуже схематичною і не містить кількісних оцінок. Це пов'язано із тим, що прямі кількісні розрахунки в рамках КХД є проблематичними через неабелевість теорії, неможливість застосування теорії збурень на більшій частині фазової діаграми, та обмежені обчислювальні ресурси для

симуляцій в рамках КХД на ґратці. Із властивостей холодних атомних ядер, експериментально достовірно відомою є точка фазової діаграми при нульовій температурі та нормальній ядерній густині  $n_0 \simeq 0.16 \text{ фм}^{-3}$ . Внаслідок ван-дер-Ваальсівської природи нуклон-нуклонної взаємодії також відомою є наявність фазового переходу типу рідина-пара при низьких температурах, яка спостерігалась в експериментах із зіткнення ядер при енергіях порядку кількох сотень МеВ [21–23]. При нульовому хімічному потенціалі термодинамічні властивості КХД можуть бути визначені із перших принципів за допомогою розрахунків в рамках КХД на ґратці. Зокрема, було встановлено, що перехід деконфайнменту від фази адронного газу до КГП при  $\mu_B = 0$  не є справжнім фазовим переходом, а є так званим переходом типу кроссовер, коли усі термодинамічні величини у діапазоні температур переходу змінюються швидко, але плавно [24]. Регіон температур кроссоверу – 150-190 МеВ. Сучасні розрахунки на ґратці здатні передбачити детальну температурну залежність багатьох різноманітних термодинамічних величин [25, 26]. У той же час структура фазової діаграми при ненульовій баріонній густині залишається невизначеною. Вважається, що при малих температурах та високих значеннях баріонної густини перехід між адронами та кварками є фазовим переходом першого роду. Це, у свою чергу, вказує на можливу наявність критичної точки на фазовій діаграмі, однак експериментального підтвердження це припущення поки не отримало.

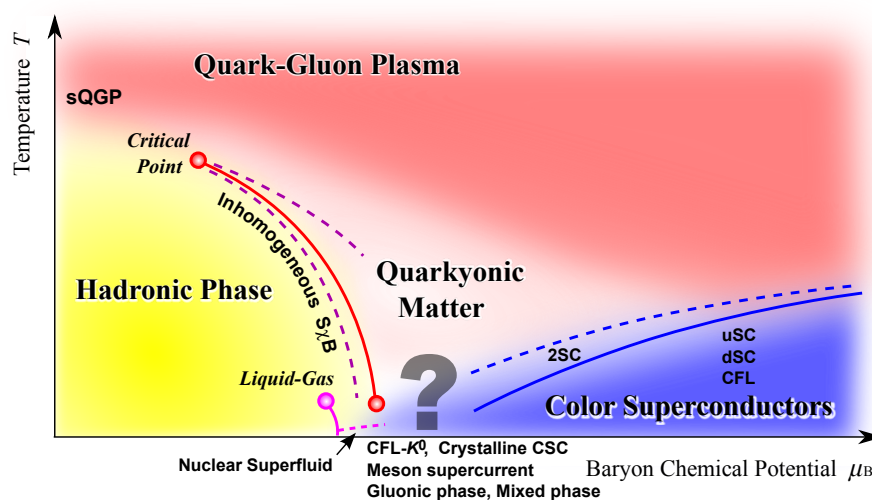


Рис. 1.1: Фазова діаграма ядерної матерії. Взято з [20].

Змінюючи маси та енергію ядер, що зіштовхуються, можна досліджувати

різні області на фазовій діаграмі. Непрямим підтвердженням утворення КГП у зіткненнях ядер є експериментальні дані, які були отримані колабораціями NA49 [27] та STAR [28], і які були узгоджені із передбаченнями теоретичних моделей, які включають перехід до фази КГП. Таким чином вважається, що крапля КГП утворюється в лабораторних умовах у експериментах SPS, RHIC і LHC. У той же час, ці самі дані також можуть бути описані статистичною моделлю адронно-резонансного газу (АРГ), яка не містить у явному вигляді партонних ступеней вільності [29]. Діапазон енергій  $\sqrt{s_{NN}} = 6 - 20$  GeV прискорювачів SPS та RHIC представляє окремий інтерес для досліджень оскільки за цих енергій зіткнення виникає система із найбільшою середньою баріонною густиною [30], яка ймовірно лежить в області фазового переходу до кварк-глюонної плазми на фазовій діаграмі КХД, і яка може бути чутливою до явищ, пов'язаних з можливою наявністю критичної точки. Дослідження у цьому діапазоні енергій плануються проводитись із використанням надсучасного обладнання на майбутніх прискорювальних комплексах FAIR та NICA.

## 1.2 Основні теоретичні підходи для опису зіткнення релятивістських ядер

Основними підходами для дослідження еволюції системи при зіткненнях релятивістських ядер є моделі, які використовують методи релятивістської статистичної фізики, мікроскопічні кінетичні моделі, релятивістська гідродинаміка, а також гібридні моделі, які об'єднують останні два підходи. Використання того чи іншого підходу, як правило, залежить від конкретних задач, які необхідно розв'язати для конкретної системи. На Рис. 1.2 схематично зображено стадії еволюції системи, яка виникає у зіткненнях релятивістських ядер згідно сучасній парадигмі. Як правило, різні стадії та різні спостережувані величини найкраще описуються в рамках різних підходів. Нище наведено деякі з найбільш поширених із них.

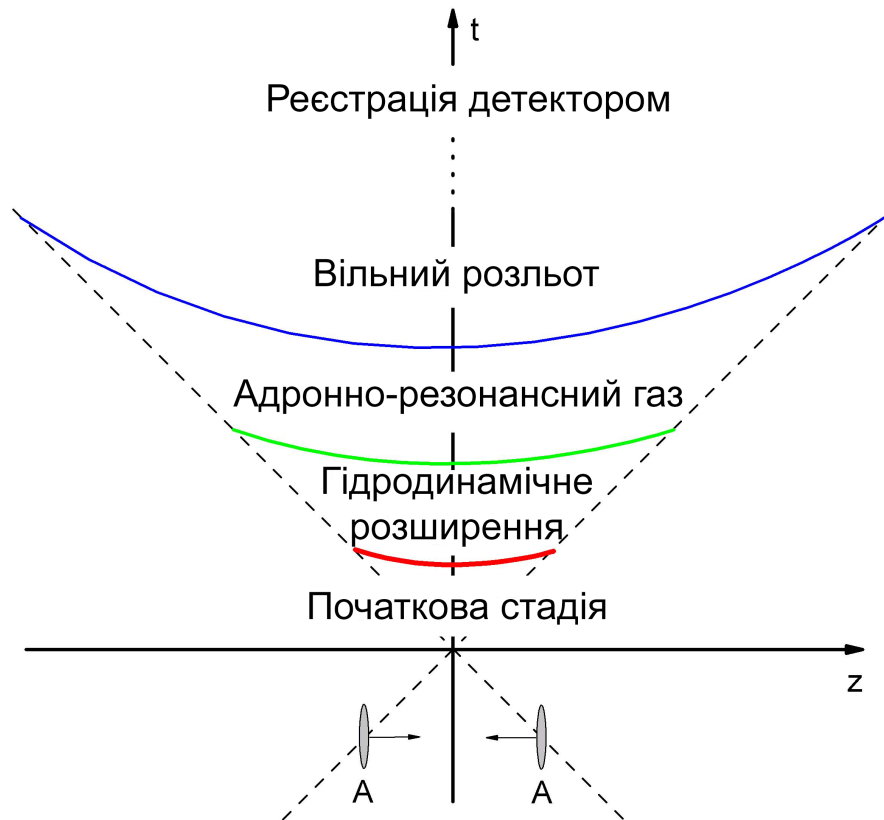


Рис. 1.2: Стадії реакції зіткнення релятивістських ядер.

### 1.2.1 Теплова модель

Ймовірно найбільш простою моделлю для опису релятивістських ядроядерних зіткнень є так звана тепла модель, або модель адронно-резонансного газу (АРГ) [31]. У цій моделі робиться припущення того, що під час зіткнення ядер в системі встановлюється локальна термодинамічна рівновага і нові частинки в системі народжуються з термального джерела у відповідності із статистичним розподілом. Порівнюючи цю модель із експериментальними даними щодо виходу різних адронів можна відновити такі термодинамічні параметри системи, як температура та баріонний хімічний потенціал, що у свою чергу дозволяє поставити у відповідність різним експериментам точки на фазовій діаграмі ядерної матерії [32–35]. Виявилося, що тепла модель здатна дуже добре описати експериментальні дані на вже існуючих експериментах. На даний момент ця модель є основним інструментом для оцінки ймовірності народже-

ння різних частинок, навіть тих, характеристики яких ще не досліджувалися на існуючих прискорювачах. Таким чином теплова модель відіграє значну роль під час постановки фізичних задач на майбутніх прискорювачах, зокрема того, що стосується проектування таких вимірювань, які ще не проводились у минулому. У той же час, ця модель непридатна для опису динаміки зіткнення ядер, зокрема, властивостей КГП, і тому існує потреба у більш складних моделях.

### 1.2.2 Мікроскопічні кінетичні моделі

У мікроскопічних кінетичних моделях опису зіткнення ядер розв'язується багатокomпонентна система релятивістських кінетичних рівнянь Больцмана для частинок різного сорту (різноманітні баріони і мезони, що можуть народжуватися в процесі зіткнення, також можуть розглядатися і партонні ступені свободи). Найбільш вдалим серед цих моделей є монте-карлівські кінетичні моделі, у яких використовується молекулярна динаміка і у яких моделюється розповсюдження частинок у системі із врахуванням різноманітних реакцій між частинками. Прикладами таких моделей є RQMD (Relativistic Quantum Molecular Dynamics) [36], UrQMD (Ultrarelativistic Quantum Molecular Dynamics) [37, 38], HSD (Hadron String Dynamics) [39], PHSD (Parton Hadron String Dynamics) [40, 41], BAMPS (Boltzmann Approach to MultiParton Scatterings) [42], AMPT (A Multi-Phase Transport) [43], та JAM [44].

До переваг монте-карлівських кінетичних моделей над іншими моделями можна віднести те, що вони описують еволюцію системи на мові мікроскопічних процесів, властивості яких були визначені або розрахунками із перших принципів, або у відповідних експериментах. Ще однією перевагою є відсутність чисельних нестійкостей, які часто виникають, наприклад у гідродинамічних моделях при чисельному розв'язанні рівнянь.

До недоліків можна віднести обмеження переважно двочастинковими реакціями, що робить опис системи непридатним при високих енергіях зіткнення, зокрема коли в процесі еволюції утворюється КГП. З цієї причини ці моделі в основному придатні для опису зіткнень при більш низьких енергіях, наприклад тим, що відповідають експериментам BNL-AGS і CERN-SPS. При більш високих енергіях зіткнення ці моделі застосовні для опису лише стадії адронного

газу.

На початковій стадії домінують бінарні зіткнення нуклонів із налітаючих ядер. Вони, як правило, описуються за допомогою моделей із формуванням та фрагментацією струн. Прикладами моделей, у яких це реалізовано, є FRITIOF [45] та PYTHIA [46].

### 1.2.3 Гідродинамічні моделі

У гідродинамічних моделях [47, 48] опису зіткнення використовується припущення про те, що на певній стадії еволюції система перебуває у стані, який є досить близьким до локальної термодинамічної рівноваги. В цих моделях адронна матерія описується, як сукупність двох або більше струменів рідини. У найбільш простій моделі ідеальної гідродинаміки розв'язуються рівняння:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (1.1)$$

$$\partial_\mu N^\mu = 0, \quad (1.2)$$

де  $T^{\mu\nu} = (e + P)u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu}$  – тензор енергії-імпульсу,  $u^\mu = (\gamma, \gamma\mathbf{v})$  – гідродинамічна 4-швидкість,  $e$  – густина енергії,  $P$  – тиск,  $N^\mu = n u^\mu$ ,  $n$  – густина частинок. Для того, щоб система рівнянь була замкнутою, необхідно також рівняння стану сильновзаємодіючої матерії  $e = e(T, \mu)$ , яке може бути задано феноменологічно або із розрахунків квантової хромодинаміки. Як правило, рівняння гідродинаміки описують систему після завершення початкової стадії ізотропізації і термалізації адронів ( $\tau \sim 1$  фм/с), і до утворення адронного газу ( $\tau \sim 7-10$  фм/с), коли густина системи падає настільки, що її опис на мові релятивістської гідродинаміки вже не є можливим. Ідеальна гідродинаміка виявилася несподівано успішною у своєму описі багатьох спостережуваних у зіткненнях важких ядер при високих енергіях, які досягаються на BNL-RHIC та CERN-LHC. Цей успіх пов'язують із низьким значенням нормованого коефіцієнту зсувної в'язкості  $\eta/s$  КХД матерії при температурах, що досягаються у зіткненнях ядер, зокрема поблизу гіпотетичного переходу деконфайнменту [49]. У той же час, активно розвивається застосування методів релятивістської гідродинаміки для опису відхилень системи від локальної термодинамічної рівноваги. Найбільш вживаним є підхід Ізраеля-Стюарта [50], який фактично є реляти-

вістськи самоузгодженим узагальненням рівнянь Нав'є-Стокса. Також активно розвиваються підходи, що враховують поправки більш високих порядків [51], а також анізотропна гідродинаміка [52–54].

Вперше гідродинамічний опис зіткнення релятивістських ядер застосував Ландау [55], де у вигляді початкової умови по завершенні стадії термалізації обрано статичний однорідний диск. Ця модель є двовимірною і застосовувалась для енергій зіткнення  $E_{\text{kin}} = 10 - 100A$  ГеВ. Модель Ландау є однією з найпростіших гідродинамічних моделей поряд із одновимірними моделями сферичного розширення [56] для низьких енергій і моделі Бйоркена [57] для високих енергій. Нині найбільш вживаними є тривимірні гідродинамічні моделі, у яких рівняння гідродинаміки розв'язуються чисельно. Прикладами таких моделей є VISH2+1 [58], MUSIC [59], vHLLC [60], та iEBE-VISHNU [61]. Основними труднощами гідродинамічного опису, окрім припущення про локальну термодинамічну рівновагу, є також проблема задання початкових умов і рівняння стану КХД матерії.

Для задання початкових умов в гідродинаміці, як правило, використовують просторові розподіли баріонів, отримані на основі ейкональної моделі Глаубера-Ситенка [62, 63], моделі пораненого нуклона [64], моделі Монте-Карло Глаубера [65], Color Glass Condensate [66–69], IP-Glasma [70]. Інший підхід полягає у застосуванні кінетичних моделей, в яких симулюється початкова стадія еволюції для знаходження необхідних розподілів.

### 1.2.4 Гібридні моделі

Останнім часом великий інтерес представляють так звані гібридні моделі, у яких поєднується гідродинамічний та кінетичний описи зіткнення ядер [71, 72]. При цьому, по завершенні гідродинамічного опису системи за відомою функцією розподілу в результаті гідродинамічної симуляції генеруються адрони відповідно до формули Купера-Фрая [73] і подальша еволюція адронного газу моделюється монте-карлівськими кінетичними моделями. Перехід до стадії адронного газу відбувається на просторово-часовій гіперповерхні, яка визначає умови, за яких гідродинамічний опис системи стає неможливим. Як правило, гідродинамічний опис стає неможливим коли густина частинок або температура



стають занадто малими, і в такому випадку перехід відбувається на гіперповерхні постійної критичної густини або температури. Цю гіперповерхню часто ототожнюють з так званою гіперповерхнею різкого фрізауту [3], яка також використовується у чистих гідродинамічних моделях для розрахунку адронних спектрів одразу по закінченню гідродинамічної стадії.

### **1.3 Процес фрізауту та просторово-часова структура системи**

Процес фрізауту у ядро-ядерних зіткненнях – це, за визначенням, процес встановлення кінцевого хімічного складу адронів в результаті зіткнення ядер (хімічний фрізаут) та встановлення кінцевого імпульсного спектру адронів (кінетичний фрізаут). Цей процес виникає внаслідок швидкого розширення адронної системи у вакуумі. Характеристики системи на стадії фрізауту, а саме виходи різних сортів частинок на стадії хімічного фрізауту та їх імпульсні розподіли на стадії кінетичного фрізауту, безпосередньо вимірюються на експерименті. В рамках концепції фрізауту окремий інтерес представляють такі об'єкти, як просторово-часові гіперповерхні фрізауту. Гіперповерхня так званого різкого фрізауту умовно відділяє просторово-часову область, у якій відбуваються адронні реакції від області, де реакцій немає. У випадку хімічного фрізауту мова йде про область де відбуваються непружні реакції із народженням нових адронів, а у випадку кінетичного фрізауту це є будь-які реакції між адронами. Насправді, таке уявлення про існування гіперповерхонь різкого фрізауту є де-що ідеалізованим описом процесу фрізауту у зіткненнях релятивістських ядер. Зокрема, дослідження в рамках транспортних моделей показали, що процес фрізауту відбувається у видовженій просторово-часовій області ненульового об'єму [74–76], а не на деякій 3-вимірній просторово-часовій гіперповерхні. Тим не менше, концепція гіперповерхні різкого фрізауту успішно використовується в рамках формалізму Купера-Фрая, зокрема для розрахунку імпульсних спектрів адронів у гідродинамічних моделях або для здійснення переходу до стадії адронного газу у гібридних моделях.

Гіперповерхні фрізауту безпосередньо несуть інформацію про просторово-

часову структуру взаємодіючої адронної системи, що утворюється при зіткненні ядер. Такий об'єкт є надзвичайно корисним для отримання наочного уявлення про еволюцію системи, що виникає у зіткненнях ядер. Такі знання, у свою чергу, дають змогу формулювати методи та моделі для опису та розв'язання різних задач. Кількісне дослідження просторово-часової структури може мати наступний вигляд: це є проведення аналізу залежності деякої фізичної величини від просторово-часової точки в системі  $(t, \mathbf{r})$  в рамках динамічної моделі опису зіткнення ядер. Наочний аналіз подібного плану було проведено в рамках транспортної моделі UrQMD в роботах [1–4], де у якості фізичних величин використовувались 4-густина адронних реакцій, тобто кількість різноманітних адронних реакцій в одиниці просторово-часового об'єму, а також густина кількості та енергії пі-мезонів, які народжуються в системі.

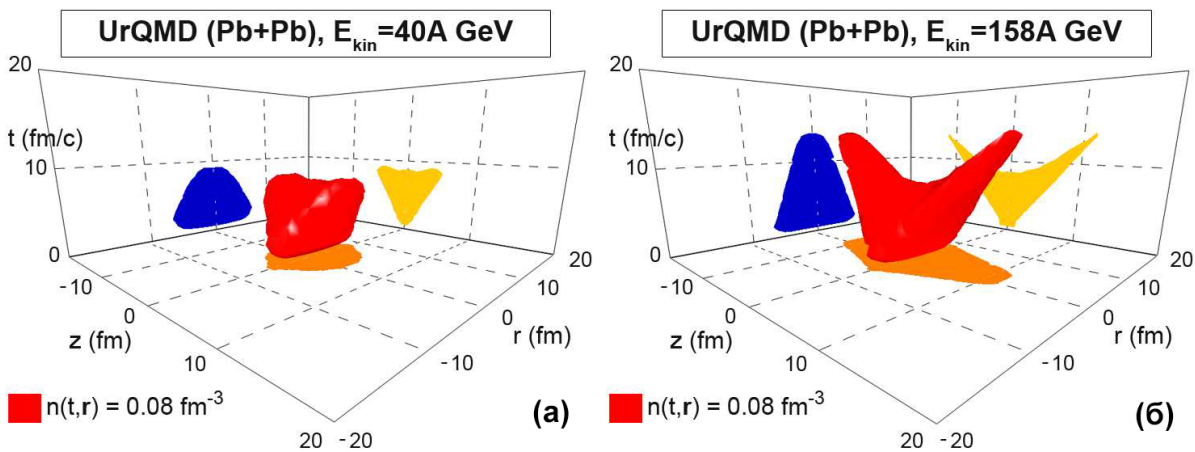


Рис. 1.3: Тривимірні гіперповерхні постійної інваріантної густини кількості негативно заряджених піонів для умов експерименту SPS при енергіях (а)  $E_{\text{kin}} = 40A$  ГеВ та (б)  $E_{\text{kin}} = 158A$  ГеВ. Взято з [3].

У загальному випадку, просторо-часова структура будь-якої фізичної величини  $f$  визначається її залежністю від 4-х просторо-часових координат  $(t, x, y, z)$ . У той же час, центральні зіткнення ядер мають яскраво виражену азимутальну симетрію. Внаслідок цієї симетрії центральних зіткнень ядер ці густини не будуть залежати від азимутального куту  $\varphi$  у площині  $x-y$  при переході до циліндричних координат, тобто  $f(t, x, y, z) = f(t, r, z)$ . На Рис. 1.3 у координатах  $(t, r, z)$  наведено гіперповерхні піонного фрizaуту  $n_{\pi}(t, r, z) = n_c$ , розраховані в UrQMD у роботі [3] для центральних зіткнень ядер свинцю при енергіях  $E_{\text{kin}} = 40A$  ГеВ та  $E_{\text{kin}} = 158A$  ГеВ. Тут величина  $n_{\pi}$  є Лоренц-

інваріантною густиною негативно заряджених пі-мезонів. Результати, зображені на Рис. 1.3 відображають досить повну інформацію про типову просторово-часову структуру центральних зіткнень релятивістських ядер для діапазона енергій  $E_{\text{kin}} = 40 - 158A$  GeV. Слід зазначити, що ці результати відповідають моделюванню у рамках UrQMD. У той же час, вони є досить типовими і для розрахунків і в інших моделях.

## 1.4 Відкриті питання

Протягом останніх 20-30 років галузь релятивістських ядро-ядерних зіткнень активно розвивалась і було отримано багато результатів. У той же час у галузі залишається багато нез'ясованих питань, які нині активно досліджуються. До найважливіших із них можна віднести наступні:

- Який вигляд має рівняння стану КХД при ненульовій баріонній густині? Якою є природа фазових переходів між адронними та партонними ступенями свободи? Чи є на фазовій діаграмі критична точка? Ці питання є основою поточних експериментальних програм NA61/SHINE у CERN [77, 78] та RHIC Beam Energy Scan у BNL [79, 80].
- Як відрізняються результати вимірювання різних величин у протон-протонних та ядро-ядерних зіткненнях при одній і тій самій енергії зіткнення? Вважається, що збуджене сильно взаємодіюче середовище утворюється у ядро-ядерних зіткненнях, але не у протон-протонних. Відповідно, ефекти наявності такого середовища можна побачити порівнюючи результати спостережень у протон-протонних та ядро-ядерних зіткненнях. У той же час, коректна інтерпретація результатів залишається непростю задачею через наявність інших ефектів, які треба враховувати, а також недостатній на даний момент набір відповідних експериментів.
- Чи утворюється у ядро-ядерних зіткненнях локальна термодинамічна рівновага і якими є межі застосування гідродинамічного опису? Як змінюються загальні характеристики взаємодіючої системи, зокрема початкові умови гідродинаміки, при переході від центральних зіткнень до суттєво нецентральних? Якою є роль флуктуацій у початковому стані гідродинаміки?

- Якою є роль взаємодії між адронами на рівняння стану адронної фази КХД? Адронна фаза у зіткненнях релятивістських ядер традиційно описується моделлю ідеального адронно-резонансного газу, у якій нехтується усіма адронними взаємодіями, які не описуються формуванням резонансів. У той же час, із фізики ядерної матерії та із властивостей нуклон-нуклонного розсіяння відомо, що при малих відносних відстанях між нуклонами наявне сильне відштовхування. Роль такої взаємодії у моделі адронно-резонансного газу досі не з'ясована повністю.

Декілька з наведених вище питань розглядаються у даному дисертаційному дослідженні.

## Розділ 2

# Імпульсні спектри адронів у протон-протонних та ядро-ядерних зіткненнях

### 2.1 Вступ

Основною спостережуваною величиною у експериментах із ядро-ядерних та протон-протонних зіткнень є імпульсні спектри різних адронів, тобто їх розподіл по імпульсах. Порівняння із різними моделями опису зіткнення ядер тоді дозволяє зробити висновок про коректність закладених у модель різноманітних фізичних припущень. У період з 1999 по 2002 роки, експериментальні дані стосовно спектрів різних адронів у Pb+Pb зіткненнях при енергіях  $p_{\text{lab}} = 20A, 30A, 40A, 80A$ , та  $158A$  GeV/c були отримані колаборацією NA49 на прискорювачі Super Proton Synchrotron (SPS) у CERN [27, 81, 82]. Ці результати узгоджуються із припущенням про появу деконфайнменту у центральних Pb+Pb зіткненнях при енергії приблизно  $30A$  GeV/c [83–85]. Подальшого прогресу у розумінні ефектів, пов'язаних із появою деконфайнменту, можна досягти за допомогою детального аналізу (як теоретичного, так і експериментального) імпульсних спектрів адронів у протон-протонних, протон-ядерних та ядро-ядерних зіткненнях. Це є основною мотивацією програми NA61/SHINE на прискорювачі SPS у CERN, яку присвячено дослідженню залежності імпульсних спектрів від розміру системи та енергії зіткнення [77, 78]. Паралельно із NA61/SHINE також було запущено програму Beam Energy Scan (BES) на прискорювачі BNL RHIC [79, 80]. Обидві програми були вмотивовані результатами, які були отримані колаборацією NA49 стосовно появи деконфайнменту та можливості знайти підтвердження наявності критичної точки на фазовій діаграмі сильновзаємодіючої матерії. Ці дослідження буде також продовжено у майбутніх експериментах,

зокрема у експерименті FAIR-CBM [86]. У цьому експерименті будуть використовуватися пучки із високою інтенсивністю, а також детектори із високою геометричною ефективністю, що дозволить проводити дослідження рідкісних спостережуваних – мульти-дивних гіперонів та мезонів із відкритою чарівністю – у протон-протонних, протон-ядерних та ядро-ядерних зіткненнях. Початок роботи експерименту CBM [87] заплановано на 2020 рік, із пучками з енергією до  $11 A$  GeV на прискорювачі SIS100. Можливий додаток у вигляді кільця SIS300 підвищить діапазон енергій до  $35 A$  GeV після 2025 року.

Нещодавно, колаборація NA61/SHINE опублікувала [88] дані щодо імпульсних спектрів негативно заряджених пі-мезонів, які народжуються у непружних (p+p) реакціях при енергіях зіткнення  $p_{\text{lab}} = 20, 31, 40, 80, \text{ та } 158$  GeV/c. Ця публікація є першим кроком у дослідженнях залежності імпульсних спектрів від розмірів системи, які проводить NA61/SHINE. Аналіз інших систем, таких як  ${}^7\text{Be}+{}^9\text{Be}$ , Ar+Ca та Xe+La, нині триває.

У даному розділі розглядаються імпульсні спектри різноманітних адронів, що виникають у непружних p+p зіткненнях, а також проводиться порівняння із відповідними даними із центральних Pb+Pb зіткнень. В першу чергу, ці дослідження стосуються негативно заряджених пі-мезонів. Виконується аналіз відмінностей, що спостерігаються на експерименті при переході від p+p до Pb+Pb зіткнень та проводиться порівняння із тими відмінностями, які передбачаються теоретично, в рамках моделі UrQMD-3.3p2 [37, 38]. При цьому використовується каскадна версія UrQMD (без гідродинаміки) і аналізується, в першу чергу, залежність основних характеристик спектру пі-мезонів від енергії зіткнення. Особливу увагу необхідно приділити ізоспіновим ефектам, особливо коли мова йде про порівняння результатів стосовно протон-протонних та ядро-ядерних зіткнень.

## 2.2 Моделювання в UrQMD

Модель UrQMD належить до класу монте-карлівських мікроскопічних моделей опису зіткнення ядер (протонів). Численні порівняння з експериментальними даними вказують на те, що ця модель адекватно описує зіткнення ядер при енергіях, що відповідають експериментам AGS, SPS та RHIC (див. Табл. 1.1).

Розглянемо детальніше як працює UrQMD. У цій моделі розв'язується кінетичне рівняння Больцмана за рахунок симуляції розповсюдження частинок (адронів) і всіх можливих двочастинкових реакцій між ними в процесі еволюції, у тому числі реакцій між частинками різного сорту. Для отримання гладких функцій розподілу, як правило, проводиться статистичне усереднення з великої кількості подій, які відповідають одному і тому ж типу зіткнення ядер. Кількість подій залежить від конкретної фізичної задачі, і, типово, може налічувати від  $10^3$  до  $10^6$  подій. Підхід молекулярної динаміки полягає в тому, що еволюція системи визначається розв'язком класичних коваріантних рівнянь руху у формі Гамільтона

$$\frac{dq_j}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad (2.1)$$

$$\frac{dp_j}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.2)$$

Крім того, розглядаються та моделюються усі можливі зіткнення між будь-якою парою адронів. Критерієм зіткнення є умова

$$d \leq d_0 = \sqrt{\frac{\sigma_{tot}}{\pi}}, \quad (2.3)$$

де  $d$  – найменша відстань між частинками в системі центра мас цих двох частинок,  $\sigma_{tot}$  - повний переріз розсіяння, який залежить від енергії зіткнення та типу частинок. В цьому підході частинки, по суті, рухаються як класичні, але тут також враховані такі квантові ефекти, як розсіяння частинок, принцип Паулі заборони деяких реакцій, народження нових частинок у реакціях, а також стохастичний розпад частинок. Наприкінці еволюції в UrQMD, адрони розповсюджуються вільно. Таким чином, розрахунки в UrQMD можна напряму порівнювати із експериментальними даними.

## 2.3 Множинність пі-мезонів та ізоспінові ефекти

У діапазоні енергій SPS, середня множинність пі-мезонів у розрахунку на один нуклон-учасник є подібною у непружних протон-протонних та ядро-ядерних зіткненнях при одній і тій же енергії зіткнення. Відповідно, для того

щоб виявити різницю у фізичних процесах, що відбуваються у  $p+p$  та у ядроядерних зіткненнях при одних і тих самих енергіях, необхідно мати всебічний набір експериментальних даних. Використаємо для нашого аналізу нещодавні дані колаборації NA61/SHINE для  $p+p$  реакцій [88], а також дані колаборації NA49 для  $Pb+Pb$  зіткнень [27, 81, 82].

Як було зазначено вище, для аналізу використовується модель UrQMD. При кожній енергії зіткнення було згенеровано приблизно  $2 \cdot 10^6$  непружних  $p+p$  реакцій та приблизно  $5 \cdot 10^4$  центральних  $Pb+Pb$  зіткнень. Центральні  $Pb+Pb$  зіткнення означено в експерименті наступним чином: це 7.2% найбільш центральних із усіх зареєстрованих непружних подій для енергій  $p_{lab} = 20A, 30A, 40A, 80A$  GeV/c та 5% для  $p_{lab} = 158A$  GeV/c. У моделюванні UrQMD такий відбір відповідає обмеженню згори на прицільний параметр зіткнення:  $b < 4$  фм для енергій  $p_{lab} = 20-80A$  GeV/c та  $b < 3.4$  фм для  $p_{lab} = 158A$  GeV/c. Слід відмітити, що у експериментах із фіксованою мішенню відбір центральних подій виконується у дещо інший спосіб: оскільки прицільний параметр неможливо визначити експериментально, то мірою центральності події є кількість спектаторів, яку було зареєстровано за допомогою калориметру нульового кута розсіяння. Тим не менш, для перших моментів випадкових величин (наприклад це є середня кількість деяких адронів, що народжуються у зіткненні) ці два критерії відбору центральності працюють практично еквівалентно [89]. Більше складнощey може виникнути при розгляді флуктуацій [90].

Експериментальні результати для середньої кількості негативно заряджених пі-мезонів  $\langle \pi^- \rangle$  по відношенню до середньої кількості нуклонів-учасників  $\langle N_p \rangle$  ( $\langle N_p \rangle = 2$  для  $p+p$  зіткнень) наведено на Рис. 2.1. Для більш зручного порівняння із експериментом використано енергетичну шкалу  $F = (\sqrt{s_{NN}} - 2m_N)^{3/4} / (\sqrt{s_{NN}})^{1/4}$ . Із експериментальних даних наведених на Рис. 2.1 видно, що при всіх енергіях SPS, величина  $\langle \pi^- \rangle / \langle N_p \rangle$  є більшою у центральних  $Pb+Pb$  зіткненнях ніж у непружних  $p+p$  зіткненнях. Результати UrQMD розрахунків наведено на Рис. 2.1 лініями. Видно, що у випадку непружних  $p+p$  реакцій, результати UrQMD добре узгоджуються із даними для двох найвищих енергій SPS (80 and 158A GeV), але недооцінюють експериментальні дані  $\langle \pi^- \rangle / \langle N_p \rangle$  при більш низьких енергіях.



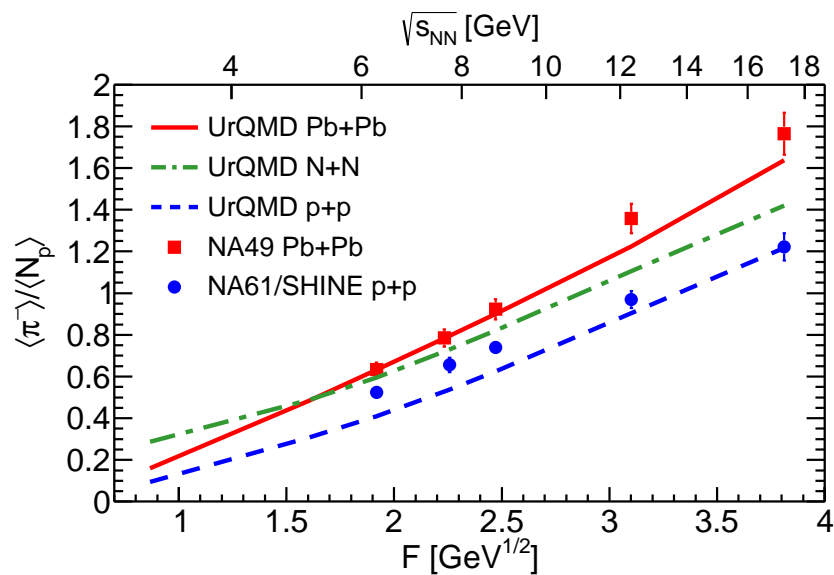


Рис. 2.1: Залежність від енергії зіткнення середньої множинності  $\pi^-$ , яку нормовано на середню кількість учасників. Експериментальні дані NA49 для центральних Pb+Pb зіткнень та NA61/SHINE для непружних p+p реакцій зображено символами. Лініями зображено передбачення моделі UrQMD для непружних p+p (пунктирна), центральних Pb+Pb (суцільна), and непружних N+N (пунктирна з точками) зіткнень.

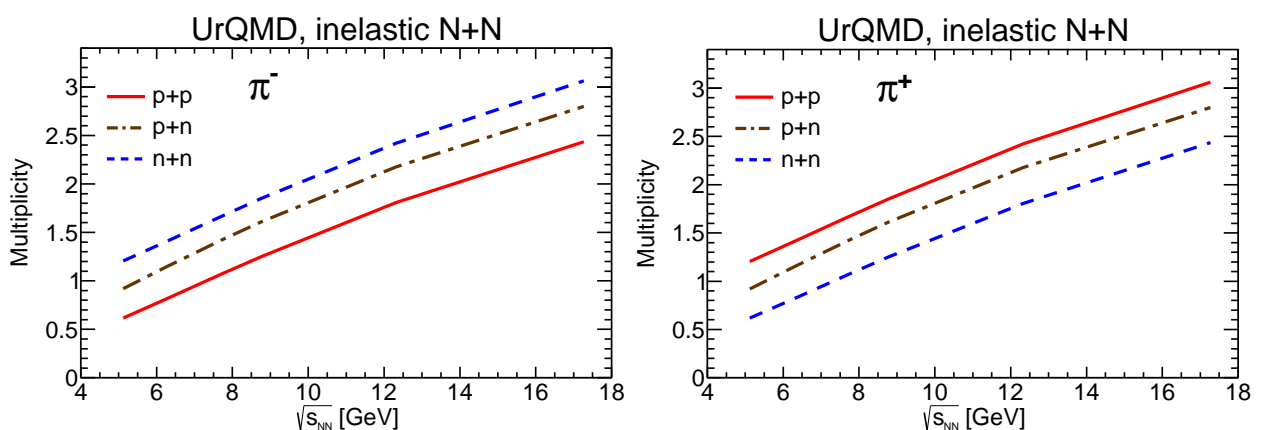


Рис. 2.2: Залежність від енергії зіткнення середніх множинностей  $\pi^-$  (зліва) та  $\pi^+$  (справа) мезонів у непружних p+p, p+n та n+n реакціях при енергіях SPS, які було розраховано у моделі UrQMD.

Для більш коректного порівняння між  $p+p$  та  $Pb+Pb$  зіткненнями необхідно врахувати ізоспінові ефекти. У процесі зіткнення ядер в системі відбуваються три різні типи нуклон-нуклонних реакцій:  $p+p$  (протон-протон),  $p+n$  (протон-нейтрон), та  $n+n$  (нейтрон-нейтрон). Розраховані в UrQMD множинності  $\pi^-$  та  $\pi^+$  в непружних  $p+p$ ,  $p+n$ , та  $n+n$  реакціях для енергій SPS наведено на Рис. 2.2. Різниця між множинностями  $\pi^-$  та  $\pi^+$  у різних типах  $N+N$  зіткнень приблизно однакова. Таким чином, можна очікувати, що ізоспінові ефекти проявляються найбільш сильно при найменших енергіях зіткнень, коли абсолютні значення множинностей стають малими.

Ядро-ядерне зіткнення можна представити як набір  $p+p$ ,  $p+n$  та  $n+n$  реакцій. Вага кожного із цих трьох вкладів у повну множинність у  $A+A$  зіткненнях буде залежати від атомного числа  $A$  та електричного заряду  $Z$  ядер, що зіштовхуються. Множинність певного сорту адронів у фіктивній  $N+N$  реакції можна представити як сконструйоване правильним чином середнє по  $p+p$ ,  $p+n$ , та  $n+n$  зіткненням, що мають місце у  $A+A$  зіткненні. Для множинності піонів  $\pi^i$  ( $i = +, -, 0$ ) отримуємо:

$$\langle \pi_{NN}^i \rangle = \alpha_{pp} \langle \pi_{pp}^i \rangle + \alpha_{pn} \langle \pi_{pn}^i \rangle + \alpha_{nn} \langle \pi_{nn}^i \rangle, \quad (2.4)$$

де  $\alpha_{pp} = Z^2/A^2$ ,  $\alpha_{pn} = 2(A-Z)Z/A^2$ , та  $\alpha_{nn} = (A-Z)^2/A^2$  є комбінаторними ймовірностями  $p+p$ ,  $p+n$ , та  $n+n$  зіткнень, відповідно. Для легких ядер та для ядер середньої ваги  $Z \cong 0.5A$ , у той час як для важких ядер  $Z \cong 0.4A$ . Таким чином  $\alpha_{pp} \cong 0.16$ ,  $\alpha_{pn} \cong 0.48$ , та  $\alpha_{nn} \cong 0.36$  для  $Pb+Pb$  зіткнень, у той час як  $\alpha_{pp} \cong \alpha_{nn} \cong 0.25$ , та  $\alpha_{pn} \cong 0.5$  у зіткненнях ядер середньої та малої ваги. Відносний вклад від  $n+n$  реакцій зростає у  $A+A$  зіткненнях із збільшенням атомного числа.

Поведінка розрахованої в UrQMD за допомогою (2.4) величини  $\langle \pi_{NN}^- \rangle / 2$ , яка є середньою множинністю  $\pi^-$  мезонів у розрахунку на один учасник у фіктивному  $N+N$  зіткненні, наведено на Рис. 2.1 лінією типу пунктир-точка. Із цього рисунку видно, що значна частина відмінностей між  $p+p$  та  $Pb+Pb$  зіткненнями по відношенню до величини  $\langle \pi^- \rangle / \langle N_p \rangle$  пояснюється ізоспіновими ефектами.

Результати UrQMD розрахунків для нормованої на кількість учасників середньої множинності усіх пі-мезонів наведено на Рис. 2.3 (зліва). Ці резуль-

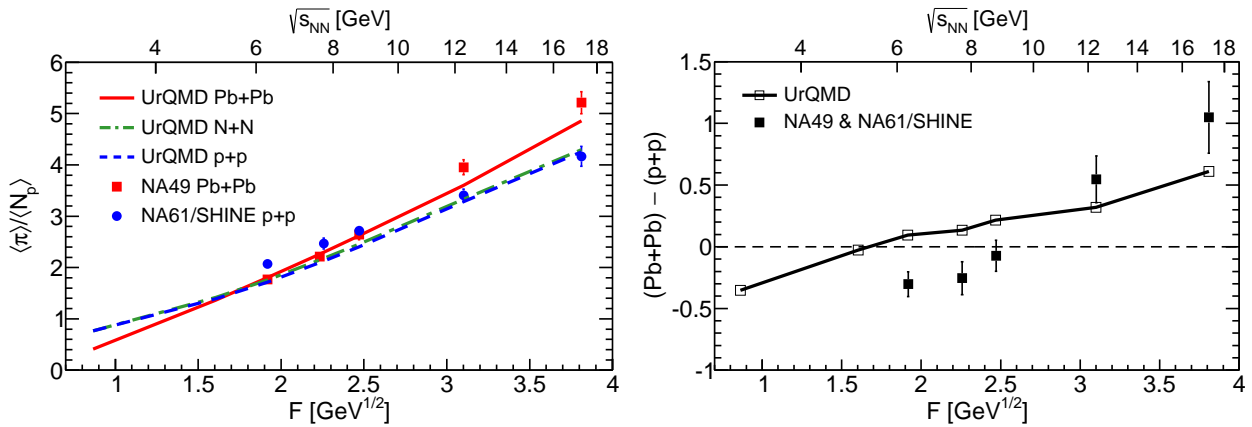


Рис. 2.3: *Зліва*: Те саме, що і на Рис. 2.1 але для середньої множинності усіх пі-мезонів. *Справа*: Різниця між середніми множинностями пі-мезонів у розрахунку на один нуклон-учасник у центральних Pb+Pb та непружних p+p зіткненнях. Суцільні символи відображають дані колаборацій NA49 та NA61/SHINE, у той час як розрахунки UrQMD показано відкритими символами.

тати порівнюються із експериментальними даними, опублікованими в роботі [88]. Середня множинність усіх пі-мезонів розраховується в UrQMD як  $\langle \pi \rangle = \langle \pi^+ \rangle + \langle \pi^0 \rangle + \langle \pi^- \rangle$ . Для того, щоб отримати оцінку цієї величини із експериментальних даних використовується формула

$$\langle \pi \rangle = \frac{3}{2} \left( \langle \pi^+ \rangle + \langle \pi^- \rangle \right). \quad (2.5)$$

У цій формулі вважається, що середня множинність нейтральних пі-мезонів виражається як  $\langle \pi^0 \rangle = 0.5 (\langle \pi^+ \rangle + \langle \pi^- \rangle)$ . Величини  $\langle \pi^+ \rangle$  та  $\langle \pi^- \rangle$  було виміряно колаборацією NA49 в центральних Pb+Pb зіткненнях. У той же час, даних для  $\langle \pi^+ \rangle$  у p+p реакціях на даний момент ще не існує. Таким чином, для того, щоб отримати експериментальну оцінку величини  $\langle \pi \rangle$  у p+p реакціях, у роботі [88] разом із рівнянням (2.5) додатково використовується наближений вираз  $\langle \pi^+ \rangle \cong \langle \pi^- \rangle + 2/3$  [91]. В роботі було зроблено спостереження, що коректність цього виразу із непоганою точністю справджується в розрахунках UrQMD. Для того, щоб обчислити  $\langle \pi \rangle$  в UrQMD просто сумуються значення  $\langle \pi^+ \rangle$ ,  $\langle \pi^0 \rangle$ ,  $\langle \pi^- \rangle$  розраховані у моделі для p+p, p+n, та n+n реакціях. Результати UrQMD розрахунків для середньої множинності пі-мезонів в p+p та N+N реакціях наведено на Рис. 2.3.

