

ОРДЕНА ЛЕНИНА АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР

Институт теоретической физики

На правах рукописи

Гусынин Валерий Павлович

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕНЕРАЦИИ

МАСС ЧАСТИЦ В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ ПОЛЯ

С НАРУШЕННЫМИ СИММЕТРИЯМИ

01.04.02 - теоретическая и математическая физика

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научные руководители:

доктор физико-математических наук

П. И. Фомин

кандидат физико-математических наук

В. А. Миранский

Киев - 1978

СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА I. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕНОРМАЛИЗАЦИОННОЙ ГРУППЫ К ИССЛЕДОВАНИЮ ВОПРОСА О ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕНЕРАЦИИ ФЕРМИОННОЙ МАССЫ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ	21
§ 1. Модифицированные уравнения ренормализационной группы	24
§ 2. Условия существования решений "сверхпроводящего типа"	35
§ 3. Вычисления в $\alpha_{\Lambda}(\alpha_{\Lambda} L)^n$ -приближении	37
ГЛАВА II. ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМА ИВИНГЕРА В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ ПОЛЯ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА РЕНОРМГРУППЫ	43
§ 1. Модель Корнуэла-Нортона	44
§ 2. Уравнения ренормгруппы. Массовые уравнения	47
§ 3. Анализ теорий без обрезания	51
§ 4. Анализ теорий при наличии обрезания	55
ГЛАВА III. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭФФЕКТИВНОГО ПОТЕНЦИАЛА К ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ С ДИНАМИЧЕСКИ НАРУШЕННОЙ СИММЕТРИЕЙ	63
§ 1. Эффективный потенциал и динамическое нарушение симметрии	63
§ 2. Анализ электродинамики Диксона-Бейкера-Вилмса с помощью метода эффективного потенциала	69
§ 3. Эффективный потенциал модели Корнуэла-Нортона	75
§ 4. Устойчивость решений с динамически нарушенной киральной симметрией в квантовой электродинамике с обрезанием	82

ГЛАВА IV. СПЕКТР УРАВНЕНИЙ БЕТЕ-СОЛНИТЕРА И ПРОБЛЕМА	
УСТОЙЧИВОСТИ ВАКУУМА В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ	
ПОЛЯ	87
§ 1. Неустойчивость вакуума безмассовой электре-	
динамики	89
§ 2. Условия устойчивости вакуума безмассовой	
хромодинамики	97
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	113
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Вывод модифицированных уравнений ренормгруппы	
для модели Корнуэла-Нортена	116
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Формулы интегрирования по угловым переменным	124
ПРИЛОЖЕНИЕ В. Ядра уравнений Бете-Солнителя квантовой	
хромодинамики в лестничном приближении . . .	127
Литература	135

ВВЕДЕНИЕ

Проблема динамической генерации масс элементарных частиц становится в настоящее время все более актуальной [1-3]. Сама идея о динамической природе масс не является новой, она была выдвинута еще в начале 20-века [4,5]. В 1961 году Намбу и другими авторами [6-8] был предложен механизм образования масс элементарных частиц, аналогичный механизму образования энергетической щели в спектре одноэлектронных возбуждений в сверхпроводнике. Эти идеи разрабатывались затем в целом ряде работ [8-12].

Возросший в последние годы интерес к проблеме динамической генерации масс связан с попытками построения единой теории слабых, электромагнитных и сильных взаимодействий по типу модели Вайнберга-Салама [13,14]; непосредственное введение затравочных массовых членов в лагранжиан подобных моделей оказывается в ряде случаев нежелательным, так как это понижает симметрию лагранжиана и разрушает такое важное свойство теории, как перенормируемость.

В настоящее время имеется два способа генерации масс элементарных частиц в калибровочных теориях. Один из них - это введение в лагранжиан скалярных полей Хиггса [15-18] с отрицательным квадратом массы, что приведет к спонтанному нарушению исходной симметрии лагранжиана и ненулевому вакуумному среднему для скалярных полей. Как следствие, фермионы и векторные частицы приобретают массу. Было показано, что такие теории являются перенормируемыми [19-23].

Другой способ - динамическое нарушение симметрии, который использует возможность существования несимметричных решений полевых уравнений без введения скалярных полей [24-31].

Вторая возможность является более привлекательной с физической точки зрения, поскольку она не требует введения скалярных полей, нарушающих асимптотическую свободу неабелевых теорий; к тому же нет экспериментальных свидетельств в пользу существования Хиггсовских частиц.

При динамическом нарушении симметрии в лагранжиан не вводятся никаких массовых параметров, которые могли бы служить в качестве масштаба m , на первый взгляд, кажется невозможным получить массы в полноте безмассовой теории. Однако, любая локальная теория поля содержит в себе ультрафиолетовые расходимости и требует определения, устраняющего их, при котором, будь-то введение обрезающего импульса или процедура вычитания, с необходимостью возникает массовый параметр.

Этот параметр, однако, не является вполне независимым, его изменение можно компенсировать соответствующим изменением констант связи и масштаба поле μ . Последнее утверждение можно выразить в виде некоторых соотношений на функции Грина и другие величины, называемых уравнениями ренормализационной группы [32, 33]. В наиболее общей и строгой форме уравнения ренормализационной группы были сформулированы Боголюбовым и Нирковичем [34] и применены к исследованию ультрафиолетового и инфракрасного поведения как в квантовой электродинамике, так и в других теориях [34-37].

Исследование механизма динамического нарушения симметрии с необходимостью требует выхода за рамки стандартной теории возмущений. Одним из способов такого выхода, кроме обычно используемого обобщенного метода Хартри-Фока [6], является метод ренормгруппы, который обладает по сравнению с методом Хартри-Фока рядом преимуществ. Он, в частности, позволяет выяснить, выживает ли такое решение при учете высших порядков теории возмущений, и уста-

новить ограничения на параметры теории, при которых решение существует.

При анализе проблемы динамической генерации масс мы будем различать два подхода. В первом из них предполагается, что перенормируемые полевые теории являются замкнутыми, т.е. приводят к конечным выражениям как для элементов S -матрицы, так и для спектра масс частиц при снятии обрезания ($\Lambda \rightarrow \infty$). Сюда относится программа конечной квантовой электродинамики Дюнсона-Бейкера-Виллея (ДБВ) [38-40], а также ряд других моделей [24-26]. Согласно второму подходу предполагается, что такие теории не являются внутренне замкнутыми и необходимо сохранять лоренц-инвариантный параметр Λ , эффективно обрезавший взаимодействие на малых расстояниях. Параметр $\ell \sim 1/\Lambda$ можно рассматривать как феноменологический представитель фундаментальной константы - элементарной длины. При этом массы частиц могут зависеть от Λ . Например, для решения "сверхпроводящего" вида эта зависимость имеет вид $m \sim \Lambda \exp(-c/g^2)$, где g - перенормированная константа связи, c - некоторое число.

Ко второму направлению относятся работы, анализирующие "сверхпроводящее" решение в электродинамике [9-II] и ряде других теорий с обрезанием [41], интерес к которым в последнее время заметно возрос (см., например, [42-44]).

Глава первая настоящей диссертации посвящена применению метода ренормализационной группы к исследованию динамического нарушения киральной симметрии в квантовой электродинамике.

Для выявления динамического нарушения киральной симметрии, присущей исходному безмассовому лагранжиану, вводится, согласно методу квазиперенормировки Боголюбова [45], в лагранжиан член $m_\Lambda \bar{\Psi} \Psi$, нарушающий эту симметрию. Это приводит к появлению у электронной функции Грина $G^{-1}(p) = \hat{p} A_\Lambda - m_\Lambda B^\Lambda$ члена $m_\Lambda B^\Lambda$ (Λ - ренормгрупп-

новой параметр). Для функции B^{\wedge} записывается ренормгрупповое функциональное соотношение, откуда обычным образом следуют дифференциальные уравнения. Полученные в первом параграфе главы уравнения наряду с переменной эффективного (ренормгруппового) заряда содержат и переменную эффективной массы. Подобная переменная появляется и в других вариантах ренормгрупповых уравнений (см. работы Вайнберга [46] и Хуфта [47]); отличие состоит в использовании иной процедуры вычитания.

Уравнения для эффективного заряда ξ_3 и массовой функции $\xi_1 (\equiv B^{\wedge}/\Lambda^{\wedge})$ образуют сложную систему. Во второй части параграфа показано, каким образом для интересующей нас задачи (нахождение физической массы электрона, определяемой положением полюса полной фермионной функции Грина) эту систему можно расцепить и записать уравнения для физической массы m в следующей интегральной форме

$$\ln \frac{m}{m_{\Lambda}} = \int_{\alpha_{\Lambda}}^{\alpha_m} ds \frac{\Psi_1(s)}{\Psi_3(s)}, \quad (1)$$

$$\ln \frac{m^2}{\Lambda^2} = \int_{\alpha_{\Lambda}}^{\alpha_m} ds \frac{1}{\Psi_3(s)}, \quad (2)$$

где Ψ_1 и Ψ_3 - ренормгрупповые функции, которые можно приближенно вычислить в теории возмущений; α_{Λ} - ренормгрупповой заряд, определяющий интенсивность взаимодействия на расстояниях $\sim 1/\Lambda$ (голый заряд при $\Lambda \rightarrow \infty$), $\alpha_m \simeq \alpha_0 \equiv \alpha$ - физический заряд.

Второй параграф главы посвящен общему анализу уравнений (1), (2). В случае электродинамики с обрезанием ($\Lambda < \infty$) анализ соотношений (1), (2) приводит к следующему выводу: динамичес-

ное нарушение киральной симметрии ($m_\Lambda = 0, m \neq 0$) возможно только, если затравочный заряд больше некоторого критического: $d_\Lambda \geq d_c \sim 1$, где d_c - радиус сходимости степенного ряда для функции Ψ_1 . Для электродинамики ДБВ показано, что из соотношений (1), (2) при $\Lambda \rightarrow \infty$ достаточно просто вытекает, в предположении малости затравочной константы $d_{\Lambda \rightarrow \infty}$, известный результат о динамическом нарушении γ_5 -симметрии в этой модели, т.е. затравочная масса m_Λ обращается в нуль при снятии обрезания ($\Lambda \rightarrow \infty$), в то время как физическая масса $m \neq 0$ (m является при этом неопределенной константой интегрирования).

В третьем параграфе первой главы приведены конкретные вычисления различных функций в так называемом $d_\Lambda (d_\Lambda L)^n$ приближении (L - большой логарифм), учитываем все члены вида $(d_\Lambda L)^n$ и $d_\Lambda (d_\Lambda L)^n$. Для нахождения функций в указанном приближении решаются уравнения ренормгруппы с функциями Ψ_i в двухчленном приближении. Показано, что в области применимости ренормгруппы ($d_\Lambda \ll 1$) для физической массы m существует приближенное решение "сверхпроводящего типа" вида

$$m = \Lambda \exp \left\{ -\frac{3\pi}{2d} \left[1 - \left(1 + \frac{19}{24\pi} d \right) \left(\frac{m_\Lambda}{m} \right)^{4/9} \right] - \frac{1}{2} \ln \frac{m_\Lambda}{m} - \frac{16}{19} \right\} \quad (3)$$

при условии, что параметр m_Λ/m удовлетворяет неравенству

$$1 \gg \frac{m_\Lambda}{m} \gg d^{9/4}, \quad d = \frac{1}{137}. \quad (4)$$

Существование этого решения и его структура позволяют надеяться, что сверхпроводящее решение имеет место и в случае γ_5 -инвариантного ($m_\Lambda = 0$) лагранжиана с достаточно сильной затравочной связью ($d_\Lambda \geq d_c$). Отметим неаналитичность при $d = 0$ в зависи-

ности массы m от физической константы d .

Вторая глава диссертации посвящена исследованию с помощью метода ренормгруппы механизма Ивнингера [48] в калибровочных теориях поля на примере модели Корнуэла-Нортена [25]. Ивнингер [48] (см. также Огневский и Полубаринев [49]) отметил, что безмассовость векторных частиц в калибровочных теориях не является непосредственным следствием калибровочной инвариантности; достаточно сильное возмущение может привести, в принципе, к появлению полюса в поляризованном операторе Π , как следствие, к возникновению массы у векторных частиц. Эта возможность особенно привлекательна для единиц теорий типа Вайнберга-Салама, как в том говорилось выше.

В первом параграфе этой главы изложена модель Корнуэла-Нортена, содержащая два фермионных и два векторных поля (A_μ, B_μ) , и проиллюстрирована принципиальная возможность реализации механизма Ивнингера в данной модели.

Второй параграф главы посвящен выводу модифицированных уравнений ренормгруппы аналогично тому, как это делалось в первой главе для случая электродинамики. Ввиду большого числа скалярных функций и громоздкости соответствующих выкладок в параграфе указаны лишь основные моменты вывода уравнений ренормгруппы и массовых уравнений. Отмечены также принципиальные места, связанные с калибровочной инвариантностью, неоднозначностью разложения поляризованного оператора на две скалярные функции. Полный вывод уравнений ренормгруппы и массовых уравнений вынесен в Приложение А.

Полученные уравнения для физических масс фермионов и одной из векторных частиц имеют вид

$$\begin{aligned} m_j &= m_{j\Lambda} S_{2j} \left(\frac{m_j^2}{\Lambda^2}, \frac{m_{1\Lambda}}{m_{2\Lambda}}, \frac{\delta m_\Lambda^2}{\mu_\Lambda^2}, d_\Lambda, \beta_\Lambda \right), \\ \mu^2 &= \mu_\Lambda^2 h \left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}, \frac{m_{1\Lambda}}{m_{2\Lambda}}, \frac{\delta m_\Lambda^2}{\mu_\Lambda^2}, d_\Lambda, \beta_\Lambda \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где S_{2j}, h - функции, которые находятся из решения соответствующих уравнений ренормгруппы, $m_{j\Lambda}$ - затравочные массы фермионов ($\delta m_\Lambda = \frac{m_{1\Lambda} - m_{2\Lambda}}{2}$ - расщепление масс), μ_Λ - затравочная масса векторной частицы V_μ , константа взаимодействия которой с фермионами есть β_Λ , d_Λ - константа взаимодействия фермионов со вторым векторным полем A_μ .

В третьем параграфе модель Корнуэла-Нортена анализируется в рамках конечной теории типа электродинамики ДБВ. Такие теории предполагают существование нулей у функций Гелл-Манна-Лоу в точках $d_\Lambda = \infty$ и $\beta_\Lambda = \infty$. При снятии обреза ($\Lambda \rightarrow \infty$) заряды d_Λ и β_Λ стремятся здесь к конечным значениям d_∞ и β_∞ , соответственно.

Из решений ренормгрупповых уравнений получаем выражения для функций S_{2j}, h , подстановка которых в (3) дает

$$\begin{aligned}
 m_\Lambda &= \frac{1}{2}(m_{1\Lambda} + m_{2\Lambda}) = \left(\frac{\Lambda^2}{m_1^2}\right)^{-\frac{\delta_0}{2}} \frac{m_1 + m_2 \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{-\delta_1}}{1 + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\delta_0 - \delta_1}}, \\
 \delta m_\Lambda &= \frac{1}{2}(m_{1\Lambda} - m_{2\Lambda}) = \left(\frac{\Lambda^2}{m_1^2}\right)^{-\frac{\delta_1}{2}} \frac{m_1 - m_2 \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{-\delta_0}}{1 + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\delta_1 - \delta_0}}, \\
 \mu_\Lambda^2 &= \mu^2 - \frac{4\beta_\infty}{\pi\delta_1} \left[\frac{m_1 - m_2 \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{-\delta_0}}{1 + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\delta_1 - \delta_0}} \right]^2 \left(\frac{m_1^2}{\mu^2}\right)^{\delta_1},
 \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\delta_0 = \frac{3(d_\infty + \beta_\infty)}{2\pi}, \quad \delta_1 = \frac{3(d_\infty - \beta_\infty)}{2\pi}.$$

Как следует из (4), для динамического нарушения симметрии

($m_\Lambda = 0, \delta m_\Lambda = 0, \mu_\Lambda = 0$) необходимо выполнение следующих условий:

1) $\delta_1 > 0$ ($d_\infty > \beta_\infty$), 2) между физическими массами m_1, m_2, μ

должно выполняться соотношение

$$\mu^2 = \frac{4\beta_\infty}{\pi\delta_1} \left[\frac{m_1 - m_2 (m_1/m_2)^{-\delta_0}}{1 + (m_1/m_2)^{\delta_1 - \delta_0}} \right]^2 \left(\frac{m_1^2}{\mu^2} \right)^{\delta_1} \quad (5)$$

Условие I) требует присутствия в модели векторного поля A_μ ; в отсутствие такового ($\alpha_\infty \equiv 0$, $\delta_1 < 0$) динамическая генерация масс невозможна.

Из формулы (5) следует, что в данной модели векторная частица приобретает отличную от нуля массу (реализуется механизм Хингера). Однако, для справедливости рассмотренных уравнений ренормгруппы существенно предположение о малости зарядов α_∞ и β_∞ , которые являются корнями функции Гельмгольца-Лоу.

Четвертый параграф второй главы посвящен анализу модели Корнуэлла-Нертена в рамках теории, предполагающей наличие граничного импульса обрезания. Уравнения ренормгруппы в этом случае являются более сложными, поскольку вместо фиксированных зарядов α_∞ и β_∞ они содержат функции эффективных зарядов ξ_A и ξ_B . Решение этих уравнений дает нам функции S_{2j} , h , подстановка которых в (3) приводит к системе уравнений для физических масс m_j, μ . Анализ полученных массовых уравнений показывает, что чисто динамическое решение ($m_{j\Lambda} = 0$, $\mu_\Lambda = 0$) возможно только при достаточно большой затравочной константе связи ($\alpha_\Lambda \gg \alpha_c \sim 1$). Кроме того, для реализации механизма Хингера, помимо условия $\alpha_\Lambda \gg \alpha_c$, необходимо оказывается также такой способ включения первоначального нарушения симметрии, при котором параметр "памяти" $Z \neq 1$ ($Z = \lim_{m_{1\Lambda}, m_{2\Lambda} \rightarrow 0} m_{1\Lambda}/m_{2\Lambda}$).

Таким образом, мы приходим к выводу, что необходимым усло-

нием существования механизма Хингера в абелевой теории с обрезанием является наличие критического значения затравочной константы связи d_c : при $d_1 < d_c$ механизм Хингера не работает, при $d_1 > d_c$ такой механизм возможен. Этот вывод согласуется с первоначальной гипотезой Хингера [48] о возникновении полюса в поляризованном операторе при достаточно сильной связи.

В области применимости ренормгруппы ($d_1 \ll 1$) в модели с обрезанием существуют решения "сверхпроводящего" типа для масс фермионов, однако затравочные массы в этом случае не равны строго нулю.

Как в теориях с обрезанием, так и без него необходимо присутствие векторного поля A_μ . Это поле обеспечивает притяжение между фермионами и антифермионами, в то время, как поле B_μ приводит к отталкиванию.

Таким образом, результаты первой и второй глав диссертации демонстрируют возможность существования при определенных условиях решений с динамически нарушенной симметрией в квантовой электродинамике и модели Корнуэлла-Нертона. Такие решения являются аномальными, поскольку они обладают меньшей симметрией, чем исходный лагранжиан системы. Однако факта появления аномальных решений недостаточно для вывода, что действительно имеет место динамическое нарушение симметрии — необходимо еще показать, что аномальное решение энергетически выигрывает, чем нормальное (т.е. соответствующее ему основное состояние лежит ниже по энергии).

Необходимо также выяснить характер нарушения симметрии, т.е. является ли данное нарушение спонтанным или нет.

Эти вопросы исследуются в третьей главе диссертации с помощью метода эффективного потенциала [50-52], определяющего плотность энергии квантоволнового вакуума как функционал от функций Грина [53, 54].

Условие стационарности эффективного потенциала приводит к уравнению

$$\frac{\delta V}{\delta f(x)} = 0 \quad (6)$$

При спонтанном нарушении симметрии типа Голдстоуна [55], когда $f = \varphi_c = \langle 0 | \varphi | 0 \rangle$ (φ - скалярное поле), уравнение (6) определяет значение φ_c . При спонтанном нарушении типа Намбу [6], когда роль φ играет оператор $\bar{\Psi}\Psi$ (Ψ - спинорное поле), f совпадает с функцией Грина G , и уравнение (6) есть уравнение Лингера-Дайсона для G . Для скалярных полей потенциал V вычислялся в целом ряде работ [56-60]; обобщение эффективного потенциала на случай составных операторов дано в [53].

В § I третьей главы обсуждается динамическое нарушение масштабной симметрии в моделях ДЭВ и Корнуэлла-Нортена. Затраченные массы в этих моделях обращаются в нуль при снятии обрезания, однако оказывается, что решения с физическими массами, отличными от нуля, не являются решениями со спонтанным нарушением масштабной инвариантности. В модели Корнуэлла-Нортена решение $m_1 \neq m_2$ нарушает также τ_2 -симметрию.

Из спонтанного нарушения масштабной инвариантности следует инвариантность плотности энергии вакуума относительно преобразования $m_i \rightarrow km_i$, т.е. вырождение вакуума по фазовому параметру группы масштабных преобразований $\ln k$. Доказательство этого утверждения использует известную теорему Фейнмана в квантовой механике применительно к группе масштабных преобразований. Аналог теоремы Фейнмана в теории поля приводит к тому, что при спонтанном нарушении масштабной симметрии эффективный потенциал не зависит от непрерывных параметров m_i . Действительно, так как V зависит от m_i неявным образом через функции Грина G .

то

$$\frac{dV}{dm_i} = \int \frac{\delta V}{\delta G(p)} \Big|_{G=G_0} \frac{dG_0(p, m)}{dm_i} dp = 0, \quad (7)$$

где G_0 есть решение уравнения (6).

Вывод равенства (7) предполагает, однако, существование вариационной производной $\delta V / \delta G$, т.е. независимость $\frac{\delta V}{\delta G} \Big|_{G=G_0}$ от формы вариации δG_0 .

В параграфах 2 и 3 третьей главы показано в двухпетлевом приближении, что ни в электродинамике ДБВ, ни в модели Корнуэлла-Нортонэ это предположение не выполняется. Как следствие, плотность энергии V зависит от параметров m_i (отсутствует вырождение вакуума), и нарушение масштабной симметрии в этих моделях не является спонтанным, несмотря на динамический характер нарушения. Интерпретация этого факта состоит в том, что обращение в ноль затравочных масс m_0 при снятии обрезания ($\Lambda \rightarrow \infty$) не означает обращения в ноль входящего в лагранжиан плотности \mathcal{L} массового члена $m_0 \bar{\Psi} \Psi$: матричные элементы оператора $m_0 (\bar{\Psi} \Psi) = m (\bar{\Psi} \Psi)_R$, вообще говоря, не равны нулю [$6I$ $(\bar{\Psi} \Psi)_R$ - перенормированный составной оператор].

Таким образом, несмотря на динамический характер нарушения ($m_0 = 0$, $\frac{\partial V}{\partial m_i} = 0$), параметры m_i фиксируют в этих моделях не только вакуум, но и лагранжиан системы.

Второй основной вывод, полученный в параграфах 2 и 3 состоит в том, что в двухпетлевом приближении плотность энергии вакуума равна

$$V = -c m^4, \quad c > 0 \quad (8)$$

для электродинамики ДБВ, и

$$V = -c_1 m^4 - c_2 \delta m^4 - c_3 m^2 \delta m^2, \quad c_1, c_2, c_3 > 0, \quad (9)$$

$$m = \frac{1}{2} (m_1 + m_2), \quad \delta m = \frac{1}{2} (m_1 - m_2)$$

для модели Корнуэлла-Нортена, т.е. плотность энергии вакуума нарушенной фазы как в модели ДБВ, так и в модели Корнуэлла-Нортена меньше, чем соответствующая плотность энергии фазы с ненарушенной симметрией.

В последнем, четвертом параграфе главы, вычисляется плотность энергии вакуума в квантовой электродинамике с обрезанием. Полученный ответ

$$V = - \frac{3m^4}{160\pi\alpha}$$

говорит о том, что решение с нарушенной киральной симметрией ($m \neq 0$) здесь также обладает меньшей плотностью энергии, чем кирально-симметричное решение ($m = 0$).

Проблема динамического нарушения симметрии и связанная с ней проблема генерации масс частиц тесно связана с вопросом устойчивости нормального (симметричного) вакуума системы. Известно [63,64] например, что возникновение энергетической щели в спектре электронных возбуждений в сверхпроводнике связано с неустойчивостью нормальной фазы относительно образования электронами связанных состояний ("куперовских пар") и перестройкой системы в устойчивую фазу. На языке двухчастичных функций Грина такая неустойчивость нормальной фазы проявляется в том, что в спектре связанных состояний появляется состояние с мнимой энергией (тахиполон).

В четвертой главе диссертации проблема устойчивости нормального вакуума рассматривается в безмассовой электродинамике (параграф первый) и безмассовой хромодинамике (параграф второй). По-

казано, что в этих теориях возможен эффект, аналогичный феномену Купера в теории сверхпроводимости, а именно: при определенных условиях уравнения Бете-Солпитера допускают тахионное решение в спектре связанных двухчастичных состояний.

В безмассовой электродинамике ищется нетривиальное решение уравнения Бете-Солпитера в лестничном приближении для волновой функции связанного фермион-антифермионного состояния вида

$$\chi = \langle 0 | \Psi \bar{\Psi} | P \rangle = \chi_S + \sigma_{\mu\nu} \chi_T^{\mu\nu} \quad (10)$$

Систему интегральных уравнений БС удастся свести в конечном итоге к одному дифференциальному уравнению второго порядка с определенными граничными условиями. Решение уравнения выражается через гипергеометрическую функцию с двумя постоянными C_1 и C_2 . Одно из граничных условий фиксирует константу $C_2 (= 0)$, а второе приводит к уравнению на собственное значение, решение которого при $d_0 \gg d_c = \frac{\pi}{4}$ есть

$$P^2 = 4\Lambda^2 c \exp\left[-\frac{2\pi n}{\sqrt{4d_0/\pi - 1}}\right], \quad n = 1, 2, \dots; \quad c \approx 6 \quad (11)$$

(P - полный импульс, Λ - обрезание, d_0 - затравочный заряд). Так как P здесь евклидовский вектор, то в спектре системы имеются тахионы. Это позволяет заключить, что вакуум безмассовой фазы неустойчив. Такая неустойчивость соответствует спонтанному нарушению киральной инвариантности, поскольку найденная волновая функция (10) связывает фермионы и антифермионы одинаковой спиральности:

$$(1 \pm \gamma_5) \chi (1 \mp \gamma_5) = 0 \quad (12)$$

Как и в теории сверхпроводимости, значение $(P^2)^{-1/2}$ определяет время перестройки вакуума, а $(P^2)^{1/2}/2$ - величину энергетической

цели, т.е. массу физического фермиона.

Возникновение критической константы $d_c = \frac{\pi}{4} \sim 1$ подтверждает вывод, сделанный в первой главе, что динамическая генерация массы в квантовой электродинамике возможна лишь при достаточно большой затравочной константе связи (при $d_0 < d_c$ имеется лишь тривиальное решение $\chi = 0$, в вакуум безмассовой фазы устойчив).

Подробно обсуждается связь условия $d_0 > d_c \sim 1$, необходимого для динамической генерации массы, с перестройкой вакуума в ситуации падения на кулоновский центр $\frac{Ze^2}{r}$ при сверхкритических зарядах $Z > 137$ [65].

Во втором параграфе четвертой главы рассматривается проблема устойчивости вакуума в безмассовой хромодинамике. Эта проблема тесным образом связана с проблемой удержания цветных частиц (кварков и глюонов) в этой теории.

Подход, развиваемый здесь, является непосредственным обобщением рассмотрения, проведенного в случае квантовой электродинамики. Для образования связанного состояния необходимо наличие сил притяжения. Такие силы действуют в теории полей Янга-Миллса между векторными частицами в синглетном (по цвету) состоянии. С физической точки зрения ясно, что при достаточно сильном притяжении может возникнуть связанное состояние, однако, в силу безмассовости составляющих частиц, оно с необходимостью будет тахионом.

Интегральные уравнения БС в случае чистой теории Янга-Миллса удастся свести в определенном приближении к одному интегральному уравнению с симметричным положительным ядром Гильберта-Шмидта. Воспользовавшись затем известными оценками [66] для наибольшего собственного значения, находим, что в спектре системы имеется тахион с собственным значением ρ^2 , равным

$$\rho^2 \approx 4\Lambda^2 \exp\left[-\frac{16}{3C_2(G)\lambda}\right], \quad (13)$$

$C_2(G)$ - значение квадратичного оператора Казимира, для цветной группы $SU(N)$. $C_2(G) = N$, $\lambda = g^2/4\pi^2$.

Так как в спектре системы имеется тахлон, то вакуум нормальной фазы неустойчив относительно образования синглетных по цвету связанных состояний глюонов. Время перестройки системы в систему со стабильным вакуумом равно по порядку величины $(\rho^2)^{-1/2}$. Квантовые числа найденного тахлона совпадают с квантовыми числами массового бозонного оператора $A_\mu^a A_\mu^a$. Следовательно, величина $(\rho^2)^{1/2}$ определяет массу векторного бозона - глюона в спектре однобозонных возбуждений. В силу того, что оператор $A_\mu^a A_\mu^a$ инвариантен относительно глобальных калибровочных преобразований, возникшая масса должна быть одинаковой у всех групповых компонент поля Янга-Миллса.

Отметим также, что решение (13) имеет место при сколь угодно малой константе g . Это согласуется с известными ренормгрупповыми соображениями [28,67] о том, что динамический механизм генерации масс при малой константе связи возможен только в асимптотически свободных теориях.

Включение безмассовых кварков меняет ситуацию существенным образом. Система интегральных уравнений БС более не является симметричной системой типа Гильберта-Шмидта и имеет вид

$$G_i(x) = \lambda \int_0^1 dy T^{ij}(x,y) G_j(y), \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

где для ядер T^{ij} выполняется

$$T^{11}(x,y) = T^{11}(y,x), \quad T^{22}(x,y) = 0, \quad (15)$$

$$T^{12}(x,y) = -T^{21}(y,x), \quad (16)$$

(знак минус в (16) связан со статистикой ферми). Собственные значения λ такой системы в общем случае комплексные. Однако при достаточно малом числе кварковых мультиплетов ($n < n_c$) λ могут оставаться вещественными. Чтобы оценить критическое значение n_c , мы заметим, что система (14) эквивалентна операторному уравнению

$$\left(\hat{T}^{11} + \lambda \hat{T}^{12} \hat{T}^{21} \right) G_1 = \frac{1}{\lambda} G_1 \quad (17)$$

Уравнения подобного типа исследовались в теории квадратичных пунктов самосопряженных операторов Н.В.Калдышем и М.Г.Крейном [68].

Мнимая часть наименьшего собственного значения λ оказывается отличной от нуля для группы $SU(N)$ при

$$n > n_c = \frac{9}{64} \frac{N^3}{N^2 - 1} \quad (18)$$

Единственным приемлемым решением в этом случае есть $G_i = 0$, и тахивон в спектре системы отсутствует.

Достаточное условие ($n < n_c$) динамической генерации масс является значительно более жестким, чем необходимое условие ($n < \frac{11}{2} N$), требующее наличия асимптотической свободы.

Перестройка вакуума, происходящая в пределе слабой связи при $n < n_c$ не приводит, однако, к возникновению массы у фермионов. Как показано в заключительной части второго параграфа, динамическая генерация массы фермионов возможна только при достаточно большой константе связи: $\frac{g^2(N^2-1)}{8\pi N} > \frac{\pi}{4}$. Вакуум в этом случае неустойчив относительно образования связанных фермион-антифермионных состояний в синглетном канале. Природа этой неустойчивости та же, что и в квантовой электродинамике.

Физические следствия полученных результатов подробно обсуждаются в заключении четвертой главы.

Заканчивается диссертация Заключением, в котором сформулированы основные результаты и выводы настоящего исследования механизмов динамической генерации масс частиц в теории поля.

В диссертации имеются также три приложения, содержащие:

- А) вывод модифицированных уравнений ренормгруппы в модели Корнуала-Нортена, Б) сводку формул интегрирования по угловым переменным, В) схематический вывод уравнения Бете-Солнителя в квантовой хромодинамике и выражения для ядер в лестничном приближении.

Глава I

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕНОРМАЛИЗАЦИОННОЙ ГРУППЫ К ИССЛЕДОВАНИЮ ВОПРОСА О ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕНЕРАЦИИ ФЕРМИОННОЙ МАССЫ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Рассмотрим вопрос о динамическом нарушении симметрии и генерации масс частиц на примере квантовой электродинамики с лагранжианом (выраженным через неперенормированные величины)

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma_\nu \partial^\nu - m_\lambda)\Psi - \frac{1}{4}(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) \quad (I.1) \\ + e_\lambda \bar{\Psi}\gamma_\nu \Psi A^\nu; \quad g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1, \quad \hbar = c = 1.$$

При этом неявно считается, что в (I.1) используется регуляризационная процедура, вводящая некоторый параметр обрезания Λ .

При $m_\lambda = 0$ плотность лагранжиана (I.1) обладает донормальной симметрией по отношению к киральному (γ_5) преобразованию

$$\Psi(x) \rightarrow \exp(i\theta\gamma_5)\Psi(x), \quad \bar{\Psi}(x) \rightarrow \bar{\Psi}(x)\exp(i\theta\gamma_5) \quad (I.2)$$

Наличие этой симметрии приводит к тому, что при вычислениях по теории возмущений для физической массы получается нулевой результат в каждом конечном порядке теории возмущений.

Возникновение физической массы $m > 0$ динамической природы связано с нарушением киральной симметрии безмассового лагранжиана, которое может быть как спонтанным (в теориях с обрезанием), так и неспонтанным (электродинамика ДБВ). Любое нарушение симметрии связано с неинвариантностью вакуума относительно соответствующей

шего преобразования симметрии [69]. Так например, если бы физический вакуум был, как и лагранжиан, инвариантен относительно преобразования (1.2), то массовый член в электронной функции Грина не мог возникнуть. Действительно, пусть при киральном преобразовании

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{-1} \Psi(x) \mathcal{U} &= \exp(i\theta\gamma_5) \Psi(x), \\ \mathcal{U}^{-1} \bar{\Psi}(x) \mathcal{U} &= \bar{\Psi}(x) \exp(i\theta\gamma_5), \end{aligned} \quad (1.3)$$

и пусть вакуум инвариантен, т.е.

$$\mathcal{U} |0\rangle = |0\rangle, \quad (1.4)$$

тогда

$$\begin{aligned} G(x-y) &= \langle 0 | T \Psi(x) \bar{\Psi}(y) | 0 \rangle = \langle 0 | \mathcal{U}^{-1} T \Psi(x) \mathcal{U} \mathcal{U}^{-1} \bar{\Psi}(y) \mathcal{U} | 0 \rangle \\ &= \exp(i\theta\gamma_5) G(x-y) \exp(i\theta\gamma_5). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Следовательно,

$$\{\gamma_5, G\} = 0. \quad (1.6)$$

Для функции $G^{-1} = \hat{p}A - mB$ последнее условие означает $mB = 0$.

