

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ
ім. М.М. БОГОЛЮБОВА НАН УКРАЇНИ

В.П. Гусинін
Е.В. Горбар

ВСТУП
ДО
КВАНТОВОЇ
ТЕОРІЇ
КАЛІБРУВАЛЬНИХ
ПОЛІВ

КИЇВ
АКАДЕМПЕРІОДИКА
2023

Рецензенти:

І.М. КАДЕНКО, доктор фіз.-мат. наук, професор
Б.І. ЛЕВ, академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор
О.Л. РЕБЕНКО, доктор фіз.-мат. наук, професор

*Затверджено до друку Вченою радою
Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України
Протокол від 29.09.2022 № 6*

*Видання здійснено за кошти Цільової комплексної
програми НАН України «Наукові основи функціонування
та забезпечення умов розвитку науково-видавничого
комплексу НАН України»*

Гусинін В.П.

Г96 Вступ до квантової теорії калібрувальних полів / В.П. Гусинін, Е.В. Горбар; НАН України, Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова. — Київ: Академперіодика, 2023. — 488 с.

ISBN 978-966-360-487-9

Квантова теорія поля є базовою дисципліною у фізиці елементарних частинок та конденсованих середовищ і займає одне з чільних місць у програмі фізичних факультетів університетів. У пропонованій монографії викладено основи теорії калібрувальних полів, які є серцевиною сучасної квантової теорії поля. Виклад ґрунтується на застосуванні методу функціонального інтегрування та передбачає знайомство з квантуванням вільних полів в операторному підході. Матеріал монографії відповідає трисеместровому університетському курсу лекцій і включає також Стандартну модель сучасної фізики елементарних частинок та окремі напрями її розширення.

Для студентів старших курсів, бакалаврів, магістрів, аспірантів фізико-математичних спеціальностей, а також науковців, які бажають ознайомитися з методами сучасної теорії калібрувальних полів.

УДК 530.145

ISBN 978-966-360-487-9

© Інститут теоретичної фізики
ім. М.М. Боголюбова НАН України, 2023
© Академперіодика, оформлення, 2023

ЗМІСТ

| | |
|----------------|---|
| ПЕРЕДМОВА..... | 9 |
|----------------|---|

1

КВАНТОВА МЕХАНІКА У ФОРМАЛІЗМІ ІНТЕГРАЛА ЗА ТРАЕКТОРІЯМИ

| | |
|---|----|
| 1.1. Фейнманівське формулювання квантової механіки..... | 11 |
| 1.2. Пропагатор вільної частинки..... | 18 |
| 1.3. Лагранжіани квадратичні за координатами та швидкостями..... | 20 |
| 1.4. Генеруючий функціонал..... | 23 |
| 1.5. Фейнманівський пропагатор в енергетичному представленні..... | 28 |
| 1.6. Генеруючий функціонал у квантовій теорії поля..... | 29 |
| 1.7. Гаусові інтеграли багатьох змінних..... | 32 |
| 1.8. Функціональне інтегрування за грасмановими змінними..... | 35 |
| 1.9. Інтеграл за траекторіями та детермінанти..... | 43 |
| Задачі..... | 46 |

2

КВАНТУВАННЯ ГАМІЛЬТОНОВИХ СИСТЕМ ІЗ В'ЯЗИМИ

| | |
|--|----|
| 2.1. Канонічне квантування регулярних гамільтонових систем..... | 50 |
| 2.2. Гамільтонова динаміка систем із в'язями..... | 53 |
| 2.3. Гамільтонові системи з в'язями першого роду..... | 59 |
| 2.4. Операторне квантування гамільтонових систем із в'язями..... | 65 |
| 2.5. Інтеграл за траекторіями для систем із в'язями..... | 66 |
| 2.6. Приклади фізичних систем із в'язями..... | 67 |
| Задачі..... | 70 |

3

КВАНТУВАННЯ ВІЛЬНОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

| | |
|--|----|
| 3.1. Квантова електродинаміка як гамільтонова система з в'язями..... | 75 |
| 3.2. Функціональний інтеграл для поля Максвелла..... | 86 |
| 3.3. Метод Фаддєєва—Попова..... | 17 |
| Задачі..... | 88 |

4

ПОЛЯ ЯНГА—МІЛЛСА

| | |
|--|-----|
| 4.1. Класичні поля Янга—Міллса | 91 |
| 4.2. Рівняння руху..... | 97 |
| 4.3. Приклади розв'язків класичних рівнянь | 100 |
| 4.4. Класифікація та представлення груп і алгебр Лі..... | 105 |
| 4.5. Квантування полів Янга—Міллса..... | 111 |
| 4.6. Квантування неабелевих теорій методом Фаддеева—Попова | 114 |
| 4.7. Симетрія БРСТ у квантовій хромодинаміці | 122 |
| Задачі..... | 126 |

5

ГЕНЕРУЮЧИЙ ФУНКЦІОНАЛ У ТЕОРІЇ
СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

| | |
|---|-----|
| 5.1. Функції Гріна у функціональному формалізмі: рівняння руху та закони збереження | 130 |
| 5.2. Функціонально-диференціальне рівняння для генеруючого функціонала..... | 136 |
| 5.3. Двоточкова функція Гріна | 139 |
| 5.4. Генеруючий функціонал для зв'язних діаграм | 142 |
| 5.5. Теорема Віка для скалярних полів | 143 |
| 5.6. Діаграми Фейнмана..... | 144 |
| 5.7. Правила Фейнмана в імпульсному просторі | 147 |
| 5.8. Симетрійні коефіцієнти в теорії скалярного поля | 148 |
| Задачі..... | 149 |

6

ПРАВИЛА ФЕЙНМАНА
В КАЛІБРУВАЛЬНИХ ТЕОРІЯХ

| | |
|---|-----|
| 6.1. Теорема Віка для спінових полів | 153 |
| 6.2. Фейнманівські правила в квантовій електродинаміці..... | 155 |
| 6.3. Фейнманівські правила в квантовій хромодинаміці | 157 |
| Задачі..... | 161 |

7

ФУНКЦІЇ ГРІНА
В ТЕОРІЇ ЗБУРЕНЬ І ПЕРЕНОРМУВАННЯ

| | |
|--|-----|
| 7.1. Електронна функція Гріна у другому порядку теорії збурень | 162 |
| 7.2. Фотонна функція Гріна у другому порядку теорії збурень..... | 165 |
| 7.3. Вершинна діаграма..... | 169 |

| | |
|--|-----|
| 7.4. Класифікація перенормовності теорій | 170 |
| 7.4.1. Індекс розбіжності діаграм у квантовій електродинаміці | 170 |
| 7.4.2. Індекс розбіжності діаграм у квантовій хромодинаміці | 174 |
| 7.4.3. Індекс діаграми та степінь розбіжності в теорії $\lambda\Phi^k$ | 175 |
| 7.5. Розмірний аналіз полів, констант взаємодії і функцій Гріна | 177 |
| 7.6. Регуляризація Паулі—Вілларса. Загальні ідеї теорії перенормувань | 179 |
| 7.7. Програма перенормувань | 183 |
| 7.8. Розмірна регуляризація | 185 |
| Задачі | 189 |

8

ОДНОПЕТЛЬОВІ ДІАГРАМИ В КВАНТОВІЙ ЕЛЕКТРОДИНАМІЦІ

| | |
|---|-----|
| 8.1. Поляризаційний оператор | 191 |
| 8.2. Уявна частина поляризаційного оператора | 195 |
| 8.3. Власна енергія електрона | 196 |
| 8.4. Перенормування заряду і маси електрона у другому порядку теорії збурень | 197 |
| 8.5. Генерація маси калібрувального поля та кіральна аномалія в моделі Швінгера | 203 |
| 8.6. Модифікація закону Кулона | 206 |
| 8.7. Вершинна діаграма | 214 |
| 8.7.1. Аномальний магнітний момент електрона | 217 |
| 8.7.2. Загальна структура вершинної функції | 223 |
| 8.7.3. Лембівський зсув | 225 |
| 8.8. Контрчленний підхід до перенормування маси, заряду та хвильових функцій | 229 |
| Задачі | 238 |

9

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ШВІНГЕРА—ДАЙСОНА, ТОТОЖНОСТІ УОРДА—ТАКАХАШІ, КІРАЛЬНІ ТА КАЛІБРУВАЛЬНІ АНОМАЛІЇ

| | |
|--|-----|
| 9.1. Інтегральні рівняння Швінгера—Дайсона | 241 |
| 9.2. Рівняння Швінгера—Дайсона в квантовій електродинаміці з функціонального інтеграла | 244 |
| 9.3. Векторні тотожності Уорда—Такахаші | 248 |
| 9.4. Перетворення Ландау—Халатнікова—Фрадкіна | 251 |
| 9.5. Аксиально-векторна тотожність | 253 |
| 9.6. Аномальна кіральна тотожність | 256 |
| 9.6.1. Кіральна аномалія з функціонального інтеграла | 256 |
| 9.6.2. Квантові аномалії калібрувальних симетрій | 265 |

| | |
|---|-----|
| 9.6.3. Кіральна аномалія та розпад нейтрального піона | 266 |
| 9.7. Тотожності Славнова—Тейлора | 271 |
| Задачі | 274 |

10

РІВНЯННЯ РЕНОРМАЛІЗАЦІЙНОЇ ГРУПИ

| | |
|--|-----|
| 10.1. Ренормалізаційна група в квантовій електродинаміці | 277 |
| 10.2. Однопетльові діаграми в квантовій хромодинаміці | 284 |
| 10.2.1. Поляризаційний оператор глюонів | 284 |
| 10.2.2. Власна енергія кварка | 287 |
| 10.2.3. Кварк-глюонна вершинна функція | 287 |
| 10.3. Розв'язок рівнянь ренормалізаційної групи у другому порядку теорії збурень | 290 |
| 10.4. Квантова хромодинаміка | 293 |
| 10.5. Рівняння для ефективної константи взаємодії. Загальний аналіз | 297 |
| 10.6. Асимптотична безпека квантово-польових теорій | 301 |
| Задачі | 304 |

11

ПЕРЕРІЗ РОЗСІЯННЯ І S-МАТРИЦЯ

| | |
|---|-----|
| 11.1. Переріз розсіяння і ширина розпаду частинок | 306 |
| 11.2. S-матриця | 309 |
| 11.3. Оптична теорема | 314 |
| 11.4. Оптична теорема для фейнманівських діаграм. Правила Куткоського | 315 |
| 11.5. Редукційні формули Лемана—Симанзіка—Циммермана | 319 |
| Задачі | 325 |

12

СПОНАННЕ ПОРУШЕННЯ СИМЕТРІЇ

| | |
|--|-----|
| 12.1. Спонтанне порушення дискретної симетрії | 327 |
| 12.2. Лінійна σ -модель | 328 |
| 12.3. Теорема Голдстоуна | 330 |
| 12.4. Модель Намбу—Йона-Лазінію | 332 |
| 12.5. Ефективна дія | 336 |
| 12.6. Квантова ефективна дія. Скалярні поля | 337 |
| 12.7. Квантова ефективна дія в квантовій електродинаміці | 344 |
| 12.8. Тотожності Нільсена | 347 |
| 12.9. Обчислення квантової ефективної дії | 350 |

| | |
|--|-----|
| 12.10. Потенціал Коулмена—Вайнберга | 356 |
| 12.11. Розклад за степенями похідних | 359 |
| 12.12. Рівняння ренормалізаційної групи для ефективної дії | 363 |
| 12.13. Функціональна ренормалізаційна група | 366 |
| 12.14. Ефективна дія для складених полів | 373 |
| Задачі | 379 |

13

МЕХАНІЗМ ХІГГСА

| | |
|--|-----|
| 13.1. Модель Хіггса з абелевою симетрією | 382 |
| 13.2. R_ξ -калібровка в калібрувальних теоріях зі спонтанним порушенням симетрії | 384 |
| 13.3. Механізм Хіггса в неабелевих калібрувальних теоріях | 387 |
| 13.4. Квантування неабелевих калібрувальних теорій в R_ξ -калібровці | 390 |
| 13.5. Приклади спонтанного порушення симетрії | 392 |
| 13.6. Монополь 'т Хоофта—Полякова | 393 |
| Задачі | 399 |

14

СТАНДАРТНА МОДЕЛЬ СИЛЬНИХ І ЕЛЕКТРОСЛАБКИХ ВЗАЄМОДІЙ

| | |
|--|-----|
| 14.1. Квантова хромодинаміка | 402 |
| 14.2. Теорія Фермі і лагранжіан електрослабких взаємодій | 404 |
| 14.3. Маса калібрувальних бозонів в електрослабких взаємодіях | 409 |
| 14.3.1. Скорочення аномалій кіральних калібрувальних симетрій | 412 |
| 14.3.2. Кут змішування Вайнберга та електрослабкі взаємодії ферміонів | 414 |
| 14.4. Масові доданки ферміонів | 416 |
| 14.5. Квантові числа полів у Стандартній моделі | 418 |
| 14.6. Хіггсівський бозон | 419 |
| 14.7. Змішування поколінь. Матриця Кабіббо—Кобаясі—Маскави | 422 |
| 14.7.1. Симетрії P , C , T | 422 |
| 14.7.2. Змішування поколінь | 423 |
| 14.7.3. Матриця Кабіббо—Кобаясі—Маскави | 424 |
| 14.8. Нейтральні реакції зі зміною ароматів | 429 |
| 14.9. Правила Фейнмана в теорії електрослабких взаємодій | 432 |
| 14.10. Слабкий розпад топ-кварка | 435 |
| 14.11. Майоранівські ферміони | 438 |
| 14.12. Осциляції нейтрино | 442 |
| 14.13. Баріонна і лептонна симетрії та їх порушення в Стандартній моделі | 448 |
| Задачі | 451 |

15
РОЗШИРЕННЯ
СТАНДАРТНОЇ МОДЕЛІ

| | |
|--|-----|
| 15.1. Маса нейтрино | 453 |
| 15.2. Модель з двома дублетами хіггсівського поля | 455 |
| 15.3. Моделі Великого об'єднання | 459 |

ДОДАТКИ

| | |
|--|-----|
| А. Обчислення детермінантів операторів | 465 |
| Б. Особливості причинних функцій Гріна | 468 |

| | |
|------------------|-----|
| ЛІТЕРАТУРА | 472 |
|------------------|-----|

| | |
|---------------------------|-----|
| ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК | 483 |
|---------------------------|-----|

| | |
|-------------------|-----|
| ПРО АВТОРІВ | 486 |
|-------------------|-----|

ПЕРЕДМОВА

Згідно з сучасними уявленнями всі відомі елементарні частинки є збудженнями квантових полів, а взаємодія цих полів описує розсіяння та розпад частинок. Історично квантова теорія поля, а саме квантова електродинаміка, з'явилася після створення квантової механіки як теорія взаємодії електронів з квантами електромагнітного поля (фотонами) в роботі Поля Дірака у 1927 р. З теоретичної точки зору релятивістська квантова теорія поля є синтезом квантової механіки і спеціальної теорії відносності. Історичну інформацію про ранні роки створення квантової теорії поля можна знайти в першому розділі чудового підручника Вайнберга [196]. В подальшому квантову теорію поля було успішно застосовано для опису слабких і сильних взаємодій. Кульмінацією розвитку квантової теорії поля та експериментальних досліджень є Стандартна модель фізики елементарних частинок, яка описує електрослабкі та сильні взаємодії частинок.

Є велика кількість дуже гарних монографій, підручників та курсів лекцій з сучасної квантової теорії поля. Ця книжка ґрунтується на курсі лекцій, який один з авторів (В.П.Г.) упродовж більш як 30 років читав для студентів-бакалаврів 4-го курсу та магістрів 1-го курсу фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, а також протягом кількох років для студентів Києво-Могилянської академії та Київського академічного університету. Як основний метод викладення квантової теорії поля ми використовуємо метод функціонального інтеграла, який є гнучким та евристично зрозумілим. При викладі матеріалу автори виходили з того, що читач вже знайомий з квантовою механікою, спеціальною теорією відносності та основами квантової теорії поля, такими як квантування вільних полів в операторній формі, наприклад, за класичними монографіями М.М. Боголюбова і Д.В. Ширкова [5], Дж. Бьоркена і С.Д. Дрелла [50, 51] або за книжкою О.Л. Ребенка [16].

Виклад починається з основ математичного апарату функціонального інтегрування, далі розглядаються канонічні гамільтонові системи з в'язями, квантування скалярних, ферміонних та електромагнітних полів, а також полів Янга—Міллса на мові континуального інтеграла, фейнманівські діаграми, теорія перенормувань. Значну увагу приділено отриманню рівнянь Швінгера—Дайсона, тотожностей Уорда—Такахаші, генеруючого

функціонала для функцій Гріна та ефективної дії. В окремих розділах викладено метод ренормалізаційної групи, спонтанне порушення симетрій та механізм Хіггса, які посідають важливе місце у фізиці елементарних частинок і фізиці конденсованих середовищ. Останні розділи монографії присвячено електрослабким взаємодіям частинок у рамках Стандартної моделі та можливим розширенням останньої.

Деякі розділи містять матеріал, який став, так би мовити, класичним тільки в останні десятиліття, наприклад тотожності Нільсена, квантова ефективна дія для складених операторів, теорії з ультрафіолетовими фіксованими точками ренормгрупи, які узагальнюють поняття перенормовності. Крім того, виклад деяких питань є оригінальним або маловідомим у літературі. Тому ми сподіваємося, що монографія буде корисною як студентам, які вивчають квантову теорію поля, так і, можливо, більш широкому загалу дослідників і науковців. Кожний розділ монографії доповнено задачами на відповідну тему, що дозволяє читачу більш глибоко засвоїти матеріал. Монографія має список рекомендованої літератури, який однак у жодному разі не можна вважати вичерпним.

Наостанок ми хочемо подякувати нашим колегам з Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова та фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, спілкування і співпраця з якими надихали нас і зробили можливим написання цього курсу лекцій. Автори вдячні також П.К. П'ятковському, який набрав в LaTeX перший рукописний варіант лекцій, Ю.С. Журавльову, Д.О. Орехову і П.О. Сухачову за допомогу в оформленні рисунків, а також О.О. Соболю за корисні поради.

1

КВАНТОВА МЕХАНІКА У ФОРМАЛІЗМІ ІНТЕГРАЛА ЗА ТРАЄКТОРІЯМИ

При вивченні ідей та методів квантової теорії калібрувальних полів ми будемо широко застосовувати метод функціонального інтегрування. Цей метод є дуже зручним у теорії збурень, яку ми будемо переважно використовувати. Основна причина полягає в тому, що поля в методі функціонального інтегрування є звичайними функціями, а не операторнозначними функціями як у підході канонічного квантування, і з ними нам набагато простіше працювати. Для того щоб зрозуміти, що таке метод функціонального інтегрування, у цьому розділі ми розглянемо цей метод для випадку квантово-механічних систем.

1.1. Фейнманівське формулювання квантової механіки

Зазвичай формулювання квантової механіки відбувається за допомогою канонічних комутаційних співвідношень для динамічних змінних. Наприклад, $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$, де \hbar — постійна Планка, у випадку системи з одним ступенем вільності, яка описується оператором координати \hat{q} та відповідним імпульсом \hat{p} . З точки зору операторів у гільбертовому просторі використання канонічних комутаційних співвідношень становить основу так званого гамільтонового підходу. Він був розроблений засновниками квантової механіки Бором, Борном, Діраком, Гейзенбергом, Йорданом, Паулі, Шредінгером та іншими в 1925–1926 роках. Основною величиною у квантовій механіці є певна комплексна функція ψ , яка називається амплітудою ймовірності (або хвильовою функцією), пов'язаною з кожним квантово-механічним станом. У найпростішому випадку однієї частинки хвильова функція $\psi(\mathbf{q}, t)$ задає ймовірність знаходження частинки в точці \mathbf{q} в момент часу t , яка дорівнює $|\psi(\mathbf{q}, t)|^2$. Хвильову функцію ψ знаходять, розв'язуючи диференціальне рівняння Шредінгера в конфігураційному просторі

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{q}, t)}{\partial t} = H(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}})\psi(\mathbf{q}, t), \quad \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla_{\mathbf{q}}, \quad (1.1.1)$$

де $H(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}})$ — оператор Гамільтона, який отримується з класичного гамільтоніана $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ заміною координат і імпульсів на відповідні оператори.

Якщо хвильова функція $\psi(q_i, t_i)$ задана в початковий момент часу t_i , тоді її значення в кінцевий момент часу $t_f > t_i$ згідно з принципом Гюйгенса визначається виразом (останній має загальний характер і фактично визначається принципом причинності)

$$\psi(q_f, t_f) = \int K(q_f, t_f | q_i, t_i) \psi(q_i, t_i) dq_i, \quad (1.1.2)$$

де $K(q_f, t_f | q_i, t_i)$ називається ядром переходу, або фейнманівським пропагатором.

Нехай у початковий момент t_i координата має точно визначене значення $q_i = q_0$. Хоча відповідний квантово-механічний стан з точно визначеною координатою неможливо реалізувати фізично, це припущення спрощує наш розгляд, тому ми його використовуємо. Тоді хвильова функція

$$\psi(q_i, t_i) = \delta(q_i - q_0)$$

в кінцевий момент часу t_f в точці q_f буде

$$\psi(q_f, t_f) = K(q_f, t_f | q_0, t_i). \quad (1.1.3)$$

Ймовірність переходу зі стану $q_i = q_0$ у стан q_f за час $t_f - t_i$ ($t_f > t_i$) визначається формулою

$$P(q_f, t_f | q_0, t_i) = |\psi(q_f, t_f)|^2 = |K(q_f, t_f | q_0, t_i)|^2, \quad (1.1.4)$$

а $K(q_f, t_f | q_0, t_i)$ є амплітудою ймовірності переходу.

Для часу $t_i < t < t_f$ маємо, очевидно,

$$\psi(q, t) = \int K(q, t | q_i, t_i) \psi(q_i, t_i) dq_i,$$

і можемо записати

$$\begin{aligned} \psi(q_f, t_f) &= \int K(q_f, t_f | q, t) \psi(q, t) dq = \\ &= \int K(q_f, t_f | q, t) K(q, t | q_i, t_i) \psi(q_i, t_i) dq dq_i, \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

звідки, порівнюючи з (1.1.2), знаходимо

$$K(q_f, t_f | q_i, t_i) = \int K(q_f, t_f | q, t) K(q, t | q_i, t_i) dq. \quad (1.1.6)$$

Як бачимо, амплітуди послідовних у часі подій перемножуються. Це одна з найважливіших властивостей фейнманівського пропагатора.

Для того щоб проілюструвати цю властивість, розглянемо експеримент зі щілинами (перехід частинки із A в D через щілини B_1 або B_2),

представлений на рис. 1. Відповідно до (1.1.6) амплітуда ймовірності переходу є суперпозицією шляхів від A до D через дві проміжні щілини, а саме: $A - B_1 - D$ і $A - B_2 - D$,

$$K(D|A) = K(D|B_1)K(B_1|A) + K(D|B_2)K(B_2|A). \quad (1.1.7)$$

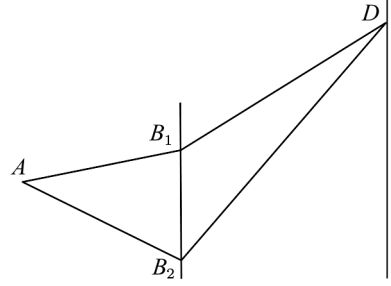


Рис. 1. Два можливі шляхи від джерела A через дві щілини B_1 і B_2 до точки D на екрані

На екрані спостерігаємо інтерференційну картину. Якщо ми зробимо тепер багато щілин (у граничному випадку приберемо проміжний екран), тоді амплітуда переходу буде визначатися сумою за всіма траєкторіями.

Фейнман показав [78], що амплітуду переходу можна записати як суму, або, точніше, як інтеграл за траєкторіями (зазначимо, що вперше цей результат для інфінітезимального по часу переходу отримав Дірак у 1933 р.)

$$K(D|A) = N_{DA} \sum_a \exp(iS_a(t_f, t_i)/\hbar), \quad (1.1.8)$$

де $S_a(t_f, t_i)$ — дія, порахована для конкретної траєкторії a від точки A до точки D , N_{DA} — нормуючий множник. Квазікласична границя $\hbar \rightarrow 0$ виділяє одну класичну траєкторію, яка визначається рівняннями Ейлера—Лагранжа,

$$\delta S = 0.$$

Таким чином, класична траєкторія є екстремумом дії, а її внесок є великим у класичній границі, тому що для близьких траєкторій внесок їх відхилення від класичної траєкторії в дію є більш високого порядку, ніж перший.

Хвильова функція в квантовій механіці є проєкцією квантово-механічного стану на обрану повну систему станів якогось ермітового оператора, наприклад власних станів $|q\rangle$ оператора координати \hat{q} ,

$$\psi(q, t) = \langle q|\psi(t)\rangle_S. \quad (1.1.9)$$

Квантові стани в представленнях Шредингера і Гейзенберга пов'язані відомим співвідношенням

$$|\psi(t)\rangle_S = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle_H, \quad (1.1.10)$$

де H — гамільтоніан системи. Для хвильових функцій маємо

$$\langle q|\psi(t)\rangle_S = \langle q|e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle_H = \langle q, t|\psi(0)\rangle_H, \quad (1.1.11)$$

де ми ввели координатні стани, залежні від часу (система відліку, що рухається),

$$|q, t\rangle = e^{iHt/\hbar}|q\rangle. \quad (1.1.12)$$

Нехай вектори $|q\rangle$ є власними станами шредінгерівського оператора координати \hat{Q}_S ,

$$\hat{Q}_S|q\rangle = q|q\rangle. \quad (1.1.13)$$

Тоді $|q, t\rangle$ є власними векторами гейзенбергівського оператора координати з тим самим власним значенням

$$\hat{Q}_H(t) = e^{iHt/\hbar}\hat{Q}_S e^{-iHt/\hbar} \Rightarrow \hat{Q}_H(t)|q, t\rangle = q|q, t\rangle. \quad (1.1.14)$$

Використовуючи співвідношення повноти $\int dq|q, t\rangle\langle q, t| = 1$ і вставляючи цю одиницю в скалярний добуток, маємо

$$\langle q_f, t_f|\psi\rangle = \int \langle q_f, t_f|q_i, t_i\rangle\langle q_i, t_i|\psi\rangle dq_i, \quad (1.1.15)$$

або

$$\psi(q_f, t_f) = \int \langle q_f, t_f|q_i, t_i\rangle\psi(q_i, t_i) dq_i. \quad (1.1.16)$$

Звідси і з (1.1.2), (1.1.12)

$$K(q_f, t_f|q_i, t_i) = \langle q_f, t_f|q_i, t_i\rangle = \langle q_f|e^{-iH(t_f-t_i)/\hbar}|q_i\rangle, \quad (1.1.17)$$

тобто фейнманівський пропатор визначається матричними елементами оператора еволюції.

Якщо використати розклад одиниці $1 = \sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$, де φ_n — власні стани гамільтоніана H , тобто $H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle$, то отримуємо спектральне представлення пропатора у вигляді розкладу за власними функціями гамільтоніана

$$\begin{aligned} K(q_f, t_f|q_i, t_i) &= \sum_n e^{-iE_n(t_f-t_i)/\hbar}\langle q_f|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|q_i\rangle = \\ &= \sum_n e^{-iE_n(t_f-t_i)/\hbar}\varphi_n(q_f)\varphi_n^*(q_i). \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

Легко пересвідчитись, що пропатор

$$K(x, x', t) \equiv \langle x|e^{-iHt/\hbar}|x'\rangle \quad (1.1.19)$$

задовольняє рівнянню Шредінгера,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}K(x, x', t) = H_x K(x, x', t), \quad (1.1.20)$$

з початковою умовою

$$K(x, x', 0) = \delta(x - x'), \quad (1.1.21)$$

де гамільтоніан H_x у конфігураційному представленні є диференціальним оператором, який діє на координату x .

Для обчислення пропагатора (1.1.17) розіб'ємо часовий інтервал на $(n+1)$ рівних відрізки довжиною ϵ і запишемо: $t_j = t_i + \epsilon j$, $t_f = t_i + (n+1)\epsilon$, $t_f \equiv t_{n+1}$. Вставляючи одиницю $\int dq_j |q_j, t_j\rangle \langle q_j, t_j| = 1$ в кожний момент часу t_j , маємо

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int dq_1 \dots dq_n \langle q_f, t_f | q_n, t_n \rangle \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle \dots \langle q_1, t_1 | q_i, t_i \rangle. \quad (1.1.22)$$

Для скалярного добутку $\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle$ у першому порядку по ϵ знаходимо

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle &= \langle q_{j+1} | e^{-iH\epsilon/\hbar} | q_j \rangle \approx \left\langle q_{j+1} \left| 1 - \frac{iH\epsilon}{\hbar} \right| q_j \right\rangle = \\ &= \delta(q_{j+1} - q_j) - \frac{i\epsilon}{\hbar} \langle q_{j+1} | H | q_j \rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{ip(q_{j+1}-q_j)/\hbar} - \frac{i\epsilon}{\hbar} \langle q_{j+1} | H | q_j \rangle. \end{aligned}$$

Нехай гамільтоніан має вигляд суми кінетичної і потенціальної енергій, $H = \frac{\hat{p}^2}{2} + V(\hat{q})$, де \hat{p} і \hat{q} — оператори імпульсу і координати відповідно, і порахуємо такий матричний елемент,

$$\langle q_{j+1} | \frac{\hat{p}^2}{2} | q_j \rangle = \int dp' dp \langle q_{j+1} | p' \rangle \langle p' | \frac{\hat{p}^2}{2} | p \rangle \langle p | q_j \rangle, \quad (1.1.23)$$

де в правій частині ми двічі вставили повну систему імпульсних станів. Використовуючи нормовану власну хвильову функцію оператора імпульсу $\hat{p} = -i\hbar\partial/\partial q$ з власним значенням p ,

$$\langle q_{j+1} | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipq_{j+1}/\hbar},$$

знаходимо

$$\langle q_{j+1} | \frac{\hat{p}^2}{2} | q_j \rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{ip(q_{j+1}-q_j)/\hbar} \frac{p^2}{2}. \quad (1.1.24)$$

Аналогічно

$$\langle q_{j+1} | V(\hat{q}) | q_j \rangle = V(\bar{q}_j) \delta(q_{j+1} - q_j), \quad \bar{q}_j = \frac{q_{j+1} + q_j}{2}. \quad (1.1.25)$$

З двох останніх формул для матричного елемента гамільтоніана маємо

$$\langle q_{j+1} | H | q_j \rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{ip(q_{j+1}-q_j)/\hbar} H(p, \bar{q}_j), \quad H(p, \bar{q}_j) = \frac{p^2}{2} + V(\bar{q}_j). \quad (1.1.26)$$

З точністю до величин порядку ϵ^2 отримуємо

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{ip}{\hbar} (q_{j+1} - q_j) - \frac{i\epsilon}{\hbar} H(p, \bar{q}_j) \right]. \quad (1.1.27)$$

Повний пропагатор (1.1.22) тоді визначається як границя $\epsilon \rightarrow 0$, тобто число інтегрувань прямує до нескінченності, $n \rightarrow \infty$, тому що $t_f - t_i = (n + 1)\epsilon$:

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \prod_{j=1}^n dq_j \prod_{l=0}^n \frac{dp_l}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{l=0}^n [p_l(q_{l+1} - q_l) - \epsilon H(p_l, \bar{q}_l)] \right\}, \quad (1.1.28)$$

де $q_0 \equiv q_i$, $q_{n+1} \equiv q_f$. Оскільки по всіх проміжних координатах q_j відбувається інтегрування, у цій границі враховуються всі траєкторії, і тому відповідний підхід називається інтегралом за траєкторіями. Звернемо увагу, що інтегрувань за імпульсними змінними на одиницю більше, ніж за координатними.

Слід зауважити, що інтеграл за траєкторіями математично строго визначений тільки в евклідовому просторі як інтеграл по мірі Вінера. Хоча інтеграл за траєкторіями в дійсному часі не є математично повністю коректно визначеним, результати обчислень за теорією збурень у підході континуального інтеграла збігаються з результатами в операторному підході. У нашому викладі ми обмежимося загалом пертурбативними результатами, тому проблем із використанням інтеграла за траєкторіями не виникає. Більше того, нині вважається, що лише в підході фейнманівського континуального інтеграла можливо буде визначити квантово-польові теорії поза рамками теорії збурень, але це й досі залишається відкритою проблемою. Одним із можливих напрямів, який може дати таке визначення, є конструктивна квантова теорія поля, де інтеграл за траєкторіями розглядається як границя скінченновимірних наближень. Математичне обґрунтування фейнманівського інтеграла тісно пов'язане з розвитком теорії інтегрування у просторі функцій (див., наприклад, [27, 93]).

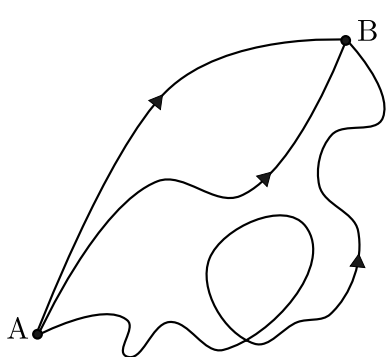


Рис. 2. Ілюстрація шляхів у фейнманівському інтегралі з точки A в точку B

ректно визначеним, результати обчислень за теорією збурень у підході континуального інтеграла збігаються з результатами в операторному підході. У нашому викладі ми обмежимося загалом пертурбативними результатами, тому проблем із використанням інтеграла за траєкторіями не виникає. Більше того, нині вважається, що лише в підході фейнманівського континуального інтеграла можливо буде визначити квантово-польові теорії поза рамками теорії збурень, але це й досі залишається відкритою проблемою. Одним із можливих напрямів, який може дати таке визначення, є конструктивна квантова теорія поля, де інтеграл за траєкторіями розглядається як границя скінченновимірних наближень. Математичне обґрунтування фейнманівського інтеграла тісно пов'язане з розвитком теорії інтегрування у просторі функцій (див., наприклад, [27, 93]).

У символічній формі границю виразу (1.1.28), коли $\epsilon \rightarrow 0$, можна записати у вигляді

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = N \int_{q(t_i)=q_i}^{q(t_f)=q_f} \mathcal{D}p(t) \mathcal{D}q(t) \exp \frac{i}{\hbar} \left(\int_{t_i}^{t_f} dt (p\dot{q} - H(p, q)) \right), \quad (1.1.29)$$

де N — деякий нормуючий множник, який ми обговоримо пізніше. Це і є фейнманівський інтеграл за траєкторіями у фазовому просторі, де інтегрування ведеться за координатами та імпульсами при кожному значенні

часу t . Причому для координат маємо граничні умови, тоді як для імпульсів інтегрування йде від $-\infty$ до $+\infty$.

Якщо гамільтоніан є квадратичним за імпульсами, то інтегрування за імпульсами в (1.1.28) можна виконати в явному вигляді, використовуючи такий гаусовий інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{ax^2}{2}+bx} = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{1/2} e^{\frac{b^2}{2a}}, \quad \text{Re } a > 0.$$

Тоді для амплітуди переходу отримуємо

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(\epsilon, n) \int \frac{\prod_{j=1}^n dq_j}{(2\pi i \hbar \epsilon)^{(n+1)/2}} e^{\frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{l=0}^n \left[\frac{1}{2} \left(\frac{q_{l+1} - q_l}{\epsilon} \right)^2 - V(\bar{q}_l) \right]}, \quad (1.1.30)$$

де множник $N(\epsilon, n)$ підбирається з умови існування границі. В неперервній границі

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = N \int_{q(t_i)=q_i}^{q(t_f)=q_f} \mathcal{D}q(t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}) \right] = N \int_{q(t_i)=q_i}^{q(t_f)=q_f} \mathcal{D}q(t) e^{\frac{i}{\hbar} S(q)}, \quad (1.1.31)$$

де $L(q, \dot{q})$ — лагранжіан системи, N — скінченний нормуючий множник. Остання формула і є фейнманівський інтеграл за траєкторіями. На відміну від звичайного інтеграла Рімана, в якому підсумовуються значення функції на відрізку, в інтегралі вздовж траєкторій підсумовуються значення функціонала вздовж усіх можливих кривих, які сполучають початкову та кінцеву точки (див. рис. 2).

Приклад Лі—Янга: ефективна дія. У випадку гамільтоніана не квадратичного за імпульсами, інтегрування за імпульсами може приводити до деякої ефективної дії S_{eff} . Як приклад розглянемо систему з лагранжіаном (Лі, Янг, 1962 р.)

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^2 f(q). \quad (1.1.32)$$

Знаходимо імпульс і гамільтонову функцію,

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q} f(q), \quad H = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{2f(q)}, \quad (1.1.33)$$

інтегруємо за імпульсами в інтегралі за траєкторіями і для фейнманівського пропатора отримуємо

$$\begin{aligned} K(q_f, t_f | q_i, t_i) &= \int \prod_{j=1}^n dq_j \prod_{j=0}^n \frac{dp_j}{2\pi \hbar} e^{\frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{l=0}^n [p_l(q_{l+1} - q_l) - \frac{\epsilon}{2} p_l^2 f^{-1}(\bar{q}_l)]} = \\ &= \int \prod_{j=1}^n \frac{dq_j}{(2\pi i \hbar \epsilon)^{1/2}} \prod_{j=0}^n f^{1/2}(\bar{q}_j) e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{l=0}^n \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{q_{l+1} - q_l}{\epsilon} \right)^2 f \left(\frac{q_{l+1} + q_l}{2} \right)}, \quad (1.1.34) \end{aligned}$$

де фактор $f^{1/2}$ запишемо у формі

$$\prod_{j=0}^n f^{1/2} \left(\frac{q_{j+1} + q_j}{2} \right) = e^{\frac{1}{2} \sum_j \ln f \left(\frac{q_{j+1} + q_j}{2} \right)} = e^{\frac{1}{2\epsilon} \sum_j \epsilon \ln f \left(\frac{q_{j+1} + q_j}{2} \right)} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} e^{\frac{1}{2} \delta(0) \int dt \ln f(q(t))}, \quad \frac{1}{\epsilon} \delta_{ij} \rightarrow \delta(t_i - t_j). \quad (1.1.35)$$

Остаточно фейнманівський пропагатор у координатному представленні приймає вигляд у неперервній границі

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = N \int \mathcal{D}q(t) e^{iS_{\text{eff}}(q)/\hbar} \quad (1.1.36)$$

з ефективною дією

$$S_{\text{eff}} = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[L(q, \dot{q}) - \frac{i\hbar}{2} \delta(0) \ln f(q) \right], \quad (1.1.37)$$

яка крім звичайного лагранжіана містить також доданок, пропорційний значенню δ -функції в нулі $\delta(0)$. При розрахунках за теорією збурень з лагранжіаном $L(q, \dot{q})$ будуть виникати нескінченні доданки, які будуть скорочуватись доданком, пропорційним $\delta(0)$, в ефективній дії. Коректне обчислення, очевидно, полягає в тому, що спочатку виконується інтегрування за координатами в (1.1.34), і потім необхідно перейти до границі $n \rightarrow \infty$.

Узагальнення для систем з N ступенями вільності. Для систем з N ступенями вільності амплітуда переходу (1.1.29) узагальнюється очевидним чином:

$$\langle q_{1f}, q_{2f}, \dots, q_{Nf}, t_f | q_{1i}, q_{2i}, \dots, q_{Ni}, t_i \rangle = \tilde{N} \int \prod_{n=1}^N [\mathcal{D}p_n(t) \mathcal{D}q_n(t)] \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\sum_{n=1}^N p_n(t) \dot{q}_n(t) - H(p_j, q_j) \right) \right], \quad (1.1.38)$$

де інтегрування за координатами задовольняє початковій і кінцевій умовам $q_n(t_i) = q_{ni}$, $q_n(t_f) = q_{nf}$.

1.2. Пропагатор вільної частинки

Інтеграл за траєкторіями для пропагатора вільної частинки в гамільтоновому формулюванні (1.1.29) може бути обчислений точно. Дискретизовану дію в рівнянні (1.1.29) запишемо як

$$\sum_{l=0}^n \left[p_l (q_{l+1} - q_l) - \epsilon \frac{p_l^2}{2m} \right] = \sum_{l=1}^n (p_{l-1} - p_l) q_l + p_n q_{n+1} - p_0 q_0 - \epsilon \sum_{l=0}^n \frac{p_l^2}{2m}, \quad (1.2.1)$$

і проінтегруємо спочатку по q_l . Це дає n δ -функцій, які дозволяють легко виконати інтегрування по p_l : $p_0 = p_1 = \dots = p_n$. Залишається

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(p_0(q_f - q_i) - \epsilon(n+1) \frac{p_0^2}{2m} \right) \right]. \quad (1.2.2)$$

Далі $\epsilon(n+1) = t_f - t_i$ і граничний перехід можна виконати тривіально. Отже

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t_f - t_i)}} \exp \left[\frac{im}{2\hbar} \frac{(q_f - q_i)^2}{t_f - t_i} \right]. \quad (1.2.3)$$

Пропагатор вільної частинки можна обчислити іншим методом, не звертаючись до інтеграла за траєкторіями, а потім порівняти результати. Матричний елемент

$$K(q_f, t_f | q_i, t_i) = \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \langle q_f | e^{-iH(t_f - t_i)/\hbar} | q_i \rangle \quad (1.2.4)$$

обчислимо, використовуючи власні функції оператора імпульсу

$$\hat{p}\psi(q) = -i\hbar \frac{\partial \psi(q)}{\partial q} = p\psi(q). \quad (1.2.5)$$

Власні хвильові функції є просто плоскими хвилями

$$\psi_p(q) = \langle q | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipq/\hbar}. \quad (1.2.6)$$

Для вільної частинки $H = \frac{\hat{p}^2}{2m}$. Очевидно,

$$H\psi_p(q) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \psi_q(p) = \frac{p^2}{2m} \psi_q(p). \quad (1.2.7)$$

Тоді, вставляючи повну систему імпульсних власних станів, знаходимо

$$\begin{aligned} K(q_f, t_f | q_i, t_i) &= \int dp' dp \langle q_f | p' \rangle \langle p' | e^{-iH(t_f - t_i)/\hbar} | p \rangle \langle p | q_i \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \langle q_f | p \rangle \langle p | q_i \rangle e^{-\frac{ip^2(t_f - t_i)}{2m\hbar}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{ip(q_f - q_i)}{\hbar} - \frac{ip^2(t_f - t_i)}{2m\hbar}} = \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t_f - t_i)}} \exp \left[\frac{im}{2\hbar} \frac{(q_f - q_i)^2}{t_f - t_i} \right]. \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

Очевидно, обидва методи дають тотожні результати, і це підтверджує еквівалентність у випадку пертурбативних обчислень методу інтеграла за траєкторіями канонічному операторному підходу.

1.3. Лагранжіани квадратичні за координатами та швидкостями

У формалізмі інтеграла по шляхах ми отримали такий вираз для фейнманівського пропагатора в конфігураційному просторі:

$$K(q_f, t_f | q_i, t_i) = N \int_{q(t_i)=q_i}^{q(t_f)=q_f} \mathcal{D}q(t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}) \right]. \quad (1.3.1)$$

Покажемо тепер, що фейнманівський пропагатор може бути обчислений точно у випадку, коли $L(q, \dot{q})$ є квадратичною по q, \dot{q} функцією.

Нехай $q = q_{cl}(t)$ є класичною траєкторією, тобто є розв'язком рівнянь Ейлера—Лагранжа

$$\frac{\delta L}{\delta q} = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (1.3.2)$$

з граничними умовами $q_{cl}(t_i) = q_i, q_{cl}(t_f) = q_f$. Довільну траєкторію запишемо у вигляді $q(t) = q_{cl}(t) + y(t)$, де очевидно $y(t_i) = y(t_f) = 0$.

Розвинемо лагранжіан L в ряд Тейлора по $y(t)$:

$$L(q_{cl} + y, \dot{q}_{cl} + \dot{y}(t)) = L(q_{cl}, \dot{q}_{cl}) + \frac{\partial L}{\partial q} y + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{y} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial q \partial q} y^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} y \dot{y} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}} \dot{y}^2 \right],$$

де похідні обчислюються при умові $y = \dot{y} = 0$. Очевидно, що цей розклад є точним, тому що L — квадратична функція. Для дії маємо

$$\int_{t_i}^{t_f} L(q_{cl}, \dot{q}_{cl}) dt + \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q} y + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{y} \right) dt + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial q \partial q} y^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} y \dot{y} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}} \dot{y}^2 \right] dt.$$

Середній доданок зникає

$$\int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q} y + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{y} \right) dt = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) y dt = 0,$$

тому що $q_{cl}(t)$ задовольняє рівнянню Ейлера—Лагранжа.

Другі похідні від L є просто функціями від t (незалежними від q_{cl}), тоді для дії квадратичної по q, \dot{q} загального вигляду

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L(q_{cl}, \dot{q}_{cl}; t) dt + \int_{t_i}^{t_f} [a(t)y^2 + b(t)\dot{y}^2 + c(t)y\dot{y}] dt$$

маємо

$$K(q_f, t_f | q_i, t_i) = e^{\frac{i}{\hbar} S(q_{cl}, \dot{q}_{cl})} \int_{y(t_i)=y(t_f)=0} \mathcal{D}y(t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} (a(t)y^2 + b(t)\dot{y}^2 + c(t)y\dot{y}) dt \right]. \quad (1.3.3)$$

Таким чином, ми показали, що пропагатор має вигляд

$$K(q_f, t_f | q_i, t_i) = A(t_i, t_f) \exp \left(\frac{i}{\hbar} S(q_{cl}, \dot{q}_{cl}) \right), \quad (1.3.4)$$

тобто для квадратичної по q, \dot{q} дії фейнманівський пропагатор виражається через значення дії для класичної (!) траєкторії. Безумовно математична причина такого результату цілком очевидна і пов'язана з тим, що ряд Тейлора, розглянутий вище, обривається на квадратичному доданку. Відповідний інтеграл за траєкторіями тоді точно обчислюється, бо є гаусовим. Якщо $A(t_i, t_f)$ відома для лагранжіана L , тоді $A(t_i, t_f)$ відома також для всіх лагранжіанів типу $L + d(t)q + e(t)\dot{q} + f(t)$, оскільки лінійні доданки не дають внесок при обчисленні $A(t_i, t_f)$. Крім того, якщо $a(t), b(t), c(t)$ не залежать від часу, тоді A стає функцією різниці часів $A(t_i, t_f) = A(t_f - t_i)$. Дійсно,

$$\begin{aligned} & \int_{t_i}^{t_f} [ay^2 + b\dot{y}^2 + cy\dot{y}] dt = \\ & = \int_{t_i+\Delta t}^{t_f+\Delta t} [ay^2(t-\Delta t) + b\dot{y}^2(t-\Delta t) + cy(t-\Delta t)\dot{y}(t-\Delta t)] dt = \\ & = \int_{t_i+\Delta t}^{t_f+\Delta t} [a\tilde{y}^2(t) + b\dot{\tilde{y}}^2(t) + c\tilde{y}\dot{\tilde{y}}(t)] dt, \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

де ми позначили $\tilde{y}(t) = y(t - \Delta t)$. Тому

$$\begin{aligned} A(t_i, t_f) &= \int_{y(t_i)=0}^{y(t_f)=0} \mathcal{D}y(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} [ay^2(t) + b\dot{y}^2(t) + cy(t)\dot{y}(t)] dt} = \\ &= \int_{\tilde{y}(t_i+\Delta t)=0}^{\tilde{y}(t_f+\Delta t)=0} \mathcal{D}\tilde{y}(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i+\Delta t}^{t_f+\Delta t} [a\tilde{y}^2(t) + b\dot{\tilde{y}}^2(t) + c\tilde{y}(t)\dot{\tilde{y}}(t)] dt} = A(t_i + \Delta t, t_f + \Delta t). \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Вибираючи $\Delta t = -t_i$, приходимо до бажаного результату. Квадратичні лагранжіани L описують зокрема такі випадки:

- а) вільна частинка $L = \frac{m\dot{q}^2}{2}$;
 б) гармонічний осцилятор $L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$;
 в) осцилятор під дією зовнішньої сили $L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 - f(t)q$.
- Повернемося до вільної частинки, де

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2}, \quad \frac{\delta L}{\delta q} = m\ddot{q} = 0 \Rightarrow \dot{q}_{cl}(t) = \frac{q_f - q_i}{t_f - t_i} = \text{const.}$$

Відразу знаходимо

$$K(q_f, t_f | q_i, t_i) = A(t_f - t_i) \exp \left[\frac{im(q_f - q_i)^2}{2\hbar(t_f - t_i)} \right]. \quad (1.3.7)$$

Для визначення множника $A(t_f - t_i)$ використаємо групову властивість пропагатора

$$K(q_3, t_3 | q_1, t_1) = \int K(q_3, t_3 | q_2, t_2) K(q_2, t_2 | q_1, t_1) dq_2.$$

Підставляючи K у вигляді (1.3.7), маємо

$$\begin{aligned} A(t_3 - t_1) e^{\frac{im(q_3 - q_1)^2}{2\hbar(t_3 - t_1)}} &= A(t_3 - t_2) A(t_2 - t_1) \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{im}{2\hbar} \left[\frac{(q_3 - q_2)^2}{t_3 - t_2} + \frac{(q_2 - q_1)^2}{t_2 - t_1} \right]} dq_2 = \\ &= A(t_3 - t_2) A(t_2 - t_1) \left[\frac{2\pi i \hbar}{m} \cdot \frac{(t_3 - t_2)(t_2 - t_1)}{t_3 - t_1} \right]^{1/2} e^{\frac{im(q_3 - q_1)^2}{2\hbar(t_3 - t_1)}}, \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

тобто отримуємо функціональне рівняння для $A(t)$,

$$\frac{A(t_3 - t_1)}{A(t_3 - t_2) A(t_2 - t_1)} = \sqrt{\frac{2\pi i \hbar}{m} \cdot \frac{(t_3 - t_2)(t_2 - t_1)}{t_3 - t_1}}, \quad (1.3.9)$$

розв'язком якого є

$$A(t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}}. \quad (1.3.10)$$

Таким чином, ми знайшли предекспоненційний множник у (1.3.4). Пізніше ми познайомимося і з іншими, більш прямими методами знаходження цього множника. Цей множник є несуттєвим у випадку, коли треба рахувати відношення інтегралів, де він скорочується. Для гармонічного осцилятора подібним чином отримуємо відомий результат ($t_f - t_i < \pi/\omega$)

$$\begin{aligned} K(q_f, t_f | q_i, t_i) &= N \int_{q(t_i)=q_i}^{q(t_f)=q_f} \mathcal{D}q(t) e^{\frac{im}{2\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (\dot{q}^2(t) - \omega^2 q^2(t))} = \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega(t_f - t_i)}} e^{\frac{im\omega}{2\hbar} \left[(q_f^2 + q_i^2) \text{ctg } \omega(t_f - t_i) - \frac{2q_i q_f}{\sin \omega(t_f - t_i)} \right]}. \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Якщо використати формулу (Mehler, 1866)

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{\frac{2xyz}{1-z^2} - \frac{(x^2+y^2)(1+z^2)}{2(1-z^2)}} = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!} z^n, \quad (1.3.12)$$

де $H_n(x)$ — поліноми Ерміта, то отримуємо розклад фейнманівського пропагатора для гармонічного осцилятора за власними функціями

$$K(q_f, t_f | q_i, t_i) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\omega(t_f-t_i)(n+1/2)} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \frac{1}{2^n n!} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} q_i\right) \times \\ \times H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} q_f\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(q_i^2+q_f^2)}. \quad (1.3.13)$$

Більш детально про обчислення фейнманівських інтегралів за траєкторіями можна прочитати в монографіях [100, 131, 168]. Зокрема, в них наведено багато прикладів точно розв'язаних задач квантової механіки на мові інтегралів за траєкторіями. Це задачі не лише з квадратичними лагранжіанами і коефіцієнтами, залежними від часу, а й з нелінійними за координатами лагранжіанами, такими, наприклад, що містять кулонівську взаємодію.

1.4. Генеруючий функціонал

Розглянемо тепер таке важливе поняття, як генеруючий функціонал. Його головна користь полягає в тому, що генеруючий функціонал дозволяє за допомогою диференціювання, або, точніше, варіації по допоміжному джерелу, знайти амплітуди переходу для добутків довільного числа операторів динамічних змінних. Ми показали вище, що амплітуда переходу має вигляд

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = N \int \mathcal{D}q(t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}) \right], \quad (1.4.1)$$

де інтегрування відбувається за всіма траєкторіями з граничними умовами

$$q(t_f) = q_f, \quad q(t_i) = q_i.$$

Розглянемо ситуацію, коли включено джерело

$$L \rightarrow L + \hbar J(t)q(t), \quad (1.4.2)$$

де $J(t)$ — довільна допоміжна функція. Нехай джерело $J(t)$ відмінне від нуля для проміжку часу від t до t' ($T < t < t' < T'$), тоді

$$\langle Q', T' | Q, T \rangle^J = N \int \mathcal{D}Q(t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_T^{T'} dt (L + \hbar J(t)Q(t)) \right]. \quad (1.4.3)$$

Ми можемо записати

$$\langle Q', T' | Q, T \rangle^J = \int dq' dq \langle Q', T' | q', t' \rangle \langle q', t' | q, t \rangle^J \langle q, t | Q, T \rangle. \quad (1.4.4)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \langle Q', T' | q', t' \rangle &= \langle Q' | e^{-\frac{i}{\hbar} H T'} e^{\frac{i}{\hbar} H t'} | q' \rangle = \\ &= \sum_m \langle Q' | e^{-\frac{i}{\hbar} H T'} | \varphi_m \rangle \langle \varphi_m | e^{\frac{i}{\hbar} H t'} | q' \rangle = \\ &= \sum_m e^{\frac{i}{\hbar} E_m (t' - T')} \langle Q' | \varphi_m \rangle \langle \varphi_m | q' \rangle = \\ &= \sum_m e^{\frac{i}{\hbar} E_m (t' - T')} \varphi_m(Q') \varphi_m^*(q'). \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

Квантове число m включає сукупність усіх квантових чисел, як дискретних, так і неперервних, і власні значення, впорядковані в порядку зростання значень енергії: $E_0 < E_1 < E_2 < \dots$ (ми вважаємо, що основний стан відділений щільною від першого збудженого рівня).

Аналогічно

$$\langle q, t | Q, T \rangle = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t - T)} \varphi_n(q) \varphi_n^*(Q), \quad (1.4.6)$$

тоді

$$\begin{aligned} \langle Q', T' | Q, T \rangle^J &= \sum_{m,n} e^{\frac{i}{\hbar} E_m (t' - T') - \frac{i}{\hbar} E_n (t - T)} \times \\ &\times \int dq dq' \varphi_m(Q') \varphi_m^*(q') \varphi_n(q) \varphi_n^*(Q) \langle q', t' | q, t \rangle^J. \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Розглянемо таку границю в комплексній площині змінних T і T' вздовж прямої, яка має кут $\delta > 0$ з дійсною віссю: $T \rightarrow -\infty e^{-i\delta}$, $T' \rightarrow \infty e^{-i\delta}$ (див. рис. 3).

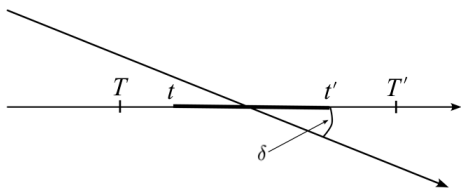


Рис. 3. Поворот у комплексній площині часової змінної

члени з $n \geq 1$, $m \geq 1$ експоненціально малі відносно внеску основного стану. Маємо

$$\begin{aligned} \langle Q', T' | Q, T \rangle^J &\underset{T' \rightarrow \infty e^{-i\delta}, T \rightarrow -\infty e^{-i\delta}}{\approx} e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 (T' - T)} \varphi_0(Q') \varphi_0^*(Q) \times \\ &\times \int dq dq' \varphi_0^*(q') \langle q', t' | q, t \rangle^J \varphi_0(q), \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

де $\varphi_0(q)$ — хвильова функція вакуумного стану.

Таким чином,

$$\int dq dq' \varphi_0^*(q') \langle q', t' | q, t \rangle^J \varphi_0(q) = \frac{\langle Q', T' | Q, T \rangle^J}{\varphi_0(Q') \varphi_0^*(Q) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_0(T' - T) \right]}. \quad (1.4.9)$$

Ліва частина — це не що інше, як амплітуда переходу вакуум-вакуум, вона не залежить від T , T' , і має існувати границя, коли $T' \rightarrow \infty e^{-i\delta}$, $T \rightarrow -\infty e^{-i\delta}$. Змінні t' и $-t$ можна після переходу до границі вибрати як завгодно великими. Тоді будемо мати

$$\langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J = N \int \mathcal{D}q \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt (L(q, \dot{q}) + \hbar J(t) q(t)) \right]. \quad (1.4.10)$$

Генеруючий функціонал, або амплітуду переходу вакуум-вакуум, у присутності джерела визначаємо як

$$Z(J) = \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J. \quad (1.4.11)$$

Розглянемо тепер матричний елемент оператора координати в заданий час t_{n_1} , тобто $\langle q_f, t_f | \hat{q}(t_{n_1}) | q_i, t_i \rangle$, де $t_f > t_{n_1} > t_i$. Тоді

$$\begin{aligned} \langle q_f, t_f | \hat{q}(t_{n_1}) | q_i, t_i \rangle &= N \int dq_1 \dots dq_n \langle q_f, t_f | q_n, t_n \rangle \dots \langle q_{n_1}, t_{n_1} | \hat{q}(t_{n_1}) | q_{n_1-1}, t_{n_1-1} \rangle \times \\ &\times \dots \langle q_1, t_1 | q_i, t_i \rangle = N \int \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}p(t) q(t_{n_1}) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (p\dot{q} - H(p, q)) \right]. \end{aligned}$$

В останньому виразі під інтегралом $q(t_{n_1})$ — вже число, а не оператор.

Так само, якщо $t_f > t_{n_1} > t_{n_2} > t_i$, тоді матричний елемент добутку двох операторів визначається рівнянням

$$\langle q_f, t_f | \hat{q}(t_{n_1}) \hat{q}(t_{n_2}) | q_i, t_i \rangle = N \int \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}p(t) q(t_{n_1}) q(t_{n_2}) e^{iS(q,p)}. \quad (1.4.12)$$

Очевидно, якщо $t_f > t_{n_2} > t_{n_1} > t_i$, тоді

$$\langle q_f, t_f | \hat{q}(t_{n_2}) \hat{q}(t_{n_1}) | q_i, t_i \rangle = N \int \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}p(t) q(t_{n_2}) q(t_{n_1}) e^{iS(q,p)}. \quad (1.4.13)$$

Оскільки інтеграли в обох попередніх формулах рівні, формули можна об'єднати в єдиний вираз

$$N \int \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}p(t) q(t_{n_2}) q(t_{n_1}) e^{iS(q,p)} = \langle q_f, t_f | T[\hat{q}(t_{n_2}) \hat{q}(t_{n_1})] | q_i, t_i \rangle, \quad (1.4.14)$$

де T — оператор хронологічного впорядкування T , який можна записати через θ -функції

$$T[\hat{q}(t_{n_2})\hat{q}(t_{n_1})] = \theta(t_{n_2} - t_{n_1})\hat{q}(t_{n_2})\hat{q}(t_{n_1}) + \theta(t_{n_1} - t_{n_2})\hat{q}(t_{n_1})\hat{q}(t_{n_2}). \quad (1.4.15)$$

Причиною цього результату є те, що, хоча $q(t_{n_2})$ і $q(t_{n_1})$ є звичайними функціями у підінтегральному виразі і порядок їх розташування не має значення, сама процедура функціонального інтегрування приводить до того, що відповідний матричний елемент виражається через хронологічно впорядкований добуток в операторному підході. Результат очевидно узагальнюється на будь-яке число операторів. Незавжди побачити, що похідні функціоналу (1.4.10) (точніше, варіаційні похідні) по джерелу визначають матричні елементи від оператора координати. Наприклад, перша похідна

$$\frac{\delta Z(J)}{\delta J(t_1)} = iN \int \mathcal{D}q(t) q(t_1) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt (L + \hbar J(t)q(t)) \right] \quad (1.4.16)$$

визначає матричний елемент від $\hat{q}(t_1)$. Варіаційна похідна функціоналу є узагальненням частинної похідної функції багатьох змінних на випадок функції нескінченного числа змінних і визначається формулою

$$\int ds \frac{\delta F[x(t)]}{\delta x(s)} \eta(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[x + \epsilon \eta] - F[x]}{\epsilon} = \left[\frac{d}{d\epsilon} F[x + \epsilon \eta] \right]_{\epsilon=0}, \quad (1.4.17)$$

де η — довільна пробна функція. З цього визначення випливає, що

$$\frac{\delta J(t)}{\delta J(t_1)} = \delta(t - t_1) \quad \text{і} \quad \frac{\delta}{\delta J(t_1)} \int_{-\infty}^{\infty} dt J(t)q(t) = q(t_1).$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \frac{\delta^n Z(J)}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_n)} \Big|_{J=0} &= i^n N \int \mathcal{D}q q(t_1) \dots q(t_n) e^{iS(q(t))} = \\ &= i^n \langle 0, \infty | T \hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n) | 0, -\infty \rangle. \end{aligned} \quad (1.4.18)$$

Для збіжності інтеграла можна до L додати $\frac{i\epsilon q^2}{2}$, де границя $\epsilon \rightarrow 0_+$ береться наприкінці обчислень. Функціонал $Z(J)$ (1.4.10) таким чином генерує (породжує) кореляційні функції $\langle 0, \infty | T \hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n) | 0, -\infty \rangle$. Звичайно, функціонал нормують так, що $Z(J=0) = 1$, тому

$$N^{-1} = \int \mathcal{D}q(t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt L(q, \dot{q}) \right]. \quad (1.4.19)$$

Зауважимо, що вираз (1.4.10) для генеруючого (породжуючого) функціонала не залежить від граничних значень q_i, q_f , тому інтегрування по $q(t)$ відбувається по всім значенням від $-\infty$ до $+\infty$.

У фазовому просторі функціонал з додатковим джерелом $K(t)$ для імпульсу

$$Z(J, K) = N \int \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}p(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(q, p) + i \int_{-\infty}^{\infty} dt [J(t)q(t) + K(t)p(t)] \right\} \quad (1.4.20)$$

є генеруючим для функцій Гріна

$$G(t_1, \dots, t_j, t_{j+1}, \dots, t_n) = \langle 0 | T [\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_j) \hat{p}(t_{j+1}) \dots \hat{p}(t_n)] | 0 \rangle, \quad (1.4.21)$$

які отримуються за допомогою диференціювання

$$G(t_1, \dots, t_j, t_{j+1}, \dots, t_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^j}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_j)} \frac{\delta^{n-j}}{\delta K(t_{j+1}) \dots \delta K(t_n)} \frac{Z(J, K)}{Z(0, 0)} \Big|_{J=K=0}. \quad (1.4.22)$$

Приклади твірних функцій у математиці. Функція

$$h(x, t) = e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

є твірною функцією для поліномів Ерміта

$$H_n(x) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} h(x, t) \Big|_{t=0}.$$

Твірна функція для поліномів Лежандра

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n, \quad |t|, |x| < 1 \quad (1.4.23)$$

важлива для отримання мультипольного розкладу кулонівського потенціалу

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2(r'/r) \cos \theta + (r'/r)^2}}. \quad (1.4.24)$$

1.5. Фейнманівський пропагатор в енергетичному представленні

Фейнманівський пропагатор містить важливу інформацію про систему. Розглянемо його представлення в енергетичному просторі

$$G(q_f, q_i; E) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int_0^{\infty} d(t_f - t_i) K(q_f, t_f | q_i, t_i) e^{i(E+i\epsilon)(t_f-t_i)/\hbar} \quad (1.5.1)$$

у випадку, коли ядро залежить від різниці $t_f - t_i$. Використовуючи власні функції гамільтоніана $H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle$ та розклад одиниці $\sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n| = 1$ представимо фейнманівський пропагатор у вигляді

$$\begin{aligned} K(q_f, t_f | q_i, t_i) &= \langle q_f | e^{-iH(t_f-t_i)/\hbar} | q_i \rangle = \\ &= \sum_{n,m=0} \langle q_f | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | e^{-iH(t_f-t_i)/\hbar} | \varphi_m \rangle \langle \varphi_m | q_i \rangle. \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Система власних енергетичних станів ортонормована $\langle\varphi_n|\varphi_m\rangle = \delta_{nm}$. Інтегруючи по $t_f - t_i$ в (1.5.1), отримуємо розклад пропагатора за власними функціями гамільтоніана системи

$$G(q_f, q_i; E) = \sum_n \frac{\varphi_n(q_f)\varphi_n^*(q_i)}{E - E_n + i\epsilon}, \quad (1.5.3)$$

і для сліду знаходимо вираз

$$\text{Tr } G(E) = \int_{-\infty}^{\infty} dq G(q, q; E) = \sum_n \frac{1}{E - E_n + i\epsilon}. \quad (1.5.4)$$

Густина станів визначається формулою

$$\rho(E) = -\frac{1}{\pi} \text{Im Tr } G(E + i\epsilon) = \sum_n \delta(E - E_n), \quad (1.5.5)$$

а локальна густина станів, яка залежить також від координати, дорівнює

$$\rho(q, E) = -\frac{1}{\pi} \text{Im } G(q, q; E + i\epsilon) = \sum_n |\varphi_n(q)|^2 \delta(E - E_n). \quad (1.5.6)$$

Густина станів є важливою характеристикою системи, у фізиці конденсованих середовищ вона є безпосередньо вимірюваною величиною.

1.6. Генеруючий функціонал у квантовій теорії поля

Квантова механіка описує динаміку нерелятивістських точкових частинок, де координати частинок представляють ступені вільності системи. Класичні теорії поля — це узагальнення класичної механіки матеріальних тіл на системи з нескінченним числом ступенів вільності, тому що поле приймає значення в кожній просторовій точці \mathbf{x} . У цьому випадку ступенями вільності є значення поля $\varphi(\mathbf{x})$. У випадку нейтрального скалярного поля $\varphi(\mathbf{x})$ є дійсним і представляє один ступінь вільності в заданій просторовій точці.

З іншого боку, заряджене скалярне поле є комплексною функцією, а отже, представляє два ступеня вільності в кожній просторовій точці. Класичні рівняння руху впливають з екстремуму функціонала дії

$$S[\varphi] = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi), \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (1.6.1)$$

Інтеграл за часом у механіці точки тепер замінюється інтегралом за просторовими координатами і часом ($x = (\mathbf{x}, t \equiv x_0)$), а функція Лагранжа L точкової механіки замінюється на функцію лагранжевої густини \mathcal{L} (або просто лагранжевої густини), яка є локальною функцією полів та їх похідних.

Лагранжіан задається інтегралом по просторовому об'єму від лагранжевої густини $L = \int d^3x \mathcal{L}$. У випадку нейтрального скалярного поля

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi). \quad (1.6.2)$$

Найпростішим прикладом теорії із взаємодією є теорія φ^4 з потенціалом

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4, \quad (1.6.3)$$

де m — маса скалярного поля, а λ — константа зв'язку самовзаємодії. Масовий доданок є аналогом гармонічного потенціалу в точковій механіці, тоді як взаємодія $\frac{\lambda}{4!} \varphi^4$ відповідає ангармонічному збуренню. Рівняння Ейлера—Лагранжа, які отримуються з дії (1.6.1), прирівнюючи нулю її локальну варіацію $\delta S = 0$,

$$\partial_\mu \frac{\delta L[\varphi]}{\delta \partial_\mu \varphi(x)} - \frac{\delta L[\varphi]}{\delta \varphi(x)} = 0, \quad L[\varphi] = \int d^3x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi), \quad (1.6.4)$$

є класичними рівняннями руху поля. У випадку $\lambda = 0$ (взаємодія відсутня) це є рівняння Клейна—Гордона—Фока (КГФ)

$$(\square + m^2)\varphi(x) = 0, \quad \square = \partial_0^2 - \partial_{\mathbf{x}}^2. \quad (1.6.5)$$

Інтеграл за траєкторіями у квантовій механіці замінюється функціональним (або континуальним) інтегралом в квантовій теорії поля. Слід зазначити, що однією з головних переваг використання методу функціонального інтеграла в релятивістській квантовій теорії поля порівняно з канонічним операторним підходом є його явна інваріантність відносно перетворень Лоренца (скорочено — лоренц-інваріантність), що надзвичайно корисно для практичних обчислень. Для генеруючого функціонала маємо

$$Z(J) = N \int \mathcal{D}\varphi(x) \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}(\varphi) + J(x)\varphi(x) + \frac{i}{2}\epsilon\varphi^2] \right\} = \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J, \quad (1.6.6)$$

де уявний доданок $\frac{i}{2}\epsilon\varphi^2$ ($\epsilon > 0$) додано для збіжності інтеграла (границя $\epsilon \rightarrow 0$ береться в кінці обчислень). Інтегрування за значеннями поля φ йде від $-\infty$ до $+\infty$. Обчислимо генеруючий функціонал для дійсного вільного скалярного поля ($\lambda = 0$) з лагранжіаном

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - m^2\varphi^2). \quad (1.6.7)$$

Генеруючий функціонал очевидно має вигляд

$$Z_0(J) = N \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ i \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - (m^2 - i\epsilon)\varphi^2) + \varphi J \right] \right\} = \quad (1.6.8)$$

$$= N \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ -i \int d^4x \left[\frac{1}{2}\varphi(\square + m^2 - i\epsilon)\varphi - J\varphi \right] \right\}, \quad (1.6.9)$$

де в останньому виразі ми проінтегрували частинами і знехтували поверхневим доданком, оскільки фізичні поля прямують до нуля на нескінченності за часовою і просторовими координатами. Зробимо в інтегралі заміну $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \varphi_0(x)$, де $\varphi_0(x)$ — деяка конкретна функція. Тоді

$$Z_0(J) = N \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ -i \int d^4x \left[\frac{1}{2}\varphi(\square + m^2 - i\epsilon)\varphi + \varphi(\square + m^2 - i\epsilon)\varphi_0 - J\varphi + \frac{1}{2}\varphi_0(\square + m^2 - i\epsilon)\varphi_0 - J\varphi_0 \right] \right\}. \quad (1.6.10)$$

Виберемо в якості $\varphi_0(x)$ частинний розв'язок рівняння

$$(\square + m^2 - i\epsilon)\varphi_0(x) = J(x) \Rightarrow \varphi_0(x) = \int dy D_c(x-y)J(y), \quad (1.6.11)$$

де $D_c(x-y)$ — функція Гріна, тобто є розв'язком рівняння КГФ з δ -функцією в правій частині,

$$(\square + m^2 - i\epsilon)D_c(x-y) = \delta(x-y). \quad (1.6.12)$$

Це рівняння з частинними похідними і постійними коефіцієнтами розв'язується за допомогою перетворення Фур'є. Ми знаходимо

$$D_c(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{m^2 - k^2 - i\epsilon}. \quad (1.6.13)$$

Уявний доданок $i\epsilon$ зміщує полюси в підінтегральному виразі в комплексну площину, визначаючи тим самим правило обходу полюсів. Тоді

$$\begin{aligned} Z_0(J) &= N \exp \left(\frac{i}{2} \int d^4x \varphi_0(x) J(x) \right) \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x \varphi (\square + m^2 - i\epsilon) \varphi \right\} = \\ &= N' \exp \frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) D_c(x-y) J(y), \end{aligned} \quad (1.6.14)$$

тобто ми знайшли явну залежність функціонала $Z(J)$ від джерела $J(x)$. В останньому виразі ми використали розв'язок (1.6.11) для $\varphi_0(x)$ і включили інтеграл по φ , який не залежить від джерела $J(x)$, в константу N' . Якщо нормувати функціонал таким чином, що $Z(J=0) = 1$, тоді

$$Z_0(J) = \exp \frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) D_c(x-y) J(y). \quad (1.6.15)$$

У функціональному інтегралі (1.6.8) можна зробити поворот в евклідові простір (віківський поворот)

$$x_4 = ix_0 \Rightarrow (\partial_0\varphi)^2 - (\partial_i\varphi)^2 = -(\partial_4\varphi)^2 - (\partial_i\varphi)^2 = -(\partial_\mu\varphi)^2.$$

Відповідний генеруючий функціонал дорівнює

$$Z_0(J) = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ - \int d^4x_E \left(\frac{1}{2} [(\partial_\mu\varphi)^2 + m^2\varphi^2] - \varphi J \right) \right\}, \quad (1.6.16)$$

де інтегрування йде за евклідовими координатами x_E , $\mu = 1, 2, 3, 4$. Це вінерівський інтеграл, який застосовується в статистичній фізиці. Наприклад, статистична сума записується як ($\beta = 1/T$, де T — температура)

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H} = \int_{\varphi(0, \mathbf{x}) = \varphi(\beta, \mathbf{x})} \mathcal{D}\varphi(\tau, \mathbf{x}) \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E(\varphi(\tau, \mathbf{x})) \right], \quad (1.6.17)$$

де інтегрування йде за конфігураціями поля, які задовольняють умові періодичності $\varphi(0, \mathbf{x}) = \varphi(\beta, \mathbf{x})$. Відповідна лагранжева густина має вигляд

$$\mathcal{L}_E(\varphi(\tau, \mathbf{x})) = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi + V(\varphi). \quad (1.6.18)$$

Звернемо увагу, що кінетичний доданок $\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2$ є тепер позитивно визначеною величиною, а потенціальна функція $V(\varphi)$ входить зі знаком плюс, і у випадку потенціалу (1.6.3) весь вираз $\mathcal{L}_E(\varphi(\tau, \mathbf{x}))$ є позитивною величиною. Таким чином, збіжність вінерівського інтеграла є набагато кращою порівняно з фейнманівським інтегралом.

1.7. Гаусові інтеграли багатьох змінних

При обчисленні інтеграла за траєкторіями ми часто зустрічаємося із системами з багатьма динамічними змінними, а у випадку квантово-польових систем — навіть із континуумом динамічних змінних. Тому в цьому параграфі ми розглянемо, як обчислюються гаусові інтеграли з багатьох змінних. Почнемо з добре відомого гаусового інтеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2} = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{1/2}, \quad \text{Re } a > 0.$$

Розглянемо добуток таких інтегралів ($\text{Re } a_i > 0$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots dx_N e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i x_i^2} = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\left(\prod_{i=1}^N a_i\right)^{1/2}}.$$

Нехай A — діагональна матриця з елементами a_1, a_2, \dots, a_N , а x — вектор (x_1, \dots, x_N) . Тоді

$$(x, Ax) = \sum_{i=1}^N a_i x_i^2, \quad \det A = \prod_{i=1}^N a_i.$$

Можна записати

$$\int d^N x e^{-\frac{1}{2}(x, Ax)} = (2\pi)^{N/2} (\det A)^{-1/2}, \quad d^N x \equiv \prod_{i=1}^N dx_i. \quad (1.7.1)$$

Очевидно, ця рівність справедлива для будь-якої дійсної додатно визначеної симетричної матриці (такі матриці діагоналізуються за допомогою ортогонального перетворення $x \rightarrow Ox$, $O^T O = 1$, $\det O = 1$). У скороченому записі

$$\int dx e^{-\frac{1}{2}(x, Ax)} = (\det A)^{-1/2}, \quad dx = \prod_{i=1}^N \frac{dx_i}{\sqrt{2\pi}}.$$

Формула легко узагальнюється для квадратичної форми загального виду

$$Q(x) = \frac{1}{2}(x, Ax) + (b, x), \quad Q'(x) = Ax + b = 0 \Rightarrow \bar{x} = -A^{-1}b, \quad Q''(x) = A.$$

Квадратичну форму можна переписати у вигляді розкладу відносно точки екстремуму \bar{x} :

$$\begin{aligned} Q(x) &= Q(\bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})Q''(x)(x - \bar{x}) = \\ &= \frac{1}{2}(\bar{x}, A\bar{x}) + (b, \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x}, A(x - \bar{x})) = \\ &= -\frac{1}{2}(b, A^{-1}b) + \frac{1}{2}(x - \bar{x}, A(x - \bar{x})). \end{aligned} \quad (1.7.2)$$

Для гаусового інтеграла з багатьох змінних отримуємо загальну формулу

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-Q(x)} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}(x-\bar{x}, A(x-\bar{x}))} \times e^{\frac{1}{2}b \cdot A^{-1} \cdot b} = \\ &= (\det A)^{-1/2} e^{\frac{1}{2}b \cdot A^{-1} \cdot b}. \end{aligned} \quad (1.7.3)$$

Розглянемо узагальнення на комплексні числа. Для двох дійсних змінних

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{-a(x^2+y^2)} = \frac{1}{a}.$$

Вводячи комплексні змінні $z = x + iy$, $z^* = x - iy$ і здійснюючи елементарні перетворення, перепишемо інтеграл у вигляді

$$\int \frac{dz^*}{(2\pi i)^{1/2}} \frac{dz}{(2\pi i)^{1/2}} e^{-az^*z} = \frac{1}{a}.$$

Для додатно визначених ермітових матриць гаусовий інтеграл від комплексних змінних дорівнює

$$\int dz^* dz e^{-(z^*Az)} = (\det A)^{-1}, \quad dz^* dz \equiv \prod_{i=1}^N \frac{dz_i^* dz_i}{2\pi i}. \quad (1.7.4)$$

У присутності лінійного доданка маємо

$$\int dz^* dz e^{-(z^*Az) + b^* \cdot z + z^* \cdot b} = (\det A)^{-1} \exp(b^* A^{-1} b), \quad b^* \cdot z \equiv \sum_{i=1}^N b_i^* z_i. \quad (1.7.5)$$

Узагальнення на випадок функціональних інтегралів є прямим (це формальне узагальнення в границі $N \rightarrow \infty$)

$$\int \mathcal{D}\varphi \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^4x \varphi(x) A \varphi(x) \right] = (\det A)^{-1/2}, \quad (1.7.6)$$

$$\int \mathcal{D}\varphi^* \mathcal{D}\varphi \exp \left[-\int d^4x \varphi^*(x) A \varphi(x) \right] = (\det A)^{-1}, \quad (1.7.7)$$

де $\det A$ є фактично функціональним детермінантом, типовий приклад — це коли A є диференціальним оператором (дивись нижче). Повертаючись до обчислення генеруючого функціонала для вільного дійсного поля, знаходимо

$$Z_0(J) = N \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) D_c(x-y) J(y) \right] [\det i(\square + m^2 - i\epsilon)]^{-1/2}. \quad (1.7.8)$$

Оператор $A = i(\square + m^2 - i\epsilon)$ відіграє роль матриці в (1.7.3), $b = -iJ$, а обернений оператор є функцією Гріна $A^{-1} = -iD_c(x - y)$. Ми обчислили таким чином константу $N' = N[\det i(\square + m^2 - i\epsilon)]^{-1/2}$.

Обчислимо тепер гаусовий інтеграл типу

$$I_{r_1 \dots r_{2n}} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N dx_i x_{r_1} x_{r_2} \dots x_{r_{2n}} e^{-\frac{1}{2}(xAx)} \quad (1.7.9)$$

для парного числа передекспоненційних множників (для непарного числа множників інтеграл очевидно дорівнює нулю). Ми маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N dx_i e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i A_{ij} x_j - \sum_{i=1}^N b_i x_i} = \left(\det \frac{A}{2\pi} \right)^{-1/2} e^{\frac{1}{2} \sum_{i,j} b_i A_{ij}^{-1} b_j}. \quad (1.7.10)$$

В останньому виразі розкладемо в ряд експоненти, які містять b_i ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r_1 \dots r_{2n}} \frac{1}{(2n)!} I_{r_1 \dots r_{2n}} b_{r_1} \dots b_{r_{2n}} = I_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! 2^n} \left(\sum_{i,j} b_i A_{ij}^{-1} b_j \right)^n,$$

і, порівнюючи степені «джерел» b , знаходимо

$$\sum_{r_1 \dots r_{2n}} I_{r_1 \dots r_{2n}} b_{r_1} \dots b_{r_{2n}} = I_0 \frac{(2n)!}{n! 2^n} \left(\sum_{i,j} b_i A_{ij}^{-1} b_j \right)^n, \quad I_0 = \left(\det \frac{A}{2\pi} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.7.11)$$

Для окремих випадків маємо

$$n = 1 \Rightarrow \sum_{r_1 r_2} I_{r_1 r_2} b_{r_1} b_{r_2} = I_0 \sum_{ij} b_i A_{ij}^{-1} b_j \Rightarrow I_{r_1 r_2} = I_0 (A^{-1})_{r_1 r_2},$$

$$n = 2 \Rightarrow \sum_{r_1 \dots r_4} I_{r_1 \dots r_4} b_{r_1} \dots b_{r_4} = 3 I_0 \sum_{ij} (b_i A_{ij}^{-1} b_j)^2.$$

Диференціюючи по b_1, b_2, b_3, b_4 , знаходимо

$$I_{r_1 \dots r_4} = I_0 [A_{r_1 r_2}^{-1} A_{r_3 r_4}^{-1} + A_{r_1 r_3}^{-1} A_{r_2 r_4}^{-1} + A_{r_1 r_4}^{-1} A_{r_2 r_3}^{-1}]. \quad (1.7.12)$$

Цей результат є аналогом теореми Віка для бозонних полів, з якою ми познайомимося пізніше. Формули інтегрування справедливі, коли детермінант відмінний від нуля, тобто відсутні нульові власні значення матриці A .

1.8. Функціональне інтегрування за грасмановими змінними

У класичній границі, коли заповнення деяких мод значно перевищує одиницю, квантовані бозонні поля переходять у класичні поля, які є звичайними числовими функціями, що залежать від часової та просторових координат. Тому континуальний інтеграл для бозонних полів зводиться до функціонального інтеграла на просторі звичайних функцій. Принцип Паулі забороняє кільком ферміонам займати один і той самий стан, тому ферміонні поля квантуються за допомогою антикомутаційних співвідношень. Виникає питання, а який математичний об'єкт може розглядатися як класична границя квантового ферміонного поля, і, головне, як визначити функціональний інтеграл для ферміонних полів?

Відповідь на це питання дали дослідження Фелікса Березіна [44], який показав, що функціональний інтеграл для ферміонів визначається як інтеграл за антикомутуючими грасмановими змінними. Зовнішня алгебра, або еквівалентно — алгебра Грасмана, є алгебраїчною системою, яка вводить антикомутативну операцію зовнішнього добутку. Розглянемо алгебру Грасмана більш детально.

Алгебра Грасмана антикомутуючих змінних. Алгебра Грасмана однієї змінної визначається рівнянням $\{\theta, \theta\} = 0$, де $\{A, B\} = A \cdot B + B \cdot A$ — антикомутатор. Таких чисел не існує, але таку алгебру можна реалізувати за допомогою матриць, наприклад

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.8.1)$$

Для грасманових змінних не існує операції ділення, яке притаманно для всіх числових систем. Хоча грасманові змінні не є, строго кажучи, числами, але найчастіше ми будемо використовувати і для них це слово, маючи, звичайно, на увазі їхню відмінність від загальновідомих числових систем. Очевидно, звичайне визначення похідної, яке використовує операцію ділення, не може існувати. Визначимо диференційний оператор алгебраїчним співвідношенням

$$\left\{ \frac{d}{d\theta}, \theta \right\} = 1. \quad (1.8.2)$$

Дійсно, загальний вигляд функції однієї грасманової змінної

$$f(\theta) = f_0 + f_1 \cdot \theta \Rightarrow \theta f = f_0 \theta, \quad (1.8.3)$$

тобто ряд Тейлора будь-якої функції однієї грасманової змінної містить тільки два доданки, де f_0 і f_1 — звичайні числа. Якщо $f(\theta)$ — звичайне комутуюче число (c -число), то тоді f_0 також має бути c -числом, а f_1 — грасмановою змінною. Корисно ввести індекс, який характеризує грасманову

природу функції f (Z_2 -градування):

$$\epsilon(f) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } f \text{ парне за числом грасманових змінних,} \\ 1, & \text{якщо } f \text{ непарне за числом грасманових змінних.} \end{cases} \quad (1.8.4)$$

Наприклад, компоненти функції (1.8.3) мають індекси

$$\epsilon(f(\theta)) = \epsilon(f_0) = 0, \quad \epsilon(f_1) = 1.$$

Тоді для довільної функції грасманової змінної $f(\theta)$ має виконуватися тотожність (1.8.2):

$$\frac{d}{d\theta}(\theta f) + \theta \frac{d}{d\theta} f = f(\theta) = f_0 + f_1 \theta. \quad (1.8.5)$$

Звідси випливає, що для тотожного виконання цього співвідношення треба покласти

$$\frac{d}{d\theta} \theta = 1, \quad \frac{d}{d\theta} f = f_1, \quad (1.8.6)$$

де ми вважаємо, що f_1 — звичайне число. З іншого боку, записуючи тотожність у вигляді

$$\frac{d}{d\theta}(\theta f) = f - \theta \frac{d}{d\theta} f, \quad (1.8.7)$$

ми отримуємо правило Лейбніца для диференціювання добутків грасманових змінних.

Зауважимо, що похідні за звичайними числами також можна визначити алгебраїчним чином за допомогою вже комутатора, який діє на функції за правилом

$$\left[\frac{d}{dx}, x \right] = 1.$$

Ця операторна рівність повинна виконуватись на довільних (диференційованих) функціях, звідси ми отримуємо звичайне правило Лейбніца

$$\frac{d}{dx}(xf(x)) = f(x) + x \frac{d}{dx} f(x).$$

Для другої похідної

$$\frac{df}{d\theta} = f_1, \quad \frac{d^2 f}{d^2 \theta} = 0 \Rightarrow \left\{ \frac{d}{d\theta}, \frac{d}{d\theta} \right\} = 0.$$

Це означає, що для диференціювання немає зворотної операції. Вище коефіцієнти f_0, f_1 були звичайними числами, але можна їх також розглядати як інші грасманові змінні. Тоді

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = -f_1.$$

Можна розглядати ліві та праві похідні

$$\frac{\vec{d}}{d\theta} f(\theta) = -f_1, \quad f(\theta) \frac{\overleftarrow{d}}{d\theta} = f_1. \quad (1.8.8)$$

Через те, що для диференціювання немає зворотної операції, виникають незручності при визначенні операції інтегрування, про яку ми звичайно і думаємо як про зворотну операцію. Визначимо формально операцію інтегрування так, щоб вона була інваріантна відносно зсуву змінних,

$$\int d\theta f(\theta) = \int d\theta f(\theta + \xi), \quad (1.8.9)$$

тобто

$$\int d\theta (f_0 + f_1\theta) = \int d\theta (f_0 + f_1\theta + f_1\xi). \quad (1.8.10)$$

Тоді необхідно покласти

$$\int d\theta = 0, \quad \int d\theta \theta = 1 \Rightarrow \int d\theta f(\theta) = f_1, \quad (1.8.11)$$

і таким чином операція інтегрування діє в точності як диференціювання, тому що

$$\int d\theta f(\theta) = \frac{d}{d\theta} f(\theta). \quad (1.8.12)$$

Звідси, замінюючи в останньому виразі $f(\theta) \rightarrow df(\theta)/d\theta$, отримуємо

$$\int d\theta \frac{d}{d\theta} f(\theta) = 0, \quad (1.8.13)$$

тобто інтеграл від повної похідної дорівнює нулю, що означає, що операція інтегрування не є зворотною до операції диференціювання. Операція інтегрування за грасмановими змінними має властивості, характерні для інтегрування деяких визначених інтегралів:

1. Інтеграл від повної похідної дорівнює нулю.
2. В результаті інтегрування по одній зі змінних отриманий вираз не залежить від цієї змінної.
3. Множник у добутку, незалежний від змінних інтегрувань, може бути винесений з-під знака інтегрування.

Зокрема, властивість (1.8.13) притаманна звичайному інтегралу по колу, $f(x + 2\pi) = f(x)$,

$$\int_{S_1} dx \frac{df}{dx} = 0.$$

Світ однієї грасманової змінної бідний, тому розглянемо N грасманових змінних $\theta_1, \dots, \theta_N$, які задовольняють

$$\{\theta_i, \theta_j\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (1.8.14)$$

Також оператори похідних задовольняють рівнянням

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \theta_j \right\} = \delta_{ij}, \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right\} = 0. \quad (1.8.15)$$

Якщо ввести оператори

$$d_i^\pm = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \pm \theta_i,$$

то такі оператори задовольняють антикомутаційні співвідношення

$$\{d_i^\pm, d_j^\pm\} = \pm 2\delta_{ij}, \quad \{d_i^+, d_j^-\} = 0. \quad (1.8.16)$$

Це показує, що алгебра може бути виражена як пряма сума двох алгебр Кліффорда.

Довільна функція N грасманових змінних має вигляд

$$f(\theta_i) = f_0 + \theta_{i_1} f_1^{i_1} + \frac{1}{2!} \theta_{i_1} \theta_{i_2} f_2^{i_1 i_2} + \dots + \frac{1}{N!} \theta_{i_1} \theta_{i_2} \dots \theta_{i_N} f_N^{i_1 \dots i_N},$$

де, очевидно, коефіцієнти $f_2^{i_1 i_2}$, $f_3^{i_1 i_2 i_3}$ і так далі, антисиметричні по всіх індексах (факторіали введено для зручності). Очевидно також, що ряд обривається на останньому доданку, який містить добуток N змінних, оскільки наступні доданки будуть містити степені θ_i , які зануляються. Очевидно, що останній коефіцієнт повинен мати вигляд $f_N^{i_1 \dots i_N} = c_N \varepsilon_{i_1 \dots i_N}$, де $\varepsilon_{i_1 \dots i_N}$ — повністю антисиметричний тензор Леві-Чивіті в N розмірностях і $\varepsilon_{12 \dots N} = 1$.

Інтеграли з багатьох грасманових змінних. Маємо правила інтегрування

$$\int d\theta_i = 0, \quad \int d\theta_i \theta_i = 1, \quad \int d\theta_1 d\theta_2 \theta_1 \theta_2 = - \int d\theta_1 (d\theta_2 \theta_2) \theta_1 = -1. \quad (1.8.17)$$

Інтегруючи функцію по всім N змінним, знаходимо

$$\int d\theta_N \dots d\theta_1 f(\theta) = f_N^{12 \dots N} = c_N. \quad (1.8.18)$$

Далі розглянемо заміну змінних $\theta \rightarrow \theta = f(\theta')$ за однією грасмановою змінною

$$1 = \int d\theta = \int d\theta' J f(\theta') = J f_1 \Rightarrow J = \frac{1}{f_1}, \quad f_1 = \frac{\partial f(\theta')}{\partial \theta'}.$$

Бачимо, що якобіан має форму, відмінну від заміни змінних у звичайному інтегралі. Також легко встановити формулу винесення числової константи з-під знаку диференціала

$$\int d(c\theta) f(\theta) = \frac{1}{c} \int d\theta f(\theta), \quad (1.8.19)$$

яка також відмінна від знайомого правила в математичному аналізі.

Для двох змінних зробимо заміну

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta'_1 \\ \theta'_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = a_{11}\theta'_1 + a_{12}\theta'_2, \\ \theta_2 = a_{21}\theta'_1 + a_{22}\theta'_2. \end{cases}$$

З інтеграла

$$\begin{aligned} 1 &= \int d\theta_1 d\theta_2 \theta_2 \theta_1 = \int d\theta'_1 d\theta'_2 J(a_{21}\theta'_1 + a_{22}\theta'_2)(a_{11}\theta'_1 + a_{12}\theta'_2) = \\ &= \int d\theta'_1 d\theta'_2 J(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})\theta'_2 \theta'_1 \end{aligned} \quad (1.8.20)$$

знаходимо відповідний якобіан переходу

$$J = \det^{-1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (1.8.21)$$

Він також відмінний від випадку інтегрування за звичайними числами, де детермінант з'являється в додатному степені. Якобіан переходу для грасманових змінних зветься березініаном на честь Ф. Березіна, який вперше отримав таке правило заміни змінних. Це виведення легко узагальнюється на випадок N змінних. Дійсно, якщо зробити заміну

$$\theta_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}\theta'_j, \quad (1.8.22)$$

то функція $f(\theta)$ стає

$$f(\theta) = \tilde{f}(\theta') = f_0 + \dots + \frac{1}{N!} (a_{i_1 j_1} \theta'_{j_1}) \dots (a_{i_N j_N} \theta'_{j_N}) \varepsilon_{i_1 \dots i_N} c_N.$$

Використаємо тотожність

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_N} a_{i_1 j_1} \dots a_{i_N j_N} = \det(a) \varepsilon_{j_1 \dots j_N},$$

яка фактично впливає з означення детермінанта. Тоді

$$f(\theta) = f_0 + \dots + \frac{1}{N!} \theta'_{j_1} \dots \theta'_{j_N} \varepsilon_{j_1 \dots j_N} \det(a) c_N,$$

і проінтегруємо останню рівність по θ' :

$$\int d\theta'_N \dots d\theta'_1 \tilde{f}(\theta') = \det(a) c_N = \det(a) \int d\theta_N \dots d\theta_1 f(\theta),$$

звідки

$$\int d\theta_N \dots d\theta_1 f(\theta) = \frac{1}{\det(a)} \int d\theta'_N \dots d\theta'_1 f(\theta(\theta')).$$

Таким чином, якобіан переходу J буде

$$J = \det^{-1}(a_{ij}) = \left(\det \frac{\partial \theta_i}{\partial \theta'_j} \right)^{-1}. \quad (1.8.23)$$

Порівнюючи це з відповідним співвідношенням для звичайних інтегралів із заміною $x_i = a_{ij}x'_j$,

$$\int dx_1 \dots dx_N f(x) = \det(a) \int dx'_1 \dots dx'_N f(x(x')),$$

бачимо, що при заміні змінних детермінант з'являється в знаменнику у випадку грасманових інтегралів, а для звичайних інтегралів — у чисельнику.

Гаусові інтеграли. Гаусові інтеграли мають важливе значення в квантовій теорії ферміонних полів, тому розгляд почнемо з інтеграла

$$I_N(M) = \int \prod_{i=1}^N d\theta_i \exp \left[-\frac{1}{2} \theta_i^T M_{ij} \theta_j \right], \quad (1.8.24)$$

де M — антисиметрична $N \times N$ матриця з елементами m_{ij} . Для обчислення розкладаємо експоненту в ряд, який очевидно обривається, і застосовуємо правила інтегрування за грасмановими змінними. Для двох грасманових змінних

$$\begin{aligned} I_2(M) &= \int d\theta_1 d\theta_2 \exp \left[-\frac{1}{2} \theta_i^T M_{ij} \theta_j \right] = \int d\theta_1 d\theta_2 \exp \left[-\frac{1}{2} (\theta_1 m_{12} \theta_2 - m_{12} \theta_2 \theta_1) \right] = \\ &= \int d\theta_1 d\theta_2 [1 - m_{12} \theta_1 \theta_2] = m_{12} = (\det M)^{1/2}, \end{aligned} \quad (1.8.25)$$

Зауважимо, що m_{12} насправді є пфаффіаном $Pf(M)$ матриці M , який для дійсного m_{12} з точністю до знака співпадає з $(\det M)^{1/2}$. Однак цей знак для нас не має важливого значення, тому ми ігноруємо його в подальшому.

Далі легко показати, що гаусовий інтеграл (1.8.24) за трьома (і взагалі непарного числа) грасмановими змінними дорівнює нулю. У загальному випадку парного N числа змінних маємо загальну формулу

$$I_N(M) = (\det M)^{1/2}, \quad (1.8.26)$$

яку легко довести використовуючи те, що довільну дійсну антисиметричну матрицю можна представити у вигляді $M = Q\Sigma Q^T$, де Q є ортогональною, а Σ блок-діагональною матрицею з $N/2$ блоками 2×2 матриць

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_i \\ -\lambda_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, N/2,$$

де $\lambda_i \in$ додатно визначеними. Порівнюючи з відповідним інтегралом для звичайних дійсних змінних (1.7.1), де детермінант входить зі степенем $-1/2$, бачимо, що у відповіді для інтеграла за грасмановими змінними детермінант входить зі степенем $+1/2$. Це є суттєвою відмінністю двох інтегралів.

Для більш загального інтеграла з лінійним доданком у квадратичній формі маємо

$$I_N(M, \chi) = \int d\theta_1 \dots d\theta_N e^{-\frac{1}{2}\theta^T M \theta + \chi_i \theta_i} = (\det M)^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\chi^T M^{-1}\chi}, \quad (1.8.27)$$

де χ_i — також грасманові числа ($\{\chi_i, \chi_j\} = 0$, $\{\chi_i, \theta_j\} = 0$). Цей результат можна легко отримати, виконуючи зсув змінної

$$\theta = \theta' - M^{-1}\chi.$$

Для гаусових інтегралів з парним числом грасманових змінних зручно ввести комплексні грасманові змінні. У випадку $N = 2$ перейдемо до нових змінних

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 + i\theta_2), \quad \eta^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 - i\theta_2) \Rightarrow \theta_1 = \frac{\eta + \eta^*}{\sqrt{2}}, \quad \theta_2 = \frac{\eta - \eta^*}{i\sqrt{2}}.$$

Цю заміну змінних запишемо як

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{i\sqrt{2}} & -\frac{1}{i\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \eta^* \end{pmatrix}.$$

Тоді для міри інтегрування маємо

$$d\theta_1 d\theta_2 = \det^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{i\sqrt{2}} & -\frac{1}{i\sqrt{2}} \end{pmatrix} d\eta d\eta^* = \frac{1}{i} d\eta d\eta^*. \quad (1.8.28)$$

Квадратична форма перетворюється у

$$\frac{1}{2}\theta^T M \theta = \theta_1 m_{12} \theta_2 = -\frac{i}{2}(\eta + \eta^*) m_{12} (\eta - \eta^*) = -i\eta^* m_{12} \eta,$$

а інтеграл за двома грасмановими змінними приймає вигляд

$$\int d\theta_1 d\theta_2 e^{-\frac{1}{2}\theta^T M \theta} = \int \frac{d\eta d\eta^*}{i} e^{i\eta^* m_{12} \eta} = m_{12},$$

тобто, трактуючи m_{12} як 1×1 матрицю, маємо

$$\int \frac{d\eta d\eta^*}{i} e^{i\eta^* \tilde{M} \eta} = \det \tilde{M}, \quad \tilde{M} = m_{12}. \quad (1.8.29)$$

Далі лінійний доданок запишемо як

$$\begin{aligned} \chi_1 \theta_1 + \chi_2 \theta_2 &= \chi_1 \frac{\eta + \eta^*}{\sqrt{2}} + \chi_2 \frac{\eta - \eta^*}{i\sqrt{2}} = \frac{\chi_1 - i\chi_2}{\sqrt{2}} \eta + \frac{\chi_1 + i\chi_2}{\sqrt{2}} \eta^* = \\ &= -\eta^* \frac{\chi_1 + i\chi_2}{\sqrt{2}} + \frac{\chi_1 - i\chi_2}{\sqrt{2}} \eta \equiv -\eta^* \xi + \xi^* \eta, \end{aligned} \quad (1.8.30)$$

де ми ввели нові «джерела» ξ і комплексно спряжені ξ^* :

$$\xi = \frac{\chi_1 + i\chi_2}{\sqrt{2}}, \quad \xi^* = \frac{\chi_1 - i\chi_2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \xi^* \xi = i\chi_1 \chi_2.$$

Отримуємо запис інтеграла в термінах комплексних грасманових змінних

$$\begin{aligned} &\int d\theta_1 d\theta_2 e^{-\frac{1}{2}\theta^T M \theta + \chi \cdot \theta} = \\ &= \int \frac{d\eta d\eta^*}{i} e^{i\eta^* m_{12} \eta + \xi^* \eta - \eta^* \xi} = m_{12} e^{\chi_1 \frac{1}{m_{12}} \chi_2} = m_{12} e^{-i\xi^* \frac{1}{m_{12}} \xi}. \end{aligned} \quad (1.8.31)$$

Позначаючи $\xi \rightarrow -i\xi$, $\xi^* \rightarrow i\xi^*$, можемо записати цей інтеграл в більш симетричній формі

$$\int \frac{d\eta d\eta^*}{i} e^{i\eta^* m_{12} \eta + i\xi^* \eta + i\eta^* \xi} = \det \tilde{M} e^{-i\xi^* \tilde{M}^{-1} \xi}, \quad \tilde{M} \equiv m_{12} \quad (1.8.32)$$

або, перепозначаючи $m_{12} \rightarrow im_{12}$, отримуємо дещо іншу форму

$$\int d\eta^* d\eta e^{-\eta^* \tilde{M} \eta + i\xi^* \eta + i\eta^* \xi} = \det \tilde{M} e^{-\xi^* \tilde{M}^{-1} \xi}. \quad (1.8.33)$$

Цей результат узагальнюється на випадок гаусового інтеграла за n комплексними грасмановими змінними

$$\int \prod_{i=1}^n [d\eta_i d\eta_i^*] e^{\eta^* M \eta + \xi^* \eta + \eta^* \xi} = \det M e^{-\xi^* M^{-1} \xi}, \quad (1.8.34)$$

де ми перевизначили джерела, а M — ермітова матриця розміром $n \times n$. Доведення цієї формули подібне доведенню формули (1.8.27). Так, спочатку зручно виконати зсув змінних $\eta = \eta' - M^{-1} \xi$. В результаті залежність від джерел ξ і ξ^* факторизується і залишається тільки гаусовий інтеграл від квадратичної форми з матрицею M . Далі використовуємо добре

відомий факт, що довільна ермітова матриця M може бути діагоналізована за допомогою унітарної матриці U . Тоді, виконуючи заміну змінних $\eta'_i = U_{ij}\eta_j$ та використовуючи $(\det U)(\det U)^* = 1$ отримуємо остаточно формулу (1.8.34).

Наостанок розглянемо гаусовий інтеграл для довільної білінійної форми, який зустрічається в теорії неабелевих калібрувальних полів, для так званих духових полів

$$\int \prod_{i=1}^n [d\eta_i d\bar{\eta}_i] e^{\bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j}, \quad (1.8.35)$$

де $\bar{\eta}_i$ і η_i — два незалежні набори грасманових змінних. Далі використаємо те, що будь-яка комплексна матриця A може бути представлена у вигляді $A = W\Sigma V^\dagger$, де W і V^\dagger — унітарні матриці, а Σ — діагональна матриця з додатно визначеними коефіцієнтами. Тоді, виконуючи унітарні перетворення $\eta' = V\eta$, $\bar{\eta}' = \bar{\eta}W^\dagger$, знаходимо

$$\int \prod_{i=1}^n [d\eta_i d\bar{\eta}_i] e^{\bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j} = \frac{\det \Sigma}{\det W^\dagger \det V} = \det A. \quad (1.8.36)$$

Докладніше про антикомутуючі числа (грасманові змінні) та їх застосування в різних галузях фізики можна прочитати в монографіях [44, 72].

1.9. Інтеграли за траєкторіями та детермінанти

Ми показали, що для гармонічного осцилятора фейнманівський пропагатор дорівнює

$$K(q_f, t_f | q_i, t_i) = A(t_i, t_f) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(q_{cl})\right),$$

де

$$A(t_f - t_i) = \int_{x(t_i)=0}^{x(t_f)=0} \mathcal{D}x(t) \exp \frac{im}{2\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt x(t) \left[-\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2 \right] x(t),$$

і оператор $-\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2$ діє на функції, які задовольняють граничним умовам $x(t_i) = x(t_f) = 0$.

Знайдемо повний набір ортонормованих хвильових функцій $\Phi_n(t)$, які визначаються рівнянням на власні значення

$$\left(-\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2 \right) \Phi_n(t) = \lambda_n \Phi_n(t), \quad \Phi_n(t_i) = \Phi_n(t_f) = 0 \quad (1.9.1)$$

і мають властивості

$$\int_{t_i}^{t_f} \Phi_n(t) \Phi_m(t) dt = \delta_{nm}, \quad \sum_n \Phi_n(t) \Phi_n(t') = \delta(t - t'). \quad (1.9.2)$$

Розкладемо функцію $x(t)$ в ряд за цією системою

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(t). \quad (1.9.3)$$

Для дії, використовуючи ортонормованість функцій $\Phi_n(t)$, знаходимо

$$S[x(t)] = \frac{m}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n^2. \quad (1.9.4)$$

Інтеграл за траєкторіями можна записати як багатократний інтеграл за фур'є-компонентами a_n і порахувати відповідний гаусовий інтеграл

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int da_1 \dots da_N e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{2\pi i \hbar}{m} \right)^{N/2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \dots \lambda_N}}. \quad (1.9.5)$$

Таким чином, інтеграл за траєкторіями, який відповідає квадратично-му лагранжіану, визначається детермінантом відповідного диференційного оператора, тобто

$$\int_{x(t_i)=0}^{x(t_f)=0} \mathcal{D}x(t) e^{\frac{im}{2\pi} \int_{t_i}^{t_f} dt x(t) \left[-\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2 \right] x(t)} = \Delta \left\{ \det \left[-\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2 \right] \right\}^{-1/2}, \quad (1.9.6)$$

де праву частину потрібно інтерпретувати як граничну процедуру

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta(N) \left[\prod_{n=1}^N \lambda_n \right]^{-1/2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \Delta(N) \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{n=1}^N \frac{da_n}{(2\pi i \hbar / m)^{1/2}} e^{\frac{im}{2\hbar} \sum_{n=1}^N \lambda_n a_n^2}.$$

Відзначимо, що ми включили фактор $\left(\frac{m}{2\pi i \hbar} \right)^{N/2}$ в міру інтегрування. Однак присутня скінченна константа Δ , тому що детермінант тільки пропорційний інтегралу. Можна вибрати Δ так, щоб нормувати $A(t_f - t_i)$ на випадок вільної частинки

$$K(q_f, t_f | q_i, t_i) = \left[\frac{\det \left(-\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2 \right)}{\det \left(-\frac{d^2}{dt^2} \right)} \right]^{-1/2} K_0(0, t_f | 0, t_i) \exp \left(\frac{i}{\hbar} S[q_{cl}] \right), \quad (1.9.7)$$

$$K_0(0, t_f | 0, t_i) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_f - t_i)} \right)^{1/2}.$$

Очевидно, що при $\omega = 0$ вираз (1.9.7) перетворюється у пропагатор вільної частинки.

Детермінант оператора визначимо як добуток його власних значень. У більшості випадків цей добуток розбіжний і його треба регуляризувати, тобто зробити скінченним. Ми розглянемо регуляризацію за допомогою так званої узагальненої дзета-функції. Визначимо детермінант такою формулою:

$$\begin{aligned} \det A &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \lambda_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \exp(\ln \lambda_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left[\sum_{n=1}^N \ln \lambda_n \right] = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left[- \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial \lambda_n^{-s}}{\partial s} \right)_{s=0} \right] = \exp \left[- \frac{\partial \zeta}{\partial s}(s, A) \Big|_{s=0} \right], \end{aligned} \quad (1.9.8)$$

де функція комплексної змінної s ,

$$\zeta(s|A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^s} = \text{Tr } A^{-s}, \quad (1.9.9)$$

є узагальненою дзета-функцією для деякого оператора A . В останній рівності в (1.9.8) ми поміняли порядок сумування і переходу до границі. Зазвичай сума в (1.9.9) збігається для значень $\text{Re } s > \sigma$, більших за деяке позитивне число σ , і визначає в цій області аналітичну функцію, яка може бути продовжена в область $\text{Re } s < \sigma$ і є аналітичною в точці $s = 0$. Дзета-функція оператора A є узагальненням знаменитої функції Рімана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \text{Re } s > 1. \quad (1.9.10)$$

Ця функція може бути аналітично продовжена в область значень $\text{Re } s < 1$, зокрема вона виявляється скінченною в точці $s = 0$, де $\zeta(0) = -1/2$. Відзначимо, що

$$\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}, \quad (1.9.11)$$

тобто з точки зору цієї аналітичної функції нескінченна сума натуральних чисел дає від'ємний дріб.

Повернемось до фейнманівського пропагатора

$$\langle q_f | e^{-\frac{iHt}{\hbar}} | q_i \rangle = K(q_f, t | q_i, 0) = N \int_{q(0)=q_i}^{q(t)=q_f} \mathcal{D}q(t) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt \left[\frac{\dot{q}^2}{2m} - V(q) \right] \right),$$

в якому зробимо заміну $t = -i\tau$. Тоді в підінтегральному виразі маємо

$$\exp(\dots) \rightarrow \exp \left(-\frac{1}{\hbar} \int_0^{+it} d\tau \left[\frac{\dot{q}^2}{2m} + V(q) \right] \right),$$

а матричний елемент переписеться як

$$\langle q_f | e^{-\frac{iHt}{\hbar}} | q_i \rangle = \langle q_f | e^{-H\beta} | q_i \rangle,$$

де ми позначили $it/\hbar = \beta$. Останній матричний елемент використовується у статистичній фізиці, якщо покласти $\beta = \frac{1}{k_B T}$ (k_B — константа Больцмана). Якщо прирівняти початкову і кінцеву координати, $q_i = q_f \equiv q$, і проінтегрувати по q , то отримуємо вже відомий вираз для статистичної суми

$$\text{Tr } e^{-\beta H} = N \int_{q(0)=q(\beta)} \mathcal{D}q(\tau) e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^{\hbar\beta} d\tau L_E(q(\tau))}. \quad (1.9.12)$$

Відповідно, виконуючи заміну $it/\hbar = \beta$ в операторі еволюції для осцилятора, знаходимо

$$\begin{aligned} \langle q_f | e^{-\beta H} | q_i \rangle &= \left[\frac{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right)}{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} \right)} \right]^{-1/2} \times \\ &\times \left(\frac{m}{2\pi\beta} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{m\omega}{2 \text{sh } \beta\omega} [(q_f^2 + q_i^2) \text{ch } \beta\omega - 2q_f q_i] \right], \end{aligned} \quad (1.9.13)$$

де ми використали відомий матричний елемент (1.3.13) для оператора еволюції гармонічного осцилятора.

ЗАДАЧІ

1. Показати, що при $t \rightarrow 0_+$ фейнманівський пропатор для вільної частинки

$$K(q_f, t | q_i, 0) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar t} \right)^{1/2} \exp \left(\frac{im(q_f - q_i)^2}{2\hbar t} \right)$$

зводиться до дельта-функції, тобто

$$K(q_f, t | q_i, 0) \rightarrow \delta(q_f - q_i), \quad t \rightarrow 0_+.$$

2. Обчислити фур'є-перетворення фейнманівського пропатора для вільної частинки

$$G(q_f, q_i; E) = \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \int_0^\infty dt K(q_f, t | q_i, 0) e^{iEt/\hbar}, \quad \text{Im } E > 0.$$

Знайти густину станів

$$\rho(E) = -\frac{1}{\pi L} \text{Im Tr } G(E + i\epsilon), \quad \epsilon \rightarrow 0_+,$$

де $\text{Tr } G(E)$ визначений як

$$\text{Tr } G(E) = \int_{-L/2}^{L/2} dq G(q, q; E).$$

3. Обчислити фейнманівський пропагатор для гармонічного осцилятора, використовуючи лагранжіан $L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{m\omega^2}{2}q^2$.

Відповідь:

$$K(q_f, t | q_i, 0) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega t} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{im\omega}{2\hbar \sin \omega t} [(q_f^2 + q_i^2) \cos \omega t - 2q_f q_i] \right\},$$

де $t < \pi/\omega$.

4. Обчислити фейнманівський пропагатор для частинки у зовнішньому постійному полі з лагранжіаном $L = \frac{m\dot{q}^2}{2} + fq$, $f = \text{const}$.

Відповідь:

$$K(q_f, t | q_i, 0) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar t} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{m(q_f - q_i)^2}{2t} + \frac{1}{2}ft(q_f + q_i) - \frac{f^2 t^3}{24m} \right] \right\}.$$

5. Обчислити фейнманівський пропагатор для гармонічного осцилятора у зовнішньому постійному полі з лагранжіаном $L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{m\omega^2}{2}q^2 + fq$, $f = \text{const}$.

6. У попередній задачі використати довільну залежну від часу функцію $f(t)$.

7. Обчислити фейнманівський пропагатор для зарядженої частинки в постійному зовнішньому магнітному полі, лагранжіан якої має вигляд:

$$L = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{r} = (x, y, z).$$

Обираючи симетричну калібровку $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (B/2)(-y, x, 0)$, отримати відповідь:

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \tau) = \frac{m\omega}{4\pi i \hbar \sin(\omega\tau/2)} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \tau}} \exp \left\{ \frac{ie}{\hbar} \int_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{im\omega}{4\hbar} \text{ctg}(\omega\tau/2) [(x - x')^2 + (y - y')^2] + \frac{im(z - z')^2}{2\hbar\tau} \right\},$$

де $\tau = t - t'$, $\omega = eB/mc$ — циклотронна частота. Інтегрування у фазовому множнику в експоненті відбувається вздовж прямої лінії, яка з'єднує точки \mathbf{r}, \mathbf{r}' .

8. Нехай задано хвильову функцію гармонічного осцилятора в момент часу $t = 0$ у вигляді

$$\Psi(q, 0) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(q-a)^2\right].$$

Використовуючи пропагатор гармонічного осцилятора, показати, що в момент часу t вона буде мати вигляд:

$$\Psi(q, t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(q^2 - 2aqe^{-i\omega t} + \frac{1}{2}a^2(1 + e^{-2i\omega t})\right)\right].$$

9. Нехай хвильова функція вільної частинки в момент часу $t = 0$ задана у вигляді розподілу

$$\Psi(q, 0) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{q^2}{4\sigma^2}\right), \quad \sigma - \text{дисперсія.}$$

Показати, що в момент t розподіл буде мати вигляд:

$$\Psi(q, t) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2(t)}} e^{-\frac{q^2}{4\sigma^2(t)}} e^{\frac{i\hbar tq^2}{8m\sigma^2\sigma^2(t)}} e^{-\frac{i}{2} \arctg \frac{\hbar t}{2m\sigma^2}},$$

де $\sigma^2(t) = \sigma^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2\sigma^2}$, тобто хвильовий пакет розпливається з часом.

10. Обчислити багатовимірний інтеграл

$$I_{r_1 r_2 r_3 r_4} = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N dx_i x_{r_1} x_{r_2} x_{r_3} x_{r_4} e^{-\frac{1}{2}(x, Ax)},$$

де $x_{r_1}, x_{r_2}, x_{r_3}, x_{r_4}$ деякі змінні з множини $x_i, i = 1, \dots, N$, а (x, Ax) є такою квадратичною формою:

$$(x, Ax) = \sum_{i,j=1}^N x_i A_{ij} x_j.$$

11. Довести формулу (1.8.19).

12. Явним обчисленням показати, що інтеграл по грасманових змінних для $N = 4$ має вигляд

$$I_4(M) = \int d\theta_1 \dots d\theta_4 \exp\left(-\frac{1}{2}\theta^T M \theta\right) = (\det M)^{1/2},$$

де M — антисиметрична матриця, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_4)$.

13. Функція Гріна рівняння Клейна—Гордона—Фока визначається рівнянням (див. (5.1.8))

$$(\square + m^2 - i\varepsilon)D(x, y) = -i\delta^4(x - y).$$

Функцію D можна представити у вигляді

$$D(x, y) = \int_0^\infty dT \langle x | e^{-iT(H-i\varepsilon)} | y \rangle, \quad H = -P_\mu^2 + m^2,$$

де імпульс $P_\mu = i\partial_\mu$. Показати, що $D(x, y)$ може бути представлена у вигляді наступного функціонального інтеграла

$$D(x, y) = \int_0^\infty dT e^{-im^2T} \int_{x_\mu(0)=y_\mu}^{x_\mu(T)=x_\mu} \mathcal{D}x_\mu(\tau) \exp \left[-i \int_0^T d\tau \frac{1}{4} \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right)^2 \right].$$

14. У присутності електромагнітного поля функція Гріна рівняння КГФ для зарядженої скалярної частинки задовольняє рівнянню

$$(D_\mu^2 + m^2 - i\varepsilon)D(x, y; A) = -i\delta^4(x - y),$$

де $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ — коваріантна похідна, $A_\mu(x)$ — вектор-потенціал. Показати, що $D(x, y; A)$ може бути представлена у вигляді функціонального інтеграла

$$D(x, y; A) = \int_0^\infty dT e^{-im^2T} \int_{x_\mu(0)=y_\mu}^{x_\mu(T)=x_\mu} \mathcal{D}x_\mu(\tau) \exp \left[i \int_0^T d\tau L(x(\tau)) \right],$$

де лагранжіан має вигляд

$$L(x(\tau)) = -\frac{1}{4} \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right)^2 - eA_\mu(x) \frac{dx^\mu}{d\tau}.$$

2

КВАНТУВАННЯ ГАМІЛЬТОНОВИХ СИСТЕМ ІЗ В'ЯЗЯМИ

Сучасні теорії електрослабких взаємодій, квантової хромодинаміки та теорії гравітації засновані на калібрувальних теоріях поля, які з точки зору класичної механіки і теорії поля належать до так званих гамільтонових систем із в'язями. Підручники з класичної лагранжевої та гамільтонової механіки зазвичай припускають, що лагранжіан $L(q, \dot{q})$ є неособливим, тобто матриця других похідних від $L(q, \dot{q})$ відносно швидкостей має обернену, принаймні локально. У випадку коли ця матриця сингулярна швидкості не можна однозначно виразити через канонічні імпульси $p = \partial L / \partial \dot{q}$, це приводить до існування обмежень (в'язей) на канонічні координати та імпульси, що впливають лише з форми лагранжіана. Калібрувальні теорії поля відносяться до класу так званих сингулярних лагранжевих теорій поля, до яких не застосовні стандартні методи квантування. Гамільтонів формалізм для систем із сингулярними лагранжіанами та їх квантування був розвинений на початку 50-х років у роботах Дірака і Бергмана, і пізніше отримав подальший розвиток у роботах де Вітта, Фаддеева, Попова, Славнова та інших [21, 48, 65, 66, 76, 92, 112, 114, 164, 181].

2.1. Канонічне квантування регулярних гамільтонових систем

Канонічне квантування класичних систем використовує гамільтонів метод. Тому в цьому параграфі ми нагадаємо основні поняття останнього для регулярних гамільтонових систем, а в наступному розглянемо канонічне квантування нерегулярних систем.

Для регулярних гамільтонових систем з n ступенями вільності і гамільтоніаном H маємо канонічні гамільтонові рівняння руху

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.1.1)$$

де q_i і p_i — узагальнені координати та імпульси, які утворюють фазовий простір Γ . На цьому просторі будемо розглядати функції $f(p, q) \in C(\Gamma)$,

де $C(\Gamma)$ — клас гладких функцій. Наприклад, C^r — клас функцій з r неперервними похідними.

Гамільтонові рівняння повністю визначають еволюцію системи з часом, тому що, якщо задано значення координат та імпульсів у початковий момент часу, можна визначити їхні значення в будь-який наступний момент часу, розв'язуючи дану систему рівнянь. Часова еволюція функції $f(p_i, q_i)$, визначеної на фазовому просторі Γ з сукупністю координат q_i та імпульсів p_i , описується внаслідок (2.1.1) рівнянням

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (2.1.2)$$

(мається на увазі підсумовування по i). Визначимо дужку Пуассона (ДП) $\{f, g\}$, яка діє на функції f і g таким чином:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i}. \quad (2.1.3)$$

Тоді рівняння часової еволюції записується як

$$\dot{f} = \{f, H\}. \quad (2.1.4)$$

Дужка Пуассона має такі властивості:

1. Білінійність

$$\begin{aligned} \{f_1 + f_2, g\} &= \{f_1, g\} + \{f_2, g\}, \\ \{f, g_1 + g_2\} &= \{f, g_1\} + \{f, g_2\}, \\ \{\alpha f, g\} &= \alpha \{f, g\}, \quad \{f, \alpha g\} = \alpha \{f, g\}, \end{aligned}$$

де α є постійним в двох останніх рівностях.

2. Антисиметричність

$$\{f, g\} = -\{g, f\}.$$

3. Тотожність Якобі

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

4. Правило Лейбніца

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}.$$

5. Існування нульового елемента c для якого

$$\{c, f\} = 0$$

для всіх функцій $f(p, q)$. У загальному випадку, якщо існує множина з операцією добутку $\{.,.\}$, то вона називається алгеброю Лі, якщо добуток

задовольняє властивостям 1–3, і алгеброю Пуассона, якщо задовольняє 1–5. Множина Γ із дужкою Пуассона називається симплектичним многовидом. Для канонічних змінних маємо

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}$$

— гамільтонові рівняння руху, і для довільної функції на фазовому просторі

$$\dot{f} = \{f, H\} = \frac{\partial f}{\partial q_k} \{q_k, H\} + \frac{\partial f}{\partial p_k} \{p_k, H\}.$$

У загальному випадку симплектичного многовиду з координатами $Z_A = (q_i, p_i)$ дужка Пуассона, що задовольняє умовам 1–5 визначається як

$$\{f(Z), g(Z)\} = \frac{\partial f}{\partial Z_A} \omega^{AB} \frac{\partial g}{\partial Z_B},$$

де тензор ω^{AB} задовольняє умови

$$\omega^{AB} = -\omega^{BA}, \quad \omega^{AD} \partial_D \omega^{BC} + \text{циклічні перестановки } \{A, B, C\} = 0.$$

Для стандартного вибору канонічно спряжених координат q_i, p_i очевидно маємо

$$\omega^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

де I — одинична $n \times n$ матриця.

Фізичні стани класичної системи — це точки (p_k, q_k) у фазовому просторі Γ , а фізичні (спостережувані) величини — функції $f(p_k, q_k)$ на Γ .

Квантування класичних регулярних гамільтонових систем. Класична теорія може бути перетворена в квантову теорію за допомогою процедури квантування, яка визначається такими кроками:

1. Визначається гільбертів простір \mathcal{H} зі скалярним добутком $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Координати q_k, p_k замінюються на оператори \hat{q}_k, \hat{p}_k , які діють в \mathcal{H} . Комутатор $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ відіграє роль дужки Пуассона

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij}. \quad (2.1.5)$$

Комутатор $[\hat{A}, \hat{B}]$ задовольняє тим самим п'яти умовам, що й дужка Пуассона.

2. Фізичні стани квантової системи — це нормовані вектори в \mathcal{H} .

3. Фізичні (спостережувані) величини — ермітові оператори \hat{f} в \mathcal{H} . Величина \hat{f} може бути отримана з класичної $f(p, q)$ заміною імпульсів і координат на відповідні оператори, $p \rightarrow \hat{p}$, $q \rightarrow \hat{q}$, але процедура неоднозначна внаслідок некомутативності \hat{p} і \hat{q} . Однією з найбільш широко застосованих схем впорядкування є так зване вейлівське квантування, згідно з

яким функції $f(p, q)$ від класичних імпульсу p і координати q ставиться у відповідність операторна функція

$$\hat{f}(\hat{p}, \hat{q}) = \int_{-\infty}^{\infty} da db \exp[i(a\hat{q} + b\hat{p})] \tilde{f}(a, b),$$

де $\tilde{f}(a, b)$ — фур'є-образ класичної функції $f(p, q)$.

4. Часова еволюція квантового стану $|\psi, t\rangle$ визначається гамільтоніаном \hat{H} (картина Шредінгера)

$$\hat{H}|\psi, t\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle. \quad (2.1.6)$$

У картині Гейзенберга має місце більш пряма відповідність з класичними гамільтоновими рівняннями руху, тому що стан ψ не залежить від часу, а еволюція операторів визначається рівняннями

$$\frac{d}{dt} A(t) = \frac{1}{i\hbar} [A(t), H]. \quad (2.1.7)$$

Ці рівняння отримуються з класичних гамільтонових рівнянь в разі заміни дужки Пуассона комутатором $\{, \} \rightarrow \frac{[,]}{i\hbar}$.

2.2. Гамільтонова динаміка систем із в'язями

Вище ми нагадали процедуру квантування регулярних гамільтонових систем. У цьому параграфі ми розглянемо квантування нерегулярних систем [121, 154, 158]. Основною причиною для цього є те, що калібрувальні теорії, які описують у Стандартній моделі електромагнітні та сильні взаємодії, є нерегулярними гамільтоновими системами. При їх квантуванні з'являються в'язі, виникає необхідність фіксації калібровки і т.д. Квантування калібрувальних теорій ми розглянемо в наступних параграфах, а в цьому зосередимося на вивченні методу Дірака—Фаддєєва квантування квантово-механічних систем із в'язями.

Сингулярні лагранжіани. Нехай система зі скінченним числом ступенів вільності, які параметризуються координатами q_i , описується дією

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q_i, \dot{q}_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.2.1)$$

Обмежимося лагранжіанами $L(q_i, \dot{q}_i)$, які залежать від похідних, не вищих першого порядку. Нехай дія є стаціонарною щодо варіацій $\delta q(t)$, які дорівнюють нулю в кінцевих точках. Тоді необхідною і достатньою умовою

стаціонарності дії є рівняння Ейлера—Лагранжа

$$L_i \equiv \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad (2.2.2)$$

або, у більш розгорнутому вигляді,

$$L_i = -\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial q_i} \equiv M_{ij} \ddot{q}_j + V_i = 0. \quad (2.2.3)$$

Прискорення визначаються однозначно початковими умовами на координати і швидкості, якщо матриця Гессе M_{ij} має обернену. Це випадок регулярних систем.

Якщо $\det M = 0$, то рівняння не можна записати в нормальній формі $\ddot{q}_j = f_j(q, \dot{q})$, і звичайні теореми про існування та єдиність розв'язків звичайних диференціальних рівнянь є незастосовними. В цьому випадку прискорення, а значить і часова еволюція, не визначаються однозначно початковими умовами на q, \dot{q} . Такі системи називаються сингулярними. Другий наслідок сингулярності матриці Гессе стосується побудови канонічного формалізму, що виявляється нетривіальною проблемою. Гамільтонова динаміка таких систем була розвинена Розенфельдом, Бергманом, Діраком, Фаддєєвим та іншими.