В результаті видно, що середня множинність пі-мезонів у розрахунку на

один нуклон-учасник є більшою в непружних  $p+p$  реакціях ніж у центральних  $Pb+Pb$  зіткненнях при малих енергіях SPS. Можливе пояснення зменшення виходу пі-мезонів у  $A+A$  зіткненнях було наведено у роботі [92], де розглядалась система пі-мезонів, нуклонів та дельта-резонансів. Коли система, що утворюється у  $A+A$  зіткненнях наближається до хімічної рівноваги, то початковий надлишок дельта-резонансів, які народились на початковій стадії у  $p+p$ ,  $n+n$ , та  $n+n$  зіткненнях, зменшується. Мікроскопічний процес, який описує поглинання  $\Delta$  має вигляд  $\Delta + N \rightarrow N + N$  і він присутній в моделі UrQMD. Це і спричиняє зменшення кількості пі-мезонів на виході.

Як показано на Рис. 2.3 (справа), різниця між експериментальними значеннями  $\langle \pi \rangle / \langle N_p \rangle$  у  $Pb+Pb$  та  $p+p$  зіткненнях збільшується із енергією зіткнення ядер і змінює знак (стає додатною) приблизно при  $E_{lab} \approx 40A$  GeV. Цей злам у різниці між нормованими на число нуклонів-учасників множинностями пі-мезонів у  $Pb+Pb$  та  $p+p$  зіткненнях буз передбачений в рамках Статистичної Моделі Початкової Стадії [83] як наслідок появи деконфайнменту. На Рис. 2.3 видно, що така поведінка спостерігається і в UrQMD, хоча зміна знаку відбувається при суттєво меншій енергії  $E_{lab} \approx 10A$  GeV замість  $40A$  GeV.

## 2.4 Втрата енергії налітаючих нуклонів

Введемо величину  $K_{loss}$ , яка буде характеризувати частку початкової кінетичної енергії, яку втрачає кожний нуклон через народження вторинних частинок. У системі центру мас протонів (або ядер), що зіштовхуються ця величина означена як

$$K_{loss} = \frac{\sqrt{s_{NN}}/2 - (\langle E_B \rangle - \langle E_{\bar{B}} \rangle) / \langle N_p \rangle}{\sqrt{s_{NN}}/2 - m_N} \quad (2.6)$$

де  $\langle E_B \rangle$  та  $\langle E_{\bar{B}} \rangle$  є, відповідно, середніми значеннями енергії баріонів та анти-баріонів у кінцевому стані системи (нуклони-спектатори тут не розглядаються) а  $\sqrt{s_{NN}}/2$  є початковою енергією одного нуклона в системі центру мас.

Експериментальні дані щодо імпульсних спектрів баріонів та анти-баріонів у  $p+p$  реакціях ще не було опубліковано, тому можна робити лише модельні оцінки. Розраховану в UrQMD величину  $K_{loss}$  у непружних  $p+p$  та у центральних  $Pb+Pb$  зіткненнях наведено на Рис. 2.4 (зліва). Видно, що у  $Pb+Pb$  зіткненнях

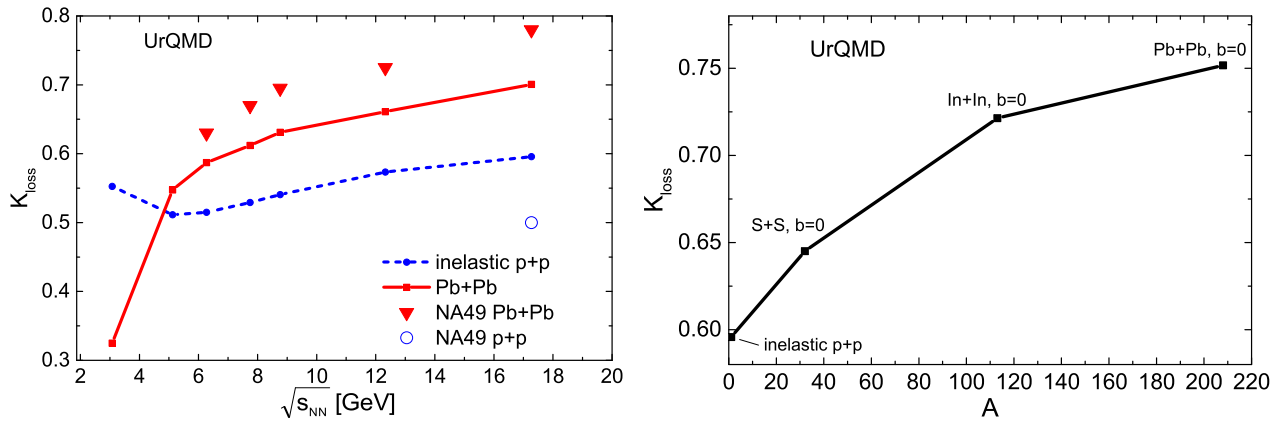


Рис. 2.4: Результати розрахунків UrQMD для величини  $K_{\text{loss}}$  (2.6). *Зліва*: Залежність від енергії зіткнення для непружних p+p (пунктирна лінія) та центральних Pb+Pb (суцільна крива) зіткнень. Експериментальні дані для непружності позначено трикутними символами для Pb+Pb і кружечком для p+p [93]. *Справа*: Залежність від масового числа  $A$  у випадку строго центральних ( $b = 0$ ) зіткнень ядер при фіксованій енергії зіткнення рівній  $158A$  ГеВ.

ця величина збільшується із енергією зіткнення. Ці результати не суперечать даним колаборації NA49 щодо так званої непружності  $K$  [93], яка дуже тісно пов'язана із  $K_{\text{loss}}$ , і зображена трикутними символами на Рис. 2.4 (зліва). Із результатів UrQMD випливає, що при енергіях  $E_{\text{lab}} \geq 20A$  ГеВ виконується наступна нерівність

$$K_{\text{loss}}(p + p) < K_{\text{loss}}(\text{Pb} + \text{Pb}) , \quad (2.7)$$

тобто, у Pb+Pb зіткненнях, кожний нуклон передає більшу у порівнянні із непружними p+p реакціями частину своєї початкової кінетичної енергії на народження вторинних частинок при тій самій енергії зіткнення на один нуклон  $\sqrt{s_{NN}}/2$ . Як видно із Рис. 2.3, нерівність (2.7) корелює із нерівністю стосовно множинності усіх пі-мезонів на один нуклон-учасник

$$\left( \frac{\langle \pi \rangle}{\langle N_p \rangle} \right)_{p+p} < \left( \frac{\langle \pi \rangle}{\langle N_p \rangle} \right)_{\text{Pb}+\text{Pb}} . \quad (2.8)$$

Для дослідження залежності втрати енергії (2.6) від розмірів системи проведемо додаткові UrQMD розрахунки для строго центральних (прицільний параметр  $b = 0$ ) ядро-ядерних зіткнень із різним масовим числом  $A$ . Додаткові

розрахунки були проведені для зіткнень S+S ( $A=32$ ) та In+In ( $A=113$ ) при енергії  $p_{\text{lab}} = 158A$  GeV/c. Результати розрахунків, які наведено на Рис. 2.4 (справа), відповідають монотонному зростанню величини  $K_{\text{loss}}$  із масовим числом при найвищій енергії SPS. Це зростання величини  $K_{\text{loss}}$  можна пояснити збільшенням кількості нуклонів-учасників: ймовірність того, що в системі з'являються вторинні непружні зіткнення із участю нуклонів-учасників зростає із  $N_p$  і це призводить до додаткової втрати енергії.

З іншого боку, на Рис. 2.4 та 2.3 видно, що при малих енергіях зіткнення ( $E_{\text{lab}} \leq 10A$  GeV) нерівності (2.7) та (2.8), отримані внаслідок UrQMD розрахунків, змінюються на протилежні:

$$K_{\text{loss}}(p + p) > K_{\text{loss}}(Pb + Pb) , \quad (2.9)$$

$$\left( \frac{\langle \pi \rangle}{\langle N_p \rangle} \right)_{p+p} > \left( \frac{\langle \pi \rangle}{\langle N_p \rangle} \right)_{Pb+Pb} . \quad (2.10)$$

Це пояснюється наявністю мікроскопічних процесів типу  $\Delta + N \rightarrow N + N$ , а також реакцій злиття мезон + баріон  $\rightarrow$  баріон у щільній баріонній системі, яка утворюється у ядро-ядерних зіткненнях. З Рис. 2.3 випливає, що перехід від (2.10) до (2.8) справді спостерігається в експериментальних даних для p+p та Pb+Pb зіткнень, але при суттєво більшій енергії зіткнення  $E_{\text{lab}} \geq 40A$  GeV.

## 2.5 Імпульсні спектри пі-мезонів

### 2.5.1 Розподіл по рапідності

Розподіли  $\pi^-$  мезонів по рапідності  $dN/dy$  у непружних p+p реакціях [88] та у центральних Pb+Pb зіткненнях [27, 81] представлено на Рис. 2.5 для різних енергій зіткнення. Лініями представлено результати розрахунків в UrQMD. Видно, що UrQMD недооцінює повний вихід  $\pi^-$  мезонів у p+p реакціях при всіх енергіях окрім найбільшої ( $p_{\text{lab}} = 158A$  GeV/c). Ці розбіжності є найбільш суттєвими у центральному діапазоні рапідностей. Схоже спостереження було також зроблено у роботі [94, 95]. Відзначимо, що представлені нами результати не суперечать результатам, отриманим у попередній версії UrQMD-2.3 [96].

Як видно з Рис. 2.5 (справа), UrQMD набагато краще описує дані по пі-мезонам у центральних Pb+Pb зіткненнях, ніж у непружних p+p реакціях. Це

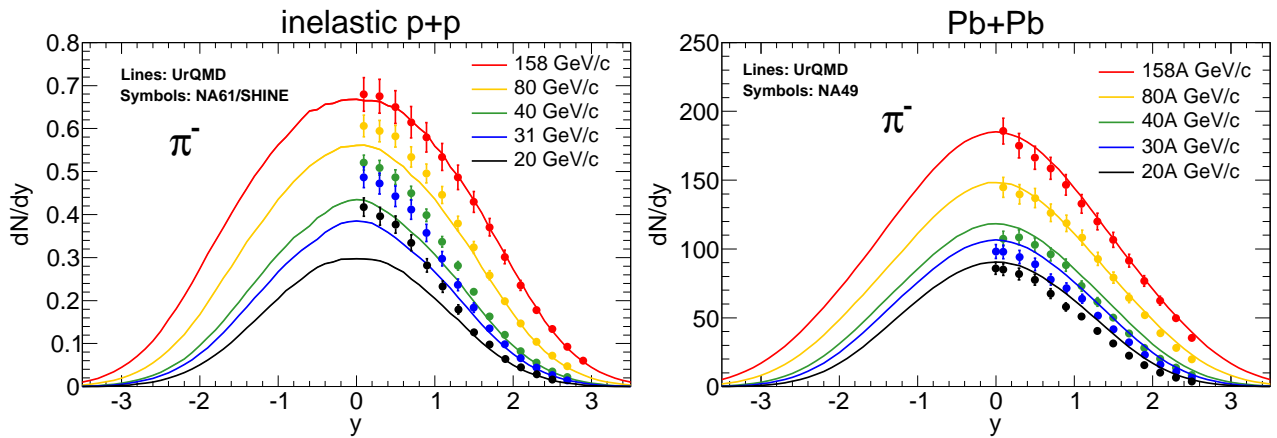


Рис. 2.5: Розподіли  $\pi^-$  мезонів по рапідності у непружних p+p реакціях (зліва) та у центральних Pb+Pb (справа) зіткненнях. Експериментальні дані колаборацій NA61/SHINE та NA49 позначено символами з вусами у той час як результати розрахунків в UrQMD позначено лініями.

спостереження є досить підозрілим оскільки протон-протонні спектри розглядаються в UrQMD як вхідні дані для опису ядро-ядерних зіткнень у режимі каскаду. Це означає, що якщо вносити зміни в UrQMD для того, щоб описати дані NA61/SHINE [88], то необхідно це робити у такий спосіб, що зберегти добрий опис даних у ядро-ядерних зіткненнях.

Ширина розподілу  $dN/dy$  по рапідності є важливою величиною, що характеризує процес народження вторинних частинок. Ця ширина означено як

$$\sigma \equiv \sqrt{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}, \quad (2.11)$$

де ( $k = 1, 2$ )

$$\langle y^k \rangle = \frac{\int dy y^k (dN/dy)}{\int dy (dN/dy)}. \quad (2.12)$$

Відмітимо, що, у випадку p+p зіткнень, або  $A + A$  зіткнень однакових ядер,  $\langle y \rangle = 0$  у системі центру мас.

Залежність від енергії зіткнення ширини  $\sigma$  розподілу по рапідності  $\pi^-$  мезонів у непружних p+p наведено на Рис. 2.6. Видно, що виконується нерівність

$$\sigma(\text{Pb} + \text{Pb}) > \sigma(\text{p} + \text{p}) \quad (2.13)$$

для всього діапазону енергій SPS. Результати розрахунків UrQMD якісно відповідають експериментальним даним. Тим не менше, UrQMD значення для

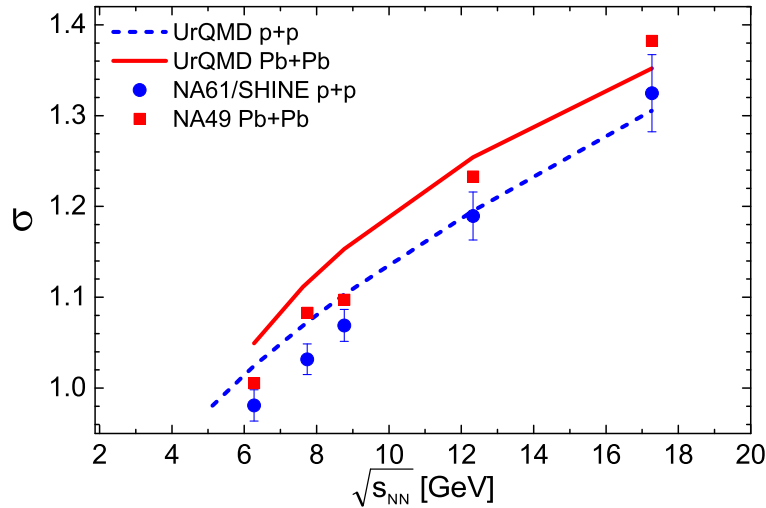


Рис. 2.6: Залежність від енергії зіткнення ширини  $\sigma$  розподілу по рапідності  $\pi^-$  мезонів у непружних p+p та у центральних Pb+Pb зіткненнях. Експериментальні дані колаборацій NA61/SHINE та NA49 позначено символами у той час як результати розрахунків в UrQMD позначено суцільними лініями.

ширини  $\sigma(p + p)$  перевищують експериментальні при малих енергіях SPS. Це пояснюється недооцінкою UrQMD кількості пі-мезонів у центральному діапазоні рапідностей, як видно із Рис. 2.5 (зліва).

Відмітимо, що залежність ширини розподілу по рапідності різних адронів у Au+Au було також нещодавно досліджено з використанням UrQMD у роботі [97].

## 2.5.2 Розподіли по поперечній масі

Розподіли  $\pi^-$  мезонів по поперечній масі у центральному діапазоні рапідностей зображено на Рис. 2.7 для непружних p+p (зліва) та центральних Pb+Pb (справа) зіткнень. Експериментальні дані колаборацій NA61/SHINE [88] та NA49 [27, 81] зображено символами з вусами. Дані відповідають центральному діапазону рапідностей  $0 < y < 0.2$ . Суцільні лінії відповідають результатам розрахунків в UrQMD. В інтервалі  $0.2 < m_T - m_\pi < 0.7$  GeV/c<sup>2</sup>, поведінку наведених вище спектрів можна достатньо точно наблизити простою експонентою

$$\frac{dN}{m_T dm_T} = A \exp\left(-\frac{m_T}{T}\right), \quad (2.14)$$



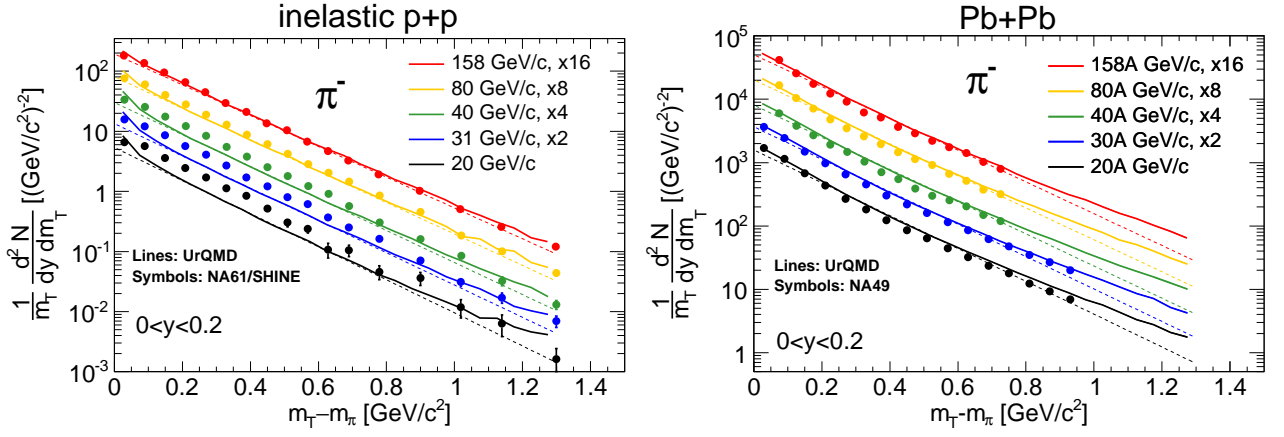


Рис. 2.7: Розподіли  $\pi^-$  мезонів по поперечній масі у центральному діапазоні рапідностей у непружних  $p+p$  (зліва) та у центральних  $Pb+Pb$  (справа) зіткненнях. Результати розрахунків UrQMD зображено суцільними лініями у той час як дані колаборацій NA61/SHINE та NA49 зображено символами з вусами. Точковими лініями зображено експоненційне наближення (2.14) даних UrQMD в інтервалі  $0.2 < m_T - m_\pi < 0.7 \text{ GeV}/c^2$ .

де  $A$  та  $T$  є параметрами наближення (апроксимації),  $m_T \equiv \sqrt{p_T^2 + m_\pi^2}$  є поперечною масою, що відповідає поперечному імпульсу пі-мезона  $p_T$ , а  $m_\pi$  є масою пі-мезона. Залежність параметру  $T$ , що є оберненим нахилом у поперечному спектрі  $\pi^-$ , від енергії зіткнення у  $p+p$  та у  $Pb+Pb$  зіткненнях наведено на Рис. 2.8 (зліва). Із цього рисунку помітно, що для усього діапазону енергій SPS виконується нерівність

$$T(p+p) < T(Pb+Pb). \quad (2.15)$$

Результати UrQMD розрахунків якісно відображають поведінку експериментальних даних, де також виконується (2.15). У той же час, при порівнянні із експериментом, UrQMD систематично переоцінює значення параметру  $T$  у  $p+p$  зіткненнях при всіх енергіях SPS.

Параметр оберненого нахилу залежить від маси адрона. Цю залежність у випадку  $p+p$  та центральних  $Pb+Pb$  зіткнень при енергії  $p_{\text{lab}} = 158A \text{ GeV}/c$  представлено на Рис. 2.9. Наведені на рисунку дані колаборації NA49 [81, 82, 27] стосовно поперечних спектрів  $\pi^-$ ,  $K^-$ , та протонів відповідають наступним інтервалам по рапідності:  $0 < y < 0.2$  для  $\pi^-$ ,  $-0.1 < y < 0.1$  для  $K^-$ , та  $-0.5 < y < -0.1$  для протонів. Для центральних  $Pb+Pb$  зіткнень справджуються

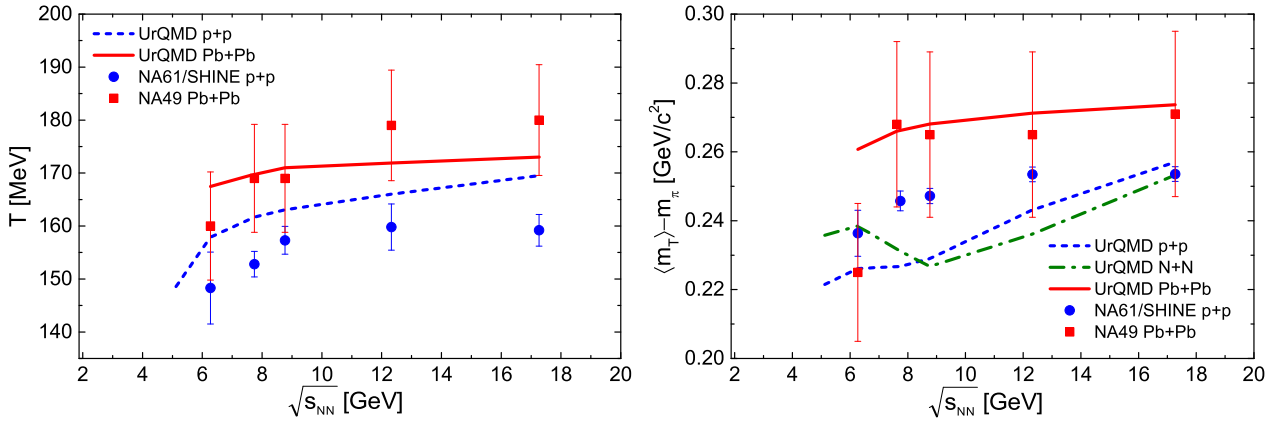


Рис. 2.8: Залежність від енергії зіткнення параметру  $T$  оберненого нахилу (зліва) та середньої поперечної маси  $\langle m_T \rangle$  (справа)  $m_T$ -спектру  $\pi^-$  мезонів у центральному діапазоні рапідностей в непружних p+p та у центральних Pb+Pb зіткненнях. Лінії відповідають розрахункам в UrQMD у той час як експериментальні дані колаборацій NA49 та NA61/SHINE зображено символами з експериментальними вусами.

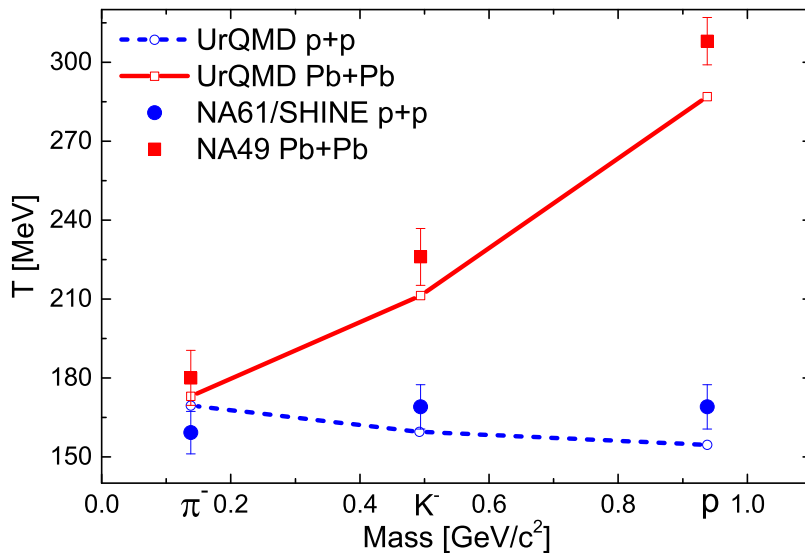


Рис. 2.9: Залежність параметру оберненого нахилу від маси адрона у непружних p+p та у центральних Pb+Pb зіткненнях при енергії  $p_{lab} = 158A$  GeV/c. Відкриті символи відповідають розрахункам UrQMD у той час як дані колаборацій NA49 [81, 82, 27] та попередні дані колаборації NA61/SHINE [98] зображено повними символами.

наступні нерівності:

$$T_\pi < T_K < T_p, \quad (2.16)$$

тобто досить сильний ріст параметру  $T$  із масою частинки. На мові гідродинаміки такий зріст відображає наявність колективного руху у поперечному напрямі в ядро-ядерних зіткненнях: при одній і тій самій поперечній швидкості струменю адронної рідини у частинок із більшою масою буде більший імпульс.

Дані колаборації NA61/SHINE [98] вказують на суттєво іншу поведінку у непружних  $p+p$  зіткненнях:

$$T_\pi \cong T_K \cong T_p. \quad (2.17)$$

Замість сильного росту параметру  $T$  із масою адрона, який спостерігається у  $Pb+Pb$  зіткненнях, значення  $T$  залишається приблизно однаковим для  $\pi^-$ ,  $K^-$ , та протонів у  $p+p$  зіткненнях.

Дослідимо тепер поведінку середньої поперечної маси. На Рис. 2.8 (*справа*) наведено середню поперечну масу  $\pi^-$  у центральному діапазоні рапідностей як функцію енергії зіткнення для  $p+p$  та  $Pb+Pb$  зіткнень. Усереднена по ізоспіну середня поперечна маса  $\langle m_T \rangle$   $\pi^-$  та  $\pi^+$  мезонів у нуклон-нуклонних зіткненнях має вигляд подібний до виразу (2.4) :

$$\langle m_T^{NN} \rangle = \alpha_{pp} \langle m_T^{pp} \rangle + \alpha_{pn} \langle m_T^{pn} \rangle + \alpha_{nn} \langle m_T^{nn} \rangle, \quad (2.18)$$

На Рис. 2.10 представлено результати розрахунків UrQMD для середньої поперечної маси  $\pi^-$  мезонів (*зліва*) та  $\pi^+$  мезонів (*справа*) у центральному діапазоні рапідностей ( $0 < y < 0.2$ ) у непружних  $p+p$ ,  $p+n$ , та  $n+n$  зіткненнях. На рисунках помітним є падіння  $\langle m_T \rangle$  у випадку  $\pi^-$  у  $n+n$  зіткненнях у діапазоні лабораторної енергії від 20 до 40 ГеВ. Аналогічний ефект спостерігається і для  $\pi^+$  у  $p+p$  зіткненнях. Врахування можливої наявності такого ефекту є дуже важливою для аналізу експериментальних даних стосовно  $p+p$  та  $A+A$  зіткнень, і тому розглядається більш детально у наступному підрозділі.

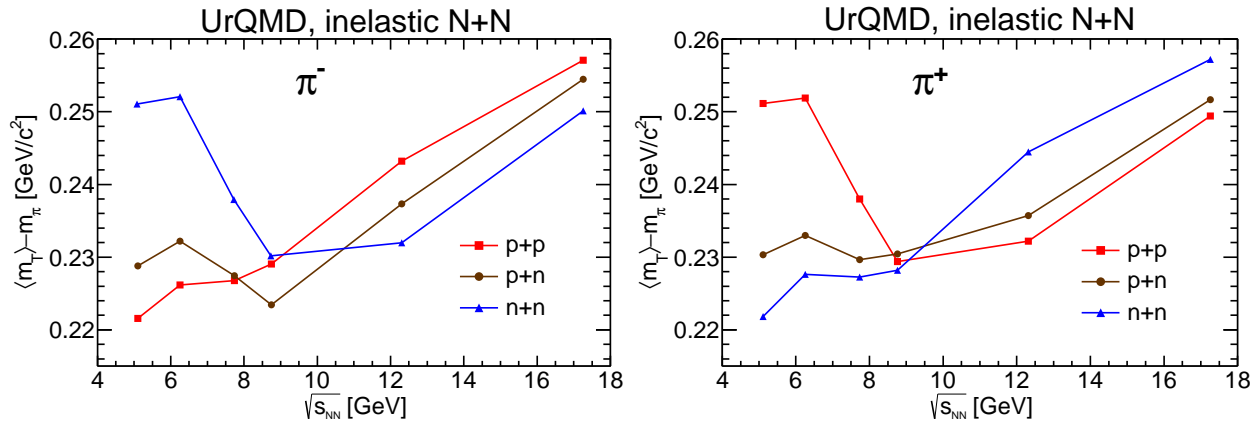


Рис. 2.10: Розрахована в UrQMD залежність від енергії зіткнення середньої поперечної маси  $\pi^-$  мезонів (зліва) та  $\pi^+$  мезонів (справа) у центральному діапазоні рапідностей ( $0 < y < 0.2$ ) у непружних p+p, p+n та n+n зіткненнях. Дані UrQMD зображено символами, а лінії зображено для наочності.

## 2.6 Резонансні та струнні вклади у процеси народження пі-мезонів в протон-протонних реакціях

Розрахунки, які проведено в UrQMD-3.3, вказують на можливу наявність немонотонної залежності поперечної маси  $\pi^+$  мезонів у p+p зіткненнях (а також  $\pi^-$  у n+n зіткненнях) при енергіях SPS. Фізично, можливу наявність такої немонотонності можна пов'язати із наявністю двох різних джерел народження пі-мезонів: збудження та розпад баріонних резонансів  $N^*$  and  $\Delta$ , та збудження та розпад адронних струн. У випадку p+p зіткнень основними непружними процесами є наступні:

$$\begin{aligned}
 p + p &\rightarrow p + \Delta^+, & p + p &\rightarrow n + \Delta^{++}, & p + p &\rightarrow \Delta^+ + \Delta^+, \\
 p + p &\rightarrow \Delta^0 + \Delta^{++}, & p + p &\rightarrow p + N^+, & p + p &\rightarrow N^+ + \Delta^+, \\
 p + p &\rightarrow N^0 + \Delta^{++}.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Модель UrQMD включає у себе стани  $N^*$  із масами  $m = 1440, \dots, 2250$  MeV та  $\Delta$  із масами  $m = 1232, \dots, 1950$  MeV [37, 38]. Версія UrQMD-3.3, за допомогою якої були проведені розрахунки також включає  $N^*$  та  $\Delta$  резонанси із штучно великими масами [99]. Якщо розглядати  $\pi^-$  та  $\pi^+$  у кінцевому стані, то відразу можна помітити різницю між ними: лише  $\Delta^0$  та  $N^0$  приводять до народження  $\pi^-$  при розпаді, у той час як розпади баріонних резонансів,  $\Delta^+$  та  $N^+$ , наро-

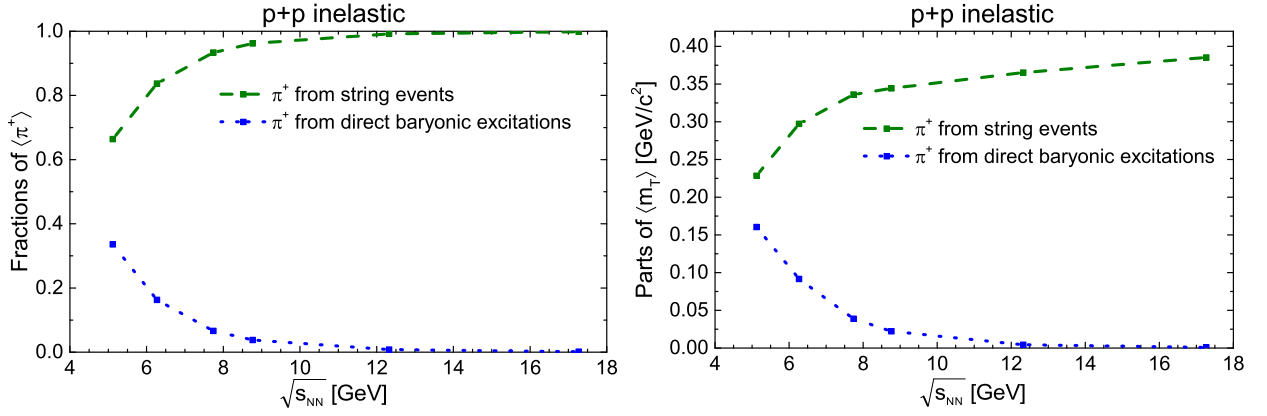
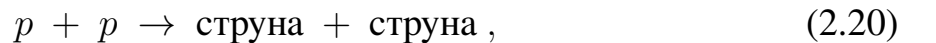


Рис. 2.11: Результати UrQMD розрахунків стосовно народження  $\pi^+$  мезонів у центральному діапазоні рапідностей ( $0 < y < 0.2$ ) у непружних p+p реакціях. Показано вклади від двох різних джерел  $\pi^+$  мезонів: 1) баріонні резонанси, які виникають у відповідності із (2.19) (точкові лінії); 2) струни, які виникають у відповідності із (2.20) (пунктирні лінії). *Зліва*: Вклади  $f_B$  та  $f_s$  у множинність  $\pi^+$  мезонів із двох джерел. *Справа*: Парціальні величини  $f_B \langle m_T \rangle_B$  та  $f_s \langle m_T \rangle_s$  поперечної маси  $\langle m_T \rangle$  із двох джерел.

джують  $\pi^+$ , а в результаті розпадів  $\Delta^{++}$  завжди народжується  $\pi^+$  і ніколи не народжується  $\pi^-$ .

Реакції, які записані у (2.19), дають основний вклад у переріз непружних p+p реакцій при малих енергіях зіткнення. Проте, при енергіях  $\sqrt{s_{NN}} \geq 4$  GeV можливість збудження струн,



відкриває нові канали народження пі-мезонів. В інтервалі енергій  $\sqrt{s_{NN}} \geq (6 \div 8)$  GeV народження струн дає домінуючий вклад у переріз непружних p+p реакцій в моделюванні UrQMD [37].

На Рис. 2.11 зображено два вклади до множинності (*зліва*) та до середньої поперечної маси  $\langle m_T \rangle$  (*справа*) для  $\pi^+$  у центральному інтервалі рапідностей,  $0 < y < 0.2$ , які було розраховано для непружних p+p зіткнень в рамках UrQMD: 1) збудження баріонних резонансів у відповідності із (2.19) та їх розпади на  $\pi^+$  та нуклон; 2) збудження струн у відповідності із (2.20) та їх розпади на  $\pi^+$  та будь-які інші адрони.

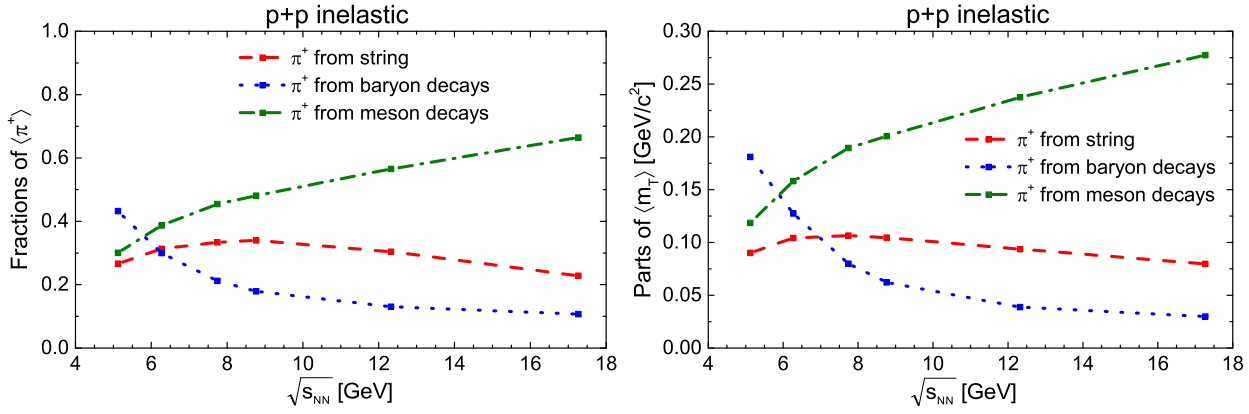


Рис. 2.12: Результати UrQMD розрахунків стосовно народження  $\pi^+$  мезонів у центральному діапазоні рапідностей ( $0 < y < 0.2$ ) у непружних p+p реакціях. Показано вклади від трьох різних джерел  $\pi^+$  мезонів: 1) усі баріонні резонанси (точкові лінії); 2) усі мезонні резонанси (пунктирно-точкові лінії); 3) ‘прямі’ мезони із розпадів струн (пунктирні лінії). *Зліва*: Частки повної множинності  $\pi^+$  від трьох джерел. *Справа*: Часткові вклади до значення  $\langle m_T \rangle$  від трьох джерел.

Значення  $\langle m_T \rangle$  тоді можна записати як

$$\langle m_T \rangle = f_B \langle m_T \rangle_B + f_s \langle m_T \rangle_s . \quad (2.21)$$

У виразі (2.22),  $f_B$  та  $f_s$  відповідають часткам повної множинності  $\pi^+$  від збуджених баріонів (2.19) та від струн (2.20), у той час як  $\langle m_T \rangle_B$  та  $\langle m_T \rangle_s$  є значеннями середніх поперечних мас, що відповідають цим двом механізмам. Із Рис. 2.11 (зліва) видно, що  $f_s > f_B$  для всіх енергій SPS, і  $f_s$  стає значно більшою за  $f_B$  із зростанням енергії зіткнення. Тим не менш, при малих енергіях SPS ця нерівність частково компенсується протилежною нерівністю стосовно середніх мас,  $\langle m_T \rangle_B > \langle m_T \rangle_s$ . Часткові вклади у  $\langle m_T \rangle$  від розпадів резонансів та струн, які означено у (2.22), показано на Рис. 2.11 (справа). Взаємодія між цими двома вкладками приводить до немонотонної поведінки їх суми ( $\langle m_T \rangle$ ) для  $\pi^+$  мезонів у області  $E_{\text{lab}} = 20 - 40$  GeV, що відображено на Рис. 2.10 (справа).

Має сенс також дослідити інше розділення, використовуючи три джерела: усі баріонні резонанси (у тому числі і ті, які виникають напряму у відповідності до (2.19), а також внаслідок розпадів струн), усі мезонні резонанси (виникають внаслідок фрагментації струн, а також внаслідок розпадів важких резонансів), і ‘прямі’ пі-мезони, що виникають внаслідок розпадів струн (без проміжних

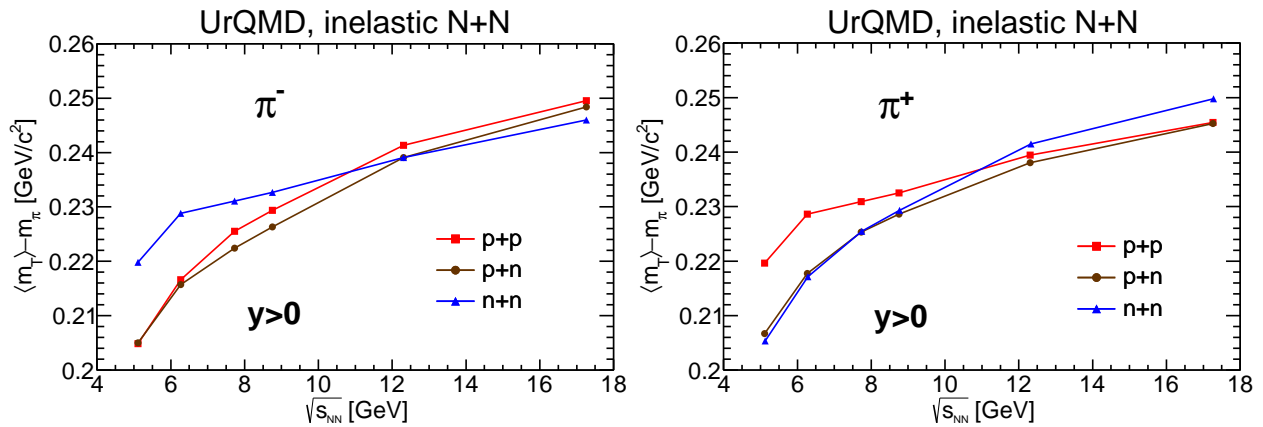


Рис. 2.13: Точками зображено результати UrQMD розрахунків стосовно середньої поперечної маси  $\langle m_T \rangle$  для  $\pi^-$  (зліва) та  $\pi^+$  (справа) для усіх додатних рапідностей ( $y > 0$ ) у непружних  $p + p$ ,  $p + n$  та  $n + n$  зіткненнях. Дані UrQMD зображено символами, а лінії проведено для наочності.

станів із баріонними резонансами). На Рис. 2.12 зображено ці три вклади у непружних  $p + p$  зіткненнях в результаті UrQMD розрахунків. На *лівій* панелі зображено частки повної множинності від різних джерел, а на *правій* панелі зображені парціальні вклади до  $\langle m_T \rangle$  для  $\pi^+$  мезонів у центральному діапазоні рапідностей  $0 < y < 0.2$ . Зменшення  $\langle m_T \rangle$  для  $\pi^+$  мезонів із енергією зіткнення, яку видно на Рис. 2.10 (*справа*), можна пояснити взаємодією цих трьох вкладів: сильне падіння баріонного вкладу із енергією зіткнення, зростання мезонного вкладу, та приблизно вклад від ‘прямих’ пі-мезонів із струн, який мало залежить від енергії зіткнення.

Зазначимо, що немонотонна поведінка величини  $\langle m_T \rangle$  є певною специфікою того, що розглядається саме центральний діапазон рапідностей. Необхідність розглядати у першу чергу саме цей діапазон пов’язана із існуючими обмеженнями детекторів, внаслідок чого цей центральний діапазон є найбільш зручним для експериментального аналізу. У той же час, як видно із Рис. 2.13, в UrQMD розрахунках середньої поперечної маси для усіх пі-мезонів (без будь-якого обмеження на інтервал рапідностей) не спостерігається ніякої немонотонності і це узгоджується із старими експериментальними даними стосовно  $p + p$  зіткнень [100].

## 2.7 Середня поперечна маса адронів у протон-протонних реакціях

У наявних дотепер експериментальних даних ніколи не спостерігалось немонотонної залежності середньої поперечної маси від енергії зіткнення у протон-протонних реакціях. Взагалі, слід відмітити, що дослідження залежності від енергії зіткнення середньої поперечної маси адронів у центральних Pb+Pb зіткненнях відіграло важливу роль у пошуку сигналів появи деконфайнменту, який проводився колаборацією NA49 [27, 81, 82]. Важливим результатом у даному контексті було спостереження сходинкоподібної поведінки середньої поперечної маси різних адронів. Середня поперечна маса  $\langle m_T \rangle$  різних адронів ( $\pi^-$ ,  $K^\pm$ ,  $p$ , та  $\bar{p}$ ) у центральному діапазоні рапідностей в центральних Pb+Pb зіткненнях зростає із енергією зіткнення при малих та великих енергіях, але залишається приблизно постійною у інтервалі енергій SPS  $\sqrt{s_{NN}} = 7.6 - 17.3$  GeV (див. Рис. 8 у [27]). Саме у цьому інтервалі енергій очікується перехід між конфайнментом та деконфайнментом із утворення змішаної фази. Описана вище залежність середньої поперечної маси  $\langle m_T \rangle$  і справді є типовою для фазового переходу 1-го роду [101–103].

У попередньому підрозділі було отримано немонотонну залежність середньої поперечної маси  $\pi^+$  мезонів у  $p + p$  зіткненнях в результаті UrQMD розрахунків. Наявність такої немонотонності пояснюється наявністю двох джерел: баріонних резонансів та струн. Проте треба відмітити, що версія UrQMD-3.3 [99] включає у себе баріонні резонанси  $N^*$  and  $\Delta$  із штучно великими масами, яких немає в таблицях Particle Data Group. У більш новій версії (UrQMD-3.4) надважкі резонанси було виключено. Використаємо цю більш нову версію для аналізу середньої поперечної маси різних адронів у центральному діапазоні рапідностей.