Таким образом, массовый член может возникнуть только если вакуум не является инвариантным относительно киральных преобразований. Справедливо и обратное: появление в полной функции Грина массового члена mB в теории с $m_A = 0$ свидетельствует о нарушении симметрии физического вакуума. Это нарушение является динамическим, поскольку вакуум невзаимодействующих полей симметричен, включение взаимодействия приводит к перестройке вакуума с понижением симметрии (и энергии). Можно показать (по-

дробнее см. главу IV), что эта перестройка обусловлена энергетически выгодными процессами сваривания в вакууме безмассовых фермионов и антифермионов. Это явление аналогично "феномену Купера" в теории сверхпроводимости [63,64]. Указанные сваривания приводят к образованию энергетической щели в спектре однофермионных возбуждений, которая играет роль массы,

Для выявления динамического нарушения γ_5 -симметрии необходимо ввести, согласно методу квазисредних Боголюбова [45], в лагранжиан член $m_A \bar{\Psi} \Psi$, нарушающий эту симметрию. В дальнейшем, после получения уравнений для физической массы, m_A устремляется к нулю. Существование решения с $m > 0$ и будет свидетельствовать о динамическом нарушении γ_5 -симметрии.

Этот метод, с другой стороны, аналогичен методу аномальных функций Грина [70], в котором неинвариантность физического вакуума относительно группы симметрии лагранжиана отражается во введении в функции Грина дополнительных членов (напр., $m B$), нарушающих эту симметрию. Для таких аномальных функций Грина выносятся затем уравнения типа Дайсона и доказываются существование нетривиального решения у этих уравнений.

Ренормгрупповой подход к анализу решений сверхпроводящего типа обладает рядом преимуществ перед другими обычно используемыми для этой цели методами (например, обобщенный метод Хартри-Фока [6]). Ренормализационная группа позволяет выяснить, возникает ли такое решение при учете высших порядков теории возмущений, и установить ограничения на параметры, при которых такое решение существует. Этот метод пригоден не только в квантовой электродинамике, но и для любой перенормируемой теории поля. Метод ренормгруппы при отыскании решений "сверхпроводящего типа" требует некоторого обобщения. Это составляет содержание первого параграфа главы.

§ I. Модифицированные уравнения ренормализационной группы

Ненормированные электронную и фотонную функции Грина запишем в виде

$$G(p) = [\hat{p}A(p^2) - m_\lambda B(p^2)]^{-1} \equiv [\hat{p} - m_\lambda - \Sigma(p)]^{-1}, \quad (I.7)$$

$$D_{\mu\nu}(p) = -\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right) \frac{d(p^2)}{p^2} \equiv -\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right) \frac{1}{p^2[1-\Pi(p^2)]} \quad (I.8)$$

Для удобства мы выбрали для $D_{\mu\nu}$ поперечную калибровку. Введем далее перенормированные функции Грина и верхнюю часть

$\Gamma_{c\mu}(p, p-k, k)$:

$$G_c(p) = [\hat{p}A_c(p^2) - mB_c(p^2)]^{-1} \equiv [\hat{p} - m - \Sigma_c(p)]^{-1} = Z_2^{-1}G(p), \quad (I.9)$$

$$D_{c\mu\nu}(p) = -\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right) \frac{d_c(p^2)}{p^2} \equiv -\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right) \frac{1}{p^2[1-\Pi_c(p^2)]} = \quad (I.10)$$

$$= Z_3^{-1}D_{\mu\nu}(p),$$

$$\Gamma_{c\mu}(p, p-k, k) = Z_1\Gamma_\mu(p, p-k, k), \quad Z_1 = Z_2. \quad (I.11)$$

Перенормированные функции определяются следующими условиями нормировки:

$$\begin{aligned} \Sigma_c(p) \Big|_{\hat{p}=m} &= 0, \\ \frac{\partial \Sigma_c(p)}{\partial \hat{p}} \Big|_{\hat{p}=m} &= 0, \\ \Pi_c(p^2) \Big|_{p^2=0} &= 0. \end{aligned} \quad (I.12)$$

Выраженный через перенормированные величины лагранжиан (I.1) принимает вид :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_i, \quad (I.13)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \bar{\Psi}_c (i\gamma_\nu \partial^\nu - m) \Psi_c - \frac{1}{4} (\partial_\nu A_{c\mu} - \partial_\mu A_{c\nu}) (\partial^\nu A_c^{\mu} - \partial^\mu A_c^\nu), \\ \mathcal{L}_i &= Z_1 e \bar{\Psi}_c \gamma_\nu \Psi_c A_c^\nu + i(Z_2 - 1) \bar{\Psi}_c \gamma_\nu \partial^\nu \Psi_c - \\ &- \frac{1}{4} (Z_3 - 1) (\partial_\nu A_{c\mu} - \partial_\mu A_{c\nu}) (\partial^\nu A_c^{\mu} - \partial^\mu A_c^\nu) + \bar{\Psi}_c (m - Z_2 m_\Lambda) \Psi_c, \\ e &= Z_3^{1/2} e_\Lambda, \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}. \end{aligned} \quad (I.14)$$

Обобщенный метод Хартри-Фока состоит в том, что перенормированная электронная функция (I.7) с помощью лагранжиана (I.13) выражается через перенормированные параметры α и m . Проще всего это сделать с помощью интегральных уравнений Швингера-Дайсона и перенормировочных соотношения (I.9)-(I.11)

$$\begin{aligned} \Sigma(p, m, \alpha) &= \frac{\alpha_\Lambda}{\pi^2 i} \int \Gamma_\mu(p, p-q, q) G(p-q) \gamma_\nu D^{\mu\nu}(q) d^4q = \\ &= \frac{\alpha}{\pi^2 i} \int \Gamma_{c\mu}(p, p-q, q) G_c(p-q) \gamma_\nu D_c^{\mu\nu}(q) d^4q. \end{aligned} \quad (I.15)$$

Так как физическая масса m определяется как полюс функции Грина, то для нее имеет место уравнение

$$\left[\hat{p} - m_\Lambda - \Sigma(p, m, \alpha) \right] \Big|_{\hat{p} = m} = 0. \quad (I.16)$$

В работах [6] такое массовое уравнение, записанное для четырехфермионного взаимодействия, решалось при учете никакого порядка теории возмущений. В работах [9-11] уравнение (I.16) решалось с помощью некоторой схемы приближений, позволяющей выйти за рамки теории возмущений. Однако, и здесь принципиальным моментом является использование лагранжиана в форме (I.13), а не в перенормированной форме (I.1).

На первый взгляд выделенность формы (I.13) кажется почти неизбежной, так как неаналитическую по d в нуле зависимость вида $m \sim \Lambda e^{-c/d}$ нельзя получить методами теории возмущений, исходя из перенормированной массы и перенормированного заряда. Обращаясь однако к перенормировочным соотношениям Дайсона общего вида

$$G(p, d_\Lambda, m_\Lambda) = Z G_c(p, d, m) \quad (I.17)$$

Если разрешить такие соотношения точно, то это будет гарантировать полную эквивалентность форм (I.1) и (I.13). Примечательно, что для этого не обязательно знать полные функции Грина, точно удовлетворяющие интегральным уравнениям Вайнгера-Дайсона типа (I.15). Например (см. § 3), уже асимптотические выражения для функций Грина, впервые полученные в [71], дают пример точных решений соотношений (I.17). Как будет показано выше, уравнения ренормализационной группы являются удобным инструментом для нахождения таких точных решений.

Чтобы лучше понять достоинства этого подхода, обратимся к простой аналогии. Хорошо известно, что появляющиеся в модели Ли (см., например, [72]) специфические трудности нелегко увидеть, работая с лагранжианом в перенормированной форме типа (I.13). Сравнение же перенормированного и перенормированного

представлений сразу показывает нарушение в такой модели условия эрмитовости гамильтониана, появление духов и т.д. Сходная ситуация возникает и при исследовании решений сверхпроводящего типа в теории поля: эквивалентность перенормированной и ненормированной форм лагранжиана дает возможность взглянуть на такие решения с двух дополняющих друг друга точек зрения, что, как будет показано в § 2 и § 3, позволяет получить о них дополнительную информацию, в частности, позволяет установить ограничения на параметры теории, при которых сверхпроводящие решения существуют.

Для вывода ренормгрупповых уравнений введем λ -функции Грина

$$G_\lambda(\rho) = [\hat{\rho} A_\lambda(\rho^2) - m_\lambda B_\lambda(\rho^2)]^{-1}, \quad (I.18)$$

$$D_\lambda^{m\nu}(\rho) = -\left(g^{m\nu} - \frac{\rho^m \rho^\nu}{\rho^2}\right) \frac{d_\lambda(\rho^2)}{\rho^2},$$

с нормировочными условиями

$$A_\lambda(-\lambda^2) = 1, \quad B_\lambda(-\lambda^2) = 1, \quad d_\lambda(-\lambda^2) = 1, \quad (I.19)$$

$$\lambda^2 \geq 0.$$

Также условия позволяют, меняя параметр λ , описать теорию различными наборами не только d_λ , но и m_λ [42, 73, 74].

Для λ -функций Грина имеет место соотношение типа Дайсона:

$$m_\lambda \frac{B_\lambda(\rho^2)}{A_\lambda(\rho^2)} = m \frac{B_c(\rho^2)}{A_c(\rho^2)}, \quad (I.20a)$$

$$A_\lambda(\rho^2) = Z_{2\lambda}^{-1} A_c(\rho^2), \quad (I.20б)$$

$$d_\lambda(\rho^2) = Z_{3\lambda} d_c(\rho^2), \quad (I.20в)$$

Как хорошо известно [75,76], функция Грина $G_\lambda(p)$ вследствие безмассовости фотона имеет на физической массовой поверхности не полюс, а ветвление, т.е. (в поперечной калибровке)

$$A_\lambda(p^2) \sim \frac{m_\lambda}{m} B_\lambda(p^2) \sim (p^2 - m^2)^{\frac{3d}{2\pi}} \quad \text{при } p^2 \sim m^2 \quad (\text{I.21})$$

Это приводит к тому, что для определения переэнергированной функции Грина G_c мы должны ввести вспомогательную массу μ . Однако, в отношениях B_c/A_c и B_λ/A_λ инфракрасные сингулярности сокращаются, т.е. выражение $(\hat{p} - m_\lambda B_\lambda/A_\lambda)^{-1}$ в (I.18) обладает простым полюсом на физической массовой поверхности. Следовательно, в (I.20a) можно положить $\mu = 0$.

Сингулярная зависимость функций A_c , B_c (вне массовой поверхности) и $Z_{2\lambda}$ от μ факторизуется [76]

$$A_c\left(\frac{p^2}{m^2}, \frac{\mu^2}{m^2}, d\right) = \mathcal{Z}\left(\frac{\mu^2}{m^2}, d\right) A'_c\left(\frac{p^2}{m^2}, \frac{\mu^2}{m^2}, d\right),$$

$$B_c\left(\frac{p^2}{m^2}, \frac{\mu^2}{m^2}, d\right) = \mathcal{Z}\left(\frac{\mu^2}{m^2}, d\right) B'_c\left(\frac{p^2}{m^2}, \frac{\mu^2}{m^2}, d\right),$$

(I.22)

$$Z_{2\lambda}\left(\frac{\lambda^2}{m^2}, \frac{\mu^2}{m^2}, d\right) = \mathcal{Z}\left(\frac{\mu^2}{m^2}, d\right) Z'_{2\lambda}\left(\frac{\lambda^2}{m^2}, \frac{\mu^2}{m^2}, d\right),$$

где
$$\mathcal{Z}\left(\frac{\mu^2}{m^2}, d\right) = \exp\left\{-\frac{3d}{4\pi} \ln \frac{\mu^2}{m^2}\right\} + O\left(d^2 \ln \frac{\mu^2}{m^2}\right).$$

Функции A'_c , B'_c , A_λ , B_λ (вне массовой поверхности) и $Z'_{2\lambda}$ обладают конечными пределами при $\mu \rightarrow 0$. Впоследствии этот факт будет использован.

Заметим здесь, что если λ выбрать достаточно большим ($\lambda \sim \Lambda$), то ему можно придать тот же смысл, что и параметру обрезания Λ [32, 42]. Параметры $m_{\lambda=\Lambda}$ и $d_{\lambda=\Lambda}$ играют в этом случае роль голей массы и заряда, соответственно.

Приступая к выводу модифицированных уравнений ренормгруппы, введем следующие обозначения (полагая $\lambda = \Lambda$):

$$x = -\frac{\rho^2}{\Lambda^2}, \quad v = -\frac{\rho^2}{m^2}, \quad y = \frac{m_{\Lambda}^2}{\Lambda^2}, \quad u = \frac{\mu^2}{\Lambda^2}, \quad t = \frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2};$$

$$\xi_1(x, y, d_{\Lambda}) \equiv \frac{B_{\Lambda}}{A_{\Lambda}} \Big|_{\mu=0}, \quad \xi_{1c}(v, d) \equiv \frac{B_c}{A_c} \Big|_{\mu=0}, \quad (I.23)$$

$$\xi_2(x, y, u, d_{\Lambda}) \equiv A_{\Lambda}, \quad \xi_{2c}(v, \frac{uv}{x}, d) \equiv A'_c,$$

$$\xi_3(x, y, d_{\Lambda}) \equiv d_{\Lambda} d_{\Lambda}, \quad \xi_{3c}(v, d) \equiv d d_c.$$

Из соотношений (I.12), (I.19) и (I.20) находим

$$m_{\Lambda} \xi_1(x, y, d_{\Lambda}) = m_{\Lambda'} \xi_1\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t} \cdot \frac{m_{\Lambda'}^2}{m_{\Lambda}^2}, d_{\Lambda'}\right),$$

$$Z'_{2\Lambda} \xi_2(x, y, u, d_{\Lambda}) = Z'_{2\Lambda'} \xi_2\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t} \cdot \frac{m_{\Lambda'}^2}{m_{\Lambda}^2}, \frac{u}{t}, d_{\Lambda'}\right), \quad (I.24)$$

$$\xi_3(x, y, d_{\Lambda}) = \xi_3\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t} \cdot \frac{m_{\Lambda'}^2}{m_{\Lambda}^2}, d_{\Lambda'}\right);$$

$$m_{\Lambda} \xi_{1c}(x, y, d_{\Lambda}) = m \xi_{1c}(v, d), \quad (I.25)$$

$$Z'_{2\Lambda} \xi_2(x, y, u, d_{\Lambda}) = \xi_{2c}(v, \frac{uv}{x}, d),$$

$$\xi_3(x, y, d_{\Lambda}) = \xi_{3c}(v, d);$$

$$\xi_1(1, y, d_\lambda) = \xi_2(1, y, u, d_\lambda) = d_\lambda^{-1} \xi_3(1, y, d_\lambda) = 1; \quad (\text{I.26})$$

$$\xi_{1c}(-1, d) = d^{-1} \xi_{3c}(0, d) = 1. \quad (\text{I.27})$$

Поэтому

$$\frac{m_{\lambda'}}{m_\lambda} = \xi_1(t, y, d_\lambda), \quad \frac{z'_{2\lambda'}}{z'_{2\lambda}} = \xi_2(t, y, u, d_\lambda), \quad d_{\lambda'} = \xi_3(t, y, d_\lambda) \quad (\text{I.28})$$

Из (I.24), (I.28) вытекают следующие функциональные соотношения

$$\xi_1(x, y, d_\lambda) = \xi_1(t, y, d_\lambda) \xi_1 \left[\frac{x}{t}, \frac{y}{t} \cdot \xi_1^2(t, y, d_\lambda), \xi_3(t, y, d_\lambda) \right],$$

$$\xi_2(x, y, u, d_\lambda) = \xi_2(t, y, u, d_\lambda) \xi_2 \left[\frac{x}{t}, \frac{y}{t} \cdot \xi_1^2(t, y, d_\lambda), \frac{u}{t}, \xi_3(t, y, d_\lambda) \right], \quad (\text{I.29})$$

$$\xi_3(x, y, d_\lambda) = \xi_3 \left[\frac{x}{t}, \frac{y}{t} \cdot \xi_1^2(t, y, d_\lambda), \xi_3(t, y, d_\lambda) \right].$$

Функциональные соотношения (I.29) удобно записать в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial \ln \xi_1(x, y, d_\lambda)}{\partial x} = \frac{1}{x} \Psi_1 \left[\frac{y}{x} \cdot \xi_1^2(x, y, d_\lambda), \xi_3(x, y, d_\lambda) \right],$$

$$\frac{\partial \ln \xi_2(x, y, u, d_\lambda)}{\partial x} = \frac{1}{x} \Psi_2 \left[\frac{y}{x} \cdot \xi_1^2(x, y, d_\lambda), \frac{u}{x}, \xi_3(x, y, d_\lambda) \right], \quad (\text{I.30})$$

$$\frac{\partial \ln \xi_3(x, y, d_\lambda)}{\partial x} = \frac{1}{x} \Psi_3 \left[\frac{y}{x} \cdot \xi_1^2(x, y, d_\lambda), \xi_3(x, y, d_\lambda) \right],$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_1(y, d_\Lambda) &= \left. \frac{\partial \ln \xi_1(x, y, d_\Lambda)}{\partial x} \right|_{x=1}, \\ \Psi_2(y, u, d_\Lambda) &= \left. \frac{\partial \ln \xi_2(x, y, u, d_\Lambda)}{\partial x} \right|_{x=1}, \\ \Psi_3(y, d_\Lambda) &= \left. \frac{\partial \xi_3(x, y, d_\Lambda)}{\partial x} \right|_{x=1}. \end{aligned} \quad (I.31)$$

Аналогичным образом получим дифференциальные уравнения для функций ξ_{ic} ($i = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln \xi_{1c}(v, d)}{\partial v} &= \frac{1}{v} \Psi_1 \left[\frac{1}{v} \cdot \xi_{1c}^2(v, d), \xi_{3c}(v, d) \right], \\ \frac{\partial \ln \xi_{2c}(v, \frac{u}{x}, d)}{\partial v} &= \frac{1}{v} \Psi_2 \left[\frac{1}{v} \cdot \xi_{1c}^2(v, d), \frac{u}{x}, \xi_{3c}(v, d) \right], \\ \frac{\partial \xi_{3c}(v, d)}{\partial v} &= \frac{1}{v} \Psi_3 \left[\frac{1}{v} \cdot \xi_{1c}^2(v, d), \xi_{3c}(v, d) \right]. \end{aligned} \quad (I.32)$$

Уравнения (I.30) отличаются от уравнений Боголюбова-Ипркова [34] первым аргументом у функций Ψ_i (там вместо $\frac{y}{x} \xi_1^2$ стоит y/x). Это отличие связано с тем, что кроме заряда d_Λ , используемого в уравнениях Боголюбова-Ипркова, мы ввели массовый параметр m_Λ . Следствием этого является то, что для функций ξ_i мы внесем теперь систему уравнений (I.30).

Искомое массовое уравнение, как следует из (I.25), (I.27), имеет вид

$$m = m_\Lambda \sum_1 \left(-\frac{m^2}{\Lambda^2}, \frac{m_\Lambda^2}{\Lambda^2}, d_\Lambda \right) \quad (I.33)$$

Система уравнений (I.30) может быть значительно упрощена для нахождения масс и констант перенормировок. Рассмотрим эти уравнения в области $\Lambda^2, |p^2| \gg m_\Lambda^2, m^2$. Как уже отмечалось, в этой области можно положить $\mu = 0$. Другое упрощение связано с тем, что, как показывают вычисления по теории возмущений [34], зависимость функций ξ_i и Ψ_i от массового аргумента не существенна в этой области. Следовательно, для функций ξ_i и Ψ_i можно положить $y = 0$. Асимптотическое разложение функций ξ_i и ξ_{ic} имеет вид

$$\begin{aligned} \xi_j \xrightarrow{|p^2| \gg m_\Lambda^2} & 1 + \left(\sum_j^{(10)} + \sum_j^{(11)} d_\Lambda + \sum_j^{(12)} d_\Lambda^2 + \dots \right) d_\Lambda \ln x \\ & + \left(\sum_j^{(20)} + \sum_j^{(21)} d_\Lambda + \dots \right) (d_\Lambda \ln x)^2 + \dots, \quad j = 1, 2; \end{aligned} \quad (I.34a)$$

$$\begin{aligned} \xi_{3/d_\Lambda} \xrightarrow{|p^2| \gg m_\Lambda^2} & 1 + \left(\sum_3^{(10)} + \sum_3^{(11)} d_\Lambda + \sum_3^{(12)} d_\Lambda^2 + \dots \right) d_\Lambda \ln x + \\ & + \left(\sum_3^{(20)} + \sum_3^{(21)} d_\Lambda + \dots \right) (d_\Lambda \ln x)^2 + \dots, \end{aligned} \quad (I.34b)$$

$$\begin{aligned} \xi_{jc} \xrightarrow{|p^2| \gg m^2} & 1 + \sum_{jc}^{(01)} d + \sum_{jc}^{(02)} d^2 + \dots + \left(\sum_{jc}^{(10)} + \sum_{jc}^{(11)} d + \right. \\ & \left. + \sum_{jc}^{(12)} d^2 + \dots \right) d \ln v + \dots, \quad j = 1, 2; \end{aligned} \quad (I.35a)$$

$$\xi_{3c}/d \xrightarrow{|p^2| \gg m^2} 1 + \sum_{3c}^{(01)} d + \sum_{3c}^{(02)} d^2 + \dots + \quad (I.35b)$$

$$+ \left(\sum_{3c}^{(10)} + \sum_{3c}^{(11)} d + \sum_{3c}^{(12)} d^2 + \dots \right) d \ln v + \dots$$

Определим теперь новые функции $\xi_j^a(x, d_\lambda)$ и $\xi_{jc}^a(x, d)$, удовлетворяющие следующим уравнениям при всех значениях ρ :

$$\frac{\partial \ln \xi_j^a(x, d_\lambda)}{\partial x} = \frac{1}{x} \Psi_j^a \left[\xi_j^a(x, d_\lambda) \right], \quad (j=1,2), \quad (I.36)$$

$$\frac{\partial \xi_3^a(x, d_\lambda)}{\partial x} = \frac{1}{x} \Psi_3^a \left[\xi_3^a(x, d_\lambda) \right];$$

$$\frac{\partial \ln \xi_{jc}^a(v, d)}{\partial v} = \frac{1}{v} \Psi_j^a \left[\xi_{3c}^a(v, d) \right], \quad (j=1,2), \quad (I.37)$$

$$\frac{\partial \xi_{3c}^a(v, d)}{\partial v} = \frac{1}{v} \Psi_3^a \left[\xi_{3c}^a(v, d) \right],$$

$$\Psi_1^a(d_\lambda) = \Psi_1(y, d_\lambda) \Big|_{y=0}, \quad (I.38)$$

$$\Psi_2^a(d_\lambda) = \Psi_2(y, u, d_\lambda) \Big|_{y=0, u=0}, \quad \Psi_3^a(d_\lambda) = \Psi_3(y, d_\lambda) \Big|_{y=0}.$$

Граничные условия для функций ξ_j^a и ξ_{jc}^a выберем следующим образом

$$\xi_j^a(1, d_\lambda) = d_\lambda^{-1} \xi_3^a(1, d_\lambda) = 1, \quad (I.39)$$

$$\xi_{jc}^a(1, d) = 1 + \sum_{jc}^{(01)} d + \sum_{jc}^{(02)} d^2 + \dots, \quad (I.40a)$$

$$d^{-1} \sum_{3c}^a(1, d) = 1 + \sum_{3c}^{(01)} d + \sum_{3c}^{(02)} d^2 + \dots, \quad (I.40b)$$

что гарантирует нам совпадение асимптотических разложений \sum_{ic}^a с асимптотическими разложениями функций ξ_i (I.34) и ξ_{ic} (I.35), соответственно. Определенные таким образом функции \sum_{ic}^a и \sum_{ic}^a удовлетворяют следующим функциональным соотношениям при всех нульсах:

$$m_{\Lambda} \sum_{1}^a(x, d_{\Lambda}) = m_{\Lambda'} \sum_{1}^a\left(\frac{x}{\tau}, d_{\Lambda'}\right),$$

$$Z'_{2\Lambda} \sum_{2}^a(x, d_{\Lambda}) = Z'_{2\Lambda'} \sum_{2}^a\left(\frac{x}{\tau}, d_{\Lambda'}\right), \quad (I.41)$$

$$\sum_{3}^a(x, d_{\Lambda}) = \sum_{3}^a\left(\frac{x}{\tau}, d_{\Lambda'}\right);$$

$$m_{\Lambda} \sum_{1c}^a(x, d_{\Lambda}) = m \sum_{1c}^a(v, d),$$

$$Z'_{2\Lambda} \sum_{2c}^a(x, d_{\Lambda}) = \sum_{2c}^a(v, d), \quad (I.42)$$

$$\sum_{3c}^a(x, d_{\Lambda}) = \sum_{3c}^a(v, d).$$

Так как при асимптотически больших нульсах соотношения (I.24), (I.25) совпадают с (I.41), (I.42), то независимые от ρ параметры $(m, m_{\Lambda}, d, d_{\Lambda}, Z'_{2\Lambda})$ в (I.24) и (I.25) совпадают с соответствующими параметрами в (I.41), (I.42). Это позволяет нам представить массовое уравнение в следующем виде

$$m = m_{\Lambda} \frac{\sum_{1}^a(m^2/\Lambda^2, d_{\Lambda})}{\sum_{1c}^a(1, d)}, \quad (I.43)$$

которое более удобно при практических вычислениях, чем уравнение (I.33). Отметим также, что из определений (I.38) и разложений (I.34) следует, что функции Ψ_i^a ($i=1,2,3$) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Psi_j^a(d_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \xi_j^{(1n)} d_1^{n+1}, \quad j=1,2, \\ \Psi_3^a(d_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \xi_3^{(1n)} d_1^{n+2}. \end{aligned} \quad (\text{I.44})$$

§ 2. Условия существования решений "сверхпроводящего типа"

Перепишем уравнения (I.36) в интегральной форме

$$\ln \xi_j^a(x, d_1) = \int_{d_1}^{\xi_3^a(x, d_1)} ds \frac{\Psi_j^a(s)}{\Psi_3^a(s)}, \quad (j=1,2), \quad (\text{I.45a})$$

$$\ln x = \int_{d_1}^{\xi_3^a(x, d_1)} ds \frac{1}{\Psi_3^a(s)}. \quad (\text{I.45b})$$

При $\rho^2 = -m^2$, как следует из (I.43), уравнения (I.45) принимают вид

$$\ln \frac{m \xi_{1c}^a(1, d)}{m_1} = \int_{d_1}^{d_m} ds \frac{\Psi_1^a(s)}{\Psi_3^a(s)}, \quad (\text{I.46a})$$

$$\ln \frac{\xi_{2c}^a(1, d)}{z'_{21}} = \int_{d_1}^{d_m} ds \frac{\Psi_2^a(s)}{\Psi_3^a(s)}, \quad (\text{I.46b})$$

$$\ln \frac{m^2}{\Lambda^2} = \int_{d_\Lambda}^{d_m} \frac{ds}{\Psi_3^a(s)}, \quad (\text{I.46в})$$

где $d_m = \sum_{3c}^a (1, d) \simeq d$.

Покажем вначале, что динамическое нарушение γ_5 -инвариантности, т.е. $m > 0$ при $m_\Lambda = 0$, возможно только, когда $d_\Lambda \gg d_c > 0$. Для этого заметим, что при $m_\Lambda = 0$, $m > 0$ и $\Lambda < \infty$ интеграл (I.46в) сходится, в то время, как интеграл в (I.46а) расходится. Расходимость в (I.46а) может возникнуть только за счет сингулярного поведения функции $\Psi_1^a(s)$ в некоторой точке $s = d_c$ ($d_c \leq d_\Lambda$). Принимая во внимание, что $\Psi_1^a(0) = 0$ (см. (I.44)), находим, что $d_c > 0$. Таким образом, радиус сходимости степенного ряда (I.44) для функции Ψ_1^a равен d_c . Значение d_c определяет минимальное значение d_Λ , при котором имеет место перестройка вакуума, и фермион может приобрести массу $m > 0$.

Естественно ожидать, что критическое значение $d_c \sim 1$. Это, в частности, будет подтверждено исследованием механизма фермион-антифермионного сшивания в главе IV. Отметим также, что условие $d_\Lambda \gg d_c \sim 1$ не противоречит тому факту, что физическая (перенормированная) константа связи мала ($d = \frac{1}{137}$). Это просто означает, что малой должна быть константа перенормировки заряда $Z_3 = d/d_\Lambda \ll 1$. (Напомним, что следствием спектральных представлений Челмена-Лемана является ограничение $0 \leq Z_3 \leq 1$).

Рассмотрим теперь электродинамику ДБВ [38-40] с $m > 0$. В этом случае обрезание снимается ($\Lambda \rightarrow \infty$) и предполагается, что голый заряд $d_{\Lambda=\infty}$ конечен и мал ($d_\infty \ll 1$). Покажем, как

просто в этом случае из (I.46) вытекает хорошо известный результат о динамическом нарушении γ_5 -инвариантности, т.е. $m_\infty = 0$. $m > 0$. Действительно, из (I.46в) следует, что в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$, $0 < m < \infty$ функция Ψ_3^a имеет ноль в точке $S = d_\infty$. С другой стороны, вследствие условия $d_\infty \ll 1$ функцию Ψ_1^a в (I.46а) можно аппроксимировать полиномом по S , причем, при $S \ll 1$ $\Psi_1^a(S) \simeq -\frac{3S}{4\pi} + O(S^2)$ [34] Поэтому из (I.46а) в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$ следует, что $m_{\Lambda \rightarrow \infty} = 0$.

§ 3. Вычисления в $d_\Lambda (d_\Lambda L)^n$ -приближении

В предыдущем параграфе было показано, что для $m_\Lambda = 0$, $d_\Lambda \ll 1$ сверхпроводящего решения не существует. Здесь мы покажем на основе дифференциальных уравнений ренормгруппы (I.46), что такое решение существует в области применимости ренормгруппы при

$$d_\Lambda \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{m_\Lambda}{m} \gg d^{9/4}$$

Заметим, что соотношения (I.19) и (I.25) позволяют однозначно восстановить λ -функции по дайсоновским перенормированным функциям, поскольку

$$Z_{3\Lambda} = d \xi_{3c}^{-1}(h, d) \simeq d [\xi_{3c}^a(h, d)]^{-1},$$

$$Z'_{2\Lambda} = \xi_{2c}(h, d) \simeq \xi_{2c}^a(h, d), \quad (\text{I.50})$$

$$\frac{m_\Lambda}{m} = \xi_{1c}(h, d) \simeq \xi_{1c}^a(h, d),$$

где $h = \Lambda^2/m^2$.

Решим уравнения (I.45) с функциями Ψ_i^a , определенными с точностью до члена порядка d_λ^2 . Коэффициенты $\xi_{ic}^{(kl)}$ для асимптотических разложений лапласовских функций взяты из [II]. Коэффициенты для λ -функций вычисляются с помощью формул (I.42) и (I.50). Их значения приведены в Таблице I. В результате имеем

$$\ln \xi_1^a = \int_{d_\lambda}^{\xi_3^a} \frac{ds}{\xi_3^{(10)} s^2 + \xi_3^{(11)} s^3} (\xi_1^{(10)} s + \xi_1^{(11)} s^2) = \quad (I.51a)$$

$$= \frac{\xi_1^{(10)}}{\xi_3^{(10)}} \ln \frac{\xi_3^a}{d_\lambda} + \left(\frac{\xi_1^{(11)}}{\xi_3^{(11)}} - \frac{\xi_1^{(10)}}{\xi_3^{(10)}} \right) \ln \frac{\xi_3^a + \xi_3^{(10)} / \xi_3^{(11)}}{d_\lambda + \xi_3^{(10)} / \xi_3^{(11)}},$$

$$\ln \xi_2^a = \frac{\xi_2^{(11)}}{\xi_3^{(11)}} \ln \frac{\xi_3^a + \xi_3^{(10)} / \xi_3^{(11)}}{d_\lambda + \xi_3^{(10)} / \xi_3^{(11)}}, \quad (I.51b)$$

$$\ln x = \frac{1}{\xi_3^{(10)}} \left(\frac{1}{d_\lambda} - \frac{1}{\xi_3^a} \right) + \frac{\xi_3^{(11)}}{(\xi_3^{(10)})^2} \ln \frac{d_\lambda (\xi_3^{(10)} + \xi_3^a \xi_3^{(11)})}{\xi_3^a (\xi_3^{(10)} + d_\lambda \xi_3^{(11)})} \quad (I.51b)$$

Подставляя теперь $\xi_i^{(kl)}$ из Таблицы I, получаем

$$\frac{m}{m_\lambda} = \left(\frac{d_m}{d_\lambda} \right)^{-9/4} \left(\frac{d_m + \frac{4}{3} \sqrt{\pi}}{d_\lambda + \frac{4}{3} \sqrt{\pi}} \right)^{19/8}; \quad (I.52a)$$

$$\frac{1 - 3d/4\sqrt{\pi}}{Z'_{2\lambda}} = \left(\frac{d_m + \frac{4}{3} \sqrt{\pi}}{d_\lambda + \frac{4}{3} \sqrt{\pi}} \right)^{7/8}; \quad (I.52b)$$

$$\ln \frac{m^2}{\Lambda^2} = 3\sqrt{\pi} (d_\lambda^{-1} - d_m^{-1}) + \frac{9}{4} \ln \frac{d_\lambda (d_m + \frac{4}{3} \sqrt{\pi})}{d_m (d_\lambda + \frac{4}{3} \sqrt{\pi})}. \quad (I.52b)$$

Таблица I

f	(01)	(10)	(11)
\sum_{1c}^a	0	$-\frac{3}{4\pi}$	$\frac{43}{96\pi^2}$
\sum_{2c}^a	$-\frac{3}{4\pi}$	0	$\frac{7}{32\pi^2}$
$\frac{\sum_{3c}^a}{d}$	$-\frac{5}{9\pi}$	$\frac{1}{3\pi}$	$-\frac{13}{108\pi^2}$
\sum_{11}^a	0	$-\frac{3}{4\pi}$	$\frac{1}{32\pi^2}$
\sum_{12}^a	0	0	$\frac{7}{32\pi^2}$
$\frac{\sum_{13}^a}{d_1}$	0	$\frac{1}{3\pi}$	$\frac{1}{4\pi^2}$

В рассматриваемом приближении (см. Таблицу I)

$$d_m \approx \frac{d}{1 + 5d/9\pi} \approx d$$

Покажем, что в области применимости уравнения (I.52) приводят к решению сверхпроводящего типа, т.е. к зависимости $m \sim \Lambda \exp(-const/d)$ при $d_1 \ll 1$. Учитывая, что $d_1 \ll 1$ и используя итерационную процедуру, легко найти из (I.52):

$$\frac{m_1}{m} \approx \eta^{9/4} \left[1 + \frac{27d}{16\pi} \frac{\ln \eta}{\eta} + \frac{57d}{32\pi} \frac{1}{\eta} - \frac{57d}{32\pi} \right], \quad (I.53a)$$

$$Z'_{21} \approx 1 + \frac{21d}{32\pi} \frac{1}{\eta} - \frac{45d}{32\pi}, \quad (I.53b)$$

$$\frac{\alpha}{\alpha_\Lambda} \approx \eta + \frac{3d}{4\pi} \ln \eta, \quad (\text{I.53в})$$

где

$$\eta = 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}.$$

Из (I.52а) следует, что $m_\Lambda/m \ll 1$. Поэтому удобно из (I.53а) и (I.53в) выразить массу m через отношение $\frac{m_\Lambda}{m}$:

$$m = \Lambda \exp \left\{ -\frac{3\pi}{2\alpha} \left[1 - \left(1 + \frac{19\alpha}{24\pi} \right) \left(\frac{m_\Lambda}{m} \right)^{4/9} \right] - \frac{1}{2} \ln \frac{m_\Lambda}{m} - \frac{16}{19} \right\} \quad (\text{I.54})$$

Условие $\alpha_\Lambda \ll 1$, как следует из (I.52а), приводит к

$$\frac{m_\Lambda}{m} \gg \alpha^{9/4} \quad (\text{I.55})$$

а физическое требование $m \ll \Lambda$, как это следует из (I.54), дает

$$\left(1 - \frac{2\alpha}{3\pi} \right)^{9/4} \left(1 + \frac{19\alpha}{24\pi} \right)^{-9/4} \gg \frac{m_\Lambda}{m} \quad (\text{I.56})$$

Таким образом, действительно в области своей применимости ренормализационная группа приводит к "сверхпроводящему" решению. Это позволяет надеяться, что и для более интересного случая γ_5 -инвариантного лагранжиана с сильной затравочной связью ($m_\Lambda = 0$, $\alpha_\Lambda \gg \alpha_c$) такое решение имеет место.