Класичні гамільтонові системи з в'язями. Визначимо імпульси стандартним чином

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.2.4)$$

Для переходу від лагранжіана до гамільтоніану потрібно перейти від швидкостей \dot{q} до імпульсів p . У випадку сингулярних систем з $\det M = 0$, не всі \dot{q}_i можна виразити як функції q, p . Нехай ранг матриці $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$ дорівнює $(n - r)$, і припустимо, що ранг цієї матриці є незмінним на всьому многовиді, визначеному координатами q_i, \dot{q}_i . Тоді за теоремою про неявні функції можна розв'язати $(n - r)$ рівнянь (2.2.4) відносно \dot{q}_l ($l = 1, \dots, n - r$) як функції p, q і r швидкостей, які залишаються

$$\dot{q}_l = \xi_l(q, p, \dot{q}_\alpha), \quad \alpha = 1, \dots, r. \quad (2.2.5)$$

Якщо тепер підставити (2.2.5) в r рівнянь, що залишаються в (2.2.4), то отримуємо r співвідношень на p, q , які не залежать внаслідок рангу $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$ від \dot{q}_α :

$$\varphi_m(p, q) = 0, \quad m = 1, \dots, r. \quad (2.2.6)$$

Ці співвідношення зазвичай називають первинними в'язями, щоб підкреслити, що при їх виведенні не застосовувалися рівняння руху. Визначимо

гамільтоніан стандартним чином через перетворення Лежандра

$$H(p, q, \dot{q}) \equiv p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}) = H(p, q). \quad (2.2.7)$$

Функція H не залежить явним чином від швидкостей \dot{q} ; для несингулярних лагранжіанів це очевидно, оскільки $\dot{q}_i = \dot{q}_i(p, q)$. У випадку сингулярних лагранжіанів це твердження також залишається вірним. Для доведення цього факту запишемо

$$H(p, q, \dot{q}) = p_l \xi_l(q, p, \dot{q}_\alpha) + p_\alpha \dot{q}_\alpha - L(q, \xi_l(q, p, \dot{q}_\alpha), \dot{q}_\alpha) \quad (2.2.8)$$

і візьмемо похідну по \dot{q}_α . Тоді ми легко отримуємо тотожність

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_\alpha} = p_l \frac{\partial \xi_l}{\partial \dot{q}_\alpha} + p_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \equiv 0, \quad (2.2.9)$$

яка виконується в силу визначення імпульсів (2.2.4). Принцип Гамільтона

$$\delta \int L dt = 0 \quad (2.2.10)$$

записується тоді як

$$\delta \int (p_i \dot{q}_i - H(p, q)) dt = 0 \quad (2.2.11)$$

при умові, що виконуються в'язі

$$\varphi_m(p, q) = 0. \quad (2.2.12)$$

В'язі можна врахувати, використовуючи множники Лагранжа,

$$\delta \int (p_i \dot{q}_i - H(p, q) - \lambda_m \varphi_m(p, q)) dt = 0. \quad (2.2.13)$$

В результаті маємо $2n + r$ незалежних змінних p, q, λ , які є функціями від t . Отримуємо гамільтонові рівняння

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_i}, \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial p_i}, \\ \varphi_m(p, q) = 0. \end{cases} \quad (2.2.14)$$

Оскільки кількість рівнянь (2.2.14) дорівнює кількості невідомих (p, q, λ) , включаючи лагранжів множник, то розв'язок рівнянь можна знайти принаймні в принципі. Позначимо через Γ фазовий простір, який містить $2n$ змінних: $(q_1, \dots, q_n), (p_1, \dots, p_n)$. Підмножина $M \subset \Gamma$, яка визначається в'язями $\varphi_m(p, q) = 0$, має розмірність $(2n - r)$.

Визначаючи повний гамільтоніан $H_T = H + \lambda_m \varphi_m$ і використовуючи дужку Пуассона

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i},$$

запишемо (2.2.14) у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= \{p_i, H\} + \lambda_m \{p_i, \varphi_m\} \approx \{p_i, H_T\}, \\ \dot{q}_i &= \{q_i, H\} + \lambda_m \{q_i, \varphi_m\} \approx \{q_i, H_T\}. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Формально при обчисленні ДП $\{p_i, H_T\}$ і $\{q_i, H_T\}$ в (2.2.15) маємо також доданки $\{p_i, \lambda_m\} \varphi_m$ і $\{q_i, \lambda_m\} \varphi_m$, відповідно. Дужки Пуассона $\{p_i, \lambda_m\}$, $\{q_i, \lambda_m\}$ нам невідомі, але ці вирази множаться на в'язі φ_m і зникають на множині M . Позначення операції \approx означає рівність у слабкому сенсі, тобто, що накладення в'язей $\varphi_m = 0$ здійснюється тільки після обчислення дужок Пуассона. У загальному випадку $\{\varphi_m, f\} \neq 0$, тому що дужки Пуассона містять похідні, а вони необов'язково дорівнюють нулю на M . Для довільної функції $g(p, q)$ у фазовому просторі еволюцію в часі можна записати як

$$\dot{g} \approx \{g, H_T\}. \quad (2.2.16)$$

Тому введений гамільтоніан $H_T \approx H$ є генератором трансляцій у часі.

Для самоузгодженості необхідно, щоб в'язі зберігалися в часі на множині M . Тому вимагаємо

$$\dot{\varphi}_m|_M = [\{\varphi_m, H\} + \lambda_n \{\varphi_m, \varphi_n\}]|_M = 0. \quad (2.2.17)$$

Виключаючи ті випадки, коли (2.2.17) призводить до протиріччя, можливо:

- а) тривіальна тотожність;
- б) $\dot{\varphi}_m|_M$ не залежать від λ ;
- в) можуть містити деякі λ .

Випадок (б) дає нові в'язі (вторинні)

$$\rho_k(q, p) = 0.$$

Повторюючи процедуру для ρ_k , знаходимо всі можливі нові (вторинні, третинні, і т.д.) в'язі. Переходячи потім до випадку (в), можна знайти частину множників Лагранжа λ_n (залежно від рангу системи).

Позначимо тепер усю сукупність знайдених в'язей як

$$\psi_s(q, p) = \{\varphi_m(q, p), \rho_k(q, p)\}, \quad s = 1, \dots, S. \quad (2.2.18)$$

Ці в'язі визначають деяку підмножину в Γ : $\psi_s = 0$, яку будемо позначати M .

Незвідність в'язей. Будь-яку функцію $f(q, p)$, яка обертається в нуль на M , можна представити як лінійну комбінацію в'язей

$$f(q, p) = \sum_s a_s(q, p)\psi_s(q, p). \quad (2.2.19)$$

Зокрема, H_T можна записати у загальному випадку як

$$H_T(q, p) = H_T(q, p)|_M + v_s(q, p)\psi_s(q, p), \quad H_T(q, p)|_M = H(q, p), \quad (2.2.20)$$

де $v_s(q, p)$ — довільні функції q і p .

Визначення. Функція $f \in C(\Gamma)$ називається величиною першого роду, якщо $\{f, \psi_s\} \approx 0$ для всіх ψ_s .

Якщо це не так, тоді функція f — величина другого роду. Рівність $\{f, \psi_s\} \approx 0$ означає, що $\{f, \psi_s\} = \sum_{s'} c_{ss'}\psi_{s'}$.

Теорема. Дужка Пуассона двох величин 1-го роду також є величиною 1-го роду.

Дійсно, для них

$$\{R, \psi_i\} = r_{ij}\psi_j, \quad \{T, \psi_i\} = t_{ij}\psi_j.$$

Використовуючи тотожність Якобі, маємо

$$\begin{aligned} \{\{R, T\}, \psi_i\} &= -\{\{T, \psi_i\}, R\} - \{\{\psi_i, R\}, T\} = \\ &= \{r_{ij}\psi_j, T\} - \{t_{ij}\psi_j, R\} = t_{ij}r_{jk}\psi_k - r_{ij}t_{jk}\psi_k \approx 0. \end{aligned}$$

Відповідно до визначення величин першого і другого роду всі в'язі можна розбити на два класи: в'язі першого та другого роду. В'язі першого роду, котрі позначимо Φ_a , задовольняють

$$\{\Phi_a, \psi_s\} \approx 0, \quad (2.2.21)$$

або внаслідок незвідності

$$\{\Phi_a, \psi_s\} = c_{ss'}^a\psi_{s'}, \quad a = 1, \dots, m \leq S. \quad (2.2.22)$$

Нехай ми знайшли всі в'язі першого роду, тоді в'язі, що залишились (позначимо їх θ_α), будуть в'язями другого роду, для них детермінант матриці з дужок Пуассона

$$\det |\{\theta_\alpha, \theta_\beta\}| \neq 0. \quad (2.2.23)$$

Дійсно, якщо $\det |\{\theta_\alpha, \theta_\beta\}| \approx 0$, то існує нетривіальний набір функцій $a_\alpha(q, p)$, таких, що задовольняють лінійній системі рівнянь

$$a_\alpha\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} \approx 0, \quad (2.2.24)$$

яку можна переписати у вигляді

$$\{a_\alpha\theta_\alpha, \theta_\beta\} \approx 0. \quad (2.2.25)$$

Оскільки для в'язей Φ_a першого роду очевидно справедлива рівність

$$\{a_\alpha \theta_\alpha, \Phi_a\} \approx 0, \quad (2.2.26)$$

то приходимо до висновку, що $a_\alpha \theta_\alpha$ — в'язь першого роду, що протирічить припущенню, що всі в'язі першого роду вичерпуються Φ_a .

Наслідок 1. Число в'язей 2-го роду — парне, тому що матриця $\{\theta_\alpha, \theta_\beta\}$ — антисиметрична.

Наслідок 2. Ті функції $v(q, p)$ у виразі (2.2.20), які помножують в'язі другого роду, визначені на M . Дійсно, відповідні функції знаходять з системи лінійних рівнянь

$$\dot{\theta}_\alpha|_M = [\{\theta_\alpha, H\} + v_\beta \{\theta_\alpha, \theta_\beta\}]|_M = 0. \quad (2.2.27)$$

В силу умови самоузгодженості ми можемо знайти v_β на M , тому що існує матриця, обернена до $\{\theta_\alpha, \theta_\beta\}$. Таким чином, невизначені функції $v(q, p)$ залишаються в H_T тільки при в'язях 1-го роду. Зазначимо, що функції $v(q, p)$ однозначно визначені тільки на підмножині M , на повному фазовому просторі Γ вони залишаються довільними.

Внаслідок того, що невизначені функції, які відповідають в'язям другого роду, можуть бути визначені, то можна очікувати, що із в'язями другого роду мати справу простіше, ніж із в'язями першого роду. Фактично від них можна позбавитись, вводячи нову дужку Пуассона, а саме дужку Дірака $\{, \}_D$.

Дужка Дірака. Розглянемо фазовий простір з дужкою Пуассона $\{, \}$. Нехай ϵ в'язі першого роду $\Phi_i = 0$ і в'язі другого роду θ_α . Визначимо матрицю

$$\Delta_{\alpha\beta} = \{\theta_\alpha, \theta_\beta\}. \quad (2.2.28)$$

Дужка Дірака визначається виразом

$$\{f, g\}_D = \{f, g\} - \{f, \theta_\alpha\} \Delta_{\alpha\beta}^{-1} \{\theta_\beta, g\}. \quad (2.2.29)$$

Неважко перевірити, що дужка Дірака задовольняє всім п'яти властивостям ДП. Причина, чому вводять дужку Дірака, полягає в тому, що відносно неї в'язі другого роду дорівнюють нулю в *сильному сенсі*, тобто, $\{\theta_\gamma, g\}_D = 0$ для довільної функції g . Зокрема, це означає, що в рівняннях руху в'язі другого роду можна вважати рівними нулю під знаком дужки Дірака.

Визначення. Функція $f(q, p)$ називається *рівною нулю в сильному сенсі*, якщо $f \approx 0$, і, крім того, її ДП $\{f, g\} \approx 0$ для всіх функцій $g \in C(\Gamma)$.

З означення дужки Дірака (2.2.29) випливає, що крім $\theta_\alpha \approx 0$, також її дужка Дірака $\{f, \theta_\alpha\}_D \approx 0$ для будь-якої $f \in C(\Gamma)$ і всіх α . Важливим наслідком цього є той факт, що доданки $v_\alpha \theta_\alpha$ в гамільтоніані можуть бути

не враховані, тому що вони не впливають на часову еволюцію системи. Часова еволюція також задається за допомогою дужки Дірака, дійсно, вона збігається зі стандартним визначенням еволюції

$$\{g, H\}_D = \{g, H\} - \{g, \theta_s\} \Delta_{ss'}^{-1} \{\theta_{s'}, H\} \approx \{g, H\} = \dot{g}, \quad (2.2.30)$$

оскільки $\{\theta_s, H\} \approx 0$ ($\dot{\theta}_s = \{\theta_s, H\} \approx 0$).

Очевидно, що рівняння руху

$$\dot{g} = \{g, H\}_D \quad (2.2.31)$$

означає, що в'язі θ_s автоматично виключаються з H . Все це означає, що θ_s можна вважати рівними нулю в сильному сенсі при використанні дужки Дірака.

Для того, щоб зрозуміти смисл нових дужок Пуассона, розглянемо випадок, коли набір θ_s складається з $\theta_1 = q_1$, $\theta_2 = p_1$. Тоді

$$\Delta_{ss'} = \begin{vmatrix} 0 & \{q_1, p_1\} \\ \{p_1, q_1\} & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_{ss'}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.32)$$

Розпишемо доданок

$$\begin{aligned} \{g, \theta_s\} \Delta_{ss'}^{-1} \{\theta_{s'}, f\} &= (\{g, \theta_1\}, \{g, \theta_2\}) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\theta_1, f\} \\ \{\theta_2, f\} \end{pmatrix} = \\ &= \left(-\frac{\partial g}{\partial p_1}, \frac{\partial g}{\partial q_1} \right) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial p_1} \\ -\frac{\partial f}{\partial q_1} \end{pmatrix} = -\frac{\partial g}{\partial p_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\partial g}{\partial q_1} \frac{\partial f}{\partial p_1}. \end{aligned}$$

Бачимо, що дужка Дірака $\{f, g\}_D$ отримується зі старої дужки Пуассона викресленням з суми n доданків тих, які містять похідні по q_1, p_1 . Таким чином, дужка Пуассона описує систему зі ступенями вільності без q_1, p_1 . У загальному випадку в'язей 2-го роду θ_s ($s = 1, \dots, 2S$) має місце редукція до $2(n - S)$ ступенів вільності, хоча редукція числа ступенів вільності є більш складною процедурою і не зводиться до простого викреслювання деяких q і p . Зручність роботи з дужкою Дірака в тому, що вона автоматично враховує в'язі другого роду, не розв'язуючи їх в явному вигляді.

2.3. Гамільтонові системи з в'язями першого роду

У подальшому розглянемо гамільтонову систему з в'язями тільки першого роду, які задовольняють

$$\{\Phi_a, \Phi_b\} = C_{abc} \Phi_c, \quad \{H, \Phi_a\} = d_{ab} \Phi_b. \quad (2.3.1)$$

C_{abc} і d_{ab} в загальному випадку є функціями q, p . Коли $C_{abc} = \text{const}$, то в'язі задовольняють алгебрі Лі, наприклад, це має місце в калібрувальних теоріях. Водночас у загальній теорії відносності коефіцієнти C_{abc} є функціями координат.

Таким чином, для дії маємо

$$S(p, q, u) = \int (p_i \dot{q}_i - H - u_a \Phi_a) dt. \quad (2.3.2)$$

Зауважимо, що не всі в'язі першого роду, знайдені в процесі встановлення самоузгодженості системи, включаються в повний гамільтоніан $H_T = H + u_a \Phi_a$. А саме, необхідно включити первинні в'язі першого роду та той мінімальний набір вторинних (третинних і т.і.) в'язей першого роду, які разом з першими задовольняють умови узгодженості (2.3.1) [59].

У присутності в'язей другого роду будемо вважати, що всі вони включені в H , і використовувати дужку Дірака замість дужки Пуассона. Тоді рівняння руху теорії

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \{q_i, H + u_a \Phi_a\} \approx \frac{\partial H}{\partial p_i} + u_a \frac{\partial \Phi_a}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H + u_a \Phi_a\} \approx -\frac{\partial H}{\partial q_i} - u_a \frac{\partial \Phi_a}{\partial q_i}, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

$$\Phi_a(p, q) = 0$$

поділяються на ті, які впливають із обмежень (в'язей), і ті, які ми звичай вважаємо генеруючими динаміку в часі. Внаслідок рівнянь (2.3.1) траєкторії, що задовольняють $\Phi_a = 0$, будуть залишатись на многовиді M . Однак, як впливає з (2.3.3), розв'язки рівнянь руху будуть містити довільні функції u_a .

Розглянемо більш уважно цю ситуацію. Нехай на Γ є два гамільтоніани $H_1 = H + u_a \Phi_a$ і $H_2 = H + v_a \Phi_a$. Вони співпадають на M і обидва застосовні для опису системи. Якщо ми починаємо з деякої точки Z на M і простежимо за часовою еволюцією згідно з H_1 на часовому інтервалі Δt , тоді прийдемо до деякої точки Z_1 . Якщо ж еволюція відбувається за допомогою H_2 , тоді прийдемо в загальному випадку до іншої точки Z_2 . Оскільки гамільтоніани рівні на M , то точки Z_1 і Z_2 представляють один і той самий фізичний стан.

Варіюючи одну функцію u_c і зберігаючи інші функції фіксованими, отримуємо одновимірний набір еквівалентних точок. Для заданої точки Z множина всіх точок на M , які описують такий самий фізичний стан, що й Z , називається *калібрувальною орбітою*. Розмірність калібрувальної орбіти дорівнює числу в'язей першого роду.

Для даної калібрувальної орбіти ми можемо перейти від однієї точки до іншої, варіюючи функції u_a , тобто виконуючи калібрувальне перетворення. Знайдемо інфінітезимальне перетворення $\delta Z = Z_2 - Z_1$. Запишемо

його в термінах в'язей, використовуючи рівняння руху $\dot{Z}_A = \{Z_A, H_T\}$,

$$\left. \begin{aligned} Z_{A1} - Z_A &= \left(\frac{dZ_A}{dt} \right)_{H_1} \Delta t = \{Z_A, H + u_a \Phi_a\} \Delta t \\ Z_{A2} - Z_A &= \left(\frac{dZ_A}{dt} \right)_{H_2} \Delta t = \{Z_A, H + v_a \Phi_a\} \Delta t \end{aligned} \right\}, \quad (2.3.4)$$

звідки

$$\delta Z_A = \{Z_A, (v_a - u_a) \Phi_a\} \Delta t. \quad (2.3.5)$$

Внаслідок довільності функцій v_a і u_a та інфінітезимальності Δt найбільш загальною формою калібрувального перетворення буде $\delta Z_A = \{Z_A, \epsilon_a \Phi_a\}$, де ϵ_a — довільні інфінітезимальні функції. Оскільки калібрувальні перетворення визначені тільки для точок на M , останнє можна записати як

$$\delta Z_A = \epsilon_a \{Z_A, \Phi_a\}.$$

Варіація довільної функції на фазовому просторі має такий вигляд:

$$\delta \chi(Z) = \frac{\partial \chi(Z)}{\partial Z_A} \delta Z_A = \frac{\partial \chi(Z)}{\partial Z_A} \epsilon_a \{Z_A, \Phi_a\} = \epsilon_a \{\chi, \Phi_a\}. \quad (2.3.6)$$

Фактично це є визначення зміни $\delta \chi$ довільної функції χ у фіксований час під дією калібрувальних перетворень, породжених в'язями першого роду Φ_a , які є генераторами цих перетворень. Оскільки фізичні стани представляються калібрувальними орбітами, то фізичними спостережуваними є тільки функції q , p , які не залежать від довільних функцій u_a , тобто є постійними на калібрувальній орбіті.

Розглянемо дві сусідні точки на M , Z і $Z + \delta Z$, які пов'язані калібрувальними перетвореннями $\delta Z_A = \epsilon_a \{Z_A, \Phi_a\}$. Фізична спостережувана f повинна задовольняти

$$f(Z) = f(Z + \delta Z), \quad (2.3.7)$$

звідки

$$\frac{\partial f}{\partial Z_A} \delta Z_A = 0 \Rightarrow \epsilon_a \frac{\partial f}{\partial Z_A} \{Z_A, \Phi_a\} = 0 \Rightarrow \epsilon_a \{f, \Phi_a\} = 0. \quad (2.3.8)$$

Необхідною і достатньою умовою того, що f представляє фізичну спостережувану, очевидно є умова

$$\{f, \Phi_a\} \approx 0 \quad (2.3.9)$$

для всіх a , тобто функція f повинна бути функцією 1-го роду.

Часова еволюція довільної функції на фазовому просторі Γ задається рівнянням

$$\dot{f} = \{f, H\} + u_a \{f, \Phi_a\}, \quad (2.3.10)$$

і для спостережуваних (калібрувально інваріантних) величин повинно виконуватись

$$\{f, \Phi_a\} = h_{ab}\Phi_b. \quad (2.3.11)$$

У цьому випадку залежність від довільних функцій u_a зникає на M для фізичних величин. Згідно з рівнянням (2.3.1) гамільтоніан H є величиною 1-го роду, тобто спостережуваною величиною.

У калібрувальній орбіті всі точки представляють один і той самий фізичний стан. Незручно і зайве мати так багато точок у фазовому просторі, які відповідають одному і тому самому фізичному стану, тому виберемо одну точку (одного представника) в кожній калібрувальній орбіті. Цей процес називається фіксацією калібровки. Зазвичай він забезпечується за допомогою накладення додаткової (калібрувальної) умови $\chi_a(p, q) = 0$. Множина точок в M , які задовольняють цю рівність, називається редукованим фазовим простором. Число калібрувальних умов дорівнює числу в'язей 1-го роду.

Іноді буває непросто (а в деяких випадках і неможливо) вибрати калібрувальні умови так, щоб вони відбирали в точності по одному представнику з калібрувальної орбіти (одним із найбільш відомих і важливих прикладів є проблема Грібова в калібрувальних неабелевих теоріях). Часто це можна зробити тільки локально, але не глобально.

Таким чином, для того, щоб отримати редукований фазовий простір Γ^* з початкового фазового простору Γ , необхідно накласти обмеження $\Phi_a = 0$ і $\chi_a = 0$. Тому калібрувальні умови $\chi_a = 0$ можна розглядати як нові в'язі. Зручно вибрати калібрувальні умови так, щоб всі обмеження Φ_a, χ_a , якщо їх розглядати спільно, були другого роду. Для цього достатньо вибрати калібрувальні умови так, щоб матриця $M_{ab} = \{\Phi_a, \chi_b\}$ була неособливою. Очевидно, що розмірність $\Gamma^* \in 2n - 2m$ ($a = 1, \dots, m$).

Для калібрувальних умов χ_a припустимо, що виконуються такі рівняння:

$$\{\chi_a, \chi_b\} = 0, \quad (2.3.12)$$

$$\det |\{\Phi_a, \chi_b\}| \neq 0. \quad (2.3.13)$$

Якщо справедливо (2.3.12), тоді, виконуючи канонічні перетворення на Γ , перейдемо до нових змінних

$$\chi_a(p, q) = p_a, \quad a = 1, \dots, m,$$

тобто нові імпульси тепер $p = (\chi_a, p^*)$. Нехай q_a — спряжені до p_a координати, тоді координати будуть $q = (q_a, q^*)$, де q^*, p^* — інші канонічні змінні. Умова (2.3.13) в цих змінних отримує вигляд

$$\det \left| \frac{\partial \Phi_a}{\partial q_b} \right| \neq 0. \quad (2.3.14)$$

З (2.3.14) випливає, що рівняння $\Phi_a = 0$ можна розв'язати відносно координат q_b . В результаті підпростір Γ^* задається рівняннями

$$\chi_a \equiv p_a = 0, \quad q_a = q_a(q^*, p^*), \quad (2.3.15)$$

де q^*, p^* — незалежні канонічні координати на Γ^* . Гамільтоніаном системи на Γ^* , очевидно, є редукована функція

$$H^*(q^*, p^*) = H(q, p)|_{\Phi=0, \chi=0} = H(q_i^*, p_i^*, q_a(q_i^*, p_i^*)). \quad (2.3.16)$$

Покажемо еквівалентність систем гамільтонових рівнянь на просторі Γ і підпросторі Γ^* . На Γ ми мали рівняння

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + u_a \frac{\partial \Phi_a}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - u_a \frac{\partial \Phi_a}{\partial q_i}, \quad \Phi_a(p, q) = 0. \quad (2.3.17)$$

Розв'язок цих рівнянь, як ми знаємо, містить довільні функції u_a . Додаткові умови $\chi_a(p, q) = 0$ знищують цю довільність, виражаючи u_a через канонічні змінні. В результаті в якості рівнянь руху залишаються тільки рівняння для змінних q^*, p^* , які співпадають з гамільтоновими рівняннями для системи Γ^*

$$\dot{q}^* = \frac{\partial H^*}{\partial p^*}, \quad \dot{p}^* = -\frac{\partial H^*}{\partial q^*}. \quad (2.3.18)$$

Дійсно, розглянемо рівняння (2.3.17) в координатах (2.3.15). Рівняння $\dot{p}_a = 0$ приводять до співвідношень, які дозволяють знайти u^a

$$\frac{\partial H}{\partial q_a} + u_b \frac{\partial \Phi_b}{\partial q_a} = 0. \quad (2.3.19)$$

Розглянемо тепер деякий з імпульсів p^* і порівняємо рівняння для нього, які випливають із (2.3.17), (2.3.16) та з (2.3.18). Маємо

$$(2.3.17) \Rightarrow \dot{p}^* = -\frac{\partial H}{\partial q^*} - u_b \frac{\partial \Phi_b}{\partial q^*},$$

$$(2.3.18) \Rightarrow \dot{p}^* = -\frac{\partial H^*}{\partial q^*} = -\frac{\partial H}{\partial q^*} - \frac{\partial H}{\partial q_a} \frac{\partial q_a}{\partial q^*},$$

де у другому рівнянні ми використали означення редукованого гамільтоніана (2.3.16). Праві частини цих двох рівнянь співпадають, якщо

$$u_a \frac{\partial \Phi_a}{\partial q^*} = \frac{\partial H}{\partial q_a} \frac{\partial q_a}{\partial q^*}. \quad (2.3.20)$$

Згідно з рівнянням (2.3.19) це еквівалентно

$$u_a \left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial q^*} + \frac{\partial \Phi_a}{\partial q_b} \frac{\partial q_b}{\partial q^*} \right) = 0. \quad (2.3.21)$$

Остання рівність виконується тотожно в силу умови в'язі

$$\Phi_a(q, p) = \Phi_a(q_a(q^*, p^*), 0, q^*, p^*) \equiv 0, \quad (2.3.22)$$

похідна від якої по q^* також тотожно дорівнює нулю. Зазначимо, що для однозначного знаходження u_a з (2.3.19) важливо, що

$$\det \left| \frac{\partial \Phi_a}{\partial q_b} \right| \neq 0.$$

Аналогічно можна довести і тотожність на Γ^* рівнянь для q^* .

Зауважимо, що зміна вибору калібрувальних умов зводиться до *канонічного* (!) перетворення у просторі Γ^* і тому не впливає на фізику задачі.

Покажемо тепер, що *стандартна* дужка Пуассона на Γ зводиться до дужки Пуассона на Γ^* для незалежних канонічних змінних q^*, p^* :

$$\{f, g\}|_{\Gamma^*} = \sum_i \left(\frac{\partial f^*}{\partial q_i^*} \frac{\partial g^*}{\partial p_i^*} - \frac{\partial f^*}{\partial p_i^*} \frac{\partial g^*}{\partial q_i^*} \right), \quad (2.3.23)$$

де редуковані функції f^* і g^* є

$$f^* = f(q_a(q^*, p^*), q^*, 0, p^*), \quad g^* = g(q_a(q^*, p^*), q^*, 0, p^*).$$

Для перевірки (2.3.23) обчислимо дужку Пуассона $\{f, g\}$ в неканонічних координатах $\eta = (\Phi_a, q^*, p_a, p^*)$. Тоді

$$\{f, g\} = \sum_{\alpha, \beta} \{\eta_\alpha, \eta_\beta\} \frac{\partial f}{\partial \eta_\alpha} \frac{\partial g}{\partial \eta_\beta}. \quad (2.3.24)$$

Внаслідок умов (2.3.1) і (2.3.12) ряд доданків в правій частині (2.3.24) щезає, і в результаті вона збігається з правою частиною (2.3.23), де

$$f^* = f(\eta)|_{p_a = \Phi_a = 0}, \quad g^* = g(\eta)|_{p_a = \Phi_a = 0}.$$

Таким чином, ми маємо тепер класичний опис систем із в'язями, які мають такі властивості.

1. Задано фазовий простір Γ із дужкою Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$. Координати $Z_A = (q_i, p_i)$ цього простору задовольняють

$$\{Z_A, Z_B\} = \omega_{AB}(Z), \quad \omega_{AB} = -\omega_{BA}, \quad \det \omega \neq 0.$$

2. Система має деяке число в'язей 1-го роду $\Phi_a = 0$. При накладанні в'язей фазовий простір Γ редукується до M . Усі в'язі є в'язями 1-го роду

$$\{\Phi_a, \Phi_b\} = C_{abc} \Phi_c.$$

Кожен фізичний стан представляється m -вимірним підмноговином в M , де m — число в'язей 1-го роду. Такий підмноговид називається калібрувальною орбітою. На калібрувальній орбіті можна переходити від однієї точки до іншої за допомогою *калібрувального перетворення*, яке має такий вигляд:

$$\delta Z_A = \epsilon_a \{Z_A, \Phi_a\}.$$

Накладаючи калібрувальні умови, можна вибрати на кожній калібрувальній орбіті одну точку як представника фізичного стану.

3. Спостережувані величини є функціями 1-го роду на M . Ці функції інваріантні при калібрувальних перетвореннях

$$\delta f = \epsilon_a \{f, \Phi_a\} \approx 0.$$

4. Часова еволюція функцій 1-го роду (які представляють спостережувані) визначається рівнянням

$$\dot{f} = \{f, H\},$$

де H — гамільтоніан, функція 1-го роду.

2.4. Операторне квантування гамільтонових систем з в'язями

Після квантування квантово-механічна система має такі властивості.

1. Є гільбертів простір \mathcal{H} із внутрішнім добутком $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Координати Z_A представляються ермітовими операторами \hat{Z}_A , які задовольняють комутативним співвідношенням $[\hat{Z}_A, \hat{Z}_B] = i\hbar\omega_{AB}(\hat{Z})$.

2. Фізичні стани є векторами $|\psi\rangle$ в \mathcal{H} , які задовольняють умовам

$$\hat{\Phi}_a(\hat{Z})|\psi\rangle = 0,$$

де $\Phi_a(Z)$ — в'язі першого роду. Зауважимо, що в'язі другого роду не можна накладати на вектори в гільбертовому просторі аналогічно в'язям першого роду, бо це призводить до протиріччя. В'язі другого роду змінюють комутатор на новий модифікований комутатор, який відповідає дужці Дірака.

3. Спостережувані представляються ермітовими операторами.

4. Гамільтоніан \hat{H} впливає з гамільтонової функції H заміною координат Z_A на оператори \hat{Z}_A . Часова еволюція фізичних станів визначається (в картині Шредінгера)

$$\hat{H}|\psi, t\rangle = i\hbar \frac{d}{dt}|\psi, t\rangle.$$

В картині Гейзенберга залежність операторів від часу визначається рівнянням

$$i\hbar \frac{d\hat{A}}{dt} = [\hat{A}, H].$$

2.5. Інтеграл за траєкторіями для систем із в'язями

Визначивши вище, як квантуються системи із в'язями в операторному формалізмі, перейдемо тепер до квантування систем із в'язями в методі інтеграла за траєкторіями. Безумовно, найпростіше для квантування таких систем було б використовувати незалежні змінні q^*, p^* у фазовому просторі Γ^* . У цьому випадку амплітуда переходу вакуум-вакуум записується добре нам відомим чином:

$$\langle 0|0\rangle = \int \prod_{j=1}^{2(n-m)} \mathcal{D}q_j^* \mathcal{D}p_j^* \exp \left[i \int_{-\infty}^{\infty} dt (p_i^* \dot{q}_i^* - H^*(p^*, q^*)) \right]. \quad (2.5.1)$$

Однак, як ми аргументували вище, перехід до незалежних змінних q^*, p^* іноді неможливо зробити в явному аналітичному вигляді. Тому нам потрібно з'ясувати, як визначається амплітуда переходу вакуум-вакуум у повному фазовому просторі Γ з координатами q, p в методі інтеграла за траєкторіями. Покажемо, що вона має вигляд

$$\langle 0|0\rangle = \int \prod_i \mathcal{D}q_i \mathcal{D}p_i e^{i \int_{-\infty}^{\infty} dt (p_i \dot{q}_i - H(p, q))} \prod_a \delta(\chi_a) \delta(\Phi_a) \det |\{\chi_a, \Phi_b\}|, \quad (2.5.2)$$

або

$$\begin{aligned} \langle 0|0\rangle = & \int \prod_i \mathcal{D}q_i \mathcal{D}p_i \prod_a \mathcal{D}\lambda_a \exp \left[i \int_{-\infty}^{\infty} dt (p_i \dot{q}_i - \underbrace{H(p, q) - \lambda_a \Phi_a(p, q)}_{H_T}) \right] \times \\ & \times \prod_a \delta(\chi_a) \det |\{\chi_a, \Phi_b\}|. \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Для того, щоб довести еквівалентність цих двох формул, виконаємо канонічне перетворення до змінних $p_a = \chi_a, q_a, p^*, q^*$ у рівнянні (2.5.2). Міра $\prod_i \mathcal{D}q_i \mathcal{D}p_i$ не змінюється при канонічних перетвореннях. Множник

$$\prod_a \delta(\chi_a) \delta(\Phi_a) \det |\{\chi_a, \Phi_b\}| \quad (2.5.4)$$

у цих змінних переписується у вигляді

$$\prod_a \delta(p_a) \delta(\Phi_a(q_a, p_a, q^*, p^*)) \det \left| \frac{\partial \Phi_a(q_a, p_a, q^*, p^*)}{\partial q_b} \right| = \prod_a \delta(p_a) \delta(q_a - q_a(q^*, p^*)),$$

де $q_a(q^*, p^*)$ є розв'язком рівняння $\Phi_a(q_a, 0, q^*, p^*) = 0$. Ми також використали формулу для дельта-функції від деякої функції

$$\prod_a \delta(\Phi_a(q_a, 0, q^*, p^*)) = \frac{\prod_a \delta(q_a - q_a(q^*, p^*))}{\left| \det \left| \frac{\partial \Phi_a(q_a, 0, q^*, p^*)}{\partial q_b} \right|_{q_a=q_a(q^*, p^*)} \right|}. \quad (2.5.5)$$

Після інтегрування по (p_a, q_a) формула (2.5.2) за допомогою дельта-функцій зводиться до (2.5.1), що і треба було довести.

За наявності в'язей другого роду, θ_α , множник (2.5.4) узагальнюється таким чином:

$$\prod_a \delta(\chi_a) \delta(\Phi_a) \det |\{\chi_a, \Phi_b\}| \prod_\alpha \delta(\theta_\alpha) \left| \det |\{\theta_\alpha, \theta_\beta\}| \right|^{1/2}. \quad (2.5.6)$$

Доведення цього факту досить просте і може бути знайдено в роботі [175]. Звичайно, в'язі другого роду не потребують накладення калібрувальних умов.

2.6. Приклади фізичних систем із в'язями

Для того щоб зрозуміти як застосовується загальна теорія квантування систем із в'язями викладена вище, розглянемо у цьому параграфі кілька конкретних прикладів і почнемо з випадку квантування вільної релятивістської частинки.

Вільна релятивістська частинка. Найпростіша система, яка приводить до гамільтонової системи з в'язями, — це вільна релятивістська частинка. Як добре відомо з теорії відносності, дія такої частинки пропорційна довжині світової лінії

$$S = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{\dot{x}_\mu^2}, \quad \dot{x}_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}, \quad (2.6.1)$$

де τ — параметр власного часу.

Дія інваріантна відносно локальних перетворень τ (дифеоморфізмів): $\tau = f(\tau')$, де f — довільна диференційовна функція ($\tau_1 = f(\tau'_1)$, $\tau_2 = f(\tau'_2)$). Зокрема, якщо вибрати калібровку $\tau = x_0$, тоді

$$S = -m \int_{x_{01}}^{x_{02}} dx_0 \sqrt{1 - \mathbf{v}^2}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dx_0}. \quad (2.6.2)$$

Рівняння Ейлера—Лагранжа дають

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x_\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} = -\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\mu \partial \dot{x}_\nu} \ddot{x}_\nu. \quad (2.6.3)$$

Матриця других похідних по швидкостях

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\mu \partial \dot{x}_\nu} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\nu} \left(-m \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}} \right) = -\frac{m}{\sqrt{\dot{x}^2}} \left(g_{\mu\nu} - \frac{\dot{x}_\mu \dot{x}_\nu}{\dot{x}^2} \right). \quad (2.6.4)$$

Неважко переконатись, що \dot{x}_ν є власним вектором цієї матриці

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\mu \partial \dot{x}_\nu} \dot{x}_\nu = 0 \quad (2.6.5)$$

з власним значенням нуль. Таким чином, гесіан

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\mu \partial \dot{x}_\nu} = 0. \quad (2.6.6)$$

Інших власних векторів з нульовими власними значеннями немає, тому ранг матриці $\partial^2 L / \partial \dot{x}_\mu \partial \dot{x}_\nu$ дорівнює 3. Таким чином, тільки 3 із 4 рівнянь Ейлера—Лагранжа лінійно незалежні. При переході до гамільтонової системи виникає одна в'язь. Дійсно, знаходимо імпульс

$$p^\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} = -m \frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}} \quad (2.6.7)$$

і переконуємося, що маємо в'язь $p_\mu p^\mu = m^2$.

Гамільтоніан тотожно дорівнює нулю:

$$H = p^\mu \dot{x}_\mu - L = \dot{x}_\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} - L = 0. \quad (2.6.8)$$

Це, очевидно, є наслідок однорідності лагранжіана L по \dot{x}_μ . Гамільтоніаном буде $H_T = u(p_\mu p^\mu - m^2)$, тобто лінійна комбінація в'язей (яка, очевидно, в цьому випадку є в'яззю першого роду).

Гамільтонові рівняння руху є такими:

$$\dot{g} = \{g, H_T\}.$$

Дужки Пуассона визначаються рівняннями

$$\{x_\mu, p^\nu\} = \delta_\mu^\nu, \quad \{x_\mu, x_\nu\} = \{p_\mu, p_\nu\} = 0, \quad (2.6.9)$$

а канонічні рівняння Гамільтона мають вигляд

$$\begin{aligned} \dot{p}_\mu &= \{p_\mu, H_T\} = \{p_\mu, u(p^2 - m^2)\} \approx 0, \\ \dot{x}_\mu &= \{x_\mu, H_T\} = \{x_\mu, u(p^2 - m^2)\} \approx 2up_\mu. \end{aligned}$$

Фізичними спостережуваними будуть функції $f(x_\mu, p_\mu)$, які задовольняють умові

$$\{f, p^2 - m^2\} \Big|_{p^2=m^2} \approx 0,$$

тобто для них повинно виконуватись

$$\frac{\partial f}{\partial x_\mu} \{x_\mu, p^2 - m^2\} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial p_\mu} \{p_\mu, p^2 - m^2\}}_{=0} = 2p_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\mu} = v(p^2 - m^2). \quad (2.6.10)$$

При квантуванні за Діраком в'язь 1-го роду накладається на стани в гільбертовому просторі

$$(p^2 - m^2)|\psi\rangle = 0. \quad (2.6.11)$$

Зокрема, в координатному представленні, де $p_\mu = -i\partial_\mu$, фізичні стани задовольняють рівнянню Клейна—Гордона—Фока

$$(\square + m^2)|\psi\rangle = 0.$$

Вільна релятивістська струна. Інший добре відомий приклад системи з в'язями є вільна релятивістська струна. Дія релятивістської струни (дія Намбу—Гото) має вигляд

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^\pi d\sigma \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}, \quad \dot{x}_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}, \quad x'_\mu = \frac{dx_\mu}{d\sigma}, \quad (2.6.12)$$

де α' — параметр, який має розмірність, обернену до квадрату маси (в системі одиниць $\hbar = c = 1$), σ — просторова координата вздовж струни, τ — параметр власного часу. Дія має чисто геометричний сенс: вона пропорційна площі, яку замітає струна при еволюції в просторі-часі.

Неважко показати, що гесіан $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\mu \partial \dot{x}_\nu}$ має ранг 2, а дві первинні в'язі мають вигляд

$$\Phi_1 = \mathcal{P}_\mu x'^\mu = 0, \quad \Phi_2 = \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}^\mu + \frac{(x')^2}{(2\pi\alpha')^2} = 0, \quad (2.6.13)$$

де

$$\mathcal{P}_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\mu} = -\frac{(\dot{x}x')x'_\mu - \dot{x}_\mu x'^2}{\sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}} \cdot \frac{1}{2\pi\alpha'}, \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}. \quad (2.6.14)$$

Очевидно, що $\mathcal{H} = \mathcal{P}_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L} = 0$, і як густину гамільтоніана ми повинні взяти $\mathcal{H} = \lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2$.

Дужка Пуассона двох функціоналів f і g від координат $x(\tau, \sigma)$ та імпульсів $\mathcal{P}(\tau, \sigma)$ визначається таким чином:

$$\{f, g\} = \int d\sigma' \left\{ \frac{\delta f(x(\tau, \sigma), \mathcal{P}(\tau, \sigma))}{\delta x_\mu(\tau, \sigma')} \frac{\delta g(x(\tau, \sigma), \mathcal{P}(\tau, \sigma))}{\delta \mathcal{P}^\mu(\tau, \sigma')} - \frac{\delta f(x(\tau, \sigma), \mathcal{P}(\tau, \sigma))}{\delta \mathcal{P}^\mu(\tau, \sigma')} \frac{\delta g(x(\tau, \sigma), \mathcal{P}(\tau, \sigma))}{\delta x_\mu(\tau, \sigma')} \right\}. \quad (2.6.15)$$

Для елементарних дужок Пуассона отримуємо

$$\{x_\mu(\tau, \sigma), \mathcal{P}^\nu(\tau, \sigma')\} = \delta_\mu^\nu \delta(\sigma - \sigma'). \quad (2.6.16)$$

Можна показати, що вторинних в'язей немає, а в'язі Φ_1, Φ_2 задовольняють $\{\Phi_1, \Phi_2\} = 0$, тобто є в'язями першого роду.

ЗАДАЧІ

1. Обчислити дужку Пуассона (ДП) у неканонічних координатах $\eta_\alpha = (\phi_a, q_i^*, p_a, p_i^*)$, де ϕ_a — в'язі 1-го роду, p_a — імпульси, спряжені до ϕ_a ,

$$\{f, g\} = \sum_{\alpha, \beta} \{\eta_\alpha, \eta_\beta\} \frac{\partial f}{\partial \eta_\alpha} \frac{\partial g}{\partial \eta_\beta}.$$

Показати, що на підмноговиді Γ^* , що визначається умовами $\phi_a = 0$, $p_a = 0$, ДП зводиться до

$$\{f, g\}_{\Gamma^*} = \sum_i \left(\frac{\partial f^*}{\partial q_i^*} \frac{\partial g^*}{\partial p_i^*} - \frac{\partial f^*}{\partial p_i^*} \frac{\partial g^*}{\partial q_i^*} \right),$$

де незалежними змінними є q_i^* , p_i^* і

$$f^* = f(q_a(q_i^*, p_i^*), q_i^*, 0, p_i^*), \quad g^* = g(q_a(q_i^*, p_i^*), q_i^*, 0, p_i^*), \quad (2.6.17)$$

а функції $q_a(q_i^*, p_i^*)$ визначаються, розв'язуючи в'язі

$$\phi_a(q_a, p_a = 0, q_i^*, p_i^*) = 0.$$

2. Нехай задано лагранжیان

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x} - y)^2.$$

Обчислити гесіан, знайти первинні в'язі та визначити вид калібрувального перетворення, що залишає лагранжیان інваріантним.

Знайти розв'язки лагранжевих рівнянь руху з початковими умовами

$$x(0) = \alpha, \quad y(0) = \beta, \quad \dot{x}(0) = \beta, \quad \dot{y}(0) = \gamma$$

і показати, що в розв'язку є функціональна довільність (тобто у розв'язок входить довільна функція).

3. Нехай задано лагранжیان

$$L = -\frac{1}{2}q^2 + q\dot{x} + \dot{q}\dot{y}.$$

Обчислити ранг гесіана, знайти в'язі та гамільтоніан і визначити вид калібрувального перетворення, що залишає лагранжیان інваріантним.

4. Для лагранжіана

$$L = \sum_{i < k}^n \frac{m_i m_k}{2M} (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_k)^2 - V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|), \quad M = \sum_i^n m_i$$

показати, що матриця Гессе є сингулярною, знайти рівняння руху і локальні перетворення, які залишають інваріантними лагранжیان і рівняння руху. Визначити імпульси і знайти первинні в'язі.

5. Розглянути лагранжیان

$$L = \frac{\dot{q}^2}{2mt} - \frac{m\omega^2}{2}tq^2,$$

де змінні $q(\tau)$ і $t(\tau)$ є функціями τ , і показати інваріантність дії $S = \int d\tau L(q(\tau), \dot{q}(\tau))$ відносно калібрувальних перетворень з довільною функцією $\lambda(\tau)$

$$q(\tau) \rightarrow q'(\tau) = q(\lambda(\tau)), \quad t(\tau) \rightarrow t'(\tau) = t(\lambda(\tau)).$$

Знайти гамільтоніан і в'язі цієї системи.

6. Показати, що дужка Дірака (2.2.29) задовольняє тотожність Якобі

$$\{f, \{g, h\}_D\}_D + \{g, \{h, f\}_D\}_D + \{h, \{f, g\}_D\}_D = 0.$$

7. Розглянемо рух вільної частинки на поверхні Σ^{N-1} в N -вимірному просторі заданою рівнянням $f(x) = 0$, де $f(x)$ є гладкою функцією декартових координат x_i , $i = 1, 2, \dots, N$ в R^N з вектором нормалі $\mathbf{n}(x) = \nabla f(x)$, $\mathbf{n}^2 = 1$. Система описується вільним гамільтоніаном $H = \mathbf{p}^2/2m$ з в'язями

$$\chi_1(x, p) \equiv f(x) = 0, \quad \chi_2(x, p) \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = 0.$$

Порахувати дужки Дірака $\{x_i, x_j\}_D$, $\{x_i, p_j\}_D$, $\{p_i, p_j\}_D$ і знайти рівняння руху. Показати, що

$$\mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = 0, \quad \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0,$$

тобто рух частинки відбувається в дотичній площині і частинка не відчуває сили в дотичній площині.

8. Розглянути попередню задачу руху частинки з масою $m = 1$ по поверхні сфери $q_i^2 = 1$ в n -вимірному просторі в лагранжевому формалізмі. Обмеження руху по поверхні сфери в n -вимірному просторі зручно враховувати за допомогою множника Лагранжа, тобто маємо лагранжیان

$$L = \frac{1}{2} (\dot{q}_i^2 - F(q_i^2 - 1)),$$

де по індексу i відбувається підсумовування. Показати, що матриця $\partial^2 L / \partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_b$ сингулярна ($q_a = (q_i, F)$, $a = 1, 2, \dots, n + 1$).

Очевидно, первинна в'язь $\phi^1 = p_F = \partial L / \partial \dot{F} \approx 0$ і первинний гамільтоніан

$$H = p_i \dot{q}_i + p_F \dot{F} - L + \lambda p_F.$$

Знайти з умови збереження в'язей у часі додаткові в'язі ϕ^2, ϕ^3, ϕ^4 та множник Лагранжа λ . Знайти матрицю дужок Пуассона $C^{AB} = \{\phi^A, \phi^B\}$ і обернену до неї матрицю, побудувати дужку Дірака и обчислити її для всіх канонічних змінних q_i, F, p_i, p_F .

9. Розглянути дію вільної релятивістської частинки у вигляді

$$S = -\frac{1}{2} \int d\tau \sqrt{g} (g^{-1} \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + m^2).$$

Встановити вид локальних перетворень змінних $(\tau, g(\tau) \rightarrow \tau', \tilde{g}(\tau'))$, які зберігають форму дії. Використовуючи рівняння Ейлера—Лагранжа для g , показати, що дія еквівалентна іншій відомій дії для релятивістської частинки

$$S = -m \int d\tau \sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}.$$

Визначити канонічні імпульси до змінних x^μ, g і зробити перехід до гамільтонового формалізму. З умови збереження в'язей у часі знайти всі нетривіальні в'язі (їх всього повинно бути дві ϕ^1, ϕ^2). Використовуючи дужки Пуассона для канонічних змінних,

$$\{x^\mu, p_\nu\} = \delta^\mu_\nu, \quad \{g, p_g\} = 1$$

(всі інші дорівнюють нулю), встановити належність в'язей до першого чи другого роду.

Розглянути умови фіксації калібровки

$$\chi^1 = g - \frac{1}{m^2} \approx 0, \quad \chi^2 = \tau - x^0 \approx 0$$

і порахувати матрицю 4×4 з дужок Пуассона $C^{AB} = \{\phi^A, \phi^B\}$, де $\phi^A = (\phi^1, \phi^2, \chi^1, \chi^2)$. Побудувати дужку Дірака і обчислити її для всіх змінних x^μ, g, p_ν, p_g між собою.

10. Розглянути лагранжіан першого порядку по похідним

$$L(q_a, \dot{q}_a) = \dot{q}_a K^a(q_a) - V(q_a), \quad a = 1, 2, \dots, 2N,$$

де функція координат $K^a(q_a)$ така, що матриця $\Delta^{ab} = -\Delta^{ba} = \partial^a K^b - \partial^b K^a$ має детермінант, відмінний від нуля, $\det \Delta \neq 0$. Очевидно, що гесіан

$$M^{ab} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_b} = 0.$$

Показати, що лагранжеві рівняння можна представити у формі

$$\dot{q}_a = (\Delta^{-1})_{ab} \partial^b V(q_a).$$

Зробити перехід до гамільтонового формалізму: знайти гамільтоніан H_0 і первинні в'язі ϕ^a . Показати, що матриця з дужок Пуассона в'язей

$$\{\phi^a, \phi^b\} = \Delta^{ab},$$

тобто первинні в'язі належать до в'язей другого роду.

Використовуючи гамільтоніан, визначений за Діраком

$$H = H_0 + u_a \phi_a,$$

де $u_a(q_a, p_a, t)$ довільні функції координат, імпульсів і часу, визначити ці функції з умови збереження в'язей у часі, $\dot{\phi}_a = \{\phi_a, H\} \approx 0$. Побудувати дужку Дірака і показати, що гамільтонові рівняння

$$\dot{q}_a = \{q_a, H\}_D$$

співпадають з лагранжевими рівняннями руху.

11. Показати, що дія вільної релятивістської струни може бути записана у вигляді

$$S = -T \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^\pi d\sigma \sqrt{-G}, \quad \left(\text{натяг струни } T = \frac{1}{2\pi\alpha'} \right)$$

де $G = \det G_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu$, і похідні $\partial_1 \equiv \partial_\tau$, $\partial_2 \equiv \partial_\sigma$, $X^\mu = X^\mu(\tau, \sigma)$.

12. Показати, що для вільної релятивістської струни первинними в'язями є

$$\phi_1 = \mathcal{P}_\mu X'^\mu = 0, \quad \phi_2 = \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}^\mu + \frac{X'_\mu X'^\mu}{(2\pi\alpha')^2} = 0$$

і що вторинні в'язі відсутні.

Обчислити дужку Пуассона в'язей $\{\phi_1, \phi_2\}$, використовуючи елементарну дужку Пуассона

$$\{X_\mu(\tau, \sigma), \mathcal{P}^\nu(\tau, \sigma')\} = \delta_\mu^\nu \delta(\sigma - \sigma').$$

13. Розглянути дію

$$S = -\frac{T}{2} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu$$

для струни $X^\mu(\tau, \sigma)$ на світовій поверхні (τ, σ) з метричним тензором $h_{\alpha\beta}$ ($h^{\alpha\beta}$ — метричний тензор, обернений до матриці $h_{\alpha\beta}$), $h = \det h_{\alpha\beta}$.

Використовуючи польові рівняння для змінної $h^{\alpha\beta}$

$$\frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}} = 0 \Rightarrow \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\alpha'\beta'} \partial_{\alpha'} X^\mu \partial_{\beta'} X_\mu = 0$$

та визначаючи тензор $G_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu$, показати, що дія еквівалентна (на класичному рівні) дії струни Намбу–Гото

$$S = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det G_{\alpha\beta}}.$$

Примітка. При виведенні польових рівнянь використовувати варіацію

$$\frac{\delta \det h_{\alpha\beta}}{\delta h^{\alpha\beta}} = -h \cdot h_{\alpha\beta},$$

яку необхідно довести.

3

КВАНТУВАННЯ ВІЛЬНОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

Квантова електродинаміка (КЕД) є прототипом інших квантових теорій поля і описує найпоширеніші і найважливіші фізичні явища [1, 45, 171]. Історично електромагнітне поле було вперше проквантоване Діраком (1927), який описав вільне електромагнітне поле як набір квантових осциляторів та ввів поняття операторів народження і знищення фотонів. Тому ми розпочнемо наше вивчення квантових полів саме з квантування в гамільтоновому підході вільного електромагнітного поля як найпростішої калібрувальної теорії.

Лагранжева густина вільного електромагнітного поля має вигляд

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (3.1)$$

де A_μ є вектор-потенціалом. Система має нескінченне число ступенів вільності $A_\mu(\mathbf{x}, t)$, які визначаються μ і \mathbf{x} . Канонічне квантування постулює комутаційні співвідношення між динамічними змінними теорії та відповідними імпульсами. Тому перший крок, який потрібно нам зробити при квантуванні електромагнітного поля, це визначити які імпульси відповідають динамічним змінним $A_\mu(\mathbf{x}, t)$ в електродинаміці. Виявляється, що при цьому ми стикаємося з проблемою, яка полягає в тому, що квантова електродинаміка не є регулярною системою з точки зору гамільтонового формалізму і тому потребує при її квантуванні використання поняття в'язей.

3.1. Квантова електродинаміка як гамільтонова система з в'язями

Щоб показати, що квантова електродинаміка не є регулярною системою обчислимо матрицю Гессе $M^{\mu\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$:

$$M^{\mu\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta^2 L}{\delta \dot{A}_\mu(\mathbf{x}) \delta \dot{A}_\nu(\mathbf{y})}. \quad (3.1.1)$$

Для її обчислення нам необхідні тільки доданки в L , квадратичні по \dot{A}_μ

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \\ &= -\frac{1}{2}\partial_0 A_i(\partial^0 A^i - \partial^i A^0) + \dots = \frac{1}{2}\partial_0 A_i \partial_0 A_i + \dots\end{aligned}\quad (3.1.2)$$

Зазначимо, що доданок з $\partial_0 A_0 \partial_0 A_0$ відсутній, що приводить до появи в'язей у квантовій електродинаміці. Таким чином,

$$M^{\mu\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).\quad (3.1.3)$$

Для цієї матриці очевидно $\det M = 0$, і ми маємо справу з сингулярною системою. Фактично це є наслідком калібрувальної інваріантності системи відносно перетворень $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$. Дійсно, згідно з рівняннями Ейлера—Лагранжа,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = 0 \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0.\quad (3.1.4)$$

Як наслідок антисиметрії тензора $F^{\mu\nu}$ маємо тотожність $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$, тобто не всі рівняння Ейлера—Лагранжа є незалежними. Узагальнений імпульс електромагнітного поля дорівнює

$$\Pi^\mu(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{A}_\mu(x)} = F^{\mu 0},$$

і внаслідок антисиметрії $F^{\mu\nu}$ компонента $F^{00} = 0$, а отже маємо первинну в'язь (primary constraint)

$$\Phi_1(x) = \Pi^0(x) = 0.\quad (3.1.5)$$

Фактично тут є не одна в'язь, а нескінченне число їх, які позначаються неперервним індексом \mathbf{x} .

Визначимо дужку Пуассона

$$\{f, g\} = \int d^3x \left(\frac{\delta f}{\delta A_\mu(x)} \frac{\delta g}{\delta \Pi^\mu(x)} - \frac{\delta g}{\delta A_\mu(x)} \frac{\delta f}{\delta \Pi^\mu(x)} \right).\quad (3.1.6)$$

Легко пересвідчитись, що канонічні змінні задовольняють одночасовим канонічним співвідношенням

$$\begin{aligned}\{A_\mu(\mathbf{x}, t), A_\nu(\mathbf{y}, t)\} &= \{\Pi_\mu(\mathbf{x}, t), \Pi_\nu(\mathbf{y}, t)\} = 0, \\ \{A_\mu(\mathbf{x}, t), \Pi^\nu(\mathbf{y}, t)\} &= \delta_\mu^\nu \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).\end{aligned}\quad (3.1.7)$$

Останнє співвідношення випливає з

$$\begin{aligned} \{A_\mu(\mathbf{x}, t), \Pi^\nu(\mathbf{y}, t)\} &= \int d^3z \left(\frac{\delta A_\mu(\mathbf{x}, t)}{\delta A_\rho(\mathbf{z}, t)} \frac{\delta \Pi^\nu(\mathbf{y}, t)}{\delta \Pi^\rho(\mathbf{z}, t)} - \frac{\delta \Pi^\nu(\mathbf{y}, t)}{\delta A_\rho(\mathbf{z}, t)} \frac{\delta A_\mu(\mathbf{x}, t)}{\delta \Pi^\rho(\mathbf{z}, t)} \right) = \\ &= \int d^3z \delta_\mu^\rho \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \delta_\rho^\nu \delta(\mathbf{y} - \mathbf{z}) = \delta_\mu^\nu \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Для густини лагранжіана маємо

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \Pi_i \Pi^i - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} = \frac{1}{2} \Pi_i^2 - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij},$$

де ми використали $F_{i0} = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i = \Pi_i$. Знайдемо гамільтоніан

$$H = \int d^3x [\Pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}] = \int d^3x [\Pi^i \partial_0 A_i - \mathcal{L}]. \quad (3.1.8)$$

Виключаючи похідні за часом $\partial_0 A_i = \partial_i A_0 - \Pi_i$, отримуємо

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \Pi_i^2 + \frac{1}{4} F_{ij}^2 + A_0 \partial_i \Pi_i \right]. \quad (3.1.9)$$

Найбільш загальний гамільтоніан визначається додаванням первинної в'язі до H :

$$H \Rightarrow \bar{H} = H + \int d^3x \Pi^0(\mathbf{x}, t) u(A_\mu(\mathbf{x}, t), \Pi^\nu(\mathbf{x}, t)), \quad (3.1.10)$$

де u — довільна функція від A_μ , Π^ν , яка є фактично множником Лагранжа. Нагадаємо, що навіть коли в'язі можна розв'язати в явному вигляді і працювати з меншою кількістю змінних, дуже часто значно зручніше не розв'язувати в'язі явно, а ввести множники Лагранжа.

Вимога збереження в'язі під час еволюції приводить до вторинних в'язей

$$\begin{aligned} \Phi_1 = \{\Phi_1, \bar{H}\} &= \{\Pi^0(x), H\} + \int d^3y u(y) \{\Pi^0(x), \Pi^0(y)\} = \\ &= \left\{ \Pi^0(x), \int d^3y \left[\frac{1}{2} \Pi_i^2(y) + \frac{1}{4} F_{ij}^2 + A_0 \partial_i \Pi_i \right] \right\} = \\ &= \int d^3y \{\Pi^0(x), A_0(y)\} \partial_i \Pi_i(y) = -\partial_i \Pi_i(x). \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Відповідно до загальної теорії вимагаємо

$$\Phi_2(x) = \partial_i \Pi_i(x) \approx 0, \quad (3.1.12)$$

де знак \approx означає, що $\partial_i \Pi_i(x)$ дорівнює нулю не тотожно, а тільки на поверхні первинної в'язі $\Phi_1 = 0$, тобто дорівнює нулю у слабкому сенсі. Співвідношення (3.1.12) є вторинною в'яззю. Знову додаючи довільну лінійну комбінацію цих в'язей до \bar{H} , отримуємо ще більш загальний гамільтоніан

$$H_T = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \Pi_i^2 + \frac{1}{4} F_{ij}^2 + A_0 \partial_i \Pi_i + u(x) \Pi^0(x) + v(x) \partial_i \Pi_i \right]. \quad (3.1.13)$$

Вимагаємо, щоб в'язь $\Phi_2(x)$ також зберігалась у часі,

$$\dot{\Phi}_2(x) = \{\partial_i \Pi_i(x), H_T\} \approx 0,$$

де знак \approx тепер означає рівність нулю на поверхні вже двох в'язей. Обчислюємо

$$\begin{aligned} \{\partial_i \Pi_i(x), H_T\} &= \int d^3 y \left\{ \partial_i \Pi_i(x), \frac{1}{4} F_{ij}^2(y) \right\} = \int d^3 y \{ \partial_k \Pi_k(x), \partial_i A_j(y) \} F_{ij}(y) = \\ &= \int d^3 y \partial_k^x \partial_i^y \{ \Pi_k(x), A_j(y) \} F_{ij}(y) = \int d^3 y \partial_j^x \partial_i^y \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) F_{ij}(y) = \\ &= -\partial_i \partial_j F_{ij}(x) = 0. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Остання рівність випливає з симетрії $\partial_i \partial_j$ і антисиметрії F_{ij} за індексами i, j . Процес виявлення нових в'язей таким чином обривається. Отже, маємо:

1. Первинні і вторинні в'язі

$$\Phi_1(x) = \Pi^0(x), \quad \Phi_2(x) = \partial_i \Pi_i(x). \quad (3.1.15)$$

2. Φ_1 і Φ_2 є в'язями 1-го роду. За визначенням в'язями 1-го роду є в'язі, чий дужки Пуассона з іншими в'язями дорівнюють нулю на поверхні всіх в'язей. Дійсно, легко перевірити, що

$$\{\Phi_1(x), \Phi_1(y)\} = \{\Phi_1(x), \Phi_2(y)\} = \{\Phi_2(x), \Phi_2(y)\} = 0. \quad (3.1.16)$$

3. Найбільш загальний гамільтоніан на многовиді Γ має таким чином вигляд

$$H_T = \int d^3 x \left[\frac{1}{2} \Pi_i^2 + \frac{1}{4} F_{ij}^2 + u \Pi^0 + (v + A^0) \partial_i \Pi_i \right]. \quad (3.1.17)$$

Початковий фазовий простір був 8-вимірним (не враховуючи залежність від \mathbf{x}) з канонічними змінними A_0, A_1, A_2, A_3 та $\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$. Дві в'язі Φ_1, Φ_2 визначають 6-вимірний многовид у цьому фазовому просторі. Оскільки обидві в'язі є 1-го роду, нам необхідні дві калібрувальні умови χ_1, χ_2 . В результаті редукований фазовий простір буде 4-вимірним. Фізично це відповідає двом поперечним фотонам та їх імпульсам.

Гамільтоніан H_T містить довільні функції u і v (A^0 може бути поглинена в v внаслідок довільності v). Розглянемо їх роль у рівняннях руху, маємо

$$\dot{A}_0 = \{A_0, H_T\} = \int d^3 y \{A_0(x), u \Pi^0(y)\} = u(x),$$

тобто функція A_0 в момент часу $t_0 + \Delta t$ є повністю довільною внаслідок довільності функції u , а доданок $\int d^3 x u(x) \Pi^0(x)$ змінює A_0 , не змінюючи A_i , що еквівалентно калібрувальному перетворенню $A_0 \rightarrow A_0 + \partial_0 \Lambda$,

де $\Lambda(\mathbf{x}, t_0) = 0$, але $\partial_t \Lambda(\mathbf{x}, t) \neq 0$. Таким чином, присутність в'язей є загальною властивістю калібрувальних теорій і має місце також у квантовій хромодинаміці та теорії слабких взаємодій, які є неабелевими калібрувальними теоріями.

Аналогічно доданок $\int d^3x v(x) \partial_i \Pi_i$ дає

$$\dot{A}_i = \{A_i, H_T\} = \int d^3y \{A_i(x), \partial_j \Pi_j(y)\} v(y) = - \int d^3y \partial_i^y \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) v(y) = \partial_i v(x),$$

тобто A_i теж містить довільну функцію у розв'язку рівняння еволюції. Можна показати, що $F_{\mu\nu}$ є величиною 1-го роду, тобто не залежить від довільних функцій u і v на M , що узгоджується з тим, що $F_{\mu\nu}$ є калібрувально інваріантною величиною.

Ми будемо використовувати такі калібрувальні умови: $\chi_1 = A_0 \approx 0$ — часова калібровка, $\chi_2 = \partial_i A_i \approx 0$ — кулонівська калібровка.

Обчислимо дужки Пуассона між в'язями і калібрувальними умовами

$$\{\chi_1(x), \Phi_1(y)\} = \{A_0(\mathbf{x}), \Pi^0(\mathbf{y})\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$\{\chi_2(x), \Phi_2(y)\} = \{\partial_i A_i(\mathbf{x}), \partial_j \Pi_j(\mathbf{y})\} = -\partial_i^x \partial_j^y \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \Delta_x \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$\{\chi_1(x), \Phi_2(y)\} = \{\chi_2(x), \Phi_1(y)\} = 0,$$

які представимо у вигляді матриці

$$\{\chi_\alpha(x), \Phi_\beta(y)\} = \begin{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 \\ 0 & \Delta_x \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{pmatrix}. \quad (3.1.18)$$

Калібрувальні умови χ і в'язі Φ можна розглядати разом як в'язі 2-го роду. Введемо позначення

$$\theta_s = (\chi_1, \chi_2, \Phi_1, \Phi_2), \quad s = 1, 2, 3, 4.$$

Тоді матриця ДП усіх θ_s приймає вигляд

$$\begin{aligned} \Delta_{ss'}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \{\theta_s(x), \theta_{s'}(y)\} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta_x \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta_x \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta_x \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta_x & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

Згідно із загальною ідеологією квантування систем з в'язями 2-го роду, необхідно перейти до дужки Дірака, яка автоматично виконує квантування тільки на редукованому фазовому просторі Γ^* і усуває будь-яку довільність у гамільтоніані. Знайдемо обернену матрицю Δ^{-1} , яка визначається рівнянням

$$\int d^3z \Delta_{st}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \Delta_{ts'}^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_{ss'} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Величина $\Delta_{ss'}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ має вигляд

$$\Delta_{ss'}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D} \\ -\mathcal{D} & 0 \end{pmatrix}, \text{ де } \mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta_x \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Очевидно, що Δ^{-1} дорівнює

$$(\Delta^{-1})_{ss'}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{D}^{-1} \\ \mathcal{D}^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажемо, що \mathcal{D}^{-1} визначається рівнянням

$$\mathcal{D}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \end{pmatrix}. \quad (3.1.20)$$

Для цього необхідно тільки мати на увазі співвідношення

$$\Delta_x \left(\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.1.21)$$

яке є не що інше, як окремий випадок рівняння Пуассона $\Delta V = \rho$ і виражає той факт, що потенціал $\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$ відповідає заряду $+1$, розташованому в точці \mathbf{y} . Тоді перевіряємо, що

$$\int d^3z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta_x \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \begin{pmatrix} \delta(\mathbf{z} - \mathbf{y}) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4\pi|\mathbf{z} - \mathbf{y}|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.1.22)$$

де ми використали

$$-\int d^3z (\Delta_x \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z})) \frac{1}{4\pi|\mathbf{z} - \mathbf{y}|} = -\Delta_x \left(\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Таким чином, Δ^{-1} дорівнює

$$\Delta_{ss'}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \\ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1.23)$$

Побудуємо тепер дужку Дірака

$$\begin{aligned} \{f, g\}_D &= \{f, g\} - \int d^3u d^3v \{f, \theta_s(u)\} (\Delta^{-1})_{ss'}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \{\theta_{s'}(v), g\} = \\ &= \{f, g\} - \int d^3u d^3v (\{f, \chi_1\}, \{f, \chi_2\}, \{f, \Phi_1\}, \{f, \Phi_2\}) \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta(\mathbf{u} - \mathbf{v}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4\pi|\mathbf{u} - \mathbf{v}|} \\ \delta(\mathbf{u} - \mathbf{v}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4\pi|\mathbf{u} - \mathbf{v}|} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\chi_1(v), g\} \\ \{\chi_2(v), g\} \\ \{\Phi_1(v), g\} \\ \{\Phi_2(v), g\} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \{f, g\}_D &= \{f, g\} - \int d^3u d^3v (\{f, \chi_1(u)\}, \{f, \chi_2(u)\}, \{f, \Phi_1(u)\}, \{f, \Phi_2(u)\}) \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} -\delta(\mathbf{u} - \mathbf{v})\{\Phi_1(v), g\} \\ \frac{1}{4\pi|\mathbf{u} - \mathbf{v}|}\{\Phi_2(v), g\} \\ \delta(\mathbf{u} - \mathbf{v})\{\chi_1(v), g\} \\ -\frac{1}{4\pi|\mathbf{u} - \mathbf{v}|}\{\chi_2(v), g\} \end{pmatrix} = \{f, g\} - \int d^3u d^3v \times \\ &\quad \times \left(-\{f, \chi_1(u)\}\delta(\mathbf{u} - \mathbf{v})\{\Phi_1(v), g\} + \{f, \chi_2(u)\}\frac{1}{4\pi|\mathbf{u} - \mathbf{v}|}\{\Phi_2(v), g\} + \right. \\ &\quad \left. + \{f, \Phi_1(u)\}\delta(\mathbf{u} - \mathbf{v})\{\chi_1(v), g\} - \{f, \Phi_2(u)\}\frac{1}{4\pi|\mathbf{u} - \mathbf{v}|}\{\chi_2(v), g\} \right), \quad (3.1.24) \end{aligned}$$

і остаточно для дужки Дірака знаходимо

$$\begin{aligned} \{f, g\}_D &= \{f, g\} - \int d^3u d^3v \left(-\{f, A_0(u)\}\delta(\mathbf{u} - \mathbf{v})\{\pi^0(v), g\} + \right. \\ &\quad + \{f, \partial_i A_i(u)\}\frac{1}{4\pi|\mathbf{u} - \mathbf{v}|}\{\partial_j \Pi_j(v), g\} + \{f, \Pi_0(u)\}\delta(\mathbf{u} - \mathbf{v})\{A^0(v), g\} - \\ &\quad \left. - \{f, \partial_i \Pi_i(u)\}\frac{1}{4\pi|\mathbf{u} - \mathbf{v}|}\{\partial_j A_j(v), g\} \right). \quad (3.1.25) \end{aligned}$$

Як випливає з останнього виразу, всі в'язі $A^0, \Pi^0, \partial_i A_i, \partial_i \Pi_i$ дорівнюють нулю в сильному сенсі відносно ДП. Зокрема, легко побачити, що

$$\begin{aligned} \{A_0(x), A_\mu(y)\}_D &= \{A_0(x), \Pi^i(y)\}_D = 0, \\ \{\Pi^0(x), \Pi^\mu(y)\}_D &= \{\Pi^0(x), A_i(y)\}_D = 0 \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

(це виконувалось також і для звичайних ДП). Також

$$\begin{aligned} \{A_0(x), \Pi^0(y)\}_D &= \{A_0(x), \Pi^0(y)\} - \int d^3u d^3v \{A_0(x), \Pi^0(u)\} \delta(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times \\ &\times \{A_0(v), \Pi^0(y)\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \int d^3u d^3v \delta(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \delta(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{y}) = 0. \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

Для того щоб показати, що $\partial_i A_i$ і $\partial_i \Pi_i$ також дорівнюють нулю в сильному сенсі, обчислимо

$$\begin{aligned} \{A_i(x), \Pi^j(y)\}_D &= \{A_i(x), \Pi^j(y)\} + \int d^3u d^3v \{A_i(x), \partial_k \Pi_k(u)\} \frac{1}{4\pi|\mathbf{u} - \mathbf{v}|} \times \\ &\times \{\partial_l A_l(v), \Pi^j(y)\} = \delta_i^j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \int d^3u d^3v \partial_i^u \delta(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \frac{1}{4\pi|\mathbf{u} - \mathbf{v}|} \partial_j^v \delta(\mathbf{v} - \mathbf{y}) = \\ &= \delta_i^j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \partial_i^x \partial^{jy} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \delta_i^j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \partial_i^x \partial^{jx} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

Останній вираз можна записати як

$$\{A_i(x), \Pi^j(y)\}_D = \left(\delta_i^j + \frac{\partial_i^x \partial^{xj}}{\Delta_x} \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \left(\delta_i^j - \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{\Delta_x} \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.1.29)$$

де ми ввели формальне позначення $\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = -\Delta_x^{-1} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$.

Видно, що $\{\partial_i A_i(x), \Pi^j(y)\}_D = 0$, крім того, $\{\partial_i A_i(x), A_\mu(y)\}_D = 0$ і $\{\partial_i A_i(x), \Pi^0(y)\}_D = 0$. Таким чином, комбінація $\partial_i A_i$ дорівнює нулю в сильному сенсі. Також $\partial_i \Pi_i$ дорівнює нулю в сильному сенсі.

Той факт, що A_0 і Π^0 дорівнюють нулю, означає, що у нас немає часових фотонів, а рівність нулю $\partial_i A_i$ і $\partial_i \Pi_i$ означає відсутність поздовжніх фотонів. Гамільтоніан і рівняння руху приймають вигляд

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \Pi_i^2 + \frac{1}{4} F_{ij}^2 \right), \quad (3.1.30)$$

$$\dot{f} = \{f, H\}_D. \quad (3.1.31)$$

Можна вибрати й інші калібровки, наприклад $\chi_1 = A_3 = 0$ — аксіальна калібровка або $\chi_2 = \Pi_3 + \partial_3 A_0 = 0$. Використовується також часова (гамільтонова) калібровка $\chi_3 = A_0 = 0$. Недолік цих калібровок — відсутність явної лоренц-інваріантності.

Еквівалентна можливість квантування — розв'язати явно в'язі і калібрувальні умови. У випадку вільного електромагнітного поля це можна зробити в явному вигляді. Запишемо рівняння для часової, $\nu = 0$, і просторових, $\nu = i$, компонент

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \partial_i F^{i0} = 0, \\ \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} = 0, \end{cases} \quad (3.1.32)$$

або в розгорнутому вигляді для другого рівняння

$$\partial_0(\partial^0 A^i - \partial^i A^0) + \partial_j(\partial^j A^i - \partial^i A^j) = 0. \quad (3.1.33)$$

У калібровці $\partial_i A_i = 0$, $A_0 = 0$ перше рівняння тотожно задовольняється, а друге приймає вигляд $\square A^i = 0$ (це можна отримати і безпосередньо з гамільтонового формалізму). Це рівняння має розв'язок, який задовольняє умові $\partial_i A_i = 0$:

$$A_i(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=1,2} \epsilon_i^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \left[a^{(\lambda)}(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a^{(\lambda)+}(\mathbf{k}) e^{ikx} \right], \quad (3.1.34)$$

де $kx = k_0 x_0 - \mathbf{k}\mathbf{x}$, $k_0 = |\mathbf{k}|$, $k_i \epsilon_i^{(\lambda)} = 0$, а вектори поляризації $\epsilon_i^{(\lambda)}$ — ортонормовані і задовольняють умові повноти

$$\epsilon_i^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \epsilon_i^{(\lambda')}(\mathbf{k}) = \delta^{\lambda\lambda'}, \quad \sum_{\lambda=1,2} \epsilon_i^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \epsilon_j^{(\lambda)}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2}. \quad (3.1.35)$$

Коефіцієнти $a^{(\lambda)+}(\mathbf{k})$, $a^{(\lambda)}(\mathbf{k})$ при квантуванні стають операторами народження і знищення фотонів. Гамільтоніан у термінах $a^{(\lambda)}(\mathbf{k})$ запишеться виключно через оператори народження і знищення двох *поперечних* фотонів, тобто тільки через фізичні ступені вільності

$$\begin{aligned} H &= \int d^3 x \left(\frac{1}{2} \Pi_i^2 + \frac{1}{4} F_{ij}^2 \right) = \frac{1}{2} \int d^3 x \left[(\partial_0 A_i)^2 - A_j \partial_i^2 A_j \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1,2} \int \left(\frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} \right) k^0 \left[a^{+(\lambda)}(\mathbf{k}) a^{(\lambda)}(\mathbf{k}) + a^{(\lambda)}(\mathbf{k}) a^{+(\lambda)}(\mathbf{k}) \right], \end{aligned} \quad (3.1.36)$$

де для імпульсу використано $\Pi_i = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i \Rightarrow -\partial_0 A_i$. При квантуванні ми накладаємо комутаційні співвідношення на коефіцієнти $a^{(\lambda)}(\mathbf{k})$:

$$\left[a^{(\lambda)}(\mathbf{k}), a^{(\lambda')+) (\mathbf{k}') \right] = (2\pi)^3 2k^0 \delta^{\lambda\lambda'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (3.1.37)$$

Обчислюючи $[A_i(x), \Pi^j(y)]$ за допомогою комутаційних співвідношень для операторів $a^{(\lambda)}$, приходимо до

$$[A_i(x), \Pi^j(y)] = i \left(\delta_i^j + \frac{\partial_i^x \partial^{jx}}{\Delta_x} \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Порівнюючи з (3.1.29), бачимо, що дужка Дірака $\{, \}_D$ при квантуванні замінюється на $[,]/i\hbar$ ($\hbar = 1$ в даних обчисленнях). Зауважимо, що в кулонівській калібровці норма всіх станів додатна, однак втрачається *явна* лоренц-інваріантність.

3.2. Функціональний інтеграл для поля Максвелла

Вище ми вивчали канонічне операторне квантування електромагнітного поля, а тепер розглянемо як електромагнітне поле квантується в підході континуального інтеграла [61, 76, 120, 121, 158, 163]. Функціональний інтеграл для вільного електромагнітного поля в кулонівській калібровці має вигляд

$$Z = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Pi_\mu \delta(A_0) \delta(\Pi_0) \delta(\partial_i A_i) \delta(\partial_i \Pi_i) \text{Det}(\Delta) e^{i \int d^4x [\Pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{H}]}, \quad (3.2.1)$$

де гамільтонова густина

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \Pi_i^2 + \frac{1}{4} F_{ij}^2 + A_0 \partial_i \Pi_i,$$

і ми використовуємо скорочене позначення $\delta(f(x)) \equiv \prod_x \delta(f(x))$ (зазначимо, що присутність $\delta(A_0) \delta(\Pi_0) \delta(\partial_i A_i) \delta(\partial_i \Pi_i)$ явним чином вказує на те, що в теорії не вісім динамічних змінних, а чотири). В цьому виразі, відповідно до загальної теорії, $\Delta = \{\chi_\alpha, \Phi_\beta\}$ є матрицею ДП калібрувальних умов і в'язей (див. (3.1.18)). Знімаючи тривіальні δ -функції $\delta(A_0)$, $\delta(\Pi_0)$, маємо

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}A_i \mathcal{D}\Pi_i \delta(\partial_i A_i) \delta(\partial_i \Pi_i) \text{Det}(\Delta) e^{i \int d^4x [\Pi^i \dot{A}_i - \frac{1}{2} \Pi_i^2 - \frac{1}{4} F_{ij}^2]} = \\ & = \int \mathcal{D}A_i \mathcal{D}A_0 \mathcal{D}\Pi_i \delta(\partial_i A_i) \text{Det}(\Delta) e^{i \int d^4x [\Pi^i \dot{A}_i - \frac{1}{2} \Pi_i^2 - \frac{1}{4} F_{ij}^2 - A_0 \partial_i \Pi_i]}, \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

де у другій рівності використано зручне представлення для функціональної дельта-функції

$$\prod_x \delta(\partial_i \Pi_i(x)) = \int \mathcal{D}A_0 e^{-i \int d^4x A_0(x) \partial_i \Pi_i(x)} \quad (3.2.3)$$

зі змінною інтегрування, яку ми знов позначили як A_0 . Після цього ми можемо легко проінтегрувати по імпульсним змінним $\Pi_i(x)$

$$\int \mathcal{D}\Pi_i e^{i \int d^4x [-\frac{1}{2} \Pi_i^2 + \Pi_i (\partial_i A_0 - \partial_0 A_i)]} = e^{i \int d^4x \frac{1}{2} F_{i0} F_{i0}} = e^{i \int d^4x [-\frac{1}{2} F_{i0} F_{i0}]}. \quad (3.2.4)$$

Остаточно отримуємо функціональний інтеграл у кулонівській калібровці

$$Z = N \int \mathcal{D}A_\mu \delta(\partial_i A_i) \text{Det}(\Delta) \exp i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 \right], \quad (3.2.5)$$

де

$$\text{Det}(\Delta) = \text{Det} |\Delta_x \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})| = \text{Det} \{ \partial_i A_i, \partial_j \Pi_j \}.$$

$\text{Det}(\Delta)$ не залежить від поля A_μ і може бути винесений за знак інтеграла та включений у константу нормування N . Замість калібрувальної умови $\partial_i A_i = 0$ може бути взята будь-яка функція $g(A, \Pi) = 0$, тоді

$$\text{Det} \{ g, \partial_i \Pi_i \} = \text{Det} \left. \left| \frac{\delta g^\epsilon}{\delta \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \right|. \quad (3.2.6)$$

Ця рівність є наслідком того, що в'язь $\partial_i \Pi_i$ є генератором калібрувальних перетворень

$$\delta g^\epsilon = \{g, \partial_i \Pi_i\} \delta \epsilon. \quad (3.2.7)$$

Цей факт дозволяє легко обчислити детермінант Фаддєєва—Попова. Наприклад, для калібрувки $g(A) = \partial_i A_i$, робимо калібрувальне перетворення

$$g(A^\epsilon) = \partial_i A_i^\epsilon = \partial_i (A_i + \partial_i \epsilon), \quad (3.2.8)$$

і знаходимо

$$\left. \frac{\delta g^\epsilon(\mathbf{x})}{\delta \epsilon(\mathbf{y})} \right|_{\epsilon=0} = \partial_i^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \Delta_x \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.2.9)$$

Порівняємо тепер отриманий вираз (3.2.5) для функціонального інтеграла в КЕД з найвним фейнманівським інтегралом

$$Z = N \int \mathcal{D}A_\mu \exp i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 \right]. \quad (3.2.10)$$

Проблема полягає в тому, що цей інтеграл розбігається через те, що ми інтегруємо в ньому за зайвими нефізичними ступенями свободи, пов'язаними калібрувальними перетвореннями. Дійсно, розіб'ємо калібрувальне поле на поперечну і поздовжню частини: $A_\mu = A_\mu^T + A_\mu^L$, де $\partial^\mu A_\mu^T = 0$ і $A_\mu^L = \partial_\mu \Theta$. Дія переписеться

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 \right) = \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu(x) (g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu(x) = \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu^T(x) (g^{\mu\nu} \square) A_\nu^T(x), \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

таким чином поле A_μ^L повністю випадає з кінетичного члена в лагранжіані КЕД. Зробимо тепер калібрувальне перетворення

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \epsilon = A_\mu^T + \partial_\mu (\Theta + \epsilon). \quad (3.2.12)$$

Порівнюючи з $A'_\mu = A_\mu^T + \partial_\mu \Theta'$, бачимо, що калібрувальне перетворення впливає лише на поздовжню частину вектор-потенціалу A_μ^L :

$$A_\mu'^T = A_\mu^T, \quad \Theta' = \Theta + \epsilon. \quad (3.2.13)$$

Інтегрування по A_μ^L еквівалентно інтегруванню по Θ , що у свою чергу еквівалентно внеску всієї калібрувальної орбіти і приводить до тривіальної розбіжності функціонального інтеграла.

Розбіжність інтеграла (3.2.10) пов'язана також з неможливістю визначити обернений оператор до оператора $g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu$ з рівняння

$$-i(g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) D_{\nu\rho}(x - y) = \delta_\rho^\mu \delta(x - y), \quad (3.2.14)$$

або для фур'є-образу рівняння

$$(-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu) D_{\nu\rho}(k) = i\delta_\rho^\mu,$$

яке визначає фейнманівський пропагатор $D_{\nu\rho}(k)$. Але це рівняння не має розв'язків, оскільки матриця $(-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu)$ має власний вектор $\sim k_\mu$ з нульовим власним значенням. Наявність у (3.2.5) дельта-функції, яка фіксує калібровку, тобто фіксує конкретну конфігурацію на калібрувальній орбіті, робить інтеграл (3.2.10) скінченним.

3.3. Метод Фаддєєва—Попова

У гамільтоновому підході ми не маємо змоги розглядати калібровки, які містять похідні по часу. Зазвичай калібровки в гамільтоновому формалізмі порушують явну лоренцову інваріантність. Але ми хотіли б зберегти явним чином лоренц-інваріантність (очевидно, що її присутність є дуже корисною для практичних обчислень), наприклад використати калібровку Лоренца $G(A) = \partial_\mu A^\mu$. Для цього використаємо підхід Фаддєєва—Попова, який є особливо зручним у випадку неабелевих калібрувальних теорій [22, 61, 76, 120, 121, 154].

Нехай поля A^μ задовольняють деякій калібрувальній умові $G(A_\mu) = 0$. Визначимо так званий детермінант Фаддєєва—Попова за допомогою інтеграла вздовж калібрувальної орбіти для фіксованої конфігурації поля A^μ :

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha(x) \delta(G(A^\alpha)) \det \left. \frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha(x)} \right|_{\alpha=0}, \quad A_\mu^\alpha = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x). \quad (3.3.1)$$

Цей функціональний інтеграл є аналогом скінченновимірною інтеграла

$$1 = \left(\prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} da_i \right) \delta^{(n)}(\mathbf{g}(\mathbf{a})) \det \left(\frac{\partial g_i}{\partial a_j} \right)_{a_j=a_{j0}}, \quad (3.3.2)$$

де a_{j0} задовольняють системі рівнянь $\mathbf{g}(\mathbf{a}_0) = 0$. Наприклад, для калібровки Лоренца $G(A_\mu) = \partial_\mu A^\mu$ зробимо калібрувальне перетворення і знайдемо варіаційну похідну

$$G(A^\alpha(x)) = \partial_\mu A^\mu(x) + \square \alpha(x) \Rightarrow \det \left. \frac{\delta G(A^\alpha(x))}{\delta \alpha(y)} \right| = \det[\square_x \delta(x - y)].$$

Внесемо представлення (3.3.1) під знак інтегрування в наївний фейнманівський інтеграл (3.2.10), і оскільки в цьому випадку детермінант Фаддєєва—Попова не залежить від змінної інтегрування, його можна винести з-під знака інтеграла

$$\det[\square_x \delta(x - y)] \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \delta(G(A^\alpha)).$$

Зробимо в інтегралі по A_μ заміну змінних $A^\alpha \rightarrow A$. При такій заміні міра інтегрування і дія залишаються інваріантними, $\mathcal{D}A_\mu^\alpha = \mathcal{D}A_\mu$, $S(A^\alpha) = S(A)$. Бачимо, що інтеграли по калібрувальній орбіті і по A_μ факторизуються. Інтеграл по $\alpha(x)$ дає просто нескінченний множник, незалежний від полів.

Можемо розглянути і більш загальний клас калібровок

$$G(A) = \partial^\mu A_\mu(x) - \omega(x) = 0,$$

для яких детермінант Фаддеева—Попова такий самий: $\det \left| \frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} \right| = \det(\square)$. Тому можемо записати

$$\int \mathcal{D}A e^{iS(A)} = \det(\square) \int \mathcal{D}\alpha(x) \int \mathcal{D}A e^{iS(A)} \delta(\partial^\mu A_\mu - \omega(x)). \quad (3.3.3)$$

Інтеграл не залежить від $\omega(x)$, тому, помножуючи чисельник і знаменник на функціональний інтеграл по $\omega(x)$, який є деякою константою, запишемо:

$$\begin{aligned} N(\xi) \int \mathcal{D}\omega(x) e^{-i \int d^4x \frac{\omega^2(x)}{2\xi}} \det(\square) \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A e^{iS(A)} \delta(\partial_\mu A^\mu - \omega(x)) = \\ = \underbrace{N(\xi) \det(\square)}_{N'} \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A e^{iS(A)} \exp \left[-i \int d^4x \int \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

В останній рівності ми проінтегрували по $\omega(x)$ за допомогою відповідної дельта-функції.

Кореляційні функції довільних операторів $\mathcal{O}(A)$ у квантовій електродинаміці таким чином задаються виразом

$$\langle 0|T\mathcal{O}(A)|0\rangle = \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{O}(A) \exp \left[i \int d^4x [\mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2] \right]}{\int \mathcal{D}A \exp \left[i \int d^4x [\mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2] \right]}. \quad (3.3.5)$$

Множники N' скорочуються в цьому співвідношенні.

Корелятор $\langle 0|T\mathcal{O}(A)|0\rangle$ не залежить від калібрувального параметра ξ для калібрувально інваріантних операторів. З урахуванням нового доданка $\sim \frac{1}{\xi}$ для пропагатора фотона маємо рівняння

$$\left(-k^2 g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) k_\mu k_\nu \right) D^{\nu\rho}(k) = i\delta_\mu^\rho. \quad (3.3.6)$$

При ξ , відмінному від нескінченності, оператор, який діє на пропагатор фотона, є несингулярним, і рівняння має розв'язок

$$D^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{i(k^2 + i\epsilon)} \left(g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right). \quad (3.3.7)$$

Найбільш відомі калібровки: $\xi = 0$ — калібровка Ландау, $\xi = 1$ — калібровка Фейнмана, $\xi = 3$ — калібровка Єнні, яка є зручною для задач на зв'язані стани і дослідження інфрачервоної поведінки при малих імпульсах.

ЗАДАЧІ

1. Показати, що тензор напруженості електромагнітного поля $F_{\mu\nu}$ є величиною 1-го роду, тобто що його дужки Пуассона з в'язями $\Phi_1 = \Pi^0$, $\Phi_2 = \partial_i \Pi_i$ обертаються на нуль (у слабкому розумінні).
2. Знайти пропагатор фотона в імпульсному просторі для лагранжіана електромагнітного поля з доданком, що фіксує калібровку

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(n_\mu A^\mu)^2,$$

де n_μ — постійний вектор, $n^2 = n_\mu n^\mu < 0$.

3. Знайти пропагатор фотона в імпульсному просторі для лагранжіана електромагнітного поля з доданком, що фіксує калібровку

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi n^2}(n_\mu A^\mu)\partial^\lambda\partial_\lambda(n_\nu A^\nu),$$

де n_μ — постійний вектор, $n_\mu n^\mu < 0$.

4. Таке саме завдання для лагранжіана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu - \kappa n_\mu A^\mu)^2,$$

де n_μ — постійний вектор, $n_\mu n^\mu < 0$, ξ , κ — параметри фіксації калібровки.

5. Розглянути лагранжіан Прока масивного векторного поля у формулюванні Штюкельберга

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2(A_\mu + \partial_\mu\phi)^2,$$

який інваріантний відносно локальних калібрувальних перетворень

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\epsilon(x), \quad \phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi - \epsilon(x).$$

Знайти гамільтоніан, в'язі та порахувати дужки Пуассона в'язей між собою і з гамільтоніаном. Показати, що

$$\Omega_\epsilon(t) = \int d^3x [\dot{\epsilon}\Pi^0 - \epsilon(\partial_i\Pi^i + \pi_\phi)]$$

є генератором калібрувальних перетворень, тобто

$$\delta A^\mu = \{A^\mu, \Omega_\epsilon\} = \partial^\mu \epsilon, \quad \delta \phi = \{\phi, \Omega_\epsilon\} = -\epsilon.$$

Π^μ та π_ϕ — канонічно спряжені імпульси до змінних A_μ та ϕ , відповідно.

6. У калібровці Прока генеруючий функціонал записується у вигляді

$$Z = \int DA^\mu D\phi \exp \left\{ i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 (A_\mu + \partial_\mu \phi)^2 - \lambda \phi^2 \right) \right\},$$

де доданок $\lambda \phi^2$ фіксує калібровку і λ є калібрувальним параметром. Утворюючи мультиплет $\Psi^T = (A^\mu, \phi)$, записати дію у вигляді

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \Psi^T \mathcal{O} \Psi$$

і показати, що обернений оператор (пропагатор) до оператора \mathcal{O} в квадратичній формі дії має вигляд

$$D(x) = \frac{1}{i} \mathcal{O}^{-1} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} D(p),$$

$$D(p) = \begin{pmatrix} \frac{i}{p^2 - m^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) + \frac{i}{\lambda} p^\mu p^\nu & \frac{1}{\lambda} p^\nu \\ -\frac{1}{\lambda} p^\mu & \frac{i}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

7. Для лагранжіана Прока масивного векторного поля

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 (A_\mu)^2$$

знайти гамільтоніан і в'язі. Показати, що в'язі є другого роду і записати відповідний функціональний інтеграл.

8. Знайти детермінант Фаддєєва—Попова у випадку, коли вибрано калібровку Намбу,

$$G = \partial_\mu A^\mu + \frac{1}{2} A_\mu A^\mu,$$

і записати функціональний інтеграл.

4

ПОЛЯ ЯНГА–МІЛЛСА

Дві з чотирьох відомих у сучасній фізиці взаємодій описуються полями Янга–Міллса, а саме: слабкі та сильні взаємодії [35, 55, 61, 118, 120, 121, 154, 163]. Електромагнітна взаємодія описується також калібрувальним полем, яке є абелевим полем. Ці факти означають, що калібрувальний принцип надзвичайно важливий і фундаментальний. Крім того, він є математично дуже елегантним і доволі простим.

Історично першим прикладом калібрувальної теорії є квантова електродинаміка (КЕД). Нагадаємо, що включення електромагнітного поля в електромагнітній теорії відбувається за допомогою подовження похідної $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ в лагранжіані для матеріальних полів. Для комплексного скалярного поля це дає лагранжеву густину

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\varphi)^*(D^\mu\varphi) - V(\varphi^*\varphi), \quad (4.1)$$

яка інваріантна відносно локальних калібрувальних перетворень

$$\varphi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\varphi(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$$

з довільною функцією $\alpha(x)$, залежною від координат, або еквівалентно

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi' = e^{ie\Lambda(x)}\varphi(x), \quad A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\Lambda(x). \quad (4.2)$$

Ці перетворення належать до абелевої групи $U(1)$ локальних перетворень. Похідна $D_\mu\varphi(x)$ при цьому перетворюється таким самим чином, як і саме поле, тобто коваріантним чином

$$D'_\mu\varphi'(x) = e^{ie\Lambda(x)}D_\mu\varphi(x), \quad (4.3)$$

тоді як векторний потенціал A_μ перетворюється неоднорідно. Включення взаємодії електромагнітного поля із зарядженими частинками за

допомогою подовження похідної стало загальним принципом. Наприклад, взаємодія з ферміонами (спінорна електродинаміка) описується лагранжіаном

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi, \quad (4.4)$$

де спінорне поле ψ перетворюється при локальних калібрувальних перетвореннях так само, як і заряджене скалярне поле в (4.2).

4.1. Класичні поля Янга—Міллса

Використовуючи ідею калібрувальної симетрії, Янг і Міллс (1954) узагальнили калібрувальний принцип на випадок неабелевих груп. Відповідне узагальнення насправді є доволі прямим. Дійсно, розглянемо поле, яке належить до деякого представлення неабелевої групи U , наприклад N -компонентний вектор φ_i , $i = 1, \dots, N$, на який матриці діють стандартним чином

$$\varphi_i \rightarrow \varphi'_i = U_{ij}\varphi_j, \quad U = e^{i\omega^a T_a}. \quad (4.1.1)$$

Матриці T_a є генераторами групи, індекс a пробігає значення $a = 1, \dots, d(G)$, де $d(G)$ — розмірність групи. Для унітарних груп, а саме такі групи є калібрувальними групами в теорії слабких і сильних взаємодій, виконується співвідношення

$$UU^+ = U^+U = 1, \quad (4.1.2)$$

яке зберігає інваріантним добуток $\varphi_i^* \varphi_i$ (матриця U^+ ермітово спряжена до матриці U). Генератори T_a є ермітовими матрицями $T_a^+ = T_a$, для яких виконуються комутаційні співвідношення алгебри Лі

$$[T_a, T_b] = if_{ab}^c T_c. \quad (4.1.3)$$

Коефіцієнти $f_{ab}^c = -f_{ba}^c$ називаються структурними константами групи, які є дійсними для унітарної групи. Наприклад, для групи $SU(2)$ генератори пов'язані з матрицями Паулі, $T_a = \frac{\tau_a}{2}$, які задовольняють комутаційним співвідношенням

$$[T_a, T_b] = i\varepsilon_{abc} T_c, \quad (4.1.4)$$

де структурними константами є повністю антисиметричний тензор ε_{abc} (базові відомості про групи і алгебри Лі будуть розглянуті в розділі 4.4).

Згідно з калібрувальним принципом, ми хочемо мати лагранжіан, інваріантний відносно локальних калібрувальних перетворень

$$U(x) = \exp(i\omega^a(x)T_a), \quad (4.1.5)$$

де групові параметри $\omega^a(x)$ залежать від координат. Очевидно, члени з похідною в лагранжіані не є інваріантними відносно таких локальних перетворень, оскільки похідна діє і на саму матрицю U ,

$$\partial_\mu \varphi \rightarrow \partial_\mu(U\varphi) = U\partial_\mu \varphi + \partial_\mu U\varphi \neq U\partial_\mu \varphi. \quad (4.1.6)$$

За аналогією з електромагнітним полем введемо подовжену похідну

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu(x), \quad A_\mu^+ = A_\mu,$$

де $A_\mu(x)$ — тепер матриця. Умова ермітовості $A_\mu^+ = A_\mu$ необхідна для того, щоб похідна була антиермітовим оператором, як і звичайна похідна. Вимагаємо далі, щоб похідна $D_\mu\varphi$ перетворювалась коваріантним чином при перетвореннях (4.1.5)

$$D'_\mu\varphi' = UD_\mu\varphi = UD_\mu U^{-1}\varphi', \quad (4.1.7)$$

звідки, внаслідок довільності φ' , похідна повинна перетворюватись наступним чином

$$D'_\mu = UD_\mu U^{-1}. \quad (4.1.8)$$

Розписуючи цей закон перетворення,

$$\partial_\mu + igA'_\mu = U(\partial_\mu + igA_\mu)U^{-1} = \partial_\mu + igUA_\mu U^{-1} + U\partial_\mu U^{-1}, \quad (4.1.9)$$

знаходимо як повинно перетворюватись калібрувальне поле

$$A'_\mu = UA_\mu U^{-1} + \frac{1}{ig}U\partial_\mu U^{-1}. \quad (4.1.10)$$

В якості A_μ достатньо розглядати поля, що належать алгебрі Лі, при цьому $UA_\mu U^{-1}$ також належить алгебрі, оскільки $UT_a U^{-1}$ задовольняє комутаційним співвідношенням. Легко перевірити безпосередньо, що калібрувальне перетворення в електродинаміці також описується рівнянням (4.1.10) у випадку $U(1)$ калібрувальної групи, де $U = e^{i\alpha(x)}$ є звичайною функцією і тому комутує з A_μ у першому доданку. Коваріантна похідна діє на N -компонентне поле $\varphi_i(x)$ за правилом

$$D_\mu\varphi_i(x) = \partial_\mu\varphi_i(x) + ig(A_\mu)_i^j\varphi_j(x). \quad (4.1.11)$$

Відзначимо аналогію із загальною теорією відносності, де коваріантна похідна діє на векторне поле за подібним правилом

$$D_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\lambda\mu}^\nu V^\lambda. \quad (4.1.12)$$

Таким чином, калібрувальне поле A_μ відіграє роль, аналогічну символам Крістоффеля в теорії гравітації. Обидві величини, A_μ і $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$, називаються зв'язністю, перша — у внутрішньому просторі, а друга — у реальному просторі-часі.

З формули (4.1.11) знаходимо дію коваріантної похідної на комплексно спряжений вектор $\chi^i = \varphi_i^*$,

$$D_\mu\chi^i(x) = \partial_\mu\chi^i(x) - ig(A_\mu)_j^i\chi^j(x), \quad (4.1.13)$$

де використано ермітовість поля $A_\mu^+ = A_\mu$. Очевидно, узагальненням дії коваріантної похідної на тензор загального виду з верхніми і нижніми індексами буде

$$D_\mu \Phi_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_n} = \partial_\mu \Phi_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_n} + ig \sum_{m=1}^k (A_\mu)_{i_m}^{l_m} \Phi_{i_1 \dots l_m \dots i_k}^{j_1 \dots j_n} - ig \sum_{m=1}^n (A_\mu)_{l_m}^{j_m} \Phi_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots l_m \dots j_n}. \quad (4.1.14)$$

Як завжди, за індексом l_m , що повторюється, йде сумування. Розкладемо матрицю A_μ по базисним матрицям відповідної алгебри Лі

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x) T_a, \quad (4.1.15)$$

де коефіцієнти розкладу A_μ^a є дійсними полями внаслідок ермітовості A_μ і T^a . Зазначимо, що кількість векторних полів A_μ^a збігається з кількістю генераторів групи U . Тому ми маємо вісім глюонних полів у теорії сильних взаємодій, де калібрувальна група $SU(3)$ має вісім генераторів і три незалежних поля в теорії слабких взаємодій, чия калібрувальна група $SU(2)$ має три генератора.

Розглянемо інфінітезимальні перетворення

$$\begin{aligned} A_\mu^a T_a &= (1 + i\omega^a T_a) A_\mu^b T_b (1 - i\omega^c T_c) + \frac{1}{ig} (1 + i\omega^a T_a) \partial_\mu (1 - i\omega^b T_b) \simeq \\ &\simeq A_\mu^b T_b + i\omega^a A_\mu^b [T_a, T_b] - \frac{1}{g} \partial_\mu \omega^a T_a, \end{aligned}$$

звідки для коефіцієнтів отримуємо

$$A_\mu^a = A_\mu^a - f_{bc}^a \omega^b A_\mu^c - \frac{1}{g} \partial_\mu \omega^a. \quad (4.1.16)$$

Інфінітезимальне перетворення можна записати як коваріантну похідну від локальних параметрів перетворення

$$\delta A_\mu^a = -\frac{1}{g} \left(\partial_\mu \omega^a - g f_{bc}^a A_\mu^b \omega^c \right) = -\frac{1}{g} (D_\mu \omega)^a. \quad (4.1.17)$$

Підкреслимо, що перетворення полів Янга–Міллса універсально і не залежить від представлення, по якому перетворюються поля матерії, оскільки воно залежить тільки від фундаментальних констант групи.

Нам треба знайти тепер лагранжіан для поля Янга–Міллса, який був би інваріантний відносно перетворень (4.1.10). Для того, щоб знайти цей лагранжіан, насамперед зазначимо, що згідно з рівнянням (4.1.8), похідна D_μ перетворюється коваріантно. Очевидно, що добуток двох коваріантних похідних $D_\mu D_\nu$ також буде перетворюватись коваріантно. Ми знаємо, що в електродинаміці калібрувальна інваріантною величиною є тензор напруженостей $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, який виражається через комутатор двох

коваріантних похідних $F_{\mu\nu} = -\frac{i}{e}[D_\mu, D_\nu]$, де $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. Спробуємо знайти аналогічний калібрувально інваріантний об'єкт у випадку неабелевих калібрувальних полів. Для цього порахуємо комутатор коваріантних похідних

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]\varphi &= [\partial_\mu + igA_\mu, \partial_\nu + igA_\nu]\varphi = \\ &= ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu])\varphi \equiv igF_{\mu\nu}\varphi, \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

звідки внаслідок довільності φ маємо операторну рівність

$$[D_\mu, D_\nu] = igF_{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]. \quad (4.1.19)$$

Очевидно, що антисиметричний тензор $F_{\mu\nu}$ є аналогом тензора напруженостей для електромагнітного поля. Зауважимо однак, що на відміну від електромагнітного поля тензор полів Янга—Міллса містить нелінійні по A_μ доданки у вигляді комутатора. Незаважко встановити закон перетворення цього тензора відносно локальних калібрувальних перетворень

$$F'_{\mu\nu} = [D'_\mu, D'_\nu] = [UD_\mu U^{-1}, UD_\nu U^{-1}] = UF_{\mu\nu}U^{-1}, \quad (4.1.20)$$

який на відміну від поля $A_\mu(x)$ перетворюється коваріантним чином. Розкладаючи тензор $F_{\mu\nu}$ за базисом алгебри Лі,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a T_a &= (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)T_a + igA_\mu^b A_\nu^c [T_b, T_c] = \\ &= (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)T_a - gf_{bc}^a T_a A_\mu^b A_\nu^c, \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

знаходимо коефіцієнти розкладу

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c. \quad (4.1.22)$$

При інфінітезимальних перетвореннях для тензора напруженості з (4.1.20) отримуємо

$$\delta F_{\mu\nu}^a = f_{bc}^a F_{\mu\nu}^b \omega^c. \quad (4.1.23)$$

Важливо, що в неабелевій теорії напруженості крім лінійного по вектор-потенціалу A_μ доданка містять також квадратичний доданок, який пропорційний структурним константам групи f_{bc}^a . Це приводить до самовзаємодії калібрувальних полів у неабелевих теоріях і є однією з причин, чому глюодинаміка навіть у відсутності кварків настільки динамічно багата (реалізуючи, наприклад, таке явище як конфайнмент, тобто відсутність асимптотичних станів із кольоровим зарядом) і суттєво відрізняється від електродинаміки, де у відсутності зарядів електромагнітні поля не взаємодіють і вільно поширюються у вакуумі. Очевидно, $\text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ є інваріантним відносно калібрувальних перетворень і може бути використаний для побудови кінетичного доданка калібрувального поля в лагранжіані,

який є узагальненням звичайної електродинамічної максвеллівської дії на випадок неабелевих полів,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} \operatorname{tr} T_a T_b = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad (4.1.24)$$

де ми використали нормування генераторів

$$\operatorname{tr} T_a T_b = \frac{1}{2} \delta_{ab}.$$

Ми тепер можемо записати лагранжеву густину для квантової хромодинаміки (КХД), яка описує взаємодію кварків і глюонів і яка інваріантна відносно локальної калібрувальної групи $SU(3)$,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}_k^i [i\gamma^\mu (D_\mu)^{ij} - m_k \delta^{ij}] \psi_k^j. \quad (4.1.25)$$

Кваркові поля ψ_k^i належать до фундаментального представлення групи $SU(3)$, тобто мають «кольоровий» індекс $i, j = 1, 2, 3$ (red, yellow, blue). Індекс $k = 1, \dots, n_f$ описує аромат кварків. Наразі відомо, що є шість ароматів, $n_f = 6$ (up, down, strange, charm, top/true, bottom/beauty), які відносно групи $SU(2)$ слабких взаємодій формують дублети, тобто належать до фундаментального представлення групи $SU(2)$,

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} Q = 2/3, \\ Q = -1/3, \end{array} \quad (4.1.26)$$

де верхні кварки u, c, t мають електричний заряд $+2/3$, а нижні d, s, b — заряд $-1/3$. Параметри мас, що входять до лагранжіану, визначаються з експерименту і мають такі значення:

$$\begin{aligned} m_u &= 2,16 \pm 0,25 \text{ MeV}, & m_c &= 1,27 \pm 0,02 \text{ GeV}, & m_t &= 172,76 \pm 0,30 \text{ GeV}, \\ m_d &= 4,65 \pm 0,47 \text{ MeV}, & m_s &= 99,6 \pm 4,3 \text{ MeV}, & m_b &= 4,18 \pm 0,03 \text{ GeV}. \end{aligned}$$

Баріони і мезони є зв'язаними станами кварків. Баріони складаються з трьох кварків, а мезони — з кварка і антикварка. Наприклад, кварковий склад протонів і нейтронів є таким: $p = |uud\rangle$, $n = |udd\rangle$. Наведемо також кварковий склад окремих баріонних резонансів:

$$\Lambda^0 = |uds\rangle, \quad \Lambda_b^0 = |udb\rangle, \quad \Lambda_c^+ = |udc\rangle, \quad \Omega^- = |sss\rangle,$$

і мезонів:

$$\begin{aligned} \pi^+ &= |u\bar{d}\rangle, & \pi^- &= |d\bar{u}\rangle, & \pi^0 &= |\bar{u}u - \bar{d}d\rangle, & \eta &= |\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s\rangle, & J/\psi &= |\bar{c}c\rangle, \\ \Upsilon &= |\bar{b}b\rangle, & K^+ &= |\bar{s}u\rangle, & K^- &= |s\bar{u}\rangle, & K^0 &= |\bar{s}d\rangle, & \bar{K}^0 &= |s\bar{d}\rangle, & B^+ &= |\bar{b}u\rangle. \end{aligned}$$

Були відкриті також баріони з двома b - і c -кварками: $\Xi_{bb}^0 = |ubb\rangle$, $\Xi_{cc}^{++} = |ucc\rangle$. В останні роки на Великому адронному колайдері були відкриті 66 нових адронів, існування яких передбачається квантовою хромодинамікою, зокрема адрони, що включають більше кварків, ніж мінімально необхідно, з чотирьох і п'яти кварків (тетракварки і пентакварки):

$$T_{cs}^0(2900) = |c\bar{s}\bar{u}d\rangle, \quad T_{cs}^{++}(2900) = |c\bar{s}\bar{u}\bar{d}\rangle,$$

$$P_{\psi s}^{\Lambda 0}(4338) = |uds\bar{c}\bar{c}\rangle, \quad P_{\psi s}^{\Lambda +}(4338) = |uud\bar{c}\bar{c}\rangle$$

(в дужках вказані маси в MeV). Теоретичного опису структури знайдених частинок поки що немає. Це можуть бути або адронні молекули, або справжні сильно зв'язані стани.

Поки що ми розглядали коваріантну похідну, яка діє на набір полів φ_i як матриця на вектор: $(\delta_{ij}\partial_\mu + iA_\mu^a T_{ij}^a)\varphi_j$. Постає питання: як діє коваріантна похідна на матрицю $\omega(x)$, яка належить алгебрі Лі? Розглянемо дію похідної на вектор $(\omega \cdot \varphi)^a$, де вектор φ^a також належить до приєднаного представлення

$$D_\mu(\omega \cdot \varphi)^a = \partial_\mu(\omega \cdot \varphi)^a + ig(A_\mu \cdot \omega\varphi)^a. \quad (4.1.27)$$

З іншого боку, будемо вимагати, щоб коваріантна похідна D_μ задовольняла правило Лейбніца, тобто діяла на добуток таким чином

$$\begin{aligned} D_\mu(\omega \cdot \varphi)^a &= (D_\mu\omega)^{ab} \cdot \varphi^b + \omega^{ab}(D_\mu\varphi)^b \Rightarrow \\ &\Rightarrow (D_\mu\omega)^{ab} \cdot \varphi^b + \omega^{ab}(\partial_\mu\varphi^b + ig(A_\mu)^{bc}\varphi^c) = \\ &= \partial_\mu\omega^{ab} \cdot \varphi^b + \omega^{ab}\partial_\mu\varphi^b + ig(A_\mu \cdot \omega)^{ab} \cdot \varphi^b. \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

З останньої рівності, внаслідок довільності φ^b , знаходимо

$$(D_\mu\omega)^{ab} = \partial_\mu\omega^{ab} + ig[(A_\mu \cdot \omega)^{ab} - (\omega \cdot A_\mu)^{ab}], \quad (4.1.29)$$

або у матричному вигляді

$$D_\mu\omega = \partial_\mu\omega + ig[A_\mu, \omega], \quad \text{тобто} \quad D_\mu = \partial_\mu + ig[A_\mu, \cdot]. \quad (4.1.30)$$

Напишемо тотожність Якобі

$$[D_\mu[D_\nu D_\lambda]] + [D_\nu[D_\lambda D_\mu]] + [D_\lambda[D_\mu D_\nu]] = 0. \quad (4.1.31)$$

Обчислюючи комутатори, отримуємо тотожність Б'янкі

$$D_\mu F_{\nu\lambda} + D_\nu F_{\lambda\mu} + D_\lambda F_{\mu\nu} = 0, \quad (4.1.32)$$

яку можна записати в скороченому вигляді, вводячи дуальний тензор $F^{*\mu\nu}$:

$$D_\mu F^{*\mu\nu} = 0, \quad F^{*\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}, \quad (4.1.33)$$

де $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ — повністю антисиметричний тензор Леві-Чивіті у чотиривимірному просторі Мінковського, який дорівнює $+1$ або -1 залежно від того, чи $\epsilon (\mu, \nu, \lambda, \rho)$ парною або непарною перестановкою чисел $(0, 1, 2, 3)$, і рівний нулю в інших випадках. Зауважимо, що $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = -\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ і $\varepsilon^{0123} = +1$.

Оскільки $F_{\mu\nu}$ належить до алгебри Лі, то коваріантна похідна діє на цей тензор відповідно до визначення (4.1.30):

$$D_\mu F_{\nu\lambda} \equiv \partial_\mu F_{\nu\lambda} + ig[A_\mu, F_{\nu\lambda}]. \quad (4.1.34)$$

Знов варто звернути увагу, що внаслідок некомутативності генераторів абелевих груп дія коваріантної похідної на тензор напруженості не зводиться тільки до доданка $\partial_\mu F_{\nu\lambda}$. Разом із нелінійною залежністю $F_{\nu\lambda}$ від A_μ це призводить до нелінійності рівнянь руху для полів Янга—Міллса.

4.2. Рівняння руху

Рівняння руху для поля Янга—Міллса отримуються з дії

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x \operatorname{tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}), \quad (4.2.1)$$

привірюючи до нуля варіацію дії

$$\delta S = - \int d^4x \operatorname{tr} (F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu}) = 0,$$

де

$$\delta F^{\mu\nu} = \partial^\mu \delta A^\nu + ig(\delta A^\mu A^\nu + A^\mu \delta A^\nu) - (\mu \leftrightarrow \nu). \quad (4.2.2)$$

Використовуючи циклічність tr і антисиметрію $F_{\mu\nu}$, маємо

$$\begin{aligned} \delta S &= -2 \int d^4x \operatorname{tr} F_{\mu\nu} (\partial^\mu \delta A^\nu + ig \delta A^\mu A^\nu + ig A^\mu \delta A^\nu) = \\ &= -2 \int d^4x \operatorname{tr} \{ -\partial^\mu F_{\mu\nu} \delta A^\nu + ig F_{\mu\nu} A^\mu \delta A^\nu + ig A^\nu F_{\mu\nu} \delta A^\mu \} = \\ &= -2 \int d^4x \operatorname{tr} \{ (-\partial^\mu F_{\mu\nu} + ig [F_{\mu\nu}, A^\mu]) \delta A^\nu \} = 0. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Звідси, внаслідок довільності локальних варіацій поля δA^ν , знаходимо рівняння Ейлера—Лагранжа для полів Янга—Міллса:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + ig[A^\mu, F_{\mu\nu}] = 0, \quad (4.2.4)$$

або в термінах коваріантної похідної

$$D^\mu F_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow D_\mu^{ab} F^{b\mu\nu} = 0, \quad D_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu + g f^{abc} A_\mu^c. \quad (4.2.5)$$

У випадку абелевої групи, тобто електродинаміки, це рівняння співпадає з добре нам відомим рівнянням руху для електромагнітних полів у вакуумі

$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$. Якщо поля Янга—Міллса взаємодіють з полями матерії, то в правій частині рівняння руху з'являється струм

$$D^\mu F_{\mu\nu} = J^\nu \Rightarrow D_\mu^{ab} F^{b\mu\nu} = J^{a\nu}. \quad (4.2.6)$$

Крім того, маємо тотожність Б'янкі (4.1.33).

Як впливає з (4.2.3), варіація дії відносно довільних локальних варіацій поля має вигляд

$$\delta S = 2 \int d^4x \operatorname{tr}\{D^\mu F_{\mu\nu} \delta A^\nu\}. \quad (4.2.7)$$

Внаслідок симетрії дії відносно локальних калібрувальних перетворень і використовуючи варіацію потенціалу (4.1.17), маємо

$$0 = \delta S = -\frac{2}{g} \int d^4x \operatorname{tr}\{D^\mu F_{\mu\nu} D^\nu \omega\},$$

звідки, для довільних інфінітезимальних ω отримуємо тотожність

$$D^\nu D^\mu F_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow D_\nu^{ab} D_\mu^{bc} F^{c\mu\nu} = 0. \quad (4.2.8)$$

Ця тотожність є наслідком другої теореми Нетер щодо інваріантності дії відносно локальних симетрій і означає, що не всі рівняння руху є незалежними. В цьому випадку число рівнянь менше за число функцій, які шукаються, і в результаті розв'язки рівнянь містять довільні функції незалежних змінних.

Тотожність може бути перевірена прямим обчисленням дії коваріантних похідних. Зауважимо, що рівняння руху з полями матерії (4.2.6) вимагає коваріантного збереження струму $D^\nu J_\nu = 0$, щоб уникнути протиріччя.

В принципі можна було б додати до лагранжіану інший квадратичний за тензором $F_{\mu\nu}$ доданок

$$I = \operatorname{tr}(F_{\mu\nu} F^{*\mu\nu}) = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \operatorname{tr}(F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho}). \quad (4.2.9)$$

Розглянемо його більш детально. Використовуючи антисиметрію тензорів $F_{\mu\nu}$ і $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$, запишемо

$$\begin{aligned} I &= 2\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \operatorname{tr}[(\partial_\mu A_\nu + igA_\mu A_\nu)(\partial_\lambda A_\rho + igA_\lambda A_\rho)] = \\ &= 2\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \operatorname{tr}[(\partial_\mu A_\nu \partial_\lambda A_\rho + 2igA_\mu A_\nu \partial_\lambda A_\rho + (ig)^2 A_\mu A_\nu A_\lambda A_\rho)]. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Тепер, використовуючи циклічність tr , маємо, що останній доданок дорівнює нулю

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \operatorname{tr}[A_\mu A_\nu A_\lambda A_\rho] &= \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \operatorname{tr}[A_\nu A_\lambda A_\rho A_\mu] = \varepsilon^{\rho\mu\nu\lambda} \operatorname{tr}[A_\mu A_\nu A_\lambda A_\rho] = \\ &= -\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \operatorname{tr}[A_\mu A_\nu A_\lambda A_\rho], \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

де у другій рівності ми зробили перепозначення $\mu \rightarrow \rho \rightarrow \lambda \rightarrow \nu \rightarrow \mu$.

Другий доданок у (4.2.10) можна записати, знов таки використовуючи властивості tr , $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ і роблячи перепозначення,

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr}[A_\mu A_\nu \partial_\lambda A_\rho] = \frac{1}{3} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\lambda \text{tr}[A_\mu A_\nu A_\rho]. \quad (4.2.12)$$

Остаточно бачимо, що інваріант I може бути представлений як повна похідна

$$I = \text{tr}(F_{\mu\nu} F^{*\mu\nu}) = 2\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\lambda \text{tr}\left(A_\rho \partial_\mu A_\nu + \frac{2ig}{3} A_\mu A_\nu A_\rho\right) = 4\partial_\lambda K^\lambda, \quad (4.2.13)$$

де

$$K^\lambda = \frac{1}{2} \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \text{tr}\left(A_\mu \partial_\nu A_\rho + \frac{2ig}{3} A_\mu A_\nu A_\rho\right) \quad (4.2.14)$$

є струмом Черна—Саймонса, або топологічним струмом. Остання назва пов'язана з тим, що при виведенні ми не використовували рівняння руху. Компонента K^0 називається густиною Черна—Саймонса, вона містить тільки просторові величини,

$$K^0 = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \text{tr}\left(A_i \partial_j A_k + \frac{2ig}{3} A_i A_j A_k\right), \quad (4.2.15)$$

і відіграє важливу роль для незбереження кірального заряду в КХД.

Доданок, пропорційний I в лагранжіані, не дає внесок при отриманні рівнянь руху, тому що є повною похідною. Однак він може давати нетривіальний внесок у дію на розв'язках рівняння руху (або інших конфігурацій полів Янга—Міллса), не спадаючих достатньо швидко на нескінченності (наприклад, для інстантонних розв'язків у евклідовому просторі).

У лагранжіані інваріант I може бути доданий у вигляді

$$\mathcal{L}_\theta = \frac{\theta g^2}{32\pi^2} F_{\mu\nu}^{*a} F^{a\mu\nu}, \quad (4.2.16)$$

де θ — деякий параметр, який треба визначити з експерименту. Важливо відзначити такі наслідки присутності \mathcal{L}_θ в лагранжіані КХД. Якщо $\theta \neq 0$, тоді непертурбативні ефекти приводять до порушення СР-симетрії (або Т-симетрії) і появи електричного дипольного моменту у нейтрона. Порушення СР-симетрії виникає тому, що лагранжіан полів Янга—Міллса з урахуванням доданка (4.2.16) залишається інваріантним відносно комбінованої СРТ-симетрії, яка включає зарядове спряження С, парність (зміна знаків просторових змінних на протилежні) Р і обернення часу Т. Оскільки доданок (4.2.16) містить першу похідну за часом, то він порушує Т-симетрію, що означає внаслідок збереження СРТ-симетрії порушення комбінованої

СР-симетрії. Відсутність експериментального спостереження такого електричного дипольного моменту у нейтрона приводить до обмеження для параметра θ :

$$|\theta| < 3 \cdot 10^{-10}. \quad (4.2.17)$$

Експерименти у 2006 році давали обмеження на електричний дипольний момент нейтрона $< 3 \cdot 10^{-26}$ е · см. Експеримент, який планується провести у Швейцарії, має намір досягти межі $< 5 \cdot 10^{-28}$ е · см.

4.3. Приклади розв'язків класичних рівнянь

Хоча рівняння Янга—Міллса нелінійні, вдалось знайти досить велику кількість окремих розв'язків класичних рівнянь Янга—Міллса [61, 121, 154, 163]. У просторі-часу Мінковського існує статичний розв'язок рівнянь Янга—Міллса з групою $SU(2)$, який задається конфігурацією

$$A_0^a = 0, \quad A_i^a(\mathbf{x}) = \varepsilon_{aij} \frac{x_j}{\mathbf{x}^2}. \quad (4.3.1)$$

Це так званий магнітний монополь Ву—Янга [199], для якого електричне поле (точніше аналог електричного поля) відсутнє, $E_i^a = 0$, але присутнє нетривіальне магнітне поле, $B_i^a \neq 0$, яке має форму поля монополя, звідси й назва — магнітний монополь. Рівняння Максвелла не мають таких розв'язків. Магнітний монополь Ву—Янга (4.3.1) є сингулярним при $|\mathbf{x}| = 0$ розв'язком рівнянь Янга—Міллса, внаслідок чого енергія розбігається. Розв'язки зі скінченною енергією можна отримати, якщо ввести взаємодію зі скалярними полями. Подібні розв'язки були знайдені 'т Хоофтом і Поляковим в моделі Джорджі—Глешоу і будуть розглянуті більш детально в розділі 13.6.

Відомі також розв'язки типу плоских хвиль, які знайшов Коулмен [62], для них

$$A_1^a = A_2^a = 0, \quad A_0^a = A_3^a = x_1 f^a(x_0 + x_3) + x_2 g^a(x_0 + x_3) + h^a(x_0 + x_3), \quad (4.3.2)$$

де $f^a(x_0 + x_3)$, $g^a(x_0 + x_3)$, $h^a(x_0 + x_3)$ — деякі довільні функції своїх аргументів. Використаний анзац для потенціалів зводить рівняння Янга—Міллса до лінійних, але існують і нелінійні неабелеві хвилі [2, 3]. Наприклад, один із розв'язків для нелінійних плоских хвиль має вигляд [3]

$$A_0^a = 0, \quad A_i^a = \varepsilon_{aik} \frac{p_k}{\sqrt{\mathbf{p}^2}} F(px) + \left(\delta_{ai} - \frac{p_a p_i}{\mathbf{p}^2} \right) H(px), \quad (4.3.3)$$

де F , H — скалярні функції аргументу $px = p_0 x_0 - \mathbf{p}\mathbf{x}$; $p = (p_0, \mathbf{p})$ — деякий 4-вектор, що визначає частоту та напрямок поширення хвилі. За умови $H = \alpha F$ ($\alpha = \text{const}$) функція F задовольняє рівнянню

$$p^2 F'' + (1 + \alpha^2) F^3 = 0, \quad (4.3.4)$$

яке має розв'язок

$$F(px) = \left(\frac{p^2}{1 + \alpha^2} \right)^{1/2} \operatorname{cn} \left[px, \frac{1}{\sqrt{2}} \right], \quad p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2 > 0, \quad (4.3.5)$$

де $\operatorname{cn}(z; m)$ — еліптична функція Якобі з параметром $m = 1/\sqrt{2}$ і періодом $T = 4K(1/\sqrt{2})$ ($K(m)$ — повний еліптичний інтеграл першого роду). Як випливає з (4.3.5), амплітуда μ пов'язана з хвильовим числом і частотою співвідношенням $p^2 = \mu^2(1 + \alpha^2)$, подібні дисперсійні співвідношення характерні для нелінійних рівнянь.

Важливу роль для опису структури основного стану в квантовій хромодинаміці мають так звані інстантонні розв'язки рівнянь Янга—Міллса в евклідовому просторі, знайдені Поляковим, Новіковим, Шварцом і Тюпкіним [42]. Вони є розв'язком так званих рівнянь дуальності

$$F_{\mu\nu} = \pm F_{\mu\nu}^*, \quad (4.3.6)$$

які є диференціальними рівняннями першого порядку по похідним. Розв'язки цих рівнянь одночасно є розв'язками і рівнянь Янга—Міллса $D^\mu F_{\mu\nu} = 0$ внаслідок тотожності Б'янкі $D^\mu F_{\mu\nu}^* = 0$.

