

ІНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ ІМ. М.М. БОГОЛЮБОВА  
НАН УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ ІМ. М.М. БОГОЛЮБОВА  
НАН УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**Черняк Олександр Миколайович**

УДК 533.9.01, 533.93

**ДИСЕРТАЦІЯ**

**ПЕРЕНЕСЕННЯ ЗАМАГНІЧЕНИХ ЧАСТИНОК У ВИПАДКОВОМУ  
ЕЛЕКТРИЧНОМУ ПОЛІ**

01.04.02 – теоретична фізика

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

---

підпис, ініціали та прізвище здобувача

Науковий керівник:

Засенко Володимир Іванович  
доктор фізико-математичних наук,  
старший науковий співробітник



# АНОТАЦІЯ

**Черняк О.М. Перенесення замагнічених частинок у випадковому електричному полі – ІТФ ім. М.М. Боголюбова НАН України, Київ, 2018.**

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика. – Рукопис.

Плазма в природі та в лабораторних умовах перебуває, як правило, у нерівноважному стані. В такій плазмі внаслідок нестійкостей збуджуються інтенсивні власні моди. Нелінійна взаємодія між ними призводить до формування турбулентного стану плазми. Інтенсивність турбулентних полів в цьому випадку може значно перевищувати тепловий рівень і призводити до турбулентного, тобто аномального, перенесення, яке за своєю природою та характеристиками суттєво відрізняється від перенесення у рівноважній плазмі.

Проблема аномального перенесення частинок є однією із найважливіших задач у фізиці плазми. Так, зокрема, інтенсивність перенесення, визначає час утримання плазми в пристроях керованого термоядерного синтезу. Аналітичний опис процесу турбулентного перенесення є складною нелінійною задачею, через це, для інтерпретації експериментальних даних або результатів моделювання, часто використовуються феноменологічні моделі. Проте для розуміння механізмів турбулентного перенесення важливо виходити з мікроскопічного опису. Послідовної теорії перенесення частинок в турбулентних полях в загальному випадку поки не існує. Для слабкого поля використовують припущення про гаусовість процесу, але воно не працює для низькочастотних інтенсивних полів. Отже побудова послідовних моделей перенесення частинок в координатному просторі та просторі швидкості на основі мікроскопічного підходу для плазмових систем, в яких

часовим масштабом кореляцій полів не можна нехтувати, є актуальною задачею.

Іншою важливою задачею фізики плазми, поряд з проблемою утримання, є нагрівання плазми. Одним із методів є нагрівання електромагнітним випромінюванням, а використання хвиль зі стрибками фази може бути ефективнішим за гармонічні хвилі. Тому актуальним є вивчення впливу випромінювання зі стрибками фази на плазму з метою оптимізації процесів нагрівання.

Метою досліджень є знаходження статистичних характеристик ансамблю частинок у зовнішніх випадковому електричному та постійному магнітному полях. При цьому були поставлені такі задачі. Сформулювати статистичні рівняння, виходячи з перших принципів мікроскопічного опису. Аналітичний підхід має описувати перенесення частинок поперек магнітного поля в широкому діапазоні часів кореляції електричного поля, за межами наближення Корсіна. Він також має відтворювати ефекти скінченного ларморівського радіусу. В границі замороженого електричного поля він має коректно відтворювати ефект сильного захоплення частинок. Для перевірки аналітичних розрахунків має бути створена програма числового моделювання перенесення частинок. Шляхом числового моделювання також має бути визначений вплив стрибків фаз випадкового поля на нагрівання та прискорення частинок.

В дисертаційній роботі отримано такі нові наукові результати:

1. Сформульовано статистичні рівняння, що описують часову еволюцію середньоквадратичного зміщення частинок поперек магнітного поля під дією статичного випадкового електричного поля. Врахування особливостей динаміки окремих груп частинок по різних еквіпотенціальним поверхням покращило відповідність аналітичних розрахунків результатам прямого числового моделювання. Виконано порівняння з методом декорельованих траєкторій і показано більшу ефективність та простоту застосування оригінального підходу.

2. Новий метод було узагальнено з метою врахування ефектів скінченного ларморівського радіусу. Показано, що розв'язки відтворюють результати моделювання, як в області малих так і великих ларморівських радіусів. Знайдено, що інтенсивність дифузії по-різному залежить від ларморівського радіусу на малих та великих часових масштабах.

3. Запропонований аналітичний метод було розвинено далі для опису перенесення частинок у змінному в часі випадковому електричному полі. Отримано масштабне співвідношення для асимптотичного коефіцієнту дифузії в залежності від часу кореляції в системі. Показано, що запропонований метод відтворює як квазілінійну поведінку статистичних характеристик для малих кореляційних часів, так і перколяційну поведінку для великих кореляційних часів.

4. Порівняно інтенсивності нагрівання частинок хвилями з регулярними фазами та стрибками фаз, а також зі стохастичними імпульсами. Виявлено подібність дії на частинки хвиль зі стрибками фаз та окремих імпульсів поля. Проаналізовано вплив на частинки хвиль з різним характером стрибків фаз. Показано, що стрибки фаз хвилі значно підвищують інтенсивність нагрівання резонансних частинок, а також залучають до цього процесу нерезонансні частинки з широкого інтервалу початкових швидкостей.

Отримані результати є внеском у теоретичний опис процесів перенесення заряджених частинок у зовнішніх випадкових полях. Результати дисертаційної роботи можуть бути використані при дослідженні плазми, що утримується магнітним полем, для розрахунку коефіцієнта дифузії, оцінки часу перенесення частинки, а також для оцінки ефективності нагрівання плазми. Вони можуть бути корисними для інтерпретації числових та лабораторних експериментів.

Матеріали дисертації представлено в українських реферованих журналах [1—7].

Структура дисертаційної роботи. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 79

найменувань. Робота написана на 121 сторінці машинописного тексту, містить 44 рисунків.

**Ключові слова:** перенесення частинок, аномальна дифузія, скінченний радіус Лармора, кореляційні функції, випадкові поля, числове моделювання

**Список публікацій здобувача:**

- [1] O. Cherniak, «Particle's Diffusion in a Two-Dimensional Random Velocity Field», *Ukrainian Journal of Physics* **60**, 1196–1210, ISSN: 2071-0186 (2015) DOI: 10.15407/ujpe60.12.1196.
- [2] O. Cherniak and V. Zasenکو, «Finite Larmor Radius Effects on a Test-Particle Diffusion», *Ukrainian Journal of Physics* **62**, 495–501, ISSN: 2071-0186 (2017) DOI: 10.15407/ujpe62.06.0495.
- [3] V. Zasenکو, O. Cherniak, and A. Zagorodny, «Subensemble concept in 2D magnetized particle transport model», *Problems of Atomic Science and Technology* **106**, 77–80, ISSN: 1562-6016 (2016).
- [4] O. Cherniak, V. Zasenکو, and A. Zagorodny, «Finite Larmor Radius Effects on Turbulent Transport of Test-Particles», *Problems of Atomic Science and Technology* **106**, 96–99, ISSN: 1562-6016 (2016).
- [5] V. Zasenکو, A. Zagorodny, and O. Cherniak, «Magnetized Particle Diffusion in a Random Electric Field with Jumping Phase», *Problems of Atomic Science and Technology* **116**, 246–267, ISSN: 1562-6016 (2018).
- [6] V. Zasenکو, A. Zagorodny, and O. Chernyak, «Particle Diffusion in a Wave with Randomly Jumping Phase», *Problems of Atomic Science and Technology* **95**, 62–64, ISSN: 1562-6016 (2015).
- [7] V. Zasenکو, A. Zagorodny, and O. Cherniak, «Impact of Wave Phase Jumps on Stochastic Heating», *Problems of Atomic Science and Technology* **107**, 60–63, ISSN: 1562-6016 (2017).

## **ABSTRACT**

**Cherniak O.M. Magnetized particles transport in random electric field – Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2017.**

Thesis for the Candidate of Science in Physics and Mathematics degree in speciality 01.04.02 – theoretical physics. – Manuscript.

In nature and laboratory plasmas are usually in non-equilibrium state. Due to various instabilities in such plasmas intensive eigenmodes are excited. Nonlinear interactions between these modes lead to a turbulent state of plasma and turbulent field intensity can significantly exceed the plasma equilibrium level. So particle transport will be determined by interaction with these intensive fields. Such anomalous transport differs considerably from collisional transport in equilibrium plasma due to particles interaction with random fields.

The problem of anomalous particle transport is one of the most important problems in plasma physics. Particularly, because an intensity of particle transport determines the plasma confinement time in controlled thermonuclear fusion devices. An analytical approach to the turbulent transport is a complicated non-linear problem. Thus phenomenological models are often used to interpret experimental data or numerical simulation results. However, the microscopic description is needed to understand the mechanisms of turbulent transport. There is no known consistent theoretical approach to particle transport in turbulent fields in the general case. The assumption of Gaussian particle displacement can be used for a weak fields, but it doesn't applicable for low-frequency intensive ones. Therefore it is an actual problem to develop the consistent approach to particle transport in coordinate and velocity space on the basis of microscopic equations for plasma systems in a wide range of field correlation times.

Plasma heating is another important objective in physics of controlled nuclear fusion along with plasma confinement. Electromagnetic waves are used to heat

plasma, and waves with phase jumps can be more effective than harmonic ones. Therefore, it is important to study the effect of electromagnetic radiation with phase jumps on a plasma in order to optimize the heating processes.

The purpose of this research is to determine the statistical characteristics of the particle ensemble in external random electric and constant magnetic fields. The tasks are as follows. To formulate statistical equations based on the first principles of the microscopic approach. The analytical method based on these equations has to be developed to describe the particle transport across a magnetic field over a wide range of correlation times of the electric field, beyond the validity domain of the Corssin approximation. It has to reproduce the effects of a finite Larmor radius as well. In the limit of the static electric field, it must correctly recover strong particle trapping effects. The numerical simulation code of particle transport should be developed in order to verify the analytical calculations. The effect of random field phase jumps on particle heating and acceleration are to be studied by numerical simulation.

In the framework of this research, the following original results were obtained:

1. The statistical equations for time evolution of the mean square displacement of particles across the magnetic field undergoing random static electric field are formulated. The correspondence between analytical calculations based on these statistical equations and results of direct numerical simulation are improved by taking into account the features of the dynamics of groups of particles on different equipotential lines. The comparison with the decorated trajectories method has been made and the efficiency and applicability of the original approach are demonstrated.
2. Our method has been generalized to account for the finite Larmor radius effects. It is shown that the solutions obtained by generalized analytical approach are in agreement with the results of direct numerical simulation in a wide range of Larmor radius. It has been found that the diffusion intensity



depends on the Larmor radius on a small and large time scale in different ways.

3. The proposed analytical method was further developed to describe the transport of particles undergoing a random time-dependent electric field. The dependence of asymptotic diffusion coefficient on correlation time on random field is obtained in a wide range of values. It is shown that the proposed method reproduces both the quasi-linear behavior of statistical characteristics for small correlation times and percolation behavior for large correlation times.
4. Particle heating by waves with phase jumps and regular phases as well as by stochastic electric pulses are compared. The similarity between particle heating by waves with phase jumps and electric field pulses is shown. The waves with different types of phase jumps are considered. It is shown that wave with phase jumps considerably increase the intensity of heating of resonance particles, and also involve non-resonance particles from a wide range of initial velocities to this process.

The obtained results contribute to the theoretical description of charged particle transport processes in external random fields. The results of this thesis can be used in study of the magnetically confined plasma to calculate the diffusion coefficient, to estimate the particle confinement time, as well as to evaluate the plasma heating efficiency.

The main results of the work were published in 7 articles. [1–7].

Structure of thesis. The thesis is consisted of introduction, four chapters, conclusions and bibliography. Thesis contains 79 citings and 44 figures. It is written on 121 pages of printed text.

**Keywords:** particle transport, anomalous diffusion, random fields, finite Larmor radius, correlation functions, numerical simulation.

**List of publications:**

- [1] O. Cherniak, «Particle's Diffusion in a Two-Dimensional Random Velocity Field», *Ukrainian Journal of Physics* **60**, 1196–1210, ISSN: 2071-0186 (2015) DOI: 10.15407/ujpe60.12.1196.
- [2] O. Cherniak and V. Zasenکو, «Finite Larmor Radius Effects on a Test-Particle Diffusion», *Ukrainian Journal of Physics* **62**, 495–501, ISSN: 2071-0186 (2017) DOI: 10.15407/ujpe62.06.0495.
- [3] V. Zasenکو, O. Cherniak, and A. Zagorodny, «Subensemble concept in 2D magnetized particle transport model», *Problems of Atomic Science and Technology* **106**, 77–80, ISSN: 1562-6016 (2016).
- [4] O. Cherniak, V. Zasenکو, and A. Zagorodny, «Finite Larmor Radius Effects on Turbulent Transport of Test-Particles», *Problems of Atomic Science and Technology* **106**, 96–99, ISSN: 1562-6016 (2016).
- [5] V. Zasenکو, A. Zagorodny, and O. Cherniak, «Magnetized Particle Diffusion in a Random Electric Field with Jumping Phase», *Problems of Atomic Science and Technology* **116**, 246–267, ISSN: 1562-6016 (2018).
- [6] V. Zasenکو, A. Zagorodny, and O. Cherniak, «Particle Diffusion in a Wave with Randomly Jumping Phase», *Problems of Atomic Science and Technology* **95**, 62–64, ISSN: 1562-6016 (2015).
- [7] V. Zasenکو, A. Zagorodny, and O. Cherniak, «Impact of Wave Phase Jumps on Stochastic Heating», *Problems of Atomic Science and Technology* **107**, 60–63, ISSN: 1562-6016 (2017).

# ЗМІСТ

<b>Вступ</b>	<b>13</b>
<b>Розділ 1 Аналітичні методи</b>	<b>25</b>
1.1 Співвідношення Тейлора . . . . .	27
1.2 Наближення Корсіна . . . . .	30
1.3 Метод декорельованих траєкторій . . . . .	32
1.4 Метод моментів . . . . .	40
1.5 Висновок . . . . .	42
<b>Розділ 2 Статичне випадкове поле</b>	<b>43</b>
2.1 Рівняння дрейфового руху . . . . .	45
2.2 Замикання статистичних рівнянь . . . . .	48
2.3 Підансамблі за початковими умовами . . . . .	59
2.4 Висновок . . . . .	66
<b>Розділ 3 Ефекти скінченного ларморівського радіуса</b>	<b>67</b>
3.1 Точні рівняння руху . . . . .	68
3.2 Методи гіроусереднення . . . . .	70
3.3 Залежність статистичних величин від початкового ларморівського радіуса . . . . .	79
3.4 Висновок . . . . .	85
<b>Розділ 4 Випадкове поле залежне від часу</b>	<b>87</b>
4.1 Поперечне перенесення . . . . .	88
4.2 Повздовжнє перенесення . . . . .	94
4.3 Висновок . . . . .	105

<b>Висновки</b>	<b>107</b>
<b>Список використаних джерел</b>	<b>109</b>
<b>Додаток А Список публікацій за темою та відомості про апробацію</b>	<b>119</b>

## Вступ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню аномального перенесення частинок. Аномальним в математичному сенсі прийнято називати такий процес перенесення для якого середньоквадратичне зміщення частинок має нелінійну залежність. У фізиці плазми така поведінка статистичних характеристик руху частинок може бути спричинена їхньою взаємодією з сильними турбулентними полями, що розвиваються з мікроскопічних нестійкостей [8—11]. Аномальне перенесення може на порядки перевищувати перенесення частинок обумовлене зіткненнями [8, 9].

В роботі досліджено перенесення частинок в площині перпендикулярній постійному магнітному полю обумовлене взаємодією із зовнішнім випадковим електричним полем [1—5]. Розглянуто рух частинок в наближенні ведучого центру та з урахуванням скінченного ларморівського радіусу. Крім того досліджено перенесення частинок в просторі координат та швидкостей під впливом випадкових електричних хвиль вздовж магнітного поля [6, 7].

Класичне явище дифузії, яке проявляється в усіх агрегатних станах речовини, феноменологічно описуються законом Фіка, який зводиться до відомого параболічного рівняння дифузії. В такому описі коефіцієнт пропорційності між часовою та просторовою похідними густини називається коефіцієнтом дифузії і вважається константою. Глибше розуміння процесу дифузії було досягнуто на основі рівняння Ланжевена, яке описує мікроскопічний рух частинок під впливом випадкових сил. Таке рівняння можна отримати з інтегрального рівняння Чепмена - Колмогорова за припущення, що сили породжені випадковим марківським процесом [12, 13]. Важливим є припущення про розділення двох часових масштабів - час загасання кореляцій випадкових сил є набагато меншим за час еволюції системи. Але

якщо випадкові поля характеризуються великими часами або довжинами кореляцій процеси перенесення стають нелокальними, немарківськими, і підхід, що ґрунтується на рівнянні Ланжевена або параболічному рівнянні дифузії виявляється недостатнім [8, 9, 14, 15]. Таким чином важливою задачею є узагальнення опису процесу перенесення з врахуванням ефектів просторової та часової нелокальності.

Дослідження процесів перенесення у плазмі є важливим з огляду на проблему утримання в пристроях керованого термоядерного синтезу. Плазма є квазінейтральною системою заряджених та нейтральних частинок, в якій збуджуються власні хвилі. В рівноважній плазмі рівень колективних збуджень визначається температурою. Відомо, що в такій плазмі процеси перенесення визначаються парними зіткненнями між частинками, при цьому взаємодією частинок із колективними збудженнями можна нехтувати.

Але в лабораторних і природних умовах перебуває у нерівноважному стані, градієнти густин, температур, зовнішні поля, в наслідок нестійкостей в плазмі збуджуються інтенсивні власні моди, тобто колективні рухи. Нелінійна взаємодія між цими полями призводить до турбулентного стану плазми, а також формування вихрових структур. Тому взаємодія частинок з колективними збудження стає домінуючою над парними зіткненнями [8—10]. Крім того ці колективні збудження характеризуються великими кореляційними часами і довжинами, значно більшими ніж у рівноважній плазмі.

Так виявляється, що класичне перенесення обумовлене парними зіткненнями у циліндричній геометрії не відповідає перенесенню у плазмі в тороїдальній геометрії [9]. Так звана неокласична модель перенесення враховує геометрію пристроїв та траєкторії частинок в них і передбачає збільшення дифузії в режимі слабких зіткнень [9, 16, 17]. Проте як класичне перенесення, так і неокласична модель передбачають, що із збільшенням температури має зростати час утримання плазми, але в експериментах спостерігається протилежна залежність [9, 18, 19]. Наступним етапом став пошук механізмів більш інтенсивної дифузії, яку пов'язують із аномальним пере-

несенням, тобто розсіянням частинок на інтенсивних полях [20—26]. Ряд експериментальних досліджень показав що основним претендентом на такі поля є дрейфові хвилі в неоднорідній плазмі [9, 22, 27, 28].

Важливим методом теоретичного дослідження є числовий експеримент. Останнім часом значного розвитку в дослідженні процесів аномального перенесення в плазмі досягнуто шляхом числового моделювання на основі гірокінетичних рівнянь [29—31]. Хоча рівняння динаміки частинок і хвиль відомі, повне числове гірокінетичне моделювання суттєво ускладнено через велику різницю між найменшими та найбільшими часових масштабами в задачі. Тому існує потреба в спрощених аналітичних моделях, які допомогли би інтерпретувати результати числових та реальних експериментів.

Побудова послідовного аналітичного підходу до опису аномального перенесення, яке задовільне відтворює експериментальні результати, не можна вважати завершеним на сьогодні [32]. А ні квазілінійне наближення [33, 34], а ні перенормування рівнянь, наприклад наближення прямої взаємодії [35—38], не дають бажаного результату. Однією з причин цього є нелокальність процесів перенесення, а рух частинок при цьому є не марківським.

Для феноменологічного опису таких процесів використовують рівняння дифузії із дробовими похідними [39], метод випадкових блукань в неперервному часі [40] та перколяційний підхід [41—43]. Хоча ці методи можуть описувати на певних часових масштабах аномальне перенесення, але вони використовують вільні параметри, а тому вони недостатньо розкривають механізми аномального перенесення. Так в рівнянні дифузії із дробовими похідними використовуються дробові показники які не впливають із мікроскопічних рівнянь. В методі випадкових блукань в неперервному часі використовується такий феноменологічний параметр параметр як ймовірність затримки частинки в певному положенні. Перколяційний підхід ґрунтується на деяких феноменологічних параметрах ширини лінії току та

молекулярної дифузії, крім того він дає можливість оцінити асимптотичні величини, але не описує їхню еволюцію. Тому побудова аналітичних моделей що ґрунтуються на мікроскопічному підході, без використання вільних параметрів є актуальною задачею.

Поряд з гірокінетичним моделюванням ефективним методом досліджень є числове моделювання поведінки пасивних домішок. При цьому розглядається рух частинок в заданих випадкових полях. Така задача є частиною складнішої задачі руху частинок в самоузгоджених полях, але таке спрощення дозволяє пов'язати параметри задачі з особливостями руху ансамблю частинок, що уможлиблює значно прозоріший аналіз механізмів перенесення.

Один із шляхів побудови аналітичної моделі ґрунтується на співвідношенні Тейлора [44] між коефіцієнтом дифузії та кореляційною функцією швидкостей частинок у випадкових полях розраховану вздовж їхніх траєкторій руху. Оскільки траєкторії частинок не є явно визначеними то така кореляційна функція, яку називають лагранжевою, є невідомою. Натомість відомою є ейлерова кореляційна функція випадкових швидкостей, визначена в лабораторній системі координат. Таким чином ключовою задачею в описі частинок у випадкових полях стає знаходження невідомої лагранжевої кореляційної функції через відому ейлерову. В загальному випадку ця задача є нелінійною і нелокальною, тому регулярного переходу від ейлерової до лагранжевої кореляційних функцій не відомо. При цьому використовують різні наближені підходи.

Для малих кореляційних часів широко відомим є наближення Корсіна [45—49]. Це відповідає чіткому розділенню двох часових масштабів, таких як обернена частота зіткнень та час еволюції системи. Розв'язки методу підтверджується в числових експериментах для малих кореляційних часів. Для низькочастотних турбулентних полів та вихрових структур з довгими часами кореляції припущення що лежать в основі наближення Корсіна вже не є виправданими, тому розрахунки з методу [49] суттєво відрізняються



від результатів числового моделювання [50—52]. Фізичною інтерпретацією довгих кореляційних часів є захоплення частинок локальними структурами випадкових полів.

На врахування довгих часів кореляції було спрямовано метод декорельованих траєкторій [8, 53—58] який якісно відтворює ефекти з числового моделювання. Проте його сформульовано неоднозначним чином [53, 54], а важливий граничний випадок нескінченного часу кореляції, замороженої турбулентності, не порівнювався із результатами прямого числового моделювання. Тому задача перенесення частинок у зовнішніх турбулентних полях потребує подальшого дослідження, на що і спрямована дисертаційна робота.

**Актуальність теми** Плазма в природі та в лабораторних умовах перебуває, як правило, у нерівноважному стані. В такій плазмі внаслідок нестійкостей збуджуються інтенсивні власні моди. Нелінійна взаємодія між ними призводить до формування турбулентного стану плазми. Інтенсивність турбулентних полів в цьому випадку може значно перевищувати тепловий рівень і призводити до турбулентного, тобто аномального, перенесення, яке за своєю природою та характеристиками суттєво відрізняється від перенесення у рівноважній плазмі.

Проблема аномального перенесення частинок є однією із найважливіших задач у фізиці плазми. Так, зокрема, інтенсивність перенесення, визначає час утримання плазми в пристроях керованого термоядерного синтезу. Аналітичний опис процесу турбулентного перенесення є складною нелінійною задачею, через це для інтерпретації експериментальних даних або результатів моделювання, часто використовуються феноменологічні моделі. Проте для розуміння механізмів турбулентного перенесення важливо виходити з мікроскопічного опису. Послідовної теорії перенесення частинок в турбулентних полях в загальному випадку поки не існує. Для слабкого поля використовують припущення про гаусовість процесу, але воно не працює для низькочастотних інтенсивних полів. Отже побудова послідов-

них моделей перенесення частинок в координатному просторі та просторі швидкості на основі мікроскопічного підходу для плазмових систем, в яких часовим масштабом кореляцій полів не можна нехтувати, є актуальною задачею.

Іншою важливою задачею фізики плазми, поряд з проблемою утримання, є нагрівання плазми. Одним із методів є нагрівання електромагнітним випромінюванням, а використання хвиль зі стрибками фази може бути ефективнішим за гармонічні хвилі. Тому актуальним є вивчення впливу випромінювання зі стрибками фази на плазму з метою оптимізації процесів нагрівання.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконана у відділі синергетики Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова Національної академії наук України. Вона є складовою частиною широкого кола досліджень транспортних процесів та формування структур у плазмових системах (теорія нелінійних процесів в макромолекулярних структурах, наносистемах і плазмі), що проводились в рамках таких тем:

- 2008–2012: Транспортні процеси та формування структур у плазмових системах. Номер державної реєстрації – 0107U007871
- 2013–2017: Формування структур та нерівноважні процеси у відкритих системах. Номер державної реєстрації – 0113U001093
- 2018–2022: Динаміка формування просторово-неоднорідних структур в багаточастинкових системах.  
Номер державної реєстрації – 0118U003535
- 2015: Моделювання дифузії частинок у випадкових полях зі стрибками фази. Номер державної реєстрації – 0115U005472
- 2015–2017: Теоретичні та експериментальні дослідження резонансних явищ в плазмі ближнього космосу: механізми аномального перенесення частинок. Номер державної реєстрації – 0115U002853

- 2016: Дослідження впливу стрибків фази на нагрівання частинок плазми. Номер державної реєстрації – 0116U004354с
- 2017: Аналітичне та числове моделювання динаміки заряджених частинок у мікрохвильових полях зі стрибковою фазою. Номер державної реєстрації – 0117U0076677с

**Мета і задачі дослідження.** Дисертаційна робота присвячена дослідженню перенесення частинок у зовнішніх полях - випадковому електричному та постійному магнітному. Метою є побудова аналітичного методу опису перенесення частинок в просторі координат поперек магнітного поля *в широкому діапазоні кореляційних часів* випадкового електричного поля, виходячи з перших принципів мікроскопічного опису. Особливою вимогою є коректне відтворення ефекту сильного захоплення частинок в границі замороженого випадкового електричного поля. Метод має також враховувати ефекти скінченного ларморівського радіусу. Особливо досліджується перенесення частинок в просторі координат та швидкостей вздовж магнітного поля.

Для перевірки аналітичних розрахунків має бути створена програма числового моделювання перенесення частинок. Шляхом числового моделювання також має бути визначений вплив стрибків фаз випадкового поля на нагрівання та прискорення частинок.

У рамках загальної мети було поставлено такі задачі.

- Побудувати аналітичне наближення для кореляційної функції компонент дрейфової швидкості вздовж траєкторій руху частинок за заданою кореляційною функцією у фіксованих точках простору.
- Провести аналіз динаміки груп частинок, що відрізняються за початковими умовами для уточнення запропонованого аналітичного наближення.
- Узагальнити аналітичне наближення на випадок точного руху частинок, тобто для скінченного радіусу Лармора, та знайти залежність асимптотичного коефіцієнта дифузії від ларморівського радіусу.

- Узагальнити аналітичну модель на випадкові поля зі скінченим часом кореляції, знайти залежність асимптотичного коефіцієнта дифузії від кореляційного часу в широкому діапазоні його значень.
- Дослідити повздовжнє перенесення та нагрівання частинок хвилями з стрибками фази.

Об'єктами дослідження є стохастичний рух заряджених частинок у заданих випадковому електричному та постійному магнітному полях.

Предмет дослідження - кореляційна функція швидкості, коефіцієнт дифузії, середньоквадратичне зміщення та функція розподілу частинок.

Методи дослідження які були застосовані у роботі включають метод функцій Гріна, методи числового моделювання для обчислення кінетичних коефіцієнтів та функції розподілу, методи теорії функцій комплексної змінної, а також методи математичної фізики та спеціальних функцій.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Основними науковими результатами, що виносяться на захист, є такі:

1. Сформульовано статистичні рівняння, що описують часову еволюцію середньоквадратичного зміщення частинок поперек магнітного поля під дією статичного випадкового електричного поля. Врахування особливостей динаміки окремих груп частинок по різних еквіпотенціальним поверхням покращило відповідність аналітичних розрахунків результатам прямого числового моделювання. Виконано порівняння з методом декорельованих траєкторій і показано більшу ефективність та простоту застосування оригінального підходу.
2. Новий метод було узагальнено з метою врахування ефектів скінченного ларморівського радіусу. Показано, що розв'язки відтворюють результати моделювання як в області малих так і великих ларморівських радіусів. Знайдено, що інтенсивність дифузії по-різному залежить від ларморівського радіусу на малих та великих часових масштабах.
3. Запропонований аналітичний метод було розвинено далі для опису перенесення частинок у змінному в часі випадковому електричному полі.

Отримано масштабне співвідношення для асимптотичного коефіцієнту дифузії в залежності від часу кореляції в системі. Показано, що запропонований метод відтворює як квазілінійну поведінку статистичних характеристик для малих кореляційних часів, так і перколяційну поведінку для великих кореляційних часів.

4. Порівняно інтенсивності нагрівання частинок хвилями з регулярними фазами та хвилями зі стрибками фаз, а також стохастичними імпульсами електричного поля. Виявлено подібність дії на частинки хвиль зі стрибками фаз та окремих імпульсів поля. Проаналізовано вплив на частинки хвиль з різним характером стрибків фаз. Показано, що стрибки фаз хвилі підвищують інтенсивність нагрівання резонансних частинок, а також залучають до цього процесу нерезонансні частинки з широкого інтервалу початкових швидкостей.

**Практичне значення одержаних результатів.** Представлені результати є внеском у теоретичний опис процесів перенесення заряджених частинок у випадкових полях. Результати дисертаційної роботи можуть бути використані при дослідженні плазми, що утримується магнітним полем, для розрахунку коефіцієнта дифузії, оцінки часу перенесення частинок, а також для оцінки ефективності нагрівання частинок плазми. Вони можуть бути корисними для інтерпретації числових та лабораторних експериментів.

**Особистий внесок здобувача.** Результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. У роботах, опублікованих у співавторстві, до дисертації включені лише ті результати, що належать автору. Це стосується, зокрема, формулювання задач та виконання аналітичних та числових розрахунків.

У роботах [1—7] автором розроблено незалежно від співавторів, програмний код, що реалізує відповідні обчислення, з метою перехресної перевірки результатів проведено незалежне моделювання.

Крім того, в роботі [1] отримано аналітичні рівняння для середньоквадратичного зміщення, розраховано асимптотики коефіцієнта дифузії та се-

редньоквадратичного зміщення на основі оригінального методу. Виконано порівняння способу замикання з відомим методом декорельованих траєкторій та здійснено аналіз типів декорельованих траєкторій. У роботі [6] проведено аналіз перенесення частинок хвилею зі стрибками фази, що сформована до або в області взаємодії. В роботі [3] запропоновано та проаналізовано рівняння для середньоквадратичного зміщення із заданим початковим потенціалом. У роботі [4] отримано аналітичні співвідношення та проведено порівняльний аналіз для гіроусереднених кореляційних функцій. В роботі [7] проведено аналіз перенесення частинок у просторі швидкості різними типами хвиль із різною частотою стрибків фази. У роботі [2] проаналізовано залежність масштабних співвідношень для середньоквадратичного зміщення та коефіцієнта дифузії від часу моделювання. В роботі [5] проаналізовано масштабне співвідношення за кореляційним часом для коефіцієнта дифузії.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертаційної роботи доповідались на семінарах відділу синергетики (теорії та моделювання плазмових процесів в минулому) інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова та на таких конференціях:

- 14-th Kudowa Summer School "Towards Fusion Energy", Kudowa-Zdrój, Poland, 2018
- Щорічна конференція інституту ядерних досліджень. Київ, Україна, 2017
- International Conference and School on Plasma Physics and Controlled Fusion. Kharkiv, Ukraine, 2016
- Українська конференція з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу. Київ, Україна, 2015;
- International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion and The Adjoint Workshop "Nano- and micro-sized structures in plasmas", Kharkiv, Ukraine, 2014
- XVIII International Scientific Conference of Young Scientists and Specialists "AYSS-2014", Dubna, Russian Federation, 2014

- Українська конференція з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу, Київ, Україна, 2013
- Конференція молодих вчених ”Сучасні проблеми в теоретичній фізиці”, Київ, Україна, 2012
- Українська конференція з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу, Київ, Україна, 2011
- XII-th Семінар та конкурс для молодих вчених з статистичної фізики та теорії конденсованого стану, Львів, Україна, 2011
- Конференція молодих вчених ”Сучасні проблеми в теоретичній фізиці”, Київ, Україна, 2010

**Публікації.** Основні результати роботи опубліковано у 7 статтях [1—7] та додатково висвітлено у матеріалах конференцій [59—69]. Публікації, що виносяться на захист, включають 7 статей у провідних фахових виданнях України [1—7].

**Структура дисертаційної роботи.** Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 79 найменувань. Робота написана на 121 сторінці машинописного тексту, містить 44 рисунків.