Результаты данной главы можно суммировать следующим обра-

в) В работе [II] с помощью решения уравнений Дайсона в "пяти-гранном" приближении была получена для m формула, аналогичная (I.54) и отличающаяся от нее лишь численными коэффициентами в показателе экспоненты (кроме первого члена $\sim 1/\alpha$). Отличие связано с тем, что в [II] параметр Λ вводился как параметр обрезания фейнмановских интегралов, здесь же Λ - ренормгрупповой параметр, которому можно придать смысл параметра обрезания только при больших значениях ($\Lambda \gg m$).

ми. Для рассмотрения вопросов о динамическом нарушении симметрии было проведено обобщение ренормгрупповых уравнений Боголюбова-Ширкова. В квантовой электродинамике ДБВ этим методом более просто получен известный результат о динамическом нарушении γ_5 -инвариантности. Для квантовой электродинамики с обрезанием показано, что:

а) решение "сверхпроводящего типа" $m \sim \Lambda \exp[-\frac{c}{\alpha} + \dots]$ в случае $m_\Lambda = 0$ возможно только, если $\alpha_\Lambda \geq \alpha_c > 0$ (критическое значение затравочной константы связи $\alpha_c \sim 1$);

б) при $\alpha_\Lambda \ll 1$ решение "сверхпроводящего типа" существует при условии, что $1 > \frac{m_\Lambda}{m} \gg \alpha^{9/4}$.

Выводы а)-б) показывают, что в абелевой калибровочной теории типа электродинамики при нулевой затравочной массе фермиона и конечном параметре обрезания физическая картина (физические решения) имеет существенно зависимость от значения гольд константы связи α_Λ . Если α_Λ больше α_c , то за счет своривания "голых" фермионов и антифермионов физические фермионы могут приобрести массу "сверхпроводящего типа". Заметим, что полученное ограничение на α_Λ указывает на то, что куперовские пары (энергия связи которых определяет массу $m = \Lambda f(\alpha)$) возникает в теории с $m_\Lambda = 0$ лишь при $\alpha_\Lambda \geq \alpha_c \sim 1$ (см. подробнее главу IV).

Сверхпроводящее решение обладает рядом привлекательных с физической точки зрения свойств. Так, зависимость $m = \Lambda f(\alpha)$ обеспечивает конечность всех перенормировочных констант $Z_i(\frac{m}{\Lambda}, \alpha) = Z_i(f(\alpha), \alpha)$ [10], и ситуация с расходимостями качественно совпадает такой же, как и в классической электродинамике: там тоже имеется одна лишь массовая линейная расходимость,

$m \sim \frac{e^2}{z_0} \sim e^2 \Lambda$. Это обстоятельство важно с точки зрения принципа соответствия [77,78] . Оно подтверждает также предположение о том, что расходимость полевой массы электрона имеет принципиальный характер и связана с отсутствием в современной электродинамике дополнительной мировой постоянной ℓ (элементарная длина), феноменологическим представителем которой является параметр обрезания $\Lambda \sim \frac{1}{\ell}$.

Г л а в а II

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМА ИВНИГЕРА В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ ПОЛЯ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА РЕНОРМИРОВКИ

Проблема динамической генерации масс представляет особый интерес при построении единых теорий взаимодействий с участием полей Янга-Миллса. Доказательство перенормируемости таких теорий существенно использует факт калибровочной инвариантности лагранжиана, которая нарушается при введении в лагранжиан масс векторных частиц. С помощью механизма Хиггса-Киббла [15-18] удается сделать векторные поля массивными, сохраняя в то же время калибровочную инвариантность и перенормируемость. Однако при этом в лагранжиан приходится вводить некоторое число скалярных полей, присутствие которых нежелательно по нескольким причинам.

Во-первых, некоторые из скалярных частиц будут появляться в физическом спектре состояний, а экспериментально нет никаких свидетельств в пользу существования таких частиц. Поэтому таким частицам приписываются обычно большие массы и малые константы связи. Во-вторых, при наличии скалярных полей трудно сохранить асимптотическую свободу [37], которая представляется необходимой для описания сильных взаимодействий. И, в-третьих, введение скалярных полей приводит к появлению дополнительных свободных параметров (масс и констант связи этих полей), что снижает предсказательную силу теорий.

Альтернативой механизму Хиггса-Киббла является так называемый механизм Ивнинера [48], при котором калибровочная симметрия нарушается динамическим образом. В этом случае вне рамок обычной теории возмущений полевые уравнения теории (без скалярных частиц)

имеет решения, которые содержат массивные векторные частицы.

Эвингер [48] отметил общую кинематическую причину для появления массивных векторных мезонов в калибровочных теориях, а именно: тензор вакуумной поляризации $\Pi^{mn}(k, g)$ должен содержать полюс при $k^2 = 0$. Действительно, рассмотрим пропагатор векторного мезона $D^{mn}(k)$:

$$D^{mn}(k) = - \left(g^{mn} - \frac{k^m k^n}{k^2} \right) D(k^2) = - \left(g^{mn} - \frac{k^m k^n}{k^2} \right) \frac{1}{k^2 - k^2 \Pi(k^2)},$$

$$\Pi^{mn}(k) = (g^{mn} k^2 - k^m k^n) \Pi(k^2).$$

Ясно, что если $\Pi(k^2)$ имеет полюс при $k^2 = 0$

$$\Pi(k^2) \sim \frac{\mu^2}{k^2},$$

то векторный мезон будет массивным, даже если он был бы безмассовый в отсутствие взаимодействия ($g = 0, \Pi = 0$).

Заметим, что обычный механизм Хиггса также приводит к полюсу в поляризованном операторе. В отсутствие скалярных полей этот полюс должен иметь динамическую природу.

В настоящее время известно лишь несколько моделей, реализующих механизм Эвингера в абелевых [24, 25, 48] и неабелевых [27, 29-31, 79] теориях. В этой главе мы исследуем с помощью модифицированных уравнений ренормгруппы механизм Эвингера в модели Корнуэла-Нортена.

§ 1. Модель Корнуэла-Нортена

Лагранжиан модели имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\Psi} (i \gamma^\nu \partial_\nu - m_0) \Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \\ & + g_A \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi A^\mu + g_B \bar{\Psi} \tau_2 \gamma_\mu \Psi B^\mu, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu.$$

Здесь Ψ - восьмикомпонентное спинорное поле, которое мы записываем в виде $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \end{pmatrix}$; A_μ и B_μ - векторные поля, τ_2 - матрица Паули

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

Лагранжиан инвариантен относительно локальных калибровочных преобразований

$$\Psi \rightarrow e^{i\alpha(x)} \Psi, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{g_A} \partial_\mu \alpha(x) \quad (2.2a)$$

$$\Psi \rightarrow e^{i\tau_2 \theta(x)} \Psi, \quad B_\mu \rightarrow B_\mu - \frac{1}{g_B} \partial_\mu \theta(x) \quad (2.2b)$$

Этой инвариантности соответствуют сохраняющиеся токи

$$\partial^\mu (\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi) = 0 \quad \text{и} \quad \partial^\mu (\bar{\Psi} \tau_2 \gamma_\mu \Psi) = 0$$

Сохранение тока позволяет получить тождества Уорда-Тakahана для собственных вершин теории $\bar{\Psi}\Psi A$ и $\bar{\Psi}\Psi B$:

$$k^\mu \Gamma_\mu^A(p, p+k) = G^{-1}(p+k) - G^{-1}(p) \quad (2.3)$$

$$k^\mu \Gamma_\mu^B(p, p+k) = \tau_2 G^{-1}(p+k) - G^{-1}(p) \tau_2 \quad (2.4)$$

где $G(p)$ - двумерный (в τ -пространстве) фермионный пропагатор, Γ_μ^A и Γ_μ^B - собственные вершинные (двумерные) функции. В силу инвариантности относительно преобразований (2.2) с постоянными фазами и относительно дискретных преобразований

$$\Psi \rightarrow \tau_1 \Psi, \quad B_\mu \rightarrow -B_\mu, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu;$$

$$\Psi \rightarrow i\tau_3 \Psi, \quad B_\mu \rightarrow -B_\mu, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu$$

функции $G, \Gamma_\mu^A, \Gamma_\mu^B$ и Σ имеют структуру

$$G(p) = G_0(p) \cdot I, \quad \Gamma_\mu^A(p, p+k) = \Gamma_{\mu_0}^A(p, p+k) I, \quad (2.5)$$

$$\Gamma_\mu^B(p, p+k) = \Gamma_{\mu_2}^B(p, p+k) \tau_2, \quad \Sigma(p) = \Sigma_0(p) I,$$

где

$$G^{-1}(p) = \hat{p} - m_0 - \Sigma(p), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Структура (5) функций Грина теории получается в предположении инвариантности вакуума относительно преобразований (2.26) с постоянной фазой. Если же вакуум не является инвариантным (спонтанное нарушение симметрии), то в функциях Грина могут появиться члены, нарушающие формальную симметрию лагранжиана, в частности

$$\Sigma(p) = \Sigma_0(p) + \tau_3 \Sigma_3(p).$$

Из тождества Юрда (4) получаем тогда

$$k^\mu \Gamma_\mu^B(p, p+k) \Big|_{k=0} = [\tau_2, \tau_3] \Sigma_3(p) = 2i\tau_1 \Sigma_3(p),$$

т.е. $\Gamma_\mu^B(p, p+k)$ имеет полюс

$$\Gamma_\mu^B(p, p+k) = \frac{k_\mu}{k^2} i\tau_1 \Gamma_1^B(p, p+k) + \dots, \quad \Gamma_1^B(p, p) = 2 \Sigma_3(p).$$

В этом случае в поляризованном операторе $\Pi_{\mu\nu}^B(k)$ также возникает полюс, поскольку Γ_μ^B дает вклад в $\Pi_{\mu\nu}^B(k)$, что видно из уравнений Лингера-Дайсона

$$\Pi_{\mu\nu}^B(k) = \frac{g_B^2}{(2\pi)^4 i} \int d^4 p T_2 [\Gamma_\mu^B(p, p+k) G(p+k) \tau_2 \gamma_\nu G(p)]$$

В результате векторный бозон B_μ приобретает массу [25].

Нашей задачей будет найти расщепление масс фермионов и массу векторной частицы B_μ . Для получения массовых уравнений мы воспользуемся методом модифицированных уравнений ренормгруппы, рассмотренных в главе I.

§ 2. Уравнения ренормгруппы. Массовые уравнения.

Выразим лагранжиан \mathcal{L} (2.1) через ненормированные поля $\Psi_\lambda^{(1,2)}$, A_λ^μ , B_λ^μ , для которых функции Грина ненормированы в точке λ (см. главу I)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\Psi}_\lambda^{(1)} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_\lambda) \Psi_\lambda^{(1)} + \bar{\Psi}_\lambda^{(2)} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_\lambda) \Psi_\lambda^{(2)} \\ & - \frac{1}{4} F_{\lambda\mu\nu} F_\lambda^{\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\lambda\mu\nu} G_\lambda^{\mu\nu} + g_A^\lambda Z_{1A}^\lambda \bar{\Psi}_\lambda^{(1)} \gamma_\mu \Psi_\lambda^{(1)} A_\lambda^\mu \\ & + g_A^\lambda Z_{1A}^\lambda \bar{\Psi}_\lambda^{(2)} \gamma_\mu \Psi_\lambda^{(2)} A_\lambda^\mu - i g_B^\lambda Z_{1B}^\lambda \bar{\Psi}_\lambda^{(1)} \gamma_\mu \Psi_\lambda^{(2)} B_\lambda^\mu \\ & + i g_B^\lambda Z_{1B}^\lambda \bar{\Psi}_\lambda^{(2)} \gamma_\mu \Psi_\lambda^{(1)} B_\lambda^\mu + \text{КОНТРОЛЬНЫЕ} \end{aligned} \quad (2.6)$$

функции Грина определим следующим образом

$$G_\lambda^{(j)}(p) = \frac{S_{1j}^\lambda(p^2)}{\hat{p} - m_\lambda S_{2j}^\lambda(p^2)}, \quad j=1,2, \quad (2.7)$$

$$D_{\lambda\mu\nu}^{(A,B)}(p) = -\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right) D_\lambda^{(A,B)}(p^2) - d_e \frac{p_\mu p_\nu}{p^4}, \quad (2.8)$$

$$D_\lambda^{(A,B)}(p^2) = \frac{d_{A,B}^\lambda(p^2)}{p^2} = \frac{1}{p^2(1 - \pi_{A,B}^\lambda(p^2))}, \quad (2.9)$$

с нормировочными условиями

$$\begin{aligned} S_{ij}^\lambda(p^2 = -\lambda^2) &= 1, \quad i, j = 1, 2, \\ d_{A,B}^\lambda(p^2 = -\lambda^2) &= 1, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $\lambda^2 > 0$, d_e - калибровочный параметр.

Меняя λ , мы можем описывать теорию различными наборами $g_{A,B}^\lambda$ и m_λ . Такое расширение ренормгруппы необходимо для определения физической массы m . Выбирая параметр λ достаточно большим ($\lambda = \Lambda$), естественно придать тот же смысл, что и параметру обрезания Λ [32, 42].

Для выявления динамического нарушения калибровочной симметрии (2.26) введем в лагранжиан (2.6) затравочные фермионные массы $m_{1\lambda}, m_{2\lambda}$ ($m_{1\lambda} \neq m_{2\lambda}$) и затравочную массу μ_λ векторного бозона B_μ . Лагранжиан \mathcal{L} переходит таким образом в несимметричный лагранжиан $\mathcal{L}_N = \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L}$. В дальнейшем после получения уравнений для физических масс m_1, m_2, μ устремим $m_{1\lambda}, m_{2\lambda}, \mu_\lambda$ к нулю, тем самым восстанавливая симметрию (26). Существование решения $m_1 \neq m_2, \mu \neq 0$ в этом пределе и будет означать динамическое нарушение симметрии. Отсутствие калибровочной инвариантности на первом этапе в силу нарушения тождеств Ферми делает лагранжиан \mathcal{L}_N , вообще говоря, неперенормируемым. Чтобы избежать этой трудности, воспользуемся тем, что можно построить много лагранжианов $\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L}_{eff}$ с $\delta m_\lambda \equiv \frac{1}{2}(m_{1\lambda} - m_{2\lambda}), \mu_\lambda \neq 0$, которые совпадают с \mathcal{L} при $\delta m_\lambda = \mu_\lambda = 0$. Как следует из обсуждения в § I, для наших целей достаточно, чтобы член $\Delta\mathcal{L}_{eff}$ нарушал инвариантность только относительно преобразования (2.26) с постоянной фазой $\theta = const$. Такой лагранжиан был построен в [80]. Там $\Delta\mathcal{L}_{eff}$ нарушает инвариантность относительно (2.26) с фазой $\theta(x)$, удовлетворяющей уравнению $\square\theta(x) = 0$ (например, с $\theta = const$), но сохраняет инвариантность для $\square\theta(x) \neq 0$. Этого оказывается достаточно для сохранения перенормируемости \mathcal{L}_{eff} . Более того, в поперечной калибровке ($d_e = 0$) этот эффективный лагранжиан \mathcal{L}_{eff} совпадает с $\mathcal{L}_N = \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L}$. В дальнейшем для

удобства будет использоваться только поперечная калибровка.

Введение в лагранжиан μ_Λ и $m_{1\Lambda} \neq m_{2\Lambda}$ изменяет структуру функций Грина G_Λ^j , \mathcal{D}_Λ^B . Вместо (2.7) и (2.9) имеем

$$G_\Lambda^j(p) = \frac{S_{ij}^\wedge(p^2)}{\hat{p} - m_{j\Lambda} S_{2j}^\wedge(p^2)}, \quad (2.11)$$

$$\mathcal{D}_\Lambda^{(B)}(p^2) = \frac{1}{p^2 - \mu_\Lambda^2 - \Pi_B^\wedge(p^2)} = \frac{1}{p^2 - \mu_\Lambda^2 - p^2 \pi_B^\wedge(p^2) - \pi_V^\wedge(p^2)} \quad (2.12)$$

с нормировочными условиями

$$S_{ij}^\wedge(p^2 = -\Lambda^2) = 1, \quad \pi_V^\wedge(p^2 = -\Lambda^2) = 0 \quad (2.13)$$

Уравнения ренормгруппы для лагранжиана \mathcal{L}_N выводятся аналогично тому, как это сделано в главе I для случая квантовой электродинамики. Вывод уравнений ренормгруппы дан в Приложении А, здесь же сделаем лишь следующее замечание. Матричная структура $G_\Lambda^j(p)$ позволяет написать по отдельности уравнения для функций $S_{ij}^\wedge(p^2)$ и $S_{2j}^\wedge(p^2)$:

$$S_{ij}^\wedge = Z_{2j}(t) S_{ij}^{\wedge'}, \quad t = \frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2},$$

$$m_{j\Lambda} S_{2j}^\wedge = m_{j\Lambda'} S_{2j}^{\wedge'}.$$

Для функции $\mathcal{D}_\Lambda^{(A,B)}$ имеем

$$\mathcal{D}_\Lambda^{(A,B)} = Z_{3A(B)}(t) \mathcal{D}_{\Lambda'}^{(A,B)}.$$

Возьмем функцию \mathcal{D}_Λ^B в виде

$$\mathcal{D}_\Lambda^B(p^2) = \frac{d_\Lambda^B(p^2)}{p^2 - \mu_\Lambda^2 h^\wedge(p^2)}, \quad (2.12')$$

где по определению

$$d_B^\wedge = Z_{3B}(t) d_B^{\wedge'}$$

Тогда

$$\mu_\Lambda^2 h^\wedge = \mu_{\Lambda'}^2 h^{\wedge'}$$

Как было показано в [80], расходимости в несимметричной теории можно удалить константами Z из симметричной теории. В дальнейшем для удобства используем функции d_B^\wedge и Z_{3B} из симметричной теории, т.е. (см. (2.9), (2.12))

$$d_B^\wedge = \frac{1}{1 - \pi_B^\wedge}, \quad h^\wedge = \frac{1}{\mu_\Lambda^2} \frac{\mu_\Lambda^2 + \pi_V^\wedge}{1 - \pi_B^\wedge}. \quad (2.14)$$

Функции $S_{2j}^\wedge, d_{A(B)}^\wedge, h^\wedge$ зависят от следующих аргументов

$$S_{2j}^\wedge \equiv S_{2j}(x, y, z, u, d_\Lambda, \beta_\Lambda),$$

$$d_A^\wedge \equiv d_A(x, y, z, u, d_\Lambda, \beta_\Lambda),$$

$$d_B^\wedge \equiv d_B(x, y, d_\Lambda, \beta_\Lambda),$$

$$h^\wedge \equiv h(x, y, z, u, d_\Lambda, \beta_\Lambda),$$

где мы ввели обозначения

$$-\frac{p^2}{\Lambda^2} = x, \quad \frac{m_{1\Lambda}^2}{\Lambda^2} = y, \quad \frac{m_{1\Lambda}}{m_{2\Lambda}} = z,$$

$$\left(\frac{\delta m_\Lambda}{\mu_\Lambda}\right)^2 = u, \quad d_\Lambda = \frac{g_A^\wedge}{4\pi}, \quad \beta_\Lambda = \frac{g_B^\wedge}{4\pi}.$$

Эти функции удовлетворяют ренормгрупповым уравнениям (A.14) - (A.15) (см. Приложение A). Физические массы m_j, μ определяются полюсами функций Грина $G_\Lambda^j(p)$ и $D_{\Lambda\mu\nu}^B(p)$, соответственно.

Вместо

$$m_j = m_{j\Lambda} S_{2j} \left(-\frac{m_j^2}{\Lambda^2}, y, z, u, \alpha_\Lambda, \beta_\Lambda \right),$$

$$\mu^2 = \mu_\Lambda^2 h \left(-\frac{\mu^2}{\Lambda^2}, y, z, u, \alpha_\Lambda, \beta_\Lambda \right).$$

Как показано в Приложении А, эти уравнения можно значительно упростить. С этой целью, так же, как и в главе I, вводятся функции $S_{ij}^a, d_{A,B}^a, h^a$, независимые от аргумента y , которые, по определению, удовлетворяют ренормгрупповым уравнениям (A.20)-(A.22) с граничными условиями (A.26). Такое определение обеспечивает совпадение асимптотических разложений для функций $S_{ij}^a, d_{A,B}^a, h^a$ и $S_{ij}^\Lambda, d_{A,B}^\Lambda, h^\Lambda$, соответственно, в области $\Lambda^2, |p^2| \gg m_j^2, \mu^2$. Если перенормированные заряды α и β предполагаются малыми, то имеют место следующие массовые уравнения (см. Приложение А):

$$m_j = m_{j\Lambda} S_{2j}^a \left(\frac{m_j^2}{\Lambda^2}, z, u, \alpha_\Lambda, \beta_\Lambda \right),$$

$$\mu^2 = \mu_\Lambda^2 h^a \left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}, z, u, \alpha_\Lambda, \beta_\Lambda \right). \quad (2.15)$$

Эти уравнения будут решаться в следующих разделах.

§ 3. Анализ теории без обрезания.

В этом разделе мы рассмотрим модель Карнуала-Нортон в рамках конечной теории типа квантовой электродинамики ДЭВ [38-40]. Такие теории предполагают существование нулей у функций Гелл-Манна-Лоу Υ_A и Υ_B (см. (A.23)) в точках α_∞ и β_∞ . При снятии обрезания ($\Lambda \rightarrow \infty$) заряды α_Λ и β_Λ в этих теориях стремятся к конечным значениям α_∞ и β_∞ , соответственно. Более того, для интересующей нас задачи можно с достаточной точностью считать, что $d_{A(B)} \equiv 1$ [39].

В низшем порядке теории возмущений получаем для Ψ_{2j}^a и H^a (см. (A.24), (A.25)):

$$\Psi_{21}^a(z, u, d_\infty, \beta_\infty) = -\frac{3}{4\pi} (d_\infty + \beta_\infty z^{-1}), \quad (2.16)$$

$$\Psi_{22}^a(z, u, d_\infty, \beta_\infty) = -\frac{3}{4\pi} (d_\infty + \beta_\infty z), \quad (2.17)$$

$$H^a(z, u, d_\infty, \beta_\infty) = -\frac{4\beta_\infty}{\pi} u. \quad (2.18)$$

Вычисление функции Ψ_{2j}^a практически совпадает с аналогичными вычислениями в симметричной теории. Для нахождения функции H^a вычислялась в низшем приближении собственная энергия векторной частицы B_μ :

$$\Pi_B^{\wedge}(\rho^2) = \frac{2\beta_\Lambda}{\pi} \int_0^1 dv \ln \left[\frac{\rho^2 v(1-v) - m_{1\Lambda}^2 v - m_{2\Lambda}^2 (1-v)}{\Lambda^2 v(1-v) - m_{1\Lambda}^2 v - m_{2\Lambda}^2 (1-v)} \right] \times \\ \times [2\rho^2 v(1-v) + m_{1\Lambda} m_{2\Lambda} - m_{1\Lambda}^2 v - m_{2\Lambda}^2 (1-v)].$$

Для перехода к конечной теории здесь выделялись функции d_B^{\wedge} и h^{\wedge} и затем полагалось $d_{A(B)}^{\wedge} \equiv 1$. В результате

$$h^a \simeq 1 - \frac{4\beta_\infty}{\pi} u \ln x$$

Отсюда и из (A.25) для H^a внесем выражение (2.18). Уравнения (A.21), (A.22) принимают вид

$$\frac{\partial \ln S_{21}^a}{\partial x} = -\frac{1}{x} \frac{3}{4\pi} \left[d_\infty + \beta_\infty z^{-1} \frac{S_{22}^a}{S_{21}^a} \right], \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \ln S_{22}^a}{\partial x} = -\frac{1}{x} \frac{3}{4\pi} \left[d_\infty + \beta_\infty z \frac{S_{21}^a}{S_{22}^a} \right], \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial h^a}{\partial x} = -\frac{1}{x} \frac{4\beta_{\infty} u}{\pi} \frac{1}{(z-1)^2} [z S_{21}^a - S_{22}^a]^2 \quad (2.21)$$

Для нахождения S_{21}^a и S_{22}^a удобно перейти к уравнению для функции $f = S_{21}^a / S_{22}^a$:

$$\frac{\partial \ln f}{\partial x} = -\frac{1}{x} \frac{3\beta_{\infty}}{4\pi} \left[\frac{1}{z f} - z f \right],$$

решение которого есть

$$f(x) = -z^{-1} \frac{1-z - (1+z)x^{-3\beta_{\infty}/2\pi}}{1-z + (1+z)x^{-3\beta_{\infty}/2\pi}} \quad (2.22)$$

Подставляя теперь (2.20) в (2.19) и (2.20) для функции $S_{21}^a(x)$ и $S_{22}^a(x)$, получаем

$$S_{21}^a(x) = \frac{1}{2} (1+z^{-1}) x^{-\frac{\delta_0}{2}} + \frac{1}{2} (1-z^{-1}) x^{-\frac{\delta_1}{2}}, \quad (2.23)$$

$$S_{22}^a(x) = \frac{1}{2} (1+z) x^{-\frac{\delta_0}{2}} + \frac{1}{2} (1-z) x^{-\frac{\delta_1}{2}}, \quad (2.24)$$

где мы ввели обозначения $\delta_0 = \frac{3(\alpha_{\infty} + \beta_{\infty})}{2\pi}$, $\delta_1 = \frac{3(\alpha_{\infty} - \beta_{\infty})}{2\pi}$

Уравнение (2.21) интегрируется теперь непосредственно, и для $h^a(x)$ имеем

$$h^a(x) = 1 + \frac{4\beta_{\infty} u}{\pi \delta_1} (x^{-\frac{\delta_1}{2}} - 1) \quad (2.25)$$

Из уравнения (2.23)-(2.25) и (2.15) получаем следующие уравнения для физических масс

$$\frac{m_1}{m_{1A}} = \frac{1}{2} (1+z^{-1}) \left(\frac{\Lambda^2}{m_1^2} \right)^{\frac{\delta_0}{2}} + \frac{1}{2} (1-z^{-1}) \left(\frac{\Lambda^2}{m_1^2} \right)^{\frac{\delta_1}{2}} \quad (2.26)$$

$$\frac{m_2}{m_{2\Lambda}} = \frac{1}{2}(1+z)\left(\frac{\Lambda^2}{m_2^2}\right)^{\frac{\delta_0}{2}} + \frac{1}{2}(1-z)\left(\frac{\Lambda^2}{m_2^2}\right)^{\frac{\delta_1}{2}}, \quad (2.27)$$

$$\frac{\mu^2}{\mu_\Lambda^2} = 1 + \frac{4\beta_\infty}{\pi\delta_1} \frac{\delta m_\Lambda^2}{\mu_\Lambda^2} \left[\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right)^{\delta_1} - 1 \right] \quad (2.28)$$

Выразим из (2.26)-(2.28) голые массы $m_{1\Lambda}, m_{2\Lambda}, \mu_\Lambda$ через физические

$$m_\Lambda \equiv \frac{1}{2}(m_{1\Lambda} + m_{2\Lambda}) = \frac{m_1 B_2 + m_2 B_1}{A_1 B_2 + A_2 B_1}; \quad \delta m_\Lambda \equiv \frac{1}{2}(m_{1\Lambda} - m_{2\Lambda}) =$$

$$= \frac{m_1 A_2 - m_2 A_1}{A_1 B_2 + A_2 B_1}; \quad \mu_\Lambda^2 = \mu^2 - \frac{4\beta_\infty}{\pi\delta_1} \left(\frac{m_1 A_2 - m_2 A_1}{A_1 B_2 + A_2 B_1} \right)^2 (C-1),$$

где

$$A_i = \left(\frac{\Lambda^2}{m_i^2}\right)^{\frac{\delta_0}{2}}, \quad B_i = \left(\frac{\Lambda^2}{m_i^2}\right)^{\frac{\delta_1}{2}}, \quad C = \left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right)^{\delta_1}.$$

При $\Lambda \rightarrow \infty$

$$m_\Lambda = \left(\frac{\Lambda^2}{m_1^2}\right)^{-\frac{\delta_0}{2}} \frac{m_1 + m_2 \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{-\delta_1}}{1 + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\delta_0 - \delta_1}} \equiv m G \left(\frac{\Lambda^2}{m_1^2}\right)^{-\frac{\delta_0}{2}}, \quad (2.29)$$

$$\delta m_\Lambda = \left(\frac{\Lambda^2}{m_1^2}\right)^{-\frac{\delta_1}{2}} \frac{m_1 - m_2 \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{-\delta_0}}{1 + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\delta_1 - \delta_0}} \equiv \delta m E \left(\frac{\Lambda^2}{m_1^2}\right)^{-\frac{\delta_1}{2}}, \quad (2.30)$$

$$\mu_\Lambda^2 = \mu^2 - \frac{4\beta_\infty}{\pi\delta_1} \left[\frac{m_1 - m_2 \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{-\delta_0}}{1 + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\delta_1 - \delta_0}} \right]^2 \left(\frac{m_1^2}{\mu^2}\right)^{\delta_1} \quad (2.31)$$

G, E - функции отношений ненормированных масс и констант связи, не зависящие от Λ .

Из формул (2.30), (2.31) следует, что для того, чтобы имелось место динамическое нарушение симметрии ($\delta m_\Lambda = 0, \mu_\Lambda = 0$), необходимо выполнение двух условий: I) $\delta_1 > 0$ ($d_\infty > \beta_\infty$),

что объясняет необходимость введения взаимодействия с полем A_μ , и 2) между физическими массами μ, m_1, m_2 должно выполняться соотношение

$$\mu^2 = \frac{4\beta_\infty}{\pi\delta_1} \left[\frac{m_1 - m_2 (m_1/m_2)^{-\delta_0}}{1 + (m_1/m_2)^{\delta_1 - \delta_0}} \right]^2 \left(\frac{m_1^2}{\mu^2} \right)^{\delta_1}, \quad (2.32)$$

которое в случае $\delta m/m \ll 1$ принимает вид

$$\mu^2 \approx \frac{4\beta_\infty}{\pi\delta_1} (\delta m)^2 \left(1 + 2\delta_0 - 2\delta_1 \frac{\delta m}{m} \right)$$

и совпадает в ближайшем порядке по d_∞, β_∞ с выражением, полученным в работе [25]. Отметим также, что, как следует из (2.33) и (2.34),

$$\frac{\delta m_\lambda}{m_\lambda} = \frac{z-1}{z+1} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \infty,$$

т.е. отношение разн. масс $z = \frac{m_{1\lambda}}{m_{2\lambda}} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} -1$.

§ 4. Анализ теорий при наличии обрезания.

