

Національна академія наук України
Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова
Національна академія наук України
Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Вахненко Олексій Олексійович

УДК
538.977;534.182;531.395;
517.962.24;530.182.1

Дисертація

Нелінійна динаміка багатокomпонентних структурованих низьковимірних систем

01.04.02 теоретична фізика
Природничі науки
(104 фізика та астрономія)

Подається
на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук.
Дисертація містить результати власних досліджень.
Використання ідей, результатів і текстів інших авторів
мають посилання на відповідні джерела.

О.О. Вахненко

Київ 2019

Зміст

Зміст	3
Анотація	9
Списки наукових праць здобувача за темою дисертації	16
Список наукових праць, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації	16
Список наукових праць, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації	19
Abstract	22
Lists of scientific publications on the subject of dissertation	28
List of publications containing the main scientific results of dissertation .	28
List of publications presenting the results of dissertation on scientific conferences	31
Вступ	34
Обґрунтування вибору теми досліджень	34
Мета і завдання досліджень	37
Методи досліджень	40
Наукова новизна здобутих результатів	42
Особистий внесок здобувача	44
Апробація матеріалів дисертації	45
Структура та обсяг дисертації	46
Зв'язок дисертаційної роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами	47

Практичне значення здобутих результатів	48
Публікації	48
1	49
Гістереза та повільна динаміка нелінійного резонансного відгуку осадових порід	49
1.1 Експериментальні передумови для побудови моделі м'якої хлипавки	49
1.2 Підсистема повздовжніх зміщень пісковикового стрижня [205, 206, 222]	51
1.3 Підсистема пошкоджених когезійних зв'язків [204, 205, 206, 222]	53
1.4 Кінетика м'якої хлипавки для стрижня з альтерновним рушієм [204, 205, 222]	60
1.5 Примусові повздовжні коливання пісковикового стрижня. Модельні відтворювання реальних експериментів [204, 205, 206, 222]	67
1.6 Динамічний ефект дискретної пам'яті. Теоретичне передбачення [205] та експеримент [211, 222, 207, 210]	84
1.7 Підсумки	86
2	89
Солітоноподібні збудження в збурених квазіодновимірних ґратках	89
2.1 Проблема коректного вибору польових функцій модельних напівдискретних систем Шрьодінґероного типу [192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 209]	89
2.2 Вплив зовнішніх полів на динаміку солітонів в регулярних драбинчастих та трубчастих ґратках [198, 209, 203]	96

2.3	Поширювання солітонного збудження на драбинчастій ґратці з точковими домішками. Слалом солітона між точковими домішками [197, 198]	103
2.4	Поширювання солітонного збудження на драбинчастій ґратці з модифікованими поперечними міжвузловими зв'язками [198, 203]	110
2.5	Підсумки	117

3 119

Інтегровна нелінійна модель шрьодінґерівських полів на пласкій фермоподібній ґратці 119

3.1	Загальний опис моделі [199, 212]	119
3.2	Допоміжні лінійні задачі та двійникові представлення нульової кривини [199, 212]	122
3.3	Розв'язки Йоста та зв'язки між ними [212]	126
3.4	Регулярність згладжених векторів Йоста [212]	131
3.5	Двійникові або комплементарні рівняння Марченка [212]	135
3.6	Еволюційні рівняння даних розсіяння [212]	140
3.7	Симетрійні властивості даних розсіяння [212]	142
3.8	Дисперсійні співвідношення для діагональних елементів зведених матриць монодромії [212]	145
3.9	Багатосолітонні розв'язки [212]	147
3.10	Односолітонна динаміка [199, 212]	157
3.11	Закони збереження та Гамільтонове формулювання моделі [199, 213, 216]	161
3.12	Підсумки	163

4 166

Напівдискретна інтегровна нелінійна Шрьодінґерова система

з тлозалежною міжвузловою резонансною взаємодією	166
4.1 Вступні зауваження та рівняння нелінійної Шррьодінґерової системи на стьождці трикутної ґратки з двома типами міжвузлової резонансної взаємодії [208, 220, 221, 227, 228, 229]	166
4.2 Інтеґровність системи в Лаксовому сенсі [208, 220, 221]	170
4.3 Перетворення Дарбу і Беклунда як основа інтеґрування напівдискретної еволюційної нелінійної системи методом одягання [220, 221]	175
4.4 Симетрії дискретних спектральних даних $\varepsilon_k(z_r)$ і z_r , дотичні до нелінійної Шррьодінґерової системи з нелінійностями притягувального типу [220, 221]	182
4.5 Багатокомпонентний солітонний розв'язок для нелінійної Шррьодінґерової системи з нелінійностями притягувального типу [220, 221]	185
4.6 Рекурентна схема послідовних перетворень Дарбу [220]	191
4.7 Нескінченна множина локальних густин як передумова для інтеґровності системи в сенсі Ліувілля [213, 221]	197
4.8 Гамільтонове представлення первинної нелінійної Шррьодінґерової системи з притягувальними нелінійностями [220, 221]	203
4.9 Критичність первинної динамічної системи відносно фонового параметра [208, 223]	208
4.10 Симетричний набір проміжних основних польових змінних та їхні фундаментальні дужки Пуассона [224]	214
4.11 Два варіанти первинно-проміжних польових змінних [224]	218

4.12	Фундаментальні дужки Пуассона для кожного з варіантів первинно-проміжних польових змінних [224]	220
4.13	Два варіанти канонічних польових змінних [224, 226]	221
4.14	Гамільтонове формулювання системи в термінах канонічних польових змінних з порушеною симетрією [225, 224, 226]	226
4.15	Сильна та слабка стандартизовані компоненти односолітонного розв'язку [224, 226]	229
4.16	Підсумки	233
5		237
	Стислий огляд інших запропонованих інтегровних нелінійних напівдискретних систем	237
5.1	Параметрично розгойдувані нелінійні Шрьодінґерові системи з далекосяжною міжвузловою резонансною взаємодією [200, 192, 193]	237
5.2	Напівдискретна інтегровна нелінійна модель двох Годових підсистем, пов'язаних через підсистему орієнтаційного типу [201, 202]	247
5.3	Багатокомпонентні напівдискретні інтегровні нелінійні системи, асоційовані з новими спектральними операторами четвертого та третього порядків [213, 214, 215, 216, 218, 219]	250
5.4	Напівдискретні інтегровні системи, навіяні моделлю Давидова–Кислухи [217, 234]	260
5.5	Підсумки	267
6		270

Нелінійна інтегровна система когерентно зв'язаних збуджень на інтеркальованій драбинчастій ґратці	270
6.1 Вступні зауваження	270
6.2 Шестикомпонентна напівдискретна нелінійна система когерентно зв'язаних збуджень [230, 231, 232, 233]	271
6.3 Загальна форма представлення нульової кривини та її зведення до випадку шестикомпонентної нелінійної системи когерентно зв'язаних збуджень [230, 231, 232]	276
6.4 Пуассонова структура та Гамільтонове представлення шестикомпонентної напівдискретної інтегровної нелінійної Шрьодінґерової системи з нелінійностями притягувального типу [230, 231]	281
6.5 Солітонний розв'язок шестикомпонентної напівдискретної нелінійної Шрьодінґерові системи за нелінійностей притягувального типу [230, 231, 232, 233]	289
6.6 Підсумки	294
Висновки	297
Найважливіші наукові результати дисертації	297
Зауваги щодо майбутніх досліджень	300
Список бібліографічних посилань на першоджерела	303
Додаток А	326
Список публікацій здобувача за темою дисертації у фахових наукових виданнях	326
Додаток Б	331
Відомості про апробацію результатів дисертації на фахових наукових зібраннях	331

АНОТАЦІЯ

О.О. Вахненко. Нелінійна динаміка багатокomпонентних структурованих низьковимірних систем.

Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 теоретична фізика.

Природничі науки (104 фізика та астрономія).

Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України.

Київ 2019.

о Аби пояснити нелінійні ефекти та ефекти повільної динаміки, що притаманні стрижнеподібним осадовим (пісковиковим) породам в численних експериментах з їхнього повздовжнього резонансного збуджування, запропоновано самодостатню форму опису, яка поряд з традиційною швидкою підсистемою повздовжніх зміщень ретельно враховує деформаційно залежну повільну підсистему порушених міжзернинних та міжпластинкових когезійних зв'язків. З огляду на величезні несумірності (дисбаланси) між жвавостями утворення та жвавостями заліковування тріщин обґрунтовано, що підсистема розірваних зв'язків зобов'язана бути підсистемою типу м'якої хлипавки, а отже її відгук на періодичне в часі внутрішнє напруження характеризується порушеною симетрією і постає у вигляді довготривалих змін концентрації розірваних зв'язків у часі та просторі. Саме ж внутрішнє напруження генерується зовнішнім періодичним урухомлюванням, що діє як безпосередньо через підсистему повздовжніх зміщень, так і опосередковано через часові та просторові модифікування модуля Юнга завдяки змінам концентрації розірваних зв'язків. Іншими словами, згідно до розвинутої теорії ефекти повільної динаміки, асоційовані з експериментально спостережува-

ною пам'яттю про історію пікової деформації, є атрибутами деформаційно індукованих кінетичних змін концентрації розірваних міжзернинних та міжпластинкових когезійних зв'язків, що спричиняють сумарний гістерезний вплив на модуль Юнга. Таким чином продемонстровано, що навіть найпростіше проте феноменологічно коректне моделювання взаємного зворотнього зв'язку між підсистемами здатне роз'яснити головні експериментальні знахідки, типові для примусових повздовжніх осциляцій пісковикових стрижнів, а саме – (i) гістерезну поведінку резонансної кривої як на висхідному, так і на низхідному схилах, (ii) лінійне пом'якшення резонансної частоти з ростом рівня урухомлювання, а також (iii) поступове (майже логарифмічне) відновлювання (більшання) резонансної частоти за низького рівня динамічної деформації після попереднього кондиціювання зразка великою динамічною деформацією. Для відтворення суттєво нелінійних пружних рис зернинної структури осадової породи (пісковіку) залежності напруженості від деформації було надано досить реалістичної непертурбативної форми. Окрім цього, підхід здатен інкорпорувати важливі теоретичні та експериментальні дані стосовно підсилювання гістерезних явищ через більшання рівноважної концентрації розірваних когезійних зв'язків за зростання водонасиченості зразка. В рамках висунутого двопідсистемного розгляду передбачено динамічний ефект, аналогічний до широковідомого квазістатичного ефекту гістерези з дискретною пам'яттю (пам'яттю про прикінцеву точку), тим самим пропонуючи його вдалий експериментальний вислід.

○ Запропоновано фізично скориговану майже інтегровну версію нелінійної Шрьодінґерової системи на регулярній багатоланцюжковій драбинчастій ґратці. Показано, що завдяки канонічній формі своїх польових амплітуд система запроваджує адекватний підхід для охоплення ефектів, спричинених повздовжнім електричним полем, повздовжнім магнетним полем, сукупністю одновузлових домішок або модифікацією поперечних міжвузлових резонансних зв'язків. Відтак, розширена система уможлиблює досліджування взаємовпливів між повздовжніми та поперечними солітонними модами в збурених багатоланцюжкових ґратках стосовно міжмодової синхронізації, придатної для адресного доправління скомпактованого нелінійного хвильового збудження до певного вузла трубчастої ґратки, підданої дії однорідного повздовжнього магнетного поля або для селективного пропускання солітона

крізь дефектний відтинок дволанцюжкової чи багатоланцюжкової ґратки. Показано, що в однорідному повздовжньому електричному полі повздовжня та поперечні солітонні моди є незалежними. Однак, на протигагу незбуреній системі, динаміка центру солітона стає фінітною в межах скінченної просторової області завдяки механізму Блоха–Зінера в повздовжньому напрямі та суто геометричної обмеженості ґратки в поперечному напрямі. Ділянка ґратки з одновузловими домішками спричиняє переміщення солітонних мод, внаслідок чого солітон як ціле демонструє досить складну дво- або тривимірну динаміку, супроводжувану випромінюванням вторинних хвиль, що може призвести до захоплення солітона. Проте за деяких специфічних обставин солітон здатен оминати навіть інтенсивні домішки, слаломуючи між ними. Зокрема, слаломна динаміка солітона можлива на драбинчастій ґратці з ділянкою зигзаґоподібного розташування одновузлових домішок. Сформульовано умови, сприятливі для реалізації такого слаломного сценарію. На протигагу, порушення сприятливих умов призводить або до захоплення солітона недосконалим сегментом, або до відбивання солітона від нього. Розглядаючи вплив локально модифікованих поперечних резонансних міжвузлових зв'язків на повздовжню динаміку солітона встановлено, що недосконалість вказаного типу здатна діяти на надхідний солітон і як притягувальний, і як відбивальний потенціал залежно від знаку енергії поперечної моди солітона. Цей суттєво солітонний ефект стає найбільш чітко промовистим для важких солітонів, коли процеси випромінювання, індуковані ґанджем поперечних міжвузлових зв'язків, пригнічено експоненційно. Варто очікувати, що локальна недосконалість поперечних резонансних зв'язків могла би слугувати за фільтр для добору солітонів із заданими наперед властивостями. Безперечно, подібна ж функційність є здійсненою також і для зигзаґоподібного розподілу одновузлових домішок.

о Побудовано нелінійну динамічну модель внутрішньовузлових збуджень на двоніжковій драбинчастій ґратці зі щаблинами, упорядковуваними в зигзаґуватий ланцюжок (*інакше*, на фермоподібній ґратці). Математичним уособленням моделі є система нелінійного Шрьодінґероного типу з двома взаємно симетричними парами польових амплітуд. Доведено інтеґровність системи та явно представлено й проаналізовано її односолітонний розв'язок. Знайдено гамільтоніан системи, а також її основні закони збереження.

Подано гамільтонівське формулювання системи як в термінах вихідних, так і в термінах фізично скоригованих (канонічних) польових змінних. Аби якнайпродуктивніше скористатись фізичною еквівалентністю двох пар польових амплітуд, започатковано найбільш адекватний симетризований підхід до оберненої задачі розсіяння із залученням двох наборів допоміжних лінійних рівнянь. Виведено дві комплементарні системи дискретних рівнянь Марченка та за їхньої допомоги знайдено багатосолітонні розв'язки нелінійної системи для справді безвідбивних польових амплітуд. Одержано дисперсійні співвідношення для діагональних елементів редукованої матриці монодромії. Найпростіша реалізація солітонної динаміки, яка відповідає незалежним від часу міжвузловим параметрам зв'язку і нульовим фазам Паєрлса, вказує, що двовузлова просторова структура елементарної комірки ґратки чітко проявляється у вигляді двох розщеплених гілок солітонних збуджень. В загальному випадку залежних від часу міжвузлових параметрів зв'язку і ненульових фаз Паєрлса теорія здатна моделювати динаміку параметрично розгойдуваних нелінійних драбинчастих систем, підданих дії зовнішнього магнетного поля, ортогонального до площини ґратки.

○ Підсумовано найхарактерніші властивості напівдискретної нелінійної Шрьодінґерової системи з параметрами міжвузлового резонансного зв'язку, керованими фоновими значеннями допоміжних полів, заданої на квазіодновимірній ґратці з двома структурними елементами в елементарній комірці. Показано, що запропонована система є інтегрованою в сенсі Лакса і, як наслідок, уможливорює побудову своїх солітонних розв'язків в рамках належно параметризованої процедури одягання на основі перетворення Дарбу та неявного перетворення Беклунда. З іншого боку, інтегровність системи породжує нескінченну ієрархію локальних законів збереження, декотрі з яких знайдено явно із застосуванням узагальненого рекурсивного підходу. Система складається з двох основних динамічних підсистем та однієї супутньої (допоміжної) підсистеми і допускає Гамільтонове формулювання, супроводжуване доволі нестандартною Пуассоновою структурою. Ненульовий фоновий рівень супутніх полів опосередковує появу додаткового типу міжвузлового резонансного зв'язку, внаслідок чого просторове впорядкування вузлів розміщення основних польових збуджень уособлює найпростішу драбинчасту стьожку трикутної ґратки. Показано, що підлаштування керівного фонового параме-

тра слугує механізмом перемикання динаміки системи між двома суттєво відмінними режимами, розділеними критичною точкою. Критичність динаміки системи відносно фонового параметра проявляється як опосередковано в рамках допоміжної лінійної спектральної задачі, так і безпосередньо в поведінці самих нелінійних динамічних рівнянь. Фізичний підтекст критичності динаміки системи стає ясним після досить витонченої процедури канонізації основних польових змінних. Наразі існує два рівноправні варіанти стандартизації польових змінних досліджуваної нелінійної динамічної системи. Кожен з варіантів є реалізованим у формі двох нееквівалентних канонічних підсистем. Порушена симетрія між канонічними підсистемами є запорукою ефекту зміни природи збуджених станів при перетині фоновим параметром критичної точки. Отже, в докритичній області система обумовлює світлі збудження в обох підсистемах, тоді як в надкритичній області одна з підсистем перетворюється на підсистему з темними збудженнями.

о Обґрунтовано спосіб побудови параметрично урухомлюваних напівдискретних інтегровних систем з далекосяжним характером міжвузлової резонансної взаємодії в рамках представлення нульової кривини зі спектральним оператором Абловіца–Ладіка шляхом адекватного збільшення числа членів в Лорановому розкладі еволюційного оператора за степенями спектрального параметра та впровадження (наперед нерегламентованих) часових залежностей до параметрів резонансної взаємодії. Сформульовано умови здійснення параметричної локалізації солітонного пакету та вказано на калібрувальну еквівалентність між параметричними коливаннями солітона в параметрично розгойдуваних напівдискретних інтегровних системах з далекосяжним характером резонансної взаємодії та Блоховими коливаннями солітона в напівдискретних інтегровних системах з далекосяжним характером резонансної взаємодії під дією лінійного потенціалу. Підкреслено, що перетворення від первинних до фізично скоригованих польових амплітуд є найбільш прийнятним засобом для адекватного розгляду переважної більшості фізичних задач.

о Запропоновано напівдискретну інтегровну нелінійну модель двох Тодових підсистем, пов'язаних між собою підсистемою орієнтаційного типу та знайдено її лагранжівське формулювання. Показано, що допоміжні спектральний та еволюційний оператори моделі є матрицями розміру 3×3 , а допоміжна

спектральна задача є задачею третього порядку.

○ Одержано дві загальні напівдискретні інтегровні нелінійні системи, асоційовані з новими допоміжними лінійними спектральними задачами четвертого та третього порядків, відповідно. Кожна із запропонованих загальних систем є суттєво багатокomпонентною і допускає низку редукованих систем з огляду на різноманітні допустимі варіанти фіксації попередньо недовизначених функцій вибору. Побудовано напівдискретну інтегровну нелінійну систему, що характеризується двома параметрами зв'язку і складається з двох зв'язаних підсистем, перша з яких моделює деяку нелінійну самодуальну мережу дросельно-конденсаторного типу, а друга – описує деяку нелінійну ґратчасту коливну підсистему, розхитувану самодуальною підсистемою.

○ Представлено чотири пари нових допоміжних операторів Лакса, заданих матрицями розміру 3×3 , що в рамках напівдискретного рівняння нульової кривини здатні згенерувати велике число нових напівдискретних інтегровних нелінійних систем, кожна з яких складається з двох зв'язаних підсистем різної природи, причому щонайменше кожна друга система має гарні перспективи для фізичних застосувань, оскільки допускає доречне стандартне (канонічне) гамільтонівське формулювання. Подано у явному вигляді кілька найрепрезентативніших напівдискретних інтегровних нелінійних систем, серед яких найбільшої уваги заслуговують система взаємозв'язаних PT -симетричних екситонів та коливань ґратки нелінійного тодівського типу, а також доволі нечікувана і цікава система PT -симетричних екситонів та нелінійних коливань ґратки з калібрувальною природою зв'язку між підсистемами.

○ У розвиток ідеї про збільшення числа структурних елементів в елементарній комірці квазіодновимірної ґратки у застосуваннях до напівдискретних інтегровних систем запропоновано нову шестикomпонентну інтегровну нелінійну систему на квазіодновимірній ґратці. Внаслідок своєї властиво симетричної форми загальна система допускає низку окремих редукацій. Досить детально розглянуто редукацію, потрактовану як напівдискретну нелінійну Шрьодінґерову систему з трьома структурними елементами в елементарній комірці. Окрім шести справді незалежних основних польових змінних, ця система характеризується чотирма супутніми полями, чії ненульові фонові значення спричиняють три додаткові типи міжвузлових резонансних взаємодій між основними полями. Як наслідок, суто одновимірна первинна просторова

ґратка, стосовна до допоміжної лінійної задачі, зазнає трансформації до драбинчастого впорядкування вузлів у вторинну ґратчасту стьожку, що слугує за просторового носія для основних полів. Слід уточнити, що сукупності міжвузлових резонансних зв'язків та просторових вузлів для основних збуджень уособлюють драбиноподібну ґратчасту структуру, інтеркальовану проміжним рядком взаємно незв'язаних вузлів. Ефект стьожкування ґратки знаходить своє відображення у надзвичайно нестандартній Пуассоновій структурі, залученої до рівнянь Гамільтона, а також у суттєвому ускладненні усієї динаміки системи. Хоч як би там було, але складність динаміки системи все ж вдається інкорпорувати до належним чином розробленої процедури одягання на основі перетворення Дарбу для допоміжної лінійної задачі, супроводжуваної неявним перетворенням Беклунда для польових функцій. Послідовне застосування цієї процедури дає змогу генерувати солітонні розв'язки рекурсивно, починаючи від тривіального (вакуумного) розв'язку. У явному вигляді подано багатокomпонентний солітонний розв'язок та пояснено сенс ключових параметрів солітонної динаміки. Важливо, що довільність вибору часових залежностей параметрів зв'язку уможливорює моделювання широкого розмаїття зовнішніх параметричних урухомлень, застосовних до нелінійної системи без втрати її інтегровності.

Ключові слова:

Повільна динаміка, Гістереза, Кінетика м'якої хлипавки, Осциляції Блоха, Селективний транспорт, Слаломна динаміка, Напівдискретна інтегрована нелінійна система, Обернена задача розсіяння, Солітон, Закони збереження, Перетворення Дарбу–Беклунда, Порушення симетрії, Канонізація Гамільтонової динаміки, Параметрична локалізація, Стьожкування ґратки.

Списки наукових праць здобувача за темою дисертації

Список наукових праць, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

- {1} О.О. Вахненко. Нова повністю інтегровна дискретизація нелінійного рівняння Шрьодінгера. *Укр. Фіз. Журн.* **40**(1), 118–122 (1995).
- {2} О.О. Vakhnenko and V.O. Vakhnenko. Physically corrected Ablowitz–Ladik model and its application to the Peierls–Nabarro problem. *Phys. Lett. A* **196**(5–6), 307–312 (1995).
- {3} О.О. Vakhnenko. Nonlinear beating excitations on ladder lattice. *J. Phys. A: Math. Gen.* **32**(30), 5735–5748 (1999).
- {4} О.О. Vakhnenko. Nonlinear model of intramolecular excitations on a multileg ladder lattice. *Phys. Rev. E* **60**(3), R2492–R2495 (1999).
- {5} О.О. Vakhnenko and M.J. Velgakis. Transverse and longitudinal dynamics of nonlinear intramolecular excitations on multileg ladder lattices. *Phys. Rev. E* **61**(6), 7110–7120 (2000).
- {6} О.О. Vakhnenko and M.J. Velgakis. Slalom soliton dynamics on a ladder lattice with zig-zag distributed impurities. *Phys. Lett. A* **278**(1–2), 59–67 (2000).
- {7} О.О. Vakhnenko and M.J. Velgakis. Multimode soliton dynamics in perturbed ladder lattices. *Phys. Rev. E* **63**(1), 016612 (11 pages) (2001).
- {8} О.О. Vakhnenko. Solitons on a zigzag-runged ladder lattice. *Phys. Rev. E* **64**(6), 067601 (4 pages) (2001).
- {9} О.О. Vakhnenko. Solitons in parametrically driven discrete nonlinear Schrödinger systems with the exploding range of intersite interactions.

- J. Math. Phys.* **43**(5), 2587–2605 (2002).
- {10} O.O. Vakhnenko. Three component nonlinear dynamical system generated by the new third-order discrete spectral problem. *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**(20), 5405–5430 (2003).
- {11} O.O. Vakhnenko. A discrete nonlinear model of three coupled dynamical fields integrable by the Caudrey method. *Ukr. J. Phys.* **48**(7), 653–666 (2003).
- {12} O.O. Vakhnenko. Dynamics of multicomponent solitons in perturbed ladder lattices. *NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry* **153**, 503–510 (2004).
- {13} O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko, T.J. Shankland, and J.A. Ten Cate. Strain-induced kinetics of intergrain defects as the mechanism of slow dynamics in the nonlinear resonant response of humid sandstone bars. *Phys. Rev. E* **70**(1), 015602(R) (4 pages) (2004).
- {14} O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko, and T.J. Shankland. Soft-ratchet modeling of end-point memory in the nonlinear resonant response of sedimentary rocks. *Phys. Rev. B* **71**(17), 174103 (14 pages) (2005).
- {15} O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko, T.J. Shankland, and J.A. TenCate. Soft-ratchet modeling of slow dynamics in the nonlinear resonant response of sedimentary rocks. *AIP Conference Proceedings* **838**(1), 120–123 (2006).
- {16} V.O. Vakhnenko, O.O. Vakhnenko, T.J. Shankland, and J.A. TenCate. Dynamical realization of end-point memory in consolidated materials. *AIP Conference Proceedings* **838**(1), 124–127 (2006).
- {17} O.O. Vakhnenko. Integrable nonlinear ladder system with background-controlled intersite resonant coupling. *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**(35), 11013–11027 (2006).
- {18} O.O. Vakhnenko. Enigma of probability amplitudes in Hamiltonian formulation of integrable semidiscrete nonlinear Schrödinger systems. *Phys. Rev. E* **77**(2), 026604 (9 pages) (2008).
- {19} V.O. Vakhnenko, O.O. Vakhnenko, J.A. TenCate, and T.J. Shankland. The dynamics of a sandstone bar under resonance loading. *Proceedings of the XX Session of the Russian Acoustical Society (Moscow, October 27-31, 2008)*, 206–209 (2008).
- {20} V. Vakhnenko, O. Vakhnenko, J. TenCate, and T. Shankland. Modeling of the nonlinear resonant response in sedimentary rocks. *Геофизический журнал* **32**(4), 195–197 (2010).

- {21} O.O. Vakhnenko. Inverse scattering transform for the nonlinear Schrödinger system on a zigzag-runged ladder lattice. *J. Math. Phys.* **51**(10), 103518 (45 pages) (2010).
- {22} O.O. Vakhnenko. Semidiscrete integrable nonlinear systems generated by the new fourth-order spectral operator. Local conservation laws. *J. Nonlin. Math. Phys.* **18**(3), 401–414 (2011).
- {23} O.O. Vakhnenko. Semidiscrete integrable nonlinear systems generated by the new fourth-order spectral operator. Systems of obverse type. *J. Nonlin. Math. Phys.* **18**(3), 415–425 (2011).
- {24} O.O. Vakhnenko. New integrable nonlinear lattice systems with two adjustable coupling parameters. *Nonlin. Engineering* **2**(3–4), 97–102 (2013).
- {25} O.O. Vakhnenko. Four-wave semidiscrete nonlinear integrable system with *PT*-symmetry. *J. Nonlin. Math. Phys.* **20**(4), 606–622 (2013).
- {26} O.O. Vakhnenko. Semidiscrete integrable systems inspired by the Davydov–Kyslyukha model. *Ukr. J. Phys.* **58**(11), 1092–1107 (2013).
- {27} O.O. Vakhnenko and V.O. Vakhnenko. Low-amplitude instability as a premise for the spontaneous symmetry breaking in the new integrable semidiscrete nonlinear system. *Chaos, Solitons and Fractals* **60**, 1–10 (2014).
- {28} O.O. Vakhnenko and V.O. Vakhnenko. Linear analysis of extended integrable nonlinear ladder network system. *Ukr. J. Phys.* **59**(6), 640–649 (2014).
- {29} O.O. Vakhnenko. Integrable nonlinear Schrödinger system on a triangular-lattice ribbon. *J. Phys. Soc. Japan* **84**(1), 014003 (12 pages) (2015).
- {30} O.O. Vakhnenko. Nonlinear integrable model of Frenkel-like excitations on a ribbon of triangular lattice. *J. Math. Phys.* **56**(3), 033505 (21 pages) (2015).
- {31} В.О. Вахненко та О.О. Вахненко. *Хвильова Динаміка Структурованих Середовищ* (Наукова думка, Київ, 2016).
- {32} O.O. Vakhnenko. Coupling-governed metamorphoses of the integrable nonlinear Schrödinger system on a triangular-lattice ribbon. *Phys. Lett. A* **380**(24), 2069–2074 (2016).
- {33} O.O. Vakhnenko. Symmetry-broken canonizations of the semi-discrete integrable nonlinear Schrödinger system with background-controlled intersite coupling. *J. Math. Phys.* **57**(11), 113504 (16 pages) (2016).

- {34} O.O. Vakhnenko. Asymmetric canonicalization of the integrable nonlinear Schrödinger system on a triangular-lattice ribbon. *Appl. Math. Lett.* **64**, 81–86 (2017).
- {35} O.O. Vakhnenko. Distinctive features of the integrable nonlinear Schrödinger system on a ribbon of triangular lattice. *Ukr. J. Phys.* **62**(3), 271–282 (2017).
- {36} O.O. Vakhnenko. Semi-discrete integrable nonlinear Schrödinger system with background-controlled inter-site resonant coupling. *J. Nonlin. Math. Phys.* **24**(2), 250–302 (2017).
- {37} O.O. Вахненко. Напівдискретна інтегровна нелінійна Шрьодінгєрова система з фоново-керованою міжвузловою резонансною взаємодією. *Укр. Фіз. Журн. Огляди* **12**(1), 3–40 (2017).
- {38} O.O. Vakhnenko. Semidiscrete integrable nonlinear Schrödinger system with background-controlled intersite resonant coupling. Short summary of key properties. *Ukr. J. Phys.* **63**(3), 220–225 (2018).
- {39} O.O. Vakhnenko. Six-component semi-discrete integrable nonlinear Schrödinger system. *Lett. Math. Phys.* **108**(8), 1807–1824 (2018).
- {40} O.O. Vakhnenko. Integrable nonlinear Schrödinger system on a lattice with three structural elements in the unit cell. *J. Math. Phys.* **59**(5), 053504 (25 pages) (2018).
- {41} O.O. Vakhnenko. Nonlinear integrable system of coherently coupled excitations on an intercalated ladder lattice. *Eur. Phys. J. Plus* **133**(6), 243 (19 pages) (2018).
- {42} O.O. Vakhnenko. Effect of lattice ribbonization via the background-controlled inter-site resonant interactions in nonlinear integrable systems. *AIP Conference Proceedings* **2037**(1), 020027 (11 pages) (2018).
- {43} O.O. Vakhnenko. Four-component integrable systems inspired by the Toda and the Davydov–Kyslukha models. *Wave Motion* **88**, 1–12 (2019).

Список наукових праць, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації

- (1) O.O. Vakhnenko. Physically corrected Ablowitz–Ladik model and its application to the Peierls–Nabarro problem. Copenhagen Conference on Complex Dynamics in Spatially Extended Systems. 27–30 September 1995, Niels Bohr Institute, Copenhagen (Denmark). *Book of Abstracts*, P46 (1995).

- (2) O.O. Vakhnenko. Discrete nonlinear model of three coupled dynamical fields integrable by the Caudrey method. International Conference “Modern Problems of Theoretical Physics” dedicated to the 90th anniversary of A.S. Davydov. 9–15 December 2002, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv (Ukraine). *Book of Abstracts*, 75 (2002).
- (3) O.O. Vakhnenko. Integrable nonlinear lattice associated with the third-order spectral problem. Fifth International Conference “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics”. 23–29 June 2003, Institute of Mathematics, Kyiv (Ukraine). *Conference Program*, Abstract on June 25 (2003).
- (4) O.O. Vakhnenko. Dynamics of multicomponent solitons in perturbed ladder lattices. The NATO Advanced Research Workshop “Nonlinear Waves: Classical and Quantum Aspects”. 12–18 July 2003, Universidade de Lisboa, Estoril (Portugal). *NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry* **153**, 503–510 (2004).
- (5) O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko, T.J. Shankland, and J.A. TenCate. Strain-induced kinetics of intergrain defects as the mechanism of slow dynamics in the nonlinear resonant response of humid sandstone bars. Bogolyubov Kyiv Conference “Modern Problems of Mathematics and Theoretical Physics”. 13–16 September 2004, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv (Ukraine). *Book of Abstracts* 76–77 (2004).
- (6) O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko, T.J. Shankland, and J.A. TenCate. Soft-ratchet modeling of slow dynamics in the nonlinear resonant response of sedimentary rocks. Innovations in Nonlinear Acoustics: ISNA17 – 17th International Symposium on Nonlinear Acoustics including the International Sonic Boom Forum. 18–22 July 2005, State College, Pensilvania (USA). *AIP Conference Proceedings* **838**(1), 120–123 (2006).
- (7) V.O. Vakhnenko, O.O. Vakhnenko, T.J. Shankland, and J.A. TenCate. Dynamical realization of end-point memory in consolidated materials. Innovations in Nonlinear Acoustics: ISNA17 – 17th International Symposium on Nonlinear Acoustics including the Interational Sonic Boom Forum. 18–22 July 2005, State College, Pensilvania (USA). *AIP Conference Proceedings* **838**(1), 124–127 (2006).
- (8) V.O. Vakhnenko, O.O. Vakhnenko, J.A. TenCate, and T.J. Shankland. The dynamics of a sandstone bar under resonance loading. The XX Session of

- the Russian Acoustical Society. 27-31 October 2008, M. Lomonosov Moscow State University, Moscow (Russia). *Proceedings of the XX Session of the Russian Acoustical Society*, 206–209 (2008).
- (9) V. Vakhnenko, O. Vakhnenko, J. TenCate, and T. Shankland. Modeling of the nonlinear resonant response in sedimentary rocks. International Conference “Geodynamical Phenomena: from Observations and Experiments to Theory and Modeling”. 20–24 September 2010, Subbotin Institute of Geophysics, Kyïv (Ukraine). *Геофизический журнал* **32**(4), 195–197 (2010).
 - (10) O.O. Vakhnenko. Semidiscrete integrable systems inspired by the Davydov–Kyslukha model. International Conference “Quantum Groups and Quantum Integrable Systems”. 18–21 June 2013, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyïv (Ukraine). *Ukr. J. Phys.* **58**(11), 1092–1107 (2013).
 - (11) O.O. Vakhnenko. Integrable nonlinear Schrödinger system on a ribbon of triangular lattice. Bogolyubov Conference “Problems of Theoretical Physics” dedicated to the 50th anniversary of the Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine. 24–26 May 2016, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyïv (Ukraine). *Program and Abstracts*, 42 (2016).
 - (12) O.O. Vakhnenko. Semidiscrete integrable nonlinear Schrödinger system with background-controlled intersite resonant coupling. Short summary of key properties. The 3rd Walter Thirring International School on Fundamentals of Astroparticle and Quantum Physics. 17–23 September 2017, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyïv (Ukraine). *Ukr. J. Phys.* **63**(3), 220–225 (2018).
 - (13) O.O. Vakhnenko. Effect of lattice ribbonization via the background-controlled inter-site resonant interactions in nonlinear integrable systems. IECMSA-2018. 7th International Conference on Mathematical Sciences and Applications. 28–31 August 2018, Ramada Encore Kyïv Hotel, Kyïv (Ukraine). *IECMSA-2018. Book of Abstracts*, 124–125 (2018); *AIP Conference Proceedings* **2037**(1), 020027 (11 pages) (2018).

Abstract

O.O. Vakhnenko. Nonlinear dynamics of multi-component structured low-dimensional systems.

Qualification research work submitted as a manuscript.

Thesis for the Doctor of Sciences in Physics and Mathematics
in speciality 01.04.02 Theoretical Physics.

Natural Sciences (104 Physics and Astronomy).

Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, NAS of Ukraine.

Kyiv 2019.

○ A closed-form description is proposed to explain nonlinear and slow dynamics effects exhibited by bar-shaped sedimentary (sandstone) rocks in longitudinal resonance experiments. Along with the fast subsystem of longitudinal nonlinear displacements the strain-dependent slow subsystem of broken inter-grain and inter-lamina cohesive bonds are thoroughly examined. Due to huge disparities between the actual rates of crack creation and crack healing the subsystem of ruptured bonds is shown to be of a soft-ratchet type, so that its response to an alternating internal stress is characterized by broken symmetry and appears as nonzero long-term temporal and spatial changes in the concentration of ruptured bonds. The internal stress is generated by an alternating external drive acting both directly through the subsystem of longitudinal displacements and indirectly through the temporal and spatial modifications of Young's modulus due to changes in concentration of ruptured bonds. By another words, according to the developed theory the slow dynamics effects, associated with the experimentally observed memory of peak strain history, are attributed to strain-induced kinetic changes in concentration of ruptured inter-grain and inter-lamina cohesive bonds, causing a net hysteretic effect on the elastic Young's modulus. Thus, even the

simplest but phenomenologically correct modeling of mutual feedback between the subsystems is shown to elucidate the main experimental findings typical of forced longitudinal oscillations of sandstone bars, namely, (i) hysteretic behavior of a resonance curve on both its upward and downward slopes, (ii) linear softening of resonant frequency with an increase of driving level, and (iii) gradual (almost logarithmic) recovery (increase) of resonant frequency at low dynamical strain after the sample has been conditioned by a high dynamical strain. In order to reproduce the highly nonlinear elastic features of sandstone grained structure a realistic nonperturbative form of stress-strain relation was adopted. In addition, the approach is able to incorporate earlier known theoretical and experimental data concerning the enhancement of hysteretic phenomena originated from an increase in equilibrium concentration of ruptured cohesive bonds due to the water saturation. In the framework of the suggested two-subsystem consideration a dynamical effect analogous to the widely known quasi-static effect of hysteresis with discrete (end-point) memory has been predicted, henceforth stimulating its successful experimental observation.

○ The physically-corrected nearly integrable version of nonlinear Schrödinger system on a regular multi-leg ladder lattice is suggested. Due to the canonical form of its field amplitudes the system is shown to provide an adequate approach for incorporating the effects caused by the longitudinal electric field, by the longitudinal magnetic field, by the set of on-site impurities or by the modification of transverse inter-site resonance bonds. Henceforth, the appropriately extended system makes it possible to investigate the interplays between the longitudinal and lateral solitonic modes in perturbed multi-leg lattices with regard to the mode-mode synchronization suitable for the address delivery of a compact nonlinear wave excitation to the proper site of a tubular lattice subjected to the uniform longitudinal magnetic field as well as for the selective transmission of a soliton through an imperfect segment of two-chain or multi-chain lattice. In a longitudinal uniform electric field the lateral and longitudinal solitonic modes are shown to be independent. However, unlike in the unperturbed system the dynamics of the soliton center of mass becomes confined within a finite spatial domain via the Bloch–Zener mechanism in the longitudinal direction and due to the transverse finiteness of a ladder in the lateral one. The segment of on-site impurities causes the soliton mode-mode mixing. As a result, the soliton exhibits rather complex two-

or three-dimensional dynamics accompanied by wave radiation which may give rise to soliton trapping. Nevertheless, under some specific conditions the soliton is able to bypass even the strong impurities slaloming between them. In particular, the slalom soliton dynamics is possible on a ladder lattice with a segment of zigzag-distributed on-site impurities. The conditions favorable to the case are formulated. On the contrary, their violation gives rise to either soliton trapping or soliton reflection from the impure segment. Considering the effect of modified transverse inter-site resonant bonds on the longitudinal soliton dynamics it has been revealed that such a local imperfection might act on the ingoing soliton as either an attractive or a repulsive potential, depending on the sign of the soliton transverse energy. The effect is essentially a solitonic one and becomes strictly pronounced for heavy solitons, when imperfection-induced radiation effects are exponentially suppressed. It is expected that the local imperfection of transverse bonds could serve as a filter selecting the solitons with prescribed properties. A similar functionality is feasible for zigzag-distributed on-site impurities too.

- The nonlinear dynamical model of intra-site excitations on a two-leg ladder lattice with the rungs arranged into a zigzag chain is constructed. The model is incarnated as a system of nonlinear Schrödinger type containing two mutually symmetric pairs of field amplitudes. The integrability of the system is proved and the one-soliton solution is explicitly presented and analyzed. The system's Hamiltonian function, as well as the basic conserved quantities are found. The system's Hamiltonian formulation in terms of both original and physically-corrected (canonic) field variables is given. In order to underline the equivalence between the two pairs of field amplitudes it was required to introduce the two sets of auxiliary linear problems and to formulate the inverse scattering technique in the most adequate symmetrical form. The two complementary sets of discrete Marchenko equations are derived and the multi-soliton solutions of nonlinear system for the true reflectionless field amplitudes are found. The dispersion relations for the diagonal elements of reduced monodromy matrices are obtained. The simplest realization of soliton dynamics corresponding to the time-independent inter-site coupling parameters and zero Peierls phases shows that the two-site spatial structure of the lattice unit cell is strictly manifested as the two splitted branches of soliton excitations. In the general case of time-dependent inter-site coupling parameters and nonzero Peierls phases, the theory is capable to model

the dynamics of parametrically driven nonlinear ladder systems subjected to the transverse external magnetic field.

- The most featured items characterizing the semi-discrete nonlinear Schrödinger system with background-controlled inter-site resonant coupling on a regular quasi-one-dimensional lattice with two structural elements in the unit cell are summarized. The proposed system is shown to be integrable in the Lax sense that makes it possible to obtain its soliton solutions in the framework of a properly parametrized dressing procedure based on the Darboux transformation accompanied by the implicit form of Bäcklund transformation. In addition, the system integrability inspires an infinite hierarchy of local conservation laws, some of which were found explicitly relying upon the generalized recursive approach. The system consists of two basic dynamic subsystems and one concomitant subsystem, and its dynamics is embedded into the Hamiltonian formulation accompanied by the highly nonstandard Poisson structure. The nonzero background level of concomitant fields mediates the appearance of an additional type of the inter-site resonant coupling. As a consequence, it establishes the triangular-lattice-ribbon spatial arrangement of location sites for the basic field excitations. By means of tuning the main background parameter the system's dynamics is proved to be switched over between two essentially different regimes separated by the critical point. The system criticality against the background parameter is manifested both indirectly by the auxiliary linear spectral problem and directly by the nonlinear dynamical equations themselves. The physical implications of system's criticality become evident after a rather sophisticated procedure of canonization of basic field variables. There are two variants to standardize the system equal in their rights. Each variant is realizable in the form of two nonequivalent canonical subsystems. The broken symmetry between canonical subsystems gives rise to the crossover effect in the nature of excited states. Thus, in the under-critical region, the system supports the bright excitations in both subsystems; while, in the over-critical region, one of the subsystems converts into the subsystem of dark excitations.

- In the framework of zero-curvature representation with the Ablowitz–Ladik spectral operator a method to construct parametrically driven semi-discrete integrable systems with the long-range type of inter-site resonant interactions is motivated via an adequate increasing the number of elements in a Laurent expansion of the evolution operator and via an insertion of (*a priori* unprescribed) time

dependencies into the parameters of resonant interaction. Conditions ensuring the realization of a parametric localization of soliton packet are formulated. The gauge equivalence between the parametric oscillations of a soliton in parametrically driven semi-discrete integrable systems with long-range resonant interactions and the Bloch oscillations caused by the linear potential in semi-discrete integrable systems with long-range resonant interactions is strictly indicated. The transformation from the primary to physically corrected field amplitudes is stressed to be the most appropriate tool for the adequate consideration of a vast majority of physical problems.

- The semi-discrete integrable nonlinear model of two Toda-like subsystems interacting through the subsystem of an orientational type is proposed and its Lagrangian formulation is found. The auxiliary spectral and evolution operators of the model is shown to be the 3×3 matrices, while the auxiliary spectral problem turns out to be the spectral problem of third order.

- Two general semi-discrete integrable nonlinear systems associated, respectively, with the new auxiliary linear spectral problems of fourth and third orders are obtained. Each of suggested general systems is essentially multi-component one and permits a number of reduced systems in view of various admissible versions for the formerly underdetermined sampling functions. The semi-discrete integrable nonlinear system, characterized by two coupling parameters and consisting of two coupled subsystems, the first of which models some nonlinear self-dual network of inductor-capacitor type and the second one describes some nonlinear vibrational lattice subsystem driven by the self-dual subsystem, is developed.

- Four pairs of new auxiliary Lax operators given by 3×3 matrices are presented. In the framework of zero-curvature relation each pair is able to generate a number of new semi-discrete integrable nonlinear systems anyone of which consists of two coupled subsystems of distinct origin, so that least every second system has a good perspective for physical applications inasmuch as it permit an appropriate standard (canonical) Hamiltonian formulation. Several the most representative semi-discrete integrable nonlinear systems are written explicitly. Among them the system of mutually-coupled PT -symmetric excitons and Toda-type lattice vibrations as well as the system PT -symmetric excitons and nonlinear lattice vibrations coupled via the gauge mechanism deserve a special attention.

- Developing the idea of increasing the number of structural elements in the

unit cell of a quasi-one-dimensional lattice as applied to semi-discrete integrable systems, the new six-component integrable nonlinear system on a quasi-one-dimensional lattice is suggested. Due to its inherent symmetrical form, the general system permits a number of particular reductions. The reduction treated as the semi-discrete integrable nonlinear Schrödinger system on a lattice with three structural elements in the unit cell is studied in considerable details. Besides six truly independent basic field variables, the system is characterized by four concomitant fields whose nonzero background values produce three additional types of inter-site resonant interactions between the basic fields. As a result, the purely one-dimensional primary spatial lattice dealing with the auxiliary linear problem is converted into a ladder-like arrangement of sites in the secondary lattice-ribbon serving as a spatial support for the basic fields. To put it clearly, the inter-site resonant bonds and the spatial sites for basic excitations provide the ladder-like lattice structure intercalated by the intermediate row of mutually uncoupled sites. The effect of lattice ribbonization gives rise to the extremely nonstandard Poisson structure involved into the Hamiltonian equations as well as to the essential enrichment of the whole system's dynamics. Nevertheless, the complexity of system's dynamics is proved to be incorporated into the properly developed dressing procedure based on the Darboux transformation for the auxiliary linear problem accompanied by the implicit Bäcklund transformation of field functions. The successive application of this procedure allows to generate recursively the system soliton solutions starting with the trivial (vacuum) one. The multi-component soliton solution is presented explicitly and the implications of key parameters in soliton dynamics are explained. Remarkably, that the arbitrariness in time dependencies of system coupling parameters allows to model a wide variety of external parametric drivings applicable to the system without the loss of its integrability.

Keywords:

Slow dynamics, Hysteresis, Soft-ratchet kinetics, Bloch oscillations, Selective transport, Slalom dynamics, Semi-discrete integrable nonlinear system, Inverse scattering transform, Soliton, Conservation laws, Darboux–Bäcklund transformation, Symmetry breaking, Canonization of Hamiltonian dynamics, Parametrical localization, Lattice ribbonization.

Lists of scientific publications on the subject of dissertation

List of publications containing the main scientific results of dissertation

- {1} O.O. Vakhnenko. Нова повністю інтегровна дискретизація нелінійного рівняння Шрьодінгера. *Укр. Фіз. Журн.* **40**(1), 118–122 (1995).
- {2} O.O. Vakhnenko and V.O. Vakhnenko. Physically corrected Ablowitz–Ladik model and its application to the Peierls–Nabarro problem. *Phys. Lett. A* **196**(5–6), 307–312 (1995).
- {3} O.O. Vakhnenko. Nonlinear beating excitations on ladder lattice. *J. Phys. A: Math. Gen.* **32**(30), 5735–5748 (1999).
- {4} O.O. Vakhnenko. Nonlinear model of intramolecular excitations on a multileg ladder lattice. *Phys. Rev. E* **60**(3), R2492–R2495 (1999).
- {5} O.O. Vakhnenko and M.J. Velgakis. Transverse and longitudinal dynamics of nonlinear intramolecular excitations on multileg ladder lattices. *Phys. Rev. E* **61**(6), 7110–7120 (2000).
- {6} O.O. Vakhnenko and M.J. Velgakis. Slalom soliton dynamics on a ladder lattice with zig-zag distributed impurities. *Phys. Lett. A* **278**(1–2), 59–67 (2000).
- {7} O.O. Vakhnenko and M.J. Velgakis. Multimode soliton dynamics in perturbed ladder lattices. *Phys. Rev. E* **63**(1), 016612 (11 pages) (2001).
- {8} O.O. Vakhnenko. Solitons on a zigzag-runged ladder lattice. *Phys. Rev. E* **64**(6), 067601 (4 pages) (2001).
- {9} O.O. Vakhnenko. Solitons in parametrically driven discrete nonlinear Schrödinger systems with the exploding range of intersite interactions.

- J. Math. Phys.* **43**(5), 2587–2605 (2002).
- {10} O.O. Vakhnenko. Three component nonlinear dynamical system generated by the new third-order discrete spectral problem. *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**(20), 5405–5430 (2003).
- {11} O.O. Vakhnenko. A discrete nonlinear model of three coupled dynamical fields integrable by the Caudrey method. *Ukr. J. Phys.* **48**(7), 653–666 (2003).
- {12} O.O. Vakhnenko. Dynamics of multicomponent solitons in perturbed ladder lattices. *NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry* **153**, 503–510 (2004).
- {13} O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko, T.J. Shankland, and J.A. Ten Cate. Strain-induced kinetics of intergrain defects as the mechanism of slow dynamics in the nonlinear resonant response of humid sandstone bars. *Phys. Rev. E* **70**(1), 015602(R) (4 pages) (2004).
- {14} O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko, and T.J. Shankland. Soft-ratchet modeling of end-point memory in the nonlinear resonant response of sedimentary rocks. *Phys. Rev. B* **71**(17), 174103 (14 pages) (2005).
- {15} O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko, T.J. Shankland, and J.A. TenCate. Soft-ratchet modeling of slow dynamics in the nonlinear resonant response of sedimentary rocks. *AIP Conference Proceedings* **838**(1), 120–123 (2006).
- {16} V.O. Vakhnenko, O.O. Vakhnenko, T.J. Shankland, and J.A. TenCate. Dynamical realization of end-point memory in consolidated materials. *AIP Conference Proceedings* **838**(1), 124–127 (2006).
- {17} O.O. Vakhnenko. Integrable nonlinear ladder system with background-controlled intersite resonant coupling. *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**(35), 11013–11027 (2006).
- {18} O.O. Vakhnenko. Enigma of probability amplitudes in Hamiltonian formulation of integrable semidiscrete nonlinear Schrödinger systems. *Phys. Rev. E* **77**(2), 026604 (9 pages) (2008).
- {19} V.O. Vakhnenko, O.O. Vakhnenko, J.A. TenCate, and T.J. Shankland. The dynamics of a sandstone bar under resonance loading. *Proceedings of the XX Session of the Russian Acoustical Society (Moscow, October 27-31, 2008)*, 206–209 (2008).
- {20} V. Vakhnenko, O. Vakhnenko, J. TenCate, and T. Shankland. Modeling of the nonlinear resonant response in sedimentary rocks. *Геофизический журнал* **32**(4), 195–197 (2010).

- {21} O.O. Vakhnenko. Inverse scattering transform for the nonlinear Schrödinger system on a zigzag-runged ladder lattice. *J. Math. Phys.* **51**(10), 103518 (45 pages) (2010).
- {22} O.O. Vakhnenko. Semidiscrete integrable nonlinear systems generated by the new fourth-order spectral operator. Local conservation laws. *J. Nonlin. Math. Phys.* **18**(3), 401–414 (2011).
- {23} O.O. Vakhnenko. Semidiscrete integrable nonlinear systems generated by the new fourth-order spectral operator. Systems of obverse type. *J. Nonlin. Math. Phys.* **18**(3), 415–425 (2011).
- {24} O.O. Vakhnenko. New integrable nonlinear lattice systems with two adjustable coupling parameters. *Nonlin. Engineering* **2**(3–4), 97–102 (2013).
- {25} O.O. Vakhnenko. Four-wave semidiscrete nonlinear integrable system with *PT*-symmetry. *J. Nonlin. Math. Phys.* **20**(4), 606–622 (2013).
- {26} O.O. Vakhnenko. Semidiscrete integrable systems inspired by the Davydov–Kyslyukha model. *Ukr. J. Phys.* **58**(11), 1092–1107 (2013).
- {27} O.O. Vakhnenko and V.O. Vakhnenko. Low-amplitude instability as a premise for the spontaneous symmetry breaking in the new integrable semidiscrete nonlinear system. *Chaos, Solitons and Fractals* **60**, 1–10 (2014).
- {28} O.O. Vakhnenko and V.O. Vakhnenko. Linear analysis of extended integrable nonlinear ladder network system. *Ukr. J. Phys.* **59**(6), 640–649 (2014).
- {29} O.O. Vakhnenko. Integrable nonlinear Schrödinger system on a triangular-lattice ribbon. *J. Phys. Soc. Japan* **84**(1), 014003 (12 pages) (2015).
- {30} O.O. Vakhnenko. Nonlinear integrable model of Frenkel-like excitations on a ribbon of triangular lattice. *J. Math. Phys.* **56**(3), 033505 (21 pages) (2015).
- {31} В.О. Вахненко та О.О. Вахненко. *Хвильова Динаміка Структурованих Середовищ* (Наукова думка, Київ, 2016).
- {32} O.O. Vakhnenko. Coupling-governed metamorphoses of the integrable nonlinear Schrödinger system on a triangular-lattice ribbon. *Phys. Lett. A* **380**(24), 2069–2074 (2016).
- {33} O.O. Vakhnenko. Symmetry-broken canonizations of the semi-discrete integrable nonlinear Schrödinger system with background-controlled intersite coupling. *J. Math. Phys.* **57**(11), 113504 (16 pages) (2016).

- {34} O.O. Vakhnenko. Asymmetric canonicalization of the integrable nonlinear Schrödinger system on a triangular-lattice ribbon. *Appl. Math. Lett.* **64**, 81–86 (2017).
- {35} O.O. Vakhnenko. Distinctive features of the integrable nonlinear Schrödinger system on a ribbon of triangular lattice. *Ukr. J. Phys.* **62**(3), 271–282 (2017).
- {36} O.O. Vakhnenko. Semi-discrete integrable nonlinear Schrödinger system with background-controlled inter-site resonant coupling. *J. Nonlin. Math. Phys.* **24**(2), 250–302 (2017).
- {37} O.O. Вахненко. Напівдискретна інтегровна нелінійна Шрьодінгєрова система з фоново-керованою міжвузловою резонансною взаємодією. *Укр. Фіз. Журн. Огляди* **12**(1), 3–40 (2017).
- {38} O.O. Vakhnenko. Semidiscrete integrable nonlinear Schrödinger system with background-controlled intersite resonant coupling. Short summary of key properties. *Ukr. J. Phys.* **63**(3), 220–225 (2018).
- {39} O.O. Vakhnenko. Six-component semi-discrete integrable nonlinear Schrödinger system. *Lett. Math. Phys.* **108**(8), 1807–1824 (2018).
- {40} O.O. Vakhnenko. Integrable nonlinear Schrödinger system on a lattice with three structural elements in the unit cell. *J. Math. Phys.* **59**(5), 053504 (25 pages) (2018).
- {41} O.O. Vakhnenko. Nonlinear integrable system of coherently coupled excitations on an intercalated ladder lattice. *Eur. Phys. J. Plus* **133**(6), 243 (19 pages) (2018).
- {42} O.O. Vakhnenko. Effect of lattice ribbonization via the background-controlled inter-site resonant interactions in nonlinear integrable systems. *AIP Conference Proceedings* **2037**(1), 020027 (11 pages) (2018).
- {43} O.O. Vakhnenko. Four-component integrable systems inspired by the Toda and the Davydov–Kyslukha models. *Wave Motion* **88**, 1–12 (2019).

List of publications presenting the results of dissertation on scientific conferences

- (1) O.O. Vakhnenko. Physically corrected Ablowitz–Ladik model and its application to the Peierls–Nabarro problem. Copenhagen Conference on Complex Dynamics in Spatially Extended Systems. 27–30 September 1995, Niels Bohr Institute, Copenhagen (Denmark). *Book of Abstracts*, P46 (1995).

- (2) O.O. Vakhnenko. Discrete nonlinear model of three coupled dynamical fields integrable by the Caudrey method. International Conference “Modern Problems of Theoretical Physics” dedicated to the 90th anniversary of A.S. Davydov. 9–15 December 2002, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv (Ukraine). *Book of Abstracts*, 75 (2002).
- (3) O.O. Vakhnenko. Integrable nonlinear lattice associated with the third-order spectral problem. Fifth International Conference “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics”. 23–29 June 2003, Institute of Mathematics, Kyiv (Ukraine). *Conference Program*, Abstract on June 25 (2003).
- (4) O.O. Vakhnenko. Dynamics of multicomponent solitons in perturbed ladder lattices. The NATO Advanced Research Workshop “Nonlinear Waves: Classical and Quantum Aspects”. 12–18 July 2003, Universidade de Lisboa, Estoril (Portugal). *NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry* **153**, 503–510 (2004).
- (5) O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko, T.J. Shankland, and J.A. TenCate. Strain-induced kinetics of intergrain defects as the mechanism of slow dynamics in the nonlinear resonant response of humid sandstone bars. Bogolyubov Kyiv Conference “Modern Problems of Mathematics and Theoretical Physics”. 13–16 September 2004, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv (Ukraine). *Book of Abstracts* 76–77 (2004).
- (6) O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko, T.J. Shankland, and J.A. TenCate. Soft-ratchet modeling of slow dynamics in the nonlinear resonant response of sedimentary rocks. Innovations in Nonlinear Acoustics: ISNA17 – 17th International Symposium on Nonlinear Acoustics including the International Sonic Boom Forum. 18–22 July 2005, State College, Pensilvania (USA). *AIP Conference Proceedings* **838**(1), 120–123 (2006).
- (7) V.O. Vakhnenko, O.O. Vakhnenko, T.J. Shankland, and J.A. TenCate. Dynamical realization of end-point memory in consolidated materials. Innovations in Nonlinear Acoustics: ISNA17 – 17th International Symposium on Nonlinear Acoustics including the Interational Sonic Boom Forum. 18–22 July 2005, State College, Pensilvania (USA). *AIP Conference Proceedings* **838**(1), 124–127 (2006).
- (8) V.O. Vakhnenko, O.O. Vakhnenko, J.A. TenCate, and T.J. Shankland. The dynamics of a sandstone bar under resonance loading. The XX Session of

- the Russian Acoustical Society. 27-31 October 2008, M. Lomonosov Moscow State University, Moscow (Russia). *Proceedings of the XX Session of the Russian Acoustical Society*, 206–209 (2008).
- (9) V. Vakhnenko, O. Vakhnenko, J. TenCate, and T. Shankland. Modeling of the nonlinear resonant response in sedimentary rocks. International Conference “Geodynamical Phenomena: from Observations and Experiments to Theory and Modeling”. 20–24 September 2010, Subbotin Institute of Geophysics, Kyïv (Ukraine). *Геофизический журнал* **32**(4), 195–197 (2010).
 - (10) O.O. Vakhnenko. Semidiscrete integrable systems inspired by the Davydov–Kyslukha model. International Conference “Quantum Groups and Quantum Integrable Systems”. 18–21 June 2013, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyïv (Ukraine). *Ukr. J. Phys.* **58**(11), 1092–1107 (2013).
 - (11) O.O. Vakhnenko. Integrable nonlinear Schrödinger system on a ribbon of triangular lattice. Bogolyubov Conference “Problems of Theoretical Physics” dedicated to the 50th anniversary of the Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine. 24–26 May 2016, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyïv (Ukraine). *Program and Abstracts*, 42 (2016).
 - (12) O.O. Vakhnenko. Semidiscrete integrable nonlinear Schrödinger system with background-controlled intersite resonant coupling. Short summary of key properties. The 3rd Walter Thirring International School on Fundamentals of Astroparticle and Quantum Physics. 17–23 September 2017, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyïv (Ukraine). *Ukr. J. Phys.* **63**(3), 220–225 (2018).
 - (13) O.O. Vakhnenko. Effect of lattice ribbonization via the background-controlled inter-site resonant interactions in nonlinear integrable systems. IECMSA-2018. 7th International Conference on Mathematical Sciences and Applications. 28–31 August 2018, Ramada Encore Kyïv Hotel, Kyïv (Ukraine). *IECMSA-2018. Book of Abstracts*, 124–125 (2018); *AIP Conference Proceedings* **2037**(1), 020027 (11 pages) (2018).

Вступ

Обґрунтування вибору теми досліджень

Назва цієї дисертаційної праці об'єднує в собі загальні аспекти теоретичних досліджень, що *a posteriori* відображають доробок автора в царині нелінійної динаміки багатокomпонентних структурованих низьковимірних систем. Матеріали до дисертації є наслідком ретельного відбору найбільш вдалих праць автора виключно із вказаної тематики та критичного викладу їхніх результатів з позицій набутого досвіду.

Першим поштовхом, що, як тепер можна стверджувати, вказав на загальний напрям майбутніх досліджень, стало ґрунтовне вивчення солітонної моделі Давидова–Кислухи [50, 51] за версією Давидова та Єремка [52]. Двопідсистемний характер моделі Давидова–Кислухи є досить сильним мотивом для досліджень багатьох фізичних систем, де нелінійні ефекти виникають внаслідок взаємодії між підсистемами. Саме думка про продуктивність ідеї виокремлення двох підсистем різної фізичної природи в досліджуваній реальній системі з послідовним урахуванням взаємодії між підсистемами допомогла авторові дисертації сформулювати адекватну гістерезну модель резонансного відгуку геологічних матеріалів на зовнішнє високочастотне механічне збурювання. З іншого боку, обмеженість просторового континуального наближення у застосуванні до моделі Давидова–Кислухи та неінтегровність цієї моделі в сенсі Лакса (Lax) стимулювали доскональне вивчення інтегровної напівдискретної (*тобто* неперервної за часом і дискретної за повздовжньою координатою) нелінійної системи Абловіца–Ладіка (Ablowitz–Ladik) Шрьодінґерового (Schrödinger) типу [2, 3, 4, 5], за певних умов [191] спорідненої до моделі Давидова–Кислухи. Внаслідок цього виникла зацікавленість в пошуку нових напівдискретних інтегровних нелінійних систем, близьких до напівдискретних нелінійних систем з фізичним підтекстом. Визначальну роль в цій зацікавленості відіграло вивчення видатної моделі Захарова–Шабата [247], чия інтегровність вказала на

універсальність методу оберненої задачі теорії розсіяння [121], вперше пристосованого Гарднером (Gardner), Гріном (Greene), Крускалом (Kruskal) та Міурою (Miura) [68] до інтегрування рівняння Кортевеґа–де Вріза (Korteweg–de Vries) [96], з огляду, як пізніше виявилось, на представність цього рівняння у формі Лакса (Lax) [107]. Знайомство з моделлю Тоди (Toda), як однією з піонерських напівдискретних інтегровних нелінійних систем [66, 120, 183, 184], вселило впевненість, що не святі макітри ліплять, а сама ідея побудови та досліджування нових напівдискретних інтегровних нелінійних систем є досить цікавою та перспективною для багатьох галузей фізики.

Тут слід підкреслити, що останнім часом напівдискретні нелінійні системи стали важливим атрибутом моделювання динаміки носіїв заряду в нелінійних електричних передавальних мережах [147, 152], ланцюжках джозефсонівських (Josephson) контактів [141, 255, 168], а також неодмінним інструментом вивчення поперечного перерозподілу світла в зв'язаних оптичних волокнах (фотонних ґратках) і хвилеводах під впливом різноманітних факторів [57, 67, 111, 58] та досліджування впливу нелінійних ефектів на стабільність лазерного нагнітання в ланцюжках когерентно зв'язаних напівпровідникових лазерів [140]. З іншого боку, є вагомим підстави, аби моделювання динаміки носіїв заряду в рамках напівдискретних нелінійних систем стало визнаним засобом розгляду і таких важливих фізичних об'єктів як нанотрубки, наностьошки [116, 35, 157] та низьковимірні напівпровідникові регулярні надструктури [25, 110, 115, 154]. Стосовно ж досліджень динаміки нелінійних імпульсів стиснення в зернистих середовищах варто вказати на найпростіші просторово-одновимірні напівдискретні нелінійні моделі Нестеренка [136, 137, 164].

Складність просторової будови багатьох фізичних об'єктів слугує стимулом до розробляння дієвих підходів для адекватного моделювання їхніх властивостей. На цьому тлі інтерес до пошуку багатокомпонентних напівдискретних інтегровних нелінійних систем видається цілком закономірним. Напевно першими ластівками серед таких систем стали нелінійні системи Шрьодінґерового [69, 187, 188, 6] та Тодового [28] типів. Але ці багатокомпонентні напівдискретні інтегровні нелінійні системи мають таке саме число параметрів повздовжнього міжвузлового зв'язку, як і їхні двокомпонентні прототипи [2, 3, 4, 5] та [66, 120, 183, 184], відповідно. Тому динаміка нелінійних збуджень в цих багатокомпонентних системах не набуває нових якісних рис порівняно

з їхніми двокомпонентними попередниками. Стосовно згаданих багатоконпонентних напівдискретних інтегровних нелінійних систем Шрьодінґероного типу вкажемо також на явну прогалину в трактуванні параметрів повздовжнього міжвузлового зв'язку лише як величин, незалежних від часової змінної, та на безпідставне з точки зору фізичних застосувань ігнорування параметрів суто лінійної взаємодії між різними компонентами. Іншою недосконалістю більшости відомих дотепер інтегровних нелінійних систем Шрьодінґероного типу слід вважати неканонічність їхніх польових амплітуд. У своїй діяльності з побудови та досліджування нових багатоконпонентних напівдискретних інтегровних нелінійних систем автор дисертації намагався врахувати усі ці виклики. Додатково, з огляду на великий науковий та прикладний інтерес до синтезу та дослідження фізичних властивостей низьковимірних макромолекулярних об'єктів [82, 46, 62, 83, 99, 106, 134, 159, 252], автор цілеспрямовано керувався ідеєю віднайти способи розширювання регулярної геометричної структури ґратки носія нелінійних збуджень в напрямках, перпендикулярних до осі трансляційної симетрії, і таким чином імітувати просторові структури нанотрубок та наностьожок. З іншого боку, привабливість ідеї про квазіодновимірний характер просторової ґратки невпинно зростала завдяки спроможності кожної побудованої відповідним чином нової багатоконпонентної напівдискретної інтегровної нелінійної системи Шрьодінґероного типу точно враховувати вплив зовнішнього магнетного поля в термінах фаз Паєрлса (Peierls) [145] для параметрів когерентної міжвузлової взаємодії. Стосовно моделювання динаміки нелінійних збуджень на квазіодновимірних ґратках, збурених точковими домішковими дефектами або локальними дефектами поперечної резонансної взаємодії, інтуїція, підкріплена поняттям траєкторії центру солітонного пакету, вказала на коло задач з формулювання критеріїв селективного доправляння солітонів крізь збурені ділянки.

Короткочасним, але досить продуктивним відступом від проблематики багатоконпонентних напівдискретних інтегровних та близьких до інтегровних нелінійних систем стало ретельне знайомство з низкою експериментальних праць [74, 76, 84, 85, 175, 176, 177], де резонансні, нелінійні та релаксаційні ефекти, висліджені при високочастотному механічному збуренні зернистих геологічних матеріалів, сплелися в досить незвичну картину лінійного пом'якшення резонансної частоти з ростом амплітуди збурення, гістерезної

поведінки резонансних кривих та логарифмічного за часом відновлювання резонансної частоти після зменшення інтенсивності збурення. Свіжий, незашорений схоластичними теоріями [31, 55, 142, 160], заснованими на концепції штучно вигаданих гістерезних елементів, погляд на усю сукупність неодноразово задокументованих експериментальних результатів відразу викликав насагу пояснити їх з єдиних позицій зрозумілої для експериментаторів фізично вмотивованої теорії, яка би брала до уваги процеси утворювання та заліковування мікротріщин.

Викладені вище критичні міркування вилились у велику низку досліджень, заголовки до яких виник вже на завершальній стадії написання дисертації.

Аби сформулювати мету і завдання цих досліджень скористаємося універсальним принципом академіка Олександра Сергійовича Давидова: “Пишите в своих рабочих планах то, что вами уже сделано”.

Мета і завдання досліджень

Метою дисертаційної роботи було закласти теоретичні підвалини та дослідити нелінійну динаміку різноманітних багатокomпонентних структурованих низьковимірних систем, придатних для адекватного опису та прогнозування важливих нелінійних фізичних ефектів в геофізичних осадових породах, нелінійних електричних мережах, напівпровідникових надструктурах, природних та синтезованих макромолекулах, синтезованих наностьожках та нанотрубках, регулярно впорядкованих зв’язаних оптичних волокнах. В процесі реалізації цієї мети виникло велике коло теоретичних завдань, серед яких підґрунтям для дисертаційної праці стали наступні задачі.

01. Побудувати самодостатню динамічно-кінетичну нелінійну модель взаємозалежних пружних деформацій та порушених міжзернинних зв’язків з природно вмотивованим асиметричним механізмом утворювання та заліковування мікротріщин, в рамках якої з єдиних позицій відтворити відомі експериментальні ефекти з неklasичного резонансного відгуку геофізичних осадових матеріалів на зовнішнє високочастотне збурення, найвиразнішими серед яких є (i) гістерезна поведінка резонансної кривої як на висхідному, так і на низхідному схилах, (ii) лінійне пом’якшування резонансної частоти з ростом рівня урухомлювання, а також (iii) поступове (майже логарифмічне) відновлювання (більшання) резонансної частоти за низького рівня динамічного деформуван-

ня після попереднього кондиціювання зразка великим динамічним деформуванням.

02. Обґрунтувати можливість гістерезного ефекту пам'яті геофізичних осадових матеріалів про найбільше високочастотне динамічне навантаження (динамічний ефект прикінцевої пам'яті).

03. Побудувати фізично скориговану (канонічну) майже інтегровну версію багатокомпонентної напівдискретної нелінійної Шрьодінґерової системи, яка завдяки точному врахуванню резонансних міжвузлових зв'язків поперечного типу слугувала би основою для моделювання динаміки внутрішньомолекулярних нелінійних збуджень на регулярних багатоланцюжкових драбинчастих ґратках.

04. Дослідити взаємовпливи між повздовжніми та поперечними внутрішньомолекулярними солітонними модами в збурених багатоланцюжкових ґратках та сформулювати умови міжмодової синхронізації для адресного доправління скомпактованого нелінійного хвильового збудження до певного вузла трубчастої ґратки, підданої дії однорідного повздовжнього магнетного поля, а також для селективного пропускання солітона крізь ділянку дволанцюжкової ґратки із зиг'заґоподібним розташуванням одновузлових домішок чи для селективного пропускання солітона крізь локальний дефект пропорційно змодифікованих поперечних резонансних міжвузлових зв'язків багатоланцюжкової драбинчастої ґратки.

05. Побудувати інтегровну нелінійну параметрично збурювану динамічну модель внутрішньовузлових збуджень на пласкій фермоподібній ґратці з двома вузлами в елементарній комірці та започаткувати найдоречнішу симетризовану форму оберненої задачі розсіяння із залученням двох наборів допоміжних лінійних рівнянь та двох комплементарних систем дискретних рівнянь Марченка, в рамках яких знайти чотирикомпонентні багатосолітонні розв'язки моделі з точним урахуванням дії магнетного поля і явно представити односолітонний розв'язок.

06. Знайти основні закони збереження інтегровної нелінійної динамічної Шрьодінґерової системи внутрішньовузлових збуджень на пласкій фермоподібній ґратці та встановити її Гамільтонове формулювання як в термінах вихідних, так і в термінах фізично скоригованих (канонічних) польових амплітуд.

07. Побудувати напівдискретну інтегровну нелінійну Шрьодінґерову систему з

додатковими тлозалежними параметрами міжвузлового резонансного зв'язку, задану на квазіодновимірній ґратці з двома структурними елементами в елементарній комірці та (з урахуванням параметричного збурювання системи і впливу зовнішнього магнетного поля) знайти її явний шестикомпонентний солітонний розв'язок, для чого розробити спеціальну процедуру перетворення Дарбу та неявного перетворення Беклунда.

08. Знайти основні закони збереження напівдискретної інтегровної нелінійної чотирикомпонентної Шрьодінґерової системи з додатковими тлозалежними параметрами міжвузлового резонансного зв'язку, сформулювати її Гамільтонове представлення в термінах суттєво нестандартної Пуассонової структури та запропонувати варіанти канонізації динамічних рівнянь системи з огляду на можливу зміну природи збуджених станів окремих підсистем.

09. Запропонувати загальну форму рекурсивного пошуку безмежної ієрархії локальних законів збереження для багатоконпонентних напівдискретних інтегровних нелінійних систем, асоційованих з допоміжними лінійними спектральними операторами довільного порядку.

10. Обґрунтувати метод побудови параметрично урухомлюваних напівдискретних інтегровних систем з далекосяжним характером міжвузлової резонансної взаємодії в рамках представлення нульової кривини зі спектральним оператором Абловіца–Ладіка шляхом адекватного збільшення числа членів в лоранівському розкладі еволюційного оператора за степенями спектрального параметра і введення (наперед нерегламентованих) часових залежностей до параметрів резонансної взаємодії, сформулювати умови виникнення параметричної локалізації солітонного пакету та пересвідчитися в калібрувальній еквівалентності між параметрично розгойдуваними напівдискретними інтегровними системами з далекосяжним характером резонансної взаємодії під дією зовнішнього просторово лінійного потенціалу і суто параметрично розгойдуваними напівдискретними інтегровними системами з далекосяжним характером резонансної взаємодії, специфічно підлаштованим у часі.

11. Провести широкий пошук пар самоузгоджених допоміжних операторів Лакса на матрицях третього порядку та матрицях четвертого порядку з метою побудови в рамках доречних напівдискретних матричних рівнянь нульової кривини низки нових багатоконпонентних напівдискретних інтегровних систем, кожна з яких складалась би зі зв'язаних підсистем суттєво відмінної

природи.

12. Побудувати напівдискретну інтегровну нелінійну Шрьодінгерову систему з кількома типами додаткових тлозалежних параметрів міжвузлового резонансного зв'язку, задану на квазіодновимірній ґратці з трьома структурними елементами в елементарній комірці та (з урахуванням параметричного збурювання системи і впливу зовнішнього магнетного поля) знайти її явний десятикомпонентний солітонний розв'язок.

13. Знайти Пуассонову структуру для напівдискретної інтегрованої нелінійної шестикомпонентної Шрьодінгерової системи з кількома типами додаткових параметрів міжвузлового резонансного зв'язку на інтеркальованій драбинчастій ґратці та сформулювати Гамільтонове представлення динамічних рівнянь цієї системи.

14. В рамках рівняння нульової кривини з доречно узагальненими допоміжними операторами другого порядку сформулювати загальне правило побудови багатокомпонентних напівдискретних інтегровних нелінійних систем з багатьма типами додаткових параметрів міжвузлового зв'язку, заданих на квазіодновимірних ґратках з довільним числом структурних елементів в елементарній комірці.

Методи досліджень

○ Для адекватного пояснення експериментально встановлених проявів неklasичного резонансного відгуку геологічних осадових порід на періодичне зовнішнє збурення впроваджено та використано метод кінетичного опису еволюції тріщин із суттєво відмінними жвавостями їхнього утворювання та заліковування.

○ Для точного відтворення траєкторій солітонних хвильових пакетів в інтегровних нелінійних системах на драбинчастих ґратках під дією лінійного потенціалу та майже точної побудови фазового портрету центру солітона на драбинчастій ґратці з модифікованим поперечним зв'язком застосовано аналітичний метод пробних лагранжіанів, що є добре зарекомендованим наочним попередником для суто комп'ютерних розрахунків.

○ Усі із запропонованих напівдискретних інтегровних нелінійних систем сформульовано в рамках матричнозначного напівдискретного рівняння нульової кривини внаслідок багаторазових евристичних спроб віднайти якомога більше

пар взаємоузгоджених аналітичних виразів для спектрального та еволюційного операторів, оскільки загального самодостатнього методу їхньої побудови наразі не існує.

о Для пошуку найважливіших локальних законів збереження більшості досліджуваних напівдискретних інтегровних нелінійних систем впроваджено та застосовано точний узагальнений метод пошуку ієрархії локальних законів збереження, прийнятний для нелінійних систем, асоційованих з допоміжними лінійними спектральними задачами будь-якого порядку.

о Для точної аналітичної побудови розв'язків напівдискретної інтегровної нелінійної системи двох зв'язаних Шрьодінґерових підсистем розроблено та використано симетричний варіант методу оберненої задачі розсіяння з двома парами взаємно симетричних простороводискретних допоміжних лінійних задач та двома симетричними наборами дискретизованих рівнянь Марченка.

о Для багатокomпонентних напівдискретних інтегровних нелінійних систем з ненульовими фоновими значеннями супутніх (залежних) полів розбиття площини допоміжного спектрального параметра на області аналітичності функцій Йоста (Jost) набуває досить ускладнених форм, тому найпрозорішим способом пошуку точних аналітичних розв'язків порівняно з іншими підходами видається метод послідовного одягання тривіального засівного розв'язку за допомоги перетворення Дарбу (Darboux) для функцій допоміжної лінійної задачі у зв'язці з неявним перетворенням Беклунда (Bäcklund) для польових функцій досліджуваної нелінійної системи. Два варіанти вказаного вище методу було розроблено та успішно застосовано для пошуку явних солітонних розв'язків чотирикомпонентної інтегровної нелінійної Шрьодінґерової системи з тлозалежними резонансними взаємодіями та шестикомпонентної інтегровної нелінійної Шрьодінґерової системи з тлозалежними резонансними взаємодіями завдяки доречним параметризаціям спектральних даних, пов'язаних з відповідними операторами Дарбу.

о Щодо методів Гамільтонової (Hamilton) динаміки, то вони безумовно допомогли скомпактизувати вирази для багатьох систем напівдискретних інтегровних нелінійних рівнянь. Особливо це стосується чотирикомпонентної інтегровної нелінійної Шрьодінґерової системи з тлозалежними резонансними взаємодіями, яка змінює природу своїх нелінійних збуджень при переході через деяке критичне значення головного фонового параметра i , як наслідок, приводить

до порушення симетрії між своїми двома парами динамічних Гамільтонових рівнянь в кожній з їхніх двох дозволених альтернативних канонічних форм.

Наукова новизна здобутих результатів

А. Побудовано самодостатню динамічно-кінетичну нелінійну модель взаємозалежних пружних деформацій та порушених міжзернинних зв'язків з природно вмотивованим асиметричним механізмом утворювання та заліковування мікротріщин типу м'якої хлипавки, в рамках якої з єдиних позицій відтворено практично усі відомі експериментальні ефекти з неklasичного резонансного відгуку геофізичних осадових матеріалів на зовнішнє високочастотне збурення та передбачено гістерезний ефект пам'яті геофізичних осадових матеріалів про найбільше високочастотне динамічне навантаження.

Б. Запропоновано фізично скориговану (канонічну) майже інтегровну динамічну модель внутрішньовузлових нелінійних збуджень на регулярних багатоланцюжкових драбинчастих ґратках та сформульовано умови синхронізації повздовжньої та поперечної солітонних мод для адресного доправляння чи для селективного пропускання скомпактованого нелінійного хвильового збудження до певного вузла ґратки, збуреної повздовжнім однорідним магнетним полем або зигзаґоподібною ділянкою одновузлових домішок чи локальним дефектом пропорційно змодифікованих поперечних резонансних міжвузлових зв'язків.

В. Побудовано інтегровну нелінійну параметрично збурювану динамічну модель внутрішньовузлових збуджень на пласкій фермоподібній ґратці з двома вузлами в елементарній комірці та започатковано найдоречнішу симетризовану форму оберненої задачі розсіяння із залученням двох наборів допоміжних лінійних рівнянь та двох комплементарних систем дискретних рівнянь Марченка, в рамках яких знайдено чотирикомпонентні багатосолітонні розв'язки моделі з точним урахуванням дії магнетного поля. Знайдено основні закони збереження цієї інтегрованої нелінійної системи та встановлено її Гамільтонове формулювання як в термінах вихідних, так і в термінах фізично скоригованих (канонічних) польових амплітуд.

Г. Побудовано чотирикомпонентну напівдискретну інтегровну нелінійну Шрьодінґерову систему з додатковими (тлозалежними) параметрами міжвузлового резонансного зв'язку та (з урахуванням параметричного збурювання

системи і впливу зовнішнього магнетного поля) знайдено її явний солітонний розв'язок в рамках спеціально створеної процедури перетворення Дарбу та неявного перетворення Беклунда. Сформульовано Гамільтонове представлення цієї системи в термінах суттєво нестандартної Пуассонової структури та запропоновано два фізично рівноцінні варіанти стандартизації динамічних рівнянь системи з невідворотнім порушенням симетрії між двома канонізованими підсистемами і зміною природи збуджених станів однієї з підсистем при переході головного фонового параметра через своє критичне значення.

Г. Запропоновано загальну форму рекурсивного пошуку безмежної ієрархії локальних законів збереження для багатокомпонентних напівдискретних інтегровних нелінійних систем, асоційованих з допоміжними лінійними спектральними операторами довільного порядку.

Д. Обґрунтовано метод побудови параметрично урухомлюваних напівдискретних інтегровних систем з далекосяжним характером міжвузлової резонансної взаємодії та сформульовано умови здійснення параметричної локалізації солітонного пакету. Вказано на калібрувальну еквівалентність між параметрично розгойдуваними напівдискретними інтегровними системами з далекосяжним характером резонансної взаємодії в полі зовнішнього просторово лінійного потенціалу і суто параметрично розгойдуваними напівдискретними інтегровними системами з далекосяжним характером резонансної взаємодії, специфічно підлаштованим у часі.

Е. Знайдено шість пар допоміжних операторів Лакса, заданих матрицями третього порядку, та дві пари допоміжних операторів Лакса, заданих матрицями четвертого порядку, кожна з яких в рамках доречного напівдискретного матричного рівняння нульової кривини започаткувала щонайменше одну раніше невідому багатокомпонентну напівдискретну інтегровну систему, що складається зі зв'язаних підсистем суттєво відмінної природи.

Є. На інтеркальованій драбинчастій ґратці з трьома структурними елементами в елементарній комірці побудовано напівдискретну інтегровну нелінійну Шрьодінґерову систему з додатковими (тлозалежними) параметрами міжвузлового резонансного зв'язку трьох типів та (з урахуванням параметричного збурювання системи і впливу зовнішнього магнетного поля) знайдено її явний солітонний розв'язок в рамках вдосконаленої процедури перетворення Дарбу та неявного перетворення Беклунда. Виявлено надзвичайно нестандартну

Пуассонову структуру цієї нелінійної системи, уособлену п'ятдесятьма п'ятьма фундаментальними дужками Пуассона між польовими амплітудами, та сформульовано Гамільтонове представлення динамічних рівнянь системи.

Ж. В рамках рівняння нульової кривини з доречно узагальненими допоміжними операторами другого порядку сформульовано загальне правило побудови багатокомпонентних напівдискретних інтегровних нелінійних систем на квазіодновимірних ґратках з довільним числом структурних елементів в елементарній комірці та з багатьма типами додаткових (глобальних) параметрів міжвузлового резонансного зв'язку.

Особистий внесок здобувача

Серед сорока трьох наукових праць {1–43}, в яких викладено основні наукові результати дисертації, тридцять наукових праць {1, 3, 4, 8–12, 17, 18, 21–26, 29, 30, 32–43} опубліковано здобувачем одноосібно. Тринадцять наукових праць {2, 5–7, 13–16, 19, 20, 27, 28, 31} опубліковано зі співавторами. Усі оригінальні наукові результати, що увійшли до дисертації з дев'яти спільних праць {2, 5–7, 13, 14, 15, 27, 28}, а саме – ідеї, постановки задач, побудови моделей, їхні аналітичні дослідження та висліди (окрім комп'ютерних розрахунків) належать виключно здобувачеві. Щодо оригінальних наукових результатів з інших трьох спільних праць {16, 19, 20}, то постановки задач, побудови моделей, їхні аналітичні дослідження та теоретичне передбачення динамічного ефекту прикінцевої пам'яті (окрім комп'ютерних розрахунків та експериментального підтвердження динамічного ефекту прикінцевої пам'яті) належать здобувачеві. Сьомий розділ спільної монографії {31} повністю написано здобувачем за результатами оригінальних наукових праць {13–16, 19, 20}.

Про деякі результати з однієї зі спільних статей {2} було згадано в дисертації співавтора: В.А. Вахненко. *Моделирование нелинейных длинноволновых процессов в многокомпонентных средах*. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.17 химическая физика, физика горения и взрыва. НАН Украины. Институт геофизики им. С.И. Субботина. Отделение геодинамики взрыва. Киев 1995.

Проте використані співавтором результати жодним чином не стосувалися ключової ідеї (та її аналітичної реалізації) здобувача зі вказаної спільної праці {2} про спосіб та доцільність введення класичних фізично скоригованих польових

амплітуд до моделі Абловіца–Ладіка. Тому саме ключову ідею та її аналітичну реалізацію про спосіб та доцільність введення класичних фізично скоригованих польових амплітуд до моделі Абловіца–Ладіка і було задіяно здобувачем в його дисертації *Нелінійна динаміка багатокomпонентних структурованих низьковимірних систем*.

Аби сконкретизувати головні аспекти особистого внеску здобувача зі спільних праць, нижче подано розгорнутий перелік доречних результатів. Зокрема, авторів дисертації належать:

- Формули перетворень до фізично скоригованих польових амплітуд зі статті {2}.
- Побудова інтегровної нелінійної моделі Шрьодінгера на багатоланцюжкових драбинчастих ґратках, викладена в статті {5}.
- Побудова фізично скоригованої майже інтегровної версії багатокomпонентної напівдискретної Шрьодінгерової системи та усі результати з селективного транспорту солітонів в нерегулярних і збурених зовнішніми полями ґратках зі статей {6, 7}.
- Головні теоретичні результати праць {13–16, 19, 20}, а саме – побудова самодостатньої динамічно-кінетичної моделі взаємозалежних пружних деформацій та порушених міжзернинних зв'язків і пояснення на її основі усіх відомих експериментальних результатів з неklasичного резонансного відгуку геофізичних осадових порід.
- Теоретичне передбачення динамічного гістерезного ефекту прикінцевої пам'яті, сформульоване в працях {14, 16, 19, 20}.
- Побудова нових напівдискретних інтегровних нелінійних багатокomпонентних систем та асоційованих з ними нових допоміжних спектральних і еволюційних операторів третього і четвертого порядків у відповідності до статей {27, 28}.

Апробація матеріалів дисертації

Більшість матеріалів дисертаційної роботи було оприлюднено на таких наукових зібраннях.

- Copenhagen Conference on Complex Dynamics in Spatially Extended Systems. 27–30 September 1995, Niels Bohr Institute, Copenhagen (Denmark).
- International Conference “Modern Problems of Theoretical Physics” dedicated to

the 90th anniversary of A.S. Davydov. 9–15 December 2002, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv (Ukraine).

◦ International Conference “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics”. 23–29 June 2003, Institute of Mathematics, Kyiv (Ukraine).

◦ The NATO Advanced Research Workshop “Nonlinear Waves: Classical and Quantum Aspects”. 12–18 July 2003, Universidade de Lisboa, Estoril (Portugal).

◦ Bogolyubov Kyiv Conference “Modern Problems of Mathematics and Theoretical Physics”. 13–16 September 2004, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv (Ukraine).

◦ Innovations in Nonlinear Acoustics: ISNA17 – 17th International Symposium on Nonlinear Acoustics including the International Sonic Boom Forum. 18–22 July 2005, State College, Pensilvania (USA).

◦ The XX Session of the Russian Acoustical Society. 27–31 October 2008, M. Lomonosov Moscow State University, Moscow (Russia).

◦ International Conference “Geodynamical Phenomena: from Observations and Experiments to Theory and Modeling”. 20–24 September 2010, Subbotin Institute of Geophysics, Kyiv (Ukraine).

◦ International Conference “Quantum Groups and Quantum Integrable Systems”. 18–21 June 2013, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv (Ukraine).

◦ Bogolyubov Conference “Problems of Theoretical Physics” dedicated to the 50th anniversary of the Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine. 24–26 May 2016, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv (Ukraine).

◦ The 3rd Walter Thirring International School on Fundamentals of Astroparticle and Quantum Physics. 17–23 September 2017, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv (Ukraine).

◦ IECMSA-2018. 7th International Conference on Mathematical Sciences and Applications. 28–31 August 2018, Ramada Encore Kyiv Hotel, Kyiv (Ukraine).

Структура та обсяг дисертації

Дисертаційна праця містить усі складові частини, вказані у вимогах до оформлення дисертацій, а саме – титульний аркуш, зміст, анотацію (українською та англійською мовами), основну частину, список бібліографічних посилань на першоджерела та два додатки. Окрім вступу та висновків, до основної части-

ни дисертації входять шість розділів, розбитих на підрозділи. В кінці кожного розділу подано підсумки його основних оригінальних результатів. Загальний обсяг дисертації складає 333 сторінки тексту, 49 рисунків та 255 бібліографічних посилань на першоджерела.

Зв'язок дисертаційної роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами

Результати дисертаційної роботи одержано повністю або частково в Інституті теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України при виконанні наступних дослідницьких проектів.

○ Нелінійні локалізовані моди в складних системах з шумом та неупорядкованістю (Nonlinear localized modes in complex systems with noise and disorder), грант INTAS 96-0158 Європейського Союзу, за координації з Університету острова Крит (Греція).

○ Транспортні явища в нелінійних ґратках (Transport phenomena in nonlinear lattices), грант С. Saratheodory 1911/98 Дослідницької комісії Університету міста Патра (Греція), за співпраці з Факультетом інженерної науки (Engineering Science Department) Університету міста Патра.

○ Динаміка природних матеріалів з огляду на структуровані середовища з нелокальними властивостями (Dynamic of Earth materials treated as structured media with non-local features), грант 1747 Українського Науково-Технологічного Центру фінансований Урядом США, за співпраці з Відділенням наук про Землю і довкілля Лос-Аламоської Національної Лабораторії США (Earth and Environmental Sciences Division, Los Alamos National Laboratory, USA) та Відділенням геодинаміки вибуху Інституту геофізики імені С.І. Субботіна НАН України.

○ Нелінійні процеси в молекулярних та нано-структурах зі складною геометрією, відомча тема РК № 0103U000104 Відділення фізики і астрономії НАН України.

○ Керована динаміка збуджень в молекулярних та наносистемах зі складною геометричною структурою, відомча тема РК № 0105U008397 Відділення фізики і астрономії НАН України.

○ Фундаментальні властивості фізичних систем в екстремальних умовах, ці-

- льова тема РК № 0107U000396 Відділення фізики і астрономії НАН України.
- Ефективне керування динамікою нелінійних збуджень в макромолекулярних та магнітних нано-системах, відомча тема РК № 0110U007540 Відділення фізики і астрономії НАН України.
 - Мікроскопічні та феноменологічні моделі фундаментальних фізичних процесів у мікро- та макросвіті, цільова тема РК № 0112U000056 Відділення фізики і астрономії НАН України.
 - Особливості механічних, електронних та магнітних процесів у низьковимірних системах на наномасштабах, відомча тема РК № 0116U003192 Відділення фізики і астрономії НАН України.
 - Структура та динаміка статистичних і квантово-польових систем, цільова тема РК № 0117U000240 Відділення фізики і астрономії НАН України.

Практичне значення здобутих результатів

- Результат з передбачення гістерезного ефекту пам'яті геофізичних осадових матеріалів про найбільше динамічне навантаження (динамічний ефект прикінцевої пам'яті) став стимулом для проведення експериментів з його підтвердження у Відділенні наук про Землю і довкілля Лос-Аламоської Національної лабораторії США (Earth and Environmental Sciences Division, Los Alamos National Laboratory, USA).
- Низка оригінальних результатів, представлених в дисертації, увійшла до курсу лекцій “Нелінійні інтегровні напівдискретні моделі”, прочитаному у 2011 році для студентів 2-го курсу КНУ імені Тараса Шевченка в Науково-освітньому центрі при ІТФ ім. М.М. Боголюбова НАН України.

Публікації

- Основні наукові результати дисертації опубліковано в 43 провідних фахових наукових виданнях. Список основних праць за темою дисертації {1–43} подано після анотації українською мовою, після анотації англійською мовою та в додатку А. В списку бібліографічних посилань на першоджерела основні праці за темою дисертації подано за посиланнями [192–234].
- Список наукових публікацій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації на фахових наукових зібраннях, подано після анотації українською мовою, після анотації англійською мовою та в додатку Б за посиланнями (1)–(13).

Розділ 1

Гістереза та повільна динаміка нелінійного резонансного відгуку осадових порід

1.1 Експериментальні передумови для побудови моделі м'якої хлипавки

Скам'янілі осадові породи, наприклад пісковики, вирізняються своєю зернистою структурою [40, 60, 179], в якій осердя окремої зернини є значно твердішим за міжзернинний цементувальний матеріал [75]. Одним з проявів недосконалості міжзернинної цементації є поруватість [40, 60, 179] – характеристика, що визначає проникність породи і слугує важливим технологічним чинником при видобутку нафти [40, 60]. Окрім того, поруватість полегшує проникання води в області міжзернинних контактів [40, 60], спричиняючи визначальний вплив на пружні модулі [39, 254, 236] та фактори сейсмічної дисипації [39, 254, 236, 180] відповідної породи.

Особливості зернинної та поруватої будови призводять до цілої низки визначальних нелінійних механічних властивостей порід як при квазістатичному, так і альтернованому динамічному навантажуванні. Так, гістерезні явища, аналогічні до встановлених за співвідношенням між навантаженням та деформацією на зразках, підданих навантажувально-розвантажувальним циклом [41, 71], згодом було виявлено і у співвідношенні між амплітудою та рушійною частотою на стрижнеподібних зразках, підданих високочастотному

альтернованому зовнішньому механічному збуджуванню з протягуванням частоти через область резонансу [84, 85, 175]. За великих рівнів періодичного збуджування має місце незвичайне майже лінійне (*тобто* суттєво некласичне) меншання резонансної частоти коливань зразка від амплітуди деформації [76, 85, 177], а після припинення високоамплітудного підготовчого збуджування спостерігаються довготермінові релаксаційні явища [175, 176], такі як майже логарифмічне в часі відновлювання (більшання) резонансної частоти [177].

Фрагментарне розуміння цих і деяких інших експериментальних результатів [177, 74] покликало нас поглянути на всю проблему, зазвичай відому під назвою “повільної динаміки”, систематично і запропонувати для неї замкнуту форму теорії [204, 205, 211, 222, 206, 207]. Ця теорія ґрунтується на прозорій, фізично вмотивованій формалізації єдиної пісковикової стрижнеподібної системи в термінах двох зв’язаних нелінійних підсистем, одна з яких порушує симетрію відгуку всієї системи на альтерноване зовнішнє збурення і діє подібно до м’якої хлипавки або діода з незначним зворотнім просочуванням [204, 205]. Надалі ми специфікуватимемо ці підсистеми як швидку підсистему повздовжніх зміщень та повільну підсистему пошкоджених міжзернинних та/чи міжпластинкових когезійних зв’язків.

В цьому розділі ми докладно обґрунтуємо побудову нашої моделі [204, 205, 211, 222, 206, 207] та продемонструємо її дієздатність у поясненні численних експериментальних спостережень (ефектів), що проявляються за примусових поздовжніх коливань пісковикових стрижнів. Ми покажемо, що велике коло експериментальних даних можна зрозуміти як прояв різноманітних граней того самого внутрішньо узгодженого механізму. Більше того, теорія, яку ми запропонували, має також значну передбачувальну силу стосовно ефекту динамічної реалізації гістерези з пам’яттю про прикінцеву точку [205], що фігурально нагадує свій добре відомий квазістатичний прототип [41, 71] (див. також [75, 84]). Цей теоретичний прогноз згодом знайшов підтвердження в експериментах Тен Кейта (Ten Cate) і Шенкланда (Shankland) [211, 222, 207, 210], виконаних у Лос-Аламоській Національній Лабораторії (LANL) США.

1.2 Підсистема повздовжніх зміщень пісковикого стрижня [205, 206, 222]

Надійний метод зондування, широко застосовуваний в експериментах з резонансних коливань стрижнів, полягає у збуджуванні горизонтально підвішеного циліндричного зразка за допомоги п'єзоелектричного силового перетворювача (трансдюсера), вцементованого між одним із кінців зразка та масивною противідбійною плитою, і в одночасному вимірюванні відгуку зразка за допомоги легковагового акселерометра, приєднаного до протилежного кінця стрижня [175, 177, 176]. В цьому випадку конфігурація альтернованих деформацій всередині стрижня є принципово повздовжньою, а саме збуджування має усі ознаки кінематичного [237]. Доречні граничні умови для поля повздовжніх зміщень u та поля повздовжніх напружень σ є такими

$$u(x = 0|t) = D(t) \cos \left(\varphi + \int_0^t d\tau \omega(\tau) \right) \quad (1.2.1)$$

$$\sigma(x = L|t) + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x = L|t) = 0, \quad (1.2.2)$$

де t вказує на час, φ відповідає початковій фазі збуджування, а x позначає поточну Лагранжову (Lagrange) координату стрижня. При цьому значення $x = 0$ та $x = L$ маркують рушійний та вільний кінці стрижня, відповідно. Параметр γ має сенс коефіцієнта внутрішнього тертя. Як правило, рушійна амплітуда $D(t)$ утримується в основному незмінною за винятком моментів вмикання рушійного пристрою, його перемикавання на інший рушійний рівень або повного вимикання. При цьому часова залежність кругової частоти рушія $\omega(t)$ задається типом протягування частоти (так званим протоколом частоти). Іншими інформативним різновидом експериментів видається такий, де в сенсі раніше вказаних часових залежностей рушійна амплітуда $D(t)$ та рушійна частота $\omega(t)$ змінені ролями.

