

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України
Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова
Національної академії наук України

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

МОМОТ АНДРІЙ ІВАНОВИЧ

УДК 533.9

ДИСЕРТАЦІЯ
ЕФЕКТИВНІ ВЗАЄМОДІЇ ТА ФЛУКТУАЦІЇ У ЗАПОРОШЕНІЙ
СЛАБКОІОНІЗОВАНИЙ ПЛАЗМІ

01.04.02 – теоретична фізика
природничі науки (104 – фізика та астрономія)

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело
_____ А.І. Момот

Науковий консультант Загородній Анатолій Глібович, доктор фіз.-мат. наук,
академік НАН України, професор

Київ – 2019

АНОТАЦІЯ

Момот А.І. Ефективні взаємодії та флуктуації у запорошеній слабкоіонізованій плазмі. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 «теоретична фізика» (10 – Природничі науки). – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, Київ, 2019.

У роботі досліджується запорошена плазма, тобто плазма із дрібними частинками конденсованої речовини (порошинками). Коли електрон або іон стикається з порошиною він залишається на її поверхні (поглинається, адсорбується). Оскільки теплова швидкість електронів у плазмі набагато більша за теплову швидкість іонів, то початково нейтральна порошокина починає заряджатися від'ємно. Зменшення концентрації плазмових частинок поблизу порошокини спричиняє появу їх потоків, які направлені до поверхні порошокини. Збільшення від'ємного заряду порошокини призводить до збільшення іонного потоку і зменшення електронного. Заряд порошокини зростає доти, доки потоки плазмових частинок не стають рівними і повний струм на поверхню порошокини стає рівним нулю. Описаний спосіб заряджання порошинок є основним для газорозрядної плазми і саме він розглядається у дисертаційній роботі. Таке заряджання є самоузгодженим, оскільки заряд порошокини визначається плазмовими потоками, які у свою чергу залежать від заряду порошокини. Великий заряд порошинок, який не є фіксованим, і наявність плазмових потоків, що підтримують цей заряд, суттєво впливають на властивості плазми.

Електростатичний потенціал навколо порошокини створюється як зарядом самої порошокини, так і зарядами у плазмі, тому такий потенціал називають ефективним. Прикладом ефективного потенціалу є потенціал Дебая. Взаємодія порошинок теж відбувається за участю плазмового оточення і теж називається ефективною.

Запорошена плазма зазвичай є низькотемпературною і слабкоіонізованою. В такій плазмі важливими є зіткнення заряджених частинок (електронів та іонів) з нейтральними. Зіткнення визначають динаміку плазми, а отже і струми заряджання. У дисертації розглядалася саме слабкоіонізована плазма з частими і нечастими зіткненнями, яка описувалася в рамках дрейфово-дифузійного наближення або на основі кінетичного рівняння з інтегралом зіткнень Батнагара – Гросса – Крука (БГК).

Дисертація присвячена вивченню ефективних потенціалів сферичних порошинок, взаємодії порошинок як між собою, так і з плазмовим оточенням, в тому числі за присутності зовнішнього постійного електричного або магнітного поля, а також дослідженню флуктуацій густини заряду та іонно-звукових хвиль у слабкоіонізованій запорошеній плазмі та звичайній плазмі у зовнішньому постійному електричному полі.

У розділі 2 на основі кінетичного рівняння БГК розвинуто новий підхід до вивчення ефективного потенціалу порошинки у слабкоіонізованій плазмі. Центральним місцем цього підходу є описання поглинання електронів та іонів порошинкою шляхом введення ефективних точкових стоків у кінетичні рівняння для плазмових частинок. На основі запропонованого підходу вперше знайдені вирази для ефективного потенціалу з урахуванням зіткнень електронів та іонів з нейтральними частинками, а також в присутності зовнішнього постійного магнітного поля. Детально проаналізовано розв'язки задачі про ефективні потенціали порошинки. Розрахунки виконано з урахуванням залежності іонного перерізу заряджання порошинки від швидкості іонів. Отримано прості аналітичні вирази для потенціалів при довільних значеннях довжини вільного пробігу іонів. Показано, що аналітичні наближення узгоджуються з проведеними нами числовими розрахунками та встановлено області застосування таких аналітичних наближень.

Чисельно розв'язана задача про екранування порошинки у слабкоіонізованій плазмі з частими зіткненнями за присутності зовнішнього постійного магнітного поля. Динаміка плазми описувалася у дрейфово-дифузійному

наближенні. Вивчено просторовий розподіл ефективного потенціалу порошинки і виконане порівняння з аналітичними виразами. Показано, що потенціал має кулонівську асимптоту з ефективним зарядом, який залежить від кута між радіус-вектором та напрямком магнітного поля. Обчислення показують, що в напрямку, паралельному зовнішньому магнітному полю, ефективний потенціал може мати немонотонну поведінку. Встановлено, що струми заряджання і стаціонарний заряд порошинки зменшуються зі збільшенням параметра замагніченості електронів, що пояснюється зменшенням потоку плазмових частинок до порошинки у напрямку перпендикулярному до магнітного поля.

Числовими методами в рамках дрейфово-дифузійного наближення досліджено розподіл електростатичного потенціалу навколо зарядженої порошинки, яка знаходиться у слабкоіонізованій плазмі з частими зіткненнями. Показано, що ефективний потенціал, із точністю до декількох відсотків, можна описати сумою кулонівського потенціалу і потенціалу Дебая з масштабованою довжиною екранування, яка у декілька разів більша за радіус Дебая і залежить від розміру порошинки та неізотермічності плазми. Збільшення довжини екранування пов'язане із суттєвим зменшенням концентрації електронів та іонів поблизу порошинки. Ефективний заряд у кулонівській частині потенціалу зростає зі зменшенням радіусу порошинки і може перевищувати екранований заряд.

В рамках моделі Пуассона – Больцмана, обчислено розподіл потенціалу навколо зарядженої сферичної частинки у неізотермічному плазмоподібному середовищі. Розглядалась частинка, яка не обмінюється зарядами із середовищем (колоїдна частинка у суспензії). Досліджено залежність ефективного заряду макрочастинки від відношення електронної та іонної температур, розміру макрочастинки та величини реального заряду. Показано, що у неізотермічному випадку має місце немонотонна залежність ефективного заряду частинки від реального заряду.

У розділі 3 виконано числове дослідження сил взаємодії між двома

однаковими зарядженими сферичними частинками, які вміщені у слабоіонізоване сильнозіткнене ізотермічне плазмоподібне середовище. Обчислення проведені для випадку частинок з фіксованим електричним зарядом, припускаючи, що частинки не поглинають електрони та іони з навколишньої плазми (колоїдних частинок), а також для частинок, які заряджаються плазмовими струмами (порошинок). У першому випадку використовувалася модель Пуассона – Больцмана і розглядалися як провідні частинки, так і частинки з однорідним розподілом поверхневого заряду, а в другому – динаміка заряджання провідних порошинок описувалась у дрейфово-дифузійному наближенні. Показано, що на великих відстанях силу взаємодії між колоїдними частинками можна описати силою, яка отримана з потенціалу Дебая з ефективним зарядом, тоді як для порошинок спостерігається кулонівська поведінка сили взаємодії. Показано, що навіть на великих відстанях взаємодію між двома порошинками можна описати з допомогою потенціалу однієї порошинки лише якісно, тобто мають місце двочастинкові ефекти. На відстанях менших за декілька радіусів частинки, спостерігаються нелінійні та поляризаційні ефекти, а також зменшення повного заряду порошинки.

У розділі 4 в рамках моделі точкових стоків виконані кінетичні розрахунки ефективного потенціалу порошинки для випадку слабоіонізованої плазми у зовнішньому постійному електричному полі. Знайдено силу тертя, яка діє на порошинку і пов'язана з дрейфом іонів у електричному полі. Було враховано зміну функцій розподілу плазмових частинок і діелектричного відгуку плазми у зовнішньому електричному полі. Показано, що поглинання електронів та іонів порошинкою може призводити до зміни напрямку сили тертя. Знайдені середні та середньоквадратичні зміщення плазмових частинок на основі рівняння БГК та виконано їх порівняння зі зміщеннями, які отримані з рівняння Фоккера-Планка.

Розглянуто заряджену провідну сферичну порошинку, яка стаціонарно рухається у слабоіонізованій плазмі з частими зіткненнями. В рамках

дрейфово-дифузійного наближення обчислена сила тертя, яка діє на порошок. Розглянуті порошинки різних розмірів, а також ізотермічна та неізотермічна плазма. Враховувалося, що поверхня порошинки поглинає всі електрони та іони, які з нею стикаються, тобто потенціал поверхні є плаваючим. Показано, що розподіли електронів та іонів навколо порошинки утворюють таке електричне поле, що сила, яка діє на порошок, направлена вздовж її швидкості, тобто має місце від'ємне тертя. Від'ємна сила тертя може перевищувати силу тертя порошинки із нейтральними частинками, яка описується законом Стокса. Також, показано, що стаціонарний струм заряджання та заряд порошинки зростають зі швидкістю порошинки. В рамках моделі точкових стоків знайдені аналітичні вирази для сили тертя, які теж передбачають можливість від'ємного тертя, визначені межі застосовності цих виразів, шляхом порівняння з результатами обчислень.

У розділі 5 узагальнено кінетичну теорію великомасштабних флуктуацій у слабоіонізованій плазмі (флуктуацій одночастинкової функції розподілу) на випадок присутності зовнішнього постійного електричного поля. Зіткнення плазмових частинок із нейтральними описувались на основі простої моделі БГК. Дисперсійне рівняння для такої плазми розв'язано чисельно в області іонно-звукових хвиль. Показано, що зовнішнє електричне поле може призводити до нестійкості іонно-звукових хвиль. Виконано детальне числове дослідження впливу зіткнень і зовнішнього електричного поля на спектри флуктуацій концентрації електронів, показано що поле призводить до аномального росту інтенсивності флуктуацій.

Запропоновано новий підхід до послідовного кінетичного опису великомасштабних флуктуацій у запорошеній слабоіонізованій плазмі з урахуванням зіткнень плазмових частинок як з нейтралами, так і з порошинками, а також флуктуацій заряду порошинок внаслідок їх заряджання плазмовими струмами. Для струмів використовувалися напівфеноменологічні вирази, які враховують вплив зіткнень і добре узгоджуються із

результатами експериментів і обчислень у широкому діапазоні частот зіткнень і параметрів плазми. Виконано аналіз залежності частот заряджання і зіткнень від довжин вільного пробігу іонів. Показано, що ці частоти є меншими за іонну плазмову частоту. Отримано вираз для функції діелектричного відгуку і на його основі детально вивчено вплив процесів заряджання та зіткнень частинок на спектри і декременти згасання іонно-звукових хвиль у запыленій плазмі. Досліджено вплив порошинок на спектри флуктуацій у плазмі та показано, що присутність порошинок зі змінним зарядом суттєво впливає на спектри флуктуацій електронної густини.

Ключові слова: запылена плазма, слабоіонізована плазма, ефективний потенціал, кінетичне рівняння БГК, рівняння Пуассона – Больцмана, від’ємне тертя, взаємодія порошинок, іонно-звукові хвилі, великомасштабні флуктуації.

ABSTRACT

Momot A.I. Effective interactions and fluctuations in dusty weakly ionized plasma. – Qualification scientific work, manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences by speciality 01.04.02 “Theoretical Physics” (10 – Nature science). – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the NAS of Ukraine, Kyiv, 2019.

Dusty plasma, i.e. plasma with fine particles of condensed matter (grains), is studied in the present work. When electron or ion collides with grain it stays on its surface (is absorbed). Since the thermal velocity of electrons is much higher than the velocity of ions, the initially neutral grain starts to charge negatively. Plasma particle fluxes directed to the grain surface appear due to the decrease of their density near the grain. The increase of grain negative charge leads to the increase of ion flux and decrease of electron one. The grain charge grows until the fluxes of plasma particles become equal. It means that the total electric current on the grain surface is equal to zero. The described mechanism of grain

charging is the main for a gas-discharge plasma and it is considered in the present work. Such the charging is self-consistent since the grain charge is determined by plasma fluxes which, in case, depending on the grain charge. The high and variable charge of the grains and the presence of charging currents strongly influence on the plasma properties.

The electrostatic potential around the grain is created by the charge of the grain as well as by plasma charges. That is why potential is called effective. The Debye potential is an example of effective potential. Plasma surrounding take part in the interaction between two grains, thus this interaction is also called effective.

Usually, dusty plasma is low-temperature and weakly ionized plasma. In such a plasma the collisions of charged particles (electrons and ions) with neutrals are important. Collisions determine the plasma dynamics, hence they determine the charging currents. Collisional weakly ionized plasma is considered in the present work. Plasma dynamics was described in drift-diffusion approximation or by kinetic equation with Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) collision integral.

The thesis studies the grain effective potentials and interaction between spherical grains and surrounding plasma, including the case of presence of external constant magnetic or electric field. The thesis also deals with electron density fluctuations and propagation of ion-acoustic waves in weakly ionized dusty plasma and ordinary plasma in an external constant electric field.

The new approach to the studying of the grain effective potential in a weakly ionized plasma on the basis of the BGK kinetic equation is proposed in section 2. The central point of this approach is the description of electron and ion absorption by the grain through introducing effective point sinks in the kinetic equations describing the dynamics of plasma particles. With the use of this approach, analytical expressions for the effective potential are derived with allowance for the collisions of electrons and ions with neutrals and in the presence of an external constant magnetic field. Solutions of the problem of

effective potential of macroparticle charged by plasma currents are analyzed in detail. Calculations are performed taking into consideration the dependence of the ionic grain charging cross-section on ion velocity. Analytical expressions for the potential are obtained for arbitrary values of ion mean free path. It is shown, that analytical approximations are in agreement with the numerical calculations and the conditions for applications of these approximations are found.

The problem of grain screening is solved numerically for the case of strongly collisional weakly ionized plasma in the presence of an external constant magnetic field. The plasma dynamics was described within the drift-diffusion approximation under the assumption that the grain absorbs all encountered electrons and ions. The spatial distribution of the effective grain potential is studied and compared with the analytical estimates. It is shown that at the distance larger than the Debye length such potential has the Coulomb-like asymptotics with the effective charge dependent on the angle between the radius vector and the external magnetic field direction. The numerical solutions show that in the direction parallel to the external magnetic field the effective potential can have nonmonotonic behavior. It is determined that the charging currents and stationary grain charge decrease with the increase of the electron magnetization parameter due to a decrease of the plasma flux to the grain perpendicularly to the magnetic field.

Electrostatic potential distribution around solitary charged grain embedded into weakly ionized strongly collisional plasma is studied numerically within the drift-diffusion approximation. It is shown that effective potential distribution can be described with precision to several percents by the sum of Coulomb potential and Debye potential with scaled screening length. It is in several times greater than Debye length and depends on grain size and plasma nonisothermality. The increase of the screening length is due to a substantial decrease of plasma particle densities near the grain. The effective charge in the Coulomb part of the potential grows with decrease of grain radius and can exceed the screened charge.

The electrostatic potential distribution around a charged spherical particle in a nonisothermal plasma-like medium was studied numerically within the Poisson–Boltzmann model. The particle with no charge exchange with surrounding medium (colloidal particle in suspension) was considered. The effective charge of a macroparticle was calculated and its dependence on the electron to ion temperature ratio as well as on particle radius and the bare charge was considered. It is shown that the effective charge depends nonmonotonically on the bare charge in nonisothermal plasma.

The results of the numerical studies of the interaction forces between two identical charged spherical conductive particles embedded into weakly ionized strongly collisional isothermal plasma-like medium are presented in section 3. The calculations are performed for the case of particles with a fixed electric charge under the assumption that particles do not absorb electrons and ions from the surrounding plasma (colloidal particles) as well as for particles charged by plasma currents (grains). In the first case, the Poisson–Boltzmann model was used for conductive particles and particles with uniform surface charge distribution and in the second the dynamics of grain charging is described in the drift-diffusion approximation. It is shown that at the large distance the interaction force between colloidal particles has the Debye screened asymptotic while for the grains the Coulomb-like behavior is observed. It is shown that even at large distance the interaction between two grains can be described with the potential of one grain only qualitatively, i.e. the two-particle effects take place. Nonlinear and polarisation effects, as well as the decrease of the stationary grain charge, are observed at a distance of several particle radii.

The kinetic calculations of the effective grain potential are presented in section 4 for the case of weakly-ionized plasma in the external constant electric field. The drag force associated with the ionic drift in the external field is found. The changes of plasma particle distribution functions due to an external electric field and their influence on the plasma dielectric response are taken into account. It is shown that the absorption of electrons and ions by the grain can cause

the change of the direction of the drag force. The mean and mean-square displacements of plasma particles are found on the basis BGK equation and the comparison with displacements from the Fokker-Plank equation is performed.

The charged conductive spherical dust grain stationary moving in a strongly collisional weakly ionized plasma is considered. The drag force on the grain is studied numerically within the drift-diffusion approximation for both isothermal and nonisothermal plasma. The grains of various sizes in isothermal and nonisothermal plasma are considered. It was taken into account that the grain surface collects all encountered electrons and ions, i.e. grain is at a floating potential. It is found that the electron and ion distributions around the grain create such an electric field that the force acting on a charged grain is directed along with its velocity, i.e., the negative drag takes place. The negative drag force can exceed the neutral drag (force due to collisions of neutrals with the grain) that is described by the Stokes law. The stationary charging current and grain charge increase with grain velocity. The analytical expressions for the ion drag force are obtained within the point sink model. They also assume the negative drag. The applicability of these expressions is examined by comparison with the results of calculations.

The theory of large-scale fluctuations (fluctuations of one particle distribution function) in a weakly ionized plasma is generalized in section 5 for the case of the presence of an external electric field. The collisions between plasma particles and neutrals were described within the Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) model. The dispersion equation for such a plasma is solved numerically in the frequency domain of ion-acoustic waves. It is shown that an external electric field can lead to ion-acoustic wave instability. The influence of collisions and external electric field on the fluctuation spectra of electron number density is studied numerically in detail. Anomalous growth of the fluctuation level due to the electric field is found.

The new approach to consistent kinetic description of the large-scale fluctuations in dusty weakly ionized plasma is formulated with regard to the

collisions between plasma particles with neutrals and grains, as well as grain charge fluctuations due to their charging by plasma currents. The grain charging currents are described by the semiempirical formulas that take into account collisions and are in a good agreement with experimental and computational results in a wide range of collision frequency and plasma parameters. The dependencies of the charging frequencies and effective collision frequencies on dusty plasma parameters are studied. The expression for dielectric response function is obtained. The influence of collision and charging processes on the ion-acoustic wave spectrum and damping in dusty plasma is analyzed. The fluctuation spectra in dusty plasma are studied. Electron density fluctuations are strongly affected by the presence of grains with variable charge.

Key words: dusty plasma, weakly ionized plasma, effective potential, BGK kinetic equation, Poisson – Boltzmann equation, negative drag, inter-grain interaction, ion-acoustic waves, large-scale fluctuations.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. A.I. Momot, A.G. Zagorodny, and O.V. Momot, “Electron density fluctuations in collisional dusty plasma with variable grain charge”, [Physical Review E](#) **99**, 013206 (2019).
2. A.I. Momot, A.G. Zagorodny, and O.V. Momot, “Fluctuations and ion-acoustic waves in collisional dusty plasma with variable grain charge”, [Problems of Atomic Science and Technology, Series: Plasma Physics](#) **24**, 79–82 (2018).
3. A.I. Momot, A.G. Zagorodny, and O.V. Momot, “A kinetic description of ion- acoustic waves in collisional dusty plasma: effects of grain charge fluctuations”, [Physics of Plasmas](#) **25**, 073706 (2018).

4. A.I. Momot, “Effective charge of a macroparticle in a non-isothermal plasma within the Poisson–Boltzmann model”, [Contributions to Plasma Physics](#) **58**, 233–238 (2018).
5. A.V. Filippov, A.G. Zagorodny, A.I. Momot, A.F. Pal’, and A.N. Starostin, “Analysis of macroparticle charge screening in a nonequilibrium plasma based on the kinetic collisional point sink model”, [Journal of Experimental and Theoretical Physics](#) **125**, 926–939 (2017).
6. A.I. Momot, “Negative drag force on finite-size charged dust grain in strongly collisional plasma”, [Physics of Plasmas](#) **24**, 103704 (2017).
7. A.I. Momot, A.G. Zagorodny, and I.S. Orel, “Interaction force between two finite-size charged particles in weakly ionized plasma”, [Physical Review E](#) **95**, 013212 (2017).
8. A.I. Momot and A.G. Zagorodny, “Toward Analytical description of the electrostatic potential of charged macroparticle in weakly ionized plasma”, [Europhysics Letters](#) **114**, 65004 (2016).
9. А.Г. Загородній та А.І. Момот, *Вступ до кінетичної теорії плазми* (Наукова думка, Київ, 2015).
10. A.I. Momot, “Screening and interaction of conductive grains charged by drift- diffusion currents in plasma”, [Physica Scripta](#) **T161**, 014002 (2014).
11. A.I. Momot, “Grain in weakly ionized plasma in the presence of an external magnetic field: Charging by plasma currents and effective potential”, [Physics of Plasmas](#) **20**, 073703 (2013).
12. A.I. Momot, “Grain charging in weakly ionized plasma in the presence of external magnetic field”, [Problems of Atomic Science and Technology, Series: Plasma Physics](#) **18**, 67–71 (2012).

13. A.I. Momot and A.G. Zagorodny, “Fluctuations in collisional plasma in the presence of an external electric field”, [Physics of Plasmas](#) **18**, 102110 (2011).
14. A.G. Zagorodny, I.V. Rogal, A.I. Momot, and I.V. Schweigert, “Grain in a plasma in the presence of external electric field: kinetic calculation of effective potential and ionic drag force”, [Ukrainian Journal of Physics](#) **55**, 29–35 (2010).
15. A.V. Filippov, A.G. Zagorodny, A.I. Momot, A.F. Pal’, and A.N. Starostin, “Screening of a moving charge in a nonequilibrium plasma”, [Journal of Experimental and Theoretical Physics](#) **108**, 497–515 (2009).
16. A.G. Zagorodny, A.I. Momot, A.V. Filippov, A.F. Pal, and A.N. Starostin, “About the influence of plasma particles collisions on the effective grain potential”, [Ukrainian Journal of Physics](#) **54**, 1089–1093 (2009).
17. A.V. Filippov, A.G. Zagorodny, and A.I. Momot, “Screening of a moving charge in a nonequilibrium plasma”, [JETP Letters](#) **88**, 24–30 (2008).
18. A.G. Zagorodny, A.V. Filippov, A.F. Pal’, A.N. Starostin, and A.I. Momot, “Kinetic theory of dusty plasmas and effective grain interactions”, [Problems of Atomic Science and Technology, Series: Plasma Physics](#) **14**, 70–74 (2008).
19. A.V. Filippov, A.G. Zagorodny, A.F. Pal’, A.N. Starostin, and A.I. Momot, “Kinetic description of the screening of the charge of macroparticles in a nonequilibrium plasma”, [JETP Letters](#) **86**, 761–766 (2008).
20. A.V. Filippov, A.G. Zagorodny, A.I. Momot, A.F. Pal’, and A.N. Starostin, “Interaction of two macroparticles in a nonequilibrium plasma”, [Journal of Experimental and Theoretical Physics](#) **105**, 831–845 (2007).
21. A.N. Starostin, A.V. Filippov, A.F. Pal’, A.I. Momot, and A.G. Zagorodny, “Shielding and Interaction of Dust Particles in Non-Equilibrium Plasma”, [Contributions to Plasma Physics](#) **47**, 388–401 (2007).

22. A.V. Filippov, A.G. Zagorodny, A.I. Momot, A.F. Pal', and A.N. Starostin, "Charge screening in a plasma with an external ionization source", [Journal of Experimental and Theoretical Physics](#) **104**, 147–161 (2007).

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

23. A.I. Momot, "Negative drag force on finite-size dust grain in strongly collisional plasma", in [Abstracts of 45th EPS Conference on Plasma Physics, Prague, Czech Republic](#) (2018), p. 5.3009.
24. A.I. Momot and A.G. Zagorodny, "Fluctuations and ion-acoustic waves in collisional dusty plasma: effects of grain charging dynamics", in [Abstracts of International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion, Kharkiv, Ukraine](#) (2018), p. 58.
25. A.G. Zagorodny and A.I. Momot, "Polarization effects in macroparticle interactions in plasmas and plasma-like media", in [Abstracts of International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion, Kharkiv, Ukraine](#) (2016), p. 19.
26. A.I. Momot and A.G. Zagorodny, "Analytical description of the electrostatic potential of dust grain in weakly ionized plasma", in [Abstracts of International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion, Kharkiv, Ukraine](#) (2016), p. 71.
27. A.I. Momot and A.G. Zagorodny, "Interaction of charged conductive spherical particles in strongly collisional plasma", in [Abstracts of International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion, Kharkiv, Ukraine](#) (2014), p. 60.
28. A.I. Momot and A.G. Zagorodny, "Macroparticle charging and screening in weakly ionized plasma with magnetized electrons", in [Proceedings of 31th International Conference on Phenomena in Ionized Gases \(ICPIG\), Granada, Spain](#) (2013).

29. A.I. Momot and A.G. Zagorodny, “Screening of dust grain charged by drift-diffusion currents in magnetized plasma”, in [Abstracts of International Conference on Research and Application of Plasmas, Warsaw, Poland \(2013\)](#).
30. A.I. Momot and A.G. Zagorodny, “Grain charging in weakly ionized plasma in the presence of external magnetic field”, in [Book of abstracts Alushta 2012 International Conference and School on Plasma Physics and Controlled Fusion and the Adjoint Workshop “Nano- and Micro- Sized Structures in Plasmas”](#), Alushta, Ukraine (2012), p. 227.
31. A.G. Zagorodny, A.I. Momot, I.V. Rogal, and I.V. Schweigert, “Kinetic description of ionic drag force in collisional plasma”, in [Proceedings of the 3-rd International Conference “Dusty Plasmas in Applications”](#), Odesa, Ukraine (2010), pp. 140–143.
32. A.G. Zagorodny, I.V. Rogal, A.I. Momot, and I.V. Schweigert, “Grain in a Plasma in the Presence of External Electric Field: Kinetic Calculation of Effective Potential and Ionic Drag Force”, in [Book of abstracts Bogolyubov Kyiv Conference “Modern Problems of Theoretical and Mathematical Physics”](#), Kyiv, Ukraine (2009), p. 183.
33. А.І. Момот, А.Г. Загородній, І.В. Рогаль та І.В. Швейгерт, “Ефективний потенціал порошинки у плазмі за наявності зовнішнього електричного поля”, в Тези Української конференції з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу, Київ, Україна (2009), с. 25.
34. A.V. Filippov, A.I. Momot, A.F. Pal', A.N. Starostin, and A.G. Zagorodny, “Shielding of a Moving Charged Dust Particle in the Nonequilibrium Plasma”, [AIP Conference Proceedings](#) **1041**, 207–208 (2008).
35. A.G. Zagorodny, A.V. Filippov, A.F. Pal, A.N. Starostin, and A.I. Momot, “Kinetic theory of dusty plasmas and effective grain interactions”, in [Book of abstracts Alushta 2008 International Conference and School on Plasma Physics and Controlled Fusion](#), Alushta, Ukraine (2008), p. 15.

36. A.G. Zagorodny, A.V. Filippov, A.F. Pal, A.N. Starostin, and A.I. Momot, “Kinetic description of effective grain potentials in a plasma”, in [Proceedings of the 2-nd International Conference “Dusty Plasmas in Applications”](#), Odesa, Ukraine (2007), pp. 176–181.
37. A.V. Filippov, A.I. Momot, A.F. Pal, A.N. Starostin, and A.G. Zagorodny, “Interaction of moving dust particles in a nonequilibrium plasma”, in [Proceedings of the 2-nd International Conference “Dusty Plasmas in Applications”](#), Odesa, Ukraine (2007), pp. 48–51.
38. A. Zagorodny, O. Bystrenko, T. Bystrenko, A. Filippov, A. Momot, A. Pal’, and A. Starostin, “Effective grain interaction in dusty plasmas: theoretical description and numerical simulation”, in [Abstracts of 28th International Conference on Phenomena in Ionized Gases \(ICPIG\)](#), Prague, Czech Republic (2007), p. 26.

Зміст

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	21
ВСТУП	23
РОЗДІЛ 1. ВЛАСТИВОСТІ ТА МЕТОДИ ОПИСАННЯ ЗАПОРОШЕНОЇ ПЛАЗМИ	33
1.1 Параметри запырошеної плазми	34
1.2 Заряджання пырошинок у плазмі	35
1.2.1 Модель обмеженого орбітального руху	36
1.2.2 Дрейфово-дифузійне наближення	39
1.3 Модель точкових стоків у дрейфово-дифузійному наближенні	40
1.3.1 Стаціонарний випадок	43
1.3.2 Динамічне екранування	43
1.4 Неідеальність запырошеної плазми і фазові переходи	45
1.5 Плазма як діелектричне середовище	49
1.5.1 Мікроскопічні рівняння для плазми та їхнє усереднення, діелектричний відгук середовища	49
1.5.2 Описання плазми у квазіпотенціальному наближенні	53
1.6 Кінетична теорія плазми як складова теорії запырошеної плазми	56
1.6.1 Кінетичне рівняння	56
1.6.2 Функція діелектричного відгуку для плазми без зіткнень	60
1.6.3 Вплив зіткнень на діелектричні характеристики плазми (модельний опис)	65
1.6.4 Іонно-звукові хвилі	68
1.7 Мікроскопічна теорія запырошеної плазми	73
1.7.1 Кінетичне рівняння для мікроскопічної фазової густини	73
1.7.2 Кінетичні рівняння для запырошеної плазми.	79

РОЗДІЛ 2. ЕФЕКТИВНИЙ ПОТЕНЦІАЛ ЗАРЯДЖЕНОЇ МАКРОЧАСТИНКИ	86
2.1 Ефективний заряд макрочастинки в моделі Пуассона – Больцмана	87
2.1.1 Постановка задачі	88
2.1.2 Ізотермічна плазма	90
2.1.3 Неізотермічна плазма	94
2.1.4 Висновки	98
2.2 Ефективний потенціал порошинки у сильнозіткненій плазмі	98
2.2.1 Постановка задачі і основні рівняння	99
2.2.2 Ефективний потенціал	101
2.2.3 Висновки	111
2.3 Кінетична теорія ефективного потенціалу порошинки	112
2.3.1 Модель точкових стоків	114
2.3.2 Вплив зіткнень на ефективний потенціал	124
2.3.3 Висновки	131
2.4 Порошинка у сильнозіткненій плазмі у зовнішньому магнітному полі	132
2.4.1 Постановка задачі	132
2.4.2 Порошинка у плазмі із замагніченими електронами і незамагніченими іонами	137
2.4.3 Висновки	146
РОЗДІЛ 3. ВЗАЄМОДІЯ ДВОХ МАКРОЧАСТИНОК	148
3.1 Постановка задачі і основні рівняння	150
3.2 Макрочастинки, які не обмінюються зарядом з плазмою	156
3.3 Макрочастинки, які поглинають електрони та іони (порошинки)	167
3.4 Висновки	172
РОЗДІЛ 4. СИЛА ТЕРТЯ, ЯКА ДІЄ НА РУХОМУ ПОРОШИНКУ	174

4.1	Модель точкових стоків у дрейфово-дифузійному наближенні	175
4.2	Кінетичне описання плазми у зовнішньому електричному полі	178
4.2.1	Ефективного потенціалу порошинки у зовнішньому електричному полі	179
4.2.2	Середні та середньоквадратичні зміщення	188
4.3	Числове розв'язання крайової задачі у дрейфово-дифузійному наближенні	193
4.4	Висновки	206
РОЗДІЛ 5. ФЛУКТУАЦІЇ ТА ІОННО-ЗВУКОВІ ХВИЛІ У ПЛАЗМІ		208
5.1	Вплив зовнішнього електричного поля	208
5.1.1	Спектри флуктуацій (загальні співвідношення)	208
5.1.2	Іонно-звукові хвилі	215
5.1.3	Критичні флуктуації у плазмі за наявності зовнішнього електричного поля	221
5.1.4	Висновки	224
5.2	Вплив флуктуацій заряду порошинок	226
5.2.1	Постановка задачі	229
5.2.2	Рівняння для динаміки заряджання порошинок	231
5.2.3	Стаціонарний заряд, частоти заряджання і зіткнень	234
5.2.4	Іонно-звукові хвилі	239
5.2.5	Флуктуації густини електронів	251
5.2.6	Висновки	258
ВИСНОВКИ		260
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ		265
ДОДАТКИ		293

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

Індекс α позначає сорт частинок: e – електрон, i – іон, n – нейтральна частинка, g – порошок (grain)

n_α – концентрація частинок (кількість частинок в одиниці об'єму),

$$[n_\alpha] = \text{см}^{-3}$$

T_α – температура, $[T_\alpha] = \text{eV}$

$$\tau = \frac{T_e}{T_i} \text{ – параметр неізотермічності}$$

m_α – маса

e_α – заряд

a – радіус порошинки

$q \equiv e_g$ – заряд порошинки

$$z_g = \frac{qe_e}{aT_e} \text{ – знерозмірений заряд порошинки}$$

φ – електростатичний потенціал

D_α – коефіцієнт дифузії

μ_α – рухливість

l_α – довжина вільного пробігу

ν_α – частота зіткнень

$$\omega_{p\alpha}^2 = \frac{4\pi e_\alpha^2 n_\alpha}{m_\alpha} \text{ – плазмова частота, } \omega_p^2 = \sum_\alpha \omega_{p\alpha}^2$$

$$k_{D\alpha}^2 = \frac{4\pi e_\alpha^2 n_\alpha}{T_\alpha}, \quad k_D^2 = \sum_\alpha k_{D\alpha}^2, \quad k_D \text{ – хвильове числа Дебая,}$$

$$\lambda_D = \frac{1}{k_D} \text{ – довжина Дебая}$$

$$v_{T\alpha} = \sqrt{\frac{T_\alpha}{m_\alpha}} \text{ – теплова швидкість}$$

$$k_{D\alpha} v_{T\alpha} = \omega_{p\alpha}$$

$$\Omega_\alpha = \frac{e_\alpha B_0}{m_\alpha c} \text{ – циклотронна частота}$$

$v_s = \sqrt{\frac{T_e}{m_i}}$ – іонно-звукова швидкість

$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k}$ – фазова швидкість

$v_\alpha = \frac{e_\alpha E_0}{m_\alpha \nu_\alpha}$ – дрейфова швидкість

$P = \frac{e_g n_g}{e_e n_i}$ – параметр Хавнеса

$f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ – одночастинкова функція розподілу

$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$ – функція діелектричного відгуку

Γ_α – густина потоку частинок сорту α

$\omega_{\mathbf{k}}$ – власна частота хвилі

$\gamma_{\mathbf{k}}$ – декремент згасання

$X = (\mathbf{r}, \mathbf{v})$

$W(z) = 1 - ze^{-z^2/2} \int_0^z dy e^{y^2/2} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} z e^{-z^2/2}$ – плазмова дисперсійна функція

ВСТУП

Запорошена (комплексна) плазма являє собою плазму із дрібними частинками конденсованої речовини (порошинками). Потрапивши у плазму, або сформувавшись у хімічно-активній плазмі, порошинки як з провідного, так і діелектричного матеріалу накопичують на собі великий, зазвичай від'ємний, електричний заряд. Порошинки є центрами рекомбінації плазми, тому виникають потоки електронів та іонів до поверхонь порошинок. У стаціонарному стані повний струм на поверхню порошинки рівний нулю. Заряд порошинки підтримується плазмовими потоками, тому він не є фіксованим і реагує на зміни параметрів плазми. Поява заряджених порошинок у плазмі суттєво впливає на її властивості і ускладнює теоретичний опис.

Обґрунтування вибору теми дослідження. Запорошена плазма часто зустрічається у природі й активно вивчається лабораторно. Заряджені порошинки відіграють важливу роль у космічній плазмі міжзоряного простору, хвостах комет, планетарних кільцях та іоносферах планет. Порошинки виявлено поблизу штучних супутників Землі і космічних апаратів. У земних умовах порошинки з'являються у різного роду газових розрядах, в які вони можуть потрапляти в результаті ерозії електродів чи стінок. Порошинки також можуть формуватися у хімічно-активній плазмі. Запорошена плазма виникає під час плазмової обробки поверхонь: нанесенні тонких плівок, щавленні (травленні), зокрема при виготовленні мікрочіпів. Також порошинки були виявлені в установках для керованого термоядерного синтезу з магнітним утриманням. Вони з'являються внаслідок руйнування внутрішньої поверхні камери і збільшуються у розмірах в результаті їх агломерації та адсорбції плазмових частинок у пристінковій області. Великі порошинки, прискорюючись електричним полем і вдаряючись об стінки камери, можуть призводити до ще більшого її пошкодження, що становить прикладну проблему у фізиці керованого термоядерного синтезу.

Дослідження заповненої плазми становить і фундаментальний інтерес. Порошинки у плазмі можуть утворювати підсистему із сильним зв'язком (потенціальна енергія взаємодії порошинок більша за їхню кінетичну енергію). В цьому разі вони поведуть себе як рідинна чи кристалічна система (плазмовий кристал). Процеси у конденсованій підсистемі порошинок, в тому числі фазові переходи і поширення хвиль, можна вивчати на мікроскопічному рівні, спостерігаючи за рухом окремих порошинок. Не менш цікавими є результати експериментів із заповненою плазмою в умовах мікрогравітації, коли у плазмі утворюється область, яка вільна від порошинок і має чіткі границі (void). Очевидно, що колективна поведінка порошинок визначається взаємодією між ними. Оскільки порошинки взаємодіють у плазмовому оточенні, то говорять про ефективну взаємодію. Отже, вивчення як ефективних потенціалів окремих порошинок, так і їх взаємодії, в тому числі у зовнішніх полях, є актуальною задачею теорії заповненої плазми.

Як вже згадувалося, заряди порошинок не є заданими, а визначаються струмами заряджання, які у свою чергу залежать від зарядів порошинок. Цей взаємозв'язок призводить до реакції зарядів порошинок на хвилі і флуктуації у плазмі та спричиняє модифікацію спектрів флуктуацій, а також впливає на поширення хвиль у плазмі. Така задача для плазми із зіткненнями залишається не до кінця розв'язаною.

Динаміка плазми і методи її описання залежать від частоти зіткнень між її компонентами (електронами, іонами та нейтральними частинками). Оскільки заповнена плазма зазвичай є низькотемпературною і слабоіонізованою, то плазмові потоки, які виникають у заповненій плазмі, в першу чергу залежать від частоти зіткнень заряджених частинок з нейтральними. У дисертації розглядалася саме слабоіонізована плазма з частими і нечастими зіткненнями, яка описувалася в рамках дрейфово-дифузійного наближення і у кінетичному підході, відповідно.

Запорошена плазма має спільні риси із зарядженими колоїдними суспензіями, а саме: наявність вільних точкових зарядів разом із сильно зарядженими макрочастинками, але між ними є важлива різниця, яка стосується механізму заряджання макрочастинок. У випадку заряджених колоїдних суспензій заряд макрочастинок з'являється внаслідок хімічної взаємодії з розчинником. Такий заряд є фіксованим і можна вважати, що між колоїдною частинкою і електролітом подальший обмін зарядами не відіграє провідної ролі. А от заряд порошинки у плазмі є наслідком поглинання (адсорбції) порошинкою електронів та іонів із плазми. Виконані у роботі дослідження ефективного потенціалу і взаємодії макрочастинок із фіксованим зарядом важливі як для порівняння з порошинками і, таким чином, для визначення впливу поглинання, так і мають самостійне значення для теорії заряджених колоїдних суспензій.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами. Дисертаційна робота пов'язана із планами науково-дослідних робіт, які проводились у рамках держбюджетних тем та міжнародних проєктів на кафедрі фізики функціональних матеріалів фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. А саме №11БФ051–01 «Фундаментальні дослідження в галузі фізики конденсованого стану і елементарних частинок, астрономії і матеріалознавства для створення основ новітніх технологій» (№ держ. реєстрації 0111U004954, 2011–2015 рр.).

Також робота виконувалась в рамках бюджетних тем та міжнародних проєктів відділу теорії та моделювання плазмових процесів та відділу синергетики Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України. А саме «Формування нелінійних структур і розповсюдження хвиль в запорошеній плазмі» за договором №1Р-2010 відповідно до конкурсу спільних наукових проєктів НАН України – РФФД.

Частина досліджень виконана за підтримки гранту Державного фонду фундаментальних досліджень (Ф76/33256) спільного наукового проєкту

«Взаємодія та динаміка частинок скінченного розміру у слабоіонізованій плазмі та колоїдних суспензіях» Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України та Київського національного університету імені Тараса Шевченка (2017-2018 рр.).

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є теоретичний опис ефективних потенціалів порошинок і взаємодії між ними, а також флуктуацій електронної густини і поширення іонно-звукових хвиль у запорошеній слабоіонізованій плазмі з різною частотою зіткнень заряджених частинок із нейтральними, в тому числі за присутності зовнішнього постійного електричного або магнітного поля.

Для досягнення поставленої мети необхідно було вирішити наступні **завдання:**

- Розвинути кінетичну теорію запорошеної плазми, яка б враховувала зіткнення електронів та іонів із нейтральними частинками і порошинкою, а також дозволяла описати наявність зовнішніх полів. Аналітично і чисельно дослідити ефективний потенціал порошинки як у плазмі без зовнішніх полів, так і за присутності постійного магнітного поля.
- Дослідити ефективний потенціал зарядженої сферичної частинки, яка міститься у сильнозіткненному плазмоподібному середовищі, в тому числі за присутності зовнішнього постійного магнітного поля, і силу взаємодії між двома такими макрочастинками. Необхідність враховувати нелінійні ефекти, передбачає числове розв'язання цієї задачі. Запропонувати аналітичний вираз для ефективного потенціалу порошинки і дослідити можливість описання сили взаємодії макрочастинок у термінах цього потенціалу.
- Розв'язати чисельно задачу про силу тертя, яка діє на заряджену провідну сферичну порошинку з боку електричного поля, яке створюється потоком плазми (рухом порошинки). Отримати наближені аналітичні вирази для сили тертя і дослідити межі їх застосовності, порівнявши з результатами обчислень. А також розвинути кінетичний опис ефективного потенціалу порошинки у плазмі за присутності зовнішнього постійного електричного поля

і на його основі розрахувати силу тертя, яка діє на порошок.

- Узагальнити теорію великомасштабних флуктуацій для слабоіонізованої плазми із зіткненнями на випадок присутності зовнішнього постійного електричного поля. Отримати функцію діелектричного відгуку і чисельно розв'язати дисперсійне рівняння в області іонно-звукових хвиль. Дослідити спектри флуктуацій електронної густини.

- Дати послідовне лінійне кінетичне описання електромагнітних процесів у заповненій слабоіонізованій плазмі із зіткненнями, врахувавши поглинання електронів та іонів порошинками, а також флуктуації заряду порошинок. На його основі дослідити спектри флуктуацій електронної густини у заповненій плазмі і поширення в ній іонно-звукових хвиль.

Об'єкт дослідження – ефективні взаємодії, флуктуації та хвилі у заповненій слабоіонізованій плазмі.

Предмет дослідження – ефективні потенціали та взаємодія порошинок, сили, які діють на рухому порошок, флуктуації електронної густини і поширення іонно-звукових хвиль у заповненій слабоіонізованій плазмі, в тому числі за наявності зовнішніх полів.

Методи дослідження. В дисертаційній роботі використовувалися методи статистичної фізики плазми, зокрема кінетичного описання плазми з використанням формалізму ймовірності переходу, що є еквівалентним методу функцій Гріна. Була також використана теорія великомасштабних флуктуацій, побудована на основі усереднення мікроскопічної фазової густини, що дало змогу дослідити флуктуації електронної густини. Системи диференціальних рівнянь у частинних похідних, які виникали під час дослідження сильнозіткненої плазми у дрейфово-дифузійному наближенні, розв'язувалися чисельно з використанням методу скінченних елементів.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в тому, що вперше:

- На основі кінетичного рівняння Батнагара – Гросса – Крука (БГК)

розвинута кінетична теорія запырошеної плазми, яка враховує зіткнення електронів та іонів з нейтральними частинками. Центральним місцем нового підходу є описання поглинання електронів та іонів пырошинкою шляхом введення ефективних точкових стоків у кінетичні рівняння для плазмових частинок. Знайдено аналітичний розв'язок рівняння на основі формалізму ймовірності переходу, що дозволяє описати наявність зовнішніх електричних та магнітних полів. Знайдено аналітичний вираз для ефективного потенціалу пырошинки у плазмі із зовнішнім постійним магнітним полем. Показано, що такий потенціал має кулонівську асимптоту з ефективним зарядом, який залежить від кута між радіус-вектором та напрямком магнітного поля.

- В рамках дрейфово-дифузійного наближення чисельно розраховано ефективний потенціал зарядженої сферичної частинки, яка міститься у сильнозіткненному плазмоподібному середовищі. Розглянуто як випадок частинки, яка поглинає електрони та іони (пырошинка), так і випадок частинки із заданим зарядом (колоїдна частинка). Показано, що потенціал пырошинки із точністю до декількох відсотків можна описати суперпозицією кулонівського потенціалу і потенціалу Дебая з масштабованою довжиною екранування, яка у кілька разів більша за радіус Дебая.

- Чисельно розв'язана задача про екранування пырошинки у слабоіонізованій сильнозіткненній плазмі за присутності зовнішнього постійного магнітного поля. Вивчено просторовий розподіл потенціалу і густини заряду поблизу пырошинки і виконано порівняння з аналітичними оцінками. Показано, що в напрямку паралельному зовнішньому магнітному полю ефективний потенціал може мати немонотонну поведінку.

- Виконано числове дослідження сил взаємодії між двома зарядженими сферичними провідними частинками, які вміщені у слабоіонізоване сильнозіткнене ізотермічне плазмоподібне середовище. Обчислення проведені для випадку частинок з фіксованим електричним зарядом (колоїдних

частинок), а також для частинок, які заряджаються плазмовими струмами (порошинок). Показано, що на великих відстанях сила взаємодії між колоїдними частинками має асимптоту Дебая, тоді як для порошинок спостерігається кулонівська поведінка з ефективним зарядом.

- В рамках дрейфово-дифузійного наближення обчислено силу тертя, яка діє на сферичну провідну порошок, що стаціонарно рухається у сильно-зіткненній плазмі. Показано, що як для ізотермічної, так і неізотермічної плазми, розподіли електронів та іонів навколо порошок утворюють таке електричне поле, що сила, яка діє на порошок, направлена вздовж її швидкості, тобто має місце від'ємне тертя. В рамках моделі точкових стоків знайдено наближені аналітичні вирази для сили тертя, і визначені межі їх застосовності, шляхом порівняння з результатами числових розрахунків. Показано, що сила від'ємного тертя може перевищувати силу тертя з нейтральними частинками, яка описується законом Стокса.

- Узагальнено кінетичну теорію великомасштабних флуктуацій у плазмі на випадок присутності зовнішнього електричного поля з урахуванням зіткнень заряджених частинок із нейтральними, які описувались на основі простої моделі БГК. Дисперсійне рівняння для такої плазми розв'язано чисельно в області іонно-звукових хвиль. Показано, що зовнішнє електричне поле може призводити до нестійкості іонно-звукових хвиль. Виконано детальне числове дослідження впливу зіткнень і зовнішнього електричного поля на спектри флуктуацій електронної густини, показано, що поле призводить до аномального наростання інтенсивності флуктуацій.

- На основі кінетичного опису досліджено діелектричні властивості заповненої плазми з урахуванням заряджання порошинок плазмовими струмами та зіткнень плазмових частинок з нейтральними. Показано, що зіткнення електронів та іонів з порошинками, а також флуктуації заряду порошинок, є додатковими механізмами дисипації енергії іонно-звукових хвиль і призводять до суттєвого зростання модуля декременту згасання. З'ясовано, що присутність порошинок зі змінним зарядом суттєво впливає на спектри

флуктуацій електронної густини. Основними факторами цього впливу є: зменшення у запырошеній плазмі концентрації електронів по відношенню до концентрації іонів, збільшення частоти зіткнень іонів, через зіткнення із пырошинками і флуктуації заряду пырошинок.

Особистий внесок здобувача. Усі наукові результати, положення і висновки, що виносяться на захист, отримані здобувачем особисто. У наукових працях, опублікованих у співавторстві, здобувач брав участь у постановці задачі, йому належить проведення значної частини досліджень, аналіз, інтерпретація і оформлення результатів, безпосередня участь у написанні наукових статей. Переважна більшість теоретичних розрахунків та комп'ютерних обчислень виконані автором особисто. Основна частина результатів представлена автором особисто на вітчизняних і міжнародних конференціях та наукових семінарах. Вибір проблематики, постановка мети та завдань дослідження здійснено разом із науковим консультантом академіком НАН України, д.ф.-м.н., професором Загороднім А.Г.

Роботи [4, 6, 10–12] є одноосібними роботами здобувача. У статтях [1–3] здобувач отримав вирази для діелектричної проникності та кореляцій електронної густини для запырошеної плазми із зіткненнями, виконав числові розрахунки ефективних частот зіткнень і заряду пырошинки, числове розв'язання дисперсійного рівняння для іонно-звукових хвиль, обчислив і проаналізував спектри флуктуацій, а також виконав оформлення результатів. У роботах [7, 8] здобувач сформулював задачі про ефективний потенціал і взаємодію сферичних пырошинок у плазмі із частими зіткненнями і виконав їх числове розв'язання методом скінченних елементів, проаналізував і оформив результати обчислень, виконав їх порівняння із аналітичними виразами. У роботах [9, 13, 14] здобувач узагальнив теорію великомасштабних флуктуацій у плазмі на випадок присутності зовнішнього постійного електричного поля. Розрахував середні зміщення плазмових частинок. На основі числового розв'язання дисперсійного рівняння для іонно-звукових

хвиль дослідив появу нестійкості, обчислив спектри флуктуацій і проаналізував появу критичних флуктуацій. У роботах [9, 18, 19] здобувач розробляв кінетичний підхід до опису запыленої плазми із зіткненнями на основі моделі точкових стоків, а у роботах [16, 17] застосував цей підхід до вивчення ефективного потенціалу і динамічного екранування порошинки у плазмі. У роботах [5, 15, 20–22] здобувач виконував аналітичні розрахунки екранування нерухомої та рухомої порошинки та взаємодії двох порошинок, комп'ютерні обчислення в цих роботах були виконані іншими авторами.

Апробація матеріалів дисертації. Основні результати, викладені в роботі, доповідалися на наукових семінарах кафедри фізики функціональних матеріалів фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, відділу теорії та моделювання плазмових процесів та відділу синергетики Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України та були представлені на наступних наукових конференціях: 45th EPS Conference on Plasma Physics (Prague, Czech Republic, 2018); International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion (Kharkiv, Ukraine, 2018, 2016, 2014; Alushta, Ukraine, 2012, 2008); 2nd, 3rd, 5th International Conference “Dusty Plasmas in Applications” (Odesa, Ukraine, 2017, 2010, 2007); International Conference on Research and Application of Plasmas “PLASMA-2013” (Warsaw, Poland, 2013); 31st and 28th International Conference on Phenomena in Ionized Gases (ICPIG) (Granada, Spain, 2013; Prague, Czech Republic, 2007); International Advanced Workshop on the Frontiers of Plasma Physics (Miramare, Trieste, Italy, 2010); Bogolyubov Kyiv Conference “Modern Problems of Theoretical and Mathematical Physics” (Kyiv, Ukraine, 2009); Українська конференція з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу (Київ, Україна, 2009); Fifth International Conference on Physics of Dusty Plasmas (Ponta Delgada, Azores, Portugal, 2008); 17th Annual Student Conference “Week of Doctoral Students” (Prague, Czech Republic, 2008).

Публікації. За результатами дослідження опубліковано 38 наукових

праць: 1 монографію, 21 наукову статтю у фахових журналах, які входять до наукометричної бази даних Scopus, 5 праць і 11 тез доповідей наукових конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається із анотацій українською та англійською мовами, переліку праць здобувача, вступу, п'яти розділів, загальних висновків, списку використаних джерел та додатку. Загальний обсяг дисертації складає 297 сторінок, включаючи 95 рисунків та 5 таблиць. Список використаних джерел містить 267 найменувань.

РОЗДІЛ 1

ВЛАСТИВОСТІ ТА МЕТОДИ ОПИСАННЯ ЗАПОРОШЕНОЇ ПЛАЗМИ

У кінці 1980-х років виник новий розділ плазмової науки – фізика заповорошеної плазми [39–55]. Його поява була спричинена, з одного боку, поступом в експериментальних дослідженнях лабораторної та космічної плазми, а з іншого – численними практичними застосуваннями об'єктів і систем (зокрема, в плазмових технологіях [56–58]), що являють собою заповорошену плазму, тобто плазму з дрібнодисперсною домішкою конденсованої речовини.

Коли електрон або іон стикається з порошинкою він залишається на її поверхні. Оскільки теплова швидкість електронів у плазмі набагато більша за теплову швидкість іонів, то початково нейтральна порошинка починає заряджатися від'ємно. Зменшення концентрації плазмових частинок поблизу порошинки призводить до появи їх потоків, які направлені до поверхні порошинки. Збільшення від'ємного заряду порошинки призводить до збільшення іонного потоку і зменшення електронного. Заряд порошинки зростає доти, доки потоки плазмових частинок не стають рівними і сумарний струм через поверхню порошинки стає рівним нулю. Описаний спосіб заряджання порошинок є основним для газорозрядної плазми [49] і саме він буде розглядатися у дисертаційній роботі. Також порошинки можуть заряджатися в результаті емісії електронів. Електронна фотоемісія є важливою для заряджання порошинок у космічній заповорошеній плазмі, а термoeмісія та вторинна електронна емісія – для певних видів лабораторної заповорошеної плазми.

Далі у цьому розділі будуть викладені основні властивості заповорошеної плазми та теоретичні підходи до її описання, а також ключові аспекти кінетичної теорії звичайної плазми, яка є складовою теорії заповорошеної плазми. Крім того, на початку оригінальних розділів (підрозділів) містяться короткі огляди літератури, які стосуються конкретних задач, що розглядаються.

1.1 Параметри запорошеної плазми

Запорошена плазма характеризується складом та просторово-часовими розподілами параметрів. Щодо складу плазми, то її складовими є вільні електрони, іони (в загальному випадку іони можуть бути кількох сортів), нейтральні атоми і молекули, а також порошинки. Надалі сорт частинок будемо позначати індексом α (e – електрон, i – іон, n – нейтральна частинка, g – порошинка (grain)).

Плазма самоорганізується таким чином, що в основному об'ємі вона є квазінейтральною, тобто виконується умова

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} = 0, \quad (1.1)$$

де e_{α} – заряд, а $n_{\alpha} = N_{\alpha}/V$ – середня концентрація частинок сорту α .

У низькотемпературній плазмі іони, як правило, є однозарядними ($e_i = e$, $e_e = -e$, де e – елементарний заряд), тоді умова квазінейтральності (1.1), для випадку порошинок одного сорту, набуває вигляду

$$e_e n_e + e_i n_i + e_g n_g = 0. \quad (1.2)$$

Щоб визначити, наскільки сильно порошинки впливають на процеси у запорошеній плазмі, вводять так званий параметр Хавнеса [59]

$$P = \frac{|e_g| n_g}{e_i n_i} = \frac{e_g n_g}{e_e n_i}, \quad (1.3)$$

який є відношенням заряду порошинок до заряду іонів в одиниці об'єму і показує, яка частина електронного заряду знаходиться на порошинках. Очевидно, що $0 \leq P < 1$. У цьому випадку відношення концентрації іонів до концентрації електронів дорівнює

$$\frac{n_e}{n_i} = 1 - P. \quad (1.4)$$

Слід зазначити, що в літературі часто зустрічається й інше означення параметра Хавнеса, а саме $P = n_g e_g / (n_e e_e)$. В цьому разі, так само $0 \leq P$, але P може бути більшим за одиницю.

Разом з густиною частинок важливим параметром плазми є температура її компонентів T_α . В даній роботі вона вимірюється в енергетичних одиницях (електрон-вольтах). Температура, як і густина, має індекс; це означає, що температури іонів, електронів, нейтральних частинок і порошинок можуть бути різними. Оскільки маса електрона значно менша за масу іона чи нейтральної частинки, то в результаті зіткнень обмін енергією електронної підсистеми з іонною та нейтральною відбувається повільно. В плазмі газового розряду електричне поле прискорює електрони значно ефективніше, ніж іони, тому температура електронів буде вищою, ніж іонів, тобто $T_e \gg T_i, T_n$. Плазму, в якій $T_e = T_i$, називають ізотермічною, в іншому разі – неізотермічною. Відношення температур T_e/T_i називають параметром неізотермічності, ми будемо його позначати τ .

1.2 Зарядження порошинок у плазмі

Як зазначалося вище, у випадку газорозрядної плазми домінуючим є механізм зарядження порошинок плазмовими струмами. Потрапивши у плазму, порошок починає поглинати електрони й іони з плазмового оточення і оскільки потік електронів до поверхні нейтральної порошоківки інтенсивніший за іонний (через різницю теплових швидкостей), то порошок починає заряджатися від'ємно. Це призводить до поступового зменшення електронного потоку і збільшення іонного (електрони відштовхуються, а іони притягуються до від'ємно зарядженої порошоківки). Зрештою електронний та іонний струми вирівнюються. Це і є умова для визначення стаціонарного значення заряду порошоківки. Очевидно, що струми зарядження мають розраховуватися самоузгоджено з урахуванням особливостей і складу плазмового оточення, зокрема впливу зіткнень плазмових частинок із нейтральними. Нижче розглянуто кілька підходів до таких розрахунків.

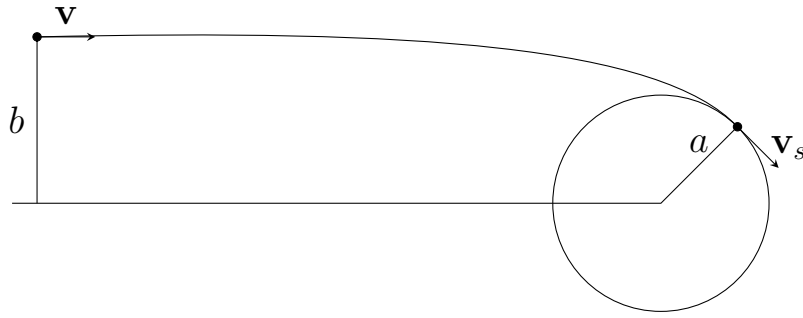


Рис. 1.1 Критична траєкторія іона.

1.2.1 Модель обмеженого орбітального руху

Для опису процесу заряджання порошинок у плазмі без зіткнень часто використовується так звана модель обмеженого орбітального руху (orbit motion limited (OML) approximation), яка була запозичена з теорії плазмових зондів [60–62]. Ця модель дає можливість отримати переріз поглинання плазмових частинок сферичною порошинкою чи зондом лише із законів збереження моменту імпульсу й енергії. Вважається, що коли прицільний параметр плазмової частинки менший чи дорівнює критичному, то вона поглинається порошинкою. Критичний прицільний параметр b відповідає ситуації, коли траєкторія плазмової частинки є дотичною до поверхні порошинки (рис. 1.1). Закон збереження моменту імпульсу для критичної траєкторії має вигляд

$$b m_{\alpha} v_0 = a m_{\alpha} v_s, \quad (1.5)$$

де v_0 – швидкість плазмової частинки на великій відстані від порошинки, a – радіус порошинки, v_s – швидкість у момент зіткнення з поверхнею порошинки.

Закон збереження енергії відповідно записується як

$$\frac{m_{\alpha} v_0^2}{2} + e_{\alpha} \varphi_0 = \frac{m_{\alpha} v_s^2}{2} + e_{\alpha} \varphi_s, \quad (1.6)$$

де φ_0 – потенціал на великій відстані від порошинки, φ_s – потенціал на поверхні порошинки.

Записуючи рівняння (1.5) і (1.6), ми вважаємо, що частинка, яка знаходиться на великій відстані від порошинки, може досягнути її поверхні без зіткнень, тобто модель обмеженого орбітального руху можна використовувати, коли $a \ll l_\alpha$, де l_α – довжина вільного пробігу плазмової частинки. Якщо у плазмі багато порошинок, то ця модель застосовна, коли можна вважати, що інші порошинки не впливають на рух електронів та іонів поблизу порошинки, яка розглядається (відстань між ними набагато більша за довжину Дебая λ_D і за l_α).

Якщо порошинка заряджена від'ємно, то $\varphi_s < 0$, і електрони зі швидкостями $v < \sqrt{2e_e\varphi_s/m_e}$ не досягають поверхні порошинки. Отже, для від'ємно зарядженої порошинки з рівнянь (1.5), (1.6) легко отримати перерізи поглинання:

$$\sigma_e(v) = \begin{cases} \pi a^2 \left(1 - \frac{2e_e\varphi_s}{m_e v^2}\right), & v^2 \geq \frac{2e_e\varphi_s}{m_e}, \\ 0, & v^2 < \frac{2e_e\varphi_s}{m_e}, \end{cases} \quad (1.7)$$

$$\sigma_i(v) = \pi a^2 \left(1 - \frac{2e_i\varphi_s}{m_i v^2}\right).$$

Інтеграл за швидкістю від одночастинкової функції розподілу $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ з відповідним перерізом поглинання (1.7) дає значення електронного (іонного) струму на поверхню порошинки:

$$I_\alpha(\mathbf{r}, t) = e_\alpha n_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \sigma_\alpha(v) v d\mathbf{v}. \quad (1.8)$$

Функція розподілу нормована на об'єм $\iint f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} d\mathbf{r} = V$.

Якщо вважати, що у стаціонарному стані функція розподілу є максвеллівською

$$f_{0\alpha}(v) = \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_\alpha v^2}{2T_\alpha}\right), \quad (1.9)$$

то інтегрування в (1.8) дає наступний результат:

$$I_i = e_i n_i a^2 2\sqrt{2\pi} v_{Ti} (1 - e_i \varphi_s / T_i), \quad (1.10)$$

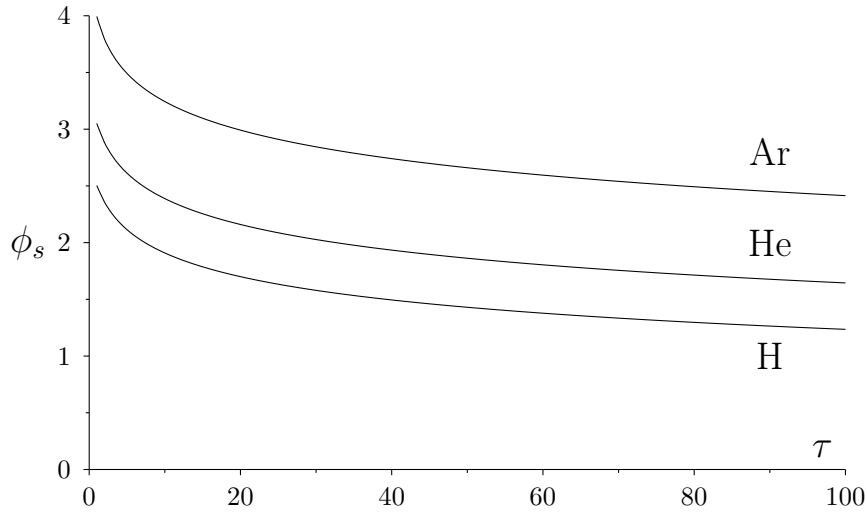


Рис. 1.2 Залежність безрозмірного поверхневого потенціалу $\phi_s = e_e \varphi_s / T_e$ від τ , для різних типів плазми (H, He, Ar), ϕ_s знайдено з рівняння (1.13) з $n_e/n_i = 1$.

$$I_e = e_e n_e a^2 2\sqrt{2\pi} v_{Te} \exp(-e_e \varphi_s / T_e), \quad (1.11)$$

де $v_{T\alpha} = \sqrt{T_\alpha / m_\alpha}$ – теплова швидкість.

Величина $\phi_s = e_e \varphi_s / T_e$, яка входить до (1.10) і (1.11), є безрозмірним поверхневим потенціалом. У стаціонарному стані повний струм на поверхню порошинки дорівнює нулю, тобто

$$I_{\text{tot}} = I_e + I_i = 0. \quad (1.12)$$

Для однозарядних іонів, підстановка (1.10) та (1.11) в (1.12) дає рівняння

$$\frac{n_e}{n_i} e^{-\phi_s} \sqrt{\tau \frac{m_i}{m_e}} = 1 + \phi_s \tau. \quad (1.13)$$

Приклади залежності ϕ_s від τ для різних типів плазми показано на рис. 1.2.

Якщо припустити, що потенціал на поверхні порошинки $\varphi_s = q/a$, що справедливо при $a \ll \lambda_D$, то

$$\phi_s = z_g = \frac{q e_e}{a T_e}, \quad (1.14)$$

де q – заряд порошинки. Величина z_g є безрозмірним зарядом порошинки. Відношення n_e/n_i в (1.13) визначається з умови квазінейтральності (1.1) і для низької концентрації порошинок його можна вважати рівним одиниці. Коли в плазмі багато порошинок, тоді відношення концентрації електронів до концентрації іонів визначається співвідношенням (1.4). Зменшення електронної концентрації порівняно з іонною у запорошеній плазмі призводить до зменшення безрозмірного поверхневого потенціалу ϕ_s (безрозміреного заряду порошинки z_g).

1.2.2 Дрейфово-дифузійне наближення

За умови $l_\alpha \ll \lambda_D$ наближення обмеженого орбітального руху втрачає свою застосовність. Такий випадок відповідає сильнозіткненній запорошеній плазмі, яка має місце наприклад у експериментах [63–65]. Зарядження порошинок у такій плазмі можна описати у дрейфово-дифузійному наближенні. Вираз для густини потоку плазмових частинок при цьому має вигляд [66]

$$\mathbf{\Gamma}_\alpha = n_\alpha \mu_\alpha \mathbf{E} - D_\alpha \nabla n_\alpha. \quad (1.15)$$

Перший доданок в (1.15) описує дрейфовий потік, другий – дифузійний. Тут μ_α – рухливість електронів чи іонів, \mathbf{E} – напруженість електричного поля, D_α – коефіцієнт дифузії (коефіцієнт дифузії електронів зазвичай значно більший, ніж іонів).

Рухливість – це коефіцієнт пропорційності між дрейфовою швидкістю частинки і електричним полем, яке спричиняє цей дрейф. Рухливість і коефіцієнт дифузії пов'язані співвідношенням Айнштайна:

$$\frac{D_\alpha}{\mu_\alpha} = \frac{T_\alpha}{e_\alpha}. \quad (1.16)$$

Враховуючи попередню формулу і співвідношення $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, (1.15) можна переписати у вигляді

$$\mathbf{\Gamma}_\alpha = -D_\alpha \left(\frac{e_\alpha}{T_\alpha} n_\alpha \nabla\varphi + \nabla n_\alpha \right). \quad (1.17)$$

Густина потоку (1.17) входить у рівняння неперервності, яке для плазми можна записати у вигляді [63]:

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \Gamma_\alpha = I + k_{\text{ion}} n_e n_n - \beta n_e n_i, \quad (1.18)$$

де I – інтенсивність об’ємної іонізації плазми зовнішніми джерелами, k_{ion} – константа швидкості іонізації газу власними електронами плазми, n_n – концентрація нейтральних частинок, β – коефіцієнт електрон-іонної рекомбінації.

Електростатичний потенціал задовольняє рівняння Пуассона

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = -4\pi \rho(\mathbf{r}). \quad (1.19)$$

У випадку плазми густина заряду має вигляд

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha}(\mathbf{r}).$$

Систему рівнянь (1.18), (1.19) необхідно доповнити крайовими умовами для потенціалу та концентрацій плазмових частинок на поверхні порошинок та на великій відстані від них. Умови для n_{α} повинні врахувати поглинання електронів та іонів поверхнею порошинки. Ця система не розв’язується аналітично, приклади її числового розв’язання можна знайти в [67, 68]. А приклад наближеного аналітичного розв’язку наведено у наступному підрозділі.

1.3 Модель точкових стоків у дрейфово-дифузійному наближенні

Щоб уникнути використання крайових умов для концентрацій плазмових частинок і при цьому врахувати їх поглинання порошинкою була запропонована [69–71] модель точкових стоків. В рамках цієї моделі рівняння неперервності (1.18) без врахування об’ємних джерел іонізації та

рекомбінації має вигляд

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \Gamma_\alpha = -S_\alpha \delta(\mathbf{r}). \quad (1.20)$$

Права частина у (1.20) описує поглинання плазми точковим стоком, $S_\alpha(t)$ – інтенсивність стоку, яка вважається заданою, $\delta(\mathbf{r})$ – дельта-функція, $n_\alpha = n_\alpha(\mathbf{r}, t)$. Задача полягає в тому, щоб знайти розподіл потенціалу і густини плазми поблизу порошинки.

Рівняння Пуассона (1.19) при цьому має вигляд

$$\Delta \varphi = -4\pi \sum_{\alpha=e,i} e_\alpha n_\alpha - 4\pi q(t) \delta(\mathbf{r}), \quad (1.21)$$

де потенціал $\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t)$ залежить як від координати, так і від часу, а заряд порошинки $q(t)$ лише від часу. Оскільки умовою застосовності дрейфово-дифузійного наближення є умова $a \gg l_\alpha$, то сформульована система рівнянь може давати неправильну поведінку потенціалу і розподілу густини заряду на відстанях від точкового стоку ближчих, ніж декілька l_α .

Заряд порошинки та інтенсивності стоку плазмових частинок не є незалежними, а пов'язані співвідношенням

$$\frac{dq}{dt} = e_i S_i(t) + e_e S_e(t). \quad (1.22)$$

Ці величини не визначаються у рамках даного підходу, але їх можна знайти шляхом порівняння з результатами числового моделювання.

Після підстановки (1.17) в (1.20) і лінеаризації, рівняння (1.20) та (1.21) набувають вигляду

$$\frac{\partial \delta n_\alpha}{\partial t} - D_\alpha \frac{e_\alpha n_0}{T_\alpha} \Delta \varphi - D_\alpha \Delta \delta n_\alpha = -S_\alpha \delta(\mathbf{r}), \quad (1.23)$$

$$\Delta \varphi = -4\pi e (\delta n_i - \delta n_e) - 4\pi q \delta(\mathbf{r}), \quad (1.24)$$

де $\delta n_\alpha(\mathbf{r}, t) = n_\alpha(\mathbf{r}, t) - n_0$ – збурення концентрації плазмових частинок, пов'язане з присутністю порошинки, $e_e = -e$, $e_i = e$.

У $\mathbf{k}\omega$ -представленні рівняння (1.23) і (1.24) мають вигляд

$$-i\frac{\omega}{D_\alpha}\delta n_{\alpha\mathbf{k}\omega} + \frac{e_\alpha n_0}{T_\alpha}k^2\varphi_{\mathbf{k}\omega} + k^2\delta n_{\alpha\mathbf{k}\omega} = -\tilde{S}_{\alpha\omega}/e, \quad (1.25)$$

$$k^2\varphi_{\mathbf{k}\omega} = 4\pi e(\delta n_{i\mathbf{k}\omega} - \delta n_{e\mathbf{k}\omega}) + 4\pi q_\omega, \quad (1.26)$$

де $\tilde{S}_{\alpha\omega} = eS_{\alpha\omega}/D_\alpha$,

$$\delta n_{\alpha\mathbf{k}\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \delta n_\alpha(\mathbf{r}, t).$$

Підстановка (1.26) у (1.25) дає систему двох рівнянь відносно $\delta n_{i\mathbf{k}\omega}, \delta n_{e\mathbf{k}\omega}$, розв'язками цієї системи є

$$\delta n_{i\mathbf{k}\omega} = \frac{1}{e\Delta_\omega} \left((i\omega/D_e - k^2)(\tilde{S}_{i\omega} + k_{Di}^2 q_\omega) - \tilde{S}_{i\omega} k_{De}^2 - \tilde{S}_{e\omega} k_{Di}^2 \right), \quad (1.27)$$

$$\delta n_{e\mathbf{k}\omega} = \frac{1}{e\Delta_\omega} \left((i\omega/D_i - k^2)(\tilde{S}_{e\omega} - k_{De}^2 q_\omega) - \tilde{S}_{i\omega} k_{De}^2 - \tilde{S}_{e\omega} k_{Di}^2 \right), \quad (1.28)$$

де

$$\Delta_\omega = -\frac{\omega^2}{D_i D_e} - i\frac{\omega}{D_e}(k_{Di}^2 + k^2) - i\frac{\omega}{D_i}(k_{De}^2 + k^2) + k^2(k^2 + k_D^2),$$

$$k_{D\alpha}^2 = \frac{4\pi e_\alpha^2 n_\alpha}{T_\alpha}, \quad k_D^2 = k_{Di}^2 + k_{De}^2.$$

Підстановка (1.27) і (1.28) в (1.26) дає фур'є-образ потенціалу

$$\varphi_{\mathbf{k}\omega} = \frac{4\pi q_\omega}{k^2} + \frac{4\pi}{k^2 \Delta_\omega} \left(i\omega q_\omega \left(\frac{k_{Di}^2}{D_e} + \frac{k_{De}^2}{D_i} \right) + \right. \\ \left. + i\omega e \frac{S_{i\omega} - S_{e\omega}}{D_i D_e} - k^2 (q_\omega k_D^2 + \tilde{S}_{i\omega} - \tilde{S}_{e\omega}) \right). \quad (1.29)$$

Як видно потенціал складається з власного потенціалу точкової порошокинки (перший доданок) та індукованої частини, що зумовлена відгуком системи як на електричне поле порошокинки, так і наявністю стоків.

1.3.1 Стаціонарний випадок

Розглянемо стаціонарну задачу. У цьому випадку заряд порошинки не змінюється з часом, з чого випливає (див. (1.22)), що потоки електронів та іонів на порошинку рівні $S_i = S_e = S$. Формула (1.29) при цьому спрощуються і потенціал має вигляд

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi(q + \tilde{S})}{k^2 + k_D^2} - \frac{4\pi\tilde{S}}{k^2}, \quad (1.30)$$

де

$$\tilde{S} = \frac{eS}{k_D^2} \left(\frac{1}{D_i} - \frac{1}{D_e} \right). \quad (1.31)$$

Ця величина має розмірність заряду і є додатною, оскільки $D_e > D_i$. В координатному представленні відповідно маємо

$$\varphi(r) = (q + \tilde{S}) \frac{e^{-k_D r}}{r} - \frac{\tilde{S}}{r}. \quad (1.32)$$

Потенціал є суперпозицією дебаївського і кулонівського потенціалів з ефективними зарядами. Як видно з (1.32) $-\tilde{S}$ можна трактувати як ефективний заряд у неекранованій частині потенціалу. Ця величина може бути пов'язана з зарядом порошинки наступним чином $\tilde{S} = -\alpha q$, де коефіцієнт пропорційності α , можна взяти з числового розв'язку задачі [8, 67], значення α залежить від радіуса порошинки, і у ізотермічній плазмі змінюється у межах від $\alpha \ll 1$ для великих порошинок і прямує до значення 0.5, коли радіус порошинки прямує до нуля.

1.3.2 Динамічне екранування

Розглянемо ще один частинний випадок розв'язків (1.27)–(1.29), а саме екранування порошинки, що рухається поступально з постійною швидкістю \mathbf{v} [69, 71]. Коли порошинка рухається рівномірно і прямолінійно, її заряд q не змінюється з часом, отже, $S_\alpha(t) = S$. Для описання такої системи останній доданок в рівнянні неперервності (1.20) $S_\alpha(t)\delta(\mathbf{r})$ необхідно замінити на

$S\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$ і також у рівнянні Пуассона (1.21) вираз $4\pi q(t)\delta(\mathbf{r})$ замінити на $4\pi q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$. Тоді

$$(S_\alpha(t)\delta(\mathbf{r}))_{\mathbf{k}\omega} = S_{\alpha\omega},$$

заміняється на

$$(S\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t))_{\mathbf{k}\omega} = 2\pi S\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}).$$

Отже, у формули (1.27)–(1.29) підставляємо

$$\begin{aligned} q_\omega &= 2\pi q\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}), \\ S_{\alpha\omega} &= 2\pi S\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \end{aligned}$$

і остаточно маємо

$$\varphi_{\mathbf{k}\omega} = \frac{8\pi^2\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})}{k^2\Delta_\omega^{(2)}} \left(i\omega q \left(\frac{k_{Di}^2}{D_e} + \frac{k_{De}^2}{D_i} \right) - k^2 k_D^2 (q + \tilde{S}) \right) + \frac{8\pi^2 q\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})}{k^2}, \quad (1.33)$$

де

$$\Delta_\omega^{(2)} = -\frac{\omega^2}{D_i D_e} - i\omega \left(\frac{k_{Di}^2}{D_e} + \frac{k_{De}^2}{D_i} \right) - i\omega k^2 \left(\frac{1}{D_e} + \frac{1}{D_i} \right) + k^4 + k^2 k_D^2.$$

Останній доданок в (1.33) – це потенціал самої частинки, а перший є індукованим потенціалом. Виконуючи зворотнє перетворення Фур'є

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \varphi_{\mathbf{k}\omega},$$

отримуємо

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^2} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)} \times \\ &\times \left(q + \frac{i\mathbf{k}\mathbf{v}q \left(\frac{k_{Di}^2}{D_e} + \frac{k_{De}^2}{D_i} \right) - k^2 k_D^2 (q + \tilde{S})}{-\frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^2}{D_i D_e} - i\mathbf{k}\mathbf{v} \left(\frac{k_{Di}^2}{D_e} + \frac{k_{De}^2}{D_i} \right) - i\mathbf{k}\mathbf{v}k^2 \left(\frac{1}{D_e} + \frac{1}{D_i} \right) + k^4 + k^2 k_D^2} \right). \quad (1.34) \end{aligned}$$

При $S = 0$ це співвідношення описує екранування точкової частинки, що рухається з постійною швидкістю у слабоіонізованій плазмі.

Знайдемо силу, яка діє на порошок з боку індукованого нею потенціалу

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = -q \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{v}t} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}}.$$

Для цього підставимо у попереднє рівняння вираз для потенціалу (1.34)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{v}) = & -\frac{iq}{2\pi^2} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^2} \mathbf{k} \times \\ & \times \left(q + \frac{i\mathbf{k}\mathbf{v}q \left(\frac{k_{Di}^2}{D_e} + \frac{k_{De}^2}{D_i} \right) - k^2 k_D^2 (q + \tilde{S})}{-\frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^2}{D_i D_e} - i\mathbf{k}\mathbf{v} \left(\frac{k_{Di}^2}{D_e} + \frac{k_{De}^2}{D_i} \right) - i\mathbf{k}\mathbf{v}k^2 \left(\frac{1}{D_e} + \frac{1}{D_i} \right) + k^4 + k^2 k_D^2} \right). \end{aligned}$$

Перейдемо далі до сферичної системи координат, направивши вісь k_z вздовж \mathbf{v} . Очевидно, не нульовою буде лише z -ова компонента вектора \mathbf{F} . Після інтегрування за кутом φ маємо

$$F_z(v) = \frac{iq}{\pi} \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 d\mu \frac{i\mu^2 kvq \left(\frac{k_{Di}^2}{D_e} + \frac{k_{De}^2}{D_i} \right) - \mu k^2 k_D^2 (q + \tilde{S})}{\mu^2 \frac{kv^2}{D_i D_e} + i\mu v \left(\frac{k_{Di}^2}{D_e} + \frac{k_{De}^2}{D_i} \right) + i\mu k^2 v \left(\frac{1}{D_e} + \frac{1}{D_i} \right) - k(k^2 + k_D^2)}. \quad (1.35)$$

Обчислення за формулою (1.35), виконані у [69, 71], показують, що сила, яка діє на рухому порошок з боку індукованого заряду, може бути направлена вздовж швидкості порошку, тобто може мати місце від'ємне тертя. До аналогічного висновку прийшли автори робіт [72–74]. Але цей цікавий результат отримано у лінійному наближенні для точкового заряду, тому нами були проведені розрахунки, що представлені у розділі 4, які враховують нелінійні ефекти та скінченний розмір порошку.

1.4 Неідеальність запорошеної плазми і фазові переходи

Умови, які можуть реалізуватися в запорошеній плазмі характеризуються широким розмаїттям параметрів. Одним з основних параметрів

системи з кулонівською взаємодією є параметр неідеальності, який означають як відношення кулонівської енергії між сусідніми частинками із зарядами q до їхньої середньої кінетичної енергії [9, п. 16.6]:

$$\Gamma = \frac{q^2}{T\Delta}, \quad (1.36)$$

де $\Delta = n^{-1/3}$ – характерна середня відстань між частинками, T і n – їхня температура і концентрація. Для електронів та іонів

$$\Gamma_\alpha = \frac{e_\alpha^2 n_\alpha^{1/3}}{T_\alpha}, \quad \alpha = e, i. \quad (1.37)$$

Систему називають неідеальною, якщо $\Gamma \gtrsim 1$. Як відомо, заряди в плазмі екрануються. Тому у випадку заповненої плазми поряд з міжчастинковою відстанню існує ще один просторовий масштаб – радіус екранування λ_D , окрім того, розмір порошинки. Для умов більшості експериментів із заповненою плазмою число електронів та іонів у дебаївській сфері, як правило, велике, тобто електронна та іонна підсистеми є ідеальними: $n_\alpha \lambda_D^3 \gg 1$ ($\alpha = e, i$), а $\Gamma_\alpha \sim (n_\alpha \lambda_D)^{-2/3} \ll 1$.

Ситуація може змінитися у випадку підсистеми порошинок. Якщо $n_g \lambda_D^3 \gg 1$, то заповнена плазма залишається ідеальною. При цьому порошинки відіграють роль додаткової плазмової компоненти і беруть участь в екрануванні зарядів у плазмі:

$$\lambda_D^{-2} = \sum_{\alpha=e,i,g} \frac{4\pi e_\alpha^2 n_\alpha}{T_\alpha}. \quad (1.38)$$

У протилежному випадку ($n_g \lambda_D^3 \ll 1$) підсистема порошинок не завжди неідеальна, оскільки екранування може визначатися електронами та іонами, тобто відстань між частинками $\Delta = n_g^{-1/3}$ може бути меншою за λ_D , але якщо порошинки екрануються лише іонами і електронами, то заповнена плазма залишається ідеальною.

На сьогодні більшість теорій, що використовуються для описання фазових переходів у запырошеній плазмі, пов'язані з моделлю однокомпонентної плазми (ОКП), частинки якої взаємодіють з потенціалам Дебая (Юкави). Енергія взаємодії частинок має вигляд

$$U(r) = \frac{q^2}{r} e^{-r/\lambda_D}. \quad (1.39)$$

Тут λ_D – довжина екранування заряду плазмовими частинками (електронами та іонами). При цьому припускається, що існує компенсувальний фон, який забезпечує електронейтральність системи. Вже та обставина, що ефективний потенціал порошинки далеко не завжди можна розглядати як екранований (див. п. 1.3.1) свідчить про те, що модель ОКП з енергією взаємодії (1.39) часто не є адекватною. Менше з тим, з її допомогою вдалося описати низку експериментів, а отже, вона розглядається як основа для розробки більш реалістичних моделей.

Зауважимо, що окрім запырошеної плазми системи із взаємодією (1.39) вивчались у багатьох розділах фізики – від колоїдних розчинів до фізики елементарних частинок. Саме цьому вивченню фазових діаграм таких систем методами Монте-Карло та молекулярної динаміки приділяється значна увага.

У випадку, що розглядається, статистичні властивості дебаєвських систем повністю характеризуються двома параметрами. Одним з них може бути константа зв'язку порошинок: $\Gamma_g = q^2/T_g\Delta$, а другим – структурний параметр (параметр ґратки):

$$\varkappa = \frac{\Delta}{\lambda_D}. \quad (1.40)$$

При цьому границя $\varkappa \rightarrow 0$ буде відповідати однокомпонентній моделі з кулонівською взаємодією.

На рис. 1.3 зображена фазова діаграма дебаєвської системи в площині

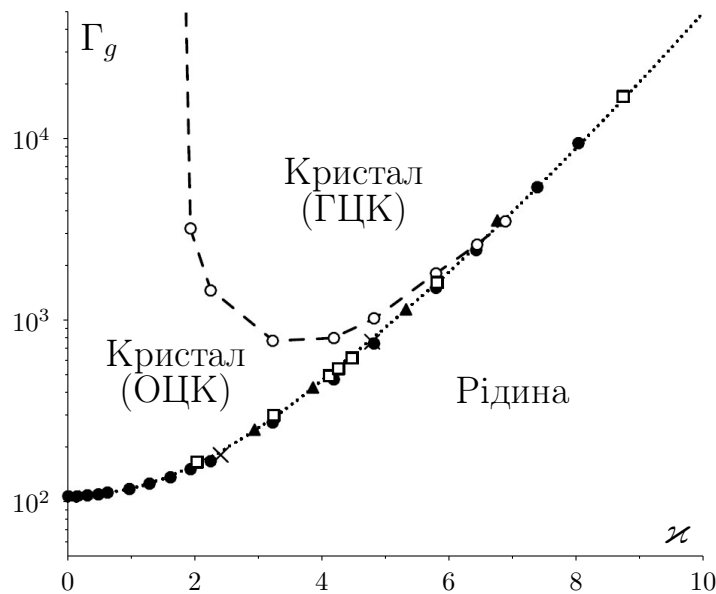


Рис. 1.3 Фазова діаграма дебаївських систем, отримана за допомогою числового моделювання. Світлим кружком позначена межа між кристалічними ОЦК- та ГЦК-фазами [75]. Межі рідина–кристал відповідають трикутникам – [76], квадрати – [77], темні кружки – [75]. Хрестики відповідають стрибку константи дифузії при моделюванні дисипативних дебаївських систем [78, 79]. Штрихова крива проведена наближено за числовими результатами.

(κ, Γ_g) . Ця діаграма була побудована в [49], на основі числового моделювання, виконаного в [75–79].

Моделювання свідчить про існування трьох фаз. Якщо позначити через Γ_M величину Γ_g на лінії плавлення, то в області сильної неідеальності $\Gamma_g > \Gamma_M$ можуть існувати кристалічні об'ємноцентрована кубічна (ОЦК) та гранецентрована кубічна (ГЦК) ґратки, а при $\Gamma_g < \Gamma_M$ існує рідинна фаза. ОЦК фаза стабільна за малих значень κ , а за великих значень структурного параметра κ стабільною є ГЦК фаза. Трикритичній точці відповідають $\kappa \simeq 6.9$, а $\Gamma_g = 3.47 \cdot 10^3$ [75].

У випадку ОКП з кулонівською взаємодією кристалізація відбувається при $\Gamma_g = \Gamma_{\text{окп}} \simeq 106$ (або 172 при використанні радіуса Вігнера – Зейтца $(4\pi n_g/3)^{-1/3}$ як одиниці довжини замість $\Delta = n_g^{-1/3}$).

1.5 Плазма як діелектричне середовище

Основна відмінність плазми, в тому числі і запорошеної, від інших середовищ полягає в далекосяжності потенціалу взаємодії частинок, з яких вона складається, а отже, одночасно може взаємодіяти велика кількість частинок. При цьому у плазмі виникають самоузгоджені поля, властивості яких можуть суттєво відрізнятися від властивостей поля в діелектричних середовищах (рідини, газу, діелектричні тверді тіла). Останнє вказує на те, що опис діелектричних властивостей плазми обов'язково повинен враховувати самоузгоджену динаміку всіх її компонентів, яка і визначає матеріальні зв'язки між електромагнітними величинами [9, розділ. 4].

1.5.1 Мікроскопічні рівняння для плазми та їхнє усереднення, діелектричний відгук середовища

Рівняння Максвелла для мікроскопічного електромагнітного поля у плазмі мають вигляд

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \mathbf{E}_M(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}_M(\mathbf{r}, t), \\
 \operatorname{div} \mathbf{H}_M(\mathbf{r}, t) &= 0, \\
 \operatorname{rot} \mathbf{H}_M(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_M(\mathbf{r}, t) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_M(\mathbf{r}, t) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t), \\
 \operatorname{div} \mathbf{E}_M(\mathbf{r}, t) &= 4\pi \rho_M(\mathbf{r}, t) + 4\pi \rho^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t).
 \end{aligned} \tag{1.41}$$

Тут $\mathbf{E}_M(\mathbf{r}, t)$ та $\mathbf{H}_M(\mathbf{r}, t)$ – мікроскопічні електричне та магнітне поля, $\mathbf{j}_M(\mathbf{r}, t)$, $\rho_M(\mathbf{r}, t)$ – густина струму і густина зарядів плазми, $\mathbf{j}^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$, $\rho^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$ – густини сторонніх струму і зарядів.