# Розділ 1

## АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ

Послідовний опис процесів перенесення у плазмі ґрунтується на розгляді самоузгодженої задачі. В такій постановці розподіл частинок визначає колективні поля, в яких самі ж частинки і рухаються. Самоузгоджений опис можна умовно поділити на дві задачі - рух частинок у заданому полі та визначення спектра поля. Самоузгоджена задача є надзвичайно складною проблемою задачею, задовільного аналітичного розв'язку в наш час не існує. Окремі розв'язки можуть бути знайдені числовими методами. Поведінка частинок у заданих полях є простішою проблемою і вона є необхідним кроком для знаходження самоузгоджених розв'язків. Незважаючи на відносну простоту загальних розв'язків у заданих полях також не існує. Задача стає особливо складною, коли неможливо розділити часові масштаби, а саме час загасання кореляцій поля та час еволюції функції розподілу або її моментів.

В дисертаційній роботі розглянуто перенесення частинок у заданих зовнішніх полях аналітичними та числовими методами. Аналіз зв'язків між вихідними умовами і результатами у числовому моделюванні в заданих полях є простішим ніж, наприклад аналіз результатів самоузгодженого гірокінетичного моделювання, який є складною задачею самою по собі з непрозорими зв'язками в системі. В цьому розділі ми розглядаємо рух у постійному магнітному полі  $\mathbf{B} = \text{const}$  та випадковому електричному  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  полі, за умови  $\langle \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \rangle = 0$ . В цьому розділі ми обмежимося дослідженням перенесення частинок поперек магнітного поля в наближенні ведучого центру, тобто дрейфовому наближенні

$$\frac{d\mathbf{x}_d}{dt} = \mathbf{v}_d = c \frac{[\mathbf{E}(\mathbf{x}_d, t) \times \mathbf{B}]}{B^2}. \quad (1.1)$$

В такому разі для мікроскопічної функції розподілу  $F(\mathbf{x}, t)$  справедливим є рівняння

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_d \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) F(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.2)$$

Ввівши функцію Гріна  $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$  як

$$f(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{x}_0 G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) f(\mathbf{x}_0, t_0), \quad (1.3)$$

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (1.4)$$

отримаємо нелінійне інтегро-диференціальне рівняння [36, 38], яке встановлює нелокальний зв'язок між часовою похідною функції Гріна та її значеннями в попередні моменти часу.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \int dt_1 \int d\mathbf{x}_1 G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) \times \\ \times \langle \mathbf{v}_d(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}_d(\mathbf{x}_1, t_1) \rangle \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} G(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Точний загальний розв'язок такого рівняння невідомий, але за умови малих часів кореляції дрейфових швидкостей це рівняння стає локальним у часі параболічним рівнянням дифузії

$$\frac{\partial}{\partial t} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( D(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \right) = 0, \quad (1.6)$$

з залежним від часу коефіцієнтом дифузії

$$D(\mathbf{x}, t) = \int dt_1 \int d\mathbf{x}_1 G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) \langle \mathbf{v}_d(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}_d(\mathbf{x}_1, t_1) \rangle. \quad (1.7)$$

Такий перехід до локального в часі рівняння відповідає відомому наближенню Корсіна, яке, проте, не працює у випадку великих кореляційних часів. Щоб просунутися далі, необхідно врахувати довгі кореляції, коли існує нелокальність у часі, а функція розподілу є негаусовою. В цій задачі ва-

жливо знайти коефіцієнти перенесення. Нелокальне рівняння на функцію розподілу спрощується якщо від нього перейти до рівняння на середньоквадратичне зміщення.

$$\frac{d}{dt}\Delta(t) = \int dt_1 \int d\mathbf{x}_1 G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) \langle \mathbf{v}_d(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}_d(\mathbf{x}_1, t_1) \rangle G(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0). \quad (1.8)$$

де зліва маємо інтеграл від кореляційної функції швидкості вздовж траєкторії частинок.

## 1.1 Співвідношення Тейлора

Середньоквадратичне відхилення та коефіцієнт дифузії пов'язані із кореляційною функцією компонент швидкості вздовж траєкторій руху частинок співвідношенням Тейлора [44]. Кореляційні функції компонент швидкості вздовж траєкторій руху називаються лагранжевими і є невідомими для нас, в той час як ейлерові кореляційні функції визначаються у фіксованих точках лабораторної системи координат і є відомими. Це зводить задачу до встановлення зв'язку між лагранжевими та ейлеровими статистичними величинами, таким чином вона полягає у визначенні лагранжевих кореляційних функцій компонент швидкості за відомими ейлеровими.

Необхідність враховувати ефекти, пов'язані із просторовою залежністю траєкторій частинок від випадкового поля, або, іншими словами, лагранжевою нелінійністю в задачі, визначається числом Кубо  $K$ . Воно є відношенням середньої довжини вільного пробігу частинки за кореляційний час до кореляційної довжини і характеризує спроможність частинки блукати просторовою структурою випадкового поля до моменту його повної зміни за рахунок часової еволюції поля.

Малі значення числа Кубо  $K < 1$  відповідають слабкій лагранжевій нелінійності в задачі. При цьому частинка в процесі свого руху не встигає відстежувати локальну просторову структуру поля, як наприклад у випадку класичної моделі броунівського руху. Для сильної лагранжевої нелінійно-

сті  $K > 1$  ситуація змінюється на протилежну - рух частинок визначається просторовою структурою поля.

Особливо цікавим для перевірки аналітичних наближень [38] є випадок гранично сильної лагранжевої нелінійності - замороженої турбулентності. В такому разі випадкове поле є статичним, число Кубо нескінченно великим  $K = \infty$ , і рух частинок повністю визначається просторовою структурою поля.

Досліджуючи руху частинок  $\mathbf{x}(t)$  у випадковому полі швидкості  $\mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t)$

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t), \quad (1.9)$$

Тейлор [44], [12] запропонував статистичний опис для середньоквадратичного відхилення в інтегральній формі

$$\Delta_i(t) = \langle x_i^2(t) \rangle = \int_0^t d\tilde{t}_1 \int_0^{\tilde{t}_1} d\tilde{t}_2 C_{v_i v_i}^L(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2), \quad (1.10)$$

де  $\langle \dots \rangle$  означає усереднення за ансамблем реалізацій, а  $C_{v_i v_i}^L(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)$  є лагранжевою кореляційною функцією компонент швидкості. Для однорідного та стаціонарного випадку лагранжева кореляційна функція компонент швидкості залежить лише від різниці відповідних моментів часу  $\tilde{t} = |\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2|$  і має вигляд

$$C_{v_i v_i}^L(\tilde{t}) = \langle v_i(\mathbf{x}(t_1 + \tilde{t}), t_1 + \tilde{t}) v_i(\mathbf{x}(t_1), t_1) \rangle. \quad (1.11)$$

При цьому, середньоквадратичне відхилення визначається як

$$\Delta_i(t) = \int_0^t d\tilde{t} (t - \tilde{t}) C_{v_i v_i}^L(\tilde{t}), \quad (1.12)$$

а залежний від часу коефіцієнт дифузії має вигляд

$$D_i(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Delta_i(t) = \int_0^t d\tilde{t} C_{v_i v_i}^L(\tilde{t}). \quad (1.13)$$

Рівняннями (1.12) та (1.13) задача статистичного опису руху частинок у випадковому полі швидкості (1.9) зводиться до визначення невідомої лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості.

При побудові аналітичної моделі виникає необхідність визначити лагранжевої кореляційної функції через відповідні ейлерову кореляційну функції, яка може бути знайдена в експерименті або розрахована із заданого ансамбля випадкових полів. Вона визначаються у фіксованих точках простору і не залежать від траєкторій руху частинок

$$C_{v_i v_i}^E(\mathbf{x}, \tilde{t}) = \langle v_i(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}, t_1 + \tilde{t}) v_i(\mathbf{x}_1, t_1) \rangle. \quad (1.14)$$

Далі ми розглянемо рівняння (1.9) для опису двовимірного руху частинок у статичному нестисливому гаусовому ізотропному випадковому полі швидкості  $\mathbf{v}(\mathbf{x}(t))$ . В такому випадку ейлерова кореляційна функція випадкових величин (1.14) явно не залежить від часу і справедливими є рівняння (1.11) - (1.13).

Основним предметом дослідження в цьому розділі є порівняльний аналіз різних аналітичних наближень лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості через відповідні ейлерові кореляційні функції у випадку гранично сильної лагранжевої нелінійності  $K = \infty$ . Для даної задачі визначальну роль відіграють ефекти захоплення частинок просторовою структурою випадкового поля швидкостей. В основу наближень покладено визначення лагранжевої кореляційної функції

$$C_{v_i v_i}^L(t) = \int [D\mathbf{x}(t)] C_{v_i v_i}^{Ec}[\mathbf{x}(t)] P[\mathbf{x}(t); t], \quad (1.15)$$

як інтеграла по множині можливих траєкторій частинок від ейлерової кореляційної функції вздовж цих траєкторій  $C_{v_i v_i}^{E_c}[\mathbf{x}(t)]$  з ймовірністю реалізацій траєкторій  $P[\mathbf{x}(t), t]$ .

## 1.2 Наближення Корсіна

Одним з перших наближень, яке широко використовується у фізиці плазми, є наближення Корсіна [12, 45—49]. Воно ґрунтується на рівнянні (1.15) з ейлеровою кореляційною функцією компонент швидкості  $C_{v_i v_i}^{E_c}$  та ймовірністю реалізації  $P(\mathbf{x}, t)$  траєкторії  $\mathbf{x}(t)$  в точці  $\mathbf{x}$  в момент часу  $t$ . Наведена ейлерова кореляційна функція розраховується у лабораторній системі координат, проте залежить від траєкторій частинок як лагранжева кореляційна функція. Для загального випадку невідома ймовірність реалізації траєкторії  $P(\mathbf{x}, t)$ . В методі Корсіна використовуються припущення про статистичну незалежність траєкторій частинок  $\mathbf{x}(t)$  від випадкового поля швидкості  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  та їхній гаусовий розподіл.

Отже, розглянемо означення лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості (1.11) в інтегральній формі

$$C_{v_i v_i}^L(t) = \langle v_i(\mathbf{x}(t_2)) v_i(\mathbf{x}(t_1)) \rangle = \int d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_1 \times \\ \times \langle v_i(\mathbf{x}_2) v_i(\mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}(t_2)) \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}(t_1)) \rangle. \quad (1.16)$$

Перше припущення наближення Корсіна дає можливість представити підінтегральне усереднення як добуток двох незалежних усереднень. Оскільки  $\mathbf{x}(t)$  траєкторії частинок вважаються статистично незалежними від випадкового поля швидкості  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ , отримаємо

$$\langle v_i(\mathbf{x}_2) v_i(\mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}(t_2)) \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}(t_1)) \rangle \approx \\ \approx \langle \delta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}(t_2)) \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}(t_1)) \rangle \langle v_i(\mathbf{x}_2) v_i(\mathbf{x}_1) \rangle. \quad (1.17)$$

Для статичного випадкового поля швидкості ейлерова кореляційна функція компонент швидкості визначається як

$$\langle v_i(\mathbf{x}_2)v_i(\mathbf{x}_1) \rangle = C_{v_i v_i}^E(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1). \quad (1.18)$$

Після введення нових змінних  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1$  та підстановки рівнянь (1.17), (1.18) у (1.16), лагранжева кореляційна функція набуває вигляду

$$\begin{aligned} C_{v_i v_i}^L(t) &\approx \int d\mathbf{x} C_{v_i v_i}^E(\mathbf{x}) \int \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{2} \left\langle \delta\left(\frac{\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{x}}}{2} - \mathbf{x}(t_2)\right) \delta\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}}{2} - \mathbf{x}(t_1)\right) \right\rangle = \\ &= \int d\mathbf{x} C_{v_i v_i}^E(\mathbf{x}) \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \rangle, \end{aligned} \quad (1.19)$$

де введено позначення для зміщення вздовж траєкторії  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_2) - \mathbf{x}(t_1)$  за час  $t = t_2 - t_1$ . Друге припущення має вигляд

$$\langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \rangle \approx \prod_{i=x,y} \frac{\exp\left(-\frac{x_i^2}{2\Delta_i(t)}\right)}{\sqrt{2\pi\Delta_i(t)}} = P^{CA}(\mathbf{x}, t). \quad (1.20)$$

Підстановка виразу (1.20) у (1.19) дає лагранжеву кореляційну функцію компонент швидкості у наближенні Корсіна

$$C_{v_i v_i}^L(t) \approx \int d\mathbf{x} C_{v_i v_i}^E(\mathbf{x}) P^{CA}(\mathbf{x}, t). \quad (1.21)$$

У роботі [49] показано, що для випадку сильної лагранжевої нелінійності  $K > 1$  наближений коефіцієнт дифузії має асимптотичну оцінку  $D \sim K$ . Для діапазону значень  $1 < K < \infty$  у числовому моделюванні [50—52] було отримано асимптотичну оцінку коефіцієнта дифузії  $D \sim K^\gamma$  з  $\gamma < 1$ . Крім того для рівняння (1.21) у випадку статичного випадкового поля швидкості  $K = \infty$  асимптотична оцінка коефіцієнта дифузії виявляється

нескінченною, а не нульовою, через очевидний факт повного захоплення частинок і відсутності дифузії в границі нескінченного часу.

У роботі [53] зауважено, що для певних випадків гаусових зміщень існує можливість точно розрахувати  $C_{v_i v_i}^{E_c}$  з рівняння (1.15). Коефіцієнт дифузії, отриманий з використанням такої ейлерової кореляційної функції та ймовірності реалізації траєкторій (1.20), також має асимптотичну оцінку  $D \sim K$  для  $K > 1$ . Така поведінка розбігається з результатами числового моделювання та теорії перколяції, що вказує на помилковість припущення (1.20) для великих чисел Кубо.

Крім того, з числового моделювання [50, 51] випливає, що розподіл зміщень  $P(\mathbf{x}, t)$  має максимум в  $\mathbf{x} = 0$  та довгі степеневі хвости, спричинені процесами захоплення частинок просторовою структурою випадкового поля: частинки що перебувають на екіпотенціальних поверхнях із великою абсолютною величиною значення потенціалу рухаються замкненими траєкторіями в досить обмежених областях координатного простору, в той час як частинки на поверхнях із малим значенням потенціалу можуть зміщуватись на значні відстані.

Це також свідчить про помилковість гаусового розподілу траєкторій за зміщеннями (1.20). Тому виникає потреба сформулювати підхід, що не ґрунтується на другому припущенні в методі Корсіна (1.20).

### 1.3 Метод декорельованих траєкторій

Для врахування руху частинок, захоплених випадковим полем, було запропоновано метод декорельованих траєкторій [8, 53, 54, 56, 58]. Для наближення лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості без використання припущення про гаусове розбігання траєкторій (1.20) використовується набір детермінованих траєкторій, які називаються траєкторіями просторової декореляції або декорельованими траєкторіями. Кожна така траєкторія визначається умовними ейлеровими кореляційними функціями випадкових полів з умовою рівності випадкових полів заданим величинам



у початковій точці траєкторій частинок. При цьому спосіб поділу ансамблю реалізацій на підансамблі в методі декорельованих траєкторій не є однозначним: залишається свобода вибору за якими саме величинами розбивати ансамбль реалізацій на підансамблі. У роботі [53] обрано спосіб розбиття на підансамблі за найкращим відтворенням результатів числового моделювання роботи [51]. В цьому методі лагранжева кореляційна функція компонент швидкості наближено розраховується як усереднений за всіма підансамблями добуток швидкості в початковий момент на середню швидкість в підансамблі вздовж відповідної декорельованої траєкторії.

Таким чином, метод декорельованих траєкторій спирається на два припущення: існує набір підансамблів за початковими значеннями випадкових полів в ансамблі реалізацій та існує характерна динаміка частинок для кожного підансамблю, яка описується відповідною декорельованою траєкторією.

Наближення лагранжевої кореляційної функції запропоноване у роботі [53] формулюється, як повна зважена ейлерова кореляційна функція для ансамблю реалізацій випадкових полів, визначена на декорельованих траєкторіях для всіх підансамблів. Таке формулювання наближення не відображає усіх припущень, використаних у методі декорельованих траєкторій. Тому, в цій роботі ми наведемо побудову наближення виходячи з інтегрального представлення лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості. Для цього розглянемо ансамбль реалізацій випадкових полів, розбитий на підансамблі за їх початковими значеннями, як запропоновано у роботі [53]

$$\phi_0 = \phi(0), \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0). \quad (1.22)$$

Аналогічно до рівняння (1.16) представимо лагранжеву кореляційну функцію компонент швидкості у вигляді інтегралу

$$C_{v_i v_i}^L(t) = \int d\phi_0 d\mathbf{v}_0 d\mathbf{v} v_{0i} v_i \times \\ \times \langle \delta(\phi_0 - \phi(\mathbf{0})) \delta(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}(0)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}(\mathbf{x}(t))) \rangle. \quad (1.23)$$

Таке співвідношення враховує умови на початкові значення випадкових швидкості та потенціалу. Оскільки значення  $\phi_0$ ,  $\mathbf{v}_0$  та  $\mathbf{v}$  є числами незалежними від усереднення, середнє від добутку  $\delta$ -функцій має вигляд

$$\langle \delta(\phi_0 - \phi(0)) \delta(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}(0)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}(\mathbf{x}(t))) \rangle = \\ = \int \frac{dk_{\phi_0} dk_{v_0} dk_v}{(2\pi)^5} \exp(-ik_{\phi_0} \phi_0 - ik_{v_0} \mathbf{v}_0 - k_v \mathbf{v}) \times \\ \times \langle \exp(ik_{\phi_0} \phi(0) + ik_{v_0} \mathbf{v}(0) + k_v \mathbf{v}(\mathbf{x}(t))) \rangle. \quad (1.24)$$

При розрахунку середнього від експоненти врахуємо співвідношення між кореляційними функціями в однаковий та довільний моменти часу. Усереднення одномоментних компонент випадкової швидкості в силу однорідності, стаціонарності та статистичної незалежності повністю описується другим незвідним моментом

$$\langle v_i(\mathbf{x}(t)) v_j(\mathbf{x}(t)) \rangle = \langle v_i(0) v_j(0) \rangle = \delta_{ij} C_{v_i v_j}^L(0) = \delta_{ij} C_{v_i v_j}^E(0). \quad (1.25)$$

Таким чином лагранжеві кореляційні функції в початковий момент часу еквівалентні ейлеровими кореляційними функціями в початковій точці траєкторій руху частинок і є відомими. Усереднення випадкових функцій  $\phi(0)$ ,  $\mathbf{v}(0)$  та  $\mathbf{v}(\mathbf{x}(t))$  у різні моменти часу в загальному випадку вимагає врахування вищих моментів, але значну інформацію містять вже другі моменти

$$\langle v_i(\mathbf{x}(t)) v_j(0) \rangle = C_{v_i v_j}^L(t), \quad (1.26)$$

та

$$\langle v_i(\mathbf{x}(t)) \phi(0) \rangle = C_{v_i \phi}^L(t). \quad (1.27)$$

Вони будуть описуватися лагранжевими кореляційними функціями в довільний ненульовий момент часу та залишаються невідомими. Отже, враховуючи лише другі незвідні моменти маємо

$$\begin{aligned} \langle \exp(ik_{\phi_0} \phi(0) + ik_{v_0} \mathbf{v}(0) + k_{\mathbf{v}} \mathbf{v}(\mathbf{x}(t))) \rangle &\approx \\ &\approx \exp \left( -\frac{1}{2} \left( k_{\phi_0}^2 C_{\phi\phi}^L(0) + \sum_{i=x,y} k_{v_{0i}}^2 C_{v_x v_x}^L(0) \right) \right) \times \\ &\times \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{i=x,y} k_{v_i}^2 C_{v_x v_x}^L(0) - \sum_{i=x,y} k_{v_i} k_{\phi_0} C_{v_i \phi}^L(\mathbf{x}(t)) \right) \times \\ &\times \exp \left( - \sum_{i \neq j=x,y} k_{v_i} k_{v_j} C_{v_i v_j}^L(\mathbf{x}(t)) \right). \quad (1.28) \end{aligned}$$

Праву частину співвідношення (1.24) можна представити у вигляді добутку

$$\begin{aligned} \langle \delta(\phi_0 - \phi(0)) \delta(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}(0)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}(\mathbf{x}(t))) \rangle &\approx \\ &\approx P_0(\phi_0, \mathbf{v}_0) P(\mathbf{v}(t), \mathbf{x}(t); \phi_0, \mathbf{v}_0), \quad (1.29) \end{aligned}$$

де ймовірність реалізації підансамблю за початковими значеннями випадкових полів має вигляд

$$\begin{aligned} P_0(\phi_0, \mathbf{v}_0) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 C_{v_x v_x}^E(0) C_{v_y v_y}^E(0) C_{\phi\phi}^E(0)}} \times \\ &\times \exp \left( -\frac{v_{0x}^2}{2C_{v_x v_x}^E(0)} - \frac{v_{0y}^2}{2C_{v_y v_y}^E(0)} - \frac{\phi_0^2}{2C_{\phi\phi}^E(0)} \right). \quad (1.30) \end{aligned}$$

Ймовірність реалізації  $\mathbf{v}$  швидкості в точці  $\mathbf{x}(t)$  для відповідного підансамблю записується як

$$P(\mathbf{v}(t), \mathbf{x}(t); \phi_0, \mathbf{v}_0) \approx \prod_{i=x,y} \frac{1}{\sqrt{2\pi\phi_i(\mathbf{x}(t); \phi_0, \mathbf{v}_0)}} \times \exp\left(-\frac{(v_i - v_i(\mathbf{x}(t); \phi_0, \mathbf{v}_0))^2}{2\phi_i(\mathbf{x}(t); \phi_0, \mathbf{v}_0)}\right). \quad (1.31)$$

Величина

$$v_i(\mathbf{x}(t); \phi_0, \mathbf{v}_0) = \phi_0 \frac{C_{v_i\phi}^L(\mathbf{x}(t))}{C_{\phi\phi}^E(0)} + \sum_{j=x,y} v_{0j} \frac{C_{v_iv_j}^L(\mathbf{x}(t))}{C_{v_jv_j}^E(0)}, \quad (1.32)$$

яка визначається через невідомі лагранжеві кореляційні функції (1.26) та (1.27), формально відповідає найбільш ймовірній швидкості в підансамблі.

Відповідну дисперсію позначено

$$\phi_i(\mathbf{x}(t); \phi_0, \mathbf{v}_0) = C_{v_iv_i}^E(0) - \sum_{\rho=\phi, v_{x,y}} \frac{(C_{v_i\rho}^E(\mathbf{x}(t)))^2}{C_{\rho\rho}^E(0)}. \quad (1.33)$$

Підстановка рівнянь (1.28)-(1.33) у зважену лагранжеву кореляційну функцію (1.23) приводить до співвідношення

$$C_{v_iv_i}^L(t) \approx \int d\phi_0 d\mathbf{v}_0 P_0(\phi_0, \mathbf{v}_0) C_{v_iv_i}^L(\mathbf{x}(t); \phi_0, \mathbf{v}_0), \quad (1.34)$$

де введено парціальну лагранжеву кореляційну функцію компонент швидкості для підансамблю

$$C_{v_iv_i}^L(t; \phi_0, \mathbf{v}_0) = v_{0i} \int d\mathbf{v} v_i P(\mathbf{v}(t), \mathbf{x}(t); \phi_0, \mathbf{v}_0) = v_{0i} v_i(\mathbf{x}(t); \phi_0, \mathbf{v}_0). \quad (1.35)$$

Рівняння (1.34) є наслідком першого припущення методу декорельованих траєкторій: існування підансамблів за початковими значеннями випадкових

полів. Воно описує залежність зваженої лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості від параметрів підансамблю.

Важливо зауважити, що рівняння (1.34) узгоджується із рівнянням (1.11) коли лагранжеві кореляційні функції з рівняння (1.32) є незалежними від параметрів підансамблю. Таке припущення є наслідком нехтування вищими моментами в усередненні (1.28).

Нарешті треба зауважити, що отримана найбільш ймовірна швидкість (1.32) у підансамблі залежить від невідомих траєкторій частинок, для наближення яких ми не можемо використовувати припущення про гаусове розбігання траєкторій (1.20), оскільки воно призводить до асимптотично нескінченного коефіцієнта дифузії у випадку статичного поля. Разом з тим, за оцінками авторів [53] припущення статистичної незалежності траєкторій частинок від випадкового поля (1.17) не є причиною помилкової асимптотичної оцінки коефіцієнта дифузії. Тому використаємо це припущення та виконаємо інтегрування у рівнянні (1.19) до того як буде здійснено усереднення за траєкторіями частинок

$$C_{v_i v_j}^L(t) = \left\langle \int d\mathbf{x} C_{v_i v_i}^E(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \right\rangle \approx \langle C_{v_i v_j}^E(\mathbf{x}(t)) \rangle. \quad (1.36)$$

Оскільки невідомі кореляційні функції (1.26) та (1.27) входять у визначення парціальної лагранжевої кореляційної функції (1.34), ми вважаємо, що для всіх траєкторій в підансамблі виконується умова (1.22). Згідно з другим припущенням методу декорельованих траєкторій кожний підансамбль можна охарактеризувати відповідною детермінованою траєкторією. Тоді ми наблизимо усереднену за траєкторіями частинок ейлерову кореляційну функцію випадкових полів, як ейлерову кореляційну функцію вздовж характерної траєкторії частинок

$$C_{v_i v_j}^L(t) \approx C_{v_i v_j}^E(\langle \mathbf{x}(t) \rangle). \quad (1.37)$$

Для визначення характерної траєкторії розглянемо умову для підансамблів (1.22). Вона сформульована лише для однієї точки випадкового поля та означає існування нескінченної кількості випадкових полів, які її задовольняють. Опис статистичної поведінки нескінченної кількості скорельованих частинок відповідно до рівнянь (1.23) та (1.35) визначається через найбільш ймовірну швидкість в підансамблі (1.32), яка в свою чергу залежить від невідомої характерної траєкторії частинок  $\langle \mathbf{x}(t) \rangle$ . Математично строго знайти таку траєкторію неможливо. Відповідно до другого припущення методу декорельованих траєкторій її природно наблизити як траєкторію вздовж найбільш ймовірної швидкості

$$\langle x(t; \phi(0) = \phi_0, \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0) \rangle \approx X_i(t; \phi_0, \mathbf{v}_0). \quad (1.38)$$

Така траєкторія називається траєкторію просторової декореляції, або декорельованою траєкторією, та визначається рівнянням

$$\frac{d}{dt} X_i(t; \phi_0, \mathbf{v}_0) = v_i(\mathbf{x}(t; \phi_0, \mathbf{v}_0); \phi_0, \mathbf{v}_0), \quad (1.39)$$

яке замикає систему рівнянь в методі декорельованих траєкторій. Інтерпретація декорельованих траєкторій (1.39) впливає з означень коефіцієнта дифузії (1.13) та парціальної лагранжевої кореляційної функції (1.35)

$$D_i(t; \phi_0, \mathbf{v}_0) = \int_0^t d\tilde{t} C_{v_i v_i}^{L_c}(\tilde{t}; \phi_0, \mathbf{v}_0) = v_{0i} X_i(t; \phi_0, \mathbf{v}_0), \quad (1.40)$$

і представляє собою парціальний коефіцієнт дифузії.

У роботі [53] розглянуто різні способи розбиття на підансамблі, наприклад, лише за початковими значеннями випадкового потенціалу, та різні способи замикання, наприклад, з врахуванням загасання лагранжевої кореляційної функції в часі - так звані траєкторії часо-просторової декореляції. Всі вони дають близькі передбачення, але найкраще відтворює результати числового моделювання з роботи [51] розглянутий метод декорельованих

траєкторій з підансамблями (1.22) за початковими величинами випадкових потенціалу та швидкості з траєкторіями просторової декореляції (1.39). Автори роботи [53] наголошують, що декорельовані траєкторії не є буквально усередненими траєкторіями частинок. Згідно з нашою інтерпретацією вони представляють парціальні коефіцієнти дифузії (1.40) для відповідних підансамблів.

Для змінного в часі випадкового потенціалу у роботі [53] методом декорельованих траєкторій було отримано часову залежність лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості для чисел Кубо  $K = 4$  та  $K = 160$ . Вона якісно, але не кількісно, відтворює результати числового моделювання [51]. Отримана оцінка асимптотичного коефіцієнта дифузії виявилася коректною у широкому діапазоні чисел Кубо: метод узгоджується із квазілінійною оцінкою для випадку малих значень чисел Кубо  $K < 1$ , а для великих чисел Кубо  $K > 1$  відтворює перколяційну оцінку.

У роботі [53] дифузія в статичному випадковому полі не порівнювалася із числовим моделюванням. Проте, оскільки траєкторії просторової декореляції є обмеженими замкненими кривими для  $\phi_0 \neq 0$ , а коефіцієнт дифузії визначається як інтеграл за всіма траєкторіями ансамблю, автори цієї роботи припускають можливість відтворення субдифузного часозалежного та нульового асимптотичного коефіцієнтів дифузії в рамках запропонованого методу.

Як наголошено у роботі [53], головним припущенням методу є можливість опису характерної еволюції частинок у підансамблі в термінах траєкторії просторової декореляції (1.39). Згідно з наведеною інтерпретацією такі детерміновані траєкторії є парціальними коефіцієнтами дифузії (1.40). Таким чином метод декорельованих траєкторій замикає рівняння на коефіцієнт дифузії, а не на середньоквадратичне відхилення, як запропоновано у наближенні Корсіна.

Декорельовані траєкторії  $X_i(t; \phi_0, \mathbf{v}_0)$  (1.39) залежать від трьох параметрів підансамблю  $\phi_0, \mathbf{v}_0$ , за якими в подальшому виконується усереднення

(1.34) як за неперервними величинами. В числовому розрахунку така кореляційна функція з неперервним усередненням наближається дискретною суммою зі скінченною кількістю підансамблів. Оцінка асимптотичного коефіцієнта дифузії для випадкового потенціалу може залежати від кількості декорельованих траєкторій. Тому важливо дослідити залежність декорельованих траєкторій від параметрів підансамблю, а також перевірити коректність замикання на коефіцієнт дифузії через порівняння з даними прямого числового моделювання.

## 1.4 Метод моментів

В нашій роботі [70] було запропоновано інше наближення лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості для випадку ізотропної замороженої турбулентності. Наближення моментами використовує перше припущення Корсіна (1.17), але замикає рівняння в інший спосіб. Для ізотропної турбулентності середнє зміщення лагранжевих частинок прямує до нуля і, важливою характеристикою, що описує розбігання траєкторій, є другий незвідний момент.

Розглянемо інтегральне представлення лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості (1.16) із першим припущенням наближення Корсіна (1.17) у вигляді рівняння (1.36)

$$C_{v_i v_i}^L(t) = \langle C_{v_i v_i}^E(\mathbf{x}(t)) \rangle. \quad (1.41)$$

Для ізотропного випадку, означимо ейлерову кореляційну функцію вздовж напрямків швидкості

$$C_{\mathbf{v}\mathbf{v}}^E(\mathbf{x}) = \sum_{i=x,y} C_{v_i v_i}^E(\mathbf{x}) = C_{\mathbf{v}\mathbf{v}}^E(|\mathbf{x}|). \quad (1.42)$$

Така кореляційна функція залежить лише від абсолютної величини різниці значень просторової змінної траєкторії частинки для двох послідовних



моментів часу. В наближенні моментами припускаємо, що для ізотропної замороженої турбулентності лагранжева кореляційна функція компонент швидкості у нульовому наближенні визначається як відповідна ейлерова кореляційна функція, що залежить від середньоквадратичного відхилення. Разом із припущенням (1.37) маємо

$$C_{v_i v_i}^L(t) \approx \langle C_{v_i v_i}^E(|\mathbf{x}(t)|) \rangle \approx C_{v_i v_i}^E(\langle |\mathbf{x}(t)| \rangle) \approx C_{v_i v_i}^E(\sqrt{\Delta(t)}). \quad (1.43)$$

У роботі [70] отримано часову залежність лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості, коефіцієнта дифузії та середньоквадратичного відхилення, які певною мірою кількісно узгоджуються із результатами прямого числового моделювання. Окремо зауважимо, що це наближення не містить вільних параметрів.

При розгляді статичного випадкового поля важливою особливістю є збереження значення потенціалу вздовж траєкторії руху частинки. Як вже зазначалося вище в методі декорельованих траєкторій, групи частинок з однаковими початковими умовами можуть рухатися скорельовано. Тому для покращення результатів (1.43) корисно побудувати наближення моментами групи частинок за значеннями випадкового потенціалу.