Результати розрахунків в UrQMD-3.4 для енергетичної залежності середньої поперечної маси  $\pi^+$  та  $\pi^-$  мезонів у центральному діапазоні рапідностей в  $p+p$  зіткненнях наведено на Рис. 2.14. Результати якісно схожі на ті, що були отримані у версії UrQMD-3.3: для  $\pi^+$  маємо монотонну залежність, а для  $\pi^-$  провал в діапазоні  $p_{lab} = 20 - 40A$  GeV. Варто зазначити, що глибина цього провалу



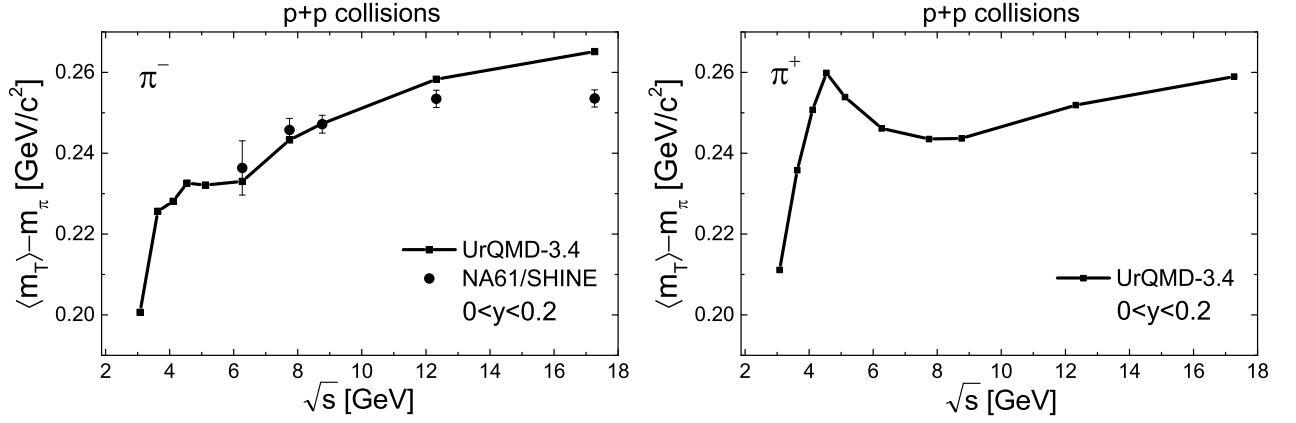


Рис. 2.14: Залежність від енергії зіткнення  $\sqrt{s}$  середньої поперечної маси  $\pi^-$  (ліва панель) та  $\pi^+$  (права панель) мезонів у  $p + p$  реакціях. Використовується діапазон рапідностей  $0 < y < 0.2$ . Суцільними лініями показано результати розрахунків в UrQMD-3.4. Символами із вусами у лівій позначено експериментальні дані із [88].

стала дещо меншою у порівнянні із UrQMD-3.3, що є наслідком виключення в UrQMD-3.4 надважких резонансів.

Розділення джерел для пі-мезонів, яке було зроблено у попередньому підрозділі для пояснення немонотонності середньої поперечної маси можна проводити і для інших адронів. Тоді, в загальному випадку, середню поперечну масу  $\langle m_T \rangle$  будь-якого адрона можна представити у вигляді

$$\langle m_T \rangle = f_B \langle m_T \rangle_B + f_S \langle m_T \rangle_S, \quad (2.22)$$

де  $f_B(\sqrt{s})$  та  $f_S(\sqrt{s})$  є частками повної множинності адрона від розпадів резонансів (2.19) та від розпадів струн (2.20), відповідно. Відмітимо, що у цьому виразі величини  $\langle m_T \rangle_B$  та  $\langle m_T \rangle_S$ , які також залежать від енергії зіткнення  $\sqrt{s}$ , є значеннями середньої поперечної маси адронів, що виникають у цих двох джерелах.

У додаток до  $\pi^\pm$  мезонів розглянемо також поведінку середньої поперечної маси  $K^\pm$ ,  $\Lambda$ , протонів та антипротонів. Саме ці адрони зазвичай реєструються на експерименті із найкращою ефективністю та статистикою. Для  $K^-$  та  $\bar{p}$  можна одразу зробити висновок, що вони не можуть з'явитися внаслідок розпадів баріонних резонансів, які входять у (2.19). На Рис. 2.15 зліва наведено результати UrQMD розрахунків для енергетичної залежності величини  $\langle m_T \rangle - m$  у

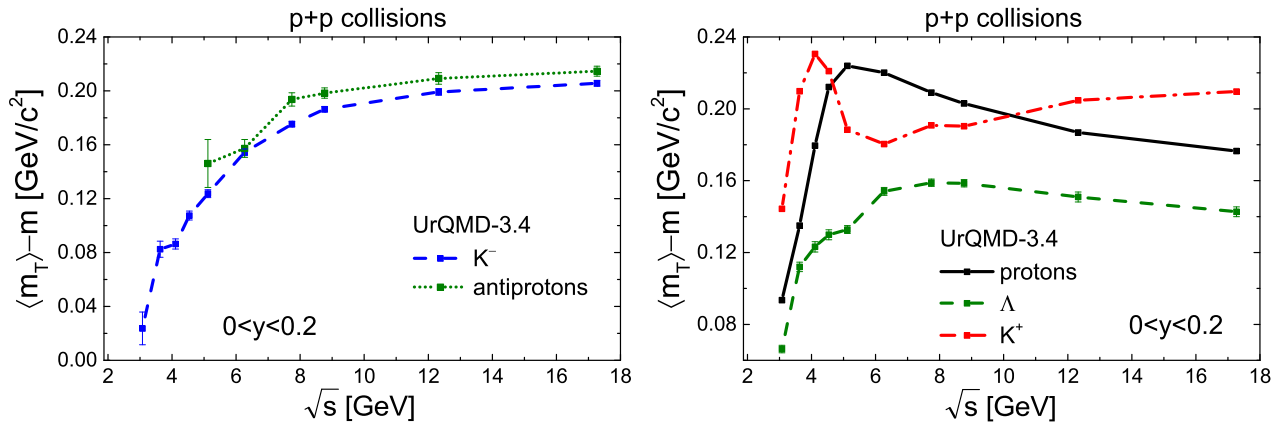


Рис. 2.15: Залежність від енергії зіткнення  $\sqrt{s}$  середньої поперечної маси різних адронів у  $p + p$  реакціях. Використовується діапазон рапідностей  $0 < y < 0.2$ . Вусами зображено статистичні похибки. *Зліва*:  $K^-$  (пунктирна лінія) та антипротони (точкова лінія). *Справа*: Протони (суцільна лінія),  $\Lambda$  (пунктирна лінія), та  $K^+$  (точково-пунктирна лінія).

центральному діапазоні рапідностей для цих адронів. Немонотонних ділянок у залежності  $\langle m_T \rangle$  від енергії зіткнення  $\sqrt{s}$  не спостерігається. На відміну від  $K^-$  та  $\bar{p}$ , протони входять до продуктів розпаду резонансів, згідно (2.19). Відмітимо, що важкі резонанси  $N^*$  також мають наступний канал розпаду:  $N^* \rightarrow \Lambda + K^+$ . Можна зробити висновок, що рівняння (2.22) можна також використовувати і для опису поведінки  $\langle m_T \rangle$  для  $p$ ,  $\Lambda$ , та  $K^+$  у  $p+p$  реакціях. Результати розрахунків в UrQMD для цих адронів наведено на Рис. 2.15 *справа*. З рисунку видно, що для цих адронів характерна немонотонна поведінка у залежності  $\langle m_T \rangle - m$  від  $\sqrt{s}$  у центральному діапазоні рапідностей ( $0 < y < 0.2$ ). Так само, як і у випадку  $\pi^+$  ця немонотонність зникає якщо розглядати необмежений інтервал рапідностей.

Як було зазначено вище, версії UrQMD-3.3 та UrQMD-3.4 відрізняються спектром резонансів, які розглядаються у моделюванні: в UrQMD-3.3 у цьому спектрі наявні надважкі резонанси. Має сенс більш детально дослідити вплив баріонного спектру на середню поперечну масу адронів у  $p+p$  реакціях. На Рис. 2.16 *зліва* та *справа* наведено результати розрахунків середньої поперечної маси для, відповідно,  $\pi^+$  та протонів, які отримано із використанням трьох різних моделей: UrQMD 3.3 та 3.4, а також Hadron String Dynamics (HSD-2.5) [104, 105, 39]. Зазначимо, що число баріонів у моделі HSD є ще меншим ніж

у UrQMD-3.4: не всі адрони, які є у таблицях PDG включено у моделювання. Відмітимо також, що  $p + p$  реакції при енергіях  $\sqrt{s} \cong 2.6$  GeV описуються в HSD-2.5 струнною моделлю FRITIOF [45].

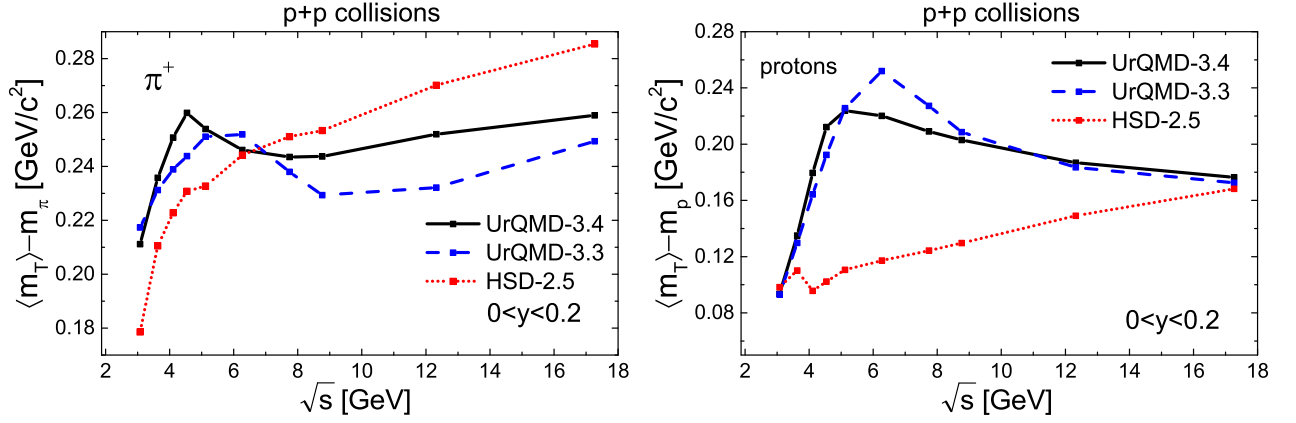


Рис. 2.16: Залежність від енергії зіткнення  $\sqrt{s}$  середньої поперечної маси  $\pi^+$  (ліва панель) та протонів (права панель) мезонів у  $p + p$  реакціях. Використовується діапазон рапідностей  $0 < y < 0.2$ . Суцільні лінії відповідають розрахункам UrQMD-3.4, пунктирні – UrQMD-3.3, а точкові – HSD-2.5.

Як видно із Рис. 2.16, і UrQMD-3.3 і UrQMD-3.4 передбачають немонотонну залежність  $\langle m_T \rangle$  від  $\sqrt{s}$  у випадку  $\pi^+$  мезонів та протонів у центральному діапазоні рапідностей, у той час як результати розрахунків в HSD, де спектр баріонів є відносно малонаселеним, дають монотонний зріст  $\langle m_T \rangle$  із енергією зіткнення як для  $\pi^+$  так і для протонів. Наявність немонотонності у енергетичній залежності середньої поперечної маси адронів може бути встановлена сучасними та майбутніми експериментами, зокрема NA61/SHINE.

## 2.8 Висновки до 2-го розділу

У даному розділі проведено детальний аналіз залежності спектрів різних адронів, у першу чергу  $\pi^-$  мезонів, від енергії зіткнення та розміру системи за допомогою моделювання у рамках UrQMD  $p+p$  та  $Pb+Pb$  зіткнень та порівняння із експериментами.

Результати UrQMD вказують на те, що при енергіях SPS ( $E_{lab} \geq 10A$  GeV), кожний нуклон-учасник витрачає більшу частку своєї початкової кінетичної енергії на народження вторинних частинок у ядро-ядерних зіткненнях ніж у не-

пружних  $p+p$  зіткненнях. Проте, при малих енергіях зіткнення ( $E_{\text{lab}} \leq 10A$  GeV) спостерігається протилежна поведінка: втрата енергії на один нуклон-учасник стає більшою у непружних  $p+p$  зіткненнях. Цей результат також корелює із відповідною нерівністю для середньої множинності пі-мезонів у розрахунку на один нуклон-учасник:  $(\langle \pi \rangle / \langle N_p \rangle)_{p+p}$  та  $(\langle \pi \rangle / \langle N_p \rangle)_{Pb+Pb}$ . Зміна знаку у різниці між  $(\langle \pi \rangle / \langle N_p \rangle)_{p+p}$  та  $(\langle \pi \rangle / \langle N_p \rangle)_{Pb+Pb}$  і справді спостерігається в експериментальних даних NA61/SHINE, але при суттєво вищій енергії  $E_{\text{lab}} \cong 40A$  GeV.

UrQMD недооцінює повний вихід  $\pi^-$  мезонів у центральному діапазоні рапідностей у непружних  $p+p$  зіткненнях при всіх енергіях SPS окрім найвищої,  $p_{\text{lab}} = 158A$  GeV/c. У той же час, UrQMD добре описує експериментальні дані при тих же енергіях для центральних Pb+Pb зіткнень. Таким чином, будь-які зміни, які будуть внесені у модель для опису нових  $p+p$  даних можуть при цьому зіпсувати опис Pb+Pb даних. Розрахунки UrQMD щодо ширини розподілу по рапідності пі-мезонів та параметру оберненого нахилу поперечного спектру якісно відповідають експериментальним даним: обидві величини монотонно зростають із енергією зіткнення, і обидві величини мають більше значення у Pb+Pb зіткненнях ніж у  $p+p$  зіткненнях.

Важливим аспектом проведеного аналізу є необхідність правильного врахування ізоспінових ефектів при порівнянні даних у протон-протонних та ядроядерних зіткненнях, особливо при невисоких енергіях зіткнення. Показано, що як множинність, так і поперечні спектри  $\pi^-$  та  $\pi^+$  мезонів суттєво відрізняються у  $p+p$ ,  $p+n$ , та  $n+n$  зіткненнях, зокрема, розрахунки UrQMD вказують на те, що значення  $\langle m_T \rangle$  можуть відрізнитися у цих реакціях на  $20 - 30$  MeV/c<sup>2</sup> при малих енергіях SPS.

Розрахунки в UrQMD-3.3 та UrQMD-3.4 передбачають наявність немонотонної ділянки у залежностях середньої поперечної маси  $\pi^+$ ,  $K^+$ , протонів та  $\Lambda$  у центральному діапазоні рапідностей від енергії зіткнення у  $p+p$  реакціях при малих енергіях SPS. У той же час, в моделі HSD-2.5, у якій баріонний спектр є біднішим ніж у UrQMD, такої немонотонності не спостерігається. Наявність таких немонотонностей може бути перевірена у майбутньому колаборацією NA61/SHINE.

## Розділ 3

# Особливості процесу утворення системи учасників на початковій стадії зіткнення ядер

### 3.1 Вступ

Із самого початку зіткнення двох ядер деякі нуклони з цих ядер починають приймати участь у зіткненнях і стають учасниками. Кількість нуклонів, які прийняли участь у реакціях, збільшується із часом у той час як кількість нуклонів, що не приймали участь у зіткненнях, зменшується. У підсумку, початкова система розділяється на дві підсистеми: учасники та спектатори. Ця стадія розділення є початковою стадією зіткнення ядер під час якої рух адронів у поперечному напрямку є незначним і кінець цієї стадії не може наступити раніше встановлення локальної термодинамічної рівноваги в системі, коли стає можливим гідродинамічний опис підсистеми учасників. З цього випливає, що коректний опис цієї стадії є важливим для накладання правильних обмежень на початкові умови у гідродинамічних моделях. У рамках оптичної границі моделі Глаубера-Ситенка [62–65] можна отримати усереднений по великій кількості подій розподіл учасників по поперечним координатам. Такий розподіл, який є гладкою функцією поперечних координат  $x$  та  $y$ , має широке застосування у якості початкового розподілу у багатьох гідродинамічних моделях [106, 107]. Модель Монте-Карло Глаубер (МК-Глаубер), у свою чергу, дозволяє промодельовувати початкову стадію розділення системи на учасники та спектатори на рівні окремих подій, і це дозволяє задавати флуктуючі початкові умови та розглядати гідродинамічний розвиток системи для окремих подій [108–110]. Флуктуації коефіцієнтів колективних потоків зазвичай пов'язують із початковими просторовими флуктуаціями [111, 112], що дає можливість накласти деякі умови на

початкову геометрію системи [113, 114]. У той же час флуктуації можуть також виникати під час гідродинамічного розширення системи, особливо у тому випадку, якщо має місце фазовий перехід у сильно-взаємодіючій матерії [115–117].

У той час як поперечний розподіл (а також флуктуації цього розподілу) були досить ретельно досліджені у літературі у рамках моделі Глаубера-Ситенка, мало уваги приділялось часовій динаміці процесу розділення на спектатори та учасники. Ця динаміка представляє окремий інтерес для периферійних (не-центральных) зіткнень ядер, у яких учасники отримують ненульовий момент імпульсу, що у свою чергу відображає появу обертання у площині реакції. У даній роботі розроблено аналітичну модель для опису початкової стадії, яка базується на кінетичному рівнянні Больцмана, і яка може бути віднесена до класу Глауберівських моделей.

Ще одним важливим питанням, яке пов'язане із процесом розділення на учасники і спектатори, є флуктуації кількості спектаторів. Внаслідок цих флуктуацій, у кожній окремій події, кількість спектаторів із ядра-снаряду може бути відмінною від кількості спектаторів у ядрі-мішені, що приводить до того, що результуюча підсистема учасників є асиметричною і має ненульовий повний імпульс. Описані вище флуктуації є найбільш суттєвими у випадку периферійних зіткнень ядер і вони детально досліджуються у даній роботі.

## **3.2 Аналітична модель опису процесу розділення на учасники та спектатори**

### **3.2.1 Початкові умови та балістичний режим**

Використаємо кінетичний підхід для розгляду процесу розділення на учасники та спектатори на початковій стадії зіткнення ядер. У нульовому наближенні зробимо припущення балістичного режиму, тобто знехтуємо усіма реакціями між адронами і розділимо усю систему на нуклони з ядра-снаряду (А) та ядра-мішені (В). У такому випадку одночастинкова функція розподілу,  $f_{A(B)}^{(0)}(x, p)$ , нуклонів із відповідного ядра описується рівнянням Больцмана без

зіткнень та без зовнішніх полів:

$$p^\mu \partial_\mu f_{A(B)}^{(0)}(x, p) = 0. \quad (3.1)$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$f_{A(B)}^{(0)}(x, p) = \mathcal{F}_{A(B)}[\mathbf{r} - \mathbf{v}(t - t_0), p], \quad (3.2)$$

де  $\mathcal{F}_{A(B)}(\mathbf{r}, p; t_0)$  є функцією розподілу нуклонів у початковий момент часу,  $t_0$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{p}/E_p$  є швидкістю нуклонів та  $E_p = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ . Початковий момент часу,  $t_0$ , відповідає моменту часу, який передує будь-якій взаємодії у системі, тобто жодного зіткнення або будь-яких внутрішніх змін у налітаючих ядрах не відбувається у інтервалі часу між  $t = -\infty$  та  $t_0$ .

Вважаємо, що початкову функцію розподілу нуклонів у ядрах можна представити як добуток просторового та імпульсного розподілів

$$\mathcal{F}_{A(B)}(\mathbf{r}, p; t_0) = \rho_{A(B)}(\mathbf{r}; t_0) g_{A(B)}(\mathbf{p}). \quad (3.3)$$

Тут  $\rho_{A(B)}(\mathbf{r}; t_0)$  є початковим просторовим розподілом нуклонів у снаряді (мішені), а  $g_{A(B)}(\mathbf{p})$  є відповідно початковим імпульсним розподілом. Система центру мас двох ядер і система спокою налітаючого ядра пов'язані між собою перетворенням Лоренца у координатах  $(t, z)$ . Враховуючи це, а також те, що просторова густина є нульовою компонентою 4-потoku, можна записати початкову просторову густину,  $\rho_{A(B)}(\mathbf{r}; t_0)$ , у системі центра мас двох ядер через відповідні компоненти 4-потoku системи спокою ядра

$$\rho_{A(B)}(\mathbf{r}; t_0) = \gamma_0 \left\{ \rho_{A(B)}^{LR}[x, y, \gamma_0(z - v_{A(B)}t_0)] + v_{A(B)} j_z^{A(B), LR}[x, y, \gamma_0(z - v_{A(B)}t_0)] \right\}, \quad (3.4)$$

де  $v_A = -v_B = v_0$  є початковою швидкістю у системі центра мас ядер,  $\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2}$ ,  $\rho_{A(B)}^{LR}(x, y, z)$  та  $j_z^{A(B), LR}(x, y, z)$  є, відповідно, початковими просторовим розподілом нуклонів та  $z$ -компонентою 4-потoku нуклонів у системі спокою снаряда (мішені).

У якості просторового розподілу нуклонів у системі спокою ядра викори-

стаємо розподіл Вудса-Саксона

$$\begin{aligned}\rho_{A(B)}^{LR}(x, y, z) &= \rho_{ws}(x \mp b/2, y, z) \\ &= c_\rho \left\{ 1 + \exp \left[ \frac{\sqrt{(x \mp b/2)^2 + y^2 + z^2} - R_0}{a} \right] \right\}^{-1},\end{aligned}\quad (3.5)$$

де  $a = 0.545$  fm та  $R_0$  є радіусом ядра. Тут множник нормування  $c_\rho$  визначається із умови  $\int d\mathbf{r} \rho_{ws}(\mathbf{r}) = A$ , де  $A$  є масовим числом ядра. У наведеному вище виразі ми одразу врахували зсув ядра по  $x$ -координаті внаслідок ненульового прицільного параметру  $b$ . Зазначимо, що наш підхід не обмежений застосуванням стандартного профілю Вудса-Саксона, інші профілі, наприклад три-параметричний Вудс-Саксон, можуть також бути використані. Припускаючи, що початковий імпульсний розподіл нуклонів у ядрі є ізотропним робимо висновок, що потік  $j_z^{A(B),LR}$  у системі спокою ядра рівний нулю, і таким чином, початкова густина  $\rho_{A(B)}(\mathbf{r}; t_0)$  у системі центра мас двох ядер має вигляд

$$\rho_{A(B)}(\mathbf{r}; t_0) = \gamma_0 \rho_{ws}[x \mp b/2, y, \gamma_0(z - v_{A(B)}t_0)]. \quad (3.6)$$

Зазначимо, що вираз (3.6) визначає просторову густину нуклонів у рухомій системі відліку і має правильне нормування, тобто  $\int d\mathbf{r} \rho_{A(B)}(\mathbf{r}; t_0) = A$ . Для того, щоб задати початковий імпульсний розподіл у системі центра мас знехтуємо Фермі-рухом у порівнянні із колективним рухом, оскільки ми маємо справу із ультрарелятивістськими енергіями зіткнення ядер. У такому випадку початковий імпульсний розподіл  $g_{A(B)}(\mathbf{p})$  має вигляд

$$g_{A(B)}(\mathbf{p}) = \delta^2(\mathbf{p}_\perp) \delta(p_z - p_{A(B)}), \quad (3.7)$$

де  $p_A$  та  $p_B$  є початковими імпульсами нуклонів у снаряді (мішені).

У підсумку, початкова функція розподілу  $\mathcal{F}_{A(B)}(\mathbf{r}, p; t_0)$  може бути записана як

$$\mathcal{F}_{A(B)}(\mathbf{r}, p; t_0) = \gamma_0 \rho_{ws}[x \mp b/2, y, \gamma_0(z - v_{A(B)}t_0)] \delta^2(\mathbf{p}_\perp) \delta(p_z - p_{A(B)}). \quad (3.8)$$

З цього виразу видно, що ядро-мішень та ядро-снаряд рухаються із протилежними швидкостями і вони повністю розділені просторово у момент часу  $t = t_0$ , що вказує на те, що задані нами початкові умови відповідають тій вимозі, що у системі немає зіткнень до початкового моменту часу  $t_0$ .



Неважно побачити, що у безпосередньому випадку, коли імпульсний розподіл має вигляд (3.7), вираз (3.8) задає розв'язок рівняння Больцмана у відсутності зіткнень, де параметр  $t_0$  відіграє роль часової змінної. Дійсно, із виразу (3.2) випливає, що залежну від часу функцію розподілу у системі центра мас ядер можна записати як розв'язок рівняння Больцмана у наступному вигляді

$$\begin{aligned}
 f_{A(B)}^{(0)}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) &= \gamma_0 \rho_{ws}(x \mp b/2, y, \gamma_0[z - \frac{p_z}{E_p}(t - t_0) - v_{A(B)}t_0]) \\
 &\quad \times \delta^2(\mathbf{p}_\perp) \delta(p_z - p_{A(B)}) \\
 &= \gamma_0 \rho_{ws}(x \mp b/2, y, \gamma_0[z - v_{A(B)}t]) \delta^2(\mathbf{p}_\perp) \delta(p_z - p_{A(B)}) \\
 &= \frac{\gamma_0 c_\rho \delta^2(\mathbf{p}_\perp) \delta(p_z - p_{A(B)})}{1 + \exp \left\{ \frac{1}{a} \left[ \sqrt{(x \mp b/2)^2 + y^2 + \gamma_0^2 (z - v_{A(B)}t)^2} - R_0 \right] \right\}} \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

де  $E_p \equiv p^0$  є енергією частинки із 4-імпульсом  $p$  і  $p_z/E_p = v_z$ .

Видно, що розв'язок рівняння Больцмана (3.9) має точно таку саму структуру що і початкова умова (3.8). Отримана балістична функція розподілу відображає рівномірний рух ядра, яке розподілене по Вудсу-Саксону, і яке стиснуте у напрямку осі  $z$  внаслідок Лоренцевого стиснення. У момент часу  $t = 0$ , густини налітаючих ядер максимально перекриваються, а координати  $z$  їх центрів співпадають будучи рівними нулю. Для того, щоб наша модель краще співставлялась із монте-карлівськими кінетичними моделями, є сенс використовувати часову вісь, для якої момент часу  $t = 0$  відповідає ситуації, коли координати  $z$  центрів налітаючих ядер знаходяться на відстані, що дорівнює Лоренц-стиснутому діаметру ядра,  $2R_0/\gamma_0$  (Рис. 3.1). Таким чином, момент часу  $t = 0$  приблизно відповідає тому моменту, коли в системі починають виникати перші реакції між нуклонами. Зокрема, у випадку центральних зіткнень ядер це означає, що у момент часу  $t = 0$  налітаючі ядра “дотикаються” одне одного. У відповідності із описаною вище часовою шкалою час максимального перекриття ядер визначається як  $t_c = R_0/(\gamma_0 v_0)$ . В результаті отримуємо, що залежна від часу балістична функція нуклонів окремого ядра має вигляд

$$\begin{aligned}
 f_{A(B)}^{(0)}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) &= \rho_{A(B)}^{(0)}(t, \mathbf{r}) \delta^2(\mathbf{p}_\perp) \delta(p_z - p_{A(B)}) \\
 &= \frac{\gamma_0 c_\rho \delta^2(\mathbf{p}_\perp) \delta(p_z - p_{A(B)})}{1 + \exp \left\{ \frac{1}{a} \left[ \sqrt{(x \mp b/2)^2 + y^2 + \gamma_0^2 (z \pm R_0/\gamma_0 \mp v_0 t)^2} - R_0 \right] \right\}}, \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

де  $\rho_{A(B)}^{(0)}(t, \mathbf{r}) = \gamma_0 \rho_{ws}(x \mp b/2, y, \gamma_0[z \mp v_0(t - t_c)])$ .

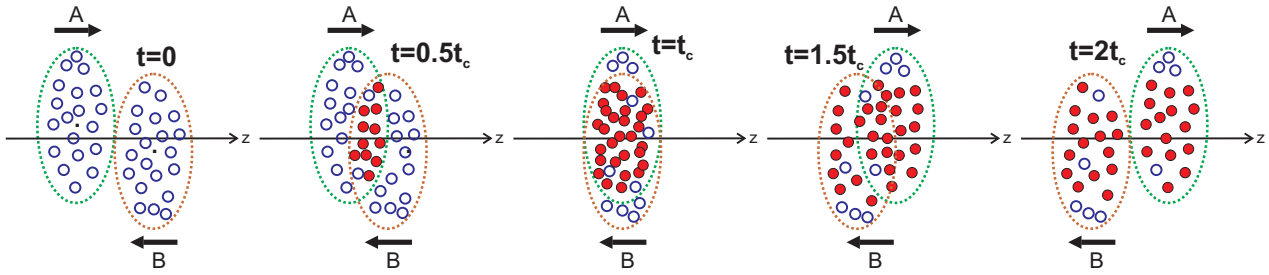


Рис. 3.1: Схематичний вигляд еволюції системи у представленій моделі. Нуклони, які не прийняли участі у жодній реакції до поточного моменту часу позначено синіми (відкритими) кружками у той час як нуклони, що вже вступили у реакції позначено червоними (суцільними) кружками.

### 3.2.2 Розділення на спектатори та учасники

Сформулюємо модель, яка безпосередньо описує розділення нуклонів на системи спектаторів та учасників. Припустимо, що нуклони із ядра-снаряду (мішені) стають учасниками лише у зіткненнях із нуклонами із ядра-мішені (снаряду). Позначимо  $f_{A(B)}^S(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$  як функцію розподілу нуклонів із ядра-снаряду (мішені), які не приймали участь у реакціях до моменту часу  $t$  у системі центру мас двох ядер. Із визначення випливає, що у границі  $t \rightarrow \infty$ , ця функція розподілу описує спектаторів. Враховуючи це означення, а також вищезгадане припущення щодо тих зіткнень, у яких нуклони стають учасниками, функції розподілу  $f_{A(B)}^S(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$  можна описати кінетичним рівнянням Больцмана, яке описує розвиток системи на мові двочастинкових зіткнень, ґрунтується на припущенні локального молекулярного хаосу, і якому інтеграл зіткнень містить лише доданок, що описує лише сток частинок із фазового об'єму. Для нуклонів із ядра-снаряду маємо

$$p^\mu \partial_\mu f_A^S(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p_1}{E_{p_1}} \frac{d^3 p'}{E_{p'}} \frac{d^3 p'_1}{E_{p'_1}} f_A^S(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) f_B^{(0)}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}_1) W(p, p_1 | p', p'_1), \quad (3.11)$$

де  $W(p, p_1 | p', p'_1)$  є швидкістю переходу.

Для того, щоб провести інтегрування у виразі (3.11) використаємо швидкість переходу  $W(p, p_1 | p', p'_1) = s \sigma(s, \theta) \delta^4(p + p_1 - p' - p'_1)$  для пружних дво-

частинкових реакцій, де  $s \equiv (p + p_1)^2$  і де  $\sigma(s, \theta)$  є диференціальним перерізом нуклон-нуклонних зіткнень.

Оскільки ми розглядаємо тільки доданок зі стоком, то лише повний переріз входить у підсумковий результат. Після інтегрування виразу (3.11) по імпульсам  $p'$  та  $p'_1$  маємо

$$p^\mu \partial_\mu f_A^S(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p_1}{E_{p_1}} d\Omega \sigma(s, \theta) \frac{1}{2} \sqrt{s(s - 4m^2)} f_A^S(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) f_B^{(0)}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}_1). \quad (3.12)$$

Враховуючи те, що  $\frac{1}{2} \int d\Omega \sigma(s, \theta) = \sigma_{NN}(s)$ , а також використовуючи явний вигляд для функції  $f_B^{(0)}$  (3.10) проведемо інтегрування по змінній  $p_1$

$$p^\mu \partial_\mu f_A^S(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = -\frac{\sigma_{NN}(s)}{E_{p_0}} \frac{1}{2} \sqrt{s(s - 4m^2)} f_A^S(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) \rho_B^{(0)}(t, \mathbf{r}). \quad (3.13)$$

Так як функція  $f_A^S(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$  описує нуклони, які не брали участь у реакціях, і імпульсний розподіл яких залишається початковим, то її можна представити у вигляді

$$f_A^S(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \rho_A^S(t, \mathbf{r}) \delta^2(\mathbf{p}_\perp) \delta(p_z - p_A), \quad (3.14)$$

де  $p_A = -p_B = p_0$  та  $\rho_A^S(t, \mathbf{r})$  є залежною від часу просторовою густиною нуклонів-спектаторів. Тоді, враховуючи що  $E_{p_0} = \frac{\sqrt{s}}{2}$  та  $p_0 = \frac{1}{2} \sqrt{s - 4m^2}$ , отримуємо рівняння для  $\rho_A^S(t, \mathbf{r})$

$$p_0^\mu \partial_\mu \rho_A^S(t, \mathbf{r}) = -2\sigma_{NN} p_0 \rho_A^S(t, \mathbf{r}) \rho_B^{(0)}(t, \mathbf{r}), \quad (3.15)$$

$$\rho_A^S(t_0, \mathbf{r}) = \rho_A^{(0)}(t_0, \mathbf{r}). \quad (3.16)$$

Вираз у правій частині рівняння (3.15) пропорційний кількості двочастинкових реакцій між нуклонами із ядра-снаряду (А) і нуклонами із ядра-мішені (В) у елементі 4-об'єму в околі точки  $(t, \mathbf{r})$ . Видно, що цей вираз визначається тільки просторовими густинами, відносною швидкістю та перерізом нуклон-нуклонної реакції. З цього випливає, що якщо трактувати  $\sigma_{NN}$  як повний переріз усіх двочастинкових нуклон-нуклонних реакцій, то рівняння (3.16) описує зменшення із часом кількості невзаємодіючих нуклонів у результаті будь-яких двочастинкових реакцій, а не лише пружних зіткнень. Розв'язок рівняння (3.15) із початковою умовою (3.16) має вигляд

$$\rho_A^S(t, \mathbf{r}) = \rho_A^{(0)}(t, \mathbf{r}) \exp \left\{ -2\sigma_{NN} v_0 \int_{t_0}^t dt' \rho_B^{(0)}[t', \mathbf{r} - \mathbf{v}_A(t - t')] \right\}, \quad (3.17)$$

де  $v_0 = p_0/E_{p_0}$  і  $\mathbf{v}_A = (0, 0, v_0)$ . Аналогічно отримуємо відповідну функцію розподілу для нуклонів із ядра-мішені

$$\rho_B^S(t, \mathbf{r}) = \rho_B^{(0)}(t, \mathbf{r}) \exp \left\{ -2\sigma_{NN}v_0 \int_{t_0}^t dt' \rho_A^{(0)}[t', \mathbf{r} - \mathbf{v}_B(t - t')] \right\}, \quad (3.18)$$

де  $\mathbf{v}_B = (0, 0, -v_0)$ .

### 3.2.3 Поперечний розподіл спектаторів

Неважко помітити, що наша модель є дуже подібною до моделі Глаубера-Ситенка у оптичній границі, яку часто використовують для опису зіткнень релятивістських ядер. Справді, у нашому спрощеному підході ми розглядаємо лише двочастинкові реакції між нуклонами, які завжди рухаються прямо вздовж осі зіткнення ядер, а імовірність реакції визначається перерізом нуклон-нуклонних реакцій. Такі самі припущення використовують і у моделі Глаубера-Ситенка. Однією із величин, які можна розрахувати у моделі Глаубера-Ситенка є поперечний розподіл поранених нуклонів (учасників) [64, 65], який досить часто використовується для задання початкових умов у гідродинамічних моделях

$$\begin{aligned} T^{\text{part}}(x, y) &= T_A^{\text{part}}(x, y) + T_B^{\text{part}}(x, y) \\ &= T_A(x - b/2, y) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\sigma_{NN} T_B(x + b/2, y)}{A} \right)^A \right] \\ &\quad + T_B(x + b/2, y) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\sigma_{NN} T_A(x - b/2, y)}{A} \right)^A \right] \\ &\approx T_A(x - b/2, y) [1 - \exp \{-\sigma_{NN} T_B(x + b/2, y)\}] \\ &\quad + T_B(x + b/2, y) [1 - \exp \{-\sigma_{NN} T_A(x - b/2, y)\}], \end{aligned} \quad (3.19)$$

де  $T_{A(B)}(x, y) = \int dz \rho_{ws}(x, y, z)$  є функцією товщини (яка нормована на кількість нуклонів  $A$ ). Відповідно, поперечний розподіл спектаторів можна записати

як

$$\begin{aligned}
T^{\text{spec}}(x, y) &= T^{\text{tot}}(x, y) - T^{\text{part}}(x, y) \\
&= T_A(x - b/2, y) \left( 1 - \frac{\sigma_{NN} T_B(x + b/2, y)}{A} \right)^A \\
&\quad + T_B(x + b/2, y) \left( 1 - \frac{\sigma_{NN} T_A(x - b/2, y)}{A} \right)^A \\
&\approx T_A(x - b/2, y) \exp \{ -\sigma_{NN} T_B(x + b/2, y) \} \\
&\quad + T_B(x + b/2, y) \exp \{ -\sigma_{NN} T_A(x - b/2, y) \}. \tag{3.20}
\end{aligned}$$

Для кількісного порівняння нашої моделі із вищезгаданою моделлю Глаубера-Ситенка розрахуємо у нашій моделі поперечний розподіл спектаторів. У відповідності із нашою моделлю поперечний розподіл спектаторів із ядра-снаряду  $T_A^{\text{spec}}(x, y)$  можна записати як

$$\begin{aligned}
T_A^{\text{spec}}(x, y) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int d\mathbf{p} \int dz f_A^S(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \int dz \rho_A^{(0)}(t, \mathbf{r}) \exp \left\{ -2\sigma_{NN} v_0 \int_{-\infty}^t dt' \rho_B^{(0)}[t', \mathbf{r} - \mathbf{v}_A(t - t')] \right\}. \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Для інтегрування виразу під експонентою використаємо

$$\rho_B^{(0)}[t', \mathbf{r} - \mathbf{v}_A(t - t')] = \gamma_0 \rho_{wS}[x + b/2, y, \gamma_0(z - v_0 t + 2v_0 t' - v_0 t_c)],$$

і виконаємо перетворення змінної інтегрування:

$$t' = \frac{1}{2v_0\gamma_0} [z' - \gamma_0 z + v_0\gamma_0(t + t_c)].$$

Враховуючи границю  $t \rightarrow \infty$ , а також вираз для визначення функції товщини ядра, виконаємо інтегрування по новій змінній  $z'$  під експонентною і отримуємо

$$T_A^{\text{spec}}(x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int dz \rho_A^{(0)}(t, \mathbf{r}) \exp \{ -\sigma_0 T_B(x + b/2, y) \}. \tag{3.22}$$

Враховуючи те, що  $\int dz \rho_A^{(0)}(t, \mathbf{r}) = T_A(x - b/2, y)$  маємо у підсумку

$$T_A^{\text{spec}}(x, y) = T_A(x - b/2, y) \exp \{ -\sigma_{NN} T_B(x + b/2, y) \}. \tag{3.23}$$

Аналогічно отримуємо поперечний розподіл спектаторів із ядра-мішені

$$T_B^{\text{spec}}(x, y) = T_B(x + b/2, y) \exp \{ -\sigma_{NN} T_A(x - b/2, y) \}. \tag{3.24}$$

Порівнюючи вирази (3.23)-(3.24) із (3.20) можна зробити висновок, що наша модель сумісна із Глауберівським підходом для опису зіткнення релятивістських ядер. Більш того, модель дозволяє вивчати залежні від часу властивості процесу поділу системи на спектатори та учасники на початковій стадії ядроядерного зіткнення.

### 3.2.4 Густина бінарних реакцій

В рамках нашої моделі можна обчислити густину  $\Gamma(t, \mathbf{r})$  бінарних зіткнень між нуклонами із налітаючих ядер, яка визначає їх кількість в одиниці просторово-часового об'єму. Оскільки ці нуклони, що приймають участь у цих реакціях, рухаються вздовж осі зіткнення ядер, то їхня відносна швидкість дорівнює  $2v_0$ . Із використанням явного вигляду (3.10) балістичних функцій розподілу  $f_{A(B)}^{(0)}$  нуклонів із налітаючих ядер запишемо 4-густину бінарних реакцій як

$$\Gamma_{\text{coll}}(t, \mathbf{r}) = \sigma_{NN} 2v_0 \rho_A^{(0)}(t, \mathbf{r}) \rho_B^{(0)}(t, \mathbf{r}). \quad (3.25)$$

Повна кількість бінарних зіткнень  $N_{\text{coll}}$  має вигляд

$$\begin{aligned} N_{\text{coll}} &= \int dt d\mathbf{r} \Gamma_{\text{coll}}(t, \mathbf{r}) \\ &= \sigma_{NN} 2v_0 \gamma_0^2 \int dt d\mathbf{r} \rho_{WS}(x - b/2, y, \gamma_0[z - v_0(t - t_c)]) \\ &\quad \times \rho_{WS}(x + b/2, y, \gamma_0[z + v_0(t - t_c)]). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Зробимо заміну змінних  $(t, z) \rightarrow (z_1, z_2)$  де  $z_1 = \gamma_0[z - v_0(t - t_c)]$ ,  $z_2 = \gamma_0[z + v_0(t - t_c)]$ . Отримуємо

$$\begin{aligned} N_{\text{coll}} &= \sigma_{NN} \int d\mathbf{r}_\perp \int dz_1 \rho_{WS}(x - b/2, y, z_1) \int dz_2 \rho_{WS}(x + b/2, y, z_2) \\ &= \sigma_{NN} \int dx dy T_A(x - b/2, y) T_B(x + b/2, y) = \sigma_{NN} A^2 t(b), \end{aligned} \quad (3.27)$$

де  $t(b)$  є функцією перекриття ядер, яка залежить від прицільного параметру ядер. Зазначимо, що тут вона нормована на одиницю. Запис (3.27) співпадає із відповідним виразом для середнього числа бінарних зіткнень в аналітичній моделі Глаубера-Ситенка. Однак відмітимо, що наша модель дозволяє аналізувати також і часову та поздовжню структури бінарних реакцій.

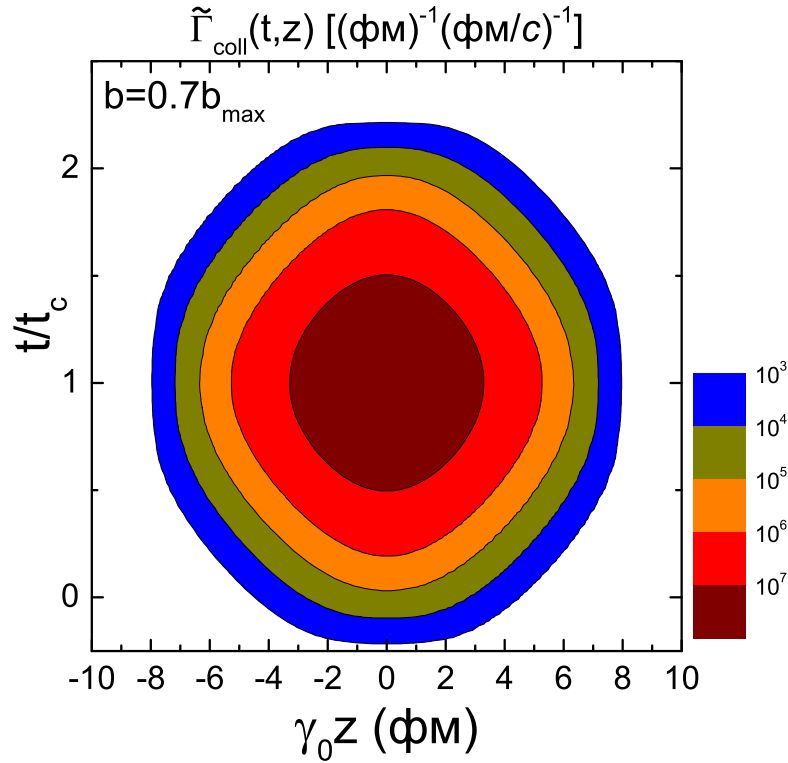


Рис. 3.2: Густина бінарних реакцій  $\tilde{\Gamma}_{\text{coll}}(t, z)$  у координатах  $(t, z)$  для Pb+Pb зіткнень. Енергія зіткнення  $\epsilon = \sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV, а прицільний параметр рівний  $b = 0.7b_{\text{max}}$ . Вісь зіткнення  $z$  нормовано  $\gamma$ -фактором  $\gamma_0$ , що відповідає енергії зіткнення ядер.

