

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ ІМ. М. М. БОГОЛЮБОВА

На правах рукопису

Міщенко Юрій Анатолійович

УДК 530.145, 539.1, 539.1.01, 539.12.01

**РЕАЛІЗАЦІЯ КОМПОЗИТНИХ КВАЗИБОЗОНІВ
ДЕФОРМОВАНИМИ ОСЦИЛЯТОРАМИ**

01.04.02 — теоретична фізика

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Гаврилик Олександр Михайлович,
доктор фізико-математичних наук,

Київ — 2013

ЗМІСТ

ВСТУП	4
РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ	10
1.1 Складені (комполитні) частинки чи квазичастинки	10
1.2 Заплутаність станів складених квазибозонів	15
1.3 Концепція деформованих осциляторів	17
1.4 Моделювання складених (квази)частинок деформованими осциляторами	20
1.5 Інші застосування деформованих осциляторів	21
РОЗДІЛ 2 РЕАЛІЗАЦІЯ КВАЗИБОЗОНІВ q-БОЗОНАМИ	22
2.1 Квазибозони, складені з двох ферміонів чи двох бозонів . . .	22
2.1.1 Алгебра операторів складених квазибозонів	22
2.1.2 Чи можуть деформовані осцилятори Аріка-Куна реалізувати квазибозони?	25
2.1.3 Умови реалізованості квазибозонів деформованими осциляторами	27
2.1.4 Необхідні умови на $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$ та $\phi(n)$, розв'язок їх для $\phi(n)$	28
2.1.5 Оператор числа квазибозонів та відповідні умови . .	32
2.1.6 Загальний розв'язок для матриць Φ_α	35
2.2 Квазибозони, складені з двох q -ферміонів	38
2.2.1 Умови реалізації	38
2.2.2 Розв'язок умов реалізації	42
2.3 Висновки до розділу 2	47
РОЗДІЛ 3 ЗАСТОСУВАННЯ РЕАЛІЗАЦІЇ КВАЗИБОЗОНІВ q-БОЗОНАМИ ДО ЗАПЛУТАНИХ СТАНІВ	50

3.1	Міри заплутаності та зв'язок із параметром деформації . . .	50
3.1.1	Квазибозон як заплутана двочастинкова система . . .	50
3.1.2	Міри заплутаності всередині одного квазибозона . . .	51
3.1.3	Заплутаність у мультиквазибозонних станах, включаючи когерентні	54
3.2	Залежність ентропії заплутаності від енергії станів для систем складених бозонів (квазибозонів)	58
3.2.1	Залежність ентропії заплутаності від енергії у випадку одного складеного бозона (квазибозона).	59
3.2.2	Ентропія заплутаності як функція від енергії для мультиквазибозонних станів в т.ч. когерентних станів	60
3.3	Залежність інших мір (характеристик) заплутаності від енергії	65
3.4	Висновки до розділу 3	69
РОЗДІЛ 4 ТОЧНІ ВИРАЗИ ДЛЯ ІНТЕРСЕПТІВ r-ЧАСТИНКОВИХ КОРЕЛЯЦІЙНИХ ФУНКЦІЙ В МОДЕЛІ μ-БОЗЕ ГАЗУ		72
4.1	Вивід точних виразів для інтерсептів кореляційних функцій в моделі μ -Бозе газу	72
4.2	Часткові випадки та порівняння з результатами інших моделей деформованого Бозе-газу	79
4.3	Висновки до розділу 4	83
ВИСНОВКИ		85
ДОДАТКИ		87
A	Доведення твердження 2.2	87
B	Доведення твердження 2.3	88
C	Часткові приклади: $\mu, \nu = 1$ та $\mu, \nu = \overline{1, 2}$	89
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ		95

ВСТУП

Актуальність теми. Концепція складених (композитних) бозонів чи *квазибозонів*, до яких належать частинки або квазичастинки, утворені з двох чи більше структурних елементів, є дуже важливою в сучасній квантовій теорії. Наприклад, мезони, екситони, куперони, позитроній, деякі ядра, атоми та молекули є складеними бозонами. Складені бозони не є звичайними бозонами (тому – термін “квазибозони”), оскільки комутаційні співвідношення їх операторів народження та знищення відрізняються від бозонних, тому кількісний опис відповідних систем є досить складним. Як один із методів наближеного чи ефективного опису систем таких квазибозонів можна використати реалізацію квазибозонних операторів народження, знищення та кількості частинок відповідними операторами деформованих осциляторів. Останні, як відомо, належать до квантових (деформованих) алгебр.

Відмітимо, що з відкриттям квантових груп і квантових алгебр в середині 80-х років з’явилися нові можливості для опису різних систем (як правило із нелінійностями) в ядерній фізиці, квантовій теорії поля, теорії конденсованого стану, статистичній фізиці. Із квантовими алгебрами пов’язані деформовані алгебри бозонних/ферміонних операторів, різноманітні варіанти яких мають широкий спектр застосування. Квантова q -деформована бозонна алгебра у версії Аріка-Куна була використана Аванчіні та Крейнном [1] при квантовому описі систем бозе-частинок для врахування нетривіальної внутрішньої структури (і власного об’єму) цих частинок і побудови відповідної однопараметрично деформованої моделі Бозе-газу. З іншого боку, в роботі Скарфоне та Нараяна Свами [2] деформована квантова алгебра була використана для еквівалентного опису системи взаємодіючих бозе-частинок в термінах невзаємодіючих, але модифікованих частинок,

яким відповідають деформовані комутаційні співвідношення.

Використання для реалізації квазібозонів тих чи інших деформованих осциляторів (деформованих бозонів) є дуже бажаним, оскільки воно приводить до значного спрощення відповідних обчислень, коли алгебра, що описує вихідну систему композитних частинок, зводиться до алгебри деякого деформованого осцилятора. В цьому сенсі інформацію про внутрішню структуру частинок вже несуть у собі один чи декілька параметрів деформації.

До цього часу вже були спроби [1, 3–9] описувати системи частинок із внутрішньою структурою за допомогою q -деформованих та інших деформацій алгебр/осциляторів, але залишались невідомими умови точного представлення алгебри складених частинок деформованими алгебрами, а також ступінь наближення до ідеальних бозонів при такому ефективному описі. Дисертація присвячена встановленню та явній побудові точного алгебраїчного представлення алгебри операторів народження, знищення та кількості частинок складених бозонів відповідними операторами деформованих алгебр, а також деяким їх застосуванням.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Результати, що увійшли в дисертаційну роботу, були отримані в рамках планової наукової тематики відділу математичних методів в теоретичній фізиці Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України (тема “Методи теорії симетрій і проблеми нелінійної динаміки в сучасній теорії поля та теорії елементарних частинок”, 2007–2011рр., шифр 1.4.7, № держ. реєстрації 0106U007885 і тема “Нелінійні квантові осцилятори, інтегровні моделі та квантово-польові системи: симетрії і застосування”, 2012–2016рр., шифр 1.4.1, № держ. реєстрації 0112U000052).

Мета і задачі дослідження. Метою дослідження є побудова всіх можливих реалізацій (представлень) алгебри операторів двочастинкових

складених бозонів в термінах алгебри деформованих осциляторів чи деформованих бозонів.

Виділимо наступні задачі дослідження:

- Побудувати представлення (реалізацію) композитних квазібозонів, складених із звичайних двох ферміонів чи двох бозонів, за допомогою деформованих бозонів. Отримати умови на хвильові функції компонент складеного бозона, при яких можлива реалізація, а також знайти можливі типи деформації алгебри деформованих бозонів. Розв'язати отримані умови.
- Побудувати представлення (реалізацію) композитних квазібозонів, складених із двох q -ферміонів. Отримати умови на хвильові функції компонент, на структурну функцію деформації, та розв'язати їх.
- Застосувати побудовану реалізацію до заплутаних станів складених бозонів: (i) обчислити міри заплутаності станів (ранг Шмідта, число Шмідта, ентропію заплутаності, конкурентність), виразивши їх через параметр деформації; (ii) знайти залежність ентропії заплутаності квазібозонних станів від їх енергії.
- Як застосування деформованих осциляторів до статистичних систем – знайти точні вирази для інтерсептів r -частинкових кореляційних функцій в моделі μ -Бозе газу

Об'єктом дослідження можна вважати систему складених бозонів у формалізмі вторинного квантування.

Предмет дослідження – побудова алгебраїчного представлення чи реалізації.

Методи дослідження. В роботі використовувались:

- методи квантової механіки і статистичної фізики: складені квазібозони та їх компоненти розглянуто в рамках формалізму вторинного квантування, тобто через оператори народження/знищення/числа

- частинок;
- деякі факти і твердження з теорії представлень – при виведенні умов реалізації складених квазибозонів;
 - методи теорії лінійних операторів і відображень – при розв’язанні умов реалізації;
 - методи квантової теорії інформації – при визначенні мір заплутаності квазибозонних станів;
 - елементи теорії спеціальних функцій.

Наукова новизна одержаних результатів. В роботі вперше отримано умови та набір хвильових функцій складених квазибозонів, які забезпечують алгебраїчну реалізацію двоферміонних чи двобозонних квазибозонів деформованими осциляторами. Доведено, що єдино можливим типом деформації для реалізації деформованими осциляторами є деформація із квадратичною структурною функцією. Результати узагальнюються на випадок q -деформованих складових.

Вперше вдалось пов’язати параметр деформації та міри заплутаності в квазибозонних станах і знайти для цих станів залежність ентропії заплутаності від енергії.

Отримано точні вирази (також вперше, як уточнення і узагальнення вже існуючих результатів) для інтерсептів r -частинкових кореляційних функцій в моделі деформованого μ -Бозе газу

Практичне значення одержаних результатів. Отримані результати мають теоретичний характер. Вони можуть бути застосовані при поясненні експериментів із системами складених бозонів чи їх заплутаними станами (останнє стосується квантової теорії інформації). Реалізація складених бозонів деформованими осциляторами, можливо із деякими видозмінами, може бути застосована до опису характеристик системи екситонів, зокрема їх спектрів, а також і мезонів.

Результати щодо застосування отриманої реалізації до заплутаних станів квазібозонів (обчислення мір заплутаності тощо) можуть бути використані в експериментах в контексті квантової теорії інформації із дво-частинковими заплутаними станами (на які можна дивитися як на стани квазібозонів). Це може стосуватися, наприклад, напрямків: квантової комунікації, квантової криптографії, квантового щільного кодування, квантової телепортації, обміну заплутаністю, та ін. Залежність ентропії заплутаності та чистоти від енергії може знайти практичне значення в експериментах з виробництва, підсилення або створення заплутаності, додаванням/вилученням частинок, квантових процесів дисоціації. Модель деформованого μ -Бозе газу застосовується для опису кореляцій π -мезонів при ядерних зіткненнях.

Особистий внесок здобувача. Здобувачем отримані наступні результати, представлені в дисертації та відповідних публікаціях. В задачі з реалізації складених квазібозонів деформованими осциляторами [10, 11] умови такої реалізації отримано з аналізу дії алгебраїчних співвідношень для операторів деформованих осциляторів на станах квазібозонів. Умови реалізації розв'язано та знайдено структурну функцію деформованих осциляторів і хвильові функції квазібозонів, які забезпечують реалізацію. Також знайдені можливі визначення оператора числа деформованих осциляторів через оператори народження та знищення.

Для заплутаного стану одного квазібозона [12] обраховано міри дво-компонентної заплутаності: число Шмідта, ранг Шмідта, чистоту (purity), ентропію заплутаності та конкурентність. Проведено узагальнення визначення двокомпонентної заплутаності на випадок мультиквазібозонних станів та отримано загальні вирази для числа Шмідта і ентропії заплутаності. Для різних випадків фоківських та когерентного мультиквазібозонних станів знайдено число Шмідта та ентропію заплутаності як функції пара-

метра деформації [12]. Окремо знайдено залежність ентропії заплутаності від енергії для вищезгаданих станів [13].

В моделі деформованого μ -Бозе газу [14] обчислено точні вирази для інтерсептів r -частинкових ($r \geq 2$) імпульсних кореляційних функцій.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались на семінарі відділу математичних методів в теоретичній фізиці в ІТФ ім. М.М. Боголюбова та на конференціях: The IV International Symposium “High Energy Physics, Cosmology and Gravity”, October 18-23, 2010, Kyiv, Ukraine; Наукова конференція “Боголюбівські читання”, 13-15 грудня 2010 р., м. Київ; Міжнародна конференція молодих вчених “Сучасні проблеми теоретичної фізики”, 22-24 грудня 2010 р., м. Київ; II Міжнародна наукова конференція молодих вчених “Фізика низьких температур”, 6-10 червня 2011 р., м. Харків; Міжнародна конференція молодих вчених “Сучасні проблеми теоретичної фізики”, 21-23 грудня 2011 р., м. Київ; III Міжнародна наукова конференція молодих вчених “Фізика низьких температур”, 14-18 травня 2012 р., м. Харків; Міжнародна конференція молодих вчених “Сучасні проблеми теоретичної фізики”, 23-26 жовтня 2012 р., м. Київ; Міжнародна конференція молодих учених і аспірантів ІЕФ-2013, 20-23 травня 2013 р., м. Ужгород; XIII Всеукраїнська школа-семінар і Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, 5-7 червня 2013 р., м. Львів.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 12 роботах, із них 5 журнальних публікацій [10–14] та 7 тез доповідей, зроблених на наукових конференціях [15–21].

Структура дисертації. Робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 125 найменувань, та додатків. Обсяг дисертації становить 109 сторінок машинописного тексту із врахуванням 18 рисунків.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1 Складені (комполитні) частинки чи квазичастинки

Складені (або комполитні) частинки/квазичастинки розглядалися в багатьох роботах з фізики твердого тіла, у статистичній фізиці, ядерній фізиці, квантовій теорії інформації, та інших розділах фізики. В деяких роботах, наприклад в [1], були розглянуті властивості комполитної структури складених (квази)частинок, а також їх наближений опис q -деформованими осциляторами. Перелічимо спочатку основні роботи, де складені (квази)частинки розглядалися виключно в рамках комполитного представлення, хоча і без використання деформованих осциляторів.

В роботі [22] аналізувалася статистика разом із комутаційними співвідношеннями для двоферміонних складених квазібозонів. Оператори народження та знищення квазібозонів у великому але скінченному об'ємі із періодичними граничними умовами були представлені у вигляді

$$A_{\mathbf{p}}^{\dagger} = \sum_{\mathbf{k}} F(\mathbf{k}) a_{\mathbf{p}/2+\mathbf{k}}^{\dagger} b_{\mathbf{p}/2-\mathbf{k}}^{\dagger}, \quad A_{\mathbf{p}} = \sum_{\mathbf{k}} F^{\dagger}(\mathbf{k}) b_{\mathbf{p}/2-\mathbf{k}} a_{\mathbf{p}/2+\mathbf{k}}, \quad (1.1.1)$$

де $a_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}$ – оператори знищення для складових ферміонів. Тоді комутаційні співвідношення на квазібозонні оператори відрізняються від стандартних бозонних співвідношень додатковим членом $\Delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}$:

$$\begin{aligned} [A_{\mathbf{p}}^{\dagger}, A_{\mathbf{p}'}^{\dagger}] &= 0, \quad [A_{\mathbf{p}}, A_{\mathbf{p}'}] = 0, \quad [A_{\mathbf{p}}, A_{\mathbf{p}'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} - \Delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}, \\ \Delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} &= \sum_{\mathbf{k}} F^{\dagger}(\mathbf{k}) [F(\mathbf{p}'/2 - \mathbf{p}/2 + \mathbf{k}) a_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'/2-\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}'/2-\mathbf{k}} + \\ &\quad + F(\mathbf{p}/2 - \mathbf{p}'/2 + \mathbf{k}) b_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'/2+\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}'/2+\mathbf{k}}]. \end{aligned}$$

В результаті, теорема про зв'язок спіна зі статистикою вже не буде виконуватись для складених квазібозонів.

Складені частинки у формалізмі вторинного квантування аналізувались за допомогою різних методів, див. наприклад роботу [23] та посилання всередині роботи. Особливо відмітимо метод Фока-Тані [24–28], де за допомогою унітарного перетворення робиться перехід від операторів складених бозонів до звичайних бозонних операторів і записується гамільтоніан вже в термінах останніх. При цьому всі ускладнення, пов'язані із композитною структурою, змістяться в бік ефективного гамільтоніана. Якщо оператор народження складеного бозона (в роботі [27] розглядались π -мезони в якості двокомпонентних квазібозонів) записаний у вигляді $A_\alpha^\dagger = \sum_{\mu\nu} \Phi_\alpha^{\mu\nu} a_\mu^\dagger b_\nu^\dagger$, то основні риси перетворення Фока-Тані наступні:

1. Над станами $|\Omega\rangle$ та операторами O системи складених квазібозонів виконується унітарне перетворення U , так що

$$|\Omega\rangle \rightarrow |\Omega\rangle = U^{-1}|\Omega\rangle, \quad O \rightarrow O_{FT} = U^{-1}OU. \quad (1.1.2)$$

Через $|\Omega\rangle$ та O_{FT} позначено відповідні величини в новому представленні.

2. Перетворення визначено таким чином, що одноквазібозонному стану $|\alpha\rangle = A_\alpha^\dagger|0\rangle$ відповідає стан звичайного бозона,

$$|\alpha\rangle \rightarrow |\alpha\rangle = U^{-1}|\alpha\rangle = A_\alpha^{(FT)\dagger}|0\rangle, \quad (1.1.3)$$

$$[A_\alpha^{(FT)}, A_\beta^{(FT)\dagger}] = \delta_{\alpha\beta}, \quad [A_\alpha^{(FT)}, A_\beta^{(FT)}] = 0. \quad (1.1.4)$$

При цьому, оператори $A_\alpha^{(FT)}$, $A_\alpha^{(FT)\dagger}$ та оператори складових a_μ , b_ν повинні бути кінематично незалежні, тобто

$$[a_\mu, A_\alpha^{(FT)}] = [a_\mu, A_\alpha^{(FT)\dagger}] = [b_\nu, A_\alpha^{(FT)}] = [b_\nu, A_\alpha^{(FT)\dagger}] = 0. \quad (1.1.5)$$

3. Мультиквазібозонний стан $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\rangle$, побудований із добре розділених хвильових пакетів (без перекриття), переходить в мультибозонний стан $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\rangle = A_{\alpha_1}^{(FT)\dagger} \cdot A_{\alpha_2}^{(FT)\dagger} \dots A_{\alpha_n}^{(FT)\dagger}|0\rangle$.

4. Якщо задано мікроскопічний гамільтоніан H системи складених квазибозонів, тоді гамільтоніан H_{FT} у представленні Фока-Тані записується у вигляді

$$H_{FT} = U^{-1} H U \equiv H_{FT}^{(0)} + V_{FT}, \quad (1.1.6)$$

де $H_{FT}^{(0)}$ – частина без врахування взаємодії, а V_{FT} відповідає за міжквазибозонну взаємодію, та взаємодію зі складовими.

В оригінальному формулюванні методу перетворення здійснюється за допомогою оператора

$$U = \exp\left(-\frac{\pi}{2} F\right), \quad (1.1.7)$$

де генератор перетворення F задається рівністю

$$F = \sum_{\alpha} A_{\alpha}^{(FT)\dagger} A_{\alpha} - A_{\alpha}^{\dagger} A_{\alpha}^{(FT)}. \quad (1.1.8)$$

Для узагальненого перетворення Фока-Тані генератор F має наступний вигляд

$$F = \sum_{\alpha} A_{\alpha}^{(FT)\dagger} O_{\alpha} - O_{\alpha}^{\dagger} A_{\alpha}^{(FT)}, \quad [O_{\alpha}, O_{\beta}^{\dagger}] = \delta_{\alpha\beta}, \quad [O_{\alpha}, O_{\beta}] = 0. \quad (1.1.9)$$

Оператор O_{α} можна представити у вигляді розкладу

$$O_{\alpha} = A_{\alpha} + \sum_{\beta} \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} A_{\beta} - \sum_{\beta\gamma} \frac{1}{2} A_{\beta}^{\dagger} [\Delta_{\beta\gamma}, A_{\alpha}] A_{\gamma} + \dots \quad (1.1.10)$$

Маючи явний вигляд для перетворення Фока-Тані операторів як розв'язок рівнянь (1.1.2), (1.1.7) та (1.1.8) або (1.1.9), можемо записати структуру гамільтоніана у представленні Фока-Тані таким чином

$$H_{FT} = \sum_{\alpha\beta} \overline{\Phi_{\alpha}^{\mu\nu}} H(\mu, \nu; \mu', \nu') \Phi_{\beta}^{\mu'\nu'} A_{\alpha}^{(FT)\dagger} A_{\beta}^{(FT)} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} V(\alpha, \beta; \gamma, \delta) A_{\alpha}^{(FT)\dagger} A_{\beta}^{(FT)\dagger} A_{\gamma}^{(FT)} A_{\delta}^{(FT)} + H_{ab}[a_{\mu}, b_{\nu}] + H_{A,ab}[A_{\alpha}^{(FT)}, a_{\mu}, b_{\nu}].$$

Перевага використання операторів в представленні Фока-Тані в тому, що оператори народження та знищення задовольняють канонічні комутаційні співвідношення.

В інших роботах, М. Комбескот та співавтори розвинули спеціальний формалізм для багаточастинкових систем складених бозонів [29–32], який базується на представленні фізичних величин у вигляді рядів по операторах складених бозонів, та використанні діаграм для опису взаємодії. Перелічимо основні положення даного формалізму. Оператори народження складених бозонів як і раніше записуємо у вигляді $A_\alpha^\dagger = \sum_{\mu\nu} \Phi_\alpha^{\mu\nu} a_\mu^\dagger b_\nu^\dagger$. Мають місце наступні комутаційні співвідношення для операторів народження та знищення складених бозонів:

$$[A_\alpha, A_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta}, \quad (1.1.11)$$

$$[\Delta_{\alpha\beta}, A_\gamma^\dagger] = \sum_\delta \left[\lambda \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \right] A_\delta^\dagger. \quad (1.1.12)$$

Коефіцієнти $\lambda \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ відповідають ферміонному обміну при взаємодії двох складених бозонів і задаються виразом

$$\lambda \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \text{Tr}(\Phi_\gamma \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\beta \Phi_\delta^\dagger). \quad (1.1.13)$$

Для комутатора гамільтоніана системи складених бозонів H з оператором A_α^\dagger у випадку коли стан $|\alpha\rangle = A_\alpha^\dagger|0\rangle$ є власним станом гамільтоніана із енергією E_α , $H|\alpha\rangle = E_\alpha|\alpha\rangle$, маємо

$$[H, A_\alpha^\dagger] = E_\alpha A_\alpha^\dagger + V_\alpha^\dagger, \quad (1.1.14)$$

$$[V_\alpha^\dagger, A_\beta^\dagger] = \sum_{\gamma\delta} \xi \begin{pmatrix} \delta & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} A_\gamma^\dagger A_\delta^\dagger. \quad (1.1.15)$$

Коефіцієнти $\xi \begin{pmatrix} \delta & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$ відповідають взаємодії двох складених бозонів, яка пов'язана із безпосередньою взаємодією їх компонентів:

$$\xi \begin{pmatrix} \delta & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} = \sum_{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2} \overline{\Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1}} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} \overline{\Phi_\delta^{\mu_2\nu_2}} \Phi_\beta^{\mu_2\nu_2} [V_{\mu_1\mu_2}^{(aa)} + V_{\nu_1\nu_2}^{(bb)} + V_{\mu_1\nu_2}^{(ab)} + V_{\mu_2\nu_1}^{(ab)}], \quad (1.1.16)$$

де $V_{\mu_1\mu_2}^{(aa)}$, $V_{\nu_1\nu_2}^{(bb)}$, ..., $V_{\mu_2\nu_1}^{(ab)}$ – матричні елементи енергії взаємодії між складовими відповідно типів a та a , b та b , a та b (наприклад кулонівського потенціалу). Процедуру обчислень згідно даного формалізму можемо сформулювати таким чином:

1. Будь-яку фізичну величину для системи двоферміонних складених бозонів можна записати через матричні елементи типу

$$\langle 0 | b_{\nu_1} a_{\mu_1} \dots b_{\nu_N} a_{\mu_N} f(H) a_{\mu'_1}^\dagger b_{\nu'_1}^\dagger \dots a_{\mu'_N}^\dagger b_{\nu'_N}^\dagger | 0 \rangle, \quad (1.1.17)$$

де $f(H)$ – функція гамільтоніана системи. Використовуючи зв'язок між вільними ферміонними парами та квазибозонами,

$$a_\mu^\dagger b_\nu^\dagger = \sum_\alpha \overline{\Phi_\alpha^{\mu\nu}} A_\alpha^\dagger, \quad (1.1.18)$$

матричний елемент (1.1.17) можна записати через матричні елементи на N -квазибозонних станах,

$$\langle 0 | A_{\alpha_N} \dots A_{\alpha_1} f(H) A_{\alpha'_1}^\dagger \dots A_{\alpha'_N}^\dagger | 0 \rangle. \quad (1.1.19)$$

2. Щоб обчислити ці матричні елементи спочатку $f(H)$ проноситься направо до вакуумного стану за допомогою комутатора $[f(H), A_\alpha^\dagger]$. Останній комутатор можна отримати використовуючи (1.1.14). В результаті такої процедури з'являються оператори V_α^\dagger , які потім видаляються перенесенням направо з використанням (1.1.15) та рівності $V_\alpha^\dagger | 0 \rangle$.
3. Як тільки $f(H)$ та всі V_α^\dagger видалені із матричного елемента (1.1.19), залишається добуток коефіцієнтів $\xi \begin{pmatrix} \delta & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$ та скалярні добутки N -квазибозонних станів типу

$$\langle 0 | A_{\alpha_N} \dots A_{\alpha_1} A_{\alpha'_1}^\dagger \dots A_{\alpha'_N}^\dagger | 0 \rangle. \quad (1.1.20)$$

Щоб обчислити такі скалярні добутки оператори знищення переносяться направо використовуючи комутатори (1.1.11)-(1.1.12).

4. Дана процедура дозволяє записати будь-яку фізичну величину для системи N складених бозонів як суму добутків коефіцієнтів $\lambda\left(\begin{smallmatrix} \delta & \gamma \\ \alpha & \beta \end{smallmatrix}\right)$ та $\xi\left(\begin{smallmatrix} \delta & \beta \\ \gamma & \alpha \end{smallmatrix}\right)$. Ці добутки зазвичай досить складні і рахуються за допомогою діаграм спеціального типу (діаграм Шива та Калі).

До складених квазібозонів належать такі (квази)частинки як мезони, екситони, біфотони, біфонони, куперони, дікварки, атом водню та ін. Мезони та баріони були розглянуті в роботах [26, 27], де враховувалась їх міжчастинкова взаємодія. Оператори народження мезонів та баріонів через оператори народження кварків записувались відповідно у вигляді

$$M_{\alpha}^{\dagger} = \Phi_{\alpha}^{\mu\nu} q_{\mu}^{\dagger} \bar{q}_{\nu}^{\dagger}, \quad B_{\alpha}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{3!}} \Phi_{\alpha}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} q_{\mu_1}^{\dagger} q_{\mu_2}^{\dagger} q_{\mu_3}^{\dagger}. \quad (1.1.21)$$

Екситони з точки зору виключно композитного підходу були розглянуті в [29, 33–37]. Стосовно атома водню див. роботу [38], мультифотонів (біфотонів та ін.) – [39–42], мультифононів – роботи [43, 44], дікварків – роботи [45–47].

1.2 Заплутаність станів складених квазібозонів

Двочастинкові складені квазібозони та їх стани розглядались також в контексті заплутаності їх компонент. Відмітимо перш за все огляди [48–50], де заплутані стани вивчались не тільки в межах квантової теорії інформації, але й в застосуванні до багаточастинкових систем та атомної і молекулярної фізики. В квантовій теорії інформації використовуються як правило заплутані фотони (біфотони, мультифотони), хоча, крім того, можуть використовуватись і заплутані стани атомів, іонів, заплутані ансамблі світла з атомами, та ін. Серед досить відомих застосувань заплутаних станів відмітимо наступні [49]:

- в квантовій криптографії – генерація квантового ключа, що базується на заплутаності;

- квантове щільне кодування – передача більшої кількості інформації за допомогою спеціально сконструйованих заплутаних станів;
- квантова телепортація – квантовий стан переноситься з одного місця в інше (а не копіюється);
- обмін заплутаністю – стани двох підсистем, які ніколи не взаємодіяли, можна зробити заплутаними без безпосередньої дії на них;
- подолання границь складності класичної комунікації за допомогою заплутаності – передача меншої кількості інформації для розв’язання певної задачі у порівнянні з класичним випадком.

Заплутані стани в неперервних змінних розглядались в роботах [51–53]. В якій мірі складений бозон можна наближати звичайним бозоном в залежності від заплутаності компонент було розглянуто в роботах [54, 55]. Якщо через $\chi(N)$ позначити наступну величину, яка характеризує відхилення від бозонності, $\chi_N = \frac{1}{N!} \langle 0 | (A_\alpha)^N (A_\alpha^\dagger)^N | 0 \rangle$, тоді виконується оцінка

$$1 - NP \leq \frac{\chi_{N+1}}{\chi_N} \leq 1 - P, \quad (1.2.1)$$

де P – чистота (purity) квазибозонного заплутаного стану.

Відмітимо, що досить важливо знати, як зміна енергії системи впливає на квантові статистичні властивості та на квантові кореляції, в т.ч. на заплутаність для системи, що розглядається. Як відомо, характеристики заплутаності між складовими квазибозона, які визначають ступінь наближення квазибозона до бозона [54–57], та їх залежність від енергії мають значення в дослідженнях по квантовій теорії інформації: в квантовій комунікації, генерації заплутаності [58], квантових процесах дисоціації [59], додаванні чи вилученні частинок взагалі і в проблемі телепортації [60, 61], та ін. Знання залежності від енергії характеристик квантових кореляцій напр. ентропії заплутаності або чистоти дозволяє пов’язати останні з енергетичним рівнем збудження, який може бути виміряний на експериментах, див. наприклад [59, 62, 63]. Зауважимо, що залежність між заплутаністю

та енергією для складених бозонів обговорювалась в [64, 65], для кубітів – в [66, 67] і для спінових систем – в [68].

1.3 Концепція деформованих осциляторів

– *Одномодовий випадок.* Деформовані осцилятори (ДО) активно використовуються з кінця 1980-х. Визначення ДО на основі їх структурної функції деформації $\phi(N)$ та основні властивості наведені, напр., в [5, 69–71]. Одномодовий ДО є нелінійним узагальненням звичайного квантового гармонічного осцилятора: якщо для звичайного осцилятора оператори народження a^\dagger , знищення a та чисел заповнення N пов'язані як $a^\dagger a = N$, $aa^\dagger = N + 1$, то для ДО вони модифікуються (деформуються) згідно $a^\dagger a = \phi(N)$, $aa^\dagger = \phi(N + 1)$. Таким чином, *узагальнений ДО* визначений через алгебру, згенеровану операторами $\{1, a, a^\dagger, N\}$, які задовольняють співвідношення

$$[N, a] = -a, \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger, \quad (1.3.1)$$

$$a^\dagger a = \phi(N) \equiv [N], \quad aa^\dagger = \phi(N + 1) \equiv [N + 1]. \quad (1.3.2)$$

Комутаційні/антикомутаційні співвідношення при цьому модифікуються наступним чином:

$$[a, a^\dagger] = [N + 1] - [N], \quad \{a, a^\dagger\} = [N] + [N + 1]. \quad (1.3.3)$$

Фоківський базис складається із векторів

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{[n]!}} (a^\dagger)^n |0\rangle, \quad [n]! \equiv [n] \cdot \dots \cdot [1]. \quad (1.3.4)$$

Генератори a^\dagger та a є підвищуючим та понижуючим операторами, і задовольняють модифіковані співвідношення

$$a|n\rangle = \sqrt{[n]}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{[n+1]}|n+1\rangle. \quad (1.3.5)$$

В залежності від $\phi(N)$ розрізняють багато типів деформованих осциляторів. До відомих та добре вивчених деформованих осциляторів належать:

1. q -деформовані осцилятори типу Аріка-Куна (АК) [72]; для них $\phi(N) = \frac{q^N - 1}{q - 1}$.
2. q -деформовані осцилятори типу Біденгарна-Макферлейна (БМ) [73, 74]; для них $\phi(N) = \frac{q^N - q^{-N}}{q - q^{-1}}$.
3. q -осцилятори типу Тама-Данкова [75–77]; для них $\phi(N) = Nq^{N-1}$.
4. Двох-параметричний p, q -деформований осцилятор [78, 79]; для нього $\phi(N) = \frac{q^N - p^{-N}}{q - p^{-1}}$.
5. q -ферміонний осцилятор; для нього $\phi(N) = q^{N-1} \sin^2 \pi N/2$.
6. Узагальнений q -деформований ферміонний осцилятор; для нього $\phi(N) = \frac{1 - (-q)^N}{1 + q}$.
7. Параферміонний осцилятор; для нього $\phi(N) = N(p + 1 - N)$.

Зауважимо, що перші шість типів ДО належать до класу осциляторів Фібоначчі [79] (тобто таких, що їх структурна функція $\phi(n)$ задовольняє трьохчленні рекурентні співвідношення типу Фібоначчі із постійними коефіцієнтами). З іншого боку, так званий μ -деформований осцилятор, структурна функція якого $\phi(N) = \frac{N}{1 + \mu N}$, є набагато менше вивченим. Введений в [80] Янусісом майже два десятиліття тому цей ДО істотно відрізняється від щойно згаданих моделей: він представляє клас так званих ДО типу квазі-Фібоначчі [81] і проявляє досить незвичайні властивості [82].

– *Багатомодовий випадок.* В контексті багатомодового випадку згадаємо про куонну [83] версію алгебри деформованих осциляторів, одна мода яких є звичайним q -деформованим осцилятором. Зауважимо, що у випадку двох або більше мод різні моди куонів не комутовують [1, 83]:

$$a_k a_l^\dagger - q a_l^\dagger a_k = \delta_{kl}. \quad (1.3.6)$$

Відмітимо, що на відміну від куонів деформовані осцилятори типу Аріка-Куна є незалежними [72, 84], тобто оператори, що відповідають різним

модам, взаємно комутують:

$$a_k a_l^\dagger - q^{\delta_{kl}} a_l^\dagger a_k = \delta_{kl}. \quad (1.3.7)$$

В рамках однієї моди (коли $k = l$) співвідношення (1.3.6) та (1.3.7) співпадають.