В теориях с обрезанием параметр Λ удерживается конечным. Для получения массовых уравнений необходимо решить систему (A.20)-(A.22), где, в отличие от теорий без обрезания, вместо d_∞ и β_∞ присутствуют инвариантные заряды \sum_A^a и \sum_B^a . Для функций φ_A^a и φ_B^a имеем выражения

$$\varphi_A^a(z, u, d_\lambda, \beta_\lambda) = \frac{2d_\lambda^2}{3\pi}, \quad \varphi_B^a(z, u, d_\lambda, \beta_\lambda) = \frac{2\beta_\lambda^2}{3\pi},$$

которые совпадают с выражениями из симметричной теории. Вычисления ψ_{2j}^a, H^a дает в ближайшем порядке

$$\begin{aligned} \Psi_{21}^a(z, u, d_\Lambda, \beta_\Lambda) &= -\frac{3}{4\pi} (d_\Lambda + \beta_\Lambda z^{-1}), \\ \Psi_{22}^a(z, u, d_\Lambda, \beta_\Lambda) &= -\frac{3}{4\pi} (d_\Lambda + \beta_\Lambda z), \\ H^a(z, u, d_\Lambda, \beta_\Lambda) &= \frac{2\beta_\Lambda}{3\pi} - \frac{4\beta_\Lambda}{\pi} u. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Система (A.20)-(A.22) решается в пределе $m_{1\Lambda} \rightarrow 0, m_{2\Lambda} \rightarrow 0, \mu_\Lambda \rightarrow 0$, но $z_0 = \lim_{m_{1\Lambda}, m_{2\Lambda} \rightarrow 0} \frac{m_{1\Lambda}}{m_{2\Lambda}} = \text{const}, u_0 = \lim_{m_{1\Lambda}, m_{2\Lambda} \rightarrow 0} \left(\frac{\delta m_\Lambda}{\mu_\Lambda} \right)^2 = \text{const}$. Имени следующие уравнения

$$\frac{\partial \xi_i^a}{\partial x} = \frac{1}{x} \frac{2}{3\pi} [\xi_i^a]^2, \quad i = A, B, \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial \ln S_{21}^a}{\partial x} = -\frac{1}{x} \frac{3}{4\pi} \left[\xi_A^a + \xi_B^a z^{-1} \frac{S_{22}^a}{S_{21}^a} \right], \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial \ln S_{22}^a}{\partial x} = -\frac{1}{x} \frac{3}{4\pi} \left[\xi_A^a + \xi_B^a z \frac{S_{21}^a}{S_{22}^a} \right], \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial h^a}{\partial x} = \frac{1}{x} \frac{2}{3\pi} \xi_B^a \left[h^a - \frac{6u}{(z-1)^2} (z S_{21}^a - S_{22}^a)^2 \right]. \quad (2.37)$$

Из (2.34) получаем

$$\xi_A^a = \frac{d_\Lambda}{1 - (2d_\Lambda/3\pi) \ln x}, \quad \xi_B^a = \frac{\beta_\Lambda}{1 - (2\beta_\Lambda/3\pi) \ln x} \quad (2.38)$$

после чего уравнения (2.35), (2.36) решаются аналогично тому, как это делалось в § 3

$$S_{21}^a(x) = \left(1 - \frac{2d_\Lambda}{3\pi} \ln x\right)^{9/8} \left(1 - \frac{2\beta_\Lambda}{3\pi} \ln x\right)^{-9/8} \cdot \frac{1}{2} z^{-1} \left[-1+z+(1+z)\left(1 - \frac{2\beta_\Lambda}{3\pi} \ln x\right)^{9/4}\right] \quad (2.39)$$

$$S_{22}^a(x) = \left(1 - \frac{2d_\Lambda}{3\pi} \ln x\right)^{9/8} \left(1 - \frac{2\beta_\Lambda}{3\pi} \ln x\right)^{-9/8} \cdot \frac{1}{2} \left[1-z+(1+z)\left(1 - \frac{2\beta_\Lambda}{3\pi} \ln x\right)^{9/4}\right] \quad (2.40)$$

Переходя к уравнению для функции $h(x)$ заметим, что оно является линейным неоднородным дифференциальным уравнением и решается стандартным методом вариации постоянной. Окончательно

$$h^a = \left(1 - \frac{2\beta_\Lambda}{3\mathcal{T}} \ln x\right)^{-1} \left[1 + \frac{4\beta_\Lambda u}{3\mathcal{T}} \mathcal{J}(x)\right], \quad \mathcal{J}(x) = \int_0^{-\ln x} dv \left(\frac{1 + \frac{2\alpha_\Lambda v}{3\mathcal{T}}}{1 + \frac{2\beta_\Lambda v}{3\mathcal{T}}} \right)^{9/4} \quad (2.41)$$

Таким образом, система (2.24)-(2.37) в данном приближении оказывается точно интегрируемой \ast). Из массовых уравнений (2.15) и уравнений (2.39)-(2.41) получаем

$$\frac{m_1}{m_{1\Lambda}} = \left(1 + \frac{2\alpha_\Lambda}{3\mathcal{T}} L_1\right)^{9/8} \left(1 + \frac{2\beta_\Lambda}{3\mathcal{T}} L_1\right)^{-9/8} \cdot \frac{1}{2} Z^{-1} \left[-1 + Z + (1+Z) \left(1 + \frac{2\beta_\Lambda}{3\mathcal{T}} L_1\right)^{9/4}\right] \quad (2.42)$$

$$\frac{m_2}{m_{2\Lambda}} = \left(1 + \frac{2\alpha_\Lambda}{3\mathcal{T}} L_2\right)^{9/8} \left(1 + \frac{2\beta_\Lambda}{3\mathcal{T}} L_2\right)^{-9/8} \cdot \frac{1}{2} \left[1 - Z + (1+Z) \left(1 + \frac{2\beta_\Lambda}{3\mathcal{T}} L_2\right)^{9/4}\right] \quad (2.43)$$

$$\frac{\mu^2}{\mu_\Lambda^2} = \left(1 + \frac{2\beta_\Lambda}{3\mathcal{T}} L_3\right)^{-1} \left[1 + \frac{4\beta_\Lambda u}{\mathcal{T}} \mathcal{J}\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right)\right]. \quad (2.44)$$

Здесь

$$L_1 = \ln \frac{\Lambda^2}{m_1^2}, \quad L_2 = \ln \frac{\Lambda^2}{m_2^2}, \quad L_3 = \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2}.$$

Из уравнений (2.42)-(2.44) следует, что чисто динамическое решение для масс фермионов и векторной частицы, т.е. в случае

$m_{1\Lambda} = 0, m_{2\Lambda} = 0, \mu_\Lambda = 0$ возможно только при $\alpha_\Lambda = \infty$. Это условие является аналогом условия $d_\infty > \beta_\infty$ в теории без обрезания. Из уравнений (2.42)-(2.44) в пределе $\alpha_\Lambda \rightarrow \infty, Z \rightarrow Z_0, u \rightarrow u_0$ получаем

\ast) Интеграл $\mathcal{J}(x)$ точно берется, однако в дальнейшем нам удобнее работать с выражением (2.41).

$$\frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^{9/8} \left(\frac{1 + \frac{2\beta_\Lambda L_1}{3\pi}}{1 + \frac{2\beta_\Lambda L_2}{3\pi}}\right)^{-9/8} \frac{Z_0 - 1 + (1 + Z_0)\left(1 + \frac{2\beta_\Lambda L_1}{3\pi}\right)^{9/4}}{1 - Z_0 + (1 + Z_0)\left(1 + \frac{2\beta_\Lambda L_2}{3\pi}\right)^{9/4}} \quad (2.45)$$

$$\frac{\mu^2}{m_2^2} = \frac{16}{13\pi} \beta_\Lambda (Z_0 - 1)^2 L_3^{13/4} \left(1 + \frac{2\beta_\Lambda L_3}{3\pi}\right)^{-1} \left(1 + \frac{2\beta_\Lambda L_2}{3\pi}\right)^{9/4} \times \left[1 - Z_0 + (1 + Z_0)\left(1 + \frac{2\beta_\Lambda L_2}{3\pi}\right)^{9/4}\right]^{-2} \quad (2.46)$$

Докажем, что

1) если $Z_0 = 1$, то $m_1 = m_2$, $\mu = 0$ независимо от того, имеет ($\beta_\Lambda \neq 0$) или не имеет ($\beta_\Lambda = 0$) место взаимодействия с полем B_μ ;

2) если $Z_0 > 1$ ($Z_0 < 1$), $\beta_\Lambda = 0$, то $m_1 > m_2$ ($m_1 < m_2$), $\mu = 0$;

3) если $Z_0 > 1$ ($Z_0 < 1$), $\beta_\Lambda \neq 0$, то $m_1 > m_2$ ($m_1 < m_2$), $\mu \neq 0$.

Результаты удобно представить в виде Таблицы II.

Таблица II

$Z_0 \backslash \beta_\Lambda$	$\beta_\Lambda = 0$	$\beta_\Lambda \neq 0$
$Z_0 = 1$	$m_1 = m_2, \mu = 0$	$m_1 = m_2, \mu = 0$
$Z_0 \neq 1$	$m_1 \neq m_2, \mu = 0$	$m_1 \neq m_2, \mu \neq 0$
	$m_1 > m_2 (m_{1\Lambda} > m_{2\Lambda})$	$m_1 > m_2 (m_{1\Lambda} > m_{2\Lambda})$
	$m_1 < m_2 (m_{1\Lambda} < m_{2\Lambda})$	$m_1 < m_2 (m_{1\Lambda} < m_{2\Lambda})$

Действительно, пусть вначале $Z_0 = 1$. Тогда уравнение (2.45) принимает вид

$$\frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^{9/8} \left(\frac{1 + \frac{2\beta_\Lambda L_1}{3\pi}}{1 + \frac{2\beta_\Lambda L_2}{3\pi}}\right)^{9/8} \quad (2.47)$$

Изно, что $m_1 = m_2$ является решением. Других же решений нет, так как если $m_1 > m_2$ ($m_1 < m_2$), то $L_1 < L_2$ ($L_1 > L_2$), и в то время, как правая часть (2.47) меньше (больше) единицы, левая часть больше (меньше) единицы. Кроме того, из (2.46) следует, что при $Z_0 = 1$ $\mu = 0$ как при $\beta_1 \neq 0$, так и при $\beta_1 = 0$.

Пусть теперь $Z_0 \neq 1$. Для определенности выберем $Z_0 > 1$. Тогда $m_1 > m_2$. В самом деле, в противном случае ($m_1 < m_2$) первый множитель в правой части (2.45) больше единицы, а остальные два дают

$$\frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{Z_0 - 1 + (1 + Z_0) T_1^2}{1 - Z_0 + (1 + Z_0) T_2^2} > 1, \quad T_i = \left(1 + \frac{2\beta_1}{3\pi} L_i\right)^{9/8},$$

так как

$$(T_1 + T_2)(Z_0 - 1) > (1 + Z_0) T_1 T_2 (T_2 - T_1)$$

из-за $Z_0 > 1$ и $T_1 > T_2$.

Заметим здесь, что доказательство соотношений между физическими массами m_1, m_2 в зависимости от соотношения между массами $m_{1\lambda}$ и $m_{2\lambda}$, как нетрудно убедиться, остается справедливым при любом конечном d_λ .

Для массы векторной частицы из (2.46) получаем: $\mu > 0$ лишь при $\beta_1 > 0$, $Z_0 \neq 1$. В остальных случаях $\mu = 0$.

Таким образом (см. Таблицу II), для того, чтобы векторная частица V_μ приобрела массу, необходимо наличие помимо в начальном расщеплении фермионных масс ($Z_0 \neq 1$) и взаимодействия с полем V_μ .

При $Z_0 = 1$ расщепления масс фермионов не происходит. При $Z_0 \neq 1$ оно имеет место независимо от наличия поля V_μ . В частности, при $Z_0 \neq 1$ расщепление имеет место в квантовой электродинамике. Условие динамического происхождения масс фермионов и векторной частицы $d_\lambda = \infty$ позволяет выразить через параметр обрезания обе фермионные массы. В самом деле, из (2.38)

$$\left. \sum_A^a(x) \right|_{x = \frac{m_i^2}{\Lambda^2}} \equiv d_{m_i} = \frac{d_\Lambda}{1 + \frac{2d_\Lambda}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m_i^2}} \stackrel{d_\Lambda \rightarrow \infty}{=} \frac{3\pi}{2 \ln \frac{\Lambda^2}{m_i^2}} \quad (2.48)$$

так что

$$m_i^2 = \Lambda^2 \exp \left[- \frac{3\pi}{2 d_{m_i}} \right]. \quad (2.49)$$

физическое требование $m_i^2 \ll \Lambda^2$ дает $d_{m_i} \ll 1$. Так как

$$d_{m_1} = \frac{d_{m_2}}{1 + \frac{2d_{m_2}}{3\pi} \ln \frac{m_2^2}{m_1^2}}, \quad \text{то в пределе } d_{m_2} \rightarrow 0, \quad d_{m_1} \approx d_{m_2} \approx d \rightarrow 0,$$

где d - перенормированная константа связи. Таким образом,

(2.49) является сингулярным в точке $d=0$ решением "сверхпроводящего типа".

То, что динамические решения для масс в рассматриваемом приближении возможны лишь для $d_\Lambda = \infty$, ставит вопрос о связи этого вывода с тем хорошо известным фактом, что область применимости ренормгруппы ограничена $d_\Lambda \ll 1$ [34]. Этот вопрос подробно обсуждается в главе I на примере электродинамики. Основным полученным там выводом сводится к тому, что решение "сверхпроводящего типа" для $m_\Lambda = 0$ возможно лишь при достаточно большой величине голой константы связи, превышающей некоторое критическое значение d_c : $d_\Lambda \gg d_c > 0$. Отменяя за подробностями к главе I, здесь приведем лишь качественные аргументы в пользу этого. Предположим противное, т.е. что $d_c = 0$. Тогда, выбирая d_Λ достаточно малым, можно добиться того, что рассматриваемое здесь приближение хорошо аппроксимирует точные функции Грина. Однако, как мы уже знаем, оно дает $d_c = \infty$. Тем самым приходим к противоречию.

Таким образом, наличие критической константы связи является в данной модели необходимым условием для возникновения масс фермионов и векторной частицы. Это согласуется с первоначальной гипотезой Вингера с той лишь разницей, что d_Λ есть константа связи бозона A_μ , остающегося безмассовым. Константа же связи

величина V_{Li} V_{Λ} может быть выбрана сколь угодно малой. Отметим, что в области своей применимости $d_{\Lambda} \ll 1$ уравнения ренормгруппы также дают решения "сверхпроводящего типа". Действительно, рассмотрим, например, случай $Z_0 = 1$, $\beta_{\Lambda} = 0$. Тогда из (2.42) и (2.43) следует, что

$$\frac{m_{\Lambda i}}{m_i} = \left(1 + \frac{2d_{\Lambda}}{3\pi} L_i\right)^{-9/8} = \left(\frac{d_{m_i}}{d_{\Lambda}}\right)^{9/8} \quad (2.50)$$

или

$$\frac{m_{\Lambda i}}{m_i} = \left(1 - \frac{2d_{m_i}}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m_i^2}\right)^{9/8} \quad (2.51)$$

Из (2.50) в силу $d_{\Lambda} \ll 1$ параметры $m_{\Lambda i}/m_i$ удовлетворяют неравенству

$$1 > \frac{m_{\Lambda i}}{m_i} \gg (d_{m_i})^{9/8} \quad (2.52)$$

Поэтому из (2.51) удобно выразить m_i через Λ и $m_{\Lambda i}/m_i$:

$$m_i = \Lambda \exp \left[-\frac{3\pi}{4d_{m_i}} \left(1 - \left(\frac{m_{\Lambda i}}{m_i}\right)^{9/8}\right) \right] \quad (2.53)$$

Существование решения "сверхпроводящего типа" в области применимости ренормгруппы (2.52) позволяет надеяться, что она имеет место и для наиболее интересного случая $m_{\Lambda i} = 0$ и $d_{\Lambda} \geq d_c$.

Полученные в настоящей главе условия для динамического нарушения калибровочной инвариантности в абелевых теориях физически выглядят достаточно прозрачно.

Как в теориях с обрезанием, так и без него необходимо присутствие векторного поля A_{μ} . Такое поле обеспечивает возникновение в модели "куперовских пар" - т.е. перестройку основ-

ного состояния системы. Примечательно, что в отличие от нерелятивистской теории сверхпроводимости, где такая перестройка имеет место при сколь угодно малой величине константы связи, здесь при наличии обрезания константа d_{λ} должна для этого превышать некоторое критическое значение $d_c \sim 1$.

Г л а в а И

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭФФЕКТИВНОГО ПОТЕНЦИАЛА К ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ С ДИНАМИЧЕСКИ НАРУШЕННОЙ СИММЕТРИЕЙ

В главах I и II настоящей диссертации на примере квантовой электродинамики и модели Корнуэла-Нортонa была продемонстрирована возможность динамического нарушения симметрии в квантовой теории поля. Было показано, что полевые уравнения в рассмотренных случаях имеют аномальные решения, обладающие меньшей симметрией, чем исходный лагранжиан системы. Однако факта появления аномальных решений недостаточно для вывода, что действительно имеет место динамическое нарушение симметрии - необходимо еще показать, что аномальное решение энергетически выгоднее, чем нормальное (т.е. соответствующее ему основное состояние лежит ниже по энергии). Необходимо также выяснить характер нарушения симметрии, т.е. является ли данное нарушение спонтанным или нет.

В настоящей главе эти вопросы исследуются с помощью метода эффективного потенциала, определяющего плотность энергии квантовополевого вакуума как функционал от функций Грина [53,54].

§ I. Эффективный потенциал и динамическое нарушение симметрии

Метод эффективного потенциала является удобным методом исследования теорий поля с нарушенными симметриями. В теории поля он был введен в работах [50,51] во многом по аналогии с методами, разработанными в статистике [54]. Большая часть работ, где вычисляется эффективный потенциал [56-60] имеет дело с потенциалом для скалярных полей. Обобщение на случай составных полей дано в работе [53].

Условие стационарности эффективного потенциала приводит к уравнению

$$\frac{\delta V}{\delta f(x)} = 0 \quad (3.1)$$

При спонтанном нарушении симметрии типа Голдстоуна [55], когда $f = \varphi_c = \langle 0 | \varphi | 0 \rangle$ (φ - скалярное поле), уравнение (3.1) определяет значение φ_c . При спонтанном нарушении типа Намбу [6], когда роль φ играет оператор $\Psi \bar{\Psi}$ (Ψ - спинорное поле), f совпадает с функцией Грина G , и уравнение (3.1) есть уравнение Вингера-Дайсона для G , которое наряду с симметричным решением допускает и решение с нарушенной симметрией.

Рассмотрим вначале модель конечной квантовой электродинамики ДБВ [38-40] и обобщающую ее модель Корнуала-Нортена [25] с лагранжианом (см. главу II § I)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\Psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m_0) \Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \\ & + g_A \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi A^\mu + g_B \bar{\Psi} \tau_2 \gamma_\mu \Psi B^\mu. \end{aligned} \quad (2.1')$$

m_0 - матрица затравочных масс

$$m_0 = \begin{pmatrix} m_{01} & 0 \\ 0 & m_{02} \end{pmatrix}$$

Для перехода к электродинамике следует положить $g_B = 0$, опустить поле B_μ и перейти к четырехкомпонентному спинорному полю.

Массовый член $m_0 \bar{\Psi} \Psi$ в электродинамике нарушает γ_5 и масштабную инвариантность, а в модели Корнуала-Нортена при $m_{01} \neq m_{02}$ нарушает в дополнение инвариантность \mathcal{L} относительно τ_2 -преобразования

$$\Psi \rightarrow \exp(i \tau_2 \theta) \Psi$$

При динамическом нарушении этих симметрий (когда $m_0 \Psi \Psi$ в \mathcal{L} отсутствует) фермионы приобретают массы, причем, в модели Корнуэлла-Нортона разные, что, в свою очередь, приводит к возникновению массы векторного поля B_μ . Напомним, что в этих моделях затравочные константы связи определяются корнями функций Гелл-Манна-Лоу, что приводит при снятии обрезания ($\Lambda \rightarrow \infty$) к обращению массовой матрицы m_0 в ноль (глава II).

В настоящей главе будет показано, что нарушение названных выше симметрий в моделях ДБВ и Корнуэлла-Нортона связано с несохранением соответствующих токов (токовые аномалии типа рассмотренных в [62,83]) в литературе (см. например [83]) такую ситуацию называют явным динамическим нарушением симметрии в отличие от спонтанного нарушения [55,56], при котором токи сохраняются и присутствуют голдстоуновские частицы. В дальнейшем ситуацию, когда имеет место аномальное несохранение токов, мы также будем называть явным динамическим нарушением симметрии.

При спонтанном нарушении масштабной инвариантности плотность энергии вакуума инвариантна относительно преобразования $m_i \rightarrow km_i$, т.е. имеет место вырождение вакуума по параметру группы масштабных преобразований. Отсюда следует, что плотность энергии вакуума в этом случае равна нулю. Действительно, пусть плотность гамильтониана \mathcal{H} не зависит явно от параметра m , но допускает семейство нормируемых состояний $|0, m\rangle$, т.е. имеет место спонтанное нарушение масштабной инвариантности. При этом

$$|0, km\rangle = \mathcal{U}_k |0, m\rangle,$$

где \mathcal{U}_k - некоторый несобственный оператор.

Определим оператор средней плотности энергии

$$\tilde{\mathcal{H}} = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int d^3x \mathcal{H}$$

где V - нормировочный объем.

Для состояния $|0, m\rangle$

$$\tilde{\mathcal{H}} |0, m\rangle = E(m) |0, m\rangle \quad (3.2)$$

где из размерных соображений плотность энергии

$$E(m) = c m^4$$

При масштабных преобразованиях

$$m \rightarrow m' = km, \quad x \rightarrow x' = k^{-1}x$$

плотность

$$E(m) \rightarrow E(km) = k^4 E(m) \quad (3.3)$$

Перепишем это равенство через матричные элементы оператора

$\tilde{\mathcal{H}}$:

$$\begin{aligned} E(m) &\equiv \langle 0, m | \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int d^3x \mathcal{H}(x) |0, m\rangle \rightarrow \\ &\rightarrow \langle 0, km | \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V/k^3} \int d^3x' \mathcal{H}(x') |0, km\rangle = \quad (3.4) \\ &= \langle 0, m | U_k^{-1} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V/k^3} \int d^3x' \mathcal{H}(x') U_k |0, m\rangle = \\ &= \langle 0, m | \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V/k^3} \int d^3x' \mathcal{H}'(x') |0, m\rangle \equiv E(km) = k^4 E(m). \end{aligned}$$

Проверяя равенств (3.4) выражает тот факт, что преобразование матричного элемента можно получить, меняя или вектора состояния ($|0, m\rangle \rightarrow |0, km\rangle$), или форму оператора ($\tilde{\mathcal{H}} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}' = U_k^{-1} \tilde{\mathcal{H}} U_k$).

Заметим здесь также, что так как гамильтониан от времени не зависит, то в пределе $V \rightarrow \infty$ интегралы по x' в (3.4) можно

опустить, а нормировочный объем $V' = \frac{V}{k^3}$ заменить на V .

Из последней строки этого равенства

$$\tilde{\mathcal{H}}' = k^4 \tilde{\mathcal{H}}$$

что ясно из размерных соображений, но, кроме этого, из второй и последней строк (3.4) получаем (штрихи у x' опускаем):

$$\langle 0, km | \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int d^3x \mathcal{H}(x) | 0, km \rangle = k^4 E(m) \quad (3.5)$$

Спонтанное нарушение (\mathcal{H} не зависит явно от m) определяет здесь то, что параметр k не появляется в операторе $\frac{1}{V} \int d^3x \mathcal{H}$.

Дифференцируя равенство (3.5) по k , используя (3.2) и нормированность $|0, km\rangle$, находим

$$E(m) = cm^4 = 0 \quad \text{т.е.} \quad c \equiv 0 \quad (3.6)$$

(теорема Хейнмана). Таким образом при спонтанном нарушении масштабной инвариантности имеет место вырождение вакуума, т.е. в такой теории масштаб (фаза группы симметрии) фиксировать нельзя, он произволен.

На первый взгляд исследование моделей с помощью метода эффективного потенциала подкрепляет такую точку зрения. Действительно, оказывается (подробнее см. в § 2-3), что за счет образования матрицы m_0 в явном потенциале V не зависит явно от параметров m_i , возникающих при наложении граничных условий на инвариантные уравнения движения (3.1)

$$\frac{\delta V}{\delta G} = 0 \quad , \quad (3.1')$$

Таким образом параметры m_i являются произвольными, и функция V зависит от них лишь неявно через функции Грина G .

Отсюда, казалось бы, и следует вывод о независимости плотности энергии вакуума от m_i . Действительно, при инфинитезимальных преобразованиях $m_i \rightarrow m_i + \delta m_i$ функции $G_0(p) \rightarrow G_0(p) + \delta G_0(p)$, где G_0 есть решение уравнения (3.1'), так что из (3.1')

$$\frac{dV}{dm_i} = \int \frac{\delta V}{\delta G(p)} \Big|_{G=G_0} \frac{dG_0(p, m_i)}{dm_i} dp = 0 \quad (3.7)$$

(аналог теоремы Фейнмана).

Заметим, что вывод равенства (3.7) предполагает существование вариационной производной $\delta V / \delta G$, т.е. независимость $\delta V / \delta G \Big|_{G=G_0}$ от формы вариации δG_0 . В § 2-3 показано, что в двухпетлевом приближении ни в электродинамике ДБВ, ни в модели Кернуала-Нертена это предположение не выполняется. Как следствие, плотность энергии V зависит от параметров m_i (отсутствует вырождение вакуума).

Отсутствие вырождения вакуума в этих моделях интерпретируется нами следующим образом. То, что при снятии обрезания ($\Lambda \rightarrow \infty$) матрица m_0 обращается в нуль, еще не означает обращение в нуль входящего в лагранжиан плотности \mathcal{L} массового члена $m_0 \bar{\Psi} \Psi$. Действительно [61, 62]

$$m_0 (\bar{\Psi} \Psi) = m (\bar{\Psi} \Psi)_R$$

где $(\bar{\Psi} \Psi)_R$ есть перенормированный составной оператор, матричные элементы которого, вообще говоря, не равны нулю.

Наличие в \mathcal{L} массового члена $m_0 (\bar{\Psi} \Psi) = m (\bar{\Psi} \Psi)_R$

означает явное нарушение γ_5 - и масштабной инвариантности в электродинамике ДБВ, а при $m_1 \neq m_2$ явное нарушение масштабной, γ_5 - и τ_2 -инвариантности в модели Корнуэлла-Нортена.

Таким образом несмотря на динамический характер нарушения ($m_0 = 0$, $\partial V / \partial m_i = 0$), параметры m_i здесь фиксирует не только вакуум, но и лагранжиан системы.

Второй основной вывод, полученный в настоящей главе, состоит в том, что в двулетельном приближении с точностью до несущественной константы плотность энергии вакуума

$$V = -c m^4, \quad c > 0$$

для электродинамики ДБВ и

$$V = -C_1 m^4 - C_2 \delta m^4 - C_3 m^2 \delta m^2, \quad C_1, C_2, C_3 > 0.$$

для модели Корнуэлла-Нортена, т.е. плотность энергии вакуума нарушенной фазы как в модели ДБВ, так и в модели Корнуэлла-Нортена меньше, чем соответствующая плотность фазы с ненарушенной симметрией.

§ 2. Анализ электродинамики Джонсона-Бейкера-Виллея с помощью метода эффективного потенциала

Эффективный потенциал для электродинамики ДБВ имеет вид

[53] :

$$V(G, \Delta) = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\ln S^{-1}(p) G(p) - S^{-1}(p) G(p) + 1 \right] + \quad (3.8)$$

$$+ \frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\ln D^{-1}(p) \Delta(p) - D^{-1}(p) \Delta(p) + 1 \right] + V_2(G, \Delta)$$

Здесь $S(p)$, $D^{\mu\nu}(p)$ и $G(p)$, $\Delta^{\mu\nu}(p)$ являются свободными и полными пропагаторами электрона и фотона, соответственно,

$$S(p) = \frac{1}{\hat{p}}, \quad \mathcal{D}^{\mu\nu}(p) = -\left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right) \frac{1}{p^2} - d_2 \frac{p^\mu p^\nu}{p^4} \quad (3.9)$$

d_2 - калибровочный параметр, $V_2(G, \Delta)$ представляет собой сумму всех двухчастично неприводимых вакуумных диаграмм (рис. 1), в которых вершины являются свободными, а пропагаторы - волнами. Как известно, [53], эффективный потенциал $V(G, \Delta)$ определяет плотность энергии вакуума в состоянии, для которого вакуумные ожидания операторов $\Psi \bar{\Psi}$ и AA равны

$$i \langle 0 | T \Psi(x) \bar{\Psi}(y) | 0 \rangle = G(x-y),$$

$$i \langle 0 | T A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle = \Delta^{\mu\nu}(x-y).$$

Ограничиваясь двухчастичным приближением для $V_2(G, \Delta)$, имеем

$$V_2(G, \Delta) = \frac{e_0^2}{2} \int \frac{d^4 p d^4 p'}{(2\pi)^8} \text{tr} \left[\gamma_\mu G(p) \gamma_\nu G(p') \Delta^{\mu\nu}(p-p') \right] \quad (3.10)$$

где e_0 - гравитационная константа связи, $\hbar = c = 1$. Вычисления проведем в неперечной калибровке ($d_2 = 0$). В этой калибровке

$$G^{-1}(p) = \hat{p} - B(p^2),$$

$$\Delta^{\mu\nu}(p) = -\left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right) \frac{d(p^2)}{p^2},$$

где B и d - скалярные функции. При $d_0 \equiv \frac{e_0^2}{4\pi} \ll 1$ в электродинамике ДЭВ можно с хорошей точностью положить $d \equiv 1$ [39]. Тогда из (3.8) и (3.10) для величины Ω , представляющей разность плотностей энергии в теориях с нарушенной ($B \neq 0$) и ненарушенной ($B = 0$) симметрией, получаем следующее выражение:

$$\Omega = V(B) - V(0) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\infty} dx x [\Psi_1(x) + \Psi_2(x)], \quad (3.11)$$

$$\Psi_1(x) = \ln\left(1 + \frac{B^2(x)}{x}\right) - \frac{B^2(x)}{x + B^2(x)}, \quad (3.12)$$

$$\Psi_2(x) = -\frac{B^2(x)}{x + B^2(x)} + \frac{3\alpha_0}{4\pi} \frac{B(x)}{x + B^2(x)} \int_0^{\infty} dy \frac{y B(y)}{y + B^2(y)} \times \left(\frac{\Theta(x-y)}{x} + \frac{\Theta(y-x)}{y} \right), \quad (3.13)$$

$$x(y) = -\rho^2(-\rho'^2) = \vec{\rho}^2 + \rho_4^2, \quad \rho_0 = i\rho_4.$$

Здесь мы осуществили виковский поворот и произвели интегрирование по угловым переменным с помощью формул Приложения Б. Очевидно, что при выводе уравнения для функции B достаточно потребовать стационарности Ω относительно произвольных вариаций функции B , сосредоточенных на произвольном, но конечном интервале ρ^2 . Это эквивалентно требованию стационарности Ω относительно локальных (\mathcal{L}) вариаций вида

$$\delta^{\mathcal{L}} B(x) = \varepsilon \delta(x - x_0),$$

где ε - инфинитезимальный параметр, и x_0 принимает все значения в интервале $[0, \infty)$. Таким образом, получаем для функции B следующее уравнение:

$$B(x) - \frac{3\alpha_0}{4\pi} \int_0^{\infty} dy \frac{y B(y)}{y + B^2(y)} \left(\frac{\Theta(x-y)}{x} + \frac{\Theta(y-x)}{y} \right) = 0 \quad (3.14)$$

Это уравнение является исходным в электродинамике ДБВ [38]. В силу масштабной инвариантности уравнение (3.14) имеет бесконечно

ного решения $B(x, t)$, включая и тривиальное решение $B=0$ для которых $B(x, kt) = k B(\frac{x}{k^2}, t)$, $B(0, t) = t$. Таким образом, здесь имеется динамическое нарушение группы масштабных преобразований, и $\ln k$ является фазовым параметром этой группы.

Точное решение уравнения (3.14) неизвестно. На асимптотическое решение при больших x можно получить, пренебрегая членом $B^2(y)$ по сравнению с y в знаменателе уравнения (3.14) и переходя к линейному уравнению

$$B(x) - \frac{3d_0}{4\pi} \int_0^{\infty} dy B(y) \left(\frac{\Theta(x-y)}{x} + \frac{\Theta(y-x)}{y} \right) = 0 \quad (3.15)$$

Решение уравнения (3.15) есть κ):

$$B(x) = m \left(\frac{x}{m^2} \right)^{-\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{2} \left[1 - \left(1 - \frac{3d_0}{\pi} \right)^{1/2} \right] \quad (3.16)$$

Легко видеть, что при таком асимптотическом поведении функции $B(x)$ интеграл в выражении (3.11) от функции Ψ_1 , а также от функции Ψ_2 сходится, хотя интегралы от каждого слагаемого

к) Каждое из уравнений (3.14) и (3.15) эквивалентно дифференциальному уравнению второго порядка с двумя естественными (следующими из (3.14) и (3.15), соответственно) граничными условиями в нуле и на бесконечности. Общее решение (3.15)

$$C_1 x^{-\gamma(-)} + C_2 x^{-\gamma(+)}, \quad \gamma(\mp) = \frac{1}{2} \left[1 \mp \left(1 - \frac{3d_0}{\pi} \right)^{1/2} \right]$$

удовлетворяет этим условиям при всех C_1 и C_2 . Однако, как показано в работах [81, 82], для нелинейного уравнения (3.14) из граничных условий следует, что при больших x асимптотика $\sim x^{-\gamma(-)}$.

как в Ψ_1 , так и в Ψ_2 по отдельности расходятся. Поэтому двойной интеграл в выражении для Ω следует понимать как повторный.

Из равенства (3.7) следует, что $\delta\Omega=0$ при вариациях $m \rightarrow m' = m + \delta m$, для которых решение B_0 уравнения (3.1), соответствующее значению m , переходит в решение $B'_0 = B_0 + \delta^m B_0$ (масштабная вариация). Покажем, что это не так, т.е.

$$\left. \frac{\delta\Omega}{\delta^m B} \right|_{B=B_0} \neq \left. \frac{\delta\Omega}{\delta^L B} \right|_{B=B_0} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\Omega}{dm} = \int \left. \frac{\delta\Omega}{\delta^m B(x)} \right|_{B=B_0} \frac{dB_0(x,m)}{dm} \neq 0$$

С этой целью заметим, что для того, чтобы привести $\delta\Omega$ к виду

$$\delta\Omega = \int \left. \frac{\delta\Omega}{\delta^L B} \right|_{B=B_0} \delta B_0 dx = 0$$

требуется сделать перестановку порядка интегрирования вида

$$\int_0^\infty dx \frac{x B_0(x)}{x + B_0^2(x)} \int_0^\infty \frac{(y - B_0^2(y))y}{(y + B_0^2(y))^2} \delta B_0(y) \left(\frac{\theta(x-y)}{x} + \frac{\theta(y-x)}{y} \right) \rightarrow \quad (3.17)$$

$$\rightarrow \int_0^\infty dy \frac{(y - B_0^2(y))y}{(y + B_0^2(y))^2} \delta B_0(y) \int_0^\infty dx \frac{x B_0(x)}{x + B_0^2(x)} \left(\frac{\theta(x-y)}{x} + \frac{\theta(y-x)}{y} \right)$$

эта операция законна для любой вариации δB_0 , сосредоточенной на конечном интервале (в частности, для $\delta^L B_0 = \varepsilon \delta(x-x_0)$), и незаконна для вариации $\delta^m B_0 \sim y^{-\gamma}$, когда двойной интеграл (3.17) расходится. Действительно, для всех B_0 (решений уравнения (3.14)) функция $\Psi_2(x, m) \equiv 0$ и

$$\Omega = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty dx x \Psi_1(x, m) = -\frac{m^4}{8\pi^2} \int_0^\infty dx x \Psi_1(x, 1) \quad (3.18)$$

Как следует из непосредственного анализа нелинейного уравнения (3.14) [81, 82], при $x = -p^2 > 0$ функция $B^2 > 0$. А так как функция $\Psi_1(x) = \ln\left(1 + \frac{B^2(x)}{x}\right) - \frac{B^2(x)}{x + B^2(x)} = \ln z + \frac{1}{z} - 1$ ($z \equiv 1 + \frac{B^2(x)}{x} > 1$) положительна при всех $z > 1$ ($\Psi_1' = \frac{z-1}{z} |_{z>1} > 0$ и $\Psi_1(z=1) = 0$), то производная $d\Omega/dm < 0$.

Подчеркнем, что нарушение равенства (3.7) связано здесь с поведением вариации δV_0 при больших $|p^2|$ (малые расстояния).

Тот факт, что $\Omega < 0$ в пределе слабой связи можно доказать и не используя положительности B^2 . Для этого достаточно заметить, что при этом основной вклад в интеграл (3.18) дает асимптотическая область $x \gg 1$. Вычисляя теперь выражение (3.18) с использованием формулы (3.16) для $B(x)$, получаем

$$\Omega = -\frac{m^4}{64\pi^2 \gamma} + O(const) \quad (3.18')$$

Заметим, что если бы мы стали непосредственно вычислять Ω , исходя из формул (3.11)-(3.13) и используя для B решение (3.16) линеаризованного уравнения (3.15), то получили бы формулу (3.18') с противоположным знаком. Именно так поступили авторы работы [81] и пришли к неправильному выводу, что в электродинамике ДЭВ $\Omega > 0$.

Связано это с тем, что выражение (3.11) содержит интегралы, которые квадратично расходятся в области больших импульсов и при

вычислениями не с точностью до членов порядка $1/\gamma$ недостаточно использовать только асимптотическое поведение $B(x)$; необходимо иметь также следующий за главным член асимптотического разложения. Воспользовавшись нелинейным уравнением (3.14), мы привели потенциал к виду (3.18), где квадратичные расходящиеся отсутствуют, и вычисления можно провести с использованием для $B(x)$ асимптотического поведения (3.16).