Використовуючи центральну граничну теорему можна показати, що розподіл ймовірності реалізації підансамбля  $\phi_0 = \phi(0)$  є гаусовим, тому можемо переписати повну лагранжеву кореляційну функцію у вигляді інтегралу

$$C_{v_{di} v_{di}}^L(t) \approx \int d\phi_0 \left( \frac{2}{\pi C_{\phi\phi}^E(0)} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{\phi_0^2}{2C_{\phi\phi}^E(0)} \right) \times \\ \times C_{v_{di} v_{di}}^L(\Delta^{1/2}(t, \phi_0), \phi_0), \quad (1.44)$$

де парціальна кореляційна функція визначається як

$$C_{\nu_{di}\nu_{di}}^L(\Delta^{1/2}(t, \phi_0), \phi_0) = \frac{\phi_0^2}{C_{\phi\phi}^E(0)} C_{\nu_{di}\nu_{di}}^E(\Delta^{1/2}(t, \phi_0)). \quad (1.45)$$

Згідно з побудовою наближення - тепер при збереженні інтенсивності, поле частинки всеодно рівне  $\phi_0$ , тому згідно визначення кореляційної функції (1.11) та (1.43), в нас з'являється додатковий множник  $\phi_0^2$ . Врешті це призводить до перенормування часу в рівнянні для середньоквадратичного відхилення в підансамблі з  $\phi_0 = \phi(0)$ .

## 1.5 Висновок

Побудовано новий метод замикання статистичних рівнянь, який ми назвали методом моментів. Ці рівняння описують перенесення частинок у двовимірному випадковому полі швидкості. Особливою рисою методу є те, що в ньому не використовуються вільні параметри. Також метод не використовує припущення про гаусовий розподіл зміщень частинок, яке не є виправданим через їхнє захоплення на замкнених орбітах. Основи оригінального методу порівняно з іншими, запропонованими раніше. Показано, що метод моментів є простішим за метод декорельованих траєкторій, але водночас враховує захоплення частинок та існування підансамблів

## Розділ 2

# СТАТИЧНЕ ВИПАДКОВЕ ПОЛЕ

У попередньому розділі ми показали як зводиться задача розрахунку коефіцієнтів перенесення до встановлення зв'язку між лагранжевими та ейлеровими статистичними величинами, а саме лагранжевими та ейлеровими кореляційними функціями компонент швидкості. Ми розглядаємо статичне випадкове електричне поле, або, іншими словами, заморожене випадкове поля, і як зазначалося раніше, воно відповідає нескінченному числу Кубо  $K = \infty$ . Це в свою чергу означає, що середня довжина пробігу частинки за кореляційний час є нескінченно великою в порівнянні з кореляційною довжиною поля – частинка нескінченно довго зберігає пам'ять про просторову структуру випадкового поля. З існування інтегралу руху, що відповідає збереженню значення потенціалу частинки виплаває, що статистичні характеристики руху частинок по близькими еквіпотенціальним поверхням будуть подібними, тобто їхній рух є сильно скорельованим. Такі особливості замороженої турбулентності роблять цю задачу важливим тестом для перевірки аналітичних наближень.

В цьому розділі буде перевірено коректність припущень розглянутих в попередньому розділі. Перевірка буде здійснюватися шляхом порівняння результатів аналітичних розрахунків з даними числового моделювання поведінки частинок на основі мікроскопічних рівнянь їхнього руху. Раніше [37, 49] було отримано для наближення Корсіна та методів, що явно чи неявно на ньому базуються, оцінку для асимптотичного по часу коефіцієнта дифузії  $D \sim K$  в границі сильної лагранжевої нелінійності  $K \gg 1$ . Це суперечить результатам числового моделювання [50—52] і причина розбіжності є необґрунтоване припущення про гаусовий розподіл траєкторій (1.20). Натомість числові моделювання для випадку сильної лагранжевої нелінійності  $1 \ll K < \infty$  [51, 52] підтверджують перколяційну асимптотичну

оцінку коефіцієнта дифузії  $D \sim K^{0.7}$  [38]. Показчик степеня менший за одиницю з'являється через ефект захоплення частинок випадковим полем. Коефіцієнт дифузії зростає зі збільшенням числа Кубо  $K$ , проте граничного переходу до  $K = \infty$  не існує, тому що в границі замороженої турбулентності частинки стають повністю захопленими і асимптотичний коефіцієнт дифузії має дорівнювати нулю. Коректна статистична теорія має відображати зростання асимптотичний коефіцієнт дифузії в перколяційному режимі і давати нульове значення в границі  $K = \infty$

Перколяційний підхід не визначає часову еволюцію дифузійного процесу, і на це спрямовані роботи авторів методу декорельованих траєкторій [8, 53, 54]. Цей метод враховує ефекти захоплення частинок просторовою структурою випадкового поля та відновлює перколяційну оцінку асимптотичного коефіцієнта дифузії для  $K > 1$ . Метод якісно відтворює форму лагранжевої кореляційної функції компонент дрейфової швидкості для випадку як великих  $K > 1$ , так і малих  $K < 1$  значень числа Кубо. Автори роботи [53] зауважують, що метод не може бути отримано із перших принципів, але його застосовність обґрунтовується через порівняння із результатами числового моделювання [51]. Проте, порівняння результатів методу декорельованих траєкторій із прямим числовим моделюванням для випадку гранично сильної лагранжевої нелінійності  $K = \infty$  не було представлено - наведено лише якісні міркування коректності методу.

Випадку замороженої турбулентності як важливому тесту для статистичних теорій має бути приділена особлива увага. В запропонованому нами наближенні моментами [70]. Статистичні характеристики поведінки частинок в заморожених полях будуть порівняні з результатами прямого числового моделювання, а також з передбаченнями на основі методу Корсіна та методу декорельованих траєкторій. Важливо, що в нашому методі використовується лише припущення про замикання рівнянь, але не використовується вільні параметри підгонки.

Найбільш близьким до нашого методу є метод декорельованих траєкторій, але існує суттєва різниця між ними в способі замикання статистичних рівнянь. Тому окремим завданням є детальний порівняльний аналіз цих методів між собою та результатів розрахунків зроблених на їх основі. Це дозволить зробити висновки про переваги того чи іншого методу.

## 2.1 Рівняння дрейфового руху

Розглянемо рух тестових замагнічених частинок у замороженому випадковому електростатичному полі у площині, перпендикулярній до постійного магнітного поля. Траєкторії частинок задовольняють рівнянню дрейфового руху

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} = \frac{e}{m} \frac{[\mathbf{E}(\mathbf{x}) \times \mathbf{e}_B]}{\Omega_B}, \quad (2.1)$$

де  $\Omega_B = \frac{eB}{mc}$ , а поле визначається як суперпозиція  $N$  гармонійних хвиль із гаусовою вагою та амплітудою потенціала  $\phi_0$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}) = -A\phi_0 \sum_{s=1}^N \mathbf{k}_s \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{k}_s}{\Delta k}\right)^2\right) \sin(-\mathbf{k}_s \mathbf{x} + \alpha_s). \quad (2.2)$$

Набір хвильових векторів задано через  $N_\kappa$  хвильових чисел у  $N_\theta$  напрямках

$$\mathbf{k}_s = k_l \mathbf{e}_{\theta_m} : k_l = l \Delta k = l \frac{k_{max}}{N_\kappa}, \quad l = 1, N_\kappa; \quad \theta_m = m \frac{2\pi}{N_\theta}, \quad m = 1, N_\theta; \\ N = N_\kappa \times N_\theta, \quad (2.3)$$

де параметр нормування

$$A = \sqrt{\frac{4k_{max}}{\Delta k \sqrt{\pi} N_\kappa N_\theta}}, \quad (2.4)$$

визначається з умови  $\langle \mathbf{E}(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x}) \rangle = E_0^2$ . Кожна реалізація випадкового поля  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  задається набором випадкових фаз  $\{\alpha_i\}$ .

Для зручності числового моделювання ми використовуємо знерозмірені просторову  $\chi = \frac{x\Delta k}{2\pi}$  та часову  $\tau = \frac{t\Omega_B}{2\pi}$  змінні, де для амплітуди знерозміреного поля введено позначення  $\sigma_0 = \frac{e\phi_0\Delta k^2}{m\Omega_B^2}$ . Підстановка у рівняння (2.1) дає знерозмірене рівняння дрейфового руху

$$v_i = \frac{d\chi_i}{d\tau} = \epsilon_{ik} \frac{\partial}{\partial \chi_k} \sigma(\chi), \quad (2.5)$$

де,  $\epsilon_{ik}$  описує антисиметричний тензор другого рангу  $\epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} = 1$ . Ізотропний знерозмірений потенціал  $\sigma(\chi)$  має вигляд

$$\sigma(\chi) = \sqrt{\frac{4\kappa_{max}}{\sqrt{\pi}N_\kappa N_\theta}} \frac{\sigma_0}{2\pi} \sum_{s=1}^N \exp\left(-\frac{\kappa_s^2}{2}\right) \cos(\alpha_s - 2\pi\kappa_s\chi), \quad (2.6)$$

де  $\kappa_s = \frac{k_s}{\Delta k}$  представляють набір знерозмірених хвильових векторів.

Для неперервної границі  $N \rightarrow \infty$  Ейлерова кореляційна функція для потенціалу має вигляд

$$C_{\sigma\sigma}^E(\chi) = \langle \sigma(\chi - \chi_0) \sigma(\chi_0) \rangle = \frac{\sigma_0^2}{4\pi^2} \exp\left(-\frac{\pi^2\chi^2}{2}\right) I_0\left(\frac{\pi^2\chi^2}{2}\right), \quad (2.7)$$

і залежить лише від  $\chi^2$ , тобто є ізотропною. Ейлерові кореляційні функції компоненти швидкості і потенціалу та компонент швидкостей визначаються як похідні від кореляційної функції для потенціалу (2.7)

$$C_{v_i\sigma}^E(\chi) = -\epsilon_{ik} \frac{\partial}{\partial \chi_k} C_{\sigma\sigma}^E(\chi), \quad (2.8)$$

$$C_{v_i v_j}^E(\chi) = -\epsilon_{ik} \epsilon_{jm} \frac{\partial^2}{\partial \chi_k \partial \chi_m} C_{\sigma\sigma}^E(\chi). \quad (2.9)$$

В числовому експерименті інтегрування рівняння (2.5) числовими методами дає нам лагранжеві траєкторії частинок. Подальше їх усереднення за  $N_r$  реалізаціями випадкових полів дає середнє зміщення

$$\langle \chi \rangle(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N_r} \chi_{\{\alpha\}_i}(\tau), \quad (2.10)$$

та середньоквадратичне зміщення

$$\langle \chi^2 \rangle(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N_r} \left( \chi_{\{\alpha\}_i}(\tau) - \langle \chi \rangle(\tau) \right)^2. \quad (2.11)$$

Аналогічно можна визначити і вищі незвідні моменти, які будуть відображати міру відхилення функції розподілу частинок від гаусової.

Разом з цим лагранжеві кореляційні функції також можуть бути знайдені з прямого числового моделювання. Лагранжева кореляційна функція компонент дрейфової швидкості розраховується таким чином

$$C_{v_i v_j}^{L (NS)}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N_r} \left( v_{i,r}(\chi(\tau)) v_{j,r}(0) \right), \quad (2.12)$$

де дрейфова швидкість  $\mathbf{v}$  визначена вздовж траєкторії ведучого центра, і відповідно до рівняння (2.5), задана як

$$v_i = \epsilon_{ik} \frac{\partial}{\partial \chi_k} \sigma(\chi). \quad (2.13)$$

Ми обрали  $N = 1440$  парціальних хвиль ( $N_\kappa = 20$ ,  $N_\theta = 72$ ) у числовому моделюванні з міркувань, щоб автокореляційна функція потенціалу  $C_{\sigma\sigma}^E(\chi)$  мала достатньо гладку поведінку. Максимальне абсолютне значення знерозміреного хвильового вектора у числовому моделюванні обмежене значенням  $\kappa_{max} = 2$ , тобто в моделюванні інтервал хвильових чисел є

вдвічі більшим ширину хвильового пакету. Амплітуда знерозміреного потенціалу  $\sigma_0 = 1$ . Для кожної реалізації електростатичного поля генерується  $N = 1440$  випадкових значень фаз хвилі. Число реалізацій  $N_r$  в числовому моделюванні вказується на рисунках.

## 2.2 Замикання статистичних рівнянь

Ключовою величиною для статистичного опису руху частинок у двовимірному нестисливому випадковому статичному полі швидкості є лагранжева кореляційна функція компонент швидкості - вона визначає часову та асимптотичну поведінку коефіцієнтів перенесення. Порівняємо різні підходи. В граничному випадку сильної лагранжевої нелінійності  $K = \infty$  асимптотичне значення коефіцієнта дифузії є нульовим. Оскільки лагранжева кореляційна функція компонент швидкості на малих часах є додатною, то на великих часах вона повинна мати довгі області від'ємних значень, щоб інтеграл від неї за часом був нульовим. Така поведінка лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості відображає захоплення частинок полем. Частинки рухаються замкненими траєкторіями, які визначаються виключно просторовою структурою випадкового поля. Аналітичні наближення мають коректно відтворювати таку поведінку кореляційної функції.

Рівняння для середньоквадратичного зміщення отримаємо зі співвідношення Тейлора (1.12) підставивши в його праву частину наближені лагранжеві кореляційні функції (1.21). Для наближення Корсіна маємо

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta = \frac{\sigma_0^2 \sqrt{2\pi}}{[1 + 2\pi^2 \Delta]^{3/2}}. \quad (2.14)$$

Для наближення моментами в результаті дещо громіздких розрахунків, з урахуванням (1.43) отримаємо

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta = \frac{\sigma_0^2}{2} \exp\left(-\frac{\pi^2 \Delta}{2}\right) \left( I_0\left(\frac{\pi^2 \Delta}{2}\right) (1 - \pi^2 \Delta) + I_1\left(\frac{\pi^2 \Delta}{2}\right) \pi^2 \Delta \right). \quad (2.15)$$



Ці рівняння замикаються на середньоквадратичне зміщення  $\Delta$ , але в різний спосіб. На відміну від них рівняння в методі декорельованих траєкторій замикаються на парціальний коефіцієнт дифузії  $X_{i,j}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} X_i = & \exp\left(-\frac{(\pi X)^2}{2}\right) I_1\left(\frac{(\pi X)^2}{2}\right) \left[ \pi^2 \sigma_0 \epsilon_{ij} X_j + \right. \\ & \left. + v_{0j} (2\pi^2 X_j X_i + \frac{2X_j X_i}{X^2} - 1) + v_{0i} (2\pi^2 X_j^2 + \frac{2X_j^2}{X^2} - 1) \right] + \\ & + \exp\left(-\frac{(\pi X)^2}{2}\right) I_0\left(\frac{(\pi X)^2}{2}\right) \left[ v_{0i} (1 - 2\pi^2 X_j^2) - \pi^2 \sigma_0 \epsilon_{ij} X_j + \right. \\ & \left. + v_{0j} 2\pi^2 X_i X_j \right], X^2 = \sum_{i=x,y} X_i^2. \quad (2.16) \end{aligned}$$

Повний коефіцієнт дифузії отримується усередненням за підансамблями всіх парціальних коефіцієнтів дифузії з відповідною ймовірністю реалізації підансамблів

$$\begin{aligned} D_i = & \int d\sigma_0 d\mathbf{v}_0 \frac{v_{0i} X_i}{\sqrt{(2\pi)^3 C_{\sigma\sigma}^E(0) C_{v_x v_x}^E(0) C_{v_y v_y}^E(0)}} \times \\ & \times \exp\left(-\frac{\sigma_0^2}{2C_{\sigma\sigma}^E(0)} - \sum_{j=x,y} \frac{v_{0j}^2}{2C_{v_j v_j}^E(0)}\right). \quad (2.17) \end{aligned}$$

Метод декорельованих траєкторій та наближення моментами не використовують другого припущення наближення Корсіна (1.20) про гаусове розбігання траєкторій частинок. Натомість вони наближено описують поведінку частинок через усереднені величини, а саме: парціальні коефіцієнти дифузії або середньоквадратичне зміщення.

Метод декорельованих траєкторій у своїй побудові спирається на ідею врахувати відомі початкові величини для опису руху частинок. При цьому функціональна залежність лагранжевих кореляційних функцій випадкових полів залишається однаковою всіх для підансамблів, а рівняння на парці-

альний коефіцієнт дифузії для різних підансамблів відрізняється лише величинами  $\sigma_0, v_0$ .

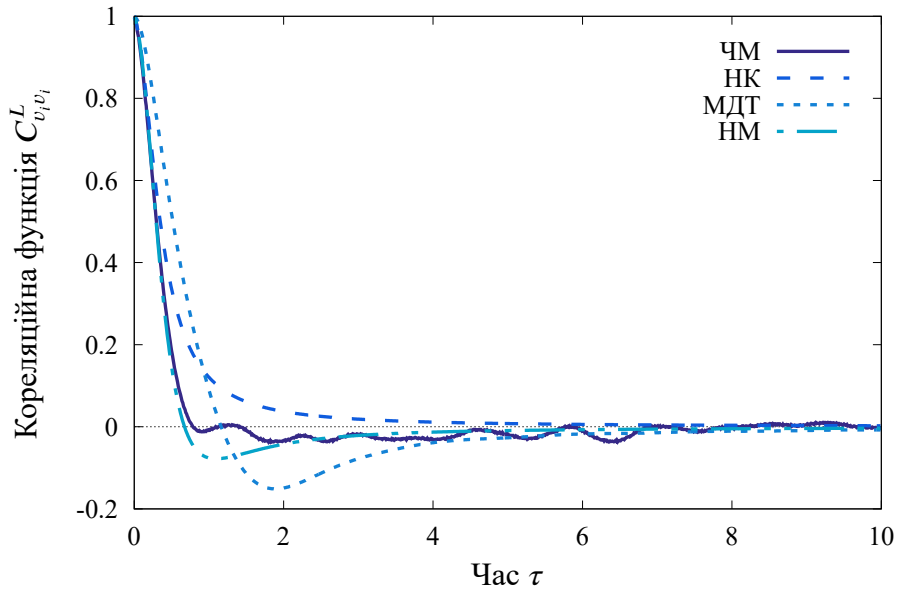
У числових розрахунках декорельованих траєкторій ми маємо перейти в рівнянні (2.17) від інтегралу до дискретної суми за підансамблями. Природно очікувати, що наближення буде точнішим із зростанням кількості підансамблів. Розглянемо уважніше праві частини рівнянь (2.14) - (2.16). Права частина рівняння (2.14) для всіх значень є додатною, в той час як для рівнянь (2.15) та (2.16) може бути також і від'ємною. Звідси одразу можна зробити висновок, що наближення Корсіна (2.14) не спроможне відтворити нульове асимптотичне значення коефіцієнту дифузії та субдифузну поведінку. Причину помилки є припущення про гаусове розбігання траєкторій, яке не використовується у методі декорельованих траєкторій та наближенні моментами. Властивості рівняння для декорельованих траєкторій детально розглянуто у наступному підрозділі 2.3.

В нашому методі моментами можна явно продемонструвати, що Лагранжова кореляційна функція компонент швидкості (1.43) наближається до нуля при прямуванні середньоквадратичного зміщення до нескінченності  $\tau \rightarrow \infty, \Delta(\tau) \rightarrow \infty$  з області від'ємних значень

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} C_{v_i v_i}^L(\tau) = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{\sigma_0^2}{2} \exp\left(-\frac{\pi^2 \Delta}{2}\right) \left( I_0\left(\frac{\pi^2 \Delta}{2}\right) (1 - \pi^2 \Delta) + I_1\left(\frac{\pi^2 \Delta}{2}\right) \pi^2 \Delta \right) = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{-\sigma_0^2}{4\pi^3 \Delta \sqrt{\pi \Delta}} = 0, \quad (2.18)$$

де використано асимптотику модифікованої функції Бесселя для  $|\arg z| < \pi/2, |z| \rightarrow \infty, \mu = 4v^2$

$$I_\nu(z) \sim \frac{\exp(z)}{\sqrt{2\pi z}} \left( 1 - \frac{\mu - 1}{8z} + \frac{(\mu - 1)(\mu - 9)}{2! (8z)^2} - \dots \right).$$



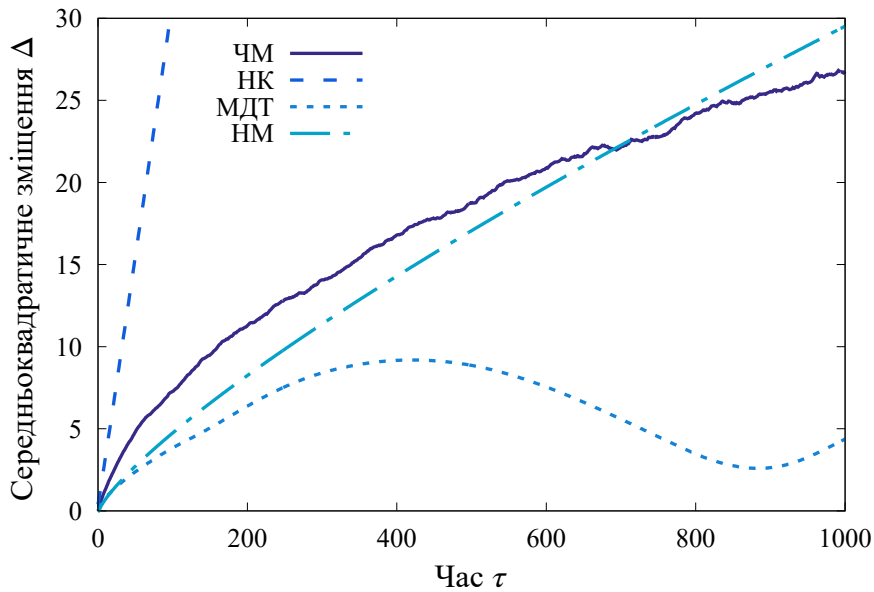
**Рис. 2.1** Лагранжева кореляційна функція компонент швидкості отримана з числового моделювання (ЧМ, число реалізацій  $N_r = 2 \times 10^4$ ), наближенням Корсіна (НК), методом декорельованих траєкторій (МДТ) (число підансамблів  $N_s = 1728 \times 10^3$ ) та наближенням моментами (НМ). Область від'ємних значень кореляційної функції описує ефект захоплення частинок

Крім того, отриманий з такої кореляційної функції коефіцієнт дифузії також асимптотично прямує до нуля при  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $\Delta(\tau) \rightarrow \infty$ . З першого інтеграла маємо

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} D(\tau) &= \lim_{\sigma_0^2 \Delta \rightarrow \infty} \left[ \Delta \exp\left(-\frac{\pi^2 \Delta}{2}\right) \left( I_0\left(\frac{\pi^2 \Delta}{2}\right) - I_1\left(\frac{\pi^2 \Delta}{2}\right) \right) \right]^{1/2} = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{\sigma_0^2}{(4\pi^7 \Delta)^{1/4}} = 0, \quad (2.19) \end{aligned}$$

де використано записану вище асимптотику модифікованої функції Бесселя.

Наведемо результати числового моделювання для лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості та середньоквадратичного зміщення. На Рис. 2.1 подано лагранжеву кореляційну функцію компонент швидкості, отриману з прямого числового моделювання, в порівнянні з трьома наближеними методами. Наближенням Корсіна не відтворюється область

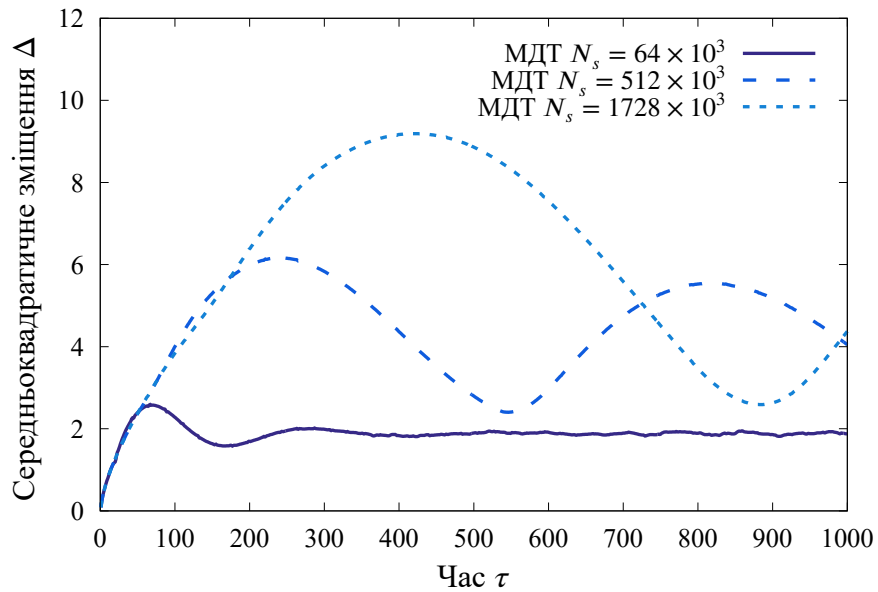


**Рис. 2.2** Середньоквадратичне зміщення отримане з числового моделювання (ЧМ, число реалізацій  $N_r = 2 \times 10^4$ ), наближення Корсіна (НК), методу декорельованих траєкторій (МДТ, число підансамблів  $N_s = 1728 \times 10^3$ ) та наближення моментами (НМ)

від’ємних значень лагранжевої кореляційної функції. Тоді як наближення моментами та метод декорельованих траєкторій якісно описують таку поведінку, при цьому результати, отримані методом моментів, краще узгоджуються з числовим моделюванням.

Поведінка кореляційної функції, знайденої з числового моделювання характеризується флуктуаціями, що обумовлені скінченним числом реалізацій випадкового поля та набору хвиль і зменшуються із зростанням числа реалізацій в числовому моделюванні. Важливими характеристиками дифузійного процесу є також коефіцієнт дифузії та середньоквадратичне зміщення. Вони виражаються через інтеграли від кореляційної функції, а значить вплив флуктуацій на їхню поведінку є меншим.

На Рис. 2.2 наведено часові залежності середньоквадратичного зміщення, які дають можливість оцінити кількісні розбіжності аналітичних наближень з числовим моделюванням. Метод декорельованих траєкторій та наближення моментами якісно відтворюють результати числового моделювання - спостерігається субдифузійна поведінка середньоквадратичного зміщення. Наближення Корсіна дає помилкову поведінку - середньоква-

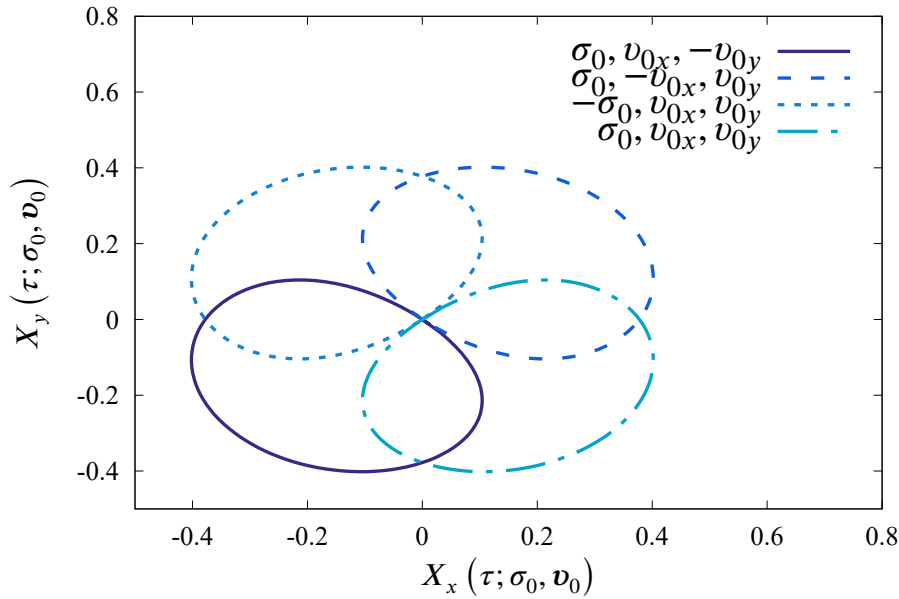


**Рис. 2.3** Середньоквадратичне зміщення отримане з методу декорельованих траєкторій для різної кількості підансамблів  $N_s = 64 \times 10^3$ ,  $512 \times 10^3$ ,  $1728 \times 10^3$

дратичне зміщення на великих часах зростає лінійно із часом. Причиною осциляції середньоквадратичного зміщення в методі декорельованих траєкторій є скінченна кількість підансамблів в аналітичних розрахунках.

На Рис. 2.3 проілюстровано вихід на стаціонарне значення середньоквадратичного зміщення в методі декорельованих траєкторій для трьох різних значень числа підансамблів  $N_s$ . Така залежність від кількості підансамблів може слабше проявлятися у випадку незамороженої турбулентності [53] через пов'язане з нею додаткове експоненційне загасання кореляцій.

Оскільки метод декорельованих траєкторій є найближчим до нашого методу, перед нами стояла задача визначити переваги того, чи іншого підходу. Уважніше розглянемо метод декорельованих траєкторій. Наведена залежність результатів методу декорельованих траєкторій від нефізичного параметру кількості підансамблів вимагає детального аналізу причин такої поведінки та шляхів їх можливого усунення. Важливо оцінити необхідність врахування початкових значень випадкових полів при описі динаміки у підансамблі декорельованими траєкторіями. Тому доречно сформулювати умову на підансамблі для числового моделювання, перевірити розподіли ймовірностей реалізацій підансамблів та коректність припущен-



**Рис. 2.4** Симетрії декорельованих траєкторій відповідно до зміни знаку параметрів підансамблю  $\{\sigma_0, v_{0x}, v_{0y}\}$

ня про особливість динаміки частинок у різних підансамблях у числовому моделюванні. Окремо необхідно проаналізувати властивості декорельованих траєкторій та їх часову еволюцію, дослідити залежність від параметрів підансамблю та способу усереднення.

Детальніше проаналізуємо залежність парціальних коефіцієнтів дифузії від параметрів підансамблю. Зокрема, з аналізу рівняння (2.16) випливає, що ми маємо три різні класи траєкторій в залежності від параметрів підансамблів: 1) періодичні орбіти  $\{\sigma_0 \neq 0, v_{0x,y} \neq 0\}$ , з вагою підансамблів  $\sim 1$ ; 2) відрізки  $\{\sigma_0 = 0, v_{0x,y} \neq 0\}$ , з вагою  $\sim N_s^{-1/3}$ ; 3) точкові  $\{\sigma_0 \neq 0, v_{0x,y} = 0\}$ , з вагою  $\sim N_s^{-2/3}$ . Перший клас дає основний внесок у коефіцієнт дифузії - траєкторії, по яким рух частинок періодично повторюється із різною швидкістю обертання - саме цей клас траєкторій визначається як декорельовані [53].

На Рис. 2.4 наведено чотири декорельовані траєкторії для різних параметрів  $\sigma_0, v_0$  підансамблю. При зміні знаку початкової швидкості  $v_{0x,y}$  декорельована траєкторія відбивається відносно відповідної осі, при цьому форма траєкторії не змінюється. Таким чином можна вважати, що декорельована траєкторія є непарною функцією відносно початкових значень

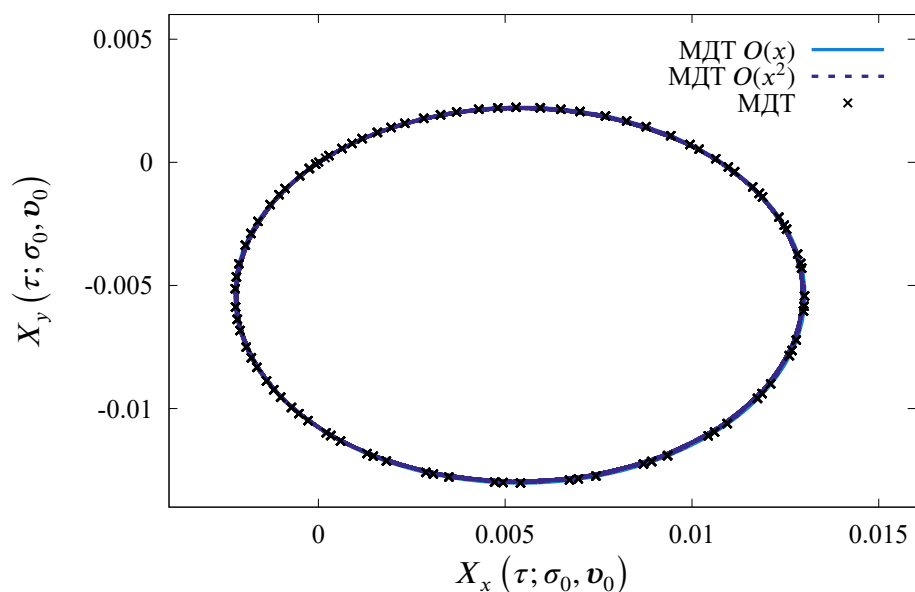
швидкості. Аналогічно, зміна знаку початкового потенціалу призводить до інверсії траєкторії відносно початку координат. При масштабуванні параметрів підсамбля  $\sigma_0, \mathbf{v}_0$ , траєкторія не змінює своєї форми, але змінюється швидкість її обходу, яка визначається початковим потенціалом  $\sigma_0$ . Зауважимо, що довжина границі замкненої області визначається відношенням початкової швидкості до значення початкового потенціалу.