Еволюційне рівняння для поля повздовжніх зміщень (або коротко для пружної підсистеми) ми запишемо в найзагальнішій формі

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\partial^2 u / \partial x \partial t)} \right], \quad (1.2.3)$$

розкриваючи її зміст поступово крок за кроком. Так, аби забезпечити додатність та суто внутрішній характер дисипації, дисипативна функція \mathcal{F} мусить бути деякою парною функцією від швидкості деформації $\partial^2 u / \partial x \partial t$. Ми обмежимося Стоксовим (Stokes) внутрішнім тертям [169], що асоціюється з дисипативною функцією

$$\mathcal{F} = (\gamma/2) [\partial^2 u / \partial x \partial t]^2. \quad (1.2.4)$$

У формулах (1.2.3) та (1.2.4) величини ρ та γ є, відповідно, середньою густиною пісковиків та коефіцієнтом внутрішнього тертя в пружній підсистемі. В подальшому залежності величин ρ та γ від температури T , насиченості водою s та деформації $\partial u / \partial x$ в рівняннях (1.2.3) та (1.2.4) ми нехтуватимемо. Співвідношення між напруженням σ та деформацією $\partial u / \partial x$ ми приймемо у вигляді

$$\sigma = \frac{E \operatorname{sech} \eta}{(r-a) [\cosh \eta \partial u / \partial x + 1]^{a+1}} - \frac{E \operatorname{sech} \eta}{(r-a) [\cosh \eta \partial u / \partial x + 1]^{r+1}}, \quad (1.2.5)$$

що за умови $r > a > 0$ запобігає стисливості стержня при деформаціях $\partial u / \partial x$, близьких до $+0 - \operatorname{sech} \eta$. Тим самим, параметрові $\cosh \eta$ приписуємо типову відстань між центрами сусідніх зернин, розділену на типову товщину міжзернинного цементацийного контакту. Тут показники r та a характеризують відштовхувальну та притягувальну частини міжзернинної взаємодії, відповідно. Іншими словами, ми апроксимуємо взаємодію між зернинами емпіричним потенціалом Мі (Mie) [128]. За малих деформацій $|\partial u / \partial x| \ll \operatorname{sech} \eta$ ми маємо

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{E \partial u / \partial x} &\approx 1 - \frac{1}{2}(r+a+3) \operatorname{sech} \eta \partial u / \partial x + \\ &+ \frac{1}{6}(r^2 + ar + a^2 + 6r + 6a + 11) (\operatorname{sech} \eta \partial u / \partial x)^2, \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

і тому параметри r , a , $\cosh \eta$ очевидно повністю специфікують нелінійні по-

правки до закону Гука (Hooke) за умови відсутності безпосереднього впливу деформації $\partial u / \partial x$ на модуль Юнга (Young) E . Тим часом непрямий ефект деформації на модуль Юнга, а саме – вплив, опосередкований концентрацією s пошкоджених міжзернинних зв'язків, вдається інкорпорувати до нашої теорії як головне джерело усіх нетривіальних явищ, згаданих в першому підрозділі. Цій темі присвячено наступний підрозділ.

1.3 Підсистема пошкоджених когезійних зв'язків [204, 205, 206, 222]

Будь-яка динамічна модель, що спирається лише на одну підсистему повздовжніх зміщень, не здатна адекватно відтворити усю гаму явищ, притаманних пісковиковим стрижням в експериментах з резонансного збуджування їхніх коливань. Цю ситуацію не рятують ані суто спекулятивні додаткові припущення (наприклад, про часову залежність амплітудно–частотної характеристики [74]), що не впливають з початкового рівняння, ані введення до розгляду допоміжних величин (наприклад, таких як максимальне відхилення деформації [74]), виправданих лише в разі квазістатичної теорії. Дотримуючись такої хибної позиції ми не в змозі відійти від неповного, фрагментального опису. Щонайбільше, на цьому шляху справа не йде далі голосливної апеляції до деякої гіпопетичної повільної підсистеми у досить штучний спосіб [177, 74], тобто без явної специфікації усіх доцільних (динамічних та / чи кінетичних) незалежних змінних та їхніх керувальних еволюційних рівнянь, навіть не згадуючи про взаємний зворотній зв'язок між повільною та швидкою підсистемами.

Ми обійшли вказані вище труднощі однопідсистемного моделювання, ввівши поряд зі швидкою пружною підсистемою також і повільну підсистему пошкоджених міжзернинних когезійних зв'язків через їхню концентрацію s . При деякому заданому напруженні σ (розтягувальному чи стискувальному) величина s мусить еволюціювати до свого залежного від напруження рівноважного значення s_σ . Аби досягти надійного узгодження між теорією та експериментом, така еволюція має трактуватися майже логарифмічною, а не експоненційною часовою залежністю, з одного боку, та бути чутливою до знаку прикладеного напруження – з іншого. Обидва ці аспекти можна досить легко врахувати

в концепції змішаної кінетики, яка на нашу думку знаходить доволі природне обґрунтування для консолідованих матеріалів. Ідея полягає в представленні загальної концентрації дефектів c через деяку прийнятну суперпозицію складових концентрацій g , де кожна парціальна концентрація g підпорядковується досить простій кінетиці.

Почнімо від розгляду набору складових концентрацій. Кожна окрема складова концентрація g в цьому наборі еволюціонує до свого залежного від напруження рівноважного значення g_σ зі швидкістю $\partial g/\partial t$, яка в наближенні найнижчого порядку має бути пропорційною до різниці $g_\sigma - g$. Так, за $g > g_\sigma$ ушкоджені зв'язки є схильними до відновлювання ($\partial g/\partial t < 0$), а при $g < g_\sigma$ неушкоджені зв'язки схильні до розриву ($\partial g/\partial t > 0$). Позначаючи жвавість відновлювання як $\mu = \mu_0 \exp(-U/kT)$, а жвавість розриву як $\nu = \nu_0 \exp(-W/kT)$, ми можемо формалізувати попередні твердження в термінах наступного кінетичного рівняння [204, 205, 206, 222]

$$\partial g/\partial t = -[\mu\theta(g - g_\sigma) + \nu\theta(g_\sigma - g)](g - g_\sigma), \quad (1.3.1)$$

де величини U та W уособлюють активаційні бар'єри для процесів відновлювання та ушкодження зв'язків відповідно, k є константою Больцмана (Boltzmann), а символ $\theta(z)$ вказує на східчасту функцію Гевісайда (Heaviside).

Виникає питання – однаковими чи різними мають бути жвавості μ та ν і чому? Існують вагомі аргументи вважати, що параметри μ та ν мусять відрізнятися, причому досить сильно, оскільки об'єм речовини, придатний для виникнення та розвитку окремої тріщини, виявляється суттєво макроскопічним, хоча й обмеженим міжзернинним простором. Справді, за розтягувального навантаження потенційно існує безліч просторових шляхів аби розірвати міжзернинний цементаційний контакт з тим самим основним наслідком – утворенням міжзернинної тріщини. Тут ми розуміємо, що будь-яка доречна макроскопічна характеристика породи неодмінно має бути нечутливою до конкретного положення тріщини між сусідніми зернинами, але повинна суттєво залежати від загальної площі тріщин в одиниці об'єму. Саме така величина і може бути належним мірилом концентрації дефектів. За аналогією з механізмом виникання тріщини слід підкреслити, що для вже утвореної рівноважної тріщини існують численні шляхи її подальшого розвитку за умови прикладення надли-

шкового розтягувального навантаження. Навпаки, за стискувального навантаження попередньо утворена тріщина має лише один просторовий шлях, аби залікуватись або, принаймні, частково стягнутись. Ці ключові спостереження означають докорінну нерівноправність $\nu_0 \gg \mu_0$ між передекспоненційними факторами ν_0 та μ_0 жвавостей порушування ν та відтворювання μ міжзернинних зв'язків навіть незалежно від когезійних властивостей цементацийного матеріалу. Більше того, завдяки можливій інтеркаляції води та/чи дрібній фрагментації цементацийного матеріалу між протилежними гранями тріщин, слід очікувати, що типове значення величини енергії активації заліковування тріщини U перевищуватиме величину енергії активації утворення тріщини W . В цілому, усі наведені вище фактори здатні призвести до ще більшої нерівноправності $\nu \gg \mu$ між жвавостями утворення ν та нищення μ дефектів, що може сягати кількох порядків. Цей висновок, що покладається на мезоскопічність масштабу залучених структурних елементів, знаходить свою наочну аналогію і на макроскопічному рівні, коли зразок, що його одного разу переламали, залишається переломленим практично назавжди.

Дотепер ми мали справу лише з єдиною складовою g концентрації дефектів, приписаною до пари фіксованих активаційних параметрів U та W . Насправді, усякий малий, але все ще макроскопічний об'єм пісковику містить в собі величезне розмаїття структурних елементів, які розрізняються за розміром, складом, природним кліважем тощо. В результаті активаційні бар'єри для процесу відновлювання когезії U та процесу порушування когезії W мають утворювати два правдоподібно неперервних набори в певних енергетичних межах, які ми позначимо як $U_0 \leq U \leq U_0 + U_+$ та $W_0 \leq W \leq W_0 + W_+$, відповідно. Значення величин U_0 , U_+ та W_0 , W_+ мусять бути нечутливими до конкретного вибору поперечного перерізу стрижня завдяки однорідності (подібності) досліджуваного зразка на макроскопічному рівні. Звичайно, лише цих характеристик недостатньо, аби конструктивно врахувати увесь набір складових концентрацій, доки не вказано певного рецепту, який внесок (внесок з якою вагою) кожна окрема складова концентрація g має давати до загальної (зв'язаної) концентрації c дефектів. Ми обмежимося найпростішим наближенням, коли усі дозволені складові концентрації g мають однакову вагу в загальній

концентрації c , тобто, має місце формула [204, 205, 222]

$$c = \frac{1}{U_+ W_+} \int_{U_0}^{U_0+U_+} dU \int_{W_0}^{W_0+W_+} g dW . \quad (1.3.2)$$

Цей вираз не суперечить наступному припущенню

$$g_\sigma = c_\sigma , \quad (1.3.3)$$

що пов'язує рівноважне значення c_σ загальної концентрації порушених зв'язків з рівноважним значенням g_σ окремої складової концентрації порушених зв'язків, де як c_σ , так і g_σ визначаються значенням напруженості σ . Насправді лише величина c_σ посідає законне місце в стандартних термодинамічних оцінках [97, 98, 143], а дані про g_σ мусять спиратися на більш-менш правдиву гіпотезу, наприклад, встановлену формулою (1.3.3).

Відповідно до монографій професора Арнольда Марковича Косевича [97, 98] рівноважну концентрацію дефектів, асоційовану з напруженістю σ , задають виразом

$$c_\sigma = c_0 \exp(v\sigma/kT) , \quad (1.3.4)$$

де параметр $v > 0$ вказує на типовий об'єм, відведений на одиничний дефект і характеризує інтенсивність дилатації. Хоча наведена формула (1.3.4) і повинна, начебто, бути застосовною до ансамблю мікроскопічних дефектів у кристалах, але, на щастя, її виведено в рамках континуальної термодинамічної теорії, що, насправді, не потребує ані специфікації типового розміру дефекта, ані конкретизації структури кристалічної матриці. З цієї причини ми вважаємо, що вона здатна працювати також і для ансамблю мезоскопічних дефектів в консолідованих матеріалах, якщо під одиничним дефектом ми розумітимемо деякий елементарний розрив міжзернинної когезії. Рівноважна концентрація дефектів у нездеформованому повністю зреласованому стрижні c_0 має бути деякою функцією від температури T та насиченості водою s . Конкретний характер цих залежностей не впливає з перших принципів і потребує виокремлення з експериментів.

У цьому місці ми введемо феноменологічний зв'язок між концентрацією дефектів c та модулем Юнга E . Інтуїція підказує, що E мусить бути деякою монотонно спадною функцією від c , яку можна розвинути в степеневий ряд за малими відхиленнями $c - c_0$ величини c від свого нездеформованого рівноважного значення c_0 . В найнижчому інформативному наближенні ми можемо знехтувати усі степені, окрім нульової та першої, і внаслідок цього спокійно перегрупувати шуканий зв'язок до виду [204, 205, 222]

$$E = (1 - c/c_{cr}) E_+ . \quad (1.3.5)$$

Тут величини c_{cr} та E_+ мають сенс критичної концентрації дефектів та максимально можливого значення модуля Юнга, відповідно. Обидва ці параметри ми приймемо незалежними від температури та водонасиченості.

Відповідно до співвідношення (1.3.5), загальна концентрація дефектів c входить до еволюційного рівняння для пружної підсистеми (1.2.3) з нормалізацією на своє критичне значення c_{cr} . З цієї причини немає жодної потреби надавати величинам c , c_σ та c_{cr} певних одиниць вимірювання, проте слід пам'ятати, що такі одиниці мусять бути однаковими для усіх трьох величин. Щодо одиниць вимірювання поточної та рівноважної складових концентрацій g та g_σ , то достатньо знати лише їхній зв'язок з одиницею вимірювання загальної концентрації c , встановлений виразом (1.3.3).

За постійного навантаження кінетичне рівняння (1.3.1) забезпечує, аби концентрація c прямувала до свого рівноважного значення c_σ , поданого формулою (1.3.4), а модуль Юнга (1.3.5) досяг значення

$$E_\sigma = [1 - (c_0/c_{cr}) \exp(v\sigma/kT)] E_+ . \quad (1.3.6)$$

Варто зауважити, що вислідна функційна залежність E_σ від σ майже точно відтворює експериментально встановлену допасовувальну формулу для пружних модулів як функцій прикладеного навантаження $P \sim -\sigma > 0$ (див. огляд [88] та вказані там посилання). Окрім того, співвідношення (1.3.6), взяте за нульової напруженості $\sigma = 0$, здатне реконструювати температурну та водонасичувальну залежності рівноважної концентрації дефектів у ненапруженому стані c_0 в рамках доступних експериментальних даних для модуля

Юнга в нездеформованих відновлених зразках. Так, беручи до уваги температурну екстраполяцію Сатерленда (Sutherland) [170, 171, 172, 251] та проаналізувавши температурозалежні дані за нульової водонасиченості [178], а також дані, залежні від водонасиченості за кімнатної температури [236], вибрані для пісковика Berea, ми запропонували наступну допасовувальну формулу [204, 205, 222]

$$c_0 = c_{cr} \left(\frac{T}{T_{cr}} \right)^2 \left[\cosh^2 \alpha - \exp \left(-\frac{\beta s}{1-s} \right) \sinh^2 \alpha \right], \quad (1.3.7)$$

де водонасиченість s означена так, аби змінюватися в інтервалі $0 \leq s \leq 1$. Допасовувальні параметри, доречні для пісковика Berea, є такими: $T_{cr} = 1475$ К, $\cosh^2 \alpha = 16$, $\beta = 10$. Ми сподіваємося, що наша апроксимація (1.3.7) має працювати принаймні в межах температурних порогів необоротних руйнацій осадових порід, а саме, між точкою замерзання води в порах (≈ 273 К) та точкою спікання глинистих внутрішньопроміжкових компонентів (≈ 345 К).

Головний вислід нашого підходу міститься в кінетичному рівнянні (1.3.1), що може бути застосованим як для статичного, так і для динамічного режимів зовнішнього навантаження. В другому випадку, проте, ми мусимо вважати величини c_σ та g_σ здогадно рівноважними, тобто такими, що їх задано формулами (1.3.4) та (1.3.3), де напруження σ прийнято динамічним.

За малих динамічних напружень $|\sigma| \ll kT/v$ експоненту $\exp(v\sigma/kT)$, що домінує у виразі (1.3.4) для c_σ , можна спокійно апроксимувати двома першими членами її розкладу. З огляду на співвідношення (1.3.3) між c_σ та g_σ , аналогічне наближення стосується і g_σ . Проте при альтернованому збуджуванні ця обставина аж ніяк не вказує на нульове значення довгострокової поправки до g_0 в розв'язкові g кінетичного рівняння (1.3.1), як можна було б очікувати. Навпаки, величезний диспаритет $\nu \gg \mu$ між жвавостями створювання ν та знищування μ дефектів, як виявляється, створює фізичний механізм порушення симетрії відгуку коливної системи на альтерноване (періодичне) зовнішнє урухомлювання, що діє подібно до м'якої хлипавки, чи недосконалого діода. Цей механізм і є наріжним каменем запропонованого нами моделювання.

Навпаки, попередні теорії непружної релаксації, розвинуті для криста-

лічних тіл [143], спираються на симетричну форму кінетичного рівняння (що відповідає тотожності $\nu \equiv \mu$ в наших позначеннях) і не припускають процесу динамічного підлаштування рівноважного значення внутрішнього релаксаційного параметра (заданого величиною g_σ в нашому підході). Щодо попередніх теорій утворення тріщин [150], то вони відрізняються від нашого підходу тим, що нехтують процеси зарубцьовування тріщин (тобто вони приймають $\mu = 0$ в наших позначеннях) і не вводять змінної концентрації дефектів до правої частини відповідного кінетичного рівняння.

Підсумовуючи зміст другого та третього підрозділів, ми сформулювали основні теоретичні засади моделі коливань пісковикого стрижня в термінах двох зв'язаних суттєво нелінійних підсистем. По-перше, ми запропонували динамічне рівняння для поля повздовжніх зміщень (1.2.3) з прийнятними виборами дисипативної функції (1.2.4), функції зв'язку між напруженістю і деформацією (1.2.5) та функції впливу концентрації дефектів на модуль Юнга (1.3.5). По-друге, ми побудували кінетичне рівняння типу м'якої хлипавки для складової концентрації дефектів (пошкоджених міжзернинних когезійних зв'язків) (1.3.1) зі слухним означенням поняття керованої напруженістю здогадно рівноважної складової концентрації дефектів (1.3.3) та вказали на прийнятний зв'язок між складовою (допоміжною) концентрацією та загальною (фактичною) концентрацією пошкоджених міжзернинних зв'язків (1.3.4). Ми також представили граничні умови (1.2.1) та (1.2.2) для поля повздовжніх зміщень так, аби адекватно формалізувати ефект збуджувального пристрою (трансдюсера) на усю стрижневу систему.

Єдино неуточненими залишилися початкові умови. Вони мусять залежати від передісторії досліджуваного зразка. Наприклад, для нездеформованого, повністю відновленого стрижня, початкові умови слід записати так

$$u(x|t = 0) = 0 \tag{1.3.8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x|t = 0) = 0 \tag{1.3.9}$$

$$g(x|t = 0) = c_0, \tag{1.3.10}$$

де $0 < x < L$.

1.4 Кінетика м'якої хлипавки для стрижня з альтерновним рушієм [204, 205, 222]

В цьому підрозділі ми проілюструємо два різні кінетичні режими утворення та анігіляції дефектів в пісковиковому стрижні за умови періодичности рушійного напруження, що дає основу для якісного розуміння експериментальних результатів та їхніх комп'ютерних відтворень. З цією метою ми введемо величину (надлишок складової концентрації)

$$G \equiv g - g_0 , \quad (1.4.1)$$

що вимірює надлишок $G > 0$ або недобір $G < 0$ дефектів на нездеформованому рівноважному тлі g_0 , а вплив динамічної підсистеми на кінетичну врахуємо наближено єдиною гармонікою

$$G_\sigma \equiv g_\sigma - g_0 = A \sin(\omega t + \delta) , \quad (1.4.2)$$

де амплітуда A та фаза δ є деякими функціями повздовжньої координати стрижня x . Знати їхній конкретний вигляд немає потреби, оскільки за кожного фіксованого x величина G підпорядковується звичайному диференційному рівнянню

$$dG/dt = - [\mu\theta (G - G_\sigma) + \nu\theta (G_\sigma - G)] (G - G_\sigma) . \quad (1.4.3)$$

Зауважимо проте, що в найнижчому порядку амплітуда A є пропорційною до амплітуди ε деформації

$$\partial u / \partial x = \varepsilon \sin(\omega t + \delta) , \quad (1.4.4)$$

взятої в тому самому одномодовому наближенні. Коефіцієнт пропорційности $\nu c_0 E / kT$ впливає з виразів (1.4.2) та (1.4.19) з використанням наближеного співвідношення $\sigma = E \partial u / \partial x$ між напруженням та деформацією, а також формул (1.3.3) і (1.3.4) для g_σ та c_σ . Тут для спрощення ми знехтували часову залежність модуля Юнга, опосередковану повною концентрацією дефектів.

Розпочинаючи від нульового значення $G(t = 0) = 0$, кінетичне рівняння (1.4.3) та синусоїдний рушій (1.4.2) спричиняють, аби надлишкова складова концентрація G зростала в кожному часовому циклі $2\pi/\omega$ майже східчасто-подібно, як це показано на рисунку 1.1, де $\mu \ll \nu \leq \omega/2\pi$. Часові інтервали швидкого зростання, контрольованого жвавістю ν , визначаємо з нерівности

$$A \sin(\omega t + \delta) - G(t) > 0 . \quad (1.4.5)$$

Навпаки, часові інтервали повільного спадання, контрольованого жвавістю μ , визначаємо із супротивної нерівности

$$A \sin(\omega t + \delta) - G(t) < 0 . \quad (1.4.6)$$

Кожен окремий інтервал швидкого зростання послідовно чергується з наступним інтервалом повільного спадання, даючи загалом повну висхідну сходинку за цикл $2\pi/\omega$.

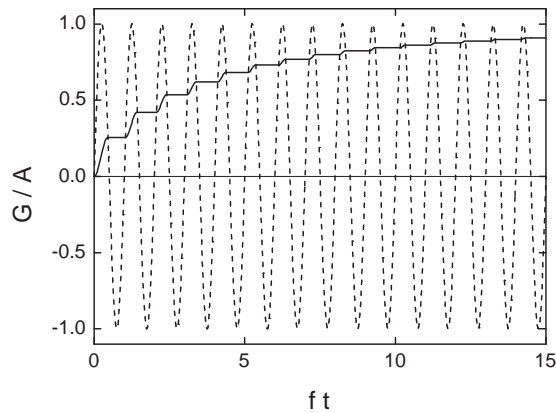


Рис. 1.1. Знормований розв'язок G/A кінетичного рівняння м'якої хлипавки (1.4.3) за синусоїдного рушійного навантажування (1.4.2) за $\mu = 1 \text{ s}^{-1}$, $\nu = 4000 \text{ s}^{-1}$, $f = \omega/2\pi = 4000 \text{ Hz}$, $\delta = 0$ та початкової умови $G(t = 0) = 0$ (суцільна східчато-подібна лінія). Штриховою лінією показано знормоване синусоїдне рушійне навантажування $G_s/A = \sin \omega t$. Час вздовж осі абсцис знормовано на період коливань $1/f$.

Хоча кінетичне рівняння (1.4.3) і можна було б проінтегрувати аналітично окремо на кожному часовому інтервалі, де виконується одна з нерівностей (1.4.5), чи (1.4.6), проте процедура зшивання цих відтинкових розв'язків в

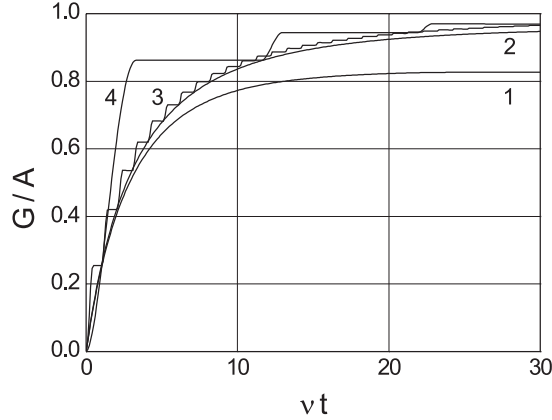


Рис. 1.2. Знормований розв'язок G/A кінетичного рівняння м'якої хлипавки (1.4.3) за синусоїдного рушійного навантажування (1.4.2). Криві $j = 1, 2, 3, 4$ послідовно відповідають жвавостям утворювання дефектів $\nu_j = 4 \cdot 10^j \text{ s}^{-1}$ з усіма іншими параметрами, такими самими як на рисунку 1.1. Час вздовж осі абсцис знормовано на обернену жвавість утворювання дефектів $1/\nu_j$ окремо для кожної кривої.

компактний вираз, придатний для якісного аналізу, видається непрактичною. Натомість, навіть побіжного погляду на комп'ютерні розв'язки (Рис. 1.2) достатньо, аби оцінити середнє (за часом) значення H усталеного розв'язку для G порівняно з амплітудою A синусоїдної стимуляції (1.4.2), а також оцінити ефективну жвавість λ нагромадження за цикл (період) надлишкової складової концентрації G порівняно зі жвавістю ν монотонного зростання G за постійного розтягувального навантаження. При побудові рисунка 1.2 ми вважали, що жвавість μ збігається зі своїм максимальним значенням $\mu_0 \exp(-U_0/kT)$, прийнятим за 1 s^{-1} , тобто саме з таким, яке в підрозділі 1.5 ми використовуваємо в інтерпретації експериментальних результатів з повільної динаміки. Частоту $f \equiv \omega/2\pi$ було вибрано в 4000 Гц, а жвавість ν випробувано за чотирьох суттєво різних значень 40; 400; 4000 та 40000 s^{-1} (відповідно криві 1, 2, 3 та 4 на рисунку 1.2). Усі чотири криві вказують, що для $\nu \geq 0.01f$ ефективна жвавість циклічного нагромадження λ не падає нижче, аніж у п'ять-шість разів порівняно зі жвавістю ν . Більше того, за $\nu \geq 0.01f$ відношення H/A завжди перевищує значення в 0.8 і швидко досягає одиниці з більшанням відношення ν/f . Іншим важливим спостереженням є майже повне пригнічення періодичних відхилень усталеного розв'язку G навколо свого середнього зна-

чення H (Рис. 1.3).

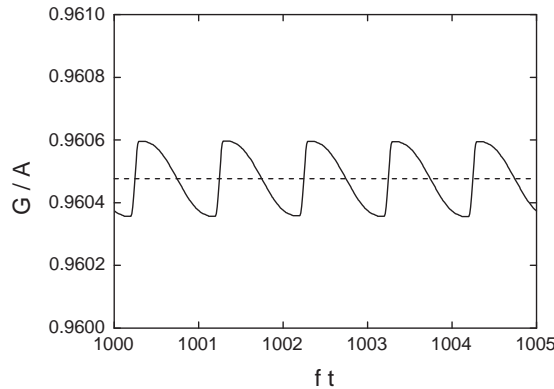


Рис. 1.3. Знормований розв'язок G/A кінетичного рівняння м'якої хлипавки (1.4.3) за синусоїдного рушійного навантажування (1.4.2) на суттєво усталеній стадії еволюції дефектів (суцільна зубчаста лінія). Штрихова лінія репрезентує середнє значення H/A знормованого усталеного розв'язку. Для обчислень збережено ті самі значення параметрів, що й для кривої $j = 2$ з рисунка 1.2. Час вздовж осі абсцис знормовано на період коливань $1/f$.

Результати попереднього абзацу легко узагальнити для випадку, коли амплітуда A не є сталою, а зростає з часом досить повільно так, що $0 < \dot{\epsilon}/\epsilon \ll \lambda \sim 0.2\nu$, де крапка вказує на похідну за часом t . Тоді за $\nu \geq 0.01f$ ми в змозі трактувати надлишок концентрації дефектів G як часозалежну величину, що ефективно відстежує поведінку амплітуди A . Є усі підстави стверджувати, що обидві згадані умови виконуються в експериментах з резонансних коливань пісковикових стрижнів, коли збуджувальну частоту протягують в напрямі до резонансної. Так, нерівність $0 < \dot{\epsilon}/\epsilon \ll 0.2\nu$ підтримується тим фактом, що типові швидкості протягування частоти навколо резонансу [175] не здатні забезпечити рівень величини $|\dot{\epsilon}|/\epsilon$ більший, аніж 0.5 s^{-1} . Щодо нерівності $0.01f \leq \nu$, то вона вочевидь повністю узгоджується з нашою гіпотезою про сильну нерівність $\mu \ll \nu$, убезпечену багатьма порядками, як це подано в підрозділі 1.3.

Перейдемо тепер до огляду режиму повільної релаксації в системі міжзернинних пошкоджених зв'язків. Цей режим настає після того, як надлишкову складову концентрацію G вже доведено до деякого усталеного значення B , а підготовче високоамплітудне збуджування раптово (починаючи від момен-

ту $t = t_c$) зменшують до дуже низького рівня. В цьому випадку, тобто за $t > t_c$, утримується нерівність $B \gg A$, і тому пружна підсистема слугує лише для зондування резонансної частоти, а її вплив на підсистему пошкоджених зв'язків можна цілком знехтувати. Тому в кінетичному рівнянні для G (1.4.3) ми всюди опустимо член G_σ і одержимо

$$dG/dt = -\mu G , \quad (1.4.7)$$

пам'ятаючи, що цікавий для нас режим розпочинається за $t = t_c$ з $G(t = t_c) = B$. Тут оцінка величини B є такою

$$B = c_0 \left[\exp \left(\frac{v\sigma_+}{kT} \right) - 1 \right] , \quad (1.4.8)$$

де $\sigma_+ > 0$ характеризує максимальне напруження, визначене амплітудою осциляцій напруження підготовчого високоінтенсивного динамічного нагнітання за $t < t_c$.

Щойно вказаний підхід є безумовно справедливим для опису процесу релаксації також і після статичної розтягувальної підготовки (кондиціонування) зразка, коли σ_+ слід розуміти як додатне прикінцеве напруження. Ми сподіваємося, що цей підхід міг би знайти застосування і у розгляді релаксаційних явищ після раптових термічних збурень, якщо σ_+ ототожнити з деяким ефективним розривним напруженням, передумовленим значеннями параметрів термічного удару.

Кінетичне рівняння (1.4.7) для надлишкової складової концентрації G при $t \geq t_c$ дає експоненційно спадний розв'язок

$$G = B \exp [-\mu(t - t_c)] . \quad (1.4.9)$$

Проте це жодною мірою не призводить саме до експоненційного меншання повної надлишкової концентрації $c - c_0$. Справді, підставивши розв'язок (1.4.9) до формули (1.3.2) для повної концентрації c з використанням означення (1.4.1), ми легко одержуємо

$$c = c_0 + \frac{B}{\chi} \left[E_1(\tau \exp(-\chi)) - E_1(\tau) \right] . \quad (1.4.10)$$

Тут

$$\tau \equiv \mu_0 \exp(-U_0/kT)(t - t_c) \quad (1.4.11)$$

позначає безрозмірнісний час, а

$$\chi \equiv U_+/kT \quad (1.4.12)$$

задає безрозмірнісну ширину енергетичного інтервалу, в межах якого розподілено активаційні бар'єри для процесу відновлювання когезії. Нарешті вираз

$$E_1(z) = \int_1^{\infty} \frac{dy}{y} \exp(-zy) \quad (1.4.13)$$

означає інтегральну експоненційну функцію [95].

Всупереч своїй назві, на початковій стадії малих z функція $E_1(z)$ поводить себе логарифмічно, що ясно видно з її аналітичного розкладу за $z < 1$ [95]

$$E_1(z) = -C - \ln z - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n \cdot n!}, \quad (1.4.14)$$

де число $C \simeq 0.5772157$ встановлює константу Ойлера–Маскероні (Euler–Mascheroni). І лише на кінцевій стадії $z > 1$ слушним виявляється використання асимптотичного розкладу [95]

$$E_1(z) = \frac{\exp(-z)}{z} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{z^n} \right]. \quad (1.4.15)$$

Ми застосуємо розклади (1.4.14) та (1.4.15) до найправдоподібнішого випадку, коли $\exp(-\chi) \gg 1$, і апроксимуємо різницю $E_1(\tau \exp(-\chi)) - E_1(\tau)$, що контролює відновлювання (меншання) в часі концентрації дефектів (1.4.10) наступною відтинковою формулою

$$\begin{aligned}
& E_1(\tau \exp(-\chi)) - E_1(\tau) \simeq \tag{1.4.16} \\
& \simeq \begin{cases} \chi - \tau + \tau^2/4 + \tau \exp(-\chi) & \text{при } \tau < \xi_- \\ \chi - C - \ln \tau + \tau \exp(-\chi) & \text{при } \xi_- \leq \tau \leq \xi_+ e^\chi \\ \frac{\exp[-\tau \exp(-\chi)]}{\tau \exp(-\chi)} & \text{при } \xi_+ e^\chi < \tau . \end{cases}
\end{aligned}$$

Тут константи $\xi_- \simeq 1.3910990$ та $\xi_+ \simeq 0.9286306$ визначено розв'язками трансцендентних рівнянь

$$-\xi_- + \xi_-^2/4 = -C - \ln \xi_- \tag{1.4.17}$$

та

$$-C - \ln \xi_+ + \xi_+ = \frac{\exp(-\xi_+)}{\xi_+}, \tag{1.4.18}$$

відповідно. Рівняння (1.4.17) та (1.4.18) мають сенс умов неперервності відтинкового представлення (1.4.16) в точках $\tau = \xi_-$ та $\tau = \xi_+ \exp(\chi)$, відповідно. Чим більшою є нерівність $\exp(\chi) \gg 1$, тим довшим стає інтервал майже логарифмічної часової залежності у формулі (1.4.16), а отже і у формулі (1.4.10) для s .

Формули (1.4.8), (1.4.10) та (1.4.16), підставлені до лінійної залежності (1.3.5) між модулем Юнга E та концентрацією дефектів s , дають нам змогу аналітично відтворити повільне, майже логарифмічне відновлювання (більшання) модуля Юнга

$$\begin{aligned}
E &= \left(1 - \frac{c_0}{c_{cr}}\right) E_+ - E_+ \frac{c_0}{c_{cr}} \left[\exp\left(\frac{v\sigma_+}{kT}\right) - 1 \right] \cdot \\
&\cdot \left\{ 1 - C \frac{kT}{U_+} - \frac{kT}{U_+} \ln \left[\mu_0 \exp\left(-\frac{U_0}{kT}\right) (t - t_c) \right] + \right. \\
&+ \left. \frac{kT}{U_+} \mu_0 \exp\left(-\frac{U_0 + U_+}{kT}\right) (t - t_c) \right\} \tag{1.4.19}
\end{aligned}$$

впродовж досить тривалого часового інтервалу

$$\frac{\xi_-}{\mu_0} \exp\left(\frac{U_0}{kT}\right) < t - t_c < \frac{\xi_+}{\mu_0} \exp\left(\frac{U_0 + U_+}{kT}\right). \quad (1.4.20)$$

Цей тип відновлювання спостерігається експериментально за допомоги відстежування часової зміни резонансної частоти після вимкнення інтенсивного кондиційовного збуджування [177].

Ідею, що виправдовує логарифмічне відновлювання модуля Юнга, раніше вже обстоювали Тен Кейт (Ten Cate), Сміт (Smith) та Г'уер (Guyer) [177], проте без вказівок на належні часові рамки (1.4.20), де логарифмічна залежність працює, та не враховуючи малої лінійної поправки (останній член у фігурних дужках виразу (1.4.19) для E) до провідного логарифмічного члена. Цікаво зауважити, що в природі логарифмічна кінетика зустрічається доволі часто і є, наприклад, неодмінним атрибутом процесу індукованого вологою старіння гранульованих середовищ [23].

1.5 Примусові повздовжні коливання пісковикогого стрижня. Модельні відтворювання реальних експериментів [204, 205, 206, 222]

Переважну більшість експериментальних результатів з примусових повздовжніх коливань пісковикогого стрижнів одержано з використанням повільного покрокового (ступеневого) протягування рушійної частоти навколо однієї з резонівних частот стрижня [84, 85, 175, 76, 177]. Аналітичний розгляд згасних коливань стрижня з одним вільним ($\sigma(x = L|t) + \gamma\partial^2 u/\partial x\partial t = 0$ за $x = L$) та іншим закріпленим ($u = 0$ за $x = 0$) кінцями в межах суто лінійної теорії дає для стрижня такі фундаментальні частоти

$$f_0(l) = \frac{2l - 1}{4L} \sqrt{\frac{E_0}{\rho} - \frac{\pi^2\gamma}{2\rho^2} \left(\frac{2l - 1}{L}\right)^2} \quad (l = 1, 2, 3, \dots), \quad (1.5.1)$$

де E_0 – це модуль Юнга в нездеформованому відновленому зразку, заданий формулою (1.3.6) за $\sigma = 0$. Відносні положення резонансних частот стрижня за скінченного згасання, обчислені для повільного висхідного протягування рушійної частоти за кінематичного збуджування, показано на рисунку 1.4. На підтвердження загальних правил, положення резонансних частот усталених примусових коливань (Рис. 1.4) добре узгоджуються з відповідними значеннями фундаментальних частот вільних згасних коливань (1.5.1), допоки пружна складова фундаментальної частоти (опосередкована першим членом підкореневого виразу формули (1.5.1)) значно перевищує дисипативну складову фундаментальної частоти (опосередковану другим членом підкореневого виразу формули (1.5.1)). На рисунку 1.4 резонансна крива показує залежність амплітуди відгуку R (зчитуваної на вільному кінці стрижня $x = L$) від рушійної частоти $f = \omega/2\pi$ за дуже малої рушійної амплітуди кінематичного збуджування $D = 7.6 \cdot 10^{-9} L$ (прикладеного до іншого кінця стрижня $x = 0$) з модельними параметрами, прийнятими для рисунка 1.5.

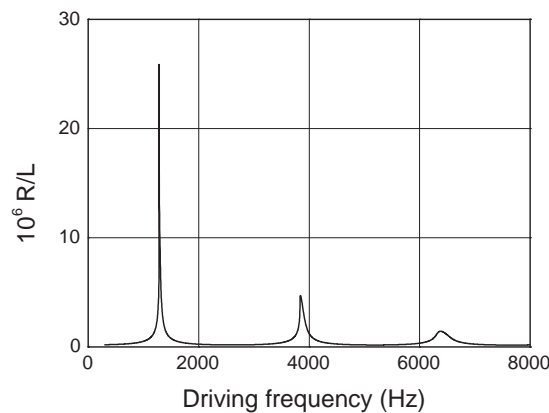


Рис. 1.4. Розрахована резонансна крива, що ілюструє відносні положення перших трьох резонансних піків за поздовжнього кінематичного збуджування пісковикого стрижня.

В рамках запропонованої у наших роботах [204, 205, 206, 222] та детально висвітленої в підрозділах 1.2–1.4 моделі двох зв’язаних підсистем, а саме, підсистеми повздовжніх зміщень пісковикого стрижня та підсистеми пошкоджених когезійних зв’язків, ми змогли відтворити переважну більшість відомих дотепер експериментальних ефектів, характерних для примусових пов-

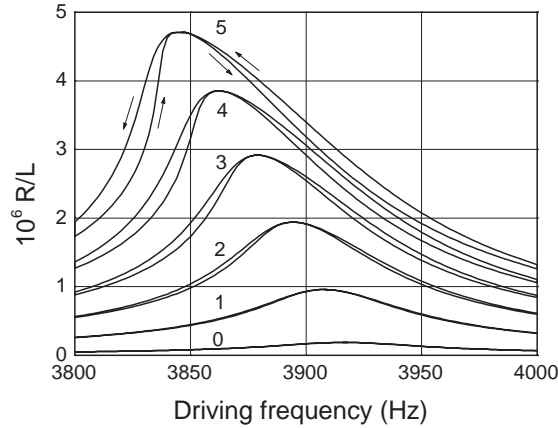


Рис. 1.5. Підготовлені (кондиційовані) резонансні криві $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ за послідовно збільшуваних значень рушійної амплітуди $D_j = 3.8(j + 0.2\delta_{j0})L \cdot 10^{-8}$. Стрілки на двох найвищих кривих вказують на напрями прогону частоти коливань рушія. Абсолютне значення швидкості прогону частоти становить $|df/dt| = 400 \text{ Hz/min}$. Водонасиченість s відповідає значенню $s = 0.25$.

здовжніх коливань пісковикового стрижня чи стрижня з іншої осадової породи.

Так, рисунок 1.5 показує типові гістерезисні резонансні криві, обчислені поблизу другої резонансної частоти $f_0(2) \equiv f_0$ за дедалі більших рушійних амплітуд D . Аби досягти відтворюваної гістерези, кожну наступну пару кривих обчислювали після двох підготовчих протягувань (одного підготовчого циклічного прогону) частоти коливань рушія. Такі підготовлені криві експериментатори зазвичай називають кондиційованими [175]. Стрілки на прикладі двох найвищих кривих вказують напрями протягування частоти. Часовий цикл для висхідного та низхідного протягування в межах частотного інтервалу 3700-4100 Hz становив 120 с. Модельні параметри прийнято такими, аби відповідати експериментальним умовам та експериментальним даним, зареєстрованим Тен Кейтом та Шенкландом (Shankland) в експериментах з пісковиком Berea [175]. Зокрема, відношення $E_+/\rho = 7.439 \cdot 10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2$ оцінювано із співвідношень (1.5.1), (1.3.6) та (1.3.7) за наступних значень $f_0 = 3920 \text{ Hz}$, $L = 0.3 \text{ m}$, $T = 297 \text{ K}$ та $s = 0.25$, відповідно другої резонансної частоти f_0 , довжини стрижня L , температури T та водонасиченості s . Відношення $\gamma/\rho = 1.851 \text{ m}^2/\text{s}$, що характеризує внутрішнє тертя, дібрано з найкращого підлаштування низькоамплі-

тудної теоретичної кривої (кривої з $j = 0$ на Рис. 1.5) до її експериментального прообразу [175] шляхом порівняння теоретичної та експериментальної добротностей. Параметри $\nu_0 \exp(-U_0/kT) = 1$ s та $U_+/k = 2525$ K, що визначають характер повільної релаксації, оцінювано відповідно до експериментальних вимірювань часової релаксації відгуку амплітуди пришвидшування за фіксованої частоти [175] та до спостережень з відновлювання резонансної частоти як функції часу [177]. Внаслідок досить повільних типових режимів протягування частоти в реальних експериментах немає ані експериментальної змоги, ані теоретичної потреби приписувати певні конкретні значення параметрам $\nu_0 \exp(-W_0/kT)$ та W_+/k , що відповідають за кінетику утворення дефектів. Це пов'язано з тим, що вище деякого критичного значення, залежного від рушійної частоти, комбінація $\nu_0 \exp(-(W_0 + W_+)/kT)$ призводить до результатів, невідрізнених від результатів, одержаних для безмежного значення вказаної комбінації. Згідно з оцінками попереднього підрозділу (підрозділу 1.4) умова, аби кінетика утворення дефектів трактувалася як практично миттєва (тобто формально характеризувалася безмежною жвавистю ν), виконується вже за нерівності $0.01 f_0 \leq \nu_0 \exp(-(W_0 + W_+)/kT)$. Комбінацію параметрів $\nu E_+/kT \cosh \eta = 275$ K було вибрано так, аби кількісно відтворити гістерезні явища за режимів протягування, типових для реальних експериментів [175]. Нарешті, параметри нелінійності $\cosh \eta = 2300$, $r = 4$, $a = 2$ було оцінено з міркувань адекватного відображення істинної асиметрії експериментальних резонансних кривих [175].

З рисунка 1.5 ми ясно бачимо, що для кожного рівня зовнішнього урухомлювання ефективна ширина резонансного піка залежить від напрямку протягування частоти і є вужчою за висхідного протягування (тобто від нижчих до вищих частот), аніж за низхідного (тобто від вищих до нижчих частот). Внаслідок цього ми і спостерігаємо гістерезні петлі, утворені висхідною та низхідною кривими на їхніх низькочастотних і високочастотних схилах. Історично саме цей ефект і став першим експериментальним свідченням повільної динаміки [175], спричиненої згідно з нашою теорією надлишковим утворенням міжзернинних дефектів, коли рушійна частота досягається близько до резонансу (тобто, коли амплітуда альтернованого напруження зростає) та доволі повільною їхньою анігіляцією, коли рушійна частота віддаляється від резонансу (тобто, коли амплітуда альтернованого напруження спадає). Важливо

зауважити, що у випадку щойно розглянутих кондиційованих кривих анігіляція міжзернинних дефектів продовжує тривати навіть тоді, коли рушійна частота вже просувається здалеку в бік резонансу. Ця ситуація утримується допоки амплітуда альтернованого напруження не досягне певного порогу, вище якого починає превалювати процес утворювання дефектів.

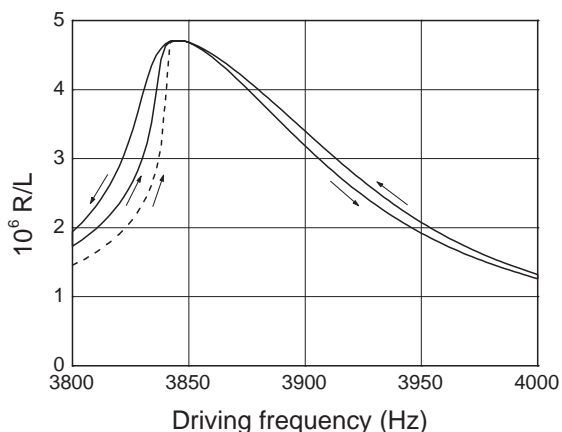


Рис. 1.6. Резонансні криві з рушійною амплітудою $D = 1.9 \cdot 10^{-7}L$. Стрілки вказують на напрями прогону частоти коливань рушія. Абсолютне значення швидкості прогону частоти становить $|df/dt| = 400 \text{ Hz/min}$. Штрихова лінія зображує некондиційовану початкову криву, зроблену за висхідного прогону.

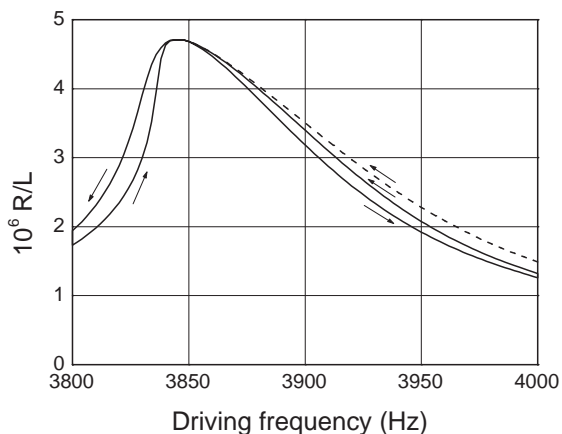


Рис. 1.7. Резонансні криві з рушійною амплітудою $D = 1.9 \cdot 10^{-7}L$. Стрілки вказують на напрями прогону частоти коливань рушія. Абсолютне значення швидкості прогону частоти становить $|df/dt| = 400 \text{ Hz/min}$. Штрихова лінія зображує некондиційовану початкову криву, зроблену за низхідного прогону.

Резонансні криві, подані на рисунках 1.6 та 1.7, було обчислено без будь-якого попереднього кондиціювання, але зі збереженням усіх модельних параметрів, задіяних для побудови рисунка 1.5. Амплітуду урухомлювання D було вибрано такою самою як і для двох найвищих кривих з рисунка 1.5. Отже, рисунок 1.6 демонструє три резонансні криві, одержані впродовж послідовних (висхідного-низхідного-висхідного) прогонів частоти, починаючи від висхідного прогону. Початкова некондиційована крива, відмічена штриховою лінією, пролягає попід двома наступними кривими. Рисунок 1.7 демонструє три резонансні криві, одержані впродовж трьох послідовних (низхідного-висхідного-низхідного) прогонів частоти, починаючи від низхідного прогону. Початкова некондиційована крива, відмічена штриховою лінією, пролягає поверх двох наступних кривих. Криві, зображені на рисунках 1.6 та 1.7 суцільними лініями, є практично відтворними і на позір збігаються з відповідними двома найвищими кривими з рисунка 1.5. Усі ці висліди повністю узгоджуються з результатами відповідних експериментальних спостережень [175]. Причина, чому кондиційована крива не збігається з її некондиціонованим аналогом на інтервалі між початковою та резонансною частотами, полягає в пом'якшеному значенні кондиційованого модуля Юнга, спричиненому незрелаксованим надлишком дефектів, створених протягом першого циклічного протягування рушійної частоти.

Зі зменшенням швидкості прогону рушійної частоти згадані вище відмінності стають дедалі менш виразними завдяки додатковому часу для релаксації на кожній з проміжних частот. Цей пункт проілюстровано на рисунках 1.8 та 1.9, де швидкість прогону становить лише соту частку від швидкості прогону з рисунків 1.6 та 1.7. Тим не менше, навіть в цьому начебто безгістерезному випадку пам'ять про найвищу амплітуду деформації все ще утримується. Останній результат, схарактеризований після свого експериментального відкриття [175] як “можливо несподіваний”, легко пояснити довготерміновістю відновлювання модуля Юнга, продиктованою повільною, майже логарифмічною, кінетикою анігіляції дефектів (див. формули (1.4.19), (1.4.20), (1.4.10) та (1.4.16) з підрозділу 1.4). За ще повільніших швидкостей прогону частоти з циклом в одну добу усі три криві стають невідрізненими незалежно від напрямку початкового прогону. Цей теоретичний результат підтверджує непряму експериментальну вказівку (одержану вимірюваннями пришвидшування за фіксованої частоти), що прогін тривалістю у кілька діб за старанно контролю-

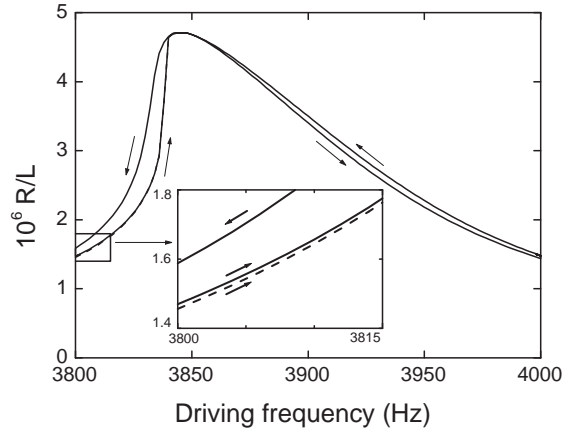


Рис. 1.8. Резонансні криві з рушійною амплітудою $D = 1.9 \cdot 10^{-7}L$. Стрілки вказують на напрями прогону частоти коливань рушія. Абсолютне значення швидкості прогону частоти становить $|df/dt| = 4 \text{ Hz/min}$. Штрихова лінія, виокремлена на збільшеній вкладці, зображує некондиційовану початкову криву, зроблену за висхідного прогону.

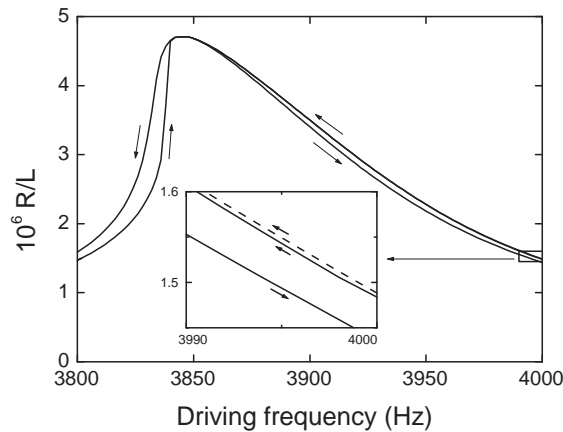


Рис. 1.9. Резонансні криві з рушійною амплітудою $D = 1.9 \cdot 10^{-7}L$. Стрілки вказують на напрями прогону частоти коливань рушія. Абсолютне значення швидкості прогону частоти становить $|df/dt| = 4 \text{ Hz/min}$. Штрихова лінія, виокремлена на збільшеній вкладці, зображує некондиційовану початкову криву, зроблену за низхідного прогону.

ваних умов мав би продукувати ті самі висхідні та низхідні резонансні криві [175].

Поряд із вже згаданими мотивами, експерименти з вимірювання часової релаксації амплітуди пришвидшування вільного кінця стрижня за фіксованої

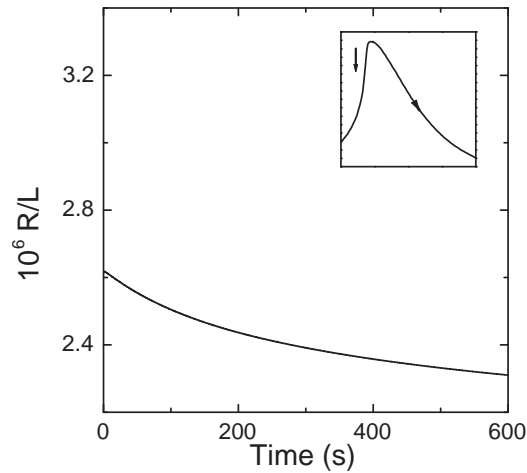


Рис. 1.10. Згасання амплітуди відгуку R за рушійної амплітуди $D = 1.9 \times 10^{-7}L$ та частоти коливань рушія $f_s = 3825$ Hz, зафіксованої нижче від пікової частоти $f_r = 3846$ Hz. Прогоня було зупинено під час виконання відтворного висхідного прогону частоти коливань рушія.

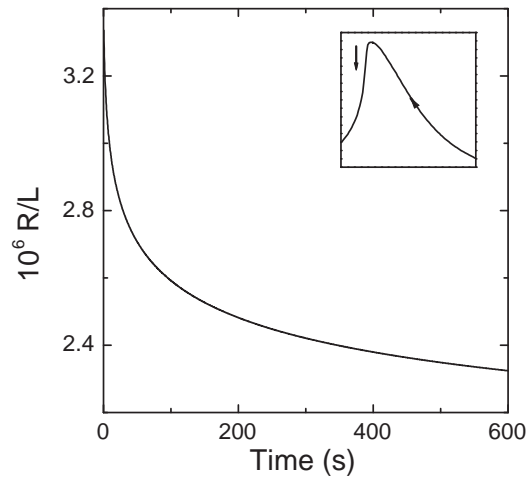


Рис. 1.11. Згасання амплітуди відгуку R за рушійної амплітуди $D = 1.9 \times 10^{-7}L$ та частоти коливань рушія $f_s = 3825$ Hz, зафіксованої нижче від пікової частоти $f_r = 3846$ Hz. Прогоня було зупинено під час виконання відтворного низхідного прогону частоти коливань рушія.

частоти надають інформацію, у який саме спосіб кам'яна порода поступово втрачає пам'ять про найбільшу деформацію [175] і таким чином проясню-

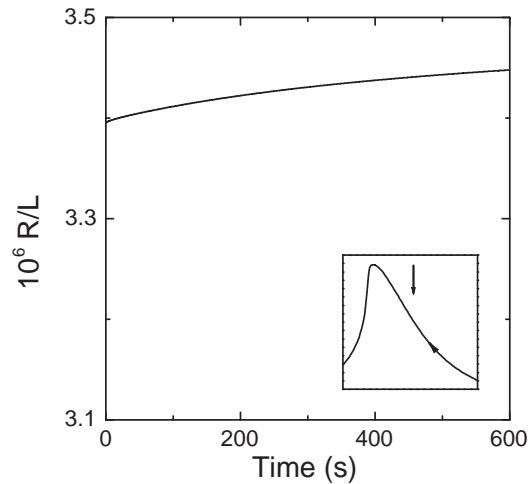


Рис. 1.12. Зростання амплітуди відгуку R за рушійної амплітуди $D = 1.9 \times 10^{-7} L$ та частоти коливань рушія $f_s = 3900$ Hz, зафіксованої вище від пікової частоти $f_r = 3846$ Hz. Прогон було зупинено під час виконання відтворюючого низхідного прогону частоти коливань рушія.

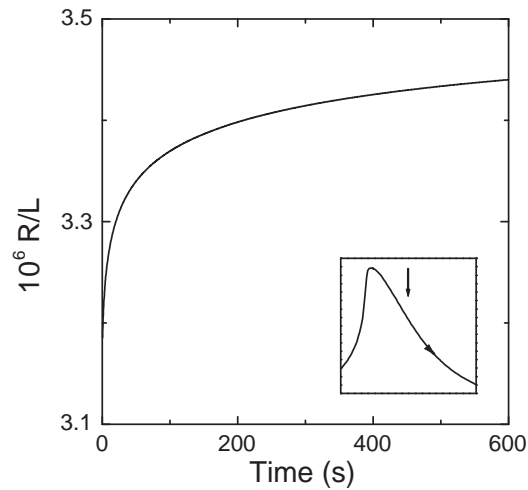


Рис. 1.13. Зростання амплітуди відгуку R за рушійної амплітуди $D = 1.9 \times 10^{-7} L$ та частоти коливань рушія $f_s = 3900$ Hz, зафіксованої вище від пікової частоти $f_r = 3846$ Hz. Прогон було зупинено під час виконання відтворюючого висхідного прогону частоти коливань рушія.

ють найцікавіші аспекти кінетики відновлювання когезійних зв'язків. Рисунки 1.10, 1.11 та 1.12, 1.13 зображують теоретичні релаксаційні криві, які коректно

відтворюють головні риси експериментів [175]. Під час побудови відтворних висхідних та низхідних резонансних кривих (з усіма параметрами, запозиченими від двох найвищих кривих з рисунка 1.5) ми зупинили прогін частоти в момент t_s (не вимикаючи самого рушія) та обчислили амплітуду R відгуку як функцію від $t - t_s$. Як і в реальних експериментах розрахована амплітуда відгуку поступово зменшувалась, коли зупинена частота була нижчою за резонансну частоту (рисунки 1.10 та 1.11) та збільшувалась, коли зупинена частота була вищою за резонансну (рисунки 1.12 та 1.13). Навіть більше, приблизно після десятихвилинної релаксації релаксаційні криві, обчислені при конкретній зупиненій частоті, наближались до довготермінового рівня, що відповідав некондиційованій частині початкової резонансної кривої незалежно від того, висхідним чи низхідним було вибрано передущий прогін.

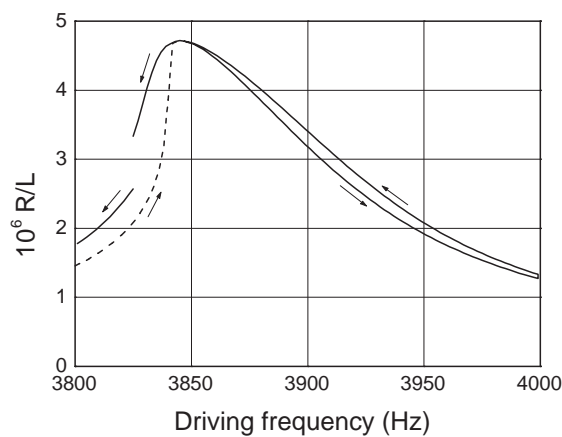


Рис. 1.14. Резонансні криві, одержані за допомоги неперервного висхідного прогону частоти коливань рушія та наступного відтинково-неперервного низхідного прогону. Протягом низхідного прогону як рушійне збуджування, так і прогін частоти було одночасно призупинено на 30 s за фіксованої частоти $f_s = 3825$ Hz, нижчої за пікову частоту $f_r = 3846$ Hz. Рушійна амплітуда D та абсолютне значення швидкості прогону частоти $|df/dt|$ поза тридцятисекундною паузою становили $D = 1.9 \cdot 10^{-7} L$ та $|df/dt| = 400$ Hz/min, відповідно.

Аби відтворити ще одну експериментальну грань часу відновлювання [175], ми видозмінили умови попереднього моделювання, зупиняючи прогін частоти та одночасно вимикаючи на 30 s і рушія за низхідного (Рис. 1.14) чи висхідного (Рис. 1.15) дозупинкового прогону від уже скондиційованого резонансу. Впродовж відносно короткого часу (десятки секунд) пам'ять про високу амплітуду

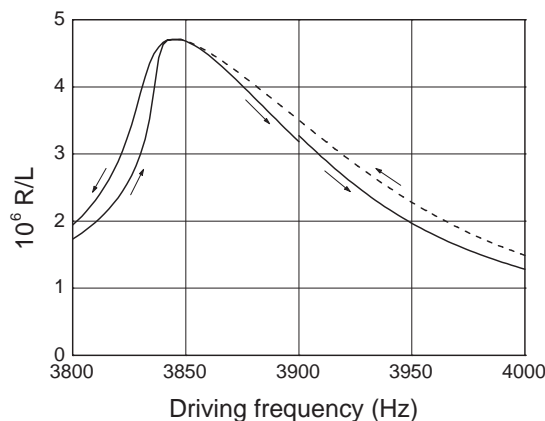


Рис. 1.15. Резонансні криві, одержані за допомоги неперервного низхідного прогону частоти коливальних рухів та наступного відтинково-неперервного висхідного прогону. Протягом висхідного прогону як рушійне збуджування, так і прогін частоти було одночасно призупинено на 30 s за фіксованої частоти $f_s = 3900$ Hz, вищої за пікову частоту $f_r = 3846$ Hz. Рушійна амплітуда D та абсолютне значення швидкості прогону частоти $|df/dt|$ поза тридцятисекундною паузою становили $D = 1.9 \cdot 10^{-7} L$ та $|df/dt| = 400$ Hz/min, відповідно.

деформації, яку камінь зазнав за резонансу зникала, що значно швидше аніж коли рушій залишався увімкненим. Відповідно до кінетичного рівняння (1.3.1) ці відмінності знаходять своє розумне пояснення в більш сприятливому режимі анігіляції дефектів за нульової напруженості $\sigma = 0$ порівняно з режимом керуванням осциляційною напруженістю зі значною амплітудою (хоча і меншою за резонансу). Рисунок 1.14 та 1.15 підготовано з використанням тих самих модельних параметрів, що й для рисунка 1.5. На додачу, рушійну амплітуду та швидкість прогону (окрім короткого часового інтервалу їхньої зупинки в 30 s) було встановлено з такими самими значеннями, як і для двох найвищих кривих з рисунка 1.5. Рисунок 1.14 зображує резонансні криві, одержані за неперервного висхідного прогону, зміненого на відтинково-неперервний низхідний прогін. Рисунок 1.15 показує доповняльні криві, одержані за низхідного неперервного прогону, зміненого на відтинково-неперервний висхідний прогін. Ефекти швидкого відновлювання (більшання) модуля Юнга E стрижня за умови зупинки прогону частоти та вимкнення рушійного нагнітання легко вглядіти як розриви резонансних кривих. На зупинених частотах нижче резонансу амплітуда відгуку провалювалась ближче до першої (некондиційованої

або те саме – відновленої) кривої з висхідним прогоном, показаної на рисунку 1.14 штриховою лінією. На зупинених частотах вище резонансу амплітуда відгуку підскакувала ближче до першої (некондиційованої або те саме – відновленої) кривої з висхідним прогоном, показаної на рисунку 1.15 штриховою лінією. Якісна картина цих провалів та підскакувань зумовлена непрямим впливом деформації на пружний модуль стрижня через концентрацію дефектів. На часовому відрізку, коли прогін частоти наближається до резонансу та минає резонанс, інтенсивність деформації стає суттєвою, спонукаючи відповідне утворення дефектів, і модуль Юнга меншає. Цей ефект проявляється як позірний зсув резонансної кривої в область нижчих частот після того, як прогін вже перевалив через резонанс. Якщо тепер рушій та прогін призупинити, деформація зникає, спричиняючи посилену анігіляцію дефектів так, що модуль Юнга більшає. Як наслідок, частина резонансної кривої, відстеженої після поновлення дії рушія та прогону частоти, повертається назад (тобто вгору за частотою) в міру втрати пам'яті про найвищу деформацію.

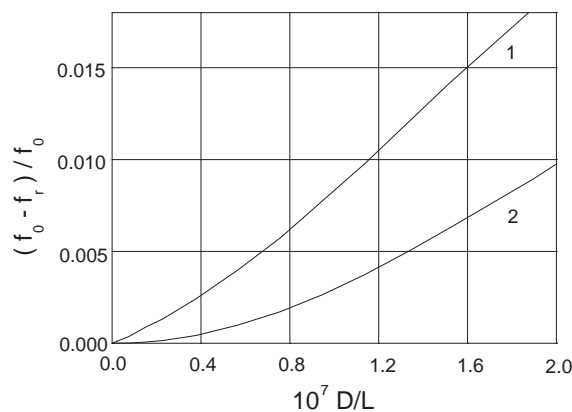


Рис. 1.16. Від'ємне значення зсуву $f_r - f_0$ резонансної частоти f_r від її асимптотичного значення f_0 як функція знормованої рушійної амплітуди D/L для нелінійного гістерезного матеріалу (крива 1) і для класичного нелінійного матеріалу (тобто нелінійного матеріалу з нульовим параметром дилатації: $v = 0$) (крива 2).

На рисунку 1.16 порівняно зсуви резонансної частоти як функції рушійної амплітуди для двох значень параметра дилатації v за інших параметрів, утриманих такими самими як і для рисунка 1.5. Так, крива 1, обчислена за $vE_+/k \cosh \eta = 275$ К, коли індукований деформацією зворотній зв'язок між

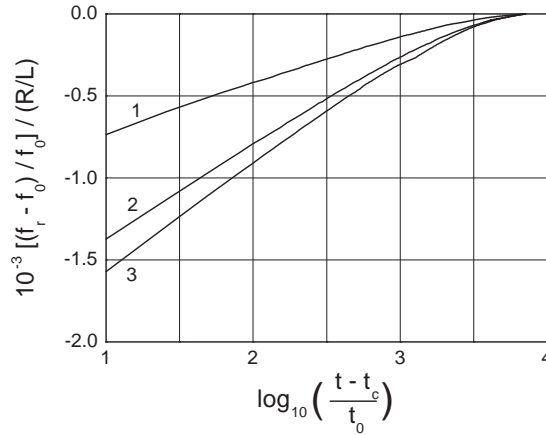


Рис. 1.17. Часова залежність відновлювання резонансної частоти f_r до її асимптотичного значення f_0 після вимкнення значного високоамплітудного кондиціювання. Послідовність кривих $j = 1, 2, 3$ відповідає висхідній послідовності водонасиченостей $s_j = 0.05, 0.15, 0.25$. Зсув частоти $f_r - f_0$ знормовано як на асимптотичну резонансну частоту f_0 , так і на ефективну кондиційовну напруженість ε_{eff} . Тут параметр ε_{eff} означено як магнітуду безрозмірної амплітуди відгуку R/L на вільному кінці стрижня, досягнуту на момент завершення високоамплітудного кондиціювання, підлаштованого до частоти резонансу.

повільною та швидкою підсистемами є істотним, демонструє майже лінійну залежність, типову для матеріалів з неklasичним нелінійним відгуком, тобто матеріалів, що мають основні риси повільної динаміки. Навпаки, крива 2, обчислена за $v = 0$, коли індуковане деформацією збуджування повільної підсистеми відсутнє, і отже обопільний зворотній зв'язок між повільною та швидкою підсистемами цілком зруйновано, демонструє майже квадратичну залежність, типову для матеріалів з класичним нелінійним відгуком [24]. Пильніше обстеження вказує, що крива 1 може бути апроксимованою лінійним та квадратичним членами, що є в руслі поліномного допасування другого порядку для модуля Юнга, що його виокремили Сміт і Тен Кейт з експериментів [166].

На рисунку 1.17 продемонстровано поступове відновлювання резонансної частоти f_r до свого максимального граничного значення f_0 після того, як стрижневі було надано високоамплітудного кондиціювання і потім кондиціювання було зупинено. Кондиціювання здійснювано багаторазовим короткоінтервальним прогоном частоти рушія в районі резонансної частоти за рівня рушійної

амплітуди, використаної для одержання третьої пари ($j = 3$) резонансних кривих на рисунку 1.5. На рисунку 1.17 зображено три різні криві, що відрізняються трьома різними значеннями водонасиченості, зберігши усі інші модельні параметри з рисунка 1.5 незмінними. Загальний зсув частоти $f_r - f_0$ складається з двох відмінних частин, а саме – (i) з очікуваного динамічного зсуву, спричиненого нелінійністю деформації [24] та (ii) із зсуву, викликаного повільною підсистемою. Проте, лише другу (кінетичну) частину зсуву можна зазвичай спостерігати протягом процесу відновлювання, оскільки перша частина зникає майже миттєво разом із зупинкою високоамплітудного рушія. Тому наочне відновлювання частоти має залежати від повільної кінетики відбудови міжзернинних когезійних зв'язків. З рисунка 1.17 ми ясно бачимо дуже довгий інтервал $10t_0 < t - t_c < 1000t_0$ логарифмічного відновлювання резонансної частоти f_r у повній згоді з експериментальними результатами [177] та нашими аналітичними розрахунками, підсумованими формулами (1.4.19) та (1.4.20) з підрозділу 1.4. Тут t_c вказує на момент вимкнення кондиціонування, а $t_0 = 1$ s є часовою масштабною константою.

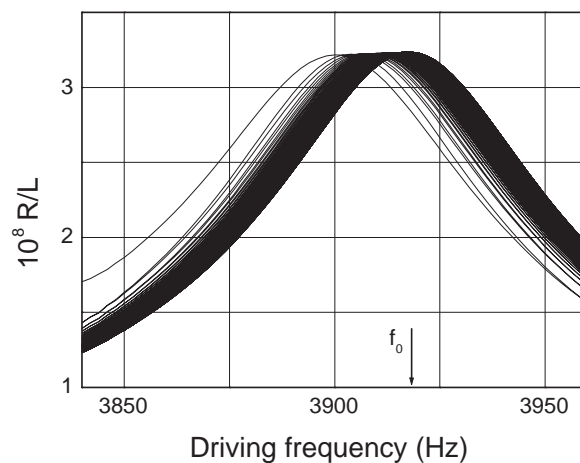


Рис. 1.18. Сукупність послідовних резонансних кривих, одержаних за допомоги неодноразового прогону частоти коливань малоамплітудного зондувального рушія навколо асимптотичного значення резонансної частоти f_0 після зупинки високоамплітудного кондиційовного рушія. Стрілка вказує на положення асимптотичної резонансної частоти f_0 . Водонасиченість, амплітуда зондування та абсолютна величина швидкості прогону частоти становлять $s = 0.25$, $D = 1.14 \cdot 10^{-9} L$ та $|df/dt| = 400$ Hz/min, відповідно.

Спосіб низькочастотного зондування відновлюваної резонансної частоти, що визначає f_r як функцію від часу, дотримується тієї самої процедури як в експерименті, так і в теорії. Після того, як високоамплітудне кондиціонування зупинено, низькоамплітудний рушій залишається увімкненим, аби багаторазово проганяти рушійну частоту і тим самим багаторазово розгортати резонансну криву та відстежувати рухоме положення резонансної частоти f_r . Рисунок 1.18 ілюструє набір послідовних резонансних кривих, що відповідає залежному від часу відновлюванню резонансної частоти, поданої кривою 3 на рисунку 1.17. За кожний наступний циклічний прогін криві зсуваються в бік вищих частот і поступово наближаються до асимптотичної кривої з граничною резонансною частотою f_0 , вказаною стрілкою. Лише частина послідовних резонансних кривих, обчислених на часовому інтервалі $t - t_c > 1$ s, є чітко розділеними, оскільки виокремлення сусідніх кривих прискорено зникає з кожним наступним прогоном. Невелика амплітуда модельна зондувального рушія становила $D = 1.14 \cdot 10^{-9} L$.

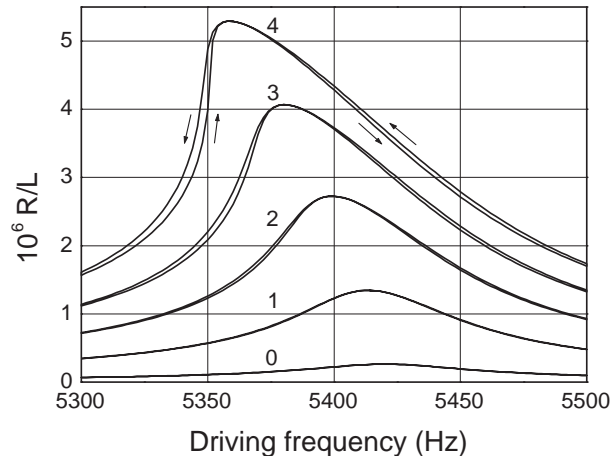


Рис. 1.19. Кондиційовані резонансні криві $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ за послідовно збільшуваних значень рушійної амплітуди $D_j = 3.8(j + 0.2\delta_{j0})L \cdot 10^{-8}$. Стрілки на двох найвищих кривих вказують на напрями прогону частоти коливань рушія. Абсолютне значення швидкості прогону частоти становить $|df/dt| = 400$ Hz/min. Водонасиченість s відповідає значенню $s = 0.05$.

Іншим цікавим експериментальним спостереженням є разюче пригнічення гістерези зі зменшенням водонасиченості досліджуваної геологічної породи

[236]. Відповідно до нашої теорії цей ефект можна зрозуміти, помітивши, що рівноважна концентрація дефектів у відновленому зразку c_0 (1.3.7) спадає більше аніж утричі, коли водонасиченість меншає від $s = 0.25$ до $s = 0.05$. Саме рівноважна концентрація дефектів (1.3.7) і контролює модуль пружності (1.3.5) через індуковані деформацією зміни нерівноважної концентрації дефектів c , як це впливає з кінетичного рівняння (1.3.1) та формул (1.3.2) і (1.3.3). Цей висновок було підтверджено безпосередніми обчисленнями зі зниженою водонасиченістю $s = 0.05$ як єдиним модельним параметром, зміненим порівняно з параметрами, прийнятими для рисунка 1.5. Одержані результати, показані на рисунку 1.19, помітно контрастують стосовно гістерезних петель порівняно з результатами з рисунка 1.5. Рисунок 1.19 демонструє істотне збільшення резонансної частоти f_r порівняно з рисунком 1.5 внаслідок монотонного росту модуля Юнга з меншанням водонасиченості (як це видно за $\sigma = 0$ з вже виразу (1.3.6) у поєднанні з формулою (1.3.7)). З огляду на цей факт інтервал прогону частоти для побудови рисунка 1.19 було зсунуто до більш високочастотної області 5200 – 5600 Hz.

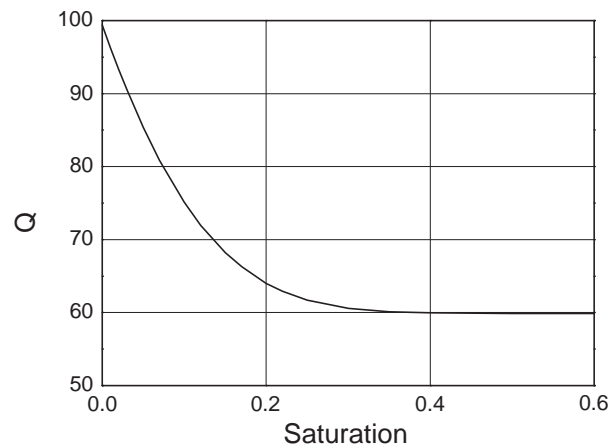


Рис. 1.20. Добротність резонансного відгуку стрижня Q як функція водонасиченості s . Фіксовані модельні параметри (тобто усі модельні параметри, окрім водонасиченості s як незалежної змінної) взято такими самими як і для рисунка 1.5.

На додаток, ми простежили монотонне меншання добротності (означеної тут як резонансна частота, поділена на ширину резонансної кривої, взятої на

$\sqrt{2}/2$ від висоти резонансного піка при низькоамплітудному рушієві) збільшенням водонасиченості s . Така властивість осадових порід є фактом, добре задокументованим в багатьох експериментальних працях [39, 254, 236, 180]. В нашій теорії вона впливає з падіння резонансної частоти f_r з ростом водонасиченості, що видно уже з низькоамплітудної аналітичної оцінки, зробленої за $\sigma = 0$ та $\gamma = 0$ за поєднання виразів (1.5.1), (1.3.7) та (1.3.7). Рисунок 1.20 ілюструє теоретичне значення добротності Q з усіма модельними параметрами, окрім змінної s , запозиченими з рисунка 1.5.

Варто зазначити, що кількісний характер теоретичних результатів суттєво залежить від вибору будь-якого окремого параметра за інших фіксованих параметрів (наприклад, рисунки 1.5 та 1.19 відрізняються лише значеннями водонасиченості). Тим не менше, існує принаймні дві можливості одночасної зміни кількох модельних параметрів без помітних відхилень у характері резонансних кривих. Найбільш очевидним набором таких параметрів є три параметри нелінійності a , r та $\cosh \eta$, замість яких за низьких рівнів деформації достатньо залучити лише дві їхні комбінації [див. вираз (1.2.6)]. Іншу можливість одержати схожість резонансних кривих вдається виявити емпірично за допомоги одночасного варіювання параметрів $\cosh \eta$, v та U_0 під час спробних комп'ютерних симуляцій (наприклад, зменшення параметра $\cosh \eta$ можна доповнити узгодженим збільшенням параметра v та зменшенням параметра U_0 за умови фіксації суми $U_0 + U_+$). Проте аналіз інших граней повільної динаміки дає змогу в принципі усунути таку невизначеність. Але все ж таки головна перепона для надійного вибору параметрів моделі викликана браком всебічних експериментальних даних, які слід збирати на тому самому зразку (або на наборі еквівалентних зразків) з використанням різноманітних, вже апробованих, експериментальних підходів в динамічному і в статичному режимах досліджень.

1.6 Динамічний ефект дискретної пам'яті. Теоретичне передбачення [205] та експеримент [211, 222, 207, 210]

Рисунки 1.5–1.9 та 1.19 демонструють динамічну реалізацію гістерезних явищ у випадку лише двох точок повороту в прогоні рушійної частоти. Виникає питання, чи ефект, подібний до ефекту прикінцевої (дискретної) пам'яті, що спостерігається в квазістатичних експериментах з багаторазовим реверсивним протоколом навантажування-розвантажування [75, 41, 71, 84, 73], міг би виникнути також і в динамічних експериментах на резонансно збуджуваних стрижнях з багаторазово реверсивним протоколом частоти.

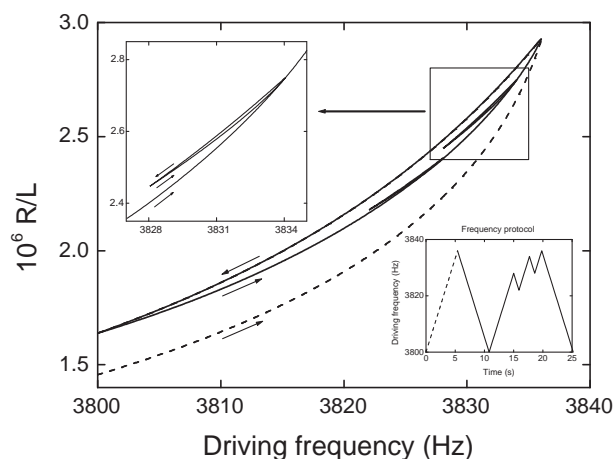


Рис. 1.21. Прояв прикінцевої пам'яті в динамічному відгуку піщовикового стрижня на зовнішнє високочастотне збуджування з багатореверсивним частотним протоколом. Модельні параметри включно з абсолютними значеннями прогону частоти збігаються з такими для двох найвищих кривих з рисунка 1.5. Інтервал частот перебуває в межах області частот для низькочастотних схилів двох найвищих кривих з рисунка 1.5. Величина R є амплітудою відгуку на вільному кінці стрижня.

Ми вивчали цю проблему теоретично [205]. Деякі графічні результати цього дослідження представлено на рисунку 1.21, де модельні параметри, включно з абсолютними значеннями швидкості прогону частоти, збігаються з такими для двох найвищих кривих з рисунка 1.5, а область реверсивного прого-

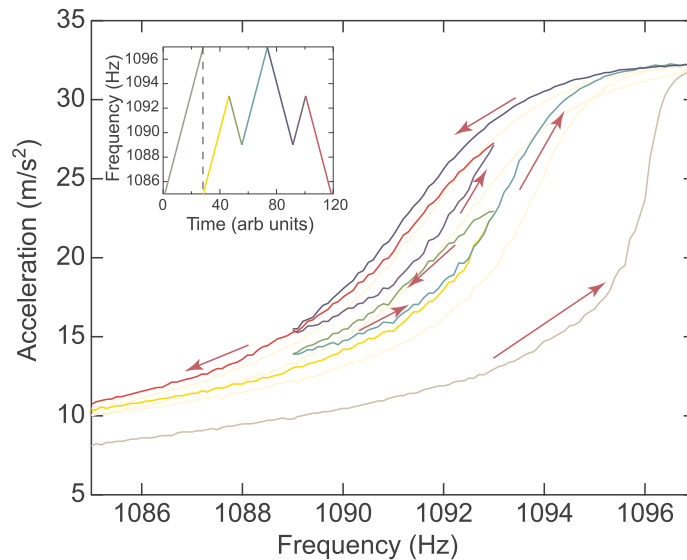


Рис. 1.22. Низькочастотні схили експериментальних резонансних кривих для стрижня з пісковиком Fontainebleau [211, 222, 207, 210]. Замкнутий характер малих гістерезисних петель чітко підтверджує існування ефекту прикінцевої пам'яті.

ну частоти вибрано в межах низькочастотних схилів цих кривих. Прикінцева пам'ять, означена тут як пам'ять про попередню максимальну амплітуду альтернованого напруження, утворює себе у вигляді малих гістерезисних петель всередині великої гістерезисної петлі. Початкова та кінцева точки кожної малої петлі на рисунку 1.5 збігаються, що є найтипівішим проявом прикінцевої (дискретної) пам'яті. Згідно з нашою теорією, при побудові гранично малої внутрішньої петлі на кондиційованій (суцільна лінія) кривій шанс створити її замкнутою спадає пропорційно до її лінійного розміру, до того ж цей шанс є меншим для низхідної кривої і більшим для верхньої частини висхідної кривої. Причина такої поведінки полягає в існуванні деякого (залежного від попередньої історії) порогу на амплітуду напруження, який мусить бути подоланий для того, щоб кінетика повільної підсистеми змогла перемкнутись з анігіляції дефектів за нижчих амплітуд на створення дефектів за вищих амплітуд. Це обмеження можна істотно послабити, коли лінійний розмір внутрішньої петлі стає зіставним з лінійним розміром великої петлі. Навпаки, маючи справу з некондиційованою кривою (штрихова лінія), замкнута внутрішня петля може бути створена будь-де і без будь-яких обмежень на свою малість (не показано).

Взявши до уваги теоретичні результати, наведені на рисунку 1.21, Тен Кейт

та Шенкланд з Лос-Аламоської Національної Лабораторії (LANL) США провели експериментальні вимірювання [211, 222, 207, 210], аби перевірити наші передбачення [205]. Рівень збуджування в перерахунку на відносну деформацію зразка становив $2 \cdot 10^{-6}$ за резонансу. Стрижневий зразок було виготовлено з пісковиків з кар'єру Fontainebleau, тому порівнювати теоретичні та експериментальні результати доцільно лише на якісному рівні. Рисунок 1.22 зображує низькочастотні крила (гілки) резонансних кривих, що відповідають частотному протоколу, показаному на вкладці. Ми чітко бачимо, що початок і кінець кожної з внутрішніх петель збігаються, що і є головною рисою ефекту прикінцевої (дискретної) пам'яті в його динамічній реалізації.

1.7 Підсумки

У цьому розділі ми виклали наші теоретичні результати із систематичного аналітичного та числового моделювання різноманітних нелінійних та релаксаційних явищ, встановлених експериментально для неklasичного резонансного відгуку стрижнеподібних осадових порід (здебільшого пісковиків) на повздовжнє високочастотне збуджування. Так, в рамках єдиного підходу ми спромоглися пояснити гістерезну поведінку резонансних кривих, майже лінійний зсув резонансної частоти як функції від амплітуди нагнітання, майже логарифмічне відновлювання в часі частоти резонансу після вимкнення високоамплітудного нагнітання (кондиціювання), характер еволюції амплітуди відгуку після тимчасової зупинки протягування частоти рушія, стрибки резонансних кривих після тимчасових призупинень зовнішнього нагнітання (заразом як в сенсі протягування частоти, так і в сенсі амплітуди збуджування), пригнічення гістерези за малих водонасиченостей зразка, а також меншання модуля пружності зразка та добротності резонансної кривої з більшанням водонасиченості. Як в якісному, так і в кількісному аспектах наша модель стала наслідком уявлень про дві зв'язані підсистеми за досить обґрунтованого твердження, що мезоскопічні дефекти в полі внутрішнього напруження утворюються та зникають з суттєво відмінними жвавостями і таким чином зумовлюють асиметрію відгуку всієї системи на зовнішнє збуджування.

Наша модель полягає в адекватному потрактуванні двох наступних під-

систем: (i) підсистеми повздовжніх зміщень та (ii) підсистеми пошкоджених міжзернинних когезійних зв'язків. Ця модель явно контрастує з іншими дво-підсистемними підходами [31, 160, 55, 142], де друга підсистема асоціюється з деякими допоміжними гістерезисними елементами. Розглядаючи наш підхід як альтернативу до раніше відомих теорій [31, 160, 55, 142], наголосимо на її принциповій перевазі, що полягає в здатності відтворити надзвичайно широкий клас експериментальних результатів за допомоги обмеженого числа фізичних параметрів. Істотні пункти нашої моделі задаються взаємодією між підсистемами з одного боку, та специфікуються нетривіальною (типу м'якої хлипавки) кінетикою розірваних міжзернинних зв'язків з іншого. Запропонований механізм взаємодії забезпечує, аби пружна підсистема запускала еволюційні процеси в підсистемі порушених зв'язків за посередництва зміни умов її рівноваги, і разом з цим аби підсистема порушених зв'язків зворотно впливала на пружну підсистему зменшуючи (збільшуючи) її модуль Юнга пропорційно до надлишкової (заниженої) концентрації дефектів (порушених зв'язків). Внаслідок значного перевищення жвавості розриву зв'язків над жвавистію їхнього відновлювання підсистема порушених зв'язків порушує симетрію динамічного відгуку усієї системи на альтерноване зовнішнє нагнітання. Ця асиметрія породжує більшість нетривіальних гістерезисних та релаксаційних ефектів в осадових породах. Проте слід пам'ятати, що логарифмічного відновлювання резонансної частоти не можна було б зрозуміти без правдоподібного припущення про розподіл жвавостей відновлювання в межах значного, але обмеженого інтервалу. В іншому разі, коли ширина інтервалу розподілу жвавостей відновлювання порушених зв'язків прямує до нуля, повна кінетика відновлювання неминуче звелася б до суто експоненційного розпаду дефектів.

Варто сказати, що, попри свій очевидний успіх, запропонована нами модель потребує дальшого вдосконалювання з метою теоретичного відтворення переважного ґенерування непарних гармонік, зафіксованого в експериментах з низьким рівнем зовнішнього періодичного в часі нагнітання [85, 86]. Так Кадіш (Kadish), Джонсон (Johnson) та Зінцнер (Zinszner) вважають [86], що таку модифікацію можна буде здійснити, ввівши нелінійне (замість лінійного) згасання. На жаль, чітко встановити тип дисипативної нелінійності з експериментальних даних наразі неможливо [144]. Ба, навіть найпростіша лінійна форма внутрішнього згасання, використана в нашому теперішньому дослідженні, в

дійсності здатна поставати через кілька фундаментально відмінних фізичних механізмів [151]. Отже, докладний аналіз допустимих форм нелінійної атенюації виходить за рамки теперішнього дослідження.

Втім, навіть в рамках прийнятого тут формалізму ми змогли передбачити гістерезний ефект прикінцевої (дискретної) пам'яти в суттєво динамічній реалізації, який згодом знайшов своє експериментальне підтвердження [211, 222, 207, 210].

В якості заключної ремарки вкажемо, що термін “повільна підсистема” ми вживали як синонім до поняття “підсистема пошкоджених міжзернинних когезійних зв'язків”. На перший погляд цей термін видається некоректним, оскільки парціальне кінетичне рівняння м'якої хлипавки (1.3.1) містить в собі дві суттєво відмінні жвавості, одна з яких (жвавість розриву зв'язків) може бути співвимірною або навіть більшою за частоту зовнішнього високочастотного рушійного нагнітання. Проте саме швидка жвавість розриву зв'язків і поєднує концентрацію дефектів з амплітудою деформації, коли амплітуда зростає. Як наслідок, ефективна жвавість росту концентрації дефектів визначається повільним збільшенням амплітуди деформації за вкрай повільного протягування частоти збуджувача. З іншого боку, коли амплітуда деформації меншає, здатен працювати лише повільний механізм відновлювання зв'язків. Отже на загал, обидві вищевказані обставини і виправдовують використання терміна “повільна підсистема”, оскільки характерні інтервали часу, відповідальні за квазіусталену еволюцію концентрації дефектів, виявляються досить значними порівняно з періодом альтернованої високочастотної деформації.

Розділ 2

Солітоноподібні збудження в збурених квазіодновимірних ґратках

2.1 Проблема коректного вибору польових функцій модельних напівдискретних систем Шрьодінґероного типу [192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 209]

Відомо, що польові функції напівдискретних інтегровних нелінійних систем (навіть коли такі системи є просторово дискретними версіями фізично вмотивованих континуальних систем) не завжди піддаються прозорій фізичній інтерпретації. В контексті наших досліджень це стосується насамперед просторово дискретної інтегровної версії Абловіца–Ладіка (Ablowitz–Ladik) [2, 3, 4, 5]

$$+i\dot{q}(n) + [1 + q(n)r(n)][q(n+1) + q(n-1)] = 0 \quad (2.1.1)$$

$$-i\dot{r}(n) + [1 + r(n)q(n)][r(n+1) + r(n-1)] = 0 \quad (2.1.2)$$

загальновідомої інтегровної нелінійної моделі Шрьодінґера (Schrödinger) [247], а також її численних просторово дискретних багатокomпонентних розширень [69, 188, 6, 194, 195, 196], які можна вважати багатокomпонентними напівдискретними наступниками добре знаної інтегровної нелінійної системи Манакова [119]. Тут польові функції $q(n)$ та $r(n)$ на n -му вузлі безмежної

одновимірної регулярної ґратки вважають взаємно комплексно спряженими ($r^*(n) = q(n)$), крапки над $q(n)$ та $r(n)$ вказують на диференціювання за часом τ ($\dot{f}(n) = df/d\tau$)

Найгостріше питання фізичної неадекватності польових амплітуд в моделі Абловіца–Ладіка (Ablowitz–Ladik) постало перед нами при обговоренні з Олександром Сергійовичем Давидовим результатів досліджень ефекту Паєрлса–Набарро (Peierls–Nabarro) [132, 133, 146] для нелінійних внутрішньо-молекулярних збуджень в одновимірних молекулярних ланцюжках [191]. Відповідь на цей виклик було зроблено в кількох наших працях [192, 193]. Вона полягає в застосуванні точкового перетворення [192, 193]

$$q(n) = Q(n) \sqrt{\frac{\exp[+Q(n)R(n)] - 1}{Q(n)R(n)}} \quad (2.1.3)$$

$$r(n) = R(n) \sqrt{\frac{\exp[+Q(n)R(n)] - 1}{Q(n)R(n)}} \quad (2.1.4)$$

класичних польових амплітуд $q(n)$ та $r(n)$ автентичної моделі Абловіца–Ладіка (2.1.1), (2.1.2) до фізично скоригованих класичних польових амплітуд, а саме до амплітуд присутності $Q(n)$ та $R(n)$ збудження на n -му вузлі безмежного регулярного ланцюжка.

Квантовий варіант вказаних вище перетворень (2.1.3), (2.1.4) запропонував Куліш [102].

Серйознішою виявилася проблема фізичної адекватності польових амплітуд багатоконпонентних напівдискретних інтегровних нелінійних Шрьодінґерових систем. Тут йдеться про наші спроби [197, 198] знайти перетворення автентичних польових амплітуд $q_\alpha(n)$ $r_\alpha(n)$ нашої версії багатоконпонентної нелінійної Шрьодінґерової системи [194, 195, 196]

$$\begin{aligned} +i\dot{q}_\alpha(n) + \sum_{\beta=1}^M t_{\alpha\beta} q_\beta(n) + [1 + \nu(n)][q_\alpha(n+1) + q_\alpha(n-1)] = \\ = \sum_{\beta=1}^M [q_\alpha(n-1)q_\beta(n) - q_\alpha(n)q_\beta(n-1)] r_\beta(n) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

$$\begin{aligned}
-i\dot{r}_\alpha(n) + \sum_{\beta=1}^M r_\beta(n)t_{\beta\alpha} + [1 + \nu(n)][r_\alpha(n+1) + r_\alpha(n-1)] = \\
= \sum_{\beta=1}^M [r_\alpha(n+1)r_\beta(n) - r_\alpha(n)r_\beta(n+1)] q_\beta(n)
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

$$\nu(n) \equiv \sum_{\beta=1}^M q_\beta(n)r_\beta(n) \tag{2.1.7}$$

($\alpha = 1, 2, 3, \dots, M$) до амплітуд збудженості (тобто, присутності збудження) так, аби одночасно представити перетворену систему як Гамільтонову (Hamilton) систему зі стандартною дужкою (структурою) Пуассона (Poisson) [209]. Зауважимо, що гамільтоновість одного з багатокомпонентних розширень простороводискретної Шрödінгерової системи [69] довели Герджіков (Gerdzhikov) та Іванов (Ivanov) в термінах даних розсіяння [69]. На жаль, Герджіков та Іванов не запропонували процедури переходу від даних розсіяння до справжніх амплітуд збудженості. За нашими спостереженнями, жодна з раніше відомих багатокомпонентних версій напівдискретної інтегрованої нелінійної системи Шрödінгера [69, 188, 6, 194, 195, 196] до цього часу не знайшла свого точного гамільтонівського формулювання в термінах амплітуд збудженості зі стандартною дужкою Пуассона. Таке канонічне формулювання, на нашу думку, якнайкраще відповідало би потребам реальних задач в багатьох галузях фізики.

В кількох наших працях [197, 198, 209] ми використали точкові перетворення

$$q_\alpha(n) = Q_\alpha(n)E(n) \quad (\alpha = 1, 2, 3, \dots, M) \tag{2.1.8}$$

$$r_\alpha(n) = R_\alpha(n)E(n) \quad (\alpha = 1, 2, 3, \dots, M) \tag{2.1.9}$$

від автентичних польових амплітуд $q_\alpha(n)$ та $r_\alpha(n)$ до амплітуд $Q_\alpha(n)$ та $R_\alpha(n)$, що за досить жорсткої (на загаль, навіть проблематичної) редукції комплексного спряження $r_\alpha^*(n) = q_\alpha(n)$ (виправданої, наприклад, на класі факторизованих функцій $q_\alpha(n) = b_\alpha q(n)$, $r_\alpha(n) = c_\alpha r(n)$, коли праві частини рівнянь (2.1.5)–(2.1.6) стають нулями) здатні набувати ознак амплітуд збудженості.

Тут

$$E(n) = \sqrt{[\exp \rho(n) - 1]/\rho(n)} \quad (2.1.10)$$

$$\rho(n) = \sum_{\beta=1}^M Q_{\beta}(n)R_{\beta}(n). \quad (2.1.11)$$

Запропоновані перетворення (2.1.8)–(2.1.11) можна застосовувати як до мультипольової системи Герджікова–Іванова [69], так і до мультипольових систем Тсучіди–Уджіно–Вадаті (Tsuchida–Ujino–Wadati) [188] та Абловіца–Охти–Трубача (Ablowitz–Ohta–Trubatch) [6], а також до системи (2.1.5)–(2.1.7), одержаної незалежно в кількох наших працях [194, 195, 196].

В одній з наших праць [209] ми проаналізували перспективи застосовування запропонованих точкових перетворень (2.1.8)–(2.1.11) на прикладі системи Тсучіди–Уджіно–Вадаті [188], доповненої членами з міжланцюжковою резонансною взаємодією $t_{\alpha\beta}$, тобто системи [209]

$$+i\dot{q}_{\alpha}(n) + \sum_{\beta=1}^M t_{\alpha\beta}q_{\beta}(n) + [1 + \nu(n)][q_{\alpha}(n + 1) + q_{\alpha}(n - 1)] = 0 \quad (2.1.12)$$

$$-i\dot{r}_{\alpha}(n) + \sum_{\beta=1}^M r_{\beta}(n)t_{\beta\alpha} + [1 + \nu(n)][r_{\alpha}(n + 1) + r_{\alpha}(n - 1)] = 0, \quad (2.1.13)$$

де величина $\nu(n)$ визначена формулою (2.1.7). Ця система (2.1.12), (2.1.13) відрізняється від нашої автентичної версії (2.1.5), (2.1.6) відсутністю суперечливих членів в правих частинах рівнянь і тому допускає редукцію до комплексно спряжених польових амплітуд $r_{\alpha}^{*}(n) = q_{\alpha}(n)$ за єдиної умови ермітовості (Hermite) матриці поперечної резонансної взаємодії $t_{\beta\alpha}^{*} = t_{\alpha\beta}$, а отже є найвдалішою версією серед споріднених мультипольових інтегровних напівдискретних нелінійних систем [69, 188, 6, 194, 195, 196], прийнятною для фізичних застосувань. Тому надалі вважатимемо, що $t_{\beta\alpha}^{*} = t_{\alpha\beta}$ та $r_{\alpha}^{*}(n) = q_{\alpha}(n)$.

В термінах скоригованих амплітуд $Q_{\alpha}(n)$ та $R_{\alpha}(n)$ розширена система

Тсучіди–Уджіно–Вадаті (2.1.12), (2.1.13) набуває вигляду [209]

$$\begin{aligned}
+i\dot{Q}_\alpha(n) &= \frac{\partial H_a}{\partial R_\alpha(n)} + \\
+ 2E(n+1) \frac{dE(n)}{d\rho(n)} \sum_{\beta=1}^M [Q_\alpha(n)Q_\beta(n+1) - Q_\alpha(n+1)Q_\beta(n)] R_\beta(n) + \\
+ 2E(n-1) \frac{dE(n)}{d\rho(n)} \sum_{\beta=1}^M [Q_\alpha(n)Q_\beta(n-1) - Q_\alpha(n-1)Q_\beta(n)] R_\beta(n) \quad (2.1.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-i\dot{R}_\alpha(n) &= \frac{\partial H_a}{\partial R_\alpha(n)} + \\
+ 2E(n+1) \frac{dE(n)}{d\rho(n)} \sum_{\beta=1}^M [R_\alpha(n)R_\beta(n+1) - R_\alpha(n+1)R_\beta(n)] Q_\beta(n) + \\
+ 2E(n-1) \frac{dE(n)}{d\rho(n)} \sum_{\beta=1}^M [R_\alpha(n)R_\beta(n-1) - R_\alpha(n-1)R_\beta(n)] Q_\beta(n) , \quad (2.1.15)
\end{aligned}$$

де [197, 198, 203, 209]

$$H_a = H_\perp + H_\parallel . \quad (2.1.16)$$

Тут

$$H_\perp = - \sum_{\alpha=1}^M \sum_{\beta=1}^M \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_\alpha(m) t_{\alpha\beta} Q_\beta(m) \quad (2.1.17)$$

$$\begin{aligned}
H_\parallel &= - \sum_{\beta=1}^M \sum_{m=-\infty}^{\infty} E(m+1)E(m) \left[Q_\beta(m+1)R_\beta(m) + \right. \\
&\quad \left. + R_\beta(m+1)Q_\beta(m) \right] . \quad (2.1.18)
\end{aligned}$$

Рівняння в термінах скоригованих амплітуд (2.1.14), (2.1.15) зберігають величини

$$N = \sum_{\beta=1}^M \sum_{m=-\infty}^{\infty} Q_{\beta}(m)R_{\beta}(m) \quad (2.1.19)$$

$$P = \frac{i}{2} \sum_{\beta=1}^M \sum_{m=-\infty}^{\infty} E(m+1)E(m) \left[Q_{\beta}(m)R_{\beta}(m+1) - Q_{\beta}(m+1)R_{\beta}(m) \right] \quad (2.1.20)$$

та величину H_{\parallel} , але не зберігають калібрувально залежну величину H_{\perp} навіть за часової незалежності параметрів міжланцюжкового зв'язку $t_{\alpha\beta}$.