Окремо відмітимо клас деформованих осциляторів, моди яких коваріантні відносно квантової групи [85–92]. Якщо через Ψ_i позначити відповідні ферміонні/бозонні оператори, тоді умова коваріантності полягає в тому, що співвідношення на Ψ_i повинні бути коваріантними відносно перетворення $\Psi \rightarrow \Psi' = T\Psi$, де $N \in SU_q(N)$. В частковому випадку $SU_q(2)$ -коваріантної бозонної версії алгебри маємо

$$\begin{aligned} \Psi_2 \bar{\Psi}_2 - q^2 \bar{\Psi}_2 \Psi_2 &= 1, \\ \Psi_1 \bar{\Psi}_1 - q^2 \bar{\Psi}_1 \Psi_1 &= 1 + (q^2 - 1) \bar{\Psi}_2 \Psi_2, \\ \Psi_2 \Psi_1 &= q \Psi_1 \Psi_2, \\ \Psi_2 \bar{\Psi}_1 &= q \bar{\Psi}_1 \Psi_2, \end{aligned}$$

а у випадку $SU_q(2)$ -коваріантної ферміонної версії:

$$\begin{aligned} \{\Psi_2, \bar{\Psi}_2\} &= 1, \\ \{\Psi_1, \bar{\Psi}_1\} &= 1 - (1 - q^{-2}) \bar{\Psi}_2 \Psi_2, \\ \Psi_1 \Psi_2 &= -q \Psi_2 \Psi_1, \\ \bar{\Psi}_1 \Psi_2 &= -q \Psi_2 \bar{\Psi}_1, \\ \{\Psi_1, \Psi_1\} &= \{\Psi_2, \Psi_2\} = 0. \end{aligned}$$

$\mathfrak{gl}_q(n)$ -коваріантна алгебра була розглянута в роботі [93].

1.4 Моделювання складених (квази)частинок деформованими осциляторами

Складені (квази)частинки почали моделювати деформованими осциляторами в рамках феноменологічного підходу ще в роботах початку 1990-х. Див. наприклад роботи [1, 7], в яких деформовані осцилятори куонного типу були застосовані до моделювання систем двоферміонних складених бозонів та відповідної Бозе-Ейнштейнівської конденсації. При цьому комутаційні співвідношення на оператори народження та знищення складених бозонів, A_α^\dagger та A_α , моделюються/наближуються відповідними комутаційними співвідношеннями куонних операторів:

$$[A_\alpha, A_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta} \approx \delta_{\alpha\beta} - (1 - q)A_\beta^\dagger A_\alpha. \quad (1.4.1)$$

Для параметра деформації маємо оцінку [1], $1 - q \sim r_0^3/V$, де r_0 – характерний радіус складеного бозона, а V – загальний об’єм квазібозонної системи. Звідси впливає одна із інтерпретацій параметра деформації q як міри об’єму, зайнятого квазичастинкою. В [6, 94–96] деформовані осцилятори використовувались при описі молекул, та їх коливальних спектрів. Параметр деформації при цьому можна пов’язати із енергією дисоціації молекул. З точки зору застосування в ядерній фізиці до нуклонів та парних ядер – див. [4, 97]. В фізиці конденсованого стану q -деформовані осцилятори були використані при моделюванні екситонів [8, 9, 98].

Слід зауважити, що з деформованими осциляторами тісно пов’язані так звані нестандартні статистики в теорії конденсованого стану і квантовій теорії поля, до яких можна віднести вже згадані куонні [97], еніонні [99–101], параферміонні [102–105] та інші екзотичні статистики.

1.5 Інші застосування деформованих осциляторів

Окрім моделювання складених (квази)частинок деформовані осцилятори знаходять різноманітні застосування при описі фізичних систем, що містять істотні нелінійності, від, скажімо, квантової оптики [70] та проблеми Ландау до феноменології високо-енергетичних частинок та сучасної квантової теорії поля, див. наприклад [3, 106]. Більш детально, деформовані осцилятори ефективно використовувались при вивченні фононного спектру в ${}^4\text{He}$ [107, 108], Бозе-Ейнштейнівської конденсації [7, 109], частинок із нестандартною статистикою [97], систем взаємодіючих частинок [2]. Термодинамічні аспекти деформованих Бозе-газів вивчались наприклад в [86, 110, 111]. В контексті n -частинкових кореляцій, деформовані осцилятори були застосовані в [82, 112–115] де було отримано відповідні інтерсепти кореляційних функцій (разом із їхніми асимптотиками) як функції параметра деформації.

РОЗДІЛ 2

РЕАЛІЗАЦІЯ КВАЗИБОЗОНІВ q -БОЗОНАМИ

2.1 Квазибозони, складені з двох ферміонів чи двох бозонів

В даному підрозділі розглядаємо багатомодову систему композитних квазибозонів, складених із двох ферміонів чи двох бозонів. Будуємо її алгебраїчну реалізацію (або представлення) деформованими осциляторами. Знаходимо хвильові функції складених квазибозонів, а також структурні функції деформованих осциляторів, при яких можлива реалізація складених квазибозонів деформованими осциляторами.

2.1.1 Алгебра операторів складених квазибозонів

Як і в роботі [1], розглядаємо систему композитних бозоноподібних частинок (чи квазибозонів, див. [22]), таких, що кожна їх копія/мода утворена з двох звичайних ферміонів чи двох звичайних бозонів. У цьому розділі ми вивчаємо реалізацію квазибозонів в термінах набору незалежних однакових копій деформованого осцилятора типу Аріка-Куна [72].

Позначимо оператори народження та знищення квазибозонних складових – двох звичайних ферміонів, чи двох звичайних бозонів – через a_{μ}^{\dagger} , b_{ν}^{\dagger} , a_{μ} , b_{ν} відповідно. До якого типу належать ці оператори будемо характеризувати величиною ϵ : $\epsilon = +1$ якщо складовими є ферміони, $\epsilon = -1$ якщо складовими є бозони. Далі відповідні два випадки ферміонних чи бозонних складових будемо розглядати об'єднаним чином використовуючи ϵ . Запишемо стандартні комутаційні співвідношення для складових,

$$\begin{aligned} [a_{\mu}, a_{\mu'}^{\dagger}]_{\epsilon} &\equiv a_{\mu} a_{\mu'}^{\dagger} + \epsilon a_{\mu'}^{\dagger} a_{\mu} = \delta_{\mu\mu'}, & [a_{\mu}, a_{\nu}]_{\epsilon} &= 0, \\ [b_{\nu}, b_{\nu'}^{\dagger}]_{\epsilon} &\equiv b_{\nu} b_{\nu'}^{\dagger} + \epsilon b_{\nu'}^{\dagger} b_{\nu} = \delta_{\nu\nu'}, & [b_{\mu}, b_{\nu}]_{\epsilon} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Крім того, кожен із операторів a_μ^\dagger , a_μ антикомутує/комутує з кожним із b_ν^\dagger , b_ν для $\epsilon = +1/-1$ відповідно. Отже, ми використовуємо ці ферміони щоб конструювати квазібозони. Тоді відповідні квазібозонні оператори народження та знищення A_α^\dagger , A_α (де α позначає моду квазібозона і пробігає весь набір його квантових чисел) задаються наступним чином

$$A_\alpha^\dagger = \sum_{\mu\nu} \Phi_\alpha^{\mu\nu} a_\mu^\dagger b_\nu^\dagger, \quad A_\alpha = \sum_{\mu\nu} \bar{\Phi}_\alpha^{\mu\nu} b_\nu a_\mu. \quad (2.1.2)$$

Умова ортонормованості квазібозонних станів, записана в термінах матриць Φ_α , має вигляд:

$$\sum_{\mu\nu} \Phi_\alpha^{\mu\nu} \bar{\Phi}_\beta^{\mu\nu} \equiv \text{Tr} \Phi_\alpha \Phi_\beta^\dagger = \delta_{\alpha\beta}.$$

Можна легко перевірити що

$$[A_\alpha, A_\beta] = [A_\alpha^\dagger, A_\beta^\dagger] = 0. \quad (2.1.3)$$

Для комутатора, що залишився, знаходимо [1]

$$[A_\alpha, A_\beta^\dagger] = \sum_{\mu\nu\mu'\nu'} \bar{\Phi}_\alpha^{\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu'\nu'} \left([a_\mu, a_{\mu'}^\dagger]_\epsilon b_\nu b_{\nu'}^\dagger - \epsilon a_{\mu'}^\dagger a_\mu [b_\nu, b_{\nu'}^\dagger]_\epsilon \right) = \delta_{\alpha\beta} - \epsilon \Delta_{\alpha\beta} \quad (2.1.4)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha\beta} &\equiv \sum_{\mu\nu\mu'} \bar{\Phi}_\alpha^{\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu'\nu} a_{\mu'}^\dagger a_\mu + \sum_{\mu\nu\nu'} \bar{\Phi}_\alpha^{\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu\nu'} b_{\nu'}^\dagger b_\nu = \\ &= \sum_{\mu\mu'} (\Phi_\beta \Phi_\alpha^\dagger)^{\mu'\mu} a_{\mu'}^\dagger a_\mu + \sum_{\nu\nu'} (\Phi_\alpha^\dagger \Phi_\beta)^{\nu\nu'} b_{\nu'}^\dagger b_\nu. \end{aligned}$$

Величина $\Delta_{\alpha\beta}$ в (2.1.4) відображає відхилення від чисто бозонних канонічних комутаційних співвідношень.

Виявляється, можливо знайти співвідношення на оператори A_α , A_β^\dagger замкнутого типу. Для цього знайдемо комутатор співвідношення (2.1.4) з оператором A_γ^\dagger :

$$[[A_\alpha, A_\beta^\dagger], A_\gamma^\dagger] = -\epsilon \sum_{\mu\nu} [(\Phi_\beta \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\gamma)^{\mu\nu} + (\Phi_\gamma \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\beta)^{\mu\nu}] a_\mu^\dagger b_\nu^\dagger. \quad (2.1.5)$$

Комутовуючи останню рівність із A_δ^\dagger отримуємо:

$$[[[A_\alpha, A_\beta^\dagger], A_\gamma^\dagger], A_\delta^\dagger] = 0. \quad (2.1.6)$$

Якщо стани $\{A_\alpha^\dagger|0\rangle\}$ є власними для ермітового оператора (наприклад, для гамільтоніана системи квазибозонів), тоді вони утворюють ортонормований базис в просторі одноквазибозонних станів. Оператори $a_\mu^\dagger b_\nu^\dagger$ при цьому можна виразити через A_δ^\dagger як лінійна комбінація із коефіцієнтами $\overline{\Phi_\delta^{\mu\nu}}$,

$$a_\mu^\dagger b_\nu^\dagger = \sum_\delta \overline{\Phi_\delta^{\mu\nu}} A_\delta^\dagger. \quad (2.1.7)$$

Підставляючи останній вираз в (2.1.5) отримуємо наступне співвідношення

$$[[A_\alpha, A_\beta^\dagger], A_\gamma^\dagger] = -\epsilon \sum_\delta C_\delta(\Phi) A_\delta^\dagger, \quad (2.1.8)$$

де коефіцієнти $C_\delta(\Phi)$ задані рівністю

$$C_\delta(\Phi) = \sum_{\mu\nu} [(\Phi_\beta \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\gamma)^{\mu\nu} + (\Phi_\gamma \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\beta)^{\mu\nu}] \overline{\Phi_\delta^{\mu\nu}}. \quad (2.1.9)$$

Зауваження 2.1. Чистий бозон (коли $\Delta_{\alpha\beta} = 0$) не є частковим випадком квазибозона, оскільки $\Delta_{\alpha\beta} = 0$ вимагало б $\Phi_\alpha = 0$, що заперечувало б саму композитну структуру (2.1.2) (детальне обґрунтування див. у розділі 2.1.6).

Зауваження 2.2. На відміну від реалізації квазибозонних операторів з використанням куонного варіанта алгебри деформованого осцилятора, як це робили в [1], у нашому подальшому розгляді різні копії/моди деформованого осцилятора є повністю незалежними. Тобто, ми вважатимемо, що виконується співвідношення, аналогічне (2.1.3), а також типу $[A_\alpha, A_\beta^\dagger] = 0$, при $\alpha \neq \beta$, на відповідні оператори деформованих осциляторів.

Найбільш простим типом деформованого осцилятора є q -деформований осцилятор Аріка-Куна [72]. Тому може бути цікавим в першу чергу спробувати використати набір q -деформованих бозонів для представлення системи незалежних квазибозонів.

2.1.2 Чи можуть деформовані осцилятори Аріка-Куна реалізувати квазібозони?

В даному розділі ми проаналізуємо реалізацію квазібозонів незалежним набором q -деформованих бозонів типу Аріка-Куна. Останні задовольняють співвідношення

$$[A_\alpha, A_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} + (q^{\delta_{\alpha\beta}} - 1)A_\beta^\dagger A_\alpha, \quad (2.1.10)$$

де незалежність мод забезпечується наявністю $\delta_{\alpha\beta}$.

Квазібозонний оператор числа частинок N_α визначаємо як

$$N_\alpha = \log_q (1 + (q - 1)A_\alpha^\dagger A_\alpha),$$

що є оберненням формули $A^\dagger A = \frac{q^N - 1}{q - 1}$, див. [72].

Нагадаємо, що для моделі Аріка-Куна виконуються також і співвідношення

$$[A_\alpha, N_\alpha] = A_\alpha, \quad [A_\alpha^\dagger, N_\alpha] = -A_\alpha^\dagger.$$

Тобто, якою б не була детальна структура оператора A_α^\dagger , він буде підвищувачим (відповідно, A_α – понижувачим) оператором для квазібозонів.

Нашою метою є знайти коефіцієнти $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$ в (2.1.2) такі, що реалізація через (2.1.10) є дійсною, тобто комутаційні співвідношення (2.1.10) виконуються на відповідному просторі станів. Якщо основний стан $|0\rangle$ для квазібозонів визначено як

$$A_\alpha|0\rangle = a_\mu|0\rangle = b_\nu|0\rangle = 0,$$

то відповідним простором станів є лінійна оболонка $\{|0\rangle, A_{\gamma_1}^\dagger|0\rangle, A_{\gamma_2}^\dagger A_{\gamma_1}^\dagger|0\rangle, \dots\}$. Перепишемо комутаційні співвідношення (2.1.10) у вигляді:

$$F_{\alpha\beta} \equiv \Delta_{\alpha\beta} + (q^{\delta_{\alpha\beta}} - 1)A_\beta^\dagger A_\alpha = 0.$$

Тоді виконання комутаційних співвідношень на вказаній лінійній оболонці зводиться до занулення оператором $F_{\alpha\beta}$ кожного із станів $|0\rangle$, $A_{\gamma_1}^\dagger|0\rangle$, $A_{\gamma_2}^\dagger A_{\gamma_1}^\dagger|0\rangle$, і так далі.

Очевидно, що для основного стану ми маємо:

$$F_{\alpha\beta}|0\rangle = 0.$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta}A_{\gamma_1}^\dagger|0\rangle = 0 & \Leftrightarrow [F_{\alpha\beta}, A_{\gamma_1}^\dagger]|0\rangle = 0. \\ F_{\alpha\beta}A_{\gamma_1}^\dagger A_{\gamma_2}^\dagger|0\rangle = 0 & \Leftrightarrow [[F_{\alpha\beta}, A_{\gamma_1}^\dagger], A_{\gamma_2}^\dagger]|0\rangle = 0. \end{aligned}$$

Рівняння $[F_{\alpha\beta}, A_{\gamma_1}^\dagger]|0\rangle = 0$ можна переписати у вигляді умови на матриці Φ_α . Використовуючи дану умову, для першого комутатора отримуємо

$$[F_{\alpha\beta}, A_{\gamma_1}^\dagger] = (1 - q^{\delta_{\alpha\beta}})A_\beta^\dagger [F_{\alpha\gamma_1} + (1 - q^{\delta_{\alpha\gamma_1}})A_{\gamma_1}^\dagger A_\alpha].$$

Обчислимо подвійний комутатор:

$$\begin{aligned} [[F_{\alpha\beta}, A_{\gamma_1}^\dagger], A_{\gamma_2}^\dagger] &= (1 - q^{\delta_{\alpha\beta}})A_\beta^\dagger [F_{\alpha\gamma_1}, A_{\gamma_2}^\dagger] + \\ &+ (1 - q^{\delta_{\alpha\beta}})(1 - q^{\delta_{\alpha\gamma_1}})A_\beta^\dagger A_{\gamma_1}^\dagger [A_\alpha, A_{\gamma_2}^\dagger]. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Звідси, для того щоб виконувалося співвідношення $[[F_{\alpha\beta}, A_{\gamma_1}^\dagger], A_{\gamma_2}^\dagger]|0\rangle = 0$ знаходимо:

$$(1 - q^{\delta_{\alpha\beta}})(1 - q^{\delta_{\alpha\gamma_1}})\delta_{\alpha\gamma_2}A_\beta^\dagger A_{\gamma_1}^\dagger|0\rangle = 0.$$

Таким чином приходимо до протиріччя: при $\alpha = \beta = \gamma_1 = \gamma_2$ і $q \neq 1$ маємо

$$(A_\alpha^\dagger)^2|0\rangle = 0,$$

тобто, парадоксальний факт нільпотентності “бозонних” операторів.

Отже, АК-тип деформації (див. [72]) приводить до протиріччя з бозонним характером системи, складеної з двох ферміонів чи бозонів. Однак, як далі буде видно, існують деформації, для яких ситуація інакша. Таким чином, ми будемо працювати в більш широкому класі деформованих осциляторів загального виду, заданих їх структурною функцією $\phi(N)$.

2.1.3 Умови реалізованості квазібозонів деформованими осциляторами

Нашою метою є оперування із A_α , A_α^\dagger та N_α , що побудовані через $a_\mu^\dagger, a_\mu, b_\nu^\dagger, b_\nu$ (N_α – деякий ефективний оператор кількості частинок для складених частинок), як з елементами (операторами) деякої алгебри деформованих осциляторів, “забувши” про їх внутрішню структуру. Для цього ми будемо шукати підалгебри обгортуючої алгебри $\mathfrak{A}\{A_\alpha, A_\alpha^\dagger, N_\alpha\}$, згенерованої операторами $A_\alpha, A_\alpha^\dagger, N_\alpha$, ізоморфні до деяких алгебр деформованих осциляторів $\mathfrak{A}\{\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\alpha^\dagger, \mathcal{N}_\alpha\}$, що генеруються $\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\alpha^\dagger, \mathcal{N}_\alpha$:

$$\mathfrak{A}\{A_\alpha, A_\alpha^\dagger, N_\alpha\} \simeq \mathfrak{A}\{\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\alpha^\dagger, \mathcal{N}_\alpha\}.$$

Встановимо необхідні та достатні умови для існування такого ізоморфізма. Як одною із умов будемо також вимагати ізоморфність просторів представлень згаданих алгебр:

$$L\{(a_\mu^\dagger)^r (b_\nu^\dagger)^s \dots |0\rangle\} \supset H \simeq \mathcal{H} = L\{\mathcal{A}_{\gamma_1}^\dagger \dots \mathcal{A}_{\gamma_n}^\dagger |0\rangle\}, \quad (2.1.12)$$

де $L\{\dots\}$ позначає лінійну оболонку. Таким чином, якщо алгебра операторів деформованих осциляторів задається співвідношеннями

$$G_i(\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\alpha^\dagger, \mathcal{N}_\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad G_i(\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\alpha^\dagger, \mathcal{N}_\alpha) \mathcal{A}_{\gamma_1}^\dagger \dots \mathcal{A}_{\gamma_n}^\dagger |0\rangle = 0, \quad (2.1.13)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

тоді необхідні та достатні умови для існування вищезгаданого ізоморфізма можна записати в такому вигляді:

$$G_i(A_\alpha, A_\alpha^\dagger, N_\alpha) \cong 0 \quad \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \quad G_i(A_\alpha, A_\alpha^\dagger, N_\alpha) A_{\gamma_1}^\dagger \dots A_{\gamma_n}^\dagger |0\rangle = 0. \quad (2.1.14)$$

Тут ми ввели символ слабкої рівності \cong для позначення рівності на всіх n -(квази)бозонних станах. Далі помічаємо що

$$G_i A_{\gamma_1}^\dagger |0\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [G_i, A_{\gamma_1}^\dagger] |0\rangle = 0 \quad (2.1.15)$$

і, по індукції,

$$G_i A_{\gamma_1}^\dagger \dots A_{\gamma_n}^\dagger |0\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\dots [G_i, A_{\gamma_1}^\dagger] \dots, A_{\gamma_n}^\dagger] |0\rangle = 0.$$

Для загального деформованого осцилятора, заданого структурною функцією $\phi(N)$, див. наприклад [5], співвідношення (2.1.13) приймає вигляд

$$\begin{cases} \mathcal{A}_\alpha^\dagger \mathcal{A}_\alpha = \phi(\mathcal{N}_\alpha), \\ [\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\alpha^\dagger] = \phi(\mathcal{N}_\alpha + 1) - \phi(\mathcal{N}_\alpha), \\ [\mathcal{N}_\alpha, \mathcal{A}_\alpha^\dagger] = \mathcal{A}_\alpha^\dagger, \quad [\mathcal{N}_\alpha, \mathcal{A}_\alpha] = -\mathcal{A}_\alpha. \end{cases} \quad (2.1.16)$$

Тут необхідно додати відповідні вирази для комутаторів $[\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\beta^\dagger]$, $\alpha \neq \beta$, якщо вони входять у визначення алгебри деформованих осциляторів. Таким чином, набір функцій G_i для даного випадку приймає вигляд:

$$\begin{aligned} G_0(A_\alpha, A_\alpha^\dagger, N_\alpha) &= A_\alpha^\dagger A_\alpha - \phi(N_\alpha), \\ G_1(A_\alpha, A_\alpha^\dagger, N_\alpha) &= [A_\alpha, A_\alpha^\dagger] - (\phi(N_\alpha + 1) - \phi(N_\alpha)), \\ G_2(A_\alpha^\dagger, N_\alpha) &= [N_\alpha, A_\alpha^\dagger] - A_\alpha^\dagger, \quad \text{та можливо деякі інші.} \end{aligned}$$

Дані функції G_i визначаються структурною функцією деформації $\phi(N_\alpha)$. Як бачимо, співвідношення (2.1.14) можна використати для встановлення зв'язку між матрицями $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$, які визначають оператори A_α^\dagger , та структурною функцією $\phi(N_\alpha)$.

2.1.4 Необхідні умови на $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$ та $\phi(n)$, розв'язок їх для $\phi(n)$

В подальшому аналізі ми вивчаємо систему квазібозонів реалізованих незалежними деформованими осциляторами (тобто моди яких незалежні), без конкретизації моделі деформації. Метою даного розділу є отримати необхідні умови реалізації в термінах матриць Φ_α . Відмітимо, що результати даного розділу не є чутливими до форми визначення $N_\alpha(\cdot)$ як функції від A_α та A_α^\dagger .

Використовуючи співвідношення (2.1.14)-(2.1.16), і беручи до уваги незалежність мод, ми приходимо до таких слабких рівностей на комутатори:

$$\begin{cases} [A_\alpha, A_\beta^\dagger] \cong 0 & \text{для } \alpha \neq \beta, \\ [N_\alpha, A_\alpha^\dagger] \cong A_\alpha^\dagger, & [N_\alpha, A_\alpha] \cong -A_\alpha, \\ [A_\alpha, A_\alpha^\dagger] \cong \phi(N_\alpha + 1) - \phi(N_\alpha). \end{cases} \quad (2.1.17)$$

Незалежність мод. Із першого співвідношення в (2.1.17) виводимо еквівалентні умови незалежності в термінах матриць Φ :

$$\sum_{\mu'\nu'} \left(\Phi_\beta^{\mu\nu'} \bar{\Phi}_\alpha^{\mu'\nu} \Phi_\gamma^{\mu'\nu} + \Phi_\gamma^{\mu\nu'} \bar{\Phi}_\alpha^{\mu'\nu} \Phi_\beta^{\mu'\nu} \right) = 0, \quad \alpha \neq \beta, \quad (2.1.18)$$

котрі можна переписати в матричній формі наступним чином

$$\Phi_\beta \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\gamma + \Phi_\gamma \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\beta = 0, \quad \alpha \neq \beta. \quad (2.1.19)$$

Умови на $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$ в рамках одної моди α . Виходячи з рівностей $A_\alpha^\dagger A_\alpha \cong \phi(N_\alpha)$ та $A_\alpha A_\alpha^\dagger \cong \phi(N_\alpha + 1)$ отримуємо

$$[A_\alpha^\dagger A_\alpha, A_\alpha A_\alpha^\dagger] \cong 0 \quad \text{та} \quad [\Delta_{\alpha\alpha}, N_\alpha] \cong 0.$$

Перше співвідношення можна еквівалентно переписати так:

$$[A_\alpha^\dagger A_\alpha, \Delta_{\alpha\alpha}] = [A_\alpha^\dagger A_\alpha, \sum_{\mu\nu\mu'} \bar{\Phi}_\alpha^{\mu\nu} \Phi_\alpha^{\mu'\nu} a_{\mu'}^\dagger a_\mu + \sum_{\mu\nu\nu'} \bar{\Phi}_\alpha^{\mu\nu} \Phi_\alpha^{\mu\nu'} b_{\nu'}^\dagger b_\nu] \cong 0.$$

Обрахунок цього комутатора дає

$$[A_\alpha^\dagger A_\alpha, \Delta_{\alpha\alpha}] = 2A_\alpha^\dagger \sum_{\mu\nu} (\Psi_\alpha^\dagger)^{\nu\mu} b_\nu a_\mu - 2 \sum_{\mu'\nu'} \Psi_\alpha^{\mu'\nu'} a_{\mu'}^\dagger b_{\nu'}^\dagger A_\alpha \cong 0, \quad (2.1.20)$$

$$\Psi_\alpha \equiv \Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\alpha.$$

Враховуючи (2.1.14), (2.1.15) та анзац (2.1.2) бачимо: з умови (2.1.20) випливає наступна умова на комутатор з одноквазібозонним станом

$$\begin{aligned}
& \left[(\bar{\Psi}_\alpha^{\mu\nu} \Phi_\alpha^{\mu'\nu'} - \bar{\Phi}_\alpha^{\mu\nu} \Psi_\alpha^{\mu'\nu'}) a_{\mu'}^\dagger b_{\nu'}^\dagger b_\nu a_\mu, \Phi_\alpha^{\lambda\rho} a_\lambda^\dagger b_\rho^\dagger \right] |0\rangle = \\
& = \left(\Phi_\alpha^{\mu'\nu'} a_{\mu'}^\dagger b_{\nu'}^\dagger \cdot \bar{\Psi}_\alpha^{\mu\nu} \Phi_\alpha^{\mu\nu} - \Phi_\alpha^{\mu'\nu'} a_{\mu'}^\dagger b_{\nu'}^\dagger \Delta[\Psi, \Phi] - \Psi_\alpha^{\mu'\nu'} a_{\mu'}^\dagger b_{\nu'}^\dagger + \Psi_\alpha^{\mu'\nu'} a_{\mu'}^\dagger b_{\nu'}^\dagger \cdot \Delta_{\alpha\alpha} \right) |0\rangle \\
& = \left(\Phi_\alpha^{\mu'\nu'} \cdot \text{Tr}(\Psi_\alpha^\dagger \Phi_\alpha) - \Psi_\alpha^{\mu'\nu'} \right) a_{\mu'}^\dagger b_{\nu'}^\dagger |0\rangle = 0
\end{aligned}$$

(сумування по повторним індексам мається на увазі). Звідси ми отримуємо умову

$$\Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\alpha = \text{Tr}(\Phi_\alpha^\dagger \Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\alpha) \cdot \Phi_\alpha, \quad (2.1.21)$$

яка є також і достатньою. Вона забезпечує не тільки слабку рівність як в (2.1.20), але й відповідну операторну рівність “=” у звичайному сенсі.

Таким чином, ми прийшли до двох незалежних умов (2.1.19) та (2.1.21) на матриці Φ_α .

Встановлення зв'язку між Φ_α та структурною функцією $\phi(n)$. Перейдемо до виводу співвідношень, що містять структурну функцію деформації ϕ . Безпосередньо із системи (2.1.17) неважко отримати її початкові значення:

$$\begin{aligned}
\phi(N_\alpha) &\cong A_\alpha^\dagger A_\alpha &\Rightarrow \phi(0) &= 0, \\
\phi(N_\alpha + 1) &\cong A_\alpha A_\alpha^\dagger &\Rightarrow \phi(1) &= 1.
\end{aligned}$$

Із (2.1.4) та третього співвідношення в (2.1.17) маємо

$$[A_\alpha, A_\alpha^\dagger] = 1 - \epsilon \Delta_{\alpha\alpha} \cong \phi(N_\alpha + 1) - \phi(N_\alpha),$$

або, еквівалентно,

$$F_{\alpha\alpha} \equiv \epsilon \Delta_{\alpha\alpha} - 1 + \phi(N_\alpha + 1) - \phi(N_\alpha) \cong 0.$$

Якщо умови (див. (2.1.17))

$$[N_\alpha, A_\alpha^\dagger] \cong A_\alpha^\dagger, \quad [N_\alpha, A_\alpha] \cong -A_\alpha \quad (2.1.22)$$

виконуються (це означає, що для цих умов необхідна подальша перевірка), тоді

$$\phi(N_\alpha)A_\alpha^\dagger \cong A_\alpha^\dagger\phi(N_\alpha+1) \Rightarrow [\phi(N_\alpha), A_\alpha^\dagger] \cong A_\alpha^\dagger(\phi(N_\alpha+1) - \phi(N_\alpha)).$$

В результаті ми приходимо до умови

$$[F_{\alpha\alpha}, A_\alpha^\dagger] \cong 2\epsilon(\Phi_\alpha\Phi_\alpha^\dagger\Phi_\alpha)^{\mu\nu}a_\mu^\dagger b_\nu^\dagger + A_\alpha^\dagger(\phi(N_\alpha+2) - 2\phi(N_\alpha+1) + \phi(N_\alpha)). \quad (2.1.23)$$

Вимагаючи, щоб цей комутатор занулявся на вакуумному стані, і враховуючи що $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$ отримуємо

$$\Phi_\alpha\Phi_\alpha^\dagger\Phi_\alpha = \epsilon\left(1 - \frac{1}{2}\phi(2)\right)\Phi_\alpha = \frac{f}{2}\Phi_\alpha,$$

де параметр f має зміст параметра деформації,

$$\frac{f}{2} \equiv \epsilon\left(1 - \frac{1}{2}\phi(2)\right) = \text{Tr}(\Phi_\alpha^\dagger\Phi_\alpha\Phi_\alpha^\dagger\Phi_\alpha) \quad \forall \alpha.$$

Знаходження допустимих функцій $\phi(n)$ явно. Рівність (2.1.23) можна переписати у вигляді

$$[F_{\alpha\alpha}, A_\alpha^\dagger] \cong \epsilon(2 - \phi(2))A_\alpha^\dagger + A_\alpha^\dagger(\phi(N_\alpha + 2) - 2\phi(N_\alpha + 1) + \phi(N_\alpha)).$$

По індукції можна довести наступну рівність для n -го комутатора:

$$[\dots [F_{\alpha\alpha}, A_\alpha^\dagger] \dots A_\alpha^\dagger] \cong (A_\alpha^\dagger)^n \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} C_{n+1}^k \phi(N_\alpha + k) \right\}$$

(тут C_n^k позначає біноміальний коефіцієнт). Вимога, щоб n -й комутатор занулявся на вакуумі, веде до рекурентного співвідношення

$$\phi(n+1) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_{n+1}^k \phi(k), \quad n \geq 2. \quad (2.1.24)$$

Як видно, всі значення $\phi(n)$ для $n \geq 3$ визначаються однозначно двома першими значеннями $\phi(1)$ та $\phi(2)$, які, взагалі кажучи, можуть залежати

від одного або декількох параметрів деформації. Використовуючи рівність [116]

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} k^m C_n^k = \begin{cases} 0, & m < n, \\ n!, & m = n, \end{cases}$$

знаходимо: незалежними розв'язками співвідношення (2.1.24) є n та n^2 , а також їх лінійна комбінація

$$\phi(n) = \left(1 + \epsilon \frac{f}{2}\right) n - \epsilon \frac{f}{2} n^2. \quad (2.1.25)$$

Дана структурна функція задовольняє і початкові умови, і рекурентні співвідношення (2.1.24).

Зауваження 2.3. З огляду на єдиність розв'язку при фіксованих початкових умовах, формула (2.1.25) дає загальний розв'язок системи (2.1.24).

Зауваження 2.4. Якщо ми візьмемо гамільтоніан у вигляді $H = \frac{1}{2}(\phi(N) + \phi(N + 1))$, тоді використовуючи отримані результати неважко вивести трьохчленні рекурентні співвідношення для структурної функції та енергетичного спектру:

$$\begin{aligned} \phi(n+1) &= \frac{2(n+1)}{n} \phi(n) - \frac{n+1}{n-1} \phi(n-1), \\ E_{n+1} &= \frac{4n^2 + 4n - 4}{2n^2 - 1} E_n - \frac{2n^2 + 4n + 1}{2n^2 - 1} E_{n-1}. \end{aligned}$$

Остання рівність має типову форму так званого співвідношення квази-Фібоначчі [81] для власних енергій. Зауважимо, що загальний випадок деформованих осциляторів з поліноміальною структурною функцією $\phi(N)$ (а вони також відносяться до класу квази-Фібоначчі) були вивчені в [117].