Оскільки декорельовані траєкторії є замкнутими, а їхній розмір визначається відношенням  $\mathbf{v}_0/\sigma_0$ , ми можемо наблизити праву частину рівняння на декорельовані траєкторії (1.39), розклавши її до першого порядку за  $X_{x,y}$ . Наближене рівняння легко інтегрується і ми отримаємо декорельовану траєкторію у першому порядку за  $X_{x,y}$

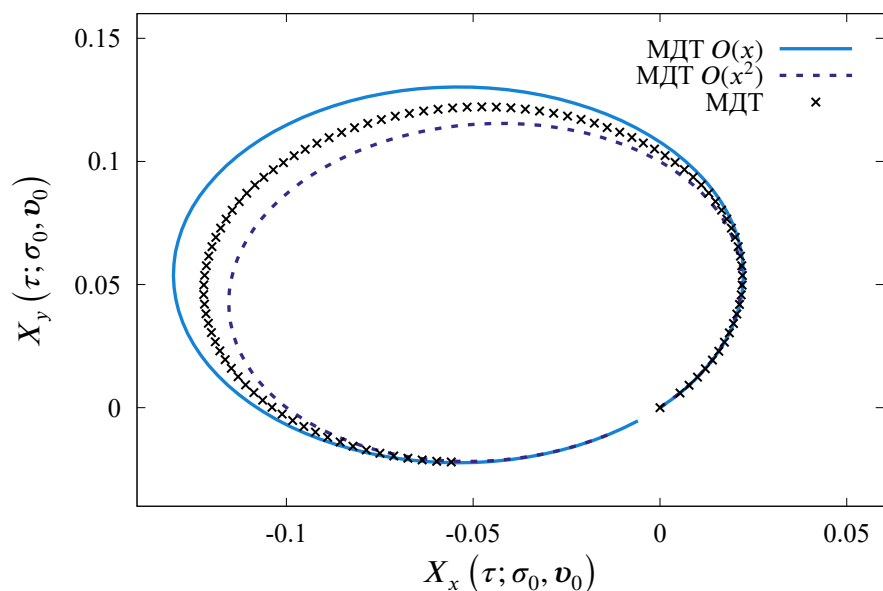
$$X_i = \frac{v_{0i}}{\pi^2 \sigma_0} \sin(\pi^2 \sigma_0 t) + \epsilon_{ij} \frac{v_{0j}}{\pi^2 \sigma_0} (1 - \cos(\pi^2 \sigma_0 t)), \quad (2.20)$$

Аналогічно можна отримати наближену декорельовану траєкторію у другому порядку за  $X_{x,y}$ . На Рис. 7 та Рис. 8 показано точні та наближені декорельовані траєкторії для двох підансамблів. Для  $|X| \sim 0.001$  ми маємо узгодження наближених та точного розв'язків із відносною похибкою  $\epsilon_{0.001} \approx 0.06\%$ , для  $|X| \sim 0.01$  маємо відносну похибку  $\epsilon_{0.01} \approx 7,6\%$ . Розбіжність між наближеними та точними траєкторіями зростає швидше ніж лінійна функція від  $|X|$ . Важливо відзначити, що при цьому наближення першого порядку дає траєкторію, яка охоплює точну декорельовану траєкторію, а наближення другого порядку охоплюється точною декорельованою траєкторією.

Отримані наближення відбивають основні властивості точного рівняння для декорельованої траєкторії, а саме: непарну залежність від параметрів підансамблю  $\sigma_0, \mathbf{v}_0$ , залежність розміру траєкторії від відношення початкової швидкості до початкового потенціалу  $\mathbf{v}_0/\sigma_0$  та залежність швидкості обходу траєкторії лише від початкового потенціалу  $\sigma_0$ .



**Рис. 2.5** Точні (МДТ) та наближені (МДТ  $O(x)$ ), (МДТ  $O(x^2)$ ) розв'язки рівняння на декорельовані траєкторії для випадку абсолютних значень  $|X| \sim 0.001$



**Рис. 2.6** Точні (МДТ) та наближені (МДТ  $O(x)$ ), (МДТ  $O(x^2)$ ) розв'язки рівняння на декорельовані траєкторії для випадку абсолютних значень  $|X| \sim 0.01$



Сказане наводить на думку, що не всі доданки у рівнянні (1.39) є важливими – частина з них буде компенсуватися при усередненні за підансамблями (2.17). Виконати неперервне усереднення за підансамблями у рівнянні (2.17) та отримати часову залежність коефіцієнта дифузії в границі нескінченної кількості підансамблів  $N_s \rightarrow \infty$  ми не можемо, оскільки не маємо аналітичного розв'язку рівняння для декорельованої траєкторії (1.39).

Тому, щоб позбутися залежності середньоквадратичного зміщення від кількості підансамблів в методі декорельованих траєкторій виконаємо усереднення рівняння за підансамблями (1.23) до того, як буде здійснено процедуру замикання на коефіцієнт дифузії. Враховуючи припущення про незалежність усереднених у підансамблі траєкторій від початкових значень потенціалу  $\sigma_0$  та швидкості  $v_0$  будемо мати

$$C_{v_i v_i}^L(\tau) = \langle v_i(0)v_i(\tau) \rangle. \quad (2.21)$$

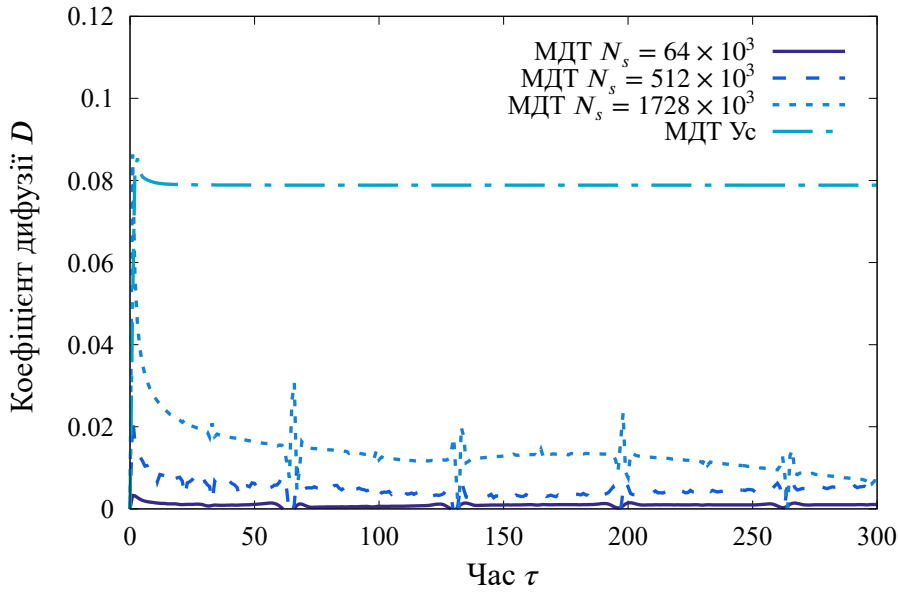
Аналогічно до рівнянь (1.36) - (1.39) отримаємо наближену лагранжеву кореляційну функцію у вигляді

$$C_{v_i v_i}^L(\tau) \approx C_{v_i v_i}^E(\tilde{X}(\tau)), \quad (2.22)$$

і виконаємо замикання рівнянь вже на повний коефіцієнт дифузії

$$\tilde{X}_i = \frac{D_i}{\sqrt{C_{v_i v_i}^L(0)}}. \quad (2.23)$$

Характерною величиною для нормування коефіцієнта дифузії в цьому випадку оберемо лагранжеву кореляційну функцію у початковий момент. В



**Рис. 2.7** Коефіцієнт дифузії для методу декорельованих траєкторій із повним проміжним усередненням (МДТ  $U_c$ ) та методу декорельованих траєкторій (МДТ  $N_s$ ) із різною кількістю підансамблів

такому наближенні кінцеве рівняння для коефіцієнта дифузії має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} D_i = \exp\left(-\frac{(\pi D)^2}{2}\right) I_1\left(\frac{(\pi D)^2}{2}\right) \left(2\pi^2 D_j^2 + \frac{2D_j^2}{D^2} - 1\right) + \\ + \exp\left(-\frac{(\pi D)^2}{2}\right) I_0\left(\frac{(\pi D)^2}{2}\right) (1 - 2\pi^2 D_j^2), \end{aligned} \quad (2.24)$$

де  $D^2 = \sum_{i=x,y} D_i^2$ .

На Рис. 2.7 наведено повний коефіцієнт дифузії, отриманий методом декорельованих траєкторій для різної кількості підансамблів, а також коефіцієнт дифузії, розрахований на основі рівняння (2.24). В рамках зроблених припущень коефіцієнт дифузії з рівняння (2.24) є граничним значенням для методу декорельованих траєкторій при  $N_s \rightarrow \infty$ . Розв'язок рівняння (2.24) показує, що коефіцієнт дифузії асимптотично не прямує до нуля. Це свідчить про недосконалість способу замикання рівнянь на парціальний (1.39) чи повний (2.22) коефіцієнти дифузії для опису його асимптотики у випадку замороженої турбулентності. Цікавим є той результат, що використання скінченної кількості підансамблів краще відповідає числовому моделюван-

ню ніж замикання на коефіцієнт дифузії, так як коефіцієнт дифузії зі скінченною кількістю підансамблів на великих часах осцилює навколо нульового значення. На скінченних часах метод декорельованих траєкторій може задовільно відтворювати поведінку середньоквадратичного зміщення за достатньої кількості підансамблів і для випадку незамороженої турбулентності давати якісну асимптотичну оцінку.

Таким чином, в цьому підрозділі було порівняно три методи, а саме: Корсіна, декорельованих траєкторій та моментів для опису дифузії замагнічених частинок в полі замороженої електростатичної турбулентності, які перевірялися за допомогою прямого числового моделювання. На відміну від наближення Корсіна, метод декорельованих траєкторій та наближення моментами якісно відтворюють поведінку лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості для ізотропного замороженого випадково поля швидкості знайдену в числовому експерименті.

Симетрія отриманих декорельованих траєкторій показує на надлишковість інформації, яка зникає при усередненні за ансамблем. Запропоновано переформулювання методу для нескінченної кількості підансамблів, яке враховує лише ключові величини і дозволяє глибше зрозуміти роль способу замикання. Замикання на коефіцієнт дифузії у методі декорельованих траєкторій не дає правильної часової залежності для лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості, а отриманий асимптотичний коефіцієнт дифузії виявляється не нульовим. Таким чином замикання на коефіцієнт дифузії у методі декорельованих траєкторій є менш вдалим, ніж замикання на середньоквадратичне зміщення у наближенні моментами.

## **2.3 Підансамблі за початковими умовами**

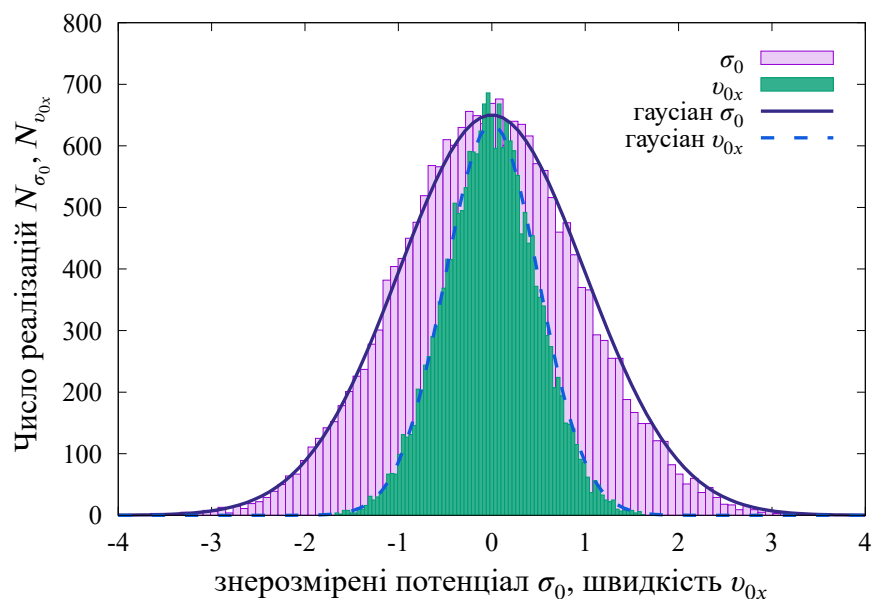
Зупинимось детальніше на тому які припущення в методі декорельованих траєкторій про підансамблі є важливими. Метод декорельованих траєкторій базується на припущенні про можливість поділу ансамблю реалізацій на підансамблі за набором початкових значень випадкових полів (1.22).

При цьому ймовірність їх реалізації є гаусовою (1.30). За припущенням методу декорельованих траєкторій кожний підансамбль описує процес загасання кореляцій у відповідній групі частинок (1.22) в термінах парціального коефіцієнта дифузії.

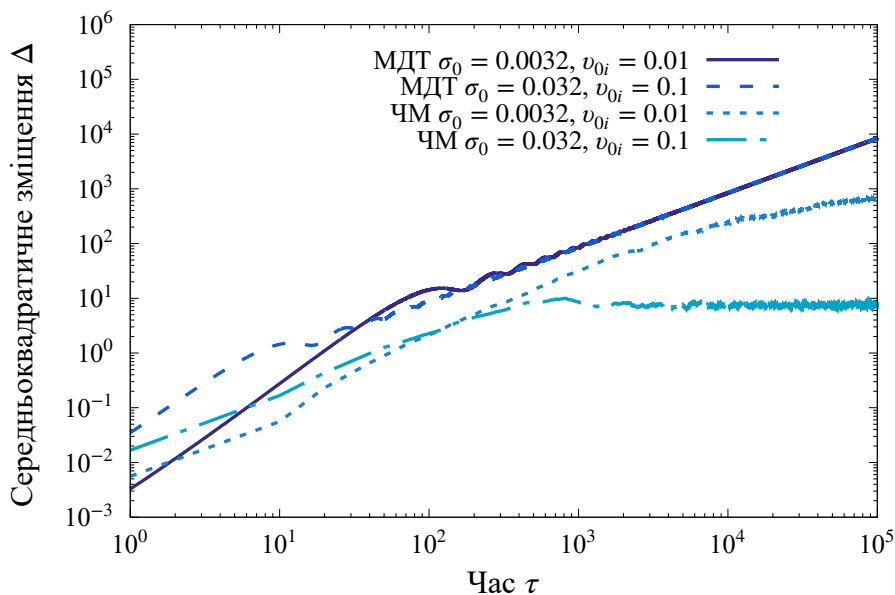
Розглянемо розподіл початкових значень потенціалу та компонент швидкості у числовому моделюванні, результати якого предствалені у попередньому розділі, та подані на Рис. 2.8. Такий розподіл не є тотожним неперервному гаусовому розподілу в методі декорельованих траєкторій. Проте можна вважати, що в граничному випадку нескінченної кількості частинок наведений на рисунку розподіл прямуватиме до гаусового.

Важливо перевірити чи спостерігається у числовому моделюванні відмінність у динаміці груп частинок з різних підансамблів, як це припускають у методі декорельованих траєкторій. Розрахуємо парціальні коефіцієнти дифузії для різних підансамблів та порівняємо їх між собою. Згідно з результатами числового моделювання, що використовуються в нашому методі та методі декорельованих траєкторій, відмінність у динаміці частинок, яка описується парціальним коефіцієнтом дифузії (1.39), визначається початковими значеннями випадкових полів і може бути суттєвою. На Рис. 2.9 наведено результати числового моделювання для середньоквадратичного зміщення для двох різних підансамблів  $\{\sigma_0, v_{0x}, v_{0y}\}$ : (A)  $\{0.0032, 0.01, 0.01\}$  та (B)  $\{0.032, 0.1, 0.1\}$ . Рівняння (1.39) та (1.40) дають відношення середньоквадратичних відхилень для підансамблів у методі декорельованих траєкторій  $\Delta_x^{MDT A} / \Delta_x^{MDT B} \approx 1/10$ , а для числового моделювання в момент  $\tau = 1000$  ми маємо  $\Delta_x^{NS A} / \Delta_x^{NS B} \approx 1/3$ .

З результатів числового моделювання для підансамблів випливає, що середньоквадратичне зміщення частинок у різних піданасаблях є різним. Проте часова залежність середньоквадратичного зміщення у числовому моделюванні не узгоджується з розрахунками методу декорельованих траєкторій. А це означає що підансамблі, з різною динамікою частинок в них, існують, але опис такої динаміки декорельованими траєкторіями виявля-



**Рис. 2.8** Розподіл за початковими значеннями потенціалу  $\sigma_0$  та швидкості  $v_{0x,y}$  з рівнянь (2.6) та (2.5) для  $N_r = 2 \times 10^4$  реалізацій: він є близьким до гаусового

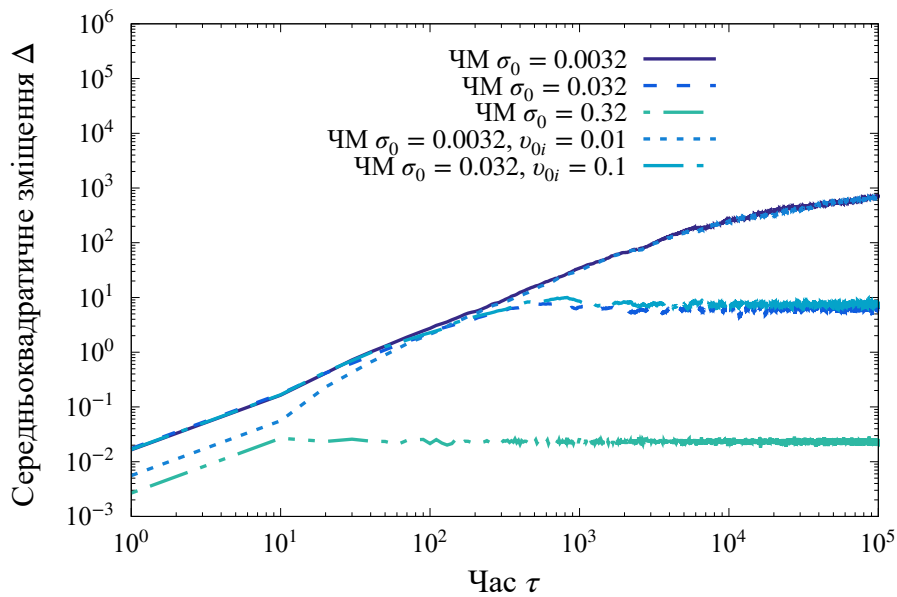


**Рис. 2.9** Середньоквадратичне зміщення для підансамблів (A)  $\{\sigma_0 = 0.0032, v_{0x} = 0.01, v_{0y} = 0.01\}$  та (B)  $\{\sigma_0 = 0.032, v_{0x} = 0.1, v_{0y} = 0.1\}$  отримане з числового моделювання (ЧМ, число реалізацій  $N_r = 10^3$ ) та методу декорельованих траєкторій (МДТ) на великих часах

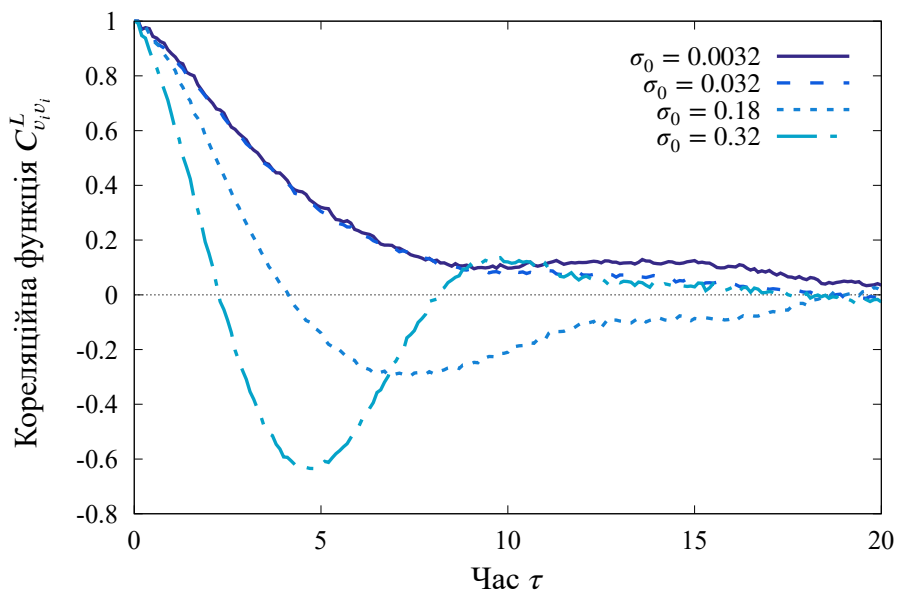
ється некоректним. Причини такого результату можуть полягати як у врахуванні лише других незвідних моментів в усередненні (1.34), так і в замиканні рівнянь на парціальний коефіцієнт дифузії

Як вже зазначалося вище, величиною що зберігається вздовж траєкторій руху в статичному випадковому полі є потенціал. А замкнена еквіпотенціальна лінія визначає область якою може рухатися частинка. Тому підансамблі за початковим потенціалом  $\{\sigma_0\}$  справді мають зміст. Водночас початкові дрейфові швидкості не несуть обмежень на рух частинок, вони тільки визначають амплітуду кореляційної функції в початковий момент. З метою з'ясування важливості врахування підансамблів за початковою швидкістю та початковим потенціалом було проведено числове моделювання для підансамблів  $\{v_0\}$ ,  $\{\sigma_0\}$  та виконано порівняння із результатами для підансамбля за початковими умовами  $\{\sigma_0, v_{0x}, v_{0y}\}$ . Результати порівняння для підансамблів за початковими значеннями потенціалу  $\{\sigma_0\}$  та за початковими умовами  $\{\sigma_0, v_{0x}, v_{0y}\}$  представлені на Рис. 2.10. З представлених на рисунку результатів можна зробити висновок, що визначальним параметром є початковий потенціал, а початкова швидкість не відіграє значної ролі для визначення середньоквадратичного зміщення. Справді, з рисунку добре видно, як зі зміною початкового потенціалу змінюється рівень насичення середньоквадратичного зміщення -  $\{0.0032, 0.01, 0.01\}$  співпадає з 0.0032, а  $\{0.032, 0.1, 0.1\}$  з 0.032.

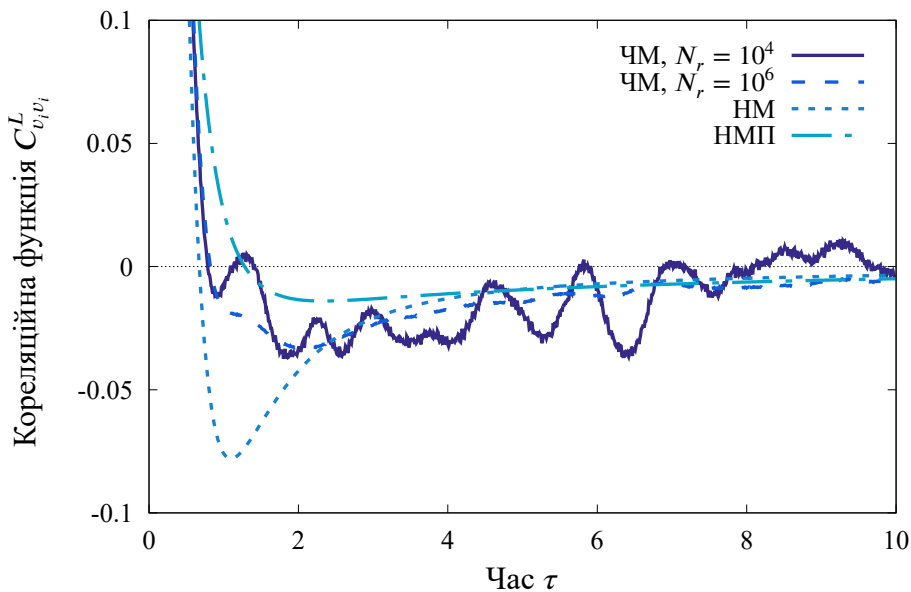
Цікавою також є поведінка лагранжевої кореляційної функції в підансамблі. На Рис. 2.10 наведено кореляційну функцію компонент дрейфової швидкості для різних початкових значень потенціалу. Область від'ємних значень з'являється раніше для кореляційної функції з більшим за абсолютним значенням потенціалу  $\sigma_0 = 0.32$  на вершині ландшафту потенціалу і швидше виходить на режим осциляцій поблизу нуля. Це означає, що рух частинок сильно скорельований і область можливих рухів дуже обмежена. В той же час кореляційна функція з найменшим абсолютним значенням, в долині ландшафту потенціалу  $\sigma_0 = 0.0032$  не має області від'ємних зна-



**Рис. 2.10** Середньоквадратичне зміщення для підансамблів  $\{\sigma_0 = 0.0032, v_{0x} = 0.01, v_{0y} = 0.01\}$ ,  $\{\sigma_0 = 0.032, v_{0x} = 0.1, v_{0y} = 0.1\}$  та  $\sigma_0 = 0.0032, 0.032, 0.32$  отримане з числового моделювання (ЧМ, число реалізацій  $N_r = 10^3$ ) на великих часах



**Рис. 2.11** Лагранжева кореляційна функція компонент дрейфової швидкості для підансамблів  $\{\sigma_0\}$ : 0.0032, 0.032, 0.18, 0.32 з числового моделювання (ЧМ) (число реалізацій  $N_r = 10^3$ )



**Рис. 2.12** Лагранжева кореляційна функція знайдена в числовому моделюванні (ЧМ), наближеннях моментами (НМ) та наближеннях моментами з підансамблями за початковим потенціалом (НМП)

чень на представлених часах - рух частинок не є скорельованим, вони розбігаються на більші відстані. На Рис. 2.10 видно, що середньоквадратичне зміщення як для  $\sigma_0 = 0.032$ , так і для  $\sigma_0 = 0.32$  виходить на насичення, це означає, що коефіцієнт дифузії прямує до нуля, а тому площа області від'ємних значень в кореляційних функціях з Рис. 2.11 компенсує область додатніх значень.

Таку саме властивість як в моделюванні мають кореляційні функції для підансамблів за початковим потенціалом в методі моментів (1.45), крім того вони є подібними за формою і при перенормованні часу переходять одна в іншу. Це можна інтерпретувати таким чином - різні групи частинок за початковими потенціалом є захопленими, можливо, окрім групи з нульовим потенціалом міра якої є нульовою. Їх еволюції є подібними між собою в нульовому наближенні і відрізняється лише часом, за який частинки повертаються в початкову точку. А значить, маючи розв'язок для одного з підансамблів в наближенні моментів, ми можемо отримати усі інші розв'язки шляхом перенормування часу. Провівши усереднення за ансамблем реалізацій (1.44) ми отримаємо повну лагранжеву кореляційну функцію. На Рис. 2.12



наведено порівняння лагранжевих кореляційних функцій для наближення моментами без розбиття на підансамблі, наближення моментами з підансамблями за початковим значенням потенціалу та числового моделювання. З нього видно, що врахування підансамблів покращує кількісну відповідність між аналітичним наближенням та прямим числовим моделюванням.

За допомогою числового моделювання ми з'ясували, що розподіл частинок за початковими значеннями як потенціалу так і швидкості є подібним до гаусового. Рух частинок з підансамблю за початковим потенціалом є скорельованим, принаймні для початкових потенціалів відмінних від нульового. Рівень насичення середньоквадратичного зміщення залежить від початкового потенціалу. Тоді як підансамблі за початковою швидкістю не містять важливої інформації, а тому не має особливої потреби їх використовувати.

Підсумуємо результати цього підрозділу. Характерною ознакою захоплення частинок є наявність області від'ємних значень лагранжевої кореляційної функції, яку ми спостерігаємо і в числовому моделюванні, і в аналітичних наближеннях. Кореляційна функція повільно спадає на великих часах, але залишається скінченною. В кожній реалізації статичного поля рух частинки є повністю детермінованим - час входить як параметр, а кореляційний час прямує до нескінченності. Ці особливості відбиває наближення моментами (1.43). Перебільшене від'ємне значення кореляційної функції швидкості розраховане без розбиття на підансамблі пов'язано з тим, що таке наближення не враховує різні часові масштаби в русі частинок. Розрахунки на основі концепції підансамблів (1.44) дозволили помітно покращити кількісне узгодження з результатами числового моделювання, як це показано у збільшеному масштабі на Рис. 2.12.

Запропонована модель допускає узагальнення на змінні в часі поля, що характеризуються скінченним часом кореляцій. Також вона може бути розширена для врахування ефектів скінченного ларморівського радіусу. Ці питання будуть розглянуті в наступних розділах.

## 2.4 Висновок

На основі запропонованих нами статистичних рівнянь розраховано еволюцію кореляційної функції, коефіцієнта дифузії та середньоквадратичного зміщення. Їхня поведінка узгоджується з прямим числовим моделюванням. Наближені рівняння не використовують вільних параметрів. Врахування концепції підансамблів дозволило покращити узгодження результатів розрахунків на основі наших статистичних рівнянь із числовим моделюванням. Показано, що розрахунки на основі методу моментів краще узгоджуються із даними числового моделювання ніж ті, що зроблені на основі методу декорельованих траєкторій.

## Розділ 3

# ЕФЕКТИ СКІНЧЕННОГО ЛАРМОРІВСЬКОГО РА- ДІУСА

В попередньому розділі 2 було показано, що запропонований аналітичний метод моментів узгоджується із прямим числовим моделюванням для перенесення частинок поперек магнітного поля статичним випадковим електричним полем у дрейфовому наближенні [3, 70]. З порівняння між методом моментів та методом декорельованих траєкторій [53] було зроблено висновок [1], що перший є простішим, не має нефізичної залежності від числа підансамблів, і використовує лише ті підансамблі, які знайшли обґрунтування в числовому моделюванні.

Наближення ведучого центру широко використовується в аналітичних і числових розрахунках, але насправді частинки рухаються під дією сили Лоренца, а ларморівський радіус при такому розгляді не є нульовим. Врахування ларморівського обертання частинок змінює якісну поведінку асимптотичного коефіцієнта дифузії – навіть в границі нескінченного кореляційного часу він залишається скінченним [56, 57, 71—75], а не прямує асимптотично до нуля, як було показано для руху у дрейфовому наближенні з розділу 2. Тим не менше відомо, що саме рух ведучих центрів визначає перенесення частинок, а ларморівське обертання враховується як поправки до нього. Отже, побудова коректного аналітичного методу для врахування скінченного ларморівського радіусу при русі частинок поперек постійного магнітного поля під дією випадкового статичного електричного поля є важливою задачею.

В цьому розділі рівняння з методу моментів узагальнюються для врахування ефектів скінченного ларморівського радіуса. Основною умовою для побудови такого узагальнення є малість зміщення ведучого центру ча-

стинки у порівнянні з просторовою неоднорідністю поля протягом періоду обертання частинки. Важливо, що ми не припускаємо малості ларморівського радіусу на тих самих просторових масштабах. Очевидно, це вимагає враховувати ефекти в усіх порядках по радіусу Лармора. Метод розрахунку кореляційних функцій для скінченного ларморівського радіусу на основі усереднення за ларморівським обертанням, – гіроусереднення, було сформульовано у [4] за допомогою двох підходів, використаних у роботах [56, 57] та [74, 75] для методу декорельованих траєкторій.

Отже, метою цього розділу є визначення коректного способу врахувати ефекти скінченного ларморівського радіусу в методі моментів та аналіз залежності коефіцієнта дифузії і середньоквадратичного зміщення від величини ларморівського радіуса. Коректність розв'язків методом моментів перевіряється шляхом порівняння із результатами прямого числового моделювання, яке ґрунтувалося на точних рівняннях без гіроусереднення.

### 3.1 Точні рівняння руху

В цьому розділі ми продовжуємо розглядати двовимірний рух, перпендикулярний до постійного магнітного поля  $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_B = \text{const}$ , заряджених частинок спричинений статичним випадковим електричним полем  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ , але тепер для точного руху – координати  $\mathbf{x}$  та швидкості  $\mathbf{v}$  частинки, які задовольняють рівнянням

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad (3.1)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{m} \left( \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right). \quad (3.2)$$

Статичне випадкове електричне поле має той самий вигляд, що і в рівнянні (2.2). Для зручності подальших аналітичних розрахунків розглянемо рух частинки як суперпозицію руху її ведучого центру та ларморівського обертання. Перепишемо рівняння руху (3.1) та (3.2) таким чином, щоб явно

отримати рівняння для координати ведучого центру  $\mathbf{x}_d = \mathbf{x} - \mathbf{r}_L$

$$\frac{d\mathbf{x}_d}{dt} = \frac{1}{\Omega_B} \frac{e}{m} [\mathbf{E}(\mathbf{x}_d + \mathbf{r}_L) \times \mathbf{e}_B], \quad (3.3)$$

та ларморівського радіуса  $\mathbf{r}_L = -\frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{e}_B]}{\Omega_B}$

$$\frac{d\mathbf{r}_L}{dt} = -\frac{1}{\Omega_B} \frac{e}{m} [\mathbf{E}(\mathbf{x}_d + \mathbf{r}_L) \times \mathbf{e}_B] + \Omega_B [\mathbf{r}_L \times \mathbf{e}_B], \quad (3.4)$$

де  $\mathbf{e}_B = \frac{\mathbf{B}}{B}$  означає одиничний вектор вздовж магнітного поля, а  $\Omega_B = \frac{eB}{mc}$  частоту ларморівську обертання.