Тим часом в континуальному відповіднику [194] розглянутих рівнянь (2.1.14), (2.1.15) величина, аналогічна до величини H_{\perp} , зберігається, а члени, аналогічні до двох останніх членів в кожному з рівнянь (2.1.14) та (2.1.15), просто відсутні. Ці зауваження наводять на думку розглянути вкорочену нелінійну систему Гамільтонових рівнянь

$$+i\dot{Q}_{\alpha}(n) = \frac{\partial H_a}{\partial R_{\alpha}(n)} \quad (2.1.21)$$

$$-i\dot{R}_{\alpha}(n) = \frac{\partial H_a}{\partial Q_{\alpha}(n)} \quad (2.1.22)$$

зі скоригованим гамільтоніаном H_a , означеним виразами (2.1.16)–(2.1.18). При цьому виявляється, що кожна з величин H_{\perp} , H_{\parallel} та N , заданих виразами (2.1.17), (2.1.18) та (2.1.19), зберігається і набуває сенсу поперечної частини гамільтоніану, повздожньої частини гамільтоніану та повного числа збуджень, відповідно. При цьому величину $Q_{\alpha}(n)R_{\alpha}(n)/N$ слід ототожнити з відносним числом нелінійних збуджень на α -ому ланцюжку в межах n -ої елементарної комірки квазіодновимірної ґратки, утвореної M резонансно зв'язаними ланцюжками. Як наслідок, величини $Q_{\alpha}(n)$ та $R_{\alpha}(n)$ з повним правом варто називати амплітудами присутності нелінійного хвильового збудження на α -ому ланцюжку в межах n -ої елементарної комірки чи просто амплітудами збудженості.

N.B. Ми віддаємо перевагу саме такій термінології для величини $Q_\alpha(n)$ та $R_\alpha(n)$, оскільки навіть в квантовомеханічних задачах термін “амплітуда ймовірности” є досить оманливим з огляду на суто детерміністичний характер пари засадничих хвильових рівнянь Шрьодінгера для канонічно спряжених польових амплітуд. Такому потрактуванню рівнянь Шрьодінгера, а отже і запропонованої нами фізично скоригованої системи нелінійних рівнянь на багатоланцюжковій ґратці (2.1.21), (2.1.22), (2.1.16)–(2.1.18), ми завдячуємо професорові Петру Івановичу Фоміну.

Рисунок 2.1 ілюструє фрагмент двоніжкової драбинчастої ґратки носія збуджень для чотирикомпонентної версії ($M = 2$) фізично скоригованої нелінійної динамічної системи (2.1.21), (2.1.22), (2.1.16)–(2.1.18).

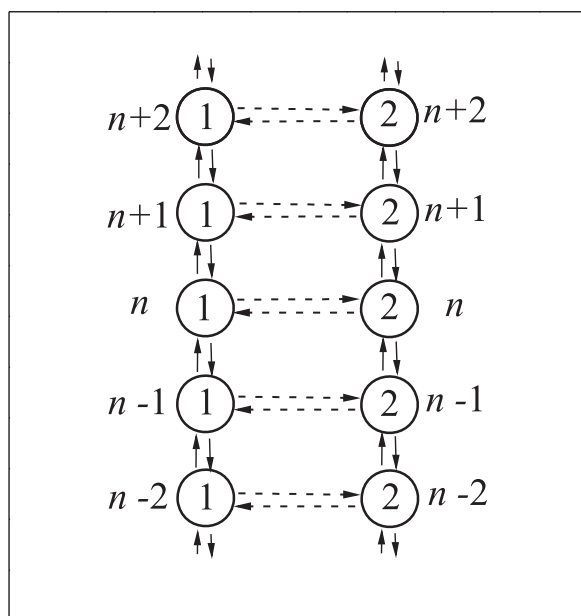


Рис. 2.1. Фрагмент пласкої двоніжкової драбинчастої ґратки носія збуджень для чотирикомпонентної версії ($M = 2$) фізично скоригованої напівдискретної інтегрованої нелінійної Шрьодінгерової системи (2.1.21), (2.1.22), (2.1.16)–(2.1.18). Кругечки позначають розташування вузлів драбинчастої ґратки. Горизонтальні стрілки вказують на резонансні зв’язки формалізовані параметрами t_{12} чи t_{21} між польовими збудженнями на сусідніх вузлах, належних до протилежних ланцюжків драбинчастої ґратки. Вертикальні стрілки вказують на резонансні зв’язки (з параметрами знормованими на одиницю) між польовими збудженнями на сусідніх вузлах, належних до певного ланцюжка драбинчастої ґратки.

Питання про інтегровність вкороченої нелінійної системи (2.1.21), (2.1.22),

(2.1.16)–(2.1.18) на сьогодні залишається відкритим. Попри досить широкий клас її розв’язків (а саме – розв’язки типу $Q_\alpha(n) = b_\alpha Q(n)$, $R_\alpha(n) = b_\alpha^* Q^*(n)$) є одночасно розв’язками і повної (невкороченої) нелінійної системи в термінах скоригованих амплітуд (2.1.14), (2.1.15). До розв’язків вказаного типу належать як односолітонні, так і багатосолітонні розв’язки. Підкреслимо, що саму вкорочену нелінійну систему (2.1.21), (2.1.22), (2.1.16)–(2.1.18) спочатку було запропоновано в результаті евристичного аналізу (навіяного функціями факторизованого типу $q_\alpha(n) = b_\alpha q(n)$, $r_\alpha(n) = c_\alpha r(n)$) безпосередньо нашої версії багатокomпонентної нелінійної Шрьодінґерої системи (2.1.5)–(2.1.7) [198].

Наявність досить важливих точних аналітичних розв’язків допасованої моделі поряд з її прозорою гамільтонівською інтерпретацією в термінах амплітуд збудженості $Q_\alpha(n)$ та $R_\alpha(n)$ вказують на доцільність використання в прикладних фізичних задачах саме вкороченої нелінійної системи (2.1.21), (2.1.22), (2.1.16)–(2.1.18). Надалі ми називатимемо цю систему фізично скоригованою мультипольовою нелінійною моделлю Шрьодінґера на квазіодновимірній ґратці.

У випадку одноланцюжкової ґратки $M = 1$ вказана система (2.1.21), (2.1.22), (2.1.16)–(2.1.18) точно переходить в запропоновану нами фізично скориговану модель Абловіца–Ладіка [192, 193], застосовну в процедурі наближеного, але адекватного опису динаміки солітоноподібних збуджень в реальних нелінійних ланцюжках [192, 193] з урахуванням потенціального рельєфу Паєрлса–Набарро (Peierls–Nabarro potential relief) [132, 133, 146].

2.2 Вплив зовнішніх полів на динаміку солітонів в регулярних драбинчастих та трубчастих ґратках [198, 209, 203]

Спираючись на представлену в попередньому підрозділі фізично скориговану мультипольову модель (2.1.21), (2.1.22), (2.1.16)–(2.1.18), в кількох працях [198, 209, 203] ми дослідили вплив зовнішніх однорідних електричного та магнетного полів на динаміку солітонів в драбинчастих та трубчастих ґратках.

Перш за все нагадаємо, що зовнішнє повздовжнє однорідне магнетне поле легко врахувати за допомоги належного вибору фаз Паєрлса (Peierls) [145]

в параметрах поперечної міжланцюжкової взаємодії $t_{\alpha\beta}$. Зовнішнє ж повздовжнє однорідне електричне поле слід враховувати додаванням відповідного потенціального члена до основного гамільтоніану (2.1.16)–(2.1.18). Виявляється, що вплив обох згаданих чинників на солітоноподібні збудження можна розрахувати точно. Для цього зручно працювати в рамках формалізму Лагранжа. Відповідно до зроблених вище тверджень, лагранжіан збуреної системи заряджених електрично нелінійних збуджень на квазіодновимірній ґратці з M резонансно зв'язаних ланцюжків слід записати наступним чином

$$\begin{aligned}
L = & \frac{i}{2} \sum_{\alpha=1}^M \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[R_{\alpha}(m) \dot{Q}_{\alpha}(m) - \dot{R}_{\alpha}(m) Q_{\alpha}(m) \right] + \\
& + \sum_{\alpha=1}^M \sum_{\beta=1}^M \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{\alpha}(m) t_{\alpha\beta} Q_{\beta}(m) + \sum_{\alpha=1}^M \sum_{m=-\infty}^{\infty} m \mathcal{E} R_{\alpha}(m) Q_{\alpha}(m) + \\
& + \sum_{\alpha=1}^M \sum_{m=-\infty}^{\infty} E(m+1) E(m) [Q_{\alpha}(m+1) R_{\alpha}(m) + R_{\alpha}(m+1) Q_{\alpha}(m)] , \quad (2.2.1)
\end{aligned}$$

де $R_{\alpha}(m) = Q_{\alpha}^*(m)$, а величина \mathcal{E} описує напруженість повздовжнього однорідного електричного поля в безрозмірнісних одиницях.

Аби дослідити динаміку односолітонного збудження, застосуємо метод пробних лагранжіанів [135, 243, 162, 193, 198, 209], а точні рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{\alpha}(n)} = \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha}(n)} \quad (2.2.2)$$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{R}_{\alpha}(n)} = \frac{\partial L}{\partial R_{\alpha}(n)} \quad (2.2.3)$$

залишимо для контролю одержаних результатів. При цьому спиратимемося на такий односолітонний анзац

$$Q_{\alpha}(n) = b_{\alpha} \sqrt{\ln[1 + \sinh^2 \mu \operatorname{sech}^2 \mu(n-x)]} \exp[+ikn + i\varphi] \quad (2.2.4)$$

з умовами нормування

$$\sum_{\alpha=1}^M b_{\alpha}^* b_{\alpha} = 1 \quad (2.2.5)$$

та комплексного спряження $R_\alpha(n) = Q_\alpha^*(n)$. Тут пробні величини $\mu, \varphi, x, k, b_\alpha, b_\alpha^*$ є претендентами на роль так званих колективних змінних. Часову еволюцію колективних змінних можна встановити підстановкою односолітонного анзацу (2.2.4) до повного лагранжіану моделі (2.2.1) з наступною варіацією одержаного таким чином пробного лагранжіану \mathcal{L} за колективними змінними та їхніми похідними за часом. Оминувши досить громіздкі, але точні обчислення пробного лагранжіану \mathcal{L} , зосередимося безпосередньо на рівняннях руху для колективних змінних. Ці рівняння є такими

$$\dot{\mu} = 0 \quad (2.2.6)$$

$$\dot{\varphi} = 2 \cosh \mu \cos k \quad (2.2.7)$$

$$\dot{x} = \frac{2}{\mu} \sinh \mu \sin k \quad (2.2.8)$$

$$\dot{k} = \mathcal{E} \quad (2.2.9)$$

$$\dot{b}_\alpha = +i \sum_{\beta=1}^M t_{\alpha\beta} b_\beta \quad (2.2.10)$$

$$\dot{b}_\alpha^* = -i \sum_{\beta=1}^M b_\beta^* t_{\beta\alpha} . \quad (2.2.11)$$

Спираючись на одержані рівняння (2.2.6)–(2.2.11), можна пересвідчитися, що односолітонні функції $Q_\alpha(n)$ та $R_\alpha(n)$, задані прийнятим анзацом (2.2.4), справді задовольняють повні рівняння Лагранжа, тобто є точними розв'язками збуреної моделі (2.2.1)–(2.2.3). Серед ефективних рівнянь (2.2.6)–(2.2.11) найцікавішими є останні чотири рівняння (2.2.8)–(2.2.11). Ввівши ефективний гамільтоніан

$$\mathcal{H} = -\frac{2}{\mu} \sinh \mu \cos k - x \mathcal{E} - \sum_{\alpha=1}^M \sum_{\beta=1}^M b_\alpha^* t_{\alpha\beta} b_\beta , \quad (2.2.12)$$

вони набувають канонічної Гамільтонової форми

$$\dot{x} = \partial \mathcal{H} / \partial k \quad (2.2.13)$$

$$\dot{k} = -\partial\mathcal{H}/\partial x \quad (2.2.14)$$

$$+ib_\alpha = \partial\mathcal{H}/\partial b_\alpha^* \quad (2.2.15)$$

$$-ib_\alpha^* = \partial\mathcal{H}/\partial b_\alpha . \quad (2.2.16)$$

Звідси видно, що повздовжня динаміка солітона (рівняння (2.2.13) і (2.2.14)) та поперечна динаміка солітона (рівняння (2.2.15) і (2.2.16)) є цілковито незалежними одна від одної.

За ненульової напруженості електричного поля $\mathcal{E} \neq 0$ середня повздовжня координата солітонного пакету

$$x = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^M n R_\alpha(n) Q_\alpha(n)}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^M R_\alpha(n) Q_\alpha(n)} \quad (2.2.17)$$

знає осциляцій Блоха (Bloch) [22, 250] за законом

$$x = \frac{2 \sinh \mu}{\mu \mathcal{E}} \{ \cos k(0) - \cos[\mathcal{E}\tau + k(0)] \} + x(0) . \quad (2.2.18)$$

Частота ω_{\parallel} та амплітуда A_{\parallel} осциляцій визначаються виразами $\omega_{\parallel} = \mathcal{E}$ та $A_{\parallel} = (2/\mu \mathcal{E}) \sinh \mu$, відповідно. При зменшенні напруженості поля до нуля $\mathcal{E} \rightarrow 0$ повздовжні Блохові коливання, як і годиться, переходять в рівномірний рух за законом

$$x = \frac{2}{\mu} \tau \sinh \mu \sin k(0) + x(0) . \quad (2.2.19)$$

Щодо поперечної динаміки солітона, то її специфіка залежить як від зовнішнього повздовжнього магнетного поля, так і від будови поперечного перерізу квазіодновимірної ґратки. Так, для ґратки з трубчастою поперечною будовою повздовжнє однорідне магнетне поле \mathbf{B} видозмінює параметри міжланцюжкової резонансної взаємодії до виразів, заданих формулами

$$t_{\alpha\beta} = t \exp(-i\phi/M) \Delta(\alpha - \beta + 1) + t \exp(+i\phi/M) \Delta(\alpha - \beta - 1) . \quad (2.2.20)$$

Тут позначення

$$\Delta(\gamma) \equiv \frac{1}{M} \sum_{\varkappa=1}^M \exp\left(\frac{2\pi i}{M} \varkappa \gamma\right) \quad (2.2.21)$$

слугує за узагальнений символ Кронекера (Kronecker), що дорівнює одиниці при $\gamma = 0, \pm M, \pm 2M, \dots$ і нулеві в інших випадках. Величина ж ϕ/M є фазою Паєрлса [145, 208, 195, 196, 199], що визначається безрозмірнісим магнетним потоком

$$\phi = \frac{e}{c\hbar} |\mathbf{B}| S \quad (2.2.22)$$

через M -гональний елемент поперечного перерізу трубки площею S . Магнетне поле \mathbf{B} вважаємо направленим в бік зростання повздовжньої дискретної координати ґратки n . Поперечна динаміка солітона на трубчастій ґратці підпорядковується закону

$$b_\alpha(\tau) = \frac{1}{M} \sum_{\beta=1}^M \sum_{\varkappa=1}^M b_\beta(0) \exp\left[\frac{2\pi i \varkappa (\beta - \alpha)}{M} + 2it\tau \cos\left(\frac{2\pi \varkappa + \phi}{M}\right)\right]. \quad (2.2.23)$$

Ця формула показує, що кожна з M власних частот

$$\omega_\perp(\varkappa) = 2t \cos\left(\frac{2\pi \varkappa + \phi}{M}\right) \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \dots, M) \quad (2.2.24)$$

поперечних осциляцій є суттєво контрольованою магнетним потоком ϕ . На загал власні частоти $\omega_\perp(\varkappa)$ є неспіввимірними, і тому говорити про можливість періодичного відновлювання початкової конфігурації поперечної складової солітонного розподілу можна лише в окремих випадках.

Так, за відсутности зовнішнього магнетного поля ($\phi = 0$) в ґратках з двома, трьома, чотирма чи шістьма циклічно зв'язаними ланцюжками поперечні власні частоти $\omega_\perp(\varkappa)$ (2.2.24) стають співвимірними. Насправді ту чи іншу умову співвимірности поперечних власних частот можна влаштувати навіть і за ненульових значень зовнішнього магнетного поля, допасованих цілком певним чином. Така властивість керування частотами поперечних осциляцій видається дуже важливою опцією для адресного переносу енергії чи заряду

на конкретний (акцепторний) вузол трубчастої ґратки, якщо додатково виключити джерело Блохових повздовжніх осциляцій, тобто покласти $\mathcal{E} = 0$. Впоратися з таким завданням можна, наприклад, якщо локалізувати початковий солітонний розподіл на тому самому ланцюжку, що й вузол-акцептор, та синхронізувати повздовжню швидкість солітона таким чином, аби початковий поперечний розподіл збуджень відновився саме у той момент, коли солітон, як ціле, досягне потрібної елементарної комірки. При цьому повздовжній розмір солітона мусить бути якнайменший, що відповідає вимозі $\mu > 1$. Аналогічна синхронізація повздовжньої та поперечної динамік могла би стати на заваді зіткненню солітона з точковою домішкою. Для цього (за щойно вказаної синхронізації повздовжньої швидкості солітона) початковий солітонний розподіл слід локалізувати на ланцюжку, протилежному до ланцюжка з домішкою. Вочевидь, перелічені вище способи синхронізації руху поперечної та повздовжньої компонент солітона не слід сприймати за догму, оскільки на загал їх можна придумати досить багато залежно від самої мети синхронізації навіть поза вимоги співвимірності поперечних власних частот.

З огляду на вказаний вище ефект незлагоджености вкладів поперечних мод за довільного (не підлаштованого наперед) магнетного поля і, як наслідок, розладнання синхронізації поперечної та повздовжньої динамік солітоноподібного збудження, спрогнозований (селективний) транспорт енергії чи заряду під впливом магнетного поля, як правило, має стати суттєво ускладненим. Тут ми поставимо крапку і від спекуляцій на тему впливу геомагнетних збурень на самопочуття живих організмів утримаємося.

На закінчення цього підрозділу зупинимося на частинному випадку дво-ланцюжкової ґратки $M = 2$, але повздовжнє електричне поле \mathcal{E} враховуватимемо. Така ґратка є нечутливою до дії повздовжнього магнетного поля, тому параметри міжланцюжкової взаємодії для неї достатньо записати наступним чином

$$t_{\alpha\beta} = (1 - \delta_{\alpha\beta})t. \quad (2.2.25)$$

Означивши поперечну координату нелінійного пакету як

$$y = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^2 (-1)^\alpha R_\alpha(n) Q_\alpha(n)}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^2 R_\alpha(n) Q_\alpha(n)} \quad (2.2.26)$$

і обчисливши її на прийнятому односолітонному анзаці (2.2.4) з урахуванням рівнянь поперечної динаміки солітона (2.2.10), (2.2.11), знаходимо

$$y = -\sin 2\varphi \cos(2t\tau) - \sin(\delta_1 - \delta_2) \sin 2\varphi \sin(2t\tau) . \quad (2.2.27)$$

Тут для зручності початкові умови для поперечних амплітуд b_1 та b_2 було вибрано так

$$b_1(0) = \exp(i\delta_1) \cos \varphi \quad (2.2.28)$$

$$b_2(0) = \exp(i\delta_2) \sin \varphi . \quad (2.2.29)$$

Отже, в поперечному напрямі центр солітона зазнає осциляцій з циклічною частотою $\omega_\perp = 2t$ та амплітудою $A_\perp = \sqrt{\cos^2 2\varphi + \sin^2(\delta_1 - \delta_2) \sin^2 2\varphi}$. Частота ω_\perp повністю визначається параметром поперечного резонансного зв'язку t . Величину ж амплітуди A_\perp за рахунок початкових умов можна регулювати від нуля і до одиниці. Цікаво, що комбінація повздовжніх Блохових осциляцій (2.2.18) та поперечних резонансних осциляцій (2.2.27) за співвимірних значень частот $\omega_\parallel = \mathcal{E}$ та $\omega_\perp = 2t$ здатна організуватися в ту чи іншу замкнуту траєкторію центру солітона у вигляді деякої класичної фігури Ліссажу (Lissajou) [78].

На рисунку 2.2 схематично показано одну з можливих реалізацій замкнутої траєкторії центру солітона, коли $\mathcal{E} = 3$ та $t = 1$. Зауважимо, що останнім часом ефект осциляцій Блоха привертає дедалі більшу увагу фізиків як фундаментальний механізм генерації електромагнетного випромінювання напівпровідниковими надструктурами в терагерцовому (донині проблематичному для регулювання частоти) діапазоні частот [100, 240, 154, 30, 103, 115, 158, 153, 57, 167, 110, 58, 25] з огляду на досить перспективний спосіб перелаштовування частоти випромінювання зміною напруженості повздовжнього електричного поля. Багато хто вважає, що поштовхом до такої бурхливої активності

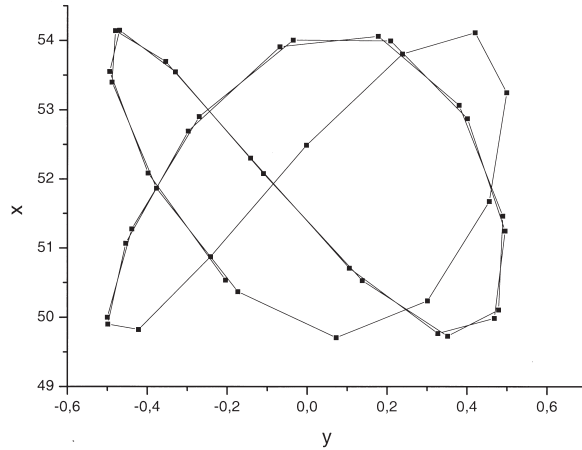


Рис. 2.2. Замкнута траєкторія руху центру солітона на драбинчастій ґратці як комбінація повздовжніх Блохових осциляцій (2.2.18) та поперечних резонансних осциляцій (2.2.27) за значень частот $\omega_{\parallel} = \mathcal{E} = 3$ та $\omega_{\perp} = 2t = 2$. Тут траєкторію центру солітона подано ламаною лінією, протрасованою квадратами, що розділені однаковими скінченними проміжками часу. Проте, самі числові розрахунки було проведено зі значно дрібнішим часовим кроком, так що повна траєкторія насправді є гладенькою кривою.

стала піонерська робота Есакі (Esaki) та Тсу (Tsu) “Superlattice and negative differential conductivity in semiconductors” [63].

2.3 Поширювання солітонного збудження на драбинчастій ґратці з точковими домішками. Слалом солітона між точковими домішками [197, 198]

У цьому підрозділі, спираючись на результати кількох наших праць [197, 198], ми вкажемо на переваги двовимірної солітонної динаміки при слаломному поширюванні солітона між сильними точковими домішками на дволанцюжковій драбинчастій ґратці порівняно із суто одновимірною солітонною динамікою на одноланцюжковій ґратці [94, 101, 161], де навіть одна, але достатньо сильна, домішка, здатна заблокувати направлений рух солітона.

Отже, розглянемо фізично скориговану нелінійну Шрьодінґерову систему

на багатоланцюжковій ґратці, доповненій регулярно розташованими домішками, дію яких ми врахуємо за допомоги потенціалу

$$U = \sum_{\alpha=1}^M \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{\alpha}(m) Q_{\alpha}(m) V_{\alpha}(m) \sum_{s=0}^{Z-1} \Delta(m - n_{\alpha} - Mls) , \quad (2.3.1)$$

де позначення $\Delta(n - m)$ є звичайним дельта-символом Кронекера $\Delta(n - m) \equiv \delta_{nm}$. Кількість домішок на кожному з M ланцюжків вважаємо однаковою і рівною Z , так що їхня загальна кількість є очевидно MZ . Число n_{α} вказує на повздовжню позицію першої домішки на α -му ланцюжку. Нарешті, величина $V_{\alpha}(n_{\alpha} + Mls)$ вказує на зсув енергії домішкової “молекули”, розташованої на α -му ланцюжку в межах $(n_{\alpha} + Mls)$ -ої елементарної комірки, порівняно з енергією основної “молекули”. Число l характеризує відстань між найближчими домішками в повздовжньому напрямі. Надалі ми вважатимемо, що $n_{\alpha} = n_i + (\alpha - 1)l$. Тоді, наприклад, за $M = 2$ прийнятий домішковий потенціал (2.3.1) відповідатиме зигзагоподібному розподілу домішок на дво-ніжковій драбинчастій ґратці, а за $M = 3$ – за спіралеподібний розподіл на триніжковій драбинчастій ґратці.

Повний лагранжіан збуреної домішками системи відрізняється від лагранжіану (2.2.1) раніше досліджуваної системи в електричному полі \mathcal{E} заміною потенціальної енергії електричного поля на потенціальну енергію домішок (2.3.1). Діючи в межах методу пробних лагранжіанів з використанням одно-солітонного анзацу (2.2.4), для колективних змінних x , k та b_{α} , b_{α}^* ми, як і раніше, одержуємо Гамільтонові рівняння колективного руху (2.2.13)–(2.2.16), але вже з іншим ефективним гамільтоніаном

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\frac{2 \sinh \mu}{\mu} \cos k - \sum_{\alpha=1}^M \sum_{\beta=1}^M b_{\alpha}^* t_{\alpha\beta} b_{\beta} + \\ & + \frac{V}{2\mu} \sum_{\alpha=1}^M b_{\alpha}^* b_{\alpha} \sum_{s=0}^{Z-1} \ln \{ 1 + \sinh^2 \mu \operatorname{sech}^2 \mu [x - n_i - (\alpha - 1)l - Mls] \} . \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Тут ми обмежилися домішками одного сорту і тому поклали $V_{\alpha}(n_i + (\alpha - 1)l + Mls) \equiv V$. Щодо параметра μ , то в наближенні пробного лагранжіану він від часу не залежить $\dot{\mu} = 0$.

Одержані рівняння колективної динаміки (2.2.13)–(2.2.16), (2.3.2) враховують дію домішок на солітон наближено. Вони з певністю справедливі, коли ефекти випромінювання хвиль солітоном [89] та ефекти збуджування домішкових станів [90] є незначними. Вимога, аби приріст енергії за рахунок домішки був меншим, аніж пониження енергії за рахунок утворення солітона, є фізичною запорукою пригнічення вказаних вище ефектів. Мовою параметрів μ та V цю вимогу можна записати так: $\mu > (4/3)|V|$.

Для одноланцюжкової системи обмеження $\mu > (4/3)|V|$ є вирішальним, оскільки за одновимірною руху у солітона немає можливості оминати домішку. Навпаки, для дволанцюжкової драбинчастої нелінійної системи обмеження $\mu > (4/3)|V|$ можна значно послабити або часом навіть зігнорувати у випадках, коли солітон та домішка розташовані на протилежних ланцюжках, незалежно від відстані між ними в повздовжньому напрямі.

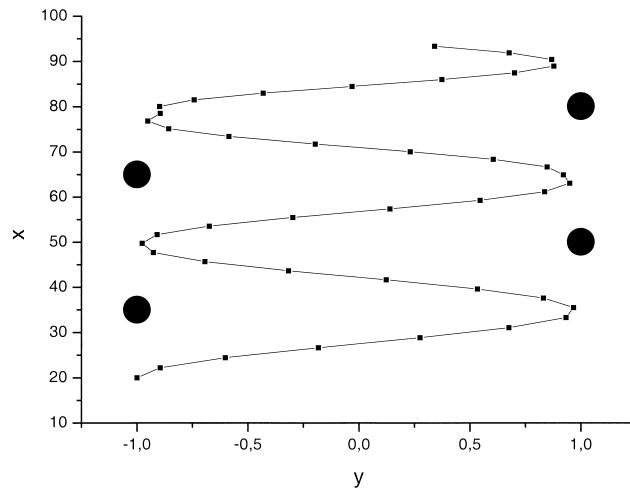


Рис. 2.3. Траекторія центру солітона на драбинчастій ґратці з притягувальними точковими домішками за $k(0) = 0.7965$ та $\varphi = 0$.

Найпростіше обґрунтування цього твердження впливає із суто геометричних міркувань. Для дволанцюжкової драбинчастої ґратки $M = 2$ з $t_{\alpha\beta} = (1 - \delta_{\alpha\beta})t$ за відсутності домішок $V = 0$ рівняння колективної динаміки для змінних x , k та b_α , b_α^* є точними. Внаслідок цього поперечна y та повздовжня x координати центру солітона підпорядковуються рівнянню гармонічних коливань $\ddot{y} + (2t)^2 y = 0$ та рівнянню рівномірного руху $\ddot{x} = 0$, відповідно. Іншими словами, на двовимірній регулярній драбинчастій ґратці центр солітона

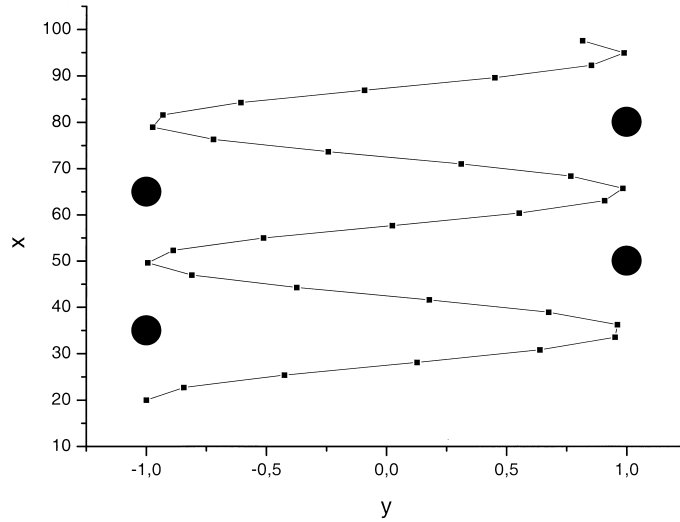


Рис. 2.4. Траєкторія центру солітона на драбинчастій ґратці з відштовхувальними точковими домішками за $k(0) = 0.7965$ та $\varphi = 0$.

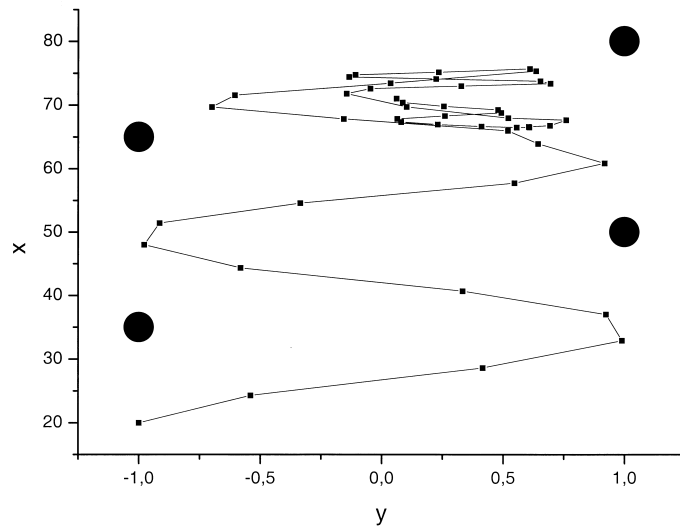


Рис. 2.5. Траєкторія центру солітона на драбинчастій ґратці з притягувальними точковими домішками за $k(0) = 0.7$ та $\varphi = 0$.

описує деяку синусоїдну траєкторію. За належного вибору початкових умов амплітуда синусоїди стає максимальною, тобто дорівнює половині відстані між ланцюжками. Такий характер ідеальної (незбуреної) траєкторії підказує, що у разі зигзагоподібного розташування домішок завжди існує нагода синхронізувати повздовжній рух солітона з його поперечним рухом таким чином, аби

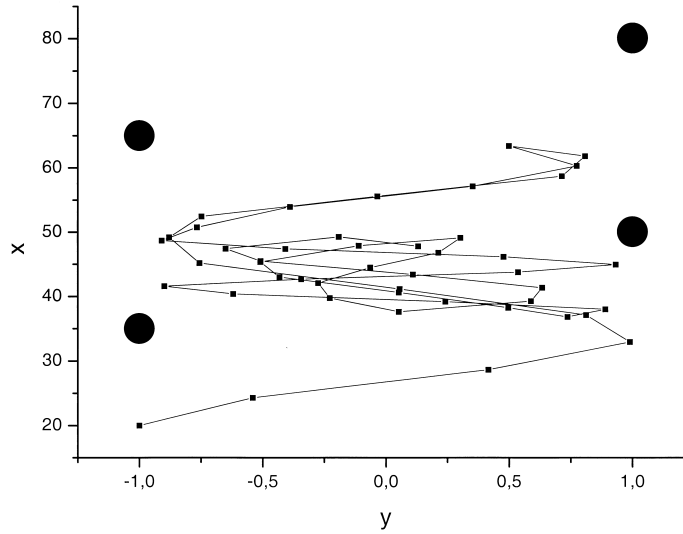


Рис. 2.6. Траєкторія центру солітона на драбинчастій ґратці з відштовхувальними точковими домішками за $k(0) = 0.7$ та $\varphi = 0$.

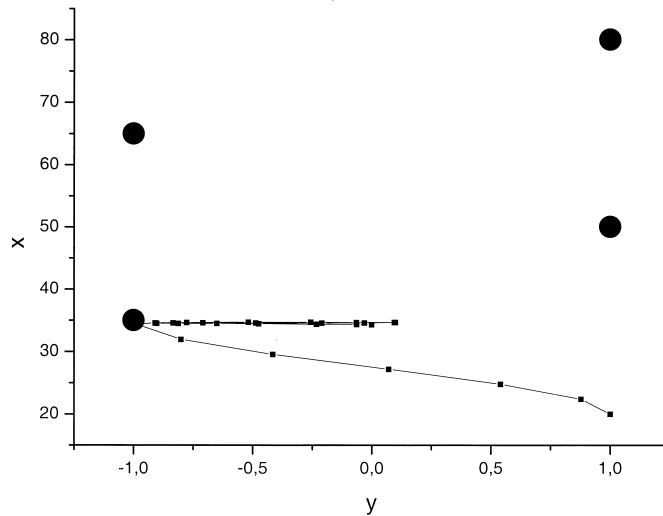


Рис. 2.7. Траєкторія центру солітона на драбинчастій ґратці з притягувальними точковими домішками за $k(0) = 0.7965$ та $\varphi = \pi/2$.

центр солітона оминав домішки. За припущення нульового повздовжнього розміру солітона основна вимога його слаломного руху визначається формулою

$$l = (j + 1/2)T_{\perp}v_{\parallel} \quad (j = 0, 1, 2, 3, \dots) , \quad (2.3.3)$$

де $T_{\perp} = \pi/t$ – період поперечних коливань солітона, $v_{\parallel} = (2/\mu) \sinh \mu \sin k(0)$

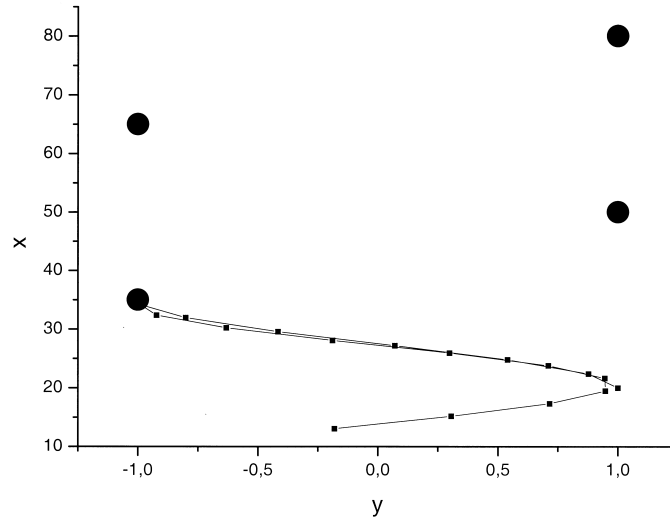


Рис. 2.8. Траєкторія центру солітона на драбинчастій ґратці з відштовхувальними точковими домішками за $k(0) = 0.7965$ та $\varphi = \pi/2$.

– повздовжня швидкість солітона. Окрім цього, початкові координати центру солітона мають бути такими, аби ідеальна (незбурена) синусоїдна траєкторія проходила через вузол, розташований саме навпроти першої з домішок. Для солітона ненульового повздовжнього розміру $d \neq 0$ вказані вимоги залишаються прийнятними за умови, що $d \ll T_{\perp} v_{\parallel} / 2$.

Ми перевірили якісні передумови адіабатичної теорії, розв'язавши чисельно точні динамічні рівняння для амплітуд збудженості $Q_{\alpha}(n)$ та $R_{\alpha}(n)$ у випадку, коли $n_{\alpha} = n_i + (\alpha - 1)l$, $M = 2$, $Z = 2$, $V_{\alpha}(n_i + (\alpha - 1)l + Mls) \equiv V$. Іншими словами, ми дослідили поширювання солітонного пакету на двоніжковій драбинчастій ґратці з розташованими зигзагоподібно домішками одного сорту. В наших розрахунках ми випробували дію обох типів домішок – притягувальних $V < 0$ та відштовхувальних $V > 0$, обмежившись чотирма привнесеними домішками.

На рисунках 2.3, 2.5 та 2.7 зображено траєкторії солітонного пакету в разі притягувальних домішок з $V = -10$.

На рисунках 2.4, 2.6 та 2.8 зображено траєкторії солітонного пакету в разі відштовхувальних домішок з $V = +10$.

Для побудови траєкторій, показаних на кожному з рисунків 2.3–2.8, повздовжня відстань між найближчими домішками l становила 15, а профіль

початкового солітона зафіксовано значенням $\mu = 3$. Окрім того, початковий солітон завжди запускали з тієї самої елементарної комірки $x(0) = n_0 = 20$, розташованої на відстані $n_i - n_0 = 15$ від першої домішки. Внутрішньоланцюжковий та міжланцюжковий параметри зв'язку утримувано значеннями $t_{\parallel} = 1$ та $t = 1/2$, відповідно. Насамкінець, фазову різницю $\delta_2 - \delta_1$ в поперечних початкових умовах $b_1(0) = \exp(i\delta_1) \cos \varphi$ та $b_2(0) = \exp(i\delta_2) \sin \varphi$ утримувано значенням $\delta_2 - \delta_1 = \pi$. Натомість, початкова швидкість солітона $(2/\mu) \sinh \mu \sin k(0)$ змінювалась від рисунка до рисунка. При цьому величина $y(0) = -\cos 2\varphi$ задавала початкову поперечну координату центру солітона. З огляду на раніше вказане обмеження $\delta_2 - \delta_1 = \pi$, для параметра φ вибирали одне з двох значень $\varphi = 0$ або $\varphi = \pi/2$, аби тим самим гарантувати максимальне значення початкової амплітуди поперечних коливань $A_{\perp}(0) = 1$.

Порівняння параметра інтенсивності домішки $|V| = 10$ з параметром профілю солітона $\mu = 3$ показує, що умову адіабатності солітонної динаміки $\mu > (4/3)|V|$ порушено, і числові моделювання відповідають суттєво неадіабатному режимові $\mu < (4/3)V$.

Тим не менше, рисунки 2.3 та 2.4, що відповідають умовам синхронізації, вказують на незначний вплив навіть інтенсивних домішок на рух солітона, і солітон, виконавши слалом між домішками (позначеними на рисунках великими темними кружками), вільно полишає нерегулярну ділянку драбинчастої ґратки незалежно від знаку взаємодії солітона з домішкою.

Рисунки 2.5 та 2.6 відображають ситуацію, коли умову синхронізації за швидкістю дещо порушено, і ми спостерігаємо захоплення солітона нерегулярною ділянкою драбинчастої ґратки незалежно від знаку солітон-домішкової взаємодії. При цьому частина солітонного розподілу випромінюється у вигляді низькоамплітудних хвиль.

Нарешті, рисунки 2.7 та 2.8 відповідають випадкові, коли умови синхронізації порушено за рахунок перенесення початкового положення центру солітона на протилежний ланцюжок. При цьому солітон, наблизившись до першої домішки, захоплюється нею у випадку притягувальної взаємодії $V = -10$ (Рис. 2.7) або відбивається від неї у випадку відштовхувальної взаємодії $V = +10$ (Рис. 2.8).

На кожному з рисунків траєкторію центру солітона подано ломаною лінією, протрасованою квадратами, що розділені однаковими скінченними

проміжками часу. Проте, самі числові розрахунки було проведено зі значно дрібнішим часовим кроком, так що повна траєкторія насправді є гладенькою кривою.

Отже, динаміка руху солітона на драбинчастій ґратці із зигзагоподібним розподілом домішок на загал є досить складною і багатою. Залежно від початкових умов та знаку солітон-домішкової взаємодії ми спостерігаємо а) слабомний рух солітона, що забезпечує практично повне проходження солітоном домішкової ділянки; б) захоплення солітона домішковою ділянкою з деяким випромінюванням просторово нелокалізованих хвиль; в) відбивання солітона від домішкової ділянки.

2.4 Поширювання солітонного збудження на драбинчастій ґратці з модифікованими поперечними міжвузловими зв'язками [198, 203]

Іншим сортом дефекту, допустимого для багатоніжкової драбинчастої ґратки, є дефект локальної модифікації поперечних резонансних зв'язків, що його враховує потенціал [198, 203]

$$U = - \sum_{\alpha=1}^M \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{\alpha}(m) Q_{\alpha}(m) \Delta(m - n_t) h_{\alpha\beta} . \quad (2.4.1)$$

Тут величини $h_{\alpha\beta}$ описують зміни параметрів поперечного зв'язку $t_{\alpha\beta}$ в межах n_t -ї елементарної комірки, а $\Delta(n - m)$, як і раніше, слугує за символа Кронекера δ_{nm} . Надалі нас цікавитиме лише випадок пропорційної модифікації

$$h_{\alpha\beta} = w t_{\alpha\beta} , \quad (2.4.2)$$

яка, наприклад, для двоніжкової ґратки є єдино можливою. Ми покажемо, що такий вид модифікації здатен впливати на повздовжню динаміку солітона двома абсолютно протилежними способами, а саме: як відштовхувальний потенціал або як притягувальний потенціал залежно лише від початкового стану

поперечних солітонних мод. Основні риси цього ефекту стають зрозумілими уже в рамках методу пробних лагранжіанів.

Як і в двох попередніх підрозділах, ми скористалися підставленням односолітонного анзацу (2.2.4) до повного лагранжіану багатокomпонентної моделі, який тепер слід розуміти як суму лагранжіану незбуреної моделі (формула (2.2.1), взята при $\mathcal{E} = 0$) та модифікаційного потенціалу (2.3.1), і застосували формалізм Ойлера–Лагранжа до колективних змінних $x, k, b_\alpha, b_\alpha^*, \mu, \varphi$ та їхніх похідних за часом. Як і раніше, параметр μ виявився часонезалежним. Ефективні ж рівняння для змінних x, k та b_α, b_α^* знову допускають стандартний гамільтонівський запис (2.2.13)–(2.2.16), але тепер під гамільтоніаном \mathcal{H} слід розуміти вираз

$$\mathcal{H} = -\frac{2 \sinh \mu}{\mu} \cos k - \eta - \frac{w\eta}{2\mu} \ln [1 + \sinh^2 \mu \operatorname{sech}^2 \mu(x - n_t)] , \quad (2.4.3)$$

де

$$\eta \equiv \sum_{\alpha=1}^M \sum_{\beta=1}^M b_\alpha^* t_{\alpha\beta} b_\beta . \quad (2.4.4)$$

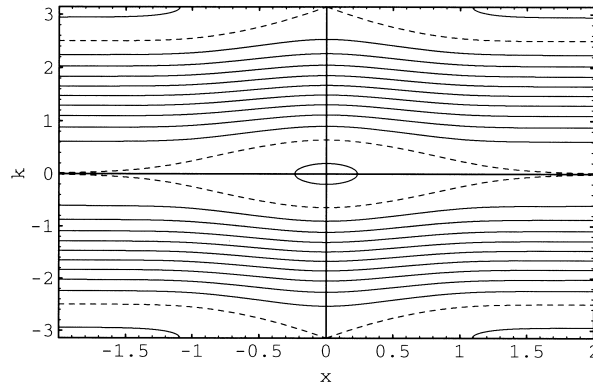


Рис. 2.9. Фазовий портрет ефективної повздовжньої динаміки солітона на драбинчастій ґратці з модифікованим поперечним зв'язком у притягувальному випадку $w\eta > 0$ з $\mathcal{H}(\pm\pi, n_t) > \mathcal{H}(0, n_t \pm \infty)$ за $\mu = 3$, $wt = 2$, $\delta_2 - \delta_1 = 0$, $\varphi = \pi/6$.

Спираючись на динамічні рівняння $+i\dot{b}_\alpha = \partial\mathcal{H}/\partial b_\alpha^*$ та $-i\dot{b}_\alpha^* = \partial\mathcal{H}/\partial b_\alpha$ для b_α та b_α^* , легко показати, що за умови часонезалежних параметрів поперечного зв'язку $t_{\alpha\beta}$ величина η зберігається, $\dot{\eta} = 0$. З огляду на збереження величини η ефективні рівняння повздожньої динаміки солітона $\dot{x} = \partial\mathcal{H}/\partial k$ та $\dot{k} = \partial\mathcal{H}/\partial x$ стають самодостатніми, оскільки вони нечутливі до поперечної динаміки. При цьому ми маємо повне право розуміти під величиною η її значення, обчислене в будь-який момент часу, зокрема і в початковий $\tau = 0$. Іншими словами, значення та знак цієї величини регулюється виключно початковими умовами на поперечні солітонні моди. Наприклад, звернувшись до двоніжкової драбинчастої моделі з $M = 2$ та $t_{\alpha\beta} = (1 - \delta_{\alpha\beta})t$ і скориставшись параметризацією $b_1(0) = \exp(i\delta_1) \cos \varphi$, $b_2(0) = \exp(i\delta_2) \sin \varphi$, ми приходимо до виразу

$$\eta = t \cos(\delta_1 - \delta_2) \sin 2\varphi , \quad (2.4.5)$$

який цілком підтверджує щойно зроблені зауваги стосовно регульовності значень величини η .

З виразу (2.4.3) для ефективного гамільтоніану \mathcal{H} видно, що поряд з іншими постійними факторами інтенсивність та знак ефективного повздожнього

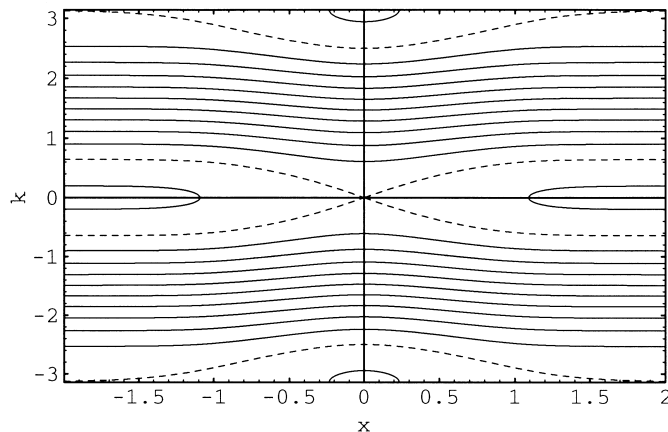


Рис. 2.10. Фазовий портрет ефективної повздожньої динаміки солітона на драбинчастій ґратці з модифікованим поперечним зв'язком у відштовхувальному випадку $w\eta < 0$ з $\mathcal{H}(\pm\pi, n_t \pm \infty) > \mathcal{H}(0, n_t)$ за $\mu = 3$, $wt = 2$, $\delta_2 - \delta_1 = \pi$, $\varphi = \pi/6$.

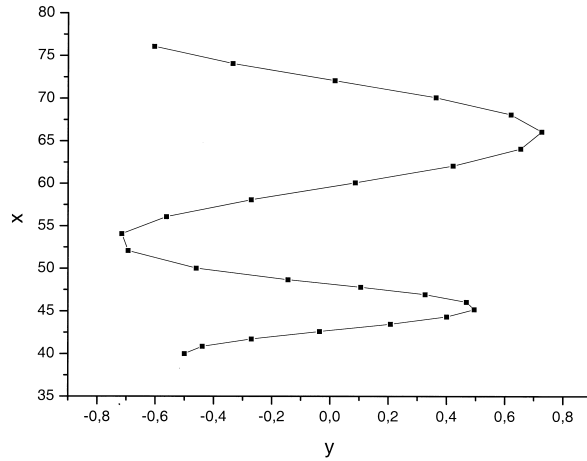


Рис. 2.11. Траєкторія центру солітона на драбинчастій ґратці з модифікованим поперечним зв'язком за $n_t = 50$, $\mu = 3$, $wt = 2$ ($w = 4$, $t = 1/2$), $\delta_2 - \delta_1 = 0$, $\varphi = \pi/6$ та $k(0) = \pi/12$, що відповідає відкритій траєкторії з $k(0) = \pi/12$ на фазовій діаграмі (Рис. 2.9) для $w\eta > 0$.

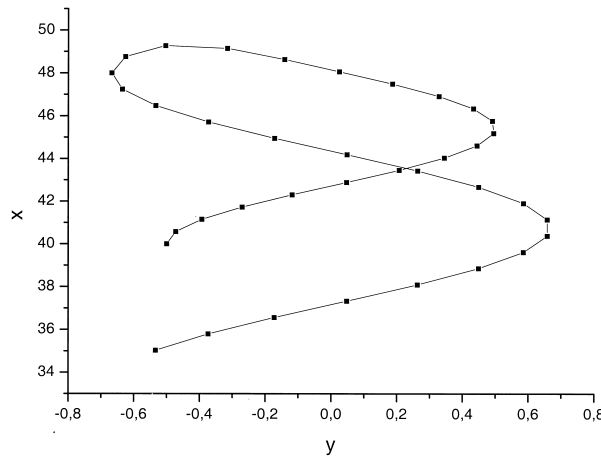


Рис. 2.12. Траєкторія центру солітона на драбинчастій ґратці з модифікованим поперечним зв'язком за $n_t = 50$, $\mu = 3$, $wt = 2$ ($w = 4$, $t = 1/2$), $\delta_2 - \delta_1 = 0$, $\varphi = \pi/6$ та $k(0) = 11\pi/12$, що відповідає бумеранговій траєкторії з $k(0) = 11\pi/12$ на фазовій діаграмі (Рис. 2.9) для $w\eta > 0$.

го потенціалу визначається інтенсивністю та знаком величини η . Тому є всі підстави вважати величину η деяким ефективним зарядом солітона. Завдяки ефективному заряду η ми здатні керувати характером взаємодії між солітоном та дефектом поперечного зв'язку від притягувального до відштовхувального і навпаки, просто змінюючи початкові параметри δ_1 , δ_2 та φ поперечного солі-

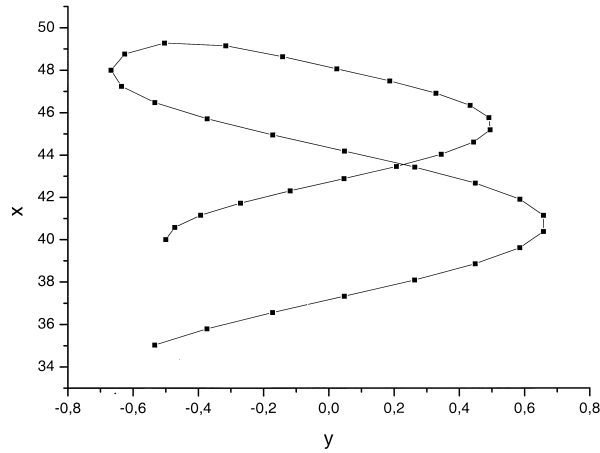


Рис. 2.13. Траєкторія центру солітона на драбинчастій ґратці з модифікованим поперечним зв'язком за $n_t = 50$, $\mu = 3$, $wt = 2$ ($w = 4$, $t = 1/2$), $\delta_2 - \delta_1 = \pi$, $\varphi = \pi/6$ та $k(0) = \pi/12$, що відповідає бумеранговій траєкторії з $k(0) = \pi/12$ на фазовій діаграмі (Рис. 2.10) для $w\eta < 0$.

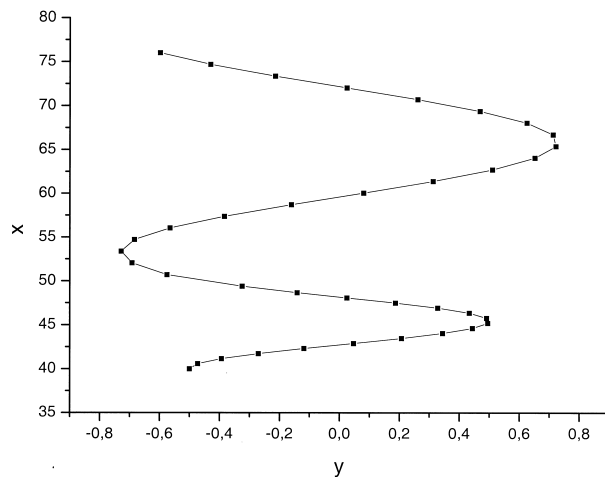


Рис. 2.14. Траєкторія центру солітона на драбинчастій ґратці з модифікованим поперечним зв'язком за $n_t = 50$, $\mu = 3$, $wt = 2$ ($w = 4$, $t = 1/2$), $\delta_2 - \delta_1 = \pi$, $\varphi = \pi/6$ та $k(0) = 11\pi/12$, що відповідає відкритій траєкторії з $k(0) = 11\pi/12$ на фазовій діаграмі (Рис. 2.10) для $w\eta < 0$.

тонного розподілу. Ми вважаємо, що цей ефект може відігравати вирішальну роль в явищі розділення чи відбору налітних солітонів за поперечною енергією $-\eta$, яка з точністю до знака збігається з ефективним зарядом солітона $+\eta$.

Аналогічно до зауважень з попереднього підрозділу, якісна теорія цього підрозділу є з певністю виправданою за умов, що індуковані нерегулярністю

ефекти випромінювання хвиль солітоном та індуковані солітоном ефекти збуджування локалізованих станів нерегулярності є незначними. Формально вказані вимоги забезпечує нерівність $\mu > (4/3)|wt|$. Проте на відміну від випадку з точковими домішками, теперішнє обмеження $\mu > (4/3)|wt|$ не підлягає жодному послабленню, оскільки недосконалість поперечного зв'язку охоплює однаковою мірою обидва ланцюжки.

Аби вказати можливі режими повздовжнього руху солітона, варто проаналізувати сімейство фазових траєкторій $\mathcal{H}(k, x) = E$, спараметризоване ефективною енергією E . При цьому точки $k = -\pi$ та $k = +\pi$ слід вважати ідентичними.

Так, коли взаємодія між солітоном і поперечним дефектом є притягувальною, $w\eta > 0$, можна очікувати два типи фазових портретів, залежно від співвідношення між $\mathcal{H}(\pm\pi, n_t)$ та $\mathcal{H}(0, n_t, \pm\infty)$. Однак, основне обмеження $\mu > (4/3)|wt|$ вибирає лише тип з $\mathcal{H}(\pm\pi, n_t) > \mathcal{H}(0, n_t \pm \infty)$, коли $4 \sinh \mu > w\eta \ln(\cosh \mu)$. Характерний фазовий портрет повздовжньої динаміки солітона для випадку $\mathcal{H}(\pm\pi, n_t) > \mathcal{H}(0, n_t \pm \infty)$ зображено на рисунку 2.9 з $\mu = 3$, $wt = 2$, $\delta_1 - \delta_2 = 0$ та $\varphi = \pi/6$. Трьома окремими режимами повздовжнього солітонного руху є (i) коливання (замкнуті траєкторії поблизу дна гамільтонівської поверхні $x = n_t, k = 0$), якщо $\mathcal{H}(0, n_t \pm \infty) > E > \mathcal{H}(0, n_t)$, (ii) транспортний рух (відкриті траєкторії), якщо $\mathcal{H}(\pm\pi, n_t) > E > \mathcal{H}(0, n_t \pm \infty)$, та (iii) рух з відбиванням (бумерангові траєкторії поблизу лінії $|k| = \pi$), якщо $\mathcal{H}(\pm\pi, n_t \pm \infty) > E > \mathcal{H}(\pm\pi, n_t)$.

Коли ж взаємодія між солітоном та поперечним дефектом є відштовхувальною, $w\eta < 0$, можна очікувати на два інші типи фазових портретів залежно від того, яка з величин $\mathcal{H}(\pm\pi \pm \infty)$ чи $\mathcal{H}(0, n_t)$ є більшою. Проте, знову з огляду на основне обмеження $\mu > (4/3)|wt|$, слід вибрати лише один з них, а саме тип з $\mathcal{H}(\pm\pi, n_t \pm \infty) > \mathcal{H}(0, n_t)$, коли $4 \sinh \mu > -w\eta \ln(\cosh \mu)$. Характерний фазовий портрет повздовжньої динаміки солітона для $\mathcal{H}(\pm\pi, n_t \pm \infty) > \mathcal{H}(0, n_t)$ зображено на рисунку 2.10 з $\mu = 3$, $wt = 2$, $\delta_1 - \delta_2 = 0$ та $\varphi = \pi/6$. Ми чітко бачимо (i) коливний режим (замкнуті траєкторії поблизу маківки гамільтонівської поверхні $x = n_t, |k| = \pi$), якщо $\mathcal{H}(\pm\pi, n_t) > E > \mathcal{H}(\pm\pi, n_t \pm \infty)$, (ii) транспортний режим (відкриті траєкторії), якщо $\mathcal{H}(\pm\pi, n_t \pm \infty) > E > \mathcal{H}(0, n_t)$, і нарешті (iii) відбивальний режим (бумерангові траєкторії поблизу лінії $k = 0$), якщо

$$\mathcal{H}(0, n_t) > E > \mathcal{H}(0, n_t \pm \infty).$$

Описані фазові діаграми (Рис. 2.9) та (Рис. 2.10) створили гарну нагоду для перехресної перевірки колективної солітонної динаміки за допомоги числових розрахунків безпосередньо в рамках точних динамічних рівнянь для амплітуд $Q_\alpha(n)$ та $R_\alpha(n)$. Ми проінспектували точну солітонну динаміку з кількома різними початковими умовами, що відповідали як притягувальній, так і відштовхувальній ефективній взаємодії між солітоном і дефектом поперечного зв'язку у випадку двоніжкової драбинчастої ґратки, коли $M = 2$, а $t_{\alpha\beta} = (1 - \delta_{\alpha\beta})t$, і одержали добре узгодження з результатами ефективної солітонної динаміки.

Комп'ютерні розрахунки траєкторій центру солітона на основі точних динамічних рівнянь для амплітуд $Q_\alpha(n)$ та $R_\alpha(n)$ подано на рисунках 2.11–2.14. Для порівняння з висновками теорії колективних змінних у формі фазових діаграм, зображених на рисунках 2.9 та 2.10, траєкторії центру солітона обчислено з тими самим значеннями параметрів μ , wt , t_{\parallel} та φ , тобто ми взяли $\mu = 3$, $wt = 2$ ($w = 4$, $t = 1/2$), $t_{\parallel} = 1$ та $\varphi = \pi/6$. З тих самих міркувань, ми утримували $\delta_2 - \delta_1 = 0$ для рисунків 2.11 і 2.12, що перегукуються з фазовим портретом з рисунка 2.9, характерним для притягування, та $\delta_2 - \delta_1 = \pi$ для рисунків 2.13 і 2.14, що перегукуються з фазовим портретом 2.10, характерним для відштовхування. Для кожного з рисунків 2.11–2.14 налітний солітон запускався з однієї і тієї самої елементарної комірки $x(0) = n_0 = 40$, розташованої на відстані $n_t - n_0 = 10$ від дефекту поперечного зв'язку.

Наголосимо, що точна теорія підтверджує результати якісної теорії про існування двох інтервалів для початкового квазіімпульсу (одного інтервалу в околі точки $|k(0)| = 0$, а іншого – в околі точки $|k(0)| = \pi$), де проста зміна знаку ефективного заряду η (наприклад, зміною різниці фаз $\delta_2 - \delta_1$ з нуля на π) призводить до повної перебудови характеру повздовжнього руху солітона з режиму проходження (рисунок 2.11 з $k(0) = \pi/12$) на режим відбивання (рисунок 2.13 з $k(0) = \pi/12$) і навпаки з режиму відбивання (рисунок 2.12 з $k(0) = 11\pi/12$) на режим проходження (рисунок 2.14 з $k = 11\pi/12$).

2.5 Підсумки

У цьому розділі, розвиваючи концепцію фізично скоригованих польових амплітуд, ми запропонували фізично скориговану мультипольову нелінійну модель Шрьодінгера на квазіодновимірній багатоланцюжковій драбинчастій ґратці. Модель адекватно враховує як повздовжню (вздовж ланцюжків), так і поперечну (впоперек ланцюжків) динаміку нелінійних хвильових збуджень. Модель допускає як односолітонні, так і багатосолітонні розв'язки спеціального (факторизованого) типу, коли повздовжні та поперечні солітонні моди є взаємно незалежними. Проте питання про повну інтегровність моделі в сенсі Лакса (Lax) залишається відкритим, оскільки представлення нульової кривини для неї ми не знаємо. Зате наявність точних солітонних розв'язків моделі дає змогу послідовно розглянути низку цікавих задач із впливу зовнішніх електричного та магнетного полів на повздовжню та поперечну динаміку солітоноподібного збудження на квазіодновимірній багатоланцюжковій драбинчастій ґратці. З іншого боку, модель здатна наближено враховувати вплив недосконалостей ґратки, викликаних зигзаґоподібним розподілом одновузлових домішок чи модифікаційним дефектом поперечних резонансних міжвузлових зв'язків, на повздовжню та поперечну динаміку солітоноподібного збудження.

Різноманітні сценарії руху солітоноподібного збудження, виявлені в результаті нашого дослідження, вказують на важливу роль синхронізації повздовжнього та поперечного рухів солітона, керованої магнетним полем в регулярній ґратці або доречним вибором початкових параметрів солітонного розподілу в нерегулярній ґратці, для селективного транспорту солітонного збудження до наперед вказаного вузла ґратки.

Тут варто згадати, що завдяки слаломному ефекту солітон здатен оминати одновузлові домішки на значній ділянці їхнього зигзаґоподібного просторового розташування. Цікавим видається також досить незвичний результат про вплив суто фазових параметрів поперечної динаміки солітона на параметри ефективного повздовжнього потенціалу взаємодії солітона з модифікаційним дефектом поперечних резонансних міжвузлових зв'язків. Дефекти обох розглянутих типів здатні як пропустити те чи інше солітонне збудження, так і відбити його і тим самим відфільтрувати солітони за певними характеристиками. З іншого боку, зигзаґоподібний частокіл домішок спроможний також

захопити солітона-невдаху, тобто стати пасткою для відлову солітонів з метою накопичення та подальшої утилізації принесеної ними енергії чи заряду.

Щодо дії повздовжнього однорідного поля на рух солітона, слід вказати на доволі очікувані залежності амплітуди та частоти повздовжніх осциляцій Блоха від напруженості поля, а також на супутній ефект динамічної локалізації повздовжнього руху солітона. Варто зауважити про повну незалежність Блохових осциляцій та поперечних коливань, що за співвимірності їхніх частот здатні сформувати деяку замкнену траєкторію центру солітонного пакету.

Розділ 3

Інтегровна нелінійна модель шрьодінґерівських полів на пласкій фермоподібній ґратці

3.1 Загальний опис моделі [199, 212]

У цьому розділі ми розглянемо інтегровну нелінійну модель Шрьодінґера (Schrödinger) на пласкій фермоподібній ґратці, яку було запропоновано та детально вивчено в двох наших працях [199] та [212].

Еволюційні рівняння моделі мають вигляд

$$\begin{aligned} & \frac{+i\dot{q}_-(n) + 2\omega_0 q_-(n)}{1 + q_-(n)r_-(n)} + \omega_t^- q_+(n) + \omega_t^+ q_+(n-1) + \\ & + \omega_l^+ q_-(n-1)[1 + q_+(n-1)r_+(n-1)] + \omega_l^- q_-(n+1)[1 + q_+(n)r_+(n)] \\ & + \omega_l^+ q_+(n-1)[q_+(n-1)r_-(n) + q_-(n)r_+(n)] \\ & + \omega_l^- q_+(n)[q_+(n)r_-(n) + q_-(n)r_+(n-1)] = 0 \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{-i\dot{r}_-(n) + 2\omega_0 r_-(n)}{1 + r_-(n)q_-(n)} + \omega_t^+ r_+(n) + \omega_t^- r_+(n-1) \\ & + \omega_l^- r_-(n-1)[1 + r_+(n-1)q_+(n-1)] + \omega_l^+ r_-(n+1)[1 + r_+(n)q_+(n)] \\ & + \omega_l^- r_+(n-1)[r_+(n-1)q_-(n) + r_-(n)q_+(n)] \\ & + \omega_l^+ r_+(n)[r_+(n)q_-(n) + r_-(n)q_+(n-1)] = 0 \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{+i\dot{q}_+(n) + 2\omega_0 q_+(n)}{1 + q_+(n)r_+(n)} + \omega_t^+ q_-(n) + \omega_t^- q_-(n+1) \\
& + \omega_l^- q_+(n+1)[1 + q_-(n+1)r_-(n+1)] + \omega_l^+ q_+(n-1)[1 + q_-(n)r_-(n)] \\
& + \omega_l^- q_-(n+1)[q_-(n+1)r_+(n) + q_+(n)r_-(n)] \\
& + \omega_l^+ q_-(n)[q_-(n)r_+(n) + q_+(n)r_-(n+1)] = 0
\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{-i\dot{r}_+(n) + 2\omega_0 r_+(n)}{1 + r_+(n)q_+(n)} + \omega_t^- r_-(n) + \omega_t^+ r_-(n+1) \\
& + \omega_l^+ r_+(n+1)[1 + r_-(n+1)q_-(n+1)] + \omega_l^- r_+(n-1)[1 + r_-(n)q_-(n)] \\
& + \omega_l^+ r_-(n+1)[r_-(n+1)q_+(n) + r_+(n)q_-(n)] \\
& + \omega_l^- r_-(n)[r_-(n)q_+(n) + r_+(n)q_-(n+1)] = 0 ,
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

де крапка над польовими функціями вказує на диференціювання за часом τ . У випадку редукції $r_{\pm}(n) = q_{\pm}^*(n)$ система рівнянь відповідає притягувальному типові нелінійних членів, а самі польові функції $q_-(n)$, $r_-(n)$ та $q_+(n)$, $r_+(n)$ можна трактувати як майже амплітуди присутності збудження на лівому ($-$) вузлі та правому ($+$) вузлі n -тої елементарної комірки, відповідно. Слушність терміну “майже амплітуда присутності” легко зрозуміти в контексті точкових перетворень

$$q_{\pm}(n) = \sqrt{[\exp(Q_{\pm}(n)R_{\pm}(n)) - 1]Q_{\pm}(n)/R_{\pm}(n)} \tag{3.1.5}$$

$$r_{\pm}(n) = \sqrt{[\exp(R_{\pm}(n)Q_{\pm}(n)) - 1]R_{\pm}(n)/Q_{\pm}(n)} \tag{3.1.6}$$

до справжніх амплітуд присутності (амплітуд збудженості) $Q_-(n)$, $R_-(n)$ та $Q_+(n)$, $R_+(n)$, оскільки, з одного боку, ми приходимо до цілком природнього формулювання закону збереження повного числа збуджень

$$\frac{d}{dt} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [Q_-(m)R_-(m) + Q_+(m)R_+(m)] = 0 , \tag{3.1.7}$$

а з іншого, гарантуємо незмінність лінійної частини скоригованих рівнянь порівняно з лінійною частиною вихідних (3.1.1) – (3.1.4).

За аналогією з теорією екситонів [47], величинам ω_l^- , ω_l^+ та ω_t^- , ω_t^+ можна надати сенс параметрів, відповідно, повздовжньої та поперечної міжвузлової

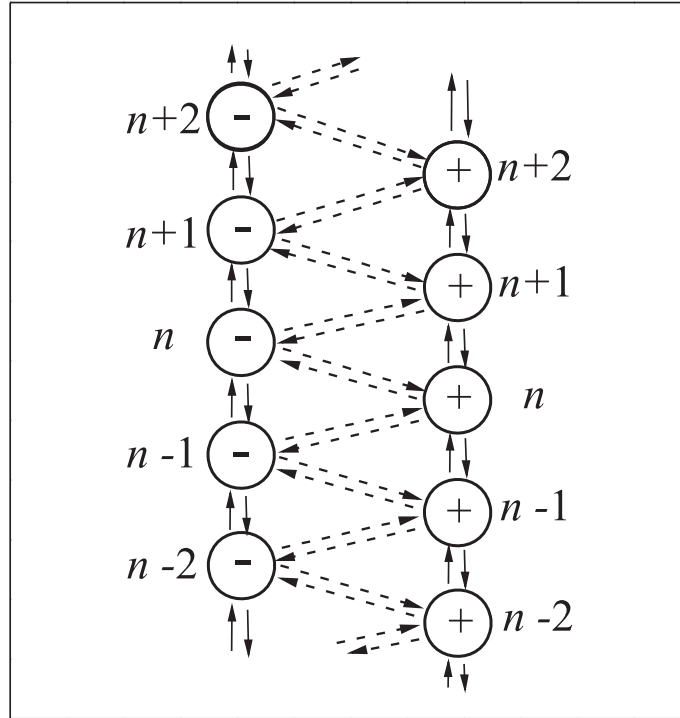


Рис. 3.1. Фрагмент плоскої фермоподібної ґратки носія збуджень для чотирикомпонентної напівдискретної інтегрованої нелінійної шрьодінґерової системи (3.1.1)–(3.1.4). Кругечки позначають розташування вузлів драбинчастої ґратки. Скісні стрілки вказують на резонансні зв'язки, формалізовані параметрами ω_t^- чи ω_t^+ між польовими збудженнями на сусідніх вузлах, належних до протилежних ланцюжків драбинчастої ґратки. Вертикальні стрілки вказують на резонансні зв'язки, формалізовані параметрами ω_l^- чи ω_l^+ між польовими збудженнями на сусідніх вузлах, належних до певного ланцюжка драбинчастої ґратки.

резонансної взаємодії, а величину ω_0 розглядати як параметр систематичного зсуву шкали енергії. На загал, усі щойно згадані параметри можна вважати довільними функціями часу τ , тим самим значно розширюючи межі застосування моделі аж до опису процесів параметричного керування збудженнями. У випадку редукції $r_{\pm}(n) = q_{\pm}^*(n)$ кількість незалежних функційних параметрів меншає за правилом $(\omega_l^-)^* = \omega_l^+$, $(\omega_t^-)^* = \omega_t^+$, $(\omega_0)^* = \omega_0$, проте загальне твердження про можливість параметричного керування збудженнями очевидно залишається в силі.

Аналіз лінійної частини запропонованої нелінійної моделі (3.1.1) – (3.1.4) свідчить, що просторові вузли, на яких задано польові амплітуди, разом з прямими лініями, вздовж яких діють резонансні зв'язки, утворюють пласку

драбинчасту ґратку на зразок пласкої ферми. Схематичне зображення пласкої фермоподібної ґратки подано на рисунку 3.1. Така геометрична конфігурація є ідеалізованим аналогом просторової ґратки однієї з реалізацій нанотрубок на основі бору, відомій в англійській літературі [113] як (1, 1) armchair boron nanotube.

З огляду на характерну геометричну будову просторової ґратки наша модель (3.1.1) – (3.1.4) суттєво відрізняється від інших інтегровних напівдискретних нелінійних систем шрьодінґерівського типу [188, 194, 3, 4, 6, 69]. Зауважимо також, що за нульових значень двох параметрів міжвузлової резонансної взаємодії ω_l^- та ω_l^+ і спеціального вибору інших трьох параметрів $\omega_t^-, \omega_0, \omega_t^+$ досліджувана тут система (3.1.1) – (3.1.4) відтворює одну з напівдискретних нелінійних інтегровних систем, що їх запропонували Абловіц і Ладік [2] і яку автори та декотрі з їхніх послідовників [242] чомусь охристили як “a discretized second order in time nonlinear Schrödinger equation”.

3.2 Допоміжні лінійні задачі та двійникові представлення нульової кривини [199, 212]

Найприйнятніша схема пошуку розв’язків базової системи нелінійних рівнянь (3.1.1) – (3.1.4) виникає з двох груп допоміжних лінійних задач

$$L^>(n|z)\Upsilon^>(n|z) = \Upsilon^>(n+1|z) \quad (3.2.1)$$

$$A^>(n|z)\Upsilon^>(n|z) = \dot{\Upsilon}^>(n|z) \quad (3.2.2)$$

та

$$L^<(n|z)\Upsilon^<(n|z) = \Upsilon^<(n-1|z) \quad (3.2.3)$$

$$A^<(n|z)\Upsilon^<(n|z) = \dot{\Upsilon}^<(n|z) , \quad (3.2.4)$$

пов’язаних, відповідно, зі зростанням та спаданням дискретної просторової координати n в двох типах допоміжних функцій $\Upsilon^>(n|z)$ та $\Upsilon^<(n|z)$ під дією

двох прийнятних типів спектральних операторів

$$L^>(n|z) = \begin{pmatrix} z & +iq_+(n) \\ +ir_+(n) & z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & +iq_-(n) \\ +ir_-(n) & z^{-1} \end{pmatrix} \quad (3.2.5)$$

$$L^<(n|z) = \begin{pmatrix} z^{-1} & -iq_-(n) \\ -ir_-(n) & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{-1} & -iq_+(n) \\ -ir_+(n) & z \end{pmatrix}. \quad (3.2.6)$$

Явні вирази для еволюційних операторів $A^>(n|z)$ та $A^<(n|z)$ буде вказано дещо пізніше. Величини $A^>(n|z)$, $\Upsilon^>(n|z)$ та $A^<(n|z)$, $\Upsilon^<(n|z)$ так само, як і $L^>(n|z)$ та $L^<(n|z)$, задаватимемо на класі матриць розміру 2×2 , причому матриці $\Upsilon^>(n|z)$ та $\Upsilon^<(n|z)$ вважатимемо неособливими скрізь в площині комплексного спектрального параметра z , а сам спектральний параметр z візьмемо незалежним від часу τ (ізоспектральна вимога).

Кожна із систем допоміжних лінійних рівнянь (3.1.1), (3.1.2) та (3.1.3), (3.1.4) є перевизначеною. Сумісність в межах кожної такої системи досягається за допомоги умов перехресності операцій диференціювання за часом τ і операції зсуву вздовж просторової координати n , застосованих до функцій $\Upsilon^>(n|z)$ та $\Upsilon^<(n|z)$ як

$$[d\Upsilon^>(m|z)/d\tau]_{m=n+1} = d\Upsilon^>(n+1|z)/d\tau \quad (3.2.7)$$

та

$$[d\Upsilon^<(m|z)/d\tau]_{m=n-1} = d\Upsilon^<(n-1|z)/d\tau, \quad (3.2.8)$$

відповідно. Безпосередніми наслідками вищезгаданих умов є два типи матричних співвідношень сумісності

$$\dot{L}^>(n|z) = A^>(n+1|z)L^>(n|z) - L^>(n|z)A^>(n|z) \quad (3.2.9)$$

та

$$\dot{L}^<(n|z) = A^<(n-1|z)L^<(n|z) - L^<(n|z)A^<(n|z), \quad (3.2.10)$$

які слід розуміти як два типи рівнянь нульової кривини, що асоційовані, відповідно, з першою (висхідною) (3.1.1), (3.1.2) та другою (низхідною) (3.1.3), (3.1.4) групами допоміжних лінійних рівнянь.

Підкреслимо, що на початковому етапі саме рівняння нульової кривини (3.2.9) та (3.2.10) в принципі дають змогу вказати на усі можливі реалізації спектральних операторів і тим самим встановити два альтернативні типи ієрархій представлень нульової кривини для певної спільної ієрархії напівдискретних інтегровних моделей. В нашому дослідженні ми спинимося детально лише на другій інтегровній моделі з усієї ієрархії, для якої матричні елементи $A_{jk}^>(n|z)$ та $A_{jk}^<(n|z)$ допоміжних еволюційних операторів $A^>(n|z)$ та $A^<(n|z)$ слід шукати у вигляді анзаців

$$A_{11}^>(n|z) = a_{11}^>(n)z^4 + b_{11}^>(n)z^2 + c_{11}^>(n) + d_{11}^>(n)z^{-2} \quad (3.2.11)$$

$$A_{12}^>(n|z) = a_{12}^>(n)z^3 + b_{12}^>(n)z + c_{12}^>(n)z^{-1} + d_{12}^>(n)z^{-3} \quad (3.2.12)$$

$$A_{21}^>(n|z) = a_{21}^>(n)z^3 + b_{21}^>(n)z + c_{21}^>(n)z^{-1} + d_{21}^>(n)z^{-3} \quad (3.2.13)$$

$$A_{22}^>(n|z) = a_{22}^>(n)z^2 + b_{22}^>(n) + c_{22}^>(n)z^{-2} + d_{22}^>(n)z^{-4} \quad (3.2.14)$$

та

$$A_{11}^<(n|z) = a_{11}^<(n)z^{-4} + b_{11}^<(n)z^{-2} + c_{11}^<(n) + d_{11}^<(n)z^2 \quad (3.2.15)$$

$$A_{12}^<(n|z) = a_{12}^<(n)z^{-3} + b_{12}^<(n)z^{-1} + c_{12}^<(n)z + d_{12}^<(n)z^3 \quad (3.2.16)$$

$$A_{21}^<(n|z) = a_{21}^<(n)z^{-3} + b_{21}^<(n)z^{-1} + c_{21}^<(n)z + d_{21}^<(n)z^3 \quad (3.2.17)$$

$$A_{22}^<(n|z) = a_{22}^<(n)z^{-2} + b_{22}^<(n) + c_{22}^<(n)z^2 + d_{22}^<(n)z^4, \quad (3.2.18)$$

відповідно. (Н.В. Аби перейти до першої інтегровної системи з вказаної ієрархії слід вважати функції $a_{jk}^>(n)$, $d_{jk}^>(n)$ та $a_{jk}^<(n)$, $d_{jk}^<(n)$ тотожними нулям.) Явні вирази в термінах польових амплітуд для усіх пошукуваних величин $a_{jk}^>(n)$, $b_{jk}^>(n)$, $c_{jk}^>(n)$, $d_{jk}^>(n)$ та $a_{jk}^<(n)$, $b_{jk}^<(n)$, $c_{jk}^<(n)$, $d_{jk}^<(n)$ природнім чином випливають з рівнянь нульової кривини (3.2.9) та (3.2.10) після підстановки до них відповідних анзаців (3.2.11)–(3.2.14) та (3.2.15)–(3.2.18) для еволюційних операторів $A^>(n|z)$ та $A^<(n|z)$, а також формул (3.2.5) та (3.2.6) для спектральних операторів $L^>(n|z)$ та $L^<(n|z)$. Для скорочення записів ми подаємо ці вирази

такими об'єднаними формулами

$$a_{11}^{\geq}(n) = +i\omega_l^{\mp} \quad (3.2.19)$$

$$b_{11}^{\geq}(n) = +i\omega_t^{\mp} + i\omega_l^{\mp} q_{\mp}(n) r_{\pm}(n \mp 1) \quad (3.2.20)$$

$$\begin{aligned} c_{11}^{\geq}(n) = & +i\omega_0 + i\omega_t^{\mp} q_{\mp}(n) r_{\pm}(n \mp 1) + i\omega_l^{\mp} q_{\pm}(n) r_{\pm}(n \mp 1) [1 + q_{\mp}(n) r_{\mp}(n)] + \\ & + i\omega_l^{\mp} q_{\mp}(n) r_{\mp}(n \mp 1) [1 + q_{\pm}(n \mp 1) r_{\pm}(n \mp 1)] + \\ & + i\omega_l^{\mp} q_{\mp}^2(n) r_{\pm}^2(n \mp 1) \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

$$d_{11}^{\geq}(n) = +i\omega_l^{\pm} q_{\pm}(n \mp 1) r_{\mp}(n) \quad (3.2.22)$$

$$a_{21}^{\geq}(n) = \mp \omega_l^{\mp} q_{\mp}(n) \quad (3.2.23)$$

$$b_{12}^{\geq}(n) = \mp \omega_t^{\mp} q_{\mp}(n) \mp \omega_l^{\mp} q_{\pm}(n) [1 + q_{\mp}(n) r_{\mp}(n)] \mp \omega_l^{\mp} q_{\mp}^2(n) r_{\pm}(n \mp 1) \quad (3.2.24)$$

$$\begin{aligned} c_{12}^{\geq}(n) = & \pm \omega_t^{\pm} q_{\pm}(n \mp 1) \pm \omega_l^{\pm} q_{\mp}(n \mp 1) [1 + q_{\pm}(n \mp 1) r_{\pm}(n \mp 1)] \pm \\ & \pm \omega_l^{\pm} q_{\pm}^2(n \mp 1) r_{\mp}(n) \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

$$d_{12}^{\geq}(n) = \pm \omega_l^{\pm} q_{\pm}(n \mp 1) \quad (3.2.26)$$

$$a_{21}^{\leq}(n) = \mp \omega_l^{\mp} r_{\pm}(n \mp 1) \quad (3.2.27)$$

$$\begin{aligned} b_{21}^{\geq}(n) = & \mp \omega_t^{\mp} r_{\pm}(n \mp 1) \mp \omega_l^{\mp} r_{\mp}(n \mp 1) [1 + r_{\pm}(n \mp 1) q_{\pm}(n \mp 1)] \mp \\ & \mp \omega_l^{\mp} r_{\pm}^2(n \mp 1) q_{\mp}(n) \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

$$c_{21}^{\geq}(n) = \pm \omega_t^{\pm} r_{\mp}(n) \pm \omega_l^{\pm} r_{\pm}(n) [1 + r_{\mp}(n) q_{\mp}(n)] \pm \omega_l^{\pm} r_{\mp}^2(n) q_{\pm}(n \mp 1) \quad (3.2.29)$$

$$d_{21}^{\geq}(n) = \pm \omega_l^{\pm} r_{\mp}(n) \quad (3.2.30)$$

$$a_{22}^{\geq}(n) = -i\omega_l^{\mp} r_{\pm}(n \mp 1) q_{\mp}(n) \quad (3.2.31)$$

$$\begin{aligned} b_{22}^{\geq}(n) = & -i\omega_0 - i\omega_t^{\pm} r_{\mp}(n) q_{\pm}(n \mp 1) - i\omega_l^{\pm} r_{\pm}(n) q_{\pm}(n \mp 1) [1 + r_{\mp}(n) q_{\mp}(n)] - \\ & - i\omega_l^{\pm} r_{\mp}(n) q_{\mp}(n \mp 1) [1 + r_{\pm}(n \mp 1) q_{\pm}(n \mp 1)] - \\ & - i\omega_l^{\pm} r_{\mp}^2(n) q_{\pm}^2(n \mp 1) \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

$$c_{22}^{\geq}(n) = -i\omega_t^{\pm} - i\omega_l^{\pm} r_{\mp}(n) q_{\pm}(n \mp 1) \quad (3.2.33)$$

$$d_{22}^{\geq}(n) = -i\omega_l^{\pm} . \quad (3.2.34)$$

Після того, як явний вигляд еволюційних операторів $A^>(n|z)$ та $A^<(n|z)$ вже знайдено, можна пересвідчитися, що кожне з матричнозначних рівнянь нульової кривини (3.2.9) та (3.2.10) стає еквівалентним системі нелінійних рівнянь Шрьодінгера та драбинчастій ґратці. Іншими словами, рівняння (3.2.9) та (3.2.10) набувають статусу представлень нульової кривини для досліджуваної в цьому розділі моделі (3.2.1)–(3.2.4). Цей результат власне і є головним критерієм інтегровності запропонованої моделі в сенсі Лакса (Lax) [139].

Принагідно підкреслимо, що згорнуті варіанти

$$\frac{d}{d\tau} \ln [\det L^>(n|z)] = \text{Sp } A^>(n+1|z) - \text{Sp } A^>(n|z) \quad (3.2.35)$$

та

$$\frac{d}{d\tau} \ln [\det L^<(n|z)] = \text{Sp } A^<(n+1|z) - \text{Sp } A^<(n|z) \quad (3.2.36)$$

рівнянь нульової кривини (3.2.9) та (3.2.10) слугують надзвичайно простим і важливим засобом перевірки правильності залежних від спектрального параметра z частин пошукуваних виразів (3.2.11), (3.2.14) та (3.2.15), (3.2.18) для діагональних елементів $A_{jj}^>(n|z)$ та $A_{jj}^<(n|z)$ еволюційних операторів $A^>(n|z)$ та $A^<(n|z)$, оскільки детермінанти $\det L^>(n|z)$ та $\det L^<(n|z)$ спектральних операторів $L^>(n|z)$ та $L^<(n|z)$ від z не залежать зовсім.

Варто наголосити, що започатковане тут двійниковання представлень нульової кривини має на меті послідовно врахувати очевидну симетрію двох пар польових амплітуд $q_-(n)$, $r_-(n)$ та $q_+(n)$, $r_+(n)$ в майбутній схемі інтегрування рівнянь руху для цих амплітуд методом оберненої задачі розсіяння.

3.3 Розв'язки Йоста та зв'язки між ними [212]

Згідно з працями Кодрі (Caudrey) [34, 246], характерні риси оберненої задачі розсіяння, пов'язаної з конкретним спектральним оператором, завжди суттєво зумовлені розв'язками так званої граничної спектральної задачі і, як наслідок, поділом площини комплексного спектрального параметра z на області регулярності згладжених векторів Йоста (Jost). У нашому дослідженні

ми мусимо мати справу з двома типами спектральних операторів $L^>(n|z)$ та $L^<(n|z)$, а отже і з двома типами граничних спектральних задач, а саме задач на власні функції і власні значення для операторів, означених як $L^>(z) = \lim_{|n| \rightarrow -\infty} L^>(n|z)$ та $L^<(z) = \lim_{|n| \rightarrow +\infty} L^<(n|z)$. Ця обставина стає додатковим джерелом досить відчутних модифікацій методу оберненої задачі розсіяння з огляду на необхідність працювати з двома задачами розсіяння, які постають на тлі спільного об'єкта – польових амплітуд $q_-(n)$, $r_-(n)$ та $q_+(n)$, $r_+(n)$, що відіграють роль потенціалів розсіяння.

Надалі ми обмежимося випадком швидкоспадних потенціалів на обох просторових нескінченностях $\lim_{|n| \rightarrow \infty} q_{\pm}(n) = 0 = \lim_{|n| \rightarrow \infty} r_{\pm}(n)$. При цьому власні значення $\zeta_k^>(z)$ та $\zeta_k^<(z)$ граничних спектральних операторів $L^>(z)$ and $L^<(z)$ задаємо виразами

$$\zeta_k^>(z) = z^2 \delta_{1k} + z^{-2} \delta_{2k} \quad (3.3.1)$$

та

$$\zeta_k^<(z) = z^{-2} \delta_{1k} + z^2 \delta_{2k} , \quad (3.3.2)$$

де індекс k пробігає значення від 1 до 2. Власні ж функції ${}^e\chi_k^>(z)$ та ${}^e\chi_k^<(z)$ обох операторів $L^>(z)$ та $L^<(z)$ є однаковими

$${}^e\chi_k^>(z) = \boldsymbol{\nu}_k = {}^e\chi_k^<(z) , \quad (3.3.3)$$

а вектор-стовпчик $\boldsymbol{\nu}_k$ означено формулою

$$\boldsymbol{\nu}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta_{1k} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \delta_{2k} . \quad (3.3.4)$$

Знання розв'язків двох типів граничних спектральних задач відкриває безпосередній шлях до коректного формулювання двох типів прямих задач розсіяння та означення двох типів векторів Йоста $\varphi_k^>(n|z)$, $\psi_k^>(n|z)$ та $\varphi_k^<(n|z)$, $\psi_k^<(n|z)$. Так, задача розсіяння першого (висхідного) типу полягає у визна-

ченні векторів $\varphi_k^>(n|z)$ і $\psi_k^>(n|z)$ як розв'язків двокомпонентного рівняння

$$L^>(n|z)\chi^>(n|z) = \chi^>(n+1|z), \quad (3.3.5)$$

які задовольняють дві різні граничні умови

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \varphi_k^>(n|z)[\zeta_k^>(z)]^{-n} = \iota_k \quad (3.3.6)$$

і

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_k^>(n|z)[\zeta_k^>(z)]^{-n} = \iota_k, \quad (3.3.7)$$

відповідно. Аналогічно, задача другого (низхідного) типу полягає у визначенні векторів Йоста $\varphi_k^<(n|z)$ і $\psi_k^<(n|z)$ як розв'язків двокомпонентного рівняння

$$L^<(n|z)\chi^<(n|z) = \chi^<(n-1|z), \quad (3.3.8)$$

що задовольняють дві різні граничні умови

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_k^<(n|z)[\zeta_k^<(z)]^n = \iota_k \quad (3.3.9)$$

і

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \psi_k^<(n|z)[\zeta_k^<(z)]^n = \iota_k, \quad (3.3.10)$$

відповідно.

Оскільки обидва типи задач розсіяння (3.3.5)–(3.3.7) та (3.3.8)–(3.3.10) є наслідками відображень основної нелінійної задачі (3.1.1)–(3.1.4) на дві групи допоміжних лінійних задач (3.2.1), (3.2.2) та (3.2.3), (3.2.4), то слід очікувати прояву певних симетрійних властивостей між Йостовими векторами різних типів. Такі симетрійні властивості постають у вигляді співвідношень

$$\varphi_k^>(n+1|z)/\zeta_k^>(z) = \psi_k^<(n|z) \prod_{m=-\infty}^n D(m) \quad (3.3.11)$$

$$\varphi_k^<(n-1|z)/\zeta_k^<(z) = \psi_k^>(n|z) \prod_{m=n}^{\infty} D(m), \quad (3.3.12)$$

де функцію $D(m)$ залучено для скороченого запису рівних між собою детермінантів $\det L^>(m|z)$ та $\det L^<(m|z)$.

Для того, аби встановити співвідношення між Йостовими векторами того самого типу, зручно спершу скомбінувати кожен з наборів векторів Йоста $\{\varphi_k^>(n|z)\}$ і $\{\psi_k^>(n|z)\}$ в так звані розв'язки Йоста $\Phi^>(n|z)$ і $\Psi^>(n|z)$ матрично-значного рівняння розсіяння висхідного типу (3.3.5), а також кожен з наборів векторів Йоста $\{\varphi_k^<(n|z)\}$ і $\{\psi_k^<(n|z)\}$ в розв'язки Йоста $\Phi^<(n|z)$ і $\Psi^<(n|z)$ матричнозначного рівняння розсіяння низхідного типу (3.3.8) в дусі позначень:

$$\mathbf{v}_k(n|z) = \begin{pmatrix} v_{1k}(n|z) \\ v_{2k}(n|z) \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2) \quad (3.3.13)$$

$$\Upsilon(n|z) = \begin{pmatrix} v_{11}(n|z) & v_{12}(n|z) \\ v_{21}(n|z) & v_{22}(n|z) \end{pmatrix}. \quad (3.3.14)$$

Після цього, ввівши поняття детермінанта Вроньського (Hoene-Wroński) $\mathbb{W}_{k=1}^2 \{\mathbf{v}_k(n|z)\}$ двох різних векторів-стовпчиків $\mathbf{v}_1(n|z)$ і $\mathbf{v}_2(n|z)$ за правилом

$$\det \Upsilon(n|z) = \mathbb{W}_{k=1}^2 \{\mathbf{v}_k(n|z)\}, \quad (3.3.15)$$

можна довести дві пари співвідношень

$$\mathbb{W}_{k=1}^2 \{\varphi_k^>(n|z)\} = \prod_{m=-\infty}^{n-1} D(m) \quad (3.3.16)$$

$$\mathbb{W}_{k=1}^2 \{\psi_k^>(n|z)\} = \prod_{m=n}^{\infty} D^{-1}(m) \quad (3.3.17)$$

та

$$\mathbb{W}_{k=1}^2 \{\varphi_k^<(n|z)\} = \prod_{m=n+1}^{\infty} D(m) \quad (3.3.18)$$

$$\mathbb{W}_{k=1}^2 \{ \psi_k^<(n|z) \} = \prod_{m=-\infty}^n D^{-1}(m) \quad (3.3.19)$$

і тим самим продемонструвати відмінність від нуля кожного з чотирьох вроньськіанів. Як наслідок, ми маємо всі підстави вибрати будь-який з наборів $\{ \varphi_k^>(n|z) \}$ чи $\{ \psi_k^>(n|z) \}$ за базис для довільного векторзначного розв'язку двокомпонентного рівняння розсіювання першого (зростального) типу (3.2.1), а будь-який з наборів $\{ \varphi_k^<(n|z) \}$ чи $\{ \psi_k^<(n|z) \}$ за базис для довільного векторзначного розв'язку двокомпонентного рівняння розсіювання другого (спадального) типу (3.2.3). Це означає, що існують лінійні перетворення між однотипними базисами, а саме

$$\varphi_k^>(n|z) = \sum_{j=1}^2 \psi_j^>(n|z) t_{jk}^>(z) \quad (3.3.20)$$

та

$$\varphi_k^<(n|z) = \sum_{j=1}^2 \psi_j^<(n|z) t_{jk}^<(z) . \quad (3.3.21)$$

Тут величини $t_{jk}^>(z)$ та $t_{jk}^<(z)$, згідно із загальними правилами [173], слід вважати матричними елементами зведених матриць монодромії (тобто матриць розсіювання) $T^>(z)$ та $T^<(z)$, відповідно. Одержані перетворення (3.3.20) та (3.3.21) легко переписати і в термінах квадратних матриць

$$\Phi^>(n|z) = \Psi^>(n|z) T^>(z) \quad (3.3.22)$$

та

$$\Phi^<(n|z) = \Psi^<(n|z) T^<(z) . \quad (3.3.23)$$

Беручи до уваги відмінність від нуля кожного з детермінантів $\det \Phi^>(n|z)$, $\det \Psi^>(n|z)$ та $\det \Phi^<(n|z)$, $\det \Psi^<(n|z)$, бачимо, що перетворення базисів в межах Йостових векторів одного типу є оборотними.

3.4 Регулярність згладжених векторів Йоста [212]

За термінологією кількох наших праць [201, 202] комбінації функцій $\varphi_k^>(n|z)[\zeta_k^>(z)]^{-n}$ та $\varphi_k^<(n|z)[\zeta_k^>(z)]^n$, що з'явилися у записові граничних умов (3.3.6) та (3.3.9) для векторів Йоста $\varphi_k^>(n|z)$ та $\varphi_k^<(n|z)$, можна означити як згладжені (обвідні) вектори Йоста ${}^e\varphi_k^>(n|z)$ та ${}^e\varphi_k^<(n|z)$. Отже

$${}^e\varphi_k^>(n|z) \equiv \varphi_k^>(n|z)[\zeta_k^>(z)]^{-n} \quad (3.4.1)$$

та

$${}^e\varphi_k^<(n|z) \equiv \varphi_k^<(n|z)[\zeta_k^<(z)]^n. \quad (3.4.2)$$

Поняття згладжених векторів Йоста є конструктивнішим за поняття векторів Йоста і тому є слушним для переформулювання задач розсіяння в термінах сумацийних рівнянь Фредгольма [34, 246, 201, 202]. Деякі автори [16, 19] надають перевагу саме таким комбінаціям, проте залишають за ними назву векторів Йоста [16] або ж і зовсім утримуються від будь-якої назви [19]. За очевидною аналогією формули

$${}^e\psi_k^>(n|z) \equiv \psi_k^>(n|z)[\zeta_k^>(z)]^{-n} \quad (3.4.3)$$

та

$${}^e\psi_k^<(n|z) \equiv \psi_k^<(n|z)[\zeta_k^<(z)]^n \quad (3.4.4)$$

слід розуміти як означення інших згладжених векторів Йоста ${}^e\psi_k^>(n|z)$ та ${}^e\psi_k^<(n|z)$.

Можна показати, що на площині комплексного спектрального параметра z згладжені вектори Йоста ${}^e\varphi_1^>(n|z)$ і ${}^e\varphi_2^<(n|z)$ є регулярними в околі нескінченно віддаленої точки $|z| = \infty$, а згладжені вектори Йоста ${}^e\varphi_2^>(n|z)$ і ${}^e\varphi_1^<(n|z)$ є регулярними в околі початкової точки $|z| = 0$. Ці твердження допускають строге доведення за побудовою, спираючись на двокомпонентні спектральні

рівняння висхідного (3.3.5) та низхідного (3.3.8) типів, а також на граничні умови (3.3.6) та (3.3.9) для Йостових функцій $\varphi_k^>(n|z)$ та $\varphi_k^<(n|z)$. Результати обчислень є такими

$$\varphi_{j1}^>(n|z) = \sum_{m=-\infty}^0 J_{j1}^>(n|n+m) z^{2n+2m+1-j} \quad (3.4.5)$$

$$\varphi_{j2}^>(n|z) = \sum_{m=-\infty}^0 J_{j2}^>(n|n+m) z^{-2n-2m+2-j} \quad (3.4.6)$$

та

$$\varphi_{j1}^<(n|z) = \sum_{m=0}^{\infty} J_{j1}^<(n|n+m) z^{2n+2m-1+j} \quad (3.4.7)$$

$$\varphi_{j2}^<(n|z) = \sum_{m=0}^{\infty} J_{j2}^<(n|n+m) z^{-2n-2m-2+j}, \quad (3.4.8)$$

де коефіцієнти розкладів $J_{jk}^>(n|n+m)$ з $m = 0, -1, -2, -3, \dots$ та $J_{jk}^<(n|n+m)$ з $m = 0, +1, +2, +3, \dots$ визначають з деяких рекурентних співвідношень і граничних умов $\lim_{n \rightarrow -\infty} J_{jk}^>(n|n+m) = \delta_{jk} \delta_{0m}$ та $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_{jk}^<(n|n+m) = \delta_{jk} \delta_{0m}$. Насправді нам знадобляться явні вирази лише для найнижчих коефіцієнтів $J_{jk}^>(n|n)$ та $J_{jk}^<(n|n)$, які ми подаємо наступними об'єднаними записами

$$J_{11}^{\geq}(n|n) = 1 \quad (3.4.9)$$

$$J_{21}^{\geq}(n|n) = \pm i r_{\pm}(n \mp 1) \quad (3.4.10)$$

$$J_{12}^{\geq}(n|n) = \pm i q_{\pm}(n \mp 1) \quad (3.4.11)$$

$$J_{22}^{\geq}(n|n) = 1. \quad (3.4.12)$$

Зважаючи на лінійні залежності (3.3.11) та (3.3.12) для $\varphi_k^>(n+1|z)$ від $\psi_k^<(n|z)$ та для $\varphi_k^<(n-1|z)$ від $\psi_k^>(n|z)$, подані вище розклади (3.4.5), (3.4.6) та (3.4.7), (3.4.8) для векторів Йоста $\varphi_k^>(n|z)$ та $\varphi_k^<(n|z)$ індукують розклади, відповідно, для векторів Йоста $\psi_k^>(n|z)$ та $\psi_k^<(n|z)$. В результаті одержуємо

$$\psi_{j1}^>(n|z) = \sum_{m=0}^{\infty} K_{j1}^>(n|n+m) z^{2n+2m-1+j} \quad (3.4.13)$$

$$\psi_{j_2}^>(n|z) = \sum_{m=0}^{\infty} K_{j_2}^>(n|n+m) z^{-2n-2m-2+j} \quad (3.4.14)$$

та

$$\psi_{j_1}^<(n|z) = \sum_{m=-\infty}^0 K_{j_1}^<(n|n+m) z^{2n+2m+1-j} \quad (3.4.15)$$

$$\psi_{j_2}^<(n|z) = \sum_{m=-\infty}^0 K_{j_2}^<(n|n+m) z^{-2n-2m+2-j} , \quad (3.4.16)$$

де

$$K_{j_k}^>(n|n+m) \prod_{l=n}^{\infty} D(l) = J_{j_k}^<(n-1|n-1+m) \quad (3.4.17)$$

$$K_{j_k}^<(n|n+m) \prod_{l=-\infty}^n D(l) = J_{j_k}^>(n+1|n+1+m) . \quad (3.4.18)$$

Отже, ми чітко бачимо, що згладжені вектори Йоста ${}^e\psi_1^>(n|z)$, ${}^e\psi_2^<(n|z)$ та ${}^e\psi_2^>(n|z)$, ${}^e\psi_1^<(n|z)$ як функції комплексного спектрального параметра z є регулярними в околі початкової $|z| = 0$ та нескінченно віддаленої $|z| = \infty$ точок, відповідно.