2.1.5 Оператор числа квазібозонів та відповідні умови

Оператор числа квазібозонів N_α можна вводити різними способами. Його визначення диктується умовами $G_0 \cong 0$, $G_1 \cong 0$ (згадаємо, що G_0 і G_1 визначені зразу після системи (2.1.16)), а також самоузгодженістю реалізації. Одне із можливих визначень може даватися рівністю $N_\alpha \stackrel{def}{=} \phi^{-1}(A_\alpha^\dagger A_\alpha)$,

або $N_\alpha \stackrel{def}{=} \phi^{-1}(A_\alpha A_\alpha^\dagger) - 1$. Ми не будемо фіксувати якусь одну форму визначення, а розглянемо більш загальну ситуацію:

$$N_\alpha \stackrel{def}{=} \chi(A_\alpha^\dagger A_\alpha, \varepsilon_\alpha), \quad \varepsilon_\alpha \equiv 1 - \epsilon \Delta_{\alpha\alpha} = [A_\alpha, A_\alpha^\dagger].$$

Як ми вже згадували вище, необхідно задовольнити співвідношення (2.1.22), які дозволяють дещо конкретизувати визначення функції χ . Зауважимо, що друге співвідношення слідує, в результаті ермітового спряження, із першого,

$$[N_\alpha, A_\alpha^\dagger] \cong A_\alpha^\dagger. \quad (2.1.26)$$

Оскільки ми припускаємо *незалежність* різних мод, див. (2.1.17), тому достатньо розглянути випадок $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \alpha$ у визначенні (2.1.14).

Корисно ввести позначення L_n для таких операторів:

$$L_0 = N, \quad L_{n+1} = [L_n, A_\alpha^\dagger] = [\dots [N_\alpha, A_\alpha^\dagger] \dots A_\alpha^\dagger], \quad n \geq 0. \quad (2.1.27)$$

Тоді умова (2.1.26) може бути переписана таким чином

$$L_1|0\rangle = A_\alpha^\dagger|0\rangle, \quad L_n|0\rangle = 0, \quad n > 1. \quad (2.1.28)$$

Для подальшого нам необхідні будуть наступні три твердження.

Твердження 2.1. *Мають місце наступні співвідношення:*

$$\begin{aligned} [\Delta_{\alpha\alpha}, A_\alpha^\dagger] &= f A_\alpha^\dagger, & [\Delta_{\alpha\alpha}, A_\alpha] &= -\bar{f} A_\alpha, & f &= 2 \operatorname{Tr}(\Phi_\alpha^\dagger \Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\alpha), \\ [\varepsilon_\alpha, A_\alpha^\dagger] &= -\epsilon f A_\alpha^\dagger, & [\Delta_{\alpha\alpha}, N_\alpha] &\cong 0, & \Delta_{\alpha\alpha} &= \Delta_{\alpha\alpha}^\dagger. \end{aligned}$$

Це твердження доводиться безпосереднім обрахунком.

Твердження 2.2. *Для кожного $n \geq 0$ виконуються такі рівності:*

$$[(A_\alpha^\dagger A_\alpha)^n, A_\alpha^\dagger] = A_\alpha^\dagger [(A_\alpha^\dagger A_\alpha + \varepsilon_\alpha)^n - (A_\alpha^\dagger A_\alpha)^n], \quad (2.1.29)$$

$$[\varepsilon_\alpha^n, A_\alpha^\dagger] = A_\alpha^\dagger [(-\epsilon f + \varepsilon_\alpha)^n - \varepsilon_\alpha^n]. \quad (2.1.30)$$

Використовуючи твердження 2.1 і 2.2, і точне комутування $A_\alpha^\dagger A_\alpha$ із ε_α ми приходимо до наступного

Твердження 2.3. Для N_α визначеного як $N_\alpha = \chi(A_\alpha^\dagger A_\alpha, \varepsilon)$, і $n \geq 0$, має місце наступна рівність для n -кратного комутатора (2.1.27):

$$L_n = (A_\alpha^\dagger)^n \chi(A_\alpha^\dagger A_\alpha + n\varepsilon_\alpha - \epsilon\sigma_n f, \varepsilon_\alpha - \epsilon n f) - \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (A_\alpha^\dagger)^{n-k} L_k,$$

$$\sigma_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Доведення тверджень 2.2 та 2.3 дано в додатках А та В.

Тоді умови (2.1.28) перетворюються в рівності

$$\begin{cases} A_\alpha^\dagger \chi(A_\alpha^\dagger A_\alpha + \varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha - \epsilon f) |0\rangle = A_\alpha^\dagger |0\rangle, \\ (A_\alpha^\dagger)^n \chi(A_\alpha^\dagger A_\alpha + n\varepsilon_\alpha - \epsilon\sigma_n f, \varepsilon_\alpha - \epsilon n f) |0\rangle = \\ = C_n^1 (A_\alpha^\dagger)^{n-1} L_1 |0\rangle = n (A_\alpha^\dagger)^n |0\rangle, \quad n > 1. \end{cases}$$

Щоб їх задовольнити, необхідно щоб

$$\chi(n - \epsilon\sigma_n f, 1 - \epsilon n f) = n, \quad n \geq 1. \quad (2.1.31)$$

Отже, умова (2.1.31) забезпечує справедливість комутаційних співвідношень (2.1.22), а тому і самоузгодженість всього представлення квазибозонів деформованими бозонами. Як можна побачити, обидва визначення $N_\alpha \stackrel{def}{=} \phi^{-1}(A_\alpha^\dagger A_\alpha)$ та $N_\alpha \stackrel{def}{=} \phi^{-1}(A_\alpha A_\alpha^\dagger) - 1$ задовольняють (2.1.31). Відмітимо, що існують також інші визначення, наприклад $N_\alpha \stackrel{def}{=} (1-p)\phi^{-1}(A_\alpha^\dagger A_\alpha) + p(\phi^{-1}(A_\alpha A_\alpha^\dagger) - 1)$, $0 < p < 1$, які задовольняють (2.1.31) і ведуть, як можна перевірити, до самоузгодженого представлення квазибозонів.

2.1.6 Загальний розв'язок для матриць Φ_α

В цьому пункті ми опишемо як знайти допустимі $d_a \times d_b$ матриці Φ_α .

Останні повинні задовольняти систему рівнянь

$$\begin{cases} \text{Tr}(\Phi_\alpha \Phi_\beta^\dagger) = \delta_{\alpha\beta}, \\ \Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\alpha = \frac{f}{2} \Phi_\alpha, \\ \Phi_\beta \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\gamma + \Phi_\gamma \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\beta = 0. \end{cases} \quad (2.1.32)$$

Розглянемо спочатку випадок $f \neq 0$. Якщо матриця Φ_α невинроджена (це означає, що $d_a = d_b$ і $\det \Phi_\alpha \neq 0$) при деякому α , із другого співвідношення системи випливає $\Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger = \frac{f}{2}$. Із третього співвідношення при $\gamma = \alpha$ отримуємо: $\Phi_\beta = 0$, $\forall \beta \neq \alpha$. Отже можливе лише одне значення α для якого $\det \Phi_\alpha \neq 0$. В цьому випадку Φ_α є довільною унітарною матрицею. Усі інші $\Phi_\beta = 0$, $\beta \neq \alpha$. Таким чином, маємо частковий невинроджений розв'язок системи. Зауважимо, що інші розв'язки будуть винроджені для всіх α .

Перейдемо до аналізу винроджених розв'язків. При $\gamma = \alpha$ останнє рівняння в (2.1.32) зводиться до $\Phi_\beta \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\alpha + \Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\beta = 0$; домножуючи його на Φ_α^\dagger та використовуючи друге співвідношення (зауважимо, що f дійсний) виводимо

$$K \Phi_\beta \Phi_\alpha^\dagger \equiv \left(\Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger + \frac{f}{2} \right) \Phi_\beta \Phi_\alpha^\dagger = 0, \quad K \equiv \Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger + \frac{f}{2}. \quad (2.1.33)$$

Із другого співвідношення системи (2.1.32) ми також отримуємо:

$$\forall x \in \text{Im } \Phi_\alpha : \quad \Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger x = \frac{f}{2} x \quad \Rightarrow \quad \dim \text{Im } \Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger \geq \dim \text{Im } \Phi_\alpha.$$

Враховуючи останнє і той факт, що $\text{Im } \Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger \subseteq \text{Im } \Phi_\alpha$ знаходимо

$$\text{Im } \Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger = \text{Im } \Phi_\alpha. \quad (2.1.34)$$

Застосовуючи теорему Фредгольма спочатку до Φ_α , а потім до $\Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger$, і використовуючи (2.2.19) приходимо до розкладів

$$\forall \alpha : \quad \mathbb{C}^{d_a} = \text{Im } \Phi_\alpha \oplus \text{Ker } \Phi_\alpha^\dagger = \text{Im } \Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger \oplus \text{Ker } \Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger,$$

$$\mathbb{C}^{d_a} = \text{Im } \Phi_\alpha \oplus \text{Ker } \Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger.$$

На кожному із підпросторів $\text{Im } \Phi_\alpha$ та $\text{Ker } \Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger$, які є власними для K , оператор K є невиродженим:

$$\forall x \in \text{Im } \Phi_\alpha : \quad Kx = fx, \quad \text{та} \quad \forall y \in \text{Ker } \Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger : \quad Ky = \frac{f}{2}y.$$

Отже оператор K є невиродженим на всьому \mathbb{C}^{d_a} . Використовуючи (2.1.33) знаходимо

$$\forall \alpha \neq \beta : \quad \Phi_\beta \Phi_\alpha^\dagger = 0 \quad \text{або} \quad \Phi_\alpha \Phi_\beta^\dagger = 0.$$

В результаті ми приходимо до системи, яка є еквівалентною до початкової (2.1.32) та до відповідних (для кожного із рівнянь) імплікації ($\alpha \neq \beta$):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Tr}(\Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger) = 1, & \Rightarrow \dim \text{Im } \Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger = \text{rank } \Phi_\alpha = 2/f \equiv m, \quad \forall \alpha, \\ \Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger \cdot \Phi_\alpha = (f/2) \cdot \Phi_\alpha, & \Rightarrow \text{Im } \Phi_\alpha - \text{власний підпростір } \Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger, \\ \Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger \cdot \Phi_\beta = 0, & \Rightarrow \forall \beta \neq \alpha \text{ Im } \Phi_\beta \subset \text{Ker } \Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger = \text{Ker } \Phi_\alpha^\dagger, \\ \Phi_\alpha \Phi_\beta^\dagger = 0. & \Rightarrow \text{Im } \Phi_\beta^\dagger \subset \text{Ker } \Phi_\alpha. \end{array} \right.$$

Таким чином, параметр деформації f пробігає дискретний набір значень, що визначаються через m :

$$f = \frac{2}{m}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.1.35)$$

Множина розв'язків залежить від співвідношення між $\sum_\alpha m$ та $\min(d_a, d_b)$. Якщо $\sum_\alpha m > \min(d_a, d_b)$, то множина розв'язків є пустою. Якщо $\sum_\alpha m \leq \min(d_a, d_b)$, тоді, згідно співвідношень

$$\mathbb{C}^{d_a} = \text{Im } \Phi_\alpha \oplus \text{Ker } \Phi_\alpha^\dagger, \quad \text{Im } \Phi_\beta \subset \text{Ker } \Phi_\alpha^\dagger, \quad \forall \beta \neq \alpha,$$

простір \mathbb{C}^{d_a} (\mathbb{C}^{d_b}) розкладається в пряму суму лінійно незалежних підпросторів:

$$\mathbb{C}^{d_a} = \left(\bigoplus_\alpha \text{Im } \Phi_\alpha \right) \oplus R, \quad \dim R = n - \sum_\alpha m, \quad \Phi_\alpha^\dagger R = 0;$$

$$\mathbb{C}^{d_b} = \left(\bigoplus_{\alpha} \text{Im } \Phi_{\alpha}^{\dagger} \right) \oplus \tilde{R}, \quad \dim \tilde{R} = n - \sum_{\alpha} m, \quad \Phi_{\alpha} \tilde{R} = 0.$$

Нехай $\{e_{1\alpha}, \dots, e_{m\alpha}\}$ – ортонормований базис у просторі $\text{Im } \Phi_{\alpha}$, а $U_1(d_a)$ – відповідна матриця переходу до цього базису від початкового базису \mathbb{C}^{d_a} . Подібним чином, нехай $\{f_{1\alpha}, \dots, f_{m\alpha}\}$ – ортонормований базис у просторі $\text{Im } \Phi_{\alpha}^{\dagger}$, а $U_2(d_b)$ – відповідна матриця переходу від початкового базису простору \mathbb{C}^{d_b} . В нових базисах, матриця переходу Φ_{α} є блочно-діагональною:

$$U_1^{\dagger}(d_a) \Phi_{\alpha} U_2(d_b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\Phi}_{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$m \times m$ -матриця $\tilde{\Phi}_{\alpha}$ задовольняє рівняння $\tilde{\Phi}_{\alpha} \tilde{\Phi}_{\alpha}^{\dagger} = \frac{f}{2} \mathbf{1}_m$. Його загальний розв'язок може бути виражений через унітарну матрицю: $\tilde{\Phi}_{\alpha} = \sqrt{f/2} U_{\alpha}(m)$. Таким чином, загальний розв'язок початкової системи (2.1.32) можна представити у вигляді

$$\Phi_{\alpha} = U_1(d_a) \text{diag} \left\{ 0, \sqrt{\frac{f}{2}} U_{\alpha}(m), 0 \right\} U_2^{\dagger}(d_b). \quad (2.1.36)$$

У цій формулі для кожної із матриць Φ_{α} , блок $\sqrt{\frac{f}{2}} U_{\alpha}(m)$ знаходиться на його α -ому місці, і не перетинається з відповідним блоком будь-якої іншої матриці Φ_{β} із $\beta \neq \alpha$. В результаті: ми отримали усі можливі квазибозонні композитні оператори, задані через (2.1.2) та (2.1.36), які можна реалізувати алгеброю деформованих осциляторів.

Випадок $f = 0$ в (2.1.32). Можна показати, що Φ_{α} повинні бути нульовими для таких f . Це можна отримати, якщо застосувати формулу сингулярного розкладу до кожної із матриць у рівнянні $\Phi_{\alpha} \Phi_{\alpha}^{\dagger} \Phi_{\alpha} = 0$. Той факт, що $\Phi_{\alpha} = 0$ означає, див. анзац (2.1.2) та співвідношення нормування зразу після нього, що стандартний бозон будучи частковим $f = 0$ випадком деформованого бозона зі структурною функцією (2.1.25) не підходить для реалізації двох-ферміонних складених бозонів.

2.2 Квазібозони, складені з двох q -ферміонів

В цьому підрозділі ми перейдемо до q -деформованого узагальнення моделі розглянутої вище. А саме, ми допускаємо нетривіальну q -деформацію для складових, при цьому інші припущення залишаються без змін, такими як і вище.

2.2.1 Умови реалізації

Для набору q -ферміонів, див. [118], незалежних у ферміонному сенсі, маємо:

$$a_\mu a_{\mu'}^\dagger + q^{\delta_{\mu\mu'}} a_{\mu'}^\dagger a_\mu = \delta_{\mu\mu'}, \quad b_\nu b_{\nu'}^\dagger + q^{\delta_{\nu\nu'}} b_{\nu'}^\dagger b_\nu = \delta_{\nu\nu'}, \quad (2.2.1)$$

$$a_\mu a_{\mu'} + a_{\mu'} a_\mu = 0, \quad \mu \neq \mu', \quad b_\nu b_{\nu'} + b_{\nu'} b_\nu = 0, \quad \nu \neq \nu'. \quad (2.2.2)$$

Комутаційні співвідношення (2.2.1) в рамках одної моди, тобто для $\mu = \mu'$ та $\nu = \nu'$ повністю задають набір допустимих значень параметра q і нільпотентність (її наявність або відсутність, та порядок) операторів a_μ^\dagger та b_ν^\dagger залежно від q . Більш точно це відображено в наступному твердженні.

Лема 2.1. *Для додатності норми q -ферміонних станів необхідно щоб $q \in \mathbb{R}$ і $q \leq 1$. Якщо $q = 1$ тоді a_μ^\dagger та b_ν^\dagger нільпотентні другого порядку; інакше, якщо $q < 1$ оператори a_μ^\dagger та b_ν^\dagger не нільпотентні ніякого порядку:*

$$q = 1 \quad \Rightarrow \quad (a_\mu^\dagger)^2 = 0, \quad (b_\nu^\dagger)^2 = 0; \quad (2.2.3)$$

$$q < 1 \quad \Rightarrow \quad (a_\mu^\dagger)^k \neq 0, \quad (b_\nu^\dagger)^k \neq 0, \quad k \geq 2. \quad (2.2.4)$$

Доведення. Лема слідує із виразу для норми вектора $x = (a_\mu^\dagger)^m |0\rangle$:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \langle 0 | a_\mu^k (a_\mu^\dagger)^k | 0 \rangle = \langle 0 | a_\mu^{k-1} [n_\mu^a + 1]_{-q} (a_\mu^\dagger)^{k-1} | 0 \rangle = \langle 0 | a_\mu^{k-1} (a_\mu^\dagger)^{k-1} \cdot \\ &\cdot [n_\mu^a + k]_{-q} | 0 \rangle = [k]_{-q} \langle 0 | a_\mu^{k-1} (a_\mu^\dagger)^{k-1} | 0 \rangle = \dots = [k]_{-q} [k-1]_{-q} \cdot \dots \cdot [1]_{-q}, \end{aligned}$$

де позначення $[n]_{-q} \equiv ((-q)^n - 1)/((-q) - 1)$ є ніщо інше як структурна функція деформації для q -ферміонів; n_μ^a – оператор кількості частинок для

q -ферміонів типу a . Ті ж самі міркування застосовні також до операторів b_ν^\dagger . Цим завершується доведення. \square

Випадок $q = 1$ (тобто звичайних ферміонів з добре-відомою нільпотентністю операторів народження/знищення) був повністю проаналізований в попередньому розділі (а також в [10]). Тут ми обмежимося випадком $q < 1$. Тому (2.2.4) має місце для будь-якого k .

Оператори народження та знищення складених квазибозонів визначаються згідно

$$A_\alpha^\dagger = \sum_{\mu\nu} \Phi_\alpha^{\mu\nu} a_\mu^\dagger b_\nu^\dagger, \quad A_\alpha = \sum_{\mu\nu} \bar{\Phi}_\alpha^{\mu\nu} b_\nu a_\mu,$$

тобто як і в (2.1.2). Умови самоузгодженості реалізації (деформованими бозонами) залишаються нетронутими, див. (2.1.16) та (2.1.17):

$$A_\alpha^\dagger A_\alpha \cong \phi(N_\alpha), \quad A_\alpha A_\alpha^\dagger \cong \phi(N_\alpha + 1), \quad (2.2.5)$$

$$[A_\alpha^\dagger, A_\beta^\dagger] \cong 0 \Leftrightarrow [A_\alpha, A_\beta] \cong 0, \quad [A_\alpha, A_\beta^\dagger] \cong 0, \quad \alpha \neq \beta, \quad (2.2.6)$$

$$[N_\alpha, A_\alpha^\dagger] \cong A_\alpha^\dagger, \quad [N_\alpha, A_\alpha] \cong -A_\alpha. \quad (2.2.7)$$

В цьому випадку умова незалежності $[A_\alpha^\dagger, A_\beta^\dagger] \cong 0$, як можна легко перевірити, веде до наступної умови на матриці Φ_α :

$$\Phi_\alpha^{\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu'\nu'} = \Phi_\alpha^{\mu\nu'} \Phi_\beta^{\mu\nu}, \quad \Phi_\alpha^{\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu'\nu} = \Phi_\alpha^{\mu'\nu} \Phi_\beta^{\mu\nu}. \quad (2.2.8)$$

Із умови (2.2.5) слідує, що повинно виконуватися

$$A_\alpha (A_\alpha^\dagger)^n |0\rangle = \phi(N_\alpha + 1) (A_\alpha^\dagger)^{n-1} |0\rangle, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2.9)$$

Використовуючи (2.2.7) отримуємо:

$$\phi(N_\alpha + 1) (A_\alpha^\dagger)^{n-1} |0\rangle = (A_\alpha^\dagger)^{n-1} \phi(N_\alpha + n) |0\rangle.$$

В результаті ми приходимо до

$$A_\alpha (A_\alpha^\dagger)^n |0\rangle = \phi(n) (A_\alpha^\dagger)^{n-1} |0\rangle, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2.10)$$

По індукції можна перевірити, що

$$\begin{aligned}
A_\alpha (A_\alpha^\dagger)^n &= (-1)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \overline{\Phi_\alpha^{\mu\nu}} \prod_{j=1}^n \Phi_\alpha^{\mu_1 \nu_1} \\
&\cdot \left[\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \delta_{\mu\mu_i} q^{\sum_{s=1}^{i-1} \delta_{\mu\mu_s}} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n a_{\mu_r}^\dagger + (-1)^n q^{\sum_{s=1}^n \delta_{\mu\mu_s}} \prod_{r=1}^n a_{\mu_r}^\dagger \cdot a_\mu \right] \\
&\cdot \left[\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \delta_{\nu\nu_k} q^{\sum_{s=1}^{k-1} \delta_{\nu\nu_s}} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^n b_{\nu_r}^\dagger + (-1)^n q^{\sum_{s=1}^n \delta_{\nu\nu_s}} \prod_{r=1}^n b_{\nu_r}^\dagger \cdot b_\nu \right].
\end{aligned}$$

Тоді, використовуючи рівняння (2.2.10) ми приходимо до

$$\begin{aligned}
\phi(n) \prod_{l=1}^{n-1} \Phi_\alpha^{\mu_l \nu_l} a_{\mu_l}^\dagger b_{\nu_l}^\dagger |0\rangle &= (-1)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \overline{\Phi_\alpha^{\mu\nu}} \prod_{l=1}^n \Phi_\alpha^{\mu_l \nu_l} \\
&\cdot \left[\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \delta_{\mu\mu_i} q^{\sum_{s=1}^{i-1} \delta_{\mu\mu_s}} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n a_{\mu_r}^\dagger + (-1)^n q^{\sum_{s=1}^n \delta_{\mu\mu_s}} \prod_{r=1}^n a_{\mu_r}^\dagger \cdot a_\mu \right] \\
&\cdot \left[\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \delta_{\nu\nu_k} q^{\sum_{s=1}^{k-1} \delta_{\nu\nu_s}} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^n b_{\nu_r}^\dagger + (-1)^n q^{\sum_{s=1}^n \delta_{\nu\nu_s}} \prod_{r=1}^n b_{\nu_r}^\dagger \cdot b_\nu \right] |0\rangle. \quad (2.2.11)
\end{aligned}$$

Зауважимо, що якщо (2.2.11) виконується на вакуумі, наступна рівність виконується на будь-якому стані:

$$\begin{aligned}
(-1)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \overline{\Phi_\alpha^{\mu\nu}} \prod_{l=1}^n \Phi_\alpha^{\mu_l \nu_l} &\cdot \left[\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \delta_{\mu\mu_i} q^{\sum_{s=1}^{i-1} \delta_{\mu\mu_s}} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n a_{\mu_r}^\dagger \right] \\
&\cdot \left[\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \delta_{\nu\nu_k} q^{\sum_{s=1}^{k-1} \delta_{\nu\nu_s}} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^n b_{\nu_r}^\dagger \right] = \phi(n) \prod_{l=1}^{n-1} \Phi_\alpha^{\mu_l \nu_l} a_{\mu_l}^\dagger b_{\nu_l}^\dagger. \quad (2.2.12)
\end{aligned}$$

Як рекурсивний крок, розглянемо наступне співвідношення вірно для $n+1$:

$$\begin{aligned}
A_\alpha (A_\alpha^\dagger)^{n+1} &= (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \overline{\Phi_\alpha^{\mu\nu}} \prod_{l=1}^n \Phi_\alpha^{\mu_l \nu_l} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \delta_{\mu\mu_i} q^{\sum_{s=1}^{i-1} \delta_{\mu\mu_s}} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{n+1} a_{\mu_r}^\dagger \right] \\
&\cdot \left[\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \delta_{\nu\nu_k} q^{\sum_{s=1}^{k-1} \delta_{\nu\nu_s}} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^{n+1} b_{\nu_r}^\dagger \right] \Phi_\alpha^{\mu_{n+1} \nu_{n+1}} + (-1)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \overline{\Phi_\alpha^{\mu\nu}} \prod_{l=1}^n \Phi_\alpha^{\mu_l \nu_l}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \delta_{\mu\mu_i} q^{\sum_{s=1}^{i-1} \delta_{\mu\mu_s}} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{n+1} a_{\mu_r}^\dagger \right) \cdot (-1)^n q^{\sum_{s=1}^{n+1} \delta_{\nu\nu_s}} \prod_{r=1}^n b_{\nu_r}^\dagger \cdot b_\nu + \right. \\
& + (-1)^n q^{\sum_{s=1}^{n+1} \delta_{\mu\mu_s}} \prod_{r=1}^n a_{\mu_r}^\dagger \cdot a_\mu \left(\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \delta_{\nu\nu_k} q^{\sum_{s=1}^{k-1} \delta_{\nu\nu_s}} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^n b_{\nu_r}^\dagger \right) + \\
& \left. + q^{\sum_{s=1}^{n+1} \delta_{\mu\mu_s} + \delta_{\nu\nu_s}} \prod_{r=1}^n a_{\mu_r}^\dagger \cdot a_\mu \prod_{r=1}^n b_{\nu_r}^\dagger \cdot b_\nu \right] \Phi_\alpha^{\mu_{n+1}\nu_{n+1}} a_{\mu_{n+1}}^\dagger b_{\nu_{n+1}}^\dagger \quad (2.2.12) \\
& \stackrel{(2.2.12)}{=} \phi(n) \prod_{l=1}^n \Phi_\alpha^{\mu_l \nu_l} a_{\mu_l}^\dagger b_{\nu_l}^\dagger + (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \overline{\Phi_\alpha^{\mu\nu}} \prod_{l=1}^{n+1} \Phi_\alpha^{\mu_l \nu_l}. \\
& \left[(-1)^n \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \delta_{\mu\mu_i} q^{\sum_{s=1}^{i-1} \delta_{\mu\mu_s}} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{n+1} a_{\mu_r}^\dagger \right) \left(\delta_{\nu\nu_{n+1}} q^{\sum_{s=1}^n \delta_{\nu\nu_s}} \prod_{r=1}^n b_{\nu_r}^\dagger - q^{\sum_{s=1}^{n+1} \delta_{\nu\nu_s}} \prod_{r=1}^{n+1} b_{\nu_r}^\dagger \cdot b_\nu \right) + \right. \\
& + (-1)^n \left(\delta_{\mu\mu_{n+1}} q^{\sum_{s=1}^n \delta_{\mu\mu_s}} \prod_{r=1}^n a_{\mu_r}^\dagger - q^{\sum_{s=1}^{n+1} \delta_{\mu\mu_s}} \prod_{r=1}^{n+1} a_{\mu_r}^\dagger \cdot a_\mu \right) \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \delta_{\nu\nu_k} q^{\sum_{s=1}^{k-1} \delta_{\nu\nu_s}} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^{n+1} b_{\nu_r}^\dagger \right) + \\
& \left. + \left(\delta_{\mu\mu_{n+1}} q^{\sum_{s=1}^n \delta_{\mu\mu_s}} \prod_{r=1}^n a_{\mu_r}^\dagger - q^{\sum_{s=1}^{n+1} \delta_{\mu\mu_s}} \prod_{r=1}^{n+1} a_{\mu_r}^\dagger \cdot a_\mu \right) \left(\delta_{\nu\nu_{n+1}} q^{\sum_{s=1}^n \delta_{\nu\nu_s}} \prod_{r=1}^n b_{\nu_r}^\dagger - q^{\sum_{s=1}^{n+1} \delta_{\nu\nu_s}} \prod_{r=1}^{n+1} b_{\nu_r}^\dagger \cdot b_\nu \right) \right]
\end{aligned}$$

де на останньому етапі ми використали (2.2.12). Підставляючи останній вираз для $A_\alpha (A_\alpha^\dagger)^{n+1}$ в (2.2.10) переписане для $n \rightarrow n+1$ виводимо наступне співвідношення, яке містить лінійну комбінацію:

$$\sum_{\mu_1 \dots \mu_n, \nu_1 \dots \nu_n} B^{\mu_1 \dots \mu_n, \nu_1 \dots \nu_n} (\Phi_\alpha, q) \cdot e_{\mu_1 \dots \mu_n, \nu_1 \dots \nu_n} = 0, \quad (2.2.13)$$

де коефіцієнти наступні

$$\begin{aligned}
B^{\mu_1 \dots \mu_n, \nu_1 \dots \nu_n} (\Phi_\alpha, q) &= - \sum_{i=1}^n q^{\sum_{s=1}^{i-1} (\delta_{\mu\mu_s} + \delta_{\nu\nu_s})} \Phi_\alpha^{\mu_n \nu} \overline{\Phi_\alpha^{\mu\nu}} \Phi_\alpha^{\mu\nu_n} \prod_{l=1}^{n-1} \Phi_\alpha^{\mu_l \nu_l}. \\
& \left((-1)^{\sum_{r=i}^{n-1} \delta_{\nu_r \nu_{r+1}}} q^{\sum_{s=i}^n \delta_{\nu\nu_s}} + (-1)^{\sum_{r=i}^{n-1} \delta_{\mu_r \mu_{r+1}}} q^{\sum_{s=i}^n \delta_{\mu\mu_s}} \right) + \\
& + q^{\sum_{s=1}^n (\delta_{\mu\mu_s} + \delta_{\nu\nu_s})} \overline{\Phi_\alpha^{\mu\nu}} \Phi_\alpha^{\mu\nu} \prod_{l=1}^n \Phi_\alpha^{\mu_l \nu_l} - [\phi(n+1) - \phi(n)] \prod_{l=1}^n \Phi_\alpha^{\mu_l \nu_l}
\end{aligned}$$

а базисний елемент

$$e_{\mu_1 \dots \mu_n, \nu_1 \dots \nu_n} = a_{\mu_1}^\dagger b_{\nu_1}^\dagger \dots a_{\mu_n}^\dagger b_{\nu_n}^\dagger |0\rangle.$$

Ці базисні елементи незалежні для різних наборів індексів $\mu_1 \dots \mu_n$ та $\nu_1 \dots \nu_n$ безвідносно до будь-якої перестановки в рамках кожного набору.