Для числового моделювання зручно використовувати знерозмірені змінні, тому введемо просторову  $\chi = \chi_d + \rho = \frac{\Delta k \mathbf{x}}{2\pi}$  та часову  $\tau = \frac{t\Omega_B}{2\pi}$  знерозмірені змінні аналогічно розділу 2. Для рівняння (3.3) отримаємо

$$\frac{d\chi_{di}}{d\tau} = -\epsilon_{ik} \frac{\partial}{\partial \chi_{dk}} \sigma(\chi_d + \rho), \quad (3.5)$$

а для рівняння (3.4) матимемо

$$\frac{d\rho_i}{d\tau} = \epsilon_{ik} \left( \frac{\partial}{\partial \chi_{dk}} \sigma(\chi_d + \rho) + 2\pi \rho_k \right), \quad (3.6)$$

де  $\epsilon_{ik}$  означає антисиметричний тензор другого порядку  $\epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} = 1$ , а знерозмірений потенціал  $\sigma(\chi)$  відповідно до рівняння (2.2) має вигляд

$$\sigma(\chi) = \sqrt{\frac{\kappa_{max}}{\pi^{5/2} N_\kappa N_\theta}} \sigma_0 \sum_{i=1}^N \exp\left(-\frac{1}{2} \kappa_i^2\right) \cos(2\pi \kappa_i \chi - \alpha_i), \quad (3.7)$$

де  $\kappa = \frac{k}{\Delta k}$  знерозмірені хвильові вектора задані аналогічно до (2.3).

Числове моделювання виконується шляхом інтегрування рівнянь (3.5) та (3.6) методом Рунге-Кутта 5-го порядку. Як і в попередньому розділі 2 випадковий потенціал (3.7) задано як суперпозицію  $N = 1440$  парціаль-

них хвиль ( $N_k = 20$ ,  $N_\theta = 72$ ), з максимальним абсолютним значенням знерозміреного хвильового вектора  $\kappa_{max} = 2$ . Амплітуда знерозміреного потенціалу  $\sigma_0 = 0.1$ . Для кожної реалізації електростатичного поля генерується  $N = 1440$  випадкових фаз хвилі  $\alpha$ . Число реалізацій  $N_r$  в числовому моделюванні вказується на рисунках.

З числових розв'язків рівнянь (3.5) та (3.6) ми маємо точні траєкторії частинок  $\chi(\tau) = \chi_d(\tau) + \rho(\tau)$ , траєкторії їхніх ведучих центрів  $\chi_d(\tau)$  та їхні ларморівські радіуси  $\rho(\tau)$ . Це дозволяє розрахувати для згаданих величин середнє зміщення за рівнянням (2.10) та їхню дисперсію, яка визначається середньоквадратичним зміщенням відповідно до рівняння (2.11). З числового моделювання також відновлюється лагранжева кореляційна функція компонент дрейфової швидкості відповідно до рівняння (2.12). Знайдені статистичні величини використовуються для перевірки розрахунків, що отримані з аналітичного методу.

## 3.2 Методи гіроусереднення

Лагранжева кореляційна функція швидкості частинок пов'язана з коефіцієнтом дифузії та середньоквадратичним зміщенням співвідношення Тейлора (1.10). Відповідно до рівнянь (3.3) та (3.4) зміщення частинки складається зі зміщення ведучого центру та обертання навколо нього. В цьому розділі ми припускаємо, що зміщення ведучого центру частинки  $\chi_d$  є малими у порівнянні з просторовою неоднорідністю поля протягом періоду обертання частинки. Відповідно до рівняння (3.4) це означає і малу зміну ларморівського радіусу  $\rho$ . Обертальний рух не дає внесок в перенесення частинок і з цієї причини для досліджуваного нами випадку лагранжева кореляційна функція у співвідношенні Тейлора визначається дрейфовою швидкістю вздовж точної траєкторії руху частинки.

Одним із способів розрахунку такої кореляційної функції є використання гіроусереднених величин – гіроусередненого випадкового потенціалу [74, 75] або гіроусередненої кореляційної функції дрейфової швидкості [57].

Так як ларморівський радіус вважається наближено незмінним протягом періоду обертання то першим доданком у (3.6) нехтують, а для рівняння (3.5) замість потенціалу вздовж точної траєкторії  $\sigma(\chi)$  вводять потенціал, усереднений за ларморівським обертанням,  $\sigma(\chi_d, \rho)$  наступним чином

$$\begin{aligned}\sigma(\chi_d, \rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_c \sigma(\chi_d + \rho(\varphi_c)) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{k} \sigma(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\chi_d) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_c \exp(i\mathbf{k}\rho \cos(\varphi_c)) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{k} \sigma(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\chi_d) J_0(\kappa\rho). \quad (3.8)\end{aligned}$$

Відповідна ейлерова кореляційна функція (2.7) для гіроусередненого потенціалу (3.8) має такий вигляд

$$\begin{aligned}C_{\sigma\sigma}^{E,B}(\chi_d, \rho) &= \langle \sigma(\chi_d + \chi_{d1}, \rho) \sigma(\chi_{d1}, \rho) \rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{k} C_{\sigma\sigma}^E(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\chi_d) J_0^2(\kappa\rho), \quad (3.9)\end{aligned}$$

де Фур'є-образ кореляційної функції  $C_{\sigma\sigma}^E(\mathbf{k})$  має вигляд

$$C_{\sigma\sigma}^E(\mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi^{7/2}\kappa} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{8\pi^2}\right). \quad (3.10)$$

Беручи до уваги рівняння (2.9) для кореляційної функції дрейфової швидкості для гіроусередненого потенціалу можна записати

$$C_{v_d v_d}^{E,B}(\chi_d) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{k} \kappa^2 C_{\sigma\sigma}^E(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\chi_d) J_0^2(\kappa\rho). \quad (3.11)$$

Іншим способом розрахунку кореляційної функції дрейфової швидкості вздовж точної траєкторії руху частинки є безпосереднє гіроусереднення

кореляційної функції дрейфової швидкості (2.9), що дає

$$C_{v_d v_d}^{E,A}(\chi_d, \rho) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{k} \mathbf{k}^2 C_{\sigma\sigma}^E(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\chi_d) J_0(\kappa\rho), \quad (3.12)$$

Кореляційні функції (3.11) і (3.12) розраховуються шляхом числового інтегрування або аналітично, використовуючи наближені значення  $J_0(\kappa\rho)$ . Останні можуть бути корисними для побудови масштабних співвідношень для коефіцієнта дифузії за ларморівським радіусом. Так для малих значень  $\kappa\rho < 1$  можна використовувати розклад функції Бесселя в ряд

$$J_0(\kappa\rho) \approx 1 - \frac{\kappa^2 \rho^2}{4} + \frac{\kappa^4 \rho^4}{64} - \frac{\kappa^6 \rho^6}{2304} + \dots$$

що дає для гіроусередненого потенціалу (3.11)

$$\begin{aligned} C_{v_d v_d}^{E,B,<}(\chi_d) = & \exp\left(-\frac{\pi^2 \chi_d^2}{2}\right) I_0\left(\frac{\pi^2 \chi_d^2}{2}\right) \left(\frac{1 - \pi^2 \chi_d^2}{2}\right) + \\ & + \exp\left(-\frac{\pi^2 \chi_d^2}{2}\right) I_0\left(\frac{\pi^2 \chi_d^2}{2}\right) \left(\frac{(-3 + 6\pi^2 \chi_d^2 - 2\pi^4 \chi_d^4)}{2} \pi^2 \rho^2 + \dots\right) + \\ & + \exp\left(-\frac{\pi^2 \chi_d^2}{2}\right) I_1\left(\frac{\pi^2 \chi_d^2}{2}\right) \left(\frac{\pi^2 \chi_d^2}{2} + \pi^4 \chi_d^2 (-2 + \pi^2 \chi_d^2) \rho^2 + \dots\right), \quad (3.13) \end{aligned}$$

та для гіроусередненої кореляційної функції (3.12)

$$\begin{aligned} C_{v_d v_d}^{E,A,<}(\chi_d) = & \exp\left(-\frac{\pi^2 \chi_d^2}{2}\right) I_0\left(\frac{\pi^2 \chi_d^2}{2}\right) \left(\frac{1 - \pi^2 \chi_d^2}{2}\right) + \\ & + \exp\left(-\frac{\pi^2 \chi_d^2}{2}\right) I_0\left(\frac{\pi^2 \chi_d^2}{2}\right) \left(\frac{(-3 + 6\pi^2 \chi_d^2 - 2\pi^4 \chi_d^4)}{4} \pi^2 \rho^2 + \dots\right) + \\ & + \exp\left(-\frac{\pi^2 \chi_d^2}{2}\right) I_1\left(\frac{\pi^2 \chi_d^2}{2}\right) \left(\frac{\pi^2 \chi_d^2}{2} + \frac{\pi^4 \chi_d^2 (2 - \pi^2 \chi_d^2)}{2} \rho^2 + \dots\right). \quad (3.14) \end{aligned}$$



Для великих значень  $\kappa\rho \gg 1$  можна використовувати асимптотику функції Бесселя

$$J_0(\kappa\rho) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\kappa\rho}},$$

тоді матимемо для гіроусередненого потенціалу (3.11)

$$C_{v_d v_d}^{E,B,>}(\chi_d) = \frac{\exp(-\pi^2 \chi_d^2)}{2\pi^{5/2} \rho}, \quad (3.15)$$

та для гіроусередненої кореляційної функції (3.12)

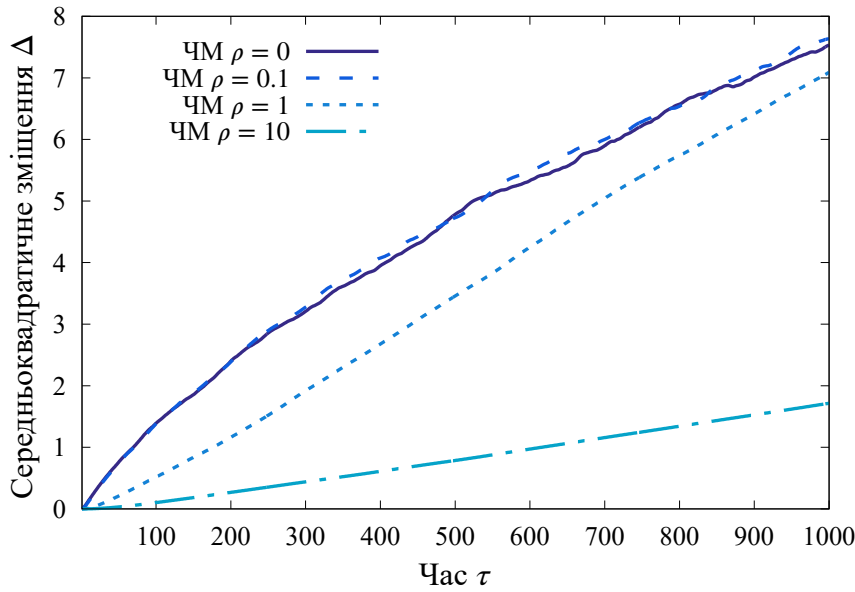
$$C_{v_d v_d}^{E,A,>}(\chi_d) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) L_{-5/4}(-\pi^2 \chi_d^2)}{\sqrt{2\pi^3} \rho}. \quad (3.16)$$

Для розрахунку наближеної лагранжевої кореляційної функції дрейфової швидкості зі скінченним ларморівським радіусом ми використовуємо замикання рівнянь на середньоквадратичне відхилення з методу моментів (1.43) для двох типів гіроусереднених кореляційних функцій

$$C_{vv}^L(\tau) = C_{vv}^E(\Delta^{1/2}(\tau), \rho), \quad (3.17)$$

де  $C_{vv}^E$  є однією з кореляційних функцій (3.11)-(3.14). Наступна підстановка лагранжевої кореляційної функції (3.17) у співвідношення Тейлора (1.10) дає рівняння для середньоквадратичного зміщення з врахуванням ефектів скінченного ларморівського радіуса, яке має вигляд

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \Delta(\tau) = C_{vv}^E(\Delta^{1/2}(\tau), \rho). \quad (3.18)$$



**Рис. 3.1** Середньоквадратичне зміщення ведучих центрів частинок отримане з числового моделювання (ЧМ,  $N_r = 10^4$ ) для початкових радіусів Лармора  $\rho(0) = 0, 0.1, 1, 10$

Зокрема підстановка (3.11) у рівняння (3.18) дає рівняння для середньоквадратичного зміщення в гіроусередненому випадковому потенціалі

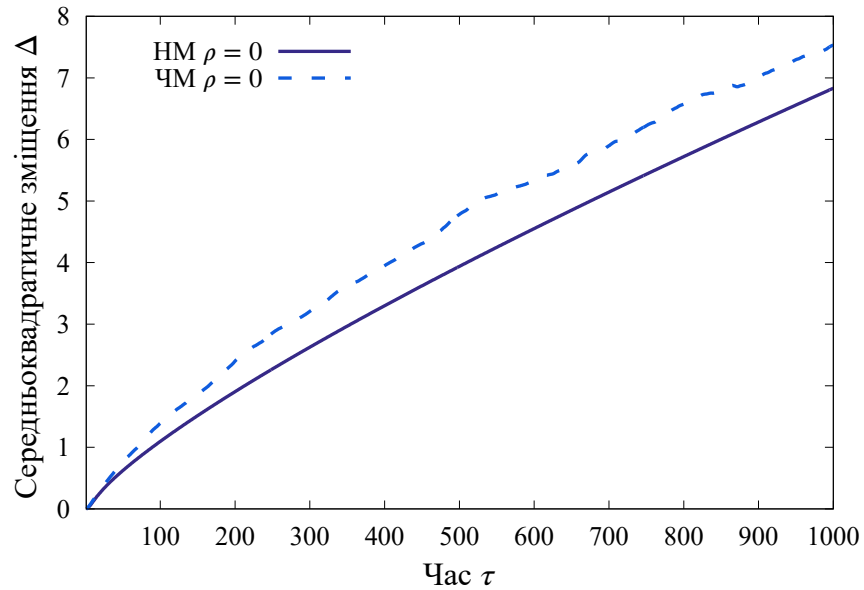
$$\frac{d^2}{d\tau^2}\Delta(\tau) = \int d\kappa \frac{\kappa^2}{4\pi^{7/2}} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{4\pi^2}\right) J_0(\kappa\Delta^{1/2})J_0^2(\kappa\rho). \quad (3.19)$$

а підстановка (3.11) у рівняння (3.18) – рівняння для середньоквадратичного зміщення для гіроусередненої кореляційної функції

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\Delta(\tau) = \int d\kappa \frac{\kappa^2}{4\pi^{7/2}} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{4\pi^2}\right) J_0(\kappa\Delta^{1/2})J_0(\kappa\rho). \quad (3.20)$$

З метою встановити коректний спосіб гіроусереднення кореляційної функції (3.11), (3.12) та перевірки аналітичних наближених кореляційних функцій (3.13)-(3.16) ми проводимо порівняння аналітичних розрахунків із результатами прямого числового моделювання.

Числове моделювання проводилося для ансамблю  $N_r = 10^4$  реалізацій випадкового потенціалу (3.7) з амплітудою  $\sigma_0 = 0.1$ . На Рис. 3.1 продемонстровано часову еволюцію середньоквадратичного зміщення ведучих центрів частинок, що отримана з числового моделювання для різних по-

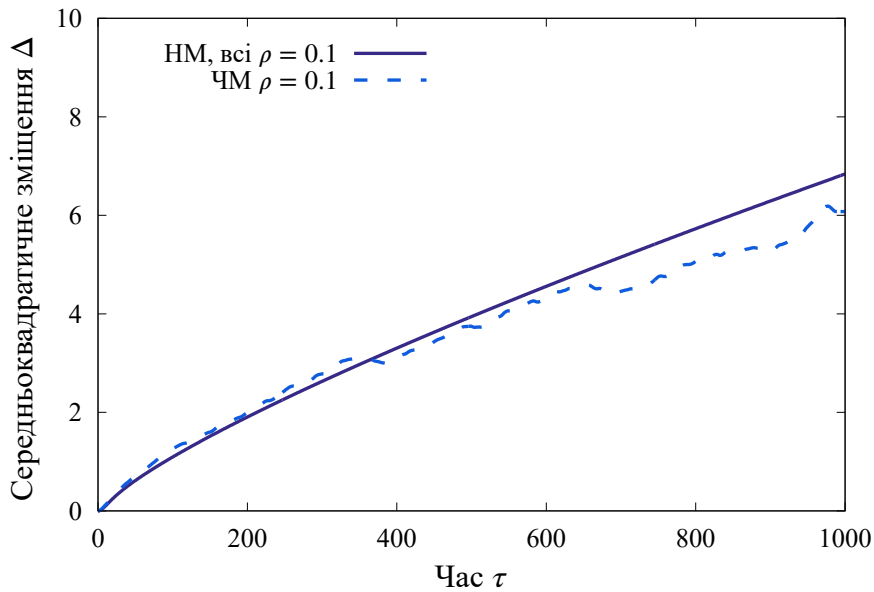


**Рис. 3.2** Середньоквадратичне зміщення веучих центрів частинок для початкових радіусів Лармора  $\rho(0) = 0$ . Числове моделювання (ЧМ,  $N_r = 10^4$ ) та наближення моментами (НМ).

чаткових значень ларморівського радіуса  $\rho(0) = 0, 0.1, 1, 10$ . Еволюція середньоквадратичного зміщення для початкового радіуса  $\rho(0) = 0.1$  виявилися дуже близькою до еволюції для радіуса  $\rho(0) = 0$  – різниця того ж порядку, що і числові флуктуації. Для більших початкових радіусів різниця стає суттєвою, наприклад, середньоквадратичне зміщення для  $\rho(0) = 10$  менше майже в чотири рази у порівнянні з  $\rho(0) = 0$  для моменту  $\tau = 1000$ .

Порівняння середньоквадратичного зміщення ведучих центрів частинок знайдене з числового моделювання та розраховане методом моментів для початкового радіуса Лармора  $\rho(0) = 0$  наведено на Рис. 3.2. Наближення моментами відтворює субдифузну поведінку яка спостерігається у прямому числовому моделюванні з достатньою точністю.

Результати для малих початкових ларморівських радіусів  $\rho(0) = 0.1$  наведено на Рис. 3.3. Відмінність від результатів для радіуса  $\rho(0) = 0$  з Рис. 3.2 є малою, що відповідає результатам наведеним на Рис. 3.1. Всі наближені кореляційні функції (3.11)-(3.14) дають подібні криві, різниця між гіроусередненням потенціалу (3.11) та гіроусередненням кореляційної функції (3.12) є нехтовно малою для малих значень гірорадіуса.

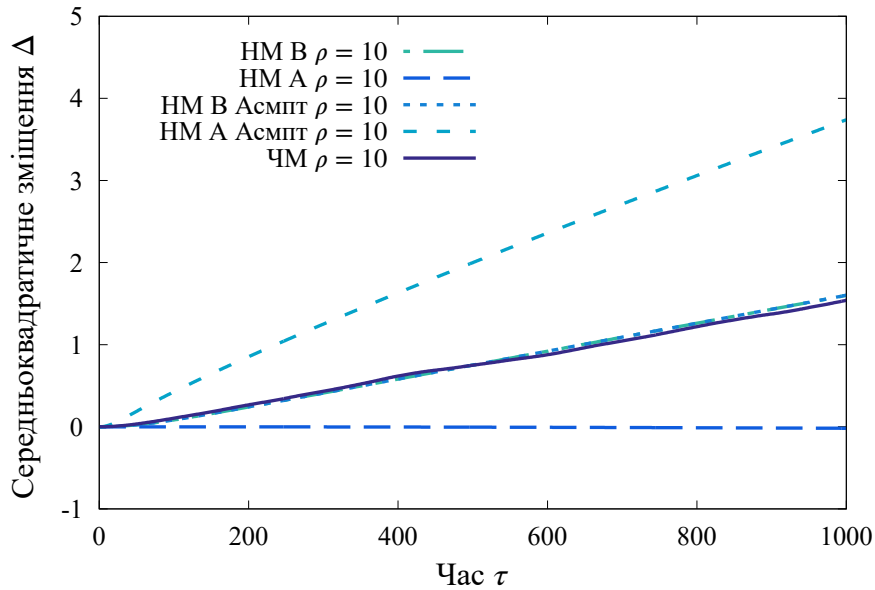


**Рис. 3.3** Середньоквадратичне зміщення ведучих центрів частинок для початкових радіусів Лармора  $\rho(0) = 0.1$ . Числове моделювання (ЧМ,  $N_r = 10^4$ ) та наближення моментами (НМ). Різні методи врахування радіуса Лармора дають однаковий результат.

Середньоквадратичне зміщення ведучих центрів частинок з ларморівським радіусом  $\rho(0) = 10$  показано на Рис. 3.4. Часова еволюція середньоквадратичного зміщення отримана з усереднення випадкового потенціалу (3.11), розрахована як використовуючи асимптотичне наближення (3.15) так і числове інтегрування (3.11), кількісно узгоджується з результатами прямого чисельного моделювання. Водночас середньоквадратичне зміщення, що отримано з гіроусереднення кореляційної функції (3.12), як з асимптотики (3.15) так і з чисельного інтегрування (3.11), не відповідає результатам прямого чисельного моделювання.

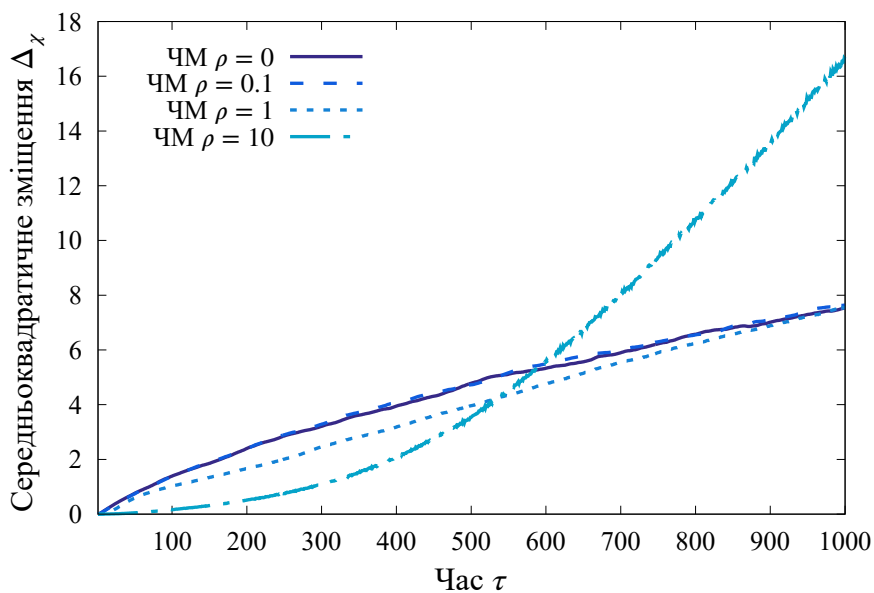
З цього випливає, що наближення моментами з гіроусередненим випадковим потенціалом (3.11), як з чисельним інтегруванням рівняння (3.11) так і з використанням наближених функцій з ряду (3.13) або з асимптотики (3.15), може розглядатися як коректний метод врахування ефектів скінченного ларморівського радіуса у методі моментів.

Розглянемо тепер статистичні характеристики точного руху частинок. На Рис. 3.5 наведено середньоквадратичне зміщення траєкторій частинок  $\Delta_\chi$ , яке отримано з прямого чисельного моделювання для  $N_r = 10^4$  реалі-

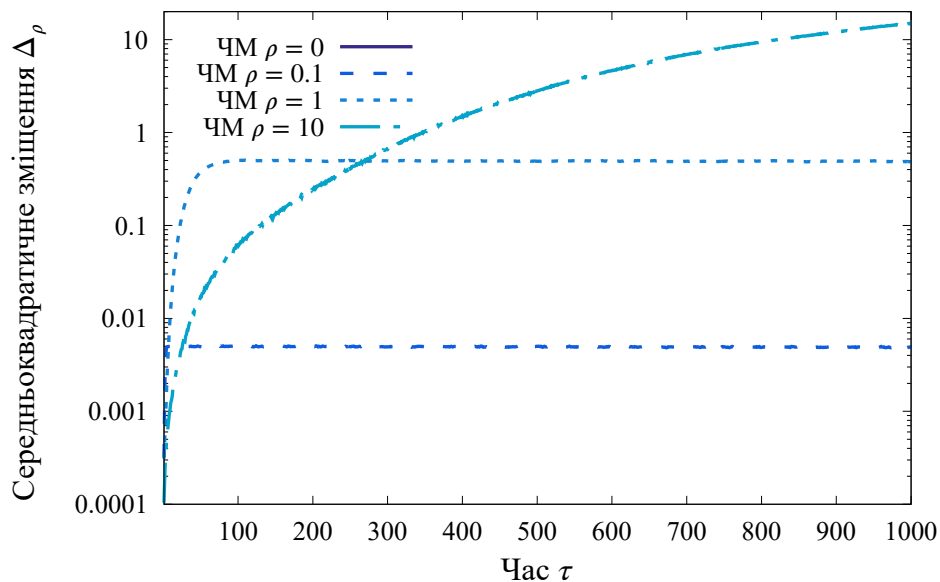


**Рис. 3.4** Середньоквадратичне зміщення ведучих центрів частинок для початкових радіусів Лармора  $\rho(0) = 10$ . Числове моделювання (ЧМ,  $N_r = 10^4$ ) та наближення моментами (НМ) з наближенням заданим рівнянням (3.12) - (А), рівнянням (3.11) - (В); (Асмпт) – аналітична асимптотика, (ЧІ) – числове інтегрування

зацій випадкового поля. Воно суттєво відрізняється від статистичних характеристик траєкторій ведучих центрів частинок з Рис. 3.1 та самих частинок. Для малих початкових радіусів Лармора  $\rho(0) = 0.1$  можна нехтувати різницею між дисперсією ведучих центрів та точних траєкторій частинок. Але із зростанням початкового радіуса  $\rho(0) = 1$  відмінність стає помітнішою. Для  $\rho(0) = 10$  початкова еволюція дисперсії ведучих центрів та точних позицій частинок є повністю відмінною. Причина полягає у внеску від дисперсії ларморівського радіуса, часова еволюція якого продемонстрована на Рис. 3.6. Вона насичується з часом: для малих початкових ларморівських радіусів значення насичення є нехтовно малим. Як тільки початкове значення радіуса не є малим, величина насичення дисперсії ларморівського радіуса зростає до значень, якими вже нехтувати не можна. Для будь-яких початкових значень дисперсія ларморівського радіуса досягає насичення за скінченний час. Значить середньоквадратичне зміщення траєкторій частинок буде зміщенне відносно кривої дисперсії ведучих центрів.



**Рис. 3.5** Середньоквадратичне зміщення траєкторій частинок отримане з числового моделювання (ЧМ,  $N_r = 10^4$ ) для початкових радіусів Лармора  $\rho(0) = 0, 0.1, 1, 10$

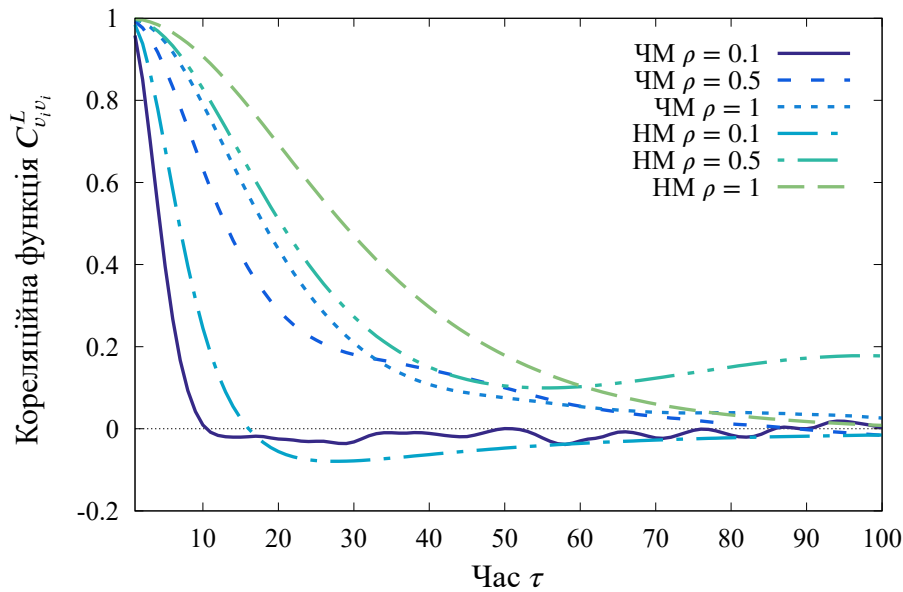


**Рис. 3.6** Середньоквадратичне зміщення радіусів Лармора частинок отримане з числового моделювання (ЧМ,  $N_r = 10^4$ ) для початкових радіусів Лармора  $\rho(0) = 0, 0.1, 1, 10$

В цьому підрозділі еволюція середньоквадратичного зміщення ведучих центрів частинок була розрахована з прямого числового моделювання і методом моментів, що ґрунтується на гіроусереднених величинах – гіроусередненому випадковому потенціалу та гіроусередненій кореляційній функції швидкості. Порівняння результатів числового моделювання та аналітичних наближень для початкових ларморівських радіусів з широкого інтервалу  $\rho(0) = 0, 0.1, 1, 10$ , показало, що аналітичний метод з гіроусередненим потенціалом (3.11) дає задовільне кількісне узгодження. На противагу метод моментів із гіроусередненою кореляційною функцією (3.12) суперечить результатам прямого числового моделювання для великих початкових значень ларморівського радіуса, наприклад для  $\rho(0) = 10$  з Рис. 3.4. Числове моделювання також демонструє, що середньоквадратичне зміщення траєкторій частинок відрізняється від середньоквадратичного зміщення ведучих центрів частинок на величину дисперсії радіусів Лармора. Для будь-якої початкової величини радіуса Лармора його дисперсія насичується за скінченний проміжок часу.

### **3.3 Залежність статистичних величин від початкового ларморівського радіуса**

Вплив скінченного ларморівського радіуса на асимптотичний коефіцієнт дифузії для скінченних часів кореляції випадкового поля має різні оцінки [57, 71—73, 75]. Ми розглядаємо випадок нескінченного часу кореляції, а тому нас цікавитиме не тільки асимптотичні значення статистичних характеристик руху частинок, а й їхня еволюція в часі. В цьому підрозділі розглядаються ефекти скінченного ларморівського радіуса в широкому діапазоні його значень. А саме, на основі висновків з попереднього підрозділу 3.2, досліджуються залежності асимптотичного коефіцієнта дифузії його еволюції та еволюції середньоквадратичного зміщення від початкового ларморівського радіуса, розрахованих з числового моделювання та методом моментів.



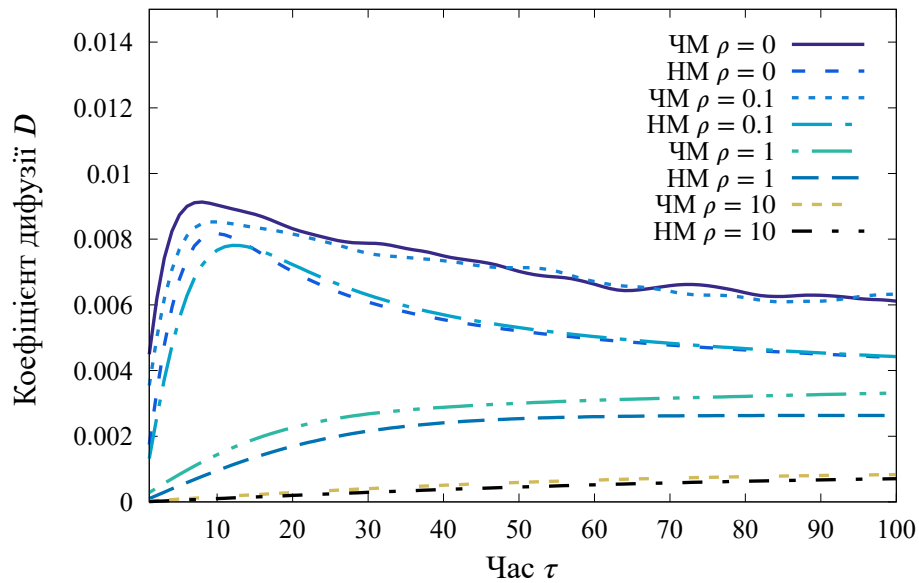
**Рис. 3.7** Лагранжева кореляційна функція дрейфової швидкості для  $\rho = 0, 0.1, 0.5, 1$  отримана з числового моделювання (ЧМ,  $N_r = 10^4$ ) та наближенням моментами (НМ)

Лагранжева кореляційна функція дрейфової швидкості, коефіцієнт дифузії та середньоквадратичне зміщення ведучих центрів частинок розраховувалося методом моментів з гіроусередненим випадковим потенціалом (3.11), який задовільно відтворює результати моделювання з попереднього підрозділу 3.2. Розрахунки методом моментів порівняні із результатами числового моделювання, параметри якого представлені у підрозділі 3.1.