В евклідовій області дія для полів Янга—Міллса після заміни $A_\mu \rightarrow \frac{1}{g} A_\mu$ приймає вигляд

$$S_E = \frac{1}{2g^2} \int_E d^4x \operatorname{tr} F_{\mu\nu}^2, \quad (4.3.7)$$

де тензор напруженості $F_{\mu\nu}$ має таку саму форму, як у просторі Мінковського (4.1.19). Зауважимо, що в евклідовому просторі топологічний доданок (4.2.16) в дії запишеться як

$$S_\theta = \frac{i\theta}{16\pi^2} \int_E d^4x \operatorname{tr} (F_{\mu\nu}^* F_{\mu\nu}), \quad (4.3.8)$$

і є чисто уявним. Далі розглянемо додатну величину

$$\operatorname{tr}(F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}^*)^2 \geq 0,$$

яку перепишемо як

$$\operatorname{tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}^* F_{\mu\nu}^*) \geq 2|\operatorname{tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^*)|. \quad (4.3.9)$$

З властивості тензора Леві-Чивіти,

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} = 2(\delta_{\rho\kappa} \delta_{\sigma\lambda} - \delta_{\rho\lambda} \delta_{\sigma\kappa}), \quad \varepsilon_{1234} = 1,$$

випливає, що $F_{\mu\nu}^* F_{\mu\nu}^* = F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$. Отже, тоді маємо нерівність

$$\operatorname{tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \geq |\operatorname{tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^*)| \quad (4.3.10)$$

[рівність виконується для (само)антидуальних полів для яких $F_{\mu\nu} = \pm F_{\mu\nu}^*$]. Ми вже встановили, що має місце

$$\int d^4x \operatorname{tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}^*) = 4 \int d^4x \partial_\mu K_\mu, \quad (4.3.11)$$

де вираз для струму K_μ наведено в (4.2.14) (струм K_μ в евклідовому просторі зберігає вид (4.2.14)). Таким чином, для дії маємо нерівність

$$S_E = \frac{1}{2g^2} \int_E d^4x \operatorname{tr} F_{\mu\nu}^2 \geq \frac{2}{g^2} \left| \int_E d^4x \partial_\mu K_\mu \right| = \frac{2}{g^2} \left| \oint_S d\sigma_\mu K_\mu \right|, \quad (4.3.12)$$

де в останній рівності ми здійснили перехід від інтегрування по об'єму до інтегрування по нескінченно віддаленій поверхні S . З вимоги скінченності дії знаходимо, що повинно виконуватись

$$F_{\mu\nu}(x) \Rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Це означає, що для полів маємо граничну умову для вектор-потенціалу у вигляді чистої калібрувального доданка

$$A_\mu(x) \Rightarrow -iU\partial_\mu U^{-1}, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (4.3.13)$$

Конфігурації полів $A_\mu(x) = -iU\partial_\mu U^{-1}$ зуться вакуумними, оскільки для них поле $F_{\mu\nu}(x) = 0$, і вони отримуються з тривіального поля $A_\mu = 0$ за допомогою калібрувального перетворення (4.1.10). Топологічний струм K_μ на нескінченно віддаленій поверхні S_∞ поводить себе як

$$\begin{aligned} K_\mu &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \operatorname{tr}(A_\nu \partial_\lambda A_\rho + \frac{2ig}{3} A_\nu A_\lambda A_\rho) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \operatorname{tr} \left[-U \partial_\nu U^{-1} \partial_\lambda U \partial_\rho U^{-1} - \frac{2}{3} U \partial_\nu U^{-1} U \partial_\lambda U^{-1} U \partial_\rho U^{-1} \right] \Rightarrow \\ &= \frac{1}{6} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \operatorname{tr} [U \partial_\nu U^{-1} U \partial_\lambda U^{-1} U \partial_\rho U^{-1}], \quad |x| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

де ми використали продиференційоване співвідношення $UU^{-1} = 1$, тобто

$$\partial_\nu UU^{-1} + U \partial_\nu U^{-1} = 0.$$

Таким чином, для дії отримуємо нижню межу

$$S_E \geq \frac{1}{3g^2} \left| \oint_{S_\infty} d\sigma_\mu \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \operatorname{tr} [U \partial_\nu U^{-1} U \partial_\lambda U^{-1} U \partial_\rho U^{-1}] \right|, \quad (4.3.15)$$

яка не залежить від поля $A_\mu(x)$, а тільки від групового елемента $U(x)$.

У випадку симетрії $SU(2)$ груповий елемент $U(x)$ залежить від трьох групових параметрів $\varphi^a(x)$, $a = 1, 2, 3$, які змінюються в межах $0 \leq \varphi^a(x) \leq \pi$, тобто значення $\varphi^a(x)$ пробігають значення на тривимірній сфері радіусом π (сфера S^3). Інтегрування в x -просторі на нескінченності також йде по сфері S^3_∞ . Таким чином, $U(x)|_{|x|=\infty}$ відображає сферу в сферу, $S^3_\infty \rightarrow S^3$. Такі неперервні диференційовні відображення характеризуються гомотопічним класом — n -кратним покриттям однієї сфери іншою (класи Черна—Понтрягіна). Для інших груп будемо мати відображення $S^3_\infty \rightarrow G$ з гомотопічною групою $\pi_3(G)$. Саме завдяки нетривіальним топологічним характеристикам вектор-потенціали у формі чисто вакуумної конфігурації (!) приводять до існування у загальному випадку в теорії неабелевих полів топологічно нетривіальних секторів.

Отже, для дії маємо нерівність

$$S_E \geq \frac{8\pi^2}{g^2} |n|, \quad (4.3.16)$$

де ціле число (топологічний інваріант Черна—Понтрягіна)

$$n = \frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \operatorname{tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^*) = \frac{1}{24\pi^2} \oint_S d\sigma_\mu \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \operatorname{tr}[U \partial_\nu U^{-1} U \partial_\lambda U^{-1} U \partial_\rho U^{-1}]. \quad (4.3.17)$$

Прикладом розв'язків самодуального рівняння $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^*$ з топологічним числом $n = 1$ є наступна конфігурація [42]

$$A_\mu(x) = \frac{-ix^2}{x^2 + a^2} U \partial_\mu U^\dagger, \quad U(x) = \frac{x_4 - i\sigma\mathbf{x}}{\sqrt{x^2}}, \quad x = (\mathbf{x}, x_4). \quad (4.3.18)$$

Цей розв'язок можна записати в дещо іншій формі

$$A_\mu(x) = \frac{\eta_{\mu\nu}^i x_\nu \sigma_i}{x^2 + a^2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4, \quad (4.3.19)$$

$$\eta_{\mu\nu}^i = \varepsilon_{i\mu\nu 4} + \delta_{i\mu} \delta_{\nu 4} - \delta_{i\nu} \delta_{\mu 4},$$

де $\eta_{\mu\nu}^i$ — тензор, введений 'т Хоофтом [186], який задовольняє умові самодуальності $\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \eta_{\lambda\rho}^i = \eta_{\mu\nu}^i$. Тут σ — матриці Паулі, a — довільний параметр розмірності довжини, який характеризує розмір інстантона. Довільність параметра a відображає той факт, що класична теорія Янга—Міллса є масштабно інваріантною, тому, якщо існує розв'язок з одним розміром, повинен існувати розв'язок з будь-яким іншим розміром.

На нескінченності конфігурація поля (4.3.18) очевидно прямує до вакуумної. Для тензора напруженості отримуємо

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^* = \frac{2a^2}{(x^2 + a^2)^2} \eta_{\mu\nu}^i \sigma_i. \quad (4.3.20)$$

Розв'язок описує локалізовану в просторі і часі конфігурацію поля з параметром локалізації a (саме в цій області $F_{\mu\nu} \neq 0$), яка називається інстантоном (від англійського слова instant — миттєвий).

Розв'язок з топологічним числом $n = -1$ (антиінстантон) має форму, подібну до (4.3.19)

$$A_\mu(x) = \frac{\bar{\eta}_{\mu\nu}^i x_\nu \sigma_i}{x^2 + a^2}, \quad \bar{\eta}_{\mu\nu}^i = \varepsilon_{i\mu\nu 4} - \delta_{i\mu} \delta_{\nu 4} + \delta_{i\nu} \delta_{\mu 4}. \quad (4.3.21)$$

Тензор $\bar{\eta}_{\mu\nu}^i$ задовольняє умову антисамодуальності $\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \bar{\eta}_{\lambda\rho}^i = -\bar{\eta}_{\mu\nu}^i$ і, відповідно, $A_\mu(x)$ є розв'язком рівняння антисамодуальності $F_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}^*$. Наведені інстантонні розв'язки локалізовані на початку координат, але внаслідок трансляційної інваріантності рівнянь ми маємо також розв'язки, де координата x замінюється на $x - x_0$, що дає 4 колективні координати x_0 — центра інстантона. Виконуючи $SU(2)$ -перетворення з постійною фазою, отримуємо найбільш загальний одноінстантонний розв'язок, який залежить від 8 колективних параметрів.

Крім інстантонних розв'язків з топологічним числом $n = \pm 1$ були знайдені багатоінстантонні розв'язки з $n = 2, 3$ та існують часткові розв'язки для вищих n . Багатоінстантонні розв'язки для групи $SU(N)$ мають загалом $4Nn$ колективних змінних. Серед цих розв'язків є конфігурації, які виглядають як добре розділені інстантони з $n = 1$, кожен з яких має $4N$ колективних змінних, що описують його положення, масштаб і орієнтацію. Однак, коли інстантони перекриваються, ця інтерпретація стає невірною і «газ» інстантонів швидше нагадує рідину.

У загальному випадку інстантонні розв'язки з довільним топологічним числом n дають непертурбативний внесок у функціональний інтеграл

$$e^{-S_{\text{inst}}} \sim e^{-8\pi^2 |n|/g^2} e^{i\theta n}, \quad (4.3.22)$$

який експоненційно малий для $g \ll 1$. Всі класичні вакууми з $F_{\mu\nu} = 0$ описуються полями $A_\mu(x) = -iU \partial_\mu U^\dagger$ і розрізняються топологічним числом N . У просторі-часі Мінковського інстантони з топологічним числом n описують квантове тунелювання [122, 123]. Причиною того, що інстантони відповідають квантовим тунельним процесам є те, що інстантони з топологічним числом n є розв'язками рівнянь руху в уявному часі і описують підбар'єрний перехід між класичними вакуумами $|N\rangle$ і $|N + n\rangle$ з нульовою енергією.

Більш детально про інстантони та інші розв'язки класичних рівнянь Янга—Міллса можна прочитати в [24, 157].

Теорія неабелевих калібрувальних полів широко використовує поняття і положення груп і алгебр Лі. Тому в наступному параграфі ми розглянемо ці положення і розпочнемо з основних відомостей із теорії алгебр Лі.

4.4. Класифікація та представлення груп і алгебр Лі

У квантовій механіці та квантовій теорії поля відіграють особливу роль і є дуже важливими унітарні оператори, які діють у векторному просторі квантових станів [7, 18, 61, 89, 120, 121]. Групові перетворення звичайно записують у вигляді матричної експоненти (4.1.1) або для інфінітезимального елемента

$$U(\omega) \simeq 1 + i\omega^a T_a, \quad (4.4.1)$$

де генератори групи задовольняють комутаційним співвідношенням

$$[T_a, T_b] = i f_{ab}^c T_c$$

і тотожності Якобі

$$[T_a, [T_b, T_c]] + [T_b, [T_c, T_a]] + [T_c, [T_a, T_b]] = 0, \quad (4.4.2)$$

звідки, використовуючи комутаційні співвідношення (4.1.3), отримуємо тотожність для структурних групових констант f_{ab}^c , яку вони повинні задовольняти:

$$\begin{aligned} f_{bc}^d [T_a, T_d] + f_{ca}^d [T_b, T_d] + f_{ab}^d [T_c, T_d] &= 0, \\ \Rightarrow f_{bc}^d f_{ad}^e + f_{ca}^d f_{bd}^e + f_{ab}^d f_{cd}^e &= 0. \end{aligned}$$

Перепишемо останню рівність у вигляді

$$f_{ad}^e f_{bc}^d - f_{bd}^e f_{ac}^d = f_{ab}^d f_{dc}^e \quad (4.4.3)$$

і визначимо матриці

$$(t_a)_c^b \equiv i f_{ac}^b. \quad (4.4.4)$$

Ці матриці утворюють так зване приєднане (adjoint) представлення алгебри Лі та задовольняють ті самі комутаційні співвідношення

$$[t_a, t_b] = i f_{ab}^d t_d. \quad (4.4.5)$$

Матриці t_a реалізують представлення алгебри Лі з розмірністю, яка дорівнює $d(G) \times d(G)$, де $d(G)$ — розмірність самої алгебри. Для групи $SU(2)$ матриці t_a будуть

$$(t_a)_{bc} = i \varepsilon_{abc}, \quad a, b, c = 1, 2, 3, \quad (4.4.6)$$

або в явному матричному вигляді

$$\begin{aligned} (t_1)_{bc} = i \varepsilon_{1bc}, \quad t_1 &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ (t_2)_{bc} = i \varepsilon_{2bc}, \quad t_2 &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ (t_3)_{bc} = i \varepsilon_{3bc}, \quad t_3 &= i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Це відомі генератори групи обертань, які відповідають спіну 1. Для групи $SU(3)$ генераторами є $T^a = \lambda^a/2$, де λ^a — матриці Гелл-Манна,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & & (4.4.8) \\ \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Матриці Гелл-Манна безслідові, тобто для них $\text{tr } \lambda^a = 0$. В алгебрі $su(3)$ можна виділити 3 незалежні підалгебри $su(2)$: $\{\lambda_1, \lambda_2, X\}$, $\{\lambda_4, \lambda_5, Y\}$, $\{\lambda_6, \lambda_7, Z\}$, де X, Y, Z є лінійними комбінаціями діагональних матриць λ_3 і λ_8 . Структурні константи можна порахувати за формулою

$$f_{ab}^c = \frac{1}{4i} \text{tr}([\lambda_a, \lambda_b]\lambda_c). \quad (4.4.9)$$

Вони є антисиметричними за всіма індексами, тому надалі опускаємо верхній індекс, $f_{cab} \equiv f_{ab}^c$. Для нетривіальних констант групи $SU(3)$ маємо

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1, & f_{147} &= f_{246} = f_{257} = f_{345} = \frac{1}{2}, \\ f_{156} &= f_{367} = -\frac{1}{2}, & f_{458} &= f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

Перейдемо тепер до класифікації алгебр Лі.

Найпростішою групою є група $U(1)$ фазових перетворень, $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$, з якою ми вже мали справу в електродинаміці. Генератор цієї групи пропорційний одиничній матриці, і очевидно комутує з усіма іншими матрицями.

Якщо алгебра не містить таких комутуючих елементів, тоді вона називається *напівпростою*. Якщо до того ж елементи алгебри не можуть бути розбиті на два взаємно комутуючих набори, тоді алгебра називається *простою*.

У загальному випадку алгебра Лі є прямою сумою неабелевих простих компонент і додаткових абелевих компонент, наприклад, Стандартна модель сильних і електрослабких взаємодій має калібрувальну групу симетрії, яка є тензорним добутком двох простих неабелевих груп та однієї абелевої групи

$$SU_c(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1), \quad (4.4.11)$$

а алгебра позначається відповідно

$$su(3) \oplus su(2) \oplus u(1). \quad (4.4.12)$$

Ми будемо вважати, що число генераторів скінченно і що, крім того, матриця, яка складається з генераторів приєднаного представлення (із структурних констант),

$$D_{ab} = \text{tr}(T_a T_b) = D_{ba} = -f_{ad}^c f_{bc}^d, \quad (4.4.13)$$

додатно визначена (компактність групи Лі). Матриця D_{ab} є дійсною для унітарних груп, для яких $T^\dagger = T$, і використовується як метричний тензор.

Наведемо приклад алгебри Лі некомпактної групи з комутаційними співвідношеннями

$$[t_1, t_2] = -it_3, \quad [t_2, t_3] = it_1, \quad [t_3, t_1] = it_2 \quad (4.4.14)$$

і структурними константами

$$f_{12}^3 = -f_{21}^3 = -1, \quad f_{23}^1 = -f_{32}^1 = 1, \quad f_{31}^2 = -f_{13}^2 = 1$$

(всі інші константи нулі). Приведемо явний вигляд цих матриць і матриці D_{ab} :

$$t_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad t_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_{ab} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матриця D_{ab} не є додатно визначеною, тому наведена алгебра є алгеброю Лі некомпактної групи. В даному випадку це є алгебра Лі некомпактної групи $O(2, 1)$ — групи Лоренца в розмірності $2 + 1$.

Кіллінг і Картан в XIX столітті навели повну класифікацію всіх можливих простих компактних груп і алгебр Лі. Вони встановили, що існують 4 нескінченні серії простих алгебр Лі, які відповідають компактным групам $SU(N)$, $O(2n + 1)$, $O(2n)$, $Sp(N)$.

1. Унітарні перетворення

$$\eta_a \rightarrow U_{ab} \eta_b, \quad \xi_a \rightarrow U_{ab} \xi_b \quad (4.4.15)$$

у комплексному N -вимірному просторі зі скалярним добутком $\eta_a^* \xi_a$, $a = 1, \dots, N$. Скалярний добуток зберігається тому, що для унітарних перетворень виконуються рівняння

$$UU^+ = U^+U = 1.$$

Усуваючи чисто фазові $U(1)$ перетворення $\xi \rightarrow e^{i\alpha}\xi$, отримуємо просту групу Лі $SU(N)$ — це всі унітарні $N \times N$ матриці, які задовольняють умові $\det U = 1$, а генератори — умовам $T^+ = T$ і $\text{tr } T^a = 0$.

Такі унімодулярні матриці утворюють серію $A_n : SU(n+1)$, $n+1 = N$, n — ранг матриці. Ранг алгебри співпадає з числом незалежних діагональних матриць (підалгебра Картана).

Для матриць $N \times N$, які задовольняють співвідношенню $T^\dagger = T$, існує $\frac{N^2 - N}{2}$ недіагональних (комплексних) елементів. Тоді дійсних параметрів з врахуванням $\text{Tr } T = 0$ буде

$$2 \cdot \frac{N^2 - N}{2} + (N - 1) = N^2 - 1,$$

тобто для групи $SU(N)$ маємо $N^2 - 1$ генераторів.

2. Група ортогональних перетворень у N -вимірному дійсному просторі (серії $B_n, D_n : SO(2n+1), SO(2n)$) діє за правилом

$$\eta_a \rightarrow O_{ab}\eta_b, \quad \xi_a \rightarrow O_{ab}\xi_b. \quad (4.4.16)$$

Ця група зберігає скалярний добуток $\eta_a\xi_a$, що для матриці O означає

$$O^T O = 1,$$

де O^T — транспонована матриця. Це ортогональна група $O(N)$ — група обертань в N вимірах. Якщо $\det O = 1$, то це буде група обертань $SO(N)$ — спеціальна ортогональна група.

Матриці O — дійсні, і якщо їх записати у вигляді

$$O = \exp(iA),$$

то матриці A мають властивості

$$A^* = -A, \quad A^+ = A, \quad A^T = -A,$$

тобто є $\frac{N(N-1)}{2}$ незалежних матриць, тому розмірність групи $d(SO(N)) = N(N-1)/2$. Число N пов'язано з рангом алгебри n : $N = 2n+1$, або $N = 2n$, тому виділяють дві серії $SO(2n+1)$ і $SO(2n)$.

3. Група симплектичних перетворень N -вимірних дійсних векторів (серія C_n).

Це група перетворень дійсних векторів, яка зберігає антисиметричний внутрішній добуток

$$\eta_a E_{ab} \xi_b, \quad E_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad I \in \frac{N}{2} \times \frac{N}{2} \text{ одинична матриця, } (4.4.17)$$

Розмірності груп Лі, їх фундаментальних представлень
та значення операторів Казіміра

| G | $SU(N)$ | $SO(N)$ | $Sp(N)$ | E_6 | E_7 | E_8 | F_4 | G_2 |
|----------|-----------|-----------------------|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\dim G$ | $N^2 - 1$ | $\frac{1}{2}N(N - 1)$ | $\frac{1}{2}N(N + 1)$ | 78 | 133 | 248 | 52 | 14 |
| $\dim F$ | N | N | N | 27 | 56 | 248 | 6 | 7 |
| $C_2(G)$ | N | $\frac{N}{2} - 1$ | $2N + 1$ | 2 | 3/2 | 1/2 | 3/2 | 2 |

і, очевидно, N повинно бути парним. Для симплектичної групи $Sp(N)$ маємо $\frac{N(N+1)}{2}$ генераторів.

Існує ще п'ять виключних груп, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 , розмірності цих груп наведено в таблиці 1. Також має місце 4 ізоморфізми між алгебрами Лі груп

$$SU(2) \simeq SO(3) \simeq Sp(2), \quad Sp(4) \simeq SO(5), \quad SU(4) \simeq SO(6). \quad (4.4.18)$$

Поля перетворюються по представленням груп Лі. Для даної групи симетрії G скінченновимірне унітарне представлення задається набором t_r^a ермітових $d(r) \times d(r)$ матриць ($d(r)$ — розмірність представлення).

Довільне представлення розкладається на суму незвідних представлень, яке у визначеному базисі має блоково-діагональний вигляд. Генератори t_r^a даного представлення ортонормовані

$$D^{ab} = \text{tr} \left(t_r^a t_r^b \right) = T(r) \delta^{ab}, \quad (4.4.19)$$

де $T(r)$ — константа для кожного r і $T(r)$ — дійсні числа. Для структурних коефіцієнтів з комутаційних співвідношень маємо

$$f_{ab}^c = \frac{1}{iT(r)} \text{tr} \left([t_{ar}, t_{br}] t_{cr} \right).$$

Тому f_{ab}^c антисиметричні по всім індексам і можна не розрізняти верхні та нижні індекси $f_{ab}^c \equiv f_{cab}$.

Важливе значення для характеристики представлення має квадратичний оператор Казіміра, який визначається формулою

$$T^2 = T_a T_a, \quad (4.4.20)$$

де по індексу a йде підсумовування. Оператор Казіміра комутує з усіма генераторами

$$[T_b, T_a T_a] = [T_b, T_a] T_a + T_a [T_b, T_a] = i f_{ba}^c T_c T_a + i T_a f_{ba}^c T_c = i f_{ba}^c \{T_c, T_a\} = 0. \quad (4.4.21)$$

Тому, згідно з лемою Шура, оператор Казиміра в незвідному представленні r пропорційний одиничній матриці

$$t_{ar}t_{ar} = C_2(r) \times \mathbb{1}, \quad (4.4.22)$$

де $\mathbb{1}$ — одинична матриця розмірності $d(r) \times d(r)$. Для приєданого представлення оператор Казиміра пов'язаний із структурними константами формулою

$$f^{acd}f^{bcd} = C_2(G)\delta^{ab}. \quad (4.4.23)$$

Використовуюючи нормування (4.4.19),

$$\text{tr}(t_r^a t_r^b) = T(r)\delta^{ab},$$

і згортаючи з δ^{ab} , отримуємо співвідношення між розмірностями групи $d(G)$ і представлення $d(r)$, Казиміром $C_2(r)$ і нормувальними константами $T(r)$:

$$d(r)C_2(r) = T(r)d(G). \quad (4.4.24)$$

Очевидно, для приєданого представлення, $r = G$, маємо $C_2(G) = T(G)$. Для групи $SU(2)$ генератори фундаментального представлення мають вигляд $t_2^a = \sigma^a/2$, при цьому $\text{tr}(t_2^a t_2^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$. Для $SU(N)$ вибираємо генератори так, щоб три з них співпадали з генераторами $SU(2)$. Тоді для будь-якої матриці фундаментального представлення

$$\text{tr}(t_N^a t_N^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}. \quad (4.4.25)$$

Це фіксує $T(r)$ і $C_2(r)$ для всіх представлень. Дійсно, для фундаментального представлення $T(N) = \frac{1}{2}$, і, використовуючи (4.4.24), знаходимо

$$NC_2(N) = \frac{1}{2}(N^2 - 1) \Rightarrow C_2(N) = \frac{N^2 - 1}{2N}. \quad (4.4.26)$$

Оскільки кварки в квантовій хромодинаміці належать до фундаментального представлення групи $SU(3)$, то для них оператор Казиміра $C_2(3) = 4/3$.

Щоб обчислити оператор Казиміра в приєданому представленні, побудуємо його з добутку представлень N і комплексно спряженого \bar{N} . Тензорний добуток двох представлень є представлення розмірності $d(r_1) \cdot d(r_2)$, і може бути записаний як тензор A_{pq} . У загальному випадку такий добуток може бути розкладений у пряму суму незвідних представлень. Символічно маємо $r_1 \times r_2 = \sum r_i$. Матриці генераторів у представленні $r_1 \times r_2$ дорівнюють

$$t_{r_1 \times r_2}^a = t_{r_1}^a \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes t_{r_2}^a, \quad (4.4.27)$$

а оператор Казиміра

$$(t_{r_1 \times r_2}^a)^2 = (t_{r_1}^a)^2 \otimes \mathbb{1} + 2t_{r_1}^a \otimes t_{r_2}^a + \mathbb{1} \otimes (t_{r_2}^a)^2. \quad (4.4.28)$$

Беремо слід, де середній доданок в останній формулі дає нуль

$$\text{tr}(t_{r_1 \times r_2}^a)^2 = (C_2(r_1) + C_2(r_2))d(r_1)d(r_2).$$

З іншого боку,

$$\text{tr}(t_{r_1 \times r_2}^a)^2 = \sum C_2(r_i)d(r_i). \quad (4.4.29)$$

Тоді має місце тотожність

$$(C_2(r_1) + C_2(r_2))d(r_1)d(r_2) = \sum_i C_2(r_i)d(r_i). \quad (4.4.30)$$

Використаємо цю тотожність для добутку представлень $N \times \bar{N}$, яке розкладається на суму двох незвідних представлень

$$N \times \bar{N} = 1 + (N^2 - 1), \quad (4.4.31)$$

де одиниця (синглетне представлення) відповідає сліду початкової матриці $N \times \bar{N}$, а другий доданок — безслідовій матриці що залишилася (приєднане представлення). Використовуючи (4.4.30),

$$2 \cdot \frac{N^2 - 1}{2N} \cdot N \cdot N = 0 + C_2(G)(N^2 - 1),$$

знаходимо значення оператора Казиміра для приєданого представлення

$$C_2(G) = N.$$

Очевидно, що для приєданого представлення нормуючий параметр дорівнює $T(G) = N$. Розмірності приєднаних і фундаментальних представлень інших груп, а також значення квадратичних операторів Казиміра для приєднаних представлень наведено в таблиці 1. Зауважимо, що для групи E_8 приєднане представлення є мінімальним, тобто одночасно і фундаментальним.

4.5. Квантування полів Янга—Міллса

Тепер у нас все готово для того, щоб перейти до квантування полів Янга—Міллса [22, 35, 61, 76, 121, 154]. Почнемо з лагранжевої густини для полів Янга—Міллса

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c. \quad (4.5.1)$$

Імпульс (точніше, густина імпульсу) за визначенням є

$$\Pi_\mu^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^{a\mu}} = -\frac{1}{2} F_{\lambda\rho}^b \frac{\partial F^{b\lambda\rho}}{\partial \dot{A}^{a\mu}} = -\frac{1}{2} F_{\lambda\rho}^a \left(\delta_0^\lambda \delta_\mu^\rho - \delta_0^\rho \delta_\mu^\lambda \right) = F_{\mu 0}^a. \quad (4.5.2)$$

Звідси маємо первинну в'язь $\Pi_0^a = 0$, а також узагальнений імпульс

$$\Pi_i^a = F_{i0}^a = \partial_i A_0^a - \partial_0 A_i^a - g f^{abc} A_i^b A_0^c = -\partial_0 A_i^a + (D_i A_0)^a, \quad (4.5.3)$$

де $\Pi_i^a = F_{i0}^a = E_i^a$ є аналогом електричного поля E_i . Аналогом магнітного поля є $B_i^a = (1/2)\varepsilon_{ijk} F_{jk}^a = \varepsilon_{ijk} (D_j A_k)^a$. Остання рівність є коваріантним аналогом відомого визначення магнітного поля в електродинаміці $B_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k$.

Використовуючи означення імпульсів, ми можемо переписати лагранжеву густину, усунувши швидкості (часові похідні)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} [2F_{\mu 0}^a F^{a\mu 0} + F_{ij}^a F^{a ij}] = \frac{1}{2} (\Pi_i^a)^2 - \frac{1}{4} F_{ij}^a F_{ij}^a. \quad (4.5.4)$$

Відповідно, для гамільтонової густини знаходимо

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \Pi_\mu^a \dot{A}^{a\mu} - \mathcal{L} = \Pi_0^a \dot{A}_0^a - \Pi_i^a \dot{A}_i^a - \frac{1}{2} (\Pi_i^a)^2 + \frac{1}{4} F_{ij}^a F_{ij}^a = \\ &= \Pi_i^a (\Pi_i^a - D_i^{ac} A_0^c) - \frac{1}{2} (\Pi_i^a)^2 + \frac{1}{4} F_{ij}^a F_{ij}^a = \\ &= \frac{1}{2} (\Pi_i^a)^2 + \frac{1}{4} F_{ij}^a F_{ij}^a - \Pi_i^a D_i^{ac} A_0^c, \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

і для гамільтоніана маємо

$$\mathbb{H} = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\Pi_i^a)^2 + \frac{1}{4} F_{ij}^a F_{ij}^a + A_0^c D_i^{ca} \Pi_i^a \right]. \quad (4.5.6)$$

В останньому доданку проведено інтегрування частинами. Елементарні одночасні дужки Пуассона задаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} \{ \Pi_\mu^a(\mathbf{x}), \Pi_\nu^b(\mathbf{y}) \} &= 0 = \{ A_\mu^a(\mathbf{x}), A_\nu^b(\mathbf{y}) \}, \\ \{ \Pi_\mu^a(\mathbf{x}), A_\nu^b(\mathbf{y}) \} &= -\delta^{ab} g_{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

Змінні $\Pi_\mu^a(\mathbf{x}), A_\nu^b(\mathbf{x})$ утворюють фазовий простір Γ . З умови збереження первинної в'язі $\dot{\Pi}_0^a = \{ \Pi_0^a, H \} = 0$ одержуємо вторинну в'язь $D_i^{ab} \Pi_i^b = 0$. Продовжуючи процедуру знаходження в'язей, можна переконатись, що знайдена вторинна в'язь зберігається. Тому інших в'язей не виникає. В'язі $\Pi_0^a = 0, D_i^{ab} \Pi_i^b = 0$ виділяють фазовий підпростір M . Позначаючи

$$\Phi^a(x) \equiv D_i^{ab} \Pi_i^b,$$

можна довести, що ці в'язі задовольняють алгебрі

$$\{\Phi^a(\mathbf{x}), \Phi^b(\mathbf{y})\} = gf^{abc}\Phi^c(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.5.8)$$

Тому Π_0^a і Φ^a — в'язі 1-го роду. Повна гамільтонова густина

$$\mathcal{H}_T = \frac{1}{2}\Pi_i^{a2} + \frac{1}{4}F_{ij}^a F_{ij}^a + v_0^a \Pi_0^a + u^a \Phi^a, \quad (4.5.9)$$

де ми додали лінійну комбінацію в'язей.

Виберемо калібрувальні умови у вигляді (кулонівська калібровка)

$$A_0^c = 0, \quad \chi_a \equiv \partial_i A_i^a(x) = 0. \quad (4.5.10)$$

Нетривіальні дужки Пуассона калібровок із в'язями будуть

$$\{A_0^a, \Pi_0^b\} = \delta^{ab}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (4.5.11)$$

$$\{\partial_i A_i^a(\mathbf{x}), D_j^{bc}\Pi_j^c(\mathbf{y})\} = \partial_i^x D_i^{xab}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \equiv M^{ab}(x, y). \quad (4.5.12)$$

Запишемо функціональний інтеграл відповідно до загальної теорії систем із в'язями

$$\begin{aligned} Z &= N \int \mathcal{D}A_0^a \mathcal{D}A_i^a \mathcal{D}\Pi_0^a \mathcal{D}\Pi_i^a \exp i \int d^4x (\Pi_\mu^a \dot{A}^\mu - \mathcal{H}_T) \times \\ &\times \delta(A_0^a)\delta(\partial_i A_i^a)\delta(\Pi_0^a)\delta(D_i^{ab}\Pi_i^b) \text{Det } \delta^{ab}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \text{Det } M^{ab}(x, y) = \\ &= N' \int \mathcal{D}A_i^a \mathcal{D}\Pi_i^a \exp i \int d^4x \left[-\Pi_i^a \dot{A}_i - \frac{1}{2}(\Pi_i^a)^2 - \frac{1}{4}F_{ij}^a F_{ij}^a \right] \times \\ &\times \delta(\partial_i A_i^a) \text{Det } M^{ab}(x, y)\delta(D_i^{ab}\Pi_i^b), \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

де в останній рівності проведено інтегрування по A_0^a , Π_0^a і тривіальний детермінант включений у константу N . Для того щоб провести інтегрування за імпульсами, скористаємось представленням функціональної дельта-функції у вигляді відповідного функціонального інтеграла по новій змінній A_0^a ,

$$\begin{aligned} Z &= N \int \mathcal{D}A_i^a \mathcal{D}A_0^a \mathcal{D}\Pi_i^a \exp i \int d^4x \left[-\Pi_i^a \dot{A}_i - \frac{1}{2}(\Pi_i^a)^2 - \frac{1}{4}(F_{ij}^a)^2 - A_0^a D_i^{ab}\Pi_i^b \right] \times \\ &\times \delta(\partial_i A_i^a) \text{Det } M^{ab}(x, y). \end{aligned} \quad (4.5.14)$$

Інтеграл за імпульсами має гаусову форму, провівши по ним інтегрування аналогічно тому, як це робилося в КЕД, отримуємо

$$Z = N \int \mathcal{D}A_\mu^a \exp i \int d^4x \left(-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 \right) \delta(\partial_i A_i^a) \text{Det } M^{ab}(x, y). \quad (4.5.15)$$

Відзначимо присутність в мірі інтегрування в (4.5.15) детермінанта Фаддеева—Попова поряд з дельта-функцією, що фіксує калібровку.

4.6. Квантування неабелевих теорій методом Фаддєєва—Попова

Завершуючи наше вивчення квантування неабелевих калібрувальних полів, ми розглянемо в цьому параграфі метод Фаддєєва—Попова і визначимо так звані «духові» поля. Знов таки, стартуємо з наївного запису функціонального інтеграла для полів Янга—Міллса

$$Z = N \int \mathcal{D}A_\mu^a \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{2g^2} \text{tr} F_{\mu\nu}^2 \right) \right]. \quad (4.6.1)$$

Дія інваріантна відносно калібрувальних перетворень

$$A_\mu \rightarrow A_\mu^U = U A_\mu U^\dagger - iU \partial_\mu U^\dagger.$$

Інтеграл Z розбігається при інтегруванні по орбіті A_μ^U , навіть в евклідовому формулюванні, тому що для зміни A_μ вздовж орбіти у функціональному інтегралі немає ніякого ріжучого фактора, і Z пропорційний об'єму орбіти $\prod_x \mathcal{D}U(x)$. Іншими словами, точками фізичного конфігураційного простору полів Янга—Міллса є класи еквівалентності локальних полів відносно дії групи калібрувальних перетворень, і тому необхідно інтегрувати у функціональному інтегралі по класах еквівалентності. Ідея полягає в тому, щоб відокремити фактор об'єму орбіти у визначенні $Z(J)$. Щоб пояснити цю ідею розглянемо звичайний інтеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{-\frac{1}{2}(x-y)^2},$$

який збігається, якщо ми інтегруємо вздовж x або y , але розбігається, якщо інтегрувати вздовж прямої (орбіти) $x - y = \text{const}$. Зробимо заміну змінних $X = x - y$, $Y = x + y$,

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dY dX e^{-\frac{1}{2}X^2}.$$

Ми виділили явним чином розбіжність, пов'язану з інтегруванням по Y . Ми хочемо аналогічним чином виділити розбіжність в інтегралі (4.6.1). Для цього вибирається гіперповерхня фіксованої калібровки (калібрувальна умова)

$$f_a(A_\mu) = 0, \quad a = 1, \dots, n, \quad (4.6.2)$$

яка перетинає орбіту тільки один раз (див. рис. 4). Інтегрування буде проводитись по гіперповерхні $f_a(A_\mu) = 0$. В принципі умова $f_a(A_\mu) = 0$ довільна, але зазвичай вибирають лінійні коваріантні калібровки як найбільш прості. Наприклад, кулонівська калібровка та калібровка Лоренца

задаються умовами: $f_a(A_\mu) = \partial_i A_i^a = 0$ — кулонівська калібровка, $f_a(A_\mu) = \partial_\mu A_\mu^a = 0$ — калібровка Лоренца, і є типовими прикладами того, як визначається ця гіперповерхня.

Будемо припускати, що для полів на гіперповерхні $f_a(A_\mu) = 0$ рівняння

$$f_a(A_\mu^U) = 0 \quad (4.6.3)$$

має єдиний розв'язок $U = 1$ для даного A_μ . Це не завжди виконується для довільного вибору гіперповерхні, додаткові точки перетину орбіти з гіперповерхнею називаються копіями Грібова.

Найпростіший спосіб виділити внесок гіперповерхні в інтегралі — вставити дельта-функцію $\delta(f(A))$, але це змінило б сам інтеграл. Ідея полягає в тому, щоб вставити величину, яка дорівнює одиниці, але містить $\delta(f(A))$. Розглянемо приклад одновимірного інтеграла по змінній ϵ (параметр калібрувального перетворення), і ми хочемо обмежити його до «поверхні» $f(\epsilon) = 0$. Маємо тотожність

$$1 = \int df \delta(f) = \int df(\epsilon) \delta(f(\epsilon)) = \int d\epsilon \left| \frac{df(\epsilon)}{d\epsilon} \right| \delta(f(\epsilon)). \quad (4.6.4)$$

Цю ідею Фаддеев і Попов узагальнили на випадок функціонального інтеграла, де ϵ стають калібрувальними функціями, залежними від координат.

Повертаючись до інтеграла (4.6.1), зауважимо, що міра інтегрування залишається інваріантною вздовж орбіти $\mathcal{D}A_\mu^U = \mathcal{D}A_\mu$. Об'єм орбіти, визначений як $\int \prod_x \mathcal{D}U(x)$, — це добуток мір на групі в кожній точці x . Інтегрування функцій $f(g)$, визначених на груповому многовиді G , задається формулою $\int_G d\mu(g) f(g)$, де $d\mu(g)$ — інваріантна міра (міра Хаара) на групі.

Для функцій на многовиді виконується $\int_G d\mu(g) f(g \cdot g') = \int_G d\mu(g) f(g)$ або $\int_G d\mu(g) f(g' \cdot g) = \int_G d\mu(g) f(g)$, де $g \cdot g'$ (або $g' \cdot g$) — групове множення, і g' — фіксований, але довільний груповий елемент. Конкретний вигляд міри залежить від параметризації групових елементів. Інтегрування на груповому многовиді має сенс, якщо область інтегрування за груповими параметрами є компактною.

Визначимо $\Delta_f(A)$ — функціонал за допомогою рівняння

$$\Delta_f(A) \int \prod_x \mathcal{D}U(x) \delta(f(A^U(x))) = 1, \quad (4.6.5)$$

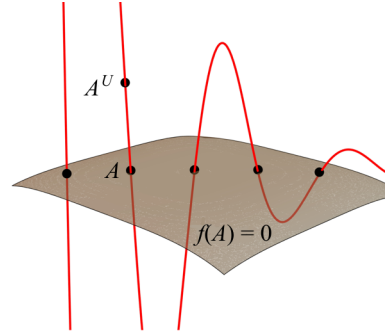


Рис. 4. Калібрувальні орбіти і поверхня, що фіксує калібровку

який очевидно залежить від поля A_μ і вибраної калібрувальної умови f . Покажемо, що функціонал $\Delta_f(A)$ — калібрувально інваріантний. Обчислимо його для полів, які зв'язані з A_μ калібрувальним перетворенням

$$\Delta_f(A^{U'}) \int \prod_x \mathcal{D}U(x) \delta(f(A^{U'U}(x))) = 1,$$

і внаслідок інваріантності міри на групі

$$\int \prod_x \mathcal{D}(U'U)(x) = \int \prod_x \mathcal{D}U(x),$$

отримуємо

$$\Delta_f(A^{U'}) = \Delta_f(A). \quad (4.6.6)$$

Вставимо одиницю (4.6.5) у функціональний інтеграл (4.6.1)

$$\int \mathcal{D}A_\mu \int \prod_x \mathcal{D}U(x) \prod_{x,a} \delta(f(A_\mu^U)) e^{iS(A)} \Delta_f(A).$$

Виконуючи калібрувальне перетворення $A \rightarrow A^{U^{-1}}$ і використовуючи інваріантність $\Delta_f(A)$, $S(A)$, $\mathcal{D}A_\mu$, приходимо до

$$\int \prod_x \mathcal{D}U(x) \int \mathcal{D}A_\mu \prod_a \delta(f^a(A_\mu)) \Delta_f(A) e^{iS(A)}, \quad (4.6.7)$$

де об'єм калібрувальної орбіти виділяється (факторизується) в явному вигляді. Цей об'єм можна включити в нормуючий множник N , який скорочується у виразах для зв'язних кореляційних функцій, оскільки вони задаються відношенням двох інтегралів

$$\langle F[A] \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A_\mu F[A] \prod_a \delta(f^a(A_\mu)) \Delta_f(A) e^{iS(A)}}{\int \mathcal{D}A_\mu \prod_a \delta(f^a(A_\mu)) \Delta_f(A) e^{iS(A)}}. \quad (4.6.8)$$

Зауважимо, що інтеграл (4.6.7) не залежить від вибору калібрувальної функції f . Дійсно, вставляючи одиницю з іншою функцією f' , приходимо до (4.6.7), де f замінюється на f' . Калібрувально інваріантні функції Гріна $\langle F[A] \rangle$ також не залежать від вибору f , однак, якщо $F[A]$ не є калібрувально інваріантним, то такі функції Гріна залежать від калібровки (наприклад, пропагатор калібрувального поля $\langle T A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle$). Зокрема, для калібрувально неінваріантних функції Гріна метод дозволяє встановити зв'язок між цими функціями в різних калібровках.

Обчислення детермінанта Фаддеева—Попова $\Delta_f(A)$. Оскільки $\Delta_f(A)$ множиться на $\prod_{x,a} \delta(f^a(A_\mu))$, то достатньо обчислити його для полів, які задовольняють $f^a(A_\mu) = 0$. За означенням поверхня, яка задається цією умовою, перетинається з кожною орбітою лише один раз, тому

достатньо обчислити (4.6.5) в околі одиничного групового елемента, де $U(x) = 1 + i\omega^a T^a$, і можна використовувати міру

$$\prod_x \mathcal{D}U(x) = \prod_{a,x} \mathcal{D}\omega^a.$$

Визначимо оператор M_f , розкладаючи функцію $f^a(A^U)$ у функціональний ряд Тейлора і утримуючи лінійний по $\delta\omega^b$ інфінітезимальний доданок

$$\begin{aligned} f^a(A_\mu^U(x)) &= f^a(A_\mu(x)) + \int \frac{\delta f^a(A_\mu^U(x))}{\delta\omega^b(y)} \Big|_{\omega=0} \delta\omega^b(y) d^4y = \\ &= f^a(A_\mu(x)) + \int d^4y M_f^{ab}(x, y) \delta\omega^b, \end{aligned} \quad (4.6.9)$$

де

$$M_f^{ab}(x, y) = \frac{\delta f^a(A_\mu^U(x))}{\delta\omega^b(y)} \Big|_{\omega=0}. \quad (4.6.10)$$

Тоді з (4.6.5) отримуємо

$$\Delta_f^{-1}(A_\mu) = \int \prod_a \mathcal{D}\omega^a(x) \delta(M^{ab}\delta\omega^b) = \text{Det}^{-1} M_f^{ab}, \quad (4.6.11)$$

тобто для функціонала Фаддеева—Попова маємо

$$\Delta_f(A_\mu) = \text{Det} M_f^{ab}. \quad (4.6.12)$$

Обчислимо цей функціонал у явному вигляді. Враховуючи, що інфінітезимальне перетворення поля A_μ записується як

$$\delta A_\mu^U(x) = -\frac{1}{g} D_\mu \omega(x),$$

розпишемо варіаційну похідну

$$\begin{aligned} M_f^{ab}(x, y) &= \frac{\delta f^a(A_\mu^U(x))}{\delta\omega^b(y)} \Big|_{\omega=0} = \int d^4z \frac{\delta f^a(A_\mu)}{\delta A_\mu^c(z)} \cdot \frac{\delta A_\mu^{Uc}(z)}{\delta\omega^b(y)} \Big|_{\omega=0} = \\ &= -\frac{1}{g} \int \frac{\delta f^a(A_\mu)}{\delta A_\mu^c(z)} D_\mu^{zcb} \delta(z-y) d^4z, \quad D_\mu^{xcb} = \partial_\mu^{xcb} + g f^{cbd} A_\mu^d(x). \end{aligned} \quad (4.6.13)$$

Для калібровки Лоренца $f^a(A_\mu) = \partial^\mu A_\mu^a = 0$ знаходимо

$$\begin{aligned} M_L^{ab}(x, y) &= -\partial_x^\mu D_{x\mu}^{ab} \delta(x-y) = -\left[\square_x \delta^{ab} + g f^{abc} \partial_x^\mu \cdot A_\mu^c(x) \right] \delta(x-y) = \\ &= -\left[\square_x \delta^{ab} + g f^{abc} A_\mu^c(x) \partial_x^\mu \right] \delta(x-y) \end{aligned} \quad (4.6.14)$$

($1/g$ в M_f^{ab} надалі опускаємо, його можна винести з-під детермінанта і включити в нормуючий множник). Для кулонівської калібровки, $f^a(A_\mu) = \partial_i A_i^a = 0$, аналогічно отримуємо

$$M_K^{ab}(x, y) = -\partial_{xi} D_{xi}^{ab} \delta(x - y) = - \left[\nabla^2 \delta^{ab} + g f^{abc} A_i^c(x) \partial_{xi} \right] \delta(x - y). \quad (4.6.15)$$

Аксіальна калібровка Арновіта—Фінклера визначається рівнянням

$$f^a(A_\mu) = n^i A_i^a = 0, \quad n_i^2 = 1 \quad (4.6.16)$$

(у випадку $n^\mu A_\mu^a = 0$, $n_\mu^2 = 0$ маємо калібровку світлового конуса). Для неї відповідний оператор

$$\begin{aligned} M_A^{ab}(x, y) &= -n^i D_{xi}^{ab} \delta(x - y) = -n^i \left[\partial_{xi} \delta^{ab} + g f^{abc} A_i^c(x) \right] \delta(x - y) = \\ &= -n^i \partial_{xi} \delta^{ab} \delta(x - y) \end{aligned} \quad (4.6.17)$$

не залежить від A_μ .

Формалізуємо виведення

$$\begin{aligned} \Delta_f^{-1}(A_\mu) &= \int \mathcal{D}U(x) \delta(f^a(A_\mu^U)) = \\ &= \int \prod_{x,a} \mathcal{D}\omega^a(x) \delta(\omega^b(y)) \cdot \text{Det}^{-1} \frac{\delta f^a(A^U)}{\delta \omega^b(y)} = \text{Det}^{-1} \frac{\delta f^a(A^U(x))}{\delta \omega^b(y)} \Big|_{\omega=0}. \end{aligned}$$

Тобто функціонал Фаддєєва—Попова обчислюється за формулою

$$\Delta_f(A_\mu) = \text{Det} \frac{\delta f^a(A_\mu^U(x))}{\delta \omega^b(y)} \Big|_{\omega=0} = \text{Det} \frac{\delta f^a}{\delta A_\mu^c} \cdot \frac{\delta A^{Uc}}{\delta \omega^b} \Big|_{\omega=0}. \quad (4.6.18)$$

Важливо при цьому, що рівняння $f^a(A_\mu^U) = 0$ має єдиний розв'язок $U = 1$.

Генеруючий функціонал функцій Гріна будемо *визначати* формулою

$$Z(J_\mu^a) = N \int \mathcal{D}A_\mu^a \delta(f^a(A_\mu)) \Delta_f(A) e^{i(S(A) + \int d^4x J_\mu^a A_\mu^a)}. \quad (4.6.19)$$

Для калібрувально інваріантних функцій Гріна $F[A]$ маємо загальний вигляд (див. формулу (4.6.8) вище)

$$\langle F[A] \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A_\mu^a F[A] \delta(f^a) \Delta_f(A) e^{iS(A)}}{\int \mathcal{D}A_\mu^a \delta(f^a) \Delta_f(A) e^{iS(A)}}. \quad (4.6.20)$$

Як уже зазначалося, середні для калібрувально інваріантних величин не залежать від вибору калібрувальної умови, зокрема, замість калібровки $f^a = 0$ можна вибрати $f^a - W^a(x) = 0$, де $W^a(x)$ — довільна функція. При цьому функціонал Фаддєєва—Попова не змінюється $\Delta_f(A) = \Delta_{f-W}(A)$.

Помножуючи чисельник і знаменник у (4.6.20) на незалежний від полів функціонал

$$\int \mathcal{D}W^a \exp\left(-\frac{i}{2\xi} \int d^4x (W^a(x))^2\right)$$

та знімаючи інтегрування по $W^a(x)$ за допомогою дельта-функції, отримуємо

$$\begin{aligned} \langle F[A] \rangle &= \frac{\int \mathcal{D}W^a e^{-\frac{i}{2\xi} \int d^4x (W^a(x))^2} \int \mathcal{D}A_\mu^a F[A] \delta(f^a - W^a) \Delta_f(A) e^{iS(A)}}{\int \mathcal{D}W^a e^{-\frac{i}{2\xi} \int d^4x (W^a(x))^2} \int \mathcal{D}A_\mu^a \delta(f^a - W^a) \Delta_f(A) e^{iS(A)}} = \\ &= \frac{\int \mathcal{D}A_\mu^a F[A] \Delta_f(A) e^{iS(A) - \frac{i}{2\xi} \int d^4x (f^a(A_\mu))^2}}{\int \mathcal{D}A_\mu^a \Delta_f(A) e^{iS(A) - \frac{i}{2\xi} \int d^4x (f^a(A_\mu))^2}}. \end{aligned} \quad (4.6.21)$$

Для генеруючого функціонала маємо новий вираз

$$Z(J) = N \int \mathcal{D}A_\mu^a \text{Det } M(A) e^{i(S(A) - \frac{i}{2\xi} \int d^4x (f^a(A_\mu))^2 + \int d^4x J_\mu^a(x) A_\mu^a)}, \quad (4.6.22)$$

де

$$N^{-1} = \int \mathcal{D}A_\mu^a \text{Det } M(A) \exp\left[i(S(A) - \frac{i}{2\xi} \int d^4x (f^a(A_\mu))^2)\right].$$

Виберемо калібровку Лоренца $f^a(A_\mu) = \partial_\mu A_\mu^a$ і представимо детермінант Фаддєєва—Попова у вигляді функціонального інтеграла

$$\text{Det } M^{ab}(x, y) = \int \mathcal{D}\bar{c}^a \mathcal{D}c^a \exp i \int d^4x d^4y \bar{c}^a(x) M^{ab}(x, y) c^b(y), \quad (4.6.23)$$

де \bar{c}^a і c^a — набір незалежних грасманових полів. Поля $c^a(x)$ називаються «духами» Фаддєєва—Попова, вони перетворюються за приєднаним представленням калібрувальної групи, є скалярами відносно лоренцових перетворень і задовольняють статистиці Фермі. Назва цих полів зумовлена тим, що вони є допоміжними, потрібними для коректного визначення процедури квантування неабелевих калібрувальних полів і тому не з'являються як асимптотичні стани, тобто як справжні частинки. Очевидно, в цьому випадку теорема про зв'язок спіну і статистики не порушується, оскільки теорема застосовна лише до фізичних полів. Поля \bar{c}^a і c^a не обов'язково є ермітово спряженими один до одного, наприклад, їх можна вважати незалежними дійсними змінними.

Таким чином, маємо ефективну лагранжеву густину

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu^a)^2 - \bar{c}^a \partial^\mu D_\mu^{ab} c^b, \quad (4.6.24)$$

де коваріантна похідна $D_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu + g f^{abc} A_\mu^c$. $\text{Det } M^{ab}$ є нелокальним функціоналом поля A_μ^a . Використаємо представлення детермінанта у формі

$$\text{Det } M^{ab} = \exp \text{Tr } \ln M,$$

$$M^{ab}(x, y) = \left[-\square_x \delta^{ab} - g f^{abc} \partial_x^\mu \cdot A_\mu^c(x) \right] \delta(x - y),$$

де похідна ∂_x^μ діє на все, що стоїть справа від неї. Операція функціонального сліду оператора M визначається як

$$\text{Tr } M = \int d^4x \text{tr} \langle x | M | y \rangle \Big|_{y=x} \quad (4.6.25)$$

і включає інтегрування за координатами та матричний слід. Опускаючи тривіальний множник, запишемо

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln \left(\frac{1}{-\square} M \right) &= \text{Tr} \ln \left(\frac{1}{-\square} (-\square + M + \square) \right) = \text{Tr} \ln \left(1 - \frac{1}{\square} (M + \square) \right) = \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr} \left(\frac{1}{\square} (M + \square) \right)^n. \end{aligned} \quad (4.6.26)$$

Тут ми ввели символічне позначення для функції Гріна оператора Даламбера

$$\left\langle x \left| \frac{1}{\square} \right| y \right\rangle = \frac{1}{\square_x} \delta(x - y) = D(x - y) \Rightarrow (\square_x - i\epsilon) D(x - y) = \delta(x - y)$$

і також для оператора диференціювання $\langle x | \partial_\mu | y \rangle = \partial_\mu^x \langle x | y \rangle = \partial_\mu^x \delta(x - y)$, де стани $|x\rangle$ є власними для оператора координат, тобто $\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$, і вони ортонормовані, $\langle x | y \rangle = \delta(x - y)$. Розглянемо матричний елемент

$$\begin{aligned} \left\langle x \left| \frac{1}{\square} (M + \square) \right| y \right\rangle &= \int d^4z \langle x | \frac{1}{\square} | z \rangle \langle z | M + \square | y \rangle = g \int d^4z D(x - z) \langle z | \partial^\mu \hat{A}_\mu | y \rangle = \\ &= g \int d^4z D(x - z) \partial^{z\mu} [\hat{A}_\mu(z) \delta(z - y)], \end{aligned} \quad (4.6.27)$$

де введено позначення $(\hat{A}_\mu)^{ab} = f^{acb} A_\mu^c$, і в першій рівності ми використали повноту станів $\int d^4z |z\rangle \langle z| = 1$. Інтегруючи частинами і знімаючи дельта-функцію, отримуємо

$$\left\langle x \left| \frac{1}{\square} (M + \square) \right| y \right\rangle = \partial_x^\mu D(x - y) \hat{A}_\mu(y). \quad (4.6.28)$$

Тоді, враховуючи що $\text{tr } \hat{A} = 0$, остаточно знаходимо

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln \frac{M}{-\square} &= - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g^n}{n} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \text{tr} \left[\partial_{x_1}^{\mu_1} D(x_1 - x_2) \hat{A}_{\mu_1}(x_2) \times \right. \\ &\quad \left. \times \partial_{x_2}^{\mu_2} D(x_2 - x_3) \hat{A}_{\mu_2}(x_3) \dots \partial_{x_n}^{\mu_n} D(x_n - x_1) \hat{A}_{\mu_n}(x_1) \right]. \end{aligned} \quad (4.6.29)$$

Таким чином, $\text{Det } M$ дає добавку в дію, яка має неполіноміальну і нелокальну залежність від поля A_μ . Відзначимо загальний знак мінус, що є характерним для однієї ферміонної петлі і дозволяє трактувати функцію $D(x)$ як пропагатор скалярної частинки, яка підпорядковується статистиці Фермі—Дірака. Це також узгоджується з тим, що детермінант $\text{Det } M$ можна представити у вигляді функціонального інтеграла за грасмановими змінними (4.6.23).

У квантовій електродинаміці в калібровці Лоренца поля духів увійдуть у лагранжіан у вигляді

$$\bar{c}M c = -\bar{c}\square c,$$

і їх взаємодія з полем A_μ відсутня. Тому $\text{Det } M$ скорочується у функціях Гріна. Однак це справедливо не в усіх калібровках. Нехай калібрувальна умова, $f(A) = 0$, визначається функцією

$$f(A) = \partial_\mu A^\mu + A^\mu A_\mu$$

(калібровка Намбу). Тоді відповідний детермінант Фаддеева—Попова,

$$\text{Det } M = \text{Det}(-\square - 2A^\mu \partial_\mu),$$

залежить від поля A_μ і визначає міру інтегрування у функціональному інтегралі.

Роль духових полів — скоротити внески від часових і поздовжніх (нефізичних) компонент калібрувального поля. Наприклад, у нульовому наближенні по константі g , інтегруючи по A_μ і духам, отримуємо (d — розмірність простору-часу)

$$[\text{Det}(-\square)]^{-\frac{d}{2}} \text{Det}(-\square) = [\text{Det}(-\square)]^{-\frac{d-2}{2}}, \quad (4.6.30)$$

тобто тільки $d - 2$ поперечних компонент дають внесок у функціональний інтеграл. Це справедливо в усіх порядках теорії збурень, хоча механізм скорочення внесків від нефізичних компонент буде дещо складнішим у вищих порядках.

Обговоримо умову того, що гіперповерхня фіксації калібровки може перетинати калібрувальні орбіти один раз. У загальному випадку це не виконується (див. рис. 4), є залишкова свобода калібрувальних перетворень. Наприклад, у КЕД калібровка $\partial^\mu A_\mu = \square\Theta = 0$ не фіксує повністю Θ , оскільки можна виконати залишкове калібрувальне перетворення з параметром, що задовольняє $\square\epsilon = 0$. Однак цю свободу можна усунути шляхом накладення відповідних граничних умов для полів на нескінченності. В КХД було запропоновано обмежити значення калібрувальних полів так званим горизонтом Грібова [99], де детермінант Фаддеева—Попова додатний, $\text{Det}M(A) > 0$. Властивості функціонального інтеграла з таким

обмеженням для калібрувального поля A_μ^a можуть бути пов'язані з кон-
файнментом кварків і глюонів. Цей підхід є прикладом непертурбативного
квантування неабелевих калібрувальних полів і активно розвивається.

4.7. Симетрія БРСТ у квантовій хромодинаміці

Метод Фаддеева—Попова дозволяє використовувати лоренц-інваріант-
ні калібровки для запису функціонального інтеграла, таким чином збері-
гаючи явну лоренц-інваріантність теорії на всіх етапах обчислень. Одно-
час калібрувальна інваріантність порушена при фіксації калібровки, що
могло б призвести до проблем при доведенні перенормовності калібруваль-
них теорій, де калібрувальна симетрія відіграє важливу роль. У цьому роз-
ділі розглянемо так звану симетрію БРСТ, яка була відкрита Беккі, Руе,
Стора і незалежно від них Тютінім, для калібрувальних теорій, зокрема
КХД, у коваріантних калібровках. Вона пов'язує духи та поздовжні глюо-
ни один з одним і гарантує, що внески цих нефізичних частинок завжди
скорочуються в усіх фізичних процесах. Почнемо з лагранжіана КХД

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \sum_{i=1}^{n_f} \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu D_\mu - m_i) \psi_i - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 - \bar{c}^a \partial^\mu D_\mu^{ab} c^b \quad (4.7.1)$$

(порівняйте з (4.1.25)). Третій і четвертий доданки справа описують фік-
сацію калібровки і лагранжіан духів. Ми перепишемо їх у вигляді

$$\mathcal{L}_{gh+gf} = -\bar{c}^a \partial^\mu D_\mu^{ab} c^b + \frac{\xi}{2} (b^a)^2 - b^a \partial^\mu A_\mu^a, \quad (4.7.2)$$

де ми ввели допоміжне комутоване скалярне поле (auxiliary field) $b^a(x)$, яке
називається полем Наканіші—Лаутрупа. Для $\xi = 0$ інтегрування по полю
 $b^a(x)$ в функціональному інтегралі дає $\delta(\partial^\mu A_\mu^a)$, тобто калібровку Ландау.
Якщо $\xi \neq 0$, то також можна проінтегрувати по $b^a(x)$ у функціональному
інтегралі, оскільки це поле входить квадратично в лагранжіан і без кіне-
тичного доданка з похідними, а отже, приходимо до лагранжіана (4.7.1)
зі стандартною формою фіксації калібровки $(1/2\xi)(\partial^\mu A_\mu^a)^2$. Лагранжіан
духів є інваріантним відносно глобальної $U(1)_{gh}$ групи

$$c(x) \rightarrow e^{i\theta} c(x), \quad \bar{c}(x) \rightarrow e^{-i\theta} \bar{c}(x). \quad (4.7.3)$$

Заряд, що зберігається при таких перетвореннях, дозволяє приписати від-
повідні заряди (духове квантове число) полям: $gh(c) = 1$, $gh(\bar{c}) = -1$.

Як уже зазначалося, лагранжіан КХД з фіксацією калібровки і духами
не має калібрувальної інваріантності, однак він має залишкову глобальну
ферміонну БРСТ-симетрію, яка в певному сенсі пам'ятає калібрувальну

інваріантність початкової теорії. Інфінітезимальні перетворення БРСТ мають вигляд

$$\begin{aligned}\delta A_\mu^a(x) &= \varepsilon D_\mu^{ac} c^c(x) = \varepsilon (\delta^{ac} \partial_\mu + g f^{acb} A_\mu^b) c^c(x), \\ \delta \psi(x) &= -ig \varepsilon c^a(x) T^a \psi(x), \quad \delta \bar{\psi}(x) = ig \varepsilon c^a(x) \bar{\psi}(x) T^a, \\ \delta c^a(x) &= \frac{1}{2} g \varepsilon f^{abc} c^b(x) c^c(x), \quad \delta \bar{c}^a(x) = -\varepsilon b^a(x), \quad \delta b^a(x) = 0,\end{aligned}\tag{4.7.4}$$

де ε — постійний антикомутуючий параметр (грасманова змінна) глобальних перетворень, який комутує з бозонними полями і антикомутує з ферміонними полями. Зауважимо, що поля c^a вибрано антиермітовими, а \bar{c}^a — ермітовими. Можна показати, що друга варіація дорівнює нулю, $\delta_{\varepsilon_1} \delta_{\varepsilon_2} = 0$, для всіх полів, навіть для різних ε . Відзначимо нелінійний характер БРСТ перетворень. Доведення БРСТ-інваріантності лагранжіана спрощується, якщо ввести матричні позначення для полів у приєднаному представленні

$$\begin{aligned}A_\mu(x) &= g A_\mu^a(x) T^a, \quad C(x) = g c^a(x) T^a, \\ \bar{C}(x) &= g \bar{c}^a(x) T^a, \quad B(x) = g b^a(x) T^a.\end{aligned}\tag{4.7.5}$$

Лагранжіан КХД тоді приймає вигляд

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{2g^2} \text{tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \sum_{i=1}^{n_f} \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu D_\mu - m_i) \psi_i + \\ &+ \frac{2}{g^2} \text{tr} \left(-\bar{C} \partial^\mu D_\mu C + \frac{\xi}{2} B^2 - B \partial^\mu A_\mu \right),\end{aligned}\tag{4.7.6}$$

де

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + i[A_\mu(x), A_\nu(x)], \\ D_\mu \psi(x) &= \partial_\mu \psi(x) + iA_\mu(x) \psi(x), \\ D_\mu C(x) &= \partial_\mu C(x) + i[A_\mu(x), C(x)].\end{aligned}\tag{4.7.7}$$

Розглянемо інфінітезимальні унітарні перетворення $U(x) = 1 + i\Lambda(x)$, при яких поля перетворюються як

$$\delta \psi = i\Lambda \psi, \quad \delta \bar{\psi} = -i\bar{\psi} \Lambda, \quad \delta A_\mu = -D_\mu \Lambda,\tag{4.7.8}$$

$$\delta C = i[\Lambda, C], \quad \delta \bar{C} = i[\Lambda, \bar{C}], \quad \delta B = i[\Lambda, B].\tag{4.7.9}$$

Перетворення (4.7.8) мають вигляд локальних калібрувальних перетворень кварків і глюонів, відносно яких перші два доданки в лагранжіані (4.7.6) очевидно інваріантні. Змінимо перетворення (4.7.9) таким чином, щоб вони залишали інваріантним останній доданок у (4.7.6). Для цього покладемо $\Lambda(x) = -\varepsilon C(x)$ в (4.7.8) і модифікуємо (4.7.9), тоді перетворен-

ня БРСТ набувають вигляд

$$\begin{aligned} \delta_B A_\mu(x) &= \varepsilon D_\mu C(x), & \delta_B \psi(x) &= -i\varepsilon C(x)\psi(x), \\ \delta_B \bar{\psi}(x) &= -i\varepsilon \bar{\psi}(x)C(x), & \delta_B C(x) &= -i\varepsilon C(x)C(x), \\ \delta_B \bar{C}(x) &= -\varepsilon B(x), & \delta_B B(x) &= 0. \end{aligned} \quad (4.7.10)$$

Значимо, що завдяки матричній структурі ферміонного поля $C(x)$ його квадрат у виразі для варіації $\delta_B C$ не зникає; замість цього маємо $C(x)C(x) = (g^2/2)[T^b, T^c]c^b(x)c^c(x) = (ig^2/2)f^{abc}T^a c^b(x)c^c(x)$, що дає відповідну формулу для $\delta C^a(x)$ в (4.7.4).

Знайдемо варіацію доданків у (4.7.6), які описують духові поля і фіксацію калібровки, відносно цих перетворень

$$\delta_B \text{tr} \left(-\bar{C} \partial^\mu D_\mu C + \frac{\xi}{2} B^2 - B \partial^\mu A_\mu \right) = -\text{tr} (\bar{C} \partial^\mu \delta_B (D_\mu C)). \quad (4.7.11)$$

Покажемо, що $\delta_B (D_\mu C) = 0$, використовуючи відповідні варіації полів із (4.7.10),

$$\begin{aligned} \delta_B (D_\mu C) &= \delta_B (\partial_\mu C + i(A_\mu C - C A_\mu)) = \\ &= \partial_\mu (\delta_B C) + i[(\delta_B A_\mu)C + A_\mu (\delta_B C) - (\delta_B C)A_\mu - C(\delta_B A_\mu)] = \\ &= -i\varepsilon [\partial_\mu (CC) - D_\mu CC - C D_\mu C + i[A_\mu, CC]] = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, лагранжیان КХД є інваріантним відносно перетворень БРСТ, тобто $\delta_B \mathcal{L} = 0$. Оскільки БРСТ-перетворення відповідають неперервній симетрії, то їх використовують для отримання тотожностей Уорда–Такахаші – співвідношень між кореляційними функціями, які є наслідком залишкової калібрувальної симетрії.

БРСТ-варіацію довільного поля Φ можна записати, виділяючи параметр ε як

$$\delta_B \Phi = \varepsilon s\Phi, \quad (4.7.12)$$

де перетворення $s\Phi$ всіх полів знаходять з (4.7.10). Для всіх полів ψ , A_μ , \bar{C} , C має місце

$$\delta_B (s\Phi) = 0, \quad (4.7.13)$$

що означає нільпотентність перетворення s : $s(s\Phi) = 0$. Наприклад, перевіримо це для поля A_μ :

$$\delta_B (sA_\mu) = \delta_B (D_\mu C) = \delta_B (\partial_\mu C + i[A_\mu, C]) = 0. \quad (4.7.14)$$

Неважко показати, що дія БРСТ-варіації на s -перетворення добутку довільного числа полів, взятих у різних просторово-часових точках, дорівнює нулю,

$$\delta_B s(\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \dots) = 0. \quad (4.7.15)$$

Це вірно також і для функціоналів $F(\Phi)$, представлених у вигляді суми добутків полів,

$$\delta_B (sF(\Phi)) = \varepsilon s s F(\Phi) = 0, \quad (4.7.16)$$

тобто БРСТ-перетворення є нільпотентними.

Корисно ввести грасмановий БРСТ-«заряд» Q таким чином, щоб він визначав інфінітезимальні перетворення за формулою

$$\delta_B \Phi = i[\varepsilon Q, \Phi] = i\varepsilon[Q, \Phi]_{\mp} = \varepsilon s\Phi, \quad s\Phi = i[Q, \Phi]_{\mp}, \quad (4.7.17)$$

де комутатор $[\cdot, \cdot]$ (знак «-») або антикомутатор $\{\cdot, \cdot\}$ (знак «+») вибирається залежно від того, чи поле Φ є бозонним, чи ферміонним. Дію оператора Q на поля знаходять безпосередньо з формул (4.7.10). Заряд Q має духове число $gh(Q) = 1$, що впливає з (4.7.10). Нільпотентність БРСТ-перетворення означає, що

$$0 = -ss\Phi = [Q, [Q, \Phi]_{\mp}]_{\pm} = [Q^2, \Phi]_{-}, \quad (4.7.18)$$

тобто Q^2 комутує з усіма полями. Наприклад, перевіримо

$$[Q^2, \psi]_{-} = [Q, \{Q, \psi\}] = -[Q, C\psi] = -\{Q, C\}\psi + C\{Q, \psi\} = CC\psi - CC\psi = 0,$$

або

$$\begin{aligned} [Q^2, A_{\mu}] &= \{Q, [Q, A_{\mu}]\} = -i\{Q, D_{\mu}C\} = -i\{Q, \partial_{\mu}C + i[A_{\mu}, C]\} = \\ &= -i(\partial_{\mu}\{Q, C\} + i[Q, A_{\mu}]C + iA_{\mu}\{Q, C\} - i\{Q, C\}A_{\mu} + iC[Q, A_{\mu}]) = \\ &= -i(-\partial_{\mu}(CC) + (D_{\mu}C)C - iA_{\mu}CC + iCCA_{\mu} + CD_{\mu}C) = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, оператор Q має бути нільпотентним, $Q^2 = 0$, але сам Q не є нульовим (Q^2 не може бути пропорційним одиничному оператору оскільки має ненульове духове число). За допомогою нільпотентного оператора Q інваріантність лагранжіана КХД виражається як

$$[Q, \mathcal{L}] = 0. \quad (4.7.19)$$

Покажемо, що доданки з духами і калібровкою \mathcal{L}_{gh+gf} в лагранжіані КХД можуть бути записані у вигляді

$$\mathcal{L}_{gh+gf} = \frac{2}{g^2} \text{tr} \left(-\bar{C} \partial^{\mu} D_{\mu} C + \frac{\xi}{2} B^2 - B \partial^{\mu} A_{\mu} \right) = \{Q, G\}, \quad (4.7.20)$$

де

$$G = -\frac{2i}{g^2} \text{tr} \left(\bar{C} (\xi B/2 - \partial^{\mu} A_{\mu}) \right). \quad (4.7.21)$$

Дійсно, для антикомутатора знаходимо

$$\begin{aligned} \{Q, G\} &= -\frac{2i}{g^2} \text{tr} \left(\{Q, \bar{C}\} (\xi B/2 - \partial^{\mu} A_{\mu}) - \bar{C} [Q, (\xi B/2 - \partial^{\mu} A_{\mu})] \right) = \\ &= -\frac{2i}{g^2} \text{tr} \left(iB (\xi B/2 - \partial^{\mu} A_{\mu}) - i\bar{C} \partial^{\mu} D_{\mu} C \right) = \\ &= \frac{2}{g^2} \text{tr} \left(-\bar{C} \partial^{\mu} D_{\mu} C + \frac{\xi}{2} B^2 - B \partial^{\mu} A_{\mu} \right). \end{aligned}$$

Тоді в силу нільпотентності Q^2 отримуємо

$$[Q, \{Q, G\}] = [Q^2, G] = 0, \quad (4.7.22)$$

що й означає інваріантність \mathcal{L}_{gh+gf} відносно БРСТ-перетворень. Зауважимо, що в термінах компонентних полів \mathcal{L}_{gh+gf} запишеться у вигляді

$$\mathcal{L}_{gh+gf} = s \left[\bar{c}^a \left(\partial^\mu A_\mu^a - \frac{\xi}{2} b^a \right) \right], \quad (4.7.23)$$

і БРСТ-інваріантність впливає з нільпотентності оператора s . Звідси, зокрема, отримуємо, що похідна $\partial_\xi \mathcal{L}_{gh+gf}$ також інваріантна відносно БРСТ-перетворень, а тому фізичні величини автоматично не залежать від калібрувального параметра. Залежність інших кореляційних функцій досліджується за допомогою тотожностей Нільсена в розділі 12.8.

В операторному формулюванні КХД оператор \hat{Q} визначає в повному просторі станів підпростір станів, які належать до ядра цього оператора, тобто

$$\hat{Q}|\Psi\rangle = 0. \quad (4.7.24)$$

Очевидно стани $|\Psi'\rangle = Q|\Psi\rangle$ також належать ядру оператора \hat{Q} і мають нульову норму. Фізичні стани ототожнюються зі станами у фактор-просторі, що визначається станами в ядрі, $\text{Ker}(\hat{Q})$, по модулю станів $|\Psi'\rangle$. Цей підхід до квантування КХД в операторному формалізмі аналогічний підходу Гупти–Блейлера в КЕД. Умова (4.7.24) отримала назву критерій Куго–Оджими. Якщо вдасться показати, що серед фізичних станів немає кварків, глюонів та інших кольорових станів, то це буде означати конфайнмент таких станів у КХД. На сьогодні такого доведення немає, і превалює думка, що механізм конфайнменту має бути динамічним, а не за рахунок суто алгебраїчної структури лагранжіана КХД. Ймовірно, умова (4.7.24) є необхідною, але не достатньою умовою для конфайнменту.

Детальніше з БРСТ-симетрією можна ознайомитись за монографіями [154, 197] і оглядовими статтями [136, 137].

ЗАДАЧІ

1. Для матриць Гелл-Манна λ^a перевірити справедливість співвідношення ортогональності

$$\text{tr}(t_3^a t_3^b) = T(3)\delta^{ab}, \quad t_3^a = \frac{\lambda^a}{2},$$

та обчислити константу нормування $T(3)$ у даному представленні.

2. Симетричні та антисиметричні тензори 2-го рангу утворюють незвідні представлення $SU(N)$, тобто

$$N \times N = \underbrace{\left(\frac{N(N-1)}{2} \right)}_{AS} \oplus \underbrace{\left(\frac{N(N+1)}{2} \right)}_S.$$

Обчислити оператори Казимира $C_2(AS)$ і $C_2(S)$.

Перевірити, що результати для $C_2(r)$ задовольняють тотожності для добутку представлень (4.4.30).

3. Критерій максимально притягувального каналу.

Статична сила взаємодії між кварками (аналог кулонівської взаємодії в КЕД) пропорційна $-\frac{g^2}{2} [C_2(r_1) + C_2(r_2) - C_2(r)]$, де r_1 і r_2 — представлення кварків, r — представлення зв'язаного стану (відповідно до кольорової групи $SU(3)$). Загальний знак мінус відповідає притяганню, тобто можливості формування зв'язаного стану.

Обчислити знак і силу взаємодії для каналів кварк-антикварк і кварк-кварк

$$3 \times \bar{3} \rightarrow 1 \oplus 8, \quad 3 \times 3 \rightarrow \bar{3} \oplus 6.$$

4. Використовуючи інваріантність міри Хаара, обчислити наступний інтеграл по унітарній групі $U(N)$:

$$D(X) = \int_{U(N)} UXU^\dagger dU = \frac{\text{tr}X}{N} I,$$

де I — одинична матриця.

Примітка. Спершу довести, що для матриці $V \in U(N)$ виконується $VD(X)V^\dagger = D(X)$, тобто $[V, D(X)] = 0$.

5. В теорії полів Янга—Міллса функції

$$\Phi_a = \partial_i E_a^i - gf_{abc} E_b^i A_{ic},$$

де f_{abc} — структурні константи, є в'язями 1-го роду. Показати, що ці в'язі задовольняють алгебрі

$$\{\Phi_a(\mathbf{x}), \Phi_b(\mathbf{y})\} = gf_{abc} \Phi_c(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$\{\cdot, \cdot\}$ — дужка Пуассона.

6. Обчислити наступну дужку Пуассона в теорії полів Янга—Міллса,

$$\{\partial_i A_i^a(\mathbf{x}), D_j^{bc} \Pi_j^c(\mathbf{y})\} = \partial_i^x D_i^{xab} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

де $A_i^a(\mathbf{x})$ — вектор-потенціал поля Янга—Міллса, $\Pi_j^c(\mathbf{y})$ — густина відповідного узагальненого імпульсу, D_j^{bc} — коваріантна похідна.

7. Показати, що похідну від матричної експоненти можна обчислити за формулою

$$\partial_\mu e^{i\omega(x)} = i \int_0^1 dt e^{it\omega(x)} \partial_\mu e^{i(1-t)\omega(x)}.$$

8. Використовуючи формулу диференціювання матричної експоненти довести, що слід другого доданка у формулі (4.1.10) для калібрувального перетворення дорівнює нулю, тобто

$$\text{tr}(U \partial_\mu U^{-1}) = 0, \quad U(x) = e^{i\omega^a T_a}.$$

9. Використовуючи вираз для оператора Фаддєєва—Попова у загальній калібровці,

$$M_f^{ab}(x, y) = \int d^4 z \frac{\delta f^a(A_\mu(x))}{\delta A_\nu^c(z)} D_\nu^{zcb} \delta(z - y),$$

де коваріантна похідна $D_\nu^{zcb} = \delta^{cb} \partial_\nu^z - g f^{cdb} A_\nu^d(z)$, знайти оператор Фаддєєва—Попова у випадку калібровок: кулонівської ($f^a(A_\mu(x)) = \partial_i A_i^a(x)$), Лоренца ($f^a(A_\mu(x)) = \partial_\mu A^{a\mu}(x)$) та аксіальної ($f^a(A_\mu(x)) = n_i A_i^a(x)$). Тут n_i — одиничний просторовий вектор, $n_i^2 = 1$.

10. Використовуючи статичний анзац для поля Янга—Міллса

$$A_0^a(x) = 0, \quad A_i^a(x) = \epsilon_{iab} \frac{x_b}{r^2} (1 + g(r)), \quad r = \sqrt{\mathbf{x}^2},$$

знайти вираз для хромагнітного поля $B_i^a = (1/2) \epsilon_{ijk} F_{jk}^a$. Показати, що повна енергія системи визначається інтегралом

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4} \int d^3 x F_{ij}^a F_{ij}^a = 4\pi \int_0^\infty dr \left[(g')^2 + \frac{(g^2 - 1)^2}{2r^2} \right].$$

Показати, що для скінченності енергії функція $g(r)$ повинна задовольняти нерівність $-1 \leq g(r) \leq 1$ і знайти поведінку $g(r)$ при $r \rightarrow 0$ і $r \rightarrow \infty$. З умови мінімуму енергії отримати рівняння для функції $g(r)$.

11. Для полів Янга—Міллса в евклідовому просторі з калібрувальною групою $SU(2)$, використовуючи параметризацію

$$A_i^a(x) = (\epsilon_{iak} \partial_k - \delta_{ai} \partial_0) \ln f(x), \quad A_0^a(x) = \partial_a \ln f(x), \quad a, i, k = 1, 2, 3,$$

привести рівняння самодуальності $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^*$ до вигляду

$$\frac{1}{f(x)} \square f(x) = 0.$$

Показати, що розв'язком останнього є n – інстантонна конфігурація

$$f^{(n)}(x) = \sum_{\mu=1}^{n+1} \frac{\lambda_{\mu}^2}{(x - a_{\mu})^2}, \quad \mu = 1, 2, 3, 4,$$

де a_{μ} – положення інстантонів, λ_{μ} – довільні розмірні параметри.

12. Показати, використовуючи підстановку

$$A_i^a(x) = (\epsilon_{iak} \partial_k - \delta_{ai} \partial_0) \ln f(x), \quad A_0^a(x) = \partial_a \ln f(x), \quad a, i, k = 1, 2, 3,$$

що рівняння Янга–Міллса в евклідовому просторі задовольняються, якщо $f(x)$ є розв'язком рівняння

$$\square f + \lambda f^3 = 0,$$

де λ – довільна константа інтегрування.

13. Показати, що функції

$$f(x) = \left(\frac{8v^2}{\lambda} \right)^{1/2} \quad \text{і} \quad f(x) = \left[\frac{(a_{\mu} - b_{\mu})^2}{\lambda(x_{\mu} - a_{\mu})^2(x_{\nu} - b_{\nu})^2} \right]^{1/2}$$

є розв'язками рівняння із попередньої задачі

$$\square f + \lambda f^3 = 0,$$

де v, a_{μ}, b_{μ} – довільні константи.

14. Показати, що коваріантна похідна духового поля є інваріантною відносно БРСТ-перетворення, тобто

$$\delta_B(D_{\mu}^{ab} c^b(x)) = 0,$$

де $D_{\mu}^{ab} = \delta^{ab} \partial_{\mu} + g f^{abc} A_{\mu}^c$, і БРСТ-перетворення мають вигляд

$$\delta_B A_{\mu}^a(x) = \epsilon D_{\mu}^{ac} c^c(x), \quad \delta_B c^a(x) = \frac{1}{2} g \epsilon f^{abc} c^b(x) c^c(x),$$

ϵ – постійний антикомутуючий грасмановий параметр.

15. Показати, що друга БРСТ-варіація всіх полів у лагранжіані КХД у коваріантній калібровці дорівнює нулю, тобто $\delta_{\epsilon_1} \delta_{\epsilon_2} \Phi = 0$, де $\Phi = (A_{\mu}, \psi, \bar{\psi}, c, \bar{c}, B)$ – набір полів в КХД.

ГЕНЕРУЮЧИЙ ФУНКЦІОНАЛ У ТЕОРІЇ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

У розділі 1.4 ми вже з'ясували корисність застосування генеруючого функціонала в квантово-механічних системах. Нагадаємо, що генеруючий функціонал дозволяє за допомогою диференціювання по допоміжним джерелам знайти кореляційні функції. Наприклад, у теорії звичайних функцій можна згадати зручність використання твірних функцій для многочленів Бернуллі, поліномів Ерміта та Лежандра. У цьому розділі ми узагальнимо поняття генеруючого функціонала на випадок квантових скалярних полів, отримаємо функціонально-диференціальне рівняння для генеруючого функціонала, розглянемо теорему Віка і діаграми Фейнмана в координатному та імпульсному просторах. Розпочнемо ми з важливого в подальшому питання про зв'язок законів збереження, які відповідають за деякі симетрії теорії, із функціями Гріна у квантово-польових теоріях.

5.1. Функції Гріна у функціональному формалізмі: рівняння руху та закони збереження

Симетрії відіграють дуже важливу роль у сучасних фізичних теоріях. Зокрема, раніше ми бачили, що калібрувальний принцип є базовим при формулюванні калібрувальних теорій. Крім того, згідно з теоремою Нетер, присутність неперервних симетрій приводить до законів збереження, які є дуже важливими і суттєво спрощують аналіз відповідних фізичних систем.

Внаслідок того, що класичні рівняння руху і закони збереження випливають із лагранжіана та його симетрій, їх можна вивести і безпосередньо із функціонального інтеграла. Це приводить до деяких співвідношень між функціями Гріна (рівняння Швінгера—Дайсона) та квантового узагальнення теорема Нетер (аналог тотожностей Уорда—Такахаші у квантовій електродинаміці) для будь-якої неперервної симетрії квантової теорії поля. Рівняння Швінгера—Дайсона та тотожності Уорда—Такахаші є точними. Присутність точних співвідношень є взагалі рідкісним явищем у теорії взаємодіючих квантово-польових систем, тому вони мають важливе значення в дослідженні калібрувальних теорій.

Рівняння руху. Для того щоб побачити, як отримуються рівняння руху і виводяться співвідношення між різними функціями Гріна, розглянемо спочатку, наприклад, триточкову функцію Гріна теорії вільного дійсного скалярного поля

$$\langle 0|T\hat{\Phi}(x_1)\hat{\Phi}(x_2)\hat{\Phi}(x_3)|0\rangle = \frac{\int \mathcal{D}\Phi e^{i\int d^4x\mathcal{L}(\Phi)}\Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)}{\int \mathcal{D}\Phi e^{i\int d^4x\mathcal{L}(\Phi)}}, \quad (5.1.1)$$

з лагранжевою густиною

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\Phi^2 + J\Phi. \quad (5.1.2)$$

Надалі, для спрощення запису будемо іноді опускаєти значок $\hat{}$ над операторами полів, усереднених по вакууму. У класичній теорії рівняння руху виводяться із вимоги екстремуму дії, $\delta S = 0$, при нескінченно малій варіації

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = \Phi(x) + \varepsilon(x). \quad (5.1.3)$$

Узагальнення на квантовий випадок полягає в тому, щоб розглядати цю варіацію як заміну змінних у функціональному інтегралі, що, звичайно, не змінює значення самого інтеграла. Міра при зсуві не змінюється $\mathcal{D}\Phi' = \mathcal{D}\Phi$, тоді маємо

$$\int \mathcal{D}\Phi e^{iS(\Phi)}\Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3) = \int \mathcal{D}\Phi e^{iS(\Phi')}\Phi'(x_1)\Phi'(x_2)\Phi'(x_3), \quad (5.1.4)$$

де доданки, пропорційні J , були опущені, оскільки ми покладаємо $J = 0$ в остаточних формулах. У першому порядку по ε отримуємо

$$0 = \int \mathcal{D}\Phi e^{iS(\Phi)} \left\{ \left(i \int d^4x \varepsilon(x) [(-\square_x - m^2)\Phi(x)] \right) \Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3) + \right. \\ \left. + \varepsilon(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3) + \Phi(x_1)\varepsilon(x_2)\Phi(x_3) + \Phi(x_1)\Phi(x_2)\varepsilon(x_3) \right\}. \quad (5.1.5)$$

Останні три доданки можна скомбінувати, якщо записати

$$\varepsilon(x_1) = \int d^4x \varepsilon(x)\delta(x - x_1).$$

Прирівнюючи нулю суму доданків при $\varepsilon(x)$, знаходимо

$$0 = \int \mathcal{D}\Phi e^{iS(\Phi)} \left[(\square_x + m^2)\Phi(x)\Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3) + i\delta(x - x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3) + \right. \\ \left. + i\delta(x - x_2)\Phi(x_1)\Phi(x_3) + i\delta(x - x_3)\Phi(x_1)\Phi(x_2) \right]. \quad (5.1.6)$$

Виносячи оператор диференціювання за знак інтеграла, останній вираз можна записати як співвідношення між чотириточковою і двоточковими функціями Гріна

$$(\square_x + m^2)\langle 0|T\Phi(x)\Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)|0\rangle = -i\delta(x-x_1)\langle 0|T\Phi(x_2)\Phi(x_3)|0\rangle - \\ -i\delta(x-x_2)\langle 0|T\Phi(x_1)\Phi(x_3)|0\rangle - i\delta(x-x_3)\langle 0|T\Phi(x_1)\Phi(x_2)|0\rangle. \quad (5.1.7)$$

Повторюючи це виведення для більш простого випадку двоточкової функції Гріна (беремо тільки одне поле $\Phi(x_1)$ замість $\Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)$ в рівнянні (5.1.4)), ми отримуємо

$$(\square_x + m^2)\langle 0|T\Phi(x)\Phi(x_1)|0\rangle = -i\delta(x-x_1), \quad (5.1.8)$$

тобто кореляційна функція задовольняє рівнянню КГФ всюди крім точки, де аргументи полів збігаються. Ця модифікація рівняння КГФ у точці x_1 називається контактним доданком, що проявляється в появі δ -функції в правій частині рівняння (5.1.8). У загальному випадку n -точкової функції Гріна для вільного скалярного поля рівняння типу (5.1.6) дає таке співвідношення

$$(\square_x + m^2)\langle 0|T\Phi(x)\Phi(x_1) \dots \Phi(x_n)|0\rangle = \\ = \sum_{i=1}^n \langle 0|T\Phi(x_1) \dots (-i\delta(x-x_i)) \dots \Phi(x_n)|0\rangle, \quad (5.1.9)$$

де в правій частині замість $\Phi(x_i)$ стоїть $-i\delta(x-x_i)$. Тобто в квантовій теорії рівняння класичної теорії поля задовольняються всіма кореляційними функціями з точністю до контактних доданків.

В операторному формалізмі рівняння руху для вільних полів (5.1.9) зазвичай виводяться шляхом безпосереднього обчислення лівої частини цього рівняння, використовуючи теорему Віка (δ -функції виникають при диференціюванні T -добутків по часу).

У випадку теорії із взаємодією аналогічні дії для двоточкової функції Гріна (див. рівняння (5.1.1) з відповідним узагальненням лагранжіана взаємодії) дають тотожність

$$0 = \int \mathcal{D}\Phi e^{iS(\Phi)} \left\{ i \int d^4x \varepsilon(x) \frac{\delta}{\delta\Phi(x)} \left(\int d^4x' \mathcal{L}(\Phi) \right) \Phi(x_1)\Phi(x_2) + \right. \\ \left. + \varepsilon(x_1)\Phi(x_2) + \Phi(x_1)\varepsilon(x_2) \right\}. \quad (5.1.10)$$

Оскільки

$$\frac{\delta}{\delta\Phi(x)} \int d^4x' \mathcal{L}(\Phi) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \right) = \frac{\delta S}{\delta\Phi(x)}$$

і узагальнюючи (5.1.10) на випадок функції Гріна для довільного числа полів $\Phi(x_1) \dots \Phi(x_n)$, приходимо до набору тотожностей

$$\begin{aligned} \langle 0|T \left(\frac{\delta}{\delta\Phi(x)} \int d^4x' \mathcal{L}(\Phi) \right) \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n)|0\rangle &= \\ &= \sum_{i=1}^n \langle 0|T \Phi(x_1) \dots (i\delta(x-x_i)) \dots \Phi(x_n)|0\rangle. \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

Ми отримали квантові рівняння руху для всіх функцій Гріна, які містять відповідні контактні доданки. Вони називаються рівняннями Швінгера—Дайсона (ШД). Виведення рівнянь ШД легко узагальнюється на довільні кореляційні функції

$$\langle 0|TX[\Phi]|0\rangle = \frac{\int \mathcal{D}\Phi X[\Phi] e^{iS(\Phi)}}{\int \mathcal{D}\Phi e^{iS(\Phi)}} = \frac{\int \mathcal{D}\Phi X[\Phi + \epsilon] e^{iS(\Phi + \epsilon)}}{\int \mathcal{D}\Phi e^{iS(\Phi)}}, \quad (5.1.12)$$

де $X[\Phi]$ — довільний функціонал Φ . Розкладаючи у функціональний ряд по $\epsilon(x)$ аналогічно вище наведеним прикладам, отримуємо загальне співвідношення

$$\langle 0|T \frac{\delta S(\Phi)}{\delta\Phi(x)} X[\Phi]|0\rangle = i \langle 0|T \frac{\delta X[\Phi]}{\delta\Phi(x)} |0\rangle. \quad (5.1.13)$$

Легко бачити, що якщо

$$X[\Phi] = \Phi(x_1)\Phi(x_2) \dots \Phi(x_n), \quad (5.1.14)$$

то ми приходимо до рівняння (5.1.11).

Симетрії і закони збереження. Теорема Нетер у класичній теорії говорить, що кожній неперервній симетрії лагранжіана (дії) відповідає струм, що зберігається. У нашому випадку скалярної теорії, крім звичних законів збереження енергії та імпульсу, пов'язаних із симетріями відносно трансляцій у часі та просторі, нас цікавлять закони збереження, які відповідають перетворенням полів із групи внутрішньої симетрії. Тобто, мовою групових перетворень, ми розглядаємо такі перетворення симетрії:

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = U\Phi(x) = e^{i\omega^a T^a} \Phi(x) \approx (1 + i\omega^a T^a)\Phi.$$

Для комплексного скалярного поля з лагранжіаном

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi$$

має місце інваріантність відносно глобальних фазових перетворень $\Phi \rightarrow e^{i\alpha} \Phi$ з постійною фазою, якій відповідає струм

$$j_\mu(x) = i\Phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Phi = i(\partial_\mu \Phi^* \Phi - \Phi^* \partial_\mu \Phi). \quad (5.1.15)$$

У функціональному інтегралі розглянемо нескінченно малу заміну змінних, яка відповідає фазовому $U(1)$ перетворенню

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = \Phi(x) + i\alpha(x)\Phi(x),$$

де тепер α — параметр, який залежить від x . Міра не міняється, тому що це унітарне перетворення. Тоді маємо, наприклад,

$$\int \mathcal{D}\Phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}[\Phi]} \Phi(x_1) \Phi^*(x_2) = \int \mathcal{D}\Phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}[\Phi']} \Phi'(x_1) \Phi'^*(x_2) \Big|_{\Phi'=(1+i\alpha)\Phi}.$$

У першому порядку по α знаходимо

$$0 = \int \mathcal{D}\Phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}[\Phi]} \left\{ i \int d^4x [(\partial_\mu \alpha)_i (\Phi \partial^\mu \Phi^* - \Phi^* \partial^\mu \Phi)] \times \right. \\ \left. \times \Phi(x_1) \Phi^*(x_2) + [i\alpha(x_1)\Phi(x_1)] \Phi^*(x_2) + \Phi(x_1) [-i\alpha(x_2)\Phi^*(x_2)] \right\}. \quad (5.1.16)$$

Зазначимо, що варіація лагранжіана пропорційна $\partial_\mu \alpha$, оскільки підстановка з постійними α залишає лагранжіан інваріантним. Інтегруючи частинами і прирівнюючи коефіцієнти при $\alpha(x)$, знаходимо співвідношення між зв'язними кореляційними функціями

$$\partial^\mu \langle T j_\mu(x) \Phi(x_1) \Phi^*(x_2) \rangle = \delta(x - x_1) \langle 0 | T \Phi(x_1) \Phi^*(x_2) | 0 \rangle - \\ - \delta(x - x_2) \langle 0 | T \Phi(x_1) \Phi^*(x_2) | 0 \rangle. \quad (5.1.17)$$

Це співвідношення можна назвати квантовим законом збереження. Таким чином, ми бачимо, що симетрія лагранжіана відображається у вигляді співвідношень між кореляційними функціями, модифікованих контактними доданками.

Перейдемо тепер від вільної теорії до загального випадку теорій із взаємодією. Нехай маємо набір полів Φ_a з деяким лагранжіаном $\mathcal{L}[\Phi]$, який описує загальний випадок теорії із взаємодією. Розглянемо інфінітезимальне перетворення

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi(x) + \varepsilon \Delta \Phi(x),$$

де ε — інфінітезимальний параметр, $\Delta \Phi$ — деформація поля. Перетворення буде перетворенням симетрії, якщо воно залишає інваріантними рівняння руху. Це буде у випадку інваріантності дії. Для лагранжіана дозволяється дивергентний доданок, тому що в дії він має вигляд поверхневого доданка. Тобто лагранжіан має бути інваріантним з точністю до дивергенції деякого вектора:

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) + \varepsilon \partial_\mu J^\mu(x). \quad (5.1.18)$$

Варіацію лагранжіана внаслідок варіації полів,

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}(\varepsilon\Delta\Phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\partial_\mu(\varepsilon\Delta\Phi), \quad (5.1.19)$$

перепишемо як

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\varepsilon\Delta\Phi \right) + \varepsilon \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \right] \Delta\Phi. \quad (5.1.20)$$

Для розв'язків рівнянь Ейлера—Лагранжа другий доданок обертається в нуль, і повну варіацію можна записати як

$$\delta\mathcal{L} = \varepsilon\partial_\mu J^\mu, \quad (5.1.21)$$

тобто у формі дивергенції деякого вектора J^μ . Останній вираз запишемо як

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (5.1.22)$$

тобто струм, який зберігається, має вигляд

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\Delta\Phi - J^\mu. \quad (5.1.23)$$

Кожній неперервній симетрії лагранжіана відповідає свій струм, що зберігається, згідно з теоремою Нетер, для класичної теорії поля. Інтегруючи (5.1.22) по тривимірному об'єму, отримуємо заряд, який зберігається у часі

$$Q = \int d^3x j^0(x). \quad (5.1.24)$$

У функціональному інтегралі перетворення симетрії відповідає заміні змінних з параметром $\varepsilon(x)$: $\Phi_a \rightarrow \Phi'_a = \Phi_a + \varepsilon\Delta\Phi_a$. Тоді для варіації лагранжіана маємо

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}\varepsilon\Delta\Phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\partial_\mu(\varepsilon\Delta\Phi_a) = \\ &= \varepsilon \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}\Delta\Phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\partial_\mu(\Delta\Phi_a) \right] + \partial_\mu\varepsilon \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\Delta\Phi_a. \end{aligned} \quad (5.1.25)$$

Вираз у квадратних дужках відповідає випадку, коли параметр ε постійний, тобто його можна записати як дивергенцію деякого струму J^μ внаслідок інваріантності лагранжіана (для внутрішніх симетрій $J^\mu = 0$). Таким чином, враховуючи інтегрування за частинами в дії, останній вираз запишеться так:

$$\varepsilon\partial_\mu J^\mu - \varepsilon\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\Delta\Phi_a \right) = -\varepsilon(x)\partial_\mu j^\mu(x). \quad (5.1.26)$$

Це означає, що дивергенцію струму, який зберігається, можна знайти з варіації дії:

$$\frac{\delta}{\delta\varepsilon(x)} \int d^4x \mathcal{L}[\Phi_a + \varepsilon(x)\Delta\Phi_a] \Big|_{\varepsilon=0} = -\partial_\mu j^\mu(x). \quad (5.1.27)$$

Так само, як і у вільному випадку, з функціонального інтеграла отримуємо співвідношення для кореляційних функцій взаємодіючих теорій, які мають симетрії,

$$\begin{aligned} \partial_\mu^x \langle j^\mu(x)\Phi_a(x_1)\Phi_b(x_2) \rangle &= -i[\delta(x-x_1)\langle \Delta\Phi_a(x_1)\Phi_b(x_2) \rangle + \\ &+ \langle \Phi_a(x_1)\Delta\Phi_b(x_2) \rangle \delta(x-x_2)], \end{aligned} \quad (5.1.28)$$

де відповідний струм знаходять за формулою (5.1.27). Отримана рівність — це так звана тотожність Уорда—Такахаши для кореляційних функцій, яка є наслідком симетрії квантової теорії.

5.2. Функціонально-диференціальне рівняння для генеруючого функціонала

Діаграмна техніка, тобто фактично ряд теорії збурень по константі взаємодії в представленні взаємодії, є базисним і найбільш широко вживаним методом аналітичних досліджень у квантовій теорії поля [5, 45, 50, 55, 121, 154, 163, 201]. Для знаходження відповідних аналітичних виразів для функцій Гріна в довільному порядку теорії збурень дуже зручним, як ми вже зазначали раніше, є метод генеруючого функціонала.

Внаслідок того, що взаємодіюче скалярне поле є найпростішим прикладом квантово-польової системи, в цьому параграфі ми виведемо функціонально-диференціальне рівняння для генеруючого функціонала $Z(J)$ на прикладі скалярного поля з лагранжевою густиною

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{1}{2}\Phi(\square + m^2)\Phi - \frac{\lambda}{4!}\Phi^4. \quad (5.2.1)$$

Для генеруючого функціонала $Z(J)$ маємо вираз у формі континуального інтеграла

$$Z(J) = N \int \mathcal{D}\Phi e^{i \int d^4x [\mathcal{L}(\Phi(x)) + J(x)\Phi(x)]}, \quad (5.2.2)$$

де нормуючий множник

$$N^{-1} = \int \mathcal{D}\Phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}(\Phi(x))}, \quad (5.2.3)$$

тобто функціонал нормований $Z(0) = 1$. Спочатку отримаємо відповідне рівняння у випадку вільного скалярного поля ($\lambda = 0$), для якого генеруючий функціонал нам відомий (див. (1.6.15))

$$Z_0(J) = \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) D_c(x-y) J(y) \right], \quad (5.2.4)$$

де $D_c(x-y)$ – функція Гріна оператора $\square + m^2 - i\varepsilon$. Обчислимо варіаційну похідну

$$\frac{\delta Z_0(J)}{i\delta J(x)} = \int d^4y D_c(x-y)J(y) \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4u d^4v J(u)D_c(u-v)J(v) \right]. \quad (5.2.5)$$

Діючи оператором $(\square + m^2)_x$, знаходимо

$$(\square + m^2)_x \frac{\delta Z_0(J)}{i\delta J(x)} = J(x)Z_0(J). \quad (5.2.6)$$

Це і є функціонально-диференціальне рівняння для $Z_0(J)$, яке містить як варіаційні, так і звичайні похідні.

Тепер нам потрібно у випадку теорії із взаємодією, $\lambda \neq 0$, знайти аналогічне рівняння для $Z(J)$. Для виведення рівняння використаємо той факт, що функціональний інтеграл від повної похідної по полю дорівнює нулю:

$$\int \mathcal{D}\Phi \frac{\delta}{\delta\Phi(x)} e^{iS[\Phi] + i \int d^4x J(x)\Phi(x)} = 0. \quad (5.2.7)$$

У випадку бозонних полів поверхневий інтеграл зникає при $\Phi = \pm\infty$ за рахунок присутності доданка $i\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) в дії. Інтеграл за грасмановими змінними зникає за означенням (див. (1.8.13)). Цей результат справедливий для інтегралів як по звичайних, так і по грасманових змінних. Диференціюючи експоненту, маємо

$$\int \mathcal{D}\Phi \left[-(\square_x + m^2)\Phi(x) + \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{int}}}{\partial\Phi(x)} + J(x) \right] e^{iS(\Phi) + i \int d^4x J(x)\Phi(x)} = 0. \quad (5.2.8)$$

Поля в квадратних дужках замінимо на похідні по джерелу,

$$\Phi(x) \rightarrow \frac{\delta}{i\delta J(x)}. \quad (5.2.9)$$

Отримуємо таке функціонально-диференціальне рівняння для $Z(J)$:

$$(\square_x + m^2) \frac{\delta Z(J)}{i\delta J(x)} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{int}}(\Phi(x))}{\partial\Phi(x)} \Big|_{\Phi(x)=\frac{\delta}{i\delta J(x)}} Z(J) = J(x)Z(J). \quad (5.2.10)$$

Очевидно, що для $\mathcal{L}_{\text{int}} = 0$ це рівняння зводиться до рівняння для $Z_0(J)$. Рівняння (5.2.10) можна застосувати для вивчення властивостей функціонала $Z(J)$, не використовуючи його виведення з функціонального інтеграла. Рівняння (5.2.10) можна також записати у вигляді

$$\frac{\delta S(\Phi)}{\delta\Phi(x)} \Big|_{\Phi(x)=\frac{\delta}{i\delta J(x)}} Z(J) + J(x)Z(J) = 0. \quad (5.2.11)$$

Розв'язком рівняння (5.2.10) є

$$Z(J) = N \exp \left[i \int d^4 x \mathcal{L}_{\text{int}} \left(\frac{\delta}{i\delta J(x)} \right) \right] Z_0(J), \quad (5.2.12)$$

де N — нормуючий множник. Відповідне доведення є очевидним з функціонального інтеграла, де в $\mathcal{L}_{\text{int}}(\Phi)$ робимо заміну (5.2.9).

Таким чином,

$$Z(J) = N \exp \left[i \int d^4 z \mathcal{L}_{\text{int}} \left(\frac{\delta}{i\delta J(z)} \right) \right] \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y J(x) D_c(x-y) J(y) \right], \quad (5.2.13)$$

$$N^{-1} = \exp \left[i \int d^4 z \mathcal{L}_{\text{int}} \left(\frac{\delta}{i\delta J(z)} \right) \right] \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y J(x) D_c(x-y) J(y) \right] \Big|_{J=0}.$$

Отриманий розв'язок є дуже зручним для знаходження пертурбативних результатів. Дійсно, обчислимо генеруючий функціонал, розкладаючи $\exp(i \int \mathcal{L}_{\text{int}})$ в ряд по константі зв'язку λ . Для виразу (5.2.13) в першому порядку по λ маємо

$$\left[1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4 z \left(\frac{\delta}{i\delta J(z)} \right)^4 + \mathcal{O}(\lambda^2) \right] \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y J(x) D_c(x-y) J(y) \right]. \quad (5.2.14)$$

Тепер нам потрібно знайти четверту варіаційну похідну

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta}{i\delta J(z)} \right)^4 Z_0 = & \left\{ -3D_c^2(0) - 6iD_c(0) \left[\int d^4 y D_c(z-y) J(y) \right]^2 + \right. \\ & \left. + \left[\int d^4 y D_c(z-y) J(y) \right]^4 \right\} Z_0(J). \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

Отримані три доданки зручно представити графічно у вигляді діаграм, наведених на рис. 5.

Правила відповідності графічних зображень аналітичним виразам представлено на рис. 6. Коефіцієнти 3, 6, 1 (симетрійні коефіцієнти) отримуються з досить простих міркувань симетрії. 1-й доданок впливає з 3-го в результаті з'єднання двох пар ліній; таких способів 3. Цей доданок опи-

$$\left(\frac{\delta}{i\delta J(z)} \right)^4 Z(J) = \left\{ 3 \left(\text{two circles} \right) - 6 \left(\text{circle with two external lines} \right) + \left(\text{cross diagram} \right) \right\} Z_0(J)$$

Рис. 5. Четверта похідна функціонала $Z_0(J)$

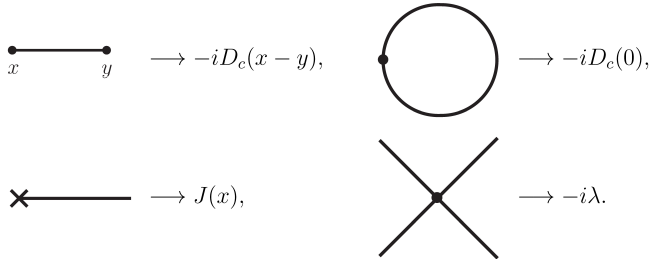


Рис. 6. Правила відповідності

$$Z(J) = \frac{\left[1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \left\{ 3 \text{ (figure-eight)} - 6 \text{ (circle with line)} + \text{ (cross)} \right\} Z_0(J) \right]}{1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \left(3 \text{ (figure-eight)} \right)}$$

Рис. 7. Функціонал $Z(J)$

$$Z(J) = \left[1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \left\{ -6 \text{ (circle with line)} + \text{ (cross)} \right\} Z_0(J) \right]$$

Рис. 8. Функціонал $Z(J)$ в порядку λ після скорочення вакуумних діаграм

сує, очевидно, вакуумну діаграму. Другий доданок отримується з'єднанням будь-яких двох ліній 3-го доданка; таких можливостей шість $\left(\frac{4!}{2!2!} = 6\right)$. Цей доданок описує поправку до власної енергії частинки. Третій доданок — це затравочна, або, як ще кажуть, гола вершина взаємодії. Функціонал $Z(J)$ приймає вигляд, зображений на рис. 7. У першому порядку по λ маємо вираз, представлений на рис. 8. Зазначимо, що вакуумна діаграма зникла. Так само буде в усіх порядках теорії збурень. Відсутність вакуумних діаграм — властивість нормованих генеруючих функціоналів. Використаємо тепер отриманий вираз для генеруючого функціонала в першому порядку по λ для знаходження поправки до двоточної функції Гріна.

5.3. Двоточкова функція Гріна

Як ми знаємо, варіаційні похідні генеруючого функціонала дають повні функції Гріна

$$\left. \frac{\delta^n Z(J)}{i\delta J(x_1) \dots i\delta J(x_n)} \right|_{J=0} = \langle 0 | T \hat{\Phi}(x_1) \dots \hat{\Phi}(x_n) | 0 \rangle \equiv G(x_1, \dots, x_n), \quad (5.3.1)$$

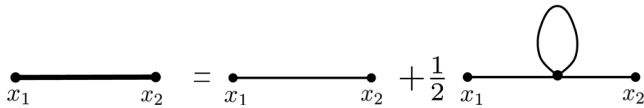


Рис. 9. Поправка другого порядку до пропагатора скалярного поля

які не містять внесків від вакуумних діаграм. Функціонал $Z(J)$ можна розкласти у функціональний ряд Тейлора

$$Z(J) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n G(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n). \quad (5.3.2)$$

Для двоточкової функції, диференціюючи рівняння, зображене на рис. 8, отримуємо

$$G(x_1, x_2) = -iD_c(x_1 - x_2) - \frac{i\lambda}{2} (-iD_c(0)) \int d^4z (-iD_c(x_1 - z)) (-iD_c(z - x_2)). \quad (5.3.3)$$

Це рівняння представлено графічно на рис. 9.

Для функції $D_c(x - y)$ використаємо її фур'є-перетворення

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2) &= -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} - \frac{i\lambda}{2} iD_c(0) \int d^4z \times \\ &\quad \times \int \frac{d^4pd^4k}{(2\pi)^8} \frac{e^{-ip(x_1-z)-ik(z-x_2)}}{(m^2 - p^2 - i\varepsilon)(m^2 - k^2 - i\varepsilon)} = \\ &= -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x_1-x_2)} \left[\frac{1}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} + \frac{(i\lambda/2)D_c(0)}{(m^2 - p^2 - i\varepsilon)^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

У підсумку в першому порядку по λ маємо

$$\begin{aligned} G(x_1 - x_2) &= i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \left[1 - \frac{(i\lambda/2)D_c(0)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \right] \approx \\ &\approx i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2 - m^2 + (i\lambda/2)D_c(0) + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

Ми бачимо, що повна функція Гріна залежить від різниці аргументів, що природно внаслідок трансляційної інваріантності теорії. Також у другій рівності ми прийняли до уваги, що розрахунки зроблено в першому порядку по константі взаємодії λ . Для фур'є-образу маємо вираз

$$G(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + (i\lambda/2)D_c(0) + i\varepsilon}, \quad (5.3.6)$$

який має полюс при

$$p^2 = m^2 - (i\lambda/2)D_c(0) \equiv m^2 + \delta m^2. \quad (5.3.7)$$

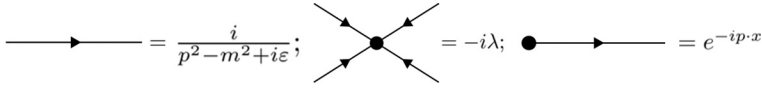


Рис. 10. Правила Фейнмана для скалярної теорії в імпульсному просторі

Бачимо, що діаграма власної енергії (друга діаграма на рис. 5) приводить до такого доданка до квадрата маси

$$\delta m^2 = -\frac{i\lambda}{2} D_c(0) = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (5.3.8)$$

який квадратично розбігається. Тут ми вперше зустрічаємося з розбіжностями в квантовій теорії поля.

Історично присутність подібних розбіжностей у теорії збурень у квантовій електродинаміці майже на двадцять років сповільнила розвиток квантової електродинаміки. Причина цього очевидна — ми обчислюємо поправку до деякої величини за теорією збурень, а в результаті зустрічаємось з розбіжними величинами. Тоді про які поправки йдеться? І виникає питання, що взагалі робити далі. Узгоджена теорія квантової електродинаміки була сформульована лише після того, як було розроблено теорію перенормувань, яка усуває ці розбіжності і дозволяє проводити розрахунки за теорією збурень. Квантова електродинаміка належить до так званих перенормованих теорій поля. Як виявилось, саме перенормовні теорії лежать в основі теорій, що описують фундаментальні взаємодії частинок (крім гравітаційної взаємодії). Теорія перенормувань буде предметом нашого подальшого вивчення.

Ми можемо тепер сформулювати правила Фейнмана для запису аналітичних виразів діаграм в імпульсному просторі, які зображено на рис. 10. Кожній внутрішній лінії, вершині та зовнішній лінії відповідають аналітичні вирази. Крім того, в кожній вершині повинен виконуватись закон збереження 4-імпульсу. По імпульсу петлі ведеться інтегрування. На додаток, кожна діаграма має симетрійний коефіцієнт (далі буде більше інформації про ці коефіцієнти). За допомогою правил Фейнмана ми можемо відразу записати аналітичний вираз для пропагатора скалярної частинки в першому порядку по константі взаємодії λ :

$$G(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{-i\lambda}{2} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (5.3.9)$$

Можна перевірити, що цей вираз співпадає з фур'є-перетворенням першого рядка в (5.3.5).

5.4. Генеруючий функціонал для зв'язних діаграм

Як ми вже знаємо, функціонал $Z(J)$ породжує функції Гріна, які не містять внесків від вакуумних діаграм, але він містить незв'язні діаграми, тобто діаграми, які складаються з окремих блоків, не зв'язаних один з одним. Корисно визначити новий функціонал $W(J)$, який описує тільки зв'язні діаграми. Він визначається таким чином

$$Z(J) = e^{iW(J)} \Rightarrow W(J) = -i \ln Z(J). \quad (5.4.1)$$

Для перших похідних функціонала $W(J)$ знаходимо

$$\frac{\delta W}{\delta J(x_1)} = -\frac{i}{Z} \frac{\delta Z}{\delta J(x_1)}, \quad (5.4.2)$$

$$\frac{\delta^2 W}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} = \frac{i}{Z^2} \frac{\delta Z}{\delta J(x_1)} \frac{\delta Z}{\delta J(x_2)} - \frac{i}{Z} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)}. \quad (5.4.3)$$

Тоді, якщо похідна

$$\left. \frac{\delta Z}{\delta J} \right|_{J=0} = 0,$$

то маємо співвідношення

$$\left. \frac{\delta^2 W}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right|_{J=0} = -i \left. \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right|_{J=0} = iG(x_1, x_2), \quad (5.4.4)$$

тобто пропагатор з точністю до уявної одиниці визначається другою варіаційною похідною або $W(J)$, або $Z(J)$. Для похідних від $W(J)$ більш високого порядку співвідношення будуть складніші. Функціонал $W(J)$ розкладемо у функціональний ряд

$$W(J) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n), \quad (5.4.5)$$

звідки коефіцієнти ряду

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (-i)^{n-1} \frac{\delta^n W(J)}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \quad (5.4.6)$$

визначають нові функції Гріна. Ці функції Гріна мають важливу характеристику: вони не містять незв'язних компонент, тобто $G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ є зв'язними функціями Гріна (цей факт буде проілюстровано пізніше).

5.5. Теорема Віка для скалярних полів

Генеруючий функціонал для вільного скалярного поля має вигляд

$$\begin{aligned} Z_0(J) &= \frac{\int \mathcal{D}\Phi \exp\{i \int d^4x [\mathcal{L}_0(\Phi) + J\Phi]\}}{\int \mathcal{D}\Phi \exp\{i \int d^4x \mathcal{L}_0(\Phi)\}} = \\ &= \exp\left\{\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) D_c(x-y) J(y)\right\}, \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

звідки

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^2 Z(J)}{i\delta J(x) i\delta J(y)} \right|_{J=0} &= \frac{\int \mathcal{D}\Phi \Phi(x) \Phi(y) \exp\{i \int d^4x [\mathcal{L}_0(\Phi)]\}}{\int \mathcal{D}\Phi \exp\{i \int d^4x \mathcal{L}_0(\Phi)\}} = \\ &= \langle 0 | T \hat{\Phi}(x) \hat{\Phi}(y) | 0 \rangle = -i D_c(x-y). \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

Для зручності можна записати

$$Z_0(J) = \exp\left[-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) \langle 0 | T \hat{\Phi}(x) \hat{\Phi}(y) | 0 \rangle J(y)\right]. \quad (5.5.3)$$

Для чотириточкової функції Гріна отримуємо

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \hat{\Phi}(x_1) \dots \hat{\Phi}(x_4) | 0 \rangle &= \frac{1}{i^4} \left. \frac{\delta^4 Z_0(J)}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_4)} \right|_{J=0} = \\ &= \langle 0 | T \hat{\Phi}(x_1) \hat{\Phi}(x_2) | 0 \rangle \langle 0 | T \hat{\Phi}(x_3) \hat{\Phi}(x_4) | 0 \rangle + \langle 0 | T \hat{\Phi}(x_1) \hat{\Phi}(x_3) | 0 \rangle \times \\ &\times \langle 0 | T \hat{\Phi}(x_2) \hat{\Phi}(x_4) | 0 \rangle + \langle 0 | T \hat{\Phi}(x_1) \hat{\Phi}(x_4) | 0 \rangle \langle 0 | T \hat{\Phi}(x_2) \hat{\Phi}(x_3) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

Введемо позначення

$$\overbrace{\hat{\Phi}(x_1) \hat{\Phi}(x_2)} = \langle 0 | T \hat{\Phi}(x_1) \hat{\Phi}(x_2) | 0 \rangle, \quad (5.5.5)$$

яке називається спарюванням. Тоді (5.5.4) запишеться як

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \left\{ \hat{\Phi}_1 \hat{\Phi}_2 \hat{\Phi}_3 \hat{\Phi}_4 \right\} | 0 \rangle &\equiv \langle 0 | T \hat{\Phi}(x_1) \hat{\Phi}(x_2) \hat{\Phi}(x_3) \hat{\Phi}(x_4) | 0 \rangle = \\ &= \overbrace{\hat{\Phi}(x_1) \hat{\Phi}(x_2)} \overbrace{\hat{\Phi}(x_3) \hat{\Phi}(x_4)} + \overbrace{\hat{\Phi}(x_1) \hat{\Phi}(x_3)} \overbrace{\hat{\Phi}(x_2) \hat{\Phi}(x_4)} + \\ &\quad + \overbrace{\hat{\Phi}(x_1) \hat{\Phi}(x_4)} \overbrace{\hat{\Phi}(x_2) \hat{\Phi}(x_3)}. \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

Це означає, що чотириточкова функція дорівнює сумі добуток усіх спарювань, тобто виражається через добуток двочастинкових функцій Гріна

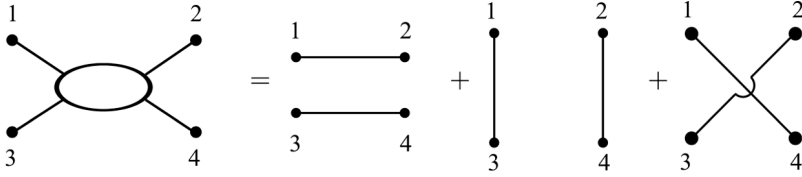


Рис. 11. Теорема Віка для чотириточкової функції Гріна вільного поля

(пропагаторів). Цей факт наочно демонструє пертурбативну природу діаграмної техніки, в якій функції Гріна вищого порядку виражаються через функції Гріна нижчого порядку. Незалежні перестановки називаються згортками, і в результаті ми маємо

$$\langle 0|T\hat{\Phi}(x_1)\hat{\Phi}(x_2)\hat{\Phi}(x_3)\hat{\Phi}(x_4)|0\rangle = \sum_{\text{згортки}} \prod \overline{\Phi(x_i)\Phi(x_j)}. \quad (5.5.7)$$

Графічне зображення представлено на рис. 11, де лініям відповідають спарювання $\overline{\Phi_i\Phi_j}$. Це є не що інше, як теорема Віка. Теорема є справедливою для довільного числа полів

$$\overline{\Phi_1 \dots \Phi_n \Phi'} = (\pm 1)^n \overline{\Phi \Phi'} \Phi_1 \dots \Phi_n. \quad (5.5.8)$$

При підрахунку спарювань оператори полів потрібно поставити поруч, і для цього прокомутувати оператори під знаком хронологічного упорядкування. Знак плюс в (5.5.8) відноситься до бозонних полів, тоді як знак мінус відповідає випадку ферміонних полів, де слід враховувати антикомутативність полів і загальний знак при перестановках. Оскільки $\langle 0|\Phi(x)|0\rangle = 0$ для вільного поля, то нетривіальними будуть тільки спарювання для $2n$ -точкових функцій Гріна $\langle 0|T\hat{\Phi}_1 \dots \hat{\Phi}_{2n}|0\rangle$. Легко підрахувати, що загалом в сумі добутоків спарювань скалярних полів буде $(2n - 1)!!$ доданків (випадок ферміонних полів розглянемо пізніше).

5.6. Діаграми Фейнмана

Кореляційні функції типу $\langle 0|T\Phi(x_1) \dots \Phi(x_n)|0\rangle$ знаходять з генеруючого функціонала за допомогою диференціювання за джерелом. Інший, більш зручний, спосіб обчислення кореляційних функцій — це використання теореми Віка.

У теорії із взаємодією обчислення функціонального інтеграла виконується за теорією збурень, тобто запишемо $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}$ і розкладаємо

$$e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}})} = e^{i \int d^4x \mathcal{L}_0} \left[1 + i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}} + \frac{i^2}{2!} \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}(\Phi(x)) \times \right. \\ \left. \times \int d^4y \mathcal{L}_{\text{int}}(\Phi(y)) + \dots \right]. \quad (5.6.1)$$

Наприклад, у теорії скалярного поля із взаємодією $\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\lambda}{4!}\Phi^4$ обчислимо знов повний пропагатор в порядку λ :

$$G(x_1, x_2) = \langle 0|T\Phi(x_1)\Phi(x_2)|0\rangle = N \int \mathcal{D}\Phi \Phi(x_1)\Phi(x_2) e^{i \int d^4x \mathcal{L}_0(x)} \times \left[1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \Phi^4(z) + \dots \right]. \quad (5.6.2)$$

До кожного доданка в квадратних дужках застосуємо теорему Віка

$$G(x_1, x_2) = N \left\{ \overline{\Phi_1}\Phi_2 + 3 \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \overline{\Phi_1}\Phi_2 \int d^4z \overline{\Phi(z)}\Phi(z) \overline{\Phi(z)}\Phi(z) + \right. \\ \left. + 12 \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^4z \overline{\Phi(x_1)}\Phi(z) \overline{\Phi(x_2)}\Phi(z) \overline{\Phi(z)}\Phi(z) \right\}. \quad (5.6.3)$$

При обчисленні доданка, пропорційного λ , загалом отримуємо 15 згортки, але тільки дві з них різні з коефіцієнтами 3 і 12. Нагадаємо, що

$$N^{-1} = 1 - 3 \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \overline{\Phi(z)}\Phi(z) \overline{\Phi(z)}\Phi(z) = 1 + \frac{1}{8} \text{ (diagram) }, \quad (5.6.4)$$

де другий доданок — вакуумна діаграма, яка пропорційна чотиривимірному об'єму $\int d^4z$, оскільки спарювання $\overline{\Phi(z)}\Phi(z) = -iD_c(0)$ не залежить від z . Аналогічний внесок вакуумної діаграми присутній у другому доданку в (5.6.3). Ці суто вакуумні внески скорочуються в (5.6.3), таким чином у порядку λ отримуємо (порівняйте з рис. 9)

$$\langle 0|T\Phi(x_1)\Phi(x_2)|0\rangle = \text{ (diagram) } + \frac{1}{2} \text{ (diagram) }. \quad (5.6.5)$$

Скорочення вакуумних внесків має місце в довільному порядку теорії збурень і відображає той факт, що функції Гріна одержуються з функціонала $Z(J)$, який нормований на одиницю при $J = 0$.

Відповідне графічне зображення пропагатора $G(x_1, x_2)$, який знаходять з ненормованого функціонала $Z(J)$, представлено на рис. 12 в порядку λ^2 разом з ваговими коефіцієнтами, які будуть пораховані пізніше. Для пропагатора, отриманого з нормованого функціонала $Z(J)$, залишаються в порядку λ^2 тільки діаграми з першого рядка, де відсутні вакуумні внески. Для зв'язної двоточкової функції Гріна в порядках λ і λ^2 маємо діаграми, зображені на рис. 13.

$$\begin{aligned}
 G^{(2)}(x_1, x_2) = & \frac{\{192\}}{1/6} \times \text{diagram}_1 + \frac{\{288\}}{1/4} \times \text{diagram}_2 + \frac{\{288\}}{1/4} \times \text{diagram}_3 + \\
 & + \frac{\{72\}}{1/16} \times \text{diagram}_4 + \text{diagram}_5 + \frac{\{72\}}{1/16} \times \text{diagram}_6 + \\
 & + \frac{\{24\}}{1/48} \times \text{diagram}_7 + \frac{\{9\}}{1/128} \times \text{diagram}_8 + \text{diagram}_9
 \end{aligned}$$

Рис. 12. Двоточкова функція Гріна в порядку λ^2 з коефіцієнтами множинності і симетрії

$$\begin{aligned}
 G_c(x_1, x_2) = & \text{diagram}_1 + \frac{1}{2} \text{diagram}_2 + \\
 & + \frac{1}{4} \text{diagram}_3 + \frac{1}{6} \text{diagram}_4 + \frac{1}{4} \text{diagram}_5
 \end{aligned}$$

Рис. 13. Зв'язана двоточкова функція Гріна скалярних полів (пропагатор) в порядках λ та λ^2

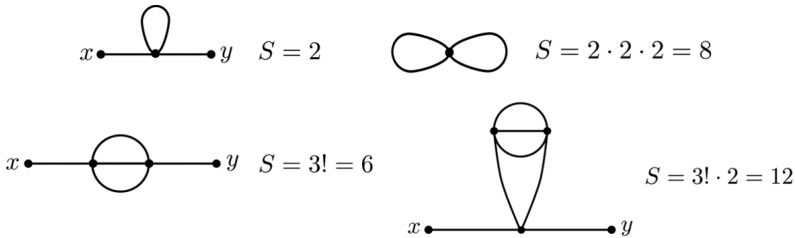


Рис. 14. Коефіцієнти симетрії діаграм

Остаточно правила Фейнмана в координатному просторі формулюються так:

1. Для пропагатора — лінія з точками на кінцях: $\overline{\Phi(x)\Phi(y)} = \langle 0|T\hat{\Phi}(x)\hat{\Phi}(y)|0\rangle$.

2. Для кожної вершини — $(-i\lambda) \int d^4z$.

3. Для кожної зовнішньої точки — коефіцієнт 1.

4. Поділити на коефіцієнт симетрії діаграми S .

З кожною діаграмою асоціюється множник $1/S$, де S — коефіцієнт симетрії даної діаграми, тобто число способів перестановок компонент діаграми, які не змінюють саму діаграму. Підрахунок коефіцієнта симетрії діаграми S проілюстровано на рис. 14.

Як приклад, у графічній формулі (5.6.6) наведено внески у чотири-точкову незв'язну функцію Гріна в порядку λ^2 :

$$\begin{aligned} \langle 0|T\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4|0\rangle = & \quad \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots \\ & + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots \end{aligned} \quad (5.6.6)$$

У функцію Гріна

$$(-i)^3 \frac{\delta^4 W(J)}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_4)} \Big|_{J=0} = \langle 0|T\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4|0\rangle_c \quad (5.6.7)$$

внески дають тільки зв'язні діаграми з наведених в (5.6.6).

5.7. Правила Фейнмана в імпульсному просторі

Від аналітичних виразів для діаграм Фейнмана в конфігураційному просторі можна перейти до відповідних виразів в імпульсному просторі, використовуючи фур'є-перетворення. Простіше одразу сформулювати правила Фейнмана в імпульсному просторі. В конфігураційному просторі пропাগатор визначається таким аналітичним виразом

$$\langle 0|T\Phi(x)\Phi(y)|0\rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (= -iD_c(x-y)). \quad (5.7.1)$$

1. Пропагатору в імпульсному просторі ставиться у відповідність лінія, якій відповідає вираз

$$\text{---} \xrightarrow{p} \text{---} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (5.7.2)$$

Напрямок імпульсу довільний унаслідок симетрії згортки для скалярних полів: $\overbrace{\Phi(x)\Phi(y)} = \overbrace{\Phi(y)\Phi(x)}$.

2. Вершина визначається таким чином

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = -i\lambda. \quad (5.7.3)$$

У результаті інтегрування за координатами z вершини виникає закон збереження енергії-імпульсу, який виражається у присутності у вершині дельта-функції:

$$\int d^4 z e^{-ip_1 z} e^{-ip_2 z} e^{-ip_3 z} e^{-ip_4 z} = (2\pi^4) \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4).$$

Дельта-функції дозволяють зняти деякі інтегрування за імпульсами, залишаючи тільки інтегрування за імпульсами, не фіксованими законом збереження (в петльових діаграмах).

3. Інтегрувати по кожному незафіксованому законом збереження імпульсу петлі: $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$.

4. Поділити на множник симетрії S даної діаграми.