Введемо далі поняття макроскопічного електричного і магнітного полів:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \langle \mathbf{E}_M(\mathbf{r}, t) \rangle, \\
 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \langle \mathbf{H}_M(\mathbf{r}, t) \rangle,
 \end{aligned} \tag{1.42}$$

де кутові дужки означають усереднення за фізично нескінченно малим

об'ємом V_{ph} або фізично нескінченно малим часовим інтервалом τ_{ph} , тобто

$$\langle A(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{V_{\text{ph}}} \int_{V_{\text{ph}}} d\mathbf{r}' A_{\text{M}}(\mathbf{r}', t), \quad (1.43)$$

або

$$\langle A(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{\tau_{\text{ph}}} \int_{t-\tau_{\text{ph}}/2}^{t+\tau_{\text{ph}}/2} dt' A_{\text{M}}(\mathbf{r}, t'). \quad (1.44)$$

Величина V_{ph} вибирається так, щоб цей об'єм вміщав багато частинок ($N_{\text{ph}} \gg 1$), але його розмір був би значно менший за характерний просторовий масштаб зміни усередненої величини. Щодо τ_{ph} , то має виконуватися подвійна нерівність

$$\tau_{\text{cor}} \ll \tau_{\text{ph}} \ll \tau_{\text{rel}}, \quad (1.45)$$

де τ_{cor} – час згасання двочастинкових кореляцій, а τ_{rel} – характерний час зміни функції розподілу, який, як очевидно, визначає характерний час зміни усереднених електромагнітних величин.

Застосуємо процедуру усереднення до рівнянь (1.41). У результаті отримаємо

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (1.46)$$

$$\text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.47)$$

$$\text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{4\pi}{c} \langle \mathbf{j}_{\text{M}}(\mathbf{r}, t) \rangle + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t), \quad (1.48)$$

$$\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \langle \rho_{\text{M}}(\mathbf{r}, t) \rangle + 4\pi \rho^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t). \quad (1.49)$$

Наступне завдання полягає у встановленні функціонального зв'язку середнього значення макроскопічного струму $\langle \mathbf{j}_{\text{M}}(\mathbf{r}, t) \rangle$ з електромагнітним

полем. Обмежившись лінійним наближенням, такий зв'язок у найзагальнішому випадку можна записати у вигляді [80, 81], [9, п. 4.2]

$$\langle j_{iM}(\mathbf{r}, t) \rangle \equiv j_i^{\text{ind}}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \sigma_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') E_j(\mathbf{r}', t'). \quad (1.50)$$

Це рівняння задає тензор провідності системи $\sigma_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$.

Підставивши (1.50) в (1.48), отримуємо

$$\text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t), \quad (1.51)$$

де

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') E_j(\mathbf{r}', t'), \quad (1.52)$$

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') + 4\pi \int_{t'}^t dt'' \sigma_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t'', t'). \quad (1.53)$$

Тензор $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$ називають тензором діелектричної проникності.

Остаточно рівняння Максвелла набувають вигляду

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \\ \text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0, \\ \text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t), \\ \text{div } \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= 4\pi \rho^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (1.54)$$

У випадку стаціонарної і просторово-однорідної системи (це означає також, що вона необмежена), залежність тензорів провідності і діелектричної проникності від t і t' зводиться до залежності від $t - t' \equiv \tau$ і від різниці координат $\mathbf{r} - \mathbf{r}' \equiv \mathbf{R}$. Це перетворює інтеграли (1.50), (1.52) в просторово-часові згортки.

Отже, зв'язок між фур'є-компонентами індукції і поля (струму і поля) стає алгебраїчним:

$$D_{i\mathbf{k}\omega} = \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_{j\mathbf{k}\omega}, \quad (1.55)$$

$$j_{i\mathbf{k}\omega}^{\text{ind}} = \sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_{j\mathbf{k}\omega}, \quad (1.56)$$

де

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \int_0^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}} \varepsilon_{ij}(\mathbf{R}, \tau), \quad (1.57)$$

і аналогічна формула має місце для $\sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$. При цьому

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega), \quad (1.58)$$

а просторові фур'є-компоненти польових величин визначаються співвідношенням типу

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (1.59)$$

Для зворотного перетворення Фур'є відповідно маємо

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}. \quad (1.60)$$

Представлення (1.57) вказує на те, що $\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ (так само як і $\sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$) є аналітичною функцією у верхній півплощині комплексної площини ω , оскільки зі зростанням інтервалу $\tau = t - t'$ відгук має слабшати, а отже, інтеграл буде збіжним при $\text{Im } \omega > 0$. З урахуванням (1.60) система рівнянь

для електромагнітного поля набуває вигляду

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{kE}_{\mathbf{k}\omega}] &= \frac{\omega}{c} \mathbf{B}_{\mathbf{k}\omega}, \\
 \mathbf{kB}_{\mathbf{k}\omega} &= 0, \\
 [\mathbf{kB}_{\mathbf{k}\omega}] &= -\frac{\omega}{c} \mathbf{D}_{\mathbf{k}\omega} - \frac{4\pi i}{c} \mathbf{j}_{\mathbf{k}\omega}^{\text{ext}}, \\
 \mathbf{kD}_{\mathbf{k}\omega} &= -4\pi i \rho_{\mathbf{k}\omega}^{\text{ext}}.
 \end{aligned} \tag{1.61}$$

Виключивши з розгляду $\mathbf{B}_{\mathbf{k}\omega}$ за допомогою першого рівняння та врахувавши (1.55), отримуємо наступну систему алгебраїчних рівнянь для фур'є-компонент електричного поля:

$$\Lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_{j\mathbf{k}\omega} = -\frac{4\pi i}{\omega} j_{i\mathbf{k}\omega}^{\text{ext}}, \tag{1.62}$$

де

$$\Lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \tag{1.63}$$

– дисперсійний тензор, який містить всю інформацію про електромагнітні властивості системи. Зауважимо, що рівняння (1.62) є загальними і можуть бути використані як для звичайної плазми, так і для запыленої плазми і, взагалі, для будь-яких інших середовищ, якщо тензор провідності, який задає діелектричну проникність, встановлює зв'язок між електричним полем та повним індукованим струмом в системі.

Формальний розв'язок (1.62) має вигляд

$$E_{i\mathbf{k}\omega} = -\frac{4\pi i}{\omega} \Lambda_{ij}^{-1}(\mathbf{k}, \omega) j_{j\mathbf{k}\omega}^{\text{ext}}, \tag{1.64}$$

де $\Lambda_{ij}^{-1}(\mathbf{k}, \omega)$ – матриця, обернена до $\Lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$, тобто $\Lambda_{ik}^{-1}(\mathbf{k}, \omega) \Lambda_{kj}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{ij}$

1.5.2 Описання плазми у квазіпотенціальному наближенні

У загальному випадку, окрім поздовжніх хвиль в ізотропному середовищі, електричне поле має як потенціальну, так і вихорову складову. З

рівнянь Максвелла (1.54) впливає, що електричне поле буде строго потенціальним, якщо знехтувати скінченністю швидкості світла ($c \rightarrow \infty$). Дійсно, у цьому наближенні [9, п. 4.5]

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \equiv 0, \quad (1.65)$$

отже,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}, t). \quad (1.66)$$

Оскільки швидкість світла скінченна, то співвідношення (1.65) можуть виконуватися лише наближено, причому, як це впливає з (1.54), воно буде тим точніше, чим меншою є величина $R/(c\tau)$ (тут R і τ – характерний просторовий і часовий масштаби зміни електричного поля). Для хвиль за R можна взяти довжину хвилі, а за τ – обернену частоту. Тоді умова малості вихрової частини набуває вигляду

$$\eta \equiv \frac{kc}{\omega} \gg 1. \quad (1.67)$$

В явному вигляді ця умова впливає з рівнянь Максвелла у $\mathbf{k}\omega$ -представленні (1.61).

Отже, якщо $\eta \gg 1$ (фазова швидкість хвилі значно менша за швидкість світла), то система рівнянь (1.61) зводиться до одного рівняння:

$$\mathbf{kD}_{\mathbf{k}\omega} = -4\pi i \rho_{\mathbf{k}\omega}^{\text{ext}}. \quad (1.68)$$

З урахуванням (1.66) $E_{i\mathbf{k}\omega} = -ik_i\varphi_{\mathbf{k}\omega}$ маємо

$$k^2\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)\varphi_{\mathbf{k}\omega} = 4\pi\rho_{\mathbf{k}\omega}^{\text{ext}}, \quad (1.69)$$

де

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \quad (1.70)$$

– поздовжня частина тензора діелектричної проникності.

Таким чином,

$$\varphi_{\mathbf{k}\omega} = \frac{4\pi\rho_{\mathbf{k}\omega}^{\text{ext}}}{k^2\varepsilon(\mathbf{k},\omega)}. \quad (1.71)$$

Порівнявши (1.71) з фур'є-компонентою заданого розподілу заряду у вакуумі

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi\rho_{\mathbf{k}}^{\text{ext}}}{k^2}, \quad (1.72)$$

доходимо висновку, що величина $\varepsilon(\mathbf{k},\omega)$, яку називають функцією діелектричного відгуку, відіграє ту саму роль, що і діелектрична константа в електростатиці, тобто показує на скільки послаблюється поле, створене зарядом у середовищі, порівняно з вакуумом. Але в середовищі з просторовою і часовою дисперсією ця функція залежить від частоти і хвильового вектора.

З рівнянь (1.69), (1.71) випливає, що дисперсійне рівняння для квазі-потенціальних хвиль (умова існування вільного електричного поля) набуває вигляду

$$\varepsilon(\mathbf{k},\omega) = 0. \quad (1.73)$$

Розв'язок цього рівняння відносно частоти $\omega(\mathbf{k})$ при дійсному \mathbf{k} матиме вигляд

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega_{\mathbf{k}} + i\gamma_{\mathbf{k}}, \quad (1.74)$$

де $\omega_{\mathbf{k}}$ – власна частота хвилі. Величина $\gamma_{\mathbf{k}}$ залежно від її знака називається декрементом, якщо $\gamma_{\mathbf{k}} < 0$, або інкрементом, якщо $\gamma_{\mathbf{k}} > 0$. Знак $\gamma_{\mathbf{k}}$ свідчить про характер еволюції хвильового збурення.

Очевидно, що хвильові процеси будуть добре вираженими, якщо $|\gamma_{\mathbf{k}}| \ll \omega_{\mathbf{k}}$. Це можливо, зокрема, за умови $|\text{Im} \varepsilon(\mathbf{k},\omega)|$ набагато менше $|\text{Re} \varepsilon(\mathbf{k},\omega)|$, адже, як відомо, поглинання електромагнітних хвиль у середовищі пов'язане з уявною частиною діелектричної проникності. Такі області

частот і хвильових векторів називають областями прозорості. В цих областях рівняння для власної частоти має вигляд

$$\operatorname{Re} \varepsilon(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) = 0. \quad (1.75)$$

Для декременту (інкременту) відповідно маємо

$$\gamma_{\mathbf{k}} = - \frac{\operatorname{Im} \varepsilon(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}})}{\left. \frac{\partial \operatorname{Re} \varepsilon(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega_{\mathbf{k}}}}. \quad (1.76)$$

Щодо вектора поляризації квазіпотенціальних хвиль, то він завжди спрямований вздовж хвильового вектора. Це випливає з потенціального характеру поля (1.66). Отримані формули можна використовувати для опису квазіпотенціальних хвиль у будь-яких середовищах із просторовою і часовою дисперсією. У даній роботі ми будемо їх застосовувати як для звичайної, так і для запорошеної плазми.

1.6 Кінетична теорія плазми як складова теорії запорошеної плазми

Опис запорошеної плазми, очевидно, базується на підходах і поняттях, які були розвинені для звичайної плазми. В цьому підрозділі будуть наведені основні положення кінетичної теорії плазми [9], які необхідні для подальшого застосування в теоретичних дослідженнях запорошеної плазми. З одного боку вони лежать в основі теорії електромагнітних процесів у середовищах з просторовою і часовою дисперсією, а з іншого боку можуть слугувати основою для побудови узагальнення, придатного для описання запорошеної плазми.

1.6.1 Кінетичне рівняння

Кінетичне рівняння і ланцюжок рівнянь Боголюбова – Борна – Гріна – Кірквуда – Івона (ББГКІ) для звичайної плазми можуть бути отримані на основі загальної статистичної теорії (див. наприклад [82–84]), але оскільки

ієрархію рівнянь ББГКІ для запорошеної плазми значно зручніше формулювати на основі рівнянь для мікроскопічної фазової густини (див. п. 1.7), то і для звичайної плазми ми будемо використовувати саме цей підхід [85–87]. Вираз для мікроскопічної фазової густини частинок сорту α має вигляд

$$N_\alpha(X, t) = \sum_{i=1}^{N_\alpha} \delta(X - X_{i\alpha}(t)), \quad (1.77)$$

де $X \equiv (\mathbf{r}, \mathbf{v})$, $X_{i\alpha}(t) \equiv (\mathbf{r}_{i\alpha}(t), \mathbf{v}_{i\alpha}(t))$ – фазова траєкторія, N_α у верхній межі суми – кількість частинок.

У потенціальному наближенні ($c \rightarrow \infty$), фазова траєкторія відповідної частинки визначається рівняннями руху

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_{i\alpha}(t)}{dt} &= \mathbf{v}_{i\alpha}(t), \\ \frac{d\mathbf{v}_{i\alpha}(t)}{dt} &= \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}_M(\mathbf{r}_{i\alpha}(t), t), \end{aligned} \quad (1.78)$$

де $\mathbf{E}_M(\mathbf{r}, t)$ – мікроскопічне електричне поле в системі.

Мікроскопічна густини задовольняє рівняння

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}_M(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} N_\alpha(X, t) = 0, \quad (1.79)$$

де $\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}$ – зовнішні сили, які діють на частинки.

Мікроскопічне поле складається з полів окремих частинок

$$\mathbf{E}_M(\mathbf{r}, t) = - \sum_{\alpha'=e,i} e_{\alpha'} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int dX' \frac{N_{\alpha'}(X', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.80)$$

Підставивши (1.80) у (1.79) і ввівши позначення

$$\hat{V}_{\alpha\alpha'}(X, X') = \frac{e_\alpha e_{\alpha'}}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'},$$

отримуємо

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} - \sum_{\alpha'=e,i} \int dX' \hat{V}_{\alpha\alpha'}(X, X') N_{\alpha'}(X', t) \right\} N_\alpha(X, t) = 0. \quad (1.81)$$

Усереднена за ансамблем мікроскопічна фазова густина

$$\langle N_\alpha(X, t) \rangle = n_\alpha f_\alpha(X, t),$$

де $f_\alpha(X, t)$ – одночастинкова функція розподілу. Тоді, після усереднення за ансамблем, (1.81) зводиться до

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} f_\alpha(X, t) = \\ = \frac{1}{n_\alpha} \sum_{\alpha'=e,i} \int dX' \hat{V}_{\alpha\alpha'}(X, X') \langle N_{\alpha'}(X', t) N_\alpha(X, t) \rangle. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Враховуючи, що

$$\langle N_{\alpha'}(X', t) N_\alpha(X, t) \rangle = \langle N_{\alpha'}(X', t) \rangle \langle N_\alpha(X, t) \rangle + \langle \delta N_{\alpha'}(X', t) \delta N_\alpha(X, t) \rangle$$

маємо

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} - \sum_{\alpha'=e,i} n_{\alpha'} \int dX' \hat{V}_{\alpha\alpha'}(X, X') f_{\alpha'}(X', t) \right\} f_\alpha(X, t) = \\ = \frac{1}{n_\alpha} \sum_{\alpha'=e,i} \int dX' \hat{V}_{\alpha\alpha'}(X, X') \langle \delta N_{\alpha'}(X', t) \delta N_\alpha(X, t) \rangle. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Використаємо явний вигляд

$$\langle \delta N_{\alpha'}(X', t) \delta N_\alpha(X, t) \rangle = n_\alpha f_\alpha(X, t) \delta(X - X') \delta_{\alpha\alpha'} + n_\alpha n_{\alpha'} G_{\alpha\alpha'}(X, X', t),$$

де

$$G_{\alpha\alpha'}(X, X', t) = f_{\alpha\alpha'}(X, X', t) - f_\alpha(X, t) f_{\alpha'}(X', t)$$

– бінарна кореляційна функція і $f_{\alpha\alpha'}(X, X', t)$ – двочастинкова функція розподілу. Тоді, рівняння (1.83) набуває стандартного вигляду першого рівняння ланцюжка ББГКІ

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} f_\alpha(X, t) = I_\alpha, \quad (1.84)$$

де

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \sum_{\alpha'=e,i} e_{\alpha'} n_{\alpha'} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int dX' \frac{f'_\alpha(X', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

– самоузгоджене електричне поле,

$$I_\alpha = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \sum_{\alpha'=e,i} e_{\alpha'} n_{\alpha'} \int dX' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} G_{\alpha\alpha'}(X, X', t) \quad (1.85)$$

інтеграл зіткнень.

Розрахунок кореляційної функції $G_{\alpha\alpha'}(X, X', t)$ або $\langle \delta N_{\alpha'}(X', t) \delta N_\alpha(X, t) \rangle$ можна здійснити на основі ланцюжка рівнянь ББГКІ або на основі кінетичного рівняння для вищих моментів флуктуацій [85–87]. В результаті ми отримаємо інтеграли зіткнень Боголюбова – Балеску – Ленарда, або, знехтувавши динамікою поля, інтеграл зіткнень Ландау. Інтеграл зіткнень $I_\alpha \equiv \sum_{\alpha'} I_{\alpha\alpha'} \{f_\alpha, f_{\alpha'}\}$, а фігурні дужки означають, що $I_{\alpha\alpha'}$ є функціоналом від функції розподілу $f_\alpha(\mathbf{v})$ та $f_{\alpha'}(\mathbf{v}')$.

Будемо шукати розв'язок для функції розподілу у вигляді

$$f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_{0\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \delta f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (1.86)$$

Тут $f_{0\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ – незбурена функція розподілу, яка встановлюється в плазмі під дією зовнішнього поля $\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}$ і задовольняє рівняння

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} f_{0\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{\alpha'} I_{\alpha\alpha'} \{f_{0\alpha}, f_{0\alpha'}\}, \quad (1.87)$$

а збурення функції розподілу $\delta f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ пов'язане із самоузгодженим електромагнітним полем. У рамках лінійного наближення будемо вважати

$$|\delta f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)| \ll f_{0\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t).$$

За цієї умови рівняння для $\delta f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, яке отримуємо лінеаризацією (1.84) після віднімання від нього (1.87), набуває вигляду

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} \delta f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial f_{0\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{v}} = \delta I_\alpha, \quad (1.88)$$

де δI_α – лінеаризований за збуреннями функцій розподілу $\delta f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ та $\delta f_{\alpha'}(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t)$ інтеграл зіткнень I_α :

$$\delta I_\alpha = \sum_{\alpha'} (I_{\alpha\alpha'} \{f_{0\alpha}, \delta f_{\alpha'}\} + I_{\alpha\alpha'} \{\delta f_\alpha, f_{0\alpha'}\}).$$

1.6.2 Функція діелектричного відгуку для плазми без зіткнень

Розрахунки функції діелектричного відгуку розпочнемо з найпростішого випадку беззіткненої плазми (впливом зіткнень можна знехтувати). В цьому випадку рівняння для збурення функції розподілу у потенціальному наближенні (1.88) набуває вигляду

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} \delta f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -\frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial f_{0\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{v}}. \quad (1.89)$$

Формальний розв'язок рівняння (1.89) у загальному випадку можна побудувати у вигляді [9, п. 5.2], [88]

$$\delta f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -\frac{e_\alpha}{m_\alpha} \int_{-\infty}^t dt' \int dX' W_\alpha(X, X'; t, t') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') \frac{\partial f_{0\alpha}(X', t')}{\partial \mathbf{v}'}, \quad (1.90)$$

де $X \equiv (\mathbf{r}, \mathbf{v})$ і $W_\alpha(X, X'; t, t')$ задовольняє рівняння

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} W_\alpha(X, X'; t, t') = 0 \quad (1.91)$$

з початковою умовою

$$W_\alpha(X, X'; t', t') = \delta(X - X'). \quad (1.92)$$

У правильності розв'язку (1.90) можна переконатися його підстановкою у (1.89). За своїм змістом рівняння (1.91) описує еволюцію функції розподілу у беззіткненній системі невзаємодіючих частинок (в ньому відсутні як самоузгоджене поле, так і інтеграл зіткнень). З урахуванням початкової умови (1.92) можна зробити висновок, що ця величина є не що інше, як густина ймовірності переходу частинки з точки X' в точку X за час $t - t'$ без урахування взаємодії з іншими частинками [88, 89].

Представлення лінеаризованого розв'язку рівняння Власова у вигляді (1.90) має ту перевагу, що воно дає можливість отримати загальні вирази для індукованих величин – струмів і зарядів, не вдаючись у деталі динаміки частинок, обумовлених наявністю полів, неоднорідності і нестационарності системи, наявності межових поверхонь тощо. Ці деталі враховуються спеціальним виглядом ймовірності переходу $W_\alpha(X, X'; t, t')$ та незбуреного розподілу $f_{0\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ для кожного окремого випадку.

Вираз для густини індукованого заряду має вигляд

$$\begin{aligned} \rho_\alpha^{\text{ind}}(\mathbf{r}, t) &= e_\alpha n_\alpha \int d\mathbf{v} \delta f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \\ &= -\frac{e_\alpha^2 n_\alpha}{m_\alpha} \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{v} \int dX' W_\alpha(X, X'; t, t') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') \frac{\partial f_{0\alpha}(X', t')}{\partial \mathbf{v}'}. \end{aligned} \quad (1.93)$$

Якщо система стаціонарна, тобто зовнішні поля не залежать від часу, то $W_\alpha(X, X'; t, t') = W_\alpha(X, X'; t - t')$, $f_{0\alpha}(X, t) = f_{0\alpha}(X)$, і можна виконати перетворення Фур'є відгуку (1.93) за часовою змінною. Якщо система є ще

й просторово однорідною (це означає, що вона має бути необмеженою), то ймовірність переходу залежить від різниці координат, що дає можливість перейти до опису в термінах просторо-часового фур'є-представлення. Дійсно, поклавши $\mathbf{E} = -\nabla\varphi(\mathbf{r})$, з (1.93) отримуємо

$$\rho_{\alpha\mathbf{k}\omega}^{\text{ind}} = i\frac{e_{\alpha}^2 n_{\alpha}}{m_{\alpha}} \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \mathbf{k} \frac{\partial f_{0\alpha}(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} \varphi_{\mathbf{k}\omega}, \quad (1.94)$$

де

$$W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \int_0^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}} W_{\alpha}(\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{R}, \tau), \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau = t - t', \quad (1.95)$$

що після підстановки в рівняння Пуассона

$$-k^2 \varphi_{\mathbf{k}\omega} = -4\pi \rho_{\mathbf{k}\omega}^{\text{ext}} - 4\pi \sum_{\alpha} \rho_{\alpha\mathbf{k}\omega}^{\text{ind}} \quad (1.96)$$

приводить до (1.71), де $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$ визначається формулою [9, п. 5.3], [89]

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 - i \sum_{\alpha=e,i} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \mathbf{k} \frac{\partial f_{0\alpha}(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'}. \quad (1.97)$$

У випадку беззіткненої плазми розрахунок відгуку суттєво полегшується ще й тим, що рівняння для $W_{\alpha}(X, X'; t, t')$ (1.91) є лінійним рівнянням першого порядку в частинних похідних, розв'язок якого можна легко побудувати, скориставшись теоремою Ковалевської. Згідно цієї теореми, розв'язком рівняння типу (1.91) є довільна функція від характеристик системи. Беручи до уваги початкову умову (1.92), яка визначає вигляд функції, а також ту обставину, що рівняння для характеристик збігаються з рівняннями руху частинок у заданому силовому полі $\mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \mathbf{v} dt, \\ d\mathbf{v} &= \frac{\mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}}}{m_{\alpha}} dt, \end{aligned} \quad (1.98)$$

розв'язок рівняння (1.91) з початковою умовою (1.92) можна записати у вигляді

$$W_\alpha(X, X'; t, t') = \delta(X - X(X'; t, t')) = \delta(X - X' - \Delta X(X'; t, t')), \quad (1.99)$$

де $\Delta X(X'; t, t') \equiv [\Delta \mathbf{r}(X'; t, t'), \Delta \mathbf{v}(X'; t, t')] -$ зміщення частинки у фазовому просторі в процесі її руху у зовнішньому силовому полі.

Очевидно, що при $t = t'$ $\Delta X(X'; t', t') = 0$, а пряма підстановка (1.99) у (1.91) показує, що з урахуванням рівняння руху (1.98) величина $W_\alpha(X, X'; t, t')$ дійсно є розв'язком рівняння (1.91). Іншими словами, ймовірність переходу можна вважати відомою величиною, якщо ми знаємо фазову траєкторію частинки у зовнішньому полі (якщо таке присутнє).

Якщо зовнішні поля відсутні, тобто $\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} = 0$, вираз для $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$ можна суттєво спростити [9, п. 5.4]. В цьому випадку ймовірність переходу має дуже простий вигляд. У відповідності з (1.99) це є δ -функція, аргументом якої є фазова траєкторія вільного руху частинки

$$W_\alpha(X, X'; \tau) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v}\tau)\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}'), \quad (1.100)$$

а отже, з (1.95) маємо

$$W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\tau}. \quad (1.101)$$

Оскільки нас цікавить випадок $\tau > 0$, регуляризація цього представлення досягається заміною $\omega \rightarrow \omega + i0$, і

$$W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \frac{i\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}')}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0}. \quad (1.102)$$

З урахуванням (1.102), функція діелектричного відгуку (1.97) для плазми без зіткнень має вигляд

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \frac{\mathbf{k} \frac{\partial f_{0\alpha}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0}. \quad (1.103)$$

Розглянемо далі плазму, поміщену у зовнішнє магнітне поле $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ [9, п. 5.5]. У цьому випадку ймовірність переходу задовольняє рівняння (1.91)

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} [\mathbf{v} \mathbf{B}_0] \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} W_\alpha(X, X'; \tau) = 0 \quad (1.104)$$

з початковою умовою (1.92).

Розв'язок цього рівняння дається виразом (1.99). При цьому аргументом δ -функції є траєкторія руху частинки у зовнішньому магнітному полі \mathbf{B}_0 , тобто

$$\begin{aligned} W_\alpha(X, X'; \tau) = & \delta \left(x - x' - \frac{1}{\Omega_\alpha} [v'_x \sin \Omega_\alpha \tau + v'_y (1 - \cos \Omega_\alpha \tau)] \right) \times \\ & \times \delta \left(y - y' - \frac{1}{\Omega_\alpha} [-v'_x (1 - \cos \Omega_\alpha \tau) + v'_y \sin \Omega_\alpha \tau] \right) \delta(z - z' - v_z \tau) \times \\ & \times \delta(v_x - v'_x \cos \Omega_\alpha \tau - v'_y \sin \Omega_\alpha \tau) \times \\ & \times \delta(v_y + v'_x \sin \Omega_\alpha \tau - v_y \cos \Omega_\alpha \tau) \delta(v_z - v'_z), \quad (1.105) \end{aligned}$$

де $\Omega_\alpha = e_\alpha B_0 / c m_\alpha$ – циклотронна частота.

Оскільки в (1.97) входить інтеграл за швидкостями від $W_{\alpha \mathbf{k} \omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$, то нас цікавитиме величина

$$\begin{aligned} W_{\alpha \mathbf{k} \omega}(\mathbf{v}') = & \int d\mathbf{v} W_{\alpha \mathbf{k} \omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \\ = & \int_0^\infty d\tau \exp \left\{ -\frac{i \mathbf{k}_\perp}{\Omega_\alpha} (\mathbf{v}'_\perp \sin \Omega_\alpha \tau + [\mathbf{v}'_\perp \mathbf{e}_z](1 - \cos \Omega_\alpha \tau)) \right\} \exp [i(\omega - k_z v'_z) \tau]. \quad (1.106) \end{aligned}$$

Тут \mathbf{e}_z – одиничний орт осі z .

Перепозначимо далі \mathbf{v}' на \mathbf{v} і введемо кути φ_k і φ_v , які задають напрямки векторів \mathbf{k}_\perp і \mathbf{v}_\perp відносно осі x . Тоді (1.106) можна переписати у вигляді

$$W_{\alpha k \omega}(\mathbf{v}) = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n \left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\alpha} \right) J_m \left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\alpha} \right) \frac{\exp[-i(n-m)(\varphi_k - \varphi_v)]}{\omega - k_z v_z - n\Omega_\alpha + i0}, \quad (1.107)$$

де $J_n(x)$ – функція Беселя n -го порядку.

Будемо вважати, що $f_{0\alpha}(\mathbf{v})$ залежить лише від v_z і v_\perp , тобто

$$f_{0\alpha}(\mathbf{v}) \equiv f_{0\alpha}(v_\perp, v_z). \quad (1.108)$$

Тоді [83, с. 56]

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_\alpha \sum_n \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \frac{n\Omega_\alpha \frac{\partial f_{0\alpha}(\mathbf{v})}{\partial v_\perp} + k_z \frac{\partial f_{0\alpha}(\mathbf{v})}{\partial v_z}}{\omega - k_z v_z - n\Omega_\alpha + i0} J_n^2 \left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\alpha} \right). \quad (1.109)$$

1.6.3 Вплив зіткнень на діелектричні характеристики плазми (модельний опис)

Побудова розв'язків кінетичних рівнянь (1.84) з інтегралом зіткнень Боголюбова – Балеску – Ленарда є складною задачею. Тому для спрощення далі будемо використовувати модельний інтеграл зіткнень, а саме простий інтеграл зіткнень Батнагара – Гросса – Крука (БГК) [90], який підходить для опису зіткнень заряджених частинок із нейтральними у випадку слабкоіонізованої плазми [91]

$$I_\alpha = -\nu_\alpha \left[f_\alpha(X, t) - \Phi_\alpha(\mathbf{v}) \int d\mathbf{v} f_\alpha(X, t) \right], \quad (1.110)$$

де ν_α – частота зіткнень заряджених частинок сорту α із нейтральними, $\Phi_\alpha(\mathbf{v})$ – функція розподілу, до якої релаксує $f_\alpha(X, t)$, тобто розподіл Максвелла (1.9). Таким чином, інтеграл зіткнень БГК описує релаксацію до локального максвеллівського розподілу $f_{0\alpha}(\mathbf{v})$ без урахування збурень гідродинамічної швидкості і температури, враховуючи, однак, локальне збурення густини частинок.

У цьому спрощеному випадку, отриманий вище вирази (1.97) для функції діелектричного відгуку $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$ в термінах ймовірностей переходу $W_\alpha(X, X'; t - t')$ залишається в силі, з тією різницею, що ймовірність переходу має розраховуватися не на основі беззіткненого рівняння (1.91), а на основі рівняння, яке випливає з (1.88) і у випадку просторово-однорідної стаціонарної плазми набуває вигляду [9, п. 5.6]

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} W_\alpha(X, X'; \tau) = -\nu_\alpha \left\{ W_\alpha(X, X'; \tau) - f_{0\alpha}(\mathbf{v}) \int d\mathbf{v} W_\alpha(X, X'; \tau) \right\}. \quad (1.111)$$

Якщо знехтувати другим доданком у правій частині (1.111), то розв'язок такого редукованого рівняння $\widetilde{W}_\alpha(X, X'; \tau)$ має вигляд

$$\widetilde{W}_\alpha(X, X'; \tau) = e^{-\nu_\alpha \tau} W_\alpha^{(0)}(X, X'; \tau), \quad (1.112)$$

де $W_\alpha^{(0)}(X, X'; \tau)$ – розв'язок відповідного беззіткненого рівняння, тобто рівняння (1.91).

Перепишемо далі (1.111) в еквівалентному вигляді:

$$W_\alpha(X, X'; \tau) = \widetilde{W}_\alpha(X, X'; \tau) + \nu_\alpha \int_0^\tau d\tau' \int dX'' \widetilde{W}_\alpha(X, X''; \tau - \tau') \times \\ \times f_{0\alpha}(\mathbf{v}'') \int d\mathbf{v} W_\alpha(\mathbf{r}'', \mathbf{v}, X'; \tau'), \quad (1.113)$$

яке випливає з рівняння (1.91), якщо другий доданок в його правій частині формально розглядати як зовнішнє поле. Перейдемо до $\mathbf{k}\omega$ -представлення:

$$W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \widetilde{W}_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') + \nu_\alpha \int d\mathbf{v}'' \widetilde{W}_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'') f_{0\alpha}(\mathbf{v}'') \int d\mathbf{v} W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'). \quad (1.114)$$

Виконавши інтегрування (1.114) за швидкостями, знаходимо

$$\int d\mathbf{v} W_{\alpha k \omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \int d\mathbf{v} \widetilde{W}_{\alpha k \omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \left[1 - \nu_{\alpha} \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' \widetilde{W}_{\alpha k \omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') f_{0\alpha}(\mathbf{v}') \right]^{-1}. \quad (1.115)$$

В $\mathbf{k}\omega$ -представленні розв'язок цього рівняння, як легко переконалися, набуває вигляду

$$W_{\alpha k \omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \widetilde{W}_{\alpha k \omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') + \frac{\nu_{\alpha} \int d\mathbf{v}'' \widetilde{W}_{\alpha k \omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'') f_{0\alpha}(\mathbf{v}'') \int d\mathbf{v} \widetilde{W}_{\alpha k \omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')}{1 - \nu_{\alpha} \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' \widetilde{W}_{\alpha k \omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') f_{0\alpha}(\mathbf{v}')}, \quad (1.116)$$

де $\widetilde{W}_{\alpha k \omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = W_{\alpha k \omega + i\nu_{\alpha}}^{(0)}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$.

Таким чином, у випадку просторово-однорідної стаціонарної плазми розв'язки рівняння (1.111) можна знайти, якщо знати ймовірність переходу для відповідної беззіткненої системи. Наприклад, за відсутності зовнішніх полів

$$\widetilde{W}_{\alpha k \omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \frac{i\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}')}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu_{\alpha}} \quad (1.117)$$

і

$$W_{\alpha k \omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \frac{i\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}')}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu_{\alpha}} - \frac{\nu_{\alpha} f_{0\alpha}(\mathbf{v})}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu_{\alpha})(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}' + i\nu_{\alpha})} \left[1 - i\nu_{\alpha} \int d\mathbf{v} \frac{f_{0\alpha}(\mathbf{v})}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu_{\alpha}} \right]^{-1}. \quad (1.118)$$

Підстановка (1.118) в (1.97) дає

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \frac{\mathbf{k} \frac{\partial f_{0\alpha}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu_{\alpha}} \left[1 - i\nu_{\alpha} \int d\mathbf{v} \frac{f_{0\alpha}(\mathbf{v})}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu_{\alpha}} \right]^{-1}. \quad (1.119)$$

Якщо плазма ізотропна, тобто $f_{0\alpha}(\mathbf{v}) = f_{0\alpha}(v)$, то використовуючи (1.70), можна показати [9], що вираз для поздовжньої діелектричної проникності $\varepsilon_L(k, \omega)$ збігається з (1.119).

Неважко показати, що у випадку магнітоактивної плазми (див. (1.107))

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_{\alpha k\omega}(\mathbf{v}) &= \int d\mathbf{v}' \widetilde{W}_{\alpha k\omega}(\mathbf{v}', \mathbf{v}) = \\ &= i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_{\alpha}}\right) J_m\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_{\alpha}}\right) \frac{e^{-i(n-m)(\varphi_k - \varphi_v)}}{\omega - k_z v_z - n\Omega_{\alpha} + i\nu_{\alpha}}.\end{aligned}\quad (1.120)$$

Отже, за умови $f_{0\alpha}(\mathbf{v}) = f_{0\alpha}(v_{\perp}, v_z)$ отримуємо

$$\begin{aligned}\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) &= 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \sum_n \int d\mathbf{v} J_n^2\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_{\alpha}}\right) \frac{n\Omega_{\alpha} \frac{\partial f_{0\alpha}(\mathbf{v})}{\partial v_{\perp}} + k_z \frac{\partial f_{0\alpha}(\mathbf{v})}{\partial v_z}}{\omega - k_z v_z - n\Omega_{\alpha} + i\nu_{\alpha}} \times \\ &\times \left[1 - i\nu_{\alpha} \sum_n \int d\mathbf{v} J_n^2\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_{\alpha}}\right) \frac{f_{0\alpha}(\mathbf{v})}{\omega - k_z v_z - n\Omega_{\alpha} + i\nu_{\alpha}} \right]^{-1}.\end{aligned}\quad (1.121)$$

Для подальших розрахунків потрібно знати явний вигляд незбуреної функції розподілу $f_{0\alpha}(\mathbf{v})$.

1.6.4 Іонно-звукові хвилі

Розглянемо квазірівноважну (неізотермічну) беззіткненну плазму. В цьому випадку незбурена функція розподілу є розподілом Максвелла (1.9). Тоді функція діелектричного відгуку (1.103) має вигляд [9, п. 6.1]

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{k_{D\alpha}^2}{k^2} \left(\frac{m_{\alpha}}{2\pi T_{\alpha}}\right)^{1/2} \int dv_{\parallel} \frac{kv_{\parallel} e^{-\frac{m_{\alpha} v_{\parallel}^2}{2T_{\alpha}}}}{\omega - kv_{\parallel} + i0}\quad (1.122)$$

або

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{k_{D\alpha}^2}{k^2} W\left(\frac{\omega}{kv_{T\alpha}}\right),\quad (1.123)$$

де

$$W(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x e^{-x^2/2}}{x - z - i0}.\quad (1.124)$$

Функція $W(z)$ називається плазмовою дисперсійною функцією [83, с. 59]. Представлення (1.124) задає функцію $W(z)$ при дійсних значеннях z . Аналітичне продовження цієї функції на всю комплексну площину z дає

$$W(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x e^{-x^2/2}}{x-z} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} z e^{-z^2/2}. \quad (1.125)$$

При великих z

$$W(z) = -\frac{1}{z^2} - \frac{3}{z^4} - \dots - \frac{(2n-1)!!}{z^{2n}} - \dots + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} z e^{-z^2/2}. \quad (1.126)$$

$W(z)$ можна також подати в представленні:

$$W(z) = 1 - z e^{-z^2/2} \int_0^z dy e^{y^2/2} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} z e^{-z^2/2}, \quad (1.127)$$

або

$$W(z) = 1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} z e^{-z^2/2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{iz}{\sqrt{2}} \right) \right], \quad (1.128)$$

де

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \quad (1.129)$$

є інтегралом ймовірності або функцією похибок. Вона визначена для всіх комплексних z .

Розклад дійсної частини в ряд Тейлора дає

$$W(z) = 1 - z^2 + \frac{z^4}{3} - \dots + \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n-1)!!} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} z e^{-z^2/2}. \quad (1.130)$$

Проведемо далі аналіз дисперсійного рівняння (1.73) з функцією діелектричного відгуку (1.123) для випадку квазірівноважної (неізотермічної) плазми, таким чином дослідимо поширення поздовжніх хвиль у такій плазмі.

Розглянемо випадок проміжних частот [9, п. 6.3]

$$kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{Te}. \quad (1.131)$$

З урахуванням розкладів (1.126) (1.130) отримуємо

$$\operatorname{Re} \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{k_{De}^2}{k^2}, \quad (1.132)$$

і наближене дисперсійне рівняння $\operatorname{Re} \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 0$ (1.75) дає

$$\omega_{\mathbf{k}}^2 = \frac{\omega_{pi}^2}{1 + k_{De}^2/k^2}. \quad (1.133)$$

У короткохвильовій області ($k \gg k_{De}$)

$$\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{pi}, \quad (1.134)$$

а при $k \ll k_{De}$

$$\omega_{\mathbf{k}} = v_s k, \quad (1.135)$$

де $v_s = \sqrt{T_e/m_i}$ – іонно-звукова швидкість.

Щодо декременту згасання низькочастотних поздовжніх хвиль, то його можна розрахувати за допомогою формули (1.76)

$$\gamma_{\mathbf{k}} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{\mathbf{k}}^3}{\omega_{pi}^2} \frac{k_{De}^2}{k^2} \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{kv_{Te}} \left[e^{-\frac{\omega_{\mathbf{k}}^2}{2k^2 v_{Te}^2}} + \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} e^{-\frac{\omega_{\mathbf{k}}^2}{2k^2 v_{Ti}^2}} \right]. \quad (1.136)$$

Як впливає з останньої формули, у випадку ізотермічної плазми ($T_e = T_i$) іонно-звукові хвилі сильно згасають. Дійсно, при $k \ll k_{De}$

$$\gamma_{\mathbf{k}} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{m_e}{m_i} v_s k \left[1 + \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} e^{-\frac{T_e}{2T_i}} \right].$$

Для того, щоб другим доданком (внесок іонів) можна було знехтувати, потрібно, щоб температура електронів була суттєво вищою за температуру

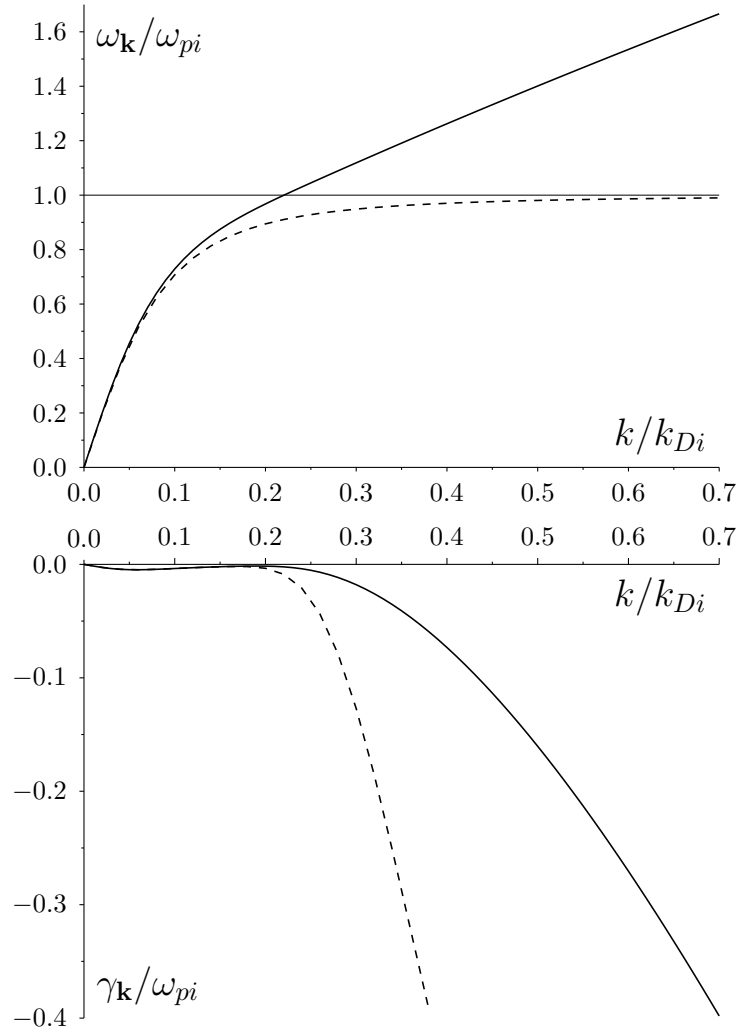


Рис. 1.4 Суцільні лінії – точний числовий розв’язок дисперсійного рівняння (1.138) в області (1.131), штрихові лінії – наближені аналітичні формули (1.133) і (1.136) ($\tau = 100$, $m_i/m_e = 1836$).

іонів ($T_e \gg T_i$). За виконання цієї умови

$$\gamma_{\mathbf{k}} = -\sqrt{\frac{\pi m_e}{8 m_i}} v_s k. \quad (1.137)$$

Слід зауважити, що отримані вирази для спектру іонно-звукових хвиль (1.133) та декременту їхнього згасання (1.136) є наближеними. Точні розв’язки дисперсійного рівняння (1.73) відносно комплексної частоти $\omega(\mathbf{k}) = \omega_{\mathbf{k}} + i\gamma_{\mathbf{k}}$ з $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$, що визначається виразом (1.123)

$$1 + \sum_{\alpha} \frac{k_{D\alpha}^2}{k^2} W\left(\frac{\omega}{k v_{T\alpha}}\right) = 0, \quad (1.138)$$

можна отримати лише чисельно. Точні числові розв'язки та їхні аналітичні наближення (1.133), (1.136) для випадку $\tau = T_e/T_i = 100$, $m_i/m_e = 1836$ представлено на рис. 1.4.

Щодо фізичної природи згасання іонно-звукових хвиль, то вона пов'язана із присутністю уявної частини в $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$, яка в свою чергу пов'язана з наявністю полюсів $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ ($\omega = kv_{\parallel}$) у знаменнику (1.122). Звідси випливає, що частинки, які рухаються саме зі швидкостями, близькими до фазової швидкості хвилі $v_{ph} = \omega/k$, і перебувають в умовах резонансної взаємодії ($\omega = kv_{\parallel}$), призводять до появи беззіткненого згасання хвиль.

Згасання типу (1.136), але для ленгмюрівських хвиль у плазмі з максвеллівським розподілом частинок вперше було відкрито Л.Д. Ландау (1946 р.) на основі розв'язку задачі Коші для еволюції збурення функції розподілу у напівобмеженій плазмі [92]. Варто зауважити, однак, що подібна задача раніше була розв'язана А.О. Власовим для плазми з лоренцовим розподілом частинок [93]. Остання обставина не була широковідомою і згасання хвиль, породжуване резонансною взаємодією хвиль і частинок, дістало назву «згасання Ландау». Історія цього відкриття детально обговорюється в [94].

Якщо обмежитися якісним описом впливу зіткнень на діелектричні властивості ізотропної плазми, то можна скористатися виразом для функції діелектричного відгуку, розрахованому на основі моделі БГК (1.119). У випадку максвеллівських розподілів $f_{0\alpha}(v)$ (1.9) можна знайти явний вигляд цієї величини [91] [9, п. 6.5], а саме

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{k_{D\alpha}^2}{k^2} \frac{(\omega + i\nu_{\alpha})W\left(\frac{\omega + i\nu_{\alpha}}{kv_{T\alpha}}\right)}{\omega + i\nu_{\alpha}W\left(\frac{\omega + i\nu_{\alpha}}{kv_{T\alpha}}\right)}. \quad (1.139)$$

Розглянемо якісний вплив зіткнень на декремент згасання іонно-звукових хвиль. Будемо вважати, що виконуються наступні умови:

$$|\omega + i\nu_e| \ll kv_{Te}, \quad |\omega + i\nu_i| \gg kv_{Ti}. \quad (1.140)$$

За цих умов

$$\text{Im } \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k_{De}^2}{k^2} \frac{\omega}{kv_{Te}} + \frac{\omega_{pi}^2 \nu_i}{\omega(\omega^2 + \nu_i^2)}, \quad (1.141)$$

таким чином, при $k \ll k_{De}$

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbf{k}} &= v_s k, \\ \gamma_{\mathbf{k}} &= -\sqrt{\frac{\pi m_e}{8 m_i}} v_s k - \frac{\nu_i}{2}, \end{aligned} \quad (1.142)$$

де $v_s = \sqrt{T_e/m_i}$ – іонно-звукова швидкість. Як бачимо, у цьому випадку електронні зіткнення не впливають на згасання іонно-звукових хвиль, оскільки завдяки низькочастотності хвиль роль електронів зводиться лише до екранування іонів. Дисперсія іонно-звукових хвиль є такою ж, як і у беззіткненній плазмі (1.135), а декремент більший за модулем на величину $\nu_i/2$ (1.137).

1.7 Мікроскопічна теорія заповненої плазми

У роботах [95, 96], [9, п. 16.7] були сформульовані основні принципи статистичної теорії заповненої плазми з урахуванням поглинання електронів та іонів порошинками. На основі строгих мікроскопічних рівнянь виведений ланцюжок рівнянь Боголюбова – Борна – Гріна – Кірквуда – Івона (ББГКІ). У цьому підрозділі наведений огляд цих робіт.

1.7.1 Кінетичне рівняння для мікроскопічної фазової густини

Розглядається система, яка складається з вільних електронів, іонів та порошинок, і припускається, що будь-яка порошинка поглинає всі електрони та іони, які стикаються з нею.

У такому разі мікроскопічну фазову густину $N_{i\alpha}(X, t)$, що відповідає i -й частинці сорту α ($\alpha = e, i$), можна записати у вигляді

$$N_{i\alpha}(X, t) = \delta(X - X_{i\alpha}(t)) \theta(t_{i\alpha} - t), \quad (1.143)$$

де $X \equiv (\mathbf{r}, \mathbf{v})$, $X_{i\alpha}(t) \equiv (\mathbf{r}_{i\alpha}(t), \mathbf{v}_{i\alpha}(t))$ – фазова траєкторія, $t_{i\alpha}$ – час зіткнення частинки з номером i сорту α з будь-якою порошинкою. Мікроскопічна фазова густина відповідної підсистеми набуває вигляду

$$N_\alpha(X, t) = \sum_{i=1}^{N_\alpha} \delta(X - X_{i\alpha}(t)) \theta(t_{i\alpha} - t). \quad (1.144)$$

Це означення $N_\alpha(X, t)$ відрізняється від такого у випадку звичайної плазми (1.77) наявністю θ -функції, яка описує зникнення частинки внаслідок її зіткнення з порошинкою. З урахуванням цього

$$N_{i\alpha}(X, t_{i\alpha}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N_{i\alpha}(X, t_{i\alpha} - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(X - X_{i\alpha}(t - \varepsilon)), \quad (1.145)$$

тобто це граничне значення потрібно розглядати як лівосторонню границю.

Скомбінувавши часову і просторову похідні та похідну за швидкістю від $N_{i\alpha}(X, t)$, отримаємо

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}_M(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} N_{i\alpha}(X, t) = -\delta(X - X_{i\alpha}(t)) \delta(t - t_{i\alpha}). \quad (1.146)$$

Оскільки $t_{i\alpha}$ – це час зіткнення електрона, чи іона з порошинкою, то

$$\begin{aligned} \delta(t - t_{i\alpha}) &= \delta(|\mathbf{r}_{i\alpha}(t) - \mathbf{r}_g(t)| - a) \left| \frac{d|\mathbf{r}_{i\alpha}(t) - \mathbf{r}_g(t)|}{dt} \right|_{t=t_{i\alpha}} = \\ &= \delta(|\mathbf{r}_{i\alpha}(t) - \mathbf{r}_g(t)| - a) \left| \mathbf{e}_{\mathbf{r}_{i\alpha}(t) - \mathbf{r}_g(t)} (\mathbf{v}_{i\alpha}(t) - \mathbf{v}_g(t)) \right|, \end{aligned} \quad (1.147)$$

де $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$, а $\mathbf{v}_g(t)$ – швидкість порошинки, з якою стикається i -та частинка сорту α .

Зауважимо, що для частинок, які прямують до порошинки

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{r}_{i\alpha}(t) - \mathbf{r}_g(t)|_{t=t_{i\alpha}} = \mathbf{e}_{\mathbf{r}_{i\alpha}(t) - \mathbf{r}_g(t)} (\mathbf{v}_{i\alpha}(t) - \mathbf{v}_g(t)) \Big|_{t=t_{i\alpha}} < 0.$$

Це означає, що $\vartheta(t_{i\alpha}) > \pi/2$, де $\vartheta(t)$ – кут між векторами $\mathbf{r}_{i\alpha}(t) - \mathbf{r}_g(t)$ і $\mathbf{v}_{i\alpha}(t) - \mathbf{v}_g(t)$.

З урахуванням (1.147) рівняння для $N_{i\alpha}(X, t)$ набуває вигляду

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}_M(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} N_{i\alpha}(X, t) = \\ = \int_{\vartheta \leq \pi/2} d\mathcal{X}' \delta(\mathcal{X}' - \mathcal{X}_g(t)) \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - a) \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v} - \mathbf{v}') N_{i\alpha}(X, t). \quad (1.148)$$

Тут $\delta(\mathcal{X} - \mathcal{X}_g(t)) \equiv \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_g(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_g(t)) \delta(q - q_g(t))$, тобто введений розширений фазовий простір, який включає заряд порошинки. В такому розширеному просторі фазова траєкторія $\mathcal{X}(t)$ визначає мікроскопічний стан порошинки. Інтегрування за \mathcal{X}' в (1.148) з урахуванням умови $\vartheta \leq \pi/2$ є еквівалентним розумінню контактного значення $N_{i\alpha}$ в сенсі (1.145). Оскільки тільки одна порошинка може знаходитись у точці \mathcal{X} в момент часу $t_{i\alpha}$, величину $\delta(\mathcal{X}' - \mathcal{X}_g(t))$ можна замінити повною мікроскопічною густиною всіх порошинок:

$$N_g(\mathcal{X}, t) = \sum_{i=1}^{N_g} \delta(\mathcal{X}' - \mathcal{X}_{ig}(t)) \quad (1.149)$$

і, таким чином, рівняння для повної мікроскопічної густини частинок сорту α можна записати у вигляді

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}_M(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} N_\alpha(X, t) = \\ = - \int d\mathcal{X}' N_g(\mathcal{X}', t) \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - a) |\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v} - \mathbf{v}')| N_\alpha(X, t). \quad (1.150)$$

Права частина цього рівняння є не що інше, як потік частинок сорту α через поверхню порошинки, тобто потік поглинутих частинок. Варто зауважити, що оскільки фазові траєкторії порошинок мають розриви першого роду, то значення $N_g(\mathcal{X}, t)$ в момент часу $t_{i\alpha}$ (цей час відповідає умові $|\mathbf{r}_{i\alpha}(t) - \mathbf{r}_g(t)| = a$) слід розуміти в сенсі граничного значення (1.145), тобто

$$N_g(\mathcal{X}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N_g(\mathcal{X}, t_{i\alpha} - \varepsilon).$$

Наступне завдання полягає у виведенні рівняння для $N_g(\mathcal{X}, t)$. При цьому потрібно врахувати, що в момент зіткнення порошинки з будь-якою іншою частинкою її швидкість і заряд змінюється стрибком, а тому в момент зіткнення $N_g(\mathcal{X}, t)$ стає не лише невизначеною, а і неінтегрованою. Для того щоб позбутися неінтегровності, часову вісь розбивають на відрізки між зіткненнями порошинки з іншими частинками і траєкторія порошинки записується у вигляді суми відповідних траєкторій між зіткненнями:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_i(t) = & \mathcal{X}_i^{(0)}(t)\theta(t-t_0)\theta(t_1-t) + \mathcal{X}_i^{(1)}(t)\theta(t-t_1)\theta(t_2-t) + \\ & + \mathcal{X}_i^{(2)}(t)\theta(t-t_2)\theta(t_3-t) + \dots, \end{aligned} \quad (1.151)$$

де t_0 – початковий час еволюції системи, $t_1 < t_2 < t_3 \dots$ – час першого, другого і т.д. зіткнень з іншими частинками. При цьому $\mathcal{X}_i^{(n)}(t) = (\mathbf{r}_i(t), \mathbf{v}_i^{(n)}, q_i^{(n)})$, де

$$\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t dt' \mathbf{v}_i(t') = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^{t_1} dt' \mathbf{v}_i^{(0)}(t') + \int_{t_1}^{t_2} dt' \mathbf{v}_i^{(1)}(t') + \dots, \quad (1.152)$$

$$\mathbf{v}_i^{(0)}(t) = \mathbf{v}_{i0} + \frac{q_{i0}}{m_g} \int_{t_0}^t dt' \mathbf{E}_M(\mathbf{r}_i(t'), t'), \quad (1.153)$$

$$\mathbf{v}_i^{(n)}(t) = \mathbf{v}_i^{(n-1)}(t_n) + \delta \mathbf{v}_i^{(n)} + \frac{q_i}{m_g} \int_{t_n}^t dt' \mathbf{E}_M(\mathbf{r}_i(t'), t'), \quad (1.154)$$

$$q_i^{(0)} = q_{i0}, \quad q_i^{(n)} = q_i^{(n-1)} + \delta q^{(n)}, \quad n > 0,$$

\mathbf{r}_{i0} , \mathbf{v}_{i0} і q_{i0} – початкові координати порошинки, $\delta \mathbf{v}_i^{(n)}$ та $\delta q_i^{(n)}$ – стрибки швидкості і заряду внаслідок зіткнень, що залежать від сорту частинок з

якими порошок стикається, а саме

$$\delta q^{(n)} = \begin{cases} e_\alpha, & \text{для зіткнень з плазмовими частинками (\alpha = e, i),} \\ \frac{1}{2}(q' - q_i^{(n-1)}), & \text{для зіткнень із порошком, що має заряд } q', \end{cases} \quad (1.155)$$

$$\delta \mathbf{v}_i^{(n)} = \begin{cases} -\frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_g} (v_i^{(n-1)}(t_n) - v'), & \text{для зіткнення з плазмовою} \\ & \text{частинкою з швидкістю } \mathbf{v}', \\ -\mathbf{e}_{\mathbf{r}_i(t_n) - \mathbf{r}'} (\mathbf{e}_{\mathbf{r}_i(t_n) - \mathbf{r}'}, \mathbf{v}_i^{(n-1)}(t_n) - \mathbf{v}'), & \text{для зіткнень із порошком,} \\ & \text{що має швидкість } \mathbf{v}'. \end{cases} \quad (1.156)$$

При записові останніх формул припускалося, що маси і розміри порошків є однаковими, а зіткнення двох порошків призводять до вирівнювання їхніх зарядів.

Таким чином, мікроскопічна фазова густина i -тої порошинки може бути записана як

$$N_{ig}(\mathcal{X}, t) = \sum_{n=0}^{N_{\text{coll}}(t)} \delta(\mathcal{X} - \mathcal{X}_i^{(n)}) \theta(t_{n+1} - t) \theta(t - t_n), \quad (1.157)$$

де $N_{\text{coll}}(t)$ – кількість зіткнень i -тої порошинки на момент часу t . Це представлення має ту перевагу над представленням $N_{ig}(\mathcal{X}, t) = \delta(\mathcal{X} - \mathcal{X}_i(t))$, що воно є інтегровним.

Використовуючи (1.157) і беручи похідні за t , \mathbf{r} , \mathbf{v} , можна показати, що

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q}{m_g} \mathbf{E}_M(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} N_{ig}(\mathcal{X}, t) = \delta(\mathcal{X} - \mathcal{X}_i(t)) \delta(t - t_0) - \sum_{n=1}^{N_{\text{coll}}} \delta(t - t_n) \left[\delta(\mathcal{X} - \mathcal{X}_i^{(n-1)}(t_n)) - \delta(\mathcal{X} - \mathcal{X}_i^{(n)}(t_n)) \right], \quad (1.158)$$

$$\mathcal{X}_i^{(n)}(t_n) - \mathcal{X}_i^{(n-1)}(t_n) = \delta \mathcal{X}_i^{(n)}, \quad \delta \mathcal{X}_i^{(n)} = (0, \delta \mathbf{v}_i^{(n)}, \delta q^{(n)}).$$

Подібно до випадку плазмових частинок

$$\delta(t - t_n) = \delta(|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_c(t)| - \tilde{a}) \mathbf{e}_{\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_c(t)}(\mathbf{v}_i(t) - \mathbf{v}_c(t)),$$

де $\mathbf{r}_c(t)$, $\mathbf{v}_c(t)$ – координата та швидкість частинки (електрон, іон, або інша порошок), з якою стикається i -та порошок, $\tilde{a} = a$ (при зіткненнях з електроном чи іоном) і $\tilde{a} = 2a$ (при зіткненнях з іншою порошком).

Підсумувавши (1.158) за всіма порошками при $t_0 \rightarrow -\infty$, отримаємо наступне рівняння:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q}{m_g} \mathbf{E}_M(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} N_{ig}(\mathcal{X}, t) = \\ = - \sum_{\alpha=e,i} \int dX' \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - a) \{ |\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v} - \mathbf{v}')| N_{ig}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, q, t) - \\ - |\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v} - \mathbf{v}' - \delta\mathbf{v}_\alpha)| N_{ig}(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \delta\mathbf{v}_\alpha, q - e_\alpha, t) \} N_\alpha(X', t) - \\ - \int d\mathcal{X}' \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - 2a) |\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v} - \mathbf{v}')| \{ N_{ig}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, q, t) N_g(\mathbf{r}', \mathbf{v}', q', t) - \\ - N_{ig}(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \delta\mathbf{v}_g, q - \delta q, t) N_g(\mathbf{r}', \mathbf{v}' + \delta\mathbf{v}_g, q', t) \}, \quad (1.159) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{v}_\alpha &\equiv \delta\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = -\frac{m_\alpha}{m_g}(\mathbf{v} - \mathbf{v}'), \\ \delta\mathbf{v}_g &\equiv \delta\mathbf{v}_g(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v} - \mathbf{v}')), \\ \delta q &\equiv \delta q(q, q') = q' - q. \end{aligned} \quad (1.160)$$

Для повної фазової густини

$$N_g(\mathcal{X}, t) = \sum_{i=1}^N N_{ig}(\mathcal{X}, t) \quad (1.161)$$

Відповідно маємо

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q}{m_g} \mathbf{E}_M(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} N_g(\mathcal{X}, t) = \\
& = - \sum_{\alpha=e,i} \int d\mathcal{X}' \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - a) \{ |\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v} - \mathbf{v}')| N_g(\mathcal{X}, t) - \\
& - |\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v} - \mathbf{v}' - \delta\mathbf{v}_\alpha)| N_g(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \delta\mathbf{v}_\alpha, q - e_\alpha, t) \} N_\alpha(X', t) - \\
& - \int d\mathcal{X}' \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - 2a) |\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v} - \mathbf{v}')| \{ N_g(\mathcal{X}, t) N_g(\mathcal{X}', t) - \\
& - N_g(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \delta\mathbf{v}_g, q - \delta q, t) N_g(\mathbf{r}', \mathbf{v}' + \delta\mathbf{v}_g, q', t) \}. \quad (1.162)
\end{aligned}$$

Останні доданки в (1.160), (1.162) описують пружні зіткнення порошків, які на відміну від кулонівських зіткнень точкових частинок не можуть бути описані в термінах мікроскопічних сил, обумовлених мікроскопічними електричними полями. Зауважимо також, що інтегрування за X' та \mathcal{X}' в (1.162) обмежується областю кутів у $\vartheta \gtrsim \pi/2$, де ϑ – кут між $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ та $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$ (або $\mathbf{v} - \mathbf{v}' - \delta\mathbf{v}_\alpha$).

Таким чином, було отримано мікроскопічне рівняння для $N_\alpha(X, t)$ ($\alpha = e, i$) і $N_g(\mathcal{X}, t)$ з урахуванням поглинання плазмових частинок порошинками та контактних зіткнень порошків. Якщо обмежитись розглядом лише системи нейтральних порошків, то можна прийти до мікроскопічного рівняння пружних кульок, отриманого М.М. Боголюбовим.

1.7.2 Кінетичні рівняння для запорошеної плазми.

Маючи рівняння для мікроскопічної фазової густини (1.150) і (1.162), можна сформулювати ієрархію рівнянь для запорошеної плазми. Введемо позначення

$$N_\alpha(\mathcal{X}, t) = \begin{cases} N_\alpha(X, t) \delta(q - e_\alpha), & \alpha = e, i, \\ N_g(\mathcal{X}, t), & \alpha = q. \end{cases} \quad (1.163)$$

У таких позначеннях рівняння (1.150), (1.162) набувають вигляду

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} - \sum_{\alpha'=e,i,g} \int d\mathcal{X}' \hat{V}_{\alpha\alpha'}(\mathcal{X}, \mathcal{X}') N_{\alpha'}(\mathcal{X}', t) \right\} N_\alpha(\mathcal{X}, t) = \\ & = - \sum_{\alpha'=e,i,g} \int d\mathcal{X}' \{ W_{\alpha\alpha'}^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{v} - \mathbf{v}') N_\alpha(\mathcal{X}, t) N_{\alpha'}(\mathcal{X}', t) - \\ & - W_{\alpha\alpha'}^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{v} - \mathbf{v}' - \delta\mathbf{v}_{\alpha\alpha'} - \delta\mathbf{v}'_{\alpha\alpha'}) N_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \delta\mathbf{v}_{\alpha\alpha'}, q - \delta q_{\alpha'}, t) \times \\ & \quad \times N_{\alpha'}(\mathbf{r}', \mathbf{v}' + \delta\mathbf{v}'_{\alpha\alpha'}, q', t) \}, \quad \alpha = e, i, g. \end{aligned} \quad (1.164)$$

Тут $\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}$ – зовнішнє силове поле (якщо присутнє),

$$\begin{aligned} \hat{V}_{\alpha\alpha'}(\mathcal{X}, \mathcal{X}') &= \frac{qq'}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}, \\ W_{\alpha\alpha'}^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &= -\mathbf{e}_\mathbf{r} \mathbf{v} \delta(r - a_{\alpha\alpha'}) \theta(\vartheta - \pi/2) (\delta_{\alpha g} + \delta_{\alpha' g} - \delta_{\alpha g} \delta_{\alpha' g}), \\ W_{\alpha\alpha'}^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &= -\mathbf{e}_\mathbf{r} \mathbf{v} \delta(r - a_{\alpha\alpha'}) \theta(\vartheta - \pi/2) \delta_{\alpha g}, \end{aligned} \quad (1.165)$$

$$a_{\alpha\alpha'} = a_\alpha + a_{\alpha'},$$

$$a_\alpha = \begin{cases} 0, & \alpha = e, i, \\ a, & \alpha = g, \end{cases} \quad \delta q_\alpha \equiv \delta q_\alpha(q, q') = \begin{cases} e_\alpha, & \alpha = e, i, \\ q' - q, & \alpha = g, \end{cases}$$

$$\delta \mathbf{v}_{\alpha\alpha'} \equiv \delta \mathbf{v}_{\alpha\alpha'}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \delta_{\alpha g} \delta \mathbf{v}_{\alpha'}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'),$$

$$\delta \mathbf{v}'_{\alpha\alpha'} \equiv \delta \mathbf{v}'_{\alpha\alpha'}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \delta_{\alpha g} \delta_{\alpha' g} \delta \mathbf{v}_g(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$$

$$\delta \mathbf{v}_{\alpha'}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \begin{cases} -(\mathbf{v} - \mathbf{v}') m_{\alpha'} / m_g, & \alpha' = e, i, \\ \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} (\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} (\mathbf{v} - \mathbf{v}')), & \alpha' = g, \end{cases}$$

$$\delta_{\alpha g} = \begin{cases} 0, & \alpha = e, i, \\ 1, & \alpha = g. \end{cases}$$

Рівняння (1.164) можна записати в простішому вигляді, якщо ввести розширену змінну $\xi \equiv (\mathcal{X}, \alpha) \equiv (\mathbf{r}, \mathbf{v}, q, \alpha)$ і позначення

$$N_\alpha(\mathcal{X}, t) \equiv N(\xi, t), \quad \sum_{\alpha=e,i,g} \int d\mathcal{X} \equiv \int d\xi.$$

В результаті маємо

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}(\xi) \right\} N(\xi, t) = - \int d\xi' \{ [W^{(1)}(\xi, \xi') - \hat{V}(\xi, \xi')] N(\xi, t) N(\xi', t) - \\ - W^{(2)}(\xi - \Delta_{\xi\xi'}, \xi' + \Delta'_{\xi\xi'}) N(\xi - \Delta_{\xi\xi'}, t) N(\xi' + \Delta'_{\xi\xi'}, t) \}, \quad (1.166)$$

$$\begin{aligned} \hat{L}(\xi) &\equiv \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}, \\ W^{(1,2)}(\xi, \xi') &\equiv W_{\alpha\alpha'}^{(1,2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{v} - \mathbf{v}'), \\ \Delta_{\xi\xi'} &\equiv \Delta_{\alpha\alpha'}(\delta\mathbf{v}_{\alpha\alpha'}, \delta q_{\alpha\alpha'}) = (0, \delta\mathbf{v}_{\alpha\alpha'}, \delta q_{\alpha\alpha'}, 0), \\ \delta q_{\alpha\alpha'} &= \delta_{\alpha\beta} \delta q_{\alpha'}, \\ \Delta'_{\xi\xi'} &\equiv \Delta'_{\alpha\alpha'}(\delta\mathbf{v}'_{\alpha\alpha'}) = (0, \delta\mathbf{v}'_{\alpha\alpha'}, 0, 0). \end{aligned} \quad (1.167)$$

Перше рівняння ієрархії можна отримати статистичним усередненням рівняння (1.166). Тоді

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}(\xi) \right\} f_1(\xi, t) = - \int d\xi' \{ [W^{(1)}(\xi, \xi') - \hat{V}(\xi, \xi')] f_2(\xi, \xi', t) - \\ - W^{(2)}(\xi - \Delta_{\xi\xi'}, \xi' + \Delta'_{\xi\xi'}) f_2(\xi - \Delta_{\xi\xi'}, \xi' + \Delta'_{\xi\xi'}, t) \}, \quad (1.168)$$

$$\begin{aligned} f_1(\xi, t) &\equiv \langle N(\xi, t) \rangle, \\ f_2(\xi, \xi', t) &\equiv \langle N(\xi, t) N(\xi', t) \rangle - \delta(\xi - \xi') f_1(\xi, t), \end{aligned} \quad (1.169)$$

а кутові дужки означають усереднення (1.44) за фізично нескінченно малим інтервалом τ_{ph} , який і задає рівень кінетичного опису. Зауважимо, що введена у такий спосіб одночастинкова функція розподілу буде нормована на число частинок:

$$\int d\xi \langle N_\alpha(\xi, t) \rangle = \left\langle \int d\xi N_\alpha(\xi, t) \right\rangle = N_\alpha.$$

Якщо домножити рівняння (1.166) на $N(\xi', t)$, а рівняння для $N(\xi', t)$ на $N(\xi, t)$, то усереднення суми отриманих рівнянь дає друге рівняння ланцюжка. Аналогічно можна отримати наступні рівняння ієрархії. Ця ієрархія

в загальному випадку має значно складнішу структуру, ніж ієрархія для звичайної плазми. Її аналіз ще досконало не проведений. Але вона є основою для вивчення кінетичних властивостей запорошеної плазми в різних наближеннях. Проілюструємо це на прикладі моделі домінантних контактних зіткнень. Введемо бінарну кореляційну функцію

$$G_{\alpha\alpha'}(\mathcal{X}, \mathcal{X}', t) = f_{\alpha\alpha'}(\mathcal{X}, \mathcal{X}', t) - f_{\alpha}(\mathcal{X}, t)f_{\alpha'}(\mathcal{X}', t)$$

і самоузгоджене електричне поле

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \sum_{\alpha=e,i,g} \int d\mathcal{X}' q' \frac{f_{\alpha}(\mathcal{X}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

У цих позначеннях перше рівняння ієрархії (1.168) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}}}{m_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} + \frac{q}{m_{\alpha}} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} f_{\alpha}(\mathcal{X}, t) = \\ & = - \sum_{\alpha'=e,i,g} \int d\mathcal{X}' \{ W_{\alpha\alpha'}^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{v} - \mathbf{v}') f_{\alpha}(\mathcal{X}, t) f_{\alpha'}(\mathcal{X}', t) - \\ & - W_{\alpha\alpha'}^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{v} - \mathbf{v}' - \delta \mathbf{v}_{\alpha\alpha'} - \delta \mathbf{v}'_{\alpha\alpha'}) f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \delta \mathbf{v}_{\alpha\alpha'}, q - \delta q_{\alpha\alpha'}, t) \times \\ & \quad \times f_{\alpha'}(\mathbf{r}', \mathbf{v}' + \delta \mathbf{v}'_{\alpha\alpha'}, q', t) \} - \\ & - \sum_{\alpha'=e,i,g} \int d\mathcal{X}' \{ W_{\alpha\alpha'}^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{v} - \mathbf{v}') G_{\alpha\alpha'}(\mathcal{X}, \mathcal{X}', t) - \\ & - W_{\alpha\alpha'}^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{v} - \mathbf{v}' - \delta \mathbf{v}_{\alpha\alpha'} - \delta \mathbf{v}'_{\alpha\alpha'}) G_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \delta \mathbf{v}_{\alpha\alpha'}, q - \delta q_{\alpha\alpha'}, \mathbf{r}', \mathbf{v}' + \delta \mathbf{v}'_{\alpha\alpha'}, q', t) \} + \\ & \quad + \sum_{\alpha'=e,i,g} \int d\mathcal{X}' \hat{V}_{\alpha\alpha'}(\mathcal{X}, \mathcal{X}') G_{\alpha\alpha'}(\mathcal{X}, \mathcal{X}', t). \quad (1.170) \end{aligned}$$

Для подальших спрощень важливо розуміти фізичний сенс інтегральних доданків у правій частині рівняння. Очевидно, що члени з кулонівським оператором $\hat{V}_{\alpha\alpha'}(\mathcal{X}, \mathcal{X}')$ описують зміну функції розподілу внаслідок відхилення мікроскопічного поля від його середнього значення. Оскільки такі відхилення пов'язані з дискретністю частинок, то у випадку слабо

зв'язаної плазми такі доданки породжують інтеграли зіткнень типу інтегралу Боголюбова – Балеску – Ленарда. Доданки з $W_{\alpha\alpha'}^{(1)}$ та $W_{\alpha\alpha'}^{(2)}$ пов'язані з контактними зіткненнями ($|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = a_{\alpha\alpha'}$).

Головна ідея наближення домінантних контактних зіткнень полягає в припущенні, що основний внесок в праву частину рівняння (1.170) дають саме такі зіткнення. При цьому для опису зіткнень порошинок можна використати гіпотезу повного ослаблення початкових кореляцій Боголюбова, тобто

$$G_{gg}(\mathcal{X}, \mathcal{X}', t) \Big|_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \gg a} \simeq f_g(\mathcal{X}, t) f_g(\mathcal{X}', t), \quad (1.171)$$

а для зіткнень плазмових частинок із порошинками її модифіковану версію

$$G_{\alpha g}(\mathcal{X}, \mathcal{X}', t) \Big|_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \gg a} \simeq -f_{\alpha}(\mathcal{X}, t) f_g(\mathcal{X}', t) \theta(\vartheta_{\min}^{\alpha g} - \vartheta), \quad (1.172)$$

де $\vartheta_{\min}^{\alpha g}$ – мінімальний кут між векторами $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ та $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$, за якого траєкторії плазмової частинки і порошинки ще не перетинаються і який визначається умовою

$$\sin^2 \vartheta_{\min}^{\alpha g} = \frac{a_{\alpha g}^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left(1 - \frac{2e_{\alpha} q}{a_{\alpha g} m_{\alpha} (\mathbf{v} - \mathbf{v}')^2} \right). \quad (1.173)$$

Суть модифікованої умови (1.172) зрозуміла: якщо $\vartheta > \vartheta_{\min}^{\alpha g}$, тобто контактне зіткнення порошинки і частинки сорту α не відбувається, $G_{\alpha g} \rightarrow 0$ і ми маємо стандартне ослаблення кореляції. Але якщо $\vartheta < \vartheta_{\min}^{\alpha g}$, тобто траєкторії таких частинок у минулому перетиналися, то кореляційна функція дорівнює добутку одночастинкових функцій розподілу зі знаком мінус (іншими словами двохчастинкова функція розподілу дорівнює нулю). Це і означає сильну кореляцію початкового і кінцевого стану частинок.

На перший погляд може здаватися, що асимптотичне значення (1.172) не можна використовувати для розрахунку інтегралів зіткнень, оскільки інтегрування в доданках з $W_{\alpha\alpha'}^{(1)}$ і $W_{\alpha\alpha'}^{(2)}$ в (1.170) проводиться по поверхні порошинки. Незважаючи на це підстановка (1.172) в (1.170) дає правильні результати, оскільки інтегрування за \mathbf{r} у відповідних доданках дає потік

частинок сорту α , що поглинаються порошинками, який зберігається (за припущення, що на поглинання плазмових частинок вибраною порошинкою, інші порошинки не впливають). Аналогічні розрахунки можна зробити і для зіткнень порошинка – порошинка [95]. В результаті кінетичні рівняння набувають вигляду

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \langle \mathbf{E}_\alpha^{\text{eff}} \rangle \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} f_\alpha(X, t) = - \int d\mathbf{v}' \int dq' \sigma_{\alpha g}(q', \mathbf{v} - \mathbf{v}') |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| f_\alpha(X, t) f_g(\mathbf{r}, \mathbf{v}', q', t) + I_\alpha, \quad (1.174)$$

де переріз визначається формулами (1.7), які можна записати як

$$\sigma_{\alpha g}(q, \mathbf{v}) = \pi a^2 \left(1 - \frac{2e_\alpha q}{am_\alpha v^2} \right) \theta \left(1 - \frac{2e_\alpha q}{am_\alpha v^2} \right). \quad (1.175)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q}{m_g} \langle \mathbf{E}_g^{\text{eff}} \rangle \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} f_g(\mathcal{X}, t) = \\ & = - \sum_{\alpha=e,i} \int d\mathbf{v}' [\sigma_{\alpha' g}(q, \mathbf{v} - \mathbf{v}') |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| f_g(\mathcal{X}, t) - \\ & - \sigma_{\alpha' g}(q - e_\alpha, \mathbf{v} - \mathbf{v}' - \delta \mathbf{v}_{\alpha'}) |\mathbf{v} - \mathbf{v}' - \delta \mathbf{v}_{\alpha'}| f_g(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \delta \mathbf{v}_{\alpha'}, q - e_{\alpha'}, t)] f_{\alpha'}(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) - \\ & - \int \frac{d\Omega}{2\pi} \int d\mathbf{v}' \int dq' |\mathbf{n}(\mathbf{v} - \mathbf{v}')| [\sigma_{gg}(q, q', \mathbf{v} - \mathbf{v}') f_g(\mathcal{X}, t) f_g(\mathbf{r}, \mathbf{v}', q', t) - \\ & - \sigma_{gg}(q - \delta q_g, q', \mathbf{v} - \mathbf{v}') f_g(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \delta \mathbf{v}_g, q - \delta q_g, t) f_g(\mathbf{r}, \mathbf{v}' + \delta \mathbf{v}_g, q', t)] + I_g. \end{aligned} \quad (1.176)$$

Перший доданок у правій частині рівняння (1.174) описує поглинання плазмових частинок порошинками у термінах перерізу поглинання. Раніше, наприклад у роботах [22, 70], такий доданок вводився евристично. Тут

$$I_\alpha = I_\alpha^C + I_\alpha^B, \quad (1.177)$$

$$I_\alpha^C = \sum_{\alpha'} \int d\mathcal{X}' \hat{V}_{\alpha\alpha'}(\mathcal{X}, \mathcal{X}') [\langle \delta N_\alpha(\mathcal{X}, t) \delta N_{\alpha'}(\mathcal{X}', t) \rangle - G_{\alpha\alpha'}^{(0)}(\mathcal{X}, \mathcal{X}', t)], \quad (1.178)$$

$$\begin{aligned}
I_\alpha^B = \sum_{\alpha'} \int d\mathcal{X}' \left\{ W_{\alpha\alpha'}^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{v} - \mathbf{v}') [\langle \delta N_\alpha(\mathcal{X}, t) \delta N_{\alpha'}(\mathcal{X}', t) \rangle - \right. \\
- G_{\alpha\alpha'}^{(0)}(\mathcal{X}, \mathcal{X}', t)] - W_{\alpha\alpha'}^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{v} - \mathbf{v}' - \delta \mathbf{v}_{\alpha\alpha'} - \delta \mathbf{v}'_{\alpha\alpha'}) \times \\
\times [\langle \delta N_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \delta \mathbf{v}_{\alpha\alpha'}, q - q_{\alpha\alpha'}, t) \delta N_{\alpha'}(\mathbf{r}, \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}_{\alpha\alpha'}, q', t) \rangle - \\
\left. - G_{\alpha\alpha'}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \delta \mathbf{v}_{\alpha\alpha'}, q - q_{\alpha\alpha'}, \mathbf{r}', \mathbf{v}' + \delta \mathbf{v}_{\alpha\alpha'}, q', t) \right\}, \quad (1.179)
\end{aligned}$$

$$G_{\alpha\alpha'}^{(0)}(\mathcal{X}, \mathcal{X}', t) = -f_\alpha(\mathcal{X}, t) f_{\alpha'}(\mathcal{X}', t) \theta(\vartheta_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{v} - \mathbf{v}') - \vartheta), \quad (1.180)$$

$$\sin^2 \vartheta_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{a_{\alpha\alpha'}^2}{r^2} \left(1 - \frac{2qq'}{m_\alpha a_{\alpha\alpha'} v^2} \right) \theta(r - a_{\alpha\alpha'}),$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_\alpha^{\text{eff}} = - \sum_{\alpha'=e,i} e_{\alpha'} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int dX' \frac{f_{\alpha'}(X', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \\
- \int d\mathcal{X}' q' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{f_g(\mathcal{X}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \theta(\vartheta - \vartheta_{\alpha g}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{v} - \mathbf{v}')), \quad (1.181)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_g^{\text{eff}} = - \sum_{\alpha'} e_{\alpha'} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int dX' \frac{f_{\alpha'}(X', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \theta(\vartheta - \vartheta_{\alpha g}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{v} - \mathbf{v}')) - \\
- \int d\mathcal{X}' q' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{f_g(\mathcal{X}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.182)
\end{aligned}$$

При виведенні рівнянь (1.174)–(1.182) було використане співвідношення

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\alpha'}(\mathcal{X}, \mathcal{X}', t) = f_{\alpha\alpha'}^{(0)}(\mathcal{X}, \mathcal{X}', t) + [\langle \delta N_\alpha(\mathcal{X}, t) \delta N_{\alpha'}(\mathcal{X}', t) \rangle - \\
- G_{\alpha\alpha'}^{(0)}(\mathcal{X}, \mathcal{X}', t)] - \delta_{\alpha\alpha'} \delta(\mathcal{X} - \mathcal{X}') f_\alpha(\mathcal{X}, t), \quad (1.183)
\end{aligned}$$

де $f_{\alpha\alpha'}^{(0)}(\mathcal{X}, \mathcal{X}', t) = f_\alpha^{(0)}(\mathcal{X}, t) f_{\alpha'}^{(0)}(\mathcal{X}', t) \theta(\vartheta - \vartheta_{\alpha g}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{v} - \mathbf{v}'))$.

Зауважимо, що величини I_α^C відповідають за кулонівські зіткнення, а I_α^B – за контактні зіткнення. При цьому поява ефективного поля зумовлена впливом поглинання електронів та іонів порошинками.

Отримані у цьому пункті рівняння в подальшому будуть використані для обґрунтування моделі точкових стоків у кінетичному наближенні.

РОЗДІЛ 2

ЕФЕКТИВНИЙ ПОТЕНЦІАЛ ЗАРЯДЖЕНОЇ МАКРОЧАСТИНКИ

Взаємодія між зарядженими порошинками визначає низку цікавих явищ, які спостерігаються у запорошеній плазмі, таких як формування у ній впорядкованих структур з порошинок (плазмових кристалів) [97–99], поширення хвиль у запорошеній плазмі [100, 101], а також формування вихрів та області вільної від порошинок (void), які спостерігаються на експерименті в умовах мікрогравітації [102–104] та на Землі [105, 106]. Тому потрібно знати розподіл електростатичного потенціалу навколо порошинки. Цей потенціал створюється зарядом порошинки і плазмовим оточенням, тому його називають ефективним потенціалом.

Аналітичні та числові дослідження показали, що потенціал порошинки суттєво відрізняється від потенціалу Дебая і залежить як від динаміки плазми, так і від розподілу джерел і стоків плазми. Зокрема, потенціал порошинки має $\propto r^{-2}$ далекосяжну асимптотичну залежність у плазмі без зіткнень ($l_{e,i} \gg \lambda_D$, довжина вільного пробігу плазмових частинок набагато більша за довжину Дебая) [22, 40, 107, 108]. У слабоіонізованій плазмі з частими зіткненнями ($l_{e,i} \ll \lambda_D$) потенціал має асимптоту $\propto r^{-1}$, якщо джерела плазми знаходяться на великій відстані від порошинки [22, 38, 67, 109]. Якщо врахувати процеси іонізації та рекомбінації плазми поблизу порошинки, то потенціал стає екранованим, але з довжиною екранування, яка може бути набагато більшою за довжину Дебая [22, 67, 110]. Точний розподіл потенціалу навколо макрочастинки можна отримати, розв'язавши чисельно відповідну нелінійну задачу, але, для прикладу, моделювання впорядкованих структур у запорошеній плазмі [111–113] потребує аналітичних виразів, які описують потенціал з прийнятною точністю на всіх відстанях до порошинки.

Не зважаючи на те, що поглинання плазмових частинок порошинками є ключовою особливістю запорошеної плазми, досить часто, особливо

коли теорія запырошеної плазми лише починала розроблятися, процесами заряджання плазмовими струмами нехтували. В цьому разі заряд пырошинки вважається заданим і розподіл потенціалу у плазмі можна знайти з рівняння Пуассона – Больцмана. Тоді потенціал поодинокі зарядженої частинки можна описати потенціалом Дебая (див. п. 2.1.1). Саме цей потенціал використовували для визначення умов формування плазмових кристалів (див. п. 1.4). Такий підхід є виправданим, коли відстань між пырошинками є порядку довжини Дебая і далекосяжні асимптоти у потенціалі не є визначальними. Крім того заряджені макрочастинки, які не обмінюються зарядами із плазмовим оточенням, зустрічаються у заряджених колоїдних суспензіях, вивчення яких теж має значний інтерес. Дослідженню потенціалу поодинокі зарядженої частинки у неізотермічному плазмоподібному середовищу в рамках моделі Пуассона – Больцмана присвячений наступний підрозділ. Після якого, надалі всюди буде враховуватися самоузгоджене заряджання пырошинок плазмовими потоками.

2.1 Ефективний заряд макрочастинки в моделі Пуассона – Больцмана

Модель Пуассона – Больцмана широко використовується для опису екранування [114–116] і взаємодії [117–121] заряджених макрочастинок у плазмі і заряджених колоїдних суспензіях [122–124]. У роботі [125] було доведено, що потенціал зарядженої макрочастинки можна описувати потенціалом Дебая – Хюккеля з ефективним (перенормованим) зарядом, а також запропоновано спосіб визначення цього заряду. Для сферичних частинок цей спосіб було розглянуто і спрощено в [126]. З того часу було запропоновано велику кількість наближених аналітичних виразів і числових розрахунків ефективного заряду в різних геометріях, див. наприклад [7, 114, 127–132]. Але у всіх згаданих роботах розглядається ізотермічне плазмоподібне середовище. У цьому розділі розглядається вплив неізотермічності плазми на

ефективний заряд сферичної макрочастинки скінченних розмірів. Відмінність електронної та іонної температур є звичною для плазми. Температура аніонів та катіонів у заряджених колоїдних суспензіях зазвичай однакова, але неізотермічний випадок все ж становить певний інтерес.

2.1.1 Постановка задачі

Розглянемо поодинокую заряджену сферичну макрочастинку радіуса a , яка вміщена у плазмове середовище. Заряд макрочастинки поляризує оточуючу плазму і в результаті виникає ненульовий електростатичний потенціал $\varphi(\mathbf{r})$. Оскільки система має сферичну симетрію, то потенціал є функцією відстані до центру частинки $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(r)$ і задовольняє рівняння Пуассона (1.19) для $r \geq a$. У випадку однозарядних іонів ($e_i = -e_e = e$, e – це елементарний заряд) маємо

$$\Delta\varphi(r) = 4\pi e(n_e(r) - n_i(r)), \quad (2.1)$$

де $n_\alpha(r)$ – концентрації електронів ($\alpha = e$) та іонів ($\alpha = i$), які описуються розподілом Больцмана

$$n_\alpha(r) = n_0 e^{-\frac{e_\alpha\varphi(r)}{T_\alpha}}, \quad (2.2)$$

де n_0 – незбурена концентрація плазми і T_α – температура в енергетичних одиницях. Таким чином, (2.1) має вигляд рівняння Пуассона – Больцмана

$$\Delta\varphi(r) = 4\pi en_0 \left(e^{\frac{e\varphi(r)}{T_e}} - e^{-\frac{e\varphi(r)}{T_i}} \right). \quad (2.3)$$

Це рівняння необхідно доповнити крайовими умовами. Очевидно, що потенціал рівний нулю на великій відстані від частинки

$$\varphi(r)|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (2.4)$$

Згідно із теоремою Гаусса

$$\oint_S \nabla \varphi(\mathbf{r}) \mathbf{n} dS = -4\pi q, \quad (2.5)$$

де q – заряд у середині замкненої поверхні S і \mathbf{n} – одиничний нормальний до поверхні вектор. Якщо S є поверхнею макрочастинки, тоді, враховуючи сферичну симетрію, (2.5) дає наступну крайову умову

$$\mathbf{n} \nabla \varphi(r) \Big|_{r=a} = -\frac{q}{a^2}. \quad (2.6)$$

Нехай кінетична енергія електронів та іонів набагато більша за потенціальну енергію їх взаємодії із зарядженою макрочастинкою

$$\left| \frac{e_\alpha \varphi(r)}{T_\alpha} \right| \ll 1, \quad (2.7)$$

тоді лінійний розв'язок рівняння Пуассона – Больцмана (2.3), який задовольняє крайову умову (2.4), має вигляд

$$\varphi(r) = \frac{C}{r} e^{-r/\lambda_D}. \quad (2.8)$$

Тут C – довільна константа, λ_D – довжина Дебая

$$\lambda_D = \frac{1}{k_D}, \quad k_D^2 = k_{De}^2 + k_{Di}^2, \quad k_{D\alpha}^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{T_\alpha}. \quad (2.9)$$

Якщо умова (2.7) не задовольняється біля поверхні макрочастинки, то вона завжди задовольняється на певній відстані від неї. Таким чином, розв'язок (2.8) дає правильну асимптотичну залежність потенціалу від відстані.