На Рис. 3.7 наведена лагранжева кореляційна функція знайдена з аналітичної моделі та з числового моделювання. У дрейфовому наближенні,  $\rho = 0$ , так само як і для малих значень ларморівського радіуса  $\rho = 0.1$  захоплення частинок полем очевидно відображаються негативними значеннями кореляційної функції. Для більших  $\rho$  воно стає не таким сильним та очевидним. Це зокрема означає, що збільшення початкового ларморівського радіуса призводить до зменшення скорельованості руху.

Залежний від часу коефіцієнт дифузії показано на Рис. 3.8 в інтервалі  $\tau = 100$ , та на Рис. 3.9 для більшого часового проміжку моделювання  $\tau = 1000$ . Видно, що зі збільшенням часу моделювання зростають і флуктуації у розв'язках. На Рис. 3.10 наведено розв'язки аналітичного методу з врахуванням підансамблів та результати прямого числового моделюван-





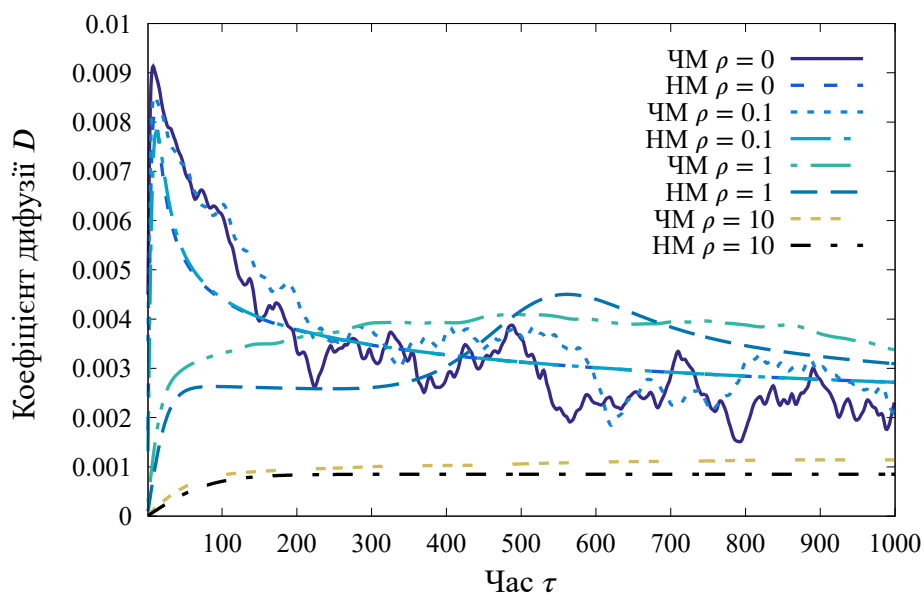
**Рис. 3.8** Коефіцієнт дифузії вєдучих центрів для радіусів Лармора  $\rho = 0, 0.1, 1, 10$  отриманих з числового моделювання (ЧМ) та як розв'язок аналітичної моделі (НМ)

ня, для  $\rho = 1$  метод з врахуванням підансамблів якісно краще відтворює результати числового моделювання.

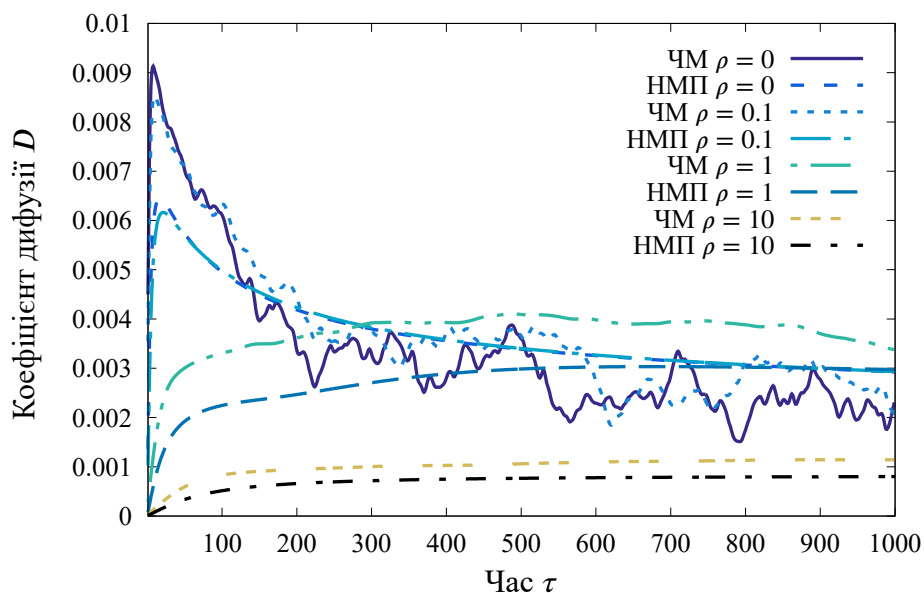
У дрейфовому наближенні частинки рухаються вздовж контурних ліній функції току, в цьому розумінні їхній рух є регулярним для кожної заданої реалізації поля. Разом з цим коефіцієнт дифузії асимптотично прямує до нуля, що з добре означеним максимумом на початкових етапах відображає сильне захоплення частинок полем.

Для  $\rho \neq 0$  частинки не рухаються замкнутими орбітами. Такий рух означає послаблення захоплення частинок полем і приводить до асимптотично скінченного ненульового коефіцієнта дифузії. Середньоквадратичне зміщення частинок, що відповідає наведеним коефіцієнтам дифузії, показано на Рис. 3.11, 3.12. Рис. 3.7-3.12 демонструють узгодженість між розв'язками аналітичного методу моментів з гіроусередненим потенціалом та результатами прямого числового моделювання.

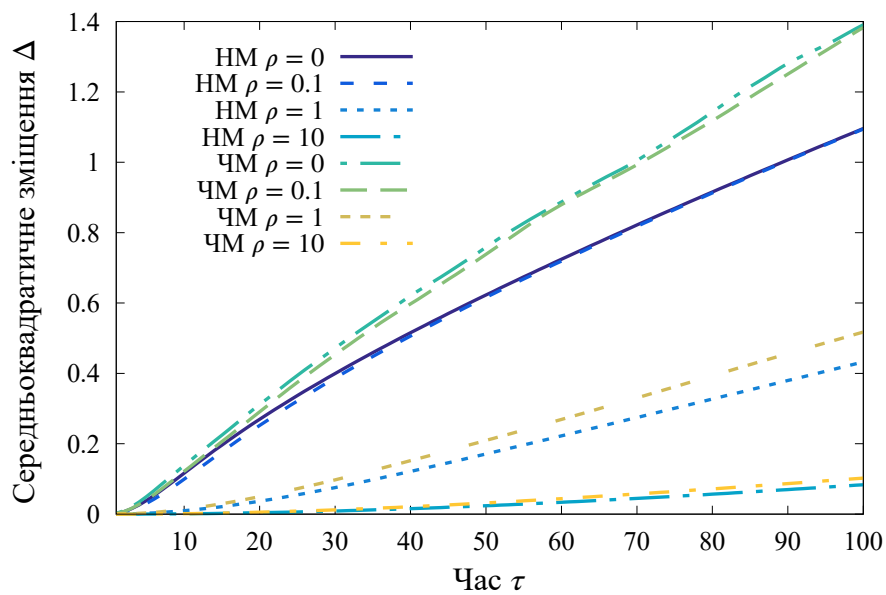
Варто відзначити, що на ранніх етапах еволюції процес розбігання частинок швидший для малих ларморівських радіусів, в той же час асимптотичний коефіцієнт дифузії зростає із зростанням ларморівського радіуса. Це призводить до перетину кривих середньоквадратичного зміщення, який по-



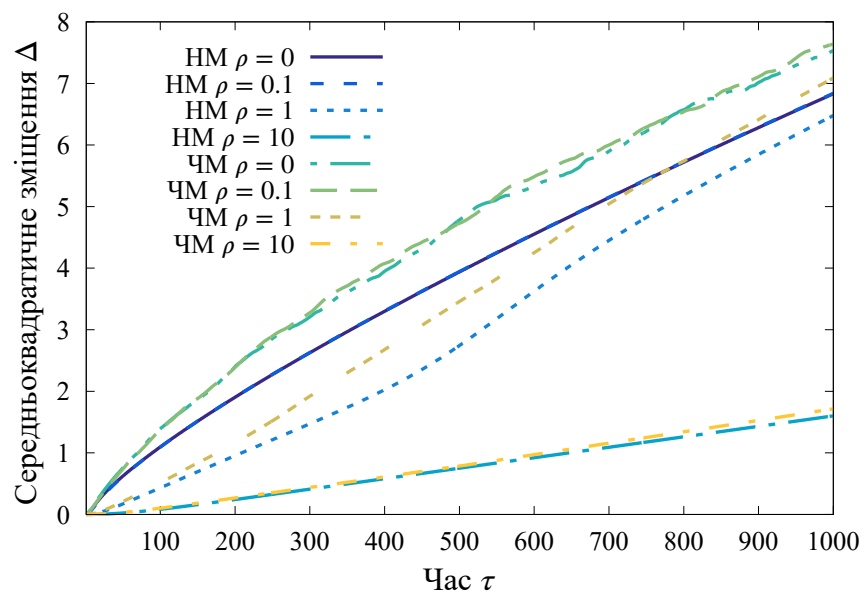
**Рис. 3.9** Те саме, що на Рис. 3.8, але для більших часів



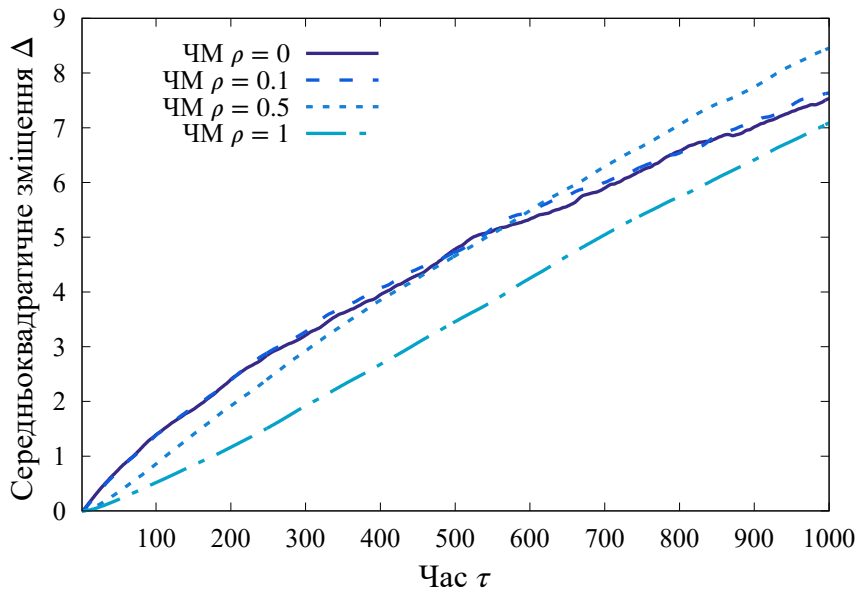
**Рис. 3.10** Коефіцієнт дифузії ведучих центрів для радіусів Лармора  $\rho = 0, 0.1, 1, 10$  отриманих з числового моделювання (ЧМ) та як розв'язок аналітичної моделі з підансамблями (НМП)



**Рис. 3.11** Середньоквадратичне зміщення ведучих центрів частинок для радіусів Лармора  $\rho = 0, 0.1, 1, 10$  отримане з числового моделювання (ЧМ) та як розв'язки аналітичної моделі (НМ)



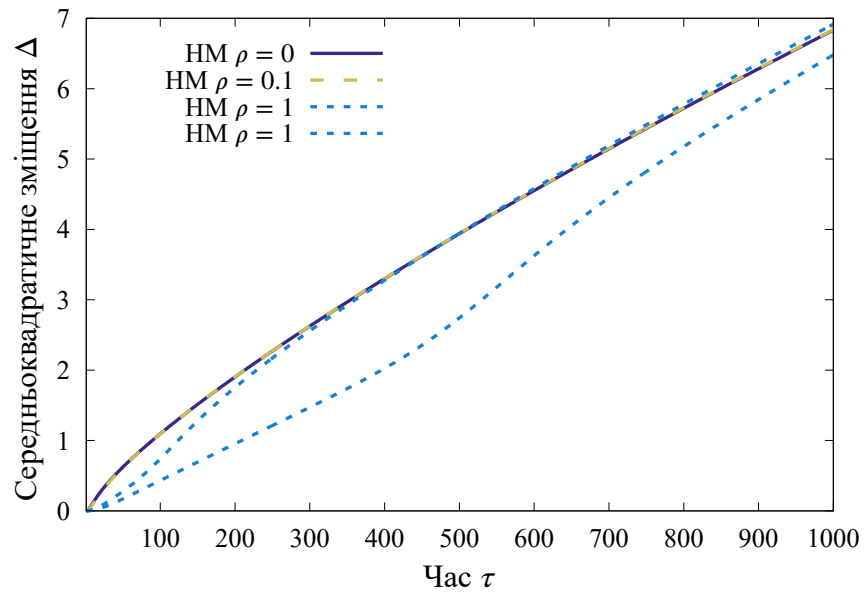
**Рис. 3.12** Те саме, що на Рис. 3.11, але для більших часів



**Рис. 3.13** Перетин кривих середньоквадратичного зміщення. Числове моделювання

казано для числового моделювання на Рис. 3.13 та для розв'язків методом моментів на Рис. 3.14. З аналітичного методу знайдено, що перетин кривих для початкових гірорадіусів  $\rho(0) = 0$  та  $\rho(0) = 0.1$  відбувається в момент  $\tau_{i0} \approx 100$ ; для  $\rho(0) = 0$  та  $\rho(0) = 0.5$  в  $\tau_{i1} \approx 450$ ; для  $\rho(0) = 0$  та  $\rho(0) = 1.0$  в  $\tau_{i2} \approx 2200$ . Цей ефект було також помічено при розрахунках [57] методом декорельованих траєкторій. У випадкових полях зі скінченним часом кореляції це може призводити до не монотонної залежності коефіцієнта дифузії від радіуса Лармора.

У підсумку, розглянуто перенесення заряджених частинок випадковим електричним полем поперек постійного магнітного поля аналітичними та числовими методами. Приділено увагу до ефектів захоплення частинок полем, саме з цієї причини розглянуто статичне електричне поле. Наш аналітичний метод моментів узагальнено для врахування ефектів скінченного радіуса Лармора. Ці ефекти було знайдено у всіх порядках по радіусу Лармора, тобто модель може бути використана у широкому діапазоні його значень. Продемонстровано узгодженість розв'язків аналітичної моделі із результатами прямого числового моделювання.



**Рис. 3.14** Перетин кривих середньоквадратичного зміщення. Аналітична модель

### 3.4 Висновок

Розглянуто коефіцієнт дифузії та середньоквадратичне зміщення частинок в широкому діапазоні значень радіуса Лармора. Визначено ефективний метод гіроусереднення кореляційної функції. Знайдено, що дифузійність на малих часах є більшою для частинок з малими радіусами Лармора, а в асимптотиці залежність змінюється на протилежну.



## Розділ 4

### ВИПАДКОВЕ ПОЛЕ ЗАЛЕЖНЕ ВІД ЧАСУ

В розділі 2 розглядалося перенесення частинок поперек постійного магнітного поля у статичному електричному випадковому полі в наближенні ведучого центру. В такій задачі ефекти захоплення частинок є визначальними, оскільки майже всі частинки захоплені. Нами було сформульовано метод моментів, який задовільно відтворює результати прямого числового моделювання. У розділі 3 досліджувалися ефекти скінченного ларморівського радіуса, тобто розглядався точний рух частинок, при перенесенні частинок статичним випадковим електричним полем. Було продемонстровано спосіб узагальнення методу моментів для врахування цих ефектів, а також показано, що врахування ефектів скінченного ларморівського радіуса частинок призводить до загасання скорельованості руху ансамблю частинок зі зростанням початкового ларморівського радіуса – частинки можуть переходити з однієї еквіпотенціальної лінії на іншу. В цьому розділі метод моментів буде узагальнено для опису перенесення частинок поперек магнітного поля *змінним у часі* випадковим електричним полем.

Границя статичного випадкового поля – нескінченного кореляційного часу, є важливою з огляду перевірки аналітичних наближених методів на спроможність описувати перенесення захоплених частинок. Проте, в плазмі турбулентні поля змінюються в часі, а значить їхній кореляційний час є скінченим, хоч може бути і співрозмірним із часом еволюції системи. Скінченний кореляційний час визначає додаткове загасання кореляцій руху ансамблю частинок, а тому важливо розглянути таку особливість перенесення змінними полями в методі моментів.

Іншою задачею, яка буде досліджується у цьому розділі є перенесення та нагрівання частинок повздовжніми електричними хвилями. Окремо розглядаються ансамблі регулярних хвиль і хвиль зі стрибками фази. Останні

є цікавими, оскільки в турбулентній плазмі через нелінійні ефекти фаза хвилі може раптово змінюватись, і це впливатиме на дифузію частинок в просторі координат та швидкостей.

## 4.1 Поперечне перенесення

Як і в попередніх розділах 2,3 в цьому підрозділі розглядається перенесення частинок поперек постійного магнітного поля під дією випадкового електричного поля. Електричне поле задано через випадковий потенціал, аналогічний до (3.7)

$$\sigma(\chi, \tau) = \sqrt{\frac{\kappa_{max}}{\pi^{3/2} N_{\kappa} N_{\theta}}} \sum_{i=1}^N \exp\left(-\frac{1}{2}\kappa_i^2\right) \cos(2\pi\kappa_i\chi - \alpha_i(\tau)), \quad (4.1)$$

але вже з фазами  $\alpha(\tau)$ , які змінюються стрибками в часі. Такі стрибки фаз відбуваються з частотою  $\nu$  та ймовірністю  $p$  і визначають кореляційний час випадкового поля як

$$\tau_c = \frac{1}{\nu \ln(1-p)}. \quad (4.2)$$

В даному підрозділі розглядається дрейфовий рух частинок, який визначається знерозміреним рівнянням (2.5) із випадковим потенціалом (4.1).

Аналогічно до попередніх розділів 2,3 в числовому моделюванні ми розглядаємо випадкове поле задане зваженою суперпозицією  $N = 1440$  гармонік ( $N_{\kappa} = 20$ ,  $N_{\theta} = 72$ ), з максимальним абсолютним значенням знерозміреного хвильового вектора  $\kappa_{max} = 2$ . Для кожної реалізації електростатичного поля генерується  $N = 1440$  випадкових фаз хвилі  $\alpha(\tau)$ . Вони змінюються стрибком із заданими частотою  $\nu$  та ймовірністю  $p$ . Число реалізацій  $N_r$  в числовому моделюванні вказується на рисунках.

Легко показати, що стрибки фази випадкового електричного поля призводять до експоненційного загасання кореляційної функції швидкості в часі. Тобто використовуючи явний вигляд кореляційної функції потенціалу (2.7) та рівняння (2.2) для означеного кореляційного часу випадкових полів



(4.1), заданих рівнянням (4.2), можна записати наближену лагранжеву кореляційну функцію компонент швидкості для скінченного часу кореляції у вигляді

$$C_{v_d v_d}^L(\tau) \approx \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_c}\right) C_{v_d v_d}^E(\Delta^{1/2}(\tau)). \quad (4.3)$$

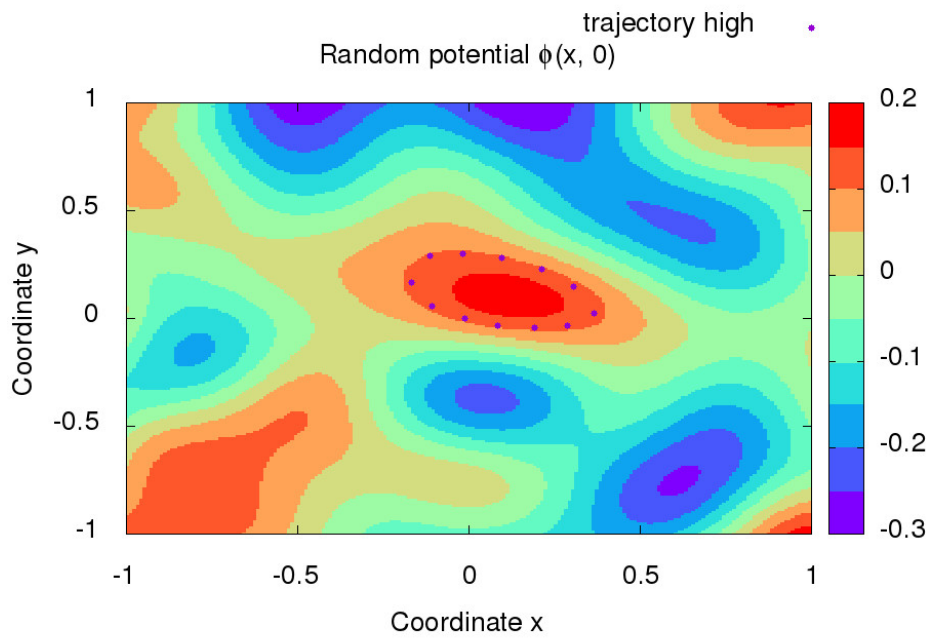
Підстановка такої лагранжевої кореляційної функції дрейфової швидкості у співвідношення Тейлора (1.10) дає рівняння на середньоквадратичне відхилення

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \Delta(\tau) = \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_c}\right) C_{v_d v_d}^E(\Delta^{1/2}(\tau)), \quad (4.4)$$

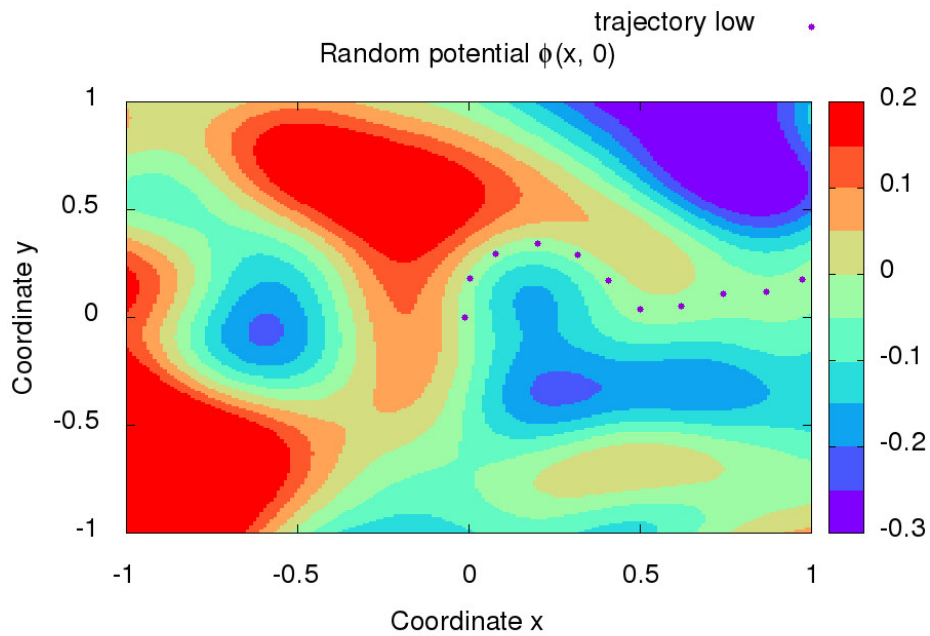
яке розв'язується чисельно. Нами виконано числове моделювання поведінки частинок в полях зі стрибками фаз. Отримані розв'язки порівняно з результатами прямого числового моделювання для асимптотичного коефіцієнта дифузії.

Як зазначалося раніше у розділі 2 для нескінченного часу кореляції випадкового поля дрейфовий рух частинок відбувається вздовж замкнутих екіпотенціальних ліній, а тому майже всі частинки, можливо окрім частинок із нульовим значенням початкового потенціалу, є захопленими випадковим полем. Типовий рух замкнутими траєкторіями захоплених частинок наведено на Рис. 4.1, вони блукають на відносно невелику відстань. Водночас не захоплені частинки можуть зміщуватися на значні відстані, що схематично відображено на Рис. 4.2. Рух захоплених частинок є сильно скорельованим, що призводить до нескінченно довгої від'ємної області значень в лагранжевій кореляційній функції дрейфової швидкості частинок. Натомість рух не захоплених частинок не має такої особливості.

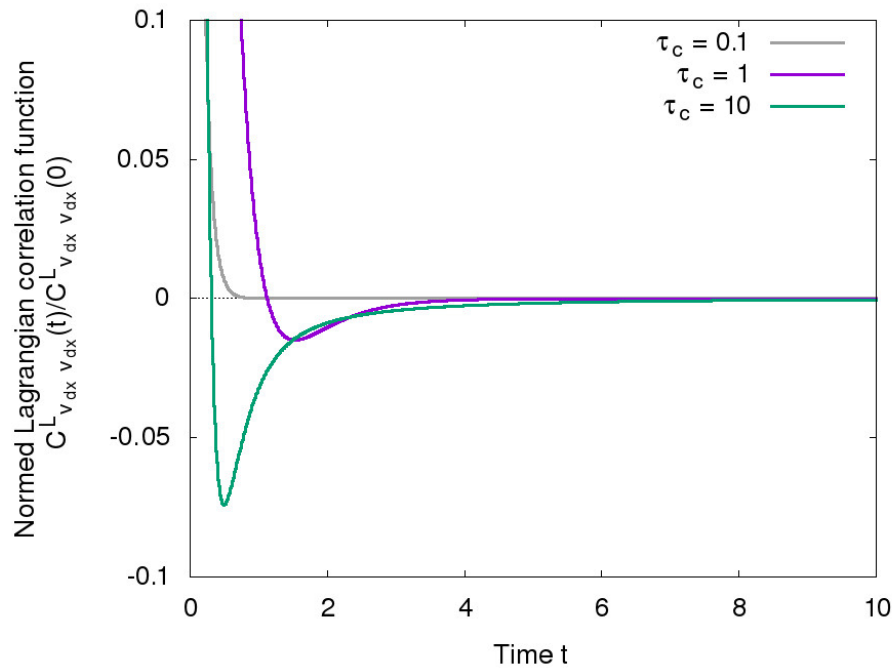
Від'ємні області значень в лагранжевій кореляційній функції дрейфової швидкості спостерігалися як в прямому числовому моделюванні, так і в наближенні моментами в розділі 2 та в розділі 3 для малих значень початкових ларморівських радіусів, коли частинки залишалися захопленими. Зміна випадкового поля в часі додає ще один часовий масштаб у задачі – час загасання кореляції поля, поряд із часом еволюції системи. Тепер усі



**Рис. 4.1** Приклад траєкторії захопленої замагніченої частинки



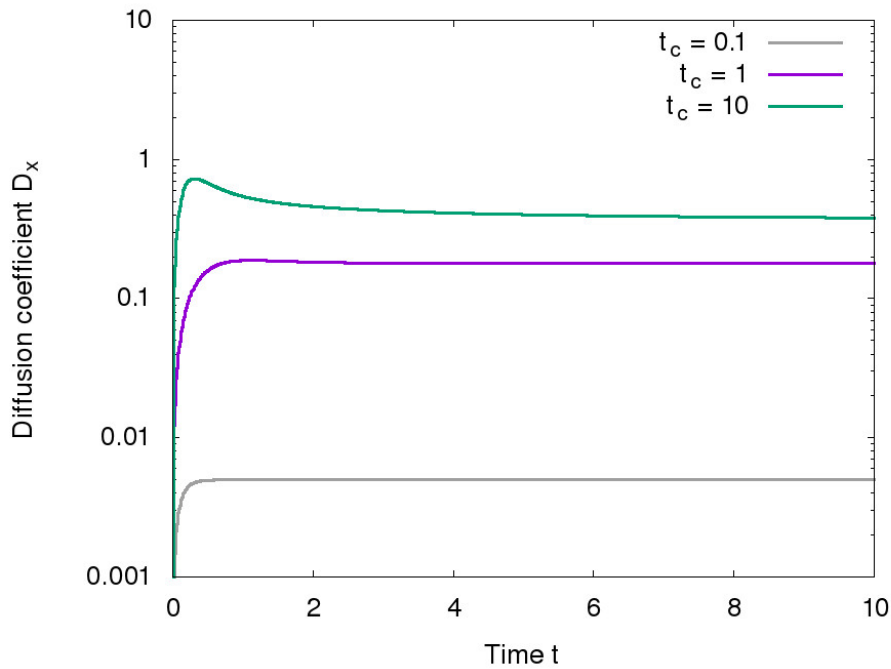
**Рис. 4.2** Приклад траєкторії незахопленої замагніченої частинки



**Рис. 4.3** Приклад кореляційної функції компонент дрейфової швидкості для різних кореляційних часів, що отримані методом моментів

частинки захоплюються лише частково. Це призводить до того, що частинки, які були захоплені полем на маленькі орбіти вздовж еквіпотенціальних ліній можуть подовжувати свої траєкторії, як тільки зміниться просторова структура випадкового поля. Частинки, що мали більшу область руху, можуть навпаки, зміщуватися на менші відстані, через зміну просторової структури випадкового поля.

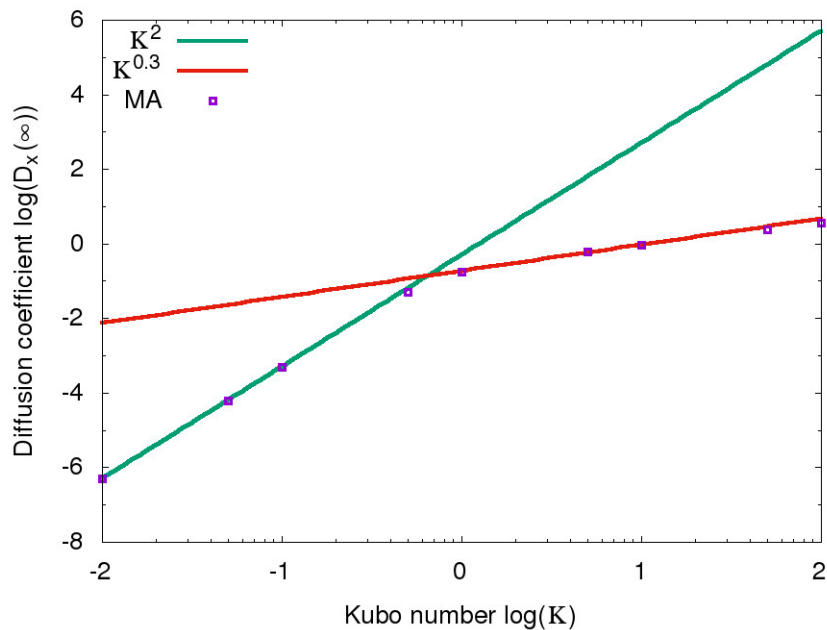
Лагранжева кореляційна функція дрейфової швидкості, що отримана методом моментів з експоненційним загасанням кореляцій в часі представлена на Рис. 4.3. Для малих значень кореляційних часів  $\tau_c = 0.1$  наближення моментами дає лагранжеву кореляційну функцію дрейфової швидкості без області від'ємних значень, але вона з'являється за більших кореляційних часів, для  $\tau_c = 1$ . Крім того з результатів дослідження перенесення у випадку нескінченного часу кореляції у розділі 2 впливає, що зі зростанням кореляційного часу, збільшується область від'ємних значень до граничної величини, коли асимптотичний коефіцієнт дифузії стає нульовим.



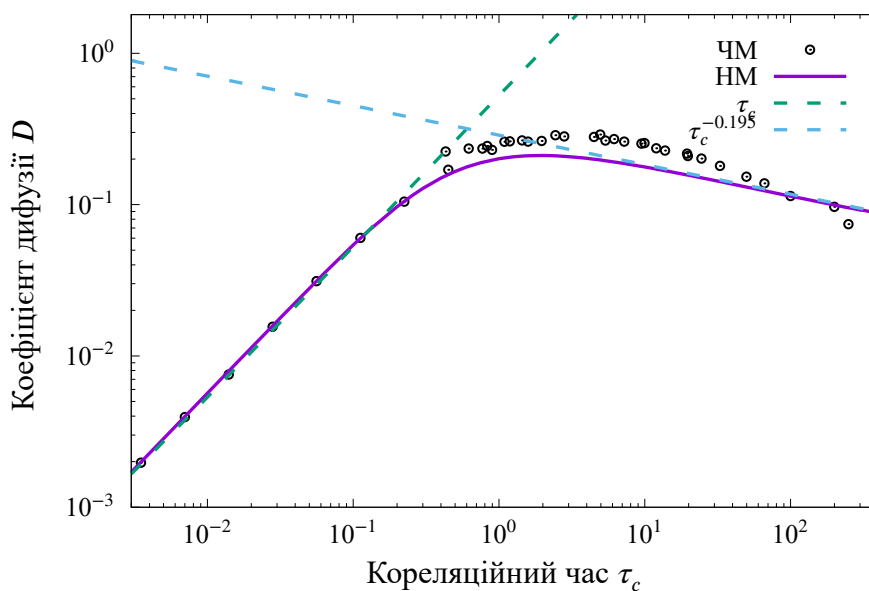
**Рис. 4.4** Відповідні коефіцієнти дифузії для різних кореляційних часів, що отримані методом моментів

Відповідна еволюція коефіцієнтів дифузії для різних кореляційних часів  $\tau_c = 0.1, 1, 10$  наведена на Рис. 4.4. З наведеного рисунку видно, що для кореляційного часу  $\tau_c = 10$  ефекти захоплення відіграють суттєву роль і призводять до субдифузійної поведінки, водночас для малого кореляційного часу  $\tau_c = 0.1$  цього не спостерігається.