5.8. Симетрійні коефіцієнти в теорії скалярного поля

Число віківських спарювань, що приводять до одного й того самого виразу фейнманівської діаграми, називається множинністю M_G даної діаграми. Тому кожна діаграма в порядку λ^p буде мати ваговий коефіцієнт

$$W_G = \frac{M_G}{(4!)^p p!}, \quad (5.8.1)$$

де фактори $(4!)^p$ та $p!$ походять з розкладу експоненти $\exp i \int d^4 x \left(-\frac{\lambda \Phi^4}{4!} \right)$ в порядку λ^p . Для функції Гріна $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ з n зовнішніми лініями необхідно згорнути в даному порядку λ^p за теоремою Віка $4p + n$ полів:

$$\langle 0 | T \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n) \Phi^4(z_1) \dots \Phi^4(z_p) | 0 \rangle. \quad (5.8.2)$$

Усього таких доданків у сумі буде $(4p+n-1)!!$, і кожний доданок є добутком $(4p+n)/2$ вільних пропагаторів. Очевидно, що

$$\sum_i M_{G_i} = (4p+n-1)!!. \quad (5.8.3)$$

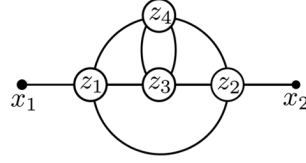
Наприклад, для двоточкової функції Гріна в порядку λ^2 маємо діаграми, наведені на рис. 12. Для кожної діаграми вказано множинність (у фігурних дужках) і ваговий (симетрійний) коефіцієнт. Незавжно перевірити, що сума всіх множинностей задовольняє умові (5.8.3): $(192 + 288 + 288 + 72 + 72 + 24 + 9) = (4 \cdot 2 + 1)!! = 945$ (аналіз діаграм на рис. 12 з їх множинностями і симетрійними коефіцієнтами див. у [132]).

Множинність діаграми можна обчислити за формулою

$$M_G = \frac{(4!)^p p!}{(2!)^{S+D} (3!)^T (4!)^F N_{IVP}}, \quad (5.8.4)$$

де S — кількість спарювань в одній і тій самій вершині, D — кількість подвійних спарювань між вершинами, T — кількість потрійних спарювань між вершинами, F — кількість четверних спарювань між вершинами, N_{IVP} — кількість перестановок тотожних вершин.

Рис. 15. Діаграма порядку λ^4 , що дає внесок у функцію Гріна $G^{(2)}(x_1, x_2)$



Для підрахунку формули (5.8.4) візьмемо до уваги, що кожна вершина зв'язується з чотирма лініями $4!$ способами, і оскільки є p вершин, то від самого початку є $(4!)^p p!$ способів намалювати діаграму. Але потрібно врахувати переоблік, який виникає завдяки перестановці ліній, що зв'язують дві вершини (можливі дві, три і чотири лінії між ними). N_{IVP} враховує кількість перестановок вершин, які не змінюють саму діаграму. Для симетрійного коефіцієнта маємо

$$W_G = \frac{1}{(2!)^{S+D}(3!)^T(4!)^F N_{IVP}}. \quad (5.8.5)$$

Формула (5.8.5) визначає вагу діаграми з фіксованою конфігурацією координат x_1, \dots, x_n на кінцях зовнішніх ліній.

Для прикладу розглянемо діаграму четвертого порядку (рис. 15). Перестановка двох ліній $D = 1$, що зв'язують вершини z_3 і z_4 , не змінює діаграму, так само як і перестановка самих вершин. Таким чином, для даної діаграми $S = T = F = 0$, $D = 1$, $N_{IVP} = 2$, $M_G = 1990656$, $W_G = 1/4$. Аналітичний вираз діаграми на рис. 15 має вигляд

$$\frac{(-i\lambda)^4}{4} \int d^4 z_1 d^4 z_2 d^4 z_3 d^4 z_4 G_0(x_1, z_1) G_0(z_1, z_2) G_0(z_1, z_3) G_0(z_1, z_4) \times \\ \times [G_0(z_3, z_4)]^2 G_0(z_3, z_2) G_0(z_4, z_2) G_0(z_2, x_2). \quad (5.8.6)$$

Симетрія виразу відносно заміни $z_3 \leftrightarrow z_4$ очевидна.

ЗАДАЧІ

1. Обчислити причинну функцію Гріна скалярного поля в $2 + 1$ -вимірному просторі-часі, тобто порахувати інтеграл:

$$D(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i(p_0 t - \mathbf{p}\mathbf{x})}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2.$$

Показати, що в безмасовому випадку функція $D(\mathbf{x}, t)$ зводиться до

$$D(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{t^2 - \mathbf{x}^2 - i\delta}}, \quad \delta \rightarrow 0.$$

Примітка. Спочатку використати представлення

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = -i \int_0^\infty dt e^{i(p^2 - m^2 + i\epsilon)t},$$

а потім інтеграл

$$\int_0^{\infty} dt t^{\nu-1} e^{-\frac{\beta}{t} - \gamma t} = 2 \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)^{\nu/2} K_{\nu}(2\sqrt{\beta\gamma}), \quad \text{Re } \beta > 0, \quad \text{Re } \gamma > 0.$$

Врахувати також, що функції Макдональда напівцілого порядку зводяться до елементарних функцій, зокрема,

$$K_{-1/2}(z) = K_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}.$$

2. Генеруючий функціонал для вільного скалярного поля задається формулою (1.6.15). Обчислити четверту похідну від $Z_0(J)$ і представити одержані доданки у вигляді діаграм.

3. Розглянути інтеграл

$$Z(a, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi e^{-\frac{a\phi^2}{2} - \frac{\lambda\phi^4}{4!}}, \quad a > 0, \quad \lambda > 0.$$

Розкладаючи експоненту в ряд по λ і здійснюючи інтегрування по x , одержати асимптотичний розклад $I(\lambda)$ по параметру λ . Визначити радіус збіжності цього ряду.

4. У другому порядку теорії збурень по λ знайти «пропагатор»

$$D(a, \lambda) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\phi \phi^2 e^{-\frac{a\phi^2}{2} - \frac{\lambda\phi^4}{4!}}}{\int_{-\infty}^{\infty} d\phi e^{-\frac{a\phi^2}{2} - \frac{\lambda\phi^4}{4!}}}.$$

Представити одержані доданки у вигляді «діаграм Фейнмана».

5. Нехай «вільна енергія» визначена інтегралом

$$e^{F(J)} = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi e^{-S(\phi) + J\phi},$$

де $S(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4$. Використовуючи тотожність

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\phi \frac{d}{d\phi} e^{-S(\phi) + J\phi} = 0,$$

отримати таке рівняння для функції $F(J)$:

$$\frac{dS}{d\phi} \left(\phi \rightarrow \frac{d}{dJ} + \frac{dF(J)}{dJ} \right) = J.$$

Диференціюючи це рівняння по J отримати ланцюжок «рівнянь Швінгера—Дайсона» для перших трьох нетривіальних рівнянь «функцій Гріна»

$$G_n = \left. \frac{d^n F(J)}{dJ^n} \right|_{J=0}.$$

6. Нехай генеруючий функціонал $Z(J)$ задовольняє рівнянню

$$Z'''(J) = JZ(J),$$

яке належить до класу рівнянь Лапласа. Знайти розв'язок цього рівняння з граничними умовами

$$Z(0) = 1, \quad Z'(0) = 0, \quad Z''(0) = 2\Gamma(3/4)/\Gamma(1/4).$$

7. Довести такі рівності для інтегралів Фейнмана:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{[xA + (1-x)B]^2} = \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[xA + yB]^2},$$

$$\frac{1}{AB^n} = \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{ny^{n-1}}{[xA + yB]^{n+1}},$$

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{[xA + (1-x)B]^{\alpha+\beta}} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}.$$

Зауваження: α і β не є цілими.

8. Застосувати метод індукції і довести таку рівність для інтеграла Фейнмана:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = (n-1)! \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta\left(\sum_{i=1}^n x_i - 1\right) \times \\ \times \frac{1}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n]^n}.$$

9. Довести найбільш загальну рівність для інтеграла Фейнмана:

$$\frac{1}{A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_n^{\alpha_n}} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta\left(\sum_{i=1}^n x_i - 1\right) \times \\ \times \frac{\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i - 1}}{[\sum_{i=1}^n x_i A_i]^{\sum_i \alpha_i} \Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_n)},$$

де α_i — довільні комплексні числа $\text{Re } \alpha_i > 0$.

Примітка 1. У задачах (7)—(9) взяти до уваги, що всі множники A_i , B містять інфінітезимально малий додатній доданок, тобто $A_i + i\epsilon$, $B + i\epsilon$.

Примітка 2. Задачу (9) довести, використовуючи тотожність

$$\frac{1}{(A + i\epsilon)^s} = \frac{(-i)^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{it(A+i\epsilon)}, \quad \epsilon > 0,$$

для кожного множника, а потім, використовуючи тотожність для одиниці,

$$1 = \int_0^\infty d\rho \delta\left(\sum_{i=1}^n t_i - \rho\right),$$

під знаком інтеграла, з наступною зміною змінних $t_i \rightarrow \rho t_i$.

6

ПРАВИЛА ФЕЙНМАНА В КАЛІБРУВАЛЬНИХ ТЕОРІЯХ

Рівняння руху в квантово-польових теоріях є складними і, як правило, їх точні розв'язки не можуть бути знайдені. Тому теорія збурень за константою взаємодій є практично єдиною можливістю досліджувати теорії квантових полів. Правила Фейнмана визначають аналітичні вирази відповідних коефіцієнтів рядів теорії збурень, а діаграми Фейнмана є дуже корисним графічним зображенням окремих доданків цих рядів. У попередньому розділі ми сформулювали правила Фейнмана в теорії скалярних полів як у координатному, так і в імпульсному просторах, а також познайомилися з відповідними діаграмами Фейнмана. У цьому розділі ми продовжимо наше вивчення правил і діаграм Фейнмана, а саме: розглянемо правила Фейнмана в калібрувальних теоріях, які описують електромагнітні та сильні взаємодії, тобто в квантовій електродинаміці та хромодинаміці.

6.1. Теорема Віка для спінових полів

Розпочнемо ми з правил Фейнмана в квантовій електродинаміці, які внаслідок абелевості калібрувальної групи і відсутності взаємодії калібрувальних бозонів між собою є значно простішими порівняно з правилами Фейнмана в неабелевих теоріях. Насамперед розглянемо узагальнення теореми Віка на випадок спінових полів, яка справедлива як в КЕД, так і в КХД.

Для вільного поля Дірака генеруючий функціонал має вигляд

$$Z_0(\bar{\eta}, \eta) = N \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \exp \left\{ i \int d^4x [\bar{\Psi}(x)(i\hat{\partial}_x - m)\Psi(x) + \bar{\eta}\Psi + \bar{\Psi}\eta] \right\}, \quad (6.1.1)$$

де нормуючий множник

$$N^{-1} = \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \exp \left\{ i \int d^4x [\bar{\Psi}(x)(i\hat{\partial}_x - m)\Psi(x)] \right\} = \text{Det}(i\hat{\partial} - m)$$

(спінорні індекси вважаються згорнутими, наприклад, $\bar{\eta}_\alpha \Psi_\alpha$). Здійснюючи інтегрування по грасманових змінних, отримуємо

$$Z_0(\bar{\eta}, \eta) = \exp\{-i\bar{\eta}[i\hat{\partial} - m]^{-1}\eta\} = \exp\left\{-i\int d^4x d^4y \bar{\eta}(x)S(x-y)\eta(y)\right\}, \quad (6.1.2)$$

де

$$S(x-y) \equiv \langle x | \frac{1}{i\gamma^\mu \partial_\mu - m} | y \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{\hat{p} - m + i\varepsilon}. \quad (6.1.3)$$

З одного боку друга похідна функціонала є

$$\left. \frac{\delta^2 Z_0(\bar{\eta}, \eta)}{\delta \bar{\eta}(x) \delta \eta(y)} \right|_{\bar{\eta}=\eta=0} = \langle 0 | T \Psi(x) \bar{\Psi}(y) | 0 \rangle \equiv \overline{\Psi(x) \Psi(y)}, \quad (6.1.4)$$

а з іншого, обчислюючи безпосередньо варіаційні похідні Z_0 в (6.1.2), знаходимо співвідношення

$$\langle 0 | T \Psi(x) \bar{\Psi}(y) | 0 \rangle = iS(x-y) \equiv G_0(x-y). \quad (6.1.5)$$

Тому можна записати

$$Z_0(\bar{\eta}, \eta) = \exp \left[- \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) \langle 0 | T \Psi(x) \bar{\Psi}(y) | 0 \rangle \eta(y) \right]. \quad (6.1.6)$$

Обчислимо 4-точкову функцію Гріна

$$\left. \frac{\delta^4 Z_0(\bar{\eta}, \eta)}{\delta \bar{\eta}(x_1) \delta \bar{\eta}(x_2) \delta \eta(x_3) \delta \eta(x_4)} \right|_{\bar{\eta}=\eta=0} = \langle 0 | T \Psi(x_1) \Psi(x_2) \bar{\Psi}(x_3) \bar{\Psi}(x_4) | 0 \rangle. \quad (6.1.7)$$

Для варіаційних похідних Z_0 знаходимо

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \Psi(x_1) \Psi(x_2) \bar{\Psi}(x_3) \bar{\Psi}(x_4) | 0 \rangle &= -\langle 0 | T \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_3) | 0 \rangle \times \\ &\times \langle 0 | T \Psi(x_2) \bar{\Psi}(x_4) | 0 \rangle + \langle 0 | T \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_4) | 0 \rangle \langle 0 | \Psi(x_2) \bar{\Psi}(x_3) | 0 \rangle = \\ &= -\overline{\Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_3)} \overline{\Psi(x_2) \bar{\Psi}(x_4)} + \overline{\Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_4)} \overline{\Psi(x_2) \bar{\Psi}(x_3)}. \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

Цей вираз є прикладом теореми Віка для ферміонних полів (з урахуванням знака перестановки для ферміонів), згідно з якою чотириточкова функція Гріна виражається через двоточкову функцію Гріна (пропатор). Звернемо увагу, що немає спарювань типу $\overline{\Psi \Psi}$ або $\overline{\bar{\Psi} \bar{\Psi}}$ внаслідок відсутності відповідних квадратичних доданків у лагранжіані. Це є справедливим для квантової електродинаміки, але такі спарювання можливі в інших теоріях, наприклад у теорії надпровідності.

6.2. Фейнманівські правила в квантовій електродинаміці

Генеруючий функціонал у КЕД в довільній коваріантній калібровці є таким

$$Z(J_\mu, \bar{\eta}, \eta) = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \exp \left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 + \bar{\Psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \Psi + J_\mu A^\mu + \bar{\eta} \Psi + \bar{\Psi} \eta \right] \right\}, \quad (6.2.1)$$

де коваріантна похідна $-D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ і N – відповідний нормуючий множник. У лагранжіані виділимо квадратичну по полях частину,

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 + \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi, \quad (6.2.2)$$

яка описує кінетичну частину дії для полів і частину, яка відповідає за взаємодію $\mathcal{L}_{\text{int}} = -eA_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$. Квадратичну частину для калібрувального поля приведемо, інтегруючи за частинами, до виду

$$\begin{aligned} & \int d^4x \left[-\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 \right] = \\ & = \frac{1}{2} \int d^4x d^4y A_\mu(x) (iD_0^{-1})^{\mu\nu}(x-y) A_\nu(y), \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

де ми позначили

$$(iD_0^{-1})^{\mu\nu}(x-y) = \left[g^{\mu\nu} \square - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial^\mu \partial^\nu \right]_x \delta(x-y). \quad (6.2.4)$$

Повний фотонний пропагатор знаходять диференціюванням $Z(J)$:

$$\frac{\delta^2 Z(J)}{i\delta J_\mu(x) i\delta J_\nu(y)} \Big|_{J=\bar{\eta}=\eta=0} = \langle 0 | T A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle.$$

Вільний фотонний пропагатор $D_0^{\mu\nu}(x-y)$ задовольняє рівнянню

$$\left[g^{\mu\nu} \square_x - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial_x^\mu \partial_x^\nu \right] D_{0\nu\lambda}(x-y) = i\delta_\lambda^\mu \delta(x-y). \quad (6.2.5)$$

В імпульсному просторі маємо матричне рівняння

$$\left[-g^{\mu\nu} k^2 + \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) k^\mu k^\nu \right] D_{0\nu\lambda}(k) = i\delta_\lambda^\mu, \quad (6.2.6)$$

розв'язком якого є

$$D_{0\nu\lambda}(k) = \frac{1}{ik^2} \left(g_{\nu\lambda} - \frac{k_\nu k_\lambda}{k^2} \right) + \xi \frac{k_\nu k_\lambda}{ik^4}. \quad (6.2.7)$$

За координатами вершин проводиться інтегрування. Дуже зручно, що симетрійні коефіцієнти в КЕД дорівнюють 1 для всіх діаграм, крім вакуумних. Це значно спрощує діаграмну техніку в квантовій електродинаміці.

Таким чином, правила Фейнмана в КЕД у конфігураційному просторі містять два елементи — лінії (пропатори) та вершини. Перші бувають двох типів — фотонні та електронні лінії, а другі, вершини, представляють просторово-часові точки, де взаємодіють електрони та фотони. У кожній вершині зустрічаються три лінії — фотонна та дві електронні. Члени n -го порядку в теорії збурень зображаються діаграмами з n вершинами, де лінії і вершини з'єднані всіма можливими способами. Якщо кожен кінець лінії закінчується вершиною, вона називається внутрішньою лінією, якщо ж один кінець лінії вільний, це зовнішня лінія. Добуток усіх пропаторів інтегрується по координатах відповідних вершин.

В імпульсному просторі співставляємо:

1) ферміонному пропатору

$$\longrightarrow = \frac{i}{\hat{p} - m + i\varepsilon}; \quad (6.2.14)$$

2) фотонному пропатору

$$\sim = \frac{1}{i(k^2 + i\varepsilon)} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\varepsilon} \right); \quad (6.2.15)$$

3) вершині

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \bullet \sim = -ie\gamma^\mu; \quad (6.2.16)$$

4) множник (-1) для кожної ферміонної петлі (появу цього множника пояснимо трохи пізніше).

6.3. Фейнманівські правила в квантовій хромодинаміці

Перейдемо тепер до формулювання правил Фейнмана в квантовій хромодинаміці. Лагранжева густина квантової хромодинаміки в коваріантній калібровці має вигляд

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^{a\mu})^2 - \bar{c}^a \partial^\mu D_\mu^{ab} c^b + \bar{\Psi}_k^\alpha (i\gamma^\mu D_\mu^{\alpha\beta} - m_k) \Psi_k^\beta, \quad (6.3.1)$$

де тензор напруженості

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (6.3.2)$$

і коваріантні похідні

$$D_\mu^{ab} = \partial_\mu \delta^{ab} + g f^{abc} A_\mu^c, \quad (6.3.3)$$

$$D_\mu^{\alpha\beta} = \partial_\mu \delta^{\alpha\beta} + i g A_\mu^a (T^a)^{\alpha\beta}. \quad (6.3.4)$$

Для кольорової групи $SU(3)$ індекси пробігають значення: $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ і $a, b, c = 1, \dots, 8$. Розіб'ємо лагранжеву густину на дві частини $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}$, де \mathcal{L}_0 — квадратична частина, яка визначає пропагатори теорії. З огляду на те, що

$$F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 - 4g f^{abc} \partial_\mu A_\nu^a A_\mu^b A_\nu^c + g^2 f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A_\mu^d A_\nu^e,$$

квадратична частина лагранжіана квантової хромодинаміки запишеться таким чином

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{a\mu})^2 - \bar{c}^a \partial^\mu \partial_\mu c^a + \bar{\Psi}_k^\alpha (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_k) \Psi_k^\alpha, \quad (6.3.5)$$

і для доданка взаємодії в лагранжіані \mathcal{L}_{int} маємо

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} = & g f^{abc} \partial_\mu A_\nu^a A^{\mu b} A^{\nu c} - \frac{g^2}{4} (f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c) (f^{ade} A^{d\mu} A^{e\nu}) - \\ & - g \bar{c}^a \partial^\mu (f^{abc} A_\mu^c c^b) - g \bar{\Psi}_i^\alpha \gamma^\mu A_\mu^a (T^a)^{\alpha\beta} \Psi_i^\beta. \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

Експонента від квадратичної частини дії запишеться

$$\begin{aligned} \exp i \int d^4 x \mathcal{L}_0(x) = & \exp \left\{ - \int d^4 x \left[-\frac{i}{2} A_\mu^a \delta^{ab} \left(\square g^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu \partial^\nu \right) A_\nu^b + \right. \right. \\ & \left. \left. + i \bar{c}^a \delta^{ab} \square c^b - i \bar{\Psi}_k^\alpha (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_k) \Psi_k^\alpha \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

Пропагатори є оберненими до диференціальних операторів у квадратичній формі в експоненті. Для пропагаторів глюонів, кварків і духів знаходимо, відповідно:

$$\langle 0 | T A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \delta^{ab} \left[\frac{1}{ip^2} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \right], \quad (6.3.8)$$

$$\langle 0 | T \Psi_{i\alpha}(x) \bar{\Psi}_{j\beta}(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{i}{\hat{p} - m} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij}, \quad (6.3.9)$$

$$\langle 0 | T c^a(x) \bar{c}^b(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \delta^{ab} \frac{i}{p^2}. \quad (6.3.10)$$

В імпульсному просторі пропагаторам відповідають лінії:

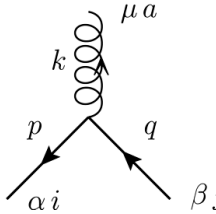
$$\begin{array}{c} \text{oooooo} \\ \text{m a} \quad p \quad \text{b v} \end{array} = \frac{1}{ip^2} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \delta^{ab}, \quad (6.3.11)$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\beta j} \quad p \quad \xrightarrow{\alpha i} \\ \hline \end{array} = \frac{i}{\hat{p} - m} \delta^{\alpha\beta} \delta_{ij}. \quad (6.3.12)$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{b} \quad p \quad \text{---} \xrightarrow{a} \\ \hline \end{array} = \frac{i}{p^2} \delta^{ab}. \quad (6.3.13)$$

За домовленістю ферміонні лінії направляємо від $\bar{\Psi}$ до Ψ і від \bar{c} до c .

Доданок \mathcal{L}_{int} , що відповідає за взаємодію, визначає вершини взаємодії. Для кварк-глюонної вершини в імпульсному просторі маємо



$$= -ig\gamma^\mu (T^a)^{\alpha\beta} \delta_{ij} (2\pi)^4 \delta(q - p - k). \quad (6.3.14)$$

У вершині присутні матриці, які діють на спінорні, кольорові і ароматні індекси кварків. Закон збереження 4-імпульсів у вершині вимагає, щоб сума імпульсів, які входять, дорівнювала сумі імпульсів, які виходять.

Розглянемо вершину взаємодії глюонів з духами. В дії iS для доданка

$$ig \int d^4x (\partial^\mu \bar{c}^a(x)) f^{abc} A_\mu^c(x) c^b(x)$$

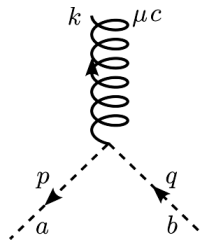
виконуємо фур'є-перетворення для полів і інтегруємо за координатами

$$\begin{aligned} ig \int d^4x \left(\partial_x^\mu \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ipx} \bar{c}^a(p) \right) f^{abc} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikx} A_\mu^c(k) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iqx} c^b(q) = \\ = \int \frac{d^4p d^4k d^4q}{(2\pi)^{12}} (-gp^\mu) f^{abc} \bar{c}^a(p) A_\mu^c(k) c^b(q) (2\pi)^4 \delta(p + k - q). \end{aligned} \quad (6.3.15)$$

Для вершини взаємодії глюонів з духами в імпульсному просторі маємо

$$-gf^{abc} p_\mu (2\pi)^4 \delta(p + k - q). \quad (6.3.16)$$

Оскільки $\bar{c}^a(p)$ відповідає духовій лінії, яка виходить, то саме вона переносить імпульс, який виникає при диференціюванні, що іноді позначається крапкою біля цієї лінії. Зображення цієї вершини представлено графічно та аналітично в (6.3.17).

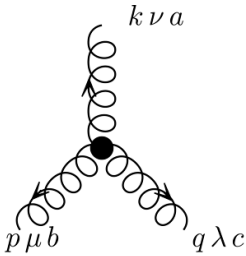


$$-gf^{abc} p_\mu (2\pi)^4 \delta(p + k - q). \quad (6.3.17)$$

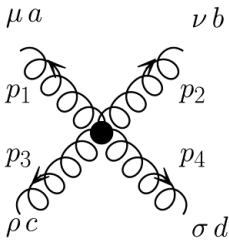
У випадку потрібної вершини взаємодії глюонів зробимо також фур'є-перетворення для полів і проінтегруємо за координатами:

$$\begin{aligned}
 igf^{abc} \int d^4x \partial_\mu A_\nu^a A^{\mu b} A^{\nu c} &= igf^{abc} \int d^4x \left(\partial_\mu^x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikx} A_\nu^c(k) \right) \times \\
 &\times \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ipx} A^{\mu b}(p) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{iqx} A^{\nu c}(q) = \\
 &= -gf^{abc} \int \frac{d^4k d^4p d^4q}{(2\pi)^{12}} k_\mu g_{\nu\lambda} A^{a\nu}(k) A^{b\mu}(p) A^{c\lambda}(q) (2\pi)^4 \delta(k+p+q). \quad (6.3.18)
 \end{aligned}$$

Вершину взаємодії отримують, обчислюючи потрібну варіаційну похідну по $A^{a\nu}(k)$, $A^{b\mu}(p)$, $A^{c\lambda}(q)$, і її наведено в (6.3.19), де всі імпульси вибрано як імпульси, що виходять. Аналогічно отримуємо вершину (6.3.20) для взаємодії чотирьох глюонів



$$\begin{aligned}
 &= -gf^{abc} [(k-q)_\mu g_{\nu\lambda} + (q-p)_\nu g_{\lambda\mu} + \\
 &+ (p-k)_\lambda g_{\mu\nu}] (2\pi)^4 \delta(p+k+q), \quad (6.3.19)
 \end{aligned}$$



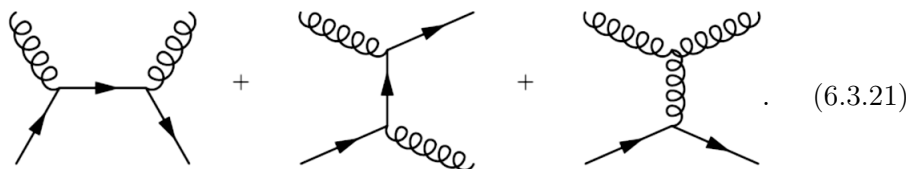
$$\begin{aligned}
 &= -ig^2 [f^{abc} f^{cde} (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) + f^{ace} f^{bde} \times \\
 &\quad \times (g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) + \\
 &\quad + f^{ade} f^{bce} (g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma})] \times \\
 &\quad \times (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4). \quad (6.3.20)
 \end{aligned}$$

При практичних обчисленнях встановлені вище правила необхідно доповнити наступним:

1. Інтегрування за нефіксованими імпульсами петель з мірою $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$.
2. Фактори симетрії.
3. Множники (-1) для кожної духової і ферміонної петлі.

Приклад фейнманівських діаграм, що описують розсіяння глюона на кварку, наведений в (6.3.21). Виявляється, однак, з причин які стануть зрозумілішими пізніше, що сила взаємодії між двома кварками — аналог кулонівської взаємодії в КЕД — є сильною при низьких енергіях і фізично

неможливо виділити окремий кварк



Це явище має назву конфайнменту і «пояснює» те, чому ми не бачимо кварків (і глюонів) у вільному стані. Знадобилося багато часу, щоб встановити, що КХД є правильною теорією ядерних сил: взаємодія між кварками на відносно низьких енергетичних масштабах ядерної фізики настільки сильна, що ми знаходимося далеко за межами теорії збурень. Насправді нікому ще не вдалося, виходячи з лагранжіана КХД, аналітично показати, що має місце явище конфайнменту. Чисельне обчислення фейнманівського інтеграла вказує на те, що це так, але у нас немає математичного доказу.

ЗАДАЧІ

1. Знайти пропагатор фотона в довільній коваріантній калібровці, який задовольняє рівнянню

$$\left[g^{\mu\nu} \square_x - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial_x^\mu \partial_x^\nu \right] D_{\nu\rho}(x - y) = i\delta_\rho^\mu \delta(x - y).$$

2. Показати, що пропагатор фотона в імпульсному просторі для лагранжіана електромагнітного поля з доданком, що фіксує калібровку

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (n_\mu A^\mu)^2,$$

має вигляд

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{ik^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{n_\mu k_\nu + n_\nu k_\mu}{(nk)} + \frac{n^2 k_\mu k_\nu}{(nk)^2} \right],$$

де n_μ — постійний часоподібний вектор, $n_\mu n^\mu > 0$.

3. Довести, що кожній замкненій ферміонній петлі в діаграмах Фейнмана відповідає множник (-1) .
4. У скалярній електродинаміці записати правила Фейнмана для вершин взаємодії зарядженого скалярного поля з електромагнітним полем.
5. Показати, що правила Фейнмана для чотириглюонної вершини взаємодії визначаються рівнянням (6.3.20).

ФУНКЦІЇ ГРІНА В ТЕОРІЇ ЗБУРЕНЬ І ПЕРЕНОРМУВАННЯ

У цьому розділі ми розглянемо однопетльові поправки до функцій Гріна в квантовій електродинаміці, а саме: діаграми власної енергії електрона, поляризації вакууму та вершинну функцію. Вони є першими нетривіальними прикладами діаграм вищих порядків теорії збурень, відомих також як радіаційні поправки, і мають надзвичайне велике як теоретичне, так і практичне значення. Згадані вище діаграми є поправками другого порядку по константі зв'язку і є розбіжними. Розбіжність приводить до необхідності перенормування. Для того щоб виконати перенормування, ми розглянемо різні методи регуляризації та процедуру віднімання, яка приводить до необхідності додавання контрчленів, пов'язаних із розбіжними величинами, до початкового лагранжіана теорії. Детально обговоримо фізичний зміст отриманих скінченних результатів та відповідні наслідки для спостережуваних величин.

7.1. Електронна функція Гріна у другому порядку теорії збурень

Почнемо ми з діаграми власної енергії в електронній функції Гріна і розкладемо в ряд експоненту, залежну від лагранжіана взаємодії у функціональному інтегралі

$$\begin{aligned}
 G_{\alpha\beta}(x-y) &= \langle 0|T\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(y)|0\rangle = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(y) \times \\
 &\times e^{i\int d^4x \mathcal{L}_0} \left[1 - ie \int d^4z \bar{\Psi}(z)\gamma^\mu A_\mu(z)\Psi(z) + \right. \\
 &\left. + \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4z \bar{\Psi}(z)\gamma^\lambda A_\lambda(z)\Psi(z) \int d^4u \bar{\Psi}(u)\gamma^\rho A_\rho(u)\Psi(u) \right], \quad (7.1.1)
 \end{aligned}$$

де вільний лагранжіан \mathcal{L}_0 задано формулою (6.2.2). Доданок першого порядку за константою зв'язку, $\sim eA_\mu$, обертається в нуль при інтегруванні

по A_μ , таким чином перша нетривіальна поправка до електронного пропагатора з'являється у другому порядку теорії збурень

$$G_{\alpha\beta}(x-y) = G_{0\alpha\beta}(x-y) + \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4z d^4u \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{i \int d^4x \mathcal{L}_0} \times \\ \times \Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(y) \bar{\Psi}_\gamma(z) (\gamma^\mu)_{\gamma\delta} \Psi_\delta(z) \bar{\Psi}_\rho(u) (\gamma^\nu)_{\rho\sigma} \Psi_\sigma(u) A_\mu(z) A_\nu(u), \quad (7.1.2)$$

де ми явно вказали всі наявні індекси полів. Функціональне інтегрування з вільним лагранжіаном легко здійснюється за допомогою теореми Віка. Згідно з теоремою Віка робимо спарювання для фотонного і ферміонних полів з урахуванням знаків у випадку ферміонів

$$G_{\alpha\beta}(x-y) = G_{0\alpha\beta}(x-y) + \frac{(-ie)^2}{2} \int d^4z d^4u D_{0\mu\nu}(z-u) [\overline{\Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(y)} \overline{\Psi_\delta(z) \bar{\Psi}_\rho(u)} + \overline{\Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\rho(u)} \overline{\Psi_\delta(z) \bar{\Psi}_\beta(y)} \overline{\Psi_\sigma(u) \bar{\Psi}_\gamma(z)}] (\gamma^\mu)_{\gamma\delta} (\gamma^\nu)_{\rho\sigma} = \\ = G_{0\alpha\beta}(x-y) + \frac{(-ie)^2}{2} \int d^4z d^4u D_{0\mu\nu}(z-u) [G_{0\alpha\gamma}(x-z) G_{0\sigma\beta}(u-y) \times \\ \times G_{0\delta\rho}(z-u) + G_{0\alpha\rho}(x-u) G_{0\delta\beta}(z-y) G_{0\sigma\gamma}(u-z)] (\gamma^\mu)_{\gamma\delta} (\gamma^\nu)_{\rho\sigma}. \quad (7.1.3)$$

Останній вираз запишемо як матричне множення

$$G_{\alpha\beta}(x-y) = G_{0\alpha\beta}(x-y) + \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4z d^4u D_{0\mu\nu}(z-u) [G_0(x-z) \times \\ \times \gamma^\mu G_0(z-u) \gamma^\nu G_0(u-y) + G_0(x-u) \gamma^\nu G_0(u-z) \gamma^\mu G_0(z-y)]_{\alpha\beta}. \quad (7.1.4)$$

Скористаємося симетрією фотонної функції Гріна

$$D_{0\mu\nu}(z-u) = D_{0\nu\mu}(u-z), \quad (7.1.5)$$

і, роблячи заміну змінних $\mu \Leftrightarrow \nu$, $z \Leftrightarrow u$ у другому доданку в квадратних дужках, отримуємо

$$G_{\alpha\beta}(x-y) = G_{0\alpha\beta}(x-y) + (-ie)^2 \int d^4z d^4u D_{0\mu\nu}(z-u) \times \\ \times [G_0(x-z) \gamma^\mu G_0(z-u) \gamma^\nu G_0(u-y)]_{\alpha\beta}, \quad (7.1.6)$$

тобто фактор $2!$ скорочується. Графічно це представлено в (7.1.7),

$$G(x-y) = \bullet \longrightarrow \bullet + \bullet \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} \bullet, \quad (7.1.7)$$

де петльовій діаграмі відповідає вираз

$$-i\Sigma(z-u) = (-ie)^2 D_{0\mu\nu}(z-u) \gamma^\mu G_0(z-u) \gamma^\nu. \quad (7.1.8)$$

У петльовій діаграмі зробимо фур'є-перетворення пропাগаторів електрона і фотона,

$$G_0(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} G_0(p), \quad D_{0\mu\nu}(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} D_{0\mu\nu}(p),$$

отримуємо

$$G(x-y) = G_0(x-y) + \int \frac{d^4 k d^4 p_1 d^4 p_2 d^4 p_3}{(2\pi)^{16}} (-ie)^2 D_{0\mu\nu}(k) G_0(p_1) \gamma^\mu \times \\ \times G_0(p_2) \gamma^\nu G_0(p_3) \int d^4 z d^4 u e^{-ik(z-u) - ip_1(x-z) - ip_2(z-u) - ip_3(u-y)}, \quad (7.1.9)$$

де спірні індекси опущені. Інтегруючи за координатами z , u ,

$$\int d^4 z e^{-iz(k-p_1+p_2)} = (2\pi)^4 \delta(k-p_1+p_2), \\ \int d^4 u e^{-iu(k+p_2-p_3)} = (2\pi)^4 \delta(k+p_2-p_3),$$

і знімаючи потім дельта-функції, приходимо до такого виразу

$$G(x-y) = G_0(x-y) + (-ie)^2 \int \frac{d^4 k d^4 p}{(2\pi)^8} e^{-ip(x-y)} \times \\ \times D_{0\mu\nu}(k) G_0(p) \gamma^\mu G_0(p-k) \gamma^\nu G_0(p), \quad (7.1.10)$$

де $p_3 = p_1 \equiv p$. В імпульсному просторі маємо

$$G(p) = G_0(p) + G_0(p) \left[\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-ie)^2 D_{0\mu\nu}(k) \gamma^\mu G_0(p-k) \gamma^\nu \right] G_0(p). \quad (7.1.11)$$

Введемо позначення для власної енергії електрона

$$-i\Sigma(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} D_{0\mu\nu}(k) \gamma^\mu G_0(p-k) \gamma^\nu, \quad (7.1.12)$$

яка графічно зображена в (7.1.13)

$$-i\Sigma(p) = \begin{array}{c} k \\ \nearrow \quad \searrow \\ \text{---} \bullet \text{---} \mu \quad p-k \quad \nu \text{---} \bullet \text{---} p \end{array} . \quad (7.1.13)$$

Скорочено вираз (7.1.11) можна записати

$$G(p) = G_0(p) + G_0(p)[-i\Sigma(p)]G_0(p) + \dots, \quad (7.1.14)$$

де трьома крапками позначені також внески більш високих порядків теорії збурень.

$$-i\Sigma(p) = \text{wavy line} + \text{wavy line with loop} + \text{wavy line with bubble} + \dots$$

Рис. 16. Власна енергія електрона в порядку e^4

Для пропагатора електрона у другому порядку теорії збурень знаходимо, яким чином власна енергія модифікує вільний пропагатор

$$\begin{aligned} G(p) &= \frac{i}{\hat{p} - m} + \frac{i}{\hat{p} - m} (-i\Sigma(p)) \frac{i}{\hat{p} - m} = \\ &= \frac{i}{\hat{p} - m} \left[1 + \Sigma(p) \frac{1}{\hat{p} - m} \right] \simeq \frac{i}{\hat{p} - m - \Sigma(p)}. \end{aligned} \quad (7.1.15)$$

Ми бачимо, що $\Sigma(p)$ дає добавку до маси електрона, тому вона називається власною енергією електрона. Необхідно додати, однак, що $\Sigma(p)$ залежить від імпульсу i у загальному випадку має нетривіальну матричну структуру, тобто виражається через матриці Дірака. Тому $\Sigma(p)$ описує не тільки поправку до маси електрона. В калібровці Фейнмана фотонний пропагатор має простий вигляд $D_{0\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{ik^2}$, і власна енергія запишеться таким чином

$$\Sigma(p) = e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{1}{\hat{p} - \hat{k} - m} \gamma^\mu \frac{1}{ik^2}. \quad (7.1.16)$$

Оскільки маємо чотиривимірний інтеграл, а підінтегральний вираз містить тільки три степені імпульсу інтегрування в знаменнику, то інтеграл лінійно розбігається при великих імпульсах інтегрування. Усунення цієї розбіжності і виділення скінченної частини становлять суть теорії перенормувань і будуть розглядатися дещо пізніше.

Зауважимо, що власна енергія $\Sigma(p)$ включає тільки одночастинково-незвідні діаграми, тобто діаграми, які не можна розрізати на дві частини, розрізаючи одну тільки лінію. Приклади діаграм порядку e^4 , а саме: друга і третя діаграми, зображені на рис. 16.

7.2. Фотонна функція Гріна у другому порядку теорії збурень

Діаграма поляризації вакууму у другому порядку теорії збурень описує першу нетривіальну радіаційну поправку до фотонного пропагатора. Спочатку ми проведемо обчислення, аналогічні обчисленням власної енергії електрона. Спершу розкладаємо в ряд по константі зв'язку експоненту

у функціональному інтегралі

$$D_{\mu\nu}(x-y) = \langle 0|TA_{\mu}(x)A_{\nu}(y)|0\rangle = N \int \mathcal{D}A_{\mu}\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi} A_{\mu}(x)A_{\nu}(y)e^{i\int d^4x\mathcal{L}_0} \times \\ \times \left[1 - ie \int d^4z \bar{\Psi}(z)\gamma^{\lambda}A_{\lambda}(z)\Psi(z) + \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4z \bar{\Psi}(z)\gamma^{\lambda}A_{\lambda}(z)\Psi(z) \times \right. \\ \left. \times \int d^4u \bar{\Psi}(u)\gamma^{\rho}A_{\rho}(u)\Psi(u) + \dots \right]. \quad (7.2.1)$$

Доданок першого порядку по e обертається в нуль при інтегруванні внаслідок непарності по A_{μ} . В результаті аналогічно електронному пропагатору, розглянутому в попередньому параграфі, ми знаходимо, що перша нетривіальна поправка до фотонного пропагатора з'являється у другому порядку теорії збурень. Ми маємо

$$D_{\mu\nu}(x-y) = D_{0\mu\nu}(x-y) + \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4z d^4u \langle 0|T\bar{\Psi}_{\alpha}(z)(\gamma^{\lambda})_{\alpha\beta}\Psi_{\beta}(z)\bar{\Psi}_{\gamma}(u) \times \\ \times (\gamma^{\rho})_{\gamma\sigma}\Psi_{\sigma}(u)|0\rangle \langle 0|TA_{\mu}(x)A_{\nu}(y)A_{\lambda}(z)A_{\rho}(u)|0\rangle. \quad (7.2.2)$$

Вакуумні середні розкриваємо за теоремою Віка

$$D_{\mu\nu}(x-y) = D_{0\mu\nu}(x-y) - \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4z d^4u \overline{\Psi}_{\sigma}(u)\overline{\Psi}_{\alpha}(z)\overline{\Psi}_{\beta}(z)\overline{\Psi}_{\gamma}(u) \times \\ \times (\gamma^{\lambda})_{\alpha\beta}(\gamma^{\rho})_{\gamma\sigma} \left[\overline{A_{\mu}(x)A_{\lambda}(z)A_{\nu}(y)A_{\rho}(u)} + \overline{A_{\mu}(x)A_{\rho}(u)A_{\nu}(y)A_{\lambda}(z)} \right]. \quad (7.2.3)$$

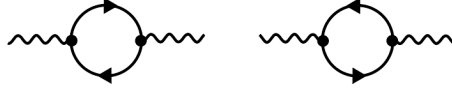
Звернемо увагу на появу знака мінус перед інтегралом, який виникає в згортці ферміонних полів при їх перестановці. Це є наслідком того, що ферміонні поля задовольняють канонічним антикомутаційним співвідношенням, а не канонічним комутаційним співвідношенням, як у випадку бозонних полів. Тоді

$$D_{\mu\nu}(x-y) = D_{0\mu\nu}(x-y) - \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4z d^4u (\gamma^{\lambda})_{\alpha\beta}G_{0\beta\gamma}(z-u)(\gamma^{\rho})_{\gamma\sigma} \times \\ \times G_{0\sigma\alpha}(u-z) [D_{0\mu\lambda}(x-z)D_{0\nu\rho}(y-u) + D_{0\mu\rho}(x-u)D_{0\nu\lambda}(y-z)] = \\ = D_{0\mu\nu}(x-y) - \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4z d^4u \text{tr} \left[\gamma^{\lambda}G_0(z-u)\gamma^{\rho}G_0(u-z) \right] \times \\ \times [D_{0\mu\lambda}(x-z)D_{0\nu\rho}(y-u) + D_{0\mu\rho}(x-u)D_{0\nu\lambda}(y-z)]. \quad (7.2.4)$$

У 2-му доданку зробимо заміну $u \leftrightarrow z$, $\rho \leftrightarrow \lambda$:

$$D_{\mu\nu}(x-y) = D_{0\mu\nu}(x-y) - \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4z d^4u D_{0\mu\lambda}(x-z)D_{0\nu\rho}(y-u) \times \\ \times \left[\text{tr}(\gamma^{\lambda}G_0(z-u)\gamma^{\rho}G_0(u-z)) + \text{tr}(\gamma^{\rho}G_0(u-z)\gamma^{\lambda}G_0(z-u)) \right]. \quad (7.2.5)$$

Рис. 17. Дві еквівалентні діаграми, що відображають аналітичні внески в (7.2.5)



Використовуючи циклічність сліду, отримуємо

$$D_{\mu\nu}(x-y) = D_{0\mu\nu}(x-y) - (-ie)^2 \int d^4z d^4u D_{0\mu\lambda}(x-z) \times \\ \times \text{tr} \left[\gamma^\lambda G_0(z-u) \gamma^\rho G_0(u-z) \right] D_{0\rho\nu}(u-y). \quad (7.2.6)$$

Вираз (7.2.6) графічно зображений в (7.2.7).

$$D_{\mu\nu}(x-y) = \text{wavy line} + \text{wavy line with loop} \quad (7.2.7)$$

Відзначимо, що знов-таки фактор $2!$ у знаменнику скорочується, тому що дві діаграми, зображені на рис. 17, дають еквівалентні внески в (7.2.5).

Введемо позначення для поляризаційного оператора (власної енергії фотона) в конфігураційному просторі

$$-i\Pi_{\lambda\rho}(z-u) = -(-ie)^2 \text{tr} [\gamma_\lambda G_0(z-u) \gamma_\rho G_0(u-z)], \quad (7.2.8)$$

тоді (7.2.6) запишеться як

$$D_{\mu\nu}(x-y) = D_{0\mu\nu}(x-y) + \int d^4z d^4u D_{0\mu\lambda}(x-z) \times \\ \times \left[-i\Pi^{\lambda\rho}(z-u) \right] D_{0\rho\nu}(u-y). \quad (7.2.9)$$

Використовуючи в інтегралі (7.2.6) фур'є-перетворення для пропагаторів і інтегруючи за координатами z, u , знаходимо

$$D_{\mu\nu}(x-y) = D_{0\mu\nu}(x-y) + e^2 \int \frac{d^4p d^4k}{(2\pi)^8} e^{-ip(x-y)} \times \\ \times D_{0\mu\lambda}(p) \text{tr} \left[\gamma^\lambda G_0(k) \gamma^\rho G_0(k-p) \right] D_{0\rho\nu}(p), \quad (7.2.10)$$

де внаслідок присутності дельта-функцій були обчислені два інтеграли по імпульсам. Для фур'є-образу фотонного пропагатора отримуємо

$$D_{\mu\nu}(p) = D_{0\mu\nu}(p) + e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_{0\mu\lambda}(p) \text{tr} \left[\gamma^\lambda G_0(k) \gamma^\rho G_0(k-p) \right] D_{0\rho\nu}(p). \quad (7.2.11)$$

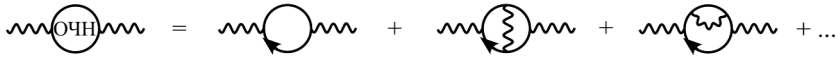


Рис. 18. Поляризаційний оператор фотона в КЕД у порядку e^4

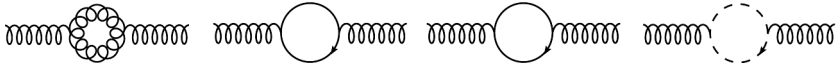


Рис. 19. Діаграми поляризаційного оператора глюона в КХД у другому порядку теорії збурень

Для поляризаційного оператора в імпульсному просторі маємо такий аналітичний вираз

$$-i\Pi_{\lambda\rho}(p) = -(-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} [\gamma_\lambda G_0(k) \gamma_\rho G_0(k-p)]. \quad (7.2.12)$$

Графічно він представлений в (7.2.13)

$$-i\Pi_{\nu\mu}(p) = \text{diagram} \quad (7.2.13)$$

Скорочено (7.2.11) можна записати

$$D_{\mu\nu}(p) = D_{0\mu\nu}(p) + D_{0\mu\lambda}(p)[-i\Pi^{\lambda\rho}(p)]D_{0\rho\nu}(p) + \dots, \quad (7.2.14)$$

де трьома крапками позначені внески більш високих порядків теорії збурень. Вираз для поляризаційного оператора (7.2.12) можна також отримати за правилами Фейнмана, ставлячи у відповідність аналітичні вирази графічним елементам діаграми (електронні та фотонні лінії, вершини, знак мінус для замкненої ферміонної петлі). Підставляючи вираз для ферміонного пропатора

$$G_0(k) = \frac{i}{\hat{k} - m},$$

остаточно знаходимо

$$\Pi_{\lambda\rho}(p) = e^2 \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \text{tr} \left[\gamma_\lambda \frac{1}{\hat{k} - m} \gamma_\rho \frac{1}{\hat{k} - \hat{p} - m} \right]. \quad (7.2.15)$$

Як бачимо, власна енергія фотона $\Pi_{\lambda\rho}(p)$ квадратично розбігається в області великих імпульсів інтегрування (нагадаємо, що діаграма власної енергії електрона має лінійну розбіжність). Поляризаційний оператор фотона включає тільки одночастинково-незвідні (ОЧН) діаграми, в порядку e^4 вони зображені на рис. 18.

У квантовій хромодинаміці маємо більше полів, а отже, більше пропаторів та вершин взаємодії. У другому порядку теорії збурень внески в

поляризаційний оператор глюона дають діаграми, зображені на рис. 19, де лінії в петлях відповідають глюонам (хвиляста лінія), кваркам (суцільна) і духам (пунктирна).

7.3. Вершинна діаграма

Перейдемо тепер до третього і так само дуже важливого прикладу радіаційних поправок у КЕД у другому порядку теорії збурень, а саме, до вершинної функції. Поправка найнижчого порядку за теорією збурень до «голої» вершини $(-ie)\gamma_\mu$ зображена на рис. 20. Запишемо аналітичний вираз для цієї діаграми одразу за правилами Фейнмана

$$-ie\Lambda_\mu(p+k, p) = (-ie)^3 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma^\lambda \frac{i}{\hat{q} + \hat{k} - m} \gamma_\mu \frac{i}{\hat{q} - m} \gamma^\nu D_{0\lambda\nu}(p-q). \quad (7.3.1)$$

Відзначимо, що внаслідок закону збереження енергії-імпульсу вершинна функція залежить тільки від значень двох 4-імпульсів зовнішніх частинок, наприклад імпульсів електрона, який входить у діаграму, та фотона. Нагадаємо, що власна енергія електрона та поляризаційний оператор залежать тільки від одного 4-імпульсу: енергія та імпульс частинки, що виходить з відповідних діаграм, такі самі, як у частинки, яка входить у ці діаграми, внаслідок закону збереження енергії та імпульсу. Як функція двох імпульсів вершинна функція є математично більш складним об'єктом, який може мати різні асимптотики в різних границях. У калібровці Фейнмана $\xi = 1$ пропагатор має найбільш простий вигляд $D_{0\lambda\nu}(k) = \frac{g_{\lambda\nu}}{ik^2}$, і поправка до вершинної функції запишеться

$$\Lambda_\mu(p+k, p) = e^2 \int \frac{d^4q}{i(2\pi)^4} \gamma^\lambda \frac{1}{\hat{q} + \hat{k} - m} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{q} - m} \gamma^\lambda \frac{1}{(p-q)^2}, \quad (7.3.2)$$

а повна вершина взаємодії дорівнює

$$\Gamma_\mu(p+k, p) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p+k, p). \quad (7.3.3)$$

Поправка $\Lambda_\mu(p, p+k)$ до вершинної функції, як легко бачити, розбігається логарифмічно при інтегуванні в області великих імпульсів.

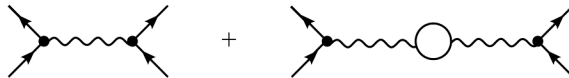
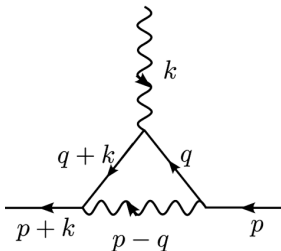


Рис. 21. Електрон-електронне розсіяння

Рис. 20. Поправка до вершини взаємодії в найнижчому порядку

Петльові діаграми з'являються не лише в розглянутих вище прикладах, а й у всіх фізичних процесах, наприклад, поправка до процесу електрон-електронного розсіяння наведена на рис. 21. Звичайно, слід додати, що радіаційні поправки не обмежуються тільки однопетльовими поправками, існують також дво-, трипетльові і так далі поправки.

7.4. Класифікація перенормовності теорій

У попередніх параграфах ми розглянули однопетльові діаграми в квантовій електродинаміці та навели деякі приклади діаграм у вищих порядках теорії збурень. У цьому параграфі ми розглянемо загальні положення теорії перенормувань у калібрувальних теоріях і в теорії скалярного поля із самодією [5, 63, 121].

7.4.1. Індекс розбіжності діаграм у квантовій електродинаміці

Розгляд загальних положень теорії перенормувань почнемо з квантової електродинаміки. Визначимо степінь розбіжності (збіжності) діаграми загального вигляду з числом F_i внутрішніх фотонних ліній і числом E_i внутрішніх електронних ліній. Індекс діаграми D підраховує степінь її розбіжності при великих імпульсах інтегрування, тобто різницю між числом інтегрувань по внутрішнім (петльовим) імпульсам разом з імпульсами в чисельнику підінтегрального виразу та їх числом у знаменнику від пропагаторів, і дорівнює

$$D = nL - 2F_i - E_i, \quad (7.4.1)$$

де L — число петель, n — розмірність простору-часу. Нескладно пояснити цю формулу. Кожне інтегрування по петльовій змінній в n -вимірному імпульсному просторі відповідає мірі $d^n p$. Оскільки фотонний пропагатор має $1/p^2$, а електронний пропагатор $1/p$ поведінку при великих імпульсах, то кожен фотонний пропагатор зменшує розбіжність інтеграла на 2 одиниці, а кожен електронний пропагатор зменшує розбіжність діаграми на одиницю.

Зручно переписати індекс діаграми в іншому вигляді, використовуючи число вершин V , число зовнішніх фотонних ліній F_e і число зовнішніх електронних ліній E_e . Ясно, що L (число незалежних петльових інтегрувань) дорівнює числу внутрішніх ліній мінус число вершин V (δ -функції в кожній вершині) $+1$, тому що виділяється одна δ -функція, відповідальна за збереження повного імпульсу,

$$L = E_i + F_i - V + 1. \quad (7.4.2)$$

Ця рівність насправді є не що інше, як знаменита топологічна тотожність Ейлера, яка пов'язує кількість петель, ліній та вершин на зв'язній діаграмі.

Число вершин V пов'язано з числом електронних і фотонних ліній. У квантовій електродинаміці є тільки одна вершина, яка описує взаємодію електронів і фотонів, і в ній сходяться дві електронні лінії, тому число електронних кінців дорівнює подвоєному числу вершин. Але у внутрішній ферміонній лінії два кінця, а у зовнішній один, тому маємо такі топологічні співвідношення між числом електронних кінців і числом вершин

$$2E_i + E_e = 2V. \quad (7.4.3)$$

Аналогічно маємо співвідношення між числом фотонних кінців і числом вершин

$$2F_i + F_e = V. \quad (7.4.4)$$

З цих рівнянь випливає

$$E_i = V - \frac{1}{2}E_e, \quad F_i = \frac{1}{2}V - \frac{1}{2}F_e. \quad (7.4.5)$$

В результаті знаходимо такий вираз для степеня розбіжності діаграми D :

$$D = n - \frac{n-1}{2}E_e - \frac{n-2}{2}F_e + \frac{n-4}{2}V. \quad (7.4.6)$$

Зауважимо, що в остаточній формулі індекс розбіжності залежить тільки від числа зовнішніх ліній і кількості вершин у діаграмі і не залежить від числа внутрішніх ліній. Тобто ми можемо провести класифікацію розбіжних діаграм, для яких $D \geq 0$, відповідно до кількості зовнішніх електронних і фотонних ліній, що визначає тип діаграми.

Для чотиривимірного простору-часу, $n = 4$,

$$D = 4 - \frac{3}{2}E_e - F_e, \quad (7.4.7)$$

тобто пропадає залежність від числа вершин V ! Такі теорії, в яких індекс D не залежить від числа вершин, відносяться до перенормовних теорій. Ці теорії є дуже важливими, тому що в них є тільки скінченне число типів розбіжних діаграм, для яких $D \geq 0$, і тому число відповідних контрчленів, які необхідно додати до початкового лагранжіана, є скінченним. У КЕД це буде сім типів діаграм, які легко перерахувати.

1) $E_e = F_e = 0$ — вакуумні діаграми (розбігаються як четверта степінь імпульсу), $D = 4$;

2) $E_e = 2, F_e = 0, D = 1$ — діаграма власної енергії електрона;

3) $E_e = 2, F_e = 1, D = 0$ — вершинна діаграма;

4) $E_e = 0, F_e = 1, D = 3$ — діаграма з одним зовнішнім фотоном;

5) $E_e = 0, F_e = 2, D = 2$ — діаграма власної енергії фотона;

6) $E_e = 0, F_e = 4, D = 0$ — діаграма розсіяння фотона на фотоні;

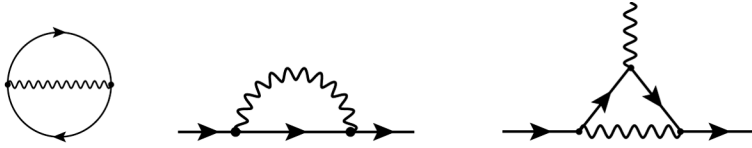


Рис. 22. Розбіжні діаграми в найнижчому порядку теорії збурень: вакуумна; власна енергія електрона; поправка до вершини взаємодії

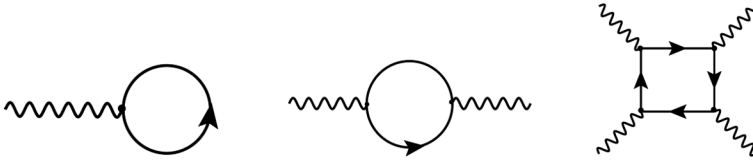


Рис. 23. Розбіжні діаграми в найнижчому порядку теорії збурень: з одним зовнішнім фотоном («пуголовок»); власна енергія фотона; розсіяння світла на світлі

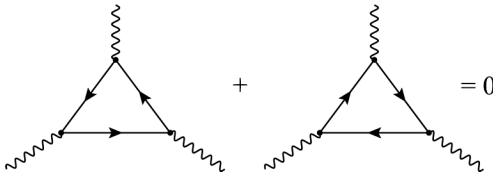


Рис. 24. Розбіжні діаграми в найнижчому порядку теорії збурень: дві діаграми з трьома фотонними лініями з ферміонними петлями за годинниковою і проти годинникової стрілки. Сума цих діаграм дорівнює нулю в силу теореми Фаррі

7) $E_e = 0, F_e = 3, D = 1$ — діаграма з трьома зовнішніми фотонами. Всі ці діаграми зображено на рис. 22–24.

Оскільки кінетичний член у лагранжіані Дірака інваріантний відносно перетворення зарядового спряження

$$\psi \rightarrow \psi^C = C\bar{\psi}^T,$$

де матриця C задана формулою $C = i\gamma^2\gamma^0$ і задовольняє співвідношенням

$$C^2 = -1, \quad C^{-1} = -C, \quad C^\dagger = -C, \quad C^T = -C, \quad C\gamma_\mu^T C^{-1} = -\gamma_\mu, \quad (7.4.8)$$

а струм $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ при цьому змінює знак, то лагранжіан КЕД інваріантний відносно перетворень

$$\psi \rightarrow \psi^C = C\bar{\psi}^T, \quad A_\mu \rightarrow -A_\mu.$$

Тому лагранжіан КЕД не може породжувати взаємодії з непарним числом фотонних кінців і без зовнішніх ферміонних ліній. Це твердження є так званою теоремою Фаррі. Один із простих і найбільш наочних її доказів

використовує представлення функцій Гріна полів через функціональний інтеграл, в даному випадку

$$\begin{aligned} & \langle 0|TA_{\mu_1}(x_1)A_{\mu_2}(x_2)\dots A_{\mu_{2k+1}}(x_{2k+1})|0\rangle = \\ & = N \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi A_{\mu_1}(x_1)A_{\mu_2}(x_2)\dots A_{\mu_{2k+1}}(x_{2k+1}) e^{i \int d^4x \mathcal{L}(A,\bar{\psi},\psi)}. \end{aligned}$$

При заміні змінних в інтегралі, яке відповідає перетворенню полів щодо зарядової симетрії, міра інтегрування і лагранжева густина не змінюють знак, а весь інтеграл змінює знак через непарне число фотонних полів, тобто маємо

$$\begin{aligned} & \langle 0|TA_{\mu_1}(x_1)A_{\mu_2}(x_2)\dots A_{\mu_{2k+1}}(x_{2k+1})|0\rangle = \\ & = -\langle 0|TA_{\mu_1}(x_1)A_{\mu_2}(x_2)\dots A_{\mu_{2k+1}}(x_{2k+1})|0\rangle = 0. \end{aligned}$$

Оскільки теорема має місце для повних кореляторів поза рамками теорії збурень, вона також має виконуватися і в кожному порядку теорії збурень. Справді, окрема діаграма з непарним числом фотонних кінців, яка дає внесок у даний корелятор, не дорівнює нулю, але відбувається скорочення діаграм з різною орієнтацією внутрішніх замкнутих ферміонних петель.

Зазначимо, що наявність додаткових симетрій лагранжіана часто приводить до зниження степеня розбіжності діаграми. Зокрема, калібрувальна інваріантність знижує індекс розбіжності, так що розбіжність другої діаграми на рис. 23 знижується з квадратичної до логарифмічної, а третя діаграма виявляється збіжною. Дійсно, для другої діаграми калібрувальна інваріантність вимагає, щоб функція поляризації вакууму мала тензорну структуру $\Pi_{\mu\nu}(k) = (k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \Pi(k^2)$. Це означає що два степені імпульсу ферміонної петлі замінюються зовнішніми імпульсами, тому що виділення двох степенів зовнішнього імпульсу при великому імпульсі інтегрування, коли масами частинок можна знехтувати, зменшує розбіжність підінтегрального виразу на дві одиниці. Отже, справжній степінь розбіжності $D = 0$, що відповідає логарифмічній розбіжності. Аналогічні міркування приводять до збіжності третьої діаграми.

Степінь розбіжності другої діаграми на рис. 22 також знижується з лінійної до логарифмічної. Діаграма з одним фотоном на рис. 23 виявляється рівною нулеві за рахунок теореми Фаррі і лоренцевої симетрії. Щоб побачити це, зауважимо, що амплітуда має індекс Лоренца, але не має зовнішнього 4-вектора, за допомогою якого можна побудувати вираз для цієї діаграми. Але якщо лоренцова симетрія порушена, наприклад через присутність зовнішніх полів, то діаграма з одним фотоном у загальному випадку вже не дорівнює нулю. Це стосується також інших діаграм з непарним числом фотонів і без ферміонних кінців. Наприклад, теорема Фаррі не працює у випадку порушення зарядової симетрії, яка порушується за наявності зовнішніх зарядів або зовнішнього електромагнітного поля.

Таким чином, в КЕД, крім вакуумних діаграм, є всього три типи розбіжних діаграм: діаграми власної енергії електрона і фотона, а також вершинна діаграма з двома електронними та однією фотонною лініями. Всі вони розбігаються тільки логарифмічно. Підкреслимо, що скінченним є тільки число типів розбіжних діаграм, самих діаграм даного типу нескінченна кількість, тому що є безліч діаграм з довільним числом внутрішніх вершин.

Зазначимо також, що індекс D вказує тільки на розбіжність діаграми в цілому, незважаючи на наявність розбіжних піддіаграм. Розбіжності останніх не враховуються цим індексом, і повинні бути видалені до обрахунку діаграми як цілого. Процес видалення розбіжностей становить суть теорії перенормування.

Квантова електродинаміка в розмірності $n = 3$ (КЕД₃) використовується для опису динаміки низькоенергетичних збуджень у планарних системах фізики конденсованих середовищ (графен, високотемпературні надпровідники). Для цієї моделі

$$D = 3 - E_e - \frac{1}{2}F_e - \frac{1}{2}V, \quad (7.4.9)$$

і КЕД₃ виявляється суперперенормовною, тоді як квантова електродинаміка у чотиривимірному просторі-часі є просто перенормовною. Дійсно, ультрафіолетово розбіжними є (крім вакуумної діаграми) тільки дві діаграми в порядку e^2 : діаграма власної енергії електрона ($E_e = 2, F_e = 0, V = 2$) — розбіжність логарифмічна ($D = 0$), і діаграма власної енергії фотона ($E_e = 0, F_e = 2, V = 2$) — розбігається лінійно ($D = 1$). В КЕД₃ відсутні розбіжні діаграми з піддіаграмами, що перекриваються, і тому перенормування КЕД₃ відбувається надзвичайно просто. Очевидно, що поліпшення ультрафіолетових властивостей квантово-польових теорій із зменшенням розмірності простору-часу є універсальною властивістю, тому що число інтегрувань по компонентам імпульсу в мірі зменшується.

Калібрувальна інваріантність КЕД₃ знижує розбіжність діаграми поляризації вакууму до $D = -1$, тобто діаграма виявляється збіжною. Розбіжність діаграми власної енергії електрона також знижується до $D = -1$. Таким чином, КЕД₃ виявляється скінченною теорією, тобто ультрафіолетові розбіжності в ній взагалі, крім вакуумної діаграми, відсутні.

7.4.2. Індекс розбіжності діаграм у квантовій хромодинаміці

Перейдемо тепер до обчислення індексу діаграми і степеня розбіжності в неабелевих калібрувальних теоріях, а саме, в квантовій хромодинаміці. Розрахунок індексу діаграми дещо ускладнюється в квантовій хромодинаміці внаслідок присутності декількох типів вершин, а також присутності у вершинах похідних, які в імпульсному просторі приводять до появи імпульсів у вершині. У квантовій хромодинаміці є чотири типи вершин, а

саме: триглюонна V_3 , чотириглюонна V_4 , вершина взаємодії духових полів з глюонним полем V_{gh} , а також кварк-глюонна вершина взаємодії V_q , причому у триглюонній і глюонно-духовій вершинах присутній ще імпульс. В результаті для індексу розбіжності діаграм у квантовій хромодинаміці маємо

$$D = nL + V_3 + V_{gh} - 2I_g - 2I_{gh} - I_q, \quad (7.4.10)$$

де I_g і I_{gh} — кількість внутрішніх глюонних і духових пропагаторів, які при великих імпульсах поведуться як $\sim 1/p^2$, а I_q — кількість внутрішніх кваркових пропагаторів, які при великих імпульсах поведуться як $\sim 1/p$.

Маємо також топологічне співвідношення

$$L = I_g + I_{gh} + I_q - V_3 - V_4 - V_{gh} - V_q + 1, \quad (7.4.11)$$

а також співвідношення, які пов'язують кількість внутрішніх і зовнішніх ліній та кількість вершин, до яких вони входять,

$$2I_g + E_g = 3V_3 + 4V_4 + V_{gh} + V_q, \quad I_{gh} = V_{gh}, \quad 2I_q + E_q = 2V_q, \quad (7.4.12)$$

де E_g і E_q — кількість зовнішніх глюонних, духових і кваркових ліній відповідно, і ми врахували те, що зовнішні духові лінії відсутні. Звідси, виключаючи залежність від числа внутрішніх ліній I_g , I_{gh} і I_q , знаходимо

$$D = n - \frac{n-2}{2}E_g - \frac{n-1}{2}E_q + \frac{n-4}{2}(V_3 + V_{gh} + V_q) + (n-4)V_4. \quad (7.4.13)$$

Отриманий вираз розбіжності діаграм означає, що квантова хромодинаміка перенормовна при $n = 4$ (цей результат є одним з ключових в Стандартній моделі), неперенормовна при $n > 4$ і суперперенормовна при $n < 4$. У розмірності $n = 4$ індекс діаграми приймає вигляд, подібний до того, який ми отримали в квантовій електродинаміці, він не залежить від кількості вершин

$$D = 4 - E_g - \frac{3}{2}E_q. \quad (7.4.14)$$

Класифікація розбіжних діаграм також подібна до того, що маємо в КЕД.

7.4.3. Індекс діаграми та степінь розбіжності в теорії $\lambda\Phi^k$

Продовжимо тепер розгляд індексу діаграми та степеня розбіжності в квантово-польових теоріях і розглянемо теорію зі скалярним полем. Для індексу діаграми в теорії скалярного поля із взаємодією $\lambda\Phi^k$ маємо

$$D = nL - 2I, \quad (7.4.15)$$

де I — число пропагаторів (внутрішніх ліній), які при великих імпульсах зменшуються як $\sim 1/p^2$. Число петель (незалежних інтегрувань) визначається виразом $L = I - V + 1$. При підрахунку індексу діаграми в даній

теорії врахуємо, що у вершині сходяться (або виходять) k ліній, тому маємо співвідношення

$$kV = 2I + E, \quad (7.4.16)$$

де E — число зовнішніх ліній, що входять до вершини. Звідси $I = \frac{k}{2}V - \frac{1}{2}E$, і для індексу знаходимо

$$D = n - nV + (n - 2)I = n - \left(\frac{n}{2} - 1\right)E + V \left[\frac{k}{2}(n - 2) - n\right]. \quad (7.4.17)$$

У розмірності простору-часу $n = 4$ для індексу розбіжності діаграми маємо

$$D = 4 - E + V(k - 4). \quad (7.4.18)$$

Як видно, індекс залежить від числа вершин у діаграмі, якщо степінь самодії $k \neq 4$, і не залежить, якщо $k = 4$. Таким чином, теорія скалярного поля із взаємодією $\lambda\Phi^4$ виявляється перенормовною в розмірності $n = 4$, оскільки в ній є *скінченне число типів* розбіжних діаграм з $D \geq 0$ і числом зовнішніх ліній $E \leq 4$, хоча самих діаграм даного типу (з фіксованим E) нескінченна кількість (з довільним числом вершин V). Зазначимо, що саме така взаємодія Φ^4 визначає самодію хіггсівського поля в Стандартній моделі елементарних частинок.

Очевидно, що теорії з $k > 4$ є неперенормовними в розмірності $n = 4$, тому що містять *нескінченне число типів* розбіжних діаграм: для будь-якої діаграми з фіксованим числом зовнішніх ліній E , збільшуючи кількість вершин в ній, приходимо до розбіжної діаграми.

Нарешті, теорія $\lambda\Phi^3$, для якої $D = 4 - E - V$, належить до суперперенормовних теорій. У таких теоріях є лише скінченне число розбіжних діаграм зі скінченим числом зовнішніх ліній і вершин.

Перерахуємо всі примітивно розбіжні діаграми в теорії $\lambda\Phi^4$ ($n = 4$). Вакуумна діаграма має розбіжність $D = 4$. Далі, діаграма з двома зовнішніми лініями $E = 2$ і індексом $D = 2$ визначає аналітичний вираз

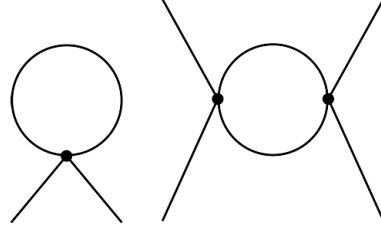
$$\frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad (7.4.19)$$

для діаграми власної енергії скалярної частинки в найнижчому порядку теорії збурень. Діаграма з чотирма зовнішніми лініями, $E = 4$,

$$\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)((k + p_1 + p_2)^2 - m^2 + i\varepsilon)}, \quad (7.4.20)$$

має індекс $D = 0$, тобто логарифмічно розбіжна. Вона відповідає діаграмі вершинної функції у порядку λ^2 теорії збурень. Ці дві розбіжні діаграми зображено на рис. 25.

Рис. 25. Розбіжні діаграми в найнижчому порядку теорії збурень у теорії $\lambda\Phi^4$: власна енергія скалярної частинки і поправка до вершини взаємодії



Для теорії $\lambda\Phi^4$ ($k = 4$) в довільній розмірності індекс (7.4.17) набуває вигляду

$$D = n - \left(\frac{n}{2} - 1\right) E + V(n - 4). \quad (7.4.21)$$

Таким чином, теорія скалярного поля із взаємодією $\lambda\Phi^4$ неперенормовна у просторі-часі з розмірністю $n > 4$, перенормовна при $n = 4$ і суперперенормовна при $n < 4$.

Для теорії $\lambda\Phi^3$ ($k = 3$) для індексу розбіжності діаграми маємо такий вираз

$$D = n - \left(\frac{n}{2} - 1\right) E + V\left(\frac{n}{2} - 3\right). \quad (7.4.22)$$

Теорія неперенормовна в розмірностях $n > 6$, перенормовна при $n = 6$ і суперперенормовна при $n < 6$.

7.5. Розмірний аналіз полів, констант взаємодії і функцій Гріна

Критерій перенормовності можна спростити, звівши його до визначення розмірності констант взаємодії. В системі одиниць, у якій постійна Планка і швидкість світла дорівнюють одиниці, $\hbar = 1 = c$, розмірності маси і довжини взаємно протилежні, $\text{грам} = \text{см}^{-1}$, а розмірності полів, констант взаємодії та інших фізичних величин виражаються в степенях маси. Проведемо такий розмірний аналіз на прикладі скалярного поля з дією

$$S = \int d^n x \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 - \frac{\lambda}{k!} \Phi^k. \quad (7.5.1)$$

Оскільки дія в обраній системі одиниць безрозмірна, розмірність густини лагранжіана $[\mathcal{L}] = (\text{довжина})^{-n} = M^n$, і з кінетичного доданка знаходимо розмірність поля

$$\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi \Rightarrow [\Phi] = M^{\frac{n-2}{2}}. \quad (7.5.2)$$

Розмірність константи взаємодії $[\lambda] = M^\delta$ знаходимо з умови $[\lambda\Phi^k] = M^n$, звідки

$$\delta = n + k - \frac{kn}{2}. \quad (7.5.3)$$

Наприклад, розмірності констант для наступних теорій є такими

$$\lambda\Phi^4: \delta = 4 - n,$$

$$\begin{aligned}\lambda\Phi^3: \delta &= 3 - \frac{n}{2}, \\ \lambda\Phi^6: \delta &= 6 - 2n.\end{aligned}$$

Визначаючи $k = \frac{n - \delta}{n/2 - 1}$, знаходимо, що індекс (7.4.17) перепишеться у вигляді

$$D = n - \left(\frac{n}{2} - 1\right) E - V\delta. \quad (7.5.4)$$

Таким чином, для перенормовності теорії необхідно $\delta \geq 0$, тобто константи взаємодії повинні бути або безрозмірними, або мати розмірність маси в додатному степені. Саме такими є константи взаємодії в Стандартній моделі, що визначає її перенормовність. Якщо є константи взаємодії розмірності маси у від'ємному степені, то теорія неперенормовна.

Наприклад, у теорії Фермі взаємодія має вигляд

$$G\bar{\psi}\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\psi\bar{\psi}\gamma_\mu(1 - \gamma^5)\psi. \quad (7.5.5)$$

Для чотиривимірного простору розмірність ферміонного поля $[\psi] = M^{3/2}$ і розмірність константи $G \in \delta = -2$. Отже, теорія Фермі є неперенормовною.

Розглянемо розмірності функцій Гріна

$$G^{(l)}(x_1, \dots, x_l) \equiv \langle 0|T\Phi(x_1) \dots \Phi(x_l)|0\rangle. \quad (7.5.6)$$

Очевидно, що їх масова розмірність є такою

$$[G^{(l)}(x_1, \dots, x_l)] = l \left(\frac{n}{2} - 1\right). \quad (7.5.7)$$

Для фур'є-образу розмірність буде

$$[G^{(l)}(p_1, \dots, p_l)] = l \left(\frac{n}{2} - 1\right) - ln = -l \left(\frac{n}{2} + 1\right), \quad (7.5.8)$$

і виділяючи дельта-функцію збереження повного 4-імпульсу, маємо

$$G^{(l)}(p_1, \dots, p_l) = \bar{G}^{(l)}(p_1, \dots, p_{l-1})\delta(P), \quad P = \sum_i p_i.$$

Розмірність дельта-функції $[\delta(P)] = M^{-n}$. Тому розмірність функції Гріна в імпульсному просторі дорівнює

$$[\bar{G}^{(l)}(p_1, \dots, p_{l-1})] = n - l \left(\frac{n}{2} + 1\right). \quad (7.5.9)$$

Зокрема, для двоточкової функції Гріна ($l = 2$) в розмірності $n = 4$ маємо

$$[\bar{G}^{(2)}] = -2.$$

Дійсно, вільний пропагатор в імпульсному представленні,

$$\bar{G} = \frac{i}{p^2 - m^2},$$

має розмірність $[\text{маса}]^{-2}$.

7.6. Регуляризація Паулі—Вілларса. Загальні ідеї теорії перенормувань

У попередньому параграфі ми розглядали приклади діаграм, які включають замкнуті цикли та виражаються в термінах інтегралів, що не є визначеними: вони розбігаються за великих імпульсів інтегрування. Процедура перенормування за теорією збурень у квантовій теорії поля — це процедура, яка дозволяє отримати фізичні результати з цих погано визначених інтегралів. Нам потрібно зрозуміти, як виконується регуляризація цих діаграм, що дозволяє проводити з ними математично коректно визначені операції, і якою є процедура перенормування.

Щоб зрозуміти загальні ідеї теорії перенормувань, корисно розглянути спочатку більш просту теорію дійсного скалярного поля із взаємодією, яка описується лагранжіаном

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[(\partial_\mu \Phi)^2 - m^2 \Phi^2 \right] - \frac{\lambda_0}{4!} \Phi^4. \quad (7.6.1)$$

У порядку λ_0^2 однопетльові поправки до зв'язної 4-х точкової функції визначаються діаграмами, які наведені на рис. 26. Згідно з правилами Фейнмана, ($-i\lambda_0$ — вершина, $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$ — пропагатор), запишемо аналітичний вираз для однієї з діаграм

$$-i\lambda_0^2 I(p^2) = \frac{(-i\lambda_0)^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{(p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad (7.6.2)$$

де p — комбінація зовнішніх імпульсів ($p = p_1 + p_2$, $p = p_1 - p_3$, $p = p_1 - p_4$ для першої, другої і третьої діаграми відповідно). Цей вираз, очевидно, розбігається логарифмічно.

У загальному випадку функція Гріна в теорії збурень визначається виразом, який містить інтегрування по внутрішньому імпульсу кожної петлі

$$M(p) = \int d^4 k_1 \dots d^4 k_L \prod_{l=1}^L [m_l^2 - (k_l + p_l)^2 - i\varepsilon]^{-1} P(k, p), \quad (7.6.3)$$

де L — число петель, тобто число топологічно незалежних замкнутих контурів, $P(k, p)$ — поліном по внутрішнім і зовнішнім імпульсам з матричними коефіцієнтами (приклади таких діаграм зображено на рис. 27).

Для того, щоб якимось працювати з цими розбіжними величинами, наперед необхідно зробити інтеграли збіжними, тобто ввести регуляризацію. Регуляризація інтеграла полягає в розгляді залежного від деякого параметра сімейства інтегралів, які: 1) добре визначені для цього параметра, і 2) початковий інтеграл відповідає деякому граничному значенню цього

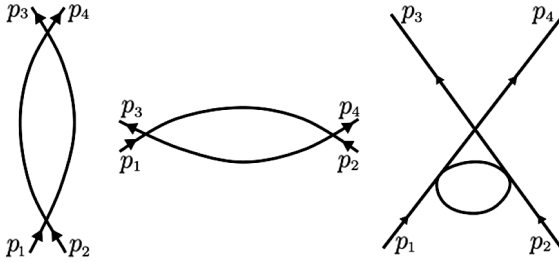


Рис. 26. Однопетльові діаграми в порядку λ_0^2 у скалярній теорії

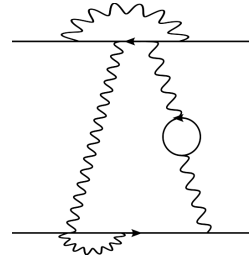


Рис. 27. Процес розсіяння з внеском петльових діаграм

параметра. Найпростіший спосіб — ввести максимальний імпульс інтегрування Λ , порахувати інтеграл, а потім розглянути границю $\Lambda \rightarrow \infty$. Існує багато інших регуляризацій, деякі з них ми розглянемо нижче. Головна вимога до регуляризації — зберігати якомога більше симетрій початкового лагранжіана.

У цьому параграфі ми розглянемо регуляризацію Паулі—Вілларса, яка є однією з найбільш зручних і широко вживаних прикладів регуляризації.

Визначимо модифікований (регуляризований) пропагатор ($i\epsilon$ опускаємо для спрощення запису)

$$D_c(p) = \frac{1}{p^2 - m^2} \rightarrow \text{reg}_M D_c(p) \equiv D_c(p, m) + \sum_{i=1}^n c_i D_c(p, M_i), \quad (7.6.4)$$

де $D_c(p, M_i)$ — пропагатор з масою M_i . Коефіцієнти c_i і допоміжні маси M_i підбираються так, щоб поліпшити ультрафіолетову поведінку, тобто модифікувати підінтегральний вираз при великих значеннях змінних інтегрування таким чином, щоб зробити інтеграл збіжним. У загальному випадку вони задовольняють умовам

$$1 + \sum_{i=1} c_i = 0, \quad m^2 + \sum_{i=1} c_i M_i^2 = 0, \quad \dots, \quad m^{2n-2} + \sum_{i=1} c_i M_i^{2n-2} = 0. \quad (7.6.5)$$

Маси M_i можна вибрати пропорційними одній масі M і так, щоб при $M \rightarrow \infty$ коефіцієнти c_i залишалися скінченними. Наприклад, у випадку інтеграла (7.6.2) достатньо взяти $c_1 = -1$, а решта c_i нулі. Тоді пропагатор модифікується

$$\frac{1}{p^2 - m^2} \rightarrow \frac{1}{p^2 - m^2} - \frac{1}{p^2 - M^2} \sim \frac{1}{p^4}, \quad p \rightarrow \infty, \quad (7.6.6)$$

і спадає на нескінченності швидше, ніж початковий пропагатор, забезпечуючи таким чином збіжність інтеграла. Використовуючи модифікований

пропагатор в (7.6.2), отримуємо регуляризований вираз

$$I(p^2) \rightarrow \text{reg}_M I(p^2) = \frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{k^2 - m^2} - \frac{1}{k^2 - M^2} \right] \times \\ \times \left[\frac{1}{(p-k)^2 - m^2} - \frac{1}{(p-k)^2 - M^2} \right], \quad (7.6.7)$$

який тепер скінченний при інтегруванні за імпульсом петлі k . У границі $M \rightarrow \infty$ регуляризований вираз $\text{reg}_M I(p^2)$ прямує до початкового $I(p^2)$, якщо зробити граничний перехід під інтегралом. Виділимо з $\text{reg}_M I(p^2)$ розбіжний при $M \rightarrow \infty$ доданок і скінченну частину.

Основне спостереження, яке є базовим для теорії перенормування, полягає в тому, що розбіжність у (7.6.7) при $M \rightarrow \infty$ не залежить від зовнішнього імпульсу p . Це можна побачити, диференціюючи $I(p^2)$ по p^μ , а потім знаходячи границю, коли $M \rightarrow \infty$:

$$\frac{\partial I(p^2)}{\partial p^\mu} = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k-p)_\mu}{(k^2 - m^2)[(p-k)^2 - m^2]^2}. \quad (7.6.8)$$

Цей вираз є скінченним. Взагалі диференціювання по зовнішньому імпульсу знижує розбіжність діаграми на одиницю. Для діаграми з індексом $D \geq 0$ похідна порядку $D + 1$ буде вже скінченною.

Запишемо регуляризований вираз у вигляді суми

$$\text{reg}_M I(p^2) = \text{reg}_M I(0) + \text{reg}_M [I(p^2) - I(0)] = I(0, M) + I_R(p^2), \quad (7.6.9)$$

де другий доданок є скінченним у границі $\lim_{M \rightarrow \infty} \text{reg}_M [I(p^2) - I(0)] = I_R(p^2)$, і в явному вигляді

$$I(0, M) \equiv \text{reg}_M I(0) = \frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{k^2 - m^2} - \frac{1}{k^2 - M^2} \right]^2, \quad (7.6.10)$$

$$I_R(p^2) = \frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{(k^2 - m^2)[(p-k)^2 - m^2]} - \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \right]. \quad (7.6.11)$$

Розбіжність присутня тільки в доданку $I(0, M)$, який розбігається логарифмічно, $I(0, M) \sim \ln M$, коли $M \rightarrow \infty$. Скінченна частина, $I_R(p^2)$, визначається відніманням з початкового виразу $I(p^2)$ першого члена ряду Тейлора по p^2 в точці $p^2 = 0$, тобто $I_R(p^2) = I(p^2) - I(0)$. Зрозуміло, що існує багато способів записати регуляризований інтеграл як суму двох доданків, один з яких прямує до скінченної границі, а другий — розбігається, коли $M \rightarrow \infty$.

Розбіжність у $I(0, M)$ скорочується, якщо вважати голу константу зв'язку λ_0 залежною від M таким чином, що

$$\lambda_0 = \lambda - 3\lambda^2 I(0, M). \quad (7.6.12)$$

Така заміна константи взаємодії виконується тільки в деревній діаграмі, але не в петльових, в яких треба робити заміну $\lambda_0 \rightarrow \lambda$, оскільки в даний момент ми виконуємо обчислення з точністю до λ^2 . Ця заміна означає, що якщо починати з лагранжіана взаємодії $\lambda\Phi^4/4!$ і вважати константу λ скінченною, то ми повинні додати в лагранжіан такий самий доданок, але з іншою константою взаємодії $-3\lambda^2 I(0, M)$ для отримання скінченних результатів. Відповідний доданок називається контрчленом, а константа взаємодії фактично перенормується.

Разом із регуляризацією процедура перенормування є базовим елементом теорії перенормування. Таким чином, разом із доданком першого порядку по константі зв'язку ми маємо

$$\begin{aligned} \lambda_0 + \lambda_0^2 [\text{reg}_M I((p_1 + p_2)^2) + \text{reg}_M I((p_1 - p_3)^2) + \text{reg}_M I((p_1 - p_4)^2)] \rightarrow \\ \rightarrow \lambda - 3\lambda^2 I(0, M) + \lambda^2 [3I(0, M) + I_R((p_1 + p_2)^2) + I_R((p_1 - p_3)^2) + \\ + I_R((p_1 - p_4)^2)] = \lambda + \lambda^2 [I_R((p_1 + p_2)^2) + \\ + I_R((p_1 - p_3)^2) + I_R((p_1 - p_4)^2)]. \end{aligned} \quad (7.6.13)$$

Знайдений остаточний вираз (7.6.13) є скінченим при знятті регуляризації $M \rightarrow \infty$. Відповідним параметром розкладу теорії є скінченна перенормована константа λ , яка утримується скінченною в границі зняття регуляризації. До контрчлена $I(0, M)$, який є нескінченим при $M \rightarrow \infty$, завжди можна додати константу. Ця свобода фіксується, прирівнюючи значення перенормованої константи взаємодії при деякому значенні імпульсу до відповідного експериментального значення при даному значенні імпульсу. Але вибір значення імпульсу є довільним, тому ця свобода приводить до такого важливого і корисного поняття, як ренормалізаційна група.

Для знаходження скінченних частин у випадку інтегралів з більш високим ступенем розбіжності, $D > 0$, треба відняти D доданків ряду Тейлора в точці віднімання $p = 0$ згідно з індексом діаграми. Очевидно, скінченна частина буде визначена з точністю до полінома по p степеня D з довільними коефіцієнтами. Підкреслимо ще раз, що таке віднімання не обов'язково робити в точці $p = 0$, оскільки іноді це може призвести до появи небажаних розбіжностей при малих імпульсах інтегрування (наприклад, у теоріях з безмасовими частинками, як у квантовій хромодинаміці).

Описана процедура віднімання для отримання скінченних частин діаграм Фейнмана має назву процедури Боголюбова—Парасюка—Хеппа—Циммермана (БПХЦ).

Розбіжності петльових діаграм при високих імпульсах є наслідком того, що в конфігураційному просторі ми маємо добуток узагальнених функцій типу $D_c(y - x)D_c(x - y)$ із співпадаючими сингулярностями на малих відстанях. У разі співпадіння сингулярностей добуток узагальнених

функцій виявляється невизначеним. Дійсно, для причинної функції можна отримати явний вираз у термінах функцій Бесселя (див. додаток Б)

$$D_c(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{m^2 - p^2 - i\epsilon} = \frac{1}{4\pi} \delta(x^2) - \frac{m}{8\pi\sqrt{|x^2|}} \theta(x^2) H_1^{(2)}(m\sqrt{|x^2|}) + \frac{mi}{4\pi^2} \theta(-x^2) K_1(m\sqrt{|x^2|}), \quad (7.6.14)$$

де $H_1^{(2)}(z)$ — функція Ганкеля другого роду, $K_1(z)$ — функція Макдональда, $x^2 = x_0^2 - \mathbf{x}^2$. Незаважко переконатися, що всі сингулярності функції $D_c(x)$ розташовані на світловому конусі, тобто при $x^2 = 0$. При $x^2 \rightarrow 0$ маємо

$$D_c(x) \simeq \frac{1}{4\pi} \delta(x^2) - \frac{i}{4\pi x^2} - \frac{m^2}{16\pi} \theta(x^2) + \frac{im^2}{8\pi^2} \ln\left(m\sqrt{|x^2|} e^{\gamma-1/2}/2\right). \quad (7.6.15)$$

Для добутку узагальнених функцій не виконується правило асоціативного множення, наприклад, залежно від порядку множення у виразі

$$\mathcal{P} \frac{1}{x} \cdot x \cdot \delta(x) = \left(\mathcal{P} \frac{1}{x} \cdot x \right) \cdot \delta(x) \neq \mathcal{P} \frac{1}{x} \cdot (x \cdot \delta(x)) \quad (7.6.16)$$

отримуємо нескінченність або нуль (узагальнена функція $\mathcal{P} \frac{1}{x}$ визначає головне значення при інтегуванні).

Як впливає з (7.6.5) в регуляризованому пропагаторі підбором коефіцієнтів c_i і допоміжних мас M_i можна усунути найбільш сингулярні на світловому конусі доданки. В принципі для регуляризації фейнманівських діаграм достатньо регуляризувати відповідний добуток пропагаторів. У деяких регуляризаціях проміжний етап регуляризації окремих пропагаторів відсутній, наприклад при обрізанні інтеграла за максимальним імпульсом петлі або в розмірній регуляризації, яку розглянемо нижче. Фактично, з математичної точки зору, процедура регуляризації петльових діаграм з наступним відніманням довізначає добуток узагальнених функцій.

7.7. Програма перенормувань

Тепер ми готові сформулювати положення загальної теорії перенормувань. Вони ґрунтуються на трьох кроках.

1. Теорія регуляризується певним чином, щоб зробити інтеграли скінченними.

2. Значення кожного параметра в початковому лагранжіані \mathcal{L} вважається апіорі залежним від параметра регуляризації (наприклад, маси M).

3. Ці залежності підбираються таким чином, щоб отримати скінченні відповіді для функцій Гріна після зняття регуляризації в кожному порядку теорії збурень по константі взаємодії.

Таким чином, в теорії Φ^4 ми заміняємо \mathcal{L} на

$$\mathcal{L} = \frac{Z}{2}(\partial_\mu\Phi)^2 - \frac{Zm_0}{2}\Phi^2 - \frac{Z^2\lambda_0}{4!}\Phi^4, \quad (7.7.1)$$

де Z , m_0 , λ_0 мають таку залежність від параметра регуляризації M , щоб були скінченними функції Гріна в границі $M \rightarrow \infty$. Крім того, визначимо «голе» поле

$$\Phi_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{Z}\Phi,$$

в термінах якого маємо стандартний вираз

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi_0)^2 - \frac{m_0^2}{2}\Phi_0^2 - \frac{\lambda_0}{4!}\Phi_0^4, \quad (7.7.2)$$

який визначає лагранжіан теорії в термінах голих полів і параметрів. Як ми вже з'ясували, якщо масова розмірність доданків із добутками полів ≤ 4 (ця вимога означає фактично, що масова розмірність усіх параметрів повинна бути додатною або нульовою), то така теорія буде перенормовною. В ній усі розбіжності можна усунути у довільному порядку теорії збурень, підбираючи залежність Z , m_0 , λ_0 від параметра регуляризації, і не використовуючи в якості контрчленів доданки розмірності >4 . Зауважимо, що в цій теорії внаслідок симетрії $\Phi \rightarrow -\Phi$ не виникає розбіжностей і контрчленів типу Φ , Φ^3 .

Як працювати з таким лагранжіаном, як (7.7.2)? Розбиваємо його на три частини, вільну \mathcal{L}_0 , взаємодіючу \mathcal{L}_{int} і контрчленну (counterterm) \mathcal{L}_{ct} частини,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} + \mathcal{L}_{\text{ct}}, \quad (7.7.3)$$

де

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi)^2 - \frac{m^2}{2}\Phi^2, \quad \mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\lambda}{4!}\Phi^4, \quad (7.7.4)$$

$$\mathcal{L}_{\text{ct}} = \frac{Z-1}{2}(\partial_\mu\Phi)^2 - \frac{Zm_0^2 - m^2}{2}\Phi^2 - \frac{Z^2\lambda_0^2 - \lambda}{4!}\Phi^4. \quad (7.7.5)$$

Перенормовані λ і m залишаються скінченними при знятті регуляризації. \mathcal{L}_{int} і \mathcal{L}_{ct} розглядаються як доданки, які відповідають за взаємодії, і за ними будується теорія збурень. Контрчлени розкладаються за степенями λ і при обчисленні в даному порядку по λ генерують додаткові діаграми, які додаються до основних діаграм. Контрчлени підбираються так, щоб скоротити всі розбіжності при знятті регуляризації ($M \rightarrow \infty$). Таким чином, контрчлени скорочують частини основних фейнманівських діаграм, які мають розбіжності при великих імпульсах.

Фіксація скінченних частин контрчленів, які мають залишкові невідзначені константи, називається *схемою перенормувань*. Це приводить до

цілком визначеного співвідношення між перенормованими і голими параметрами теорії. Теорії, ультрафіолетові розбіжності яких можна систематично усувати за допомогою перевизначення скінченної кількості параметрів лагранжіана в щойно описаний спосіб, називаються *перенормованими*. Для перенормованих теорій ця процедура працює в усіх порядках за константою зв'язку λ . Лагранжіани квантової електродинаміки і квантової хромодинаміки мають цю властивість, а отже, ультрафіолетові розбіжності, які з'являються в теорії збурень, можуть бути повністю усунуті в будь-якому порядку по константі взаємодії.

Розглянемо тепер одну з найбільш застосованих у квантово-польових теоріях регуляризацій, яка має назву розмірна регуляризація.

7.8. Розмірна регуляризація

Для безпосереднього обчислення розглянутих вище діаграм власної енергії електрона, поляризаційного оператора та вершинної функції ми використаємо розмірну регуляризацію, в якій розбіжні інтеграли стають збіжними за допомогою формального зменшення розмірності простору-часу. Розмірна регуляризація, запропонована в роботах 'т Хоофта і Вельтмана, Ешмора, Боліні і Джіамб'яджі [33, 53, 184] (див. оглядову статтю [142]), є однією з найбільш зручних регуляризацій і широко використовується при дослідженні калібрувальних теорій. Вона є лоренц-інваріантною та зберігає калібрувальні симетрії. Крім того, вона доволі проста в практичних обчисленнях. Цю регуляризацію ми розглянемо на прикладі інтеграла в (7.6.2), де інтеграл стає збіжним за рахунок зменшення числа інтегрувань, тобто ми переходимо до інтегрування в n -вимірному просторі з $n < 4$,

$$I(p^2) = \frac{i\mu^{4-n}}{2} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon]}, \quad (7.8.1)$$

де ми ввели довільний параметр розмірності маси μ , щоб зберегти розмірність початкового інтеграла $I(p^2)$. Далі ми використовуємо тотожність

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{(xA + (1-x)B)^2}, \quad (7.8.2)$$

яка є окремим випадком більш загальної тотожності Фейнмана

$$\frac{1}{a_1 \dots a_n} = (n-1)! \int_0^1 \frac{dx_1 \dots dx_n}{(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n)^n} \delta\left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right), \quad (7.8.3)$$

і об'єднує добуток знаменників у степінь одного знаменника. Інший спосіб — це використати так зване α -представлення Швінгера для

пропагаторів,

$$\frac{1}{A + i\varepsilon} = -i \int_0^{\infty} d\alpha e^{i\alpha(A+i\varepsilon)}. \quad (7.8.4)$$

Об'єднаємо два пропагатора за допомогою тотожності Фейнмана

$$\frac{1}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)[(k-p)^2 - m^2 + i\varepsilon]} = \int_0^1 \frac{dx}{[k^2 - m^2 + i\varepsilon + xp^2 - 2xkp]^2},$$

і для $I(p^2)$ маємо

$$\begin{aligned} I(p^2) &= \frac{i\mu^{4-n}}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{[(k-xp)^2 + x(1-x)p^2 - m^2 + i\varepsilon]^2} = \\ &= \frac{i\mu^{4-n}}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{[k^2 + x(1-x)p^2 - m^2 + i\varepsilon]^2}, \end{aligned} \quad (7.8.5)$$

де в останній рівності зроблена заміна змінної $k - xp \rightarrow k$, яка законна в силу збіжності інтеграла при $n < 4$.

Обчислення можна спростити, якщо зробити аналітичне продовження до уявних енергій — так званий віківський поворот з простору Мінковського в евклідів простір. Для цього розглянемо контур у комплексній площині змінної інтегрування k^0 , зображений на рис. 28. У випадку $p^2 < 0$ підінтегральний вираз не містить полюсів у першому та третьому квадрантах (вони наявні у другому та четвертому квадрантах), тому інтеграл по контуру дорівнює нулю згідно з теоремою Коші. Оскільки підінтегральний вираз швидко зменшується при $|k^0| \rightarrow \infty$, внесок від дуг кола зникає й інтеграл по дійсній осі стає рівним інтегралу по уявній осі. Подальша заміна змінної $k_0 = ik_4$ приводить до інтегрування в евклідовому просторі

$$\int_M d^4 k = i \int_E d^4 k. \quad (7.8.6)$$

Міра в евклідовому n -вимірному просторі дорівнює

$$\begin{aligned} d^n k &= k^{n-1} dk d\Omega, \quad d\Omega = d\varphi \sin \theta_1 d\theta_1 \dots \sin^{n-2} \theta_{n-2} d\theta_{n-2}, \\ 0 \leq \varphi &\leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta_i \leq \pi, \quad \int d\Omega = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}, \end{aligned}$$

де $\Gamma(z)$ — гамма-функція Ейлера. Скаляр $k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2$ в просторі Мінковського стає $k^2 = -k_4^2 - \mathbf{k}^2 = -k_E^2$, де k_E — вектор в евклідовому просторі

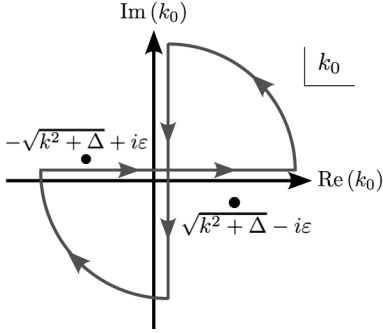


Рис. 28. Віківський поворот в комплексній площині k^0

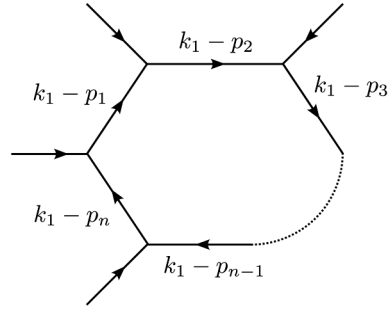


Рис. 29. Загальний вигляд однопетльової діаграми

(індекс E надалі опускаємо). Таким чином, маємо порахувати інтеграл в евклідовому просторі (для $p^2 < 0$ можна покласти $\varepsilon = 0$)

$$I(p^2) = -\frac{\mu^{4-n}}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{[k^2 + m^2 - x(1-x)p^2]^2}. \quad (7.8.7)$$

Оскільки підінтегральний вираз не залежить від кутів, то інтегрування по кутах елементарне

$$I(p^2) = -\frac{\mu^{4-n}}{(4\pi)^{n/2} \Gamma(n/2)} \int_0^1 dx \int_0^\infty \frac{dk k^{n-1}}{[k^2 + m^2 - x(1-x)p^2]^2}. \quad (7.8.8)$$

Для інтегрування по k використовуємо формулу

$$\int_0^\infty \frac{dx x^{\alpha-1}}{(x+a)^\beta} = a^{\alpha-\beta} B(\alpha, \beta - \alpha), \quad \text{Re } \beta > \text{Re } \alpha > 0, \quad (7.8.9)$$

де $B(x, y)$ – бета-функція Ейлера, і знаходимо

$$\begin{aligned} I(p^2) &= -\frac{\mu^{4-n}}{(4\pi)^{n/2} \Gamma(n/2)} \int_0^1 \frac{dx B(n/2, 2 - n/2)}{[m^2 - x(1-x)p^2]^{2-n/2}} = \\ &= -\frac{1}{32\pi^2} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \int_0^1 \frac{dx}{\left[\frac{m^2 - x(1-x)p^2}{4\pi\mu^2}\right]^{2-n/2}}. \end{aligned} \quad (7.8.10)$$

Отриманий вираз при $p^2 < 0$ можна аналітично продовжити до значень $p^2 > 0$.

Узагальнюючи обчислення, можна записати довільний інтеграл по імпульсу в просторі Мінковського для однієї петльової діаграми з довільним числом n пропагаторів (рис. 29) і $n + 1$ зовнішніх ліній.

$$I_n(\{m_j\}, \{p_j\}) = \int \frac{d^n k_1}{i\pi^{n/2}} \frac{1}{D_1 \dots D_n}, \quad D_j = (k_1 - p_j)^2 - m_j^2 + i\varepsilon. \quad (7.8.11)$$

Імпульси зовнішніх ліній в діаграмі на рис. 29 обрано таким чином, $p_1 - p_2, p_2 - p_3, \dots, p_{n-1} - p_n, p_n - p_1$, що сума всіх зовнішніх імпульсів дорівнює нулю. Застосовуючи формулу Фейнмана (7.8.3) для добутку знаменників, приходимо до виразу, який містить інтеграли типу

$$\int \frac{d^n k}{i\pi^{n/2}} \frac{(-k^2)^\alpha}{(-Uk^2 + V)^\beta} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + \alpha)}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{\Gamma(\beta - \frac{n}{2} - \alpha)}{\Gamma(\beta)} \frac{U^{-\frac{n}{2} - \alpha}}{V^{\beta - \frac{n}{2} - \alpha}}, \quad (7.8.12)$$

де U — функція фейнманівських параметрів, а V , крім фейнманівських параметрів, залежить від зовнішніх імпульсів і мас. Ця формула об'єднує операції евклідового повороту, інтегрування за кутами і модулем імпульсу, і буде в подальшому застосовуватися до обчислень однопетльових діаграм в інших теоріях. Застосовуючи її до виразу (7.8.5) ще в просторі Мінковського, отримуємо відразу вираз (7.8.10).

Початкова розбіжність $I(p^2)$ тепер виникає при $n \rightarrow 4$ як полюс гамма-функції $\Gamma(2 - \frac{n}{2})$. Виділимо розбіжну і скінченну частини, взявши до уваги, що

$$\Gamma(z) \simeq \frac{1}{z} - \gamma, \quad z \rightarrow 0, \quad (7.8.13)$$

де γ — константа Ейлера. Розкладемо $I(p^2)$ поблизу $n = 4$:

$$\begin{aligned} I(p^2) &\simeq -\frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{1}{2 - n/2} - \gamma \right) \int_0^1 dx \left[1 - (2 - n/2) \ln \frac{m^2 - x(1-x)p^2}{4\pi\mu^2} \right] = \\ &= -\frac{1}{16\pi^2(4-n)} + \frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\gamma + \ln \frac{m^2 - x(1-x)p^2}{4\pi\mu^2} \right]. \end{aligned} \quad (7.8.14)$$

Перший доданок у правій частині має полюс при $n = 4$ і визначає розбіжну частину, другий доданок скінченний при $n = 4$, і ми опустили доданки, які пропорційні степеням $n - 4$ і зникають коли $n = 4$. Зазначимо, що частина, залежна від імпульсу, є скінченною. Така сама ситуація буде мати місце і для власної енергії електрона, поляризаційного оператора та вершинної функції в квантовій електродинаміці у другому порядку теорії збурень.

Як було продемонстровано, розмірна регуляризація зберігає фундаментальні симетрії системи, зокрема лоренц-інваріантність у даному випадку, і дуже зручна в практичних обчисленнях. Ці її переваги особливо

проявляються в так званих векторних калібрувальних теоріях, таких як КЕД і КХД, у яких ліві та праві ферміони мають однакові калібрувальні взаємодії. Але в теорії електрослабких взаємодій ліві і праві ферміони взаємодіють по-різному з калібрувальними полями, такі теорії називаються кіральними. Наявність кіральних ферміонів і кіральних взаємодій проявляється через такі явища, як незбереження парності та неінваріантності відносно зарядового спряження в слабких взаємодіях (див. розділ 14), виникнення кіральних аномалій, тобто незбереження класичних симетрій у квантовій теорії (розділ 9.6). Усі ці явища зумовлені присутністю діраківської матриці γ_5 , або тензора Леві-Чивіті $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$, які є внутрішньо чотиривимірними величинами. Це призводить до проблем з розмірною регуляризацією при наявності величин, які жорстко прив'язані до певної розмірності.

Три основні властивості: антикомутативність γ_5 з іншими матрицями γ_μ , циклічність слідів та ненульовий слід добутку γ_5 з чотирма різними матрицями γ_μ , не можуть бути одночасно збережені без порушення узгодженості схеми. Найбільш поширеним є використання схеми регуляризації, в якій зберігається антикомутативність γ_5 -матриці, але при цьому γ_5 визначається неоднозначно [60]. На сьогодні не існує загальноприйнятої схеми розмірної регуляризації в кіральних теоріях. Більше про розмірну регуляризацію в кіральних теоріях можна прочитати в оглядових статтях [38, 167]. Звісно, можна використовувати й інші регуляризації в кіральних теоріях, наприклад калібрувально інваріантну регуляризацію Паулі—Вілларса або регуляризацію Славнова [20], за допомогою введення в лагранжіан кінетичних доданків з більш високими степенями коваріантних похідних.

ЗАДАЧІ

1. Знайти та зобразити всі примітивно розбіжні діаграми в квантовій електродинаміці у $(2 + 1)$ -вимірному просторі-часі.
2. Обчислити в однопетльовому наближенні співвідношення між перенормованою і перенормованою константами зв'язку в скалярній електродинаміці із зарядженим скалярним полем.
3. Використовуючи розмірну регуляризацію, обчислити в скалярній електродинаміці із зарядженим скалярним полем однопетльову поправку до власної енергії скалярного поля.
4. Довести перенормовність теорії масивних псевдоскалярного π і ферміонного ψ полів із лагранжіаном взаємодії

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \int d^4x \left(g \bar{\psi} i \gamma_5 \psi \pi - \frac{\lambda}{4!} \pi^4 \right).$$

5. Використовуючи регуляризацію Паулі—Вілларса в теорії псевдоскалярного і ферміонного полів із лагранжіаном взаємодії, визначеному в попередній задачі, обчислити однопетльові поправки до власної енергії псевдоскалярного і ферміонного полів.

6. Обчислити в розмірній регуляризації інтеграл в евклідовій області

$$\int \frac{d^n k (k^2)^\alpha}{\pi^{n/2} (k^2 + m^2)^\beta}$$

і показати, що інтеграл дорівнює нулю, коли $m = 0$, якщо $n \neq 2(\beta - \alpha)$.

7. У безмасовій теорії ϕ^3 власна енергія скалярної частинки в аналітичній регуляризації в просторі Мінковського має вигляд

$$\int \frac{d^4 k}{i\pi^2 D_1^\alpha D_2^\beta} = (-p^2)^{2-\alpha-\beta} G(\alpha, \beta), \quad D_1 = -(p+k)^2, \quad D_2 = -k^2.$$

Обчислити інтеграл і показати, що функція $G(\alpha, \beta)$ визначається виразом

$$G(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta - 2)\Gamma(2 - \alpha)\Gamma(2 - \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(4 - \alpha - \beta)}.$$

8. У теорії $\lambda\Phi^4/4!$ записати в імпульсному просторі вираз для вакуумної діаграми в порядку λ^2 і, застосовуючи фейнманівську параметризацію добутку пропагаторів, виконати інтегрування за імпульсами.

ОДНОПЕТЛЬОВІ ДІАГРАМИ В КВАНТОВІЙ ЕЛЕКТРОДИНАМІЦІ

У попередньому розділі ми розглянули однопетльові поправки до функцій Гріна в квантовій електродинаміці. Розбіжність цих діаграм привела до необхідності розвитку методу перенормування, який полягає в регуляризації розбіжних діаграм з подальшою процедурою віднімання. У цьому розділі ми продовжимо вивчення однопетльових радіаційних поправок та обчислимо аналітично діаграми поляризації вакууму, власної енергії електрона та вершинної функції. Також ми з'ясуємо фізичні наслідки цих однопетльових радіаційних поправок і покажемо, що вони модифікують на малих відстанях закон Кулона, генерують аномальний магнітний момент електрона та приводять до лембівського зсуву енергетичних рівнів електронних станів у воднеподібних атомах.

8.1. Поляризаційний оператор

Для регуляризації петльових діаграм будемо використовувати розмірну регуляризацію. У цьому параграфі розглянемо поляризаційний оператор. Для нього ми вже отримали раніше аналітичний вираз

$$\Pi_{\lambda\rho}(p) = e^2 \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \text{tr} \left[\gamma_\lambda \frac{1}{\hat{k} - m} \gamma_\rho \frac{1}{\hat{k} - \hat{p} - m} \right], \quad (8.1.1)$$

який відповідає діаграмі рис. 30. Запишемо цей вираз для $\Pi_{\mu\nu}(p)$, використовуючи розмірну регуляризацію

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = e^2 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n i} \frac{\text{tr} \gamma_\mu (\hat{k} + m) \gamma_\nu (\hat{k} - \hat{p} + m)}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)[(k - p)^2 - m^2 + i\varepsilon]}, \quad (8.1.2)$$

де інтегрування йде в n -вимірному просторі. Для сліду гамма-матриць в n -вимірному просторі маємо

$$\text{tr} \gamma_\mu \gamma_\nu = 2^{[n/2]} g_{\mu\nu}, \quad \text{tr} \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_\rho = 2^{[n/2]} (g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} + g_{\mu\rho} g_{\lambda\nu}), \quad (8.1.3)$$

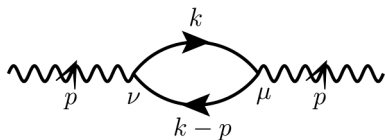


Рис. 30. Діаграма поляризації вакууму

де $[x]$ означає цілу частину числа. Для збереження правильної розмірності фізичних величин в n -вимірному просторі визначимо розмірності полів і константи зв'язку в системі одиниць $\hbar = c = 1$. В цій системі маємо розмірності $[m] = [\text{erg}] = [\text{sec}^{-1}] = [\text{cm}^{-1}]$. Тому зручно вимірювати всі величини в одиницях деякої довільної маси μ . Оскільки дія безрозмірна в цій системі одиниць, то знаходимо з кінетичних доданків розмірність поля A_μ ,

$$\left[\int d^n x F_{\mu\nu}^2 \right] = \mu^0, \quad [F^2] = \mu^n, \quad [F] = \mu^{n/2}, \quad [A] = \mu^{\frac{n-2}{2}}, \quad (8.1.4)$$

і ферміонного поля

$$\left[\int d^n x \bar{\Psi} \hat{\partial} \Psi \right] = \mu^0, \quad [\Psi] = \mu^{\frac{n-1}{2}}, \quad (8.1.5)$$

Розмірність константи зв'язку e знаходимо з доданка для взаємодії

$$[e \bar{\Psi} A \Psi] = [e] \mu^{\frac{3n-4}{2}} = \mu^n, \quad (8.1.6)$$

маємо $[e] = \mu^{\frac{4-n}{2}}$. Для збереження безрозмірності (в даній системі одиниць) константи зв'язку e виділимо її розмірність в поляризаційному операторі в явному вигляді

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = e^2 \mu^{4-n} 2^{[n/2]} \int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n} \frac{k_\mu(k-p)_\nu + (k-p)_\mu k_\nu + g_{\mu\nu}[m^2 - k(k-p)]}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]},$$

де ми порахували слід матриць відповідно до (8.1.3) та взяли до уваги, що слід непарного числа гамма-матриць дорівнює нулю. Далі використаємо тотожність Фейнмана (7.8.2) для того, щоб скомбінувати знаменники в один множник

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = e^2 \mu^{4-n} 2^{[n/2]} \int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n} \int_0^1 dx \frac{k_\mu(k-p)_\nu + (k-p)_\mu k_\nu + g_{\mu\nu}[m^2 - k(k-p)]}{[(k-xp)^2 + x(1-x)p^2 - m^2]^2}.$$

Робимо зсув змінних $k \rightarrow k + xp$ і, спрощуючи чисельник дробу, знаходимо

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(p) &= e^2 \mu^{-n+4} 2^{[n/2]} \int_0^1 dx \int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n} \times \\ &\times \frac{2k_\mu k_\nu - 2x(1-x)p_\mu p_\nu + g_{\mu\nu}[m^2 - k^2 + x(1-x)p^2]}{[k^2 + x(1-x)p^2 - m^2]^2}, \end{aligned} \quad (8.1.7)$$

де ми опустили доданки, лінійні по імпульсу інтегрування k , оскільки інтеграли від доданків з непарними степенями k обертаються в нуль,

$$\int d^n k k_\mu f(k^2) = 0.$$

Інтеграли від доданків з парними степенями k не зникають, для них ми маємо в нашому випадку

$$\int d^n k k_\mu k_\nu f(k^2) = \frac{g_{\mu\nu}}{n} \int d^n k k^2 f(k^2). \quad (8.1.8)$$

Використовуючи цю рівність, отримуємо

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(p) = e^2 \mu^{4-n} 2^{[n/2]} \int_0^1 dx \int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n} \times \\ \times \frac{g_{\mu\nu}[m^2 - k^2 + x(1-x)p^2 + \frac{2}{n}k^2] - 2x(1-x)p_\mu p_\nu}{[k^2 + x(1-x)p^2 - m^2]^2}. \end{aligned} \quad (8.1.9)$$

Інтегрування по k здійснюється за допомогою формули (7.8.12), маємо

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(p) = \frac{e^2 \mu^{4-n} 2^{[n/2]}}{(4\pi)^{n/2} \Gamma(n/2)} \int_0^1 dx \left\{ \frac{\Gamma(n/2)\Gamma(2-n/2)}{[m^2 - x(1-x)p^2]^{2-n/2}} [g_{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)p^2) - \right. \\ \left. - 2x(1-x)p_\mu p_\nu] + g_{\mu\nu} \frac{n-2}{n} \frac{\Gamma(1+n/2)\Gamma(1-n/2)}{[m^2 - x(1-x)p^2]^{1-n/2}} \right\}. \end{aligned} \quad (8.1.10)$$

Далі для гамма-функцій використовуємо співвідношення $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, остаточно

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = \frac{2e^2 \mu^{-n+4} 2^{[n/2]}}{(4\pi)^{n/2}} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \int_0^1 \frac{dx x(1-x)}{[m^2 - x(1-x)p^2]^{2-n/2}}. \quad (8.1.11)$$

Звертаємо увагу на автоматичну появу в розмірній регуляризації поперечного тензора $g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu$, що є наслідком збереження в цій регуляризації симетрії відносно калібрувальних перетворень, які потребують виконання тотожності $p^\mu \Pi_{\mu\nu}(p) = 0$. Також бачимо явну симетрію $\Pi_{\mu\nu}(p)$ за лоренцовими індексами.

Наступна задача — виділити розбіжну і збіжну частини при знятті регуляризації коли $n \rightarrow 4$. Спочатку запишемо

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = \frac{e^2 2^{[n/2]}}{8\pi^2} (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \int_0^1 \frac{dx x(1-x)}{\left[\frac{m^2 - x(1-x)p^2}{4\pi\mu^2}\right]^{2-n/2}} \quad (8.1.12)$$

і розкладемо вираз по $n - 4$, використовуючи

$$\Gamma(z) \simeq \frac{1}{z} - \gamma, \quad z \rightarrow 0,$$

утримуючи полюсний доданок і скінченну частину. Знаходимо

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(p) &\simeq \frac{e^2}{2\pi^2} (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \left[\frac{1}{2 - \frac{n}{2}} - \gamma \right] \int_0^1 dx x(1-x) \times \\ &\times \left[1 - \left(2 - \frac{n}{2} \right) \ln \frac{m^2 - x(1-x)p^2}{2\pi\mu^2} \right] \simeq \frac{e^2}{2\pi^2} (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \times \\ &\times \left[\frac{1}{3(4-n)} - \frac{\gamma}{6} - \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{m^2 - x(1-x)p^2}{4\pi\mu^2} \right] + O(n-4). \end{aligned} \quad (8.1.13)$$

Найпростіша процедура перенормувань — це просто відняти полюсний (при $n \rightarrow 4$) доданок, що визначає так звану MS (minimal subtraction) схему перенормувань.

Модифікована схема перенормування (\overline{MS}) супроводжується відніманням полюса разом з деякою комбінацією універсальних констант γ і π . У схемі \overline{MS} перенормований поляризаційний оператор має такий вигляд:

$$\Pi_{\mu\nu}^{\overline{MS}}(p) = -\frac{e^2}{2\pi^2} (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{m^2 - x(1-x)p^2}{\mu^2}. \quad (8.1.14)$$

У схемі віднімання за Дайсоном, яка відповідає відніманню значення поляризаційного оператора при нульовому імпульсі для перенормованого поляризаційного оператора, маємо

$$\Pi_{\mu\nu}^D(p) = -\frac{e^2}{2\pi^2} (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{m^2 - x(1-x)p^2}{m^2}. \quad (8.1.15)$$

Записуючи

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \Pi(p^2), \quad (8.1.16)$$

бачимо, що скалярна функція нормована як $\Pi(p^2 = 0) = 0$ у схемі віднімання за Дайсоном, тоді як в \overline{MS} -схемі нормування інше.

8.2. Уявна частина поляризаційного оператора

При $p^2 < 0$ поляризаційний оператор (8.1.15) очевидно дійсний. Область значень $p^2 < 0$ відповідає так званій евклідовій області, тому що внаслідок лоренц-інваріантності завжди можна перейти в систему, де $p_0 = 0$ і тільки просторові компоненти імпульсу відмінні від нуля, $\mathbf{p} \neq 0$. Евклідова область важлива для визначення біжучої константи зв'язку і буде розглядатися далі. У цьому параграфі ми зосередимось на уявній частині поляризаційного оператора, яка може з'явитися при $p^2 > 0$, коли вираз під логарифмом від'ємний

$$m^2 - xp^2 + x^2p^2 < 0.$$

Це буде у випадку, коли змінна інтегрування задовольняє $x_- < x < x_+$, де

$$x_{\pm} = \frac{1}{2p^2} [p^2 \pm \sqrt{p^4 - 4m^2p^2}] = \frac{1}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} \right] = \frac{1}{2}(1 \pm \beta), \quad p^2 > 4m^2.$$

Внесок в уявну частину $\Pi(p^2)$ дає тільки його скінченний доданок

$$\text{Im } \Pi(p^2 \pm i\varepsilon) = -\frac{e^2}{2\pi^2} \int_{(1-\beta)/2}^{(1+\beta)/2} dx x(1-x) \text{Im} \ln \frac{m^2 - x(1-x)(p^2 \pm i\varepsilon)}{m^2}. \quad (8.2.1)$$

Для уявної частини логарифма знаходимо

$$\text{Im} \ln \frac{m^2 - x(1-x)p^2 \mp x(1-x)i\varepsilon}{m^2} = \mp\pi, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Остаточно отримуємо

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi(p^2 \pm i\varepsilon) &= \pm \frac{e^2}{2\pi} \int_{(1-\beta)/2}^{(1+\beta)/2} dx x(1-x) = \pm \frac{\alpha}{6} \beta (3 - \beta^2) = \\ &= \pm \frac{\alpha}{3} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{p^2} \right) \theta(p^2 - 4m^2), \end{aligned} \quad (8.2.2)$$

де $\alpha = e^2/4\pi$ — постійна тонкої структури. Очевидно, функція $\Pi(p^2)$ має розріз, який починається з $p^2 = 4m^2$ — порога народження реальної електрон-позитронної пари. Значення на розрізі різняться при підході до нього зверху та знизу.

8.3. Власна енергія електрона

Продовжимо обчислення поправок до функцій Гріна в квантовій електродинаміці у другому порядку теорії збурень, використовуючи розмірну регуляризацию, і розглянемо у цьому параграфі діаграму власної енергії електрона. Вона визначається діаграмою на рис. 31. Запишемо для неї аналітичний вираз згідно з правилами Фейнмана

$$-i\Sigma(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{i}{\hat{p} - \hat{k} - m} \gamma^\nu D_{0\nu\mu}(k), \quad (8.3.1)$$

де пропагатор фотона в коваріантній калібровці визначається формулою (6.2.15). Проведемо обчислення діаграми в калібровці Фейнмана $\xi = 1$, де вираз для діаграми має найбільш простий вигляд

$$\Sigma(p) = e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{1}{\hat{p} - \hat{k} - m} \gamma_\mu \frac{1}{k^2}. \quad (8.3.2)$$

Інтеграл розбіжний, і для його регуляризації ми застосуємо розмірну регуляризацию

$$\Sigma(p) = e^2 \mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{\gamma^\mu (\hat{p} - \hat{k} + m) \gamma_\mu}{i [(p-k)^2 - m^2] k^2} \quad (8.3.3)$$

(нагадаємо, що m^2 у знаменнику має нескінченно малу добавку, $m^2 - i\varepsilon$, що мається на увазі). Для здійснення інтегрування по імпульсам використаємо тотожність Фейнмана (7.8.2) для того, щоб об'єднати доданки у знаменнику,

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= e^2 \mu^{4-n} \int_0^1 dx \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{\gamma^\mu (\hat{p} - \hat{k} + m) \gamma_\mu}{i [(p-k)^2 x - xm^2 + (1-x)k^2]^2} = \\ &= e^2 \mu^{4-n} \int_0^1 dx \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{\gamma^\mu (\hat{p} - \hat{k} + m) \gamma_\mu}{i [(k-px)^2 + x(1-x)p^2 - xm^2]^2}. \end{aligned} \quad (8.3.4)$$

Після зсуву змінних, $k \rightarrow k + px$, опускаємо непарні по k доданки в чисельнику та інтегруємо за допомогою формули (7.8.12), тоді отримуємо

$$\Sigma(p) = \frac{e^2 \mu^{4-n}}{(4\pi)^{n/2}} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \int_0^1 dx \frac{\gamma^\mu ((1-x)\hat{p} + m) \gamma_\mu}{[m^2 x - x(1-x)p^2]^2 - \frac{n}{2}}. \quad (8.3.5)$$

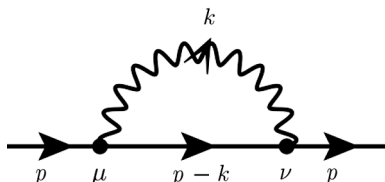


Рис. 31. Діаграма власної енергії електрона у другому порядку теорії збурень

Для виділення розбіжної частини спершу запишемо

$$\Sigma(p) = \frac{e^2}{16\pi^2} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \int_0^1 \frac{dx \gamma^\mu ((1-x)\hat{p} + m) \gamma_\mu}{\left[\frac{m^2 x - x(1-x)p^2}{4\pi\mu^2}\right]^{2-\frac{n}{2}}}. \quad (8.3.6)$$

У розмірній регуляризації, крім переходу до інтегрування в n -вимірному просторі, для самоузгодженості обчислень приймається, що матриці Дірака задовольняють таким співвідношенням:

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = n, \quad \gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu = (2-n)\gamma_\nu.$$

Далі розкладемо вираз (8.3.6) в точці $n = 4$, утримуючи в цьому розкладі сингулярну та скінченну частини, отримуємо

$$\begin{aligned} \Sigma(p) = & \frac{e^2}{8\pi^2(4-n)}(-\hat{p} + 4m) + \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ \hat{p}(1+\gamma) - 2m(1+2\gamma) + \right. \\ & \left. + 2 \int_0^1 dx [\hat{p}(1-x) - 2m] \ln \frac{m^2 x - x(1-x)p^2}{4\pi\mu^2} \right\} + O(n-4). \end{aligned} \quad (8.3.7)$$

Таким чином, можемо записати

$$\Sigma(p) = \frac{e^2}{8\pi^2(4-n)}(-\hat{p} + 4m) + \Sigma_f(p), \quad (8.3.8)$$

де перший доданок розбіжний при $n \rightarrow 4$, а $\Sigma_f(p)$ — скінченна частина.

8.4. Перенормування заряду і маси електрона у другому порядку теорії збурень

У попередніх параграфах ми обчислили, використовуючи розмірну регуляризацію, розбіжну та збіжну частини поляризаційного оператора і власної енергії електрона. У цьому параграфі ми розглянемо перенормування константи взаємодії та маси електрона на основі вже отриманих виразів і розпочнемо з перенормування заряду.

Оскільки фотонний пропагатор описує взаємодію між двома електричними зарядами, то розглянемо вираз

$$\alpha_0 D(p^2) = \frac{\alpha_0}{p^2[1 + \Pi(p^2)]}, \quad \alpha_0 = \frac{e_0^2}{4\pi}, \quad (8.4.1)$$

де $D(p^2)$ — скалярна функція при поперечному тензорі у фотонному пропагаторі, а індекс 0 означає голий (bare), або затравочний заряд. Для перенормованої функції $\Pi(p^2)$ у другому порядку теорії збурень ми отримали

в розмірній регуляризації такий вираз:

$$\Pi(p^2) = \frac{2\alpha_0}{\pi} \left[\frac{1}{3(4-n)} - \frac{\gamma}{6} - \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{m_0^2 - x(1-x)p^2}{4\pi\mu^2} \right], \quad (8.4.2)$$

де m_0 є також гола маса. Розбіжна частина поляризаційного оператора дорівнює

$$\Pi(0) = \frac{2\alpha_0}{\pi} \left[\frac{1}{3(4-n)} - \frac{\gamma}{6} - \frac{1}{6} \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right], \quad (8.4.3)$$

а збіжна

$$\Pi(p^2) - \Pi(0) = -\frac{2\alpha_0}{\pi} \left[\int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{m_0^2 - x(1-x)p^2}{m_0^2} \right]. \quad (8.4.4)$$

Для отримання розбіжної частини поляризаційного оператора в калібрувально інваріантній регуляризації Паулі—Віллара треба замінити

$$\frac{2}{4-n} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \rightarrow \ln \frac{M^2}{m_0^2}, \quad (8.4.5)$$

де M — параметр регуляризації, який спрямовується до нескінченності у перенормованих величинах. Зробимо тотожні перетворення

$$\alpha_0 D(p^2) = \frac{\alpha_0}{1 + \Pi(0)} \frac{1}{p^2 \left[1 + \frac{\Pi(p^2) - \Pi(0)}{1 + \Pi(0)} \right]}. \quad (8.4.6)$$

Введемо перенормований заряд

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \Pi(0)} = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \frac{M^2}{m_0^2}} \equiv Z_3 \alpha_0, \quad (8.4.7)$$

де константа Z_3 визначає перенормування заряду. В результаті маємо

$$\alpha_0 D(p^2) = \alpha D_R(p^2) = \frac{\alpha}{p^2 [1 + \Pi_R(p^2)]} = \frac{\alpha_{\text{eff}}(p^2)}{p^2}, \quad (8.4.8)$$

де ми визначили ефективну константу взаємодії $\alpha_{\text{eff}}(p^2)$, виділивши в явному вигляді множник $1/p^2$, який відповідає кулонівській взаємодії. Перенормований поляризаційний оператор дорівнює

$$\Pi_R(p^2) = \frac{\Pi(p^2) - \Pi(0)}{1 + \Pi(0)} = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{m^2 - x(1-x)p^2}{m^2}, \quad (8.4.9)$$

і в першому порядку по α ми замінили голу масу m_0 на перенормовану масу m . Поведінку ефективної константи взаємодії $\alpha_{\text{eff}}(p^2)$ та її фізичний зміст ми розглянемо в розділі 8.6, а зараз проаналізуємо зв'язок (8.4.7) між голою і перенормованою константами. Очевидно, якщо вважати α_0 скінченною величиною, то перенормована константа прямує до нуля, коли знімається регуляризація,

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \frac{M^2}{m^2}} \sim \frac{1}{\ln \frac{M^2}{m^2}} \rightarrow 0, \quad M \rightarrow \infty. \quad (8.4.10)$$

Тобто теорія стає тривіальною в цій границі: будь-яке скінченне значення голого заряду (на малих відстанях) призводить до зникнення фізичного заряду, тобто до відсутності взаємодії (на спостережуваних відстанях). Цей результат в 1954 р. отримали Ландау, Абрикосов і Халатніков [12, 138], і він має назву «нуль-заряд» (відомий також як проблема тривіальності). На цей результат можна подивитись і з іншого боку. Так, співвідношення (8.4.7) можна обернути і знайти голу константу як функцію перенормованої

$$\alpha_0 = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{M^2}{m^2}}. \quad (8.4.11)$$

Вважаючи, що перенормована константа не залежить від параметра регуляризації, знаходимо, що не можна спрямувати M до нескінченності: α_0 зростає з ростом M і стає нескінченним при $M^2 = m^2 \exp(3\pi/\alpha)$.