2.2.2 Розв'язок умов реалізації

Перейдемо до розв'язку умови реалізації 2.2.13. Спочатку відокремимо в (2.2.13) члени з $\mu_1 = \dots = \mu_n$ та $\nu_1 = \dots = \nu_n$; використовуючи їх лінійну незалежність від інших отримуємо $B^{\mu_1 \dots \mu_1, \nu_1 \dots \nu_1}(\Phi_\alpha, q) = 0$, що можна переписати в наступній формі:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i-1} \left(2 + (\delta_{\mu\mu_1} + \delta_{\nu\nu_1})(q^n - q^{i-1} - 2) + 2\delta_{\mu\mu_1}\delta_{\nu\nu_1}(q^n - 1)(q^{i-1} - 1) \right) \Phi_\alpha^{\mu_1\nu} \overline{\Phi_\alpha^{\mu\nu}} \Phi_\alpha^{\mu\nu_1} \cdot \\ & \cdot (\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1})^{n-1} + \left(1 + (\delta_{\mu\mu_1} + \delta_{\nu\nu_1})(q^n - 1) + \delta_{\mu\mu_1}\delta_{\nu\nu_1}(q^n - 1)^2 \right) \overline{\Phi_\alpha^{\mu\nu}} \Phi_\alpha^{\mu\nu} (\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1})^n = \\ & = [\phi(n+1) - \phi(n)] (\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1})^n. \end{aligned}$$

Виконуючи сумування по i, μ, ν в лівій частині, отримуємо

$$\begin{aligned} & ((-1)^n - 1) (\Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\alpha)^{\mu_1\nu_1} (\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1})^{n-1} + \left(\frac{1}{2}(-q)^n + \frac{q-1}{2(q+1)}q^n - \frac{q}{q+1}(-1)^n \right) \cdot \\ & [(\Phi_\alpha^\dagger \Phi_\alpha)^{\nu_1\nu_1} + (\Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger)^{\mu_1\mu_1}] (\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1})^n + \frac{q-1}{q+1}(q^n - 1)(q^n - (-1)^n) |\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1}|^2 (\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1})^n = \\ & = [\phi(n+1) - \phi(n) - 1] (\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1})^n. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Для всіх індексів (μ_1, ν_1) для яких $\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} \neq 0$, останнє рівняння можна поділити на $(\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1})^n$. Сумуючи (2.2.14) по n від $n = 1$ да $n = s$, а потім виконуючи в результуючому рівнянні заміну $s \rightarrow n - 1$ ми отримуємо:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1 - (-1)^n}{2} - n \right) \frac{(\Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\alpha)^{\mu_1\nu_1}}{\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1}} + \left([n]_{-q} - \frac{1 - (-1)^n}{2} \right)^2 \cdot |\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1}|^2 + \\ & + \frac{1 - (-1)^n}{2} ([n]_{-q} - 1) [(\Phi_\alpha^\dagger \Phi_\alpha)^{\nu_1\nu_1} + (\Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger)^{\mu_1\mu_1}] = \phi(n) - n, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Зауважимо, що функції $\left(\frac{1-(-1)^n}{2} - n\right)$, $\left([n]_{-q} - \frac{1-(-1)^n}{2}\right)^2$ та $\frac{1-(-1)^n}{2}([n]_{-q} - 1)$ як функції від n незалежні для допустимих значень q . Тому $(\Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\alpha)^{\mu_1 \nu_1} / \Phi_\alpha^{\mu_1 \nu_1}$, $|\Phi_\alpha^{\mu_1 \nu_1}|^2$ та $[(\Phi_\alpha^\dagger \Phi_\alpha)^{\nu_1 \nu_1} + (\Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger)^{\mu_1 \mu_1}]$ не залежать від (μ_1, ν_1) якщо $\Phi_\alpha^{\mu_1 \nu_1} \neq 0$:

$$\begin{aligned} (\Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\alpha)^{\mu_1 \nu_1} / \Phi_\alpha^{\mu_1 \nu_1} &= p_1, \\ |\Phi_\alpha^{\mu_1 \nu_1}|^2 &= p_2, \\ (\Phi_\alpha^\dagger \Phi_\alpha)^{\nu_1 \nu_1} + (\Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger)^{\mu_1 \mu_1} &= p_3, \end{aligned}$$

де p_1 , p_2 та p_3 – деякі числові параметри. Таким чином, отримуємо

$$\begin{aligned} \phi(n) = n - \left(n - \frac{1-(-1)^n}{2}\right) p_1 + \left([n]_{-q} - \frac{1-(-1)^n}{2}\right)^2 p_2 + \\ + \frac{1-(-1)^n}{2} ([n]_{-q} - 1) p_3. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Давайте тепер розглянемо члени в рівнянні (2.2.13) з n прирівняними індексами $\mu_1 = \dots = \mu_n$ та з $n - 1$ прирівняними індексами в наборі (ν_1, \dots, ν_n) , при цьому, той що залишився відмінний. Позначимо $n - 1$ рівних індексів через ν_1 , а один відмінний (нехай він займає k -те місце) через ν_2 . Виходячи з лінійної незалежності згаданих членів від інших ми отримуємо рівняння

$$\sum_{k=1}^n B^{\mu_1 \dots \mu_1, \nu_1 \dots \nu_k \dots \nu_1} e_{\mu_1 \dots \mu_1, \nu_1 \dots \nu_k \dots \nu_1} |_{\nu_k \rightarrow \nu_2} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n (-1)^k B^{\mu_1 \dots \mu_1, \nu_1 \dots \nu_k \dots \nu_1} |_{\nu_k \rightarrow \nu_2} = 0. \quad (2.2.16)$$

Вводячи допоміжні позначення

$$\begin{cases} X = \Phi_\alpha^{\mu_1 \nu_1} \Phi_\alpha^{\mu_1 \nu_2}, \\ Y = \Phi_\alpha^{\mu_1 \nu_1} \Phi_\alpha^{\mu_1 \nu_2} (\Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger)^{\mu_1 \mu_1}, \\ Z = (\Phi_\alpha^{\mu_1 \nu_1})^2 (\Phi_\alpha^\dagger \Phi_\alpha)^{\nu_1 \nu_2}, \end{cases}$$

після здійснення всіх сумувань в (2.2.16) отримуємо:

$$\begin{aligned}
& [Xp_2](-1)^n q^{2n} + \\
& [(-q^3 + 2q^2 - 3q + 4)p_2 X]q^{2n} + \\
& [((q^2 - 2 - q)p_2 + 2p_3)X + (-2 - q)Y]nq^n + \\
& [((-3q^3 + 17q^2 + q^4 - 26 - 5q)p_2 + (-4q + 2q^2 + 2)p_3)X + (6 + 5q - q^3 - 2q^2)Y + \\
& \quad + (4q - 10q^2 + 6)Z]q^n + \\
& [((-q^3 + q + 2q^2 - 2)p_2 + (2 - 2q)p_3)X + (q^2 + 3q - 2)Y + (-2 - 2q)Z](-q)^n + \\
& [((q^2 + 3 - 4q)p_2 + (-4q^2 + 2q + 2)p_3)X + (4q^2 - q - 5)Y + (3q^2 + 1)Z](-1)^n + \\
& [(2p_1 + (-3q + 5)p_2 - 2p_3)X + Y + (3q - 3)Z]n + \\
& [((8 - 8q^2)p_1 + (23 - 3q - 19q^2 + 7q^3)p_2 + (8q - 4q^3 + 2q^2 - 6)p_3)X + \\
& \quad + (4q^3 - 5 - 12q + 5q^2)Y + (-3q^3 - 11 + 3q + 11q^2)Z] = 0.
\end{aligned}$$

Прирівнюючи нулю коефіцієнти цієї системи при лінійно незалежних функціях $(-1)^n q^{2n}$, q^{2n} , nq^n , q^n , $(-q)^n$, $(-1)^n$, n , 1 (розглянутих як елементи векторного простору функцій від n), ми приходимо до наступної системи:

$$\left\{ \begin{array}{l}
Xp_2 = 0, \\
[-q^3 + 2q^2 - 3q + 4]p_2 X = 0, \\
[(q^2 - 2 - q)p_2 + 2p_3]X + [-2 - q]Y = 0, \\
[(-3q^3 + 17q^2 + q^4 - 26 - 5q)p_2 + (-4q + 2q^2 + 2)p_3]X + [6 + 5q - q^3 - 2q^2]Y + \\
\quad + [4q - 10q^2 + 6]Z = 0, \\
[(-q^3 + q + 2q^2 - 2)p_2 + (2 - 2q)p_3]X + [q^2 + 3q - 2]Y + [-2 - 2q]Z = 0, \\
[(q^2 + 3 - 4q)p_2 + (-4q^2 + 2q + 2)p_3]X + [4q^2 - q - 5]Y + [3q^2 + 1]Z = 0, \\
[2p_1 + (-3q + 5)p_2 - 2p_3]X + Y + [3q - 3]Z = 0, \\
[(8 - 8q^2)p_1 + (23 - 3q - 19q^2 + 7q^3)p_2 + (8q - 4q^3 + 2q^2 - 6)p_3]X + \\
\quad + [4q^3 - 5 - 12q + 5q^2]Y + [-3q^3 - 11 + 3q + 11q^2]Z = 0.
\end{array} \right.$$

Розв'язок цієї системи має вигляд ($q \neq 1$):

$$\begin{cases} X = \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_2} = 0, \\ Y = \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_2} (\Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger)^{\mu_1\mu_1} = 0, \\ Z = (\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1})^2 (\Phi_\alpha^\dagger \Phi_\alpha)^{\nu_1\nu_2} = 0. \end{cases}$$

Цей набір умов еквівалентний одній,

$$\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_2} = 0, \quad (2.2.17)$$

яка означає, що матриця Φ_α не може містити двох ненульових елементів в будь-якому фіксованому рядку.

Подібним чином ми можемо вивести умову

$$\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} \Phi_\alpha^{\mu_2\nu_1} = 0, \quad (2.2.18)$$

із якої слідує, що матриця Φ_α не може містити двох ненульових елементів в будь-якому фіксованому стовпчику.

Далі проробимо той же самий аналіз, що і в двох попередніх абзацах, для тих членів в (2.2.13), для яких: в наборі (μ_1, \dots, μ_n) існує тільки один індекс (позначимо його через μ_2) відмінний від інших $(n - 1)$ однакових індексів (позначимо їх через μ_1), та подібним чином для індексів ν – в наборі (ν_1, \dots, ν_n) існує тільки один індекс (позначимо його через ν_2) відмінний від інших однакових індексів (позначимо його через ν_1). В результаті ми отримуємо

$$\Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} \Phi_\alpha^{\mu_2\nu_2} = 0. \quad (2.2.19)$$

Тобто, матриця Φ_α не може містити двох ненульових елементів в різних рядках і стовпчиках. Використовуючи попередні умови (2.2.17) і (2.2.18) ми отримуємо, що матриця Φ_α не може містити двох ненульових елементів. Як наслідок ми отримуємо наступні значення для параметрів p_1, p_2, p_3 :

$$p_1 = p_2 = 1, \quad p_3 = 2.$$

Тоді із (2.2.15) слідує наступний вираз для структурної функції деформації:

$$\phi(n) = ([n]_{-q})^2. \quad (2.2.20)$$

Умови модової незалежності, що містяться в (2.2.8) та рівняннях (2.2.17), (2.2.18) і (2.2.19) дозволяють нам знайти розв'язок для Φ_α : ненульові елементи матриць Φ_α та Φ_β розташовані лише на перетині різних стовпчиків і різних рядків:

$$\Phi_\alpha^{\mu\nu} = \Phi_\alpha^{\mu_0(\alpha)\nu_0(\alpha)} \delta_{\mu\mu_0(\alpha)} \delta_{\nu\nu_0(\alpha)}, \quad |\Phi_\alpha^{\mu_0(\alpha)\nu_0(\alpha)}| = 1. \quad (2.2.21)$$

Для ілюстративних цілей більш детальний розгляд двох часткових прикладів включаючи також пропущені кроки виводу вище дано в додатку С. Перший приклад стосується випадку з одним можливим значенням $\mu, \nu = 1$ для складових q -ферміонних мод. Другий приклад стосується випадку двомодових складових, тобто двох можливих значень $\mu, \nu = \overline{1, 2}$.

Залишається задовольнити комутаційні співвідношення (2.2.7) за рахунок коректного визначення оператора N_α . Нехай N_α визначено наступним чином $N_\alpha \stackrel{def}{=} \chi(A_\alpha^\dagger A_\alpha, A_\alpha A_\alpha^\dagger)$, а матриці Φ_α такі, що знайдено в (2.2.21). Приймаючи до уваги останнє ми маємо

$$A_\alpha A_\alpha^\dagger \cdot (A_\alpha^\dagger)^n |0\rangle = [n+1]_{-q}^2 (A_\alpha^\dagger)^n |0\rangle, \quad A_\alpha^\dagger A_\alpha \cdot (A_\alpha^\dagger)^n |0\rangle = [n]_{-q}^2 (A_\alpha^\dagger)^n |0\rangle.$$

Тоді (2.2.7) еквівалентно до

$$\begin{aligned} & \chi(A_\alpha^\dagger A_\alpha, A_\alpha A_\alpha^\dagger) (A_\alpha^\dagger)^{n+1} |0\rangle - A_\alpha^\dagger \chi(A_\alpha^\dagger A_\alpha, A_\alpha A_\alpha^\dagger) (A_\alpha^\dagger)^n |0\rangle = A_\alpha^\dagger (A_\alpha^\dagger)^n |0\rangle \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \chi(A_\alpha^\dagger A_\alpha, [n+2]_{-q}^2) (A_\alpha^\dagger)^{n+1} |0\rangle - A_\alpha^\dagger \chi(A_\alpha^\dagger A_\alpha, [n+1]_{-q}^2) (A_\alpha^\dagger)^n |0\rangle = (A_\alpha^\dagger)^{n+1} |0\rangle \\ & \Leftrightarrow \chi([n+1]_{-q}^2, [n+2]_{-q}^2) (A_\alpha^\dagger)^{n+1} |0\rangle - \chi([n]_{-q}^2, [n+1]_{-q}^2) (A_\alpha^\dagger)^{n+1} |0\rangle = (A_\alpha^\dagger)^{n+1} |0\rangle \\ & \Leftrightarrow \chi([n+1]_{-q}^2, [n+2]_{-q}^2) - \chi([n]_{-q}^2, [n+1]_{-q}^2) = 1, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Таким чином умова $\chi([n]_{-q}^2, [n+1]_{-q}^2) \Big|_n^{n+1} \equiv \chi([n+1]_{-q}^2, [n+2]_{-q}^2) - \chi([n]_{-q}^2, [n+1]_{-q}^2) = 1, n = 0, 1, \dots$, необхідна і достатня для того щоб (2.2.7) виконувалось.

Зауваження 2.5. Вираз (2.2.20) для структурної функції має місце лише коли $q \neq 1$ тобто коли $a_\mu^\dagger, a_\nu^\dagger$ не нільпотентні будь-якого порядку. Якщо $q = 1$, то саме структурна функція (2.1.25) забезпечує реалізацію. Таким чином, об'єднана формула для структурної функції деформації (для тих деформованих осциляторів, які дають реалізацію) для квазібозонів, складених із двох q -ферміонів, може бути записана таким чином

$$\phi(n) = \begin{cases} ([n]_{-q})^2 = \left(\frac{1 - (-q)^n}{1 + q} \right)^2, & q < 1; \\ \left(1 + \frac{1}{m}\right)n - \frac{1}{m}n^2, & q = 1, \quad m \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (2.2.22)$$

Відсутність неперервної границі від (2.2.20) до (2.1.25) коли $q \rightarrow 1$ або другими словами розривність (2.2.22) при $q = 1$ пояснюється наступним чином. Якщо $q \neq 1$ тоді існує нескінченна кількість базисних елементів $\{(a_1^\dagger)^{k_1} \dots (a_{d_a}^\dagger)^{k_{d_a}} (b_1^\dagger)^{l_1} \dots (b_{d_b}^\dagger)^{l_{d_b}} | 0\rangle \mid k_i, l_j \geq 0, \sum_{i=1}^{d_a} k_i = \sum_{j=1}^{d_b} l_j = n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ підпростору станів складених бозонів. А це приводить до нескінченної кількості умов (2.2.13) таким чином накладаючи значні обмеження на $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$. З іншого боку, якщо $q = 1$, тоді існує лише скінченна кількість, рівна $\sum_{k=1}^{\min(d_a, d_b)} C_{d_a}^k C_{d_b}^k = C_{d_a + d_b}^{\max(d_a, d_b)}$, базисних елементів: $|0\rangle, a_\mu^\dagger b_\nu^\dagger |0\rangle, \dots, a_1^\dagger \dots a_{\min(d_a, d_b)}^\dagger b_1^\dagger \dots b_{\min(d_a, d_b)}^\dagger |0\rangle$, що веде до скінченної кількості умов (2.2.13). Більш того, в цьому випадку тільки декілька умов серед них є незалежними, див. (2.1.32).

2.3 Висновки до розділу 2

Як показано в підрозділі 2.1 вище, проблема реалізації квазібозонів типу “ферміон+ферміон” чи “бозон+бозон” деформованими осциляторами має нетривіальний розв’язок. У випадку стандартних ферміонів/бозонів як складових, структурна функція ϕ відповідної деформації найдена у вигляді (2.1.25) – квадратична по оператору числа частинок N , із дискретними значеннями параметра деформації $f = 2/m$. Це єдина структурна функція

деформації для якої реалізація (ізоморфізм) є можливим. В доповнення, отримані необхідні і достатні умови на матриці Φ_α в анзаці (2.1.2) для квазибозонів, щоб таке представлення було самоузгодженим, а вираз (2.1.36) дає їх загальний розв'язок.

В підрозділі 2.2, було проведено нове узагальнення, як представлено у підрозділах 2.2.1 і 2.2.2. Це випадок квазибозонів, сконструйованих із складових, які є q -деформованими ферміонами (2.2.1)-(2.2.2). Для цієї реалізації ми знову вивели співвідношення для матриць Φ_α і вирішили їх. Детальний аналіз привів нас при $q \neq 1$ до результуючої структурної функції (2.2.20) деформованого осцилятора яка дає точну реалізацію квазибозонів, складених із двох q -ферміонів. Принципова відмінність ситуації, тут розглянутої, від випадку розглянутого в підрозділі 2.1 (згідно [10]) є такою, що в той час, як чисті ферміони є нільпотентними, q -деформовані ферміони для $q \neq 1$ не є нільпотентними ніякого порядку, див. (2.2.4). Оскільки другий порядок нільпотентності звичайних ферміонів (як без-деформаційна границя q -ферміонів) різко появляється при $q = 1$ згідно із Леммою 2.1, немає прямого переходу від структурної функції (2.2.20) до структурної функції (2.1.25), як результат неперервної $q \rightarrow 1$ границі. Див. також зауваження 2.5 включаючи (2.2.22) по цьому питанню.

Загальна стратегія розвинутого наближення полягає в тому, щоб дослідити деформовані бозони як засіб реалізації квазибозонів, що повинно дати значне спрощення (в алгебраїчному сенсі) в подальших застосуваннях. Останнє досягається коли з алгеброю, що представляє початкову систему складених частинок, працювати, як з алгеброю, що відповідає деякому деформованому осцилятору. Отримані результати та розвинуте наближення можна потенціально застосувати до: різних проблем (суб)ядерної фізики (із такими складеними частинками як адрони, нуклонні комплекси) таких як вивчення спарювання в ядрах [4]; двочастинкові заплутані композизи [12] в квантовій теорії інформації (де роль квазибозонів можуть грати

наприклад біфотони [41]); Бозе-Ейнштейнівська конденсація складених бозонів [7] та інші термодинамічні питання включаючи рівняння стану для багато-частинкових систем із складених бозонів. Розвинутий формалізм можна також застосувати до моделювання фізичних частинок або квазі-частинок таких як екситони, біфотони і куперони у відповідних розділах фізики твердого тіла. Стосовно екситонів, вже існує [29] опис взаємодіючих екситонів використовуючи нескінченні ряди по їх операторам народження. Крім того, екситони були промодельовні [8, 9] q -деформованою версією бозонів, однак, без врахування їх композитної структури.

Результати розділу опубліковано в [10, 11].

РОЗДІЛ 3

ЗАСТОСУВАННЯ РЕАЛІЗАЦІЇ КВАЗИБОЗОНІВ q -БОЗОНАМИ ДО ЗАПЛУТАНИХ СТАНІВ

3.1 Міри заплутаності та зв'язок із параметром деформації

В цьому підрозділі ми досліджуємо роль заплутаності для спеціального класу *двочастинкових* квазибозонів, складених із двох ферміонів або двох бозонів, які задовольняють реалізацію деформованими бозонами на рівні операторів народження/знищення. Наближення розвинуте в попередніх підрозділах та [10, 11] дозволяє нам встановити прямий зв'язок між мірою заплутаності в рамках складеного бозона та параметром деформації. Ми обчислюємо міри двочастинкової заплутаності також для мультиквазибозонних станів, наприклад фоківських станів або когерентного стану, і виражаємо їх через параметр деформації.

3.1.1 Квазибозон як заплутана двочастинкова система

Двочастинковий квазибозон можна розглядати як заплутану систему по відношенню до його компонент. Вектор стану квазибозона в α -й моді, як елемент тензорного добутку гільбертових просторів компонент, виражається в загальній формі

$$|\Psi_\alpha\rangle = \sum_{\mu\nu} \Phi_\alpha^{\mu\nu} |a_\mu\rangle \otimes |b_\nu\rangle, \quad |a_\mu\rangle \equiv a_\mu^\dagger |0\rangle, \quad |b_\nu\rangle \equiv b_\nu^\dagger |0\rangle \quad (3.1.1)$$

з операторами народження $a_\mu^\dagger, b_\nu^\dagger$ складових (двох звичайних ферміонів, або двох звичайних бозонів) та комплексною $d_a \times d_b$ матрицею $\|\Phi_\alpha^{\mu\nu}\|$. Для таких двочастинкових станів, відповідний розклад Шмідта [119] приймає

ВИГЛЯД:

$$|\Psi_\alpha\rangle = \sum_{k=1}^{\min(d_a, d_b)} \lambda_k^\alpha |v_k^\alpha\rangle \otimes |w_k^\alpha\rangle \quad (3.1.2)$$

де $\sum_k (\lambda_k^\alpha)^2 = 1$ як наслідок нормованості станів $|\Psi_\alpha\rangle$. Набір дійсних коефіцієнтів λ_k^α однозначний із точністю до перестановок для будь-якого фіксованого стану $|\Psi_\alpha\rangle$. Кожен елемент розкладу Шмідта (тобто λ_k^α , $|v_k^\alpha\rangle$, $|w_k^\alpha\rangle$) залежить від стану $|\Psi_\alpha\rangle$. Якщо число індексів k для яких $\lambda_k^\alpha \neq 0$ більше одного, тоді стан $|\Psi_\alpha\rangle$ заплутаний, інакше – сепарабельний.

3.1.2 Міри заплутаності всередині одного квазибозона

Наш розгляд, як вже зазначалось, має справу з квазибозонами, які реалізовані деформованими осциляторами. Таким чином, згідно з (2.1.36) ми маємо наступний явний вигляд для Φ_α :

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha &= U_1(d_a) \text{diag}\{0..0, \sqrt{f/2} U_\alpha(m), 0..0\} U_2^\dagger(d_b) = \\ &= U_1(d_a) \text{diag}\{0, \sqrt{f/2} \mathbf{1}_m, 0\} \text{diag}\{\mathbf{1}, U_\alpha(m), \mathbf{1}\} U_2^\dagger(d_b) = \\ &= U_1(d_a) \text{diag}\{0..0, \sqrt{f/2} \mathbf{1}_m, 0..0\} \tilde{U}_2(d_b) \end{aligned}$$

де $\tilde{U}_2(d_b) \equiv \text{diag}\{\mathbf{1}, U_\alpha(m), \mathbf{1}\} U_2^\dagger(d_b)$. Використовуючи останнє перепишемо вираз для стану $|\Psi_\alpha\rangle$ у формі розкладу Шмідта (3.1.2), а саме

$$\begin{aligned} |\Psi_\alpha\rangle &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{m}} |v_k^\alpha\rangle \otimes |w_k^\alpha\rangle, \quad |v_k^\alpha\rangle = U_1^{\mu k} |a_\mu\rangle, \quad |w_k^\alpha\rangle = \tilde{U}_2^{k\nu} |b_\nu\rangle, \\ \lambda_k^\alpha &= \lambda = \sqrt{f/2} = 1/\sqrt{m}. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Як бачимо, саме параметр m (пов'язаний з параметром f деформації згідно $\frac{f}{2} = \frac{1}{m}$) визначає коефіцієнти розкладу Шмідта λ_k^α . Тоді ступінь заплутаності характеризується наступними величинами (див. наприклад огляди [49, 50] для їх визначення):

- Ранг Шмідта – число ненульових коефіцієнтів Шмідта λ_k^α , що в даному випадку дорівнює m ;

— Число Шмідта (та чистота P підсистеми)

$$K = \left[\sum_k (\lambda_k^\alpha)^4 \right]^{-1} = 1/P = m; \quad (3.1.4)$$

— Ентропія заплутаності

$$S_{\text{entang}} = - \sum_k (\lambda_k^\alpha)^2 \ln(\lambda_k^\alpha)^2 = \ln(m); \quad (3.1.5)$$

— Конкурентність

$$C = \left[\frac{m}{m-1} \left(1 - \sum_k (\lambda_k^\alpha)^4 \right) \right]^{1/2} = 1. \quad (3.1.6)$$

Зауважимо, що завдяки скороченню в силу (3.1.3) результат для конкурентності виявляється незалежним від m . На відміну від двох інших мір заплутаності, число Шмідта K та ентропія заплутаності S_{entang} , явно залежать від m , і, крім того, конкурентність можна виразити через K . Тому розгляд нижче буде стосуватися саме цих двох мір.

Зауваження 3.1. Нерівності отримані в [54] у наших позначеннях приймають вигляд (див. [55] за визначенням χ_N)

$$1 - N/m \leq \chi_{N+1}/\chi_N \leq 1 - 1/m. \quad (3.1.7)$$

Із (3.1.4)-(3.1.6) ми бачимо, що чим більше m , тим більше заплутаність ферміонів (бозонів) в квазибозоні, і тим менше параметр деформації f . Тому, в силу (2.1.25), сильно заплутаний квазибозон наближається до звичайного бозона, для достатньо малих значень квантового числа N :

$$\phi(N) \approx \phi_{\text{boson}}(N) \equiv N, \quad N \ll m, \quad m \gg 1.$$

Відмітимо однак, що квазибозони не можуть, особливо для великих N , бути строго реалізованими чистими бозонами [11].

Використовуючи розклад Шмідта ми можемо записати наступний вираз для оператора народження квазибозона:

$$A_\alpha^\dagger = \sum_{k=1}^m \lambda_k^\alpha v_k^{\alpha\dagger} w_k^{\alpha\dagger}, \quad v_k^{\alpha\dagger} \equiv U_1^{\mu k} a_\mu^\dagger, \quad w_k^{\alpha\dagger} \equiv \tilde{U}_2^{k\nu} b_\nu^\dagger. \quad (3.1.8)$$

Варто замітити, що, завдяки унітарності U_1 та \tilde{U}_2 , оператори v_k і w_k задовольняють ті ж самі комутаційні співвідношення як a_μ і b_ν , тобто (аналогічно і для w_k):

$$\begin{aligned} \{v_k^\alpha, v_{k'}^{\beta\dagger}\} &= \delta_{kk'}\delta_{\alpha\beta}, & \{v_k^{\alpha\dagger}, v_{k'}^{\beta\dagger}\} &= 0, & \text{якщо } \epsilon &= +1, \\ [v_k^\alpha, v_{k'}^{\beta\dagger}] &= \delta_{kk'}\delta_{\alpha\beta}, & [v_k^{\alpha\dagger}, v_{k'}^{\beta\dagger}] &= 0, & \text{якщо } \epsilon &= -1. \end{aligned}$$

Тоді ми можемо переписати відхилення $\Delta_{\alpha\alpha}$ так

$$\Delta_{\alpha\alpha} = \sum_{k=1}^m (\lambda_k^\alpha)^2 (v_k^{\alpha\dagger} v_k^\alpha + w_k^{\alpha\dagger} w_k^\alpha)$$

в термінах v_k^α та w_k^α замість a_μ та b_ν .

Сформулюємо деякі із тверджень у формалізмі матриці густини. Використовуючи (3.1.2), матриця густини для нашої складеної системи набуває вигляду

$$\rho_\alpha = \sum_{k,j} \lambda_k^\alpha \lambda_j^\alpha |v_k^\alpha\rangle \langle v_j^\alpha| \otimes |w_k^\alpha\rangle \langle w_j^\alpha|.$$

Разом із (3.1.3) це дає матриці густини для підсистем:

$$\begin{aligned} \rho_\alpha^{(a)} &= \text{Tr}_b \rho_\alpha = \sum_{k=1}^m \frac{1}{m} |v_k^\alpha\rangle \langle v_k^\alpha|, \\ \rho_\alpha^{(b)} &= \text{Tr}_a \rho_\alpha = \sum_{k=1}^m \frac{1}{m} |w_k^\alpha\rangle \langle w_k^\alpha|. \end{aligned}$$

Таким чином ми отримали змішані стани для підсистем (для $m > 1$). Це означає, що вся складена система знаходиться у заплутаному стані. В термінах матриці густини для вищезгаданих характеристик (порівняйте із (3.1.4) та (3.1.5)) ми знаходимо:

— Число Шмідта

$$K = 1/\text{Tr}(\rho_\alpha^{(a)})^2 = 1/\text{Tr}(\rho_\alpha^{(b)})^2 = m;$$

— Ентропія заплутаності

$$S_{\text{entang}} = -\text{Tr}_a \rho_\alpha^{(a)} \ln \rho_\alpha^{(a)} = -\text{Tr}_b \rho_\alpha^{(b)} \ln \rho_\alpha^{(b)} = \ln(m).$$

Згадаємо, що величина m походить від розглядуваної деформації (та визначає її, див. (2.1.25)-(3.1.3)), яка використана в реалізації квазибозонів (2.1.2). В той же самий час ця величина з'являється як міра заплутаності для стану одного квазибозона.

3.1.3 Заплутаність у мультиквазибозонних станах, включаючи когерентні

На відміну від попереднього випадку, де підсистеми були елементарними, можливо ввести (і притому природнім чином) двочастинкову заплутаність для *мультиквазибозонних* станів використовуючи замість елементарних підсистем їх тензорні добутки. Отже, давайте розширимо попередній розгляд на випадок більш загальних мультиквазибозонних станів

$$|\Psi\rangle = \sum_{\{m_\gamma\}} \Psi(\{m_\gamma\}) (A_{\gamma_1}^\dagger)^{m_{\gamma_1}} \cdot \dots \cdot (A_{\gamma_D}^\dagger)^{m_{\gamma_D}} |0\rangle \quad (3.1.9)$$

де $\{m_\gamma\}$ – це набір чисел заповнення для всіх квазибозонних мод $\gamma \in \{\gamma_1, \dots, \gamma_D\}$; $\Psi(\{m_\gamma\}) \equiv \Psi(m_{\gamma_1}, \dots, m_{\gamma_D})$ – хвильова функція стану у представленні вторинного квантування. Сумування в (3.1.9) пробігає всі можливі набори чисел заповнення $\{m_\gamma\}$ для квазибозонів. Стани (3.1.9) розглядаються як двочастинково заплутані по відношенню до a - і b -підсистем. Тобто, перша або a -підсистема містить усі ферміони (бозони) типу a , і, подібним чином, b -підсистема містить усі ферміони (бозони) типу b .

Зауваження 3.2. Так як для $\epsilon = +1$ оператори A_γ^\dagger , як можна показати, нільпотентні порядку $m+1$, ми маємо умову $m_\gamma \leq m$ в цьому випадку. Тоді сума в (3.1.9) скінченна якщо набір мод α скінченний. Однак, у випадку $\epsilon = -1$ оператори A_γ^\dagger не є нільпотентними, а сума в (3.1.9), взагалі кажучи, може бути нескінченною, як для когерентних станів.

Давайте запишемо використовуючи (3.1.8) структурний блок цього ста-

ну в наступній формі

$$(A_\gamma^\dagger)^{m_\gamma} = \left(\frac{1}{m}\right)^{m_\gamma/2} m_\gamma! \sum_{k_1 \leq \dots \leq k_{m_\gamma}} \frac{v_{k_1}^{\gamma\dagger} \dots v_{k_{m_\gamma}}^{\gamma\dagger}}{R_{k_1 \dots k_{m_\gamma}}} \otimes \frac{w_{k_{m_\gamma}}^{\gamma\dagger} \dots w_{k_1}^{\gamma\dagger}}{R_{k_1 \dots k_{m_\gamma}}} \quad (3.1.10)$$

що відповідає розкладу Шмідта; $R_{k_1 \dots k_{m_\gamma}} \equiv |v_{k_1}^{\gamma\dagger} \dots v_{k_{m_\gamma}}^{\gamma\dagger} |0\rangle| = |w_{k_{m_\gamma}}^{\gamma\dagger} \dots w_{k_1}^{\gamma\dagger} |0\rangle|$ є нормуючим коефіцієнтом. Вводячи мультиіндексні позначення

$$k^\gamma = (k_1, \dots, k_{m_\gamma}), \quad V_{k^\gamma}^{\gamma\dagger} \equiv \frac{v_{k_1}^{\gamma\dagger} \dots v_{k_{m_\gamma}}^{\gamma\dagger}}{R_{k_1 \dots k_{m_\gamma}}}, \quad W_{k^\gamma}^{\gamma\dagger} \equiv \frac{w_{k_{m_\gamma}}^{\gamma\dagger} \dots w_{k_1}^{\gamma\dagger}}{R_{k_1 \dots k_{m_\gamma}}},$$

перепишемо оператор (3.1.10) більш компактно:

$$(A_\gamma^\dagger)^{m_\gamma} = \left(\frac{1}{m}\right)^{m_\gamma/2} m_\gamma! \sum_{\text{впорядковані } k^\gamma} V_{k^\gamma}^{\gamma\dagger} \otimes W_{k^\gamma}^{\gamma\dagger}.$$

Тоді початковий стан (3.1.9) записується як розширений розклад Шмідта, порівн. (3.1.2), (із сумуванням по набору впорядкованих $k^{\gamma_1}, \dots, k^{\gamma_D}$):

$$|\Psi\rangle = \sum_{\{m_\gamma\}} \sum_{k^{\gamma_1}, \dots, k^{\gamma_D}} \Lambda_{k^{\gamma_1}, \dots, k^{\gamma_D}} \cdot V_{k^{\gamma_1}}^{\gamma_1\dagger} \dots V_{k^{\gamma_D}}^{\gamma_D\dagger} \otimes W_{k^{\gamma_D}}^{\gamma_D\dagger} \dots W_{k^{\gamma_1}}^{\gamma_1\dagger} |0\rangle,$$

$$\Lambda_{k^{\gamma_1}, \dots, k^{\gamma_D}} = \Psi(\{m_\gamma\}) \left(\frac{1}{m}\right)^{(m_{\gamma_1} + \dots + m_{\gamma_D})/2} m_{\gamma_1}! \dots m_{\gamma_D}!,$$

з коефіцієнтами $\Lambda_{k^{\gamma_1}, \dots, k^{\gamma_D}}$. На його основі обчислимо характеристики дво-частинкової заплутаності:

— число Шмідта (визначене згідно (3.1.4))

$$K = \left[\sum_{\{m_\gamma\}} |\Psi(\{m_\gamma\})|^4 \left(\frac{1}{m}\right)^{2 \sum_{j=1}^D m_{\gamma_j}} \prod_{j=1}^D (m_{\gamma_j}!)^4 N_m^{m_{\gamma_j}} \right]^{-1}; \quad (3.1.11)$$

— ентропія заплутаності (визначена згідно (3.1.5))

$$S_{\text{entang}} = - \sum_{\{m_\gamma\}} |\Psi(\{m_\gamma\})|^2 \left(\frac{1}{m}\right)^{\sum_{j=1}^D m_{\gamma_j}} \prod_{j=1}^D (m_{\gamma_j}!)^2 N_m^{m_{\gamma_j}} \cdot \ln \left[|\Psi(\{m_\gamma\})|^2 \left(\frac{1}{m}\right)^{\sum_{j=1}^D m_{\gamma_j}} \prod_{j=1}^D (m_{\gamma_j}!)^2 \right]. \quad (3.1.12)$$

Тут $N_m^{m_\gamma} = C_m^{m_\gamma}$ для квазибозонів, складених із двох звичайних ферміонів, та $N_m^{m_\gamma} = C_{m+m_\gamma-1}^{m-1}$ для квазибозонів, складених із двох звичайних бозонів (C_m^n – біноміальний коефіцієнт).

Приклад 3.1. Обрахуємо характеристики запутаності для нормованого мультиквазибозонного фоківського стану $[\phi(m_\alpha)!]^{-1/2} (A_\alpha^\dagger)^{m_\alpha} |0\rangle$ для фіксованої моди α (тут ϕ -факторіал визначений згідно $\phi(n)! \stackrel{def}{=} \phi(1) \cdot \dots \cdot \phi(n)$). Для такого стану амплітуда Ψ конфігурації $\{m_\gamma = m_\alpha, \gamma = \alpha; m_\gamma = 0, \gamma \neq \alpha\}$ чисел заповнення рівна $\Psi = [\phi(m_\alpha)!]^{-1/2}$, в той час як для інших конфігурацій $\Psi = 0$. Враховуючи те, що для нашої структурної функції (2.1.25), $\phi(n)!|_{\epsilon=+1} = (n!)^2 C_m^n / m^n$ та $\phi(n)!|_{\epsilon=-1} = (n!)^2 C_{m+n-1}^n / m^n$ отримуємо:

$$\begin{aligned} K_{\epsilon=+1} &= C_m^{m_\alpha}, \quad K_{\epsilon=-1} = C_{m+m_\alpha-1}^{m_\alpha}; \\ S_{\text{entang}}|_{\epsilon=+1} &= \ln C_m^{m_\alpha}, \quad S_{\text{entang}}|_{\epsilon=-1} = \ln C_{m+m_\alpha-1}^{m_\alpha}. \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Приклад 3.2. Подібним чином давайте розглянемо n -квазибозонний стан коли всі квазибозони знаходяться в різних модах:

$$|\Psi\rangle = A_{\gamma_1}^\dagger \cdot \dots \cdot A_{\gamma_n}^\dagger |0\rangle, \quad \gamma_i \neq \gamma_j, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

здійснюючи подібні обрахунки знаходимо:

$$\begin{aligned} K_{\epsilon=+1} &= K_{\epsilon=-1} = m^n; \\ S_{\text{entang}}|_{\epsilon=+1} &= S_{\text{entang}}|_{\epsilon=-1} = n \ln(m). \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Зауваження 3.3. Зауважимо, що в (3.1.4), (3.1.5) та в прикладах 3.1, 3.2 ми маємо просту закономірність: ентропія запутаності рівна $S_{\text{entang}} = \ln K$.