Принципова інформація про регулярність матриць розсіяння (зведених матриць монодромії) $T^>(z)$ та $T^<(z)$ впливає безпосередньо з регулярних розкладів для векторів Йоста $\varphi_k^>(n|z)$, $\psi_k^>(n|z)$ та $\varphi_k^<(n|z)$, $\psi_k^<(n|z)$. Справді, оскільки розв'язки Йоста $\Psi^>(n|z)$ та $\Psi^<(n|z)$ є матрицями неособливими, то міжбазисні перетворення (3.3.22) та (3.3.23) допускають розв'язки відносно $T^>(z)$ і $T^<(z)$ так, що для матричних елементів $t_{jk}^>(z)$ і $t_{jk}^<(z)$ ми маємо

$$t_{jk}^>(z) = \frac{\prod_{i=1}^2 \{(1 - \delta_{ji})\psi_i^>(n|z) + \varphi_k^>(n|z)\delta_{ji}\}}{\prod_{i=1}^2 \{\psi_i^>(n|z)\}} \quad (3.4.19)$$

та

$$t_{jk}^{\leq}(z) = \frac{\prod_{i=1}^2 \{(1 - \delta_{ji})\psi_i^{\leq}(n|z) + \varphi_k^{\leq}(n|z)\delta_{ji}\}}{\prod_{i=1}^2 \{\psi_i^{\leq}(n|z)\}}. \quad (3.4.20)$$

З формул для вроньськіанів (3.3.17) та (3.3.19) видно, що знаменники виразів (3.4.19) та (3.4.20) для $t_{jk}^{\geq}(z)$ і $t_{jk}^{\leq}(z)$ є відмінними від нуля і зовсім не залежать від спектрального параметра z . Тому регулярні властивості функцій $t_{jk}^{\geq}(z)$ і $t_{jk}^{\leq}(z)$ повністю визначаються чисельниками щойно одержаних виразів (3.4.19) та (3.4.20). Згідно з розкладами (3.4.5), (3.4.6), (3.4.13), (3.4.14) та (3.4.7), (3.4.8), (3.4.15), (3.4.16) ми в змозі встановити такі властивості лише для діагональних матричних елементів $t_{kk}^{\geq}(z)$ і $t_{kk}^{\leq}(z)$. Так, функціям $t_{11}^{\geq}(z)$ і $t_{22}^{\leq}(z)$ приписано бути регулярними в околі нескінченно віддаленої точки $|z| = \infty$, натомість як функціям $t_{22}^{\geq}(z)$ і $t_{11}^{\leq}(z)$ – в околі початкової точки $|z| = 0$. Інформація ж про регулярність решти матричних елементів залишається недоступною, оскільки відповідні вроньськіани містять Йостові вектори з протилежними видами регулярних розкладів. На щастя, така інформація для нашого дальшого розгляду не знадобиться.

Очевидно формальна представність кожного окремо взятого згладженого вектора Йоста деяким специфічним нескінченним рядом приховує в собі природне питання правильного вибору границі, що обмежує область рівномірної збіжності самого ряду. Найконструктивніший спосіб розв'язання цієї проблеми запропонував Кодрі в серії визначних, хоча й дещо скупих на деталі, праць [33, 34]. Не вдаючись до подробиць, які можна знайти в двох наших працях [201, 202], зауважимо, що підхід Кодрі ґрунтується на переформулюванні теорії розсіяння в термінах сумацийних рівнянь Фредгольма, або конкретніше, зі встановленням найслабших обмежень на форму ядер Фредгольма, що забезпечували б обмеженість кожного зі згладжених векторів Йоста на обох просторових нескінченностях.

У застосуванні до дискретизованих задач розсіяння, що пов'язані з нашими спектральними рівняннями першого (висхідного) (3.2.1) та другого (низхідного) (3.2.3) типів, рецепт Кодрі [34, 201, 202] приписує, аби границю між областями регулярності згладжених векторів Йоста ${}^e\varphi_1^{\geq}(n|z)$ і ${}^e\varphi_2^{\geq}(n|z)$ ви-

значали рівнянням $|\zeta_1^>(z)| = |\zeta_2^>(z)|$, а границю між областями регулярності згладжених векторів Йоста ${}^e\varphi_1^<(n|z)$ і ${}^e\varphi_2^<(n|z)$ – рівнянням $|\zeta_1^<(z)| = |\zeta_2^<(z)|$. За допомоги формул (3.3.6) та (3.3.6) для власних значень $\zeta_k^>(z)$ та $\zeta_k^<(z)$ першої та другої граничних спектральних задач легко пересвідчитися, що кожна з шуканих границь пробігає вздовж одиничного кола $|z| = 1$ в площині комплексного спектрального параметра z .

Підсумовуючи знахідки цього підрозділу, ми здатні зробити висновок, що згладжені вектори Йоста ${}^e\varphi_2^>(n|z)$, ${}^e\varphi_1^<(n|z)$, ${}^e\psi_1^>(n|z)$, ${}^e\psi_2^<(n|z)$ є регулярними функціями z всередині одиничного кола $|z| < 1$, а згладжені вектори Йоста ${}^e\varphi_1^>(n|z)$, ${}^e\varphi_2^<(n|z)$, ${}^e\psi_2^>(n|z)$, ${}^e\psi_1^<(n|z)$ є регулярними функціями $1/z$ зовні одиничного кола $|z| > 1$. Внаслідок цього діагональні елементи $t_{22}^>(z)$, $t_{11}^<(z)$ та $t_{11}^>(z)$, $t_{22}^<(z)$ зведених матриць монодромії є регулярними функціями z та $1/z$, відповідно, всередині $|z| < 1$ та зовні $|z| > 1$ одиничного кола. Насправді, існують вагомні аргументи, подані в одній з наших праць [212], що кожна зі згаданих вище функцій є не лише регулярною у своїй специфічній відкритій області, але зостається ще й неперервною аж до самої границі. Ці уточнення, як відомо [64, 105], значно розширюють межі застосовності теорему Коші (Cauchy) та теорії лишків, тим самим даючи гарне підґрунтя для послідовної побудови дискретних версій рівнянь оберненої задачі теорії розсіювання, споріднених до рівнянь Марченка [121, 10, 11, 12, 122]. Згідно зі статтею Кейса (Case) та Чіу (Chiu) [32], великою перевагою методу Марченка є використання саме матриці розсіювання (а не спектральної функції) як основного засадничого об'єкта теорії.

3.5 Двійникові або комплементарні рівняння Марченка [212]

В контексті запропонованого нами підходу з використанням двох (замість лише однієї) дискретизованих задач розсіювання, рівняння Марченка виникають як сумаційні рівняння для коефіцієнтів $K_{jk}^>(n|n+m)$ та $K_{jk}^<(n|n+m)$, задіяних в розкладах (3.4.13), (3.4.14) та (3.4.15), (3.4.16) векторів Йоста $\psi_k^>(n|z)$ та $\psi_k^<(n|z)$, відповідно. Найважливішими серед таких коефіцієнтів є коефіцієнти найнижчого порядку $K_{jk}^>(n|n)$ та $K_{jk}^<(n|n)$, оскільки саме вони

задають розв'язки початкових напівдискретних нелінійних еволюційних рівнянь (3.1.1)–(3.1.4). Справді, порівнюючи вирази (3.4.9)–(3.4.12) для $J_{jk}^<(n|n)$ та $J_{jk}^>(n|n)$ з формулами (3.4.17) і (3.4.18), що зв'язують $K_{jk}^>(n|n+m)$ з $J_{jk}^<(n-1|n-1+m)$ та $K_{jk}^<(n|n+m)$ з $J_{jk}^>(n+1|n+1+m)$, одержуємо

$$q_-(n) = +iK_{12}^>(n|n)/K_{22}^>(n|n) \quad (3.5.1)$$

$$r_-(n) = +iK_{21}^>(n|n)/K_{11}^>(n|n) \quad (3.5.2)$$

та

$$q_+(n) = -iK_{12}^<(n|n)/K_{22}^<(n|n) \quad (3.5.3)$$

$$r_+(n) = -iK_{21}^<(n|n)/K_{11}^<(n|n) . \quad (3.5.4)$$

Такий самий результат випливає і з безпосередньої підстановки розкладів (3.4.13), (3.4.14) та (3.4.15), (3.4.16) для векторів Йоста $\psi_k^>(n|z)$ та $\psi_k^<(n|z)$ до рівнянь розсіяння першого (висхідного) (3.3.5) та другого (низхідного) (3.3.8) типів, відповідно. Дві пари відображень (3.5.1), (3.5.2) та (3.5.3), (3.5.4) демонструють очевидну симетрію, екстрагуючи дві схожі пари польових амплітуд $q_-(n)$, $r_-(n)$ та $q_+(n)$, $r_+(n)$ з двох груп коефіцієнтів розкладу $K_{jk}^>(n|n)$ і $K_{jk}^<(n|n)$ взаємно комплементарної природи.

Хоча загальна процедура виводження дискретизованих рівнянь Марченка і відома [32, 2, 173], проте сама потреба залучати до розгляду дві комплементарні задачі розсіяння замість однієї, а також специфіка задіяних нами спектральних операторів і векторів Йоста, вказує на необхідність значної її адаптації.

Отже, розділимо формули (3.3.20) та (3.3.21) для базисних перетворень, відповідно, на діагональні матричні елементи $t_{kk}^>(z)$ і $t_{kk}^<(z)$ матриць розсіяння (зведених матриць монодромії) за припущень, що жоден з них не зникає в жодній з точок одиничного кола $|z| = 1$. Після цього прийнятний вибір вагових функцій в кожному з підготованих таким чином співвідношень та наступне контурне інтегрування за спектральним параметром z дають нам два набори інтегральних рівностей:

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} \left[\frac{{}^e\varphi_{j1}^>(n|z)}{t_{11}^>(z)} \right] z^{-2l+1-j} &= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} {}^e\psi_{j1}^>(n|z) z^{-2l+1-j} + \\
&+ \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} \left[\frac{{}^e\psi_{j2}^>(n|z)t_{21}^>(z)}{t_{11}^>(z)} \right] z^{-4n-2l+1-j}
\end{aligned} \tag{3.5.5}$$

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} \left[\frac{{}^e\varphi_{j2}^>(n|z)}{t_{22}^>(z)} \right] z^{+2l+2-j} &= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} {}^e\psi_{j2}^>(n|z) z^{+2l+2-j} + \\
&+ \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} \left[\frac{{}^e\psi_{j1}^>(n|z)t_{12}^>(z)}{t_{22}^>(z)} \right] z^{+4n+2l+2-j}
\end{aligned} \tag{3.5.6}$$

та

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} \left[\frac{{}^e\varphi_{j1}^<(n|z)}{t_{11}^<(n)} \right] z^{+2l-1+j} &= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} {}^e\psi_{j1}^<(n|z) z^{+2l-1+j} + \\
&+ \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} \left[\frac{{}^e\psi_{j2}^<(n|z)t_{21}^<(z)}{t_{11}^<(z)} \right] z^{-4n+2l-1+j}
\end{aligned} \tag{3.5.7}$$

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} \left[\frac{{}^e\varphi_{j2}^<(n|z)}{t_{22}^<(z)} \right] z^{-2l-2+j} &= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} {}^e\psi_{j2}^<(n|z) z^{-2l-2+j} + \\
&+ \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} \left[\frac{{}^e\psi_{j1}^<(n|z)t_{12}^<(z)}{t_{22}^<(z)} \right] z^{+4n-2l-2+j}.
\end{aligned} \tag{3.5.8}$$

Тут $j = 1, 2$, а $l = 0, 1, 3, \dots, \infty$ у кожній з чотирьох формул (3.5.5)–(3.5.8). Для визначености контурне інтегрування виконуємо проти ходу годинникової стрілки. Для зручності компоненти $\varphi_{jk}^>(n|z)$, $\varphi_{jk}^<(n|z)$ і $\psi_{jk}^>(n|z)$, $\psi_{jk}^<(n|z)$ векторів Йоста було замінено на їхні згладжені двійники ${}^e\varphi_{jk}^>(n|z)$, ${}^e\varphi_{jk}^<(n|z)$ і ${}^e\psi_{jk}^>(n|z)$, ${}^e\psi_{jk}^<(n|z)$ згідно з прийнятими раніше означеннями (3.4.1), (3.4.2) і (3.4.3), (3.4.4).

В одній з наших праць [212] показано, що під час виконування контурного інтегрування за спектральним параметром z в кожній з виписаних вище

рівностей (3.5.5)–(3.5.8) ми маємо повне право користуватися формальними записами для регулярних рядів згладжених векторів Йоста і на самому контурі інтегрування $|z| = 1$.

Окрім цього слід взяти до уваги граничні властивості

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} t_{11}^>(z) = 1 = \lim_{|z| \rightarrow 0} t_{22}^>(z) \quad (3.5.9)$$

та

$$\lim_{|z| \rightarrow 0} t_{11}^<(z) = 1 = \lim_{|z| \rightarrow \infty} t_{22}^<(z) \quad (3.5.10)$$

діагональних елементів матриць розсіяння (зведених матриць монодромії), які впливають з формул (3.4.19) та (3.4.20) для $t_{jk}^>(z)$ та $t_{jk}^<(z)$ з огляду на регулярні розклади (3.4.5), (3.4.6), (3.4.13), (3.4.14) та (3.4.7), (3.4.8), (3.4.15), (3.4.16) для векторів Йоста $\varphi_k^>(n|z)$, $\psi_k^>(n|z)$ та $\varphi_k^<(n|z)$, $\psi_k^<(n|z)$, а також на зв'язки між $K_{kk}^>(n|n)$ і $J_{kk}^<(n-1|n-1)$ та між $K_{kk}^<(n|n)$ і $J_{kk}^>(n+1|n+1)$ згідно з формулами (3.4.17) та (3.4.18).

Нарешті, важливу роль відіграють нулі $z_{kk}^>(r)$ та $z_{kk}^<(r)$ функцій $t_{kk}^>(z)$ та $t_{kk}^<(z)$, тобто розв'язки рівнянь

$$t_{kk}^>(z) = 0 \quad (3.5.11)$$

та

$$t_{kk}^<(z) = 0 \quad (3.5.12)$$

в межах областей регулярності функцій $t_{kk}^>(z)$ та $t_{kk}^<(z)$, відповідно. При цьому з представлень (3.4.19) і (3.4.20) для $t_{kk}^>(z)$ та $t_{kk}^<(z)$ в термінах вроньськ'янів негайно впливають лінійні залежності

$$\varphi_k^>(n|z_{kk}^>(r)) = \psi_j^>(n|z_{kk}^>(r)) p_{jk}^>(z_{kk}^>(r)) \quad (j \neq k) \quad (3.5.13)$$

та

$$\varphi_k^<(n|z_{kk}^<(r)) = \psi_j^<(n|z_{kk}^<(r)) p_{jk}^<(z_{kk}^<(r)) \quad (j \neq k), \quad (3.5.14)$$

які можна розуміти як означення параметрів пропорційности $p_{jk}^>(z_{kk}^>(r))$ та $p_{jk}^<(z_{kk}^<(r))$, відповідно.

Твердження, перелічені в попередніх трьох абзацах, а також теорія лишків дають змогу провести фактичні інтегрування у формулах (3.5.5)–(3.5.8). В результаті одержуємо два типи дискретних рівнянь Марченка

$$K_{jk}^>(n|n+l) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^2 K_{ji}^>(n|n+m) F_{ik}^>(2n+l+m) = \delta_{0l} \delta_{jk} \quad (3.5.15)$$

$$K_{jk}^<(n|n-l) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^2 K_{ji}^<(n|n-m) F_{ik}^<(2n-l-m) = \delta_{0l} \delta_{jk} , \quad (3.5.16)$$

де $j = 1, 2$; $k = 1, 2$, а $l = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$. Тут матричні елементи $F_{jk}^>(m)$ і $F_{jk}^<(m)$ операторних ядер задано виразами

$$F_{11}^>(m) = 0 = F_{22}^>(m) \quad (3.5.17)$$

$$F_{21}^>(m) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} \frac{t_{21}^>(z)}{t_{11}^>(z)} z^{-2m-1} + \\ + H(N_{\text{ext}}^> - 1/2) \sum_{r=1}^{N_{\text{ext}}^>} \frac{p_{21}^>(z_{11}^>(r))}{z_{11}^>(r) t_{11}^{\prime >}(z_{11}^>(r))} [z_{11}^>(r)]^{-2m-1} \quad (3.5.18)$$

$$F_{12}^>(m) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} \frac{t_{12}^>(z)}{t_{22}^>(z)} z^{+2m+1} - \\ - H(N_{\text{int}}^> - 1/2) \sum_{r=1}^{N_{\text{int}}^>} \frac{p_{12}^>(z_{22}^>(r))}{z_{22}^>(r) t_{22}^{\prime >}(z_{22}^>(r))} [z_{22}^>(r)]^{+2m+1} \quad (3.5.19)$$

та

$$F_{11}^<(-m) = 0 = F_{22}^<(-m) \quad (3.5.20)$$

$$\begin{aligned}
F_{21}^{\leq}(-m) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} \frac{t_{21}^{\leq}(z)}{t_{11}^{\leq}(z)} z^{+2m+1} - \\
&- H(N_{\text{int}}^{\leq} - 1/2) \sum_{r=1}^{N_{\text{int}}^{\leq}} \frac{p_{21}^{\leq}(z_{11}^{\leq}(r))}{z_{11}^{\leq}(r) t_{11}^{\leq}(z_{11}^{\leq}(r))} [z_{11}^{\leq}(r)]^{+2m+1}
\end{aligned} \tag{3.5.21}$$

$$\begin{aligned}
F_{12}^{\leq}(-m) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} \frac{t_{12}^{\leq}(z)}{t_{22}^{\leq}(z)} z^{-2m-1} + \\
&+ H(N_{\text{ext}}^{\leq} - 1/2) \sum_{r=1}^{N_{\text{ext}}^{\leq}} \frac{p_{12}^{\leq}(z_{22}^{\leq}(r))}{z_{22}^{\leq}(r) t_{22}^{\leq}(z_{22}^{\leq}(r))} [z_{22}^{\leq}(r)]^{-2m-1},
\end{aligned} \tag{3.5.22}$$

де символом $H(x)$ позначено функцію-сходінку Гевісайда (Heaviside), що дорівнює одиниці за $x > 0$ і нулевій за $x < 0$, а символи $t_{kk}^{\leq}(z_{kk}^{\leq}(r))$ та $t_{kk}^{\leq}(z_{kk}^{\leq}(r))$ введено для скороченого запису похідних $dt_{kk}^{\leq}(z)/dz$ та $dt_{kk}^{\leq}(z)/dz$, обчислених за $z = z_{kk}^{\leq}(r)$ та $z = z_{kk}^{\leq}(r)$ відповідно. Dodatні цілі числа N_{ext}^{\leq} , N_{int}^{\leq} та N_{int}^{\leq} , N_{ext}^{\leq} перелічують загальну кількість коренів в кожному з рівнянь $t_{11}^{\leq}(z) = 0$, $t_{22}^{\leq}(z) = 0$ та $t_{11}^{\leq}(z) = 0$, $t_{22}^{\leq}(z) = 0$, відповідно.

Сукупність величин $t_{jk}^{\leq}(z)$, $z_{kk}^{\leq}(r)$, $p_{jk}^{\leq}(z_{kk}^{\leq}(r))$ та $t_{jk}^{\leq}(z)$, $z_{kk}^{\leq}(r)$, $p_{jk}^{\leq}(z_{kk}^{\leq}(r))$ ми назвемо даними розсіяння для задач розсіяння (3.3.5)–(3.3.7) та (3.3.8)–(3.3.10), що асоціюються, відповідно, з першим (висхідним) (3.2.3) та другим (низхідним) (3.2.3) типами спектральних операторів.

Як і зазвичай, часові залежності даних розсіяння в рівняннях Марченка є суто параметричними і мають бути встановлені окремо з деяких додаткових міркувань.

3.6 Еволюційні рівняння даних розсіяння [212]

У цьому підрозділі ми зупинимося на рівняннях еволюції даних розсіяння.

Для початку дамо означення граничних еволюційних операторів $A^{\leq}(z)$ та $A^{\leq}(z)$. Отже,

$$A^{\leq}(z) = \lim_{n \rightarrow -\infty} A^{\leq}(n|z) \tag{3.6.1}$$

та

$$A^<(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} A^<(n|z) . \quad (3.6.2)$$

Згідно з формулами (3.2.11)–(3.2.14), (3.2.19)–(3.2.34) для матричних елементів $A_{jk}^>(n|z)$ та формулами (3.2.14)–(3.2.18), (3.2.19)–(3.2.34) для матричних елементів $A_{jk}^<(n|z)$, а також з граничними умовами $\lim_{|n| \rightarrow \infty} q_{\pm}(n) = 0$ та $\lim_{|n| \rightarrow \infty} r_{\pm}(n) = 0$ на польові амплітуди, для матричних елементів $A_{jk}^>(z)$ та $A_{jk}^<(z)$ граничних еволюційних операторів маємо

$$A_{11}^>(z) = +i\omega_l^- z^4 + i\omega_t^- z^2 + i\omega_0 \quad (3.6.3)$$

$$A_{12}^>(z) = 0 = A_{21}^>(z) \quad (3.6.4)$$

$$A_{22}^>(z) = -i\omega_0 - i\omega_t^+ z^{-2} - i\omega_l^+ z^{-4} \quad (3.6.5)$$

та

$$A_{11}^<(z) = +i\omega_l^+ z^{-4} + i\omega_t^+ z^{-2} + i\omega_0 \quad (3.6.6)$$

$$A_{12}^<(z) = 0 = A_{21}^<(z) \quad (3.6.7)$$

$$A_{22}^<(z) = -i\omega_0 - i\omega_t^- z^2 - i\omega_l^- z^4 , \quad (3.6.8)$$

відповідно.

Опускаючи усі подробиці доведень, викладених в нашій основній праці [212], подамо тепер самі рівняння еволюції даних розсіяння. Отже, дані розсіяння, що пов'язані з висхідним рівнянням розсіяння

$$\Phi^>(n+1|z) = L^>(n|z)\Phi^>(n|z) \quad (3.6.9)$$

та представленням нульової кривини

$$\dot{L}^>(n|z) = A^>(n+1|z)L^>(n|z) - L^>(n|z)A^>(n|z) , \quad (3.6.10)$$

мусять еволюціонувати за рівняннями

$$\dot{t}_{jk}^>(z) = A_{jj}^>(z)t_{jk}^>(z) - t_{jk}^>(z)A_{kk}^>(z) \quad (3.6.11)$$

$$\dot{z}_{kk}^{\gt}(r) = 0 \quad (3.6.12)$$

$$\frac{d}{d\tau} p_{jk}^{\gt}(z_{kk}^{\gt}(r)) = A_{jj}^{\gt}(z_{kk}^{\gt}(r)) p_{jk}^{\gt}(z_{kk}^{\gt}(r)) - p_{jk}^{\gt}(z_{kk}^{\gt}(r)) A_{kk}^{\gt}(z_{kk}^{\gt}(r)) . \quad (3.6.13)$$

Дані ж розсіяння, що пов'язані з низхідним рівнянням розсіяння

$$\Phi^{\lt}(n-1|z) = L^{\lt}(n|z) \Phi^{\lt}(n|z) \quad (3.6.14)$$

та представленням нульової кривини

$$\dot{L}^{\lt}(n|z) = A^{\lt}(n-1|z) L^{\lt}(n|z) - L^{\lt}(n|z) A^{\lt}(n|z) , \quad (3.6.15)$$

мусять еволюціонувати за рівняннями

$$\dot{t}_{jk}^{\lt}(z) = A_{jj}^{\lt}(z) t_{jk}^{\lt}(z) - t_{jk}^{\lt}(z) A_{kk}^{\lt}(z) \quad (3.6.16)$$

$$\dot{z}_{kk}^{\lt}(r) = 0 \quad (3.6.17)$$

$$\frac{d}{d\tau} p_{jk}^{\lt}(z_{kk}^{\lt}(r)) = A_{jj}^{\lt}(z_{kk}^{\lt}(r)) p_{jk}^{\lt}(z_{kk}^{\lt}(r)) - p_{jk}^{\lt}(z_{kk}^{\lt}(r)) A_{kk}^{\lt}(z_{kk}^{\lt}(r)) . \quad (3.6.18)$$

3.7 Симетрійні властивості даних розсіяння [212]

Загальні симетрійні властивості даних розсіяння по своїй суті є прямими наслідками симетрійних властивостей функцій Йоста. Так, розглядаючи розклади (3.4.5), (3.4.6), (3.4.13), (3.4.14) та (3.4.7), (3.4.8), (3.4.15), (3.4.16) для компонент векторів Йоста, легко помітити, що

$$\varphi_{jk}^{\gt}(n|-z) = (-1)^{j+k} \varphi_{jk}^{\gt}(n|z) \quad (3.7.1)$$

$$\psi_{jk}^{\gt}(n|-z) = (-1)^{j+k} \psi_{jk}^{\gt}(n|z) \quad (3.7.2)$$

та

$$\varphi_{jk}^{\lt}(n|-z) = (-1)^{j+k} \varphi_{jk}^{\lt}(n|z) \quad (3.7.3)$$

$$\psi_{jk}^{\lt}(n|-z) = (-1)^{j+k} \psi_{jk}^{\lt}(n|z) . \quad (3.7.4)$$

Виходячи з цих формул та зважаючи на представлення (3.3.19) та (3.3.20) для елементів $t_{jk}^>(z)$ та $t_{jk}^<(z)$ зведених матриць монодромії, робимо висновок, що

$$t_{jk}^>(-z) = (-1)^{j+k} t_{jk}^>(z) \quad (3.7.5)$$

$$t_{jk}^<(-z) = (-1)^{j+k} t_{jk}^<(z) . \quad (3.7.6)$$

Отже, діагональні елементи зведених матриць монодромії є парними функціями спектрального параметра z . Тому корені $z_{kk}^>(r)$ і $z_{kk}^<(r)$ кожного з рівнянь $t_{kk}^>(z) = 0$ та $t_{kk}^<(z) = 0$ мусять з'являтися парами так, що кожен окремий корінь має двійника з протилежним знаком. Очевидно при цьому кількість коренів у кожному зі згаданих вище рівнянь мусить бути парним числом, тобто $N_{\text{ext}}^> \equiv 2N_{11}^>$, $N_{\text{int}}^> \equiv 2N_{22}^>$ та $N_{\text{int}}^< \equiv 2N_{11}^<$, $N_{\text{ext}}^< \equiv 2N_{22}^<$. За таких обставин розумно перенумерувати корені згідно з наступними угодами

$$z_{kk}^>(2N_{kk}^> + 1 - r) = -z_{kk}^>(r) \quad (3.7.7)$$

$$z_{kk}^<(2N_{kk}^< + 1 - r) = -z_{kk}^<(r) . \quad (3.7.8)$$

Перелічимо тепер симетрійні властивості даних розсіяння. По-перше,

$$p_{jk}^>(-z_{kk}^>(r)) = -p_{jk}^>(z_{kk}^>(r)) \quad (j \neq k) \quad (3.7.9)$$

$$p_{jk}^<(-z_{kk}^<(r)) = -p_{jk}^<(z_{kk}^<(r)) \quad (j \neq k). \quad (3.7.10)$$

По-друге,

$$t_{11}^>(z) = t_{22}^<(z) \quad (3.7.11)$$

$$t_{12}^>(z) = -t_{12}^<(z)z^{-4} \quad (3.7.12)$$

$$t_{21}^>(z) = -t_{21}^<(z)z^4 \quad (3.7.13)$$

$$t_{22}^>(z) = t_{11}^<(z) . \quad (3.7.14)$$

По-третє,

$$z_{jj}^>(r) = z_{kk}^<(r) \quad (j \neq k), \quad (3.7.15)$$

де нумерацію r коренів $z_{jj}^>(r)$ та $z_{kk}^<(r)$ вважаємо спільною. Одночасно ми приходимо до дуже важливих обмежень $N_{jj}^> = N_{kk}^<$ на повні числа $2N_{jj}^>$ і $2N_{kk}^<$ коренів $z_{jj}^>(r)$ і $z_{kk}^<(r)$, де $j \neq k$. По-четверте,

$$p_{jk}^>(z_{kk}^>(r))p_{kj}^<(z_{jj}^<(r)) = \zeta_j^<(z_{jj}^<(r))\zeta_k^>(z_{kk}^>(r)) \prod_{m=-\infty}^{\infty} D(m) \quad (j \neq k). \quad (3.7.16)$$

Формули (3.7.9)–(3.7.16) встановлюють симетрії поміж даними розсіяння, породженими двома відмінними типами задач розсіяння, і виникають лише у симетричному формулюванні теорії розсіяння. Виявляється, що саме ці симетрії стають найпотрібнішими для коректної параметризації розв'язків досліджуваної нелінійної моделі.

У найважливішому частинному випадку комплексно спряжених польових амплітуд $r_{\pm}(n) = q_{\pm}^*(n)$ з'являється ще й набір уже суто специфічних симетрій. По-перше, ми маємо

$$[t_{11}^>(1/z^*)]^* = t_{22}^>(z) \quad (3.7.17)$$

$$[t_{21}^>(1/z^*)]^* = -t_{12}^>(z) \quad (3.7.18)$$

та

$$[t_{12}^<(1/z^*)]^* = -t_{21}^<(z) \quad (3.7.19)$$

$$[t_{22}^<(1/z^*)]^* = t_{11}^<(z). \quad (3.7.20)$$

По-друге,

$$[z_{jj}^>(r)]^* = 1/z_{kk}^>(r) \quad (j \neq k) \quad (3.7.21)$$

$$[z_{jj}^<(r)]^* = 1/z_{kk}^<(r) \quad (j \neq k). \quad (3.7.22)$$

По-третє,

$$p_{jk}^>(z_{kk}^>(r)) = -[p_{kj}^>(z_{jj}^>(r))]^* \quad (3.7.23)$$

$$p_{jk}^<(z_{kk}^<(r)) = -[p_{kj}^<(z_{jj}^<(r))]^* . \quad (3.7.24)$$

Усе це супроводжується серйозним обмеженням на числа коренів $2N_{kk}^>$ та $2N_{kk}^<$ рівнянь $t_{kk}^>(z) = 0$ та $t_{kk}^<(z) = 0$, відповідно. А саме, ми маємо $N_{kk}^> = N = N_{kk}^<$.

3.8 Дисперсійні співвідношення для діагональних елементів зведених матриць монодромії [212]

Дисперсійні співвідношення для діагональних елементів $t_{kk}^>(z)$ та $t_{kk}^<(z)$ зведених матриць монодромії $T^>(z)$ та $T^<(z)$ відіграють значну роль в аналізованні рівнянь Марченка (3.5.15), (3.5.16), тим самим спрощуючи шляхи побудови їхніх розв'язків.

Оскільки виведення дисперсійних співвідношень має суто математичний інтерес, то відтворювати його ми не станемо, а наведемо лише кінцеві результати. Наразі дисперсійні співвідношення є такими:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta} \cdot \frac{\ln[1 - t_{12}^>(\zeta)t_{21}^>(\zeta)/t_{11}^>(\zeta)t_{22}^>(\zeta)]}{1 - (z/\zeta)^2} = \\ = \ln t_{11}^>(z) + \ln \prod_{s=1}^N \frac{z^2 - [z_{22}^>(s)]^2}{z^2 - [z_{11}^>(s)]^2} \end{aligned} \quad (3.8.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta} \cdot \frac{\ln[1 - t_{12}^>(\zeta)t_{21}^>(\zeta)/t_{11}^>(\zeta)t_{22}^>(\zeta)]}{1 - (\zeta/z)^2} = \\ = \ln t_{22}^>(z) + \ln \prod_{s=1}^N \frac{z^{-2} - [z_{11}^>(s)]^{-2}}{z^{-2} - [z_{22}^>(s)]^{-2}} \end{aligned} \quad (3.8.2)$$

та

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta} \cdot \frac{\ln[1 - t_{12}^<(\zeta)t_{21}^<(\zeta)/t_{11}^<(\zeta)t_{22}^<(\zeta)]}{1 - (z/\zeta)^2} = \\
& = \ln t_{22}^<(z) + \ln \prod_{s=1}^N \frac{z^2 - [z_{11}^<(s)]^2}{z^2 - [z_{22}^<(s)]^2} \quad (3.8.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta} \cdot \frac{\ln[1 - t_{12}^<(\zeta)t_{21}^<(\zeta)/t_{11}^<(\zeta)t_{22}^<(\zeta)]}{1 - (\zeta/z)^2} = \\
& = \ln t_{11}^<(z) + \ln \prod_{s=1}^N \frac{z^{-2} - [z_{22}^<(s)]^{-2}}{z^{-2} - [z_{11}^<(s)]^{-2}}. \quad (3.8.4)
\end{aligned}$$

Тут ми виписали аж чотири дисперсійні співвідношення, що пов'язано, з одного боку, з формальною рівноправністю внутрішньої $|z| > 1$ та зовнішньої $|z| < 1$ областей одиничного кола в площині комплексного спектрального параметра z , а з іншого боку, з подвоєним числом задач розсіяння. В підходах з однією задачею розсіяння зазвичай обмежуються лише одним дисперсійним співвідношенням, причому в дещо іншому формулюванні [173]. Що стосується перших двох дисперсійних співвідношень (3.8.1), (3.8.2), поданих в нашому формулюванні, то вони з точністю до позначень нагадують дисперсійні співвідношення, що їх запропонували Герджіков (Gerdjikov), Іванов (Ivanov) та Куліш [70] у випадку інтегрованої нелінійної системи Абловіца–Ладіка (Ablowitz–Ladik) [3, 4].

Для повноти картини випишемо без доведення дві комплементарні версії

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta} \ln [1 - t_{12}^>(\zeta)t_{21}^>(\zeta)/t_{11}^>(\zeta)t_{22}^>(\zeta)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln D(m) - \\
& - \sum_{s=1}^N \ln [z_{11}^>(s)/z_{22}^>(s)]^2 \quad (3.8.5)
\end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta} \ln [1 - t_{12}^{\leq}(\zeta)t_{21}^{\leq}(\zeta)/t_{11}^{\leq}(\zeta)t_{22}^{\leq}(\zeta)] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln D(m) - \\ &- \sum_{s=1}^N \ln [z_{22}^{\leq}(s)/z_{11}^{\leq}(s)]^2 \end{aligned} \quad (3.8.6)$$

правила сум.

Забігаючи наперед, варто сказати, що суму

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln D(m) \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \{[1 + q_-(m)r_-(m)][1 + q_+(m)r_+(m)]\}, \quad (3.8.7)$$

яка неодноразово зустрічалася у попередніх формулах, слід ототожнити з повним числом збуджень в досліджуваній нелінійній системі (3.1.1)–(3.1.4) [199].

3.9 Багатосолітонні розв'язки [212]

Почнемо цей підрозділ із простого спостереження, що набір восьми дискретизованих рівнянь Марченка (3.5.15) та (3.5.16) є, по суті, розщепленим на чотири пари рівнянь, алгебрично незалежних одна від іншої. В межах кожної такої пари перший індекс (індекс j) є фіксованим, а другий індекс (індекс k) пробігає два різні значення 1 і 2. Підстановка рівняння з $k = j$ до рівняння з $k \neq j$ в межах кожної пари дає

$$K_{jj}^{\>}(n|n+l) - \sum_{m=0}^{\infty} K_{jj}^{\>}(n|n+m)M_{jj}^{\>}(+m+2n|2n+l) = \delta_{0l} \quad (3.9.1)$$

$$K_{jk}^{\>}(n|n+l) = - \sum_{m=0}^{\infty} K_{jj}^{\>}(n|n+m)F_{jk}^{\>}(+m+2n+l) \quad (3.9.2)$$

та

$$K_{jj}^{\leq}(n|n-l) - \sum_{m=0}^{\infty} K_{jj}^{\leq}(n|n-m)M_{jj}^{\leq}(-m+2n|2n-l) = \delta_{0l} \quad (3.9.3)$$

$$K_{jk}^{\leq}(n|n-l) = - \sum_{m=0}^{\infty} K_{jj}^{\leq}(n|n-m) F_{jk}^{\leq}(-m+2n-l), \quad (3.9.4)$$

де складені ядра $M_{jj}^{\geq}(+m|+l)$ та $M_{jj}^{\leq}(-m|-l)$ задано формулами

$$M_{jj}^{\geq}(+m|+l) = \sum_{m'=0}^{\infty} F_{jk}^{\geq}(+m+m') F_{kj}^{\geq}(+m'+l) \quad (3.9.5)$$

та

$$M_{jj}^{\leq}(-m|-l) = \sum_{m'=0}^{\infty} F_{jk}^{\leq}(-m-m') F_{kj}^{\leq}(-m'-l). \quad (3.9.6)$$

Тут індекси j та k вважаємо відмінними між собою, $j \neq k$, скрізь в шести останніх формулах (3.9.1)–(3.9.6).

Модифіковані версії (3.9.1), (3.9.2) та (3.9.3), (3.9.4) сумацийних рівнянь Марченка показують, що за кожного фіксованого j рівнянням (3.9.1) та (3.9.3) притаманна замкненість стосовно величин $K_{jj}^{\geq}(n|n+m)$ та $K_{jj}^{\leq}(n|n-m)$, відповідно. Тому рівняння (3.9.1) та (3.9.3) слід вважати головними. Натомість роль рівнянь (3.9.2) та (3.9.4) стає суто підрядною. Дійсно, якщо величини $K_{jj}^{\geq}(n|n+m)$ та $K_{jj}^{\leq}(n|n-m)$ відомі, то величини $K_{jk}^{\geq}(n|n+m)$ та $K_{jk}^{\leq}(n|n-m)$ з $j \neq k$ можна знайти за допомоги звичайних підсумовувань.

Найпростіша і водночас найважливіша ситуація з розв'язуванням рівнянь Марченка постає, коли недіагональні дані розсіяння неперервного спектру $t_{12}^{\geq}(z)$, $t_{21}^{\geq}(z)$ та $t_{12}^{\leq}(z)$, $t_{21}^{\leq}(z)$ як функції, задані на одиничному колі $|z| = 1$, стають тотожними нулям, а кількості коренів $2N_{kk}^{\geq}$ і $2N_{kk}^{\leq}$ підпорядковано обмеженням $N_{kk}^{\geq} = N$ і $N_{kk}^{\leq} = N$. Дещо коригуючи звичайну термінологію, ми назовемо цей випадок як справді невідбивний. Надалі ми обмежимося саме цим випадком.

При цьому дисперсійні співвідношення (3.8.1), (3.8.3) та (3.8.2), (3.8.4) набувають досить прозорих форм

$$t_{11}^{\geq}(z) = \prod_{s=1}^N \frac{z^2 - \exp[+\mu_e(s) + ik_e(s)]}{z^2 - \exp[-\mu_i(s) + ik_i(s)]} = t_{22}^{\leq}(z) \quad (3.9.7)$$

та

$$t_{22}^>(z) = \prod_{s=1}^N \frac{z^{-2} - \exp[+\mu_i(s) - ik_i(s)]}{z^{-2} - \exp[-\mu_e(s) - ik_e(s)]} = t_{11}^<(z) , \quad (3.9.8)$$

де для квадратів коренів запропоновано такі параметризації

$$[z_{11}^>(s)]^2 = \exp[+\mu_e(s) + ik_e(s)] = [z_{22}^<(s)]^2 \quad (3.9.9)$$

та

$$[z_{22}^>(s)]^2 = \exp[-\mu_i(s) + ik_i(s)] = [z_{11}^<(s)]^2 . \quad (3.9.10)$$

Тут константи $k_e(s)$ та $k_i(s)$ вважаємо дійсними, а константи $\mu_e(s)$ та $\mu_i(s)$ – дійсними додатніми параметрами. За самою побудовою формула (3.9.7) забезпечує регулярність величин $t_{11}^>(z)$ та $t_{22}^<(z)$ за $|z| > 1$, а формула (3.9.8) – регулярність величин $t_{22}^>(z)$ та $t_{11}^<(z)$ за $|z| < 1$. Отже, з огляду на раніше згадувану неперервність функцій $t_{11}^>(z)$, $t_{22}^<(z)$ та $t_{22}^>(z)$, $t_{11}^<(z)$ аж до самої границі $|z| = 1$, формули (3.9.7) та (3.9.8) є чинними, принаймні за $|z| \geq 1$ та $|z| \leq 1$, відповідно.

Структура підрядних частин (3.9.2) та (3.9.4) рівнянь Марченка (3.9.1)–(3.9.4) вказує та те, що формули (3.5.1)–(3.5.4) для польових амплітуд здатні видати нетривіальні розв'язки лише за умов, що ядра $F_{jk}^>(m)$ і $F_{jk}^<(-m)$, взяті за $j \neq k$, є суттєво ненульовими величинами. В рамках задачі розсіяння ці вимоги виконуються, якщо $N \geq 1$, тобто кожне з рівнянь $t_{kk}^>(z) = 0$ та $t_{kk}^<(z) = 0$ мусить мати принаймні одну пару коренів. Тоді, у відповідності з означеннями (3.5.18), (3.5.19) та (3.5.21), (3.5.22), ядра, що нас цікавлять, можна записати наступним чином

$$F_{21}^>(m) = \sum_{s=1}^N \rho_{21}^>(z_{11}^>(s)) \exp[-\nu_e(s)m] \quad (3.9.11)$$

$$F_{12}^>(m) = \sum_{s=1}^N \rho_{12}^>(z_{22}^>(s)) \exp[-\nu_i(s)m] \quad (3.9.12)$$

та

$$F_{21}^{\leq}(-m) = \sum_{s=1}^N \rho_{21}^{\leq}(z_{11}^{\leq}(s)) \exp[-\nu_i(s)m] \quad (3.9.13)$$

$$F_{12}^{\leq}(-m) = \sum_{s=1}^N \rho_{12}^{\leq}(z_{22}^{\leq}(s)) \exp[-\nu_e(s)m] , \quad (3.9.14)$$

де взято до уваги угоди (3.7.7) та (3.7.8) про нумерацію коренів та властивості симетрії (3.7.5), (3.7.9) та (3.7.6), (3.7.11) даних розсіяння, а також наступні позначення

$$\rho_{21}^{\geq}(z_{11}^{\geq}(s)) = \frac{2p_{21}^{\geq}(z_{11}^{\geq}(s))}{[z_{11}^{\geq}(s)]^2 t_{11}'(z_{11}^{\geq}(s))} \quad (3.9.15)$$

$$\rho_{12}^{\geq}(z_{22}^{\geq}(s)) = -\frac{2p_{12}^{\geq}(z_{22}^{\geq}(s))}{t_{22}'(z_{22}^{\geq}(s))} \quad (3.9.16)$$

$$\rho_{21}^{\leq}(z_{11}^{\leq}(s)) = -\frac{2p_{21}^{\leq}(z_{11}^{\leq}(s))}{t_{11}'(z_{11}^{\leq}(s))} \quad (3.9.17)$$

$$\rho_{12}^{\leq}(z_{22}^{\leq}(s)) = \frac{2p_{12}^{\leq}(z_{22}^{\leq}(s))}{[z_{22}^{\leq}(s)]^2 t_{22}'(z_{22}^{\leq}(s))} \quad (3.9.18)$$

і скорочення

$$\nu_e(s) = \mu_e(s) + ik_e(s) \quad (3.9.19)$$

$$\nu_i(s) = \mu_i(s) - ik_i(s) . \quad (3.9.20)$$

Що стосується складених ядер $M_{jj}^{\geq}(+m|+l)$ та $M_{jj}^{\leq}(-m|-l)$, то елементарні підсумовування геометричних прогресій, що з'являються в їхніх означеннях (3.9.5) та (3.9.6), дають

$$\begin{aligned} M_{11}^{\geq}(+m|+l) &= M_{22}^{\geq}(+l|+m) = \\ &= \sum_{s'=1}^N \sum_{s''=1}^N \rho_{12}^{\geq}(z_{22}^{\geq}(s')) \frac{\exp[-\nu_i(s')m - \nu_e(s'')l]}{1 - \exp[-\nu_i(s') - \nu_e(s'')]} \rho_{21}^{\geq}(z_{11}^{\geq}(s'')) \end{aligned} \quad (3.9.21)$$

та

$$\begin{aligned}
M_{11}^{\leq}(-m|-l) &= M_{22}^{\leq}(-l|-m) = \\
&= \sum_{s'=1}^N \sum_{s''=1}^N \rho_{12}^{\leq}(z_{22}^{\leq}(s')) \frac{\exp[-\nu_e(s')m - \nu_i(s'')l]}{1 - \exp[-\nu_e(s') - \nu_i(s'')]} \rho_{21}^{\leq}(z_{11}^{\leq}(s'')) .
\end{aligned} \tag{3.9.22}$$

Дві останні формули (3.9.21) та (3.9.22) чітко вказують на вироджений характер усіх складених ядер. Як наслідок, процедура розв'язування основних частин (3.9.1) та (3.9.3) рівнянь Марченка у справді невідбивному випадку стає тісно пов'язаною з пошуком допоміжних величин

$$X_{11}^{\geq}(n|s) = \sum_{m=0}^{\infty} K_{11}^{\geq}(n|n+m) \exp[-\nu_i(s)m] \tag{3.9.23}$$

$$X_{22}^{\geq}(n|s) = \sum_{m=0}^{\infty} K_{22}^{\geq}(n|n+m) \exp[-\nu_e(s)m] \tag{3.9.24}$$

та

$$X_{11}^{\leq}(n|s) = \sum_{m=0}^{\infty} K_{11}^{\leq}(n|n-m) \exp[-\nu_e(s)m] \tag{3.9.25}$$

$$X_{22}^{\leq}(n|s) = \sum_{m=0}^{\infty} K_{22}^{\leq}(n|n-m) \exp[-\nu_i(s)m] , \tag{3.9.26}$$

що підпорядковані двом суто алгебричним системам рівнянь

$$\sum_{s'=1}^N X_{jj}^{\geq}(n|s') \langle s'|C_{jj}^{\geq}(n)|s \rangle = 1 \tag{3.9.27}$$

та

$$\sum_{s'=1}^N X_{jj}^{\leq}(n|s') \langle s'|C_{jj}^{\leq}(n)|s \rangle = 1 \tag{3.9.28}$$

так, що статус просторової змінної n нижчає до звичайного параметра. Тут елементи $\langle s'|C_{jj}^{\geq}(n)|s'' \rangle$ і $\langle s'|C_{jj}^{\leq}(n)|s'' \rangle$ $N \times N$ матриць $C_{jj}^{\geq}(n)$ і $C_{jj}^{\leq}(n)$ опосе-

редковано елементами

$$\langle s' | B_{12}^>(n) | s'' \rangle = \frac{\rho_{12}^>(z_{22}^>(s')) \exp[-2\nu_i(s')n]}{1 - \exp[-\nu_i(s') - \nu_e(s'')]}$$
 (3.9.29)

$$\langle s' | B_{21}^>(n) | s'' \rangle = \frac{\rho_{21}^>(z_{11}^>(s')) \exp[-2\nu_e(s')n]}{1 - \exp[-\nu_e(s') - \nu_i(s'')]}$$
 (3.9.30)

та

$$\langle s' | B_{12}^<(n) | s'' \rangle = \frac{\rho_{12}^<(z_{22}^<(s')) \exp[+2\nu_e(s')n]}{1 - \exp[-\nu_e(s') - \nu_i(s'')]}$$
 (3.9.31)

$$\langle s' | B_{21}^<(n) | s'' \rangle = \frac{\rho_{21}^<(z_{11}^<(s')) \exp[+2\nu_i(s')n]}{1 - \exp[-\nu_i(s') - \nu_e(s'')]}$$
 (3.9.32)

інших $N \times N$ матриць $B_{12}^>(n)$, $B_{21}^>(n)$ та $B_{12}^<(n)$, $B_{21}^<(n)$ за допомоги виразів

$$\langle s' | C_{jj}^>(n) | s'' \rangle = \delta_{s's''} - \sum_{s=1}^N \langle s' | B_{jk}^>(n) | s \rangle \langle s | B_{kj}^>(n) | s'' \rangle$$
 (3.9.33)

та

$$\langle s' | C_{jj}^<(n) | s'' \rangle = \delta_{s's''} - \sum_{s=1}^N \langle s' | B_{jk}^<(n) | s \rangle \langle s | B_{kj}^<(n) | s'' \rangle ,$$
 (3.9.34)

де індекси j та k вважаємо відмінними між собою, $j \neq k$.

Стандартний рецепт розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь (3.9.27) та (3.9.28) приводить до виразів

$$X_{jj}^>(n|s) = \sum_{s'=1}^N \frac{\partial \ln \det C_{jj}^>(n)}{\partial \langle s | C_{jj}^>(n) | s' \rangle}$$
 (3.9.35)

та

$$X_{jj}^<(n|s) = \sum_{s'=1}^N \frac{\partial \ln \det C_{jj}^<(n)}{\partial \langle s | C_{jj}^<(n) | s' \rangle} .$$
 (3.9.36)

Знання допоміжних величин $X_{jj}^>(n|s)$ та $X_{jj}^<(n|s)$ дає змогу відтворити розв'язки початкових величин $K_{jk}^>(n|n+m)$ та $K_{jk}^<(n|n-m)$ за допомоги

певних формул підсумовування. Тут ми випишемо лише формули для відтворення найнижчих коефіцієнтів $K_{jk}^>(n|n)$ та $K_{jk}^<(n|n)$, чого, як ми знаємо, цілком достатньо для наших намірів знайти розв'язки основної нелінійної еволюційної задачі (3.1.1)–(3.1.4) в термінах польових амплітуд $q_-(n)$, $r_-(n)$ та $q_+(n)$, $r_+(n)$. Ці формули є такими:

$$K_{11}^>(n|n) = 1 + \sum_{s'=1}^N \sum_{s''=1}^N X_{11}^>(n|s') \langle s' | B_{12}^>(n) | s'' \rangle \rho_{21}^>(z_{11}^>(s'')) \exp[-2\nu_e(s'')n] \quad (3.9.37)$$

$$K_{21}^>(n|n) = - \sum_{s=1}^N X_{22}^>(n|s) \rho_{21}^>(z_{11}^>(s)) \exp[-2\nu_e(s)n] \quad (3.9.38)$$

$$K_{22}^>(n|n) = 1 + \sum_{s'=1}^N \sum_{s''=1}^N X_{22}^>(n|s') \langle s' | B_{21}^>(n) | s'' \rangle \rho_{12}^>(z_{22}^>(s'')) \exp[-2\nu_i(s'')n] \quad (3.9.39)$$

$$K_{12}^>(n|n) = - \sum_{s=1}^N X_{11}^>(n|s) \rho_{12}^>(z_{22}^>(s)) \exp[-2\nu_i(s)n] \quad (3.9.40)$$

та

$$K_{11}^<(n|n) = 1 + \sum_{s'=1}^N \sum_{s''=1}^N X_{11}^<(n|s') \langle s' | B_{12}^<(n) | s'' \rangle \rho_{21}^<(z_{11}^<(s'')) \exp[+2\nu_i(s'')n] \quad (3.9.41)$$

$$K_{21}^<(n|n) = - \sum_{s=1}^N X_{22}^<(n|s) \rho_{21}^<(z_{11}^<(s)) \exp[+2\nu_i(s)n] \quad (3.9.42)$$

$$K_{22}^<(n|n) = 1 + \sum_{s'=1}^N \sum_{s''=1}^N X_{22}^<(n|s') \langle s' | B_{21}^<(n) | s'' \rangle \rho_{12}^<(z_{22}^<(s'')) \exp[+2\nu_e(s'')n] \quad (3.9.43)$$

$$K_{12}^<(n|n) = - \sum_{s=1}^N X_{11}^<(n|s) \rho_{12}^<(z_{22}^<(s)) \exp[+2\nu_e(s)n] . \quad (3.9.44)$$

Безпосередньою підстановкою восьми останніх виразів до формул (3.5.1), (3.5.2) та (3.5.3), (3.5.4) для польових амплітуд $q_-(n)$, $r_-(n)$ та $q_+(n)$, $r_+(n)$ ми одержуємо

$$q_-(n) = \frac{+iK_{12}^>(n|n)}{K_{22}^>(n|n)} = \frac{-i \sum_{s=1}^N X_{11}^>(n|s) \rho_{12}^>(z_{22}^>(s)) \exp[-2\nu_i(s)n]}{1 + \sum_{s'=1}^N \sum_{s''=1}^N X_{22}^>(n|s') \langle s'|B_{21}^>(n)|s'' \rangle \rho_{12}^>(z_{22}^>(s'')) \exp[-2\nu_i(s'')n]} \quad (3.9.45)$$

$$r_-(n) = \frac{+iK_{21}^>(n|n)}{K_{11}^>(n|n)} = \frac{-i \sum_{s=1}^N X_{22}^>(n|s) \rho_{21}^>(z_{11}^>(s)) \exp[-2\nu_e(s)n]}{1 + \sum_{s'=1}^N \sum_{s''=1}^N X_{11}^>(n|s') \langle s'|B_{12}^>(n)|s'' \rangle \rho_{21}^>(z_{11}^>(s'')) \exp[-2\nu_e(s'')n]} \quad (3.9.46)$$

та

$$q_+(n) = \frac{-iK_{12}^<(n|n)}{K_{22}^<(n|n)} = \frac{+i \sum_{s=1}^N X_{11}^<(n|s) \rho_{12}^<(z_{22}^<(s)) \exp[+2\nu_e(s)n]}{1 + \sum_{s'=1}^N \sum_{s''=1}^N X_{22}^<(n|s') \langle s'|B_{21}^<(n)|s'' \rangle \rho_{12}^<(z_{22}^<(s'')) \exp[+2\nu_e(s'')n]} \quad (3.9.47)$$

$$r_+(n) = \frac{-iK_{21}^<(n|n)}{K_{11}^<(n|n)} = \frac{+i \sum_{s=1}^N X_{22}^<(n|s) \rho_{21}^<(z_{11}^<(s)) \exp[+2\nu_i(s)n]}{1 + \sum_{s'=1}^N \sum_{s''=1}^N X_{11}^<(n|s') \langle s'|B_{12}^<(n)|s'' \rangle \rho_{21}^<(z_{11}^<(s'')) \exp[+2\nu_i(s'')n]} \quad (3.9.48)$$

Ці результати (3.9.45)–(3.9.48) і встановлюють N -солітонний розв'язок напів-дискретної нелінійної моделі Шрьодінгера на пласкій фермоподібній драбин-

частій ґратці (3.1.1)–(3.1.4).

Часова залежність N -солітонного розв'язку здійснюється через часові залежності даних розсіювання $p_{jk}^>(z_{kk}^>(s))$, $z_{kk}^>(s)$ та $p_{jk}^<(z_{kk}^<(s))$, $z_{kk}^<(s)$, що входять до правих частин виведених формул (3.9.45), (3.9.46) та (3.9.47), (3.9.48) у вигляді комбінацій $\rho_{jk}^>(z_{kk}^>(s))$ та $\rho_{jk}^<(z_{kk}^<(s))$ як безпосередньо, так і в складі інших задіяних величин $X_{jj}^>(n|s)$, $\langle s'|B_{jk}^>(n)|s''\rangle$ та $X_{jj}^<(n|s)$, $\langle s'|B_{jk}^<(n)|s''\rangle$. У повній згоді зі своїми означеннями (3.9.15), (3.9.16) та (3.9.17), (3.9.18) композиційні дані розсіювання $\rho_{jk}^>(z_{kk}^>(s))$ і $\rho_{jk}^<(z_{kk}^<(s))$ мусять еволюціонувати у той самий спосіб, що й $p_{jk}^>(z_{kk}^>(s))$ і $p_{jk}^<(z_{kk}^<(s))$, відповідно, тобто мусять підпорядковуватися рівнянням

$$\frac{d}{d\tau}\rho_{jk}^>(z_{kk}^>(s)) = A_{jj}^>(z_{kk}^>(s))\rho_{jk}^>(z_{kk}^>(s)) - \rho_{jk}^>(z_{kk}^>(s))A_{kk}^>(z_{kk}^>(s)) \quad (3.9.49)$$

$$\frac{d}{d\tau}\rho_{jk}^<(z_{kk}^<(s)) = A_{jj}^<(z_{kk}^<(s))\rho_{jk}^<(z_{kk}^<(s)) - \rho_{jk}^<(z_{kk}^<(s))A_{kk}^<(z_{kk}^<(s)) . \quad (3.9.50)$$

Це легко зрозуміти, спираючись на рівняння еволюції (3.6.11)–(3.6.13) та (3.6.16)–(3.6.18) для основних даних розсіювання. Розв'язки рівнянь (3.9.49) та (3.9.50) для композиційних даних розсіювання $\rho_{jk}^>(z_{kk}^>(s))$ та $\rho_{jk}^<(z_{kk}^<(s))$ очевидно визначають вирази

$$\begin{aligned} \rho_{jk}^>(z_{kk}^>(s)|\tau) &= \rho_{jk}^>(z_{kk}^>(s)|0) \times \\ &\times \exp \left\{ \int_0^\tau d\xi [A_{jj}^>(z_{kk}^>(s)|\xi) - A_{kk}^>(z_{kk}^>(s)|\xi)] \right\} \end{aligned} \quad (3.9.51)$$

$$\begin{aligned} \rho_{jk}^<(z_{kk}^<(s)|\tau) &= \rho_{jk}^<(z_{kk}^<(s)|0) \times \\ &\times \exp \left\{ \int_0^\tau d\xi [A_{jj}^<(z_{kk}^<(s)|\xi) - A_{kk}^<(z_{kk}^<(s)|\xi)] \right\} , \end{aligned} \quad (3.9.52)$$

де потреба явно вказати на часовий аргумент τ в задіяних величинах виникла для коректного запису результатів інтегрування.

Аби одержати багатосолітонні розв'язки рівнянь Марченка, ми вважали повну кількість коренів в кожному з чотирьох рівнянь (3.5.11) та (3.5.12) однаковою і рівною $2N$. На загал ці обмеження видаються дещо незрозумілими, проте знаходять своє природне обґрунтування щойно ми вдамося до додаткової специфікації моделі за допомоги комплексного спряження польових амплі-

туд $r_{\pm}(n) = q_{\pm}^*(n)$, уже побіжно згадуваної в підрозділі 3.7 цього розділу. Ця ж сама редукція $r_{\pm}(n) = q_{\pm}^*(n)$ започатковує низку інших додаткових симетрій для величин, що входять до N -солітонного розв'язку. Так, зважаючи на певний набір загальних співвідношень симетрії, раніше встановлених в підрозділі 3.7 для даних розсіяння, ми виявили наступне

$$\rho_{jk}^{\geq}(z_{kk}^{\geq}(s)) = - \left[\rho_{kj}^{\geq}(z_{jj}^{\geq}(s)) \right]^* \quad (3.9.53)$$

$$\mu_e(s) = \mu(s) = \mu_i(s) \quad (3.9.54)$$

$$k_e(s) = k(s) = k_i(s) \quad (3.9.55)$$

$$\nu_e(s) = [\nu_i(s)]^* \quad (3.9.56)$$

$$\langle s' | B_{jk}^{\geq}(n) | s'' \rangle = - \langle s' | B_{kj}^{\geq}(n) | s'' \rangle^* \quad (3.9.57)$$

$$\langle s' | C_{jj}^{\geq}(n) | s'' \rangle = \langle s' | C_{kk}^{\geq}(n) | s'' \rangle^* \quad (3.9.58)$$

$$X_{jj}^{\geq}(n|s) = [X_{kk}^{\geq}(n|s)]^*, \quad (3.9.59)$$

де індекси j та k вважаються різними $j \neq k$.

Ще одна частина симетрійних обмежень, характерних для справді невідбивного випадку, стосується добутоків $\rho_{jk}^{\geq}(z_{kk}^{\geq}(s))\rho_{kj}^{\leq}(z_{jj}^{\leq}(s))$ композиційних даних розсіяння $\rho_{jk}^{\geq}(z_{kk}^{\geq}(s))$ та $\rho_{kj}^{\leq}(z_{jj}^{\leq}(s))$, взятих за $j \neq k$. Ці обмеження ґрунтуються на формулі (3.7.16) для добутку $p_{jk}^{\geq}(z_{kk}^{\geq}(r))p_{kj}^{\leq}(z_{jj}^{\leq}(r))$, доповненій означеннями (3.9.15), (3.9.16) та (3.9.17), (3.9.18) композиційних даних розсіяння, а також дисперсійними співвідношеннями (3.9.7) та (3.9.8) і належним чином сконкретизованими правилами сум (3.8.5) та (3.8.6). В результаті маємо

$$\begin{aligned} & \rho_{12}^{\geq}(z_{22}^{\geq}(s))\rho_{21}^{\leq}(z_{11}^{\leq}(s)) = [z_{22}^{\geq}(s)]^2 \times \\ & \times \lim_{z \rightarrow z_{22}^{\geq}(s)} \left\{ [z^{-2} - (z_{22}^{\geq}(s))^{-2}]^2 \prod_{s'=1}^N \frac{[z_{11}^{\geq}(s')]^2 [z^{-2} - (z_{11}^{\geq}(s'))^{-2}]^2}{[z_{22}^{\geq}(s')]^2 [z^{-2} - (z_{22}^{\geq}(s'))^{-2}]^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.9.60)$$

$$\begin{aligned} & \rho_{21}^{\geq}(z_{11}^{\geq}(s))\rho_{12}^{\leq}(z_{22}^{\leq}(s)) = [z_{11}^{\geq}(s)]^{-2} \times \\ & \times \lim_{z \rightarrow z_{11}^{\geq}(s)} \left\{ [z^2 - (z_{11}^{\geq}(s))^2]^2 \prod_{s'=1}^N \frac{[z_{11}^{\geq}(s')]^2 [z^2 - (z_{22}^{\geq}(s'))^2]^2}{[z_{22}^{\geq}(s')]^2 [z^2 - (z_{11}^{\geq}(s'))^2]^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.9.61)$$

3.10 Односолітонна динаміка [199, 212]

У цьому підрозділі ми крок за кроком зробимо деякі спрощення загальних наробок попереднього підрозділу і прийдемо до наочної реалізації солітонної динаміки.

Найочевидніше спрощення полягає в редукції до комплексно спряжених польових амплітуд $r_+(n) = q_+^*(n)$ і $r_-(n) = q_-^*(n)$. Цей крок надає змоги застосувати вже згадані в підрозділі 3.1 цього розділу обмеження на параметри міжвузлових зв'язків ω_l^- , ω_t^- , ω_l^+ , ω_t^+ та на параметр енергетичного зсуву ω_0 і тим самим звернутися до параметризацій

$$\omega_l^- \exp(+i\gamma_l) = \omega_l = \omega_l^+ \exp(-i\gamma_l), \quad (3.10.1)$$

$$\omega_t^- \exp(+i\gamma_t) = \omega_t = \omega_t^+ \exp(-i\gamma_t) \quad (3.10.2)$$

в термінах суто дійсних величин ω_l , γ_l та ω_t , γ_t , а також взяти до уваги дійсність величини ω_0 . Тут фази γ_l і γ_t доцільно трактувати як фази Паєрлса [145, 208], пов'язані з магнетними потоками крізь елементарні клаптики драбинчастої ґратки. Як наслідок, формули (3.9.51) та (3.9.52) для часових залежностей композиційних дискретних даних розсіяння можна звести до прийнятніших форм

$$\begin{aligned} \rho_{jk}^>(z_{kk}^>(s)|\tau) &= \rho_{jk}^>(z_{kk}^>(s)|0) \times \\ &\times \exp \left\{ +2 \int_0^\tau d\xi [\mu(s)v(k(s)|\xi|\mu(s)) - i(-1)^k \omega(k(s)|\xi|\mu(s))] \right\} \end{aligned} \quad (3.10.3)$$

$$\begin{aligned} \rho_{jk}^<(z_{kk}^<(s)|\tau) &= \rho_{jk}^<(z_{kk}^<(s)|0) \times \\ &\times \exp \left\{ -2 \int_0^\tau d\xi [\mu(s)v(k(s)|\xi|\mu(s)) + i(-1)^k \omega(k(s)|\xi|\mu(s))] \right\}, \end{aligned} \quad (3.10.4)$$

де введено позначення

$$\begin{aligned} \mu(s)v(k(s)|\tau|\mu(s)) &= \omega_l(\tau) \sinh 2\mu(s) \sin(2k(s) - \gamma_l(\tau)) + \\ &+ \omega_t(\tau) \sinh \mu(s) \sin(k(s) - \gamma_t(\tau)) \end{aligned} \quad (3.10.5)$$

та

$$\begin{aligned} \omega(k(s)|\tau|\mu(s)) = & -\omega_0(\tau) - \omega_l(\tau) \cosh 2\mu(s) \cos(2k(s) - \gamma_l(\tau)) - \\ & - \omega_t(\tau) \cosh \mu(s) \cos(k(s) - \gamma_t(\tau)) , \end{aligned} \quad (3.10.6)$$

а також зроблено явні записи часового аргумента τ .

Аби завершити параметризацію композиційних дискретних даних розсіяння $\rho_{jk}^>(z_{kk}^>(s)|\tau)$ та $\rho_{jk}^<(z_{kk}^<(s)|\tau)$, слід запропонувати прийнятну параметризацію для їхніх початкових значень $\rho_{jk}^>(z_{kk}^>(s)|0)$ та $\rho_{jk}^<(z_{kk}^<(s)|0)$. Так, для початкових значень $\rho_{jl}^>(z_{ll}^>(s)|0)$ та $\rho_{jl}^<(z_{ll}^<(s)|0)$, що відповідають односолітонному розв'язку ($N = 1$), ми маємо

$$\rho_{jl}^{\gtrless}(z_{ll}^{\gtrless}|0) = \pm 2i \sinh \mu \exp[\pm 2\mu(x \pm 1/4) + i(-1)^l(\theta \mp k/2)] . \quad (3.10.7)$$

Тут вказівки на порядкове число $s = 1$ одного єдиного солітона ми вилучили як зайві. Одночасно ми перейменували кілька індексів, аби запобігти їхньому ототожненню з вільним параметром k .

Підготувавши праві частини формул (3.9.45), (3.9.46) та (3.9.47), (3.9.48) для $q_-(n)$, $r_-(n)$ та $q_+(n)$, $r_+(n)$ в дусі ухвалених параметризацій, ми приходимо до досить зручних виразів

$$q_-(n) = \frac{\sinh \mu \exp[+2ikn + i(\theta - k/2) - 2i \int_0^\tau d\xi \omega(k|\xi|\mu)]}{\cosh\{2\mu[n - 1/4 - x - \int_0^\tau d\xi v(k|\xi|\mu)]\}} \quad (3.10.8)$$

$$q_+(n) = \frac{\sinh \mu \exp[+2ikn + i(\theta + k/2) - 2i \int_0^\tau d\xi \omega(k|\xi|\mu)]}{\cosh\{2\mu[n + 1/4 - x - \int_0^\tau d\xi v(k|\xi|\mu)]\}} \quad (3.10.9)$$

для односолітонного розв'язку початкової нелінійної динамічної системи (3.1.1)–(3.1.4). З огляду на прийняті симетрійні редукції $r_-(n) = q_-^*(n)$ та $r_+(n) = q_+^*(n)$, вирази для $r_-(n)$ та $r_+(n)$ ми тут не подаємо.

Підкреслимо, що одержані формули (3.10.8) та (3.10.9) для односолітонного розв'язку залишаються чинними незалежно від конкретного вибору ча-

сових залежностей в параметрах зв'язку, тим самим пропонуючи практично невичерпне розмаїття сценаріїв параметричного впливу на нелінійну систему навіть в рамках односолітонної динаміки.

Зважаючи на фермоподібну будову просторової ґратки та пригадуючи фізичну інтерпретацію скоригованих польових функцій $Q_+(n)$, $R_+(n)$ та $Q_-(n)$, $R_-(n)$ як амплітуд присутності збудження (амплітуд збудженості), розумно ввести поняття середньої повздовжньої координати y нелінійного хвильового пакету за допомоги формули

$$y = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} [(n - 1/4)Q_-(n)R_-(n) + (n + 1/4)Q_+(n)R_+(n)]}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} [Q_-(n)R_-(n) + Q_+(n)R_+(n)]} . \quad (3.10.10)$$

Безпосередній підрахунок координати y на односолітонному розв'язку (3.10.8) та (3.10.9) з використанням обернених точкових перетворень

$$Q_{\pm}(n) = \sqrt{[q_{\pm}(n)/r_{\pm}(n)] \ln[1 + q_{\pm}(n)r_{\pm}(n)]} \quad (3.10.11)$$

$$R_{\pm}(n) = \sqrt{[r_{\pm}(n)/q_{\pm}(n)] \ln[1 + r_{\pm}(n)q_{\pm}(n)]} \quad (3.10.12)$$

дає

$$y = x + \int_0^{\tau} d\xi v(k|\xi|\mu) . \quad (3.10.13)$$

Отже, величину $v(k|\tau|\mu)$ слід розуміти як миттєву повздовжню швидкість центру солітона в момент часу τ , а параметр x – як початкову повздовжню координату солітонного хвильового пакету.

За умови $\mu \ll 1$ параметр $1/\mu$ оцінює характерний розмір солітонного хвильового пакету в повздовжньому напрямі, але за $\mu \gtrsim 1$ така оцінка перестає бути правильною, і за $\mu \gg 1$ повздовжній розмір солітона слід оцінювати величиною, що коливається між 1 та $1/\sqrt{\mu}$ залежно від положення центру y солітонного пакету. Детальний аналіз такого дихального ефекту зроблено в одній з наших праць [200] на прикладі інтегрованої одноланцюжкової нелінійної моделі Шрьодінгера.

Що стосується величин $\omega(k|\tau|\mu)$ та k , то обмежимося їхньою інтерпретацією в найпростішому випадку незалежних від часу параметрів міжвузлових резонансних зв'язків та нульових фаз Паєрлса.

Беручи до уваги періодичність функції $\omega(k|\tau|\mu)$ за k , розглянемо лише інтервал $-\pi/2 \leq k < +3\pi/2$ і розіб'ємо його на два підінтервали $-\pi/2 \leq k < +\pi/2$ і $+\pi/2 \leq k < +3\pi/2$. Останній крок дає змогу замість параметра k ввести нового параметра \varkappa – спільного для обох підінтервалів за правилом

$$k = \varkappa/2 \quad -\pi/2 \leq k < +\pi/2, \quad (3.10.14)$$

$$k = \varkappa/2 + \pi \quad +\pi/2 \leq k < +3\pi/2. \quad (3.10.15)$$

В результаті, одногілковий (k -параметризований) односолітонний розв'язок (3.10.8), (3.10.9) вдається замінити на двогілковий (\varkappa -параметризований) односолітонний розв'язок

$$q_-(n|b) = \frac{\sinh \mu \exp[+i\varkappa n + i(\theta - \varkappa/4 - \pi b/2) - i\tau\Omega_b(\varkappa|\mu)]}{\cosh\{2\mu[n - 1/4 - x - \tau v_b(\varkappa|\mu)]\}} \quad (3.10.16)$$

$$q_+(n|b) = \frac{\sinh \mu \exp[+i\varkappa n + i(\theta + \varkappa/4 + \pi b/2) - i\tau\Omega_b(\varkappa|\mu)]}{\cosh\{2\mu[n + 1/4 - x - \tau v_b(\varkappa|\mu)]\}}, \quad (3.10.17)$$

де значення $b = 0$ або $b = 1$ вказує на порядкове число солітонної гілки, а параметр \varkappa перебуває в межах першої зони Бріллюєна (Brillouin) $-\pi < \varkappa < +\pi$. Тут функції $\Omega_b(\varkappa|\mu)$ та $v_b(\varkappa|\mu)$ підпорядковано означенням

$$\begin{aligned} \Omega_b(\varkappa|\mu) &= 2\omega(\varkappa/2 + \pi b|\tau = 0|\mu) = \\ &= -2\omega_0 - 2\omega_l \cosh 2\mu \cos \varkappa - (-1)^b \omega_t \cosh \mu \cos(\varkappa/2) \end{aligned} \quad (3.10.18)$$

$$\begin{aligned} \mu v_b(\varkappa|\mu) &= \mu v(\varkappa/2 + \pi b|\tau = 0|\mu) = \\ &= \omega_l \sinh 2\mu \sin \varkappa + (-1)^b \omega_t \sinh \mu \sin(\varkappa/2), \end{aligned} \quad (3.10.19)$$

де раніше вказані припущення щодо параметрів міжвузлових резонансних зв'язків та фаз Паєрлса залишаються чинними.

В границі особливо широкого хвильового пакету $\mu \rightarrow 0$ частоти $\Omega_b(\varkappa|\mu)$ прямують до значень $\Omega_b(\varkappa|0)$, що відтворюють двогілковий спектр, характер-

ний для лінійної частини основної нелінійної системи (3.1.1)–(3.1.4). В тій же границі $\mu \rightarrow 0$ величини $v_b(\varkappa|\mu)$ набувають сенсу групових швидкостей

$$v_b(\varkappa|0) = \frac{\partial}{\partial \varkappa} \Omega_b(\varkappa|0) \quad (3.10.20)$$

відповідних пласких хвиль зі всіма ознаками величини \varkappa як звичайного хвильового числа. Варто зазначити, що двогілкова реалізація енергетичної структури як в односолітонному, так і в лінійному розв'язках є неодмінним атрибутом запропонованої моделі, який зумовлено тією самою геометричною рисою, а саме – наявністю двох структурних елементів в елементарній комірці базової драбинчастої ґратки.

3.11 Закони збереження та Гамільтонове формулювання моделі [199, 213, 216]

Ще одним підтвердженням інтегровності досліджуваної нелінійної моделі (3.8.5)–(3.8.5) є наявність нескінченного числа законів збереження відповідно до нескінченного числа вузлів просторової ґратки.

Рекурентна процедура пошуку густин та потоків, що входять до законів збереження, будується, спираючись на підхід, описаний в працях Абловіца (Ablowitz) і Ладіка (Ladik) [4, 5] чи Тсучіди (Tsuchida) і Вадаті (Wadati) [188, 187], або на узагальнений підхід, запропонований в кількох наших працях [213, 216]. Не відтворюючи деталей розрахунків, наведемо відразу результати для п'яти перших інтегралів руху, оскільки саме вони знадобляться нам для гамільтонівського формулювання основної нелінійної моделі. Отже величини, що зберігаються в процесі еволюції, є такими:

$$\begin{aligned} I_l^- = & \sum_{m=-\infty}^{\infty} q_+(m)r_+(m-1)[1 + q_-(m)r_-(m)] + \\ & + \sum_{m=-\infty}^{\infty} q_-(m+1)r_-(m)[1 + q_+(m)r_+(m)] + \\ & + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} [q_+^2(m)r_-^2(m) + q_-^2(m)r_+^2(m-1)] \end{aligned} \quad (3.11.1)$$

$$I_t^- = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [q_+(m)r_-(m) + q_-(m)r_+(m-1)] \quad (3.11.2)$$

$$I_0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \left\{ [1 + q_-(m)r_-(m)][1 + q_+(m)r_+(m)] \right\} \quad (3.11.3)$$

$$I_t^+ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [q_-(m)r_+(m) + q_+(m)r_-(m+1)] \quad (3.11.4)$$

$$\begin{aligned} I_l^+ = & \sum_{m=-\infty}^{\infty} q_-(m)r_-(m+1)[1 + q_+(m)r_+(m)] + \\ & + \sum_{m=-\infty}^{\infty} q_+(m-1)r_+(m)[1 + q_-(m)r_-(m)] + \\ & + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} [q_-^2(m)r_+^2(m) + q_+^2(m)r_-^2(m+1)] . \end{aligned} \quad (3.11.5)$$

Знаючи ці інтеграли руху, легко перевірити, що дещо громіздкі початкові нелінійні еволюційні рівняння (3.1.1)–(3.1.4) можна переписати в досить компактній Гамільтоновій (Hamilton) формі

$$+i\dot{q}_{\pm}(n) = [1 + q_{\pm}(n)r_{\pm}(n)] \frac{\partial H}{\partial r_{\pm}(n)} \quad (3.11.6)$$

$$-i\dot{r}_{\pm}(n) = [1 + q_{\pm}(n)r_{\pm}(n)] \frac{\partial H}{\partial q_{\pm}(n)} . \quad (3.11.7)$$

Тут гамільтоніан моделі

$$H = -\omega_l^- I_l^- - \omega_t^- I_t^- - 2\omega_0 I_0 - \omega_t^+ I_t^+ - \omega_l^+ I_l^+ \quad (3.11.8)$$

повністю визначається щойно виписаними інтегралами руху (3.11.1)–(3.11.5), помноженими на доречні параметри міжвузлових зв'язків. Наявність множників $1 + q_{\pm}(n)r_{\pm}(n)$ в правих частинах рівнянь Гамільтона (Hamilton) (3.11.6) та (3.11.7) свідчить про нестандартність відповідних фундаментальних дужок Пуассона. Саме ця обставина і застерігає нас від трактування вихідних польових функцій $q_+(n)$, $r_+(n)$ та $q_-(n)$, $r_-(n)$ як амплітуд збудженості.

Натомість, переформулювання досліджуваної моделі в термінах скоригованих польових функцій $Q_+(n)$, $R_+(n)$ та $Q_-(n)$, $R_-(n)$ за допомоги прямих точкових перетворень (3.1.5) та (3.1.6) приводить до стандартних рівнянь Гамільтона

$$+i\dot{Q}_\pm(n) = \frac{\partial H}{\partial R_\pm(n)} \quad (3.11.9)$$

$$-i\dot{R}_\pm(n) = \frac{\partial H}{\partial Q_\pm(n)}, \quad (3.11.10)$$

що відповідають стандартним дужкам Пуассона. У випадку редукції $R_\pm(n) = Q_\pm^*(n)$ ці результати ще раз підкреслюють правомірність інтерпретації величин $Q_+(n)$, $R_+(n)$ та $Q_-(n)$, $R_-(n)$ як амплітуд збуджености, відповідно, правого (+) та лівого (−) вузла n -тої елементарної комірки ґратчастої дволанцюжкової (драбинчастої) структури.

A posteriori звернімо увагу, що інтеграли руху $I_l^-, I_t^-, I_0, I_t^+, I_l^+$ (3.11.1)–(3.11.5) досліджуваної нелінійної системи (3.1.1)–(3.1.4) мають усі ознаки точних адіабатних інваріантів [15], причому, на відміну від вимог теорії адіабатних інваріантів [15], будь-який вибір швидкостей зміни параметрів міжвузлової взаємодії $\omega_l^-, \omega_l^+, \omega_t^-, \omega_t^+$ та параметра систематичного зсуву шкали енергії ω_0 у часі τ жодним чином не порушує їхнього статусу точних інтегралів руху. Що ж стосується гамільтоніана системи (3.11.8), то він набуває статусу інтеграла руху лише за умов незалежності параметрів $\omega_l^-, \omega_l^+, \omega_t^-, \omega_t^+, \omega_0$ від часу.

3.12 Підсумки

Отже, в третьому розділі ми представили чотирикомпонентну нелінійну систему Шрьодінґера на регулярній квазіодновимірній ґратці. Аналіз лінійної частини цієї системи вказує, що первинна просторова структура ґратки носія збуджень являє собою драбинчасту ґратку із зигзаґоподібно впорядкованими щаблями, яка містить по два вузли на одну елементарну комірку. Параметри міжвузлового резонансного зв'язку системи можуть бути довільними функціями від часу, що є важливим чинником для строгого моделювання широкого кола параметрично розгойдуваних систем різноманітної фізичної природи. За

фізично вмотивованої умови комплексно спряжених польових амплітуд, фази параметрів міжвузлового резонансного зв'язку набувають сенсу фаз Паєрлса, відповідальних за зовнішні магнетні поля, що пронизують елементарні клаптики драбинчастої ґратки.

За самою своєю побудовою система є інтегрованою, оскільки допускає представлення нульової кривини. Більше того, з метою відтворення симетрії між двома парами польових амплітуд, ми запропонували дві пари допоміжних матричнозначних лінійних рівнянь, асоційованих з додатнім та від'ємним зсувами повздовжньої дискретної просторової координати в двох типах допоміжних функцій під дією двох допустимих типів спектральних операторів, відповідно. Тим самим ми з необхідністю мали працювати з двома типами рівнянь нульової кривини, а саме – з висхідним рівнянням нульової кривини та з низхідним рівнянням нульової кривини. Такий симетризований підхід має кілька практичних переваг, оскільки значно спрощує пошук розв'язків досліджуваної системи нелінійних еволюційних рівнянь і уможливорює надійний симетрично вмотивований контроль одержаних результатів.

В термінах вказаної вище симетрії між польовими амплітудами, ми розглянули два різновиди прямої задачі розсіяння – координатно-висхідний та координатно-низхідний. Ми започаткували дві пари базових матричнозначних функцій (розв'язків) Йоста (по одній парі на кожен різновид прямої задачі розсіяння) і встановили взаємно однозначну відповідність між розв'язками Йоста протилежних типів. Ми представили також традиційні співвідношення між розв'язками Йоста того самого типу, тим самим гарантувавши адекватні означення двох різновидів зведеної матриці монодромії.

Зваживши на властивості регулярності та симетрії розв'язків Йоста, а також матриць монодромії, ми вивели два типи сумаційних рівнянь Марченка для коефіцієнтів розкладу векторів Йоста і виписали комплементарні формули для польових амплітуд в термінах найнижчих коефіцієнтів розкладу.

Оскільки ядра рівнянь Марченка суттєво зумовлено даними розсіяння, ми одержали звичайні диференційні рівняння, що керують еволюцією даних розсіяння в часі, а також всебічно проаналізували властивості симетрії даних розсіяння як взагалі, так і за редукції до комплексно спряжених польових амплітуд.

Ми знайшли дисперсійні співвідношення для діагональних елементів обох

різновидів матриці монодромії за звичного спрощувального припущення про однакове число нулів в кожному діагональному матричному елементі окремо взятої матриці монодромії, що цілком виправдано принаймні за редукції до комплексно спряжених польових амплітуд.

Ми описали процедуру розв'язування рівнянь Марченка в справді невідбивному випадку і формально одержали багатосолітонний розв'язок початкової (нередукованої) нелінійної системи з еволюцією в часі, опосередкованою часовими залежностями даних розсіяння.

Ми проаналізували найпростішу реалізацію солітонної динаміки за редукції до комплексно спряжених польових амплітуд та зробили повну інтерпретацію солітонних параметрів. Ми наголосили також на цілком природній кореляції між двовузловою будовою елементарної комірки ґратки-носія та двогілковим розщепленням солітонного розв'язку.

Аби підкреслити переваги запропонованого нами симетризованого підходу до прямої та оберненої задач розсіяння, звернемо особливу увагу на явну недолугість використання лише одного окремого несиметризованого (висхідного чи низхідного) варіанту теорії при побудові розв'язків для польових амплітуд, коли одна з фізично рівноправних пар функцій $q_+(n)$, $r_+(n)$ чи $q_-(n)$, $r_-(n)$ потребує залучення вищих коефіцієнтів розкладу векторів Йоста і таким чином призводить до значних і кострубатих перепон в аналітичних розрахунках.

Нарешті, ми знайшли явно низку найважливіших законів збереження досліджуваної інтегровної нелінійної ґратчастої системи та вказали на її Гамільтонове представлення як в термінах вихідних польових функцій, так і в термінах спеціально введених фізично скоригованих функцій.

Розділ 4

Напівдискретна інтегрована нелінійна Шрьодінґерова система з глобальною міжвузловою резонансною взаємодією

4.1 Вступні зауваження та рівняння нелінійної Шрьодінґерової системи на стьожці трикутної ґратки з двома типами міжвузлової резонансної взаємодії [208, 220, 221, 227, 228, 229]

Напівдискретні інтегровані нелінійні Шрьодінґерові (Schrödinger) системи на одновимірних або квазіодновимірних ґратках [2, 4, 6, 8, 7, 69, 188, 194, 196, 238] відіграють значну роль в моделюванні широкого кола явищ з різних галузей фізики, позаяк вони допомагають збагнути на який тип нелінійних збуджень слід сподіватися, розглядаючи конкретні фізичні ситуації. Достатньо зауважити, що концепція нелінійних збуджень, пов'язаних з тією чи іншою моделлю нелінійного шрьодінґерівського типу, є досить плідною для дослідження нелінійних ефектів в дискретних електричних передавальних мережах [123], для моделювання процесів перенесення енергії і заряду в макромолекулах солітоноподібними збудженнями [26, 53, 54, 163], а також для теоретичного трактування експериментально спостережуваних розподілів світла в перері-

зах зв'язаних оптичних волокнин [38, 67].

Виходячи з цього, запропонована нами напівдискретна інтегровна нелінійна Шрьодінгєрова система з тлозалежними міжвузловими резонансними зв'язками [208, 220, 221, 227, 228] може мати значні фізичні застосування в якості багатокomпонентної системи з двома типами вільних параметрів зв'язку, що зумовлюють досить незвичні властивості [223, 225], і системи, чия ґраткова структура-носій є близько спорідненою зі структурою нанотрубки типу (1,1) на основі бору [113], що належить до нового класу низьковимірних синтетичних матеріалів, відомих як наностьожки [83, 99, 134]. У цьому розділі ми розглядаємо найрепрезентативніші результати досліджень такої напівдискретної нелінійної Шрьодінгєрової системи.

Напівдискретна нелінійна Шрьодінгєрова система з тлозалежними міжвузловими резонансними зв'язками (яку можна розглядати також як інтегровну нелінійну Шрьодінгєрову систему на стьожді трикутної ґратки), записана в термінах двох пар основних польових змінних $q_+(n)$, $r_+(n)$ та $q_-(n)$, $r_-(n)$ і однієї пари супутніх польових змінних $\mu(n)$, $\nu(n)$, має вигляд [208, 220, 221, 227, 228, 229]

$$\begin{aligned} &+ i\dot{q}_+(n) + \beta q_-(n-1)[1 + q_+(n)r_+(n)] + \\ &+ \alpha q_+(n+1)[q_+(n)r_-(n) - \nu(n)] + \alpha [q_-(n) + q_+(n)\mu(n)] = 0 \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

$$\begin{aligned} &- i\dot{r}_+(n) + \alpha r_-(n-1)[1 + r_+(n)q_+(n)] + \\ &+ \beta r_+(n+1)[r_+(n)q_-(n) - \mu(n)] + \beta [r_-(n) + r_+(n)\nu(n)] = 0 \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

$$\begin{aligned} &+ i\dot{q}_-(n) + \alpha q_+(n+1)[1 + q_-(n)r_-(n)] + \\ &+ \beta q_-(n-1)[q_-(n)r_+(n) - \mu(n)] + \beta [q_+(n) + q_-(n)\nu(n)] = 0 \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

$$\begin{aligned} &- i\dot{r}_-(n) + \beta r_+(n+1)[1 + r_-(n)q_-(n)] + \\ &+ \alpha r_-(n-1)[r_-(n)q_+(n) - \nu(n)] + \alpha [r_+(n) + r_-(n)\mu(n)] = 0 \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

$$\begin{aligned} &+ i\dot{\mu}(n) + \alpha q_+(n+1)[r_+(n) + r_-(n)\mu(n)] + \\ &+ \beta [q_+(n)r_+(n) - q_-(n)r_-(n)] - \alpha r_-(n-1)[q_-(n) + q_+(n)\mu(n)] = 0 \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

$$\begin{aligned}
& -i\dot{\nu}(n) + \beta r_+(n+1)[q_+(n) + q_-(n)\nu(n)] + \\
& + \alpha [r_+(n)q_+(n) - r_-(n)q_-(n)] - \beta q_-(n-1)[r_-(n) + r_+(n)\nu(n)] = 0 . \quad (4.1.6)
\end{aligned}$$

Тут крапка над польовими функціями відповідає за диференціювання за ча-

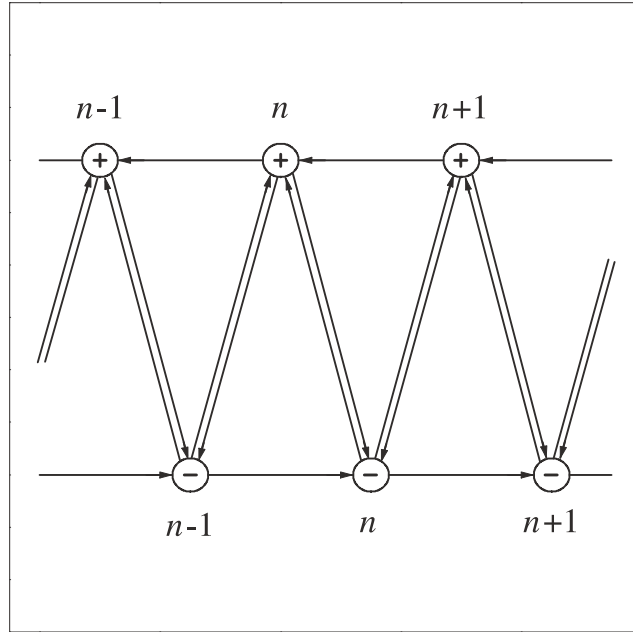


Рис. 4.1. Фрагмент двоніжкової драбинчастої ґратки-носія для напівдискретної інтегрованої нелінійної Шрьодінґерової системи з тлозалежними міжвузловими резонансними зв'язками (4.1.1)–(4.1.6). Кругечки позначають місцезнаходження вузлів драбинчастої ґратки. Скісні стрілки вказують на первинні резонансні зв'язки (формалізовані параметрами α чи β) між основними польовими збудженнями на сусідніх вузлах, належних до протилежних ланцюжків драбинчастої ґратки. Горизонтальні стрілки вказують на складові (тлозалежні) резонансні зв'язки (формалізовані параметрами $-\alpha\nu$ чи $-\beta\mu$) між основними польовими збудженнями на сусідніх вузлах, належних до певного ланцюжка драбинчастої ґратки. Тут $\nu = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \nu(n)$ та $\mu = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \mu(n)$.

сом τ , тоді як часозалежні параметри α і β описують первинний резонансний зв'язок між польовими змінними на сусідніх вузлах, належних до протилежних ланцюжків драбинчастої ґратки. Довільність часових залежностей цих параметрів обмежено лише загальною вимогою їхнього комплексного спряження $\beta^* = \alpha$. Польові змінні $q_+(n)$ і $r_+(n)$ (з $r_+^*(n) = q_+(n)$) наближено характеризують амплітуди присутності збудження на верхньому (плюсовому) вузлі n -тої елементарної комірки драбинчастої ґратки. Аналогічно, польові змінні $q_-(n)$ і $r_-(n)$ (з $r_-^*(n) = q_-(n)$) наближено характеризують амплітуди прису-

тності збудження на нижньому (мінусовому) вузлі n -тої елементарної комірки драбинчастої ґратки. Ці дві пари змінних $q_+(n)$, $r_+(n)$ і $q_-(n)$, $r_-(n)$ складають основний набір динамічних полів на нескінченно довгій ($-\infty < n < +\infty$) драбинчастій ґратці із зигзагоподібним упорядкуванням щаблів. При цьому дискретна просторова координата n позначає порядковий номер елементарної комірки ґратки, тоді як індекси $+$ та $-$ слугують аби розрізняти два різновиди вузлів в тій самій елементарній комірці. Іншими словами, позначки $+$ та $-$ слід віднести до двох відмінних ланцюжків (ніжок) драбинчастої ґратки. Навпаки, змінні $\mu(n)$ і $\nu(n)$ (з $\nu^*(n) = \mu(n)$) постають як супутній набір полів, оскільки їх можна виключити із розгляду, використовуючи так звані природні в'язі

$$\frac{\mu(n) - q_-(n)r_+(n)}{1 + \mu(n)\nu(n) + q_+(n)r_+(n) + q_-(n)r_-(n)} = \frac{\mu}{1 + \mu\nu} \quad (4.1.7)$$

$$\frac{\nu(n) - q_+(n)r_-(n)}{1 + \mu(n)\nu(n) + q_+(n)r_+(n) + q_-(n)r_-(n)} = \frac{\nu}{1 + \mu\nu}, \quad (4.1.8)$$

продиктовані самою структурою системи рівнянь (4.1.1)–(4.1.6) через сукупність найнижчих локальних законів збереження (наведених в підрозділі 4.7) за нульових граничних значень основних польових змінних $q_+(n)$, $r_+(n)$ та $q_-(n)$, $r_-(n)$ на обох просторових нескінченностях $|n| \rightarrow \infty$. Принаймні варто пам'ятати, що величини $\mu(n)$ і $\nu(n)$ належить розглядати як функції від основних польових змінних $q_+(n)$, $r_+(n)$ та $q_-(n)$, $r_-(n)$, і що вони не відіграють незалежної ролі в динаміці системи. Що ж стосується резонансного зв'язку між сусідніми вузлами, належними до того самого ланцюжка драбинчастої ґратки, то він виявляється ненульовим за умови, що часонезалежні граничні значення μ і ν супутніх полів $\mu(n)$ і $\nu(n)$ на обох просторових нескінченностях $|n| \rightarrow \infty$ є відмінними від нуля. В результаті параметри зв'язку, відповідальні за повздовжню взаємодію, виникають як істотно складові параметри, що дорівнюють $-\alpha\nu$ і $-\beta\mu$. Під терміном “міжвузловий резонансний зв'язок”, запозиченим з теорії молекулярних (малорадіусних) екситонів [47], ми розуміємо недисипативний (когерентний) зв'язок, що уособлює лінійну частину взаємодії між збудженнями основних полів. Прийняті симетрії між польовими змінними, доповнені прийнятими симетріями між параметрами зв'язку, конкретизують розглядувану систему (4.1.1)–(4.1.6) як систему з нелінійностями притягуваль-

ного різновиду.

Просторову структуру вузлів ґратки і міжвузлових резонансних зв'язків, стосовну до нашої системи (4.1.1)–(4.1.6), візуалізовано на рисунку 4.1 як дво-стоякову драбинчасту ґратку, яку, відповідно до сучасної термінології з наноструктур [61], можна розглядати як найпростішу стійку трикутної ґратки з лінійними краями. На загал квазіодновимірність того чи іншого ґратчастого об'єкту вважають обов'язковою передумовою, сприятливою для її фізичних застосувань, оскільки відомо, що вже квазіодновимірність (на відміну від цілковитості одновимірності) реальної макромолекулярної ґратчастої структури (взагалі будь-якої ґратчастої структури, розглядуваної в просторово мікроскопічному масштабі) є неодмінним чинником для термодинамічної стійкості структури [253]. Про цю важливу обставину неодноразово нагадував академік Олександр Сергійович Давидов. З іншого боку, саме завдяки драбинчастій геометрії своєї ґратчастої структури-носія досліджувана система (4.1.1)–(4.1.6) (коли йдеться про електрично заряджені збудження) набуває здатності відчувати дію зовнішнього магнетного поля в термінах магнетних потоків, що пронизують елементарні (трикутні) клаптики ґратчастої стійки і моделюються фазами комплекснозначних параметрів зв'язку, потрактованими як фази Паєрлса [145, 196, 209].

4.2 Інтегровність системи в Лаксовому сенсі [208, 220, 221]

Вважають, що нелінійна еволюційна система на одновимірній або квазіодновимірній ґратці є інтегрованою в Лаксовому (Lax) сенсі [139], якщо вона допускає напівдискретне представлення нульової кривини [173]

$$\dot{L}(n|z) = A(n+1|z)L(n|z) - L(n|z)A(n|z) \quad (4.2.1)$$

в термінах деяких допоміжних операторів $L(n|z)$ і $A(n|z)$ з часонезалежним комплекснозначним спектральним параметром z . Зазвичай оператори $L(n|z)$ та $A(n|z)$ називають спектральним оператором та еволюційним оператором,

відповідно.