Історично цей результат (як і подібні до нього для констант взаємодії в інших теоріях) мав велике значення для розвитку квантової теорії поля, тому що поставив питання, чи є квантова теорія поля самоузгодженою теорією. На щастя, ситуація змінилася після відкриття явища асимптотичної свободи в неабелевих теоріях, що спричинило ренесанс квантової теорії поля. Ці питання ми розглянемо пізніше, а поки що повернемося до власної енергії електрона.

Для неї ми одержали раніше такий вираз:

$$\begin{aligned} \Sigma(p) = & \frac{\alpha_0}{2\pi(4-n)} (-\hat{p} + 4m_0) + \frac{\alpha_0}{4\pi} [\hat{p}(1+\gamma) - 2m_0(1+2\gamma)] + \\ & + \frac{\alpha_0}{2\pi} \int_0^1 dx [\hat{p}(1-x) - 2m_0] \ln \frac{m_0^2 x - x(1-x)p^2}{4\pi\mu^2}. \end{aligned} \quad (8.4.12)$$

Неважко обчислити уявну частину $\Sigma(p)$, яка виявляється скінченною і незалежною від довільного параметра μ

$$\text{Im}\Sigma(p) = \alpha \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right) \left[m - \frac{\hat{p}}{4} \left(1 + \frac{m^2}{p^2}\right)\right] \theta(p^2 - m^2). \quad (8.4.13)$$

Таким чином, $\Sigma(p)$ має розріз у комплексній площині p^2 , який починається з m^2 , тобто, коли досягається поріг народження двочастинкового (електрон + фотон) стану. По енергії p_0 цьому порогу відповідають розрізи $(-\infty, -m)$ і (m, ∞) , які починаються з маси електрона внаслідок відсутності маси у фотона.

Для неперенормованого пропагатора електрона маємо

$$G(p) = \frac{i}{\hat{p} - m_0 - \Sigma(\hat{p})}. \quad (8.4.14)$$

Фізична маса є полюсом функції Гріна, тобто її знаходять з рівняння

$$[\hat{p} - m_0 - \Sigma(\hat{p})] \Big|_{\hat{p}=m} = 0 \Rightarrow m - m_0 - \Sigma(m) = 0, \quad (8.4.15)$$

що дає зв'язок між голою і фізичною масами.

Для пропагатора виконаємо тотожні перетворення

$$G(p) = \frac{i}{\hat{p} - m_0 - \Sigma(\hat{p} = m) - (\hat{p} - m)\partial\Sigma(\hat{p})/\partial\hat{p} \Big|_{\hat{p}=m} - \Sigma_{\text{sub}}(\hat{p})}, \quad (8.4.16)$$

де

$$\Sigma_{\text{sub}} = \Sigma(\hat{p}) - \Sigma(\hat{p} = m) - (\hat{p} - m)\partial\Sigma(\hat{p})/\partial\hat{p} \Big|_{\hat{p}=m},$$

тобто ми відняли і додали два перші доданки ряду Тейлора по \hat{p} в точці m . Враховуючи (8.4.15), запишемо

$$\begin{aligned} G(p) &= \frac{i}{\hat{p} - m - (\hat{p} - m)\partial\Sigma(\hat{p})/\partial\hat{p} \Big|_{\hat{p}=m} - \Sigma_{\text{sub}}(\hat{p})} = \\ &= \frac{Z_2}{\hat{p} - m - \Sigma_R(\hat{p})} = Z_2 G_R(p), \end{aligned} \quad (8.4.17)$$

де Z_2 — константа перенормування вторинно квантованої хвильової функції електрона,

$$Z_2 = \frac{1}{1 - \partial\Sigma(\hat{p})/\partial\hat{p} \Big|_{\hat{p}=m}}, \quad \Sigma_R(\hat{p}) = \frac{\Sigma_{\text{sub}}}{1 - \partial\Sigma(\hat{p})/\partial\hat{p} \Big|_{\hat{p}=m}}. \quad (8.4.18)$$

З рівняння (8.4.15) для фізичної маси маємо

$$m = m_0 + \delta m, \quad \delta m = \Sigma(\hat{p} = m). \quad (8.4.19)$$

У другому порядку теорії збурень $\Sigma(\hat{p} = m) \simeq \Sigma(\hat{p} = m_0)$ і з рівняння (8.4.12) знаходимо

$$\delta m = m_0 \frac{3\alpha_0}{4\pi} \left(\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln(4\pi) + \ln \frac{\mu^2}{m_0^2} + \frac{4}{3} \right) + O(\alpha_0^2), \quad (8.4.20)$$

$$Z_2 = 1 - \frac{\alpha_0}{4\pi} \left(\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln(4\pi) + \ln \frac{\mu^2}{m_0^2} - 2 \ln \frac{m_0^2}{\lambda^2} + 4 \right) + O(\alpha_0^2), \quad (8.4.21)$$

і повна маса

$$m = m_0 \left[1 + \frac{3\alpha_0}{4\pi} \left(\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln(4\pi) + \ln \frac{\mu^2}{m_0^2} + \frac{4}{3} \right) + O(\alpha_0^2) \right]. \quad (8.4.22)$$

Зауважимо, що константа Z_2 , яка пов'язана з похідною власної енергії на масовій оболонці $\hat{p} = m$, виявляється інфрачервоно розбіжною, і тому при її обчисленні треба ввести фіктивну масу фотона λ , яка покладається рівною нулю в остаточних обчисленнях фізичних величин, де залежність від λ скорочується. Слід також зазначити, що наведені результати були отримані в калібровці Фейнмана $\xi = 1$. В інших калібровках $\xi \neq 1$ константа Z_2 є залежною від калібрувального параметра ξ , тоді як фізична маса (полюс функції Гріна) не залежить від ξ . Незалежність фізичної маси від вибору калібровки для фотонного пропагатора можна довести і в загальному випадку (поза межами теорії збурень, див. розділ 9.4). Це є важливим результатом, оскільки означає, що незважаючи на те, що електронна функція Гріна залежить від калібровки, вона містить інформацію про фізичні калібрувально незалежні величини.

Як впливає з рівняння (8.4.22), якщо гола маса дорівнює нулю, $m_0 = 0$, то фізична маса також рівна нулю. Тобто маса електрона не може бути породжена за рахунок взаємодії в теорії збурень. Це є наслідком кіральної симетрії лагранжіана для безмасових ферміонів (про кіральну симетрію див. розділи 8.5, 9.5 і 12.4).

У другому порядку теорії збурень ми можемо замінити в (8.4.21) голу константу α_0 і масу m_0 на фізичну константу α і масу m . Також, використовуючи зв'язок (8.4.5) між розмірною регуляризациєю і регуляризациєю Паулі—Вілларса, поправку до голої маси можна записати як

$$\delta m \sim \frac{3\alpha}{2\pi} m \ln \frac{M}{m}. \quad (8.4.23)$$

Як бачимо, власна енергія електрона стає нескінченною, коли знімається регуляризація, $M \rightarrow \infty$. Факт розбіжності власної енергії електрона був встановлений ще в 1929 р. (Гейзенберг, Паулі), але конкретна залежність від параметра обрізання була вперше отримана Віктором Вайскопфом у 1934 р. Цікаво порівняти власну енергію електрона (8.4.23) в квантовій електродинаміці з власною енергією електрона в класичній електродинаміці. В класичній теорії електрона Лоренца вважається, що маса електрона виникає повністю за рахунок кулонівського поля, яке породжується електроном, $E(r) = e/(4\pi r^2)$. Для енергії поля маємо

$$\mathcal{E} = \int d^3x \frac{E^2(r)}{2} = \frac{e^2}{8\pi} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{\alpha}{2r_0}, \quad (8.4.24)$$

де ми ввели скінченний радіус електрона r_0 на нижній границі інтегрування. З точки зору теорії відносності, радіус електрона не є чітко визначеною величиною, і ми хотіли б попрямувати його до нуля. Очевидно, для точкового електрона власна енергія розбігається, коли r_0 прямує до нуля. Якщо ототожнити енергію поля \mathcal{E} з енергією спокою електрона, $mc^2 = \alpha \hbar c / 2r_0$, де ми відновили константи \hbar і c , то звідси отримуємо (ігноруючи модельно залежний числовий коефіцієнт $1/2$) класичний радіус електрона

$$r_0 = \alpha \frac{\hbar}{mc} = \frac{e^2}{4\pi mc^2} = 2,8 \cdot 10^{-15} \text{ м.} \quad (8.4.25)$$

Вважаючи, що обрізання в конфігураційному та імпульсному просторі пов'язані співвідношенням невизначеності, $r_0 \sim 1/M$, бачимо, що в класичній теорії власна енергія розбігається лінійно за параметром M , а в квантовій теорії логарифмічно. Якщо вважати, що в КЕД гола маса електрона дорівнює нулю, а фізична маса виникає динамічним чином за рахунок електромагнітної взаємодії, то можна розглянути самоузгоджене рівняння на масу, прирівнявши масу δm за рахунок взаємодії (8.4.23) повній масі m :

$$m = \frac{3\alpha}{2\pi} m \ln \frac{M}{m}. \quad (8.4.26)$$

Крім тривіального розв'язку $m = 0$ це рівняння має і нетривіальний

$$m = Me^{-2\pi/3\alpha}. \quad (8.4.27)$$

Такий розв'язок, по-перше, не можна отримати по теорії збурень внаслідок неаналітичної залежності динамічно згенерованої маси від константи взаємодії, по-друге, він порушує спонтанним чином кіральну симетрію, а по-третє, він лінійно пропорційний параметру обрізання M як в класичній електродинаміці (П.І. Фомін, 1967 р.) Проблема динамічної генерації мас елементарних частинок поза межами теорії збурень все ще далека від вирішення і залишається одним із важливих напрямів досліджень у квантовій теорії поля, зокрема в теорії калібрувальних полів.

Повертаючись до рівняння (8.4.22), бачимо, що маса m розбігається, коли $n \rightarrow 4$, якщо вважати голу масу m_0 скінченною. Оскільки експериментально неможливо виміряти голу масу, а спостережуваною є тільки маса $m = m_0 + \delta m$, яка очевидно є скінченною, то в другому порядку теорії збурень можемо виразити голу масу,

$$m_0 = m \left[1 - \frac{3\alpha}{4\pi} \left(\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln(4\pi) + \ln \frac{\mu^2}{m^2} + \frac{4}{3} \right) + O(\alpha^2) \right], \quad (8.4.28)$$

і константу Z_2 ,

$$Z_2 = 1 - \frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln(4\pi) + \ln \frac{\mu^2}{m^2} - 2 \ln \frac{m^2}{\lambda^2} + 4 \right) + O(\alpha^2) \quad (8.4.29)$$

через параметри m і α , які будемо вважати скінченними (і пов'язаними з вимірюваними величинами). Голі маса m_0 і константа зв'язку α_0 будуть розбіжними при знятті обрізання, але вони нефізичні і не з'являються у спостережуваних величинах. Це і є основна ідея теорії перенормувань, яку ми розглянемо більш детально пізніше.

8.5. Генерація маси калібрувального поля та кіральна аномалія в моделі Швінгера

Для того щоб краще зрозуміти фізичні властивості та зміст отриманих скінченних частин власної енергії фотона і електрона, розглянемо поляризаційний оператор в ігравковій моделі квантової електродинаміки у двовимірному просторі-часі, тобто $n = 2$. З формули (8.1.11) отримуємо

$$\Pi_{\mu\nu} = \frac{e^2}{\pi} (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \int_0^1 \frac{dx x(1-x)}{m^2 - x(1-x)p^2}, \quad (8.5.1)$$

де заряд має масову розмірність одиницю, тобто $[e] = \mu^1$. Поляризаційний оператор у розмірності $n = 2$ не містить розбіжностей, і взагалі КЕД₂ — скінченна теорія. Покладемо ще масу ферміона $m = 0$, тоді отримуємо так звану модель Швінгера, яка є прикладом точно розв'язуваної моделі квантової теорії поля. Очевидно,

$$\Pi_{\mu\nu} = -\frac{e^2}{\pi} \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) p^2 \Pi(p^2), \quad \Pi(p^2) = -\frac{e^2}{\pi p^2}. \quad (8.5.2)$$

Нескінченний ланцюжок внесків поляризаційного оператора в пропагатор фотона (рис. 32) можна просумувати. Запишемо цей нескінченний ряд

$$D_{\mu\nu}(p) = D_{0\mu\nu}(p) + D_{0\mu\lambda}(p)(-i\Pi_{\lambda\rho}(p))D_{0\rho\nu}(p) + \dots, \quad (8.5.3)$$

де вільний пропагатор

$$D_{0\mu\nu}(p) = \frac{1}{ip^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) + \xi \frac{p_\mu p_\nu}{ip^4}, \quad (8.5.4)$$

а повний пропагатор має таку загальну тензорну структуру

$$D_{\mu\nu}(p) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) d(p^2) + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} d_l(p^2), \quad (8.5.5)$$

з двома поки що невідомими скалярними функціями $d(p^2)$ і $d_l(p^2)$. Внаслідок поперечності поляризаційного оператора, $p^\mu \Pi_{\mu\nu}(p) = 0$, доданок

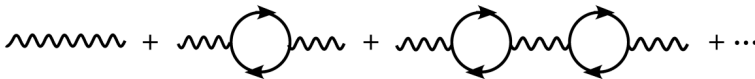


Рис. 32. Повний фотонний пропагатор

$d_l(p^2)$ не отримує внесків від петльових діаграм, тому $d_l(p^2) = \xi/ip^2$. Тобто поздовжня частина фотонного пропагатора не змінюється за рахунок взаємодії. Для поперечної частини пропагатора отримуємо геометричну прогресію, яка дає

$$D(p^2) = \frac{1}{ip^2} + \frac{1}{ip^2}(-ip^2\Pi(p^2))\frac{1}{ip^2} + \dots = \frac{1}{i} \frac{1}{p^2 + p^2\Pi(p^2)}. \quad (8.5.6)$$

Оскільки з (8.5.2)

$$\Pi(p^2) = -\frac{e^2}{\pi p^2}, \quad (8.5.7)$$

то для пропагатора фотона знаходимо

$$D_{\mu\nu}(p) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \frac{1}{i(p^2 - e^2/\pi)}. \quad (8.5.8)$$

Полюс повного, з врахуванням взаємодії, пропагатора знаходиться при $p^2 = e^2/\pi$, на відміну від вільного пропагатора з полюсом при $p^2 = 0$. Маємо *динамічну* генерацію маси калібрувального поля без порушення калібрувальної інваріантності — механізм Швінгера. Варто нагадати, що просто додати масовий доданок у лагранжیان для калібрувального поля неможливо, тому що такий доданок порушує калібрувальну симетрію. Тому можливість генерації маси калібрувальних бозонів без порушення калібрувальної симетрії є дуже нетривіальним результатом.

Необхідною умовою механізму Швінгера є поява полюса при $p^2 = 0$ в поляризаційному операторі (8.5.7), тобто виникнення безмасового зв'язаного стану. Цей механізм генерації маси калібрувального поля може бути узагальнений на довільну розмірність простору-часу. Наприклад, генерація маси W - і Z -бозонів в електрослабких взаємодіях і можливої маси глюонів у квантовій хромодинаміці відбувається фактично за механізмом Швінгера.

Інший цікавий та важливий ефект, який має місце в моделі Швінгера — це кіральна аномалія. Як показали Адлер та Белл і Джеків у 1969 р., вона має місце також в реалістичних моделях у чотиривимірному просторі, зокрема, кіральна аномалія важлива для опису розпаду нейтрального піона на два фотона $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$.

Ця аномалія описує порушення кіральної симетрії теорії безмасових ферміонів, яка визначається лагранжіаном

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi. \quad (8.5.9)$$

Цей лагранжیان інваріантний відносно звичайних і кіральних перетворень

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow e^{-i\alpha}\bar{\psi}, \quad \psi \rightarrow e^{i\theta\gamma_5}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{i\theta\gamma_5}, \quad (8.5.10)$$

де матриця γ_5 у двовимірному просторі визначається як $\gamma_5 = \gamma^0\gamma^1$. Відповідно до теореми Нетер маємо збереження векторного і аксіально-векторного струмів,

$$j_\mu(x) = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \quad \partial^\mu j_\mu(x) = 0, \quad j_5^\mu(x) = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi, \quad \partial^\mu j_{\mu 5} = 0. \quad (8.5.11)$$

Розглянемо середнє значення струму, індукованого зовнішнім електромагнітним полем

$$\begin{aligned} \langle j_\mu(p) \rangle &= \int d^2x e^{ipx} \langle j_\mu(x) \rangle = -ie \int d^2x d^2y e^{ipx} \underbrace{\langle T j_\mu(x) j_\nu(y) \rangle}_{i\Pi_{\mu\nu}(x-y)/e^2} A^\nu(y) = \\ &= \frac{1}{e} \Pi_{\mu\nu}(p) A^\nu(p) = -\frac{e}{\pi} \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) A^\nu(p), \end{aligned} \quad (8.5.12)$$

де використано зв'язок поляризаційного оператора з корелятором струмів

$$-i\Pi_{\mu\nu} = (-ie)^2 \langle 0 | T j_\mu j_\nu | 0 \rangle. \quad (8.5.13)$$

Очевидно, $p^\mu \langle j_\mu(p) \rangle = 0$, що виражає закон збереження векторного струму в імпульсному просторі. У двовимірному просторі гамма-матриці є фактично матрицями Паулі,

$$\gamma^0 = \sigma^2, \quad \gamma^1 = i\sigma^1, \quad \gamma_5 = \gamma^0\gamma^1 = i\sigma^2\sigma^1 = \sigma^3.$$

Легко перевірити співвідношення

$$\gamma^\mu\gamma_5 = -\varepsilon^{\mu\nu}\gamma_\nu,$$

яке справедливо тільки у двовимірному просторі. Завдяки цьому співвідношенню кіральний струм виражається через векторний струм

$$\langle j_5^\mu(p) \rangle = -\varepsilon^{\mu\nu} \langle j_\nu(p) \rangle = \varepsilon^{\mu\nu} \frac{e}{\pi} \left(A_\nu(p) - \frac{p_\nu p^\lambda}{p^2} A_\lambda(p) \right). \quad (8.5.14)$$

Якщо кіральний струм зберігається, то згідно з рівнянням (8.5.11) повинно мати місце співвідношення (звичайна тотожність Уорда)

$$p_\mu \langle j^{\mu 5}(p) \rangle = 0.$$

Але з (8.5.14) знаходимо

$$p_\mu \langle j_5^\mu(p) \rangle = \frac{e}{\pi} \varepsilon^{\mu\nu} p_\mu A_\nu(p). \quad (8.5.15)$$

Фур'є-перетворення цього рівняння приводить до такого рівняння

$$\partial_\mu j_5^\mu = \frac{e}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (8.5.16)$$

тобто кіральний струм не зберігається. Це і є кіральна, або аксіальна аномалія. Очевидно, що як закон збереження векторного струму, так і аномальний закон збереження аксіально-векторного струму пов'язані з переречністю поляризаційного оператора, тобто є наслідком збереження калібрувальної симетрії.

Важливий висновок: *симетрії початкового класичного лагранжіана можуть (!) порушуватися при квантуванні, приводячи до аномалій у законах збереження.*

8.6. Модифікація закону Кулона

У параграфі 8.4 ми виконали перенормування поляризаційного оператора та власної енергії електрона, а в цьому параграфі з'ясуємо, що радіаційні поправки приводять до важливих фізичних наслідків. Для цього ми розглянемо поляризаційний оператор. Нагадаємо, що він має загальний вигляд

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = (g_{\mu\nu}p^2 - p_\mu p_\nu)[\text{розбіжна частина} + \text{скінченна частина}], \quad (8.6.1)$$

де скінченна (перенормована по Дайсону) частина дорівнює

$$\Pi_R(p^2) = -\frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{m^2 - x(1-x)p^2}{m^2}, \quad (8.6.2)$$

і $\Pi_R(0) = 0$. Згідно з рівнянням (8.4.8), це означає, що ефективна константа зв'язку при нульовому імпульсі $\alpha_{\text{eff}}(0)$ дорівнює експериментально спостережуваній константі взаємодії в квантовій електродинаміці, тобто постійній тонкій структури α .

Рівняння Максвелла мають вигляд

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu,$$

або (при врахуванні калібрувального доданка) еквівалентно у формі рівняння для вектор-потенціалу

$$\left(\square g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right) A^\nu(x) = j_\mu(x). \quad (8.6.3)$$

Таким чином, струм генерує поле, яке визначається за допомогою функції Гріна,

$$A_\mu(x) = -i \int d^4y D_{0\mu\nu}(x-y) j^\nu(y). \quad (8.6.4)$$

При врахуванні радіаційних поправок вільний пропагатор фотона $D_{0\mu\nu}$ замінюється на повний (рис. 33)

$$A_\mu(x) = -i \int d^4y D_{\mu\nu}(x-y) j^\nu(y). \quad (8.6.5)$$

Нехай зовнішнє джерело — нерухоми́й заряд Q , тоді струм запишеться у вигляді

$$j_\mu(x) = Q\delta_{\mu 0}\delta^3(\mathbf{x}),$$



Рис. 33. Взаємодія електрона із зовнішнім зарядом

і не залежить від часу t . Обчислимо електричний потенціал $A_0(0, \mathbf{x})$, який також тоді не залежить від t ,

$$A_0(\mathbf{x}) = -iQ \int_{-\infty}^{\infty} dt D_{00}(t, \mathbf{x}) = -iQ \int_{-\infty}^{\infty} dt \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik_0t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} D_{00}(k^0, \mathbf{k}). \quad (8.6.6)$$

Інтегруючи за часовою змінною, отримуємо вираз для потенціалу

$$A_0(\mathbf{x}) = -iQ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} D_{00}(0, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \quad (8.6.7)$$

Із виразу для повного пропагатора

$$D_{\mu\nu}(k) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{1}{ik^2(1 + \Pi_R(k^2))} + \xi \frac{k_\mu k_\nu}{ik^4},$$

знаходимо

$$D_{00}(k_0 = 0, \mathbf{k}) = -\frac{1}{ik^2} \frac{1}{1 + \Pi_R(-\mathbf{k}^2)} \approx -\frac{1}{ik^2} (1 - \Pi_R(-\mathbf{k}^2)), \quad (8.6.8)$$

де ми врахували тільки внесок у пропагатор в порядку e^2 . В результаті, використовуючи (8.6.2), для потенціалу маємо

$$A_0(\mathbf{x}) = Q \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{\mathbf{k}^2} \left\{ 1 + \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left[1 + x(1-x) \frac{\mathbf{k}^2}{m^2} \right] \right\}. \quad (8.6.9)$$

Для того щоб зрозуміти фізичний смисл отриманого результату, апроксимуємо логарифм його значенням для $\mathbf{k}^2 \ll m^2$, зберігаючи лише перший доданок ряду Тейлора. Тоді маємо

$$A_0(\mathbf{x}) = Q \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{\mathbf{k}^2} \left\{ 1 + \frac{e^2}{2\pi^2} \frac{\mathbf{k}^2}{m^2} \int_0^1 dx [x(1-x)]^2 \right\}. \quad (8.6.10)$$

Використовуючи інтеграли

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{\mathbf{k}^2} = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}, \quad \int_0^1 dx [x(1-x)]^2 = B(3, 3) = \frac{1}{30},$$

отримуємо поправку до кулонівського потенціалу, пропорційну дельта-функції

$$A_0(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi r} + \frac{\alpha Q}{15\pi m^2} \delta(\mathbf{x}). \quad (8.6.11)$$

В результаті потенціал взаємодії електрона з зарядом $-e$ і ядра з зарядом $Q = Ze$ дорівнює

$$V(x) = -eA_0(x) = -\frac{Z\alpha}{r} - \frac{4\alpha^2 Z}{15m^2} \delta(\mathbf{x}). \quad (8.6.12)$$

На малих відстанях поправка істотна. Рівні в атомі зсуваються на величину

$$\delta E = \int d^3x |\psi_{n,l}(x)|^2 \left(-\frac{4\alpha^2 Z}{15m^2} \delta(\mathbf{x}) \right) = -\frac{4\alpha^2 Z}{15m^2} |\psi_{n,l}(0)|^2 \delta_{l0}, \quad (8.6.13)$$

де n — головне квантове число і l — орбітальний момент. Хвильова функція $\psi_{n,l}(0)$ відмінна від нуля тільки для s -хвильових станів з орбітальним моментом $l = 0$,

$$\psi_{n,0}(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi n^3 a^3}}, \quad a = \frac{1}{Zm\alpha} \text{ — борівський радіус.} \quad (8.6.14)$$

Для зсуву рівнів знаходимо поправку, зумовлену поляризацією вакууму, тобто тим, що в квантовій електродинаміці фотон може народити віртуальну електрон-позитронну пару, і цей процес змінює потенціал взаємодії,

$$\delta E_{n,l} = -\frac{4}{15\pi} \frac{Z^4 \alpha^5}{n^3} m \delta_{l,0}. \quad (8.6.15)$$

Для того щоб зрозуміти значення цієї поправки, нагадаємо результати для енергії воднеподібних атомів, отримані з використанням рівняння Дірака, які визначаються формулою

$$E_{nj} = m \left[1 + \frac{\xi^2}{(n - |\kappa| + \sqrt{\kappa^2 - \xi^2})^2} \right]^{-1/2}, \quad (8.6.16)$$

де n — головне квантове число, $j = l \pm 1/2$ — повний кутовий момент, l — орбітальний момент та

$$\kappa = \mp(j + 1/2), \quad \xi = Z\alpha.$$

Два рівня з $n = 2$, $j = 1/2$ в атомі водню в теорії Дірака, а саме $2S_{1/2}$ і $2P_{1/2}$ є виродженими. Врахування вакуумних флуктуацій знімає (!) виродження, частота переходу між рівнями в атомі водню, $Z = 1$, дорівнює

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{1}{h} (E_{2S_{1/2}} - E_{2P_{1/2}}) = -\frac{4}{15\pi} \frac{\alpha^5}{8h} m \simeq -27 \text{ МГц.} \quad (8.6.17)$$

У 1947 р. Лемб експериментально отримав зсув $\simeq 1057,8$ МГц, який значно більший за величиною і протилежний за знаком. Очевидно, інші ефекти, крім поляризації вакууму, є важливими, і ми їх розглянемо пізніше. Точність експериментальних і теоретичних передбачень достатні, щоб підтвердити присутність поляризації вакууму в лембівському зсуві рівнів воднеподібних атомів.

Для того, щоб знайти більш точний вигляд поправки до закону Кулона, запишемо вираз (8.6.9) у формі

$$\begin{aligned} A_0(\mathbf{x}) &= \frac{Q}{4\pi^2} \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{ik|\mathbf{x}| \cos \theta} \{ \dots \} = \frac{Q}{4\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{e^{ik|\mathbf{x}|} - e^{-ik|\mathbf{x}|}}{ik|\mathbf{x}|} \{ \dots \} = \\ &= \frac{Q}{2\pi^2 r} \int_0^\infty dk \frac{\sin kr}{k} \{ 1 - \Pi(-k^2) \} = \frac{Q}{4\pi r} \left\{ 1 - \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{k} e^{ikr} \Pi(-k^2) \right\}. \end{aligned} \quad (8.6.18)$$

Тут $k = |\mathbf{k}|$ і ми використали інтеграл

$$\int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Поляризаційна функція

$$\Pi(-k^2) = -\frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left[1 + x(1-x) \frac{k^2}{m^2} \right]$$

як функція k має розрив у комплексній площині на уявній осі від $i2m$ до $+i\infty$. Контур інтегрування в (8.6.18) можна деформувати в контур C у верхній напівплощині, який обходить розрив проти годинникової стрілки

$$\begin{aligned} \int_C \frac{dk}{k} e^{ikr} \Pi(-k^2) &= \left(\int_{i\infty-\delta}^{2im} \frac{dk}{k} + \int_{2im}^{i\infty+\delta} \frac{dk}{k} \right) e^{ikr} \Pi(-k^2) = (k = iz) = \\ &= -\int_{2m}^{i\infty+\delta} \frac{dz}{z} e^{-zr} \Pi(z^2) + \int_{2m}^{i\infty-\delta} \frac{dz}{z} e^{-zr} \Pi(z^2) = -2i \int_{2m}^\infty \frac{dz}{z} e^{-zr} \operatorname{Im} \Pi(z^2 + i\delta), \end{aligned} \quad (8.6.19)$$

де δ — нескінченно мала величина. Використовуючи раніше одержаний вираз для уявної частини поляризаційного оператора,

$$\operatorname{Im} \Pi(z^2 + i\delta) = \frac{\alpha}{3} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{z^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{z^2} \right), \quad \delta \rightarrow 0_+,$$

отримуємо після заміни змінної $z = 2my$,

$$A_0(r) = \frac{Q}{4\pi r} \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{3\pi} \int_1^\infty \frac{dy}{y^2} e^{-2mry} \sqrt{y^2 - 1} \left(1 + \frac{1}{2y^2} \right) \right\}. \quad (8.6.20)$$

Проаналізуємо поведінку інтеграла в отриманому виразі в двох асимптотичних областях, $mr \gg 1$ і $mr \ll 1$. При $mr \gg 1$ основний внесок в інтеграл дає область $y \approx 1$, маємо

$$\begin{aligned} I &\equiv \int_1^{\infty} \frac{dy}{y^2} e^{-2mry} \sqrt{y^2 - 1} \left(1 + \frac{1}{2y^2}\right) \approx \\ &\approx \frac{3}{\sqrt{2}} \int_1^{\infty} dy e^{-2mry} (y-1)^{1/2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \frac{e^{-2mr}}{(2mr)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (8.6.21)$$

Поведінка інтеграла в області $mr \ll 1$ є дещо складнішою. Домножуючи чисельник і знаменник в підінтегральному виразі на $\sqrt{y^2 - 1}$, запишемо

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{dy}{y^4} \frac{2y^4 - y^2 - 1}{\sqrt{y^2 - 1}} e^{-2mry} = \int_1^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} \left(1 - \frac{y^2 + 1}{2y^4}\right) e^{-2mry} = \\ &= K_0(2mr) - \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} \frac{y^2 + 1}{y^4} e^{-2mry}, \end{aligned} \quad (8.6.22)$$

де використано інтегральне представлення для модифікованої функції Бесселя. При $r \rightarrow 0$ скористаємося асимптотикою функції Бесселя і покладемо $r = 0$ у другому доданку

$$K_0(2mr) \simeq -\ln(mr) - \gamma, \quad r \rightarrow 0, \quad \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} \frac{y^2 + 1}{y^4} = \frac{5}{6}. \quad (8.6.23)$$

Таким чином, знаходимо асимптотичну поведінку інтеграла в області малих і великих відстаней порівняно з комптонівською довжиною електрона $1/m$:

$$\int_1^{\infty} dy e^{-2mry} \frac{\sqrt{y^2 - 1}}{y^2} \left(1 + \frac{1}{2y^2}\right) = \begin{cases} -\frac{5}{6} - \gamma - \ln mr, & mr \ll 1, \\ \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}}, & mr \gg 1. \end{cases} \quad (8.6.24)$$

Зауважимо, що оскільки в області $r \ll 1/m$ хвильові функції воднеподібних атомів можна вважати майже постійними, то наближення поправки до потенціалу дельта-функцією в (8.6.12) є задовільним для знаходження поправок до енергетичних рівнів електрона.

Остаточо для потенціалу A_0 маємо асимптотичні вирази

$$A_0(r) = \frac{Q}{4\pi r} \begin{cases} 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \left(-\frac{5}{3} - 2\gamma + \ln \frac{1}{(mr)^2}\right), & mr \ll 1, \\ 1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}}, & mr \gg 1. \end{cases} \quad (8.6.25)$$

Потенціал можна записати у вигляді

$$A_0(r) = \frac{Q(r)}{4\pi r}, \quad (8.6.26)$$

якщо ввести ефективний (екранований) заряд $Q(r)$,

$$Q(r) = Q \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{3\pi} \int_1^\infty \frac{dy}{y^2} e^{-2mry} \sqrt{y^2 - 1} \left(1 + \frac{1}{2y^2} \right) \right\}, \quad (8.6.27)$$

який залежить від відстані до пробного заряду. Кулонівський потенціал (8.6.26), модифікований за рахунок однопетльової поправки, має назву потенціалу Юлінга. Ефективний заряд $Q(r)$ дорівнює Q на великих відстанях і зростає логарифмічно на малих відстанях як

$$Q(r) \approx Q \left\{ 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{1}{(mr)^2} \right\}. \quad (8.6.28)$$

Поправку можна інтерпретувати як результат екранування пробного заряду віртуальними e^+e^- -парами, які на відстанях $r \gtrsim 1/m$ поведуть себе як диполі, і вакуум можна вважати «діелектричним» середовищем. Дійсно, на великих відстанях заряд виявляється меншим від заряду на малих відстанях (див. рис. 34). Зі зменшенням відстані діелектрична хмара, утворена диполями (віртуальними електрон-позитронними парами), що екранує, стає меншою, і ми спостерігаємо більший заряд. Це явище відоме як поляризація вакууму, звідси й назва поляризаційний оператор для петльових поправок у пропагаторі фотона.

Проаналізуємо тепер поведінку ефективної константи взаємодії в імпульсному просторі. Оскільки внутрішня фотонна лінія зв'язує дві ферміонні лінії, то взаємодія між зарядами визначається повним фотонним

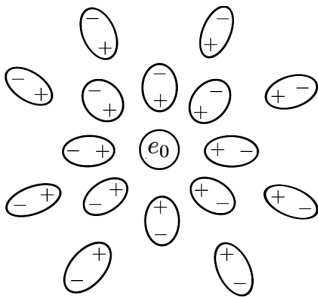


Рис. 34. Екранування го-лого заряду електрона віртуальними e^+e^- — парами в квантовій електродинаміці

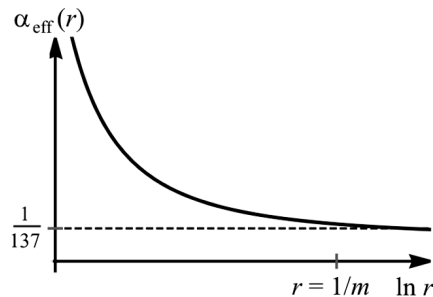


Рис. 35. Поведінка ефективної константи взаємодії $\alpha_{\text{eff}}(r)$ як функції відстані в однопетльовому наближенні для поляризації вакууму

пропагатором (у калібровці Ландау)

$$\alpha D_{\mu\nu}(p) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \frac{1}{ip^2} \frac{\alpha}{1 + \Pi_R(p^2)}, \quad (8.6.29)$$

де з рівняння (8.6.2)

$$\Pi_R(p^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{m^2 - x(1-x)p^2}{m^2}. \quad (8.6.30)$$

Згідно з рівнянням (8.4.8), ефективна взаємодія, залежна від імпульсу, визначається так:

$$\alpha_{\text{eff}}(p^2) = \frac{\alpha}{1 + \Pi_R(p^2)}. \quad (8.6.31)$$

Малі просторові відстані відповідають значенням $-p^2 \gg m^2$, у цьому випадку

$$\begin{aligned} \Pi_R(p^2) &\simeq -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left[\ln \left(\frac{-p^2}{m^2} \right) + \ln(x(1-x)) \right] = \\ &= -\frac{\alpha}{3\pi} \left[\ln \left(\frac{-p^2}{m^2} \right) - \frac{5}{3} \right], \end{aligned} \quad (8.6.32)$$

і ефективна константа взаємодії в цій границі

$$\alpha_{\text{eff}}(p^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left(\frac{-p^2}{m^2 e^{5/3}} \right)}, \quad -p^2 \gg m^2. \quad (8.6.33)$$

Таким чином, при великих імпульсах ефективна константа взаємодії стає набагато більшою, що узгоджується як якісно, так і кількісно зі знайденою нами вище поведінкою ефективного заряду на малих відстанях згідно з рівнянням (8.6.28). Ефект зростання $\alpha_{\text{eff}}(p^2)$ при великих переданих імпульсах спостерігається на експерименті: в області від $p = 0$ до $p = 30$ GeV ефективна взаємодія $\alpha_{\text{eff}}(p^2)$ зростає на 5% порівняно з її значенням $1/137$ при малих імпульсах. Можна також знайти α_{eff} як функцію відстані r , якщо покласти $p = 1/r$, поведінка $\alpha_{\text{eff}}(r)$ зображена на рис. 35.

При врахуванні двопетльових діаграм у поляризації вакууму ефективна константа взаємодії отримує додатковий внесок і визначається таким рівнянням

$$\alpha_{\text{eff}}(p^2) = \begin{cases} \alpha, & p^2 \rightarrow 0, \\ \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left(\frac{-p^2}{m^2} \right) + \frac{3\alpha}{4\pi} \ln \left(1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left(\frac{-p^2}{m^2} \right) \right)}, & -p^2 \gg m^2. \end{cases} \quad (8.6.34)$$

В однопетльовому наближенні фотонний пропагатор і ефективна константа мають нефізичний полюс при

$$-p^2 = m^2 \exp(3\pi/\alpha) \sim (m \cdot 10^{280})^2. \quad (8.6.35)$$

Це так званий полюс Ландау. Він існує при гігантських значеннях енергії $\sim 10^{286}$ еВ, недосяжних експериментально. Більш того, формула (8.6.34) свідчить про те, що однопетльове наближення стає непридатним з ростом енергії взаємодії задовго до підходу до полюсу.

Зауважимо, що існування ефективної «константи» взаємодії, залежної від імпульсу, означає відсутність у теорії поля істинно малого параметра розкладу. Фактичний розклад у теорії збурень відбувається по $\alpha_{\text{eff}}(p^2)$ і тому є проблематичним при великих значеннях ефективної константи взаємодії, тобто при дуже високих енергіях або переданих імпульсах.

Ми вже відзначали, що уявна частина поляризаційного оператора описує можливість для віртуальних пар e^+e^- стати реальними, якщо енергія фотона перевищує поріг народження $2m$ в присутності, наприклад, ядра. Цей ефект має місце в теорії збурень по константі зв'язку. Але можливі ефекти народження пар і поза теорією збурень, коли пари народжуються з вакууму зовнішнім електричним полем — так званий ефект Швінгера (1951 р.). Юліан Швінгер отримав формулу для ймовірності народження електрон-позитронних пар постійним електричним полем [172]

$$P \sim E^2 \exp\left(-\frac{\pi m^2 c^3}{e\hbar E}\right). \quad (8.6.36)$$

Цей результат не можна отримати в теорії збурень через наявність константи електричної взаємодії e у знаменнику в експоненті (тобто має місце неаналітична залежність і розклад по e дає нулі). Ймовірність дуже мала для значень напруженості електричного поля $E < E_c$, де критичне поле є надзвичайно сильним

$$E_c = \frac{m^2 c^3}{e\hbar} \approx 1,3 \cdot 10^{16} \frac{\text{В}}{\text{см}}, \quad I_c = \frac{cE_c^2}{8\pi} = 4 \cdot 10^{29} \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}, \quad (8.6.37)$$

а I_c — відповідна критична густина енергії такого поля. Такі значення електричних полів і потужності ще не досягнуті в експерименті з лазерами, але є надія досягнути їх найближчим часом.

Відзначимо схожість формули (8.6.36) з формулою для ймовірності іонізації атома з енергією зв'язку E_b постійним зовнішнім електричним полем [69, 125, 200]

$$P_{\text{юн}} \sim \exp\left(-\frac{4\sqrt{2m}E_b^{3/2}}{3e\hbar E}\right). \quad (8.6.38)$$

Для атома водню енергія зв'язку

$$E_b = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13,6 \text{ еВ}, \quad (8.6.39)$$

і для ймовірності іонізації атома отримуємо формулу

$$P_{\text{водень}} \sim \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{m^2 e^5}{E\hbar^4}\right). \quad (8.6.40)$$

Критичне поле і критична густина енергії для іонізації водню

$$E_c^{\text{іон}} = \frac{m^2 e^5}{\hbar^4} = \alpha^3 E_c \approx 4 \cdot 10^9 \frac{\text{В}}{\text{см}}, \quad I_c^{\text{іон}} = \alpha^6 I_c \approx 6 \cdot 10^{16} \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}. \quad (8.6.41)$$

Причина схожості полягає в тому, що в квантовій електродинаміці рівні електронів і позитронів, розділені у вакууму щільною $2m$, змінюються у зовнішньому електричному полі, і для критичного поля підбар'єрні тунельні переходи між рівнями перестають бути забороненими. Якісно це схоже на переходи між зв'язаним рівнем електрона в атомі та делокалізованими електронними рівнями у континуумі, які індукуються постійним електричним полем.

Потужність деяких сучасних лазерів досягає 1,25 петават (1,25 × 10¹⁵ Вт) у дуже короткому імпульсі, що дозволяє досягти енергії іонізації, визначеної в рівнянні (8.6.41). Лазери, що зараз розробляються, будуть мати пікову потужність випромінювання 200 петаватів. Для порівняння, потужність усіх електростанцій світу сьогодні становить лише близько 7,5 ТВт, тобто на п'ять порядків менше. Звісно, потужність 200 ПВт буде досягатися в дуже короткому імпульсі, тривалість якого вимірюється фемтосекундами, тобто 10⁻¹⁵ секунди. Це близько до часу одного коливання світлової хвилі.

8.7. Вершинна діаграма

У попередніх розділах ми розглянули однопетльові поправки до поляризаційного оператора і власної енергії електрона. У цьому розділі ми завершимо наш розгляд радіаційних поправок у другому порядку теорії збурень по константі взаємодії і обчислимо вершинну функцію, яка описує

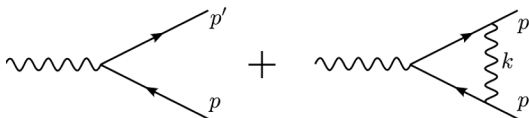


Рис. 36. Вершинна функція в порядку e^2

взаємодію електрона з фотоном.

Повну вершину взаємодії можна представити у вигляді

$$-ie\Gamma_\mu(p, q) = -ie\gamma_\mu - ie\Lambda_\mu(p, q, p + q), \quad (8.7.1)$$

де q — імпульс фотона, а $-ie\Lambda_\mu(p+q, p)$ описує петльові поправки довільного порядку до голої вершини $-ie\gamma_\mu$ (див. рис. 36). У випадку однопетльової

поправки, яку ми розглянемо у цьому розділі, за правилами Фейнмана в розмірній регуляризації маємо вираз

$$-ie\mu^{2-\frac{n}{2}}\Lambda_\mu(p, q, p+q) = \left(-ie\mu^{2-\frac{n}{2}}\right)^3 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \gamma_\nu \frac{i}{\hat{p} + \hat{k} + \hat{q} - m} \gamma_\mu \times \\ \times \frac{i}{\hat{p} + \hat{k} - m} \gamma_\rho \frac{g^{\nu\rho}}{ik^2}, \quad (8.7.2)$$

де ми використовуємо фотонний пропагатор у калібровці Фейнмана $\xi = 1$. Необхідно обчислити інтеграл ($p' = p + q$):

$$\Lambda_\mu(p, q, p') = e^2 \mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n} \frac{\gamma^\nu(\hat{p}' + \hat{k} + m)\gamma_\mu(\hat{p} + \hat{k} + m)\gamma_\nu}{[(p' + k)^2 - m^2][(p + k)^2 - m^2]k^2}. \quad (8.7.3)$$

Застосуємо параметризацію Фейнмана (7.8.3) для добутку трьох множників у знаменнику, тоді

$$\Lambda_\mu(p, q, p') = 2e^2 \mu^{4-n} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n} \times \\ \times \frac{\gamma^\nu(\hat{p}' + \hat{k} + m)\gamma_\mu(\hat{p} + \hat{k} + m)\gamma_\nu}{[k^2 + 2pkx + 2p'ky + p^2x + p'^2y - m^2(x+y)]^3}.$$

Здійснюючи зсув змінної інтегрування $k \rightarrow k - xp - yp'$, приходимо до такого виразу для однопетльової поправки до вершинної функції

$$\Lambda_\mu(p, q, p') = 2e^2 \mu^{4-n} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n} \times \\ \times \frac{\gamma^\nu(\hat{p}' + \hat{k} - x\hat{p} - y\hat{p}' + m)\gamma_\mu(\hat{p} - x\hat{p} - y\hat{p}' + \hat{k} + m)\gamma_\nu}{[k^2 + x(1-x)p^2 + y(1-y)p'^2 - 2xyp' - m^2(x+y)]^3}. \quad (8.7.4)$$

Частина, квадратична в чисельнику по k , дає розбіжність. Запишемо

$$\Lambda_\mu = \Lambda_\mu^{(1)} + \Lambda_\mu^{(2)},$$

і для розбіжної частини $\Lambda_\mu^{(1)}$ маємо

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p, q, p') = \frac{2e^2 \mu^{4-n}}{n} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n} \times \\ \times \frac{\gamma^\nu \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma^\rho \gamma_\nu \cdot k^2}{[k^2 + x(1-x)p^2 + y(1-y)p'^2 - 2xyp' - m^2(x+y)]^3}, \quad (8.7.5)$$

де ми застосували формулу інтегрування (8.1.8). Використовуючи для гамма-матриць у розмірній регуляризації співвідношення

$$\gamma_\rho \gamma_\mu \gamma^\rho = (2 - n) \gamma_\mu, \quad \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma^\rho \gamma^\nu = (2 - n)^2 \gamma_\mu,$$

формулу (7.8.12) для інтегрування по k і спрощуючи гамма-функції, що виникають, отримуємо

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p, q, p') = \gamma_\mu \frac{e^2}{8\pi^2} \cdot \frac{(2 - n)^2}{4} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \times \\ \times \left[\frac{m^2(x + y) - x(1 - x)p^2 - y(1 - y)p'^2 + 2xypp'}{4\pi\mu^2} \right]^{\frac{n}{2} - 2}. \quad (8.7.6)$$

Виділимо тепер розбіжну частину при $n \rightarrow 4$, яка визначить константу перенормування вершинної функції

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p, q, p') \simeq \gamma_\mu \frac{e^2}{8\pi^2} \left(\frac{1}{2 - \frac{n}{2}} - \gamma - 2 \right) \frac{1}{2} - \gamma_\mu \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \times \\ \times \ln \frac{m^2(x + y) - x(1 - x)p^2 - y(1 - y)p'^2 + 2xypp'}{4\pi\mu^2}, \quad (8.7.7)$$

тобто $\Lambda_\mu^{(1)}(p, q, p')$ приймає вигляд

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p, q, p') = \gamma_\mu \frac{e^2}{8\pi^2(4 - n)} + \text{скінченна частина}. \quad (8.7.8)$$

В $\overline{\text{MS}}$ -схемі скінченна частина дорівнює

$$\text{скінченна частина} = -\gamma_\mu \cdot \frac{e^2}{8\pi^2} - \gamma_\mu \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \times \\ \times \ln \frac{m^2(x + y) - x(1 - x)p^2 - y(1 - y)p'^2 + 2xypp'}{\mu^2}. \quad (8.7.9)$$

У схемі віднімання по Дайсону замінюємо $\mu^2 \rightarrow m^2$. На масовій поверхні $p^2 = p'^2 = m^2$, $q^2 = 0$, $2pp' = 2m^2$ інтеграл легко обчислюється і скінченна частина дорівнює

$$\text{скінченна частина} = -\gamma_\mu \cdot \frac{e^2}{8\pi^2} \cdot \frac{1}{2}. \quad (8.7.10)$$

8.7.1. Аномальний магнітний момент електрона

Розглянемо скінченну частину вершинної функції $\Lambda_\mu^{(2)}$, в якій відразу покладемо $n = 4$:

$$\Lambda_\mu^{(2)}(p, q, p') = 2e^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \times \\ \times \frac{\gamma^\nu ((1-y)\hat{p}' - x\hat{p} + m) \gamma_\mu ((1-x)\hat{p} - y\hat{p}' + m) \gamma_\nu}{[k^2 + x(1-x)p^2 + y(1-y)p'^2 - 2xypp' - m^2(x+y)]^3}. \quad (8.7.11)$$

Далі застосовуємо формулу інтегрування (7.8.12),

$$\Lambda_\mu^{(2)}(p, q, p') = -\frac{e^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \times \\ \times \frac{\gamma^\nu [(1-y)\hat{p}' - x\hat{p} + m] \gamma_\mu [(1-x)\hat{p} - y\hat{p}' + m] \gamma_\nu}{m^2(x+y) - x(1-x)p^2 - y(1-y)p'^2 + 2xypp'}. \quad (8.7.12)$$

Фізичний смисл повної вершинної функції $\Gamma_\mu = \gamma_\mu + \Lambda_\mu$ є більш прозорим, коли вона обчислюється у спінових обкладинках $\bar{u}(p') \dots u(p)$, визначаючи тим самим струм, з яким взаємодіє електромагнітне поле.

Спочатку покажемо, що електромагнітний струм $\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)$ у випадку голої вершини описує частинку з діраківським магнітним моментом, тобто зі спіновим g -фактором, який дорівнює двійці, $g = 2$. Нагадаємо, що спіновий g -фактор є множником у формулі для розщеплення рівнів енергії електронів із різним значенням спінового моменту в магнітному полі. Заряд e , який обертається по замкненій орбіті з кутовим моментом l , створює звичайний орбітальний магнітний момент, який дорівнює

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2m} \mathbf{l}.$$

Наявність у електрона спіну приводить до появи додаткового магнітного моменту

$$\boldsymbol{\mu} = 2 \cdot \frac{e}{2m} \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = \hbar \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}. \quad (8.7.13)$$

У загальному випадку співвідношення між магнітним моментом і спіном записується через g -фактор

$$\boldsymbol{\mu} = g \frac{e}{2m} \mathbf{S} = g \mu_B \mathbf{S}, \quad (8.7.14)$$

тобто для електрона g -фактор дорівнює 2, μ_B — магнетон Бора.

Для нас у цьому параграфі важливо, що має місце додатковий внесок у спіновий магнітний момент, пов'язаний з вершинною діаграмою. Щоб

продемонструвати це, виведемо спочатку тотожність Гордона. З наступних рівностей отримуємо

$$\begin{cases} \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \\ \gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu = -2i\sigma_{\mu\nu}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_\mu \gamma_\nu = g_{\mu\nu} - i\sigma_{\mu\nu}, \\ \gamma_\nu \gamma_\mu = g_{\mu\nu} + i\sigma_{\mu\nu}. \end{cases} \quad (8.7.15)$$

Маємо також рівняння Дірака для спінорів в імпульсному просторі

$$\hat{p}u(p) = mu(p), \quad \bar{u}(p')\hat{p}' = m\bar{u}(p'),$$

де виконується $p^2 = p'^2 = m^2$. Звідси,

$$\begin{aligned} \gamma_\mu u(p) &= \frac{1}{m} \gamma_\mu \hat{p}u(p) = \frac{1}{m} (p_\mu - i\sigma_{\mu\nu} p^\nu) u(p), \\ \bar{u}(p') \gamma_\mu &= \frac{1}{m} \bar{u}(p') \hat{p}' \gamma_\mu = \frac{1}{m} \bar{u}(p') (p'_\mu + i\sigma_{\mu\nu} p'^\nu). \end{aligned}$$

Тому для матричного елемента голої вершини у спінорних обкладинках знаходимо

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) &= \frac{1}{2} \bar{u}(p') [\gamma_\mu u(p)] + \frac{1}{2} [\bar{u}(p') \gamma_\mu] u(p) = \\ &= \frac{1}{2m} \bar{u}(p') [(p' + p)_\mu + i\sigma_{\mu\nu} q^\nu] u(p), \quad q = p' - p. \end{aligned} \quad (8.7.16)$$

Це і є тотожність Гордона. Додаток з $\sigma_{\mu\nu}$ відповідає g -фактору $g = 2$ (у випадку $g \neq 2$ коефіцієнт одиниця замінюється $1 \rightarrow \frac{g}{2}$).

При врахуванні однопетльової поправки до вершинної функції нам необхідно обчислити

$$\bar{u}(p') (\gamma_\mu + \Lambda_\mu^{(2)}) u(p). \quad (8.7.17)$$

Попередньо перетворимо чисельник у (8.7.12), використовуючи формули

$$\gamma^\nu \gamma_\mu \gamma_\nu = -2\gamma_\mu, \quad \gamma^\nu \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu = 4g_{\mu\lambda}, \quad \gamma^\nu \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\sigma \gamma_\nu = -2\gamma_\sigma \gamma_\lambda \gamma_\mu. \quad (8.7.18)$$

Розглянемо чисельник

$$\begin{aligned} N &= \gamma_\nu [\hat{p}'(1-y) - \hat{p}x + m] \gamma_\mu [\hat{p}(1-x) - \hat{p}'y + m] \gamma^\nu = \\ &= \gamma_\nu [\hat{p}'(1-y) - \hat{p}x] \gamma_\mu [\hat{p}(1-x) - \hat{p}'y] \gamma^\nu + m\gamma_\nu \gamma_\mu \times \\ &\times [\hat{p}(1-x) - \hat{p}'y] \gamma^\nu + m\gamma_\nu [\hat{p}'(1-y) - \hat{p}x] \gamma_\mu \gamma^\nu + m^2 \gamma_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu. \end{aligned} \quad (8.7.19)$$

Використовуючи співвідношення для γ -матриць, знаходимо

$$\begin{aligned} N &= -2 [\hat{p}(1-x) - \hat{p}'y] \gamma_\mu [\hat{p}'(1-y) - \hat{p}x] + 4m [p_\mu(1-x) - p'_\mu y] + \\ &+ 4m [p'_\mu(1-y) - p_\mu x] - 2m^2 \gamma_\mu = -2 [\hat{p}(1-x) - \hat{p}'y] \gamma_\mu \times \\ &\times [\hat{p}'(1-y) - \hat{p}x] + 4m [p_\mu(1-2x) + p'_\mu(1-2y)] - 2m^2 \gamma_\mu \Rightarrow \end{aligned} \quad (8.7.20)$$

(поміняємо \hat{p}' зліва і \hat{p} справа на m , використовуючи те, що вони діють безпосередньо на відповідні спінори)

$$\begin{aligned} \Rightarrow & -2(1-x)(1-y)\hat{p}\gamma_\mu\hat{p}' + 2my(1-y)\gamma_\mu\hat{p}' + 2mx(1-x)\hat{p}\gamma_\mu - \\ & - 2m^2xy\gamma_\mu + 4m[p_\mu(1-2x) + p'_\mu(1-2y)] - 2m^2\gamma_\mu. \end{aligned} \quad (8.7.21)$$

Щоб мати можливість подіяти операторами \hat{p} і \hat{p}' на відповідні спінори $u(p)$ і $\bar{u}(p')$, необхідно прокомутувати \hat{p} в крайнє праве положення, а \hat{p}' — в крайнє ліве положення, наприклад,

$$\begin{aligned} \hat{p}\gamma_\mu\hat{p}' &= (-\gamma_\mu\hat{p} + 2p_\mu)\hat{p}' = \gamma_\mu\hat{p}'\hat{p} - 2\gamma_\mu pp' + 2p_\mu\hat{p}' = \\ &= (-\hat{p}'\gamma_\mu + 2p'_\mu)\hat{p} - \gamma_\mu \cdot 2pp' + 2p_\mu\hat{p}' = -\hat{p}'\gamma_\mu\hat{p} + 2p'_\mu\hat{p}' + \\ &+ 2p_\mu\hat{p}' - \gamma_\mu \cdot 2pp' \Rightarrow 2m(p_\mu + p'_\mu) - \gamma_\mu(m^2 + 2pp'). \end{aligned} \quad (8.7.22)$$

Для чисельника після елементарних перетворень остаточно отримуємо

$$N = 4mp_\mu(y - xy - x^2) + 4mp'_\mu(x - xy - y^2) + D\gamma_\mu, \quad (8.7.23)$$

де

$$D = 2m^2 [2(1-x)(1-y) - 2x - 2y + x^2 + y^2] - 2q^2(1-x)(1-y).$$

У знаменнику в (8.7.12) покладемо $p^2 = p'^2 = m^2$, $(p - p')^2 = q^2 = 0$ і $pp' = m^2$, тоді вираз (8.7.12) значно спрощується (поки опустимо доданок $D\gamma_\mu$ у чисельнику)

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^{(2)}(p, q, p') &= -\frac{e^2}{4\pi^2 m} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[p_\mu \left(\frac{1-x}{x+y} - \frac{x}{(x+y)^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + p'_\mu \left(-1 + \frac{x}{x+y} + \frac{x}{(x+y)^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (8.7.24)$$

Інтегрування по y і x є досить елементарними

$$\Lambda_\mu^{(2)}(p, q, p') = -\frac{e^2}{16\pi^2 m} (p + p')_\mu = -\frac{\alpha}{4\pi m} (p + p')_\mu. \quad (8.7.25)$$

При інтегруванні обох доданків в $D\gamma_\mu$ в чисельнику виникає розбіжність при малих імпульсах інтегрування (інфрачервона розбіжність). Зручно спочатку ввести фіктивну масу фотона λ . Коли $q^2 = 0$ розбіжний при $\lambda \rightarrow 0$, доданок $\simeq (\alpha/2\pi) \ln(m^2/\lambda^2)$. При перенормуванні хвильових функцій за допомогою константи Z_2 (8.4.29) ця розбіжність скорочується. Скінченна частина, що залишається, разом зі скінченною частиною з $\Lambda_\mu^{(1)}$ (8.7.10) дає внесок $D'\gamma_\mu$, де $D' = \alpha/2\pi$.

Таким чином,

$$\bar{u}(p')(\gamma_\mu + \Lambda_\mu^{(1)} + \Lambda_\mu^{(2)})u(p) = \bar{u}(p') \left[\gamma_\mu(1 + D') - \frac{\alpha}{4\pi m} (p + p')_\mu \right] u(p). \quad (8.7.26)$$

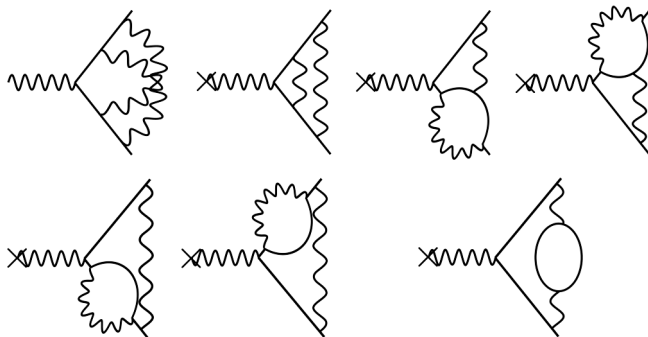


Рис. 37. Поправки до вершини в порядку e^4

Використовуючи тотожність Гордона (8.7.16), рівняння (8.7.26) можна записати в двох інших формах

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')(\gamma_\mu + \Lambda_\mu)u(p) &= \bar{u}(p') \left[\frac{(p+p')_\mu}{2m} + \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right) \frac{i\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2m} \right] u(p) = \\ &= \bar{u}(p') \left[\gamma_\mu + \frac{\alpha}{2\pi} \frac{i\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2m} \right] u(p). \end{aligned} \quad (8.7.27)$$

Таким чином, гіромагнітне відношення для електрона дорівнює (Швінгер, 1948 р.)

$$\frac{g}{2} = 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \simeq 1,00116141. \quad (8.7.28)$$

Сучасне значення аномального магнітного моменту електрона відоме як теоретично, так і експериментально з надзвичайно великою точністю. В порядку $\alpha^2 \in 7$ діаграм Фейнмана (рис. 37), в порядку $\alpha^3 - 72$ діаграми, $\alpha^4 - 891$ і $\alpha^5 - 12672$ діаграм Фейнмана. Зауважимо, що дві діаграми, зображені на рис. 38, в точності скорочуються за теоремою Фаррі.

Позначимо через $a = \frac{g}{2} - 1$ відхилення гіромагнітного відношення від одиниці. Експериментально знайдені значення аномального магнітного моменту уточнювалися протягом багатьох років

$$\begin{aligned} a_{\text{exp}} &= 1159652188,3(4.2) \cdot 10^{-12} \text{ (1987 р.)}, \\ a_{\text{exp}} &= 1159652180,85(76) \cdot 10^{-12} \text{ (2006 р.)}, \\ a_{\text{exp}} &= 1159652180,73(28) \cdot 10^{-12} \text{ (2008 р.)}. \end{aligned}$$

Останнє експериментальне значення наведено в роботі [110].

Окрім електронів у проміжних станах можуть бути й інші заряджені частинки: мюон, τ -лептон, адрони, векторні W_μ^\pm -бозони. Таким чином, можна записати

$$a = a(\text{QED}) + a(\text{Hadrons}) + a(\text{Weak}). \quad (8.7.29)$$

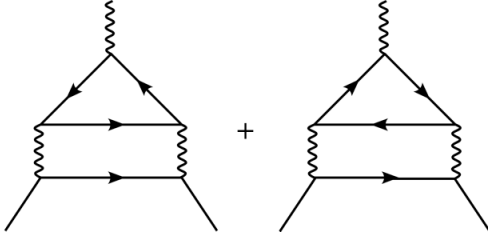


Рис. 38. Поправки до вершини в порядку e^4 , які скорочуються за теоремою Фаррі

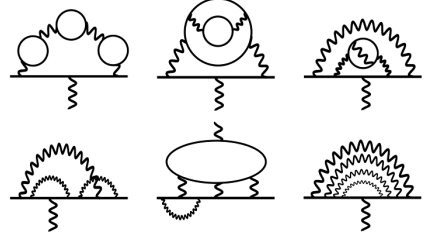


Рис. 39. Поправки до вершини в порядку α^4

Домінуючий внесок дає чисто електродинамічна взаємодія $a(QED)$. Причина цього проста і пов'язана з тим, що найлегшими зарядженими елементарними частинками є лептони, а маси адронів та векторних мезонів значно перевищують маси найлегших заряджених лептонів. Квантово-електродинамічний внесок можна представити у вигляді, де коефіцієнти стають залежними від відношення мас

$$a(QED) = A_1 + A_2 \left(\frac{m_e}{m_\mu} \right) + A_2 \left(\frac{m_e}{m_\tau} \right) + A_3 \left(\frac{m_e}{m_\mu}, \frac{m_e}{m_\tau} \right). \quad (8.7.30)$$

де m_e, m_μ, m_τ — маси електрона, мюона і τ -лептона відповідно. Усі чотири доданки представляються у вигляді ряду по константі α ,

$$A_k = \sum_{i=1, 2, \dots} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^i A_k^{(2i)}. \quad (8.7.31)$$

Оскільки електрон є найлегшим лептоном, внески від важких частинок, тобто $A_k^{(2i)}$, $k \geq 2$, $i \geq 2$, значно менші за $A_1^{(2i)}$. Але їх треба враховувати, коли точність експерименту досягає відповідного рівня. Оцінка показує, що внески мюонних петель є порядку $\sim 2 \cdot 10^{-12}$, внески адронів — $\sim 1,7 \cdot 10^{-12}$, а слабких взаємодій — $\sim 0,03 \cdot 10^{-12}$.

Теоретичне значення g -фактора можна записати у вигляді ряду

$$g_{\text{th}} = 2 \left[1 + A_1^{(2)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) + A_1^{(4)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + A_1^{(6)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + A_1^{(8)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^4 + \dots \right]. \quad (8.7.32)$$

Коефіцієнти $A_1^{(2)}$, $A_1^{(4)}$, $A_1^{(6)}$ знайдено аналітично в роботах [155, 178] і [140],

$$\begin{aligned} A_1^{(2)} &= \frac{1}{2}, \quad A_1^{(4)} = \frac{197}{144} + \frac{\pi^2}{12} + \frac{3}{4}\zeta(3) - \frac{\pi^2}{2} \ln 2, \\ A_1^{(6)} &= \frac{83}{72}\pi^2\zeta(3) - \frac{215}{24}\zeta(5) + \frac{100}{3} \left[\text{Li}_4(1/2) + \frac{1}{24} \ln^4 2 - \frac{\pi^2}{24} \ln^2 2 \right] - \\ &\quad - \frac{239}{2160}\pi^4 + \frac{139}{18}\zeta(3) - \frac{298}{9}\pi^2 \ln 2 + \frac{17101}{810}\pi^2 + \frac{28259}{5184}, \end{aligned} \quad (8.7.33)$$

де $\text{Li}_\nu(x)$ — полілогарифмічна функція.

Для коефіцієнтів $A_1^{(2i)}$ отримано такі числові значення

$$\begin{aligned} A_1^{(2)} &= 0,5, & A_1^{(4)} &= -0,328478965579193\dots, \\ A_1^{(6)} &= 1,181241456\dots, & A_1^{(8)} &= -1,9122457649\dots, \\ A_1^{(10)} &= 6,675(192). \end{aligned} \quad (8.7.34)$$

Для коефіцієнтів $A_1^{(2)}$, $A_1^{(4)}$, $A_1^{(6)}$ маємо аналітичні вирази (див. (8.7.33)), які можуть бути обчислені з довільною точністю. Приклади діаграм в порядку α^4 наведено на рис. 39. Вони дають внесок порядку $\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 \sim 29 \cdot 10^{-12}$. Хоча для коефіцієнта $A_1^{(8)}$ і немає замкненого аналітичного виразу, аналогічного (8.7.33), цей коефіцієнт був порахований чисельно з точністю до 1100 знаків [141]. Водночас для $A_1^{(10)}$ залишаються багатовимірні інтеграли, які обчислюються методом Монте-Карло (звідси похибка (192) числового розрахунку).

Підсумовуючи всі залежні від мас доданки, отримуємо

$$a(\text{QED: mass dependent}) = 2,7475719(13) \cdot 10^{-12}, \quad (8.7.35)$$

де невизначеність походить від відношення мас електрона і τ -лептона.

На сьогодні експериментальне значення [111] становить

$$a_{\text{exp}} = \frac{g_e - 2}{2} = 0,00115965218073(28), \quad (8.7.36)$$

і теоретичне значення [31]

$$a_{\text{th}} = \frac{g_{\text{th}} - 2}{2} = 0,001159652182032(13)(12)(720), \quad (8.7.37)$$

яке пораховано з використанням значення постійної тонкої структури, отриманої з незалежного вимірювання

$$\alpha^{-1} = 137,035998995(85). \quad (8.7.38)$$

Перша похибка в (8.7.37) виникає за рахунок невизначеності внесків від КЕД (в порядку α^5), друга похибка пов'язана з невизначеністю адронних внесків і електрослабких взаємодій, а третя похибка походить від невизначеності в значенні постійної тонкої структури α . Точність вимірювання аномального магнітного моменту електрона відповідає вимірюванню відстані від Землі до Місяця з точністю до товщини людської волосини.

З іншого боку, можна використати теоретично обчислений аномальний магнітний момент електрона і порівняти відповідне значення з експериментально визначеним, щоб знайти значення константи α з рівняння

$$a_{\text{exp}} = a_{\text{th}}(\alpha). \quad (8.7.39)$$

Це дає значення

$$\alpha^{-1} = 137,0359981491(311), \quad (8.7.40)$$

яке на теперішній час вважається найбільш точним значенням постійної тонкої структури.

8.7.2. Загальна структура вершинної функції

Перейдемо тепер до аналізу загальної структури вершинної функції. Спершу розглянемо її структуру на масовій оболонці. Вершинна функція Γ_μ є вектором за індексом μ і матрицею за діраківськими індексами. Оскільки Γ_μ перетворюється як 4-вектор при лоренцових перетвореннях, то векторна структура вершинної функції може бути побудована як лінійна комбінація з векторів $p_\mu, p'_\mu, \gamma_\mu$, помножених на чотири лоренц-інваріантні матричні структури: $1, \hat{p}, \hat{p}', \sigma_{\mu\nu}p^\mu p'^\nu$. В результаті маємо 12 векторно-матричних структур, і вершинна функція запишеться

$$\Gamma_\mu(p', p) = \sum_{i=1}^{12} F_i(p'^2, p^2, q^2) v_{i\mu}(p', p), \quad q = p' - p, \quad (8.7.41)$$

де F_i — інваріантні функції лоренцових скалярів і $v_{i\mu}(p', p)$ мають вигляд

1. γ_μ , 2. p_μ , 3. p'_μ , 4. $p_\mu \hat{p}$, 5. $p'_\mu \hat{p}$, 6. $p_\mu \hat{p}'$, 7. $p'_\mu \hat{p}'$, 8. $\gamma_\mu \hat{p}$,
9. $\gamma_\mu \hat{p}'$, 10. $\gamma_\mu \sigma_{\nu\lambda} p^\nu p'^\lambda$, 11. $p_\mu \sigma_{\nu\lambda} p^\nu p'^\lambda$, 12. $p'_\mu \sigma_{\nu\lambda} p^\nu p'^\lambda$.

У випадку, коли парність не зберігається, як в теорії слабких взаємодій, відповідні струми містять ще дванадцять псевдовекторів, які отримуються множенням 4-векторів на матрицю γ_5 .

На масовій оболонці $\hat{p}u(p) = mu(p)$, $\bar{u}(p')\hat{p}' = m\bar{u}(p')$, $p^2 = m^2$, $p'^2 = m^2$ і скалярні функції F_i залежать від однієї змінної q^2 . Водночас, враховуючи що Γ_μ береться в обкладинках між спінорами, $\bar{u}(p')\Gamma_\mu(p', p)u(p)$, структури $v_{i\mu}$, $i = 4, \dots, 12$ зводяться до перших трьох, якщо використати комутаційні співвідношення для матриць Дірака. Для зручності використаємо комбінації імпульсів $p' + p$, $p' - p$ і залишемо

$$\Gamma_\mu(p', p) = \gamma_\mu A + (p' + p)_\mu B + (p' - p)_\mu C. \quad (8.7.42)$$

Далі використаємо умову збереження струму на масовій оболонці $q_\mu \Gamma^\mu = 0$. Згортаючи q_μ за лоренцовим індексом з (8.7.42) і беручи вираз в обкладинках спінорів $\bar{u}(p')$ і $u(p)$, бачимо, що перший і другий доданок обертаються в нуль, а третій — ні, тому треба покласти $C = 0$. З умови ермітовості струму, $\gamma_0 \Gamma_\mu^\dagger(p', p) \gamma_0 = \Gamma_\mu(p, p')$, впливає що функції A, B дійсні.

За допомогою тотожності Гордона можна записати загальну структуру Γ_μ між станами електрона на масовій поверхні в стандартних позначеннях для скалярних функцій у вигляді

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2), \quad (8.7.43)$$

або

$$\Gamma^\mu(p', p) = \frac{(p' + p)^\mu}{2m} F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} (F_1(q^2) + F_2(q^2)), \quad (8.7.44)$$

де $F_1(q^2)$, $F_2(q^2)$ — функції q^2 , які називаються форм-факторами. Така назва пов'язана з тим, що фур'є-образи форм-факторів описують вплив просторового розподілу електричного заряду і магнітного моменту частинки на її взаємодію з іншими частинками і полями. В теорії сильних взаємодій форм-фактори, зокрема для протона і нейтрона, не можуть бути розраховані аналітично в КХД, але можуть бути експериментально виміряні і використані в інших процесах.

В КЕД найнижчому порядку $F_1 = 1$, $F_2 = 0$, і в порядку e^2 маємо:

$$F_1(q^2) \simeq 1 - \frac{\alpha}{6\pi} \cdot \frac{q^2}{m^2} \left[\ln \frac{\mu^2}{m^2} + \underbrace{\frac{2}{5} + \frac{3}{4}} \right], \quad F_2(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi}, \quad (8.7.45)$$

де в F_1 включений також доданок $2/5$, який походить від внеску діаграми вакуумної поляризації. Форм-фактори містять у собі інформацію про взаємодію електромагнітного поля з електроном, зокрема містять повний електричний заряд (в F_1) і магнітний момент (в F_2), і називаються, відповідно, електричним і магнітним форм-факторами.

У випадку, коли розглядаються процеси поза масовою оболонкою, вершина функція $\Gamma^\mu(p', p)$ містить, з врахуванням тотожності Уорда—Такашаші (УТ) (9.3.14), вісім незалежних структур. Повна вершина може бути представлена як сума поздовжньої (L) і поперечної (T) частин

$$\Gamma_\mu(p', p) = \Gamma_\mu^L(p', p) + \Gamma_\mu^T(p', p), \quad (8.7.46)$$

де $\Gamma_\mu^L(p', p)$ задовольняє (9.3.14), і $(p' - p)^\mu \Gamma_\mu^T(p', p) = 0$. Використовуючи загальну форму пропагатора, $G^{-1}(p) = -i[A(p^2)\hat{p} - B(p^2)]$, для поздовжньої частини знаходимо [36]

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^L(p', p) = & \frac{A(p'^2) + A(p^2)}{2} \gamma_\mu + \frac{A(p'^2) - A(p^2)}{p'^2 - p^2} (p' + p)_\mu (\hat{p}' + \hat{p}) - \\ & - \frac{B(p'^2) - B(p^2)}{p'^2 - p^2} (p' + p)_\mu. \end{aligned} \quad (8.7.47)$$

Поперечна частина розкладається по базису незалежних тензорів

$$\Gamma_\mu^T(p', p) = \sum_{i=1}^8 \tau_i(p^2, p'^2, q^2) T_\mu^i(p', p), \quad (8.7.48)$$

де скалярні функції τ_i залежать тепер від трьох лоренцових інваріантів, а вісім тензорів T_μ^i задовольняють умові поперечності

$$q^\mu T_\mu^i(p', p) = 0, \quad i = 1, \dots, 8. \quad (8.7.49)$$

В якості незалежного базису цих тензорів можна вибрати такий:

$$\begin{aligned} T_\mu^1 &= p_\mu(p' \cdot q) - p'_\mu(p \cdot q) \equiv Q_\mu, & T_\mu^2 &= Q_\mu(\hat{p} + \hat{p}'), & T_\mu^3 &= q^2 \gamma_\mu - q_\mu \hat{q}, \\ T_\mu^4 &= Q_\mu \sigma_{\lambda\nu} p^\lambda p'^\nu, & T_\mu^5 &= \sigma_{\mu\lambda} q^\lambda, & T_\mu^6 &= \gamma_\mu(p'^2 - p^2) - (p + p')_\mu \hat{q}, \\ T_\mu^7 &= \frac{p'^2 - p^2}{2} [\gamma_\mu(\hat{p} + \hat{p}') - p_\mu - p'_\mu] - i(p + p')_\mu \sigma_{\nu\lambda} p^\nu p'^\lambda, \\ T_\mu^8 &= i\gamma_\mu \sigma_{\lambda\nu} p^\lambda p'^\nu + p_\mu \hat{p}' - p'_\mu \hat{p} \end{aligned} \quad (8.7.50)$$

(нагадаємо, що $\sigma_{\mu\nu} = i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]/2$). Загальна структура вершинної функції використовується при дослідженні динамічної генерації маси ферміонів за допомогою рівнянь Швінгера–Дайсона. Додаткові аргументи (перенормовність, відсутність кінематичних сингулярностей) дозволяють отримати подальші обмеження на скалярні функції τ_i і виразити їх через ферміонні функції $A(p^2)$, $B(p^2)$. На цьому шляху можна отримати замкнену систему інтегральних рівнянь для функцій $A(p^2)$, $B(p^2)$ і $\Pi(p^2)$ (поляризації вакууму) (див. [129] і посилання там).

8.7.3. Лембівський зсув

Як ми зазначали раніше, в теорії Дірака енергетичні рівні $2S_{1/2}$ і $2P_{1/2}$ в атомі водню є виродженими. В 1947 р. Лемб і Резерфорд поміряли зсув цих рівнів і знайшли, що вони є невиродженими і розщеплені по енергії на величину

$$E_{2S_{1/2}} - E_{2P_{1/2}} = 1057,77 \pm 0,10 \text{ МГц.}$$

Нагадаємо, що лембівський зсув відіграв одну з ключових ролей, поряд з аномальним магнітним моментом, у поясненні фундаментальних взаємодій між зарядженими частинками і взагалі у формулюванні теорії перенормувань з моменту появи квантової механіки та квантування електромагнітного поля.

У теорії Дірака рівні $E_{2S_{1/2}}$, $E_{2P_{1/2}}$ вироджені, але це виродження виявляється випадковим, оскільки воно виникає лише в тому випадку, якщо взаємодія між електроном і протоном точно пропорційна $1/r$, як передбачається законом Кулона. Саме існування лембівського зсуву вказує на те,

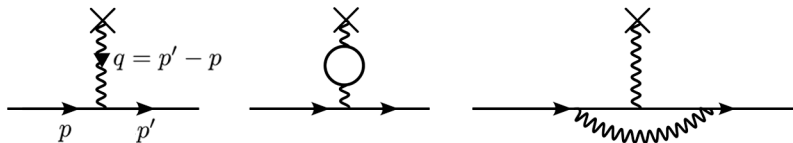


Рис. 40. Діаграми найнижчого порядку взаємодії електрона із зовнішнім полем

що закон Кулона змінюється на коротких відстанях, що ми вже бачили на прикладі поляризації вакууму, яка модифікує закон Кулона. Таким чином, приходимо до висновку, що необхідно врахувати радіаційні поправки до взаємодії електрона із зовнішнім полем ядра для того, щоб описати експериментально знайдене розщеплення рівнів $2S_{1/2}$ і $2P_{1/2}$ в атомі водню.

Матричний елемент розсіяння електрона в першому порядку за зовнішнім електромагнітним полем має вигляд

$$\begin{aligned} \langle p' | M | p \rangle &= -ie \int d^4x \langle p' | j_\mu(x) | p \rangle A^\mu(x) = \\ &= -ie \int d^4x e^{i(p'-p)x} \langle p' | j_\mu(0) | p \rangle A^\mu(x) = \\ &= -ie \langle p' | j_\mu(0) | p \rangle A^\mu(p' - p), \quad j_\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x), \end{aligned} \quad (8.7.51)$$

де матричний елемент струму для електронів на масовій оболонці

$$\begin{aligned} \langle p' | \bar{\psi} \gamma_\mu(0) \psi | p \rangle &= \bar{u}(p') \left(\gamma_\mu + \Lambda_\mu + \gamma_\lambda D_0^{\lambda\nu} \Pi_{\nu\mu} \right) u(p) = \\ &= \bar{u}(p') \left[\gamma_\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma_{\mu\nu} q^\nu}{2m} F_2(q^2) \right] u(p). \end{aligned} \quad (8.7.52)$$

У першому порядку за зовнішнім полем поправки до кулонівської взаємодії з ядром визначаються діаграмами, зображеними на рис. 40.

Електрони в ядрі знаходяться у зв'язаному стані, тобто не на масовій оболонці, $\mu^2 = m^2 - p^2 \neq 0$, але близько до неї (енергія зв'язку електрона в атомі є значно меншою, ніж енергія спокою електрона), тому можна знехтувати вставками власної енергії в зовнішні лінії, які за припущенням включені в коректне визначення маси і нормування станів. Для малих переданих імпульсів, $q = p' - p \rightarrow 0$, можна використати лідируючі члени в форм-факторах (8.7.45) і записати модифіковане рівняння Дірака

$$\left[i\gamma^\mu \partial_\mu - m + \left\{ \gamma_\mu \left[1 - \frac{\alpha}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{\mu} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) \square \right] - \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\sigma_{\mu\nu} \partial^\nu}{2m} \right\} eA^\mu \right] \psi(x) = 0, \quad (8.7.53)$$

де похідні в доданку зі взаємодією діють тільки на вектор-потенціал A^μ .

Зсув рівнів за рахунок доданків у взаємодії пропорційних α можна врахувати за теорією збурень. Тобто спочатку розв'язується рівняння Дірака в кулонівському полі ядра

$$(\gamma^\mu(i\partial_\mu + eA_\mu) - m)\psi(x) = 0, \quad A_\mu(x) = \frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x}|}g_{\mu 0}, \quad (8.7.54)$$

власні значення енергії і власні функції якого добре відомі. Зсув рівнів визначається формулою

$$\delta E = e\alpha \int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x}) \left[\frac{1}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{\mu} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) \Delta A^0(\mathbf{x}) + \frac{i}{4\pi m} \gamma^k E^k(\mathbf{x}) \right] \psi(\mathbf{x}),$$

де E^k — електричне кулонівське поле, і в якості $\psi(\mathbf{x})$ беруться розв'язки незбуреного рівняння (8.7.54) з квантовими числами n, l, j . Відхилення електрона від масової поверхні, $\mu^2 = m^2 - p^2$, можна оцінити таким чином. Для енергії маємо $p_0 = m - \epsilon_n$, де ϵ_n — енергія зв'язку в стані з квантовим числом n . З співвідношення невизначеності для імпульсу $|\mathbf{p}| \sim 1/a = Z\alpha m$, де a — борівський радіус, отримуємо

$$\frac{m^2 - p^2}{m^2} \approx \frac{2}{m} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \epsilon_n \right).$$

Використаємо також

$$\Delta A^0(\mathbf{x}) = -Ze\delta(\mathbf{x}), \quad |\psi_n(0)|^2 = \frac{(Z\alpha m)^3}{\pi n^3}.$$

Розрахунки дають такі внески від окремих доданків в (8.7.53):

$$\left. \begin{array}{l} 2S_{1/2} \text{ —————} \\ 2P_{1/2} \text{ —————} \end{array} \right\} 1010 \text{ МГц,} \quad \text{дає доданок } -\frac{\alpha}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{\mu} - \frac{3}{8} \right) \square eA^0,$$

$$\left. \begin{array}{l} 2S_{1/2} \text{ —————} \\ 2P_{1/2} \text{ —————} \end{array} \right\} -27 \text{ МГц,} \quad \text{поляризація вакууму } \frac{\alpha}{15\pi m^2} \square eA^0,$$

$$\left. \begin{array}{l} 2S_{1/2} \text{ —————} \\ 2P_{1/2} \text{ —————} \end{array} \right\} 68 \text{ МГц,} \quad \text{аномальний магнітний момент.}$$

Частота переходу для атома водню, $Z = 1$, дорівнює

$$\nu = \frac{E_{2S_{1/2}} - E_{2P_{1/2}}}{h} = \frac{mc^2\alpha(\alpha Z)^4}{6\pi h} \left(\ln \frac{mc^2 \langle E_{2P} \rangle}{2 \text{ Ryd} \langle E_{2S} \rangle} + \frac{91}{120} \right) = 1052,1 \text{ МГц,} \quad (8.7.55)$$

де $Ryd = Rhc$ і константа Рідберга

$$R = \frac{me^4}{4\pi c\hbar^3} = 4\pi\alpha^2 \frac{mc}{\hbar} = 10973731,568160(21) \text{ м}^{-1},$$

$$Ryd = 13,605693122994 \text{ еВ.}$$

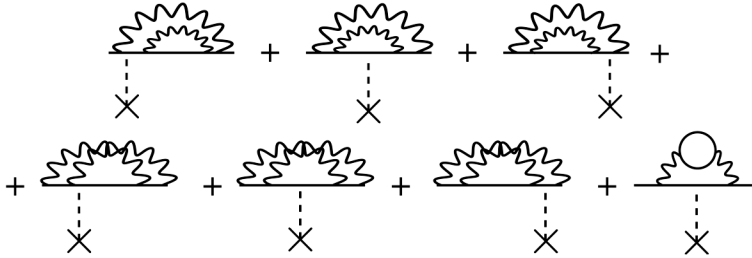


Рис. 41. Внески діаграм порядку α^2 до взаємодії з кулонівським полем ядра

Формула Рідберга для спектра ліній воднеподібних атомів має такий вигляд

$$\frac{1}{\lambda_{nm}} = RZ^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad m > n \geq 1, \quad (8.7.56)$$

де λ — довжина поглинутої чи випроміненої хвилі. Формула Рідберга відіграла дуже важливу роль при створенні квантової механіки. Вона описує знамениті серії Лаймана ($n = 1$), Бальмера ($n = 2$), Пашена ($n = 3$). У формулі (8.7.55) використовуються числові значення

$$\langle E_{2S} \rangle = 16,640 \text{ Ryd}, \quad \langle E_{2P} \rangle = 0,9704 \text{ Ryd}.$$

Формула (8.7.55) враховує радіаційні поправки $\sim \alpha$. Наступні поправки включають радіаційні поправки $\sim \alpha^2 (\alpha Z)^4$ (див. рис. 41), які дають внесок $\Delta E/h \sim +0,101$ МГц; ефекти віддачі ядра, $\sim \frac{m}{M} (Z\alpha)^4$, $\frac{m}{M} (Z\alpha)^5$, дають $\Delta E/h \sim +0,358$ МГц і ефекти скінченних розмірів ядра $\sim (R_N m)^2 (Z\alpha)^4 \sim +0,128$ МГц. Це дає величину розщеплення рівнів в атомі водню

$$\nu = 1057,864 \pm 0,014 \text{ МГц}. \quad (8.7.57)$$

Експериментальне значення на сьогодні виміряно з точністю до 10^{-5} :

$$\nu = 1057,845 \pm 0,009 \text{ МГц}. \quad (8.7.58)$$

Вимірювання лембівського зсуву в атомі водню важливе також для визначення зарядового радіуса протона, $r_p = 0,8751(61)$ фм ($1 \text{ фм} = 10^{-15} \text{ м}$). Зауважимо, що аналогічні вимірювання лінії $2S_{1/2} \rightarrow 2P_{1/2}$ в мюонному атомі водню дають дещо інше значення $r_p = 0,84087(39)$ фм — різниця в 4%, що становить так звану загадку радіуса протона. Дослідження з вимірювання і уточнення радіуса протона тривають і дотепер.

Людерс і Паулі довели теорему, яка стверджує, що будь-яка лоренц-інваріантна локальна квантова теорія поля з ермітовим гамільтоніаном повинна мати СРТ-симетрію — симетрію відносно зміни знака заряду частинок, просторових і часових координат. Внаслідок СРТ-теорему у частинки та античастинки маси та ширини розпаду повинні бути точно рівні,

а також однакові спектри зв'язаних станів та антистанів [180]. У 2020 р. колаборація ALPNA виміряла тонку структуру станів $n = 2$ атомів антиводню. Отримане значення для розщеплення рівнів $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$ узгоджується з передбаченням квантової електродинаміки з точністю до 2 %, а класичний зсув Лемба в антиводні $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$ — з точністю до 11 %. Це фактично означає перевірку СРТ-симетрії. На сьогодні процесів, у яких ця фундаментальна теорема порушується, невідомо.

8.8. Контрчленний підхід до перенормування маси, заряду та хвильових функцій

Обчисливши у попередніх параграфах діаграми власної енергії електрона, поляризації вакууму і вершинної функції та виділивши розбіжні частини цих діаграм, ми завершимо у цьому розділі процедуру однопетльового перенормування квантової електродинаміки, визначивши необхідні контрчлени і відповідний лагранжіан, який враховує ці контрчлени.

У контрчленному підході вважається, що маса m и заряд e , присутні в лагранжіані, є скінченними. «Ідеологія» перенормування полягає в тому, щоб додати до початкового лагранжіана контрчлени (розбіжні) таким чином, щоб скомпенсувати розбіжності власної енергії, поляризації вакууму і вершини. Тобто вважається, що внаслідок того, що ми не знаємо точно, яка саме теорія (лагранжіан) описує фізику на малих відстанях (еквівалентно при великих енергіях і імпульсах), ми можемо «підправити» лагранжіан, додаючи необхідні контрчлени для того, щоб усунути розбіжності, які виникають у теорії збурень. Такий підхід в ідейному плані подібний до відповідного підходу класичної теорії Лоренца електрона, в якій повна маса електрона складається із затравочної маси електрона та маси електромагнітної природи, яка пов'язана з кулонівським полем електрона.

Почнемо з ферміонної частини лагранжіана. Для фур'є-перетворення електронної функції Гріна $G(x - y)$ нескінченний ряд фейнманівських діаграм пов'язаний із власною енергією електрона $\Sigma(p)$ (див. рис. 42), утворює фактично геометричну прогресію і може бути записаний так:

$$G(p) = \frac{i}{\hat{p} - m} + \frac{i}{\hat{p} - m} (-i\Sigma(p)) \frac{i}{\hat{p} - m} + \dots = \frac{i}{\hat{p} - m - \Sigma(p)}. \quad (8.8.1)$$

До $\Sigma(p)$ ми відносимо нескінченний ряд одночастинково-незвідних діаграм, тобто діаграм, які неможливо розділити на дві окремі, розрізаючи всього одну ферміонну лінію (див. відповідні приклади на рис. 43).

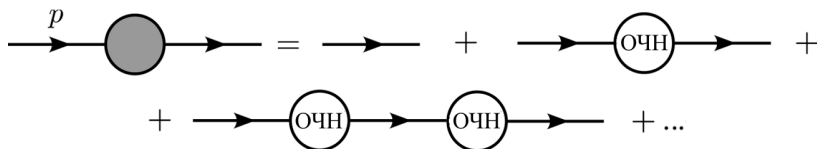


Рис. 42. Повний пропагатор електрона в термінах власної енергії

Рис. 43. Одночастинково-незвідні діаграми власної енергії електрона

Як ми з'ясували в попередніх параграфах, розбіжні доданки у власній енергії електрона мають таку саму структуру, як у початковому лагранжіані. Тому до кінетичної частини,

$$\mathcal{L}_1 = i\bar{\psi}\hat{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (8.8.2)$$

додамо контрчлени

$$\Delta\mathcal{L}_{1ct} = iB\bar{\psi}\hat{\partial}\psi - A\bar{\psi}\psi \quad (8.8.3)$$

з такою самою структурою, як у \mathcal{L}_1 . Тобто йдеться саме про перенормування початкового лагранжіана. В результаті з урахуванням контрчлених доданків ми маємо такий лагранжіан

$$(\mathcal{L}_1)_B = \mathcal{L}_1 + \Delta\mathcal{L}_{1ct} = i(1+B)\bar{\psi}\hat{\partial}\psi - (m+A)\bar{\psi}\psi. \quad (8.8.4)$$

Виберемо тепер константи A і B так, щоб електронний пропагатор був скінченним з точністю до e^2 . Додатки будемо розглядати, як доданки взаємодії, вони дають додаткові внески за теорією збурень. Відповідні внески у порядку e^2 до пропагатора електрона зображено діаграмами в (8.8.5), де їх позначено хрестиками

Далі вимагаємо, щоб $\Sigma(p) + A - B\hat{p}$ була скінченною величиною, тобто

$$\frac{e^2}{8\pi^2(4-n)}(-\hat{p} + 4m) + A - B\hat{p} = \text{скінченна величина}. \quad (8.8.6)$$

Нагадаємо, що в розмірній регуляризації розбіжності проявляються як полюси при $n = 4$, коли розмірність простору-часу прямує до 4. В найнижчому порядку теорії збурень власна енергія електрона вже була обчислена. З точністю до скінченних величин ми маємо такі вирази для розбіжних констант

$$A = -\frac{e^2 m}{2\pi^2(4-n)}, \quad B = -\frac{e^2}{8\pi^2(4-n)}. \quad (8.8.7)$$

Звернемо увагу, що з точки зору матричної структури константа B множиться на згортку імпульсу і матриць Дірака \hat{p} , а константа A множиться

Рис. 44. Повний пропагатор фотона в термінах поляризаційного оператора

на матричну одиницю. Тому розбіжна константа B визначає константу перенормування вторинно квантованої хвильової функції електрона

$$Z_2 = 1 + B = 1 - \frac{e^2}{8\pi^2(4-n)}, \quad (8.8.8)$$

а нова гола електронна хвильова функція дорівнює $\psi_B = \sqrt{Z_2}\psi$. Тоді лагранжیان \mathcal{L}_{1B} можна переписати в термінах голих полів і маси таким чином

$$\mathcal{L}_{1B} = i\bar{\psi}_B \hat{\partial} \psi_B - (m + A)Z_2^{-1} \bar{\psi}_B \psi_B = i\bar{\psi}_B \hat{\partial} \psi_B - m_0 \bar{\psi}_B \psi_B, \quad (8.8.9)$$

де гола (розбіжна) маса

$$m_0 = (m + A)Z_2^{-1} = m \left(1 - \frac{e^2}{2\pi^2(4-n)}\right) \left(1 - \frac{e^2}{8\pi^2(4-n)}\right)^{-1} = m - \delta m. \quad (8.8.10)$$

Величини з індексами B є голі величини, без врахування взаємодії, а ψ , m відносяться до *фізичного* (спостережуваного) електрона. Ще раз підкреслимо, що лагранжیان \mathcal{L}_{1B} , виражений у термінах голих величин, має таку саму форму, як і лагранжیان \mathcal{L}_1 . Тобто перенормування зберігає форму вихідного лагранжіана. Ця властивість є дуже важливою. Теорії, в яких контрчлени мають таку саму структуру, як і доданки у початковому лагранжіані, називаються перенормовними теоріями.

Ясно, що голий пропагатор $\langle 0|T\psi_B(x)\bar{\psi}_B(y)|0\rangle$ зв'язаний з пропагатором фізичних полів мультиплікативним співвідношенням

$$G_B(x-y) = \langle 0|T\psi_B(x)\bar{\psi}_B(y)|0\rangle = Z_2 \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle = Z_2 G_r(x-y). \quad (8.8.11)$$

Для фур'є-перетворення повного фотонного пропагатора, $D_{\mu\nu}(x-y)$, аналогічно маємо нескінченний ряд знов-таки у формі геометричної прогресії, зображений графічно на рис. 44,

$$D_{\mu\nu}(k) = D_{0\mu\nu}(k) + D_{0\mu\alpha}(k)(-i\Pi^{\alpha\beta}(k))D_{0\beta\nu}(k) + \dots \quad (8.8.12)$$

Тут $D_{0\mu\nu}(k)$ є пропагатором вільного поля,

$$D_{0\mu\nu}(k) = \frac{1}{ik^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \xi \frac{k_\mu k_\nu}{ik^4}, \quad (8.8.13)$$

а поляризаційний оператор $\Pi_{\mu\nu}(k)$ (власна енергія фотона) є поперечним внаслідок калібрувальної інваріантності $k^\mu \Pi_{\mu\nu}(k) = k^\nu \Pi_{\mu\nu}(k) = 0$:

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = (g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu) \Pi(k^2) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) k^2 \Pi(k^2). \quad (8.8.14)$$

Поляризаційний оператор включає тільки одночастинково-незвідні діаграми, приклади деяких з них наведено на рис. 18.

Тоді, використовуючи поперечність тензора $g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/k^2$, отримуємо

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(k) &= \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \left(\frac{1}{ik^2} + \frac{1}{ik^2} (-ik^2 \Pi(k)) \frac{1}{ik^2} + \dots \right) + \xi \frac{k_\mu k_\nu}{ik^4} = \\ &= \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{1}{ik^2} \frac{1}{1 + \Pi(k^2)} + \xi \frac{k_\mu k_\nu}{ik^4}. \end{aligned} \quad (8.8.15)$$

У нашому випадку в найнижчому порядку теорії збурень для поляризаційного оператора запишемо, виділяючи розбіжність,

$$\Pi(k^2) = \frac{e^2}{6\pi^2(4-n)} + \Pi_f(k^2), \quad (8.8.16)$$

де $\Pi_f(k^2)$ – скінченна частина. У початковий лагранжіан

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (8.8.17)$$

добавимо контрчлен

$$\mathcal{L}_{2ct} = -\frac{C}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \Rightarrow \frac{C}{2} A^\mu (\square g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu, \quad (8.8.18)$$

щоб усунути розбіжність у поляризації вакууму. Тоді

$$(\mathcal{L}_2)_B = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{2ct} = -\frac{Z_3}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2, \quad Z_3 = 1 + C.$$

В імпульсному просторі це очевидно дасть додатковий внесок $-iC(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu)$ в обернений пропагатор фотона. Далі в порядку e^2 вимагаємо, щоб $\Pi(k^2) + C$ була скінченною величиною і знаходимо

$$C = -\frac{e^2}{6\pi^2(4-n)}, \quad Z_3 = 1 - \frac{e^2}{6\pi^2(4-n)}. \quad (8.8.19)$$

Визначимо константу перенормування вторинно квантованої хвильової функції фотона $A_B^\mu = Z_3^{1/2} A^\mu$. Тоді $\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{2ct}$ можна переписати у вигляді

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_B^{\mu\nu} F_{B\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} Z_3^{-1} (\partial^\mu A_{B\mu})^2 =$$

$$= -\frac{1}{4}F_B^{\mu\nu}F_{B\mu\nu} - \frac{1}{2\xi_0}(\partial_\mu A_B^\mu)^2, \quad \xi_0 = Z_3\xi. \quad (8.8.20)$$

Неперенормований і перенормований пропагатори фотона в термінах голих і фізичних полів зв'язані мультиплікативно

$$D_{\mu\nu} \sim \langle 0|TA_{\mu B}A_{\nu B}|0\rangle \sim Z_3\langle 0|TA_\mu A_\nu|0\rangle = Z_3D_{r\mu\nu}, \quad (8.8.21)$$

де $D_{r\mu\nu}$ — перенормований фотонний пропагатор, який дорівнює

$$D_{r\mu\nu}(k) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) \frac{1}{ik^2} \frac{1}{1 + \Pi_f(k^2)} + \text{члени пропорційні } \xi, \quad (8.8.22)$$

де $\Pi_f(k^2)$ є скінченною частиною поляризаційної функції, визначеною в рівнянні (8.8.16). Очевидно, маса фотона дорівнює нулю, оскільки полюс при $k^2 = 0$ зберігається.

Перенормування позбавляє нас від нескінченних доданків, але залишає скінченні доданки, що приводить до спостережуваних фізичних ефектів, у тому числі до залежності значення заряду електрона від переданого імпульсу, що підтверджується експериментально.

Звернемось тепер до вершинної функції, яку в імпульсному просторі представимо у вигляді $\Gamma^\mu(p, p') = \gamma^\mu + \Lambda^\mu(p, p')$, де p і p' — імпульси електрона. У найнижчому порядку теорії збурень поправка до голої вершини описується другою діаграмою на рис. 36. Її розбіжна частина, $\Lambda_\mu^{(1)}$, при n , що прямує до 4, має вигляд (див. (8.7.8))

$$\Lambda_\mu^{(1)} = \frac{e^2}{8\pi^2(4-n)}\gamma_\mu. \quad (8.8.23)$$

Цю розбіжність можна усунути, додавши до лагранжіана взаємодії

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -e\mu^{2-\frac{n}{2}}\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu \quad (8.8.24)$$

контрчлен виду

$$\mathcal{L}_{3ct} = -De\mu^{2-\frac{n}{2}}\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu, \quad (8.8.25)$$

що дає додаткову вершину взаємодії $-ie\mu^{2-\frac{n}{2}}D\gamma_\mu$ в розкладі за теорією збурень. Тоді вимагаємо

$$D\gamma_\mu + \Lambda_\mu = \text{скінченна величина},$$

звідки

$$D = -\frac{e^2}{8\pi^2(4-n)}. \quad (8.8.26)$$

В результаті доданок у лагранжіані, який описує взаємодію електронного та електромагнітного полів, отримує вигляд

$$\mathcal{L}_{\text{int}} + \mathcal{L}_{\text{ct}} = -(1 + D)e\mu^{2-\frac{n}{2}}\bar{\psi}\hat{A}\psi = -Z_1e\mu^{2-\frac{n}{2}}\bar{\psi}\hat{A}\psi, \quad Z_1 = 1 + D. \quad (8.8.27)$$

Зрештою, повний лагранжіан КЕД (в однопетльовому наближенні) має в термінах фізичних полів такий вигляд

$$\mathcal{L}_B = iZ_2\bar{\psi}\hat{\partial}\psi - (m + A)\bar{\psi}\psi - Z_1e\mu^{2-\frac{n}{2}}\bar{\psi}\hat{A}\psi - \frac{Z_3}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2, \quad (8.8.28)$$

де

$$Z_1 = Z_2 = 1 - \frac{e^2}{8\pi^2(4-n)}, \quad Z_3 = 1 - \frac{e^2}{6\pi^2(4-n)}, \quad A = -\frac{me^2}{2\pi^2(4-n)}. \quad (8.8.29)$$

Відзначимо важливу рівність $Z_1 = Z_2$, яка є наслідком так званої тотожності Уорда—Такахаші (УТ), доведення якої буде дано пізніше,

$$-ik^\mu\Gamma_\mu(p, p+k) = G^{-1}(p+k) - G^{-1}(p), \quad (8.8.30)$$

де за визначенням $\Gamma_\mu(p, p+k) \equiv \gamma_\mu + \Lambda_\mu$. Оскільки ферміонний пропагатор зв'язаний з власною енергією електрона співвідношенням (8.8.1), то для розбіжних частин маємо в порядку e^2 :

$$G_{\text{div}}^{-1}(p) = (-i) \left[\hat{p} \underbrace{\left(1 + \frac{e^2}{8\pi^2(4-n)} \right)}_{=Z_2^{-1}} - m \left(1 + \frac{e^2}{2\pi^2(4-n)} \right) \right], \quad (8.8.31)$$

$$\Gamma_{\text{div}}^\mu = \gamma^\mu \left(1 + \frac{e^2}{8\pi^2(4-n)} \right) = \gamma^\mu Z_1^{-1}. \quad (8.8.32)$$

Фактично тотожність Уорда—Такахаші (8.8.30) потребує рівності $Z_1 = Z_2$ у всіх порядках теорії збурень.

Переходячи до голих величин, маємо

$$\mathcal{L}_B = i\bar{\psi}_B\hat{\partial}\psi_B - m_0\bar{\psi}_B\psi_B - e_0\bar{\psi}_B\hat{A}_B\psi_B - \frac{1}{4}F_B^{\mu\nu}F_{B\mu\nu} + \frac{1}{2\xi_0}(\partial^\mu A_{B\mu})^2. \quad (8.8.33)$$

Тут голі константи пов'язані з фізичними (скінченними) співвідношеннями

$$m_0 = \underbrace{Z_2^{-1}(m + A)}_{=mZ_m}, \quad e_0 = e\mu^{2-\frac{n}{2}} \frac{Z_1}{Z_2 Z_3^{1/2}} = e\mu^{2-\frac{n}{2}} Z_3^{-1/2}, \quad \xi_0 = Z_3 \xi. \quad (8.8.34)$$

Таким чином, всі нескінченні величини включені в голі величини, при цьому лагранжіан зберіг свою початкову форму. Цей результат означає перенормовність квантової електродинаміки у даному порядку. Насправді квантова електродинаміка є перенормовною теорією в усіх порядках теорії збурень (див. розділ 7).

Для константи перенормування $Z_2 (= Z_1)$ ми вже наводили вираз у другому порядку теорії збурень поблизу $n = 4$ (8.4.29). Константа Z_m визначається з формули (8.4.28). Наведемо тут вираз для константи Z_3 :

$$Z_3 = 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \left(\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln(4\pi) + \ln \frac{\mu^2}{m^2} \right) + O(\alpha^2), \quad (8.8.35)$$

Для голої константи зв'язку маємо співвідношення

$$\alpha_0 = Z_3^{-1} \alpha = \alpha \left[1 + \frac{\alpha}{3\pi} \left(\frac{2}{4-n} - \gamma + \ln(4\pi) + \ln \frac{\mu^2}{m^2} \right) + O(\alpha^2) \right]. \quad (8.8.36)$$

Хоча схема перенормування на масовій оболонці (перенормування за Дайсоном) є найбільш привабливою з фізичної точки зору, вона є лише однією з багатьох можливих схем перенормувань. Єдина вимога, яку справді потрібно врахувати, це те, щоб контрчлени усували ультрафіолетові розбіжності в діаграмах Фейнмана, залишаючи тільки скінченні члени в границі $n \rightarrow 4$.

Позначаючи $\epsilon = (4-n)/2$, розбіжності в діаграмах з k петлями мають вигляд кількох доданків ряду Лорана $\sum_{i=-k}^{-1} c_i \epsilon^i$ ($k = 1$ в однопетльових діаграмах). Мінімальний спосіб перенормування полягає в тому, щоб включити лише полюсні доданки у контрчлени. Така схема перенормування, як вже згадувалося раніше, називається MS (minimal subtraction) схемою. Однак, оскільки полюси $1/\epsilon$ завжди йдуть разом з константою Ейлера та $\ln(4\pi)$, то зручніше видаляти полюси разом з цими константами

$$\frac{1}{\tilde{\epsilon}} = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi).$$

Еквівалентно, це відповідає заміні довільного параметра μ на інший

$$\mu^2 \Rightarrow \bar{\mu}^2 = 4\pi\mu^2 e^{-\gamma}. \quad (8.8.37)$$

Відповідна схема називається модифікованою схемою мінімального віднімання $\overline{\text{MS}}$, вона широко використовується в пертурбативних розрахунках у фізиці високих енергій, особливо в КХД. Формули для перенормувань виглядають простіше в цій схемі, наприклад (8.8.36) замінюється на

$$\alpha_0 = \alpha \left[1 + \frac{\alpha}{3\pi} \left(\frac{1}{\tilde{\epsilon}} + \ln \frac{\bar{\mu}^2}{m^2} \right) + O(\alpha^2) \right]. \quad (8.8.38)$$

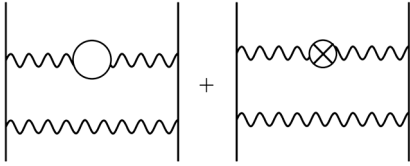


Рис. 45. Скорочення розбіжностей у піддіаграмах

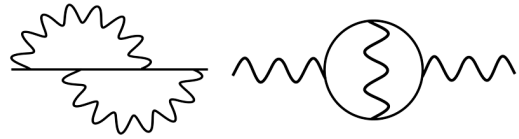


Рис. 46. Розбіжності, що перекриваються в діаграмах власної енергії електрона і фотона

У довільному порядку теорії збурень співвідношення між голими та перенормованими зарядами і масами в розмірній регуляризації мають вигляд рядів Тейлора за перенормованою константою зв'язку. В розмірній регуляризації маємо

$$\alpha_0(n) = \mu^{4-n} \alpha \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} a^{(k)}(n) \alpha^k \right), \quad (8.8.39)$$

$$m_0(n) = m \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} b^{(k)}(n) \alpha^k \right), \quad (8.8.40)$$

а в регуляризації Паулі–Вілларса

$$\alpha_0(M) = \alpha \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} a^{(k)} \left(\frac{M}{m} \right) \alpha^k \right), \quad (8.8.41)$$

$$m_0(M) = m \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} b^{(k)} \left(\frac{M}{m} \right) \alpha^k \right). \quad (8.8.42)$$

У даному порядку теорії збурень α^k всі розбіжності в піддіаграмах усуваються за допомогою контрчленів, знайдених в порядках $\leq k - 1$. Залишаються тільки розбіжності діаграм як цілого в даному порядку α^k , їх можна усунути, підбираючи коефіцієнти $a^{(k)}, b^{(k)}$ і відповідні коефіцієнти ряду для константи перенормування хвильової функції електрона Z_2 ($= Z_1$). Для константи Z_3 очевидно використовуємо $Z_3 = \alpha/\alpha_0$.

Тонкощі перенормування у вищих порядках. Аналіз розбіжностей діаграм Фейнмана за допомогою індексу розбіжності не враховує розбіжності в піддіаграмах багатопетльових діаграм. Якщо діаграма по індексу є збіжною, але має розбіжні піддіаграми, то ці розбіжності легко усуваються за допомогою контрчленів вже знайдених у нижчих порядках теорії збурень. Приклад відповідних діаграм наведено на рис. 45. Розбіжність першої діаграми, яка присутня за рахунок розбіжної піддіаграми поляризації вакууму, скорочується контрчленом другої діаграми.

Більш складна ситуація виникає у випадку так званих розбіжностей, що перекриваються, тобто таких діаграм, які містять дві або більше розбіжних петель. Приклади таких діаграм в КЕД в порядку e^4 наведено на рис. 46.

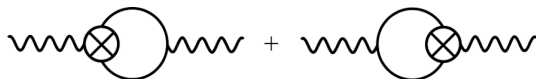


Рис. 47. Поляризація вакууму з контрчленами у вершинах



Рис. 48. Контрчлен для вакуумної поляризації в порядку e^4

У контрчленному підході розбіжності в кожній вершині діаграми поляризації вакууму усуваються за допомогою нових діаграм на рис. 47, де у вершинах з'являються контрчлени порядку e^2 . Після цього треба ще додати новий контрчлен порядку e^4 , щоб усунути розбіжність діаграми як цілої (рис. 48).

Ця процедура усунення розбіжностей працює і для діаграм більш високого порядку. Тобто після усунення розбіжностей в даному порядку можна переходити до діаграм наступного порядку. Вже наявні контрчлени усувають розбіжності в піддіаграмах, а розбіжності діаграми як цілого усуваються підбором нового контрчлена даного порядку. Ця рекурсивна процедура усунення розбіжностей працює в перенормовних теоріях і має назву R -операції Боголюбова—Парасюка. Детальніше з R -операцією можна познайомитися в монографіях [5, 16, 63, 121].

Важливість тотожності Уорда—Такахаші. Як ми вже зазначали раніше, тотожності УТ є наслідком калібрувальної симетрії і відіграють дуже важливу роль у практичних обчисленнях. Для того щоб зрозуміти їх значення, розглянемо простий приклад квантової електродинаміки з двома сортами заряджених частинок: електронами і мюонами. Тоді для фотон-мюонної вершини матимемо

$$eZ_2'^{-1}Z_3^{-1/2} = e_0(Z_1')^{-1}, \quad (8.8.43)$$

де Z_1' і Z_2' — константи перенормування вершини і поля мюона відповідно. Константи перенормування залежать від маси мюона (в регуляризації з обрізанням по імпульсам, або в регуляризації Паулі—Вілларса). Виникає підозра, що рівняння (8.8.43) визначає інше співвідношення між фізичним зарядом e і голим зарядом e_0 , ніж у випадку присутності лише одних електронів. Але в силу тотожності УТ $Z_1' = Z_2'$, це співвідношення залишається таким, як і раніше, так що присутній лише один універсальний електричний заряд, який має одне й те саме значення для всіх сортів частинок.

Сенс теорії перенормувань виражається в теоремі Боголюбова—Парасюка—Хеппа—Циммермана (БПХЦ):

Для довільної перенормовної квантової теорії поля у будь-якому порядку теорії збурень усі розбіжності усуваються за допомогою контрчленів, які відповідають примітивно розбіжним діаграмам. Тобто теорія є скінченною, якщо використати перенормовну теорію з повним набором контрчленів.

Математичне доведення теореми БПХЦ можна знайти в книгах [5, 16, 63].

Теорії перенормувань можна надати сенс і поза межами теорії збурень: підібрати параметри лагранжіана як функції параметра регуляризації таким чином, щоб фізичні величини були скінченними, коли параметр регуляризації прямує до свого граничного значення. Але регулярної непертурбативної процедури перенормування поки що не розроблено. З іншого боку, можна використовувати теорію збурень не за константою зв'язку, а за іншими параметрами теорії. Прикладами таких розкладів є розклади за числом петель (loop expansion), за константою Планка \hbar (квазікласичний розклад), розклад $1/N$, де N — кількість компонент полів, наприклад розклад за параметром $1/n_f$ або $1/N_c$ в КХД, де n_f — кількість ароматів кварків, а N_c — кількість кольорів.

ЗАДАЧІ

1. Обчислити інтеграл, що зустрічається при обчисленні поляризації вакууму в розмірній регуляризації,

$$I = \int_0^1 \frac{dx x(1-x)}{[m^2 - x(1-x)p^2]^{2-n/2}},$$

використовуючи інтеграл

$$\int_0^1 du u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} (u+z)^{-\rho} = z^{-\rho} B(\alpha, \beta) F(\alpha, \rho; \alpha + \beta; -1/z),$$

$$\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} \beta > 0, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

і співвідношення для гіпергеометричної функції Гауса

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{-b} F\left(c-a, b; c; \frac{z}{z-1}\right).$$

Показати, що поляризаційний оператор в області $0 < p^2 < 4m^2$ може бути записаний як

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = \frac{e^2 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{48\pi^2} \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{\frac{n}{2}-2} (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) F\left(2, 2 - \frac{n}{2}; \frac{5}{2}; \frac{p^2}{4m^2}\right),$$

де $[x]$ — ціла частина числа x . Цей вираз допускає аналітичне продовження в області $p^2 < 0$ і $p^2 > 4m^2$. Оскільки гіпергеометрична функція $F(a, b; c; z)$ має розріз для дійсних значень $z > 1$, поляризаційна функція має уявну частину в області імпульсів $p^2 > 4m^2$.

2. Скінченна частина поляризації вакууму в схемі віднімання за Дайсоном має вигляд (8.1.15). Обчислити інтеграл, використовуючи інтегрування частинами, і одержати такий вираз в області імпульсів $0 < p^2 < 4m^2$:

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = -\frac{\alpha}{3\pi}(g_{\mu\nu}p^2 - p_\mu p_\nu) \left\{ \frac{1}{3} + 2 \left(1 + \frac{2m^2}{p^2} \right) \left[\left(\frac{4m^2}{p^2} - 1 \right)^{1/2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \operatorname{arccctg} \left(\frac{4m^2}{p^2} - 1 \right)^{1/2} - 1 \right] \right\}.$$

3. У попередній задачі зробити аналітичне продовження фінального виразу до області імпульсів $p^2 > 4m^2$ за допомогою формули

$$\operatorname{arccctg}(iz) = -i \operatorname{arccth}(z) = \frac{1}{2i} \ln \frac{z+1}{z-1}$$

і обчислити уявну частину $\operatorname{Im}\Pi(p^2 + i\epsilon)$, де скалярна функція $\Pi(p^2)$ визначається як $\Pi_{\mu\nu}(p) = (g_{\mu\nu}p^2 - p_\mu p_\nu) \Pi(p^2)$.

4. Використовуючи розмірну регуляризацию, обчислити в скалярній електродинаміці з зарядженим скалярним полем поляризаційну функцію фотонного поля в однопетльовому наближенні.
5. Обчислити власну енергію електрона в другому порядку теорії збурень, використовуючи регуляризацию Фейнмана, коли фотонний пропагатор у калібровці $\xi = 1$ модифікується таким чином:

$$D_{0\mu\nu}(k) \frac{g_{\mu\nu}}{i(k^2 + i\epsilon)} \rightarrow g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{i(k^2 - \lambda^2 + i\epsilon)} - \frac{1}{i(k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon)} \right] = \\ = ig_{\mu\nu} \int_{\lambda^2}^{\Lambda^2} \frac{dt}{(k^2 - t + i\epsilon)^2}, \quad (8.8.44)$$

де λ — мала маса фотона (інфрачервоне обрізання) і Λ — параметр ультрафіолетового обрізання.

6. Обчислити власну енергію електрона в другому порядку теорії збурень в довільній калібровці $\xi \neq 1$, застосувавши розмірну регуляризацию. Показати, що значення фізичної маси, яке визначається положенням полюса пропагатора, не залежить від калібрувального параметра ξ .

7. Розглянути однопетльовий фейнманівський інтеграл у просторі Мінковського що відповідає трикутній діаграмі,

$$J = \int \frac{d^n k}{i\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{(-k^2)^{\nu_1} [(k+p_1)^2]^{\nu_2} [(k+p_1+p_2)^2]^{\nu_3}}.$$

Застосовуючи параметризацію Фейнмана і формулу інтегрування (7.8.12), отримати

$$J = \Gamma\left(\nu - \frac{n}{2}\right) \int_{\alpha_i \geq 0} \left(\prod_{i=1}^3 d\alpha_i \frac{\alpha_i^{\nu_i-1}}{\Gamma(\nu_i)} \right) \frac{U^{\nu-n}}{F^{\nu-\frac{n}{2}}},$$

де $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$, і

$$U = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad F = -\alpha_1\alpha_2x_1 - \alpha_2\alpha_3x_2 - \alpha_3\alpha_1x_3, \\ x_1 = p_1^2, \quad x_2 = p_2^2, \quad x_3 = (p_1 + p_2)^2.$$

8. Розглянути взаємодію електрона з легким скалярним полем ϕ , визначену доданком $g\phi\bar{\psi}_e\psi_e$. У випадку, коли маса скалярної частинки m_ϕ приймає значення в інтервалі $(Z\alpha)^2 m_e \ll m_\phi \ll Z\alpha m_e$ знайти зміну енергії $1s$ -стану воднеподібного атома із зарядом Ze внаслідок такої взаємодії.
9. Знайти асимптотичну поведінку електронного пропагатора в квантовій електродинаміці при великому значенні імпульсу, використовуючи власну енергію електрона в однопетльовому наближенні.

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ШВІНГЕРА–ДАЙСОНА, ТОТОЖНОСТІ УОРДА–ТАКАХАШІ, КІРАЛЬНІ ТА КАЛІБРУВАЛЬНІ АНОМАЛІЇ

У попередніх двох розділах ми розглядали функції Гріна в теорії збурень, вивчали та аналізували однопетльові діаграми в квантовій електродинаміці. Однак ми вже згадували, що крім результатів, отриманих у пертурбативному підході, в теорії квантових калібрувальних полів існують деякі точні рівняння і співвідношення для функцій Гріна, пов'язані з симетріями. Це інтегральні рівняння Швінгера–Дайсона, тотожності Уорда–Такахаші, а також квантові аномалії, які описують порушення в квантовій теорії симетрій, що присутні в класичній теорії. Ясно, ці точні рівняння і співвідношення посідають особливе місце в сучасній теорії квантових калібрувальних полів.

9.1. Інтегральні рівняння Швінгера–Дайсона

Розпочнемо розгляд з рівнянь Швінгера–Дайсона (ШД) і для початку розглянемо діаграми для власної енергії електрона, які можна розбити на два класи: одночастинково-незвідні діаграми (або компактні) і звідні діаграми, з'єднані однією ферміонною лінією.

Позначимо, як і раніше, через $-i\Sigma(p)$ суму всіх компактних діаграм. Тоді нескінченний ряд усіх діаграм на рис. 42 можна представити у вигляді блоків $-i\Sigma(p)$, з'єднаних однією ферміонною лінією, що дає рівність (8.8.1) — співвідношення між точним пропагатором і масовим оператором $\Sigma(p)$. Це рівняння можна записати також у вигляді

$$G^{-1}(p) = G_0^{-1}(p) - (-i\Sigma(p)), \quad (9.1.1)$$

де $G_0(p) = i/(\hat{p} - m_0)$ — вільний електронний пропагатор, і яке графічно зображено на рис. 49.

Аналогічно для фотонного пропагатора відповідні діаграми також можна розбити на компактні (або сильнозв'язні) власноенергетичні діаграми $-i\Pi_{\mu\nu}(k)$ для фотона і некомпактні діаграми, де блоки $-i\Pi_{\mu\nu}(k)$ з'єднані однією фотонною лінією. Увесь нескінченний ряд діаграм для фо-

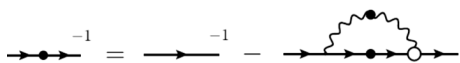


Рис. 49. Рівняння ШД для повного ферміонного пропатора в КЕД

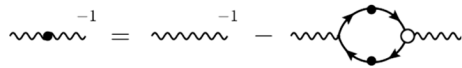


Рис. 50. Рівняння ШД для повного фотонного пропатора в КЕД

тонного пропатора (8.8.12) можна записати у вигляді рівняння

$$D_{\mu\nu}(p) = D_{\mu\nu}^0(p) + D_{\mu\lambda}^0(p)(-i\Pi^{\lambda\rho}(p))D_{\rho\nu}(p), \quad (9.1.2)$$

або в іншій формі

$$D_{\mu\nu}^{-1}(p) = (D^0)_{\mu\nu}^{-1}(p) - (-i\Pi_{\mu\nu}(p)), \quad (9.1.3)$$

і яке графічно зображене на рис. 50.

Вільний пропатор має тензорну структуру

$$D_{0\mu\nu}(k) = \frac{1}{ik^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \xi \frac{k_\mu k_\nu}{ik^4}, \quad (9.1.4)$$

а власна енергія фотона є поперечним тензором $\Pi_{\mu\nu}(k) = (g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu) \times \Pi(k^2)$. Тензорну структуру повного фотонного пропатора можна записати з двома невідомими скалярними функціями $d(k^2)$ і $d_l(k^2)$

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{d(k^2)}{ik^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + d_l(k^2) \frac{k_\mu k_\nu}{ik^4}. \quad (9.1.5)$$

Підставляючи це у рівняння (9.1.2), знаходимо, що $d_l(k^2) = \xi$, а $d(k^2)$ визначається з простого рівняння

$$d(k^2) = 1 - \Pi(k^2) \cdot d(k^2) \Rightarrow d(k^2) = \frac{1}{1 + \Pi(k^2)}. \quad (9.1.6)$$

Як бачимо, поздовжня частина пропатора (9.1.5) не міняється внаслідок поперечності тензора $\Pi_{\mu\nu}(k)$, а поперечна частина виражається через скалярну поляризаційну функцію.

Звернемося тепер до вершинної функції. Суму всіх вершинних частин позначимо $\Gamma_\mu(p', p)$ (у визначення не включаємо пропатори зовнішніх електронних і фотонних ліній, а також множник $(-ie_0)$)

$$\Gamma_\mu(p', p) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p', p).$$

Одночастинково-незвідна вершина $\Gamma_\mu(p', p)$ пов'язана з триточковою кореляційною функцією операцією ампутації (див. рис. 51).

Визначимо також ядро електрон-позитронного розсіяння $K(p, p', q)_{\alpha\beta, \gamma\delta}$. У визначення K не включені діаграми, які можна роз-

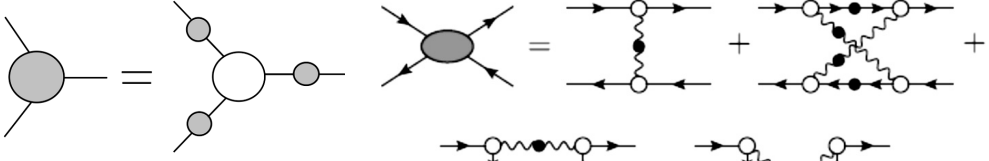


Рис. 51. Ампутація вершинної функції в КЕД

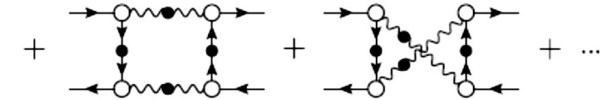


Рис. 52. Ядро електрон-позитронного розсіяння у вигляді ряду за скелетними діаграмами з повними пропаторами і вершинами

бити на дві, розрізаючи одну фотонну лінію або дві ферміонні лінії (див. рис. 52).

Випишемо інтегральні рівняння, які зв'язують величини Σ , $\Pi_{\mu\nu}$ з повними пропаторами $G(p)$, $D_{\mu\nu}$ і вершиною Γ_μ згідно з правилами Фейнмана

$$-i\Sigma(p) = (-ie_0)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Gamma_\mu(p, p-k) G(p-k) \gamma_\nu D^{\mu\nu}(k). \quad (9.1.7)$$

Використовуючи зв'язок повного ферміонного пропатора з власною енергією (9.1.1), отримуємо інтегральне рівняння для ферміонного пропатора

$$G^{-1}(p) = G_0^{-1}(p) - (-ie_0)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Gamma_\mu(p, p-k) G(p-k) \gamma_\nu D^{\mu\nu}(k). \quad (9.1.8)$$

Аналогічно, для вакуумної поляризації

$$-i\Pi_{\mu\nu}(k) = (-ie_0)^2 (-1) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr}[\gamma_\mu G(p-k) \Gamma_\nu(p-k, p) G(p)], \quad (9.1.9)$$

де в правій частині присутній множник -1 для ферміонної петлі відповідно до правил Фейнмана. Для фотонного пропатора отримуємо інтегральне рівняння

$$D_{\mu\nu}^{-1}(k) = D_{0\mu\nu}^{-1}(k) + (-ie_0)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr}[\gamma_\mu G(p-k) \Gamma_\nu(p-k, p) G(p)]. \quad (9.1.10)$$

Рівняння для вершинної частини схематично можна записати як

$$\Gamma = \gamma + \int \Gamma G G \cdot K, \quad (9.1.11)$$

або у більш розгорнутому вигляді

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(p+q, p) = \gamma_{\alpha\beta}^\mu + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [G(k+q) \Gamma^\mu(k+q, k) G(k)]_{\beta'\alpha'} \times K_{\alpha'\beta', \alpha\beta}(k, k+q, p+q). \quad (9.1.12)$$

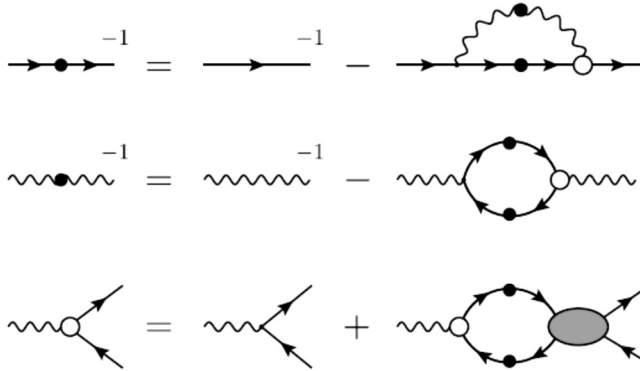


Рис. 53. Рівняння ШД в КЕД. Повні пропагатори позначені жирною крапкою, повна вершина — світлим кружечком, а ядро K — сірим кружечком

Інтегральні рівняння для ферміонного і фотонного пропагаторів та вершини зображені на рис. 53.