Розглянемо величину  $\tilde{\Gamma}_{\text{coll}}(t, z) = \int dx dy \Gamma_{\text{coll}}(t, \mathbf{r})$ , яка відображає двовимірну просторово-часову структуру бінарних реакцій у координатах  $(t, z)$ . Цю величину зображено на Рис. 3.2. Видно, що часова шкала  $t_c$  є природною для характеризування початкової стадії.

Має сенс порівняти нашу аналітичну модель із моделлю МК-Глаубер. У цій моделі природнім чином враховуються кореляції внаслідок механізму зіткнень (кореляції “близнюків” [118]), тобто той факт, що нуклони можуть прореагувати один з одним тільки якщо вони знаходяться поруч у поперечній площині. Для того, щоб провести порівняння розглянемо таку величину як частота бінарних реакцій  $\nu_{\text{coll}}(t) = \int dz \tilde{\Gamma}_{\text{coll}}(t, z)$ , яку можна розрахувати як у нашій моделі, так і у моделі МК-Глаубер. Для того, щоб розрахувати цю величину у МК-Глаубер, виконаємо звичну процедуру (описану наприклад у [119]), але із додатковим кроком для визначення часової залежності.

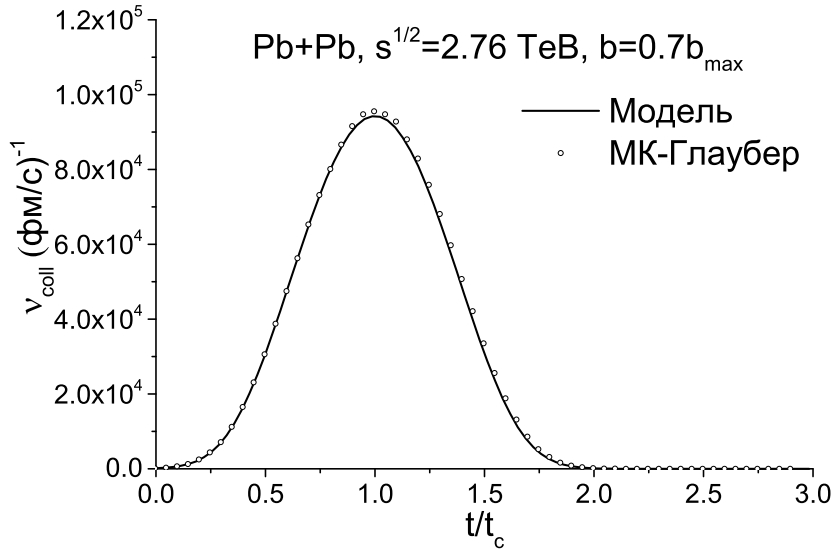


Рис. 3.3: Частота бінарних реакцій  $\nu_{\text{coll}}(t)$  у Pb+Pb зіткненнях розрахована за допомогою запропонованої моделі, а також моделі Монте Карло Глаубер. Енергія зіткнення  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV, а прицільний параметр рівний  $b = 0.7b_{\text{max}}$ .

1. Згенеруємо початкові координати нуклонів у налітаючих ядрах із використанням розподілу Вудса-Саксона із тими самими параметрами, що і у нашій аналітичній моделі.
2. Розглянемо усі можливі бінарні реакції між нуклонами із налітаючих ядер. Для цього розраховуємо відстань  $d_{\text{trans}}$  між ними у поперечній площині. У випадку, якщо виконується нерівність  $d_{\text{trans}} < \sqrt{\frac{\sigma_{NN}}{\pi}}$ , зареєструємо бінарне зіткнення.
3. Для кожного бінарного зіткнення розрахуємо момент часу, що відповідає цьому зіткненню як  $t = \frac{|z_1 - z_2|}{2v_0}$ , де  $z_1$  та  $z_2$  є поздовжніми координатами двох нуклонів, що приймають участь у зіткненні, у момент часу  $t = 0$ .

Частота бінарних реакцій, розрахована у нашій аналітичній моделі, і у моделі МК-Глаубер наведена на Рис. 3.3. На рисунку видно, що обидва графіки практично співпадають, що вказує на те, що наша модель відповідає моделі МК-Глаубер, а також те, що флуктуації між окремими подіями та кореляції “близнюків” мало впливають на частоту бінарних реакцій.



### 3.3 Часова залежність різних величин на стадії розділення

Для досліджень часової структури процесу поділу спектаторів та учасників розглянемо таку величину як залежний від часу поперечний розподіл  $T^s(t; x, y)$  нуклонів, які не приймали участі у реакціях до моменту часу  $t$ . Цей розподіл можна записати як

$$\begin{aligned} T^s(t; x, y) &= T_A^s(t; x, y) + T_B^s(t; x, y), \\ T_{A(B)}^s(t; x, y) &= \int d\mathbf{p} \int dz f_{A(B)}^s(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) \\ &= \int dz \rho_{A(B)}^{(0)}(t, \mathbf{r}) \exp \left\{ -2\sigma_{NN} v_0 \int_{-\infty}^t dt' \rho_{B(A)}^{(0)}[t', \mathbf{r} - \mathbf{v}_{A(B)}(t - t')] \right\}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$(3.29)$$

Цей вираз можна також переписати через початковий розподіл Вудса-Саксона:

$$\begin{aligned} T_{A(B)}^s(t; x, y) &= \int dz \gamma_0 \rho_{ws}(x \mp b/2, y, \gamma_0[z \mp v_0(t - t_c)]) \times \\ &\exp \left\{ -2\sigma_{NN} v_0 \int_{t_0}^t dt' \gamma_0 \rho_{ws}(x \pm b/2, y, \gamma_0[z \mp v_0(t + t_c) \pm 2v_0 t']) \right\}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Має сенс ввести змінні  $\tilde{z} = \gamma_0 z$  та  $\tilde{t} = t/t_c$ , де, як було сказано вище,  $t_c = R_0/(\gamma_0 v_0)$  є часом максимального просторового перекриття густин (див. Рис. 3.1). Дослідження в рамках монтекарлівських моделей показують, що цей момент часу відповідає максимуму частоти нуклон-нуклонних реакцій [3, 4, 120] і може бути інтерпретований як залежний від енергії зіткнення часовий масштаб для початкової стадії зіткнення ядер. Цей момент часу  $t_c$  зменшується із збільшенням енергії зіткнення ядер і знаходиться у наступних інтервалах:  $t_c \simeq 1 - 2$  фм/с для енергій SPS,  $t_c \simeq 0.1 - 0.8$  фм/с для енергій RHIC та  $t_c \sim 10^{-2} - 10^{-3}$  фм/с для енергій LHC.

$$\begin{aligned} T_{A(B)}^s(\tilde{t}; x, y) &= \int d\tilde{z} \rho_{ws}[x \mp b/2, y, \tilde{z} \mp R_0(\tilde{t} - 1)] \times \\ &\exp \left\{ -2\sigma_{NN} R_0 \int_{-\infty}^{\tilde{t}} d\tilde{t}' \rho_{ws}[x \pm b/2, y, \tilde{z} \mp R_0(\tilde{t} + 1) \pm 2R_0 \tilde{t}'] \right\}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

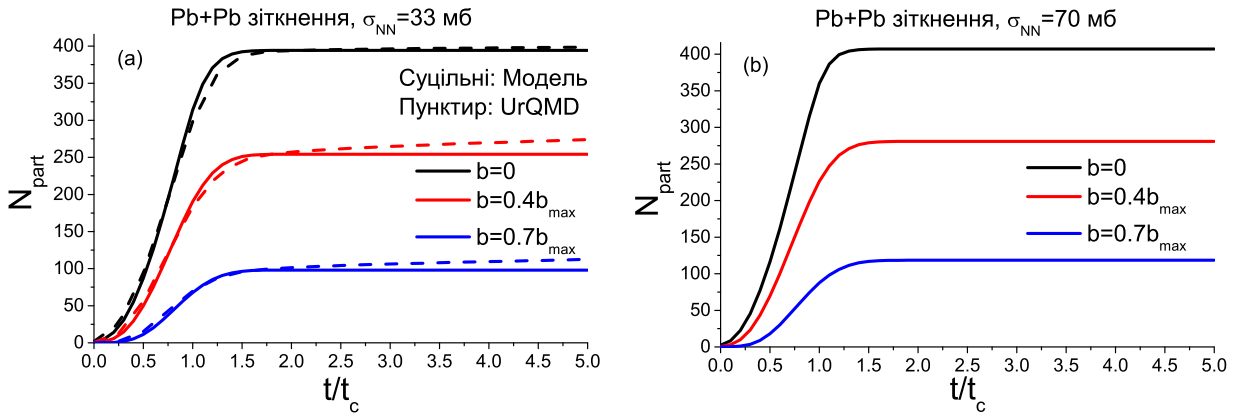


Рис. 3.4: Часова залежність повної кількості нуклонів-учасників у Pb+Pb зіткненнях при енергіях (a) SPS та RHIC ( $\sigma_{NN} = 33$  мб) і (b) LHC ( $\sigma_{NN} = 70$  мб) для різних значень прицільного параметру. Суцільні лінії відповідають розрахункам, проведеним у нашій моделі, у той час як пунктирною лінією у (a) позначені розрахунки в моделі UrQMD при енергії  $\sqrt{s_{NN}} = 17.3$  GeV.

### 3.3.1 Кількість учасників

Повна кількість учасників (або повний баріонний заряд) у момент часу  $t$  може бути записана як

$$N_{\text{part}}(t) = 2A - \int dx dy [T_A^s(t; x, y) + T_B^s(t; x, y)]. \quad (3.32)$$

Часова залежність повної кількості нуклонів-учасників у Pb+Pb зіткненнях наведена на Рис. 3.4 для енергій (a) SPS та RHIC ( $\sigma_{NN} = 33$  mb) і (b) LHC ( $\sigma_{NN} = 70$  mb) для трьох різних центральностей:  $b = 0, 0.4b_{\text{max}}, 0.7b_{\text{max}}$ , де  $b_{\text{max}} = 2R_0$  та  $R_0 = 6.53$  фм. Видно, що зміна у значенні перерізу нуклон-нуклонних реакцій, яка, по суті, відображає усю різницю між енергіями RHIC та LHC, має незначний вплив на часову залежність  $N_{\text{part}}(t)$  і приводить лише до незначного збільшення кількості учасників для заданого прицільного параметру. З Рис. 3.4 також видно, що процес формування системи учасників є найбільш інтенсивним у інтервалі часу  $t \simeq 0.5 - 1 t_c$  і закінчується приблизно при  $t \simeq 1.5 t_c$ .

Має сенс провести порівняння між нашою спрощеною аналітичною моделлю та більш складною моделлю, такою як UrQMD [37, 38]. Часова залежність повної кількості учасників (баріонного заряду) може бути розрахована в UrQMD як середнє по всім подіям значення величини  $N_{\text{part}}(t) = 2A - N_{\text{spec}}(t)$ , де  $N_{\text{spec}}(t)$  визначається у кожному зіткненні у результаті аналізу послідовності

всіх адронних реакцій. Результати UrQMD розрахунків для величини  $N_{\text{part}}(t)$  у Pb+Pb зіткненнях при найбільшій енергії SPS  $\sqrt{s_{\text{NN}}} = 17.3$  GeV зображено на Рис. 3.4а пунктирними лініями. Відмітимо, що часова вісь із UrQMD, яку зображено на Рис. 3.4а, відповідає часовій вісі, яка використовується у нашій спрощеній моделі, тобто у момент часу  $t = 0$  налітаючі ядра “дотикаються” одне одного. Порівняння із UrQMD (суцільні лінії на Рис. 3.4) вказує на те, що моделі в цілому добре узгоджені. У той же час видно, що кількість учасників у UrQMD продовжує зростати, також і у моменти часу  $t > 1.5t_c$ , хоча це зростання і незначне. Це можна пояснити більш складною динамікою зіткнень в UrQMD у порівнянні із нашою аналітичною моделлю.

### 3.3.2 Момент імпульсу

Наша модель дозволяє вивчати часову залежність повного моменту імпульсу системи учасників, що представляє окремий інтерес. Повний момент імпульсу вже сформованої системи учасників є величиною, що зберігається, має ненульове значення у нецентральных зіткненнях ядер [121, 122] та може приймати велике значення ( $L \approx 10^6 \hbar$  для енергій LHC [5]). Момент імпульсу вказує на наявність обертання у початковому гідродинамічному стані. Позначимо залежний від часу момент імпульсу системи учасників як  $L_{\text{tot}}^P(t)$ . Цю величину можна розрахувати як різницю між повним моментом імпульсу  $L_{\text{tot}}$  та залежним від часу моментом імпульсу  $L_{\text{tot}}^S(t)$  нуклонів, які не приймали участі у реакціях до моменту часу  $t$ . Означені вище величини можна записати як

$$L_{\text{tot}} = p_{\text{in}}^z \int dx dy x [T_A(x - b/2, y) - T_B(x + b/2, y)], \quad (3.33)$$

$$L_{\text{tot}}^S(t) = p_{\text{in}}^z \int dx dy x [T_A^S(t; x, y) - T_B^S(t; x, y)], \quad (3.34)$$

$$L_{\text{tot}}^P(t) = L_{\text{tot}} - L_{\text{tot}}^S(t), \quad (3.35)$$

де  $p_{\text{in}}^z = \sqrt{s/4 - m_N^2}$  є початковим імпульсом нуклона з налітаючого ядра.

Залежність повного моменту імпульсу учасників від прицільного параметру у різні моменти часу наведено на Рис. 3.5. Відмітимо, що значення моменту імпульсу наведено в одиницях  $\hbar$ . Видно, що, так само як і у випадку часової залежності кількості учасників, повний момент імпульсу учасників зростає із

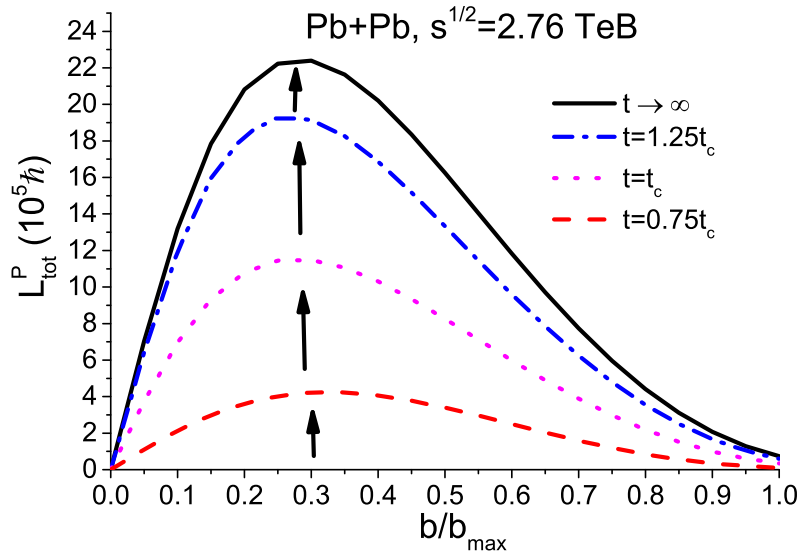


Рис. 3.5: Залежність повного моменту імпульсу учасників від прицільного параметру у різні моменти часу у Pb+Pb зіткненнях при енергії  $\sqrt{s} = 2.76$  TeV.

часом і досягає максимального значення наприкінці процесу розділення на спектатори та учасники.

Окремий інтерес представляє така величина, як часова залежність моменту імпульсу у розрахунку на один нуклон-учасник. Така величина відображає середній вклад нуклонів-учасників у повний момент імпульсу. Тут треба відмітити, що кількість нуклонів-учасників також змінюється із часом. Залежність моменту імпульсу у розрахунок на один учасник від прицільного параметру у різні моменти часу наведено на Рис. 3.6. Видно, що, як і у випадку повного моменту імпульсу, ця величина зростає із часом для усіх значень прицільного параметру. З цього можна зробити висновок, що, для будь-якого фіксованого значення прицільного параметру  $b$ , швидкість зростання повної кількості учасників  $N_p$  є меншою за швидкість зростання повного моменту імпульсу учасників. Іншою подібністю до поведінки повного моменту імпульсу є те, що у залежності нормованого моменту імпульсу від прицільного параметра також наявний максимум, який дещо зсунуто у напрямку більших значень  $b$ . Серед відмінностей можна зазначити те, що момент імпульсу на один учасник не прямує до нуля при збільшенні прицільного параметра, що є індикатором того, що обертання та завихреність присутні у початковому гідродинамічному стані навіть у найбільш периферійних зіткненнях, і їх необхідно враховувати.

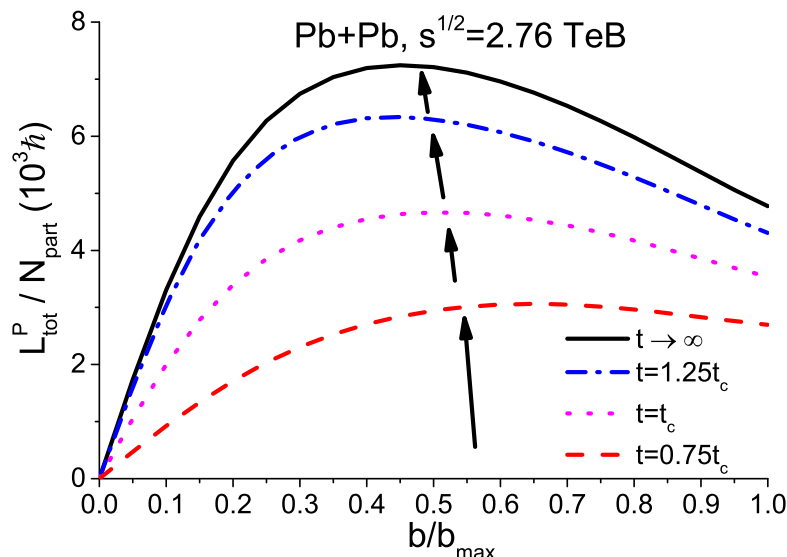


Рис. 3.6: Залежність моменту імпульсу учасників у розрахунку на один нуклон-учасник у різні моменти часу для Pb+Pb зіткнень при енергіях  $\sqrt{s} = 2.76$  TeV.

Цікаво порівняти швидкість зростання із часом моменту імпульсу учасників із відповідною швидкістю зростання кількості нуклонів-учасників. Для цього проведемо порівняння часових залежностей відповідних нормованих величин:  $N_{\text{part}}(t)/N_{\text{part}}(\infty)$  та  $L_{\text{tot}}^P(t)/L_{\text{tot}}^P(\infty)$ , де  $N_{\text{part}}(\infty)$  та  $L_{\text{tot}}^P(\infty)$  це, відповідно, підсумкові значення повного числа учасників та повного моменту імпульсу учасників наприкінці стадії розділення. Часову залежність цих величин наведено на Рис. 3.7.

З Рис. 3.7 видно, що збільшення із часом кутового моменту відбувається із деяким запізненням у порівнянні із числом учасників, і є найбільш інтенсивним у інтервалі  $t \simeq 0.75 - 1.25t_c$ . Це можна пояснити тим, що різні нуклони дають різний вклад у повний момент імпульсу і нуклони із найбільшим вкладом переходять до системи учасників в середньому у більш пізні моменти часу. Цей висновок також можна зробити проаналізувавши часову залежність моменту імпульсу, який нормовано на число учасників (див. Рис. 3.6).

Цікаво дослідити залежність моменту імпульсу від енергії зіткнення ядер, а також від профілю ядерної густини. Момент імпульсу сформованої системи учасників може бути записаний через функції товщини ядер  $T_{A(B)}(x, y)$  та через

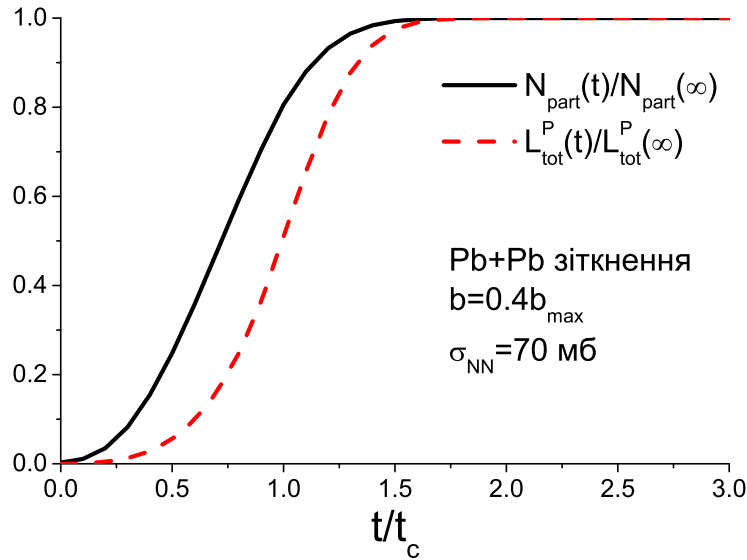


Рис. 3.7: Часова залежність кількості учасників та повного моменту імпульсу учасників, які нормовані на свої підсумкові значення. Розглянуто Pb+Pb зіткнення.

підсумковий поперечний розподіл спектаторів  $T_{A(B)}^S(x, y)$  як

$$L_{\text{tot}} = p_i^z \int dx dy x [T_A(x - b/2, y) - T_B(x + b/2, y)], \quad (3.36)$$

$$L_{\text{tot}}^S = p_i^z \int dx dy x [T_A^S(x, y) - T_B^S(x, y)], \quad (3.37)$$

$$L_{\text{tot}}^P = L_{\text{tot}} - L_{\text{tot}}^S. \quad (3.38)$$

Нагадаємо, що поперечний розподіл спектаторів визначається рівнянням (3.20). Інший підхід полягає у тому, що усі нуклони в області геометричного перекриття ядер вважаються учасниками [121–124].

З Рис. 3.8 видно, що момент імпульсу при енергіях LHC ( $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV) на два порядки більший, ніж при енергіях SPS ( $\sqrt{s_{NN}} = 17.32$  GeV) та на порядок більший, ніж при енергіях RHIC ( $\sqrt{s_{NN}} = 200$  GeV).

Момент імпульсу має найбільше значення для ядер із розподілом ядерної густини у вигляді Вудса-Саксона (3.6), внаслідок присутності дифузійного краю із хвостом, який ефективно збільшує значення моменту імпульсу. Для ядер із однорідною густиною нуклонів та різким краєм ми вважаємо усі нуклони в області перекриття ядер учасниками, а усі інші нуклони – спектаторами (модель “твердих” сфер). У цьому випадку момент імпульсу менший приблизно у два

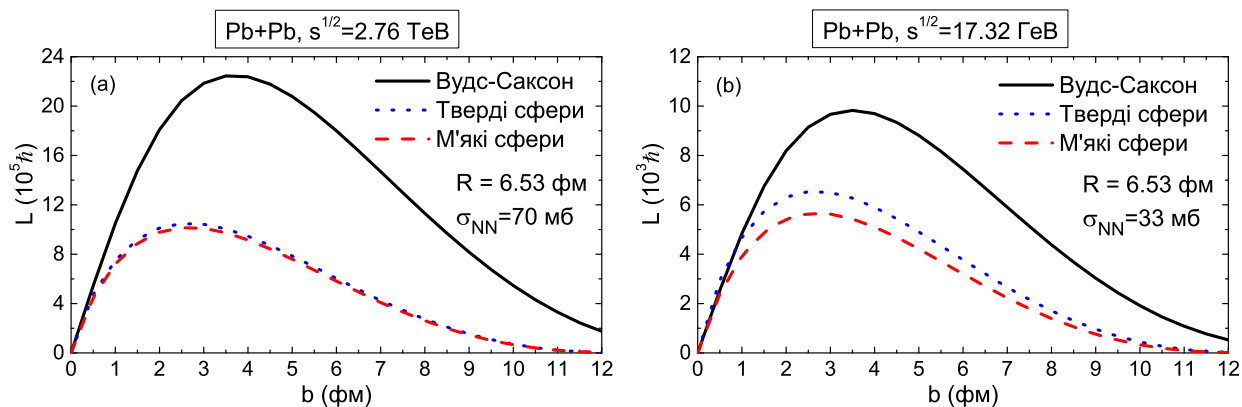


Рис. 3.8: Залежність повного моменту імпульсу учасників від прицільного параметру у Pb+Pb зіткненнях для енергій (a) LHC та (b) SPS для різних профілів ядерної густини.

рази у порівнянні із профілем Вудса-Саксона. Якщо ще додатково врахувати наявність деякої прозорості у зоні перекриття внаслідок кінцевого значення нуклон-нуклонного перерізу (модель “м’яких” сфер), то при енергіях LHC/SPS момент імпульсу зменшується приблизно на 2%/15% у порівнянні із “твердими” сферами (див. Рис. 3.8).

З наведених вище розрахунків випливає, що при заданні початкових умов у гідродинамічних моделях опису існує деяка неоднозначність при врахуванні повного моменту імпульсу учасників.

### 3.3.3 Завихреність

Класична (нерелятивістська) завихреність учасників у площині реакції  $(x, z)$  визначається як

$$\omega_y = \omega_{xz} = -\omega_{zx} = \frac{1}{2} (\partial_z v_x^P - \partial_x v_z^P), \quad (3.39)$$

де  $v^P$  є середньою 3-швидкістю учасників. Появу завихреності у площині реакції в зіткненнях важких йонів можна пов’язати з наявністю ненульового кутового моменту системи учасників і, як було показано у гідродинамічних дослідженнях, завихреність продовжує відігравати роль протягом усієї гідродинамічної еволюції до етапу фрізауту [125, 126]. Таку величину як завихреність можна використовувати для дослідження обертання у площині реакції. Можна відмітити, що із завихреністю досить тісно пов’язана поляризація  $\Lambda$  гіперонів, яку можна визначати експериментально [127]. Можливість експериментального де-

тектування обертання за допомогою Ханбері-Бран-Твісс інтерферометрії було також досліджено у роботах [128–130].

Незважаючи на те, що наша модель не описує еволюцію сформованої системи учасників, ми все рівно можемо провести дослідження виникнення завихреності на стадії формування цієї системи. Для цього знехтуємо поперечним рухом учасників на стадії формування (режим без “стопінгу”), і тоді їх середня швидкість визначається як

$$v_x^P(t, \mathbf{r}) \approx v_y^P(t, \mathbf{r}) \approx 0, \quad (3.40)$$

$$v_z^P(t, \mathbf{r}) \approx v_0 \frac{\rho_A^P(t, \mathbf{r}) - \rho_B^P(t, \mathbf{r})}{\rho_A^P(t, \mathbf{r}) + \rho_B^P(t, \mathbf{r})}, \quad (3.41)$$

$$\rho_{A(B)}^P(t, \mathbf{r}) \approx \rho_{A(B)}^{(0)}(t, \mathbf{r}) - \rho_{A(B)}^S(t, \mathbf{r}). \quad (3.42)$$

Тут  $\rho_{A(B)}^P(t, x, y, z)$  є залежною від часу просторовою густиною учасників із ядра-снаряду (мішені). Для релятивістського випадку використаємо означення із роботи [131]

$$\omega_\nu^\mu = \frac{1}{2} (\nabla_\nu u^\mu - \nabla^\mu u_\nu), \quad (3.43)$$

де  $u^\mu = \gamma(1, \mathbf{v})$ ,  $\nabla_\alpha = \Delta_\alpha^\beta \partial_\beta$  і  $\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu$ . Подібно до [125] знехтуємо колективним прискоренням у порівнянні із обертанням, тобто вважаємо, що  $|\partial_\tau u^\mu| \ll |\partial_x u^z|$ , і тоді отримуємо наступний вираз для релятивістської завихреності  $\omega_z^x$  у площині реакції

$$\omega_z^x = -\omega_x^z = -\frac{1}{2} \gamma \partial_x v_z - \frac{1}{2} v_z \partial_x \gamma, \quad (3.44)$$

де  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v_z^2}$ . Тут вже враховано, що  $v_x = v_y = 0$  у нашій моделі.

Подібно до [125] зважимо завихреність вагою, яка пропорційна густині енергії. У такий спосіб зважена завихреність відобразить також і колективну динаміку системи. Завихреність у класичному та релятивістському випадках тоді має вигляд

$$\Omega_{zx} = w(t, x, z) \omega_{zx}, \quad (3.45)$$

де вага  $w(t, x, z)$  визначається як

$$w(t, x, z) = \frac{\epsilon^P(t, x, y=0, z)}{\langle \epsilon^P(t, x, y=0, z) \rangle}. \quad (3.46)$$



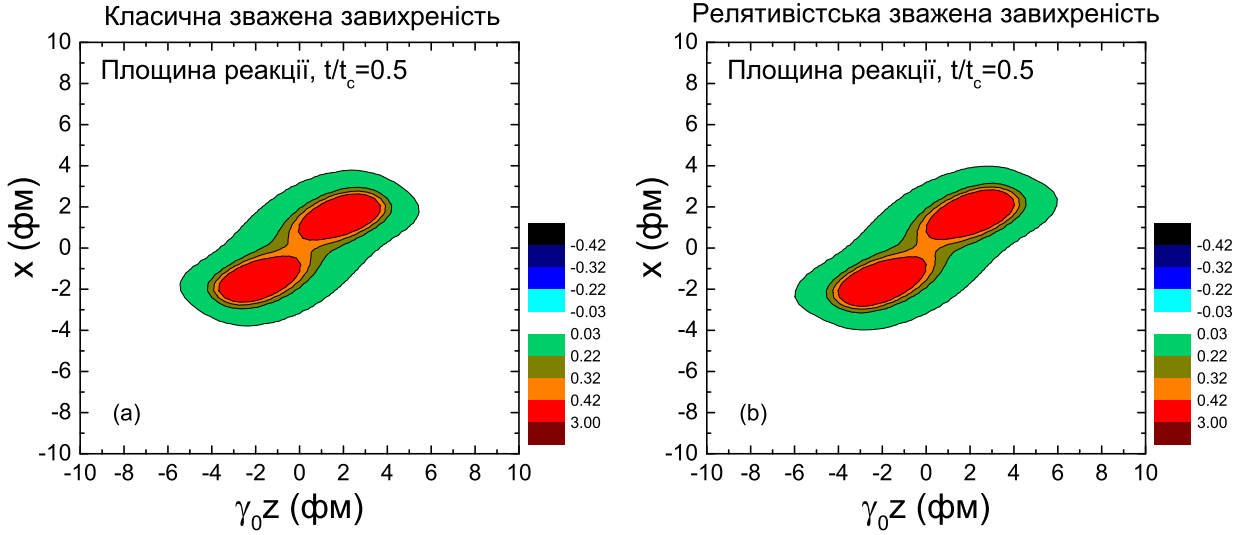


Рис. 3.9: Класична (а) та релятивістська (б) зважені завихреності учасників ( $\Omega_{zx}$ ) в одиницях  $c/\text{фм}$ , які розраховані у площині реакції, тобто у площині  $(x, z)$ , у момент часу  $t = 0.5t_c$  в Pb+Pb зіткненнях. Результати представлені для енергії зіткнення  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76 \text{ TeV}$  і  $b = 0.7b_{\text{max}}$ . Вісь зіткнення  $z$  промасштабована  $\gamma$ -фактором  $\gamma_0$ , який відповідає енергії зіткнення.

Тут  $\epsilon^P(t, x, y, z) = \frac{\sqrt{s}}{2} (\rho_A^P + \rho_B^P)$  є густиною енергії учасників, а  $\langle \epsilon^P(t, x, y = 0, z) \rangle$  є середньою густиною енергії у площині реакцій в момент часу  $t$ . Для усереднення густини енергії використовуємо область  $-1.5R_0 < x < 1.5R_0$ ,  $-1.5R_0 < \gamma_0 z < 1.5R_0$ . Результати розрахунків для класичної та релятивістської завихреностей у площині реакції у різні моменти часу показано на Рис. 3.9-3.11.

Представлені результати відображають виникнення обертання на етапі формування системи учасників. Видно, що область із найбільшою кількістю учасників характеризується суттєвим позитивним значенням завихреності і це добре узгоджується із гідродинамічними розрахунками [125] в моделі Particle in Cell Relativistic Hydro (PICRH) [123, 124]. Область спектаторів характеризується від'ємними значеннями завихреності, що пов'язано із збільшенням кількості учасників із часом внаслідок зіткнень. Оскільки в гідродинамічній моделі PICRH спектатори не розглядаються взагалі, то цей ефект там відсутній.

Необхідно звернути увагу на суттєву різницю між нерелятивістською та релятивістською завихреностями на Рис. 3.10 та 3.11. Причиною цьому є присутність релятивістських  $\gamma$ -факторів, які мають велике значення у нашій моделі, оскільки ми розглядаємо лише зіткнення, і не розглядаємо колективних ефектів

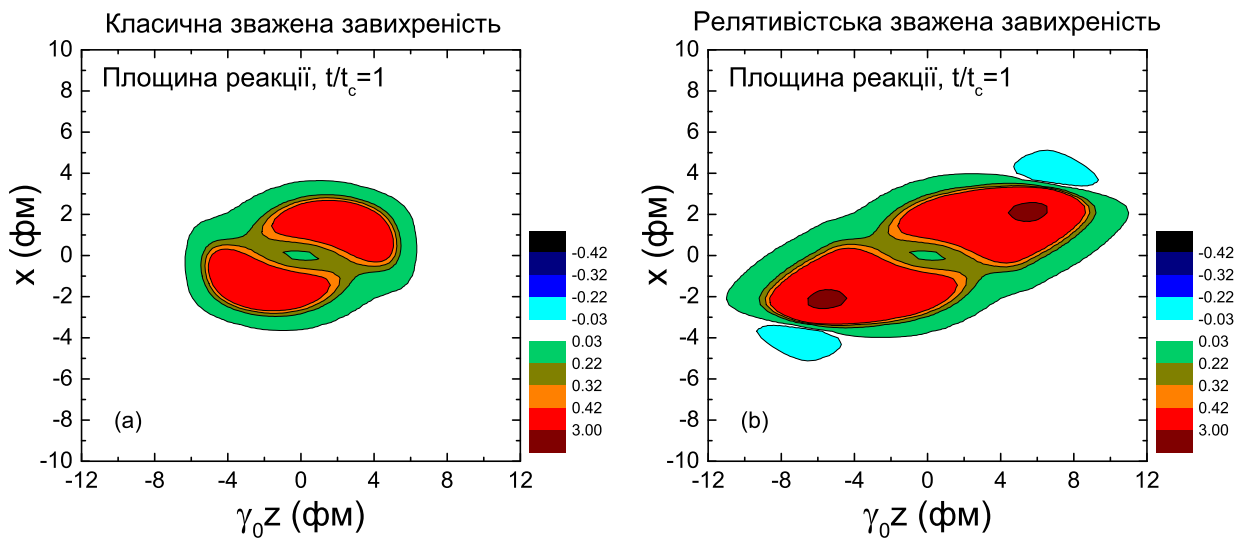


Рис. 3.10: Те саме, що і на Рис. 3.9, але для  $t = t_c$ .

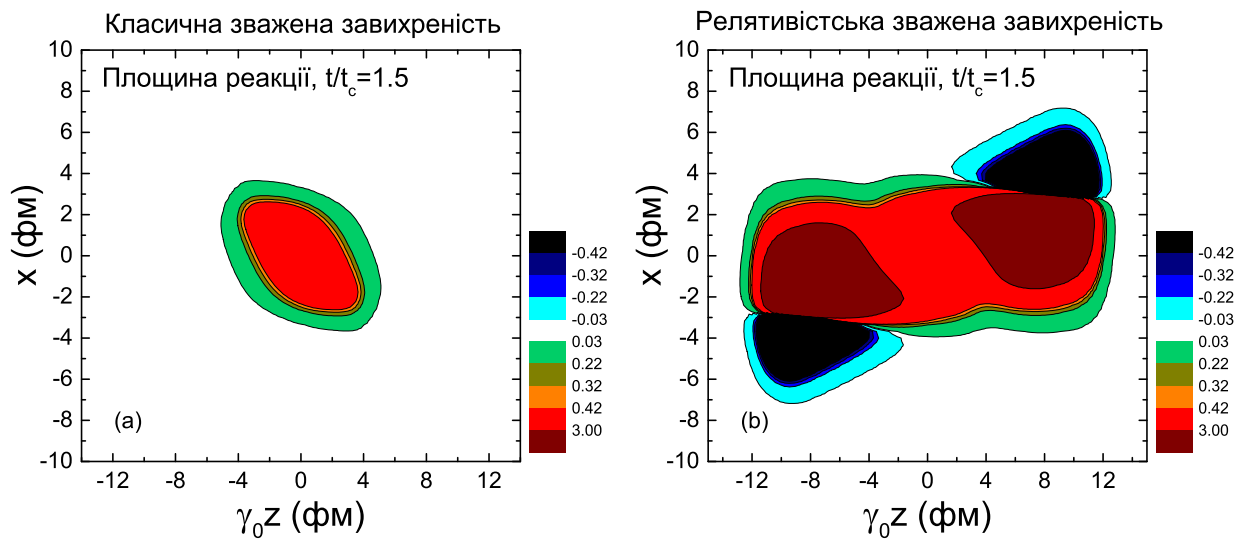


Рис. 3.11: Те саме, що і на Рис. 3.9, але для  $t = 1.5t_c$ .

внаслідок тиску. У моделі PICRH ці колективні ефекти приводять до зменшення швидкостей як у початковому стану так і при подальшій гідродинамічній еволюції, і тому різниця між нерелятивістською на релятивістською завихреностями є не такою суттєвою.

### 3.4 Порівняння із іншими моделями початкової стадії

Коректна ідентифікація особливостей початкової стадії зіткнення релятивістських ядер є дуже важливою при розгляді результатів гідродинамічних та гібридних моделей. У той час як середня стадія зіткнення ядер досить непогано описується гідродинамічними моделями, для моделювання початкового стану у гідродинаміці використовують різні наближення.

Відповідність нашої моделі оптичній границі моделі Глаубера-Ситенка було детально досліджено у попередніх підрозділах. У гідродинамічній моделі PICRH [123, 124] початковий стан формується в результаті динамічної еволюції системи у полі Янга-Міллса [132, 133], і цей опис чимось подібний до нашої моделі. У моделі початкового стану для PICRH притягувальні поля Янга-Міллса є домінуючими, і тому система там залишається більш компактною та рівномірною у порівнянні із нашою моделлю. Також у цій моделі використовуються профілі ядерної густини із різким краєм замість профілю Вудса-Саксона, внаслідок чого типові часи  $t_c$  та  $2t_c$  стають дещо коротшими. Початковий же момент часу для гідродинаміки відповідає моменту, коли ядра пройшли одне крізь інше і майже зупинились внаслідок дії поля Янга-Міллса. Відповідно, цей час має бути не меншим за  $2t_c$ . Подібні властивості також притаманні деяким моделям початкового стану, що ґрунтуються на підході Color Glass Condensate.

З іншої сторони, для тих підходів, що ґрунтуються на молекулярній динаміці та/або гідродинаміці і використовують початкові умови із МК-Глаубер, наша модель дає корисні часові масштаби. Наприклад, початковий момент часу гідродинамічної еволюції у гібридній моделі на основі UrQMD [72], також тісно пов'язаний із часовою шкалою  $t_c$  нашої моделі, цей час в UrQMD рівний більшому з двох величин:  $2t_c$  або  $1 \text{ фм}/c$ .

### 3.5 Поздовжні флуктуації системи центру мас учасників

За сучасними уявленнями, через деякий час після завершення стадії розділення на спектатори та учасники, система учасників знаходиться у стані, який близький до локальної термодинамічної рівноваги, і тоді подальша еволюція цієї системи може бути описана рівняннями релятивістської гідродинаміки. Варто зауважити, що кількість спектаторів у кожному ядрі змінюється від зіткнення до зіткнення навіть якщо прицільний параметр був фіксований і, в результаті цих флуктуацій, центр мас системи учасників не співпадає із центром мас двох ядер, тобто рапідність системи учасників  $y^{c.m.}$  може бути відмінною від нуля в окремо взятій події. Флуктуації такого роду автоматично враховані у транспортних моделях опису зіткнення ядер, оскільки вони описують процес розділення на спектатори та учасники. У той же час, гідродинамічні моделі не описують спектаторів взагалі, і тому в цих моделях такі флуктуації природнім чином не враховані. Можна очікувати, що флуктуації  $y^{c.m.}$  можуть бути найбільш суттєвими у периферійних зіткненнях ядер, коли прицільний параметр зіткнення ядер є великим, а енергія спектаторів значною у порівнянні із енергією учасників.

Можна зробити висновок, що при порівнянні із експериментом величин, які залежать від рапідності (наприклад це можуть бути коефіцієнти колективних потоків), може бути важливим врахування флуктуацій системи центру мас учасників. Як було зазначено в роботах [123, 124, 134] ці флуктуації можуть мати значний вплив при описі периферійних зіткнень у рамках гідродинамічних моделей. А, наприклад, вплив поздовжних флуктуацій густини фаерболу на дво-частинкову кореляційну функцію було досліджено у роботі [135]. Ці флуктуації можуть мати вплив і на інші спостережувані величини [136, 137].

Для досліджень флуктуацій центру мас учасників побудуємо спрощену аналітичну модель.

### 3.5.1 Визначення рапідності системи учасників через кількість спектаторів

Розглянемо імовірність того, що нуклон буде спектатором або учасником в результаті зіткнення ядер. Як було зазначено вище, багаточастинкову систему, яка утворюється від час зіткнення ядер можна розбити на три підсистеми: спектатори із ядра-снаряду (А), спектатори із ядра-мішені (В) та учасники (Р). Закон збереження повного 4-імпульсу системи має наступний вигляд:

$$E_{\text{tot}} = E_A + E_B + E_P, \quad (3.47)$$

$$P_{\text{tot}}^z = P_A^z + P_B^z + P_P^z = 0. \quad (3.48)$$

Рапідність с.ц.м. учасників може бути записана як

$$y_P = \frac{1}{2} \ln \frac{E_P + P_P^z}{E_P - P_P^z}. \quad (3.49)$$

Використовуючи рівняння (3.47)-(3.48), можемо виразити  $y_P$  через енергію та імпульс спектаторів [134]

$$y_{c.m.} \approx y_P = \operatorname{arctanh} \left[ \frac{-(P_A^z + P_B^z)}{E_{\text{tot}} - E_A - E_B} \right]. \quad (3.50)$$

Далі знехтуємо початковим Фермі-рухом у ядрах у порівнянні із колективною швидкістю ядра. У такому випадку можна виразити  $E_{\text{tot}}$ ,  $E_{A(B)}$  та  $P_{A(B)}^z$  через кількості спектаторів  $N_A$  та  $N_B$

$$E_{\text{tot}} = 2A p_i^0, \quad (3.51)$$

$$E_A = N_A p_i^0, \quad (3.52)$$

$$E_B = N_B p_i^0, \quad (3.53)$$

$$P_A^z = N_A p_i^z, \quad (3.54)$$

$$P_B^z = -N_B p_i^z, \quad (3.55)$$

де  $p_i^0 = \sqrt{s}/2$  та  $p_i^z = \sqrt{s/4 - m_N^2}$  є, відповідно, початковими енергією та імпульсом нуклонів, тобто це є енергія та імпульс спектаторів. Тут  $m_N = 938 \text{ MeV}/c^2$  є масою нуклона. Рапідність с.ц.м. тоді можна виразити через кількості спектаторів  $N_A$  та  $N_B$  як

$$y_P(N_A, N_B) = \operatorname{arctanh} \left( \frac{N_B - N_A}{2A - N_A - N_B} v_i \right), \quad (3.56)$$

де  $v^i = \frac{p_i^z}{p_i^0}$  є початковою швидкістю нуклонів. З цього виразу випливає, що у нашій моделі  $y^{c.m.}$  може приймати лише дискретний набір значень. Цей факт є наслідком того, що ми знехтували Фермі-рухом нуклонів, врахування якого б привело до деякого розмиття імпульсу. Крім того, спектатори та учасники не завжди можна розділити абсолютно чітко, між ними може існувати певний рівень залишкової взаємодії. Підсумовуючи вираз (3.56), маємо висновок, що, в рамках нашої моделі, ми можемо визначити імовірність того, що рапідність буде приймати те чи інше значення, якщо вдасться визначити імовірності кількості спектаторів  $N_A$  та  $N_B$ .