Інтегровність напівдискретної нелінійної Шрьодінгерової системи з тлоза-
лежними міжвузловими резонансними зв'язками (4.1.1)–(4.1.6) знаходить своє
природне підтвердження в будь-якому з двох запропонованих нами виборів
допоміжних операторів. Спочатку її було встановлено шляхом пошуку опера-
торів $L(n|z)$ і $A(n|z)$ у вигляді 4×4 квадратних матриць [208]

$$L(n|z) = \begin{pmatrix} z^2 & g_{11}(n) & f_{12}(n)z & g_{12}(n)z^{-1} \\ g_{11}(n) & z^2 & g_{12}(n)z^{-1} & f_{12}(n)z \\ g_{21}(n)z^{-1} & f_{21}(n)z & z^{-2} & f_{22}(n) \\ f_{21}(n)z & g_{21}(n)z^{-1} & f_{22}(n) & z^{-2} \end{pmatrix} \quad (4.2.2)$$

та

$$A(n|z) = \begin{pmatrix} b_{11}(n)z^2 & c_{11}(n) & b_{12}(n)z & c_{12}(n)z^{-1} \\ c_{11}(n) & b_{11}(n)z^2 & c_{12}(n)z^{-1} & b_{12}(n)z \\ c_{21}(n)z^{-1} & b_{21}(n)z & c_{22}(n)z^{-2} & b_{22}(n) \\ b_{21}(n)z & c_{21}(n)z^{-1} & b_{22}(n) & c_{22}(n)z^{-2} \end{pmatrix}. \quad (4.2.3)$$

Однак, пізніше інтегровність системи було підтверджено, спираючись на про-
стіші 2×2 квадратні матриці [220, 221]

$$L(n|z) = \begin{pmatrix} z^2 + g_{11}(n) & f_{12}(n)z + g_{12}(n)z^{-1} \\ f_{21}(n)z + g_{21}(n)z^{-1} & f_{22}(n) + z^{-2} \end{pmatrix} \quad (4.2.4)$$

та

$$A(n|z) = \begin{pmatrix} b_{11}(n)z^2 + c_{11}(n) & b_{12}(n)z + c_{12}(n)z^{-1} \\ b_{21}(n)z + c_{21}(n)z^{-1} & b_{22}(n) + c_{22}(n)z^{-2} \end{pmatrix}. \quad (4.2.5)$$

Між двома вищезазначеними підходами існує взаємно однозначна відповід-
ність, оскільки, незалежно від прийнятого вибору допоміжних матриць (4.2.2)
та (4.2.3) або (4.2.4) та (4.2.5), зі співвідношення нульової кривини (4.2.1) ви-
пливає той самий загальний набір інтегровних нелінійних еволюційних рівнянь

[221]

$$\begin{aligned}\dot{g}_{11}(n) &= c_{11}(n+1)g_{11}(n) + b_{12}(n+1)g_{21}(n) + c_{12}(n+1)f_{21}(n) - \\ &- g_{11}(n)c_{11}(n) - f_{12}(n)c_{21}(n) - g_{12}(n)b_{21}(n)\end{aligned}\quad (4.2.6)$$

$$\begin{aligned}\dot{f}_{12}(n) &= b_{11}(n+1)g_{12}(n) + c_{11}(n+1)f_{12}(n) + b_{12}(n+1)f_{22}(n) - \\ &- c_{12}(n) - g_{11}(n)b_{12}(n) - f_{12}(n)b_{22}(n)\end{aligned}\quad (4.2.7)$$

$$\begin{aligned}\dot{g}_{12}(n) &= c_{11}(n+1)g_{12}(n) + b_{12}(n+1) + c_{12}(n+1)f_{22}(n) - \\ &- g_{11}(n)c_{12}(n) - f_{12}(n)c_{22}(n) - g_{12}(n)b_{22}(n)\end{aligned}\quad (4.2.8)$$

$$\begin{aligned}\dot{f}_{22}(n) &= b_{21}(n+1)g_{12}(n) + c_{21}(n+1)f_{12}(n) + b_{22}(n+1)f_{22}(n) - \\ &- f_{21}(n)c_{12}(n) - g_{21}(n)b_{12}(n) - f_{22}(n)b_{22}(n)\end{aligned}\quad (4.2.9)$$

$$\begin{aligned}\dot{g}_{21}(n) &= c_{21}(n+1)g_{11}(n) + b_{22}(n+1)g_{21}(n) + c_{22}(n+1)f_{21}(n) - \\ &- g_{21}(n)c_{11}(n) - f_{22}(n)c_{21}(n) - b_{21}(n)\end{aligned}\quad (4.2.10)$$

$$\begin{aligned}\dot{f}_{21}(n) &= b_{21}(n+1)g_{11}(n) + c_{21}(n+1) + b_{22}(n+1)f_{21}(n) - \\ &- f_{21}(n)c_{11}(n) - g_{21}(n)b_{11}(n) - f_{22}(n)b_{21}(n)\end{aligned}\quad (4.2.11)$$

з функціями $b_{11}(n)$, $c_{11}(n)$, $b_{12}(n)$, $c_{12}(n)$ та $c_{22}(n)$, $b_{22}(n)$, $c_{21}(n)$, $b_{21}(n)$, заданими формулами

$$b_{11}(n) = b_{11} \quad (4.2.12)$$

$$c_{11}(n) = c_{11} - b_{11}f_{12}(n)f_{21}(n-1) \quad (4.2.13)$$

$$b_{12}(n) = b_{11}f_{12}(n) \quad (4.2.14)$$

$$c_{12}(n) = g_{12}(n-1)c_{22} \quad (4.2.15)$$

$$c_{22}(n) = c_{22} \quad (4.2.16)$$

$$b_{22}(n) = b_{22} - c_{22}g_{21}(n)g_{12}(n-1) \quad (4.2.17)$$

$$c_{21}(n) = c_{22}g_{21}(n) \quad (4.2.18)$$

$$b_{21}(n) = f_{21}(n-1)b_{11} . \quad (4.2.19)$$

Тут функції $g_{11}(n)$, $f_{12}(n)$, $g_{12}(n)$ і $f_{22}(n)$, $g_{21}(n)$, $f_{21}(n)$ слід розуміти як прототиби польових змінних, а координатонезалежні параметри b_{11} , c_{11} і c_{22} , b_{22} можна вважати довільними функціями часу τ .

Загальна інтегровна система (4.2.6)–(4.2.19) допускає щонайменше два типи комплекснозначних редукцій [221] і два типи дійснозначних редукцій [221]. Зокрема, редукція [220, 221]

$$g_{11}(n) = \mu(n) = \nu^*(n) \quad (4.2.20)$$

$$f_{12}(n) = +q_+(n) = +r_+^*(n) \quad (4.2.21)$$

$$g_{12}(n) = -q_-(n) = -r_-^*(n) \quad (4.2.22)$$

$$f_{22}(n) = \nu(n) = \mu^*(n) \quad (4.2.23)$$

$$g_{21}(n) = -r_+(n) = -q_+^*(n) \quad (4.2.24)$$

$$f_{21}(n) = +r_-(n) = +q_-^*(n) \quad (4.2.25)$$

$$b_{11} = -i\alpha = -i\beta^* \quad (4.2.26)$$

$$c_{11} = 0 \quad (4.2.27)$$

$$c_{22} = +i\beta = +i\alpha^* \quad (4.2.28)$$

$$b_{22} = 0 \quad (4.2.29)$$

відтворює багатокomпонентну напівдискретну інтегровну Шрьодінґерову систему (4.1.1)–(4.1.6), яка і є головним предметом нашого дослідження.

Добре відомо, що особливості фактичного інтегрування будь-якої окремої інтегрованої нелінійної системи в рамках оберненої задачі розсіяння обумовлені порядком її допоміжної спектральної задачі [33, 34, 235]. Так, за Кодрі [33, 34] порядок допоміжної спектральної задачі визначається кількістю *відмінних* власних значень $\eta_j(z)$ граничної спектральної матриці $L(z)$ (означеної як $L(z) = \lim_{n \rightarrow -\infty} L(n|z)$ або як $L(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} L(n|z)$), *тобто* кількістю

відмінних розв'язків алгебричного рівняння

$$\det[L(z) - \eta I] = 0, \quad (4.2.30)$$

де I – одинична матриця того самого рангу, що й гранична (на загал невідроджена) спектральна матриця $L(z)$. Отже, порядок допоміжної спектральної задачі не може перевищувати рангу граничної спектральної матриці і залежить від самої структури такої матриці, яка істотно чутлива до вибору граничних умов для польових змінних. Наприклад, будь-яку допоміжну спектральну задачу, пов'язану з тією чи іншою з дотепер відомих версій багатокомпонентної напівдискретної інтегрованої нелінійної Шрьодінґерової системи [6, 69, 188, 194, 196], за нульових граничних умов можна трактувати як задачу другого порядку, незважаючи на певне матричне узагальнення засадничої спектральної задачі Абловіца–Ладіка [2, 4]. На противагу, порядок допоміжної спектральної задачі, пов'язаної з деякою багатокомпонентною напівдискретною інтегрованою нелінійною Шрьодінґеровою системою за ненульових граничних умов [20, 21], зазвичай є вищим порівняно з її двійником, взятим за нульових граничних умов.

Загалом, коли порядок алгебричного рівняння (4.2.30) зростає, відповідні аналітичні розв'язки $\eta_i(z)$ стають громіздкими (для рівняння третього степеня), неосяжними (для рівняння четвертого порядку) і навіть неможливими (для рівнянь вищого порядку). Отже, за винятком деяких окремих випадків, теорія солітонів змушена насправді мати справу з допоміжними спектральними задачами низького порядку. З цього погляду важливо наголосити, що напівдискретна інтегрована нелінійна Шрьодінґерова система з тлозалежними міжвузловими резонансними зв'язками (4.1.1)–(4.1.6) може бути асоційованою лише з допоміжною спектральною задачею четвертого порядку [208], що характеризується чотирма *відмінними* (втім явно заданими) власними значеннями

$$\eta_1(z) = z^2 + \mu \quad (4.2.31)$$

$$\eta_2(z) = z^{-2} + \nu \quad (4.2.32)$$

$$\eta_3(z) = z^2 - \mu \quad (4.2.33)$$

$$\eta_4(z) = z^{-2} - \nu, \quad (4.2.34)$$

але й з допоміжною спектральною задачею другого порядку [220, 221], що характеризується лише двома *відмінними* власними значеннями

$$\eta_1(z) = z^2 + \mu \quad (4.2.35)$$

$$\eta_2(z) = z^{-2} + \nu. \quad (4.2.36)$$

4.3 Перетворення Дарбу і Беклунда як основа інтегрування напівдискретної еволюційної нелінійної системи методом одягання [220, 221]

Серед загальних методів пошуку солітонних розв'язків інтегрованої нелінійної системи підхід, що ґрунтується на перетворенні Дарбу (Darboux), видається найбільш виграним завдяки його універсальності і порівняній простоті. Перетворення Дарбу у застосуванні до напівдискретних інтегрованих нелінійних систем ввели в теорію солітонів Матвеев і Салль [125, 126]. Їхню версію методу перетворення Дарбу було успішно використано при розв'язанні дискретизованих рівнянь Сіліна–Тихончука [108, 109], що описують взаємодію Ленгмюрових (Langmuir) плазмових хвиль у випадку сильного згасання йонно-акустичної хвилі [165]. Іншу версію підходу перетворення Дарбу запропонували Нойгебауер (Neugebauer) і Майнел (Meinel) [138]. Згодом цю версію було впроваджено для дослідження дискретизованої системи Максвелла–Блоха (Maxwell–Bloch) [29, 155].

Критичний розгляд наявної літератури з методу перетворення Дарбу [125, 126, 108, 138, 29, 155, 36, 109, 127, 72, 56, 245, 9, 241] підказав нам основні ідеї, достатні аби побудувати явні розв'язки будь-якої редукованої інтегрованої системи, закодованої в запропонованій загальній системі (4.2.6)–(4.2.19). Заради універсальності ми викладемо головні пункти доречної процедури одягання Дарбу в термінах прототипових польових змінних $g_{11}(n)$, $f_{12}(n)$, $g_{12}(n)$ та $f_{22}(n)$, $g_{21}(n)$, $f_{21}(n)$ [220, 221].

На початку нагадаємо, що рівняння нульової кривини (4.2.1) випливає з умови сумісності між двома допоміжними матричними рівняннями

$$X(n+1|z) = L(n|z)X(n|z) \quad (4.3.1)$$

і

$$\dot{X}(n|z) = A(n|z)X(n|z), \quad (4.3.2)$$

що мають назву допоміжної лінійної задачі. Тут через $X(n|z)$ позначено матричну функцію, детермінант якої $\det X(n|z)$ може дорівнювати нулеві лише в обмеженій кількості точок на площині комплексного спектрального параметра z . Надалі ми можемо беззастережно вважати матриці $L(n|z)$ і $A(n|z)$ квадратними 2×2 матрицями, посилаючись за необхідності на їхні явні представлення (4.2.4) і (4.2.5). Отже і матрицю $X(n|z)$ також слід прийняти за квадратну 2×2 матрицю.

Враховуючи, що прототипові польові змінні $g_{11}(n)$, $f_{12}(n)$, $g_{12}(n)$, $f_{22}(n)$, $g_{21}(n)$, $f_{21}(n)$ повністю визначають спектральний $L(n|z)$ і еволюційний $A(n|z)$ оператори, існує можливість розрізнити два відмінні розв'язки $g_{11}^-(n)$, $f_{12}^-(n)$, $g_{12}^-(n)$, $f_{22}^-(n)$, $g_{21}^-(n)$, $f_{21}^-(n)$ і $g_{11}^+(n)$, $f_{12}^+(n)$, $g_{12}^+(n)$, $f_{22}^+(n)$, $g_{21}^+(n)$, $f_{21}^+(n)$ загальної інтегрованої нелінійної системи (4.2.6)–(4.2.19) за допомоги двох наборів матриць $L^-(n|z)$, $A^-(n|z)$ і $L^+(n|z)$, $A^+(n|z)$, відповідно. Отже, формально ми в змозі взяти до розгляду два окремі уособлення базового рівняння нульової кривини (4.2.1), а саме – мінус-позначене рівняння нульової кривини

$$\dot{L}^-(n|z) = A^-(n+1|z)L^-(n|z) - L^-(n|z)A^-(n|z) \quad (4.3.3)$$

та плюс-позначене рівняння нульової кривини

$$\dot{L}^+(n|z) = A^+(n+1|z)L^+(n|z) - L^+(n|z)A^+(n|z). \quad (4.3.4)$$

З огляду на цю домовленість немає жодних принципових перешкод аби залучити мінус-позначену допоміжну лінійну задачу

$$X^-(n+1|z) = L^-(n|z)X^-(n|z) \quad (4.3.5)$$

$$\dot{X}^-(n|z) = A^-(n|z)X^-(n|z) , \quad (4.3.6)$$

пов'язану з матрицями $L^-(n|z)$, $A^-(n|z)$, $X^-(n|z)$, та плюс-позначену допоміжну лінійну задачу

$$X^+(n+1|z) = L^+(n|z)X^+(n|z) \quad (4.3.7)$$

$$\dot{X}^+(n|z) = A^+(n|z)X^+(n|z) , \quad (4.3.8)$$

пов'язану з матрицями $L^+(n|z)$, $A^+(n|z)$, $X^+(n|z)$, до складу консолідованої схеми перетворення Дарбу.

За означенням [36] перетворення Дарбу

$$X^+(n|z) = S(n|z)X^-(n|z) \quad (4.3.9)$$

пов'язує розв'язки $X^-(n|z)$ та $X^+(n|z)$ мінус-позначеної (4.3.5), (4.3.6) та плюс-позначеної (4.3.7), (4.3.8) допоміжних лінійних задач за допомоги матриці Дарбу $S(n|z)$. Матриця Дарбу $S(n|z)$ мусить підпорядковуватися системі матричних рівнянь

$$S(n+1|z)L^-(n|z) = L^+(n|z)S(n|z) \quad (4.3.10)$$

$$\dot{S}(n|z) = A^+(n|z)S(n|z) - S(n|z)A^-(n|z) , \quad (4.3.11)$$

що відображають просторову (4.3.10) та часову (4.3.11) умови сумісності між мінус-позначеною (4.3.5), (4.3.6) та плюс-позначеною (4.3.7), (4.3.8) допоміжними лінійними задачами. Варто зауважити, що ці умови (4.3.10), (4.3.11) разом з мінус-позначеним рівнянням нульової кривини (4.3.3) приводять до плюс-позначеного рівняння нульової кривини (4.3.4). Навпаки, часову умову сумісності (4.3.11) слушно розглядати як прямий наслідок просторової умови сумісності (4.3.10), якщо як мінус-позначене (4.3.3), так і плюс-позначене (4.3.4) рівняння нульової кривини вважати задовільненими.

Відповідно до мнемонічного правила Кузнєцова і Скляніна [104], анзаца для матриці Дарбу $S(n|z)$ варто вибрати у формі, аналогічній до форми спектральної матриці $L(n|z)$ (4.2.4). Іншими словами, ми маємо припустити, що

матрицю Дарбу задано виразом

$$S(n|z) = \begin{pmatrix} z^2 + u_{11}(n) & t_{12}(n)z + u_{12}(n)z^{-1} \\ t_{21}(n)z + u_{21}(n)z^{-1} & t_{22}(n) + z^{-2} \end{pmatrix}. \quad (4.3.12)$$

Вказаний анзац (4.3.12) приписує правдоподібно найпростіший варіант матриці Дарбу, доцільний для нашого завдання. Його покликанням, як очікується, є утворити один додатковий солітон в наступному (плюс-позначеному) розв'язку нелінійної системи порівняно з попереднім (мінус-позначеним) розв'язком. Намір же утворити разом кілька солітонів вимагає вибору матриці Дарбу, узагальненої до виду, що містить спектральний параметр з такими самими показниками степеня, як і добуток відповідної кількості спектральних матриць.

Використовуючи прийнятий анзац (4.3.12) для матриці Дарбу, просторову умову сумісності (4.3.10) можна переписати у вигляді дванадцяти співвідношень між функціями, що конкретизують матрицю Дарбу $S(n|z)$, і функціями, залученими до матриць $L^-(n|z)$ та $L^+(n|z)$. Відповідні вирази мають вигляд

$$t_{12}(n) = f_{12}^-(n) \quad (4.3.13)$$

$$u_{21}(n) = g_{21}^-(n) \quad (4.3.14)$$

$$t_{21}(n+1) = f_{21}^+(n) \quad (4.3.15)$$

$$u_{12}(n+1) = g_{12}^+(n) \quad (4.3.16)$$

та

$$\begin{aligned} g_{11}^-(n) + t_{12}(n+1)f_{21}^-(n) + u_{11}(n+1) &= \\ &= g_{11}^+(n) + f_{12}^+(n)t_{21}(n) + u_{11}(n) \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

$$\begin{aligned} u_{11}(n+1)g_{11}^-(n) + u_{12}(n+1)f_{21}^-(n) + t_{12}(n+1)g_{21}^-(n) &= \\ &= g_{11}^+(n)u_{11}(n) + f_{12}^+(n)u_{21}(n) + g_{12}^+(n)t_{21}(n) \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

$$\begin{aligned}
u_{11}(n+1)f_{12}^-(n) + t_{12}(n+1)f_{22}^-(n) + g_{12}^-(n) &= \\
&= g_{11}^+(n)t_{12}(n) + f_{12}^+(n)t_{22}(n) + u_{12}(n)
\end{aligned} \tag{4.3.19}$$

$$\begin{aligned}
u_{11}(n+1)g_{12}^-(n) + t_{12}(n+1) + u_{12}(n+1)f_{22}^-(n) &= \\
&= g_{11}^+(n)u_{12}(n) + f_{12}^+(n) + g_{12}^+(n)t_{22}(n)
\end{aligned} \tag{4.3.20}$$

$$\begin{aligned}
f_{22}^-(n) + u_{21}(n+1)g_{12}^-(n) + t_{22}(n+1) &= \\
&= f_{22}^+(n) + g_{21}^+(n)u_{12}(n) + t_{22}(n)
\end{aligned} \tag{4.3.21}$$

$$\begin{aligned}
t_{22}(n+1)f_{22}^-(n) + t_{21}(n+1)g_{12}^-(n) + u_{21}(n+1)f_{12}^-(n) &= \\
&= f_{22}^+(n)t_{22}(n) + g_{21}^+(n)t_{12}(n) + f_{21}^+(n)u_{12}(n)
\end{aligned} \tag{4.3.22}$$

$$\begin{aligned}
t_{22}(n+1)g_{21}^-(n) + u_{21}(n+1)g_{11}^-(n) + f_{21}^-(n) &= \\
&= f_{22}^+(n)u_{21}(n) + g_{21}^+(n)u_{11}(n) + t_{21}(n)
\end{aligned} \tag{4.3.23}$$

$$\begin{aligned}
t_{22}(n+1)f_{21}^-(n) + u_{21}(n+1) + t_{21}(n+1)g_{11}^-(n) &= \\
&= f_{22}^+(n)t_{21}(n) + g_{21}^+(n) + f_{21}^+(n)u_{11}(n) .
\end{aligned} \tag{4.3.24}$$

Виникає питання, яким чином застосувати рівняння (4.3.13)–(4.3.24) аби одержати новий розв'язок загальної нелінійної системи, спираючись на попередній. Цілком очевидний і разом з тим непрактичний спосіб – це вилучити всі посередницькі функції Дарбу $u_{11}(n)$, $t_{12}(n)$, $u_{12}(n)$, $t_{22}(n)$, $u_{21}(n)$, $t_{21}(n)$ і одержати шість рівнянь, що пов'язують шість функцій $g_{11}^+(n)$, $f_{12}^+(n)$, $g_{12}^+(n)$, $f_{22}^+(n)$, $g_{21}^+(n)$, $f_{21}^+(n)$ нового розв'язку із шістьма функціями $g_{11}^-(n)$, $f_{12}^-(n)$, $g_{12}^-(n)$, $f_{22}^-(n)$, $g_{21}^-(n)$, $f_{21}^-(n)$ за припущенням відомого попереднього розв'язку. За означенням ці шість рівнянь встановлюють перетворення Беклунда (Bäcklund) між попереднім і новим розв'язками. Позаяк вислідні формули для перетворення Беклунда по суті є занадто громіздкими, то ми їх тут не подаємо. Однак сам факт їхнього існування надає упевненості в тому, що вихідні рівняння (4.3.13)–(4.3.24) слід розглядати як внутрішньо несуперечливий засіб у розбудові методу одягання Дарбу.

Засади методу одягання Дарбу полягають у відновлюванні функцій Дарбу, спираючись на певні загальні спектральні властивості ухваленого анзаца Дарбу, за посилу, що засівного розв'язка (представленого мінус-позначеними польовими функціями) нелінійної системи вже відомо заздалегідь. Після завершення цієї програми генерація нового (ужинкового) розв'язку (представленого плюс-позначеними польовими функціями) зводиться до розв'язування суто лінійних алгебричних рівнянь, вибраних належним чином з розгорненого запису (4.3.13)–(4.3.24) просторової умови сумісності (4.3.10). При найпростішому виборі матриці Дарбу (4.3.12) перші два рівняння (4.3.13) і (4.3.14) з розгорненого запису (4.3.13)–(4.3.24) явно показують, що лише чотири (а саме $u_{11}(n)$, $u_{12}(n)$, $t_{22}(n)$, $t_{21}(n)$) із шести функцій Дарбу здатні претендувати на справді наперед невідомі.

Аби досягти успіху в застосуванні методу одягання Дарбу до нашої загальної нелінійної системи (4.2.6)–(4.2.19), треба проаналізувати згорнуте еволюційне рівняння

$$\frac{d}{d\tau} \ln[\det S(n|z)] = \text{Sp } A^+(n|z) - \text{Sp } A^-(n|z) , \quad (4.3.25)$$

виведене з належно підготованої часової умови сумісності (4.3.11) внаслідок дії операції сліду. Отже, оскільки комбінація $\text{Sp } A^+(n|z) - \text{Sp } A^-(n|z)$ не залежить від спектрального параметра z , то величини

$$W_+(n) = t_{22}(n) - t_{21}(n)t_{12}(n) \quad (4.3.26)$$

$$W_0(n) = 1 + t_{22}(n)u_{11}(n) - t_{21}(n)u_{12}(n) - t_{12}(n)u_{21}(n) \quad (4.3.27)$$

$$W_-(n) = u_{11}(n) - u_{12}(n)u_{21}(n) , \quad (4.3.28)$$

що входять до виразу

$$\det S(n|z) = W_+(n)z^2 + W_0(n) + W_-(n)z^{-2} , \quad (4.3.29)$$

мають еволюціювати у спосіб, що приводить до ланцюжка рівнянь

$$\frac{d}{d\tau} \ln W_+(n) = \frac{d}{d\tau} \ln W_0(n) = \frac{d}{d\tau} \ln W_-(n) . \quad (4.3.30)$$

Як наслідок, функції $W_+(n)$, $W_0(n)$, $W_-(n)$ мусять відрізнятися між собою лише незалежними від часу коефіцієнтами. До того ж, за умови однорідности простору ці часонезалежні коефіцієнти мають бути незалежними і від просторової координати. Відтак, формула (4.3.29) для детермінанта матриці Дарбу набуває форми

$$\det S(n|z) = (z^2 + u_{11}) (z^{-2} + t_{22}) \frac{W_0(n)}{1 + u_{11}t_{22}}, \quad (4.3.31)$$

де параметри u_{11} і t_{22} постають незалежними як від часу, так і від координати, тоді як функції $t_{12}(n)$, $u_{12}(n)$ і $u_{21}(n)$, $t_{21}(n)$ прийнято такими, що швидко спадають до нуля на обох просторових нескінченностях. Одержаний вираз (4.3.31) показує, що всі чотири ($r = 1, 2, 3, 4$) корені z_r рівняння $\det S(n|z) = 0$ є незалежними як від часу, так і від координати.

З огляду на очевидну тотожність $\det S(n|z_r) = 0$, з означення перетворення Дарбу (4.3.9) безпосередньо впливає рівняння $\det X^+(n|z_r) = 0$. Остання рівність означає, що

$$\sum_{k=1}^2 X_{jk}^+(n|z_r) \varepsilon_k(z_r) = 0 \quad (4.3.32)$$

або ж детальніше

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 S_{ji}(n|z_r) X_{ik}^-(n|z_r) \varepsilon_k(z_r) = 0, \quad (4.3.33)$$

де $X_{jk}^+(n|z)$ і $S_{jk}(n|z)$ – матричні елементи матриць $X^+(n|z)$ і $S(n|z)$, відповідно. Тут усі вісім спектральних параметрів $\varepsilon_k(z_r)$ ($k = 1, 2; r = 1, 2, 3, 4$) змушені бути незалежними від часу τ і координати n . Це твердження має статус строго доведеної теореми.

Одержана формула (4.3.33) містить неоднорідну систему восьми лінійних алгебричних рівнянь ($j = 1, 2; r = 1, 2, 3, 4$), що уможливорює виразити невідомі функції Дарбу $u_{11}(n)$, $u_{12}(n)$, $t_{22}(n)$, $t_{21}(n)$ через *a priori* відомі складові частини матриці Дарбу і розв'язок $X^-(n|z)$ мінус-позначеної допоміжної лінійної задачі (4.3.5) і (4.3.6), заразом беручи до уваги спектральні параметри $\varepsilon_k(z_r)$ і корені z_r . Своєю чергою, розв'язок $X^-(n|z)$ повністю визначається

мінус-позначеним (засівним) розв'язком $g_{11}^-(n)$, $f_{12}^-(n)$, $g_{12}^-(n)$, $f_{22}^-(n)$, $g_{21}^-(n)$, $f_{21}^-(n)$ цікавої нам загальної нелінійної інтегровної системи (4.2.6)–(4.2.19). Отже, у поєднанні з попередньо одержаними розгорненими формулами (4.3.13)–(4.3.24) для просторової умови сумісності (4.3.10), ми приходимо до замкненої процедури одягання Дарбу, що уможлиблює згенерувати новий розв'язок $g_{11}^+(n)$, $f_{12}^+(n)$, $g_{12}^+(n)$, $f_{22}^+(n)$, $g_{21}^+(n)$, $f_{21}^+(n)$ загальної нелінійної системи (4.2.6)–(4.2.19), виходячи з уже відомого розв'язку $g_{11}^-(n)$, $f_{12}^-(n)$, $g_{12}^-(n)$, $f_{22}^-(n)$, $g_{21}^-(n)$, $f_{21}^-(n)$.

Принагідно варто зауважити, що спектральні коефіцієнти $\varepsilon_k(z_r)$ і корені z_r , які виникають в процедурі одягання Дарбу, відіграють таку саму роль, що й дискретні спектральні дані в методі оберненої задачі розсіяння [173, 34, 201, 202, 212, 187, 188, 4].

4.4 Симетрії дискретних спектральних даних $\varepsilon_k(z_r)$ і z_r , дотичні до нелінійної Шрьодінґерової системи з нелінійностями притягувального типу [220, 221]

Розглядаючи багатокomпонентну нелінійну Шрьодінґерову систему з нелінійностями притягувального типу (4.1.1)–(4.1.6) і враховуючи попарне комплексне спряження її польових змінних (4.2.20)–(4.2.25) та її параметрів зв'язку (4.2.26)–(4.2.29), легко показати, що за визначальної редукції (4.2.20)–(4.2.29) спектральній $L(n|z)$ і еволюційній $A(n|z)$ матрицям (4.2.4) і (4.2.5) (з матрицею $A(n|z)$ (4.2.5), заданою формулами (4.2.12)–(4.2.19)) властиві наступні співвідношення симетрії

$$\sigma_2[L(n|1/z^*)]^* \sigma_2 = L(n|z) \quad (4.4.1)$$

$$\sigma_3[L(n|-z)] \sigma_3 = L(n|z) \quad (4.4.2)$$

і

$$\sigma_2[A(n|1/z^*)]^* \sigma_2 = A(n|z) \quad (4.4.3)$$

$$\sigma_3[A(n| - z)]\sigma_3 = A(n|z) , \quad (4.4.4)$$

де символи σ_2 і σ_3 позначають другу

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4.5)$$

і третю

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.4.6)$$

матриці Паулі (Pauli). Як наслідок, аналогічні співвідношення симетрії

$$\sigma_2[X(n|1/z^*)]^*\sigma_2 = X(n|z) \quad (4.4.7)$$

$$\sigma_3[X(n| - z)]\sigma_3 = X(n|z) \quad (4.4.8)$$

є чинними також і для матричної функції $X(n|z)$. Схожі властивості мусять справджуватися і для мінус-позначених та плюс-позначених варіантів усіх трьох вищеінспектованих матриць, а також і для матриці Дарбу $S(n|z)$:

$$\sigma_2[S(n|1/z^*)]^*\sigma_2 = S(n|z) \quad (4.4.9)$$

$$\sigma_3[S(n| - z)]\sigma_3 = S(n|z) . \quad (4.4.10)$$

Нижче ми перелічимо кілька найрепрезентативніших висновків з вищевстановлених співвідношень симетрії.

Зокрема, ми маємо

$$t_{21}^*(n) = -u_{12}(n) \quad (4.4.11)$$

$$t_{22}^*(n) = +u_{11}(n) \quad (4.4.12)$$

$$t_{12}^*(n) = -u_{21}(n) . \quad (4.4.13)$$

Можна показати, що ці формули обґрунтовують рівність $t_{22}^* = u_{11}$, що спонукає до наступних параметризацій

$$u_{11} = -\exp(+2\gamma + 2i\kappa) \quad (4.4.14)$$

$$t_{22} = -\exp(+2\gamma - 2i\kappa) , \quad (4.4.15)$$

де γ і κ – дійсні параметри, незалежні від часу і координати. Тоді для коренів z_r рівняння $\det S(n|z) = 0$ (з $\det S(n|z)$, заданим формулою (4.3.31)) ми матимемо

$$z_1 = \exp(+\gamma + i\kappa) = -z_3 \quad (4.4.16)$$

$$z_2 = \exp(-\gamma + i\kappa) = -z_4 . \quad (4.4.17)$$

Інші важливі властивості

$$\varepsilon_1(-z_r)/\varepsilon_2(-z_r) = -\varepsilon_1(+z_r)/\varepsilon_2(+z_r) \quad (4.4.18)$$

$$\varepsilon_2^*(z_2)/\varepsilon_1^*(z_2) = -\varepsilon_1(z_1)/\varepsilon_2(z_1) \quad (4.4.19)$$

$$\varepsilon_2^*(z_4)/\varepsilon_1^*(z_4) = -\varepsilon_1(z_3)/\varepsilon_2(z_3) \quad (4.4.20)$$

вказують на наступні параметризації

$$\varepsilon_2(z_2)/\varepsilon_1(z_2) = +\exp(+d + ie) = -\varepsilon_2(z_4)/\varepsilon_1(z_4) \quad (4.4.21)$$

$$\varepsilon_2(z_1)/\varepsilon_1(z_1) = -\exp(-d + ie) = -\varepsilon_2(z_3)/\varepsilon_1(z_3) \quad (4.4.22)$$

з дійсними параметрами d і e , незалежними від часу і від координати.

Аналіз усіх наявних властивостей симетрії підштовхує до багатьох спрощень. Найважливішим серед них є здатність скоротити наполовину кількість лінійних алгебричних рівнянь, закодованих у формулі (4.3.33), що містить відомі $t_{12}(n)$, $u_{21}(n)$ і невідомі $u_{11}(n)$, $u_{12}(n)$, $t_{22}(n)$, $t_{21}(n)$ функції Дарбу. Після цього число лінійних алгебричних рівнянь вже збігається з числом невідомих функцій Дарбу, і спрощена система рівнянь стає легко розв'язною.

4.5 Багатокомпонентний солітонний розв'язок для нелінійної Шр'єдінґерової системи з нелінійностями притягувального типу [220, 221]

Покладаючись на результати попередніх двох підрозділів, побудуємо односолітонний розв'язок для нелінійної Шр'єдінґерової системи на стьожді трикутної ґратки (4.1.1)–(4.1.6) за нелінійностей притягувального типу.

Для цього в якості засівного (мінус-позначеного) розв'язку ми виберемо вакуумний розв'язок

$$f_{12}^-(n) = +q_+^-(n) = 0 \quad (4.5.1)$$

$$g_{12}^-(n) = -q_-^-(n) = 0 \quad (4.5.2)$$

$$g_{11}^-(n) = \mu^-(n) = \mu \quad (4.5.3)$$

$$g_{21}^-(n) = -r_+^-(n) = 0 \quad (4.5.4)$$

$$f_{21}^-(n) = +r_-^-(n) = 0 \quad (4.5.5)$$

$$f_{22}^-(n) = \nu^-(n) = \nu . \quad (4.5.6)$$

Як наслідок, мінус-позначені спектральна та еволюційна матриці стають незалежними від координатної змінної

$$L^-(n|z) = L^-(z) \quad (4.5.7)$$

$$A^-(n|z) = A^-(z) , \quad (4.5.8)$$

тоді як спектральна матриця $L^-(z)$ виявляється незалежною ще й від часової змінної.

Отже, мінус-позначене рівняння нульової кривини (4.3.3) спрощується до строгого співвідношення комутативності

$$A^-(z)L^-(z) = L^-(z)A^-(z) , \quad (4.5.9)$$

яке вказує, що матриці

$$L^-(z) = \begin{pmatrix} z^2 + \mu & 0 \\ 0 & \nu + z^{-2} \end{pmatrix} \quad (4.5.10)$$

і

$$A^-(z) = \begin{pmatrix} -i\alpha z^2 & 0 \\ 0 & +i\beta z^{-2} \end{pmatrix} \quad (4.5.11)$$

поділяють один і той же набір власних функцій

$$|x_k^-(z)\rangle = \begin{pmatrix} \langle 1|x_k^-(z)\rangle \\ \langle 2|x_k^-(z)\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{1k} \\ \delta_{2k} \end{pmatrix} \quad (4.5.12)$$

з індексом k , що пробігає значення 1 і 2, та величиною δ_{jk} , встановленою для дельта-символу Кронекера. Власні значення $\eta_k(z)$ та $\dot{\varphi}_k(z)$ матриць $L^-(z)$ і $A^-(z)$, відповідно, є такими:

$$\eta_1(z) = z^2 + \mu \quad (4.5.13)$$

$$\eta_2(z) = \nu + z^{-2} \quad (4.5.14)$$

і

$$\dot{\varphi}_1(z) = -i\alpha z^2 \quad (4.5.15)$$

$$\dot{\varphi}_2(z) = +i\beta z^{-2}. \quad (4.5.16)$$

Виявляється, що перші власні значення $\eta_1(z)$ і $\eta_2(z)$ збігаються з власними значеннями (4.2.35) і (4.2.36) граничного спектрального оператора $L(z)$, введеного в підрозділі 4.2. Цей факт підкреслює природжену властивість власних значень $\eta_j(z)$ бути нечутливими до вибору уподобаної схеми інтегрування.

Тепер можна легко пересвідчитися, що компоненти $X_{jk}^-(n|z)$ розв'язку $X^-(n|z)$ мінус-позначеної допоміжної задачі (4.3.5) і (4.3.6) слід взяти у формі

$$X_{jk}^-(n|z) = \langle j|x_k(z)\rangle [\eta_k(z)]^n \exp[\varphi_k(z)] \equiv \delta_{jk} [\eta_k(z)]^n \exp[\varphi_k(z)] \quad (4.5.17)$$

з функціями $\varphi_k(z)$, визначеними виразами

$$\varphi_1(z) = -iAz^2 + i\psi \quad (4.5.18)$$

$$\varphi_2(z) = +iBz^{-2} - i\psi . \quad (4.5.19)$$

Тут ψ – дійсний сталий параметр, тоді як функції A і B – розв'язки звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\dot{A} = \alpha \quad (4.5.20)$$

і

$$\dot{B} = \beta, \quad (4.5.21)$$

обмежені умовою комплексного спряження $B^* = A$.

Знаючи компоненти $X_{jk}^-(n|z)$ матричної функції $X^-(n|z)$, ми маємо знайти чотири шукані функції Дарбу $u_{11}(n)$, $u_{12}(n)$ і $t_{22}(n)$, $t_{21}(n)$. Це завдання є здійсненим за допомоги розв'язування двох вкорочених неоднорідних систем рівнянь, залучених до застереження (4.3.33), що обумовлює тотожності $\det S(n|z_r) = 0$ ($r = 1, 2, 3, 4$). Результати розрахунків є такими:

$$u_{11}(n) = U_{11}(n)/U_{00}(n) \quad (4.5.22)$$

$$u_{12}(n) = U_{12}(n)/U_{00}(n) \quad (4.5.23)$$

і

$$t_{22}(n) = T_{22}(n)/T_{00}(n) \quad (4.5.24)$$

$$t_{21}(n) = T_{21}(n)/T_{00}(n) , \quad (4.5.25)$$

де

$$\begin{aligned} U_{11}(n) = & X_{11}^-(n|z_2)X_{22}^-(n|z_1)\varepsilon_2(z_1)\varepsilon_1(z_2)z_2^2/z_1 - \\ & - X_{11}^-(n|z_1)X_{22}^-(n|z_2)\varepsilon_2(z_2)\varepsilon_1(z_1)z_1^2/z_2 \end{aligned} \quad (4.5.26)$$

$$U_{12}(n) = X_{11}^-(n|z_1)X_{11}^-(n|z_2)\varepsilon_1(z_2)\varepsilon_1(z_1)[z_1^2 - z_2^2] \quad (4.5.27)$$

$$U_{00}(n) = X_{11}^-(n|z_1)X_{22}^-(n|z_2)\varepsilon_2(z_2)\varepsilon_1(z_1)/z_2 - \\ - X_{11}^-(n|z_2)X_{22}^-(n|z_1)\varepsilon_2(z_1)\varepsilon_1(z_2)/z_1 \quad (4.5.28)$$

i

$$T_{22}(n) = X_{22}^-(n|z_1)X_{11}^-(n|z_2)\varepsilon_1(z_2)\varepsilon_2(z_1)z_2/z_1^2 - \\ - X_{22}^-(n|z_2)X_{11}^-(n|z_1)\varepsilon_1(z_1)\varepsilon_2(z_2)z_1/z_2^2 \quad (4.5.29)$$

$$T_{21}(n) = X_{22}^-(n|z_2)X_{22}^-(n|z_1)\varepsilon_2(z_1)\varepsilon_2(z_2)[1/z_2^2 - 1/z_1^2] \quad (4.5.30)$$

$$T_{00}(n) = X_{22}^-(n|z_2)X_{11}^-(n|z_1)\varepsilon_1(z_1)\varepsilon_2(z_2)z_1 - \\ - X_{22}^-(n|z_1)X_{11}^-(n|z_2)\varepsilon_1(z_2)\varepsilon_2(z_1)z_2 . \quad (4.5.31)$$

Позаяк функції Дарбу $u_{11}(n)$, $u_{12}(n)$ і $t_{22}(n)$, $t_{21}(n)$ вже знайдено, ми маємо підставити їх до десяти інформативних рівнянь (4.3.15)–(4.3.24), виведених з просторової умови сумісності (4.3.10), і відродити всі шість функцій $q_+^+(n)$, $q_-^+(n)$, $\mu^+(n)$ і $r_+^+(n)$, $r_-^+(n)$, $\nu^+(n)$, долучених до односолітонного розв'язку. Проводячи вказані розрахунки, ми мали справу лише з шістьма належним чином вибраними рівняннями, тоді як решта рівнянь знадобилися суто для перевірки одержаних результатів. Кінцевим формулам для багатоконпонентного односолітонного розв'язку вдалося надати досить естетичного вигляду

$$q_+^+(n) = + \sinh(2\gamma) \frac{\exp[+2i(\varkappa_+ + \varkappa_-)(n - \xi - y) + i\chi]}{\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n - s - x)]} \quad (4.5.32)$$

$$q_-^+(n) = - \sinh(2\gamma) \frac{\exp[+2i(\varkappa_+ + \varkappa_-)(n + \xi - y) + i\chi]}{\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n + s - x)]} \quad (4.5.33)$$

$$\mu^+(n) = \mu - \frac{\exp(+2i\varkappa) \sinh(2\gamma) \sinh[2(\gamma_+ + \gamma_- - \gamma)]}{\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n - s - x)] \cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n + s - x)]} \quad (4.5.34)$$

i

$$r_+^+(n) = + \sinh(2\gamma) \frac{\exp[-2i(\varkappa_+ + \varkappa_-)(n - \xi - y) - i\chi]}{\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n - s - x)]} \quad (4.5.35)$$

$$r_-^+(n) = - \sinh(2\gamma) \frac{\exp[-2i(\varkappa_+ + \varkappa_-)(n + \xi - y) - i\chi]}{\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n + s - x)]} \quad (4.5.36)$$

$$\nu^+(n) = \nu - \frac{\exp(-2i\varkappa) \sinh(2\gamma) \sinh[2(\gamma_+ + \gamma_- - \gamma)]}{\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n - s - x)] \cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n + s - x)]} . \quad (4.5.37)$$

Тут дві пари дійсних сталих параметрів γ_+ , \varkappa_+ і γ_- , \varkappa_- означено двома системами рівнянь

$$\exp(+2\gamma_+ + 2i\varkappa_+) = \exp(+2\gamma + 2i\varkappa) + \mu \quad (4.5.38)$$

$$\exp(+2\gamma_+ - 2i\varkappa_+) = \exp(+2\gamma - 2i\varkappa) + \nu \quad (4.5.39)$$

i

$$\exp(-2\gamma_- + 2i\varkappa_-) = \exp(-2\gamma + 2i\varkappa) + \mu \quad (4.5.40)$$

$$\exp(-2\gamma_- - 2i\varkappa_-) = \exp(-2\gamma - 2i\varkappa) + \nu , \quad (4.5.41)$$

відповідно. Інші три дійсні сталі параметри s , ξ , χ задано формулами

$$2s = 1 - \frac{\gamma}{\gamma_+ + \gamma_-} \quad (4.5.42)$$

$$2\xi = 1 - \frac{\varkappa}{\varkappa_+ + \varkappa_-} \quad (4.5.43)$$

$$\chi = \varkappa_+ + \varkappa_- + 4\varkappa + 2\psi - e. \quad (4.5.44)$$

Аби сконкретизувати дійсні величини x та y , треба в раніше означених функціях A і B виділити їхні дійсні та уявні частини:

$$A = \operatorname{Re}(A) + i\operatorname{Im}(A) \quad (4.5.45)$$

$$B = \operatorname{Re}(A) - i\operatorname{Im}(A) . \quad (4.5.46)$$

Тоді розгорнутий запис для функцій x та y подають вирази

$$x = -\frac{1}{2} - \frac{\gamma + d/2}{\gamma_+ + \gamma_-} - \frac{\sinh(2\gamma)}{\gamma_+ + \gamma_-} [\operatorname{Re}(A) \sin(2\kappa) + \operatorname{Im}(A) \cos(2\kappa)] \quad (4.5.47)$$

і

$$y = \frac{\cosh(2\gamma)}{\kappa_+ + \kappa_-} [\operatorname{Re}(A) \cos(2\kappa) - \operatorname{Im}(A) \sin(2\kappa)] , \quad (4.5.48)$$

відповідно. Отже часові залежності властиво дійсних функцій $\operatorname{Re}(A)$ та $\operatorname{Im}(A)$ визначають всю динаміку солітона.

З одержаного односолітонного розв'язку (4.5.32)–(4.5.37) видно, що величина $\sinh(2\gamma)$ характеризує амплітуду кожної основної солітонної компоненти, тоді як параметр 4γ виявляє себе як повне число збуджень в односолітонному розв'язку. Останнє твердження випливає із загальної формули для повного числа збуджень

$$N = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \left[\frac{1 + \mu(m)\nu(m) + q_+(m)r_+(m) + q_-(m)r_-(m)}{1 + \mu\nu} \right] , \quad (4.5.49)$$

застосованої до односолітонного розв'язку (4.5.32)–(4.5.37).

Величина x тісно пов'язана із середньою повздовжньою координатою солітонного хвильового пакету. Припускаючи тлумачення величини x коректним, величину

$$v = -\frac{\sinh(2\gamma)}{\gamma_+ + \gamma_-} [\operatorname{Re}(\alpha) \sin(2\kappa) + \operatorname{Im}(\alpha) \cos(2\kappa)] , \quad (4.5.50)$$

означену формулою $v = \dot{x}$, слід розуміти як повздовжню швидкість солітона.

Величина $1/2|\gamma_+ + \gamma_-|$, розглядувана за умови $|\gamma_+ + \gamma_-| \ll 1$, оцінює характерний розмір кожної основної солітонної компоненти в повздовжньому напрямі, проте за $|\gamma_+ + \gamma_-| \gtrsim 1$ така оцінка втрачає коректність внаслідок помітного прояву дискретності ґратки в так званому дихальному коливанні повздовжнього розміру солітона, спричиненому його повздовжнім рухом [200, 212]. У свою чергу, параметр $2(\kappa_+ + \kappa_-)$ є тісно пов'язаним з імпульсом солітона. Варто також зауважити, що параметр $2s$ описує розщеплення між середніми координатами верхньоланцюжкової та нижньоланцюжкової основних

солітонних компонент, тоді як параметр $4(\varkappa_+ + \varkappa_-)\xi$ визначає розщеплення між фазами цих компонент.

У випадку нульового тла $\mu = 0 = \nu$ для супутніх польових змінних $\mu(n)$ і $\nu(n)$ означення (4.5.38)–(4.5.41) параметрів γ_+ , \varkappa_+ і γ_- , \varkappa_- показують, що $\gamma_+ = \gamma = \gamma_-$ і $\varkappa_+ = \varkappa = \varkappa_-$. Інакше кажучи, ми можемо розуміти параметри $1/4\gamma$ і $4\varkappa$ як деякі первинні характеристики, споріднені, відповідно, до повздовжнього розміру солітона та імпульсу солітона. Ці первинні параметри збігаються з фізичними параметрами $1/2|\gamma_+ + \gamma_-|$ і $2(\varkappa_+ + \varkappa_-)$ лише за умови $\mu = 0 = \nu$.

4.6 Рекурентна схема послідовних перетворень Дарбу [220]

Аби процедура одягання Дарбу стала зручною для послідовного застосування, доцільно розглядати верхні індекси мінус та плюс, що відповідають засівному та ужинковому розв'язкам, як поточні. При цьому ми ухвалимо наступні заміни

$$L^-(n|z) \rightarrow L^{(s)}(n|z) \tag{4.6.1}$$

$$L^+(n|z) \rightarrow L^{(c)}(n|z) \tag{4.6.2}$$

$$X^-(n|z) \rightarrow X^{(s)}(n|z) \tag{4.6.3}$$

$$X^+(n|z) \rightarrow X^{(c)}(n|z) \tag{4.6.4}$$

$$S(n|z) \rightarrow S^{(c)}(n|z) \tag{4.6.5}$$

$$z_r \rightarrow z_r(c) \tag{4.6.6}$$

$$\varepsilon_k(z_r) \rightarrow \varepsilon_k^{(c)}(z_r(c)), \tag{4.6.7}$$

вважаючи $c \equiv s + 1$ довільним додатнім цілим числом. Тут перші два записи (4.6.1) і (4.6.2) передбачають, що аналогічні зміни слід ввести і до наявних амплітуд поля. Що ж стосується c -тої матриці Дарбу $S^{(c)}(n|z)$, то вона має бути задана виразом

$$S^{(c)}(n|z) = \begin{pmatrix} z^2 + u_{11}^{(c)}(n) & f_{12}^{(s)}(n)z + u_{12}^{(c)}(n)z^{-1} \\ t_{21}^{(c)}(n)z + g_{21}^{(s)}(n)z^{-1} & t_{22}^{(c)}(n) + z^{-2} \end{pmatrix} \quad (4.6.8)$$

у повній узгодженості з властивостями $t_{12}^{(c)}(n) = f_{12}^{(s)}(n)$ і $u_{12}^{(c)}(n) = g_{21}^{(s)}(n)$, встановленими раніше.

Якщо нульовий засівний розв'язок $g_{11}^{(0)}(n)$, $f_{12}^{(0)}(n)$, $g_{12}^{(0)}(n)$, $f_{22}^{(0)}(n)$, $g_{21}^{(0)}(n)$, $f_{21}^{(0)}(n)$ та відповідна нульова допоміжна матрична функція $X^{(0)}(n|z)$ відомі, тоді N -тий ужинковий розв'язок $g_{11}^{(N)}(n)$, $f_{12}^{(N)}(n)$, $g_{12}^{(N)}(n)$, $f_{22}^{(N)}(n)$, $g_{21}^{(N)}(n)$, $f_{21}^{(N)}(n)$ визначають наступні рекурентні формули

$$g_{11}^{(c)}(n) = G_{11}^{(c)}(n)/D_{00}^{(c)}(n) \quad (4.6.9)$$

$$f_{12}^{(c)}(n) = F_{12}^{(c)}(n)/D_{00}^{(c)}(n) \quad (4.6.10)$$

$$g_{12}^{(c)}(n) = u_{12}^{(c)}(n+1) \quad (4.6.11)$$

і

$$f_{22}^{(c)}(n) = F_{22}^{(c)}(n)/D_{00}^{(c)}(n) \quad (4.6.12)$$

$$g_{21}^{(c)}(n) = G_{21}^{(c)}(n)/D_{00}^{(c)}(n) \quad (4.6.13)$$

$$f_{21}^{(c)}(n) = t_{21}^{(c)}(n+1), \quad (4.6.14)$$

де

$$\begin{aligned} G_{11}^{(c)}(n) = & \left[u_{11}^{(c)}(n+1)g_{11}^{(s)}(n) + u_{12}^{(c)}(n+1)f_{21}^{(s)}(n) + f_{12}^{(s)}(n+1)g_{21}^{(s)}(n) - \right. \\ & \left. - u_{12}^{(c)}(n+1)t_{21}^{(c)}(n) \right] t_{22}^{(c)}(n) - g_{21}^{(s)}(n) \left[u_{11}^{(c)}(n+1)f_{12}^{(s)}(n) + \right. \\ & \left. + f_{12}^{(s)}(n+1)f_{22}^{(s)}(n) + g_{12}^{(s)}(n) - u_{12}^{(c)}(n) \right] \end{aligned} \quad (4.6.15)$$

$$\begin{aligned} F_{12}^{(c)}(n) = & \left[u_{11}^{(c)}(n+1)f_{12}^{(s)}(n) + f_{12}^{(s)}(n+1)f_{22}^{(s)}(n) + g_{12}^{(s)}(n) - u_{12}^{(c)}(n) \right] u_{11}^{(c)}(n) - \\ & - f_{12}^{(s)}(n) \left[u_{11}^{(c)}(n+1)g_{11}^{(s)}(n) + u_{12}^{(c)}(n+1)f_{21}^{(s)}(n) + \right. \\ & \left. + f_{12}^{(s)}(n+1)g_{21}^{(s)}(n) - u_{12}^{(c)}(n+1)t_{21}^{(c)}(n) \right] \end{aligned} \quad (4.6.16)$$

$$D_{00}^{(c)}(n) = u_{11}^{(c)}(n)t_{22}^{(c)}(n) - g_{21}^{(s)}(n)f_{12}^{(s)}(n) \quad (4.6.17)$$

$$\begin{aligned} F_{22}^{(c)}(n) = & \left[t_{22}^{(c)}(n+1)f_{22}^{(s)}(n) + t_{21}^{(c)}(n+1)g_{12}^{(s)}(n) + g_{21}^{(s)}(n+1)f_{12}^{(s)}(n) - \right. \\ & \left. - t_{21}^{(c)}(n+1)u_{12}^{(c)}(n) \right] u_{11}^{(c)}(n) - f_{12}^{(s)}(n) \left[t_{22}^{(c)}(n+1)g_{21}^{(s)}(n) + \right. \\ & \left. + g_{21}^{(s)}(n+1)g_{11}^{(s)}(n) + f_{21}^{(s)}(n) - t_{21}^{(c)}(n) \right] \end{aligned} \quad (4.6.18)$$

$$\begin{aligned} G_{21}^{(c)}(n) = & \left[t_{22}^{(c)}(n+1)g_{21}^{(s)}(n) + g_{21}^{(s)}(n+1)g_{11}^{(s)}(n) + f_{21}^{(s)}(n) - t_{21}^{(c)}(n) \right] t_{22}^{(c)}(n) - \\ & - g_{21}^{(s)}(n) \left[t_{22}^{(c)}(n+1)f_{22}^{(s)}(n) + t_{21}^{(c)}(n+1)g_{12}^{(s)}(n) + \right. \\ & \left. + g_{21}^{(s)}(n+1)f_{12}^{(s)}(n) - t_{21}^{(c)}(n+1)u_{12}^{(c)}(n) \right], \end{aligned} \quad (4.6.19)$$

а верхній індекс s пробігає цілі додатні значення від 1 до N , тоді як $s = c - 1$. Тут c -ті функції Дарбу $u_{11}^{(c)}(n)$, $u_{12}^{(c)}(n)$ і $t_{22}^{(c)}(n)$, $t_{21}^{(c)}(n)$ задано формулами

$$u_{11}^{(c)}(n) = U_{11}^{(c)}(n)/U_{00}^{(c)}(n) \quad (4.6.20)$$

$$u_{12}^{(c)}(n) = U_{12}^{(c)}(n)/U_{00}^{(c)}(n) \quad (4.6.21)$$

і

$$t_{22}^{(c)}(n) = T_{22}^{(c)}(n)/T_{00}^{(c)}(n) \quad (4.6.22)$$

$$t_{21}^{(c)}(n) = T_{21}^{(c)}(n)/T_{00}^{(c)}(n), \quad (4.6.23)$$

де

$$\begin{aligned} U_{11}^{(c)}(n) = & Y_1^{(s)}(n|z_2(c))Y_2^{(s)}(n|z_1(c))z_2^2(c)/z_1(c) - \\ & - Y_1^{(s)}(n|z_1(c))Y_2^{(s)}(n|z_2(c))z_1^2(c)/z_2(c) + \\ & + f_{12}^{(s)}(n)Y_2^{(s)}(n|z_1(c))Y_2^{(s)}(n|z_2(c)) [z_2(c)/z_1(c) - z_1(c)/z_2(c)] \end{aligned} \quad (4.6.24)$$

$$\begin{aligned} U_{12}^{(c)}(n) = & Y_1^{(s)}(n|z_1(c))Y_1^{(s)}(n|z_2(c)) [z_1^2(c) - z_2^2(c)] + \\ & + f_{12}^{(s)}(n) \left[Y_2^{(s)}(n|z_1(c))Y_1^{(s)}(n|z_2(c))z_1(c) - \right. \\ & \left. - Y_2^{(s)}(n|z_2(c))Y_1^{(s)}(n|z_1(c))z_2(c) \right] \end{aligned} \quad (4.6.25)$$

$$\begin{aligned}
U_{00}^{(c)}(n) &= Y_1^{(s)}(n|z_1(c))Y_2^{(s)}(n|z_2(c))/z_2(c) - \\
&- Y_1^{(s)}(n|z_2(c))Y_2^{(s)}(n|z_1(c))/z_1(c)
\end{aligned} \tag{4.6.26}$$

i

$$\begin{aligned}
T_{22}^{(c)}(n) &= Y_2^{(s)}(n|z_1(c))Y_1^{(s)}(n|z_2(c))z_2(c)/z_1^2(c) - \\
&- Y_2^{(s)}(n|z_2(c))Y_1^{(s)}(n|z_1(c))z_1(c)/z_2^2(c) + \\
&+ g_{21}^{(s)}(n)Y_1^{(s)}(n|z_2(c))Y_1^{(s)}(n|z_1(c)) [z_2(c)/z_1(c) - z_1(c)/z_2(c)]
\end{aligned} \tag{4.6.27}$$

$$\begin{aligned}
T_{21}^{(c)}(n) &= Y_2^{(s)}(n|z_2(c))Y_2^{(s)}(n|z_1(c)) [1/z_2^2(c) - 1/z_1^2(c)] + \\
&+ g_{21}^{(s)}(n) \left[Y_1^{(s)}(n|z_2(c))Y_2^{(s)}(n|z_1(c))/z_2(c) - \right. \\
&\left. - Y_1^{(s)}(n|z_1(c))Y_2^{(s)}(n|z_2(c))/z_1(c) \right]
\end{aligned} \tag{4.6.28}$$

$$\begin{aligned}
T_{00}^{(c)}(n) &= Y_2^{(s)}(n|z_2(c))Y_1^{(s)}(n|z_1(c))z_1(c) - \\
&- Y_2^{(s)}(n|z_1(c))Y_1^{(s)}(n|z_2(c))z_2(c)
\end{aligned} \tag{4.6.29}$$

із введеним скороченим записом

$$Y_j^{(s)}(n|z_r(c)) = \sum_{k=1}^2 X_{jk}^{(s)}(n|z_r(c))\varepsilon_k^{(c)}(z_r(c)). \tag{4.6.30}$$

Всі ці формули (4.6.8)–(4.6.30) належить доповнити співвідношенням перетворення Дарбу

$$X^{(c)}(n|z) = S^{(c)}(n|z)X^{(s)}(n|z) \tag{4.6.31}$$

як неодмінної частини всієї рекурсивної процедури.

У випадку вакуумного нульового засівного розв'язку (4.5.1)–(4.5.6), пов'язаного із системою з притягувальним типом нелінійностей (4.1.1)–(4.1.6), коли

$$f_{jk}^{(0)}(n) = \nu \delta_{jk} \tag{4.6.32}$$

$$g_{jk}^{(0)}(n) = \mu \delta_{jk} \quad (4.6.33)$$

$$X_{jk}^{(0)}(n|z) = \delta_{jk} [\eta_k(z)]^n \exp[\varphi_k(z)] , \quad (4.6.34)$$

із загальних формул (4.6.8)–(4.6.30) впливає перший ужинковий розв’язок $g_{11}^{(1)}(n)$, $f_{12}^{(1)}(n)$, $g_{12}^{(1)}(n)$, $f_{22}^{(1)}(n)$, $g_{21}^{(1)}(n)$, $f_{21}^{(1)}(n)$ односолітонного типу (4.5.32)–(4.5.37). Постає питання, чи можна ідентифікувати N -тий ужинковий розв’язок, заснований на вакуумному нульовому засівному розв’язку (4.6.32), (4.6.33), як N -солітонний розв’язок. Нижче ми наведемо деякі переконливі аргументи на користь позитивної відповіді.

Перш за все ми параметризуємо корені $z_1(c)$ і $z_2(c)$ рівняння $\det S^{(c)}(n|z) = 0$ за допомоги формул

$$z_1(c) = \exp[+\gamma(c) + i\kappa(c)] \quad (4.6.35)$$

$$z_2(c) = \exp[-\gamma(c) + i\kappa(c)] , \quad (4.6.36)$$

де індекс c пробігає цілі додатні значення від 1 до N . Враховуючи, що величина $\sinh[2\gamma(1)]$ визначає амплітуду будь-якої з основних польових функцій у випадку суто односолітонного розв’язку, ми зосередимося на другому ужинковому розв’язку, що характеризується параметрами $\gamma(1)$ і $\gamma(2)$ з параметром $\gamma(1)$, успадкованим від односолітонного засівного розв’язку. Аби досягнути двосолітонності структури другого засівного розв’язку, достатньо показати, що в граничному випадку зниклого засівного параметра $\gamma(1)$ розв’язок виживає як новоутворений солітон з амплітудою кожної основної польової функції, визначеною величиною $\sinh[2\gamma(2)]$. Найпростіший спосіб перевірити таке твердження забезпечується взаємно однозначною відповідністю між фундаментальною системою рівнянь

$$\sum_{k=1}^2 S_{jk}^{(1)}(n|z_r(1)) X_{kk}^{(0)}(n|z_r(1)) \varepsilon_k^{(1)}(z_r(1)) = 0 , \quad (4.6.37)$$

пов’язаною із суто односолітонним розв’язком, та її двійником

$$\sum_{k=1}^2 S_{jk}^{(2)}(n|z_r(2)) X_{kk}^{(0)}(n|z_r(2)) \omega_k^{(2)}(z_r(2)) = 0 , \quad (4.6.38)$$

пов'язаним з другим ужинковим розв'язком, взятим в границі зникомого $\gamma(1)$. Дійсно, структури матриць Дарбу в першій (4.6.37) і останній (4.6.38) системах є суттєво подібними, оскільки $f_{12}^{(0)}(n) = 0 = g_{21}^{(0)}(n)$ і $f_{12}^{(1)}(n) = 0 = g_{21}^{(1)}(n)$. До того ж, перенормовані параметри $\omega^{(2)}(z_r(2))$, що входять до другої системи (4.6.38), задано формулами

$$\omega_1^{(2)}(z_r(2)) = \{z_r^2(2) - \exp[+2i\mathcal{K}(1)]\} \varepsilon_1^{(2)}(z_r(2)) \quad (4.6.39)$$

$$\omega_2^{(2)}(z_r(2)) = \{z_r^{-2}(2) - \exp[-2i\mathcal{K}(1)]\} \varepsilon_2^{(2)}(z_r(2)) , \quad (4.6.40)$$

які, вочевидь, гарантують симетрію

$$\left[\omega_2^{(2)}(z_2(2)) / \omega_1^{(2)}(z_2(2)) \right]^* = -\omega_1^{(2)}(z_1(2)) / \omega_2^{(2)}(z_1(2)) , \quad (4.6.41)$$

що є ізоморфною до первинної симетрії

$$\left[\varepsilon_2^{(2)}(z_2(2)) / \varepsilon_1^{(2)}(z_2(2)) \right]^* = -\varepsilon_1^{(2)}(z_1(2)) / \varepsilon_2^{(2)}(z_1(2)) . \quad (4.6.42)$$

Таким чином, з огляду на симетрію

$$\left[\varepsilon_2^{(1)}(z_2(1)) / \varepsilon_1^{(1)}(z_2(1)) \right]^* = -\varepsilon_1^{(1)}(z_1(1)) / \varepsilon_2^{(1)}(z_1(1)) , \quad (4.6.43)$$

властивості параметрів $\varepsilon_k^{(1)}(z_r(1))$ і $\omega_k^{(2)}(z_r(2))$ є подібними. Нарешті, відповідність між функціями $X_{kk}^{(0)}(n|z_r(1))$ і $X_{kk}^{(0)}(n|z_r(2))$ видається самоочевидною.

За індукцією ми можемо стверджувати, що N -тий ужинковий розв'язок, заснований на вакуумному нульовому засівному розв'язку, слід трактувати як N -солітонний розв'язок.

4.7 Нескінченна множина локальних густин як передумова для інтегровності системи в сенсі Ліувілля [213, 221]

Інтегровність за Ліувіллем (Liouville) нелінійної системи, заданої на нескінченному просторовому носіїві, означає, що існує нескінченна множина збережних величин, попарно інволютивних (комутативних) поміж собою [190]. Проте, вже щонайменше знання кількох локальних густин дає добру нагоду досліджувати динаміку системи. Тут під терміном “локальна густина” ми маємо на увазі густину $\rho(n)$, що входить до локального закону збереження (аналога рівняння неперервності в дискретному просторі)

$$\dot{\rho}(n) = J(n|n-1) - J(n+1|n), \quad (4.7.1)$$

де величину $J(n+1/2|n-1/2)$ належить трактувати як потік. Що стосується величини $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho(n)$, то вона, вочевидь, зберігається, якщо значення потоку на обох просторових нескінченностях збігаються. Розглядаючи нашу загальну інтегровну систему (4.2.6)–(4.2.19), ми вважатимемо, що останню вимогу виконано для всієї нескінченної множини потоків шляхом правильного вибору граничних умов для прототипових польових змінних.

У цьому підрозділі ми представимо у явному вигляді кілька найнижчих локальних законів збереження із нескінченної ієрархії, пов’язаної із загальною інтегровною системою (4.2.6)–(4.2.19). Три з них випливають з універсального локального закону збереження [221]

$$\frac{d}{d\tau} \ln [\det L(n|z)] = \text{Sp } A(n+1|z) - \text{Sp } A(n|z), \quad (4.7.2)$$

який є безпосереднім наслідком рівняння нульової кривини (4.2.1) за умови, що $\det L(n|z) \neq 0$, тоді як решту рівнянь породжує пряма рекурсивна процедура [221], узагальнена версія якої [213] придатна для будь-якої напівдискретної інтегровної системи, пов’язаної з просторово-одновимірною допоміжною спектральною задачею довільного порядку.

Варто зауважити, що ідея про застосування прямої рекурсивної техніки

для ґенерування законів збереження вперше постала в піонерських працях Конно (Konno), Санукі (Sanuki), Ічікаві (Ichikawa) [92] та Вадаті (Wadati), Санукі (Sanuki), Конно (Konno) [239], які зосереджувалися виключно на неперервних інтегровних нелінійних системах. У випадку напівдискретних інтегровних систем цей підхід переформулювали Тсучіда (Tsuchida), Уджіно (Ujino) і Вадаті (Wadati) [187, 188]. Однак, на відміну від узагальненої рекурсивної процедури [213], усі ці праці [92, 239, 187, 188] мали справу лише з найпростішими версіями прямої рекурсивної процедури і обмежувались лише допоміжними спектральними задачами другого порядку в сенсі Кодрі (Caudrey) [34, 201, 202].

Почнемо з локальних законів збереження, що походять з універсального закону збереження (4.7.2). При цьому ми скористаємося двовимірними матричними представленнями (4.2.4) і (4.2.5) для спектрального $L(n|z)$ та еволюційного $A(n|z)$ операторів з матричними елементами $A_{jk}(n|z)$, заданими в термінах прототипових польових змінних (4.2.12)–(4.2.19). Оскільки величина $\det L(n|z)$ є поліномом Лорана (Laurent) за парними степенями спектрального параметра, а величина $\text{Sp } A(n+1|z) - \text{Sp } A(n|z)$ не залежить від спектрального параметра зовсім, то локальні закони збереження, породжені універсальним законом збереження (4.7.2), постають у такому вигляді

$$\dot{\rho}_+(n) = J_0(n|n-1) - J_0(n+1|n) \quad (4.7.3)$$

$$\dot{\rho}_0(n) = J_0(n|n-1) - J_0(n+1|n) \quad (4.7.4)$$

$$\dot{\rho}_-(n) = J_0(n|n-1) - J_0(n+1|n) . \quad (4.7.5)$$

Тут локальні густини $\rho_+(n)$, $\rho_0(n)$, $\rho_-(n)$ задано виразами

$$\rho_+(n) = \ln [f_{22}(n) - f_{21}(n)f_{12}(n)] \quad (4.7.6)$$

$$\rho_0(n) = \ln [1 + g_{11}(n)f_{22}(n) - f_{12}(n)g_{21}(n) - g_{12}(n)f_{21}(n)] \quad (4.7.7)$$

$$\rho_-(n) = \ln [g_{11}(n) - g_{12}(n)g_{21}(n)] , \quad (4.7.8)$$

а потоки виявляються однаковими для усіх трьох локальних законів збереження, позаяк кожен з них пов'язаний зі спільною величиною

$$J_0(n|n-1) = b_{11}f_{12}(n)f_{21}(n-1) + c_{22}g_{21}(n)g_{12}(n-1) . \quad (4.7.9)$$

Структура найнижчих локальних законів збереження (4.7.3)–(4.7.5) вказує на ланцюжок рівнянь $\dot{\rho}_+(n) = \dot{\rho}_0(n) = \dot{\rho}_-(n)$. Як наслідок, функції $\exp[\rho_+(n)]$, $\exp[\rho_0(n)]$, $\exp[\rho_-(n)]$ мають відрізнитися між собою лише коефіцієнтами, незалежними від часової змінної τ . Аби вберегти однорідність простору, ці коефіцієнти слід розглядати як незалежні і від просторової змінної n також. Твердження цього абзацу у застосуванні до інтегрованої системи з нелінійностями притягувального типу (4.1.1)–(4.1.6) приводять до заявлених раніше природніх в'язей (4.1.7) і (4.1.8) з часонезалежними фоновими параметрами μ і ν .

Аби перейти до наступних локальних законів збереження, ми коротко викладемо головні особливості прямої рекурсивної техніки в запропонованій нами загальній формі [213], розглядаючи спектральний $L(n|z)$ та еволюційний $A(n|z)$ оператори як $R \times R$ квадратні матриці (де $\det L(n|z) \neq 0$), без жодного посилення на дані розсіяння допоміжної спектральної задачі чи на Гамільтонову (Hamilton) структуру асоційованої інтегрованої системи. Тут ми не накладаємо жодних спрощувальних обмежень на порядок спектрального оператора з тим, аби він міг навіть збігатися з рангом R відповідної матриці.

Перш за все ми маємо оперувати із системою допоміжних функцій $\Gamma_{jk}(n|z)$, підпорядкованих правилу

$$\Gamma_{ji}(n|z)\Gamma_{ik}(n|z) = \Gamma_{jk}(n|z), \quad (4.7.10)$$

так аби задовольнити систему просторових рівнянь Ріккати (Riccati)

$$\Gamma_{jk}(n+1|z) \sum_{i=1}^R L_{ki}(n|z)\Gamma_{ik}(n|z) = \sum_{i=1}^R L_{ji}(n|z)\Gamma_{ik}(n|z) . \quad (4.7.11)$$

Тут величини $L_{jk}(n|z)$ означають матричні елементи спектрального оператора $L(n|z)$. Загальна властивість (4.7.10) накладає обмеження на допоміжні функції $\Gamma_{jk}(n|z)$ так, що лише $R-1$ з них можна розглядати як справді незале-

жні. Наприклад, маючи справу зі спектральним оператором другого порядку ($R = 2$), достатньо використовувати лише одну допоміжну функцію, тоді як спираючись на спектральний оператор третього порядку ($R = 3$), ми маємо залучити вже дві допоміжні функції.

Іншою ключовою складовою частиною загального підходу є сукупність твірних рівнянь

$$\frac{d}{d\tau} \ln M_{jj}(n|z) = B_{jj}(n+1|z) - B_{jj}(n|z) \quad (4.7.12)$$

з функціями $M_{jj}(n|z)$ та $B_{jj}(n|z)$, заданими виразами

$$M_{jj}(n|z) = \sum_{i=1}^R L_{ji}(n|z) \Gamma_{ij}(n|z) \quad (4.7.13)$$

і

$$B_{jj}(n|z) = \sum_{i=1}^R A_{ji}(n|z) \Gamma_{ij}(n|z), \quad (4.7.14)$$

де $A_{jk}(n|z)$ – матричні елементи еволюційного оператора $A(n|z)$.

Аби згенерувати ієрархію локальних законів збереження, ми мусимо шукати розв'язки рівнянь Ріккати (4.7.11) у формі деякого прийняттого степеневого ряду відносно спектрального параметра z або оберненого спектрального параметра $1/z$. Потім, ввівши результат обчислення до твірних рівнянь (4.7.12) і звівши члени з однаковими степенями z або $1/z$, ми можемо прийти до нескінченної ієрархії локальних законів збереження. Локальна густина кожного локального закону збереження диктується винятково спектральним оператором, тоді як локальні потоки – поєднанням спектрального та еволюційного операторів, оскільки величини $\ln M_{jj}(n|z)$ слід розуміти як твірні функції локальних густин, а $B_{jj}(n|z)$ – як твірні функції локальних потоків.

У нашому випадку спектральної $L(n|z)$ (4.2.4) та еволюційної $A(n|z)$ (4.2.5) квадратних матриць другого порядку система просторових рівнянь Ріккати зводиться до двох взаємно еквівалентних рівнянь

$$\begin{aligned} & \Gamma_{12}(n+1|z) [f_{21}(n)z + g_{21}(n)z^{-1}] \Gamma_{12}(n|z) + \Gamma_{12}(n+1|z) [f_{22}(n) + z^{-2}] \\ & = [z^2 + g_{11}(n)] \Gamma_{12}(n|z) + f_{12}(n)z + g_{12}(n)z^{-1} \end{aligned} \quad (4.7.15)$$

i

$$\begin{aligned} & \Gamma_{21}(n+1|z) [f_{12}(n)z + g_{12}(n)z^{-1}] \Gamma_{21}(n|z) + \Gamma_{21}(n+1|z) [z^2 + g_{11}(n)] \\ & = [f_{22}(n) + z^{-2}] \Gamma_{21}(n|z) + f_{21}(n)z + g_{21}(n)z^{-1}. \end{aligned} \quad (4.7.16)$$

Отже, розвиваючи рекурсивну процедуру за $|z| \rightarrow 0$, варто розглянути перше (4.7.15) з двох рівнянь і шукати функцію $\Gamma_{12}(n|z)$ у вигляді

$$\Gamma_{12}(n|z) = z \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{12}(n|0|k) z^{2k}. \quad (4.7.17)$$

Навпаки, розвиваючи рекурсивну процедуру за $|z| \rightarrow \infty$, розумно використати друге (4.7.16) із двох альтернативних рівнянь і шукати функцію $\Gamma_{21}(n|z)$ у вигляді

$$\Gamma_{21}(n|z) = z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{21}(n|\infty|k) z^{-2k}. \quad (4.7.18)$$

Належні обчислення в межах кожної зі щойно заявлених рекурентних схем продукують для двох найпростіших (але дуже важливих) локальних законів збереження наступні вирази

$$\dot{\rho}_{12+}(n) = J_{12+}(n|n-1) - J_{12+}(n+1|n) \quad (4.7.19)$$

$$\dot{\rho}_{21-}(n) = J_{21-}(n|n-1) - J_{21-}(n+1|n), \quad (4.7.20)$$

де

$$\rho_{12+}(n) = f_{22}(n) + g_{21}(n)g_{12}(n-1) \quad (4.7.21)$$

$$\rho_{21-}(n) = g_{11}(n) + f_{12}(n)f_{21}(n-1) \quad (4.7.22)$$

$$\begin{aligned}
J_{12+}(n+1|n) &= c_{22}g_{21}(n+1)g_{12}(n)f_{22}(n) - \\
&\quad - c_{22}g_{21}(n+1)f_{12}(n) - f_{21}(n)b_{11}g_{12}(n) - \\
&\quad - c_{22}g_{21}(n+1)[g_{11}(n) - g_{12}(n)g_{21}(n)]g_{12}(n-1)
\end{aligned} \tag{4.7.23}$$

$$\begin{aligned}
J_{21-}(n+1|n) &= b_{11}f_{12}(n+1)f_{21}(n)g_{11}(n) - \\
&\quad - b_{11}f_{12}(n+1)g_{21}(n) - g_{12}(n)c_{22}f_{21}(n) - \\
&\quad - b_{11}f_{12}(n+1)[f_{22}(n) - f_{21}(n)f_{12}(n)]f_{21}(n-1).
\end{aligned} \tag{4.7.24}$$

Інші дві прийнятні, але громіздкіші рекурсивні процедури обчислювання ґрунтуються на розкладанні в ряд

$$\Gamma_{21}(n|z) = z \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{21}(n|0|k) z^{2k} \tag{4.7.25}$$

за умови $|z| \rightarrow 0$ і розкладанні в ряд

$$\Gamma_{12}(n|z) = z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{12}(n|\infty|k) z^{-2k} \tag{4.7.26}$$

за умови $|z| \rightarrow \infty$. Ці розклади було використано, відповідно, в другому (4.7.16) та першому (4.7.15) з двох еквівалентних рівнянь Ріккаті. Результати обчислень відтворюють два локальні закони збереження (4.7.3) і (4.7.5), вже виведені раніше з універсального локального закону збереження (4.7.2), та продукують додатково серію нових. Найпростішими і разом з тим важливими серед них є локальні закони збереження

$$\dot{\rho}_{21+}(n) = J_{21+}(n|n-1) - J_{21+}(n+1|n) \tag{4.7.27}$$

$$\dot{\rho}_{12-}(n) = J_{12-}(n|n-1) - J_{12-}(n+1|n) \tag{4.7.28}$$

де

$$\rho_{21+}(n) = f_{22}(n) + g_{21}(n+1)g_{12}(n) \tag{4.7.29}$$

$$\rho_{12-}(n) = g_{11}(n) + f_{12}(n+1)f_{21}(n) \quad (4.7.30)$$

i

$$\begin{aligned} J_{21+}(n|n-1) &= c_{22}f_{22}(n)g_{21}(n)g_{12}(n-1) - \\ &\quad - c_{22}f_{21}(n)g_{12}(n-1) - g_{21}(n)b_{11}f_{12}(n) - \\ &\quad - c_{22}g_{21}(n+1)[g_{11}(n) - g_{12}(n)g_{21}(n)]g_{12}(n-1) \end{aligned} \quad (4.7.31)$$

$$\begin{aligned} J_{12-}(n|n-1) &= b_{11}g_{11}(n)f_{12}(n)f_{21}(n-1) - \\ &\quad - b_{11}g_{12}(n)f_{21}(n-1) - f_{12}(n)c_{22}g_{21}(n) - \\ &\quad - b_{11}f_{12}(n+1)[f_{22}(n) - f_{21}(n)f_{12}(n)]f_{21}(n-1). \end{aligned} \quad (4.7.32)$$

Оскільки будь-яку функцію у формі $F(n+1|n) - F(n|n-1)$ можна завжди взяти за густину в деякому тривіальному локальному законі збереження, то локальні густини $\rho_{12+}(n)$ і $\rho_{21+}(n)$ належить розглядати як фізично еквівалентні. Очевидно, таке саме твердження стосується також і локальних густин $\rho_{21-}(n)$ та $\rho_{12-}(n)$.

4.8 Гамільтонове представлення первинної нелінійної Шр'юдінгерової системи з притягувальними нелінійностями [220, 221]

Тепер, коли найнижчі локальні густини загальної напівдискретної інтегрованої нелінійної системи вже відомі, ми можемо підлаштувати їх до потреб окремої редукованої системи з метою віднайти її Гамільтонове (Hamilton) представлення в термінах правильно означених Гамільтонової функції і Пуассонової дужки (Пуассонової структури). Надалі ми цікавитимемося випадком нелінійної Шр'юдінгерової системи на стьожці трикутної ґратки (4.1.1)–(4.1.6) за притягувального типу нелінійностей.

Аби бути послідовними, ми маємо взяти до уваги, що властивість $\dot{\rho}_+(n) = \dot{\rho}_0(n) = \dot{\rho}_-(n)$ інспірує дві природні в'язі (4.1.7) і (4.1.8), які вказують, що польові змінні $\mu(n)$ і $\nu(n)$ (називані супутніми змінними) насправді залежать

від основних польових змінних $q_+(n)$, $q_-(n)$ і $r_+(n)$, $r_-(n)$.

Внаслідок цього, аби застосувати загальні принципи Гамільтонового підходу [59, 124, 249], ми для початку мусимо працювати лише з основними рівняннями (*тобто* рівняннями (4.1.1)–(4.1.4)) аби спробувати переписати їх в уніфікованій формі

$$\dot{y}_\lambda(n) = \sum_{\varkappa=1}^4 \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{\lambda\varkappa}(n|m) \frac{\partial H}{\partial y_\varkappa(m)} \quad (4.8.1)$$

з величиною H , задіяною в якості Гамільтонової функції, і метричними елементами (елементами структурної або симплектичної матриці) $J_{\lambda\varkappa}(n|m)$, підпорядкованими умові антисиметричності $J_{\varkappa\lambda}(m|n) = -J_{\lambda\varkappa}(n|m)$. Тут $y_1(n)$, $y_2(n)$, $y_3(n)$, $y_4(n)$ – деякий повний набір незалежних польових змінних, записаних в уніфікованій формі. Вищенаведений вираз (4.8.1) є досить універсальним, позаяк він допускає велику низку конкретних функційних співвідношень між уніфікованими і основними польовими змінними. У цьому підрозділі ми приймемо найпростішу лінійну відповідність між цими двома множинами польових змінних, задану співвідношеннями

$${}_p y_1(n) = q_-(n) \quad (4.8.2)$$

$${}_p y_2(n) = q_+(n) \quad (4.8.3)$$

$${}_p y_3(n) = r_-(n) \quad (4.8.4)$$

$${}_p y_4(n) = r_+(n) . \quad (4.8.5)$$

Тут індекс p перед величиною ${}_p y_\lambda$ вказує, що насправді ми маємо справу з первинними основними польовими змінними, замаскованими під уніфіковані, (*тобто* з такими основними польовими змінними, якими вони є в первинній версії (4.1.1)–(4.1.6) напівдискретної інтегровної нелінійної Шрьодінґерої системи з тлозалежними міжвузловими резонансними зв'язками). Ми зберігатимемо такий самий індекс перед усіма величинами, притаманними первинній системі (4.1.1)–(4.1.6) в рамках Гамільтонового викладу.

Досвід, надбаний під час розгляду інших напівдискретних інтегровних нелінійних систем Шрьодінґерового типу [87, 102, 161, 199], підказує нам шу-

кати густину Гамільтонової функції вихідної системи (4.1.1)–(4.1.6) як деяку суперпозицію других локальних густин, що входять до локальних законів збереження (див. формули (4.7.21), (4.7.22) та (4.7.29), (4.7.30) з підрозділу 4.7, супроводжувані формулами (4.2.20)–(4.2.25) з підрозділу 4.2). Таке спостереження приводить до наступного претендента [220, 221]

$$\begin{aligned}
{}_p H = & - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha [q_+(m)r_-(m-1) + \mu(m) - \mu] - \\
& - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta [r_+(m)q_-(m-1) + \nu(m) - \nu]
\end{aligned} \tag{4.8.6}$$

на Гамільтонову функцію. Тоді, порівнюючи вихідні основні рівняння (4.1.1)–(4.1.4) з їхньою шуканою уніфікованою формою (4.8.1), ми одержуємо сукупність претендентів на метричні елементи ${}_p J_{\lambda\kappa}(n|m)$ в термінах основних і супутніх польових змінних. Вирази для їхніх ненульових представників подано нижче [221]:

$${}_p J_{13}(n|m) = -i[1 + q_-(n)r_-(n)]\delta_{nm} \tag{4.8.7}$$

$${}_p J_{14}(n|m) = -i[q_-(n)r_+(n) - \mu(n)]\delta_{nm} \tag{4.8.8}$$

$${}_p J_{23}(n|m) = -i[q_+(n)r_-(n) - \nu(n)]\delta_{nm} \tag{4.8.9}$$

$${}_p J_{24}(n|m) = -i[1 + q_+(n)r_+(n)]\delta_{nm} \tag{4.8.10}$$

$${}_p J_{31}(n|m) = +i[1 + r_-(n)q_-(n)]\delta_{nm} \tag{4.8.11}$$

$${}_p J_{32}(n|m) = +i[r_-(n)q_+(n) - \nu(n)]\delta_{nm} \tag{4.8.12}$$

$${}_p J_{41}(n|m) = +i[r_+(n)q_-(n) - \mu(n)]\delta_{nm} \tag{4.8.13}$$

$${}_p J_{42}(n|m) = +i[1 + r_+(n)q_+(n)]\delta_{nm} . \tag{4.8.14}$$

Решта метричних елементів є нульові метричні елементи. Як тільки претендентів на метричні елементи знайдено, ми маємо перевірити, чи величина $\{F, G\}$, задана формулою

$$\{F, G\} = - \sum_{\lambda=1}^4 \sum_{\kappa=1}^4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial y_{\lambda}(n)} J_{\lambda\kappa}(n|m) \frac{\partial G}{\partial y_{\kappa}(m)} , \tag{4.8.15}$$

задовольняє усі вимоги, що підкріплюють означення дужки Пуассона [59, 124, 249]. Найкритичнішою з них є вимога

$$\{E, \{F, G\}\} + \{F, \{G, E\}\} + \{G, \{E, F\}\} = 0, \quad (4.8.16)$$

зголошена на тотожність Якобі (Jacobi). Відповідно до загального правила [59, 124, 249] ця вимога (4.8.16) рівносильна системі рівнянь

$$\sum_{\varkappa=1}^4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[J_{\varkappa\lambda}(k|l) \frac{\partial J_{\mu\nu}(m|n)}{\partial y_{\varkappa}(k)} + J_{\varkappa\mu}(k|m) \frac{\partial J_{\nu\lambda}(n|l)}{\partial y_{\varkappa}(k)} + J_{\varkappa\nu}(k|n) \frac{\partial J_{\lambda\mu}(l|m)}{\partial y_{\varkappa}(k)} \right] = 0. \quad (4.8.17)$$

NB. Тут індекси, позначені літерами μ і ν , не мають нічого спільного з фоновими параметрами, визначеними як $\mu = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \mu(n)$ і $\nu = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \nu(n)$.

Безпосереднє підставлення раніше одержаних виразів (4.8.7)–(4.8.14) для величин ${}_p J_{\lambda\varkappa}(n|m)$ з використанням виразів для похідних $\partial\mu(n)/\partial y_{\varkappa}(n)$ і $\partial\nu(n)/\partial y_{\varkappa}(n)$, що випливають з природніх в'язей (4.1.7) і (4.1.8), зводить набір вимог (4.8.17) до набору тотожностей. У результаті тотожність Якобі (4.8.16) виявляється справедливою, виправдовуючи таким чином означення дужки Пуассона (4.8.15) і вибір функції Гамільтона (4.8.6).

Використовуючи загальне означення дужки Пуассона (4.8.15), конкретизоване формулами для метричних елементів (4.8.7)–(4.8.14), і враховуючи співвідношення між уніфікованими і основними польовими змінними (4.8.2)–(4.8.5), можна сміливо обчислити усі можливі дужки Пуассона, пов'язані з основними $q_+(n)$, $r_+(n)$, $q_-(n)$, $r_-(n)$ і супутніми $\mu(n)$, $\nu(n)$ польовими змінними. Їхній список наведено нижче

$$\{q_+(m), r_+(n)\} = +i [1 + q_+(n)r_+(n)] \delta_{nm} \quad (4.8.18)$$

$$\{q_+(m), r_-(n)\} = +i [q_+(n)r_-(n) - \nu(n)] \delta_{nm} \quad (4.8.19)$$

$$\{q_-(m), r_-(n)\} = +i [1 + q_-(n)r_-(n)] \delta_{nm} \quad (4.8.20)$$

$$\{q_-(m), r_+(n)\} = +i [q_-(n)r_+(n) - \mu(n)] \delta_{nm} \quad (4.8.21)$$

$$\{q_+(m), q_+(n)\} = 0 = \{r_+(m), r_+(n)\} \quad (4.8.22)$$

$$\{q_+(m), q_-(n)\} = 0 = \{r_+(m), r_-(n)\} \quad (4.8.23)$$

$$\{q_-(m), q_-(n)\} = 0 = \{r_-(m), r_-(n)\} \quad (4.8.24)$$

$$\{\mu(m), \nu(n)\} = +i [q_+(n)r_+(n) - q_-(n)r_-(n)]\delta_{nm} \quad (4.8.25)$$

$$\{\mu(m), \mu(n)\} = 0 = \{\nu(m), \nu(n)\} \quad (4.8.26)$$

$$\{\mu(m), r_-(n)\} = +i [r_+(n) + r_-(n)\mu(n)]\delta_{nm} \quad (4.8.27)$$

$$\{\mu(m), q_+(n)\} = -i [q_-(n) + q_+(n)\mu(n)]\delta_{nm} \quad (4.8.28)$$

$$\{\nu(m), q_-(n)\} = -i [q_+(n) + q_-(n)\nu(n)]\delta_{nm} \quad (4.8.29)$$

$$\{\nu(m), r_+(n)\} = +i [r_-(n) + r_+(n)\nu(n)]\delta_{nm} \quad (4.8.30)$$

$$\{\mu(m), r_+(n)\} = 0 = \{\nu(m), q_+(n)\} \quad (4.8.31)$$

$$\{\mu(m), q_-(n)\} = 0 = \{\nu(m), r_-(n)\} . \quad (4.8.32)$$

Покладаючись на ці результати (4.8.18)–(4.8.32), неважко перевірити, що нелінійна система Шрьодінгера на стьожці трикутної ґратки (4.1.1)–(4.1.6) допускає стисле Гамільтонове представлення

$$\dot{q}_+(n) = \{ {}_p H, q_+(n) \} \quad (4.8.33)$$

$$\dot{r}_+(n) = \{ {}_p H, r_+(n) \} \quad (4.8.34)$$

$$\dot{q}_-(n) = \{ {}_p H, q_-(n) \} \quad (4.8.35)$$

$$\dot{r}_-(n) = \{ {}_p H, r_-(n) \} \quad (4.8.36)$$

$$\dot{\mu}(n) = \{ {}_p H, \mu(n) \} \quad (4.8.37)$$

$$\dot{\nu}(n) = \{ {}_p H, \nu(n) \} \quad (4.8.38)$$

з Гамільтоновою функцією ${}_p H$, заданою раніше дібраною формулою (4.8.6).

Хоча сама Гамільтонова функція (4.8.6) і не виявляє жодних ознак нелінійної взаємодії, оскільки вона задана квадратичною формою за польовими змінними, тим не менше нелінійні взаємодії з'являються в первинній динамічній системі (4.1.1)–(4.1.6) завдяки надзвичайно нестандартній формі приналежних дужок Пуассона (4.8.18)–(4.8.32). Постає питання, чи можна стандартизувати форму Пуассонової структури і перенести всі нелінійні взаємодії

повністю в стандартизовану Гамільтонову функцію. За деяких (термінологічно завуальованих, але вірогідних) умов позитивне твердження стосовно цієї проблеми проголошує теорема Дарбу [44, 45, 59, 124, 249], проте вона не дає жодних розумних настанов щодо способу виконання такої стандартизації. Першою практичною підказкою у розплутуванні Гордієвого вузла стандартизації для нас став факт різко вираженої критичності первинної (нестандартизованої) нелінійної системи (4.1.1)–(4.1.6) відносно керівного фонового параметра $\mu\nu$. Тему критичності системи ми розглянемо в наступному підрозділі.

Варто зауважити, що нестандартна форма Пуассонової структури є досить типовою властивістю інтегровних нелінійних систем, пов'язаних з дискретними спектральними задачами. Для прикладу достатньо навести систему Абловіца–Ладіка [2, 4], чия нестандартна Пуассонова структура [87, 102, 161] стає на заваді сприйнятливого трактування її польових змінних в чітких і зрозумілих фізичних термінах.

4.9 Критичність первинної динамічної системи відносно фонового параметра [208, 223]

Факт критичності напівдискретної інтегровної нелінійної Шрödінґерової системи з тлозалежними міжвузловими резонансними зв'язками (4.1.1)–(4.1.6) відносно фонового параметра $\mu\nu$ ми виявили, досліджуючи спектр її низькоамплітудних збуджень [208]. Схожий результат було одержано і при конструюванні областей аналітичності Йостових (Jost) функцій допоміжної задачі розсіяння, асоційованої з рівняннями системи (4.1.1)–(4.1.6) [208].

Згідно з підходом Кодрі до оберненої задачі розсіяння [34, 201, 202] лінії, що розділяють області аналітичності *відмінних* Йостових функцій в площині комплексного спектрального параметра z , визначаються набором рівнянь

$$|\eta_j(z)| = |\eta_k(z)|, \quad (4.9.1)$$

де $\eta_j(z)$ символізує j -те власне значення граничного спектрального оператора $L(z)$, означеного в підрозділі 4.2, а індекси j та k охоплюють усі можливі комбінації таким чином, аби запобігти своєму взаємному збігові.

Звернувшись до досліджуваної системи (4.1.1)–(4.1.6) та врахувавши 4×4 матричне представлення (4.2.2) допоміжного спектрального оператора $L(n|z)$, ми приходимо до сукупності чотирьох відмінних власних значень (4.2.31)–(4.2.34) граничного спектрального оператора $L(z)$. У результаті умова (4.9.1), що визначає границі між областями аналітичності, складається з шести рівнянь. Належний аналіз цих рівнянь вказує на критичну якісну перебудову структури областей аналітичності, що відбувається, коли фоновий параметр $\mu\nu$ переступає через своє критичне значення $\mu\nu = 1$ [208]. Рисунки 4.2 і 4.3 демонструють типове розбиття на області аналітичності в площині фазоузгідного спектрального параметра $z \exp(-i\delta)$, відповідно за докритичних $\mu\nu < 1$ і надкритичних $\mu\nu > 1$ значень фонового параметра $\mu\nu$ у випадку допоміжного спектрального оператора четвертого порядку. Тут дійсного фазового параметра δ задано співвідношенням $\mu/\nu = \exp(+4i\delta)$.

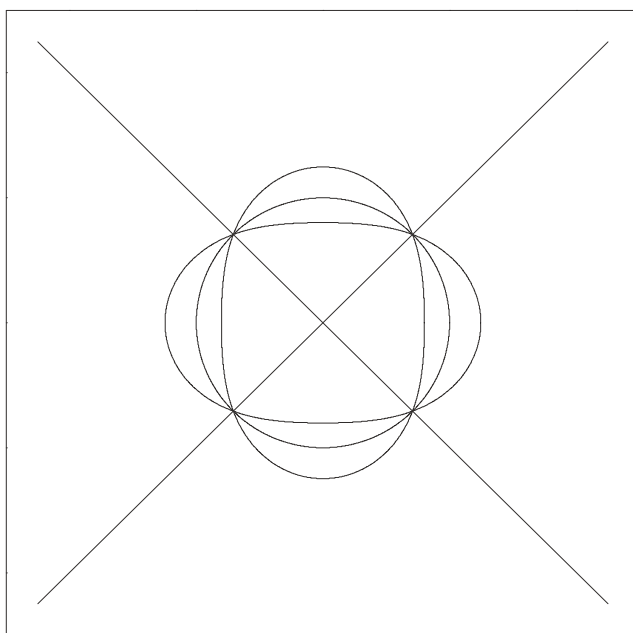


Рис. 4.2. Типове розбиття на області аналітичності для функцій Йоста в площині фазоузгідного спектрального параметра $z \exp(-i\delta)$ за докритичних значень фонового параметра $\mu\nu < 1$ (буквально за $\mu\nu = \exp(-\pi/2)$). Випадок допоміжного спектрального оператора четвертого порядку.

Кросовер в упорядкуванні областей аналітичності Йостових функцій є родовою властивістю досліджуваної системи (4.1.1)–(4.1.6) і неминуче відбувається також і у випадку 2×2 матричного представлення (4.2.4) допоміжного спектрального оператора $L(n|z)$, коли ми маємо лише два *відмінні* власні зна-

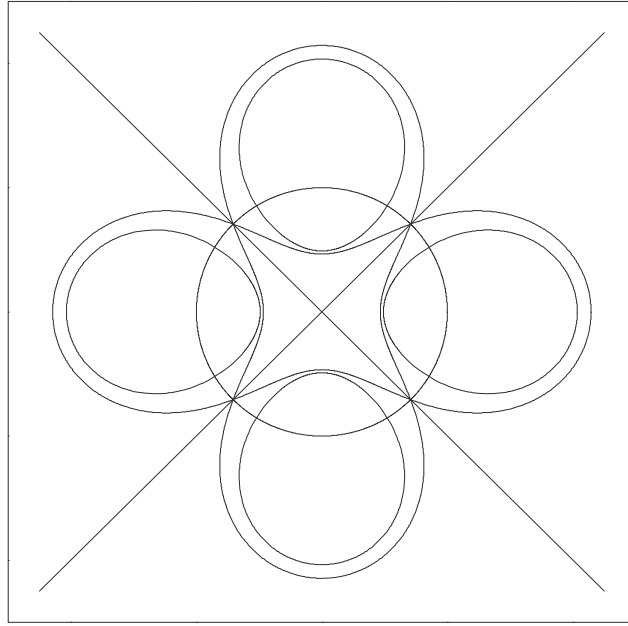


Рис. 4.3. Типове розбиття на області аналітичності для функцій Йоста в площині фазоузгідненого спектрального параметра $z \exp(-i\delta)$ за надкритичних значень фонового параметра $\mu\nu > 1$ (буквально за $\mu\nu = \exp(+\pi/2)$). Випадок допоміжного спектрального оператора четвертого порядку.

чення (4.2.35) і (4.2.36) граничного спектрального оператора $L(z)$, а відтак лише одне рівняння в умові (4.9.1), що визначає межі між областями аналітичності. На рисунках 4.4 і 4.5 показано типове розбиття на області аналітичності в площині фазоузгідненого спектрального параметра $z \exp(-i\delta)$, відповідно при докритичних $\mu\nu < 1$ і надкритичних $\mu\nu > 1$ значеннях фонового параметра $\mu\nu$ у випадку допоміжного спектрального оператора другого порядку.

Аби виявити критичність відносно фонового параметра $\mu\nu$ безпосередньо в первинній (нестандартизований) нелінійній системі (4.1.1)–(4.1.6), ми переписемо систему двох природніх в'язей (4.1.7) і (4.1.8) за допомоги трьох наступних формул

$$\mu(n) - q_-(n)r_+(n) = \mu \exp[+\rho(n)] \quad (4.9.2)$$

$$1 + \mu(n)\nu(n) + q_+(n)r_+(n) + q_-(n)r_-(n) = (1 + \mu\nu) \exp[+\rho(n)] \quad (4.9.3)$$

$$\nu(n) - q_+(n)r_-(n) = \nu \exp[+\rho(n)] , \quad (4.9.4)$$

де спільна дійсна величина $\rho(n)$ згодом є повною густиною збуджень на обох ланцюжках драбинчастої ґратки. Тоді комбінуючи попередні співвідношення

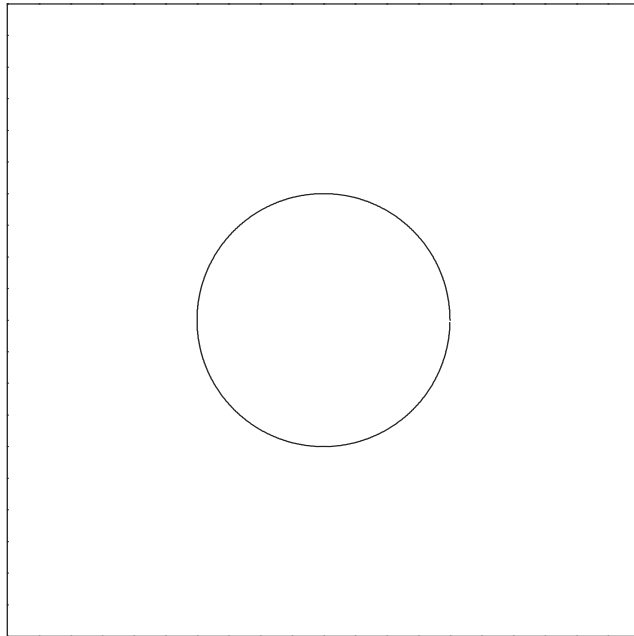


Рис. 4.4. Розбиття на області аналітичності для функцій Йоста в площині фазоузгідненого спектрального параметра $z \exp(-i\delta)$ за докритичних значень фонового параметра $\mu\nu < 1$. Випадок допоміжного спектрального оператора другого порядку.