Зауважимо, що ці рівняння не утворюють замкнутої системи рівнянь, оскільки рівняння для вершини містить ядро K , для якого треба виписати своє рівняння. Фактично рівняння Швінгера—Дайсона утворюють нескінченну систему інтегральних рівнянь для функцій Гріна з довільним числом ферміонних і фотонних зовнішніх ліній. Якщо обмежитись внеском в ядро K тільки першої діаграми на рис. 52, то отримуємо замкнену систему нелінійних інтегральних рівнянь (так зване тригамне наближення), яке розглядали Ландау, Абрикосов і Халатніков.

9.2. Рівняння Швінгера—Дайсона в квантовій електродинаміці з функціонального інтеграла

Нагадаємо, що для того, щоб правильно визначити інтеграл за траєкторіями, потрібно усунути внесок калібрувальню еквівалентних конфігурацій, які описують фізично еквівалентні точки у фазовому просторі. Відповідно до процедури Фаддеева—Попова, слід вибрати калібрувальню умову (поверхню), яка (в ідеалі) один раз перетинає всі калібрувальні орбіти, і додати детермінант Фаддеева—Попова. У випадку лоренцових калібрувальних умов у КЕД детермінант Фаддеева—Попова, як ми бачили раніше, не залежить від змінних інтегрувань і може бути винесений за знак інтеграла та поглинений у нормуючий множник.

Генеруючий функціонал в КЕД в цих калібровках має вигляд

$$Z(J, \bar{\eta}, \eta) = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\hat{D} - m) \psi - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 + J^\mu A_\mu + \bar{\eta} \psi(x) + \bar{\psi}(x) \eta \right] \right\}, \quad (9.2.1)$$

де $D_\mu = \partial_\mu + ie_0 A_\mu$ — коваріантна похідна, а $J_\mu, \eta, \bar{\eta}$ — джерела для полів $A_\mu(x), \bar{\psi}(x), \psi(x)$, відповідно, ξ — калібрувальний параметр. Для сукупності полів і джерел

$$\Phi_l = \{A, \psi, \bar{\psi}\}, \quad J_l = \{J, \bar{\eta}, \eta\}$$

запишемо генеруючий функціонал у загальному вигляді

$$Z[J_l] = N \int \mathcal{D}\Phi_l e^{iS(\Phi_l, J_l)}.$$

Розглянемо інтеграл

$$\int \mathcal{D}\Phi_l \frac{\delta}{\delta\Phi_l(x)} e^{iS(\Phi_l, J_l)} = 0, \quad (9.2.2)$$

який дорівнює нулю як інтеграл від функціональної похідної. Наприклад, для $\delta/\delta A_\mu(x)$ це буде рівність

$$\int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \left\{ \left[g_{\mu\nu} \square_x - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu^x \partial_\nu^x \right] A^\nu(x) - e_0 \bar{\psi} \gamma_\mu \psi(x) + J_\mu(x) \right\} e^{iS} = 0.$$

Замінюючи поля в дужках {...} функціональними похідними по відповідним джерелам, наприклад

$$A^\mu(x) e^{iS(A_\mu, \bar{\psi}, \psi)} = \frac{\delta}{i\delta J_\mu(x)} e^{iS(A_\mu, \bar{\psi}, \psi)}, \quad (9.2.3)$$

отримуємо функціонально-диференціальне рівняння для генеруючого функціонала $Z(J, \bar{\eta}, \eta)$:

$$\left\{ \left[g^{\mu\nu} \square - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu \partial^\nu \right]^x \frac{\delta}{i\delta J^\nu(x)} - e_0 \gamma_{\beta\alpha}^\mu \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}_\alpha(x)} \frac{\delta}{i\delta \eta_\beta(x)} + J^\mu(x) \right\} Z = 0. \quad (9.2.4)$$

Нагадаємо, що при диференціюванні за грасмановими змінними треба враховувати антикомутативність цих змінних та похідних по ним.

Аналогічно у випадку ферміонних змінних маємо

$$0 = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \frac{\delta e^{iS}}{i\delta \bar{\psi}_\alpha(x)} = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \left[(i\hat{D} - m)_{\alpha\beta}^x \psi_\beta(x) + \eta_\alpha(x) \right] e^{iS},$$

$$0 = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \frac{\delta e^{iS}}{i\delta \psi_\alpha(x)} = - \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \left[(-i\hat{D} - m)_{\beta\alpha}^x \bar{\psi}_\beta(x) + \bar{\eta}_\alpha(x) \right] e^{iS},$$

де в останній рівності коваріантна похідна діє на діраківські спряжений спінор за правилом $D_\mu \bar{\psi} = (\partial_\mu - ie_0 A_\mu) \bar{\psi}$. Далі ми замінюємо поля на варіаційні похідні

$$\psi_\alpha(x) \Rightarrow \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}_\alpha(x)}, \quad \bar{\psi}_\alpha(x) \Rightarrow -\frac{\delta}{i\delta \eta_\alpha(x)}, \quad (9.2.5)$$

що дає такі функціонально-диференційні рівняння

$$\left\{ (i\hat{\partial} - m)_{\alpha\beta}^x \frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}_\beta(x)} - e_0\gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{\delta}{i\delta J^\mu(x)} \frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}_\beta(x)} + \eta_\alpha(x) \right\} Z[J, \bar{\eta}, \eta] = 0, \quad (9.2.6)$$

$$\left\{ (i\hat{\partial} + m)_{\beta\alpha}^x \frac{\delta}{i\delta\eta_\beta(x)} + e_0\gamma_{\beta\alpha}^\mu \frac{\delta}{i\delta J^\mu(x)} \frac{\delta}{i\delta\eta_\beta(x)} + \bar{\eta}_\alpha(x) \right\} Z[J, \bar{\eta}, \eta] = 0. \quad (9.2.7)$$

Для генеруючого функціонала зв'язних функцій Гріна $W[J, \bar{\eta}, \eta]$ відповідні рівняння стають вже нелінійними, з (9.2.4) отримуємо

$$\left[g^{\mu\nu}\square - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu\partial^\nu \right]^x \frac{\delta W}{\delta J^\nu(x)} - e_0\gamma_{\beta\alpha}^\mu \left(\frac{\delta W}{\delta\bar{\eta}_\alpha(x)} \frac{\delta W}{\delta\eta_\beta(x)} + \frac{1}{i} \frac{\delta^2 W}{\delta\bar{\eta}_\alpha(x)\delta\eta_\beta(x)} \right) + J^\mu(x) = 0. \quad (9.2.8)$$

Аналогічно з рівнянь (9.2.6), (9.2.7) маємо

$$(i\hat{\partial} - m)_{\alpha\beta}^x \frac{\delta W}{\delta\bar{\eta}_\beta(x)} - e_0\gamma_{\alpha\beta}^\mu \left(\frac{\delta W}{\delta J^\mu(x)} \frac{\delta W}{\delta\bar{\eta}_\beta(x)} + \frac{1}{i} \frac{\delta^2 W}{\delta J^\mu(x)\delta\bar{\eta}_\beta(x)} \right) + \eta_\alpha(x) = 0, \quad (9.2.9)$$

$$(i\hat{\partial} + m)_{\beta\alpha}^x \frac{\delta W}{\delta\eta_\beta(x)} + e_0\gamma_{\beta\alpha}^\mu \left(\frac{\delta W}{\delta J^\mu(x)} \frac{\delta W}{\delta\eta_\beta(x)} + \frac{1}{i} \frac{\delta^2 W}{\delta J^\mu(x)\delta\eta_\beta(x)} \right) + \bar{\eta}_\alpha(x) = 0. \quad (9.2.10)$$

Знайдені функціонально-диференційні рівняння для функціоналів $Z[J, \bar{\eta}, \eta]$, $W[J, \bar{\eta}, \eta]$ можна записати як нескінченний ланцюжок зчеплених інтегральних рівнянь для функцій Гріна. Зазвичай використовують рівняння для зв'язних функцій Гріна. Продемонструємо це на прикладі виведення рівняння ШД для фотонного пропагатора. Продиференціюємо рівняння (9.2.8) по $\delta/i\delta J^\lambda(y)$ і покладемо всі джерела $J, \eta, \bar{\eta} = 0$. Отримуємо рівняння, яке пов'язує дві зв'язні кореляційні функції

$$\left[g^{\mu\nu}\square_x - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_x^\mu\partial_x^\nu \right] \langle 0|TA_\nu(x)A_\lambda(y)|0\rangle_c + \frac{1}{i}\delta_\lambda^\mu\delta(x-y) + e_0\gamma_{\beta\alpha}^\mu \langle 0|T\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x)A_\lambda(y)|0\rangle_c = 0, \quad (9.2.11)$$

де ми використали, що $\frac{\delta W}{\delta\bar{\eta}} = \frac{\delta W}{\delta\eta} = 0$ у відсутності джерел, а також рівняння

$$\frac{\delta^2 W}{\delta J^\nu(x)i\delta J^\lambda(y)} \Big|_{J, \eta, \bar{\eta}=0} = \langle 0|TA_\nu(x)A_\lambda(y)|0\rangle_c, \quad (9.2.12)$$

$$\frac{\delta^3 W}{i\delta J^\lambda(y)i\delta\bar{\eta}_\alpha(x)\delta\eta_\beta(x)} = -\langle 0|T\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x)A_\lambda(y)|0\rangle_c \quad (9.2.13)$$

(надалі значок c опускаємо). Визначимо ампутовану 3-точкову функцію $\Gamma_{\gamma\delta}^\nu(xz|y)$ таким чином

$$\begin{aligned} \langle 0|T\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(z)A_\mu(y)|0\rangle &= -ie_0 \int d^4x'd^4z'd^4y'G_{\alpha\gamma}(x-x')\Gamma_{\gamma\delta}^\nu(x'z'|y') \times \\ &\times G_{\delta\beta}(z'-z)D_{\nu\mu}(y'-y). \end{aligned} \quad (9.2.14)$$

Внаслідок трансляційної інваріантності величина $\Gamma_{\gamma\delta}^\nu(xz|y)$ залежить від двох різниць координат. Здійснюючи фур'є-перетворення для величин G , D , Γ , отримуємо

$$\begin{aligned} \langle 0|T\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(z)A_\mu(y)|0\rangle &= -ie_0 \int \frac{d^4p d^4q}{(2\pi)^8} e^{-ip(x-z)-iq(x-y)} G_{\alpha\gamma}(p) \times \\ &\times \Gamma_{\gamma\delta}^\nu(p, p+q) G_{\delta\beta}(p+q) D_{\nu\mu}(q). \end{aligned} \quad (9.2.15)$$

Тоді, прирівнюючи $x = z$, і використовуючи фур'є-перетворення по $x - y$, рівняння (9.2.11) стає

$$\begin{aligned} - \left[g^{\mu\nu} k^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) k^\mu k^\nu \right] D_{\nu\lambda}(k) - ie_0^2 \gamma_{\beta\alpha}^\mu \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} G_{\alpha\gamma}(p) \Gamma_{\gamma\delta}^\nu(p, p+k) \times \\ \times G_{\delta\beta}(p+k) D_{\nu\lambda}(k) + \frac{\delta_\lambda^\mu}{i} = 0 \end{aligned} \quad (9.2.16)$$

або, множачи на обернену матрицю $(D^{-1})^{\lambda\nu}$,

$$(D^{-1})^{\mu\nu}(k) = (D_0^{-1})^{\mu\nu}(k) + (-ie_0)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr}[G(p)\Gamma^\nu(p, p+k)G(p+k)\gamma^\mu], \quad (9.2.17)$$

де матриця

$$(D_0^{-1})^{\mu\nu}(k) = i \left[g^{\mu\nu} k^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) k^\mu k^\nu \right]$$

є оберненою до матриці $D_{0\mu\nu}(k)$ (8.5.4). Рівняння (9.2.17) збігається з раніше одержаним рівнянням (9.1.10).

Рівняння ШД для ферміонного пропагатора (9.1.8) впливає з рівняння (9.2.9) після диференціювання по $\eta_\gamma(y)$ і покладаючи всі джерела рівними нулю (або із рівняння (9.2.10) після диференціювання по $\bar{\eta}_\gamma(y)$). Аналогічно рівняння для вершинної функції (9.1.12) отримується з рівняння (9.2.8) диференціюванням по η і $\bar{\eta}$, покладаючи $J = \eta = \bar{\eta} = 0$, виконуючи ампутування і переходячи в імпульсний простір.

Зазначимо, що рівняння Швінгера—Дайсона є неоднорідними інтегральними рівняннями, і, розв'язуючи їх методом ітерацій, де неоднорідні перші доданки беруться в якості нульового наближення, ми отримуємо розв'язки у вигляді ряду за діаграмами Фейнмана. Тобто розв'язки за тео-

рією збурень завжди містяться в цих рівняннях. З іншого боку, розв’язки інтегральних рівнянь можуть містити непертурбативні внески, які не можна знайти за теорією збурень. Наприклад, розкладаючи в ряд Тейлора по α в нулі функцію $e^{-1/\alpha}$, одержимо нулі

$$e^{-\frac{1}{\alpha}} = 0 + 0 + 0 + \dots \quad (9.2.18)$$

Тобто такі внески не виявляються в теорії збурень. Ще одним аргументом для дослідження рівнянь ШД є те, що джерелом виникнення нескінченностей може бути якраз метод вирішення цих рівнянь послідовними наближеннями. Дійсно, нехай маємо рівняння $f = f_0 + \lambda I(f)$, де I — деякий інтегральний оператор, а λ — малий параметр. Рівняння може мати скінченний розв’язок навіть якщо $I(f_0) = \infty$, тобто коли ітерації приводять до нескінченності. Як приклад розглянемо скінченний інтеграл

$$I(g) = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1+g^2}}, \quad (9.2.19)$$

і розкладемо підінтегральний вираз в ряд по g ,

$$I(g) = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} \left[1 - g^2 \ln x + \frac{g^4}{2} \ln^2 x + \dots \right]. \quad (9.2.20)$$

Бачимо, що почленне інтегрування приводить до розбіжності кожного члена ряду теорії збурень, хоча інтеграл (9.2.19) є очевидно збіжним.

9.3. Векторні тотожності Уорда–Такахаші

Тотожності Уорда–Такахаші — це співвідношення, яким задовольняють n -точкові функції Гріна і які є наслідком інваріантності квантової теорії поля відносно неперервної симетрії, зокрема й локальних калібрувальних перетворень. Для інваріантності квантової теорії необхідна інваріантність як дії, так і міри інтегрування у функціональному інтегралі. У випадку неінваріантності міри інтегрування виникають так звані аномальні тотожності УТ. Ми розглянемо виведення обох типів тотожностей та почнемо з тотожностей, що виникають через калібрувальну інваріантність. Для їх отримання в КЕД у функціональному інтегралі (9.2.1) зробимо заміни змінних, які відповідають локальному калібрувальному перетворенню

$$\psi(x) \rightarrow e^{-ie\alpha(x)}\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow e^{ie\alpha(x)}\bar{\psi}(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x). \quad (9.3.1)$$

Доданки в лагранжіані, які змінюються при калібрувальних перетвореннях, мають вигляд

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu + \square\alpha)^2 + J^\mu(A_\mu + \partial_\mu\alpha) + \bar{\eta}e^{-ie\alpha}\psi + \bar{\psi}e^{ie\alpha}\eta \sim \\ & \sim -\frac{1}{\xi}\partial_\mu A^\mu\square\alpha + J^\mu\partial_\mu\alpha - ie\alpha\bar{\eta}\psi + ie\alpha\bar{\psi}\eta, \end{aligned} \quad (9.3.2)$$

де в останньому виразі ми зберегли лінійні інфінітезимально малі члени. Таким чином, у першому порядку по $\alpha(x)$ маємо

$$\int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \left[\frac{1}{\xi} \square \partial_\mu A^\mu(x) + \partial_\mu J^\mu(x) + ie\bar{\eta}\psi(x) - ie\bar{\psi}\eta(x) \right] e^{iS(J, \bar{\eta}, \eta)} = 0.$$

Замінюючи поля на функціональні похідні, отримуємо тотожність, яка є наслідком калібрувальної інваріантності теорії

$$\left[\frac{1}{\xi} \square^x \partial_\mu^x \frac{\delta}{i\delta J_\mu(x)} + \partial_\mu^x J^\mu(x) + ie\bar{\eta}_\alpha(x) \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}_\alpha(x)} - ie\eta_\alpha(x) \frac{\delta}{i\delta \eta_\alpha(x)} \right] Z[J, \bar{\eta}, \eta] = 0. \quad (9.3.3)$$

Для функціонала $W[J, \bar{\eta}, \eta]$, що генерує зв'язні функції Гріна, тотожність приймає вигляд

$$-i\partial_\mu^x J^\mu(x) + \frac{1}{\xi} \square^x \partial_\mu^x \frac{\delta W}{i\delta J_\mu(x)} + ie\bar{\eta}_\alpha(x) \frac{\delta W}{i\delta \bar{\eta}_\alpha(x)} - ie\eta_\alpha(x) \frac{\delta W}{i\delta \eta_\alpha(x)} = 0. \quad (9.3.4)$$

З цієї функціональної тотожності можна отримати безліч тотожностей для кореляційних функцій, які містять зовнішні фотонні лінії.

Якщо у функціональному інтегралі робити заміну змінних тільки для ферміонних полів, то отримуємо іншу тотожність

$$\gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\mu \left[\frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}_\beta(x)} \frac{\delta W}{\delta \eta_\alpha(x)} + \frac{1}{i} \frac{\delta^2 W}{\delta \bar{\eta}_\beta(x) \delta \eta_\alpha(x)} \right] + \bar{\eta}_\alpha(x) \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}_\alpha(x)} - \eta_\alpha(x) \frac{\delta W}{\delta \eta_\alpha(x)} = 0. \quad (9.3.5)$$

Останню рівність можна записати у більш прозорому вигляді

$$\partial_\mu \langle j^\mu(x) \rangle_{J, \eta, \bar{\eta}} + \bar{\eta}_\alpha(x) \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}_\alpha(x)} - \eta_\alpha(x) \frac{\delta W}{\delta \eta_\alpha(x)} = 0, \quad (9.3.6)$$

де $\langle j^\mu \rangle_{J, \eta, \bar{\eta}}$ є середнє значення струму $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ у присутності джерел

$$\langle j^\mu(x) \rangle_{J, \eta, \bar{\eta}} = \frac{\int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) e^{i\int d^4x [\mathcal{L}_{QED} + J^\mu A_\mu + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi]}}{\int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{i\int d^4x [\mathcal{L}_{QED} + J^\mu A_\mu + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi]}}. \quad (9.3.7)$$

З тотожності (9.3.6) отримуються тотожності для кореляційних функцій, які містять струм. Зокрема, диференціюючи (9.3.6) за джерелами, отримуємо таку тотожність УТ для комптонівської амплітуди розсіяння поза масовою оболонкою

$$\partial_z^\mu \langle 0 | T j_\mu(z) j_\nu(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) | 0 \rangle = \langle 0 | T j_\nu(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) | 0 \rangle \times (\delta(z - y_1) - \delta(z - x_1)).$$

Контактні доданки в правій частині не дають внесок в амплітуду розсіяння, для якої в імпульсному просторі виконується

$$k^\mu M_{\mu\nu}(k, p, q) = 0, \quad (9.3.8)$$

де k, p, q — імпульси фотона і ферміонів відповідно. З фізичної точки зору це означає, що поздовжні фотони, поляризації яких пропорційні імпульсу, не взаємодіють. Тотожність (9.3.8) очевидно узагальнюється на довільні амплітуди із зовнішніми фотонними лініями.

Як інший приклад, продиференціюємо (9.3.4) по $J_\nu(y)$ і покладемо $J = \eta = \bar{\eta} = 0$, тоді отримуємо

$$\frac{1}{\xi} \square^x \partial_x^\mu \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle + \frac{1}{i} \partial_\nu^x \delta(x - y) = 0. \quad (9.3.9)$$

В імпульсному просторі це приводить до співвідношення

$$k^\mu D_{\mu\nu}(k) = \xi \frac{k_\nu}{ik^2}. \quad (9.3.10)$$

Загальна тензорна структура повного фотонного пропагатора (9.1.5) містить дві невідомі функції $d(k^2)$ і $d_l(k^2)$. Тотожність означає, що одна з них зафіксована $d_l(k^2) = \xi$.

З (9.3.10) очевидно, що для оберненого пропагатора

$$k^\nu D_{\nu\mu}^{-1}(k) = \frac{ik^2 k_\mu}{\xi}, \quad (9.3.11)$$

а для вільного пропагатора маємо аналогічну рівність

$$k^\nu D_{0\nu\mu}^{-1}(k) = \frac{ik^2 k_\mu}{\xi}.$$

Тоді з рівняння ШД

$$D_{\mu\nu}^{-1} = D_{0\mu\nu}^{-1} + i\Pi_{\mu\nu}$$

отримуємо тотожність для поляризаційного оператора

$$k^\mu \Pi_{\mu\nu}(k) = 0 \Rightarrow \Pi_{\mu\nu}(k) = (k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \Pi(k^2), \quad (9.3.12)$$

яка визначає тензорну структуру цієї величини з однією скалярною функцією $\Pi(k^2)$.

Тепер продиференціюємо тотожність (9.3.3) по $\frac{\delta}{i\delta\eta_\beta(y)}$, $\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}_\gamma(z)}$ при $J = \eta = \bar{\eta} = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} \square^x \partial_x^\mu \langle 0 | T A_\mu(x) \psi_\gamma(z) \bar{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle + e \langle 0 | T \psi_\gamma(z) \bar{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle \delta(x-z) - \\ - e \langle 0 | T \psi_\gamma(z) \bar{\psi}_\beta(x) | 0 \rangle \delta(x-y) = 0. \end{aligned} \quad (9.3.13)$$

Знов визначаючи ампутовану вершинну функцію і виконуючи перетворення Фур'є, отримуємо тотожність УТ

$$(-i)k^\mu \Gamma_\mu(p, p+k) = G^{-1}(p+k) - G^{-1}(p), \quad (9.3.14)$$

яка вже використовувалася в розділі 8.8. Диференціюючи цю тотожність за фотонним імпульсом k^μ при $k^\mu = 0$ і взявши до уваги зв'язок повного ферміонного пропагатора з власною енергією, знаходимо, що повна вершина при нульовому фотонному імпульсі задовольняє рівнянню

$$\Gamma_\mu(p, p) = i \frac{\partial G^{-1}(p)}{\partial p^\mu} = \gamma_\mu - \frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p^\mu}. \quad (9.3.15)$$

Це так звана диференційна тотожність Уорда.

9.4. Перетворення Ландау—Халатнікова—Фрадкіна

Функції Гріна в калібрувальних теоріях у загальному випадку не є калібрувально інваріантними і залежать від вибору калібрувальної умови. Ці функції в різних калібровках пов'язані певними співвідношеннями, які у випадку коваріантних калібровок називаються перетвореннями Ландау—Халатнікова—Фрадкіна (ЛХФ). Продемонструємо отримання таких перетворень у випадку електронного пропагатора, який визначається інтегралом

$$G(x-y, \xi) = \frac{\int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \psi(x) \bar{\psi}(y) e^{iS(A_\mu, \bar{\psi}, \psi)}}{\int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{iS(A_\mu, \bar{\psi}, \psi)}} \quad (9.4.1)$$

з дією

$$S(A_\mu, \bar{\psi}, \psi) = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\hat{D} - m) \psi - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right], \quad (9.4.2)$$

яка залежить від калібрувального параметра ξ . Продиференціюємо (9.4.1) по ξ і запишемо результат через кореляційну функцію

$$\partial_\xi G(x-y, \xi) = \frac{i}{2\xi^2} \int d^4z \partial_z^\mu \partial_u^\nu \langle 0 | A_\mu(z) A_\nu(u) \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle_{u=z}, \quad (9.4.3)$$

яка описує комптонівське розсіяння фотона на електроні поза масовою оболонкою. Визначимо ампутовану функцію Гріна

$$\langle 0|A_\mu(z)A_\nu(u)\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle = e^2 \int d^4z' d^4u' d^4x' d^4y' D_\mu^{\mu'}(z-z') D_\nu^{\nu'}(u-u') \times \\ \times G(x-x') \Gamma_{\mu'\nu'}(x', y'; z', u') G(y'-y), \quad (9.4.4)$$

і після фур'є-перетворення всіх величин

$$\langle 0|A_\mu(z)A_\nu(u)\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle = e^2 \int \frac{d^4k d^4q d^4p}{(2\pi)^{12}} e^{ik(z-y)-iq(u-y)+ip(x-y)} \times \\ \times D_\mu^{\mu'}(k) D_\nu^{\nu'}(q) G(p+k-q) \Gamma_{\mu'\nu'}(p+k-q, p; k, q) G(p) \quad (9.4.5)$$

(нагадаємо, що внаслідок пуанкаре-інваріантності шукана функція Гріна і $\Gamma_{\mu'\nu'}(z', u'; x', y')$ залежать від трьох різниць координат). Підставляючи останній вираз в (9.4.3) і використовуючи (9.3.10), отримуємо

$$\partial_\xi G(x-y, \xi) = -\frac{ie^2}{2} \int \frac{d^4k d^4p}{(2\pi)^8} e^{ip(x-y)} \frac{1}{k^4} G(p, \xi) k^\mu k^\nu \Gamma_{\mu\nu}(p, p; k, k) G(p, \xi). \quad (9.4.6)$$

Для комптонівської амплітуди розсіяння вперед $\Gamma_{\mu\nu}(p, p; k, k)$ використовуємо таку тотожність Уорда–Такахаші (див. задачу 7 наприкінці розділу)

$$k^\mu k^\nu \Gamma_{\mu\nu}(p, p; k, k) = G^{-1}(p) [G(p+k) + G(p-k) - 2G(p)] G^{-1}(p), \quad (9.4.7)$$

тоді

$$\partial_\xi G(x-y, \xi) = -\frac{ie^2}{2} \int \frac{d^4k d^4p}{(2\pi)^8} e^{ip(x-y)} \frac{1}{k^4} [G(p+k, \xi) + G(p-k, \xi) - 2G(p, \xi)] = \\ = ie^2 \int \frac{d^4k d^4p}{(2\pi)^8} e^{ip(x-y)} \frac{1}{k^4} [1 - e^{ik(x-y)}] G(p, \xi). \quad (9.4.8)$$

Визначаючи функцію

$$\Delta(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikx}}{k^4},$$

попередня рівність призводить до рівняння

$$\partial_\xi G(x-y, \xi) = ie^2 [\Delta(0) - \Delta(x-y)] G(x-y, \xi), \quad (9.4.9)$$

що і дає перетворення ЛХФ — правило переходу для електронного пропагатора в коваріантній калібровці з параметром ξ_0 до іншої калібровки з параметром ξ

$$G(x, \xi) = \exp[ie^2(\xi - \xi_0) (\Delta(0) - \Delta(x))] G(x, \xi_0). \quad (9.4.10)$$

Функція

$$\Delta(0) - \Delta(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1 - e^{ikx}}{k^4} \quad (9.4.11)$$

є розбіжною в ультрафіолетовій області і потребує регуляризації, наприклад, вводячи імпульсне обрізання або використовуючи розмірну регуляризацію.

Перетворення ЛХФ (9.4.10) є точним законом переходу для неперенормованого електронного пропатора від однієї коваріантної калібровки до іншої. При перенормуванні перетворення ЛХФ пов'язує значення константи Z_2 в різних калібровках.

Важливим наслідком перетворення ЛХФ є те, що полюс функції Гріна, який визначає масу електрона, не залежить від калібрувального параметра внаслідок коваріантності закону перетворення. В імпульсному просторі перетворення ЛХФ має більш складний вигляд, для похідної по ξ з (9.4.8) безпосередньо отримуємо

$$\partial_\xi G(p, \xi) = ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4} [G(p, \xi) - G(p - k, \xi)], \quad (9.4.12)$$

або для власної енергії, $G^{-1}(p, \xi) = \hat{p} - \Sigma(p, \xi)$,

$$\partial_\xi \Sigma(p, \xi) = ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4} [G^{-1}(p, \xi) - G^{-1}(p, \xi)G(p - k, \xi)G^{-1}(p, \xi)]. \quad (9.4.13)$$

З останньої рівності випливає, що на масовій оболонці, $G^{-1}(p, \xi)|_{\hat{p}=m} = 0$, де $m = \Sigma(p, \xi)|_{\hat{p}=m}$, тобто маса, що визначається полюсом функції Гріна, не залежить від калібровки, $\partial m / \partial \xi = 0$.

Перетворення ЛХФ можна узагальнити і на більш складні калібрувальні умови, де параметр ξ замінюється на операторну функцію $\xi(-\square)$, а також на інші функції Гріна, наприклад вершинну функцію (див. [13, 81, 203]).

9.5. Аксіально-векторна тотожність

Розглянемо функціональний інтеграл для повного ферміонного пропатора в квантовій електродинаміці

$$G(x_1 - x_2) = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) e^{iS(A_\mu, \bar{\psi}, \psi)} \quad (9.5.1)$$

з дією (9.4.2). Зробимо заміну змінних у чисельнику функціонального інтеграла, яка відповідає кіральним перетворенням,

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\theta(x)\gamma_5} \psi, \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi} e^{i\theta(x)\gamma_5}, \quad (9.5.2)$$

або в інфінітезимальній формі

$$\psi(x) \simeq (1 + i\theta(x)\gamma_5)\psi, \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(1 + i\theta(x)\gamma_5). \quad (9.5.3)$$

Ферміонна частина лагранжіана при цьому змінюється таким чином (з точністю до членів лінійних по θ):

$$\begin{aligned} \bar{\psi}e^{i\theta\gamma_5}(i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m_0)e^{i\theta(x)\gamma_5}\psi &\simeq \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m_0)\psi - \\ &- \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi\partial_\mu\theta - 2i\theta(x)m_0\bar{\psi}\gamma_5\psi. \end{aligned} \quad (9.5.4)$$

Оскільки початковий інтеграл не залежав від θ , очевидно, що варіація по θ повинна дорівнювати нулю

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \delta_\theta(e^{iS}\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)) &\simeq \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{iS} \times \\ \times \left\{ \int d^4x [-i\partial_\mu\theta(x)\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi + 2\theta(x)m_0\bar{\psi}\gamma_5\psi(x)]\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2) + \right. \\ \left. + i\theta(x_1)\gamma_5\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2) + i\theta(x_2)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_5 \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (9.5.5)$$

Звідси для кореляційних функцій маємо тотожність

$$\begin{aligned} i\partial_\mu^x \langle 0|T\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|0\rangle &= -2m_0\langle 0|T\bar{\psi}\gamma_5\psi(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|0\rangle - \\ - i\delta(x-x_1)\gamma_5\langle 0|T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|0\rangle &- i\delta(x-x_2)\langle 0|T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|0\rangle\gamma_5. \end{aligned} \quad (9.5.6)$$

Визначимо ампутовані вершини $\Gamma_{\mu 5}$ і Γ_5 аналогічно тому, як це зроблено в рівняннях (9.2.14) і (9.2.15),

$$\begin{aligned} \langle 0|T\bar{\psi}(-i\gamma_\mu\gamma_5)\psi(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|0\rangle &= \int \frac{d^4p d^4k}{(2\pi)^8} e^{ip(x-x_1)-ik(x-x_2)} \times \\ &\times G(p)\Gamma_{\mu 5}(p, k)G(k), \end{aligned} \quad (9.5.7)$$

$$\begin{aligned} \langle 0|T\bar{\psi}(-i\gamma_5)\psi(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|0\rangle &= \int \frac{d^4p d^4k}{(2\pi)^8} e^{ip(x-x_1)-ik(x-x_2)} \times \\ &\times G(p)\Gamma_5(p, k)G(k). \end{aligned} \quad (9.5.8)$$

В імпульсному просторі отримуємо аксіально-векторну тотожність УТ, яка пов'язує вершини $\Gamma_{\mu 5}$, Γ_5 і ферміонний пропагатор G :

$$(p-k)^\mu\Gamma_{\mu 5}(p, k) = 2m_0\Gamma_5(p, k) + G^{-1}(p)\gamma_5 + \gamma_5G^{-1}(k). \quad (9.5.9)$$

Легко перевірити цю тотожність для вільних вершин і пропагаторів

$$\Gamma_{\mu 5}^{(0)} = -i\gamma_\mu\gamma_5, \quad G_0^{-1}(p) = \frac{\hat{p} - m_0}{i}, \quad \Gamma_5^{(0)} = -i\gamma_5,$$

У випадку безмасових ферміонів ($m_0 = 0$), враховуючи матричну структуру повного пропагатора,

$$G^{-1}(p) = -i[\hat{p}A(p^2) - B(p^2)], \quad (9.5.10)$$

тотожність (9.5.9) приймає вигляд

$$(p - k)^\mu \Gamma_{\mu 5}(p, k) = -i \left\{ [\hat{p}A(p^2) - B(p^2)] \gamma_5 + \gamma_5 [\hat{k}A(k^2) - B(k^2)] \right\}. \quad (9.5.11)$$

В границі, коли $k \rightarrow p$, маємо

$$\lim_{k \rightarrow p} (p - k)^\mu \Gamma_{\mu 5}(p, k) = 2i\gamma_5 B(p^2). \quad (9.5.12)$$

Звідси випливає, що вершина $\Gamma_{\mu 5}(p, k)$ повинна мати полюс при $(p - k)^2 = 0$

$$\Gamma_{\mu 5}(p, k) \approx 2i\gamma_5 B(p^2) \frac{(p - k)_\mu}{(p - k)^2}, \quad k \rightarrow p. \quad (9.5.13)$$

Поява нетривіальної масової функції $B(p^2) \neq 0$ як розв'язок рівнянь Швінгера—Дайсона означає порушення неперервної кіральної симетрії, і згідно з теоремою Голдстоуна (див. розділ 12) означає появу безмасової псевдоскалярної частинки (намбу-голдстоунівського бозона), що й проявляється в наявності полюса у вершині.

Нарешті наведемо (наївну) тотожність для кореляційної функції з аксіальним і векторними струмами, яка є очевидною з точки зору її отримання з функціонального інтеграла, але буде потрібною при аналізі розпаду нейтрального піона на два гамма кванти,

$$\partial_x^\mu \langle 0 | j_{\mu 5}(x) j_\nu(x_1) j_\lambda(0) | 0 \rangle = 2im_0 \langle 0 | j_5(x) j_\nu(x_1) j_\lambda(0) | 0 \rangle. \quad (9.5.14)$$

Визначаючи фур'є-перетворення у вигляді

$$\langle 0 | T \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi(x) j_\nu(y) j_\lambda(0) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} e^{ipx -iky} \Gamma_{\mu\nu\lambda}^5(k, p), \quad (9.5.15)$$

$$\langle 0 | T \bar{\psi} \gamma_5 \psi(x) j_\nu(y) j_\lambda(0) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} e^{ipx -iky} \Gamma_{\nu\lambda}^5(k, p), \quad (9.5.16)$$

отримуємо в імпульсному просторі тотожність

$$p^\mu \Gamma_{\mu\nu\lambda}^5(k, p) = 2m_0 \Gamma_{\nu\lambda}^5(k, p), \quad (9.5.17)$$

яка буде проаналізована в подальшому.

9.6. Аномальна кіральна тотожність

При виведенні кіральної тотожності УТ ми вважали інваріантною міру інтегрування при заміні (9.5.2), однак це не так. Японський фізик К. Фуджікава показав [83] (див. також [149]), що ферміонна міра не є інваріантною відносно заміни ферміонних змінних, що приводить до незбереження кірального струму, тобто до виникнення так званих аномалій.

Загальне визначення квантової аномалії є таким. Розглянемо квантову теорію, яка має групу симетрії G , що залишає інваріантною класичну дію, $\delta S_{cl} = 0$. Ми говоримо, що симетрія G є аномальною, якщо вона порушена в повній квантовій теорії. Таким чином, аномальні симетрії є симетріями класичних теорій, які не виживають після переходу до квантової теорії. При цьому група G може бути або дискретною, або неперервною, і це може бути або глобальна симетрія, або калібрувальна (локальна) симетрія.

Якщо симетрія G є глобальною симетрією, то аномалії є безпечними, тобто не вказують на суперечливість теорії, але часто мають цікаві фізичні наслідки. З іншого боку, якщо G — калібрувальна симетрія, то аномалії вказують на протиріччя в теорії та повинні скорочуватися, щоб уникнути цих протиріч. Зокрема, відсутність калібрувальної інваріантності внаслідок аномалії приведе до появи у спектрі теорії станів з від'ємною нормою, що очевидно є неприйнятним із фізичної точки зору.

Почнемо з розгляду глобальних симетрій. У класичній теорії інваріантність щодо неперервної глобальної групи симетрії G приводить, відповідно до теореми Нетер, до збереження струмів j_μ^i : $\partial^\mu j_\mu^i = 0$ (індекс i відноситься до генераторів групи G). У випадку аномальної симетрії квантові поправки роблять дивергенцію струму j_μ^i відмінною від нуля: $\partial^\mu j_\mu^i = \mathcal{A}^i$. Тоді ефективна квантова дія (див. розділ 12) під дією перетворень симетрії з параметрами α^i перетворюється як

$$\delta_\omega \Gamma = \int d^4x \alpha^i \partial^\mu j_\mu^i = \int d^4x \alpha^i \mathcal{A}^i \neq 0,$$

і симетрія квантової теорії порушена. Виникнення аномалій більш точно можна сформулювати як порушення наївних тотожностей УТ, що впливають із інваріантності відносно групи G . В цьому випадку ми маємо справу з аномальними тотожностями УТ.

9.6.1. Кіральна аномалія з функціонального інтеграла

Історично першим прикладом аномалії була абелева аномалія кірального струму [25, 43], яка важлива для розуміння ширини розпаду нейтрального пі-мезона, $\pi_0 \rightarrow \gamma\gamma$, і яку ми зараз розглянемо методом Фуджікави. Виведення аномалії розглянемо у просторі Мінковського, хоча коректніше

розглядати її в евклідовому просторі з наступним зворотним віківським поворотом [83, 84].

Для виведення аномалії зробимо кіральні перетворення, точніше заміни змінних у функціональному інтегралі

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)\gamma_5}\psi, \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}e^{i\alpha(x)\gamma_5}, \quad (9.6.1)$$

де $\alpha(x) = \alpha^i(x)T^i$ у випадку неабелевих симетрій з генераторами T^i . Достатньо розглянути тільки інтегрування по ферміонах у функціональному інтегралі

$$Z = N \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left[i \int d^4x \bar{\psi} i \hat{D} \psi \right]. \quad (9.6.2)$$

Далі обчислення вакуумних середніх хронологічно впорядкованих операторів $\mathcal{O}(x_i)$ (кореляційних функцій), що містять поля матерії, можна провести в два етапи: спочатку обчислити функціональний інтеграл лише по полях матерії

$$\langle T \mathcal{O}(x_1) \dots \mathcal{O}(x_N) \rangle = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{O}(x_1) \dots \mathcal{O}(x_N) e^{i \int d^4x \mathcal{L}(\bar{\psi}, \psi, A_\mu)}, \quad (9.6.3)$$

а потім виконати функціональне інтегрування по калібрувальним полям. Тільки на другому етапі доводиться мати справу з фіксацією калібрувальної умови та введенням духів, тоді як поява будь-яких аномалій повністю пов'язана з обчисленням (9.6.2), або більш загально, (9.6.3).

Розкладемо поля ψ за базисом власних функцій ермітова оператора $i\hat{D}$,

$$i\hat{D}\Phi_m = \lambda_m \Phi_m, \quad \bar{\Phi}_m i\hat{D} = -iD_\mu \bar{\Phi}_m \gamma^\mu = \lambda_m \bar{\Phi}_m. \quad (9.6.4)$$

Власні значення цього оператора є дійсними і за відсутності калібрувального поля ($A_\mu = 0$) задовольняють умові $\lambda_m^2 = k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2$. Для фіксованого A_μ ці значення є також асимптотичною формою власних значень λ_m при великих k . Ортонормовані власні функції ермітова оператора $i\hat{D}$ утворюють повну систему, тобто задовольняють рівнянням

$$\int d^4x \bar{\Phi}_n(x) \Phi_m(x) = \delta_{nm}, \quad (9.6.5)$$

$$\sum_n \Phi_{n\alpha}(x) \bar{\Phi}_{n\beta}(y) = \delta_{\alpha\beta} \delta(x - y), \quad (9.6.6)$$

де n і m є сукупністю всіх квантових чисел, які включають як дискретні, так і неперервні числа; α, β є спірними індексами. Розкладемо поля по повній системі функцій $\Phi_n(x)$ (узагальнений ряд Фур'є):

$$\psi(x) = \sum_m a_m \Phi_m(x) = \sum_m \langle m|x \rangle a_m, \quad \bar{\psi}(x) = \sum_m \bar{a}_m \bar{\Phi}_m = \sum_m \langle x|m \rangle \bar{a}_m, \quad (9.6.7)$$

де коефіцієнти a_m, \bar{a}_m є грасмановими змінними, так само як і поля $\psi, \bar{\psi}$. Використовуючи ортонормованість $\Phi_n(x)$, знаходимо

$$a_n = \int d^4x \bar{\Phi}_n(x) \psi(x), \quad \bar{a}_n = \int d^4x \Phi_n(x) \bar{\psi}(x). \quad (9.6.8)$$

Перетворення (9.6.7) є унітарним, і ферміонну міру можна з точністю до тривіального множника записати як

$$\prod_x \mathcal{D}\psi(x) \mathcal{D}\bar{\psi}(x) = \frac{1}{\det[\bar{\Phi}_m(x)] \det[\Phi_n(x)]} \prod_m da_m d\bar{a}_m = \prod_m da_m d\bar{a}_m. \quad (9.6.9)$$

Дійсно, детермінанти в (9.6.9) можна розглядати як детермінанти матриць, рядки і колонки яких позначаються x і n , тоді вираз

$$\det[\bar{\Phi}_m(x)] \det[\Phi_n(x)] = \det \left[\int d^4x \bar{\Phi}_m(x) \Phi_n(x) \right] = \det[\delta_{mn}]$$

не залежить від полів і його можна опустити. Міра інтегрування не залежить від вибору базису в розкладі (9.6.7), але зручно вибрати $\Phi_n(x)$ в якості власних функцій оператора Дірака $i\hat{D}$, який є ермітовим.

При виведенні тотожності достатньо розглянути інфінітезимальну заміну. Якщо $\psi'(x) = (1 + i\alpha(x)\gamma_5)\psi(x)$, де у випадку неабелевих симетрій $\alpha(x) = T^i \alpha^i(x)$, то коефіцієнти розкладу визначаються таким інфінітезимальним лінійним перетворенням

$$a'_m = \sum_n \int d^4x \bar{\Phi}_m(1 + i\alpha(x)\gamma_5)\Phi_n a_n = \sum_n (\delta_{mn} + C_{mn})a_n. \quad (9.6.10)$$

Тоді ферміонна міра перетворюється при кіральной заміні змінних як

$$\mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar{\psi}' = J^{-2} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}, \quad C_{mn} = \int d^4x \bar{\Phi}_m(x) i\alpha(x)\gamma_5 \Phi_n(x),$$

де J — детермінант якобіана перетворення $1 + C$. Для інфінітезимальних параметрів $\alpha(x)$ можна записати

$$J = \det(1 + C) = e^{\text{tr} \ln(1+C)} \simeq e^{\sum_n C_{nn}},$$

або

$$\ln J = i \int d^4x \alpha^i(x) \sum_n \bar{\Phi}_n(x) \gamma_5 T^i \Phi_n(x). \quad (9.6.11)$$

Формально, використовуючи повноту функцій $\Phi_n(x)$, маємо

$$\sum_n \bar{\Phi}_n(x) \gamma_5 T^i \Phi_n(x) = \underbrace{\text{tr}(\gamma_5 T^i)}_{=0} \underbrace{\delta(x-x)}_{=\infty}, \quad (9.6.12)$$

тобто виникає невизначеність типу $0 \times \infty$. Суму в останньому виразі потрібно попередньо регуляризувати калібрувально інваріантним чином

$$\sum_n \bar{\Phi}_n(x) \gamma_5 T^i \Phi_n(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n \bar{\Phi}_n(x) \gamma_5 T^i \Phi_n(x) e^{\lambda_n^2/M^2}. \quad (9.6.13)$$

(Після віківського повороту знак λ_n^2 буде від'ємним). Хоча для збіжності суми при великих n ми використовуємо експоненційну регуляризаційну функцію $\exp(-x)$, можна замість неї взяти довільну функцію $f(x)$ ($x = -\lambda_n^2/M^2$), тому що остаточний результат не залежить від конкретного вибору цієї функції, якщо $f(x)$ задовольняє умови $f(0) = 1$, $f(\infty) = 0$, і $x f'(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ та $x \rightarrow +\infty$ (див. задачу **12** цього розділу).

Зважаючи на те, що λ_n^2 є власним значенням оператора $(i\hat{D})^2$, запишемо, використовуючи повноту Φ_n ,

$$\begin{aligned} \sum_n \bar{\Phi}_n(x) \gamma_5 T^i \Phi_n(x) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n \bar{\Phi}_n(x) \gamma_5 T^i e^{(i\hat{D}_x)^2/M^2} \Phi_n(x) = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \text{tr} \left[\gamma_5 T^i e^{(i\hat{D}_x)^2/M^2} \right] \delta(x-y) \Big|_{y \rightarrow x}. \end{aligned} \quad (9.6.14)$$

Використовуючи інтегральне представлення для дельта-функції, дію на неї нашого оператора представимо у вигляді

$$\begin{aligned} e^{(i\hat{D})^2/M^2} \delta(x-y) \Big|_{x=y} &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} e^{\frac{k^2}{M^2} + 2i\frac{k \cdot D}{M^2} - \frac{\hat{D}^2}{M^2}} \cdot \mathbb{1} \Big|_{y=x} = \\ &= M^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{k^2} e^{2i\frac{k \cdot D}{M} - \frac{\hat{D}^2}{M^2}} \cdot \mathbb{1}, \end{aligned} \quad (9.6.15)$$

де $\mathbb{1}$ — одинична матриця. В границі $M \rightarrow \infty$ внесок дадуть тільки ті доданки розкладу експоненти, які містять в точності чотири гамма-матриці, тому

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \text{tr} \left[\gamma_5 T^i e^{(i\hat{D})^2/M^2} \right] \delta(x-y) \Big|_{x=y} = \text{tr} \left[\gamma_5 T^i \cdot \frac{1}{2} \hat{D}^4 \right] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{k^2} \quad (9.6.16)$$

(для числа гамма-матриць менше чотирьох матричний слід дорівнює нулю, а для більш як чотирьох гамма-матриць границя $M \rightarrow \infty$ дає нуль). Після віківського повороту $k_0 = ik_4$ маємо

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{k^2} = i \int_E \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k^2} = \frac{i}{16\pi^2}.$$

Для обчислення сліду врахуємо, що

$$D_\mu = \partial_\mu + igT^a A_\mu^a, \quad F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a,$$

$$(i\hat{D})^2 = -D_\mu^2 - \frac{g}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]}{2},$$

тобто із \hat{D}^4 внесок при обчисленні сліду дає тільки

$$\begin{aligned} \text{tr}\left[\gamma_5 T^i \frac{1}{2} \left(\frac{g}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)^2\right] \frac{i}{16\pi^2} &= \frac{ig^2}{4 \cdot 32\pi^2} \text{tr}(T^i T^b T^c) \text{tr}(\gamma_5 \sigma^{\mu\nu} \sigma^{\lambda\rho}) F_{\mu\nu}^b F_{\lambda\rho}^c = \\ &= -\frac{g^2}{32\pi^2} \text{tr}(T^i T^b T^c) \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho}. \end{aligned} \quad (9.6.17)$$

В останньої рівності ми використали такий слід гамма-матриць

$$\text{tr}(\gamma_5 \sigma^{\mu\nu} \sigma^{\lambda\rho}) = 4i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}, \quad \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^5.$$

В результаті отримуємо

$$J = \exp\left[-\frac{ig^2}{32\pi^2} \int d^4x \alpha^i(x) \text{tr}(T^i T^b T^c) \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu}^b F_{\lambda\rho}^c\right], \quad (9.6.18)$$

і генеруючий функціонал (9.6.2) після заміни змінних та, враховуючи варіацію дії, приймає вигляд

$$\begin{aligned} Z &= N \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp\left\{i \int d^4x \left[\bar{\psi} i\hat{D}\psi + \alpha^i \partial^\mu j_{\mu 5}^i + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{g^2}{16\pi^2} \int d^4x \alpha^i(x) \text{tr}(T^i T^b T^c) \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu}^b F_{\lambda\rho}^c\right]\right\}. \end{aligned} \quad (9.6.19)$$

Оскільки це лише заміна змінних, то вона не змінює значення інтеграла для будь-якої $\alpha^i(x)$, тоді, розкладаючи по інфінітезимальних $\alpha^i(x)$ і прирівнюючи до нуля вираз при довільному $\alpha^i(x)$, знаходимо для дивергенції середнього значення струму

$$\partial^\mu \langle j_{\mu 5}^i \rangle = -\frac{g^2}{16\pi^2} \text{tr}(T^i T^b T^c) \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu}^b F_{\lambda\rho}^c, \quad (9.6.20)$$

де кіральний струм визначений як $j_{\mu 5}^i = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 T^i \psi$. Аналогічну процедуру можна безпосередньо провести і для кореляторів полів матерії (9.6.3), що приводить до аномальних тотожностей УТ для функцій Гріна зі вставкою струму $j_{\mu 5}^i$.

Якщо робити кіральну заміну в (9.6.1) з одиничною матрицею замість матриць T^i (абелеві кіральні заміни для ферміонів), то кіральний струм буде $j_{\mu 5}(x) = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi$. Позначаючи величину

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{32\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr}(F^{\mu\nu} F^{\lambda\rho}) = \frac{1}{16\pi^2} \text{tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^*),$$

яка називається густиною Черна—Понтрягіна, для синглетного струму маємо аномальну дивергенцію

$$\partial^\mu \langle j_{\mu 5}(x) \rangle = -2g^2 \mathcal{A}(x). \quad (9.6.21)$$

Для n_f безмасових ферміонів у лагранжіані (9.6.2) остання рівність модифікується очевидним чином

$$\partial^\mu \langle j_{\mu 5}(x) \rangle = -2g^2 n_f \mathcal{A}(x), \quad (9.6.22)$$

де струм $j_{\mu 5}(x) = \bar{\psi}_i \gamma_\mu \gamma_5 \psi_i$, $i = 1, \dots, n_f$. Ми вже показували, що $\text{tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^*) = 4\partial_\lambda K^\lambda$, де

$$K^\lambda = \frac{1}{2} \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \text{tr}(A_\mu \partial_\nu A_\rho + \frac{2i}{3} A_\mu A_\nu A_\rho) = \frac{1}{4} \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \left[A_\mu^a \partial_\nu A_\rho^a - \frac{g}{3} f^{abc} A_\mu^a A_\nu^b A_\rho^c \right].$$

Тому можна було б ввести новий струм

$$J_5^\mu = \bar{\psi}_i \gamma^\mu \gamma_5 \psi_i + \frac{g^2 n_f}{2\pi^2} K^\mu, \quad (9.6.23)$$

що згідно з (9.6.22) зберігається, $\partial_\mu J_5^\mu = 0$, але він не є калібрувально інваріантним як це випливає з означення K^μ .

Аномалія в дивергенції кірального струму приводить до незбереження кірального заряду

$$Q_5 = \int d^3x j_{05}(x). \quad (9.6.24)$$

Дійсно, інтегруючи вираз (9.6.21) по чотиривимірному об'єму, отримуємо таку зміну кірального заряду для топологічно нетривіальних конфігурацій калібрувального поля

$$\Delta Q_5 = \int_{-\infty}^{\infty} dt (\partial_0 Q_5) = -2g^2 \int d^4x \mathcal{A}(x) = 2n.$$

При обчисленні інтеграла в просторі Мінковського робимо віківський поворот $x_0 = -ix_4$, $\mathcal{A}_M(x) = -i\mathcal{A}_E(x)$ (остання рівність випливає з того факту, що $\mathcal{A}_M(x) \sim \partial_0 K_0 - \partial_j K_j$ і $K_0 \rightarrow -K_4$, $K_j \rightarrow iK_j$ при переході в евклідові простір).

Очевидно, інстантонні розв'язки для топологічно нетривіальних конфігурацій калібрувального поля $A_\mu(x)$ приводять до незбереження кірального заряду Q_5 внаслідок аномалії в дивергенції кірального струму.

В КЕД для дивергенції кірального струму маємо

$$\partial^\mu \langle j_{\mu 5} \rangle = -\frac{e^2}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} = \frac{e^2}{2\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}. \quad (9.6.25)$$

Цей вираз вперше з'явився в роботі Швінгера [172], але його фізичне значення було повністю оцінено тільки після робіт Адлера, Белла і Джекківа, зокрема той важливий факт, що симетрії класичної теорії можуть порушуватися при квантуванні, і це, як наслідок, має спостережувані фізичні ефекти.

Зауважимо, що кіральна аномалія є також важливою у фізиці конденсованого стану, наприклад для опису магнітоопору в діраківських і вейлівських напівметалах, чії квазічастинки описуються рівняннями Дірака і Вейля відповідно [32].

Кіральна аномалія має місце у просторі-часі довільної парної розмірності, оскільки в непарних розмірностях немає аналога матриці γ_5 . В розмірності $d = 2n$ маємо

$$\partial^\mu \langle j_{\mu 5} \rangle = (-1)^{n+1} \frac{2e^n}{n!(4\pi)^n} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_{2n}} F_{\mu_1 \mu_2} \dots F_{\mu_{2n-1} \mu_{2n}}. \quad (9.6.26)$$

Для двовимірної електродинаміки, $n = 1$, $d = 2$,

$$\partial^\mu \langle j_{\mu 5} \rangle = \frac{e}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu},$$

це є вираз, який ми отримували раніше.

Для масивних ферміонів дивергенція кірального струму модифікується очевидним чином

$$\partial^\mu \langle j_{\mu 5} \rangle = 2im_0 \langle j_5 \rangle - \frac{e^2}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho}, \quad (9.6.27)$$

де $j_5 = \bar{\psi} \gamma_5 \psi$. Аналогічно можна отримати аномальні тотожності для функцій Гріна, що містять кіральний струм, якщо зробити заміну ферміонних змінних в інтегралі (9.6.3). Зокрема, аксіальна тотожність (9.5.9) також модифікується

$$(p - k)^\mu \Gamma_{\mu 5}(p, k) = 2m_0 \Gamma_5(p, k) + G^{-1}(p) \gamma_5 + \gamma_5 G^{-1}(k) + \frac{e_0^2}{(4\pi)^2} \bar{F}(p, k). \quad (9.6.28)$$

Визначення ампутуваних вершин $\Gamma_{\mu 5}(p, k)$, $\Gamma_5(p, k)$ наведено в (9.5.7) і (9.5.8), а для ампутованої вершини $\bar{F}(p, k)$ використовуємо фур'є-перетворення

$$\langle 0 | T \bar{F}(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} e^{ip(x-x_1) - ik(x-x_2)} G(p) \bar{F}(p, k) G(k), \quad (9.6.29)$$

де $\bar{F}(x) = \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho}(x)$. Аномальна тотожність (9.6.28) записана в термінах неперенормованих величин, її форма зберігається і після перенормування.

Аналогічно тотожність (9.5.17) також змінюється за рахунок аномального доданка

$$p^\mu \Gamma_{\mu\nu\lambda}^5(k, p) = 2m_0 \Gamma_{\nu\lambda}^5(k, p) + \frac{ie_0^2}{(4\pi)^2} \tilde{F}_{\nu\lambda}(k, p), \quad (9.6.30)$$

де

$$\tilde{F}_{\nu\lambda}(k, p) = \int d^4x d^4y e^{-ipx +iky} \langle 0 | T \bar{F}(x) j_\nu(y) j_\lambda | 0 \rangle.$$

У загальному випадку аномалія кірального струму для довільної глобальної групи G визначається формулою (9.6.20). Наприклад, при кіральних перетвореннях ліві u і d кварки перетворюються таким чином

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5\tau_3/2} \psi(x), \quad \psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix},$$

а відповідний кіральний струм має вигляд ($\tau_3/2$ — генератор групи $SU(2)$)

$$j_{\mu 5}^3 = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau_3}{2} \psi = \frac{1}{2} (\bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 u - \bar{d} \gamma_\mu \gamma_5 d).$$

Аномалія скорочується, оскільки $\text{tr}(\tau_3 T^a T^b) = \text{tr}(\tau_3) \text{tr}(T^a T^b) = 0$ ($\text{tr}(\tau_3) = 0$). Це буде справедливо і для кірального струму $j_{\mu 5}^i = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 t^i \psi$, який відповідає групі $SU(N)$ глобальних перетворень N ароматів ферміонних полів з генераторами t^i ,

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha t^i \gamma_5} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{i\alpha t^i \gamma_5},$$

оскільки $\text{tr} t^i = 0$. Таким чином, глюонні доданки в кіральному струмі для групи $SU(N)$ відсутні.

З іншого боку, за наявності електромагнітного поля ці струми мають аномалію, наприклад ($D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$, q — зарядова матриця кварків) величина $\mathcal{A}(x)$ в цьому випадку буде

$$\mathcal{A}(x) = -\frac{1}{32\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} \text{tr}\{q^2 \tau_3\},$$

де $F_{\mu\nu}$ — тензор напружностей електромагнітного поля, tr включає також слід по кольоровим індексам. Обчислюючи слід матриць

$$\text{tr}\{q^2 \tau_3\} = N_c \left(\frac{2e}{3}\right)^2 \cdot (+1) + N_c \left(-\frac{e}{3}\right)^2 \cdot (-1) = \frac{N_c e^2}{3},$$

де N_c — розмірність кольорової групи ($N_c = 3$ в квантовій хромодинаміці), отримуємо для дивергенції кірального струму

$$\partial^\mu \langle \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau_3}{2} \psi \rangle = -\frac{N_c e^2}{96\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho}. \quad (9.6.31)$$

За теорією збурень права частина визначається внеском трикутної діаграми, подібної до діаграми на рис. 24, де одна з вершин $-ie\gamma_\mu$ замінюється на $-i\gamma_\mu\gamma_5\tau_3/2$.

Як бачимо, абелева кіральна аномалія є калібрувально інваріантною, і це є наслідком використання калібрувально інваріантної регуляризації при обчисленні якобіана в методі Фуджікави. Якщо в якості аргументу регуляризаційної функції $f(x)$ брати $x = (i\hat{\partial})^2/M^2$ замість $x = (i\hat{D})^2/M^2$, то така регуляризація зберігає кіральну симетрію, але порушує калібрувальну інваріантність, і ми знайшли б, що аномалія дорівнює нулю, а кіральний струм $j_{\mu 5}(x)$ зберігається. Але цей струм містить добуток полів в одній точці і також потребує регуляризації. При використанні калібрувально неінваріантної регуляризації струм $j_{\mu 5}(x)$ стає калібрувально неінваріантним, тобто нефізичним. Фактично для ферміонної міри не існує регуляризації, яка одночасно зберігає і калібрувальну, і кіральну інваріантність. До цього висновку приводить також аналіз трикутної діаграми в теорії збурень [43, 189].

Співвідношення (9.6.31) насправді є операторною тотожністю, справедливою в усіх порядках теорії збурень (тобто радіаційні поправки до неї вищих порядків дорівнюють нулю). Таким чином, кіральна аномалія є фактично результатом однопетльових розрахунків, що узгоджується з тим фактом, що в розглянутому методі Фуджікави аномалія виникає із детермінанта при заміні ферміонних змінних у функціональному інтегралі. Це є сутність теореми, доведеної Адлером і Бардіном в роботі [26], де було проведено діаграмний аналіз відсутності поправок вищого порядку до аномалії.

Нарешті розглянемо випадок, коли в інтегралі (9.6.2) робиться кіральна заміна ферміонних змінних (9.6.1), але з генераторами T^a калібрувальної групи, $\alpha^i T^i \rightarrow \alpha^a T^a$. Легко бачити, що генеруючий функціонал після заміни змінних приймає вигляд

$$Z = N \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left\{ i \int d^4x \left[\bar{\psi} i \hat{D} \psi + \alpha^a (D^\mu j_{\mu 5})^a + \frac{g^2}{16\pi^2} \int d^4x \alpha^a(x) \text{tr}(T^a T^b T^c) \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu}^b F_{\lambda\rho}^c \right] \right\} \quad (9.6.32)$$

(порівняйте з (9.6.19)). У цьому випадку отримуємо

$$\begin{aligned} (D^\mu \langle j_{\mu 5} \rangle)^a &= -\frac{g^2}{16\pi^2} \text{tr}(T^a T^b T^c) \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu}^b F_{\lambda\rho}^c = \\ &= -\frac{g^2}{32\pi^2} \text{tr}(T^a \{T^b, T^c\}) \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu}^b F_{\lambda\rho}^c, \end{aligned} \quad (9.6.33)$$

де кіральний струм визначений як $j_{\mu 5}^a = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5 T^a\psi$. Тобто маємо аномалію для коваріантної дивергенції струму. Для дійсних представлень стверджується рівність $T_a^T = -T_a$, для них коефіцієнти d_{abc} щезають

$$d_{abc} = \text{tr}(T_a\{T_b, T_c\}) = \text{tr}(T_a^T\{T_b^T, T_c^T\}) = -d_{abc} = 0,$$

аномальна права частина в (9.6.33) зникає і коваріантна дивергенція кірального струму дорівнює нулю. Зокрема, коефіцієнти $d_{abc} = 0$ для групи $SU(2)$.

9.6.2. Квантові аномалії калібрувальних симетрій

Аномалія типу (9.6.33) відіграє важливу роль у кіральних калібрувальних теоріях — теоріях, де ліві та праві ферміони входять несиметричним чином, тобто належать до різних представлень калібрувальної групи. Калібрувальні перетворення в цьому випадку містять матрицю γ_5 , і відповідний струм з'являється в рівняннях руху калібрувальних полів

$$(D^\mu F_{\mu\nu})^a = j_\nu^a, \quad j_\nu^a = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{matter}}}{\partial A_{a\nu}}, \quad (9.6.34)$$

де коваріантна похідна визначена в (4.2.5), і струм в правій частині — це струм полів матерії. Беручи коваріантну похідну від обох частин рівняння і використовуючи тотожність (4.2.8), знаходимо, що несуперечність рівняння руху вимагає коваріантного збереження струму, $(D^\nu j_\nu)^a = 0$, тобто скорочення аномалії. Це накладає певні обмеження на склад полів матерії, наприклад в теорії електрослабких взаємодій (див. розділ 14), де ліві ферміони взаємодіють з $SU(2)$ калібрувальним полем, а праві не взаємодіють. Як прототип такої теорії розглянемо модель з лагранжіаном, де ліві ферміони взаємодіють з калібрувальним полем, а праві — ні,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2}\text{tr}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}_R i\hat{\partial}\psi_R + \bar{\psi}_L i\hat{D}\psi_L = \\ &= -\frac{1}{2}\text{tr}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}i\hat{\partial}\psi - g\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}T^a\psi A^{a\mu}, \end{aligned} \quad (9.6.35)$$

де $\psi_{L,R} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}\psi$. Лагранжіан є інваріантним відносно кіральних калібрувальних перетворень

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)\frac{1+\gamma_5}{2}}\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x)e^{-i\alpha(x)\frac{1-\gamma_5}{2}}, \quad (9.6.36)$$

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x)T^a \rightarrow e^{i\alpha(x)}\left[A_\mu(x) + \frac{1}{ig}\partial_\mu\right]e^{-i\alpha(x)}, \quad (9.6.37)$$

де $\alpha(x) = \alpha^a(x)T^a$, T^a — генератори калібрувальної групи. Для ферміонів, які взаємодіють з калібрувальним полем, маємо струм

$$j_\mu^a = \bar{\psi}\gamma_\mu \frac{1 + \gamma_5}{2} T^a \psi = \bar{\psi}_L \gamma_\mu T^a \psi_L. \quad (9.6.38)$$

Здійснюючи у функціональному інтегралі заміну змінних (9.6.36), отримуємо аномалію для коваріантної дивергенції кірального струму,

$$(D^\mu \langle j_\mu \rangle)^a = -\frac{g^2}{32\pi^2} \text{tr}(T^a T^b T^c) \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu}^b F_{\lambda\rho}^c, \quad (9.6.39)$$

яка тільки множником $1/2$ відрізняється від (9.6.33). Незаважко переконатися, що при перетвореннях (9.6.36) струм (9.6.38) перетворюється коваріантним чином, $\delta j_\mu^a = f^{abc} j_\mu^b \alpha^c$. Тому аномалія (9.6.39) має назву коваріантної. Її поява, як і раніше, пов'язана з неінваріантністю ферміонної міри у функціональному інтегралі при локальних калібрувальних перетвореннях (9.6.36).

9.6.3. Кіральна аномалія та розпад нейтрального піона

Кіральна аномалія Адлера–Белла–Джеківа (9.6.31) з $N_c = 3$ є важливою для опису розпаду нейтрального піона на два фотона $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$. Саме при дослідженні цього процесу квантові аномалії були вперше відкриті в квантовій теорії поля.

Розглянемо розпад $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ у спрощеній моделі нуклон-мезонної взаємодії, враховуючи тільки протонне ψ , нейтральні піонне π - і σ -поля, а також взаємодію протонів з електромагнітним полем [43, 172, 179]. Лагранжіван моделі зі спонтанним порушенням кіральної симетрії визначається рівнянням (див. розділ 12.2)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}[i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m_p + g(\sigma + i\gamma_5\pi)]\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\pi)^2 - \\ & - \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 - \frac{1}{2}m_\pi^2\pi^2 - \lambda v\sigma(\sigma^2 + \pi^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (9.6.40)$$

де $m_p = -gv$ — маса протона, v — вакуумне середнє поля σ , а g — константа нуклон-мезонної взаємодії. Ми також додали в модель затравочні маси піона і сигма-частинок, для яких виконується співвідношення $m_\sigma^2 = m_\pi^2 + 2\lambda v^2$. В результаті дивергенція кірального струму (12.2.11) в цій моделі стає пропорційною масі піона та полю піона

$$\partial^\mu j_{\mu 5} = m_\pi^2 f_\pi \pi, \quad f_\pi = -v = m_p/g. \quad (9.6.41)$$

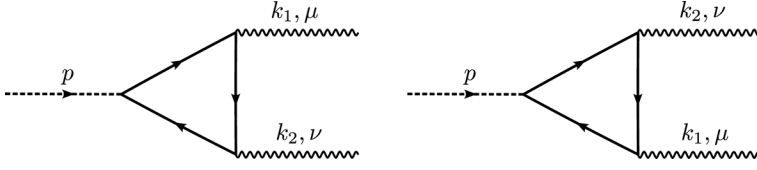


Рис. 54. Дві трикутні діаграми, які описують розпад нейтрального піона у два фотона та визначають кіральну аномалію

Масова розмірність $\partial^\mu j_{\mu 5}$ дорівнює 4, а розмірність піонного поля в правій частині 1. Такі струми, в яких всі оператори, що виникають в дивергенції струму, мають розмірність менше 4 називаються такими, що «частково зберігаються», або «гладкими». Для матричних елементів, що містять відповідні струми, виникають співвідношення в області низьких енергій і малих імпульсів, які не залежать від деталей динаміки. Але в окремих випадках наївні співвідношення типу (9.6.41), що випливають з лагранжіана, не виконуються, і виникають нові доданки в правій частині, залежні від динаміки в конкретній моделі, приводячи до так званих аномалій. Зокрема, як побачимо, це має місце для дивергенції кірального струму.

Проведемо спочатку розрахунок ширини розпаду піона в розглянутій моделі. В найнижчому порядку теорії збурень амплітуда розпаду $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ з імпульсом p на два фотона з імпульсами k_1 і k_2 визначається двома трикутними діаграмами, зображеними на рис. 54, і дорівнює

$$T^{\mu\nu}(k_1, k_2) = M^{\mu\nu}(k_1, k_2) + M^{\nu\mu}(k_2, k_1), \quad (9.6.42)$$

де матричний елемент

$$M^{\mu\nu}(k_1, k_2) = ig_e^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{tr} [G_0(p+q-k_1)\gamma^\mu G_0(p+q)\gamma_5 G_0(q)\gamma^\nu], \quad (9.6.43)$$

$G_0(q) = i/(\hat{q} - m_p)$ є пропагатором протона. Використовуючи

$$\text{tr} [\gamma_5 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2j+1}}] = \text{tr} [\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu] = 0, \quad \text{tr} [\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta] = -4i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta},$$

обчислюємо підінтегральний вираз у рівнянні (9.6.43) і в результаті приходимо до виразу, який враховує внесок двох діаграм

$$T^{\mu\nu}(k_1, k_2) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{8ie^2 g m_p \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (k_1)_\alpha (k_2)_\beta}{[(p+q-k_1)^2 - m_p^2][(p+q)^2 - m_p^2](q^2 - m_p^2)}. \quad (9.6.44)$$

Використовуючи фейнманівські параметри та інтегруючи по імпульсу ферміонної петлі, знаходимо

$$T^{\mu\nu}(k_1, k_2) = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (k_1)_\alpha (k_2)_\beta T(p^2), \quad (9.6.45)$$

де скалярна функція $T(p^2)$ визначається інтегралом

$$T(p^2) = \frac{e^2 g m_p}{2\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [m_p^2 - p^2 xy]^{-1}, \quad (9.6.46)$$

і використано те, що фотони є на масовій оболонці, тобто $k_1^2 = k_2^2 = 0$. На масовій оболонці піона, $p^2 = m_\pi^2 \ll m_p^2$,

$$T(m_\pi^2) \simeq T(0) \left(1 + \frac{1}{12} \frac{m_\pi^2}{m_p^2} \right), \quad T(0) = \frac{e^2 g}{4\pi^2 m_p}. \quad (9.6.47)$$

Як видно, функція $T(p^2)$ є гладкою функцією свого аргументу при малих p^2 , так що із задовільною точністю виконується наближене співвідношення $T(m_\pi^2) \approx T(0)$ для $m_\pi^2 \ll m_p^2$.

Далі, використовуючи формулу (11.2.15) для ширини розпаду піона, отримуємо

$$\begin{aligned} \Gamma_{\pi^0} &= \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{8m_\pi (2\pi)^6 |\mathbf{k}_1| |\mathbf{k}_2|} \left| T^{\mu\nu} \varepsilon_\mu^{(\lambda_1)}(\mathbf{k}_1) \varepsilon_\nu^{(\lambda_2)}(\mathbf{k}_2) \right|^2 \delta^4(p - k_1 - k_2) = \\ &= \frac{\alpha^2 m_\pi^3}{64\pi^3 f_\pi^2} = 7,76 \text{ eB}, \quad \lambda_1, \lambda_2 = 1, 2, \end{aligned} \quad (9.6.48)$$

де $\varepsilon_\mu^{(\lambda_1)}(k_1)$ і $\varepsilon_\nu^{(\lambda_2)}(k_2)$ є векторами поляризації фотонів, а сума по поляризаціям визначається формулою (3.1.35). Також використано, що $g/m_p = 1/f_\pi$, $f_\pi = 92 \text{ MeB}$ — константа розпаду піона. Обчислена ширина розпаду нейтрального піона на два фотони добре узгоджується з експериментальними даними.

Існує інший спосіб обчислення ширини розпаду нейтрального піона на два фотони за допомогою алгебри струмів та гіпотези про часткове збереження аксіального струму (ЧЗАС). Для амплітуди розпаду нейтрального піона на два фотони маємо

$$\langle \gamma(k_1 \varepsilon_1) \gamma(k_2 \varepsilon_2) | \pi^0(p) \rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(p - k_1 - k_2) \varepsilon^\mu(k_1) \varepsilon^\nu(k_2) T_{\mu\nu}(k_1, k_2, p), \quad (9.6.49)$$

де $T_{\mu\nu}$ — амплітуда на масовій оболонці,

$$T_{\mu\nu}(k_1, k_2, p) = e^2 \int d^4 z d^4 y e^{ik_1 z + ik_2 y} \langle 0 | T(j_\mu(z) j_\nu(y)) | \pi^0(p) \rangle, \quad (9.6.50)$$

і j_μ — електромагнітний струм. Далі для корелятора

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu}^5(k_1, k_2, p) = \int d^4 x d^4 y e^{ik_1 y - ipx} \langle 0 | T(j_{\lambda 5}(x) j_\mu(y) j_\nu(0)) | 0 \rangle, \quad (9.6.51)$$

де $j_{\lambda 5} = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma_{\lambda} \gamma_5 \psi$ — кіральний струм, знаходимо

$$p^{\lambda} \Gamma_{\lambda \mu \nu}^5(k_1, k_2, p) = -i \int d^4 x d^4 y e^{ik_1 y - i p x} \langle 0 | T(\partial^{\lambda} j_{\lambda 5}(x) j_{\mu}(y) j_{\nu}(0)) | 0 \rangle. \quad (9.6.52)$$

По-друге, нейтральний піон має такі самі квантові числа, як і аксіальний струм $j_{\mu 5}$. Тому, використовуючи лоренц- і пуанкаре-інваріантність, матричний елемент цього струму відносно вакууму і піонного поля може бути записаний як

$$\langle 0 | j_{\mu 5}(x) | \pi^0(p) \rangle = i f_{\pi} p_{\mu} e^{-i p x}. \quad (9.6.53)$$

Він відмінний від нуля для $f_{\pi} \neq 0$, і для дивергенції струму маємо

$$\partial^{\mu} \langle 0 | j_{\mu 5}(x) | \pi^0(p) \rangle = m_{\pi}^2 f_{\pi} e^{-i p x}. \quad (9.6.54)$$

Більш сильна операторна рівність

$$\partial^{\mu} j_{\mu 5} = f_{\pi} m_{\pi}^2 \pi^0 \quad (9.6.55)$$

відома як гіпотеза про часткове збереження аксіального струму.

Використовуючи цю гіпотезу, означення (9.6.50) та редукційну формулу Лемана—Симанзика—Циммермана (11.5.30), знаходимо у випадку фотонів на масовій поверхні, $k_1^2 = k_2^2 = 0$, що

$$p^{\lambda} \Gamma_{\lambda \mu \nu}^5(k_1, k_2, p) = \frac{i f_{\pi} m_{\pi}^2}{e^2(p^2 - m_{\pi}^2)} T_{\mu \nu}(k_1, k_2, p). \quad (9.6.56)$$

Загальна структура тензора $T_{\mu \nu}$ є такою

$$T_{\mu \nu}(k_1, k_2, p) = \varepsilon_{\mu \nu \alpha \beta} k_1^{\alpha} k_2^{\beta} T(p^2) \quad (9.6.57)$$

внаслідок коваріантності відносно лоренцівських перетворень та збереження парності. Крім того, нейтральний піон є псевдоскалярною частинкою, тому $T_{\mu \nu}$ повинен бути псевдотензором. Звідси присутність тензора $\varepsilon_{\mu \nu \alpha \beta}$. Очевидно, що калібрувальна інваріантність $k_1^{\mu} T_{\mu \nu} = k_2^{\nu} T_{\mu \nu} = 0$ виконується автоматично і бозе-симетрія $T_{\mu \nu}(k_1, k_2) = T_{\nu \mu}(k_2, k_1)$ також має місце.

Далі тензор $\Gamma_{\lambda \mu \nu}^5(k_1, k_2, p)$ також має бути пропорційним антисиметричному тензору Леві-Чивіти, тому що струм $j_{\lambda 5}^3$ є псевдовектором. Враховуючи поперечність відносно імпульсів фотонів k_1^{μ} і k_2^{ν} , тобто $k_1^{\mu} \Gamma_{\lambda \mu \nu}^5 = k_2^{\nu} \Gamma_{\lambda \mu \nu}^5 = 0$, а також бозе-симетрію $\Gamma_{\lambda \mu \nu}^5(k_1, k_2, p) = \Gamma_{\lambda \nu \mu}^5(k_2, k_1, p)$, загальна структура тензора $\Gamma_{\lambda \mu \nu}^5$ є такою

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda \mu \nu}^5(k_1, k_2, p) = & \varepsilon_{\mu \nu \alpha \beta} k_1^{\alpha} k_2^{\beta} p_{\lambda} F_1(p^2) + (\varepsilon_{\lambda \mu \alpha \beta} k_{2\nu} - \varepsilon_{\lambda \nu \alpha \beta} k_{1\mu}) k_1^{\alpha} k_2^{\beta} F_2(p^2) + \\ & + \left[(\varepsilon_{\lambda \mu \alpha \beta} k_{1\nu} - \varepsilon_{\lambda \nu \alpha \beta} k_{2\mu}) k_1^{\alpha} k_2^{\beta} - \varepsilon_{\lambda \mu \nu \alpha} (k_1^{\alpha} - k_2^{\alpha}) \frac{p^2}{2} \right] F_3(p^2). \end{aligned} \quad (9.6.58)$$

Звідси, згортаючи за імпульсом піона, маємо

$$p^\lambda \Gamma_{\lambda\mu\nu}^5(k_1, k_2, p) = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta p^2 (F_1(p^2) + F_3(p^2)). \quad (9.6.59)$$

В результаті, враховуючи рівняння (9.6.56) і (9.6.57), знаходимо

$$T(p^2) = -i \frac{e^2(p^2 - m_\pi^2)}{f_\pi m_\pi^2} p^2 (F_1(p^2) + F_3(p^2)). \quad (9.6.60)$$

Оскільки у функціях $F_1(p^2)$ і $F_3(p^2)$ відсутні кінематичні сингулярності при $p^2 = 0$ (відсутні сильновзаємодіючі частинки з нульовою масою), то, як вперше показали Сазерленд [182] і Вельтман [193], маємо $T(0) = 0$. Звідси випливає, що в границі $p^2 \rightarrow 0$ (продовжуючи за масову оболонку) амплітуда $T_{\mu\nu}$ повинна дорівнювати нулю. В межах теорії ЧЗАС маємо $T(m_\pi^2) \approx T(0)$ і амплітуда розпаду $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ сильно подавлена. Цей результат суперечить експериментальним фактам та прямому обчисленню ширини розпаду в моделі нуклон-піонної взаємодії, розглянутій вище.

Це протиріччя було вирішене Адлером у 1969 р. з відкриттям кіральної аномалії, коли замість наївного рівняння (9.6.55) застосовуємо формулу (порівняйте з (9.6.27))

$$\partial_x^\mu j_{\mu 5} = f_\pi m_\pi^2 \pi^0 - \frac{e^2}{32\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}, \quad (9.6.61)$$

де враховано, що означення струму $j_{\mu 5}$ у розглянутій моделі містить коефіцієнт $1/2$. Тоді для шуканих кореляторів маємо співвідношення

$$\begin{aligned} \partial_x^\mu \langle 0 | T j_{\mu 5}(x) j_\nu(y) j_\lambda(0) | 0 \rangle &= f_\pi m_\pi^2 \langle 0 | T j_\nu(y) j_\lambda(0) \pi^0(x) | 0 \rangle - \\ &- \frac{e^2}{32\pi^2} \langle 0 | \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma} F^{\alpha\beta} F^{\gamma\sigma}(x) j_\nu(y) j_\lambda(0) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (9.6.62)$$

Після фур'є-перетворення на масовій оболонці знаходимо

$$p^\mu \Gamma_{\mu\nu\lambda}^5(k_1, k_2, p) = \frac{i f_\pi m_\pi^2}{e^2(p^2 - m_\pi^2)} T_{\nu\lambda}(k_1, k_2) + \frac{i}{4\pi^2} \varepsilon_{\nu\lambda\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta, \quad (9.6.63)$$

де використано редуційну формулу Лемана—Симанзіка—Циммермана (11.5.30), а також рівняння Максвелла $\partial^\mu F_{\mu\nu} = e j_\nu$ при обчисленні аномального доданка у найнижчому порядку по e . Таким чином, в границі $p \rightarrow 0$ маємо таку низькоенергетичну теорему

$$T_{\mu\nu}(k_1, k_2) = \frac{e^2}{4\pi^2 f_\pi} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta. \quad (9.6.64)$$

Враховуючи, що $g/m_p = 1/f_\pi$, ця амплітуда узгоджується з амплітудою, обчисленою раніше за допомогою двох трикутних діаграм у моделі з нуклон-піонною взаємодією (формули (9.6.45) і (9.6.47)). Таким чином,

ширина розпаду нейтрального піона $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ дійсно повністю визначається кіральною аномалією в границі низьких енергій.

У квантовій хромодинаміці піони, як і інші сильновзаємодіючі частинки, складаються з кварків, зокрема нейтральний піон складається з u і d кварків, $|\pi^0\rangle = (\bar{u}u - \bar{d}d)/\sqrt{2}$. Тому кіральна аномалія приймає вид (9.6.31), де права частина множиться на число кольорів N_c , і для узгодження з експериментом потрібно, щоб число кольорів дорівнювало трьом, $N_c = 3$. Це є одним із багатьох експериментальних фактів, що підтверджують КХД.

9.7. Тотожності Славнова—Тейлора

У цьому розділі ми отримуємо узагальнені тотожності УТ, які пов'язують функції Гріна з різним числом зовнішніх ліній у неабелевих теоріях і які мають назву тотожностей Славнова—Тейлора (СТ). Вони є наслідком калібрувальної симетрії та аналогом тотожностей Уорда—Такахаші в абелевій калібрувальній теорії і відіграють таку саму роль: зменшують число типів ультрафіолетових розбіжностей і відповідних констант перенормування. Тотожності СТ є точними обмеженнями для будь-якого розв'язку рівнянь Швінгера—Дайсона в КХД.

Метод виведення тотожностей ідейно аналогічний тому, що застосовувався в КЕД. Всі тотожності можуть бути отримані з однієї тотожності для генеруючого функціонала, аналогічній тотожності (9.3.3) або (9.3.4) в КЕД. Ми обмежимося випадком теорії Янга—Міллса без полів матерії в коваріантній калібровці, де генеруючий функціонал має вигляд

$$Z(J) = N \int \mathcal{D}A \Delta(A) \exp \left[i \int d^4x \left\{ \mathcal{L}(x) - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 + J^{a\mu} A_\mu^a \right\} \right], \quad (9.7.1)$$

де міра інтегрування $\mathcal{D}A$ має стандартний вигляд $\mathcal{D}A = \prod_{a,\mu,x} \mathcal{D}A_\mu^a(x)$. Лагранжیان $\mathcal{L}(x)$ поля Янга—Міллса, визначений в (4.1.24), є інваріантним відносно локальних калібрувальних перетворень, які в інфінітезимальній формі мають вигляд (див. (4.1.17))

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu'^a = A_\mu^a + D_\mu^{ab} \omega^b, \quad D_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu - g f^{acb} A_\mu^c. \quad (9.7.2)$$

Детермінант Фаддеева—Попова $\Delta(A)$ є визначником оператора $M = \partial^\mu D_\mu$ для обраної калібровки, $\Delta(A) = \text{Det} M$. З використанням допоміжних полів Фаддеева—Попова функціонал (9.7.1) має вигляд

$$Z(J) = N \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \exp \left[i \int d^4x \left\{ \mathcal{L}(x) - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 - \bar{c}^a \partial^\mu D_\mu^{ab} c^b + J^{a\mu} A_\mu^a \right\} \right],$$

Зробимо тепер заміну змінної $A_\mu^a \rightarrow A_\mu'^a$ в інтегралі (9.7.1), яка відповідає інфінітезимальному калібрувальному перетворенню (9.7.2). Розглянемо спеціальний вид перетворення де функції ω^b задовольняють

рівнянню

$$M^{ab}\omega^b = \chi^a,$$

і χ^a — довільні інфінітезимальні функції незалежні від поля A (перетворення Славнова), тобто $\omega = M^{-1}\chi$. Це відповідає нелокальному калібрувальному перетворенню: оператор M^{-1} є інтегральним оператором оберненим до диференційного оператора $M_{xy}^{ab} = \partial_x^\mu D_{x\mu}^{ab} \delta(x-y)$, і задовольняє рівнянню

$$\int d^4z M_{xz}^{ab} M_{zy}^{-1bc}(A) = \partial_x^\mu D_{x\mu}^{ab} M_{xy}^{-1bc}(A) = \delta^{ac} \delta(x-y). \quad (9.7.3)$$

Функція M_{xy}^{-1ab} є звичайно ж функцією Гріна духової частинки у зовнішньому векторному полі A_μ . Лагранжіан $\mathcal{L}(x)$, очевидно, інваріантний щодо зазначеної заміни. Можна показати, що і міра інтегрування $\mathcal{D}A\Delta(A)$ також інваріантна, а варіація $\delta(\partial^\mu A_\mu^a) = \chi^a$. Оскільки заміна змінних в інтегралі не змінює його значення, то прирівнюючи нулю варіацію Z по χ , маємо

$$\int \mathcal{D}A_\mu^a \Delta(A_\mu^a) \exp \left[i \int d^4x \{ \mathcal{L}(x) - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 + J^{a\mu}(x) A_\mu^a(x) \} \right] \times \\ \times \left[-\frac{1}{\xi} \partial_y^\mu A_\mu^a(y) + \int d^4z J^{b\mu}(z) D_{z\mu}^{bc}(A) [M^{-1}(A)]_{zy}^{ca} \right] = 0. \quad (9.7.4)$$

Замінюючи у передекспоненційному факторі змінну A_μ^a на варіаційну похідну $\delta/i\delta J^{a\mu}$, отримуємо

$$\left\{ -\frac{1}{\xi} \partial_x^\mu \frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}(x)} + \int d^4z J^{b\mu}(z) D_{z\mu}^{bc}(\delta/i\delta J) [M^{-1}(\delta/i\delta J)]_{zx}^{ca} \right\} Z(J) = 0. \quad (9.7.5)$$

Тотожність (9.7.5) для генеруючого функціонала і є тотожність Славнова–Тейлора. Хоча при отриманні цієї тотожності ми використовували спеціальний вид калібрувального перетворення з параметром, залежним нелінійним чином від калібрувального поля, можна показати, що тотожність (9.7.5) є найбільш загальним обмеженням на $Z(J)$, яке випливає з калібрувальної інваріантності лагранжіана.

Диференціюючи цю тотожність за джерелами, ми отримуємо співвідношення між функціями Гріна теорії Янга–Міллса. Наприклад, продиференціюємо (9.7.5) по $J_\nu^b(y)$ і покладемо джерела рівними нулю, знаходимо

$$\frac{i}{\xi} \langle T \partial_x^\mu A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle = D_{y\nu}^{bc} \left(\frac{\delta}{i\delta J} \right) M_{yx}^{-1ca} \left(\frac{\delta}{i\delta J} \right) Z(J) \Big|_{J=0} = \\ = \langle D_{y\nu}^{bc}(A) [M^{-1}(A)]_{yx}^{ca} \rangle. \quad (9.7.6)$$

Дужки $\langle \dots \rangle$ означають функціональне інтегрування за калібрувальним полем з відповідною мірою, як в (9.7.1), наприклад $\langle T[M^{-1}(A)]_{yx}^{ca} \rangle$ є повним пропагатором духів,

$$M^{-1ca} \left(\frac{\delta}{i\delta J} \right) Z(J) \Big|_{J=0} = \langle T[M^{-1}(A)]_{yx}^{ca} \rangle = i \langle Tc^c(y)\bar{c}^a(x) \rangle. \quad (9.7.7)$$

Відповідно, (9.7.6) перепишеться

$$\frac{1}{\xi} \langle T\partial_x^\mu A_\mu^a(x)A_\nu^b(y) \rangle = -\langle T\bar{c}^a(x)(D_\mu c)^b(y) \rangle. \quad (9.7.8)$$

Диференціюючи рівність (9.7.6) за змінною y і використовуючи операторну рівність $MM^{-1} = 1$ або (9.7.3), отримуємо для пропагатора глюонів

$$\frac{i}{\xi} \langle T\partial_x^\mu A_\mu^a(x)\partial_y^\nu A_\nu^b(y) \rangle = \frac{i}{\xi} \partial_x^\mu \partial_y^\nu D_{\mu\nu}^{ab}(x-y) = \delta^{ab}\delta(x-y). \quad (9.7.9)$$

Ця тотожність фіксує поздовжню частину пропагатора поля Янга—Міллса $\langle TA_\mu^a(x)A_\nu^b(y) \rangle$, аналогічно тотожності (9.3.9) для фотонного пропагатора в КЕД, тобто поздовжня частина пропагатора не модифікується взаємодіями. Наслідком тотожності є те, що пропагатор глюонів в імпульсному просторі в коваріантній калібровці має загальну структуру

$$D_{\mu\nu}^{ab}(k) = \frac{\delta^{ab}}{ik^2} \left[\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) D(k^2) + \xi \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \quad (9.7.10)$$

з однією невідомою функцією $D(k^2)$.

Диференціюючи (9.7.5) по $J_\nu^b(y)$ і $J_\lambda^c(z)$, отримуємо тотожність для триглюонної вершинної функції

$$\frac{i}{\xi} \langle T\partial_x^\mu A_\mu^a(x)A_\nu^b(y)A_\lambda^c(z) \rangle = \langle TA_\lambda^c(z)D_{y\nu}^{be}M_{yx}^{-1ea}(A) \rangle + \langle TA_\nu^b(y)D_{z\lambda}^{ce}M_{zx}^{-1ea}(A) \rangle.$$

На відміну від КЕД, дивергенція вершинної функції не виражається тільки через двочкові функції Гріна. Диференціюючи по y , отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{i}{\xi} \langle T\partial_x^\mu A_\mu^a(x)\partial_y^\nu A_\nu^b(y)A_\lambda^c(z) \rangle &= \langle T\partial_y^\nu A_\nu^b(y)D_{z\lambda}^{ce}M_{zx}^{-1ea}(A) \rangle = \\ &= -i \langle T\partial_y^\nu A_\nu^b(y)\bar{c}^a(x)D_\lambda^{cd}c^d(z) \rangle. \end{aligned} \quad (9.7.11)$$

Зазначені тотожності можна записати і в імпульсному просторі (див. [37, 39, 76, 127]). Вивід тотожностей Славнова—Тейлора можна спростити, якщо використовувати БРСТ-симетрію.

ЗАДАЧІ

1. Функціонал $W(J_\mu, \bar{\eta}, \eta)$, пов'язаний з функціоналом $Z(J_\mu, \bar{\eta}, \eta)$ співвідношенням

$$Z(J_\mu, \bar{\eta}, \eta) = e^{iW(J_\mu, \bar{\eta}, \eta)},$$

породжує зв'язні функції Гріна. Переписати функціональні рівняння Швінгера—Дайсона для $Z(J_\mu, \bar{\eta}, \eta)$ у квантовій електродинаміці як рівняння для функціонала $W(J_\mu, \bar{\eta}, \eta)$.

2. У теорії дійсного скалярного поля з лагранжевою густиною (5.2.1) отримати рівняння Швінгера—Дайсона для пропагатора і чотири-точкової вершинної функції з рівняння для функціонала $W(J)$.

3. Вивести рівняння Швінгера—Дайсона для пропагатора і вершин взаємодії в електродинаміці зарядженого скалярного поля з лагранжевою густиною

$$\mathcal{L} = (D_\mu \Phi)^* D^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi - \frac{\lambda}{4} (\Phi^* \Phi)^2, \quad D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu.$$

4. Вивести рівняння Швінгера—Дайсона для глюодинаміки (теорії Янга—Міллса без полів матерії).

5. Ферміонний пропагатор в КЕД визначається функціональним інтегралом (9.4.1). Зробити таку заміну ферміонних змінних в чисельнику функціонального інтеграла

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\theta(x)} \psi, \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow e^{-i\theta(x)} \bar{\psi}.$$

Прирівнюючи варіацію інтеграла по $\theta(x)$ до нуля, отримати співвідношення між кореляційними функціями

$$\begin{aligned} \partial_x^\mu \langle 0 | T j_\mu(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) | 0 \rangle &= \delta(x - y_1) \langle 0 | T \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) | 0 \rangle - \\ &- \delta(x - x_1) \langle 0 | T \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) | 0 \rangle, \end{aligned}$$

де $j_\mu(x) = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi(x)$ — електричний струм.

Показати, що це співвідношення можна узагальнити таким чином

$$\begin{aligned} &\partial_x^\mu \langle 0 | T j_\mu(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) \dots \psi(x_n) \bar{\psi}(y_n) | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | T \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) \dots \psi(x_n) \bar{\psi}(y_n) | 0 \rangle \sum_{i=1}^n (\delta(x - y_i) - \delta(x - x_i)). \end{aligned}$$

6. У попередній задачі, визначаючи ампутовану вершину Γ_μ відповідно до

$$\langle 0|Tj_\mu(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(y_1)|0\rangle = \int \frac{d^4p d^4k}{(2\pi)^8} e^{-ip(x_1-x)+ik(y_1-x)} G(p)\Gamma_\mu(p,k)G(k)$$

і виконуючи фур'є-перетворення, записати попередню тотожність у вигляді рівняння (9.3.14).

7. Отримати тотожність Уорда–Такахаші для комптонівської амплітуди розсіяння поза масовою оболонкою

$$\begin{aligned} \partial_\mu^z \langle 0|Tj_\mu(z)j_\nu(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(y_1)|0\rangle &= \langle 0|Tj_\nu(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(y_1)|0\rangle \times \\ &\times (\delta(z-y_1) - \delta(z-x_1)). \end{aligned}$$

Зробити фур'є-перетворення і записати тотожність для ампутованих функцій Гріна.

8. У попередній задачі показати, що з отриманої тотожності одержується тотожність (9.4.7) для комптонівської амплітуди розсіяння вперед. Перевірити цю тотожність у деревному наближенні, де $G^{-1}(p) = \hat{p} - m$ і комптонівська амплітуда

$$\Gamma_{\mu\nu}(p,p;k,k) = \gamma^\mu \frac{1}{\hat{p} + \hat{k} - m} \gamma^\nu + \gamma^\mu \frac{1}{\hat{p} - \hat{k} - m} \gamma^\nu.$$

9. Обчислити в розмірній регуляризації функцію $\Delta(0) - \Delta(x)$ з рівності (9.4.11).
10. Використовуючи тотожність Нільсена для ферміонного пропагатора $G(p, \xi)$ на масовій оболонці,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} G^{-1}(p, \xi) \Big|_{\hat{p}=m} = 0,$$

довести що фізична маса, яка визначається полюсом пропагатора, $G^{-1}(p, \xi) \Big|_{\hat{p}=m} = 0$, є калібрувально інваріантною величиною, тобто $\partial m / \partial \xi = 0$. Використати загальну матричну структуру $G^{-1}(p) = -i[A(p^2)\hat{p} - B(p^2)]$.

11. Вивести кіральну аномалію в методі Фуджікави, використовуючи в якості регуляризаційної функції $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x = (i\hat{D})^2/M^2$.

12. Показати, що кіральна аномалія не залежить від вибору регуляризаційної функції $f(x) = e^{-x}$, де $x = -\lambda_n^2/M^2$ в рівнянні (9.6.13), тобто що результат не залежить від конкретного вибору $f(x)$, якщо $f(x)$ задовольняє умови $f(0) = 1$, $f(\infty) = 0$, і $xf'(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ та $x \rightarrow +\infty$.
13. За допомогою параметризації Фейнмана виконати інтегрування в рівнянні (9.6.44) для амплітуди розпаду нейтрального піона на два фотона і показати, що вона зводиться до амплітуди (9.6.45).
14. Показати, що міра інтегрування $\mathcal{D}A \Delta(A)$ в інтегралі (9.7.1) є інваріантною при заміні змінних (9.7.2) (перетворення Славнова) з параметром $\omega^a(A) = M^{-1ab}(A)\chi^b$, де інфінітезимальна функція χ^b не залежить від поля A .

РІВНЯННЯ РЕНОРМАЛІЗАЦІЙНОЇ ГРУПИ

У цьому розділі ми розглянемо спочатку рівняння ренормалізаційної групи, а потім типові та найбільш важливі розв'язки цих рівнянь. Ренормалізаційна група (скорочено ренормгрупа) математично являє собою метод, який дозволяє систематично дослідити, як відбуваються зміни фізичних величин та спостережуваних при зміні масштабу. Причина того, чому ренормалізаційна група є важливою при дослідженні квантово-польових систем, є доволі очевидною. Процедура перенормування приводить автоматично до появи деякого масштабу імпульсів, де визначаються скінченні частини розбіжних діаграм. Цей масштаб є довільним, і тому з'являється свобода щодо його зміни, тобто масштабних перетворень (scaling). При цьому параметри перенормованої теорії поля, як-то маси і константи взаємодії, стають залежними від масштабу, але змінюються вони таким чином, щоб фізичні спостережувані залишались незмінними.

Ідея ренормалізаційної групи вперше з'явилася в теорії квантових полів у роботі Штюкельберга і Петерманна у 1953 р. Значний внесок у розвиток ренормгрупи в квантовій теорії поля зроблено працями М. Гелл-Манна і Ф. Лоу, М. Боголюбова і Д. Ширкова, К. Калана, К. Симанзіка, К. Вільсона, С. Вайнберга, Г. 'т Хоофта. Ренормгрупа отримала широке застосування також у фізиці конденсованого середовища для опису критичних явищ, у газо- і гідродинаміці та інших галузях фізики.

10.1. Ренормалізаційна група в квантовій електродинаміці

Для того, щоб вивести рівняння ренормалізаційної групи в квантовій електродинаміці, розглянемо спочатку неперенормований пропагатор $G(x - y) = \langle 0|T\psi_B(x)\bar{\psi}_B(y)|0\rangle$. Його фур'є-перетворення має вигляд

$$G(p) = \frac{i}{\hat{p} - m_0 - \Sigma(p)}, \quad (10.1.1)$$

де $\Sigma(p)$ — власна енергія електрона. Останню після виділення розбіжних частин A і B в довільному порядку теорії збурень, запишемо таким чином

$$\Sigma(p) = B\hat{p} - A + \Sigma_f(p), \quad (10.1.2)$$

Після простих перетворень маємо

$$G(p) = Z_2 G_r, \quad G_r = \frac{i}{\hat{p} - m - \Sigma_r(p)}, \quad (10.1.3)$$

$$Z_2 = \frac{1}{1 - B}, \quad \Sigma_r(p) = \frac{\Sigma_f(p)}{1 - B},$$

тобто неперенормований і перенормований пропагатори зв'язані мультиплікативно. $\Sigma_r(p)$ не містить розбіжностей і визначається тільки перенормованими зарядом і масою. Ми маємо також зв'язок між голою (затраченою) масою m_0 і скінченною масою електрона m у вигляді

$$m = \frac{m_0 - A}{1 - B} \Rightarrow m_0 = m Z_2^{-1} + A. \quad (10.1.4)$$

У порядку e^2 константи A і B наведені в (8.8.7), і легко бачити, що (10.1.4) і вираз для Z_2 співпадають в даному порядку з отриманими в розділі 8.8.

Як уже зазначалось, процедура виділення розбіжностей в (10.1.2) не є однозначною, вона залишає невизначеними скінченні константи, які можна віднести до скінченної величини $\Sigma_f(p)$. Довільні константи, які з'являються в G_r , можна зафіксувати умовами нормування, наприклад умовою поведінки поблизу полюса

$$G_r(p) \sim \frac{i}{\hat{p} - m}, \quad \hat{p} \rightarrow m. \quad (10.1.5)$$

Тобто ці константи (дві в даному випадку) фіксуються із умови наявності полюсу перенормованого пропагатора в точці $\hat{p} = m$ з лишком, який дорівнює i , де m — фізична маса електрона.

Умови нормування легше всього сформулювати на мові одночастинково-незвідних функцій Гріна, які визначаються як сума діаграм, які не можна розбити на дві частини, розрізаючи одну лінію, крім того, всі зовнішні лінії вважаються видаленими (ампутованими). Наприклад, для $G(p)$ за означенням ОЧН функції маємо

$$\begin{aligned} -i\Gamma^{(2)}(p) &= G^{-1}(p) \cdot G(p) \cdot G^{-1}(p) = G^{-1}(p) = \\ &= G_0^{-1}(p) - (-i)\Sigma(p). \end{aligned} \quad (10.1.6)$$

Аналогічно для ампутованого фотонного пропагатора

$$\begin{aligned} -i\Gamma_{\mu\nu}^{(2)}(k) &= D_{\mu\lambda}^{-1}(k) D^{\lambda\rho}(k) D_{\rho\nu}^{-1} = D_{\mu\nu}^{-1}(k) = \\ &= i(g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu)(1 + \Pi(k^2)) + \frac{i}{\xi} k_\mu k_\nu, \end{aligned} \quad (10.1.7)$$

де $\Pi(k^2)$ — скалярна поляризаційна функція, а ξ — калібрувальний параметр, і для вершини

$$\Gamma_\mu(p, p') = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p, p'). \quad (10.1.8)$$

Зв'язок перенормованих і неперенормованих функцій Гріна тоді визначається таким чином

$$\Gamma^{(2)}(p) = Z_2^{-1} \Gamma_r^{(2)}(p), \quad (10.1.9)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{(2)}(p) = Z_3^{-1} \Gamma_{r\mu\nu}^{(2)}(p), \quad (10.1.10)$$

$$\Gamma_\mu(p, p') = Z_1^{-1} \Gamma_{r\mu}(p, p'). \quad (10.1.11)$$

Довільні константи в перенормованих функціях Γ_r фіксуються умовами нормування. Одне з таких нормувань — це нормування по Дайсону. Воно здійснюється для імпульсу, який відповідає фізичній масі частинки: для ферміонної ОЧН-функції покладемо

$$\Gamma_r^{(2)}(\hat{p})|_{\hat{p}=m} = G_r^{-1}(p)|_{\hat{p}=m} = 0, \quad (10.1.12)$$

$$\left. \frac{\partial \Gamma_r^{(2)}(\hat{p})}{\partial \hat{p}} \right|_{\hat{p}=m} = 1, \quad (10.1.13)$$

для вершинної функції

$$\Gamma_r^\mu(p, p)|_{\hat{p}=m} = \gamma^\mu. \quad (10.1.14)$$

Довільну константу у фотонній функції $\Gamma_{\mu\nu}^{(2)}(k)$ фіксуємо із умови

$$\Pi_r(0) = 0. \quad (10.1.15)$$

Використовуючи зв'язок з неперенормованими функціями Гріна, можна звідси визначити константи нормування Z_i , голу масу m_0 і голий заряд e_0 . Наприклад, із (10.1.9), використовуючи (10.1.12),

$$\Gamma^{(2)}(\hat{p} = m) = 0 \Rightarrow (\hat{p} - m_0 - \Sigma(p))|_{\hat{p}=m} = 0, \quad (10.1.16)$$

знаходимо голу масу $m_0 = m_0(m, e, \mu, n)$ як функцію фізичних маси і заряду, а також масового параметра μ і розмірності n (в розмірній регуляризації). Також із (10.1.9), використовуючи (10.1.13), знаходимо константу Z_2 :

$$\left. \frac{\partial \Gamma^{(2)}(\hat{p})}{\partial \hat{p}} \right|_{\hat{p}=m} = 1 - \left. \frac{\partial \Sigma(\hat{p})}{\partial \hat{p}} \right|_{\hat{p}=m} = Z_2^{-1}(m, \mu, e, n). \quad (10.1.17)$$

Константу Z_1 знаходимо з (10.1.11) і (10.1.14)

$$\Gamma_\mu(p, p)|_{\hat{p}=m} = \gamma_\mu Z_1^{-1}. \quad (10.1.18)$$

Для константи Z_3 і голого заряду отримуємо

$$Z_3^{-1} = 1 + \Pi(0), \quad (10.1.19)$$

$$e_0 = \frac{Z_1 \mu^{2-n/2}}{Z_2 Z_3^{1/2}} e = Z_3^{-1/2} e \mu^{2-n/2}. \quad (10.1.20)$$

Безумовно, можна використовувати інші умови нормування, наприклад, зручним є нормування в евклідовій області в деякій точці $p^2 = -\mu^2$.

Основним об'єктом застосування ренормгрупи є вакуумні середні добуток польових операторів $\langle T \bar{\psi}(x_1) \cdots \psi(x_{n_e}) A_\mu(y_1) \cdots A_\nu(y_{n_\gamma}) \rangle$, де n_e і n_γ — число електронних і фотонних операторів відповідно. Для ОЧН-функцій Гріна запишемо ренормалізаційні співвідношення в імпульсному просторі між перенормованими і перенормованими функціями

$$\Gamma^{(n_e+n_\gamma=n)}(p_1, \dots, p_n, e_0, m_0, n) = Z_2^{-n_e/2} Z_3^{-n_\gamma/2} \Gamma_r^{(n)}(p_1, \dots, p_n; e_r, m_r, \mu, n), \quad (10.1.21)$$

які залежать від голих, m_0, e_0 , і перенормованих, m_r, e_r , параметрів відповідно. За визначенням перенормовані функції $\Gamma_r^{(n)}(p_1, \dots, p_n; e_r, m_r, \mu, n)$ скінченні, коли розмірність простору-часу $n \rightarrow 4$. Неперенормовані функції Гріна не залежать від параметра перенормування μ , тоді як перенормовані функції Гріна Γ_r залежать від μ як явно, так і неявно через перенормовані заряд e_r і масу m_r , які в загальному випадку довільної ренормалізаційної схеми відрізняються від таких самих параметрів у схемі перенормування за Дайсоном. Тому, очевидно, справедливо

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n, e_0, m_0, n) = 0, \quad (10.1.22)$$

і, диференціюючи рівність (10.1.21) по μ , беручи до уваги, що залежність від μ міститься в константах Z_i , параметрах e_r і m_r , отримуємо

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Gamma_r(p_1, \dots, p_n; e_r, m_r, \mu, n) - \left(\frac{n_\gamma}{2} \mu \frac{d}{d\mu} \ln Z_3 + \frac{n_e}{2} \mu \frac{d}{d\mu} \ln Z_2 \right) \Gamma_r = 0.$$

Далі, розписуючи повну похідну, маємо

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial e_r}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial}{\partial e_r} + \mu \frac{\partial m_r}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial m_r} - \frac{n_\gamma}{2} \cdot \mu \frac{\partial \ln Z_3}{\partial \mu} - \frac{n_e}{2} \mu \frac{\partial \ln Z_2}{\partial \mu} \right) \Gamma_r = 0. \quad (10.1.23)$$

Визначимо функції

$$\beta \left(e_r, \frac{m_r}{\mu}, n \right) \equiv \mu \frac{\partial e_r}{\partial \mu}, \quad (10.1.24)$$

$$\gamma_m \left(e_r, \frac{m_r}{\mu}, n \right) \equiv \mu \frac{\partial m_r}{m_r \cdot \partial \mu}, \quad \gamma \left(e_r, \frac{m_r}{\mu}, n \right) \equiv \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu}. \quad (10.1.25)$$

Ці функції мають границю при $n \rightarrow 4$, безрозмірні і залежать від e_r та відношення m_r/μ . В останньому рівнянні вже можна перейти до границі $n \rightarrow 4$, тоді маємо

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial e_r} + \gamma_m \cdot m_r \frac{\partial}{\partial m_r} - n_\gamma \gamma_\gamma - n_e \gamma_e \right) \Gamma_r^{(n)}(p_1, \dots, p_n, e_r, m_r, \mu) = 0. \quad (10.1.26)$$

Це і є шукане рівняння ренормалізаційної групи. Воно означає, що явна залежність перенормованих функцій $\Gamma_r^{(n)}(p_1, \dots, p_n, e_r, m_r, \mu)$ від параметра μ повинна бути скомпенсована залежністю від нього величин e_r і m_r .

Скористаємося міркуваннями розмірного аналізу загального виду (див. розділ 7.5) і спочатку обчислимо розмірність $\Gamma_r^{(n)}$. Для функції Гріна загального виду

$$G(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T \psi(x_1) \dots \psi(x_{\frac{n_e}{2}}) \bar{\psi} \dots \bar{\psi}(x_{\frac{n_e}{2}}) A(y_1) \dots A(y_{n_\gamma}) | 0 \rangle,$$

враховуючи розмірність полів $[\psi] = m^{3/2}$, $[A_\mu] = m$, знаходимо розмірність

$$[G(x_1, \dots, x_n)] = m^{\frac{3}{2}n_e + n_\gamma}. \quad (10.1.27)$$

З фур'є-перетворення

$$G(p_1, \dots, p_n) = \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n e^{i \sum_{i=1}^n p_i x_i} G(x_1, \dots, x_n) \quad (10.1.28)$$

визначається розмірність функції Гріна в імпульсному просторі

$$[G(p_1, \dots, p_n)] = m^{\frac{3}{2}n_e + n_\gamma - 4(n_e + n_\gamma)}, \quad (10.1.29)$$

де ми використали, що $[x] = \text{см}^{-1}$. Далі, виділяючи дельта-функцію,

$$G(p_1, \dots, p_n) = \delta(p_1 + \dots + p_n) \bar{G}(p_1, \dots, p_n),$$

маємо для розмірності \bar{G} :

$$[\bar{G}(p_1, \dots, p_n)] = m^{4 - \frac{3}{2}n_e - 3n_\gamma}. \quad (10.1.30)$$

Остаточно знаходимо розмірність ампутованих функцій Гріна

$$\Gamma = (G^{-1})^{n_e} (D^{-1})^{n_\gamma} \bar{G} \Rightarrow [\Gamma] = m^D, \quad (10.1.31)$$

де степінь D є

$$D = 4 - \frac{3}{2}n_e - n_\gamma, \quad (10.1.32)$$

яка співпадає з індексом розбіжності діаграм відповідної функції Гріна.

З міркувань розмірності запишемо Γ_r у вигляді

$$\Gamma_r = \mu^D f\left(\frac{p_1}{\mu}, \dots, \frac{p_n}{\mu}, \frac{m_r}{\mu}, e_r\right), \quad (10.1.33)$$

де f є безрозмірною функцією своїх аргументів. З точки зору фізики нас цікавить залежність від імпульсів, тому розглянемо випадок, коли всі імпульси в Γ_r змінюються одночасно в t разів:

$$\Gamma_r(tp_1, \dots, tp_n, m_r, \mu, e_r) = \mu^D f\left(\frac{tp_i}{\mu}, \frac{m_r}{\mu}, e_r\right). \quad (10.1.34)$$

Частинну похідну по μ перепишемо так:

$$\mu \frac{\partial \Gamma_r}{\partial \mu} = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\mu^D f\left(\frac{tp_i}{\mu}, \frac{m_r}{\mu}, e_r\right) \right] = D\Gamma_r - t \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_r - m_r \frac{\partial}{\partial m_r} \Gamma_r. \quad (10.1.35)$$

Таким чином, отримуємо для Γ_r рівняння, яке виражає зміну масштабу μ зі зміною імпульсів

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + t \frac{\partial}{\partial t} + m_r \frac{\partial}{\partial m_r} - D \right) \Gamma_r = 0. \quad (10.1.36)$$

Виключаючи з двох рівнянь (10.1.26) і (10.1.36) величину $\mu \frac{\partial \Gamma_r}{\partial \mu}$, знаходимо

$$\left[-t \frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial e_r} + (\gamma_m - 1) m_r \frac{\partial}{\partial m_r} + 4 - \left(\frac{3}{2} + \gamma_e \right) n_e - (1 + \gamma_\gamma) n_\gamma \right] \times \\ \times \Gamma_r(tp_1, \dots, tp_n; m_r, e_r, \mu) = 0. \quad (10.1.37)$$

Це основне рівняння ренормгрупи для одночастинково-незвідних функцій Гріна. Функція β називається функцією Калана—Симанзіка, а функції $\gamma_e, \gamma_\gamma, \gamma_m$ — аномальними розмірностями. В теорії збурень ці функції є рядами по константі зв'язку e_r . Рівняння (10.1.37) є однорідним лінійним рівнянням у частинних похідних першого порядку. Воно виражає результат зміни масштабу імпульсів, від яких залежить Γ_r , в t разів.

Знайдемо розв'язок рівняння (10.1.37), припускаючи, що функції $\beta, \gamma_e, \gamma_\gamma, \gamma_m$ нам відомі. Зміна t може бути скомпенсована зміною e_r, m_r і загального множника. Нехай є функції $e(t), m(t)$ і $f(t)$ такі, що розв'язок можна записати у вигляді

$$\Gamma^{(n)}(tp, m_r, e_r, \mu) = f(t) \Gamma^{(n)}(p, m(t), e(t), \mu). \quad (10.1.38)$$

Обчислимо похідну по t :

$$t \frac{\partial}{\partial t} \Gamma^{(n)}(tp, m, e, \mu) = \\ = \left(t \frac{df}{dt} + f \cdot t \frac{\partial m(t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial m(t)} + f \cdot t \frac{\partial e(t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial e(t)} \right) \Gamma^{(n)}(p, m(t), e(t), \mu) = \\ = \left(t \frac{df}{dt} + f \cdot t \frac{\partial m(t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial m_r} + f \cdot t \frac{\partial e(t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial e_r} \right) \frac{1}{f(t)} \Gamma^{(n)}(tp, m_r, e_r, \mu). \quad (10.1.39)$$

Будемо вимагати, щоб розв'язок у формі (10.1.38) тотожно задовольняв рівняння (10.1.37). Підставляючи останній вираз в (10.1.37) і порівнюючи коефіцієнти, знаходимо рівняння для функцій $e(t)$, $m(t)$ і $f(t)$ з граничними умовами для них:

$$t \frac{\partial e(t)}{\partial t} = \beta(e(t)), \quad e(1) = e_r, \quad (10.1.40)$$

$$t \frac{\partial m(t)}{\partial t} = m(t)(\gamma_m - 1), \quad m(1) = m_r, \quad (10.1.41)$$

$$\frac{1}{f} t \frac{\partial f}{\partial t} = 4 - \left(\frac{3}{2} + \gamma_e \right) n_e - (1 + \gamma_\gamma) n_\gamma, \quad f(1) = 1. \quad (10.1.42)$$

Функція $e(t)$ називається біжучою константою взаємодії, або ефективним зарядом, який залежить від масштабу енергії-імпульсу, на якому він вимірюється, $m(t)$ — біжуча маса. Ці функції можна знайти, якщо $\beta(e_r)$ і $\gamma_m(e_r)$ відомі. Технічно важко проінтегрувати рівняння для $e(t)$ і $m(t)$, оскільки β і γ_m залежать від двох змінних $e(t)$ та $\frac{m(t)}{\mu}$, і маємо зв'язану систему рівнянь. Існують, однак, рецепти перенормувань, коли β і γ_m стають незалежними від мас ('т Хоофт, Вайнберг [185, 194]). Тоді рівняння для $e(t)$ і $m(t)$ можна проінтегрувати.

Для $f(t)$ у (10.1.42) маємо розв'язок

$$f(t) = t^{4 - \frac{3}{2}n_e - n_\gamma} \exp \left[-n_e \int_1^t \gamma_e(t) \frac{dt}{t} - n_\gamma \int_1^t \gamma_\gamma(t) \frac{dt}{t} \right]. \quad (10.1.43)$$

Загальний розв'язок рівняння ренормгрупи має вигляд

$$\Gamma^{(n)}(tp, m_r, e_r, \mu) = t^{4 - \frac{3}{2}n_e - n_\gamma} \exp \left[-n_e \int_1^t \frac{\gamma_e(e(t)) dt}{t} - n_\gamma \int_1^t \frac{\gamma_\gamma(e(t)) dt}{t} \right] \times \\ \times \Gamma^{(n)}(p, m(t), e(t), \mu). \quad (10.1.44)$$

Експоненціальний доданок приводить до появи так званих аномальних розмірностей, що легко бачити у випадку $e = e_* = \text{const}$ і $\beta(e_*) = 0$, коли множник перед $\Gamma^{(n)}(p, m(t), e(t), \mu)$ зводиться до

$$t^{4 - (\frac{3}{2} + \gamma_e(e_*))n_e - (1 + \gamma_\gamma(e_*))n_\gamma}. \quad (10.1.45)$$

Тобто канонічні розмірності електронного і фотонного полів, $3/2$ і 1 , замінюються в результаті взаємодії на динамічні розмірності $\frac{3}{2} + \gamma_e(e_*)$ і

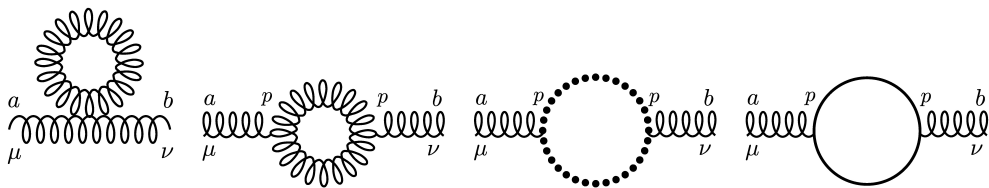


Рис. 55. Діаграми, що дають внесок у власну енергію глюона

$1 + \gamma_\gamma(e_*)$, відповідно. Тому доданки $\gamma_\epsilon(e_*)$ і $\gamma_\gamma(e_*)$ до канонічних розмірностей називаються аномальними розмірностями відповідних полів.

Асимптотична свобода є надзвичайно важливою властивістю неабелевих калібрувальних теорій, зокрема в квантовій хромодинаміці, і рівняння ренормалізаційної групи виявляються ефективними для опису цього явища. Для того щоб обчислити відповідні бета-функції, в наступному параграфі ми розглянемо однопетльові діаграми в квантовій хромодинаміці.

10.2. Однопетльові діаграми в квантовій хромодинаміці

Розрахунки однопетльових діаграм у квантовій хромодинаміці розпочнемо з поляризаційного оператора глюонів. Відповідне обчислення можна провести без додаткових ускладнень для загальної кольорової групи G і ферміонів у довільному представленні r .

10.2.1. Поляризаційний оператор глюонів

У квантовій хромодинаміці власна енергія глюона в однопетльовому наближенні визначається чотирма діаграмами, зображеними на рис. 55. Діаграма типу пуголовок (tadpole, перша діаграма на рис. 55) пов'язана з чотиреглюонною вершиною і пропорційна інтегралу

$$\int \frac{d^n k}{k^2},$$

який у розмірній регуляризації дає нульовий внесок, що впливає з формули (7.8.12) при $\beta = 0$. Інша діаграма з кварковою петлею аналогічна рис. 30 в КЕД з додатковими індексами кольорової групи a і b глюонів (четверта діаграма на рис. 55)

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{ab}(p) &= g^2 \mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n} \text{tr}(T^a T^b) \text{tr} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{k} - m} \gamma_\nu \frac{1}{\hat{k} - \hat{p} - m} = \\ &= g^2 \mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n} \text{tr}(T^a T^b) \frac{\text{tr} \gamma_\mu (\hat{k} + m) \gamma_\nu (\hat{k} - \hat{p} + m)}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)[(k - p)^2 - m^2 + i\varepsilon]}, \end{aligned} \quad (10.2.1)$$

де T^a є генераторами кольорової групи у деякому представленні ферміонів $r = F$. Порівнюючи з формулою (8.1.2), бачимо, що обчислення є повністю подібним до обчислення поляризаційного оператора в квантовій електродинаміці при врахуванні, що

$$\text{tr}(T^a T^b) = n_f T(F) \delta^{ab},$$

де n_f — число кваркових ароматів, а $T(F)$ — нормування генераторів відповідно до формули (4.4.19).

Діаграма з глюонною петлею згідно з правилами Фейнмана в калібровці $\xi = 1$ для пропагаторів дорівнює

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{ab} = & \frac{g^2}{2} f^{acd} f^{bcd} \mu^{-n+4} \int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n} [-(2p+k)_\sigma g_{\mu\rho} + (p+2k)_\mu g_{\sigma\rho} + \\ & + (p-k)_\rho g_{\mu\sigma}] \frac{[(p-k)^\rho g_\nu^\sigma + (p+2k)_\nu g^{\sigma\rho} - (k+2p)^\sigma g_\nu^\rho]}{(p+k)^2 k^2}, \end{aligned} \quad (10.2.2)$$

де f^{abc} є структурними константами калібрувальної групи, і враховано симетричний коефіцієнт $1/2$ даної діаграми. Після згортки індексів останній вираз дещо спрощується

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(p) = -\frac{g^2}{2} C_2(G) \delta^{ab} \mu^{-n+4} \int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n} \frac{N_{\mu\nu}}{(p+k)^2 k^2}, \quad (10.2.3)$$

де чисельник

$$\begin{aligned} N_{\mu\nu} = & (5p^2 + 2k^2 + 2pk)g_{\mu\nu} + (n-6)p_\mu p_\nu + (4n-6)k_\mu k_\nu + \\ & + (2n-3)(p_\mu k_\nu + p_\nu k_\mu), \end{aligned} \quad (10.2.4)$$

і використано також (4.4.23). Об'єднуючи знаменники за допомогою формули (7.8.3) та, здійснюючи зсув змінної інтегрування $k \rightarrow k - xp$, маємо

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{ab}(p) = & -\frac{g^2 C_2(G) \delta^{ab}}{2(4\pi)^{n/2}} \mu^{-n+4} \int_0^1 dx \int \frac{d^n k}{i\pi^{n/2}} \times \\ & \times \frac{g_{\mu\nu}[p^2(5-2x+2x^2)+2k^2]+p_\mu p_\nu[n-6-2x(1-x)(2n-3)]+(4n-6)k_\mu k_\nu}{[k^2+x(1-x)p^2]^2}. \end{aligned} \quad (10.2.5)$$

Інтегрування доданка $k_\mu k_\nu$ еквівалентно інтегруванню $k^2 g_{\mu\nu}/n$ і, використовуючи загальну формулу (7.8.12), отримуємо

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(p) = -\frac{g^2 (-p^2/\mu^2)^{n/2-2}}{2(4\pi)^{n/2}} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{\frac{n}{2}-2} \times$$

$$\times \left[g_{\mu\nu} p^2 \left(5 - \frac{2(4n-5)}{n-2} x(1-x) \right) + p_\mu p_\nu (n-6-2x(1-x)(2n-3)) \right]. \quad (10.2.6)$$

Подальше інтегрування по x дає

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{ab}(p) &= \frac{g^2(-p^2/\mu^2)^{n/2-2}}{(4\pi)^{n/2}} \frac{B(n/2, n/2)}{n-2} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) C_2(G) \times \\ &\times \delta^{ab} [g_{\mu\nu} p^2(5-6n) + p_\mu p_\nu(7n-6)]. \end{aligned} \quad (10.2.7)$$

Внесок духових полів у поляризаційну функцію глюонів (третя діаграма на рис. 55) є таким

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(p) = -g^2 f^{cad} f^{dbc} \mu^{-n+4} \int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n} \frac{(p+k)_\mu k_\nu}{(p+k)^2 k^2}. \quad (10.2.8)$$

Застосовуючи стандартну техніку фейнманівської параметризації та інтегруючи, знаходимо

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{ab}(p) &= -g^2 \frac{(-p^2/\mu^2)^{n/2-2}}{(4\pi)^{n/2}} \frac{B(n/2, n/2)}{n-2} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) C_2(G) \times \\ &\times \delta^{ab} [g_{\mu\nu} p^2 + p_\mu p_\nu(n-2)]. \end{aligned} \quad (10.2.9)$$

Збираючи внески діаграм з глюонною і духовою петлями, отримуємо вираз

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{ab}(p) &= \frac{g^2(-p^2/\mu^2)^{n/2-2}}{(4\pi)^{n/2}} \frac{2(2-3n)B(n/2, n/2)}{n-2} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) C_2(G) \times \\ &\times \delta^{ab} (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu), \end{aligned} \quad (10.2.10)$$

який є поперечним. Для розбіжної частини маємо при $\varepsilon = 4 - n \rightarrow 0$:

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(p) = -\frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon} \frac{5}{3} C_2(G) \delta^{ab} (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu). \quad (10.2.11)$$

Враховуючи внесок діаграми з кварковою петлею, остаточно отримуємо таку розбіжну частину поляризаційної функції глюонів

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(p) = \frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon} \delta^{ab} (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \left(-\frac{5}{3} C_2(G) + \frac{4n_f T(F)}{3} \right). \quad (10.2.12)$$

В результаті для константи перенормування глюонної хвильової функції Z_3 знаходимо

$$Z_3 = 1 + \frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon} \left(\frac{5}{3} C_2(G) - \frac{4n_f T(F)}{3} \right). \quad (10.2.13)$$

У довільній коваріантній калібровці з параметром ξ останній вираз замінюється на такий [103]:

$$Z_3 = 1 + \frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{13}{3} - \xi \right) C_2(G) - \frac{4n_f T(F)}{3} \right). \quad (10.2.14)$$

10.2.2. Власна енергія кварка

У квантовій хромодинаміці власна енергія кварків в однопетльовому наближенні визначається діаграмою (рис. 56), яка подібна діаграмі власної енергії електрона на рис. 31, де фотонний пропагатор змінюється на глюонний пропагатор, який у коваріантній калібровці визначається рівнянням (6.3.11). Крім того, вершина взаємодії кваркових і глюонних полів пропорційна генератору T^a групи $SU(3)$ у фундаментальному представленні. Тому аналітичний вираз для власної енергії кварка в однопетльовому наближенні в калібровці Фейнмана співпадає з власною енергією електрона в квантовій електродинаміці з додатковим множником $\sum_a (T^a T^a)_{ij}$, тобто

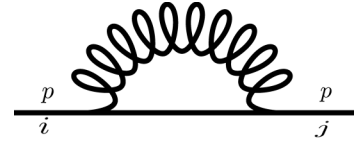


Рис. 56. Діаграма власної енергії кварка

$$\Sigma_{ij}(p) = g^2 \sum_a (T^a T^a)_{ij} \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{1}{\hat{p} - \hat{k} - m} \gamma^\mu \frac{1}{k^2}. \quad (10.2.15)$$

Сума $\sum_a (T^a T^a)_{ij} = C_2(F) \delta_{ij}$ пов'язана з інваріантом Казимира $C_2(F)$ ферміонного представлення групи G , який для фундаментального представлення групи $G = SU(3)$ дорівнює $C_2 = 4/3$. Окрім цього загального множника, подальший аналіз власної енергії кварка в однопетльовому наближенні в квантовій хромодинаміці такий самий, як і для власної енергії електрона в однопетльовому наближенні в квантовій електродинаміці, що було розглянуто раніше. В результаті для розбіжної частини діаграми (10.2.15) знаходимо константу перенормування хвильової функції кварка Z_2 ,

$$Z_2 = 1 - \frac{g^2}{8\pi^2 \varepsilon} C_2(F), \quad (10.2.16)$$

яка відрізняється від константи перенормування хвильової функції електрона Z_2 тільки множником $C_2(F)$. У довільній коваріантній калібровці

$$Z_2 = 1 - \frac{g^2}{8\pi^2 \varepsilon} \xi C_2(F), \quad (10.2.17)$$

звідки випливає, що в калібровці Ландау $\xi = 0$, константа перенормування Z_2 скінченна у другому порядку теорії збурень і дорівнює одиниці.