Застосувавши крайову умову (2.6) до лінійного розв'язку (2.8), отримуємо потенціал Дерягіна – Ландау – Фервея – Овербека (ДЛФО) [122, 123]

$$\varphi(r) = \frac{q_D^{\text{eff}}}{r} e^{-k_D r}, \quad q_D^{\text{eff}} = \frac{q e^{k_D a}}{a k_D + 1}, \quad (2.10)$$

який у випадку $ak_D \ll 1$ переходить у потенціал Дебая – Хюккеля (або просто потенціал Дебая)

$$\varphi_D(r) = \frac{q}{r} e^{-k_D r}. \quad (2.11)$$

Відповідно до (2.10) потенціал зарядженої сферичної частинки описується потенціалом Дебая – Хюккеля з ефективним зарядом q_D^{eff} , який залежить від ak_D і є більшим за реальний заряд q .

У знерозмірених змінних

$$\phi = \frac{e_e \varphi}{T_e}, \quad z_g = \frac{q e_e}{a T_e}, \quad \tau = \frac{T_e}{T_i}, \quad \tilde{r} = \frac{r}{\lambda_D}, \quad \tilde{a} = \frac{a}{\lambda_D} \quad (2.12)$$

рівняння для потенціалу (2.3) і крайова умова (2.6) мають наступний вигляд:

$$\Delta \phi(\tilde{r}) = \frac{e^{\tau \phi(\tilde{r})} - e^{-\phi(\tilde{r})}}{1 + \tau}, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{n} \nabla \phi(\tilde{r}) \Big|_{\tilde{r}=\tilde{a}} = -\frac{z_g}{\tilde{a}}. \quad (2.14)$$

Таким чином, задача має три параметри: τ , z_g та \tilde{a} . Вона розв'язувалась чисельно у програмі FlexPDE [133] методом скінченних елементів [134] на відрізку $[\tilde{a}, \tilde{b}]$, де $\tilde{b} = bk_D \gg 1$. Крайова умова (2.4) апроксимувалась умовою $\phi(\tilde{b}) = 0$.

2.1.2 Ізотермічна плазма

Для повноти розгляду і перевірки обчислювальної методики спочатку були відтворені результати, які стосуються ізотермічної плазми ($\tau = 1$) [7].

Відношення обчисленого потенціалу до потенціалу Дебая (2.11) для різних значень нормованого радіуса макрочастинки a/λ_D і заряду $z_g = q e_e / a T_e$ представлені на рис. 2.1а, б. Ці відношення відрізняються від константи лише поблизу поверхні частинки, це означає, що потенціал частинки можна описати потенціалом Дебая з ефективним зарядом q^{eff} , який визначається сталим значенням до якого прямує відношення потенціалів. Поняття

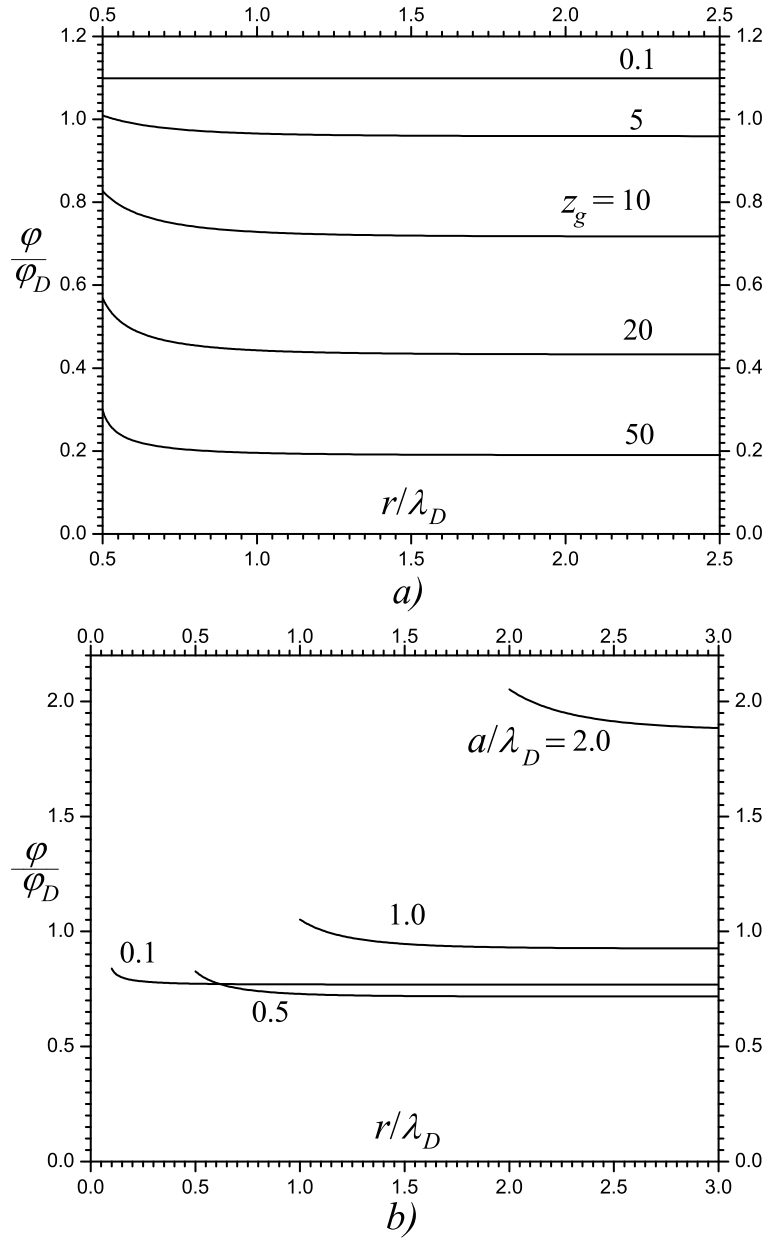


Рис. 2.1 Відношення обчисленого потенціалу до потенціалу Дебая φ/φ_D : а) $a/\lambda_D = 0.5$, $z_g = 0.1, 5, 10, 20, 50$; б) $z_g = 10$, $a/\lambda_D = 0.1, 0.5, 1.0, 2.0$, $z_g = qe_e/aT_e$.

ефективного заряду бере свій початок з роботи Александера та ін. [125] і було розвинуте в подальших дослідженнях.

Рис. 2.1а показує, що для фіксованого радіуса частинки збільшення z_g призводить до збільшення ефективного заряду. Залежність q^{eff} від радіуса частинки при фіксованому z_g є немонотонною (див. рис. 2.1б). Ці висновки

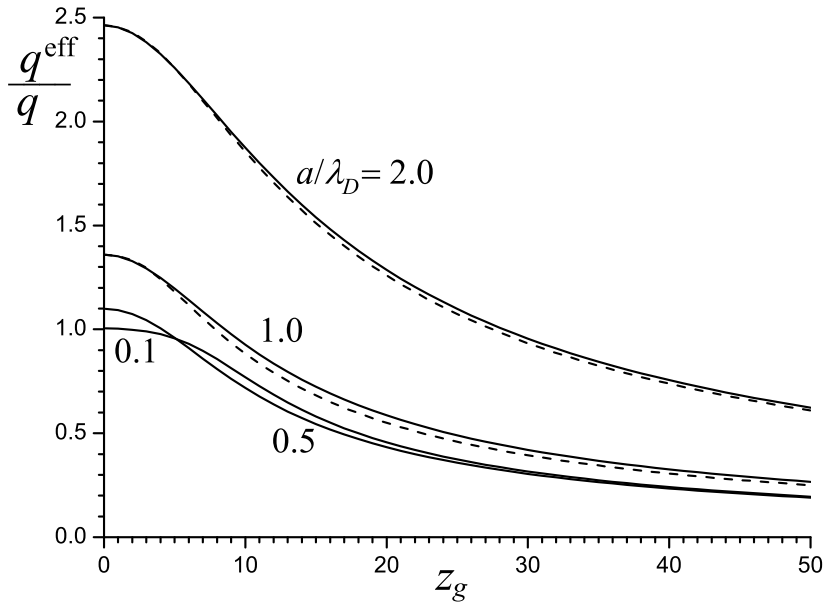


Рис. 2.2 Залежність ефективного заряду від z_g для $a/\lambda_D = 0.1, 0.5, 1.0, 2.0$, штрихова лінія відповідає (2.15).

більш наглядно ілюструє рис. 2.2, на якому зображена залежність ефективного заряду від z_g для різних значень a/λ_D , і узгоджуються з результатами, які отримані у роботі [114].

Найпростішу аналітичну залежність ефективного заряду від розміру макрочастинки можна взяти з потенціалу ДЛФО (2.10), який був отриманий у наближенні (2.7), або $z_g \ll 1$. З рис. 2.3 видно, що q_D^{eff} є правильним для частинок довільного розміру, якщо z_g менше або рівне декільком одиницям. Для великих значень z_g обчислений ефективний заряд є меншим ніж це передбачається зарядом ДЛФО.

Наступний вираз для ефективного заряду при $a/\lambda_D \gg 1$ можна знайти у [128, 130, 132]

$$\frac{q^{\text{eff}} e_e}{a T_e} = \frac{e^{k_D a}}{k_D a + 1} t \left(4k_D a + 2 \left(5 - \frac{t^4 + 3}{t^2 + 1} \right) \right), \quad (2.15)$$

де

$$t = T \left(\frac{z_g}{2k_D a + 2} \right), \quad T(x) = \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}. \quad (2.16)$$

Аналітичні оцінки для ефективного заряду (2.15), які на рис. 2.2, 2.3

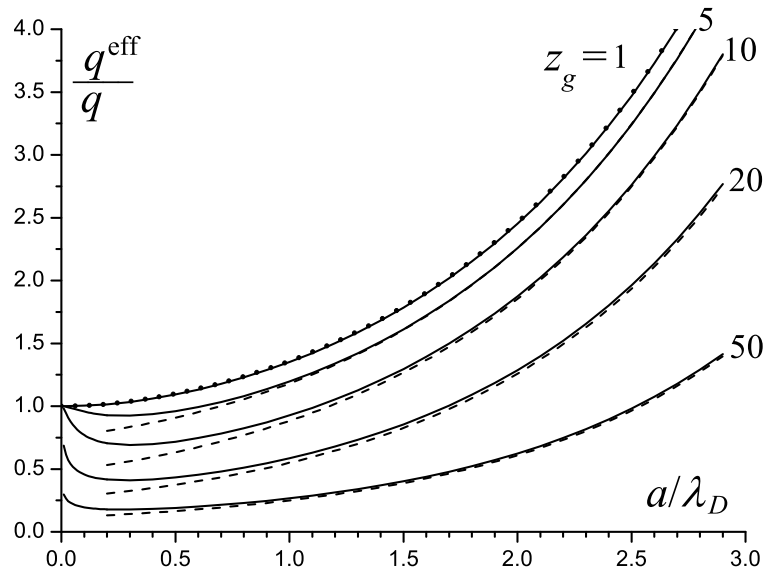


Рис. 2.3 Залежність ефективного заряду від радіуса макрочастинки, суцільні лінії є результатом обчислень для $z_g = 1, 5, 10, 20, 50$, точки відповідають ефективному заряду ДЛФО (2.10), штрихові лінії відповідають (2.15).

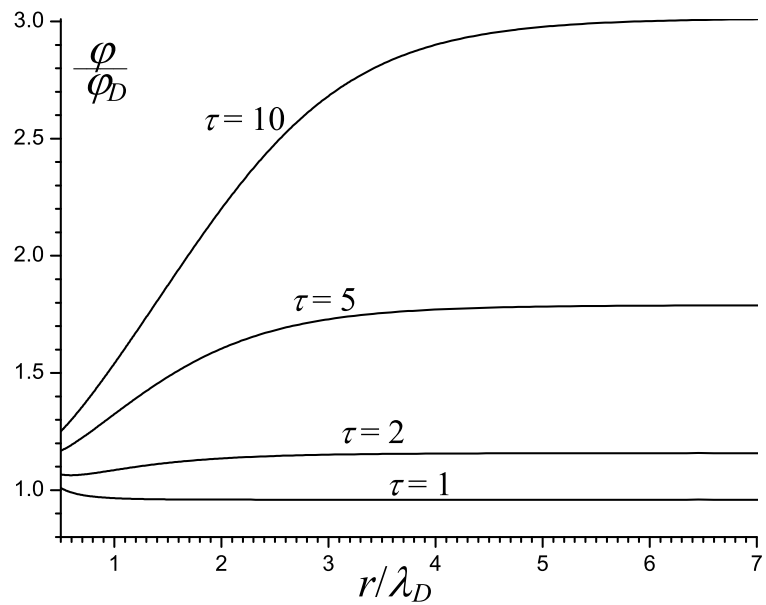


Рис. 2.4 Відношення обчисленого потенціалу до потенціалу Дебая φ/φ_D від відстані до центру макрочастинки для $a/\lambda_D = 0.5$ і $z_g = 5$ у ізотермічній ($\tau = 1$) та неізотермічній ($\tau = 2, 5, 10$) плазмі.

зображені штриховими лініями, і числові розрахунки узгоджуються при $k_D a \gtrsim 1$.

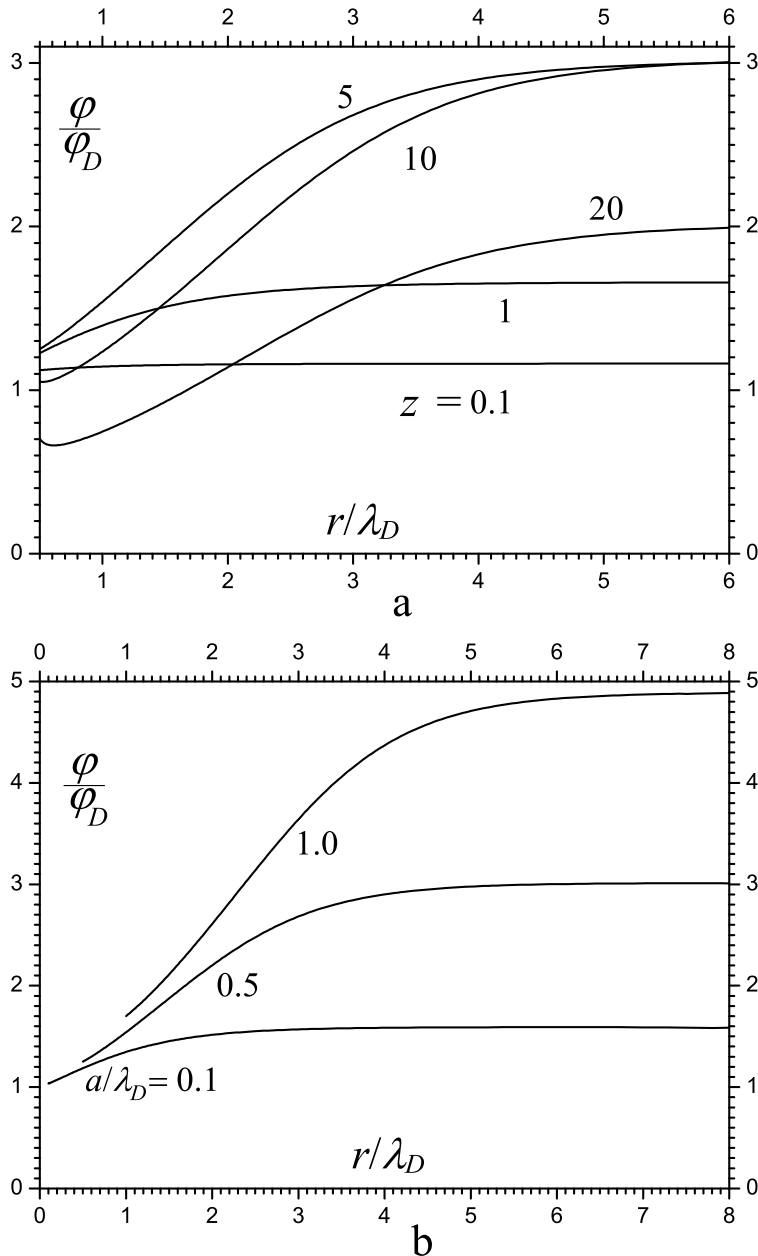


Рис. 2.5 Відношення обчисленого потенціалу до потенціалу Дебая φ/φ_D від відстані до центру макрочастинки у неізотермічній плазмі ($\tau = 10$): а) $a/\lambda_D = 0.5$, $z_g = 0.1, 5, 10, 20$; б) $z_g = 5$, $a/\lambda_D = 0.1, 0.5, 1.0$.

2.1.3 Неізотермічна плазма

У цьому підрозділі представлені результати для неізотермічної плазми [4]. На рис. 2.4 наведені відношення обчисленого потенціалу до потенціалу Дебая у ізотермічній ($\tau = 1$) та неізотермічній ($\tau = 2, 5, 10$) плазмі. Ці відношення досягають сталого значення на певній відстані R від центру

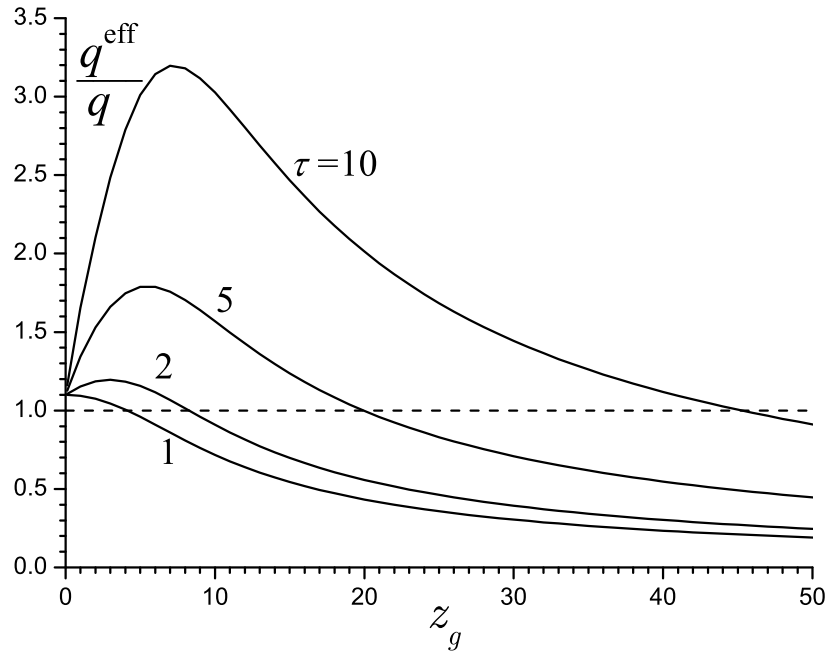


Рис. 2.6 Залежність відношення ефективного заряду до реального від z_g для $a/\lambda_D = 0.5$ у ізотермічній ($\tau = 1$) та неізотермічній ($\tau = 2, 5, 10$) плазмі.

макрочастинки. Нагадаємо, це означає, що починаючи з цієї відстані потенціал частинки можна описати потенціалом Дебая з ефективним зарядом q^{eff} , який визначається сталим значенням до якого прямує відношення потенціалів. Відстань R суттєво збільшується зі збільшенням τ . Це пояснюється тим фактом, що у неізотермічній плазмі точність припущення (2.7) і застосовність лінійного розкладу для показникових функцій у правій частині рівняння (2.13) є різними для електронної та іонної частин. Як результат, точність лінійного розв'язку (2.11) зменшується зі зростанням відношення електронної температури до іонної.

Рис. 2.5а ілюструє, що у неізотермічній плазмі ($\tau = 10$) R зростає з z_g і залежність q^{eff}/q від z_g є суттєво немонотонна. Ця залежність більш наглядно спостерігається на рис. 2.6. Відношення q^{eff}/q є монотонною функцією z_g лише в ізотермічній плазмі, а от у неізотермічній воно має максимум, який стає більш вираженим зі збільшенням τ . Крім того, область, де ефективний заряд є більшим за реальний, також зростає зі збільшенням τ . Цей ефект, певною мірою, подібний до зростання q^{eff} у асиметричних електролітах у порівнянні із симетричними [135].

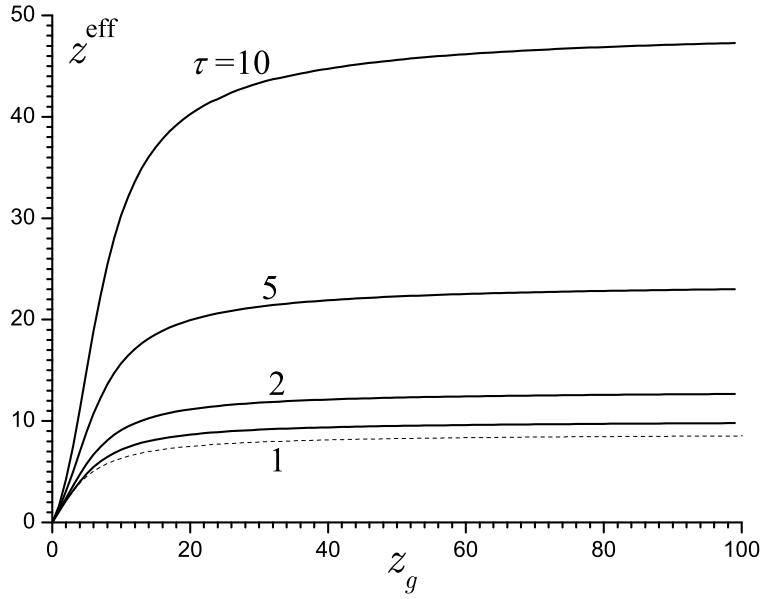


Рис. 2.7 Залежність безрозмірного ефективного заряду від z_g для $a/\lambda_D = 0.5$ у ізотермічній ($\tau = 1$) та неізотермічній ($\tau = 2, 5, 10$) плазмі: суцільні лінії є результатом обчислень, а штрихова лінія відповідає (2.15).

Згідно з рис. 2.5b ефективний заряд і відстань R зростають з a/λ_D у неізотермічній плазмі ($\tau = 10$) для $z_g = 5$. Підсумовуючи наведені вище результати, можна стверджувати, що відстань R від центру макрочастинки, починаючи з якої потенціал описується потенціалом Дебая (2.11) з ефективним зарядом, зростає зі збільшенням значень всіх трьох параметрів z_g , τ та \tilde{a} .

Відомо [129], що в моделі Пуассона – Больцмана має місце насичення ефективного заряду. Значення насичення визначається як

$$q_{\text{sat}}^{\text{eff}} = \lim_{q \rightarrow \infty} q^{\text{eff}}(q). \quad (2.17)$$

Рис. 2.7 показує, що у неізотермічній плазмі насичення ефективного заряду також спостерігається. Значення насичення є вищим ніж у ізотермічній плазмі і досягається за більших значень реального заряду. Результати обчислень узгоджуються з (2.15) (штрихова лінія на рис. 2.7) для $\tau = 1$.

У неізотермічній плазмі ($\tau = 10$) q^{eff} є набагато більшим ніж ефективний заряд ДЛФО (2.10) і є близьким до нього лише при $z_g \ll 1$ (див.

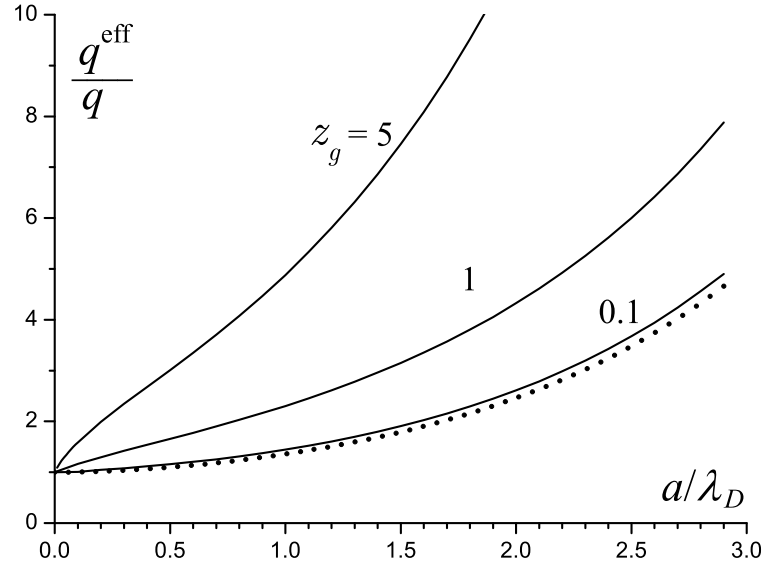


Рис. 2.8 Залежність відношення ефективного заряду до реального від радіуса макрочастинки у неізотермічній плазмі ($\tau = 10$) для $z_g = 0.1, 1, 5$: суцільні лінії є результатом обчислень, а точкова відповідає ефективному заряду ДЛФО (2.10).

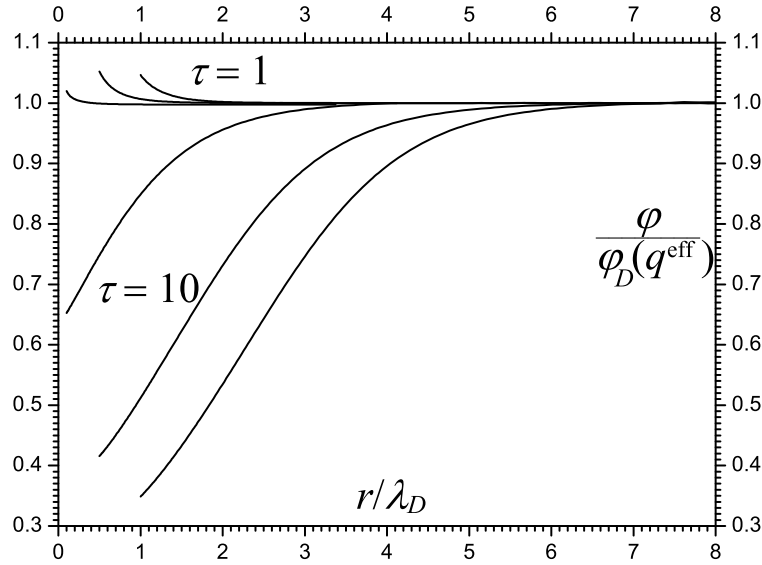


Рис. 2.9 Відношення обчисленого потенціалу до потенціалу Дебая з ефективним зарядом $\varphi/\varphi_D(q^{\text{eff}})$ у ізотермічній ($\tau = 1$) та неізотермічній ($\tau = 10$) плазмі, $z_g = 5$, $a/\lambda_D = 0.1, 0.5, 1.0$.

рис. 2.8). Отже, діапазон значень z_g , для яких (2.10) є точним, суттєво залежить від τ .

Рис. 2.9 ілюструє відносну похибку потенціалу Дебая з ефективним зарядом від відстані. Очевидно, що найбільше відхилення спостерігається

поблизу поверхні макрочастинки, але у ізотермічній плазмі, для розглянутих параметрів, воно ледь перевищує 5%. У неізотермічній ($\tau = 10$) плазмі потенціал Дебая навіть з ефективним зарядом погано описує потенціал зарядженої сферичної макрочастинки скінченних розмірів на відстанях декілька довжин Дебая від неї, хоча і є асимптотично правильним. Як для ізотермічної та і неізотермічної плазми, потенціал Дебая з ефективним зарядом краще описує розподіл потенціалу поблизу малих макрочастинок ($a \ll \lambda_D$).

2.1.4 Висновки

Розподіл потенціалу навколо зарядженої сферичної макрочастинки у плазмоподібному середовищі може бути асимптотично правильно описаний потенціалом Дебая з ефективним зарядом. Значення ефективного заряду залежить від відношення радіуса частинки до довжини Дебая $\tilde{a} = a/\lambda_D$, безрозмірного заряду $z_g = qe_e/aT_e$ та відношення температури електронів та іонів $\tau = T_e/T_i$. Ефективний заряд може бути як значно меншим, так і більшим за реальний заряд. У ізотермічній плазмі ефективний заряд монотонно спадає зі збільшенням z_g , але у неізотермічній плазмі ця залежність має виражений максимум. Для будь-яких значень \tilde{a} та z_g , значення ефективного заряду у неізотермічній плазмі є більшим, ніж в ізотермічній. Насичення ефективного заряду також має місце у неізотермічній плазмі. Відносна похибка потенціалу Дебая з ефективним зарядом у декілька разів більша у неізотермічній плазмі, ніж в ізотермічній, так само як і відстань від макрочастинки, починаючи з якої потенціал Дебая стає точним.

2.2 Ефективний потенціал порошинки у сильнозіткненній плазмі

У цьому підрозділі будуть представлені результати робіт [8, 26] в яких отримано аналітичний вираз для потенціалу порошинки у випадку слабкоіонізованої плазми із частими зіткненнями, яка має місце, наприклад у

експериментах [63–65]. Тут і надалі, на відміну від попереднього підрозділу, розглядається порошинка, яка самоузгоджено заряджається плазмовими потоками, що є однією з найважливіших особливостей запорошеної плазми.

2.2.1 Постановка задачі і основні рівняння

Розглянемо заряджену сферичну порошинку радіуса a із зарядом q , яка вміщена у нескінченну слабоіонізовану плазму із частими зіткненнями. Електростатичний потенціал задовольняє рівняння Пуассона (2.1) з крайовими умовами (2.4) і (2.6).

Оскільки порошинка заряджається за рахунок поглинання електронів та іонів, які з нею стикаються, то стаціонарне значення її заряду визначається умовою рівності нулю повного електричного струму через поверхню порошинки (1.12)

$$I_{\text{tot}} = 4\pi a^2 \sum_{\alpha} e_{\alpha} \Gamma_{\alpha} = 0, \quad (2.18)$$

де густина потоку плазмових частинок Γ_{α} задовольняє стаціонарне рівняння неперервності

$$\text{div} \Gamma_{\alpha}(r) = 0. \quad (2.19)$$

На відміну від рівняння (1.18), у правій частині (2.19) відсутні доданки, які описують об'ємну іонізацію та рекомбінацію, тобто цими процесами ми нехтуємо.

У дрейфово-дифузійному наближенні (див. п. 1.2.2), яке підходить для опису динаміки плазми у випадку слабоіонізованої плазми із частими зіткненнями, густини потоків електронів та іонів мають вигляд (1.17)

$$\Gamma_{\alpha}(r) = -D_{\alpha} \left(\frac{e_{\alpha}}{T_{\alpha}} n_{\alpha}(r) \nabla \varphi(r) + \nabla n_{\alpha}(r) \right). \quad (2.20)$$

Для того, щоб описати поглинання плазмових частинок поверхнею порошинки використовуємо крайову умову для $n_\alpha(r)$ [49, 63, 67]

$$n_\alpha(r)|_{r=a} = 0. \quad (2.21)$$

Вважаємо, що джерела плазми знаходяться на великій відстані від порошинки де вони підтримують сталу концентрацію електронів та іонів n_0 , тобто

$$n_\alpha(r)|_{r \rightarrow \infty} = n_0. \quad (2.22)$$

У знерозмірених змінних

$$\mathbf{G}_\alpha = \frac{\Gamma_\alpha}{D_e n_0 k_D} \quad (2.23)$$

отримуємо

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_e &= -\eta_e(\tilde{r}) \nabla \phi(\tilde{r}) - \nabla \eta_e(\tilde{r}), \\ \mathbf{G}_i &= (D_i/D_e)(\tau \eta_i(\tilde{r}) \nabla \phi(\tilde{r}) - \nabla \eta_i(\tilde{r})), \end{aligned} \quad (2.24)$$

де $\eta_\alpha = n_\alpha/n_0$, $\phi = -e\varphi/T_e$, $\tilde{r} = r/\lambda_D$, $\tau = T_e/T_i$ і рівняння для потенціалу має вигляд

$$\Delta \phi = \frac{\eta_i(\tilde{r}) - \eta_e(\tilde{r})}{1 + \tau}. \quad (2.25)$$

Сформульована вище задача не має точного аналітичного розв'язку, тому вона була розв'язана чисельно у програмі FlexPDE [133] методом скінченних елементів [134]. Задача має сферичну симетрію, тому вона є одновимірною у сферичній системі координат.

Областю обчислень є відрізок $[a, b]$. В обчисленнях крайову умову (2.4) ми апроксимуємо такою ж, але при $r = b$, де $b \gg \lambda_D$ і $b \gg l_\alpha$ – довжина вільного пробігу.

Знерозмірені вирази (2.24) містять параметр D_i/D_e , який є відношенням коефіцієнтів дифузії. Використовуючи співвідношення $D_\alpha =$

$l_\alpha \sqrt{T_\alpha/m_\alpha}$, отримуємо

$$\frac{D_e}{D_i} = \frac{l_e}{l_i} \sqrt{\frac{m_i T_e}{m_e T_i}} = d\sqrt{\tau}. \quad (2.26)$$

При цьому було використано припущення, що довжина вільного пробігу (переріз) частинок не залежать від їхньої температури. Параметр d є відношенням коефіцієнтів дифузії електронів та іонів у ізотермічній плазмі. Розумним значенням цього параметра є $d = 1000$ [67]. Обчислення проводились як для ізотермічної плазми ($\tau = T_e/T_i = 1$), так і для неізотермічної ($\tau = 2$ і 10).

2.2.2 Ефективний потенціал

Як вже згадувалося на початку цього розділу, потенціал порошинки має кулонівську асимптотичну поведінку, яку можна легко отримати з наступних міркувань. Порошинка збурює розподіл концентрації плазмових частинок $n_\alpha(r) = n_0 + \delta n_\alpha(r)$, але на великих відстанях від порошинки плазма повинна залишатись квазінейтральною, тому $\delta n_i = \delta n_e = \delta n$, при цьому густина заряду рівна нулю і відповідно рівна нулю права частина рівняння Пуассона (2.1). З огляду на сферичну симетрію і з урахуванням крайової умови (2.4) розв'язок рівняння (2.1) має вигляд

$$\varphi = \frac{\tilde{q}}{r}, \quad (2.27)$$

де \tilde{q} – довільна константа, яка має сенс ефективного неекранованого заряду.

Підстановка (2.27) в (2.20) дає електронний та іонний струми

$$I_\alpha = -4\pi r^2 e_\alpha \Gamma_{\alpha r}(r) = D_\alpha \left(-k_{D\alpha}^2 \tilde{q} \left(1 + \frac{\delta n}{n_0} \right) + 4\pi e_\alpha r^2 \frac{\partial \delta n}{\partial r} \right). \quad (2.28)$$

У стаціонарному стані задовольняється умова (2.18), таким чином $I_i = -I_e = I$. Вважаючи збурення малим $\delta n \ll n_0$, знаходимо

$$\tilde{q} = -\frac{I}{k_D^2} \left(\frac{1}{D_i} - \frac{1}{D_e} \right) \quad (2.29)$$

і, використовуючи крайову умову (2.22), знаходимо збурення концентрації плазмових частинок

$$\delta n(r) = -\frac{I}{4\pi e k_D^2} \left(\frac{k_{Di}^2}{D_e} + \frac{k_{De}^2}{D_i} \right) \frac{1}{r}, \quad (2.30)$$

яке є обернено пропорційним відстані від порошинки. Неекранований заряд (2.29) є пропорційним до струму заряджання і з'являється саме завдяки поглинанню електронів та іонів порошиною. Цей вираз з точністю до позначень збігається з виразом (1.31), який отримано у моделі точкових стоків (див. п. 1.3).

Далі наведені результати обчислень на основі рівнянь (2.24), (2.25). Рис. 2.10а, б вказують на те, що кулонівська асимптота \tilde{q}/r є правильною як в ізотермічній, так і в неізотермічній плазмі. Неекранований заряд \tilde{q} знаходився з (2.29), використовуючи розрахований стаціонарний струм заряджання I . Відстань від порошинки з якої потенціал проявляє суто кулонівську поведінку залежить від її розміру і є меншою для менших порошинок.

З рис. 2.11, 2.12 видно, що розподіли електронів та іонів навколо тіла, яке поглинає плазму, кардинально відрізняються від розподілу Больцмана (2.2). Концентрації плазмових частинок стають майже рівними на певній відстані $\tilde{R} = R/\lambda_D$ від порошинки ($\tilde{R} \approx 5$ для $a = 0.1\lambda_D$ та $\tilde{R} \approx 8$ для $a = 0.5\lambda_D$) і починаючи з цієї відстані розподіли їх концентрацій правильно описуються виразом (2.30) (точкова лінія на рис. 2.11). Але, як видно з рис. 2.10а, на відстані \tilde{R} ще спостерігається відмінність між обчисленим потенціалом і кулонівським \tilde{q}/r . Це можна пояснити тим фактом, що на цій відстані умова $\delta n \ll n_0$, яка була використана при виведенні (2.29), не задовольняється з необхідною точністю, особливо для великих порошинок. Залишивши доданок $\delta n/n_0$ у (2.28), отримуємо уточнений вираз для ефективного неекранованого заряду

$$\tilde{q}_c = -\frac{I}{k_D^2} \left(\frac{1}{D_i} - \frac{1}{D_e} \right) \frac{1}{1 + \delta n(r)/n_0}. \quad (2.31)$$

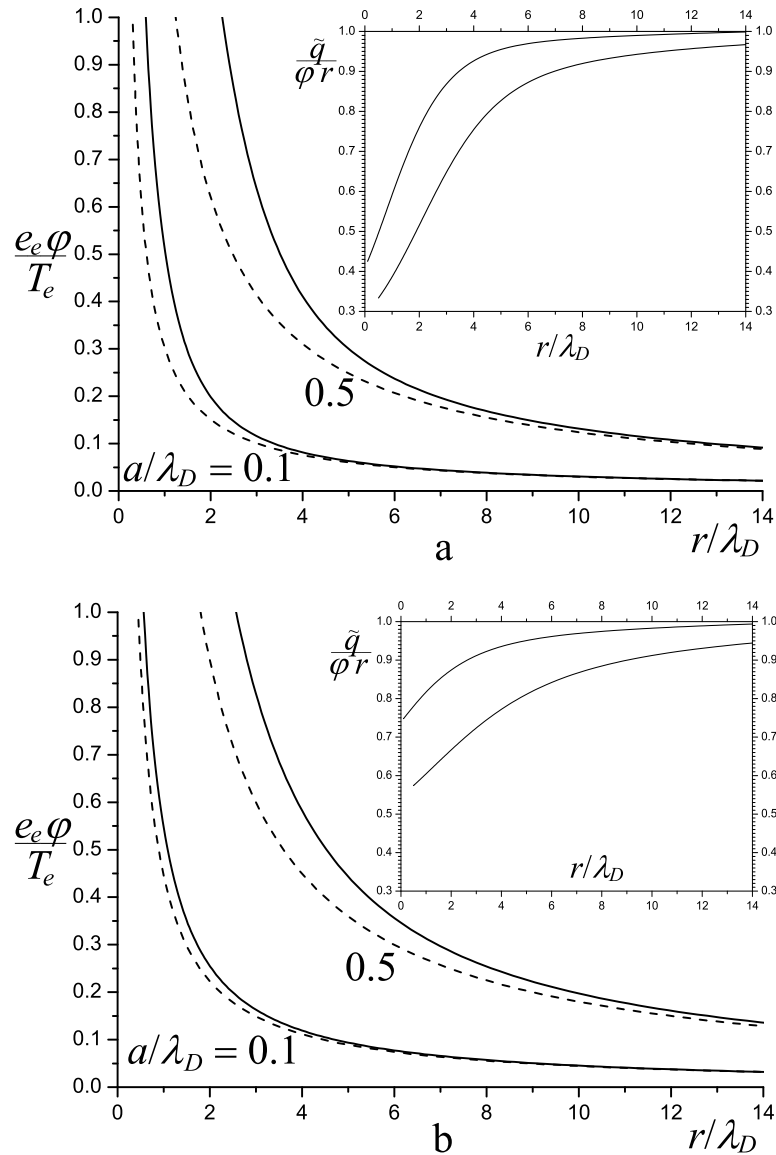


Рис. 2.10 Залежність потенціалу від відстані для двох розмірів порошинок: $a = 0.1, 0.5\lambda_D$ у ізотермічній (а) та неізотермічній $\tau = 10$ (б) плазмі. Суцільні лінії – обчислений потенціал, штрихові лінії – \tilde{q}/r . Вставка показує відношення \tilde{q}/r до обчисленого потенціалу.

В такому разі він стає функцією від r і оскільки δn є від'ємним, то \tilde{q}_c збільшується при наближенні до порошинки. Отже, вираз (2.29) занижує відносний неекраниваний заряд, так само як і потенціал, що і спостерігається на рис. 2.10а, б (штрихова лінія знаходиться нижче, ніж суцільна).

Згідно з крайовою умовою (2.21), перший доданок у (2.20) рівний нулю на поверхні порошинки. Тому умова (2.18) дає $D_e \nabla n_e(a) = D_i \nabla n_i(a)$.

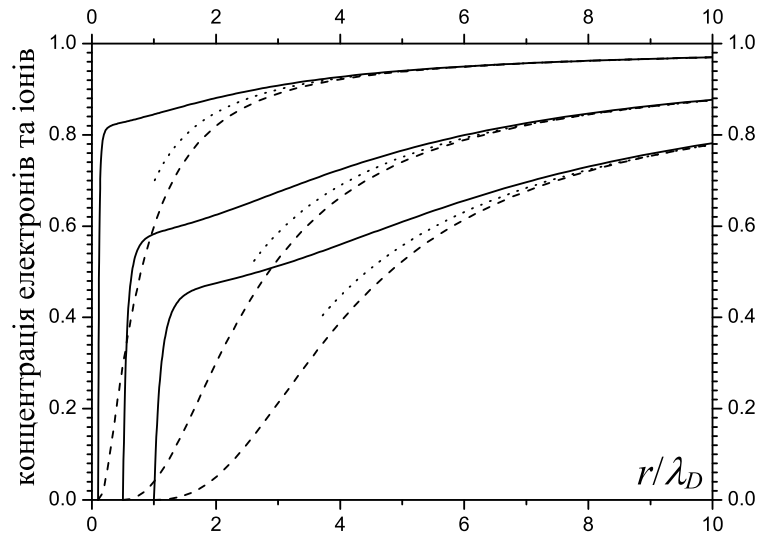


Рис. 2.11 Залежність нормованої концентрації електронів та іонів n_α/n_0 від відстані для трьох розмірів порошинок: $a = 0.1, 0.5, 1.0\lambda_D$ у ізотермічній плазмі. Суцільна лінія – концентрація іонів, штрихова лінія – концентрація електронів, точкова лінія – формула (2.30).

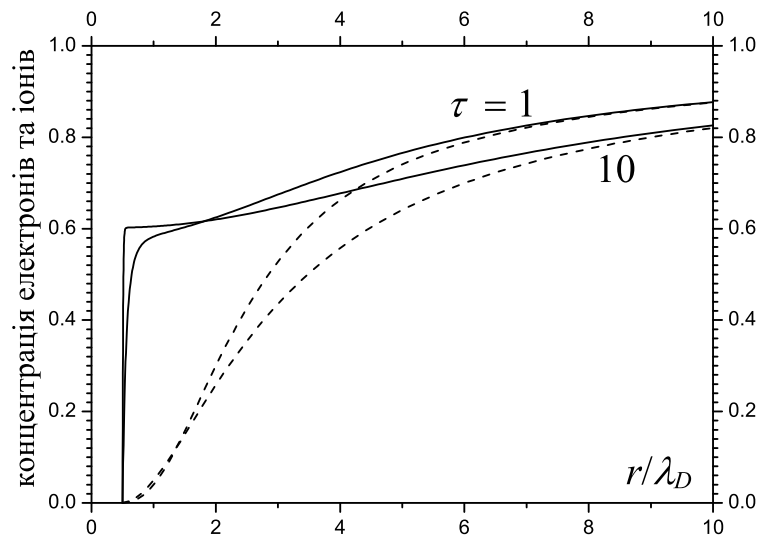


Рис. 2.12 Залежність нормованої концентрації електронів та іонів n_α/n_0 від відстані у ізотермічній ($\tau = 1$) та неізотермічній ($\tau = 10$) плазмі. Суцільна лінія – концентрація іонів, штрихова лінія – концентрація електронів.

Оскільки $D_e \gg D_i$, то поблизу поверхні порошинки концентрація іонів зростає значно швидше, ніж концентрація електронів, що і спостерігається на рис. 2.11. Збільшення τ призводить до збільшення відношення $D_e/D_i = d\sqrt{\tau}$ (2.26), це пояснює більш різке зростання концентрації іонів біля поверхні порошинки у неізотермічній плазмі (див. рис. 2.12). Отримані нами розподіли

іонів узгоджуються з результатами числового розв'язання кінетичного рівняння з інтегралом зіткнень БГК (1.110) в границі $l_i/a \ll 1$ [136].

Розрахований струм заряджання I дає змогу визначити з (2.29) неекранований заряд \tilde{q} , залежність якого від радіуса порошинки наведена на рис. 2.13а разом із повним стаціонарним зарядом порошинки. З рисунка видно, що нормований неекранований заряд $\tilde{z}_g = \tilde{q}e_e/aT_e$ зменшується зі збільшенням радіуса порошинки на відміну від повного заряду z_g , який навпаки збільшується зі зростанням радіуса порошинки. В результаті, див. рис. 2.13b, відносний неекранований заряд \tilde{q}/q або \tilde{z}_g/z_g різко зростає при зменшенні радіуса порошинки. У ізотермічній плазмі $\tilde{q}/q < 0.5$, що узгоджується з результатами обчислень виконаними у [67]. У неізотермічній плазмі значення відносного неекранованого заряду є вищим, ніж в ізотермічній і досягає значення ≈ 0.9 для $a \ll \lambda_D$, $\tau = 10$. Це означає, що переважна частина потенціалу маленької порошинки у неізотермічній плазмі є кулонівською \tilde{q}/r . Такий висновок підтверджується рисунком 2.10b, на якому відношення \tilde{q}/r до обчисленого потенціалу для $a = 0.1\lambda_D$ не перевищує ≈ 0.75 .

У роботах [137, 138] були запропоновані наступні наближені вирази для струмів заряджання у дрейфово-дифузійному наближенні

$$I_i = \frac{4\pi a n_0 z_g \tau D_i e}{1 - e^{-z_g \tau}}, \quad I_e = -\frac{4\pi a n_0 z_g D_e e}{e^{z_g} - 1}. \quad (2.32)$$

Використовуючи умову стаціонарності $I_i + I_e = 0$, отримуємо рівняння для заряду порошинки

$$\tau \frac{D_i}{D_e} \frac{1 - e^{z_g}}{e^{-z_g \tau} - 1} = 1. \quad (2.33)$$

Значення стаціонарного заряду, які дає рівняння (2.33), рівні $z_g \approx 6.91$, 6.56 і 5.76 для $\tau = 1, 2, 10$, відповідно, і узгоджуються з результатами наших обчислень при $a \ll \lambda_D$ (див. рис. 2.13а). Підстановка стаціонарного заряду у вираз (2.32) дає стаціонарний струм, який в границі $a \ll \lambda_D$ знову узгоджується з обчисленим струмом, який наведено на рис. 2.14.

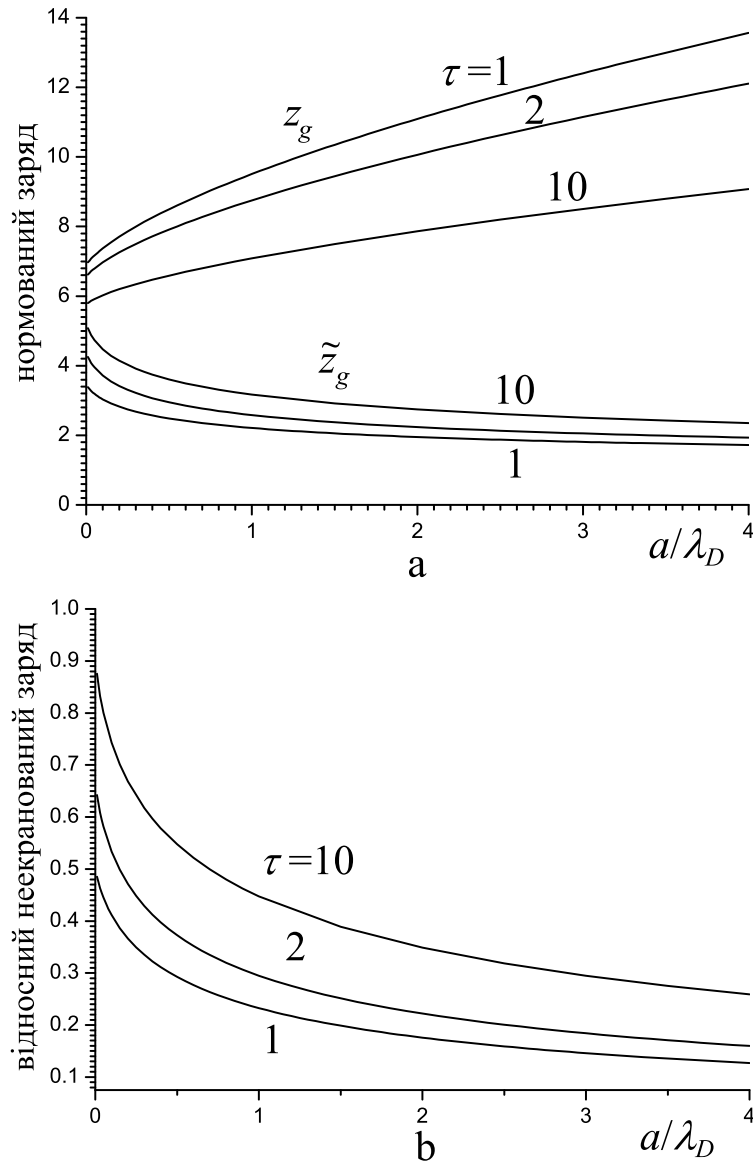


Рис. 2.13 а – нормований заряд порошинки $z_g = qe_e/aT_e$ і нормований неекраниваний заряд $\tilde{z}_g = \tilde{q}e_e/aT_e$ у ізотермічній ($\tau = 1$) та неізотермічній ($\tau = 2, 10$) плазмі, б – відносний неекраниваний заряд $\tilde{q}/q = \tilde{z}_g/z_g$ від радіуса порошинки.

Комбінуючи формули (2.32) і (2.29), отримуємо наближену формулу для неекраниваного заряду

$$\tilde{z}_g = \frac{z_g}{e^{z_g} - 1} \left(\frac{D_e}{D_i} - 1 \right) \frac{1}{1 + \tau}. \quad (2.34)$$

У ізотермічній плазмі розв'язком рівняння (2.33) є $z_g = \ln(D_e/D_i)$ і

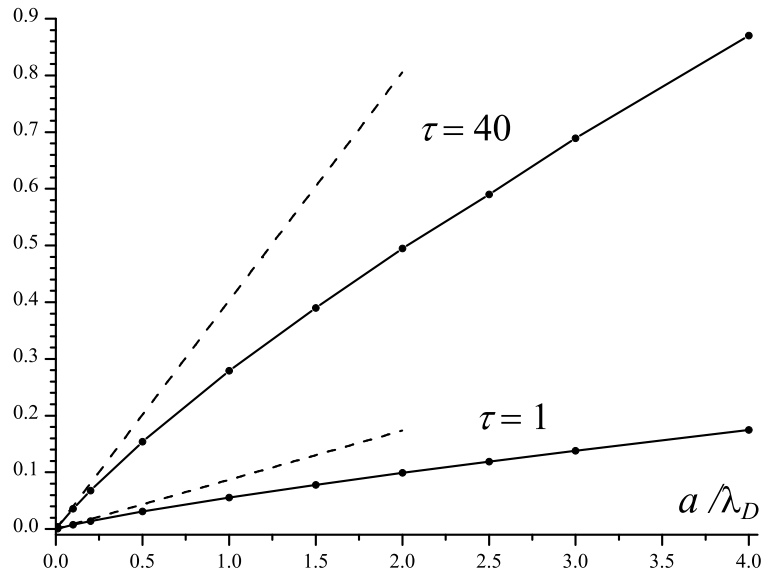


Рис. 2.14 Залежність безрозмірного струму $Ik_D/en_0e D_e$ від радіуса порошинки. Суцільні лінії з точками – результати обчислень, штрихові лінії – формула (2.32).

(2.34) дає значення $\tilde{z}_g/z_g = 0.5$, яке не залежить від D_e/D_i . Для неізотермічної плазми отримуємо $\tilde{z}_g/z_g \approx 0.67$ ($\tau = 2$) і ≈ 0.91 ($\tau = 10$). Ці значення є верхньою межею відносного неекранованого заряду, які досягаються для $a \ll \lambda_D$ (див. рис. 2.13b).

Для опису потенціалу на довільній відстані від порошинки можна використовувати вираз (1.32) [22, 70, 71, 139]

$$\varphi_0(r) = (q - \tilde{q}) \frac{e^{-r/\lambda_D}}{r} + \frac{\tilde{q}}{r}, \quad (2.35)$$

який є сумою потенціалів Дебая і Кулона з ефективними зарядами.

Вираз (2.35) отриманий у лінійному наближенні у рамках моделі точкових стоків (див. п. 1.3), суть якої полягає у введенні у рівняння неперервності $\text{div}\mathbf{\Gamma}_\alpha(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})I_\alpha/e_\alpha$ сингулярних доданків, які враховують поглинання плазми порошинкою. Такий підхід дає змогу позбутися крайових умов, але при цьому стаціонарний заряд порошинки q і струм заряджання I стають невизначеними параметрами.

Порівняння (2.35) з обчисленим потенціалом у ізотермічній плазмі для

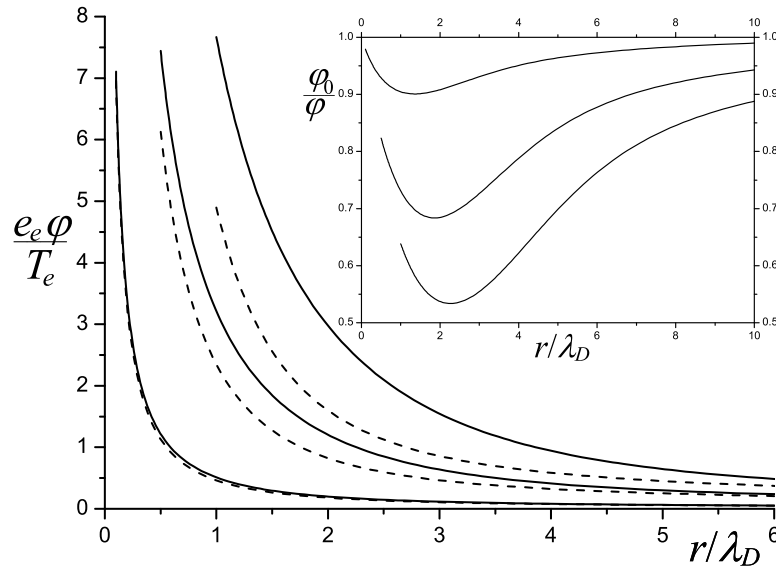


Рис. 2.15 Залежність потенціалу від відстані для трьох розмірів порошинок: $a = 0.1, 0.5, 1.0\lambda_D$. Суцільні лінії – обчислений потенціал, штрихові лінії – формула (2.35). Вставка показує відношення φ_0 до обчисленого потенціалу.

$a = 0.1, 0.5, 1.0\lambda_D$ наведено на рис. 2.15 (криві починаються з поверхні порошинки). Видно, що формула (2.35) із значеннями q і \tilde{q} , які взяті із обчислень, завищує значення потенціалу і описує його задовільно лише для малих порошинок. Максимальна відносна похибка (2.35) у порівнянні з обчисленим потенціалом становить приблизно 10% для $a = 0.1\lambda_D$, зростає до $\approx 32\%$ для $a = 0.5\lambda_D$ і досягає $\approx 46\%$ для $a = \lambda_D$ (див. вставку на рис. 2.15). У неізотермічній ($\tau = 10$) плазмі максимальна відносна похибка формули (2.35) дещо менша, ніж у ізотермічній, і становить $\approx 9\%$, 26% , 38% для $a = 0.1, 0.5, 1.0\lambda_D$, відповідно.

Таким чином, наближена формула (2.35) дає задовільний якісний опис поведінки потенціалу, але кількісний опис потребує покращення. Оскільки максимальна відносна похибка спостерігається на відстанях $r \approx 2\lambda_D$, то для покращення точності формули (2.35) необхідно модифікувати дебаєвську частину потенціалу, неточність якої, напевне, пов'язана зі зміною розподілу електронів та іонів поблизу порошинки, порівняно із розподілом Больцмана. Отже, дебаєвське екранування відбувається у неоднорідному

плазмовому середовищі. В такому разі природно припустити, що зміна однорідного розподілу плазмових частинок повинна призвести до зміни довжини екранування. Тому ми вводимо ефективну довжину екранування λ_D/p , поділивши звичайну довжину екранування на параметр p

$$\varphi_{0p}(r) = (q - \tilde{q}) \frac{e^{-rp/\lambda_D}}{r} + \frac{\tilde{q}}{r}. \quad (2.36)$$

Ефективна довжина екранування вводилась також при дослідженні потенціалу порошинки у плазмі без зіткнень [140, 141] або з нечастими зіткненнями [142]. Для знаходження параметра p необхідно апроксимувати обчислений потенціал формулою (2.36). Очевидно, що при цьому необхідно використовувати просторову область де дебаєвський доданок є суттєвим у порівнянні з кулонівським. Внутрішньою межею цієї області є поверхня порошинки, а от зовнішня межа не є однозначно визначеною. Взагалі, значення p , яке дає метод найменших квадратів, залежить від вибору зовнішньої межі області апроксимації. Такий недолік відсутній у методу мінімізації максимальної відносної похибки, тому саме він був використаний нами для знаходження параметра p . Рис. 2.16 показує, що значення p наближається до одиниці для $a \ll \lambda_D$ у ізотермічній плазмі і різко спадає зі збільшенням радіуса порошинки. У неізотермічній ($\tau = 10$) плазмі значення p приблизно вдвічі менше, ніж в ізотермічній. Отже, поглинання електронів та іонів призводить не лише до появи неекранованої частини потенціалу, а й до суттєвого збільшення довжини екранування. Це збільшення є яскраво вираженим для $a \gtrsim \lambda_D$, а також у неізотермічній плазмі. На відміну від наближеної формули для потенціалу в плазмі без зіткнень [141], ефективна довжина екранування λ_D/p не залежить від відстані до порошинки, що спрощує використання формули (2.36).

Вираз (2.36) описує розподіл потенціалу значно краще ніж (2.35), див. рис. 2.17. Максимальна відносна похибка зменшуються до $\approx 1.5\%$, 4% , 5% у ізотермічній плазмі і до $\approx 1.2\%$, 2.5% , 3.2% у неізотермічній для $a = 0.1, 0.5, 1.0\lambda_D$, відповідно.

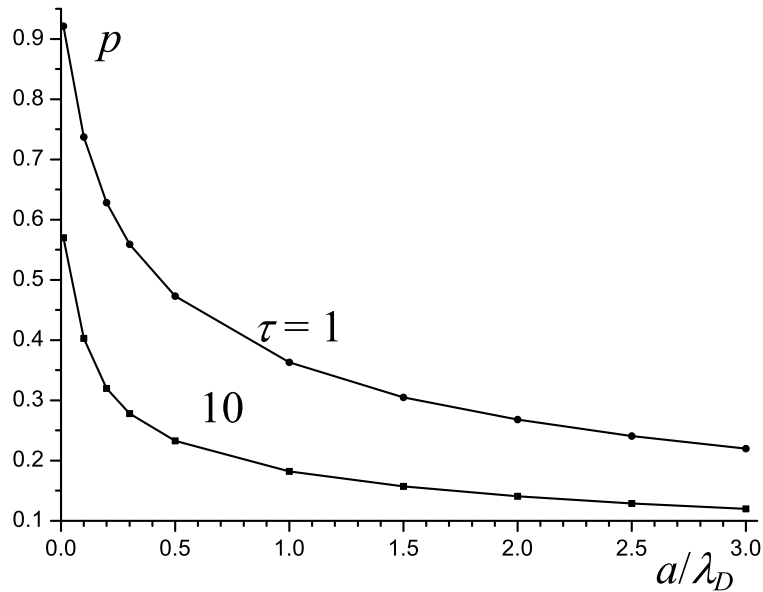


Рис. 2.16 Залежність параметра p від радіуса порошинки у ізотермічній та неізотермічній ($\tau = 10$) плазмі.

Табл. 1. Значення параметра p для різних значень радіуса порошинки в ізотермічній та неізотермічній ($\tau = 10$) плазмі

a/λ_D	p , ($\tau = 1$)	p , ($\tau = 10$)
0.01	0.921	0.570
0.1	0.737	0.403
0.2	0.628	0.320
0.3	0.559	0.278
0.5	0.473	0.233
1	0.363	0.182
1.5	0.305	0.157
2	0.268	0.141
2.5	0.241	0.129
3	0.220	0.120

Рис. 2.16 дає лише кілька прикладів поведінки скейлінгового параметра p . Для того щоб знайти його для інших конкретних значень параметрів плазми необхідно виконати числовий розрахунок потенціалу, а потім апроксимувати отримані результати формулою (2.36), використовуючи метод мінімізації максимальної відносної похибки. Такий підхід не є простим, але

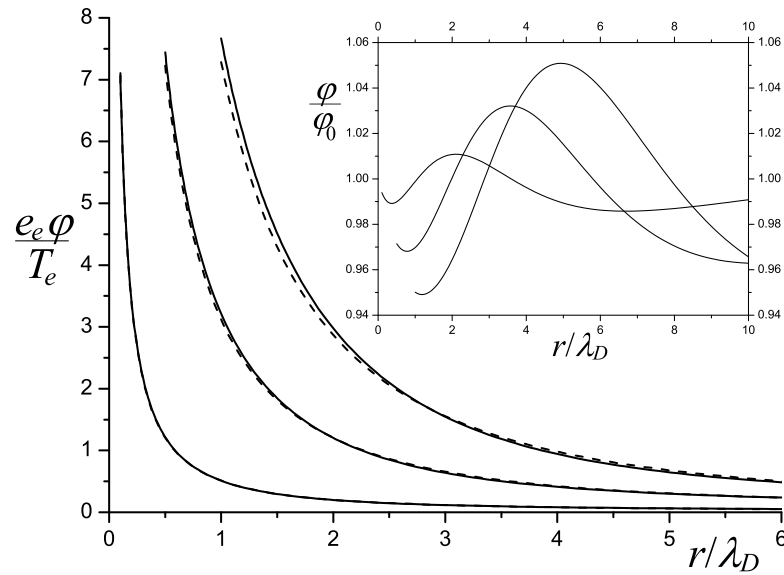


Рис. 2.17 Залежність потенціалу від відстані для трьох розмірів порошинок: $a = 0.1, 0.5, 1.0\lambda_D$. Суцільні лінії – обчислений потенціал, штрихові лінії – формула (2.36). Вставка показує відношення φ_{0p} до обчисленого потенціалу.

він відкриває принципову можливість використання аналітичних виразів для потенціалів, щоб зрозуміти фізичну природу багаточастинкових ефектів (кореляцій) у задачі колективної поведінки у сильнозв'язаних кулонівських системах і визначити якісні ефекти з результатів моделювання.

2.2.3 Висновки

Розподіл електростатичного потенціалу у слабоіонізованій плазмі з частими зіткненнями поблизу зарядженої сферичної макрочастинки, яка поглинає електрони та іони, може бути описаний з точністю до декількох відсотків суперпозицією потенціалів Кулона та Дебая з масштабованою довжиною екранування. Суттєве зменшення концентрації плазмових частинок поблизу порошинки, через їх поглинання, призводить до збільшення довжини екранування у декілька разів і є більшим для порошинок більших розмірів. У неізотермічній плазмі ці ефекти є ще більш вираженими. Лише у границі малих частинок ($a \ll \lambda_D$) у ізотермічній плазмі довжина екранування наближається до довжини Дебая.

Ефективний заряд кулонівської частини потенціалу зростає зі зменшенням a/λ_D , а у неізотермічній плазмі неекранований заряд може перевищувати екранований заряд і у границі малих порошинок для $T_e/T_i = 10$ досягає $\approx 90\%$ від усього заряду порошинки. Значення неекранованого заряду знаходиться з числових розрахунків або з аналітичної формули (2.34) для малих порошинок.

2.3 Кінетична теорія ефективного потенціалу порошинки

У попередньому підрозділі був отриманий аналітичний вираз для потенціалу порошинки у дрейфово-дифузійному наближенні. Більш загальний розв'язок задачі можна отримати у рамках кінетичного опису. Перевагою цього підходу є те, що він дозволяє вивчати ефективний потенціал порошинки за довільних значень параметрів плазми і знайти його залежність від кінетичних характеристик плазмових процесів (оскільки заповнена плазма є відкритою системою, то ефективний потенціал залежить не лише від термодинамічних, а і від кінетичних властивостей плазми).

Кінетична теорія заповненої плазми добре розвинута у наближенні плазми без зіткнень, але це наближення часто не відповідає експериментальним умовам у яких досліджується заповнена плазма [40, 49]. Відомо [143], що навіть нечасті зіткнення змінюють динаміку плазми і заряджання порошинок, на це вказують результати експериментів [144, 145] та числового моделювання [146, 147]. Тому актуальною є задача розв'язання кінетичної теорії заповненої плазми, яка б враховувала зіткнення електронів та іонів із нейтральними частинками, оскільки заповнена плазма зазвичай є слабоіонізованою, а також дозволяла враховувати наявність зовнішніх електричних та магнітних полів.

Отже, при довільних співвідношеннях між довжиною вільного пробігу, дебаєвським радіусом та розміром порошинки самоузгоджений розрахунок стаціонарного заряду порошинки можна здійснити на основі кінетичного

опису. Для цього знадобиться знайти стаціонарну границю розв'язку системи рівнянь, яка складається з кінетичного рівняння (1.84) і рівняння Пуассона (1.19):

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} - \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = I_\alpha, \quad (2.37)$$

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}, t) = -4\pi [e_e n_e(\mathbf{r}, t) + e_i n_i(\mathbf{r}, t)], \quad (2.38)$$

де I_α – інтеграл зіткнень, $\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}$ – зовнішнє силове поле, а також рівняння для заряду порошинки

$$\frac{dq(t)}{dt} = -4\pi a^2 [e_e n_e(\mathbf{r}, t) v_e(\mathbf{r}, t) + e_i n_i(\mathbf{r}, t) v_i(\mathbf{r}, t)]|_{r=a}, \quad (2.39)$$

$$v_\alpha(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{v} \mathbf{n} \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (2.40)$$

$$n_\alpha(\mathbf{r}, t) = n_\alpha \int d\mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (2.41)$$

де \mathbf{n} – одиничний нормальний вектор до поверхні порошинки. З крайовими умовами

$$f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)|_{v_r > 0, r=a} = 0, \quad (2.42)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial r} \right|_{r=a} = -\frac{q(t)}{a^2}, \quad (2.43)$$

$$f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)|_{\mathbf{r} \rightarrow \infty} = f_{0\alpha}(\mathbf{v}), \quad (2.44)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t)|_{\mathbf{r} \rightarrow \infty} = 0. \quad (2.45)$$

Умова (2.42) означає, що біля поверхні порошинки немає електронів та іонів, які рухаються від поверхні, тобто ця умова описує їх адсорбцію. Приклади числових розв'язків системи рівнянь (2.38)–(2.45) наведені в [136, 148, 149].

2.3.1 Модель точкових стоків

Для опису багатьох цікавих явищ, які експериментально спостерігаються у запорошеній плазмі (формування впорядкованих структур з порошинок і поширення у них хвиль), необхідні аналітичні вирази для ефективного потенціалу. Щоб отримати наближений аналітичний розв'язок системи рівнянь (2.38)–(2.39) нами була запропонована модель точкових стоків. Її суть полягає в тому, щоб описати ефекти, зумовлені поглинанням плазмових частинок порошиною, ввівши в кінетичне рівняння (2.37) ефективні точкові стоки, інтенсивність яких відповідає крайовій умові (2.42), тобто замість рівняння (2.37) з крайовими умовами (2.42), (2.43) використовувати наступне рівняння з точковим стоком [5, 18, 19, 35, 36, 143]:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} - \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} f_\alpha(X, t) = I_\alpha - S_\alpha(\mathbf{v}, t) \delta(\mathbf{r}). \quad (2.46)$$

Тут $X = (\mathbf{r}, \mathbf{v})$, $S_\alpha(\mathbf{v}, t)$ – інтенсивність точкових стоків, яка є функціоналом від функції розподілу $f_\alpha(X, t)$, тобто

$$S_\alpha(\mathbf{v}, t) \equiv S_\alpha(\mathbf{v}, t; \{f_\alpha(X, t)\}). \quad (2.47)$$

Аналогічний прийом вже був використаний нами при дрейфово-дифузійному описові динаміки плазми: точкові стоки вводилися у рівняння неперервності (п. 1.3) [22, 69, 70].

Величини (2.47) зручно виразити в термінах перерізів заряджання порошинок $\sigma_\alpha(q(t), v)$. Наприклад, у випадку беззіткненої плазми, або у випадку частих зіткнень можна записати

$$S_\alpha(\mathbf{v}, t) = v \sigma_\alpha(q(t), v) f_\alpha(X, t). \quad (2.48)$$

Рівняння (2.46) з інтенсивність стоку (2.48) вперше було записано в наших роботах [19, 36] на основі евристичних міркувань, а в [18] модель точкових стоків була обґрунтована на основі мікроскопічної теорії запорошеної

плазми. Дійсно, за наявності лише однієї нерухомої порошинки одночастинкова функція розподілу порошинок записується як

$$f_g(\mathcal{X}, t) = \delta(q - q_g)\delta(\mathbf{r})\delta(\mathbf{v}).$$

Підставивши її у кінетичне рівняння для плазмових частинок (1.174), можна показати, що воно переходить у рівняння типу (2.46) з точковим стоком, який має інтенсивність (2.48).

Наділі у (2.46) ми будемо використовувати модельний інтеграл зіткнень, а саме просту модель БГК (1.110).

Наявність стоків призводить до збурень ефективного електричного потенціалу, принаймні на великих відстанях від порошинки ці збурення є малими, а отже, можемо скористатись лінеаризованою версією рівняння (2.46). Таким чином, отримані результати будуть давати правильну асимптотичну поведінку потенціалу. Зауважимо однак, що переріз заряджання потрібно розраховувати без використання теорії збурень. Таким чином, для лінійної поправки до незбуреної функції розподілу маємо наступне рівняння

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} \delta f_\alpha(X, t) - \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f_{0\alpha}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = \\ = -\nu_\alpha \left[\delta f_\alpha(X, t) - f_{0\alpha}(\mathbf{v}) \int d\mathbf{v} \delta f_\alpha(X, t) \right] - S_\alpha^{(0)}(\mathbf{v}, t) \delta(\mathbf{r}), \quad (2.49)$$

де

$$S_\alpha^{(0)}(\mathbf{v}, t) = S_\alpha(\mathbf{v}, t; \{f_{0\alpha}(\mathbf{v})\}),$$

або у випадку (2.48)

$$S_\alpha^{(0)}(\mathbf{v}, t) = v\sigma_\alpha(q(t), v)f_{0\alpha}(\mathbf{v}).$$

Для потенціалу самоузгодженого поля $\varphi(\mathbf{r}, t)$ маємо рівняння Пуассона (2.38) з точковим зарядом:

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}, t) = -4\pi q(t)\delta(\mathbf{r}) - 4\pi \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \int d\mathbf{v} \delta f_\alpha(X, t). \quad (2.50)$$

Розв'язок рівняння (2.49) можна записати у вигляді (див. (1.90))

$$\delta f_\alpha(X, t) = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \int_{-\infty}^t dt' \int dX' W_\alpha(X, X'; t - t') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}', t')}{\partial \mathbf{r}'} \frac{\partial f_{0\alpha}(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} - \\ - \int_{-\infty}^t dt' \int dX' W_\alpha(X, X'; t - t') S_\alpha^{(0)}(\mathbf{v}', t') \delta(\mathbf{r}'), \quad (2.51)$$

де $W_\alpha(X, X'; \tau)$ – ймовірність переходу плазмової частинки з точки X' у точку X за час $\tau = t - t'$, що задовольняє рівняння (1.111) з початковою умовою (1.92) $W_\alpha(X, X'; 0) = \delta(X - X')$.

Підстановка (2.51) у рівняння Пуассона (2.50), приводить до наступного розв'язку в $\mathbf{k}\omega$ -представленні

$$\varphi_{\mathbf{k}\omega} = \frac{4\pi q_\omega}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, \omega)} - \frac{4\pi}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, \omega)} \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') S_{\alpha\omega}^{(0)}(\mathbf{v}'), \quad (2.52)$$

де $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$ – функція діелектричного відгуку (1.97), а фур'є-образ ймовірності переходу $W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ визначається формулою (1.95). У стаціонарному стані

$$q(t) = q, \quad S_\alpha^{(0)}(\mathbf{v}, t) = S_\alpha^{(0)}(\mathbf{v}), \quad (2.53)$$

і вираз (2.52) набуває вигляду

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi q}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, 0)} - \frac{4\pi}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, 0)} \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' W_{\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') S_\alpha^{(0)}(\mathbf{v}'). \quad (2.54)$$

Тут

$$W_{\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')|_{\omega=0}, \quad (2.55)$$

$$\varepsilon(\mathbf{k}, 0) = 1 + \frac{k_D^2}{k^2}. \quad (2.56)$$

Якщо порошок рухається з постійною швидкістю \mathbf{v}_0 , то аргумент \mathbf{r} δ -функції в (2.49), (2.50) слід замінити на $(\mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t)$. Таким чином, розв'язок

для потенціалу порошокинки, яка рухається, набуває вигляду

$$\varphi_{\mathbf{k}\omega} = \frac{8\pi^2 q \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0)}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k}\mathbf{v}_0)} - \frac{8\pi^2 \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0)}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k}\mathbf{v}_0)} \times \\ \times \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' W_{\alpha\mathbf{k}, \mathbf{k}\mathbf{v}_0}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') S_{\alpha}^{(0)}(\mathbf{v}'). \quad (2.57)$$

На основі (2.51) можна розрахувати струм заряджання порошокинки. Зокрема у випадку стаціонарної ізотропної плазми

$$\mathbf{j}_{\alpha}(r) = -e_{\alpha} n_{\alpha} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \int d\mathbf{v} S_{\alpha}^{(0)}(\mathbf{v}), \quad r > 0. \quad (2.58)$$

Розглянемо детальніше питання про вплив властивостей плазми на ефективний потенціал порошокинки в стаціонарному стані. У випадку ізотропної плазми за відсутності зовнішніх полів $W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ визначається формулою (1.118), враховуючи (2.55), маємо

$$W_{\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = -\frac{i\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}')}{\mathbf{k}\mathbf{v} - i\nu_{\alpha}} - \\ - \frac{\nu_{\alpha} f_{0\alpha}(v)}{(\mathbf{k}\mathbf{v} - i\nu_{\alpha})(\mathbf{k}\mathbf{v}' - i\nu_{\alpha})} \left[1 + i\nu_{\alpha} \int d\mathbf{v} \frac{f_{0\alpha}(v)}{\mathbf{k}\mathbf{v} - i\nu_{\alpha}} \right]^{-1}. \quad (2.59)$$

Тоді розв'язок (2.54) має вигляд

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi q}{k^2 + k_D^2} + \frac{4\pi i}{k^2 + k_D^2} \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} \frac{\int d\mathbf{v} \frac{S_{\alpha}^{(0)}}{\mathbf{k}\mathbf{v} - i\nu_{\alpha}}}{1 + i\nu_{\alpha} \int d\mathbf{v} \frac{f_{0\alpha}(v)}{\mathbf{k}\mathbf{v} - i\nu_{\alpha}}}. \quad (2.60)$$

Зворотнє перетворення Фур'є дає вираз для потенціалу

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{qe^{-k_D r}}{r} + i \sum_{\alpha} 4\pi e_{\alpha} n_{\alpha} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{k^2 + k_D^2} \frac{\int d\mathbf{v} \frac{v\sigma_{\alpha}(q, v) f_{0\alpha}(v)}{\mathbf{k}\mathbf{v} - i\nu_{\alpha}}}{1 + i\nu_{\alpha} \int d\mathbf{v} \frac{f_{0\alpha}(v)}{\mathbf{k}\mathbf{v} - i\nu_{\alpha}}}. \quad (2.61)$$

У беззіткненному режимі ($\nu_\alpha = 0$), формула (2.61) спрощується до

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{qe^{-k_D r}}{r} + i \sum_{\alpha} 4\pi e_{\alpha} n_{\alpha} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{k^2 + k_D^2} \int \frac{v\sigma_{\alpha}(q, v)f_{0\alpha}(v)}{\mathbf{k}\mathbf{v} - i0} d\mathbf{v}, \quad (2.62)$$

що дає

$$\varphi(r) = \frac{q}{r} e^{-k_D r} - \frac{\tilde{Q}}{r} g(k_D r), \quad (2.63)$$

де

$$g(x) = e^{-x} \text{Ei}(x) - e^x \text{Ei}(-x), \quad (2.64)$$

$$\tilde{Q} = \frac{2\pi}{k_D} \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} \int_0^{\infty} dv v^2 \sigma_{\alpha}(q, v) f_{0\alpha}(v). \quad (2.65)$$

Тут

$$\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt \quad (2.66)$$

– інтегральна показникова функція. При $k_D r \gg 1$ з урахуванням асимптотичної поведінки $\text{Ei}(x) \simeq e^x/x$ із (2.63) отримуємо

$$\varphi(r) \simeq -\frac{2\tilde{Q}}{k_D r^2}. \quad (2.67)$$

Зауважимо, що в (2.62)–(2.67) фігурує переріз заряджання, розрахований на основі моделі обмежених орбіт (1.7).

Таким чином, як випливає з (2.67) у випадку беззіткненої плазми поглинання електронів та іонів порошинкою (наявність струменів заряджання) призводить до часткового розекранування поля порошинки, і потенціал порошинки має дипольну асимптоту, що узгоджується з результатами робіт [40, 107, 108].

У випадку частих зіткнень ($\nu_\alpha \gg kv_{T\alpha}$) рівняння (2.54) дає

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi q}{k^2 + k_D^2} - \frac{4\pi}{k^2 + k_D^2} \frac{1}{k^2} \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha} S_{\alpha}}{D_{\alpha}}, \quad (2.68)$$

де

$$S_{\alpha} = n_{\alpha} \int d\mathbf{v} S_{\alpha}^{(0)}(v) = n_{\alpha} \int d\mathbf{v} v \sigma_{\alpha}(q, v) f_{0\alpha}(\mathbf{v}), \quad (2.69)$$

$D_{\alpha} = v_{T\alpha}^2 / \nu_{\alpha}$ – коефіцієнт дифузії.

Виводячи (2.68), ми скористались наближенням

$$1 + i\nu_{\alpha} \int d\mathbf{v} \frac{f_{0\alpha}(v)}{\mathbf{k}\mathbf{v} - i\nu_{\alpha}} = W \left(\frac{i\nu_{\alpha}}{kv_{T\alpha}} \right) \simeq \frac{k^2 v_{T\alpha}^2}{\nu_{\alpha}^2},$$

$$\int d\mathbf{v} \frac{v \sigma_{\alpha}(q, v) f_{0\alpha}(v)}{\mathbf{k}\mathbf{v} - i\nu_{\alpha}} \simeq \frac{i}{\nu_{\alpha}} \int d\mathbf{v} v \sigma_{\alpha}(q, v) f_{0\alpha}(v).$$

Як випливає з означення (2.69), величини S_{α} являють собою інтенсивності поглинання частинок сорту α точковим стоком, тобто кількість частинок відповідного сорту, поглинутих в одиницю часу. Це підтверджується також тим, що інтегрування (2.46) за швидкостями дає рівнянням неперервності виду (1.20). У координатному представленні з (2.68) маємо

$$\varphi(r) = (q + \tilde{S}) \frac{e^{-k_D r}}{r} - \frac{\tilde{S}}{r}, \quad (2.70)$$

де

$$\tilde{S} = \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha} S_{\alpha}}{k_D^2 D_{\alpha}}. \quad (2.71)$$

Таким чином, за наявності зіткнень ефективний потенціал (2.70) повністю співпадає із виразом (1.32), який отриманий у моделі точкових стоків у дрейфово-дифузійному наближенні, і є суперпозицію екранованого та кулонівського потенціалу з відповідними ефективними зарядами. В рамках лінійного наближення ці величини розрахувати неможливо. Їх можна знайти лише на основі числового розв'язання відповідних крайових задач (див.

п. 2.2). Приклади таких розрахунків можна також знайти в [8, 67, 143]. Вони свідчать, що розекранування може бути досить суттєвим, а саме $-\tilde{S}/q \leq 0.5$ у ізотермічній плазмі і досягає значення 0.9 у неізотермічній ($\tau = 10$) плазмі (див. рис. 2.13).

Зауважимо, що поява кулонівської асимптоти за умови поглинання плазмових частинок порошиною є цілком природною. Дійсно, якщо знехтувати процесами іонізації та рекомбінації, у стаціонарному випадку рівняння неперервності (1.18) в області, вільній від порошинок, набуває вигляду

$$\operatorname{div} \mathbf{\Gamma}_\alpha = 0. \quad (2.72)$$

Єдиний сферично симетричний розв'язок цього рівняння –

$$\mathbf{\Gamma}_\alpha(\mathbf{r}) = A_\alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.73)$$

Це означає, що густина струму

$$\mathbf{j}_\alpha(\mathbf{r}) = e_\alpha A_\alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.74)$$

Проте, за законом Ома $\mathbf{j}_\alpha(\mathbf{r}) = \sigma_\alpha \mathbf{E}(\mathbf{r})$, тобто

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \sim \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.75)$$

Якщо плазма знаходиться у зовнішньому магнітному полі $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$, то фур'є-образ ймовірності переходу $W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ задається виразом (1.116).

Зауважимо, що $\varphi_{\mathbf{k}\omega}$ (2.52) і $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$ (1.97), по суті, виражені в термінах величини

$$W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}') = \int d\mathbf{v} W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}').$$

Якщо функція розподілу $f_{0\alpha}(\mathbf{v})$ та інтенсивність стоку $S_\alpha^{(0)}(\mathbf{v})$ залежать від v_\perp і v_z , то як впливає з (1.107)

$$W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\alpha}\right) \frac{i}{\omega - n\Omega_\alpha - k_z v_z + i\nu_\alpha}, \quad (2.76)$$

де $J_n(x)$ – функція Бесселя. Використовуючи цю формулу, отримуємо

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi q}{k^2 + k_D^2} + \frac{4\pi i}{k^2 + k_D^2} \sum_{\alpha} \frac{e_\alpha n_\alpha}{F_\alpha(\mathbf{k})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d\mathbf{v} J_n^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\alpha}\right) \frac{S_\alpha^{(0)}(\mathbf{v})}{k_z v_z + n\Omega_\alpha - i\nu_\alpha}, \quad (2.77)$$

де

$$F_\alpha(\mathbf{k}) = 1 + i\nu_\alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d\mathbf{v} J_n^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\alpha}\right) \frac{f_{0\alpha}(\mathbf{v})}{k_z v_z + n\Omega_\alpha - i\nu_\alpha}. \quad (2.78)$$

Вираз (2.77) описує потенціал макрочастинки в магнітоактивній плазмі за умови, що інтенсивності стоків $S_\alpha^{(0)}(\mathbf{v})$ відомі. Враховуючи, що $f_{0\alpha}(\mathbf{v})$ – це розподіл Максвелла (1.9), а також [150, с. 198]

$$\int_0^{\infty} dv_\perp v_\perp J_n^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\alpha}\right) \exp\left(-\frac{v_\perp}{2v_{T\alpha}}\right) = v_{T\alpha}^2 \Lambda_n\left(\frac{k_\perp^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2}\right),$$

отримуємо

$$F_\alpha(\mathbf{k}) = 1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i\nu_\alpha}{n\Omega_\alpha + i\nu_\alpha} \Lambda_n\left(\frac{k_\perp^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2}\right) \left[1 - W\left(\frac{i\nu_\alpha - n\Omega_\alpha}{|k_z|v_{T\alpha}}\right)\right]. \quad (2.79)$$

Тут $\Lambda_n(x) = I_n(x)e^{-x}$, $I_n(x)$ – модифікована функція Бесселя 1-го роду.

У випадку беззіткненої плазми (2.77) дає

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi q}{k^2 + k_D^2} - \frac{4\pi^2}{k^2 + k_D^2} \sum_{\alpha} e_\alpha n_\alpha \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d\mathbf{v} J_n^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\alpha}\right) S_\alpha^{(0)}(\mathbf{v}) \delta(k_z v_z + n\Omega_\alpha). \quad (2.80)$$

Для подальших розрахунків нам потрібно знати величину $S_\alpha^{(0)}(\mathbf{v})$. У загальному випадку це складна задача. Вона суттєво спрощується в границі $B_0 \rightarrow \infty$. У цьому випадку

$$S_\alpha^{(0)}(\mathbf{v}) = |v_z| \sigma_\alpha(q, v_z) f_{0\alpha}(\mathbf{v}), \quad (2.81)$$

$$\sigma_\alpha(q, v_z) = \pi a^2 \theta \left(v_z^2 - \frac{2e_\alpha q}{m_\alpha a} \right), \quad (2.82)$$

де, $\theta(x)$ – функція Хевісайда,

$$f_{0\alpha}(\mathbf{v}) = \delta(\mathbf{v}_\perp) \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m_\alpha v_z^2}{2T_\alpha} \right) = \delta(\mathbf{v}_\perp) f_{0\alpha}(v_z).$$

Підставляючи (2.81) в (2.80), одержуємо

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi q}{k^2 + k_D^2} - \frac{4\pi^2}{k^2 + k_D^2} \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} dv_z f_{0\alpha}(v_z) \sigma_\alpha(q, v_z) \delta(k_z). \quad (2.83)$$

Виконаємо зворотне перетворення Фур'є (2.83). Враховуючи [150, с. 159]

$$\int_0^\infty dk_\perp \frac{k_\perp}{k_\perp^2 + k_D^2} J_0(k_\perp r_\perp) = K_0(k_D r_\perp),$$

отримуємо

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{qe^{-k_D r}}{r} - \varphi_0 K_0(k_D r_\perp). \quad (2.84)$$

Тут $K_0(x)$ – функція Макдональда, а

$$\varphi_0 = \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \int dv_z \sigma_\alpha(q, v_z) f_{0\alpha}(v_z). \quad (2.85)$$

Таким чином, у сильнозамагніченій беззіткненній плазмі основний внесок у потенціал дають індуковані стоком частинок струни об'ємного заряду з густиною

$$\rho(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}_\perp) \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \int dv_z f_{0\alpha}(v_z) \sigma_\alpha(q, v_z). \quad (2.86)$$

Відповідна густина струму має вигляд

$$j_z(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}_\perp) \frac{z}{|z|} \sum_\alpha \pi e_\alpha n_\alpha \int dv_z |v_z| f_{0\alpha}(v_z) \sigma_\alpha(q, v_z), \quad (2.87)$$

що дає наступний вираз для повного струму заряджання:

$$I_{\text{tot}} = \sum_\alpha 2\pi e_\alpha n_\alpha \int dv_z |v_z| f_{0\alpha}(v_z) \sigma_\alpha(q, v_z). \quad (2.88)$$

Поклавши $I_{\text{tot}} = 0$, можна отримати рівняння для заряду q .

У випадку сильнозамагніченої плазми $|\Omega_\alpha| > k_\perp v_{T\alpha}$ з частими зіткненнями $\nu_\alpha \gg |k_z| v_{T\alpha}$, вираз (2.79) спрощується

$$F_\alpha(\mathbf{k}) \simeq \frac{1}{\nu_\alpha} (k_\perp^2 D_{\alpha\perp} + k_z^2 D_{\alpha\parallel}), \quad (2.89)$$

$$D_{\alpha\perp} = \frac{v_{T\alpha}^2 \nu_\alpha}{\Omega_\alpha^2 + \nu_\alpha^2}, \quad D_{\alpha\parallel} = \frac{v_{T\alpha}^2}{\nu_\alpha}$$

– коефіцієнти дифузії у перпендикулярному та паралельному до магнітного поля напрямках. Отже,

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi}{k^2 + k_D^2} \left(q - \frac{e_\alpha n_\alpha \int S_\alpha^{(0)}(\mathbf{v}) d\mathbf{v}}{k_\perp^2 D_{\alpha\perp} + k_z^2 D_{\alpha\parallel}} \right). \quad (2.90)$$

Зворотнє перетворення Фур'є дає наступну асимптоту $r \gg \lambda_D$:

$$\varphi(\mathbf{r}) \simeq -\frac{\tilde{S}(\theta)}{r}, \quad (2.91)$$

$$\tilde{S}(\theta) = \sum_\alpha \frac{e_\alpha S_\alpha}{k_D^2 D_{\alpha\perp} \sqrt{1 + (D_{\alpha\parallel}/D_{\alpha\perp} - 1) \sin^2 \theta}}, \quad (2.92)$$

де θ – кут між радіус-вектором \mathbf{r} і віссю z . Таким чином, потенціал має кулонівську асимптоту з ефективним зарядом, який залежить від кута θ . За відсутності зовнішнього магнітного поля $D_{\alpha\parallel} = D_{\alpha\perp} = D_\alpha$ (2.92) переходить у (2.71).