### 3.5.2 Імовірність кількості спектаторів

Поперечний розподіл спектаторів розраховується із моделі Глаубера-Ситенка

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N_{\text{spec}}}{dx dy} = & T_A(x - b/2, y) \left[ 1 - \frac{\sigma_{NN} T_B(x + b/2, y)}{A} \right]^A \\ & + T_B(x + b/2, y) \left[ 1 - \frac{\sigma_{NN} T_A(x - b/2, y)}{A} \right]^A, \end{aligned} \quad (3.57)$$

де  $b$  є прицільним параметром, а  $\sigma_{NN}$  це повний переріз нуклон-нуклонної реакції. Тут  $T_{A(B)}$  є функціями товщини ядра. Перший доданок у правій частині (3.57) є поперечним розподілом спектаторів із ядра-снаряду, а другий, відповідно, є розподілом спектаторів із ядра-мішені. Імовірність того, що нуклон із ядра-снаряду буде спектатором (внаслідок симетрії маємо ту саму імовірність і для нуклона з ядра-мішені) може бути записана як

$$\begin{aligned} p_A = p_B = p = & \frac{1}{A} \int dx dy T_A(x - b/2, y) \\ & \times \left( 1 - \frac{\sigma_{NN} T_B(x + b/2, y)}{A} \right)^A. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Залежність цієї імовірності від прицільного параметру у Pb+Pb зіткненнях при енергії  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV зображено на Рис. 3.12. Використаємо наступні значення параметрів:  $\sigma_{NN} = 70$  мб [138, 139],  $A = 208$ ,  $R = 6.53$  фм and  $\alpha = 0.545$ . Припустимо, що повна кількість спектаторів з одного ядра розподілена за біноміальним розподілом. Тоді, використовуючи параметр  $p$  із (3.58) цей розподіл

записується як

$$p(N_A) = \binom{A}{N_A} p^{N_A} (1-p)^{A-N_A}, \quad (3.59)$$

$$p(N_B) = \binom{A}{N_B} p^{N_B} (1-p)^{A-N_B}. \quad (3.60)$$

Тут ми зробили припущення, що нуклони у ядрі не корелюють між собою, тобто їх імпульси та координати є незалежними. Ще одне припущення, яке ми використаємо, є наступним: кількість спектаторів у ядрі-снаряді є незалежним від кількості спектаторів у ядрі-мішені. Це твердження звичайно є певним наближенням. Зокрема, наявність учасників у одному ядрі означає, що відбувались реакції між налітаючими нуклонами, а значить учасники точно повинні бути і в іншому ядрі. Таким чином, можна очікувати, що, при фіксованій кількості спектаторів  $N_A$  із ядра-снаряду, кількість спектаторів  $N_B$  у ядрі-мішені буде розподілена навколо середнього значення  $\langle N_B \rangle \approx N_A$ . Схожий висновок можна знайти у роботі [140], де це питання досліджувалося в рамках транспортних моделей. Незважаючи на те, що кількості спектаторів у налітаючих ядрах не є повністю некорельованими, ми будемо вважати ці дві величини незалежними для простоти розрахунків. Можна очікувати, що це наближення буде працювати добре у випадку зіткнення важких ядер із великим масовим числом, де локальні у поперечному просторі кореляції усереднюються по усьому ядру. Використовуючи це наближення можемо записати

$$p(N_A, N_B) \approx p(N_A) p(N_B). \quad (3.61)$$

Використовуючи цей вираз для імовірності можна визначити густину імовірності для рапідності с.ц.м. учасників, див. (3.56).

### 3.5.3 Гаусова апроксимація та розподіл рапідності учасників

Як було зазначено вище, у нашому підході рапідність с.ц.м. учасників може приймати дискретний набір значень. Однак, якщо дозволити величинам  $N_A$  та  $N_B$  приймати неперервні значення, то і рапідність буде приймати неперервні значення. Добре відомо, що при деяких умовах, біноміальні розподіли  $p(N_A)$  та

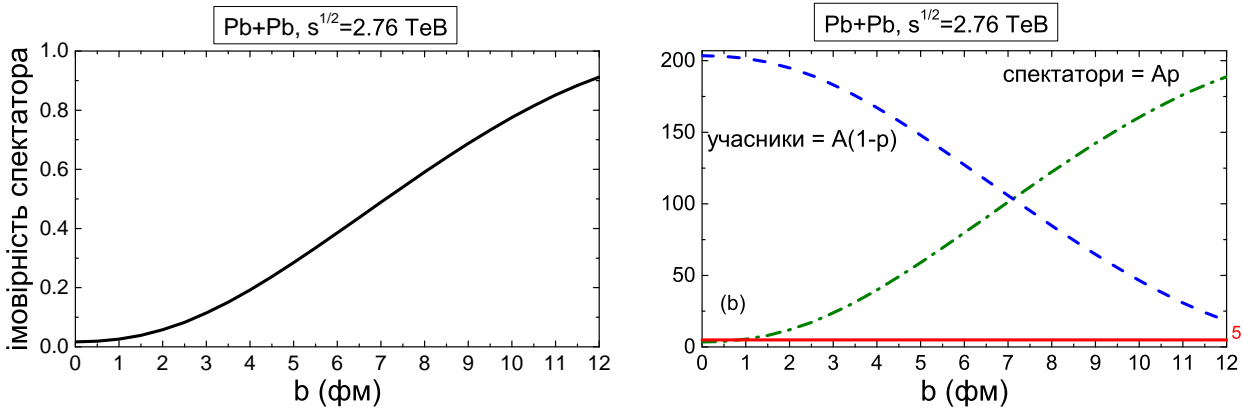


Рис. 3.12: (а) Залежність імовірності того, що нуклон є спектатором від прицільного параметру у Pb+Pb зіткненнях при енергії  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV. (б) Та сама залежність, але для середньої кількості спектаторів (лінія типу пунктир-точка) та учасників (пунктирна лінія). Суцільною лінією позначено нижню границю для цих двох величин, яка визначає умови при яких біноміальний розподіл можна наблизити розподілом Гаусса.

$p(N_B)$  можна добре наблизити розподілами Гауса із середнім значенням  $Ap$  та середньоквадратичним відхиленням  $Ap(1-p)$

$$p(N_{A(B)}) \Rightarrow \rho(N_{A(B)}) = \frac{\exp\left(-\frac{(N_{A(B)} - Ap)^2}{2Ap(1-p)}\right)}{\sqrt{2\pi Ap(1-p)}}. \quad (3.62)$$

У нашому випадку вищезгадані умови мають наступний вигляд: середні числа спектаторів та учасників  $Ap$  та  $A(1-p)$  мають бути достатньо великими, наприклад  $Ap > 5$  та  $A(1-p) > 5$ . З Рис. 3.12 видно, що ці умови добре виконуються, особливо при нецентральному зіткненні. Після використання гаусового наближення (3.62) густина розподілу рапідності має вигляд

$$\begin{aligned} f_P(y) &= \int_0^A dN_A \int_0^A dN_B \rho(N_A) \rho(N_B) \delta[y - y_P(N_A, N_B)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dN_A \int_{-\infty}^{\infty} dN_B \tilde{\rho}(N_A) \tilde{\rho}(N_B) \delta[y - y_P(N_A, N_B)], \end{aligned} \quad (3.63)$$

де ми вводимо наступні функції для того, щоб записати нескінченні межі інтегрування

$$\tilde{\rho}(N_{A(B)}) = \rho(N_{A(B)}) \theta(A - N_{A(B)}) \theta(N_{A(B)}). \quad (3.64)$$

Введемо нові змінні:

$$N = \frac{1}{2}(N_A + N_B), \quad n = N_B - N_A,$$



$$f_P(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dN \int_{-\infty}^{\infty} dn \tilde{\rho}(N + n/2) \tilde{\rho}(N - n/2) \times \delta \left[ y - \operatorname{arctanh} \left( \frac{n}{2(A - N)} v_i \right) \right]. \quad (3.65)$$

Виконаємо перехід до нової змінної у виразі для  $\delta$ -функції враховуючи правило:  $\delta[y - f(n; N)] = \delta[n - F(y; N)]/|f'(\bar{n})|$ , де

$$\bar{n} = F(y; N) = \frac{1}{v_i} 2(A - N) \tanh y. \quad (3.66)$$

Вставивши  $f'(\bar{n})$  у явному вигляді, отримуємо розподіл по рапідності

$$f_P(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dN \tilde{\rho}(N + \bar{n}/2) \tilde{\rho}(N - \bar{n}/2) \frac{2(A - N)}{v_i \cosh^2 y}. \quad (3.67)$$

Для того, щоб розрахувати інтеграл у (3.67) використаємо наступне наближення

$$\tilde{\rho}(N \pm \bar{n}/2) \approx \rho(N \pm \bar{n}/2). \quad (3.68)$$

Це наближення працює добре у випадку, коли наш початковий біноміальний розподіл (3.60) можна із достатньою точністю наблизити розподілом Гауса (3.62). Наявність гаусової експоненти дозволяє нам знехтувати тета-функціями при інтегруванні (3.67). Використаємо для інтегрування явний вигляд (3.62) для  $\rho(N \pm \bar{n}/2)$  та отримуємо

$$f_P(y) = \sqrt{\frac{A(1-p)}{\pi p}} \frac{v_i^2 \exp \left[ -\frac{A(1-p)}{p} \frac{\tanh^2 y}{v_i^2 + \tanh^2 y} \right]}{\cosh^2 y [v_i^2 + \tanh^2 y]^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.69)$$

### 3.5.4 Ультрарелятивістська границя та розподіл у центральному діапазоні рапідностей

Має сенс проаналізувати вираз (3.69) в ультрарелятивістській границі, тобто коли  $v_i \rightarrow 1$ . Отримуємо

$$f_P^{\text{UR}}(y) = \sqrt{\frac{A(1-p)}{\pi p}} \frac{\exp \left[ -\frac{A(1-p)}{p} \frac{\tanh^2 y}{1 + \tanh^2 y} \right]}{\cosh^2 y [1 + \tanh^2 y]^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.70)$$

Якщо тепер розглянути зіткнення однакових ядер при фіксованому значенні прицільного параметру і при різних енергіях зіткнення, то можна побачити, що єдиний параметр у (3.70), який залежить від енергії зіткнення ядер це

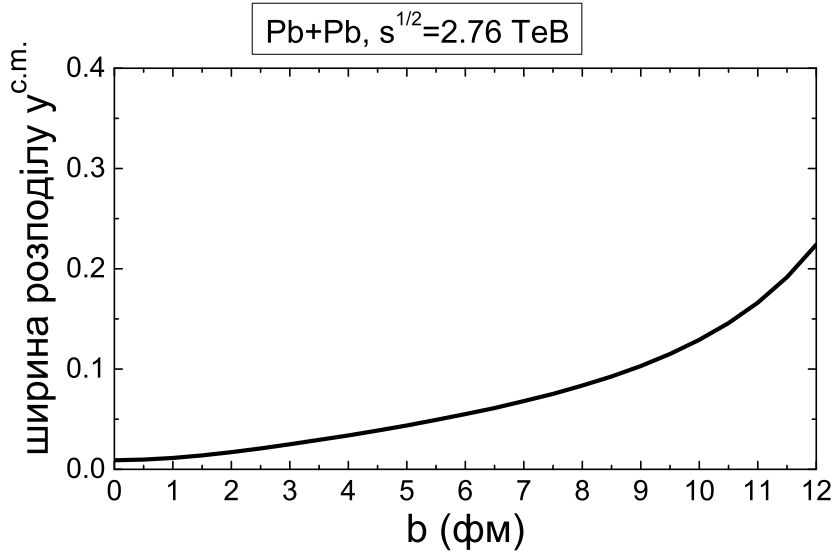


Рис. 3.13: Залежність середньо-квадратичного відхилення розподілу рапідності учасників від прицільного параметру. Розрахунки проведено для Pb+Pb зіткнень при енергії  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV.

імовірність  $p$  того, що нуклон буде спектатором. Ця імовірність, у свою чергу, залежить від енергії зіткнення лише через відповідну залежність перерізу нуклон-нуклонних реакцій  $\sigma_{NN}$ , див. (3.58). Як відомо,  $\sigma_{NN}$  мало змінюється у досить широкому діапазоні енергій зіткнення (енергії SPS та RHIC) і, за таких умов, можна вважати, що розподіл рапідності с.ц.м. учасників не залежить від енергії зіткнення ядер.

Ще один корисний граничний випадок – це розподіл у центральному діапазоні рапідностей, тобто навколо значення  $y = 0$ . Слід очікувати, що флуктуації рапідності учасників у зіткненнях ядер не надто великі, і тоді, для малих значень  $y^{c.m.}$ , можна апроксимувати гіперболічні функції, що входять у вираз (3.69) як  $\cosh y \approx 1$  та  $\tanh y \approx y$ . Окрім цього, оскільки ми маємо справу із релятивістськими енергіями зіткнення, то значення  $v_i$  має бути близьким до 1, що дозволяє записати  $(\tanh y)^2 + v_i^2 \approx v_i^2$ . Із врахуванням цих наближень отримуємо

$$f_P(y) = \sqrt{\frac{A(1-p)}{\pi p v_i^2}} \exp \left[ -\frac{A(1-p)}{p v_i^2} y^2 \right]. \quad (3.71)$$

Цей вираз співпадає із розподілом Гауса навколо середнього значення  $y = 0$  із

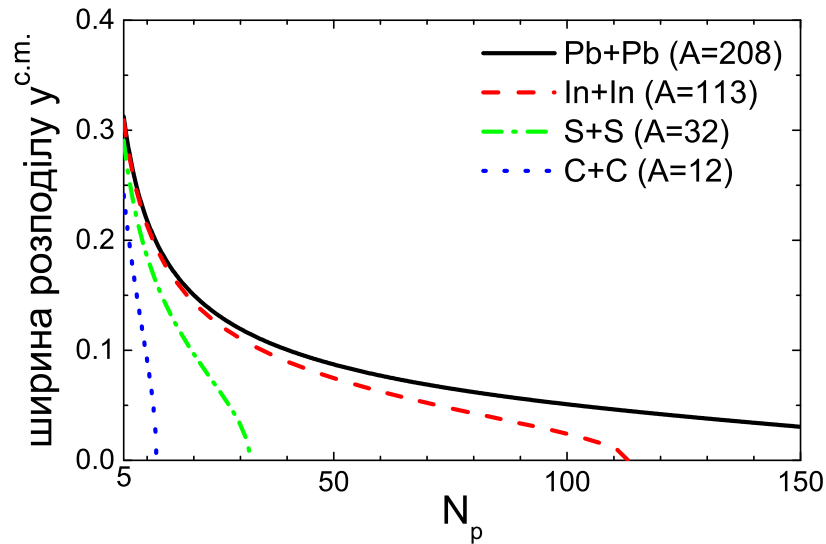


Рис. 3.14: Залежність середньоквадратичного відхилення  $\sqrt{\delta y^2}$  розподілу рапідності учасників, означеного у (3.73), від середньої кількості учасників  $N_p$ . Розрахунки проведено для різних ядер, що зіштовхуються, а саме Pb+Pb, In+In, S+S, та C+C.

дисперсією

$$\delta y^2 = \frac{p v_i^2}{2A(1-p)}. \quad (3.72)$$

Із виразу для дисперсії можна зробити наступний висновок: флуктуації рапідності зростають із збільшенням імовірності  $p$  того, що нуклон буде спектатором, тобто вони зростають із збільшенням прицільного параметру. У граничному випадку  $p = 0$  у системі немає спектаторів, і відповідно с.ц.м. двох ядер та с.ц.м. учасників мають співпадати. Із виразу (3.71) видно, що ця границя коректно описується нашою моделлю.

Залежність середньоквадратичного відхилення  $\sqrt{\delta y^2}$  цього розподілу Гауса від прицільного параметру зіткнення у випадку Pb+Pb зіткнень при енергії ЛНС  $\sqrt{s} = 2.76$  TeV наведено на Рис. 3.13. Видно, що середньоквадратичне відхилення (яке характеризує ширину розподілу) завжди є значно меншим у порівнянні із 1 – це свідчить про те, що гаусове наближення для малих значень  $y$  є виправданим. Відповідно, можна очікувати, що густина розподілу рапідності у вигляді розподілу Гауса (3.71) повинна працювати добре при практично будь-яких енергіях зіткнення та прицільних параметрах.

Вираз (3.72) для  $\sqrt{\delta y^2}$  можна переписати через масове число  $A$  та середню кількість учасників  $N_p = A(1 - p)$ . Тоді він має наступний вигляд

$$\delta y^2 = \frac{v_i^2}{2} \left( \frac{1}{N_p} - \frac{1}{A} \right). \quad (3.73)$$

Цікаво дослідити залежність флуктуацій рапідності від середньої кількості учасників  $N_p$  для різних пар ядер  $A + A$ , що зіштовхуються. Цю залежність наведено на Рис. 3.14 для Pb+Pb, In+In, S+S та C+C зіткнень. Тут ми вважаємо, що  $v_i = 1$ , оскільки ми розглядаємо зіткнення ультрарелятивістських ядер. Можна відмітити, що для фіксованого значення середньої кількості учасників  $N_p$ , флуктуації рапідності є більш сильними у зіткненнях більш важких ядер. Таким чином, якщо розглядати зіткнення ядер із однаковою кількістю учасників (назвемо такі зіткнення “еквівалентними”), то флуктуації будуть більшими у більш нецентральних зіткненнях більш важких ядер. Схожий результат стосовно посилення флуктуацій в залежності від атомного числа ядра було отримано в роботі [140].

### 3.6 Результати розрахунків для флуктуацій рапідності системи центру мас

Проведемо розрахунки розподілу рапідності с.ц.м учасників для зіткнень ядер при різних умовах. Залежність імовірності  $p$  того, що нуклон буде спектатором від прицільного параметру було досліджено у попередньому підрозділі. Цю залежність у випадку Pb+Pb зіткнень при енергії  $\sqrt{s} = 2.76$  TeV наведено на Рис. 3.12а. Видно, що ця імовірність сильно залежить від центральності зіткнення ядер: вона є малою, але ненульовою у центральних зіткненнях, вона рівна приблизно 0.5 для напівцентральних зіткнень, і вона наближається до одиниці для периферійних зіткнень.

Далі розглянемо розподіл рапідності при трьох різних центральностях, але для однієї і тієї ж енергії зіткнення. Будемо використовувати вираз (3.69) для розрахунків. Результати розрахунків для Pb+Pb зіткнень при енергії  $\sqrt{s} = 2.76$  TeV наведено на Рис. 3.15 для трьох різних центральностей: центральні зіткнення ( $b = 0$  фм), напівцентральні ( $b = 6$  фм) та периферійні ( $b = 9.5$  фм).

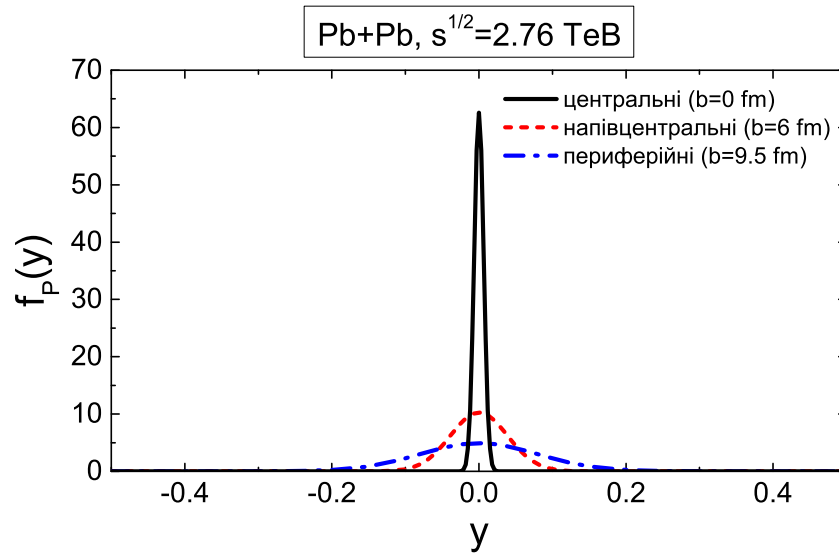


Рис. 3.15: Густина розподілу рапідності системи центру мас учасників для Pb+Pb зіткнень при енергії  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV для трьох різних центральностей.

Видно, що розподіл рапідності  $f_P(y)$  сильно залежить від центральності зіткнення. При малих значеннях прицільного параметру флуктуації  $y^{c.m.}$  виглядають незначними. Якщо ж збільшити прицільний параметр до значення 9.5 фм (периферійні зіткнення), то ширина розподілу  $f_P(y)$  суттєво збільшується у порівнянні із центральними зіткненнями. Таким чином, флуктуації рапідності с.ц.м. учасників необхідно враховувати в першу чергу в периферійних зіткненнях, наприклад при розрахунку розподілів по рапідності різних величин [134]. Також було перевірено, що для всіх трьох кривих на Рис. 3.15 розподіл рапідності практично співпадає із розподілом Гауса, який записано у виразі (3.71).

Представляє інтерес дослідити вплив енергії зіткнення ядер на флуктуації рапідності с.ц.м. учасників. Для цього розглянемо ці флуктуації при трьох різних енергіях  $\sqrt{s_{NN}} = 6.41$  GeV ( $E_{kin} = 20$  GeV),  $\sqrt{s_{NN}} = 17.32$  GeV ( $E_{kin} = 158$  GeV) та  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV. Перші дві енергії відповідають експериментам на прискорювачі CERN-SPS, у той час як третя енергія відповідає CERN-LHC. Використаємо значення перерізу  $\sigma_{NN} = 33$  мб для обох енергій SPS і  $\sigma_{NN} = 70$  мб для енергії LHC. Результати розрахунків для різних енергій зіткнення у випадку периферійних зіткнень ( $b = 9.5$  фм) представлено на Рис. 3.16.

Із проведених розрахунків випливає, що флуктуації досить слабо залежать

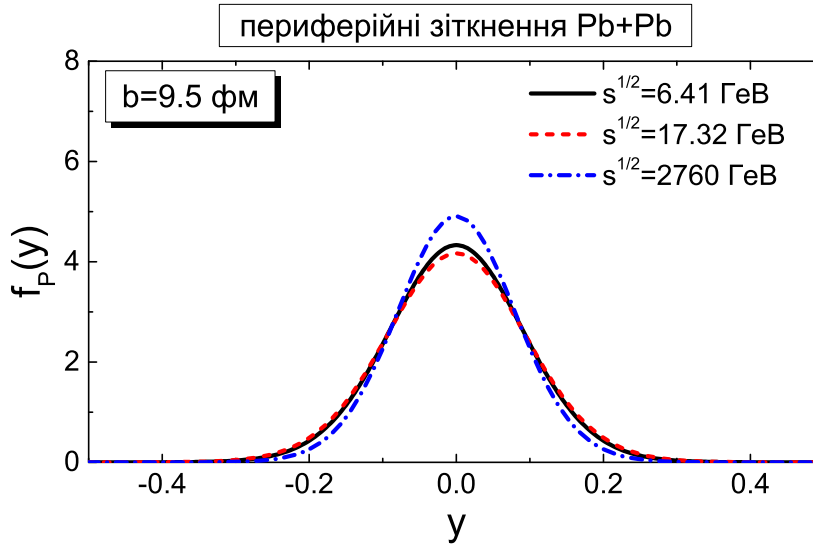


Рис. 3.16: Густина розподілу рапідності с.ц.м. учасників у периферійних Pb+Pb зіткненнях при енергіях  $\sqrt{s_{NN}} = 6.41$  GeV ( $E_{\text{kin}} = 20$  GeV),  $\sqrt{s_{NN}} = 17.32$  GeV ( $E_{\text{kin}} = 158$  GeV) та  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV.

від енергії зіткнення ядер, особливо якщо порівняти це із тим, як сильно вони залежать від прицільного параметру. Це можна пояснити тим, що для високих енергій зіткнення розподіл рапідності добре описується виразом (3.70) для ультра-релятивістської границі, і уся різниця між енергіями LHC та SPS є наслідком того, що переріз нуклон-нуклонних реакцій було збільшено в два рази, що усе одно не призводить до сильних змін у флуктуаціях рапідності.

### 3.6.1 Оцінки із інших теоретичних моделей

Поздовжні флуктуації, які виникають внаслідок флуктуацій у початковому стані було проаналізовано у роботі [141] в рамках моделі PASCIAE, яка розглядає молекулярну динаміку партонів та адронів. У цій роботі було зроблено оцінку флуктуацій рапідності с.ц.м. учасників і було отримано  $\Delta y^{c.m.} = 0.1$ . При цьому було знехтувано усіма ефектами, пов'язаними із випроміненням частинок до встановлення локальної рівноваги, внаслідок яких флуктуації б зросли.

Однозначне визначення розділення між спектаторами та учасниками у реалістичному сценарії є нетривіальною задачею. Між спектаторами та учасниками завжди існує певний рівень взаємодії на стадії розділення, і деякі з нуклонів не

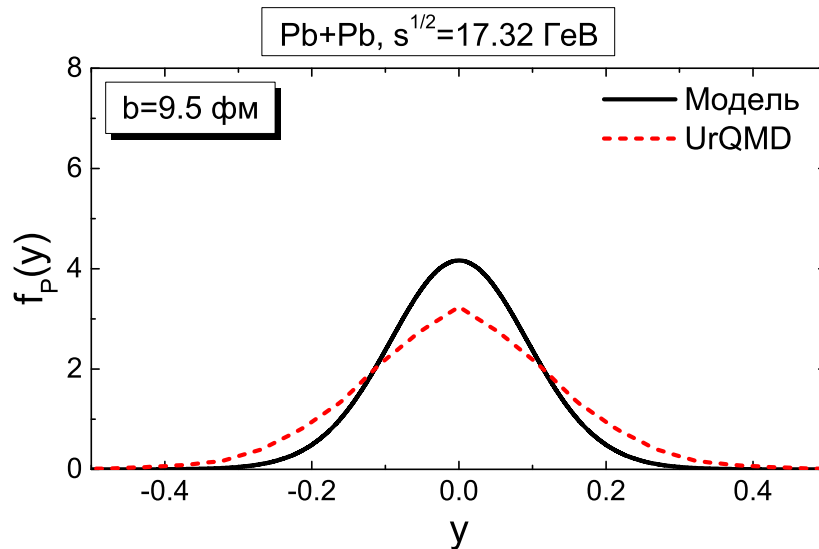


Рис. 3.17: Густина розподілу рапідності с.ц.м. учасників у периферійних Pb+Pb зіткненнях при енергії  $\sqrt{s_{NN}} = 17.32$  GeV ( $E_{kin} = 158$  GeV), яку розраховано у представленій моделі та в рамках UrQMD.

завжди можна однозначно класифікувати як спектатори чи учасники. Внаслідок цієї невизначеності рівень флуктуацій  $y^{c.m.}$  може змінитися.

Порівняємо тепер розрахунки нашої моделі із відповідними розрахунками в рамках транспортної моделі UrQMD. Рапідність с.ц.м. учасників може бути розрахована в UrQMD за допомогою формули (3.49). Використовуючи UrQMD, ми зможемо врахувати і початковий Фермі-рух, і початкові кореляції між нуклонами в ядрі, однак для того, щоб отримати гладкий розподіл необхідно провести симуляцію великої кількості подій. Порівняння розрахунків розподілу рапідності в рамках нашої моделі та моделі UrQMD для периферійних Pb+Pb зіткнень при енергії  $\sqrt{s_{NN}} = 17.32$  GeV ( $E_{kin} = 158$  GeV) при  $\sigma_{NN} = 33$  мб і  $b = 9.5$  фм наведено на Рис. 3.17.

Можна помітити, що результати розрахунків у двох моделях дещо відрізняються, ширина розподілу із UrQMD є більшою. Проте слід відмітити, що ці відмінності є малими у порівнянні із тими відмінностями, які виникають при зміні прицільного параметру (див. Рис. 3.15). Відмінності між моделями на Рис. 3.17 можна пояснити тим, що у нашій моделі ми нехтуємо початковими кореляціями між нуклонами в ядрі, а також кореляціями між кількостями спектаторів у налітаючих ядрах. Також можна поставити питання, чи можна

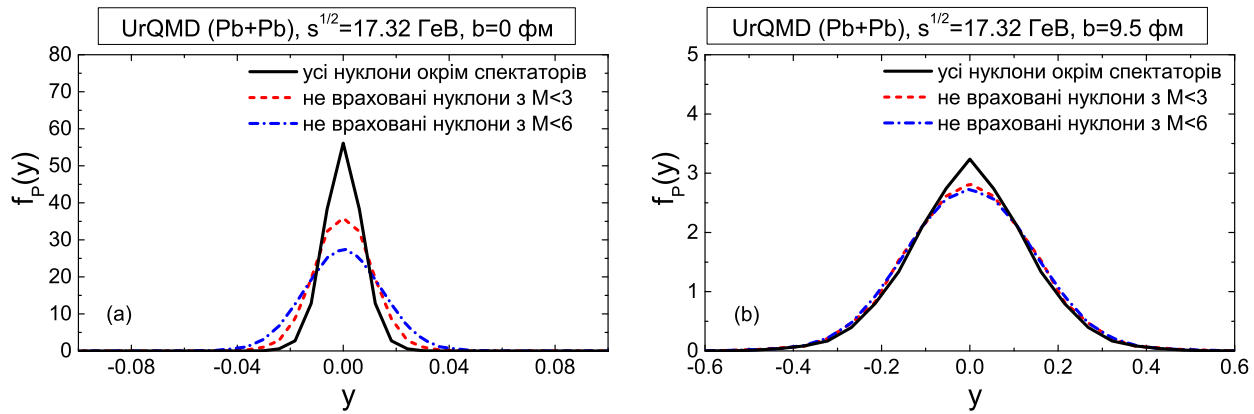


Рис. 3.18: Густина розподілу рапідності с.ц.м. для (а) центральних та (б) периферійних Pb+Pb зіткнень, яку розраховано в UrQMD для різних означень системи учасників, коли нуклони, які взяли участь у недостатньо великій кількості реакцій не вважаються учасниками.

однозначно ідентифікувати спектаторів із UrQMD із спектаторами в моделі Глаубера-Ситенка.

Розділення між спектаторами та учасниками в UrQMD було на певному рівні досліджено в роботі [142]. У цих дослідженнях важливу роль відіграє випромінювання нуклонів до встановлення локальної термодинамічної рівноваги. В роботі показано, що нуклони, які приймали участь у не більш як 4-6 реакціях є нетермалізованими. В результаті, такі нуклони не можна однозначно вважати учасниками, вони мають великий поздовжній та малий поперечний імпульси, і вони не реєструються калориметрами нульового кута, тобто експериментально їх не можна ідентифікувати як спектатори. Подібні судження також використовувались для пояснення посиленого виходу дивних частинок в рамках картини ядро-корона [143–145], де нуклони, які взяли участь лише в одному розсіянні, вважаються нуклонами з корони і вони не вважаються частиною фаєрболу. В центральних та напівцентральних зіткненнях ядер ці частинки можуть мати сильний вплив на флуктуації  $y^{c.m.}$ . Наприклад, якщо виключити із системи учасників нуклони, які приймали участь у менш ніж шести реакціях ( $M < 6$ ), то в центральних зіткненнях флуктуації рапідності с.ц.м. учасників збільшуються удвічі, див. Рис. 3.18а. У той же час, ці флуктуації мало впливають на розподіл рапідності у периферійних зіткненнях (Рис. 3.18б).



### 3.7 Висновки до 3-го розділу

Побудована на основі рівняння Больцмана аналітична модель (підрозділ 3.2) дозволяє описати часову динаміку розділення системи адронів на спектатори та учасники. Модель узгоджується із аналітичною та монтекарлівською моделями Глаубера-Ситенка у границі  $t \rightarrow \infty$  і в рамках цієї моделі можна отримати у явному вигляді залежний від енергії зіткнення часовий масштаб  $t_c$ , який є часом максимального перекриття густин налітаючих ядер і який характеризує початкову стадію. Результати проведених розрахунків вказують на те, що процес поділу системи на учасники та спектатори закінчується приблизно при  $t \simeq 1.5t_c$ .

Проведені розрахунки показали, що повний момент імпульсу сформованої системи учасників є ненульовим для нецентрального зіткнення ядер, і його залежність від прицільного параметру має максимум при  $b \approx 0.3b_{\max}$ . Повний момент імпульсу у розрахунку на один учасник може сягати суттєвого значення ( $\sim 10^4 \hbar$  для енергій LHC) і залишається ненульовим навіть у найбільш периферійних зіткненнях. Це, разом із результатами розрахунків для завихреності, вказує на те, що у початковому гідродинамічному стані системи для нецентрального зіткнення ядер присутнє обертання системи у площині реакцій. Це накладає важливу умову на профіль швидкостей у початковому стані, цей профіль повинен мати градієнт вздовж осі  $x$ . Наявність такого градієнту у початковому стані може посилити чутливість еволюції системи до коефіцієнту зсувної в'язкості. Аналіз часової залежності повного моменту імпульсу учасників вказує на те, що нуклони із найбільшим вкладом у момент імпульсу стають учасниками у більш пізні моменти часу.

Модель ґрунтується на неявному припущенні, що кількість нуклонів зберігається. При високих енергіях зіткнення в системі виникають численні нуклон-антинуклонні пари, тому можливою модифікацією запропонованого підходу є формулювання (або інтерпретація) моделі на мові баріонного заряду, що зберігається.

Для аналізу флуктуацій (по відношенню до кожної окремої події) с.ц.м. учасників внаслідок флуктуацій кількості спектаторів у налітаючих ядрах у підрозділі 3.5 сформульовано спрощену аналітичну модель. Основним параметром моделі є імовірність того, що нуклон буде спектатором, а для визначення ці-

її імовірності використовується модель Глаубера-Ситенка. Слід зазначити, що для визначення можна використовувати і інші моделі. Показано, що у більшості випадків, флуктуації рапідності с.ц.м. учасників описуються розподілом Гауса із шириною, що в основному визначається центральністю зіткнень. Ці флуктуації є тим сильнішими чим більш периферійними є зіткнення. У той же час, залежність флуктуацій від енергії зіткнення є досить малою. Слід відмітити, що якщо порівнювати зіткнення різних пар ядер, наприклад  $A_1 + A_1$  і  $A_2 + A_2$ , де  $A_1 > A_2$ , то, при умові, що середня кількість учасників є однаковою, флуктуації будуть меншими для зіткнень більш легких ядер, тобто для  $A_2 + A_2$ .

Отримані результати вказують на те, що, при аналізі та порівнянні із експериментом розподілів різних спостережуваних по рапідності, необхідно перевіряти як впливають на результат флуктуації рапідності с.ц.м. учасників, особливо для периферійних зіткнень. Слід відмітити, що аналіз флуктуацій учасників можна також проводити експериментально, наприклад за допомогою алгоритму, який було запропоновано у роботі [134]. Дослідження поздовжних флуктуацій системи центра мас учасників у зіткненнях ядер свинцю були нещодавно проведені експериментально колаборацією ALICE на Великому Адронному Колайдері, вимірюючи у кожній події енергію спектаторів за допомогою спеціальних калориметрів [146]. Отримані результати добре узгоджуються із розподілом Гауса для флуктуацій рапідності системи центра мас учасників.

## Розділ 4

# Підхід середнього поля у статистичних системах і його застосування у моделі адронно-резонансного газу

### 4.1 Вступ

Термодинамічні моделі опису властивостей сильно-взаємодіючої матерії є одними із найбільш цінних інструментів у сучасній фізиці високих енергій. Модель адронно-резонансного газу (АРГ) та її різні модифікації було успішно застосовано для визначення термодинамічних параметрів матерії, яка утворюється у релятивістських ядро-ядерних зіткненнях. Це було досягнуто шляхом опису багатого набору даних щодо множинностей різних адронів у різних експериментах, починаючи з низьких енергій прискорювача SIS до найвищих енергій LHC [31–33, 147–149, 34, 29]. У ще більш реалістичному описі необхідно враховувати взаємодії притягання та відштовхування між адронами. Аргументи, які було наведено Дашеном, Ма та Бернштейном [150], вказують на те, що включення у газ усіх відомих резонансів у якості вільних частинок дозволяє ефективно промодельовувати притягальні взаємодії між адронами, що ведуть до формування вузьких резонансів. Для того, щоб описати відштовхувальну частину взаємодії було запропоновано різні феноменологічні поправки типу виключеного об'єму [151–156]. Моделювання притягальної та відштовхувальної взаємодії можна також виконувати у рамках релятивістської теорії середнього поля, наприклад як це зроблено у моделі Валечки [157, 158] та у її узагальненнях. У рамках узагальненого формалізму середнього поля також досліджувались і ефекти виключеного об'єму [159–162], де процедуру типу ван дер Ваальса можна провести за допомогою залежного від температури середнього поля. У даному розділі цей підхід буде розвинуто за допомогою формулювання узагальненої

теорії середнього поля для одно- та багато-компонентних газів із базових термодинамічних міркувань. В результаті можна отримати зручну процедуру для формулювання відомих класичних моделей виключеного об'єму (наприклад ван дер Ваальс або Карнаген-Старлінг) для великого канонічного ансамблю із задоволенням умов термодинамічної узгодженості. Важливість виконання умов термодинамічної узгодженості у феноменологічних моделях середнього поля було нещодавно досліджено у роботі [163].

## 4.2 Термодинамічна теорія середнього поля для однокомпонентного газу

Розглянемо систему взаємодіючих частинок із загального термодинамічного погляду. Вихідною величиною, яка розглядається у даному підході є густина вільної енергії  $\phi(n, T)$ , яка залежить від густини частинок  $n$  та від температури  $T$ . Густина вільної енергії (ГВЕ) пов'язана з основними термодинамічними величини наступним чином

$$\phi(n, T) = \varepsilon(n, T) - T s(n, T), \quad (4.1)$$

$$\phi(n, T) = n \mu(n, T) - p(n, T), \quad (4.2)$$

де  $\varepsilon(n, T)$  є густиною енергії, а  $p(n, T)$  є тиском. Дві інші величини,  $\mu(n, T)$  (хімічний потенціал) та  $s(n, T)$  (густина ентропії) визначаються як частинні похідні по відношенню до незалежних змінних  $(n, T)$ :

$$\mu = \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_T, \quad s = - \left( \frac{\partial \phi}{\partial T} \right)_n. \quad (4.3)$$

Для системи взаємодіючих частинок ГВЕ можна записати як суму вільної та взаємодіючої частин

$$\phi(n, T) = \phi_0(n, T) + \phi_{\text{int}}(n, T), \quad (4.4)$$

де  $\phi_0$  є ГВЕ вільної системи (без взаємодії). Хімічний потенціал також можна розбити на “вільну” та “взаємодіючу” частини. У відповідності із (4.3) отримуємо

$$\mu = \mu_0 + \left( \frac{\partial \phi_{\text{int}}}{\partial n} \right)_T, \quad \text{де} \quad \mu_0 \equiv \left( \frac{\partial \phi_0}{\partial n} \right)_T. \quad (4.5)$$

Враховуючи вирази (4.2), (4.4) та (4.5) для системи взаємодіючих частинок можна виразити тиск у наступному вигляді

$$p = n \mu(n, T) - \phi(n, T) = p_0(n, T) + n \left( \frac{\partial \phi_{\text{int}}}{\partial n} \right)_T - \phi_{\text{int}}, \quad (4.6)$$

де

$$p_0(n, T) = n \mu_0(n, T) - \phi_0(n, T). \quad (4.7)$$

Незалежні змінні  $n$  та  $T$  відповідають взаємодіючій системі. Тиск системи вільних частинок  $p_0$  із останнього виразу (4.7) можна пов'язати із тиском ідеального газу  $\tilde{p}_0$ , який розраховується у рамках великого канонічного ансамблю для значень  $T$  та  $\mu_0$ , які записано у (4.7)

$$\tilde{p}_0(T, \mu_0) = \frac{g}{3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}} f(\mathbf{k}; T, \mu_0), \quad (4.8)$$

де  $g$  є кратністю виродження, а  $f(\mathbf{k}; T, \mu_0)$  є функцією розподілу для ідеального газу (Больцманівського, Фермі-Діраківського або Бозе-Ейнштейнівського).

Означимо наступні величини:

$$U(n, T) = \left[ \frac{\partial \phi_{\text{int}}(n, T)}{\partial n} \right]_T, \quad (4.9)$$

$$P^{\text{ex}}(n, T) = n \left[ \frac{\partial \phi_{\text{int}}(n, T)}{\partial n} \right]_T - \phi_{\text{int}}(n, T). \quad (4.10)$$

Одразу можна побачити, що ці величини пов'язані одна з одною співвідношенням

$$n \frac{\partial U(n, T)}{\partial n} = \frac{\partial P^{\text{ex}}(n, T)}{\partial n}. \quad (4.11)$$

Використаємо ці дві величини для того, щоб визначити тиск. Підставимо вираз для  $P^{\text{ex}}(n, T)$  із (4.10) у (4.6) і отримаємо

$$p = p_0(n, T) + P^{\text{ex}}(n, T). \quad (4.12)$$

Видно, що якщо розглядати  $p_0(n, T)$  як тиск ідеального газу, то величина  $P^{\text{ex}}(n, T)$  є надлишковим тиском.

Для розрахунку тиску ідеального газу тоді можна використовувати формулу (4.8). Якщо розглядати систему у канонічному ансамблі, то незалежними величинами мають бути  $n$  та  $T$ , у великому канонічному ансамблі такими змінними є

$\mu$  та  $T$ . Таким чином, у рівнянні (4.8) хімічний потенціал  $\mu_0$  має бути виражений через ці незалежні змінні. Це можна зробити, якщо вставити означення (4.9) у вираз (4.5) для хімічного потенціалу  $\mu_0$  і отримати

$$\mu_0 = \mu - U(n, T). \quad (4.13)$$

У великому канонічному ансамблі густину частинок  $n$  тоді треба розглядати як функцію  $n(\mu, T)$  і, відповідно, середнє поле  $U$  тоді є функцією  $U[n(\mu, T), T]$ . Із означення (4.9) випливає, що величина  $U(n, T)$  відображає енергію взаємодії у розрахунку на одну частинку. У підсумку отримуємо наступний вираз для тиску системи взаємодіючих частинок у великому канонічному ансамблі

$$p(T, \mu) = \frac{g}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}} f(\mathbf{k}; T, \mu, n) + P^{\text{ex}}(n, T), \quad (4.14)$$

де вважається, що  $n = n(T, \mu)$  і

$$f(\mathbf{k}; T, \mu) = \left\{ \exp \left[ \frac{\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} + U(n, T) - \mu}{T} \right] + a \right\}^{-1} \quad (4.15)$$

де  $a = +1$  для ферміонів,  $a = -1$  для бозонів і  $a = 0$  для наближення Больцмана.