Залежність асимптотичного коефіцієнта дифузії від кореляційного часу представлена на Рис. 4.6. Можна бачити, що результати методу моментів відповідають результатам прямого числового моделювання. Аналітичний метод відтворює перехід від квазілінійного до перколяційного режимів перенесення. На Рис. 4.5 представлена залежність асимптотичного коефіцієнта дифузії від числа Кубо  $K$ . З наведеного рисунку видно, що результати методу моментів відтворюють відомий результат наближення Корсіна  $D \sim K^2$  [45, 46] для області малих значень  $K < 1$ , а для великих значень  $K > 1$  маємо  $D \sim K^{0.8}$ , що відповідає перколяційному режиму [42, 51].



**Рис. 4.5** Скейлінг асимптотичного коефіцієнта дифузії для різних чисел Кубо. Розрахунки на основі методу моментів подані точками. Показано перехід від квазілінійного режиму дифузії до перколяційного, відображених прямими.



**Рис. 4.6** Залежність асимптотичного коефіцієнта дифузії від часу кореляції поля з числового моделювання (ЧМ) та наближення моментами (НМ)

## 4.2 Повздожнє перенесення

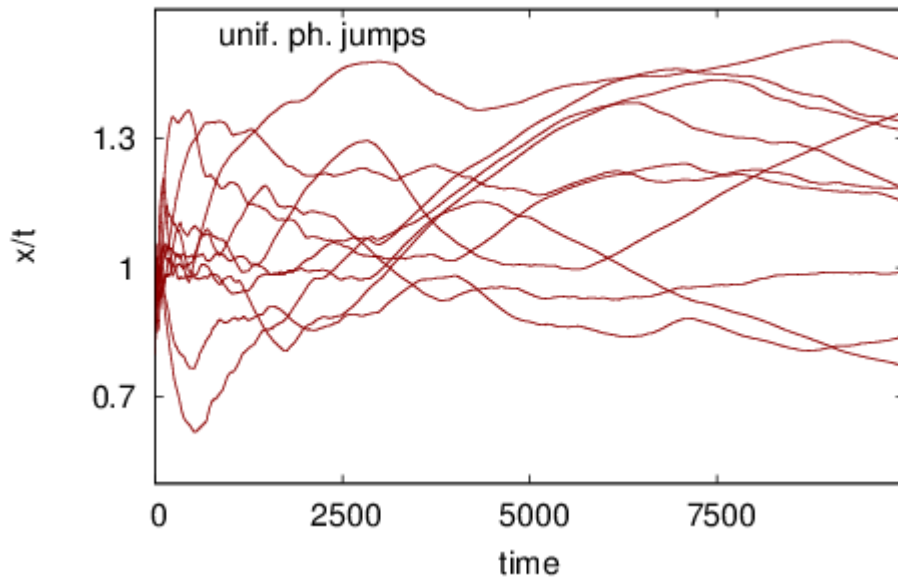
Мікрохвильове випромінювання зі стрибками фази спостерігається в експериментах і викликає значний інтерес через його здатність проникати у плазму із закритичною густиною [76—78]. Крім того, з огляду на можливості використання мікрохвильового випромінювання для нагрівання плазми, зокрема в розрядах, які розглядаються як перспективні джерела світла сонячного спектра [79], воно є цікавим предметом дослідження. З іншого боку, в турбулентній плазмі через нелінійні ефекти у хвилі трапляються раптові зміни фаз, які впливають на дифузію частинок в просторі координат та швидкостей.

За допомогою числового моделювання ми вивчаємо поведінку частинок у хвилі з випадковими стрибками фази. Розглянуто два типи стрибків. Перший, коли зміна фази відбуваються в плазмовому середовищі, в якому хвиля взаємодіє з частинками. При цьому частота стрибків в системі координат, що рухається з частинкою, не залежить від швидкості частинки, що захоплюється хвилею (однорідні стрибки). Другий, коли хвилю з випадковими стрибками фази вводять в плазмове середовище. При цьому частота стрибків в рухомій системі координат зменшується з наближенням швидкості частинки до фазової швидкості хвилі (сповільнені стрибки) за аналогією з ефектом Доплера.

Розглянемо рух ансамблю частинок в полі хвилі

$$E(x, t) = E_0 \cos(\omega_0 t - k_0 x + \alpha(t)), \quad (4.5)$$

де  $E_0$  – амплітуда електричного поля,  $\omega_0$  та  $k_0$  – частота та хвильове число,  $t$  та  $x$  – час та координата,  $\alpha$  – випадкова фаза, яка стрибком змінюється з часом. Кожній окремій частинці ансамблю відповідає свій набір стрибків фази. Розглянуто два типи зміни фази. Перший характеризується незмінною ймовірністю  $p = 0.2$  наприкінці кожного періоду, а величина на яку змінюється фаза стрибком рівноймовірно розподілена в інтервалі  $(0, 2\pi)$ . Другий

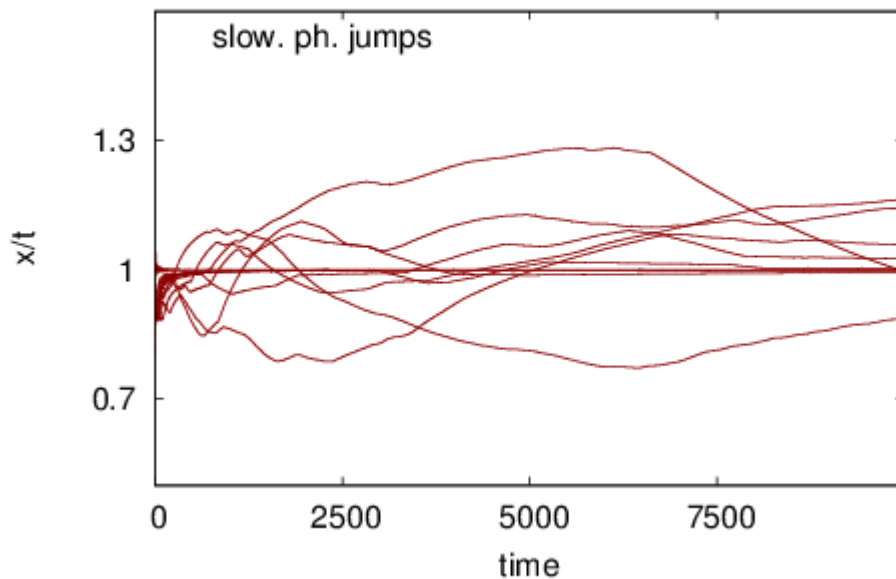


**Рис. 4.7** Десять траєкторій в просторі швидкості для однорідних стрибків випадкової фази

тип стрибків фази характеризувався змінною в часі ймовірністю  $p(t)$ , величина якої спадає з наближенням усередненої за швидкими осциляціями швидкості частинки  $\langle v(t) \rangle$  до фазової швидкості хвилі  $p(t) = p \left| 1 - \frac{k_0 \langle v(t) \rangle}{\omega_0} \right|$ .

Результати моделювання поведінки частинок в полі хвилі з випадковими стрибками фази подано на Рис. 4.7-4.12. Статистичні характеристики ансамблю частинок отримано на основі розрахунків траєкторій  $N_r = 10^4$  частинок. Час і довжина вимірювались в одиницях періоду  $\frac{2\pi}{\omega_0}$  і довжини хвилі  $\frac{2\pi}{k_0}$ . Величина електричного поля в розрахунках відповідає такій амплітуді осциляцій швидкості захоплених частинок, яка становить 0.141 від фазової швидкості хвилі. Для початкових швидкостей частинок було взято значення 0.85. Гармонічною хвилею без зміни фази ці частинки не захоплюються, тобто для звичайної хвилі вони є нерезонансними.

На відміну від цього, з хвилею зі стрибками фази, частинки вступають в резонансну взаємодію в *широкому інтервалі початкових швидкостей*, і з часом усереднена за ансамблем швидкість захоплених частинок прямує до фазової швидкості хвилі. Відбувається це для обох типів стрибків фази.



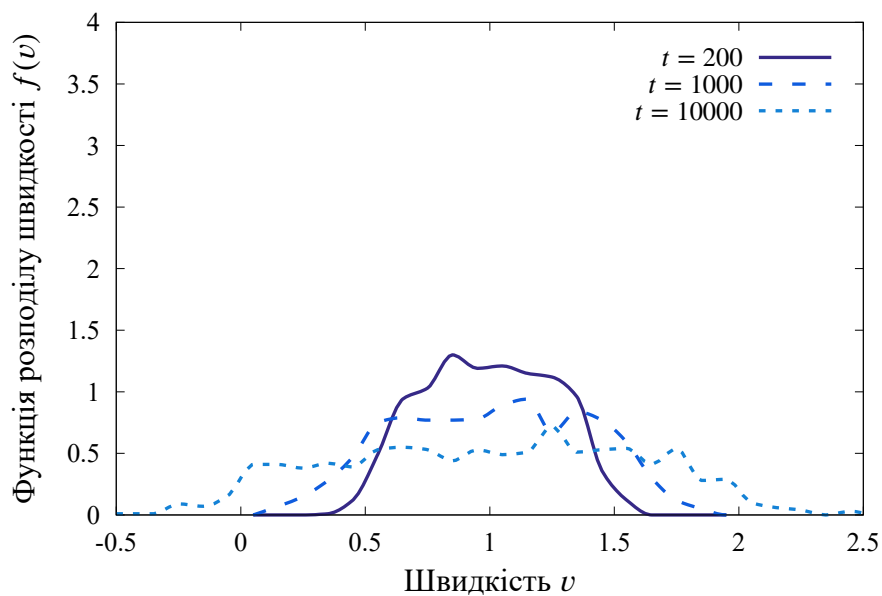
**Рис. 4.8** Десять траєкторій в просторі швидкості для уповільнюючихся стрибків випадкової фази

В цілому, частинки з початковою швидкістю меншу за фазову прискорюються, їхня усереднена швидкість зростає від 0.85 до 1. Механізм цього прискорення є подібним до стохастичного прискорення Фермі. Одночасно з прискоренням відбувається також стохастичне нагрівання частинок, характеристикою його є дисперсія швидкостей. Зауважимо, що зростання дисперсії з часом для незмінної в часі ймовірності стрибків фази, хвилі першого типу, є суттєво більшим.

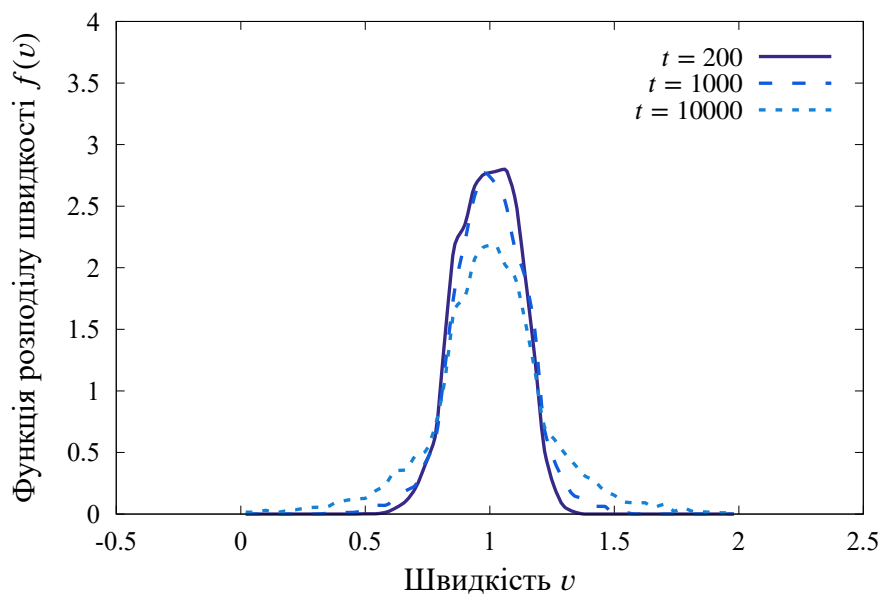
На Рис. 4.7, 4.8 подано усереднені за швидкими осциляціями швидкості десяти довільних частинок в полі хвиль зі стрибками фази першого і другого типу. Якщо частота стрибків фаз уповільнюється відповідно до ефекту Доплера, блукання частинок відбуваються у звуженій області фазового простору, дисперсія швидкостей і координат є меншою, ніж для першого типу стрибків. Також для другого типу стрибків є помітнішою доля частинок, індивідуальна швидкість яких прямує до фазової швидкості хвилі.

Такій поведінці окремих частинок відповідає еволюція функцій розподілу швидкостей, подана на Рис. 4.9,4.10 для трьох моментів часу, що до-





**Рис. 4.9** Функція розподілу в просторі швидкості для рівномірних стрибків фази



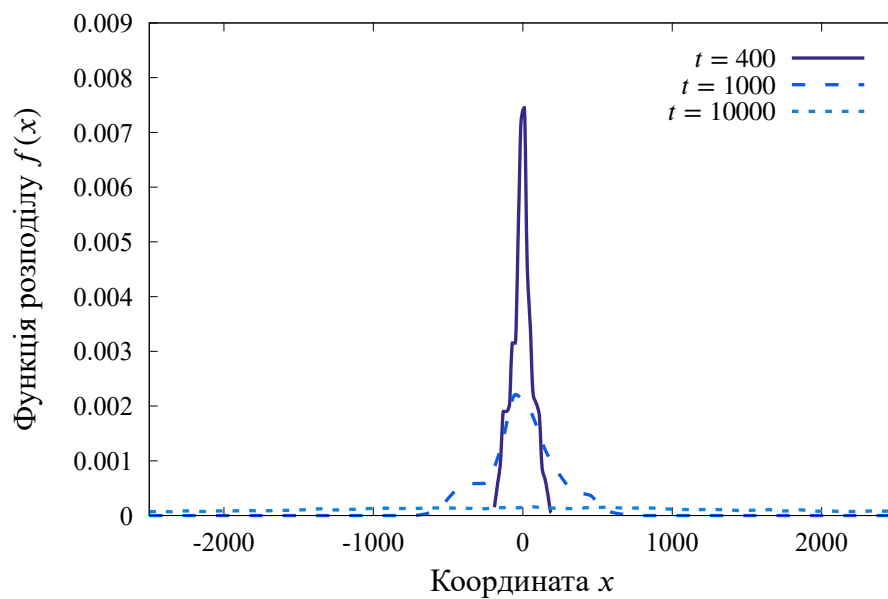
**Рис. 4.10** Функція розподілу в просторі швидкості для сповільнених стрибків фази

рівнюють  $200$ ,  $10^3$  та  $10^4$  періодам. У полі хвилі з постійною ймовірністю стрибків функція розподілу частинок за швидкостями сильно розширюється, що свідчить про те що процес нагрівання триває протягом всього часу моделювання. Тоді як для другого типу зміни фази функція розподілу частинок за швидкостями після початкового розширення майже зберігає форму. Процес розширення функції розподілу швидкостей обумовлений тим, що інтервал швидкостей резонансної взаємодії залишає більше частинок, ніж потрапляє до нього з нерезонансної області.

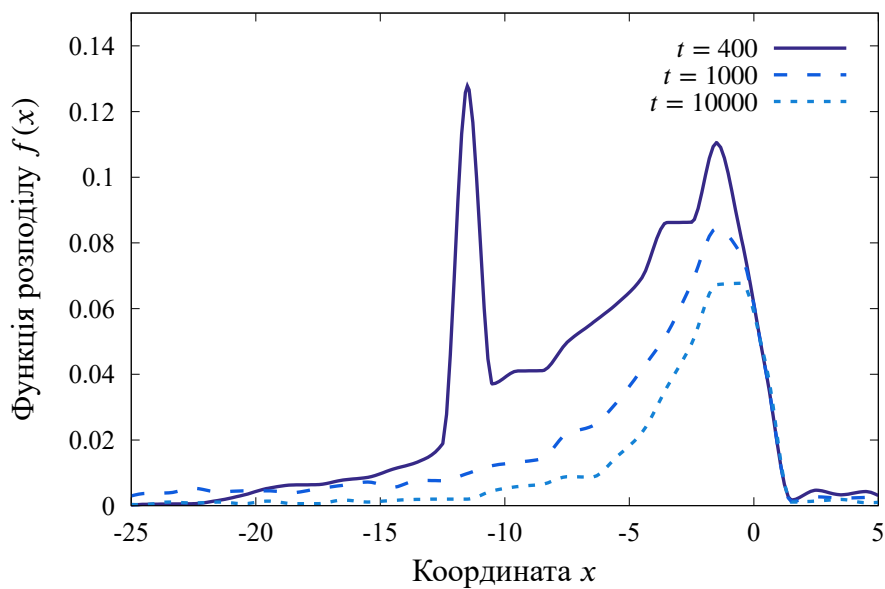
На Рис. 4.11,4.12 подано еволюцію функцій розподілу частинок в координатному просторі також для трьох моментів часу. Зауважимо, що просторові масштаби на цих двох рисунках сильно відрізняються. Розпливання функції розподілу координат для першого типу стрибків фази є ще більш промовистим ніж розпливання функції розподілу швидкостей. Пік функції розподілу на Рис.4.12 для  $t = 10^4$  зберігає пам'ять про початкові умови, коли всі частинки були зосереджені в одній точці фазового простору. З часом він дисипує, але в цілому форма функції розподілу зберігається значно краще, ніж для постійної в часі частоти стрибків фази.

Експериментальні спостереження показують, що інтенсивна хвиля в плазмовому середовищі характеризується деякою нерегулярністю, яку можна моделювати випадковими стрибками фази. В роботі звернено увагу на суттєву залежність поведінки частинок, резонансно взаємодіючих з хвилею, від того, яким чином відбуваються стрибки. Якщо стрибки фази утворюються під час взаємодії хвилі з частинками, то їхня частота в системі координат, що рухається з частинкою, не залежить від її швидкості. Якщо ж хвиля зі стрибками фази була згенерована раніше і потім запущена в область взаємодії, то частота стрибків в рухомій системі координат залежить від швидкості частинки.

На основі моделювання показано, що в кожному разі через стрибки фази частинки з ширшого інтервалу початкових швидкостей, ніж це було би для гармонічної хвилі без зміни фази, вступають з нею в резонансну вза-



**Рис. 4.11** Функція розподілу частинок для рівномірних стрибків фази



**Рис. 4.12** Функція розподілу частинок для сповільнених стрибків фази

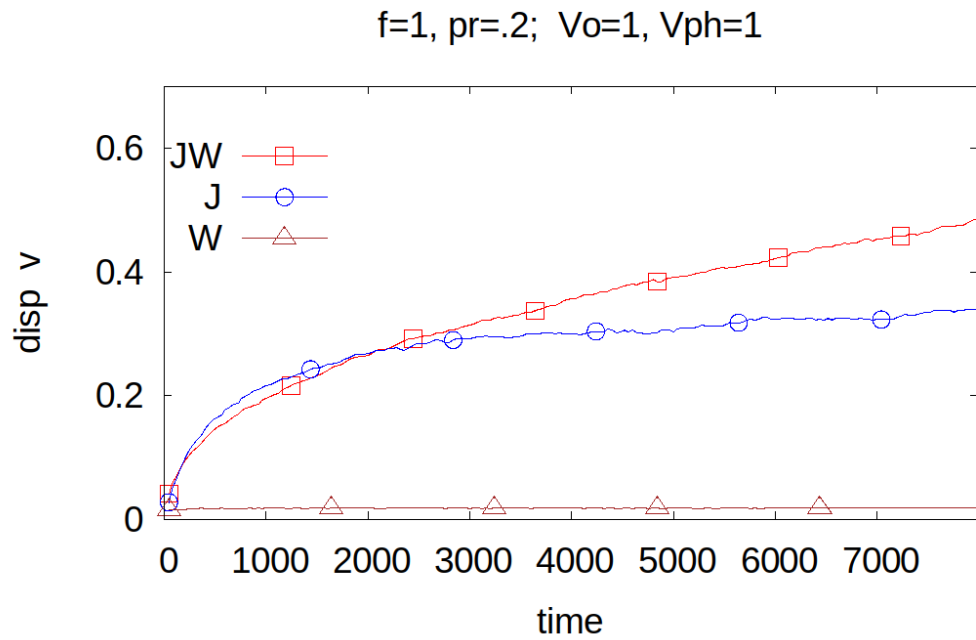
емодію. Зокрема, частинки з початковою швидкістю, меншою за фазову швидкість хвилі, прискорюються. При цьому, якщо стрибки фаз відбуваються під час прискорення, їхня частота в системі координат, що рухається з частинкою, не залежить від швидкості руху. Через це розширення функції розподілу частинок в просторі швидкостей і координат триває постійно, відповідно зростає дисперсія швидкостей – частинки нагріваються. Якщо частинки взаємодіють з хвилею із вже сформованою зміною фази, то по мірі наближення їхньої швидкості до фазової швидкості хвилі вони перестають відчувати стрибки фази і поле для них не відрізняється від поля гармонійної хвилі без стрибків фази. Тому наближення їхньої швидкості до фазової швидкості хвилі не супроводжується значним зростанням дисперсії.

Іншою важливою задачею є оцінка внеску хвиль зі стрибками фаз в інтенсивність нагрівання частинок. Для цього окремо розглядаються хвилі з регулярними фазами та випадкові імпульси поля. Таке розділення не є точно визначеним у числовому моделюванні, оскільки інтенсивність нагрівання залежить від тривалості імпульсу, однак воно встановлює відповідність між імпульсами та стрибками фаз.

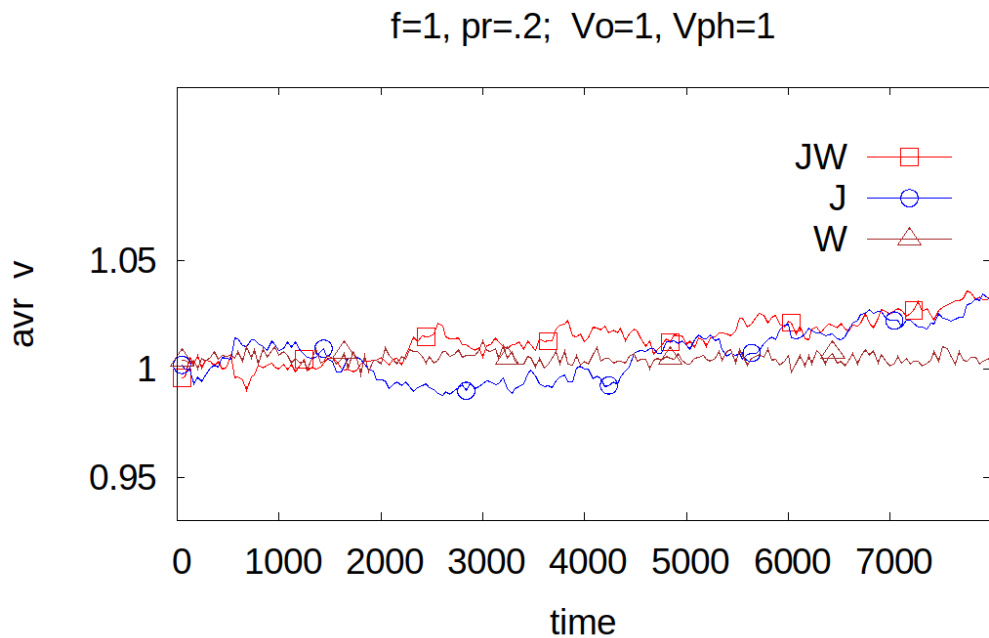
В числовому моделюванні розраховуються середня швидкість та дисперсія швидкості резонансних та не резонансних частинок. Порівнюються процеси нагрівання частинок хвилями зі стрибками фази, ансамблем регулярних хвиль та полем випадкових електричних імпульсів.

Ми розглядаємо перенесення частинок у просторі швидкостей під дією зовнішнього випадкового електричного поля, заданого суперпозицією 10 парціальних хвиль

$$\phi(x, t) = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{5\sqrt{\pi}} \phi_0^2 \frac{k_{max}}{\Delta k} \exp\left(-\left(\frac{k_i - k_0}{\Delta k}\right)^2\right) \times \cos(\omega t - k_i x + \alpha_i + \beta(t)), \quad (4.6)$$



**Рис. 4.13** Дисперсія швидкості частинок в полі хвиль зі стрибками фази (JW), окремих імпульсів (J) та хвиль без стрибків фази (W). Початкова швидкість частинок  $v_0 = 1$ , фазова швидкість хвиль  $v_{ph} = 1$ , частота стрибків фази  $\nu = 1$ , ймовірність стрибка  $p = 0.2$



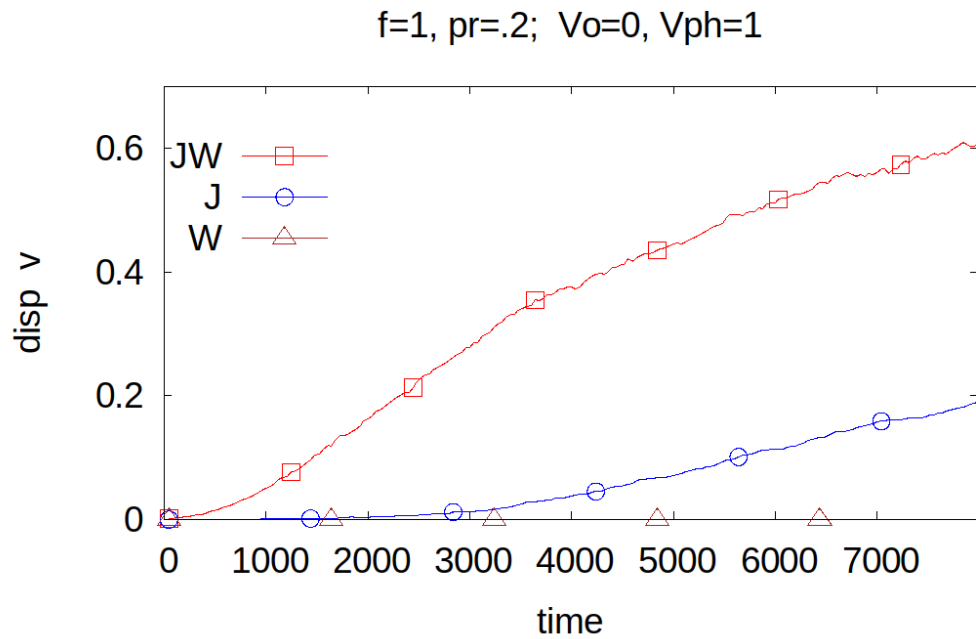
**Рис. 4.14** Середня швидкість резонансних частинок в полі хвиль зі стрибками фази (JW), окремих імпульсів (J) та хвиль без стрибків фази (W). Початкова швидкість частинок  $v_0 = 1$ , фазова швидкість хвиль  $v_{ph} = 1$ , частота стрибків фази  $\nu = 1$ , ймовірність стрибка  $p = 0.2$

з фіксованою частотою  $\omega$ , хвильовими числами  $k_i$  в околі значення  $k_0$  та з амплітудою потенціалу  $\phi_0$ . Для моделювання використовуються час, нормований на період  $\frac{2\pi}{\omega_0}$ , та довжина, нормована на величину  $\frac{2\pi}{k_0}$ . Параметрами спектру є ширина  $d = \frac{\Delta k}{k_0} = 0.04$  та безрозмірна амплітуда потенціалу  $\sigma = \frac{e}{m} \left( \frac{k_0}{\omega_0} \right)^2 \phi_0 = 0.01$ , де  $e$  та  $m$  є зарядом та масою частинки. Набір випадкових фаз  $\{\alpha_i\}$  залишається постійним для кожної реалізації поля, тоді як спільна фаза  $\beta(t)$  змінюється стрибками в процесі руху частинки. Фаза може змінюватись на довільну величину з частотою  $\nu$ , нормованою на обернений період коливань, та ймовірність стрибка фаз  $p$ .

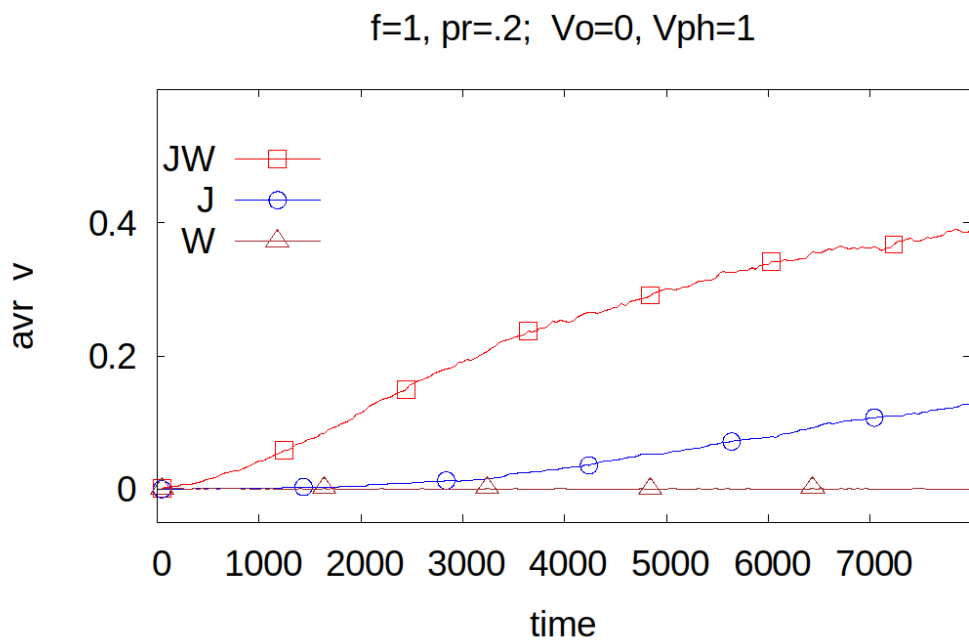
Для розгляду нагрівання частинок за відсутності стрибків фаз беремо  $p = 0$ . Цей випадок порівнюємо з двома іншими, коли стрибки фаз трапляються один раз або двічі протягом періоду коливань  $\nu = 1$ , або  $\nu = 2$  відповідно з ймовірностями  $p = 0.2$ , або  $p = 0.1$ . Для виокремлення ефекту, обумовленого суто стрибками фаз, розглянуто також нагрівання окремими імпульсами поля. При цьому, в числовому моделюванні електричне поле покладається нульовим майже всюди, крім тих кроків по часу, коли трапляється стрибок фаз  $\beta(t)$ . Для  $\nu = 2$ ,  $p = 0.1$  імпульси є вдвічі коротшими ніж для  $\nu = 1$ ,  $p = 0.2$ , але їхня середня кількість за одиницю часу залишається тією самою.

Результати числового моделювання дифузії частинок в просторі швидкостей під дією зовнішнього випадкового поля з потенціалу (4.6) із стрибками фази  $\beta(t)$ ; без стрибків фази  $\beta(t)$ ; та в полі окремих імпульсів наведені на Рис. 4.13-4.18.