§ 3. Эффективный потенциал модели Корнуэла-Нертена

В этом разделе мы покажем, что для эффективного потенциала в модели Корнуэла-Нертена также не выполняется равенство (3.7). Эффективный потенциал рассматриваемой модели в двухпетлевом приближении имеет вид [53]

$$\begin{aligned} \Omega = V(G, \Delta_i) - V(G_N, \Delta_{iN}) = & -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\ln G_N^{-1}(p) G(p) - \right. \\ & \left. - S^{-1}(p) G(p) + S^{-1}(p) G_N(p) \right] + \frac{i}{2} \sum_{j=A,B} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\ln \Delta_{jN}^{-1}(p) \Delta_j(p) \right. \\ & \left. - D^{-1}(p) \Delta_j(p) + D^{-1}(p) \Delta_{jN}(p) \right] + \frac{1}{2} \sum_{j=A,B} \int \frac{d^4 p d^4 p'}{(2\pi)^8} \text{tr} \left[\Gamma_j^\mu G(p) \Gamma_j^\nu \right. \\ & \left. \times G(p') \Delta_{j\mu\nu}(p-p') - \Gamma_j^\mu G_N(p) \Gamma_j^\nu G_N(p') \Delta_{jN\mu\nu}(p-p') \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

где

$$S(p) = \frac{1}{\beta}, \quad D_{\mu\nu}(p) = - \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \frac{1}{p^2},$$

$$\Gamma_A^\mu = g_A \gamma^\mu, \quad \Gamma_B^\mu = g_B \gamma^\mu \tau_2.$$

Индексом N обозначены пропагаторы безмассовой теории. S и G ; D и Δ_j - свободные и полные пропагаторы фермионов и векторных частиц, соответственно (используется калибровка Лан-

ду). Рассмотрим приближение, когда $G_N = S$, $\Delta_j = \Delta_{jN} = \mathcal{D}$.
 В калибровке Ландау для пропагатора G имеем

$$G^{-1}(p) = \hat{p} - \beta_S(p^2) - \tau_3 \beta_V(p^2)$$

Выявление члена $\tau_3 \beta_V(p^2)$ связано с нарушением τ_2 -симметрии.
 После интегрирования по углам (используя формулы Приложения Б) и
 вивского поворота получаем для Ω следующее выражение

$$\begin{aligned} \Omega(\beta_S, \beta_V) = & -\frac{1}{8\pi^2} \left\{ \int_0^\infty dx x \left[\ln \frac{u^2(x) - \omega^2(x)}{x^2} + 4 \frac{x u(x)}{u^2(x) - \omega^2(x)} - \right. \right. \\ & \left. \left. - 4 \right] + \frac{3(g_A^2 + g_B^2)}{8\pi^2} \int_0^\infty dx dy xy \frac{[\beta_S(x)u(x) - \beta_V(x)\omega(x)][\beta_S(y)u(y) - \beta_V(y)\omega(y)]}{[u^2(x) - \omega^2(x)][u^2(y) - \omega^2(y)]} \right. \\ & \left. \times K(x, y) + \frac{3(g_A^2 - g_B^2)}{8\pi^2} \int_0^\infty dx dy xy \frac{\beta_V(x)u(x) - \beta_S(x)\omega(x)}{u^2(x) - \omega^2(x)} \times \right. \\ & \left. \times \frac{\beta_V(y)u(y) - \beta_S(y)\omega(y)}{u^2(y) - \omega^2(y)} K(x, y) \right\}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где

$$u(x) = x + \beta_S^2(x) + \beta_V^2(x),$$

$$\omega(x) = 2\beta_S(x)\beta_V(x),$$

$$K(x, y) = \frac{\theta(x-y)}{x} + \frac{\theta(y-x)}{y},$$

$$x = -p^2, \quad y = -p'^2.$$

Варьируя потенциал Ω по β_S и β_V , получаем уравнения

$$\beta_S(x) = \frac{3(g_A^2 + g_B^2)}{16\pi^2} \int_0^\infty dy y \frac{\beta_S(y)u(y) - \beta_V(y)\omega(y)}{u^2(y) - \omega^2(y)} K(x, y), \quad (3.21)$$

$$\beta_V(x) = \frac{3(g_A^2 - g_B^2)}{16\pi^2} \int_0^\infty dy y \frac{\beta_V(y)u(y) - \beta_S(y)\omega(y)}{u^2(y) - \omega^2(y)} K(x,y) \quad (3.22)$$

Покажем, что решение системы интегральных уравнений (3.21) и (3.22) содержит две произвольные константы. Действительно, система (3.21) (3.22) эквивалентна следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\frac{d}{dx} \left\{ x^2 \frac{d\beta_S(x)}{dx} \right\} + \frac{3(g_A^2 + g_B^2)}{16\pi^2} x \frac{\beta_S(x)u(x) - \beta_V(x)\omega(x)}{u^2(x) - \omega^2(x)} = 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ x^2 \frac{d\beta_V(x)}{dx} \right\} + \frac{3(g_A^2 - g_B^2)}{16\pi^2} x \frac{\beta_V(x)u(x) - \beta_S(x)\omega(x)}{u^2(x) - \omega^2(x)} = 0 \quad (3.24)$$

с граничными условиями

$$x^2 \frac{d\beta_S(x)}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad x^2 \frac{d\beta_V(x)}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad (3.25)$$

$$\left\{ x \frac{d\beta_S(x)}{dx} + \beta_S(x) \right\} \Big|_{x=\infty} = 0, \quad \left\{ x \frac{d\beta_V(x)}{dx} + \beta_V(x) \right\} \Big|_{x=\infty} = 0 \quad (3.26)$$

Общее решение этой системы зависит от четырех произвольных констант C_i ($i=1, \dots, 4$). При этом два условия (3.26) на бесконечности не накладывают каких-либо ограничений на эти константы.

В самом деле, асимптотика общего решения системы (3.23), (3.24) при $x \rightarrow \infty$ определяется следующими уравнениями

$$\frac{d^2 \beta_S^a(x)}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d\beta_S^a(x)}{dx} + \frac{3(g_A^2 + g_B^2)}{16\pi^2} \frac{\beta_S^a(x)}{x^2} = 0, \quad (3.23')$$

$$\frac{d^2 \beta_V^a(x)}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d\beta_V^a(x)}{dx} + \frac{3(g_A^2 - g_B^2)}{16\pi^2} \frac{\beta_V^a(x)}{x^2} = 0, \quad (3.24')$$

откуда получаем

$$\beta_S^a(x) = C_1 x^{-\gamma_S^{(-)}} + C_2 x^{-\gamma_S^{(+)}} , \quad \gamma_S(\pm) = \frac{1}{2} \left[1 \pm \left(1 - \frac{3(g_A^2 + g_B^2)}{4\pi} \right)^{1/2} \right] \quad (3.27)$$

$$\beta_V^a(x) = C_3 x^{-\gamma_V^{(-)}} + C_4 x^{-\gamma_V^{(+)}} , \quad \gamma_V(\pm) = \frac{1}{2} \left[1 \pm \left(1 - \frac{3(g_A^2 - g_B^2)}{4\pi} \right)^{1/2} \right] \quad (3.28)$$

$g_A^2 > g_B^2$.

Прямой подстановкой нетрудно убедиться, что функции $\beta_S^a(x, C_i)$ и $\beta_V^a(x, C_j)$ удовлетворяют условиям (3.26) при всех C_i . Таким образом, для определения четырех констант имеется лишь два уравнения (3.25). Следовательно, общее решение системы (3.23) - (3.24) зависит от двух произвольных констант. Поскольку в граничные условия (3.25) входят лишь производные функций $\beta_S(x)$ и $\beta_V(x)$, то в качестве этих констант можно взять $\beta_S(0) \equiv m$ и $\beta_V(0) \equiv \delta m$.

Свяжем теперь параметры m и δm с коэффициентами при асимптотическом поведении функций $\beta_S(x)$ и $\beta_V(x)$. Для этого вычислим в пределе малых констант связи значения $\beta_S(0)$ и $\beta_V(0)$ с помощью формул (3.21), (3.22). Учитывая, что основной вклад в интегралы дает область $x \gg m^2$, можно воспользоваться асимптотиками (3.27) и (3.28), получим

$$C_1 = m^{1+2\gamma_S^{(-)}} + O(g_A^2, g_B^2), \quad C_3 = \delta m \cdot m^{2\gamma_V^{(-)}} + O(g_A^2, g_B^2).$$

Из равенства (3.7) следует, что в случае, если решение уравнений (3.1) ((3.21) и (3.22)) зависит непрерывным образом от параметров нарушения симметрии (m и δm), то плотность энергии вакуума не должна зависеть от этих параметров. Покажем, что в рас-

нестративаемой модели так же, как в конечной квантовой электродинамике, равенство (3.7) не выполняется, т.е. плотность энергии вакуума зависит явным образом от параметров m и δm . Для доказательства этого воспользуемся уравнениями (3.21), (3.22) и приведем потенциал (3.22) к виду

$$\Omega(\beta_s, \beta_v) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\infty} dx x \left\{ \ln \frac{u^2(x) - \omega^2(x)}{x^2} + 2 \frac{xu(x)}{u^2(x) - \omega^2(x)} - 2 \right\} \quad (3.29)$$

Интегральная функция в выражении (3.29) положительна. Действительно, вводя обозначение

$$Z^2 = \frac{u^2(x) - \omega^2(x)}{x^2} = 1 + 2 \frac{\beta_s^2(x) + \beta_v^2(x)}{x} + \frac{(\beta_s^2(x) - \beta_v^2(x))^2}{x^2} > 1$$

имеем

$$\begin{aligned} \ln \frac{u^2 - \omega^2}{x^2} + 2 \frac{xu}{u^2 - \omega^2} - 2 &= \ln Z^2 + 2 \frac{\sqrt{Z^2 + \frac{\omega^2}{x^2}}}{Z^2} - 2 \gg \\ &\gg 2 \left[\ln Z + \frac{1}{Z} - 1 \right] \Big|_{Z \gg 1} \gg 0. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\Omega(\beta_s, \beta_v) = V(\beta_s, \beta_v) - V(0, 0) = -m^4 f\left(\frac{\delta m}{m}, g_A^2, g_B^2\right) < 0 \quad (3.30)$$

Вычислим теперь разность плотностей энергии вакуума в несимметричной ($\beta_v \neq 0$) и симметричной ($\beta_v = 0$) теориях, т.е.

$$\begin{aligned} V(\beta_s, \beta_v) - V(\beta_s, 0) &= \Omega(\beta_s, \beta_v) - \Omega(\beta_s, 0) = \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\infty} dx x \left\{ \ln \frac{(x + \beta_s^2 + \beta_v^2)^2 - 4\beta_s^2\beta_v^2}{(x + \beta_s^2)^2} + 2 \frac{x(x + \beta_s^2 + \beta_v^2)}{(x + \beta_s^2 + \beta_v^2)^2 - 4\beta_s^2\beta_v^2} - 2 \frac{x}{x + \beta_s^2} \right\} \quad (3.31) \end{aligned}$$

В пределе малых констант связи основной вклад в интеграл (3.31) дает область больших x ($x \gg m^2$), где можно воспользоваться асимптотическими выражениями (3.27) и (3.28) для функций $\beta_S(x)$ и $\beta_V(x)$. Получим

$$\Omega(\beta_S, \beta_V) - \Omega(\beta_S, 0) = -\frac{1}{8\pi^2} \left[\frac{\delta m^4}{4\chi_V^{(-)}} + \frac{3m^2 \delta m^2}{\chi_S^{(-)} + \chi_V^{(-)}} + O(\text{const}) \right] < 0 \quad (3.32)$$

Из формул (3.18), (3.30) и (3.32) следует, что плотность энергии вакуума нарушенной фазы как в модели ДБВ, так и в модели Корнуэла-Нортена меньше, чем соответствующая плотность фазы с ненарушенной симметрией. Однако, энергетические соображения в данном случае недостаточны для того, чтобы безоговорочно сделать вывод о том, какая фаза системы является устойчивой. Дело в том, что параметры нарушения симметрии (m и δm) фиксирует в данном случае не вакуум (как при спонтанном нарушении), а лагранжиан системы.

Июясним это на примере электродинамики ДБВ. В ней спонтанное нарушение χ_S -инвариантности возможно лишь при спонтанном нарушении масштабной инвариантности. В этом случае, как уже отмечалось, плотность энергии вакуума равнялась бы нулю. Однако, как показано в настоящей главе, это не так, и потому нарушение симметрии не является спонтанным, т.е. масштабный ток не сохраняется. Так как дивергенция масштабного тока пропорциональна $m_0 \bar{\Psi} \Psi$, то, хотя при снятии обрезания ($\Lambda \rightarrow \infty$) затравочная масса стремится к нулю, массовый член $m_0 \bar{\Psi} \Psi$ в этом пределе должен оставаться конечным. Действительно, (см., например, [61])

$$m_0 (\bar{\Psi} \Psi) = m (\bar{\Psi} \Psi)_R$$

где $(\bar{\Psi} \Psi)_R$ - перенормированный составной оператор, матричные элементы которого не равны нулю. Производ в выборе значения пара-

метра m связан с неоднозначностью процедуры перенормировки. Присутствие этого члена в лагранжиане приводит к несохранению как масштабного, так и аксиального тока.

Аналогичная ситуация имеет место и в модели Корнуэла-Нортонна, где член $m_0 \bar{\Psi} \Psi$ также "выживает" в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$, причем, когда $m_1 \neq m_2$ имеет место и несохранение ζ_2 -тока.

В связи с тем, что массовые параметры m_i в рассмотренных моделях фиксируют лагранжиан системы, обсудим здесь возможность использования для вычисления эффективного потенциала метода Рэлей-Ритца, применявшегося в работах [53, 81].

Как известно, суть метода состоит в том, что эффективный потенциал вычисляется с помощью пробных функций Грина, зависящих от параметров. Варьируя затем параметры, их подбирают таким образом, чтобы получить минимум данного функционала. В работах [53, 81] в качестве пробных функций брались решения линеаризованных уравнений Швингера-Дайсона (см. (3.16), (3.27), (3.28)), а в качестве параметров - массы m_i . Этот метод, однако, неявно предполагает эквивалентность вариационной производной $\delta\Omega/\delta G$ и производной по массовым параметрам $d\Omega/dm_i$. Как показано в настоящей главе, такая эквивалентность не имеет места в моделях ДБВ и Корнуэла-Нортонна. Тем самым можно поставить под сомнение законность процедуры, использованной в этих работах. Так например, формальное варьирование величины Ω по m_i (формула (3.32)) дало бы $m_i \delta m_i = \infty$; в этом случае $\Omega = -\infty$ и в системе отсутствовало бы основное состояние.

С физической точки зрения невозможность варьирования по массовым параметрам m_i связана с тем, что выбор определенных значений этих параметров определяет не только вакуум, как при спон-

танном нарушении симметрии, но и доопределяет саму теорию (эффективный лагранжиан, включающий контрчлены), аналогично тому, как выбор определенного значения параметра обрезания Λ (точки вычитания μ) доопределяет теорию при процедуре регуляризации (при процедуре вычитания). Следовательно, различные значения m_i соответствуют не разным фазам одной и той же теории, а просто разным теориям.

§ 4. Устойчивость решений с динамически нарушенной киральной симметрией в квантовой электродинамике с обрезанием

Запишем выражение для эффективного потенциала в двухпетлевом приближении

$$\begin{aligned}
 V(G, \Delta) = & -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\ln S^{-1}(p) G(p) - \right. \\
 & \left. - S^{-1}(p) G(p) + 1 \right] + \frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\ln \mathcal{D}^{-1}(p) \Delta(p) - \right. \\
 & \left. - \mathcal{D}^{-1}(p) \Delta(p) + 1 \right] + \frac{e_0^2}{2} \int \frac{d^4 p d^4 p'}{(2\pi)^8} \text{tr} \left[\gamma_\mu G(p) \gamma_\nu \times \right. \\
 & \left. \times G(p') \Delta^{\mu\nu}(p-p') \right].
 \end{aligned}
 \tag{3.33}$$

Условие стационарности $V(G, \Delta)$ относительно вариаций G дает

$$\frac{\delta V(G, \Delta)}{\delta G(p)} = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \left[G^{-1}(p) - S^{-1}(p) - \frac{e_0^2}{(2\pi)^4 i} \int d^4 p' \gamma_\mu G(p') \gamma_\nu \Delta^{\mu\nu}(p-p') \right] = 0 \quad (3.34)$$

Варируя $V(G, \Delta)$ по $\Delta^{\mu\nu}$, получим аналогичным образом уравнение для $\Delta^{\mu\nu}$, которое мы здесь не пишем. Уравнение (3.34) есть не что иное, как уравнение Швингера-Дайсона в приближении, когда не учитываются радиационные поправки к вершине. Определяя (в калибровке Ландау) функции $B(p^2)$ и $d(p^2)$ с помощью

$$G^{-1}(p) = \hat{p} - mB(p^2), \quad \Delta^{\mu\nu}(p) = -\left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right) \frac{d(p^2)}{p^2},$$

получим из (3.34) следующее уравнение для функции $B(p^2)$:

$$B(p^2) = \frac{3e_0^2}{(2\pi)^4 i} \int d^4 p' \frac{d[(p-p')^2]}{(p-p')^2} \frac{B(p'^2)}{p'^2 - m^2 B^2(p'^2)}, \quad (3.35)$$

(m - физическая масса электрона).

Соответствующее уравнение для функции $d(p^2)$ имеет, как известно [75], асимптотическое решение, независимое от функции $B(p^2)$:

$$d_0 d(p^2) = \alpha \left[1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|p^2|}{m^2} \right]^{-1}, \quad \Lambda^2 \gg |p^2| \gg m^2,$$

где α - неренормированная константа связи, Λ - параметр обрезания. Уравнение (3.35) является нелинейным интегральным уравнением для функции $B(p^2)$. Предполагая, что основной вклад в (3.35) дает область больших импульсов ($p' \gg p$), можно пре-

небольшой членом $m^2 B(p'^2)$ по сравнению с p'^2 в знаменателе (3.35). При интегрировании по углам воспользуемся следующим приближением

$$\frac{d[(p-p')^2]}{(p-p')^2} = \begin{cases} \frac{d(p^2)}{p^2}, & p > p' \\ \frac{d(p'^2)}{p'^2}, & p < p' \end{cases},$$

которое является точным в области $p \gg p'$ и $p \ll p'$. Таким образом для $B(p^2)$ получаем линейное однородное интегральное уравнение

$$B(p^2) = \frac{3d_0}{4\pi} \int_{m^2}^{\Lambda^2} dp'^2 B(p'^2) \left(\frac{\Theta(p^2 - p'^2) d(p^2)}{p^2} + \frac{\Theta(p'^2 - p^2) d(p'^2)}{p'^2} \right) \quad (3.36)$$

Учитывая в (3.36) лишь вклад области $p' \geq p$, уравнение можно свести к дифференциальному уравнению первого порядка

$$p^2 \frac{dB}{dp^2} = - \frac{3d_0}{4\pi} \left(1 - \frac{d}{3\pi} \ln \frac{p^2}{m^2} \right)^{-1} B(p^2) \quad (3.37)$$

с граничным условием

$$B(m^2) = \frac{3d_0}{4\pi} \int_{m^2}^{\Lambda^2} \frac{dp'^2}{p'^2} B(p'^2) d(p'^2) \quad (3.38)$$

Решением уравнения (3.37) является

$$B(p^2) = B_0 \left(1 - \frac{d}{3\pi} \ln \frac{p^2}{m^2} \right)^{9/4}, \quad (3.39)$$

где $B_0 = 1$ из условия нормировки $B(m^2) = 1$.

Из граничного условия (3.38) получаем, что нетривиальное решение для $B(p^2)$ существует лишь при условии, что между m и Λ имеет место соотношение

$$m = \Lambda \exp(-3\pi/2\alpha) \quad (3.40)$$

Вычислим теперь разность плотностей энергии вакуума в теориях с нарушенной ($B \neq 0$) и ненарушенной ($B = 0$) киральной симметрией

$$\Omega = V(G, \Delta) - V(G_N, \Delta_N)$$

Индексом N обозначены пропагаторы симметричной теории с $m=0$. Из (3.33) получаем (в приближении $\Delta \simeq \Delta_N$) после интегрирования по углам и виковского поворота:

$$\begin{aligned} \Omega(m) = & -\frac{m^4}{8\pi^2} \left\{ \int_1^{\Lambda^2/m^2} dy y \left[\ln\left(1 + \frac{B^2(y)}{y}\right) - 2 \frac{B^2(y)}{y + B^2(y)} \right] + \right. \\ & + \frac{3\alpha_0}{4\pi} \int_1^{\Lambda^2/m^2} dx dy \frac{xy B(x) B(y)}{(x + B^2(x))(y + B^2(y))} \left(\frac{\Theta(x-y)d(x)}{x} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\Theta(y-x)d(y)}{y} \right) \right\}, \quad x = \frac{p^2}{m^2}, \quad y = \frac{p'^2}{m^2}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Воспользовавшись уравнением (3.36), приведем выражение (3.41)

к виду

$$\Omega(m) = -\frac{m^4}{8\pi^2} \int_1^{\Lambda^2/m^2} dy y \left[\ln\left(1 + \frac{B^2(y)}{y}\right) - \frac{B^2(y)}{y + B^2(y)} \right] \quad (3.42)$$

В (3.41) и (3.42) мы сохранили только вклад от области $m^2 < p^2 < \Lambda^2$. Вычисляя теперь $\Omega(m)$ с помощью выражения (3.39) для $B(p^2)$ и учитывая соотношение (3.40), имеем

$$\Omega(m) = -\frac{3m^4}{160\pi d} < 0 \quad (3.43)$$

Таким образом, в квантовой электродинамике с обрезанием решение с нарушенной киральной симметрией ($m \neq 0$) является энергетически более выгодным, чем кирально-симметричное решение ($m = 0$). Отметим также, что варьировать потенциал по параметру m здесь нельзя по другой причине, чем в случае электродинамики ДБВ: значение m фиксируется уравнением Хингера-Дайсона.

Г л а в а I V

СПЕКТР УРАВНЕНИЙ БЕТЕ-СОЛИТЕРА И ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ ВАКУУМА В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ ПОЛЯ

Решения с динамически нарушенными симметриями являются аномальными решениями симметричных квантово-полевых уравнений. Хорошо известно, что в квантовой статистике появление аномального решения имеет простой физический смысл: это есть проявление неустойчивости симметричного основного состояния системы относительно возмущений, нарушающих исходную симметрию лагранжиана.

Простой пример - ферромагнетик (при нулевой температуре), у которого симметричное (относительно вращений) основное состояние с неупорядоченной ориентацией спинов (аналог нормального решения) является неустойчивым и разрушается при приложении сколь угодно слабого анизотропного возмущения, переходя в упорядоченное состояние, в котором все спины ориентированы одинаково (аналог аномального решения, нарушающего симметрию лагранжиана).

Такую же природу имеет и явление сверхпроводимости: в этом случае основное состояние неустойчиво относительно возмущения, нарушающего калибровочную инвариантность. С другой стороны, как известно [63-64], неустойчивость нормальной фазы в теории сверхпроводимости проявляется в образовании электронами связанных состояний ("куперовских пар"). Последующая перестройка системы в устойчивую фазу приводит к возникновению щели в спектре однофермионных возбуждений.

В работе [84] было указано на близкую аналогию проблемы неустойчивости вакуума безмассовой электродинамики относительно спонтанной генерации массы электрона и проблемы неустойчивости вакуума относительно спонтанного рождения e^+e^- -пар в ситуации

падения на кулоновский центр $\frac{ze^2}{z}$ при сверхкритических зарядах $z > z_c \sim 137$ [65]. В [84] рассматривалась задача связывания безмассового электрона кулоновским центром и было показано, что при $d_A \equiv \frac{e_A^2}{4\pi} > 1$ в спектре системы появляется квазистационарный уровень, свидетельствующий о неустойчивости основного состояния системы. Условие $d_A > 1$ согласуется с выводом, полученным в первой главе, о том, что динамическая генерация массы электрона в квантовой электродинамике возможна лишь при достаточно большой затравочной константе связи: $d_A > d_c \sim 1$.

Следующий шаг состоит в рассмотрении чисто полевой задачи связывания двух безмассовых частиц, между которыми действует сила притяжения. Физически ясно, что если притяжение будет достаточно сильным, то отрицательная энергия взаимодействия может преодолеть положительную кинетическую энергию двух частиц, и образуется связанное состояние ("куперовская пара") с отрицательной энергией. Это означает, что нормальный вакуум становится неустойчивым относительно спонтанного образования бесконечного числа таких пар. Конденсация куперовских пар приведет к понижению энергии вакуума и возникновению нового стабильного вакуума с массивным спектром возбуждений.

При учете коллективных взаимодействий, как известно [63], устойчивых связанных состояний более не существует. Куперовская пара в этом случае является уже как "таххионный" полюс (состояние с мнимой энергией) у двухчастичных функций Грина.

Настоящая глава посвящена исследованию проблемы устойчивости нормального вакуума в безмассовой электродинамике и безмассовой хромодинамике. Как будет показано, в этих теориях возможен эффект, аналогичный феномену Купера в теории сверхпроводимости, а именно: при определенных условиях уравнения Бете-Солпитера допускают тахионное решение в спектре двухчастичных

связанных состояний.

§ I. Неустойчивость вакуума безмассовой электродинамики

Рассмотрим уравнение Бете-Салпитера (БС) для волновой функции $\chi_{\alpha\beta}(q, P)$ связанного фермион-антифермионного состояния

$$\left[S^{-1}(q + \frac{1}{2}P) \chi(q, P) S^{-1}(q - \frac{1}{2}P) \right]_{\alpha\beta} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} K_{\alpha\beta; \alpha'\beta'}(q, k; P) \chi(k, P) \quad (4.1)$$

где q и P - относительный и полный импульс двух частиц, Λ - регуляризирующий параметр обрезания, S - пропагатор фермиона, $K_{\alpha\beta; \alpha'\beta'}(q, k, P)$ - ядро.

$$\chi_{\alpha\beta}(q, P) = \int dx e^{iqx} \langle 0 | T \Psi_{\alpha}(\frac{x}{2}) \bar{\Psi}_{\beta}(-\frac{x}{2}) | P \rangle \quad (4.2)$$

В лестничном приближении в калибровке Фейнмана

$$K_{\alpha\beta; \alpha'\beta'}(q, k; P) = -e^2 (\gamma^{\mu})_{\alpha\alpha'} (\gamma^{\nu})_{\beta'\beta} \mathcal{D}_{\mu\nu}(q-k), \quad (4.3)$$

$$S^{-1}(p) = -i \gamma^{\mu} p_{\mu}, \quad \mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = \frac{g_{\mu\nu}}{i k^2}.$$

Общая матричная структура функции χ имеет вид

$$\chi(q, P) = \chi_S + \gamma_{\mu} \chi_{\nu}^{\mu} + \sigma_{\mu\nu} \chi_T^{\mu\nu} + \gamma_{\mu} \gamma_5 \chi_A^{\mu} + \gamma_5 \chi_P \quad (4.4)$$

Подстановка выражения (4.4) в уравнение Бете-Салпитера (4.1) приводит к следующей системе уравнений для функций $\chi_S, \chi_{\nu}^{\mu}, \chi_T^{\mu\nu}$,

$$\chi_A^{\mu}, \chi_P :$$

$$(q^2 - \frac{1}{4}P^2)\chi_S(q, P) + i(P_\mu q_\nu - q_\mu P_\nu)\chi_T^{mv}(q, P) = \frac{4e_\kappa^2}{i(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(q-k)^2} \chi_S(k, P) \quad (4.5)$$

$$i(q^\mu P^\nu - P^\mu q^\nu)\chi_S(q, P) + P_\lambda q_\rho \varepsilon^{\lambda\rho\mu\nu} \chi_\rho(q, P) + 2(q^2 - \frac{1}{4}P^2)\chi_T^{mv}(q, P) - \\ - 4q_\lambda(q^\mu \chi_T^{\lambda\nu} - \chi_T^{\lambda\mu} q^\nu) + P_\lambda(P^\mu \chi_T^{\lambda\nu} - \chi_T^{\lambda\mu} P^\nu) = 0, \quad (4.6)$$

$$2q_\mu q_\nu \chi_V^y(q, P) - (q^2 - \frac{1}{4}P^2)\chi_V^m(q, P) - \frac{1}{2}P^\mu P_\lambda \chi_V^\lambda(q, P) - \\ - iP_\lambda q_\rho \varepsilon^{\lambda\rho\mu\nu} \chi_{VA}(q, P) = -\frac{2e_\kappa^2}{i(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(q-k)^2} \chi_V^m(k, P), \quad (4.7)$$

$$iP^\lambda q^\rho \varepsilon_{\lambda\rho\nu\mu} \chi_V^y(q, P) - (q^2 - \frac{1}{4}P^2)\chi_{MA}(q, P) + 2q_\mu q_\nu \chi_A^y(q, P) - \\ - \frac{1}{2}P_\mu P_\nu \chi_A^y(q, P) = \frac{-2e_\kappa^2}{i(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(q-k)^2} \chi_{MA}(k, P), \quad (4.8)$$

$$(q^2 - \frac{1}{4}P^2)\chi_\rho(q, P) - P^\lambda q^\rho \varepsilon_{\lambda\rho\mu\nu} \chi_T^{mv}(q, P) = \frac{e_\kappa^2}{i(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(q-k)^2} \chi_\rho(k, P) \quad (4.9)$$

Трансформационные свойства волновой функции относительно преобразования пространственной (P) и зарядовой (C) четности нетрудно получить, используя соответствующие трансформационные свойства операторов $\Psi, \bar{\Psi}$ и связанного состояния $|P\rangle$.

Имеем

$$y_0 \chi(q_0, -\vec{q}; P_0, -\vec{P}) y_0 = h_p \chi(q_0, \vec{q}; P_0, \vec{P}), \quad (4.10)$$

$$C \bar{\chi}(-q, P) C^{-1} = h_c \chi(q, P), \quad C^{-1} \gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T}, \quad (4.11)$$

где h_p и h_c - пространственная и зарядовая четности связанного состояния, C - матрица зарядового сопряжения.

Используя (4.10), (4.11) для связанного состояния $|P\rangle = 0^{++}$, получаем

$$\chi_p(q, P) = 0, \quad \chi_A^{\sim}(q, P) = 0,$$

$$\chi_v^{\sim}(q, P) = P^{\sim} \chi_{v1}(P^2, q^2, Pq) + q^{\sim} \chi_{v2}(P^2, q^2, Pq), \quad (4.12)$$

$$\chi_T^{\sim\nu}(q, P) = (P^{\sim} q^{\nu} - q^{\sim} P^{\nu}) \chi_T(P^2, q^2, Pq),$$

• для связанного состояния $\gamma^{pc} = 0^{-+}$

$$\chi_s(q, P) = 0, \quad \chi_v^{\sim}(q, P) = 0,$$

$$\chi_A^{\sim}(q, P) = P^{\sim} \chi_{A1}(P^2, q^2, Pq) + q^{\sim} \chi_{A2}(P^2, q^2, Pq), \quad (4.13)$$

$$\chi_T^{\sim\nu}(q, P) = \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} P_{\sigma} q_{\rho} \chi_T^A(P^2, q^2, Pq),$$

где $\chi_s, \chi_p, \chi_{vi}, \chi_{Ai}, \chi_T, \chi_T^A$ - скалярные функции.

В силу γ_s -инвариантности безмассовой электродинамики система уравнений для функций (4.12) и система уравнений для функций (4.13) совпадает. В дальнейшем будем рассматривать систему для состояния 0^{++} , которая имеет следующий вид

$$(q^2 - \frac{1}{4} P^2) \chi_s(P^2, q^2, Pq) + 2i [P^2 q^2 - (Pq)^2] \chi_T(P^2, q^2, Pq) =$$

$$= \frac{\alpha_A}{i\pi^3} \int^{\wedge} \frac{d^4 k}{(q-k)^2} \chi_s(P^2, k^2, Pk), \quad (4.14)$$

$$i \chi_s(P^2, q^2, Pq) + 2(q^2 - \frac{1}{4} P^2) \chi_T(P^2, q^2, Pq) = 0, \quad (4.15)$$

$$[2q^{\sim} q^{\rho} - P^{\sim} (q^2 + \frac{1}{4} P^2)] \chi_{v1}(P^2, q^2, Pq) + [q^{\sim} (q^2 + \frac{1}{4} P^2) - \frac{1}{2} P^{\sim} Pq] \times$$

$$\times \chi_{v2}(P^2, q^2, Pq) = -\frac{\alpha_A}{2i\pi^3} \int^{\wedge} \frac{d^4 k}{(q-k)^2} [P^{\sim} \chi_{v1}(P^2, k^2, Pk) + k^{\sim} \chi_{v2}(P^2, k^2, Pk)] \quad (4.16)$$

Система уравнений (4.14)-(4.16) расщепляется на две группы уравнений для функции χ_S, χ_T (уравнения (4.14), (4.15)) и для функции χ_{Vi} ((4.16)). Так как

$$(1 \pm \gamma_5) [\chi_S + \sigma_{\mu\nu} \chi_T^{\mu\nu}] (1 \mp \gamma_5) = 0,$$

$$(1 \pm \gamma_5) [\gamma_\mu \chi_V^\mu] (1 \pm \gamma_5) = 0,$$

то функции χ_{V1}, χ_{V2} относятся к связанному состоянию фермиона и антифермиона разной, а функции χ_S, χ_T - одинаковой спиральности. Массовая вершина $\bar{\Psi}\Psi = \bar{\Psi}_L \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Psi_L$ связывает фермион и антифермион одинаковой спиральности. Поэтому нестабильность вакуума, ведущая к спонтанному появлению массы фермиона, должна отразиться в наличии тахионного решения системы уравнений для функции χ_S, χ_T . Эта система сводится к одному уравнению для функции χ_S и в евклидовой области ($q_0 \rightarrow iq_0, P_0 \rightarrow iP_0$) имеет вид

$$\frac{(q^2 + \frac{1}{4}P^2)^2 - (Pq)^2}{q^2 - \frac{1}{4}P^2} \chi_S(P^2, q^2, Pq) = \frac{d_K}{\pi^3} \int \frac{d^4K}{(q-K)^2} \chi_S(P^2, K^2, P_K) \quad (4.17)$$

Разложим функцию χ_S и ядро $\frac{1}{(q-K)^2}$ по четырехмерным сферическим гармоникам [85]

$$\chi_S(q, P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^n \sum_{m=-\ell}^{\ell} G_{n\ell m}(q^2, P^2) Y_{n\ell m}(\Omega_q) \quad (4.18)$$

$$\frac{1}{(q-K)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^n \sum_{m=-\ell}^{\ell} K_n(q^2, K^2) \cdot \frac{2\pi^2}{n+1} Y_{n\ell m}(\Omega_q) \times \quad (4.19)$$

$$\times Y_{n\ell m}(\Omega_K) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(q^2, K^2) C_n^1\left(\frac{q \cdot K}{|q||K|}\right).$$

Выражения для четырехмерных сферических гармоник Y через полиномы Гегенбауэра приведены в Приложении Б.