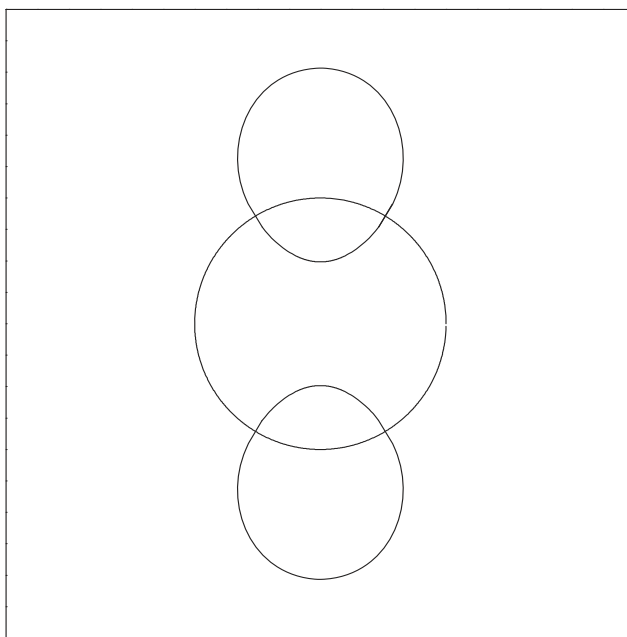


Рис. 4.5. Типове розбиття на області аналітичності для функцій Йоста в площині фазоузгідненого спектрального параметра $z \exp(-i\delta)$ за надкритичних значень фонового параметра $\mu\nu > 1$ (буквально за $\mu\nu = \exp(+\pi/2)$). Випадок допоміжного спектрального оператора другого порядку.

(4.9.2)–(4.9.4), ми одержуємо вираз [223]

$$\begin{aligned}
& 2[q_+(n) + \nu(n)q_-(n)][r_+(n) + \mu(n)r_-(n)] + 2[q_-(n) + \mu(n)q_+(n)][r_-(n) + \\
& \quad + \nu(n)r_+(n)] + [q_+(n)r_+(n) - q_-(n)r_-(n)]^2 + [1 - \mu(n)\nu(n)]^2 = \\
& \quad = (1 - \mu\nu)^2 \exp[+2\rho(n)] , \tag{4.9.5}
\end{aligned}$$

який, вочевидь, є істотно критичним відносно значення фонового параметра $\mu\nu$. Справді, в точці $\mu\nu = 1$ права частина цього виразу (4.9.5) зникає то-тожньо, і ми мусимо кожен член лівої частини прирівняти до нуля внаслідок невід'ємності кожного такого члена, очевидної з притаманних симетрій $r_+^*(n) = q_+(n)$, $r_-^*(n) = q_-(n)$ і $\nu^*(n) = \mu(n)$ первинних польових амплітуд. Ці вимоги, справедливі лише в самій критичній точці $\mu\nu = 1$, є рівнозначними до сукупності додаткових в'язей

$$q_+(n) + \nu(n)q_-(n) = 0 = r_+(n) + \mu(n)r_-(n) \tag{4.9.6}$$

$$q_-(n) + \mu(n)q_+(n) = 0 = r_-(n) + \nu(n)r_+(n) \tag{4.9.7}$$

$$\mu(n)\nu(n) = 1 , \tag{4.9.8}$$

які згортають первинну багатокomпонентну нелінійну динамічну систему (4.1.1)–(4.1.6), задану на стьожці трикутної ґратки з двома вузлами в елементарній комірці, до двокомпонентної нелінійної динамічної системи

$$+i\dot{q}(n) + [\alpha q(n+1) + \beta q(n-1)][1 + q(n)r(n)] = 0 \tag{4.9.9}$$

$$-i\dot{r}(n) + [\beta r(n+1) + \alpha r(n-1)][1 + r(n)q(n)] = 0 , \tag{4.9.10}$$

заданої на ланцюжку винятково одновимірної ґратки з одним вузлом в елементарній комірці. Тут згорнуті польові змінні $q(n)$ і $r(n)$ означено згідно з такими формулами параметризації

$$q_+(n) \exp[-i(2\delta - \pi)(n - 1/2)] = q(n) = q_-(n) \exp[-i(2\delta - \pi)(n + 1/2)] \tag{4.9.11}$$

$$r_+(n) \exp[+i(2\delta - \pi)(n - 1/2)] = r(n) = r_-(n) \exp[+i(2\delta - \pi)(n + 1/2)] \tag{4.9.12}$$

$$\mu(n) \exp[-2i\delta] = 1 = \nu(n) \exp[+2i\delta] \tag{4.9.13}$$

за припущення, що дійсний фазовий параметр δ є часонезалежним.

Отже, в критичній точці $\mu\nu = 1$ первинна нелінійна інтегровна система (4.1.1)–(4.1.6) скорочується до простішої системи (4.9.9) і (4.9.10), яку можна вважати за узагальнення інтегровної системи Абловіца–Ладіка [2, 4] на випадок часозалежних параметрів зв'язку α і β [93, 200]. В результаті, кількість незалежних польових змінних меншає наполовину, тоді як супутні польові змінні тривіалізуються до простих констант. Тим не менше, в докритичній області $\mu\nu < 1$ і в надкритичній області $\mu\nu > 1$ система залишається багатокомпонентною і не може буди зведена до простішої системи (здогадно системи Абловіца–Ладіка) шляхом будь-якого перетворення. Це твердження збігається з тим фактом, що структурна матриця, пов'язана з первинною інтегровною системою (4.1.1)–(4.1.6) (тобто структурна матриця з матричними елементами ${}_pJ_{\lambda\kappa}(n|m)$, заданими формулами (4.8.7)–(4.8.14)), стає, як буде показано далі, виродженою лише в критичній точці $\mu\nu = 1$.

Достоту, завдяки діагональності первинної структурної матриці відносно просторових індексів n і m достатньо мати справу лише з детермінантом ${}_pD(n)$ локальної структурної матриці, тобто з детермінантом 4×4 квадратної матриці, чії елементи ${}_pJ_{\lambda\kappa}(n|n)$ позначено літерами λ і κ як винятково поточними індексами. Виходячи із співвідношень (4.8.7)–(4.8.14), що специфікують елементи ${}_pJ_{\lambda\kappa}(n|m)$ структурної матриці, отримуємо явний вираз для локального визначника ${}_pD(n)$, а саме

$${}_pD(n) = \{[1 + q_+(n)r_+(n)][1 + q_-(n)r_-(n)] - [\mu(n) - q_-(n)r_+(n)][\nu(n) - q_+(n)r_-(n)]\}^2, \quad (4.9.14)$$

яка чітко вказує, що за критичної величини $\mu\nu = 1$ фонового параметра $\mu\nu$ визначник ${}_pD(n)$ локальної структурної матриці, а отже і визначник $\prod_{m=-\infty}^{\infty} {}_pD(m)$ усієї структурної матриці прямують до нуля тотожно завдяки в'язям критичності (4.9.6)–(4.9.8).

4.10 Симетричний набір проміжних основних польових змінних та їхні фундаментальні дужки Пуассона [224]

Позаяк і ліва, і права частини формули з виявлення критичности (4.9.5) є суттєво невід'ємними, і до того ж права частина є повним квадратом суто дійсної функції, постає ідея влаштувати повний квадрат деякого дійсного виразу і з лівої частини також. Ця пропозиція спонукає до підстанов

$$q_+(n) + \nu(n)q_-(n) = \frac{1 - \mu(n)\nu(n)}{1 - u_+(n)v_+(n)u_-(n)v_-(n)} [1 + u_-(n)v_-(n)]u_+(n) \quad (4.10.1)$$

$$r_+(n) + \mu(n)r_-(n) = \frac{1 - \mu(n)\nu(n)}{1 - u_+(n)v_+(n)u_-(n)v_-(n)} [1 + u_-(n)v_-(n)]v_+(n) \quad (4.10.2)$$

$$q_-(n) + \mu(n)q_+(n) = \frac{1 - \mu(n)\nu(n)}{1 - u_+(n)v_+(n)u_-(n)v_-(n)} [1 + u_+(n)v_+(n)]u_-(n) \quad (4.10.3)$$

$$r_-(n) + \nu(n)r_+(n) = \frac{1 - \mu(n)\nu(n)}{1 - u_+(n)v_+(n)u_-(n)v_-(n)} [1 + u_+(n)v_+(n)]v_-(n), \quad (4.10.4)$$

які слугують для введення нових основних польових змінних $u_+(n)$, $v_+(n)$ і $u_-(n)$, $v_-(n)$ замість первинних $q_+(n)$, $r_+(n)$ і $q_-(n)$, $r_-(n)$. Тут симетрії комплексного спряження $r_+^*(n) = q_+(n)$, $r_-^*(n) = q_-(n)$ і $\nu^*(n) = \mu(n)$ первинних польових амплітуд забезпечують виконання аналогічних симетрій $v_+^*(n) = u_+(n)$, $v_-^*(n) = u_-(n)$ для нових основних польових амплітуд і, таким чином, гарантують невід'ємність добутків $u_+(n)v_+(n)$ і $u_-(n)v_-(n)$. Ці нові основні польові змінні $u_+(n)$, $v_+(n)$ і $u_-(n)$, $v_-(n)$ відіграватимуть проміжну, але дуже важливу роль в наших подальших міркуваннях.

Отже, беручи квадратний корінь рівняння з виявлення критичности (4.9.5) із використанням щойно поданих означень (4.10.1)–(4.10.4), одержимо

$$\begin{aligned} \frac{1 - \mu(n)\nu(n)}{1 - u_+(n)v_+(n)u_-(n)v_-(n)} [1 + u_+(n)v_+(n)][1 + u_-(n)v_-(n)] = \\ = (1 - \mu\nu) \exp[+\rho(n)]. \end{aligned} \quad (4.10.5)$$

Тут знаки квадратних коренів дібрано так, аби забезпечити коректні граничні значення $u_+(n) = q_+(n)$, $v_+(n) = r_+(n)$ і $u_-(n) = q_-(n)$, $v_-(n) = r_-(n)$ проміжних основних польових змінних $u_+(n)$, $v_+(n)$ і $u_-(n)$, $v_-(n)$ за нульових фонових значень $\mu = 0 = \nu$ супутніх полів (див. формули (4.9.2), (4.9.4) і (4.10.1)–(4.10.4) для роз'яснення). Втім, будучи прямим наслідком семи раніше виписаних формул (4.9.2)–(4.9.4) і (4.10.1)–(4.10.4), одержане співвідношення (4.10.5) дає змогу значно спростити розрахунки величин $q_+(n)$, $r_+(n)$, $q_-(n)$, $r_-(n)$, $\mu(n)$, $\nu(n)$ і $\exp[+\rho(n)]$ в термінах проміжних польових амплітуд $u_+(n)$, $v_+(n)$ і $u_-(n)$, $v_-(n)$. Відповідні результати представлено нижче

$$q_+(n) = \frac{u_+(n)[1 + \mu\nu u_-(n)v_-(n)] - \nu u_-(n)[1 + u_+(n)v_+(n)]}{1 - \mu\nu u_+(n)v_+(n)u_-(n)v_-(n)} \quad (4.10.6)$$

$$r_+(n) = \frac{v_+(n)[1 + \mu\nu u_-(n)v_-(n)] - \mu v_-(n)[1 + u_+(n)v_+(n)]}{1 - \mu\nu u_+(n)v_+(n)u_-(n)v_-(n)} \quad (4.10.7)$$

$$q_-(n) = \frac{u_-(n)[1 + \mu\nu u_+(n)v_+(n)] - \mu u_+(n)[1 + u_-(n)v_-(n)]}{1 - \mu\nu u_+(n)v_+(n)u_-(n)v_-(n)} \quad (4.10.8)$$

$$r_-(n) = \frac{v_-(n)[1 + \mu\nu u_+(n)v_+(n)] - \nu v_+(n)[1 + u_-(n)v_-(n)]}{1 - \mu\nu u_+(n)v_+(n)u_-(n)v_-(n)} \quad (4.10.9)$$

$$\mu(n) = \frac{(1 - \mu\nu)u_-(n)v_+(n) + \mu[1 - u_+(n)v_+(n)u_-(n)v_-(n)]}{1 - \mu\nu u_+(n)v_+(n)u_-(n)v_-(n)} \quad (4.10.10)$$

$$\nu(n) = \frac{(1 - \mu\nu)u_+(n)v_-(n) + \nu[1 - u_+(n)v_+(n)u_-(n)v_-(n)]}{1 - \mu\nu u_+(n)v_+(n)u_-(n)v_-(n)} \quad (4.10.11)$$

$$\begin{aligned} \exp[+\rho(n)] &= \frac{[1 - \mu u_+(n)v_-(n)][1 - \nu u_-(n)v_+(n)]}{[1 - \mu\nu u_+(n)v_+(n)u_-(n)v_-(n)]^2} \times \\ &\times [1 + u_+(n)v_+(n)][1 + u_-(n)v_-(n)]. \end{aligned} \quad (4.10.12)$$

Ці сім формул (4.10.6)–(4.10.12) було перевірено шляхом прямих підставлянь до головних визначальних співвідношень (4.9.2)–(4.9.4) і (4.10.1)–(4.10.4) та до допоміжного співвідношення (4.10.5).

Одержані формули перетворення (4.10.6)–(4.10.11) уможливають повне вилучення супутніх полів $\mu(n)$ і $\nu(n)$ з динаміки системи. Однак, навіть такий позитивний факт не приводить автоматично до канонічних польових змінних. Перш за все, за ненульових фонових величин μ і ν супутніх полів два набори

проміжних польових амплітуд $u_+(n)$, $v_+(n)$ і $u_-(n)$, $v_-(n)$ у формулі (4.10.12) для $\exp[+\rho(n)]$, вочевидь, є тісно змішаними. До того ж набір фундаментальних Пуассонових дужок, пов'язаних з проміжними польовими амплітудами, демонструє істотні переплутування між усіма динамічними змінними.

Аби підтвердити останнє твердження, ми звернемося до реєстру дужок Пуассона (4.8.18)–(4.8.32), пов'язаних з первинними польовими змінними $q_+(n)$, $r_+(n)$, $q_-(n)$, $r_-(n)$ і $\mu(n)$, $\nu(n)$. Як показано в підрозділі 4.9, структурна матриця, відповідальна за ці дужки (4.8.18)–(4.8.32), вироджується лише за критичного значення $\mu\nu = 1$ фонового параметра $\mu\nu$. Отже, поза межами критичної точки (*тобто* за $\mu\nu \neq 1$) ми можемо без ризику застосовувати всі потрібні формули із наведеного списку (4.8.18)–(4.8.32) в обчислюванні фундаментальних дужок Пуассона, пов'язаних з проміжними польовими змінними $u_+(n)$, $v_+(n)$, $u_-(n)$, $v_-(n)$. Встановлені результати підсумовано співвідношеннями

$$\{u_+(m), v_+(n)\} = \frac{i}{1 - \mu\nu} [1 + u_+(n)v_+(n)][1 + \mu\nu u_+(n)v_+(n)]\delta_{nm} \quad (4.10.13)$$

$$\begin{aligned} \{u_+(m), v_-(n)\} &= \frac{i\nu}{1 - \mu\nu} \frac{1 - \mu u_+(n)v_-(n)}{1 - \nu u_-(n)v_+(n)} \times \\ &\times [1 + u_+(n)v_+(n)][1 + u_-(n)v_-(n)]\delta_{nm} \end{aligned} \quad (4.10.14)$$

$$\{u_-(m), v_-(n)\} = \frac{i}{1 - \mu\nu} [1 + u_-(n)v_-(n)][1 + \mu\nu u_-(n)v_-(n)]\delta_{nm} \quad (4.10.15)$$

$$\begin{aligned} \{u_-(m), v_+(n)\} &= \frac{i\mu}{1 - \mu\nu} \frac{1 - \nu u_-(n)v_+(n)}{1 - \mu u_+(n)v_-(n)} \times \\ &\times [1 + u_+(n)v_+(n)][1 + u_-(n)v_-(n)]\delta_{nm} \end{aligned} \quad (4.10.16)$$

$$\{u_+(m), u_+(n)\} = \{u_+(m), u_-(n)\} = \{u_-(m), u_-(n)\} = 0 \quad (4.10.17)$$

$$\{v_+(m), v_+(n)\} = \{v_+(m), v_-(n)\} = \{v_-(m), v_-(n)\} = 0. \quad (4.10.18)$$

Упродовж досить довгих і громіздких розрахунків цих формул (4.10.13)–(4.10.18) ми змушені були знайти вирази для проміжних польових змінних $u_+(n)$, $v_+(n)$, $u_-(n)$, $v_-(n)$ в термінах початкових змінних $q_+(n)$, $r_+(n)$, $q_-(n)$, $r_-(n)$, $\mu(n)$, $\nu(n)$, використовуючи вихідні означення (4.10.1)–(4.10.4), а потім

просуватися крок за кроком крізь увесь список шуканих фундаментальних дужок Пуассона, беручи до уваги вирази (4.10.6)–(4.10.11) для старих польових змінних в термінах нових.

З огляду на загальне означення дужки Пуассона (*тобто* Пуассонової структури) (4.8.15) ненульові елементи структурної матриці, пов'язані з проміжними польовими змінними, задаємо формулами

$${}_i J_{13}(n|m) = -{}_i J_{31}(m|n) = -\{u_-(m), v_-(n)\} \quad (4.10.19)$$

$${}_i J_{14}(n|m) = -{}_i J_{41}(m|n) = -\{u_-(m), v_+(n)\} \quad (4.10.20)$$

$${}_i J_{23}(n|m) = -{}_i J_{32}(m|n) = -\{u_+(m), v_-(n)\} \quad (4.10.21)$$

$${}_i J_{24}(n|m) = -{}_i J_{42}(m|n) = -\{u_+(m), v_+(n)\} . \quad (4.10.22)$$

Відповідний локальний структурний визначник

$${}_i D(n) = [\{u_+(n), v_+(n)\}\{u_-(n), v_-(n)\} - \{u_+(n), v_-(n)\}\{u_-(n), v_+(n)\}]^2 \quad (4.10.23)$$

набуває форми

$${}_i D(n) = \frac{[1 + u_+(n)v_+(n)]^2 [1 + u_-(n)v_-(n)]^2}{(1 - \mu\nu)^2 [1 - \mu\nu u_+(n)v_+(n)u_-(n)v_-(n)]^2} \quad (4.10.24)$$

і, як видно, стає розбіжним, коли фоновий параметр $\mu\nu$ прямує до одиниці.

Пригадуючи, що локальний структурний визначник ${}_p D(n)$ (4.9.14), пов'язаний з первинними польовими змінними, прямує до нуля, коли фоновий параметр $\mu\nu$ прямує до одиниці, варто шукати певного компромісу між проміжними і первинними польовими змінними і ввести ту чи іншу асиметричну множину польових змінних шляхом належного вибору двох взаємодоповняльних підмножин. Ідея про асиметрію підтверджується також вже доведеним фактом того, що число незалежних польових змінних меншає наполовину, коли фоновий параметр $\mu\nu$ набуває свого критичного значення, рівного одиниці. Отже, слід очікувати, що підсистема, описувана підмножиною проміжних польових змінних, може стати незбуджуваною в критичній точці $\mu\nu = 1$. У наступному підрозділі ми розвинемо ідею про порушення симетрії шляхом введення двох

можливих варіантів первинно-проміжних польових змінних у явному вигляді.

4.11 Два варіанти первинно-проміжних польових змінних [224]

Симетрія між двома підмножинами проміжних польових змінних $u_+(n), v_+(n)$ та $u_-(n), v_-(n)$ допускає, аби замінити ту чи іншу підмножину на її первинний двійник і оперувати надалі з будь-яким з двох наборів $q_+(n), r_+(n), u_-(n), v_-(n)$ чи $q_-(n), r_-(n), u_+(n), v_+(n)$ змішаних первинно-проміжних польових змінних окремо на однакових підставах.

Розглянемо спочатку перший варіант первинно-проміжних польових змінних $q_+(n), r_+(n), u_-(n), v_-(n)$. Аби переформулювати динамічну систему в термінах цих змінних, ми маємо одержати відповідні представлення для мінус-позначених основних полів $q_-(n), r_-(n)$ та супутніх полів $\mu(n), \nu(n)$, а також для величини $\exp[+\rho(n)]$. Для цього зручно скористатися співвідношеннями

$$\frac{q_-(n) + \mu(n)q_+(n)}{1 + q_+(n)r_+(n)} = \frac{(1 - \mu\nu)u_-(n)}{1 + \mu\nu u_-(n)v_-(n)} \quad (4.11.1)$$

$$\frac{r_-(n) + \nu(n)r_+(n)}{1 + q_+(n)r_+(n)} = \frac{(1 - \mu\nu)v_-(n)}{1 + \mu\nu u_-(n)v_-(n)}, \quad (4.11.2)$$

сумісними з формулами перетворень (4.10.1)–(4.10.4) і (4.10.6)–(4.10.11), розглянутих в підрозділі 4.10. Належні обчислювання приводять до таких представлень

$$q_-(n) = \frac{(1 - \mu\nu)u_-(n)}{1 + \mu\nu u_-(n)v_-(n)} - \mu q_+(n) \frac{1 + u_-(n)v_-(n)}{1 + \mu\nu u_-(n)v_-(n)} \quad (4.11.3)$$

$$r_-(n) = \frac{(1 - \mu\nu)v_-(n)}{1 + \mu\nu u_-(n)v_-(n)} - \nu r_+(n) \frac{1 + u_-(n)v_-(n)}{1 + \mu\nu u_-(n)v_-(n)} \quad (4.11.4)$$

$$\mu(n) = \frac{(1 - \mu\nu)u_-(n)r_+(n)}{1 + \mu\nu u_-(n)v_-(n)} + \mu \frac{1 + u_-(n)v_-(n)}{1 + \mu\nu u_-(n)v_-(n)} \quad (4.11.5)$$

$$\nu(n) = \frac{(1 - \mu\nu)q_+(n)v_-(n)}{1 + \mu\nu u_-(n)v_-(n)} + \nu \frac{1 + u_-(n)v_-(n)}{1 + \mu\nu u_-(n)v_-(n)} \quad (4.11.6)$$

$$\exp[+\rho(n)] = [1 + q_+(n)r_+(n)] \frac{1 + u_-(n)v_-(n)}{1 + \mu\nu u_-(n)v_-(n)}. \quad (4.11.7)$$

Обираючи другий варіант первинно-проміжних польових змінних $q_-(n)$, $r_-(n)$, $u_+(n)$, $v_+(n)$, нам належить одержати відповідні представлення для плюс-позначених основних полів $q_+(n)$, $r_+(n)$ і супутніх полів $\mu(n)$, $\nu(n)$, а також для величини $\exp[+\rho(n)]$. Для цього варто використати співвідношення

$$\frac{q_+(n) + \nu(n)q_-(n)}{1 + q_-(n)r_-(n)} = \frac{(1 - \mu\nu)u_+(n)}{1 + \mu\nu u_+(n)v_+(n)} \quad (4.11.8)$$

$$\frac{r_+(n) + \mu(n)r_-(n)}{1 + q_-(n)r_-(n)} = \frac{(1 - \mu\nu)v_+(n)}{1 + \mu\nu u_+(n)v_+(n)}, \quad (4.11.9)$$

що є сумісними з формулами перетворень (4.10.1)–(4.10.4) і (4.10.6)–(4.10.11), розглянутих в підрозділі 4.10. Належні обчислювання приводять до таких представлень

$$q_+(n) = \frac{(1 - \mu\nu)u_+(n)}{1 + \mu\nu u_+(n)v_+(n)} - \nu q_-(n) \frac{1 + u_+(n)v_+(n)}{1 + \mu\nu u_+(n)v_+(n)} \quad (4.11.10)$$

$$r_+(n) = \frac{(1 - \mu\nu)v_+(n)}{1 + \mu\nu u_+(n)v_+(n)} - \mu r_-(n) \frac{1 + u_+(n)v_+(n)}{1 + \mu\nu u_+(n)v_+(n)} \quad (4.11.11)$$

$$\mu(n) = \frac{(1 - \mu\nu)q_-(n)v_+(n)}{1 + \mu\nu u_+(n)v_+(n)} + \mu \frac{1 + u_+(n)v_+(n)}{1 + \mu\nu u_+(n)v_+(n)} \quad (4.11.12)$$

$$\nu(n) = \frac{(1 - \mu\nu)u_+(n)r_-(n)}{1 + \mu\nu u_+(n)v_+(n)} + \nu \frac{1 + u_+(n)v_+(n)}{1 + \mu\nu u_+(n)v_+(n)} \quad (4.11.13)$$

$$\exp[+\rho(n)] = [1 + q_-(n)r_-(n)] \frac{1 + u_+(n)v_+(n)}{1 + \mu\nu u_+(n)v_+(n)}. \quad (4.11.14)$$

Звертаючись до формул (4.11.3)–(4.11.7) і (4.11.10)–(4.11.14), що запроваджують, відповідно, перший та другий варіанти первинно-проміжних польових змінних $q_+(n)$, $r_+(n)$, $u_-(n)$, $v_-(n)$ та $q_-(n)$, $r_-(n)$, $u_+(n)$, $v_+(n)$, ми явно бачимо, що обидва альтернативні вирази (4.11.7) та (4.11.14) для величини $\exp[+\rho(n)]$ є факторизованими. Таке спостереження подає нам чітку вказівку, як в цілісній динамічній системі виокремити дві строго означені підсистеми. До того ж кожна з формул (4.11.7) чи (4.11.14) для величини $\exp[+\rho(n)]$ чи-

тко розкриває нам характер збуджень в обох задіяних підсистемах. Отже, при докритичних значеннях $\mu\nu < 1$ фонового параметра $\mu\nu$ обидві підсистеми є аналогічними до систем зі світлими збудженнями, і величину $\rho(n)$ належить трактувати як повну густину світлих збуджень в обох підсистемах. З іншого боку, в надкритичній області $\mu\nu > 1$ підсистема, описувана первинними польовими змінними, залишається підсистемою зі збудженнями світлого типу, тоді як підсистема, пов'язана з проміжними польовими змінними, перетворюється на підсистему зі збудженнями темного типу. В самій критичній точці $\mu\nu = 1$ уся система зсідается до єдиної підсистеми зі збудженнями світлого типу.

Треба зауважити, що використані тут терміни “світлі нелінійні збудження” і “темні нелінійні збудження” слід розуміти за аналогією з термінами “світлі солітони” і “темні солітони”, типовими для нелінійної оптики [91].

4.12 Фундаментальні дужки Пуассона для кожного з варіантів первинно-проміжних польових змінних [224]

Тепер саме час підтвердити, що строге відокремлення двох підсистем, про яке було заявлено вище, зумовлено головними властивостями фундаментальних дужок Пуассона, пов'язаних з кожним окремим варіантом первинно-проміжних польових змінних. Ми опустимо тут всі обчислювання, зроблені на основі формул для дужок Пуассона між первинними полями (4.8.18)–(4.8.32) та між проміжними полями (4.10.13)–(4.10.18), а також на основі низки допоміжних формул та формул перетворення, наведених в попередньому підрозділі. Отже розглянемо лише кінцеві результати.

Так, перший варіант первинно-проміжних польових змінних $q_+(n)$, $r_+(n)$, $u_-(n)$, $v_-(n)$ характеризується такими фундаментальними дужками Пуассона

$$\{q_+(m), r_+(n)\} = i[1 + q_+(n)r_+(n)]\delta_{nm} \quad (4.12.1)$$

$$\{q_+(m), q_+(n)\} = 0 = \{r_+(m), r_+(n)\} \quad (4.12.2)$$

$$\{q_+(m), v_-(n)\} = 0 = \{q_+(m), u_-(n)\} \quad (4.12.3)$$

$$\{u_-(m), r_+(n)\} = 0 = \{v_-(m), r_+(n)\} \quad (4.12.4)$$

$$\{u_-(m), u_-(n)\} = 0 = \{v_-(m), v_-(n)\} \quad (4.12.5)$$

$$\{u_-(m), v_-(n)\} = \frac{i}{1 - \mu\nu} [1 + u_-(n)v_-(n)][1 + \mu\nu u_-(n)v_-(n)]\delta_{nm} . \quad (4.12.6)$$

Аналогічно фундаментальні дужки Пуассона для другого варіанту первинно-проміжних польових змінних $q_-(n)$, $r_-(n)$, $u_+(n)$, $v_+(n)$ задають вирази

$$\{q_-(m), r_-(n)\} = i [1 + q_-(n)r_-(n)]\delta_{nm} \quad (4.12.7)$$

$$\{q_-(m), q_-(n)\} = 0 = \{r_-(m), r_-(n)\} \quad (4.12.8)$$

$$\{q_-(m), v_+(n)\} = 0 = \{q_-(m), u_+(n)\} \quad (4.12.9)$$

$$\{u_+(m), r_-(n)\} = 0 = \{v_+(m), r_-(n)\} \quad (4.12.10)$$

$$\{u_+(m), u_+(n)\} = 0 = \{v_+(m), v_+(n)\} \quad (4.12.11)$$

$$\{u_+(m), v_+(n)\} = \frac{i}{1 - \mu\nu} [1 + u_+(n)v_+(n)][1 + \mu\nu u_+(n)v_+(n)]\delta_{nm} . \quad (4.12.12)$$

Кожен з двох вищенаведених наборів (4.12.1)–(4.12.6) та (4.12.7)–(4.12.12) фундаментальних дужок Пуассона чітко демонструє повне відокремлення двох підсистем різного походження.

Накопичених результатів стосовно відокремлення польових змінних і досвіду з канонізування інших напівдискретних нелінійних систем [102, 192, 193, 199] цілком достатньо для того, аби сформулювати нелінійні перетворення, що канонізують досліджувану інтегровну нелінійну систему (4.1.1)–(4.1.6).

4.13 Два варіанти канонічних польових змінних [224, 226]

Задача канонізування системи полягає у віднайденні такого набору уніфікованих польових змінних ${}_c u_1(n)$, ${}_c u_2(n)$, ${}_c u_3(n)$, ${}_c u_4(n)$, щоби єдиними ненульовими елементами структурної матриці, які постають в рівняннях Гамільтона (4.8.1), були елементи, задані співвідношеннями ${}_c J_{13}(n|m) = -i\delta_{nm}$,

${}_cJ_{24}(n|m) = -i\delta_{nm}$, ${}_cJ_{31}(n|m) = +i\delta_{nm}$, ${}_cJ_{42}(n|m) = +i\delta_{nm}$. Враховуючи факт точної розщепності системи на первинну та проміжну підсистеми, слушно формалізувати останній крок процедури канонізування у вигляді доречних нелінійних масштабних перетворень первинно-проміжних польових змінних.

Беручи до уваги, що величини $\ln[1 + q_+(n)r_+(n)]$ та $\ln[1 + u_-(n)v_-(n)] - \ln[1 + \mu\nu u_-(n)v_-(n)]$ в докритичній області $\mu\nu < 1$ пов'язані з густинами збуджень, відповідно, в плюс-позначеній первинній підсистемі і мінус-позначеній проміжній підсистемі, ми введемо нові (фізично скориговані) польові амплітуди $Q_+(n)$, $R_+(n)$ і $U_-(n)$, $V_-(n)$ за допомоги формул перетворення

$$Q_+(n) = q_+(n) \sqrt{\frac{\ln[1 + q_+(n)r_+(n)]}{q_+(n)r_+(n)}} \quad (4.13.1)$$

$$R_+(n) = r_+(n) \sqrt{\frac{\ln[1 + q_+(n)r_+(n)]}{q_+(n)r_+(n)}} \quad (4.13.2)$$

і

$$U_-(n) = \frac{u_-(n)}{\sqrt{u_-(n)v_-(n)}} \sqrt{\ln \frac{1 + u_-(n)v_-(n)}{1 + \mu\nu u_-(n)v_-(n)}} \quad (4.13.3)$$

$$V_-(n) = \frac{v_-(n)}{\sqrt{u_-(n)v_-(n)}} \sqrt{\ln \frac{1 + u_-(n)v_-(n)}{1 + \mu\nu u_-(n)v_-(n)}}. \quad (4.13.4)$$

Тут, як бачимо, область значень для величини $Q_+(n)R_+(n)$ обмежено нерівністю $Q_+(n)R_+(n) \geq 0$ за будь-якого допустимого значення $\mu\nu \geq 0$ фонового параметра $\mu\nu$. На противагу, область значень для величини $U_-(n)V_-(n)$ обмежено послідовністю нерівностей $\ln(1/\mu\nu) \geq U_-(n)V_-(n) \geq 0$, якщо $\mu\nu < 1$, і послідовністю нерівностей $0 \geq U_-(n)V_-(n) \geq \ln(1/\mu\nu)$, якщо $\mu\nu > 1$. З міркувань практичного застосування праві частини останніх двох виразів (4.13.3) і (4.13.4) доцільно переписати безпосередньо в термінах первинних польових змінних і одержати

$$U_-(n) = \frac{q_-(n) + \mu(n)q_+(n)}{\sqrt{[q_-(n) + \mu(n)q_+(n)][r_-(n) + \nu(n)r_+(n)]}} \times \\ \times \sqrt{\ln \frac{1 + \mu(n)\nu(n) + q_+(n)r_+(n) + q_-(n)r_-(n)}{(1 + \mu\nu)[1 + q_+(n)r_+(n)]}} \quad (4.13.5)$$

$$V_-(n) = \frac{r_-(n) + \nu(n)r_+(n)}{\sqrt{[q_-(n) + \mu(n)q_+(n)][r_-(n) + \nu(n)r_+(n)]}} \times \\ \times \sqrt{\ln \frac{1 + \mu(n)\nu(n) + q_+(n)r_+(n) + q_-(n)r_-(n)}{(1 + \mu\nu)[1 + q_+(n)r_+(n)]}}. \quad (4.13.6)$$

Розрахунки показують, що фундаментальні дужки Пуассона, пов'язані з польовими змінними $Q_+(n)$, $R_+(n)$ і $U_-(n)$, $V_-(n)$, і справді є канонічними

$$\{Q_+(m), R_+(n)\} = i\delta_{nm} \quad (4.13.7)$$

$$\{Q_+(m), Q_+(n)\} = 0 = \{R_+(m), R_+(n)\} \quad (4.13.8)$$

$$\{Q_+(m), V_-(n)\} = 0 = \{Q_+(m), U_-(n)\} \quad (4.13.9)$$

$$\{U_-(m), R_+(n)\} = 0 = \{V_-(m), R_+(n)\} \quad (4.13.10)$$

$$\{U_-(m), U_-(n)\} = 0 = \{V_-(m), V_-(n)\} \quad (4.13.11)$$

$$\{U_-(m), V_-(n)\} = i\delta_{nm}. \quad (4.13.12)$$

Завдяки властивостям $Q_+(n)R_+(n) \geq 0$, $\ln(1/\mu\nu) \geq U_-(n)V_-(n) \geq 0$, чинним за $\mu\nu < 1$, та властивостям $Q_+(n)R_+(n) \geq 0$, $0 \geq U_-(n)V_-(n) \geq \ln(1/\mu\nu)$, чинним за $\mu\nu > 1$, канонічну підсистему, описувану польовими амплітудами $Q_+(n)$ і $R_+(n)$, можна назвати сильною підсистемою, тоді як канонічну підсистему, описувану польовими амплітудами $U_-(n)$ і $V_-(n)$, – слабкою. Сильна підсистема відповідає світлим нелінійним збудженням за усіх допустимих значень $\mu\nu \geq 0$ фонового параметра $\mu\nu$. Навпаки, слабка підсистема зазнає переходу від підсистеми зі світлими збудженнями до підсистеми з темними збудженнями, коли фоновий параметр $\mu\nu$ переходить крізь критичну точку $\mu\nu = 1$ від докритичних $\mu\nu < 1$ до надкритичних $\mu\nu > 1$ значень. У самій

критичній точці $\mu\nu = 1$ підсистема слабких збуджень стає абсолютно незбуджуваною і тому повністю зникає з динаміки системи. Взаємна симетрія між сильною і слабкою підсистемами, вочевидь, є цілком порушеною при усіх ненульових значеннях фонового параметра, і лише за умови $\mu\nu = 0$ ми приходимо до повністю симетричного випадку, рівнозначного до розглянутих в наших раніших працях [199, 212].

Щойно описаний варіант канонізації виникає з польових змінних $q_+(n)$, $r_+(n)$ і $u_-(n)$, $v_-(n)$, де проміжну підсистему позначено нижнім індексом мінус. З цієї причини називатимемо цю канонізацію мінус-асиметричною.

З іншого боку, варіант канонізації, виниклий з польових змінних $q_-(n)$, $r_-(n)$ і $u_+(n)$, $v_+(n)$, ми називатимемо плюс-асиметричною канонізацією.

Формули перетворення, що відповідають за плюс-асиметричну канонізацію, введемо наступним чином

$$Q_-(n) = q_-(n) \sqrt{\frac{\ln[1 + q_-(n)r_-(n)]}{q_-(n)r_-(n)}} \quad (4.13.13)$$

$$R_-(n) = r_-(n) \sqrt{\frac{\ln[1 + q_-(n)r_-(n)]}{q_-(n)r_-(n)}} \quad (4.13.14)$$

і

$$U_+(n) = \frac{u_+(n)}{\sqrt{u_+(n)v_+(n)}} \sqrt{\ln \frac{1 + u_+(n)v_+(n)}{1 + \mu\nu u_+(n)v_+(n)}} \quad (4.13.15)$$

$$V_+(n) = \frac{v_+(n)}{\sqrt{u_+(n)v_+(n)}} \sqrt{\ln \frac{1 + u_+(n)v_+(n)}{1 + \mu\nu u_+(n)v_+(n)}} \quad (4.13.16)$$

з практичними версіями останніх двох виразів (4.13.15) і (4.13.16), заданими формулами

$$U_+(n) = \frac{q_+(n) + \nu(n)q_-(n)}{\sqrt{[q_+(n) + \nu(n)q_-(n)][r_+(n) + \mu(n)r_-(n)]}} \times \\ \times \sqrt{\ln \frac{1 + \mu(n)\nu(n) + q_+(n)r_+(n) + q_-(n)r_-(n)}{(1 + \mu\nu)[1 + q_-(n)r_-(n)]}} \quad (4.13.17)$$

$$V_+(n) = \frac{r_+(n) + \mu(n)r_-(n)}{\sqrt{[q_+(n) + \nu(n)q_-(n)][r_+(n) + \mu(n)r_-(n)]}} \times \\ \times \sqrt{\ln \frac{1 + \mu(n)\nu(n) + q_+(n)r_+(n) + q_-(n)r_-(n)}{(1 + \mu\nu)[1 + q_-(n)r_-(n)]}}. \quad (4.13.18)$$

Область значень для величини $Q_-(n)R_-(n)$ обмежено нерівністю $Q_-(n)R_-(n) \geq 0$ за будь-якого допустимого значення $\mu\nu \geq 0$ фонового параметра $\mu\nu$, тоді як область значень для величини $U_+(n)V_+(n)$ обмежено послідовністю нерівностей $\ln(1/\mu\nu) \geq U_+(n)V_+(n) \geq 0$, якщо $\mu\nu < 1$, і послідовністю нерівностей $0 \geq U_+(n)V_+(n) \geq \ln(1/\mu\nu)$, якщо $\mu\nu > 1$.

Що ж стосується фундаментальних дужок Пуассона

$$\{Q_-(m), R_-(n)\} = i\delta_{nm} \quad (4.13.19)$$

$$\{Q_-(m), Q_-(n)\} = 0 = \{R_-(m), R_-(n)\} \quad (4.13.20)$$

$$\{Q_-(m), V_+(n)\} = 0 = \{Q_-(m), U_+(n)\} \quad (4.13.21)$$

$$\{U_+(m), R_-(n)\} = 0 = \{V_+(m), R_-(n)\} \quad (4.13.22)$$

$$\{U_+(m), U_+(n)\} = 0 = \{V_+(m), V_+(n)\} \quad (4.13.23)$$

$$\{U_+(m), V_+(n)\} = i\delta_{nm}, \quad (4.13.24)$$

пов'язаних з польовими змінними $Q_-(n)$, $R_-(n)$ і $U_+(n)$, $V_+(n)$, то вони, як бачимо, є канонічними.

З огляду на явну *mutatis mutandis* відповідність з мінус-асиметричним випадком, ми не повторюємо тут усіх аргументів стосовно виокремлення відповідних сильної та слабкої підсистем всередині плюс-асиметрично канонізованої системи і не пояснюємо ще раз подробиць ефекту кросовера в критичній точці $\mu\nu = 1$ окремо для неї.

4.14 Гамільтонове формулювання системи в термінах канонічних польових змінних з порушеною симетрією [225, 224, 226]

Аби переформулювати досліджувану інтегровну нелінійну систему (4.1.1)–(4.1.6) до її канонічного виду, ми маємо знати вирази для первинних польових змінних $q_+(n)$, $r_+(n)$, $q_-(n)$, $r_-(n)$, $\mu(n)$, $\nu(n)$, заданих у термінах канонічних змінних $Q_+(n)$, $R_+(n)$, $U_-(n)$, $V_-(n)$ або $Q_-(n)$, $R_-(n)$, $U_+(n)$, $V_+(n)$.

Розглянемо спочатку випадок мінус-асиметричних канонічних полів $Q_+(n)$, $R_+(n)$ і $U_-(n)$, $V_-(n)$. Обернувши формули перетворення (4.13.1)–(4.13.4), ми в змозі записати первинно-проміжні польові змінні $q_+(n)$, $r_+(n)$ та $u_-(n)$, $v_-(n)$ в термінах мінус-асиметричних канонічних змінних $Q_+(n)$, $R_+(n)$ та $U_-(n)$, $V_-(n)$, відповідно. Одержані вирази належить підставити до формул перетворення (4.11.3)–(4.11.6) для вкороченого набору первинних полів $q_-(n)$, $r_-(n)$, $\mu(n)$, $\nu(n)$. В результаті ми приходимо до таких формул оберненого перетворення:

$$q_+(n) = Q_+(n) \sqrt{\frac{\exp[+Q_+(n)R_+(n)] - 1}{Q_+(n)R_+(n)}} \quad (4.14.1)$$

$$r_+(n) = R_+(n) \sqrt{\frac{\exp[+Q_+(n)R_+(n)] - 1}{Q_+(n)R_+(n)}} \quad (4.14.2)$$

$$q_-(n) = U_-(n) \sqrt{\frac{\exp[U_-(n)V_-(n)] - 1}{U_-(n)V_-(n)}} \sqrt{1 - \mu\nu \exp[U_-(n)V_-(n)]} - \mu Q_+(n) \exp[U_-(n)V_-(n)] \sqrt{\frac{\exp[Q_+(n)R_+(n)] - 1}{Q_+(n)R_+(n)}} \quad (4.14.3)$$

$$r_-(n) = V_-(n) \sqrt{\frac{\exp[U_-(n)V_-(n)] - 1}{U_-(n)V_-(n)}} \sqrt{1 - \mu\nu \exp[U_-(n)V_-(n)]} - \nu R_+(n) \exp[U_-(n)V_-(n)] \sqrt{\frac{\exp[Q_+(n)R_+(n)] - 1}{Q_+(n)R_+(n)}} \quad (4.14.4)$$

$$\begin{aligned}
\mu(n) &= \mu \exp[U_-(n)V_-(n)] + R_+(n)U_-(n) \times \\
&\times \sqrt{\frac{\exp[U_-(n)V_-(n)] - 1}{U_-(n)V_-(n)}} \sqrt{\frac{\exp[Q_+(n)R_+(n)] - 1}{Q_+(n)R_+(n)}} \times \\
&\times \sqrt{1 - \mu\nu \exp[U_-(n)V_-(n)]}
\end{aligned} \tag{4.14.5}$$

$$\begin{aligned}
\nu(n) &= \nu \exp[U_-(n)V_-(n)] + Q_+(n)V_-(n) \times \\
&\times \sqrt{\frac{\exp[U_-(n)V_-(n)] - 1}{U_-(n)V_-(n)}} \sqrt{\frac{\exp[Q_+(n)R_+(n)] - 1}{Q_+(n)R_+(n)}} \times \\
&\times \sqrt{1 - \mu\nu \exp[U_-(n)V_-(n)]} .
\end{aligned} \tag{4.14.6}$$

Схожі міркування у випадку плюс-асиметричних канонічних полів $Q_-(n)$, $R_-(n)$ і $U_+(n)$, $V_+(n)$ породжують наступні формули оберненого перетворення

$$q_-(n) = Q_-(n) \sqrt{\frac{\exp[Q_-(n)R_-(n)] - 1}{Q_-(n)R_-(n)}} \tag{4.14.7}$$

$$r_-(n) = R_-(n) \sqrt{\frac{\exp[Q_-(n)R_-(n)] - 1}{Q_-(n)R_-(n)}} \tag{4.14.8}$$

і

$$\begin{aligned}
q_+(n) &= U_+(n) \sqrt{\frac{\exp[U_+(n)V_+(n)] - 1}{U_+(n)V_+(n)}} \sqrt{1 - \mu\nu \exp[U_+(n)V_+(n)]} - \\
&- \nu Q_-(n) \exp[U_+(n)V_+(n)] \sqrt{\frac{\exp[Q_-(n)R_-(n)] - 1}{Q_-(n)R_-(n)}}
\end{aligned} \tag{4.14.9}$$

$$\begin{aligned}
r_+(n) &= V_+(n) \sqrt{\frac{\exp[U_+(n)V_+(n)] - 1}{U_+(n)V_+(n)}} \sqrt{1 - \mu\nu \exp[U_+(n)V_+(n)]} - \\
&- \mu R_-(n) \exp[U_+(n)V_+(n)] \sqrt{\frac{\exp[Q_-(n)R_-(n)] - 1}{Q_-(n)R_-(n)}}
\end{aligned} \tag{4.14.10}$$

$$\begin{aligned}
\mu(n) &= \mu \exp[U_+(n)V_+(n)] + Q_-(n)V_+(n) \times \\
&\times \sqrt{\frac{\exp[U_+(n)V_+(n)] - 1}{U_+(n)V_+(n)}} \sqrt{\frac{\exp[Q_-(n)R_-(n)] - 1}{Q_-(n)R_-(n)}} \times \\
&\times \sqrt{1 - \mu\nu \exp[U_+(n)V_+(n)]}
\end{aligned} \tag{4.14.11}$$

$$\begin{aligned}
\nu(n) &= \nu \exp[U_+(n)V_+(n)] + R_-(n)U_+(n) \times \\
&\times \sqrt{\frac{\exp[U_+(n)V_+(n)] - 1}{U_+(n)V_+(n)}} \sqrt{\frac{\exp[Q_-(n)R_-(n)] - 1}{Q_-(n)R_-(n)}} \times \\
&\times \sqrt{1 - \mu\nu \exp[U_+(n)V_+(n)]} .
\end{aligned} \tag{4.14.12}$$

Означимо Гамільтонові функції ${}_cH_-$ і ${}_cH_+$ мінус-асиметричної канонізованої системи і плюс-асиметричної канонізованої системи, підставивши відповідні формули перетворення (4.14.1)–(4.14.6) і (4.14.7)–(4.14.12) до виразу (4.8.6) для Гамільтонової функції ${}_pH$ первинної системи (4.1.1)–(4.1.6).

Тоді динаміку мінус-асиметричної канонізованої системи визначатимуть рівняння Гамільтона

$$+i\dot{Q}_+(n) = +i\{{}_cH_-, Q_+(n)\} = \frac{\partial {}_cH_-}{\partial R_+(n)} \tag{4.14.13}$$

$$-i\dot{R}_+(n) = -i\{{}_cH_-, R_+(n)\} = \frac{\partial {}_cH_-}{\partial Q_+(n)} \tag{4.14.14}$$

$$+i\dot{U}_-(n) = +i\{{}_cH_-, U_-(n)\} = \frac{\partial {}_cH_-}{\partial V_-(n)} \tag{4.14.15}$$

$$-i\dot{V}_-(n) = -i\{{}_cH_-, V_-(n)\} = \frac{\partial {}_cH_-}{\partial U_-(n)} , \tag{4.14.16}$$

які, вочевидь, мають стандартну канонічну форму завдяки канонічній формі приналежних фундаментальних дужок Пуассона (4.13.7)–(4.13.12).

Аналогічно, динаміку плюс-асиметричної канонізованої системи визначатимуть такі рівняння Гамільтона:

$$+i\dot{Q}_-(n) = +i\{{}_cH_+, Q_-(n)\} = \frac{\partial {}_cH_+}{\partial R_-(n)} \tag{4.14.17}$$

$$-i\dot{R}_-(n) = -i\{{}_cH_+, R_-(n)\} = \frac{\partial {}_cH_+}{\partial Q_-(n)} \quad (4.14.18)$$

$$+i\dot{U}_+(n) = +i\{{}_cH_+, U_+(n)\} = \frac{\partial {}_cH_+}{\partial V_+(n)} \quad (4.14.19)$$

$$-i\dot{V}_+(n) = -i\{{}_cH_+, V_+(n)\} = \frac{\partial {}_cH_+}{\partial U_+(n)}, \quad (4.14.20)$$

де враховано канонічні властивості іншого приналежного набору фундаментальних дужок Пуассона (4.13.19)–(4.13.24).

4.15 Сильна та слабка стандартизовані компоненти односолітонного розв'язку [224, 226]

У цьому підрозділі ми проілюструємо деякі загальні результати, що стосуються асиметричних стандартизацій (4.13.1)–(4.13.6) і (4.13.13)–(4.13.18) первинної інтегрованої нелінійної системи (4.1.1)–(4.1.6) на прикладі односолітонного розв'язку. Для цього ми використаємо формули для односолітонного розв'язку (4.5.32)–(4.5.37) нестандартизованої системи (4.1.1)–(4.1.6), заданої на нескінченній стьожці трикутної ґратки і охарактеризованої нелінійностями притягувального типу. Заради стислості викладу ми опустимо верхній (наразі неінформативний) індекс плюс над усіма компонентами односолітонного розв'язку (4.5.32)–(4.5.37). Особливої уваги у нашому розгляді буде приділено означенням (4.5.38)–(4.5.41) і (4.5.42) визначальних односолітонних параметрів γ_+ , \varkappa_+ , γ_- , \varkappa_- і s .

Спираючись на означення (4.5.38)–(4.5.41) параметрів γ_+ , \varkappa_+ і γ_- , \varkappa_- , можна легко одержати вираз

$$\begin{aligned} \sinh[2(\gamma_+ + \gamma_- - \gamma)] &= (1 - \mu\nu) \frac{\sinh(2\gamma)}{\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_- - \gamma)]} \times \\ &\times \frac{2 \sinh(2\gamma) \sinh(2\gamma) + [\exp(2i\varkappa) + \mu][\exp(-2i\varkappa) + \nu]}{[\exp(2\gamma + 2i\varkappa) + \mu][\exp(2\gamma - 2i\varkappa) + \nu][\exp(-2\gamma + 2i\varkappa) + \mu][\exp(-2\gamma - 2i\varkappa) + \nu]}, \end{aligned} \quad (4.15.1)$$

який свідчить, що знак члена $\sinh[2(\gamma_+ + \gamma_- - \gamma)]$ в його лівій частині повністю визначається знаком добутка $(1 - \mu\nu) \sinh(2\gamma)$ у правій частині. Зокрема, завдяки такій властивості супутні односолітонні компоненти (4.5.34) і (4.5.37), обчислені в критичній точці $\mu\nu = 1$, зводяться до своїх граничних сталих значень μ і ν . Саме ця властивість члена $\sinh[2(\gamma_+ + \gamma_- - \gamma)]$, як буде показано, і визначає головні характеристики стандартизованих односолітонних компонент.

І справді, застосовуючи формули мінус-асиметричної стандартизації (4.13.1), (4.13.2) і (4.13.5), (4.13.6) до величин $Q_+(n)R_+(n)$ і $U_-(n)V_-(n)$, обчислених за допомоги нестандартизованого багатокомпонентного односолітонного розв'язку (4.5.32)–(4.5.37), ми одержуємо

$$Q_+(n)R_+(n) = \ln \left\{ 1 + \frac{\sinh(2\gamma) \sinh(2\gamma)}{\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n - x - s)] \cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n - x - s)]} \right\} \quad (4.15.2)$$

$$U_-(n)V_-(n) = \ln \left\{ 1 + \frac{\sinh(2\gamma) \sinh[2(\gamma_+ + \gamma_- - \gamma)]}{\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n - x - 3s + 1)] \cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n - x + s)]} \right\}. \quad (4.15.3)$$

Отже, на догоду загальній теорії, величина $Q_+(n)R_+(n)$, будучи обчислена на односолітонному розв'язку, набуває дійсних невід'ємних значень за усіх допустимих значень $\mu\nu \geq 0$ фонового параметра $\mu\nu$, і відтак її можна трактувати як число світлих Q_+R_+ збуджень в n -тій елементарній комірці. Ця властивість характеризує солітонну компоненту Q_+R_+ як таку, що належить до сильної підсистеми. Навпаки, знака величини $U_-(n)V_-(n)$, обчисленої на односолітонному розв'язку, як видно, повністю вказано знаком параметра $1 - \mu\nu$, а отже величину $U_-(n)V_-(n)$ можна вважати числом світлих U_-V_- збуджень в n -тій елементарній комірці лише за умови $\mu\nu < 1$. До того ж, в критичній точці $\mu\nu = 1$ компонента U_-V_- мінус-асиметрично стандартизованого солітона зникає повністю. За $\mu\nu > 1$ добуток $U_-(n)V_-(n)$ стає від'ємно напізвизначеним (*тобто* недодатнім), а отже компонента U_-V_- мінус-асиметрично стандартизованого солітона описує темні збудження. Таким чином, компонента U_-V_- мінус-асиметрично стандартизованого солітона проявляє всі властивості, очікувані для слабкої підсистеми згідно із загальною теорією. Рисунки 4.6

і 4.7, розраховані за формулами мінус-асиметричної стандартизації (4.15.2) і (4.15.3), ілюструють принципову відмінність в спільній поведінці двох взаємно асиметричних односолітонних компонент за докритичних $\mu\nu < 1$ (Рис. 4.6) і надкритичних $\mu\nu > 1$ (Рис. 4.7) значень головного фонового параметра $\mu\nu$.

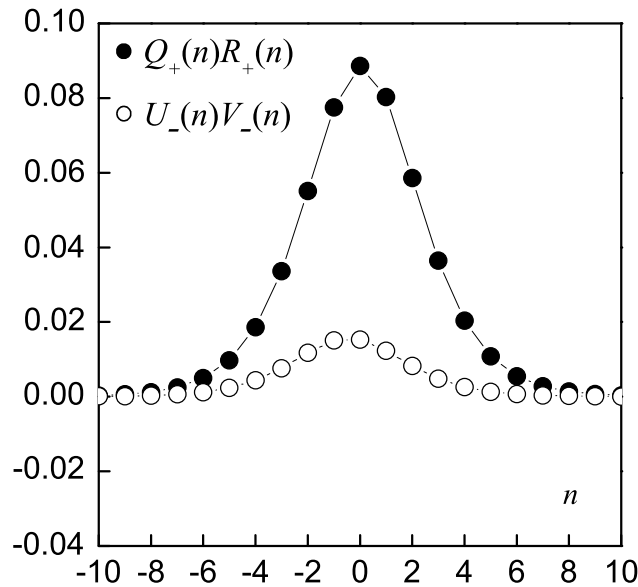


Рис. 4.6. Типові розподіли сильної $Q_+(n)R_+(n)$ (заповнені кружки) та слабкої $U_-(n)V_-(n)$ (порожні кружки) односолітонних компонент за номером елементарної комірки n у випадку мінус-асиметричної стандартизації в докритичній області $\mu\nu < 1$ фонового параметра $\mu\nu$. Розрахунки зроблено за $\mu = 0.7 = \nu$, $\gamma = 0.15$, $\varkappa = 0$, $x = 0$ згідно з формулами (4.15.2) та (4.15.3). Видно, що обидві солітонні компоненти є компонентами світлого типу.

З іншого боку, застосовуючи формули плюс-асиметричної стандартизації (4.13.13), (4.13.14) і (4.13.17), (4.13.18) до величин $Q_-(n)R_-(n)$ і $U_+(n)V_+(n)$, обчислених за посередництва нестандартизованого багатоконпонентного односолітонного розв'язку (4.5.32)–(4.5.37), одержуємо

$$Q_-(n)R_-(n) = \ln \left\{ 1 + \frac{\sinh(2\gamma) \sinh(2\gamma)}{\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n - x + s)] \cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n - x + s)]} \right\} \quad (4.15.4)$$

$$U_+(n)V_+(n) = \ln \left\{ 1 + \frac{\sinh(2\gamma) \sinh[2(\gamma_+ + \gamma_- - \gamma)]}{\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n - x + 3s - 1)] \cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n - x - s)]} \right\}. \quad (4.15.5)$$

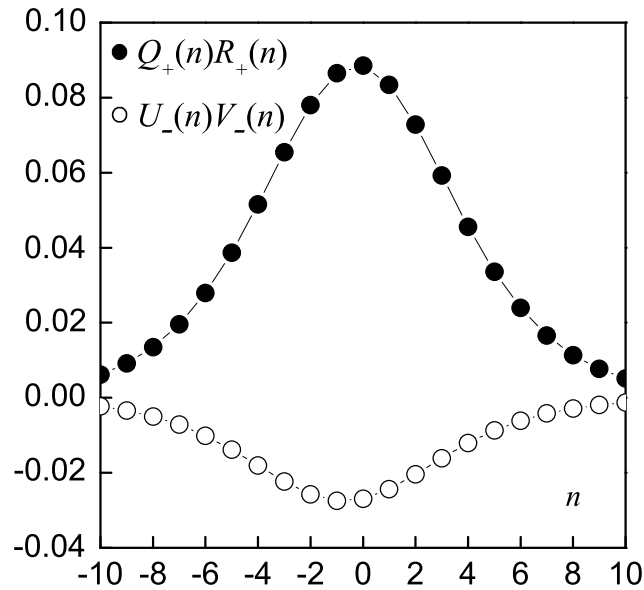


Рис. 4.7. Типові розподіли сильної $Q_+(n)R_+(n)$ (заповнені кружки) та слабкої $U_-(n)V_-(n)$ (порожні кружки) односолітонних компонент за номером елементарної комірки n у випадку мінус-асиметричної стандартизації в надкритичній області $\mu\nu > 1$ фонового параметра $\mu\nu$. Розрахунки зроблено за $\mu = 1.9 = \nu$, $\gamma = 0.15$, $\varkappa = 0$, $x = 0$ згідно з формулами (4.15.2) та (4.15.3). Видно, що слабка солітонна компонента є компонентою темного типу.

Отже, згідно із загальною теорією величина $Q_-(n)R_-(n)$, обчислена на односолітонному розв'язку, набуває дійсних невід'ємних значень за усіх допустимих значень $\mu\nu \geq 0$ фонового параметра $\mu\nu$, і тому її можна трактувати як число світлих Q_-R_- збуджень в n -тій елементарній комірці. Ця властивість характеризує солітонну компоненту Q_-R_- як таку, що належить до сильної підсистеми. Навпаки, знака величини $U_+(n)V_+(n)$, обчисленої за допомогою односолітонного розв'язку, повністю визначено знаком параметра $1 - \mu\nu$, а відтак величину $U_+(n)V_+(n)$ можна вважати числом світлих U_+V_+ збуджень в n -тій елементарній комірці лише за умови $\mu\nu < 1$. Більше того, в критичній точці $\mu\nu = 1$ компонента U_+V_+ плюс-асиметрично стандартизованого солітона повністю зникає. При $\mu\nu > 1$ добуток $U_+(n)V_+(n)$ стає від'ємно напіввизначеним, і тому компонента U_+V_+ плюс-асиметрично стандартизованого солітона описує темні збудження. Отже, компонента U_+V_+ плюс-асиметрично стандартизованого солітона демонструє всі властивості, передбачені для слабкої підсистеми. Рисунки 4.8 і 4.9, розраховані за формулами плюс-асиметричної стандартизації (4.15.4) і (4.15.5), показують принципову відмінність в спільній поведінці двох взаємно асиметричних односолітонних компонент за докритичних $\mu\nu < 1$

(Рис. 4.8) і надкритичних $\mu\nu > 1$ (Рис. 4.9) значень головного фонового параметра $\mu\nu$.

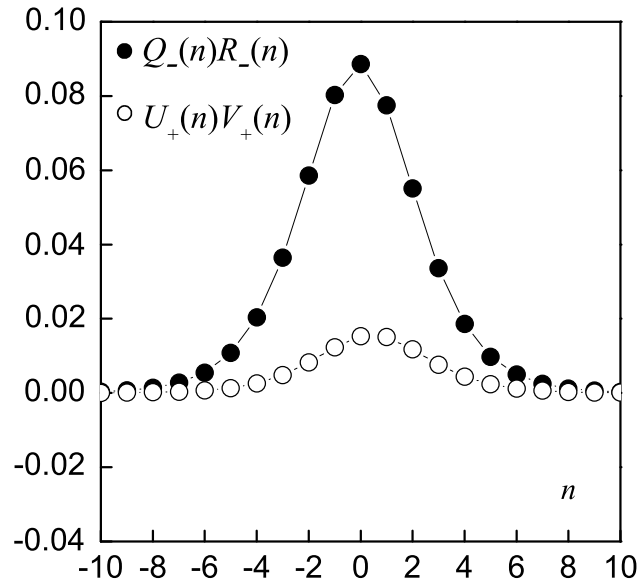


Рис. 4.8. Типові розподіли сильної $Q_-(n)R_-(n)$ (заповнені кружки) та слабкої $U_+(n)V_+(n)$ (порожні кружки) односолітонних компонент за номером елементарної комірки n у випадку плюс-асиметричної стандартизації в докритичній області $\mu\nu < 1$ фонового параметра $\mu\nu$. Розрахунки зроблено за $\mu = 0.7 = \nu$, $\gamma = 0.15$, $\varkappa = 0$, $x = 0$ згідно з формулами (4.15.4) та (4.15.5). Видно, що обидві солітонні компоненти є компонентами світлого типу.

Насамкінець зауважимо, що в критичній точці $\mu\nu = 1$ параметр координатного розщеплення s (4.5.42) обертається на тотожній нуль з огляду на формулу (4.15.1) для функційного параметра $\sinh[2(\gamma_+ + \gamma_- - \gamma)]$. Отже жодної суперечності між мінус-асиметрично стандартизованим солітонним представленням та плюс-асиметрично стандартизованим солітонним представленням не існує. Насправді, саме існування двох нееквівалентних підсистем в будь-якій з двох асиметрично стандартизованих систем відкриває можливість описати критичність системи найприроднішим чином, а саме – шляхом повного вилучення збуджень слабкої підсистеми в критичній точці.

4.16 Підсумки

У цьому підрозділі ми підсумовуємо найважливіші результати четвертого розділу, і насамперед – властивості напівдискретної інтегрованої нелінійної Шрьодінгерової системи з тлозалежними міжвузловими резонансними зв'язками з

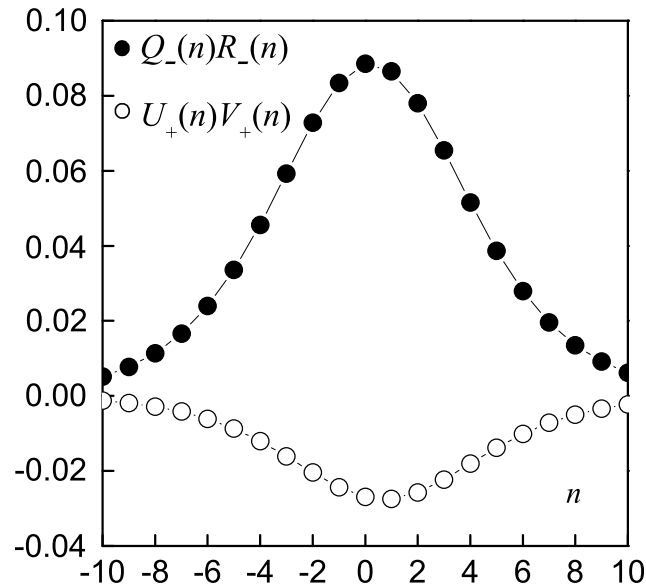


Рис. 4.9. Типові розподіли сильної $Q_-(n)R_-(n)$ (заповнені кружки) та слабкої $U_+(n)V_+(n)$ (порожні кружки) односолітонних компонент за номером елементарної комірки n у випадку плюс-асиметричної стандартизації в надкритичній області $\mu\nu > 1$ фонового параметра $\mu\nu$. Розрахунки зроблено за $\mu = 1.9 = \nu$, $\gamma = 0.15$, $\varkappa = 0$, $x = 0$ згідно з формулами (4.15.4) та (4.15.5). Видно, що слабка солітонна компонента є компонентою темного типу.

огляду на вагому роль, яку відіграють напівдискретні інтегровні моделі нелінійного шрьодінґерівського типу в описові різноманітних явищ у багатьох галузях фізики. Перелік фізичних об'єктів, відкритих для застосувань напівдискретних інтегровних моделей нелінійного шрьодінґерівського типу, та список доречних посилань на оригінальні праці інших дослідників подано в наших недавніх публікаціях [220, 221, 223].

Вісім оригінальних праць [208, 213, 220, 221, 223, 225, 224, 226] складають осердя одержаних результатів, втім вплив праць зі стандартизації широко відомої напівдискретної нелінійної системи Абловіца–Ладіка [102, 192, 193] видається вкрай незаперечним. Фактично нашу діяльність зі стандартизації системи Абловіца–Ладіка [192, 193] було інспіровано доволі критичним ставленням академіка Олександра Сергійовича Давидова до нестандартних польових амплітуд як таких, що не мають прямого фізичного сенсу [209]. Подібна задача стандартизації, як ми вже знаємо, постає також в напівдискретній інтегровній нелінійній Шрьодінґерівській системі з тлозалежними міжвузловими резонансними зв'язками, але на багато витонченішому рівні [225, 224, 226] у порівнянні із задачами стандартизації, що постають у простих напівдискре-

тних інтегровних нелінійних системах [192, 193, 199, 174], що характеризуються суто розщепними структурними (симплектичними) матрицями. З одного боку, розщепність структурної матриці вказує на те, що кожен з двох діагональних блоків структурної матриці – це нульова матриця, тоді як кожен з двох позадіагональних блоків структурної матриці – діагональна матриця. З іншого боку, розщепність вимагає, аби кожного елемента структурної матриці було задано польовими змінними, що належать до однієї окремої підсистеми. Жодного універсального рецепту, як одночасно подолати обидва вищезгадані застереження, не існує. Що ж стосується системи із розщепною структурною матрицею, то задача її канонізації виявляється більш-менш тривіальною (проте іноді і занадто громіздкою). Отже, головна задача в канонізуванні напівдискретної інтегровної нелінійної Шрьодінґерої системи з тлозалежними міжвузловими резонансними зв'язками полягала у віднаходженні такого нелінійного перетворення до нових польових змінних, аби відповідна структурна матриця стала розщепною. Щоби просунутися у виконанні цієї мети, ми змушені були здійснити цілу низку логічних кроків. Перш за все, ми знайшли кілька найнижчих локальних густин з нескінченної ієрархії і встановили Пуассонову та Гамільтонову структури системи в термінах первинних польових змінних. Потім, спираючись на так звані природні в'язі, ми виявили критичність системи стосовно фонового параметра. З урахуванням критичності системи ми зуміли ввести набір проміжних польових змінних, а потім два варіанти первинно-проміжних польових змінних. Виявилось, що характерною ознакою кожного варіанту первинно-проміжних польових змінних є розщепність притаманної їм структурної матриці, а отже головну перешкоду для канонізації системи було подолано. В процесі стандартизації ми з'ясували, що кожна із стандартизованих систем складається із слабкої і сильної підсистем. На загал, симетрія між слабкою підсистемою і сильною підсистемою є суттєво порушеною і підлягає відновленню лише за нульової величини фонового параметра. В докритичній області фонового параметра обидві канонічні підсистеми є підсистемами світлих нелінійних збуджень, тоді як в надкритичній області слабка підсистема обертається в підсистему темних нелінійних збуджень. В самій критичній точці слабка підсистема стає перманентно повністю незбуджуваною. Перехід від одного типу нелінійних збуджень до іншого було підтверджено мінус-асиметричним та плюс-асиметричним стандартизовани-

ми багатокomпонентними односолітонними розв'язками як аналітично, так і графічно, з урахуванням формул для первинного (нестандартизованого) солітонного розв'язку. Сам же первинний солітонний розв'язок було одержано в рамках достатньо нетривіального методу одягання Дарбу, розвинутого саме для цієї мети.

Ще одна важлива риса напівдискретної інтегрованої нелінійної Шрьодінґерої системи з тлозалежними міжвузловими резонансними зв'язками пов'язана з *a priori* довільними часовими залежностями параметрів поперечного зв'язку, здатними охопити вплив зовнішнього лінійного потенціалу. Як наслідок, первинна нелінійна система з відповідно підлаштованим параметричним розгойдуванням стає ізоморфною системі, що моделює Блохові осциляції заряджених нелінійних носіїв в стьожці трикутної ґратки внаслідок дії повздовжнього просторово однорідного електричного поля. Обґрунтування такого твердження можна знайти в нашій недавній праці [223].

Окрім того, нами запропоновано прямий узагальнений рекурсивний підхід до пошуку нескінченної множини локальних законів збереження для напівдискретних інтегрованих нелінійних систем, асоційованих з допоміжною спектральною задачею довільного порядку. В рамках цього підходу знайдено кілька найважливіших локальних законів збереження для напівдискретної інтегрованої нелінійної Шрьодінґерої системи з тлозалежними міжвузловими резонансними зв'язками.

Розділ 5

Стислий огляд інших запропонованих інтегровних нелінійних напівдискретних систем

5.1 Параметрично розгойдувані нелінійні Шрьодінґерові системи з далекосяжною міжвузловою резонансною взаємодією [200, 192, 193]

У численних публікаціях, що стосуються інтегровних нелінійних еволюційних моделей на одновимірних або квазіодновимірних ґратках, впадає у вічі деяка обмеженість у трактуванні параметрів міжвузлових резонансних зв'язків. Окрім деяких поодиноких винятків [27] дослідники надають перевагу моделям з короткосяжною міжвузловою резонансною взаємодією [187, 188, 6], а самі параметри взаємодії вважають незалежними від часу. Тим часом міжмолекулярна взаємодія в реалістичних фізичних системах є або далекосяжною [130, 131], або принаймні помірносяжною [37]. Наприклад, вплив далекосяжності міжмолекулярної взаємодії в ангармонічних ланцюжках виявляється настільки критичним, що здатен повністю перебудувати всю структуру солітоноподібних мод [130, 131].

У частинному випадку моделі Абловіца–Ладіка з короткодією Конотоп, Чубикало та Вазкез (Vázquez) показали, що задача про Блохові (Bloch) осци-

ляції солітона під дією лінійного потенціалу є тотожною до стандартної задачі Абловіца–Ладіка, але вже з певною залежністю параметра взаємодії від часу [93]. При цьому виявилось, що підлаштована система також є інтегрованою. Проте послідовного обґрунтування цієї досить продуктивної у фізичному сенсі ідеї для довільної залежності параметра взаємодії від часу, а тим більше вказівок на правомірність постулювати довільні часові залежності в усіх параметрах взаємодії будь-якої конкретної нелінійної інтегрованої системи з ієрархії Абловіца–Ладіка, зроблено не було.

Отже, виклик вказати на прості, але дієві рецепти розширення відомих інтегрованих нелінійних динамічних систем до параметрично розгойдуваних систем з далекою міжвузловою резонансною взаємодією видається досить виправданим. Найповніше це питання висвітлено в одній з наших статей [200] на прикладі ієрархії параметрично розгойдуваних систем, породжених основною моделлю Абловіца–Ладіка.

Нагадаємо, що нелінійна інтегрована нелінійна система Шрьодінгера у формі основної моделі Абловіца–Ладіка [2, 3, 4, 5]

$$+i\dot{q}(n) = -2\omega_0 q(n) - [\omega_1^- q(n+1) + \omega_1^+ q(n-1)][1 + q(n)r(n)] \quad (5.1.1)$$

$$-i\dot{r}(n) = -2\omega_0 r(n) - [\omega_1^+ r(n+1) + \omega_1^- r(n-1)][1 + r(n)q(n)] \quad (5.1.2)$$

впливає з рівняння нульової кривини [173]

$$\dot{L}(n|z) = A(n+1|z)L(n|z) - L(n|z)A(n|z) \quad (5.1.3)$$

зі спектральним $L(n|z)$ та еволюційним $A(n|z)$ операторами, запостульованими матрицями [173, 200]

$$L(n|z) = \begin{pmatrix} z & iq(n) \\ ir(n) & z^{-1} \end{pmatrix} \quad (5.1.4)$$

$$A(n|z) = \begin{pmatrix} a_{11}^+(n)z^2 + a_{11}(n) & a_{12}^+(n)z + a_{12}^-(n)z^{-1} \\ a_{21}^+(n)z + a_{21}^-(n)z^{-1} & a_{22}(n) + a_{22}^-(n)z^{-2} \end{pmatrix}. \quad (5.1.5)$$

Тут функції, що конкретизують еволюційний оператор $A(n|z)$, мають бути такими

$$a_{11}^+(n) = +i\omega_1^- \quad (5.1.6)$$

$$a_{11}(n) = +i\omega_0 + i\omega_1^- q(n)r(n-1) \quad (5.1.7)$$

$$a_{12}^+(n) = -i\omega_1^- q(n) \quad (5.1.8)$$

$$a_{12}^-(n) = +i\omega_1^+ q(n-1) \quad (5.1.9)$$

$$a_{21}^+(n) = -i\omega_1^- r(n-1) \quad (5.1.10)$$

$$a_{21}^-(n) = +i\omega_1^+ r(n) \quad (5.1.11)$$

$$a_{22}(n) = -i\omega_0 - i\omega_1^+ r(n)q(n-1) \quad (5.1.12)$$

$$a_{22}^-(n) = -i\omega_1^+ . \quad (5.1.13)$$

На противагу до усталеної думки про незалежність параметрів ω_1^- , ω_0 , ω_1^+ від часу τ , сама процедура визначення форми функцій $a_{11}^+(n)$, $a_{11}(n)$, $a_{12}^+(n)$, $a_{12}^-(n)$ та $a_{21}^+(n)$, $a_{21}^-(n)$, $a_{22}(n)$, $a_{22}^-(n)$ (5.1.6)–(5.1.13) із системи скінченнорізнице-цевих рівнянь, закодованих в рівнянні нульової кривини (5.1.3), не заперечує, аби ці параметри ω_1^- , ω_0 , ω_1^+ були довільними функціями від часу τ [200]. Цей простий, але дуже важливий факт опинився поза увагою дослідників з огляду на непереборне бажання авторів класичних праць [2, 3, 4, 5] одержати пристойну просторову дискретизацію добре відомого континуального інтегровного нелінійного рівняння Шрödінгера [247], поклавши $\omega_1^- = 1$, $\omega_0 = -1$, $\omega_1^+ = 1$.

Отже, насправді основна модель Абловіца–Ладіка (5.1.1), (5.1.2) здатна описувати велике коло параметрично розгойдуваних нелінійних інтегровних систем з короткосяжною резонансною міжвузловою взаємодією, оскільки вона допускає практично необмежений вибір прийнятних часових залежностей параметрів взаємодії ω_1^- , ω_0 , ω_1^+ [200].

Якщо розуміти під M -ю моделлю з ієрархії Абловіца–Ладіка ту, в якій матричні елементи $A_{jk}(n|z)$ еволюційного оператора $A(n|z)$ розвинуто за тими самими степенями z та $1/z$, що й матричні елементи мультиплікативного оператора $[L(n|z)]^{2M}$, то міжвузлова резонансна взаємодія в ній сягатиме від-

стані M постійних ґратки, тобто охоплюватиме $2M$ найближчих сусідів. Отже, з ростом числа M можна досягти дедалі більшої далекосяжності взаємодії без втрати інтегровності самої розширеної моделі. В нашій статті з цього питання [200] вказано, що граничні значення $A_{jk}(z) = \lim_{|n| \rightarrow \infty} A_{jk}(n|z)$ матричних елементів $A_{jk}(n|z)$ оператора еволюції $A(n|z)$ M -ї моделі за умови швидкоспадних польових амплітуд ($q(n) \rightarrow 0$ та $r(n) \rightarrow 0$ при $|n| \rightarrow \infty$) мають вигляд

$$A_{11}(z) = +i\omega_0 + i \sum_{\alpha=1}^M \omega_{\alpha}^{-} z^{2\alpha} \quad (5.1.14)$$

$$A_{12}(z) = 0 = A_{21}(z) \quad (5.1.15)$$

$$A_{11}(z) = -i\omega_0 - i \sum_{\alpha=1}^M \omega_{\alpha}^{+} z^{-2\alpha} . \quad (5.1.16)$$

При цьому величини ω_{α}^{-} , ω_0 , ω_{α}^{+} , на відміну від загально усталеної традиції, виправдано вважати довільними функціями від часу τ .

Рівняння руху для будь-якої параметрично розгойдуваної моделі з розглядуваної ієрархії допускають уніфікований Гамільтонів запис

$$+i\dot{q}(n) = [1 + q(n)r(n)] \frac{\partial H}{\partial r(n)} \quad (5.1.17)$$

$$-i\dot{r}(n) = [1 + r(n)q(n)] \frac{\partial H}{\partial q(n)} , \quad (5.1.18)$$

де гамільтоніан M -ї моделі задається виразом

$$H = -2\omega_0 I_0 - \sum_{\alpha=1}^M [\omega_{\alpha}^{-} I_{\alpha}^{-} + \omega_{\alpha}^{+} I_{\alpha}^{+}] , \quad (5.1.19)$$

а точка над функціями в лівих частинах динамічних рівнянь (5.1.17) та (5.1.18) позначає похідну за часом. Тут I_{α}^{-} , I_{α}^{+} та I_0 є мінус α -й, плюс α -й та нульовий інтеграл руху, пов'язані з вибраним спектральним оператором $L(n|z)$ (5.1.4). Послідовний пошук цих інтегралів руху найдоцільніше проводити в рамках узагальненої рекурентної процедури [213, 216], викладеної в підрозділі 4.7 четвертого розділу цієї дисертаційної праці. Сім найнижчих інтегралів руху є

такими [200]

$$I_0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln[1 + q(m)r(m)] \quad (5.1.20)$$

$$I_1^{\pm} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q(m)r(m \pm 1) \quad (5.1.21)$$

$$I_2^{\pm} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q(m)r(m \pm 2)[1 + q(m \pm 1)r(m \pm 1)] + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} q^2(m)r^2(m \pm 1) \quad (5.1.22)$$

$$\begin{aligned} I_3^{\pm} = & \sum_{m=-\infty}^{\infty} q(m)r(m \pm 3)[1 + q(m \pm 2)r(m \pm 2)][1 + q(m \pm 1)r(m \pm 1)] + \\ & + \sum_{m=-\infty}^{\infty} q(m)q(m \pm 1)r^2(m \pm 2)[1 + q(m \pm 1)r(m \pm 1)] + \\ & + \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^2(m)r(m \pm 1)r(m \pm 2)[1 + q(m \pm 1)r(m \pm 1)] + \\ & + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{3} q^3(m)r^3(m \pm 1) . \end{aligned} \quad (5.1.23)$$

Можна показати [200], що з білінійною точністю для інтегралів руху I_{α}^{-} та I_{α}^{+} довільного порядку $\alpha \geq 1$ матимемо

$$I_{\alpha}^{\pm} \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} q(m)r(m \pm \alpha) . \quad (5.1.24)$$

Тому лінійні частини рівнянь M -ї моделі з нескінченної ієрархії набувають вигляду

$$+i\dot{q}(n) \sim -2\omega_0 q(n) - \sum_{\alpha=1}^M [\omega_{\alpha}^{-} q(n + \alpha) + \omega_{\alpha}^{+} q(n - \alpha)] \quad (5.1.25)$$

$$-i\dot{r}(n) \sim -2\omega_0 r(n) - \sum_{\alpha=1}^M [\omega_{\alpha}^{+} r(n + \alpha) + \omega_{\alpha}^{-} r(n - \alpha)] . \quad (5.1.26)$$

Звідси видно, що параметри ω_α^- та ω_α^+ характеризують величину резонансного зв'язку між двома вузлами одновимірної регулярної ґратки, розділеними α -ма постійними ґратки. Члени, пропорційні до параметра ω_0 , відповідають за систематичний зсув початку відліку енергії, і їх можна легко усунути за допомоги калібрувального перетворення польових амплітуд $q(n)$ та $r(n)$.

На загал, параметри ω_α^- , ω_α^+ та ω_0 слід вважати довільними функціями часу. Як наслідок, функція Гамільтона H будь-якої моделі з узагальненої ієрархії не зобов'язана зберігатись і тому здатна описувати ту чи іншу параметрично розгойдувану нелінійну систему з досить складною динамікою. З невідомих причин цю важливу обставину вперто не помічають в стандартних теоріях інтегровних ієрархій [248, 173].

Інше важливе зауваження щодо моделей, згенерованих спектральним оператором Абловіца–Ладіка (5.1.1), стосується нестандартності їхньої Гамільтонової структури (5.1.17), (5.1.18). В кількох наших працях [192, 193] ми запропонували точкові перетворення

$$q(n) = \sqrt{[\exp(Q(n)R(n)) - 1]Q(n)/R(n)} \quad (5.1.27)$$

$$r(n) = \sqrt{[\exp(R(n)Q(n)) - 1]R(n)/Q(n)}, \quad (5.1.28)$$

які, як виявилось, є класичними аналогами знайдених Кулішем перетворень квантових операторів [102]. Тут важливо, що ці точкові перетворення (5.1.27), (5.1.28) зводять будь-яку систему як із традиційної, так і з параметрично розгойдуваної ієрархії до звичної стандартної форми [200]

$$+i\dot{Q}(n) = \partial H / \partial R(n) \quad (5.1.29)$$

$$-i\dot{R}(n) = \partial H / \partial Q(n). \quad (5.1.30)$$

При цьому лінійні частини рівнянь (5.1.29), (5.1.30) в термінах скоригованих амплітуд $Q(n)$ і $R(n)$ та лінійні частини рівнянь (5.1.17), (5.1.18) в термінах початкових амплітуд $q(n)$ та $r(n)$ збігаються і, таким чином, відповідають за той самий спектр низькоамплітудних збуджень.

Точні тлумачення скоригованих амплітуд $Q(n)$ та $R(n)$ залежать від прийнятої редукції польових амплітуд. Так, якщо $r(n) = q^*(n)$, а значить і

$R(n) = Q^*(n)$, то амплітуди $Q(n)$ та $R(n)$ є нічим іншим, як амплітудами присутності збудження на n -му вузлі ланцюжка, оскільки згідно з означенням нульового інтегралу руху (5.1.20), повне число збуджень в системі

$$I_0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Q(m)R(m) \quad (5.1.31)$$

зобов'язане зберігатися. Використовування поняття амплітуд присутності збудження $Q(m)$ та $R(m)$ дає змогу обчислювати середні значення $\langle G \rangle$ деякої величини G для конкретного розподілу нелінійних збуджень у найприродніший спосіб, а саме за формулою

$$\langle G(n) \rangle = \frac{\sum_{m=-\infty}^{\infty} G(m)Q(m)R(m)}{\sum_{m=-\infty}^{\infty} Q(m)R(m)} . \quad (5.1.32)$$

Надалі в межах цього підрозділу вважатимемо амплітуди $q(n)$ та $r(n)$ комплексно спряженими. При цьому гамільтоніан H для будь-якої моделі з нескінченної ієрархії мусить бути дійсним $H^* = H$, що з огляду на саме означення (5.1.19) гамільтоніану H вимагає, аби параметри міжвузлового зв'язку ω_α^- та ω_α^+ були комплексно спряженими навзаєм, тобто допускали представлення

$$\omega_\alpha^- \exp(+i\varphi_\alpha) = \omega_\alpha = \omega_\alpha^+ \exp(-i\varphi_\alpha) , \quad (5.1.33)$$

де суто дійсні параметри ω_α та φ_α можуть бути довільними функціями від часу $\omega_\alpha = \omega_\alpha(\tau)$ та $\varphi_\alpha = \varphi_\alpha(\tau)$. Параметр зсуву шкали енергії $\omega_0 = \omega_0(\tau)$ також мусить бути суто дійсним.

В рамках таких припущень в праці [200] ми застосували метод оберненої задачі розсіяння і формально знайшли багатосолітонні розв'язки для будь-якої моделі з нескінченної ієрархії параметрично розгойдуваних нелінійних напівдискретних систем шрьодінґерівського типу, пов'язаних зі спектральним оператором Абловіца–Ладіка (5.1.4).

Так, для односолітонного розв'язку ми маємо

$$q(n|\tau) = \frac{\sinh \mu \exp[+ikn + i\theta - i \int_0^\tau dt \Omega(k|t|\mu)]}{\cosh\{\mu[n - x - \int_0^\tau dt v(k|t|\mu)]\}}, \quad (5.1.34)$$

де функції

$$\Omega(k|\tau|\mu) = -2\omega_0(\tau) - 2 \sum_{\alpha=1}^M \omega_\alpha(\tau) \cosh(\alpha\mu) \cos[\alpha k - \varphi_\alpha(\tau)] \quad (5.1.35)$$

$$v(k|\tau|\mu) = \frac{2}{\mu} \sum_{\alpha=1}^M \omega_\alpha(\tau) \sinh(\alpha\mu) \sin[\alpha k - \varphi_\alpha(\tau)] \quad (5.1.36)$$

повністю визначаються порядковим номером M моделі в узагальненій ієрархії. За умови часової незалежності параметрів $\omega_\alpha(\tau)$ та $\varphi_\alpha(\tau)$, величини $\Omega(k|\tau|\mu)$ та $v(k|\tau|\mu)$ нагадують закон дисперсії хвиль та їхню групову швидкість, відповідно. У загальному випадку залежних від часу параметрів $\omega_\alpha(\tau)$ та $\varphi_\alpha(\tau)$ існують передумови для явища так званої параметричної локалізації солітона [200].

Пояснимо останнє твердження, звернувшись до означення координати центру розподілу нелінійних збуджень

$$x(k|\tau|\mu) \equiv \langle n \rangle, \quad (5.1.37)$$

зробленому в дусі прийнятої раніше формули усереднення (5.1.32). Провівши вказане тут усереднювання на розподілі збуджень, що відповідає односолітонному розв'язкові (5.1.34), за допомоги формули підсумовування Пуассона одержуємо точний результат, а саме

$$x(k|\tau|\mu) = x + \int_0^\tau dt v(k|t|\mu). \quad (5.1.38)$$

Звідси видно, що параметр x відповідає за координату центру солітона в початковий момент часу $\tau = 0$, а величина $v(k|\tau|\mu)$ є миттєвою швидкістю солітона

як цілого. У частинному випадку, коли параметричне розгойдування системи визначено залежностями $\omega_\alpha(\tau) = \omega_\alpha(0)$ та $\varphi_\alpha(\tau) = \varphi_\alpha(0) - \mathcal{E}_\alpha(0)\tau$, для положення центру солітона матимемо

$$x(k|\tau|\mu) = x - \frac{2}{\mu} \sum_{\alpha=1}^M \frac{\omega_\alpha(0)}{\mathcal{E}_\alpha(0)} \sinh(\alpha\mu) \{ \cos [\mathcal{E}_\alpha(0)\tau + \alpha k - \varphi_\alpha(0)] - \cos [\alpha k - \varphi_\alpha(0)] \}. \quad (5.1.39)$$

Таким чином, динаміка центру солітона стає суто осциляційною і вказує на ефект параметричної локалізації солітона в певних просторових межах. Якщо ж тепер один або кілька параметрів $\mathcal{E}_\alpha(0)$ спрямувати до нуля, то відповідні парціальні коливання виродяться в поступальний рух, і в цілому ми матимемо деяку суперпозицію дрейфового та осциляційного рухів.

Надзвичайно важливою властивістю параметрично розгойдуваних систем з дійсним гамільтоніаном, тобто гамільтоніаном виду

$$H = -2\omega_0 I_0 - \sum_{\alpha=1}^M \omega_\alpha [\exp(-i\varphi_\alpha) I_\alpha^- + \exp(+i\varphi_\alpha) I_\alpha^+], \quad (5.1.40)$$

є їхня калібрувальна еквівалентність з параметрично розгойдуваними системами в лінійному потенціалі $-\mathcal{E}n$, тобто з системами з гамільтоніаном

$$\mathcal{H} = -2\omega_0 I_0 - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{E} m \ln[1 + q(m)r(m)] - \sum_{\alpha=1}^M \omega_\alpha [\exp(-i\psi_\alpha) I_\alpha^- + \exp(+i\psi_\alpha) I_\alpha^+], \quad (5.1.41)$$

де на загал $\omega_\alpha = \omega_\alpha(\tau)$, $\varphi_\alpha = \varphi_\alpha(\tau)$, $\omega_0 = \omega_0(\tau)$, а

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\tau) \quad (5.1.42)$$

$$\psi_\alpha(\tau) = \varphi_\alpha(\tau) + \alpha \int_0^\tau dt \mathcal{E}(t). \quad (5.1.43)$$

Згадане калібрувальне перетворення означає, що розв'язки для системи з гамільтоніаном \mathcal{H} одержуємо з розв'язків $q(n)$ та $r(n)$ для систем з га-

мільтоніаном H простим домножуванням останніх на $\exp[+in \int_0^\tau dt \mathcal{E}(t)]$ та $\exp[-in \int_0^\tau dt \mathcal{E}(t)]$, відповідно. У випадку, коли $\omega_0 = \omega_0(0)$, $\omega_\alpha = \omega_\alpha(0)$, $\psi_\alpha = \psi_\alpha(0)$ та $\mathcal{E} = \mathcal{E}(0)$, параметричне збуджування системи з лінійним потенціалом відсутнє. При цьому дія лінійного потенціалу приводить до осциляцій центру солітона за законом

$$x(k|\tau|\mu) = x - \frac{2}{\mu} \sum_{\alpha=1}^M \frac{\omega_\alpha(0)}{\alpha \mathcal{E}(0)} \sinh(\alpha\mu) \{ \cos[\alpha \mathcal{E}(0)\tau + \alpha k - \psi_\alpha(0)] - \cos[\alpha k - \psi_\alpha(0)] \}. \quad (5.1.44)$$

З цієї формули видно, що з ростом напруженості поля $\mathcal{E}(0)$ частоти парціальних осциляцій більшають, а їхні амплітуди меншають, що відповідає явищу так званої динамічної локалізації солітона.

У фізиці конденсованого стану осциляції, спричинені грою між лінійним потенціалом, прикладеним до носіїв заряду, та дискретністю просторової структури, відомі під назвою осциляцій Блоха–Зінера (Bloch–Zener oscillations) [22, 250]. Такі ефекти експериментально проявляються лише в просторово дискретних регулярних системах, наприклад, в напівпровідникових надґратках [117], а в неперервних системах є принципово забороненими. Цікаво, що явища, аналогічні до коливань Блоха та до динамічної локалізації, є характерними для термооптичних полімерних структур з поперечним температурним градієнтом [148] та для зігнутих оптичноволокнинних структур [114].

На закінчення цього підрозділу спинимось на інтерпретації параметрів k та μ загального односолітонного розв'язку (5.1.34).

У випадку параметрично незбуджуваної системи без лінійного потенціалу, коли $\omega_\alpha(\tau) = \omega_\alpha(0)$, $\varphi_\alpha(\tau) = \varphi_\alpha(0)$ та $\mathcal{E}(0) = 0$, рух солітона як цілого є рівномірним, і параметру k можна наближено приписати роль квазіімпульсу. У випадку ж системи із суто Блоховими осциляціями, коли $\omega_\alpha(\tau) = \omega_\alpha(0)$, $\varphi_\alpha(\tau) = \varphi_\alpha(0) - \mathcal{E}_\alpha(0)\tau$ та $\mathcal{E}(0) = 0$, роль параметра k як аналога квазіімпульсу втрачається і натомість, згідно з формулою (5.1.44), зводиться до впливу на фази парціальних коливань.

Аби зрозуміти роль параметра μ слід скористатися означенням

$$d(x(k|\tau|\mu)) = 2\sqrt{\langle(n - x(k|\tau|\mu))^2\rangle} \quad (5.1.45)$$

для характерної ширини $d(x(k|\tau|\mu))$ солітонного пакету.

Розрахунки показують, що за $\mu \ll 1$ ширина солітона практично не залежить від положення його центру і дорівнює

$$d(x(k|\tau|\mu)) \simeq \frac{\pi}{\mu\sqrt{3}}. \quad (5.1.46)$$

За $\mu \gtrsim 1$ ширина солітона осцилює в межах

$$d(0) \leq d(x(k|\tau|\mu)) \leq d(\pm 1/2), \quad (5.1.47)$$

де

$$d(0) \simeq \sqrt{\frac{4 \ln 2}{\mu}} \quad (5.1.48)$$

$$d(\pm 1/2) \simeq 1. \quad (5.1.49)$$

Такий дихальний ефект є безпосереднім наслідком дискретності простору та руху солітона як цілого. За $\mu \ll 1$ амплітуда дихальних осциляцій стає експоненційно малою. За $\mu \gtrsim 1$ можна стверджувати, що параметр $1/\mu$ є ключовим для оцінок як найменшої ширини солітона, так і амплітуди його дихальних осциляцій.

5.2 Напівдискретна інтегровна нелінійна модель двох Тодових підсистем, пов'язаних через підсистему орієнтаційного типу [201, 202]

В цьому підрозділі ми спинимося на результатах двох наших праць [201, 202], що започаткували новий спектральний оператор третього порядку і узгодже-

ний з ним еволюційний оператор, які в рамках представлення нульової кривини привели до раніше невідомої напівдискретної нелінійної системи

$$\frac{d}{d\tau} [\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_+(n)] = \partial \mathcal{L} / \partial q_+(n) \quad (5.2.1)$$

$$\frac{d}{d\tau} [\partial \mathcal{L} / \partial \dot{\alpha}(n)] = \partial \mathcal{L} / \partial \alpha(n) \quad (5.2.2)$$

$$\frac{d}{d\tau} [\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_-(n)] = \partial \mathcal{L} / \partial q_-(n) \quad (5.2.3)$$

з функцією Лагранжа

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\dot{q}_+^2(m) \sin^2 \alpha(m) + \dot{q}_-^2(m) \cos^2 \alpha(m)] \\ & - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp [+q_+(m+1) - q_+(m)] \sin \alpha(m+1) \sin \alpha(m) \\ & - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp [+q_-(m+1) - q_-(m)] \cos \alpha(m+1) \cos \alpha(m) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\dot{q}_+(m) - \dot{q}_-(m)]^2 \sin^2 \alpha(m) \cos^2 \alpha(m) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \dot{\alpha}^2(m) . \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Динамічна структура цієї інтегрованої нелінійної системи (5.2.1)–(5.2.4) є значно складнішою за динамічну структуру системи Тоди [181, 182, 120, 66, 183, 184, 185], оскільки включає в себе динаміку трьох зв'язаних підсистем, дві з яких можна розуміти як Тодові підсистеми з масами структурних елементів, залежними від орієнтаційної польової змінної. Сама ж інтегрована система (5.2.1)–(5.2.4) є цілком оригінальною, тобто не є редукцією чи розширенням раніше відомих інтегрованих систем.

Допоміжні спектральний $L(n|z)$ та еволюційний $A(n|z)$ оператори, асоційовані із запропонованою динамічною системою (5.2.1)–(5.2.4), мають вигляд [201, 202]

$$L(n|z) = \begin{pmatrix} p_{11}(n) + \lambda(z) & F_{12}(n) & p_{13}(n) \\ G_{21}(n) & 0 & G_{23}(n) \\ p_{31}(n) & F_{32}(n) & p_{33}(n) + \lambda(z) \end{pmatrix} \quad (5.2.5)$$

та

$$A(n|z) = \begin{pmatrix} 0 & A_{12}(n) & 0 \\ A_{21}(n) & \lambda(z) & A_{23}(n) \\ 0 & A_{32}(n) & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.2.6)$$

де функційні частини відповідних матричних елементів задано виразами

$$F_{12}(n) = i \exp[+q_-(n)] \cos \alpha(n) \quad (5.2.7)$$

$$G_{21}(n) = i \exp[-q_-(n)] \cos \alpha(n) \quad (5.2.8)$$

$$G_{23}(n) = i \exp[-q_+(n)] \sin \alpha(n) \quad (5.2.9)$$

$$F_{32}(n) = i \exp[+q_+(n)] \sin \alpha(n) \quad (5.2.10)$$

$$p_{11}(n) = \dot{q}_-(n) [1 - \sin^4 \alpha(n)] - \dot{q}_+(n) \sin^2 \alpha(n) \cos^2 \alpha(n) \quad (5.2.11)$$

$$p_{13}(n) = \exp [+q_-(n) - q_+(n)] \\ \times [\dot{q}_-(n) \sin^3 \alpha(n) \cos \alpha(n) + \dot{q}_+(n) \sin \alpha(n) \cos^3 \alpha(n) - \dot{\alpha}(n)] \quad (5.2.12)$$

$$p_{31}(n) = \exp [-q_-(n) + q_+(n)] \\ \times [\dot{q}_-(n) \sin^3 \alpha(n) \cos \alpha(n) + \dot{q}_+(n) \sin \alpha(n) \cos^3 \alpha(n) + \dot{\alpha}(n)] \quad (5.2.13)$$

$$p_{33}(n) = \dot{q}_+(n) [1 - \cos^4 \alpha(n)] - \dot{q}_-(n) \sin^2 \alpha(n) \cos^2 \alpha(n) \quad (5.2.14)$$

та

$$A_{12}(n) = -i \exp[+q_-(n)] \cos \alpha(n) \quad (5.2.15)$$

$$A_{21}(n) = -i \exp[-q_-(n-1)] \cos \alpha(n-1) \quad (5.2.16)$$

$$A_{23}(n) = -i \exp[-q_+(n-1)] \sin \alpha(n-1) \quad (5.2.17)$$

$$A_{32}(n) = -i \exp[+q_+(n)] \sin \alpha(n). \quad (5.2.18)$$

Конкретний вибір функційної залежності величини $\lambda(z)$ від спектрального параметра z диктують граничні умови для швидкостей $\dot{q}_+(n)$, $\dot{\alpha}(n)$, $\dot{q}_-(n)$ на обох просторових нескінченностях $|n| \rightarrow \infty$. Так, у випадку нульових грани-

чних швидкостей $\dot{q}_+(\pm\infty) = 0$, $\dot{a}(\pm\infty) = 0$, $\dot{q}_-(\pm\infty) = 0$ найбільш прийнятним виявляється вибір $\lambda(z) = z + 1/z$, оскільки тоді власні значення $\zeta_j(z)$ граничного спектрального оператора $L(z)$ (означеного як $L(z) = \lim_{n \rightarrow -\infty} L(n|z)$ або $L(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} L(n|z)$) набувають досить зручної параметризації

$$\zeta_1(z) = z \tag{5.2.19}$$

$$\zeta_2(z) = z + 1/z \tag{5.2.20}$$

$$\zeta_3(z) = 1/z . \tag{5.2.21}$$

Оскільки між собою ці власні значення (5.2.19)–(5.2.21) не збігаються, то за загальним правилом, сформульованим Кодрі [34], спектральний оператор $L(n|z)$, а отже і пов'язана з ним спектральна задача, мають третій порядок. Ця обставина, незважаючи на оптимізм підходу Кодрі до оберненої задачі розсіяння [34] в наших потугах [201, 202] пошуку розв'язків вищевказаної нелінійної інтегровної системи (5.2.1)–(5.2.4), наводить на думку, що метод одягання в рамках перетворення Дарбу–Беклунда є значно перспективнішим і дасть змогу в майбутньому знайти цікаві солітонні розв'язки системи у найпростіший спосіб. Дотепер знайдений явний розв'язок із застосуванням досить складної машинерії підходу Кодрі [201, 202] видається нам занадто тривіальним, аби про нього тут згадувати.