2.3.2 Вплив зіткнень на ефективний потенціал

У попередньому підрозділі були отримані загальні вирази для ефективних потенціалів, а також аналітичні оцінки для випадків частих зіткнень і плазми без зіткнень, які представлені у наших роботах [19, 36]. Пізніше частина цих результатів була повторена в [143] і зроблена спроба виконати більш детальний аналіз. Однак оцінки представлені у [143] були виконані у досить грубому наближенні, а саме переріз заряджання, вважався таким, що не залежить від швидкостей плазмових частинок. Метою нашої роботи [16] було виконати аналітичні розрахунки ефективного потенціалу з урахуванням залежності перерізу заряджання від швидкості.

Ми розпочинаємо зі співвідношення для ефективного потенціалу (2.61). Нехтуючи впливом поглинання електронів порошинкою на їхню функцію розподілу за швидкостями (таке наближення широко застосовується у теорії запорошеної плазми), отримуємо

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \frac{qe^{-k_D r}}{r} + i4\pi e_i n_i \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{k^2 + k_D^2} \frac{\int \frac{v\sigma_i(v)f_{0i}(v)}{\mathbf{k}\mathbf{v} - i\nu_i} d\mathbf{v}}{1 + i\nu_i \int \frac{f_{0i}(v)}{\mathbf{k}\mathbf{v} - i\nu_i} d\mathbf{v}} = \\ &= \varphi_D(r) + \varphi_S(r). \end{aligned} \quad (2.93)$$

Тут, $f_{0i}(v)$ – функція розподілу, яка виникає внаслідок зіткнень (тобто ми вважаємо, що $f_{0i}(v)$ – це розподіл Максвелла), $\sigma_i(v) = \pi a^2(1 + v_{0i}^2/v^2)$ – переріз заряджання порошинки іонами, $v_{0i}^2 = 2|e_i q|/(am_i)$ (1.7), ν_i – частота зіткнень іонів з нейтральними частинками.

Слід зазначити, що після інтегрування за кутом між \mathbf{k} і \mathbf{v} вираз (2.93) спрощується до формули (3) з [143]. Однак таке представлення не підходить для аналітичних розрахунків при малих ν_i . Виявилось, що обчислювати інтеграли за швидкостями у (2.93) зручно, використовуючи співвідношення

$$\int d\mathbf{v} \frac{f(\mathbf{v})}{\mathbf{k}\mathbf{v} - i\nu} = i \int_0^\infty d\tau e^{-\nu\tau} \int d\mathbf{v} f(\mathbf{v}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}\tau}, \quad (2.94)$$

де $f(\mathbf{v})$ – довільна регулярна функція. Таким чином отримуємо

$$\varphi_S(r) = \frac{2i}{\pi} e_i n_i \int_0^{\infty} dx \frac{\sin x}{x^2 + \xi_D^2} \frac{F(\xi/x)}{V(\xi/x)}, \quad (2.95)$$

де

$$F(y) = -\sigma_0 \left(\frac{d}{d\beta} - u_{0i}^2 \right) \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \int_0^{\infty} dt e^{-yt\sqrt{2\beta}} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t} \operatorname{erf} \left(\frac{it}{\sqrt{2}} \right) \Big|_{\beta=1/2}, \quad (2.96)$$

$$V(y) = 1 - \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} y e^{\frac{y^2}{2}} \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{\sqrt{2}} \right), \quad (2.97)$$

$$\sigma_0 = \pi a^2, \quad u_{0i}^2 = \frac{2|e_i q|}{a T_i}, \quad \xi_D = k_D r, \quad \xi = \frac{r}{l_i} = \frac{r \nu_i}{v_{Ti}}, \quad v_{Ti}^2 = \frac{T_i}{m_i}. \quad (2.98)$$

Для того, щоб отримати подальші аналітичні оцінки необхідні певні наближення для $F(y)$ і $V(y)$, але складність полягає в тому, що у (2.95) аргументи цих функцій можуть приймати як малі, так і великі значення. Розділимо область інтегрування у (2.95)

$$\varphi_S(r) = \frac{2i}{\pi} e_i n_i \left[\int_0^{\xi} dx \frac{\sin x}{x^2 + \xi_D^2} \frac{F(\xi/x)}{V(\xi/x)} + \int_{\xi}^{\infty} dx \frac{\sin x}{x^2 + \xi_D^2} \frac{F(\xi/x)}{V(\xi/x)} \right] = I_1 + I_2, \quad (2.99)$$

таким чином, можна застосувати степеневі розклади для обох інтегралів, у першому $\xi/x \gg 1$, а в другому $\xi/x \ll 1$.

Розпочнемо з розгляду I_2 . Як видно функція $F(y)$ має скінченне значення у точці $y = 0$, але її перша похідна в цій точці не існує. Це означає, що $F(y)$ не можна розкласти у степеневий ряд за y в околі нуля. Для того, щоб описати поведінку $F(y)$ за малих значень y її зручно представити у формі

$$F(y) = F(0) + \delta F(y), \quad (2.100)$$

де

$$F(0) = \frac{i\pi}{2}\sigma_0(1 + u_{0i}^2), \quad (2.101)$$

$$\delta F(y) = -\frac{i\sigma_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{d}{d\beta} - u_{0i}^2 \right) \int_0^y dq e^{q^2\beta} \text{Ei}(-q^2\beta) \Big|_{\beta=1/2}. \quad (2.102)$$

При $y \ll 1$

$$\delta F(y) \approx -\frac{i\sigma_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{d}{d\beta} - u_{0i}^2 \right) y(\gamma + \ln \beta - 2 + 2 \ln y), \quad (2.103)$$

$$\frac{F(y)}{V(y)} \approx (F(0) + \delta F(y)) \left(1 + \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} y \right). \quad (2.104)$$

У I_1 з виразу (2.99), при $y \gg 1$

$$\frac{F(y)}{V(y)} \approx i\sigma_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} (2 + u_0^2) y. \quad (2.105)$$

У випадку $\xi \ll 1$ ($r \ll l_i$) вкладом I_1 можна знехтувати. Для аналітичних розрахунків зручно продовжити нижню межу інтегрування в I_2 до нуля, тобто ми фактично повертаємося до виразу (2.95). Однак наближення (2.103), (2.104) порушуються у розширеній області інтегрування, тому необхідно перевірити їхню поведінку при великих y , що відповідає малим значенням x в (2.95)

$$\frac{\sin x}{x^2 + \xi_D^2} \frac{F(\xi/x)}{V(\xi/x)} = O(\ln x), \quad x \rightarrow 0 \quad (2.106)$$

це не збігається з правильним результатом, який дає вираз (2.105)

$$\frac{\sin x}{x^2 + \xi_D^2} \frac{F(\xi/x)}{V(\xi/x)} = O(1), \quad x \rightarrow 0. \quad (2.107)$$

Така невірна поведінка може спричинити суттєві відхилення наших наближених аналітичних розрахунків. Підстановка виразів (2.103), (2.104)

у (2.95) дає наступну оцінку при $r/l_i \ll 1$

$$\begin{aligned} \varphi_S(r) = & -\frac{e_i n_i}{k_D r} \sigma_0 (1 + u_{0i}^2) \left\{ Q(k_D r) - \frac{\varepsilon_1}{k_D l_i} Q^+(k_D r) + \right. \\ & \left. + \frac{\varepsilon_1}{k_D l_i} \left[(1 - e^{-k_D r}) \ln \frac{r}{l_i} + e^{-k_D r} \ln k_D r \right] + \frac{1}{k_D l_i} [\varepsilon_2 (1 - e^{-k_D r}) + \varepsilon_3] \right\}, \end{aligned} \quad (2.108)$$

де

$$Q(y) = \frac{1}{2} [e^{-y} \text{Ei}(y) - e^y \text{Ei}(-y)], \quad (2.109)$$

$$Q^+(y) = \frac{1}{2} [e^{-y} \text{Ei}(y) + e^y \text{Ei}(-y)], \quad (2.110)$$

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{u_{0i}^2}{1 + u_{0i}^2} \simeq 0.8,$$

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \varepsilon_1 \left[\frac{1}{u_{0i}^2} - \left(\frac{\gamma}{2} - 1 - \frac{1}{2} \ln 2\right) \right] \simeq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{\varepsilon_1}{2} (\gamma - 2 - \ln 2) \simeq 1.12,$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1 \gamma \simeq 0.46,$$

γ – стала Ейлера.

При виведенні (2.108), зокрема, було використане співвідношення [151, с. 438]

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x \sin(bx) \ln(ax)}{x^2 + z^2} = \frac{\pi}{2} [e^{-bz} \ln(az) - e^{bz} \text{Ei}(-bz) - e^{-bz} \text{Ei}(bz)].$$

Знерозмірений потенціал має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(r)}{q k_D} = & \frac{e^{-\xi_D}}{\xi_D} + \frac{(a k_D)(2 + t/z)}{4 \xi_D (1 + t)} \left\{ Q(\xi_D) - \frac{\varepsilon_1}{\tilde{l}_i} Q^+(\xi_D) + \right. \\ & \left. + \frac{\varepsilon_1}{\tilde{l}_i} \left[(1 - e^{-\xi_D}) \ln \frac{\xi_D}{\tilde{l}_i} + e^{-\xi_D} \ln \xi_D \right] + \frac{1}{\tilde{l}_i} [\varepsilon_2 (1 - e^{-\xi_D}) + \varepsilon_3] \right\}, \end{aligned} \quad (2.111)$$

де $\tilde{l}_i = k_D l_i$.

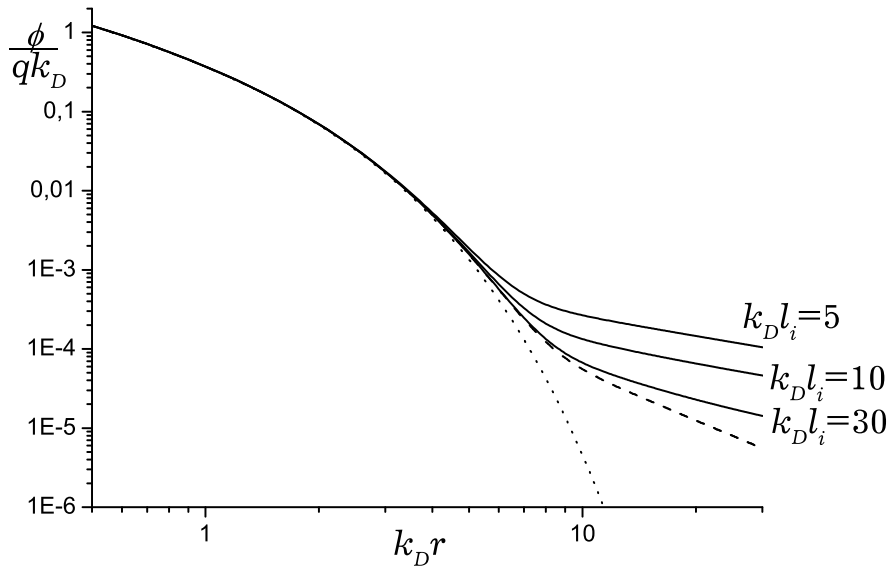


Рис. 2.18 Нормований ефективний потенціал порошинки отриманий з (2.111). Штрихова лінія відповідає плазмі без зіткнень. Точкова лінія – потенціал Дебая.

Графіки залежності (2.111) представлені на рис. 2.18. Ми розглядали аргонову плазму з $\tau = 100$ і порошиною радіусом $k_D a = 0.01$. Значення безрозмірного заряду $z_g = |e_i q| / a T_e$ залежить від довжини вільного пробігу іонів і може бути визначене з аналітичних виразів [152] з числових розрахунків [148] або ж можна використовувати експериментальні дані [144]. Розглядаючи порошинку, як малий сферичний зонд, z_g можна вважати довільним параметром. Для того, щоб детально дослідити залежність потенціалу від відстані, не враховуючи залежність значення заряду від частоти зіткнень іонів, ми використовували просте і добре відоме рівняння для заряду (1.13) $\sqrt{\tau m_i / m_e} e^{-z_g} = 1 + z_g \tau$, яке отримане для плазми без зіткнень в наближенні обмеженого орбітального руху (див. п. 1.2.1).

Другий доданок в (2.111) пропорційний до ak_D , тому у випадку $ak_D \ll 1$ другий доданок дає свій вклад лише коли перший є малим. Відхилення від потенціалу Дебая з'являється лише на відстані у декілька одиниць $k_D r$ (див. рис. 2.18). Отже, лише асимптотична поведінка $\varphi_S(r)$ при $k_D r \gg 1$ є

важливою і вираз (2.108) спрощується до

$$\varphi_S(r) = -\frac{e_i n_i}{k_D r} \sigma_0 u_{0i}^2 \left\{ \frac{1}{k_D r} + \frac{\varepsilon_1}{k_D l_i} \ln \frac{r}{l_i} + \frac{1}{k_D l_i} (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \right\}. \quad (2.112)$$

Порівняння графіків показало, що немає суттєвої різниці між виразами (2.108) та (2.112) при $ak_D = 0.01$ і довільних значеннях \tilde{l}_i .

Діапазон розумних значень довжин вільного пробігу $l_i k_D$ від нескінченності (плазма без зіткнень) до кількох одиниць (це обмеження спричинене використанням перерізу з моделі обмеженого орбітального руху). Вираз (2.108) є справедливим для $l_i \gg r$, тому в області $r \approx 10\lambda_D$, де відмінність від потенціалу Дебая є суттєвою, прийнятними значеннями довжини вільного пробігу є декілька десятків λ_D , але для таких значень l_i відмінність від плазми без зіткнень є малою (див. рис. 2.18). При $k_D l_i \gg 1$ вираз (2.108) дає

$$\varphi_S(r) = -\frac{e_i n_i}{k_D r} \sigma_0 (1 + u_{0i}^2) Q(k_D r), \quad (2.113)$$

який з точністю до позначень збігається з формулою (2.63) або [22, (65)], яка отримана для плазми без зіткнень. На відміну від формули (6) в [143], яка при $k_D l_i \gg 1$ відрізняється на множник $(1 + z_g \tau)/(1 + 2z_g \tau) \approx 1/2$ при $\tau \gg 1$.

Розглянемо інший граничний випадок $\xi \gg 1$, на цей раз ми нехтуємо I_2 в (2.99) і продовжуємо верхню межу інтегрування в I_1 до нескінченності. У розширеній області інтегрування при $y \ll 1$ вираз (2.105) поводить себе як

$$\frac{\sin x}{x^2 + \xi_D^2} \frac{F(\xi/x)}{V(\xi/x)} = O\left(\frac{\sin x}{x^3}\right), \quad x \rightarrow \infty \quad (2.114)$$

і правильна поведінка підінтегрального виразу в (2.95), яка впливає з формули (2.104), є

$$\frac{\sin x}{x^2 + \xi_D^2} \frac{F(\xi/x)}{V(\xi/x)} = O\left(\frac{\sin x}{x^2}\right), \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.115)$$

В цьому разі відмінність не настільки критична у порівнянні з (2.106)

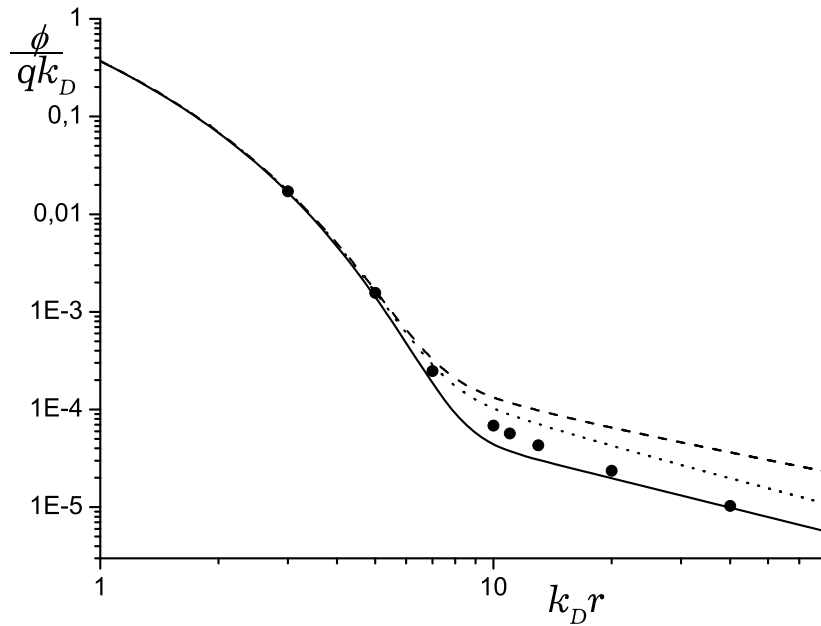


Рис. 2.19 Нормований ефективний потенціал порошинки для $k_D l_i = 10$. Наші аналітичні результати: (2.116) (суцільна лінія), (2.108), (2.111) (штрихова лінія), точкова лінія – вираз для потенціалу отриманий в [143], точки – обчислення за формулою (2.95).

і (2.107). Загальний вираз має вигляд

$$\varphi(r) = -\frac{e_i n_i}{r k_D l_i} \sigma_0 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (2 + u_{0i}^2) (1 - e^{-k_D r}). \quad (2.116)$$

Ми виконали безпосередні обчислення виразу (2.95), для того, щоб перевірити наші аналітичні розрахунки, див. рис. 2.19.

Як видно, наш вираз (2.112) відрізняється від отриманого в [143] без урахування залежності від швидкості перерізу заряджання, а саме числові множники в кулонівських частинах є різними (їхнє відношення $2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)/0.6\pi^{3/2} \sim 0.94$), а також у виразі (2.112) присутній новий доданок, який пропорційний $\ln(r/l_i)/r$. Отже, формула (6) з [143] не повністю описує якісну поведінку потенціалу при $r < l_i$. Числові розрахунки проведені у роботі [148] показали, що у режимі слабких зіткнень, отриманий нами вираз для потенціалу дає більш точні значення у порівнянні з виразом з [143].

Неекраниваний розподіл густини заряду описується виразом

$$\begin{aligned} \rho_i^{(0)}(r) &= \frac{ie_i n_i}{2\pi^2 r^2} \int_0^\infty dx \sin x \frac{F(\xi/x)}{V(\xi/x)} \simeq \\ &\simeq -\frac{e_i n_i}{4\pi r^2} \sigma_0 (1 + u_{0i}^2) \left\{ 1 + \frac{r}{l_i} (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \frac{r}{l_i} \varepsilon_1 \ln \frac{r}{l_i} \right\}. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Повна (екранивана) густина заряду при $r < l_i$ може бути записана як

$$\begin{aligned} \rho_i^{tot}(r) &= -\frac{e_i n_i}{4\pi r^2} \sigma_0 (1 + u_{0i}^2) \left\{ 1 - k_D r Q(k_D r) \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{k_D l_i} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{r}{l_i} e^{-k_D r} (\varepsilon_2 + \varepsilon_1 \ln(k_D l_i)) \right\}. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Важливо відмітити ще раз, що умови для застосування отриманих наближених виразів (2.108) і (2.116) для слабкозіткненої і сильнозіткненої плазми відповідно визначаються відношенням відстані від заряду до середньої довжини пробігу іонів r/l_i . Саме це відношення визначає тип наближення для $\varphi_S(r)$ (частина потенціалу, яка пов'язана із поглинанням іонів порошиною). Це твердження можна довести строго, але воно також випливає з наближень для підінтегральних виразів ($\nu_i/kv_{Ti} \ll 1$, що означає $r \sim 1/k \ll v_{Ti}/\nu_i = l_i$, для слабкозіткненого режиму і $\nu_i/kv_{Ti} \gg 1$ ($r \gg l_i$) для сильнозіткненого режиму).

2.3.3 Висновки

Кінетичний опис ефективного потенціалу порошинки на основі запропонованої нами моделі точкових стоків з інтегралом зіткнень БГК дозволяє відтворити результати, отримані у дрейфово-дифузійному наближенні та у наближенні плазми без зіткнень. При відповідному виборі заряду порошинки та інтенсивності стоку, отримані вирази для ефективного потенціалу з хорошою точністю узгоджуються з числовими розв'язками нелінійної крайової задачі. Показано, що модель точкових стоків може бути використана для опису ефективного потенціалу в присутності зовнішнього магнітного поля.

Зіткнення можуть суттєво впливати на потенціал порошинки. Зокрема, вони можуть призводити до появи кулонівської поведінки потенціалу на великих відстанях, але кулонівська асимптота може бути визначальною лише при $r > l_i$. У протилежному випадку $r < l_i$ доданок кулонівського типу в потенціалі теж з'являється, але частина потенціалу, яка виникає у беззіткненній плазмі, його переважає.

2.4 Порошинка у сильнозіткненній плазмі у зовнішньому магнітному полі

Важливою задачею заповненої плазми є вивчення впливу зовнішнього магнітного поля на властивості лабораторної заповненої плазми [153–155], а також плазми в установках для керованого термоядерного синтезу з магнітним утриманням [156–159]. Вплив магнітного поля на зарядження та ефективний потенціал порошинок у сильнозіткненній плазмі був нами досліджений у роботах [11, 12, 28–30].

2.4.1 Постановка задачі

Розглянемо провідну сферичну порошинку, яка знаходиться у слабоіонізованій плазмі з частими зіткненнями за присутності зовнішнього однорідного магнітного поля ($\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$). Динаміку плазми будемо описувати у дрейфово-дифузійному наближенні, яке широко використовується у фізиці плазми в тому числі і для плазми у магнітному полі [160, 161]. Стационарне рівняння неперервності (2.19) має вигляд

$$\operatorname{div}\Gamma_\alpha(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.119)$$

де густина потоку електронів та іонів

$$\Gamma_\alpha(\mathbf{r}) = -\hat{\mu}_\alpha n_\alpha(\mathbf{r})\nabla\varphi(\mathbf{r}) - \hat{D}_\alpha\nabla n_\alpha(\mathbf{r}), \quad (2.120)$$

$\hat{\mu}_\alpha$ – тензор рухливості плазмових частинок, \hat{D}_α – тензор дифузії.

Електростатичний потенціал $\varphi(\mathbf{r})$ задовольняє рівняння Пуассона:

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -4\pi \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha}(\mathbf{r}). \quad (2.121)$$

Якщо розподіл плазмових частинок за швидкостями є максвеллівським, тоді виконується співвідношення Айнштайна $\hat{\mu}_{\alpha} = \hat{D}_{\alpha} e_{\alpha} / T_{\alpha}$.

Тензор дифузії має вигляд [160]

$$\hat{D}_{\alpha} = D_{\alpha\parallel} \times \begin{pmatrix} (1 + \gamma_{\alpha}^2)^{-1} & \gamma_{\alpha} (1 + \gamma_{\alpha}^2)^{-1} & 0 \\ -\gamma_{\alpha} (1 + \gamma_{\alpha}^2)^{-1} & (1 + \gamma_{\alpha}^2)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.122)$$

де $\gamma_{\alpha} = \Omega_{\alpha} / \nu_{\alpha}$ – параметр замагніченості, $\Omega_{\alpha} = e_{\alpha} B / m_{\alpha} c$ – циклотронна частота, ν_{α} – частота зіткнень заряджених частинок із нейтральними,

$$D_{\alpha\parallel} \equiv D_{\alpha} = v_{T\alpha}^2 / \nu_{\alpha}, \quad (2.123)$$

$$v_{T\alpha} = \sqrt{T_{\alpha} / m_{\alpha}}.$$

Оскільки задача має циліндричну симетрію, то невідомі величини є функціями двох змінних: $n_{\alpha}(\mathbf{r}) = n_{\alpha}(r_{\perp}, z)$ та $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(r_{\perp}, z)$.

Рівняння (2.119)–(2.121) необхідно доповнити крайовими умовами. Щоб описати поглинання електронів та іонів використовується умова типу (2.21) $n_{\alpha}(\mathbf{r})|_{r_{\perp}^2 + z^2 = a^2} = 0$, де a – радіус порошинки. У магнітному полі потоки плазмових частинок до порошинки не будуть сферично-симетричними, але оскільки ми розглядаємо провідну порошинку, то заряди можуть вільно переміщатися по її поверхні. Тому ми вважаємо, що напруженість електричного поля на поверхні порошинки всюди однакова і, таким чином, потенціал на поверхні задовольняє теорему Гаусса (2.5) $\mathbf{n}\nabla\varphi(\mathbf{r})|_{r_{\perp}^2 + z^2 = a^2} = -q/a^2$, де q – стаціонарний заряд, який задовольняє умову (1.12)

$$e_i \int_S \Gamma_i d\mathbf{S} + e_e \int_S \Gamma_e d\mathbf{S} = 0, \quad (2.124)$$

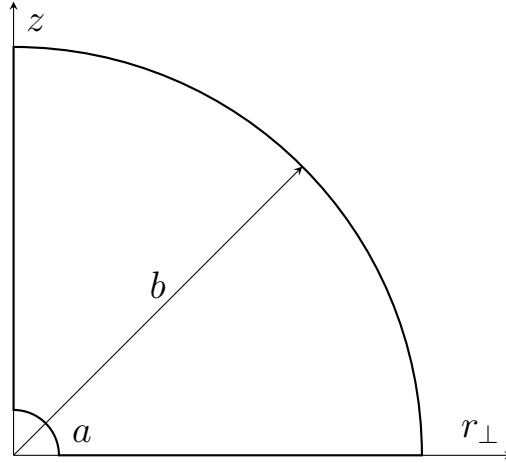


Рис. 2.20 Область обчислень.

S – будь-яка сферична поверхня концентрична з порошинкою. Умови

$$n_\alpha(\mathbf{r})|_{r \rightarrow \infty} = n_0, \quad \varphi(\mathbf{r})|_{r \rightarrow \infty} = 0 \quad (2.125)$$

задовольняються на великій відстані від порошинки, де n_0 – незбурена концентрація плазмових частинок.

Сформульована задача була розв’язана нами [11, 12, 28] чисельно у програмі FlexPDE в якій реалізований метод скінченних елементів [134]. Область обчислень зображена на рис. 2.20. В обчисленнях крайові умови (2.125) апроксимуються такими ж, але при $r = b$. Нормальні складові векторів $\nabla\varphi(\mathbf{r})$ і $\nabla n_\alpha(\mathbf{r})$ до границь $z_g = 0$, $a < r_\perp < b$ та $r_\perp = 0$, $a < z < b$ рівні нулю, що відповідає неперервності концентрації і потенціалу на цих границях. Числовий розв’язок аналогічно сформульованої задачі для сферичного зонда у слабкоіонізованій плазмі із частими зіткненнями за присутності однорідного магнітного поля був виконаний в [161].

До того як наводити результати обчислень, необхідно обговорити можливість спостерігати ефекти, які пов’язані із взаємодією струмів зарядження з магнітним полем, в рамках дрейфово-дифузійного наближення. Згідно з (2.122), вплив магнітного поля на дифузію є помітним коли $\gamma_\alpha \sim 1$. Щоб вплив був суттєвим необхідно $\gamma_e \sim 10$. Для досить великого значення

індукції магнітного поля $B \sim 10^4$ Гс (наприклад, у [155] експерименти із за-
порошеною плазмою проводились у полі $2.3 \cdot 10^4$ Гс) електронна циклотронна
частота складає $\Omega_e = 1.8 \cdot 10^{11} \text{с}^{-1}$. Значення відношення циклотронної ча-
стоти до частоти зіткнень, яке використовувалося у нашому дослідженні,
рівне $\gamma_e = 20$, отже, верхня межа значення електронної частоти зіткнень
є $\nu_e \sim 10^{10} \text{с}^{-1}$.

Дрейфово-дифузійний (континуальний) опис динаміки плазми можна
застосовувати коли довжина вільного пробігу частинок l_α набагато менша
за радіус порошинки a і довжину Дебая λ_D :

$$l_\alpha \ll a, \quad l_\alpha \ll \lambda_D. \quad (2.126)$$

Довжина вільного пробігу електронів $l_e = v_{Te}/\nu_e$ або $l_e[\text{см}] = 4.2 \cdot 10^7 \sqrt{T_e[\text{eV}]} / \nu_e[\text{с}^{-1}]$. З одного боку значення частоти зіткнень повинно бути меншим за циклотронну частоту, а з іншого досить великим, щоб довжина вільного пробігу електронів задовольняла умову (2.126). Для електронів з температурою $T_e = 1$ еВ і $\nu_e = 10^{10} \text{с}^{-1}$, l_e складає $4.2 \cdot 10^{-3}$ см, отже, в такому разі наші обчислення підходять для порошинок розміром $a \geq 10^{-2}$ см або для зондів з плаваючим потенціалом. У випадку термічної плазми, яка теж може містити порошинки [49], типові значення електронної температури є $T_e \sim 0.1$ еВ і довжина вільного пробігу електронів стає навіть меншою $l_e \sim 10^{-3}$ см. Пробіг іонів є набагато меншим за l_e , тому l_i також задовольняє умову (2.126).

Частота зіткнень електронів пов'язана із перерізом передачі імпульсу і концентрацією нейтральних частинок $\nu_e = v_{Te} \sigma_{en} n_n = 10^{10} \text{с}^{-1}$. Для різних газів і електронних температур значення перерізу варіюється у широкому діапазоні, але відповідне значення концентрації нейтралів повинно залишати незмінним значення добутку $\sigma_{en} n_n$. Для $T_e = 1$ еВ середнє значення перерізу рівне $\sigma_{en} = 10^{-15} \text{см}^2$, тоді концентрація нейтралів рівна $n_n = 2.4 \cdot 10^{17} \text{см}^{-3}$ ($p = 10^4$ Па). В атомарних газах (аргон, криптон та інші) через ефект

Рамзауера – Таунсенда σ_{en} має виражений мінімум $\sigma_{en} = 10^{-17}$ см⁻³ в діапазоні електронної температури $T_e < 1$ еВ [49, 162]. Для таких умов значення n_n відповідає атмосферному тиску.

Давайте тепер порівняємо l_e з довжиною Дебая $\lambda_D \approx \lambda_{Di}$. Для іонів кімнатної температури $T_i \approx 300$ К $\lambda_D[\text{см}] \approx 120/\sqrt{n_i[\text{см}^{-3}]}$. Для низької концентрації іонів $n_i = 10^8$ см⁻³, $\lambda_D \approx 10^{-2}$ см, таким чином, довжина Дебая задовольняє (2.126).

Хоча сформульовані вище умови важко задовольнити для порошинок із розмірами, які притаманні експериментам із запорошеною плазмою, в будь-якому разі варто дослідити граничний випадок замагнічених електронів, який може бути реалізований у більш сильних магнітних полях. Як буде показано далі, у такому випадку можна спостерігати нові ефекти такі як формування немонотонного розподілу потенціалу чи його специфічної симетрії.

В обчисленнях необхідно задати значення відношення коефіцієнтів дифузії $D_{e\parallel}/D_{i\parallel}$. Використовуючи рівняння (2.123), отримуємо $D_{e\parallel}/D_{i\parallel} = (l_e/l_i)\sqrt{m_i/m_e}\sqrt{T_e/T_i} = d\sqrt{\tau}$ (2.26). Параметр d – це відношення коефіцієнтів дифузії електронів до іонів у ізотермічній плазмі і його значення в обчисленнях приймалося рівним $d = 1000$ (так само як і у п. 2.2), що дає змогу зробити порівняння із результатами обчислень з [67]. Обчислення проводились для двох значень $\tau = T_e/T_i = 1, 40$.

Заряд порошинки входить у одну з крайових умов. Його значення варіювалося доки умова (2.124) не задовольнялася із заданою точністю. Результати для заряду були отримані для $b = 300\lambda_D$. Подальше збільшення b впливало на значення заряду несуттєво.

Для того щоб перевірити програму для обчислень ми розпочали з плазми без зовнішнього магнітного поля. Надійні результати для цього випадку можна взяти з роботи [67], в якій чисельним методом знаходилась стаціонарна границя залежної від часу задачі, тобто розглядалось рівняння типу (1.18). Оскільки обчислення заряду порошинки пов'язане з крайовою

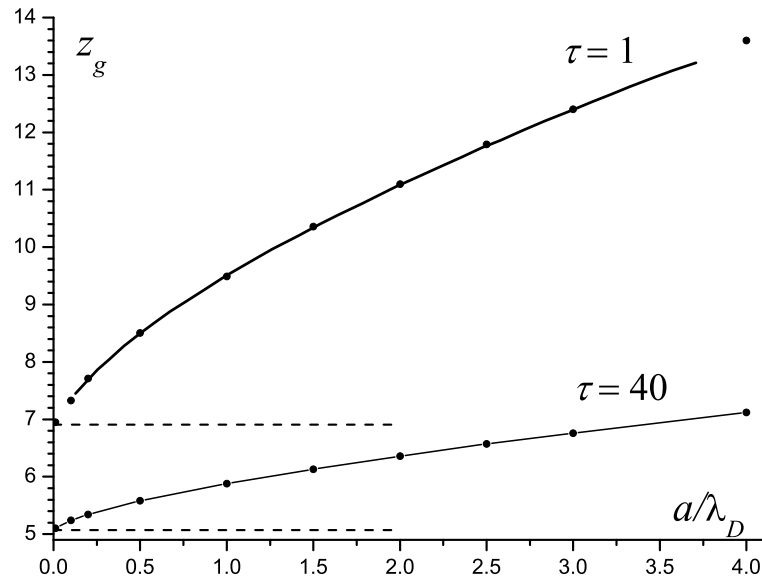


Рис. 2.21 Залежність безрозмірного заряду порошинки $z_g = e_e q/aT_e$ від її радіуса за відсутності зовнішнього магнітного поля. Точки, які з'єднані суцільною лінією, – результати обчислень, товста суцільна лінія взята з [67], штрихова лінія відповідає формулі (2.33).

умовою (2.124), яка потребує розподілу електростатичного потенціалу, то достатньо порівняти лише результати для значення заряду порошинки. Далі наведена залежність заряду порошинки від її радіуса (рис. 2.21). Як видно, отримані значення добре узгоджуються з відповідними значеннями з [67], а також, у границі $a \ll \lambda_D$, із аналітичною оцінкою за формулою (2.33).

2.4.2 Порошинка у плазмі із замагніченими електронами і незамагніченими іонами

Перейдемо до обчислень ефективного потенціалу порошинки у плазмі із зовнішнім магнітним полем. Значення індукції магнітного поля B визначається параметром замагніченості електронів, який є відношенням циклотронної частоти до частоти зіткнень $\gamma_e = \Omega_e/\nu_e$. Аналогічне відношення для іонів $\gamma_i = -\gamma_e\sqrt{\tau}/d$.

Задача про ефективний потенціал порошинки у магнітоактивній слабкоіонізованій плазмі з частими зіткненнями розглядалася нами в кінетичному підході в рамках моделі точкових стоків [18, 19] (див. п. 2.3). Зокрема,

був отриманий фур'є-образ потенціалу у замагніченій плазмі (2.90), який дає наступну асимптотичну поведінку (2.91)

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{r} \sum_{\alpha} \frac{I_{\alpha}}{k_D^2 D_{\alpha\perp} \sqrt{1 + (D_{\alpha\parallel}/D_{\alpha\perp} - 1) \sin^2 \theta}}, \quad (2.127)$$

де $I_i = I$, $I_e = -I$, $D_{\alpha\perp} = D_{\alpha\parallel}/(1 + \gamma_{\alpha}^2)$.

Отже, формула (2.127) передбачає існування у потенціалу кулонівської асимптоти з ефективним зарядом, який залежить від кута θ між радіус-вектором і напрямком зовнішнього магнітного поля. У напрямку поля ($\theta = 0$) формула (2.127) дає

$$\varphi(z) = -\frac{I}{k_D^2} \left(\frac{1}{D_{i\perp}} - \frac{1}{D_{e\perp}} \right) \frac{1}{z} = \tilde{q}_z \frac{1}{z}. \quad (2.128)$$

За відсутності магнітного поля $D_{\alpha\perp} = D_{\alpha\parallel} = D_{\alpha}$ і ефективний заряд не залежить від кута θ і є від'ємним, оскільки $D_e \gg D_i$. А от у магнітоактивній плазмі, \tilde{q}_z , а разом з ним і потенціал, може змінювати знак. Така зміна відбувається, коли коефіцієнти дифузії електронів та іонів поперек магнітного поля стають рівними. Оскільки поблизу від'ємно зарядженої порошокни потенціал є від'ємним, а на нескінченності, згідно крайовою умовою (2.125), рівний нулю, то зміна знаку потенціалу означає появу екстремуму.

У термінах безрозмірних змінних формула (2.128) має вигляд

$$\varphi(z) = -\frac{IF}{k_D^2 D_{e\parallel}} \frac{1}{z}, \quad F = d\sqrt{\tau} \left(1 + \frac{\gamma_e^2 \tau}{d^2} \right) - 1 - \gamma_e^2. \quad (2.129)$$

Аналіз виразу (2.129) показує, що в залежності від параметрів d і τ функція $F(\gamma_e)$ може як зростати, так і спадати в області $\gamma_e \geq 0$, також $F(\gamma_e)$ може мати від'ємні значення (потенціал може змінювати знак). Розв'язок рівняння $F(\gamma_e) = 0$ для $d = 1000$, $\tau = 1$ – це $\gamma_e \approx 30$, а для $d = 1000$, $\tau = 40$ – $\gamma_e \approx 80$, тобто в другому випадку необхідне сильніше замагнічення електронів для того, щоб потенціал змінив знак. А от, наприклад, для $d = 200$, $\tau = 40$ рівняння $F(\gamma_e) = 0$ не має дійсних коренів, тобто потенціал

не може змінити знак. Для більш повного аналізу асимптотичної поведінки потенціалу (2.129) необхідно також враховувати залежність стаціонарного струму заряджання від γ_e .

Формула (2.127) з $\theta = \pi/2$ дає

$$\varphi(r_{\perp}) = -\frac{IG}{k_D^2 D_{e\parallel}} \frac{1}{r_{\perp}}, \quad G = d\sqrt{\tau} \sqrt{1 + \frac{\gamma_e^2 \tau}{d^2}} - \sqrt{1 + \gamma_e^2}. \quad (2.130)$$

Цей вираз не передбачає, що потенціал поперек магнітного поля може змінювати знак зі збільшенням γ_e .

Зворотнє перетворення Фур'є виразу (2.90) дає

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \varphi_{\mathbf{k}} = \frac{q}{r} e^{-k_D r} - \sum_{\alpha} \varphi_{2\alpha}. \quad (2.131)$$

Отже, $\varphi(\mathbf{r})$ є сумою потенціалу Дебая і виразу

$$\varphi_{2\alpha} = \frac{I_{\alpha}}{2\pi^2} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{1}{(k^2 + k_D^2)(k_{\perp}^2 D_{\alpha\perp} + k_z^2 D_{\alpha\parallel})}, \quad (2.132)$$

який з'являється завдяки поглинанню плазмових частинок порошинкою.

Перейдемо у інтегралі (2.132) до циліндричної системи координат, тоді

$$\varphi_{2\alpha} = I_{\alpha} \int_0^{\infty} dk_{\perp} \frac{k_{\perp} J_0(k_{\perp} r_{\perp})}{k_{\perp}^2 (D_{\alpha\parallel} - D_{\alpha\perp}) + k_D^2 D_{\alpha\parallel}} \left(\frac{e^{-k_{\perp}|z|\sqrt{D_{\alpha\perp}/D_{\alpha\parallel}}} - e^{-|z|\sqrt{k_{\perp}^2 + k_D^2}}}{k_{\perp} \sqrt{D_{\alpha\perp}/D_{\alpha\parallel}}} - \frac{e^{-|z|\sqrt{k_{\perp}^2 + k_D^2}}}{\sqrt{k_{\perp}^2 + k_D^2}} \right), \quad (2.133)$$

або

$$\varphi_{2\alpha} = \frac{I_{\alpha}}{\pi^2} \int_0^{\infty} dk_z \frac{\cos(k_z z) K_0(r_{\perp} |k_z| \sqrt{D_{\alpha\parallel}/D_{\alpha\perp}}) - K_0(r_{\perp} \sqrt{k_z^2 + k_D^2})}{k_z^2 (D_{\alpha\perp} - D_{\alpha\parallel}) + k_D^2 D_{\alpha\perp}}, \quad (2.134)$$

де $J_0(x)$, $K_0(x)$ – функції Бесселя та Макдональда, відповідно.

Фізичне пояснення отриманої асимптотичної поведінки ефективного потенціалу зрозуміле. Навіть якщо знехтувати самоузгодженою взаємодією плазмових частинок присутність порошинки спричиняє появу потоків частинок. Існування електронних та іонних струмів означає існування

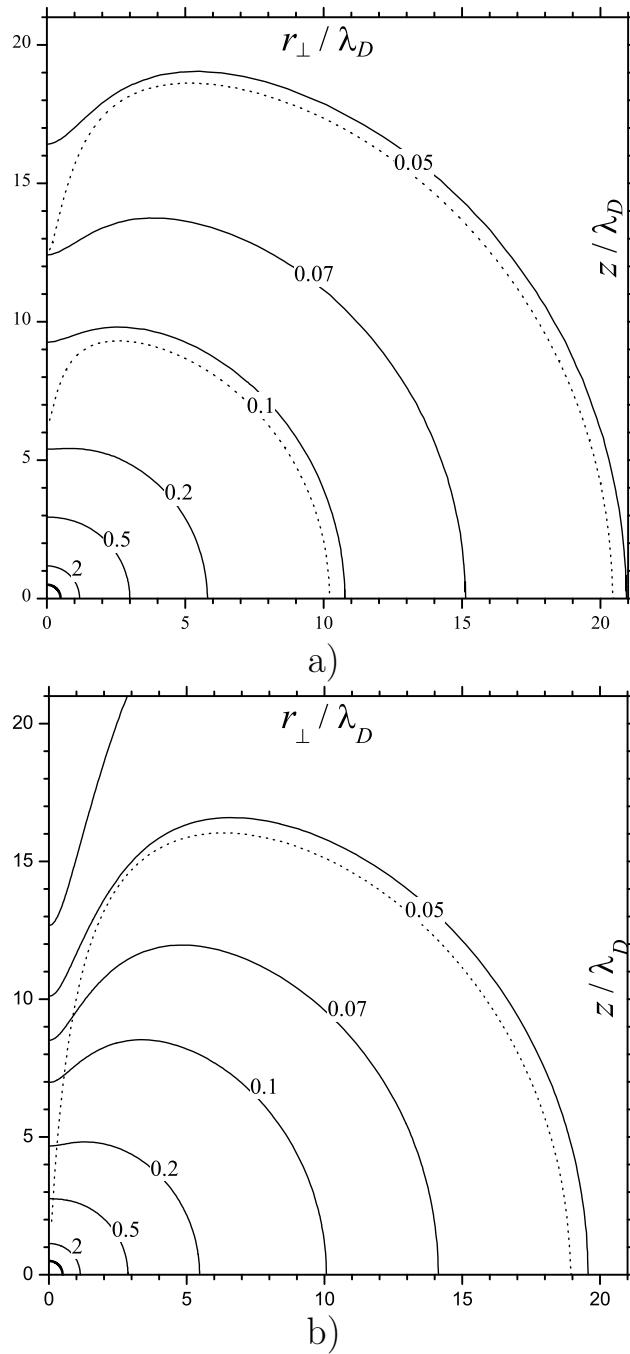


Рис. 2.22 Ізолінії безрозмірного потенціалу $e_e \varphi / T_e$ для $a = 0.5 \lambda_D$, $\tau = 1$ і $\gamma_e = 20$ (а), $\gamma_e = 50$ (б). Суцільні лінії – результати обчислень, точкові лінії – формула (2.127). Товста суцільна лінія – це поверхня порошинки.

електричного поля, якому у відповідності із законом Ома, повинні бути пропорційні струми. Таким чином, принаймні на великій відстані від порошинки потенціал створюється лінійною комбінацією концентрацій частинок і описується виразом (2.127). Саме в такому разі потоки плазмових частинок узгоджуються із законом Ома.

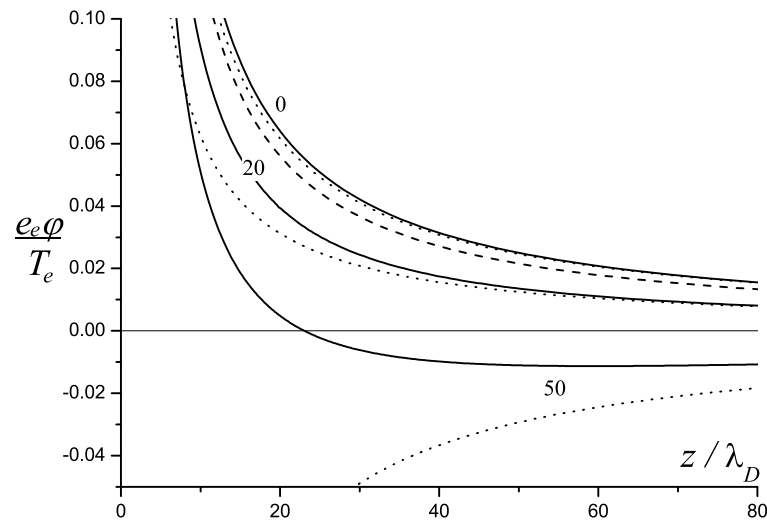


Рис. 2.23 Розподіл безрозмірного потенціалу $e_e \varphi / T_e$ вздовж магнітного поля для $a = 0.5\lambda_D$, $\gamma_e = 0, 20, 50$, у ізотермічній плазмі ($\tau = 1$): суцільні лінії – результати обчислень, точкові лінії – формула (2.127). І неізотермічній плазмі ($\tau = 40$, $\gamma_e = 20$) – штрихова лінія.

Наведені аналітичні результати отримані в моделі точкових стоків, тому стаціонарний заряд порошинки q і стаціонарний струм I є параметрами, які ми беремо із обчислень.

Типовий розподіл знерозміреного потенціалу $e_e \varphi / T_e$ в ізотермічній ($\tau = 1$) плазмі для двох значень магнітного поля показаний на рис. 2.22. Радіус порошинки дорівнює $a = 0.5\lambda_D$, $d = 1000$ і $\gamma_e = 20, 50$, останнє значення взяте, щоб побачити зміну знаку потенціалу, яка передбачається формулою (2.127). Точкові лінії побудовані за (2.127) зі значеннями струму, які взяті з обчислень. Для досягнення доброго узгодження обчислень з асимптотичною формулою необхідно збільшити область обчислення, а саме взяти $b = 10000\lambda_D$ для $\gamma_e = 0, 20$ і $b = 5000\lambda_D$ для $\gamma_e = 50$.

У випадку, що розглядається, потенціал проявляє специфічну поведінку: на відстанях, які перевищують довжину Дебая, потенціал спадає більш повільно у поперечному напрямку до поля, ніж у поздовжньому. Це ефект стає більш вираженим при збільшенні магнітного поля. Потенціал є симетричним лише поблизу порошинки. Слід відмітити, що асимптотична формула

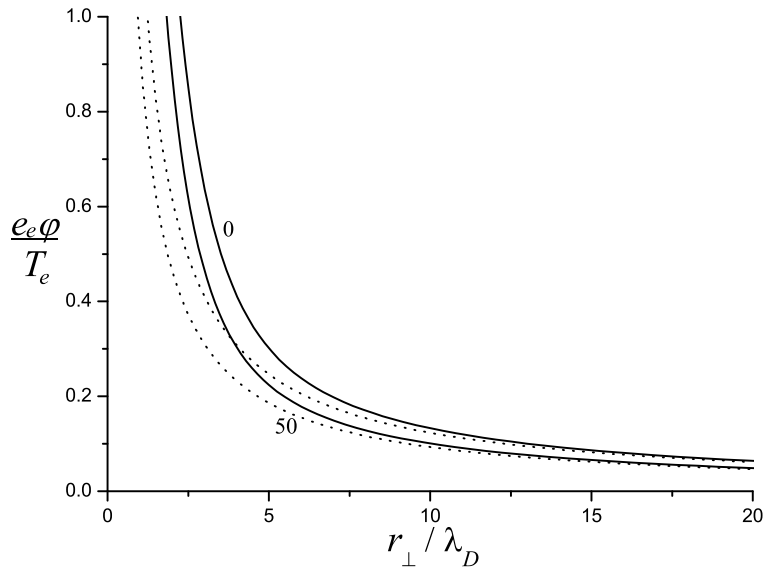


Рис. 2.24 Розподіл безрозмірного потенціалу $e_e\varphi/T_e$ перпендикулярно до магнітного поля для $a = 0.5\lambda_D$, $\gamma_e = 0, 50$, $\tau = 1$. Суцільні лінії – результати обчислень, точкові лінії – формула (2.127).

(2.127) кількісно задовільно узгоджується з результатами обчислень за винятком області поблизу осі z , де вона може бути використана лише для грубих оцінок.

Потенціал також був розрахований для неізотермічної ($\tau = 40$) плазми для тих же значень $\gamma_e = 20, 50$. Розподіл потенціалу подібний до розподілу в ізотермічній плазмі, але асиметрія ізоліній менш виражена, що і передбачалось формулою (2.127).

Координатні залежності потенціалу паралельно і перпендикулярно до магнітного поля, тобто вздовж осей z і r_\perp представлені на рис. 2.23, 2.24. З рисунків видно, що у сильному магнітному полі ($\gamma_e = 50$) безрозмірний потенціал поблизу осі z стає від'ємним і має слабковиражений мінімум в області $z \sim 60\lambda_D$. Асимптотична формула краще описує розподіл потенціалу у слабкому магнітному полі, а також перпендикулярно до магнітного поля, ніж вздовж. Це твердження також ілюструється ізолініями на рис. 2.22. Для заданих параметрів вплив магнітного поля ($\gamma_e = 20$) на розподіл потенціалу є суттєво меншим у неізотермічній плазмі ($\tau = 40$), ніж у ізотермічній (див. рис. 2.23).

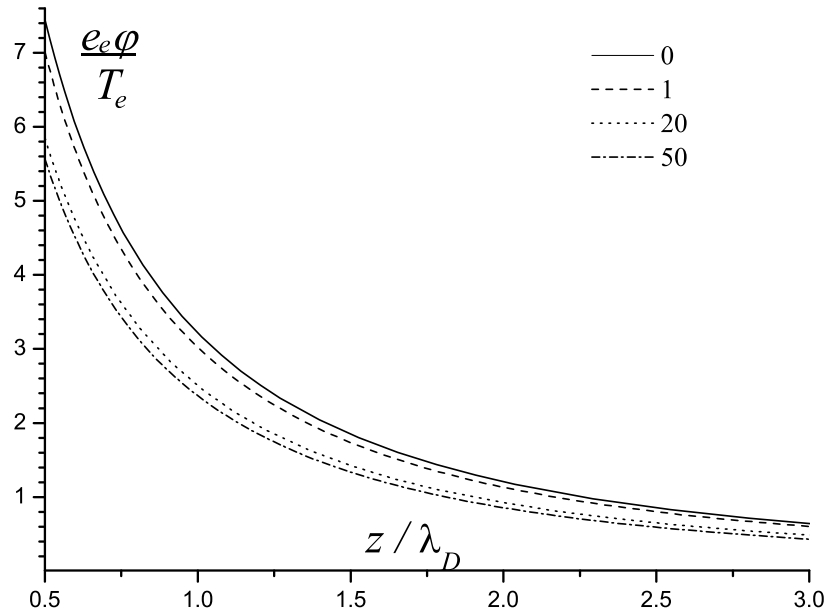


Рис. 2.25 Обчислений розподіл безрозмірного потенціалу $e_e\varphi/T_e$ вздовж магнітного поля для $a = 0.5\lambda_D$, $\gamma_e = 0, 1, 20, 50$, $\tau = 1$.

Модифікація розподілу потенціалу поблизу порошинки через присутність магнітного поля в ізотермічній плазмі показана на рис. 2.25. Ізолінії потенціалу поблизу порошинки мають майже колову форму, тому на рисунку представлений розподіл лише вздовж осі z . Видно, що зі збільшенням відношення електронної циклотронної частоти до частоти зіткнень, поверхневий потенціал зростає. Варто зазначити, що розподіл потенціалу біля порошинки є чутливим до слабкого магнітного поля. Навіть невелике значення $\gamma_e = 1$ призводить до помітного відхилення поверхневого потенціалу. Це відповідає рис. 2.26, на якому наведена залежність заряду порошинки z_g від γ_e . Збільшення магнітного поля призводить до різкого зменшення заряду порошинки в області $\gamma_e \sim 1$, де електрони стають замагніченими, і більш повільного зменшення в області $\gamma_e \sim 10$. Така поведінка спричинена зменшенням стаціонарного потоку плазмових частинок зі зростанням γ_e (див. рис. 2.27). Отже, магнітне поле пригнічує потік електронів до порошинки і її від'ємний заряд зменшується.

З рис. 2.26, 2.27 видно, що залежності безрозмірного заряду і струму

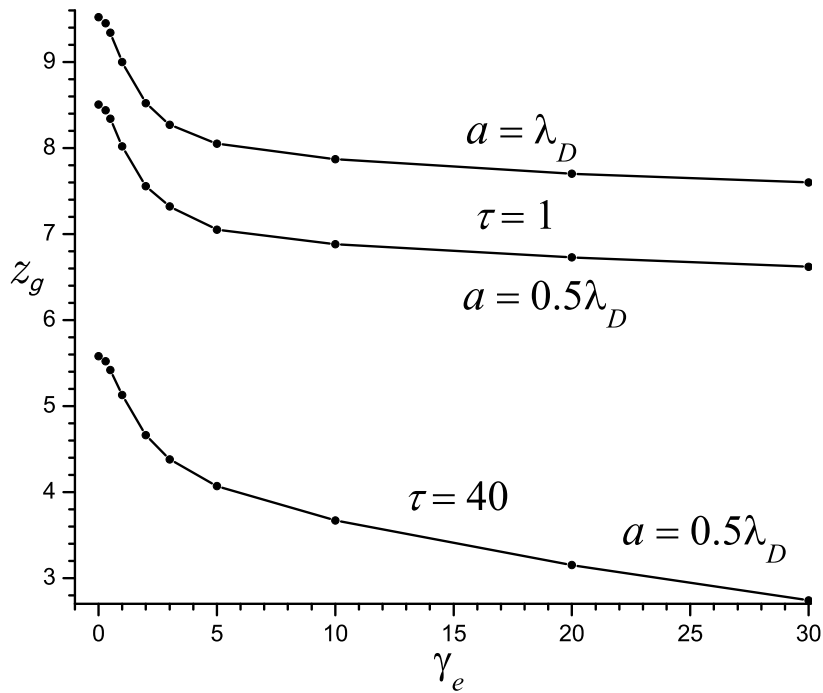


Рис. 2.26 Безрозмірний заряд порошинки $z_g = e_e q / a T_e$ від γ_e для $a = \lambda_D, 0.5\lambda_D, \tau = 1, 40$.

від радіуса порошинки є майже лінійними, так само як і у випадку відсутності магнітного поля (рис. 2.21, 2.14).

Електронний та іонний струми заряджання сферичної порошинки у однорідній магнітоактивній плазмі без зіткнень досліджувалися у роботі [163], де було знайдено, що зовнішнє магнітне поле зменшує струми заряджання, отже, має місці якісне узгодження між результатами для плазми з частими зіткненнями і плазми без зіткнень.

Формула (2.131) була застосована для знаходження потенціалу порошинки вздовж магнітного поля з $\gamma_e = 50$. Нагадаємо, що в цьому випадку асимптотична формула (2.127) працює погано (див. рис. 2.23). Рис. 2.28 показує, що (2.131) дає правильну асимптотичну поведінку, а на інших відстанях описує розподіл потенціалу досить добре. Отже, (2.131) є більш точною у порівнянні із простою формулою (2.127). Також з'ясовано, що з точки зору числового інтегрування, представлення (2.133) для $\varphi_{2\alpha}$ є зручнішим, ніж (2.134).

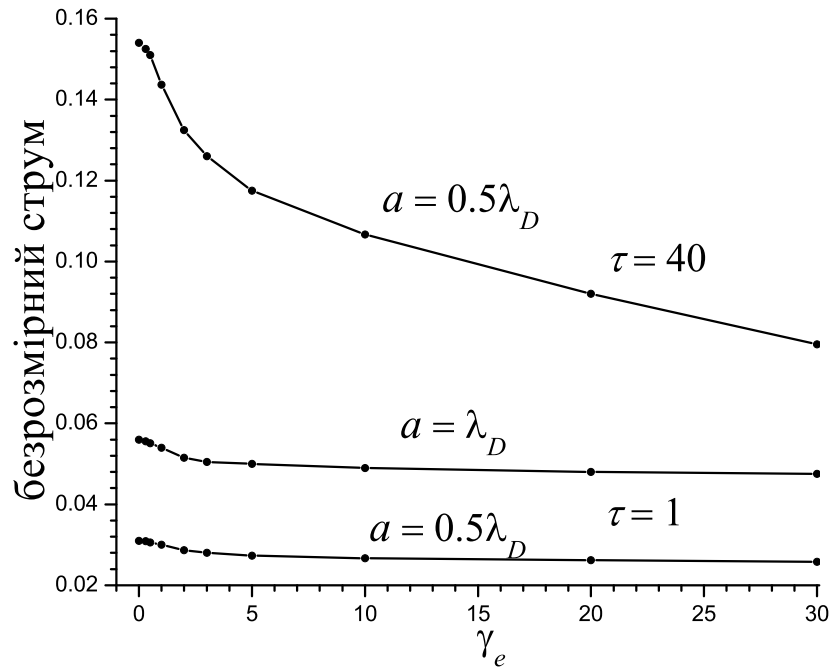


Рис. 2.27 Залежність безрозмірного струму Ik_D/en_0D_e від γ_e для $a = \lambda_D, 0.5\lambda_D$, $\tau = 1, 40$.

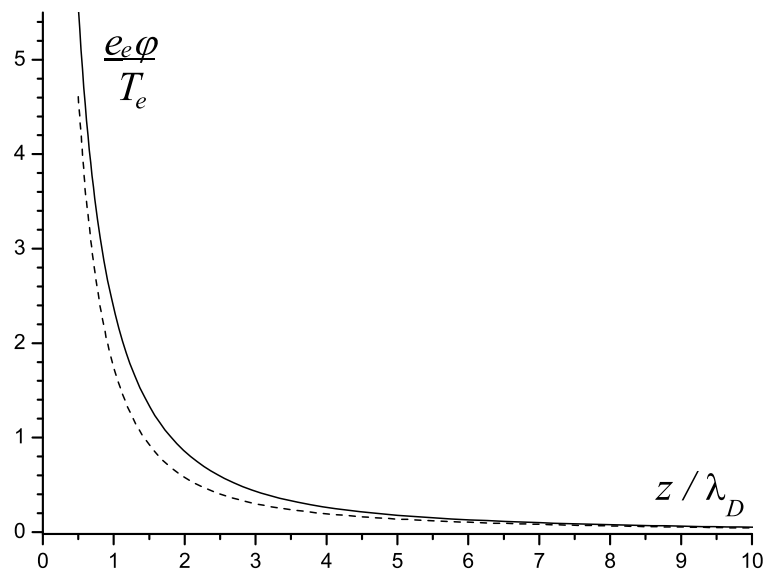


Рис. 2.28 Розподіл безрозмірного потенціалу $e_e\varphi/T_e$ вздовж магнітного поля для $a = 0.5\lambda_D$, $\gamma_e = 50$, суцільні лінії – результати обчислень, штрихові лінії – формула (2.131).

Також був розрахований розподіл індукованого заряду біля порошинки, його ізоляції показані на рис. 2.29. Видно, що вздовж магнітного поля (осі z) густина заряду спадає значно повільніше, ніж у інших напрямках.

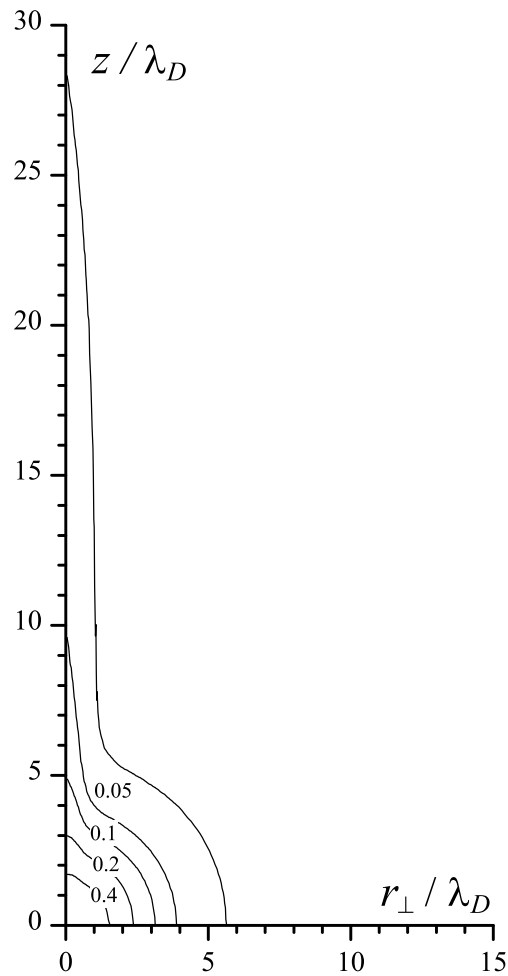


Рис. 2.29 Ізолінії безрозмірної густини заряду $(n_i - n_e)/n_0$, $\gamma_e = 20$, $a = 0.5\lambda_D$.

2.4.3 Висновки

Отримані результати показують, що навіть слабе магнітне поле (електрони та іони незамагнічені) може помітно впливати на струм заряджання і заряд порошинки. Зокрема, поява зовнішнього магнітного поля призводить до різкого зменшення цих величин. Це може бути пояснене зменшенням потоку плазмових частинок до порошинки у перпендикулярному до магнітного поля напрямку. В той же час слабе магнітне поле не змінює помітно просторову симетрію розподілу потенціалу.

Збільшення магнітного поля до значень при яких електрони стають замагніченими призводить до порушення сферичної симетрії ефективного

потенціалу. Цей ефект залежить від відношення коефіцієнтів дифузії електронів до іонів. Для розглянутих параметрів потенціал спадає швидше у напрямку вздовж поля, ніж у перпендикулярному напрямку. Більше того, подальше збільшення зовнішнього магнітного поля може призвести до зміни знаку потенціалу на певній відстані від порошокинки у напрямку вздовж магнітного поля і створити немонотонну просторову залежність потенціалу. Це означає, що для порошокинки, які знаходяться на одній силовій лінії поля, можливе слабке притягання. Цей ефект може бути пояснений специфічним самоузгодженим розподілом заряду навколо порошокинки у присутності сильного магнітного поля.

РОЗДІЛ 3

ВЗАЄМОДІЯ ДВОХ МАКРОЧАСТИНОК

Задача про взаємодію двох заряджених тіл має давню історію [164]. Справа в тому, що взаємодію заряджених об'єктів навіть сферичної форми можна описати законом Кулона для точкових зарядів лише у випадку коли їхні розміри набагато менші за відстань між ними. Тому виникає задача розрахувати силу взаємодію (притягання чи відштовхування) двох заряджених об'єктів на довільних відстанях. Останні дослідження цього питання для двох провідних сферичних тіл у вакуумі представлені в роботах [165–167]. Зокрема, внаслідок поляризації, сила відштовхування між двома однойменно зарядженими провідними сферами однакового розміру є меншою, ніж кулонівська сила між двома точковими зарядами такої ж величини, які знаходяться на відстані рівній відстані між центрами сфер. Відношення цих сил досягає значення 0.6149, коли сфери знаходяться у контакті [166].

Очевидно, що присутність плазми навколо заряджених об'єктів суттєво ускладнює задачу. В той же час силу взаємодії між двома зарядженими частинками скінченних розмірів необхідно знати для розв'язання різноманітних задач у фізиці заповненої плазми [40, 49] і фізиці заряджених колоїдних суспензій [168–171]. Ці області фізики вивчають системи, що складаються не лише із заряджених частинок, які можуть вважатися точковими (електрони та іони у плазмі та протиіони у випадку колоїдних суспензій), а також із заряджених частинок скінченних розмірів (порошинки у заповненій плазмі і заряджені колоїдні частинки у випадку колоїдних суспензій). Зокрема, одна з найбільш важливих задач цих областей дослідження – це опис формування впорядкованих структур (наприклад плазмові і колоїдні кристали) в заповненій плазмі [97–99] і колоїдних суспензіях [168, 169], відповідно.

Слід відмітити, що задача взаємодії порошинок у заповненій плазмі вивчалась впродовж багатьох років. Багато аспектів взаємодії порошинок

вже описані (див. наприклад роботи [172–175] і посилання у них). Однак, проблема впливу скінченного розміру частинок на силу взаємодії все ще залишається відкритою. Тим часом, такий вплив необхідно знати для коректного опису формування плазмових кристалів і моделювання впорядкованих структур у заповненій плазмі [176, 177]

Дослідження взаємодії між порошинками у щільній хмарі порошинок виконано у серії робіт (див. наприклад [178–180] і посилання у них). У цих роботах хмара порошинок описувалася як суцільне середовище, яке є джерелом і стоком для іонів, а також створює силу тертя для них. Потенціал вибраної порошинки, яка знаходиться у цьому середовищі, вивчався із урахуванням відгуку іонів. У згаданих роботах виявлено притягання між однойменно зарядженими порошинками.

В цьому розділі наведені результати [7, 10, 20, 21, 25, 27] дослідження впливу скінченного розміру заряджених частинок, які містяться у плазмоподібному середовищі, на силу взаємодії між двома частинками і запропоновано опис цієї сили у термінах ефективного потенціалу. Оскільки об'єкти, які розглядаються (порошинки і заряджені колоїдні частинки), накопичують і несуть на собі великий електричний заряд, то необхідно враховувати пов'язані з цим нелінійні ефекти, що спричинило необхідність розв'язувати цю задачу чисельно. Динаміка плазми описувалась у дрейфово-дифузійному наближенні, яке підходить для слабкоіонізованої плазми з частими зіткненнями, що має місце у експериментах із заповненою плазмою [63–65].

Як вже зазначалося, між заповненою плазмою і зарядженими колоїдами є багато спільного, однак є і суттєва відмінність, яка стосується механізму заряджання макрочастинок. У випадку заряджених колоїдів макрочастинки набувають заряд внаслідок їх хімічної взаємодії з розчинником. Такий заряд є фіксованим і можна вважати, що обмін зарядом між колоїдною частинкою і електролітом відсутній. На противагу цьому,

порошинки у плазмі поглинають електрони та іони і завдяки цьому заряджаються [49]. Таким чином, заряд порошинки, який визначається струмами заряджання, залежить як від динаміки плазми, так і від присутності інших порошинок. Це вносить додаткове ускладнення, яке пов'язане з тим, що заряд однієї порошинки змінюється за присутності другої, принаймні якщо вони знаходяться досить близько одна від одної.

Цей розділ організований наступним чином. Загальне формулювання задачі і основні рівняння наведені у першому підрозділі, який також включає опис числового методу, який використовується. У наступному підрозділі представлені результати числового дослідження сили взаємодії між двома частинками скінченних розмірів.

3.1 Постановка задачі і основні рівняння

Розглянемо дві однакові заряджені сферичні провідні макрочастинки радіуса a , які вміщені у нескінченну слабоіонізовану плазму з частими зіткненнями. Ми вважаємо, що кожна частинка має заряд q і відстань між центрами частинок рівна $2c$. Геометрія системи, яка розглядається, показана на рис. 3.1.

Сила, яка діє на одну зі сфер з боку заряду іншої сфери та індукованих зарядів плазми, може бути знайдена на основі наступного підходу. Розглянемо елемент поверхні dS , його заряд $dq = \sigma dS$, де σ – густина поверхневого заряду. У випадку провідної макрочастинки, вектор напруженості електричного поля \mathbf{E} нормальний до поверхні і має значення $E = 4\pi\sigma$, при цьому σ є функцією координати [181]. Сила, яка діє на елемент поверхні дорівнює

$$d\mathbf{F} = \sigma(\mathbf{E} - \mathbf{E}_S)dS, \quad (3.1)$$

де \mathbf{E}_S – напруженість електричного поля, яке створює сам елемент поверхні (поле зарядженої площини)

$$\mathbf{E}_S = 2\pi\sigma\mathbf{n}, \quad (3.2)$$

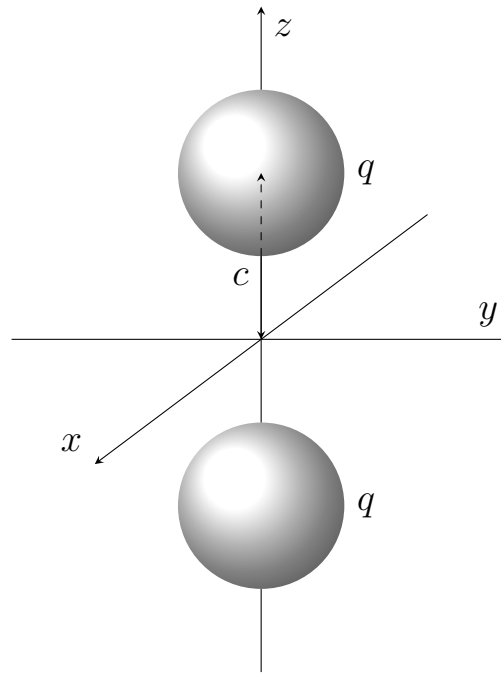


Рис. 3.1 Взаємне розміщення макрочастинок і системи координат.

де \mathbf{n} – одиничний зовнішній вектор нормалі до елемента поверхні.

Таким чином, сила, яка на нього діє може бути записана як

$$d\mathbf{F} = 2\pi\sigma^2\mathbf{n}dS. \quad (3.3)$$

Інтегруючи по поверхні макрочастинки S , отримуємо силу

$$\mathbf{F} = 2\pi \oint_S \sigma^2 d\mathbf{S} = \frac{1}{8\pi} \oint_S \left(\mathbf{n} \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}} \right)^2 d\mathbf{S}, \quad (3.4)$$

яка діє на всю частинку.

Потенціал $\varphi(\mathbf{r})$ задовольняє рівняння Пуассона. У випадку однозарядних іонів $e_i = -e_e = e$, де e – елементарний заряд, маємо

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = 4\pi e(n_e(\mathbf{r}) - n_i(\mathbf{r})), \quad (3.5)$$

де $n_\alpha(\mathbf{r})$ – концентрація плазмових частинок. Це рівняння необхідно доповнити крайовими умовами. Потенціал повинен спадати з відстанню від

заряджених макрочастинок, тобто

$$\varphi(\mathbf{r})\Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (3.6)$$

Крайова умова для потенціалу на поверхні провідної частинки є

$$\varphi(\mathbf{r})\Big|_S = \varphi_S = \text{const}. \quad (3.7)$$

Спосіб визначення φ_S , так само як і крайові умови для розподілів електронів та іонів, залежать від властивостей макрочастинок і їх необхідно розглядати окремо.

Для того щоб дослідити вплив поляризації поверхневого заряду на взаємодію провідних частинок, ми також розглядаємо взаємодію частинок з однорідним розподілом поверхневого заряду

$$\sigma_0 = \frac{q}{4\pi a^2}.$$

В цьому разі z -компонента сили, яка діє на елемент поверхні, задається виразом

$$dF_z = \sigma_0 E_z dS \quad (3.8)$$

і z -компонента сили, яка діє на всю поверхню,

$$F_z = -\frac{q}{4\pi a^2} \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial z} dS. \quad (3.9)$$

Оскільки електричне поле, яке створює сама однорідно заряджена сферична поверхня має сферичну симетрію, то його вклад у силу (3.9) рівний нулю.

На відміну від провідних частинок, для частинок із однорідним розподілом поверхневого заряду електричний потенціал у середині сфери $\varphi_i(\mathbf{r})$ не є сталим. Тому в середині сфери необхідно розв'язувати рівняння Лапласа

$$\Delta \varphi_i(\mathbf{r}) = 0$$

разом із рівнянням Пуассона (3.5) за її межами. Крайова умова на поверхні сфери

$$\mathbf{n} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \Big|_S - \mathbf{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{r}} \Big|_S = 4\pi\sigma_0. \quad (3.10)$$

Макрочастинки, які не обмінюються зарядом із плазмою.

Якщо обмін зарядом між макрочастинкою і плазмою відсутній (така ситуація має місце для заряджених колоїдних суспензій), концентрації електронів та іонів можна описати розподілом Больцмана (2.2) і тоді рівняння (3.5) набуває вигляду рівняння Пуассона – Больцмана

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = 4\pi en_0 \left(e^{\frac{e\varphi(\mathbf{r})}{T_e}} - e^{-\frac{e\varphi(\mathbf{r})}{T_i}} \right). \quad (3.11)$$

Це рівняння розв'язувалося у п. 2.1 для випадку однієї макрочастинки, але на відміну від (2.3) тут потенціал не є сферично симетричним.

У безрозмірних змінних

$$\phi = \frac{e_e\varphi}{T_e}, \quad \tau = \frac{T_e}{T_i}, \quad \tilde{r} = \frac{r}{\lambda_D}, \quad (3.12)$$

рівняння для потенціалу має вигляд (2.13).

Значення φ_S в крайовій умові (3.7) необхідно брати таким, щоб для заданого заряду порошинки, потенціал $\varphi(\mathbf{r})$ задовольняв теорему Гаусса

$$\oint_S \mathbf{n} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} dS = -4\pi q. \quad (3.13)$$

Порошинки, які заряджаються плазмовими струмами

Якщо макрочастинка (порошинка) поглинає всі електрони та іони, які з нею стикаються, то значення поверхневого потенціалу залишається фіксованим, але замість (3.13) необхідно враховувати, що стаціонарне значення заряду порошинки визначається повним струмом, який тече на поверхню порошинки

$$I_{\text{tot}} = \sum_{\alpha} I_{\alpha} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \oint_S \Gamma_{\alpha} dS = 0, \quad (3.14)$$

де густина потоку $\mathbf{\Gamma}_\alpha$ задовольняє стаціонарне рівняння неперервності

$$\operatorname{div}\mathbf{\Gamma}_\alpha(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.15)$$

Крайові умови на $n_\alpha(\mathbf{r})$ (2.21) (2.22)

$$n_\alpha(\mathbf{r})|_S = 0, \quad n_\alpha(\mathbf{r})|_{r \rightarrow \infty} = n_0. \quad (3.16)$$

У дрейфово-дифузійному наближенні (див. п. 1.2.2), яке ми використовуємо для опису динаміки плазми у випадку слабкоіонізованої плазми з частими зіткненнями, густина потоку електронів та іонів має вигляд (1.17)

$$\mathbf{\Gamma}_\alpha(\mathbf{r}) = -D_\alpha \left(\frac{e_\alpha}{T_\alpha} n_\alpha(\mathbf{r}) \nabla \varphi(\mathbf{r}) + \nabla n_\alpha(\mathbf{r}) \right). \quad (3.17)$$

Використовуючи безрозмірні змінні (3.12) і (2.23)

$$\mathbf{G}_\alpha = \frac{\mathbf{\Gamma}_\alpha}{D_e n_0 k_D}, \quad (3.18)$$

отримуємо

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_e &= -\eta_e(\tilde{\mathbf{r}}) \nabla \phi(\tilde{\mathbf{r}}) - \nabla \eta_e(\tilde{\mathbf{r}}), \\ \mathbf{G}_i &= (D_i/D_e) (\tau \eta_i(\tilde{\mathbf{r}}) \nabla \phi(\tilde{\mathbf{r}}) - \nabla \eta_i(\tilde{\mathbf{r}})), \end{aligned} \quad (3.19)$$

де $\eta_\alpha = n_\alpha/n_0$ і, таким чином, система рівнянь для потенціалу і концентрації плазмових частинок має вигляд

$$\Delta \phi(\tilde{\mathbf{r}}) = \frac{\eta_i(\tilde{\mathbf{r}}) - \eta_e(\tilde{\mathbf{r}})}{1 + \tau}, \quad (3.20)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{G}_\alpha(\tilde{\mathbf{r}}) = 0. \quad (3.21)$$

На відміну від (2.24) та (2.25) у (3.19) та (3.20) потенціал і концентрації не мають сферичної симетрії. Задача про взаємодію двох сферичних частинок має аксіальну симетрію по осі z (див. рис. 3.1), тому в циліндричній системі координат потенціал є функцією двох змінних $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(r_\perp, z)$, так

само як концентрація електронів та іонів $n_\alpha(\mathbf{r}) = n_\alpha(r_\perp, z)$. Ця задача, яка є двомірною в (r_\perp, z) координатах, розв'язувалась чисельно методом скінченних елементів [134] у програмі FlexPDE [133]. Враховуючи дзеркальну симетрію відносно площини xy (рис. 3.1), використовувалась область обчислень, яка показана на рис. 3.2. В обчисленнях крайові умови (3.6) і (3.16) були замінені на аналогічні при $r = b$, де $b \gg \lambda_D$. Нормальні компоненти векторів $\nabla\phi(\tilde{\mathbf{r}})$, $\nabla\eta(\tilde{\mathbf{r}})$ до границь $(z = 0, 0 < r_\perp < b)$, $(r_\perp = 0, 0 < z < c - a)$ і $(r_\perp = 0, c + a < z < b)$ рівні нулю, що відповідає неперервності потенціалу та концентрації плазмових частинок на цих границях, з огляду на аксіальну та дзеркальну симетрії задачі.

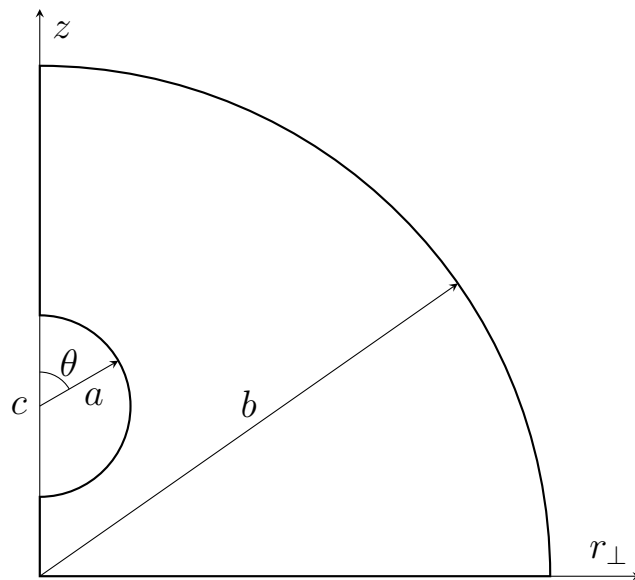


Рис. 3.2 Область обчислень.

У циліндричній системі координат рівняння поверхні макрочастинки з центром в точці $(0, 0, c)$ задається виразом $r_\perp^2 + (z - c)^2 = a^2$, звідки вектор нормалі до поверхні має вигляд $\mathbf{n} = \{\mathbf{r}_\perp/a, (z - c)/a\}$. Оскільки лише z -компонента сили (3.4), яка діє на порошок, має ненульове значення, то

$$F = F_z = \frac{1}{8\pi a} \oint_S \left(\mathbf{n} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 (z - c) dS. \quad (3.22)$$

У циліндричній системі координат $dS = 2\pi r_{\perp} dl$, тому остаточно маємо

$$F = \frac{1}{4a} \int_l \left(\mathbf{n} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 r_{\perp} (z - c) dl, \quad (3.23)$$

де інтегрування виконується вздовж півкола (див. рис. 3.2).

У знерозмірених виразах для потоків (3.19) з'являється відношення коефіцієнтів дифузії D_e/D_i . Використовуючи співвідношення $D_{\alpha} = l_{\alpha} \sqrt{T_{\alpha}/m_{\alpha}}$ і припущення про незалежність довжини вільного пробігу від температури, отримуємо (2.26) $D_e/D_i = (l_e/l_i) \sqrt{m_i/m_e} \sqrt{T_e/T_i} = d\sqrt{\tau}$. Параметр d – відношення коефіцієнтів дифузії електронів та іонів у ізотермічній плазмі. Обчислення проводились для значення $d = 1000$ (таке ж значення використовувалося в п. 2.2, 2.4 і [67]) і $\tau = 1$ (ізотермічна плазма).

3.2 Макрочастинки, які не обмінюються зарядом з плазмою

У цьому підрозділі представлені результати розв'язання рівняння Пуассона – Больцмана (3.11) для двох макрочастинок.

Взаємодія між двома зарядженими сферичними частинками у плазмі в рамках моделі Пуассона – Больцмана була розглянута аналітично, наприклад, в роботах [119, 120, 182], з використанням тензора напружень Максвелла і вільної енергії електричного поля. Було доведено, що в обох випадках сила є відштовхувальною як в ізотермічній, так і в неізотермічній плазмі. На основі тензора напружень сила розраховувалась також в роботах [183, 184].

Ми розраховуємо силу F_z , яка діє на одну частинку з боку іншої частинки та індукованих у плазмі зарядів, за формулами (3.23) і (3.9). Рис. 3.3 показує залежність сили від напіввідстані між центрами провідних макрочастинок (суцільні лінії) і макрочастинок з однорідним розподілом густини поверхневого заряду (штрихові лінії). Розглянуті різні розміри частинок $a = 0.1, 0.5, 1.0\lambda_D$ з однаковим значенням безрозмірного заряду $z_g = 5$.

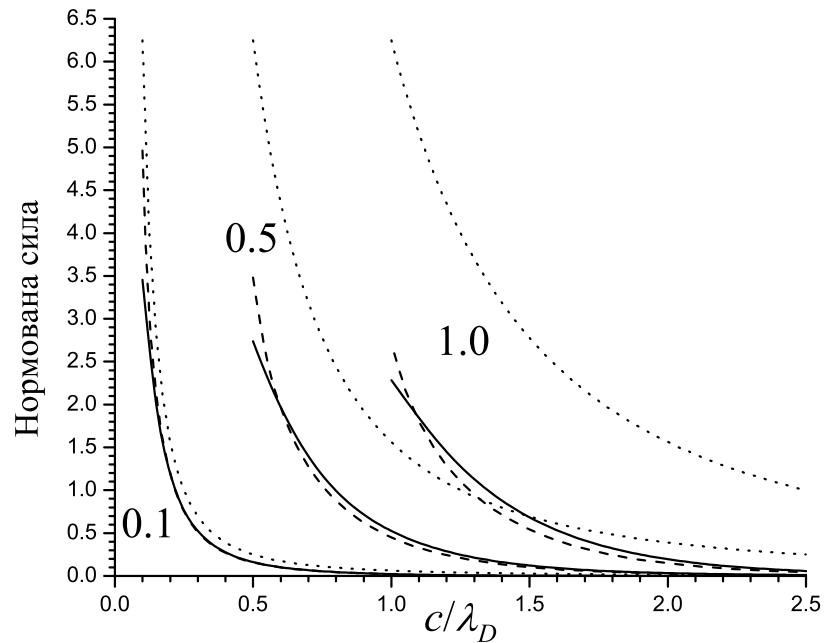


Рис. 3.3 Нормована сила відштовхування $F_z e^2 / T_e^2$ між провідними макрочастинками (суцільні лінії), макрочастинками із однорідною густиною поверхневого заряду (штрихові лінії) та $F_C e^2 / T_e^2$ (точкові лінії) від напіввідстані між їхніми центрами для $a = 0.1, 0.5, 1.0 \lambda_D$, $z_g = 5$.

Сила Кулона, яка діє між двома точковими зарядами у вакуумі

$$F_C = \frac{q^2}{(2c)^2} \quad (3.24)$$

наведена на рис. 3.3 точковими лініями. Сила відштовхування монотонно спадає з відстанню. Очевидно, максимальна сила відштовхування досягається коли макрочастинки знаходяться у контакті і значення цієї максимальної сили зменшується зі збільшенням розмірів частинок.

Очевидно, що сили взаємодії між провідними частинками і частинками із однорідною густиною поверхневого заряду в плазмopodobному середовищі є меншими, ніж F_C (див. рис. 3.3). Для того щоб порівняти ці сили було знайдено відношення F_z / F_C . Залежності цього відношення від c для однакових значень $z_g = 5$ і різних $a / \lambda_D = 0.1, 0.5, 1$ представлені на рис. 3.4, а для однакових значень $a / \lambda_D = 0.5$ і різних $z_g = 1, 5, 10$ на рис. 3.5. Відношення F_z / F_C різко спадає зі збільшенням c , це означає що має місце екранування взаємодіє між макрочастинками. Екранування менш виражене на малих

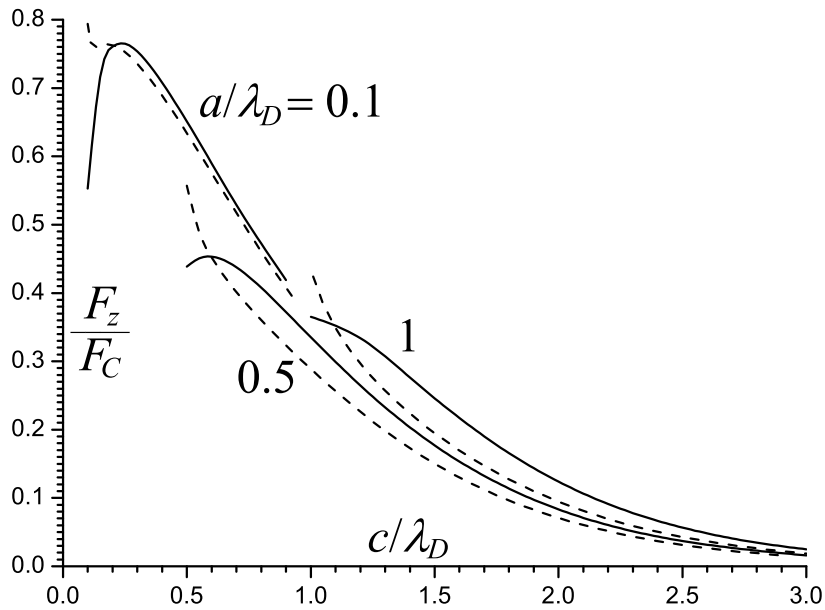


Рис. 3.4 Відношення обчисленої сили до сили кулона F_z/F_C між провідними макрочастинками (суцільні лінії) і макрочастинками із однорідною густиною поверхневого заряду (штрихові лінії) від напіввідстані між їхніми центрами для $a = 0.1, 0.5, 1.0\lambda_D$, $z_g = 5$.

відстанях, де значення F_z/F_C є більшим, особливо для менших a/λ_D і z_g . Таким чином, взаємодія заряджених макрочастинок у плазмі є близькою до закону Кулона для $c \ll \lambda_D$, але таку умову можна задовольнити лише для частинок з радіусом значно меншим за λ_D .

Сила взаємодії між макрочастинками із однорідним розподілом поверхневого заряду і провідними макрочастинками є різною. Зокрема, коли частинки знаходяться майже у контакті $c \gtrsim a$ сила між провідними частинками є меншою (суцільні лінії знаходяться нижче, ніж штрихові лінії на рис. 3.3–3.5 за винятком випадку $a/\lambda_D = 0.5, z_g = 10$ на рис. 3.5). Зменшення сили можна пояснити поляризацією поверхневих зарядів провідних макрочастинок.

Поляризація наглядно показана на рис. 3.6. При $c = 0.5\lambda_D$ нормована густина поверхневого заряду $\sigma e_e/(T_e k_D)$ на провідних макрочастинках розмірів $a = 0.5\lambda_D$ і зарядів $z_g = 5$ помітно менша на тих сторонах макрочастинок, які знаходяться одна на проти одної, ніж на протилежних сторонах,

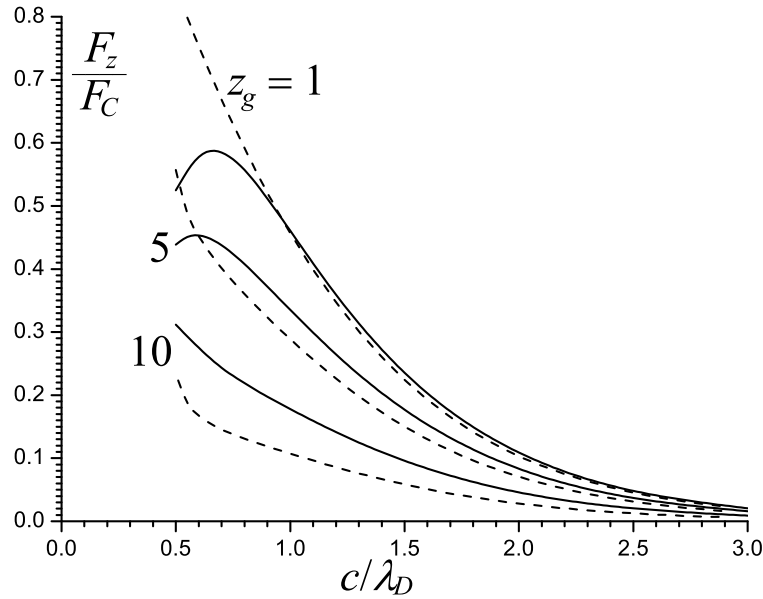


Рис. 3.5 Відношення обчисленої сили до сили кулона F_z/F_C між провідними макрочастинками (суцільні лінії) і макрочастинками із однорідною густиною поверхневого заряду (штрихові лінії) від напіввідстані між їхніми центрами для $a = 0.5\lambda_D$, $z_g = 1, 5, 10$.