Перехід до нерелятивістської границі, тобто  $|\mathbf{k}| \ll m$ , є тривіальним. Справді, треба лише виконати зміну у законі дисперсії

$$\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} \rightarrow m + \frac{\mathbf{k}^2}{2m}, \quad (4.16)$$

і врахувати, що “нерелятивістський” хімічний потенціал  $\tilde{\mu}$  пов’язаний із “релятивістським”  $\mu$  як  $\tilde{\mu} = \mu - m$ .

Перевіримо стандартне для великого канонічного ансамблю співвідношення

$$N(T, \mu, V) = - \left[ \frac{\partial \Omega(T, \mu, V)}{\partial \mu} \right]_{T, V}. \quad (4.17)$$

Враховуючи, що у однорідній системі  $\Omega(T, \mu, V) = -p(T, \mu) V$ , маємо

$$n(T, \mu) = \frac{\partial p(T, \mu)}{\partial \mu}. \quad (4.18)$$

Для розрахунків використаємо альтернативний запис для тиску, який є еквівалентним (4.14):

$$p(T, \mu) = \frac{gT}{a} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln \left\{ 1 + a \exp \left[ \frac{-\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} - U(n, T) + \mu}{T} \right] \right\} + P^{\text{ex}}(n, T). \quad (4.19)$$

Таким чином, для похідної у правій частині (4.18) маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(T, \mu)}{\partial \mu} &= g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(\mathbf{k}; T, \mu) \left[ 1 - \frac{\partial U(n, T)}{\partial n} \frac{\partial n(T, \mu)}{\partial \mu} \right] \\ &\quad + \frac{\partial P^{\text{ex}}(n, T)}{\partial n} \frac{\partial n(T, \mu)}{\partial \mu} \\ &= n - \left[ n \frac{\partial U(n, T)}{\partial n} - \frac{\partial P^{\text{ex}}(n, T)}{\partial n} \right] \frac{\partial n(T, \mu)}{\partial \mu}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

де введено

$$n = g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(\mathbf{k}; T, \mu). \quad (4.21)$$

Вираз у квадратних дужках у правій частині на другій стрічці у (4.20) рівний нулю внаслідок (4.11). Таким чином отримуємо стандартне відношення:  $\partial p(T, \mu)/\partial \mu = n$  у великому канонічному ансамблі і це підтверджує правильність (4.18). Це також підтверджує, що функція  $f(\mathbf{k}; T, \mu)$  у (4.15) справді є функцією розподілу, яка містить у собі *середнє поле*  $U(n, T)$ , яке враховує наявність взаємодії у системі.

Для визначення густини енергії  $\varepsilon$  використаємо співвідношення Ейлера  $\varepsilon + p = Ts + \mu n$  та  $s = \partial p/\partial T$  і отримаємо

$$\begin{aligned} \varepsilon(T, \mu) &= g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} f(\mathbf{k}; T, \mu) + nU(n, T) - P^{\text{ex}}(n, T) + \\ &\quad + T \left\{ \left[ \frac{\partial P^{\text{ex}}(n, T)}{\partial T} \right]_n - n \left[ \frac{\partial U(n, T)}{\partial T} \right]_n \right\}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Самоузгодженість нашого термодинамічного опису впливає із виразу (4.11), що пов'язує середнє поле  $U(n, T)$  та надлишковий тиск  $P^{\text{ex}}(n, T)$ . Таким чином, співвідношення (4.11) можна також інтерпретувати як *умову термодинамічної самоузгодженості* у випадку, коли величини  $U(n, T)$  та  $P^{\text{ex}}(n, T)$

задаються із феноменологічних міркувань. Справді, якщо взяти (4.11) за означення, то частинна похідна від термодинамічного потенціалу  $\Omega(T, \mu, V)$  дозволяє отримати коректний вираз для густини частинок:  $-\left[\partial\Omega/\partial\mu\right]_{T,V} = nV$ .

Треба відмітити, що, для заданого середнього поля  $U(n, T)$ , вираз (4.21) насправді є рівнянням для густини частинок  $n$ . Це рівняння необхідно розв'язувати самоузгодженим чином для будь-якої точки у площині  $(T, \mu)$ . В результаті можна отримати явну залежність  $n = n(T, \mu)$ , яка у загальному випадку буде відрізнятися для відповідної залежності у випадку ідеального газу  $n_0(T, \mu_0)$ .

Подібний підхід широко застосовується у релятивістських теоріях середнього поля [157, 158, 164, 165], коли частинки взаємодіють із скалярним  $\phi$  (притягання) та векторним  $V_\mu$  (відштовхування) полями. Внаслідок симетрії відносно обертань лише “часова” компонента векторного поля  $V_0$  є відмінною від нуля. У наших позначеннях це відповідає середньому полю  $U(n, T)$ .

Рівняння (4.21), (4.14) та (4.22) визначають самоузгоджену процедуру для врахування взаємодії між частинками у феноменологічний спосіб.

### 4.3 Одночастинкове представлення взаємодійного класичного газу

Для ілюстрації наведених вище міркувань розглянемо класичний газ із відштовхуванням частинок.

$$\Xi(T, \mu, V) = \sum_{N=0}^{\infty} V^N g^N \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3k_N}{(2\pi)^3} \exp \left\{ -\frac{1}{T} \left[ \sum_{j=1}^N e_0(k_j) - \mu N \right] \right\} \\ \times \frac{1}{V^N N!} \int d^3r_1 \cdots d^3r_N \exp \left( -\frac{U_N}{T} \right), \quad (4.23)$$

де  $e_0(k) = \mathbf{k}^2/2m$  у нерелятивістському випадку і  $e_0(k) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$  у релятивістському. Потенціальна енергія системи  $N$  частинок записується як

$$U_N = \sum_{i<j}^N \Phi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|), \quad (4.24)$$

де  $\Phi(|\mathbf{r}|)$  є потенціалом двочастинкової взаємодії.



Використаємо дві теореми Маєра [166, 167]. З цих теорем випливає, що велику статистичну суму  $\Xi(T, n)$  больцманіського газу із двочастинковою взаємодією можна представити як

$$\ln \Xi = V \left[ n + \sum_{i=2}^{\infty} B_i(T) n^i \right], \quad (4.25)$$

$$\ln z_0 = \ln n + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{i}{i-1} B_i(T) n^{i-1}, \quad (4.26)$$

де  $z_0$  є одночастинковою статистичною сумою для ідеального газу,

$$z_0(T, \mu) = g \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \exp \left( -\frac{e_0(k) - \mu}{T} \right). \quad (4.27)$$

Віріальні коефіцієнти  $B_i(T)$  залежать від температури  $T$ . Наприклад, другий віріальний коефіцієнт для частинок, які взаємодіють за потенціалом  $\Phi(r)$  записується як

$$B_2(T) = \frac{1}{2} \int d^3 r \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{\Phi(r)}{T} \right] \right\}. \quad (4.28)$$

Розклади, які записано у (4.25) та (4.26), можна внести в означення наступних величин

$$\Delta P_{\text{cl}}(n, T) = T \sum_{i=2}^{\infty} B_i(T) n^i, \quad (4.29)$$

$$U_{\text{cl}}(n, T) = T \sum_{i=2}^{\infty} \frac{i}{i-1} B_i(T) n^{i-1}, \quad (4.30)$$

для яких справджується співвідношення аналогічне (4.11),

$$n \frac{\partial U_{\text{cl}}(n, T)}{\partial n} = \frac{\partial \Delta P_{\text{cl}}(n, T)}{\partial n}. \quad (4.31)$$

Рівняння (4.31) справджується і окремо для будь-якої пари відповідних доданків у розкладах (4.29) та (4.30). Таким чином, це співвідношення справджується якщо обірвати ряд на деякому порядку. Із використанням цих записів, рівняння (4.25) та (4.26) можна переписати як

$$p(T, \mu) = (T/V) \ln \Xi = Tn(T, \mu) + \Delta P_{\text{cl}}(n, T), \quad (4.32)$$

$$n(T, \mu) = g \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \exp \left[ -\frac{e_0(k) - \mu + U_{\text{cl}}(n, T)}{T} \right]. \quad (4.33)$$

Наведені вище вирази для класичного газу були отримані без використання будь-яких наближень і можуть бути інтерпретовані як одночастинкове представлення статистичної суми (4.23). Таким чином, “середнє” поле  $U(n, T)$  та надлишковий тиск  $\Delta P(n, T)$  є строго визначеними величинами у випадку класичної статистики. З іншої сторони, із виразів (4.32) та (4.33) випливає, що термодинамічні величини  $U(n, T)$  та  $\Delta P(n, T)$  мають розклади (4.29) та (4.30) у вигляді віріального ряду.

Вираз для густини енергії  $\varepsilon$ , можна отримати із використанням співвідношень Ейлера:  $\varepsilon + p = Ts + \mu n$ , та  $s = \partial p / \partial T$ . Отримуємо

$$\begin{aligned} \varepsilon(T, \mu) = & g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e_0(k) f(\mathbf{k}; T, \mu, n) + n U_{cl}(n, T) - \Delta P_{cl}(n, T) + \\ & + T \left\{ \left[ \frac{\partial \Delta P_{cl}(n, T)}{\partial T} \right]_n - n \left[ \frac{\partial U_{cl}(n, T)}{\partial T} \right]_n \right\}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

### 4.3.1 Відповідність гамільтоніану середнього поля

Дослідимо, яким чином термодинамічне середнє поле може бути пов’язане із мікроскопічним середнім полем. Гамільтоніан класичного взаємодіючого бозманівського газу, який описується самоузгодженим середнім полем  $U(n, T)$ , може бути записаний як

$$H = \sum_i [e_0(k_i) + U_{cl}(n, T)] - V \Delta P_{cl}(n, T), \quad (4.35)$$

де член  $V \Delta P_{cl}(n, T)$  є необхідним для того, щоб енергія взаємодії не враховувалась двічі. Статистична сума у великому канонічному ансамблі може бути записана як

$$\begin{aligned} \Xi = & \sum_{N=0}^{\infty} e^{\mu N/T} \frac{V^N}{N!} \exp \left\{ -\frac{N U_{cl}(n, T) - V \Delta P_{cl}(n, T)}{T} \right\} \\ & \times \prod_{i=1}^N \frac{g}{2\pi^2} \int dk_i k_i^2 \exp \left( -\frac{e_0(k_i)}{T} \right) \\ = & \exp \left\{ e^{-U_{cl}/T} V z_0(\mu, T) + V \Delta P_{cl}^{ex}/T \right\}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Відповідно, можна записати

$$\ln \Xi = V \left[ e^{-U_{cl}/T} z_0(\mu, T) + \Delta P_{cl}/T \right]. \quad (4.37)$$

Враховуючи вираз (4.33) для густини частинок можна побачити, що наведений вище вираз співпадає із віріальним розкладом великої статистичної суми (4.25) у тому випадку, якщо  $\Delta P_{cl}(n, T)$  та  $U(n, T)$  означено за допомогою рівнянь (4.29) та (4.30), відповідно. У той же час, якщо при розгляді статистичної системи ми стартуємо з ефективного гамільтоніану, то необхідно враховувати умови термодинамічної самоузгодженості, тобто той факт, що термодинамічні середні значення повинні співпадати із середніми по статистичному ансамблю. Термодинамічні середні значення густин кількості та енергії частинок визначаються через (4.33) та (4.34), відповідно. Статистичне середнє для густини частинок може буде записане як

$$\begin{aligned} n^{\text{stat}} &= \frac{\langle N \rangle}{V} \\ &= \frac{1}{V} \frac{\sum_{N=0}^{\infty} e^{\mu N/T} N \frac{V^N}{N!} \exp \left\{ -\frac{NU(n, T) - V\Delta P_{cl}(n, T)}{T} \right\} \prod_{i=1}^N \frac{g}{2\pi^2} \int dk_i k_i^2 e^{-e_0(k_i)/T}}{\sum_{N=0}^{\infty} e^{\mu N/T} \frac{V^N}{N!} \exp \left\{ -\frac{NU(n, T) - V\Delta P_{cl}(n, T)}{T} \right\} \prod_{i=1}^N \frac{g}{2\pi^2} \int dk_i k_i^2 e^{-e_0(k_i)/T}} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Цю величину також можна обчислити напряму. Отримуємо вираз

$$n^{\text{stat}} = z_0(T, \mu) \exp \left\{ -\frac{U_{cl}[n(T, \mu), T]}{T} \right\}, \quad (4.39)$$

який співпадає із (4.33). Для густини енергії маємо

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\text{stat}} &= \frac{\langle E \rangle}{V} \\ &= \frac{1}{V} \frac{\sum_{N=0}^{\infty} e^{\mu N/T} \frac{V^N}{N!} \exp \left\{ -\frac{NU_{cl}(n, T) - V\Delta P_{cl}(n, T)}{T} \right\} \prod_{i=1}^N \frac{g}{2\pi^2} \int dk_i k_i^2 e^{-e_0(k_i)/T} H}{\sum_{N=0}^{\infty} e^{\mu N/T} \frac{V^N}{N!} \exp \left\{ -\frac{NU_{cl}(n, T) - V\Delta P_{cl}(n, T)}{T} \right\} \prod_{i=1}^N \frac{g}{2\pi^2} \int dk_i k_i^2 e^{-e_0(k_i)/T}} \end{aligned} \quad (4.40)$$

В результаті отримуємо

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\text{stat}} &= \frac{g}{2\pi^2} \int dk k^2 e_0(k) \exp \left[ \frac{\mu - e_0(p) - U_{cl}(n, T)}{T} \right] \\ &\quad + n U_{cl}(n, T) - \Delta P_{cl}(n, T). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Якщо порівняти цей вираз із відповідним термодинамічним середнім (4.34), то можна побачити, що повинно виконуватись співвідношення

$$\frac{\partial \Delta P_{cl}(n, T)}{\partial T} = n \frac{\partial U_{cl}(n, T)}{\partial T}. \quad (4.42)$$

Разом із виразом (4.31) це означає, що мікроскопічне середнє поле  $U_{cl}(n, T)$  та відповідний надлишковий тиск  $P^{ex}(n, T)$  можуть бути лише функціями густини частинок і не можуть бути функціями температури. Тільки у цьому випадку систему можна описати самоузгоджено за допомогою Гамільтоніану (4.35). У більш загальному випадку, у тому числі і квантового Фермі або Бозе газу, функції  $U_{cl}$  та  $\Delta P_{cl}$  із (4.35) мають задовольняти співвідношення (4.31) та (4.42) для того, щоб термодинамічний опис був самоузгодженим (див. [168]). Тим не менш, наш підхід, який було описано у попередньому підрозділі і у якому ці величини можуть явним чином залежати від температури, є термодинамічно самоузгодженим оскільки ми не вважаємо, що Гамільтоніан має саме таку структуру, яка задається виразом (4.35). Замість цього ми стартуємо одразу із виразу для термодинамічного потенціалу. Єдиним припущенням є те, що віріальний розклад великої статистичної суми є збіжним. Отримані у цьому підрозділі результати вказують на те, що у випадку коли надлишковий тиск явним чином залежить від температури (як у випадку газу ван дер Ваальса), то систему неможливо описати самоузгодженим чином за допомогою Гамільтоніану (4.35) і, відповідно, величину  $U_{cl}(n, T)$  (4.30) не можна вважати мікроскопічним середнім полем. Далі побачимо, що саме така ситуація виникає для класу моделей виключеного об'єму.

## 4.4 Модель середнього поля для мультикомпонентного газу

Феноменологічну модель середнього поля можна узагальнити на випадок суміші  $f$  різних типів частинок. Позначимо  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_f)$  як набір густин частинок та  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_f)$  як набір хімічних потенціалів, кожен із яких відповідає окремому типу частинок. У випадку суміші у нас буде  $f$  різних середніх полів  $U_i(\mathbf{n}, T)$ , кожен із яких відповідає окремому сорту частинок, а також загальний для всієї системи надлишковий тиск  $P^{ex}(\mathbf{n}, T)$ . Цілком природнім є те, що  $U_i(\mathbf{n}, T)$  та  $P^{ex}(\mathbf{n}, T)$  можуть залежати від усіх різних густин різних сортів

частинок в системі. ГВЕ у цьому випадку записується як

$$\phi(\mathbf{n}, T) = \sum_{i=1}^f n_i \mu_i(\mathbf{n}, T) - p(\mathbf{n}, T). \quad (4.43)$$

Цю густину можна розбити на суму вільного та взаємодіючого вкладів

$$\phi(\mathbf{n}, T) = \sum_{i=1}^f \phi_0^i(n_i, T) + \phi_{\text{int}}(\mathbf{n}, T). \quad (4.44)$$

Аналогічно, як це було зроблено у підрозділі 4.2, можна виразити повний тиск  $p(T, \mu)$  та густини  $n_i(T, \mu)$  у вигляді

$$p(T, \mu) = \sum_{i=1}^f \frac{g_i}{3} a \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{\sqrt{m_i^2 + \mathbf{k}^2}} f_i(\mathbf{k}; T, \mu) + P^{\text{ex}}(\mathbf{n}, T), \quad (4.45)$$

$$n_i(T, \mu) = g_i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} f_i(\mathbf{k}; T, \mu) \quad (4.46)$$

де  $f_i(\mathbf{k}; T, \mu)$  є функцією розподілу для частинок сорту  $i$

$$f_i(\mathbf{k}; T, \mu) = \left\{ \exp \left[ \frac{\sqrt{m_i^2 + \mathbf{k}^2} + U_i[\mathbf{n}(T, \mu), T] - \mu_i}{T} \right] + a_i \right\}^{-1}. \quad (4.47)$$

Надлишковий тиск  $P^{\text{ex}}(\mathbf{n}, T)$  та середні поля  $U_i(\mathbf{n}, T)$  означаються як

$$P^{\text{ex}}(\mathbf{n}, T) = \sum_{i=1}^f n_i \left[ \frac{\partial \phi_{\text{int}}(\mathbf{n}, T)}{\partial n_i} \right]_{T, n_i \neq j} - \phi_{\text{int}}(\mathbf{n}, T), \quad (4.48)$$

$$U_i(\mathbf{n}, T) = \left[ \frac{\partial \phi_{\text{int}}(\mathbf{n}, T)}{\partial n_i} \right]_{T, n_i \neq j} \quad (4.49)$$

і пов'язані один з одним набором рівнянь, які визначають умови термодинамічної самоузгодженості

$$\sum_{j=1}^f n_j \frac{\partial U_j}{\partial n_i} = \frac{\partial P^{\text{ex}}}{\partial n_i}, \quad i = 1 \dots f. \quad (4.50)$$

Із співвідношення  $\partial^2 P^{\text{ex}} / \partial n_i \partial n_k = \partial^2 P^{\text{ex}} / \partial n_k \partial n_i$  отримуємо, що середні поля  $U_i$  не є незалежними, а пов'язані одне з іншим як

$$\frac{\partial U_i}{\partial n_j} = \frac{\partial U_j}{\partial n_i}, \quad i, j = 1 \dots f. \quad (4.51)$$

Це співвідношення є корисним, якщо середні поля задаються із феноменологічних міркувань.

У виразі (4.46) записано систему  $f$  рівнянь (як правило трансцендентних) для густин  $n_i$ . Цю систему можна розв'язувати чисельно, наприклад за допомогою методу послідовних наближень або методу Бройдена. Густина енергії можна визначити із термодинамічного співвідношення

$$\varepsilon(T, \boldsymbol{\mu}) = T \partial p / \partial T + \sum_{i=1}^f \mu_i \partial p / \partial \mu_i - p. \quad (4.52)$$

В результаті маємо

$$\begin{aligned} \varepsilon(T, \boldsymbol{\mu}) = & \sum_{i=1}^f g_i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sqrt{m_i^2 + \mathbf{k}^2} f_i(\mathbf{k}; T, \boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^f n_i U_i(\mathbf{n}, T) - P^{\text{ex}}(\mathbf{n}, T) \\ & + T \left[ \frac{\partial P^{\text{ex}}(\mathbf{n}, T)}{\partial T} - \sum_{i=1}^f n_i \frac{\partial U_i(\mathbf{n}, T)}{\partial T} \right]. \end{aligned} \quad (4.53)$$

#### 4.4.1 Збереження зарядів

У релятивізмі число частинок у замкнутій системі, як правило, може змінюватися, наприклад внаслідок народження пар частинок та анти-частинок. Внаслідок цього, замість поняття закону збереження кількості частинок мають місце закони збереження зарядів. Такими зарядами, наприклад, можуть бути баріонний заряд, електричний заряд та дивність у сильно взаємодіючих системах. Відповідно, великий канонічний ансамбль для релятивістських систем, як правило, формулюється на мові хімічних потенціалів, які відповідають цим зарядам. Нехай ми маємо  $s$  незалежних зарядів у системі, а  $\tilde{\boldsymbol{\mu}} = (\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_s)$  є відповідними незалежними хімічними потенціалами.

Позначимо  $j$ -й заряд  $i$ -го сорту частинок як  $Q_i^j$ . Тоді хімічний потенціал  $\mu_i$  для  $i$ -го сорту частинок може бути записаний як

$$\mu_i(\tilde{\boldsymbol{\mu}}) = \sum_{j=1}^s Q_i^j \tilde{\mu}_j. \quad (4.54)$$

Густина  $\rho_j$   $j$ -го заряду може бути виражена через набір  $\{n_i\}$  густин сортів різних частинок як

$$\rho_j(T, \tilde{\boldsymbol{\mu}}) = \sum_{i=1}^f Q_i^j n_i[T, \boldsymbol{\mu}(\tilde{\boldsymbol{\mu}})]. \quad (4.55)$$

Так само, як і у попередньому підрозділі, у нас буде  $f$  різних середніх полів  $U_i(T, \tilde{\mu})$ , по одному на кожний сорт частинок в системі. Покажемо, що умови термодинамічної самоузгодженості  $\rho_j = \partial p(T, \tilde{\mu}) / \partial \tilde{\mu}_j$  задовольняються у випадку, коли тиск та густини частинок задаються, відповідно, виразами (4.45) та (4.46), де  $\mu$  залежить від  $\tilde{\mu}$  як (4.54). Справді, величину  $\partial p(T, \tilde{\mu}) / \partial \tilde{\mu}_j$  можна записати як

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(T, \tilde{\mu})}{\partial \tilde{\mu}_j} &= \sum_{i=1}^f g_i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f_i(\mathbf{k}; T, \tilde{\mu}) \left[ Q_i^j - \sum_{k=1}^f \frac{\partial U_i(\mathbf{n}, T)}{\partial n_k} \frac{\partial n_k(T, \tilde{\mu})}{\partial \tilde{\mu}_j} \right] \\ &\quad + \sum_{k=1}^f \frac{\partial P^{\text{ex}}(\mathbf{n}, T)}{\partial n_k} \frac{\partial n_k(T, \tilde{\mu})}{\partial \tilde{\mu}_j} \\ &= \sum_{i=1}^f Q_i^j n_i - \sum_{k=1}^f \left[ \sum_{i=1}^f n_i \frac{\partial U_i(\mathbf{n}, T)}{\partial n_k} - \frac{\partial P^{\text{ex}}(\mathbf{n}, T)}{\partial n_k} \right] \frac{\partial n_k(T, \mu)}{\partial \tilde{\mu}_j}, \quad (4.56) \end{aligned}$$

де ми використовуємо той факт, що  $\partial \mu_i / \partial \tilde{\mu}_j = Q_i^j$ . Із врахуванням (4.50) маємо

$$\frac{\partial p(T, \tilde{\mu})}{\partial \tilde{\mu}_j} = \rho_j(T, \tilde{\mu}), \quad (4.57)$$

у відповідності із термодинамічними співвідношеннями. Таким чином, формулювання теорії для багаточастинкового газу, який заданий рівняннями (4.45)-(4.47), можна також використовувати і у випадку системи, де зберігаються заряди, а не окремі кількості частинок.

## 4.5 Процедура виключеного об'єму

Розглянемо у цьому підрозділі системи із відштовхувальною взаємодією на малих відстанях. Особливу увагу приділимо тому, як ефективно можна сформулювати різні моделі виключеного об'єму в рамках великого канонічного ансамблю використовуючи формалізм середнього поля.

### 4.5.1 Середні поля, які пропорційні температурі

Розглянемо спочатку однокомпонентний класичний газ. У класичних системах, де відштовхування моделюється потенціалом твердих сфер, усі віріальні коефіцієнти є незалежними від температури, див. (4.28). З виразів (4.30) та

(4.29) впливає, що у цьому випадку середнє поле та надлишковий тиск є пропорційними температурі, тобто

$$U(n, T) \propto T, \quad P^{\text{ex}}(n, T) \propto T, \quad (4.58)$$

Розглянемо тепер клас середніх полів, які пропорційні  $T$  більш загально. Із (4.22) впливає, що у цьому випадку густина енергії визначається лише першим доданком із інтегралом

$$\varepsilon(T, \mu) = g \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} f(\mathbf{k}; T, \mu). \quad (4.59)$$

У випадку газу Больцмана маємо для цього класу

$$n(T, \mu) = e^{-\tilde{U}(n)} n_0(T, \mu), \quad (4.60)$$

$$\varepsilon(T, \mu) = e^{-\tilde{U}(n)} \varepsilon_0(T, \mu), \quad (4.61)$$

де  $\tilde{U}(n) = U(T, n)/T$  у відповідності із (4.58) і де введено позначення

$$n_0(T, \mu) = g \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} f_0(\mathbf{k}; T, \mu), \quad (4.62)$$

$$\varepsilon_0(T, \mu) = g \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} f_0(\mathbf{k}; T, \mu). \quad (4.63)$$

Тут

$$f_0(\mathbf{k}; T, \mu) = \exp \left[ \frac{-\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} + \mu}{T} \right] \quad (4.64)$$

є функцією розподілу ідеального газу при температурі  $T$  та хімічному потенціалу  $\mu$ .

Множник

$$e^{-\tilde{U}(n)} \equiv \vartheta(n), \quad (4.65)$$

у правій частині рівнянь (4.60) та (4.61) можна інтерпретувати як фактор-подавлення об'єму  $V$  системи. Справді, якщо ввести позначення

$$\tilde{V}(n) = \vartheta(n) V, \quad (4.66)$$

то рівняння (4.60) та (4.61) можна переписати у вигляді

$$N(T, \mu) = \tilde{V} n_0(T, \mu), \quad (4.67)$$

$$E(T, \mu) = \tilde{V} \varepsilon_0(T, \mu). \quad (4.68)$$



Очевидно, що у випадку відштовхувального середнього поля  $\tilde{U}(n) = U(T, n)/T$  маємо

$$0 < \vartheta(n) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{V} \leq V. \quad (4.69)$$

Це означає, що відштовхувальне середнє поле генерує *ефективний* власний об'єм  $\tilde{v}_0$  для кожної частинки в системі, і це ефективно приводить до зменшення повного об'єму  $V$  системи цих  $N$  частинок, тобто  $V \rightarrow V - N\tilde{v}_0 = \tilde{V}$ . Ефективний власний об'єм  $\tilde{v}_0(n)$  тоді можна визначити як

$$\tilde{v}_0 = \frac{1}{N} (V - \tilde{V}) = v [1 - \vartheta(n)], \quad (4.70)$$

де  $v = V/N$  є середнім об'ємом на одну частинку. Інтерпретація величини  $\tilde{v}_0$  у відповідності із (4.70) є досить очевидною. Справді, величина  $V - \tilde{V}$  являє собою повний *ефективний* власний об'єм системи  $N$  частинок в результаті відштовхувальної взаємодії між ними. Тоді *ефективний* об'єм однієї частинки взаємно-однозначно пов'язаний із середнім полем

$$\tilde{v}_0(n) = \frac{1}{n} \left\{ 1 - \exp \left[ -\tilde{U}(n) \right] \right\}, \quad (4.71)$$

де права частина рівняння залежить лише від густини частинок.

Таким чином ми довели наступну теорему: якщо середнє поле є відштовхувальним ( $U(n, T) > 0$ ) і пропорційним температурі, тобто  $U(n, T) \propto T$ , то, у випадку статистики Больцмана, наявність взаємодії в системі приводить лише до зменшення повного об'єму системи  $\tilde{V} \rightarrow \vartheta(n) V$ , де  $\vartheta(n) = \exp[-U(n, T)/T]$ . Повне число частинок та їх повна енергія тоді можуть бути розраховані із використанням виразів для ідеального газу у рамках великого канонічного ансамблю:  $N(T, \mu) = \tilde{V} n_0(T, \mu)$  та  $E(T, \mu) = \tilde{V} \varepsilon_0(T, \mu)$ .

У випадку квантової статистики, вважаючи спочатку, що середнє поле  $U(n, T)$  має той самий вигляд (4.58), маємо наступні вирази для густин кількості та енергії частинок

$$n(T, \mu) = \vartheta(n) \tilde{n}_0(T, \mu), \quad (4.72)$$

$$\varepsilon(T, \mu) = \vartheta(n) \tilde{\varepsilon}_0(T, \mu), \quad (4.73)$$

де  $\tilde{U}(n) = U(T, n)/T$  та

$$\tilde{n}_0(T, \mu) = g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{f}_0(\mathbf{k}; T, \mu), \quad (4.74)$$

$$\tilde{\varepsilon}_0(T, \mu) = g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} \tilde{f}_0(\mathbf{k}; T, \mu). \quad (4.75)$$

Тут  $\tilde{f}_0(\mathbf{k}; T, \mu)$  є функцією розподілу ідеального Фермі або Бозе газу

$$\tilde{f}_0(\mathbf{k}; T, \mu) = \left[ \exp \left( \frac{\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} - \mu}{T} \right) + a \vartheta(n) \right]^{-1}. \quad (4.76)$$

Виявляється що, окрім зменшення об'єму, тут ми маємо також і проміжну квантову статистику оскільки другий доданок у знаменнику змінюється у межах  $0 < \vartheta(n) \leq 1$ . Нагадаємо, що  $\vartheta(n) = e^{-\tilde{U}(n)}$ , та  $a = 1$  для ферміонів або  $a = -1$  для бозонів. Цікаво відмітити, що у випадку відштовхувального середнього поля, при зростанні густини частинок  $n$ , функція розподілу (4.76) стає подібною функції розподілу Больцмана. Таким чином можна зробити висновок, що у випадку квантової статистики наявність відштовхувального середнього поля, яке пропорційне  $T$ , приводить до зменшення повного об'єму системи ( $V \rightarrow \tilde{V}$ ), а також до послаблення ефектів, пов'язаних із квантовою статистикою. Усі ці ефекти залежать лише від густини частинок.

У контексті квантової статистики слід зазначити, що процедура виключеного об'єму сформульована строго і однозначно лише у випадку класичної статистики Больцмана. Класичні вирази (4.58) можуть бути незастосовними у випадку, коли ефекти квантової статистики є домінуючими, наприклад у випадку виродженого Фермі газу при низьких температурах. Вочевидь, у такому випадку формалізм необхідно буде модифікувати. У подальшому, в роботі розглядаються лише ті застосування, де ефектами квантової статистики можна знехтувати.

## 4.5.2 Однокомпонентний газ

Розглянемо конкретні приклади моделей виключеного об'єму і як вони реалізуються у підході середнього поля. У якості першого прикладу розглянемо однокомпонентний газ, у якому ефективний власний об'єм однієї частинки  $\tilde{v}_0$

(4.71) не залежить від густини частинок  $n$ . Із (4.71) випливає, що у такому випадку середнє поле визначається як

$$U_{\text{de}}(n, T) = -T \ln(1 - \tilde{v}_0 n). \quad (4.77)$$

Назвемо такий підхід *моделлю прямого виключеного об'єму*. Рівняння (4.21) для густини частинок у такому випадку можна розв'язати явним чином

$$n_{\text{de}}(T, \mu) = \frac{n^0(T, \mu)}{1 + \tilde{v}_0 n^0(T, \mu)}, \quad (4.78)$$

де  $n^0 = z_0$  є густиною точкових частинок, тобто ідеального газу. Отриманий результат відображає загальну закономірність: при “включенні” відштовхувальної взаємодії густина частинок зменшується у порівнянні із густиною частинок ідеального газу  $n^0$  при тих самих значеннях  $T$  і  $\mu$ . Це явище також якісно справджується і у випадку квантових газів.

Для тиску, у наближенні Больцмана, маємо із (4.32)

$$p_{\text{de}}(T, \mu) = -\frac{T}{\tilde{v}_0} \ln [1 - \tilde{v}_0 n_{\text{de}}(T, \mu)] = \frac{T}{\tilde{v}_0} \ln [1 + \tilde{v}_0 n^0(T, \mu)]. \quad (4.79)$$

Густина енергії має вигляд

$$\varepsilon_{\text{de}}(T, \mu) = \frac{\varepsilon^0(T, \mu)}{1 + \tilde{v}_0 n^0(T, \mu)}. \quad (4.80)$$

Далі розглянемо віріальний розклад для класичного газу твердих сфер радіуса  $r$

$$p = Tn + Tv_0 n^2. \quad (4.81)$$

Тут віріальний коефіцієнт  $v_0 = 4(4\pi)r^3/3$  у чотири рази більший за внутрішній об'єм частинки. Надлишковий тиск та середнє поле тоді визначаються як

$$P^{\text{ex}}(n, T) = Tv_0 n^2, \quad (4.82)$$

$$U(n, T) = 2Tv_0 n. \quad (4.83)$$

Вирази (4.82) та (4.83) є загальними для систем, що характеризуються віріальним розкладом до другого порядку та віріальним коефіцієнтом  $v_0$ . Відзначимо, що модель прямого виключеного об'єму узгоджується із віріальним розкладом другого порядку (4.81) якщо  $\tilde{v}_0 = 2v_0$ .

Імовірно найбільш відомим прикладом системи із виключеним об'ємом частинок є системи із *рівнянням стану ван дер Ваальса*

$$p_{\text{vdW}} = \frac{Tn}{1 - v_0 n}, \quad (4.84)$$

у якому знехтувано доданком, що відповідає за притягання. Вираз (4.84) насправді являє собою екстраполяцію (4.81) до високих значень  $v_0 n$ . Надлишковий тиск ( $P^{\text{ex}} = p - nT$ ) рівний

$$P_{\text{vdW}}^{\text{ex}}(n, T) = Tn \frac{v_0 n}{1 - v_0 n}. \quad (4.85)$$

Використовуючи (4.31) у формі

$$U(n, T) = \int_0^n \frac{1}{n'} \frac{\partial P^{\text{ex}}(n', T)}{\partial n'} dn',$$

та поклавши  $U(n = 0, T) = 0$ , отримуємо

$$U_{\text{vdW}}(n, T) = T \frac{v_0 n}{1 - v_0 n} - T \ln(1 - v_0 n). \quad (4.86)$$

Густину у моделі ван дер Ваальса можна записати як

$$n_{\text{vdW}} = (1 - v_0 n_{\text{vdW}}) n^{\text{id}}(T, \mu) \exp\left(-\frac{v_0 n_{\text{vdW}}}{1 - v_0 n_{\text{vdW}}}\right). \quad (4.87)$$

Підсумковий результат отримуємо розв'язавши трансцендентне рівняння (4.87) відносно  $n_{\text{vdW}}$ .

У роботі [155] було сформульовано термодинамічно самоузгоджену процедуру для врахування виключеного об'єму. Вона має широке застосування у моделі адронно-резонансного газу. Покажемо, що у наближенні Больцмана, ця процедура еквівалентна моделі ван дер Ваальса у формалізмі середнього поля, яка задається рівняннями (4.85) та (4.87). Тиск та густина у підході із роботи [155] для наближення Больцмана записується як

$$P^{\text{excl}} = n^0(T, \mu) T e^{-v_0 P^{\text{excl}}/T}, \quad (4.88)$$

$$n^{\text{excl}} = \frac{n^0(T, \mu) e^{-v_0 P^{\text{excl}}/T}}{1 + v_0 n^0(T, \mu) e^{-v_0 P^{\text{excl}}/T}}. \quad (4.89)$$

Як правило, розв'язок можна отримати вирішуючи трансцендентне рівняння (4.88) для тиску. Із (4.89) отримуємо

$$n^0(T, \mu) e^{-v_0 P^{\text{excl}}/T} = \frac{n^{\text{excl}}}{1 - v_0 n^{\text{excl}}}. \quad (4.90)$$

Підставляючи цей вираз у (4.88) маємо

$$P^{\text{excl}} = \frac{n_{\text{excl}} T}{1 - v_0 n_{\text{excl}}}, \quad (4.91)$$

Цей вираз співпадає із (4.85). У подібний спосіб отримуємо для  $n^{\text{excl}}$

$$n^{\text{excl}} = (1 - v_0 n^{\text{excl}}) n^0(T, \mu) \exp\left(-\frac{v_0 n^{\text{excl}}}{1 - v_0 n^{\text{excl}}}\right). \quad (4.92)$$

Останнім прикладом, який ми розглянемо у випадку однокомпонентного газу, є досить відоме *рівняння стану Карнагена-Старлінга* [169], яке є більш точним за модель ван дер Ваальса при високих густинах кількості частинок. Тиск може бути виражений через пакувальну частку  $\eta$  за допомогою формули Карнагена-Старлінга

$$P_{\text{CS}} = Tn \frac{1 + \eta + \eta^2 - \eta^3}{(1 - \eta)^3}. \quad (4.93)$$

Пакувальна частка  $\eta$  може бути виражена через другий віріальний коефіцієнт  $v_0$  та густину  $n$  як  $\eta = v_0 n/4$ . Надлишковий тиск тоді записується як

$$P_{\text{CS}}^{\text{ex}}(n, T) = Tn \frac{v_0 n - (v_0 n)^2/8}{(1 - v_0 n/4)^3}, \quad (4.94)$$

а середнє поле  $U_{\text{CS}}(n, T)$  має вигляд

$$U_{\text{CS}}(n, T) = -3T \left[ 1 - \frac{1 - v_0 n/12}{(1 - v_0 n/4)^3} \right]. \quad (4.95)$$

На Рис. 4.1 наведено залежність надлишкового тиску в одиницях тиску ідеального газу  $P^{\text{ex}}/nT$  від пакувальної частки  $\eta = v_0 n/4$ , для чотирьох різних моделей виключеного об'єму: віріальний розклад до другого порядку (пунктирна зелена лінія), модель прямого виключеного об'єму (точкова синя лінія), рівняння стану ван дер Ваальса (пунктирно-точкова червона лінія), та рівняння стану Карнагена-Старлінга (суцільна чорна лінія). Монте Карло дані із [170] щодо стисливості твердих сфер зображено трикутними символами. Відзначимо, що усі чотири моделі співпадають у другому порядку віріального розкладу. Відмітимо також, що  $P^{\text{ex}}/nT \equiv Z - 1$ , де  $Z$  є стисливістю. Очевидно, що пакувальна частка строго обмежена згори для трьох останніх підходів:  $\eta < 0.125$  у моделі прямо виключеного об'єму,  $\eta < 0.25$  у моделі ван дер Ваальса, і  $\eta < 1$

у моделі Карнагена-Старлінга. Також відмітимо, що границею щільного пакування для твердих сфер є  $\eta = \pi/(3\sqrt{2}) \simeq 0.76$ . Усі підходи дають практично однакові результати для малих значень  $\eta$ , але починають сильно відрізнятися при  $\eta > 0.1$ . Порівняння із Монте Карло розрахунками свідчить, що модель Карнагена-Старлінга є найбільш точною із тих, що розглядаються і описує дані Монте Карло симуляцій принаймні до  $\eta \simeq 0.5$ .

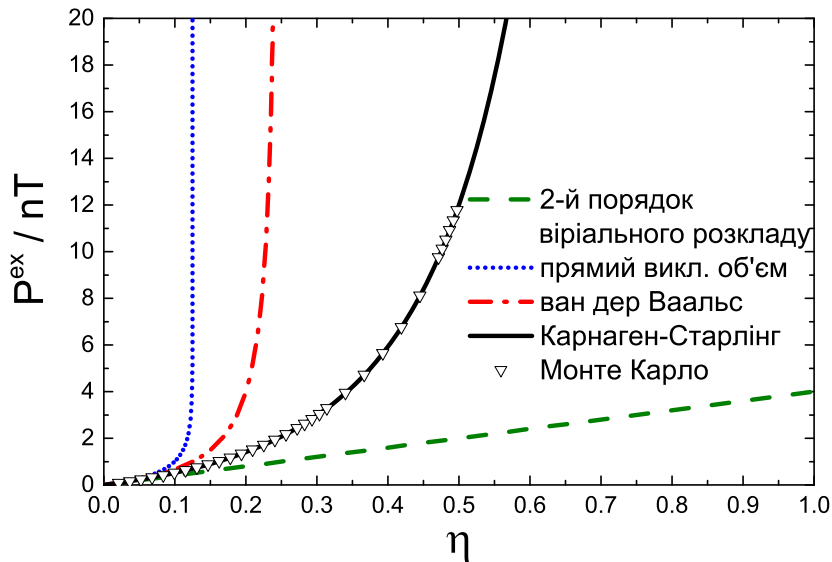


Рис. 4.1: Залежність величини  $P^{\text{ex}}/nT$  від пакувальної частки  $\eta$  для чотирьох різних моделей твердих сфер: віріальний розклад до другого порядку (пунктирна зелена лінія), модель прямого виключеного об'єму (точкова синя лінія), рівняння стану ван дер Ваальса (пунктирно-точкова червона лінія), та рівняння стану Карнагена-Старлінга (суцільна чорна лінія). Монте Карло дані із [170] зображено трикутними символами.

### 4.5.3 Віріальний розклад для мультикомпонентного газу

Розглянемо тепер мультикомпонентний газ. Віріальний розклад для класичного мультикомпонентного газу із  $f$  сортів різних частинок має вигляд

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{n}, T) &= T \sum_{i=1}^f n_i + T \sum_{i,j} b_{ij}(T) n_i n_j + \sum_{i,j,k} b_{ijk}(T) n_i n_j n_k + \dots \\
 &= T \sum_{i=1}^f n_i + P^{\text{ex}}(\mathbf{n}, T).
 \end{aligned} \tag{4.96}$$

Тут  $b_{ij}, b_{ijk}, \dots$  є віріальними коефіцієнтами. Для того, щоб отримати вирази для середніх полів  $U_m(\mathbf{n}, T)$  представимо їх у вигляді ряду по густинам усіх сортів частинок

$$U_i(\mathbf{n}, T) = T \sum_j a_j^i(T) n_j + \sum_{j,k} a_{jk}^i(T) n_j n_k + \dots \quad (4.97)$$

Підставляючи  $U_m$  у вигляді (4.97) у вирази (4.50), які являють собою умови термодинамічної самоузгодженості, отримуємо замкнуту систему лінійних рівнянь для коефіцієнтів  $a_j^i, a_{jk}^i, \dots$ . Розв'язок цієї системи дає можливість отримати середні  $U_i$  в однозначний спосіб із віріального розкладу (4.96).