5.3 Багатокомпонентні напівдискретні інтегровні нелінійні системи, асоційовані з новими спектральними операторами четвертого та третього порядків [213, 214, 215, 216, 218, 219]

В низці наших праць [213, 214, 215, 216, 218, 219] ми подали результати пошуків нових багатокомпонентних напівдискретних інтегровних нелінійних систем, головною рисою кожної з яких стало узгоджене поєднання кількох полів суттєво відмінної природи зі збереженням інтегровності системи як цілого.

Спільним перспективним підґрунтям для розбудови таких систем стало виявлення прийняттого типу допоміжного спектрального оператора четвертого порядку [213, 214, 215]

$$L(n|z) = \tag{5.3.1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & t_{12}(n) & u_{13}(n)z^{-1} & 0 \\ t_{21}(n) & r_{22}(n)z^2 + t_{22}(n) & s_{23}(n)z + u_{23}(n)z^{-1} & s_{24}(n)z \\ u_{31}(n)z^{-1} & s_{32}(n)z + u_{32}(n)z^{-1} & t_{33}(n) + v_{33}(n)z^{-2} & t_{34}(n) \\ 0 & s_{42}(n)z & t_{43}(n) & 0 \end{pmatrix},$$

що в рамках рівняння нульової кривини (5.1.3) демонструє повну узгодженість з двома принципово різними типами еволюційних операторів [213, 214, 215]

$$A(n|z) = \tag{5.3.2}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & c_{12}(n) & d_{13}(n)z^{-1} & 0 \\ c_{21}(n) & a_{22}(n)z^2 + c_{22}(n) & b_{23}(n)z + d_{23}(n)z^{-1} & b_{24}(n)z \\ d_{31}(n)z^{-1} & b_{32}(n)z + d_{32}(n)z^{-1} & c_{33}(n) + e_{33}(n)z^{-2} & c_{34}(n) \\ 0 & b_{42}(n)z & c_{43}(n) & 0 \end{pmatrix}$$

та [213]

$$A(n|z) = \tag{5.3.3}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}(n)z^2 + c_{11}(n) & c_{12}(n) & b_{13}(n)z & b_{14}(n)z + d_{14}(n)z^{-1} \\ c_{21}(n) & 0 & 0 & d_{24}(n)z^{-1} \\ b_{31}(n)z & 0 & 0 & c_{34}(n) \\ b_{41}(n)z + d_{41}(n)z^{-1} & d_{42}(n)z^{-1} & c_{43}(n) & c_{44}(n) + e_{44}(n)z^{-2} \end{pmatrix}.$$

Для прикладу ми подамо загальну багатокомпонентну напівдискретну інтегровну нелінійну систему, що випливає з рівняння нульової кривини (5.1.3), специфікованого еволюційним оператором першого типу (5.3.2) [214]

$$\dot{t}_{12}(n) = c_{12}(n+1)t_{22}(n) + d_{13}(n+1)s_{32}(n) - t_{12}(n)c_{22}(n) - u_{13}(n)b_{32}(n) \tag{5.3.4}$$

$$\dot{u}_{13}(n) = c_{12}(n+1)u_{23}(n) + d_{13}(n+1)t_{33}(n) - t_{12}(n)d_{23}(n) - u_{13}(n)c_{33}(n) \tag{5.3.5}$$

$$\dot{t}_{21}(n) = c_{22}(n+1)t_{21}(n) + b_{23}(n+1)u_{31}(n) - t_{22}(n)c_{21}(n) - s_{23}(n)d_{31}(n) \tag{5.3.6}$$

$$\begin{aligned}\dot{r}_{22}(n) &= c_{22}(n+1)r_{22}(n) + b_{23}(n+1)s_{32}(n) + b_{24}(n+1)s_{42}(n) \\ &\quad - r_{22}(n)c_{22}(n) - s_{23}(n)b_{32}(n) - s_{24}(n)b_{42}(n)\end{aligned}\quad (5.3.7)$$

$$\begin{aligned}\dot{t}_{22}(n) &= c_{21}(n+1)t_{12}(n) + c_{22}(n+1)t_{22}(n) - t_{21}(n)c_{12}(n) - t_{22}(n)c_{22}(n) \\ &\quad + b_{23}(n+1)u_{32}(n) + d_{23}(n+1)s_{32}(n) - s_{23}(n)d_{32}(n) - u_{23}(n)b_{32}(n)\end{aligned}\quad (5.3.8)$$

$$\begin{aligned}\dot{s}_{23}(n) &= a_{22}(n+1)u_{23}(n) + c_{22}(n+1)s_{23}(n) - r_{22}(n)d_{23}(n) - t_{22}(n)b_{23}(n) \\ &\quad + b_{23}(n+1)t_{33}(n) + b_{24}(n+1)t_{43}(n) - s_{23}(n)c_{33}(n) - s_{24}(n)c_{43}(n)\end{aligned}\quad (5.3.9)$$

$$\begin{aligned}\dot{u}_{23}(n) &= c_{21}(n+1)u_{13}(n) + c_{22}(n+1)u_{23}(n) - t_{21}(n)d_{13}(n) - t_{22}(n)d_{23}(n) \\ &\quad + b_{23}(n+1)v_{33}(n) + d_{23}(n+1)t_{33}(n) - s_{23}(n)e_{33}(n) - u_{23}(n)c_{33}(n)\end{aligned}\quad (5.3.10)$$

$$\dot{s}_{24}(n) = c_{22}(n+1)s_{24}(n) + b_{23}(n+1)t_{34}(n) - t_{22}(n)b_{24}(n) - s_{23}(n)c_{34}(n)\quad (5.3.11)$$

$$\dot{u}_{31}(n) = d_{32}(n+1)t_{21}(n) + c_{33}(n+1)u_{31}(n) - u_{32}(n)c_{21}(n) - t_{33}(n)d_{31}(n)\quad (5.3.12)$$

$$\begin{aligned}\dot{s}_{32}(n) &= b_{32}(n+1)t_{22}(n) + d_{32}(n+1)r_{22}(n) - s_{32}(n)c_{22}(n) - u_{32}(n)a_{22}(n) \\ &\quad + c_{33}(n+1)s_{32}(n) + c_{34}(n+1)s_{42}(n) - t_{33}(n)b_{32}(n) - t_{34}(n)b_{42}(n)\end{aligned}\quad (5.3.13)$$

$$\begin{aligned}\dot{u}_{32}(n) &= d_{31}(n+1)t_{12}(n) + d_{32}(n+1)t_{22}(n) - u_{31}(n)c_{12}(n) - u_{32}(n)c_{22}(n) \\ &\quad + c_{33}(n+1)u_{32}(n) + e_{33}(n+1)s_{32}(n) - t_{33}(n)d_{32}(n) - v_{33}(n)b_{32}(n)\end{aligned}\quad (5.3.14)$$

$$\begin{aligned}\dot{t}_{33}(n) &= b_{32}(n+1)u_{23}(n) + d_{32}(n+1)s_{23}(n) - s_{32}(n)d_{23}(n) - u_{32}(n)b_{23}(n) \\ &\quad + c_{33}(n+1)t_{33}(n) + c_{34}(n+1)t_{43}(n) - t_{33}(n)c_{33}(n) - t_{34}(n)c_{43}(n)\end{aligned}\quad (5.3.15)$$

$$\begin{aligned}\dot{v}_{33}(n) &= d_{31}(n+1)u_{13}(n) + d_{32}(n+1)u_{23}(n) + c_{33}(n+1)v_{33}(n) \\ &\quad - u_{31}(n)d_{13}(n) - u_{32}(n)d_{23}(n) - v_{33}(n)c_{33}(n)\end{aligned}\quad (5.3.16)$$

$$\dot{t}_{34}(n) = d_{32}(n+1)s_{24}(n) + c_{33}(n+1)t_{34}(n) - u_{32}(n)b_{24}(n) - t_{33}(n)c_{34}(n)\quad (5.3.17)$$

$$\dot{s}_{42}(n) = b_{42}(n+1)t_{22}(n) + c_{43}(n+1)s_{32}(n) - s_{42}(n)c_{22}(n) - t_{43}(n)b_{32}(n)\quad (5.3.18)$$

$$\dot{t}_{43}(n) = b_{42}(n+1)u_{23}(n) + c_{43}(n+1)t_{33}(n) - s_{42}(n)d_{23}(n) - t_{43}(n)c_{33}(n) , \quad (5.3.19)$$

де [213, 214]

$$c_{12}(n) = t_{12}(n-1)a_{22}/r_{22}(n-1) \quad (5.3.20)$$

$$d_{13}(n) = u_{13}(n-1)e_{33}/v_{33}(n-1) \quad (5.3.21)$$

$$c_{21}(n) = a_{22}t_{21}(n)/r_{22}(n) \quad (5.3.22)$$

$$a_{22}(n) = a_{22} \quad (5.3.23)$$

$$b_{23}(n) = a_{22}s_{23}(n)/r_{22}(n) \quad (5.3.24)$$

$$d_{23}(n) = u_{23}(n-1)e_{33}/v_{33}(n-1) \quad (5.3.25)$$

$$b_{24}(n) = a_{22}s_{24}(n)/r_{22}(n) \quad (5.3.26)$$

$$d_{31}(n) = e_{33}u_{31}(n)/v_{33}(n) \quad (5.3.27)$$

$$b_{32}(n) = s_{32}(n-1)a_{22}/r_{22}(n-1) \quad (5.3.28)$$

$$d_{32}(n) = e_{33}u_{32}(n)/v_{33}(n) \quad (5.3.29)$$

$$e_{33}(n) = e_{33} \quad (5.3.30)$$

$$c_{34}(n) = e_{33}t_{34}(n)/v_{33}(n) \quad (5.3.31)$$

$$b_{42}(n) = s_{42}(n-1)a_{22}/r_{22}(n-1) \quad (5.3.32)$$

$$c_{43}(n) = t_{43}(n-1)e_{33}/v_{33}(n-1) . \quad (5.3.33)$$

Тут координатонезалежним величинам a_{22} та e_{33} дозволено бути довільними функціями від часу τ і таким чином привносити до нелінійної системи (5.3.4)–(5.3.19) ефект того чи іншого параметричного розгойдування.

Чотирнадцять останніх виразів (5.3.20)–(5.3.33) фіксують більшість матричних елементів задіяного еволюційного оператора (5.3.2) в термінах польових функцій спектрального оператора (5.3.1). Дві незафіксовані функції (функції вибору) $c_{22}(n)$ та $c_{33}(n)$ відкривають свободу вибору цікавого нам варіанту інтегровної системи. Схожа картина з функціями вибору є досить звичною для інших інтегровних нелінійних систем [189, 208, 213, 214] і вірогідно узгоджується з принципами методу редукційних груп Михайлова [129]. Найпо-

слідовніший підхід до полагодження конкретної фіксації функцій вибору, на наше переконання, полягає в належному врахуванні найнижчих локальних законів збереження. Спираючись на цей керівний принцип, ми спромоглися вказати на кілька варіантів фіксації функцій $c_{22}(n)$ та $c_{33}(n)$ і, відповідно, на кілька конкретних реалізацій нових інтегровних нелінійних систем, поданих в одній з наших статей [214].

Зважаючи на значну складність загальної інтегровної нелінійної системи (5.3.4)–(5.3.33), ми звернули увагу на деякі її симетричні властивості з метою зменшити число незалежних польових функцій. При цьому виявилось, що одержані таким чином редуковані інтегровні нелінійні системи насправді можна пов'язати з допоміжним спектральним оператором вже не четвертого, а третього порядку.

Більше того, нам вдалося вгледіти і загальнішу форму допоміжного спектрального оператора третього порядку [216]

$$L(n|z) = \begin{pmatrix} r_{11}(n)z^2 + t_{11}(n) & \beta s_{12}(n)z + \alpha s_{12}(n) & s_{13}(n)z + u_{13}(n)z^{-1} \\ \alpha s_{21}(n)z + \beta s_{21}(n) & 0 & \alpha u_{23}(n) + \beta u_{23}(n)z^{-1} \\ s_{31}(n)z + u_{31}(n)z^{-1} & \beta u_{32}(n) + \alpha u_{32}(n)z^{-1} & t_{33}(n) + v_{33}(n)z^{-2} \end{pmatrix} \quad (5.3.34)$$

з двома часонезалежними параметрами α and β , пов'язаними єдиною умовою

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0. \quad (5.3.35)$$

Редукція ж, про яку йшлося вище, вимагає додаткового обмеження $\alpha\beta = 1$ параметрів α та β цього спектрального оператора (5.3.34) [215].

В рамках рівняння нульової кривини (5.1.3) узагальнений спектральний оператор (5.3.34) в парі з еволюційним оператором типу [216]

$$A(n|z) = \begin{pmatrix} a_{11}(n)z^2 + c_{11}(n) & b_{12}(n)z + c_{12}(n) & b_{13}(n)z + d_{13}(n)z^{-1} \\ b_{21}(n)z + c_{21}(n) & 0 & c_{23}(n) + d_{23}(n)z^{-1} \\ b_{31}(n)z + d_{31}(n)z^{-1} & c_{32}(n) + d_{32}(n)z^{-1} & c_{33}(n) + e_{33}(n)z^{-2} \end{pmatrix} \quad (5.3.36)$$

породжують наступну загальну систему інтегровних нелінійних еволюційних

рівнянь [216]:

$$\begin{aligned} \dot{r}_{11}(n) &= c_{11}(n+1)r_{11}(n) - r_{11}(n)c_{11}(n) + \\ &+ \alpha\beta a_{11}s_{12}(n+1)s_{21}(n)/r_{11}(n+1) - \alpha\beta a_{11}s_{12}(n)s_{21}(n-1)/r_{11}(n-1) + \\ &+ a_{11}s_{13}(n+1)s_{31}(n)/r_{11}(n+1) - a_{11}s_{13}(n)s_{31}(n-1)/r_{11}(n-1) \end{aligned} \quad (5.3.37)$$

$$\begin{aligned} \dot{t}_{11}(n) &= c_{11}(n+1)t_{11}(n) - t_{11}(n)c_{11}(n) + \\ &+ \alpha\beta a_{11}s_{12}(n+1)s_{21}(n)/r_{11}(n+1) - \alpha\beta a_{11}s_{12}(n)s_{21}(n-1)/r_{11}(n-1) + \\ &+ a_{11}s_{13}(n+1)u_{31}(n)/r_{11}(n+1) - a_{11}u_{13}(n)s_{31}(n-1)/r_{11}(n-1) + \\ &+ u_{13}(n)e_{33}s_{31}(n)/v_{33}(n) - s_{13}(n)e_{33}u_{31}(n)/v_{33}(n) \end{aligned} \quad (5.3.38)$$

$$\begin{aligned} \dot{s}_{12}(n) &= c_{11}(n+1)s_{12}(n) - a_{11}t_{11}(n)s_{12}(n)/r_{11}(n) + \\ &+ a_{11}s_{13}(n+1)u_{32}(n)/r_{11}(n+1) - s_{13}(n)e_{33}u_{32}(n)/v_{33}(n) \end{aligned} \quad (5.3.39)$$

$$\begin{aligned} \dot{s}_{13}(n) &= c_{11}(n+1)s_{13}(n) - s_{13}(n)c_{33}(n) + \\ &+ \alpha\beta a_{11}s_{12}(n+1)u_{23}(n)/r_{11}(n+1) - \alpha\beta s_{12}(n)u_{23}(n-1)e_{33}/v_{33}(n-1) + \\ &+ a_{11}s_{13}(n+1)t_{33}(n)/r_{11}(n+1) - a_{11}t_{11}(n)s_{13}(n)/r_{11}(n) + \\ &+ a_{11}u_{13}(n) - r_{11}(n)u_{13}(n-1)e_{33}/v_{33}(n-1) \end{aligned} \quad (5.3.40)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_{13}(n) &= c_{11}(n+1)u_{13}(n) - u_{13}(n)c_{33}(n) + \\ &+ \alpha\beta a_{11}s_{12}(n+1)u_{23}(n)/r_{11}(n+1) - \alpha\beta s_{12}(n)u_{23}(n-1)e_{33}/v_{33}(n-1) + \\ &+ u_{13}(n)e_{33}t_{33}(n)/v_{33}(n) - t_{11}(n)u_{13}(n-1)e_{33}/v_{33}(n-1) + \\ &+ a_{11}s_{13}(n+1)v_{33}(n)/r_{11}(n+1) - s_{13}(n)e_{33} \end{aligned} \quad (5.3.41)$$

$$\begin{aligned} \dot{s}_{21}(n) &= s_{21}(n)t_{11}(n)a_{11}/r_{11}(n) - s_{21}(n)c_{11}(n) + \\ &+ u_{23}(n)e_{33}s_{31}(n)/v_{33}(n) - u_{23}(n)s_{31}(n-1)a_{11}/r_{11}(n-1) \end{aligned} \quad (5.3.42)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_{23}(n) &= u_{23}(n)t_{33}(n)e_{33}/v_{33}(n) - u_{23}(n)c_{33}(n) + \\ &+ s_{21}(n)a_{11}u_{13}(n)/r_{11}(n) - s_{21}(n)u_{13}(n-1)e_{33}/v_{33}(n-1) \end{aligned} \quad (5.3.43)$$

$$\begin{aligned}
\dot{s}_{31}(n) &= c_{33}(n+1)s_{31}(n) - s_{31}(n)c_{11}(n) + \\
&+ \alpha\beta e_{33}u_{32}(n+1)s_{21}(n)/v_{33}(n+1) - \alpha\beta u_{32}(n)s_{21}(n-1)a_{11}/r_{11}(n-1) + \\
&+ s_{31}(n)t_{11}(n)a_{11}/r_{11}(n) - t_{33}(n)s_{31}(n-1)a_{11}/r_{11}(n-1) + \\
&+ e_{33}u_{31}(n+1)r_{11}(n)/v_{33}(n+1) - u_{31}(n)a_{11}
\end{aligned} \tag{5.3.44}$$

$$\begin{aligned}
\dot{u}_{31}(n) &= c_{33}(n+1)u_{31}(n) - u_{31}(n)c_{11}(n) + \\
&+ \alpha\beta e_{33}u_{32}(n+1)s_{21}(n)/v_{33}(n+1) - \alpha\beta u_{32}(n)s_{21}(n-1)a_{11}/r_{11}(n-1) + \\
&+ e_{33}u_{31}(n+1)t_{11}(n)/v_{33}(n+1) - e_{33}t_{33}(n)u_{31}(n)/v_{33}(n) + \\
&+ e_{33}s_{31}(n) - v_{33}(n)s_{31}(n-1)a_{11}/r_{11}(n-1)
\end{aligned} \tag{5.3.45}$$

$$\begin{aligned}
\dot{u}_{32}(n) &= c_{33}(n+1)u_{32}(n) - t_{33}(n)e_{33}u_{32}(n)/v_{33}(n) + \\
&+ e_{33}u_{31}(n+1)s_{12}(n)/v_{33}(n+1) - u_{31}(n)a_{11}s_{12}(n)/r_{11}(n)
\end{aligned} \tag{5.3.46}$$

$$\begin{aligned}
\dot{t}_{33}(n) &= c_{33}(n+1)t_{33}(n) - t_{33}(n)c_{33}(n) + \\
&+ \alpha\beta e_{33}u_{32}(n+1)u_{23}(n)/v_{33}(n+1) - \alpha\beta e_{33}u_{32}(n)u_{23}(n-1)/v_{33}(n-1) + \\
&+ e_{33}u_{31}(n+1)s_{13}(n)/v_{33}(n+1) - e_{33}s_{31}(n)u_{13}(n-1)/v_{33}(n-1) + \\
&+ s_{31}(n)a_{11}u_{13}(n)/r_{11}(n) - u_{31}(n)a_{11}s_{13}(n)/r_{11}(n)
\end{aligned} \tag{5.3.47}$$

$$\begin{aligned}
\dot{v}_{33}(n) &= c_{33}(n+1)v_{33}(n) - v_{33}(n)c_{33}(n) + \\
&+ \alpha\beta e_{33}u_{32}(n+1)u_{23}(n)/v_{33}(n+1) - \alpha\beta e_{33}u_{32}(n)u_{23}(n-1)/v_{33}(n-1) + \\
&+ e_{33}u_{31}(n+1)u_{13}(n)/v_{33}(n+1) - e_{33}u_{31}(n)u_{13}(n-1)/v_{33}(n-1) .
\end{aligned} \tag{5.3.48}$$

Тут за загальними правилами координатонезалежні величини a_{11} та e_{33} можуть бути довільними функціями від часу τ , а функції вибору $c_{11}(n)$ та $c_{33}(n)$ наразі не є фіксованими.

Не вдаючись до обтяжливих подробиць, зауважимо, що одержану загальну систему дванадцяти рівнянь (5.3.37)–(5.3.48), за певної фіксації функцій вибору $c_{11}(n)$ та $c_{33}(n)$, редукції до суто дійсних польових змінних та належної параметризації редукованих польових змінних, можна звести до системи шести напівдискретних інтегровних нелінійних рівнянь, що допускають принаймні часткову фізичну інтерпретацію [218, 219]. Отже редукована напівдис-

кретна інтегровна нелінійна система складається з двох зв'язаних підсистем [218, 219], а саме

$$\frac{\dot{g}_+(n)}{1 - g_+^2(n)} = G_-(n) - G_-(n - 1) \quad (5.3.49)$$

$$\frac{\dot{g}_-(n)}{1 - g_-^2(n)} = G_+(n + 1) - G_+(n) \quad (5.3.50)$$

та

$$\begin{aligned} \frac{\dot{t}(n)}{1 - t(n)} = & \alpha\beta F_+(n + 1)F_-(n) - \alpha\beta F_+(n)F_-(n - 1) \\ & + G_+(n + 1)G_-(n) - G_+(n)G_-(n - 1) \\ & - G_+(n + 1)g_-(n) + g_+(n)G_-(n - 1) \\ & + G_+(n)g_-(n) - g_+(n)G_-(n) \end{aligned} \quad (5.3.51)$$

$$\dot{w}(n) = G_+(n) + G_-(n) - T(n) , \quad (5.3.52)$$

де для скорочення записів використано позначення

$$G_+(n) = g_+(n) + [1 - g_+(n)]t(n) \quad (5.3.53)$$

$$G_-(n) = g_-(n) + [1 - g_-(n)]t(n) \quad (5.3.54)$$

$$T(n) = [1 - g_+(n)g_-(n)]t(n) + g_+(n)g_-(n) \quad (5.3.55)$$

$$F_+(n) = [1 - g_+(n)][1 - t(n)][1 + g_-(n)]F_+ \exp[+w(n)] \quad (5.3.56)$$

$$F_-(n) = [1 + g_+(n)][1 - t(n)][1 - g_-(n)]F_- \exp[-w(n)] \quad (5.3.57)$$

з $\dot{F}_+ = 0 = \dot{F}_-$. Тут перша підсистема (5.3.49), (5.3.50), відповідальна за еволюцію польових змінних $g_+(n)$ та $g_-(n)$, описує деяку нелінійну самодуальну мережу дросельно-конденсаторного типу. Друга підсистема (5.3.51), (5.3.52), відповідальна за еволюцію польових змінних $t(n)$ та $w(n)$, описує деяку нелінійну ґратку, коливання якої розхитує самодуальна підсистема.

Наприклад, у найпростішому випадку нульового параметра зв'язку $\alpha\beta = 0$ останнє рівняння (5.3.52) другої підсистеми (5.3.51), (5.3.52) ніяк не впливатиме на поведінку решти рівнянь (5.3.49)–(5.3.51), оскільки вони не міститимуть змінної $w(n)$. При цьому має бути [218, 219] $t(n) = 0$, і тому $G_+(n) = g_+(n)$ та

$G_-(n) = g_-(n)$. Як наслідок, перша підсистема (5.3.49), (5.3.50) стає самодостатньою і набуває вигляду

$$\frac{\dot{g}_+(n)}{1 - g_+^2(n)} = g_-(n) - g_-(n - 1) \quad (5.3.58)$$

$$\frac{\dot{g}_-(n)}{1 - g_-^2(n)} = g_+(n + 1) - g_+(n) . \quad (5.3.59)$$

Якщо тепер ототожнити $g_+(n)$ з безрозмірним струмом $I(n)$ а $g_-(n)$ з без-

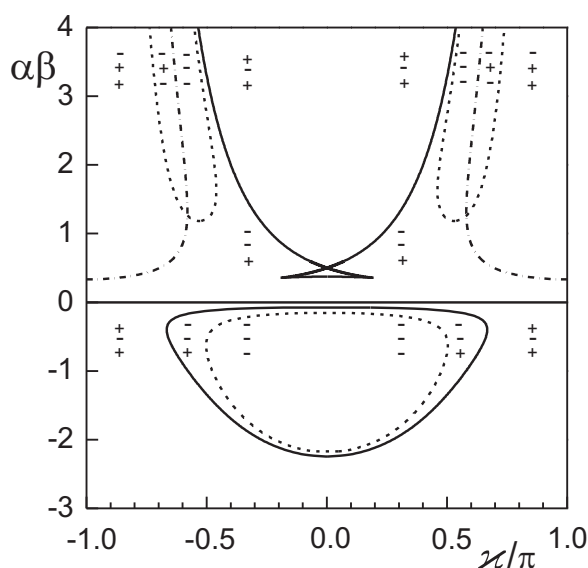


Рис. 5.1. Розбиття на області чотиригілкового (вказані стовпчиками міток з порядком знаків $+-+$) та двогілкового (вказані стовпчиками міток з порядком знаків, відмінним від $+-+$) спектру низькоамплітудних збуджень нелінійної інтегрованої системи (5.3.49)–(5.3.57) в площині дійсного хвильового вектора κ та дійсного підлаштовного параметра зв'язку $\alpha\beta$. Область, схожа на риб'ячий хвіст, відповідає стовпчику міток з порядком знаків $+-+$.

розмірною напругою $V(n)$, то ці зв'язані рівняння (5.3.58), (5.3.59) описуватимуть нелінійну драбинчасту електричну мережу самодуального типу, що складається зі струмозалежних дроселів та напругозалежних конденсаторів з n -ою індуктивністю $L(I(n))$ та n -ою ємністю $C(V(n))$, заданими нелінійними залежностями

$$L(I(n)) = \frac{\operatorname{artanh} I(n)}{I(n)} \quad (5.3.60)$$

та

$$C(V(n)) = \frac{\operatorname{artanh}V(n)}{V(n)}. \quad (5.3.61)$$

Еквівалентна електрична схема такої укороченої системи (5.3.58), (5.3.59) формально збігається з класичною схемою дросельно-конденсаторного типу, розглянутою Хіротою (Hirota) та Сузукі (Suzuki) [79] і досліджуваною аналітично Хіротою (Hirota) та Сатсумою (Satsuma) [80], проте з характеристиками нелінійних елементів $L(I(n))$ та $C(V(n))$, відмінними від наших (5.3.60), (5.3.61). Зауважимо, що належний вибір цих залежностей $L(I(n))$ та $C(V(n))$ уможливує строге досліджування напівдискретних моделей [43, 81], започаткованих моделлю міжвидової конкуренції Вольтерра (Volterra) [42].

У світлі усіх цих зауважень щодо скороченої системи (5.3.58), (5.3.59), запропонована нами ширша напівдискретна інтегровна нелінійна система (5.3.49)–(5.3.57) видається перспективною для подальших фізичних застосувань.

В кількох працях [216, 218, 219] ми дослідили поведінку спектру низькоамплітудних (лінійних) збуджень нашої напівдискретної інтегрованої нелінійної системи (5.3.49)–(5.3.57) в залежності від регульовного параметра зв'язку $\alpha\beta$ за умови його дійсних значень. Відповідне дисперсійне рівняння постає як алгебричне рівняння четвертого степеня і допускає суто дійсні розв'язки, що уособлюють гілки спектру, лише в певних областях на площині дійсного хвильового вектора κ та дійсного регульовного параметра зв'язку $\alpha\beta$. Так, на рисунку 5.1 області, де існують усі чотири дійсні гілки спектру, вказано стовпчиками міток з порядком знаків $+-+$. Усі чотири дійсні гілки спектру існують також в області, схожій на риб'ячий хвіст. У кожній з решти областей існує лише по дві дійсні гілки спектру. Типові залежності дійснозначної нормальної циклічної частоти Ω від хвильового вектора κ для дванадцяти різних значень параметра зв'язку $\alpha\beta$ проілюстровано на рисунку 5.2.

Цікаво звернути увагу на деякі з реалізацій дисперсійних кривих з рисунка 5.2, а саме – на дисперсійні криві у формі похилої вісімки, що нагадують дисперсійні криві, характерні для Ленгмюрових (Langmuir) коливань за взаємодії холодного струменя заряджених частинок з гарячою плазмою або за проходження струменя заряджених частинок крізь хвильовід [13, 149].

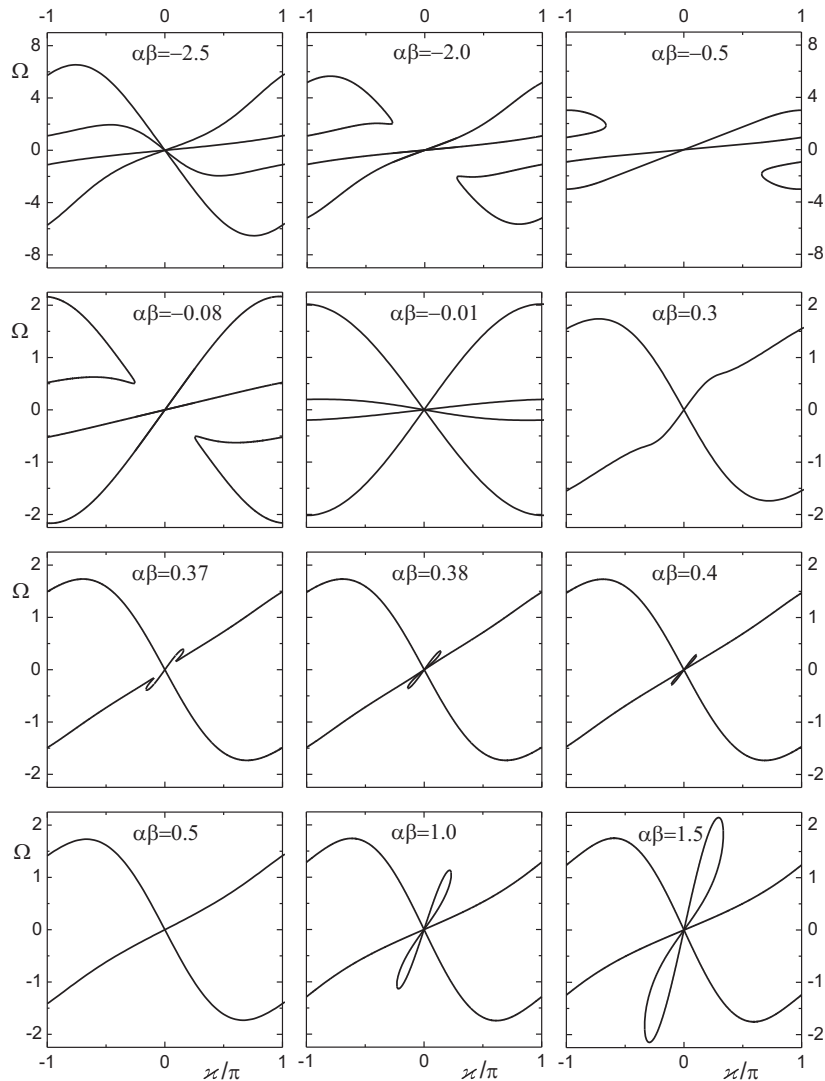


Рис. 5.2. Дійснозначна нормальна циклічна частота низькоамплітудних збуджень нелінійної інтегрованої системи (5.3.49)–(5.3.52) Ω як функція від дійсного хвильового вектора x для дванадцяти відмінних дійсних значень підлаштовного параметра зв'язку $\alpha\beta$.

5.4 Напівдискретні інтегровні системи, навіяні моделлю Давидова–Кислухи [217, 234]

У спробі відтворити деякі фізичні риси солітоноподібних збуджень в екситон-фононній нелінійній системі Давидова–Кислухи [50, 51, 52, 54] ми виявили чотири різні комбінації анзаців для матричнозначних операторів Лакса, здатних в рамках представлення нульової кривини (5.1.3) згенерувати цілу низку напівдискретних інтегровних нелінійних систем [217, 234].

Спираючись окремо на кожен з двох типів анзаців [217, 234]

$$L(n|\lambda) = \begin{pmatrix} f_{11}(n) + \lambda^2 h_{11}(n) & \lambda g_{12}(n) & f_{13}(n) \\ \lambda g_{21}(n) & f_{22}(n) & 0 \\ f_{31}(n) & 0 & f_{33}(n) \end{pmatrix} \quad (5.4.1)$$

$$A(n|\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(n) & 0 & a_{13}(n) \\ 0 & a_{22}(n) & \lambda b_{23}(n) \\ a_{31}(n) & \lambda b_{32}(n) & a_{33}(n) + \lambda^2 c_{33}(n) \end{pmatrix} \quad (5.4.2)$$

та

$$L(n|\lambda) = \begin{pmatrix} f_{11}(n) + \lambda^2 h_{11}(n) & \lambda g_{12}(n) & f_{13}(n) \\ \lambda g_{21}(n) & f_{22}(n) & 0 \\ f_{31}(n) & 0 & f_{33}(n) \end{pmatrix} \quad (5.4.3)$$

$$A(n|\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(n) + \lambda^2 c_{11}(n) & \lambda b_{12}(n) & a_{13}(n) \\ \lambda b_{21}(n) & a_{22}(n) & 0 \\ a_{31}(n) & 0 & a_{33}(n) \end{pmatrix} \quad (5.4.4)$$

з розкладами тейлорівської (Taylor) форми за спектральним параметром λ для операторів Лакса $L(n|\lambda)$ та $A(n|\lambda)$, ми запропонували два типи загальних нелінійних інтегровних систем на нескінченних квазіодновимірних регулярних ґратках. Відповідно до теорії редуційних груп Михайлова [129], обидві загальні системи виявилися недовизначеними, що дало змогу започаткувати численні редуковані системи в термінах справжніх польових змінних. Кожну з одержаних редукованих систем слід вважати інтегровою версією певних двох зв'язаних підсистем, причому системі в цілому властива симетрія інверсії простору та часу (PT -симетрія). Так, ми змогли об'єднати коливну підсистему, подібну до Тодової (Toda), з ґратчастою підсистемою самозахоплювання в єдину інтегровну систему, тим самим суттєво розширивши перелік реалістичних фізичних систем, придатних для строгого моделювання. В термінах прототипових польових функцій явно знайдено декілька перших густин, пов'язаних з будь-якою з можливих ієрархій локальних законів збереження.

Звернувшись окремо до кожної з двох інших типів анзаців [217]

$$L(n|z) = \begin{pmatrix} f_{11}(n) + h_{11}(n)(z^2 + z^{-2}) & g_{12}(n)z & f_{13}(n) \\ g_{21}(n)z^{-1} & f_{22}(n) & 0 \\ f_{31}(n) & 0 & f_{33}(n) \end{pmatrix} \quad (5.4.5)$$

$$A(n|z) = \begin{pmatrix} a_{11}(n) & 0 & a_{13}(n) \\ 0 & a_{22}(n) & b_{23}(n)z^{-1} \\ a_{31}(n) & b_{32}(n)z & a_{33}(n) + c_{33}(n)(z^2 + z^{-2}) \end{pmatrix} \quad (5.4.6)$$

та

$$L(n|z) = \begin{pmatrix} f_{11}(n) + h_{11}(n)(z^2 + z^{-2}) & g_{12}(n)z & f_{13}(n) \\ g_{21}(n)z^{-1} & f_{22}(n) & 0 \\ f_{31}(n) & 0 & f_{33}(n) \end{pmatrix} \quad (5.4.7)$$

$$A(n|z) = \begin{pmatrix} a_{11}(n) + c_{11}(n)(z^2 + z^{-2}) & b_{12}(n)z & a_{13}(n) \\ b_{21}(n)z^{-1} & a_{22}(n) & 0 \\ a_{31}(n) & 0 & a_{33}(n) \end{pmatrix} \quad (5.4.8)$$

з розкладами тепер вже лоранівської (Laurent) форми за спектральним параметром z для операторів Лакса $L(n|z)$ та $A(n|z)$, знайдено чотири нові напівдискретні нелінійні інтегровні системи, цікаві для фізичних застосувань. По-перше, підсистему, подібну до Тодової, ми пов'язали з підсистемою PT -симетричних екситонів з наведеною нелінійністю. Інша інтегровна система виникла як підсистема екситонів типу Френкеля (Frenkel), пов'язаних із суттєво нетривіальною коливною підсистемою. Виявлено також інтегровну систему, що складається з двох самозахопних підсистем, поєднаних за допомоги взаємно індукованої нелінійності. Нарешті, одержано інтегровну систему, де Тода-подібна підсистема та самозахопна підсистема взаємодіють на кшталт зарядженої частинки з електромагнетним полем. При цьому, вираз для вектор-потенціалу в гамільтоніані виявився пропорційним до густини збуджень в самозахопній підсистемі. Кожна із запропонованих інтегровних систем допускає чітке Гамільтонове представлення, що характеризується двома парами канонічних польових змінних зі стандартною (недеформованою) Пуассоновою структурою. В рамках узагальненої прямої процедури явно знайдено декілька гу-

стин із загальних локальних законів збереження. Ці густини легко адаптувати до будь-якої інтегровної системи, пов'язаної з операторами Лакса лоранівської форми.

З великої низки щойно перелічених напівдискретних нелінійних інтегровних систем, запропонованих в двох наших працях [217, 234], зупинимось спочатку на системі [217], що деяким чином є спорідненою до добре відомої (проте неінтегровної в сенсі Лакса) системи Давидова–Кислухи для моделювання зв'язаних екситонів (або електронів) та зміщень молекул в одновимірних молекулярних ланцюжках [50, 51, 52, 54].

Для цього слід задіяти перший тип допоміжних матриць з розкладами Лоранової форми за спектральним параметром z (5.4.5), (5.4.6). Тоді з рівняння нульової кривини (5.1.3) за умови

$$h_{11}(n) = 1 \tag{5.4.9}$$

матимемо

$$a_{11}(n) = a_{11} \tag{5.4.10}$$

$$c_{33}(n) = c_{33} \tag{5.4.11}$$

$$a_{13}(n) = -f_{13}(n)c_{33} \tag{5.4.12}$$

$$a_{31}(n+1) = -c_{33}f_{31}(n) , \tag{5.4.13}$$

де параметри a_{11} та c_{33} можуть бути довільними функціями від часу τ .

Аби означити решту функцій, що входять до анзацу (5.4.6) для еволюційного оператора $A(n|z)$, а також параметризувати функції, що входять до анзацу (5.4.5) для спектрального оператора $L(n|z)$, слід накласти наступні в'язі:

$$f_{33}(n) = 0 \tag{5.4.14}$$

$$\frac{d}{d\tau} [f_{13}(n)f_{31}(n)] = 0 \tag{5.4.15}$$

$$\dot{f}_{22}(n) = 0 . \tag{5.4.16}$$

Ці в'язі (5.4.14)–(5.4.16) дають

$$f_{13}(n) = f_{13} \exp[+q(n)] \quad (5.4.17)$$

$$f_{31}(n) = f_{31} \exp[-q(n)] \quad (5.4.18)$$

$$f_{22}(n) = f_{22} \quad (5.4.19)$$

та

$$b_{32}(n+1) = (c_{33}f_{31}/f_{22}) g_{12}(n) \exp[-q(n)] \quad (5.4.20)$$

$$b_{23}(n) = (f_{13}c_{33}/f_{22}) g_{21}(n) \exp[+q(n)] \quad (5.4.21)$$

$$a_{22}(n) = a_{22} \quad (5.4.22)$$

$$a_{33}(n) = a_{33} , \quad (5.4.23)$$

де a_{22} та a_{33} – деякі довільні функції часу τ , а параметри f_{13} , f_{31} та f_{22} не залежать ані від часу τ , ані від координати n : $\dot{f}_{13} = 0 = \dot{f}_{31}$ та $\dot{f}_{22} = 0$.

Нарешті, означивши імпульс пружного поля $p(n)$, канонічно спряжений до відхилення пружного поля $q(n)$, та канонічно спряжені амплітуди псевдо-екситонного поля $g_+(n)$ та $g_-(n)$ підстановками

$$f_{11}(n) - g_{12}(n)g_{21}(n)/f_{22} = p(n) \quad (5.4.24)$$

та

$$g_{21}(n) = g_+(n) \sqrt{f_{22}} \quad (5.4.25)$$

$$g_{12}(n) = g_-(n) \sqrt{f_{22}} , \quad (5.4.26)$$

приходимо до анонсованої напівдискретної інтегрованої нелінійної системи

$$\dot{p}(n) = -\partial H / \partial q(n) \quad (5.4.27)$$

$$\dot{q}(n) = +\partial H / \partial p(n) \quad (5.4.28)$$

$$\dot{g}_+(n) = -\partial H / \partial g_-(n) \quad (5.4.29)$$

$$\dot{g}_-(n) = +\partial H/\partial g_+(n) \quad (5.4.30)$$

з функцією Гамільтона

$$\begin{aligned} H = & \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{33} p^2(m)/2 - \\ & - \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_{13} c_{33} f_{31} [1 + g_+(m)g_-(m-1)/f_{22}] \exp[+q(n) - q(n-1)] + \\ & + \sum_{m=-\infty}^{\infty} (a_{11} - a_{33})p(m) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} (a_{11} - a_{22})[f_{22} + g_+(m)g_-(m)] . \end{aligned} \quad (5.4.31)$$

Тут ми ввели назву “псевдо-екситони” з огляду на закон збереження $\dot{N} = 0$ числа відповідних збуджень

$$N = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_+(m)g_-(m) \quad (5.4.32)$$

в усій системі (5.4.27)–(5.4.31).

З фізичної точки зору найбільш вдалий вибір вільних параметрів $a_{11} - a_{33}$ та $a_{11} - a_{22}$ уособлюють формули

$$a_{11} - a_{33} = 0 \quad (5.4.33)$$

$$a_{11} - a_{22} = f_{13} c_{33} f_{31} / f_{22} . \quad (5.4.34)$$

При цьому одержані еволюційні рівняння (5.4.27)–(5.4.30) (з гамільтоніаном H , поданим виразом (5.4.31)) описуватимуть спільну динаміку двох зв’язаних підсистем, де перші два рівняння (5.4.27), (5.4.28) відповідатимуть пружній підсистемі, а два інші (5.4.29)–(5.4.30) – підсистемі індуковано захоплюваних псевдо-екситонів. Річ у тім, що нелінійності до підсистеми псевдо-екситонів привнесено (індуковано) за рахунок впливу пружної підсистеми.

Зауважимо, що запропонована напівдискретна нелінійна інтегрована система (5.4.27)–(5.4.31) за умови часонезалежних вільних параметрів $a_{11} - a_{22}$, $a_{11} - a_{33}$ та $c_{33} \in PT$ -симетричною. Іншими словами, трансформовані польові функції $p(n|\tau)$, $q(n|\tau)$ та $g_+(n|\tau)$, $g_-(n|\tau)$, означені при $\dot{\alpha} = 0$ як

$$p(n|\tau) = +p(-n| - \tau) \quad (5.4.35)$$

$$q(n|\tau) = -q(-n| - \tau) \quad (5.4.36)$$

$$g_+(n|\tau) = g_-(-n| - \tau) \exp(+\alpha) \quad (5.4.37)$$

$$g_-(n|\tau) = g_+(-n| - \tau) \exp(-\alpha) , \quad (5.4.38)$$

задовольняють ту саму систему рівнянь (5.4.27)–(5.4.31), що й первинні польові функції $p(n|\tau)$, $q(n|\tau)$ та $g_+(n|\tau)$, $g_-(n|\tau)$. Цей факт видається досить показовим з огляду на перспективи широкого застосування PT -симетричних моделей в сучасній фізичній науці [17], особливо в нелінійній оптиці [118, 1, 77], оскільки вони дозволяють одержувати фізично зважені результати без посилення на більш сильну умову Діракової (Dirac) ермітовості (Hermite) [17].

Насамкінець вкажемо на ще одну досить цікаву напівдискретну інтегровну нелінійну систему, започатковану вже другим типом допоміжних матриць з розкладами лоранівської форми за спектральним параметром z (5.4.7), (5.4.7). Система допускає чітке Гамільтонове формулювання

$$\dot{p}(n) = -\partial\mathcal{H}/\partial q(n) \quad (5.4.39)$$

$$\dot{q}(n) = +\partial\mathcal{H}/\partial p(n) \quad (5.4.40)$$

$$\dot{g}_+(n) = -\partial\mathcal{H}/\partial g_-(n) \quad (5.4.41)$$

$$\dot{g}_-(n) = +\partial\mathcal{H}/\partial g_+(n) \quad (5.4.42)$$

з функцією Гамільтона \mathcal{H} , визначеною виразом

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_{m=-\infty}^{\infty} (a_{11} - a_{33})p(m) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} (a_{22} - a_{11})g_+(m)g_-(m) - \\ & - \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{11}f_{22}g_+(m)g_-(m-1) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} (c_{11}/2)[p(m) - g_+(m)g_-(m)]^2 - \\ & - \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_{31}c_{11}f_{13} \exp[+q(m) - q(m-1)] , \end{aligned} \quad (5.4.43)$$

де величини $p(n)$, $q(n)$ and $g_+(n)$, $g_-(n)$ мають сенс канонічних польових змінних для двох взаємодійних підсистем.

Підсистема, описувана змінними $p(n)$ та $q(n)$, нагадує підсистему Годового типу, а підсистема, описувана змінними $g_+(n)$ та $g_-(n)$, – деяку самозахопну підсистему з повним числом збуджень

$$N = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_+(m)g_-(m) \quad (5.4.44)$$

як одним з інтегралів руху.

Щодо надзвичайно нетривіальної взаємодії між підсистемами, то вона в чомусь подібна до взаємодії зарядженої частинки з електромагнетним полем [48, 156]. Інше цікаве порівняння, стосовне до згаданого нетривіального члена $\sum_{m=-\infty}^{\infty} (c_{11}/2)[p(m) - g_+(m)g_-(m)]^2$ в функції Гамільтона (5.4.43), належить професорові Юрію Борисовичу Гайдідею і вказує на аналогію зі знаменитим гамільтоніаном Лі–Лоу–Пайнса (Lee–Low–Pines Hamiltonian function) [112, 14, 49] в теорії поляронів.

За умови часонезалежних вільних параметрів $a_{11} - a_{22}$, $a_{11} - a_{33}$, c_{33} згадана інтегровна система (5.4.39)–(5.4.43) в цілому стає PT -симетричною.

5.5 Підсумки

У першому підрозділі цього розділу ми запропонували спосіб побудови параметрично розгойдуваних напівдискретних інтегровних систем з далекосяжним характером резонансної взаємодії в рамках представлення нульової кривини зі спектральним оператором Абловіца–Ладіка шляхом адекватного збільшення числа членів в лоранівському розкладі еволюційного оператора за степенями спектрального параметра та цілком обґрунтованого введення (наперед нерегламентованих) часових залежностей до параметрів резонансної взаємодії. В рамках оберненої задачі теорії розсіяння цей підхід уможливорює віднайти точні солітонні розв'язки системи з далекосяжним характером резонансної взаємодії, спираючись на асимптотичні значення матричних елементів еволюційного оператора за повздожньою просторовою координатою. З іншого боку, саму інтегровну нелінійну систему з далекосяжностями M -го порядку

найпростіше одержати з рівнянь Гамільтона, взявши за функцію Гамільтона суперпозицію $2M + 1$ перших інтегралів руху (що залежать виключно від виду спектрального оператора) з коефіцієнтами (параметрами взаємодії), залежними від часу. Ми сформулювали умови здійснення параметричної локалізації солітонного пакету та вказали на калібрувальну еквівалентність між параметричними коливаннями солітона в параметрично розгойдуваних напівдискретних інтегровних системах з далекосяжним характером резонансної взаємодії та Блоховими коливаннями солітона в напівдискретних інтегровних системах з далекосяжним характером резонансної взаємодії під дією лінійного потенціалу. Ми також вказали на перетворення до скоригованих польових амплітуд, як найбільш прийняттого засобу для адекватного розгляду переважної більшості фізичних задач.

В другому підрозділі ми запропонували напівдискретну інтегровну нелінійну модель двох Тодових підсистем, пов'язаних через підсистему орієнтаційного типу, та знайшли її Лагранжове формулювання. Показано, що допоміжні спектральний та еволюційний оператори моделі є матрицями розміру 3×3 . При цьому допоміжна спектральна задача є задачею третього порядку, що дуже ускладнює інтегрування моделі в рамках будь-якої модифікації методу оберненої задачі теорії розсіяння.

У третьому підрозділі ми одержали дві загальні напівдискретні інтегровні нелінійні системи, асоційовані з новими допоміжними лінійними спектральними задачами четвертого та третього порядків, відповідно. Кожна із запропонованих загальних систем є суттєво багатокомпонентною і допускає низку редукованих систем з огляду на різноманітні прийнятні варіанти фіксації попередньо недовизначених функцій вибору. Навіть побіжний погляд підказує, що кожна з редукованих систем має складатися з кількох підсистем різної природи і тому варта подальшого ґрунтовного вивчення з метою конкретних фізичних застосувань. Наразі ми вже змогли побудувати напівдискретну інтегровну нелінійну систему, що характеризується двома параметрами зв'язку і складається з двох зв'язаних підсистем, перша з яких моделює деяку нелінійну самодуальну мережу дросельно-конденсаторного типу, а друга – описує деяку нелінійну ґратчасту підсистему, коливання якої розхитує самодуальна підсистема.

В четвертому підрозділі ми представили чотири пари нових допоміжних

операторів Лакса, заданих матрицями розміру 3×3 , що в рамках напівдискретного рівняння нульової кривини здатні згенерувати велике число нових напівдискретних інтегровних нелінійних систем, кожна з яких складається з двох зв'язаних підсистем відмінної природи, причому щонайменше кожна друга система має гарні перспективи для фізичних застосувань, оскільки допускає доречне стандартне (канонічне) Гамільтонове формулювання. Достатньо широкий перелік одержаних таким чином систем подано в двох наших працях [217, 234]. Тут же ми згадали лише про найрепрезентативніші напівдискретні інтегровні нелінійні системи, серед яких найбільшої уваги заслуговують система взаємозв'язаних PT -симетричних екситонів та коливань ґратки нелінійного Тодового типу, а також доволі нечікувана і цікава система PT -симетричних екситонів та нелінійних коливань ґратки з калібрувальною природою зв'язку між підсистемами.

Розділ 6

Нелінійна інтегровна система когерентно зв'язаних збуджень на інтеркальованій драбинчастій ґратці

6.1 Вступні зауваження

В розділі 4 на основі низки праць [220, 221, 223, 225, 224, 226, 227, 228] ми подали розлогий підсумок дослідження нетривіальних властивостей інтегрованої нелінійної Шр'юдінґерої (Schrödinger) системи на квазіодновимірній ґратці з двома структурними елементами в елементарній комірці. Нетривіальні риси вказаної системи є прямим наслідком суттєво ненульового тла для супутніх полів. Варто згадати, що симплектична (структурна) матриця, відповідальна за Гамільтонову (Hamilton) динаміку такої системи, виявилася нерозщепною, внаслідок чого основні польові змінні системи взаємно перемішалися в рамках нестандартних фундаментальних дужок Пуассона (Poisson) [221, 224, 227, 228]. З іншого боку, самі динамічні рівняння системи стали критичними відносно головного фонового параметра [208, 223, 225, 224, 226, 227, 228], що в канонічно стандартизованій (фізично скоригованій) версії системи постало як ефект переходу від режиму світло-світлих нелінійних збуджень до режиму темно-світлих нелінійних збуджень в критичній точці [225, 224, 226, 227, 228]. Вказаний ефект критичної зміни природи нелінійних збуджень чітко продемонстровано і на мультикомпонентному солітонному розв'язковій стандартизованій системі [225, 224, 226, 227, 228].

Розвиваючи концепцію супутніх полів з ненульовими граничними значеннями, на продуктивність якої вказують щойно згадані результати, в цьому розділі ми розглянемо значно складнішу інтегровну нелінійну систему, облаштовану на квазіодновимірній ґратці з трьома структурними елементами в елементарній комірці. Основні засадничі положення для цієї системи було запропоновано та розроблено в трьох наших працях [230, 231, 232].

6.2 Шестикомпонентна напівдискретна нелінійна система когерентно зв'язаних збуджень [230, 231, 232, 233]

Аби щонайшвидше впоратися з необхідними означеннями, розпочнемо безпосередньо з запису анонсованої шестикомпонентної динамічної інтегровної нелінійної системи [230, 231, 232, 233]

$$\begin{aligned}
 & + i\dot{\phi}_+(n) + \alpha [\phi(n) + \eta(n)\phi_+(n)] - \\
 & - \alpha [\nu(n) - \phi_+(n)\psi_-(n)]\phi_+(n+1) + \beta [1 + \phi_+(n)\psi_+(n)]\phi_-(n-1) = 0
 \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

$$\begin{aligned}
 & + i\dot{\phi}(n) + \alpha [\phi_-(n) + \mu(n)\phi_+(n)] + \beta [\phi_+(n) + \nu(n)\phi_-(n)] - \\
 & - \alpha [\theta(n) - \phi(n)\psi_-(n)]\phi_+(n+1) - \beta [\eta(n) - \phi(n)\psi_+(n)]\phi_-(n-1) = 0
 \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

$$\begin{aligned}
 & + i\dot{\phi}_-(n) + \beta [\phi(n) + \theta(n)\phi_-(n)] - \\
 & - \beta [\mu(n) - \phi_-(n)\psi_+(n)]\phi_-(n-1) + \alpha [1 + \phi_-(n)\psi_-(n)]\phi_+(n+1) = 0
 \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

$$\begin{aligned}
 & + i\dot{\eta}(n) + \beta [\psi_+(n)\phi_+(n) - \psi_-(n)\phi_-(n)] + \\
 & + \alpha [\psi(n) + \eta(n)\psi_-(n)]\phi_+(n+1) - \alpha [\phi(n) + \eta(n)\phi_+(n)]\psi_-(n-1) = 0
 \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

$$\begin{aligned}
 & + i\dot{\mu}(n) - \beta [\psi(n)\phi_-(n) - \psi_+(n)\phi(n)] + \\
 & + \alpha [\psi_+(n) + \mu(n)\psi_-(n)]\phi_+(n+1) - \alpha [\phi_-(n) + \mu(n)\phi_+(n)]\psi_-(n-1) = 0
 \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

та

$$\begin{aligned} & -i\dot{\psi}_+(n) + \beta [\psi(n) + \theta(n)\psi_+(n)] - & (6.2.6) \\ & - \beta [\mu(n) - \psi_+(n)\phi_-(n)]\psi_+(n+1) + \alpha [1 + \psi_+(n)\phi_+(n)]\psi_-(n-1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -i\dot{\psi}(n) + \beta [\psi_-(n) + \nu(n)\psi_+(n)] + \alpha [\psi_+(n) + \mu(n)\psi_-(n)] - & (6.2.7) \\ & - \beta [\eta(n) - \psi(n)\phi_-(n)]\psi_+(n+1) - \alpha [\theta(n) - \psi(n)\phi_+(n)]\psi_-(n-1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -i\dot{\psi}_-(n) + \alpha [\psi(n) + \eta(n)\psi_-(n)] - & (6.2.8) \\ & - \alpha [\nu(n) - \psi_-(n)\phi_+(n)]\psi_-(n-1) + \beta [1 + \psi_-(n)\phi_-(n)]\psi_+(n+1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -i\dot{\theta}(n) + \alpha [\phi_+(n)\psi_+(n) - \phi_-(n)\psi_-(n)] + & (6.2.9) \\ & + \beta [\phi(n) + \theta(n)\phi_-(n)]\psi_+(n+1) - \beta [\psi(n) + \theta(n)\psi_+(n)]\phi_-(n-1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -i\dot{\nu}(n) - \alpha [\phi(n)\psi_-(n) - \phi_+(n)\psi(n)] + & (6.2.10) \\ & + \beta [\phi_+(n) + \nu(n)\phi_-(n)]\psi_+(n+1) - \beta [\psi_-(n) + \nu(n)\psi_+(n)]\phi_-(n-1) = 0 , \end{aligned}$$

яку називатимемо напівдискретною нелінійною системою когерентно зв'язаних збуджень на квазіодновимірній ґратці з трьома структурними елементами в елементарній комірці. Тут точка над функціями вказує на диференціювання за часом τ , а ціле число n , що змінюється від мінус до плюс нескінченности, позначає порядковий номер елементарної комірки квазіодновимірної ґратки. Часозалежні параметри α та β характеризують первинну міжвузлову резонансну взаємодію між збудженнями, формалізованими основними польовими змінними $\phi_+(n)$, $\phi(n)$, $\phi_-(n)$ та $\psi_+(n)$, $\psi(n)$, $\psi_-(n)$. Тут, за аналогією з теорією молекулярних екситонів [47, 54], епітет “резонансна” використано, аби вказати на лінійну частину когерентної (недисипативної) взаємодії між основними збудженнями, розташованими на відмінних вузлах ґратки. Термін “основні польові змінні” зауважує, що запропонована нелінійна система з десяти рівнянь (6.2.1)–(6.2.10) насправді є шестикомпонентною у відповідності до числа незалежних (основних) польових змінних, дозволених чотирма природніми в'язями. Згідно з цією

термінологією польові змінні $\eta(n)$, $\mu(n)$ та $\theta(n)$, $\nu(n)$ слід вважати залежними (суто допоміжними або супутніми). Аби розрізнити три структурні елементи в межах n -ої елементарної ґратки ми надамо першому з них мітку плюс (+), другий залишимо без мітки, а третьому надамо мітку мінус (-). Тим самим ми забезпечимо відповідні маркування і для трьох пар основних польових змінних $\phi_+(n)$, $\psi_+(n)$; $\phi(n)$, $\psi(n)$ та $\phi_-(n)$, $\psi_-(n)$.

Надалі ми вважатимемо основні поля швидкоспадаючими на обох просторових нескінченностях $|n| \rightarrow \infty$, а для кожної пари супутніх полів окремо приймемо специфіковані умови просторово однорідного тла (фону) $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \eta(n) = \eta$, $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \theta(n) = \theta$ та $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \mu(n) = \mu$, $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \nu(n) = \nu$. Тоді набір чотирьох природніх в'язей набуде такого вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{\eta(n) - \mu(n)\theta(n) - \phi(n)\psi_+(n) - \phi_-(n)\psi(n)}{1 + \eta(n)\theta(n) + \mu(n)\nu(n) + \phi_+(n)\psi_+(n) + \phi(n)\psi(n) + \phi_-(n)\psi_-(n)} = \\ & = \frac{\eta - \mu\theta}{1 + \eta\theta + \mu\nu} \end{aligned} \quad (6.2.11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mu(n) - \phi_-(n)\psi_+(n)}{1 + \eta(n)\theta(n) + \mu(n)\nu(n) + \phi_+(n)\psi_+(n) + \phi(n)\psi(n) + \phi_-(n)\psi_-(n)} = \\ & = \frac{\mu}{1 + \eta\theta + \mu\nu} \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\theta(n) - \nu(n)\eta(n) - \psi(n)\phi_+(n) - \psi_-(n)\phi(n)}{1 + \eta(n)\theta(n) + \mu(n)\nu(n) + \phi_+(n)\psi_+(n) + \phi(n)\psi(n) + \phi_-(n)\psi_-(n)} = \\ & = \frac{\theta - \nu\eta}{1 + \eta\theta + \mu\nu} \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\nu(n) - \psi_-(n)\phi_+(n)}{1 + \eta(n)\theta(n) + \mu(n)\nu(n) + \phi_+(n)\psi_+(n) + \phi(n)\psi(n) + \phi_-(n)\psi_-(n)} = \\ & = \frac{\nu}{1 + \eta\theta + \mu\nu}. \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

Тут фонові параметри η , θ та μ , ν зобов'язані бути як часо- так і координатонезалежними. Вказані вище в'язі (6.2.11)–(6.2.14) продиктовано самими рівняннями системи (6.2.1)–(6.2.10) за посередництва чотирьох однокоміркових локальних законів збереження. З цієї причини їх і названо природніми.

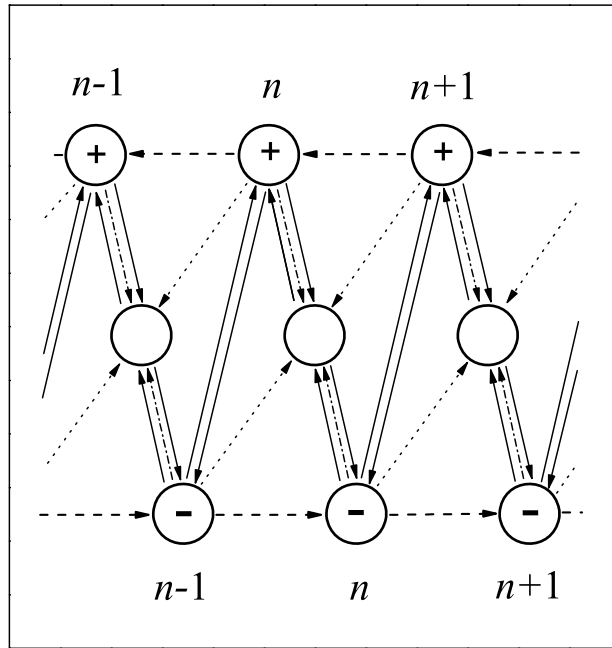


Рис. 6.1. Фрагмент інтеркальованої драбинчастої ґратки-носія з трьома структурними елементами в елементарній комірці, стосовної до нелінійної інтегровної системи когерентно зв'язаних збуджень з трьома типами тлозалежних міжвузлових резонансних взаємодій (6.2.1)–(6.2.10). Кругечки з позначкою плюс складають верхній ланцюжок вузлів ґратки. Кругечки без позначки складають середній (інтеркальований) ланцюжок вузлів ґратки. Кругечки з позначкою мінус складають нижній ланцюжок вузлів ґратки. Неперервні стрілки вказують на первинні міжвузлові резонансні зв'язки, формалізовані параметрами α та β . Горизонтальні штрихові стрілки вказують на тлозалежні міжвузлові резонансні зв'язки, формалізовані параметрами $-\alpha\nu$ та $-\beta\mu$. Скісні штрихпунктирні стрілки вказують на тлозалежні міжвузлові резонансні зв'язки, формалізовані параметрами $\alpha\mu$ та $\beta\nu$. Скісні пунктирні стрілки вказують на тлозалежні міжвузлові резонансні зв'язки, формалізовані параметрами $-\alpha\theta$ та $-\beta\eta$.

Взявши до уваги прийняті граничні умови для основних та супутніх полів і обмежившись випадком низько-амплітудних збуджень, спинимось коротко на лінеаризованій версії

$$+i\dot{\phi}_+(n) + \alpha\eta\phi_+(n) - \alpha\nu\phi_+(n+1) + \alpha\phi(n) + \beta\phi_-(n-1) = 0 \quad (6.2.15)$$

$$+i\dot{\phi}(n) + (\alpha + \beta\nu)\phi_-(n) - \beta\eta\phi_-(n-1) - \alpha\theta\phi_+(n+1) + (\beta + \alpha\mu)\phi_+(n) = 0 \quad (6.2.16)$$

$$+i\dot{\phi}_-(n) + \beta\theta\phi_-(n) - \beta\mu\phi_-(n-1) + \beta\phi(n) + \alpha\phi_+(n+1) = 0 \quad (6.2.17)$$

$$-i\dot{\psi}_+(n) + \beta\theta\psi_+(n) - \beta\mu\psi_+(n+1) + \beta\psi(n) + \alpha\psi_-(n-1) = 0 \quad (6.2.18)$$

$$-i\dot{\psi}(n) + (\beta + \alpha\mu)\psi_-(n) - \alpha\theta\psi_-(n-1) - \beta\eta\psi_+(n+1) + (\alpha + \beta\nu)\psi_+(n) = 0 \quad (6.2.19)$$

$$-i\dot{\psi}_-(n) + \alpha\eta\psi_-(n) - \alpha\nu\psi_-(n-1) + \alpha\psi(n) + \beta\psi_+(n+1) = 0 \quad (6.2.20)$$

нашої початкової системи (6.2.1)–(6.2.10). Справа в тому, що лінеаризована система рівнянь (6.2.15)–(6.2.20) є важливою ланкою для реконструкції просторового впорядкування вузлів та резонансних зв'язків в регулярну ґратчасту структуру, асоційовану з досліджуваною нелінійною системою (6.2.1)–(6.2.10). Справді, до системи лінеаризованих рівнянь для основних полів (6.2.15)–(6.2.20), як видно, залучено як пару звичайних (традиційних) параметрів міжвузлової резонансної взаємодії, так і три додаткові пари параметрів міжвузлової резонансної взаємодії, контрольовані ненульовими значеннями η , θ та μ , ν супутніх полів $\eta(n)$, $\theta(n)$ та $\mu(n)$, $\nu(n)$. Ці три типи незалежних параметрів міжвузлової резонансної взаємодії є такими: (i) $-\alpha\nu$, $-\beta\mu$; (ii) $\alpha\mu$, $\beta\nu$; (iii) $-\alpha\theta$, $-\beta\eta$. Рисунок 6.1 унаочнює приведені вище міркування у вигляді драбиноподібної регулярної ґратчастої структури з трьома відмінними структурними елементами в елементарній комірці. Є всі підстави розуміти одержану ґратчасту структуру як інтеркальовану драбинчасту ґратку.

Подібно до лінеаризованої системи (6.2.15)–(6.2.20), первинна нелінійна інтегровна система (6.2.1)–(6.2.10), розглядувана за ненульових значень супутніх полів, мусить характеризуватися чотирма типами міжвузлової резонансної взаємодії також. Кожна пара міжвузлових параметрів резонансного зв'язку (o) α , β ; (i) $-\alpha\nu$, $-\beta\mu$; (ii) $\alpha\mu$, $\beta\nu$; (iii) $-\alpha\theta$, $-\beta\eta$ є відповідальною за лінійну частину деякого своєрідного когерентного (недисипативного) типу взаємодії між основними полями.

Запропоновану шестикомпонентну систему (6.2.1)–(6.2.10) можна трактувати як систему нелінійного Шрьодінґерового типу в тому сенсі, що, за певних умов симетрії та низького рівня збуджень, її основні польові функції наближено мають стосунок до амплітуд присутності збудження на тому чи іншому вузлі ґратки. Найприроднішими умовами симетрії між польовими змінними, а також між параметрами міжвузлового резонансного зв'язку видаються ті, що забезпечують або притягувальний, або відштовхувальний характер нелінійностей в системі. Так, для системи з нелінійностями притягувального типу

ми маємо умови комплексного спряження: $\psi_+(n) = +\phi_+^*(n)$, $\psi(n) = +\phi^*(n)$, $\psi_-(n) = +\phi_-^*(n)$, $\theta(n) = \eta^*(n)$, $\nu(n) = \mu^*(n)$ та $\beta = \alpha^*$. Натомість, для системи з нелінійностями відштовхувального типу ми маємо: $\psi_+(n) = -\phi_+^*(n)$, $\psi(n) = -\phi^*(n)$, $\psi_-(n) = -\phi_-^*(n)$, $\theta(n) = \eta^*(n)$, $\nu(n) = \mu^*(n)$ та $\beta = \alpha^*$. В кожному з вищевказаних випадків взаємозалежності між параметрами міжвузлового резонансного зв'язку зостаються однаковими, і їх задано наступними рівностями: $\beta = \alpha^*$, $\beta\mu = \alpha^*\nu^*$, $\beta\nu = \alpha^*\mu^*$, $\beta\eta = \alpha^*\theta^*$. Оскільки параметри зв'язку в кожній з рівностей співвідносяться шляхом комплексного спряження, то розумно вважати їхні фази фазами Паєрлса [145], придатними для моделювання потоків зовнішніх магнетних полів крізь пласкі елементарні клаптики ґратки. [145, 212, 227, 228]. Тим самим ми одержуємо додаткову фізично вмотивовану підставу аби кваліфікувати ґратку-носія як суттєво квазіодновимірну структуру, як це зображено на рисунку 6.1.

6.3 Загальна форма представлення нульової кривини та її зведення до випадку шестикомпонентної нелінійної системи когерентно зв'язаних збуджень [230, 231, 232]

Інтегровність напівдискретної нелінійної системи в сенсі Лакса (Lax) [139], як ми знаємо, вказує на існування двох матричнозначних функцій $L(n|z)$ та $A(n|z)$, взаємно узгоджених (сумісних) в рамках напівдискретного представлення нульової кривини [173]

$$\dot{L}(n|z) = A(n+1|z)L(n|z) - L(n|z)A(n|z), \quad (6.3.1)$$

де квадратіві матриці $L(n|z)$ та $A(n|z)$ позначають спектральний та еволюційний оператори, відповідно, причому спектральний параметр z вважаємо незалежним від часу τ .

Взявши елементи $L_{jk}(n|z)$ спектральної матриці $L(n|z)$ у вигляді поліномів Лорана відносно спектрального параметра z , ми маємо трактувати коефіцієнти цих поліномів в якості прообразів польових функцій шуканої системи. В

цьому підрозділі ми прийmemo ці матричні елементи $L_{jk}(n|z)$ у вигляді наступних виразів

$$L_{11}(n|z) = z^3 + s_{11}(n)z + u_{11}(n)z^{-1} \quad (6.3.2)$$

$$L_{12}(n|z) = r_{12}(n)z^2 + t_{12}(n) + v_{12}(n)z^{-2} \quad (6.3.3)$$

$$L_{21}(n|z) = r_{21}(n)z^2 + t_{21}(n) + v_{21}(n)z^{-2} \quad (6.3.4)$$

$$L_{22}(n|z) = s_{22}(n)z + u_{22}(n)z^{-1} + z^{-3}. \quad (6.3.5)$$

Тоді, відповідно до умови нульової кривини (6.3.1), найпростіший прийнятний варіант для елементів $A_{jk}(n|z)$ еволюційної матриці $A(n|z)$ мусить набути форми

$$A_{11}(n|z) = a_{11}z^2 - a_{11}r_{12}(n)r_{21}(n-1) + c_{11} \quad (6.3.6)$$

$$A_{12}(n|z) = a_{11}r_{12}(n)z + v_{12}(n-1)e_{22}z^{-1} \quad (6.3.7)$$

$$A_{21}(n|z) = r_{21}(n-1)a_{11}z + e_{22}v_{21}(n)z^{-1} \quad (6.3.8)$$

$$A_{22}(n|z) = c_{22} - e_{22}v_{21}(n)v_{12}(n-1) + e_{22}z^{-2}, \quad (6.3.9)$$

де координатонезалежним параметрам a_{11} , c_{11} and e_{22} , c_{22} дозволено бути довільними функціями від часу τ .

З іншого боку, умова нульової кривини (6.3.1) вказує, що прообрази польових функцій $s_{11}(n)$, $u_{11}(n)$, $r_{12}(n)$, $t_{12}(n)$, $v_{12}(n)$ та $u_{22}(n)$, $s_{22}(n)$, $v_{21}(n)$, $t_{21}(n)$, $r_{21}(n)$ мусять задовольняти систему рівнянь [230, 231, 232]

$$\begin{aligned} \dot{r}_{12}(n) &= c_{11}r_{12}(n) - r_{12}(n)c_{22} + a_{11}[t_{12}(n) - s_{11}(n)r_{12}(n)] + \\ &+ a_{11}r_{12}(n+1)[s_{22}(n) - r_{21}(n)r_{12}(n)] - [1 - r_{12}(n)v_{21}(n)]v_{12}(n-1)e_{22} \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

$$\begin{aligned} \dot{t}_{12}(n) &= c_{11}t_{12}(n) - t_{12}(n)c_{22} + \\ &+ a_{11}[v_{12}(n) - u_{11}(n)r_{12}(n)] - [r_{12}(n) - v_{12}(n)s_{22}(n)]e_{22} + \\ &+ a_{11}r_{12}(n+1)[u_{22}(n) - r_{21}(n)t_{12}(n)] - [s_{11}(n) - t_{12}(n)v_{21}(n)]v_{12}(n-1)e_{22} \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_{12}(n) &= c_{11}v_{12}(n) - v_{12}(n)c_{22} - [t_{12}(n) - v_{12}(n)u_{22}(n)]e_{22} + & (6.3.12) \\ &+ a_{11}r_{12}(n+1)[1 - r_{21}(n)v_{12}(n)] - [u_{11}(n) - v_{12}(n)v_{21}(n)]v_{12}(n-1)e_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{s}_{11}(n) &= e_{22}[r_{21}(n)v_{12}(n) - v_{21}(n)r_{12}(n)] + & (6.3.13) \\ &+ a_{11}r_{12}(n+1)[t_{21}(n) - r_{21}(n)s_{11}(n)] - a_{11}[t_{12}(n) - s_{11}(n)r_{12}(n)]r_{21}(n-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_{11}(n) &= e_{22}[t_{21}(n)v_{12}(n) - v_{21}(n)t_{12}(n)] + & (6.3.14) \\ &+ a_{11}r_{12}(n+1)[v_{21}(n) - r_{21}(n)u_{11}(n)] - a_{11}[v_{12}(n) - u_{11}(n)r_{12}(n)]r_{21}(n-1) \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} \dot{v}_{21}(n) &= c_{22}v_{21}(n) - v_{21}(n)c_{11} + e_{22}[t_{21}(n) - u_{22}(n)v_{21}(n)] + & (6.3.15) \\ &+ e_{22}v_{21}(n+1)[u_{11}(n) - v_{12}(n)v_{21}(n)] - [1 - v_{21}(n)r_{12}(n)]r_{21}(n-1)a_{11} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{t}_{21}(n) &= c_{22}t_{21}(n) - t_{21}(n)c_{11} + & \\ &+ e_{22}[r_{21}(n) - s_{22}(n)v_{21}(n)] - [v_{21}(n) - r_{21}(n)u_{11}(n)]a_{11} + & (6.3.16) \\ &+ e_{22}v_{21}(n+1)[s_{11}(n) - v_{12}(n)t_{21}(n)] - [u_{22}(n) - t_{21}(n)r_{12}(n)]r_{21}(n-1)a_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{r}_{21}(n) &= c_{22}r_{21}(n) - r_{21}(n)c_{11} - [t_{21}(n) - r_{21}(n)s_{11}(n)]a_{11} + & (6.3.17) \\ &+ e_{22}v_{21}(n+1)[1 - v_{12}(n)r_{21}(n)] - [s_{22}(n) - r_{21}(n)r_{12}(n)]r_{21}(n-1)a_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_{22}(n) &= a_{11}[v_{12}(n)r_{21}(n) - r_{12}(n)v_{21}(n)] + & (6.3.18) \\ &+ e_{22}v_{21}(n+1)[t_{12}(n) - v_{12}(n)u_{22}(n)] - e_{22}[t_{21}(n) - u_{22}(n)v_{21}(n)]v_{12}(n-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{s}_{22}(n) &= a_{11}[t_{12}(n)r_{21}(n) - r_{12}(n)t_{21}(n)] + & (6.3.19) \\ &+ e_{22}v_{21}(n+1)[r_{12}(n) - v_{12}(n)s_{22}(n)] - e_{22}[r_{21}(n) - s_{22}(n)v_{21}(n)]v_{12}(n-1) . \end{aligned}$$

Виведена загальна напівдискретна інтегровна нелінійна система (6.3.10)–(6.3.19) є першою з нескінченної ієрархії інтегровних нелінійних систем, асоційованих з вибраним спектральним оператором (6.3.2)–(6.3.5), оскільки вона відповідає найпростішому допустимому вибору еволюційного

оператора у вигляді полінома Лорана другого порядку відносно спектрального параметра z (6.3.6)–(6.3.9). Зауважимо, що симетрія одержаних загальних рівнянь уможливорює низку редукованих систем, найбільш представницькими з яких видаються напівдискретні нелінійні системи Шрьодінґероного типу та напівдискретні нелінійні системи типу Кортвеґа–де Вріза (Korteweg–de Vries systems).

Легко пересвідчитися, що напівдискретна інтегровна нелінійна система Шрьодінґероного типу (6.2.1)–(6.2.10), введена в підрозділі 6.2, впливає із загальної напівдискретної інтегрованої нелінійної системи (6.3.10)–(6.3.19), якщо запостулювати співвідношення симетрії

$$r_{12}(n) = +\phi_+(n) = \pm\psi_+^*(n) \quad (6.3.20)$$

$$t_{12}(n) = +\phi(n) = \pm\psi^*(n) \quad (6.3.21)$$

$$v_{12}(n) = +\phi_-(n) = \pm\psi_-^*(n) \quad (6.3.22)$$

$$s_{11}(n) = -\eta(n) = -\theta^*(n) \quad (6.3.23)$$

$$u_{11}(n) = -\mu(n) = -\nu^*(n) \quad (6.3.24)$$

$$v_{21}(n) = -\psi_+(n) = \mp\phi_+^*(n) \quad (6.3.25)$$

$$t_{21}(n) = -\psi(n) = \mp\phi^*(n) \quad (6.3.26)$$

$$r_{21}(n) = -\psi_-(n) = \mp\phi_-^*(n) \quad (6.3.27)$$

$$u_{22}(n) = -\theta(n) = -\eta^*(n) \quad (6.3.28)$$

$$s_{22}(n) = -\nu(n) = -\mu^*(n) \quad (6.3.29)$$

між польовими змінними та доповнити їх доречними співвідношеннями симетрії

$$a_{11} = +i\alpha = +i\beta^* \quad (6.3.30)$$

$$c_{11} = c_{22} \quad (6.3.31)$$

$$e_{22} = -i\beta = -i\alpha^* \quad (6.3.32)$$

між параметрами зв'язку. Тут горішня позначка в останній правій частині кожної з формул (6.3.20)–(6.3.22) та (6.3.25)–(6.3.27) специфікує систему з нелінійностями притягувального типу. Натомість, нижня позначка в останній правій частині кожної з формул (6.3.20)–(6.3.22) та (6.3.25)–(6.3.27) специфікує систему з нелінійностями відштовхувального типу.

Отже, аби виокремити шестикомпонентну напівдискретну інтегровну нелінійну систему Шрьодінґероного типу (6.2.1)–(6.2.10) в рамках рівняння нульової кривини (6.3.1), ми мусимо сконкретизувати матричні елементи $L_{jk}(n|z)$ та $A_{jk}(n|z)$ спектрального $L(n|z)$ та еволюційного $A(n|z)$ операторів такими формулами:

$$L_{11}(n|z) = +z^3 - \eta(n)z - \mu(n)z^{-1} \quad (6.3.33)$$

$$L_{12}(n|z) = +\phi_+(n)z^2 + \phi(n) + \phi_-(n)z^{-2} \quad (6.3.34)$$

$$L_{21}(n|z) = -\psi_-(n)z^2 - \psi(n) - \psi_+(n)z^{-2} \quad (6.3.35)$$

$$L_{22}(n|z) = -\nu(n)z - \theta(n)z^{-1} + z^{-3} \quad (6.3.36)$$

та

$$A_{11}(n|z) = +i\alpha z^2 + i\alpha\phi_+(n)\psi_-(n-1) \quad (6.3.37)$$

$$A_{12}(n|z) = +i\alpha\phi_+(n)z - i\beta\phi_-(n-1)z^{-1} \quad (6.3.38)$$

$$A_{21}(n|z) = -i\alpha\psi_-(n-1)z + i\beta\psi_+(n)z^{-1} \quad (6.3.39)$$

$$A_{22}(n|z) = -i\beta\psi_+(n)\phi_-(n-1) - i\beta z^{-2}, \quad (6.3.40)$$

відповідно.

6.4 Пуассонова структура та Гамільтонове представлення шестикомпонентної напівдискретної інтегровної нелінійної Шрьодінгерової системи з нелінійностями притягувального типу [230, 231]

Завдяки своїй повній інтегровності загальна напівдискретна нелінійна система (6.3.10)–(6.3.19) мусить мати нескінченне число законів збереження. Узагальнена рекурентна процедура їхнього послідовного пошуку, викладена в низці наших праць [213, 216, 227] та в розділі 4 чинної дисертації, дає змогу виокремити явно принаймні декілька перших збережних величин, придатних для залучення до Гамільтонової (Hamilton) функції системи.

Не спиняючись на перипетіях відповідних розрахунків, вкажемо, що Гамільтонова функція, підлаштована до потреб шестикомпонентної напівдискретної інтегровної нелінійної Шрьодінгерової (Schrödinger) системи (6.2.1)–(6.2.10) за нелінійностей притягувального типу, набуває вигляду [230, 231, 232]

$$\begin{aligned}
 H = & -\alpha \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\phi_+(m)\psi_-(m-1) + \eta(m) - \eta] - \\
 & -\beta \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\psi_+(m)\phi_-(m-1) + \theta(m) - \theta] .
 \end{aligned} \tag{6.4.1}$$

На загал, ця функція Гамільтона може залежати від часу τ параметрично внаслідок тих чи інших постульованих часових залежностей параметрів зв'язку α та β .

Аби коректно означити Пуассонову структуру (дужку Пуассона), доречну для шестикомпонентної напівдискретної інтегровної нелінійної Шрьодінгерової системи (6.2.1)–(6.2.10) за нелінійностей притягувального типу, та віднайти Гамільтонове представлення для цієї системи, слід пам'ятати, що польові змінні $\eta(n)$, $\mu(n)$ та $\theta(n)$, $\nu(n)$ (вибрані за супутні) в дійсності є залежними від основних польових змінних $\phi_+(n)$, $\phi(n)$, $\phi_-(n)$ та $\psi_+(n)$, $\psi(n)$, $\psi_-(n)$. Внаслідок цього для застосування загальних принципів Гамільтонового розгляду

[59, 124, 249] ми спочатку мусимо послуговуватися лише основними рівняннями системи (тобто рівняннями (6.2.1)–(6.2.3) та (6.2.6)–(6.2.8)) і спробувати переписати їх в уніфікованій формі

$$\dot{y}_\lambda(n) = \sum_{\varkappa=1}^6 \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{\lambda\varkappa}(n|m) \frac{\partial H}{\partial y_\varkappa(m)} \quad (6.4.2)$$

з величиною H , взятою за функцію Гамільтона (6.4.1), та матричними елементами $J_{\lambda\varkappa}(n|m)$ структурної (симплектичної) матриці J , підпорядкованими умові скісної симетрії $J_{\varkappa\lambda}(m|n) = -J_{\lambda\varkappa}(n|m)$. Тут величини $y_1(n)$, $y_2(n)$, $y_3(n)$, $y_4(n)$, $y_5(n)$, $y_6(n)$ складають деякий повний набір незалежних польових змінних, записаних в уніфікованій формі. Вказаний запис (6.4.2) є достатньо універсальним, оскільки допускає ряд окремих функційних співвідношень між уніфікованими та основними польовими змінними. Надалі ми приймемо найпростішу лінійну відповідність між цими двома наборами польових змінних, задану залежностями

$$y_1(n) = \phi_-(n) \quad (6.4.3)$$

$$y_2(n) = \phi(n) \quad (6.4.4)$$

$$y_3(n) = \phi_+(n) \quad (6.4.5)$$

$$y_4(n) = \psi_-(n) \quad (6.4.6)$$

$$y_5(n) = \psi(n) \quad (6.4.7)$$

$$y_6(n) = \psi_+(n) . \quad (6.4.8)$$

Найпростіший шлях, аби виявити здогадні вирази для елементів $J_{\lambda\varkappa}(n|m)$ симплектичної матриці, полягає у порівнянні основних рівнянь (6.2.1)–(6.2.3) та (6.2.6)–(6.2.8) з їхніми уніфікованими двійниками (6.4.2), записаними у вигляді

$$\dot{y}_\lambda(n) = \{H, y_\lambda(n)\} , \quad (6.4.9)$$

узгодженому з означенням [59, 124, 249]

$$\{F, G\} = - \sum_{\lambda=1}^6 \sum_{\varkappa=1}^6 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial y_{\lambda}(n)} J_{\lambda\varkappa}(n|m) \frac{\partial G}{\partial y_{\varkappa}(m)} \quad (6.4.10)$$

дужки Пуассона $\{F, G\}$ між двома довільними функціями F та G . Цей рецепт порівняння уможливорює зібрати переважну більшість претендентів на шукані матричні елементи $J_{\lambda\varkappa}(n|m)$ з огляду на їхні очевидні взаємозалежності $J_{\lambda\varkappa}(n|m) = -\{y_{\lambda}(n), y_{\varkappa}(m)\}$ з релевантними фундаментальними дужками Пуассона $\{y_{\lambda}(n), y_{\varkappa}(m)\}$. Проте аби ідентифікувати здогадні вирази для матричних елементів $J_{25}(n|m)$ та $J_{52}(n|m)$, ми змушені звернутися до допоміжних еволюційних рівнянь (6.2.4), (6.2.5) та (6.2.9), (6.2.10) і їхніх двійників, записаних в термінах дужок Пуассона, а також взяти до уваги раніше наведені вирази (6.2.11)–(6.2.14) для природніх в'язей. Остаточний реєстр ненульових претендентів на матричні елементи $J_{\lambda\varkappa}(n|m)$ подають формули [230, 231]

$$J_{41}(n|m) = +i[1 + \phi_{-}(n)\psi_{-}(n)]\delta_{nm} = -J_{14}(n|m) \quad (6.4.11)$$

$$J_{51}(n|m) = -i[\eta(n) - \phi_{-}(n)\psi(n)]\delta_{nm} = -J_{15}(n|m) \quad (6.4.12)$$

$$J_{61}(n|m) = -i[\mu(n) - \phi_{-}(n)\psi_{+}(n)]\delta_{nm} = -J_{16}(n|m) \quad (6.4.13)$$

$$J_{42}(n|m) = -i[\theta(n) - \phi(n)\psi_{-}(n)]\delta_{nm} = -J_{24}(n|m) \quad (6.4.14)$$

$$J_{52}(n|m) = +i[1 - \mu(n)\nu(n) + \eta(n)\theta(n) + \phi(n)\psi(n)]\delta_{nm} = -J_{25}(n|m) \quad (6.4.15)$$

$$J_{62}(n|m) = -i[\eta(n) - \phi(n)\psi_{+}(n)]\delta_{nm} = -J_{26}(n|m) \quad (6.4.16)$$

$$J_{43}(n|m) = -i[\nu(n) - \phi_{+}(n)\psi_{-}(n)]\delta_{nm} = -J_{34}(n|m) \quad (6.4.17)$$

$$J_{53}(n|m) = -i[\theta(n) - \phi_{+}(n)\psi(n)]\delta_{nm} = -J_{35}(n|m) \quad (6.4.18)$$

$$J_{63}(n|m) = +i[1 + \phi_{+}(n)\psi_{+}(n)]\delta_{nm} = -J_{36}(n|m) . \quad (6.4.19)$$

Щойно усі претенденти на матричні елементи $J_{\lambda\varkappa}(n|m)$ вже відомі, ми мусимо перевірити, чи вираз (6.4.10) для величини $\{F, G\}$ задовольняє усі вимоги, що супроводжують означення дужки Пуассона [59, 124, 249]. Найкритичнішою з них є вимога

$$\{E, \{F, G\}\} + \{F, \{G, E\}\} + \{G, \{E, F\}\} = 0 , \quad (6.4.20)$$

зголошена на роль тотожності Якобі (Jacobi). Згідно із загальним правилом [59, 124, 186, 249] вищезазначена вимога (6.4.20) є рівноцінною до системи рівнянь

$$\sum_{\varkappa=1}^6 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[J_{\varkappa\lambda}(k|l) \frac{\partial J_{\mu\nu}(m|n)}{\partial y_{\varkappa}(k)} + J_{\varkappa\mu}(k|m) \frac{\partial J_{\nu\lambda}(n|l)}{\partial y_{\varkappa}(k)} + J_{\varkappa\nu}(k|n) \frac{\partial J_{\lambda\mu}(l|m)}{\partial y_{\varkappa}(k)} \right] = 0 , \quad (6.4.21)$$

де індекси, вказані буквами μ та ν , не мають нічого спільного з фоновими параметрами, означеними як $\mu = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \mu(n)$ та $\nu = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \nu(n)$.

Для практичного застосування тесту Якобі (6.4.21) слушно модифікувати його до виду

$$\{y_{\lambda}(l), J_{\mu\nu}(m|n)\} + \{y_{\mu}(m), J_{\nu\lambda}(n|l)\} + \{y_{\nu}(n), J_{\lambda\mu}(l|m)\} = 0 , \quad (6.4.22)$$

обґрунтованому формулою

$$\sum_{\varkappa=1}^6 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{\varkappa\lambda}(k|l) \frac{\partial J_{\mu\nu}(m|n)}{\partial y_{\varkappa}(k)} = \{y_{\lambda}(l), J_{\mu\nu}(m|n)\} , \quad (6.4.23)$$

що впливає з означення дужки Пуассона (6.4.10). Отже, аби перевірити тотожність Якобі, ми мусимо виявити усю низку претендентів на дужки Пуассона між кожною парою польових змінних, з основними та супутніми змінними включно. Концептуально це завдання є аналогічним до завдання, виконаного в процедурі відбору кандидатів на матричні елементи $J_{\lambda\varkappa}(n|m)$. Оскільки загальне число польових змінних дорівнює десяти, достатнє число шуканих претендентів становитиме п'ятдесят п'ять. Необхідні викладки з використанням виразів для претендентів на дужки Пуассона показують, що модифікований тест Якобі (6.4.22) дійсно виконується для довільної допустимої комбінації індексів λ, μ, ν та координат l, m, n . В результаті, раніше виписані вирази (6.4.11)–(6.4.19) для претендентів на величини $J_{\lambda\varkappa}(n|m)$ підвищують свій ста-

тус і визначають справжні ненульові елементи структурної (симплектичної) матриці. Ці вирази (6.4.11)–(6.4.19), доповнені формулами (6.2.11)–(6.2.14) для природніх в'язей, ясно вказують, що симплектична матриця J залишається нерозщепною навіть за нульових значень усіх фонових параметрів: $\eta = 0 = \theta$ та $\mu = 0 = \nu$.

Щодо претендентів на набір дужок Пуассона, то вони також підвищують свій статус до набору справжніх дужок Пуассона. Для повноти картини ми випишемо явно усі п'ятдесят п'ять елементарних дужок Пуассона, що характеризують досліджувану інтегровну нелінійну Шрьодінгерову систему (6.2.1)–(6.2.10). Їхній список є таким [230, 231]:

$$\{\phi_-(m), \phi_-(n)\} = 0 \quad (6.4.24)$$

$$\{\phi_-(m), \phi(n)\} = 0 \quad (6.4.25)$$

$$\{\phi_-(m), \phi_+(n)\} = 0 \quad (6.4.26)$$

$$\{\phi_-(m), \psi_-(n)\} = +i[1 + \phi_-(n)\psi_-(n)]\delta_{nm} \quad (6.4.27)$$

$$\{\phi_-(m), \psi(n)\} = -i[\eta(n) - \phi_-(n)\psi(n)]\delta_{nm} \quad (6.4.28)$$

$$\{\phi_-(m), \psi_+(n)\} = -i[\mu(n) - \phi_-(n)\psi_+(n)]\delta_{nm} \quad (6.4.29)$$

$$\{\phi_-(m), \eta(n)\} = 0 \quad (6.4.30)$$

$$\{\phi_-(m), \mu(n)\} = 0 \quad (6.4.31)$$

$$\{\phi_-(m), \theta(n)\} = +i[\phi(n) + \phi_-(n)\theta(n)]\delta_{nm} \quad (6.4.32)$$

$$\{\phi_-(m), \nu(n)\} = +i[\phi_+(n) + \phi_-(n)\nu(n)]\delta_{nm} \quad (6.4.33)$$

$$\{\phi(m), \phi(n)\} = 0 \quad (6.4.34)$$

$$\{\phi(m), \phi_+(n)\} = 0 \quad (6.4.35)$$

$$\{\phi(m), \psi_-(n)\} = -i[\theta(n) - \phi(n)\psi_-(n)]\delta_{nm} \quad (6.4.36)$$

$$\{\phi(m), \psi(n)\} = +i[1 - \mu(n)\nu(n) + \eta(n)\theta(n) + \phi(n)\psi(n)]\delta_{nm} \quad (6.4.37)$$

$$\{\phi(m), \psi_+(n)\} = -i[\eta(n) - \phi(n)\psi_+(n)]\delta_{nm} \quad (6.4.38)$$

$$\{\phi(m), \eta(n)\} = +i[\phi_-(n) + \phi_+(n)\mu(n)]\delta_{nm} \quad (6.4.39)$$

$$\{\phi(m), \mu(n)\} = +i[\phi(n)\mu(n) - \phi_-(n)\eta(n)]\delta_{nm} \quad (6.4.40)$$

$$\{\phi(m), \theta(n)\} = +i[\phi_+(n) + \phi_-(n)\nu(n)]\delta_{nm} \quad (6.4.41)$$

$$\{\phi(m), \nu(n)\} = +i[\phi(n)\nu(n) - \phi_+(n)\theta(n)]\delta_{nm} \quad (6.4.42)$$

$$\{\phi_+(m), \phi_+(n)\} = 0 \quad (6.4.43)$$

$$\{\phi_+(m), \psi_-(n)\} = -i[\nu(n) - \phi_+(n)\psi_-(n)]\delta_{nm} \quad (6.4.44)$$

$$\{\phi_+(m), \psi(n)\} = -i[\theta(n) - \phi_+(n)\psi(n)]\delta_{nm} \quad (6.4.45)$$

$$\{\phi_+(m), \psi_+(n)\} = +i[1 + \phi_+(n)\psi_+(n)]\delta_{nm} \quad (6.4.46)$$

$$\{\phi_+(m), \eta(n)\} = +i[\phi(n) + \phi_+(n)\eta(n)]\delta_{nm} \quad (6.4.47)$$

$$\{\phi_+(m), \mu(n)\} = +i[\phi_-(n) + \phi_+(n)\mu(n)]\delta_{nm} \quad (6.4.48)$$

$$\{\phi_+(m), \theta(n)\} = 0 \quad (6.4.49)$$

$$\{\phi_+(m), \nu(n)\} = 0 \quad (6.4.50)$$

$$\{\psi_-(m), \psi_-(n)\} = 0 \quad (6.4.51)$$

$$\{\psi_-(m), \psi(n)\} = 0 \quad (6.4.52)$$

$$\{\psi_-(m), \psi_+(n)\} = 0 \quad (6.4.53)$$

$$\{\psi_-(m), \eta(n)\} = -i[\psi(n) + \psi_-(n)\eta(n)]\delta_{nm} \quad (6.4.54)$$

$$\{\psi_-(m), \mu(n)\} = -i[\psi_+(n) + \psi_-(n)\mu(n)]\delta_{nm} \quad (6.4.55)$$

$$\{\psi_-(m), \theta(n)\} = 0 \quad (6.4.56)$$

$$\{\psi_-(m), \nu(n)\} = 0 \quad (6.4.57)$$

$$\{\psi(m), \psi(n)\} = 0 \quad (6.4.58)$$

$$\{\psi(m), \psi_+(n)\} = 0 \quad (6.4.59)$$

$$\{\psi(m), \eta(n)\} = -i[\psi_+(n) + \psi_-(n)\mu(n)]\delta_{nm} \quad (6.4.60)$$

$$\{\psi(m), \mu(n)\} = +i[\psi_+(n)\eta(n) - \psi(n)\mu(n)] \quad (6.4.61)$$

$$\{\psi(m), \theta(n)\} = -i[\psi_-(n) + \psi_+(n)\nu(n)] \quad (6.4.62)$$

$$\{\psi(m), \nu(n)\} = +i[\psi_-(n)\theta(n) - \psi(n)\nu(n)] \quad (6.4.63)$$

$$\{\psi_+(m), \psi_+(n)\} = 0 \quad (6.4.64)$$

$$\{\psi_+(m), \eta(n)\} = 0 \quad (6.4.65)$$

$$\{\psi_+(m), \mu(n)\} = 0 \quad (6.4.66)$$

$$\{\psi_+(m), \theta(n)\} = -i[\psi(n) + \psi_+(n)\theta(n)] \quad (6.4.67)$$

$$\{\psi_+(m), \nu(n)\} = -i[\psi_-(n) + \psi_+(n)\nu(n)] \quad (6.4.68)$$

$$\{\eta(m), \eta(n)\} = 0 \quad (6.4.69)$$

$$\{\eta(m), \mu(n)\} = 0 \quad (6.4.70)$$

$$\{\eta(m), \theta(n)\} = +i[\phi_+(n)\psi_+(n) - \phi_-(n)\psi_-(n)] \quad (6.4.71)$$

$$\{\eta(m), \nu(n)\} = +i[\phi_+(n)\psi(n) - \phi(n)\psi_-(n)] \quad (6.4.72)$$

$$\{\mu(m), \mu(n)\} = 0 \quad (6.4.73)$$

$$\{\mu(m), \theta(n)\} = +i[\phi(n)\psi_+(n) - \phi_-(n)\psi(n)] \quad (6.4.74)$$

$$\{\mu(m), \nu(n)\} = +i[\phi_+(n)\psi_+(n) - \phi_-(n)\psi_-(n)] \quad (6.4.75)$$

$$\{\theta(m), \theta(n)\} = 0 \quad (6.4.76)$$

$$\{\theta(m), \nu(n)\} = 0 \quad (6.4.77)$$

$$\{\nu(m), \nu(n)\} = 0 . \quad (6.4.78)$$

Покладаючись на ці результати (6.4.24)–(6.4.78), можна пересвідчитися, що багатокomпонентна напівдискретна нелінійна Шр'юдінґерова система (6.2.1)–(6.2.10) за нелінійностей притягувального типу допускає лаконічне Гамільтонове представлення [230, 231]

$$\dot{\phi}_+(n) = \{H, \phi_+(n)\} \quad (6.4.79)$$

$$\dot{\phi}(n) = \{H, \phi(n)\} \quad (6.4.80)$$

$$\dot{\phi}_-(n) = \{H, \phi_-(n)\} \quad (6.4.81)$$

$$\dot{\eta}(n) = \{H, \eta(n)\} \quad (6.4.82)$$

$$\dot{\mu}(n) = \{H, \mu(n)\} \quad (6.4.83)$$

та

$$\dot{\psi}_+(n) = \{H, \psi_+(n)\} \quad (6.4.84)$$

$$\dot{\psi}(n) = \{H, \psi(n)\} \quad (6.4.85)$$

$$\dot{\psi}_-(n) = \{H, \psi_-(n)\} \quad (6.4.86)$$

$$\dot{\theta}(n) = \{H, \theta(n)\} \quad (6.4.87)$$

$$\dot{\nu}(n) = \{H, \nu(n)\} \quad (6.4.88)$$

з функцією Гамільтона H , заданою раніше прийнятою формулою (6.4.1).