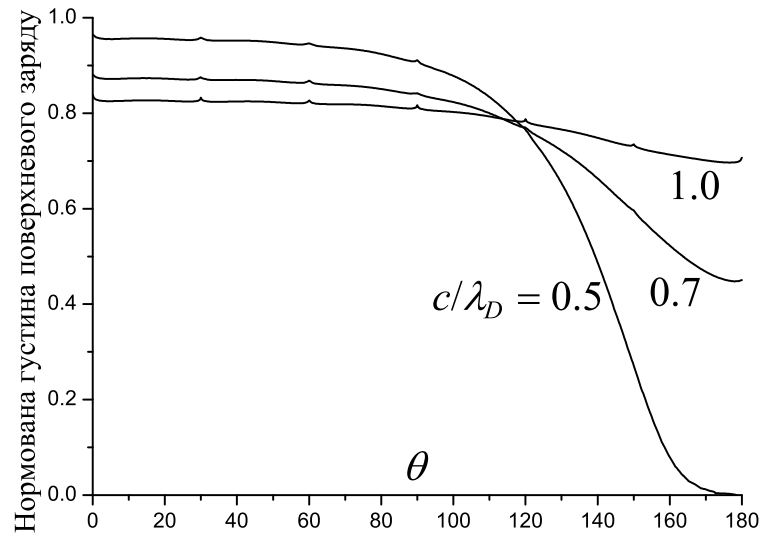


Рис. 3.6 Залежність нормованої густини поверхневого заряду $\sigma_e/(T_e k_D)$ на провідній макрочастинці від кута θ (див. рис. 3.2) для $a = 0.5\lambda_D$, $z_g = 5$ і $c = 0.5, 0.7, 1\lambda_D$.

і зменшується до нуля в точці контакту частинок. Це призводить до зменшення сили відштовхування у порівнянні з макрочастинками із однорідним розподілом поверхневого заряду (див. рис. 3.4). Для $c = 0.7\lambda_D$ поляризація залишається суттєвою, але менш вираженою. І для $c = \lambda_D$ нею можна

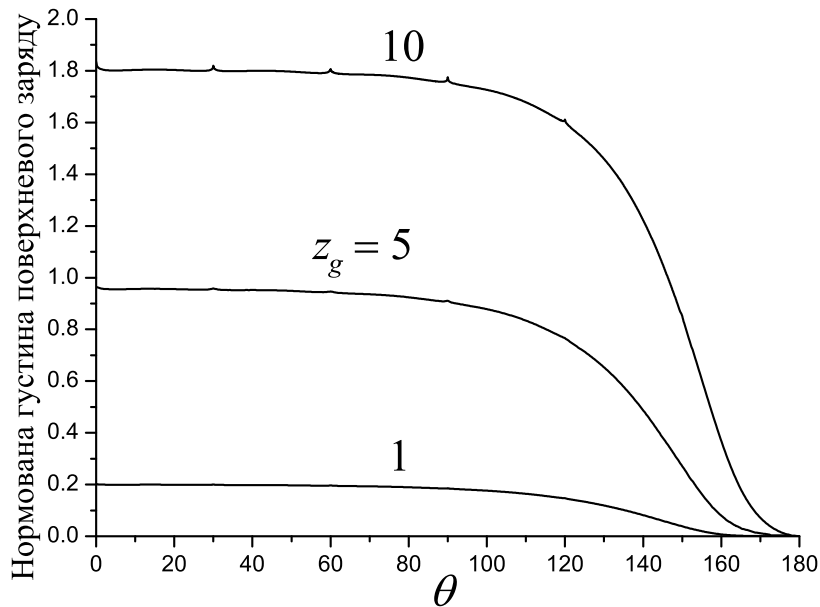


Рис. 3.7 Залежність нормованої густини поверхневого заряду на провідній макрочастинці $\sigma e_e / (T_e k_D)$ від кута θ (див. рис. 3.2) для $a = 0.5\lambda_D$, $c = 0.5\lambda_D$ і $z_g = 1, 5, 10$.

нехтувати.

Рис. 3.7 показує як поляризація поверхневого заряду залежить від безрозмірного заряду z_g для макрочастинок, які знаходяться у контакті ($c = 0.5\lambda_D$). З рисунка видно, що поляризація зменшується зі збільшенням z_g , зокрема область де поверхневий заряд майже рівний нулю є меншою для більших значень z_g . Цей факт пояснює поведінку кривих на рис. 3.5 для $c \gtrsim a$, а саме те, що сила відштовхування між провідними частинками суттєво менша, ніж для частинок із однорідним поверхневим зарядом (суцільна лінія знаходиться вище, ніж штрихова) для $z_g = 1$. Цей ефект є менш вираженим для $z_g = 5$ і зникає для $z_g = 10$.

Також, видно, що відштовхування між провідними частинками є більшим, ніж між частинками з однорідною густиною поверхневого заряду (суцільні лінії знаходяться вище, ніж штрихові лінії на рис. 3.4, 3.5), крім області $c \ll \lambda_D$, що вже згадувалося раніше. Це можна пояснити, розглянувши рис. 3.8, на якому наведена нормована густина заряду в плазмі $(n_i - n_e)/n_0$ вздовж осі z поблизу однієї з макрочастинок розміром $a = 0.5\lambda_D$. Густина заряду рівна нулю всередині макрочастинки ($0.5 \leq z/\lambda_D \leq 1.5$).

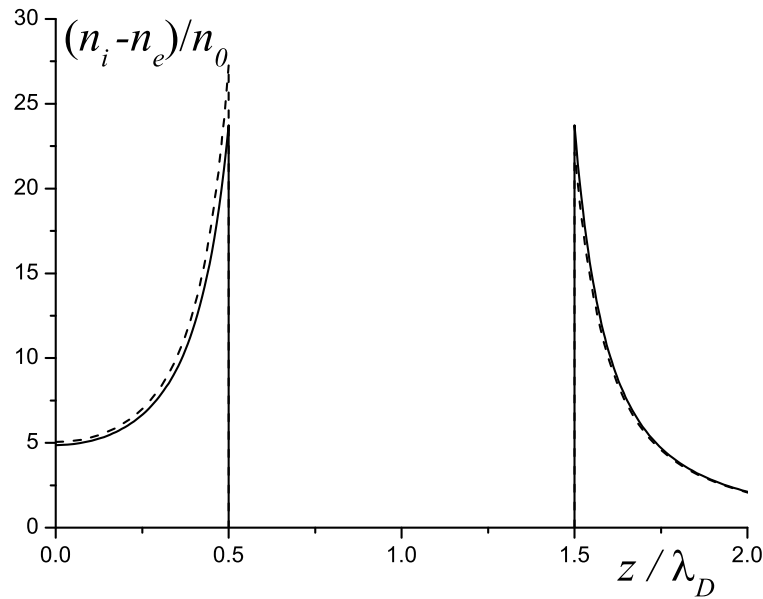


Рис. 3.8 Залежність нормованої густини заряду $(n_i - n_e)/n_0$ від z/λ_D поблизу однієї із провідних (суцільна лінія) частинок, або частинок із однорідною густиною поверхневого заряду (штрихова лінія) для $a = 0.5\lambda_D$, $c = \lambda_D$, $z_g = 5$.

В області між від'ємно зарядженими макрочастинками знаходиться більше доданого заряду у випадку однорідної густини поверхневого заряду, ніж у випадку провідних макрочастинок (штрихова лінія знаходиться вище, ніж суцільна на рис. 3.8) і навпаки для $z/\lambda_D > 1.5$. Як наслідок відштовхування між макрочастинками зменшується. Таким чином, взаємодія між макрочастинками суттєво залежить від рухливості поверхневого заряду, і не лише на коротких відстанях між макрочастинками, де поляризація є важливою.

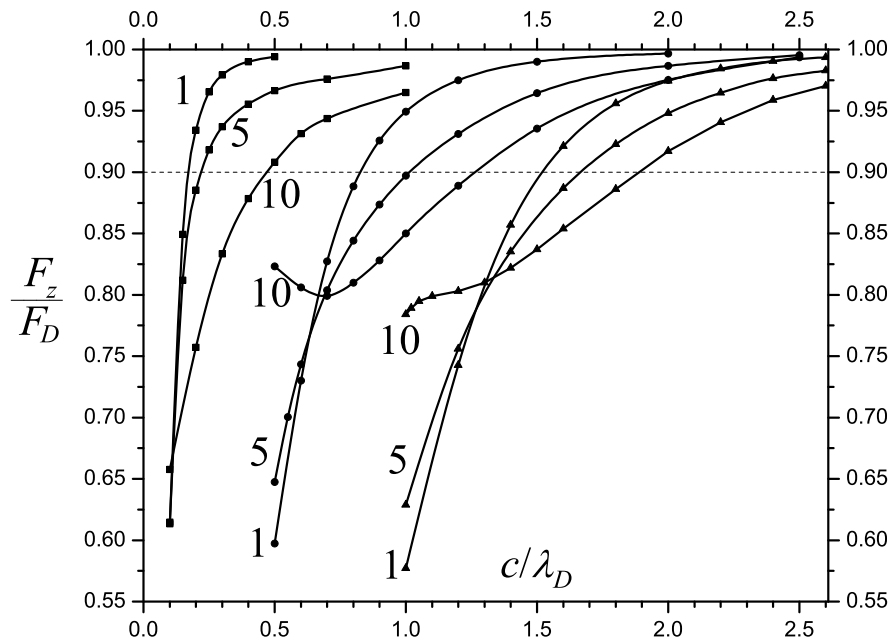
Також, було зроблене порівняння обчисленої сили із силою, яка діє на точковий заряд, що знаходиться у потенціалі Дебая (2.11) такого ж заряду

$$F_D = -q^{\text{eff}} \frac{\partial \varphi_D}{\partial r} \Big|_{r=2c} = \left(\frac{q^{\text{eff}}}{2c} \right)^2 e^{-2ck_D} (1 + 2ck_D). \quad (3.25)$$

Ефективний заряд q^{eff} залежить від параметрів τ , z_g та a/λ_D (див. рис. 2.1а). У табл. 2 наведені значення q^{eff}/q , які використовувалися у подальших обчисленнях.

Табл. 2. Відношення ефективного заряду до реального q^{eff}/q

a/λ_D	$z_g = 1$	$z_g = 5$	$z_g = 10$
0.1	1.0037	0.9569	0.7697
0.5	1.0929	0.9597	0.7176
1.0	1.3514	1.1961	0.9264

Рис. 3.9 Відношення обчисленої сили до сили Дебая (3.25) F_z/F_D від напіввідстані між центрами провідних макрочастинок для $a = 0.1, 0.5, 1.0\lambda_D$ і $z_g = 1, 5, 10$.

Залежність відношення F_z/F_D для провідних макрочастинок для декількох значень ak_D і z_g від напіввідстані між їхніми центрами c показана на рис. 3.9 (мінімальне значення c рівне радіусу макрочастинок). Це відношення зростає і прямує до одиниці. Це означає, що на відстанях $c \gg a$ взаємодія описується силою Дебая (3.25) з відповідним ефективним зарядом. Для частинок різних розмірів $a = 0.1, 0.5, 1.0\lambda_D$ і однаковим $z_g = 5$ значення 10% відносної похибки сили Дебая досягається при $c \approx 0.25, 1, 1.7\lambda_D$ відповідно. На відстані $c \approx a$ відношення F_z/F_D не залежить суттєво від радіуса макрочастинок для $z_g = 1, 5$ і рівне приблизно 0.6. При заданому значенні ak_D залежність відносної похибки сили Дебая від безрозмірного заряду

Табл. 3. Відношення ефективного до реального заряду q_2^{eff}/q

a/λ_D	$z_g = 1$	$z_g = 5$	$z_g = 10$
0.1	1.0013	0.937	0.664
0.5	1.0616	0.883	0.561
1.0	1.2477	1.037	0.689

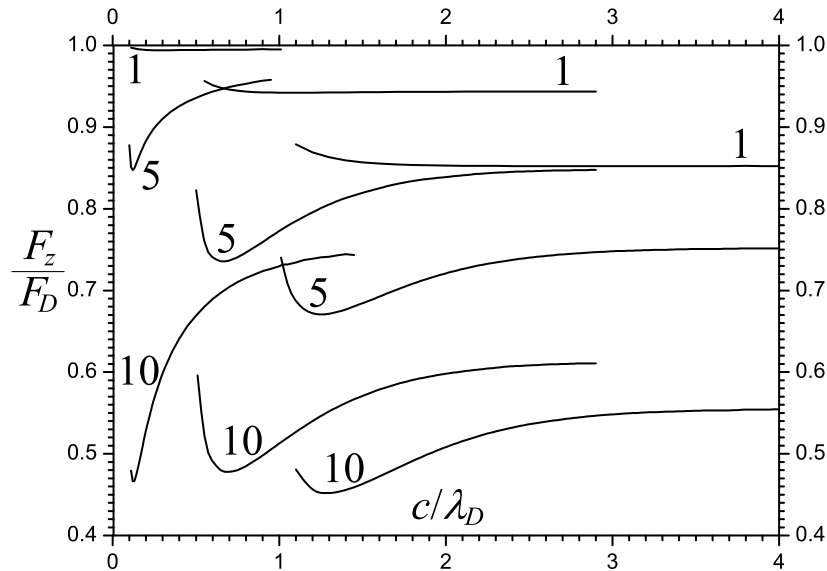


Рис. 3.10 Відношення обчисленої сили до сили Дебая (3.25) F_z/F_D від напіввідстані між центрами макрочастинок з однорідною густиною поверхневого заряду для $a = 0.1, 0.5, 1.0\lambda_D$ і $z_g = 1, 5, 10$.

макрочастинок z_g є неоднозначною. З одного боку для менших значень z_g відносна похибка спадає більш швидко зі збільшенням c , але з іншого боку, коли макрочастинки знаходяться майже у контакті ($c \approx a$) відносна похибка є меншою для більших значень z_g . Для $a = 0.5\lambda_D$ і $z_g = 10$ відносна похибка сили Дебая не перевищує 20% для всіх відстаней між макрочастинками.

Відношення F_z/F_D для макрочастинок із однорідним розподілом поверхневого заряду для декількох значень $a\lambda_D$ і z_g показане на рис. 3.10. Відношення прямує до сталого значення на певній відстані між макрочастинками, але це значення є меншим за одиницю і зменшується зі збільшенням розміру макрочастинок і її заряду. Це означає, що так само як і для провідних макрочастинок взаємодія на відстанях $c \gg a$ описується

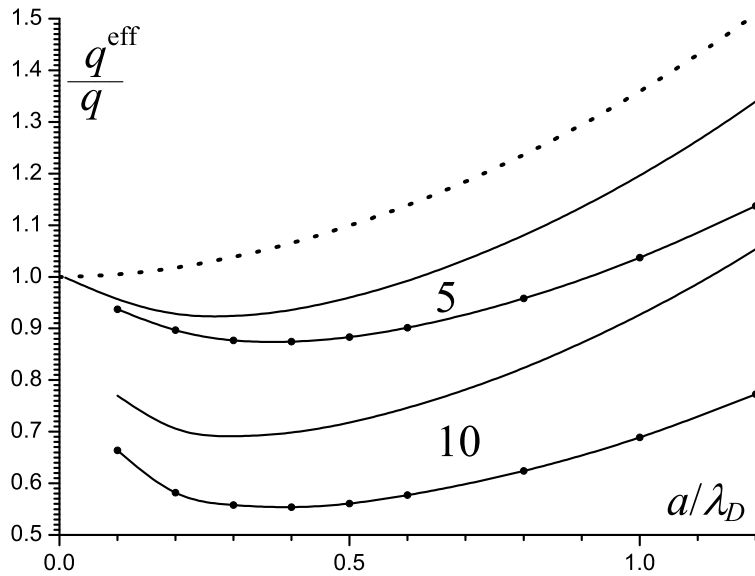


Рис. 3.11 Залежність ефективного заряду від радіуса макрочастинки для $z_g = 5$ і 10 . Точки відповідають ефективному заряду ДЛФО (2.10), суцільна лінія – ефективний заряд обчислений для однієї макрочастинки (рис. 2.3), лінії з точками – q_2^{eff} для взаємодії макрочастинок з однорідною густиною поверхневого заряду.

силою Дебая (3.25), але з іншим ефективним зарядом q_2^{eff} , який визначається значенням до якого прямує відношення F_z/F_D . Значення q_2^{eff} наведені у табл. 3 і на рис. 3.11, з яких видно, що q_2^{eff} є меншим, ніж ефективний заряд q^{eff} , який знайдений для однієї макрочастинки (див. рис. 2.3), але вони мають однакову якісну залежність від радіусів макрочастинок.

Якщо у формулі для сили Дебая (3.25) використовувати ефективний заряд q_2^{eff} , тоді відношення F_z/F_D буде прямувати до одиниці коли $s \gg a$. Для параметрів, які розглядаються, відносна похибка величини $F_D(q_2^{\text{eff}})$ не перевищує 15%. Таким чином, сила Дебая краще описує взаємодію макрочастинок з однорідним розподілом поверхневого заряду, ніж провідних макрочастинок, звичайно ж з відповідними ефективними зарядами.

Знаючи просторовий розподіл потенціалу, можна також знайти енергію електростатичного поля [181]

$$W_1 = \frac{1}{8\pi} \int (\nabla\varphi)^2 d\mathbf{r}. \quad (3.26)$$

У циліндричній системі координат елемент об'єму $d\mathbf{r} = 2\pi r_{\perp} dr_{\perp} dz$ і (3.26) має вигляд

$$W_1 = \frac{1}{2} \iint (\nabla\varphi)^2 r_{\perp} dr_{\perp} dz, \quad (3.27)$$

де інтегрування виконується по області обчислень (рис. 3.2). У (3.27) вже включено двійку, поява якої пов'язана з тим, що область інтегрування складає лише половину простору.

Енергію також можна знайти за формулою

$$W = W_2 + W_3 = \frac{1}{2} \int \sigma\varphi dS + \frac{1}{2} \int \rho\varphi d\mathbf{r}. \quad (3.28)$$

Для провідних макрочастинок, поверхневий потенціал яких є сталим, другий доданок спрощується і у випадку двох однакових частинок має вигляд

$$W_2 = 2 \frac{\varphi_s q}{2}. \quad (3.29)$$

Другий доданок у (3.28) дає енергію плазми, яка має вигляд

$$W_3 = \frac{1}{2} \int \rho\varphi d\mathbf{r} = \frac{en_0}{2} \int \left(e^{-\frac{e_i\varphi}{T_i}} - e^{-\frac{e_e\varphi}{T_e}} \right) \varphi d\mathbf{r}. \quad (3.30)$$

Обчислення показують, що виконується рівність $W_1 = W_2 + W_3$, тобто електростатична енергія системи складається з енергії частинок (додатна) і енергії взаємодії індукованого заряду в плазмі з полем частинок (від'ємна).

Залежність енергій W_1 , W_2 , W_3 від s (напіввідстані між центрами частинок) наведена на рис. 3.12. Електростатична енергія частинок W_2 є додатною і монотонно спадає з віддаленням частинок, енергія взаємодії індукованого заряду в плазмі з полем частинок W_3 є від'ємною і монотонно зростає. Повна електростатична енергія системи W_1 залежить від s немонотонно, і має мінімум [21]. Якісно така ж залежність енергії взаємодії точкових однойменних зарядів у плазмі була отримана аналітично наприклад в роботі [118] із рівняння Пуассона-Больцмана (3.11) у лінійному

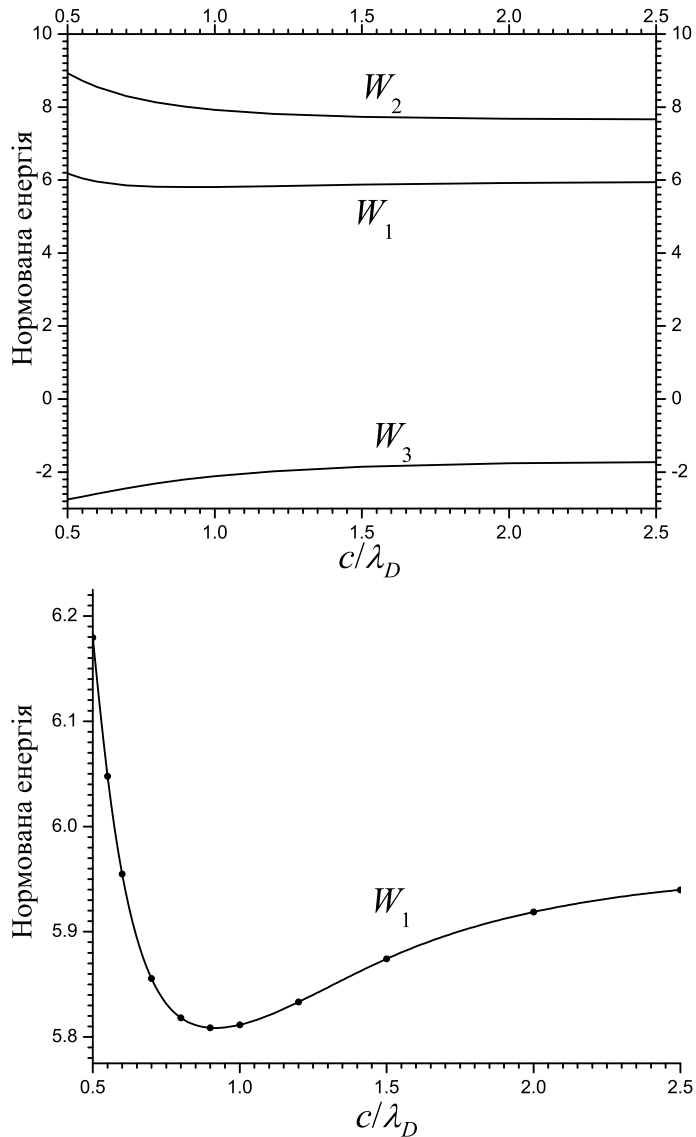


Рис. 3.12 Залежність нормованої електростатичної енергії $W e^2 k_D / T_e^2$ від напіввідстані між центрами частинок в ізотермічній плазмі ($\tau = 1$), $a = 0.5\lambda_D$, $z_g = 5$.

наближенні. Із такої залежності можна дійти висновку, що макрочастинки будуть утворювати зв'язану систему. Але наші попередні розрахунки сили взаємодії двох макрочастинко за формулою (3.23) показали, що вони завжди відштовхуються (див. наприклад рис. 3.3), тобто сила не є похідною від повної електростатичної енергії системи W_1 . Це питання було детально обговорено у роботах [119, 120] і було пояснене тим, що рівноважний стан системи у випадку, коли задана температура і об'єм, визначається мінімумом вільної енергії.

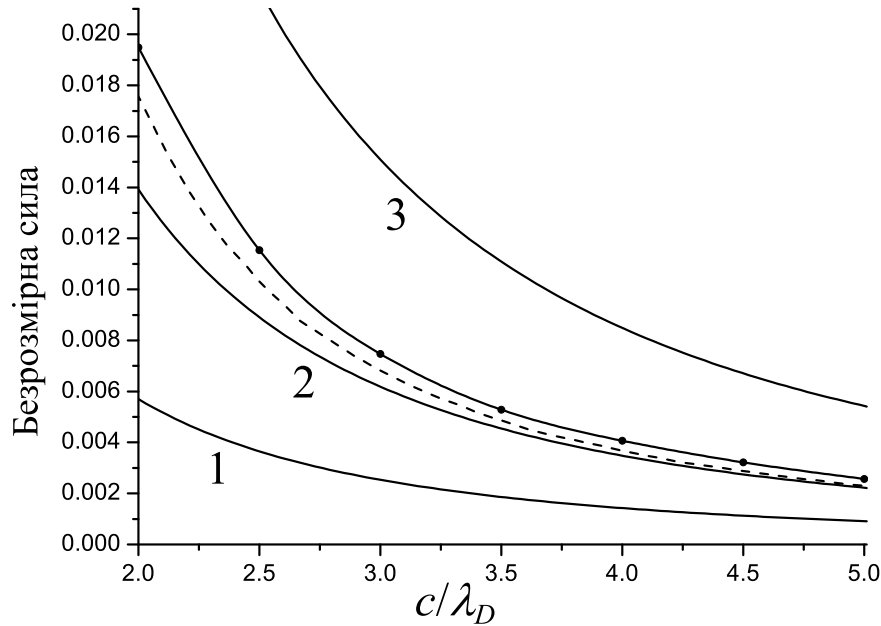


Рис. 3.13 Безрозмірна сила відштовхування Fe^2/T_e^2 між двома порошинками радіусів $a = 0.1\lambda_D$ від напіввідстані між їхніми центрами: лінія з точками обчислене, лінія 1 відповідає $\tilde{q}^2/(2c)^2$, 2 – $q\tilde{q}/(2c)^2$, 3 – $q^2/(2c)^2$, штрихова лінія отримана з формули (3.31), використовуючи обчислений потенціал однієї порошинки $\varphi(\mathbf{r})$.

3.3 Макрочастинки, які поглинають електрони та іони (порошинки)

Сила відштовхування між двома порошинками обчислювалась за формулою (3.23). Ще раз нагадаємо, що це сила, яка діє на поверхневий заряд провідної порошинки з боку електричного поля іншої порошинки та індукованих зарядів у плазмі. Залежності сили від напіввідстані між центрами порошинок радіусів $a = 0.1\lambda_D$ і $a = 0.5\lambda_D$ наведені на рис. 3.13, 3.14.

Сила взаємодії також може бути отримана у наближенні, що друга порошинка є точковою і знаходиться у полі першої порошинки, яке не змінюється через присутність другої порошинки

$$F = -q \frac{d\varphi}{dr}, \quad (3.31)$$

де $\varphi(\mathbf{r})$ – ефективний потенціал однієї порошинки, такі потенціали розглядалися у п. 2.2. Використовуючи той факт, що асимптотична поведінка

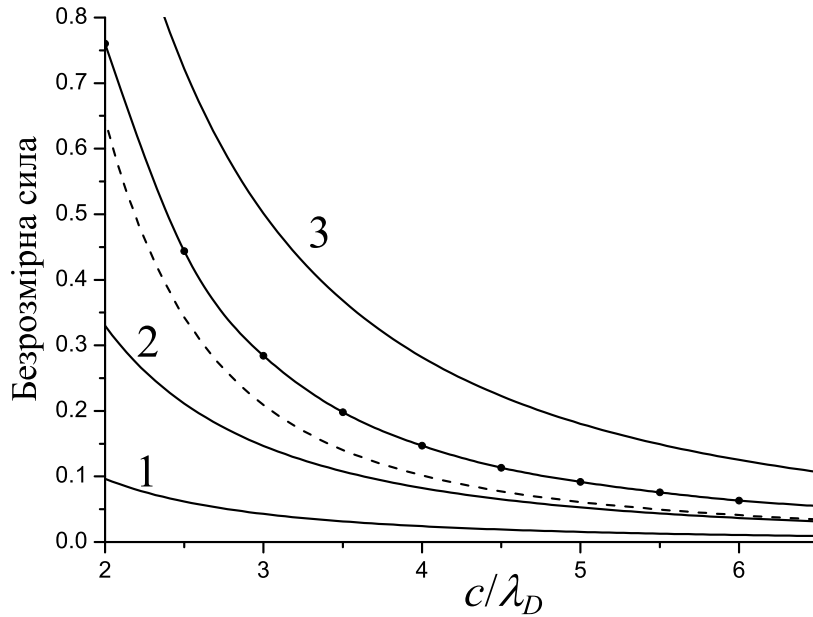


Рис. 3.14 Безрозмірна сила відштовхування Fe^2/T_e^2 між двома порошинками радіусів $a = 0.5\lambda_D$ від напіввідстані між їхніми центрами: лінія з точками обчислена, лінія 1 відповідає $\tilde{q}^2/(2c)^2$, 2 – $q\tilde{q}/(2c)^2$, 3 – $q^2/(2c)^2$, штрихова лінія отримана з формули (3.31), використовуючи обчислений потенціал однієї порошинки $\varphi(\mathbf{r})$.

потенціалу є кулонівською $\varphi = \tilde{q}/r$ (див. (2.27)), формула (3.31) дає

$$F = q \frac{\tilde{q}}{(2c)^2}, \quad (3.32)$$

або у знерозміреному вигляді

$$\frac{Fe^2}{T_e^2} = z_g \tilde{z}_g \left(\frac{a}{2c}\right)^2. \quad (3.33)$$

Значення заряду порошинки z_g і неекранованого заряду \tilde{z}_g можна взяти із обчислень для однієї порошинки, вони рівні $z_g \approx 7.371$, $\tilde{z}_g \approx 3.021$ для $a = 0.1\lambda_D$ і $z_g \approx 8.496$, $\tilde{z}_g \approx 2.485$ для $a = 0.5\lambda_D$ (див. рис. 2.13 або [8]). Сила, яку дає формула (3.33) представлена на рис. 3.13, 3.14 лінією 2, яка є найближчою до обчисленої сили у порівнянні з $q^2/(2c)^2$ (лінія 3) і $\tilde{q}^2/(2c)^2$ (лінія 1). Але видно, що значення, які дає формула (3.33), є меншими за обчислені значення сили, і різниця є більш суттєвою для порошинок розмірами $a = 0.5\lambda_D$. Можна припустити, що формула (3.33) занижує значення сили

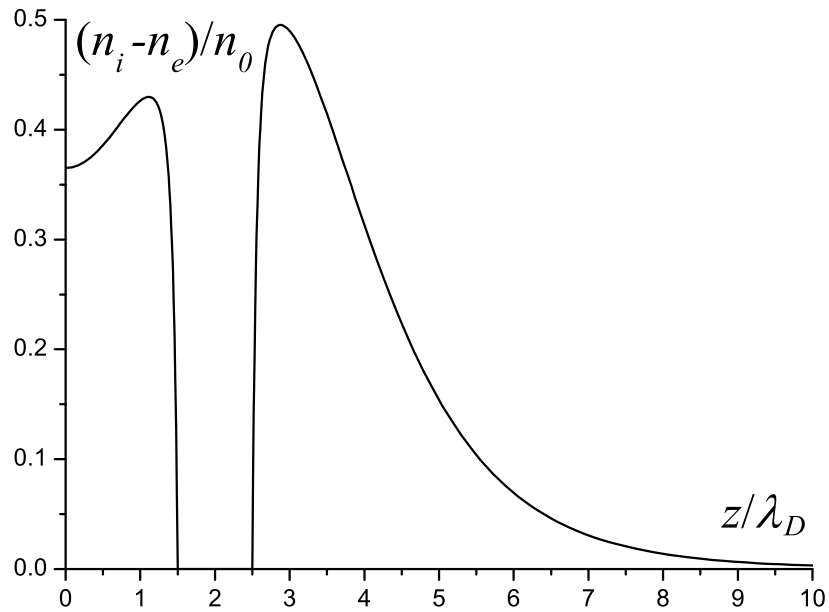


Рис. 3.15 Залежність нормованої густини заряду $(n_i - n_e)/n_0$ від z/λ_D поблизу однієї із провідних порошинок для $a = 0.5\lambda_D$ і $c = 2\lambda_D$.

через недостатню точність виразу (2.27), але штрихова лінія, яка отримана з (3.31), використовуючи ефективний потенціал φ розрахований для однієї порошинки (див. п. 2.2 або [8]), показує майже таку саму відмінність з обчисленою силою що і (3.33) при $c \gg \lambda_D$. Ця відмінність може бути пояснена двочастинковими та/або розмірними ефектами. Можна зробити висновок, що вираз (3.32) дає кількісний опис відштовхування лише між порошинками радіуси яких набагато менші за довжину Дебая ($a \ll \lambda_D$) при $c \gg \lambda_D$.

Збільшення сили відштовхування можна пояснити специфічним розподілом плазмових частинок навколо від'ємно заряджених порошинок. Як видно з рис. 3.15 густина заряду є додатною і меншою в області між порошинками, ніж зовні, що створює додаткову силу, яка відштовхує порошинки.

Зробимо також порівняння обчисленої сили із силою Кулона $F_C = q^2/(2c)^2$, як це було зроблено у п. 3.2. Відношення F_z/F_C наведені на рис. 3.16 для трьох значень радіусів порошинок $a = 0.1, 0.5, 1.0\lambda_D$. Ці відношення прямують до сталого значення ≈ 0.5 на великих відстанях між

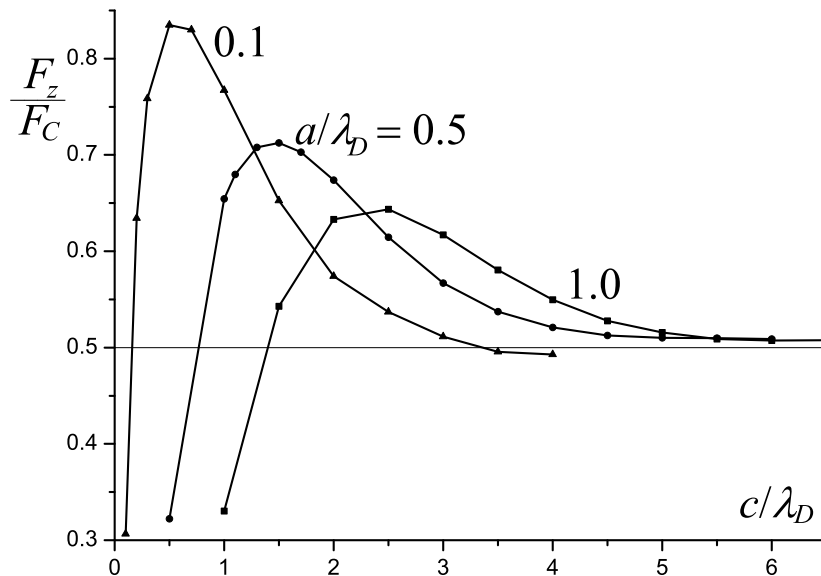


Рис. 3.16 Залежність відношення обчисленої сили до сили Кулона (3.24) F_z/F_C від напіввідстані між центрами порошинок для $a/\lambda_D = 0.1, 0.5, 1.0$.

порошинками ($c \gg \lambda_D$). Це означає, що для розглянутих параметрів сила взаємодії між порошинками вдвічі менша за силу Кулона і може бути асимптотично описана формулою

$$\frac{1}{2}F_C = \frac{1}{2} \frac{q^2}{(2c)^2}. \quad (3.34)$$

Отже, сила взаємодії не описується кількісно потенціалом однієї порошинки навіть на великих відстанях між ними (за винятком випадку $a \ll \lambda_D$). Подібно до випадку макрочастинки з однорідною густиною поверхневого заряду (див. п. 3.2), потенціал однієї частинки дає правильну залежність сили від відстані, але правильний кількісний опис потребує введення певного ефективного заряду, який у випадку двох порошинок рівний $\tilde{q}^{\text{eff}} \approx q/2$.

Відношення F_z/F_C немонотонно залежать від відстані між порошинками, спочатку воно зростає зі збільшенням c і, досягнувши максимального значення, різко зменшується. Зростання F_z/F_C пояснюється вкладом у силу від дебаєвської частини потенціалу порошинки (2.36). Зменшення відношення F_z/F_C на малих відстанях між порошинками можна пояснити поляризацією поверхневого заряду, яку ілюструє рис. 3.17. Поляризація

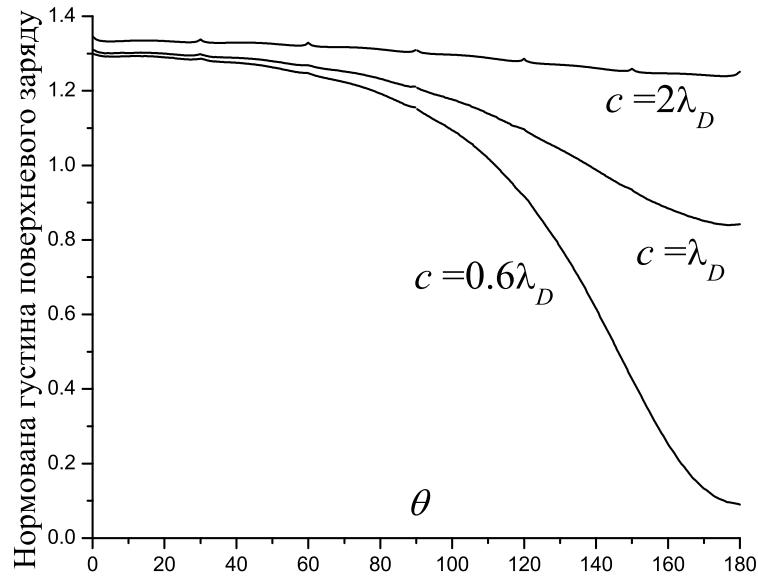


Рис. 3.17 Залежність нормованої густини поверхневого заряду на провідній порошинці $\sigma e_e / (T_e k_D)$ від кута θ (див. рис. 3.2) для $a = 0.5\lambda_D$ і $c = 0.6, 1, 1.2\lambda_D$.

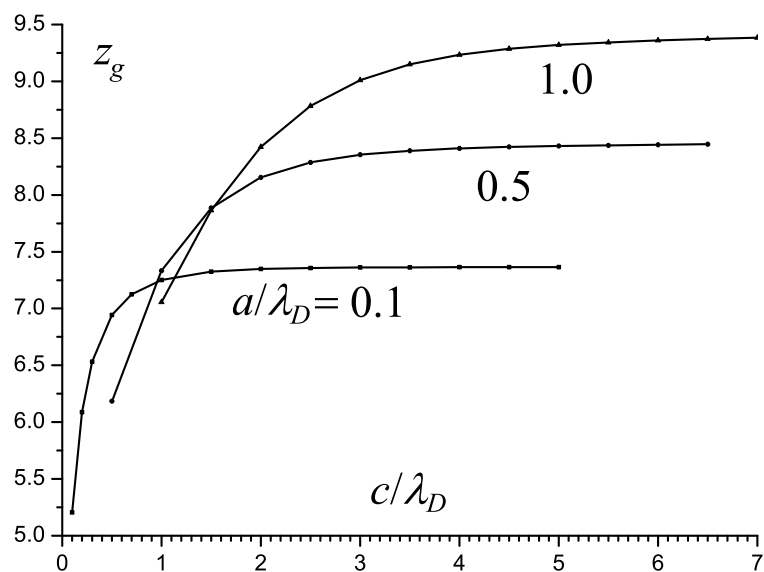


Рис. 3.18 Залежність безрозмірного заряду порошинки $z_g = qe_e / aT_e$ від напіввідстані між центрами порошинок для $a/\lambda_D = 0.1, 0.5, 1.0$.

поверхневого заряду порошинок є ще більш суттєвою, ніж провідних макрочастинок, які не поглинають електроні та іони (див. рис. 3.6).

На малих відстанях між порошинками їх взаємний вплив є найбільшим. Одним із проявів цього впливу є суттєве зменшення стаціонарного

заряду порошинок зі зменшенням s , яке ілюструє рис. 3.18. Зменшення зарядів пов'язане зі зменшенням струмів заряджання і також призводить до зменшення сили відштовхування у порівнянні із силою Кулона.

3.4 Висновки

Досліджено вплив двочастинкових та розмірних ефектів на силу взаємодії між двома зарядженими сферичними провідними макрочастинками у ізотермічному плазмподібному середовищі. Обчислення були виконані для макрочастинок, які не обмінюються зарядами з оточенням (колоїдні частинки у заряджених колоїдних суспензіях), а також для макрочастинок, які заряджаються завдяки поглинанню електронів та іонів із оточуючої плазми (порошинки у запорошеній плазмі).

Сила взаємодії знаходилась із розрахованого розподілу потенціалу в плазмі із двома макрочастинками і порівнювалась із силою знайденою на основі ефективного потенціалу однієї частинки, якщо вважати іншу частинку точковою. Порівняння показує, що на відстанях у декілька радіусів частинки, силу взаємодії між двома провідним частинками, які не обмінюються зарядом із середовищем, можна кількісно описати силою, яка отримана з потенціалу Дебая з ефективним зарядом. Але у випадку частинок з однорідним розподілом густини поверхневого заряду ефективний заряд є відмінним (меншим) за ефективний заряд однієї частинки. На менших відстанях відхилення між обчисленою силою і силою Дебая збільшується і для розглянутих параметрів досягає значення $\approx 40\%$ коли частинки перебувають у контакті.

Двочастинкові ефекти особливо важливі під час опису взаємодії порошинок. Для порошинок із розмірами $a \leq \lambda_D$ на відстанях $s \gg \lambda_D$ сила взаємодії дорівнює приблизно половині сили Кулона, з якою взаємодіють відповідні точкові заряди у вакуумі. Це означає, що ефективний заряд дорівнює приблизно половині повного заряду порошинки незалежно від її

радіуса a/λ_D . На відстанях менших за декілька a , спостерігаються поляризаційні ефекти, а також зменшення повного заряду порошинок. Отже, для того щоб розрахувати силу взаємодії між двома макрочастинками на малих і середніх відстанях, необхідно розв'язувати самоузгоджену систему рівнянь для електростатичного потенціалу, розподілу плазмових частинок та заряду порошинок.

РОЗДІЛ 4

СИЛА ТЕРТЯ, ЯКА ДІЄ НА РУХОМУ ПОРОШИНКУ

Стаціонарний потік плазми або рух порошинки з постійною швидкістю порушує сферичну симетрію електричного поля і розподілу плазмових частинок за швидкостями навколо порошинки, внаслідок цього з'являється сила тертя (drag force), яка діє на порошинку. Ця сила пов'язана із передачею імпульсу від плазмових частинок до порошинки як внаслідок контактних зіткнень, так і розсіяння. Взаємодія порошинки з іонами дає значно більший вклад у силу тертя, ніж взаємодія з електронами, тому в літературі, зазвичай, йде мова про іонну силу тертя (ion drag force) [53, 185]. Вклад електронів у силу тертя обговорюється в роботі [186].

Вивчення сили тертя важливе для розуміння багатьох явищ у за-порошеній плазмі. Зокрема, ця сила відповідає за формування в умовах мікрогравітації області вільної від порошинок [187, 188], в тому числі навколо металеві сферичної частинки [189, 190], а також за обертання плазмових кристалів у магнітному полі [191, 192].

Сила тертя у плазмі без зіткнень вивчалась як аналітично, див. наприклад [185, 193–197], так і чисельно [198, 199] а також експериментально в роботах [200, 201]. У роботах [193, 194] теоретично було встановлено, що ефективна температура, яка визначає розподіл порошинок за швидкостями, може бути аномально високою внаслідок прискорення порошинок під дією сили, яка виникає через зіткнення з іонами, тобто сила тертя з боку іонів є від'ємною. Це може слугувати поясненням аномального нагрівання порошинок, яке спостерігається в експериментах [202, 203].

У іншому граничному випадку, а саме плазми із частими зіткненнями, сила тертя вивчалась аналітично у роботах [15, 17, 38, 71–74]. Ці дослідження передбачають зменшення сили тертя і навіть можливість існування від'ємного тертя, що пов'язано зі специфічним розподілом електричного поля навколо порошинки. Так само як і числові розв'язки задачі для плазми

із зіткненнями [149, 204–206].

Згадані результати для сили тертя, яка діє на порошок в плазмі із частими зіткненнями були отримані аналітично у лінійному наближенні в рамках моделі точкових стоків, а в числових розрахунках [149, 206] не розглядались частоти зіткнень, які відповідають континуальному (дрейфово-дифузійному) наближенню. Тому, метою даного розділу є розв'язати чисельно задачу про силу тертя, яка діє на заряджену провідну сферичну порошок скінченних розмірів з боку електричного поля, яке створюється потоком плазми [6, 23]. Отримати більш зручні для розрахунків наближені аналітичні вирази для сили тертя [15, 17, 34, 37] і дослідити межі їх застосовності, порівнявши з результатами обчислень. А також розвинути кінетичний опис ефективного потенціалу порошки у плазмі за присутності зовнішнього постійного електричного поля і на його основі розрахувати силу тертя, яка діє на порошок [14, 32].

4.1 Модель точкових стоків у дрейфово-дифузійному наближенні

В моделі точкових стоків у дрейфово-дифузійному наближенні сила, яка діє на рухому порошок дається формулою (1.35). Вводячи безрозмірну змінну інтегрування $x = k\lambda_D$ і враховуючи співвідношення між коефіцієнтами дифузії $D_e/D_i = d\sqrt{\tau}$ (2.26), отримуємо

$$F = \frac{iq^2}{\pi\lambda_D^2} \int_0^\infty dx \int_{-1}^1 d\mu \frac{i\mu^2 x \tilde{v} \beta - \mu x^2 (1 - \alpha) d\sqrt{\tau}}{\mu^2 x \tilde{v}^2 + i\mu \tilde{v} \beta + i\mu x^2 \tilde{v} (1 + d\sqrt{\tau}) - x(x^2 + 1) d\sqrt{\tau}}, \quad (4.1)$$

де

$$\beta = \frac{\tau + d\sqrt{\tau}}{\tau + 1}, \quad \tilde{v} = \frac{v\lambda_D}{D_i}, \quad \tau = \frac{T_e}{T_i}.$$

Параметр α буде обговорено нижче.

Дискримінант квадратного відносно μ рівняння у знаменнику підінтегрального виразу (4.1) можна представити у вигляді $-\tilde{v}^2 \Lambda^2$, тому він

від'ємний за будь-яких значень \tilde{v} та x . Величина Λ^2 задається виразом

$$\Lambda^2 = \beta^2 + x^4(d\sqrt{\tau} - 1)^2 + 2x^2(d\sqrt{\tau} - 1)(d\sqrt{\tau} - \tau)/(\tau + 1). \quad (4.2)$$

Підінтегральний вираз не має особливих точок на дійсній осі і з формули (4.1) отримуємо [15]

$$F = -\frac{2q^2}{\pi\lambda_D^2} \int_0^\infty dx \left[\frac{\beta}{\tilde{v}} + \frac{x}{\mu_1\Lambda} \left(\frac{x}{\tilde{v}} d\sqrt{\tau}(1 - \alpha) - \frac{\beta}{\mu_1} \right) \operatorname{arctg} \mu_1 - \right. \\ \left. - \frac{x}{\mu_2\Lambda} \left(\frac{x}{\tilde{v}} d\sqrt{\tau}(1 - \alpha) - \frac{\beta}{\mu_2} \right) \operatorname{arctg} \mu_2 \right], \quad (4.3)$$

де

$$\mu_{1,2} = \frac{2\tilde{v}x}{\beta + x^2(1 + d\sqrt{\tau}) \pm \Lambda}.$$

Знак « $-$ » в (4.5) означає, що сила тертя є від'ємною.

На основі формули

$$U(\mathbf{v}) = q \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{v}t} \varphi(\mathbf{r}, t)$$

можна знайти енергію взаємодії порошинки з індукованим нею зарядом

$$U = \frac{2q^2}{\pi\lambda_D} \int_0^\infty \frac{dx}{\Lambda} \left[\left(\frac{x}{\tilde{v}} d\sqrt{\tau}(1 - \alpha) - \frac{\beta}{\mu_1} \right) \operatorname{arctg} \mu_1 - \right. \\ \left. - \left(\frac{x}{\tilde{v}} d\sqrt{\tau}(1 - \alpha) - \frac{\beta}{\mu_2} \right) \operatorname{arctg} \mu_2 \right]. \quad (4.4)$$

Оскільки, згідно з (2.26), d – це відношення коефіцієнтів дифузії електронів та іонів у ізотермічній плазмі, то розглядаючи d^{-1} як малий

параметр, вираз (4.3) може бути розкладений у ряд

$$F = -\frac{2q^2 k_D^2 (\tau + 1)}{\pi \tilde{v}} \int_0^\infty dx x^2 \frac{\alpha A - x^2 \tau}{A^2} \times \\ \times \left(\frac{x(A + \tau)}{A \tilde{v}} \arctan \frac{A \tilde{v}}{x(A + \tau)} - 1 \right) + O(d^{-1}), \quad (4.5)$$

де

$$A = x^2 \tau + x^2 + 1.$$

Відомо [8, 49, 67, 109], що потенціал однієї порошинки у плазмі з частими зіткненнями має кулонівську асимптоту (див. п. 2.2), тобто частина \tilde{q} від повного заряду q є неекранованою. Параметр $\alpha = \tilde{q}/q$ у попередніх формулах (не потрібно плутати з індексом, який означає сорт плазмових частинок) – це відношення неекранованого заряду до повного. В границі малих порошинок $a \ll \lambda_D$ його можна знайти із рівняння (2.33) [137].

Неекранований заряд задається рівнянням (2.34) [8]

$$\tilde{z}_g = \frac{z_g \sqrt{\tau}}{(1 - e^{-z_g \tau}) d} \frac{d \sqrt{\tau} - 1}{1 + \tau} \approx \frac{z_g \tau}{1 + \tau}, \quad (4.6)$$

де $z_g = qe_e/aT_e$.

Рівняння (2.33) дає наступні значення стаціонарного заряду $z_g = 6.91, 6.56$ і 5.76 , а формула (4.6) – $\alpha = 0.5, 0.67$ і 0.91 для $\tau = 1, 2, 10$, відповідно. Як було показано у п. 2.2, ці значення узгоджуються з результатами числових розрахунків для $a \ll \lambda_D$, але для частинок скінченних розмірів параметр α суттєво спадає зі збільшенням розміру порошинки (див. рис. 2.13).

Для малих швидкостей потоку (порошинки) $\tilde{v} \ll 1$ формула (4.5) дає

$$F = -\frac{2\alpha - \tau(1 - \alpha)}{6(\tau + 1)} q^2 k_D^2 \tilde{v}. \quad (4.7)$$

З (4.6) випливає, що $\alpha \approx \tau/(\tau + 1)$ і вираз (4.7) спрощується до

$$F = -\frac{\tau}{6(\tau + 1)^2} q^2 k_D^2 \tilde{v}, \quad (4.8)$$

який з точністю до позначень збігається з формулою (11) в роботі [72].

У випадку ізотермічної плазми ($\tau = 1$) формула (4.8) має вигляд

$$F = -\frac{1}{24}q^2k_D^2\tilde{v}. \quad (4.9)$$

Якщо для формули (1.35) розглянути випадок $\tilde{v} \ll 1$, то отримаємо

$$F = -\frac{q^2v\lambda_D}{6D_i} \left[2\alpha \left(\frac{D_i}{D_e}k_{Di}^2 + k_{De}^2 \right) - (1 - \alpha) \left(\frac{D_i}{D_e}k_{De}^2 + k_{Di}^2 \right) \right]. \quad (4.10)$$

Цей вираз відрізняється від (4.7), який теж отриманий для $\tilde{v} \ll 1$, тим, що в ньому не робилося розкладу за d^{-1} . Очевидно, (4.10) переходить у (4.7), якщо в ньому покласти $D_i/D_e = 0$.

Взявши $\alpha = 0$, з (4.10) можна отримати силу, яка діє на заряджену частинку, яка не поглинає електрони та іони

$$F = -\frac{q^2v\lambda_D}{6} \left(\frac{k_{De}^2}{D_e} + \frac{k_{Di}^2}{D_i} \right). \quad (4.11)$$

У випадку ізотермічної плазми (4.11) спрощуються до

$$F = -\frac{q^2v\lambda_D}{12} \left(\frac{1}{D_e} + \frac{1}{D_i} \right). \quad (4.12)$$

Останній вираз, з точністю до позначень, збігається з результатом, який отримали ще Дебай і Хюкель у роботі [207], в якій вони розглядали екранування іона, що рухається в електроліті.

4.2 Кінетичне описання плазми у зовнішньому електричному полі

Рух порошинки і поява стаціонарних потоків плазми може спричинятися постійним зовнішнім електричним полем, тому теорію ефективного потенціалу порошинки необхідно узагальнити на цей випадок. Вираз для потенціалу дає змогу знайти силу тертя, яка діє на порошинку з боку потоку іонів.

Кінетична теорія ефективного потенціалу порошинки, в рамках моделі точкових стоків, із урахуванням заряджання порошинки плазмовими потоками була вперше запропонована в роботах [19, 36, 70] (див. п. 2.3).

Кінетичний опис екранування порошинки у слабкоіонізованій плазмі, яка знаходиться у зовнішньому електричному полі, представлений у роботах [208, 209]. Але в цих роботах не враховувалося поглинання електронів та іонів порошиною, яке може суттєво впливати на асимптотичну поведінку потенціалу (як це спостерігається у випадку нерухомої порошинки у плазмі без зовнішнього поля [19], п. 2.3) або призводити до якісної зміни сили, яка діє на порошинку з боку індукованих зарядів у плазмі (рухома порошинка у плазмі з частими зіткненнями [15, 17, 71–74], п. 4.1). Очевидно, що опис цих ефектів у кінетичному підході дасть більше деталей про ефективний потенціал порошинки у порівнянні із континуальним наближенням і, відповідно, дасть змогу більш точно розрахувати силу тертя, що діє на порошинку, яка необхідна, зокрема, при вивченні динаміки порошинок у приелектродному шарі.

Отже, у цьому підрозділі представлені результати робіт [13, 14, 31–33], у яких в кінетичному підході знайдено ефективний потенціал порошинки, яка поглинає електрони та іони, і силу тертя, яка на неї діє, у слабкоіонізованій плазмі за присутності зовнішнього постійного електричного поля, також знайдені середні і середньоквадратичні зміщення плазмових частинок.

4.2.1 Ефективного потенціалу порошинки у зовнішньому електричному полі

Запишемо кінетичне рівняння (1.84) для плазми у зовнішньому електричному полі:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}^{\text{ext}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} f_\alpha(X, t) = I_\alpha, \quad (4.13)$$

взявши за величину I_α простий інтеграл зіткнень БГК (1.110):

$$I_\alpha = -\nu_\alpha \left\{ f_\alpha(X, t) - \Phi_\alpha(\mathbf{v}) \int d\mathbf{v} f_\alpha(X, t) \right\}. \quad (4.14)$$

Тут ν_α – ефективна частота зіткнень, $\Phi_\alpha(\mathbf{v})$ – функція розподілу, до якої релаксує $f_\alpha(X, t)$, тобто розподіл Максвелла (1.9).

Рівняння для незбуреної функції розподілу має вигляд (1.87)

$$\frac{e_\alpha \mathbf{E}^{\text{ext}}}{m_\alpha} \frac{\partial f_{0\alpha}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = -\nu_\alpha \left\{ f_{0\alpha}(\mathbf{v}) - \Phi_\alpha(\mathbf{v}) \int d\mathbf{v}' f_{0\alpha}(\mathbf{v}') \right\}, \quad (4.15)$$

а ймовірність переходу $W_\alpha(X, X'; \tau)$ задовольняє рівняння (1.111)

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha \mathbf{E}^{\text{ext}}}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} W_\alpha(X, X'; \tau) = \\ = -\nu_\alpha \left\{ W_\alpha(X, X'; \tau) - \Phi_\alpha(\mathbf{v}) \int d\mathbf{v} W_\alpha(X, X'; \tau) \right\}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Направимо вісь z вздовж зовнішнього електричного поля $\mathbf{E}^{\text{ext}} = (0, 0, E^{\text{ext}})$, тоді розв'язок рівняння (4.15) для незбуреної функції розподілу має вигляд

$$f_{0\alpha}(\mathbf{v}) = \int_{-\infty}^{v_z} dv'_z \beta_\alpha \Phi_\alpha(\mathbf{v}_\perp, v'_z) \exp[-\beta_\alpha(v_z - v'_z)], \quad \beta_\alpha > 0 \quad (4.17)$$

або

$$f_{0\alpha}(\mathbf{v}) = - \int_{v_z}^{\infty} dv'_z \beta_\alpha \Phi_\alpha(\mathbf{v}_\perp, v'_z) \exp[-\beta_\alpha(v_z - v'_z)], \quad \beta_\alpha < 0, \quad (4.18)$$

де $\beta_\alpha = 1/v_\alpha$, $v_\alpha = e_\alpha E^{\text{ext}} / (m_\alpha \nu_\alpha)$ – дрейфова швидкість.

У термінах функції похибок

$$\begin{aligned} f_{0\alpha}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} |\beta_\alpha| \Phi_\alpha(\mathbf{v}_\perp) \exp(-v_z \beta_\alpha + v_{T\alpha}^2 \beta_\alpha^2 / 2) \times \\ \times \left\{ 1 + \text{sign}(\beta_\alpha) \text{erf} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{v_z}{v_{T\alpha}} - v_{T\alpha} \beta_\alpha \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

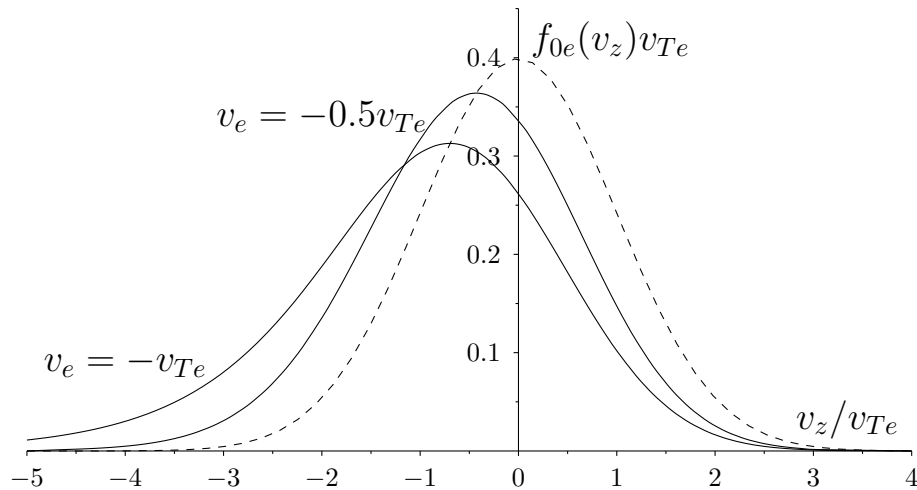


Рис. 4.1 Незбурена функція розподілу електронів $f_{0e}(v_z)v_{Te}$ (4.19) і максвеллівський розподіл (штрихова лінія).

Незбурена функція розподілу є асиметричною, її максимум зсунутий від початку координат $v_z = 0$ (рис. 4.1). Лише у випадку малих дрейфових швидкостей $v_\alpha/v_{T\alpha} \ll 1$

$$f_{0\alpha}(\mathbf{v}) \simeq \Phi_\alpha(\mathbf{v}) \left(1 + \frac{v_z v_\alpha}{v_{T\alpha}^2} \right) \simeq \Phi_\alpha(\mathbf{v}_\perp, v_z + v_\alpha) \quad (4.20)$$

можна розглядати як максвеллівську функцію з дрейфом частинок. Відмінність розподілу від максвеллівського є суттєвою при розрахунках сили, яка діє на порошок з боку іонного потоку [210].

Ймовірність переходу в $\mathbf{k}\omega$ -представленні при $v_\alpha > 0$ має вигляд

$$W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \frac{\beta_\alpha}{\nu_\alpha} \left\{ \delta(\mathbf{v}_\perp - \mathbf{v}'_\perp) \theta(v_z - v'_z) \exp[-i\psi_\alpha(\mathbf{v}_\perp, v'_z)] + \right. \\ \left. + \nu_\alpha W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}') \int_{-\infty}^{v_z} dv''_z \Phi_\alpha(\mathbf{v}_\perp, v''_z) \exp[-i\psi_\alpha(\mathbf{v}_\perp, v''_z)] \right\} \exp[i\psi_\alpha(v_z)], \quad (4.21)$$

де

$$\psi_\alpha(\mathbf{v}_\perp, v_z) = \frac{\beta_\alpha}{\nu_\alpha} \left\{ (\omega - \mathbf{k}_\perp \mathbf{v}_\perp + i\nu_\alpha) v_z - \frac{k_z v_z^2}{2} \right\}, \quad (4.22)$$

$$W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}') = \frac{\beta_\alpha}{\nu_\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \exp[i\psi_\alpha(\mathbf{v}'_\perp, v_z) - i\psi_\alpha(\mathbf{v}'_\perp, v'_z)] \theta(v_z - v'_z) \times \\ \times \left\{ 1 - \beta_\alpha \int_{-\infty}^{v_z} d\mathbf{v} \int_{-\infty}^{v_z} dv''_z \Phi_\alpha(\mathbf{v}_\perp, v''_z) \exp[i\psi_\alpha(\mathbf{v}_\perp, v_z) - i\psi_\alpha(\mathbf{v}_\perp, v''_z)] \right\}^{-1}, \quad (4.23)$$

$\theta(x)$ – функція Хевісайда.

При $v_\alpha < 0$

$$W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = -\frac{\beta_\alpha}{\nu_\alpha} \left\{ \delta(\mathbf{v}_\perp - \mathbf{v}'_\perp) \theta(v'_z - v_z) \exp[-i\psi_\alpha(\mathbf{v}_\perp, v'_z)] + \right. \\ \left. + \nu_\alpha W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}') \int_{v_z}^{\infty} dv''_z \Phi_\alpha(\mathbf{v}_\perp, v''_z) \exp[-i\psi_\alpha(\mathbf{v}_\perp, v''_z)] \right\} \exp[i\psi_\alpha(v_z)], \quad (4.24)$$

де

$$W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}') = -\frac{\beta_\alpha}{\nu_\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \exp[i\psi_\alpha(\mathbf{v}'_\perp, v_z) - i\psi_\alpha(\mathbf{v}'_\perp, v'_z)] \theta(v'_z - v_z) \times \\ \times \left\{ 1 + \beta_\alpha \int_{v_z}^{\infty} d\mathbf{v} \int_{v_z}^{\infty} dv''_z \Phi_\alpha(\mathbf{v}_\perp, v''_z) \exp[i\psi_\alpha(\mathbf{v}_\perp, v_z) - i\psi_\alpha(\mathbf{v}_\perp, v''_z)] \right\}^{-1}. \quad (4.25)$$

Підстановка (4.17)–(4.18) і (4.21)–(4.25) у формулу для функції діелектричного відгуку (1.97) дає

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{k_{D\alpha}^2}{\varkappa_\alpha^2(\mathbf{k}) G_\alpha(\mathbf{k}, \omega)} \int_0^{\infty} dy e^{-y} W \left(\frac{\omega + i\nu_\alpha - k_z v_\alpha y}{\varkappa_\alpha(\mathbf{k}) v_{T\alpha}} \right), \quad (4.26)$$

де

$$G_\alpha(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{\omega + i\nu_\alpha} \left[\omega + i\nu_\alpha W \left(\frac{\omega + i\nu_\alpha}{\varkappa_\alpha(\mathbf{k}) v_{T\alpha}} \right) \right], \quad (4.27)$$

$$\varkappa_\alpha^2(\mathbf{k}) = k^2 + \frac{ik_z v_\alpha \nu_\alpha}{v_{T\alpha}^2},$$

$W(z)$ – плазмова дисперсійна функція (1.124).

З точністю до позначень, рівняння (4.26) і (4.27) відтворюють результати отримані в [208, 209]. Вирази для функції діелектричного відгуку у плазмі із зіткненнями у зовнішньому електричному полі були також отримані у роботах [211, 212], але у наближенні, що незбурена функція розподілу $f_{0\alpha}(\mathbf{v})$ є розподілом Максвелла з дрейфом (4.20), яке є справедливим лише для малих швидкостей дрейфу.

Для $|k_z v_\alpha| \ll \nu_\alpha$ рівняння (4.26) спрощується до

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) &= 1 + \sum_{\alpha} \frac{k_{D\alpha}^2}{\varkappa_{\alpha}^2 G_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega)} W\left(\frac{\omega + i\nu_{\alpha}}{\varkappa_{\alpha}(\mathbf{k})v_{T\alpha}}\right) = \\ &= 1 + \sum_{\alpha} \frac{k_{D\alpha}^2}{\varkappa_{\alpha}^2} \frac{(\omega + i\nu_{\alpha})W\left(\frac{\omega + i\nu_{\alpha}}{\varkappa_{\alpha}v_{T\alpha}}\right)}{\omega + i\nu_{\alpha}W\left(\frac{\omega + i\nu_{\alpha}}{\varkappa_{\alpha}v_{T\alpha}}\right)}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

а у випадку відсутності поля ($v_\alpha = 0$) переходить у (1.139).

У дрейфово-дифузійному наближенні ($\omega \ll \nu_\alpha$) маємо

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) \simeq 1 + i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\nu_{\alpha}(\omega - k_z v_{\alpha} + ik^2 D_{\alpha})}, \quad (4.29)$$

де $\omega_{p\alpha}^2 = 4\pi e_{\alpha}^2 n_{\alpha}/m_{\alpha}$.

У стаціонарному випадку ($\omega = 0$)

$$\varepsilon(\mathbf{k}, 0) = 1 - i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\nu_{\alpha}(k_z v_{\alpha} - ik^2 D_{\alpha})}. \quad (4.30)$$

Для подальших розрахунків нам необхідні явні вирази для величин, які описують вклад процесів поглинання у ефективний потенціал, а саме другі доданки у рівняннях (2.52) та (2.54). Позначимо ці величини як $\varphi_{\mathbf{k}\omega}^{(s)}$ та $\varphi_{\mathbf{k}}^{(s)}$, тобто,

$$\varphi_{\mathbf{k}\omega}^{(s)} = \frac{4\pi Q_{\omega}^{(s)}}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, \omega)}, \quad (4.31)$$

де

$$Q_{\omega}^{(s)} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{0\alpha} \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') S_{\alpha\omega}^{(0)}(\mathbf{v}'). \quad (4.32)$$

$$S_{\alpha\omega}^{(0)}(\mathbf{v}) = v \sigma_{\alpha}(q, v) f_{0\alpha}(\mathbf{v}). \quad (4.33)$$

З огляду на явні вирази для $W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ (4.21) (4.24) отримуємо

$$Q_{\omega}^{(s)} = -i \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha} n_{0\alpha}}{G_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega)} \int d\mathbf{v} \frac{S_{\alpha\omega}^{(0)}(\mathbf{v})}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu_{\alpha}} \left[1 - W \left(\frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu_{\alpha}}{\sqrt{ik_z v_{\alpha} \nu_{\alpha}}} \right) \right],$$

$$\text{Re} \left(\sqrt{ik_z v_{\alpha} \nu_{\alpha}} \right) > 0. \quad (4.34)$$

Слід зазначити, що у випадку плазми із зіткненнями, задача про відповідне наближення перерізу заряджання $\sigma_{\alpha}(q, v)$ досі не розв'язана (строго кажучи, вводячи поняття перерізу, ми припускаємо, що потік частинок рухаючись з нескінченності до центру розсіяння, збурюється лише цим центром). Тому, опис заряджання порошинки зазвичай виконується у термінах струмів заряджання [138, 213]. Якщо відома залежність струмів заряджання від частоти зіткнень та інших параметрів плазми, то можливо запропонувати прийнятне наближення для інтегральних доданків, які містять перерізи заряджання. Зокрема, така ідея була використана у [143] для того, щоб розрахувати ефективний потенціал порошинки у випадку слабкозіткненого режиму заряджання порошинки. А саме, у [143] було зроблене припущення, що

$$\int d\mathbf{v} v \sigma_i(q, v) F(\mathbf{v}) = \sigma_{0i} \int d\mathbf{v} v F(\mathbf{v}), \quad (4.35)$$

де $F(\mathbf{v})$ – довільна, але регулярна функція, σ_{0i} – ефективний переріз заряджання, який знаходиться із співвідношення для струму заряджання

$$I_i = n_i \int d\mathbf{v} v \sigma_i(v) f_{0i}(v) = n_i \sigma_{0i} \int d\mathbf{v} v f_{0i}(v). \quad (4.36)$$

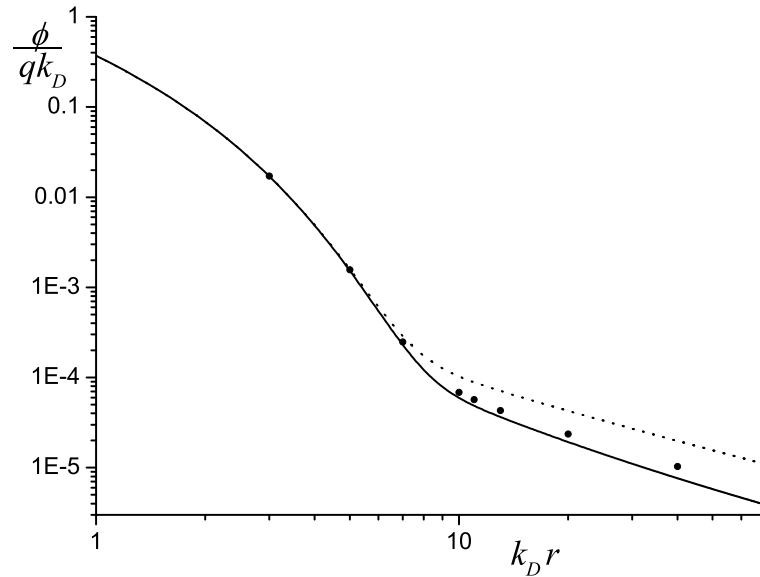


Рис. 4.2 Нормований ефективний потенціал порошинки для $k_D l_i = 10$. Формула (4.38) – суцільна лінія, вираз для потенціалу отриманий в [143] – точкова лінія, обчислення за виразом (2.93) – точки.

Подібне наближення можна використати і у нашому випадку, а саме

$$\int d\mathbf{v} v \sigma_\alpha(q, v) F(\mathbf{v}) = \frac{I_\alpha}{n_\alpha} \int d\mathbf{v} F(\mathbf{v}), \quad (4.37)$$

де I_α – струм заряджання, який створюють частинки сорту α .

Використовуючи наближення (4.37) у виразі для ефективного потенціалу порошинки у слабкоіонізованій плазмі (2.93), отримуємо [31]

$$\varphi(r) = \frac{qe^{-k_D r}}{r} - \frac{e_i I_i}{v_{Ti} \sqrt{2\pi} k_D r} \left(e^{-k_D r} \text{Ei}(k_D r) - e^{k_D r} \text{Ei}(-k_D r) + \frac{\sqrt{\pi}(\pi - 2)}{k_D l_i \sqrt{2}} (1 - e^{-k_D r}) \right). \quad (4.38)$$

Тут $\text{Ei}(x)$ – інтегральна показникова функція (2.66). Рис. 4.2 показує, що наше наближення добре узгоджується з результатами обчислень за формулою (2.93) [16] і буде використовуватися у подальших розрахунках.

Таким чином, ми приходимо до наступного співвідношення для ефективного заряду, який пов'язаний із зарядженням порошинки,

$$Q_{\omega}^{(s)} = i \sum_{\alpha} e_{\alpha} I_{\alpha\omega} \int_0^{\infty} dy \frac{1}{G_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega)} \frac{\exp(-y)}{\omega - k_z v_{\alpha} y + i\nu_{\alpha}} \times \left[1 - W \left(\frac{\omega - k_z v_{\alpha} y + i\nu_{\alpha}}{\kappa_{\alpha}(k) v_{T\alpha}} \right) \right] \quad (4.39)$$

Як слідує з рівняння (4.34) та (4.39) для $\nu_{\alpha} \gg kv_{T\alpha}, k_z v_{\alpha}$ ми маємо

$$Q_{\omega}^{(s)} = -i \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{G_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega)} \frac{1}{(\omega + i\nu_{\alpha})} \left[1 - W \left(\frac{\omega + i\nu_{\alpha}}{\sqrt{ik_z v_{\alpha} \nu_{\alpha}}} \right) \right] I_{\alpha\omega}, \quad (4.40)$$

$$I_{\alpha\omega} = n_{\alpha} \int d\mathbf{v} S_{\alpha\omega}^{(0)}(\mathbf{v}).$$

У стаціонарному випадку ($\omega = 0$) рівняння (4.40) спрощується

$$Q^{(s)} = - \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{\nu_{\alpha} G_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega)} \left[1 - W \left(\sqrt{\frac{i\nu_{\alpha}}{k_z v_{\alpha}}} \right) \right] I_{\alpha}, \quad (4.41)$$

$$G_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega) \simeq W \left(\frac{i\nu_{\alpha}}{\kappa_{\alpha}(\mathbf{k}) v_{T\alpha}} \right).$$

Якщо умова $|\kappa_{\alpha}(\mathbf{k}) v_{T\alpha}| \ll \nu_{\alpha}$ задовольняється, тоді

$$G_{\alpha}(\mathbf{k}, 0) \simeq \frac{k^2 v_{T\alpha}^2 + ik_z v_{\alpha} \nu_{\alpha}}{\nu_{\alpha}^2}. \quad (4.42)$$

Очевидно, що для $k_z v_{\alpha} \ll \nu_{\alpha}$, ми маємо

$$Q^{(s)} \simeq - \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{\nu_{\alpha} G_{\alpha}(\mathbf{k})} I_{\alpha}. \quad (4.43)$$

Таким чином, у дрейфово-дифузійному наближенні ($\nu_{\alpha} \gg kv_{T\alpha}, k_z v_{\alpha}$) отримуємо

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi q}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, 0)} - \frac{4\pi}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, 0)} \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{\nu_{\alpha} G_{\alpha}(k)} I_{\alpha}. \quad (4.44)$$

Нехтуючи впливом поля на електрони ($v_e = 0$), тобто припускаючи, що розподіл електронів є больцманівським, можемо записати

$$\varepsilon(\mathbf{k}, 0) = 1 + \frac{k_{De}^2}{k^2} + \frac{k_{Di}^2}{k^2 + ik_z v_i \nu_i / v_{Ti}^2}, \quad G_e(\mathbf{k}) = \frac{k^2 v_{Te}^2}{\nu_e^2}. \quad (4.45)$$

Коли потенціал $\varphi_{\mathbf{k}}$ відомий, тоді можна знайти силу, яка діє на порошок, внаслідок поляризації плазми навколо неї

$$\mathbf{F} = -q \left. \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right|_{\mathbf{r}=0} = -iq \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathbf{k} \varphi_{\mathbf{k}}. \quad (4.46)$$

Якщо зовнішнє поле відсутнє, тоді $\varphi_{\mathbf{k}}$ залежить від квадрату \mathbf{k} і сила, яка діє на порошок, рівна нулю. Ситуація кардинально змінюється, коли у плазмі є потоки частинок. Використовуючи явний вигляд $\varepsilon(\mathbf{k}, 0)$ і $G_i(\mathbf{k})$, знаходимо, що

$$F_z = -\frac{q}{2\pi^2} \int d\mathbf{k} \frac{ik_z}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, 0)} \left[q - \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{\nu_{\alpha} G_{\alpha}(\mathbf{k})} I_{\alpha} \right]. \quad (4.47)$$

Для малої дрейфової швидкості v_i рівняння (4.47) спрощується до

$$F_z = \frac{qv_i}{2\pi^2 D_i} \int d\mathbf{k} \frac{k_z^2}{k^2(k^2 + k_D^2)} \left[\frac{k_D^2 \tilde{S}_i}{k^2} + \frac{k_i^2}{k^2 + k_D^2} \left(q - \frac{k_D^2 \tilde{S}}{k^2} \right) \right], \quad (4.48)$$

де (1.31)

$$\tilde{S} = \sum_{\alpha} \tilde{S}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha} I_{\alpha}}{k_D^2 D_{\alpha}}.$$

Після інтегрування маємо

$$F_z = \frac{qv_i}{6D_i k_D} \left\{ k_{Di}^2 (q - \tilde{S}) + 2k_D^2 \tilde{S}_i \right\}. \quad (4.49)$$

Видно, що коли поглинання електронів та іонів порошком відсутнє ($\tilde{S}_{\alpha} = 0$), тоді сила тертя є додатною, тобто вона діє у напрямку іонного потоку.

Однак, якщо умова

$$k_{Di}^2 (q - \tilde{S}) + 2k_D^2 \tilde{S}_i > 0 \quad (4.50)$$

задовольняється і $q < 0$, тоді сила стає від'ємною, так само як у моделі точкових стоків у дрейфово-дифузійному наближенні [15, 17, 71–74] та кінетичному моделюванні [204].

Оскільки коефіцієнт дифузії електронів набагато більший за коефіцієнт дифузії іонів, то $\tilde{S}_i \approx \tilde{S} = -\alpha q$, враховуючи, що $k_{Di}^2/k_D^2 = \tau/(\tau + 1)$ і використовуючи позначення $\tilde{v} = v_i/(D_i k_D)$, рівняння (4.49) можна переписати як

$$F_z = -\frac{q^2 \tilde{v}}{6} k_D^2 \frac{2\alpha - \tau(1 - \alpha)}{\tau + 1}, \quad (4.51)$$

що повністю збігається з результатом (4.7) отриманим в моделі точкових стоків у дрейфово-дифузійному наближенні.

4.2.2 Середні та середньоквадратичні зміщення

Явні вирази для фур'є-образів ймовірностей переходу $W_{\alpha k\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ і $W_{\alpha k\omega}(\mathbf{v}')$ представлені формулами (4.21)–(4.25). Вони дають змогу розрахувати середні $\langle \Delta r_i \rangle_{\mathbf{v}, \tau}$ і середньоквадратичні $\langle \Delta r_{\alpha i}^2 \rangle_{\mathbf{v}, \tau}$ зміщення частинок, тобто

$$\langle \Delta r_{\alpha i} \rangle_{\mathbf{v}, \tau} = \int d\Delta \mathbf{r} \int d\Delta \mathbf{v} \Delta r_{\alpha i} W_{\alpha}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}, \mathbf{r}, \mathbf{v}; \tau). \quad (4.52)$$

Згідно з (1.95)

$$W_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{r}', \mathbf{v}', \tau) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \int d\omega e^{-i\omega\tau} W_{\alpha k\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'), \quad (4.53)$$

де $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

Тоді

$$\langle \Delta r_{\alpha i} \rangle_{\mathbf{v}, \tau} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega e^{-i\omega\tau} \int d\Delta \mathbf{r} \int d\mathbf{k} \Delta r_{\alpha i} e^{i\mathbf{k}\Delta \mathbf{r}} \int d\Delta \mathbf{v} W_{\alpha k\omega}(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}, \mathbf{v}). \quad (4.54)$$

Інтеграл за $\Delta \mathbf{v}$ – це інтеграл за першим аргументом фур'є-образу імовірності переходу

$$\int d\mathbf{v} W_{\alpha \mathbf{k} \omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = W_{\alpha \mathbf{k} \omega}(\mathbf{v}'), \quad (4.55)$$

які задаються виразами (4.23), (4.25).

Знайдемо середнє зміщення вздовж осі z (у напрямку дії зовнішнього поля)

$$\langle \Delta z_{\alpha} \rangle_{\mathbf{v}, \tau} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\omega e^{-i\omega\tau} \int d\Delta z \int d\mathbf{k} \Delta z e^{ik_z \Delta z} \delta(k_x) \delta(k_y) W_{\alpha \mathbf{k} \omega}(\mathbf{v}), \quad (4.56)$$

інтегрування частинами дає

$$\langle \Delta z_{\alpha} \rangle_{\mathbf{v}, \tau} = \frac{i}{(2\pi)} \int d\omega e^{-i\omega\tau} \left. \frac{\partial W_{\alpha \mathbf{k} \omega}(\mathbf{v})}{\partial k_z} \right|_{\mathbf{k}=0}. \quad (4.57)$$

Похідна у рівнянні (4.57) має вигляд

$$i \left. \frac{\partial W_{\alpha \mathbf{k} \omega}(\mathbf{v})}{\partial k_z} \right|_{\mathbf{k}=0} = -\frac{v_{\alpha}}{\omega^2} + \frac{v_z - v_{\alpha}}{\nu_{\alpha}} \left(\frac{i}{\omega} + \frac{1}{i\omega - \nu_{\alpha}} \right). \quad (4.58)$$

Виконавши одностороннє зворотнє перетворення Фур'є, отримуємо

$$\langle \Delta z_{\alpha} \rangle_{\mathbf{v}, \tau} = \tau v_{\alpha} + \frac{v_z - v_{\alpha}}{\nu_{\alpha}} \left(1 - e^{-\nu_{\alpha} \tau} \right). \quad (4.59)$$

Легко переконатися, що середнє зміщення у напрямку перпендикулярному до поля дорівнює

$$\langle \Delta r_{\alpha \perp} \rangle_{\mathbf{v}, \tau} = \frac{v_{\perp}}{\nu_{\alpha}} \left(1 - e^{-\nu_{\alpha} \tau} \right). \quad (4.60)$$

Графік залежності (4.59) представлений на рис. 4.3, крива $v_{\alpha}/v_z = 0$ відповідає рівнянню (4.60).

Середньоквадратичне зміщення розраховується подібним чином

$$\langle \Delta r_{\alpha i}^2 \rangle_{\mathbf{v}, \tau} = \int d\Delta \mathbf{r} \int d\Delta \mathbf{v} \Delta r_{\alpha i}^2 W_{\alpha}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}, \mathbf{r}, \mathbf{v}; \tau). \quad (4.61)$$

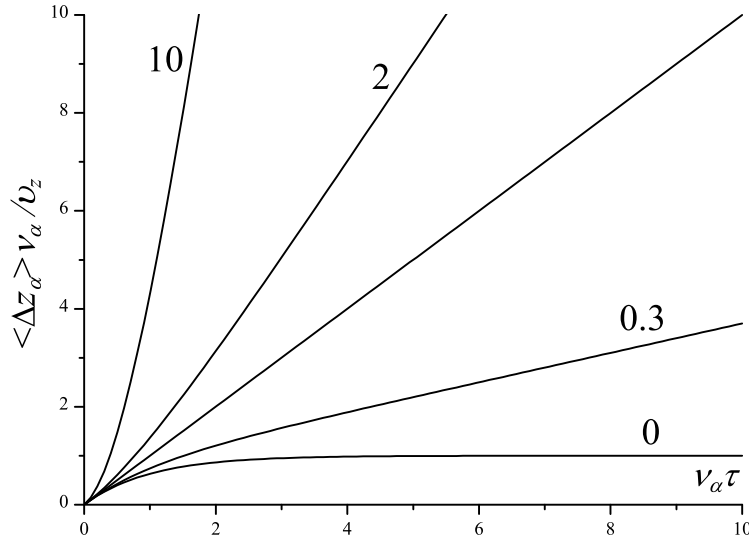


Рис. 4.3 Нормоване середнє зміщення $\langle \Delta z_\alpha \rangle v_\alpha / v_z$ для різних значень v_α / v_z .

$$\frac{\langle \Delta z_\alpha^2 \rangle_{\mathbf{v}, \tau} v_\alpha^2}{v_{T\alpha}^2} = \left(\frac{\nu_\alpha \tau v_\alpha}{v_{T\alpha}} \right)^2 \left(1 + 2e^{-\nu_\alpha \tau} \right) + 2\nu_\alpha \tau \left(1 + e^{-\nu_\alpha \tau} \right) - 4 + 4e^{-\nu_\alpha \tau} + 2 \left[\left(\frac{v_z}{v_{T\alpha}} \right)^2 + \frac{v_z}{v_{T\alpha}} \frac{\nu_\alpha \tau v_\alpha}{v_{T\alpha}} - \frac{3v_\alpha^2}{v_{T\alpha}^2} \right] \left[1 - (1 + \nu_\alpha \tau) e^{-\nu_\alpha \tau} \right]. \quad (4.62)$$

Слід звернути увагу, що нормування величин $\langle \Delta z_\alpha^2 \rangle_{\mathbf{v}, \tau}$ і $\langle \Delta z_\alpha \rangle_{\mathbf{v}, \tau}$ зроблено у різний спосіб.

При $\nu_\alpha \tau \gg 1$

$$\frac{\langle \Delta z_\alpha^2 \rangle_{\mathbf{v}, \tau} v_\alpha^2}{v_{T\alpha}^2} \approx \left(\frac{v_\alpha}{v_{T\alpha}} \nu_\alpha \tau \right)^2 + 2\nu_\alpha \tau \left(\frac{v_\alpha v_z}{v_{T\alpha}^2} + 1 \right) + 2 \frac{v_z^2}{v_{T\alpha}^2} - 6 \frac{v_\alpha^2}{v_{T\alpha}^2} - 4, \quad (4.63)$$

середньоквадратичне зміщення зростає пропорційно до τ^2 .

Без зовнішнього електричного поля рівняння (4.62) спрощується до

$$\frac{\langle \Delta z_\alpha^2 \rangle_{\mathbf{v}, \tau} v_\alpha^2}{v_{T\alpha}^2} = 2\nu_\alpha \tau \left(1 + e^{-\nu_\alpha \tau} \right) - 4 + 4e^{-\nu_\alpha \tau} + 2 \left(\frac{v_z}{v_{T\alpha}} \right)^2 \left[1 - (1 + \nu_\alpha \tau) e^{-\nu_\alpha \tau} \right]. \quad (4.64)$$

Для $\nu_\alpha \tau \gg 1$, маємо

$$\frac{\langle \Delta z_\alpha^2 \rangle_{\mathbf{v}, \tau} v_\alpha^2}{v_{T\alpha}^2} \approx 2\nu_\alpha \tau + 2 \frac{v_z^2}{v_{T\alpha}^2} - 4. \quad (4.65)$$

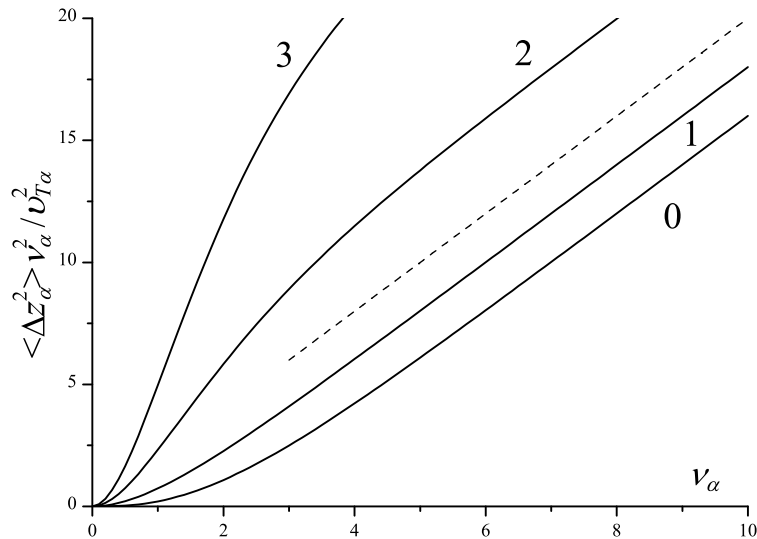


Рис. 4.4 Нормоване середньоквадратичне зміщення $\langle \Delta z_\alpha^2 \rangle v_\alpha^2 / v_{T\alpha}^2$ (4.65) для різних значень швидкості частинки $v_z/v_{T\alpha}$, штрихова лінія – $2\nu_\alpha\tau$.

Видно, що на відміну від (4.63), в цьому разі має місце лінійна залежність середньоквадратичного зміщення від τ .

Для $\nu_\alpha\tau \ll 1$, залежність від τ є квадратичною незалежно від того чи є електричне поле чи ні

$$\frac{\langle \Delta z_\alpha^2 \rangle_{v,\tau} v_\alpha^2}{v_{T\alpha}^2} \sim \left(\frac{v_z}{v_{T\alpha}} \nu_\alpha \tau \right)^2. \quad (4.66)$$

Графіки для середньоквадратичних зміщень представлені на рис. 4.4, 4.5.