10.2.3. Кварк-глюонна вершинна функція

Кварк-глюонна вершинна функція в однопетльовому наближенні визначається двома діаграмами Фейнмана на рис. 57. Перша з них аналогічна електрон-фотонній вершинній функції (8.7.2) в квантовій електродинаміці з додатковим індексом a генератора групи G та кольоровими

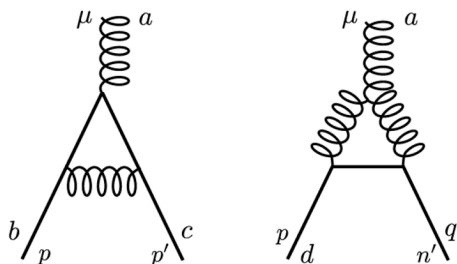


Рис. 57. Діаграми кварк-глюонної вершини

індексами i, j кварків і дорівнює в калібровці Фейнмана

$$\begin{aligned}
 -ig\mu^{2-\frac{n}{2}}(\Lambda_\mu^{(1)a}(p, q, p+q))_{ij} &= \left(-ig\mu^{2-\frac{n}{2}}\right)^3 \sum_b (T^b T^a T^b)_{ij} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \times \\
 &\times \gamma_\nu \frac{i}{\hat{p} + \hat{k} + \hat{q} - m} \gamma_\mu \frac{i}{\hat{p} + \hat{k} - m} \gamma_\rho \frac{g^{\nu\rho}}{ik^2}. \quad (10.2.18)
 \end{aligned}$$

Використовуюючи комутаційні співвідношення, знаходимо

$$\sum_b T^b T^a T^b = if^{abc} T^b T^c + C_2(F) T^a,$$

звідки

$$\sum_b T^b T^a T^b = -\frac{1}{2} f^{abc} f^{bcd} T^d + C_2(F) T^a = \left[-\frac{1}{2} C_2(G) + C_2(F)\right] T^a, \quad (10.2.19)$$

де використано також співвідношення (4.4.23). Для групи $SU(N)$ маємо такі значення операторів Казимира приєднаного $C_2(G) = N$ і фундаментального $C_2(F) = (N^2 - 1)/(2N)$ представлень, і у випадку квантової хромодинаміки, де $N = 3$, знаходимо $\sum_b T^b T^a T^b = -T^a/6$.

Для розбіжної частини цієї вершини отримуємо

$$\Lambda_\mu^{(1)a, div}(p, q, p+q) = \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \left[-\frac{1}{2} C_2(G) + C_2(F)\right] T^a \gamma_\mu, \quad (10.2.20)$$

яка пропорційна матриці γ_μ , як і у випадку КЕД.

Друга діаграма на рис. 57 має суто неабелевий характер і зумовлена триглюонною вершиною. Її внесок визначається рівнянням

$$\begin{aligned}
 -ig\mu^{2-\frac{n}{2}}(\Lambda_\mu^{(2)a}(p, q, p+q))_{ij} &= g^3 (\mu^{4-n})^{3/2} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \gamma^\rho (T^b)_{il} \frac{1}{i(k-p)^2} f^{abc} \times \\
 &\times [(2p-q-k)_\nu g_{\rho\mu} + (2k-p-q)_\mu g_{\rho\nu} + (2q-k-p)_\rho g_{\nu\mu}] \times \\
 &\times \frac{1}{i(q-k)^2} \frac{i}{\hat{k} - m} \gamma^\nu (T^c)_{lj}. \quad (10.2.21)
 \end{aligned}$$

Далі, використовуючи

$$f^{abc}T^bT^c = \frac{i}{2}f^{abc}f^{bcd}T^d = \frac{i}{2}C_2(G)T^a,$$

маємо

$$\Lambda_\mu^{(2)a}(p, q, p+q) = -\frac{g^2 C_2(G) \mu^{4-n}}{2} T^a I_\mu(p, q), \quad (10.2.22)$$

де

$$I_\mu(p, q) = \int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n} \frac{\gamma^\rho (\hat{k} + m) \gamma^\nu}{k^2 - m^2} \times \\ \times \frac{(2p - q - k)_\nu g_{\rho\mu} + (2k - p - q)_\mu g_{\rho\nu} + (2q - k - p)_\rho g_{\nu\mu}}{(k - p)^2 (q - k)^2}.$$

За допомогою 2-параметричної формули Фейнмана (7.8.3) та зсуву змінної інтегрування $k' = k - px - qy$ знаходимо для розбіжної частини I_μ такий вираз

$$I_\mu^{\text{div}}(p, q) = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n} \times \\ \times \frac{(4 - 2n)k_\mu \hat{k} - 2\gamma_\mu k^2}{[k^2 - m^2(1 - x - y) + p^2 x + q^2 y - (px + qy)^2]^3}. \quad (10.2.23)$$

Інтегруючи по k за допомогою (7.8.12), отримуємо

$$I_\mu^{\text{div}}(p, q) = \frac{2(1-n)}{(4\pi)^{n/2}} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \gamma_\mu \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \times \\ \times [m^2(1-x-y) - x(1-x)p^2 - y(1-y)q^2 + 2xypq]^{n/2-2}, \quad (10.2.24)$$

звідки розбіжна частина дорівнює

$$I_\mu^{\text{div}} = -\frac{3}{8\pi^2 \varepsilon} \gamma_\mu,$$

і, відповідно,

$$\Lambda_\mu^{(2)a, \text{div}}(p, q, p+q) = \frac{3g^2 C_2(G)}{16\pi^2 \varepsilon} T^a \gamma_\mu. \quad (10.2.25)$$

Комбінуючи розбіжні внески двох діаграм в рівняннях (10.2.20), (10.2.25), знаходимо такий вираз для розбіжної частини кварк-глюонної вершини

$$\Lambda_\mu^{a, \text{div}} = \Lambda_\mu^{(1)a} + \Lambda_\mu^{(2)a} = \frac{g^2}{8\pi^2 \varepsilon} (C_2(G) + C_2(F)) \gamma_\mu T^a, \quad (10.2.26)$$

звідки отримуємо константу перенормування кварк-глюонної вершини Z_1 ,

$$Z_1 = 1 - \frac{g^2}{8\pi^2 \varepsilon} (C_2(G) + C_2(F)). \quad (10.2.27)$$

У довільній коваріантній калібровці константа Z_1 має вигляд [103]

$$Z_1 = 1 - \frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon} \left(\frac{\xi + 3}{4} C_2(G) + \xi C_2(F) \right). \quad (10.2.28)$$

Константи перенормування Z_1, Z_2, Z_3 будуть використані в розділі 10.4 для знаходження ренормгрупової бета-функції.

10.3. Розв'язок рівнянь ренормалізаційної групи у другому порядку теорії збурень

Для того щоб краще зрозуміти фізичний зміст ренормгрупи і біжучої константи зв'язку, розглянемо випадок, коли бета-функція в КЕД (10.1.40) не залежить від маси

$$t \frac{\partial e(t)}{\partial t} = \beta(e(t)). \quad (10.3.1)$$

Ми знайшли у другому порядку теорії збурень такий зв'язок між голим і фізичним зарядами (позначимо $e \equiv e_r$)

$$e_0 = e Z_3^{-1/2} \mu^{\frac{4-n}{2}}, \quad Z_3 = 1 - \frac{e^2}{6\pi^2(4-n)}, \quad (10.3.2)$$

або з точністю до e^2 ,

$$e_0 \simeq e \left(1 + \frac{e^2}{12\pi^2(4-n)} \right) \mu^{\frac{4-n}{2}}. \quad (10.3.3)$$

Оскільки голий заряд e_0 не залежить від μ , то, диференціюючи останню рівність по μ , отримуємо рівняння для бета-функції

$$0 = \beta \left(1 + \frac{e^2}{4\pi^2(4-n)} \right) \mu^{\frac{4-n}{2}} + \frac{4-n}{2} \mu^{\frac{4-n}{2}} \left(1 + \frac{e^2}{12\pi^2(4-n)} \right), \quad (10.3.4)$$

звідки з нашою точністю знаходимо

$$\beta(e) \simeq \frac{n-4}{2} e \left(1 - \frac{e^2}{6\pi^2(4-n)} \right). \quad (10.3.5)$$

Як вже стверджувалося, бета-функція є скінченною в границі, коли $n \rightarrow 4$, і в однопетльовому наближенні дорівнює

$$\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2}. \quad (10.3.6)$$

Тоді рівняння для ефективної константи взаємодії в квантовій електродинаміці має такий вигляд

$$t \frac{\partial e(t)}{\partial t} = \frac{e^3(t)}{12\pi^2} \Rightarrow t \frac{\partial e^2(t)}{\partial t} = \frac{e^4(t)}{6\pi^2}, \quad e(1) = e. \quad (10.3.7)$$

Це рівняння легко розв'язується

$$e^2(t) = \frac{e^2}{1 - \frac{e^2}{6\pi^2} \ln t}, \quad (10.3.8)$$

або, вводячи постійну тонкої структури $\alpha = e^2/4\pi$ і, відповідно, біжучу $\alpha(t) = e^2(t)/4\pi$, перепишемо його у вигляді

$$\alpha(t) = \frac{\alpha}{1 - \frac{2\alpha}{3\pi} \ln \frac{|p|}{m}} = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{p^2}{m^2}}, \quad t = \frac{|p|}{m}. \quad (10.3.9)$$

Згідно з цією формулою $\alpha(t)$ стає $\gg 1$ в області $1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{p^2}{m^2} \simeq 0$ і в точці $|p| = m e^{3\pi/2\alpha} \equiv \Lambda_{\text{LP}}$ виникає полюс (полюс Ландау). Використовуючи це значення, формулу (10.3.9) можна переписати у вигляді

$$\alpha(p) = \frac{3\pi}{2 \ln \frac{\Lambda_{\text{LP}}}{|p|}}. \quad (10.3.10)$$

Але значення енергії Λ_{LP} неможливо досягти фізично, тому що показник в експоненті $3\pi/2\alpha \approx 645$ є надзвичайно великим, що дає $\Lambda_{\text{LP}} \approx 10^{280}$ МеВ. Більш того, зі зростанням енергії вступають в дію інші взаємодії, сильні і слабкі, а згодом і гравітаційні. Тобто квантова електродинаміка не є фізично замкненою теорією. Залежність ефективної константи від енергії підтверджена на експерименті. Наприклад, при енергії порядку 200 ГеВ ефективна константа α дорівнює $1/127$ замість $1/137$ при низьких енергіях.

У теорії дійсного скалярного поля із взаємодією $\lambda\Phi^4/4!$ бета- і гамма-функції у двопетльовому наближенні в MS-схемі перенормувань мають вигляд

$$\beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} - \frac{17\lambda^3}{3(4\pi)^4} + \mathcal{O}(\lambda^4), \quad (10.3.11)$$

$$\gamma(\lambda) = \frac{\lambda^2}{12(4\pi)^4} - \frac{\lambda^3}{16(4\pi)^6} + \mathcal{O}(\lambda^4). \quad (10.3.12)$$

Інтегруючи ренормгрупове рівняння для ефективної константи взаємодії

$$\mu \frac{d\lambda(\mu)}{d\mu} = \beta(\lambda(\mu)) \quad (10.3.13)$$

в однопетльовому наближенні від μ_0 до деякого параметра обрізання $\Lambda \gg \mu_0$, отримуємо

$$\lambda(\Lambda) = \frac{\lambda_r}{1 - \frac{3\lambda_r}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\mu_0}}, \quad (10.3.14)$$

де $\lambda_r = \lambda(\mu_0)$. Як і в квантовій електродинаміці при скінченному λ_r неможливо зняти обрізання, $\Lambda \rightarrow \infty$, внаслідок присутності полюса в знаменнику. Якщо обернути залежність,

$$\lambda_r = \frac{\lambda(\Lambda)}{1 + \frac{3\lambda(\Lambda)}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\mu_0}}, \quad (10.3.15)$$

і вважати голу константу $\lambda(\Lambda)$ скінченною, коли $\Lambda \rightarrow \infty$, то перенормована константа прямує до нуля

$$\lambda_r \sim \frac{16\pi^2}{3 \ln \frac{\Lambda}{\mu_0}} \rightarrow 0. \quad (10.3.16)$$

Таким чином, у теорії самовзаємодіючого скалярного поля маємо таку саму ситуацію, що й у КЕД: або полюс Ландау, або так званий нуль-заряд. Іншими словами, це означає, що або теорія внутрішньо суперечлива, або взаємодії зникають і залишається теорія вільного поля. Це те, що мається на увазі під тривіальністю теорії.

Для неабелевих теорій Янга—Міллса з n_f числом ферміонів і кольорової групою $SU(3)$ маємо (див. розділ 10.4 у випадку загальної кольорової групи)

$$\beta(g) = \frac{g^3}{16\pi^2} \left(-11 + \frac{2n_f}{3} \right) < 0, \quad \text{якщо } n_f \leq 16. \quad (10.3.17)$$

Розв'язок рівняння для ефективної константи зв'язку дає

$$g^2(t) = \frac{g_r^2}{1 - \frac{g_r^2}{8\pi^2} (-11 + 2n_f/3) \ln t}. \quad (10.3.18)$$

Ця ефективна взаємодія прямує до нуля, $g^2(t) \rightarrow 0$, при великих переданих імпульсах ($t = |p|/m \rightarrow \infty$), або малих відстанях. Це явище, відкрите Гроссом, Вільчеком і Політцером у 1973 р. [101,156], отримало назву асимптотичної свободи і відіграє важливу роль у квантовій хромодинаміці — кварки поводять себе як майже вільні частинки на малих відстанях. Історично це відкриття мало дуже велике значення, тому що зникла проблема з тим, що взаємодії в інших відомих квантово-польових моделях стають нескінченними на малих відстанях (полюс Ландау), що ставило під сумнів самоузгодженість квантової теорії поля як такої. Взаємодії в теоріях з асимптотичною свободою стають слабкими на малих відстанях, і тому теорія таких квантових полів є повністю самоузгодженою.

Присутність полюса Ландау в КЕД є наслідком екранування віртуальними парами заряджених частинок-античастинок, наприклад електрон-позитронними парами у вакуумі. Віртуальні частинки протилежного заряду притягуються до центрального заряду, а віртуальні частинки з ідентичним зарядом відштовхуються. Тому відбувається поляризація вакууму. В результаті, наближаючись до центрального заряду, пробна частинка відчуває все менший вплив вакууму і ефективний заряд збільшується.

Такий самий процес відбувається у КХД з віртуальними кварк-антикварковими парами; вони екранують кольоровий заряд (дійсно, як впливає із доданка $2n_f/3$ у формулі (10.3.17), кожен аромат ферміонів приводить до додаткового позитивного внеску в бета-функцію). Однак, як видно

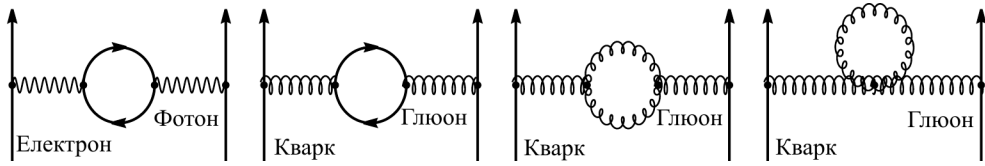


Рис. 58. Екранування в КЕД (перша діаграма) і КХД (три наступні діаграми). Для взаємодії кварків є дві додаткові діаграми, що виникають із глюон-глюонної взаємодії

з формули (10.3.18), зміна знака в екрануванні заряду в квантовій хромодинаміці порівняно з КЕД пов'язана з внесками в поляризацію глюонів, які взаємодіють один з одним, оскільки вони мають кольоровий заряд (див. рис. 58). Таким чином, самодія калібрувальних полів приводить до ефекту антиекранування, що є вирішальним для асимптотичної свободи в неабелевих калібрувальних теоріях. Зауважимо, що на ефект антиекранування в неабелевих теоріях вперше було звернуто увагу в роботах [126, 190] ще до відкриття асимптотичної свободи (про історію відкриття асимптотичної свободи див. [176, 188]).

10.4. Квантова хромодинаміка

Квантова хромодинаміка описує сильні взаємодії і є калібрувальною теорією з неабелевою групою $SU(3)$. Тому є сенс більш детально розглянути бета-функцію та біжучу константу зв'язку в цій теорії. У квантовій хромодинаміці співвідношення між перенормованою, g , і голою, g_0 , константами зв'язку, що впливає з кварк-глюонної взаємодії в лагранжіані КХД, має вигляд

$$g_0 = g\mu^{2-\frac{n}{2}} Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2}, \tag{10.4.1}$$

де константи Z_i у другому порядку теорії задаються виразами (10.2.13), (10.2.16), (10.2.27). Це співвідношення є аналогічним відповідному співвідношенню в КЕД (8.8.34), але відсутня рівність $Z_1 = Z_2$. Інші взаємодії, триглюонна, чотириглюонна, та взаємодія духів і глюонів приводять до таких співвідношень

$$g_0 = g\mu^{2-\frac{n}{2}} Z_{3g} Z_3^{-3/2}, \quad g_0 = g\mu^{2-\frac{n}{2}} Z_{4g}^{1/2} Z_3^{-1}, \quad g_0 = g\mu^{2-\frac{n}{2}} \tilde{Z}_1 \tilde{Z}_2^{-1} Z_3^{-1/2}, \tag{10.4.2}$$

де Z_{3g} , Z_{4g} , \tilde{Z}_1 — константи перенормування триглюонної, чотириглюонної і глюонно-духової вершин, відповідно, \tilde{Z}_2 — константа перенормування хвильової функції духів. Усі ці рівності еквівалентні внаслідок співвідношень між константами Z ,

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_{3g}}{Z_3} = \frac{Z_{4g}}{Z_{3g}} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_2}, \tag{10.4.3}$$

які випливають з тотожностей Славнова—Тейлора [19, 183] і є узагальненням тотожностей Уорда—Такахаші в КЕД на випадок неабелевої симетрії. З фізичної точки зору ці тотожності означають, що перенормований заряд в (10.4.1) є одним й тим самим. У схемі віднімання \overline{MS} всі константи Z мають вигляд рядів Лорана

$$Z(h) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{(k)}(h)}{\varepsilon^k}, \quad h = \frac{g^2}{(4\pi)^2}. \quad (10.4.4)$$

Диференціюючи першу рівність в (10.4.1) по μ і враховуючи, що гола константа g_0 не залежить від μ , знаходимо бета-функцію аналогічно тому, як ми знаходили бета-функцію в КЕД у розділі 10.3,

$$\beta(g) = \mu \frac{dg(\mu)}{d\mu} = -\frac{g^3}{4\pi^2} \frac{11C_2(G) - 4n_f T(F)}{12}. \quad (10.4.5)$$

Для кольорової групи $SU(3)$ з ферміонами у фундаментальному представленні $C_2(SU(3)) = 3$, $T(F) = 1/2$, і коефіцієнт $33 - 2n_f > 0$, якщо число ферміонів (ароматів) $n_f \leq 16$; бета-функція в цьому випадку від'ємна, що веде до асимптотичної свободи. У Стандартній моделі є 6 ароматів кварків, тому бета-функція в квантовій хромодинаміці є від'ємною, тобто константа зв'язку сильної взаємодії зменшується зі збільшенням енергії.

У термінах константи $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$ — аналога постійної тонкої структури в КЕД,

$$\beta(\alpha_s) = -\frac{b\alpha_s^2}{\pi}, \quad \mu \frac{d\alpha_s}{d\mu} = -\frac{b\alpha_s^2}{\pi}, \quad b = \frac{11N_c - 2n_f}{6}. \quad (10.4.6)$$

Розв'язок рівняння ренормгрупи має такий вигляд

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{\alpha}{1 + \frac{\alpha}{2\pi} b \ln \frac{\mu^2}{M^2}}, \quad (10.4.7)$$

де використана гранична умова $\alpha = \alpha_s(\mu^2 = M^2)$. Цей розв'язок зазвичай записують у еквівалентному вигляді

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{2\pi}{b \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2}}, \quad \Lambda^2 = M^2 e^{-\frac{2\pi}{b\alpha(M)}}, \quad (10.4.8)$$

де вводиться розмірний параметр КХД Λ , незалежний від вибору точки нормування M (легко переконатися, що $M d\Lambda/dM = 0$).

Введемо позначення

$$a(\mu^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi} = \frac{g_r^2(\mu^2)}{4\pi^2}. \quad (10.4.9)$$

Тоді для внесків у бета-функцію від петльових діаграм маємо

$$\mu \frac{da}{d\mu} = \beta(a) = -ba^2 \left[\underbrace{1}_{1\text{-loop}} + \underbrace{ca}_{2\text{-loop}} + \underbrace{c_2 a^2}_{3\text{-loop}} + c_3 a^3 + \dots \right]. \quad (10.4.10)$$

Коефіцієнти b , c не залежать від схеми віднімань, усі вищі залежать. Усі коефіцієнти b , c , c_2 , c_3 були обчислені в $\overline{\text{MS}}$ -схемі. Наприклад, для трипетльового внеску включно маємо

$$c = \frac{153 - 19n_f}{12b}, \quad c_2 = \frac{1}{64b} \left(2857 - \frac{5033}{9} n_f + \frac{325}{27} n_f^2 \right).$$

Загальний розв'язок ренормгрупового рівняння записується у вигляді

$$\ln \frac{\mu}{M} = \int_{a_M}^{a(\mu)} \frac{dx}{\beta(x)}, \quad (10.4.11)$$

де використано граничну умову $a_M = \alpha_s(M^2)/\pi$, тобто задається значення константи взаємодії при $\mu = M$. Ренормгрупове рівняння (10.4.10) у двопетльовому наближенні може бути проінтегровано

$$-\frac{1+ca}{ca} e^{-\frac{1+ca}{ca}} = -\frac{1+ca_M}{ca_M} e^{-\frac{1+ca_M}{ca_M}} \left(\frac{\mu}{M} \right)^{-b/c}. \quad (10.4.12)$$

Останнє рівняння є трансцендентним рівнянням для функції $W = -(1+ca)/ca$ вигляду

$$W(z)e^{W(z)} = z, \quad z = -\frac{1+ca_M}{ca_M} e^{-\frac{1+ca_M}{ca_M}} \left(\frac{\mu}{M} \right)^{-b/c}, \quad (10.4.13)$$

розв'язок якого виражається через функцію Ламберта, яка вперше з'явилася у 1758 р. $W(z)$ є багатозначною функцією з нескінченною кількістю гілок, які позначаються $W_n(z)$. Розв'язок для $\alpha_s(\mu^2)$ запишеться

$$\alpha_s(\mu^2) = -\frac{\pi}{c[1+W_{-1}(z(\mu))]}, \quad z(\mu) = -\frac{1}{e} \left(\frac{\mu}{\Lambda} \right)^{-b/c}, \quad (10.4.14)$$

де $W_{-1}(z)$ — одна з гілок функції Ламберта, яка є дійсною для $-1/e < z < 0$ (тут e — число Ейлера). Для $c > 0$, $z < 0$ ця гілка є монотонно спадною функцією зі значеннями $W_{-1}(z) \in (-\infty, -1)$ (поза цим інтервалом $W_{-1}(z)$ є комплексною функцією). Ультрафіолетова границя, $\mu \rightarrow \infty$, відповідає $z \rightarrow 0_-$, $W_{-1}(z) \rightarrow -\infty$, і $\alpha_s(\mu^2) \rightarrow 0$ згідно з явищем асимптотичної свободи.

Якщо ж розглянути інфрачервону границю, $\mu \rightarrow 0$, то при деякому значенні μ_0 ми знаходимо в ефективній константі взаємодії полюс, коли $W_{-1}(z_0) = -1$ (полюс Ландау), і далі функція стає комплексною. Очевидно, двопетльове наближення стає непридатним в околі полюса (фактично ще далеко від полюса, коли ефективний параметр розкладу стає порядку одиниці, $\alpha_s(\mu^2)/\pi \sim 1$). Зростання біжучої константи взаємодії при малих імпульсах означає, що квантова хромодинаміка стає сильно взаємодіючою теорією в інфрачервоній області.

Ренормінваріантний параметр Λ в двопетльовому наближенні визначається як

$$\Lambda = M \left(\frac{1 + ca}{ca} \right)^{c/b} e^{-\frac{1}{ba}}. \quad (10.4.15)$$

Легко перевірити, що $M da_M/dM = 0$. Оскільки

$$W_{-1}(-x) \simeq \ln x - \ln(-\ln x), \quad x \rightarrow 0, \quad (10.4.16)$$

то знаходимо таку асимптотичну поведінку ефективної константи при $\mu \gg \Lambda$,

$$\alpha_s(\mu^2) \simeq \frac{2\pi}{b \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2} + c \ln \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2}}. \quad (10.4.17)$$

Зазначимо, що врахування двопетльового внеску в бета-функцію, пов'язаного з константою c , приводить до подвійної логарифмічної залежності $\ln \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2}$ у біжучій константі зв'язку. Це є загальним результатом — трипетльовий внесок приводить до потрійної логарифмічної залежності і так далі.

Цікаво також розглянути випадок, коли $c < 0$, $z > 0$, що виконується для $n_f > 8$ (тобто у випадку більш як восьми ароматів кварків). У цьому випадку фізичною гілкою буде $W_0(z)$, вона є дійсною монотонно зростаючою функцією для $z \in (-1/e, \infty)$ зі значеннями $W_0(z) \in (-1, \infty)$ в цьому інтервалі (поза цим інтервалом $W_0(z)$ є комплексною функцією); для $z \geq 0$ функція $W_0(z) \in [0, \infty)$. Ультрафіолетова границя, $\mu \rightarrow \infty$, відповідає $z \rightarrow \infty$, $W_0(z) \rightarrow \infty$ і $\alpha_s(\mu^2) \rightarrow 0$ — тобто має місце асимптотична свобода. Інфрачервона границя відповідає $\mu \rightarrow 0$, при цьому $z \rightarrow 0_+$, $W_0(z) \rightarrow 0_+$, $a(\mu) \rightarrow -1/c$. Тобто в розглянутому випадку з $c < 0$ маємо інфрачервону стабільну фіксовану точку, і вся область значень μ є під контролем. Очевидно, в КХД такої фіксованої інфрачервону стабільної точки немає, оскільки на сьогодні відомо про існування 6 ароматів кварків. Але ситуація може змінитися, якщо в експерименті знайдуть нові типи кварків. Також ця інфрачервону стабільна фіксована точка може бути важливою для узагальнених теорій з калібрувальною групою $SU(N_c)$, $N_c > 3$.

У вищих порядках біжуча константа в КХД стає залежною від схеми віднімань. Спеціальний вибір такої схеми був запропонований 'т Хоофтом, де всі $c_2 = c_3 = \dots = 0$. Але ця схема не спрощує розрахунків.

10.5. Рівняння для ефективної константи взаємодії. Загальний аналіз

Розглянемо тепер загальний випадок рівняння для ефективної константи взаємодії і проаналізуємо загальні типи розв'язків та їх властивості. Рівняння для ефективної константи взаємодії,

$$\mu \frac{dg(\mu)}{d\mu} = \beta(g(\mu)) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{dg}{\beta(g)}, \quad g(\mu = \mu_0) = g_r, \quad (10.5.1)$$

неважко проінтегрувати. В результаті маємо

$$\ln \frac{\mu}{\mu_0} = \int_{g_r}^{g(\mu)} \frac{dx}{\beta(x)}. \quad (10.5.2)$$

Знання β -функції дозволяє знайти $g(\mu)$ з останнього виразу. Якщо нас цікавить значення ефективної константи взаємодії при великих імпульсах, тоді розглядаємо границю $\mu \rightarrow \infty$. У цьому випадку ліва сторона рівняння вище розбігається, і тому $g(\mu)$ повинна або розбігатись, або наближатись до нуля функції $\beta(g)$, щоб забезпечити розбіжність інтеграла. Відповідне значення g є фіксованою точкою ренормгрупи, в якій система масштабно інваріантна. Тоді всі величини визначаються з розмірного аналізу з врахуванням динамічних розмірностей замість канонічних.

У загальному випадку, поза межами теорії збурень, можливі наступні випадки.

1. Поліус Ландау.

Нехай бета-функція додатна, $\beta(g) > 0$, і залишається додатною при всіх g , і при цьому інтеграл в (10.5.2) збігається,

$$\int^{\infty} \frac{dx}{\beta(x)} < \infty. \quad (10.5.3)$$

Тоді ефективна константа взаємодії $g(\mu)$ монотонно зростає і стає нескінченною при *скінченному* значенні E :

$$E_{\infty} = \mu_0 \exp \left(\int_{g(\mu_0)}^{\infty} \frac{dg}{\beta(g)} \right). \quad (10.5.4)$$

Така ситуація має місце в квантовій електродинаміці, якщо обмежитися другим порядком теорії збурень, де

$$\beta(g) = \frac{g^2}{6\pi^2}, \quad g = e^2. \quad (10.5.5)$$

Відповідна гранична енергія

$$E_\infty = \mu_0 \exp\left(\frac{6\pi^2}{g_{\mu_0}}\right) \quad (10.5.6)$$

є полюсом Ландау. Безумовно, наближення $\beta(g) = g^2/6\pi^2$ стає неприйнятним раніше, ніж буде досягнута енергія E_∞ , оскільки заряд стає великим і теорія збурень перестає бути застосовною.

Переріз процесу розсіяння або будь-яка фізична величина можуть бути записані у вигляді

$$R = \mu^D f\left(\frac{E}{\mu}, X, g(\mu)\right), \quad (10.5.7)$$

де D — масова розмірність величини R , E — енергія, X — інші безрозмірні величини, включаючи відношення енергетичних змінних. Фізична величина R не залежить від μ , тобто $\mu dR/d\mu = 0$, що означає компенсацію явної залежності від μ через залежність перенормованої константи зв'язку. Покладемо довільний параметр $\mu = E$,

$$R(E) = E^D f(1, X, g(E)). \quad (10.5.8)$$

Залежність від E визначається ефективною константою взаємодії $g(E)$ (крім тривіальної залежності E^D), яку знаходять з ренормгрупового рівняння (10.5.1).

2. Монотонне зростання.

Нехай бета-функція $\beta(g)$ додатна і зростає з ростом g , але достатньо повільно, так, що інтеграл в (10.5.2) розбігається,

$$\int \frac{dg}{\beta(g)} = \infty. \quad (10.5.9)$$

Наприклад, нехай при $g \rightarrow \infty$ бета-функція поводить себе як $\beta(g) \sim bg^k$, $b > 0$, $k < 1$. Розв'язок рівнянь ренормгрупи буде

$$g_E = \left[1 + (1 - k)bg_{\mu_0}^{k-1} \ln \frac{E}{\mu_0}\right]^{1/(1-k)} g_{\mu_0}.$$

Якщо g_{μ_0} мала при деякому μ_0 , то ріст g_E буде помітний тільки при дуже великих E . Дійсно

$$g_E \rightarrow [(1 - k)b \ln E]^{1/(1-k)}, \quad E \rightarrow \infty.$$

Асимптотична поведінка не залежить від g_{μ_0} .

3. Фіксована точка при скінченному значенні константи.

Точки g_* , де β -функція обертається в нуль, називаються фіксованими точками. Розглянемо найбільш поширений випадок, коли нуль β -функції є першого порядку. Поблизу нього β -функцію можна апроксимувати

$$\beta(g) = (g - g_*)\beta'(g_*), \quad (10.5.10)$$

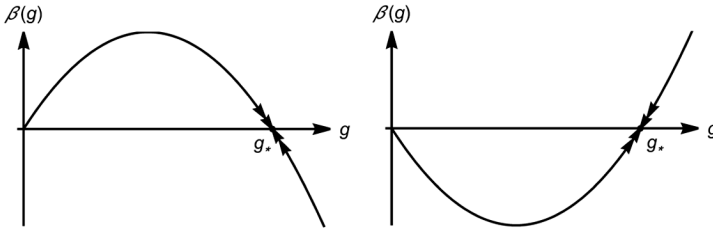


Рис. 59. Бета-функції з фіксованими точками

і рівняння (10.5.2) приймає вигляд

$$t \frac{dg}{dt} = (g - g_*) \beta'(g_*), \quad t = \mu/\mu_0, \quad g(\mu = \mu_0) = g_r. \quad (10.5.11)$$

Це рівняння легко розв'язується

$$\frac{dg}{g - g_*} = \beta'(g_*) \frac{dt}{t} \Rightarrow \int_{g_r}^{g(t)} \frac{dx}{x - g_*} = \beta'(g_*) \ln t,$$

звідки знаходимо

$$\ln \left| \frac{g(t) - g_*}{g_r - g_*} \right| = \beta' \ln t. \quad (10.5.12)$$

Якщо $g_r > g_*$, то

$$g(t) = g_* + (g_r - g_*) t^{\beta'(g_*)}. \quad (10.5.13)$$

Очевидно, що границю $t \rightarrow \infty$ можна дослідити у випадку $\beta' < 0$. Тоді ефективна константа взаємодії прямує до фіксованої точки

$$g(t) \rightarrow g_*, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (10.5.14)$$

Такий самий результат одержуємо і для $g_r < g_*$. У цьому випадку g_* називається ультрафіолетово стабільною (УФ) точкою. Поки $\beta(g) > 0$ ефективна константа $g(t)$ зростає зі збільшенням енергетичного масштабу і прямує до g_* ($t \rightarrow \infty$). Але коли $\beta(g)$ перетинає нуль і стає від'ємною, то потік (зазначено стрілками) змінює свій напрямок, а $g(t)$ зменшується і також прямує до УФ-точки g_* ($t \rightarrow \infty$). Ця ситуація зображена на лівій панелі рис. 59. Очевидно, коли $t \rightarrow 0$ і $\beta' > 0$, ефективна константа $g(t)$ прямує до точки $g = 0$, яка називається в цьому випадку інфрачервоно стабільною (ІЧ) точкою.

Подібним чином можна отримати нетривіальну ІЧ стабільну точку. Це відповідає ситуації зображеній справа на рис. 59. Ми бачимо, що поки $\beta(g) < 0$ константа зв'язку зростає зі зменшенням енергетичного масштабу ($t \rightarrow 0$). Потік у напрямку ІЧ позначено стрілками. Таким чином, у цьому випадку $g_* \in$ ІЧ стабільною фіксованою точкою. Очевидно, точка $g = 0 \in$

УФ стабільною точкою, оскільки $g(t) \rightarrow 0$ коли $t \rightarrow \infty$. З іншого боку, коли $\beta(g) > 0$, все навпаки: константа зв'язку зменшується коли рухається до ІЧ-точки і зростає в напрямку УФ-точки.

В околі фіксованої точки аномальна розмірність поля може бути розвинута в ряд по $g - g_*$,

$$\gamma(g) \sim \gamma(g_*) + c(g - g_*) + \mathcal{O}((g - g_*)^2). \quad (10.5.15)$$

Тоді, наприклад, в КЕД функція Гріна буде містити множник

$$\begin{aligned} \Gamma^{(n)} &\sim E^{4-\frac{3}{2}n_e-n_\gamma} \exp \left[- \int^E \gamma_e(g_\mu) \frac{d\mu}{\mu} n_e - \int^E \gamma_\gamma(g_\mu) \frac{d\mu}{\mu} n_\gamma \right] \simeq \\ &\simeq E^{4-(\frac{3}{2}+\gamma_e(g_*))n_e-(1+\gamma_\gamma(g_*))n_\gamma}, \end{aligned} \quad (10.5.16)$$

якщо значення g_* було б фіксованою точкою. Тому γ_γ, γ_e називаються аномальними розмірностями фотонного і електрон-позитронного полів, відповідно, про що вже зазначалося раніше.

У квантовій електродинаміці бета-функція (в схемі віднімання на масовій оболонці), нехтуючи внесками від важких лептонів, відома до α^5 (і навіть до α^6 [124]):

$$\beta(\alpha) = \frac{2\alpha^2}{3\pi} + \frac{\alpha^3}{2\pi^2} - \frac{121\alpha^4}{144\pi^3} + \left(\frac{5561}{5184} - \frac{23\zeta(2)}{9} + \frac{9 \ln 2\zeta(2)}{3} - \frac{7\zeta(3)}{8} \right) \frac{\alpha^5}{\pi^4} + \mathcal{O}(\alpha^6), \quad (10.5.17)$$

$\zeta(x)$ — дзета-функція Рімана. Бета-функція додатна при малих α , а також формально має нетривіальний нуль при $\alpha \approx 2,45$, проте очевидно цей нуль знаходиться поза рамками теорії збурень.

Наведемо також для прикладу вираз для бета-функції в квантовій електродинаміці в $\overline{\text{MS}}$ -схемі,

$$\beta(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\pi} \sum_{n=0}^k b_n \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^n, \quad (10.5.18)$$

де коефіцієнти

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{2}{3}, \quad b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_2 = -\frac{31}{144}, \quad b_3 = -\frac{2785}{1552} - \frac{13\zeta(3)}{18}, \\ b_4 &= -\frac{195067}{248832} - \frac{25\zeta(3)}{48} - \frac{13\zeta(4)}{48} + \frac{215\zeta(5)}{48}. \end{aligned} \quad (10.5.19)$$

Зауважимо, що, порівнюючи бета-функції, отримані в схемі віднімання на масовій оболонці та в $\overline{\text{MS}}$ -схемі, ми бачимо, що перші два коефіцієнти не залежать від схеми віднімання, тоді як інші залежать.

4. Асимптотична свобода.

Нехай бета-функція є від'ємною і поводить себе при малих значеннях константи взаємодії так:

$$\beta(g) \simeq -bg^n, \quad b > 0, \quad n > 1, \quad g \rightarrow 0. \quad (10.5.20)$$

Тоді розв'язок ренормгрупового рівняння буде

$$g_E = g_{\mu_0} \left[1 + b(n-1)g_{\mu_0}^{n-1} \ln \frac{E}{\mu_0} \right]^{-1/(n-1)}. \quad (10.5.21)$$

При великих значеннях енергії ефективна константа прямує до нуля,

$$g_E \rightarrow [b(n-1) \ln E]^{-1/(n-1)} \rightarrow 0, \quad E \rightarrow \infty, \quad (10.5.22)$$

тобто має місце асимптотична свобода, з якою ми зустрічались вище, досліджуючи рівняння ренормалізаційної групи в квантовій хромодинаміці. Поведінку аномальних розмірностей в границі малих g знаходимо з теорії збурень,

$$\gamma(g) \sim cg^m.$$

Тоді для функцій Гріна Γ

$$\begin{aligned} \Gamma &\sim \exp\left(-\int^E \gamma(g_\mu) \frac{d\mu}{\mu}\right) \rightarrow \exp\left[-c \int^E [b(n-1) \ln \mu]^{-\frac{m}{n-1}} \frac{d\mu}{\mu}\right] \sim \\ &\sim \exp\left[-\frac{c[b(n-1)]^{-m/(n-1)}}{1 - \frac{m}{n-1}} (\ln E)^{1 - \frac{m}{n-1}}\right]. \end{aligned} \quad (10.5.23)$$

Тому у випадку асимптотичної свободи не виникає поправок до ефективної розмірності при великих імпульсах (малих відстанях).

10.6. Асимптотична безпека квантово-польових теорій

У випадку, коли теорія містить декілька констант зв'язку, маємо систему ренормгрупових рівнянь для ефективних констант взаємодій $g_i(\mu)$, які визначені в точці нормування, що характеризується енергетичним масштабом μ ,

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_i(\mu) = \beta_i(g_j(\mu)), \quad i = 1, \dots, n. \quad (10.6.1)$$

Зауважимо, що, якщо деякі константи \bar{g}_i в лагранжіані розмірні і мають канонічну розмірність d_{g_i} , тоді можна ввести відповідні безрозмірні константи $g_i = \mu^{-d_{g_i}} \bar{g}_i$, а всі ренормгрупові рівняння можна записати у вигляді

рівнянь для безрозмірних констант у формі (10.6.1). Кожна теорія визначається траєкторією в просторі констант зв'язку, яка є розв'язком (10.6.1) із заданими початковими умовами.

Очевидно, існує набагато більше різних типів асимптотичної поведінки ефективних констант взаємодій $g_i(\mu)$ коли $\mu \rightarrow \infty$, ніж у випадку однієї константи. У просторі констант g_i можуть бути траєкторії, які прямують до нескінченності при скінченних значеннях масштабу μ , тобто приводять до полюса Ландау або входять до деякої фіксованої точки бета-функції при $\mu \rightarrow \infty$.

Нехай g_i^* задовольняють рівнянням $\beta_i(g_j^*) = 0$, тобто g_i^* визначають фіксовану точку в n -вимірному просторі констант зв'язку. В самій точці g_i^* теорія буде мати масштабно інваріантну поведінку, а залежність фізичних величин від енергії або імпульсів буде визначатися канонічною розмірністю фізичної величини. Поблизу фіксованої точки рівняння можна лінеаризувати

$$\mu \frac{dg_i(\mu)}{d\mu} = B_{ij}(g_j(\mu) - g_j^*) + O((g_j(\mu) - g_j^*)^2), \quad B_{ij} = \left. \frac{\partial \beta(g_i)}{\partial g_j} \right|_{g=g^*} \quad (10.6.2)$$

і дослідити ренормгрупові траєкторії в околі цієї точки. Нехай матриця B має власні значення λ_m і, відповідно, власні вектори $v^{(m)}$,

$$B_{ik}v_k^{(m)} = \lambda_m v_i^{(m)}. \quad (10.6.3)$$

Розв'язок рівнянь (10.6.1) поблизу фіксованої точки g^* може бути розкладено за власними векторами матриці B

$$g_i(\mu) = g_i^* + c_m v_i^{(m)} \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{\lambda_m}, \quad (10.6.4)$$

де c_m — деякі коефіцієнти розкладу (константи інтегрування), μ_0 — деякий довільний масштаб. Ефективні константи взаємодії прямують до фіксованої ренормгрупової точки g^* коли $\mu \rightarrow \infty$ у випадку, якщо $c_m = 0$ для всіх власних векторів з власними значеннями $\lambda_m > 0$. Якщо $c_m \neq 0$ для деяких позитивних власних значень λ_m , то траєкторія буде виходити з фіксованої точки вздовж такого напрямку. Відповідний приклад наведено на рис. 60 у випадку двох констант g_1 і g_2 з бета-функціями $\beta_{g_1} = 2g_1 - 2g_1^2$, $\beta_{g_2} = -g_1g_2 + 2g_2^3$. Фіксована точка $g_1 = 1$, $g_2 = 1/\sqrt{2}$ має один ультрафіолетово притягуючий і один ультрафіолетово відштовхуючий напрям.

Нехай маємо n власних векторів з від'ємними власними значеннями, тоді маємо гіперповерхню, що складається з траєкторій, які притягаються до точки g^* при $\mu \rightarrow \infty$. Така гіперповерхня називається ультрафіолетово критичною, і, якщо початкові значення констант лежать на цій гіперповерхні, то всі вони будуть прямувати до фіксованої точки (див. рис. 61).

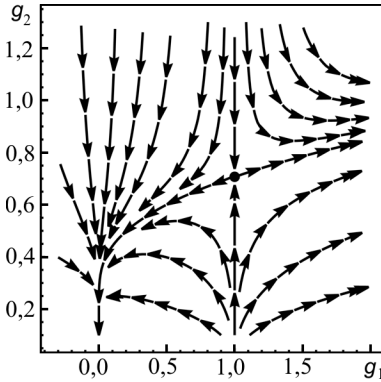


Рис. 60. Приклад поведінки ре-
нормгрупових траєкторій в околі
фіксованої точки

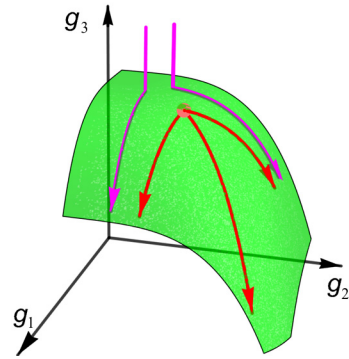


Рис. 61. Ілюстрація фіксова-
ної точки з критичною ультра-
фіолетовою поверхнею

Навіть константи неперенормовної теорії, якщо вони спочатку лежать на цій гіперповерхні, залишаються скінченними у границі $\mu \rightarrow \infty$. У неперенормовних теоріях ми фактично маємо нескінченне число констант взаємодій, щоб усунути всі розбіжності; в цьому випадку число рівнянь (10.6.1) також нескінченне, але критична поверхня тим не менш може мати скінченну розмірність [195].

Теорії з ультрафіолетовою критичною поверхнею отримали назву асимптотично безпечних, оскільки всі константи в них скінченні в ультрафіолетовій границі. Умова асимптотичної безпеки замінює в таких теоріях принцип перенормовності, тобто залишає в теорії скінченне число незалежних констант взаємодій, а саме ті, що лежать на критичній гіперповерхні. Фактично в теоріях з нерухомою точкою реалізується непертурбативна перенормовність, причому скінченна розмірність критичної гіперповерхні гарантує передбачуваність теорії.

Зв'язок асимптотично безпечних теорій з перенормовними в деяких випадках виявляється більш тісним. Дійсно, нехай маємо фіксовану точку в нулі $g^* = 0$ (очевидно, будь-яка теорія має таку точку, оскільки $\beta_i(g)$ завжди стає рівним нулю при $g = 0$). Для розмірних констант бета-функція має вигляд

$$\beta_i(g_j) = -d_i g_i + \text{петльові внески}. \quad (10.6.5)$$

Тоді, для того щоб траєкторія потрапляла в точку $g^* = 0$, необхідно щоб всі розмірні константи з розмірністю $d_i < 0$ були відсутні, але неперенормовані константи взаємодії якраз мають $d_i < 0$. Для перенормованих констант з $d_i = 0$ необхідно також мати від'ємні бета-функції, $\beta_i/g_i < 0$, поблизу нуля, щоб відповідні константи прямували до нуля при $\mu \rightarrow \infty$. Таким чином, ультрафіолетова критична гіперповерхня, яка містить фіксовану точку $g^* = 0$, складається з теорій, що є перенормовними і асимптотично вільними.

Важливим наслідком є також те, що ренормгрупа може дати нам інформацію про фундаментальні взаємодії, оскільки вона дозволяє відрізнити ефективні теорії (які порушуються в УФ-границі, наприклад через проблему тривіальності) від фундаментальних теорій, які справедливі у нескінченному діапазоні масштабів завдяки асимптотичній свободі або асимптотичній безпеці в УФ-границі.

Критерій асимптотичної безпеки може бути застосований і для дослідження квантової гравітації, яка є неперенормовною теорією за стандартною теорією збурень. Ясно, що в цьому випадку ми повинні шукати фіксовані точки, відмінні від $g^* = 0$. Цей напрям досліджень квантової гравітації в останні роки привернув до себе значну увагу. Такий підхід може привести до включення квантових гравітаційних флуктуацій поряд із взаємодіями Стандартної моделі в рамки єдиної квантово-польової теорії (див. оглядову статтю [73]).

ЗАДАЧІ

1. Знайти точний розв'язок ренормгрупового рівняння для ефективної константи зв'язку в теорії дійсного скалярного поля із взаємодією $\frac{\lambda\phi^4}{4!}$:

$$\mu \frac{d\lambda(\mu)}{d\mu} = \beta(\lambda(\mu)), \quad \lambda(\mu_0) = \lambda_r,$$

де β -функція у двопетльовому наближенні має вигляд

$$\beta(\lambda) = b\lambda^2 + c\lambda^3, \quad b = \frac{3}{(4\pi)^2}, \quad c = \frac{8}{\pi(4\pi)^4}.$$

Примітка. Відповідь повинна виражатися через реальну гілку функції Ламберта.

2. Знайти аномальну розмірність маси γ_m в порядку e^2 у квантовій електродинаміці та обчислити біжучу масу $m(t)$, де $t = |p|/m$.
3. Показати, що в теорії з бета-функцією $\beta(g) = b_1g^2 + b_2g^3 + b_3g^4$ коефіцієнт b_3 залежить від схеми віднімання, тоді як b_1, b_2 не залежать. Тобто, перевизначаючи константу зв'язку $g = \lambda + a_1\lambda^2 + a_2\lambda^3$ в іншій схемі віднімання, для константи λ отримати ренормгрупове рівняння з бета-функцією $\beta(\lambda) = b_1\lambda^2 + b_2\lambda^3 + c\lambda^4$, де коефіцієнт c вже залежить від коефіцієнтів a_i .

4. У моделі

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - ig\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi$$

обчислити β -функції для констант зв'язку λ і g в порядку λ і g^2 .

5. Обчислити у найнижчому порядку β -функцію в моделі Гросса—Неве

$$L = \bar{\psi}^j i\gamma^\mu \partial_\mu \psi^j + \frac{g^2}{2} (\bar{\psi}^j \psi^j)^2,$$

де $j = 1, \dots, N$. Показати, що теорія є асимптотично вільною.

6. Дослідити систему ренормгрупових рівнянь ($i = 1, 2$)

$$\frac{dg_i(t)}{dt} = \beta_i(g_j), \quad \beta_1(g_1, g_2) = -2g_1 - \frac{g_2}{8\pi}, \quad \beta_2(g_1, g_2) = -g_2 + \frac{3g_2^2}{16\pi}.$$

Знайти фіксовані точки, матрицю B (див. її визначення в (10.6.2)) і її власні значення, поведінку траєкторій поблизу фіксованих точок. Зобразити фазовий портрет у площині констант зв'язку.

7. У точній ренормгрупі бета-функції попередньої задачі замінюються на

$$\beta_1(g_1, g_2) = -2g_1 - \frac{g_2}{8\pi(1+g_1)^{1/2}}, \quad \beta_2(g_1, g_2) = -g_2 + \frac{3g_2^2}{16\pi(1+g_1)^{3/2}}.$$

Знайти фіксовані точки, матрицю B і її власні значення, поведінку траєкторій поблизу фіксованих точок. Зобразити фазовий портрет у площині констант зв'язку.

ПЕРЕРІЗ РОЗСІЯННЯ І S-МАТРИЦЯ

Експерименти в фізиці елементарних частинок, які описуються теоріями квантових полів, — це експерименти з розсіяння, народження або ж розпаду частинок. Можна нагадати, що, наприклад, саме за допомогою розсіяння альфа-частинок на золотій фользі, Резерфорд у 1911 р. встановив будову атома. У наш час дослідження розсіяння частинок відбувається на великих спеціально побудованих потужних прискорювачах. Щодо спостереження розпаду частинок, то пошук рідкісних розпадів зазвичай потребує детекторів рекордної гігантської величини.

У цьому розділі будуть розглянуті перерізи розсіяння, ширини розпаду частинок та зв'язок цих величин з функціями Гріна в теорії квантових полів за допомогою редуційних формул Лемана—Симанзіка—Циммермана. Також буде визначено S -матрицю та розглянуто оптичну теорему для фейнманівських діаграм і правила Куткоського для обчислення уявних частин діаграм. Розгляд розпочнемо з визначення перерізу розсіяння та ширини розпаду елементарних частинок.

11.1. Переріз розсіяння і ширина розпаду частинок

Ймовірність спостереження будь-якого окремого кінцевого стану в процесах розсіяння може бути виражена через *переріз розсіяння* — величину, яка характеризує внутрішні властивості взаємодій частинок, що розсіюються, і тому дозволяє порівнювати експерименти з пучками різних розмірів та інтенсивностей. Нехай частинки типу B розсіюються на мішені з частинками типу A , ρ_B , ρ_A — густини пучка і мішені, а l_A , l_B — довжини пучків (рис. 64). Число подій розсіяння пропорційно ρ_A , ρ_B , l_A , l_B та площі перекриття пучків A і визначається виразом

$$N = \sigma \rho_A \rho_B l_A l_B \cdot A,$$

де коефіцієнт

$$\sigma = \frac{N}{\rho_A \rho_B l_A l_B A}$$

— переріз розсіяння (симетричний відносно систем A , B), який має розмір-

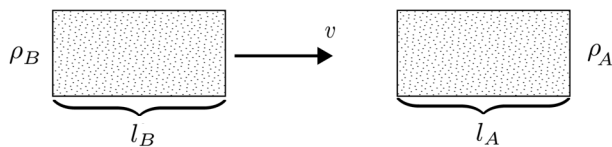


Рис. 62. Процес розсіяння

ність $[\sigma] = \text{см}^2$. Вводячи числа частинок А і В, $N_A = \rho_A l_A A$, $N_B = \rho_B l_B A$, число зіткнень переписеться наступним чином

$$N = \frac{\sigma N_A N_B}{A},$$

а σ дорівнює

$$\sigma = \frac{N}{N_A N_B} A. \quad (11.1.1)$$

Величина $N/(N_A N_B)$ є ймовірністю того, що відбудеться N зіткнень з можливого числа зіткнень $N_A N_B$, а σ — це ефективна площа шматка, який вибивається з площі A перетину пучків кожною частинкою налітаючого пучка. Оцінимо кількість можливих зіткнень для двох пучків з кількістю протонів у цих згустках $\sim 1,15 \cdot 10^{11}$. Ймовірність того, що один конкретний протон у згустку, що приходить зліва, зіткнеться з протоном у згустку, що приходить справа, залежить від розміру протона (d^2 з $d \sim 1$ фм) і розміру поперечного перерізу згустку ($A \sim R^2$, при $R \simeq 16$ мкм). Тоді ймовірність $\simeq d^2/R^2 = (10^{-15})^2/(16 \cdot 10^{-6})^2 = 4 \cdot 10^{-21}$. Кількість взаємодій буде: ймовірність \times (кількість протонів у згустку) $^2 \sim 50$. Звісно, кількість зіткнень буде значно більшою для взаємодії пучка з мішенню, де число протонів $\sim 10^{19} \text{ см}^{-3}$.

Густина пучків ρ_A , ρ_B в дійсності не є постійною, і необхідно інтегрувати по перекриттю пучків

$$N = \sigma l_A l_B \int d^2x \rho_A(x) \rho_B(x)$$

(x — координати в поперечному напрямку).

Якщо фіксується не тільки тип частинок, а й їх імпульси в кінцевому стану в об'ємі $d^3p_1 \dots d^3p_n$, тоді розглядають *диференціальний переріз розсіяння*

$$\frac{d\sigma}{d^3p_1 \dots d^3p_n}.$$

Імпульси в кінцевому стані обмежені законом збереження 4-імпульсу

$$p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

або еквівалентно збереження енергії та тривимірного імпульсу

$$E_a + E_b = \sum_{i=1}^n E_i, \quad \mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i, \quad E_i^2 = \mathbf{p}_i^2 + m_i^2, \quad (11.1.2)$$

де m_i — маси частинок. Таким чином, на $3n$ -вимірний простір імпульсів (кінцевих) накладено 4 обмеження, в підсумку маємо інтегрувати по $3n-4$ -вимірному фазовому простору

$$I_n(p_a, p_b) = \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} (2\pi)^4 \delta\left(p_a + p_b - \sum_i p_i\right) T(\mathbf{p}_i). \quad (11.1.3)$$

Експериментально вирізняють два типа процесів, а саме: ексклюзивні та інклюзивні. *Ексклюзивні процеси*: вимірюються імпульси всіх частинок в процесі. *Інклюзивні процеси*: відомі лише деякі частинки і їх імпульси, тобто кінцевий стан не ідентифіковано до кінця. Ексклюзивна реакція фіксує визначений канал реакції, а інклюзивна включає в себе суму різних ексклюзивних реакцій. На практиці зустрічаються два найважливіші типи ексклюзивних процесів:

розпад частинки

$$p_A \rightarrow p_1 + p_2 + \dots + p_n, \quad 1 \rightarrow n, \quad (11.1.4)$$

зіткнення двох частинок

$$p_A + p_B \rightarrow p_1 + p_2 + \dots + p_n, \quad 2 \rightarrow n. \quad (11.1.5)$$

Зіткнення $2 \rightarrow n$ описується перерізом розсіяння σ , а розпад — шириною (або ймовірністю) розпаду Γ нестабільної частинки A ($1 \rightarrow n$). Ця ймовірність визначається як

$$\Gamma \equiv \frac{\text{число розпадів в одиницю часу}}{\text{число частинок } A}, \quad (11.1.6)$$

розмірність $[\Gamma] = [\text{сек}]^{-1}$, і відповідно, час життя частинки $\tau = 1/\Gamma$.

У квантовій механіці нестабільна частинка описується резонансом Брейта—Вігнера, поблизу якого амплітуда розсіяння має форму

$$f(E) \simeq \frac{1}{E - E_0 + i\Gamma/2}. \quad (11.1.7)$$

Переріз розсіяння має пік поблизу брейт-вігнерівського резонансу

$$\sigma \sim \frac{1}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}. \quad (11.1.8)$$

Релятивістське узагальнення брейт-вігнерівського резонансу визначається появою уявної частини в пропагаторах проміжних (віртуальних) частинок, де поблизу полюса $p_0 \simeq E_p$,

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + im\Gamma} \simeq \frac{1}{2E_p \left[p_0 - E_p + i \left(\frac{m}{E_p} \right) \frac{\Gamma}{2} \right]}. \quad (11.1.9)$$

Ймовірність розпаду в довільній системі відліку $\frac{m}{E_p}\Gamma$, що узгоджується з релятивістським розтягненням часу.

Підрахуємо число суттєвих змінних у кінцевому стані. Для розпаду $1 \rightarrow n$ орієнтація конфігурації імпульсів частинок у кінцевому стані в системі спокою частинки, яка розпадається, не має значення. Тому є $3n - 7$ суттєвих змінних. Для процесу розсіяння $2 \rightarrow n$ поворот навколо виділеної осі зіткнення не є суттєвою змінною, в результаті в цьому випадку маємо $3n - 5$ суттєвих змінних.

Повний переріз, або ймовірність розпаду, отримується інтегруванням по всьому $3n - 4$ фазовому простору. Диференціальний переріз знаходять інтегруванням по підмножині фазового простору, коли фіксуються суттєві змінні.

11.2. *S*-матриця

Важливе значення в теорії розсіяння має *S*-матриця, яка зв'яже між собою початковий і кінцевий стани. Спочатку будуються хвильові пакети частинок у початковому стані, далі діємо на них оператором еволюції $\exp(-iHt)$ з гамільтоніаном, який включає взаємодію, а потім проєктуємо кінцевий стан на заданий стан, який описує набір частинок у кінцевому стані. Це визначає амплітуду ймовірності народження заданого стану, яка в свою чергу визначає переріз розсіяння.

Хвильовий пакет для заданого стану можна записати у вигляді суперпозиції імпульсних станів

$$|\Phi\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} \Phi(\mathbf{k}) |\mathbf{k}\rangle, \quad (11.2.1)$$

де міра інтегрування записана в лоренц-інваріантній формі, а $\Phi(\mathbf{k})$ — фур'є-образ просторової хвильової функції.

У вільній теорії стани з фіксованим імпульсом знаходять за допомогою дії операторів народження на вакуумний стан, $|\mathbf{k}\rangle = a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle$, де оператори знищення та народження $a(\mathbf{k})$, $a^\dagger(\mathbf{k}')$ задовольняють стандартним комутаційним або антикомутаційним співвідношенням

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')]_{\mp} = (2\pi)^3 2E_k \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (11.2.2)$$

Стани ортонормовані таким чином

$$\langle \mathbf{k}' | \mathbf{k} \rangle = (2\pi)^3 2E_k \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}), \quad (11.2.3)$$

а нормування хвильової функції $\langle \Phi | \Phi \rangle = 1$ дає умову на $\Phi(\mathbf{k})$:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} |\Phi(\mathbf{k})|^2 = 1. \quad (11.2.4)$$

Ймовірність, яку ми хочемо обчислити, визначається квадратом модуля матричного елемента

$$P = |\underbrace{\langle \Phi_1 \Phi_2 \dots |}_{\text{майбутнє}} \underbrace{|\Phi_A \Phi_B \rangle}_{\text{минуле}}|^2.$$

Якщо хвильові пакети концентруються поблизу визначених імпульсів, тоді нам треба знати матричний елемент між початковими (in) і кінцевими (out) станами $\langle p_1 p_2 \dots; \text{out} | p_{APB}; \text{in} \rangle$.

Стани in і out зв'язані оператором $U(t_2, t_1)$,

$$\begin{aligned} \langle p_1 p_2 \dots; \text{out} | p_{APB}; \text{in} \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \langle p_1 p_2 \dots |_{\substack{T \\ -T}} p_{APB} \rangle = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \langle p_1 p_2 \dots | U(T, -T) | p_{APB} \rangle = \langle p_1 p_2 \dots; \text{out} | S | p_{APB}; \text{out} \rangle, \end{aligned} \quad (11.2.5)$$

де (див. розділ 3 в книжці [196])

$$U(t_2, t_1) = e^{iH_0 t_2} e^{-iH(t_2 - t_1)} e^{-iH_0 t_1}.$$

Повний гамільтоніан H є сумою вільного гамільтоніана H_0 і частини, що відповідає за взаємодію, $H = H_0 + V$. Стани $|\text{in}\rangle$ і $|\text{out}\rangle$ є власними станами гамільтоніана H_0 . Таким чином, оператор S зв'язує початкові і кінцеві стани,

$$|\alpha, \text{in}\rangle = S |\alpha, \text{out}\rangle, \quad \langle \alpha, \text{out} | = \langle \alpha, \text{in} | S. \quad (11.2.6)$$

Матричні елементи цього оператора,

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta, \text{out} | \alpha, \text{in} \rangle = \langle \beta, \text{out} | S | \alpha, \text{out} \rangle = \langle \beta, \text{in} | S | \alpha, \text{in} \rangle, \quad (11.2.7)$$

утворюють так звану S -матрицю з властивостями $SS^\dagger = S^\dagger S = 1$, тобто S -матриця є унітарною, що є наслідком збереження повної ймовірності процесів.

З S -матриці зручно виділити частину, відповідальну за взаємодію (T -матриця)

$$S = 1 + iT,$$

а з елементів T -матриці множник, який виражає закон збереження енергії-імпульсу

$$\langle p_1 p_2 \dots | T | p_{APB} \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A + p_B - \sum_i p_i \right) M(p_A, p_B \rightarrow p_f). \quad (11.2.8)$$

Величина $M(p_a, p_b \rightarrow p_f)$ називається амплітудою розсіяння, яка аналогічна амплітуді розсіяння $f(\theta)$ на кут θ у квантовій механіці.

Необхідно знайти зв'язок амплітуди M з вимірюваною величиною — перерізом розсіяння. Ймовірність переходу із початкового стану $|p_A p_B\rangle$ в кінцевий $|p_1 p_2 \dots\rangle$ визначається матричним елементом

$$\frac{\langle p_1 p_2 \dots | T | p_A p_B \rangle}{\| |p_1 p_2 \dots\rangle \| \| |p_A p_B\rangle \|}, \quad (11.2.9)$$

де ми врахували нормування станів і те, що амплітуда ймовірності для будь-якого оператора визначається формулою

$$\frac{\langle \psi | T | \Phi \rangle}{\| |\psi\rangle \| \| |\Phi\rangle \|}. \quad (11.2.10)$$

Нормування одночастинкового стану впливає з (11.2.3)

$$\| |\mathbf{k}\rangle \|^2 = \langle \mathbf{k} | \mathbf{k} \rangle = (2\pi)^3 2E_k \delta^{(3)}(0). \quad (11.2.11)$$

Фізичний зміст $\delta^{(3)}(0)$ впливає з того, що у тривимірному просторі скінченного об'єму V має місце заміна $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \rightarrow V$, тобто

$$\| |\mathbf{k}\rangle \|^2 = 2E_k V. \quad (11.2.12)$$

Таким чином, ймовірність взаємодії дорівнює

$$\left| \frac{\langle p_1 p_2 \dots | T | p_A p_B \rangle}{\| |p_1 p_2 \dots\rangle \| \| |p_A p_B\rangle \|} \right|^2 = \frac{(2\pi)^8 \delta^2(p_A + p_B - \sum_i p_i) |M|^2}{2E_{p_1} \dots 2E_{p_n} \cdot 2E_{p_A} \cdot 2E_{p_B} \cdot V^{2+n}}. \quad (11.2.13)$$

Для чотиривимірної дельта-функції маємо $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) = V \cdot T$, T — час, а отже,

$$(2\pi)^8 \delta^2\left(p_A + p_B - \sum_i p_i\right) = VT (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_A + p_B - \sum_i p_i\right).$$

Для того, щоб отримати повну ймовірність, необхідно підсумувати (проінтегрувати) за всіма можливими кінцевими станами. Для однієї частинки необхідно проінтегрувати по фазовому об'єму

$$dN = \frac{V \cdot d^3 p}{(2\pi)^3}.$$

тоді повна ймовірність переходу з початкового стану в кінцевий є

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{T}{2E_{p_A} 2E_{p_B} V} \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_A + p_B - \sum_i p_i\right) |M|^2. \quad (11.2.14)$$

Для ширини розпаду частинки $1 \rightarrow n$ отримуємо

$$\Gamma = \frac{W_{1 \rightarrow n}}{T} = \frac{1}{2E_{p_A}} \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_A - \sum_i p_i\right) |M|^2. \quad (11.2.15)$$

Ймовірність $W_{1 \rightarrow n}$ — це ймовірність розпаду однієї частинки.

Для перерізу реакції $2 \rightarrow n$ маємо

$$\sigma = \frac{N}{N_A N_B} A = W_{2 \rightarrow n} \frac{V}{l_A} = W_{2 \rightarrow n} \frac{V}{|\mathbf{v}| \cdot T}, \quad (11.2.16)$$

де A — площа перетину пучків, або пучка з мішенню, $l_A = |\mathbf{v}|T$, і \mathbf{v} — відносна швидкість. Тоді для перерізу розсіяння отримуємо формулу

$$\sigma_{2 \rightarrow n} = \frac{1}{2E_{p_A} 2E_{p_B} |\mathbf{v}|} \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_A + p_B - \sum_i p_i\right) |M|^2. \quad (11.2.17)$$

У лабораторній системі енергія $E_B = m_B$ ($\mathbf{p}_B = 0$), і величину $2m_B E_{p_A} |\mathbf{v}|$ запишемо в лоренц-інваріантному вигляді, що дозволить мати вираз для перерізу в довільній системі координат. Оскільки релятивістська швидкість $\mathbf{v} = \mathbf{p}/E$, то $E_A |\mathbf{v}| = |\mathbf{p}_A|$. Розглянемо інваріантну відносно перетворень Лоренца змінну Мандельштама

$$s = (p_A + p_B)^2 = m_A^2 + m_B^2 + 2m_B E_A, \quad (11.2.18)$$

де друга рівність — запис у системі мішені. Звідси

$$E_A = \frac{s - m_A^2 - m_B^2}{2m_B}, \quad \mathbf{p}_A^2 = E_A^2 - m_A^2 = \frac{(s - m_A^2 - m_B^2)^2 - 4m_A^2 m_B^2}{4m_B^2}.$$

Визначимо кінематичну функцію

$$\lambda(x, y, z) = (x - y - z)^2 - 4yz = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz, \quad (11.2.19)$$

яка очевидно симетрична відносно перестановки аргументів. У термінах цієї функції

$$|\mathbf{p}_A| = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_A^2, m_B^2)}{2m_B}. \quad (11.2.20)$$

Функцію λ можна переписати у вигляді

$$\lambda(x, y, z) = [x - (\sqrt{y} + \sqrt{z})^2][x - (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2], \quad (11.2.21)$$

тобто

$$\lambda(s, m_A^2, m_B^2) = [s - (m_A + m_B)^2][s - (m_A - m_B)^2]. \quad (11.2.22)$$

Очевидно, повинно виконуватись $\lambda \geq 0$, звідки маємо нерівність

$$\sqrt{s} \geq m_A + m_B,$$

де $m_A + m_B$ — поріг реакції. Іноді $\lambda(x, y, z)$ називають трикутною функцією, тому що $\frac{1}{4}\sqrt{-\lambda(x, y, z)}$ — площа трикутника зі сторонами \sqrt{x} , \sqrt{y} , \sqrt{z} .

Формула для перерізу розсіяння приймає лоренц-інваріантний вигляд

$$\sigma_{2 \rightarrow n} = \frac{1}{2\lambda^{1/2}(s, m_A^2, m_B^2)} \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_A + p_B - \sum_i p_i\right) |M|^2. \quad (11.2.23)$$

Функцію λ можна записати у дещо іншому вигляді,

$$\begin{aligned} \lambda(s, m_A^2, m_B^2) &= [s - (m_A + m_B)^2][s - (m_A - m_B)^2] = \\ &= (2p_{APB} - 2m_A m_B)(2p_{APB} + 2m_A m_B) = 4[(p_{APB})^2 - m_A^2 m_B^2], \end{aligned} \quad (11.2.24)$$

де використано $s = (p_A + p_B)^2 = m_A^2 + m_B^2 + 2p_{APB}$. Для перерізу розсіяння використовується також формула

$$\sigma_{2 \rightarrow n} = \frac{1}{4\sqrt{(p_{APB})^2 - m_A^2 m_B^2}} \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_A + p_B - \sum_i p_i\right) |M|^2. \quad (11.2.25)$$

Отримані формули дозволяють легко знайти переріз у системі центру мас, де повний імпульс $\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = 0$. В цій системі

$$\sqrt{s} = E_A + E_B = \sqrt{\mathbf{p}_A^2 + m_A^2} + \sqrt{\mathbf{p}_B^2 + m_B^2}, \quad E_A^2 - E_B^2 = m_A^2 - m_B^2.$$

Звідси маємо

$$\begin{aligned} E_A &= \frac{s + m_A^2 - m_B^2}{2\sqrt{s}}, \quad E_B = \frac{s - m_A^2 + m_B^2}{2\sqrt{s}}, \\ |\mathbf{p}_A| &= |\mathbf{p}_B| = \frac{2\lambda^{1/2}(s, m_A^2, m_B^2)}{2\sqrt{s}}. \end{aligned} \quad (11.2.26)$$

У системі мішені при великих імпульсах (енергіях) з рівняння (11.2.20) знаходимо

$$s \approx 2m_B P_A^M \quad \text{або} \quad s \approx 2P_A^M \quad (11.2.27)$$

в одиницях ГеВ, тому що мішенню практично завжди є нуклон з масою $m_B \approx 1$ ГеВ. З іншого боку, в системі центру мас

$$E_A \approx E_B \approx P_A \approx P_B \approx \frac{\sqrt{s}}{2}. \quad (11.2.28)$$

Корисна енергія зіткнень \sqrt{s} зростає тільки як $\sqrt{2P_A^M}$ в системі мішені та як $2P_A^{СЦМ}$ — в системі центра мас. Щоб досягти тієї ж енергії на мішені, що й на зустрічних пучках, ефективний імпульс на мішені повинен бути значно більшим, ніж імпульс в експерименті на зустрічних пучках. Це означає, що виграш на зустрічних пучках може бути значним, наприклад, щоб досягти однієї і тієї самої енергії при імпульсі 40 ГеВ/с на зустрічних пучках, на мішені необхідно досягти імпульсу 3200 ГеВ/с. У системі центра мас множник в перерізі $2\lambda^{1/2}(s, m_A^2, m_B^2)$ набуває простий вигляд

$$2\lambda^{1/2}(s, m_A^2, m_B^2) = 4E^{СЦМ}P^{СЦМ}, \quad (11.2.29)$$

де енергія $E^{СЦМ} = \sqrt{s} = E_A + E_B$.

11.3. Оптична теорема

Оптична теорема випливає з унітарності S -матриці, якщо в рівняння $S^\dagger S = 1$ підставити $S = 1 + iT$. Тоді отримуємо нелінійне співвідношення для T -матриці:

$$-i(T - T^\dagger) = T^\dagger T. \quad (11.3.1)$$

Розглянемо матричний елемент цього співвідношення між станами $|\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\rangle$ і $|\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\rangle$. Для обчислення правої частини вставимо повний набір проміжних станів

$$\langle p_1 p_2 | T^\dagger T | k_1 k_2 \rangle = \sum_n \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3 2E_i} \langle p_1 p_2 | T^\dagger | \{q_i\} \rangle \langle \{q_i\} | T | k_1 k_2 \rangle. \quad (11.3.2)$$

Із T -матриці виділимо δ -функцію, яка виражає закон збереження чотириімпульсу

$$\langle \{q_i\} | T | k_1 k_2 \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(k_1 + k_2 - \sum q_i \right) M(k_1 k_2 \rightarrow q_i), \quad (11.3.3)$$

і підставляючи в (11.3.2), отримуємо

$$\begin{aligned} & -i[M(k_1 k_2 \rightarrow p_1 p_2) - M^*(p_1 p_2 \rightarrow k_1 k_2)] = \\ & = \sum_n \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3 2E_i} M^*(p_1 p_2 \rightarrow q_i) M(k_1 k_2 \rightarrow q_i) \times \\ & \quad \times (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(k_1 + k_2 - \sum q_i \right). \end{aligned} \quad (11.3.4)$$

В останньому виразі ми скоротили на загальну дельта-функцію $(2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)$. Запишемо цю рівність у скороченому вигляді

$$-i[M(a \rightarrow b) - M^*(b \rightarrow a)] = \sum_f \int d\Pi_f M^*(b \rightarrow f) M(a \rightarrow f), \quad (11.3.5)$$

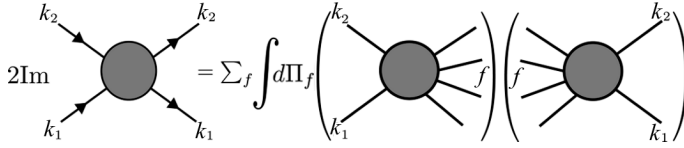


Рис. 63. Оптична теорема — графічне зображення

де $d\Pi_f$ — фазовий об'єм. Підсумовування відбувається за всіма можливими кінцевими станами f , які допускаються законами збереження.

Для випадку розсіяння вперед покладемо $p_i = k_i$ і отримуємо тотожність, яку графічно зображено на рис. 63.

Оптична теорема звучить так: *Уявна частина амплітуди розсіяння вперед визначається внесками всіх можливих проміжних багаточастинкових станів.* Якщо додати необхідні кінематичні множники, тоді отримуємо стандартне формулювання оптичної теореми

$$\text{Im } M(k_1 k_2 \rightarrow k_1 k_2) = 2E_{\text{СЦМ}} P_{\text{СЦМ}} \sigma_{\text{tot}}(k_1 k_2 \rightarrow \text{всі стани}), \quad (11.3.6)$$

де $E_{\text{СЦМ}}$, $P_{\text{СЦМ}}$ — енергія та імпульс кожної частинки в системі центра мас.

Цей вираз пов'язує амплітуду розсіяння на нульовий кут з повним перерізом народження всіх кінцевих станів.

11.4. Оптична теорема для фейнманівських діаграм. Правила Куткоського

Підінтегральні вирази діаграм Фейнмана містять пропагатори, які мають полюси. Поблизу полюсів, коли знаменники пропагаторів малі, стає суттєвою уявна добавка $i\varepsilon$, яка визначає правило обходу полюсів. Розглянемо діаграму $2 \rightarrow 2$, матричний елемент якої $M(s)$ залежить від змінної Мандельстама s . Матричний елемент дійсний, якщо в $M(s)$ енергія $s < s_0$, де s_0 — порогова енергія народження найлегших проміжних станів. Тому для дійсних значень $s < s_0$ справедлива тотожність

$$M(s) = [M(s^*)]^*. \quad (11.4.1)$$

Розглядаючи s як комплексну змінну, останню рівність можна аналітично продовжити на всю комплексну площину (принцип симетрії Шварца). При $s > s_0$ поблизу дійсної осі, звідси випливає

$$\begin{aligned} \text{Re } M(s + i\varepsilon) &= \text{Re } M(s - i\varepsilon), \\ \text{Im } M(s + i\varepsilon) &= -\text{Im } M(s - i\varepsilon). \end{aligned} \quad (11.4.2)$$

Тому починаючи з $s > s_0$ буде розріз, і стрибок на розрізі визначається формулою

$$\text{Disc } M(s) = M(s + i\varepsilon) - M(s - i\varepsilon) = 2i \text{Im } M(s + i\varepsilon). \quad (11.4.3)$$

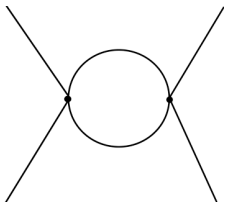


Рис. 64. Діаграма розсіяння $2 \rightarrow 2$

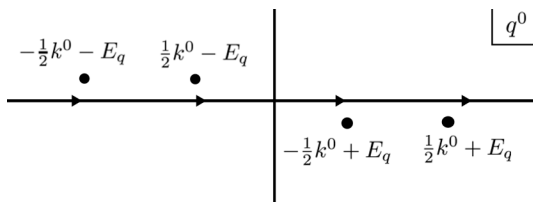


Рис. 65. Полюси в комплексній площині q^0

Стрибок на розрізі для фейнманівської діаграми визначається правилами розрізання Куткоського. Розглянемо для прикладу однопетльову діаграму розсіяння $2 \rightarrow 2$ в теорії $\lambda\Phi^4$ (рис. 64) з імпульсами частинок, що розсіюються, k_1 і k_2 , і запишемо її вираз за правилами Фейнмана ($k = k_1 + k_2$)

$$iM = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{\left(\frac{k}{2} - q\right)^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{\left(\frac{k}{2} + q\right)^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (11.4.4)$$

У системі центра мас вектор $k = (k_0, \mathbf{0})$ і полюси при $k_0 \geq 2m$ розташовані в точках

$$q^0 = \frac{k_0}{2} \pm (E_q - i\varepsilon), \quad q^0 = -\frac{k_0}{2} \pm (E_q - i\varepsilon), \quad E_q = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}, \quad (11.4.5)$$

два з яких вище дійсної осі, а два нижче (див. рис. 65). Замкнемо контур інтегрування в нижній напівплощині. Як з'ясується, тільки один полюс $q^0 = -\frac{k_0}{2} + E_q$ дає внесок у стрибок, і за теорією лишків Коші для нього знаходимо

$$\frac{1}{\left(\frac{k_0}{2} + q_0 - E_q + i\varepsilon\right)\left(\frac{k_0}{2} + q_0 + E_q + i\varepsilon\right)} \rightarrow \frac{-2\pi i}{2E_q}. \quad (11.4.6)$$

Обчислення в полюсі еквівалентно при інтегуванні по q^0 заміні

$$\frac{1}{\left(\frac{k}{2} + q\right)^2 - m^2 + i\varepsilon} \rightarrow -2\pi i \delta \left[\left(\frac{k}{2} + q\right)^2 - m^2 \right] \theta \left(\frac{k^0}{2} + q^0 \right). \quad (11.4.7)$$

Тоді маємо

$$\begin{aligned} iM &= -2\pi i \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^4} \frac{1}{2E_q} \frac{1}{(k_0 - E_q)^2 - E_q^2} = \\ &= -2\pi i \frac{\lambda^2}{2} \frac{4\pi}{(2\pi)^4} \int_m^\infty dE_q E_q |\mathbf{q}| \frac{1}{2E_q} \frac{1}{k_0(k_0 - 2E_q)}, \end{aligned} \quad (11.4.8)$$

де ми проінтегрували по кутах і перешли до змінної інтегрування E_q . Остаточно

$$M = -\frac{\lambda^2}{8\pi^2 k^0} \int_m^\infty \frac{dE_q \sqrt{E_q^2 - m^2}}{k^0 - 2E_q}, \quad (11.4.9)$$

де підінтегральний вираз має полюс при $E_q = k_0/2$. Для другого полюса в (11.4.4) при $q^0 = \frac{k^0}{2} + E_q$ у знаменнику останнього виразу буде $k_0 + 2E_q$, полюси відсутні і амплітуда M дійсна, тобто уявна частина внеску цього доданка дорівнює нулю.

Коли $k_0 < 2m$, полюс при $E_q = k_0/2$ в (11.4.9) не лежить на контурі інтегрування, і M дійсне. При $k^0 > 2m$ він лежить або вище, або нижче ($k_0 \mp i\varepsilon$), і інтеграл має стрибок. Використаємо формулу Сохоцького

$$\frac{1}{k_0 - 2E_q \pm i\varepsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{k_0 - 2E_q} \mp i\pi\delta(k^0 - 2E_q), \quad (11.4.10)$$

де \mathcal{P} позначає головне значення інтеграла. Для стрибка M маємо

$$\begin{aligned} \text{Disc } M(k^0) &= M(k^0 + i\varepsilon) - M(k^0 - i\varepsilon) = \\ &= -\frac{\lambda^2}{8\pi^2 k^0} \int_m^\infty dE_q \sqrt{E_q^2 - m^2} \left(\frac{1}{k^0 - 2E_q + i\varepsilon} - \frac{1}{k^0 - 2E_q - i\varepsilon} \right) = \\ &= \frac{i\lambda^2}{4\pi k^0} \int_m^\infty dE_q \sqrt{E_q^2 - m^2} \delta(k^0 - 2E_q) = \frac{i\lambda^2}{16\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^0{}^2}} \theta(k^0 - 2m). \end{aligned} \quad (11.4.11)$$

Зауважимо, що стрибок амплітуди M також можна отримати заміною полюса на δ -функцію, що еквівалентно заміні початкового пропагатора

$$\frac{1}{\left(\frac{k}{2} - q\right)^2 - m^2 + i\varepsilon} \rightarrow -2\pi i \delta \left[\left(\frac{k}{2} - q\right)^2 - m^2 \right] \theta \left(\frac{k^0}{2} - q^0 \right). \quad (11.4.12)$$

Дійсно, повертаючись до початкового виразу і перепозначаючи імпульси,

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} = \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k), \quad (11.4.13)$$

запишемо

$$\begin{aligned} M &= -\frac{i\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k) \times \\ &\quad \times \frac{1}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{p_2^2 - m^2 + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (11.4.14)$$

$$2 \operatorname{Im} \left(\text{Diagram 1} \right) = \int d\Pi \left| \text{Diagram 2} \right|^2$$

$$2 \operatorname{Im} \left(\text{Diagram 3} \right) = \int d\Pi \left| \text{Diagram 4} \right|^2$$

Рис. 66. Приклади застосування правила Куткоського

Правило Куткоського полягає в тому, що стрибок Disc M можна обчислити, замінивши кожний з пропагаторів

$$\frac{1}{p_i^2 - m^2 + i\varepsilon} \rightarrow (-2\pi i)\delta(p_i^2 - m^2)\theta(p_i^0). \quad (11.4.15)$$

У нашому випадку

$$\begin{aligned} \operatorname{Disc} M &= -\frac{i\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k) \times \\ &\times (-2\pi i)^2 \delta(p_1^2 - m^2) \delta(p_2^2 - m^2) \theta(p_1^0) \theta(p_2^0). \end{aligned} \quad (11.4.16)$$

Легко перевірити, виконуючи інтегрування за допомогою дельта-функцій, що отримується результат (11.4.11).

Водночас, інтегруючи в (11.4.16) тільки по енергіях p_i^0 за допомогою дельта-функцій $\delta(p_i^2 - m^2)$, отримуємо аналог оптичної теореми

$$\begin{aligned} \operatorname{Disc} M_2(k) &= 2i \operatorname{Im} M_2(k) = \frac{i}{2} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \times \\ &\times |M_1(k)|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k). \end{aligned} \quad (11.4.17)$$

Тут $M_1(k)$ і $M_2(k)$ — амплітуди розсіяння в першому і другому порядку по λ , $M_1(k) = -i\lambda$. Тобто нелінійне співвідношення для амплітуди розсіяння, яке є наслідком унітарності теорії, дозволяє отримати уявну частину амплітуди з амплітуди нижчого порядку.

Сформулюємо загальні правила обчислення уявної частини діаграми Фейнмана з використанням правил Куткоського (рис. 68).

1. У даному каналі потрібно розрізати діаграму всіма можливими засобами.

2. Для кожного розрізаного пропагатора робиться заміна (11.4.15).

3. Підсумовуються внески від всіх можливих розрізань.

Правила Куткоського дозволяють довести оптичну теорему в довільному порядку теорії збурень.

11.5. Редукційні формули Лемана—Симанзіка—Циммермана

Редукційні формули Лемана—Симанзіка—Циммермана пов'язують елементи S -матриці з повними функціями Гріна взаємодіючих полів, і тому є ланцюжком, який з'єднує формалізм функцій Гріна з експериментально спостережуваними величинами. Виведення цих формул проведемо для випадку взаємодіючого скалярного поля.

S -матриця зв'язує вільні частинки в початковому і кінцевому стані, які в даному випадку описуються рівнянням Клейна—Гордона—Фока. Для комплексного поля воно має розв'язки з додатною і від'ємною енергією

$$f_p^{(\pm)}(x) = e^{\mp i p x} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}}, \quad p^0 \equiv E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (11.5.1)$$

Вони ортонормовані відносно скалярного добутку при фіксованому часі

$$(\varphi, \psi) = i \int_t d^3x \varphi^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \psi(x), \quad A \overleftrightarrow{\partial}_0 B = A \partial_0 B - B \partial_0 A. \quad (11.5.2)$$

Тобто маємо співвідношення ортонормованості

$$\int_t d^3x f_{p'}^{*(\pm)}(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_p^{(\pm)}(x) = \pm \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (11.5.3)$$

$$\int_t d^3x f_{p'}^{*(\pm)}(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_p^{(\mp)}(x) = 0. \quad (11.5.4)$$

Поле можна розкласти по повній системі f_p^\pm :

$$\varphi(x) = \int d^3p [f_p^+(x) \tilde{a}(p) + f_p^-(x) \tilde{b}^\dagger(p)], \quad (11.5.5)$$

звідки за допомогою (11.5.3) і (11.5.4) знаходимо коефіцієнти Фур'є:

$$\tilde{b}^\dagger(p) = \int d^3x f_p^{*(-)}(x) \frac{1}{i} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(x), \quad (11.5.6)$$

$$\tilde{a}(p) = \int d^3x f_p^{*(+)}(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(x). \quad (11.5.7)$$

В термінах тільки $\exp(\pm i p x)$ маємо наступний розклад

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} (e^{-i p x} \tilde{a}(p) + e^{i p x} \tilde{b}^\dagger(p)). \quad (11.5.8)$$

Введемо нові позначення для коефіцієнтів розкладу Фур'є

$$\int d^3x e^{-i p x} \frac{1}{i} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(x) = \sqrt{(2\pi)^3 2E_p} \tilde{b}^\dagger(p) \equiv b^\dagger(p), \quad (11.5.9)$$

$$\int d^3x e^{ipx} i \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(x) = \sqrt{(2\pi)^3 2E_p} \tilde{a}(p) \equiv a(p), \quad (11.5.10)$$

в термінах яких розклад поля приймає вигляд

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} (e^{-ipx} a(p) + e^{ipx} b^\dagger(p)). \quad (11.5.11)$$

Вибір розкладу (11.5.11) зручний тому, що міра інтегрування в ньому релятивістські інваріантна. У випадку дійсного скалярного поля, який ми й будемо надалі розглядати, $b^\dagger(p) = a^\dagger(p)$. На коефіцієнти Фур'є при квантуванні накладаються комутаційні співвідношення:

$$[a(p), a^\dagger(p')] = (2\pi)^3 2E_p \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (11.5.12)$$

Початкові і кінцеві стани багатьох вільних частинок (простір Фока) будуються за допомогою операторів народження $a^\dagger(p)$.

Рівняння Янга—Фелдмана. Для взаємодіючої теорії скалярного поля рівняння руху мають такий вигляд:

$$(\square + m^2)\varphi(x) = j(x), \quad (11.5.13)$$

де права частина містить степені $\varphi(x)$ вище другої. Використовуючи функції Гріна, взаємодіюче скалярне поле можна зв'язати з вільними полями в початковому, φ_{in} , і кінцевому, φ_{out} , станах,

$$\varphi(x) = \sqrt{Z} \varphi_{\text{in}}(x) + \int d^4y D_{\text{ret}}(x-y) j(y), \quad (11.5.14)$$

$$\varphi(x) = \sqrt{Z} \varphi_{\text{out}}(x) + \int d^4y D_{\text{adv}}(x-y) j(y). \quad (11.5.15)$$

Запізнювальна і випереджальна функції та поля φ_{in} , φ_{out} задовольняють рівнянням

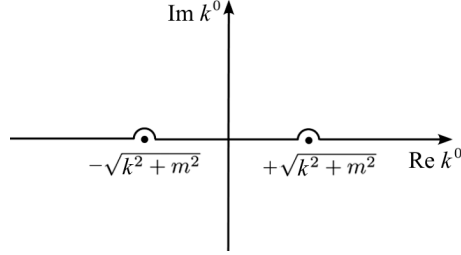
$$\begin{aligned} (\square + m^2)_x D_{\text{ret}}(x-y) &= \delta(x-y), & (\square + m^2)\varphi_{\text{in}}(x) &= 0, \\ (\square + m^2)_x D_{\text{adv}}(x-y) &= \delta(x-y), & (\square + m^2)\varphi_{\text{out}}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Функції Гріна визначаються виразами

$$D_{\text{ret,adv}}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{m^2 - (k_0 \pm i\varepsilon)^2 + \mathbf{k}^2}. \quad (11.5.16)$$

Контур інтегрування по k^0 для функції $D_{\text{ret}}(x)$ обходить полюси зверху (рис. 67), а для $D_{\text{adv}}(x)$ — відповідно, знизу.

Рис. 67. Шлях інтегрування для $D_{\text{ret}}(x)$ в комплексній площині k^0



Обчислення за теорією лишків дає

$$D_{\text{ret}}(x) = i\theta(x^0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ikx} - e^{ikx}}{2k^0} \Big|_{k^0=\sqrt{k^2+m^2}}, \quad (11.5.17)$$

$$D_{\text{adv}}(x) = -i\theta(-x^0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ikx} - e^{ikx}}{2k^0} \Big|_{k^0=\sqrt{k^2+m^2}}. \quad (11.5.18)$$

Таким чином, ці функції мають властивості

$$D_{\text{ret}}(x) = 0, \quad x^0 < 0, \quad D_{\text{adv}}(x) = 0, \quad x^0 > 0, \quad (11.5.19)$$

що виправдовує їх назви запізнювальної і випереджальної. З (11.5.14) і (11.5.15) випливає, що

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\rightarrow \sqrt{Z}\varphi_{\text{in}}(x), & x^0 &\rightarrow -\infty, \\ \varphi(x) &\rightarrow \sqrt{Z}\varphi_{\text{out}}(x), & x^0 &\rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Пов'яжемо елементи S -матриці розсіяння l частинок в початковому і n частинок в кінцевому стані з повними функціями Гріна взаємодіючих полів. У просторі Фока вільних початкових і кінцевих станів усі стани отримуються дією операторів народження на вакуумний стан. Ці оператори за допомогою формул (11.5.9) і (11.5.10) виражаються через вільні поля φ_{in} , φ_{out} . Спершу для однієї початкової частинки запишемо

$$\begin{aligned} \langle p_1, \dots, p_n, \text{out} | q_1, \dots, q_l, \text{in} \rangle &= \langle p_1, \dots, p_n, \text{out} | a_{\text{in}}^\dagger(q_1) | q_2, \dots, q_l, \text{in} \rangle = \\ &= \int_{x_0} d^3x e^{-iq_1x} \frac{1}{i} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle p_1, \dots, p_n, \text{out} | \varphi_{\text{in}}(x) | q_2, \dots, q_l, \text{in} \rangle. \end{aligned} \quad (11.5.20)$$

Інтеграл визначається для довільного моменту часу x_0 . Виберемо велике від'ємне x_0 , при цьому взаємодіюче поле прямує до φ_{in} :

$$x_0 \rightarrow -\infty, \quad \varphi(x) \rightarrow Z^{1/2}\varphi_{\text{in}}(x).$$

Це твердження відоме як адіабатична гіпотеза. Відповідну границю необхідно розуміти в слабкому сенсі, тобто як таку, що виконується для матричних елементів. Таким чином,

$$\begin{aligned} & \langle p_1, \dots, p_n, \text{out} | q_1, \dots, q_l, \text{in} \rangle = \\ & = \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} Z^{-1/2} \int_{x_0} d^3x e^{-iq_1x} \frac{1}{i} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle p_1, \dots, p_n, \text{out} | \varphi(x) | q_2, \dots, q_l, \text{in} \rangle. \end{aligned} \quad (11.5.21)$$

При $x_0 \rightarrow +\infty$ аналогічно

$$\varphi(x) \rightarrow Z^{1/2} \varphi_{\text{out}}(x).$$

Для довільного інтеграла справедлива тотожність

$$\begin{aligned} & \left(\lim_{x_0 \rightarrow +\infty} - \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \right) \int d^3x \psi(x_0, \mathbf{x}) = \\ & = \lim_{\substack{x_{0f} \rightarrow +\infty \\ x_{0i} \rightarrow -\infty}} \int_{x_{0i}}^{x_{0f}} dx_0 \frac{\partial}{\partial x_0} \int d^3x \psi(x_0, \mathbf{x}) = \int d^4x \partial_0 \psi(x_0, \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (11.5.22)$$

Тоді матричний елемент можна переписати у формі

$$\begin{aligned} & \langle p_1, \dots, p_n, \text{out} | q_1, \dots, q_l, \text{in} \rangle = \\ & = \lim_{x_0 \rightarrow +\infty} Z^{-1/2} \int_{x_0} d^3x e^{-iq_1x} \frac{1}{i} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle p_1, \dots, p_n, \text{out} | \varphi(x) | q_2, \dots, q_l, \text{in} \rangle + \\ & + iZ^{-1/2} \int d^4x \partial_0 \left[e^{-iq_1x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle p_1, \dots, p_n, \text{out} | \varphi(x) | q_2, \dots, q_l, \text{in} \rangle \right] = \\ & = \langle p_1, \dots, p_n, \text{out} | a_{\text{out}}^\dagger(q_1) | q_2, \dots, q_l, \text{in} \rangle + \\ & + iZ^{-1/2} \int d^4x \partial_0 \left[e^{-iq_1x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle p_1, \dots, p_n, \text{out} | \varphi(x) | q_2, \dots, q_l, \text{in} \rangle \right]. \end{aligned} \quad (11.5.23)$$

Перший доданок є сумою незв'язних доданків, які отримуються, комутуючи $a_{\text{out}}^\dagger(q_1)$ з операторами $a_{\text{out}}(p_i)$,

$$\begin{aligned} & \langle p_1, \dots, p_n, \text{out} | a_{\text{out}}^\dagger(q_1) | q_2, \dots, q_l, \text{in} \rangle = \\ & = \sum_{k=1}^n (2\pi)^3 2p_k^0 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_k - \mathbf{q}_1) \langle p_1, \dots, \check{p}_k, \dots, p_n, \text{out} | q_2, \dots, q_l, \text{in} \rangle, \end{aligned} \quad (11.5.24)$$

вони зникають, коли жоден з початкових імпульсів не співпадає з кінцевим. Позначення \check{p}_k означає, що частинка з імпульсом p_k відсутня в матричному елементі.

Для другого доданка

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \partial_0 \left[e^{-iq_1x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle \beta, \text{out} | \varphi(x) | \alpha, \text{in} \rangle \right] = \\
 & = \int d^4x \left\{ e^{-iq_1x} \partial_0^2 \langle \beta, \text{out} | \varphi(x) | \alpha, \text{in} \rangle - \partial_0^2 (e^{-iq_1x}) \langle \beta, \text{out} | \varphi(x) | \alpha, \text{in} \rangle \right\} = \\
 & = \int d^4x \left\{ e^{-iq_1x} \partial_0^2 \langle \beta, \text{out} | \varphi(x) | \alpha, \text{in} \rangle + (-\Delta + m^2) (e^{-iq_1x}) \langle \beta, \text{out} | \varphi(x) | \alpha, \text{in} \rangle \right\} = \\
 & = \int d^4x e^{-iq_1x} (\square + m^2) \langle \beta, \text{out} | \varphi(x) | \alpha, \text{in} \rangle, \quad (11.5.25)
 \end{aligned}$$

де в останній рівності ми проінтегрували частинами для просторових змінних. Таким чином, після редукції одної частинки маємо

$$\begin{aligned}
 & \langle p_1, \dots, p_n, \text{out} | q_1, \dots, q_l, \text{in} \rangle = \\
 & = \sum_{k=1}^n (2\pi)^3 2p_k^0 \delta^3(\mathbf{p}_k - \mathbf{q}_1) \langle p_1, \dots, \check{p}_k, \dots, p_n, \text{out} | q_2, \dots, q_l, \text{in} \rangle + \\
 & + iZ^{-1/2} \int d^4x e^{-iq_1x} (\square + m^2) \langle p_1, \dots, p_n, \text{out} | \varphi(x) | q_2, \dots, q_l, \text{in} \rangle. \quad (11.5.26)
 \end{aligned}$$

Процес редукції частинок з початкового стану можна повторювати далі.

Зробимо тепер аналогічну процедуру для частинок у кінцевому стані (незв'язні частини опустимо)

$$\begin{aligned}
 & \langle p_1, \dots, p_n, \text{out} | \varphi(x) | q_2, \dots, q_l, \text{in} \rangle = \\
 & = \langle p_2, \dots, p_n, \text{out} | a_{\text{out}}(p_1) \varphi(x) | q_2, \dots, q_l, \text{in} \rangle = \\
 & = \lim_{y_0 \rightarrow +\infty} iZ^{-1/2} \int_{y_0} d^3y e^{ip_1y} \overleftrightarrow{\partial}_{y_0} \langle p_2, \dots, p_n, \text{out} | \varphi(y) \varphi(x) | q_2, \dots, q_l, \text{in} \rangle. \quad (11.5.27)
 \end{aligned}$$

Оскільки $y_0 > x_0$, то можливо безболісно вставити знак T -впорядкування, під знаком якого можна поля переставити і далі виконувати всі операції, як і в першому випадку. Тоді маємо ланцюжок перетворень

$$\begin{aligned}
 & \langle p_1, \dots, \text{out} | \varphi(x) | q_2, \dots, \text{in} \rangle = \\
 & = \lim_{y_0 \rightarrow +\infty} iZ^{-1/2} \int d^3y e^{ip_1y} \overleftrightarrow{\partial}_{y_0} \langle p_2, \dots, \text{out} | T \varphi(x) \varphi(y) | q_2, \dots, \text{in} \rangle = \\
 & = \lim_{y_0 \rightarrow -\infty} iZ^{-1/2} \int d^3y e^{ip_1y} \overleftrightarrow{\partial}_{y_0} \langle p_2, \dots, \text{out} | T \varphi(x) \varphi(y) | q_2, \dots, \text{in} \rangle = \\
 & = iZ^{-1/2} \int d^4y e^{ip_1y} (\square_y + m^2) \langle p_2, \dots, \text{out} | T \varphi(x) \varphi(y) | q_2, \dots, \text{in} \rangle = \\
 & = \langle p_2, \dots, \text{out} | \varphi(x) a_{\text{in}}(p_1) | q_2, \dots, \text{in} \rangle + iZ^{-1/2} \int d^4y e^{ip_1y} (\square_y + m^2) \times \\
 & \quad \times \langle p_2, \dots, \text{out} | T \varphi(y) \varphi(x) | q_2, \dots, \text{in} \rangle. \quad (11.5.28)
 \end{aligned}$$

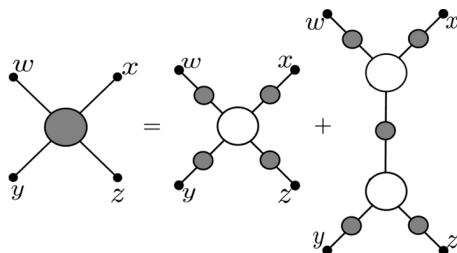


Рис. 68. Структура чотириточкової функції Гріна

Перший доданок після комутації $a_{\text{in}}(p_1)$ з $a_{\text{in}}^\dagger(q_i)$ знов відповідає незв'язним доданкам.

Таким чином, після редукції двох частинок маємо

$$\begin{aligned} \langle p_1, \dots, \text{out} | q_1, \dots, \text{in} \rangle &= \langle p_1, \dots, \text{in} | S | q_1, \dots, \text{in} \rangle = \text{незв'язні доданки} + \\ &+ (iZ^{-1/2})^2 \int d^4x_1 d^4y_1 e^{ip_1y - iq_1x} (\square_{y_1} + m^2)(\square_{x_1} + m^2) \times \\ &\times \langle p_2, \dots, \text{out} | T\varphi(y_1)\varphi(x_1) | q_2, \dots, \text{in} \rangle. \end{aligned} \quad (11.5.29)$$

Після редукції всіх частинок маємо загальну формулу

$$\begin{aligned} \langle p_1, \dots, p_n, \text{out} | q_1, \dots, q_l, \text{in} \rangle &= \langle p_1, \dots, p_n, \text{in} | S | q_1, \dots, q_l, \text{in} \rangle = \\ &= \text{незв'язні доданки} + (iZ^{-1/2})^{n+l} \int d^4y_1 \dots d^4y_n d^4x_1 \dots d^4x_l \times \\ &\times \exp\left(i \sum_{k=1}^n p_k y_k - i \sum_{j=1}^l q_j x_j\right) (\square_{y_1} + m^2) \dots (\square_{y_n} + m^2) (\square_{x_1} + m^2) \dots \times \\ &\times (\square_{x_l} + m^2) \langle 0 | T\varphi(y_1) \dots \varphi(y_n)\varphi(x_1) \dots \varphi(x_l) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (11.5.30)$$

Це і є формула Лемана—Симанзіка—Циммермана (ЛСЦ). Опускаючи незв'язні доданки та перекидаючи дію операторів КГФ на експоненти, можна записати (11.5.30) у вигляді

$$\begin{aligned} &\int \left(\prod_{j=1}^l d^4x_j e^{-iq_j x_j} \right) \int \left(\prod_{k=1}^n d^4y_k e^{ip_k y_k} \right) \langle 0 | T\varphi(y_1) \dots \varphi(y_n)\varphi(x_1) \dots \varphi(x_l) | 0 \rangle = \\ &= \left(\prod_{j=1}^l \frac{i\sqrt{Z}}{q_j^2 - m^2 + i\varepsilon} \right) \left(\prod_{k=1}^n \frac{i\sqrt{Z}}{p_k^2 - m^2 + i\varepsilon} \right) \langle p_1, \dots, p_n, \text{out} | q_1, \dots, q_l, \text{in} \rangle + \dots, \end{aligned} \quad (11.5.31)$$

де крапки позначають члени менш сингулярні при виході на масову оболонку $p_i^0 \rightarrow +E_{p_i}$, $q_j^0 \rightarrow +E_{q_j}$.

Для полів зі спіном необхідно ще помножити на поляризаційний спінор (типу $u^s(p)$ або ε^λ), щоб спроектувати на відповідний спіновий стан. При

цьому розглядати необхідно тільки зв'язні діаграми, які одержуються з функціонала $W(J)$, оскільки тільки вони мають максимальну сингулярну структуру. Незв'язні діаграми мають менше полюсів, ніж множників $p_i^2 - m_i^2$ від операторів КГФ. Константи перенормування хвильової функції Z в (11.5.31) в точності скорочуються з константами перенормування полів φ . В результаті достатньо взяти тільки ампутовані функції Гріна (див., наприклад, рис. 68), покласти зовнішні лінії на масову поверхню, взяти всі енергії додатними і помножити на спінові спінори або вектори поляризації.

Зауваження. Якщо аналітично продовжити отриманий вираз для S -матричного елемента від додатної до від'ємної енергії, $p_i^0 \rightarrow -q_i^0$ ($q_i^0 > 0$), то це буде відповідати елементу S -матриці, де $a(\mathbf{p})$ в кінцевому стані замінюється на $a^\dagger(-\mathbf{p})$ в початковому

$$\langle \dots a(p) | S | \dots \rangle \Big|_{p=-q} = \langle \dots | S | a^\dagger(q) \dots \rangle.$$

Ця властивість релятивістських амплітуд розсіяння називається кросинг-симетрією і є загальною властивістю квантової теорії поля.

ЗАДАЧІ

1. Розглянути теорію скалярного поля ϕ із взаємодією $g\phi^3/3!$ та обчислити зв'язний елемент S -матриці для скаляр-скалярного розсіяння в порядку g^2 . Знайти диференціальний переріз у системі центра мас.
2. Обчислити диференціальний і повний переріз розсіяння процесу $e^-e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$ в найнижчому порядку по константі взаємодії, вважаючи, що спіни електрона і мюона не реєструються.
3. Обчислити диференціальний переріз електрон-електронного розсіяння в найнижчому порядку за теорією збурень, вважаючи, що спіни початкових і кінцевих частинок не реєструються.
4. Обчислити диференціальний переріз $d\sigma/d\cos\theta$ для розсіяння $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$ в найнижчому порядку за теорією збурень в границі $E_{\text{СЦМ}} \gg m_e$, коли можна ігнорувати масу електрона.

Спонтанне порушення симетрії є однією з центральних ідей Стандартної моделі елементарних частинок, а також фізики багаточастинкових систем в теорії конденсованих середовищ [11, 23, 54, 61, 118, 121, 154, 201]. Дійсно, майже всі фазові переходи в статистичній фізиці пов'язані зі спонтанним порушенням симетрії. Наприклад, феромагнітний фазовий перехід нижче точки Кюрі, кристалізація, надпровідний фазовий перехід тощо. Зазначимо, однак, що існують стани речовини, які не можна представити як стани зі спонтанно порушеною симетрією. Такі стани пов'язані з топологічним порядком, і відповідним прикладом є спінові рідини та електронний газ у квантовому ефекті Холла.

Якщо дуже коротко, то суть явища спонтанного порушення симетрії полягає в тому, що хоча лагранжіан (гамільтоніан) фізичної системи є інваріантним відносно деякої симетрії, основний стан цієї системи є неінваріантним. Звідси внаслідок симетрії відразу випливає, що насправді існують інші вироджені по енергії стани системи, які всі є фізично еквівалентними. У квантовій механіці в системах із скінченним числом ступенів вільності спонтанне порушення симетрії принципово неможливе.

Дійсно, розглянемо для прикладу квантово-механічну частинку в потенціалі з двома симетричними ямами. Навіть якщо ми локалізуємо частинку в одній ямі, то частинка може тунелувати в іншу яму. Тому справжній основний стан частинки буде суперпозицією станів, локалізованих у двох ямах. Спонтанне порушення симетрії можливе тільки в системах з нескінченним числом ступенів вільності, тобто в квантовій теорії поля або квантових статистичних системах у термодинамічній границі, коли ймовірність переходу від стану системи, локалізованого в одному мінімумі, до іншого виродженого по енергії стану зануляється. Дійсно, хоча ймовірність такого переходу для однієї частинки або одного ступеня вільності є скінченною величиною, ймовірність одно-

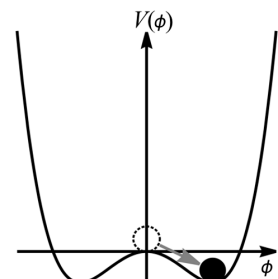


Рис. 69. Спонтанне порушення симетрії у двоямному потенціалі

часного переходу для всіх частинок системи прямує до нуля, коли число частинок прямує до нескінченності.

Ситуація в калібрувальних теоріях є більш делікатною, наприклад, існують особливі розв'язки (інстантони), які описують тунелювання між вакуумними станами з різним топологічним числом [123, 157]. Реалізація спонтанного порушення симетрії має далекосяжні наслідки для фізичних систем, де це явище реалізується, визначаючи спектр низькоенергетичних збуджень. Усі ці питання будуть детально обговорюватись у цьому розділі, а аналіз спонтанного порушення симетрії розпочнемо з простого випадку дійсного взаємодіючого скалярного поля.

12.1. Спонтанне порушення дискретної симетрії

Лагранжева густина дійсного взаємодіючого скалярного поля

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (12.1.1)$$

має дискретну симетрію відносно заміни $\phi \rightarrow -\phi$. Основний стан відповідає значенню поля $\phi = 0$. За теорією збурень маємо взаємодіюче поле з квадратом маси m^2 . Якщо ми зробимо заміну

$$m^2 \rightarrow -\mu^2,$$

тоді гамільтоніан буде мати вигляд

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\partial_i\phi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \right], \quad (12.1.2)$$

де потенціал

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (12.1.3)$$

має мінімуми для двох значень поля (див. рис. 69)

$$\phi_0 = \pm v = \pm \sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu, \quad (12.1.4)$$

і ϕ_0 — вакуумне середнє поля ϕ . Розкладемо $\phi(x)$ поле поблизу одного із мінімумів $\phi(x) = v + \sigma(x)$, тоді лагранжева густина перепишеться

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 - \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{6}}\mu\sigma^3 - \frac{\lambda}{4!}\sigma^4 + \text{const.} \quad (12.1.5)$$

Очевидно, що лагранжіан описує скалярне поле масою $\sqrt{2}\mu$ із взаємодіями σ^3 і σ^4 . Симетрія відносно зміни знака поля, $\sigma \rightarrow -\sigma$, тепер відсутня. Тобто маємо ситуацію, коли початковий лагранжіан і гамільтоніан мають симетрію, але вибір конкретного розв'язку рівнянь руху для основного стану порушує цю дискретну симетрію. Це явище називається спонтанним порушенням симетрії. Підкреслимо ще раз, що в цьому розгляді ми вважаємо, що тунелювання поля у стані з вакуумним середнім v у всьому просторі у вироджений по енергії стан із вакуумним середнім $-v$ дорівнює нулю. Тільки тоді аналіз вище є застосовним і явище спонтанного порушення симетрії реалізується.

Перейдемо тепер до розгляду спонтанного порушення неперервної симетрії.

12.2. Лінійна σ -модель

Розглянемо так звану лінійну σ -модель з N скалярними полями і «неправильним» знаком масового доданка

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^i)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2 - \frac{\lambda}{4}[(\phi^i)^2]^2, \quad i = 1, \dots, N. \quad (12.2.1)$$

Лагранжіан має неперервну симетрію відносно глобальних перетворень $\phi^i \rightarrow R^{ij}\phi^j$ з будь-якою ортогональною ($RR^T = 1$) матрицею R . Тобто маємо неперервну групу симетрії $O(N)$. Мінімуму потенціалу

$$V(\phi^i) = -\frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2 + \frac{\lambda}{4}[(\phi^i)^2]^2, \quad (12.2.2)$$

зображеному на рис. 70, відповідає конфігурація поля

$$(\phi_0^i)^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}. \quad (12.2.3)$$

Але це рівняння фіксує тільки довжину вектора ϕ^i , а його напрямок залишається довільним. Без втрати загальності можна вибрати вектор ϕ_0^i вздовж N -го напрямку (схематично відповідний стан показано червоною точкою на рис. 70) (для $N = 2$)

$$\phi_0^i = (0, 0, \dots, v), \quad v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}. \quad (12.2.4)$$

Визначимо нові поля $\pi^k(x)$ і $\sigma(x)$

$$\phi^i(x) = (\pi^k(x), v + \sigma(x)), \quad k = 1, \dots, N - 1, \quad (12.2.5)$$

які описують відхилення (флуктуації) від основного стану. Зауважимо, що лінійна σ -модель може бути застосована для опису піонів, коли $N = 4$, у цьому випадку поля $\pi^k(x)$ і $\sigma(x)$ відповідають триpletу піонів і сигма-частинці. Лагранжیان моделі після заміни (12.2.5) набуває вигляду

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi^k)^2 - \frac{m_\sigma^2}{2}\sigma^2 - \lambda v \sigma [\sigma^2 + (\pi^k)^2] - \frac{\lambda}{4} [\sigma^2 + (\pi^k)^2]^2. \quad (12.2.6)$$

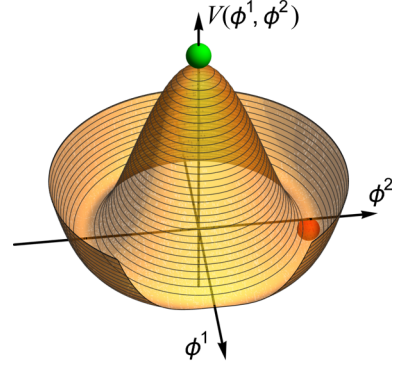


Рис. 70. Спонтанне порушення неперервної симетрії

В результаті маємо масивне поле σ з масою $m_\sigma = \sqrt{2}\mu$ і $N - 1$ безмасових полів π^k . Симетрія $O(N)$ порушена до $O(N - 1)$, оскільки поля $\pi^k(x)$ входять у вигляді квадрата довжини $(\pi^k(x))^2$.

Модель (12.2.1) можна узагальнити на випадок присутності ферміонів

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}[i\gamma^\mu \partial_\mu + g(\sigma + i\gamma_5\pi)]\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(\sigma^2 + \pi^2) - \frac{\lambda}{4}[\sigma^2 + \pi^2]^2, \quad (12.2.7)$$

де ми для простоти залишили тільки два поля σ і π . Ферміони тут безмасові, і модель має кіральну симетрію відносно перетворень групи $U(1)$ з постійним параметром θ :

$$\psi \rightarrow e^{i\theta\gamma_5/2}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{i\theta\gamma_5/2}, \quad \begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix}. \quad (12.2.8)$$

За теоремою Нетер цій симетрії відповідає кіральний струм

$$j_{\mu 5} = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi + \sigma\partial_\mu\pi - \pi\partial_\mu\sigma, \quad (12.2.9)$$

який зберігається, $\partial^\mu j_{\mu 5} = 0$, що нескладно перевірити, використовуючи рівняння руху. Мінімуму потенціалу відповідає конфігурація полів $\sigma^2 + \pi^2 = \mu^2/\lambda$, і вибираючи, наприклад, один з мінімумів $\sigma_0 = \sqrt{\mu^2/\lambda} \equiv v$, $\pi_0 = 0$, для флуктуацій полів, $\sigma(x) \rightarrow v + \sigma(x)$, $\pi(x) \rightarrow 0 + \pi(x)$, лагранжیان приймає вигляд

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}[i\gamma^\mu \partial_\mu - m + g(\sigma + i\gamma_5\pi)]\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi)^2 - \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 - \lambda v \sigma (\sigma^2 + \pi^2) - \frac{\lambda}{4}[\sigma^2 + \pi^2]^2, \quad (12.2.10)$$

а кіральний струм (12.2.9) стає

$$j_{\mu 5} = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma_{\mu} \gamma_5 \psi + \sigma \partial_{\mu} \pi - \pi \partial_{\mu} \sigma + v \partial_{\mu} \pi \quad (12.2.11)$$

і продовжує зберігатися. Таким чином, в результаті спонтанного порушення кіральної симетрії ферміон і σ -частинка набувають маси, $m = -gv$ і $m_{\sigma} = \sqrt{2\lambda}v$, відповідно, а π є безмасовою частинкою, відомою як голдстоунівський бозон.

12.3. Теорема Голдстоуна

Як бачимо, спонтанне порушення неперервної симетрії на відміну від спонтанного порушення дискретної симетрії супроводжується появою безмасових частинок. Цей результат є загальним і випливає з теореми Голдстоуна. Число таких безмасових частинок пов'язано з числом порушених генераторів симетрії. Дійсно, для групи $O(N)$ число генераторів $\frac{N(N-1)}{2}$, а число порушених симетрій дорівнює

$$\frac{N(N-1)}{2} - \frac{(N-1)(N-2)}{2} = N-1.$$

Число порушених симетрій збігається з числом безмасових частинок — це і є твердження теореми Голдстоуна. Інтуїтивно легко зрозуміти причину появи безмасових частинок. У випадку спонтанно порушеної неперервної симетрії існує багаточисельність станів системи, вироджених по енергії, внаслідок симетрії. Один стан у цьому багаточисельності переходить в інший при дії порушених генераторів симетрії. Ясно, що поля, які відповідають руху вздовж напрямків, що описуються дією таких генераторів, за визначенням будуть безмасовими, тому що потенціальна енергія однакова для всіх вироджених станів. Енергія таких полів буде пов'язана тільки з їх залежністю від координат і часу, тобто ефективна дія для них буде містити квадратичні доданки тільки з похідними від полів у повній відповідності з прикладом спонтанного порушення неперервної симетрії в лінійній σ -моделі, розглянутому в попередньому параграфі (див. рівняння (12.2.6)).

Безмасові поля, які виникають в результаті спонтанного порушення неперервної симетрії, називаються голдстоунівськими бозонами (або намбу-голдстоунівськими бозонами). Ці бозони були знайдені Намбу в 1960 р. при дослідженні мікроскопічної теорії надпровідності Бардіна—Купера—Шріффера, а також при дослідженні спонтанного порушення кіральної симетрії в квантово-польовій моделі (модель Намбу—Йона-Лазініо [151]). Пізніше у 1961 р. їх загальна фізична природа була з'ясована Голдстоуном та ін. [94, 95]. Незалежно така мода була відкрита Андерсоном і Боголюбовим (1958 р.) при дослідженні спонтанного порушення симетрії в теорії конденсованих станів [4, 28, 52].

Доведемо цю теорему у загальному випадку, розглядаючи ϕ як класичні поля, коли лагранжева густина має вигляд

$$\mathcal{L} = (\text{доданки з похідними}) - V(\phi) \quad (12.3.1)$$

і є інваріантною відносно деякої неперервної симетрії. Формалізм ефективної дії для вакуумних середніх квантових полів, який дозволяє обчислити ефективний потенціал для таких середніх, буде розглянуто в наступному параграфі. Нехай ϕ_0^a — конфігурація поля, яка мінімізує потенціал $V(\phi)$,

$$\frac{\partial}{\partial \phi^a} V|_{\phi^a = \phi_0^a} = 0. \quad (12.3.2)$$

Розкладемо $V(\phi)$ в околі цієї точки

$$V(\phi) = V(\phi_0) + \frac{1}{2}(\phi - \phi_0)^a(\phi - \phi_0)^b \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^a \partial \phi^b} \right)_{\phi_0} + \dots$$

Коефіцієнт при квадратичному доданку,

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^a \partial \phi^b} \right)_{\phi_0} = m_{ab}^2, \quad (12.3.3)$$

буде симетричною матрицею, власні значення якої дорівнюють квадратам мас полів, і вони всі більше або дорівнюють нулю, оскільки ϕ_0 — мінімум.

Довільне перетворення неперервної симетрії має вигляд

$$\phi^a(x) \rightarrow \phi^a(x) + \alpha \Delta^a(x, \phi), \quad (12.3.4)$$

де α — нескінченно малий параметр, $\Delta^a(x, \phi)$ — деяка функція полів ϕ та їх похідних у точці x . Обмежимося глобальними симетріями, коли групі перетворення не залежать від координат. Інваріантність потенціалу виражається в рівності

$$V(\phi^a) = V(\phi^a + \alpha \Delta^a(\phi)),$$

або

$$\Delta^a(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi^a} V = 0. \quad (12.3.5)$$

Продиференціюємо по ϕ^b і покладемо $\phi = \phi_0$:

$$\underbrace{\left(\frac{\partial \Delta^a(\phi)}{\partial \phi^b} \right)_{\phi_0}}_{=0} \left(\frac{\partial V}{\partial \phi^a} \right)_{\phi_0} + \Delta^a(\phi_0) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^a \partial \phi^b} \right)_{\phi_0} = 0. \quad (12.3.6)$$

Якщо перетворення не змінює ϕ_0 (тобто основний стан інваріантний відносно таких перетворень), то $\Delta^a(\phi_0) = 0$, і співвідношення тривіальне.

Спонтанно порушена симетрія — це коли $\Delta^a(\phi_0) \neq 0$, тобто основний стан змінюється при деяких перетвореннях. Але тоді $\Delta^a(\phi_0)$ є вектором із власним значенням нуль матриці m_{ab}^2 . Таких векторів рівно стільки, скільки є порушених симетрій, тобто перетворень, що змінюють вакуум, і визначається числом $\dim G - \dim H$, де $\dim G$ — розмірність початкової групи симетрії, $\dim H$ — розмірність залишкової підгрупи симетрії основного стану. Поля вздовж напрямків $\Delta^a(\phi_0)$ мають тільки кінетичну енергію і описують безмасові голдстоунівські бозони (або ж намбу-голдстоунівські бозони). Теорема доведена.

12.4. Модель Намбу—Йона-Лазініо

Модель Намбу—Йона-Лазініо (НЙЛ) історично є першим прикладом динамічного порушення симетрії у фізиці елементарних частинок. Вона була запропонована в 1961 р. [151] з ідеєю пояснити маси спостережуваних ферміонів і мезонів. Модель НЙЛ ґрунтується на аналогії зі знаменитою теорією надпровідності Бардіна—Купера—Шріффера (БКШ), сформульованою у 1957 р., де внаслідок динамічного порушення $U(1)$ симетрії за рахунок притягальної чотириферміонної взаємодії в спектрі електронних збуджень відкривається щілина. З точки зору енергетичного спектра маса в рівнянні Дірака відіграє роль щілини, яка відділяє верхній континуум, який описує частинки, від нижнього континууму, що описує античастинки. Масовий доданок порушує кіральну симетрію, тому природно, спробувати, спираючись на аналогію з теорією надпровідності БКШ, пояснити наявність маси ферміонів як наслідок динамічного порушення кіральної симетрії, що й зробили у своїй роботі Намбу і Йона-Лазініо.

Почнемо з генеруючого функціонала, який в моделі НЙЛ визначається рівнянням

$$Z = N \int D\bar{\psi} D\psi e^{i \int d^4x \{ \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \frac{G}{2} [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi} i \gamma_5 \psi)^2] \}}. \quad (12.4.1)$$

Взаємодія в моделі НЙЛ є чотириферміонною, так само як у теорії БКШ. Модель має $U(1) \times U_A(1)$ симетрію відносно звичайних фазових та кіральних перетворень

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi, \quad \psi \rightarrow e^{i\beta\gamma_5} \psi.$$

Ці неперервні симетрії внаслідок теореми Нетер приводять до збереження векторного і аксіального струмів

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (12.4.2)$$

$$\partial_\mu j_5^\mu = 0, \quad j_5^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi. \quad (12.4.3)$$

Для аналізу моделі Намбу—Йона-Лазініо зручно застосувати метод Хаббарда—Стратоновича і ввести допоміжні поля. У цьому методі генеруючий функціонал моделі НЙЛ можна переписати у формі

$$Z = \int D\bar{\psi}D\psi D\sigma D\pi e^{i\int d^4x\{\bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \sigma\bar{\psi}\psi - \pi\bar{\psi}i\gamma_5\psi - \frac{1}{2G}(\sigma^2 + \pi^2)\}}. \quad (12.4.4)$$

Дійсно, використовуючи рівняння руху для полів σ і π ,

$$\sigma = -G\bar{\psi}\psi, \quad \pi = -G\bar{\psi}i\gamma_5\psi,$$

легко пересвідчитись, що генеруючий функціонал (12.4.4) є еквівалентним функціоналу (12.4.1), якщо проінтегрувати за допоміжними полями, оскільки відповідний інтеграл є гаусовим. Очевидно, що рівняння руху означають, що поля σ і π є складеними полями, які утворені парами частинка-античастинка.

Інтегрування за ферміонними полями приводить до нової форми генеруючого функціонала

$$\begin{aligned} Z &= N \int D\sigma D\pi e^{-i\int d^4x \frac{1}{2G}(\sigma^2 + \pi^2)} \text{Det} [i\gamma^\mu\partial_\mu - \sigma - i\gamma_5\pi] = \\ &= N' \int D\sigma D\pi e^{iS_{\text{eff}}(\sigma, \pi)}, \end{aligned} \quad (12.4.5)$$

де ефективна дія для полів σ і π визначається виразом

$$S_{\text{eff}}(\sigma, \pi) = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2G}(\sigma^2 + \pi^2) \right\} - i\text{Tr} \ln [i\gamma^\mu\partial_\mu - \sigma - i\gamma_5\pi], \quad (12.4.6)$$

і ми використали формулу для детермінанта оператора

$$\ln \text{Det} A = \text{Tr} \ln A, \quad \text{Tr} \ln A = \int d^4x \text{tr} \langle x | \ln A | x \rangle.$$

Рівняння руху для полів σ і π впливають з умови екстремуму ефективної дії

$$\frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta \sigma(x)} = 0, \quad \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta \pi(x)} = 0$$

і мають вигляд

$$\sigma(x) = iG \text{tr} \langle x | \frac{1}{i\gamma^\mu\partial_\mu - \sigma - i\gamma_5\pi} | x \rangle, \quad (12.4.7)$$

$$\pi(x) = iG \text{tr} \langle x | \gamma_5 \frac{1}{i\gamma^\mu\partial_\mu - \sigma - i\gamma_5\pi} | x \rangle. \quad (12.4.8)$$

Ці рівняння руху мають розв'язок $\pi = 0$, $\sigma = \text{const} \neq 0$. У цьому випадку (12.4.7) приймає простий вигляд

$$\sigma = iG \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{p} - \sigma} = 4iG \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\sigma}{p^2 - \sigma^2}, \quad (12.4.9)$$

і ми маємо рівняння на масу σ , яке отримав Намбу (очевидно з рівняння (12.4.4), що ненульове вакуумне середнє поля σ_0 відіграє роль маси для ферміонів). Математично воно має таку саму структуру, що й не дивно, як і рівняння на щільну в теорії надпровідності БКШ. Оскільки інтеграл розбіжний, то необхідно ввести ультрафіолетове обрізання, після віківського повороту інтеграл легко обчислюється, і для нетривіального розв'язку отримуємо трансцендентне рівняння

$$\frac{4\pi^2}{G\Lambda^2} = 1 - \frac{\sigma_0^2}{\Lambda^2} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{\sigma_0^2} + 1 \right). \quad (12.4.10)$$

Очевидно, це рівняння має розв'язок, якщо константа взаємодії перевищує деяке критичне значення $G > G_c = 4\pi^2/\Lambda^2$, і в наближенні $\sigma_0/\Lambda \ll 1$ знаходимо

$$\sigma_0^2 \simeq \Lambda^2 \frac{G - G_c}{G \ln \frac{G}{G - G_c}}, \quad G \gtrsim G_c. \quad (12.4.11)$$

Отже, у моделі НЙЛ кіральна симетрія спонтанно порушена динамічним чином, і у вакуумному стані виникає нетривіальний кіральний конденсат $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \sim \sigma_0\Lambda^2 \neq 0$.

Зауважимо, що в присутності зовнішнього магнітного поля B рівняння для маси має нетривіальний розв'язок при як завгодно малій константі зв'язку

$$\sigma_0 \simeq \sqrt{|eB|} \exp \left(-\frac{1}{\nu_0 G} \right), \quad \nu_0 = \frac{|eB|}{4\pi^2}, \quad (12.4.12)$$

де $\nu_0 = \frac{1}{V} \frac{dN}{dE} \Big|_{E=0}$ — густина станів на найнижчому рівні Ландау $E = 0$ (V — об'єм системи). У відсутності магнітного поля густина станів $\nu(E) \sim \sim E^2$ дорівнює нулю при $E = 0$, що й пояснює відсутність нетривіального розв'язку при малій константі взаємодії. Таким чином, магнітне поле в даному випадку сприяє (каталізує) динамічній генерації маси — феномен, який авторами оригінальних робіт [107, 108] з очевидних причин був названий *магнітним каталізом*. Це явище є універсальним і знаходить багато застосувань як у фізиці високих енергій, так і у фізиці конденсованих станів.