Используя теперь соотношения ортогональности (Б.5) для функций $Y_{n\lambda m}$ и рекуррентное соотношение [86]

$$2z C_n^1(z) = C_{n+1}^1(z) - C_{n-1}^1(z)$$

для полиномов Гегенбауэра, получаем для состояния с $z = 0$ бесконечную зацепляющуюся цепочку уравнений

$$\frac{(x+a)^2}{x-a} G_0(x) - \frac{ax}{x-a} (G_0(x) + G_2(x)) = \frac{d_A}{\pi} \int_0^1 dy y K_0(x,y) G_0(y), \quad (4.20)$$

$$\frac{(x+a)^2}{x-a} G_n(x) - \frac{ax}{x-a} (G_{n-2}(x) + 2G_n(x) + G_{n+2}(x)) = \frac{d_A}{\pi(n+1)} \int_0^1 dy y K_n(x,y) G_n(y) \quad (4.21)$$

где $x = \rho^2/\Lambda^2$, $y = \kappa^2/\Lambda^2$, $a = \rho^2/4\Lambda^2$. Ядра $K_n(x,y)$ вычислены в Приложении Б и имеют вид

$$K_n(x,y) = \frac{\Theta(x-y)}{x} \left(\frac{y}{x}\right)^{n/2} + \frac{\Theta(y-x)}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^{n/2} \quad (4.22)$$

Примем, что параметр $a \ll 1$ (ниже это предположение будет оправдано). Тогда из структуры системы (4.20), (4.21) следует, что можно искать решение с $G_{n+2}/G_n \sim a \ll 1$ ($n=0,2,4,\dots$). Действительно, пусть, например, G_0 - величина порядка константы в разложении по параметру a и $G_2 \sim a$. Тогда в уравнении (4.20) можно пренебречь гармоникой G_2 по сравнению с гармоникой G_0 и для G_0 получаем линейное однородное уравнение. Для G_2 уравнение (4.21) дает линейное уравнение с неоднородным членом, пропорциональным $a G_0$; итерационное решение этого уравнения даст $G_2 \sim a$, таким образом рассматриваемое

приближение является самосопряженным.

В первом порядке по α уравнение (4.20) становится эквивалентным дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d}{dx} \left\{ x^2 \frac{d}{dx} \left[\frac{x(x+a)}{x-a} G_0(x) \right] \right\} + \frac{d_x}{\pi} x G_0(x) = 0 \quad (4.23)$$

с граничными условиями

$$x^2 \frac{d}{dx} \left[\frac{x(x+a)}{x-a} G_0(x) \right] \Big|_{x=0} = 0, \quad (4.24)$$

$$\left\{ x \frac{d}{dx} \left[\frac{x(x+a)}{x-a} G_0(x) \right] + \frac{x(x+a)}{x-a} G_0(x) \right\} \Big|_{x=1} = 0 \quad (4.25)$$

Общее решение уравнения (4.23) имеет вид [87]

$$\frac{x(x+a)}{x-a} G_0 = C_1 \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\frac{-1+\nu}{2}} F\left(\frac{\nu+\mu}{2}, \frac{\nu-\mu}{2}, 1+\nu; \frac{-x}{\alpha} \right) + C_2 \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\frac{-1+\nu}{2}} F\left(-\frac{\nu+\mu}{2}, \frac{\mu-\nu}{2}, 1+\nu; \frac{-x}{\alpha} \right) \quad (4.26)$$

где $F(a, b, c; x)$ - гипергеометрическая функция,

$$\nu = \sqrt{1 + \frac{4d_x}{\pi}}, \quad \mu = \sqrt{1 - \frac{4d_x}{\pi}}.$$

Из граничного условия (4.24) $C_2 = 0$, а условие (4.25) приводит к уравнению

$$\frac{(-\mu+1)\Gamma(-\mu)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu-\mu}{2}\right)} \alpha^{\frac{1+\mu}{2}} + \frac{(\mu+1)\Gamma(\mu)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu+\mu}{2}\right)} \alpha^{\frac{1-\mu}{2}} = 0 \quad (4.27)$$

(Γ - гамма-функция Эйлера). Это уравнение не имеет решений $\alpha \ll 1$ при $d_x < d_c = \frac{\pi}{4}$. При $d_x > d_c = \frac{\pi}{4}$ оно эквивалентно следующему уравнению

$$\begin{aligned} & \operatorname{arg} \Gamma(-i\mathcal{V}) + \operatorname{arg} \Gamma(1-i\mathcal{V}) - \operatorname{arg} \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \frac{i\mathcal{V}}{2}\right) - \\ & - \operatorname{arg} \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2} - \frac{i\mathcal{V}}{2}\right) - \frac{i\mathcal{V}}{2} \ln \frac{1}{a} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\mathcal{V} = \sqrt{-\mu}.$$

Вблизи критического значения d_c , когда $\frac{d_n - d_c}{d_n} \ll 1$, т.е. при $\mathcal{V} \rightarrow 0$, решение уравнения (4.28) имеет вид

$$a = \frac{\rho^2}{4\Lambda^2} = c \exp\left[-\frac{2\pi n}{\sqrt{4d_0/\pi} - 1}\right] \ll 1, \quad (4.29)$$

$$n = 1, 2, \dots; \quad c \simeq 6.$$

Так как вектор ρ - евклидовский, то в спектре системы имеются тахионы, т.е. вакуум безмассовой фазы неустойчив. Как и в теории сверхпроводимости, значение $(\rho^2)^{-1/2}$ определяет время перестройки вакуума t , а $(\rho^2)^{1/2}$ - величину энергетической щели, т.е. массу физического фермиона. С каждым значением $n \geq 1$ связан свой канал перестройки, причем, как следует из (4.29), соотношение времен перестройки для соседних каналов

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{1}{2} a^{1/2} \ll 1$$

Поэтому вероятность перестройки для канала с $n \geq 2$ подавлена по сравнению с вероятностью для канала с $n = 1$.

При снятии обреза ($\Lambda \rightarrow \infty$) конечное значение для ρ^2 возможно лишь при

$$d_0 \simeq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^3}{\ln^2 \frac{4\Lambda^2 c}{\rho^2}} \rightarrow d_c = \frac{\pi}{4}, \quad (4.30)$$

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} \rightarrow 0.$$

Таким образом, в пределе $\Lambda = \infty$ остается лишь два тахиона с квантовыми числами 0^{++} и 0^{-+} , соответственно^{ж)}.

Как уже отмечалось в литературе [84], нестабильность вакуума безмассовой электродинамики при $d_A > d_c$ тесно связана с неустойчивостью вакуума относительно спонтанного рождения e^+e^- пар в ситуации падения на кулоновский центр $\frac{Ze^2}{z}$ при сверхкритических зарядах $Z > Z_c \sim 137$ [65]. Действительно, при снятии обрезания ($\Lambda \rightarrow \infty$), когда заряд $d_A > d_c$ и фиксирован, энергетическая цепь $(p^2)^{1/2}$ неограниченно растет; в пределе $\Lambda = \infty$ в системе отсутствует основное состояние. Как и для кулоновского потенциала с $Z > Z_c$, здесь при $d_A > d_c$ в отсутствие обрезания имеет место коллапс^{жж)}.

ж) Ситуация здесь подобна той, которая имеет место в модели Голдстоуна [55] с

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^* + \frac{1}{2} \mu^2 \varphi \varphi^* - \frac{\lambda}{4!} (\varphi \varphi^*)^2, \quad \varphi = \varphi_1 + i\varphi_2, \quad \mu^2, \lambda > 0$$

В нормальной фазе здесь также имеется два тахиона, один из которых связан с компонентой φ_1 , а другой — с φ_2 . В электродинамике роль φ_1 и φ_2 играют составные операторы $\bar{\Psi}\Psi (J^{PC} = 0^{++})$ и $\bar{\Psi}\gamma_5\Psi (J^{PC} = 0^{-+})$.

жж) При достаточно большом заряде d_A вакуум массивной электродинамики в принципе также может стать нестабильным. Однако, по аналогии с кулоновским центром следует ожидать, что критическое значение d_c растет с увеличением массы фермиона (в случае кулоновского центра критическое значение $Z_c \approx 137$ [84] для безмассового фермиона и $Z_c \approx 180$, когда масса фермиона равна его физической массе [65]). Перестройка вакуума приводит к росту массы, и

Фиксированный затравочный заряд $d_A \equiv d_c$ в электродинамике без обрезания можно рассматривать как полевой аналог критического заряда $Z_c e^2$: заряд не может быть больше d_c , так как в этом случае масса фермиона $m = \infty$; он не может быть и меньше d_c , т.к. в этом случае $m = 0$, и теория (с затравочной массой $m_0 = 0$), как показано в [88], становится тривиальной (нет взаимодействия).

Как известно из работы Гелл-Манна-Лоу [32], в квантовой электродинамике без обрезания значение затравочной константы связи должно быть фиксировано. Это значение определяется нулем Z_0 ренормгрупповой функции $\Psi(z)$, связанной с фотонным пропагатором. Возникающий здесь критический заряд d_c можно отождествить с зарядом Гелл-Манна-Лоу.

Нетривиальной задачей является выход за рамки лестничного приближения, используемого в настоящей главе. Укажем, однако, что эффект поляризации вакуума, в основном, сводится к замене затравочной константы связи d_A на ренормгрупповую функцию d_λ , где d_λ определяет интенсивность взаимодействия на расстояниях $z \sim 1/\lambda$, причем, при $\lambda = \Lambda$ значение $d_{\lambda=\Lambda}$ есть затравочная константа d_A . Так как эффект неустойчивости, так же, как и явление падения на центр определяется в основном взаимодействием на малых расстояниях, где $d_\lambda \approx d_A$, то по всей вероятности неустойчивость должна сохраняться и при выходе за рамки лестничного приближения.

§ 2. Условия устойчивости вакуума безмассовой хромодинимики

В настоящее время существует уверенность [89,90], что физика элементарных частиц описывается неабелевыми калибровочными теориями: это теория типа Зайнберга-Салама [13,14] для слабых

при неизменной константе связи d_A основное состояние системы становится стабильным.

и электромагнитных взаимодействий и квантовая хромодинамика [91] для сильных взаимодействий. Поля Янга-Миллса [92] составляют обязательный элемент этих теорий. Несмотря на то, что многие аспекты теории полей Янга-Миллса (квантование [19,20] пространства Уорда-Славнова [96,97], ненормируемость [19,21,22], асимптотическая свобода [37]) достаточно хорошо проанализированы, вопросы динамики этих полей только начинают исследоваться. Одни из основных вопросов здесь - это определение и исследование свойств основного состояния (вакуума) и спектра возбуждений. В квантовой хромодинамике проблема вакуума теснейшим образом связана с проблемой удержания цветных зарядов (кварков и глюонов) [98,99].

Основная задача настоящего параграфа состоит в исследовании проблемы устойчивости нормального вакуума в безмассовой квантовой хромодинамике. Подход, развиваемый здесь, является непосредственным обобщением рассмотрения, проведенного в § I настоящей главы в безмассовой электродинамике. Напомним, что та же нестабильность вакуума явилась следствием возникновения тахионных решений в спектре связанных фермион-антифермионных состояний. Существенно при этом было наличие (как и в теории сверхпроводимости) сил притяжения для образования связанного состояния двух частиц.

В случае теории Янга-Миллса имеет место притяжение между двумя векторными частицами в синглетном (по цвету) канале. Притягивающая сила возникает из-за диаграммы с обменом векторной частицей (рис. 3а). Контактная диаграмма (рис. 3б) приводит к отталкиванию. Ясно, что если притяжение окажется сильнее отталкивания, то может возникнуть связанное состояние, которое в случае безмассовых составляющих частиц с необходимостью будет тахионом. Нормальный вакуум будет нестабильным относительно спонтанного рождения таких состояний.

Как оказывается, в случае чистой теории Янга-Миллса (без фермионов) такая ситуация действительно имеет место. Как следствие, эта нестабильность должна привести к генерации массы у векторной частицы.

Включение безмассовых кварков меняет всю ситуацию коренным образом. Такого в этом случае возникает только, если число (N) кварковых мультиплетов не превышает некоторого критического значения N_c , которое для группы $SU(N)$ оказывается равным $\frac{9}{64} \frac{N^3}{N^2-1}$. При $N \leq N_c$ в результате перестройки вакуума бозоны приобретают массу; при $N > N_c$ все частицы остаются безмассовыми.

Лагранжиан безмассовой квантовой хромодинамики имеет следующий вид (см., например, [90,100])

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\Psi}^j i\gamma^\mu (\partial_\mu - g A_\mu^a t^a) \Psi^j - \frac{1}{2d_c} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 + c^{*a} \square c^a + g f^{abc} \partial^\mu c^{*a} c^b A_\mu^c,$$

где $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c,$

t^a - матрица фермионного представления (R) калибровочной группы G , f^{abc} - структурные константы группы. Векторные поля A_μ^a преобразуются (относительно глобальных калибровочных преобразований) по присоединенному представлению компактной группы Ли, инфинитезимальные генераторы которой $\{T^a\}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \quad (T^c)_{ab} = f^{acb}.$$

Ψ^j - фермионные поля, где индекс $j = 1, 2, \dots, n$ (число "ароматов"). Член $-\frac{1}{2de} (\partial \tilde{A}_\mu^a)^2$ фиксирует калибровку. Для сохранения унитарности вводятся, согласно Фаддееву и Попову [93], вспомогательные нефизические поля $C^a(x)$ (духи). Правила Фейнмана для лагранжиана квантовой хромодинамики можно найти, например, в [52].

Система уравнений Бете-Салпитера для волновых функций

$\Psi_i(q, P)$ связанного бозон-бозонного ($i = V$), дух-духового ($i = G$) и ферми-антифермионного ($i = F$) состояния имеет следующий вид

$$\Psi_{V\mu\nu}^{ab}(q, P) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_{\mu\lambda}^{ac}(q + \frac{1}{2}P) K_{V\nu\lambda\rho; \mu'\nu'}^{cd; a'b'}(q, k; P) \Psi_{V\mu'\nu'}^{a'b'}(k, P) \times$$

$$\times D_{\rho\nu}^{db}(q - \frac{1}{2}P) + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_{\mu\lambda}^{ac}(q + \frac{1}{2}P) K_{VG\lambda\rho; \mu'\nu'}^{cd; a'b'}(q, k; P) \Psi_G^{a'b'}(k, P) \times \quad (4.31)$$

$$\times D_{\rho\nu}^{db}(q - \frac{1}{2}P) + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_{\mu\lambda}^{ac}(q + \frac{1}{2}P) K_{VF\lambda\rho; \alpha\beta}^{cd; mn}(q, k, P) \Psi_{F\alpha\beta}^{mn}(k, P) D_{\rho\nu}^{db}(q - \frac{1}{2}P);$$

$$\Psi_G^{ab}(q, P) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} G^{ac}(q + \frac{1}{2}P) K_{GV\mu\nu}^{cd; a'b'}(q, k, P) \Psi_{V\mu\nu}^{a'b'}(k, P) G^{db}(q - \frac{1}{2}P) +$$

$$+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} G^{ac}(q + \frac{1}{2}P) K_{GG}^{cd; a'b'}(q, k, P) \Psi_G^{a'b'}(k, P) G^{db}(q - \frac{1}{2}P) + \quad (4.32)$$

$$+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} G^{ac}(q + \frac{1}{2}P) K_{GF\alpha\beta}^{cd; mn}(q, k, P) \Psi_{F\alpha\beta}^{mn}(k, P) G^{db}(q - \frac{1}{2}P);$$

$$\Psi_{F\alpha\beta}^{mn}(q, P) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_{\alpha\alpha'}^{mm'}(q + \frac{1}{2}P) K_{FV\alpha'\beta'; \lambda\rho}^{m'n'; ab}(q, k; P) \Psi_{V\lambda\rho}^{ab}(k, P) \times$$

$$\times \int_{\beta'\beta}^{n'n} (q - \frac{1}{2}P) + \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \int_{\alpha\alpha'}^{mm'} (q + \frac{1}{2}P) K_{FG\alpha'\beta'}^{m'n';ab} (q, K; P) \Psi_G^{ab}(K, P) \times$$

$$\times \int_{\beta'\beta}^{n'n} (q - \frac{1}{2}P) + \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \int_{\alpha\alpha'}^{mm'} (q + \frac{1}{2}P) K_{FF\alpha'\beta';\gamma\delta}^{m'n';l_2} (q, K; P) \quad (4.33)$$

$$\times \Psi_{F\gamma\delta}^{-l_2}(K, P) \int_{\beta'\beta}^{n'n} (q - \frac{1}{2}P).$$

Здесь D, G, S - пропагаторы векторной, бозонной и фермионной частицы, соответственно, K_{ij} - ядра; q и P - относительный и полный импульс двух частиц, Λ - регуляризирующий параметр обрезания, который можно устранить в конечных выражениях, переходя к перенормированным величинам. Индексы a, b, \dots, m, n , относятся к цветной группе $SU(N)$. μ, ν, \dots - лоренцевские индексы, α, β, \dots - спинорные индексы. На рис. 2 приведено графическое изображение системы (4.31)-(4.32). Схематический вывод этой системы дан в Приложении В, где приведены также выражения для ядер K_{ij} в логарифмическом приближении (рис. 3).

Общая структура волновых функций Ψ_i для бесцветного связанного состояния $\gamma^{PC} = 0^{++}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_{V\mu\nu}^{ab}(q, P) &= \int dx e^{iqx} \langle 0 | T A_\mu^a(\frac{x}{2}) A_\nu^b(-\frac{x}{2}) | P \rangle = \\ &= \delta^{ab} \left[(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}) A_1 + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} A_2 + P_\mu P_\nu A_3 + \right. \\ &\left. + (q_\mu P_\nu + P_\mu q_\nu) A_4 + (q_\mu P_\nu - P_\mu q_\nu) A_5 \right], \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\Psi_G^{ab}(q, P) = \int dx e^{iqx} \langle 0 | T C^a(\frac{x}{2}) C^{*b}(-\frac{x}{2}) | P \rangle = \delta^{ab} B, \quad (4.35)$$

$$\Psi_{F\alpha\beta}^{m\bar{n}}(q, P) = \int dx e^{iqx} \langle 0 | T \Psi_{\alpha}^m(\frac{x}{2}) \bar{\Psi}_{\beta}^{\bar{n}}(-\frac{x}{2}) | P \rangle \quad (4.36)$$

$$= \delta^{m\bar{n}} [\chi_S + \gamma_M \chi_V + \epsilon_{\mu\nu} \chi_T]_{\alpha\beta},$$

где

$$\chi_V(q, P) = P^{\mu} \chi_1 + q^{\mu} \chi_2,$$

$$\chi_T^{\mu\nu}(q, P) = (P^{\mu} q^{\nu} - q^{\mu} P^{\nu}) \chi_7.$$

$A_1, A_5, B, \chi_S, \chi_1, \chi_2, \chi_7$ - скалярные функции инвариантов P^2, q^2, Pq .
 Условия зарядовой С-чётности, а также Бозе- и Ферми-статистики приводят к тому, что функции $A_1, A_2, A_3, A_5, \chi_S, \chi_2, \chi_7$ - чётные, а функции B, A_4, χ_1 - нечётные по переменной Pq . Отсюда и из разложений (4.34)-(4.36) следует, что в пределе $P=0$ остаются лишь функции $A_1, A_2, \chi_2, \chi_S, \chi_7$. Более того, в калибровке Ландау условие поперечности для $\Psi_{\nu\mu}$ приводит к тому, что при $P=0$ функция A_2 также равна нулю.

В дальнейшем система уравнений (4.31)-(4.33) будет исследоваться в лестничном приближении в калибровке Ландау при условии $P^2/4\lambda^2 \equiv \alpha \ll 1$.

В этом приближении уравнения для функций χ_S, χ_7 отщепляются от уравнений для функций A_i, χ_i, B и система для последних в низшем порядке по параметру α включает лишь две функции (A_1 и χ_2) и в евклидовой области ($q_0 \rightarrow iq_0, P_0 \rightarrow iP_0$) имеет вид:

$$[q^4 + \frac{1}{2} P^2 q^2 - (Pq)^2] \varphi_i(q, P) = \frac{g^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{(q-k)^2} K_{ij}(q, k) \varphi_j(k, P) \quad (4.37)$$

$$i, j = 1, 2, \quad \varphi_1 \equiv A_1, \quad \varphi_2 \equiv \chi_2.$$

а ядра

$$K_{11}(q, k) = \frac{C_2(G)}{3} \left\{ 12 \left[q^2 + k^2 - \frac{(kq)^2}{q^2} - \frac{(kq)^2}{k^2} \right] + \right. \\ \left. + 4 \frac{[k^2 q^2 - (kq)^2][2k^2 q^2 + (kq)^2]}{(q-k)^2 q^2 k^2} - \frac{27}{4} (q-k)^2 \right\}, \quad (4.38a)$$

$$K_{12}(q, k) = -\frac{8n}{3} \frac{T(R)}{C_2(R)} K_{21}(k, q) = \frac{4n}{3} \left\{ -k^2 + 3kq - 2 \frac{(kq)^2}{q^2} \right\}, \quad (4.38b)$$

$$K_{22}(q, k) = C_2(R) \left\{ -qk - 2 \frac{[k(q-k)][q(q-k)]}{(q-k)^2} \right\} \quad (4.38b)$$

Здесь n - число кварковых мультиплетов, $C_2(G)$ и $C_2(R)$ - значения квадратичных операторов Казимира, для бозонного и фермионного представления группы G :

$$\sum_{c,d} f^{acd} f^{bcd} = C_2(G) \delta^{ab}, \\ \sum_a (t^a t^a)^{mn} = C_2(R) \delta^{mn}, \\ \text{tr} (t^a t^b) = T(R) \delta^{ab},$$

(R) и $T(R)$ связаны соотношением

$$\text{tr} T(R) = d(R) C_2(R)$$

где $d(R)$ - размерность представления R , τ - размерность (число генераторов) группы. В случае четной группы $SU(N)$ для векторного представления $d(R) = N$, $\tau = N^2 - 1$, $T(R) = \frac{1}{2}$, $C_2(R) = \frac{N^2 - 1}{2N}$.

В выражении (38a) первые два слагаемых происходят из диаграмм с обменом глюоном, последнее слагаемое представляет контактное четырехглюонное взаимодействие (рис. 3a), и оно дает отрицательный вклад по сравнению с первыми двумя слагаемыми.

Заметим также, что ядра $K_{12}(q, k)$ и $K_{21}(q, k)$, представляющие одно и то же взаимодействие (обмен фермионом, см. рис. 3б и рис. 3в), входят в уравнения (4.37) с разными знаками. Дополнительный знак минус возникает здесь вследствие того, что в уравнении (4.31) слагаемое, связывающее бозонную (Ψ_V) и фермионную (Ψ_F) волновые функции, содержит дополнительное интегрирование по фермионной петле в отличие от аналогичного слагаемого, связывающего Ψ_F и Ψ_V , в уравнении (4.33). (См. графическое изображение уравнений (4.31) и (4.33) на рис. 2).

В Приложении В приведен аналитический вывод выражений для ядер K_{VF} и K_{FV} в логарифмическом приближении; из формул (B.21), (B.24) непосредственно следует, что K_{VF} содержит дополнительный знак минус по сравнению с K_{FV} . Как мы увидим, этот знак окажется существенным для дальнейшего.

Разложим теперь функции $\Psi_i(q, p)$ и ядра по четырехмерным сферическим гармоникам

$$\Psi_i(q, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^n \sum_{m=-\ell}^{\ell} G_i^{(n, \ell, m)}(q^2, p^2) Y_{n, \ell, m}(\Omega_q),$$

$$K_{ij}(q^2, k^2, q, k) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{ij}^{(n)}(q^2, k^2) C_n^1\left(\frac{q \cdot k}{|q||k|}\right) = \quad (4.39)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^n \sum_{m=-\ell}^{\ell} T_{ij}^{(n, \ell, m)}(q^2, k^2) \cdot \frac{2\pi^2}{n+1} Y_{n, \ell, m}(\Omega_q) Y_{n, \ell, m}(\Omega_k)$$

Вспомогательным теперь соотношением ортогональности (Б.5) для Y , находим для состояния с $\ell = 0$, что каждое из уравнений (4.37) переходит в бесконечную записываемую цепочку уравнений вида

$$x(x+2a)G_i^{(0)} - ax(G_i^{(0)} + G_i^{(2)}) = \lambda \int_0^1 dy y T_{ij}^{(0)}(x, y) G_j^{(0)}(y), \quad (4.40)$$

$$x(x+2a)G_i^{(n)} - \alpha x(G_i^{(n-2)} + 2G_i^{(n)} + G_i^{(n+2)}) = \lambda \int_0^1 dy y T_{ij}^{(n)}(x,y) G_j^{(n)}(y) \quad (4.41)$$

$n \geq 2$

где $x = g^2/\Lambda^2$, $y = k^2/\Lambda^2$, $\lambda = g^2/4\pi^2$. Ядра $T_{ij}^{(n)}(x,y)$ - некоторые функции. Из структуры системы (4.40)-(4.41) следует, что можно искать решение для φ_i с отношением $G_i^{(n+2)}/G_i^{(n)} \sim \alpha \ll 1$ ($n=0,2,4,\dots$). Тогда в нулевом порядке по α функции φ_i есть $G_i^{(0)}$, и в этом приближении система (4.40)-(4.41) принимает вид

$$G_i(x) = \lambda \int_0^1 dy T^{ij}(x,y) G_j(y), \quad (4.43)$$

где для удобства мы перешли к новым функциям

$$G_1 \rightarrow \frac{G_1^{(0)}}{x \sqrt{x+a}}, \quad G_2 \rightarrow \sqrt{\frac{3C_2(R)}{8nT(R)}} \frac{G_2^{(0)}}{x \sqrt{x+a}}$$

а ядра T^{ij} есть

$$T^{11}(x,y) = \frac{C_2(G)}{16} \frac{1}{\sqrt{x+a}} \left\{ \Theta(x-y) \left[3 + \frac{50}{3} \frac{y}{x} - \frac{7}{3} \frac{y^2}{x^2} \right] + \right. \\ \left. + \Theta(y-x) \left[3 + \frac{50}{3} \frac{x}{y} - \frac{7}{3} \frac{x^2}{y^2} \right] \right\} \frac{1}{\sqrt{y+a}}, \quad (4.44)$$

$$T^{12}(x,y) = -T^{21}(y,x) = \sqrt{\frac{2n}{3} \frac{C_2(R)}{T(R)}} \frac{1}{\sqrt{x+a}} \left\{ \Theta(x-y) \times \right. \\ \left. \times \left(-\frac{1}{3} \frac{y^2}{x^2} \right) + \Theta(y-x) \left(-1 + \frac{2}{3} \frac{x}{y} \right) \right\} \frac{1}{\sqrt{y+a}}, \quad (4.45)$$

$$T^{22}(x,y) = 0. \quad (4.46)$$

В случае чистой теории Янга-Миллса ($n=0$) уравнение (4.43) является интегральным уравнением Гильберта-Имита [66] с симметричным положительным ядром $T^{11}(x,y) = T^{11}(y,x)$ и). Как известно, для таких уравнений все собственные значения λ являются положительными и для минимального собственного значения имеет место оценка [66]

$$\sqrt{\frac{S_2}{S_4}} \geq \lambda_1 \geq \sqrt[4]{\frac{1}{S_4}}, \quad (4.47)$$

где

$$S_{2m} = Sp \hat{T}_{2m} \equiv \sum_i \int_0^1 dx T_{2m}^{ii}(x,x),$$

и

$$T_{2m}^{ij}(x,y) = \int_0^1 T_m^{ik}(x,t) T_m^{kj}(t,y) dt; \quad T_1^{ij}(x,y) \equiv T^{ij}(x,y);$$

- интегрированные ядра.

Вычисления дают

$$\frac{16}{3C_2(G)} \frac{1}{\ln^2 1/a} + O\left(\frac{1}{\ln^2 1/a}\right) \geq \lambda_1 \geq \frac{16}{3C_2(G)} \frac{1}{\ln^2 1/a} + O\left(\frac{1}{\ln^2 1/a}\right) \quad (4.48)$$

Таким образом

$$P^2 \sim 4\Lambda^2 \exp\left[-\frac{16}{3C_2(G)\lambda_1}\right] \quad (4.49)$$

и) Уравнение БС для чистой теории Янга-Миллса рассматривалось также в [10]. Однако там не была учтена зарядовая инвариантность и принималось, что волновая функция для "духов" $B \neq 0$ при $P=0$. При этом система уравнений, включающая функции для "духов", в силу статистики Ферми не является симметричной.

Параметр Λ можно устранить, переходя в (4.49) к перенормированному заряду^{*})

$$\lambda(\mu) = \lambda(\Lambda) \left[1 - \frac{3C_2(G)}{16} \lambda(\Lambda) \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right]^{-1} \quad (9.50)$$

Из формулы (4.49)

$$\lambda(\Lambda) = \frac{16}{3C_2(G) \ln \frac{4\Lambda^2}{p^2}} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} 0$$

т.е. голая константа связи стремится к нулю при снятии обрезания в согласии с тем, что предсказывает асимптотическая свобода [37].

Так как вектор ρ евклидовский, то в спектре системы имеются тахионы, т.е. вакуум нормальной фазы неустойчив относительно образования синглетных по цвету связанных состояний векторных частиц. После конденсации тахионов должен возникнуть стабильный вакуум с нулем в спектре одноцветных возбуждений. Время перестройки системы в систему со стабильным вакуумом по порядку величины равно $(p^2)^{-1/2}$. А так как квантовые числа тахиона совпадают с квантовыми числами массового безымянного оператора $A_\mu^a A_\mu^a$, то величина $(p^2)^{1/2}$ определяет массу глюона - нуля в спектре возбуждений. В силу того, что оператор $A_\mu^a A_\mu^a$ не нарушает глобальную калибровочную инвариантность, возникшая масса будет одинаковой у всех групповых компонент поля Янга - Миллса. Поскольку массовый параметр $(p^2)^{1/2}$ определяет энергетический порог рождения цветных частиц, при достаточно большом значении этого параметра рождение цветных частиц будет подавлено.

*) Перенормированный заряд $\lambda(\mu)$ в (4.50) отличается от репернормированного заряда [37] коэффициентом (3/16 вместо 11/6); это связано с тем, что лестничное приближение не является репернорминвариантным.

Возможность динамической генерации масс у поля Янга-Миллса рассматривалась в работах [27,29-31], где постулировалось существование устойчивой массивной фазы и проверялась самосогласованность этого предположения. В частности, обсуждались однородные уравнения Бете-Саммитера для вычетов в голдстоуновском полве. Однако ясно, что существование голдстоуновского полве является следствием, но не причиной появления массивной фазы. Истинной причиной является наличие сил притяжения между двумя безмассовыми глюонами в синглетном канале, приводящее к появлению тахиона, а следовательно, и неустойчивости безмассовой фазы.

Перейдем теперь к рассмотрению собственно безмассовой квантовой хромодинамики. При включении фермионов система (4.43) больше не является симметричной системой уравнений Гильберта-Индта, поскольку $T^{12}(x,y) = -T^{21}(y,x)$ (именно здесь существенен знак минус, происходящий из фермионной петли, о чем говорилось выше).

Собственные значения λ такой системы в общем случае комплексные. Однако при достаточно малом числе кварковых мультиплетов ($n < n_c$) собственные значения могут оставаться вещественными *). Чтобы оценить критическое значение n_c , заметим, что система (4.43) эквивалентна операторному уравнению

$$\left(\hat{T}^{11} + \lambda \hat{T}^{12} \hat{T}^{21} \right) G_1 = \frac{1}{\lambda} G_1 \quad (4.51)$$

*) Простейший пример такой ситуации дает матрица $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$, чьи собственные значения $\lambda_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$ вещественны при $b^2 \leq \frac{a^2}{4}$.

Подобного типа уравнения исследовались в теории квадратичных пучков самосопряженных операторов И.В.Калдышем и И.Г.Крейном [68].

Для функции G_1 , нормированной на единицу, получаем

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \langle G_1 | \hat{T}^{11} | G_1 \rangle \pm \frac{1}{2} \left[\langle G_1 | \hat{T}^{11} | G_1 \rangle^2 + 4 \langle G_1 | \hat{T}^{12} \hat{T}^{21} | G_1 \rangle \right]^{1/2} \quad (4.52)$$

где

$$\langle G_1 | \hat{T}^{ij} | G_1 \rangle \equiv \int_0^1 dx dy G_1(x) T^{ij}(x,y) G_1(y) \quad (4.53)$$

В силу положительности операторов $\hat{T}^{11} - \hat{T}^{12} \hat{T}^{21}$, при

$$\langle G_1 | \hat{T}^{11} | G_1 \rangle^2 < 4 \langle G_1 | \hat{T}^{12} \hat{T}^{21} | G_1 \rangle \quad (4.54)$$

мнимая часть $\text{Im } 1/\lambda$ отлична от нуля, а

$$\text{Re } \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \langle G_1 | \hat{T}^{11} | G_1 \rangle \quad (4.55)$$

Из явного вида ядер (4.44), (4.55) следует, что для интересующего нас собственного значения λ_1 с $\text{Re } \lambda_1 \sim \frac{1}{\ln^2 1/a}$ нормированная функция G_1 имеет вид $[\sqrt{x+a} \ln^{1/2} 1/a]^{-1}$ в области $x \approx 0$; которая и дает основной вклад в интеграл (4.53). Отсюда и из условия (4.54) находим, что мнимая часть становится отличной от нуля при

$$R > R_c = \frac{9}{64} \frac{C_2^2(G) T(R)}{C_2(R)} \quad (4.56)$$

и для группы $SU(N)$

$$R_c = \frac{9}{64} \frac{N^3}{N^2 - 1}$$

Таким образом, единственным приемлемым решением уравнений (4.43) при $R > R_c$ есть $G_i = 0$, и таким в спектре системы отсутствует. В частности, в стандартной схеме квантовой хромодинамики с цветной группой $SU(3)$ достаточно введения одного

триплета цветных кварков, чтобы система стала стабильной относительно спаривания глюонов.

Отметим также, что перестройка вакуума, происходящая в пределе слабой связи при $\mathcal{N} < \mathcal{N}_c$, не приводит к возникновению масс у фермионов. Действительно, массовая вершина $\bar{\Psi}\Psi = \bar{\Psi}_L\Psi_R + \bar{\Psi}_R\Psi_L$ ($\Psi_{L,R} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}\Psi$) связывает фермионы и антифермионы одной и той же спиральности. С другой стороны, волновая функция $\chi = g_{\mu\nu}\chi_\nu^{\mu}$, входящая в уравнение (4.36), удовлетворяет условию $(1 \pm \gamma_5)\chi \times (1 \pm \gamma_5) = 0$ и относится к связанному состоянию фермиона и антифермиона разной спиральности. Связанное состояние фермиона и антифермиона одной и той же спиральности описывается функцией $\chi = \chi_S + \sigma_{\mu\nu}\chi_T^{\mu\nu}$. Система уравнений для χ_S, χ_T при замене $\frac{g^2 C_2(R)}{4\pi} \rightarrow \alpha$ совпадает с соответствующей системой уравнений безмассовой электродинамики, рассмотренной нами в параграфе первом настоящей главы. Как показано там, в пределе слабой связи эти уравнения не имеют тахионного решения. Критическая константа связи, выше которой происходит генерация фермионных масс, равна в этом случае

$$\frac{g_c^2}{4\pi} = \frac{\pi}{4C_2(R)} = \frac{\pi N}{2(N^2 - 1)}$$

Таким образом, проблема связанных состояний для безмассовой электродинамики и безмассовой хромодинамики выглядит совершенно по-разному: когда число кварковых мультиплетов \mathcal{N} мало, то в лестничном приближении при сколь угодно малой константе связи g в спектре связанных состояний последней имеется безцветный тахив. Что можно сказать о тахионном решении при выходе за рамки лестничного приближения? На первый взгляд, малость константы g можно

рассматривать как оправдание такого приближения. Однако, как следует из рассмотрения настоящего параграфа, за появление тахионного решения в основном отвечает инфракрасная область малых импульсов. Как известно [102], в хромодинамике при учёте высших порядков теории возмущений эффективная константа связи в этой области растёт. Это обстоятельство делает проблему связанных состояний необычайно сложной. Тем не менее, если принять [102, 103], что в хромодинамике динамика взаимодействий на больших расстояниях в своих главных чертах определяется законом затравочной константы g на эффективную константу связи $g(k^2)$ (которая растёт в инфракрасной области $k^2 \rightarrow 0$), то естественно думать, что эффективное увеличение константы приведёт лишь к росту масс тахиона.