Слід відмітити, що середньоквадратичні зміщення (4.64) відрізняються від розрахованих на основі рівняння Фоккера-Планка [214]

$$\frac{\langle \Delta z_\alpha^2 \rangle_{v,\tau} v_\alpha^2}{v_{T\alpha}^2} = 2\nu_\alpha\tau - 3 + 4e^{-\nu_\alpha\tau} - e^{-2\nu_\alpha\tau} + \frac{v_z^2}{v_{T\alpha}^2} \left(1 - e^{-\nu_\alpha\tau} \right)^2. \quad (4.67)$$

Причиною цієї відмінності є те, що оператори зіткнень у рівнянні Фоккера-Планка і у рівнянні БГК є різними. Однак, після усереднення за початковими швидкостями v_z з максвелівським розподілом, обидва вирази (4.64) і (4.67) приводять до однакового результату

$$\frac{\langle \Delta z_\alpha^2 \rangle_{v,\tau} v_\alpha^2}{v_{T\alpha}^2} = 2\nu_\alpha\tau - 1 + e^{-\nu_\alpha\tau}, \quad (4.68)$$

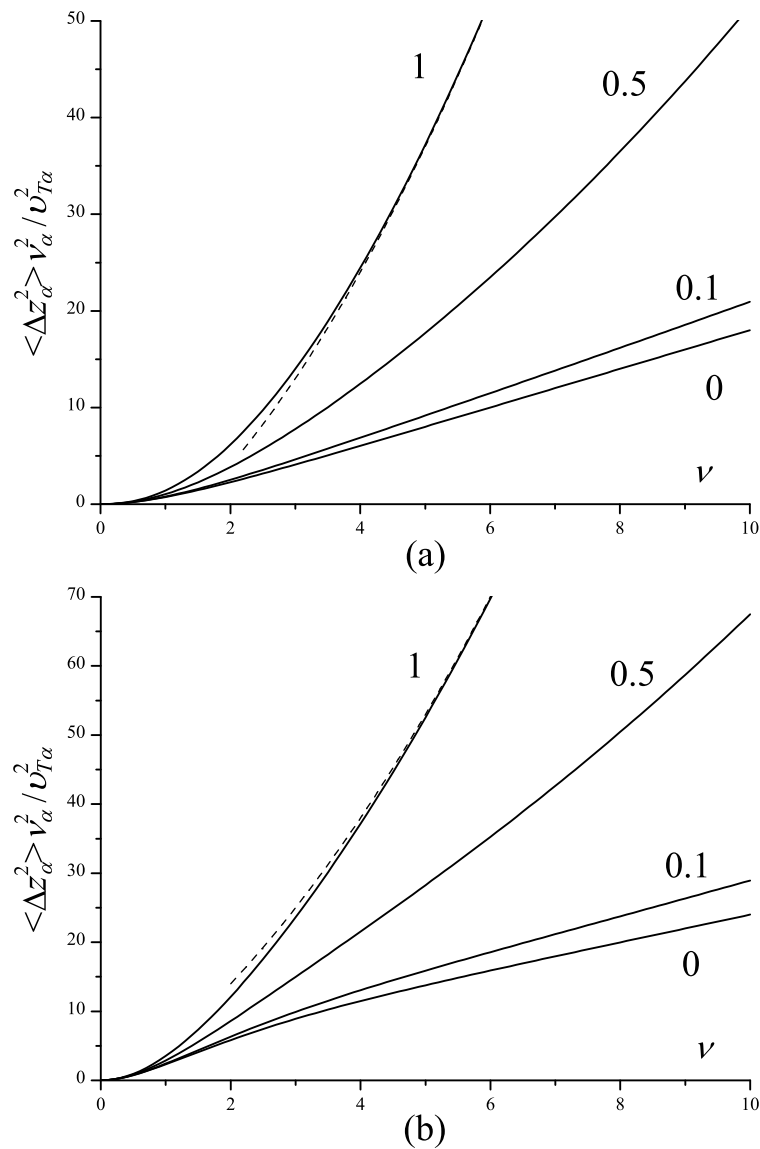


Рис. 4.5 Нормоване середньоквадратичне зміщення $\langle \Delta z_\alpha^2 \rangle v_\alpha^2 / v_{T\alpha}^2$, $v_z = v_{T\alpha}$ (a) $v_z = 2v_{T\alpha}$ (b) для різних значень дрейфової швидкості $v_\alpha / v_{T\alpha}$, штрихова лінія відповідає рівнянню (4.63).

який вперше був отриманий Ланжевенем [215]. Таким чином, у рівноважному стані обидва рівняння дають однакове середньоквадратичне зміщення. Що стосується різниці між (4.64) та (4.67), то вона суттєво залежить від початкової швидкості (див. рис. 4.6). Можна строго показати, що ця відмінність зникає для $v_z = v_{T\alpha}$, подібно до рівноважного стану. Зі зростанням відхилення швидкості від $v_{T\alpha}$, зростає і різниця між середньоквадратичними зміщеннями, які дають рівняння (4.64) та (4.67). Цей факт дозволяє зробити

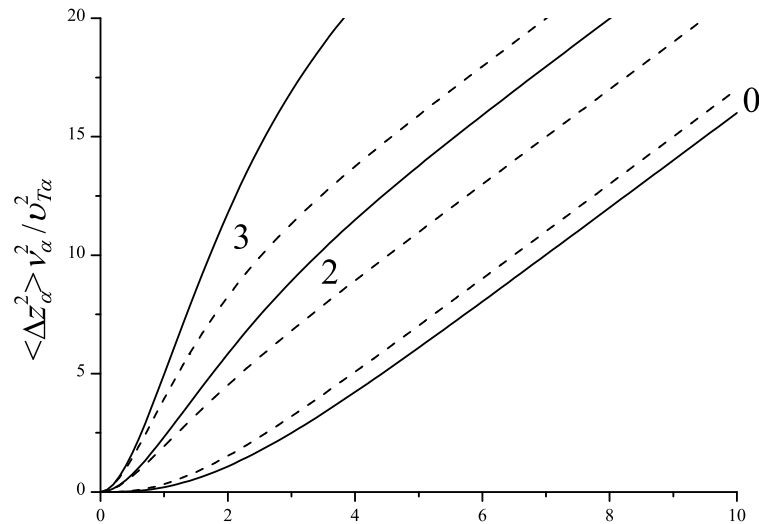


Рис. 4.6 Нормоване середньоквадратичне зміщення $\langle \Delta z_\alpha^2 \rangle v_\alpha^2 / v_{T\alpha}^2$ для різних значень швидкості частинки $v_z / v_{T\alpha}$, штрихові лінії – рівняння (4.67), суцільні лінії – (4.64).

висновок, що описання на основі рівнянь БГК та Фоккера-Планка узгоджуються, коли основний вклад у фізичні ефекти, пов'язаний із частинками, які рухаються зі швидкостями близькими до теплових.

4.3 Числове розв'язання крайової задачі у дрейфово-дифузійному наближенні

Сила тертя, яка діє на заряджене провідне тіло у зовнішньому електричному полі може бути розраховане на основі підходу, який використовувався у п. 3.1.

У стаціонарному стані електричне поле всередині провідного тіла рівне нулю. Із крайових умов до рівнянь Максвелла [181] випливає, що напруженість електричного поля \mathbf{E} на поверхні провідного тіла направлена вздовж зовнішньої нормалі \mathbf{n} і рівна

$$E = 4\pi\sigma, \quad (4.69)$$

де σ – густина поверхневого заряду.

Сила, яка діє на елемент поверхні dS

$$d\mathbf{F} = \sigma(\mathbf{E} - \mathbf{E}_S)dS, \quad (4.70)$$

де $\mathbf{E}_S = 2\pi\sigma\mathbf{n}$ – електричне поле, яке створюється самим елементом поверхні, як зарядженою площиною.

Таки самий результат можна отримати і з інших міркувань. Для провідника локальне значення електричного поля можна інтерпретувати як суму двох полів. Перше створюється зарядом елемента поверхні, а друге – силовими лініями, які починаються на провіднику і проходять через елемент поверхні, що розглядається. Обидва поля мають однакову величину, тому що поле, яке створюється елементом поверхні і направлене у середину провідника, повинно компенсуватися полем від всього іншого тіла. Тоді сила, яка діє на елемент поверхні, це просто сила відштовхування з боку всієї іншої сфери.

Остаточно

$$d\mathbf{F} = 2\pi\sigma^2\mathbf{n}dS \quad (4.71)$$

і використовуючи (4.69) повна сила, в термінах електростатичного потенціалу, задається виразом

$$\mathbf{F} = \frac{1}{8\pi} \oint_S (\mathbf{n}\nabla\varphi)^2 \mathbf{n}dS. \quad (4.72)$$

Потенціал всередині провідної сфери дорівнює нулю, а за межами $\varphi(\mathbf{r})$ задовольняє рівняння Пуассона, яке у випадку плазми із одним сортом однозарядних іонів, має вигляд (3.5).

Через поглинання електронів та іонів порошинкою виникають потоки плазми до поверхні порошинки. Динаміку плазми із частими зіткненнями

ми описуємо у дрейфово-дифузійному наближенні (див. п. 1.2.2), тому густина потоку електронів та іонів має вигляд (1.17)

$$\mathbf{\Gamma}_\alpha(\mathbf{r}) = -D_\alpha \left(\frac{e_\alpha}{T_\alpha} n_\alpha(\mathbf{r}) \nabla \varphi(\mathbf{r}) + \nabla n_\alpha(\mathbf{r}) \right) - \mathbf{v} n_\alpha(\mathbf{r}). \quad (4.73)$$

Останній доданок в (4.73) описує потік плазми зі швидкістю $-\mathbf{v}$, що еквівалентно руху порошинки зі швидкістю \mathbf{v} .

Ми поміщаємо систему координат у центр сферичної порошинки і робимо припущення, що джерела плазми знаходяться на нескінченності, тому потенціал на нескінченності рівний нулю

$$n_\alpha(\mathbf{r})|_{r \rightarrow \infty} = n_0, \quad \varphi(\mathbf{r})|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (4.74)$$

Густина потоку (4.73) задовольняє стаціонарне рівняння неперервності (3.15). Оскільки електрони та іони поглинаються порошиною, їхня концентрація на поверхні порошинки рівна нулю

$$n_\alpha(\mathbf{r})|_{r=a} = 0, \quad (4.75)$$

де a – радіус порошинки.

Потенціал на поверхні провідного тіла є сталим

$$\varphi(\mathbf{r})|_{r=a} = \varphi_S = \text{const}. \quad (4.76)$$

Таким чином, ми маємо систему трьох рівнянь з невідомими функціями $\varphi(\mathbf{r})$, $n_\alpha(\mathbf{r})$ і крайовими умовами для них (4.74), (4.75) і (4.76).

Стаціонарний поверхневий потенціал φ_S визначається умовою рівності нулю повного електричного струму через поверхню порошинки (3.14)

$$I_{\text{tot}} = \sum_{\alpha=e,i} I_\alpha = \sum_{\alpha=e,i} e_\alpha \oint_{r=a} \mathbf{\Gamma}_\alpha \mathbf{n} dS = 0. \quad (4.77)$$

Вираз для стаціонарного заряду q випливає з (4.69)

$$q = \oint_{r=a} \sigma dS = -\frac{1}{4\pi} \oint_{r=a} \mathbf{n} \nabla \varphi(\mathbf{r}) dS. \quad (4.78)$$

У безрозмірних змінних

$$\phi = \frac{e_e \varphi}{T_e}, \quad \tau = \frac{T_e}{T_i}, \quad \tilde{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{\lambda_D}, \quad \mathbf{G}_\alpha = \frac{\Gamma_\alpha \lambda_D}{D_i n_0}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v} \lambda_D}{D_i}, \quad \eta_\alpha = \frac{n_\alpha}{n_0}, \quad (4.79)$$

отримуємо

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_e(\tilde{\mathbf{r}}) &= -(D_e/D_i)[\eta_e(\tilde{\mathbf{r}})\nabla\phi(\tilde{\mathbf{r}}) + \nabla\eta_e(\tilde{\mathbf{r}})] - \tilde{\mathbf{v}}\eta_e(\tilde{\mathbf{r}}), \\ \mathbf{G}_i(\tilde{\mathbf{r}}) &= \tau\eta_i(\tilde{\mathbf{r}})\nabla\phi(\tilde{\mathbf{r}}) - \nabla\eta_i(\tilde{\mathbf{r}}) - \tilde{\mathbf{v}}\eta_i(\tilde{\mathbf{r}}). \end{aligned} \quad (4.80)$$

Отже, система рівнянь для потенціалу і концентрацій плазмових частинок має вигляд

$$\Delta\phi(\tilde{\mathbf{r}}) = \frac{\eta_i(\tilde{\mathbf{r}}) - \eta_e(\tilde{\mathbf{r}})}{1 + \tau}, \quad (4.81)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{G}_\alpha(\tilde{\mathbf{r}}) = 0. \quad (4.82)$$

Відношення коефіцієнтів дифузії дорівнює (2.26) $D_e/D_i = d\sqrt{\tau}$. Це означає, що у неізотермічній плазмі ($\tau > 1$) відношення D_e/D_i є більшим, ніж в ізотермічній. Обчислення проводились для $d = 1000$ (таке ж значення використовувалося в п. 2.2 і 2.4 [8, 11, 67]) і $\tau \geq 1$ (ізотермічна та неізотермічна плазма).

Задача про взаємодію сферичної частинки зі стаціонарним потоком плазми має аксіальну симетрію. Ми використовуємо циліндричну систему координат і вибираємо напрямок осі z протилежно до потоку. В такому разі $\mathbf{v} = (0, 0, v)$ і потенціал є функцією двох змінних $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(r_\perp, z)$, так само як і концентрація електронів та іонів $n_\alpha(\mathbf{r}) = n_\alpha(r_\perp, z)$. Сформульована вище задача, яка є двовимірною в координатах (r_\perp, z) , розв'язувалась чисельно у програмі FlexPDE [133] методом скінченних елементів [134]. Область обчислень показана на рис. 4.7. Крайові умови (4.74) в обчисленнях були замінені

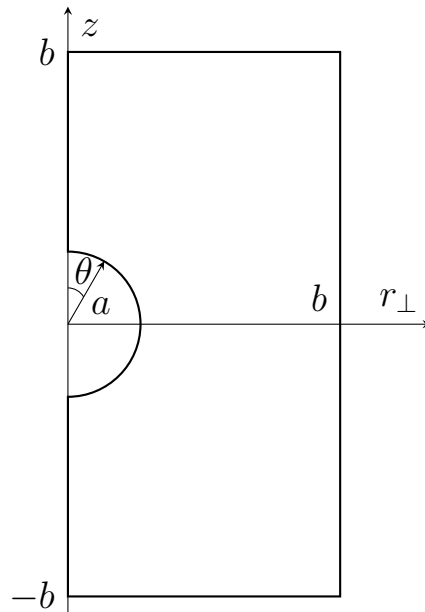


Рис. 4.7 Область обчислень.

такими ж, але при $r_{\perp} = b$ і $z = b$, де $b \gg \lambda_D$. Нормальні компоненти $\nabla\phi(\tilde{\mathbf{r}})$ і $\nabla\eta(\tilde{\mathbf{r}})$ до границі $r_{\perp} = 0$ рівні нулю, що відповідає неперервності потенціалу і концентрації електронів та іонів на цій границі.

Далі представлені результати числового розв'язання задачі. На рис. 4.8 наведена залежність абсолютного значення безрозмірної сили тертя $Fe^2/(T_e a k_D)^2$ від $\tilde{v} = v\lambda_D/D_i$ у ізотермічній плазмі ($\tau = 1$). Сила тертя направлена протилежно до потоку (вздовж швидкості порошинки), тобто має місце від'ємне тертя. Сила немонотонно залежить від швидкості, що узгоджується із результатами отриманими в роботі [149] в яких виконане числове розв'язання кінетичного рівняння БГК. Можна зробити висновок, що для заданих параметрів формула (4.3) (штрихова лінія) і вираз (4.5) (суцільна лінія) дають майже однакові значення сили тертя. Отже, можна використовувати більш просту і зручну для числового інтегрування формулу (4.5). З рис. 4.8 видно, що нелінійні й розмірні ефекти, які враховані у числовому розв'язку, призводять до зменшення абсолютного значення безрозмірної сили тертя. Вираз (4.5) з параметром $\alpha = \tilde{q}/q$ з (4.6) правильно описує якісну залежність сили від швидкості і його можна використовувати для знаходження значень сили тертя, яка діє на порошинки малого розміру

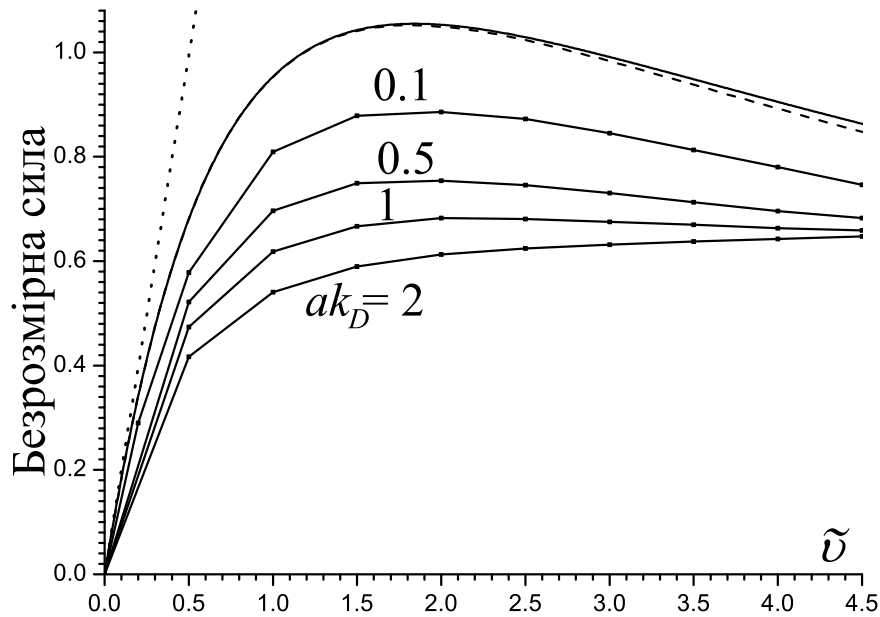


Рис. 4.8 Залежність безрозмірної сили $Fe^2/(T_e ak_D)^2$ від швидкості $\tilde{v} = v\lambda_D/D_i$ у ізотермічній плазмі. Суцільні лінії з точками – результати обчислень, суцільна лінія – формула (4.5), штрихова лінія – формула (4.3), точкова лінія – (4.9).

$a \ll \lambda_D$, ці значення є верхньою межею безрозмірної від'ємної сили тертя, яка діє на порошинки скінченних розмірів. Можна було б спробувати використати формулу (4.5) для порошинок скінченних розмірів, взявши параметр α і заряд порошинки q з обчислень для нерухомої порошинки (див. п. 2.2 або [8, 67]), але вона не дає а ні кількісного, а ні якісного узгодження з числовим розв'язком для сили тертя. Використання виразу (4.9), який отриманий у лінійному наближенні, (точкова лінія на рис. 4.8) обмежене значеннями $\tilde{v} \ll 1$ і $a \ll \lambda_D$.

Безрозмірна сила тертя $Fe^2/(T_e ak_D)^2$ поступово зменшується зі збільшенням ak_D (збільшення радіуса порошинки від 0.1 до $1.0\lambda_D$ призводить до зменшення безрозмірної сили приблизно на 20%). Це означає, що сама (розмірна) сила приблизно пропорційна квадрату радіуса порошинки.

В термінах довжини вільного пробігу безрозмірну швидкість можна записати як

$$\tilde{v} = \frac{v}{v_{Ti}} \frac{\lambda_D}{l_i}. \quad (4.83)$$

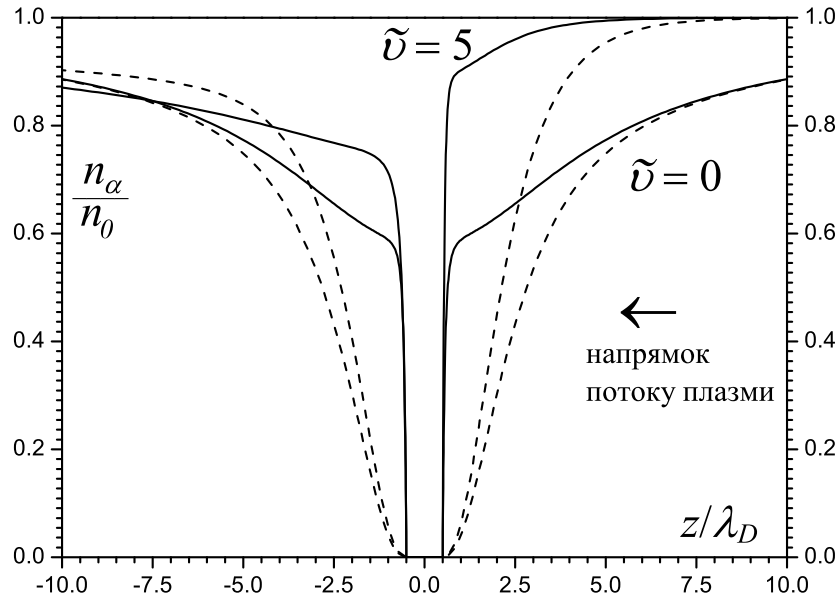


Рис. 4.9 Нормована концентрація іонів n_i/n_0 (суцільні лінії) та електронів n_e/n_0 (штрихові лінії) від z/λ_D поблизу нерухомої ($\tilde{v} = 0$) і рухомої ($\tilde{v} = 5$) порошинки для $r_\perp = 0$ і $a = 0.5\lambda_D$ у ізотермічній плазмі.

У наших обчислення розглядаються значення \tilde{v} у декілька одиниць, це відповідає швидкості потоку, яка набагато менша за теплову швидкість іонів $v \ll v_{Ti}$, оскільки у плазмі з частими зіткненнями виконується нерівність $\lambda_D/l_i \gg 1$.

На рис. 4.9 наведені розподіли нормованих концентрацій іонів та електронів n_α/n_0 вздовж осі z ($r_\perp = 0$). Видно, що потік плазми збільшує концентрації іонів та електронів біля порошинки у порівнянні з випадком нерухомої порошинки $\tilde{v} = 0$, також їхній розподіл стає асиметричним. Нагадаємо, що потік плазми направлений протилежно до напрямку осі z (або порошинка рухається вздовж осі z). Густина додатного заряду (різниця між суцільною і штриховою лініями) перед від'ємно зарядженою порошинкою є більшою, ніж позаду. Крім того, позаду порошинки формується область з від'ємною густиною заряду (штрихова лінія знаходить вище, ніж суцільна). Це відбувається через те, що потік плазми збільшує кількість плазмових частинок навколо порошинки всюди, крім області позаду неї, але більш рухливі електрони приходять в цю область швидше, ніж іони. Такий розподіл

заряду приводить до появи від'ємного тертя. Для плазми із нечастими зіткненнями має місце протилежний ефект, а саме іони фокусуються позаду порошинки, це явище обговорювалося, наприклад, у роботах [216–221].

Нормовані профілі розподілів електронів та іонів біля нерухомої порошинки (див. рис. 4.9) повністю узгоджуються з профілями у [67]. Більше того, у цій роботі було показано, що числові розрахунки на основі континуального (дрейфово-дифузійного) наближення добре узгоджуються з моделюванням на основі мікроскопічної броунівської динаміки. Профілі концентрацій для інших радіусів порошинок та значення $\tau = 10$ можна побачити на рис. 2.11 і 2.12.

У роботі [149] вивчалась сила тертя іонів, що діє на порошинку, яка вміщена у слабкоіонізовану аргонову плазму із зіткненнями, на основі безпосереднього числового розв'язання кінетичного рівняння Батнагара – Гросса – Крука (1.84) і (1.110). Обчислення були виконані у широкому діапазоні значень тиску плазми включаючи випадок коли довжина вільного пробігу іонів набагато менша за довжину Дебая і розміри порошинки ($l_i \ll \lambda_D, a$), тобто для випадку коли повинно бути справедливим дрейфово-дифузійне наближення. На рис. 6b у роботі [149] наведені профілі густини плазми поблизу сферичної $a = 0.5\lambda_D$ порошинки в однорідному потоці плазми з $v/v_{Ti} = 0.08$ для $l_i/\lambda_D = 0.01$.

Рис. 4.10 показує якісне узгодження між профілями густини плазми у дрейфово-дифузійному і кінетичному підходах, але очікувати повного збігу не можна з наступних причин. У кінетичних обчисленнях для аргонової плазми довжина вільного пробігу була порядку довжини Дебая (в атомарних газах переріз зіткнень між електронами та нейтралами має яскраво виражений мінімум, який пов'язаний із ефектом Рамзауера – Таунсенда [49, 162]). Це означає, що дрейфово-дифузійне наближення не задовольняється для електронів навіть наближено. Ще одна причина – це крайові умови на поверхні порошинки. У наших обчисленнях на основі дрейфово-дифузійного наближення, концентрація плазмових частинок на поверхні порошинки

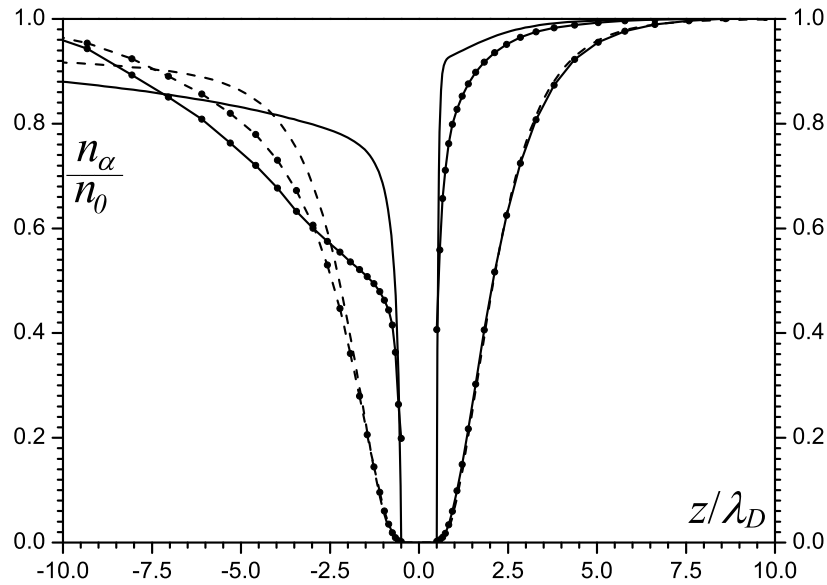


Рис. 4.10 Нормована концентрація іонів n_i/n_0 (суцільні лінії) та концентрація електронів n_e/n_0 (штрихові лінії) від z/λ_D для $\tilde{v} = 8$, $r_{\perp} = 0$ і $a = 0.5\lambda_D$ у ізотермічній плазмі. Лінії з точками взяті з рис. 6b у роботі [149].

рівна нулю (4.75) на відміну від кінетичного підходу, що добре видно для концентрації іонів на рис. 4.10. Очевидно, що крайові умови впливають на весь профіль густини плазми. Більше того, відрізняються розміри областей обчислень, а саме $b = 20\lambda_D$ у [149] і $b = 100\lambda_D$ у наших обчисленнях. Оскільки на краю області обчислень задається умова $n_{\alpha} = n_0$, то це, хоча б частково, може пояснити різницю між профілями для значень координат $z \approx -10\lambda_D$.

Як видно з рис. 4.11, радіальна компонента густини іонного потоку на рухомому порошинку є неізотропною. Густина потоку зростає з кутом θ (див. рис. 4.7). Подальше збільшення швидкості порошинки призводить не лише до збільшення густини потоку на передню сторону порошинки, але і до зменшення з протилежного боку ($\theta \approx 140 - 180$). Наші обчислення також показали, що радіальна компонента густини електронного потоку на рухомому порошинку залишається майже ізотропною, що пов'язано із високою рухливістю електронів.

Густина потоку пов'язана зі струмом формулою (4.77). З рис. 4.11

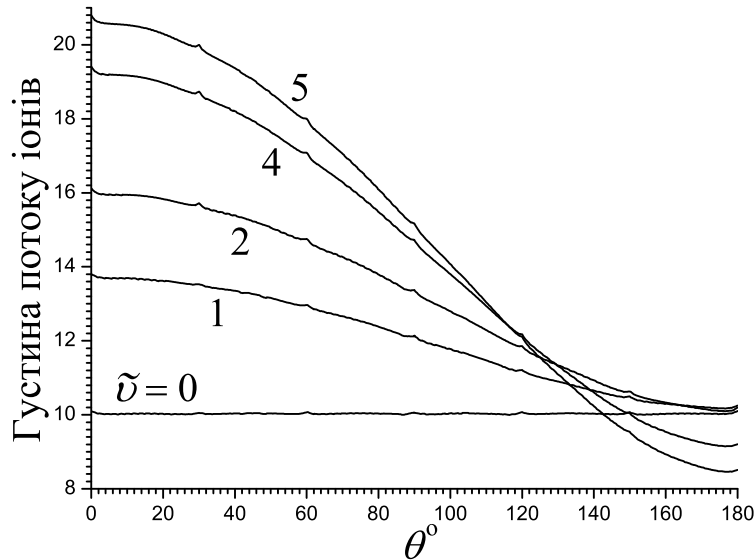


Рис. 4.11 Залежність радіальної компоненти безрозмірної густини іонного потоку $G_{ir} = \Gamma_{ir}\lambda_D/D_i n_0$ від кута θ у ізотермічній плазмі для $ak_D = 0.5$ і $\tilde{v} = 0; 1; 2; 4; 5$.

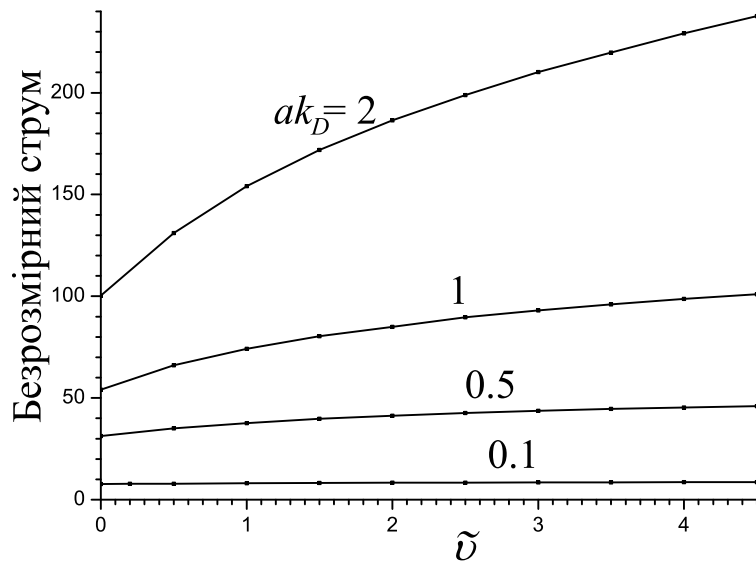


Рис. 4.12 Безрозмірний стаціонарний струм заряджання Ik_D/en_0D_i від $\tilde{v} = v\lambda_D/D_i$ для $ak_D = 0.1; 0.5; 1; 2$ у ізотермічній плазмі.

слідуює, що рух порошинки повинен збільшувати стаціонарний струм заряджання. Це збільшення спостерігається на рис. 4.12 і воно є більш вираженим для більших порошинок.

Збільшення струму заряджання у свою чергу означає збільшення стаціонарного заряду і призводить до зміни відношення $\alpha = \tilde{q}/q$. Згідно з рис. 4.13, залежність стаціонарного заряду від швидкості є суттєвою для

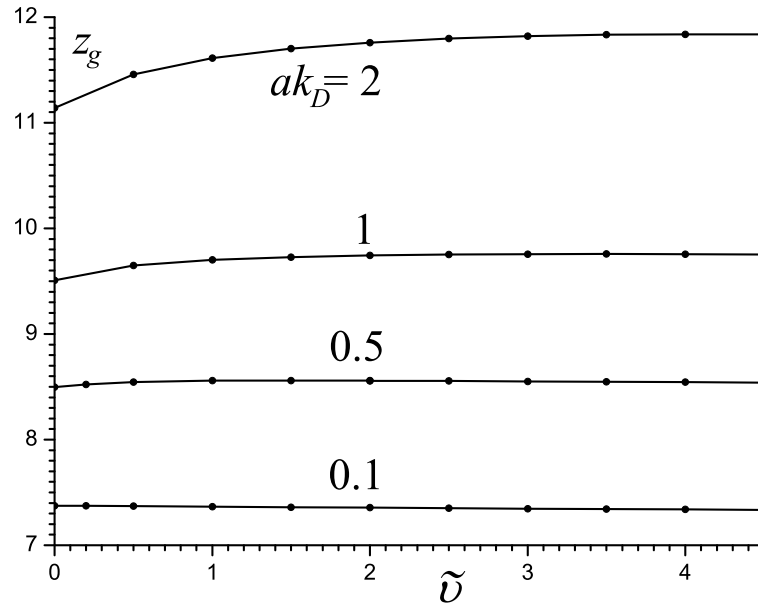


Рис. 4.13 Залежність безрозмірного стаціонарного заряду $z_g = qe_e/aT_e$ від $\tilde{v} = v\lambda_D/D_i$ для $ak_D = 0.1; 0.5; 1; 2$ у ізотермічній плазмі.

$ak_D \gtrsim 1$. Той факт, що параметр α є функцією швидкості порошинки не враховується у формулі (4.5), так само як і у (4.3). Напевне, це одна із причин, чому ці формули гірше описують залежність сили тертя від швидкості для більших порошинок.

Оскільки ми розглядаємо слабкоіонізовану плазму, то від'ємну силу тертя слід порівняти з силою тертя з нейтральними частинками [73]. У сильнотіткненному режимі цю силу можна знайти за законом Стокса

$$F_S = 6\pi a v n_n m_n l_n v_{Tn}, \quad (4.84)$$

де індекс n позначає нейтральні частинки. Виправданим є припущення, що $m_n \approx m_i$, $T_n \approx T_i$ і $l_n \approx l_i$. Отже, сила Стокса у знерозміреному вигляді

$$\frac{F_S e^2}{(T_e a k_D)^2} = \frac{2\tau}{1 + \tau a k_D} \frac{\tilde{v}}{n_e} n_n (l_i k_D)^2. \quad (4.85)$$

Вона визначається співвідношенням між малим значенням $(l_i k_D)^2$ і великим значенням n_n/n_e , а також параметрами τ і ak_D .

Від'ємна сила тертя пропорційна швидкості порошинки (4.8) для $\tilde{v} \ll 1$, так само як і сила Стокса (4.85). Отже, відношення цих сил дає

наближену умову

$$\frac{|F|}{F_S} = \frac{z_g^2 a k_D}{3(\tau + 1)} \frac{n_e}{n_n} \frac{1}{(l_i k_D)^2} > 1, \quad (4.86)$$

яка визначає чи перевищує від'ємне тертя, сулу тертя з нейтралами при $\tilde{v} \ll 1$. Однак слід пам'ятати, що межі застосовності цієї умови обмежені застосовністю формули (4.8), тобто $a \ll \lambda_D$.

Якщо умова (4.86) задовольняється, тоді порошок прискорюватиметься доки при певному значенні \tilde{v} не буде досягнутий баланс сил, який визначається перетином графіку лінійної функції (сили Стокса) і кривої, яка описує залежність сили від'ємного тертя від швидкості (див. рис. 4.8). Видно, що умову (4.86) більш легко задовольнити у ізотермічній плазмі. А от вплив радіуса порошинки на цю умову проаналізувати більш складно. З одного боку, $a k_D$ знаходиться у чисельнику виразу (4.86) так само як і заряд порошинки z_g , який зростає з радіусом (див. рис. 4.13), але з іншого боку, наші обчислення для порошинок скінченних розмірів (див. рис. 4.8) показують, що нахил графіку залежності сила тертя від швидкості зменшується зі збільшенням радіуса порошинки. У будь-якому разі, сила Стокса пропорційна радіусу порошинки a , тоді як сила від'ємного тертя приблизно пропорційна до a^2 , як вже обговорювалося вище. Отже, можливе існування певного критичного значення радіуса a_{cr} , такого що для $a \lesssim a_{cr}$ сила тертя нейтралів перевищує від'ємне тертя, а для $a \gtrsim a_{cr}$ навпаки. Це означає, що у слабоіонізованій плазмі з частими зіткненнями розподіл порошинок за швидкостями може залежати від їхніх розмірів. Суттєва різниця у рівноважних швидкостях порошинок різних розмірів може дозволити порошинкам подолати кулонівський бар'єр між ними і сприяти їх агломерації.

Формула (4.5) передбачає (див. рис. 4.14), що якісна залежність сили тертя від швидкості є однаковою у ізотермічній та неізотермічній плазмі крім того сила немонотонно залежить від відношення температури електронів до іонів. Для $\tau \sim 2$ абсолютне значення від'ємного тертя є вищим, ніж в

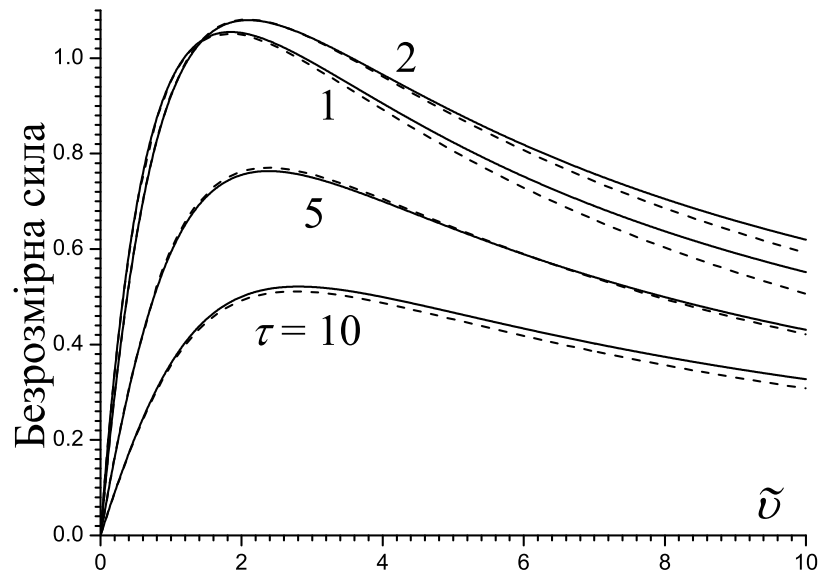


Рис. 4.14 Залежність безрозмірної сили $Fe^2/(T_e ak_D)^2$ від $\tilde{v} = v\lambda_D/D_i$ для $\tau = 1, 2, 5, 10$. Суцільні лінії – формула (4.5), штрихові лінії – формула (4.3).

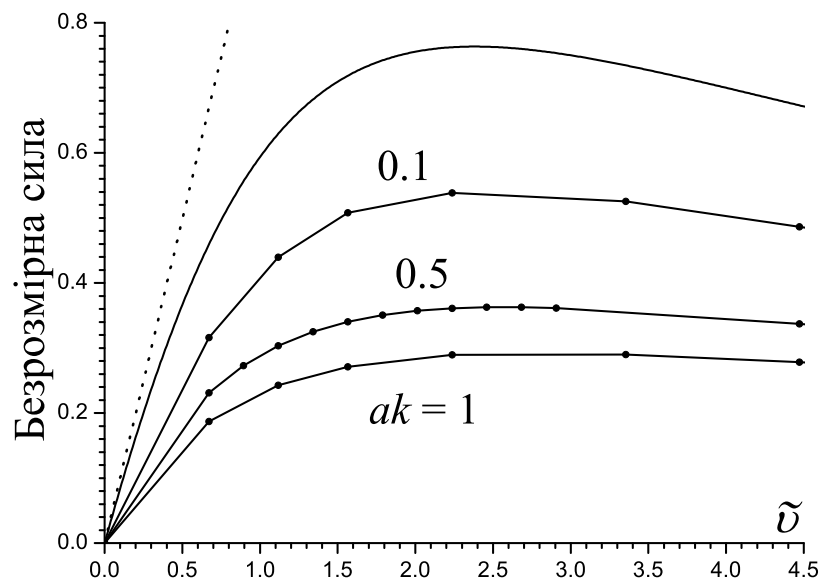


Рис. 4.15 Залежність безрозмірної сили $Fe^2/(T_e ak_D)^2$ від $\tilde{v} = v\lambda_D/D_i$ у неізотермічній плазмі ($\tau = 5$). Суцільні лінії з точками – результати обчислень, суцільні лінії – формула (4.5), точкова лінія – формула (4.8).

ізоетермічній плазмі, для $\tilde{v} \gtrsim 2$, але подальше збільшення τ зменшує його значення.

Результати числових розрахунків для випадку неізотермічної плазми ($\tau = 5$), які представлені на рис. 4.15, показують, що абсолютне значення знерозміреної від'ємної сили тертя є меншим, ніж у ізоетермічній плазмі. Але

оскільки вираз $Fe^2/(T_e a k_D)^2$ містить температуру електронів, то розмірна сила у неізотермічній плазмі буде більшою. Також з рисунка видно, що у неізотермічній плазмі від'ємна сила тертя сильніше залежить від радіуса порошинки. Формула (4.5) узгоджується з (4.8) (точкова лінія на рисунку) і знову дає верхню межу для сили тертя, яка діє на порошинки скінченних розмірів.

4.4 Висновки

Розглянуто заряджену провідну сферичну порошинку скінченних розмірів, що стаціонарно рухається у слабоіонізованій плазмі з частими зіткненнями. В рамках дрейфово-дифузійного наближення була обчислена сила тертя, яка діє на порошинку. Показано, що розподіли електронів та іонів навколо порошинки утворюють таке електричне поле, що сила, яка діє на порошинку направлена вздовж її швидкості, тобто має місце від'ємне тертя. Ця сила немонотонно залежить від швидкості порошинки і приблизно пропорційна квадрату її радіуса як для ізотермічної, так і неізотермічної плазми. Позаду від'ємно зарядженої порошинки у плазмі формується область з від'ємною густиною заряду. Також встановлено, що стаціонарний струм заряджання та заряд порошинки зростають зі зростанням її швидкості.

Запропонована нами формула (4.5) дозволяє знаходити силу тертя, яка діє на малі порошинки $a \ll \lambda_D$ як в ізотермічній та і неізотермічній плазмі для $D_e/D_i \gg 1$. Вона дає граничне значення сили тертя, яка діє на порошинки скінченних розмірів. Сформульована наближена умова (4.86), що визначає чи може від'ємна сила тертя перевищувати силу тертя із нейтралами, яка описується законом Стокса і пропорційна радіусу порошинки a . Таким чином, можливе існування порогового значення радіуса a_{cr} , нижче якого $a \lesssim a_{cr}$ сила тертя із нейтралами перевищує від'ємне тертя, а вище порогового $a \gtrsim a_{cr}$ – навпаки. Це означає, що розподіл порошинок за швидкостями буде залежати від їх розміру.

Послідовна кінетична теорія запырошеної плазми використана для знаходження ефективного потенціалу плазми із зіткненнями у зовнішньому електричному полі. Заряджання пырошинки плазмовими струмами із урахуванням зіткнень плазмових частинок із нейтральним було описане в рамках інтегралу зіткнень БГК. Знайдена сила тертя, яка пов'язана з дрейфом іонів у зовнішньому електричному полі. Показано, що поглинання іонів пырошинкою може призводити до зміни напрямку сили тертя.

На основі рівняння БГК розраховано середні та середньоквадратичні зміщення електронів та іонів у плазмі в зовнішньому постійному електричному полі. Виконано порівняння зі зміщеннями, розрахованими на основі рівняння Фоккера-Планка. Показано, що середньоквадратичні зміщення в загальному випадку є відмінними, але відмінність зникає у рівноважному стані.

РОЗДІЛ 5

ФЛУКТУАЦІЇ ТА ІОННО-ЗВУКОВІ ХВИЛІ У ПЛАЗМІ

5.1 Вплив зовнішнього електричного поля

Зовнішнє електричне поле часто присутнє у природній та лабораторній плазмі. Однак, послідовна кінетична теорія флуктуацій у такій плазмі досі потребує подальшого розвитку. Зокрема, випадок присутності зовнішнього змінного електричного поля детально вивчений (див. наприклад роботи [222–226] і посилання у них), а от вплив постійного зовнішнього електричного поля на резонансні властивості флуктуацій поблизу порогу нестійкості, які індуковані цим полем, вивчені недостатньо.

У цьому підрозділі представлені результати робіт [9, 13, 14, 32], у яких знайдені самоузгодженим чином спектри флуктуацій та іонно-звукових хвиль у плазмі із зіткненнями, яка знаходиться у зовнішньому постійному електричному полі. Такі розрахунки були виконані у рамках теорії великомасштабних флуктуацій у формулюванні Ланжевена [85–87], яке дає загальні вирази для флуктуаційних спектрів у термінах кореляційних функцій ланжевенівих джерел та функції діелектричного відгуку системи, що розглядається. Обидві ці величини можна розрахувати у рамках кінетичної теорії плазми, що використовує формалізм ймовірності переходу [227, 228], який є еквівалентним методу функцій Гріна.

5.1.1 Спектри флуктуацій (загальні співвідношення)

Розглянемо електронно-іонну плазму (можливо слабоіонізовану), яка знаходиться у зовнішньому електричному полі $\mathbf{E}^{\text{ext}} = (0, 0, E_0)$. Основна задача цього підрозділу застосувати теорію великомасштабних флуктуацій [85–87] до такої плазми і розрахувати флуктуаційні спектри із урахуванням впливу поля на функції розподілу і кінетичні властивості плазми. Очевидно, цей вплив стосується як кореляційної функції ланжевенівих джерел, так і функції діалектичного відгуку плазми.

Почнемо з рівняння для мікроскопічної фазової густини (1.77)

$$N_\alpha(X, t) = \sum_{i=1}^{N_\alpha} \delta(X - X_{i\alpha}(t)), \quad X \equiv (\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad (5.1)$$

де $\alpha = e, i$, $X_{i\alpha}(t)$ – фазова траєкторія частинок сорту α ,

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}_M(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}^{\text{ext}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} N_\alpha(X, t) = 0, \quad (5.2)$$

$\mathbf{E}_M(\mathbf{r}, t)$ – мікроскопічне електричне поле.

Виконавши статистичне усереднення рівнянь (5.1) і (5.2) за ансамблем Гіббса, отримуємо [9, п. 11.1]

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}^{\text{ext}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} f_\alpha(X, t) = I_\alpha, \quad (5.3)$$

де

$$\begin{aligned} n_\alpha f_\alpha(X, t) &= \langle N_\alpha(X, t) \rangle, \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \langle \mathbf{E}_M(\mathbf{r}, t) \rangle, \\ I_\alpha &= -\frac{e_\alpha}{m_\alpha n_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \langle \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \delta N_\alpha(X, t) \rangle. \end{aligned}$$

$$\delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_M(\mathbf{r}, t) - \mathbf{E}(\mathbf{r}, t),$$

$$\delta N_\alpha(X, t) = N_\alpha(X, t) - n_\alpha f_\alpha(X, t).$$

Величину I_α можна розглядати як інтеграл зіткнень, за умови, що кореляційна функція $\langle \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \delta N_\alpha(\mathbf{r}, t) \rangle$ виражена у термінах $f_\alpha(X, t)$. У випадку повністю іонізованої плазми вона зводиться до інтегралу зіткнень або у форму Балеску – Ленарда, або Ландау. Для спрощення задачі, наскільки це можливо, замість згаданих інтегралів зіткнень ми будемо використовувати просту модель Батнагара – Гросса – Крука (БГК) (4.14) [90].

Відомо [91, 229], що ця модель є найбільш ефективною для описання зіткнень плазмових частинок з нейтральними, тобто для слабкоіонізованої

плазми. Однак, проста модель БГК також може бути корисною для якісного вивчення ефектів, які спричинені зіткненнями інших типів. Отже, далі розглядається загальний випадок зіткнень плазмових частинок, який включає і частинний випадок слабоіонізованої, відповідно до оцінки параметрів зіткнень.

А зараз, уточнимо поняття ансамблю Гіббса. Описання кінетичної еволюції передбачає усереднення за фізично нескінченно малим часовим інтервалом τ_{ph} (або за фізично нескінченно малим об'ємом $V_{\text{ph}} \sim l_{\text{ph}}^3$), який задовольняє умову (1.45) $\tau_{\text{cor}} \ll \tau_{\text{ph}} \ll \tau_{\text{rel}}$, де τ_{cor} – час кореляцій мікроскопічних (молекулярних) флуктуацій, які генерує мікроскопічний рух частинок, τ_{rel} – характерний час зміни функції розподілу. Це означає, що усереднення за ансамблем Гіббса еквівалентне усередненню за часом (1.44). У випадку згладжування за фізично нескінченно малим об'ємом повинна задовольнятися наступна подвійна нерівність $l_{\text{cor}} \ll l_{\text{ph}} \ll l_{\text{rel}}$, де l_{cor} – довжина кореляцій мікроскопічних флуктуацій, l_{rel} – просторовий масштаб варіацій функції розподілу.

Основний момент теорії великомасштабних флуктуацій у газах і плазмі полягає в тому, що усереднена за ансамблем Гіббса (згладжена за τ_{ph} , або V_{ph}) мікроскопічна фазова густина є регулярною величиною на часових масштабах порядку τ_{ph} , але вона залишається випадковою величиною для $\tau \sim \tau_{\text{rel}} \gg \tau_{\text{ph}}$ [85–87, 227]. Це досить природно, оскільки $N_\alpha(X, t)$, яка є випадковою на будь-яких часах, усереднюється лише за τ_{ph} . Це значить, що за відповідних умов, функція розподілу $f_\alpha(X, t)$ включає у себе і випадкову компоненту, тобто,

$$f_\alpha(X, t) = f_{0\alpha}(X, t) + \delta f_\alpha(X, t).$$

Тут $f_{0\alpha}(X, t) = \langle \langle N_\alpha(X, t) \rangle_{\tau_{\text{ph}}} \rangle$, де $\langle \dots \rangle \equiv \langle \dots \rangle_{\tau_{\text{ph}}^{(L)}}$, $\tau_{\text{ph}}^{(L)}$ – часовий інтервал усереднення за великомасштабними (кінетичними) флуктуаціями, по відношенню до яких може бути введена функція розподілу $f_{0\alpha}(X, t)$ і наступний елемент у ієрархії ансамблів Гіббса (що еквівалентно усередненню за

$\tau_{\text{ph}}^{(L)} \gg \tau_{\text{ph}}$). У свою чергу рівняння (5.3) в цьому разі може розглядатися як стохастичне рівняння, яке описує великомасштабні (кінетичні) флуктуації.

Наступний крок – це виконати статистичне усереднення рівняння (5.3), яке дає

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}^{\text{ext}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} f_{0\alpha}(X, t) = I_\alpha + \tilde{I}_\alpha, \quad (5.4)$$

де I_α задається виразом (4.14) і

$$\tilde{I}_\alpha = -\frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left\langle \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \delta f_\alpha(X, t)}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle$$

– інтеграл зіткнень, який генерується великомасштабними флуктуаціями, і є аналогом інтегралу зіткнень у кінетичному рівнянні, яке отримано без урахування великомасштабних флуктуацій I_α .

Віднімаючи рівняння (5.4) з (5.3) і нехтуючи доданками, які змінюються повільно, отримуємо лінеаризоване рівняння для флуктуацій функції розподілу

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}^{\text{ext}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} \delta f_\alpha(X, t) + \nu_\alpha \left\{ \delta f_\alpha(X, t) - \Phi_\alpha(\mathbf{v}) \int d\mathbf{v} \delta f_\alpha(X, t) \right\} = -\frac{e_\alpha}{m_\alpha} \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \delta f_{0\alpha}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}. \quad (5.5)$$

Що стосується незбуреної функції розподілу $f_{0\alpha}(\mathbf{v})$, то у просторово однорідному і стаціонарному випадку, рівняння (5.4) записується як (4.15).

Тут ми припустили, що впливом великомасштабних флуктуацій на формування стаціонарного розподілу можна знехтувати (вклад I_α є набагато більшим, ніж \tilde{I}_α)

Формальний розв'язок рівняння (5.5) можна записати (див. (1.90))

$$\delta f_\alpha(X, t) = \delta f_\alpha^{(0)}(X, t) - \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \int_{-\infty}^t dt' \int dX' W_\alpha(X, X'; t - t') \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') \frac{\partial f_{0\alpha}(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'}, \quad (5.6)$$

де $\delta f_\alpha^{(0)}(X, t)$ – загальний розв’язок однорідного рівняння (5.5), тобто це функція розподілу у системі без самоузгодженої взаємодії через флуктуації електричного поля. Другий доданок у (5.6) – це частинний розв’язок рівняння (5.5). Функція $W_\alpha(X, X'; t - t')$ також задовольняє однорідне рівняння (5.5), але з початковою умовою (1.92) $W_\alpha(X, X'; 0) = \delta(X - X')$.

Отже, ця величина є імовірністю переходу частинки з початкової фазової точки $X' \equiv (\mathbf{r}', \mathbf{v}')$ у точку $X \equiv (\mathbf{r}, \mathbf{v})$ впродовж часового інтервалу $\tau = t - t'$.

Розв’язок (5.6) дає рівняння Пуассона для флуктуацій потенціалу поля ($\delta \mathbf{E} = -\nabla \delta \varphi(\mathbf{r}, t)$) у плазмі

$$\Delta \delta \varphi(\mathbf{r}, t) + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2 n_{\alpha}}{m_{\alpha}} \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{v} \int dX' W_{\alpha}(X, X'; t - t') \times \\ \times \frac{\partial \delta \varphi(\mathbf{r}', t')}{\partial \mathbf{r}'} \frac{\partial f_{0\alpha}(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} = -4\pi \delta \rho^{(0)}(\mathbf{r}, t), \quad (5.7)$$

де

$$\delta \rho^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} \int d\mathbf{v} \delta f_{\alpha}^{(0)}(X, t). \quad (5.8)$$

Рівняння (5.7) є нічим іншим, як ланжевеним формулюванням задачі про великомасштабні флуктуації електричного поля в якому флуктуації густини заряду у системі без самоузгодженої взаємодії через флуктуаційне поле (5.8) грають роль ланжевених джерел.

Оскільки ми знаємо фізичну природу ланжевених джерел, то їх кореляційну функцію легко розрахувати. Враховуючи, що

$$\delta f_{\alpha}^{(0)}(X, t) = \int dX'' W_{\alpha}(X, X''; t - t') \delta f_{\alpha}^{(0)}(X'', t') \quad (5.9)$$

і припускаючи, що за відсутності самоузгодженої взаємодії

$$\langle \delta f_{\alpha}^{(0)}(X, t) \delta f_{\alpha'}^{(0)}(X', t) \rangle = n_{\alpha} \delta(X - X') f_{0\alpha}(X, t) \delta_{\alpha\alpha'}, \quad (5.10)$$

отримуємо

$$\begin{aligned} \langle \delta f_\alpha^{(0)}(X, t) \delta f_\alpha^{(0)}(X', t') \rangle = & n_\alpha f_{0\alpha}(X', t') W_\alpha(X, X'; t - t') \theta(t - t') + \\ & + n_\alpha f_{0\alpha}(X, t) W_\alpha(X', X; t' - t) \theta(t' - t), \end{aligned} \quad (5.11)$$

де $\theta(x)$ – це θ -функція, або

$$\begin{aligned} \langle \delta \rho^{(0)}(\mathbf{r}, t) \delta \rho^{(0)}(\mathbf{r}', t') \rangle = \\ = \sum_\alpha e_\alpha^2 n_\alpha \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' \left\{ f_{0\alpha}(X', t') W_\alpha(X, X'; t - t') \theta(t - t') + \right. \\ \left. + f_{0\alpha}(X, t) W_\alpha(X', X; t' - t) \theta(t' - t) \right\}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Таким чином, ми отримали рівняння Ланжевена для флуктуацій електричного поля (5.7) і кореляційну функцію для відповідних ланжевенів джерел (5.12).

У випадку, який розглядається (просторово однорідна і стаціонарна система), загальний розв'язок задачі може бути отриманий у $\mathbf{k}\omega$ -представленні (1.71)

$$\delta \varphi_{\mathbf{k}\omega} = \frac{4\pi \delta \rho_{\mathbf{k}\omega}^{(0)}}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, \omega)}. \quad (5.13)$$

Тому

$$\langle \delta \varphi^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{16\pi^2 \langle \delta \rho^{(0)2} \rangle_{\mathbf{k}\omega}}{k^4 |\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2}, \quad (5.14)$$

де функція діелектричного відгуку має вигляд (1.97)

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_\alpha \chi_\alpha(\mathbf{k}, \omega) = 1 - i \sum_\alpha \frac{4\pi e_\alpha^2 n_\alpha}{k^2 m_\alpha} \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \mathbf{k} \frac{\partial f_{0\alpha}(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'}, \quad (5.15)$$

$\chi_\alpha(\mathbf{k}, \omega)$ – діелектрична сприйнятливість.

$$\langle \delta \rho^{(0)2} \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \sum_\alpha e_\alpha^2 n_\alpha \langle \delta n_\alpha^{(0)2} \rangle = \sum_\alpha e_\alpha^2 n_\alpha \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' f_{0\alpha}(\mathbf{v}') W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') + \text{к.с.}, \quad (5.16)$$

де к.с. – комплексно спряжене, а $W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ визначається формулою (1.95).

Аналогічно,

$$\langle \delta n_e^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \left| \frac{1 + \chi_i(\mathbf{k}, \omega)}{\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)} \right|^2 \langle \delta n_e^{(0)2} \rangle_{\mathbf{k}\omega} + z_i^2 \left| \frac{\chi_e(\mathbf{k}, \omega)}{\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)} \right|^2 \langle \delta n_i^{(0)2} \rangle_{\mathbf{k}\omega}, \quad (5.17)$$

де $z_i = |e_i/e_e|$ зарядове число іонів.

Очевидно, що спектри флуктуацій (5.14) і (5.17) мають виражені максимуми в області прозорості поблизу власних частот поздовжніх коливань, які визначаються дисперсійним рівнянням (1.73)

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 0. \quad (5.18)$$

У такому разі, маємо

$$\langle \delta \varphi^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} \simeq \frac{8\pi^2 \tilde{T}(\mathbf{k}, \omega)}{k^2} \delta[\operatorname{Re} \varepsilon(\mathbf{k}, \omega)], \quad (5.19)$$

де $\tilde{T}(\mathbf{k}, \omega)$ – ефективна температура колективних флуктуацій, $\delta(x)$ – δ -функція.

$$\tilde{T}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{2\pi\omega}{k^2} \frac{\langle \delta \rho^{(0)2} \rangle_{\mathbf{k}\omega}}{\operatorname{Im} \varepsilon(\mathbf{k}, \omega)}. \quad (5.20)$$

Видно, що функція діелектричного відгуку (5.15) і кореляційні функції ланжевенівих джерел (5.16) виражаються у термінах незбуреної функції розподілу і Фур'є-компоненти ймовірності переходу. Слід відмітити, що за відсутності зовнішнього поля рівняння (5.17), (5.19) збігаються з відповідними рівняннями з робіт [224, 225] при нульовій амплітуді поля накачки.

Направимо вісь z вздовж зовнішнього електричного поля $\mathbf{E}^{\text{ext}} = (0, 0, E^{\text{ext}})$, тоді розв'язки рівняння для незбуреної функції розподілу $f_{0\alpha}(\mathbf{v})$ мають вигляд (4.17), (4.18), (4.19). Функція розподілу залежить від відношення дрейфової швидкості електронів $v_\alpha = e_\alpha E^{\text{ext}} / (m_\alpha \nu_\alpha)$ до теплової швидкості $v_{T\alpha} = \sqrt{T_\alpha / m_\alpha}$.

Слід зазначити, що у випадку слабоіонізованої плазми середня енергія, яку отримує електрон від електричного поля між двома послідовними

зіткненнями, дорівнює $\Delta\varepsilon_E = m_e v_e^2/2$. У стаціонарному стані електрон втрачає таку ж кількість енергії у зіткненнях $\Delta\varepsilon = \delta\varepsilon$, де $\varepsilon \approx m_e v_{Te}^2/2$ – це теплова енергія електрона, а δ – коефіцієнт. Отже, відношення дрейфової швидкості електрона до теплової $v_e/v_{T_e} \sim \delta$. У пружних зіткненнях $\delta = 2m_e/m_n$ і зростає у непружних зіткненнях (наприклад, частина енергії електрона може йти на збудження коливань у молекулі). Максимально можливе значення δ – це 1 (іонізація нейтральної частинки електроном) [230].

Нехай для частоти зіткнень плазмових частинок із нейтральними виконується співвідношення $\nu_\alpha = v_{T_\alpha} \sigma_\alpha n_n$, де σ_α – переріз розсіяння, тоді маємо

$$\frac{v_e}{v_{T_e}} = -\frac{T_i \sigma_i v_i}{T_e \sigma_e v_{T_i}}. \quad (5.21)$$

Відношення температури електронів до іонів $\tau = T_e/T_i \geq 1$, однак відношення перерізів $\sigma_i/\sigma_e > 1$, тому відношення дрейфової швидкості до теплової для електронів та іонів можуть бути одного порядку.

5.1.2 Іонно-звукові хвилі

Як вже зазначалося вище, резонансна структура спектрів флуктуацій визначається власною частотою відповідних хвиль, яка є розв'язком дисперсійного рівняння (5.18). Функція діелектричного відгуку $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$ для плазми із зіткненнями у зовнішньому електричному полі була знайдена у п. 4.2, формула (4.26). Нижче представлені результати числового розв'язання дисперсійного рівняння з функцією діелектричного відгуку (4.26) в області іонно-звукових хвиль. Такі дослідження досі привертають увагу в контексті проблеми нестійкості плазми, яка спричинена зовнішнім електричним полем [231]. Дисперсійне рівняння розв'язувалося відносно комплексної частоти (1.74) $\omega(\mathbf{k}) = \omega_{\mathbf{k}} + i\gamma_{\mathbf{k}}$ при заданому значенні хвильового вектора \mathbf{k} . Всі обчислення були виконані для водневої плазми ($m_i/m_e = 1836$). Хвильовий вектор нормований на $k_{Di} = \sqrt{4\pi e_i^2 n_i / T_i}$.

Спочатку будуть наведені результати, отримані в роботі [13] для спектру іонно-звукових хвиль у плазмі без зовнішнього електричного поля,

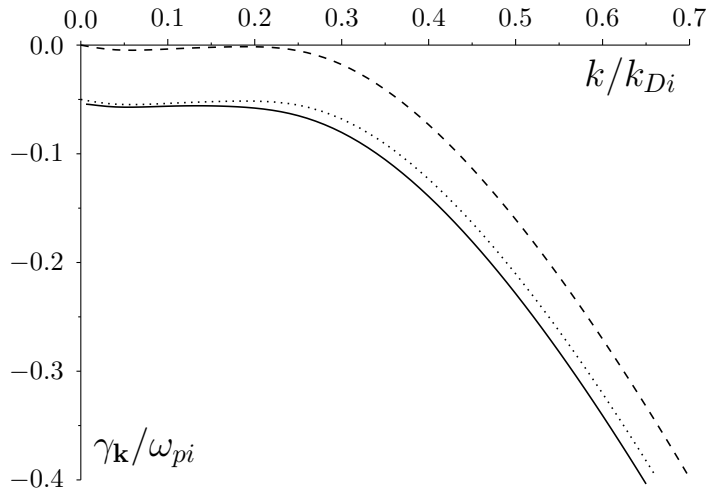


Рис. 5.1 Декремент згасання іонно-звукових хвиль у неізотермічній ($\tau = 100$) водневій плазмі, отриманий в результаті числового розв'язку дисперсійного рівняння $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 0$ відносно комплексної частоти $\omega(\mathbf{k}) = \omega_{\mathbf{k}} + i\gamma_{\mathbf{k}}$: суцільна лінія – розв'язок з функцією діелектричного відгуку (1.139), штрихова лінія – (1.123), точкова лінія – сума штрихової лінії та $-\nu_i/2$.

тобто числовий розв'язок дисперсійного рівняння $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 0$ з функцією діелектричного відгуку (1.139). Обчислення показують, що у неізотермічній ($\tau = 100$) плазмі із зіткненнями дисперсійна крива майже збігається з кривою для беззіткненої плазми, яка наведена на рис. 1.4, а от декремент згасання у плазмі із зіткненнями (суцільна лінія на рис. 5.1) приблизно на $\nu_i/2$ більший за модулем декременту беззіткненої плазми (штрихова лінія на рис. 5.1), що узгоджується з формулою (1.142).

У випадку ізотермічної плазми числовий розв'язок дисперсійного рівняння з функцією діелектричного відгуку (1.139) має наступні особливості (рис. 5.2). Існує мінімальне, відмінне від нуля, значення хвильового числа, нижче якого власна частота дорівнює нулю. Ця особливість спектру буде більш детально обговорена у п. 5.2.4. Крім того, декремент згасання зростає за модулем порівняно із беззіткненою плазмою більше ніж на $\nu_i/2$.

Перейдемо до результатів для плазми у зовнішньому електричному полі. Функція діелектричного відгуку (4.26) залежить від дрейфових швидкостей плазмових частинок, які пов'язані співвідношенням (5.21). В

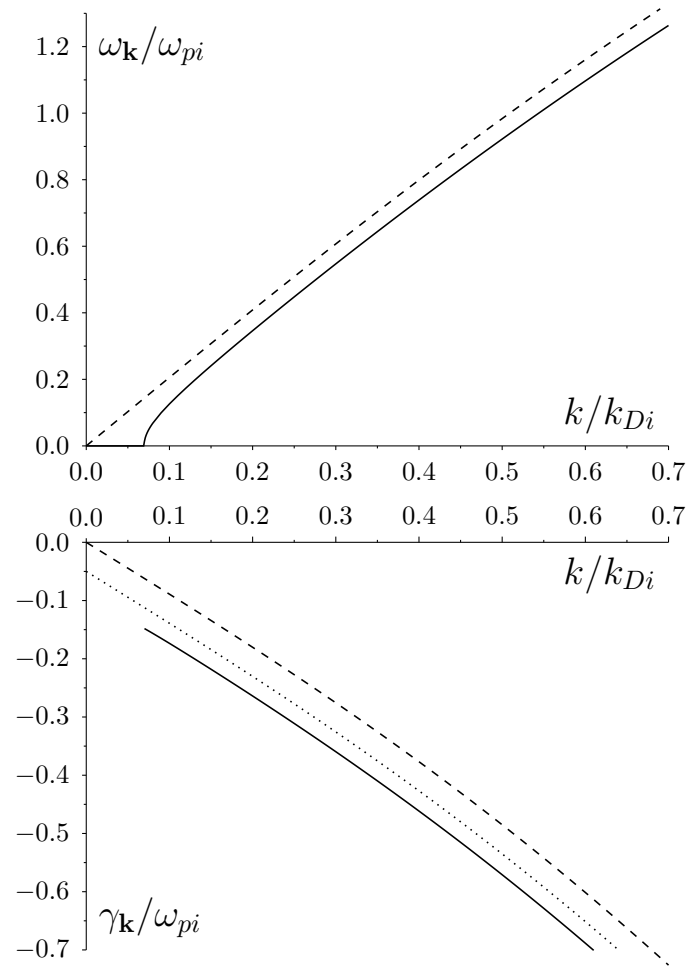


Рис. 5.2 Числовий розв'язок дисперсійного рівняння $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 0$ відносно комплексної частоти $\omega(\mathbf{k}) = \omega_{\mathbf{k}} + i\gamma_{\mathbf{k}}$ в області іонно-звукових хвиль з функцією діелектричного відгуку (1.139) (суцільні лінії) і (1.123) (штрихові лінії), точкова лінія – сума штрихової лінії та $-\nu_i/2$ ($T_e/T_i = 1$, $m_i/m_e = 1836$).

обчисленнях відношення перерізів становило $\sigma_i/\sigma_e = 0.25$ і для заданого значення дрейфової швидкості іонів і відношення температур T_e/T_i , дрейфова швидкість електронів знаходилась з (5.21). Оскільки вісь z направлена вздовж електричного поля, то дрейфова швидкість іонів є додатною, а електронів – від'ємною. Проекція хвильового вектора k_z , яка входить у вираз для функції діелектричного відгуку (4.26), задає напрямок поширення хвилі. Зокрема, випадок $k_z = 0$ (хвиля поширюється перпендикулярно до поля) відповідає випадку відсутності зовнішнього поля. У наших обчисленнях ми розглядали $k_z = -k$, тобто поширення хвилі проти поля.

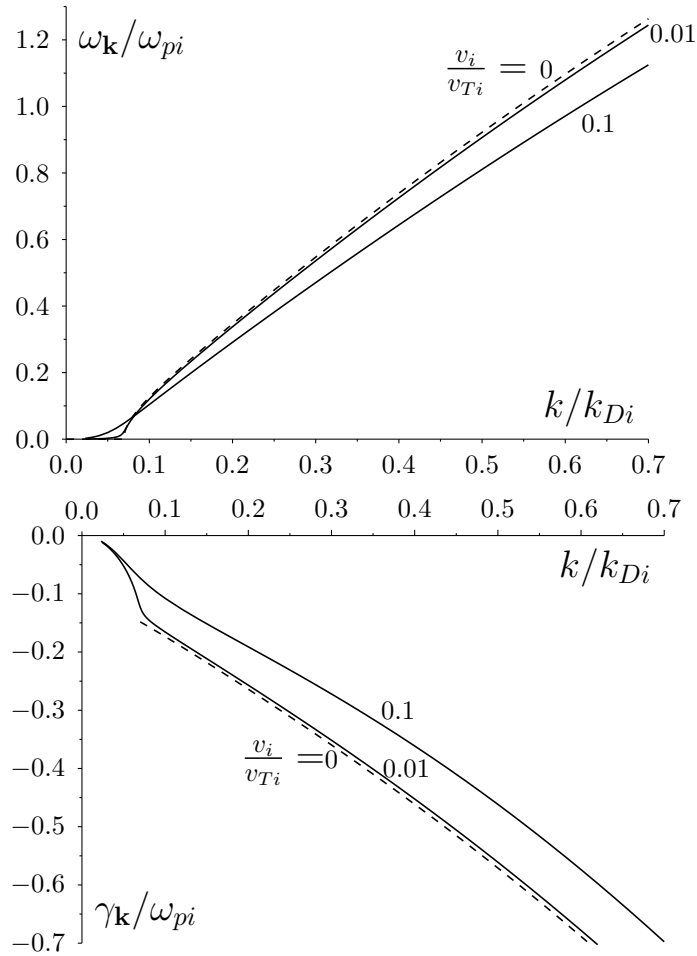


Рис. 5.3 Числовий розв'язок дисперсійного рівняння $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 0$ відносно комплексної частоти $\omega(\mathbf{k}) = \omega_{\mathbf{k}} + i\gamma_{\mathbf{k}}$ в області іонно-звукових хвиль з функцією діелектричного відгуку (4.26) (суцільні лінії) для різних значень дрейфової швидкості іонів ($v_i = 0.01; 0.1v_{Ti}$) і (1.139) (штрихові лінії) ($T_e/T_i = 1$, $m_i/m_e = 1836$, $\nu_i = 0.1\omega_{pi}$).

Результати числового розв'язання дисперсійного рівняння для іонно-звукових хвиль у водневій плазмі без зовнішнього електричного поля виконані в роботах [9, 13]. Залежність власної частоти і декременту згасання від хвильового вектора для випадку плазми без зіткнень наведена на рис. 1.4. Вплив зіткнень ілюструють рисунки 5.1 та 5.2.

Типову залежність власної частоти і декременту згасання іонно-звукових хвиль в ізотермічній плазмі, що поширюються проти поля ($k_z < 0$), для різних значень дрейфової швидкості іонів показано на рис. 5.3. Як бачимо, наявність електричного поля досить суттєво модифікує як дійсну, так і

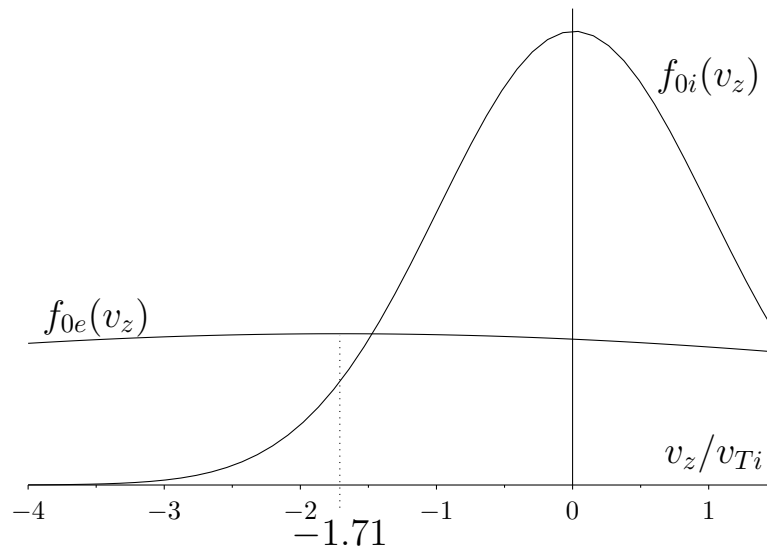


Рис. 5.4 Схематичне зображення функцій розподілу електронів $f_{0e}(v_z)$ та іонів $f_{0i}(v_z)$ (4.19) у зіткненій плазмі у зовнішньому постійному електричному полі.

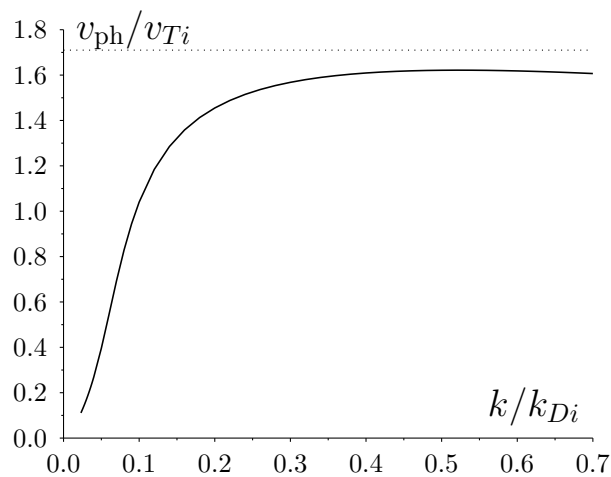


Рис. 5.5 Залежність фазової швидкості іонно-звукової хвилі в ізотермічній зіткненій плазмі $\nu_i = 0.1\omega_{pi}$ у зовнішньому постійному електричному полі ($v_i = 0.01v_{Ti}$), штрихова лінія відповідає швидкості $-1.71v_{Ti}$.

уявну частину розв'язку дисперсійного рівняння.

За наявності електричного поля максимуми електронного та іонного розподілів за швидкостями не збігаються (рис. 5.4). Наприклад, у випадку $v_i = 0.01v_{Ti}$ максимум іонного розподілу знаходиться при $v \simeq 0.01v_{Ti}$, а електронного – при $v \simeq -1.7v_{Ti}$. Зменшення згасання, що спостерігається у

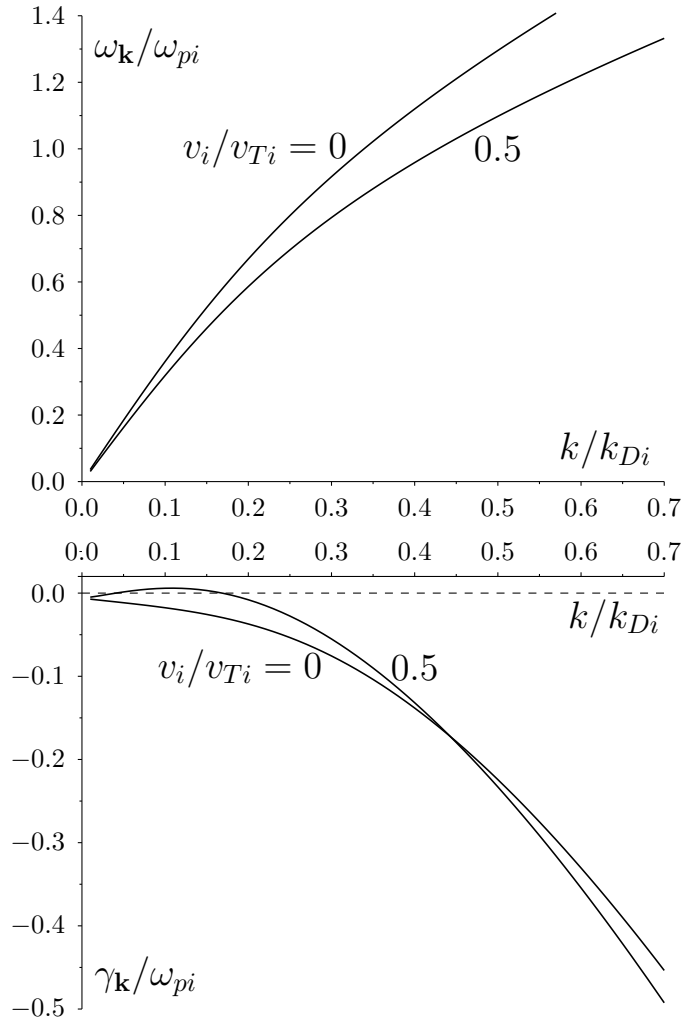


Рис. 5.6 Числовий розв'язок дисперсійного рівняння $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 0$ відносно комплексної частоти $\omega(\mathbf{k}) = \omega_{\mathbf{k}} + i\gamma_{\mathbf{k}}$ в області іонно-звукових хвиль з функцією діелектричного відгуку (4.26) ($T_e/T_i = 10$, $m_i/m_e = 1836$, $\nu_i = 0.01\omega_{pi}$).

плазмі з дрейфом, можна зрозуміти, розглянувши залежність фазової швидкості хвилі від хвильового числа (рис. 5.5). В області $k \sim 0.3 - 0.7k_{Di}$ фазова швидкість є близькою до швидкості, за якої спостерігається максимум розподілу електронів, отже, кількість електронів, які отримують і забирають енергію від хвилі, майже однакова і хвиля згасає на іонах. При $k \sim 0.2k_{Di}$ фазова швидкість суттєво зменшується і взаємодія з електронами підсилює хвилю. Таким чином, при $k \lesssim 0.2k_{Di}$ має місце конкуренція між підсиленням хвилі електронами та згасанням на іонах і в результаті розсіювання

іонів нейтральними частинками.

Подальше збільшення дрейфової швидкості призводить до появи розв'язків з додатною уявною частиною, тобто до дрейфової нестійкості (рис. 5.6). А от у випадку швидкоосцилюючого зовнішнього електричного поля може виникати параметрична нестійкість [222–225]. Природно, що в обох випадках зіткнення частинок призводять до зростання порогу нестійкості і впливають на область нестійкості.

Також були виконані обчислення для додатних значень k_z , які показали, що у випадку поширення хвилі проти дрейфу іонів, нестійкість не виникає, а згасання навпаки збільшується. Це відбувається, тому що фазова швидкість хвилі потрапляє у область де похідна за швидкістю від функцій розподілів як іонів, так і електронів є від'ємною.

5.1.3 Критичні флуктуації у плазмі за наявності зовнішнього електричного поля

У попередньому пункті було показано, що наявність зовнішнього електричного поля в слабоіонізованій плазмі призводить до зміни функцій розподілу електронів та іонів за швидкостями (4.19), що в свою чергу може призводити до нестійкості іонно-звукових хвиль, а отже, в такій плазмі матимуть місце критичні флуктуації, інтенсивність яких буде необмежено наростати. Запропонований у цьому розділі підхід до розгляду великомасштабних флуктуацій і отримані загальні формули дають змогу виконати кількісний опис таких критичних флуктуацій. Для цього потрібно скористатися загальною формулою (5.17), а в ролі $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$ та $\chi_\alpha(\mathbf{k}, \omega)$ взяти величини, розраховані з урахуванням явного вигляду ймовірності переходу (4.21)–(4.25) та одночастинкової функції розподілу (4.17)–(4.19) для плазми в зовнішньому електричному полі. Явний вигляд $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$ і $\chi_\alpha(\mathbf{k}, \omega)$ у цьому випадку задається формулами (4.26), (4.27).

Щодо кореляційних функцій ланжевенових джерел $\langle \delta n_\alpha^{(0)2} \rangle_{\mathbf{k}\omega}$, то їх слід розраховувати на основі (5.16) з використанням (4.21)–(4.25) і

(4.17)–(4.19). Результат розрахунку $\langle \delta n_\alpha^{(0)2} \rangle_{\mathbf{k}\omega}$ має вигляд

$$\langle \delta n_\alpha^{(0)2} \rangle_{\mathbf{k}\omega} = 2n_\alpha \text{Im} \frac{1}{G_\alpha(\mathbf{k}, \omega)} \int_0^\infty dy \frac{e^{-y}}{\omega - k_z v_\alpha y + i\nu_\alpha} \left[W \left(\frac{\omega + i\nu_\alpha - k_z v_\alpha y}{v_{T\alpha} \kappa_\alpha(\mathbf{k})} \right) - 1 \right]. \quad (5.22)$$

Резонансна структура спектру при цьому визначається розв'язками дисперсійного рівняння $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 0$ (5.18) з функцією діелектричного відгуку (4.26). Якісний опис спектрів при цьому можна зробити на основі апроксимації:

$$\langle \delta n_e^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} \simeq \langle \delta n_e^2 \rangle_{\mathbf{k}} \frac{\gamma_{\mathbf{k}}}{(\omega - \omega_{\mathbf{k}})^2 + \gamma_{\mathbf{k}}^2}, \quad (5.23)$$

де

$$\langle \delta n_e^2 \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{\langle \delta n_e^{(0)2} \rangle_{\mathbf{k}\omega} + \langle \delta n_i^{(0)2} \rangle_{\mathbf{k}\omega}}{\gamma_{\mathbf{k}} \frac{\partial \text{Re} \varepsilon(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega}} \Big|_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}. \quad (5.24)$$

Далі наведені результати розрахунків флуктуаційних спектрів на основі (5.17), (4.26), (4.27), (5.22). Безрозмірними параметрами, які задавались в обчисленнях, є частота зіткнень іонів ν_i/ω_{pi} , дрейфова швидкість іонів v_i/v_{Ti} та параметр неізотермічності T_e/T_i . Дрейфова швидкість електронів визначалась із співвідношення (5.21), а всі обчислення проводились для водневої плазми ($m_i/m_e = 1836$).

Для того, щоб послідовно вивчити вплив зіткнень і зовнішнього електричного поля, розпочнемо із аналізу випадку плазми без зіткнень і електричного поля (штрихові лінії на рис. 5.7 і 5.8). В цьому разі спектри суттєво залежать від відношення температур іонів та електронів. У випадку ізотермічної плазми іонно-звукові хвилі сильно згасають (1.136) і резонансні максимуми виражені слабо (див. рис. 5.7). Відомо, що в ізотермічній плазмі, флуктуації в області $k \ll k_{De}$ створюються випадковим рухом екранованих іонів. Слабковиражені максимуми відповідають низькочастотним власним збудженням, які сильно згасають. А от у неізотермічній плазмі іонно-звукові хвилі згасають слабше і резонансна структура флуктуаційних

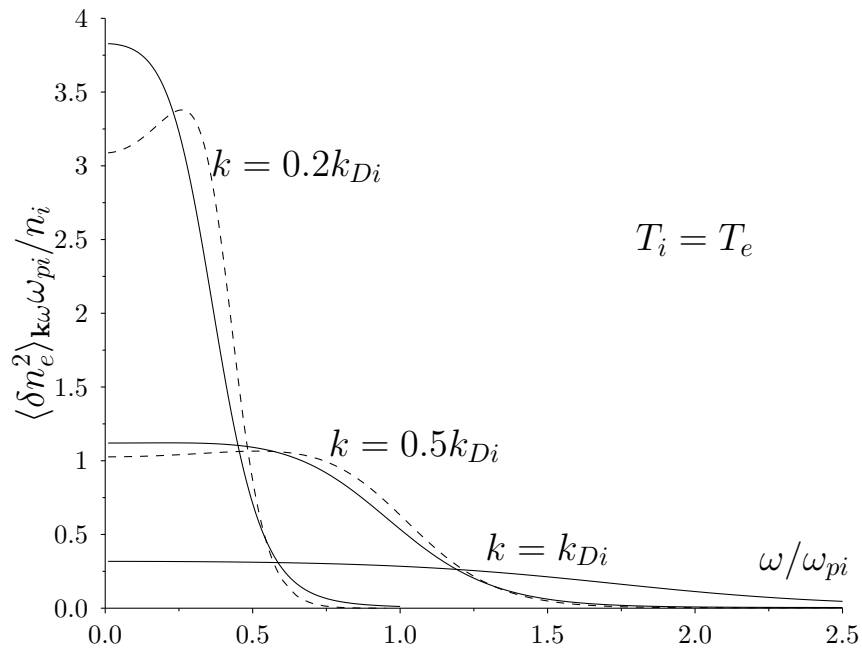


Рис. 5.7 Спектри флуктуацій густини електронів $\langle \delta n_e^2 \rangle_{k\omega} \omega_{pi} / n_i$ в ізотермічній зіткненній плазмі $\nu_i = 0.1\omega_{pi}$, штрихова лінія відповідає беззіткненній плазмі.

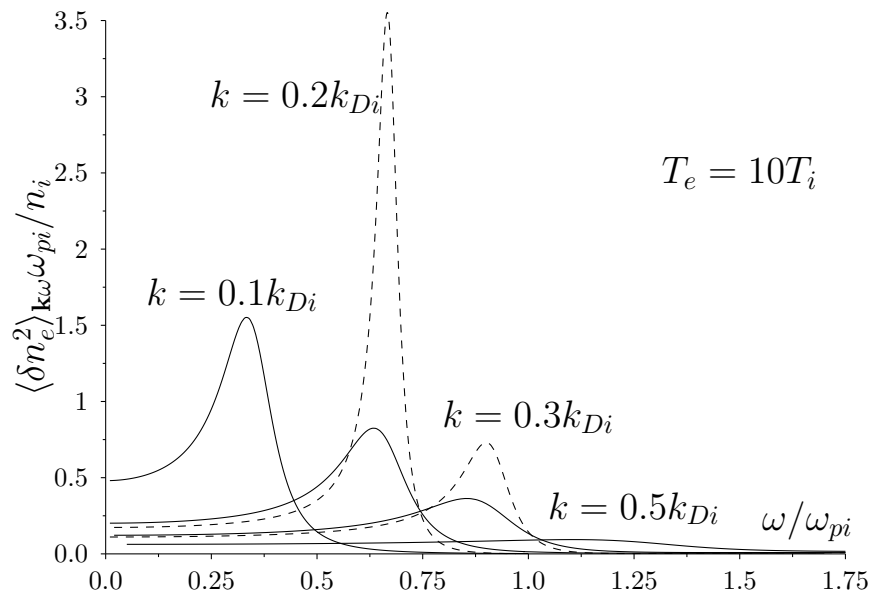


Рис. 5.8 Спектри флуктуацій густини електронів $\langle \delta n_e^2 \rangle_{k\omega} \omega_{pi} / n_i$ у неізотермічній $T_e = 10T_i$ зіткненній плазмі $\nu_i = 0.1\omega_{pi}$, штрихова лінія відповідає беззіткненній плазмі.

спектрів добре проявляється (див. рис. 5.8). Відповідно до рівняння (5.23), положення максимумів визначаються власними частотами хвилі.

Перейдемо до розгляду спектрів флуктуацій у плазмі із зіткненнями. Для досить великого значення частоти зіткнень $\nu_i = 0.1\omega_{pi}$, їхній вплив на інтенсивність флуктуацій в ізотермічній плазмі (суцільні лінії на рис. 5.7) не суттєвий, а от у неізотермічній плазмі (рис. 5.8) зіткнення призводять до помітного уширення резонансних максимумів. Згідно з (5.23), напівширина флуктуаційного максимуму визначається декрементом згасання γ_k . Це узгоджується з результатами обчислень для різних значень частоти зіткнень.

Очевидно, що вплив зовнішнього поля найяскравіше буде проявлятися в резонансних областях, але, оскільки, як було показано в п. 5.1.2, наявність поля призводить до зменшення декременту, то відповідні резонанси з'являються навіть у випадку ізотермічної плазми. Цей ефект наочно ілюструється результатами обчислень, представлених на рис. 5.9. У випадку неізотермічної плазми ефект впливу зовнішнього поля ще помітніший (рис. 5.10). В останньому випадку власні частоти резонансних флуктуацій в підкритичному режимі суттєво залежать від значень зовнішнього поля (дрейфової швидкості) (рис. 5.11). При досягненні полем критичного значення ($\gamma_k \rightarrow 0$) інтенсивність резонансної лінії необмежено наростає у повній відповідності з оцінкою (5.23).

5.1.4 Висновки

Розвинуто теорію великомасштабних флуктуацій для слабоіонізованої плазми у зовнішньому постійному електричному полі, яка враховує вплив електричного поля на розподіл плазмових частинок за швидкостями та на функцію діелектричного відгуку.

Виконано числове розв'язання дисперсійного рівняння в області іонно-звукових хвиль. Вивчено залежність власної частоти і декременту згасання хвиль від електричного поля. Показано, що поле призводить до немонотонної залежності декременту згасання від хвильового вектора, а саме

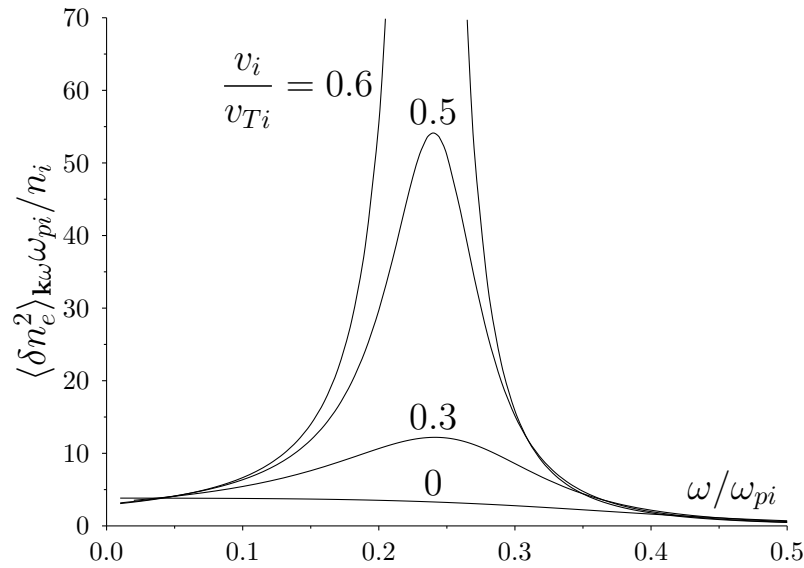


Рис. 5.9 Спектри флуктуацій густини електронів $\langle \delta n_e^2 \rangle_{k\omega} \omega_{pi} / n_i$ в ізотермічній водневій зіткненній плазмі $\nu_i = 0.1\omega_{pi}$ у зовнішньому електричному полі, $k_z = -0.2k_{Di}$, $k = |k_z|$.