Позаяк сама по собі функція Гамільтона (6.4.1) виражається квадратичною формою відносно польових змінних, то нелінійні члени в динамічних рівняннях (6.4.79)–(6.4.88) виникають виключно завдяки вельми нестандартному вигляду доречних дужок Пуассона (6.4.24)–(6.4.78).

Варто зауважити, що нестандартна форма Пуассонової структури є доволі звичайною властивістю багатьох інтегровних нелінійних систем, асоційованих з дискретними допоміжними спектральними задачами. Наприклад, навіть найпростіша інтегровна нелінійна Шрьодінґерова система на суто одновимірній ґратці лише з одним структурним елементом в елементарній комірці [2, 4] опікується нестандартними фундаментальними дужками Пуассона. [87, 102, 161]. Серед складніших представників, характеризованих нестандартними дужками Пуассона, хотілося б ще раз згадати інтегровні нелінійні Шрьодінґерові системи на квазіодновимірних ґратках з двома структурними елементами в елементарній комірці [199, 212] та [220, 221], детальне дослідження яких подано в розділах 3 та 4 чинної дисертації.

6.5 Солітонний розв'язок шестикомпонентної напівдискретної нелінійної Шрьодінґеріві системи за нелінійностей притягувального типу [230, 231, 232, 233]

Своєрідність фактичного інтегрування окремо взятої інтегрованої нелінійної системи суттєво залежить, як відомо [33, 34, 201, 202], від порядку допоміжної спектральної задачі, асоційованої з системою.

Допоміжні спектральний $L(n|z)$ та еволюційний $A(n|z)$ оператори, відповідальні за інтегровність розглядуваної в цьому розділі напівдискретної інтегрованої нелінійної системи (6.2.1)–(6.2.10), є квадратними матрицями розміру 2×2 (дивись вирази (6.3.2)–(6.3.5) та (6.3.6)–(6.3.9) для матричних елементів $L_{jk}(n|z)$ та $A_{jk}(n|z)$, відповідно). Тому не дивно, що доречна спектральна задача має другий порядок. Взавши до уваги цей сприятливий факт та поклавшись на свій попередній досвід, набутий протягом досліджування дещо простішої інтегрованої нелінійної системи [220, 221, 227, 228], представленої в розділі 4, ми спромоглися побудувати самодостатню схему інтегрування, засновану на перетвореннях Дарбу та Беклунда [231, 232]. При цьому ми спиралися на найпростішу прийнятну форму анзацу для матриці Дарбу [231, 232]

$$S(n|z) = \begin{pmatrix} z^2 + T_{11}(n) & S_{12}(n)z + {}^cU_{12}(n)z^{-1} \\ S_{21}(n)z + {}^cU_{21}(n)z^{-1} & T_{22}(n) + z^{-2} \end{pmatrix}, \quad (6.5.1)$$

достатню аби утворити один додатковий солітон в наступному (ужинковому) розв'язку нелінійної системи порівняно з попереднім (засівним) розв'язком. Ми пропустимо всі досить довгі та громіздкі викладки і представимо тут лише остаточні результати, які стосуватимуться багатоконпонентного солітонного розв'язку теперішньої нелінійної системи (6.2.1)–(6.2.10) за нелінійностей притягувального типу, забезпечуваними, як ми вже вказували, наступними співвідношеннями симетрії: $\psi_+(n) = \phi_+^*(n)$, $\psi(n) = \phi^*(n)$, $\psi_-(n) = \phi_-^*(n)$, $\nu(n) = \mu^*(n)$ та $\beta = \alpha^*$, $\nu = \mu^*$. З цією метою ми введемо кілька потрібних позначень.

Перш за все ми матимемо справу з парою дійсних сталих спектральних параметрів γ та \varkappa і означимо дві інші пари дійсних сталих параметрів γ_+ , \varkappa_+

та γ_- , \varkappa_- за допомоги двох систем рівнянь [230, 231, 232]

$$\begin{aligned} \exp(+3\gamma_+ + 3i\varkappa_+) &= \exp(+3\gamma + 3i\varkappa) - \eta \exp(+\gamma + i\varkappa) - \\ &- \mu \exp(-\gamma - i\varkappa) \end{aligned} \quad (6.5.2)$$

$$\begin{aligned} \exp(+3\gamma_+ - 3i\varkappa_+) &= \exp(+3\gamma - 3i\varkappa) - \theta \exp(+\gamma - i\varkappa) - \\ &- \nu \exp(-\gamma + i\varkappa) \end{aligned} \quad (6.5.3)$$

та

$$\begin{aligned} \exp(-3\gamma_- + 3i\varkappa_-) &= \exp(-3\gamma + 3i\varkappa) - \eta \exp(-\gamma + i\varkappa) - \\ &- \mu \exp(+\gamma - i\varkappa) \end{aligned} \quad (6.5.4)$$

$$\begin{aligned} \exp(-3\gamma_- - 3i\varkappa_-) &= \exp(-3\gamma - 3i\varkappa) - \theta \exp(-\gamma - i\varkappa) - \\ &- \nu \exp(+\gamma + i\varkappa). \end{aligned} \quad (6.5.5)$$

Потому ми встановимо параметри розщеплення ξ та s фази та координати, використовуючи співвідношення

$$6(\varkappa_+ + \varkappa_-)\xi = 3(\varkappa_+ + \varkappa_-) - 2\varkappa \quad (6.5.6)$$

та

$$6(\gamma_+ + \gamma_-)s = 3(\gamma_+ + \gamma_-) - 2\gamma. \quad (6.5.7)$$

Дійсні питома координатні величини y та x , відповідальні за динамічні властивості багатокомпонентного солітона, означимо виразами

$$\begin{aligned} 3(\varkappa_+ + \varkappa_-)y &= 2 \cosh(2\gamma)[\operatorname{Im}(A) \sin(2\varkappa) - \operatorname{Re}(A) \cos(2\varkappa)] + \\ &+ 3(\varkappa_+ + \varkappa_-)y_0 \end{aligned} \quad (6.5.8)$$

та

$$\begin{aligned} 3(\gamma_+ + \gamma_-)x &= 2 \sinh(2\gamma)[\operatorname{Re}(A) \sin(2\varkappa) + \operatorname{Im}(A) \cos(2\varkappa)] + \\ &+ 3(\gamma_+ + \gamma_-)x_0, \end{aligned} \quad (6.5.9)$$

де y_0 та x_0 – суть довільні сталі дійсні координатні параметри. Тут дійсні величини $\text{Re}(A)$ та $\text{Im}(A)$ пов'язано з комплекснозначними величинами A та B у загальноприйнятій спосіб

$$A = \text{Re}(A) + i\text{Im}(A) \quad (6.5.10)$$

та

$$B = \text{Re}(A) - i\text{Im}(A), \quad (6.5.11)$$

де динамічні величини A та B є розв'язками простих диференціальних рівнянь першого порядку

$$\dot{A} = \alpha \quad (6.5.12)$$

та

$$\dot{B} = \beta. \quad (6.5.13)$$

Взявши до уваги перелік ухвалених позначень (6.5.2)–(6.5.13), потрібний нам багатокomпонентний солітонний розв'язок вдається охопити формулами

$$\phi_+(n) = \frac{\sinh(2\gamma) \exp[+3i(\kappa_+ + \kappa_-)(n - \xi - y)]}{\cosh[3(\gamma_+ + \gamma_-)(n - s - x)]} \quad (6.5.14)$$

$$\begin{aligned} \phi(n) = & \frac{\sinh(2\gamma) \exp[+3i(\kappa_+ + \kappa_-)(n - y)]}{\sinh[3(\gamma_+ + \gamma_-) - 2\gamma]} \times \\ & \times \left\{ \frac{\sinh(2\gamma) \exp[+3i(\kappa_+ + \kappa_-)\xi]}{\cosh[3(\gamma_+ + \gamma_-)(n - s - x)]} \exp(-2i\kappa) + \right. \\ & + \frac{\mu \sinh[3(\gamma_+ + \gamma_-)] \exp[-3i(\kappa_+ + \kappa_-)\xi]}{\cosh[3(\gamma_+ + \gamma_-)(n - s - x)]} \exp(-2i\kappa) + \\ & + \frac{\sinh(2\gamma) \exp[-3i(\kappa_+ + \kappa_-)\xi]}{\cosh[3(\gamma_+ + \gamma_-)(n + s - x)]} \exp(+2i\kappa) + \\ & \left. + \frac{\nu \sinh[3(\gamma_+ + \gamma_-)] \exp[+3i(\kappa_+ + \kappa_-)\xi]}{\cosh[3(\gamma_+ + \gamma_-)(n + s - x)]} \exp(+2i\kappa) \right\} \quad (6.5.15) \end{aligned}$$

$$\phi_-(n) = \frac{\sinh(2\gamma) \exp[+3i(\kappa_+ + \kappa_-)(n + \xi - y)]}{\cosh[3(\gamma_+ + \gamma_-)(n + s - x)]} \quad (6.5.16)$$

$$\eta(n) = \eta + \frac{\sinh(2\gamma) \sinh[3(\gamma_+ + \gamma_-) - 2\gamma] \exp(+2i\kappa)}{\cosh[3(\gamma_+ + \gamma_-)(n - s - x)] \cosh[3(\gamma_+ + \gamma_-)(n + s - x)]} \quad (6.5.17)$$

$$\begin{aligned} \mu(n) = \mu + & \hspace{15em} (6.5.18) \\ & + \sinh(2\gamma) \frac{\sinh(2\gamma) \exp[+3i(\kappa_+ + \kappa_-) - 2i\kappa] + \mu \sinh[3(\gamma_+ + \gamma_-)]}{\cosh[3(\gamma_+ + \gamma_-)(n - s - x)] \cosh[3(\gamma_+ + \gamma_-)(n + s - x)]} \end{aligned}$$

та

$$\psi_+(n) = \frac{\sinh(2\gamma) \exp[-3i(\kappa_+ + \kappa_-)(n - \xi - y)]}{\cosh[3(\gamma_+ + \gamma_-)(n - s - x)]} \quad (6.5.19)$$

$$\begin{aligned} \psi(n) = & \frac{\sinh(2\gamma) \exp[-3i(\kappa_+ + \kappa_-)(n - y)]}{\sinh[3(\gamma_+ + \gamma_-) - 2\gamma]} \times \\ & \times \left\{ \frac{\sinh(2\gamma) \exp[-3i(\kappa_+ + \kappa_-)\xi]}{\cosh[3(\gamma_+ + \gamma_-)(n - s - x)]} \exp(+2i\kappa) + \right. \\ & + \frac{\nu \sinh[3(\gamma_+ + \gamma_-)] \exp[+3i(\kappa_+ + \kappa_-)\xi]}{\cosh[3(\gamma_+ + \gamma_-)(n - s - x)]} \exp(+2i\kappa) + \\ & + \frac{\sinh(2\gamma) \exp[+3i(\kappa_+ + \kappa_-)\xi]}{\cosh[3(\gamma_+ + \gamma_-)(n + s - x)]} \exp(-2i\kappa) + \\ & \left. + \frac{\mu \sinh[3(\gamma_+ + \gamma_-)] \exp[-3i(\kappa_+ + \kappa_-)\xi]}{\cosh[3(\gamma_+ + \gamma_-)(n + s - x)]} \exp(-2i\kappa) \right\} \quad (6.5.20) \end{aligned}$$

$$\psi_-(n) = \frac{\sinh(2\gamma) \exp[-3i(\kappa_+ + \kappa_-)(n + \xi - y)]}{\cosh[3(\gamma_+ + \gamma_-)(n + s - x)]} \quad (6.5.21)$$

$$\theta(n) = \theta + \frac{\sinh(2\gamma) \sinh[3(\gamma_+ + \gamma_-) - 2\gamma] \exp(-2i\kappa)}{\cosh[3(\gamma_+ + \gamma_-)(n - s - x)] \cosh[3(\gamma_+ + \gamma_-)(n + s - x)]} \quad (6.5.22)$$

$$\begin{aligned} \nu(n) = \nu + & \hspace{15em} (6.5.23) \\ & + \sinh(2\gamma) \frac{\sinh(2\gamma) \exp[-3i(\kappa_+ + \kappa_-) + 2i\kappa] + \nu \sinh[3(\gamma_+ + \gamma_-)]}{\cosh[3(\gamma_+ + \gamma_-)(n - s - x)] \cosh[3(\gamma_+ + \gamma_-)(n + s - x)]} . \end{aligned}$$

Згідно з раніше введеними означеннями (6.5.2)–(6.5.13) ключові характеристики цього багатокомпонентного розв'язку (6.5.14)–(6.5.23) вочевидь суттєво залежать від рівнів фонових параметрів η , θ та μ , ν .

Так, справжній хвильовий вектор $K = 3(\kappa_+ + \kappa_-)$, приписаний до солітонного розв'язку (6.5.14)–(6.5.23), зумовлено заразом затравковим хвильовим вектором $k = 6\kappa$ та затравковим оберненим повздовжнім розміром солітона 6γ . Таке саме твердження стосується і справжнього оберненого повздовжньо-

го розміру солітона $\Gamma = 3(\gamma_+ + \gamma_-)$. При цьому слід зауважити, що справжні величини K та Γ збігаються зі своїми затравковими двійниками k та 6γ лише у границі зникومих фонових параметрів: $\eta = 0 = \theta$ та $\mu = 0 = \nu$.

На загал, внаслідок дуже громіздкої залежності k від K , вкрай непрактично розглядати фазову частоту Ω , означену виразом

$$\Omega = 3(\varkappa_+ + \varkappa_-)\dot{\gamma} , \quad (6.5.24)$$

як функцію від справжнього хвильового вектора K . На щастя, фазова частота Ω , узята як функція від затравкового хвильового вектора k , має досить простий вигляд

$$\Omega(k) = 2 \cosh(2\gamma)[\text{Im}(\alpha) \sin(k/3) - \text{Re}(\alpha) \cos(k/3)] , \quad (6.5.25)$$

де затравковий хвильовий вектор k змінюється в межах розширеної затравкової зони Бріллюена (Brillouin) $-3\pi \leq k \leq +3\pi$. Тут одразу ж впадає у вічі неперервність закону дисперсії (6.5.25) на усьому інтервалі розширеної затравкової зони Бріллюена $-3\pi \leq k \leq +3\pi$ включно навіть з потенційно вразливими точками -3π , $-\pi$ та $+\pi$, $+3\pi$.

Навпаки, фазова частота Ω , розглядувана як функція від справжнього хвильового вектора K , за ненульових значень фонових параметрів η , θ та μ , ν здатна мати точки розриву і навіть демонструвати цілі ділянки нестабільності (тобто ділянки, де Ω набуває комплексних значень). Цей здогад є наслідком підготовчого аналізу алгебричного кубічного рівняння для визначення спектру низькоамплітудних збуджень (тобто збуджень в лінеаризованій версії (6.2.15)–(6.2.20) досліджуваної нелінійної системи (6.2.1)–(6.2.10)).

З іншого боку, ми можемо ввести величину

$$v = \dot{x} , \quad (6.5.26)$$

що характеризує швидкість солітона вдовж квазіодновимірної ґратки. З тієї ж причини, що й для фазової частоти Ω , наразі зручніше мати справу зі швидкістю солітона v (6.5.26) як функції від затравкового хвильового вектора k ,

поданої формулою

$$v(k) = \frac{2 \sinh(2\gamma)}{3(\gamma_+ + \gamma_-)} [\text{Im}(\alpha) \cos(k/3) + \text{Re}(\alpha) \sin(k/3)] , \quad (6.5.27)$$

де величина $3(\gamma_+ + \gamma_-)$, як ми вже знаємо, є функцією від затравкового хвильового вектора $k = 6\mathfrak{z}$ та затравкового оберненого повздовжнього розміру солітона 6γ .

Варто зауважити, що в границі просторово простягнутого солітонного розподілу $\Gamma \rightarrow 0$ та зниклих фонових параметрів η , θ та μ , ν ми приходимо до стандартного співвідношення

$$v(k) = \frac{\partial}{\partial k} \Omega(k) , \quad (6.5.28)$$

що уособлює означення групової швидкості.

На завершення опису солітонних параметрів звернемо особливу увагу на практично невичерпні можливості для вибору часових залежностей параметрів зв'язку α та β , обмежені лише вимогою їхнього комплексного спряження $\beta = \alpha^*$. Ця властивість є цілком слушним засобом для моделювання впливу широкого класу параметричних збуджувачів на динаміку системи без втрати інтегровності останньої. Окрім того, ми добре знаємо, що часова допасовність параметрів зв'язку тісно пов'язана зі строгим потрактуванням осциляцій Блоха (Bloch) в напівдискретних інтегровних нелінійних системах, коли нелінійні збудження зазнають дії лінійного потенціалу [198, 200, 223].

6.6 Підсумки

У шостому розділі ми виклали ключові властивості загальної напівдискретної інтегровної нелінійної системи на квазіодновимірній ґратці з трьома структурними елементами в елементарній комірці з їхнім наступним підлаштуванням переважно до потреб шестикомпонентної напівдискретної інтегровної нелінійної системи Шрьодінґера з притягувальним типом нелінійностей. Мотивацією до цього завдання слугувала загальноновизнана фундаментальна роль напівдискретних інтегровних нелінійних Шрьодінґерових систем в найрізноманітніших областях фізичної науки [221], коли строгий опис більш складних явищ потре-

бує залучення дедалі складніших багатокomпонентних інтегровних нелінійних моделей.

Отже, в розвиток ідеї про більшання числа структурних елементів в елементарній комірці квазіодновимірної ґратки-носія елементарних збуджень, придатних до моделювання напівдискретними інтегровними нелінійними системами Шрьодінґероного типу, ми запропонували представлення нульової кривини, в рамках якого започаткували загальну напівдискретну інтегровну нелінійну систему на квазіодновимірній ґратці з трьома структурними елементами в елементарній комірці. Інтегровність одержаної загальної системи дає змогу явним чином відшукати низку найважливіших локальних законів збереження, дотичних до динамічних властивостей системи і до так званих природних в'язей, що надають частині польових змінних статусу супутніх, тобто залежних від основних польових змінних. Так, детальний розгляд конкретної редукції до напівдискретної інтегровної нелінійної системи Шрьодінґероного типу вказав на суттєво нетривіальний вплив супутніх полів на Пуассонову структуру та на Гамільтонове формулювання динаміки системи в цілому, спричинене ненульовими фоновими значеннями цих полів.

З іншого боку, представлення нульової кривини для загальної напівдискретної інтегровної нелінійної системи є неодмінним ключем до інтегрування рівнянь системи методом послідовного одягання засівного (тривіального або вже відомого) розв'язку в рамках перетворення Дарбу для допоміжної лінійної задачі та неявного перетворення Беклунда для польових функцій.

Внаслідок симетрій, притаманних шестикomпонентній напівдискретній інтегровній нелінійній системі Шрьодінґера з притягувальним типом нелінійностей, схема одягання Дарбу–Беклунда зазнає відчутних спрощень і приводить до прийнятно параметризованого ужинкового багатокomпонентного солітонного розв'язку, що складається з шести основних та чотирьох супутніх компонент.

Звернемо особливу увагу на досить продуктивну концепцію супутніх полів, типову для напівдискретних інтегровних систем, чий допоміжний спектральний оператор має детермінант, залежний від спектрального параметра [233]. Суть справи полягає в тому, що ненульові фонові значення супутніх полів опосередковують ефективно кілька додаткових типів міжвузлової резонансної взаємодії між основними полями і тим самим створюють стьожкоподібну про-

сторову конфігурацію ґратки-носія збуджень [233]. Так, для шестикомпонентної напівдискретної інтегровної нелінійної системи Шрьодінґера з притягувальним типом нелінійностей такі додаткові резонансні взаємодії асоціюються з наступними трьома типами параметрів міжвузлового резонансного зв'язку: (i) $-\alpha\nu$, $-\beta\mu$; (ii) $\alpha\mu$, $\beta\nu$; (iii) $-\alpha\theta$, $-\beta\eta$. Отже, в цілому вказана система забезпечує чотири типи резонансної міжвузлової взаємодії і таким чином суттєво збагачує свою динамічну поведінку.

Ще один принциповий пункт стосується уніфікованого погляду на деякий досить широкий клас багатоконпонентних напівдискретних інтегровних нелінійних систем в цілому. Він впливає безпосередньо з порівняння загального виду спектрального оператора, характерного для напівдискретних інтегровних нелінійних систем на ґратці з двома структурними елементами в елементарній комірці (4.2.4) (розглянутого в четвертому розділі на основі наших праць [221, 227, 228]), із загальним видом спектрального оператора, характерного для напівдискретних інтегровних нелінійних систем на ґратці з трьома структурними елементами в елементарній комірці (6.3.2)–(6.3.5) (розглянутого в цьому шостому розділі). З цього порівняння випливає загальне правило: аби одержати загальну напівдискретну інтегровну нелінійну систему на ґратці з S структурними елементами в елементарній комірці в рамках рівняння нульової кривини з доречними допоміжними операторами другого порядку, слід запостулювати спектральний оператор як матрицю з тими самими степенями спектрального параметра z , що й добуток S операторів Абловіца–Ладіка. Тут ми розуміємо оператор Абловіца–Ладіка в його загальновідомому 2×2 матричному представленні [173]

$$L^{AL}(n|z) = \begin{pmatrix} z & g_{12}(n) \\ g_{21}(n) & z^{-1} \end{pmatrix}. \quad (6.6.1)$$

Щодо еволюційного оператора для M -ої інтегровної нелінійної системи з ієрархії, згенерованої спектральним оператором для систем із S структурними елементами в елементарній комірці, то його лоранівський розклад за степенями спектрального параметра z мусить включати ті самі степені, що й добуток $2M$ спектральних операторів Абловіца–Ладіка (6.6.1).

Висновки

В дисертації запропоновано та досліджено велику кількість нелінійних еволюційних моделей багатокomпонентних структурованих низьковимірних систем з огляду на їхнє застосування до об'єктів різноманітної фізичної природи. Серед таких фізичних об'єктів слід вказати на геофізичні осадові породи, нелінійні електричні мережі, напівпровідникові надструктури, природні та синтезовані макромолекули, синтезовані наностьожки, регулярно впорядковані зв'язані оптичні волокнини.

В підсумках до кожного з розділів дисертації детально викладено практично всі одержані наукові результати, і тому тут ми подаємо лише найважливіші з них.

Найважливіші наукові результати дисертації

01. Побудовано самодостатню динамічно-кінетичну нелінійну модель взаємозалежних пружних деформацій та порушених міжзернинних зв'язків з природно вмотивованим асиметричним механізмом утворювання та заліковування мікротріщин типу м'якої хлипавки, в рамках якої з єдиних позицій відтворено практично усі відомі експериментальні ефекти з неklasичного резонансного відгуку геофізичних осадових матеріалів на зовнішнє високочастотне збурення, найвиразнішими серед яких є (i) гістерезна поведінка резонансної кривої на висхідному і на низхідному схилах, (ii) лінійне пом'якшення резонансної частоти з ростом рівня урухомлювання, а також (iii) поступове (майже логарифмічне) відновлювання (більшання) резонансної частоти з плином часу за низького рівня динамічного деформування після попереднього кондиціювання зразка великим динамічним деформуванням.

02. Передбачено гістерезний ефект пам'яті геофізичних осадових матеріалів

про найбільше високочастотне динамічне навантаження (динамічний ефект прикінцевої пам'яті), що згодом знайшов своє експериментальне втілення.

03. Побудовано фізично скориговану (канонічну) майже інтегровну версію багатокomпонентної напівдискретної нелінійної Шрьодінґерової системи, яка завдяки точному врахуванню резонансних міжвузлових зв'язків поперечного типу слугує основою для моделювання динаміки внутрішньомолекулярних нелінійних збуджень на регулярних багатоланцюжкових драбинчастих ґратках.

04. Досліджено взаємовпливи між повздовжніми та поперечними внутрішньомолекулярними солітонними модами в збурених багатоланцюжкових ґратках та сформульовано умови міжмодової синхронізації для адресного доправлення скомпактованого нелінійного хвильового збудження до певного вузла трубчастої ґратки, підданої дії однорідного повздовжнього магнетного поля, а також для селективного пропускання солітона крізь ділянку дволанцюжкової ґратки із зигзагоподібним розташуванням одновузлових домішок завдяки слаломному ефекту чи для селективного (керованого знаком ефективної енергії поперечної солітонної моди) пропускання солітона крізь локальний дефект пропорційно модифікованих поперечних резонансних міжвузлових зв'язків багатоланцюжкової драбинчастої ґратки.

05. Побудовано інтегровну нелінійну параметрично збурювану динамічну модель внутрішньовузлових збуджень на пласкій фермоподібній ґратці з двома вузлами в елементарній комірці та започатковано найбільш доречну симетризовану форму оберненої задачі розсіяння із залученням двох наборів допоміжних лінійних рівнянь та двох комплементарних систем дискретних рівнянь Марченка, в рамках яких знайдено чотирикомпонентні багатосолітонні розв'язки моделі з точним урахуванням дії магнетного поля, ортогонального до площини ґратки. Явно представлено односолітонний розв'язок.

06. Знайдено основні закони збереження інтегровної нелінійної динамічної Шрьодінґерової системи внутрішньовузлових збуджень на пласкій фермоподібній ґратці та встановлено її Гамільтонове формулювання в термінах вихідних і фізично скоригованих (канонічних) польових амплітуд.

07. На квазіодновимірній ґратці з двома структурними елементами в елементарній комірці побудовано напівдискретну інтегровну нелінійну Шрьодінґерову систему з додатковими параметрами міжвузлового резонансного зв'язку, керованими фоновими значеннями допоміжних полів, та (з урахуванням пара-

метричного збурювання системи і впливу зовнішнього магнетного поля) знайдено її явний шестикомпонентний солітонний розв'язок в рамках спеціально створеної процедури перетворення Дарбу та неявного перетворення Беклунда.

08. Знайдено основні закони збереження напівдискретної інтегрованої нелінійної чотирикомпонентної Шрьодінґерової системи з додатковими тлозалежними параметрами міжвузлового резонансного зв'язку. Сформульовано Гамільтонове представлення цієї системи в термінах суттєво нестандартної Пуассонової структури та запропоновано два фізично рівноцінні варіанти стандартизації динамічних рівнянь системи з невідворотнім порушенням симетрії між двома канонізованими підсистемами і зміною природи збуджених станів однієї з підсистем, коли головний фоновий параметр переступає через своє критичне значення.

09. Запропоновано загальну форму рекурсивного пошуку нескінченної ієрархії локальних законів збереження для багатоконпонентних напівдискретних інтегрованих нелінійних систем, асоційованих з допоміжними лінійними спектральними операторами довільного порядку.

10. В рамках представлення нульової кривини зі спектральним оператором Абловіца–Ладіка обґрунтовано метод побудови параметрично урухомлюваних напівдискретних інтегрованих систем з далекосяжним характером міжвузлової резонансної взаємодії шляхом адекватного збільшення числа членів в лоранівському розкладі еволюційного оператора за степенями спектрального параметра і введення (наперед нерегламентованих) часових залежностей до параметрів резонансної взаємодії, сформульовано умови здійснення параметричної локалізації солітонного пакету та вказано на калібрувальну еквівалентність між параметрично розгойдуваними напівдискретними інтегрованими системами з далекосяжним характером резонансної взаємодії в полі зовнішнього просторово лінійного потенціалу і суто параметрично розгойдуваними напівдискретними інтегрованими системами з далекосяжним характером резонансної взаємодії, специфічно підлаштованим у часі.

11. Знайдено шість пар допоміжних операторів Лакса, заданих матрицями третього порядку, та дві пари допоміжних операторів Лакса, заданих матрицями четвертого порядку, кожна з яких в рамках доречного напівдискретного матричного рівняння нульової кривини започаткувала не менше однієї раніше невідомої багатоконпонентної напівдискретної інтегрованої системи, що скла-

дається зі зв'язаних підсистем суттєво відмінної природи.

12. На квазіодновимірній ґратці з трьома структурними елементами в елементарній комірці побудовано напівдискретну інтегровну нелінійну Шрьодінґерову систему з додатковими параметрами міжвузлового резонансного зв'язку трьох типів, керованими фоновими значеннями допоміжних полів, та (з урахуванням параметричного збурювання системи і впливу зовнішнього магнетного поля) знайдено її явний десятикомпонентний солітонний розв'язок в рамках вдосконаленої процедури перетворення Дарбу та неявного перетворення Беклунда.

13. Для напівдискретної інтегровної нелінійної шестикомпонентної Шрьодінґерової системи з кількома типами додаткових параметрів міжвузлового резонансного зв'язку на інтеркальованій драбинчастій ґратці виявлено надзвичайно нестандартну Пуассонову структуру, уособлену п'ятдесятьма п'ятьма фундаментальними дужками Пуассона між польовими амплітудами, та сформульовано Гамільтонове представлення динамічних рівнянь цієї системи.

14. В рамках рівняння нульової кривини з доречно узагальненими допоміжними операторами другого порядку сформульовано загальне правило побудови багатокомпонентних напівдискретних інтегровних нелінійних систем на квазіодновимірних ґратках з довільним числом структурних елементів в елементарній комірці та з багатьма типами додаткових (глозалежних) параметрів міжвузлового резонансного зв'язку.

Зауваги щодо майбутніх досліджень

Є усі підстави вважати, що результати досліджень, викладені в пунктах 01 та 02, дали дієвий і досить простий ключ до розуміння взаємовпливу важливих для сейсмології процесів швидкої та повільної динаміки геофізичних порід. Дещо переобтяжені математично модифікації нашого підходу до процесів швидкої та повільної динаміки, викладені іншими дослідниками [18, 65], не змінюють ключових положень нашої оригінальної моделі, проте завуальовують їхню прозору фізичну суть, зрозумілу для експериментаторів.

Результати досліджень, викладені в пунктах 03 та 04, можна застосовувати для розв'язування проблем селективного транспорту енергії та заряду як в просторово регулярних, так і в просторово нерегулярних природних чи синте-

зованих макромолекулах та синтезованих наноструктурах, перспективних для наноелектроніки, а також для розв'язування проблем селективного транспорту енергії та заряду, керованого зовнішніми полями.

Важлива універсальна властивість усіх напівдискретних інтегровних нелінійних систем полягає у повздовжній трансляційній інваріантності їхніх солітонних розв'язків на будь-яку (навіть несумірну з повздовжнім періодом кристалічної ґратки) відстань. Цю властивість варто брати до уваги під час проектування пристроїв селективної передачі інформації вузькими нелінійними хвильовими пакетами так, аби такі пристрої підлягали моделюванню в рамках напівдискретних нелінійних систем, якомога ближчих до інтегровних, з метою мінімізації негативного впливу ефектів розсіювання та пінінгу, спричинених періодичним потенціальним рельєфом Паєрлса–Набарро (Peierls–Nabarro potential relief) [132, 133, 146].

Звертаємо особливу увагу на проблему стандартизації польових амплітуд тієї чи іншої напівдискретної інтегровної нелінійної системи, розв'язання якої за твердженням однієї з теорем Дарбу має надавати новим польовим амплітудам статус канонічних (фізично вмотивованих) польових змінних. На загаль, проблема стандартизації польових амплітуд поставала для будь-якої з представлених в дисертації напівдискретних інтегровних нелінійних систем Шрьодінґероного типу і була успішно розв'язана для більшості з них. Проте проблема стандартизації польових амплітуд напівдискретної інтегровної нелінійної чотирикомпонентної Шрьодінґероної системи з додатковими тлозалежними параметрами міжвузлового резонансного зв'язку виявилась справжньою багатоходовою головоломкою і була розв'язана лише завдяки вірі в теорему Дарбу, оскільки сама теорема Дарбу жодних конструктивних рецептів розв'язання проблеми стандартизації польових амплітуд не надає. Вочевидь проблема стандартизації польових амплітуд напівдискретної інтегровної нелінійної шестикомпонентної Шрьодінґероної системи з додатковими тлозалежними параметрами міжвузлового резонансного зв'язку є ще складнішою і тому має терпляче очікувати на своє успішне розв'язання.

Вказаний в пункті 10 результат про калібрувальну еквівалентність між параметрично розгойдуваними напівдискретними інтегровними системами з далекосяжним характером резонансної взаємодії під дією зовнішнього просторово лінійного потенціалу і суто параметрично розгойдуваними напівдис-

кретними інтегровними системами з далекосяжним характером резонансної взаємодії, специфічно підлаштованим у часі, насправді стосується будь-якої з великої низки запропонованих в дисертації параметрично розгойдуваних напівдискретних інтегровних нелінійних систем Шрьодінґероного типу і уможливорює розв'язання фізичних проблем, пов'язаних з Блоховими осциляціями нелінійних збуджень під дією зовнішнього лінійного у просторі потенціалу. Ця загальна властивість вказаних вище систем видається досить важливим чинником в суто прагматичному аспекті використання ефекту осциляцій Блоха як фундаментального механізму генерації електромагнетного проміння напівпровідниковими надструктурами в терагерцовому (донині проблематичному для регулювання) діапазоні частот з огляду на досить перспективний спосіб перелаштовування частоти випромінювання простою зміною напруженості повздовжнього електричного поля.

Підкреслимо також, що згадані в пункті 11 численні напівдискретні інтегровні нелінійні системи потребують додаткових досліджень стосовно пошуку їхніх солітонних розв'язків, що є неабиякою суто теоретичною проблемою спричиненою більшими за другий порядками асоційованих з ними допоміжних лінійних спектральних задач.

Нарешті, викладений в пункті 14 рецепт побудови багатоконпонентних напівдискретних інтегровних нелінійних систем з багатьма типами додаткових параметрів міжвузлового зв'язку, заданих на квазіодновимірних ґратках з доволіним числом структурних елементів в елементарній комірці, відкриває широке поле діяльності в царині досліджування майбутніх багатоконпонентних напівдискретних інтегровних нелінійних систем.

Список бібліографічних посилань на першоджерела

- [1] F.Kh. Abdullaev, Ya.V. Kartashov, V.V. Konotop and D.A. Zezyulin, Solitons in PT -symmetric nonlinear lattices, *Phys. Rev. A* **83**(4), 041805(R) (4 pages) (2011).
- [2] M.J. Ablowitz and J.F. Ladik, Nonlinear differential-difference equations, *J. Math. Phys.* **16**(3), 598–603 (1975).
- [3] M.J. Ablowitz and J.F. Ladik, A nonlinear difference scheme and inverse scattering, *Stud. Appl. Math.* **55**(3), 213–229 (1976).
- [4] M.J. Ablowitz and J.F. Ladik, Nonlinear differential-difference equations and Fourier analysis, *J. Math. Phys.* **17**(6), 1011–1018 (1976).
- [5] M.J. Ablowitz, Lectures on the inverse scattering transform, *Stud. Appl. Math.* **58**(1), 17–94 (1978).
- [6] M.J. Ablowitz, Y. Ohta, and A.D. Trubatch, On discretizations of the vector nonlinear Schrödinger equation, *Phys. Lett. A* **253**(5–6), 287–304 (1999).
- [7] M.J. Ablowitz, B. Prinari, and A.D. Trubatch, *Discrete and Continuous Nonlinear Schrödinger Systems* (Cambridge University Press, New York, 2004).
- [8] M.J. Ablowitz, G. Biondini, and B. Prinari, Inverse scattering transform for the integrable discrete nonlinear Schrödinger equation with nonvanishing boundary conditions, *Inverse Problems* **23**(4), 1711–1758 (2007).
- [9] V.E. Adler and V.V. Postnikov, On vector analogs of the modified Volterra lattice, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41**(45), 455203 (16 pages) (2008).

- [10] З.С. Агранович и В.А. Марченко, Восстановление потенциала по матрице рассеяния для системы дифференциальных уравнений, *ДАН СССР* **113**(5), 951–954 (1957).
- [11] З.С. Агранович и В.А. Марченко, Восстановление потенциала по матрице рассеяния для системы дифференциальных уравнений, *Зап. Мат. Отд. Физ.-Мат. Фак. ХГУ и Харьк. Мат. Общества* **26**(4), 3–103 (1960).
- [12] З.С. Агранович и В.А. Марченко, *Обратная Задача Теории Рассеяния* (Издательство ХГУ, Харьков, 1960);
Z.S. Agranovich and V.A. Marchenko, *The Inverse Problem of Scattering Theory* (Gordon and Breach, New York, 1964).
- [13] А.И. Ахиезер, И.А. Ахиезер, Р.В. Половин, А.Г. Ситенко, и К.Н. Степанов, *Электродинамика Плазмы* (Наука, Москва, 1974);
A.I. Akhiezer, I.A. Akhiezer, R.V. Polovin, A.G. Sitenko, and K.N. Stepanov, *Plasma Electrodynamics. Vol. 1, Linear Theory* (Pergamon Press, Oxford—New York, 1975).
- [14] J. Appel, Polarons, *Solid State Physics* **21**, 193–391 (1968).
- [15] А.С. Бакай и Ю.П. Степановский, *Адиабатические Инварианты* (Наукова Думка, Київ, 1981).
- [16] R. Beals and R.R. Coifman, Linear spectral problems, non-linear equations and the $\bar{\partial}$ -method, *Inverse Problems* **5**(2), 87–130 (1989).
- [17] С.М. Bender, Making sense of non-Hermitian Hamiltonians, *Rep. Prog. Phys.* **70**(6), 947–1018 (2007).
- [18] H. Berjamine, N. Favrie, B. Lombard, and G. Chiavassa, Nonlinear waves in solids with slow dynamics: an internal-variable model, *Proc. R. Soc. A* **473**(2201), 20170024 (18 pages) (2017).
- [19] H. Bhate, Discrete scattering theory, *J. Differential Equations.* **64**(3), 395–438 (1986).
- [20] G. Biondini and D. Kraus, Inverse scattering transform for the defocusing Manakov system with nonzero boundary conditions, *SIAM J. Math. Anal.* **47**(1), 706–757 (2015).

- [21] G. Biondini, D.K. Kraus, and B. Prinari, The three-component defocusing nonlinear Schrödinger equation with nonzero boundary conditions, *Commun. Math. Phys.* **348**(2), 475–533 (2016).
- [22] F. Bloch, Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern, *Z. Phys.* **52**(7–8), 555–600 (1929).
- [23] L. Bocquet, E. Charlaix, S. Ciliberto, and J. Crassous, Moisture-induced ageing in granular media and the kinetics of capillary condensation, *Nature* **396**(6713), 735–737 (1998).
- [24] Н.Н. Боголюбов и Ю.А. Митропольский, *Асимптотические Методы в Теории Нелинейных Колебаний* (Наука, Москва, 1974).
- [25] L.L. Bonilla and H.T. Grahn, Non-linear dynamics of semiconductor superlattices, *Rep. Prog. Phys.* **68**(3), 577–683 (2005).
- [26] L.S. Brizhik, B.M.A.G. Piette, and W.J. Zakrzewski, Donor-acceptor electron transport mediated by solitons, *Phys. Rev. E* **90**(5), 052915 (12 pages) (2014).
- [27] M. Bruschi and F Calogero, Integrable systems of quartic oscillators, *Phys. Lett. A* **273**(3), 173–182 (2000).
- [28] M. Bruschi, S.V Manakov, O. Ragnisco, and D. Levi, The nonabelian Toda lattice: Discrete analogue of the matrix Schrödinger spectral problem, *J. Math. Phys.* **21**(12), 2749–2753 (1980).
- [29] R.K. Bullough, N.M. Bogoliubov, A.V. Rybin, G.G. Varzugin, and J. Timonen, Solitons of q -deformed quantum lattices and the quantum soliton, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**(48), 10463–10474 (2001).
- [30] D. Cai, A.R. Bishop, N. Grønbech-Jensen, and M. Salerno, Electric-field induced nonlinear Bloch oscillations and dynamical localization, *Phys. Rev. Lett.* **74**(7), 1186–1189 (1995).
- [31] B. Capogrosso-Sansone and R.A. Guyer, Dynamic model of hysteretic elastic systems, *Phys. Rev. B* **66**(22), 224101 (12 pages) (2002).
- [32] K.M. Case and S.C. Chiu, The discrete version of the Marchenko equations in the inverse scattering problem, *J. Math. Phys.* **14**(11), 1643–1647 (1973).

- [33] P.J. Caudrey, The inverse problem for a general $N \times N$ spectral equation, *Physica D* **6**(1), 51–66 (1982).
- [34] P.J. Caudrey, Differential and discrete spectral problems and their inverses, *North-Holland Mathematics Studies* **97**, 221–232 (Elsevier, Amsterdam, 1984).
- [35] H. Cheraghchi, Nonlinear transport through ultra-narrow zigzag graphene nanoribbons: non-equilibrium charge and bond currents, *Phys. Scripta* **84**(1), 015702 (8 pages) (2011).
- [36] A.R. Chowdhury and G. Mahato, A Darboux-Bäcklund transformation associated with a discrete nonlinear Schrödinger equation, *Lett. Math. Phys.* **7**(4), 313–317 (1983).
- [37] P.L. Christiansen, A.V. Zolotaryuk, and A.V. Savin, Solitons in an isolated helix chain, *Phys. Rev. E* **56**(1), 877–888 (1997).
- [38] D.N. Christodoulides and R.I. Joseph, Discrete self-focusing in nonlinear arrays of coupled waveguides, *Opt. Lett.* **13**(9), 794–796 (1988).
- [39] V.A. Clark, B.R. Tittmann, and T.W. Spencer, Effect of volatiles on attenuation (Q^{-1}) and velocity in sedimentary rocks, *J. Geophys. Res. B* **85**(10), 5190–5198 (1980).
- [40] R.E. Collins, *Flow of Fluids through Porous Materials* (Reinhold Publishing Corporation, New York, 1961).
- [41] N.G.W. Cook and K. Hodgson, Some detailed stress-strain curves for rock, *J. Geophys. Res.* **70**(12), 2883–2888 (1965).
- [42] K. Daikoku and Y. Mizushima, New instability concept in avalanche diode oscillation, *Jap. J. Appl. Phys.* **13**(6), 989-994 (1974).
- [43] K. Daikoku, Y. Mizushima, and T. Tamama, Computer experiments on new lattice solitons propagating in Volterra's system, *Jap. J. Appl. Phys.* **14**(3), 367-376 (1975).
- [44] G. Darboux, Sur le problème de Pfaff, *Bull. Sci. Math. Astron. 2 série* **6**(1), 14–36 (1882).

- [45] G. Darboux, Sur le problème de Pfaff, *Bull. Sci. Math. Astron. 2 série* **6**(1), 49–68 (1882).
- [46] P.M. Das, G. Danda, A. Cupo, W.M. Parkin, L. Liang, N. Kharche, X. Ling, Sh. Huang, M.S. Dresselhaus, V. Meunier, and M. Drndić, Controlled sculpture of black phosphorus nanoribbons, *ACS Nano* **10**(6), 5687–5695 (2016).
- [47] А.С. Давыдов, *Теория Молекулярных Экситонов* (Наука, Москва, 1968);
A.S. Davydov, *Theory of Molecular Excitons* (Plenum Press, New York – London, 1971).
- [48] А.С. Давыдов, *Квантовая Механика* (Наука, Москва, 1973);
A.S. Davydov, *Quantum Mechanics* (Pergamon Press, Oxford – New York, 1976);
О.С. Давидов, *Квантова Механіка* (Академперіодика, Київ, 2012).
- [49] А.С. Давыдов, *Теория Твердого Тела* (Наука, Москва, 1976);
A.S. Davydov, *Théorie du Solide* (Mir, Moscou, 1980).
- [50] A.S. Davydov and N.I. Kislukha, Solitary excitons in one-dimensional molecular chains, *Phys. Stat. Solidi (b)* **59**(2), 465–470 (1973).
- [51] А.С. Давыдов и Н.И. Кислуха, Солитоны в одномерных молекулярных цепях, *Журн. Эксп. Теор. Физ.* **71**(9), 1090–1098 (1976);
A.S. Davydov and N.I. Kislukha, Solitons in one-dimensional molecular chains, *Sov. Phys.-JETP* **44**(3), 571–575 (1976).
- [52] О.С. Давидов та О.О. Єремко, Радіаційний час життя солітонів в молекулярних ланцюжках, *Укр. Фіз. Журн.* **22**(6), 881–892 (1977).
- [53] А.С. Давыдов, А.А. Еремко, и А.И. Сергиенко, Солитоны в α -спиральных белковых молекулах, *Укр. Физ. Журн.* **23**(6), 983–993 (1978).
- [54] А.С. Давыдов, *Солитоны в Молекулярных Системах* (Наукова Думка, Київ, 1984);
A.S. Davydov, *Solitons in Molecular Systems* (Kluwer Academic, Dordrecht, 1991).
- [55] P.P. Delsanto and M. Scalerandi, Modeling nonclassical nonlinearity, conditioning, and slow dynamics effects in mesoscopic elastic materials, *Phys. Rev.*

- B* **68**(6), 064107 (9 pages) (2003).
- [56] E.V. Doktorov and S.B. Leble, *A Dressing Method in Mathematical Physics* (Springer, Dordrecht, 2007).
- [57] F. Dreisow, A. Szameit, M. Heinrich, T. Pertsch, S. Nolte, and A. Tuüinnermann, Bloch-Zener oscillations in binary superlattices, *Phys. Rev. Lett.* **102**(7), 076802 (4 pages) (2009).
- [58] R. Driben, V.V. Konotop, T. Meier, and A.V. Yulin, Bloch oscillations sustained by nonlinearity, *Sci. Rep.* **7**, 3194 (8 pages) (2017).
- [59] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, и А.Ф. Фоменко, *Современная Геометрия. Методы и Приложения*. (Наука, Москва, 1986);
B.A. Dubrovin, A.F. Fomenko and S.P. Novikov, *Modern Geometry. Methods and Applications* (Springer-Verlag, Berlin, 1984).
- [60] F.A.L. Dullien, *Porous Media. Fluid Transport and Pore Structure* (Academic Press, New York, 1979).
- [61] M. Eliashvili, G.I. Japaridze, G. Tsitsishvili, and G. Tukhashvili, Edge states in 2D lattices with hopping anisotropy and Chebyshev polynomials, *J. Phys. Soc. Japan* **83**(4), 044706 (9 pages) (2014).
- [62] K.J. Erickson, A.L. Gibb, A. Sinitskii, M. Rousseas, N. Alem, J.M. Tour, and A.K. Zettl, Longitudinal splitting of boron nitride nanotubes for the facile synthesis of high quality boron nitride nanoribbons, *Nano Lett.* **11**(8), 3221–3226 (2011).
- [63] L. Esaki and R. Tsu, Superlattice and negative differential conductivity in semiconductors, *IBM J. Res. Dev.* **14**(1), 61–65 (1970).
- [64] М.А. Евграфов, *Аналитические Функции* (Наука, Москва, 1968).
- [65] N. Favrie, B. Lombard, and C. Payan, Fast and slow dynamics in a nonlinear elastic bar excited by longitudinal vibrations, *Wave Motion* **56**, 221–238 (2015).
- [66] H. Flaschka, On Toda lattice. II, *Progr. Theor. Phys.* **51**(3), 703–716 (1974).
- [67] I.L. Garanovich, S. Longhi, A.A. Sukhorukov, and Yu.S. Kivshar, Light propagation and localization in modulated photonic lattices and waveguides,

- Phys. Rep.* **518**(1–2), 1–79 (2012).
- [68] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, and R.M. Miura, Method for solving the Korteweg–de Vries equation, *Phys. Rev. Lett.* **19**(19), 1095–1097 (1967).
- [69] В.С. Герджиков и М.И. Иванов, Гамильтонова структура многокомпонентных разностных нелинейных уравнений Шредингера, *Теор. Мат. Физ.* **52**(1), 89–104 (1982);
V.S. Gerdzhikov and M.I. Ivanov, Hamiltonian structure of multicomponent nonlinear Schrödinger equations in difference form, *Theor. Math. Phys.* **52**(1), 676–685 (1982).
- [70] V.S. Gerdzhikov, M.I. Ivanov, and P.P. Kulish, Expansions over the “squared” solutions and difference evolution equations, *J. Math. Phys.* **25**(1), 25–34 (1984).
- [71] R.B. Gordon and L.A. Davis, Velocity and attenuation of seismic waves in imperfectly elastic rock, *J. Geophys. Res.* **73**(12), 3917–3935 (1968).
- [72] C.H. Gu, H.S. Hu, and Z.X. Zhou, *Darboux Transformations in Integrable Systems. Theory and their Applications to Geometry* (Kluwer Academic Publishers, Boston – Dordrecht – London, 2005).
- [73] R.A. Guyer, K.R. McCall, G.N. Boitnott, L.B. Hilbert Jr., and T.J. Plona, Quantitative implementation of Preisach–Mayergoyz space to find static and dynamic elastic moduli in rock, *J. Geophys. Res. B* **102**(3), 5281–5293 (1997).
- [74] R.A. Guyer, K.R. McCall, and K. Van Den Abeele, Slow elastic dynamics in a resonant bar of rock, *Geophys. Res. Lett.* **25**(10), 1585–1588 (1998).
- [75] R.A. Guyer and P.A. Johnson, Nonlinear mesoscopic elasticity: Evidence for a new class of materials, *Phys. Today* **52**(4), 30–36 (1999).
- [76] R.A. Guyer, J.A. Ten Cate, and P.A. Johnson, Hysteresis and the dynamic elasticity of consolidated granular materials, *Phys. Rev. Lett.* **82**(16), 3280–3283 (1999).
- [77] Y. He, X. Zhu, D. Mihalache, J. Liu and Zh. Chen, Lattice solitons in PT -symmetric mixed linear-nonlinear optical lattices, *Phys. Rev. A* **85**(1), 013831 (6 pages) (2012).

- [78] H.L.F. Hemholtz, *On the Sensations of Tone as a Physiological Basis for the Theory of Music* (Dover Publications, New York, 1954).
- [79] R. Hirota and K. Suzuki, Theoretical and experimental studies of lattice solitons in nonlinear lumped networks, *Proc. of IEEE* **61**(10), 1483–1491 (1973).
- [80] R. Hirota, Exact N -soliton solution of nonlinear lumped self-dual network equations, *J. Phys. Soc. Japan* **35**(1), 289–294 (1973).
- [81] R. Hirota and J. Satsuma, N -soliton solution of nonlinear network equations describing a Volterra system, *J. Phys. Soc. Japan* **40**(3), 891–900 (1976).
- [82] I.Ch.-Y. Hou, Yu. Hu, A. Narita, and K. Müllen, Diels–Alder polymerization: a versatile synthetic method toward functional polyphenylenes, ladder polymers and graphene nanoribbons, *Polymer Journal* **50**(1), 3–20 (2018).
- [83] L. Jiao, L. Zhang, X. Wang, G. Diankov, and H. Dai, Narrow graphene nanoribbons from carbon nanotubes, *Nature* **458**(7240), 877–880 (2009).
- [84] P.A. Johnson and P.N.J. Rasolofosaon, Manifestation of nonlinear elasticity in rock: convincing evidence over large frequency and strain intervals from laboratory studies, *Nonlin. Processes Geophys.* **3**(2), 77–88 (1996).
- [85] P.A. Johnson, B. Zinszner, and P.N.J. Rasolofosaon, Resonance and elastic nonlinear phenomena in rock, *J. Geophys. Res. B* **101**(5), 11553–11564 (1996).
- [86] A. Kadish, P.A. Johnson, and B. Zinszner, Evaluating hysteresis in earth materials under dynamic resonance, *J. Geophys. Res. B* **101**(11), 25139–25147 (1996).
- [87] F. Kako and N. Mugibayashi, Complete integrability of general nonlinear differential-difference equations solvable by the inverse method. II, *Progr. Theor. Phys.* **61**(3), 776–790 (1979).
- [88] A. Kaselow and S.A. Shapiro, Stress sensitivity of elastic moduli and electrical resistivity in porous rocks, *J. Geophys. Eng.* **1**(1), 1–11 (2004).
- [89] Ю.С. Кившарь, А.М. Косевич, и О.А. Чубыкало, Рассеяние на точечном дефекте связанных квазичастиц как солитонная проблема (одномерный случай), *Журн. Эксп. Теор. Физ.* **93**(3), 968–977 (1987);

- Yu.S. Kivshar, A.M. Kosevich, and O.A. Chubykalo, Point-defect scattering of bound quasiparticles as a soliton problem (one-dimensional case), *Sov. Phys.-JETP* **66**(3), 545–550 (1987).
- [90] Yu.S. Kivshar, Zhang Fei, and L. Vázquez, Resonant soliton-impurity interactions, *Phys. Rev. Lett.* **67**(10), 1177–1180 (1991).
- [91] Yu.S. Kivshar and B. Luther-Davies, Dark optical solitons: Physics and applications, *Phys. Rep.* **298**(2–3), 81–197 (1998).
- [92] K. Konno, H. Sanuki, and Y.H. Ichikawa, Conservation laws of nonlinear-evolution equations, *Progr. Theor. Phys.* **52**(3), 886–889 (1974).
- [93] V.V. Konotop, O.A. Chubykalo, and L. Vázquez, Dynamics and interaction of solitons on an integrable inhomogeneous lattice, *Phys. Rev. E* **48**(1), 563–568 (1993).
- [94] V.V. Konotop, D. Cai, M. Salerno, A.R. Bishop, and N. Grønbech-Jensen, Interaction of a soliton with point impurities in an inhomogeneous, discrete nonlinear Schrödinger system, *Phys. Rev. E* **53**(6), 6476–6485 (1996).
- [95] G.A. Korn and T.M. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review* (Mc Graw-Hill, New York, 1961);
Г. Корн и Т. Корн, *Справочник по Математике для Научных Работников и Инженеров. Определения, Теоремы, Формулы* (Наука, Москва, 1968).
- [96] D.J. Korteweg and G. de Vries, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *Philos. Mag. Ser. 5*, **39**(240), 422–443 (1895).
- [97] А.М. Косевич, *Основы Механики Кристаллической Решетки* (Наука, Москва, 1972).
- [98] А.М. Косевич, *Физическая Механика Реальных Кристаллов* (Наукова Думка, Київ, 1981).
- [99] D.V. Kosynkin, A.L. Higginbotham, A. Sinitskii, J.R. Lomeda, A. Dimiev, V.K. Price, and J.M. Tour, Longitudinal unzipping of carbon nanotubes to form graphene nanoribbons, *Nature* **458**(7240), 872–876 (2009).

- [100] J.B. Krieger and G.J. Iafrate, Time evolution of Bloch electrons in a homogeneous electric field, *Phys. Rev. B* **33**(8), 5494-5500 (1986).
- [101] Y. Kubota and T. Odagaki, Propagation of solitons in the Toda lattice with an impure segment, *Phys. Rev. E* **61**(3), 3133–3138 (2000).
- [102] P.P. Kulish, Quantum difference nonlinear Schrödinger equation, *Lett. Math. Phys.* **5**(3), 191–197 (1981).
- [103] H. Kurz, H.G. Roskos, T. Dekorsy, and K. Köhler, Bloch oscillations, *Phil. Trans. R. Soc. London A* **354**(1717), 2295–2310 (1996).
- [104] V. Kuznetsov and E. Sklyanin, Bäcklund transformation for the BC-type Toda lattice, *SIGMA* **3**, 080 (17 pages) (2007).
- [105] М.А. Лаврентьев и Б.В. Шабат, *Методы Теории Функций Комплексного Переменного* (Наука, Москва, 1973).
- [106] K.Ch. Lau, R. Orland, and R. Pandey, Structure and stability of Mg-intercalated boron nanotubes and crystalline bundles, *J. Phys. Condens. Matter.* **21**(4), 045304 (7 pages) (2009).
- [107] P.D. Lax, Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, *Comm. Pure and Appl. Math.* **21**(5), 467–490 (1968).
- [108] С.Б. Лебле и М.А. Салль, Преобразование Дарбу для дискретного аналога уравнений Силина-Тихончука, *Доклады АН СССР* **284**(1), 110–114 (1985).
- [109] S.B. Leble, *Nonlinear Waves and Waveguides with Stratification* (Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg, 1991).
- [110] M. Lebugle, M. Gräfe, R. Heilmann, A. Perez-Leija, S. Nolte, and A. Szameit, Experimental observation of N00N state Bloch oscillations, *Nature Commun.* **6**, 8273 (7 pages) (2015).
- [111] F. Lederer, G.I. Stegeman, D.N. Christodoulides, G. Assanto, M. Segev, and Y. Silberberg, Discrete solitons in optics, *Phys. Rep.* **463**(1–3), 1–126 (2008).
- [112] T.D. Lee, F.E. Low, and D. Pines, The motion of slow electrons in a polar crystal, *Phys. Rev.* **90**(2), 297–302 (1953).

- [113] R.K.F. Lee, B.J. Cox, and J.M. Hill, An exact polyhedral model for boron nanotubes, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42**(6), 065204 (23 pages) (2009).
- [114] G. Lenz, I. Talanina, and C.M. de Sterke, Bloch oscillations in an array of curved optical waveguides, *Phys. Rev. Lett.* **83**(5), 963–966 (1999).
- [115] K. Leo, Interband optical investigation of Bloch oscillations in semiconductor superlattices, *Semicond. Sci. Technol.* **13**(3), 249–263 (1998).
- [116] M.P. López-Sancho and L. Brey, Charged topological solitons in zigzag graphene nanoribbons, *2D Materials* **5**(1), 015026 (6 pages) (2018).
- [117] F. Löser, M. Sudzius, B. Rosam, V. G. Lyssenko, Y. Kosevich, M. M. Dignam, K. Köhler, and K. Leo, Generation and manipulation of Bloch wave packets, *Physica E* **7**(1–2), 285–288 (2000).
- [118] K.G. Makris, R. El-Ganainy, D.N. Christodoulides and Z.N. Musslimani, Beam dynamics in PT symmetric optical lattices, *Phys. Rev. Lett.* **100**(10), 103904 (4 pages) (2008).
- [119] С.В. Манаков, К теории двумерной стационарной самофокусировки электромагнитных волн, *Журн. Эксп. Теор. Физ.* **65**(2), 505–516 (1973); S.V. Manakov, On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves, *Sov. Phys.–JETP* **38**(2), 248–253 (1974).
- [120] С.В. Манаков, О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах, *Журн. Эксп. Теор. Физ.* **67**(2), 543–555 (1974); S.V. Manakov, Complete integrability and stochastization of discrete dynamical systems, *Sov. Phys.–JETP* **40**(2), 269–274 (1975).
- [121] В.А. Марченко, Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеянных волн, *ДАН СССР* **104**(5), 695–698 (1955).
- [122] В.А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их Приложения* (Наукова Думка, Київ, 1977).
- [123] P. Marquié, J.M. Bilbault, and M. Remoissenet, Nonlinear Schrödinger models and modulational instability in real electrical lattices, *Physica D* **87**(1–4), 371–374 (1995).

- [124] B.M. Maschke, A.J. Van Der Schaft, and P.C. Breedveld, An intrinsic Hamiltonian formulation of network dynamics: Non-standard Poisson structures and gyrators, *J. Franklin Inst.* **329**(5), 923–966 (1992).
- [125] V.B. Matveev, Darboux transformation and the explicit solutions of differential-difference and difference-difference evolution equations. I, *Lett. Math. Phys.* **3**(3), 217–222 (1979).
- [126] V.B. Matveev and M.A. Salle, Differential-difference evolution equations. II (Darboux transformation for the Toda lattice), *Lett. Math. Phys.* **3**(5), 425–429 (1979).
- [127] V.B. Matveev and M.A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons* (Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg, 1991).
- [128] G. Mie, Zur kinetischen Theorie der einatomigen Körper, *Ann. Phys.* **11**(8), 657–697 (1903).
- [129] A.V. Mikhailov, The reduction problem and the inverse scattering method, *Physica D* **3**(1–2), 73–117 (1981).
- [130] S.F. Mingaleev, Yu.B. Gaididei, and F.G. Mertens, Solitons in anharmonic chains with ultra-long-range interatomic interactions, *Phys. Rev. E* **61**(2), R1044–R1047 (2000).
- [131] S.F. Mingaleev, Yu.B. Gaididei, E. Majerníková, and S. Shpyrko, Kinks in the discrete sine-Gordon model with Kac-Baker long-range interactions, *Phys. Rev. E* **61**(4), 4454–4461 (2000).
- [132] F.R.N. Nabarro, Dislocations in a simple cubic lattice, *Proc. Phys. Soc.* **59**(2), 256–272 (1947).
- [133] F.R.N. Nabarro, *Theory of Crystal Dislocations* (Dover Publications, New York, 1987).
- [134] A. Narita, X. Feng, Y. Hernandez, S.A. Jensen, M. Bonn, H. Yang, I.A. Verzhbitskiy, C. Casiraghi, M.R. Hansen, A.H.R. Koch, G. Fytas, O. Ivasenko, B. Li, K.S. Mali, T. Balandina, S. Mahesh, S. De Feyter, and K. Müllen, Synthesis of structurally well-defined and liquid-phase-processable graphene nanoribbons, *Nature Chemistry* **6**(2), 126–132 (2014).

- [135] A.H. Nayfeh, *Perturbation Methods* (A Wiley-Interscience Publication, New York – London, 1973);
А.Х. Найфэ, *Методы Возмущений* (Мир, Москва, 1976).
- [136] В.Ф. Нестеренко, Распространение нелинейных импульсов сжатия в зернистых средах, *Прикл. Мех. Техн. Физ.* (5), 136–148 (1983);
V.F. Nesterenko, Propagation of nonlinear compression pulses in granular media, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **24**(5), 733-743 (1983).
- [137] V.F. Nesterenko, *Dynamics of Heterogeneous Materials* (Springer-Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, 2001).
- [138] G. Neugebauer and R. Meinel, General N -soliton solution of the AKNS class on arbitrary background, *Phys. Lett. A* **100**(9), 467–470 (1984).
- [139] A.C. Newell, *Solitons in Mathematics and Physics* (SIAM Press, Philadelphia, 1985).
- [140] D.T. Nichols and H.G. Winful, The effect of nonlinear gain on the stability of evanescently coupled semiconductor laser arrays, *J. Appl. Phys.* **73**(1), 459–461 (1993).
- [141] M. Nishida, T. Kanayama, T. Nakajo, T. Fujii, and N. Hatakenaka, Bound fluxon pair in one-dimensional SQUID array, *Physica C* **470**(19), 832-834 (2010).
- [142] M. Nobili and M. Scalerandi, Temperature effects on the elastic properties of hysteretic elastic media: Modeling and simulations, *Phys. Rev. B* **69**(10), 104105 (12 pages) (2004).
- [143] A.S. Nowick and B.S. Berry, *Anelastic Relaxation in Crystalline Solids* (Academic Press, New York and London, 1972).
- [144] Я.Г. Пановко, *Введение в Теорию Механических Колебаний* (Наука, Москва, 1991).
- [145] R. Peierls, Zur theorie des diamagnetismus von leitungselektronen, *Z. Phys.* **80**(11–12), 763–791 (1933).
- [146] R. Peierls, The size of a dislocation, *Proc. Phys. Soc.* **52**(1), 34–37 (1940).

- [147] F.B. Pelap, J.H. Kamga, S.B. Yamgoue, S.M. Ngounou, and A. Fomethe, Elliptical waves transmission in a 1D dispersive nonlinear electrical lattice, *Chin. J. Phys.* **53**(4), 080701 (16 pages) (2015).
- [148] T. Pertsch, P. Dannberg, W. Elflein, A. Bräuer, and F. Lederer, Optical Bloch oscillations in temperature tuned waveguide arrays, *Phys. Rev. Lett.* **83**(23), 4752–4755 (1999).
- [149] Л.В. Постников, В.И. Королев, Т.М. Таранович, В.А. Мельникова, и С.Я. Вышкинд, *Сборник Задач по Теории Колебаний* (Наука, Москва, 1978).
- [150] Ю.Н. Работнов, *Элементы Наследственной Механики Твердых Тел* (Наука, Москва, 1977).
- [151] Ю.Н. Работнов, *Механика Деформируемого Твердого Тела* (Наука, Москва, 1979).
- [152] M. Remoissenet, *Waves Called Solitons. Concepts and Experiments* (Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg, 1999).
- [153] P. Robrish, J. Xu, S. Kobayashi, P.G. Savvidis, B. Kolasa, G. Lee, D. Mars, and S.J. Allen, Loss and gain in Bloch oscillating super-superlattices: THz Stark ladder spectroscopy, *Physica E* **32**(1–2), 325–328 (2006).
- [154] H.G. Roskos, C. Waschke, K. Victor, K. Köhler, and H. Kurz, Bloch oscillations in semiconductor superlattices, *Jpn. J. Appl. Phys.* **34**(2B), 1370–1375 (1995).
- [155] A. Rybin, J. Timonen, G. Varzugin, and R.K. Bullough, q -deformed solitons and quantum solitons of the Maxwell-Bloch lattice, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**(1), 157–164 (2001).
- [156] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).
- [157] K. Sasaki, R. Saito, M.S. Dresselhaus, K. Wakabayashi, and T. Enoki, Soliton trap in strained graphene nanoribbons, *New J. Phys.* **12**(10), 103015 (12 pages) (2010).

- [158] P.G. Savvidis, B. Kolasa, G. Lee, and S.J. Allen, Resonant crossover of terahertz loss to the gain of a Bloch oscillating InAs/AlSb superlattice, *Phys. Rev. Lett.* **92**(19), 196802 (4 pages) (2004).
- [159] S. Saxena and T.A. Tyson, Insights on the atomic and electronic structure of boron nanoribbons, *Phys. Rev. Lett.* **104**(24), 245502 (4 pages) (2010).
- [160] M. Scalerandi, P.P. Delsanto, and P.A. Johnson, Stress induced conditioning and thermal relaxation in the simulation of quasi-static compression experiments, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **36**(3), 288–293 (2003).
- [161] R. Scharf and A.R. Bishop, Properties of the nonlinear Schrödinger equation on a lattice, *Phys. Rev. A* **61**(12), 6535–6544 (1991).
- [162] H.J. Schnitzer, F.G. Mertens, and A.R. Bishop, A collective-variable theory for nonlinear coherent excitations in classical Hamiltonian systems, *Physica D* **141**(3–4), 261–280 (2000).
- [163] A.C. Scott, Dynamics of Davydov solitons, *Phys. Rev. A* **26**(1), 578–595 (1982).
- [164] S. Sen, J. Hong, J. Bang, E. Avalos, and R. Doney, Solitary waves in the granular chain, *Phys. Rep.* **462**(2), 21–66 (2008).
- [165] В.П. Силин и В.Т. Тихончук, Ленгмюровская турбулентность и черенковский нагрев электронов в пространственно неоднородной плазме, *Журн. Эксп. Теор. Физ.* **81**(6), 2039–2051 (1981);
V.P. Silin and V.T. Tikhonchuk, Parametric turbulence and Cherenkov heating of electrons in a spatially inhomogeneous plasma, *Sov. Phys.–JETP* **54**(6), 1075–1082 (1981).
- [166] E. Smith and J.A. Ten Cate, Sensitive determination of nonlinear properties of Berea sandstone at low strains, *Geophys. Res. Lett.* **27**(13), 1985–1988 (2000).
- [167] V.N. Sokolov and G.J. Iafrate, Theory of relaxation for spontaneous emission of Bloch oscillation radiation, *Semicond. Phys. Quant. Electr. Optoelectr.* **17**(2), 109–129 (2014).
- [168] I.O. Starodub and Ya. Zolotaryuk, Embedded soliton dynamics in the asymmetric array of Josephson junctions, *Low Temperature Phys.* **43**(6),

828–834 (2017).

- [169] G.G. Stokes, On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* **8**(3), 287–319 (1849).
- [170] W. Sutherland, A kinetic theory of solids, with an experimental introduction, *Philosophical Magazine Series 5* **32**(194), 31–43 (1891).
- [171] W. Sutherland, A kinetic theory of solids, with an experimental introduction, *Philosophical Magazine Series 5* **32**(195), 215–225 (1891).
- [172] W. Sutherland, A kinetic theory of solids, with an experimental introduction, *Philosophical Magazine Series 5*, **32**(199), 524–553 (1891).
- [173] Л.А. Тахтаджян и Л.Д. Фаддеев, *Гамильтонов Подход в Теории Солитонов* (Наука, Москва, 1986);
L.D. Faddeev and L.A. Takhtajan, *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons* (Springer-Verlag, Berlin, 1987).
- [174] Y. Tang, J. Cao, X. Liu, and Y. Sun, Symplectic methods for the Ablowitz–Ladik discrete nonlinear Schrödinger equation, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**(10), 2425–2437 (2007).
- [175] J.A. Ten Cate and T.J. Shankland, Slow dynamics in the nonlinear elastic response of Berea sandstone, *Geophys. Res. Lett.* **23**(21), 3019–3022 (1996).
- [176] J.A. Ten Cate and T.J. Shankland, Slow dynamics and nonlinear response at low strains in Berea sandstone, in *Proceedings of the 16th International Congress on Acoustics and 135th Meeting of the Acoustical Society of America*, P.A. Kuhl and L.A. Crum, Eds., American Institute of Physics, New York, **3**, 1565–1566 (1998).
- [177] J.A. Ten Cate, E. Smith, and R.A. Guyer, Universal slow dynamics in granular solids, *Phys. Rev. Lett.* **85**(5), 1020–1023 (2000).
- [178] J.A. Ten Cate, J. Duran, and T.J. Shankland, Nonlinearity and slow dynamics in rocks: Response to changes of temperature and humidity, in *Proceedings of the 16th International Symposium on Nonlinear Acoustics*, O.V. Rudenko and O.A. Sapozhnikov, Eds., Faculty of Physics, MSU, Moscow, **2**, 767–770 (2002).

- [179] J.-F. Thovert, F. Yuosefian, P. Spanne, C.G. Jacquin, and P.M. Adler, Grain reconstruction of porous media: Application to a low-porosity Fontainebleau sandstone, *Phys. Rev. E* **63**(6), 061307 (17 pages) (2001).
- [180] B.R. Tittmann, V.A. Clark, J.M. Richardson, and T.W. Spencer, Possible mechanism for seismic attenuation in rocks containing small amounts of volatiles, *J. Geophys. Res. B* **85**(10), 5199–5208 (1980).
- [181] M. Toda, Vibration of a chain with nonlinear interaction, *J. Phys. Soc. Japan* **22**(2), 431–436 (1967).
- [182] M. Toda, Wave propagation in anharmonic lattices, *J. Phys. Soc. Japan* **23**(3), 501–506 (1967).
- [183] M. Toda, Studies of a non-linear lattice, *Phys. Rep.* **18**(1), 1–123 (1975).
- [184] M. Toda, *Theory of Nonlinear Lattices* (Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1981);
M. Toda, *Теория Нелинейных Решеток* (Москва, Мир, 1984).
- [185] M. Toda and K. Sogo, Discovery of lattice soliton, *J. Phys. A: Math. Theor.* **51**(6), 060201 (7 pages) (2018).
- [186] G.F. Torres del Castillo and M.P. Velázquez Quesada, Symplectic structures and dynamical symmetry groups, *Rev. Mex. de Fís.* **50**(6), 608–613 (2004).
- [187] T. Tsuchida, H. Ujino, and M. Wadati, Integrable semi-discretization of the coupled modified KdV equations, *J. Math. Phys.* **39**(9), 4785–4813 (1998).
- [188] T. Tsuchida, H. Ujino, and M. Wadati, Integrable semi-discretization of the coupled nonlinear Schrödinger equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32**(11), 2239–2262 (1999).
- [189] T. Tsuchida, Integrable discretizations of derivative nonlinear Schrödinger equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**(36), 7827–7847 (2002).
- [190] G.-Z. Tu, A trace identity and its applications to the theory of discrete integrable systems, *J. Phys. A: Math. Gen.* **23**(17), 3903–3922 (1990).
- [191] А.А. Вахненко и Ю.Б. Гайдидей, О характере движения солитонов в дискретных молекулярных цепях, *Теор. Мат. Физ.* **68**(3), 350–359 (1986);
А.А. Vakhnenko and Yu.B. Gaididei, On the motion of solitons in discrete

- molecular chains, *Theor. Math. Phys.* **68**(3), 873–880 (1986).
- [192] O.O. Vakhnenko, Нова повністю інтегровна дискретизація нелінійного рівняння Шрьодінгера, *Укр. Фіз. Журн.* **40**(1), 118–122 (1995).
- [193] O.O. Vakhnenko and V.O. Vakhnenko, Physically corrected Ablowitz–Ladik model and its application to the Peierls–Nabarro problem, *Phys. Lett. A* **196**(5–6), 307–312 (1995).
- [194] O.O. Vakhnenko, Nonlinear beating excitations on ladder lattice, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32**(30), 5735–5748 (1999).
- [195] O.O. Vakhnenko, Nonlinear model of intramolecular excitations on a multileg ladder lattice, *Phys. Rev. E* **60**(3), R2492–R2495 (1999).
- [196] O.O. Vakhnenko and M.J. Velgakis, Transverse and longitudinal dynamics of nonlinear intramolecular excitations on multileg ladder lattices, *Phys. Rev. E* **61**(6), 7110–7120 (2000).
- [197] O.O. Vakhnenko and M.J. Velgakis, Slalom soliton dynamics on a ladder lattice with zig-zag distributed impurities, *Phys. Lett. A* **278**(1–2), 59–67 (2000).
- [198] O.O. Vakhnenko and M.J. Velgakis, Multimode soliton dynamics in perturbed ladder lattices, *Phys. Rev. E* **63**(1), 016612 (11 pages) (2001).
- [199] O.O. Vakhnenko, Solitons on a zigzag-runged ladder lattice, *Phys. Rev. E* **64**(6), 067601 (4 pages) (2001).
- [200] O.O. Vakhnenko, Solitons in parametrically driven discrete nonlinear Schrödinger systems with the exploding range of intersite interactions, *J. Math. Phys.* **43**(5), 2587–2605 (2002).
- [201] O.O. Vakhnenko, Three component nonlinear dynamical system generated by the new third-order discrete spectral problem, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**(20), 5405–5430 (2003).
- [202] O.O. Vakhnenko, A discrete nonlinear model of three coupled dynamical fields integrable by the Caudrey method, *Ukr. J. Phys.* **48**(7), 653–666 (2003).
- [203] O.O. Vakhnenko. Dynamics of multicomponent solitons in perturbed ladder lattices. *NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry* **153**,

503–510 (2004).

- [204] O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko, T.J. Shankland, and J.A. Ten Cate, Strain-induced kinetics of intergrain defects as the mechanism of slow dynamics in the nonlinear resonant response of humid sandstone bars. *Phys. Rev. E* **70**, 015602(R) (4 pages) (2004).
- [205] O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko, and T.J. Shankland, Soft-ratchet modeling of end-point memory in the nonlinear resonant response of sedimentary rocks, *Phys. Rev. B* **71**(17), 174103 (14 pages) (2005).
- [206] O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko, T.J. Shankland, and J.A. TenCate, Soft-ratchet modeling of slow dynamics in the nonlinear resonant response of sedimentary rocks, *AIP Conference Proceedings* **838**(1), 120–123 (2006).
- [207] V.O. Vakhnenko, O.O. Vakhnenko, T.J. Shankland, and J.A. TenCate, Dynamical realization of end-point memory in consolidated materials, *AIP Conference Proceedings* **838**(1), 124–127 (2006).
- [208] O.O. Vakhnenko, Integrable nonlinear ladder system with background-controlled intersite resonant coupling, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**(35), 11013–11027 (2006).
- [209] O.O. Vakhnenko, Enigma of probability amplitudes in Hamiltonian formulation of integrable semidiscrete nonlinear Schrödinger systems, *Phys. Rev. E* **77**(2), 026604 (9 pages) (2008).
- [210] V.O. Vakhnenko, O.O. Vakhnenko, J.A. TenCate, and T.J. Shankland, The dynamics of a sandstone bar under resonance loading, *Proceedings of the XX Session of the Russian Acoustical Society (Moscow, October 27-31, 2008)* 206–209 (2008).
- [211] V. Vakhnenko, O. Vakhnenko, J. TenCate, and T. Shankland, Modeling of the nonlinear resonant response in sedimentary rocks, *Геофизический журнал* **32**(4), 195–197 (2010).
- [212] O.O. Vakhnenko, Inverse scattering transform for the nonlinear Schrödinger system on a zigzag-runged ladder lattice, *J. Math. Phys.* **51**(10), 103518 (45 pages) (2010).

- [213] O.O. Vakhnenko, Semidiscrete integrable nonlinear systems generated by the new fourth-order spectral operator. Local conservation laws, *J. Nonlin. Math. Phys.* **18**(3), 401–414 (2011).
- [214] O.O. Vakhnenko, Semidiscrete integrable nonlinear systems generated by the new fourth-order spectral operator. Systems of obverse type, *J. Nonlin. Math. Phys.* **18**(3), 415–425 (2011).
- [215] O.O. Vakhnenko, New integrable nonlinear lattice systems with two adjustable coupling parameters, *Nonlin. Engineering* **2**(3–4), 97–102 (2013).
- [216] O.O. Vakhnenko, Four-wave semidiscrete nonlinear integrable system with PT -symmetry, *J. Nonlin. Math. Phys.* **20**(4), 606–622 (2013).
- [217] O.O. Vakhnenko. Semidiscrete integrable systems inspired by the Davydov–Kyslukha model, *Ukr. J. Phys.* **58**(11), 1092–1107 (2013).
- [218] O.O. Vakhnenko and V.O. Vakhnenko, Low-amplitude instability as a premise for the spontaneous symmetry breaking in the new integrable semidiscrete nonlinear system, *Chaos, Solitons and Fractals* **60**, 1–10 (2014).
- [219] O.O. Vakhnenko and V.O. Vakhnenko, Linear analysis of extended integrable nonlinear ladder network system, *Ukr. J. Phys.* **59**(6), 640–649 (2014).
- [220] O.O. Vakhnenko, Integrable nonlinear Schrödinger system on a triangular-lattice ribbon, *J. Phys. Soc. Japan* **84**(1), 014003 (12 pages) (2015).
- [221] O.O. Vakhnenko, Nonlinear integrable model of Frenkel-like excitations on a ribbon of triangular lattice, *J. Math. Phys.* **56**(3), 033505 (21 pages) (2015).
- [222] В.О. Вахненко та О.О. Вахненко, *Хвильова Динаміка Структурованих Середовищ* (Наукова думка, Київ, 2016).
- [223] O.O. Vakhnenko, Coupling-governed metamorphoses of the integrable nonlinear Schrödinger system on a triangular-lattice ribbon, *Phys. Lett. A* **380**(24), 2069–2074 (2016).
- [224] O.O. Vakhnenko, Symmetry-broken canonizations of the semi-discrete integrable nonlinear Schrödinger system with background-controlled intersite coupling, *J. Math. Phys.* **57**(11), 113504 (16 pages) (2016).

- [225] O.O. Vakhnenko, Asymmetric canonicalization of the integrable nonlinear Schrödinger system on a triangular-lattice ribbon, *Appl. Math. Lett.* **64**, 81–86 (2017).
- [226] O.O. Vakhnenko, Distinctive features of the integrable nonlinear Schrödinger system on a ribbon of triangular lattice, *Ukr. J. Phys.* **62**(3), 271–282 (2017).
- [227] O.O. Vakhnenko. Semi-discrete integrable nonlinear Schrödinger system with background-controlled inter-site resonant coupling, *J. Nonlin. Math. Phys.* **24**(2), 250–302 (2017).
- [228] O.O. Вахненко. Напівдискретна інтегровна нелінійна Шрьодінгєрова система з фоново-керованою міжвузловою резонансною взаємодією, *Укр. Фіз. Журн. Огляди* **12**(1), 3–40 (2017).
- [229] O.O. Vakhnenko. Semidiscrete integrable nonlinear Schrödinger system with background-controlled intersite resonant coupling. Short summary of key properties, *Ukr. J. Phys.* **63**(3), 220–225 (2018).
- [230] O.O. Vakhnenko. Six-component semi-discrete integrable nonlinear Schrödinger system, *Lett. Math. Phys.* **108**(8), 1807–1824 (2018).
- [231] O.O. Vakhnenko. Integrable nonlinear Schrödinger system on a lattice with three structural elements in the unit cell, *J. Math. Phys.* **59**(5), 053504 (25 pages) (2018).
- [232] O.O. Vakhnenko. Nonlinear integrable system of coherently coupled excitations on an intercalated ladder lattice, *Eur. Phys. J. Plus* **133**(6), 243 (19 pages) (2018).
- [233] O.O. Vakhnenko. Effect of lattice ribbonization via the background-controlled inter-site resonant interactions in nonlinear integrable systems, *AIP Conference Proceedings* **2037**(1), 020027 (11 pages) (2018).
- [234] O.O. Vakhnenko. Four-component integrable systems inspired by the Toda and the Davydov–Kyslukha models, *Wave Motion* **88**, 1–12 (2019).
- [235] V.O. Vakhnenko and E.J. Parkes, The singular solutions of a nonlinear evolution equation taking continuous part of the spectral data into account in inverse scattering method, *Chaos, Solitons and Fractals* **45**(6), 846–852 (2012).

- [236] K.E.-A. Van Den Abeele, J. Carmeliet, P.A. Johnson, and B. Zinszner, Influence of water saturation on the nonlinear elastic mesoscopic response in Earth materials and the implications to the mechanism of nonlinearity, *J. Geophys. Res. B* **107**(6), 2121 (ECV4-1–ECV4-11) (2002).
- [237] Н.В. Василенко, *Теория Колебаний* (Вища Школа, Київ, 1992).
- [238] V.E. Vekslerchik and V.V. Konotop, Discrete nonlinear Schrödinger equation under non-vanishing boundary conditions, *Inverse Problems* **8**(6), 889–909 (1992).
- [239] M. Wadati, H. Sanuki and K. Konno, Relationships among inverse method, Bäcklund transformation and an infinite number of conservation laws, *Progr. Theor. Phys.* **53**(2), 419–436 (1975).
- [240] C. Waschke, H.G. Roskos, R. Schwedler, K. Leo, H. Kurz, and K. Köhler, Coherent submillimeter-wave emission from Bloch oscillations in a semiconductor suprlattice, *Phys. Rev. Lett.* **70**(21), 3319–3322 (1993).
- [241] X.-Y. Wen, New hierarchies of integrable lattice equations and associated properties: Darboux transformation, conservation laws and integrable coupling, *Rep. Math. Phys.* **67**(2), 259–277 (1975).
- [242] X.-Y. Wen, D.-S. Wang, and X.-H. Meng, N -soliton solutions and inelastic interaction for a discretized second order in time nonlinear Schrödinger equation, *Rep. Math. Phys.* **72**(3), 349–367 (2013).
- [243] G.B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves* (A Wiley-Interscience Publication, New York – London, 1974);
Дж. Уизем, *Линейные и Нелинейные Волны* (Мир, Москва, 1977).
- [244] C. Willis, M. El-Batanouny, and P. Stancioff, Sine-Gordon kinks on a discrete lattice. I. Hamiltonian formalism, *Phys. Rev. B* **33**(3), 1904–1911 (1986).
- [245] X.-X. Xu, Darboux transformation of a coupled lattice soliton equation, *Phys. Lett. A* **362**(2–3), 205–211 (2007).
- [246] Y. Yan and P.J. Caudrey, A discrete spectral transform in 2+1 dimensions, *Inverse Problems* **6**(1), 153–163 (1990).

- [247] В.Е. Захаров и А.Б. Шабат, Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах, *Журн. Эксп. Теор. Физ.* **61**(1), 118–134 (1971);
V.E. Zakharov and A.B. Shabat, Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media, *Sov. Phys.–JETP* **34**(1), 62–69 (1972).
- [248] В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, и Л.П. Питаевский, *Теория Солитонов: Метод Обратной Задачи* (Наука, Москва, 1980);
V.E. Zakharov, S.V. Manakov, S.P. Novikov, and L.P. Pitayevskiy, *Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method* (Consultant Bureau, New York – London, 1984).
- [249] В.Е. Захаров и Е.А. Кузнецов, Гамильтоновский формализм для нелинейных волн, *Усп. Физ. Наук* **167**(11), 1137–1167 (1997);
V.E. Zakharov and E.A. Kuznetsov, Hamiltonian formalism for nonlinear waves, *Phys.–Uspekhi* **40**(11), 1087–1116 (1997).
- [250] C. Zener, A theory of the electrical breakdown of solid dielectrics, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **145**(855), 523–529 (1934).
- [251] C. Zener, *Elasticity and Anelasticity of Metals* (The University of Chicago Press, Chicago, 1948).
- [252] Q. Zhong, L. Kong, J. Gou, W. Li, Sh. Sheng, Sh. Yang, P. Cheng, H. Li, K. Wu, and L. Chen, Synthesis of borophene nanoribbons on Ag(110) surface, *Phys. Rev. Materials* **1**(2), 021001(R) (5 pages) (2017).
- [253] J.M. Ziman, *Models of disorder. The Theoretical Physics of Homogeneously Disordered Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 1979).
- [254] B. Zinszner, P.A. Johnson, and P.N.J. Rasolofosaon, Influence of change in physical state on elastic nonlinear response in rock: Significance of effective pressure and water saturation, *J. Geophys. Res. B* **102**(4), 8105–8120 (1997).
- [255] Ya. Zolotaryuk and I.O. Starodub, Fluxon mobility in an array of asymmetric superconducting quantum interference devices, *Phys. Rev. E* **91**(1), 013202 (9 pages) (2015).

Додаток А

Список публікацій здобувача за темою дисертації у фахових наукових виданнях

- {1} О.О. Вахненко. Нова повністю інтегрована дискретизація нелінійного рівняння Шрödінгера. *Укр. Фіз. Журн.* **40**(1), 118–122 (1995).
- {2} О.О. Vakhnenko and V.O. Vakhnenko. Physically corrected Ablowitz–Ladik model and its application to the Peierls–Nabarro problem. *Phys. Lett. A* **196**(5–6), 307–312 (1995).
- {3} О.О. Vakhnenko. Nonlinear beating excitations on ladder lattice. *J. Phys. A: Math. Gen.* **32**(30), 5735–5748 (1999).
- {4} О.О. Vakhnenko. Nonlinear model of intramolecular excitations on a multi-leg ladder lattice. *Phys. Rev. E* **60**(3), R2492–R2495 (1999).
- {5} О.О. Vakhnenko and M.J. Velgakis. Transverse and longitudinal dynamics of nonlinear intramolecular excitations on multileg ladder lattices. *Phys. Rev. E* **61**(6), 7110–7120 (2000).
- {6} О.О. Vakhnenko and M.J. Velgakis. Slalom soliton dynamics on a ladder lattice with zig-zag distributed impurities. *Phys. Lett. A* **278**(1–2), 59–67 (2000).
- {7} О.О. Vakhnenko and M.J. Velgakis. Multimode soliton dynamics in perturbed ladder lattices. *Phys. Rev. E* **63**(1), 016612 (11 pages) (2001).

- {8} O.O. Vakhnenko. Solitons on a zigzag-runged ladder lattice. *Phys. Rev. E* **64**(6), 067601 (4 pages) (2001).
- {9} O.O. Vakhnenko. Solitons in parametrically driven discrete nonlinear Schrödinger systems with the exploding range of intersite interactions. *J. Math. Phys.* **43**(5), 2587–2605 (2002).
- {10} O.O. Vakhnenko. Three component nonlinear dynamical system generated by the new third-order discrete spectral problem. *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**(20), 5405–5430 (2003).
- {11} O.O. Vakhnenko. A discrete nonlinear model of three coupled dynamical fields integrable by the Caudrey method. *Ukr. J. Phys.* **48**(7), 653–666 (2003).
- {12} O.O. Vakhnenko. Dynamics of multicomponent solitons in perturbed ladder lattices. *NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry* **153**, 503–510 (2004).
- {13} O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko, T.J. Shankland, and J.A. Ten Cate. Strain-induced kinetics of intergrain defects as the mechanism of slow dynamics in the nonlinear resonant response of humid sandstone bars. *Phys. Rev. E* **70**(1), 015602(R) (4 pages) (2004).
- {14} O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko, and T.J. Shankland. Soft-ratchet modeling of end-point memory in the nonlinear resonant response of sedimentary rocks. *Phys. Rev. B* **71**(17), 174103 (14 pages) (2005).
- {15} O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko, T.J. Shankland, and J.A. TenCate. Soft-ratchet modeling of slow dynamics in the nonlinear resonant response of sedimentary rocks. *AIP Conference Proceedings* **838**(1), 120–123 (2006).
- {16} V.O. Vakhnenko, O.O. Vakhnenko, T.J. Shankland, and J.A. TenCate. Dynamical realization of end-point memory in consolidated materials. *AIP Conference Proceedings* **838**(1), 124–127 (2006).
- {17} O.O. Vakhnenko. Integrable nonlinear ladder system with background-controlled intersite resonant coupling. *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**(35), 11013–11027 (2006).

- {18} O.O. Vakhnenko. Enigma of probability amplitudes in Hamiltonian formulation of integrable semidiscrete nonlinear Schrödinger systems. *Phys. Rev. E* **77**(2), 026604 (9 pages) (2008).
- {19} V.O. Vakhnenko, O.O. Vakhnenko, J.A. TenCate, and T.J. Shankland. The dynamics of a sandstone bar under resonance loading. *Proceedings of the XX Session of the Russian Acoustical Society (Moscow, October 27-31, 2008)*, 206–209 (2008).
- {20} V. Vakhnenko, O. Vakhnenko, J. TenCate, and T. Shankland. Modeling of the nonlinear resonant response in sedimentary rocks. *Геофизический журнал* **32**(4), 195–197 (2010).
- {21} O.O. Vakhnenko. Inverse scattering transform for the nonlinear Schrödinger system on a zigzag-runged ladder lattice. *J. Math. Phys.* **51**(10), 103518 (45 pages) (2010).
- {22} O.O. Vakhnenko. Semidiscrete integrable nonlinear systems generated by the new fourth-order spectral operator. Local conservation laws. *J. Nonlin. Math. Phys.* **18**(3), 401–414 (2011).
- {23} O.O. Vakhnenko. Semidiscrete integrable nonlinear systems generated by the new fourth-order spectral operator. Systems of obverse type. *J. Nonlin. Math. Phys.* **18**(3), 415–425 (2011).
- {24} O.O. Vakhnenko. New integrable nonlinear lattice systems with two adjustable coupling parameters. *Nonlin. Engineering* **2**(3–4), 97–102 (2013).
- {25} O.O. Vakhnenko. Four-wave semidiscrete nonlinear integrable system with PT -symmetry. *J. Nonlin. Math. Phys.* **20**(4), 606–622 (2013).
- {26} O.O. Vakhnenko. Semidiscrete integrable systems inspired by the Davydov–Kyslukha model. *Ukr. J. Phys.* **58**(11), 1092–1107 (2013).
- {27} O.O. Vakhnenko and V.O. Vakhnenko. Low-amplitude instability as a premise for the spontaneous symmetry breaking in the new integrable semidiscrete nonlinear system. *Chaos, Solitons and Fractals* **60**, 1–10 (2014).

- {28} O.O. Vakhnenko and V.O. Vakhnenko. Linear analysis of extended integrable nonlinear ladder network system. *Ukr. J. Phys.* **59**(6), 640–649 (2014).
- {29} O.O. Vakhnenko. Integrable nonlinear Schrödinger system on a triangular-lattice ribbon. *J. Phys. Soc. Japan* **84**(1), 014003 (12 pages) (2015).
- {30} O.O. Vakhnenko. Nonlinear integrable model of Frenkel-like excitations on a ribbon of triangular lattice. *J. Math. Phys.* **56**(3), 033505 (21 pages) (2015).
- {31} В.О. Вахненко та О.О. Вахненко. *Хвильова Динаміка Структурованих Середовищ* (Наукова думка, Київ, 2016).
- {32} O.O. Vakhnenko. Coupling-governed metamorphoses of the integrable nonlinear Schrödinger system on a triangular-lattice ribbon. *Phys. Lett. A* **380**(24), 2069–2074 (2016).
- {33} O.O. Vakhnenko. Symmetry-broken canonizations of the semi-discrete integrable nonlinear Schrödinger system with background-controlled inter-site coupling. *J. Math. Phys.* **57**(11), 113504 (16 pages) (2016).
- {34} O.O. Vakhnenko. Asymmetric canonicalization of the integrable nonlinear Schrödinger system on a triangular-lattice ribbon. *Appl. Math. Lett.* **64**, 81–86 (2017).
- {35} O.O. Vakhnenko. Distinctive features of the integrable nonlinear Schrödinger system on a ribbon of triangular lattice. *Ukr. J. Phys.* **62**(3), 271–282 (2017).
- {36} O.O. Vakhnenko. Semi-discrete integrable nonlinear Schrödinger system with background-controlled inter-site resonant coupling. *J. Nonlin. Math. Phys.* **24**(2), 250–302 (2017).
- {37} О.О. Вахненко. Напівдискретна інтегрована нелінійна Шрьодінгєрова система з фоново-керованою міжвузловою резонансною взаємодією. *Укр. Фіз. Журн. Огляди* **12**(1), 3–40 (2017).
- {38} O.O. Vakhnenko. Semidiscrete integrable nonlinear Schrödinger system with background-controlled intersite resonant coupling. Short summary of key properties. *Ukr. J. Phys.* **63**(3), 220–225 (2018).

- {39} O.O. Vakhnenko. Six-component semi-discrete integrable nonlinear Schrödinger system. *Lett. Math. Phys.* **108**(8), 1807–1824 (2018).
- {40} O.O. Vakhnenko. Integrable nonlinear Schrödinger system on a lattice with three structural elements in the unit cell. *J. Math. Phys.* **59**(5), 053504 (25 pages) (2018).
- {41} O.O. Vakhnenko. Nonlinear integrable system of coherently coupled excitations on an intercalated ladder lattice. *Eur. Phys. J. Plus* **133**(6), 243 (19 pages) (2018).
- {42} O.O. Vakhnenko. Effect of lattice ribbonization via the background-controlled inter-site resonant interactions in nonlinear integrable systems. *AIP Conference Proceedings* **2037**(1), 020027 (11 pages) (2018).
- {43} O.O. Vakhnenko. Four-component integrable systems inspired by the Toda and the Davydov–Kyslukha models. *Wave Motion* **88**, 1–12 (2019).

Додаток Б

Відомості про апробацію результатів дисертації на фахових наукових зібраннях

- (1) O.O. Vakhnenko. Physically corrected Ablowitz–Ladik model and its application to the Peierls–Nabarro problem. Copenhagen Conference on Complex Dynamics in Spatially Extended Systems. 27–30 September 1995, Niels Bohr Institute, Copenhagen (Denmark). *Book of Abstracts*, P46 (1995).
Стендова доповідь.
- (2) O.O. Vakhnenko. Discrete nonlinear model of three coupled dynamical fields integrable by the Caudrey method. International Conference “Modern Problems of Theoretical Physics” dedicated to the 90th anniversary of A.S. Davydov. 9–15 December 2002, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv (Ukraine). *Book of Abstracts*, 75 (2002).
Усна доповідь.
- (3) O.O. Vakhnenko. Integrable nonlinear lattice associated with the third-order spectral problem. Fifth International Conference “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics”. 23–29 June 2003, Institute of Mathematics, Kyiv (Ukraine). *Conference Program*, Abstract on June 25 (2003).
Усна доповідь.
- (4) O.O. Vakhnenko. Dynamics of multicomponent solitons in perturbed ladder lattices. The NATO Advanced Research Workshop “Nonlinear Waves: Classical and Quantum Aspects”. 12–18 July 2003, Universidade de Lisboa, Estoril (Portugal). *NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry*

153, 503–510 (2004).

Усна доповідь.

- (5) O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko, T.J. Shankland, and J.A. TenCate. Strain-induced kinetics of intergrain defects as the mechanism of slow dynamics in the nonlinear resonant response of humid sandstone bars. Bogolyubov Kyiv Conference “Modern Problems of Mathematics and Theoretical Physics”. 13–16 September 2004, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv (Ukraine). *Book of Abstracts* 76–77 (2004).

Усна доповідь.

- (6) O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko, T.J. Shankland, and J.A. TenCate. Soft-ratchet modeling of slow dynamics in the nonlinear resonant response of sedimentary rocks. Innovations in Nonlinear Acoustics: ISNA17 – 17th International Symposium on Nonlinear Acoustics including the International Sonic Boom Forum. 18–22 July 2005, State College, Pensilvania (USA). *AIP Conference Proceedings* **838**(1), 120–123 (2006).

Усна доповідь.

- (7) V.O. Vakhnenko, O.O. Vakhnenko, T.J. Shankland, and J.A. TenCate. Dynamical realization of end-point memory in consolidated materials. Innovations in Nonlinear Acoustics: ISNA17 – 17th International Symposium on Nonlinear Acoustics including the International Sonic Boom Forum. 18–22 July 2005, State College, Pensilvania (USA). *AIP Conference Proceedings* **838**(1), 124–127 (2006).

Усна доповідь.

- (8) V.O. Vakhnenko, O.O. Vakhnenko, J.A. TenCate, and T.J. Shankland. The dynamics of a sandstone bar under resonance loading. The XX Session of the Russian Acoustical Society. 27-31 October 2008, M. Lomonosov Moscow State University, Moscow (Russia). *Proceedings of the XX Session of the Russian Acoustical Society*, 206–209 (2008).

Усна доповідь.

- (9) V. Vakhnenko, O. Vakhnenko, J. TenCate, and T. Shankland. Modeling of the nonlinear resonant response in sedimentary rocks. International Conference

“Geodynamical Phenomena: from Observations and Experiments to Theory and Modeling”. 20–24 September 2010, Subbotin Institute of Geophysics, Kyiv (Ukraine). *Геофизический журнал* **32**(4), 195–197 (2010).

Усна доповідь.

- (10) O.O. Vakhnenko. Semidiscrete integrable systems inspired by the Davydov–Kylukha model. International Conference “Quantum Groups and Quantum Integrable Systems”. 18–21 June 2013, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv (Ukraine). *Ukr. J. Phys.* **58**(11), 1092–1107 (2013).

Усна доповідь.

- (11) O.O. Vakhnenko. Integrable nonlinear Schrödinger system on a ribbon of triangular lattice. Bogolyubov Conference “Problems of Theoretical Physics” dedicated to the 50th anniversary of the Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine. 24–26 May 2016, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv (Ukraine). *Program and Abstracts*, 42 (2016).

Усна доповідь.

- (12) O.O. Vakhnenko. Semidiscrete integrable nonlinear Schrödinger system with background-controlled intersite resonant coupling. Short summary of key properties. The 3rd Walter Thirring International School on Fundamentals of Astroparticle and Quantum Physics. 17–23 September 2017, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv (Ukraine). *Ukr. J. Phys.* **63**(3), 220–225 (2018).

Запрошена усна доповідь.

- (13) O.O. Vakhnenko. Effect of lattice ribbonization via the background-controlled inter-site resonant interactions in nonlinear integrable systems. IECMSA-2018. 7th International Conference on Mathematical Sciences and Applications. 28–31 August 2018, Ramada Encore Kyiv Hotel, Kyiv (Ukraine). *IECMSA-2018. Book of Abstracts*, 124–125 (2018); *AIP Conference Proceedings* **2037**(1), 020027 (11 pages) (2018).

Усна доповідь.