Приклад 3.3. Представляє інтерес порахувати характеристики запутаності для *квазибозонного когерентного стану*, який визначений тільки якщо квазибозон складається із двох бозонів (коли $\epsilon = -1$, див. Зауваження 3.2), як наприклад біфотон. Когерентний стан для одної квазибозонної

моди α (згадаємо що $A_\alpha|\Psi_\alpha\rangle = \mathcal{A}_\alpha|\Psi_\alpha\rangle$, а A_α визначено в (2.1.2)) можна записати у вигляді ряду (ми опускаємо індекс α у оператора \mathcal{A}_α)

$$\begin{aligned} |\Psi_\alpha\rangle &= \tilde{C}(\mathcal{A}; m) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{A}^n}{\phi(n)!} (A_\alpha^\dagger)^n |0\rangle, \\ \tilde{C}(\mathcal{A}; m) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\mathcal{A}|^{2n}}{\phi(n)!} \right)^{-1/2} = \left[\frac{(m-1)! I_{m-1}(z)}{(z/2)^{m-1}} \right]^{-1/2} = \\ &= e^{-|\mathcal{A}|^2/2} \left[1 + \frac{1}{4} \frac{|\mathcal{A}|^4}{m} + \dots \right], \quad z = 2\sqrt{m}|\mathcal{A}|, \end{aligned}$$

де $I_{m-1}(z)$ – модифікована функція Бесселя порядку $m - 1$. Для данного стану ми отримуємо

$$\begin{aligned} K &= \tilde{C}^{-4} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (C_{n+m-1}^n)^{-3} \frac{(|\mathcal{A}|^2 m)^{2n}}{(n!)^4} \right]^{-1} = \\ &= \tilde{C}^{-4} {}_0F_3(m, m, m; |\mathcal{A}|^4 m^2) = e^{2|\mathcal{A}|^2} \left[1 - 2 \frac{|\mathcal{A}|^4}{m} + \dots \right], \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

де ${}_0F_3$ – гіпергеометрична функція, а також

$$\begin{aligned} S_{\text{entang}} &= \tilde{C}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\mathcal{A}|^2 m)^n}{(n!)^2 C_{n+m-1}^n} \ln \left[\frac{(n!)^2 (C_{n+m-1}^n)^2}{\tilde{C}^2 (|\mathcal{A}|^2 m)^n} \right] = \\ &= |\mathcal{A}|^2 \left[1 - \frac{1}{2} (1 + |\mathcal{A}|^2) \frac{|\mathcal{A}|^2}{m} + \dots \right] \ln \frac{m}{|\mathcal{A}|^2} + \\ &+ |\mathcal{A}|^2 \left[1 + \left(1 - \frac{|\mathcal{A}|^2}{2} \right) \frac{|\mathcal{A}|^2}{m} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

Як ми показали, поняття двочастинкової заплутаності допускає природне узагальнення на довільні *мультик квазибозонні* (включаючи когерентні) стани. Ступінь такої заплутаності взагалі кажучи залежить від хвильової функції $\Psi(\{m_\gamma\})$, див. (3.1.9), тим не менше для звичайних фоківських станів ми знаходимо: вона більше чим більше параметр m і (якщо $\epsilon = -1$) число квазибозонів у стані.

3.2 Залежність ентропії запутаності від енергії станів для систем складених бозонів (квазибозонів)

Серед мір, які характеризують ступінь запутаності чи кореляції між запутаними складовими квазибозона, таких як ранг Шмідта, число Шмідта, конкурентність, чистота (*purity*) та ентропія запутаності, останні дві особливо важливі в контексті (теоретичного та експериментального) дослідження в квантовій теорії інформації, квантовій комунікації та телепортації [49, 50]. Варто також згадати, що існує досить велике коло задач, де приділялась значна увага до залежності мір запутаності/кореляцій від енергії – див. наприклад відповідний підрозділ розділу 1 “Огляд літератури” на стор. 15. Все це мотивує вивчення залежності від енергії ентропії та інших характеристик запутаності.

В даному підрозділі ми аналізуємо взаємозв’язок між енергією системи (стану) і такими двома основними характеристиками запутаності як ентропія запутаності та чистота (*purity*). Серед вище розглядуваних характеристик запутаності ентропія запутаності S_{entang} певно представляє першорядний інтерес для застосувань. По цій причині в даному підрозділі ми в першу чергу вивчаємо такий важливий аспект, як залежність саме ентропії запутаності S_{entang} від енергії E відповідного стану (енергія є однією із основних фізичних величин системи складених бозонів). Працюємо при тих же умовах, що і в попередніх підрозділах: розглядаємо систему складених бозонів, які можна реалізувати в термінах модово-незалежних деформованих осциляторів з квадратичною¹ структурною функцією $\varphi(n) = \left(1 + \epsilon \frac{f}{2}\right)n - \epsilon \frac{f}{2}n^2$, де $\epsilon = +1/-1$ відповідно для ферміонних/бозонних складових. Відповідний аналіз проведено для станів, розглянутих як приклади в підрозділі 3.1. Отримані залежності $S_{\text{entang}}(E)$

¹Як доведено в розділі 2 та [10, 11] це єдина можливість для випадку коли складовими є два звичайних ферміона (чи два звичайних бозона)

ентропії заплутаності від енергії проілюстровано графічно для різних значень параметра деформації f . Аналогічний розгляд, хоча і в коротшому вигляді проведено також для залежності чистоти від енергії.

Гамільтоніан системи деформованих осциляторів. Для того, щоб знайти енергетичну залежність ентропії заплутаності потрібен вираз для гамільтоніану системи складених бозонів. Різні варіанти можливі в залежності від конкретної фізичної системи, яку описуємо за допомогою деформованих осциляторів. Ми беремо гамільтоніан такого ж вигляду, що і в [120, 121]. Отже для ефективного гамільтоніана системи деформованих осциляторів (деформованих бозонів), яка дає реалізацію складених бозонів, маємо:

$$H = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\alpha} (\varphi(N_{\alpha}) + \varphi(N_{\alpha} + 1)). \quad (3.2.1)$$

3.2.1 Залежність ентропії заплутаності від енергії у випадку одного складеного бозона (квазібозона).

В якості першого прикладу розглянемо систему із одного складеного бозона. Для ентропії заплутаності в цьому випадку ми маємо [12]:

$$S_{\text{entang}} = \ln \frac{2}{f}. \quad (3.2.2)$$

Вираз для енергії одного складеного бозона, як слідує із (3.2.1) разом з (2.1.25) та (2.1.35), наступний:

$$E = \frac{1}{2} \hbar \omega (\varphi(1) + \varphi(2)) = \hbar \omega \left(\frac{3}{2} - \epsilon \frac{f}{2} \right) = \hbar \omega \left(\frac{3}{2} - \frac{\epsilon}{m} \right). \quad (3.2.3)$$

Тоді для ентропії заплутаності компонент одного складеного бозона знаходимо

$$\begin{aligned} S_{\text{entang}} &= \ln \frac{\epsilon}{\frac{3}{2} - \frac{E}{\hbar \omega}} = \\ &= \begin{cases} -\ln \left(\frac{3}{2} - \frac{E}{\hbar \omega} \right), & \epsilon = 1, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{E}{\hbar \omega} \leq \frac{3}{2}, \\ -\ln \left(\frac{E}{\hbar \omega} - \frac{3}{2} \right), & \epsilon = -1, \quad \frac{3}{2} \leq \frac{E}{\hbar \omega} \leq \frac{5}{2}. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Відповідні графіки представлені на Рис.3.1 та Рис.3.2. Відмітимо важливу рису протилежної поведінки (зростаючої проти спадаючої) залежності від енергії у випадку ферміонних складових в порівнянні з випадком бозонних складових. В обох $\epsilon = \pm 1$ випадках ентропія S_{entang} прямує до нескінченності при енергії $E = \frac{3}{2}\hbar\omega$, що означає максимальну заплутаність між складовими. При цьому складові (ферміонні чи бозонні) стають найбільш сильно зв'язані всередині квазибозона, а квазибозон найбільш близький до звичайного бозона. На протилежність, для $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$, $\epsilon = +1$ та $E = \frac{5}{2}\hbar\omega$, $\epsilon = -1$ ентропія заплутаності $S_{\text{entang}} = 0$, тобто складові незаплутані. З фізичної точки зору в цьому випадку складові фактично є незв'язаними.

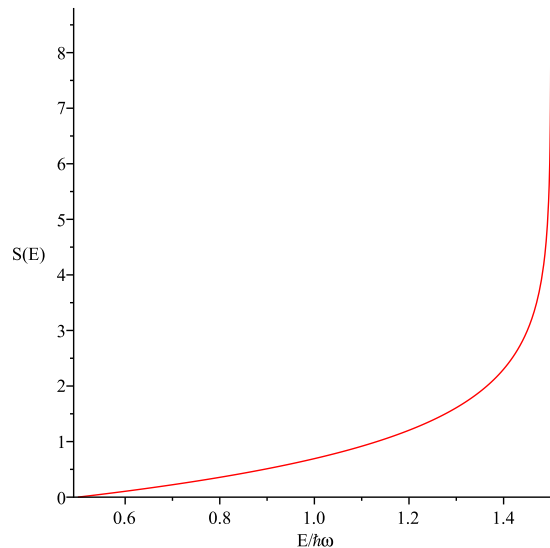


Рис. 3.1. Залежність ентропії заплутаності S_{entang} від енергії E_α для одного складеного бозона у випадку ферміонних компонент тобто при $\epsilon = +1$.

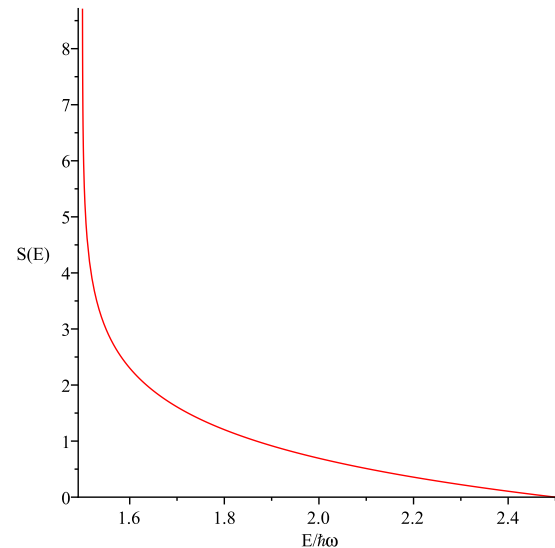


Рис. 3.2. Залежність ентропії заплутаності S_{entang} від енергії E_α для одного складеного бозона у випадку бозонних компонент тобто при $\epsilon = -1$.

3.2.2 Ентропія заплутаності як функція від енергії для мультиквазибозонних станів в т.ч. когерентних станів

Тепер перейдемо до випадку мультиквазибозонних станів. Приймаючи до уваги гамільтоніан (3.2.1), загальна енергія системи (при умові модової

незалежності) виражається таким чином

$$E = \sum_{\alpha} \hbar\omega_{\alpha} \left[n_{\alpha} + \frac{1}{2} - \epsilon \frac{f}{2} n_{\alpha}^2 \right]. \quad (3.2.5)$$

Квазибозонний фоківський стан. Давайте знайдемо ентропію заплутаності як функцію енергії для нормованого фоківського стану n_{α} квазибозонів, $[\phi(n_{\alpha})!]^{-1/2} (A_{\alpha}^{\dagger})^{n_{\alpha}} |0\rangle$, у фіксованій моді α . Ентропія заплутаності між a - та b -підсистемами для двох значень ϵ дорівнює відповідно, див. [12],

$$S_{\text{entang}}|_{\epsilon=+1} = \ln C_{2/f}^{n_{\alpha}}, \quad S_{\text{entang}}|_{\epsilon=-1} = \ln C_{2/f+n_{\alpha}-1}^{n_{\alpha}}. \quad (3.2.6)$$

Дані залежності $S_{\text{entang}} = S_{\text{entang}}(n_{\alpha})$ проілюстровані на Рис. 3.3 та 3.4.

Обертаючи рівн. (3.2.5) отримуємо залежність числа заповнення n_{α} квазибозонів в α -ій моді від енергії E_{α} квазибозонів:

$$n_{\alpha}^{\pm}(E_{\alpha}) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2\epsilon f \left(\frac{E_{\alpha}}{\hbar\omega_{\alpha}} - \frac{1}{2} \right)}}{2\epsilon f}. \quad (3.2.7)$$

Підстановка цього виразу в (3.2.6) веде до двогілкової форми розглядуваної залежності $S_{\text{entang}}^{\pm}(E_{\alpha})$ для випадку $\epsilon = +1$,

$$S_{\text{entang}}^{\pm}(E_{\alpha})|_{\epsilon=+1} = \ln \left(C_{\frac{[1 \pm \sqrt{1 - 2fE_{\alpha}/\hbar\omega_{\alpha}}]/(2f)}{2/f}}^{2/f} \right), \quad (3.2.8)$$

де $\frac{E}{\hbar\omega} \leq \frac{1+f}{2f}$ для обох S_{entang}^{+} - та S_{entang}^{-} -гілок, $\frac{E}{\hbar\omega} \geq \frac{1}{2}$ для S_{entang}^{-} -гілки. Для $\epsilon = -1$ ми маємо одну монотонну гілку:

$$S_{\text{entang}}(E_{\alpha})|_{\epsilon=-1} = \ln \left(C_{\frac{[\sqrt{1-f+2fE_{\alpha}/\hbar\omega_{\alpha}-1}]/(2f)}{[1-f+2fE_{\alpha}/\hbar\omega_{\alpha}-1]/(2f)}}^{2/f-1+[\sqrt{1-f+2fE_{\alpha}/\hbar\omega_{\alpha}-1}]/(2f)} \right), \quad (3.2.9)$$

де $\frac{E}{\hbar\omega} \geq \frac{1}{2}$. Відповідні функції представлені графічно на Рис. 3.5 та Рис. 3.6.

Стан із одним квазибозоном на моді. А тепер перейдемо до мультиквазибозонного стану із прикладу 2 в [12]. В цьому випадку всі квазибозони знаходяться в різних модах, тобто стан квазибозонної системи наступний,

$$|\Psi\rangle = A_{\gamma_1}^{\dagger} \cdot \dots \cdot A_{\gamma_n}^{\dagger} |0\rangle, \quad \gamma_i \neq \gamma_j, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

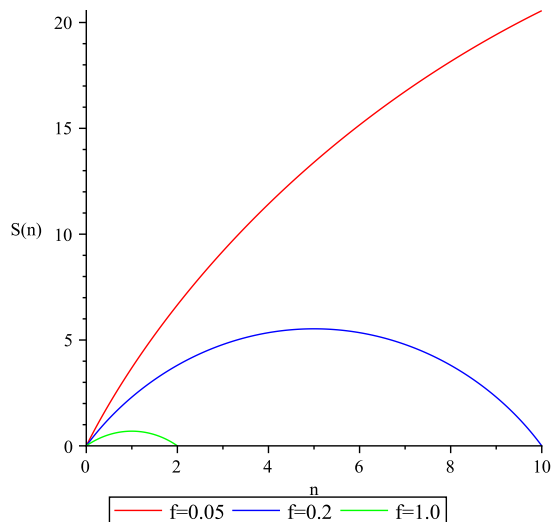


Рис. 3.3. Залежність ентропії заплутаності S_{entang} , див. (3.2.6), від числа квазібозонів n_α для одномодової мультиквазібозонної системи: випадок $\epsilon = +1$ ферміонних компонент.

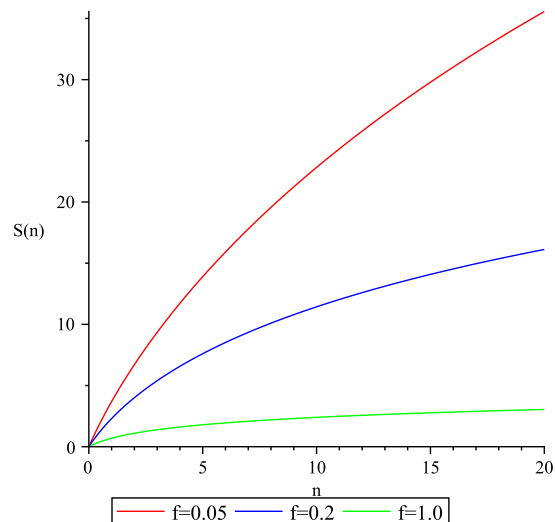


Рис. 3.4. Залежність ентропії заплутаності S_{entang} , див. (3.2.6), від числа квазібозонів n_α для одномодової мультиквазібозонної системи: випадок $\epsilon = -1$ бозонних компонент.

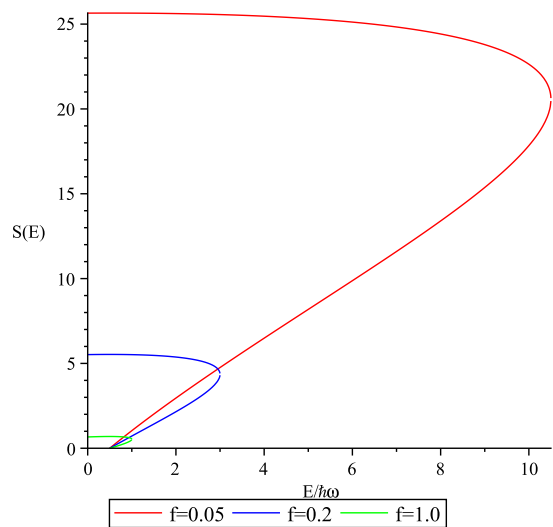


Рис. 3.5. Залежність ентропії заплутаності S_{entang} , див. (3.2.8), від енергії E_α для одномодової мультиквазібозонної системи: випадок $\epsilon = +1$ ферміонних компонент.

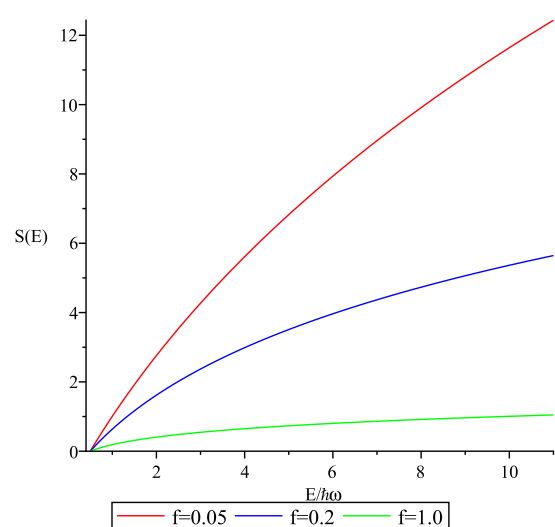


Рис. 3.6. Залежність ентропії заплутаності S_{entang} , див. (3.2.9), від енергії E_α для одномодової мультиквазібозонної системи: випадок $\epsilon = -1$ бозонних компонент.

Для ентропії заплутаності у випадках $\epsilon = \pm 1$ маємо,

$$S_{\text{entang}} = n \ln(m) = n \ln \frac{2}{f}. \quad (3.2.10)$$

Енергія системи залежить від дисперсійного співвідношення ω_{γ_j} як функції γ_j . Беручи його в лінійній (відносно γ_j) формі, а саме $\omega_{\gamma_j} = \omega_0 + (\gamma_j - \gamma_1) \frac{\partial \omega}{\partial \gamma}$, а також використовуючи (3.2.5) і $n_{\gamma_j} = 1$, приходимо до наступного виразу для енергії

$$E = \frac{3 - \epsilon f}{2} (\hbar \omega_0 n + \frac{1}{2} \hbar \delta \omega n (n - 1)), \quad (3.2.11)$$

де $\delta \omega = \frac{\partial \omega}{\partial \gamma} \delta \gamma$. Розв'язок останнього дає n як функцію енергії, а саме

$$n(E) = \frac{-1 + \frac{1}{2} \frac{\delta \omega}{\omega_0} + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta \omega}{\omega_0}\right)^2 + 4 \frac{\delta \omega}{\omega_0} \frac{1 - \epsilon f}{\hbar \omega_0} \frac{E}{\hbar \omega_0}}}{\delta \omega / \omega_0} \quad (3.2.12)$$

Тоді із (3.2.10) отримуємо

$$\begin{aligned} S_{\text{entang}}(E) &= \frac{-1 + \frac{1}{2} \frac{\delta \omega}{\omega_0} + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta \omega}{\omega_0}\right)^2 + 4 \frac{\delta \omega}{\omega_0} \frac{1 - \epsilon f}{\hbar \omega_0} \frac{E}{\hbar \omega_0}}}{\delta \omega / \omega_0} \ln \frac{2}{f} = \\ &= \left| \frac{\omega}{\delta \omega} \right| \cdot \left[-\text{sign} \frac{\omega}{\delta \omega} + \sqrt{1 + \frac{4}{3 - \epsilon f} \cdot \frac{E}{\hbar \omega^2 / \delta \omega}} \right] \ln \frac{2}{f}. \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Як і в попередньому випадку ми отримуємо відповідні графіки, зображені на Рис. 3.7 та Рис. 3.8 (ентропія запутаності вимірюється в одиницях $\omega / \delta \omega$, а енергія – в одиницях $\hbar \omega^2 / \delta \omega$, $\omega = |\omega_0 - \frac{1}{2} \delta \omega|$).

Когерентний стан квазібозонів. Як останній приклад розглянемо когерентний стан системи складених бозонів в α -ій моді, див. Приклад 3 в [12]:

$$|\Psi_\alpha\rangle = \tilde{C}(\mathcal{A}; m) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{A}^n}{\phi(n)!} (A_\alpha^\dagger)^n |0\rangle, \quad (3.2.14)$$

$$\tilde{C}(\mathcal{A}; m) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\mathcal{A}|^{2n}}{\phi(n)!} \right)^{-1/2} = \left[\frac{(m-1)! I_{m-1}(z)}{(z/2)^{m-1}} \right]^{-1/2} = e^{-|\mathcal{A}|^2/2} \left[1 + \frac{1}{4} \frac{|\mathcal{A}|^4}{m} + \dots \right],$$

$$z = 2\sqrt{m}|\mathcal{A}|,$$

де $I_{m-1}(z)$ – модифікована функція Беселя порядку $m - 1$. Для середньої енергії системи в цьому стані маємо

$$E_\alpha = \langle \Psi_\alpha | \frac{1}{2} \hbar \omega_\alpha [\varphi(N_\alpha) + \varphi(N_\alpha + 1)] | \Psi_\alpha \rangle =$$

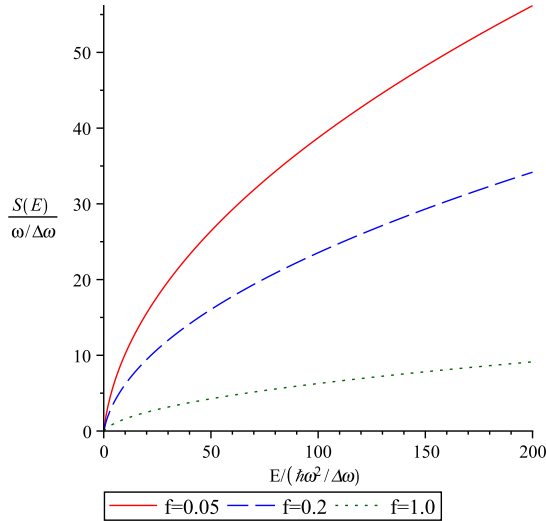


Рис. 3.7. Залежність ентропії заплутаності S_{entang} від енергії E для мультиквазібозонної системи із одним квазібозоном/моду: випадок $\epsilon = +1$ ферміонних компонент.

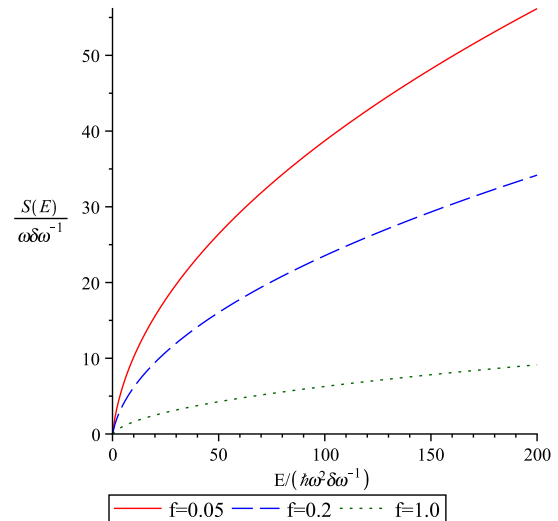


Рис. 3.8. Залежність ентропії заплутаності S_{entang} від енергії E_α для мультиквазібозонної системи із одним квазібозоном/моду: випадок $\epsilon = -1$ бозонних компонент.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \hbar \omega_\alpha |\tilde{C}|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\mathcal{A}|^{2n}}{\varphi(n)!} \varphi(n) + \frac{1}{2} \hbar \omega_\alpha |\tilde{C}|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\mathcal{A}|^{2n}}{\varphi(n)!} \varphi(n+1) = \\
&= \hbar \omega_\alpha |\tilde{C}|^2 |\mathcal{A}|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\mathcal{A}|^{2n}}{\varphi(n)!} + \frac{1}{2} \hbar \omega_\alpha |\tilde{C}|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\mathcal{A}|^{2n}}{\varphi(n)!} \cdot [\varphi(n+1) - \varphi(n)] = \\
&= \hbar \omega_\alpha |\mathcal{A}|^2 + \frac{1}{2} \hbar \omega_\alpha |\tilde{C}|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\mathcal{A}|^{2n}}{\varphi(n)!} \left[1 + \frac{2n}{m}\right] = \\
&= \hbar \omega_\alpha |\mathcal{A}|^2 + \frac{1}{2} \hbar \omega_\alpha + \frac{1}{2} \hbar \omega_\alpha \frac{1}{m} |\tilde{C}|^2 |\mathcal{A}| \frac{\partial}{\partial |\mathcal{A}|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\mathcal{A}|^{2n}}{\varphi(n)!} = \\
&= \hbar \omega_\alpha \left(|\mathcal{A}|^2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \hbar \omega_\alpha \frac{1}{m} |\mathcal{A}| \cdot \frac{\partial}{\partial |\mathcal{A}|} \ln \frac{I_{m-1}(z)}{|\mathcal{A}|^{m-1}} = \\
&= \hbar \omega_\alpha \left(|\mathcal{A}|^2 + \frac{1}{2}\right) + \hbar \omega_\alpha \frac{1}{\sqrt{m}} |\mathcal{A}| \frac{I'_{m-1}(z)}{I_{m-1}(z)} - \frac{1}{2} \hbar \omega_\alpha \frac{1}{m} (m-1) = \\
&= \hbar \omega_\alpha \left(|\mathcal{A}|^2 + \frac{1}{2m}\right) + \frac{\hbar \omega_\alpha |\mathcal{A}|}{\sqrt{m}} \frac{I_m(2\sqrt{m}|\mathcal{A}|) + I_{m-2}(2\sqrt{m}|\mathcal{A}|)}{2I_{m-1}(2\sqrt{m}|\mathcal{A}|)}. \quad (3.2.15)
\end{aligned}$$

Ентропія заплутаності в когерентному стані (3.2.14) дається, див. [12], наступним виразом (пригадаємо, що $m = \frac{2}{f}$):

$$S_{\text{entang}} = \tilde{C}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\mathcal{A}|^2 m)^n}{(n!)^2 C_{n+m-1}^n} \ln \left[\frac{(n!)^2 (C_{n+m-1}^n)^2}{\tilde{C}^2 (|\mathcal{A}|^2 m)^n} \right]. \quad (3.2.16)$$

Таким чином, ми маємо ніщо інше як залежність S_{entang} від E_α в параметричній формі (нажаль, ми не можемо розв'язати (3.2.15) відносно $|\mathcal{A}|$ як параметра, для того, щоб вставити розв'язок в (3.2.16); тому ми вимушені використовувати параметричну форму залежності $S_{\text{entang}} = S_{\text{entang}}(E)$). Графік цієї залежності дано на Рис. 3.9.

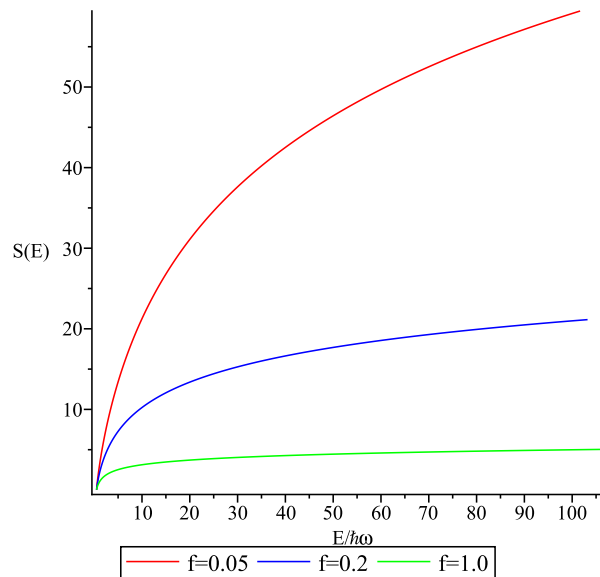


Рис. 3.9. Залежність ентропії заплутаності S_{entang} від енергії E_α для когерентного стану квазібозонів.

3.3 Залежність інших мір (характеристик) заплутаності від енергії

Існують деякі інші широко вживані характеристики заплутаності: ранг Шмідта, конкурентність, число Шмідта K або обернена до нього величина $P = 1/K$, що називається *чистота* (*purity*) [49, 50]. Залежність від енергії цих характеристик заплутаності, – ранга Шмідта, конкурентності та чистоти має дещо простішу форму і може бути порахована подібним чином з використанням явних формул із [12].

Оскільки така характеристика заплутаності як *чистота* використовується у зв'язку з проблемою генерації заплутаності в процесах розсіяння [58]

та інших [60, 66], давайте приділимо деяку увагу величині P .

Для *заплутаної системи*, що складається з одного квазибозона, чистота, як було знайдено в [12], пов'язана з параметром деформації $m = \frac{2}{f}$ простим чином:

$$P = \sum_k \lambda_k^4 = \frac{1}{m}, \text{ або } P = \text{Tr}(\rho_\alpha^{(a)})^2 = \text{Tr}(\rho_\alpha^{(b)})^2 = \frac{1}{m}. \quad (3.3.1)$$

Тоді залежність від енергії для чистоти у випадку одного складеного бозона відразу слідує після об'єднання (3.3.1) з (3.2.3), що дає:

$$P = \frac{f}{2} = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{3}{2} - \frac{E}{\hbar\omega} \right) = \begin{cases} \left(\frac{3}{2} - \frac{E}{\hbar\omega} \right), & \epsilon = 1, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{E}{\hbar\omega} \leq \frac{3}{2}, \\ \left(\frac{E}{\hbar\omega} - \frac{3}{2} \right), & \epsilon = -1, \quad \frac{3}{2} \leq \frac{E}{\hbar\omega} \leq \frac{5}{2}. \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Таким чином, залежність чистоти від енергії *лінійна* для обох $\epsilon = +1$ та $\epsilon = -1$. Відмітимо однак два взаємно протилежні (тобто спадаючий проти зростаючого) типи поведінки чистоти із збільшенням енергії у випадку ферміонних в порівнянні з випадком бозонних складових.

Подібним чином, для чистоти у *випадку одномодових мультик квазибозонних фоківських станів* на основі [12] отримуємо

$$P^\pm(E_\alpha)|_{\epsilon=+1} = \left(C_{2/f}^{[1 \pm \sqrt{1+f-2fE_\alpha/\hbar\omega_\alpha}]/(2f)} \right)^{-1}, \quad (3.3.3)$$

$$P(E_\alpha)|_{\epsilon=-1} = \left(C_{2/f-1+[\sqrt{1-f+2fE_\alpha/\hbar\omega_\alpha-1}]/(2f)} \right)^{-1}, \quad (3.3.4)$$

причому інтервали визначення такі самі як і для ентропії заплутаності, див. (3.2.8) та (3.2.9). Функції енергії (3.3.3) та (3.3.4) представлені графічно на Рис. 3.10 та Рис. 3.11 відповідно. Відмітимо особливу форму кривих на Рис. 3.10 (немонотонна поведінка, з двома ділянками монотонності для кожної кривої).