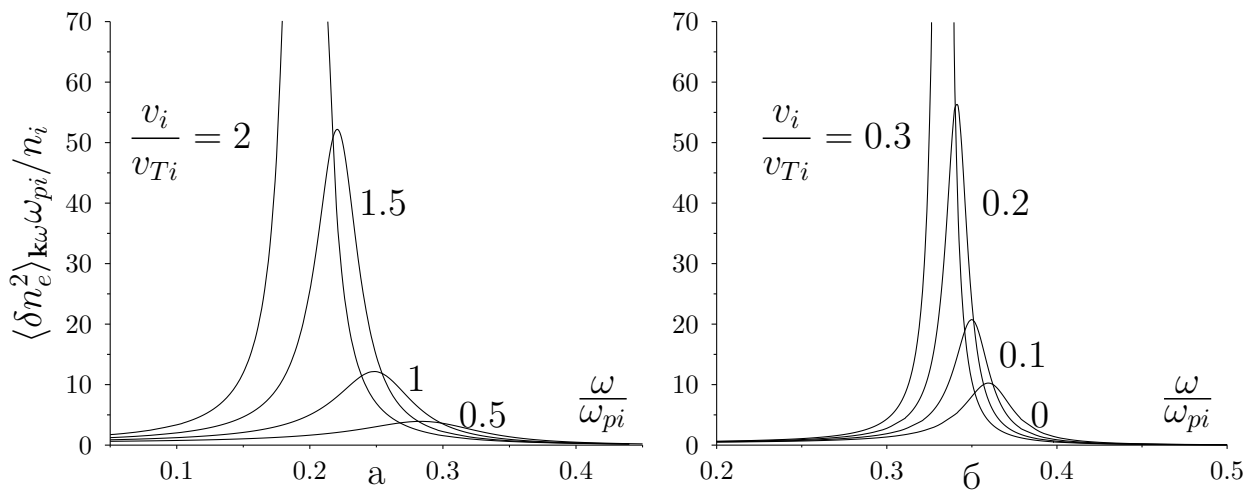


Рис. 5.10 Спектри флуктуацій густини електронів $\langle \delta n_e^2 \rangle_{k\omega} \omega_{pi} / n_i$ в неізотермічній $T_e = 10T_i$ водневій зіткненній плазмі у зовнішньому електричному полі, $k_z = -0.1k_{Di}$, $k = |k_z|$; а - $\nu_i = 0.1\omega_{pi}$, б - $\nu_i = 0.01\omega_{pi}$.

заявляється область де декремент згасання стає додатнім, тобто амплітуда хвилі зростає.

Представлені результати розрахунку спектрів флуктуації електронної

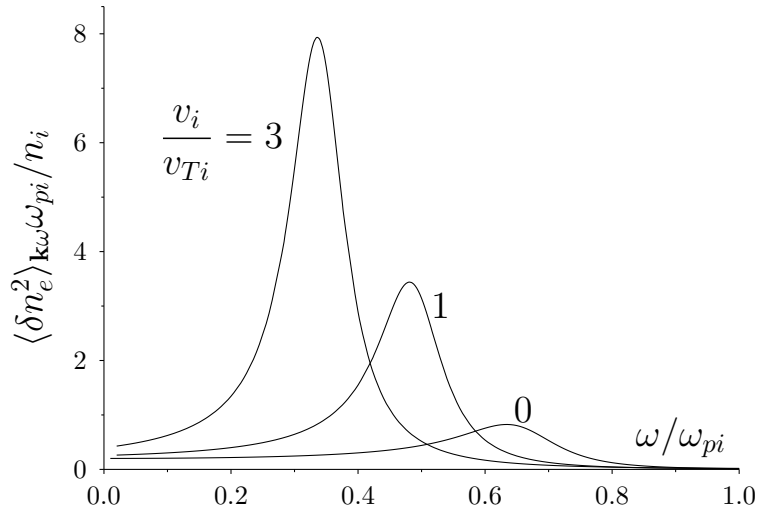


Рис. 5.11 Спектри флуктуацій густини електронів $\langle \delta n_e^2 \rangle_{k\omega} \omega_{pi} / n_i$ в неізотермічній $T_i = 0.1T_e$ водневій зіткненній плазмі $\nu_i = 0.1\omega_{pi}$ у зовнішньому електричному полі, $k_z = -0.2k_{Di}$, $k = |k_z|$.

густини. Підтверджено, що резонансна структура таких спектрів визначається власною частотою і декрементом згасання хвиль, які знайдені із урахуванням впливу зовнішнього електричного поля. Виявлено, що електричне поле призводить до резонансної поведінки спектру флуктуацій навіть в ізотермічній плазмі з частими зіткненнями. При розрахунку порогу нестійкості важливо враховувати зіткнення частинок, подібно до випадку параметричної нестійкості у зовнішньому високочастотному електричному полі.

5.2 Вплив флуктуацій заряду порошинок

Є дві причини для флуктуацій заряду порошинок [49, 232]. Перша – це дискретна і випадкова природа процесу заряджання. Такий тип флуктуацій заряду є важливим для дрібних порошинок [232] і для мікроскопічного опису електромагнітних флуктуацій у запорошеній плазмі [95]. Просторові і часові варіації параметрів плазми, які впливають на процеси заряджання, є другою причиною для флуктуацій заряду порошинок і саме вони розглядаються у цьому підрозділі. У такому випадку процес заряджання вважається

неперервним. Заряд порошинки стає залежною від часу величиною і її необхідно розглядати як динамічну змінну, яка самоузгоджено пов'язана з іншими динамічними змінними плазми, такими як густина, потенціал та інші [233].

Важливість флуктуацій заряду, як джерела згасання осциляцій у астрофізичній запорошеній плазмі, вперше було відмічено у роботах [234, 235]. Пізніше, було показано, що флуктуації заряду порошинок можуть впливати на поширення хвиль у запорошеній плазмі [233, 236, 237].

Існування іонно-звукових хвиль у запорошеній ізотермічній плазмі без зіткнень вперше було передбачено теоретично у роботі [238], пізніше такі хвилі були виявлені експериментально [239, 240] в тому числі у неоднорідній плазмі [241]. Властивості іонно-звукових хвиль із урахуванням флуктуацій заряду порошинок досліджувалися переважно на основі гідродинамічного підходу [242–247]. Кінетичний опис іонно-звукових хвиль також використовувався у декількох роботах [248–251], але лише для плазми без зіткнень. Таким чином, дослідження діелектричного відгуку і поширення іонно-звукових хвиль у плазмі із зіткненнями із урахуванням самоузгодженого заряджання порошинок досі залишається відкритою задачею.

Електромагнітні флуктуації є важливим, а нерідко і єдиним джерелом інформації про характеристики середовища. Вони тісно пов'язані з електромагнітними, кінетичними і термодинамічними властивостями багаточастинкових системи. Зокрема, кореляційні функції мікроскопічної густини частинок визначають статичні і динамічні формфактори системи і, таким чином, спектр розсіяння плазмою електромагнітних хвиль [82, 83, 227]. Кінетичні коефіцієнти в рівнянні Фоккера-Планка [82, 227, 252] та інтеграли зіткнень в кінетичних рівняннях також визначаються флуктуаціями мікроскопічної фазової густини. Очевидно також, що саме електромагнітні флуктуаційні поля відіграють роль ланжевенових джерел броунівського руху заряджених частинок у плазмі [83, 85]. Отже, розрахунок флуктуаційних

полів у запоорошеній плазмі є важливим для опису дифузії порошинок, інтенсивність якої значною мірою визначає процеси формування і плавлення плазмових кристалів [97–99].

Теорія флуктуацій в звичайній плазмі є добре розвинутою [13, 86, 253–255]. Щодо її узагальнення на випадок запоорошеної плазми, то на сьогодні ще залишається відкритою низка питань. Для розв'язання цієї задачі, зазвичай використовують один з двох підходів. Перший базується на описі динаміки заряджання порошинок з допомогою рівнянь, які містять перерізи заряджання [237, 256–258]. Недоліком такого підходу є те, що він потребує феноменологічного опису зіткнень плазмових частинок із порошинками (як пружних, так і непружних). А у разі необхідності послідовного опису колективної взаємодії між порошинками, цей підхід додатково потребує розрахунку сил «бомбардування» та «затінення», які виникають через розсіяння і поглинання плазмових частинок порошиною у присутності інших порошинок. У другому підході заряд порошинки розглядається як незалежна змінна, тому функція розподілу порошинок залежить не лише від координати і швидкості, а і від заряду порошинки [95, 193, 259–264]. Такий підхід забезпечує можливість розробити послідовну кінетичну теорію повністю іонізованої запоорошеної плазми, а також, зокрема, знайти інтеграли зіткнень для всіх сортів частинок. Однак, такий підхід стикається із серйозними проблемами, як стосуються узагальнення на випадок плазми із зіткненнями. Основною проблемою є те, що величини, які описують динаміку заряджання порошинок, виражаються у термінах перерізів заряджання, а вони відомі лише для плазми без зіткнень. Наближені феноменологічні вирази для таких перерізів у плазмі із зіткненнями (див. наприклад роботу [263] і посилання у ній) мають обмежену область застосування. Взагалі, така ж проблема виникає і у першому підході, але у ньому можна використовувати напівфеноменологічні вирази для струмів заряджання [152, 265], які враховують вплив зіткнень і добре узгоджуються із результатами експериментів і обчислень [148] у широкому діапазоні частот зіткнень і параметрів

плазми. Це означає, що ми можемо уникнути проблеми знаходження перерізів у разі, якщо рівняння для динаміки заряджання будуть сформульовані у термінах струмів заряджання. Оскільки це можна легко зробити у першому підході, саме він виглядає більш придатним для узагальнення теорії електромагнітних флуктуацій на випадок плазми із зіткненнями.

Згадана вище проблема із знаходженням перерізів заряджання порошинок для плазми із зіткненнями є причиною, чому самоузгоджений розрахунок спектрів флуктуацій проводився або для беззіткненої плазми [237, 256, 257, 260], або для слабкозіткненої [261–264, 266].

Метою наших робіт [1–3, 24], результати яких представлені у цьому підрозділу, було дати послідовне лінійне кінетичне описання електромагнітних процесів у слабоіонізованій плазмі із зіткненнями із урахуванням поглинання електронів та іонів порошинками, а також флуктуацій заряду порошинок. Ключовим моментом є те, що збурення електричного поля впливають на струми заряджання i , таким чином, призводять до флуктуацій заряду порошинок. Такий самоузгоджений вплив дає додатковий внесок у діелектричний відгук заповненої плазми, який у свою чергу визначає дисперсію і згасання хвиль.

5.2.1 Постановка задачі

Послідовне описання електромагнітних флуктуацій у заповненій плазмі потребує урахування не лише флуктуацій густини заряду, які пов'язані з електронами та іонами

$$\delta\rho_\alpha(\mathbf{r}, t) = e_\alpha\delta n_\alpha(\mathbf{r}, t), \quad \alpha = e, i, \quad (5.25)$$

але і з флуктуаціями густини заряду порошинок, які можна розділити на дві складових. Перша пов'язана із флуктуаціями концентрації порошинок, а друга – із флуктуаціями їхніх зарядів

$$\delta\rho_g(\mathbf{r}, t) = e_g\delta n_g(\mathbf{r}, t) + n_g\delta e_g(\mathbf{r}, t), \quad (5.26)$$

де e_g – стаціонарний заряд порошинки, n_g – середня концентрація порошинок. Зауважимо, (5.26) означає, що ми будемо розглядати флуктуаційні збурення, які задовольняють умову $n_g R^3 \gg 1$. Тут, R – характерний просторовий масштаб збурення.

Флуктуації густини заряджених частинок мають вигляд

$$\delta n_\alpha(\mathbf{r}, t) = n_\alpha \int d\mathbf{v} \delta f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad \alpha = e, i, g, \quad (5.27)$$

де $\delta f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ – флуктуації функції розподілу відповідного сорту частинок. У випадку електронів та іонів вони можуть бути знайдені так само як і у звичайній плазмі (див. п. 5.1.1 або [13]), але із урахуванням зіткнень електронів та іонів із порошинками, окрім зіткнень із нейтралами.

Флуктуації функцій розподілів електронів та іонів задовольняють рівняння (5.5)

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right\} \delta f_\alpha(X, t) + \nu_\alpha \left\{ \delta f_\alpha(X, t) - f_{0\alpha}(\mathbf{v}) \int d\mathbf{v} \delta f_\alpha(X, t) \right\} = \\ = - \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial \delta \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f_{0\alpha}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}, \quad (5.28)$$

де $\delta \varphi(\mathbf{r}, t)$ – флуктуації електростатичного потенціалу, $f_{0\alpha}(\mathbf{v})$ – незбурена функція розподілу (зазвичай це розподіл Максвелла). Тут $\nu_\alpha = \nu_{\alpha n} + \nu_{\alpha g}$, де $\nu_{\alpha n}$, $\nu_{\alpha g}$ – ефективні частоти зіткнень частинок сорту α з нейтралами і порошинками.

Використання рівняння (5.28) означає, що ми робимо наступне припущення. Електрони та іони, які поглинаються порошиною, рекомбінують на її поверхні і формують нейтральний атом (молекулу) газу, які потім випаровуються в оточуючу плазму і можуть бути знову іонізовані зовнішніми джерелами іонізації. Таке припущення дозволяє використовувати інтеграл зіткнень БГК (1.110) у рівнянні (5.28).

5.2.2 Рівняння для динаміки заряджання порошинок

Заряд порошинки визначається електронним та іонним струмами заряджання

$$\frac{\partial e_g(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \sum_{\alpha=e,i} I_{\alpha}(n_{\alpha}(\mathbf{r}, t), e_g(\mathbf{r}, t)). \quad (5.29)$$

З метою спрощення опису ми зробили припущення, що струми заряджання порошинки залежить лише від густини плазмових частинок, їхньої температури та заряду порошинки. Це припущення є виправданим у випадку частих зіткнень плазмових частинок із нейтралами. І хоча для нечастих зіткнень таке припущення не є достатньо обґрунтованим, але ми будемо ним послуговуватися, а міру наближення зможемо визначити, порівнявши результати отримані в рамках цього наближення, з відповідними результатами кінетичних розрахунків.

Для малих флуктуацій концентрації $n_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = n_{\alpha} + \delta n_{\alpha}(\mathbf{r}, t)$ відносно середнього значення n_{α} і малих флуктуацій заряду порошинки $e_g(\mathbf{r}, t) = e_g + \delta e_g(\mathbf{r}, t)$ відносно його середнього значення, яке визначається умовою рівності нулю повного струму заряджання

$$I_e(n_e, e_g) + I_i(n_i, e_g) = 0, \quad (5.30)$$

із (5.29) отримуємо рівняння для $\delta e_g(\mathbf{r}, t)$

$$\frac{\partial \delta e_g(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nu_{\text{ch}} \delta e_g(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha=e,i} \frac{\partial I_{\alpha}(n_{\alpha}, e_g)}{\partial n_{\alpha}} \delta n_{\alpha}(\mathbf{r}, t), \quad (5.31)$$

де частота заряджання ν_{ch} визначається формулою

$$\nu_{\text{ch}} = \sum_{\alpha=e,i} \nu_{\text{ch}}^{\alpha}, \quad \nu_{\text{ch}}^{\alpha} = -\frac{\partial I_{\alpha}(n_{\alpha}, e_g)}{\partial e_g}. \quad (5.32)$$

Тепер нам необхідні явні вирази для струмів заряджання $I_{\alpha}(n_{\alpha}, e_g)$ у плазмі із зіткненнями. Оскільки у газорозрядній плазмі довжина вільного

пробігу електронів l_e зазвичай на два порядки більша за довжину вільного пробігу іонів l_i , то для електронного струму ми використовуємо вираз (1.11)

$$I_e = e_e n_e \sqrt{8\pi a^2 \nu_{Te}} \exp(-\phi_s), \quad (5.33)$$

який отриманий у наближенні обмеженого орбітального руху, тобто розглядається випадок $l_e \gg \lambda_D, a$.

Для іонного струму заряджання ми використовуємо інтерполяційну формулу, яка була запропонована в роботі [152] і з високою точністю відтворює результати кінетичних обчислень [148]

$$I_i = e_i n_i \sqrt{8\pi a^2 \nu_{Ti}} \frac{I^{WC} I^{SC}}{I^{WC} + I^{SC}}, \quad (5.34)$$

де

$$I^{WC} = 1 + \phi_s \tau + 0.1(\phi_s \tau)^2 \lambda_D / l_i, \quad (5.35)$$

$$I^{SC} = \sqrt{2\pi} \phi_s \tau l_i / a, \quad \tau = T_e / T_i. \quad (5.36)$$

Тут $\phi_s = e_e \varphi_s / T_e$ – безрозмірний поверхневий потенціал, φ_s – поверхневий потенціал, a – радіус порошинки, ν_i частота зіткнень іонів з іншими частинками. WC – скорочення від weakly collisional (слабкозіткненна), SC – strongly collisional (сильнозіткненна).

Потенціал поблизу порошинку у плазмі із зіткненнями можна описати потенціалом ДЛФО (2.10)

$$\varphi(r) = \frac{e_g \exp(-k_D(r - a))}{r (1 + a k_D)}, \quad (5.37)$$

тоді

$$\phi_s = \frac{e_e e_g}{a T_e (1 + a k_D)}. \quad (5.38)$$

Просторово-часове перетворення Фур'є (1.27) рівняння для флуктуацій заряду порошинки (5.26) разом з (5.31) дає

$$\delta\rho_{g\mathbf{k}\omega} = e_g\delta n_{g\mathbf{k}\omega} + \frac{in_g}{\omega + i\nu_{\text{ch}}} \sum_{\alpha=e,i} \frac{I_\alpha}{n_\alpha} \delta n_{\alpha\mathbf{k}\omega}. \quad (5.39)$$

У (5.39) було враховано, що згідно з (5.33) і (5.34)

$$\frac{\partial I_\alpha(n_\alpha, e_g)}{\partial n_\alpha} = \frac{I_\alpha}{n_\alpha}. \quad (5.40)$$

Підставляємо (5.6) у (5.27) і після перетворення Фур'є отримуємо

$$\begin{aligned} \delta n_{\alpha\mathbf{k}\omega} &= n_\alpha \int d\mathbf{v} \delta f_{\alpha\mathbf{k}\omega}^{(0)}(\mathbf{v}) + i \frac{e_\alpha n_\alpha}{m_\alpha} \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \mathbf{k} \frac{\partial f_{0\alpha}(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} \delta\varphi_{\mathbf{k}\omega} = \\ &= \delta n_{\alpha\mathbf{k}\omega}^{(0)} - \frac{k^2}{4\pi e_\alpha} \chi_\alpha(\mathbf{k}, \omega) \delta\varphi_{\mathbf{k}\omega}, \quad \alpha = e, i, g, \end{aligned} \quad (5.41)$$

де $\chi_\alpha(\mathbf{k}, \omega)$ – діелектрична сприйнятливість (5.15).

Далі підставляємо формулу (5.41) з $\alpha = g$ у перший доданок виразу (5.39) і формулу (5.41) з $\alpha = e, i$ у другий доданок. Таким чином отримуємо

$$\begin{aligned} \delta\rho_{g\mathbf{k}\omega} &= \delta\rho_{g\mathbf{k}\omega}^{(0)} - \frac{k^2}{4\pi} \chi_g(\mathbf{k}, \omega) \delta\varphi_{\mathbf{k}\omega} + \\ &+ \frac{i}{\omega + i\nu_{\text{ch}}} \sum_{\alpha=e,i} \nu_{\alpha g} \delta\rho_{\alpha\mathbf{k}\omega}^{(0)} - \frac{k^2}{4\pi} \frac{i}{\omega + i\nu_{\text{ch}}} \sum_{\alpha=e,i} \nu_{\alpha g} \chi_\alpha(\mathbf{k}, \omega) \delta\varphi_{\mathbf{k}\omega}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

де вираз

$$\nu_{\alpha g} = \frac{n_g I_\alpha}{e_\alpha n_\alpha} \quad (5.43)$$

є частотою зіткнень плазмових частинок з порошинками.

Формулу (5.42) можна переписати так, щоб вона була подібною до (5.41):

$$\delta\rho_{g\mathbf{k}\omega} = \delta\tilde{\rho}_{g\mathbf{k}\omega}^{(0)} - \frac{k^2}{4\pi} \tilde{\chi}_g(\mathbf{k}, \omega) \delta\varphi_{\mathbf{k}\omega}, \quad (5.44)$$

де

$$\delta\tilde{\rho}_{g\mathbf{k}\omega}^{(0)} = \delta\rho_{g\mathbf{k}\omega}^{(0)} + \frac{i}{\omega + i\nu_{\text{ch}}} \sum_{\alpha=e,i} \nu_{\alpha g} \delta\rho_{\alpha\mathbf{k}\omega}^{(0)}, \quad (5.45)$$

$$\tilde{\chi}_g(\mathbf{k}, \omega) = \chi_g(\mathbf{k}, \omega) + \frac{i}{\omega + i\nu_{\text{ch}}} \sum_{\alpha=e,i} \nu_{\alpha g} \chi_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega). \quad (5.46)$$

Отже,

$$\delta\varphi_{\mathbf{k}\omega} = \frac{4\pi\delta\rho_{\mathbf{k}\omega}^{(0)}}{k^2\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)}, \quad (5.47)$$

де

$$\delta\rho_{\mathbf{k}\omega}^{(0)} = \sum_{\alpha=e,i,g} \delta\rho_{\alpha\mathbf{k}\omega}^{(0)} + \frac{i}{\omega + i\nu_{\text{ch}}} \sum_{\alpha=e,i} \nu_{\alpha g} \delta\rho_{\alpha\mathbf{k}\omega}^{(0)}, \quad (5.48)$$

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_{\alpha=e,i,g} \chi_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega) + \frac{i}{\omega + i\nu_{\text{ch}}} \sum_{\alpha=e,i} \nu_{\alpha g} \chi_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega). \quad (5.49)$$

Видно, що функція діелектричного відгуку запырошеної плазми відрізняється від діелектричного відгуку звичайної плазми присутністю перенормованої сприйнятливості порошинок, яка спричинена процесами заряджання. Крім того, під час розрахунку діелектричного відгуку плазмових частинок, зіткнення із порошинками необхідно враховувати так само як і зіткненнями плазмових частинок із нейтралами, тобто $\nu_{\alpha} = \nu_{\alpha n} + \nu_{\alpha g}$.

5.2.3 Стаціонарний заряд, частоти заряджання і зіткнень

Стаціонарний заряд визначається умовою рівності нулю повного струму заряджання порошинки (5.30). Використовуючи (5.33) і (5.34), отримуємо наступне рівняння для ϕ_s :

$$\frac{n_e}{n_i} \mu \exp(-\phi_s) = \frac{I^{\text{WC}} I^{\text{SC}}}{I^{\text{WC}} + I^{\text{SC}}}, \quad (5.50)$$

де $\mu = v_{Te}/v_{Ti} = \sqrt{\tau m_i/m_e}$.

Відношення n_e/n_i у рівнянні (5.50) знаходиться з умови квазінейтральності, яка у випадку запырошеної плазми має вигляд (1.2). Для

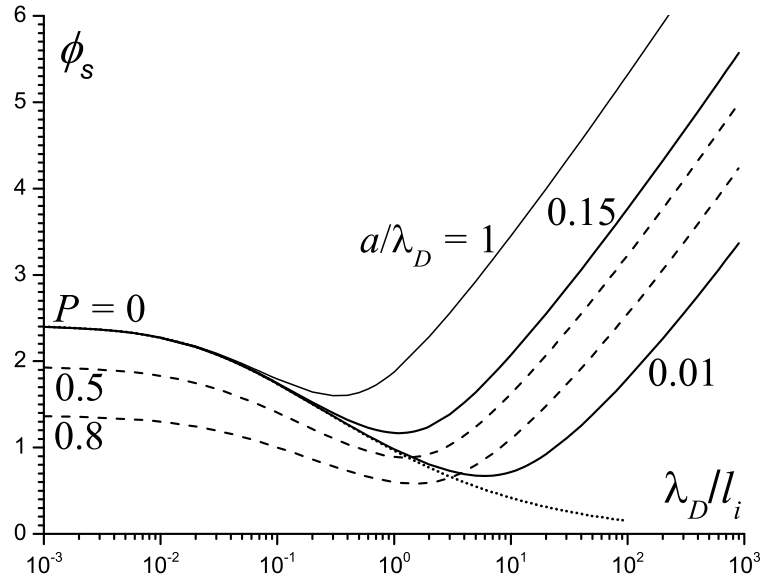


Рис. 5.12 Залежність $\phi_s = e_e \varphi_s / T_e$ від оберненої довжини вільного пробігу іонів у неізотермічній ($\tau = 100$) аргонівій плазмі. Суцільні лінії: $a/\lambda_D = 1; 0.15; 0.01$, $P = 0$; штрихові лінії: $a/\lambda_D = 0.15$, $P = 0.5; 0.8$; точкова лінія – розв’язок рівняння (5.53).

однозарядних іонів ($e_e = -e_i$)

$$\frac{n_e}{n_i} = 1 - P, \quad P = \frac{e_g n_g}{e_e n_i}, \quad (5.51)$$

де P – параметр Хавнеса (1.3).

У режимі слабких зіткнень іонний струм спрощується до

$$I_i = e_i n_i \sqrt{8\pi} a^2 v_{Ti} I^{WC}, \quad (5.52)$$

що дає наступне рівняння для ϕ_s :

$$\frac{n_e}{n_i} \mu \exp(-\phi_s) = I^{WC}. \quad (5.53)$$

Воно не залежить від a/λ_D на відміну від рівняння (5.50).

Залежність стаціонарного значення ϕ_s від оберненої довжини вільного пробігу іонів у неізотермічній ($\tau = 100$) аргонівій плазмі наведена на рис. 5.12. Для великих довжин вільного пробігу l_i і $P = 0$, значення ϕ_s прямує до ≈ 2.4 , яке відповідає значенню заряду у наближенні обмеженого

орбітального руху (див. рис. 1.2). Зменшення довжини вільного пробігу спочатку призводить до зменшення ϕ_s . Точкова лінія на рис. 5.12 – це розв’язок рівняння (5.53). Вона показує, що межі застосовності формули для іонного струму (5.52) залежать від l_i , а також від розміру порошинки. Подальше зменшення довжини вільного пробігу призводить до збільшення величини ϕ_s крім того вона починає залежати від розміру порошинки a/λ_D . Збільшення параметра Хавнеса P призводить до зменшення ϕ_s (штрихові лінії на рис. 5.12). Оскільки $\lambda_{De} = \lambda_D \sqrt{1 + \tau/(1 - P)}$, тоді для $\tau = 100$ і $P = 0$ $\lambda_{De} \approx 10\lambda_D$. Крива для $a/\lambda_D = 0.15$ ($\lambda_{De}/a \approx 66.7$) збігається з відповідною кривою у роботі [152, рис. 1]. Коли ϕ_s відоме, то можна знайти стаціонарні струми заряджання з формул (5.33) і (5.34).

Знайдемо тепер частоти заряджання (5.32), взявши похідні від струмів (5.33) і (5.34)

$$\nu_{\text{ch}}^e = I_e \frac{\phi_s}{e_g}, \quad (5.54)$$

$$\nu_{\text{ch}}^i = -I_i \frac{(2I^{\text{WC}} - 2 - \phi_s \tau) I^{\text{SC}} + (I^{\text{WC}})^2}{e_g (I^{\text{WC}} + I^{\text{SC}}) I^{\text{WC}}}. \quad (5.55)$$

У нормованому вигляді частоти заряджання мають вигляд

$$\frac{\nu_{\text{ch}}^e}{\omega_{pi}} = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\tau}} \frac{k_{Di} (1 - P) \exp(-\phi_s)}{k_D (1 + \lambda_D/a)}. \quad (5.56)$$

$$\frac{\nu_{\text{ch}}^i}{\omega_{pi}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \frac{k_{Di}}{k_D} \frac{I^{\text{SC}}}{1 + \lambda_D/a} \frac{(2I^{\text{WC}} - 2 - \phi_s \tau) I^{\text{SC}} + (I^{\text{WC}})^2}{\phi_s (I^{\text{WC}} + I^{\text{SC}})^2}, \quad (5.57)$$

де $k_{Di}/k_D = \sqrt{\tau}/\sqrt{1 - P + \tau}$ для $\tau = 100$, $k_{Di}/k_D \approx 1$.

З рис. 5.13 видно, що для розглянутих параметрів значення частот заряджання є меншими за іонну плазмову частоту $\nu_{\text{ch}}^e \lesssim \omega_{pi}$ і немонотонно залежать від оберненої довжини вільного пробігу іонів. Поведінка електронної частоти заряджання пояснюється формулою (5.56). Зменшення ϕ_s приводить до збільшення частоти заряджання, тому максимум частоти

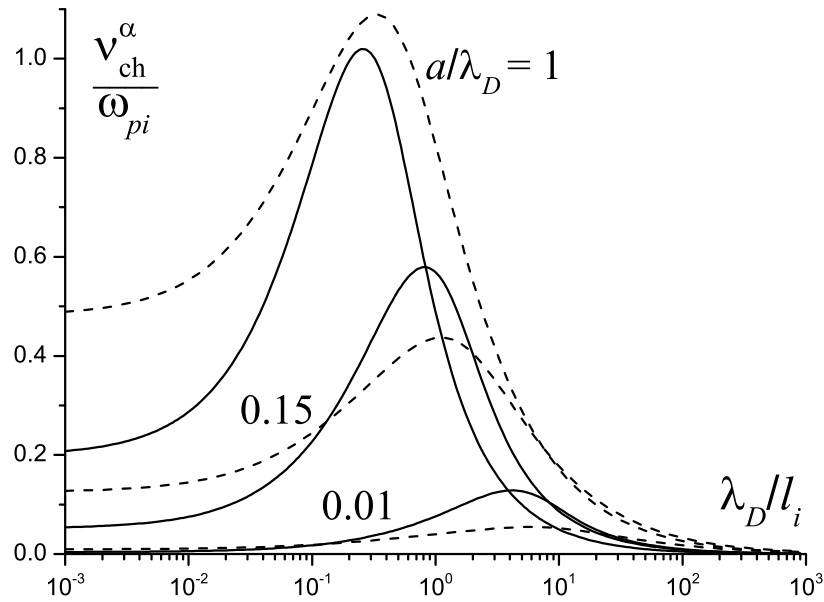


Рис. 5.13 Нормована електронна (штрихова лінія) та іонна (суцільна лінія) частоти заряджання $\nu_{\text{ch}}^{\alpha}/\omega_{pi}$ від оберненої довжини вільного пробігу іонів у неізотермічній ($\tau = 100$) аргонівій плазмі для $a/\lambda_D = 1; 0.15; 0.01$.

приблизно співпадає з мінімумом ϕ_s (див. рис. 5.12). З одного боку, зменшення a/λ_D спричиняє зменшення ϕ_s , але оскільки λ_D/a знаходиться у знаменнику (5.56), то загалом зменшення розміру порошинки веде до зменшення частоти. Що стосується впливу на частоту заряджання параметра Хавнеса, то у сильнеізотермічній плазмі залежністю k_{Di}/k_D від P можна знехтувати, а залежність ϕ_s від P проявляється у зменшенні іонної частоти заряджання в області її максимуму (див. рис. 5.14). Зменшення електронної частоти зі збільшенням P є більш вираженим, оскільки вона пропорційна до $1 - P$ (5.56).

Як видно з рис. 5.15, у ізотермічній плазмі частоти заряджання теж є меншими за ω_{pi} .

Використовуючи (5.51) і (5.38), можна отримати вираз

$$\frac{n_g}{k_D^3} = \frac{P}{4\pi\phi_s k_D a (1 + k_D a) (1 - P + \tau)}. \quad (5.58)$$

Таким чином, параметр Хавнеса P разом з іншими параметрами плазми визначає концентрацію порошинок.

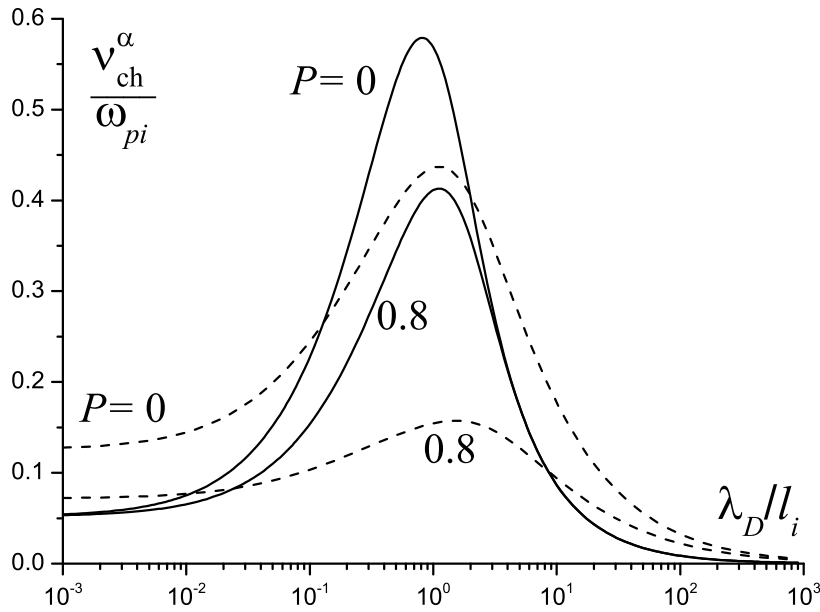


Рис. 5.14 Нормована електронна (штрихова лінія) та іонна (суцільна лінія) частоти заряджання $\nu_{ch}^{\alpha}/\omega_{pi}$ від оберненої довжини вільного пробігу іонів у неізотермічній ($\tau = 100$) аргонівій плазмі для $a/\lambda_D = 0.15$ і $P = 0; 0.8$.

Для параметрів, які розглядаються, середня відстань між порошинками $\Delta = n_g^{-1/3}$ змінюється від ≈ 3 до 20 (див. рис. 5.16). Згідно з (5.58) $\Delta \sim \phi_s^{1/3}$, тому залежність середньої відстані між порошинками від оберненої довжини вільного пробігу іонів має мінімум, який відповідає мінімуму безрозмірного поверхневого потенціалу ϕ_s (див. рис. 5.12).

Розрахуємо тепер частоти зіткнень між плазмовими частинками і порошинками, використовуючи формулу (5.43). У стаціонарному стані між частотами має місце просте співвідношення $\nu_{ig} = (1 - P)\nu_{eg}$, тому на рис. 5.17, 5.18 наведена лише іонна частота. Оскільки струми заряджання зростають зі збільшенням розміру порошинки (5.33) і (5.34), частоти зіткнень мають таку саму поведінку. Як випливає з формули (5.58), у неізотермічній плазмі $n_g \sim P$, тому на рис. 5.17, 5.18 штрихові лінії ($P = 0.8$) знаходяться вище, ніж суцільні ($P = 0.5$)

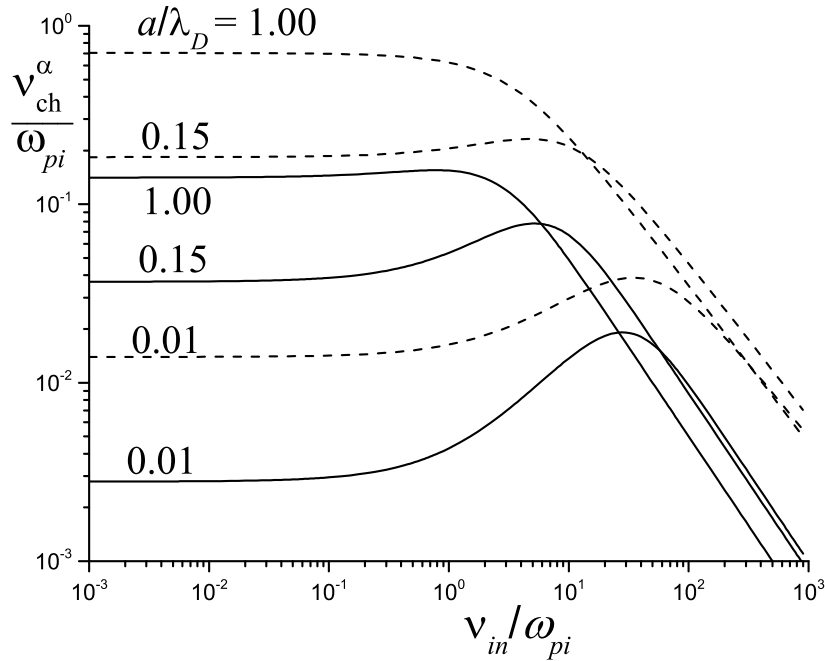


Рис. 5.15 Нормована електронна (штрихова лінія) та іонна (суцільна лінія) частоти заряджання $\nu_{ch}^\alpha / \omega_{pi}$ від частоти зіткнень іонів з нейтралами у ізотермічній ($\tau = 1$) аргонівій плазмі для $a/\lambda_D = 1; 0.15; 0.01$.

5.2.4 Іонно-звукові хвилі

На основі виразу для функції діелектричного відгуку (5.49) можна вивчати дисперсію і згасання поздовжніх хвиль у запорошеній плазмі, для цього необхідно розв'язати дисперсійне рівняння (5.18).

Також необхідні вирази для діелектричної сприйнятливості, які входять до (5.49). Ми будемо використовувати результати (1.139) отримані на основі кінетичного рівняння з інтегралом зіткнень БГК

$$\chi_\alpha(\mathbf{k}, \omega) = \frac{k_{D\alpha}^2 (\omega + i\nu_\alpha) W(z_\alpha)}{k^2 \omega + i\nu_\alpha W(z_\alpha)}, \quad z_\alpha = \frac{\omega + i\nu_\alpha}{k\nu_{T\alpha}}, \quad (5.59)$$

де $W(z)$ – плазмова дисперсійна функція (1.127). У знерозміреному вигляді

$$\chi_i(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{\tilde{k}^2} \frac{(\tilde{\omega} + i\tilde{\nu}_i) W(z_i)}{\tilde{\omega} + i\tilde{\nu}_i W(z_i)}, \quad (5.60)$$

де

$$\tilde{k} = \frac{k}{k_{Di}}, \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega}{\omega_{pi}}, \quad \tilde{\nu}_i = \frac{\nu_i}{\omega_{pi}}, \quad z_i = \frac{\tilde{\omega} + i\tilde{\nu}_i}{\tilde{k}}, \quad (5.61)$$

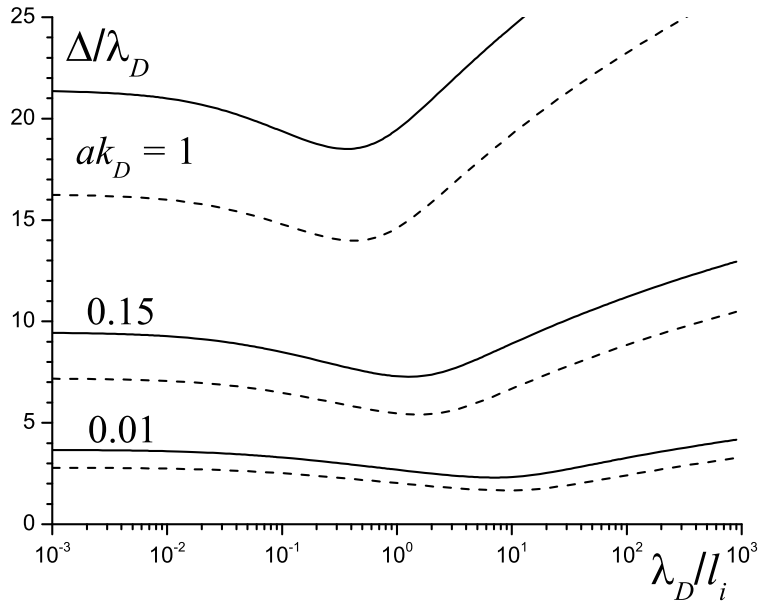


Рис. 5.16 Залежність середньої відстані між порошинками від оберненої довжини вільного пробігу іонів у неізотермічній ($\tau = 100$) аргонівій плазмі для $a/\lambda_D = 1; 0.15; 0.01$, $P = 0.5$ (суцільні лінії) і $P = 0.8$ (штрихові лінії).

$$\chi_e(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1 - P}{\tau \tilde{k}^2} \frac{(\tilde{\omega} + i\tilde{\nu}_e)W(z_e)}{\tilde{\omega} + i\tilde{\nu}_e W(z_e)}, \quad (5.62)$$

де

$$\tilde{\nu}_e = \frac{\nu_e}{\omega_{pi}}, \quad z_e = \frac{\tilde{\omega} + i\tilde{\nu}_e}{\mu \tilde{k}}. \quad (5.63)$$

Отже, присутність порошинок у плазмі призводить не лише до появи нових доданків у виразі для діелектричного відгуку (останній доданок у формулі (5.49) і $\chi_g(\mathbf{k}, \omega)$ у другому доданку), але і до зміни $\chi_e(\mathbf{k}, \omega)$, яка пов'язана зі зменшенням концентрації електронів по відношенню до концентрації іонів ($\chi_e(\mathbf{k}, \omega)$ пропорційне до $1 - P$).

Плазма без порошинок У плазмі без порошинок функція діелектричного відгуку має вигляд (1.139)

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_{\alpha=e,i} \chi_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega), \quad (5.64)$$

і плазмові частинки стикаються лише з нейтралами, тобто $\nu_{\alpha} = \nu_{\alpha n}$ у (5.60) і (5.62).

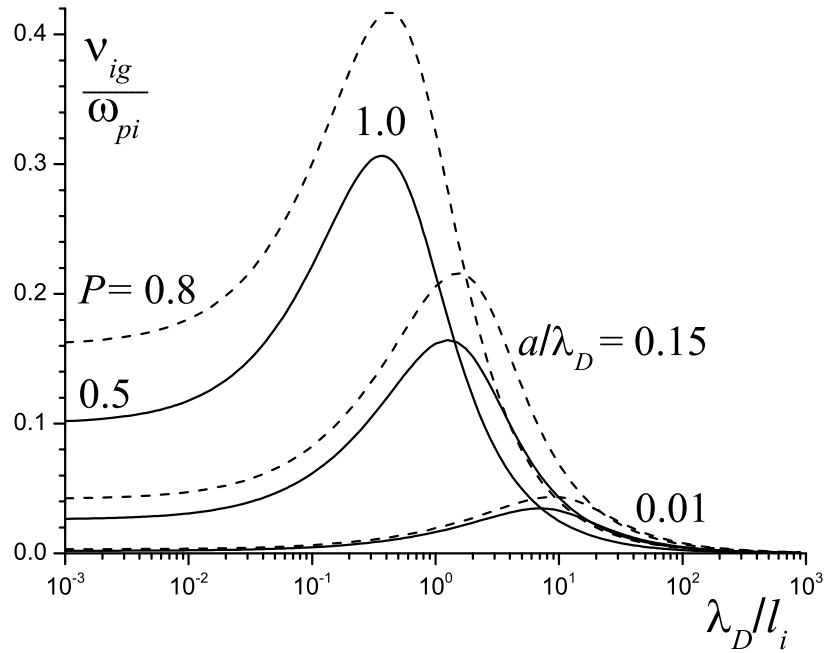


Рис. 5.17 Залежність нормованої частоти зіткнень іонів ν_{ig}/ω_{pi} від оберненої довжини вільного пробігу іонів у неізотермічній ($\tau = 100$) аргонівій плазмі для $P = 0.5$ (суцільні лінії) і $P = 0.8$ (штрихові лінії), $a/\lambda_D = 1; 0.15; 0.01$.

Дисперсійне рівняння (5.18), визначає власну частоту як функцію від хвильового вектора (1.74). Для дійсних \mathbf{k} , власна частота є комплексною $\omega(\mathbf{k}) = \omega_{\mathbf{k}} + i\gamma_{\mathbf{k}}$, де $\gamma_{\mathbf{k}}$ – декремент згасання.

Відомо, що іонно-звукові хвилі існують лише у сильноноізотермічній $\tau \gg 1$ плазмі (1.136) і їх фазова швидкість лежить у діапазоні (1.131) $v_{Ti} \ll \omega/k \ll v_{Te}$, тобто $z_i \gg 1$ і $z_e \ll 1$. Використовуючи наближені формули для плазмової дисперсійної функції (1.126) і (1.130), $W(z_e) \approx 1$ і $W(z_i) \approx -1/z_i^2$, (5.59) дає

$$\chi_e = \frac{k_{De}^2}{k^2}, \quad \chi_i = -\frac{\omega_{pi}^2}{(\omega + i\nu_i)\omega}. \quad (5.65)$$

Дисперсійне рівняння перетворюється на квадратне рівняння відносно ω і його розв'язок має вигляд

$$\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{\omega_{pi}^2}{1 + k_{De}^2/k^2} - \frac{\nu_i^2}{4}} - i\frac{\nu_i}{2}. \quad (5.66)$$

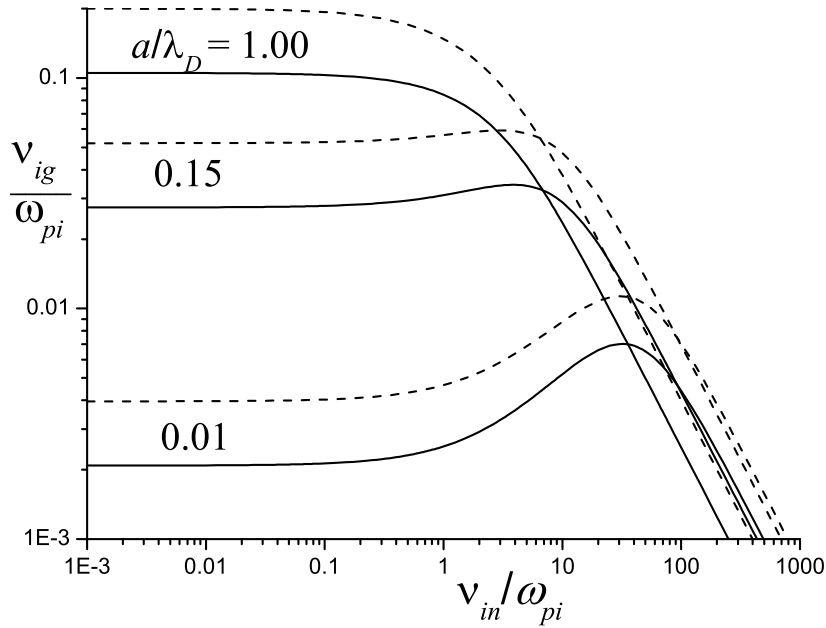


Рис. 5.18 Залежність нормованої частоти зіткнень іонів ν_{ig}/ω_{pi} від частоти зіткнень іонів з нейтралами у ізотермічній ($\tau = 1$) аргонівій плазмі для $P = 0.5$ (суцільні лінії) і $P = 0.8$ (штрихові лінії), $a/\lambda_D = 1; 0.15; 0.01$.

Коли $\nu_i = 0$, (5.66) перетворюється на добре відомий спектр іонно-звукових хвиль у плазмі без зіткнень (1.133):

$$\omega_{\mathbf{k}} = \frac{\omega_{pi}}{\sqrt{1 + k_{De}^2/k^2}}. \quad (5.67)$$

При $k \ll k_{De}$ з (5.67) слідує пряма пропорційність між власною частотою і хвильовим вектором (1.135):

$$\omega_{\mathbf{k}} = \frac{\omega_{pi}}{k_{De}} k = \sqrt{\tau \frac{n_i}{n_e}} v_{Ti} k. \quad (5.68)$$

Але давайте повернемося до формули (5.66). З першого доданку випливає, що у плазмі із зіткненнями $\omega_{\mathbf{k}}$ стає рівним нулю при ненульовому значення хвильового числа $k = k_0$, яке дорівнює

$$k_0 = \frac{k_{De}}{\sqrt{4\omega_{pi}^2/\nu_i^2 - 1}} \quad (5.69)$$

і при $k \ll k_{De}$ лінійна залежність (5.68) більше не спостерігається.

Цей висновок підтверджується результатами числового розв'язання дисперсійного рівняння з діелектричним відгуком (5.64) відносно комплексної частоти, які представлені суцільними лініями на рис. 5.19а, б. Для порівняння на рисунку також наведений розв'язок для плазми без зіткнень (штрихова лінія). Формула (5.66) (точкова лінія) у довгохвильовій області добре узгоджується з числовим розв'язком для власної частоти і декременту згасання, включаючи значення $k_0 \approx 0.02$ (5.69).

Відомо (див. п. 1.6.4), що згасання іонно-звукових хвиль спричиняється резонансною взаємодією поля хвилі з іонами (згасання Ландау), а також зіткненнями іонів, вклад яких у декремент згасання приблизно дорівнює (1.142) $\Delta\gamma_{\mathbf{k}} = -\nu_i/2$, що збігається з уявною частиною формули (5.66). Порівняння штрихової і суцільної ліній на рис. 5.19б підтверджує правильність останньої формули і показує, що згасання Ландау стає суттєвим при $\tilde{k} \gtrsim 0.2$ для $\tau = 100$. Наведені висновки узгоджуються з результатами числового розв'язку дисперсійного рівняння (5.64) для водневої плазми (див. рис. 5.1 і 5.2).

Згасання, яке пов'язане із зіткненнями іонів є сильним для $\nu_{in} = 0.4\omega_{pi}$ і відношення власної частоти до декременту згасання $\omega_{\mathbf{k}}/|\gamma_{\mathbf{k}}|$ є досить малим і як видно зі вставки на рис. 5.19а не перевищує значення ≈ 4 . В цьому разі важко сказати, що хвиля дійсно поширюється, але таке значення ν_{in} було вибрано для того, щоб продемонструвати більш наглядно вплив зіткнень на іонно-звукові хвилі.

Слід також обговорити частоту зіткнень електронів із нейтралами ν_{en} , яка присутня у формулі (5.62). Для слабоіонізованої плазми має місце просте співвідношення $\nu_{\alpha n} = v_{T\alpha}\sigma_{\alpha}n_n$, де σ_{α} – переріз розсіяння електронів (іонів) на нейтралах. Таким чином, електронна та іонна частоти зіткнень пов'язані співвідношенням $\nu_e = \nu_i\mu(\sigma_e/\sigma_i)$. Переріз розсіяння іонів Ar^+ з енергією 0.1 еВ на атомах Ar складає 157 \AA^2 і зменшується зі збільшенням енергії [267, табл. 7]. Переріз розсіяння електронів на атомах аргона має

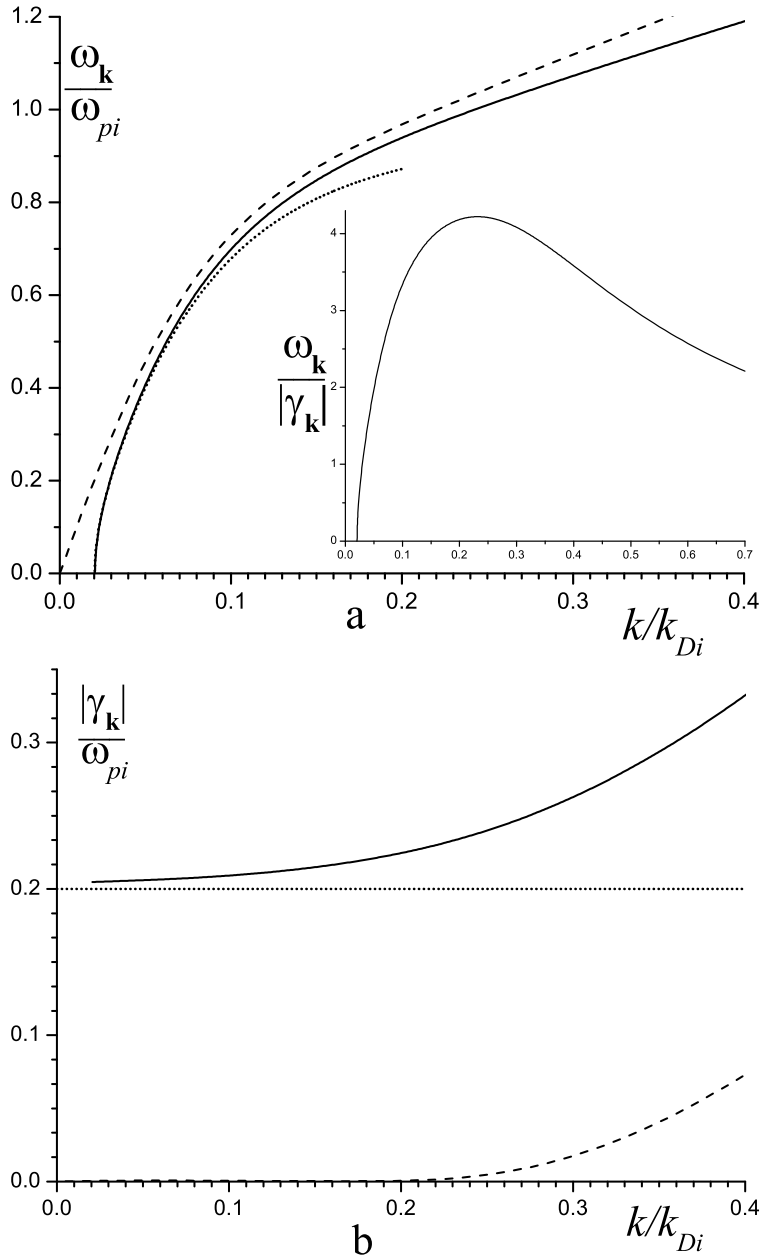


Рис. 5.19 Власна частота $\omega_{\mathbf{k}}$ (a) і модуль декременту згасання $|\gamma_{\mathbf{k}}|$ (b) іонно-звукових хвиль у неізотермічній ($\tau = 100$) аргонівій плазмі, які є результатом числового розв'язання дисперсійного рівняння $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}} + i\gamma_{\mathbf{k}}) = 0$ з функцією діелектричного відгуку (5.64), (5.59) від хвильового числа у беззіткненній (штрихові лінії) і зіткненній ($\nu_{in} = 0.4\omega_{pi}$) плазмі (суцільні лінії). Точкові лінії – формула (5.66), вставка – відношення $\omega_{\mathbf{k}}/|\gamma_{\mathbf{k}}|$.

мінімум $\approx 0.1\text{\AA}^2$ на енергіях ≈ 0.2 еВ, а для енергії електронів ≈ 2.5 еВ величина перерізу складає $\approx 3\text{\AA}^2$ [162, рис. 4]. Отже, для неізотермічної плазми

можна покласти величину $\sigma_e/\sigma_i \approx 0.02$, саме це значення ми використовували у обчисленнях. Оскільки зіткнення електронів майже не впливають на дисперсію і згасання іонно-звукових хвиль (5.66), наближена оцінка для відношення перерізів розсіяння (і відповідно для частоти зіткнень електронів ν_{en}) не впливає на точність обчислень. Величину ν_{en} можна було взагалі взяти рівною нулю.

Запорошена плазма

Як вже згадувалося вище, у запорошеній плазмі разом із зіткненнями плазмових частинок із нейтралами необхідно враховувати їх зіткнення з порошинками: $\nu_\alpha = \nu_{\alpha n} + \nu_{\alpha g}$. Оскільки обернена довжика вільного пробігу у сильнонеізотермічній плазмі рівна

$$\frac{\lambda_D}{l_i} = \frac{k_{Di}}{k_D} \tilde{\nu}_{in} \approx \frac{\nu_{in}}{\omega_{pi}} = \tilde{\nu}_{in}, \quad (5.70)$$

то рис. 5.17 показує як $\tilde{\nu}_{ig}$ співвідноситься з $\tilde{\nu}_{in}$. При $\tilde{\nu}_{in} \ll 1$ основний вклад у ефективні частоти дають зіткнення з порошинками. У протилежному випадку $\tilde{\nu}_{in} \gg 1$, основний вклад в ефективну частоту, очевидно, дають зіткнення з нейтралами.

Спектри і згасання іонно-звукових хвиль у запорошеній плазмі із урахуванням флуктуацій заряду порошинок (суцільні лінії на рис. 5.20а, б) вивчались за допомогою числового розв'язання дисперсійного рівняння $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 0$ відносно комплексної частоти $\omega(\mathbf{k}) = \omega_{\mathbf{k}} + i\gamma_{\mathbf{k}}$, де функція діелектричного відгуку задавалась виразом (5.49). Оскільки плазмова частота порошинок ω_{pg} набагато менша за плазмову частоту іонів ω_{pi} , то рух порошинок не впливає на поширення іонно-звукових хвиль, тому у (5.49) ми нехтували доданком $\chi_g(\mathbf{k}, \omega)$.

Можливість існування іонно-звукових хвиль у ізотермічній запорошеній плазмі без зіткнень вперше обговорювалась в роботі [238]. З (5.68) слідує, що фазова швидкість іонно-звукових хвиль рівна $\omega/k = v_{Ti} \sqrt{\tau n_i/n_e}$ для $k \ll k_{De}$. Це означає, що у звичайній ізотермічній плазмі $\omega/k = v_{Ti}$, тому

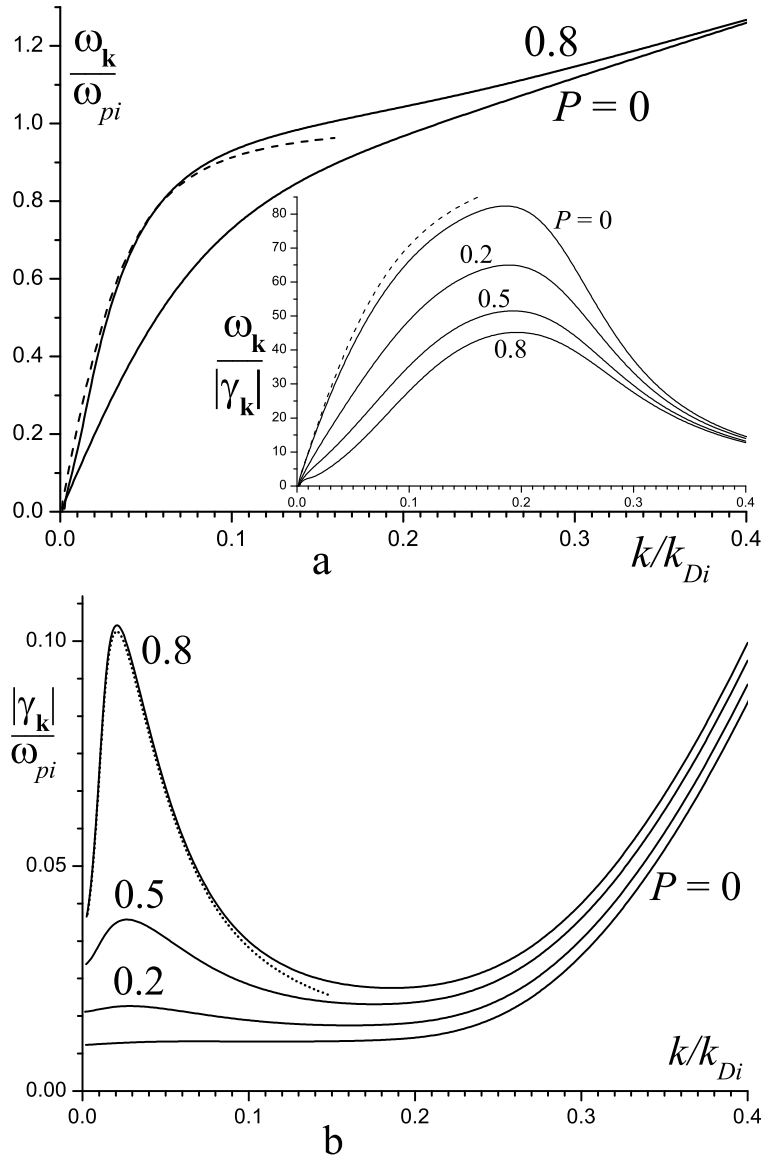


Рис. 5.20 Власна частота $\omega_{\mathbf{k}}$ (а) і модуль декременту згасання $|\gamma_{\mathbf{k}}|$ (б) іонно-звукових хвиль у неізотермічній ($\tau = 100$) аргонівій плазмі, які є результатом числового розв'язання дисперсійного рівняння $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}} + i\gamma_{\mathbf{k}}) = 0$ з функцією діелектричного відгуку (5.49), (5.59) від хвильового числа для $\nu_{in} = 0.02\omega_{pi}$, $ak_D = 0.15$, $P = 0; 0.2; 0.5; 0.8$ (суцільні лінії) і функцією діелектричного відгуку (5.49), (5.65) (точкова лінія). Штрихові лінії отримані з формули (5.66), вставка – відношення $\omega_{\mathbf{k}}/|\gamma_{\mathbf{k}}|$.

має місце сильне згасання Ландау. Воно зменшується у ізотермічній заповненій плазмі за умови $n_e \ll n_i$. У випадку неізотермічної плазми ($\tau = 100$) із зіткненнями, який розглядається на рис. 5.20а, б, збільшення фазової швидкості (за рахунок збільшення власної частоти) теж відбувається. На

Табл. 4. Частота зіткнень іонів з порошинками радіусом $a = \lambda_D$ для $\tilde{\nu}_{in} = \nu_{in}/\omega_{pi} = 0.2$.

P	$\tilde{\nu}_{ig}$	$(\tilde{\nu}_{in} + \tilde{\nu}_{ig})/2$
0.1	0.062	0.131
0.2	0.122	0.161
0.5	0.279	0.240
0.8	0.371	0.286

рис 5.20а, крива, яка відповідає $P = 0.8$ знаходиться вище, ніж крива для $P = 0$. З цього рисунка також видно, що дисперсія іонно-звукових хвиль у сильнеізотермічній запорошеній плазмі добре описується формулою для звичайної плазми (5.66) (штрихова лінія), але з урахуванням зменшення відношення n_e/n_i . Таким чином, для параметрів які розглядаються, флуктуації заряду порошинок і збільшення ν_{in} через зіткнення з порошинками не впливають на спектр іонно-звукових хвиль.

Оскільки при $\tau = 100$ фазова швидкість набагато більша за теплову швидкість іонів, то згасання Ландау є малим для $k \ll k_{De}$, додаткове збільшення фазової швидкості через зменшення n_e/n_i не впливає на згасання хвиль. А от флуктуації заряду порошинок і збільшення ν_{in} через зіткнення із порошинками призводить до суттєвого збільшення модуля декременту згасання (на порядок для $\tilde{k} \approx 0.02$) і відповідно до зменшення відношення $\omega_{\mathbf{k}}/|\gamma_{\mathbf{k}}|$ (див. вставку на рис. 5.20а). Штрихова лінія на вставці отримана з формули (5.66). Поведінка декременту згасання добре описується наближеними виразами для діелектричної сприйнятливості (5.65) (точкова лінія на рис. 5.20b).

З рис. 5.21 видно, що для малих значень P збільшення декременту згасання через зіткнення іонів з порошинками приблизно описується формулою $\gamma_{\mathbf{k}} = -(\nu_{in} + \nu_{ig})/2$ (штрихові лінії). Значення $\tilde{\nu}_{ig}$ і $(\tilde{\nu}_{in} + \tilde{\nu}_{ig})/2$ наведені у табл. 4. Такі ж значення, що відповідають рис. 5.20, наведені у табл. 5.

Розглянемо тепер іонно-звукові хвилі у запорошеній плазмі з іншим

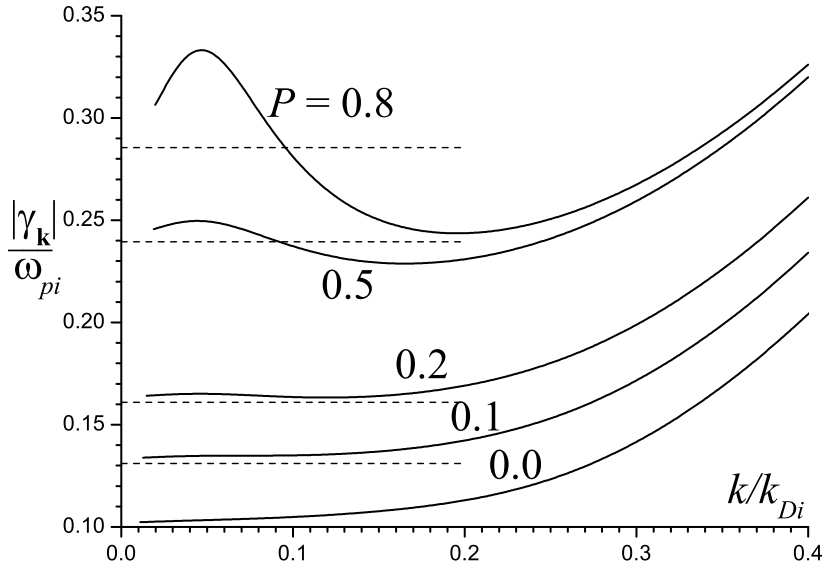


Рис. 5.21 Модуль декременту згасання $|\gamma_{\mathbf{k}}|$ іонно-звукових хвиль у неізо-термічній ($\tau = 100$) аргонівій плазмі, як результат числового розв'язання дисперсійного рівняння $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}} + i\gamma_{\mathbf{k}}) = 0$ з функцією діелектричного відгуку (5.49), (5.59) від хвильового числа для $\nu_{in} = 0.2\omega_{pi}$, $ak_D = 1$, $P = 0; 0.1; 0.2; 0.5; 0.8$ (суцільні лінії). Штрихові лінії відповідають значенням $(\tilde{\nu}_{in} + \tilde{\nu}_{ig})/2$.

Табл. 5. Частота зіткнень іонів з порошинками радіусом $a = 0.15\lambda_D$ для $\tilde{\nu}_{in} = \nu_{in}/\omega_{pi} = 0.02$.

P	$\tilde{\nu}_{ig}$	$(\tilde{\nu}_{in} + \tilde{\nu}_{ig})/2$
0.2	0.0146	0.0173
0.5	0.0351	0.0276
0.8	0.0521	0.0361

відношенням електронної температури до іонної, а саме $\tau = 10$. У цьому разі, вплив порошинок на спектр і згасання іонно-звукових хвиль (див. рис. 5.22) подібний до попереднього випадку $\tau = 100$ (рис. 5.20). В області $\tilde{k} \lesssim 0.2$ спостерігається збільшення власної частоти і модуля декременту згасання. Але є і суттєва відмінність, для $\tilde{k} \gtrsim 0.2$ згасання у запорошеній плазмі є меншим, ніж у звичайній плазмі. Як вже згадувалося вище, при $\tilde{k} \gtrsim 0.2$ важливою для згасання є резонансна взаємодія хвилі з іонами.

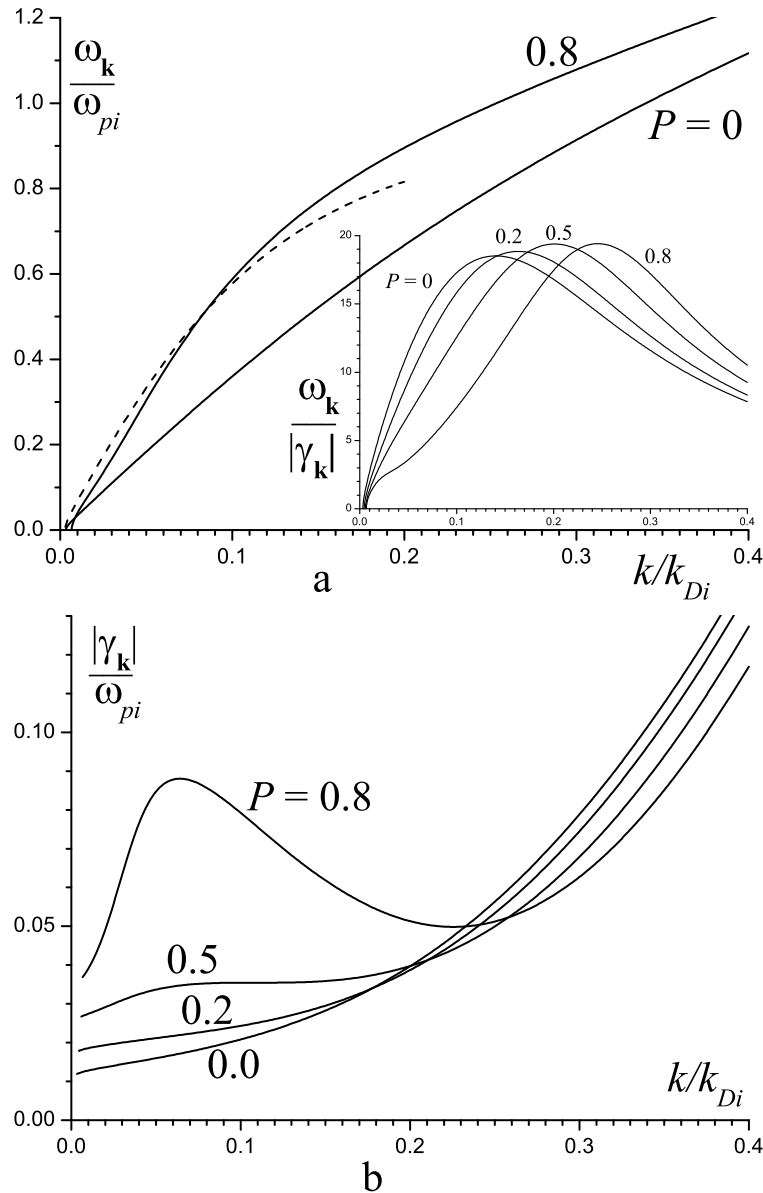


Рис. 5.22 Власна частота $\omega_{\mathbf{k}}$ (а) і модуль декременту згасання $|\gamma_{\mathbf{k}}|$ (б) іонно-звукових хвиль у неізотермічній ($\tau = 10$) аргонівій плазмі, які є результатом числового розв'язання дисперсійного рівняння $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}} + i\gamma_{\mathbf{k}}) = 0$ з функцією діелектричного відгуку (5.49), (5.59) від хвильового числа для $\nu_{in} = 0.02\omega_{pi}$, $ak_D = 0.15$, $P = 0; 0.2; 0.5; 0.8$ (суцільні лінії) і діелектричною проникністю (5.49), (5.65) (точкова лінія). Штрихові лінії отримані з формули (5.66), вставка – відношення $\omega_{\mathbf{k}}/|\gamma_{\mathbf{k}}|$.

Зі вставки на рис. 5.22а видно, що максимум відношення $\omega_{\mathbf{k}}/\gamma_{\mathbf{k}}$ зсувається до більших значень k . Саме значення максимуму дещо збільшується. Така поведінка відрізняється від випадку $\tau = 100$ (вставка на рис. 5.20а), у якому присутність порошинок призводила до суттєвого зменшення відношення

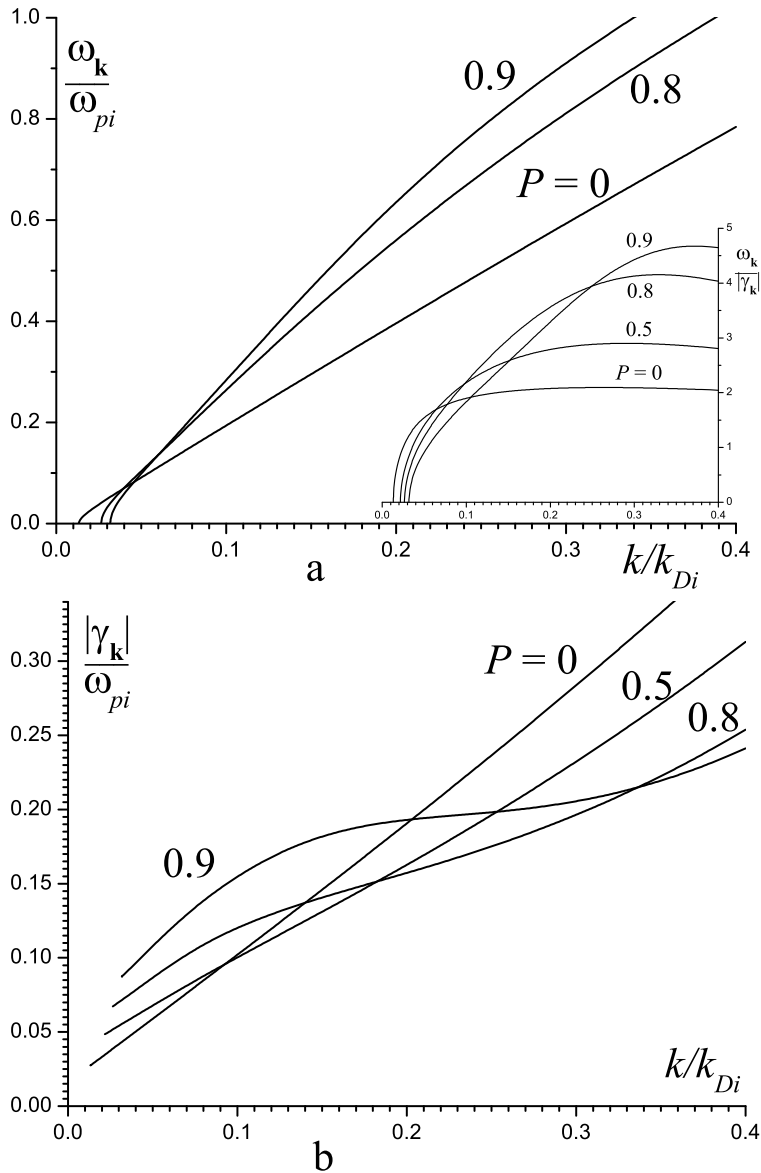


Рис. 5.23 Власна частота $\omega_{\mathbf{k}}$ (а) і модуль декременту згасання $|\gamma_{\mathbf{k}}|$ (б) іонно-звукових хвиль у ізотермічній ($\tau = 1$) аргонівій плазмі, які є результатом числового розв'язання дисперсійного рівняння $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}} + i\gamma_{\mathbf{k}}) = 0$ з функцією діелектричного відгуку (5.49), (5.59) від хвильового числа для $\nu_{in} = 0.02\omega_{pi}$, $ak_D = 0.15$, $P = 0; 0.5; 0.8; 0.9$ (суцільні лінії), вставка – відношення $\omega_{\mathbf{k}}/|\gamma_{\mathbf{k}}|$.

$\omega_{\mathbf{k}}/\gamma_{\mathbf{k}}$, хоча воно і залишається більшим, ніж для $\tau = 10$.

Нарешті розглянемо іонно-звукові хвилі у ізотермічній ($\tau = 1$) запорошеній плазмі. З рис. 5.23а видно, що так само як і в неізотермічній плазмі, власна частота іонно-звукових хвиль у ізотермічній плазмі зростає зі збільшенням P . Окрім того, область малих k , де хвилі не існують, стає ширшою (значення k_0 (5.69) зростає). Зміни у залежності декременту згасання від

k , які спостерігалися при зменшенні τ від 100 до 10 стають ще більш вираженими для $\tau = 1$ (див. рис. 5.23b), зокрема зменшення згасання Ландау при збільшенні P . Вставка на рис. 5.23а показує, що максимум відношення $\omega_{\mathbf{k}}/|\gamma_{\mathbf{k}}|$ зсувається до більших значень k , а значення самого максимуму суттєво зростає, але залишається меншим, ніж для $\tau = 10$ і 100.

5.2.5 Флуктуації густини електронів

У цьому підрозділі будуть розраховані кореляційні функції флуктуацій електронної густини $\langle \delta\rho_e^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}$. Ми починаємо з виразу для флуктуацій електронної густини, з (5.41) і (5.47) слідує, що

$$\delta\rho_{e\mathbf{k}\omega} = \delta\rho_{e\mathbf{k}\omega}^{(0)} - \frac{\chi_e(\mathbf{k}, \omega)}{\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)} \delta\rho_{\mathbf{k}\omega}^{(0)}, \quad (5.71)$$

використовуючи (5.48), отримуємо

$$\delta\rho_{e\mathbf{k}\omega} = \delta\rho_{e\mathbf{k}\omega}^{(0)} - \frac{\chi_e(\mathbf{k}, \omega)}{\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)} \left[\sum_{\alpha=e,i} \left(1 + \frac{i\nu_{\alpha g}}{\omega + i\nu_{\text{ch}}} \right) \delta\rho_{\alpha\mathbf{k}\omega}^{(0)} + \delta\rho_{g\mathbf{k}\omega}^{(0)} \right]. \quad (5.72)$$

Остаточно

$$\begin{aligned} \langle \delta\rho_e^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = & \left| 1 - \frac{\chi_e(\mathbf{k}, \omega)}{\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)} \left(1 + \frac{i\nu_{eg}}{\omega + i\nu_{\text{ch}}} \right) \right|^2 \langle \delta\rho_e^{(0)2} \rangle_{\mathbf{k}\omega} + \\ & + \left| \frac{\chi_e(\mathbf{k}, \omega)}{\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)} \left(1 + \frac{i\nu_{ig}}{\omega + i\nu_{\text{ch}}} \right) \right|^2 \langle \delta\rho_i^{(0)2} \rangle_{\mathbf{k}\omega} + \left| \frac{\chi_e(\mathbf{k}, \omega)}{\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)} \right|^2 \langle \delta\rho_g^{(0)2} \rangle_{\mathbf{k}\omega}, \end{aligned} \quad (5.73)$$

таким чином, кореляційні функції флуктуацій електронної густини виражаються через $\chi_\alpha(\mathbf{k}, \omega)$ та $\langle \delta\rho_\alpha^{(0)2} \rangle_{\mathbf{k}\omega}$ (5.16)

$$\langle \delta\rho_\alpha^{(0)2} \rangle_{\mathbf{k}\omega} = e_\alpha^2 n_\alpha \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') f_{0\alpha}(\mathbf{v}') + \text{к.с.} \quad (5.74)$$

у рівноважному стані [83, 86, 227]

$$\langle \delta\rho_\alpha^{(0)2} \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{T_\alpha k^2}{2\pi\omega} \text{Im}\chi_\alpha(\mathbf{k}, \omega). \quad (5.75)$$

Нехтуючи флуктуаціями заряду порошинки, тобто поклавши у (5.73) частоти ν_{ch} і $\nu_{\alpha g}$ рівними нулю, отримуємо

$$\begin{aligned} \langle \delta \rho_e^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = & \left| 1 - \frac{\chi_e(\mathbf{k}, \omega)}{\varepsilon_{mc}(\mathbf{k}, \omega)} \right|^2 \langle \delta \rho_e^{(0)2} \rangle_{\mathbf{k}\omega} \\ & + \left| \frac{\chi_e(\mathbf{k}, \omega)}{\varepsilon_{mc}(\mathbf{k}, \omega)} \right|^2 \langle \delta \rho_i^{(0)2} \rangle_{\mathbf{k}\omega} + \left| \frac{\chi_e(\mathbf{k}, \omega)}{\varepsilon_{mc}(\mathbf{k}, \omega)} \right|^2 \langle \delta \rho_g^{(0)2} \rangle_{\mathbf{k}\omega} \end{aligned} \quad (5.76)$$

кореляційну функцію густини електронів у багатоконпонентній (multi-component) моделі, де

$$\varepsilon_{mc}(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_{\alpha=e,i,g} \chi_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega). \quad (5.77)$$

Кореляційні функції флуктуацій іонної густини можна знайти у такий же спосіб.

Числові розрахунки спектрів флуктуацій проводились для аргонної плазми для різних значень розміру порошинок ak_D , параметра Хавнеса P , і частоти іон-нейтральних зіткнень ν_{in} для ізотермічної $\tau = 1$ та неізотермічної $\tau > 1$ плазми. Оскільки плазмова частота порошинок набагато менша за плазмову частоту іонів, то рух порошинок не впливає на флуктуації в цій області частот, тому ми нехтували останніми доданками у (5.73) і (5.76), так само як і $\chi_g(\mathbf{k}, \omega)$ в (5.49) та (5.77).

Можна виділити основні фактори, які включає наше описання і які впливають на спектри флуктуації електронної густини у запорошеній плазмі:

- Флуктуації заряду порошинок, які описуються останнім доданком у (5.49) і відповідними доданками у (5.73), які містять ν_{ch} і $\nu_{\alpha g}$.
- Зіткнення плазмових частинок із нейтралами і порошинками, які визначають ефективну частоту зіткнень плазмових частинок $\nu_{\alpha} = \nu_{\alpha n} + \nu_{\alpha g}$ і впливають на діелектричну сприйнятливність електронів та іонів (5.59).

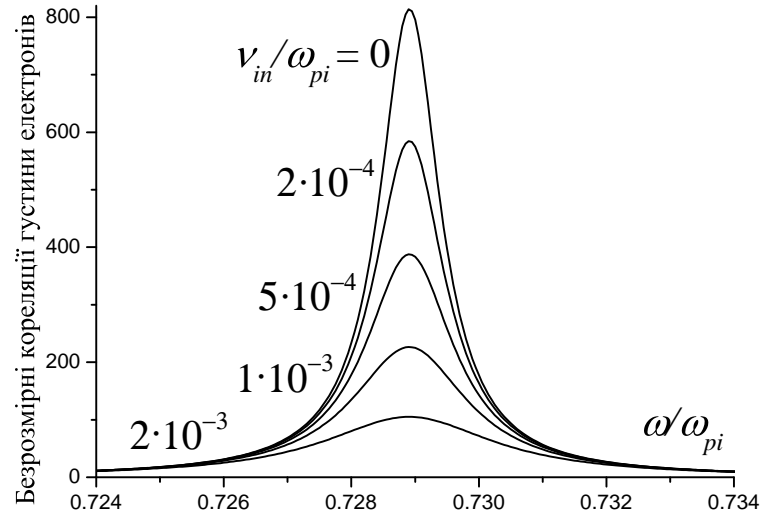


Рис. 5.24 Спектри флуктуацій густини електронів $\langle \delta n_\alpha^2 \rangle_{k\omega} \omega_{pi} / n_i$ у звичайній неізотермічній ($\tau = 100$) аргонівій плазмі для $\nu_{in}/\omega_{pi} = 0; 2 \cdot 10^{-4}; 5 \cdot 10^{-4}; 1 \cdot 10^{-3}; 2 \cdot 10^{-3}$, $k/k_{Di} = 0.1$.

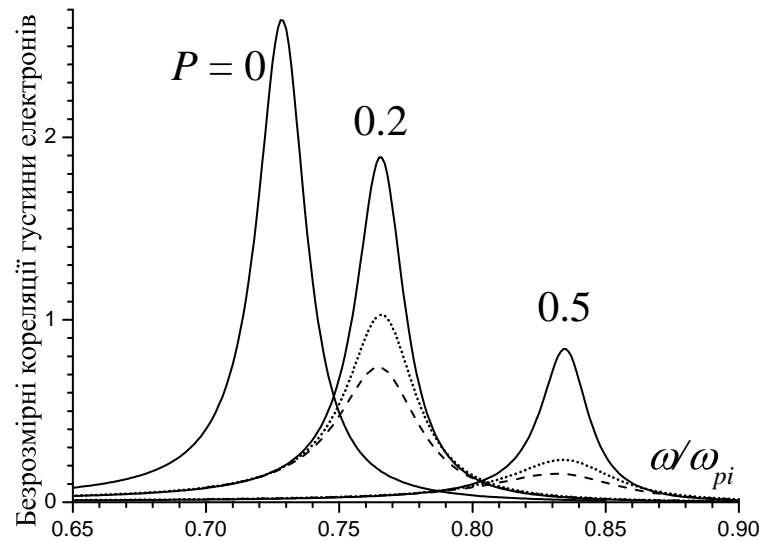


Рис. 5.25 Спектри флуктуацій густини електронів $\langle \delta n_\alpha^2 \rangle_{k\omega} \omega_{pi} / n_i$ у неізотермічній ($\tau = 100$) аргонівій плазмі для $\nu_{in}/\omega_{pi} = 0.02$, $k/k_{Di} = 0.1$, $P = 0, 0.2, 0.5$, обчислені за формулою (5.76) (суцільні лінії), включаючи зіткнення із порошинками $\nu_\alpha = \nu_{\alpha n} + \nu_{\alpha g}$, $a/\lambda_D = 0.15$ (штрихові лінії). Точкова лінія відповідає (5.73).

- Зменшення у запорошеній плазмі концентрації електронів по відношенню до концентрації іонів, що впливає на поверхневий потенціал порошинки ϕ_s (див. (5.50)) і діелектричну сприйнятливність електронів (5.62).

Для того, щоб з'ясувати вклад другого фактора окремо, ми розпочнемо із розгляду кореляційної функції електронної густини, яка задається виразом (5.76) і $\nu_\alpha = \nu_{\alpha n}$ у (5.59), тобто із дослідження впливу зіткнень іонів з нейтралами на флуктуації електронної густини у звичайній плазмі. Рис. 5.24 показує, що інтенсивність флуктуацій у неізотермічній плазмі ($\tau = 100$) є чутливою до зіткнень іонів із нейтралами. Навіть для малих значень ν_{in}/ω_{pi} , флуктуації суттєво пригнічуються.

Що стосуються третього фактора, то як було показано вище, зменшення n_e/n_i призводить до збільшення власної частоти іонно-звукових хвиль (див. рис. 5.20) і, як наслідок, до зміщення максимуму флуктуацій в область вищих частот. Цей ефект ілюструє рис. 5.25, на якому наведені спектри флуктуацій, які отримані з виразів для мультикомпонентної плазми (5.76), але з $n_e/n_i = 1 - P$. Крім зміщення флуктуаційного максимуму, також спостерігається його зменшення. Останнє пояснюється зменшенням діелектричної сприйнятливості електронів (5.62), яка пропорційна до $1 - P$, що призводить до зменшення $\langle \delta\rho_e^{(0)2} \rangle_{\mathbf{k}\omega}$ (ці величини пов'язані через (5.75)).

Для того, що виокремити вплив флуктуацій заряду порошинок (перший фактор), ми, спочатку «увімкнули» другий і третій фактор, а саме, зіткнення плазмових частинок із порошинками включені у ефективну частоту зіткнень $\nu_\alpha = \nu_{\alpha n} + \nu_{\alpha g}$ в (5.59), але для кореляційної функції густини електронів використовувалася формула (5.76) (штрихова лінія на рис. 5.25). Для $a/\lambda_D = 0.15$ і $P = 0.2; 0.5$ частота зіткнень іонів з порошинками рівна $\nu_{ig}/\omega_{pi} \approx 0.015$ і 0.035 відповідно, тобто її значення порядку частоти іон-нейтральних зіткнень $\nu_{in}/\omega_{pi} = 0.02$. Збільшення частоти зіткнень іонів очікувано призводить до зменшення інтенсивності флуктуацій. Нарешті, ми включаємо у розгляд флуктуації заряду порошинок (точкова лінія на рис. 5.25), тобто використовуємо формулу (5.73) з діелектричною проникністю (5.49). Можна прийти до висновку, що флуктуації заряду порошинок призводять до підсилення флуктуацій електронної густини, якщо

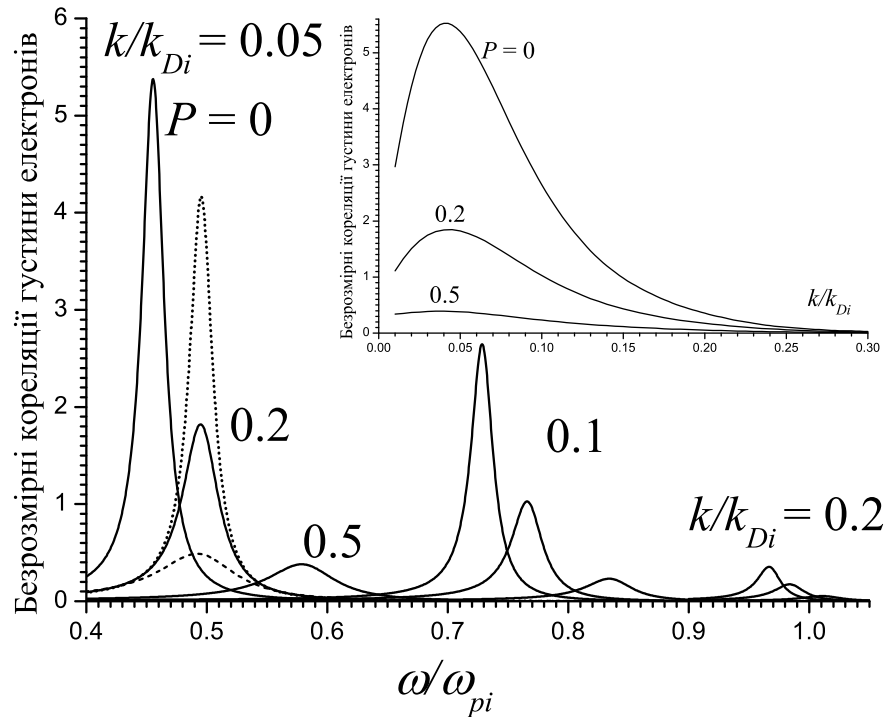


Рис. 5.26 Спектри флуктуацій густини електронів $\langle \delta n_\alpha^2 \rangle_{k\omega} \omega_{pi} / n_i$ у неізо-термічній ($\tau = 100$) аргонівій плазмі для $\nu_{in} = 0.02\omega_{pi}$, $a/\lambda_D = 0.15$, $k/k_{Di} = 0.05; 0.1; 0.2$, $P = 0; 0.2; 0.5$, $a/\lambda_D = 0.01$ (точкова лінія) і $a/\lambda_D = 1$ (штрихова лінія). Вставка – максимальне значення кореляційної функції густини електронів від k/k_{Di} .