У випадку віріального розкладу лише до другого порядку маємо  $P^{\text{ex}}(\mathbf{n}, T) = T \sum_{i,j} b_{ij}(T) n_i n_j$ . Середні поля, відповідно, мають вигляд  $U_i(\mathbf{n}, T) = T \sum_j a_j^i(T) n_j$ . Система рівнянь для коефіцієнтів  $a_j^i$  може бути розв'язана явно і розв'язок має вигляд

$$a_j^i(T) = 2b_{ij}(T), \quad (4.98)$$

$$U_i(\mathbf{n}, T) = 2T \sum_j b_{ij}(T) n_j. \quad (4.99)$$

#### 4.5.4 Виключений об'єм у мульти-компонентному газі: процедура ван дер Ваальса I

Один із способів узагальнити модель ван дер Ваальса на випадок багатоконпонентної системи частинок із різними власними об'ємами  $v_i$  полягає у тому, щоб замінити повний об'єм  $V$  на повний доступний об'єм  $V - \sum_i v_i N_i$ . Таку процедуру було проведено у термодинамічно самоузгоджений спосіб у роботі [171, 172], де повний доступний об'єм було підставлено у велику канонічну суму. В результаті можна отримати трансцендентне рівняння для тиску  $p(T, \boldsymbol{\mu})$

$$p(T, \boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^f p_i^0 [T, \mu_i - v_i p(T, \boldsymbol{\mu})]. \quad (4.100)$$

Густина  $n_i$  сорту частинок  $i$  може бути записана як

$$n_i(T, \boldsymbol{\mu}) = \frac{n_i^0 [T, \mu_i - v_i p(T, \boldsymbol{\mu})]}{1 + \sum_{j=1}^f v_j n_j^0 [T, \mu_i - v_i p(T, \boldsymbol{\mu})]}. \quad (4.101)$$

Тут  $p_i^0$  та  $n_i^0$  є виразами ідеального газу для тиску та густини частинок сорту  $i$ . У Больцманівському наближенні вираз (4.100) для тиску має вигляд

$$p(T, \boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^f p_i^0(T, \mu_i) \exp[-v_i p(T, \boldsymbol{\mu})/T]. \quad (4.102)$$

Покажемо, що у наближенні Больцмана можна отримати еквівалентний результат і у підході середнього поля. Для цього замінимо повний виключений об'єм  $v_0 n$  у виразі (4.85) для надлишкового тиску однокомпонентного газу ван дер Ваальса на повний виключений об'єм  $\sum_i v_i n_i$  мультикомпонентного газу. Надлишковий тиск тоді має вигляд

$$P_{\text{VdW}}^{\text{ex}}(\mathbf{n}, T) = T \left( \sum_{i=1}^f n_i \right) \frac{\sum_{i=1}^f v_i n_i}{1 - \sum_{i=1}^f v_i n_i}. \quad (4.103)$$

Для того, щоб вирішити задачу необхідно розв'язати систему рівнянь (4.50) термодинамічної самоузгодженості відносно середніх полів  $U_i$ . У даному випадку розв'язок можна знайти у замкненому вигляді і він має вигляд

$$U_i(\mathbf{n}, T) = T \frac{v_i \sum_{j=1}^f n_j}{1 - \sum_{j=1}^f v_j n_j} - T \ln \left( 1 - \sum_{j=1}^f v_j n_j \right). \quad (4.104)$$

Маючи вирази для  $U_i$  можна тепер виразити  $n_i$  у наближенні Больцмана як

$$n_i(T, \boldsymbol{\mu}) = \left( 1 - \sum_{j=1}^f v_j n_j \right) n_i^0(T, \mu_i) \exp \left( - \frac{v_i \sum_{j=1}^f n_j}{1 - \sum_{j=1}^f v_j n_j} \right). \quad (4.105)$$

Нагадаємо, що повний тиск у системі можна записати як

$$\begin{aligned} p(T, \boldsymbol{\mu}) &= T \left( \sum_{i=1}^f n_i \right) + P_{\text{VdW}}^{\text{ex}}[\mathbf{n}(T, \boldsymbol{\mu}), T] \\ &= T \left( \sum_{i=1}^f n_i \right) \left( 1 + \frac{\sum_{i=1}^f v_i n_i}{1 - \sum_{i=1}^f v_i n_i} \right) \\ &= T \frac{\sum_{i=1}^f n_i}{1 - \sum_{i=1}^f v_i n_i}. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Якщо підставити (4.105) у чисельник (4.106), то отримуємо

$$p(T, \boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^f p_i^0(T, \mu_i) \exp \left( - \frac{v_i \sum_{j=1}^f n_j}{1 - \sum_{j=1}^f v_j n_j} \right), \quad (4.107)$$



де було враховано, що  $p_i^0(T, \mu_i) = T n_i^0(T, \mu_i)$ . Використовуючи (4.106) можна переписати вираз для експоненти у (4.107) і отримати вираз

$$p(T, \boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^f p_i^0(T, \mu_i) \exp[-v_i p(T, \boldsymbol{\mu})/T] \quad (4.108)$$

який співпадає із (4.102).

#### 4.5.5 Виключений об'єм у мульти-компонентному газі: процедура ван дер Ваальса II

Сформулюємо тепер процедуру виключеного об'єму для мульти-компонентного газу, яка узгоджується із віріальним розкладом у другому порядку. Нехай  $b_{ij}$ ,  $i, j = 1 \dots f$  – матриця віріальних коефіцієнтів. Для моделі твердих сфер коефіцієнти мають вигляд

$$b_{ij} = \frac{2}{3}\pi(r_i + r_j)^3, \quad (4.109)$$

де  $r_i$  є радіусами сфер. Тиск у випадку розкладу до другого порядку має вигляд

$$P = T \sum_{i=1}^f n_i + T \sum_{i,j=1}^f b_{ij} n_i n_j. \quad (4.110)$$

Проведемо процедуру екстраполяції ван дер Ваальса подібно до того, як це було зроблено у випадку однокомпонентного газу (див. [173])

$$P = T \sum_{i=1}^f \left( \frac{n_i}{1 - \sum_{j=1}^f \tilde{b}_{ji} n_j} \right). \quad (4.111)$$

Для того, щоб вираз (4.111) був узгоджений із розкладом до другого порядку (4.110) необхідно, щоб виконувалась умова  $\tilde{b}_{ii} = b_{ii}$  and  $\tilde{b}_{ij} + \tilde{b}_{ji} = 2b_{ij}$ . Вибір коефіцієнтів  $\tilde{b}_{ij}$  є неоднозначним. Наприклад, можна покласти  $\tilde{b}_{ij} = b_{ij}$ . А у роботі [173] ці коефіцієнти означено як

$$\tilde{b}_{ij} = \frac{2b_{ii}b_{ij}}{b_{ii} + b_{jj}}. \quad (4.112)$$

Надлишковий тиск має вигляд

$$P^{\text{ex}}(\mathbf{n}, T) = T \sum_{i=1}^f \left( \frac{n_i \sum_{j=1}^f \tilde{b}_{ji} n_j}{1 - \sum_{j=1}^f \tilde{b}_{ji} n_j} \right). \quad (4.113)$$

Розв'язок рівнянь (4.50), які визначають умови термодинамічної самоузгодженості, відносно  $U_i$  має вигляд

$$U_i(\mathbf{n}, T) = T \sum_{j=1}^f \frac{\tilde{b}_{ij} n_j}{1 - \sum_{k=1}^f \tilde{b}_{kj} n_k} - T \ln \left( 1 - \sum_{j=1}^f \tilde{b}_{ji} n_j \right). \quad (4.114)$$

Використовуючи цей вираз, густини частинок  $n_i$  можна записати у наближенні Больцмана як

$$n_i(T, \boldsymbol{\mu}) = \left( 1 - \sum_{j=1}^f \tilde{b}_{ji} n_j \right) n_i^0(T, \mu_i) \exp \left( - \sum_{j=1}^f \frac{\tilde{b}_{ij} n_j}{1 - \sum_{k=1}^f \tilde{b}_{kj} n_k} \right), \quad i = 1 \dots f. \quad (4.115)$$

Вираз (4.115) являє собою систему трансцендентних рівнянь відносно густин  $n_i$ .

Покажемо тепер, що описана у формалізмі середнього поля процедура еквівалентна процедурі ван дер Ваальса для мульти-компонентного газу, яку було розроблено у роботі [173]. У цій роботі повний тиск можна представити у вигляді суми “парціальних” тисків:  $p(T, \boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^f p_i(T, \boldsymbol{\mu})$ . Величини  $p_i(T, \boldsymbol{\mu})$  знаходяться із системи трансцендентних рівнянь

$$p_i(T, \boldsymbol{\mu}) = p_i^0(T, \mu_i) \exp \left( - \sum_{j=1}^f \tilde{b}_{ij} p_j(T, \boldsymbol{\mu}) / T \right). \quad (4.116)$$

У нашому підході, тиск (4.111) також можна представити як суму “парціальних” тисків

$$p(T, \boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^f p_i(T, \boldsymbol{\mu}), \quad (4.117)$$

$$p_i(T, \boldsymbol{\mu}) = \frac{T n_i}{1 - \sum_{j=1}^f \tilde{b}_{ji} n_j}. \quad (4.118)$$

Підставляючи (4.115) у чисельник в (4.118) отримуємо

$$p_i(T, \boldsymbol{\mu}) = p_i^0(T, \mu_i) \exp \left( - \sum_{j=1}^f \frac{\tilde{b}_{ij} n_j}{1 - \sum_{k=1}^f \tilde{b}_{kj} n_k} \right), \quad (4.119)$$

де використано  $p_i^0(T, \mu_i) = T n_i^0(T, \mu_i)$ . Використовуючи (4.118) можна переписати

сати експоненту у (4.119) і отримати

$$p_i(T, \boldsymbol{\mu}) = p_i^0(T, \mu_i) \exp \left[ - \sum_{j=1}^f \tilde{b}_{ij} p_j(T, \boldsymbol{\mu}) / T \right]. \quad (4.120)$$

Цей вираз точно співпадає із (4.116).

## 4.6 Підхід середнього поля у моделі адронно-резонансного газу

Статистичні моделі дуже успішно описують широкий набір експериментальних даних щодо множинності різних у адронів у багатьох експериментах із зіткнення важких ядер. Найбільш відомою із таких статистичних моделей є модель ідеального адронно-резонансного газу (I-АРГ), яку сформульовано у великому канонічному ансамблі і яка описує систему невзаємодіючих адронів та резонансів. Тиск у такій системі має вигляд суми парціальних тисків

$$p = \sum_{i=1}^f p_i(T, \mu_i) = \sum_{i=1}^f \frac{g_i}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + m_i^2}} \left[ \exp \left( \frac{\sqrt{k^2 + m_i^2} - \mu_i}{T} \right) + a_i \right]^{-1}, \quad (4.121)$$

де  $g_i$  є виродженістю по спіну для сорту адронів  $i$ ,  $T$  є температурою,  $a_i$  рівний  $-1$  для бозонів,  $+1$  для ферміонів та  $0$  для наближення Больцмана. Хімічний потенціал  $\mu_i$  містить вклади від хімічних потенціалів баріонного заряду, електричного заряду та дивності:

$$\mu_i = B_i \mu_B + S_i \mu_S + Q_i \mu_Q. \quad (4.122)$$

Густина частинок сорту  $i$  записується як

$$n_i(T, \mu_i) = \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk \left[ \exp \left( \frac{\sqrt{k^2 + m_i^2} - \mu_i}{T} \right) + a_i \right]^{-1}. \quad (4.123)$$

Якщо правильно врахувати розпади нестабільних адронів, то шляхом фіту експериментальних даних щодо відношень виходів різних сортів адронів можна визначити температуру  $T$  та баріонний хімічний потенціал  $\mu_B$ , що відповідають експерименту. Хімічні потенціали  $\mu_S$  та  $\mu_Q$ , як правило, можна представити у

вигляді функції  $T$  та  $\mu_B$  із законів збереження зарядів. Зокрема, можна зафіксувати повний заряд дивності  $\langle S \rangle = 0$  та відношення електричного заряду до баріонного  $\langle Q \rangle / \langle B \rangle = Z/A \approx 0.4$ .

У адронно-резонансному газі, сформульованому у рамках підходу середнього поля, з'являються такі величини як надлишковий тиск  $P^{\text{ex}}(\mathbf{n}, T)$  та середні поля  $U_i(\mathbf{n}, T)$ . Відповідно, вирази (4.121) та (4.123) змінюються і тепер мають вигляд

$$\begin{aligned}
 p &= \sum_{i=1}^f \frac{g_i}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + m_i^2}} \left[ \exp \left( \frac{\sqrt{k^2 + m_i^2} - \mu_i + U_i(\mathbf{n}, T)}{T} \right) + a_i \right]^{-1}, \\
 &\quad + P^{\text{ex}}(\mathbf{n}, T), \\
 n_i &= \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk \left[ \exp \left( \frac{\sqrt{k^2 + m_i^2} - \mu_i + U_i(\mathbf{n}, T)}{T} \right) + a_i \right]^{-1}, \\
 &= \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk f_i(k; \mathbf{n}, T, \mu_i). \tag{4.124}
 \end{aligned}$$

У наших розрахунках ми включаємо усі відомі адрони та резонанси (разом із відповідними античастинками) із масами до 2.3 GeV, що складаються із  $u$ ,  $d$  або  $s$  кварків. Кінцева ширина резонансів, і їхня відповідна Брейт-Вігнерівська форма враховуються у моделі таким самим чином, як це робиться у пакеті THERMUS [174]. Для цього робиться наступна модифікація при інтегруванні функції розподілу по імпульсам:

$$\int d^3k f_i(k; \mathbf{n}, T, \mu_i) \rightarrow \int d\tilde{m} \int d^3k \frac{1}{\pi} \frac{2\tilde{m} m_i \Gamma_i}{(\tilde{m}^2 - m_i^2)^2 + m_i^2 \Gamma_i^2} f_i(k; \mathbf{n}, T, \mu_i). \tag{4.125}$$

Для проведення розрахунків необхідно розв'язувати систему рівнянь (4.124) самоузгодженим чином. У подальших дослідженнях будемо вважати, що відштовхування між усіма сортами адронів є однаковим, тобто усі адрони мають один і той самий радіус  $r$ . У цьому випадку усі середні поля співпадають ( $U_i \equiv U$ ) і залежать лише від повної густини усіх адронів  $n = \sum_i n_i$ . Таким чином, треба розв'язувати лише одне трансцендентне рівняння для повної густини  $n$  і для цього використовується метод дотичних. Розглянемо три різні параметризації для середнього поля:

а) Модель прямого виключеного об'єму:

$$P^{\text{ex}}(n, T) = -\frac{T}{2v_0} \ln(1 - 2v_0n) - nT, \quad (4.126)$$

$$U(n, T) = -T \ln(1 - 2v_0n), \quad (4.127)$$

де  $v_0$  – це є об'єм адрона, помножений на чотири.

б) Рівняння стану ван дер Ваальса:

$$P^{\text{ex}}(n, T) = Tn \frac{v_0n}{1 - v_0n}, \quad (4.128)$$

$$U(n, T) = T \frac{v_0n}{1 - v_0n} - T \ln(1 - v_0n). \quad (4.129)$$

в) Рівняння стану Карнагена-Старлінга:

$$P^{\text{ex}}(n, T) = Tn \frac{v_0n - (v_0n)^2/8}{(1 - v_0n/4)^3}, \quad (4.130)$$

$$U(n, T) = -3T \left[ 1 - \frac{1 - v_0n/12}{(1 - v_0n/4)^3} \right]. \quad (4.131)$$

Усі три моделі узгоджуються із другим порядком віріального розкладу для моделі твердих сфер.

## 4.7 АРГ із виключеним об'ємом на стадії фрізауту

Дослідимо властивості АРГ, що присутній на стадії хімічного фрізауту у зіткненнях важких іонів. В результаті аналізу експериментальних даних щодо множинностей різних адронів, залежність температури та баріонного хімічного потенціалу від енергії зіткнення ядер можна пераметризувати як [175]

$$T(\sqrt{s_{\text{NN}}}) = 0.166 \text{ GeV} - 0.139 \text{ GeV}^{-1} \mu_B^2 - 0.053 \text{ GeV}^{-3} \mu_B^4, \quad (4.132)$$

$$\mu_B(\sqrt{s_{\text{NN}}}) = \frac{1.308 \text{ GeV}}{1 + 0.273 \text{ GeV}^{-1} \sqrt{s_{\text{NN}}}}. \quad (4.133)$$

Для врахування неповної термалізації дивних частинок, як правило, вводять фактор придушення  $\gamma_S$ , який вставляється у одночастичну функцію розподілу і енергетична залежність якого має вигляд [176]

$$\gamma_S(\sqrt{s_{\text{NN}}}) = 1 - 0.396 \exp\left(-1.23 \frac{T}{\mu_B}\right). \quad (4.134)$$

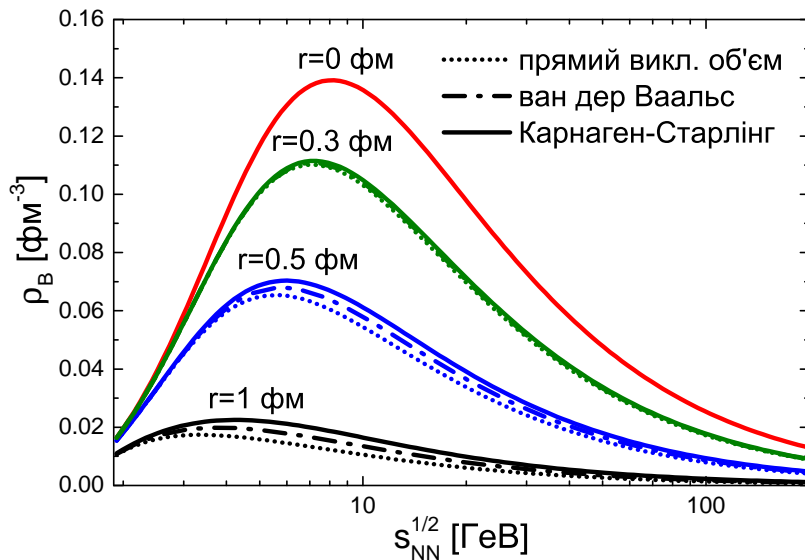


Рис. 4.2: Залежність густини баріонного заряду на стадії хімічного фрізауту від енергії зіткнення для трьох різних моделей виключеного об'єму: модель прямого виключеного об'єму (точкова лінія), рівняння стану ван дер Ваальса (точково-пунктирна лінія), та для рівняння стану Карнагена-Старлінга (суцільна лінія).

Цей множник вставляється у вираз для  $f_i(k; \mathbf{n}, T, \mu_i)$  наступним чином

$$f_i(k; \mathbf{n}, T, \mu_i) = \left[ \gamma_S^{-|s_i|} \exp \left( \frac{\sqrt{k^2 + m_i^2} - \mu_i + U_i(\mathbf{n}, T)}{T} \right) + a_i \right]^{-1}, \quad (4.135)$$

де  $|s_i|$  є сумою дивних та анти-дивних кварків у адроні сорту  $i$ . Зазначимо, що ефекти квантової статистики в (4.135) для даної задачі є незначними.

Залежність густини баріонного заряду від енергії зіткнення  $\sqrt{s_{NN}}$ , наведено на Рис. 4.2. Відмітимо, що результати розрахунків у моделі ван дер Ваальса узгоджуються із відповідними розрахунками в роботі [177], які було проведено із використанням пакету THERMUS. Врахування відштовхування у вигляді твердих сфер приводить до зсуву максимуму у енергетичній залежності густини баріонного заряду у область більш низьких енергій. Наприклад, для радіусу рівного 0.5 фм максимум зсувається від енергії  $\sqrt{s_{NN}} \simeq 8$  ГеВ до  $\sqrt{s_{NN}} \simeq 6$  ГеВ.

Залежність середнього поля та надлишкового тиску від енергії зіткнення наведено на Рис. 4.3. Видно, що обидві ці величини зростають із енергією зіткнення. Відмітимо, що і розбіжності в результатах для різних моделей виключеного об'єму також зростають із енергією зіткнення.

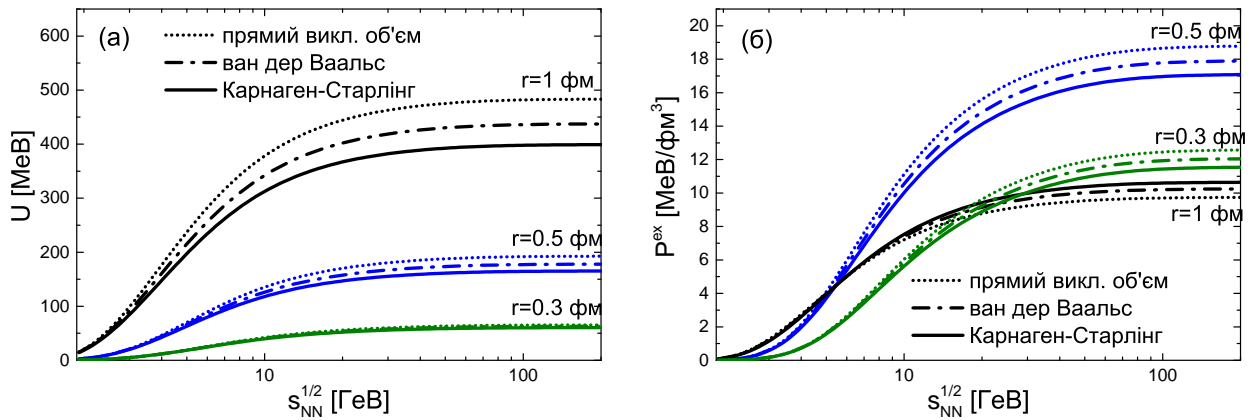


Рис. 4.3: Залежність від енергії зіткнення (а) середнього поля  $U$  та (б) надлишкового тиску  $P^{ex}$ , які розраховано у підході середнього поля для трьох різних моделей виключеного об'єму: модель прямого виключеного об'єму (точкова лінія), рівняння стану ван дер Ваальса (точково-пунктирна лінія), та для рівняння стану Карнагена-Старлінга (суцільна лінія).

Ефективний виключений об'єм  $\tilde{v}_0$  на одну частинку, який генерується відштовхувальним середнім полем, можна розрахувати використовуючи вираз (4.71). Залежність цієї величини від енергії зіткнення наведено на Рис. 4.4. Тут значення величини  $\tilde{v}_0$  нормовано на внутрішній об'єм частинки  $v_{in} = 4\pi r^3/3$ , а  $r = 0.5$  фм. Видно, що для моделі прямого виключеного об'єму, значення  $\tilde{v}_0$  є фіксованим і рівне  $\tilde{v}_0 = 8v_{in}$ . Це значення можна інтерпретувати як сферичний об'єм навколо центру сферичної частинки, всередині якого не може знаходитись центр будь-якої іншої сферичної частинки у випадку, коли сфери є повністю непроникними. Для більш реалістичних рівнянь стану, як модель ван дер Ваальса або модель Карнаген-Старлінг, маємо нерівність  $\tilde{v}_0 < 8v_{in}$ .

Як було описано у підрозділі 4.5, множник  $\vartheta(n) = e^{-U(n,T)/T}$  визначає подавлення густин та ефектів, пов'язаних із квантовою статистикою у порівнянні із випадком ідеального газу. Залежність від енергії зіткнення у випадку адронного радіусу рівного 0.5 фм наведено на Рис. 4.5. Видно, що при  $r = 0.5$  фм подавлення густин та квантової статистики є досить суттєвим, особливо при високих енергіях зіткнення. Отримані результати вказують на те, що наближення Больцмана достатньо добре працює для дослідження властивостей хімічного фрізауту у зіткненнях важких ядер.

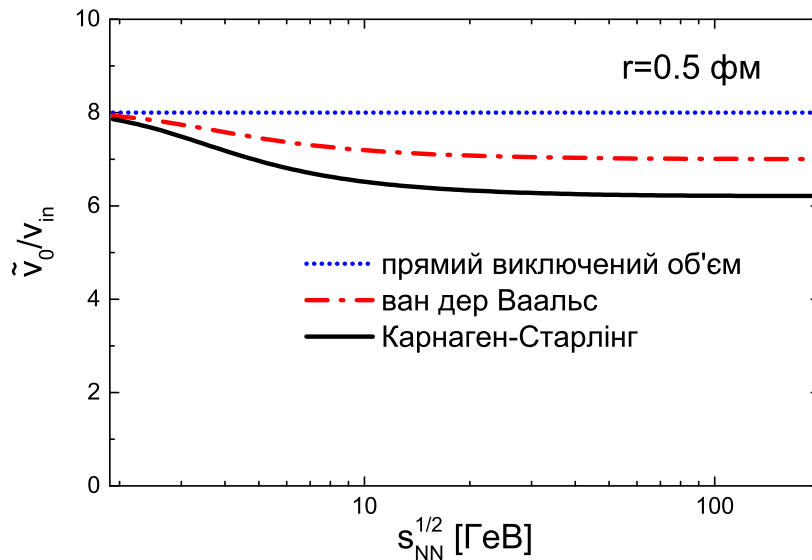


Рис. 4.4: Залежність від енергії зіткнення ефективного виключеного об'єму однієї частинки, який розраховується відповідно до (4.71), для трьох різних моделей виключеного об'єму: модель прямого виключеного об'єму (точкова лінія), рівняння стану ван дер Ваальса (точково-пунктирна лінія), та для рівняння стану Карнагена-Старлінга (суцільна лінія). Для розрахунків використовується адронний радіус 0.5 фм.

Дослідимо як впливає на розрахунки значення адронного радіусу  $r$ . На Рис. 4.6 наведено залежність густини баріонного заряду від адронного радіусу  $r$  для фіксованої енергії зіткнення  $\sqrt{s_{NN}} = 8$  GeV, якій відповідають наступні значення параметрів:  $T = 141$  MeV,  $\mu_B = 411$  MeV and  $\gamma_S = 0.74$ . Видно, що відмінності між значеннями густини баріонного заряду, розрахованими для трьох різних моделей виключеного об'єму, зростають із  $r$  та досягають приблизно 20 – 25% при  $r \gtrsim 1$  фм. У той же час, типові значення радіусу адронів зазвичай не перевищують 0.5 фм. У такому випадку наближення ван дер Ваальсу для аналізу хімічного фрізауту є достатнім. Тим не менше, якщо інтерпретувати нашу систему як газ твердих сфер, то модель Карнагена-Старлінга дає найбільш точні результати.



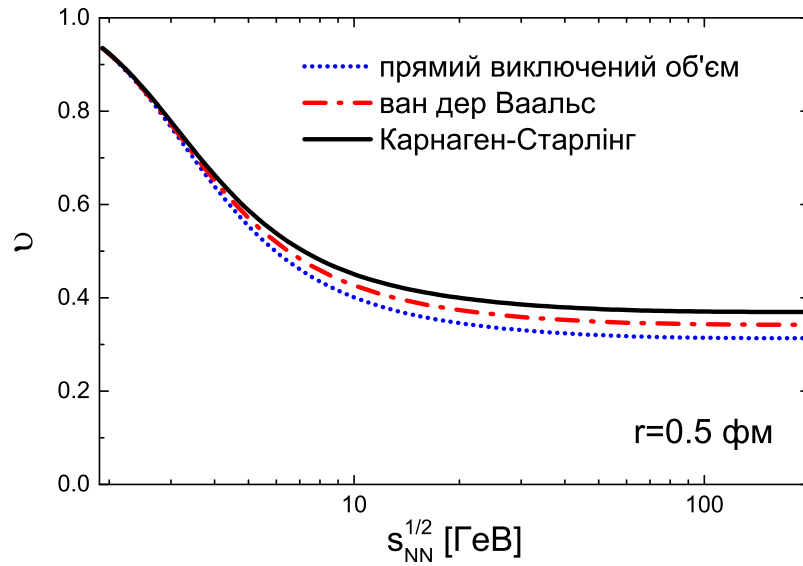


Рис. 4.5: Залежність від енергії зіткнення множника  $\vartheta$ , який визначає подавлення густин та ефектів, пов'язаних із квантовою статистикою, внаслідок наявності відштовхувального середнього поля. Розрахунки проведено із використанням трьох різних процедур виключеного об'єму та для значення адронного радіусу 0.5 фм.

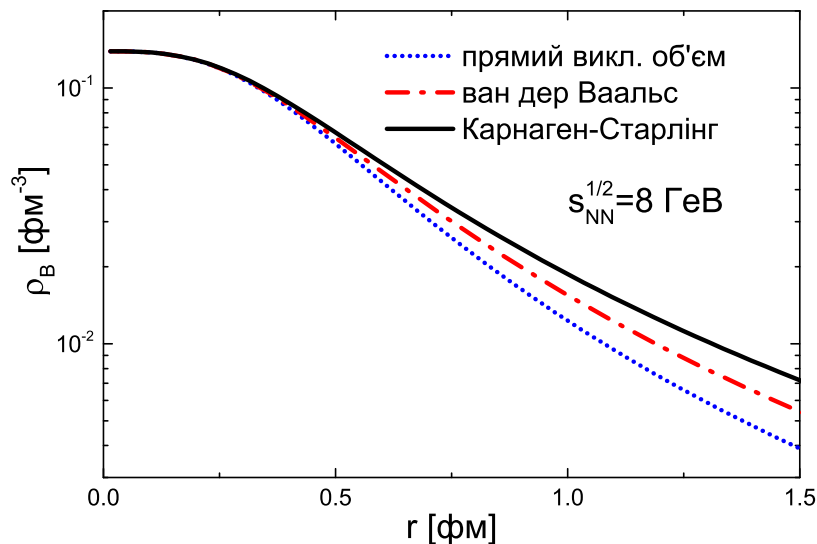


Рис. 4.6: Залежність густини баріонного заряду від величини адронного радіусу. Розрахунки проведено для значень параметрів  $T = 141$  MeV,  $\mu_B = 411$  MeV та  $\gamma_S = 0.74$ , які відповідають енергії зіткнення  $\sqrt{s_{NN}} = 8$  GeV.

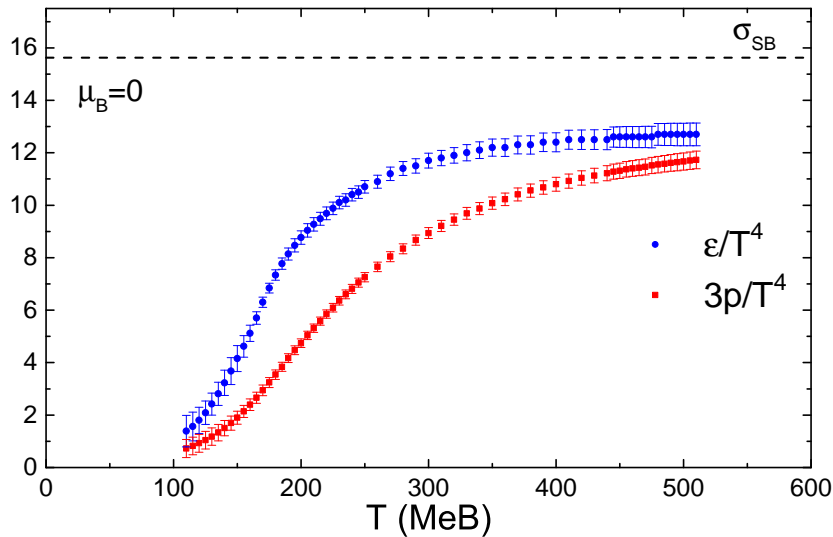


Рис. 4.7: Розрахунки в рамках КХД на ґратці [25] для  $3p/T^4$  (кружки) та  $\varepsilon/T^4$  (квадрати) при нульовому баріонному хімічному потенціалі.

## 4.8 Порівняння взаємодіючого АРГ із даними КХД на ґратці

Рівняння стану КХД при нульовій баріонній густині може бути проаналізовано за допомогою монтекарлівських розрахунків КХД на ґратці [25, 26]. Такі розрахунки вказують на наявність двох фаз сильновзаємодіючої матерії: адронної фази при малих  $T$  та кварк-глюонної фази деконфайнменту при великих  $T$ . При цьому розрахунки показують, що цей перехід не є справжнім фазовим переходом, а, натомість, переходом плавного кросоверу. На Рис. 4.7 наведено результати розрахунків із роботи [25] для тиску та густини енергії ( $3p/T^4$  та  $\varepsilon/T^4$ ).

На Рис. 4.7 видно швидкий ріст термодинамічних величин поблизу температури кросоверу  $T_c \simeq 150 - 160$  MeV. У фазі деконфайнменту величини  $3p/T^4$  та  $\varepsilon/T^4$  повільно наближаються до своїх граничних значень, що визначаються відповідною границею Стефана-Больцмана  $3p_{SB}/T^4 = \varepsilon_{SB}/T^4 = \sigma_{SB}$ , де  $\sigma_{SB} = 19\pi^2/12 \simeq 15.6$  у КХД із трьома сортами кварків. При  $T < T_c$  домінує адронна фаза конфайнменту. Цікавим питанням є порівняння рівняння стану АРГ із виключеним об'ємом із даними КХД на ґратці у цьому діапазоні температур. Для цієї задачі використаємо процедуру виключеного об'єму ван дер

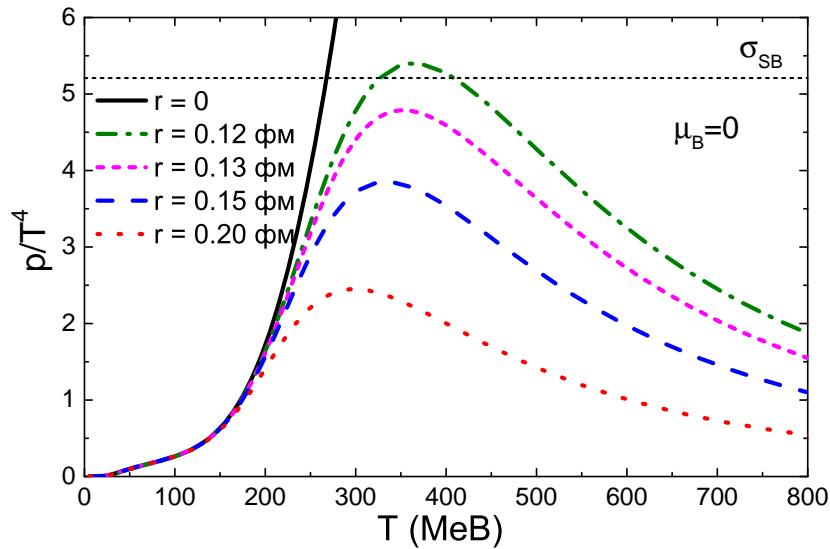


Рис. 4.8: Залежність тиску від температури у моделі АРГ із виключеним об'ємом при нульовому баріонному хімічному потенціалі та декількох різних значеннях радіусу твердої серцевини адрону. Границю Стефана-Больцмана  $p_{SB}/T^4 = \sigma_{SB}/3 \cong 5.2$  показано штрихованою горизонтальною лінією.

Ваальса у наближенні Больцмана.

На Рис. 4.8 наведено залежність тиску  $p^{\text{lat}}/T^4$  від температури у моделі АРГ із виключеним об'ємом при нульовому баріонному хімічному потенціалі та декількох різних значеннях радіусу твердої серцевини адрону. У випадку ідеального АРГ ( $r = 0$ ) тиск  $p(T)/T^4$  швидко зростає при високих температурах і перевищує границю Стефана-Больцмана для безмасових невзаємодіючих кварків та глюонів,  $p_{SB}(T)/T^4 = \sigma_{SB}/3 \cong 5.2$ . Тому, відповідно до критеріїв Гіббса щодо глобальної термодинамічної рівноваги це означало б що точкові адрони завжди мають бути домінуючою фазою при високих температурах. Така властивість ідеального АРГ протирічить даним КХД на ґратці і вказує на обмеженість такої моделі. У той же час, як видно із Рис. 4.8, наявність ефектів виключеного об'єму приводить до іншої поведінки тиску: при  $r \geq 0.13$  фм маємо  $p^{\text{ev}}(T)/T^4 < \sigma_{SB}/3$  за будь-якої  $T$ . Звідси можна зробити висновок про необхідність накласти обмеження знизу  $r \geq 0.13$  фм на радіус твердої серцевини адрона.

На Рис. 4.9, наведено порівняння залежності тиску  $p^{\text{lat}}/T^4$  від температури у моделі АРГ із виключеним об'ємом із даними КХД на ґратці для декількох

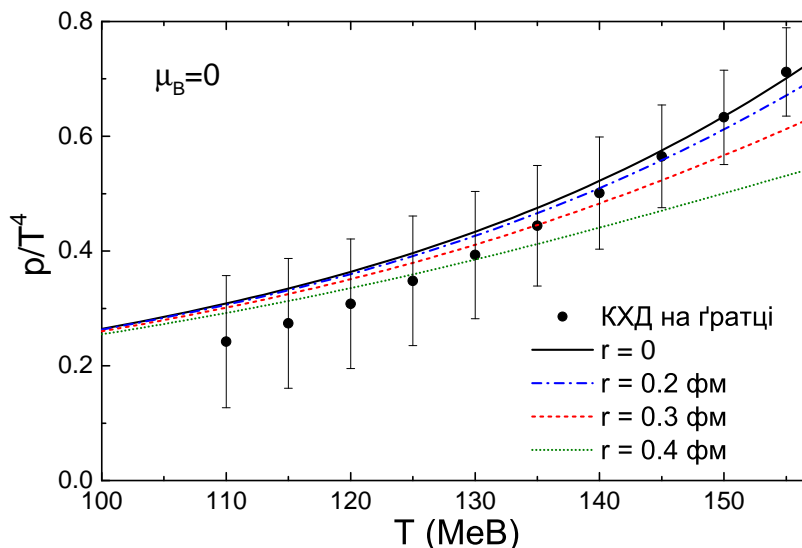


Рис. 4.9: Залежність тиску від температури у моделі АРГ із виключеним об'ємом при нульовому баріонному хімічному потенціалі та декількох різних значеннях радіусу твердої серцевини адрону. Точками показано дані КХД на ґратці [25].

різних значень радіусу твердої серцевини адрону та при температурах  $T < 155$  MeV. Видно, що дані КХД на ґратці описуються добре у досить широкому діапазоні значень радіусу твердої серцевини  $r \lesssim 0.4$  фм. При більших значеннях  $r$  тиску у АРГ буде суттєво подавленим у порівнянні із КХД на ґратці.

Таким чином, у результаті порівняння даних для адронного тиску можна накласти такі обмеження знизу та згори на значення адронного радіусу:  $0.13 < r \lesssim 0.4$  фм. У той же час слід пам'ятати, що інші термодинамічні величини, які розраховуються на ґратці, можуть у майбутньому бути використані для отримання більш сильних обмежень на величину  $r$ . Крім того, представлені розрахунки були виконані у припущенні однакового радіусу твердої серцевини для всіх адронів. Висновки можуть бути іншими за інших припущень, наприклад, коли радіус адрону явно залежить від його сорту.

## 4.9 Висновки до 4-го розділу

У представленому підході середнього поля, усі величини, пов'язані із взаємодією, виражаються через середні поля  $U_i(n, T)$  та надлишковий тиск  $P^{\text{ex}}(n, T)$ . Такий підхід задає процедуру для узагальнення відомих феноменологічних моделей рівняння стану на випадок статистичних систем із змінною

кількістю частинок, і які формулюються у великому канонічному ансамблі.

У даному розділі сформульовано три різні процедури виключеного об'єму: модель прямого виключеного об'єму, рівняння стану ван дер Ваальса та рівняння стану Карнагена-Старлінга. Середні поля у моделях виключеного об'єму є пропорційними температурі (у випадку статистики Максвелла-Больцмана) і показано, що такі поля генерують ефективний власний виключений об'єм частинки. В результаті, у виразах для густин кількості та енергії частинок, з'являється подавлюючий множник  $\vartheta(n) = \exp(-U(T, n)/T)$ , який зменшує ефективний об'єм доступний для руху, та ефекти, пов'язані із квантовою статистикою.

Розглянуті три процедури використовуються в рамках моделі адронно-резонансного газу для досліджень хімічного фрізауту у зіткненнях важких ядер. В усіх трьох випадках, включення відштовхування типу твердих сфер приводить до зсуву максимуму у залежності густини баріонного заряду від енергії зіткнення до менших значень енергії. Цей результат було також отримано у більш ранніх дослідженнях [177]. Розрахунки також показують, що різниці в результатах у розглянутих трьох підходах залишаються незначними при типових значеннях адронного радіусу ( $r \lesssim 0.5$  фм). При високих адронних густинах модель Карнагена-Старлінга є найбільш точною із тих підходів, що були розглянуті. Ефекти, пов'язані із релятивістським скороченням довжини безсумнівно змінять картину твердих сфер. Тим не менше, можна очікувати, що ці ефекти не будуть відігравати дуже важливої ролі у випадку адронного газу. Це пояснюється тим, що температура адронного газу завжди є суттєво меншою за маси усіх адронів окрім пі-мезонів. Оскільки більшість пі-мезонів, які реєструються в експерименті, є продуктами розпадів нестабільних резонансів, які у свою чергу мають велику масу, то цей ефект є також незначним і для пі-мезонів загалом.

Запропонований підхід з використанням середніх полів дозволяє також розглядати мульти-компонентну систему частинок різних розмірів. У такій системі, відповідно, має місце різна взаємодія між різними сортами частинок. У розділі сформульовано дві різні процедури виключеного об'єму типу ван дер Ваальса, і показано, що у наближенні Больцмана ці дві процедури співпадають із запропонованими раніше у літературі моделями. У випадку мульти-компонентного газу, при заданих значеннях температури та хімічних потенціалів, необхідно

чисельно розв'язувати систему трансцендентних рівнянь відносно густин усіх сортів адронів, які розглядаються. Такі розрахунки планується проводити у майбутньому.

Порівняння моделі АРГ із наявністю виключеного об'єму у адронів із даними КХД на гратці дозволяє отримати обмеження на величину радіусу твердої серцевини адрона. З умови того, що тиск у АРГ не може перевищувати ліміту Стефана-Больцмана отримано обмеження знизу:  $r \geq 0.13$  фм. У той же час, умова задовільного опису даних КХД на гратці при температурах  $T < 155$  MeV веде до наступного обмеження згори  $r \lesssim 0.4$  фм. Більш сильні обмеження на величину  $r$  можуть бути отримані у майбутньому із аналізу інших термодинамічних величин.

# Висновки

1. В результаті аналізу імпульсних спектрів показано, що транспортна модель UrQMD якісно описує усі експериментальні спостереження у ядро-ядерних та протон-протонних зіткненнях при енергіях SPS. Показано, що при порівнянні спектрів пі-мезонів у ядро-ядерних та протон-протонних зіткненнях необхідно правильно враховувати ізоспінові ефекти, особливо при більш низьких енергіях зіткнення. Розрахунки в UrQMD передбачають наявність немонотонної ділянки у залежностях середньої поперечної маси  $\pi^+$ ,  $K^+$ , протонів та  $\Lambda$  у центральному діапазоні рапідностей від енергії зіткнення у p+p реакціях при малих енергіях SPS, що пояснюється наявністю вкладів від розпадів баріонних резонансів та фрагментації струн. Наявність немонотонної поведінки може бути перевірена у найближчому майбутньому колаборацією NA61/SHINE.
2. В рамках побудованої аналітичної моделі опису процесу розділення системи на учасників та спектаторів показано, що цей процес характеризується часовим масштабом  $t_c$  (який є часом максимального перекриття налітаючих ядер) і закінчується приблизно при  $t \simeq 1.5 t_c$ . Показано, що момент імпульсу підсистеми учасників є ненульовим у нецентральных зіткненнях ядер, його значення у розрахунку на один нуклон-учасник постійно збільшується із часом, і його треба врахувати при заданні початкових умов у гідродинамічних моделях.
3. В рамках спрощеної аналітичної моделі проведено аналіз поздовжніх флуктуацій центру мас системи учасників та показано, що ці флуктуації описуються розподілом Гауса із шириною, яка в першу чергу визначається центральністю зіткнення. Отримано, що флуктуації суттєво зростають із прицільним параметром зіткнення ядер, і слабо залежать від енергії зіткнення ядер. Отримані результати свідчать про те, що врахування цих флуктуацій може бути важливим при порівнянні різноманітних розподілів по рапідності між експериментом та гідродинамічними моделями.