Також, для *мультик квазибозонних станів із одним квазибозоном на моді*, використовуючи вираз для чистоти, порахований в [12], легко знахо-

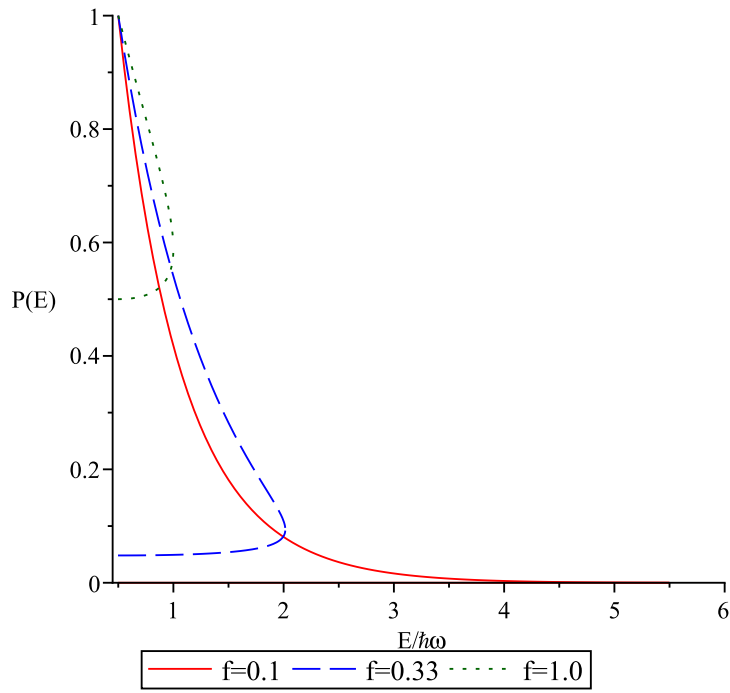


Рис. 3.10. Залежність чистоти P , див. (3.3.3), від енергії E_α для одномодової мультиквазібозонної системи: випадок $\epsilon = +1$ ферміонних компонент.

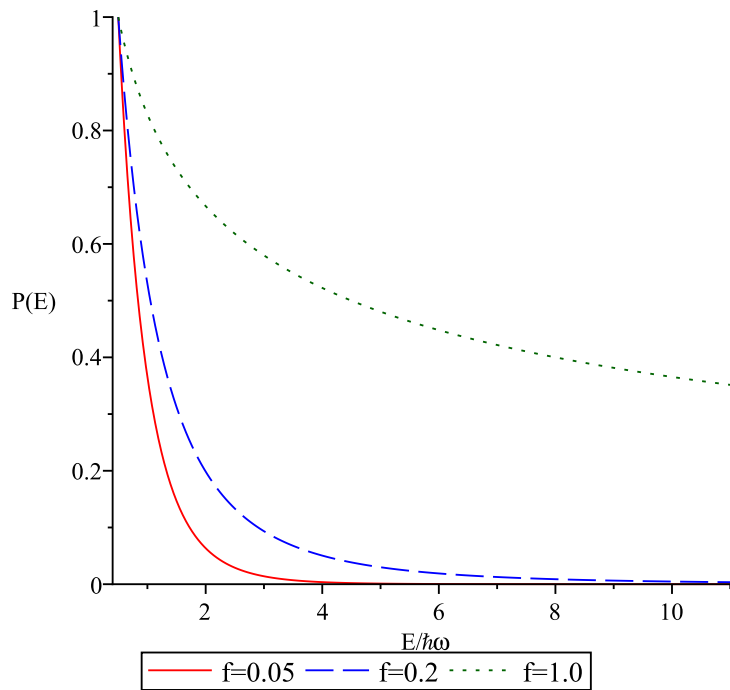


Рис. 3.11. Залежність чистоти P , див. (3.3.4), від енергії E_α для одномодової мультиквазібозонної системи: випадок $\epsilon = -1$ бозонних компонент.

ДИМО

$$P(E) = \exp(-S_{\text{entang}}(E)). \quad (3.3.5)$$

Відповідні графіки зображені на рисунках 3.12 та 3.13. Як показують ри-

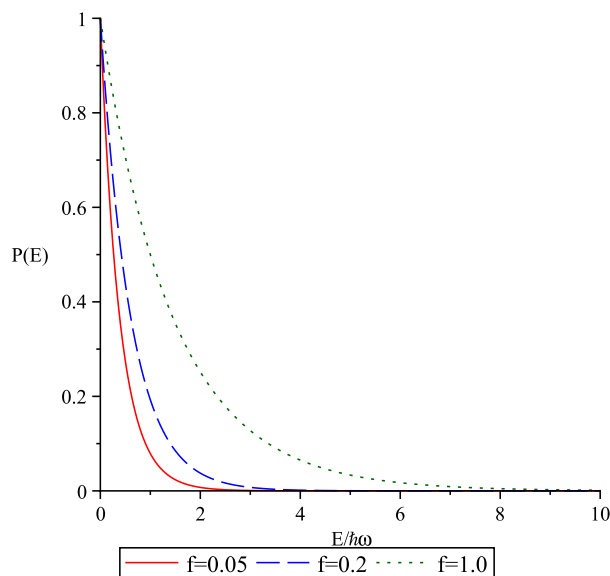


Рис. 3.12. Залежність чистоти P від енергії E для мультиквазібозонної системи з одним квазібозоном на моду: випадок $\epsilon = +1$ ферміонних складових.

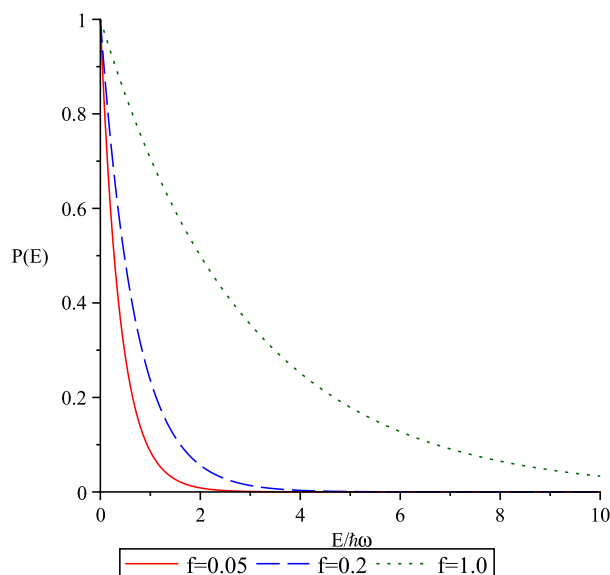


Рис. 3.13. Залежність чистоти P від енергії E_α для мультиквазібозонної системи з одним квазібозоном на моду: випадок $\epsilon = -1$ бозонних складових.

сунки 3.11-3.13, чистота падає від свого максимального можливого значе-

ння $P = 1$ (нульова заплутаність), що досягається при $E = \frac{\hbar\omega}{2}$, тобто коли відсутні кванти, до $P = 0$ при дуже великих енергіях багато-частинкових станів. Особливу поведінку чистоти як функції енергії бачимо на Рис. 3.10: чистота падає від $P = 1$, коли енергія зростає до деякого максимуму $E_{\max}(f)$ (останній визначається параметром f), потім далі зменшується від $P_f \equiv P(E_{\max}(f))$, коли енергія зменшується від $E_{\max}(f)$ до найменших значень. Заманливо проінтерпретувати таке існування двох режимів наступним чином: як додавання так і вилучення [60],[61] квантів (квази-бозона) може привести до зниження чистоти (purity) станів. Два режими, пов'язані з існуванням двох гілок, відрізняються початковим значенням чистоти (purity) P (нульовим чи $P(E_{\max})$)

3.4 Висновки до розділу 3

В даному розділі ми довели, що для складених бозонів, реалізованих деформованими бозонами (деформованими осциляторами), характеристики заплутаності однозначно, див. (3.1.4)-(3.1.6), визначаються параметром деформації $f = 2/m$, і навпаки, міра заплутаності між компонентами визначає степінь деформації. Таким чином, саме внутрішня заплутаність складових розкриває фізичний зміст параметра деформації. Подібні результати, як видно із (3.1.11)-(3.1.12), було встановлено також для мультиквазибозонних станів розглянутих як двочастинкова система, зокрема для фоківських станів (3.1.13)-(3.1.14) та для когерентних станів (3.1.15)-(3.2.16). Було б цікаво розкрити фізичні наслідки встановленого співвідношення між ентропією та деформацією, для тих систем частинок композитної природи де деформовані осцилятори можуть бути ефективно застосовані (наприклад піонів [3, 115], екситонів [8] та ін.).

Зробимо декілька зауважень стосовно отриманих залежностей ентропії заплутаності від енергії, та їх представлень відповідними графіками.

Для стану одного складеного бозона, реалізованого деформованим осцилятором, із врахуванням гамільтоніану (3.2.1), знаходимо, що ентропія заплутаності монотонно росте із енергією якщо складовими є ферміони, та спадає якщо складовими є бозони (Рис. 3.1 та Рис. 3.2).

Висновок такий: для більших енергій двоферміонний квазибозон стає міцніше зв'язаний тоді як двобозонний квазибозон стає менш зв'язаним. В обох випадках енергія $E = \frac{3}{2}\hbar\omega$ відповідає найбільш заплутаному квазибозону, який проявляє себе тут як найбільш близький до звичайного бозона.

У випадку мультиквазибозонного стану для одної фіксованої моди та коли складові ферміонного типу ми спостерігаємо дві гілки – одна спадаюча, а інша зростаюча, див. Рис. 3.5 і передостанній абзац цього розділу. Для інших розглянутих мультиквазибозонних станів (випадок фіксованої моди з ферміонними компонентами, або випадок одного квазибозона/моду, або когерентного стану) ентропія заплутаності монотонно зростає із енергією, див. Рис. 3.6-3.9, в той час як чистота монотонно спадає як на Рис. 3.11-3.13, або з деякими особливостями (два режими чи гілки монотонності, див. Рис. 3.10 та кінець підрозділу 3.3).

Що можна сказати про роль параметра деформації f ? Маємо наступну досить природну рису: ентропія заплутаності збільшується із зменшенням f , тобто із наближенням до чисто бозонної поведінки – або для фоківських станів у фіксованій моді, або для когерентних станів.

При зміні енергії, див. рис. 3.6-3.9, бачимо, що стан двоферміонного квазибозона, мультиквазибозонні стани для двоферміонних квазибозонів у фіксованій моді, мультиквазибозонні стани з одним квазибозоном на моду та когерентні квазибозонні стани більш заплутані при *більшій енергії*. Це підказує можливість збільшувати заплутаність (тобто її ентропію) за рахунок збільшення енергії (мульти)квазибозонного стану. Стани двобозонних квазибозонів *проявляють протилежну поведінку* оскільки вони менш заплутані при більших енергіях. З точки зору фізики ми маємо таким чином

однозначне співвідношення між ступенем (силою) заплутаності та, скажімо, рівнем енергії мультиквазибозонних станів, що розглядаються.

Також, на отримані вище залежності, напр. ті, що на Рис. 3.1 та Рис. 3.6-3.9, можна дивитись в контексті *виробництва чи підсилення заплутаності* (див. [58, 122]), і це дає інше можливе фізичне застосування наших результатів. Як можна бачити, заплутаність стає більшою із збільшенням енергії (додавання частинки?) для перерахованих випадків. На відміну від цих випадків, у випадку двобозонних квазибозонів *створення заплутаності* спостерігається коли енергія зменшується. Тобто, коли енергія системи зменшується (вилучення частинки?), ентропія заплутаності росте. Можливо, це можна було б перевірити на деяких фізичних прикладах розглядуваних систем, особливо з точки зору додавання/вилучення частинок [60, 61].

Зробимо ще деякі зауваження стосовно можливої експериментальної перевірки отриманих результатів, які можуть стосуватися залежностей, зображених напр. на Рис. 3.1 та Рис. 3.2. Що стосується першого випадку (двоферміонний квазибозон), можна розглянути складені (квази)частинки типу “електрон-електрон” або “електрон-дірка” (екситони). Щоб перевірити властивості двобозонних складених (квази)частинок ми могли б взяти біфотони чи молекулу водню H_2 для відповідних релевантних експериментів. Крім того, мультиквазибозонні залежності, представлені на Рис. 3.7 та Рис. 3.8, також можуть мати практичний чи фізичний інтерес.

Накінець відмітимо інтригуючу появу “біфуркацій” (або існування двох гілок), що на Рис. 3.5 та Рис. 3.10. Яка із гілок фізично реалізується могло б бути інтригуючим можливим питанням для перевірки. Скажімо, $2k$ -електронні, $2k$ -фотонні, k -екситонні системи, та ін. могли б бути використані для спеціалізованих експериментів. Крім квазибозонних станів, що вивчаються в даній роботі, не чисті, напр. теплові стани квазибозонів, також представляють інтерес для майбутнього аналізу.

Результати розділу опубліковано в [12, 13].

РОЗДІЛ 4

ТОЧНІ ВИРАЗИ ДЛЯ ІНТЕРСЕПТІВ r -ЧАСТИНКОВИХ
КОРЕЛЯЦІЙНИХ ФУНКЦІЙ В МОДЕЛІ μ -БОЗЕ ГАЗУ

Модель деформованого μ -Бозе газу [82] є однією із реалізацій деформованих осциляторів, а саме μ -осцилятора Янусіса – нелінійного узагальнення стандартного квантового осцилятора (визначення, деякі властивості та застосування див. напр. в [5]). В статті [82] були отримані приблизні вирази до фіксованого порядку наближення по μ для 2-х та 3-х частинкових кореляційних функцій в моделі деформованого μ -Бозе газу, а для відповідних асимптотик знайдені точні вирази. Виявляється, що результуючі вирази для інтерсептів r -го порядку можна отримати в точній формі, що і складає основну частину даного розділу. Фактично, ми виводимо відповідні точні формули виражені в термінах спеціальної функції Лерха для загального випадку r -частинкового кореляційного інтерсепту, а також ілюструємо деякі із них графічно, приділяючи особливу увагу випадкам $r = 2$ та $r = 3$.

4.1 Вивід точних виразів для інтерсептів кореляційних
функцій в моделі μ -Бозе газу

Наш розгляд стосується моделі деформованого μ -Бозе газу як вторинно квантованої системи спеціально деформованих бозонів. Це означає, що кожна мода \mathbf{k} в деформованому Бозе-газі описується деформованим осцилятором із операторами народження/знищення $a_{\mathbf{k}}^\dagger$, $a_{\mathbf{k}}$, та оператором числа частинок $N_{\mathbf{k}}$. Визначальні співвідношення для такої системи деформова-

них осциляторів (деформованих бозонів) мають наступний вигляд

$$a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} = \phi(N_{\mathbf{k}}), \quad (4.1.1)$$

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} (\phi(N_{\mathbf{k}} + 1) - \phi(N_{\mathbf{k}})), \quad [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = 0, \quad (4.1.2)$$

$$[N_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}}^{\dagger}, \quad [N_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = -\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}}, \quad (4.1.3)$$

де використано поняття структурної функції $\phi(N)$. Як бачимо, ми маємо справу із системою деформованих осциляторів, які є модово незалежні, тобто, оператори, які відповідають деформованим осциляторам в різних модах, комутують.

Як в [82], та подібно до відповідних недеформованих аналогів [123], розглядувані інтерсепти кореляційної функції r -го порядку при заданому імпульсі \mathbf{k} визначені наступним чином

$$\lambda^{(r)}(\mathbf{k}) = \frac{\langle (a_{\mathbf{k}}^{\dagger})^r (a_{\mathbf{k}})^r \rangle}{\langle a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} \rangle^r} - 1. \quad (4.1.4)$$

Символом $\langle \dots \rangle$ позначено звичайне статистичне усереднення для системи з Гамільтоніаном H :

$$\langle F \rangle = \frac{\text{Tr } F \exp(-\beta H)}{\text{Tr } \exp(-\beta H)}, \quad (4.1.5)$$

де $\beta = (k_B T)^{-1}$, k_B – постійна Больцмана. Використовуючи (4.1.1) та (4.1.3) формула (4.1.4) для інтерсептів $\lambda^{(r)}(\mathbf{k})$ може бути переписана в термінах структурної функції $\phi(N)$ як

$$\lambda^{(r)}(\mathbf{k}) = \frac{\langle [N_{\mathbf{k}}][N_{\mathbf{k}} - 1] \cdot \dots \cdot [N_{\mathbf{k}} - r + 1] \rangle}{\langle [N_{\mathbf{k}}] \rangle^r} - 1, \quad (4.1.6)$$

де використано позначення $[N] = [N]_{\phi} \equiv \phi(N)$ для структурної функції. Оскільки ми маємо справу із моделлю деформованого μ -Бозе газу [82], для $\phi(N)$ ми беремо структурну функцію деформованого μ -осцилятора:

$$\phi_{\mu}(N) \equiv [N]_{\mu} = \frac{N}{1 + \mu N}, \quad \mu > 0.$$

Інтерсепти (4.1.6) взагалі кажучи залежать від вибору Гамільтоніана H . Ми беремо Гамільтоніан в наступній формі

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} \quad (4.1.7)$$

та припускаємо, що енергетичні рівні деформованого бозона залежать тільки від модуля імпульса $k = |\mathbf{k}|$. Тоді, використовуючи фоківський базис, в якому $N_{\mathbf{k}}|n_{\mathbf{k}}\rangle = n_{\mathbf{k}}|n_{\mathbf{k}}\rangle$, $\phi(N_{\mathbf{k}})|n_{\mathbf{k}}\rangle = \phi(n_{\mathbf{k}})|n_{\mathbf{k}}\rangle$, модову незалежність, та враховуючи (4.1.5)-(4.1.7), для інтерсепта r -частинкової кореляційної функції ми отримуємо

$$\lambda_{\mu}^{(r)}(k) = \frac{(1 - e^{-\beta\hbar\omega})^{-r+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+\mu n} \cdot \dots \cdot \frac{n-r+1}{1+\mu(n-r+1)} \exp[-\beta\hbar\omega n]}{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+\mu n} \exp[-\beta\hbar\omega n]\right)^r} - 1, \quad (4.1.8)$$

$$\omega = \omega_{\mathbf{k}} = \omega(k).$$

Як бачимо, інтерсепт залежить від μ , модуля імпульса k та температури T . Рухаючись далі, ми розкладаємо добуток в n -ому члені ряду в чисельнику (що перед експонентою) на суму простих дробів:

$$\prod_{l=0}^{r-1} \frac{n-l}{1+\mu(n-l)} = \frac{1}{\mu^r} \prod_{l=0}^{r-1} \left(1 - \frac{1}{1+\mu(n-l)}\right) = \frac{1}{\mu^r} + \frac{1}{\mu^r} \sum_{l=0}^{r-1} \frac{A_l^{(r)}(\mu)}{1+\mu(n-l)}. \quad (4.1.9)$$

Коефіцієнти $A_l^{(r)}(\mu)$ задовольняють рекурентні співвідношення:

$$\begin{cases} A_l^{(r+1)}(\mu) = A_l^{(r)}(\mu) \left(1 + \frac{1}{\mu(r-l)}\right), & l = 0, \dots, r-1; \\ A_r^{(r+1)}(\mu) = -1 - \sum_{l=0}^{r-1} \frac{A_l^{(r)}(\mu)}{\mu(r-l)}. \end{cases} \quad (4.1.10)$$

Ці співвідношення дозволяють знайти коефіцієнти $A_l^{(r)}$, перерахуємо декілька з них:

$$A_0^{(1)}(\mu) = -1;$$

$$\begin{aligned}
A_0^{(2)}(\mu) &= -1 - \frac{1}{\mu}, & A_1^{(2)}(\mu) &= -1 + \frac{1}{\mu}; \\
A_0^{(3)}(\mu) &= -1 - \frac{3}{2\mu} - \frac{1}{2\mu^2}, & A_1^{(3)}(\mu) &= -1 + \frac{1}{\mu^2}, & A_2^{(3)}(\mu) &= -1 + \frac{3}{2\mu} - \frac{1}{2\mu^2}; \\
&\dots
\end{aligned}$$

Тоді, в силу (4.1.9)-(4.1.10) нескінченну суму ряду, що в чисельнику (4.1.8), можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1 + \mu n} \cdot \dots \cdot \frac{n - r + 1}{1 + \mu(n - r + 1)} \exp[-\beta\hbar\omega n] &= \frac{1}{\mu^r} \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-\beta\hbar\omega n] + \\
&+ \frac{1}{\mu^r} \sum_{l=0}^{r-1} A_l^{(r)}(\mu) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \mu(n - l)} \exp[-\beta\hbar\omega n]. \quad (4.1.11)
\end{aligned}$$

Подібним чином для суми в знаменнику (4.1.8) отримуємо

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1 + \mu n} \exp[-\beta\hbar\omega n] &= \frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-\beta\hbar\omega n] + \\
&+ \frac{1}{\mu} A_0^{(1)}(\mu) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \mu n} \exp[-\beta\hbar\omega n]. \quad (4.1.12)
\end{aligned}$$

Як бачимо, другі ряди в правій частині (4.1.11) та (4.1.12) подібної форми. Тому, щоб обчислити цей вираз, достатньо провести сумування відповідного типового ряду, що дає:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a + bn} e^{-\beta\hbar\omega n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a + bn} \equiv \frac{1}{b} \Phi(z, 1, a/b) = \frac{1}{b} \Phi(e^{-\beta\hbar\omega}, 1, a/b), \\
a &= 1 - \mu l, \quad b = \mu, \quad l = 1, \dots, r - 1, \quad z = e^{-\beta\hbar\omega},
\end{aligned}$$

де Φ – це спеціальна трансцендентна функція Лерха, див. напр. [124].

В результаті ми приходимо до наступного виразу для температурного середнього $\langle a_k^\dagger a_k \rangle$

$$\langle a_k^\dagger a_k \rangle = \langle \phi(N_k) \rangle = \begin{cases} (e^{\beta\hbar\omega} - 1)^{-1}, & \mu = 0, \\ \mu^{-1} - \mu^{-2}(1 - e^{-\beta\hbar\omega})\Phi(e^{-\beta\hbar\omega}, 1, \mu^{-1}), & \mu > 0, \end{cases} \quad (4.1.13)$$

та до середніх r -го порядку (деформовані аналоги r -частинкових розподілів по імпульсах)

$$\langle (a_k^\dagger)^r (a_k)^r \rangle = 1 + \mu^{-1}(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_{l=0}^{r-1} A_l^{(r)}(\mu) \Phi(e^{-\beta\hbar\omega}, 1, \mu^{-1} - l), \quad r \geq 2, \quad (4.1.14)$$

які складають один із наших основних результатів. Границя $\mu \rightarrow 0$ в застосуванні до (4.1.14) має особливість, тому ми обчислюємо $\langle (a_k^\dagger)^r (a_k)^r \rangle$ для $\mu = 0$ окремо. Починаючи із визначення ми приходимо до

$$\langle (a_k^\dagger)^r (a_k)^r \rangle|_{\mu=0} = (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\dots(n-r+1)e^{-\beta\hbar\omega n}.$$

Використовуючи тотожність Абеля для останньої суми отримуємо:

$$\begin{aligned} & (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\dots(n-r+1)e^{-\beta\hbar\omega n} = (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \cdot \\ & \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ N(N-1)\dots(N-r+1) \frac{e^{-\beta\hbar\omega(N+1)} - 1}{e^{-\beta\hbar\omega} - 1} - \sum_{n=0}^{N-1} r n(n-1)\dots(n-r+2) \cdot \right. \\ & \cdot \left. \frac{e^{-\beta\hbar\omega(n+1)} - 1}{e^{-\beta\hbar\omega} - 1} \right\} = (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \frac{r}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\dots(n-r+2)e^{-\beta\hbar\omega n} = \\ & = \frac{r}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \langle (a_k^\dagger)^{r-1} (a_k)^{r-1} \rangle|_{\mu=0} = \dots = \frac{r!}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^r} \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\langle (a_k^\dagger)^r (a_k)^r \rangle|_{\mu=0} = \frac{r!}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^r}. \quad (4.1.15)$$

Із (4.1.13)-(4.1.14) та рівн. (4.1.4) отримуємо наш наступний результат – інтерсепт $\lambda_\mu^{(r)}(k)$ кореляційної функції r -го порядку,

$$\begin{aligned} \lambda_\mu^{(r)}(k) &= \left(1 + \mu^{-1}(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_{l=0}^{r-1} A_l^{(r)}(\mu) \Phi(e^{-\beta\hbar\omega}, 1, \mu^{-1} - l) \right) \cdot \\ & \cdot \left(1 + \mu^{-1}(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) A_0^{(1)}(\mu) \Phi(e^{-\beta\hbar\omega}, 1, \mu^{-1}) \right)^{-r} - 1, \quad r = 2, 3, \dots, \quad \mu > 0, \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

Використовуючи (4.1.15), в без-деформаційній границі $\mu \rightarrow 0$ ми відновлюємо:

$$\lambda_{\mu}^{(r)}(k)|_{\mu=0} = r! - 1. \quad (4.1.17)$$

Отримана формула (4.1.16) представляє *точний загальний* вираз для інтерсептів, що розглядаються, так як вона покриває усі порядки $r \geq 2$.

Розклад в ряд по μ . У випадку малих значень параметра деформації μ може представляти інтерес розклад величини $\lambda_{\mu}^{(r)}(k)$ в ряд по μ . Для таких цілей ми розкладемо типовий ряд, представлений в (4.1.11) та (4.1.12) наступним чином:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \mu(n-l)} e^{-\alpha n} = \sum_{s=0}^{\infty} c_s(l) \mu^s, \quad \alpha = \beta \hbar \omega, \quad l = 0, \dots, r-1. \quad (4.1.18)$$

Коефіцієнти $c_s(l)$ розкладу знаходимо виходячи із визначення

$$\begin{aligned} c_s(l) &= \frac{1}{s!} \frac{\partial^s}{\partial \mu^s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \mu(n-l)} e^{-\alpha n} \Big|_{\mu=0} = e^{-\alpha l} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^s (n-l)^s e^{-\alpha(n-l)} = \\ &= (-1)^s e^{-\alpha l} \sum_{n=-l}^{\infty} n^s e^{-\alpha n} = (-1)^s e^{-\alpha l} \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^s \sum_{n=-l}^{\infty} e^{-\alpha n} = \\ &= e^{-\alpha l} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^s \frac{e^{\alpha l}}{1 - e^{-\alpha}} = \frac{1}{x^l} \left(x \frac{d}{dx} \right)^s \frac{x^{l+1}}{x-1}, \quad x = e^{\alpha}. \end{aligned}$$

Для похідної в останньому виразі ми проробимо наступні перетворення ($m = l + 1$):

$$\begin{aligned} \left(x \frac{d}{dx} \right)^s \frac{x^m}{x-1} &= \left(x \frac{d}{dx} \right)^s \frac{x^m - 1}{x-1} + \left(x \frac{d}{dx} \right)^s \frac{1}{x-1} = \\ &= \left(x \frac{d}{dx} \right)^s \sum_{j=0}^{m-1} x^j + \left(x \frac{d}{dx} \right)^s \frac{1}{x-1} = \delta_{s0} + \sum_{j=1}^{m-1} j^s x^j + \left(x \frac{d}{dx} \right)^s \frac{1}{x-1}. \end{aligned}$$

По індукції можна перевірити, що останню похідну можна представити у вигляді скінченної суми:

$$\left(x \frac{d}{dx} \right)^s \frac{1}{x-1} = \sum_{j=0}^s \frac{(-1)^j}{j+1} \frac{g_s^j}{(x-1)^{j+1}}$$

де коефіцієнти g_s^j задовольняють рекурентне співвідношення

$$g_{s+1}^j = (j+1)(g_s^j + g_s^{j-1}), \quad g_0^0 = 1.$$

Розв'язок цього рекурентного співвідношення виражається через числа Стірлінга другого роду $\left\{ \begin{smallmatrix} s \\ j \end{smallmatrix} \right\}$:

$$g_s^j = (j+1)! \left\{ \begin{smallmatrix} s+1 \\ j+1 \end{smallmatrix} \right\}.$$

Виходячи з цього, коефіцієнти $c_s(l)$ можна записати наступним чином

$$c_s(l) = \delta_{s0} e^{-\beta\hbar\omega l} + e^{-\beta\hbar\omega l} \sum_{j=1}^l j^s e^{\beta\hbar\omega j} + e^{-\beta\hbar\omega l} (-1)^s \sum_{j=0}^s j! \left\{ \begin{smallmatrix} s+1 \\ j+1 \end{smallmatrix} \right\} \frac{1}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^{j+1}}.$$

Випишемо декілька перших коефіцієнтів:

$$c_0(0) = 1 + \frac{1}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)},$$

$$c_1(0) = -\frac{1}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)} - \frac{1}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^2},$$

$$c_2(0) = \frac{1}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)} + \frac{3}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^2} + \frac{2}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^3},$$

$$c_3(0) = -\frac{1}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)} - \frac{7}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^2} - \frac{12}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^3} - \frac{6}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^4},$$

$$c_4(0) = \frac{1}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)} + \frac{15}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^2} + \frac{50}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^3} + \frac{60}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^4} + \frac{24}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^5},$$

$$c_5(0) = -\frac{1}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)} - \frac{31}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^2} - \frac{180}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^3} - \frac{390}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^4} - \frac{360}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^5} - \frac{120}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^6},$$

$$c_6(0) = \frac{1}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)} + \frac{63}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^2} + \frac{602}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^3} + \frac{2100}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^4} + \frac{3360}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^5} + \frac{2520}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^6} + \frac{840}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^7}.$$

Використовуючи “початкові” значення для коефіцієнтів $c_s(0)$, усі інші коефіцієнти можна визначити за формулою

$$c_s(l) = e^{-\beta\hbar\omega l} \sum_{j=1}^l j^s e^{\beta\hbar\omega j} + e^{-\beta\hbar\omega l} c_s(0).$$

Тоді суми (4.1.11) та (4.1.12), причому остання є частковим випадком першої, мають наступні розклади Тейлора:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+\mu n} \cdots \frac{n-r+1}{1+\mu(n-r+1)} e^{-\beta\hbar\omega n} = \frac{1}{\mu^r(1-e^{-\beta\hbar\omega})} + \frac{1}{\mu^r} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{r-1} A_l^{(r)}(\mu) c_s(l) \mu^s, \quad (4.1.19)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+\mu n} e^{-\beta\hbar\omega n} = \frac{1}{\mu} (1-e^{-\beta\hbar\omega})^{-1} + \frac{1}{\mu} \sum_{s=0}^{\infty} A_0^{(1)}(\mu) c_s(0) \mu^s. \quad (4.1.20)$$

Ряди (4.1.19) та (4.1.20), як можна показати, розходяться при будь-якому $\mu > 0$ і, таким чином, їх практичне застосування є сумнівним.

4.2 Часткові випадки та порівняння з результатами інших моделей деформованого Бозе-газу

Розглянемо два часткові випадки $r = 2$ та $r = 3$, які були раніше розглянуті в [82] в рамках фіксованого наближення. В цих двох випадках, для інтерсептів $\lambda_{\mu}^{(2)}$ та $\lambda_{\mu}^{(3)}$ ($0 < \mu < \frac{1}{2}$) ми отримуємо:

$$\lambda_{\mu}^{(2)} = (1-e^{-\beta\hbar\omega})^{-1} \left\{ (1-e^{-\beta\hbar\omega})^{-1} - \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} \right) \Phi(e^{-\beta\hbar\omega}, 1, \mu^{-1}) - \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu^2} \right) \cdot \Phi(e^{-\beta\hbar\omega}, 1, \mu^{-1}-1) \right\} \left((1-e^{-\beta\hbar\omega})^{-1} - \mu^{-1} \Phi(e^{-\beta\hbar\omega}, 1, \mu^{-1}) \right)^{-2} - 1, \quad (4.2.1)$$

$$\lambda_{\mu}^{(3)} = (1-e^{-\beta\hbar\omega})^{-2} \left\{ (1-e^{-\beta\hbar\omega})^{-1} - \left(\frac{1}{\mu} + \frac{3}{2\mu^2} + \frac{1}{2\mu^3} \right) \Phi(e^{-\beta\hbar\omega}, 1, \mu^{-1}) - \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu^3} \right) \Phi(e^{-\beta\hbar\omega}, 1, \mu^{-1}-1) - \left(\frac{1}{\mu} - \frac{3}{2\mu^2} + \frac{1}{2\mu^3} \right) \Phi(e^{-\beta\hbar\omega}, 1, \mu^{-1}-2) \right\} \cdot \left((1-e^{-\beta\hbar\omega})^{-1} - \mu^{-1} \Phi(e^{-\beta\hbar\omega}, 1, \mu^{-1}) \right)^{-3} - 1. \quad (4.2.2)$$

Варто розглянути наступну спеціально побудовану [125] функцію $r_{\mu}^{(3)}(k)$ (також розглянуту в [82, 115]), що є корисною в експериментальному контексті:

$$r_{\mu}^{(3)}(k) = \frac{\lambda_{\mu}^{(3)}(k) - 3\lambda_{\mu}^{(2)}(k)}{2(\lambda_{\mu}^{(2)}(k))^{3/2}}. \quad (4.2.3)$$

Визначення $r_\mu^{(3)}(k)$ побудовано таким чином, що за рахунок скорочення небажаних похибок, яке відбувається у чисельнику, забезпечується покращена *purity*. Враховуючи (4.2.3) та точні вирази (4.2.1)-(4.2.2) явний вираз для $r_\mu^{(3)}(k)$ безпосередньо слідує із підстановки (тому ми його тут не приводимо).

У випадку, коли деформовані бозони (тут, що відповідають μ -Бозе газу) використовуються як в [82, 112, 115] для опису релятивістських частинок, енергія задається формулою $\hbar\omega_k = \sqrt{m^2 + k^2}$. Тоді залежність величин $\langle a_k^\dagger a_k \rangle$, $\lambda_\mu^{(2)}(k, T)$, $\lambda_\mu^{(3)}(k, T)$ та $r_\mu^{(3)}(k, T)$ від імпульсу $k = |\mathbf{k}|$ для значень $\mu = 0.1, 0.2$ параметра деформації, при температурах $T = 120, 180 \text{ MeV}$, є такою, що зображена на рисунках 4.1, 4.2, 4.3 та 4.4.