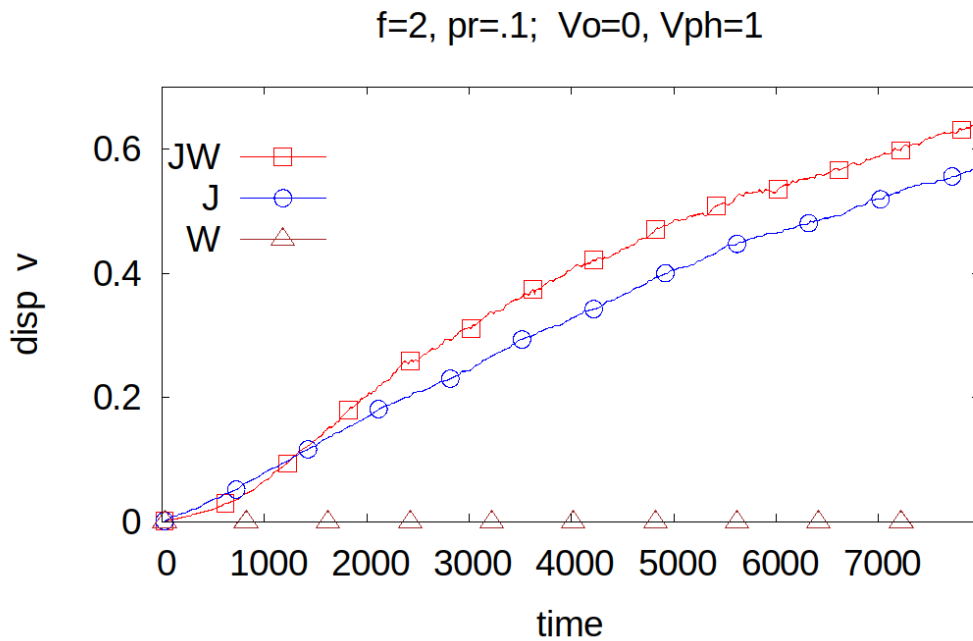
З моделювання випливає що поля хвиль із стрибками фази та без них хоч і виглядають подібними, рух резонансних частинок в них помітно різниться. Резонансна на початковій стадії частинка, тобто частинка чия швидкість співпадає з фазовою швидкістю хвилі, в полі хвилі без стрибків фази весь час залишається в резонансній області простору швидкостей, тоді як в полях із стрибками фаз вона може мандрувати в просторі швидкостей на



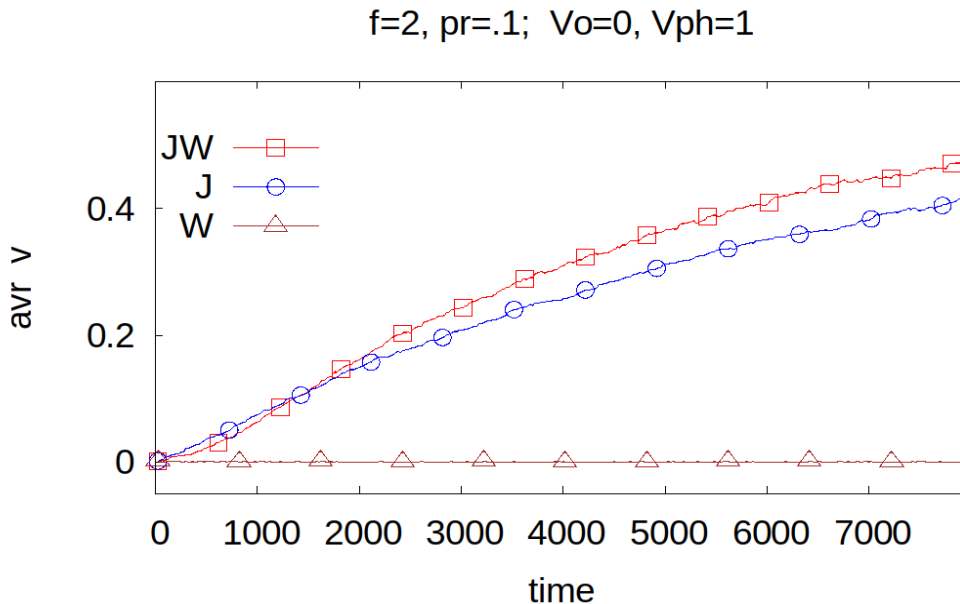
**Рис. 4.15** Дисперсія швидкості частинок в полі хвиль зі стрибками фази (JW), окремих імпульсів (J) та хвиль без стрибків фази (W). Початкова швидкість частинок  $v_0 = 0$ , фазова швидкість хвиль  $v_{ph} = 1$ , частота стрибків фази  $\nu = 1$ , ймовірність стрибка  $p = 0.2$



**Рис. 4.16** Прискорення частинок в полі хвиль зі стрибками фази (JW), окремих імпульсів (J) та хвиль без стрибків фази (W). Початкова швидкість частинок  $v_0 = 0$ , фазова швидкість хвиль  $v_{ph} = 1$ , частота стрибків фази  $\nu = 1$ , ймовірність стрибка  $p = 0.2$



**Рис. 4.17** Дисперсія швидкості частинок в полі хвиль зі стрибками фази (JW), окремих імпульсів (J) та хвиль без стрибків фази (W). Початкова швидкість частинок  $v_0 = 0$ , фазова швидкість хвиль  $v_{ph} = 1$ , частота стрибків фази  $\nu = 2$ , ймовірність стрибка  $p = 0.1$



**Рис. 4.18** Прискорення частинок в полі хвиль зі стрибками фази (JW), окремих імпульсів (J) та хвиль без стрибків фази (W). Початкова швидкість частинок  $v_0 = 0$ , фазова швидкість хвиль  $v_{ph} = 1$ , частота стрибків фази  $\nu = 2$ , ймовірність стрибка  $p = 0.1$



велику відстань від початкового положення. Тобто стрибки фази вносять ефект шуму з широким спектром.

На Рис. 4.13,4.14 подано еволюцію дисперсії швидкості частинок, спричинену стохастичним нагріванням, а також відповідну еволюцію середньої швидкості, обумовлену стохастичним прискоренням для резонансних частинок. З наведених рисунків видно, що інтенсивність нагрівання резонансних груп частинок зі знерозміреними початковими швидкостями  $v_0 = 1$  є найбільшою у хвилях зі стрибками фази. Для таких хвиль дисперсія швидкості зростає, тоді як нагрівання імпульсами досягло насичення.

Більш цікавим є сильна взаємодія між *нерезонансними* частинками та хвилями зі стрибками фаз, що представлено на Рис. 4.15-4.18. Нерезонансні частинки розігріваються навіть швидше за резонансні частинки, що можна бачити на Рис. 4.15,4.17). Дійсно, вплив стрибків фаз на нагрівання є найбільш промовистим для нерезонансних частинок, оскільки їхня взаємодія за відсутності стрибків фаз є дуже слабкою. Разом з нагріванням хвилі зі стрибками фаз прискорюють, або загальмовують, частинки поки їхні швидкості не досягають області фазових швидкостей хвиль.

Рис. 4.15-4.18 показують відповідність між нагріванням частинок окремими імпульсами електричного поля та хвилями зі стрибками фаз, якщо імпульси та стрибки фаз відбуваються з однаковою частотою, яка визначається добутком  $\nu \times p = 0.2$ . Нагрівання імпульсами залежить також від їхньої тривалості, яка в числовому моделюванні є пропорційною до  $\frac{1}{\nu}$ . Порівняння Рис. 4.15,4.16 з Рис. 4.17,4.18 показує, що коротші імпульси спричиняють більш інтенсивне нагрівання та прискорення частинок.

### 4.3 Висновок

Розглянуто перенесення частинок у випадковому змінному електричному полі із різними кореляційними часами, показано що розв'язки статистичних рівнянь сформульованого нами методу моментів відтворюють квазі-лінійну поведінку статистичних характеристик в широкому інтервалі коре-

ляційних часів. Зокрема, для малих кореляційних часів – це квазілінійний режим, для великих - перколяційний.

Розглянуто нагрівання частинок та їх прискорення хвилями з регулярними фазами та зі стрибками фаз, а також стохастичними імпульсами. Показано подібність між впливом стрибків фаз та дією окремих імпульсів поля. Продемонстровано, що стрибки фаз значно підвищують інтенсивність нагрівання резонансних частинок, а також залучають до цього процесу нерезонансні частинки з широкого інтервалу початкових швидкостей.

## ВИСНОВКИ

Сформульовано статистичні рівняння, що описують часову еволюцію середньоквадратичного зміщення частинок поперек магнітного поля під дією статичного випадкового електричного поля. Врахування особливостей динаміки окремих груп частинок по різних еквіпотенціальним поверхням покращило відповідність аналітичних розрахунків результатам прямого числового моделювання. Виконано порівняння з методом декорельованих траєкторій і показано більшу ефективність та простоту застосування оригінального підходу.

Розраховано еволюцію кореляційної функції, коефіцієнта дифузії та середньоквадратичного відхилення, їхня поведінка узгоджується з прямим числовим моделюванням. Наближені рівняння не використовують вільних параметрів. Врахування концепції підансамблів покращує узгодження результатів наближення із числовим моделюванням. Показано, що наближення моментами краще узгоджується із результатами числового моделювання ніж метод декорельованих траєкторій.

Новий метод було узагальнено з метою врахування ефектів скінченного ларморового радіусу. Показано, що розв'язки відтворюють результати моделювання як в області малих так і великих ларморових радіусів. Знайдено, що інтенсивність дифузії по-різному залежить від ларморового радіусу на малих та великих часових масштабах.

Запропонований аналітичний метод було розвинено далі для опису перенесення частинок у змінному в часі випадковому електричному полі. Отримано залежність асимптотичного коефіцієнту дифузії від часу кореляції в системі. Показано, що запропонований метод відтворює поведінку статистичних характеристик в широкому інтервалі кореляційних часів, знайдену

в числовому моделюванні. Зокрема квазілінійний режим для малих кореляційних часів, так і перколяційний для великих.

Порівняно інтенсивності нагрівання частинок хвилями з регулярними фазами та стрибками фаз, а також зі стохастичними імпульсами. Виявлено подібність дії на частинки хвиль зі стрибками фаз та окремих імпульсів електричного поля. Проаналізовано вплив на частинки хвиль з різним характером стрибків фаз. Показано, що стрибки фаз хвилі значно підвищують інтенсивність нагрівання резонансних частинок, а також залучають до цього процесу нерезонансні частинки з широкого інтервалу початкових швидкостей.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] O. Cherniak, «Particle's Diffusion in a Two-Dimensional Random Velocity Field», *Ukrainian Journal of Physics* **60**, 1196–1210, ISSN: 2071-0186 (2015) DOI: 10.15407/ujpe60.12.1196.
- [2] O. Cherniak and V. Zasenکو, «Finite Larmor Radius Effects on a Test-Particle Diffusion», *Ukrainian Journal of Physics* **62**, 495–501, ISSN: 2071-0186 (2017) DOI: 10.15407/ujpe62.06.0495.
- [3] V. Zasenکو, O. Cherniak, and A. Zagorodny, «Subensemble concept in 2D magnetized particle transport model», *Problems of Atomic Science and Technology* **106**, 77–80, ISSN: 1562-6016 (2016).
- [4] O. Cherniak, V. Zasenکو, and A. Zagorodny, «Finite Larmor Radius Effects on Turbulent Transport of Test-Particles», *Problems of Atomic Science and Technology* **106**, 96–99, ISSN: 1562-6016 (2016).
- [5] V. Zasenکو, A. Zagorodny, and O. Cherniak, «Magnetized Particle Diffusion in a Random Electric Field with Jumping Phase», *Problems of Atomic Science and Technology* **116**, 246–267, ISSN: 1562-6016 (2018).
- [6] V. Zasenکو, A. Zagorodny, and O. Chernyak, «Particle Diffusion in a Wave with Randomly Jumping Phase», *Problems of Atomic Science and Technology* **95**, 62–64, ISSN: 1562-6016 (2015).
- [7] V. Zasenکو, A. Zagorodny, and O. Cherniak, «Impact of Wave Phase Jumps on Stochastic Heating», *Problems of Atomic Science and Technology* **107**, 60–63, ISSN: 1562-6016 (2017).
- [8] R. Balescu, *Aspects of Anomalous Transport in Plasmas* (IOP Publishing, 2005), p. 319, ISBN: 0750310308.
- [9] J. Wesson, *Tokamaks* (Clarendon Press, 2003), p. 764, ISBN: 0198509227.

- [10] J. Weiland, *Stability and Transport in Magnetic Confinement Systems* (Springer, 2012), p. 230, ISBN: 9781461437420.
- [11] В. Цытович, *Теория турбулентной плазмы* (Атомиздат, 1971), p. 425.
- [12] A. Monin and A. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics, Volume 1,2* (Dover, 2013), p. 784, ISBN: 0486458830.
- [13] Я. Зельдович and А. Мышкис, *Элементы математической физики* (Наука, 1973), p. 351.
- [14] W. D. McComb, *The physics of fluid turbulence* (Oxford University Press, 1990), p. 594, ISBN: 019856256X.
- [15] U. Frisch, *Turbulence Legacy of Kolmogorov* (Cambridge University Press, 1995), p. 296, ISBN: 0521457130.
- [16] P. Helander and D. Sigmar, *Collisional Transport in Magnetized Plasmas* (Cambridge University Press, 2001), p. 296, ISBN: 0521807980.
- [17] F. L. Hinton and R. D. Hazeltine, «Theory of plasma transport in toroidal confinement systems», *Rev. Mod. Phys.* **48**, 239–308 (1976) DOI: 10.1103/RevModPhys.48.239.
- [18] A. J. Wootton, B. A. Carreras, H. Matsumoto, K. McGuire, W. A. Peebles, C. P. Ritz, P. W. Terry, and S. J. Zweben, «Fluctuations and anomalous transport in tokamaks», *Physics of Fluids B: Plasma Physics* **2**, 2879–2903 (1990) DOI: 10.1063/1.859358, eprint: <https://doi.org/10.1063/1.859358>.
- [19] B. A. Carreras, «Progress in anomalous transport research in toroidal magnetic confinement devices», *IEEE Transactions on Plasma Science* **25**, 1281–1321, ISSN: 0093-3813 (1997) DOI: 10.1109/27.650902.
- [20] B. Coppi and G. Rewoldt, «New Trapped-Electron Instability», *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1329–1332 (1974) DOI: 10.1103/PhysRevLett.33.1329.
- [21] G. Becker, «Electron temperature profile invariance on OH, L- and H-mode plasmas and consequences for the anomalous transport», *Nuclear Fusion* **32**, 81–88 (1992) DOI: 10.1088/0029-5515/32/1/i07.

- [22] A. M. Dimits, T. J. Williams, J. A. Byers, and B. I. Cohen, «Scalings of Ion-Temperature-Gradient-Driven Anomalous Transport in Tokamaks», *Phys. Rev. Lett.* **77**, 71–74 (1996) DOI: 10.1103/PhysRevLett.77.71.
- [23] F. Ryter, C. Angioni, M. Beurskens, S. Cirant, G. T. Hoang, G. M. D. Hogeweij, F. Imbeaux, A. Jacchia, P. Mantica, W. Suttrop, and G. Tardini, «Experimental studies of electron transport», *Plasma Physics and Controlled Fusion* **43**, A323–A338 (2001) DOI: 10.1088/0741-3335/43/12a/325.
- [24] B. P. van Milligen, R. Sánchez, and B. A. Carreras, «Probabilistic finite-size transport models for fusion: Anomalous transport and scaling laws», *Physics of Plasmas* **11**, 2272–2285 (2004) DOI: 10.1063/1.1701893, eprint: <https://doi.org/10.1063/1.1701893>.
- [25] P. Mantica, A. Thyagaraja, J. Weiland, G. M. D. Hogeweij, and P. J. Knight, «Heat Pinches in Electron-Heated Tokamak Plasmas: Theoretical Turbulence Models versus Experiments», *Phys. Rev. Lett.* **95**, 185002 (2005) DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.185002.
- [26] G. Sánchez Burillo, B. P. van Milligen, and A. Thyagaraja, «Analysis of the radial transport of tracers in a turbulence simulation», *Physics of Plasmas* **16**, 042319 (2009) DOI: 10.1063/1.3118589, eprint: <https://doi.org/10.1063/1.3118589>.
- [27] W. Horton, B. Hu, J. Dong, and P. Zhu, «Turbulent electron thermal transport in tokamaks», *New Journal of Physics* **5**, 14–14 (2003) DOI: 10.1088/1367-2630/5/1/314.
- [28] F. Ryter, C. Angioni, A. G. Peeters, F. Leuterer, H.-U. Fahrbach, and W. Suttrop, «Experimental Study of Trapped-Electron-Mode Properties in Tokamaks: Threshold and Stabilization by Collisions», *Phys. Rev. Lett.* **95**, 085001 (2005) DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.085001.
- [29] L. Villard, A. Bottino, S. Brunner, A. Casati, J. Chowdhury, T. Dannert, R. Ganesh, X. Garbet, T. Görler, V. Grandgirard, R. Hatzky, Y. Idomura, F.

- Jenko, S. Jolliet, S. K. Aghdam, X. Lapillonne, G. Latu, B. F. McMillan, F. Merz, Y. Sarazin, T. M. Tran, and T. Vernay, «Gyrokinetic simulations of turbulent transport: size scaling and chaotic behaviour», *Plasma Physics and Controlled Fusion* **52**, 124038 (2010) DOI: 10.1088/0741-3335/52/12/124038.
- [30] G. J. Wilkie, I. G. Abel, M. Landreman, and W. Dorland, «Transport and deceleration of fusion products in microturbulence», *Physics of Plasmas* **23**, 060703 (2016) DOI: 10.1063/1.4953420, eprint: <https://doi.org/10.1063/1.4953420>.
- [31] J. Garcia and D. Cambon, «On the universality of power laws for tokamak plasma predictions», *Plasma Physics and Controlled Fusion* **60**, 025028 (2018) DOI: 10.1088/1361-6587/aa9878.
- [32] J. W. Conner and H. R. Wilson, «Survey of theories of anomalous transport», *Plasma Physics and Controlled Fusion* **36**, 719–795 (1994) DOI: 10.1088/0741-3335/36/5/002.
- [33] A. Vedenov, E. Velikhov, and R. Sagdeev, «Nonlinear oscillations of rarified plasma», *Nuclear Fusion* **1**, 82–100 (1961) DOI: 10.1088/0029-5515/1/2/003.
- [34] W. Drummond and D. Pines, «Non-linear stability of plasma oscillations», *Nuclear Fusion* **1**, 1049–1057 (1962).
- [35] R. H. Kraichnan, «The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers», *Journal of Fluid Mechanics* **5**, 497–543 (1959) DOI: 10.1017/S0022112059000362.
- [36] S. A. Orszag and R. H. Kraichnan, «Model Equations for Strong Turbulence in a Vlasov Plasma», *The Physics of Fluids* **10**, 1720–1736 (1967) DOI: 10.1063/1.1762351, eprint: <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.1762351>.



- [37] R. H. Kraichnan, «Lagrangian velocity covariance in helical turbulence», *Journal of Fluid Mechanics* **81**, 385–398 (1977) DOI: 10.1017/S0022112077002110.
- [38] R. H. Kraichnan, «Diffusion by a Random Velocity Field», *The Physics of Fluids* **13**, 22–31 (1970) DOI: 10.1063/1.1692799, eprint: <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.1692799>.
- [39] R. Metzler and J. Klafter, «The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach», *Physics Reports* **339**, 1–77, ISSN: 0370-1573 (2000) DOI: [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(00\)00070-3](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00070-3).
- [40] J. Lebowitz and E. Montroll, «Nonequilibrium phenomena. II - From stochastics to hydrodynamics», NASA STI/Recon Technical Report A **85** (1984).
- [41] M. Isichenko, Y. L. Kalda, E. Tatarinova, O. Tel'kovskaya, and V. Yan'kov, «Diffusion in a medium with vortex flow», *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **96**, 913–925 (1989).
- [42] A. Gruzinov, M. Isichenko, and Y. Kalda, «Two-dimensional turbulent diffusion», *Journal of Theoretical and Experimental Physics* **70**, 263–269 (1990).
- [43] M. B. Isichenko, «Percolation, statistical topography, and transport in random media», *Rev. Mod. Phys.* **64**, 961–1043 (1992) DOI: 10.1103/RevModPhys.64.961.
- [44] G. I. Taylor, «Diffusion by Continuous Movements», *Proceedings of the London Mathematical Society* **s2-20**, 196–212, ISSN: 1460-244X (1922) DOI: 10.1112/plms/s2-20.1.196.
- [45] S. Corrsin, *ADVANCES IN GEOPHYSICS VOLUME 6, Volume 6 (v. 6)* (Academic Press, 1959), pp. 269–271, ISBN: 0120188066.

- [46] T. H. Dupree, «A Perturbation Theory for Strong Plasma Turbulence», *The Physics of Fluids* **9**, 1773–1782 (1966) DOI: 10.1063/1.1761932, eprint: <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.1761932>.
- [47] T. H. Dupree, «Nonlinear Theory of Drift-Wave Turbulence and Enhanced Diffusion», *The Physics of Fluids* **10**, 1049–1055 (1967) DOI: 10.1063/1.1762220, eprint: <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.1762220>.
- [48] T. H. Dupree, «Theory of Phase Space Density Granulation in Plasma», *The Physics of Fluids* **15**, 334–344 (1972) DOI: 10.1063/1.1693911, eprint: <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.1693911>.
- [49] J. B. Taylor and B. McNamara, «Plasma Diffusion in Two Dimensions», *The Physics of Fluids* **14**, 1492–1499 (1971) DOI: 10.1063/1.1693635, eprint: <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.1693635>.
- [50] M. Ottaviani, «Scaling Laws of Test Particle Transport in Two-Dimensional Turbulence», *Europhysics Letters* **20**, 111–116 (1992) DOI: 10.1209/0295-5075/20/2/004.
- [51] J.-D. Reuss and J. H. Misguich, «Low-frequency percolation scaling for particle diffusion in electrostatic turbulence», *Phys. Rev. E* **54**, 1857–1869 (1996) DOI: 10.1103/PhysRevE.54.1857.
- [52] J.-D. Reuss, M. Vlad, and J. Misguich, «Percolation scaling for transport in turbulent plasmas», *Physics Letters A* **241**, 94–98, ISSN: 0375-9601 (1998) DOI: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(98\)00142-X](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(98)00142-X).
- [53] M. Vlad, F. Spineanu, J. H. Misguich, and R. Balescu, «Diffusion with intrinsic trapping in two-dimensional incompressible stochastic velocity fields», *Phys. Rev. E* **58**, 7359–7368 (1998) DOI: 10.1103/PhysRevE.58.7359.
- [54] M. Vlad and F. Spineanu, «Trajectory structures and transport», *Phys. Rev. E* **70**, 056304 (2004) DOI: 10.1103/PhysRevE.70.056304.

- [55] M. Vlad, F. Spineanu, J. H. Misguich, J.-D. Reuss, R. Balescu, K. Itoh, and S.-I. Itoh, «Lagrangian versus Eulerian correlations and transport scaling», *Plasma Physics and Controlled Fusion* **46**, 1051–1063 (2004) DOI: 10.1088/0741-3335/46/7/005.
- [56] M. Vlad and F. Spineanu, «Larmor radius effects on impurity transport in turbulent plasmas», *Plasma Physics and Controlled Fusion* **47**, 281–294 (2005) DOI: 10.1088/0741-3335/47/2/006.
- [57] M. Vlad, F. Spineanu, S.-I. Itoh, M. Yagi, and K. Itoh, «Turbulent transport of ions with large Larmor radii», *Plasma Physics and Controlled Fusion* **47**, 1015–1029 (2005) DOI: 10.1088/0741-3335/47/7/004.
- [58] M. Vlad and F. Spineanu, «Random and quasi-coherent aspects in particle motion and their effects on transport and turbulence evolution», *New Journal of Physics* **19**, 025014 (2017) DOI: 10.1088/1367-2630/aa602d.
- [59] A. Chernyak, «Test-particle transport in external fields», in "Program and Abstracts, Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics": Kyiv, Ukraine, December 22-24, 2010 (2010), p. 62.
- [60] О. Черняк та В. Засенко, «Феноменологічні моделі опису перенесення тестових частинок у зовнішніх полях», укр., в "Збірка тез, 11-та Всеукраїнська школа-семінар та конкурс молодих учених зі статистичної фізики та теорії конденсованого стану: Київ, Україна, Червень 1-3, 2011 (2011), с. 57.
- [61] О. Черняк, «Дифузія у замороженому випадковому полі швидкостей», укр., в "Програма. Збірник анотацій. Список учасників, Українська конференція з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу": Київ, Україна, Жовтня 25-26, 2011 (2011), с. 56.
- [62] О. Chernyak, «Transport of magnetized particles in a frozen turbulent electric field», in "Program and Abstracts, Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics": Kyiv, Ukraine, October 23-26, 2012 (2012), p. 58.

- [63] О. Черняк, А. Загородній та В. Засенко, «Перенесення частинок у випадковому електричному полі», укр., в "Програма. Збірник анотацій. Спсиок учасників, Українська конференція з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу": Київ, Україна, Вересня 24-25, 2013 (2013), с. 53.
- [64] А. Черняк, "Particle diffusion in two-dimensional random velocity field", Russian, in "Сборник анотаций докладов, 18 международная научная конференция молодіх ученіх и специалистов к 105-летию Н.Н. Боголюбова: Дубна, РФ, Февраля 24-28, 2014 (2014), р. 39.
- [65] О. Cherniak, «Finite larmor radius effects on test-particle diffusion in frozen random field», in "Book of Abstracts, International conference-school on plasma physics and controlled fusion": Kharkiv, Ukraine, September 15-18, 2014 (2014), р. 62.
- [66] О. Черняк та В. Засенко, «Динаміка підансамблів замагнічених частинок у випадковому електричному полі», укр., в "Програма. Збірник анотацій. Спсиок учасників, Українська конференція з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу": Київ, Україна, Вересня 22-23, 2015 (2015), с. 36.
- [67] О. Cherniak, V. Zasenکو, and A. Zagorodny, «Finite larmor radius effects on turbulent transport of test-particles», in "Book of Abstracts, International conference-school on plasma physics and controlled fusion": Kharkiv, Ukraine, September 12-15, 2016 (2016), р. 82.
- [68] О. Черняк та В. Засенко, «Перенесення частинок у випадковому полі зі скінченним часом кореляції», укр., в "Тези доповідей, 24 Щорічна наукова конференція інституту ядерних досліджень НАН України": Київ, Україна, Квітня 10-13, 2017 (2017), с. 183.
- [69] О. Cherniak and V. Zasenکو, «Test-particle diffusion in random electric field», in "Book of Abstracts, 14-th Kudowa Summer School "Towards Fusion Energy"": Kudowa-Zdroj, Poland, June 4-8, 2018 (2018), р. 56.

- [70] V. Zasenkov, A. Zagorodny, and O. Chernyak, «Diffusion in a Frozen Random Velocity Field», *Ukrainian Journal of Physics* **56**, 1007–1010, ISSN: 2071-0186 (2011).
- [71] G. Manfredi and R. O. Dendy, «Test-Particle Transport in Strong Electrostatic Drift Turbulence with Finite Larmor Radius Effects», *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4360–4363 (1996) DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.4360.
- [72] G. Manfredi and R. O. Dendy, «Transport properties of energetic particles in a turbulent electrostatic field», *Physics of Plasmas* **4**, 628–635 (1997) DOI: 10.1063/1.872159, eprint: <https://doi.org/10.1063/1.872159>.
- [73] S. V. Annibaldi, G. Manfredi, and R. O. Dendy, «Non-Gaussian transport in strong plasma turbulence», *Physics of Plasmas* **9**, 791–799 (2002) DOI: 10.1063/1.1445426, eprint: <https://doi.org/10.1063/1.1445426>.
- [74] T. Hauff and F. Jenko, «Turbulent  $E \times B$  advection of charged test particles with large gyroradii», *Physics of Plasmas* **13**, 102309 (2006) DOI: 10.1063/1.2360173, eprint: <https://doi.org/10.1063/1.2360173>.
- [75] T. Hauff and F. Jenko, « $E \times B$  advection of trace ions in tokamak microturbulence», *Physics of Plasmas* **14**, 092301 (2007) DOI: 10.1063/1.2768025, eprint: <https://doi.org/10.1063/1.2768025>.
- [76] Y. B. Fainberg, «Plasma electronics and plasma acceleration of charged particles», *Plasma Physics Reports* **26**, 335–343, ISSN: 1562-6938 (2000) DOI: 10.1134/1.952858.
- [77] V. Karas' and V. Levchenko, «Penetration of microwave with a stochastic jumping phase into overdense plasmas and electron collisionless heating by it», *Problems of Atomic Science and Technology* **95**, 133–136, ISSN: 1562-6016 (2003).
- [78] V. I. Karas', Y. B. Fainberg, A. F. Alisov, A. M. Artamoshkin, R. Bingham, I. V. Gavrilenko, V. D. Levchenko, M. Lontano, V. I. Mirny, I. F. Potapenko, and A. N. Starostin, «Interaction of microwave radiation un-

dergoing stochastic phase jumps with plasmas or gases», Plasma Physics Reports **31**, 748–760, ISSN: 1562-6938 (2005) DOI: 10.1134/1.2048833.

- [79] A. F. Alisov, A. M. Artamoshkin, S. A. Berdin, V. I. Golota, A. M. Egorov, A. G. Zagorodny, I. A. Zagrebel'ny, V. I. Zasenko, V. I. Karas', I. V. Karas', I. F. Potapenko, and A. N. Starostin, «Low-pressure discharge induced by microwave radiation with a stochastically jumping phase», Plasma Physics Reports **36**, 736–749, ISSN: 1562-6938 (2010) DOI: 10.1134/S1063780X10080106.

# ДОДАТОК А

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ

Результати даної дисертаційної роботи представлено у 7-и роботах, що опубліковані у провідних українських фізичних журналах [1—7].

Матеріали роботи було представлено на семінарах в Інституті теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, а також конференціях.

- [1] O. Cherniak, «Particle's Diffusion in a Two-Dimensional Random Velocity Field», *Ukrainian Journal of Physics* **60**, 1196–1210, ISSN: 2071-0186 (2015) DOI: 10.15407/ujpe60.12.1196.
- [2] O. Cherniak and V. Zasenکو, «Finite Larmor Radius Effects on a Test-Particle Diffusion», *Ukrainian Journal of Physics* **62**, 495–501, ISSN: 2071-0186 (2017) DOI: 10.15407/ujpe62.06.0495.
- [3] V. Zasenکو, O. Cherniak, and A. Zagorodny, «Subensemble concept in 2D magnetized particle transport model», *Problems of Atomic Science and Technology* **106**, 77–80, ISSN: 1562-6016 (2016).
- [4] O. Cherniak, V. Zasenکو, and A. Zagorodny, «Finite Larmor Radius Effects on Turbulent Transport of Test-Particles», *Problems of Atomic Science and Technology* **106**, 96–99, ISSN: 1562-6016 (2016).
- [5] V. Zasenکو, A. Zagorodny, and O. Cherniak, «Magnetized Particle Diffusion in a Random Electric Field with Jumping Phase», *Problems of Atomic Science and Technology* **116**, 246–267, ISSN: 1562-6016 (2018).
- [6] V. Zasenکو, A. Zagorodny, and O. Chernyak, «Particle Diffusion in a Wave with Randomly Jumping Phase», *Problems of Atomic Science and Technology* **95**, 62–64, ISSN: 1562-6016 (2015).

- [7] V. Zasenکو, A. Zagorodny, and O. Cherniak, «Impact of Wave Phase Jumps on Stochastic Heating», *Problems of Atomic Science and Technology* **107**, 60–63, ISSN: 1562-6016 (2017).
- [59] A. Chernyak, «Test-particle transport in external fields», in "Program and Abstracts, Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics": Kyiv, Ukraine, December 22-24, 2010 (2010), p. 62.
- [60] О. Черняк та В. Засенко, «Феноменологічні моделі опису перенесення тестових частинок у зовнішніх полях», укр., в "Збірка тез, 11-та Всеукраїнська школа-семінар та конкурс молодих учених зі статистичної фізики та теорії конденсованого стану: Kyiv, Ukraine, Червень 1-3, 2011 (2011), с. 57.
- [61] О. Черняк, «Дифузія у замороженому випадковому полі швидкостей», укр., в "Програма. Збірник анотацій. Спсикок учасників, Українська конференція з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу": Київ, Україна, Жовтня 25-26, 2011 (2011), с. 56.
- [62] O. Chernyak, «Transport of magnetized particles in a frozen turbulent electric field», in "Program and Abstracts, Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics": Kyiv, Ukraine, October 23-26, 2012 (2012), p. 58.
- [63] О. Черняк, А. Загородній та В. Засенко, «Перенесення частинок у випадковому електричному полі», укр., в "Програма. Збірник анотацій. Спсикок учасників, Українська конференція з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу": Київ, Україна, Вересня 24-25, 2013 (2013), с. 53.
- [64] А. Черняк, "Particle diffusion in two-dimensional random velocity field", Russian, in "Сборник анотаций докладов, 18 международная научная конференция молодых ученых и специалистов к 105-летию Н.Н. Боголюбова: Дубна, РФ, Февраля 24-28, 2014 (2014), p. 39.



- 
- [65] O. Cherniak, «Finite larmor radius effects on test-particle diffusion in frozen random field», in "Book of Abstracts, International conference-school on plasma physics and controlled fusion": Kharkiv, Ukraine, September 15-18, 2014 (2014), p. 62.
- [66] О. Черняк та В. Засенко, «Динаміка підансамблів замагнічених частинок у випадковому електричному полі», укр., в "Програма. Збірник анотацій. Спсиок учасників, Українська конференція з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу": Київ, Україна, Вересня 22-23, 2015 (2015), с. 36.
- [67] O. Cherniak, V. Zasenکو, and A. Zagorodny, «Finite larmor radius effects on turbulent transport of test-particles», in "Book of Abstracts, International conference-school on plasma physics and controlled fusion": Kharkiv, Ukraine, September 12-15, 2016 (2016), p. 82.
- [68] О. Черняк та В. Засенко, «Перенесення частинок у випадковому полі зі скінченним часом кореляції», укр., в "Тези доповідей, 24 Щорічна наукова конференція інституту ядерних досліджень НАН України": Київ, Україна, Квітня 10-13, 2017 (2017), с. 183.
- [69] O. Cherniak and V. Zasenکو, «Test-particle diffusion in random electric field», in "Book of Abstracts, 14-th Kudowa Summer School "Towards Fusion Energy"": Kudowa-Zdroj, Poland, June 4-8, 2018 (2018), p. 56.