4. Побудовано підхід середнього поля для одно- та мульти-компонентних статистичних систем, який дозволяє ефективно врахувати взаємодії між частинками у великому канонічному ансамблі. В рамках запропонованого підходу побудовано різноманітні процедури виключеного об'єму у одно- та мульти-компонентних системах, які потім включено у модель адронно-резонансного газу. Показано, що вибір процедури виключеного об'єму є важливим при високих густинах адронів, і запропоновано у таких випадках використовувати рівняння стану Карнагена-Старлінга. В рамках порівняння моделі адронно-резонансного газу із розрахунками квантової хромодинаміки на ґратці отримано обмеження знизу та зверху на величину адронного радіусу.



## Список використаних джерел

- [1] Д. Анчишкін, А. Мускеєв, В. Вовченко, and С. Єжов, “Просторово-часова структура релятивістських ядро-ядерних зіткнень,” Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика **29**, 124 (2011).
- [2] D. V. Anchishkin, A. O. Muskeyev, V. Y. Vovchenko, and S. N. Yezhov, “Evolution of the Hadronic System Created in Relativistic Heavy-Ion Collisions,” Problems of Atomic Science and Technology **77**, 115 (2012).
- [3] D. Anchishkin, V. Vovchenko, and L. P. Csernai, “Pionic freeze-out hypersurfaces in relativistic nucleus-nucleus collisions,” Physical Review C **87**, 014906 (2013), arXiv:1211.1927 [nucl-th].
- [4] D. Anchishkin, V. Vovchenko, and S. Yezhov, “Hadronic Reaction Zones in Relativistic Nucleus–Nucleus Collisions,” International Journal of Modern Physics E **22**, 1350042 (2013), arXiv:1302.6190 [nucl-th].
- [5] V. Vovchenko, D. Anchishkin, and L. P. Csernai, “Longitudinal fluctuations of the center of mass of the participants in heavy-ion collisions,” Physical Review C **88**, 014901 (2013), arXiv:1306.5208 [nucl-th].
- [6] V. Y. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, “System-size and energy dependence of particle momentum spectra: The UrQMD analysis of p + p and Pb + Pb collisions,” Physical Review C **90**, 024916 (2014), arXiv:1407.0629 [nucl-th].
- [7] V. Vovchenko, D. Anchishkin, and L. P. Csernai, “Time dependence of partition into spectators and participants in relativistic heavy-ion collisions,” Physical Review C **90**, 044907 (2014), arXiv:1407.4644 [nucl-th].
- [8] V. Y. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, “Mean transverse mass of hadrons in proton-proton reactions,” Nuclear Physics A **936**, 1 (2015), arXiv:1408.5493 [nucl-th].

- [9] D. Anchishkin and V. Vovchenko, “Mean-field approach in the multi-component gas of interacting particles applied to relativistic heavy-ion collisions,” *Journal of Physics G Nuclear Physics* **42**, 105102 (2015), arXiv:1411.1444 [nucl-th].
- [10] V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, “Hadron resonance gas equation of state from lattice QCD,” *Physical Review C* **91**, 024905 (2015), arXiv:1412.5478 [nucl-th].
- [11] R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, “Quantum van der Waals and Walecka models of nuclear matter,” *International Journal of Modern Physics E* **26**, 1750061 (2017), arXiv:1708.05605 [nucl-th].
- [12] D. Anchishkin, A. Muskeyev, V. Vovchenko, and S. Yezhov, “The space-time structure of relativistic nucleus-nucleus collisions,” in *Proceedings of the International School-seminar “New Physics and Quantum Chromodynamics at External Conditions”, Dnipropetrovsk, Ukraine, 3-6 May 2011*, pp. 5–12.
- [13] D. Anchishkin, A. Muskeyev, V. Vovchenko, and S. Yezhov, “Zone of reactions as a tool in studying the space-time structure of relativistic nucleus-nucleus collisions,” in *Book of abstracts of XX International School-Seminar of Galyna Puchkovska “Spectroscopy of Molecules and Crystals”, Beregove, Crimea, Ukraine, September 20-27, 2011*, p. 23.
- [14] В. Вовченко and Д. Анчишкін, “Гіперповерхні піонного фрїзауту в релятивістських ядро-ядерних зіткненнях,” in *Збірник тез Наукової конференції молодих учених «Наука XXI сторіччя», Київ, Україна, 15-16 травня, 2013*, pp. 5–6.
- [15] V. Vovchenko, D. Anchishkin, and L. Csernai, “Time dependence of partition into spectators and participants in relativistic heavy-ion collisions,” in *Book of abstracts of the VI Young scientists conference “Problems of Theoretical Physics”, Kyiv, Ukraine, November 25-27, 2014*, pp. 17–18.
- [16] V. Vovchenko, I. Kisel, and D. Anchishkin, “Event-by-event extraction of kinetic and chemical freeze-out properties in the CBM experiment,” in *Book*

of abstracts of the “Quark Matter 2015” conference, Kobe, Japan, September 27 – October 3, 2015, p. 137.

- [17] V. Vovchenko, “Critical fluctuations in models with van der Waals interactions,” in *Book of abstracts of the “Critical Point and Onset of Deconfinement 2016” conference, Wroclaw, Poland, May 30 – June 4, 2016*, pp. 5–6.
- [18] V. Vovchenko and H. Stoecker, “Analysis of hadron yield data within hadron resonance gas model with multi-component eigenvolume corrections,” in *Book of abstracts of the “Strangeness in Quark Matter 2016” conference, Berkeley, CA, USA, June 26 – July 1, 2016*, pp. 4–5.
- [19] L. P. Csernai, *Introduction to relativistic heavy ion collisions* (Wiley, New York, 1994).
- [20] K. Fukushima and T. Hatsuda, “The phase diagram of dense QCD,” *Reports on Progress in Physics* **74**, 014001 (2011), arXiv:1005.4814 [hep-ph].
- [21] J. Pochodzalla *et al.*, “Probing the Nuclear Liquid-Gas Phase Transition,” *Physical Review Letters* **75**, 1040 (1995).
- [22] J. B. Natowitz, K. Hagel, Y. Ma, M. Murray, L. Qin, R. Wada, and J. Wang, “Limiting Temperatures and the Equation of State of Nuclear Matter,” *Physical Review Letters* **89**, 212701 (2002), nucl-ex/0204015.
- [23] V. A. Karnaukhov *et al.*, “Critical temperature for the nuclear liquid-gas phase transition,” *Physical Review C* **67**, 011601 (2003), nucl-ex/0302006.
- [24] Y. Aoki, G. Endrődi, Z. Fodor, S. D. Katz, and K. K. Szabó, “The order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics,” *Nature* **443**, 675 (2006), hep-lat/0611014.
- [25] S. Borsányi, Z. Fodor, C. Hoelbling, S. D. Katz, S. Krieg, and K. K. Szabó, “Full result for the QCD equation of state with 2+1 flavors,” *Physics Letters B* **730**, 99 (2014), arXiv:1309.5258 [hep-lat].
- [26] A. Bazavov *et al.* (HotQCD Collaboration), “Equation of state in (2 + 1)-flavor QCD,” *Physical Review D* **90**, 094503 (2014), arXiv:1407.6387 [hep-lat].

- [27] C. Alt *et al.* (NA49 Collaboration), “Pion and kaon production in central Pb+Pb collisions at 20A and 30A GeV: Evidence for the onset of deconfinement,” *Physical Review C* **77**, 024903 (2008), arXiv:0710.0118 [nucl-ex].
- [28] J. Adams, M. M. Aggarwal, Z. Ahammed, J. Amonett, B. D. Anderson, D. Arkhipkin, G. S. Averichev, S. K. Badyal, Y. Bai, J. Balewski, and et al., “Experimental and theoretical challenges in the search for the quark–gluon plasma: The STAR Collaboration’s critical assessment of the evidence from RHIC collisions,” *Nuclear Physics A* **757**, 102 (2005).
- [29] A. Andronic, P. Braun-Munzinger, and J. Stachel, “Thermal hadron production in relativistic nuclear collisions: The hadron mass spectrum, the horn, and the QCD phase transition,” *Physics Letters B* **673**, 142 (2009), arXiv:0812.1186 [nucl-th].
- [30] J. Randrup and J. Cleymans, “Maximum freeze-out baryon density in nuclear collisions,” *Physical Review C* **74**, 047901 (2006), hep-ph/0607065.
- [31] J. Cleymans and H. Satz, “Thermal hadron production in high energy heavy ion collisions,” *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields* **57**, 135 (1993), hep-ph/9207204.
- [32] J. Cleymans and K. Redlich, “Unified Description of Freeze-Out Parameters in Relativistic Heavy Ion Collisions,” *Physical Review Letters* **81**, 5284 (1998), nucl-th/9808030.
- [33] J. Cleymans and K. Redlich, “Chemical and thermal freeze-out parameters from 1A to 200A GeV,” *Physical Review C* **60**, 054908 (1999), nucl-th/9903063.
- [34] A. Andronic, P. Braun-Munzinger, and J. Stachel, “Hadron production in central nucleus nucleus collisions at chemical freeze-out,” *Nuclear Physics A* **772**, 167 (2006), nucl-th/0511071.
- [35] J. Letessier and J. Rafelski, “Hadron production and phase changes in relativistic heavy-ion collisions,” *European Physical Journal A* **35**, 221 (2008), nucl-th/0504028.

- [36] H. Sorge, H. Stöcker, and W. Greiner, “Poincaré invariant Hamiltonian dynamics: Modelling multi-hadronic interactions in a phase space approach,” *Annals of Physics* **192**, 266 (1989).
- [37] S. A. Bass *et al.*, “Microscopic models for ultrarelativistic heavy ion collisions,” *Progress in Particle and Nuclear Physics* **41**, 225 (1998), nucl-th/9803035.
- [38] M. Bleicher *et al.*, “Relativistic hadron-hadron collisions in the ultra-relativistic quantum molecular dynamics model,” *Journal of Physics G Nuclear Physics* **25**, 1859 (1999), hep-ph/9909407.
- [39] W. Cassing and E. L. Bratkovskaya, “Hadronic and electromagnetic probes of hot and dense nuclear matter,” *Physics Reports* **308**, 65 (1999).
- [40] W. Cassing and E. L. Bratkovskaya, “Parton transport and hadronization from the dynamical quasiparticle point of view,” *Physical Review C* **78**, 034919 (2008), arXiv:0808.0022 [hep-ph].
- [41] W. Cassing and E. L. Bratkovskaya, “Parton-hadron-string dynamics: An off-shell transport approach for relativistic energies,” *Nuclear Physics A* **831**, 215 (2009), arXiv:0907.5331 [nucl-th].
- [42] Z. Xu and C. Greiner, “Thermalization of gluons in ultrarelativistic heavy ion collisions by including three-body interactions in a parton cascade,” *Physical Review C* **71**, 064901 (2005), hep-ph/0406278.
- [43] Z.-W. Lin, C. M. Ko, B.-A. Li, B. Zhang, and S. Pal, “Multiphase transport model for relativistic heavy ion collisions,” *Physical Review C* **72**, 064901 (2005), nucl-th/0411110.
- [44] Y. Nara, N. Otuka, A. Ohnishi, K. Niita, and S. Chiba, “Relativistic nuclear collisions at 10A GeV energies from p+Be to Au+Au with the hadronic cascade model,” *Physical Review C* **61**, 024901 (2000), nucl-th/9904059.
- [45] B. Nilsson-Almqvist and E. Stenlund, “Interactions between hadrons and nuclei: The Lund Monte Carlo - FRITIOF version 1.6,” *Computer Physics Communications* **43**, 387 (1987).

- [46] T. Sjöstrand, S. Mrenna, and P. Skands, “PYTHIA 6.4 physics and manual,” *Journal of High Energy Physics* **5**, 026 (2006), hep-ph/0603175.
- [47] P. F. Kolb and U. Heinz, “Hydrodynamic description of ultrarelativistic heavy-ion collisions,” *Quark Gluon Plasma 3*, 634 (2004), nucl-th/0305084.
- [48] P. Huovinen and P. V. Ruuskanen, “Hydrodynamic Models for Heavy Ion Collisions,” *Annual Review of Nuclear and Particle Science* **56**, 163 (2006), nucl-th/0605008.
- [49] L. P. Csernai, J. I. Kapusta, and L. D. McLerran, “Strongly Interacting Low-Viscosity Matter Created in Relativistic Nuclear Collisions,” *Physical Review Letters* **97**, 152303 (2006), nucl-th/0604032.
- [50] W. Israel and J. Stewart, “Transient relativistic thermodynamics and kinetic theory,” *Annals of Physics* **118**, 341 (1979).
- [51] G. S. Denicol, H. Niemi, E. Molnár, and D. H. Rischke, “Derivation of transient relativistic fluid dynamics from the Boltzmann equation,” *Physical Review D* **85**, 114047 (2012), arXiv:1202.4551 [nucl-th].
- [52] M. Martinez and M. Strickland, “Dissipative dynamics of highly anisotropic systems,” *Nuclear Physics A* **848**, 183 (2010), arXiv:1007.0889 [nucl-th].
- [53] W. Florkowski and R. Ryblewski, “Highly anisotropic and strongly dissipative hydrodynamics for early stages of relativistic heavy-ion collisions,” *Physical Review C* **83**, 034907 (2011), arXiv:1007.0130 [nucl-th].
- [54] M. Martinez, R. Ryblewski, and M. Strickland, “Boost-invariant (2+1)-dimensional anisotropic hydrodynamics,” *Physical Review C* **85**, 064913 (2012), arXiv:1204.1473 [nucl-th].
- [55] Л. Д. Ландау, “О множественном образовании частиц при столкновениях быстрых частиц,” *Известия АН СССР, сер. физическая* **17**, 51 (1953).
- [56] G. D. Westfall, J. Gosset, P. J. Johansen, A. M. Poskanzer, W. G. Meyer, H. H. Gutbrod, A. Sandoval, and R. Stock, “Nuclear Fireball Model for Proton

- Inclusive Spectra from Relativistic Heavy-Ion Collisions,” *Physical Review Letters* **37**, 1202 (1976).
- [57] J. D. Bjorken, “Highly relativistic nucleus-nucleus collisions: The central rapidity region,” *Physical Review D* **27**, 140 (1983).
- [58] H. Song and U. Heinz, “Causal viscous hydrodynamics in 2 + 1 dimensions for relativistic heavy-ion collisions,” *Physical Review C* **77**, 064901 (2008), arXiv:0712.3715 [nucl-th].
- [59] B. Schenke, S. Jeon, and C. Gale, “(3+1)D hydrodynamic simulation of relativistic heavy-ion collisions,” *Physical Review C* **82**, 014903 (2010), arXiv:1004.1408 [hep-ph].
- [60] I. Karpenko, P. Huovinen, and M. Bleicher, “A 3+1 dimensional viscous hydrodynamic code for relativistic heavy ion collisions,” *Computer Physics Communications* **185**, 3016 (2014), arXiv:1312.4160 [nucl-th].
- [61] C. Shen, Z. Qiu, H. Song, J. Bernhard, S. Bass, and U. Heinz, “The iEBE-VISHNU code package for relativistic heavy-ion collisions,” *ArXiv e-prints* (2014), arXiv:1409.8164 [nucl-th].
- [62] R. J. Glauber, *Lectures in theoretical physics*, Vol. 1 (Interscience, New York, 1959).
- [63] А. Г. Ситенко, “К теории ядерных реакций с участием сложных частиц,” *Украинский физический журнал* **4**, 152 (1959).
- [64] A. Bialas, M. Bleszyński, and W. Czyż, “Multiplicity distributions in nucleus-nucleus collisions at high energies,” *Nuclear Physics B* **111**, 461 (1976).
- [65] M. L. Miller, K. Reygers, S. J. Sanders, and P. Steinberg, “Glauber Modeling in High-Energy Nuclear Collisions,” *Annual Review of Nuclear and Particle Science* **57**, 205 (2007), nucl-ex/0701025.
- [66] L. McLerran and R. Venugopalan, “Computing quark and gluon distribution functions for very large nuclei,” *Physical Review D* **49**, 2233 (1994), hep-ph/9309289.

- [67] L. McLerran and R. Venugopalan, “Gluon distribution functions for very large nuclei at small transverse momentum,” *Physical Review D* **49**, 3352 (1994), hep-ph/9311205.
- [68] F. Gelis and R. Venugopalan, “Particle production in field theories coupled to strong external sources, I: Formalism and main results,” *Nuclear Physics A* **776**, 135 (2006), hep-ph/0601209.
- [69] F. Gelis, E. Iancu, J. Jalilian-Marian, and R. Venugopalan, “The Color Glass Condensate,” *Annual Review of Nuclear and Particle Science* **60**, 463 (2010), arXiv:1002.0333 [hep-ph].
- [70] B. Schenke, P. Tribedy, and R. Venugopalan, “Fluctuating Glasma Initial Conditions and Flow in Heavy Ion Collisions,” *Physical Review Letters* **108**, 252301 (2012), arXiv:1202.6646 [nucl-th].
- [71] D. Teaney, J. Lauret, and E. Shuryak, “A Hydrodynamic description of heavy ion collisions at the SPS and RHIC,” arXiv (2001), arXiv:nucl-th/0110037 [nucl-th].
- [72] H. Petersen, J. Steinheimer, G. Burau, M. Bleicher, and H. Stöcker, “Fully integrated transport approach to heavy ion reactions with an intermediate hydrodynamic stage,” *Physical Review C* **78**, 044901 (2008), arXiv:0806.1695 [nucl-th].
- [73] F. Cooper and G. Frye, “Single-particle distribution in the hydrodynamic and statistical thermodynamic models of multiparticle production,” *Physical Review D* **10**, 186 (1974).
- [74] L. V. Bravina, I. N. Mishustin, N. S. Amelin, J. P. Bondorf, and L. P. Csernai, “Freeze-out in relativistic heavy ion collisions at AGS energies,” *Physics Letters B* **354**, 196 (1995).
- [75] L. V. Bravina, I. N. Mishustin, J. P. Bondorf, A. Faessler, and E. E. Zabrodin, “Microscopic study of freeze-out in relativistic heavy-ion collisions at 160A GeV/c energy,” *Physical Review C* **60**, 044905 (1999), nucl-th/9907061.



- [76] S. A. Bass, A. Dumitru, M. Bleicher, L. Bravina, E. Zabrodin, H. Stöcker, and W. Greiner, “Hadronic freeze-out following a first order hadronization phase transition in ultrarelativistic heavy-ion collisions,” *Physical Review C* **60**, 021902 (1999), nucl-th/9902062.
- [77] M. Gazdzicki and NA61/SHINE Collaboration, “Ion program of NA61/SHINE at the CERN SPS,” *Journal of Physics G Nuclear Physics* **36**, 064039 (2009), arXiv:0812.4415 [nucl-ex].
- [78] N. Abgrall *et al.* (NA61/SHINE Collaboration), “NA61/SHINE facility at the CERN SPS: beams and detector system,” *Journal of Instrumentation* **9**, P06005 (2014), arXiv:1401.4699 [physics.ins-det].
- [79] G. S. F. Stephans, “critRHIC: the RHIC low energy program,” *Journal of Physics G Nuclear Physics* **32**, 447 (2006), nucl-ex/0607030.
- [80] G. Odyniec, “RHIC Beam Energy Scan Program: Phase I and II,” *PoS CPOD2013*, 043 (2013).
- [81] S. V. Afanasiev *et al.* (NA49 Collaboration), “Energy dependence of pion and kaon production in central Pb+Pb collisions,” *Physical Review C* **66**, 054902 (2002), nucl-ex/0205002.
- [82] C. Alt *et al.* (NA49 Collaboration), “Energy and centrality dependence of  $\bar{p}$  and p production and the  $\bar{\Lambda}/\bar{p}$  ratio in Pb+Pb collisions between 20A GeV and 158A GeV,” *Physical Review C* **73**, 044910 (2006).
- [83] M. Gazdzicki and M. I. Gorenstein, “On the Early Stage of Nucleus-Nucleus Collisions,” *Acta Physica Polonica B* **30**, 2705 (1999), hep-ph/9803462.
- [84] M. Gazdzicki, M. Gorenstein, and P. Seyboth, “Onset of deconfinement in nucleus-nucleus collisions: Review for pedestrians and experts,” *Acta Physica Polonica B* **42**, 307 (2011), arXiv:1006.1765 [hep-ph].
- [85] M. Gazdzicki, M. I. Gorenstein, and P. Seyboth, “Recent developments in the study of deconfinement in nucleus-nucleus collisions,” *International Journal of Modern Physics E* **23**, 1430008 (2014), arXiv:1404.3567 [nucl-ex].

- [86] B. Friman, C. Hohne, J. Knoll, S. Leupold, J. Randrup, *et al.*, “The CBM physics book: Compressed baryonic matter in laboratory experiments,” *Lect.Notes Phys.* **814**, 1 (2011).
- [87] P. Senger, “The compressed baryonic matter experiment at FAIR,” *Central European Journal of Physics* **10**, 1289 (2012).
- [88] N. Abgrall *et al.* (NA61/SHINE Collaboration), “Measurement of negatively charged pion spectra in inelastic p+p interactions at 20, 31, 40, 80 and 158 GeV/c,” *European Physical Journal C* **74**, 2794 (2014), arXiv:1310.2417 [hep-ex].
- [89] W. Broniowski and W. Florkowski, “Geometric relation between centrality and the impact parameter in relativistic heavy-ion collisions,” *Physical Review C* **65**, 024905 (2002), nucl-th/0110020.
- [90] V. P. Konchakovski, M. I. Gorenstein, E. L. Bratkovskaya, and W. Greiner, “Fluctuations and correlations in nucleus-nucleus collisions within transport models,” *Journal of Physics G Nuclear Physics* **37**, 073101 (2010), arXiv:1001.3085 [nucl-th].
- [91] A. I. Golokhvastov, “Koba-Nielsen-Olesen Scaling in Isospin-Coupled Reactions,” *Physics of Atomic Nuclei* **64**, 1841 (2001).
- [92] M. Gaździcki, M. I. Gorenstein, and S. Mrówczyński, “Pion suppression in nuclear collisions,” *European Physical Journal C* **5**, 129 (1998), nucl-th/9701013.
- [93] H. Strobele (NA49 Collaboration), “Baryon stopping in 40 and 158 GeV/nucleon Pb+Pb collisions,” *PoS CPOD2009*, 044 (2009), arXiv:0908.2777 [nucl-ex].
- [94] V. Uzhinsky, “Toward UrQMD Model Description of pp and pC Interactions at High Energies,” *ArXiv e-prints* (2013), arXiv:1308.0736 [hep-ph].
- [95] V. Uzhinsky, “Toward Description of  $pp$  and  $p\{\rm C\}$  Interactions at

- High Energies: Problems of Fritiof-based Models,” ArXiv e-prints (2014), arXiv:1404.2026 [hep-ph].
- [96] M. Mitrovski, T. Schuster, G. Gräf, H. Petersen, and M. Bleicher, “Charged-particle (pseudo-)rapidity distributions in p+ pmacr /p+p and Pb+Pb/Au+Au collisions from UrQMD calculations at energies available at the CERN Super Proton Synchrotron to the Large Hadron Collider,” *Physical Review C* **79**, 044901 (2009), arXiv:0812.2041 [hep-ph].
- [97] K. Dey and B. Bhattacharjee, “Separate mass scaling of the widths of the rapidity distributions for mesons and baryons at energies available at the Facility for Antiproton and Ion Research,” *Physical Review C* **89**, 054910 (2014), arXiv:1303.7347 [hep-ph].
- [98] S. Pulawski (NA61/SHINE), “Identified hadron spectra in p+p interactions at 20, 31, 40, 80 and 158 GeV/c from NA61/SHINE at the CERN SPS,” *PoS CPOD2013*, 056 (2013).
- [99] H. Petersen, M. Bleicher, S. A. Bass, and H. Stöcker, “UrQMD-2.3 - Changes and Comparisons,” ArXiv e-prints (2008), arXiv:0805.0567 [hep-ph].
- [100] A. M. Rossi, G. Vannini, A. Bussière, E. Albini, D. D’Alessandro, and G. Giacomelli, “Experimental study of the energy dependence in proton-proton inclusive reactions,” *Nuclear Physics B* **84**, 269 (1975).
- [101] L. van Hove, “Multiplicity dependence of  $p_t$  spectrum as a possible signal for a phase transition in hadronic collisions,” *Physics Letters B* **118**, 138 (1982).
- [102] C. M. Hung and E. V. Shuryak, “Hydrodynamics near the QCD phase transition: Looking for the longest-lived fireball,” *Physical Review Letters* **75**, 4003 (1995), hep-ph/9412360.
- [103] M. I. Gorenstein, M. Gaździcki, and K. A. Bugaev, “Transverse activity of kaons and deconfinement phase transition in nucleus-nucleus collisions,” *Physics Letters B* **567**, 175 (2003), hep-ph/0303041.

- [104] W. Ehehalt and W. Cassing, “Relativistic transport approach for nucleus-nucleus collisions from SIS to SPS energies,” *Nuclear Physics A* **602**, 449 (1996), hep-ph/9507274.
- [105] J. Geiss, W. Cassing, and C. Greiner, “Strangeness production in the HSD transport approach from SIS to SPS energies,” *Nuclear Physics A* **644**, 107 (1998), nucl-th/9805012.
- [106] P. F. Kolb, P. Huovinen, U. Heinz, and H. Heiselberg, “Elliptic flow at SPS and RHIC: from kinetic transport to hydrodynamics,” *Physics Letters B* **500**, 232 (2001), hep-ph/0012137.
- [107] P. F. Kolb, U. Heinz, P. Huovinen, K. J. Eskola, and K. Tuominen, “Centrality dependence of multiplicity, transverse energy, and elliptic flow from hydrodynamics,” *Nuclear Physics A* **696**, 197 (2001), hep-ph/0103234.
- [108] H. Holopainen, H. Niemi, and K. J. Eskola, “Event-by-event hydrodynamics and elliptic flow from fluctuating initial states,” *Physical Review C* **83**, 034901 (2011), arXiv:1007.0368 [hep-ph].
- [109] B. Schenke, S. Jeon, and C. Gale, “Elliptic and Triangular Flow in Event-by-Event  $D=3+1$  Viscous Hydrodynamics,” *Physical Review Letters* **106**, 042301 (2011), arXiv:1009.3244 [hep-ph].
- [110] Z. Qiu and U. Heinz, “Event-by-event shape and flow fluctuations of relativistic heavy-ion collision fireballs,” *Physical Review C* **84**, 024911 (2011), arXiv:1104.0650 [nucl-th].
- [111] W. Broniowski, P. Bożek, and M. Rybczyński, “Fluctuating initial conditions in heavy ion collisions from the Glauber approach,” *Physical Review C* **76**, 054905 (2007), arXiv:0706.4266 [nucl-th].
- [112] B. Alver and G. Roland, “Collision-geometry fluctuations and triangular flow in heavy-ion collisions,” *Physical Review C* **81**, 054905 (2010), arXiv:1003.0194 [nucl-th].

- [113] E. Retinskaya, M. Luzum, and J.-Y. Ollitrault, “Constraining models of initial conditions with elliptic and triangular flow data,” *Physical Review C* **89**, 014902 (2014), arXiv:1311.5339 [nucl-th].
- [114] T. Renk and H. Niemi, “Constraints from  $v_2$  fluctuations for the initial-state geometry of heavy-ion collisions,” *Physical Review C* **89**, 064907 (2014), arXiv:1401.2069 [nucl-th].
- [115] J. I. Kapusta, “Equation of state and phase fluctuations near the chiral critical point,” *Physical Review C* **81**, 055201 (2010), arXiv:1001.3650 [nucl-th].
- [116] J. I. Kapusta, B. Müller, and M. Stephanov, “Relativistic theory of hydrodynamic fluctuations with applications to heavy-ion collisions,” *Physical Review C* **85**, 054906 (2012), arXiv:1112.6405 [nucl-th].
- [117] J. I. Kapusta, B. Müller, and M. Stephanov, “Hydrodynamic noise and Bjorken expansion,” *Nuclear Physics A* **904**, 499 (2013), arXiv:1211.3370 [nucl-th].
- [118] J.-P. Blaizot, W. Broniowski, and J.-Y. Ollitrault, “Correlations in the Monte Carlo Glauber model,” *Physical Review C* **90**, 034906 (2014), arXiv:1405.3274 [nucl-th].
- [119] B. Abelev *et al.* (ALICE Collaboration), “Centrality determination of Pb-Pb collisions at  $\sqrt{s_{NN}}=2.76$  TeV with ALICE,” *Physical Review C* **88**, 044909 (2013), arXiv:1301.4361 [nucl-ex].
- [120] D. Anchishkin, A. Muskeyev, and S. Yezhov, “Relativistic nucleus-nucleus collisions: Zone of reactions and space-time structure of fireball,” *Physical Review C* **81**, 031902 (2010), arXiv:0908.1723 [nucl-th].
- [121] F. Becattini, F. Piccinini, and J. Rizzo, “Angular momentum conservation in heavy ion collisions at very high energy,” *Physical Review C* **77**, 024906 (2008), arXiv:0711.1253 [nucl-th].
- [122] J.-H. Gao, S.-W. Chen, W.-T. Deng, Z.-T. Liang, Q. Wang, and X.-N. Wang, “Global quark polarization in noncentral A+A collisions,” *Physical Review C* **77**, 044902 (2008), arXiv:0710.2943 [nucl-th].

- [123] L. P. Csernai, V. K. Magas, H. Stöcker, and D. D. Strottman, “Fluid dynamical prediction of changed  $v_1$  flow at energies available at the CERN Large Hadron Collider,” *Physical Review C* **84**, 024914 (2011), arXiv:1101.3451 [nucl-th].
- [124] L. P. Csernai, D. D. Strottman, and C. Anderlik, “Kelvin-Helmholtz instability in high-energy heavy-ion collisions,” *Physical Review C* **85**, 054901 (2012), arXiv:1112.4287 [nucl-th].
- [125] L. P. Csernai, V. K. Magas, and D. J. Wang, “Flow vorticity in peripheral high-energy heavy-ion collisions,” *Physical Review C* **87**, 034906 (2013), arXiv:1302.5310 [nucl-th].
- [126] L. P. Csernai, D. J. Wang, M. Bleicher, and H. Stöcker, “Vorticity in peripheral collisions at the Facility for Antiproton and Ion Research and at the JINR Nuclotron-based Ion Collider Facility,” *Physical Review C* **90**, 021904 (2014).
- [127] F. Becattini, L. P. Csernai, and D. J. Wang, “ $\Lambda$  polarization in peripheral heavy ion collisions,” *Physical Review C* **88**, 034905 (2013), arXiv:1304.4427 [nucl-th].
- [128] L. P. Csernai and S. Velle, “Differential HBT Method to Analyze Rotation,” *ArXiv e-prints* (2013), arXiv:1305.0385 [nucl-th].
- [129] L. P. Csernai, S. Velle, and D. J. Wang, “New method to detect rotation in high-energy heavy-ion collisions,” *Physical Review C* **89**, 034916 (2014), arXiv:1305.0396 [nucl-th].
- [130] L. P. Csernai and S. Velle, “Study of rotating high energy systems with the differential HBT method,” *International Journal of Modern Physics E* **23**, 1450043 (2014), arXiv:1405.7283 [nucl-th].
- [131] E. Molnár, H. Niemi, and D. H. Rischke, “Numerical tests of causal relativistic dissipative fluid dynamics,” *European Physical Journal C* **65**, 615 (2010), arXiv:0907.2583 [nucl-th].
- [132] V. K. Magas, L. P. Csernai, and D. D. Strottman, “Initial state of ultrarelativistic heavy ion collisions,” *Physical Review C* **64**, 014901 (2001), hep-ph/0010307.

- [133] V. K. Magas, L. P. Csernai, and D. Strottman, “Effective string rope model for the initial stages of ultra-relativistic heavy ion collisions,” *Nuclear Physics A* **712**, 167 (2002), hep-ph/0202085.
- [134] L. P. Csernai, G. Eyyubova, and V. K. Magas, “New method for measuring longitudinal fluctuations and directed flow in ultrarelativistic heavy ion reactions,” *Physical Review C* **86**, 024912 (2012), arXiv:1204.5885 [hep-ph].
- [135] A. Bzdak and D. Teaney, “Longitudinal fluctuations of the fireball density in heavy-ion collisions,” *Physical Review C* **87**, 024906 (2013), arXiv:1210.1965 [nucl-th].
- [136] H. Petersen, “Initial-state fluctuations at the RHIC and the LHC in event-by-event ideal hydrodynamics,” *Journal of Physics G Nuclear Physics* **38**, 124122 (2011).
- [137] L. Pang, Q. Wang, and X.-N. Wang, “Effects of initial flow velocity fluctuation in event-by-event (3+1)D hydrodynamics,” *Physical Review C* **86**, 024911 (2012), arXiv:1205.5019 [nucl-th].
- [138] J. Beringer *et al.* (Particle Data Group), “Review of Particle Physics (RPP),” *Physical Review D* **86**, 010001 (2012).
- [139] G. Antchev *et al.* (TOTEM Collaboration), “First measurement of the total proton-proton cross-section at the LHC energy of  $\sqrt{s} = 7$  TeV,” *EPL (Europhysics Letters)* **96**, 21002 (2011), arXiv:1110.1395 [hep-ex].
- [140] V. P. Konchakovski, B. Lungwitz, M. I. Gorenstein, and E. L. Bratkovskaya, “Multiplicity fluctuations in nucleus-nucleus collisions: Dependence on energy and atomic mass number,” *Physical Review C* **78**, 024906 (2008), arXiv:0712.2044 [nucl-th].
- [141] Y. Cheng, Y.-L. Yan, D.-M. Zhou, X. Cai, B.-H. Sa, and L. P. Csernai, “Longitudinal fluctuations in the partonic and hadronic initial state,” *Physical Review C* **84**, 034911 (2011), arXiv:1106.3371 [hep-ph].

- [142] D. Anchishkin, V. Naboka, and J. Cleymans, “Nonequilibrium distribution functions of nucleons in relativistic nucleus-nucleus collisions,” *Condensed Matter Physics* **16**, 13201 (2013).
- [143] F. Becattini and J. Manninen, “Strangeness production from SPS to LHC,” *Journal of Physics G Nuclear Physics* **35**, 104013 (2008), arXiv:0805.0098 [nucl-th].
- [144] F. Becattini and J. Manninen, “Centrality dependence of strangeness production in heavy-ion collisions as a geometrical effect of core-corona superposition,” *Physics Letters B* **673**, 19 (2009), arXiv:0811.3766 [nucl-th].
- [145] J. Aichelin and K. Werner, “Centrality dependence of strangeness enhancement in ultrarelativistic heavy ion collisions: A core-corona effect,” *Physical Review C* **79**, 064907 (2009), arXiv:0810.4465 [nucl-th].
- [146] S. Acharya *et al.* (ALICE Collaboration), “Longitudinal asymmetry and its effect on pseudorapidity distributions in Pb-Pb collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV,” *Physics Letters B* **781**, 20 (2018), arXiv:1710.07975 [nucl-ex].
- [147] F. Becattini, J. Cleymans, A. Keränen, E. Suhonen, and K. Redlich, “Features of particle multiplicities and strangeness production in central heavy ion collisions between 1.7A and 158A GeV/c,” *Physical Review C* **64**, 024901 (2001), hep-ph/0002267.
- [148] P. Braun-Munzinger, D. Magestro, K. Redlich, and J. Stachel, “Hadron production in Au-Au collisions at RHIC,” *Physics Letters B* **518**, 41 (2001), hep-ph/0105229.
- [149] F. Becattini, M. Gaździcki, A. Keränen, J. Manninen, and R. Stock, “Chemical equilibrium study in nucleus-nucleus collisions at relativistic energies,” *Physical Review C* **69**, 024905 (2004), hep-ph/0310049.
- [150] R. Dashen, S.-K. Ma, and H. J. Bernstein, “S-Matrix Formulation of Statistical Mechanics,” *Physical Review* **187**, 345 (1969).



- [151] R. Hagedorn, "The Pressure Ensemble as a Tool for Describing the Hadron - Quark Phase Transition," *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields* **17**, 265 (1983).
- [152] R. Hagedorn and J. Rafelski, "Hot hadronic matter and nuclear collisions," *Physics Letters B* **97**, 136 (1980).
- [153] J. Cleymans and E. Suhonen, "Influence of Hadronic Hard Core Radius on Detonations and Deflagrations in Quark Matter," *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields* **37**, 51 (1987).
- [154] M. I. Gorenstein, V. K. Petrov, and G. M. Zinovjev, "Phase transition in the hadron gas model," *Physics Letters B* **106**, 327 (1981).
- [155] D. H. Rischke, M. I. Gorenstein, H. Stoecker, and W. Greiner, "Excluded volume effect for the nuclear matter equation of state," *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields* **51**, 485 (1991).
- [156] S. Uddin and C. Singh, "Equation of state of finite size hadrons: Thermodynamical consistency," *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields* **63**, 147 (1994).
- [157] J. D. Walecka, "A theory of highly condensed matter." *Annals of Physics* **83**, 491 (1974).
- [158] B. D. Serot and J. D. Walecka, "Recent Progress in Quantum Hadrodynamics," *International Journal of Modern Physics E* **6**, 515 (1997), nucl-th/9701058.
- [159] D. Anchishkin, "Particle finite size effects as mean field approximation," *Soviet Physics - JETP* **75**, 195 (1992).
- [160] D. Anchishkin and E. Suhonen, "Generalization of mean-field models to account for effects of excluded volume," *Nuclear Physics A* **586**, 734 (1995).
- [161] V. K. Tiwari, K. Singh, N. Prasad, and G. Singh, "Mean field model with excluded volume correction for a multicomponent hadron gas," *Nuclear Physics A* **637**, 159 (1998).

- [162] V. K. Tiwari, N. Prasad, and C. P. Singh, “Excluded volume in mean-field formalism and kaon condensation,” *Physical Review C* **58**, 439 (1998).
- [163] M. I. Gorenstein, “Examination of the thermodynamical consistency of excluded-volume hadron gas models,” *Physical Review C* **86**, 044907 (2012), arXiv:1205.1762 [nucl-th].
- [164] K. A. Olive, “The Thermodynamics of the Quark - Hadron Phase Transition in the Early Universe,” *Nuclear Physics B* **190**, 483 (1981).
- [165] B. Waldhauser, J. Maruhn, H. Stoecker, and W. Greiner, “Nuclear equation of state from the nonlinear relativistic mean field theory,” *Physical Review C* **38**, 1003 (1988).
- [166] J. E. Mayer and M. G. Mayer, *Statistical mechanics* (John Wiley and Sons, Inc., New York, 1977).
- [167] Ф. М. Куни, *Статистическая физика и термодинамика* (Наука, Москва, 1981) p. 352.
- [168] T. S. Biró, A. A. Shanenko, and V. D. Toneev, “Toward thermodynamic consistency of quasiparticle picture,” *Physics of Atomic Nuclei* **66**, 982 (2003), nucl-th/0102027.
- [169] N. F. Carnahan and K. E. Starling, “Equation of State for Nonattracting Rigid Spheres,” *The Journal of Chemical Physics* **51**, 635 (1969).
- [170] G.-W. Wu and R. J. Sadus, “Hard sphere compressibility factors for equation of state development,” *AIChE Journal* **51**, 309 (2005).
- [171] G. D. Yen, M. I. Gorenstein, W. Greiner, and S. N. Yang, “Excluded volume hadron gas model for particle number ratios in A+A collisions,” *Physical Review C* **56**, 2210 (1997), nucl-th/9711062.
- [172] G. D. Yen and M. I. Gorenstein, “Analysis of particle multiplicities in Pb+Pb collisions at 158A GeV/c within hadron gas models,” *Physical Review C* **59**, 2788 (1999), nucl-th/9808012.

- [173] M. I. Gorenstein, A. P. Kostyuk, and Y. D. Krivenko, “Van der Waals excluded-volume model of multicomponent hadron gas,” *Journal of Physics G Nuclear Physics* **25**, L75 (1999), nucl-th/9906068.
- [174] S. Wheaton, J. Cleymans, and M. Hauer, “THERMUS - A thermal model package for ROOT,” *Computer Physics Communications* **180**, 84 (2009), hep-ph/0407174.
- [175] J. Cleymans, H. Oeschler, K. Redlich, and S. Wheaton, “Comparison of chemical freeze-out criteria in heavy-ion collisions,” *Physical Review C* **73**, 034905 (2006), hep-ph/0511094.
- [176] F. Becattini, J. Manninen, and M. Gaździcki, “Energy and system size dependence of chemical freeze-out in relativistic nuclear collisions,” *Physical Review C* **73**, 044905 (2006), hep-ph/0511092.
- [177] V. V. Begun, M. Gaździcki, and M. I. Gorenstein, “Hadron-resonance gas at freeze-out: Reminder on the importance of repulsive interactions,” *Physical Review C* **88**, 024902 (2013), arXiv:1208.4107 [nucl-th].

# Додатки

## А Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

### А.1 Список публікацій за темою дисертації

1. Д. Анчишкін, А. Мускеєв, В. Вовченко, and С. Єжов, Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика **29**, 124 (2011).
2. D. V. Anchishkin, A. O. Muskeyev, V. Y. Vovchenko, and S. N. Yezhov, Problems of Atomic Science and Technology **77**, 115 (2012).
3. D. Anchishkin, V. Vovchenko, and L. P. Csernai, Physical Review C **87**, 014906 (2013).
4. D. Anchishkin, V. Vovchenko, and S. Yezhov, International Journal of Modern Physics E **22**, 1350042 (2013).
5. V. Vovchenko, D. Anchishkin, and L. P. Csernai, Physical Review C **88**, 014901 (2013).
6. V. Y. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, Physical Review C **90**, 024916 (2014).
7. V. Vovchenko, D. Anchishkin, and L. P. Csernai, Physical Review C **90**, 044907 (2014).
8. V. Y. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, Nuclear Physics A **936**, 1 (2015).
9. D. Anchishkin and V. Vovchenko, Journal of Physics G Nuclear Physics **42**, 105102 (2015).
10. V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, Physical Review C **91**, 024905 (2015).
11. R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, International Journal of Modern Physics E **26**, 1750061 (2017).

## **A.2 Апробація результатів дисертації**

1. Наукова конференція молодих вчених «Наука XXI сторіччя», Київ, Україна, 12-14 травня 2010 (стендова доповідь)
2. International School-Seminar «New Physics and Quantum Chromodynamics at External Conditions», Dnipropetrovsk, Ukraine, 3-6 May 2011 (усна доповідь)
3. Наукова конференція студентів, аспірантів та молодих учених «Сучасні проблеми фізики», Київ, Україна, 11-13 травня 2011 (стендова доповідь)
4. XX International School-Seminar of Galyna Puchkovska «Spectroscopy of Molecules and Crystals», Beregove, Ukraine, 22-29 September 2011 (усна доповідь)
5. Наукова конференція молодих учених «Наука XXI сторіччя», Київ, Україна, 15-16 травня 2013 (усна доповідь)
6. 24th CBM Collaboration Meeting, Krakow, Poland, 8-12 September 2014 (усна доповідь)
7. VI Young scientists conference “Problems of Theoretical Physics” dedicated to the 105-th anniversary of M.M. Bogolyubov, Kyiv, Ukraine, 25-27 November 2014 (усна доповідь)
8. 26th CBM Collaboration Meeting, Prague, Czech Republic, 14-18 September 2015 (усна доповідь)
9. Critical Point and Onset of Deconfinement 2016, 30 May-4 June 2016, Wroclaw, Poland (усна доповідь)
10. Strangeness in Quark Matter 2016, 26 June - 1 July 2016, Berkeley, CA, USA (усна доповідь)