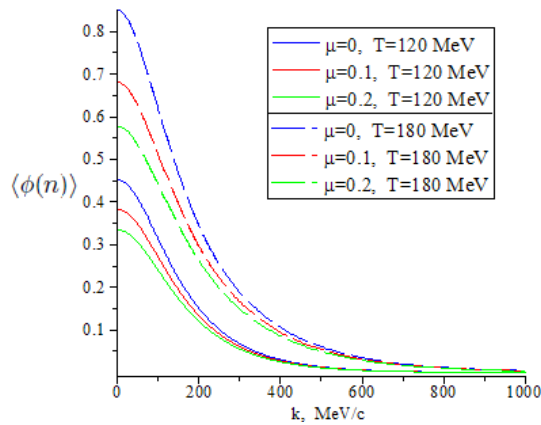


Рис. 4.1. Залежність “деформованого розподілу” $\langle \phi(N) \rangle = \langle a_k^\dagger a_k \rangle$ від імпульсу k , для значень параметра деформації $\mu = 0$ (звичайний Бозе-випадок) та $\mu = 0.1, 0.2$ (деформований випадок) і температур $T = 120, 180 \text{ MeV}$

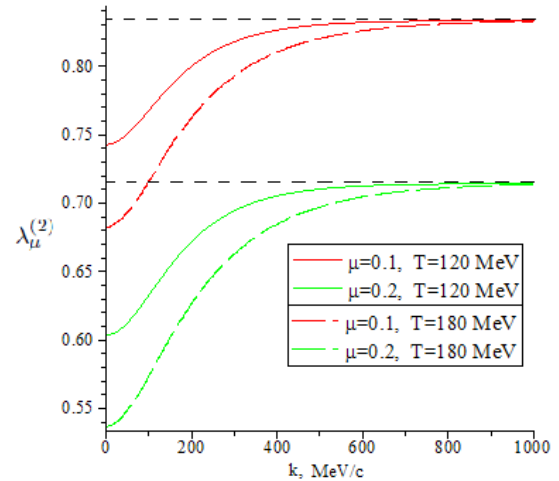


Рис. 4.2. Залежність інтерцепта $\lambda_\mu^{(2)}(k)$ від імпульсу k , для значень параметра деформації $\mu = 0.1, 0.2$ та температур $T = 120, 180 \text{ MeV}$. Асимптотики знаходяться з (4.2.7) при $\mu = 0.1, 0.2$.

Із Рис. 4.1 ми бачимо, що криві деформованих розподілів лежать нижче звичайного ($\mu = 0$) недеформованого Бозе-Ейнштейнівського розподілу; із збільшенням параметра деформації μ або зменшенням температури T криві проходять нижче і нижче. В залежностях від імпульсу інтерцептів $\lambda_\mu^{(2)}(k)$, $\lambda_\mu^{(3)}(k)$, та функції $r_\mu^{(3)}(k)$ (рисунки 4.2-4.4) ми спостерігаємо

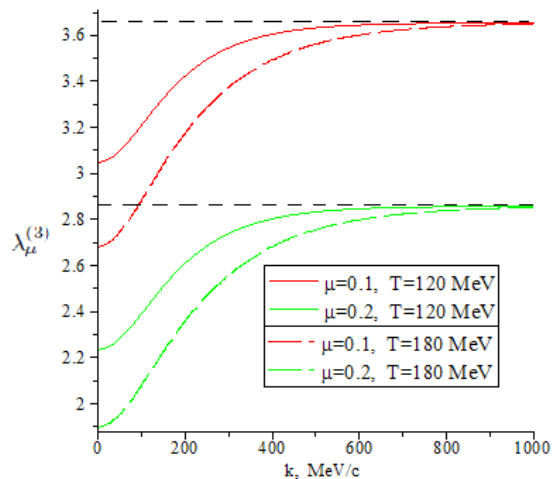


Рис. 4.3. Залежність інтерсепта $\lambda_{\mu}^{(3)}(k)$ від імпульсу k , для значень параметра деформації $\mu = 0.1, 0.2$ та температур $T = 120, 180 \text{ MeV}$. Асимптотики знайдені з (4.2.7) при $\mu = 0.1, 0.2$.

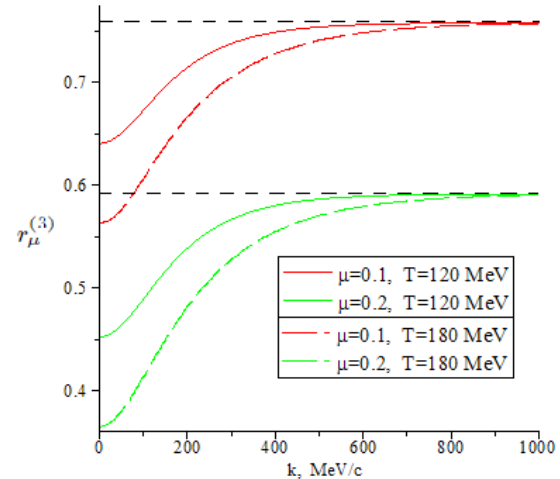


Рис. 4.4. Залежність кореляційної функції $r_{\mu}^{(3)}(k)$ від імпульсу k , для значень параметра деформації $\mu = 0.1, 0.2$ та температур $T = 120, 180 \text{ MeV}$. Асимптотики слідують із (4.2.3) після підстановки (4.2.7).

подібну поведінку по відношенню до μ – більші значення параметрів μ відповідають нижчим кривим, в той час як нижчі температури відповідають кривим, що проходять вище. Крім того, у всіх графіках на рисунках 4.2-4.4 залежність від імпульсу k асимптотично прямує до відповідних постійних значень для інтерсептів (даних в (4.2.7) нижче), а асимптотика для $r_{\mu}^{(3)}(k)$ слідує із (4.2.3).

Частина розділу, що залишилась, присвячена порівнянню результатів отриманих вище з аналогічними результатами, представленими в більш ранніх статтях по інших моделях деформованого Бозе-газу. Порівняння стосується кореляційних інтерсептів разом із їхніми асимптотиками, знайденими в рамках моделі μ -Бозе газу [82], із відповідними величинами, знайденими в моделі деформованого Бозе газу іншого типу. Наприклад, у випадку моделі p, q -Бозе газу точні вирази для деформованого аналогу r -частинкового розподілу та для інтерсептів кореляційної функції r -го порядку, отриманої в [114], набувають вигляду, відповідно (введено позна-

чення $[r]_{p,q}! \equiv [r]_{p,q}[r-1]_{p,q}\dots[1]_{p,q}$:

$$\langle (A_k^\dagger)^r (A_k)^r \rangle = \frac{[r]_{p,q}! (e^{\hbar\beta\omega} - 1)}{\prod_{j=0}^r (e^{\hbar\beta\omega - p^j q^{r-j}})}, \quad (4.2.4)$$

$$\lambda_{p,q}^{(r)}(k) = \frac{\langle (A_k^\dagger)^r (A_k)^r \rangle}{\langle A_k^\dagger A_k \rangle^r} - 1 = [r]_{p,q}! \frac{(e^{\hbar\omega} - p)^r (e^{\hbar\omega} - q)^r}{(e^{\hbar\omega} - 1)^{r-1} \prod_{j=0}^r (e^{\hbar\omega} - q^{r-j} p^j)} - 1. \quad (4.2.5)$$

По відношенню до відповідних результатів (4.1.16) даної глави, вираз (4.2.5), хоча і містить два параметра деформації, має простішу форму (виражену в термінах елементарних функцій, а не спеціальних), і це імовірно пов'язано з тим фактом, що p, q -осцилятор належить до класу Фібоначчі, в той час як μ -осцилятор представляє клас осциляторів квази-Фібоначчі [81] (тому відповідний розгляд є більш складним).

Тепер перейдемо до розгляду асимптотичної поведінки. Ми бачимо, що кореляційні інтерсепти прямують до певних постійних значень при великих імпульсах. Ці асимптотичні значення $\lambda_\mu^{(r)}(k, T)$ залежать тільки від μ , та можуть бути отримані безпосередньо із визначення (4.1.8) як границя

$$\begin{aligned} \lambda_{\mu, asympt}^{(r)} &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+\mu n} \cdot \dots \cdot \frac{n-r+1}{1+\mu(n-r+1)} e^{-\beta\hbar\omega n}}{(1 - e^{-\beta\hbar\omega})^{r-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+\mu n} e^{-\beta\hbar\omega n} \right)^r} - 1 = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{[r]_\mu! e^{-\beta\hbar\omega r} + \dots}{\left(\frac{1}{1+\mu} \right)^r e^{-\beta\hbar\omega r} + \dots} - 1 = (1 + \mu)^r [r]_\mu! - 1, \quad [r]_\mu! \equiv [r]_\mu [r-1]_\mu \dots [1]_\mu. \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

В чисельнику, залишається домінуючий $n = r$ член, в той час як у знаменнику домінує $n = 1$ член. Для $r = 2$ та $r = 3$ цей результат є у повному узгодженні із відповідними асимптотичними значеннями інтерсептів $\lambda^{(2)}$ та $\lambda^{(3)}$ μ -Бозе газу, що були раніше знайдені в [82]:

$$\begin{aligned} \lambda_{\mu, asympt}^{(2)} &= (1 + \mu)^2 [2]_\mu! - 1 = \frac{1}{1 + 2\mu}, \\ \lambda_{\mu, asympt}^{(3)} &= (1 + \mu)^3 [3]_\mu! - 1 = \frac{5 + 7\mu}{(1 + 2\mu)(1 + 3\mu)}. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Повчально порівняти асимптотичні значення (4.2.6) кореляційних інтерсептів r -го порядку для моделі μ -Бозе газу з відповідними асимптотиками у випадку моделі p, q -Бозе газу [114, 115], тобто

$$\lambda_{pq, asympt}^{(r)} = [r]_{p,q}! - 1. \quad (4.2.8)$$

Відмінність, виражена з боку μ -Бозе газу додатковим фактором $(1 + \mu)^r$, пов'язана з тим фактом, що для p, q -осцилятора ми маємо $[1]_{p,q} = 1$, в той час як для μ -осцилятора $[1]_{\mu} = \frac{1}{1+\mu} \neq 1$. Точний вираз для асимптотики функції $r_{\mu}^{(3)}(k)$ можна отримати як в [82] підстановкою (4.2.7) в (4.2.3).

4.3 Висновки до розділу 4

Даний розділ описує подальші кроки по відношенню до [82] – тут ми узагальнюємо попередні результати і знаходимо їх в точній формі. Більш точно, в рамках моделі μ -Бозе газу ми отримали *точні* вирази (4.1.16), (4.1.17) для інтерсептів кореляційних функцій r -го порядку для будь-якого $r \geq 2$, а також явні формули (4.1.13)-(4.1.15) для (деформованого та недеформованого) одно- та r -частинкового розподілів. Нагадаємо, що в [82] відповідні формули були дані тільки для випадків $r = 2$ та $r = 3$, і в рамках певного наближення. В даному розділі точні вирази для цих часткових випадків ($r = 2$ та $r = 3$) представлені в (4.2.1) та (4.2.2) вище. Ми також отримали точну формулу, яка дає асимптотичні значення для інтерсептів кореляційних функцій r -го порядку, як відповідні функції параметра μ . Отримані Тейлорівські розклади по параметру деформації μ для одно- та r -частинкових розподілів (деформованих) розподілів, див. (4.1.19) та (4.1.20). Подальший аналіз показує, що вони розходяться при будь-якому $\mu > 0$.

Залежність від імпульсу k температурного середнього $\langle a_k^{\dagger} a_k \rangle$, інтерсептів $\lambda_{\mu}^{(2)}(k)$ і $\lambda_{\mu}^{(3)}(k)$ другого і третього порядків, а також функції $r_{\mu}^{(3)}(k)$,

див. (4.2.3), була проілюстрована на відповідних рисунках 4.1-4.4. Порівняння отриманих результатів із результатами попередніх статей показує, що графіки $\lambda_\mu^{(2)}(k)$, $\lambda_\mu^{(3)}(k)$ та $r_\mu^{(3)}(k)$ знаходяться у якісному узгодженні з попередніми результатами. Більш того, відповідні асимптотики $\lambda_\mu^{(2)}(k)$ та $\lambda_\mu^{(3)}(k)$ повністю узгоджуються із асимптотиками, знайденими в [82]. Якщо порівнювати асимптотики (4.2.6) з аналогічними асимптотиками (4.2.8) знайденими, *також для довільного r* , у випадку p, q -деформації [114] ми спостерігаємо наступне. В обох випадках з'являються відповідні деформації r -факторіала, але результат (4.2.6) відрізняється від формули (4.2.8), див. також [114], присутністю додаткового множника $(1 + \mu)^r$ – це зумовлено різними значеннями структурної функції деформації при $n = 1$.

Результати розділу опубліковано в [14].

ВИСНОВКИ

В дисертації побудовано точну алгебраїчну реалізацію складених (ком-
 позитних) квазибозонів, які утворені з двох бозонів чи двох ферміонів, чи
 навіть двох q -ферміонів, в термінах деформованих осциляторів. Отримана
 реалізація дозволяє працювати з операторами народження, знищення та
 числа квазибозонів як з відповідними операторами деформованих осциля-
 торів. Розглянуто застосування отриманої реалізації до знаходження мір
 заплутаності квазибозонних станів та інші застосування. Більш детально,
 отримано наступні результати:

- Для двоферміонних чи двобозонних складених квазибозонів доведе-
 но існування і знайдено явний вигляд їх реалізації деформованими
 осциляторами (із квадратичною структурною функцією). Отримано
 також коефіцієнтні матриці, через які виражено стани квазибозонів
 в цій реалізації.
- Дано узагальнення такої реалізації на випадок квазибозонів, утво-
 рених із двох q -ферміонів. При $q \neq 1$ квазибозони реалізуються де-
 формованими осциляторами із структурною функцією деформації,
 що є добутком структурних функцій (q -деформованих) компонент.
 Квазибозонні стани при цьому також відповідним чином фактори-
 зовані.
- Обчислено основні кількісні характеристики двочастинної (biparti-
 te) заплутаності: ранг Шмідта, число Шмідта, ентропію заплутано-
 сті і чистоту (purity), – для заплутаних станів квазибозонів, реалі-
 зованих деформованими осциляторами.
- Отримано явний вигляд залежності ентропії, а також і чистоти

(purity), двочастинної заплутаності від енергії для одноквазибозонних, когерентних та мультиквазибозонних станів квазибозонів.

- У застосуванні деформованих осциляторів до моделі деформованого μ -Бозе газу знайдено точні вирази для інтерсептів r -частинкових кореляційних функцій. Проведено порівняння отриманих виразів та їх асимптотик з відомими раніше результатами для μ -Бозе газу та pq -Бозе газу.

ДОДАТКИ

А Доведення твердження 2.2

Оскільки наш розгляд нижче стосується лише однієї моди α , ми опустимо індекс α . Доведемо спочатку рівність (2.1.29). Для $n = 0$ це очевидно. Покладемо $n = 1$:

$$[A^\dagger A, A^\dagger] = A^\dagger[A, A^\dagger] = A^\dagger(1 - \epsilon\Delta_{\alpha\alpha}) \equiv A^\dagger\epsilon = A^\dagger [(A^\dagger A + \epsilon)^1 - (A^\dagger A)^1].$$

Далі будемо діяти по індукції. Припускаючи, що рівняння має місце для n , доведемо, що воно виконується і для $n + 1$:

$$\begin{aligned} [(A^\dagger A)^{n+1}, A^\dagger] &= [A^\dagger A(A^\dagger A)^n, A^\dagger] = [A^\dagger A, A^\dagger](A^\dagger A)^n + A^\dagger A[(A^\dagger A)^n, A^\dagger] = \\ &= A^\dagger\epsilon(A^\dagger A)^n + A^\dagger A A^\dagger [(A^\dagger A + \epsilon)^n - (A^\dagger A)^n] = A^\dagger\epsilon(A^\dagger A)^n + \\ &+ A^\dagger(A^\dagger A + \epsilon)^{n+1} - A^\dagger(A^\dagger A)^{n+1} - A^\dagger\epsilon(A^\dagger A)^n = A^\dagger [(A^\dagger A + \epsilon)^{n+1} - (A^\dagger A)^{n+1}]. \end{aligned}$$

Розглянемо друге рівняння. Коли $n = 0$ це також тривіально. Для $n = 1$ ми маємо

$$[\epsilon, A^\dagger] = -\epsilon f A^\dagger = A^\dagger[(-\epsilon f + \epsilon) - \epsilon].$$

Крок індукції наступний:

$$\begin{aligned} [\epsilon^{n+1}, A^\dagger] &= [\epsilon\epsilon^n, A^\dagger] = -\epsilon f A^\dagger\epsilon^n + \epsilon A^\dagger[(-\epsilon f + \epsilon)^n - \epsilon^n] = \\ &= -\epsilon f A^\dagger\epsilon^n + (-\epsilon f A^\dagger + A^\dagger\epsilon)[(-\epsilon f + \epsilon)^n - \epsilon^n] = A^\dagger[(-\epsilon f + \epsilon)^{n+1} - \epsilon^{n+1}]. \end{aligned}$$

Таким чином, твердження доведено.

В Доведення твердження 2.3

Коли $n = 0$ рівняння зводиться до визначення N . Доведемо його для $n = 1$. Представимо χ як формальний ряд:

$$\chi(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} b_{nm} x^n y^m, \quad [x, y] = 0.$$

Тоді

$$\begin{aligned} L_1 &= [\chi(A^\dagger A, \varepsilon), A^\dagger] = \sum_{n,m=1}^{\infty} b_{nm} [(A^\dagger A)^n, A^\dagger] \varepsilon^m + \sum_{n,m=1}^{\infty} b_{nm} (A^\dagger A)^n [\varepsilon^m, A^\dagger] = \\ &= \sum_{n,m=1}^{\infty} b_{nm} [(A^\dagger A + \varepsilon)^n - (A^\dagger A)^n] \varepsilon^m + \sum_{n,m=1}^{\infty} b_{nm} (A^\dagger A)^n A^\dagger [(-\varepsilon f + \varepsilon)^m - \varepsilon^m] = \\ &= A^\dagger [\chi(A^\dagger A + \varepsilon, \varepsilon - \varepsilon f) - \chi(A^\dagger A, \varepsilon)] = A^\dagger \chi(A^\dagger A + \varepsilon, \varepsilon - \varepsilon f) - A^\dagger N. \end{aligned}$$

Далі будемо діяти по індукції. Крок індукції:

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= [L_n, A^\dagger] = (A^\dagger)^n [\chi(A^\dagger A + n\varepsilon - \varepsilon\sigma_n f, \varepsilon - \varepsilon n f), A^\dagger] - \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (A^\dagger)^{n-k} [L_k, A^\dagger] = \\ &= (A^\dagger)^n [\chi(A^\dagger A + n\varepsilon - \varepsilon\sigma_n f, \varepsilon - \varepsilon n f), A^\dagger] - \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (A^\dagger)^{n-k} L_{k+1}. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Перетворимо комутатор в останньому виразі,

$$\begin{aligned} [\chi(A^\dagger A + n\varepsilon - \varepsilon\sigma_n f, \varepsilon - \varepsilon n f), A^\dagger] &= \sum_{n,m=1}^{\infty} b_{nm} [(A^\dagger A + n\varepsilon - \varepsilon\sigma_n f)^n, A^\dagger] (\varepsilon - \varepsilon n f)^m + \\ &+ \sum_{n,m=1}^{\infty} b_{nm} (A^\dagger A + n\varepsilon - \varepsilon\sigma_n f)^n [(\varepsilon - \varepsilon n f)^m, A^\dagger] = \\ &= A^\dagger \chi(A^\dagger A + (n+1)\varepsilon - \varepsilon\sigma_{n+1} f, \varepsilon - \varepsilon(n+1)f) - A^\dagger \chi(A^\dagger A + n\varepsilon - \varepsilon\sigma_n f, \varepsilon - \varepsilon n f), \end{aligned}$$

де ми використали що $\sigma_{n+1} = \sigma_n + n$. Як наслідок,

$$\begin{aligned} (A^\dagger)^n [\chi(A^\dagger A + n\varepsilon - \varepsilon\sigma_n f, \varepsilon - \varepsilon n f), A^\dagger] &= (A^\dagger)^{n+1} \chi(A^\dagger A + (n+1)\varepsilon - \varepsilon\sigma_{n+1} f, \varepsilon - \\ &- \varepsilon(n+1)f) - A^\dagger \cdot (A^\dagger)^n \chi(A^\dagger A + n\varepsilon - \varepsilon\sigma_n f, \varepsilon - \varepsilon n f). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Враховуючи припущення індукції, останній член набуває вигляду:

$$A^\dagger \cdot (A^\dagger)^n \chi(A^\dagger A + n\varepsilon - \epsilon\sigma_n f, \varepsilon - \epsilon n f) = A^\dagger L_n + A^\dagger \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (A^\dagger)^{n-k} L_k.$$

Підставляючи цей вираз в (B.2) а потім результуючий вираз в (B.1), отримуємо

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= (A^\dagger)^{n+1} \chi(A^\dagger A + (n+1)\varepsilon - \epsilon\sigma_{n+1} f, \varepsilon - \epsilon(n+1)f) - A^\dagger L_n - \\ &\quad - A^\dagger \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (A^\dagger)^{n-k} L_k - \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (A^\dagger)^{n-k} L_{k+1} = \\ &= (A^\dagger)^{n+1} \chi(A^\dagger A + (n+1)\varepsilon - \epsilon\sigma_{n+1} f, \varepsilon - \epsilon(n+1)f) - \sum_{k=0}^n C_{n+1}^k (A^\dagger)^{n+1-k} L_k. \end{aligned}$$

Таким чином, твердження доведено.

С Часткові приклади: $\mu, \nu = 1$ та $\mu, \nu = \overline{1, 2}$

Для двох прикладів ми припускаємо $q \neq 1$.

Приклад 1. Давайме спочатку розглянемо найпростіший випадок коли є лише одна мода у складових композитного бозона: $\mu, \nu = 1$. Число мод α тут не є істотнім, так як подальший розгляд стосується лише однієї фіксованої моди α . Тоді оператори народження і знищення $A_\alpha^\dagger, A_\alpha$ композитного бозона згідно з (2.1.2) зводяться до (фіксований індекс α опущено)

$$A^\dagger = \Phi^{11} a_1^\dagger b_1^\dagger, \quad A = \overline{\Phi^{11}} b_1 a_1. \quad (\text{C.1})$$

Ми вимагаємо, щоб складені бозони були алгебраїчно представлені деформованими бозонами, тобто щоб рівняння визначення $\mathcal{A}A^\dagger = \phi(\mathcal{N} + 1)$ деформованих бозонів виконувалось для будь-яких n -частинкових станів $(A^\dagger)^n |0\rangle$ складеного бозона:

$$AA^\dagger \cdot (A^\dagger)^n |0\rangle = \phi(N + 1)(A^\dagger)^n |0\rangle \Leftrightarrow$$

$$|\Phi^{11}|^2 [n_1^a + 1]_{-q} [n_1^b + 1]_{-q} (A^\dagger)^n |0\rangle = \phi(n+1) (A^\dagger)^n |0\rangle, \quad (\text{C.2})$$

де ми ввели оператори кількості частинок n_1^a, n_1^b для q -деформованих складових ферміонів. Беручи до уваги умову нормування $|\Phi^{11}|^2 = 1$ та рівність $n_1^i (A^\dagger)^n |0\rangle = n (A^\dagger)^n |0\rangle$, $i = a, b$, співвідношення (C.2) переписується як

$$[n+1]_{-q} [n+1]_{-q} (A^\dagger)^n |0\rangle = \phi(n+1) (A^\dagger)^n |0\rangle.$$

Із останнього слідує $\phi(n) = ([n]_{-q})^2$.

Приклад 2. Далі давайте розглянемо випадок двох мод $\mu = 1, 2$ та $\nu = 1, 2$. Для операторів народження та знищення $A_\alpha^\dagger, A_\alpha$ ми отримуємо (фіксований індекс α опущено як і раніше)

$$A^\dagger = \sum_{\mu, \nu=1}^2 \Phi^{\mu\nu} a_\mu^\dagger b_\nu^\dagger = \Phi^{11} a_1^\dagger b_1^\dagger + \Phi^{12} a_1^\dagger b_2^\dagger + \Phi^{21} a_2^\dagger b_1^\dagger + \Phi^{22} a_2^\dagger b_2^\dagger, \quad (\text{C.3})$$

$$A = \sum_{\mu, \nu=1}^2 \overline{\Phi^{\mu\nu}} b_\nu a_\mu = \overline{\Phi^{11}} b_1 a_1 + \overline{\Phi^{12}} b_2 a_1 + \overline{\Phi^{21}} b_1 a_2 + \overline{\Phi^{22}} b_2 a_2. \quad (\text{C.4})$$

Як і в Прикладі 1, для справедливості реалізації складених бозонів деформованими бозонами ми вимагаємо наступну рівність

$$A (A^\dagger)^{n+1} |0\rangle = \phi(N+1) (A^\dagger)^n |0\rangle. \quad (\text{C.5})$$

Як допоміжний крок, давайте запишемо оператор $(A^\dagger)^n$ через суму

$$(A^\dagger)^n = \sum_{k, l=0}^n (-1)^{n(n-1)/2} C_n^{kl}(\Phi) (a_2^\dagger)^k (a_1^\dagger)^{n-k} (b_2^\dagger)^l (b_1^\dagger)^{n-l} \quad (\text{C.6})$$

із коефіцієнтами $C_n^{kl}(\Phi) \equiv C_n^{kl}(\Phi^{11}, \Phi^{12}, \Phi^{21}, \Phi^{22})$ записаними у формі

$$C_n^{kl}(\Phi) = \sum_{j=\max(0, l+k-n)}^{\min(k, l)} P_n^{kl}(j) (\Phi^{22})^j (\Phi^{21})^{k-j} (\Phi^{12})^{l-j} (\Phi^{11})^{n-k-l+j}. \quad (\text{C.7})$$

Після деяких алгебраїчних перетворень виводимо наступні рекурентні співвідношення на коефіцієнти $P_n^{kl}(j)$:

$$P_{n+1}^{kl}(j) = P_n^{kl}(j) + (-1)^{n+k-1} P_n^{k-1, l}(j) + (-1)^{n+l-1} P_n^{k, l-1}(j) + (-1)^{k+l} P_n^{k-1, l-1}(j-1),$$

$$\begin{aligned}
P_{n+1}^{0l}(0) &= P_n^{0l}(0) + (-1)^{n+l-1} P_n^{0,l-1}(0), \\
P_{n+1}^{k0}(0) &= P_n^{k0}(0) + (-1)^{n+k-1} P_n^{k-1,0}(0), \\
P_{n+1}^{n+1,l}(l) &= P_n^{nl}(l) + (-1)^{n+l-1} P_n^{n,l-1}(l-1), \\
P_{n+1}^{k,n+1}(k) &= P_n^{kn}(k) + (-1)^{n+k-1} P_n^{k-1,n}(k-1), \quad 1 \leq k, l \leq n,
\end{aligned}$$

з початковими умовами

$$\begin{aligned}
P_n^{00}(0) &= P_n^{0n}(0) = P_n^{n0}(0) = P_n^{nn}(n) = 1, \\
P_n^{kl}(j) &= 0 \quad \text{якщо } j > \min(k, l) \text{ чи } j < \max(0, k + l - n).
\end{aligned}$$

В подальшому нам потрібні лише декілька коефіцієнтів $P_n^{kl}(j)$ для яких ми даємо їх явні вирази, як розв'язки вищезгаданих рекурентних співвідношень:

$$P_n^{01}(0) = P_n^{10}(0) = \frac{1 - (-1)^n}{2}, \quad (\text{C.8})$$

$$P_n^{11}(0) = -n + \frac{1 - (-1)^n}{2}, \quad P_n^{11}(1) = n, \quad (\text{C.9})$$

$$P_n^{02}(0) = P_n^{20}(0) = \frac{1}{2}n + \frac{(-1)^n - 1}{4}, \quad (\text{C.10})$$

$$P_{n+1}^{12}(0) = P_{n+1}^{21}(0) = \frac{3}{2}n \frac{1 + (-1)^n}{2}, \quad (\text{C.11})$$

$$P_{n+1}^{12}(1) = P_{n+1}^{21}(1) = -n \frac{1 + (-1)^n}{2}, \quad (\text{C.12})$$

$$P_{n+1}^{22}(0) = (3/4 - 3n/2) \frac{1 + (-1)^n}{2} + \frac{3}{4}n^2 - \frac{3}{4}, \quad (\text{C.13})$$

$$P_{n+1}^{22}(1) = (n-1) \frac{1 + (-1)^n}{2} - n^2 + 1, \quad (\text{C.14})$$

$$P_{n+1}^{22}(2) = n(n+1)/2. \quad (\text{C.15})$$

Тепер перепишемо ліву частину і праву частину (C.5) відповідно як

$$\begin{aligned}
AA^{n+1}|0\rangle &= \sum_{k,l=0}^n (-1)^{n(n-1)/2} \left\{ [k+1]_{-q} [l+1]_{-q} \overline{\Phi}^{22} C_{n+1}^{k+1,l+1}(\Phi) + (-1)^l [k+1]_{-q} \cdot \right. \\
&\cdot [n+1-l]_{-q} \overline{\Phi}^{21} C_{n+1}^{k+1,l}(\Phi) + (-1)^k [n+1-k]_{-q} [l+1]_{-q} \overline{\Phi}^{12} C_{n+1}^{k,l+1}(\Phi) + \\
&\left. + (-1)^{k+l} [n+1-k]_{-q} [n+1-l]_{-q} \overline{\Phi}^{11} C_{n+1}^{kl}(\Phi) \right\} (a_2^\dagger)^k (a_1^\dagger)^{n-k} (b_2^\dagger)^l (b_1^\dagger)^{n-l} |0\rangle,
\end{aligned}$$

$$\phi(N+1)(A^\dagger)^n|0\rangle = \phi(n+1) \sum_{k,l=0}^n (-1)^{n(n-1)/2} C_n^{kl}(\Phi) (a_2^\dagger)^k (a_1^\dagger)^{n-k} (b_2^\dagger)^l (b_1^\dagger)^{n-l} |0\rangle.$$

Оскільки вектори $(a_2^\dagger)^k (a_1^\dagger)^{n-k} (b_2^\dagger)^l (b_1^\dagger)^{n-l} |0\rangle$, $k, l = 0, \dots, n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, утворюють базис у гільбертовому просторі, ми можемо прирівняти відповідні доданки, і таким чином вимога (С.5) для $n \geq 1$ еквівалентна наступній системі рівнянь:

$$\begin{aligned} & [k+1]_{-q} [l+1]_{-q} \overline{\Phi^{22}} C_{n+1}^{k+1, l+1}(\Phi) + (-1)^l [k+1]_{-q} [n+1-l]_{-q} \overline{\Phi^{21}} C_{n+1}^{k+1, l}(\Phi) + \\ & + (-1)^k [n+1-k]_{-q} [l+1]_{-q} \overline{\Phi^{12}} C_{n+1}^{k, l+1}(\Phi) + (-1)^{k+l} [n+1-k]_{-q} [n+1-l]_{-q} \cdot \\ & \cdot \overline{\Phi^{11}} C_{n+1}^{kl}(\Phi) - \phi(n+1) C_n^{kl}(\Phi) = 0, \quad k, l = 0, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Припускаючи тут $k = l = 0$, і використовуючи (С.7) та вирази (С.8)-(С.9), ми приходимо до рівнянь

$$\begin{aligned} & \left(-n + \frac{1 + (-1)^n}{2} - 1 \right) \overline{\Phi^{22}} \Phi^{21} \Phi^{12} (\Phi^{11})^{n-1} + (n+1) \overline{\Phi^{22}} \Phi^{22} (\Phi^{11})^n + \\ & + \frac{1 + (-1)^n}{2} [n+1]_{-q} \overline{\Phi^{21}} \Phi^{21} (\Phi^{11})^n + \frac{1 + (-1)^n}{2} [n+1]_{-q} \overline{\Phi^{12}} \Phi^{12} (\Phi^{11})^n + \\ & + [n+1]_{-q}^2 \overline{\Phi^{11}} (\Phi^{11})^{n+1} = \phi(n+1) (\Phi^{11})^n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Виходячи із умови нормування матриця Φ має по крайній мірі один ненульовий елемент. Нехай це буде $\Phi^{11} \neq 0$ (для будь-якого іншого ненульового елемента подальший розгляд аналогічний). Тоді, із останнього рівняння після ділення на $(\Phi^{11})^n$ і заміни $n+1 \rightarrow n$ ми отримуємо наступний вираз для структурної функції:

$$\begin{aligned} \phi(n) = & \left(\frac{1 - (-1)^n}{2} - n \right) \overline{\Phi^{22}} \Phi^{21} \Phi^{12} (\Phi^{11})^{-1} + n \overline{\Phi^{22}} \Phi^{22} + \\ & + \frac{1 - (-1)^n}{2} [n]_{-q} \overline{\Phi^{21}} \Phi^{21} + \frac{1 - (-1)^n}{2} [n]_{-q} \overline{\Phi^{12}} \Phi^{12} + [n]_{-q}^2 \overline{\Phi^{11}} \Phi^{11}. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Далі давайте підставимо $k = 1, l = 0$ в (С.16). Тоді, використовуючи (С.7) разом із (С.8)-(С.12), після відповідних перетворень ми можемо переписати (С.16) в наступному вигляді:

$$f_1(n)\overline{\Phi^{22}}\Phi^{12}(\Phi^{21})^2 + f_2(n)\overline{\Phi^{22}}\Phi^{22}\Phi^{21}\Phi^{11} + f_3(n)\overline{\Phi^{12}}\Phi^{12}\Phi^{21}\Phi^{11} + \\ + f_4(n)\overline{\Phi^{12}}\Phi^{22}(\Phi^{11})^2 + f_5(n)\overline{\Phi^{21}}(\Phi^{21})^2\Phi^{11} + f_6(n)\overline{\Phi^{11}}\Phi^{21}(\Phi^{11})^2 = 0, \quad (\text{C.18})$$

де

$$f_1(n) = [2]_{-q}P_{n+1}^{21}(0) - P_n^{10}(0)P_{n+1}^{11}(0) = [2]_{-q}\frac{3n}{2}\frac{1+(-1)^n}{2} + (n+1)\frac{1-(-1)^n}{2}, \\ f_2(n) = [2]_{-q}P_{n+1}^{21}(1) - P_n^{10}(0)P_{n+1}^{11}(1) = -[2]_{-q}n\frac{1+(-1)^n}{2} - (n+1)\frac{1-(-1)^n}{2}, \\ f_3(n) = -[n]_{-q}P_{n+1}^{11}(0) - [n+1]_{-q}P_n^{10}(0)P_{n+1}^{01}(0) = [n]_{-q}\left(n + \frac{1-(-1)^n}{2}\right), \\ f_4(n) = -[n]_{-q}P_{n+1}^{11}(1) = -[n]_{-q}(n+1), \\ f_5(n) = [2]_{-q}[n+1]_{-q}P_{n+1}^{20}(0) - [n+1]_{-q}P_n^{10}(0)P_{n+1}^{10}(0) = \\ = [2]_{-q}[n+1]_{-q}\left(\frac{n}{2} + \frac{1-(-1)^n}{4}\right), \\ f_6(n) = -[n]_{-q}[n+1]_{-q}P_{n+1}^{10}(0) - [n+1]_{-q}^2P_n^{10}(0) = \\ = -[n]_{-q}[n+1]_{-q}\frac{1+(-1)^n}{2} - [n+1]_{-q}^2\frac{1-(-1)^n}{2}.$$

Використовуючи лінійну незалежність функції $f_6(n)$ від функцій $f_1(n), \dots, f_5(n)$ і те що $\Phi^{11} \neq 0$, із (C.18) отримуємо

$$\overline{\Phi^{11}}\Phi^{21}(\Phi^{11})^2 f_6(n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi^{21} = 0. \quad (\text{C.19})$$

Подібним чином, розглядаючи випадок коли $k = 0, l = 1$ в (C.16) виводимо

$$\Phi^{12} = 0. \quad (\text{C.20})$$

Розглянемо випадок $k = l = 1$ в (C.16). Підставляючи (C.7) разом із (C.9)-(C.15) в (C.16), після ділення на $(\Phi^{22})^{n-3}$ отримуємо

$$g_1(n)\overline{\Phi^{22}}(\Phi^{21})^2(\Phi^{12})^2 + g_2(n)\overline{\Phi^{22}}\Phi^{22}\Phi^{21}\Phi^{12}\Phi^{11} + g_3(n)\overline{\Phi^{22}}(\Phi^{22})^2(\Phi^{11})^2 + \\ + g_4(n)\overline{\Phi^{21}}(\Phi^{21})^2\Phi^{12}\Phi^{11} + g_5(n)\overline{\Phi^{21}}\Phi^{22}\Phi^{21}(\Phi^{11})^2 + g_6(n)\overline{\Phi^{12}}\Phi^{21}(\Phi^{12})^2\Phi^{11} + \\ + g_7(n)\overline{\Phi^{12}}\Phi^{22}\Phi^{12}(\Phi^{11})^2 + g_8(n)\overline{\Phi^{11}}\Phi^{21}\Phi^{12}(\Phi^{11})^2 + g_9(n)\overline{\Phi^{11}}\Phi^{22}(\Phi^{11})^3 = 0, \quad (\text{C.21})$$

де

$$\begin{aligned}
g_1(n) &= [2]_{-q}^2 P_{n+1}^{22}(0) - P_{n+1}^{11}(0) P_n^{11}(0), \\
g_2(n) &= [2]_{-q}^2 P_{n+1}^{22}(0) - P_{n+1}^{11}(0) P_n^{11}(1) - P_{n+1}^{11}(1) P_n^{11}(0), \\
g_3(n) &= [2]_{-q}^2 P_{n+1}^{22}(2) - P_{n+1}^{11}(1) P_n^{11}(1) = ([2]_{-q}^2/2 - 1)n(n+1), \\
g_4(n) &= g_6(n) = -[2]_{-q}[n]_{-q} P_{n+1}^{21}(0) - [n+1]_{-q} P_{n+1}^{10}(0) P_n^{11}(0), \\
g_5(n) &= g_7(n) = -[2]_{-q}[n]_{-q} P_{n+1}^{21}(1) - [n+1]_{-q} P_{n+1}^{10}(0) P_n^{11}(1), \\
g_8(n) &= [n]_{-q}^2 P_{n+1}^{11}(0) - [n+1]_{-q}^2 P_n^{11}(0), \\
g_9(n) &= [n]_{-q}^2 P_{n+1}^{11}(1) - [n+1]_{-q}^2 P_n^{11}(1) = [n]_{-q}^2(n+1) - [n+1]_{-q}^2 n.
\end{aligned}$$

Беручи до уваги (С.19) і (С.20) співвідношення (С.21) зводиться до

$$g_3(n) \overline{\Phi}^{22} (\Phi^{22})^2 (\Phi^{11})^2 + g_9(n) \overline{\Phi}^{11} \Phi^{22} (\Phi^{11})^3 = 0. \quad (\text{С.22})$$

Використовуючи знову лінійну незалежність функцій $g_6(n)$ і $g_9(n)$, і згаду-
ючи що $\Phi^{11} \neq 0$, із (С.22) отримуємо

$$\overline{\Phi}^{11} \Phi^{22} (\Phi^{11})^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi^{22} = 0.$$

Підстановка цього матричного елемента разом із двома попередніми (С.19)
і (С.20) в (С.17), і використання умови нормування дає результуючий вираз
для структурної функції: $\phi(n) = [n]_{-q}^2$.