Какова роль фермионов в этой проблеме? Из хорошо известных ренормгрупповых аргументов следует, что необходимым условием существования динамического механизма генерации масс в пределе слабой связи является наличие асимптотической свободы [28, 67]. При большом числе фермионных мультиплетов ($n > \frac{11}{2}N$ для $SU(N)$) это условие нарушается [37]. Из результатов настоящего параграфа вытекает, что достаточное условие (см. (4.56)) существования такого механизма является значительно более жестким, чем условие существования асимптотической свободы. При выходе за рамки лестничного приближения это условие может измениться. Однако, оно по-прежнему должно оставаться более жестким, чем требование асимптотической свободы.

В заключение отметим следующие два момента.

а) Найденная неустойчивость теории Янга-Миллса относительно сдвигания глюонов отвечает неустойчивости нормального вакуума, соответствующего классическому решению $A_M^a = 0$. Как известно, инстантонные решения [104] также приводят к неустойчивости вакуума $A_M^a = 0$ (процесс туннелирования [105-107]). Для массивных безмассовых кварков нормальный вакуум становится стабильным как относительно процессов сдвигания глюонов, так и относительно процессов туннелирования [105]. Вопрос о связи между этими двумя каналами неустойчивости является в настоящее время открытым.

б) Одним из основных вопросов в проблеме связанных состояний остается вопрос о калибровочно-инвариантном приближении. Лучшее приближение таковым не является. Так например, известно [108], что в квантовой электродинамике уравнение Бете-Салпитера для слабо связанных состояний дает калибровочно-инвариантные результаты лишь при учете в ядре членов высшего порядка. Ситуация сложнее в случае сильно связанных состояний [109]. Опыт однако показывает, что качественно уравнение Бете-Салпитера в лестничном приближении дает правильный ответ на вопрос о существовании связанных состояний. Поскольку физические причины для существования связанного состояния, такие как наличие сил притяжения в соответствующем канале, не зависят от выбора калибровки, можно надеяться, что выводы, полученные в одной калибровке, могут быть получены и в любой другой калибровке.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение перечислим основные результаты и выводы, полученные в диссертации.

1. Уравнения ренормализационной группы модифицированы путем введения переменной эффективной массы и применены к исследованию вопроса о динамической генерации физических масс частиц в абелевых калибровочных теориях поля (квантовая электродинамика, модель Корнуэла - Нортена). Показано, что для динамической генерации фермионной массы (спонтанное нарушение киральной симметрии) в схемах с обрезанием необходимо, чтобы затравочная константа связи безмассового векторного поля превышала некоторое критическое значение, определяемое положением сингулярности ренормгрупповой функции Ψ_1 .

При затравочных массах фермионов, не равных строго нулю (удовлетворяющих определенным неравенствам), и достаточно малых константах связи в рассмотренных теориях найдены решения "сверхпроводящего типа" для физических масс фермионов.

2. С помощью модифицированных уравнений ренормгруппы показано, что в модели Корнуэла - Нортена в рамках схемы без обрезания существует решение, когда затравочные массы частиц обращаются в нуль при снятии обрезания, в то время как физические массы частиц остаются конечными. В этом случае помимо динамического нарушения киральной симметрии имеет место динамическое нарушение калибровочной ζ_2 -симметрии, приводящее к появлению массы у соответствующего калибровочного поля (механизм Хингера). Получено соотношение между физическими массами частиц, аналогичное массовым соотношениям в механизме Хиггса.

3. Показано, что в безмассовой электродинамике имеет место эффект, аналогичный "куперовскому смариванию" в теории сверхпроводимости, а именно: уравнение Бете - Солпитера в лестничном приближении содержит тахионное решение в спектре связанных фермион-антифермионных состояний. Наличие такого решения свидетельствует о неустойчивости безмассовой фазы системы. Найденное решение существует лишь при затравочной константе связи, большей критической, для которой получено численное значение.

4. В моделях ДБВ, Корнуэлла-Нортена и квантовой электродинамике с обрезанием вычислена в двухпетлевом приближении разность плотностей энергии вакуума фаз с нарушенной и ненарушенной симметрией. Показано, что решения с динамически нарушенной симметрией являются энергетически более выгодными, чем симметричные решения.

С помощью метода эффективного потенциала получен вывод, что нарушение масштабной симметрии в моделях ДБВ и Корнуэлла-Нортена не является спонтанным (соответствующий масштабный ток не сохраняется), несмотря на обращение в нуль затравочных масс.

5. В безмассовой хромодинамике исследованы в лестничном приближении уравнения Бете-Солпитера для волновых функций связанного глюон-глюонного и фермион-антифермионного состояния. Для чистой теории Янга-Миллса показано в пределе слабой связи существование синглетного по цвету связанного состояния двух глюонов с мнимой энергией (тахием), что приводит к нестабильности вакуума безмассовой фазы. В результате перестройки вакуума калибровочные бозоны могут приобрести массу.

В безмассовой хромодинамике с цветной группой $SU(N)$ и n кварклетками кварков тахионное решение существует только при $n < n_c$.

Для критического значения n_c числа кварковых мультиплетов получено явное выражение.

Таким образом, в диссертации с помощью различных, независимых и взаимодополняющих подходов к проблеме динамической генерации масс показано, что в калибровочных теориях поля массы частиц действительно могут возникать за счет взаимодействия без введения скалярных полей Хиггса.

Для дальнейшей разработки проблем, рассмотренных в настоящей диссертации, в частности, проблемы устойчивости вакуума в калибровочных теориях, важным является разработка калибровочно-инвариантного и ренорминвариантного приближения для уравнения Бете-Салпитера. Представляет интерес также выяснение связи между инстантонным каналом неустойчивости теории Янга-Миллса и найденным в настоящем исследовании таковым каналом неустойчивости.

Основные результаты, вошедшие в диссертацию, опубликованы в работах [110-115].

Я выражаю глубокую благодарность моим научным руководителям П.И.Фомину и В.А.Миринскому за многочисленные плодотворные обсуждения вопросов, затронутых в диссертации, постоянное внимание и помощь на различных этапах настоящего исследования.

Я признателен также сотрудникам отдела астрофизики и элементарных частиц ИГи АН УССР Б.В.Струминскому и Д.А.Ситенко за интересные дискуссии и ряд ценных замечаний.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Вывод модифицированных уравнений осесимметричной для модели

Корнуэля-Нортена

Вывод уравнений в основном аналогичен тому, как это делается в главе I. Функции S_{ij}^{\wedge} , d_A^{\wedge} , d_B^{\wedge} и h^{\wedge} , введенные в § 2, нормированы следующим образом

$$S_{ij}(x, y, z, u, d_{\Lambda}, \beta_{\Lambda}) \Big|_{x=1} = 1, \quad d_A(x, y, z, u, d_{\Lambda}, \beta_{\Lambda}) \Big|_{x=1} = 1, \quad (A.1)$$

$i, j = 1, 2$

$$h(x, y, z, u, d_{\Lambda}, \beta_{\Lambda}) \Big|_{x=1} = 1, \quad d_B(x, y, d_{\Lambda}, \beta_{\Lambda}) \Big|_{x=1} = 1.$$

Далее потребуется также вершинная функция $\Gamma_{\Lambda 2}^B$ ($\Gamma_{\Lambda \mu}^B = \gamma_{\mu} z_{\mu} \Gamma_{\Lambda 2}^B + \dots$), которую мы примем нормированной следующим образом:

$$\Gamma^B(x_1, x_2, x_3, y, z, u, d_{\Lambda}, \beta_{\Lambda}) \equiv \Gamma_{\Lambda 2}^B(\rho^2, \kappa^2, (\rho+\kappa)^2) = 1 \quad (A.1')$$

при

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1,$$

где

$$x_1 = -\frac{\rho^2}{\Lambda^2}, \quad x_2 = -\frac{\kappa^2}{\Lambda^2}, \quad x_3 = -\frac{(\rho+\kappa)^2}{\Lambda^2}.$$

Переходя теперь обычным образом от точки вычитания Λ к Λ' и используя перенормировочные соотношения, получим

$$d_A(x, y, z, u, d_{\Lambda}, \beta_{\Lambda}) = Z_{3A}(t) d\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t} \frac{m_{1\Lambda'}^2}{m_{1\Lambda}^2}, \frac{m_{1\Lambda'}}{m_{1\Lambda}}, \frac{\delta m_{\Lambda'}^2}{m_{\Lambda}^2}, d_{\Lambda'}, \beta_{\Lambda'}\right) \quad (A.2)$$

$$S_{ij}(x, y, z, u, d_{\Lambda}, \beta_{\Lambda}) = Z_{2j}(t) S_{ij}\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t} \frac{m_{1\Lambda'}^2}{m_{1\Lambda}^2}, \frac{m_{1\Lambda'}}{m_{1\Lambda}}, \frac{\delta m_{\Lambda'}^2}{m_{\Lambda}^2}, d_{\Lambda'}, \beta_{\Lambda'}\right) \quad (A.3)$$

$$m_{j\Lambda} S_{2j}(x, y, z, u, d_{\Lambda}, \beta_{\Lambda}) = m_{j\Lambda'} S_{2j}\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t} \frac{m_{1\Lambda'}^2}{m_{1\Lambda}^2}, \frac{m_{1\Lambda'}}{m_{1\Lambda}}, \frac{\delta m_{\Lambda'}^2}{m_{\Lambda}^2}, d_{\Lambda'}, \beta_{\Lambda'}\right) \quad (A.4)$$

$$d_B(x, y, d_\Lambda, \beta_\Lambda) = Z_{3B}(t) d_B\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{m_{1\Lambda'}^2}{m_{1\Lambda}^2}, d_{\Lambda'}, \beta_{\Lambda'}\right) \quad (\text{A.5})$$

$$\mu_{\Lambda'}^2 h(x, y, z, u, d_\Lambda, \beta_\Lambda) = \mu_{\Lambda'}^2 h\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{m_{1\Lambda'}^2}{m_{1\Lambda}^2}, \frac{m_{1\Lambda'}}{m_{1\Lambda}}, \frac{\delta m_{\Lambda'}^2}{\mu_{\Lambda'}^2}, d_{\Lambda'}, \beta_{\Lambda'}\right) \quad (\text{A.6})$$

$$\Gamma_2^B(x_1, x_2, x_3, y, z, u, d_\Lambda, \beta_\Lambda) = Z_{1B}^{-1}(t) \Gamma_2^B\left(\frac{x_1}{t}, \frac{x_2}{t}, \frac{x_3}{t}, \frac{y}{t}, \frac{m_{1\Lambda'}^2}{m_{1\Lambda}^2}, \right. \quad (\text{A.7})$$

$$\left. \frac{m_{1\Lambda'}}{m_{1\Lambda}}, \frac{\delta m_{\Lambda'}^2}{\mu_{\Lambda'}^2}, d_{\Lambda'}, \beta_{\Lambda'}\right).$$

Для зарядов d_Λ и β_Λ справедливы следующие соотношения

$$d_{\Lambda'} = d_\Lambda Z_{3A}(t), \quad (\text{A.8})$$

$$\beta_{\Lambda'} = \beta_\Lambda Z_{21}(t) Z_{22}(t) Z_{3B}(t) Z_{1B}^{-2}(t).$$

Пользуясь теперь условиями нормировки (A.I) и (A.I'), получаем

$$Z_{2j}(t) = S_{1j}(t, y, z, u, d_\Lambda, \beta_\Lambda), \quad j = 1, 2,$$

$$Z_{3A}(t) = d_A(t, y, z, u, d_\Lambda, \beta_\Lambda),$$

$$Z_{3B}(t) = d_B(t, y, d_\Lambda, \beta_\Lambda), \quad (\text{A.9})$$

$$Z_{1B}^{-1}(t) = \Gamma_2^B(t, t, t, y, z, u, d_\Lambda, \beta_\Lambda),$$

$$m_{j\Lambda'} = m_{j\Lambda} S_{2j}(t, y, z, u, d_\Lambda, \beta_\Lambda),$$

$$\mu_{\Lambda'}^2 = \mu_\Lambda^2 h(t, y, z, u, d_\Lambda, \beta_\Lambda).$$

Введем инвариантные заряды ξ_A и ξ_B

$$\xi_A(t, y, z, u, d_\lambda, \beta_\lambda) \equiv d_\lambda d_A(t, y, z, u, d_\lambda, \beta_\lambda), \quad (\text{A.10})$$

$$\xi_B(t, y, z, u, d_\lambda, \beta_\lambda) \equiv \beta_\lambda S_{11}(t, y, z, u, d_\lambda, \beta_\lambda) S_{12}(t, y, z, u, d_\lambda, \beta_\lambda) \times d_B(t, y, d_\lambda, \beta_\lambda) \Gamma_2^{\beta^2}(t, t, t, y, z, u, d_\lambda, \beta_\lambda)$$

Из (A.3)-(A.10) получаем следующие функциональные соотношения

$$\xi_{A(B)}(t, y, z, u, d_\lambda, \beta_\lambda) = \xi_{A(B)} \left[\frac{x}{z}, \gamma(t), \rho(t), \sigma(t), \xi_A(t), \xi_B(t) \right] \quad (\text{A.11})$$

$$S_{ij}(x, y, z, u, d_\lambda, \beta_\lambda) = S_{ij}(t, y, z, u, d_\lambda, \beta_\lambda) S_{ij} \left[\frac{x}{z}, \gamma(t), \rho(t), \sigma(t), \xi_A(t), \xi_B(t) \right] \quad (\text{A.12})$$

$$h(x, y, z, u, d_\lambda, \beta_\lambda) = h(t, y, z, u, d_\lambda, \beta_\lambda) h \left[\frac{x}{z}, \gamma(t), \rho(t), \sigma(t), \xi_A(t), \xi_B(t) \right] \quad (\text{A.13})$$

где $\xi_{A(B)}(t), \gamma(t), \rho(t), \sigma(t)$ есть значения функции $\xi_{A(B)}$.
 $\gamma \equiv (y/x) S_{21}^2, \rho \equiv z S_{21}/S_{22}, \sigma \equiv u [(z S_{21} - S_{22})/z - 1]^{-1} h^{-1}$ при
 $x = t$, соответственно. Удобно переписать функциональные соотношения (A.10)-(A.13) в дифференциальной форме

$$\frac{\partial \xi_{A(B)}(x, y, z, u, d_\lambda, \beta_\lambda)}{\partial x} = \frac{1}{x} \Psi_{A(B)}[\gamma, \rho, \sigma, \xi_A, \xi_B], \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial \ln S_{ij}(x, y, z, u, d_\lambda, \beta_\lambda)}{\partial x} = \frac{1}{x} \Psi_{ij}[\gamma, \rho, \sigma, \xi_A, \xi_B], \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial \ln h(x, y, z, u, d_\lambda, \beta_\lambda)}{\partial x} = \frac{1}{x} H[\gamma, \rho, \sigma, \xi_A, \xi_B], \quad (\text{A.16})$$

где функции $\varphi_{A(B)}, \Psi_{ij}, H$ определены следующим образом

$$\varphi_{A(B)}(y, z, u, d_\Lambda, \beta_\Lambda) = \left. \frac{\partial \xi_{A(B)}(x, y, z, u, d_\Lambda, \beta_\Lambda)}{\partial x} \right|_{x=1} \quad (\text{A.17})$$

$$\Psi_{ij}(y, z, u, d_\Lambda, \beta_\Lambda) = \left. \frac{\partial \ln S_{ij}(x, y, z, u, d_\Lambda, \beta_\Lambda)}{\partial x} \right|_{x=1} \quad (\text{A.18})$$

$$H(y, z, u, d_\Lambda, \beta_\Lambda) = \left. \frac{\partial \ln h(x, y, z, u, d_\Lambda, \beta_\Lambda)}{\partial x} \right|_{x=1} \quad (\text{A.19})$$

Уравнения (A.14)-(A.16) отличаются от обычных уравнения Боголюбова-Иркова [34] тем, что они содержат не только инвариантные заряды ξ_A, ξ_A , но также и инвариантные массы $m_{j\Lambda} S_{2j}, \mu_\Lambda h^{1/2}$. Как уже отмечалось в случае квантовой электродинамики, это отличие связано с тем, что для рассмотрения проблемы динамической генерации масс необходимо расширить ренормгрупповые уравнения, параметризуя теорию не только зарядами d_Λ и β_Λ , но и массами $m_{1\Lambda}, m_{2\Lambda}, \mu_\Lambda$.

Согласно теории возмущений [34] предположим, что зависимость функций $S_{ij}, \xi_{A(B)}, h(\Psi_{ij}, \varphi_{A(B)}, H)$ от аргумента y (γ) становится незначительной в области $\Lambda^2, |p^2| \gg m_i^2, \mu^2$. Следовательно, в этой области можно положить $y = \gamma = 0$. Как станет видно, это позволит записать массовые уравнения в более удобной форме.

Для этого определим новые функции $\xi_{A(B)}^a, S_{ij}^a, h^a$ удовлетворяющие следующим уравнениям при всех значениях импульса p :

$$\frac{\partial \xi_{A(B)}^a(x, z, u, d_\lambda, \beta_\lambda)}{\partial x} = \frac{1}{x} \Psi_{A(B)}^a [\rho^a, \sigma^a, \xi_A^a, \xi_B^a], \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial \ln S_{ij}^a(x, z, u, d_\lambda, \beta_\lambda)}{\partial x} = \frac{1}{x} \Psi_{ij}^a [\rho^a, \sigma^a, \xi_A^a, \xi_B^a], \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{\partial \ln h^a(x, z, u, d_\lambda, \beta_\lambda)}{\partial x} = \frac{1}{x} H^a [\rho^a, \sigma^a, \xi_A^a, \xi_B^a], \quad (\text{A.22})$$

где функции

$$\Psi_{A(B)}^a(z, u, d_\lambda, \beta_\lambda) = \left. \frac{\partial \xi_{A(B)}^a(x, z, u, d_\lambda, \beta_\lambda)}{\partial x} \right|_{x=1}, \quad (\text{A.23})$$

$$\Psi_{ij}^a(z, u, d_\lambda, \beta_\lambda) = \left. \frac{\partial \ln S_{ij}^a(x, z, u, d_\lambda, \beta_\lambda)}{\partial x} \right|_{x=1}, \quad (\text{A.24})$$

$$H^a(z, u, d_\lambda, \beta_\lambda) = \left. \frac{\partial \ln h^a(x, z, u, d_\lambda, \beta_\lambda)}{\partial x} \right|_{x=1}, \quad (\text{A.25})$$

равны функциям $\Psi_{A(B)}^a|_{y=0}$, $\Psi_{ij}^a|_{y=0}$, $H^a|_{y=0}$ из (A.17)-(A.19), соответственно. В качестве нормировочных условий для $\xi_{A(B)}^a$, S_{ij}^a , h^a выберем

$$\frac{\xi_A^a}{d_\lambda} \Big|_{x=1} = 1, \quad \frac{\xi_B^a}{\beta_\lambda} \Big|_{x=1} = 1, \quad (\text{A.26})$$

$$S_{ij}^a \Big|_{x=1} = 1, \quad h^a \Big|_{x=1} = 1.$$

Эти условия гарантируют совпадение асимптотических разложений функций $\xi_{A(B)}^a, S_{ij}^a, h^a$ с асимптотическими разложениями функций $\xi_{A(B)}, S_{ij}, h$, соответственно, в области $\Lambda, |p^2| \gg m_i^2, \mu^2$.
 Функции $\xi_{A(B)}^a, S_{ij}^a, h^a$, определенные таким образом, удовлетворяют следующим функциональным соотношениям при всех значениях импульса p ,

$$\xi_{A(B)}^a(x, z, u, d_\Lambda, \beta_\Lambda) = \xi_{A(B)}^a\left(\frac{x}{t}, p^a, \sigma^a, \xi_A^a, \xi_B^a\right), \quad (\text{A.27})$$

$$S_{ij}^a(x, z, u, d_\Lambda, \beta_\Lambda) = Z_{2j}(t) S_{ij}^a\left(\frac{x}{t}, p^a, \sigma^a, \xi_A^a, \xi_B^a\right), \quad (\text{A.28})$$

$$m_{j\Lambda} S_{2j}^a(x, z, u, d_\Lambda, \beta_\Lambda) = m_{j\Lambda'} S_{2j}^a\left(\frac{x}{t}, p^a, \sigma^a, \xi_A^a, \xi_B^a\right), \quad (\text{A.29})$$

$$\mu_\Lambda^2 h^a(x, z, u, d_\Lambda, \beta_\Lambda) = \mu_{\Lambda'}^2 h^a\left(\frac{x}{t}, p^a, \sigma^a, \xi_A^a, \xi_B^a\right) \quad (\text{A.30})$$

Так как соотношения (A.2)-(A.5) и (A.27)-(A.30) совпадают при асимптотически больших p , то параметры, не зависящие от p , в выражениях (A.2)-(A.6) и (A.27)-(A.30) ($m_{j\Lambda}, \mu_\Lambda, d_\Lambda, \beta_\Lambda, Z_{2j}$) также совпадают.

Введем теперь перенормированные функции Грина

$$G_j^c(p) = \frac{S_{ij}^c(p^2)}{\hat{p} - m_j S_{2j}^c(p^2)},$$

$$D_{\mu\nu}^{(A)c}(p) = -\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right) \frac{d_A^c(p^2)}{p^2},$$

$$D_{\mu\nu}^{(B)c}(p) = -\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right) \frac{d_B^c(p^2)}{p^2 - \mu^2 h^c(p^2)}$$

с обычными нормировочными условиями [34].

Для функций S_{2j}^c, h^c справедливы уравнения

$$m_j S_{2j}^c(p^2) = m_{j\Lambda} S_{2j}^\Lambda(p^2), \quad (\text{A.31})$$

$$\mu^2 h^c(p^2) = \mu_\Lambda^2 h^\Lambda(p^2). \quad (\text{A.32})$$

Далее можно определить функции S_{2jc}^a и h_c^a , аналогично функциям S_{2j}^a и h^a , так что будут выполняться уравнения

$$m_j S_{2jc}^a(p^2) = m_{j\Lambda} S_{2j}^\Lambda(p^2), \quad (\text{A.33})$$

$$\mu^2 h_c^a(p^2) = \mu_\Lambda^2 h^\Lambda(p^2). \quad (\text{A.34})$$

Нормировочные условия, которые гарантируют совпадение асимптотических разложений функций S_{2jc}^a, h_c^a с асимптотическими разложениями функций S_{2j}^c, h^c , соответственно, имеют вид (см. главу I):

$$S_{2jc}^a(p^2) \Big|_{p^2 = -m_j^2} = 1 + \sum_{\substack{k, l=0 \\ k+l \geq 1}} C_{2j}^{(kl)} \alpha^k \beta^l, \quad (\text{A.35})$$

$$h_c^a(p^2) \Big|_{p^2 = -\mu^2} = 1 + \sum_{\substack{k, l=0 \\ k+l \geq 1}} H^{(kl)} \alpha^k \beta^l,$$

где α, β - перенормированные заряды, а коэффициенты $C_{2j}^{(kl)}, H^{(kl)}$ вычисляются в теории возмущений. Из (A.33)-(A.34) получаем массовые уравнения

$$m_j = m_{j\Lambda} \frac{S_{2j}^\Lambda\left(\frac{m_j^2}{\Lambda^2}, Z, U, \alpha_\Lambda, \beta_\Lambda\right)}{S_{2jc}^a \Big|_{p^2 = -m_j^2}}, \quad (\text{A.36})$$

$$\mu^2 = \mu_\Lambda^2 \frac{h^\Lambda\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}, Z, U, \alpha_\Lambda, \beta_\Lambda\right)}{h_c^a \Big|_{p^2 = -\mu^2}}. \quad (\text{A.37})$$

Предполагая малость перенормированных зарядов, из (А.35) имеем

$$S_{2j}^a \Big|_{p^2 = -m_j^2} \simeq 1 \quad \text{и} \quad h_c^a \Big|_{p^2 = -\mu^2} \simeq 1, \quad \text{что при-}$$

водит к

$$m_j = m_{j\Lambda} S_{2j}^a \left(\frac{m_j^2}{\Lambda^2}, Z, u, \alpha_\Lambda, \beta_\Lambda \right), \quad (\text{А.38})$$

$$\mu^2 = \mu_\Lambda^2 h^a \left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}, Z, u, \alpha_\Lambda, \beta_\Lambda \right). \quad (\text{А.39})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Формулы интегрирования по угловым переменным

В главах II и IV часто встречаются интегралы, содержащие интегрирования по угловым переменным типа

$$J_{mn} = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{\cos^n \Psi d\Omega}{[q^2 + k^2 - 2|q||k|\cos\Psi]^m} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos^n \Psi \sin^2 \Psi d\Psi}{[q^2 + k^2 - 2|q||k|\cos\Psi]^m} \quad (\text{Б.1})$$

$$d\Omega = \sin^2 \Psi \sin \theta d\Psi d\theta d\varphi$$

Интегралы можно вычислить, переходя, например, к комплексной переменной $Z = e^{i\Psi}$ и используя теорию вычетов. Приведем ответы для некоторых значений m и n :

$$J_{10} = \frac{\Theta(q^2 - k^2)}{q^2} + \frac{\Theta(k^2 - q^2)}{k^2}; \quad J_{11} = \frac{1}{2|q||k|} \left[\frac{k^2}{q^2} \Theta(q^2 - k^2) + \frac{q^2}{k^2} \Theta(k^2 - q^2) \right];$$

$$J_{12} = \frac{q^2 + k^2}{4} \left[\frac{\Theta(q^2 - k^2)}{q^4} + \frac{\Theta(k^2 - q^2)}{k^4} \right]; \quad J_{13} = \frac{1}{8|q||k|} \left[\left(\frac{k^2}{q^2} + 1 \right) \Theta(q^2 - k^2) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{q^2}{k^2} + 1 \right) \Theta(k^2 - q^2) - 1 \right]; \quad J_{20} = \frac{\Theta(q^2 - k^2)}{q^2(q^2 - k^2)} + \frac{\Theta(k^2 - q^2)}{k^2(k^2 - q^2)};$$

$$J_{21} = \frac{1}{|q||k|} \left[\frac{k^2}{q^2} \frac{\Theta(q^2 - k^2)}{q^2 - k^2} + \frac{q^2}{k^2} \frac{\Theta(k^2 - q^2)}{k^2 - q^2} \right]; \quad J_{22} = \frac{3k^2 + q^2}{4q^4} \times \quad (\text{Б.2})$$

$$\times \frac{\Theta(q^2 - k^2)}{q^2 - k^2} + \frac{3q^2 + k^2}{4k^4} \frac{\Theta(k^2 - q^2)}{k^2 - q^2}; \quad J_{23} = \frac{q^2 + k^2}{2|q||k|} \left[\frac{k^2}{q^4} \frac{\Theta(q^2 - k^2)}{q^2 - k^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{q^2}{k^4} \frac{\Theta(k^2 - q^2)}{k^2 - q^2} \right]; \quad \Theta(q^2 - k^2) = \begin{cases} 1, & q^2 > k^2 \\ 0, & q^2 < k^2 \end{cases}$$

Четырехмерные сферические гармоники, используемые в гл. II и IV, имеют следующий вид [85]

$$Y_{lm}(\Psi, \theta, \varphi) = \mathcal{E}_l^m(\Psi) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (\text{Б.3})$$

где $Y_{2m}(\theta, \varphi)$ - трехмерные сферические гармоники [86], а

$$\mathcal{E}_n^z(\Psi) = \left[\frac{2^{2z+1}}{\pi} \frac{(n+1)(n-2)!}{(n+2+1)!} \right]^{1/2} z! (\sin \Psi)^z C_{n-2}^{z+1}(\cos \Psi) \quad (Б.4)$$

$C_{n-2}^{z+1}(\cos \Psi)$ - полиномы Гегенбауэра. Гармоники $\mathcal{Y}_{nzm}(\Psi, \theta, \varphi)$ удовлетворяют соотношению ортогональности

$$\int d\Omega \mathcal{Y}_{nzm}(\Psi, \theta, \varphi) \mathcal{Y}_{n'z'm'}(\Psi, \theta, \varphi) = \delta_{nn'} \delta_{zz'} \delta_{mm'} \quad (Б.5)$$

В главе IV § I используется разложение

$$\frac{1}{(q-k)^2} = \sum_{n'=0}^{\infty} K_{n'}(q^2, k^2) C_{n'}^1\left(\frac{qk}{|q||k|}\right) \quad (4.19')$$

Для нахождения коэффициентов $K_{n'}(q^2, k^2)$ умножим (4.19) на $C_n^1\left(\frac{qk}{|q||k|}\right)$ и проинтегрируем по $d\Omega_k$, воспользовавшись формулой

$$\int d\Omega_k C_n^1\left(\frac{qk}{|q||k|}\right) C_{n'}^1\left(\frac{qk}{|q||k|}\right) = 2\pi^2 \delta_{nn'}, \quad (Б.6)$$

которая является частным случаем формулы (Б.5), при $z=z'=m=m'=0$ ($Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$). Получим

$$K_n(q^2, k^2) = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{d\Omega C_n^1(\cos \Psi)}{q^2 + k^2 - 2|q||k| \cos \Psi} \quad (Б.7)$$

или, учитывая [86]

$$C_n^1(\cos \Psi) = \frac{\sin [(n+1)\Psi]}{\sin \Psi},$$

$$K_n(q^2, k^2) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \Psi \sin [(n+1)\Psi] d\Psi}{q^2 + k^2 - 2|q||k| \cos \Psi} \quad (Б.8)$$

При $n=0$ $K_0(q^2, k^2) = J_{10}$ (формула (Б.1)). Чтобы вычислить $K_n(q^2, k^2)$ при произвольном n , заметим, что интеграл (Б.8) симметричен относительно замены $q \leftrightarrow k$; таким образом, достаточно вычислить его при $q^2 > k^2$. Интеграл (Б.8) можно привести к виду

$$K_n(q^2, k^2) = \frac{(-1)^{n-1}}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \frac{e^{i(n+2)\psi} - e^{in\psi} - e^{-in\psi} + e^{-i(n+2)\psi}}{q^2 \left(1 + \frac{|k|}{|q|} e^{-i\psi}\right) \left(1 + \frac{|k|}{|q|} e^{i\psi}\right)} \quad (\text{Б.9})$$

При $|q| > |k|$ знаменатели в (Б.9) можно разложить в ряд

$$\left(1 + \frac{|k|}{|q|} e^{\pm i\psi}\right)^{-1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(-\frac{|k|}{|q|}\right)^{\ell} e^{\pm i\ell\psi}$$

Интегрируя затем по $d\psi$ и сворачивая оставшийся ряд, получаем

$$K_n(q^2, k^2) = \frac{\Theta(q^2 - k^2)}{q^2} \left(\frac{|k|}{|q|}\right)^n + \frac{\Theta(k^2 - q^2)}{k^2} \left(\frac{|q|}{|k|}\right)^n \quad (\text{Б.10})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

**Вывод уравнения Бете-Салпитера квантовой хромодинамики
в логарифмическом приближении**

Вывод уравнения Бете-Салпитера удобнее всего осуществлять, используя генерирующую функционал для функции Грина [116, 117]. Рассмотрим вначале, в качестве примера, вывод уравнения Бете-Салпитера в квантовой электродинамике [118].

Определим амплитуду перехода вакуум-вакуум в присутствии внешних фермионных источников

$$Z = \langle 0 | T \exp i \int dx [\bar{\psi}(x) \Psi(x) + \bar{\Psi}(x) \psi(x)] | 0 \rangle \equiv \langle 0 | 0 \rangle_{\psi \bar{\psi}} \quad (B.1)$$

где Ψ - гейзенберговский оператор электрона. Источники ψ и $\bar{\psi}$ антикоммутируют между собой и со всеми фермионными операторами. Функция Грина электрона в присутствии источников есть

$$S(x, y) = -i \frac{\delta^2 \ln Z}{\delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(x)} = i \frac{\langle 0 | T \Psi(x) \bar{\Psi}(y) | 0 \rangle_{\psi \bar{\psi}}}{\langle 0 | 0 \rangle_{\psi \bar{\psi}}} \quad (B.2)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$F(x, y, x', y') = i \frac{\delta^2 S(x, y)}{\delta \bar{\psi}(y') \delta \psi(x')} \Big|_{\psi = \bar{\psi} = 0} \quad (B.3)$$

которая равна

$$F(x, y, x', y') = S(y', x') S(x, y) + \langle 0 | T \Psi(x) \bar{\Psi}(y) \Psi(y') \bar{\Psi}(x') | 0 \rangle \quad (B.4)$$

Определим массовый оператор M в присутствии внешних источников соотношением

$$S(xy) = [S_0^{-1}(xy) - M(xy)]^{-1} + i [S_0^{-1}(xv) - M(xv)] \bar{h}(v) \bar{h}(u) [S_0^{-1}(uy) - M(uy)]^{-1} \quad (B.5)$$

В выражении (B.5) S_0 - свободный пропагатор; по повторяющимся аргументам подразумевается суммирование и интегрирование.

Из формул (B.4), (B.5) выразим функцию $F(xy, x'y')$ через функциональную производную от массового оператора

$$F(xy, x'y') = i \left. \frac{\delta^2 [S_0^{-1}(xy) - M(xy)]^{-1}}{\delta \bar{h}(y') \delta h(x')} \right|_{h=\bar{h}=0} + S(xx') S(y'y') \quad (B.6)$$

$$= S(xx') S(y'y') + i S(xz) \left. \frac{\delta^2 M(zt)}{\delta \bar{h}(y') \delta h(x')} \right|_{h=\bar{h}=0} S(ty),$$

где мы воспользовались также соотношением

$$\frac{\delta^2 S}{\delta \bar{h} \delta h} S^{-1} + S \frac{\delta^2 S^{-1}}{\delta \bar{h} \delta h} = 0$$

Учитывая теперь, что массовый оператор M зависит от источников нелинейным образом через функцию Грина S , функционалом от которой он является, получаем

$$F(xy, x'y') = S(xx') S(y'y') + S(xz) \frac{\delta M(zt)}{\delta S(uv)} F(uv, x'y') S(ty) \quad (B.7)$$

Наличие связанного фермион-антифермионного состояния $|P\rangle$ в спектре системы приводит к появлению соответствующего члена у функции Грина $\langle 0|T \Psi(x) \bar{\Psi}(y) \bar{\Psi}(y') \Psi(x')|0\rangle$. Для волновой функции связанного состояния $\langle 0|T \Psi(x) \bar{\Psi}(y)|P\rangle$ получаем однородное уравнение Бете-Салпитера

$$\langle 0|T \Psi(x) \bar{\Psi}(y)|P\rangle = S(x,z) K(zt, uv) \langle 0|T \Psi(u) \bar{\Psi}(v)|P\rangle S(ty) \quad (B.8)$$

где ядро
$$K(zt, uv) = \frac{\delta M(zt)}{\delta S(uv)}.$$

Для получения уравнения Бете-Солпитера в квантовой хромодинамике вводятся дополнительные источники J бозонного поля A и источники ρ, ρ^* "духовых" полей c^*, c .