порівнювати із штриховою лінією, але у порівнянні із описом у рамках багатоконпонентної моделі (суцільні лінії) флуктуації суттєво пригнічуються.

Спектри флуктуацій густини електронів у сильнеізотермічній плазмі ($\tau = 100$), які наведені на рис. 5.26, показують, що положення та інтенсивності максимумів залежать від хвильового числа k/k_{Di} і збігаються з власними частотами іонно-звукових хвиль (див. рис. 5.20). Присутність порошинок призводить до зміщення максимуму флуктуацій до вищих частот і до зменшення інтенсивності флуктуацій. Як було показано вище, збільшення власної частоти іонно-звукових хвиль пов'язане зі зменшенням відношення концентрації електронів до іонів n_e/n_i . Це твердження підкріплюється кривими на рис. 5.26, які відповідають $k/k_{Di} = 0.05$, $P = 0.2$ і різним значенням розміру порошинок $a/\lambda_D = 0.01, 0.15, 1$. Значення частоти зіткнень ν_{ig} і частоти заряджання ν_{ch}^α є набагато меншими для

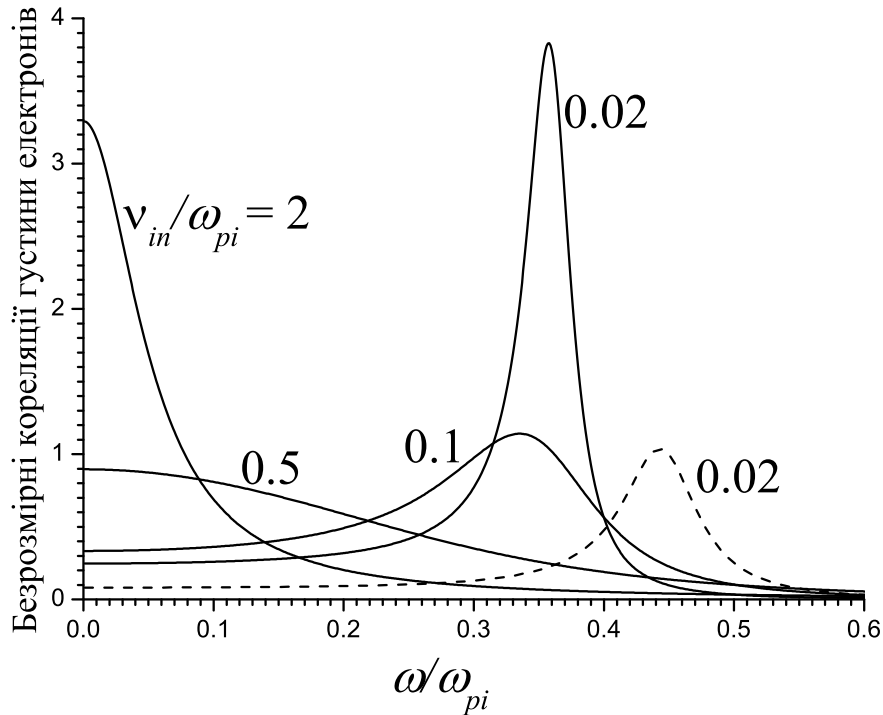


Рис. 5.27 Спектри флуктуацій густини електронів $\langle \delta n_\alpha^2 \rangle_{k\omega} \omega_{pi} / n_i$ у неізотермічній ($\tau = 10$) аргонівій плазмі для $k/k_{Di} = 0.1$, $\nu_{in}/\omega_{pi} = 0.02; 0.1; 0.5; 2$, $P = 0$ (суцільні лінії) і $P = 0.5$, $a/\lambda_D = 0.15$ (штрихові лінії).

$a/\lambda_D = 0.01$, ніж для $a/\lambda_D = 1$ (див. рис. 5.13, 5.17). Отже, флуктуації пригнічуються менше за присутності малих порошинок, ніж великих, але величина зміщення максимуму майже повністю залежить від параметра Хавнеса.

Зі вставки на рис. 5.26 видно, що найвища інтенсивність флуктуацій спостерігається при $k/k_{Di} \approx 0.05$ і збільшення параметра Хавнеса призводить до зменшення інтенсивності флуктуацій для всіх значень хвильового вектора у розглянутому діапазоні.

Зміна спектру флуктуацій у звичайній неізотермічній плазмі ($\tau = 10$) зі збільшенням частоти іон-нейтральних зіткнень показана на рис 5.27. Зі збільшенням ν_{in}/ω_{pi} флуктуації спочатку зменшуються, але потім зростають із максимумом при $\omega = 0$. Присутність порошинок також збільшує ефективну частоту зіткнень іонів $\nu_i = \nu_{in} + \nu_{ig}$ завдяки зіткненням іонів з порошинками. Наприклад, $\nu_{ig}/\omega_{pi} = 0.028$ для $P = 0.5$, $ak_D = 0.15$ і $\nu_{in}/\omega_{pi} = 0.02$, отже $\nu_i/\omega_{pi} = 0.048$ і флуктуації пригнічуються. Але

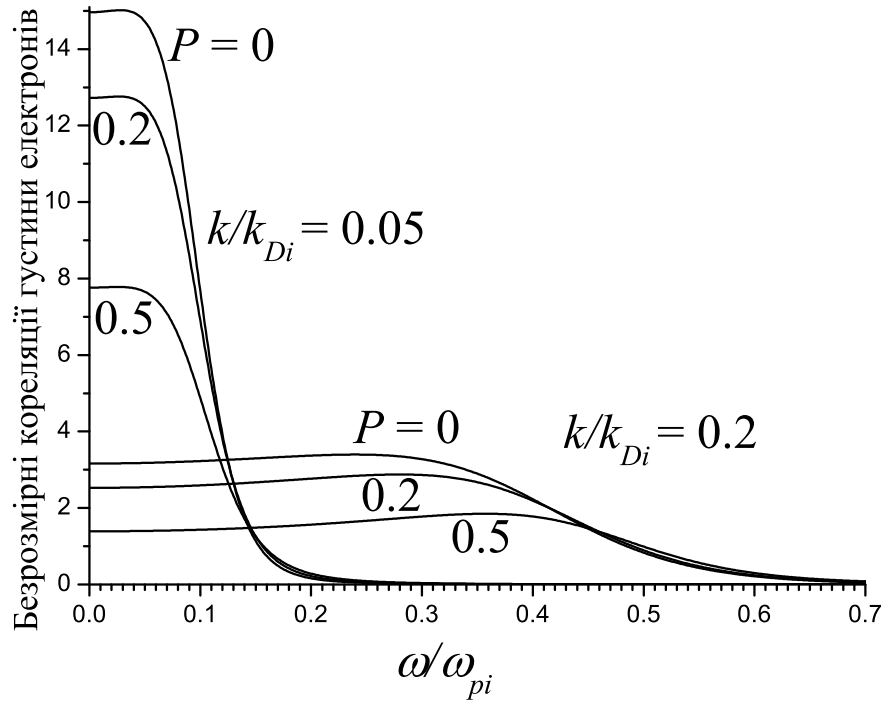


Рис. 5.28 Спектри флуктуацій густини електронів $\langle \delta n_e^2 \rangle_{k\omega} \omega_{pi} / n_i$ у ізотермічній ($\tau = 1$) аргонівій плазмі для $\nu_{in} = 0.02\omega_{pi}$, $a/\lambda_D = 0.15$, $k/k_{Di} = 0.05; 0.1; 0.2$ і $P = 0; 0.2; 0.5$.

максимальне значення безрозмірної кореляції електронної густини приблизно рівне значенню у звичайній плазмі з $\nu_{in} = 0.1$. Додаткове зменшення інтенсивності флуктуацій, напевне, пов'язане з динамікою заряджання порошинок (варіацією їхніх зарядів). Крім того, максимум зсувається до вищих частот. Як вже згадувалося, збільшення частоти, на якій знаходиться максимум флуктуацій, відбувається за рахунок зменшення n_e/n_i .

Спектри флуктуації у ізотермічній плазмі (див. рис. 5.28) відрізняються від спектрів у неізотермічній плазмі: максимумами ширші і зміщені до нижчих частот. Присутність порошинок пригнічує флуктуації, але не так сильно як у неізотермічній плазмі. Рис. 5.29 ілюструє вплив розміру порошинок на флуктуації в ізотермічній плазмі. Оскільки ν_{ig} і ν_{ch} для $a/\lambda_D = 0.01$ є набагато меншими, ніж для $a/\lambda_D = 1$ (див. рис. 5.15, 5.18), то присутність порошинок різних розмірів змінює спектри флуктуацій по-різному, навіть при однаковому значенні параметра Хавнеса.

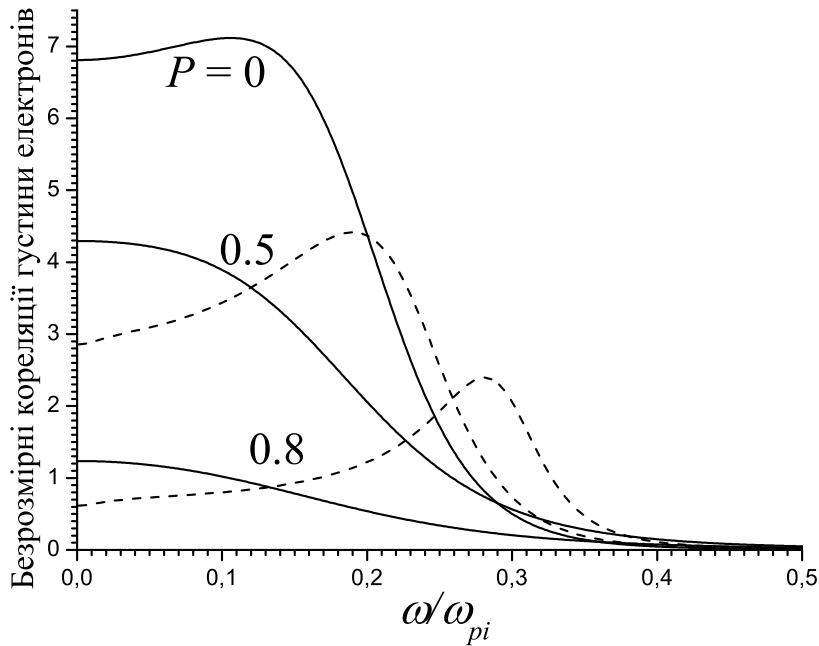


Рис. 5.29 Спектри флуктуацій густини електронів $\langle \delta n_\alpha^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} \omega_{pi} / n_i$ у ізотермічній ($\tau = 1$) аргонівій плазмі для $\nu_{in} = 0.02\omega_{pi}$, $k/k_{Di} = 0.1$, $P = 0; 0.5; 0.8$, $a/\lambda_D = 0.01$ (штрихові лінії) і $a/\lambda_D = 1$ (суцільні лінії).

5.2.6 Висновки

У кінетичному підході отримано вираз для діелектричної проникності слабкоіонізованої заповненої плазми із зіткненнями. Врахування флуктуацій заряду порошинок призводить до перенормування діелектричної сприйнятливості підсистеми порошинок. На діелектричну сприйнятливість електронів та іонів впливає збільшення їх частоти зіткнень за рахунок зіткнень з порошинками.

Виконано аналіз частот заряджання порошинок і частот зіткнень електронів та іонів з порошинками у широкому діапазоні довжин вільного пробігу іонів. З'ясовано, що обидві частоти є порядку або менше за плазмову частоту іонів $\lesssim \omega_{pi}$ для параметрів газорозрядної плазми.

На зміну спектру іонно-звукових хвиль у заповненій плазмі порівняно зі звичайною плазмою переважно впливає зменшення концентрації електронів по відношенню до іонів n_e/n_i , а саме власна частота і фазова швидкість зростає зі зменшенням n_e/n_i . Зростання фазової швидкості приводить до зменшення згасання Ландау, яке спостерігається при $k/k_{Di} \gtrsim 0.2$

у ізотермічній та слабконеізотермічній плазмі. Зіткнення електронів та іонів з порошинками, а також флуктуації заряду порошинок, є додатковими механізмами дисипації енергії хвилі і призводять до суттєвого зростання модуля декременту згасання.

Присутність порошинок зі змінним зарядом суттєво впливає на спектри флуктуацій електронної густини. Основними факторами цього впливу є: зменшення у запорошеній плазмі концентрації електронів по відношенню до концентрації іонів, збільшення частоти зіткнень іонів, через зіткнення із порошинками і флуктуації заряду порошинок.

У випадку неізотермічної плазми положення та інтенсивності іонно-звукових резонансів залежать від концентрації порошинок (параметра Хавнеса). Зменшення відношення концентрації електронів до іонів n_e/n_i у запорошеній плазмі призводить до зміщення флуктуаційних максимумів до вищих частот а також до їх зменшення, через зменшення діелектричної сприйнятливості електронів. Збільшення ефективної частоти зіткнень іонів додатково пригнічує кореляції електронної густини. Самі флуктуації заряду порошинок підсилюють флуктуації електронної густини, але загалом, у запорошеній плазмі флуктуації суттєво пригнічуються. Цей ефект залежить від розміру порошинок і є більш вираженим для більших порошинок, оскільки частота зіткнень іонів з порошинками пропорційна квадрату їх радіуса.

Присутність порошинок збільшує ефективну частоту зіткнень іонів, але зміна спектру флуктуацій відрізняється від тієї, що відбувається у звичайній плазмі при збільшенні частоти зіткнень іонів з нейтралами. Зокрема, збільшення частоти зіткнень іонів у звичайній плазмі може призводити до пригнічення іонно-звукового резонансу і появи максимуму біля нульової частоти, чого не спостерігається у запорошеній плазмі. У випадку ізотермічної плазми присутність порошинок призводить до якісної зміни спектрів флуктуацій. Для великої концентрації порошинок (параметр Хавнеса перевищує 0.5) і малих порошинок ($a/\lambda_D = 0.01$) іонно-звуковий резонанс стає більш вираженим.

ВИСНОВКИ

1. На основі кінетичного рівняння розвинуто новий підхід до вивчення ефективного потенціалу порошинки у слабоіонізованій плазмі. Центральним місцем цього підходу є описання поглинання електронів та іонів порошиною шляхом введення ефективних точкових стоків у кінетичні рівняння для плазмових частинок. На основі запропонованого підходу вперше знайдено вирази для ефективного потенціалу з урахуванням зіткнень електронів та іонів з нейтральними частинками, а також в присутності зовнішнього постійного магнітного поля. Виконано детальний аналіз отриманих співвідношень з урахуванням залежності іонного перерізу заряджання порошинки від швидкості іонів. Отримано прості аналітичні вирази для потенціалів при довільних значеннях довжини вільного пробігу іонів. Показано, що аналітичні наближення узгоджуються з проведеними числовими розрахунками та встановлено області застосування таких аналітичних наближень.

2. Показано, що розподіл електростатичного потенціалу у слабоіонізованій плазмі з частими зіткненнями поблизу зарядженої сферичної порошинки, яка поглинає електрони та іони, може бути описаний з точністю до декількох відсотків суперпозицією потенціалів Кулона та Дебая з масштабованою довжиною екранування. Суттєве зменшення концентрації плазмових частинок поблизу порошинки, через їх поглинання порошиною, призводить до збільшення довжини екранування у декілька разів, яка зростає зі збільшенням розміру порошинки. У неізотермічній плазмі ці ефекти є ще більш вираженими. Лише у границі малих частинок ($a/\lambda_D \ll 1$) у ізотермічній плазмі довжина екранування наближається до довжини Дебая. Ефективний заряд у кулонівській частині потенціалу зростає зі зменшенням a/λ_D , а у неізотермічній плазмі неекранований заряд може перевищувати екранований заряд і у границі малих порошинок для $T_e/T_i = 10$ досягає $\approx 90\%$ від усього заряду порошинки.

3. Числове розв'язання задачі про екранування порошинки для випадку слабоіонізованої плазми з частими зіткненнями за присутності зовнішнього постійного магнітного поля показує, що навіть слабе магнітне поле (електрони та іони незамагнічені) може призводити до помітно зменшення струму заряджання і заряду порошинки. Це може бути пояснене зменшенням потоку плазмових частинок до порошинки у перпендикулярному до магнітного поля напрямку. Водночас, слабе магнітне поле не змінює помітно просторову симетрію розподілу потенціалу. Збільшення магнітного поля до значень при яких електрони стають замагніченими призводить до порушення сферичної симетрії ефективного потенціалу. При цьому потенціал спадає швидше у напрямку вздовж поля, ніж у перпендикулярному напрямку. Більше того, подальше збільшення зовнішнього магнітного поля може обумовити немонотонну просторову залежність потенціалу. Це означає, що для порошинок, які знаходяться на одній силовій лінії поля, може мати місце притягання.

4. Показано, що в рамках моделі Пуассона – Больцмана розподіл потенціалу навколо зарядженої сферичної макрочастинки у неізотермічному плазмopodobному середовищі, яка не поглинає електрони та іони, може бути описаний потенціалом Дебая з ефективним зарядом. Значення ефективного заряду залежить від відношення розміру частинки до довжини Дебая a/λ_D , безрозмірного заряду порошинки $z_g = qe_e/aT_e$ та відношення температури електронів та іонів T_e/T_i . Ефективний заряд може бути як значно меншим, так і більшим за реальний заряд. У ізотермічній плазмі ефективний заряд монотонно спадає з z_g , але у неізотермічній плазмі ця залежність має виражений максимум. Для будь-яких значень a/λ_D та z_g значення ефективного заряду у неізотермічній плазмі є більшим, ніж в ізотермічній.

5. В рамках дрейфово-дифузійного наближення обчислено силу взаємодії між двома зарядженими сферичними провідними частинками, які вміщені у слабоіонізоване сильнозіткнене ізотермічне плазмopodobне середовище. Показано, що на відстанях у декілька радіусів частинки, силу

взаємодії між двома провідним частинками, які не обмінюються зарядом із середовищем, можна кількісно описати силою, що відповідає потенціалу Дебая з ефективним зарядом. З'ясовано, що двочастинкові ефекти особливо важливі під час описання взаємодії порошинок. Для порошинок із розмірами $a \leq \lambda_D$ і на відстанях набагато більших за довжину Дебая, сила взаємодії дорівнює приблизно половині сили Кулона, з якою взаємодіють відповідні точкові заряди у вакуумі. На відстанях менших за декілька радіусів частинки, спостерігаються поляризаційні ефекти, а також зменшення повного заряду порошинок.

6. Кінетична теорія запырошеної плазми з моделлю точкових стоків використана для знаходження ефективного потенціалу порошинки у слабоіонізованій плазмі у зовнішньому постійному електричному полі. Знайдена сила тертя, яка пов'язана з дрейфом іонів у зовнішньому електричному полі. Показано, що поглинання іонів порошиною може призводити до зміни напрямку сили тертя.

7. На основі рівняння Батнагара – Гросса – Крука (БГК) розраховано середні та середньоквадратичні зміщення електронів та іонів у плазмі в зовнішньому постійному електричному полі. Виконано порівняння зі зміщеннями, розрахованими на основі рівняння Фоккера-Планка. Показано, що середньоквадратичні зміщення в загальному випадку є відмінними, але відмінність зникає у рівноважному стані.

8. В рамках дрейфово-дифузійного наближення обчислено силу тертя, яка діє на сферичну провідну порошинку, що стаціонарно рухається у сильнотіткненій плазмі. Показано, що як для ізотермічної, так і неізотермічної плазми, розподіли електронів та іонів навколо порошинки створюють таке електричне поле, що сила, яка діє на порошинку направлена вздовж її швидкості, тобто має місце від'ємне тертя. Ця сила немонотонно залежить від швидкості порошинки і приблизно пропорційна квадрату її радіуса як для ізотермічної, так і неізотермічної плазми. Позаду від'ємно зарядженої

порошинки у плазмі формується область з від'ємною густиною заряду. Також встановлено, що стаціонарний струм заряджання та заряд порошинки зростають зі зростанням її швидкості.

9. В рамках моделі точкових стоків знайдено наближені аналітичні вирази для сили тертя. З'ясовано, що вони якісно правильно описують залежність сили від швидкості порошинки і дають граничне значення сили тертя, яка діє на порошинки скінченних розмірів. Сформульовано умову за якої від'ємна сила тертя може перевищувати силу тертя із нейтралами, яка описується законом Стокса. Ця умова пропорційна радіусу порошинки a , таким чином, можливе існування порогового значення радіуса a_{cr} вище якого спостерігається від'ємне тертя. В такому разі, розподіл порошинок за швидкостями буде залежати від їхнього розміру.

10. Розвинуто теорію великомасштабних флуктуацій для слабоіонізованої плазми у зовнішньому постійному електричному полі, яка враховує вплив електричного поля на розподіл плазмових частинок за швидкостями та на функцію діелектричного відгуку. Отримано числові розв'язки дисперсійного рівняння в області іонно-звукових хвиль. Показано, що поле призводить до немонотонної залежності декременту згасання від хвильового вектора, а саме заявляється область де декремент згасання стає додатнім, тобто має місце нестійкість. Представлено результати розрахунків спектрів флуктуації електронної густини. Підтверджено, що резонансна структура таких спектрів визначається власною частотою і декрементом згасання хвиль, які знайдені із урахуванням впливу зовнішнього електричного поля. Виявлено, що електричне поле призводить до резонансної поведінки спектру флуктуацій навіть в ізотермічній плазмі з частими зіткненнями. Досліджено залежність порогу нестійкості від частоти зіткнення.

11. У кінетичному наближенні отримано вираз для діелектричної проникності слабоіонізованої заповненої плазми із зіткненнями на основі якого досліджено поширення іонно-звукових хвиль. Врахування флуктуацій

заряду порошинок призводить до перенормування діелектричної сприйнятливості підсистеми порошинок. Зміни спектру іонно-звукових хвиль у запорошеній плазмі порівняно зі звичайною плазмою відбуваються переважно за рахунок зменшення концентрації електронів по відношенню до іонів, а саме власна частота і фазова швидкість зростає зі зменшенням n_e/n_i . Зростання фазової швидкості приводить до зменшення згасання Ландау, яке спостерігається при $k/k_{Di} \gtrsim 0.2$ у ізотермічній та слабконеізотермічній плазмі. Зіткнення електронів та іонів з порошинками, а також флуктуації заряду порошинок, є додатковими механізмами дисипації енергії хвилі і призводять до суттєвого зростання модуля декременту згасання.

12. Показано, що присутність порошинок зі змінним зарядом суттєво впливає на спектри флуктуацій електронної густини. Основними факторами цього впливу є: зменшення у запорошеній плазмі концентрації електронів по відношенню до концентрації іонів n_e/n_i , збільшення частоти зіткнень іонів, через зіткнення із порошинками і флуктуації заряду порошинок. У випадку неізотермічної плазми зменшення відношення n_e/n_i призводить до зміщення флуктуаційних максимумів до вищих частот, а також до їх зменшення через зменшення діелектричної сприйнятливості електронів. Збільшення ефективної частоти зіткнень іонів залежить від розміру порошинок і додатково пригнічує флуктуації електронної густини. Самі флуктуації заряду порошинок можуть підсилювати флуктуації електронної густини, але загалом, у запорошеній плазмі флуктуації електронної густини суттєво пригнічуються. У випадку ізотермічної плазми присутність порошинок призводить до якісної зміни спектрів флуктуацій. Для великої концентрації малих порошинок іонно-звуковий резонанс стає більш вираженим.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. A.I. Momot, A.G. Zagorodny, and O.V. Momot, “Electron density fluctuations in collisional dusty plasma with variable grain charge”, [Physical Review E](#) **99**, 013206 (2019).
2. A.I. Momot, A.G. Zagorodny, and O.V. Momot, “Fluctuations and ion-acoustic waves in collisional dusty plasma with variable grain charge”, [Problems of Atomic Science and Technology, Series: Plasma Physics](#) **24**, 79–82 (2018).
3. A.I. Momot, A.G. Zagorodny, and O.V. Momot, “A kinetic description of ion- acoustic waves in collisional dusty plasma: effects of grain charge fluctuations”, [Physics of Plasmas](#) **25**, 073706 (2018).
4. A.I. Momot, “Effective charge of a macroparticle in a non-isothermal plasma within the Poisson–Boltzmann model”, [Contributions to Plasma Physics](#) **58**, 233–238 (2018).
5. A.V. Filippov, A.G. Zagorodny, A.I. Momot, A.F. Pal’, and A.N. Starostin, “Analysis of macroparticle charge screening in a nonequilibrium plasma based on the kinetic collisional point sink model”, [Journal of Experimental and Theoretical Physics](#) **125**, 926–939 (2017).
6. A.I. Momot, “Negative drag force on finite-size charged dust grain in strongly collisional plasma”, [Physics of Plasmas](#) **24**, 103704 (2017).
7. A.I. Momot, A.G. Zagorodny, and I.S. Orel, “Interaction force between two finite-size charged particles in weakly ionized plasma”, [Physical Review E](#) **95**, 013212 (2017).
8. A.I. Momot and A.G. Zagorodny, “Toward Analytical description of the electrostatic potential of charged macroparticle in weakly ionized plasma”, [Europhysics Letters](#) **114**, 65004 (2016).
9. А.Г. Загородній та А.І. Момот, *Вступ до кінетичної теорії плазми* (Наукова думка, Київ, 2015).

10. A.I. Momot, “Screening and interaction of conductive grains charged by drift- diffusion currents in plasma”, *Physica Scripta* **T161**, 014002 (2014).
11. A.I. Momot, “Grain in weakly ionized plasma in the presence of an external magnetic field: Charging by plasma currents and effective potential”, *Physics of Plasmas* **20**, 073703 (2013).
12. A.I. Momot, “Grain charging in weakly ionized plasma in the presence of external magnetic field”, *Problems of Atomic Science and Technology, Series: Plasma Physics* **18**, 67–71 (2012).
13. A.I. Momot and A.G. Zagorodny, “Fluctuations in collisional plasma in the presence of an external electric field”, *Physics of Plasmas* **18**, 102110 (2011).
14. A.G. Zagorodny, I.V. Rogal, A.I. Momot, and I.V. Schweigert, “Grain in a plasma in the presence of external electric field: kinetic calculation of effective potential and ionic drag force”, *Ukrainian Journal of Physics* **55**, 29–35 (2010).
15. A.V. Filippov, A.G. Zagorodny, A.I. Momot, A.F. Pal’, and A.N. Starostin, “Screening of a moving charge in a nonequilibrium plasma”, *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **108**, 497–515 (2009).
16. A.G. Zagorodny, A.I. Momot, A.V. Filippov, A.F. Pal, and A.N. Starostin, “About the influence of plasma particles collisions on the effective grain potential”, *Ukrainian Journal of Physics* **54**, 1089–1093 (2009).
17. A.V. Filippov, A.G. Zagorodny, and A.I. Momot, “Screening of a moving charge in a nonequilibrium plasma”, *JETP Letters* **88**, 24–30 (2008).
18. A.G. Zagorodny, A.V. Filippov, A.F. Pal’, A.N. Starostin, and A.I. Momot, “Kinetic theory of dusty plasmas and effective grain interactions”, *Problems of Atomic Science and Technology, Series: Plasma Physics* **14**, 70–74 (2008).

19. A.V. Filippov, A.G. Zagorodny, A.F. Pal', A.N. Starostin, and A.I. Momot, "Kinetic description of the screening of the charge of macroparticles in a nonequilibrium plasma", [JETP Letters](#) **86**, 761–766 (2008).
20. A.V. Filippov, A.G. Zagorodny, A.I. Momot, A.F. Pal', and A.N. Starostin, "Interaction of two macroparticles in a nonequilibrium plasma", [Journal of Experimental and Theoretical Physics](#) **105**, 831–845 (2007).
21. A.N. Starostin, A.V. Filippov, A.F. Pal', A.I. Momot, and A.G. Zagorodny, "Shielding and Interaction of Dust Particles in Non-Equilibrium Plasma", [Contributions to Plasma Physics](#) **47**, 388–401 (2007).
22. A.V. Filippov, A.G. Zagorodny, A.I. Momot, A.F. Pal', and A.N. Starostin, "Charge screening in a plasma with an external ionization source", [Journal of Experimental and Theoretical Physics](#) **104**, 147–161 (2007).
23. A.I. Momot, "Negative drag force on finite-size dust grain in strongly collisional plasma", in [Abstracts of 45th EPS Conference on Plasma Physics, Prague, Czech Republic](#) (2018), p. 5.3009.
24. A.I. Momot and A.G. Zagorodny, "Fluctuations and ion-acoustic waves in collisional dusty plasma: effects of grain charging dynamics", in [Abstracts of International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion, Kharkiv, Ukraine](#) (2018), p. 58.
25. A.G. Zagorodny and A.I. Momot, "Polarization effects in macroparticle interactions in plasmas and plasma-like media", in [Abstracts of International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion, Kharkiv, Ukraine](#) (2016), p. 19.
26. A.I. Momot and A.G. Zagorodny, "Analytical description of the electrostatic potential of dust grain in weakly ionized plasma", in [Abstracts of International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion, Kharkiv, Ukraine](#) (2016), p. 71.

27. A.I. Momot and A.G. Zagorodny, “Interaction of charged conductive spherical particles in strongly collisional plasma”, in Abstracts of International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion, Kharkiv, Ukraine (2014), p. 60.
28. A.I. Momot and A.G. Zagorodny, “Macroparticle charging and screening in weakly ionized plasma with magnetized electrons”, in [Proceedings of 31th International Conference on Phenomena in Ionized Gases \(ICPIG\), Granada, Spain \(2013\)](#).
29. A.I. Momot and A.G. Zagorodny, “Screening of dust grain charged by drift-diffusion currents in magnetized plasma”, in [Abstracts of International Conference on Research and Application of Plasmas, Warsaw, Poland \(2013\)](#).
30. A.I. Momot and A.G. Zagorodny, “Grain charging in weakly ionized plasma in the presence of external magnetic field”, in [Book of abstracts Alushta 2012 International Conference and School on Plasma Physics and Controlled Fusion and the Adjoint Workshop “Nano- and Micro- Sized Structures in Plasmas”, Alushta, Ukraine \(2012\)](#), p. 227.
31. A.G. Zagorodny, A.I. Momot, I.V. Rogal, and I.V. Schweigert, “Kinetic description of ionic drag force in collisional plasma”, in [Proceedings of the 3-rd International Conference “Dusty Plasmas in Applications”, Odesa, Ukraine \(2010\)](#), pp. 140–143.
32. A.G. Zagorodny, I.V. Rogal, A.I. Momot, and I.V. Schweigert, “Grain in a Plasma in the Presence of External Electric Field: Kinetic Calculation of Effective Potential and Ionic Drag Force”, in [Book of abstracts Bogolyubov Kyiv Conference “Modern Problems of Theoretical and Mathematical Physics”, Kyiv, Ukraine \(2009\)](#), p. 183.
33. А.І. Момот, А.Г. Загородній, І.В. Рогаль та І.В. Швейгерт, “Ефективний потенціал порошинки у плазмі за наявності зовнішнього електричного

- поля”, в Тези Української конференції з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу, Київ, Україна (2009), с. 25.
34. A.V. Filippov, A.I. Momot, A.F. Pal', A.N. Starostin, and A.G. Zagorodny, “Shielding of a Moving Charged Dust Particle in the Nonequilibrium Plasma”, [AIP Conference Proceedings](#) **1041**, 207–208 (2008).
 35. A.G. Zagorodny, A.V. Filippov, A.F. Pal, A.N. Starostin, and A.I. Momot, “Kinetic theory of dusty plasmas and effective grain interactions”, in Book of abstracts Alushta 2008 International Conference and School on Plasma Physics and Controlled Fusion, Alushta, Ukraine (2008), p. 15.
 36. A.G. Zagorodny, A.V. Filippov, A.F. Pal, A.N. Starostin, and A.I. Momot, “Kinetic description of effective grain potentials in a plasma”, in [Proceedings of the 2-nd International Conference “Dusty Plasmas in Applications”](#), Odesa, Ukraine (2007), pp. 176–181.
 37. A.V. Filippov, A.I. Momot, A.F. Pal, A.N. Starostin, and A.G. Zagorodny, “Interaction of moving dust particles in a nonequilibrium plasma”, in [Proceedings of the 2-nd International Conference “Dusty Plasmas in Applications”](#), Odesa, Ukraine (2007), pp. 48–51.
 38. A. Zagorodny, O. Bystrenko, T. Bystrenko, A. Filippov, A. Momot, A. Pal', and A. Starostin, “Effective grain interaction in dusty plasmas: theoretical description and numerical simulation”, in [Abstracts of 28th International Conference on Phenomena in Ionized Gases \(ICPIG\)](#), Prague, Czech Republic (2007), p. 26.
 39. P. Bliokh, V. Sinitsin, and V. Yaroshenko, *Dusty and Self-Gravitational Plasmas in Space* (Springer Science & Business Media, 1995).
 40. V.N. Tsytovich, “Dust plasma crystals, drops, and clouds”, [Phys. Usp.](#) **40**, 53–94 (1997).
 41. P.K. Shukla and A.A. Mamun, *Introduction to Dusty Plasma Physics* (IoP Publishing Ltd., London, 2002).

42. V.N. Tsytovich, G.E. Morfill, and H. Thomas, “Complex plasmas: I. complex plasmas as unusual state of matter”, *Plasma Phys. Rep.* **28**, 623–651 (2002).
43. G.E. Morfill, V.N. Tsytovich, and H. Thomas, “Complex plasmas: II. Elementary processes in complex plasmas”, *Plasma Phys. Rep.* **29**, 1–30 (2003).
44. H. Thomas, G.E. Morfill, and V.N. Tsytovich, “Complex plasmas: III. Experiments on strong coupling and long-range correlations”, *Plasma Phys. Rep.* **29**, 895–954 (2003).
45. V.N. Tsytovich, G.E. Morfill, and H. Thomas, “Complex plasmas IV: Theoretical approaches to complex plasmas and their application”, *Plasma Phys. Rep.* **30**, 816–864 (2004).
46. R.L. Merlino and J.A. Goree, “Dusty plasmas in the laboratory, industry, and space”, *Phys. Today* **57**, 32–38 (2004).
47. S.V. Vladimirov and K. Ostrikov, “Dynamic self-organization phenomena in complex ionized gas systems: new paradigms and technological aspects”, *Phys. Rep.* **393**, 175–380 (2004).
48. В.Е. Фортов, А.Г. Храпак, С.А. Храпак, В.И. Молотков и О.Ф. Петров, “Пылевая плазма”, *УФН* **174**, 495–544 (2004).
49. V.E. Fortov, A.V. Ivlev, S.A. Khrapak, A.G. Khrapak, and G.E. Morfill, “Complex (dusty) plasmas: Current status, open issues, perspectives”, *Phys. Rep.* **421**, 1–103 (2005).
50. S.V. Vladimirov, K. Ostrikov, and A.A. Samarian, *Physics and Applications of Complex Plasmas* (World Scientific, 2005).
51. О.С. Ваулина, О.Ф. Петров, В.Е. Фортов, А.Г. Храпак и А.С. Храпак, *Пылевая плазма: эксперимент и теория* (Физматлит, Москва, 2009).

52. P.K. Shukla and B. Eliasson, “Colloquium: Fundamentals of dust-plasma interactions”, [Rev. Mod. Phys. **81**, 25–44 \(2009\)](#).
53. S. Khrapak and G. Morfill, “Basic processes in complex (dusty) plasmas: charging, interactions, and ion drag force”, [Contrib. Plasma Phys. **49**, 148–168 \(2009\)](#).
54. G.E. Morfill and A.V. Ivlev, “Complex plasmas: An interdisciplinary research field”, [Rev. Mod. Phys. **81**, 1353–1404 \(2009\)](#).
55. В. Фортов и Г. Морфилл, ред., *Комплексная и пылевая плазма: из лаборатории в космос*. (Физматлит, Москва, 2012).
56. G.S. Selwyn, J. Singh, and R.S. Bennett, “In situ laser diagnostic studies of plasma-generated particulate contamination”, [J. Vac. Sci. Technol. A **7**, 2758–2765 \(1989\)](#).
57. F.F. Chen, “Industrial applications of low-temperature plasma physics”, [Phys. Plasmas **2**, 2164–2175 \(1995\)](#).
58. L. Boufendi and A. Bouchoule, “Industrial developments of scientific insights in dusty plasmas”, [Plasma Sources Sci. T. **11**, A211–A218 \(2002\)](#).
59. O. Havnes, C.K. Goertz, G.E. Morfill, E. Grün, and W. Ip, “Dust charges, cloud potential, and instabilities in a dust cloud embedded in a plasma”, [J. Geophys. Research: Space Phys. **92**, 2281–2287 \(1987\)](#).
60. H.M. Mott-Smith and I. Langmuir, “The theory of collectors in gaseous discharges”, [Phys. Rev. **28**, 727 \(1926\)](#).
61. J.E. Allen, “Probe theory – the orbital motion approach”, [Phys. Scripta **45**, 497 \(1992\)](#).
62. J.E. Allen, B.M. Annaratone, and U. de Angelis, “On the orbital motion limited theory for a small body at floating potential in a Maxwellian plasma”, [J. Plasma Phys. **63**, 299–309 \(2000\)](#).

63. A.F. Pal', A.O. Serov, A.N. Starostin, A.V. Filippov, and V.E. Fortov, "Non-self-sustained discharge in nitrogen with a condensed dispersed phase", *J. Exp. Theor. Phys.* **92**, 235–245 (2001).
64. V.N. Babichev, A.F. Pal', A.N. Starostin, A.V. Filippov, and V.E. Fortov, "Stable dust structures in non-self-sustained gas discharge under atmospheric pressure", *J. Exp. Theor. Phys.* **80**, 241–245 (2004).
65. A.V. Filippov, V.N. Babichev, N.A. Dyatko, A.F. Pal', A.N. Starostin, M.D. Taran, and V.E. Fortov, "Formation of plasma dust structures at atmospheric pressure", *J. Exp. Theor. Phys.* **102**, 342–354 (2006).
66. Н.А. Кролл и А.У. Трайвелпис, *Основы физики плазмы* (Мир, Москва, 1975).
67. O. Bystrenko and A. Zagorodny, "Screening of dust grains in a weakly ionized gas: Effects of charging by plasma currents", *Phys. Rev. E* **67**, 066403 (2003).
68. А.В. Филиппов, Н.А. Дятко, А.Ф. Паль и А.Н. Старостин, "Самосогла-сованная модель зарядки пылевых частиц при повышенных давлениях на основе метода моментов", *Физика плазмы* **29**, 214–226 (2003).
69. А.І. Момот, "Вплив самоузгодженого заряджання порошинок на електродинамічні процеси у запорошеній плазмі", дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2006).
70. A.G. Zagorodny, A.V. Filippov, A.F. Pal, A.N. Starostin, and A.I. Momot, "Effective grain potential in a plasma with external sources of ionization", *Probl. Atom. Sci. Tech. Series: Plasma Phys.* **12**, 99–103 (2006).
71. A.G. Zagorodny, A.V. Filippov, A.F. Pal, A.N. Starostin, and A.I. Momot, "Macroparticle screening in a weakly ionized plasma", *J. Phys. Stud.* **11**, 158–164 (2007).

72. S.A. Khrapak, S.K. Zhdanov, A.V. Ivlev, and G.E. Morfill, “Drag force on an absorbing body in highly collisional plasmas”, *J. App. Phys.* **101**, 033307 (2007).
73. S.V. Vladimirov, S.A. Khrapak, M. Chaudhuri, and G.E. Morfill, “Superfluidlike motion of an absorbing body in a collisional plasma”, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 055002 (2008).
74. M. Chaudhuri, S.A. Khrapak, and G.E. Morfill, “Ion drag force on a small grain in highly collisional weakly anisotropic plasma: Effect of plasma production and loss mechanisms”, *Phys. Plasmas* **15**, 053703 (2008).
75. S. Hamaguchi, R.T. Farouki, and D.H.E. Dubin, “Triple point of Yukawa systems”, *Phys. Rev. E* **56**, 4671–4682 (1997).
76. E.J. Meijer and D. Frenkel, “Melting line of Yukawa system by computer simulation”, *J. Chem. Phys.* **94**, 2269–2271 (1991).
77. M.J. Stevens and M.O. Robbins, “Melting of Yukawa systems: A test of phenomenological melting criteria”, *J. Chem. Phys.* **98**, 2319–2324 (1993).
78. O.S. Vaulina and S.A. Khrapak, “Simulation of the dynamics of strongly interacting macroparticles in a weakly ionized plasma”, *J. Exp. Theor. Phys.* **92**, 228–234 (2001).
79. O. Vaulina, S. Khrapak, and G. Morfill, “Universal scaling in complex (dusty) plasmas”, *Phys. Rev. E* **66**, 016404 (2002).
80. Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред* (Гостехиздат, Москва, 1957).
81. А.А. Рухадзе и В.П. Силин, “Электродинамика сред с пространственной дисперсией”, *УФН* **74**, 223–267 (1961).
82. А.И. Ахиезер, И.А. Ахиезер, Р.В. Половин, А.Г. Ситенко и К.Н. Степанов, *Электродинамика плазмы* (Наука, Москва, 1974).

83. С. Ишимару, *Основные принципы физики плазмы* (Атомиздат, Москва, 1975).
84. А.Г. Ситенко, *Флуктуации и нелинейное взаимодействие волн в плазме* (Наукова думка, Киев, 1977).
85. Ю.Л. Климонтович, *Статистическая теория неравновесных процессов в плазме* (Изд-во Моск. ун-та, Москва, 1964).
86. Ю.Л. Климонтович, *Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы* (Наука, Москва, 1975).
87. Ю.Л. Климонтович, *Статистическая физика* (Наука, Москва, 1982).
88. S. Ichimaru and I.P. Yakimenko, “Transition probability approach to the theory of plasmas”, *Phys. Scripta* **7**, 198–208 (1973).
89. I.P. Yakimenko and A.G. Zagorodny, “Transition probabilities, correlation functions and dielectric permittivity tensors for semi-bounded and bounded nonequilibrium plasmas”, *Phys. Scripta* **10**, 244–251 (1974).
90. P.L. Bhatnagar, E.P. Gross, and M. Krook, “A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems”, *Phys. Rev.* **94**, 511–525 (1954).
91. А.Ф. Александров, Л.С. Богданкевич и А.А. Рухадзе, *Основы электродинамики плазмы* (Высшая школа, Москва, 1978).
92. Л. Ландау, “О колебаниях электронной плазмы”, *ЖЭТФ.* **16**, 574 (1946).
93. А. Власов, “Теория вибрационных свойств электронного газа и ее приложения”, *Ученые записки МГУ им. М.В. Ломоносова. Физика.* **75** (1945).
94. А. Рухадзе, ред., *Об основополагающих работах А.А. Власова по физике плазмы и их обсуждение* (ООО “Мир журналов”, Москва, 2014).

95. P.P.J.M. Schram, A.G. Sitenko, S.A. Trigger, and A.G. Zagorodny, “Statistical theory of dusty plasmas: Microscopic equations and Bogolyubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon hierarchy”, [Phys. Rev. E **63**, 016403 \(2000\)](#).
96. P.P.J.M. Schram, A.G. Sitenko, S.A. Trigger, and A.G. Zagorodny, “Kinetic description of dusty plasmas and problems of grain dynamics”, [Contrib. Plasma Phys. **41**, 211–214 \(2001\)](#).
97. H. Thomas, G.E. Morfill, V. Demmel, J. Goree, B. Feuerbacher, and D. Möhlmann, “Plasma crystal: Coulomb crystallization in a dusty plasma”, [Phys. Rev. Lett. **73**, 652–655 \(1994\)](#).
98. J.H. Chu and L. I, “Direct observation of Coulomb crystals and liquids in strongly coupled RF dusty plasmas”, [Phys. Rev. Lett. **72**, 4009–4012 \(1994\)](#).
99. Y. Hayashi and K. Tachibana, “Observation of Coulomb-crystal formation from carbon particles grown in a methane plasma”, [Jpn. J. Appl. Phys **33**, L804–L806 \(1994\)](#).
100. N.N. Rao, P.K. Shukla, and M.Y. Yu, “Dust-acoustic waves in dusty plasmas”, [Planetary and Space Science **38**, 543–546 \(1990\)](#).
101. A. Barkan, R.L. Merlino, and N. D’Angelo, “Laboratory observation of the dust-acoustic wave mode”, [Phys. Plasmas **2**, 3563–3565 \(1995\)](#).
102. G.E. Morfill, H.M. Thomas, U. Konopka, H. Rothermel, M. Zuzic, A. Ivlev, and J. Goree, “Condensed plasmas under microgravity”, [Phys. Rev. Lett. **83**, 1598–1601 \(1999\)](#).
103. A.P. Nefedov, G.E. Morfill, V.E. Fortov, H.M. Thomas, H. Rothermel, T. Hagl, A.V. Ivlev, M. Zuzic, B.A. Klumov, A.M. Lipaev, V.I. Molotkov, O.F. Petrov, Y.P. Gidzenko, S.K. Krikalev, W. Shepherd, A.I. Ivanov, M. Roth, H. Binnenbruck, J.A. Goree, and Y.P. Semenov, “PKE-Nefedov: plasma

- crystal experiments on the International Space Station”, [New J. Phys.](#) **5**, [33](#) (2003).
104. H.M. Thomas, G.E. Morfill, V.E. Fortov, A.V. Ivlev, V.I. Molotkov, A.M. Lipaev, T. Hagl, H. Rothermel, S.A. Khrapak, R.K. Suetterlin, M. Rubin-Zuzic, O.F. Petrov, V.I. Tokarev, and S.K. Krikalev, “Complex plasma laboratory PK-3 Plus on the International Space Station”, [New J. Phys.](#) **10**, [033036](#) (2008).
105. M. Mikikian and L. Boufendi, “Experimental investigations of void dynamics in a dusty discharge”, [Phys. Plasmas](#) **11**, [3733–3737](#) (2004).
106. R.P. Dahiya, G.V. Paeva, W.W. Stoffels, E. Stoffels, G.M.W. Kroesen, K. Avinash, and A. Bhattacharjee, “Evolution of a dust void in a radio-frequency plasma sheath”, [Phys. Rev. Lett.](#) **89**, [125001](#) (2002).
107. Я.Л. Альперт, А.В. Гуревич и Л.П. Питаевский, *Искусственные спутники в разреженной плазме* (Наука, Москва, 1964).
108. M. Lampe, G. Joyce, G. Ganguli, and V. Gavrishchaka, “Interactions between dust grains in a dusty plasma”, [Phys. Plasmas](#) **7**, [3851–3861](#) (2000).
109. C.H. Su and S.H. Lam, “Continuum theory of spherical electrostatic probes”, [Phys. Fluids](#) **6**, [1479–1491](#) (1963).
110. A.V. Filippov, A.G. Zagorodny, A.F. Pal’, and A.N. Starostin, “Screening of the dust-particle charge in a plasma with an external ionization source”, [JETP Lett.](#) **81**, [146–150](#) (2005).
111. B. Klumov, G. Joyce, C. R ath, P. Huber, H. Thomas, G.E. Morfill, V. Molotkov, and V. Fortov, “Structural properties of 3D complex plasmas under microgravity conditions”, [EPL \(Europhysics Letters\)](#) **92**, [15003](#) (2010).

112. O.F. Petrov, M.M. Vasiliev, O.S. Vaulina, K.B. Stacenko, E.V. Vasilieva, E.A. Lisin, Y. Tun, and V.E. Fortov, “Solid-hexatic-liquid transition in a two-dimensional system of charged dust particles”, *EPL (Europhysics Letters)* **111**, 45002 (2015).
113. Y.L. Song, F. Huang, Z.Y. Chen, Y.H. Liu, and M.Y. Yu, “Self-organization and oscillation of negatively charged dust particles in a 2-dimensional dusty plasma”, *Phys. Lett. A* **380**, 886–895 (2016).
114. O. Bystrenko and A. Zagorodny, “Critical effects in screening of high-Z impurities in plasmas”, *Phys. Lett. A* **255**, 325–330 (1999).
115. L.G. D’yachkov, “Screening of macroions in colloidal plasmas: accurate analytical solution of the Poisson–Boltzmann equation”, *Phys. Lett. A* **340**, 440–448 (2005).
116. V.I. Vishnyakov, G.S. Dragan, and V.M. Evtuhov, “Nonlinear Poisson–Boltzmann equation in spherical symmetry”, *Phys. Rev. E* **76**, 036402 (2007).
117. D.P. Resendes, J.T. Mendonca, and P.K. Shukla, “Formation of dusty plasma molecules”, *Phys. Lett. A* **239**, 181–186 (1998).
118. A.S. Ivanov, “Polarization’s interaction and bound states of like charged particles in plasma”, *Phys. Lett. A* **290**, 304–308 (2001).
119. A.V. Filippov, A.F. Pal’, A.N. Starostin, and A.S. Ivanov, “Electrostatic interaction between two macroparticles in the Poisson–Boltzmann model”, *JETP Lett.* **83**, 546–552 (2006).
120. A.V. Filippov, “Electrostatic interaction of two point charges in equilibrium plasmas within the Debye approximation”, *Contrib. Plasma Phys.* **56**, 380–390 (2016).
121. S.A. Khrapak and A.G. Khrapak, “Internal energy of the classical two- and three-dimensional one-component-plasma”, *Contrib. Plasma Phys.* **56**, 270–280 (2016).

122. B. Derjaguin and L. Landau, “Theory of the stability of strongly charged lyophobic sols and of the adhesion of strongly charged particles in solutions of electrolytes”, *Acta physicochim. URSS* **14**, 633–662 (1941).
123. E.J.W. Verwey and J.T.G. Overbeek, *Theory of the stability of lyophobic colloids: The interaction of sol particles having an electric double layer* (Elsevier Publishing Company, New York, 1948).
124. J.E. Sader and D.Y.C. Chan, “Long-range electrostatic attractions between identically charged particles in confined geometries and the Poisson–Boltzmann theory”, *Langmuir* **16**, 324–331 (2000).
125. S. Alexander, P.M. Chaikin, P. Grant, G.J. Morales, P. Pincus, and D. Hone, “Charge renormalization, osmotic pressure, and bulk modulus of colloidal crystals: Theory”, *J. Chem. Phys.* **80**, 5776–5781 (1984).
126. E. Trizac, L. Bocquet, M. Aubouy, and H.H. Von Grunberg, “Alexander’s prescription for colloidal charge renormalization”, *Langmuir* **19**, 4027–4033 (2003).
127. G.V. Ramanathan, “Counterion condensation in micellar and colloidal solutions”, *J. Chem. Phys.* **88**, 3887–3892 (1988).
128. I.A. Shkel, O.V. Tsodikov, and M.T. Record, “Complete asymptotic solution of cylindrical and spherical Poisson–Boltzmann equations at experimental salt concentrations”, *J. Phys. Chem. B* **104**, 5161–5170 (2000).
129. L. Bocquet, E. Trizac, and M. Aubouy, “Effective charge saturation in colloidal suspensions”, *J. Chem. Phys.* **117**, 8138–8152 (2002).
130. M. Aubouy, E. Trizac, and L. Bocquet, “Effective charge versus bare charge: an analytical estimate for colloids in the infinite dilution limit”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 5835 (2003).

131. A.V. Shavlov, S.N. Romanyuk, and V.A. Dzhumandzhi, “Effective charge and effective radius of water droplet in dropwise cluster”, [Phys. Plasmas](#) **20**, 023703 (2013).
132. L. Samaj and E. Trizac, “Effective charge of cylindrical and spherical colloids immersed in an electrolyte: the quasi-planar limit”, [J. Phys. A: Math. Theor.](#) **48**, 265003 (2015).
133. PDE Solutions Inc., *FlexPDE*.
134. O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, *The Finite Element Method: The basis* (Butterworth-Heinemann, 2000).
135. G. Téllez and E. Trizac, “Nonlinear screening of spherical and cylindrical colloids: The case of 1:2 and 2:1 electrolytes”, [Phys. Rev. E](#) **70**, 011404 (2004).
136. I.L. Semenov, A.G. Zagorodny, and I.V. Krivtsun, “A study of dust grain screening in a weakly ionized plasma based on the numerical solution of the Vlasov-Bhatnagar-Gross-Krook kinetic equations”, [Phys. Plasmas](#) **18**, 103707 (2011).
137. S.A. Khrapak, G.E. Morfill, A.G. Khrapak, and L.G. D’yachkov, “Charging properties of a dust grain in collisional plasmas”, [Phys. Plasmas](#) **13**, 052114 (2006).
138. L.G. D’yachkov, S.A. Khrapak, and A.G. Khrapak, “Hydrodynamic approach to grain charging in weakly ionized plasmas”, [Ukr. J. Phys.](#) **53**, 1053–1061 (2008).
139. S.A. Khrapak, G.E. Morfill, V.E. Fortov, L.G. D’yachkov, A.G. Khrapak, and O.F. Petrov, “Attraction of positively charged particles in highly collisional plasmas”, [Phys. Rev. Lett.](#) **99**, 055003 (2007).
140. J.E. Daugherty, R.K. Porteous, M.D. Kilgore, and D.B. Graves, “Sheath structure around particles in low-pressure discharges”, [J. Appl. Phys.](#) **72**, 3934–3942 (1992).

141. I.L. Semenov, S.A. Khrapak, and H.M. Thomas, “Approximate expression for the electric potential around an absorbing particle in isotropic collisionless plasma”, *Phys. Plasmas* **22**, 053704 (2015).
142. S. Ratynskaia, U. de Angelis, S. Khrapak, B. Klumov, and G.E. Morfill, “Electrostatic interaction between dust particles in weakly ionized complex plasmas”, *Phys. Plasmas* **13**, 104508 (2006).
143. S.A. Khrapak, B.A. Klumov, and G.E. Morfill, “Electric potential around an absorbing body in plasmas: Effect of ion-neutral collisions”, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 225003 (2008).
144. S. Ratynskaia, S. Khrapak, A. Zobnin, M.H. Thoma, M. Kretschmer, A. Usachev, V. Yaroshenko, R.A. Quinn, G.E. Morfill, O. Petrov, and V. Fortov, “Experimental determination of dust-particle charge in a discharge plasma at elevated pressures”, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 085001 (2004).
145. S.A. Khrapak, S.V. Ratynskaia, A.V. Zobnin, A.D. Usachev, V.V. Yaroshenko, M.H. Thoma, M. Kretschmer, H. Höfner, G.E. Morfill, O.F. Petrov, and V.E. Fortov, “Particle charge in the bulk of gas discharges”, *Phys. Rev. E* **72**, 016406 (2005).
146. A.V. Zobnin, A.P. Nefedov, V.A. Sinel’shchikov, and V.E. Fortov, “On the charge of dust particles in a low-pressure gas discharge plasma”, *J. Exp. Theor. Phys.* **91**, 483–487 (2000).
147. I.H. Hutchinson and L. Patacchini, “Computation of the effect of neutral collisions on ion current to a floating sphere in a stationary plasma”, *Phys. Plasmas* **14**, 013505 (2007).
148. I.L. Semenov, A.G. Zagorodny, and I.V. Krivtsun, “On the effect of ion-neutral collisions on dust grain screening in a low-pressure gas discharge plasma”, *Phys. Plasmas* **19**, 043703 (2012).

149. I.L. Semenov, A.G. Zagorodny, and I.V. Krivtsun, “Ion drag force on a dust grain in a weakly ionized collisional plasma”, *Phys. Plasmas* **20**, 013701 (2013).
150. А.П. Прудников, Ю.А. Брычков и О.И. Маричев, *Интегралы и ряды. Специальные функции*. (Физматлит, Москва, 2003).
151. А.П. Прудников, Ю.А. Брычков и О.И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*. (Физматлит, Москва, 2002).
152. S.A. Khrapak and G.E. Morfill, “An interpolation formula for the ion flux to a small particle in collisional plasmas”, *Phys. Plasmas* **15**, 114503 (2008).
153. N. Sato, G. Uchida, T. Kaneko, S. Shimizu, and S. Iizuka, “Dynamics of fine particles in magnetized plasmas”, *Phys. Plasmas* **8**, 1786–1790 (2001).
154. V.Y. Karasev, E.S. Dzlieva, A.Y. Ivanov, and A.I. Eikhvald, “Rotational motion of dusty structures in glow discharge in longitudinal magnetic field”, *Phys. Rev. E* **74**, 066403 (2006).
155. M. Schwabe, U. Konopka, P. Bandyopadhyay, and G.E. Morfill, “Pattern formation in a complex plasma in high magnetic fields”, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 215004 (2011).
156. J. Winter, “Dust in fusion devices – experimental evidence, possible sources and consequences”, *Plasma Phys. Control. Fusion* **40**, 1201–1210 (1998).
157. S.I. Krasheninnikov, R.D. Smirnov, and D.L. Rudakov, “Dust in magnetic fusion devices”, *Plasma Phys. Control. Fusion* **53**, 083001 (2011).
158. J. Winter, “Dust in fusion devices – a multi-faceted problem connecting high- and low-temperature plasma physics”, *Plasma Phys. Control. Fusion* **46**, B583–B592 (2004).

159. A.Y. Pigarov, S.I. Krasheninnikov, T.K. Soboleva, and T.D. Rognlien, “Dust-particle transport in tokamak edge plasmas”, *Phys. Plasmas* **12**, 122508 (2005).
160. А.П. Жилинский и Л.Д. Цендин, “Столкновительная диффузия частично ионизованной плазмы в магнитном поле”, *УФН* **131**, 343–385 (1980).
161. K.K. Niyogi and I.M. Cohen, “Continuum electrostatic probe theory with magnetic field”, *Phys. Fluids* **16**, 69–74 (1973).
162. H.B. Milloy, R.W. Crompton, J.A. Rees, and A.G. Robertson, “The momentum transfer cross section for electrons in argon in the energy range 0–4 eV”, *Aust. J. Phys.* **30**, 61–72 (1977).
163. M. Salimullah, I. Sandberg, and P.K. Shukla, “Dust charge fluctuations in a magnetized dusty plasma”, *Phys. Rev. E* **68**, 027403 (2003).
164. W. Thomson, “XLV. On the mutual attraction or repulsion between two electrified spherical conductors”, *Philos. Mag. Series 4* **5**, 287–297 (1853).
165. V.A. Saranin, “On the interaction of two electrically charged conducting balls”, *Phys. Usp.* **42**, 385 (1999).
166. J. Lekner, “Electrostatics of two charged conducting spheres”, *Proc. R. Soc. A*, 1364–5021 (2012).
167. K. Kolikov, D. Ivanov, G. Krastev, Y. Epitropov, and S. Bozhkov, “Electrostatic interaction between two conducting spheres”, *J. Electrostat.* **70**, 91–96 (2012).
168. P. Pieranski, “Two-dimensional interfacial colloidal crystals”, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 569–572 (1980).
169. J. Derksen and W. van de Water, “Hydrodynamics of colloidal crystals”, *Phys. Rev. A* **45**, 5660–5673 (1992).

170. M. Hoppenbrouwers and W. van de Water, “Charged colloidal systems”, *Physica B* **228**, 153–157 (1996).
171. M. Hoppenbrouwers and W. van de Water, “Modes of motion of a colloidal crystal”, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3871–3874 (1998).
172. M.E. Markes and P.F. Williams, “The electrostatic interaction of charged, dust-particle pairs in plasmas”, *Phys. Lett. A* **278**, 152–158 (2000).
173. H. Itou, T. Amano, and M. Hoshino, “First-principles simulations of electrostatic interactions between dust grains”, *Phys. Plasmas* **21**, 123707 (2014).
174. M. Lampe and G. Joyce, “Grain-grain interaction in stationary dusty plasma”, *Phys. Plasmas* **22**, 023704 (2015).
175. A.E. Davletov, L.T. Yerimbetova, Y.S. Mukhametkarimov, and A.K. Ospanova, “Polarization and finite size effects in correlation functions of dusty plasmas”, *Contrib. Plasm. Phys.* **55**, 180–185 (2015).
176. O.S. Vaulina, X.G. Koss, Y.V. Khrustalyov, O.F. Petrov, and V.E. Fortov, “Thermodynamic and transport properties of nonideal systems with isotropic pair potentials”, *Phys. Rev. E* **82**, 056411 (2010).
177. P. Toliás, S. Ratynskaia, and U. de Angelis, “Soft mean spherical approximation for dusty plasma liquids: One-component Yukawa systems with plasma shielding”, *Phys. Rev. E* **90**, 053101 (2014).
178. C. Castaldo, U. de Angelis, and V.N. Tsytovich, “Screening and attraction of dust particles in plasmas”, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 075004 (2006).
179. V. Tsytovich, R. Kompaneets, U. de Angelis, and C. Castaldo, “Collective grain interactions for constant ionization source”, *Contrib. Plasma Phys.* **46**, 280–286 (2006).
180. P. Toliás and S. Ratynskaia, “Screening in weakly ionized dusty plasmas; effect of dust density perturbations”, *Phys. Plasmas* **20**, 023702 (2013).

181. Я.П. Терлецкий и Ю.П. Рыбаков, *Электродинамика* (Высшая школа, Москва, 1990).
182. A.V. Filippov, A.F. Pal', and A.N. Starostin, "Electrostatic interaction of two charged macroparticles in an equilibrium plasma", *J. Exp. Theor. Phys.* **121**, 909–923 (2015).
183. S.L. Carnie, D.Y.C. Chan, and J. Stankovich, "Computation of forces between spherical colloidal particles: nonlinear Poisson–Boltzmann theory", *J. Colloid Interf. Sci.* **165**, 116–128 (1994).
184. J. Stankovich and S.L. Carnie, "Electrical double layer interaction between dissimilar spherical colloidal particles and between a sphere and a plate: Nonlinear Poisson–Boltzmann theory", *Langmuir* **12**, 1453–1461 (1996).
185. S.A. Khrapak, A.V. Ivlev, G.E. Morfill, and H.M. Thomas, "Ion drag force in complex plasmas", *Phys. Rev. E* **66**, 046414 (2002).
186. S.A. Khrapak and G.E. Morfill, "Dusty plasmas in a constant electric field: Role of the electron drag force", *Phys. Rev. E* **69**, 066411 (2004).
187. J. Goree, G.E. Morfill, V.N. Tsytovich, and S.V. Vladimirov, "Theory of dust voids in plasmas", *Phys. Rev. E* **59**, 7055–7067 (1999).
188. V. Land and W.J. Goedheer, "Effect of large-angle scattering, ion flow speed and ion-neutral collisions on dust transport under microgravity conditions", *New J. Phys.* **8**, 1–23 (2006).
189. M. Schwabe, S. Zhdanov, T. Hagl, P. Huber, A.M. Lipaev, V.I. Molotkov, V.N. Naumkin, M. Rubin-Zuzic, P.V. Vinogradov, E. Zaehringer, V.E. Fortov, and H.M. Thomas, "Observation of metallic sphere–complex plasma interactions in microgravity", *New J. Phys.* **19**, 103019 (2017).
190. S. Khrapak, P. Huber, H. Thomas, V. Naumkin, V. Molotkov, and A. Lipaev, "Theory of a cavity around a large floating sphere in complex (dusty) plasma", *Phys. Rev. E* **99**, 053210 (2019).

191. P.K. Kaw, K. Nishikawa, and N. Sato, “Rotation in collisional strongly coupled dusty plasmas in a magnetic field”, *Phys. Plasmas* **9**, 387–390 (2002).
192. U. Konopka, D. Samsonov, A.V. Ivlev, J. Goree, V. Steinberg, and G.E. Morfill, “Rigid and differential plasma crystal rotation induced by magnetic fields”, *Phys. Rev. E* **61**, 1890–1898 (2000).
193. A.G. Zagorodny, P.P.J.M. Schram, and S.A. Trigger, “Stationary velocity and charge distributions of grains in dusty plasmas”, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3594–3597 (2000).
194. S.A. Trigger and A.G. Zagorodny, “Negative friction in dusty plasmas”, *Contrib. Plasm. Phys.* **43**, 381–383 (2003).
195. S.A. Khrapak, A.V. Ivlev, S.K. Zhdanov, and G.E. Morfill, “Hybrid approach to the ion drag force”, *Phys. Plasmas* **12**, 042308 (2005).
196. I. Denysenko, K. Ostrikov, and N.A. Azarenkov, “Dust charge and ion drag forces in a high-voltage, capacitive radio frequency sheath”, *Phys. Plasmas* **16**, 113707 (2009).
197. I.L. Semenov, S.A. Khrapak, and H.M. Thomas, “Momentum transfer cross-section for ion scattering on dust particles”, *Phys. Plasmas* **24**, 033710 (2017).
198. I.H. Hutchinson, “Collisionless ion drag force on a spherical grain”, *Plasma Phys. Control. Fusion* **48**, 185 (2006).
199. Y.O. Tyshetskiy and S. Vladimirov, “Screening of absorbing grains in plasma with a flow”, *Ukr. J. Phys.* **56**, 1326–1329 (2011).
200. V. Yaroshenko, S. Ratynskaia, S. Khrapak, M.H. Thoma, M. Kretschmer, H. Hofner, G.E. Morfill, A. Zobnin, A. Usachev, O. Petrov, and V. Fortov, “Determination of the ion-drag force in a complex plasma”, *Phys. Plasmas* **12**, 093503 (2005).

201. V. Nosenko, R. Fisher, R. Merlino, S. Khrapak, G. Morfill, and K. Avinash, “Measurement of the ion drag force in a collisionless plasma with strong ion-grain coupling”, [Phys. Plasmas](#) **14**, 103702 (2007).
202. A. Melzer, A. Homann, and A. Piel, “Experimental investigation of the melting transition of the plasma crystal”, [Phys. Rev. E](#) **53**, 2757–2766 (1996).
203. G.E. Morfill, H.M. Thomas, U. Konopka, and M. Zuzic, “The plasma condensation: Liquid and crystalline plasmas”, [Physics of Plasmas](#) **6**, 1769–1780 (1999).
204. I.V. Schweigert, A.L. Alexandrov, and F.M. Peeters, “Negative ion-drag force in a plasma of gas discharge”, [IEEE T. Plasma Sci.](#) **32**, 623–626 (2004).
205. S.A. Maiorov, “Influence of the trapped ions on the screening effect and frictional force in a dusty plasma”, [Plasma Phys. Rep.](#) **31**, 690–699 (2005).
206. L. Patacchini and I.H. Hutchinson, “Fully self-consistent ion-drag-force calculations for dust in collisional plasmas with an external electric field”, [Phys. Rev. Lett.](#) **101**, 025001 (2008).
207. P. Debye and E. Huckel, “The theory of the electrolyte II-The border law for electrical conductivity”, [Phys. Z](#) **24**, 305–325 (1923).
208. V.A. Schweigert, “Dielectric permittivity of a plasma in an external electric field”, [Plasma Phys. Rep.](#) **27**, 997–999 (2001).
209. I.V. Schweigert, V.A. Schweigert, and F.M. Peeters, “Perturbation of collisional plasma flow around a charged dust particle: Kinetic analysis”, [Phys. Plasmas](#) **12**, 113501 (2005).
210. I.H. Hutchinson and C.B. Haakonsen, “Collisional effects on nonlinear ion drag force for small grains”, [Phys. Plasmas](#) **20**, 083701 (2013).

211. L. Stenflo, “Oscillations of a weakly ionized plasma in a constant electric field”, [Plasma Phys. **10**, 551–559 \(1968\)](#).
212. G.F. Reiter, “Instability of the steady state of a plasma in a uniform electric field”, [Phys. Fluids **10**, 703–710 \(1967\)](#).
213. L.G. D’yachkov, A.G. Khrapak, S.A. Khrapak, and G.E. Morfill, “Model of grain charging in collisional plasmas accounting for collisionless layer”, [Phys. Plasmas **14**, 042102 \(2007\)](#).
214. S. Chandrasekhar, “Stochastic problems in physics and astronomy”, [Rev. Mod. Phys. **15**, 1–89 \(1943\)](#).
215. P. Langevin, “On the theory of brownian motion”, *C. R. Acad. Sci.* **146**, 530–533 (1908).
216. A. Melzer, V.A. Schweigert, I.V. Schweigert, A. Homann, S. Peters, and A. Piel, “Structure and stability of the plasma crystal”, [Phys. Rev. E **54**, R46–R49 \(1996\)](#).
217. P. Ludwig, W.J. Miloch, H. Kahlert, and M. Bonitz, “On the wake structure in streaming complex plasmas”, [New J. Phys. **14**, 053016 \(2012\)](#).
218. W.J. Miloch, J. Trulsen, and H.L. Pécseli, “Numerical studies of ion focusing behind macroscopic obstacles in a supersonic plasma flow”, [Phys. Rev. E **77**, 056408 \(2008\)](#).
219. I.H. Hutchinson, “Nonlinear collisionless plasma wakes of small particles”, [Phys. Plasmas **18**, 032111 \(2011\)](#).
220. D. Block, J. Carstensen, P. Ludwig, W.J. Miloch, F. Greiner, A. Piel, M. Bonitz, and A. Melzer, “Wake formation and wake field effects in complex plasmas”, [Contrib. Plasm. Phys. **52**, 804–812 \(2012\)](#).
221. A. Piel, “Molecular dynamics simulation of ion flows around microparticles”, [Phys. Plasmas **24**, 033712 \(2017\)](#).

222. J. Larsson, L. Stenflo, and R. Tegeback, “Enhanced fluctuations in a magnetized plasma due to the presence of an electromagnetic wave”, *J. Plasma Phys.* **16**, 37–45 (1976).
223. A.G. Zagorodny, R. Tegeback, A.S. Usenko, and I.P. Yakimenko, “Enhanced fluctuations in semi-infinite Plasmas”, *Phys. Scripta* **18**, 182–190 (1978).
224. P. Uddholm and L. Stenflo, “Effects of collisions on density fluctuations in plasmas”, *Phys. Scripta* **22**, 71–74 (1980).
225. A.G. Zagorodny, I.P. Yakimenko, E. Näslund, and L. Stenflo, “Scattering of electromagnetic waves on enhanced fluctuations in a semi-infinite plasma-molecular medium”, *Phys. Scripta* **30**, 212–216 (1984).
226. L. Stenflo, “Comments on stimulated electromagnetic emissions in the ionospheric plasma”, *Phys. Scripta* **T107**, 262 (2004).
227. Y.L. Klimontovich, H. Wilhelmsson, I.P. Yakimenko, and A.G. Zagorodny, “Statistical theory of plasma-molecular systems”, *Phys. Rep.* **175**, 263–401 (1989).
228. Ю. Климонтович, Х. Вильгельмссон, И. Якименко и А. Загородний, *Статистическая теория плазменно-молекулярных систем* (Изд-во Моск. ун-та, Москва, 1990).
229. D. Else, R. Kompaneets, and S.V. Vladimirov, “On the reliability of the Bhatnagar–Gross–Krook collision model in weakly ionized plasmas”, *Phys. Plasmas* **16**, 062106 (2009).
230. Ю.П. Райзер, *Физика газового разряда* (Издательский Дом “Интеллект”, Долгопрудный, 2009).
231. B. Shokri and A.R. Niknam, “Kinetic theory of low-frequency instability of discharge plasma”, *Phys. Plasmas* **12**, 072107 (2005).
232. C. Cui and J. Goree, “Fluctuations of the charge on a dust grain in a plasma”, *IEEE T. Plasma Sci.* **22**, 151–158 (1994).

233. M.R. Jana, A. Sen, and P.K. Kaw, “Collective effects due to charge-fluctuation dynamics in a dusty plasma”, [Phys. Rev. E **48**, 3930 \(1993\)](#).
234. G.E. Morfill, E. Grün, and T.V. Johnson, “Dust in Jupiter’s magnetosphere: Physical processes”, [Planet. Space Sci. **28**, 1087–1100 \(1980\)](#).
235. O. Havnes, T. Aslaksen, F. Melandsø, and T. Nitter, “Collisionless braking of dust particles in the electrostatic field of planetary dust rings”, [Phys. Scripta **45**, 491 \(1992\)](#).
236. R.K. Varma, P.K. Shukla, and V. Krishan, “Electrostatic oscillations in the presence of grain-charge perturbations in dusty plasmas”, [Phys. Rev. E **47**, 3612 \(1993\)](#).
237. A.G. Sitenko, A.G. Zagorodny, Y.I. Chutov, P. Schram, and V.N. Tsytovich, “Statistical properties and relaxation of dusty plasmas”, [Plasma Phys. Control. Fusion **38**, A105 \(1996\)](#).
238. P.K. Shukla and V.P. Silin, “Dust ion-acoustic wave”, [Phys. Scripta **45**, 508 \(1992\)](#).
239. A. Barkan, N. D’angelo, and R.L. Merlino, “Experiments on ion-acoustic waves in dusty plasmas”, [Planet. Space Sci. **44**, 239–242 \(1996\)](#).
240. R.L. Merlino, A. Barkan, C. Thompson, and N. D’angelo, “Laboratory studies of waves and instabilities in dusty plasmas”, [Phys. Plasmas **5**, 1607–1614 \(1998\)](#).
241. X. Liang, J. Zheng, J.X. Ma, W.D. Liu, J. Xie, G. Zhuang, and C.X. Yu, “Experimental observation of ion-acoustic waves in an inhomogeneous dusty plasma”, [Phys. Plasmas **8**, 1459–1462 \(2001\)](#).
242. N. d’Angelo, “Ion-acoustic waves in dusty plasmas”, [Planet. Space Sci. **42**, 507–511 \(1994\)](#).
243. S.V. Vladimirov, K.N. Ostrikov, and M.Y. Yu, “Ion-acoustic waves in a dust-contaminated plasma”, [Phys. Rev. E **60**, 3257 \(1999\)](#).

244. A.V. Ivlev, D. Samsonov, J. Goree, G. Morfill, and V.E. Fortov, “Acoustic modes in a collisional dusty plasma”, *Phys. Plasmas* **6**, 741–750 (1999).
245. J. Vranjes, B.P. Pandey, and S. Poedts, “Ion-acoustic waves in dusty plasma with charge fluctuations”, *Phys. Plasmas* **9**, 1464–1467 (2002).
246. H.J. Lee, “Comment on “Ion-acoustic waves in dusty plasma with charge fluctuations”[*Phys. Plasmas* 9, 1464 (2002)]”, *Phys. Plasmas* **11**, 849–851 (2004).
247. A.V. Ivlev and G. Morfill, “Acoustic modes in a collisional dusty plasma: Effect of the charge variation”, *Phys. Plasmas* **7**, 1094–1102 (2000).
248. J.-X. Ma and M.Y. Yu, “Self-consistent theory of ion acoustic waves in a dusty plasma”, *Phys. Plasmas* **1**, 3520–3522 (1994).
249. R.K. Varma, “A kinetic description for low frequency longitudinal waves in a dust plasma including charge fluctuations”, *Phys. Plasmas* **7**, 3505–3514 (2000).
250. A.I. Momot and A.G. Zagorodny, “Kinetic theory of ion-acoustic waves in dusty plasmas with grains of different sizes”, *Phys. Scripta* **71**, 543 (2005).
251. M.R. Rouhani, M. Jamshidi, and H.H. Pajouh, “Kinetic effects of the dust charge fluctuations on the instability of dust ion-acoustic waves”, *Astrophys. Space Sci.* **357**, 91 (2015).
252. A. Sitenko and V. Malnev, *Plasma physics theory* (CRC Press, 1994).
253. A.G. Sitenko and A.A. Gurin, “Effect of particle collisions on plasma fluctuations”, *J. Exp. Theor. Phys.* **22**, 1089 (1966).
254. R.H. Williams and W.R. Chappell, “Microscopic theory of density fluctuations and diffusion in weakly ionized plasmas”, *Phys. Fluids* **14**, 591–598 (1971).

255. I. Holod, A. Zagorodny, and J. Weiland, “Anisotropic diffusion across an external magnetic field and large-scale fluctuations in magnetized plasmas”, [Phys. Rev. E **71**, 046401 \(2005\)](#).
256. A.G. Sitenko, A.G. Zagorodny, and V.N. Tsytovich, “Fluctuation phenomena in dusty plasmas”, [AIP Conference Proceedings **345**, 311–318 \(1995\)](#).
257. V.P. Kubaichuk and A.G. Zagorodny, “Influence of grain charging dynamics on electromagnetic fluctuations in dusty plasmas”, [Phys. Scripta **60**, 549 \(1999\)](#).
258. U. De Angelis, G. Capobianco, C. Marmolino, and C. Castaldo, “Fluctuations in dusty plasmas”, [Plasma Phys. Contr. F. **48**, B91 \(2006\)](#).
259. V.N. Tsytovich and O. Havnes, “Charging processes, dispersion properties and anomalous transport in dusty plasma”, [Comments Plasma Phys. Contr. F. **15**, 267–280 \(1993\)](#).
260. V.N. Tsytovich and U. de Angelis, “Kinetic theory of dusty plasmas. I. General approach”, [Phys. Plasmas **6**, 1093–1106 \(1999\)](#).
261. S. Ratynskaia, M. de Angeli, U. de Angelis, C. Marmolino, G. Capobianco, M. Lontano, E. Lazzaro, G. Morfill, and G. Gervasini, “Observation of the effects of dust particles on plasma fluctuation spectra”, [Phys. Rev. Lett. **99**, 075002 \(2007\)](#).
262. S. Ratynskaia, M. de Angeli, E. Lazzaro, C. Marmolino, U. de Angelis, C. Castaldo, A. Cremona, L. Laguardia, G. Gervasini, and G. Grosso, “Plasma fluctuation spectra as a diagnostic tool for submicron dust”, [Phys. Plasmas **17**, 043703 \(2010\)](#).
263. P. Talias, S. Ratynskaia, and U. de Angelis, “Kinetic models of partially ionized complex plasmas in the low frequency regime”, [Phys. Plasmas **18**, 073705 \(2011\)](#).

264. P. Talias, S. Ratynskaia, and U. de Angelis, “Spectra of ion density and potential fluctuations in weakly ionized plasmas in the presence of dust grains”, [Phys. Rev. E](#) **85**, 026408 (2012).
265. S.A. Khrapak, P. Talias, S. Ratynskaia, M. Chaudhuri, A. Zobnin, A. Usachev, C. Rau, M.H. Thoma, O.F. Petrov, V.E. Fortov, and G.E. Morfill, “Grain charging in an intermediately collisional plasma”, [EPL \(Europhysics Letters\)](#) **97**, 35001 (2012).
266. V.N. Tsytovich, U. de Angelis, A.V. Ivlev, and G.E. Morfill, “Kinetic theory of partially ionized complex (dusty) plasmas”, [Phys. Plasmas](#) **12**, 082103 (2005).
267. A.V. Phelps, “Cross sections and swarm coefficients for nitrogen ions and neutrals in N₂ and Argon ions and neutrals in Ar for energies from 0.1 eV to 10 keV”, [J. Phys. Chem. Ref. Data](#) **20**, 557–573 (1991).

ДОДАТКИ

Додаток А. Список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. A.I. Momot, A.G. Zagorodny, and O.V. Momot, “Electron density fluctuations in collisional dusty plasma with variable grain charge”, [Physical Review E](#) **99**, 013206 (2019).
2. A.I. Momot, A.G. Zagorodny, and O.V. Momot, “Fluctuations and ion-acoustic waves in collisional dusty plasma with variable grain charge”, [Problems of Atomic Science and Technology, Series: Plasma Physics](#) **24**, 79–82 (2018).
3. A.I. Momot, A.G. Zagorodny, and O.V. Momot, “A kinetic description of ion-acoustic waves in collisional dusty plasma: effects of grain charge fluctuations”, [Physics of Plasmas](#) **25**, 073706 (2018).
4. A.I. Momot, “Effective charge of a macroparticle in a non-isothermal plasma within the Poisson–Boltzmann model”, [Contributions to Plasma Physics](#) **58**, 233–238 (2018).
5. A.V. Filippov, A.G. Zagorodny, A.I. Momot, A.F. Pal’, and A.N. Starostin, “Analysis of macroparticle charge screening in a nonequilibrium plasma based on the kinetic collisional point sink model”, [Journal of Experimental and Theoretical Physics](#) **125**, 926–939 (2017).
6. A.I. Momot, “Negative drag force on finite-size charged dust grain in strongly collisional plasma”, [Physics of Plasmas](#) **24**, 103704 (2017).
7. A.I. Momot, A.G. Zagorodny, and I.S. Orel, “Interaction force between two finite-size charged particles in weakly ionized plasma”, [Physical Review E](#) **95**, 013212 (2017).

8. A.I. Momot and A.G. Zagorodny, “Toward Analytical description of the electrostatic potential of charged macroparticle in weakly ionized plasma”, [Europhysics Letters](#) **114**, 65004 (2016).
9. А.Г. Загородній та А.І. Момот, *Вступ до кінетичної теорії плазми* (Наукова думка, Київ, 2015).
10. A.I. Momot, “Screening and interaction of conductive grains charged by drift- diffusion currents in plasma”, [Physica Scripta](#) **T161**, 014002 (2014).
11. A.I. Momot, “Grain in weakly ionized plasma in the presence of an external magnetic field: Charging by plasma currents and effective potential”, [Physics of Plasmas](#) **20**, 073703 (2013).
12. A.I. Momot, “Grain charging in weakly ionized plasma in the presence of external magnetic field”, [Problems of Atomic Science and Technology, Series: Plasma Physics](#) **18**, 67–71 (2012).
13. A.I. Momot and A.G. Zagorodny, “Fluctuations in collisional plasma in the presence of an external electric field”, [Physics of Plasmas](#) **18**, 102110 (2011).
14. A.G. Zagorodny, I.V. Rogal, A.I. Momot, and I.V. Schweigert, “Grain in a plasma in the presence of external electric field: kinetic calculation of effective potential and ionic drag force”, [Ukrainian Journal of Physics](#) **55**, 29–35 (2010).
15. A.V. Filippov, A.G. Zagorodny, A.I. Momot, A.F. Pal’, and A.N. Starostin, “Screening of a moving charge in a nonequilibrium plasma”, [Journal of Experimental and Theoretical Physics](#) **108**, 497–515 (2009).
16. A.G. Zagorodny, A.I. Momot, A.V. Filippov, A.F. Pal, and A.N. Starostin, “About the influence of plasma particles collisions on the effective grain potential”, [Ukrainian Journal of Physics](#) **54**, 1089–1093 (2009).

17. A.V. Filippov, A.G. Zagorodny, and A.I. Momot, “Screening of a moving charge in a nonequilibrium plasma”, [JETP Letters](#) **88**, 24–30 (2008).
18. A.G. Zagorodny, A.V. Filippov, A.F. Pal’, A.N. Starostin, and A.I. Momot, “Kinetic theory of dusty plasmas and effective grain interactions”, [Problems of Atomic Science and Technology, Series: Plasma Physics](#) **14**, 70–74 (2008).
19. A.V. Filippov, A.G. Zagorodny, A.F. Pal’, A.N. Starostin, and A.I. Momot, “Kinetic description of the screening of the charge of macroparticles in a nonequilibrium plasma”, [JETP Letters](#) **86**, 761–766 (2008).
20. A.V. Filippov, A.G. Zagorodny, A.I. Momot, A.F. Pal’, and A.N. Starostin, “Interaction of two macroparticles in a nonequilibrium plasma”, [Journal of Experimental and Theoretical Physics](#) **105**, 831–845 (2007).
21. A.N. Starostin, A.V. Filippov, A.F. Pal’, A.I. Momot, and A.G. Zagorodny, “Shielding and Interaction of Dust Particles in Non-Equilibrium Plasma”, [Contributions to Plasma Physics](#) **47**, 388–401 (2007).
22. A.V. Filippov, A.G. Zagorodny, A.I. Momot, A.F. Pal’, and A.N. Starostin, “Charge screening in a plasma with an external ionization source”, [Journal of Experimental and Theoretical Physics](#) **104**, 147–161 (2007).

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

23. A.I. Momot, “Negative drag force on finite-size dust grain in strongly collisional plasma”, in [Abstracts of 45th EPS Conference on Plasma Physics, Prague, Czech Republic](#) (2018), p. 5.3009.
24. A.I. Momot and A.G. Zagorodny, “Fluctuations and ion-acoustic waves in collisional dusty plasma: effects of grain charging dynamics”, in [Abstracts of International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion, Kharkiv, Ukraine](#) (2018), p. 58.

25. A.G. Zagorodny and A.I. Momot, “Polarization effects in macroparticle interactions in plasmas and plasma-like media”, in [Abstracts of International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion, Kharkiv, Ukraine \(2016\)](#), p. 19.
26. A.I. Momot and A.G. Zagorodny, “Analytical description of the electrostatic potential of dust grain in weakly ionized plasma”, in [Abstracts of International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion, Kharkiv, Ukraine \(2016\)](#), p. 71.
27. A.I. Momot and A.G. Zagorodny, “Interaction of charged conductive spherical particles in strongly collisional plasma”, in [Abstracts of International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion, Kharkiv, Ukraine \(2014\)](#), p. 60.
28. A.I. Momot and A.G. Zagorodny, “Macroparticle charging and screening in weakly ionized plasma with magnetized electrons”, in [Proceedings of 31th International Conference on Phenomena in Ionized Gases \(ICPIG\), Granada, Spain \(2013\)](#).
29. A.I. Momot and A.G. Zagorodny, “Screening of dust grain charged by drift-diffusion currents in magnetized plasma”, in [Abstracts of International Conference on Research and Application of Plasmas, Warsaw, Poland \(2013\)](#).
30. A.I. Momot and A.G. Zagorodny, “Grain charging in weakly ionized plasma in the presence of external magnetic field”, in [Book of abstracts Alushta 2012 International Conference and School on Plasma Physics and Controlled Fusion and the Adjoint Workshop “Nano- and Micro- Sized Structures in Plasmas”, Alushta, Ukraine \(2012\)](#), p. 227.
31. A.G. Zagorodny, A.I. Momot, I.V. Rogal, and I.V. Schweigert, “Kinetic description of ionic drag force in collisional plasma”, in [Proceedings of the 3-rd International Conference “Dusty Plasmas in Applications”, Odesa, Ukraine \(2010\)](#), pp. 140–143.

32. A.G. Zagorodny, I.V. Rogal, A.I. Momot, and I.V. Schweigert, “Grain in a Plasma in the Presence of External Electric Field: Kinetic Calculation of Effective Potential and Ionic Drag Force”, in [Book of abstracts Bogolyubov Kyiv Conference “Modern Problems of Theoretical and Mathematical Physics”](#), Kyiv, Ukraine (2009), p. 183.
33. А.І. Момот, А.Г. Загородній, І.В. Рогаль та І.В. Швейгерт, “Ефективний потенціал порошинки у плазмі за наявності зовнішнього електричного поля”, в Тези Української конференції з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу, Київ, Україна (2009), с. 25.
34. A.V. Filippov, A.I. Momot, A.F. Pal', A.N. Starostin, and A.G. Zagorodny, “Shielding of a Moving Charged Dust Particle in the Nonequilibrium Plasma”, [AIP Conference Proceedings](#) **1041**, 207–208 (2008).
35. A.G. Zagorodny, A.V. Filippov, A.F. Pal, A.N. Starostin, and A.I. Momot, “Kinetic theory of dusty plasmas and effective grain interactions”, in [Book of abstracts Alushta 2008 International Conference and School on Plasma Physics and Controlled Fusion](#), Alushta, Ukraine (2008), p. 15.
36. A.G. Zagorodny, A.V. Filippov, A.F. Pal, A.N. Starostin, and A.I. Momot, “Kinetic description of effective grain potentials in a plasma”, in [Proceedings of the 2-nd International Conference “Dusty Plasmas in Applications”](#), Odesa, Ukraine (2007), pp. 176–181.
37. A.V. Filippov, A.I. Momot, A.F. Pal, A.N. Starostin, and A.G. Zagorodny, “Interaction of moving dust particles in a nonequilibrium plasma”, in [Proceedings of the 2-nd International Conference “Dusty Plasmas in Applications”](#), Odesa, Ukraine (2007), pp. 48–51.
38. A. Zagorodny, O. Bystrenko, T. Bystrenko, A. Filippov, A. Momot, A. Pal', and A. Starostin, “Effective grain interaction in dusty plasmas: theoretical description and numerical simulation”, in [Abstracts of 28th International Conference on Phenomena in Ionized Gases \(ICPIG\)](#), Prague, Czech Republic (2007), p. 26.