Зауважимо, що якщо $q = 0$, невизначеність “0⁰” у визначенні $\phi(n)$ при
 $n = 0$ розв’язується із використанням умови $\phi(0) = 0$ що дає $\phi(n) = \theta(n)$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Avancini S. S. Many-body problems with composite particles and q -Heisenberg algebras / S. S. Avancini, G. Krein // J. Phys. A: Math. Gen. — 1995. — Vol. 28. — P. 685.
- [2] Scarfone A. M. An interacting particles system revisited in the framework of the q -deformed algebra / A. M. Scarfone, P. Narayana Swamy // J. Phys. A: Math. Gen. — 2008. — Vol. 41, no. 27. — P. 275211.
- [3] Ribeiro-Silva C. I. Deformed scalar quantum electrodynamics as a phenomenological model for composite scalar particles / C. I. Ribeiro-Silva, E. M. F. Curado, M. A. Rego-Monteiro // J. Phys. A: Math. Gen. — 2008. — Vol. 41, no. 14. — P. 145404.
- [4] Sviratcheva K. D. Physical Significance of q Deformation and Many-Body Interactions in Nuclei / K. D. Sviratcheva et al. // Phys. Rev. Lett. — 2004. — Oct. — Vol. 93, no. 15. — P. 152501.
- [5] Bonatsos D. Quantum groups and their applications in nuclear physics / D. Bonatsos, C. Daskaloyannis // Prog. Part. Nucl. Phys. — 1999. — Vol. 43. — P. 537.
- [6] Bonatsos D. Generalized deformed oscillators for vibrational spectra of diatomic molecules / D. Bonatsos, C. Daskaloyannis // Phys. Rev. A. — 1992. — Jul. — Vol. 46, no. 1. — Pp. 75–80.
- [7] Avancini S. S. Compositeness effects in the Bose-Einstein condensation / S. S. Avancini, J. R. Marinelli, G. Krein // J. Phys. A: Math. Gen. — 2003. — Vol. 36, no. 34. — P. 9045.
- [8] Bagheri Harouni M. Q -deformed description of excitons and associated physical results / M. Bagheri Harouni, R. Roknizadeh, M. H. Naderi // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. — 2009. — Vol. 42, no. 9. — P. 095501.

- [9] Semiconductor-cavity QED in high- Q regimes with q -deformed bosons / Yu-Xi Liu, C. P. Sun, S. X. Yu, D. L. Zhou // *Phys. Rev. A.* — 2001. — Jan. — Vol. 63. — P. 023802.
- [10] Gavrilik A. M. Two-fermion composite quasibosons and deformed oscillators / A. M. Gavrilik, I. I. Kachurik, Yu. A. Mishchenko // *Ukr. J. Phys.* — 2011. — Vol. 56. — P. 948.
- [11] Gavrilik A. M. Quasibosons composed of two q -fermions: realization by deformed oscillators / A. M. Gavrilik, I. I. Kachurik, Yu. A. Mishchenko // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2011. — Vol. 44. — P. 475303.
- [12] Gavrilik A. M. Entanglement in composite bosons realized by deformed oscillators / A. M. Gavrilik, Yu. A. Mishchenko // *Phys. Lett. A.* — 2012. — Vol. 376, no. 19. — Pp. 1596 – 1600.
- [13] Gavrilik A. M. Energy dependence of the entanglement entropy of composite boson (quasiboson) systems / A. M. Gavrilik, Yu. A. Mishchenko // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2013. — Vol. 46, no. 14. — P. 145301.
- [14] Gavrilik A. M. Exact expressions for the intercepts of r -particle momentum correlation functions in μ -Bose gas model / A. M. Gavrilik, Yu. A. Mishchenko // *Phys. Lett. A.* — 2012. — Vol. 376, no. 36. — Pp. 2484 – 2489.
- [15] Гаврилик О. М. Квазібозони та деформовані осцилятори / О. М. Гаврилик, Ю. А. Міщенко // Боголюбівські читання, присвячені 45 річчю ІТФ ім. М.М. Боголюбова, 13-15 грудня 2010 р, м. Київ: Тези доповідей. — 2010. — С. 19. — Україна, м. Київ.
- [16] Mishchenko Yu. A. Composite Bose particles as deformed bosons / Yu. A. Mishchenko, A. M. Gavrilik // *Modern Problems of Theoretical Physics: Young Scientists Conference, 22-24 December 2010: Program and Abstracts.* — 2010. — P. 19. — Ukraine, Kyiv.
- [17] Mishchenko Yu. A. Composite Bose-type particles as deformed bosons /

- Yu. A. Mishchenko, A. M. Gavriliuk // Low Temperature Physics: International Conference for Young Scientists, 6-10 June 2011: Conference program and Abstract book. — 2011. — P. 174. — Ukraine, Kharkiv.
- [18] Mishchenko Yu. A. Entanglement in composite bosons realized by deformed oscillators / Yu. A. Mishchenko, A. M. Gavriliuk // Modern Problems of Theoretical Physics: III Young Scientists Conference, 21-23 December 2011: Program and Abstracts. — 2011. — P. 25. — Ukraine, Kyiv.
- [19] Mishchenko Yu. A. Entanglement in composite bosons realized by deformed oscillators / Yu. A. Mishchenko, A. M. Gavriliuk // Low Temperature Physics: International Conference for Young Scientists, 14-18 May 2012: Conference program and Abstract book. — 2012. — P. 202. — Ukraine, Kharkiv.
- [20] Mishchenko Yu. A. Exact expressions for the intercepts of r -particle momentum correlation functions in μ -Bose gas model / Yu. A. Mishchenko, A. M. Gavriliuk // Modern Problems of Theoretical Physics: IV Young Scientists Conference, 23-26 October 2012: Program and Abstracts. — 2012. — P. 43. — Ukraine, Kyiv.
- [21] Mishchenko Yu. A. Dependence of the entanglement entropy of composite bosons (quasibosons) systems on their energy / Yu. A. Mishchenko, A. M. Gavriliuk // Modern Problems of Theoretical Physics: IV Young Scientists Conference, 23-26 October 2012: Program and Abstracts. — 2012. — P. 87. — Ukraine, Kyiv.
- [22] Perkins W. A. Quasibosons / W. A. Perkins // Int. J. Theor. Phys. — 2002. — Vol. 41. — Pp. 823–838.
- [23] Zhou D.-L. Idealization second quantization of composite particles / D.-L. Zhou, S.-X. Yu, C.-P. Sun // Commun. Theor. Phys.(Beijing, China). — 2001. — Vol. 36. — Pp. 525–530.
- [24] Girardeau M. D. Second-quantization representation for a nonrelativistic system of composite particles. I. Generalized Tani transformation and

- its iterative evaluation / M. D. Girardeau // J. Math. Phys. — 1975. — Vol. 16, no. 9. — Pp. 1901–1919.
- [25] Girardeau M. D. Fock-Tani representation for the quantum theory of reactive collisions / M. D. Girardeau, J. Dennis Gilbert // Physica A. — 1979. — Vol. 97, no. 1. — Pp. 42 – 74.
- [26] Second quantization approach to composite hadron interactions in quark models / D. Hadjimichief, G. Krein, S. Szpigel, J.S. da Veiga // Phys. Lett. B. — 1996. — Vol. 367, no. 1 - 4. — Pp. 317 – 322.
- [27] Mapping of Composite Hadrons into Elementary Hadrons and Effective Hadronic Hamiltonians / D. Hadjimichief, G. Krein, S. Szpigel, J.S. Da Veiga // Ann. Phys. — 1998. — Vol. 268, no. 1. — Pp. 105–148.
- [28] Combescot M. The Girardeau’s fermion-boson procedure in the light of the composite-boson many-body theory / M. Combescot // Eur. Phys. J. B. — 2007. — Vol. 60. — Pp. 289–303.
- [29] Combescot M. Interacting excitons described by an infinite series of composite-exciton operators / M. Combescot, O. Betbeder-Matibet // Phys. Rev. B. — 2008. — Sep. — Vol. 78. — P. 125206.
- [30] Combescot M. The many-body physics of composite bosons / M. Combescot, O. Betbeder-Matibet, F. Dubin // Phys. Rep. — 2008. — Vol. 463, no. 5 - 6. — Pp. 215 – 320.
- [31] Combescot M. General Many-Body Formalism for Composite Quantum Particles / M. Combescot, O. Betbeder-Matibet // Phys. Rev. Lett. — 2010. — May. — Vol. 104, no. 20. — P. 206404.
- [32] Combescot M. Finite Temperature Formalism for Composite Quantum Particles / M. Combescot, Sh.-Yu. Shiau, Y.-Ch. Chang // Phys. Rev. Lett. — 2011. — May. — Vol. 106, no. 20. — P. 206403.
- [33] Keldysh L. V. Collective properties of excitons in semiconductors / L. V. Keldysh, A. N. Kozlov // JETP. — 1968. — Vol. 27. — P. 521.
- [34] Moskalenko S. A. Bose-Einstein condensation of excitons and biexci-

- tons: and coherent nonlinear optics with excitons / S. A. Moskalenko, D. W. Snoke. — Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2000. — 428 pp.
- [35] Gerace D. Quantum theory of exciton-photon coupling in photonic crystal slabs with embedded quantum wells / D. Gerace, L. C. Andreani // *Phys. Rev. B*. — 2007. — Jun. — Vol. 75. — P. 235325.
- [36] Girlanda R. Quantum description of the electromagnetic field in a confined polarizable medium / R. Girlanda, S. Savasta, B. Azzarboni // *La Rivista del Nuovo Cimento*. — 1998. — Vol. 21. — Pp. 1–63.
- [37] Exciton-photon interaction in a quantum dot embedded in a photonic microcavity / M. Sodagar, M. Khoshnegar, A. Eftekharian, S. Khorasani // *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* — 2009. — Vol. 42, no. 8. — P. 085402.
- [38] Bethe H. A. Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms / H. A. Bethe, E. E. Salpeter. — Berlin: Springer-Verlag, 1957. — 368 pp.
- [39] Sunilkumar V. Aspects of Polynomial algebras and their physical applications : PhD Thesis / V. Sunilkumar // *ArXiv Mathematical Physics e-prints*. — 2002. — Available: <http://arxiv.org/abs/math-ph/0203047>.
- [40] Biphoton light with hidden polarization and its polarization tomography / P. A. Bushev, V. P. Karassiov, A. V. Masalov, A. A. Putilin // *Optics and Spectroscopy*. — 2001. — Vol. 91, no. 4. — Pp. 526–531.
- [41] Shih Y. Entangled biphoton source – property and preparation / Y. Shih // *Rep. Prog. Phys.* — 2003. — Vol. 66, no. 6. — P. 1009.
- [42] Formation dynamics of an entangled photon pair: A temperature-dependent analysis / A. Carmele, F. Milde, M.-R. Dachner et al. // *Phys. Rev. B*. — 2010. — May. — Vol. 81. — P. 195319.
- [43] Agranovich V. M. Excitations in Organic Solids / V. M. Agranovich. — Oxford: Oxford Univ. Press, 2008. — 512 pp.
- [44] Agranovich V. M. A new type of three-phonon complexes (triphonons) / V. M. Agranovich, O. A. Dubovskii, A. V. Orlov // *Phys. Lett. A*. — 1986. — Vol. 119, no. 2. — Pp. 83 – 88.

- [45] Diquarks / M. Anselmino, E. Predazzi, S. Ekelin et al. // *Rev. Mod. Phys.* — 1993. — Oct. — Vol. 65. — Pp. 1199–1233.
- [46] Wilczek F. Diquarks as Inspiration and as Objects / F Wilczek // *Deserfest: A Celebration of the Life and Works of Stanley Deser* / Ed. by J. T. Liu et al. — Vol. 1. — 2006. — Pp. 322–338.
- [47] Gavrilik A. M. Linking the Parameters of Diquark-Quark Model to the Cabibbo Angle / A. M. Gavrilik, I. I. Kachurik // *Ukr. J. Phys.* — 2003. — Vol. 48, no. 6. — Pp. 513–517.
- [48] Entanglement in many-body systems / L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh, V. Vedral // *Rev. Mod. Phys.* — 2008. — May. — Vol. 80. — Pp. 517–576.
- [49] Quantum entanglement / R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki // *Rev. Mod. Phys.* — 2009. — Vol. 81. — P. 865–942.
- [50] Tichy M. C. Essential entanglement for atomic and molecular physics / M. C. Tichy, F. Mintert, A. Buchleitner // *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* — 2011. — Vol. 44, no. 19. — P. 192001.
- [51] Braunstein S. L. Quantum information with continuous variables / S. L. Braunstein, P. van Loock // *Rev. Mod. Phys.* — 2005. — Jun. — Vol. 77. — Pp. 513–577.
- [52] Sancho P. Compositeness effects, Pauli's principle and entanglement / P. Sancho // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 2006. — Vol. 39, no. 40. — P. 12525.
- [53] Adesso G. Entanglement in continuous-variable systems: recent advances and current perspectives / G. Adesso, F. Illuminati // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2007. — Vol. 40, no. 28. — P. 7821.
- [54] Chudzicki C. Entanglement and Composite Bosons / C. Chudzicki, O. Oke, W. K. Wootters // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Vol. 104. — P. 070402.
- [55] Law C. K. Quantum entanglement as an interpretation of bosonic character in composite two-particle systems / C. K. Law // *Phys. Rev. A.* — 2005. — Vol. 71. — P. 034306.

- [56] Criteria for two distinguishable fermions to form a boson / R. Ramanathan, P. Kurzynski, T. K. Chuan et al. // *Phys. Rev. A.* — 2011. — Vol. 84. — P. 034304.
- [57] Morimae T. Vacuum entanglement governs the bosonic character of magnons / T. Morimae // *Phys. Rev. A.* — 2010. — Vol. 81. — P. 060304.
- [58] Weder R. Entanglement creation in low-energy scattering / R. Weder // *Phys. Rev. A.* — 2011. — Vol. 84. — P. 062320.
- [59] Quantum entanglement and the dissociation process of diatomic molecules / R. O. Esquivel, N. Flores-Gallegos, M. Molina-Espiritu et al. // *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* — 2011. — Vol. 44, no. 17. — P. 175101.
- [60] Particle addition and subtraction channels and the behavior of composite particles / P. Kurzynski, R. Ramanathan, A. Soeda et al. // *New J. Phys.* — 2012. — Vol. 14, no. 9. — P. 093047.
- [61] Strategies for enhancing quantum entanglement by local photon subtraction / T. J. Bartley, P. J. D. Crowley, A. Datta et al. // *Phys. Rev. A.* — 2013. — Vol. 87. — P. 022313.
- [62] An excitation-dependent four-level model for quantum entanglement in photosynthetic systems / Ch.-H. Chang, A. M. Branczyk, G. D. Scholes, D. F. V. James // *ArXiv e-prints.* — 2012. — Available: <http://arxiv.org/abs/1202.3439>.
- [63] Enhancing quantum entanglement by photon addition and subtraction / C. Navarrete-Benlloch, R. García-Patrón, J. H. Shapiro, N. J. Cerf // *Phys. Rev. A.* — 2012. — Vol. 86. — P. 012328.
- [64] Majtey A. P. The relationship between entanglement, energy and level degeneracy in two-electron systems / A. P. Majtey, A. R. Plastino, J. S. Dehesa // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2012. — Vol. 45, no. 11. — P. 115309.
- [65] Quantum entanglement in exactly soluble atomic models: the Moshinsky

- model with three electrons, and with two electrons in a uniform magnetic field / P. A. Bouvrie, A. P. Majtey, A. R. Plastino et al. // Eur. Phys. J. D. — 2012. — Vol. 66. — Pp. 1–15.
- [66] McHugh D. Entanglement, purity, and energy: Two qubits versus two modes / D. McHugh, M. Ziman, V. Bužek // Phys. Rev. A. — 2006. — Vol. 74. — P. 042303.
- [67] Entanglement versus energy in the entanglement transfer problem / D. Cavalcanti, J. G. Oliveira, J. G. P. de Faria et al. // Phys. Rev. A. — 2006. — Vol. 74. — P. 042328.
- [68] Wang X. G. Entanglement versus energy in quantum spin models / X. G. Wang // Phys. Lett. A. — 2005. — Vol. 334, no. 5 - 6. — Pp. 352 – 356.
- [69] Meljanac S. Unified view of deformed single-mode oscillator algebras / S. Meljanac, M. Milekovic, S. Pallua // Phys. Lett. B. — 1994. — Vol. 328, no. 1-2. — Pp. 55 – 59.
- [70] f -oscillators and nonlinear coherent states / V. I. Man'ko, G. Marmo, E. C. G. Sudarshan, F. Zaccaria // Physica Scripta. — 1997. — Vol. 55, no. 5. — P. 528.
- [71] Daskaloyannis C. Generalized deformed oscillator and nonlinear algebras / C. Daskaloyannis // J. Phys. A: Math. Gen. — 1991. — Vol. 24, no. 15. — P. L789.
- [72] Arik M. Hilbert spaces of analytic functions and generalized coherent states / M. Arik, D. D. Coon // J. Math. Phys. — 1976. — Vol. 17, no. 4. — P. 524.
- [73] Biedenharn L. C. The quantum group $SU_q(2)$ and a q -analogue of the boson operators / L. C. Biedenharn // J. Phys. A: Math. Gen. — 1989. — Vol. 22, no. 18. — P. L873.
- [74] Macfarlane A. J. On q -analogues of the quantum harmonic oscillator and

- the quantum group $SU_q(2)$ / A. J. Macfarlane // J. Phys. A: Math. Gen. — 1989. — Vol. 22, no. 21. — P. 4581.
- [75] Odaka K. On quantization of simple harmonic oscillators / K Odaka, T Kishi, S Kamefuchi // J. Phys. A: Math. Gen. — 1991. — Vol. 24, no. 11. — P. L591.
- [76] Chaturvedi S. Tamm-Dancoff Deformation of Bosonic Oscillator Algebras / S. Chaturvedi, V. Srinivasan, R. Jagannathan // Mod. Phys. Lett. A. — 1993. — Vol. 08, no. 39. — Pp. 3727–3734.
- [77] Gavrilik A. M. A q -oscillator with 'accidental' degeneracy of energy levels / A. M. Gavrilik, A. P. Rebesh // Mod. Phys. Lett. A. — 2007. — Vol. 22, no. 13. — P. 949.
- [78] Chakrabarti R. A (p, q) -oscillator realization of two-parameter quantum algebras / R. Chakrabarti, R. Jagannathan // J. Phys. A: Math. Gen. — 1991. — Vol. 24, no. 13. — P. L711.
- [79] Fibonacci oscillators / M. Arik, E. Demircan, T. Turgut et al. // Z. Phys. C. — 1992. — Vol. 55, no. 1. — Pp. 89–95.
- [80] Jannussis A. New deformed Heisenberg oscillator / A. Jannussis // J. Phys. A: Math. Gen. — 1993. — Vol. 26, no. 5. — P. L233.
- [81] Gavrilik A. M. Quasi-Fibonacci oscillators / A. M. Gavrilik, I. I. Kachurik, A. P. Rebesh // J. Phys. A: Math. Theor. — 2010. — Vol. 43, no. 24. — P. 245204.
- [82] Gavrilik A. M. Intercepts of the momentum correlation functions in the μ -Bose gas model and their asymptotics / A. M. Gavrilik, A. P. Rebesh // Eur. Phys. J. A. — 2011. — Vol. 47. — P. 55.
- [83] Greenberg O. W. Particles with small violations of Fermi or Bose statistics / O. W. Greenberg // Phys. Rev. D. — 1991. — Jun. — Vol. 43. — Pp. 4111–4120.
- [84] On the number operators of multimode systems of deformed oscillators covariant under quantum groups / R. Jagannathan, R. Sridhar, R. Va-

- sudevan et al. // J. Phys. A: Math. Gen. — 1992. — Vol. 25, no. 23. — P. 6429.
- [85] W. Pusz. Twisted second quantization / Pusz W., Woronowicz S. L. // Rep. Math. Phys. — 1989. — Vol. 27, no. 2. — Pp. 231 – 257.
- [86] Algin A. High temperature behavior of a two-parameter deformed quantum group fermion gas / A. Algin, M. Arik, A. S. Arik // Phys. Rev. E. — 2002. — Jan. — Vol. 65, no. 2. — P. 026140.
- [87] Algin A. Bose-Einstein condensation of a two-parameter deformed quantum group boson gas / A. Algin, B. Deviren // J. Phys. A: Math. Gen. — 2005. — Vol. 38, no. 26. — P. 5945.
- [88] Arik M. Thermodynamics of two parameter quantum group gases / M. Arik, J. Kornfilt // Phys. Lett. A. — 2002. — Vol. 300, no. 4-5. — Pp. 392 – 396.
- [89] Algin A. Thermostatistical properties of a two-parameter generalised quantum group fermion gas / A. Algin, M. Baser // Physica A. — 2008. — Vol. 387, no. 5-6. — Pp. 1088 – 1098.
- [90] Ubriaco M. R. Anyonic behavior of quantum group gases / M. R. Ubriaco // Phys. Rev. E. — 1997. — Jan. — Vol. 55. — Pp. 291–296.
- [91] Ubriaco M. R. High and Low Temperature Behavior of a Quantum Group Fermion Gas / M. R. Ubriaco // Mod. Phys. Lett. A. — 1996. — Vol. 11, no. 29. — Pp. 2325–2333.
- [92] Ubriaco M. R. Thermodynamics of a free $SU_q(2)$ fermionic system / M. R. Ubriaco // Phys. Lett. A. — 1996. — Vol. 219, no. 3-4. — Pp. 205 – 211.
- [93] Chung W.-S. The $gl_{\sqrt{q}}(n)$ -covariant oscillators and q -deformed quantum mechanics in n dimensions / W.-S. Chung // J. Math. Phys. — 1997. — Vol. 38, no. 5. — Pp. 2148–2153.
- [94] Bonatsos D. Model of n coupled generalized deformed oscillators for vi-

- brations of polyatomic molecules / D. Bonatsos, C. Daskaloyannis // Phys. Rev. A. — 1993. — Nov. — Vol. 48. — Pp. 3611–3616.
- [95] Bonatsos D. Coupled Q -oscillators as a model for vibrations of polyatomic molecules / D. Bonatsos, C. Daskaloyannis, P. Kolokotronis // J. Chem. Phys. — 1997. — Vol. 106, no. 2. — Pp. 605–609.
- [96] De Souza J. A method based on a nonlinear generalized Heisenberg algebra to study the molecular vibrational spectrum / J. De Souza, N. M. Oliveira-Neto, C. I. Ribeiro-Silva // Eur. Phys. J. D. — 2006. — Vol. 40, no. 2. — Pp. 205–210.
- [97] Greenberg O. W. Quon Statistics for Composite Systems and a Limit on the Violation of the Pauli Principle for Nucleons and Quarks / O. W. Greenberg, Robert C. Hilborn // Phys. Rev. Lett. — 1999. — Nov. — Vol. 83, no. 22. — Pp. 4460–4463.
- [98] Zeng Q. J. Thermostatistical properties of a q -deformed bosonic exciton gas / Q. J. Zeng, Z. Cheng, J.-H. Yuan // Eur. Phys. J. B. — 2011. — Vol. 81. — Pp. 275–281.
- [99] Wilczek F. Quantum Mechanics of Fractional-Spin Particles / F. Wilczek // Phys. Rev. Lett. — 1982. — Oct. — Vol. 49. — Pp. 957–959.
- [100] On anyon superconductivity / Y.-H. Chen, F. Wilczek, E. Witten, B. I. Halperin // Int. J. Mod. Phys. B. — 1989. — Vol. 03, no. 07. — Pp. 1001–1067.
- [101] Lerda A. Anyons and quantum groups / A. Lerda, S. Sciuto // Nucl. Phys. B. — 1993. — Vol. 401, no. 3. — Pp. 613 – 643.
- [102] Ohnuki Y. Quantum field theory and parastatistics / Y. Ohnuki, S. Kamefuchi. — Berlin: Springer-Verlag, 1982. — 489 pp.
- [103] Debergh N. Parasupersymmetric Quantum Mechanics with an Arbitrary Number of Parasupercharges and Orthogonal Lie Algebras / N. Debergh, A. G. Nikitin // Helv. Phys. Acta. — 1995. — Vol. 68, no. 1. — Pp. 19–31.
- [104] Nikitin A. G. Irreducible representations of the Poincare parasuperalge-

- bra / A. G. Nikitin, V. V. Tretynyk // J. Phys. A: Math. Gen. — 1995. — Vol. 28, no. 6. — P. 1655.
- [105] Chung W.-S. q -Deformation of Fermion Algebra and Para Supersymmetry / W.-S. Chung // Prog. Theor. Phys. — 1996. — Vol. 95, no. 3. — Pp. 697–702.
- [106] Gavrilik A. M. Quantum algebras in phenomenological description of particle properties / A. M. Gavrilik // Nucl. Phys. B - Proc. Suppl. — 2001. — Vol. 102 - 103. — Pp. 298 – 305.
- [107] Rego-Monteiro M. Quantum Algebraic Nature of the Phonon Spectrum in ^4He / M. Rego-Monteiro, L. M. C. S. Rodrigues, S. Wolck // Phys. Rev. Lett. — 1996. — Feb. — Vol. 76, no. 7. — Pp. 1098–1101.
- [108] Rego-Monteiro M. q -deformation and instability of the phonon spectrum in ^4He / M. Rego-Monteiro, L. M. C. S. Rodrigues, S. Wolck // Physica A. — 1998. — Vol. 259, no. 3-4. — Pp. 245 – 260.
- [109] Algin A. Bose-Einstein condensation in a gas of Fibonacci oscillators / A. Algin // J. Stat. Mech. — 2008. — P. P10009.
- [110] Lavagno A. Generalized thermodynamics of q -deformed bosons and fermions / A. Lavagno, P. Narayana Swamy // Phys. Rev. E. — 2002. — Feb. — Vol. 65, no. 3. — P. 036101.
- [111] Lavagno A. Thermostatistics of a q -deformed boson gas / A. Lavagno, P. Narayana Swamy // Phys. Rev. E. — 2000. — Feb. — Vol. 61, no. 2. — Pp. 1218–1226.
- [112] Anchishkin D. V. Two-particle correlations from the q -Boson viewpoint / D. V. Anchishkin, A. M. Gavrilik, N. Z. Iorgov // Eur. Phys. J. A. — 2000. — Vol. 7. — Pp. 229–238.
- [113] Anchishkin D. V. q -Boson Approach To Multiparticle Correlations / D. V. Anchishkin, A. M. Gavrilik, N. Z. Iorgov // Mod. Phys. Lett. A. — 2000. — Vol. 15, no. 26. — Pp. 1637–1646.
- [114] Adamska L. V. Multi-particle correlations in qp -Bose gas model /

- L. V. Adamska, A. M. Gavrilik // J. Phys. A: Math. Gen. — 2004. — Vol. 37, no. 17. — P. 4787.
- [115] Gavrilik A. M. Combined Analysis of Two- and Three-Particle Correlations in q, p -Bose Gas Model / A. M. Gavrilik // SIGMA. — 2006. — Vol. 2. — P. 074.
- [116] Korn G. A. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers / G. A. Korn, T. M. Korn. — New York: McGraw-Hill Companies, 1968. — 1130 pp.
- [117] Gavrilik A. M. Polynomially deformed oscillators as k -bonacci oscillators / A. M. Gavrilik, A. P. Rebesh // J. Phys. A: Math. Theor. — 2010. — Vol. 43, no. 9. — P. 095203.
- [118] Viswanathan K. S. Generalized q -fermion oscillators and q -coherent states / K. S. Viswanathan, R. Parthasarathy, R. Jagannathan // J. Phys. A: Math. Gen. — 1992. — Vol. 25, no. 7. — P. L335.
- [119] Nielsen M. A. Quantum Computation and Quantum Information / M. A. Nielsen, I. L. Chuang. — Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2000. — 700 pp.
- [120] Gavrilik A. M. Plethora of q -Oscillators Possessing Pairwise Energy Level Degeneracy / A. M. Gavrilik, A. P. Rebesh // Mod. Phys. Lett. A. — 2008. — Vol. 23, no. 13. — Pp. 921–932.
- [121] Gavrilik A. M. Occurrence of Pairwise Energy Level Degeneracies in q, p -oscillator Model / A. M. Gavrilik, A. P. Rebesh // Ukr. J. Phys. — 2008. — Vol. 53. — Pp. 586 – 594.
- [122] Leon J. A case of entanglement generation between causally disconnected atoms / J. Leon, C. Sabin // Int. J. Quantum Inform. — 2009. — Vol. 07, no. supp01. — Pp. 187–193.
- [123] Wiedemann U. A. Particle interferometry for relativistic heavy-ion collisions / U. A. Wiedemann, U. Heinz // Phys. Rep. — 1999. — Vol. 319, no. 4-5. — Pp. 145 – 230.

- [124] Gradshteyn I. S. Table of integrals, series and products / I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik. — Academic Press, 2007. — 1200 pp.
- [125] Heinz U. What can we learn from three-pion interferometry? / U. Heinz, Q. H. Zhang // Phys. Rev. C. — 1997. — Jul. — Vol. 56. — Pp. 426–431.

*Автор хотів би подякувати своєму науковому керівникові О.М. Гаври-
лику за постановку задач, корисні поради та плідну співпрацю, Качурику
І.І. за корисні обговорення і пропозиції, а також І.В. Симоногу, М.З. Іор-
гову, та А.П. Ребеш за обговорення отриманих результатів.*