Функции Грина векторной и "духовой" частицы определяются следующим образом

$$D(xy) = i \frac{\delta^2 \ln Z}{\delta J(x) \delta J(y)}, \quad G(xy) = -i \frac{\delta^2 \ln Z}{\delta \rho(y) \delta \rho^*(x)}, \quad (B.9)$$

а соответствующие массовые операторы в присутствии внешних источников

$$D(xy) = [D_0^{-1}(xy) - \Pi(xy)]^{-1} + i [D_0^{-1}(xu) - \Pi(xu)]^{-1} J(u) J(v) [D_0^{-1}(vy) - \Pi(vy)]^{-1},$$

$$G(xy) = [G_0^{-1}(xy) - \Sigma(xy)]^{-1} + i [G_0^{-1}(xu) - \Sigma(xu)]^{-1} \rho(u) \rho^*(v) [G_0^{-1}(vy) - \Sigma(vy)]^{-1}. \quad (B.10)$$

Вводя далее в рассмотрение функции

$$T = -i \frac{\delta^2 \mathcal{D}(xy)}{\delta J(x') \delta J(y')}, \quad \bar{T} = i \frac{\delta^2 G(xy)}{\delta \rho^*(y') \delta \rho(x')} \quad (B.11)$$

и производя выкладки, аналогичные случаю квантовой электродинамики, но значительно более громоздкие, получаем для волновых функций $\langle 0|T A(x) A(y)|P \rangle, \langle 0|T C(x) C^*(y)|P \rangle, \langle 0|T \Psi(x) \bar{\Psi}(y)|P \rangle$ систему

$$\langle 0|T A(x) A(y)|P \rangle = D(xz) K_{VV}(zt, uv) \langle 0|T A(u) A(v)|P \rangle D(ty) +$$

$$+ D(xz) K_{VG}(zt, uv) \langle 0|T C(u) C^*(v)|P \rangle D(ty) + \quad (B.12)$$

$$+ D(xz) K_{VF}(zt, uv) \langle 0|T \Psi(u) \bar{\Psi}(v)|P \rangle D(ty);$$

$$\langle 0|T C(x) C^*(y)|P \rangle = G(xz) K_{GV}(zt, uv) \langle 0|T A(u) A(v)|P \rangle G(ty) \quad (B.13)$$

$$+ G(xz) K_{GG}(zt, uv) \langle 0|T C(u) C^*(v)|P \rangle G(ty) +$$

$$+ G(xz) K_{GF}(zt, uv) \langle 0|T \Psi(u) \bar{\Psi}(v)|P \rangle G(ty);$$

$$\begin{aligned} \langle 0|T\Psi(x)\Psi(y)|P\rangle &= S(xz)K_{FV}(zt,uv)\langle 0|TA(u)A(v)|P\rangle S(ty) \\ &+ S(xz)K_{FG}(zt,uv)\langle 0|TC(u)C^*(v)|P\rangle S(ty) + \quad (\text{B.14}) \\ &+ S(xz)K_{FF}(zt,uv)\langle 0|T\Psi(u)\bar{\Psi}(v)|P\rangle S(ty). \end{aligned}$$

Ядра K_{ij} определены здесь следующими образом

$$\begin{aligned} K_{VV\lambda\rho;mn}^{cd;ab}(zt,uv) &= \frac{\delta\pi_{\lambda\rho}^{cd}(zt)}{\delta\mathcal{D}_{mn}^{ab}(uv)}, \quad K_{VG\lambda\rho}^{cd;ab}(zt,uv) = \frac{\delta\pi_{\lambda\rho}^{cd}(zt)}{\delta G^{ab}(uv)}, \\ K_{VF\lambda\rho;\alpha\beta}^{cd;mn}(zt,uv) &= \frac{\delta\pi_{\lambda\rho}^{cd}(zt)}{\delta S_{\alpha\beta}^{mn}(uv)}, \quad K_{GV}{}_{;mn}^{cd;ab}(zt,uv) = \frac{\delta\Sigma^{cd}(zt)}{\delta\mathcal{D}_{mn}^{ab}(uv)}, \\ K_{GG}{}^{cd;ab}(zt,uv) &= \frac{\delta\Sigma^{cd}(zt)}{\delta G^{ab}(uv)}, \quad (\text{B.15}) \\ K_{GF}{}_{;\alpha\beta}^{cd;mn}(zt,uv) &= \frac{\delta\Sigma^{cd}(zt)}{\delta S_{\alpha\beta}^{mn}(uv)}, \quad K_{FV\alpha\beta;\lambda\rho}^{mnia}(zt,uv) = \frac{\delta M_{\alpha\beta}^{mn}(zt)}{\delta\mathcal{D}_{\lambda\rho}^{ab}(uv)}, \\ K_{FG\alpha\beta}{}^{mn;ab}(zt,uv) &= \frac{\delta M_{\alpha\beta}^{mn}(zt)}{\delta G^{ab}(uv)}, \quad K_{FF\alpha\beta;\alpha'\beta'}^{mn;m'n'}(zt,uv) = \frac{\delta M_{\alpha\beta}^{mn}(zt)}{\delta S_{\alpha'\beta'}^{m'n'}(uv)} \end{aligned}$$

где мы явно вынесли соответствующие индексы. Определяя с учетом трансляционной инвариантности Фурье-преобразование функций

$$\Psi_i(x,y;P) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dq \Psi_i(q,P) e^{-iq(x-y) - i\rho \frac{x+y}{2}}, \quad (\text{B.16})$$

$$G(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dp G(p) e^{-ip(x-y)}, \quad (B.17)$$

$$K_{ij}(z, t, uv) = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int dP dq dk K(q, k; P) \exp[-iq(z-t) + ik(u-v) - i\frac{P}{2}(z+t-u-v)], \quad (B.18)$$

приходим к системе (4.31)-(4.33), выписанной в § 2 главы IV (см. также рис. 2).

Лестничное приближение для уравнений Бете-Салитера налучи, сохраняя в выражениях для массовых операторов Π, M, Σ вклады второго порядка по g и вычисляя ядра K_{ij} по формулам (B.18). В качестве примера вычислим ядра K_{VF} и K_{FV} .

Чтобы найти вклад фермионов в оператор Π во втором порядке, вычислим, как обычно, величину

$$\langle 0|T A_\mu^c(x) A_\nu^d(y)|0\rangle \Rightarrow \frac{(ig)^2}{2} \int du dv \langle 0|T A_\mu^c(x) A_\nu^d(y) \bar{\Psi}_\alpha^m(u) \times (\gamma_\lambda)_{\alpha\beta} \Psi_\beta^n(u) (t^a)_{mn} A_\lambda^a(u) \bar{\Psi}_{\alpha'}^{m'}(v) (\gamma_\rho)_{\alpha'\beta'} \Psi_{\beta'}^{n'}(v) (t^b)_{m'n'} A_\rho^b(v)|0\rangle \quad (B.19)$$

$$= i \int du dv \mathcal{D}_{\mu\lambda}^{ca}(xu) \Pi_{\lambda\rho}^{ab}(uv) \mathcal{D}_{\rho\nu}^{bd}(vy),$$

где

$$\Pi_{\lambda\rho}^{ab}(uv) = -\frac{(ig)^2}{2i} \left[S_{\beta'\alpha'}^{n'm'}(vu) (\gamma_\lambda)_{\alpha\beta} (t^a)^{mn} S_{\beta\alpha}^{nm'}(uv) (\gamma_\rho)_{\alpha'\beta'} \times (t^b)^{m'n'} + S_{\beta\alpha}^{n'm'}(uv) (\gamma_\rho)_{\alpha\beta} (t^b)^{mn} S_{\beta'\alpha'}^{nm'}(vu) (\gamma_\lambda)_{\alpha'\beta'} (t^a)^{m'n'} \right] \quad (B.20)$$

Знак минус в (B.20) является, как обычно, отражением фермионской статистики. Вычисляя теперь вариационную производную и осуществляя фурье-преобразование, получаем

$$K_{VF \lambda\rho; \alpha\beta}^{ab; mn}(q, k; P) = -(ig)^2 \left[(\gamma_\lambda)_{\beta\alpha} (t^a)^{nn'} \frac{1}{i} S_{\alpha\alpha'}^{n'm'}(k+q) (\gamma_\rho)_{\alpha'\alpha} \times (t^b)^{m'm} + (q \rightarrow -q, \lambda \leftrightarrow \rho, a \leftrightarrow b) \right]. \quad (B.21)$$

Для вычисления K_{FV} найдем вклад векторных частиц в массовый оператор M во втором порядке

$$\begin{aligned} \langle 0|T \Psi_\alpha^m(x) \bar{\Psi}_\beta^n(y)|0\rangle &\Rightarrow \frac{(ig)^2}{2} \int du dv \langle 0|T \Psi_\alpha^m(x) \bar{\Psi}_\beta^n(y) \times \\ &\times \bar{\Psi}_\sigma^\ell(u) (\gamma_\lambda)_{\sigma\delta} \Psi_\delta^k(u) (t^a)^{\ell k} A_\lambda^a(u) \bar{\Psi}_{\sigma'}^{\ell'}(v) (\gamma_\rho)_{\sigma'\delta'} \Psi_{\delta'}^{k'}(v) (t^b)^{\ell'k'} \\ &\times A_\rho^b(v)|0\rangle = \frac{1}{i} \int du dv S_{\alpha\sigma}^{m\ell}(xu) M_{\sigma\delta}^{\ell k}(uv) S_{\delta\beta}^{kn}(vy), \end{aligned} \quad (B.22)$$

где

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta}^{mn}(uv) &= \frac{(ig)^2}{2i} \left[(\gamma_\lambda)_{\alpha\delta} (t^a)^{mk} S_{\delta\sigma}^{k\ell}(uv) (\gamma_\rho)_{\sigma\beta} (t^b)^{\ell n} D_{\lambda\rho}^{ab}(uv) \right. \\ &\left. + (\gamma_\rho)_{\alpha\delta} (t^b)^{mk} S_{\delta\sigma}^{k\ell}(uv) (\gamma_\lambda)_{\sigma\beta} (t^a)^{\ell n} D_{\lambda\rho}^{ab}(vu) \right]. \end{aligned} \quad (B.23)$$

Вычисляя вариационную производную $\delta M / \delta \mathcal{D}$ и осуществляя Фурье-преобразование, получаем:

$$\begin{aligned} K_{FV\alpha\beta; \lambda\rho}^{mn; ab}(q, k; P) &= \frac{(ig)^2}{2} \left[(\gamma_\lambda)_{\alpha\delta} (t^a)^{mk} \frac{1}{i} S_{\delta\sigma}^{k\ell}(q-k) (\gamma_\rho)_{\sigma\beta} \right. \\ &\left. \times (t^b)^{\ell n} + (k \rightarrow -k, \lambda \leftrightarrow \rho, a \leftrightarrow b) \right] \end{aligned} \quad (B.24)$$

Нетрудно убедиться, исходя из формул (B.21) и (B.24), что между ядрами K_{VF} и K_{FV} имеет место соотношение

$$K_{VF\lambda\rho; \alpha\beta}^{ab; mn}(q, k; P) = -2 K_{FV\beta\alpha; \rho\lambda}^{nm; ba}(k, q; -P) \quad (B.25)$$

Для остальных ядер аналогичным образом получаем следующие выражения:

$$K_{FG} = K_{GF} = 0, \quad (B.26)$$

несколько в рассматриваемом порядке вклад духов в собственную энергию фермионов и вклад фермионов в собственную энергию духов равны нулю из-за отсутствия в лагранжиане вершины, описывающей взаимодействие фермионов и духов; далее

$$\begin{aligned}
 K_{VV \lambda\rho; \mu\nu}(q, k; P) = & \frac{1}{2} \left\{ g^2 \int^{ca} \int^{db'} \left[(2q - k + \frac{1}{2}P)_\mu g_{\lambda\sigma} + \right. \right. \\
 & + (2k - q + \frac{1}{2}P)_\lambda g_{\delta\mu} + (-k - q - P)_\delta g_{\mu\lambda} \left. \right] i D_{\delta\sigma}^{eb}(q - k) \left[(2q - k - \right. \\
 & - \frac{1}{2}P)_\rho g_{\sigma\rho} + (-q - k + P)_\sigma g_{\rho\nu} + (2k - q - \frac{1}{2}P)_\rho g_{\sigma\nu} \left. \right] + \\
 & + (q \rightarrow -q, c \leftrightarrow d, \lambda \leftrightarrow \rho) + (-ig^2) \left[\int^{ca'e} \int^{db'e} (g_{\lambda\rho} g_{\mu\nu} - g_{\lambda\nu} g_{\rho\mu}) \right. \\
 & \left. + \int^{cde} \int^{a'b'e} (g_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} - g_{\lambda\nu} g_{\rho\mu}) + \int^{cb'e} \int^{da'e} (g_{\lambda\rho} g_{\mu\nu} - g_{\lambda\mu} g_{\rho\nu}) \right] \left. \right\},
 \end{aligned} \tag{B.27}$$

$$\begin{aligned}
 K_{VG \lambda\rho}^{cd; ab}(q, k; P) = & -g^2 \left[\int^{ca} \int^{db'} (k - \frac{1}{2}P)_\rho (k - q)_\lambda \times \right. \\
 & \left. \times \frac{1}{i} G^{eb'}(k - q) + (q \rightarrow -q, \lambda \leftrightarrow \rho, c \leftrightarrow d) \right],
 \end{aligned} \tag{B.28}$$

$$\begin{aligned}
 K_{GV}^{ab; cd}{}_{\lambda\rho}(q, k; P) = & \frac{g^2}{2} \left[\int^{a'ec} \int^{bd'b'} (q + \frac{1}{2}P)_\lambda (q - k)_\rho \times \right. \\
 & \left. \times \frac{1}{i} G^{eb'}(q - k) + (k \rightarrow -k, c \leftrightarrow d, \lambda \leftrightarrow \rho) \right],
 \end{aligned} \tag{B.29}$$

$$K_{GG}^{ab; cd}(q, k; P) = g^2 \int^{cae} \int^{b'dt} (k + \frac{1}{2}P)_\lambda (q - \frac{1}{2}P)_\rho i D_{\lambda\rho}^{et}(q - k) \tag{B.30}$$

$$K_{FF \alpha\beta; \alpha'\beta'}^{mn; m'n'}(q, k; P) = (ig)^2 (t^a)^{mm'} (t^b)^{nn'} (f_{\mu\alpha})_{\alpha\beta} (f_{\nu\beta'})_{\alpha'\beta'} i D_{\mu\nu}^{ab}(q - k) \tag{B.31}$$

Знак минус в формуле (B.28) является следствием фермионской статистики для духов. Для ядер K_{VG} и K_{GV} имеет место соотношение

$$K_{VG\mu\rho}^{cd;ab}(q, k; P) = -2K_{GV\rho\lambda}^{dc;ba}(k, q; -P) \quad (B.32)$$

Приведем также выражения для пропагаторов глюона, фермиона и духа:

$$iD_{\mu\nu}^{ab}(k) = \frac{\delta^{ab}}{ik^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} d_e \right), \quad (B.33)$$

$d_e = 1$ - калибровка Ландау;

$$\frac{1}{i} S_{\alpha\beta}^{mnij}(p) = \left(\frac{i}{\beta} \right)_{\alpha\beta} \delta^{mn} \delta^{ij} \quad (B.34)$$

индексы i, j относятся к "аромату";

$$\frac{1}{i} G^{ab}(p) = \frac{i}{p^2} \delta^{ab} \quad (B.35)$$

Диаграммы для ядер K_{ij} в лестничном приближении приведены на рис. 3. Нетрудно убедиться, что выражения (B.27), (B.24), (B.26)-(B.31) для ядер тождественны соответствующим выражениям для диаграмм рис. 3, записанным по правилам Фейнмана с учетом дополнительного знака минус для K_{VF} , K_{VG} (см. рис. 2). На рис. 2 и рис. 3 волнистая линия относится к глюону, пунктирная - к духу и сплошная - к фермиону.

ЛИТЕРАТУРА

- I. А.А.Славнов. Международная конференция по физике высоких энергий, ХУН, Труды, т.2, Тбилиси, 1976.
2. H.Pagels, Phys. Reports, 16, 221, 1975.
3. S.Weinberg, Phys. Rev. D13, 974, 1976.
4. Г.А.Лоренц. Теория электронов, И.-Л., 1956.
5. С.Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, Москва, 1963.
6. Y.Nambu, Phys. Lett. 4, 380, 1960;
Y.Nambu and G.Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122, 345, 1961.
7. Б.А.Арбузов, А.Н.Тавхелидзе, Р.Н.Фаустов, ДАН СССР, 139, 345, 1961.
8. В.Г.Вакс, А.И.Ларкин, ИЭФ 40, 282, 1992, 1961.
9. П.И.Фомин, Известия ИЭФ 6, 972, 1967.
10. П.И.Фомин, В.И.Трутенъ, ИФ 9, 838, 1969; ИЭФ, 59, 890, 1970.
11. В.И.Трутенъ, П.И.Фомин, ТИФ, т. 5, 219, 1970.
12. А.Т.Филиппов. Материалы IV Международного совещания по нелинейным теориям поля. Алунта, 1976.
13. S.Weinberg, Phys. Rev. Lett. 19, 1264 (1967).
14. A.Salam, in Proceedings of the Eighth Nobel Symposium, ed. by N.Svartholm, p.367 (1968).
15. P.W.Higgs, Phys. Rev. Lett. 13, 508, 1964; Phys. Rev. 145, 1156, 1966.
16. F.Englert, R.Brout, Phys.Rev.Lett. 13, 321 (1964).
17. G.S.Guralnik, C.R.Hagen, T.W.B.Kibble, Phys. Rev. Lett. 13, 585 (1964).
18. T.W.B.Kibble, Phys. Rev. 155, 1554, 1967.
19. G't Hooft, Nucl. Phys. B33, 173 (1971);
G't Hooft and M.Veltman, Nucl. Phys. B50, 318 (1972).
20. B.W.Lee, Phys. Rev. D5, 823, 1972;

- B.W.Lee and J.Zinn-Justin, Phys. Rev. D5, 3121, 3137, 3155, 1972; Phys. Rev. D7, 1049, 1973.
21. И.В.Тютин, Е.С.Фрадкин, ЯФ, 16, 835, 1972;
E.S.Fradkin and I.V.Tyutin, Rivista del Nuovo Cim. 4, 1, 1974.
22. Р.Э.Каллош, И.В.Тютин, ЯФ, 17, 183, 1972.
23. А.А.Славнов. ЭЧАЯ, т.5, 755, 1974.
24. R.Jackiw and K.Johnson, Phys. Rev. D8, 2386 (1973).
25. J.M.Cornwall and R.E.Norton, Phys. Rev. D8, 3338 (1973).
26. H.Pagels, Phys. Rev. D7, 3689, 1973.
27. J.Smit, Phys. Rev. D10, 2473 (1973).
28. D.Gross and A.Neveu, Phys. Rev. D10, 3235 (1974).
29. F.Englert, J.Frère and P.Nicoletopoulos, CERN preprint TH-1933 (1974).
30. E.Nichten and F.Feinberg, Phys. Rev. D10, 3254 (1975).
31. E.Poggio, E.Tomboulis and S.Tye, Phys. Rev. D11, 2839, 1975.
32. M.Gell-Mann and F.Low, Phys. Rev. 95, 1300 (1954).
33. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков, ДАН СССР, 103, 392, 1955;
ИЗТО 30, 77, 1956.
34. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков, Введение в теорию квантованных полей, Наука, М., 1973.
35. Д.В.Ширков, ДАН СССР, 103, 972, 1955; ДАН СССР 148, 814, 1963;
Nucl. Phys. B62, 194, 1973.
36. В.В.Белокурое, А.А.Владимиров, Д.И.Казаков, А.А.Славнов,
Д.В.Ширков, ТИФ, 19, 149, 1974.
37. D.J.Gross and F.Wilczek, Phys. Rev. D8, 3633, 1973.
38. K.Johnson, M.Baker and R.Willey, Phys. Rev. B136, 1111, 1964.
39. K.Johnson and M.Baker, Phys. Rev. D8, 1110, 1973.
40. S.Adler, Phys. Rev. D5, 3021, 1972.
41. В.И.Трутень, УФН, т.21, 489, 1976.
42. K.Wilson, Phys. Rev. D3, 1818 (1971).

43. S.Fubini, Summary talk, 18th High-energy Conf. CERN preprint TH-1904 (1974).
44. Q.Shafi, Journ. of Phys., vol 99, 1977.
45. Н.Н.Боголюбов. Квазисредние в задачах статистической механики, препринт ОИЯИ Р-1451, Дубна (1961); Избранные труды, т. 3, стр. 174-215 (1971).
46. S.Weinberg, Phys. Rev. D8, 3497, 1973.
47. G't Hooft, Nucl. Phys. B61, 455, 1973.
48. J.Schwinger, Phys. Rev. 125, 397, 1962; 128, 2325, 1962.
49. В.И.Огневский, И.В.Полубаринов, ИЭФ, 41, 247, 1961; Nuovo Cim. 23, 173, 1962.
50. J.Goldstone, A.Salam, S.Weinberg, Phys. Rev. 127, 965, 1962.
51. G.Jona-Lasinio, Nuovo Cim. 34, 1790, 1964.
52. E.S.Abers and B.W.Lee, Phys. Reports, C9, 1, 1973; перевод в сб. "Квантовая теория калибровочных полей", Мир, Москва, 1977.
53. J.M.Cornwall, R.Jackiw and E.Tomboulis, Phys. Rev. D10, 2428, 1974.
54. А.Н.Васильев. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике, изд-во Ленинградского университета, 1976.
55. J.Goldstone, Nuovo Cim. 19, 154, 1961.
56. S.Coleman and E.Weinberg, Phys. Rev. D7, 1888 (1973).
57. R.Jackiw, Phys. Rev. D9, 1686, 1974.
58. J.Iliopoulos, C.Itzykson, A.Martin, Rev.Mod.Phys., 47, 165, 1975.
59. Д.А.Кириани, А.Д.Линде, ИЭФ, т.67, 1263, 1974.
60. Б.Л.Иоффе, В.А.Новиков, И.А.Лишман, ЯФ 22, 401, 1989.
61. S.Adler and W.Bardeen, Phys. Rev. 182, 1517, 1969; Phys. Rev. D4, 3045, 1971.
62. M.Baker and K.Johnson, Phys. Rev. D3, 2516, 1971.

63. Дж.Шриффер. Теория сверхпроводимости, § 7.1, Наука, 1970.
64. Н.Н.Боголюбов, В.В.Толмачев, Д.В.Ширков. Новый метод в теории сверхпроводимости, изд-во АН СССР, М., 1958.
65. Я.Б.Зельдович, В.С.Попов, УФН, 195, 403, 1971.
66. С.Г.Михлин. Интегральные уравнения, Гостехиздат, 1947.
67. K.Lane, Phys.Rev. D10, 1353, 1974.
68. И.Ц.Гохберг, М.Г.Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, гл.12, Наука, 1965.
69. А.А.Гриб, Е.В.Дамаскинский, В.М.Максимов, УФН, 102, 587, 1970.
70. Л.П.Горьков, ВЭФ, 34, 735, 1958;
Y.Nambu, Phys. Rev. 117, 648, 1960.
71. L.D.Landau, A.A.Abrikosov and I.M.Khalatnikov, Nuovo Cim. Suppl. 3, 80, 1956.
72. Д.Бартон. Дисперсионные методы в теории поля. Атомиздат, М., 1968.
73. K.Eriksson, Nuovo Cim. 30, 1423, 1963.
74. M.Astaud and B.Jouvet, Nuovo Cim. 63A, 5, 1969.
75. Л.Д.Ландау, А.А.Абрикосов, И.М.Халатников. Сборник трудов Л.Д.Ландау, стр. 302-327, Наука, 1969.
76. D.R.Yennie, S.C.Frautchi and H.Suura, Ann. of Phys. 13, 379, 1961.
77. А.В.Виленкин, П.И.Фомин, ВЭФ 67, 12, 1974.
78. П.И.Фомин, ВЧАЯ, т.7, вып. 3, 687, 1976.
79. S.Sarkar, Nucl.Phys. B56, 493, 1973.
80. J.M.Cornwall, Phys.Rev. D10, 500, 1974.
81. R.Fukuda and T.Kugo, Nucl.Phys. B117, 250, 1976.
82. Б.Г.Драгович, Д.П.Мавло, А.Т.Филиппов, препринт P2-10344, ОИЯИ, Дубна, 1976.
83. H.Pagels, Phys.Rev. D7, 3689, 1973;
P.Langacker and H.Pagels, Phys.Rev. D9, 3413, 1974.

84. P.I.Fomin and V.A.Miransky, Phys. Lett. 64B, 166, 1966.
85. M.Gourdin, Nuove Cim. 2, 338 (1958).
86. Г.Бейтмен, А.Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, т.1, Наука, Москва, 1973.
87. Е.Т.Уиттекер, Г.Ватсон. Курс современного анализа, т.2, Физматгиз, 1963.
88. G.Bilam and M.Gluck, Phys. Rev. D13, 279, 1976.
89. Дж.Иллиопулос, УФН, т.123, 565, 1977.
90. W.Marciano and H.Pagels, Quantum Chromodynamics, preprint C00-2232B-130, Rockefeller University, 1977.
91. H.Fritsch, M.Gell-Mann, H.Leutwyler, Phys. Lett., 47B, 365, 1973.
92. C.N.Yang and R.L.Mills, Phys. Rev. 96, 191 (1953);
перевод в сб. "Элементарные частицы и компенсирующие поля"
Ипр, 1964.
93. В.Н.Попов, Л.Д.Фаддеев, препринт ИТФ-67-36, Киев, 1967;
L.D.Faddeev and V.N.Popov, Phys. Lett. 25B, 29, 1967.
94. B.S.De Witt, Phys. Rev. 160, 1113 (1967); Phys. Rev. 162,
1195, 1967.
95. E.S.Fradkin and I.V.Tyutin, Phys. Rev. D2, 2841, 1970.
96. А.А.Славнов, ТИФ, 10, 153, 1972.
97. J.C.Taylor, Nucl. Phys. B33, 436, 1971.
98. A.M.Polyakov, Phys. Lett. 59B, 82 (1975).
99. R.Jackiw, Rev. Mod. Phys. 49, 681 (1977).
100. А.И.Вайнштейн, В.И.Захаров, В.А.Новиков, Л.Б.Окунь, Шифман, М.А.
УФН, т.123, 217, 1977.
101. R.Fukuda, preprint RIFP-301, Kyoto University (1977).
102. J.M.Corwall, Nucl Phys. B128, 75, 1977.
103. H.Pagels. Phys. Rev. D14, 2747, 1976.
104. A.Belavin, A.Polyakov, A.Schwartz and Y.Tyupkin, Phys. Lett.
B59, 85, 1975.

105. G't Hooft, Phys. Rev. Lett. 37, 8, 1976.
106. R.Jackiw and C.Rebbi, Phys.Rev. Lett. 37, 172, 1976.
107. C.Callan, R.Dashen, D.Gross, Phys. Lett. 63B, 334, 1976.
108. R.Barbieri, M.Ciafaloni and R.Menetti, Nuovo Cim. 55, 701, 1968.
109. A.Nishimura and K.Higashijima, preprint UT-261, University of Tokyo, 1976.
110. P.I.Femin, V.P.Gusynin, V.A.Miransky and Yu.A.Sitenko, Nucl.Phys. B110, 445, 1976; preprint ITP-75-93E, Kiev, 1975.
111. V.P.Gusynin and V.A.Miransky, Nucl.Phys. B109, 526, 1976; preprint ITP-75-99E, Kiev, 1975.
112. В.П.Гусынин, УФН, т.22, 389, 1977.
113. V.P.Gusynin and V.A.Miransky, preprint ITP-77-1E, Kiev, 1977.
114. В.П.Гусынин, В.А.Миранский, П.И.Фомин, ДАН УССР, сер.А, т.6, 1978; препринт ИТФ-77-139P, Киев, 1977.
115. V.P.Gusynin and V.A.Miransky, preprint ITP-78-6E, Kiev, 1978.
116. J.Schwinger, Proc.Nat.Acad.Sci., 37, 452, 455, 1951; перевод в сб. ПСФ № 3, 28, 33, 1955.
117. Е.С.Фрадкин. Метод функций Грина в теории квантованных полей и в квантовой статистике. Труды ФИАН, т.29, 1965.
118. См., напр., M.Baker, K.Johnson and B.W.Lee, Phys.Rev. 133B, 209, 1964.

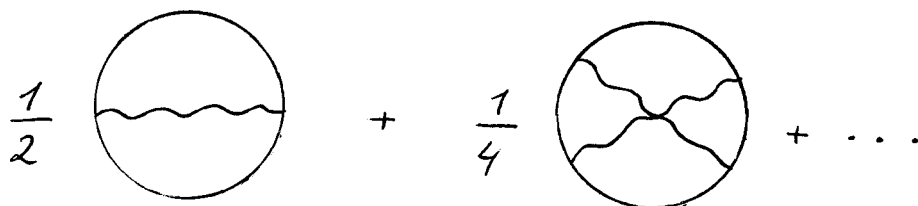


Рис. I. Вакуумные диаграммы, дающие вклад в эффективный потенциал V .

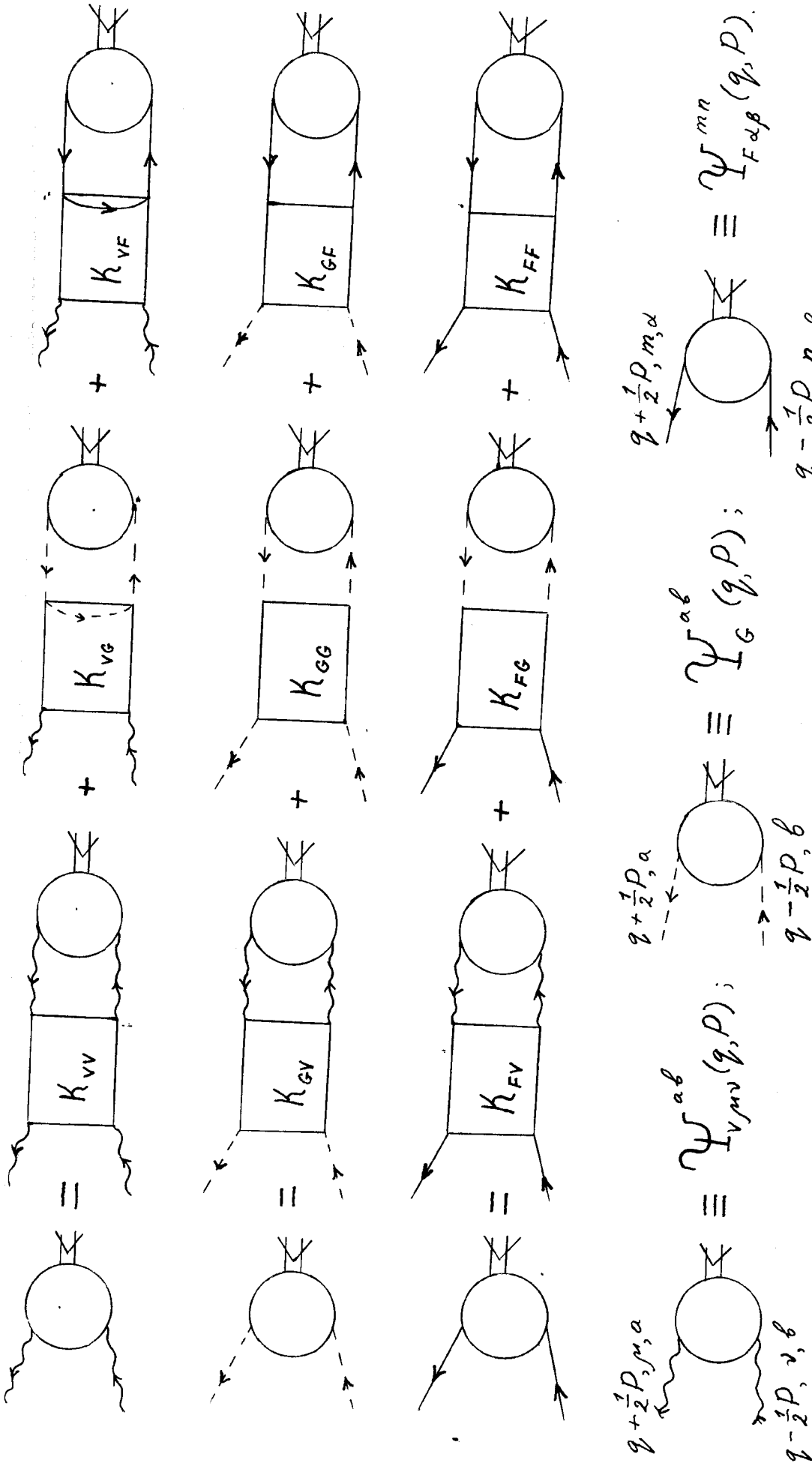


Рис. 2. Система уравнений Бете-Солпитера для двухчастичных связанных состояний в квантовой хромодинамике.

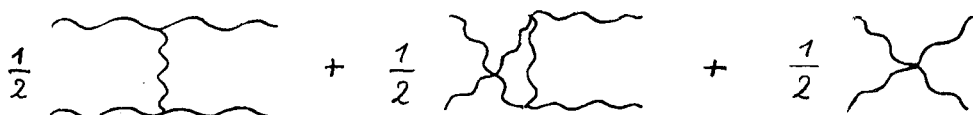


Рис. 3а



Рис. 3б

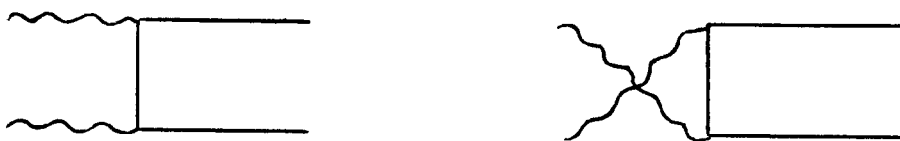


Рис. 3в



Рис. 3г

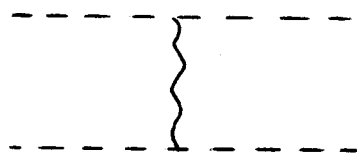


Рис. 3д

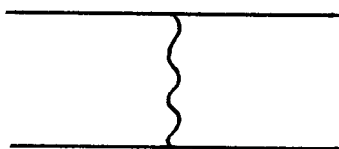


Рис. 3е

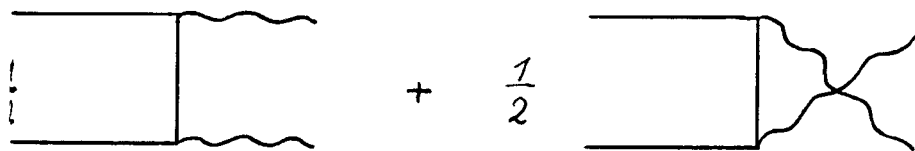


Рис. 3ж

Рис. 3. Диаграммы для ядер уравнений Бете-Солпитера в лестничном приближении с соответствующими симметричными коэффициентами: а) K_{VV} б) K_{VG} в) K_{VF} г) K_{GV} д) K_{GG} е) K_{FF} ж) K_{FV} .