Цікаво порівняти формулу (12.4.12) з формулою для щільності Δ в теорії надпровідності БКШ,

$$\Delta \sim \omega_D \exp \left(-\frac{2}{g\nu_F} \right),$$

де g — константа електрон-фононої взаємодії, ω_D — частота Дебая, ν_F — густина станів на поверхні Фермі. В обох випадках нетривіальний розв'язок виникає при як завгодно малій константі зв'язку завдяки ненульовій густині станів на відповідній поверхні (фактично найнижчий рівень Ландау в моделі НЙЛ відіграє роль поверхні Фермі в теорії надпровідності).

Але повернемося до моделі НЙЛ. Розкладаючи ефективну дію $S_{\text{eff}}(\sigma, \pi)$ в ряд Тейлора по відхиленням $\sigma(x) \rightarrow \sigma_0 + \sigma(x)$, $\pi(x) \rightarrow 0 + \pi(x)$ знаходимо квадратичну частину дії для полів σ і π

$$S_{\text{eff}}(\sigma, \pi) = \int d^4x d^4y \left[\frac{1}{2} \sigma(x) D_{\sigma}^{-1}(x-y) \sigma(y) + \frac{1}{2} \pi(x) D_{\pi}^{-1}(x-y) \pi(y) + \dots \right], \quad (12.4.13)$$

де

$$D_{\sigma}^{-1}(x-y) = \left. \frac{\delta^2 S_{\text{eff}}(\sigma, \pi)}{\delta \sigma(x) \delta \sigma(y)} \right|_{\substack{\sigma=\sigma_0 \\ \pi=0}} = -\frac{\delta(x-y)}{G} + i \text{tr}[S(x-y)S(y-x)],$$

$$D_{\pi}^{-1}(x-y) = \left. \frac{\delta^2 S_{\text{eff}}(\sigma, \pi)}{\delta \pi(x) \delta \pi(y)} \right|_{\substack{\sigma=\sigma_0 \\ \pi=0}} = -\frac{\delta(x-y)}{G} + i \text{tr}[i\gamma_5 S(x-y)i\gamma_5 S(y-x)],$$

а $S(x-y) = \langle x | (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - \sigma_0)^{-1} | y \rangle$ є пропагатором вільних ферміонів з масою σ_0 . Обернені величини $D_{\sigma}(x-y)$ і $D_{\pi}(x-y)$ є пропагаторами складених полів σ і π (мезонів). Доданки більш високого порядку по σ і π в S_{eff} описують взаємодію цих полів. В імпульсному просторі маємо

$$D_{\sigma}^{-1}(p) = -\frac{1}{G} + i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\frac{1}{\hat{q} - \sigma_0} \frac{1}{\hat{q} - \hat{p} - \sigma_0} \right], \quad (12.4.14)$$

$$D_{\pi}^{-1}(p) = -\frac{1}{G} + i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[i\gamma_5 \frac{1}{\hat{q} - \sigma_0} i\gamma_5 \frac{1}{\hat{q} - \hat{p} - \sigma_0} \right]. \quad (12.4.15)$$

Інтеграли є розбіжними, і, вводячи регуляризацію, можна показати, що $D_{\sigma}^{-1}(p) \rightarrow \text{const}$, $D_{\pi}^{-1}(p) \rightarrow 0$, коли $p \rightarrow 0$. Тобто $D_{\sigma}(p)$ описує розповсюдження масивної скалярної частинки σ , тоді як $D_{\pi}(p)$ є пропагатором безмасової псевдоскалярної (намбу-голдстоунівської) частинки π . Дійсно, перепишемо, наприклад, вираз (12.4.15) після обчислення сліду в формі

$$D_{\pi}^{-1}(p) = -\frac{1}{G} + 4i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - \sigma_0^2} - 4i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{p(q-p)}{(q^2 - \sigma_0^2)[(q-p)^2 - \sigma_0^2]}.$$

Перші два доданки в правій частині скорочуються внаслідок самоузгодженого рівняння (12.4.9) для динамічної маси σ_0 , а з останнього доданка випливає, що $D_{\pi}^{-1}(p) \rightarrow 0$, коли $p \rightarrow 0$. Величину $D_{\pi}^{-1}(p)$ можна, звісно, обчислити в явному вигляді.

Модель НЙЛ є достатньо простою і характеризується динамічним порушенням кіральної симетрії. Сучасна версія моделі НЙЛ, яка використовується в якості низькоенергетичного наближення до КХД, визначається лагранжіаном

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi + G \sum_{a=0}^{N_f^2-1} \left[\left(\bar{\psi} \frac{\lambda^a}{2} \psi \right)^2 + \left(\bar{\psi} \frac{\lambda^a}{2} i\gamma_5 \psi \right)^2 \right], \quad (12.4.16)$$

де матриці λ^a належать до фундаментального представлення флейворної групи $U(N_f)$ ($\text{tr } \lambda^a \lambda^b = 2\delta^{ab}$). Ферміонне поле $\psi_{i\alpha}$ має флейворний індекс ($i = 1, 2, \dots, N_f$) і кольоровий індекс ($\alpha = 1, 2, 3$), тобто ферміони належать до фундаментального представлення кольорової групи $SU_c(3)$. Ця модель використовується як феноменологічна теорія для опису порушення кіральної симетрії в квантовій хромодинаміці в кіральній границі, де поля ψ відповідають кваркам. У цьому випадку складені поля $\sigma^a = \bar{\psi} \frac{\lambda^a}{2} \psi$ і $\pi^a = \bar{\psi} \frac{\lambda^a}{2} i\gamma_5 \psi$ описують скалярні і псевдоскалярні мезони, відповідно. Зокрема, безмасові псевдоскалярні поля π^a описують піони і каони, які є намбу-голдстоунівськими бозонами, пов'язаними з динамічним порушенням кіральної симетрії, в результаті якої кварки отримують ненульову масу.

Зауважимо, що в моделі з N_c числом кольорів ($\alpha = 1, 2, \dots, N_c$) можна використовувати теорію збурень за параметром $1/N_c$ замість розкладу за константою взаємодії G . Виявляється, що модель НЙЛ стає перенормовною в розкладі $1/N_c$ у тривимірному просторі-часі, незважаючи на те, що вона є неперенормовною в теорії збурень за константою G [160]. Більше про модель НЙЛ та її узагальнення дивись в монографії [150].

12.5. Ефективна дія

У параграфі 12.3 поля ϕ розглядалися як класичні. Але насправді поля ϕ є квантовими і мають квантові флуктуації. Для вивчення явища спонтанного порушення симетрії і врахування флуктуацій квантових полів у квантово-польових системах був розроблений спеціальний формалізм ефективної дії, який оперує з вакуумними середніми квантових полів $\langle 0|\phi|0\rangle$ [121, 158, 201].

Для того, щоб краще зрозуміти зміст ефективної дії для вакуумних середніх, розглянемо приклад зі статистичної фізики для системи класичних спінів у зовнішньому магнітному полі H . Вільну енергію Гельмгольца $F(H)$ знаходять із статистичної суми

$$Z(H) = e^{-\beta F(H)} = \int \mathcal{D}\mathbf{s}(x) \exp \left[-\beta \int dx (\mathcal{H}(s) - \mathbf{H}\mathbf{s}(x)) \right],$$

де $\beta = 1/(k_B T)$ пов'язана з температурою, $\mathcal{H}(s)$ — гамільтоніан системи спінів, а \mathbf{H} — вектор напруженості магнітного поля. Намагніченість визначається як похідна вільної енергії

$$\begin{aligned} -\left. \frac{\partial F}{\partial \mathbf{H}} \right|_{\beta = \text{const}} &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mathbf{H}} \ln Z = \frac{1}{Z} \int dx \int \mathcal{D}\mathbf{s} \mathbf{s}(x) \exp \left[-\beta \int dx (\mathcal{H}(s) - \mathbf{H}\mathbf{s}) \right] = \\ &= \int dx \langle \mathbf{s}(x) \rangle_{\mathbf{H}} \equiv \mathbf{M}(\mathbf{H}). \end{aligned} \quad (12.5.1)$$

Як відомо, при температурі, нижчій за точку Кюрі намагніченість у ферромагнітному стані системи залишається скінченною навіть при виключеному магнітному полі, $\mathbf{H} \rightarrow 0$, і має місце спонтанне порушення симетрії відносно групи поворотів у просторі. Дослідження границі $\mathbf{H} \rightarrow 0$ функції $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ є досить нетривіальним завданням, тому більш зручно замість функціонала Гельмгольца використати функціонал вільної енергії Гіббса. Вільна енергія Гіббса $G(\mathbf{M})$ як функція намагніченості визначається за допомогою перетворення Лежандра

$$G(\mathbf{M}) = F(\mathbf{H}) + \mathbf{M}\mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{M}), \quad (12.5.2)$$

де напруженість магнітного поля як функція намагніченості $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{M})$ визначається із співвідношення

$$-\frac{\partial F(\mathbf{H})}{\partial \mathbf{H}} = \mathbf{M}(\mathbf{H}). \quad (12.5.3)$$

Для похідної від $G(\mathbf{M})$ маємо

$$\frac{\partial G(\mathbf{M})}{\partial M_i} = \frac{\partial F(\mathbf{H})}{\partial M_i} + M_j \frac{\partial H_j}{\partial M_i} + H_i = \frac{\partial F}{\partial H_j} \frac{\partial H_j}{\partial M_i} + M_j \frac{\partial H_j}{\partial M_i} + H_i = H_i, \quad (12.5.4)$$

де ми використали співвідношення (12.5.3). Якщо $\mathbf{H} = 0$, тоді вільна енергія досягає екстремуму при відповідному значенні намагніченості \mathbf{M} ,

$$\frac{\partial G(\mathbf{M})}{\partial M_i} = 0. \quad (12.5.5)$$

Термодинамічно стабільний стан відповідає мінімуму вільної енергії Гіббса $G(\mathbf{M})$ як функції намагніченості. Функціонал Гіббса виявляється найбільш зручним методом для знаходження фази з нетривіальною намагніченістю, і відповідно, для дослідження спонтанного порушення симетрії.

У квантовій теорії поля аналогом функціонала Гіббса є так звана ефективна дія для вакуумних середніх квантових полів, безпосередньому вивченню якої присвячено наступний підрозділ.

12.6. Квантова ефективна дія. Скалярні поля

Розглянемо спочатку найбільш простий випадок одного дійсного скалярного поля. Визначимо функціонал Швінгера $W(J)$,

$$W(J) = \frac{1}{i} \ln Z(J), \quad Z(J) = e^{iW(J)}, \quad Z(0) = 1, \quad (12.6.1)$$

і розкладемо його у функціональний ряд по джерелу J ,

$$W(J) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n). \quad (12.6.2)$$

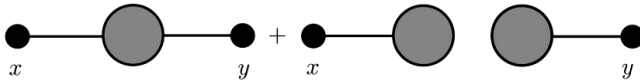


Рис. 71. Звідна двоточкова функція Гріна

де коефіцієнти розкладу

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (-i)^{n-1} \frac{\delta^n W(J)}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} \quad (12.6.3)$$

будуть зв'язними функціями Гріна. Обчислимо спершу одноточкову функцію Гріна

$$G_c^{(1)} = \frac{\delta W(J)}{\delta J(x_1)} \Big|_{J=0} = \frac{1}{iZ(J)} \frac{\delta Z(J)}{\delta J(x_1)} \Big|_{J=0} = \langle 0|\Phi(x_1)|0\rangle = \langle 0|\Phi(0)|0\rangle. \quad (12.6.4)$$

Зауважимо, що вакуумне середнє квантованого поля є константою у відсутності зовнішніх джерел. Це випливає з припущення, що вакуумний стан у гільбертовому просторі єдиний та пуанкаре-інваріантний, тобто має місце

$$P_\mu |0\rangle = 0 \quad \text{і} \quad e^{-iP_\mu a^\mu} |0\rangle = |0\rangle,$$

під дією оператора трансляції P_μ . Тоді, використовуючи перетворення оператора поля $e^{iP \cdot a} \Phi(x) e^{-iP \cdot a} = \Phi(x + a)$, і $[P_\mu, \Phi(x)] = -i\partial_\mu \Phi(x)$, при $a = -x$ отримуємо

$$\langle 0|\Phi(x)|0\rangle = \langle 0|e^{-iP \cdot x} \Phi(x) e^{iP \cdot x} |0\rangle = \langle 0|\Phi(0)|0\rangle.$$

Нормування $Z(0) = 1$ означає, що всі вакуумні діаграми видалені, а тому $G_c^{(1)}$ дійсно описується тільки зв'язними діаграмами (наприклад, у теорії збуджень). Для двоточної функції Гріна отримуємо

$$G_c^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{i} \frac{\delta^2 W(J)}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0} = \frac{1}{Z(J)} \frac{\delta^2 Z(J)}{i\delta J(x_1) i\delta J(x_2)} \Big|_{J=0} - \frac{1}{Z^2(J)} \frac{\delta Z(J)}{i\delta J(x_1)} \frac{\delta Z(J)}{i\delta J(x_2)} \Big|_{J=0} = \langle 0|T\Phi(x_1)\Phi(x_2)|0\rangle - (\langle 0|\Phi(0)|0\rangle)^2. \quad (12.6.5)$$

Функції Гріна, що отримуються з функціонала $Z(J)$, містять незв'язні частини. Наприклад, для функції Гріна $G(x, y) = \delta^2 Z(J) / i\delta J(x) i\delta J(y) \Big|_{J=0}$ є зв'язні і незв'язні внески зображені на рис. 71. Як видно з виразу (12.6.5), незв'язні частини діаграми скорочуються у функції $G_c^{(2)}(x, y)$.

Функції Гріна, які визначаються функціоналами $W(J)$ і $Z(J)$, зв'язані очевидними співвідношеннями, що випливають з означення

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n \ln Z(J)}{i\delta J(x_1) \dots i\delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (12.6.6)$$

Для найнижчих функцій маємо, крім вже наведених,

$$\begin{aligned}
 G_c^{(1)} &= G^{(1)}, \\
 G_c^{(2)} &= G^{(2)} - G^{(1)}G^{(1)}, \\
 G_c^{(3)} &= G^{(3)} - 3G^{(2)}G^{(1)} + 2(G^{(1)})^3, \\
 G_c^{(4)} &= G^{(4)} - 4G^{(3)}G^{(1)} + 12G^{(2)}(G^{(1)})^2 - 3(G^{(2)})^2 - 6(G^{(1)})^4,
 \end{aligned} \tag{12.6.7}$$

де використано скорочені позначення $G_c^{(n)} = G_c(x_1, \dots, x_n)$, $G^{(n)} = G(x_1, \dots, x_n)$ (функції $G(x_1, \dots, x_n)$ визначаються функціоналом $Z(J)$ в (5.3.2)). Коефіцієнти пов'язані з перестановкою аргументів в подібних виразах.

Визначимо

$$\Phi_c(x, J) = \frac{\delta W(J)}{\delta J(x)} = \frac{1}{Z(J)} \frac{\delta Z(J)}{i\delta J(x)} = \frac{1}{Z(J)} \langle 0, \text{out} | \Phi(x) | 0, \text{in} \rangle, \tag{12.6.8}$$

що є середнім значенням квантового поля в основному стані (вакуумі) в присутності джерела $J(x)$, а тому є залежним від x . У повній аналогії з прикладом із статистичної фізики, розглянутому в попередньому параграфі, ефективна дія для поля Φ визначається як перетворення Лежандра від $W(J)$,

$$\Gamma(\Phi_c) = \left[W(J) - \int d^4x J(x) \Phi_c(x) \right] \Big|_{J(x)=J(x, \Phi_c)}, \tag{12.6.9}$$

де $J(x, \Phi_c)$ знаходять оберненням формули (12.6.8). Знайдемо першу похідну цього функціонала по $\Phi_c(x)$:

$$\frac{\delta \Gamma(\Phi_c)}{\delta \Phi_c(x)} = -J(x, \Phi_c) + \underbrace{\int d^4y \left[\frac{\delta W(J)}{\delta J(y)} - \Phi_c(y) \right]}_{=0} \Big|_{J=J(y, \Phi_c)} \frac{\delta J(y, \Phi_c)}{\delta \Phi_c(x)}, \tag{12.6.10}$$

де ми використали формулу (12.6.8). Таким чином,

$$\frac{\delta \Gamma(\Phi_c)}{\delta \Phi_c(x)} = -J(x). \tag{12.6.11}$$

Дамо тепер визначення власних вершин $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$, які є ампутованими одночастинково-незвідними функціями Гріна.

Визначення ампутованих функцій Гріна є таким

$$G_{\text{amp}}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv (i^{n-1}) \prod_{k=1}^n \int dy_k \left[G^{(2)}(x_k, y_k) \right]^{-1} G^{(n)}(y_1, \dots, y_n). \tag{12.6.12}$$

Одночастинково-незвідні функції Гріна є зв'язними діаграмами, які не можуть бути розбиті на дві (і більше) незв'язні частини, розрізаючи одну лінію. Як приклад розглянемо зв'язну чотириточкову діаграму, зображену на рис. 68, всі її зовнішні лінії містять пропагатори, які видаляються в процесі ампутації. Після ампутації перша діаграма справа є одночастинково-незвідною, а друга все ще містить одночастинково-звідний внесок. Власні функції $\Gamma^{(n)}$ є одночасно і ампутуваними, і незвідними, тобто в них відсутні внески діаграм типу другої в правій частині рис. 68. Покажемо, що $\Gamma(\Phi_c)$ є генеруючим функціоналом власних вершин.

Для простоти розглянемо випадок, коли при $J = 0$ є тільки один розв'язок $\Phi_c(x, 0) = v = 0$. Випадок $\Phi_c(x, 0) \neq 0$ відповідає спонтанному порушенню симетрії. Розкладемо $\Gamma(\Phi_c)$ у функціональний ряд Тейлора

$$\Gamma(\Phi_c) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \Gamma^n(x_1, \dots, x_n) \Phi_c(x_1) \dots \Phi_c(x_n), \quad (12.6.13)$$

і покажемо, що функції

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left. \frac{\delta^n \Gamma}{\delta \Phi_c(x_1) \dots \delta \Phi_c(x_n)} \right|_{\Phi_c=0} \quad (12.6.14)$$

є власними на прикладі двоточкової функції Гріна $\Gamma^{(2)}(x_1, x_2)$. Функція

$$\Gamma^{(1)}(x) = \left. \frac{\delta \Gamma}{\delta \Phi_c} \right|_{\Phi_c=0} = -J(x, 0) = 0$$

дорівнює нулю, тому підсумовування в (12.6.13) починається з $n = 2$. Продиференціюємо співвідношення

$$\Phi_c(x, J) = \frac{\delta W(J)}{\delta J(x)}$$

по $\frac{\delta}{\delta \Phi_c(y)}$ і покладемо $J = \Phi_c = 0$, отримуємо

$$\begin{aligned} \delta^4(x-y) &= \frac{\delta}{\delta \Phi_c(y)} \left[\left. \frac{\delta W(J)}{\delta J(x)} \right|_{J=J(x, \Phi_c)} \right] = \int d^4z \frac{\delta^2 W(J)}{\delta J(x) \delta J(z)} \frac{\delta J(z, \Phi_c)}{\delta \Phi_c(y)} \Big|_{J=\Phi_c=0} = \\ &= - \int d^4z \frac{\delta^2 W(J)}{\delta J(x) \delta J(z)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \Phi_c(y) \delta \Phi_c(z)} \Big|_{J=\Phi_c=0} = \\ &= i^{-1} \int d^4z \Gamma^{(2)}(y, z) G_c^{(2)}(z, x). \end{aligned} \quad (12.6.15)$$

Множачи останню рівність на $\int d^4x G_c^{(2)-1}(x, u)$, знаходимо

$$\Gamma^{(2)}(y, u) = i G_c^{(2)-1}(y, u). \quad (12.6.16)$$

З іншого боку, ампутувана функція $G_c^{(2)}$ буде

$$G_{\text{amp}}^{(2)} = iG_c^{(2)-1}G_c^{(2)}G_c^{(2)-1} = iG_c^{(2)-1} = \Gamma^{(2)}. \quad (12.6.17)$$

Звідси видно, що $\Gamma^{(2)}$ є ампутованою функцією Гріна (порівняйте з (10.1.6)). Для триточкової функції, використовуючи скорочені позначення $G_c^{(2)} = -iW_{JJ} = i\Gamma_{\Phi\Phi}^{-1}$ і ланцюжкове диференціювання, отримуємо

$$\begin{aligned} G_c^{(3)} &= -W_{JJJ} = \frac{\delta}{i\delta J}G_c^{(2)} = \frac{\delta}{\delta J}\Gamma_{\Phi\Phi}^{-1} = -\Gamma_{\Phi\Phi}^{-2}\Gamma_{\Phi\Phi\Phi}\frac{\delta\Phi}{\delta J} = \\ &= -\Gamma_{\Phi\Phi}^{-2}\Gamma_{\Phi\Phi\Phi}W_{JJ} = i(G_c^{(2)})^3\Gamma_{\Phi\Phi\Phi}, \end{aligned} \quad (12.6.18)$$

тобто $\Gamma_{\Phi\Phi\Phi}$ є ампутованою функцією Гріна. Отримання співвідношень між зв'язними функціями і одночастинково незвідними полегшується, якщо використовувати тривіальну рекурсію

$$G_c^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\delta}{i\delta J(x_1)}G_c^{(n-1)}(x_2, \dots, x_n). \quad (12.6.19)$$

Визначимо оператор власної енергії за допомогою формули

$$\Gamma^{(2)}(x, y) = i \left[G_0^{(2)}(x, y) \right]^{-1} - \Sigma(x, y), \quad (12.6.20)$$

де

$$G_0^{(2)}(x, y) = \int \frac{d^4p d^4q}{(2\pi)^8} e^{-i(px+qy)} (2\pi)^4 \delta^4(p+q) \frac{i}{p^2 - m^2}$$

є пропагатором вільного поля з масою m . Запишемо фур'є-перетворення

$$\Gamma^{(2)}(x, y) = \int \frac{d^4p d^4q}{(2\pi)^8} e^{-i(px+qy)} \Gamma^{(2)}(p, q), \quad (12.6.21)$$

$$\Sigma(x, y) = \int \frac{d^4p d^4q}{(2\pi)^8} e^{-i(px+qy)} (2\pi^4) \delta(p+q) \Sigma(p). \quad (12.6.22)$$

Тоді в імпульсному просторі маємо співвідношення

$$\Gamma^{(2)}(p, q) = (2\pi)^4 \delta(p+q) [p^2 - m^2 - \Sigma(p)]. \quad (12.6.23)$$

Для фур'є-образу $G_c^{(2)}(p, q)$ знаходимо

$$\begin{aligned} G_c^{(2)}(p, q) &= i(2\pi)^4 \delta(p+q) [p^2 - m^2 - \Sigma(p)]^{-1} = \\ &= (2\pi)^4 \delta(p+q) \left[\frac{i}{p - m^2} + \frac{i}{p^2 - m^2} (-i\Sigma(p)) \frac{i}{p^2 - m^2} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Таким чином, $\Sigma(p)$ дійсно є власною енергією і дає тільки одночастинково-незвідний внесок у двоточкову функцію Гріна. Для $\Gamma^{(2)}(x, y)$ отримуємо з (12.6.21)

$$\Gamma^{(2)}(x, y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} [p^2 - m^2 - \Sigma(p)]. \quad (12.6.24)$$

Усі внески за рахунок взаємодій містяться в $\Sigma(p)$. У найнижчому порядку за теорією збурень (деревне наближення) маємо

$$\Gamma^{(2)}(x, y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} (p^2 - m^2) = (-\square_x - m^2) \delta(x - y). \quad (12.6.25)$$

Тоді в цьому наближенні $\Gamma(\Phi_c)$ зводиться до класичної дії

$$\Gamma(\Phi_c) = \frac{1}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 \Gamma^{(2)}(x_1, x_2) \Phi_c(x_1) \Phi_c(x_2) = \frac{1}{2} \int d^4 x [\partial_\mu \Phi_c \partial^\mu \Phi_c - m^2 \Phi_c^2].$$

Поза межами деревного наближення $\Gamma(\Phi_c)$ включає квантові поправки, саме тому $\Gamma(\Phi_c)$ називається квантовою ефективною дією. Квантові поправки можуть відігравати домінуючу роль, тому формалізм ефективної дії, який включає ці поправки, має важливе значення. Знаючи ефективну дію, зв'язні функції Гріна можуть бути відновлені шляхом об'єднання в деревні діаграми одночастинково-незвідних функцій Гріна. Поклавши зовнішні лінії на масову оболонку (тобто поклавши $J = 0$ в (12.6.11), а також використовуючи відповідний розв'язок для Φ_c) і додавши хвильові функції, що відповідають рівнянню $\Gamma^{(2)}\psi = 0$, до зовнішніх ліній, отримаємо S-матрицю даної теорії (редукційні формули ЛСЦ з попереднього розділу).

У теоріях зі спонтанним порушенням симетрії середнє вакуумне значення $\Phi_c(x, 0) = v \neq 0$. У цьому випадку розклад Γ має вигляд

$$\Gamma(\Phi_c) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n \Gamma_v^n(x_1, \dots, x_n) \tilde{\Phi}_c(x_1) \dots \tilde{\Phi}_c(x_n), \quad (12.6.26)$$

де $\tilde{\Phi}_c(x) = \Phi_c(x) - v$.

Повну ефективну дію, яка включає квантові поправки, можна представити у вигляді розкладу за степенями похідних поля $\Phi_c(x)$,

$$\Gamma(\Phi_c) = \int d^4 x \left[-V_{\text{eff}}(\Phi_c) + \frac{1}{2} Z(\Phi_c) \partial_\mu \Phi_c \partial^\mu \Phi_c + O(\partial^4) \right], \quad (12.6.27)$$

де перший доданок, незалежний від похідних поля, є ефективним потенціалом, а всі наступні доданки пропорційні похідним поля. Для постійних полів маємо

$$\Gamma(\Phi_c) = -VT V_{\text{eff}}(\Phi_c), \quad VT = \int d^4 x. \quad (12.6.28)$$

Тобто ефективна дія, обчислена для постійних полів, визначає (із знаком мінус) ефективний потенціал, помножений на чотирирівимірний об'єм.

Умови екстремуму стають

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}(\Phi_c)}{\partial \Phi_c} = 0. \quad (12.6.29)$$

Значення $V_{\text{eff}}(\Phi_c)$, обчислене в точці розв'язку, визначає густину енергії відповідного стану. Глобальний мінімум ефективного потенціалу відповідає основному (вакуумному) стану системи. Таким чином, ефективний потенціал відіграє важливу роль у знаходженні основного стану з порушеною симетрією. Тому обговоримо тепер, як відображається симетрія класичної дії у квантовій ефективній дії.

Розглянемо неперервні симетрії, які породжуються інфінітезимальними перетвореннями з постійним параметром α , на зразок тих, що вже використовувались у розділі 12.3,

$$\Phi_a(x) \rightarrow \Phi'_a(x) = \Phi_a(x) + \alpha \Delta_a(x, \Phi). \quad (12.6.30)$$

Індекс a позначає набір усіх полів у лагранжіані, включно з калібрувальними полями, полями матерії, а також духовими та допоміжними полями після фіксації калібровки. Будемо припускати, що класична дія та міра інтегрування в функціональному інтегралі інваріантні відносно перетворення (12.6.30):

$$S(\Phi') = S(\Phi), \quad \prod_{a,x} \mathcal{D}\Phi'_a(x) = \prod_{a,x} \mathcal{D}\Phi_a(x). \quad (12.6.31)$$

У функціональному інтегралі для $Z(J)$ зробимо заміну змінної інтегрування, $\Phi \rightarrow \Phi'$,

$$Z(J) = \int \mathcal{D}\Phi_a(x) \exp \left[iS(\Phi) + i \int d^4x (\Phi_a(x) + \alpha \Delta_a(x, \Phi)) J_a(x) \right]. \quad (12.6.32)$$

Розкладаючи за параметром α і прирівнюючи коефіцієнт при першому степені α до нуля, аналогічно тому, як це робилося в розділі 5.1, отримуємо

$$\int d^4y \langle \Delta_a(y, \Phi) \rangle_J J_a(y) = 0, \quad (12.6.33)$$

де $\langle \dots \rangle_J$ позначає квантове середнє у присутності джерела

$$\langle \Delta_a(y, \Phi) \rangle_J = Z^{-1}(J) \int \mathcal{D}\Phi_a(x) \Delta_a(y, \Phi) e^{iS(\Phi) + i \int d^4x \Phi_a(x) J_a(x)}. \quad (12.6.34)$$

Згідно з (12.6.11) джерело виражається через похідну ефективної дії,

$$J_a(x) = -\frac{\delta\Gamma(\Phi_c)}{\delta\Phi_{ca}(x)}, \quad (12.6.35)$$

тому маємо загальну умову інваріантності ефективної дії у вигляді

$$\int d^4y \langle \Delta_a(y, \Phi) \rangle_{J_a} \frac{\delta\Gamma}{\delta\Phi_{ca}} = 0. \quad (12.6.36)$$

Іншими словами, ефективна дія є інваріантною відносно перетворень $\Phi_{ca} \rightarrow \Phi_{ca} + \alpha \langle \Delta_a(y, \Phi) \rangle_{J_a}$. Диференціюючи останню рівність по полях, отримуємо співвідношення між одночастинково-незвідними функціями Гріна, які є наслідком відповідної симетрії і які у випадку неабелевої симетрії отримали назву тотожностей Славнова—Тейлора. Зокрема, умову інваріантності ефективної дії (12.6.36) можна застосувати до БРСТ-симетрії, розглянутої в розділі 4.7. Відповідні тотожності та їх фізичні наслідки в КЕД розглядаються у розділі 12.8.

12.7. Квантова ефективна дія в квантовій електродинаміці

Квантова ефективна дія в квантовій електродинаміці визначається із залученням ферміонних змінних

$$\Gamma(\mathcal{A}_\mu, \bar{\Psi}, \Psi) = W(J^\mu, \eta, \bar{\eta}) - \int d^4x (J^\mu \mathcal{A}_\mu + \bar{\Psi} \eta + \bar{\eta} \Psi), \quad (12.7.1)$$

де $\mathcal{A}_\mu, \bar{\Psi}, \Psi$ — класичні поля (середні значення квантованих полів) у присутності джерел

$$\begin{aligned} \frac{\delta W}{\delta J^\mu(x)} &= \langle \mathcal{A}_\mu \rangle_J = \mathcal{A}_\mu(x), & \frac{\delta W}{\delta \eta_\alpha(x)} &= -\langle \bar{\psi}_\alpha(x) \rangle_J = -\bar{\Psi}_\alpha(x), \\ \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}_\alpha(x)} &= \langle \psi_\alpha(x) \rangle_J = \Psi_\alpha(x). \end{aligned} \quad (12.7.2)$$

З (12.7.1) знаходимо

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\mathcal{A}_\mu(x)} = -J^\mu(x), \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\Psi}_\alpha(x)} = -\eta_\alpha(x), \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\Psi_\alpha(x)} = \bar{\eta}_\alpha(x). \quad (12.7.3)$$

Зауважимо, що за ненульових джерел середні квантованих полів залежать функціонально від джерел, наприклад,

$$\mathcal{A}_\mu(x) = \mathcal{A}_\mu(x; [J_\nu, \eta, \bar{\eta}]) \Rightarrow \frac{\delta\mathcal{A}_\mu(x)}{\delta J^\nu(y)} \neq 0, \quad (12.7.4)$$

і аналогічно для функціональних похідних за грасмановими змінними. Диференціюючи рівності (12.7.2) по полях або (12.7.3) по джерелах і потім

покладаючи поля і джерела рівними нулю, отримуємо співвідношення між зв'язними функціями Гріна і одночастинково-незвідними функціями Гріна. При цьому візьмемо до уваги, що похідні від Γ по Ψ і $\bar{\Psi}$ дорівнюють нулю при $\Psi = \bar{\Psi} = 0$, якщо присутня нерівна кількість похідних $\delta/\delta\Psi$ і $\delta/\delta\bar{\Psi}$. Продемонструємо це на такому прикладі

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha\beta}\delta(x-y) &= \frac{\delta\eta_\alpha(x)}{\delta\eta_\beta(y)} = \frac{\delta}{\delta\eta_\beta(y)} \left(-\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\Psi}_\alpha(x)} \right) = \\ &= - \int d^4z \frac{\delta^2 W}{\delta\eta_\beta(y)\delta\bar{\eta}_\gamma(z)} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\Psi_\gamma(z)\delta\bar{\Psi}_\alpha(x)}, \end{aligned} \quad (12.7.5)$$

де в останньому виразі покладено $\Psi = \bar{\Psi} = 0$, $\eta = \bar{\eta} = 0$, маємо

$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\Psi(y)\delta\bar{\Psi}(z)} = - \left[\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(z)} \right]^{-1}. \quad (12.7.6)$$

Нагадаємо, що

$$\frac{\delta^2 W}{\delta\eta_\beta(y)\delta\bar{\eta}_\gamma(z)} = iG_{\gamma\beta}(z, y; \mathcal{A}), \quad (12.7.7)$$

і G — повний ферміонний пропагатор за присутності класичного поля \mathcal{A} (звичайний пропагатор у вакуумі $G(x, y) = G(x, y; \mathcal{A} = 0)$). Тотожність (12.7.5) означає, що $G^{-1} = -i\Gamma^{(2)}$. Таким чином, другі похідні Γ є фактично оберненими повними пропагаторами полів.

Використання функціонала Γ спрощує виведення рівнянь Швінгера—Дайсона. Покладаючи $\eta = \bar{\eta} = 0$ і $\Psi = \bar{\Psi} = 0$ в рівнянні (9.2.8), запишемо його у вигляді

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\mathcal{A}_\mu(x)} = \left[g^{\mu\nu}\square - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu\partial^\nu \right]_x \mathcal{A}_\nu(x) + e_0 \text{tr}(\gamma^\mu G(x, x; \mathcal{A})). \quad (12.7.8)$$

Продиференціюємо цю рівність по $\mathcal{A}_\nu(y)$ і покладемо $\mathcal{A}_\nu = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\mathcal{A}_\mu(x)\delta\mathcal{A}_\nu(y)} &= \left[g^{\mu\nu}\square - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu\partial^\nu \right]_x \delta(x-y) + \\ &+ ie_0 \text{tr} \left[\gamma^\mu \frac{\delta}{\delta\mathcal{A}_\nu(y)} \left(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\Psi(x)\delta\bar{\Psi}(x)} \right)^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (12.7.9)$$

Зліва маємо обернений пропагатор фотона,

$$i(D^{-1})^{\mu\nu} = \left. \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\mathcal{A}_\mu(x)\delta\mathcal{A}_\nu(y)} \right|_{\mathcal{A}=\Psi=\bar{\Psi}=0}.$$

Обчислимо похідну, використовуючи аналог диференціювання для скінченновимірних матриць $dA^{-1}(x) = -A^{-1}dA(x)A^{-1}(x)$,

$$\frac{\delta}{\delta\mathcal{A}_\nu(y)} \left(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\Psi(x)\delta\bar{\Psi}(x)} \right)^{-1} = - \int d^4u d^4v \left(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\Psi(x)\delta\bar{\Psi}(u)} \right)^{-1} \times \\ \times \frac{\delta}{\delta\mathcal{A}_\nu(y)} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\Psi(u)\delta\bar{\Psi}(v)} \left(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\Psi(v)\delta\bar{\Psi}(x)} \right)^{-1},$$

де також у кінцевих виразах усі поля $\mathcal{A} = \Psi = \bar{\Psi} = 0$. Права сторона рівності містить ОЧН триточкову функцію (ферміон-фотонну вершину)

$$-e_0\Gamma_\nu(x, y; z) = \frac{\delta}{\delta\mathcal{A}_\nu(z)} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\Psi(x)\delta\bar{\Psi}(y)}. \quad (12.7.10)$$

Очевидно, в деревному наближенні

$$\Gamma_\nu(x, y; z) = \gamma_\nu\delta(x-z)\delta(y-z).$$

З огляду на те, що $\Gamma^{(2)^{-1}} = -iG$, рівняння (12.7.9) зводиться до

$$D_{\mu\nu}^{-1}(x-y) = D_{0\mu\nu}^{-1}(x-y) - e_0^2 \int d^4u d^4v \text{tr} [\gamma_\mu G(x-u)\Gamma_\nu(u, v; y)G(v-x)].$$

Це є рівнянням Швінгера—Дайсона для фотонного пропагатора, яке після фур'є-перетворення є рівнянням (9.2.17).

Калібрувальна тотожність (9.3.4) приймає вигляд

$$i\partial_\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta\mathcal{A}_\mu(x)} + \frac{1}{i\xi} \square\partial^\mu \mathcal{A}_\mu(x) + e \frac{\delta\Gamma}{\delta\Psi(x)} \Psi(x) + e\bar{\Psi}(x) \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\Psi}(x)} = 0. \quad (12.7.11)$$

Диференціюючи цю тотожність по $\mathcal{A}_\nu(y)$, покладаючи $\mathcal{A} = \Psi = \bar{\Psi} = 0$ і здійснюючи перетворення Фур'є, отримуємо тотожність (9.3.11) для оберненого фотонного пропагатора. Також, диференціюючи (12.7.11) по $\bar{\Psi}$ і Ψ , маємо

$$i\partial_\mu \frac{\delta^3\Gamma}{\delta\mathcal{A}_\mu(x)\delta\Psi_\beta(z)\delta\bar{\Psi}_\alpha(y)} + e \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\Psi}_\alpha(y)\delta\Psi_\beta(x)} \delta(x-z) + \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\Psi_\beta(z)\delta\bar{\Psi}_\alpha(x)} \delta(x-y) = 0. \quad (12.7.12)$$

Після фур'є-перетворення по $z-x$ і $y-x$ приходимо до векторної тотожності (9.3.14). Перевага використання тотожності (12.7.11) для функціонала Γ полягає в тому, що ми відразу отримуємо співвідношення для ОЧН функцій Гріна, уникаючи проміжного етапу ампутування та виділення ОЧН функцій. Це ж стосується і отримання рівнянь Швінгера—Дайсона.

12.8. Тотожності Нільсена

Як ми знаємо, фізичні величини в калібрувальних теоріях не залежать від вибору калібрувальної умови, зокрема в коваріантних калібровках не залежать від калібрувального параметра ξ . Але функції Гріна окремих полів, наприклад електронів і фотонів в КЕД, а також кварків і глюонів в КХД, очевидно не є калібрувально інваріантними. Фізичні величини будуються з функцій Гріна, і нетривіальною проблемою є зрозуміти, як залежність від калібрувальної умови скорочується при обчисленні фізичних спостережуваних як у пертурбативних, так і непертурбативних обчисленнях. Тотожності Нільсена, які ми отримуємо в цьому розділі, якраз і описують залежність функцій Гріна від калібрувального параметра і мають схематично вигляд $\partial G_1/\partial \xi = G_2 G_3$. Тоді, якщо права частина дорівнює нулю, то G_1 має бути незалежним від ξ .

Ці тотожності дозволяють також отримати фізичну інформацію з калібрувально залежних функцій Гріна, наприклад встановити калібрувальну незалежність мас електрона, бозона Хіггса та інших спостережуваних частинок, маси яких визначаються полюсами відповідних функцій Гріна. Вони важливі для доведення калібрувальної інваріантності власної енергії фотона в КЕД і з'ясування ролі калібрувальної симетрії в ефективному потенціалі для моделей зі спонтанним порушенням симетрії. Тотожності Нільсена впливають із розширеної симетрії БРСТ, в якій калібрувальні параметри також зазнають БРСТ-перетворення. Для конкретності розглянемо виведення цих тотожностей у квантовій електродинаміці.

Стандартне формулювання квантової електродинаміки в методі інтеграла за траєкторіями в коваріантних калібровках (6.2.1) базується на лагранжіані

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi}(i\hat{D} - m)\psi + \frac{\xi}{2}B^2 - B\partial^\mu A_\mu - \bar{c}\square c, \quad (12.8.1)$$

де введено допоміжне поле Наканіші—Лаутрупа і залишено духовий доданок, незважаючи на те, що в КЕД духові поля відщеплюються (порівняйте з лагранжіаном КХД (4.7.1) і (4.7.2)). В присутності духового доданка наявна інваріантність КЕД відносно БРСТ-перетворень

$$\begin{aligned} \delta A_\mu(x) &= \epsilon \partial_\mu c(x), & \delta \psi(x) &= -ie \epsilon c(x) \psi(x), \\ \delta \bar{\psi}(x) &= ie \epsilon c(x) \bar{\psi}(x), & \delta c(x) &= 0, \\ \delta \bar{c}(x) &= -\epsilon B, & \delta B(x) &= 0, \end{aligned} \quad (12.8.2)$$

які є частинним наслідком неабелевих БРСТ-перетворень (4.7.4) для групи $U(1)$ (для якої $f^{abc} = 0$). Стандартні тотожності УТ в КЕД можуть бути отримані звичайним способом, використовуючи БРСТ-інваріантність, як в розділі 9.3.

Для знаходження тотожностей Нільсена додамо до лагранжіана доданок

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} \rightarrow \mathcal{L}_{\text{QED}} + \frac{\chi}{2} \bar{c}B, \quad (12.8.3)$$

де χ — постійна грасманова змінна, $\chi^2 = 0$. Легко переконатися, розкладаючи генеруючий функціонал по χ , що цей доданок не змінює динаміку КЕД. Модифікований лагранжіан є інваріантним відносно розширених БРСТ-перетворень, які крім (12.8.2) включають перетворення ξ і χ :

$$\delta\xi = -\epsilon\chi, \quad \delta\chi = 0, \quad (12.8.4)$$

тому варіація

$$\delta\left(\frac{\xi}{2}B^2 + \frac{\chi}{2}\bar{c}B\right) = 0.$$

Важливо зазначити, що калібрувальний параметр тепер також перетворюється. Щоб скористатися цією інваріантністю для отримання тотожностей Нільсена, розглянемо такий генеруючий функціонал з джерелами $J_\mu, J, \bar{\eta}, \eta, \bar{K}, K$

$$e^{iW} = \int [D\mu] \exp i \int d^4x [\mathcal{L}_{\text{QED}} + J_\mu A^\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + JB + \bar{K}(-iec\psi) + (iec\bar{\psi})K],$$

де міра $[D\mu]$ включає інтегрування по всіх полях, які входять до лагранжіана. Джерела для духових полів не включаємо оскільки їх функції Гріна не розглядаємо (для КЕД вони тривіальні).

За допомогою перетворення Лежандра перейдемо до функціонала Γ , що генерує одночастинково-незвідні функції Гріна

$$\Gamma(A_c^\mu, \psi_c, \bar{\psi}_c, B_c, c_c, \bar{c}_c, \bar{K}, K, \xi, \chi) = W(J_\mu, \eta, \bar{\eta}, J, \bar{K}, K, \xi, \chi) - \int d^4x (J_\mu A_c^\mu + \bar{\eta}\psi_c + \bar{\psi}_c\eta + JB_c), \quad (12.8.5)$$

де поля $\phi_{ci} = (A_c^\mu, \psi_c, \bar{\psi}_c, B_c, c_c, \bar{c}_c)$ є середніми значеннями квантованих полів $\phi_i = (A^\mu, \psi, \bar{\psi}, B, c, \bar{c})$ у присутності джерел

$$\frac{\delta W}{\delta J_i(x)} = \langle \phi_i(x) \rangle_{J_i} \equiv \phi_{ci}(x). \quad (12.8.6)$$

Надалі значок c опускаємо для скорочення запису. Внаслідок інваріантності ефективної дії відносно БРСТ-перетворень (12.8.2), (12.8.4) класичних полів маємо

$$0 = \int d^4x \left(\delta A_\mu(x) \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} + \delta\psi(x) \frac{\delta}{\delta\psi(x)} + \delta\bar{\psi}(x) \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x)} + \delta\bar{c}(x) \frac{\delta}{\delta\bar{c}(x)} \right) + \delta\xi \frac{\partial\Gamma}{\partial\xi}$$

(інші варіації $\delta B = \delta c = \delta \chi = 0$). Варіаційні похідні за грасмановими полями визначені як ліві. Символ інтегрування у виразі для варіації функціонала будемо опускати, маючи його на увазі. Оскільки $\epsilon \delta \Gamma / \delta \bar{K} = -i \epsilon c \psi = \delta \psi$, $\epsilon \delta \Gamma / \delta K = i \epsilon c \bar{\psi} = \delta \bar{\psi}$ і всі варіації полів пропорційні ϵ , то отримуємо тотожність

$$0 = \partial_\mu c \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{K}} \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi} + \frac{\delta \Gamma}{\delta K} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}} - B \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{c}} - \chi \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}. \quad (12.8.7)$$

Диференціюючи останню рівність по полях, можна отримати тотожності Уорда—Такахаші (Славнова—Тейлора у випадку неабелевої симетрії) між одночастинково-незвідними функціями Гріна для досліджуваної БРСТ-симетрії з калібрувальним параметром ξ , які називаються тотожностями Нільсена. Наприклад, продиференціюємо цю рівність по χ і покладемо $\chi = 0$,

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} = -\partial_\mu c \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \chi \delta A_\mu} + \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \chi \delta \bar{K}} \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{K}} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \chi \delta \bar{\psi}} + \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \chi \delta K} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}} + \frac{\delta \Gamma}{\delta K} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \chi \delta \psi} - B \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \chi \delta \bar{c}}.$$

Якщо не розглядаються функціональні похідні від цього виразу по духових полях, то збереження духового числа приводить до подальшого спрощення,

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} = \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \chi \delta \bar{K}} \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi} + \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \chi \delta K} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}} - B \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \chi \delta \bar{c}}, \quad (12.8.8)$$

де ми також використали $\partial_\mu c = \partial_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta J_\epsilon} = 0$ для одноточкової функції (Γ не залежить від джерела J_ϵ для поля $c(x)$ в (12.8.5)). З останньої тотожності ми можемо отримати тотожності Нільсена для двоточкових функцій Гріна.

Диференціюючи (12.8.8) по $\psi(x)$ і $\bar{\psi}(y)$ і покладаючи джерела рівними нулю, отримуємо таку тотожність

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi_\alpha(x) \delta \bar{\psi}_\beta(y)} &= \int d^4 z \left(\frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \chi \delta \psi_\alpha(x) \delta \bar{K}_\gamma(z)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi_\gamma(z) \delta \bar{\psi}_\beta(y)} + \right. \\ &\left. + \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \chi \delta \bar{\psi}_\beta(y) \delta K_\gamma(z)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi_\alpha(x) \delta \bar{\psi}_\gamma(z)} \right), \end{aligned} \quad (12.8.9)$$

де всі інші доданки зникають через збереження числа ферміонів або завдяки появі одноточкових функцій, рівних нулю. Рівність містить обернений ферміонний пропагатор $iG_{\beta\alpha}^{-1}(y-x) = \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi_\alpha(x) \delta \bar{\psi}_\beta(y)}$, і ми відновили неявне інтегрування. Потрійні похідні Γ (треточкові ОЧН функції Гріна) містять

допоміжне інтегрування по одній координаті за рахунок похідної по χ , і для них запишемо перетворення Фур'є

$$\begin{aligned} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \chi \delta \psi_\alpha(x) \delta \bar{K}_\gamma(z)} &= \int d^4 u \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-iq(x-u) - ik(z-u)} F_{\gamma\alpha}(q, k, -q - k), \\ &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x-z)} F_{\gamma\alpha}(q, -q, 0), \end{aligned} \quad (12.8.10)$$

$$\frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \chi \delta \bar{\psi}_\beta(y) \delta K_\gamma(z)} = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iq(y-z)} \bar{F}_{\beta\gamma}(q, -q, 0). \quad (12.8.11)$$

Рівняння (12.8.9) після перетворення Фур'є приймає вигляд

$$-\frac{\partial}{\partial \xi} G^{-1}(p) = G^{-1}(p)F(-p, p, p) + \bar{F}(p, -p, 0)G^{-1}(p). \quad (12.8.12)$$

Це є тотожність Нільсена для оберненого ферміонного пропагатора. З неї випливає, що якщо m є полюсом пропагатора, тобто $G^{-1}(p)|_{\hat{p}=m} = 0$, і припускаючи, що функції F, \bar{F} регулярні в полюсі, то маса ферміона не залежить від калібрувального параметра ξ ,

$$\left. \frac{\partial}{\partial \xi} G^{-1}(p) \right|_{\hat{p}=m} = 0. \quad (12.8.13)$$

Дійсно, загальна форма оберненого пропагатора в коваріантній калібровці є такою

$$G^{-1}(p) = -i[A(p^2)\hat{p} - B(p^2)], \quad (12.8.14)$$

тоді маса m визначається рівнянням

$$A(m^2)m = B(m^2). \quad (12.8.15)$$

Використовуючи останню рівність і тотожність Нільсена (12.8.13), легко переконатися, що фізична маса електрона, яка визначається полюсом пропагатора, є калібрувально інваріантною величиною $\partial m / \partial \xi = 0$, незважаючи на те, що сам пропагатор залежить від калібрувального параметра.

12.9. Обчислення квантової ефективної дії

Покажемо тепер, як можна обчислити окремі доданки в розкладі по похідним квантової ефективної дії. Для цього відновимо постійну \hbar у функціональному інтегралі для $Z(J)$

$$Z(J) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} W(J)\right) = N \int \mathcal{D}\Phi e^{iS(\Phi, J)/\hbar}, \quad Z(0) = 1, \quad (12.9.1)$$

де класична дія $S(\Phi, J) = \int d^4x [\mathcal{L}(\Phi(x)) + J(x)\Phi(x)]$. Квантова ефективна дія будується за правилами:

$$\frac{\delta W}{\delta J} = \langle 0 | \hat{\Phi}(x) | 0 \rangle = \Phi_c(x) = \frac{\int \mathcal{D}\Phi \Phi(x) e^{iS(\Phi, J)/\hbar}}{\int \mathcal{D}\Phi e^{iS(\Phi, J)/\hbar}}, \quad (12.9.2)$$

$$\Gamma(\Phi_c) = W(J) - \int d^4x J(x)\Phi_c(x), \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \Phi_c(x)} = -J(x).$$

Покажемо, що обчислення $\Gamma(\Phi_c)$, яке відповідає розкладу по степеням \hbar , пов'язане з розкладом по числу петель. Кожний доданок у лагранжіані, відповідальний за взаємодію, дає множник \hbar^{-1} в діаграмі, кожний пропагатор приводить до множника \hbar , тому кожний граф має степінь \hbar , який визначається $P = I - V$, де I — число внутрішніх ліній, V — число вершин (нагадаємо, що $\Gamma(\Phi_c)$ генерує власні функції Гріна, які є ампутованими, а тому зовнішні лінії не дають внесок в P). Число петель визначається рівнянням $L = I - (V - 1)$, тому $P = L - 1$, тобто петльовий розклад дає ряд по степеням \hbar (квазікласичний розклад).

Для ефективної дії з (12.9.1) і (12.9.2) маємо такий вираз

$$\Gamma(\Phi_c) = -i\hbar \ln \left\{ N \int \mathcal{D}\Phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int d^4x \left[\mathcal{L}(\Phi) - \frac{\delta \Gamma(\Phi_c)}{\delta \Phi_c(x)} (\Phi - \Phi_c(x)) \right] \right] \right\} \quad (12.9.3)$$

або, виконуючи зсув змінних $\Phi \rightarrow \Phi + \Phi_c$,

$$\Gamma(\Phi_c) = -i\hbar \ln \left\{ N \int \mathcal{D}\Phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int d^4x \left[\mathcal{L}(\Phi + \Phi_c) - \frac{\delta \Gamma(\Phi_c)}{\delta \Phi_c(x)} \Phi \right] \right] \right\}. \quad (12.9.4)$$

Як бачимо, ефективна дія визначається нелінійним функціонально-диференціальним рівнянням першого порядку, де варіація ефективної дії присутня також у підінтегральному виразі функціонального інтеграла. Розв'язок рівняння (12.9.4) можна шукати у вигляді ряду Тейлора (12.6.13) для $\Gamma(\Phi_c)$. Вставляючи розклад (12.6.13) у рівняння (12.9.4) і порівнюючи коефіцієнти польових мономів по Φ_c , приходимо до нескінченної системи зв'язаних інтегро-диференціальних рівнянь для $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ — рівнянь Швінгера—Дайсона. Знаходження розв'язку потребує обриву такої нескінченної системи, що має, звичайно, як переваги, так і недоліки.

Ми підемо іншим шляхом. Покладемо

$$\Gamma(\Phi_c) = S(\Phi_c) + \Gamma_{\text{int}}(\Phi_c), \quad (12.9.5)$$

тоді для $\Gamma_{\text{int}}(\Phi_c)$ маємо рівняння

$$\Gamma_{\text{int}}(\Phi_c) = -i\hbar \ln \left\{ N \int \mathcal{D}\Phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left[S(\Phi + \Phi_c) - S(\Phi_c) - \int d^4x \frac{\delta S(\Phi)}{\delta \Phi(x)} \Big|_{\Phi=\Phi_c} \Phi(x) - \int d^4x \frac{\delta \Gamma_{\text{int}}(\Phi_c)}{\delta \Phi_c(x)} \Phi(x) \right] \right] \right\}. \quad (12.9.6)$$

Визначимо модифіковану дію

$$\tilde{S}(\Phi_c, \Phi) \equiv S(\Phi + \Phi_c) - S(\Phi_c) - \int d^4x \left. \frac{\delta S(\Phi)}{\delta \Phi(x)} \right|_{\Phi=\Phi_c} \Phi(x). \quad (12.9.7)$$

Нова дія має квадратичні і більш високі степені по $\Phi(x)$

$$\tilde{S}(\Phi_c, \Phi) = \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \Phi(x) D^{-1} \{ \Phi_c; x, y \} \Phi(y) + S_{\text{int}} \{ \Phi_c; \Phi(x) \}, \quad (12.9.8)$$

де пропагатор $D\{ \Phi_c; x, y \}$ є зворотним до оператора

$$D^{-1} \{ \Phi_c; x, y \} = \left. \frac{\delta^2 \tilde{S}}{\delta \Phi(x) \delta \Phi(y)} \right|_{\Phi=\Phi_c}. \quad (12.9.9)$$

Таким чином, функціонал $\Gamma_{\text{int}}(\Phi_c)$ визначається внеском одночастинково-незвідних діаграм, які визначаються дією (12.9.7). Наприклад, у випадку теорії $\frac{\lambda}{4!} \Phi^4$ маємо

$$D^{-1} \{ \Phi_c; x, y \} = \left\{ -(\square_x + m^2) - \frac{\lambda}{2} \Phi_c^2(x) \right\} \delta(x - y), \quad (12.9.10)$$

$$S_{\text{int}} \{ \Phi_c; \Phi(x) \} = - \int d^4x \left(\frac{\lambda}{3!} \Phi_c(x) \Phi^3 + \frac{\lambda}{4!} \Phi^4(x) \right). \quad (12.9.11)$$

При конкретних обчисленнях функціонала (12.9.6) будемо шукати розв'язок у вигляді ряду по \hbar :

$$\Gamma_{\text{int}} = \sum_{L=1} \hbar^L \Gamma^{(L)}. \quad (12.9.12)$$

Тоді в 1-му порядку по \hbar рівняння (12.9.6) зводиться до

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{int}}(\Phi_c) &= -i\hbar \ln \left\{ N \int \mathcal{D}\Phi \exp \frac{i}{\hbar} \left[\frac{i}{2} \int d^4x d^4y \Phi(x) D^{-1} \{ \Phi_c, x, y \} \Phi(y) \right] \right\} = \\ &= -i\hbar \ln \frac{\det^{-1/2} D^{-1} \{ \Phi_c, x, y \}}{\det^{-1/2} D_0^{-1} \{ 0, x, y \}} = \frac{i\hbar}{2} \text{Tr} \ln D^{-1} D_0. \end{aligned} \quad (12.9.13)$$

Для постійних полів, $\Phi_c = \text{const}$, пропагатор залежить від різниці координат, $D(\Phi_c, x, y) = D(\Phi_c, x - y)$, а ефективна дія $\Gamma(\Phi_c)$ зводиться до ефективного потенціалу (12.6.28), який у базисі плоских хвиль запишеться так:

$$V_{\text{eff}}(\Phi_c) = \frac{1}{2} m^2 \Phi_c^2 + U(\Phi_c) - \frac{i\hbar}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln [D^{-1} \{ \Phi_c, p \} D_0 \{ 0, p \}], \quad (12.9.14)$$

де

$$D^{-1} \{ \Phi_c, p \} = \int d^4x e^{ipx} D^{-1} \{ \Phi_c, x, 0 \}.$$

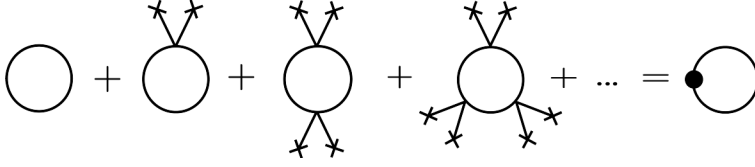


Рис. 72. Вакуумні діаграми в теорії збурень для потенціалу Коулмена–Вайнберга

Тут $U(\Phi_c)$ — класичний потенціал взаємодії у початковому лагранжіані

$$\mathcal{L}(\Phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 - U(\Phi),$$

який відповідає деревному наближенню ($L = 0$) до потенціалу $V_{\text{eff}}(\Phi_c)$.

Оскільки

$$D^{-1} \{ \Phi_c, x, 0 \} = [-(\square_x + m^2) - U''(\Phi_c)] \delta(x), \quad (12.9.15)$$

тоді

$$D^{-1} \{ \Phi_c, p \} = p^2 - m^2 - U''(\Phi_c). \quad (12.9.16)$$

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(\Phi_c) &= \frac{1}{2} m^2 \Phi_c^2 + U(\Phi_c) - \frac{i\hbar}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln \frac{p^2 - m^2 - U''(\Phi_c)}{p^2 - m^2} = \\ &= \frac{1}{2} m^2 \Phi_c^2 + U(\Phi_c) + \frac{i\hbar}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{U''(\Phi_c)}{p^2 - m^2} \right]^n. \end{aligned} \quad (12.9.17)$$

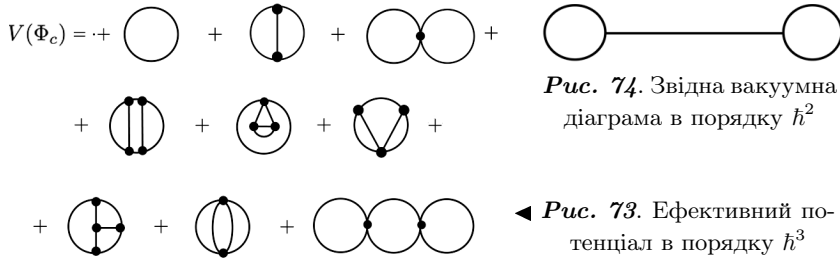
Третій доданок описує внесок усіх однопетльових діаграм, які містять n пропагаторів $\frac{i}{p^2 - m^2}$ і n вершин $-iU''(\Phi_c)$, а всі зовнішні лінії мають нульові імпульси. Для теорії $\frac{\lambda}{4!} \Phi^4$ вони мають вигляд, наведений на рис. 72, де вершині відповідає множник $(-i\lambda/2)\Phi_c^2$.

Щоб з'ясувати фізичний зміст $V(\Phi_c)$, запишемо його після віківського повороту ($p_0 = ip_4$) у вигляді

$$V_{\text{eff}}(\Phi_c) = \frac{1}{2} m^2 \Phi_c^2 + U(\Phi_c) + \frac{\hbar}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln \frac{p^2 + m^2 + U''(\Phi_c)}{p^2 + m^2}. \quad (12.9.18)$$

Інтегруючи частинами (по p_4), маємо

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(\Phi_c) &= \frac{1}{2} m^2 \Phi_c^2 + U(\Phi_c) - \hbar \int \frac{d^3 p dp_4}{(2\pi)^4} \times \\ &\times \left[\frac{p_4^2}{p_4^2 + \mathbf{p}^2 + m^2 + U''} - \frac{p_4^2}{p_4^2 + \mathbf{p}^2 + m^2} \right]. \end{aligned} \quad (12.9.19)$$



Інтегрування по p_4 легко здійснюється

$$V_{\text{eff}}(\Phi_c) = \frac{1}{2}m^2\Phi_c^2 + U(\Phi_c) + \frac{\hbar}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 + U''} - \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \right]. \quad (12.9.20)$$

Третій доданок є різницею густини енергії вакууму (густина енергії нульових коливань) у присутності та за відсутності поля. Нагадаємо, що енергія нульових коливань має вигляд

$$E_0 = \sum_{\mathbf{p}} \pm \frac{E(\mathbf{p})}{2},$$

де $E(\mathbf{p})$ — енергія окремої моди коливань, знак «+» для бозонів та «-» для ферміонів, знак суми означає інтегрування за неперервними квантовими числами та підсумовування за дискретними. Добре відомо, що нульові коливання полів у вакуумі приводить до спостережуваних ефектів, скажімо, такого, як притягання між двома паралельними пластинами, який відомий як ефект Казіміра. Наприклад, у випадку електромагнітного поля сила між пластинами, розташованими на відстані a , визначається формулою

$$F_K = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240} \times \frac{\text{площа}}{a^4}.$$

Доданки вищого порядку по \hbar (двох-, трипетльові і так далі) в ефективному потенціалі $V_{\text{eff}}(\Phi_c)$ визначаються ОЧН діаграмами на рис. 73, в яких є вершини двох типів, Φ^3 і Φ^4 , у відповідності з ефективним лагранжіаном (12.9.11). Зауважимо, що діаграми типу наведеної на рис. 74 відсутні, оскільки вони є одночастинково-звідними.

Вираз (12.9.20) все ще розбігається і необхідно його регуляризувати. Це можна зробити, або просто обрізаючи інтеграл при деякому імпульсі $p^2 = \Lambda^2$, або змінюючи розмірність простору (розмірна регуляризація). Ми продемонструємо тут інший шлях — регуляризацію за допомогою ζ -функції.

Значення $p^2 + m^2 + U''(\Phi_c)$ є власними для оператора $-\square + m^2 + U''(\Phi_c)$ в евклідовому просторі. Запишемо

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln \left(\frac{p^2 + m^2 + U''(\Phi_c)}{\mu^2} \right) = - \left. \frac{\partial}{\partial s} \zeta(s) \right|_{s=0}, \quad (12.9.21)$$

де узагальнена дзета-функція визначається таким чином

$$\zeta(s) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(\mu^2)^s}{(p^2 + m^2 + U''(\Phi_c))^s}, \quad (12.9.22)$$

і ми ввели розмірний параметр μ для забезпечення правильної розмірності. Інтегруючи по кутам, отримуємо

$$\zeta(s) = \frac{(\mu^2)^s}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{dp^2 p^2}{(p^2 + m^2 + U'')^s}. \quad (12.9.23)$$

Очевидно, останній інтеграл збігається при $\text{Re } s > 2$, де він визначає аналітичну функцію. Обчислюючи інтеграл за допомогою (7.8.9), знаходимо

$$\zeta(s) = \frac{(m^2 + U''(\Phi_c))^{2-s}}{16\pi^2} \frac{\Gamma(2)\Gamma(s-2)}{\Gamma(s)} (\mu^2)^s. \quad (12.9.24)$$

Полюси $\zeta(s)$ знаходяться при $s = 1, 2$, тоді як полюси Γ -функцій при $s = -m$ в чисельнику і знаменнику скорочуються. Це є цілком загальним фактом. Використовуючи властивості Γ -функцій, можна також записати

$$\zeta(s) = \frac{(m^2 + U''(\Phi_c))^{2-s}}{16\pi^2} \frac{(\mu^2)^s}{(s-1)(s-2)}, \quad (12.9.25)$$

і, обчислюючи похідну в нулі,

$$\zeta'(0) = - \frac{(m^2 + U''(\Phi_c))^2}{32\pi^2} \left[\ln \frac{(m^2 + U''(\Phi_c))}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right], \quad (12.9.26)$$

остаточно знаходимо

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(\Phi_c) &= \frac{1}{2} m^2 \Phi_c^2 + U(\Phi_c) + \frac{\hbar}{64\pi^2} \left[(m^2 + U''(\Phi_c))^2 \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\ln \frac{m^2 + U''(\Phi_c)}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) - m^4 \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right]. \end{aligned} \quad (12.9.27)$$

У теорії із взаємодією $\frac{\lambda}{4!} \Phi^4$ ефективний потенціал приймає вигляд

$$V_{\text{eff}}(\Phi_c) = \frac{1}{2} m^2 \Phi_c^2 + \frac{\lambda}{4!} \Phi_c^4 + \frac{\hbar}{64\pi^2} \left(m^2 + \frac{\lambda \Phi_c^2}{2} \right)^2 \left[\ln \left(\frac{m^2 + \frac{\lambda \Phi_c^2}{2}}{\mu^2} \right) - \frac{3}{2} \right] \quad (12.9.28)$$

(ми опустили несуттєву константу при $\Phi_c = 0$, яка визначає точку відліку густини енергії вакууму). Масштаб перенормування μ є довільним, але спостережувані не повинні залежати від нього, що приводить до деякої залежності параметрів теорії m і λ від μ , що описується ренормалізаційною групою.

У випадку $\Phi_c \neq \text{const}$ ефективна дія може бути розкладена за степенями похідних (12.6.27). Обчислення такого розкладу в однопетльовому наближенні розглянемо дещо пізніше, а в наступному параграфі розглянемо важливий випадок потенціалу Коулмена—Вайнберга у випадку взаємодіючого безмасового скалярного поля. Зазначимо, що в початковій дії такої теорії відсутній будь-який розмірний параметр і класична теорія є масштабно інваріантною, точніше навіть конформно інваріантною.

12.10. Потенціал Коулмена—Вайнберга

Для $m = 0$ ефективний потенціал (12.9.28) набуває такого вигляду

$$V(\Phi_c) = \frac{\lambda}{4!} \Phi_c^4 + \frac{\lambda^2 \Phi_c^4}{256\pi^2} \left[\ln \frac{\lambda \Phi_c^2}{2\mu^2} - \frac{3}{2} \right]. \quad (12.10.1)$$

Оскільки μ — довільний параметр, виберемо його так, щоб потенціал був нормований умовою

$$\left. \frac{d^4 V}{d\Phi_c^4} \right|_{\Phi_c=M} = \lambda. \quad (12.10.2)$$

Зазначимо, що ця умова нормування вводить розмірний параметр у початкову масштабно інваріантну теорію безмасового взаємодіючого скалярного поля. Обчислюємо четверту похідну

$$V'''' = \lambda + \frac{\lambda^2}{64\pi^2} \left[6 \ln \frac{\lambda \Phi_c^2}{2\mu^2} + 16 \right].$$

З останньої рівності, а також з умови нормування (12.10.2) знаходимо зв'язок між параметрами μ і M :

$$\ln \frac{\lambda M^2}{2\mu^2} = -\frac{8}{3}.$$

Таким чином, потенціал Коулмена—Вайнберга для безмасового скалярного поля приводиться до канонічного виду

$$V_{\text{КВ}}(\Phi_c) = \frac{\lambda}{4!} \Phi_c^4 + \frac{\lambda^2 \Phi_c^4}{256\pi^2} \left[\ln \frac{\Phi_c^2}{M^2} - \frac{25}{6} \right] \quad (12.10.3)$$

та зображений на рис. 75. Як бачимо, точка мінімуму $\Phi_c = 0$ класичного потенціалу стає максимумом, тобто нестабільною точкою для потен-

ціалу Коулмена—Вайнберга. Мінімум потенціалу знаходимо з рівняння $V'(\Phi_c) = 0$:

$$\frac{1}{3} + \frac{\lambda}{32\pi^2} \left[\ln \frac{\Phi_c^2}{M^2} - \frac{11}{3} \right] = 0, \quad (12.10.4)$$

що дає

$$\Phi_0 = \pm M \exp \left(-\frac{16\pi^2}{3\lambda} + \frac{11}{6} \right). \quad (12.10.5)$$

Розкладаючи потенціал поблизу одного з мінімумів, отримуємо $V_{\text{KB}}(\Phi_c) = \text{const} + \frac{1}{2}m^2(\Phi_c - \Phi_0)^2$. Тобто для скалярного поля, яке не мало маси в початковому лагранжіані, маємо тепер масовий доданок. Таким чином, ефективний потенціал дозволяє дослідити динамічну генерацію маси для безмасових частинок за рахунок взаємодії. Зазначимо, що саме радіаційні квантові поправки відіграють вирішальну роль для генерації маси в розглянутому випадку.

На жаль, цей мінімум знаходиться поза межами застосування петльового розкладу. Дійсно, останній в моделі, що розглядається, еквівалентний розкладу по степеням λ і $\ln \frac{\Phi_c^2}{M^2}$. Це видно з того, що якщо в початковій дії (при $m = 0$) замінити $\Phi \rightarrow \Phi/\sqrt{\lambda}$, тоді константа λ з'явиться разом з \hbar перед дією.

Крім того, в загальному випадку n -петльовий вираз для потенціалу має доданки порядку $\left[\ln \frac{\Phi_c^2}{M^2} \right]^n$, тому що кожна петля при інтегруванні по імпульсу приводить до логарифмічної розбіжності, яка перетворюється в $\ln \frac{\Phi_c^2}{M^2}$ в результаті перенормування. Тому в порядку n петель потенціал буде містити доданки порядку

$$\lambda^{n+1} \left[\ln \frac{\Phi_c^2}{M^2} \right]^n. \quad (12.10.6)$$

Розклад по \hbar (петлям) законний тільки тоді, коли $\lambda \ln \frac{\Phi_c^2}{M^2} \ll 1$, $\lambda \ll 1$. При цих умовах внески вищих петель не змінюють якісно фізичну картину деревного наближення. Власне, розв'язок (12.10.5) знаходиться поза межами застосування розкладу, оскільки з (12.10.4) видно, що умова $\lambda \ln \frac{\Phi_c^2}{M^2} \ll 1$ не задовольняється.

Цей недолік усувається в моделі комплексного скалярного поля, що взаємодіє з електромагнітним полем і визначається лагранжіаном

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + (D_\mu\Phi)^* D^\mu\Phi - \frac{\lambda}{4!}(\Phi^*\Phi)^2,$$

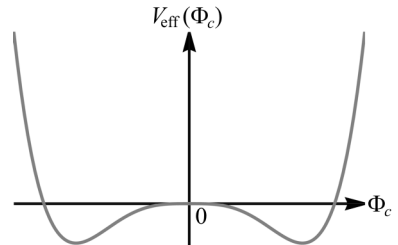


Рис. 75. Ефективний потенціал Коулмена—Вайнберга

де $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. У цьому випадку Коулмен і Вайнберг отримали такий ефективний потенціал

$$V_{\text{eff}}(\Phi_c) = \frac{\lambda}{4!} \Phi_c^4 + \left(\frac{5\lambda^2}{1152\pi^2} + \frac{3e^4}{64\pi^2} \right) \Phi_c^4 \left[\ln \frac{\Phi_c^2}{M^2} - \frac{25}{6} \right]. \quad (12.10.7)$$

Область застосовності цього потенціалу $e^4 \ln(\Phi_c^2/M^2) \ll 1$. Доданок $\sim e^4$ можна збалансувати з першим доданком $\sim \lambda$, якщо $\lambda \sim e^4$. У цьому випадку мінімум потенціалу знаходиться в області застосовності обчислень.

Іншим важливим прикладом ефективної дії є обчислення ефективної дії для постійних електричного і магнітного полів у квантовій електродинаміці для безмасових ферміонів. Відповідна дія дорівнює

$$\Gamma(\mathcal{F}) = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{QED}}, \quad \mathcal{L}_{\text{QED}} = -\mathcal{F} + \frac{e^2 \mathcal{F}}{24\pi^2} \left[\ln \left(\frac{2e^2 \mathcal{F}}{\mu^4} \right) - 1 \right], \quad (12.10.8)$$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2}{2}, \quad \mathcal{G} = \mathbf{E}\mathbf{H} = 0,$$

де \mathbf{H} і \mathbf{E} – магнітне і електричне поля. На діаграмному рівні ця дія відповідає підсумовуванню всіх діаграм з ферміонними петлями, чії зовнішні фотонні лінії описують вставки зовнішніх електричного і магнітного полів. Важливо, що ця дія є нелінійною по \mathcal{F} . Це означає, що внаслідок розсіювання на віртуальних електрон-позитронних парах електромагнітні поля починають взаємодіяти між собою, тобто принцип суперпозиції в класичній теорії у вакуумі перестає працювати в квантовій електродинаміці. Для масивних ферміонів ефективний лагранжیان був отриманий Гейзенбергом і Ейлером в 1936 р. [113], а також Швінгером у 1951 р. [172] (див. огляд [70] та літературу там), і залежить від двох інваріантів полів \mathcal{F} і \mathcal{G} .

У квантовій глюодинаміці з групою $SU(N_c)$ ефективний лагранжیان був отриманий Саввіді в 1977 р. [165, 166], за відсутності ферміонів він має вигляд

$$\mathcal{L}_g = -\mathcal{F} - \frac{11g^2 N_c \mathcal{F}}{96\pi^2} \left[\ln \left(\frac{2g^2 \mathcal{F}}{\mu^4} \right) - 1 \right], \quad (12.10.9)$$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} = \frac{\mathbf{H}_a^2 - \mathbf{E}_a^2}{2} > 0, \quad \mathcal{G} = \mathbf{E}_a \mathbf{H}_a = 0,$$

де \mathbf{H}_a і \mathbf{E}_a – кольорові аналоги магнітного і електричного полів. Внесок безмасових кварків у тому ж наближенні є таким:

$$\mathcal{L}_q = + \frac{g^2 n_f \mathcal{F}}{48\pi^2} \left[\ln \left(\frac{2g^2 \mathcal{F}}{\mu^4} \right) - 1 \right]. \quad (12.10.10)$$

Ефективний лагранжіан дозволяє обчислити магнітну індукцію вакууму \mathcal{B} , яка визначається похідною ($\mathbf{E}_a = 0$)

$$\mathcal{B}_a = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{H}_a} = \mu_{\text{vac}} \mathbf{H}_a. \quad (12.10.11)$$

У випадку квантової електродинаміки знаходимо

$$\mu_{\text{QED}} = 1 - \frac{e^2}{24\pi^2} \ln \left(\frac{e^2 \mathbf{H}^2}{\mu^4} \right) < 1, \quad (12.10.12)$$

тобто при великих полях, вакуум КЕД поводить себе як діамagnetне середовище. З іншого боку, в квантовій хромодинаміці

$$\mu_{\text{QCD}} = 1 + \frac{g^2}{96\pi^2} (11N_c - 2n_f) \ln \left(\frac{e^2 \mathbf{H}_a^2}{\mu^4} \right) > 1, \quad (12.10.13)$$

тобто вакуум КХД є парамагнітним при умові $n_f < 11N_c/2$, що звичайно виконується для $N_c = 3$ і $n_f = 6$ в стандартній КХД з асимптотичною свободою.

Діамagnetизм вакууму КЕД означає, що магнітне поле виштовхується з вакууму за рахунок утворення індукованого магнітного поля у напрямку, протилежному напрямку прикладеного магнітного поля. Це явище подібне до орбітального діамagnetизму Ландау вільного електронного газу, коли внаслідок руху електронів по круговим орбітам утворюється поле, яке протидіє прикладеному магнітному полю. Парамагнетизм вакууму КХД означає, що зовнішнє хромомagnetне поле підсилюється за рахунок індукованого у вакуумі хромомagnetного поля внаслідок взаємодії з віртуальними глюонами, і спрямованого в тому самому напрямку, що і зовнішнє поле. У КХД саме велика поляризація спінів глюонів відповідає за посилення зовнішнього поля. Це явище подібне до парамагнетизму Паулі. Зауважимо, однак, що діамagnetний і парамагнітний внески в КХД виникають за рахунок віртуальних кварків і глюонів на відміну від діамagnetизму Ландау і парамагнетизму Паулі реальних електронів.

12.11. Розклад за степенями похідних

Покажемо як на практиці знайти розклад ефективної дії (12.6.27) за степенями похідних в однопетльовому наближенні [9, 106]. Будемо проводити обчислення в евклідовій області, в цьому випадку

$$\Gamma^{(1)}(\varphi_c(x)) = \frac{1}{2} \ln \det(-\square + m^2 + U''(\varphi_c)) = \frac{1}{2} \ln \det H = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln H, \quad (12.11.1)$$

де ми використали формулу $\ln \det H = \text{Tr} \ln H$. Визначимо узагальнену дзета-функцію деякого оператора H

$$\zeta(s|H) = \text{Tr} H^{-s}. \quad (12.11.2)$$

У нашому випадку $H = -\square + X(x)$, $X(x) \equiv m^2 + U''(\varphi_c)$. Тоді

$$\text{Tr} \ln H = - \left. \frac{d\zeta(s|H)}{ds} \right|_{s=0} \quad (12.11.3)$$

і однопетльова ефективна дія виражається через похідну дзета-функції

$$\Gamma(X) = -\frac{1}{2} \zeta'(0|H). \quad (12.11.4)$$

Для дзета-функції використаємо її представлення через інтеграл Коші від резольвенти оператора $H - \lambda$,

$$\begin{aligned} \zeta(s|H) &= \text{Tr} H^{-s} = \text{Tr} \int_C \frac{id\lambda}{2\pi} \lambda^{-s} \frac{1}{H - \lambda} = \\ &= \int d^n x \int_C \frac{id\lambda}{2\pi} \lambda^{-s} \text{tr} \langle x | \frac{1}{H - \lambda} | x \rangle, \quad \text{Re } s > 0, \end{aligned} \quad (12.11.5)$$

де tr — слід по внутрішнім ступеням вільності, а n — розмірність простору-часу. Контур C обходить спектр оператора H проти годинникової стрілки, не перетинаючи розріз для функції λ^{-s} вздовж напівосі $(-\infty, 0]$.

Ми розглянемо тільки еліптичні оператори H , для яких власні значення задовольняють умові $\text{Re } \lambda_i > 0$. Рівняння для резольвенти (функції Гріна оператора $H - \lambda$) в операторній формі має вигляд

$$(H - \lambda)G(\lambda) = 1.$$

Метод обчислення функції Гріна базується на техніці псевдодиференціальних операторів [177], де використовується узагальнене фур'є-перетворення. Для функції Гріна воно має вигляд

$$G(x, x', \lambda) = \langle x | \frac{1}{H - \lambda} | x' \rangle = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} e^{ik_\mu(x-x')^\mu} \sigma(x, k, \lambda), \quad (12.11.6)$$

де фур'є-образ $\sigma(x, k, \lambda)$ називається символом оператора $(H - \lambda)^{-1}$. Для похідної маємо очевидно

$$\partial_x^\mu G = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} e^{ik(x-x')} (ik^\mu + \partial_x^\mu) \sigma(x, k, \lambda), \quad (12.11.7)$$

і для символу резольвенти одержуємо рівняння

$$(k^2 + X - \lambda - 2ik_\mu \partial_\mu - \square) \sigma(x, k, \lambda) = 1. \quad (12.11.8)$$

Для того, щоб отримати розклад по похідним, введемо формальний параметр ϵ перед кожною похідною

$$(k^2 + X - \lambda - 2i\epsilon k\partial - \epsilon^2\Box)\sigma_\epsilon(x, k, \lambda) = 1,$$

і будемо шукати символ $\sigma_\epsilon(x, k, \lambda)$ у вигляді ряду за цим параметром

$$\sigma_\epsilon = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m \sigma_m, \quad (12.11.9)$$

який потім покладемо рівним одиниці. Коефіцієнти σ_m будуть містити в точності m похідних. Для коефіцієнтів ряду отримуємо рекурентні співвідношення

$$\begin{cases} (k^2 + X - \lambda)\sigma_0 = 1, \\ (k^2 + X - \lambda)\sigma_1 - 2ik\partial\sigma_0 = 0, \\ (k^2 + X - \lambda)\sigma_m - 2ik\partial\sigma_{m-1} - \Box\sigma_{m-2} = 0, \quad m \geq 2. \end{cases} \quad (12.11.10)$$

Послідовно знаходимо перші коефіцієнти

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{1}{k^2 + X - \lambda}, & \sigma_1 &= \sigma_0 2ik\partial\sigma_0 = -\frac{2ik\partial X}{(k^2 + X - \lambda)^3}, \\ \sigma_2 &= \sigma_0 (2ik\partial\sigma_1 + \Box\sigma_0) = \sigma_0 \left[4k_\mu\partial_\mu \frac{k_\nu\partial_\nu X}{(k^2 + X - \lambda)^3} + \partial_\mu\partial_\mu \frac{1}{k^2 + X - \lambda} \right] = \\ &= \frac{4k_\mu k_\nu\partial_\mu\partial_\nu X}{(k^2 + X - \lambda)^4} - 12 \frac{k_\mu\partial_\mu X k_\nu\partial_\nu X}{(k^2 + X - \lambda)^5} - \frac{\Box X}{(k^2 + X - \lambda)^3} + \frac{2\partial_\mu X \partial_\mu X}{(k^2 + X - \lambda)^4}. \end{aligned}$$

Таким чином, для дзета-функції маємо

$$\begin{aligned} \zeta(s|H) &= \mu^{2s} \int d^n x \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \int \frac{id\lambda}{2\pi} \lambda^{-s} \left\{ \frac{1}{k^2 + X - \lambda} + \frac{4k_\mu k_\nu\partial_\mu\partial_\nu X}{(k^2 + X - \lambda)^4} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{12k_\mu k_\nu\partial_\mu X \partial_\nu X}{(k^2 + X - \lambda)^5} - \frac{\Box X}{(k^2 + X - \lambda)^3} + \frac{2\partial_\mu X \partial_\mu X}{(k^2 + X - \lambda)^4} \right\}. \quad (12.11.11) \end{aligned}$$

Інтегрування за змінними λ і k легко виконується за допомогою формул

$$\begin{aligned} \int_C \frac{id\lambda}{2\pi} \frac{\lambda^{-s}}{(M - \lambda)^{k+1}} &= \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)\Gamma(k+1)} M^{-s-k}, \quad M = k^2 + X, \\ \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k_{\mu_1} \dots k_{\mu_{2m}}}{(k^2 + X)^l} &= \frac{1}{(4\pi)^{n/2} 2^m} \frac{\Gamma(l - m - \frac{n}{2})}{\Gamma(l)} X^{\frac{n}{2} + m - l} \delta_{\{\mu_1 \dots \mu_{2m}\}}, \end{aligned}$$

де $\delta_{\{\mu_1 \dots \mu_{2m}\}}$ — повністю симетричний за всіма індексами тензор, побудований з кронекерівського тензора $\delta_{\mu\nu}$, наприклад,

$$\delta_{\{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4\}} = \delta_{\mu_1 \mu_2} \delta_{\mu_3 \mu_4} + \delta_{\mu_1 \mu_3} \delta_{\mu_2 \mu_4} + \delta_{\mu_1 \mu_4} \delta_{\mu_2 \mu_3}.$$

Тоді маємо загальний інтеграл

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^n k}{(2\pi^4)} k_{\mu_1} \dots k_{\mu_{2m}} \int \frac{id\lambda}{2\pi} \lambda^{-s} \frac{1}{(k^2 + X - l)^{l+1}} = \\ & = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{\Gamma(s+l-m-\frac{n}{2})}{2^m \Gamma(s) \Gamma(l+1)} X^{\frac{n}{2}+m-l-s} \delta_{\{\mu_1 \dots \mu_{2m}\}}. \end{aligned} \quad (12.11.12)$$

Використовуючи цю формулу для дзета-функції, отримуємо розклад за похідними до другого степеня

$$\begin{aligned} \zeta(s|H) &= \frac{\mu^{2s}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma(s)} \int d^n x \left\{ \Gamma\left(s - \frac{n}{2}\right) X^{\frac{n}{2}-s} + \frac{1}{12} (\partial_\mu X)^2 X^{\frac{n}{2}-3-s} \right. \\ & \quad \left. \times \Gamma\left(s + 3 - \frac{n}{2}\right) - \frac{1}{6} \square X X^{\frac{n}{2}-2-s} \Gamma\left(s + 2 - \frac{n}{2}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Для розмірності $n = 4$ вираз набуває вигляд

$$\begin{aligned} \zeta(s|H) &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^4 x \left\{ \frac{1}{(s-2)(s-1)} X^2 \left(\frac{X}{\mu^2}\right)^{-s} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{s}{12} \frac{(\partial_\mu X)^2}{X} \left(\frac{X}{\mu^2}\right)^{-s} - \frac{1}{6} \square X \left(\frac{X}{\mu^2}\right)^{-s} \right\}, \end{aligned} \quad (12.11.13)$$

і, обчислюючи похідну по s в нулі, знаходимо ефективну дію

$$\Gamma^{(1)}(X) = -\frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4 x \left\{ \frac{3}{4} X^2 - \frac{1}{2} X^2 \ln \frac{X}{\mu^2} + \frac{1}{12} \frac{(\partial_\mu X)^2}{X} + \frac{1}{6} \square X \ln \frac{X}{\mu^2} \right\}$$

або інтегруючи частинами останній доданок

$$\Gamma^{(1)}(X) = \frac{1}{64\pi^2} \int d^4 x \left\{ \frac{X^2}{2} \left(\ln \frac{X}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{6} \frac{(\partial_\mu X)^2}{X} \right\}. \quad (12.11.14)$$

Для теорії дійсного скалярного поля із взаємодією $\lambda\Phi^4/4!$ маємо

$$X = m^2 + \frac{\lambda\Phi_c^2}{2}, \quad \partial_\mu X = \lambda\Phi_c \partial_\mu \Phi_c.$$

Разом з класичною дією (в евклідовому просторі)

$$S(\Phi_c) = \int d^4 x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi_c)^2 + \frac{m^2}{2} \Phi_c^2 + \frac{\lambda}{4!} \Phi_c^4 \right\}$$

знаходимо розклад за похідними однопетльової ефективної дії:

$$\Gamma(\Phi_c) = S(\Phi_c) + \Gamma^{(1)}(\Phi_c) = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda^2 \Phi_c^2}{192\pi^2(m^2 + \lambda\Phi_c^2/2)} \right) (\partial_\mu \Phi_c)^2 + \frac{m^2}{2} \Phi_c^2 + \frac{\lambda}{4!} \Phi_c^4 + \frac{(m^2 + \lambda\Phi_c^2/2)^2}{64\pi^2} \left[\ln \frac{m^2 + \lambda\Phi_c^2/2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right] \right\}. \quad (12.11.15)$$

З цього виразу отримуємо коефіцієнт при другій похідній

$$Z(\Phi_c) = 1 + \frac{\lambda^2 \Phi_c^2}{192\pi^2(m^2 + \lambda\Phi_c^2/2)} \quad (12.11.16)$$

та ефективний потенціал

$$V(\Phi_c) = \frac{m^2}{2} \Phi_c^2 + \frac{\lambda}{4!} \Phi_c^4 + \frac{(m^2 + \lambda\Phi_c^2/2)^2}{64\pi^2} \left[\ln \frac{m^2 + \lambda\Phi_c^2/2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right]. \quad (12.11.17)$$

Очевидно, цей потенціал співпадає із раніше одержаним виразом (12.9.28) (тут постійна Планка покладена рівною одиниці, $\hbar = 1$). Для безмасового випадку, $m = 0$, вирази спрощуються

$$Z(\Phi_c) = 1 + \frac{\lambda}{96\pi^2}, \quad (12.11.18)$$

$$V(\Phi_c) = \frac{\lambda}{4!} \Phi_c^4 + \frac{\lambda^2 \Phi_c^4}{256\pi^2} \left[\ln \frac{\lambda\Phi_c^2}{2\mu^2} - \frac{3}{2} \right]. \quad (12.11.19)$$

При використанні умови нормування (12.10.2) ефективний потенціал набуває стандартного вигляду (12.10.3).

12.12. Рівняння ренормалізаційної групи для ефективної дії

Розглянемо рівняння ренормгрупи для ефективної дії у випадку теорії безмасового скалярного поля із взаємодією $\lambda\Phi^4/4!$. Скористаємося тим, що одночастинково-незвідні перенормовані функції Гріна в імпульсному просторі задовольняють рівнянню (порівняйте з рівняннями (10.1.26) для КЕД)

$$\left(\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - n\gamma(\lambda) \right) \Gamma^{(n)}(\{p_i\}, \sigma, \lambda) = 0, \quad (12.12.1)$$

де n — кількість зовнішніх ліній у даній функції Гріна, $\beta(\lambda)$ і $\gamma(\lambda) \in \beta$ -функцією та аномальною розмірністю поля, відповідно, σ — параметр розмірності маси, що виникає в процесі перенормування (використовуємо тут позначення σ для цього параметра замість μ). Для переходу в конфігураційний простір робимо фур'є-перетворення, очевидно, (12.12.1) стає

$$\left(\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - n\gamma(\lambda) \right) \Gamma^{(n)}(\{x_i\}, \sigma, \lambda) = 0. \quad (12.12.2)$$

Далі використаємо розклад ефективної дії в функціональний ряд Тейлора (порівняйте з (12.6.13))

$$\Gamma(\Phi_c, \sigma, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n, \sigma, \lambda) \Phi_c(x_1) \dots \Phi_c(x_n)$$

і очевидну рівність

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \left(\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - n\gamma(\lambda) \right) \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n, \sigma, \lambda) \times \\ \times \Phi_c(x_1) \dots \Phi_c(x_n) = 0, \quad (12.12.3)$$

а також

$$\int d^4x \Phi_c(x) \frac{\delta}{\delta \Phi_c(x)} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n, \sigma, \lambda) \Phi_c(x_1) \dots \Phi_c(x_n) = \\ = n \int d^4x_1 \dots d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n, \sigma, \lambda) \Phi_c(x_1) \dots \Phi_c(x_n). \quad (12.12.4)$$

В результаті отримуємо таке ренормгрупове рівняння для ефективної дії

$$\left[\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - \gamma(\lambda) \int d^4x \Phi_c(x) \frac{\delta}{\delta \Phi_c(x)} \right] \Gamma(\Phi_c(x), \sigma, \lambda) = 0. \quad (12.12.5)$$

Це рівняння фактично виражає той факт, що ефективна дія не повинна залежати від вибору точки нормування σ , тобто повна похідна дорівнює нулю,

$$\sigma \frac{d}{d\sigma} \Gamma(\Phi_c(x, \sigma), \lambda(\sigma), \sigma) = 0. \quad (12.12.6)$$

Це означає, як і у випадку функцій Гріна, що явна залежність Γ від σ повинна компенсуватися відповідною залежністю $\Phi_c(\sigma), \lambda(\sigma)$.

Якщо використати розклад ефективної дії по похідним, то з (12.12.5) і (12.6.27) отримуємо окремі рівняння для $V(\Phi_c)$ і $Z(\Phi_c)$:

$$\left(\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - \gamma(\lambda) \Phi_c \frac{\partial}{\partial \Phi_c} \right) V(\Phi_c, \lambda, \sigma) = 0, \quad (12.12.7)$$

$$\left(\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - \gamma(\lambda) \Phi_c \frac{\partial}{\partial \Phi_c} - 2\gamma(\lambda) \right) Z(\Phi_c, \lambda, \sigma) = 0. \quad (12.12.8)$$

В наближенні, що розглядається, обчислимо похідні потенціалу:

$$\Phi_c \frac{\partial V}{\partial \Phi_c} = \frac{\lambda}{3!} \Phi_c^4 + \frac{\lambda^2 \Phi_c^4}{64\pi^2} \left[\ln \frac{\Phi_c^2}{\sigma^2} - \frac{25}{6} \right] + \frac{\lambda^2 \Phi_c^4}{128\pi^2}, \\ \sigma \frac{\partial V}{\partial \sigma} = -\frac{\lambda^2 \Phi_c^4}{128\pi^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial \lambda} = \frac{1}{4!} \Phi_c^4 + \frac{\lambda \Phi_c^4}{128\pi^2} \left[\ln \frac{\Phi_c^2}{\sigma^2} - \frac{25}{6} \right].$$

Використовуючи ці похідні в рівнянні (12.12.7) і покладаючи $\Phi_c = \sigma$, отримуємо рівняння для β - і γ -функцій:

$$\beta(\lambda) \left(1 - \frac{25\lambda}{32\pi^2}\right) - \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} - 4\gamma(\lambda) \left(\lambda - \frac{11\lambda^2}{32\pi^2}\right) = 0. \quad (12.12.9)$$

Ще одне рівняння для цих функцій отримуємо з (12.12.8). Для похідних від Z маємо

$$\sigma \frac{\partial Z}{\partial \sigma} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial \Phi_c} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial \lambda} = \frac{1}{96\pi^2},$$

і з (12.12.8) знаходимо

$$\beta(\lambda) \cdot \frac{1}{96\pi^2} - 2\gamma \left(1 + \frac{\lambda}{96\pi^2}\right) = 0. \quad (12.12.10)$$

Із системи рівнянь (12.12.9), (12.12.10) отримуємо

$$\beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2} + O(\lambda^3), \quad \gamma(\lambda) = \frac{\lambda^2}{4(4\pi)^2} + O(\lambda^3), \quad (12.12.11)$$

де ми залишили тільки доданки порядку λ^2 у відповідності до наближення, в якому обчислювалась ефективна дія. Звернемо увагу, що тоді як вираз для бета-функції в порядку λ^2 збігається з раніше одержаним у схемі MS (10.3.11), вираз для гамма-функції, отриманий у регуляризації за допомогою дзета-функції, трохи відрізняється від (10.3.12) у схемі MS. Тобто аномальна розмірність поля є схемозалежною.

Використовуючи аргументи розмірності, запишемо $V(\Phi_c, \lambda, \sigma) = \Phi_c^4 \times v(\Phi_c/\sigma, \lambda)$, де $v(\Phi_c/\sigma, \lambda)$ — безрозмірна функція. Тоді (12.12.7) перепишеться

$$\left(\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - 4\gamma(\lambda) - \gamma(\lambda) \Phi_c \frac{\partial}{\partial \Phi_c}\right) v(\Phi_c/\sigma, \lambda) = 0. \quad (12.12.12)$$

Зважаючи на те, що $\sigma \partial v / \partial \sigma = -\Phi_c \partial v / \partial \Phi_c$, останнє рівняння представимо у вигляді

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \bar{\beta}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + 4\bar{\gamma}(\lambda)\right) v(t, \lambda) = 0, \quad (12.12.13)$$

де

$$t = \ln \frac{\Phi_c}{\sigma}, \quad \bar{\beta}(\lambda) = \frac{\beta(\lambda)}{1 + \gamma(\lambda)}, \quad \bar{\gamma}(\lambda) = \frac{\gamma(\lambda)}{1 + \gamma(\lambda)}. \quad (12.12.14)$$

Розглянемо функцію $\lambda(t, \lambda)$, яка задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda(t, \lambda) = \bar{\beta}(\lambda(t, \lambda)), \quad \lambda(0, \lambda) = \lambda.$$

Очевидно, ця функція задовольняє також рівнянню

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \bar{\beta}(\lambda)\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)\lambda(t, \lambda) = 0.$$

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння в частинних похідних (12.12.13) є таким:

$$v(t, \lambda) = f(\lambda(t, \lambda))e^{-4\int_0^t dt' \bar{\gamma}(\lambda(t', \lambda))}, \quad (12.12.15)$$

де $f(\lambda(t, \lambda))$ — довільна функція аргументу $\lambda(t, \lambda)$. Вона визначається умовою нормування, наприклад, покладаючи $t = 0$, знаходимо із (12.10.3)

$$f(\lambda) = v(0, \lambda) = \frac{1}{4!} \left(\lambda - \frac{25\lambda^2}{64\pi^2} \right). \quad (12.12.16)$$

Функції $\beta(\lambda)$ і $\gamma(\lambda)$ нам відомі тільки в теорії збурень за константою взаємодії λ , тому результат буде знаходитися в області застосування, якщо ефективна константа $\lambda(t, \lambda)$ залишається малою. Використовуючи ці функції, отримуємо

$$\lambda(t, \lambda) = \frac{\lambda}{1 - \frac{3\lambda t}{16\pi^2}}, \quad (12.12.17)$$

і розв'язок для потенціалу

$$V(\Phi_c) = \Phi_c^4 v(0, \lambda(t, \lambda))e^{-4\int_0^t dt' \bar{\gamma}(\lambda(t', \lambda))} \simeq \frac{\Phi_c^4}{4!} \left(\lambda(t, \lambda) - \frac{25}{64\pi^2} \lambda^2(t, \lambda) \right).$$

Експонента не дає внесок в однопетльовому наближенні. Зберігаючи тільки члени першого порядку за біжучою константою $\lambda(t, \lambda)$, маємо

$$V(\Phi_c) \simeq \frac{\lambda \Phi_c^4}{4!} \frac{1}{1 - \frac{3\lambda}{32\pi^2} \ln \frac{\Phi_c^2}{\sigma^2}}. \quad (12.12.18)$$

Неважко бачити, що розкладаючи дріб в ряд за параметром $\lambda \ln \frac{\Phi_c^2}{\sigma^2}$ і утримуючи перші два доданки ряду, отримуємо лідируючі доданки у виразі (12.10.3). Таким чином, рівняння ренормгрупи підсумовує лідируючі члени виду $\lambda^{n+1} \ln^n \frac{\Phi_c^2}{\sigma^2}$ нескінченного ряду за константою зв'язку λ .

12.13. Функціональна ренормалізаційна група

Ренормалізаційна група і квантова ефективна дія є природними структурами для вивчення систем із багатьма ступенями свободи. У даному параграфі ми розглянемо найбільш універсальний підхід до обчислення ефективної дії Γ , заснований на ідеї Вільсона не інтегрувати всі флуктуації

одночасно, як це закладено в рівнянні (12.9.4), а інтегрувати імпульсні моди полів шар за шаром, починаючи з ультрафіолетової області. Це зручно робити в евклідовому просторі, де рівняння (12.9.4) у випадку дійсного скалярного поля запишеться у вигляді

$$e^{-\Gamma(\Phi_c)} = \int_{\Lambda} \mathcal{D}\Phi \exp \left(-S(\Phi + \Phi_c) + \int d^4x \frac{\delta\Gamma(\Phi_c)}{\delta\Phi_c} \Phi \right). \quad (12.13.1)$$

Тут Λ — параметр регуляризації (нормуючий множник опускаємо). Його наявність тісно пов'язана з визначенням міри інтегрування в функціональному інтегралі. Дійсно, поле має нескінченну кількість ступенів свободи, і інтегрування за таким нескінченним набором змінних є нетривіальною проблемою.

У теорії збурень труднощі з визначенням міри проявляються як ультрафіолетові розбіжності, які виникають у петльових інтегралах, коли імпульси внутрішніх ліній стають великими. Щоб надати сенс мірі інтегрування, необхідно ввести певну процедуру регуляризації ультрафіолетових мод, що в теорії збурень еквівалентно регуляризації нескінченностей у петльових діаграмах. Будь-який спосіб регуляризації неминуче вводить новий енергетичний масштаб Λ — ультрафіолетове обрізання (cut-off) — в теорію. Існує багато способів введення таких регуляторів в КТП. Наприклад, можна визначити теорію на просторовій ґратці (після повороту Віка до евклідового простору). У цьому випадку Λ^{-1} є постійною ґратки. В теорії збурень можна аналітично продовжити розмірність простору-часу, процедура відома як розмірна регуляризація. Можна також зменшити амплітуду мод з великими імпульсами або зовсім занулити їх, змінивши дію чи міру — спосіб, який ми і будемо використовувати.

Рівняння (12.13.1) визначає ефективну дію, коли у функціональному інтегралі проінтегровано за всіма модами $\Phi(p)$ з імпульсами $p < \Lambda$. Натомість будемо шукати інтерполюючу дію Γ_k , яка також називається ефективною усередненою дією, з параметром імпульсного шару k , таку, що Γ_k відповідає затравочній дії, коли $k \rightarrow \Lambda$, і є повною квантовою дією Γ , коли $k \rightarrow 0$,

$$\Gamma_{k \rightarrow \Lambda} \simeq S, \quad \Gamma_{k \rightarrow 0} = \Gamma. \quad (12.13.2)$$

Визначимо спочатку інфрачервоно регуляризований функціонал

$$Z_k(J) = e^{W_k(J)} = \int_{\Lambda} \mathcal{D}\Phi e^{-S(\Phi) - \Delta S_k(\Phi) + \int d^4x J\Phi}, \quad (12.13.3)$$

де ми ввели в дію квадратичний за полем доданок

$$\Delta S_k(\Phi) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Phi(-p) R_k(p) \Phi(p), \quad (12.13.4)$$

який має форму масового доданка з масою, залежною від імпульсу. Форма регуляризуючої функції $R_k(p)$ є довільною, але повинна задовольняти трьом умовам. По-перше,

$$\lim_{p^2/k^2 \rightarrow 0} R_k(p) > 0, \quad (12.13.5)$$

це гарантує, що ефективний пропагатор залишається скінченним в інфрачервоній границі $p^2 \rightarrow 0$ і немає інфрачервоних розбіжностей при наявності безмасових мод. Якщо границя в (12.13.5) скінченна, то відповідний інфрачервоний регулятор можна назвати масоподібним. По-друге,

$$\lim_{k^2/p^2 \rightarrow 0} R_k(p) = 0, \quad (12.13.6)$$

з чого випливає, з одного боку, що регулятор дорівнює нулю при $k \rightarrow 0$, а з іншого, що внесок в регулятор великих імпульсів $p \gg k$ суттєво подавлений. Як наслідок, ми автоматично відновлюємо стандартний генеруючий функціонал, а також повну ефективну дію в границі $k \rightarrow 0$: $Z_{k=0}(J) = Z(J)$, $\Gamma_{k=0} = \Gamma$, тобто повна теорія є кінцевою точкою потоку. Нарешті ще одна умова буде

$$\lim_{k \sim \Lambda \rightarrow \infty} R_k(p) \rightarrow \infty. \quad (12.13.7)$$

Ця умова означає, що у функціональному інтегралі домінує стаціонарна точка дії $S(\Phi)$ в цій границі, що виправдовує використання наближення сідлової точки при обчисленні інтеграла. Фактично це виділяє конфігурацію класичного поля, для якої $\Gamma_{k \rightarrow \Lambda}(\Phi_c) \approx S(\Phi_c)$. Функцію $R_k(p)$ часто записують у вигляді $R_k(p) = p^2 r(p^2/k^2)$, де $r(p^2/k^2)$ — безрозмірна функція безрозмірного аргументу. Всі перелічені умови для $R_k(p)$ очевидним чином переносяться на $r(p^2/k^2)$. Наведемо деякі типові регулятори, які часто використовуються в літературі:

$$R_k(p) = ap^2 \frac{e^{-b(p^2/k^2)^\beta}}{1 - e^{-b(p^2/k^2)^\beta}}, \quad a, b > 0, \quad \beta \geq 1 \text{ (експоненційний)}, \quad (12.13.8)$$

$$R_k(p) = p^2 \left(\frac{k^2}{p^2} \right)^b, \quad b > 1 \text{ (степеневий)}, \quad (12.13.9)$$

$$R_k(p) = (k^2 - p^2)\theta(k^2 - p^2) \text{ (сходінкоподібний)}. \quad (12.13.10)$$

Щоб зрозуміти роль масштабу k в Γ_k , зазначимо, що доданок ΔS_k при обчисленні W_k (12.13.3) подавляє флуктуації з імпульсами, нижчими k . Так само при обчисленні Γ_k імпульси інтегрування фактично обрізаються для $p^2 < k^2$ так, що лише флуктуації з імпульсами $p^2 > k^2$, де $R_k(p) \approx 0$, дають внесок у відповідний функціональний інтеграл. Таким чином, Γ_k — ефективна дія, де імпульси $k^2 < p^2 < \Lambda^2$ були проінтегровані.

Оскільки інтерполюючий функціонал Γ_k має правильні границі при $k \rightarrow 0$ і $k \rightarrow \Lambda$, то вивчимо тепер проміжну траєкторію цієї дії з $0 < k < \Lambda$. Введемо позначення $t = \ln(k/\Lambda)$ і обчислимо похідну

$$\begin{aligned} \partial_t W_k(J) &= -\frac{e^{-W_k}}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \mathcal{D}\Phi \Phi(-p) \partial_t R_k(p) \Phi(p) e^{-S - \Delta S_k + \int d^4 x J \Phi} = \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \partial_t R_k(p) G_k(-p, p) - \partial_t \Delta S_k(\Phi_{ck}), \end{aligned} \quad (12.13.11)$$

де $G_k(p, q)$ — залежний від k зв'язний пропагатор, визначений через похідні від $W_k(J)$:

$$G_k(p, q) = \frac{W_k(J)}{\delta J(p) \delta J(q)} = \langle \Phi(p) \Phi(q) \rangle - \langle \Phi(p) \rangle \langle \Phi(q) \rangle, \quad (12.13.12)$$

а вакуумне середнє поля $\Phi(x)$ визначається стандартним чином

$$\frac{\delta W_k(J)}{\delta J(x)} = \langle \Phi(x) \rangle_J = \Phi_{ck}(x). \quad (12.13.13)$$

Зауважимо, що доданок $\partial_t \Delta S_k(\Phi_{ck})$ в (12.13.11) виникає за рахунок останнього доданка в (12.13.12). Перетворення Лежандра дещо модифікуємо

$$\Gamma_k(\Phi_c) = \int d^4 x J(x) \Phi_c(x) - W_k(J) - \Delta S_k(\Phi_c). \quad (12.13.14)$$

З рівняння (12.13.13) знаходимо джерело як функціонал від Φ_{ck} : $J_k(x) = J(x, \Phi_{ck})$. В подальшому ми фіксуємо змінні Φ_{ck} (а отже, і J_k) і опускаємо індекс k у Φ_{ck} та J_k . Диференціюючи рівність (12.13.14), отримуємо квантові рівняння руху

$$J(x) = \frac{\delta \Gamma_k(\Phi_c)}{\delta \Phi_c(x)} + (R_k \Phi_c)(x). \quad (12.13.15)$$

Також

$$\frac{\delta J(x)}{\delta \Phi_c(y)} = \frac{\delta^2 \Gamma_k(\Phi_c)}{\delta \Phi_c(x) \delta \Phi_c(y)} + R_k(x, y), \quad (12.13.16)$$

де

$$R_k(x, y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} R_k(p) = R_k(i\partial_x) \delta(x-y), \quad (12.13.17)$$

а з (12.13.13) маємо

$$\frac{\delta \Phi_c(y)}{\delta J(z)} = \frac{\delta^2 W(J)}{\delta J(z) \delta J(y)} = G_k(y, z). \quad (12.13.18)$$

За правилом ланцюгового диференціювання отримуємо важливу тотожність

$$\delta(x-z) = \frac{\delta J(x)}{\delta J(z)} = \int d^4 y \frac{\delta J(x)}{\delta \Phi_c(y)} \frac{\delta \Phi_c(y)}{\delta J(z)} = \int d^4 y [\Gamma_k^{(2)} + R_k](x, y) G_k(y, z), \quad (12.13.19)$$

де ОЧН функції визначаються стандартним чином

$$\Gamma_k^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n \Gamma_k(\Phi_c)}{\delta \Phi_c(x_1) \dots \delta \Phi_c(x_n)}.$$

В операторній формі

$$1 = (\Gamma_k^{(2)} + R_k)G_k. \tag{12.13.20}$$

Очевидно, при $k = 0$ ця тотожність еквівалентна (12.6.15) (в евклідовому просторі).

Продиференціюємо рівність (12.13.14) при фіксованих Φ_c і J , тобто знаходимо частинну похідну, і далі використовуємо (12.13.11) і (12.13.20),

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k(\Phi_c) &= -\partial_t W_k(J) - \partial_t \Delta S(\Phi_c) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \partial_t R_k(p) G_k(-p, p) = \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\partial_t R_k \left(\Gamma_k^{(2)} + R_k \right)^{-1} \right], \end{aligned} \tag{12.13.21}$$

де Tr означає інтегрування по всіх імпульсах (і підсумовування по всіх індексах для багатокomпонентних полів). Беручи послідовні функціональні похідні по Φ_c в рівнянні (12.13.21), одержуємо нескінченну ієрархію рівнянь для одночастинково-незвідних функцій $\Gamma_k^{(n)}$. Графічне зображення ренормгрупових рівнянь для ефективної дії Γ_k і вершин $\Gamma_k^{(1)}$, $\Gamma_k^{(2)}$ наведено на рис. 76 (знаки та симетрійні коефіцієнти не показані). Суцільна лінія позначає пропагатор $G_k = (\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1}$, хрестик — $\partial_t R_k$, і жирна точка з n лініями, що виходять — $\Gamma_k^{(n)}$ ($n = 0, 1, 2$).

Отримане рівняння, яке називається рівнянням Ветеріха [198], є нелінійним функціонально-диференціальним рівнянням для нескінченного числа змінних t , $\Phi_c(x)$, і виражає k -залежність (або потік) ефективної дії Γ_k в термінах точного пропагатора, або другої функціональної похідної Γ_k відносно поля Φ_c . На відміну від рівняння (12.13.1), для знаходження повної ефективної дії не потрібно обчислювати функціональний інтеграл, але ціна, яку потрібно заплатити, є використання повного пропагатора. Для заданих початкових умов, наприклад задаючи голу дію на УФ-масштабі обрізання $k = \Lambda$, рівняння

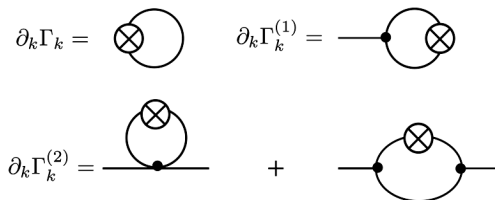


Рис. 76. Графічне зображення РГ рівнянь для ефективної дії і вершин $\Gamma_k^{(1)}$ і $\Gamma_k^{(2)}$

потіку визначає траєкторію до повної квантової теорії, яка описується ефективною дією $\Gamma_{k=0}$. Фактично ренормгруповий потік (12.13.21) має місце у просторі теорій, де координатами є різні оператори Φ_c^2 , $(\partial \Phi_c)^2$ і т.п. Вираз функціональна ренормгрупа очевидно

випливає з того факту, що тут ми маємо справу з функціями поля, а не зі скінченною кількістю констант зв'язку як в стандартній ренормгрупі.

Обговоримо роль регулятора $R_k(p^2)$, який з'являється в (12.13.21) в двох місцях. У знаменнику R_k гарантує регуляризацію в інфрачервоній області, як і закладалося з самого початку. Похідна $\partial_t R_k$ в чисельнику рівняння (12.13.21) за рахунок умови (12.13.6) забезпечує регуляризацію в ультрафіолетовій області, оскільки інтегрування за імпульсами швидко збігається для $p^2 \gg k^2$ і у підсумку лише невеликий інтервал імпульсів дає ефективний внесок, оскільки похідна переважно зосереджена в малій комірці імпульсів поблизу $p^2 \simeq k^2$. Точна форма траєкторії Γ_k залежить від форми регулятора R_k , але кінцева точка $\Gamma_{k=0}$ на траєкторії не залежить від форми R_k , і це гарантується рівняннями (12.13.5)–(12.13.7). (Залежність траєкторії від регулятора R_k подібна до залежності від схеми перенормування в пертурбативній ренормгрупі.)

Раніше отримані результати для ефективної дії легко можуть бути знайдені також за допомогою рівняння (12.13.21). Наприклад, у нижчому (однопетльовому) порядку розкладу за постійною Планка \hbar маємо $\Gamma_k = S + \hbar\Gamma^{(1)} + O(\hbar^2)$, і в цьому порядку можна замінити $\Gamma_k^{(2)}$ в правій стороні рівняння (12.13.21) на $S^{(2)}$. Тоді отримуємо

$$\partial_t \Gamma_k(\Phi_c) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\partial_t R_k \left(S^{(2)} + R_k \right)^{-1} \right] = \frac{1}{2} \partial_t \text{Tr} \ln \left[S^{(2)} + R_k \right], \quad (12.13.22)$$

що дає в однопетльовому наближенні

$$\Gamma_{k=0} = S + \frac{\hbar}{2} \text{Tr} \ln S^{(2)} + \text{const}. \quad (12.13.23)$$

Це збігається з результатами обчислення ефективної дії у даному порядку в розділі 12.9.

Важливою перевагою рівняння потоку є його універсальність: крім теорії збурень, можна застосовувати різні систематичні апроксимаційні схеми, які дозволяють отримувати результати поза рамками теорії збурень. Наприклад, можна шукати ефективну дію у формі розкладу за степенями похідних, для теорії з одним дійсним скалярним полем цей анзац приймає вигляд (порівняйте з (12.6.27) у просторі Мінковського)

$$\Gamma_k(\Phi_c) = \int d^4x \left[V_k(\Phi_c) + \frac{1}{2} Z_k(\Phi_c) (\partial_\mu(\Phi_c))^2 + O(\partial^4) \right]. \quad (12.13.24)$$

Для реального обчислення потрібно обірвати розклад за похідними в деякому порядку, і якщо тільки вибрано максимальний степінь похідних, то всі члени до цього порядку будуть присутні в рівнянні потоку. Як і для

будь-якого розкладу, властивості збіжності повинні бути перевірені окремо, щоб оцінити похибку обриву розкладу. Зазвичай при виборі тієї чи іншої схеми обриву ми маємо керуватися фізикою даної задачі, стежачи за тим, щоб вона включала найважливіші ступені свободи.

Щоб отримати рівняння для ефективного потенціалу, достатньо обмежитися в (12.13.24) першими двома доданками і покласти $Z_k = 1$. Тоді маємо

$$\partial_t V_k(\Phi_c) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\partial_t R_k(p)}{p^2 + V_k''(\Phi_c) + R_k(p)}. \quad (12.13.25)$$

При обчисленні ефективного потенціалу поле $\Phi_c(x)$ розглядаємо як постійне, і при використанні регулятора (12.13.10) рівняння приймає вигляд

$$\partial_t V_k(\Phi_c) = \frac{1}{32\pi^2} \frac{k^6}{k^2 + V_k''(\Phi_c)}. \quad (12.13.26)$$

Подальший розв'язок для потенціалу можна шукати у вигляді ряду Тейлора по парним степеням поля (зберігаючи симетрію $\Phi_c \rightarrow -\Phi_c$)

$$V_k(\Phi_c) = \sum_{i=1}^N \frac{g_i(k)}{(2i)!} \Phi_c^{2i}, \quad (12.13.27)$$

і для констант g_i отримуємо систему рівнянь, подібну до звичайних ренормгрупових рівнянь

$$k \frac{dg_i(k)}{dk} = \beta_i(g_j(k), k). \quad (12.13.28)$$

При зміні енергетичного масштабу k , змінюються всі константи зв'язку, таким чином, точка в просторі констант зв'язку, що визначає теорію, описує лінію потоку, і кожна лінія визначає свою теорію. Підкреслимо, що всі точки на лінії потоку належать до однієї теорії, але визначаються різними енергетичними масштабами.

Відзначимо ще одну унікальну особливість рівняння потоку — на відміну від функціонального інтеграла для Γ_k рівняння не залежить від мікроскопічної дії S , яке входить тільки в граничну умову. Це дозволяє шукати узгоджену мікроскопічну динаміку за допомогою пошуку фіксованої точки цього рівняння.

Функціональна ренормалізаційна група (інша назва — точна ренормалізаційна група завдяки замкнутій функціональній формі) знаходить багато застосувань не лише в квантовій теорії полі, а й у в статистичній фізиці, фізиці конденсованих середовищ, квантовій гравітації та ін. З одного боку, у фізиці багатьох тіл вона дозволяє визначити низькоенергетичні властивості таких систем на великих відстанях, дослідити фазові перетворення, а з іншого боку, в квантовій теорії полі і квантовій гравітації шукати

життєздатне розширення Стандартної моделі без розбіжностей в ультрафіолетовій області. Еволюційне рівняння для ефективної дії пов'язує опис фізики на різних масштабах, зокрема макроскопічні фізичні властивості систем із мікроскопічними взаємодіями та ступенями вільності.

Сучасна теорія ренормалізаційної групи з'ясувала також, чому фундаментальні взаємодії описується перенормовними теоріями в низькоенергетичній області. Немає апіорних причин відкидати неперенормовні взаємодії в теоріях елементарних частинок. Принаймні в пертурбативному режимі можна довести, що будь-які потоки, що починаються з можливих початкових умов в ультрафіолетовій області, включаючи неперенормовні взаємодії, будуть сходитися до низьковимірному підпростору в загальному просторі теорій, що описується перенормовними взаємодіями. Іншими словами, в інфрачервоній області всі теоретичні передбачення будь-яких мікротеорій з великим ультрафіолетовим обрізанням еквівалентні теоріям, що мають лише перенормовні взаємодії.

Огляд методів знаходження розв'язків еволюційного рівняння функціональної ренормгрупи та їх застосувань можна знайти в [34, 46, 71, 91, 198].

12.14. Ефективна дія для складених полів

Досі ми розглядали переважно спонтанне порушення симетрії, яке реалізується за рахунок нетривіального вакуумного середнього скалярного поля. Але є багато випадків коли основну роль при спонтанному порушенні симетрії відіграють конденсати складених полів, наприклад, в теорії надпровідності ми маємо конденсати електронних пар (куперівські пари). Як ми вже бачили у випадку моделі НЙЛ (розділ 12.4), безмасові ферміони у відсутності взаємодії зі скалярними полями не можуть набути маси за теорією збурень, якщо кіральна симетрія не порушена. Така сама ситуація і з генерацією мас кварків у квантовій хромодинаміці, де відсутні скалярні поля. Дійсно, при кіральних перетвореннях з постійною фазою оператори ферміонних полів перетворюються як

$$\psi(x) \rightarrow U\psi(x)U^{-1} = e^{i\gamma_5\theta}\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow U\bar{\psi}(x)U^{-1} = \bar{\psi}(x)e^{i\gamma_5\theta}, \quad (12.14.1)$$

де $U = e^{i\theta Q_5}$, а Q_5 є оператором кірального заряду. Відповідно, для ферміонного пропагатора маємо такий ланцюжок перетворень

$$\begin{aligned} G(x-y) &= \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle = \langle 0|U^{-1}UT\psi(x)U^{-1}U\bar{\psi}(y)U^{-1}U|0\rangle = \\ &= \langle 0|UT\psi(x)U^{-1}U\bar{\psi}(y)U^{-1}|0\rangle = e^{i\gamma_5\theta}\langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle e^{i\gamma_5\theta} = \\ &= e^{i\gamma_5\theta}G(x-y)e^{i\gamma_5\theta}, \end{aligned} \quad (12.14.2)$$

де крім (12.14.1) ми використали умову інваріантності вакууму $U|0\rangle = |0\rangle$, $Q_5|0\rangle = 0$. Очевидно, в імпульсному просторі остання рівність набуває вигляд

$$G(p) = e^{i\gamma_5\theta} G(p) e^{i\gamma_5\theta} \quad \text{або} \quad G^{-1}(p) = e^{-i\gamma_5\theta} G^{-1}(p) e^{-i\gamma_5\theta}. \quad (12.14.3)$$

Далі, підставляючи загальну форму пропагатора $G^{-1}(p) = -i[\hat{p}A(p^2) - B(p^2)]$ в рівність (12.14.3), отримуємо, що масова функція $B(p^2) \equiv 0$. Таким чином, якщо кіральна симетрія не порушена, тоді безмасові ферміони не отримують масу. Вихід з цієї ситуації — спонтанне порушення симетрії, коли вакуумний стан не є інваріантним, $U|0\rangle \neq |0\rangle$. Тоді, якщо знаходимо нетривіальний розв'язок рівняння ШД для масової функції $B(p^2)$, то маємо спонтанне порушення симетрії з неінваріантним вакуумом. Очевидно, для вивчення такого спонтанного порушення симетрії важливо мати загальний формалізм для виведення рівнянь для пропагаторів (та інших функцій Гріна) на непертурбативному вакуумі.

Такий формалізм, відомий як ефективна дія для складених операторів, вперше був розроблений у фізиці конденсованого середовища [40, 41, 146]. Зручний підхід для виведення функціонала ефективної дії складених операторів у релятивістській теорії поля був розроблений у роботах [64, 191, 192] на основі функціонального інтеграла, якого ми дотримуємось надалі.

У цьому розділі ми розглянемо виведення ефективної дії Γ у квантовій електродинаміці, яка є функціоналом вакуумних середніх складених операторів $TA_\mu(x)A_\nu(y)$ і $T\psi(x)\bar{\psi}(y)$, тобто $\Gamma(D, G)$ є функціоналом повних функцій Гріна $D_{\mu\nu}(x, y) = \langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle$ і $G(x, y) = \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle$. Умови стаціонарності

$$\frac{\delta\Gamma(D, G)}{\delta G(x, y)} = 0, \quad \frac{\delta\Gamma(D, G)}{\delta D(x, y)} = 0, \quad (12.14.4)$$

приводять до рівнянь Швінгера—Дайсона для величин $D(x, y)$ і $G(x, y)$, які на істинному вакуумі стають трансляційно-інваріантними пропагаторами фотона і електрона.

Визначимо генеруючий функціонал для функцій Гріна складених полів таким чином

$$Z(K, I) = e^{iW(K, I)} = N \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{i[S(A, \psi, \bar{\psi}) + \bar{\psi}K\psi + \frac{1}{2}AIA]}, \quad (12.14.5)$$

де K і I — джерела для складених полів (джерела для полів $A, \psi, \bar{\psi}$ не вводимо). Для скорочення запису будемо використовувати конденсовані позначення, де підсумовування за дискретними індексами та інтегрування за неперервними змінними будемо мати на увазі, наприклад,

$$\bar{\psi}K\psi = \int d^4x d^4y \bar{\psi}_\alpha(x) K_{\alpha\beta}(x, y) \psi_\beta(y), \quad AIA = \int d^4x d^4y A_\mu(x) I^{\mu\nu}(x, y) A_\nu(y).$$

У цих позначеннях

$$S(A, \psi, \bar{\psi}) = \frac{1}{2} A i D_0^{-1} A + \bar{\psi} \left(i G_0^{-1} - e \hat{A} \right) \psi, \quad \hat{A} = \gamma^\mu A_\mu, \quad (12.14.6)$$

$$\begin{aligned} i D_{0\mu\nu}^{-1}(x-y) &= \left(g_{\mu\nu} \square - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial_\mu \partial_\nu \right)_x \delta(x-y) \rightarrow \\ &\rightarrow D_{0\mu\nu}(k) = \frac{1}{i k^2} \left(g_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \end{aligned} \quad (12.14.7)$$

$$i G_0^{-1}(x-y) = (i \gamma^\mu \partial_\mu - m_0)_x \delta(x-y) \rightarrow G_0(p) = \frac{i}{\hat{p} - m_0}, \quad (12.14.8)$$

де D_0, G_0 — вільні пропагатори фотонних і електронних полів. Для похідних $W(K, I)$ за джерелами маємо

$$\frac{\delta W(K, I)}{\delta I^{\mu\nu}(x, y)} = \frac{1}{2} \langle T A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle = \frac{1}{2} D_{\mu\nu}(x, y), \quad (12.14.9)$$

$$\frac{\delta W(K, I)}{\delta K(y, x)} = \langle T \bar{\psi}(y) \psi(x) \rangle = -G(x, y). \quad (12.14.10)$$

Ці співвідношення дозволяють виразити неявним чином джерела I, K як функціонали D, G . Далі визначимо перетворення Лежандра

$$\Gamma(D, G) = W(K, I) - \frac{1}{2} \text{Tr}(DI) + \text{Tr}(GK), \quad (12.14.11)$$

звідки маємо

$$\frac{\delta \Gamma(D, G)}{\delta D^{\mu\nu}(x, y)} = -\frac{1}{2} I_{\mu\nu}, \quad \frac{\delta \Gamma(D, G)}{\delta G_{\alpha\beta}(x, y)} = K_{\beta\alpha}(y, x).$$

Для $\Gamma(D, G)$ отримуємо, замінюючи джерела на відповідні похідні від Γ ,

$$\Gamma(D, G) = \text{Tr} \left(D \frac{\delta \Gamma}{\delta D} \right) + \text{Tr} \left(G \frac{\delta \Gamma}{\delta G} \right) - i \ln \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{iS(D, G, A, \psi, \bar{\psi})}, \quad (12.14.12)$$

де введено позначення

$$S(D, G, A, \psi, \bar{\psi}) = \frac{1}{2} A \left(i D_0^{-1} - 2 \frac{\delta \Gamma}{\delta D} \right) A + \bar{\psi} \left(i G_0^{-1} - e \hat{A} + \frac{\delta \Gamma}{\delta G} \right) \psi.$$

Зручно визначити величину Γ_2 ,

$$\Gamma(D, G) = \frac{i}{2} \text{Tr} [\ln D^{-1} + D_0^{-1} D - 1] - i \text{Tr} [\ln G^{-1} + G_0^{-1} G - 1] + \Gamma_2(D, G), \quad (12.14.13)$$

для якої з (12.14.12) маємо рівняння

$$\Gamma_2(D, G) = \text{Tr} \left(D \frac{\delta \Gamma_2}{\delta D} \right) + \text{Tr} \left(G \frac{\delta \Gamma_2}{\delta G} \right) -$$

$$- i \ln \left[\frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp i \left\{ \frac{1}{2} A \left(i D^{-1} - 2 \frac{\delta \Gamma_2}{\delta D} \right) A + \bar{\psi} \left(i G^{-1} - e \hat{A} + \frac{\delta \Gamma_2}{\delta G} \right) \psi \right\}}{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp i \left\{ \frac{1}{2} A i D^{-1} A + \bar{\psi} i G^{-1} \psi \right\}} \right]. \quad (12.14.14)$$

З рівнянь (12.14.4), (12.14.13) отримуємо рівняння для пропагаторів

$$D^{-1} = D_0^{-1} + i\Pi, \quad \Pi = -2i \frac{\delta \Gamma_2}{\delta D}, \quad (12.14.15)$$

$$G^{-1} = G_0^{-1} + i\Sigma, \quad \Sigma = -i \frac{\delta \Gamma_2}{\delta G}, \quad (12.14.16)$$

які є не що інше як рівняння Швінгера–Дайсона. Отже, Π і Σ повинні інтерпретуватися як власні енергії, які з точки зору діаграм є одночастинково-незвідними відносно пропагаторів. Оскільки Π і Σ задані як похідні по D і G від Γ_2 , то Γ_2 має бути двочастинково-незвідним (2ЧН) по відношенню до пропагаторів D і G . Дійсно, якщо Γ_2 має двочастинково-звідні діаграми вигляду $\tilde{\Gamma} D D \tilde{\Gamma}$ або $\tilde{\Gamma} G G \tilde{\Gamma}$, де дві частини діаграми з'єднані двома пропагаторами, тоді Π , Σ мали б внесок типу $\tilde{\Gamma} D \tilde{\Gamma}$ або $\tilde{\Gamma} G \tilde{\Gamma}$, але такі структури не належать до Π і Σ . Відсутність двочастинково-звідних внесків у Γ_2 є наслідком того, що пропагатори D і G не мають радіаційних поправок і є точними.

Розкладаючи рівняння (12.14.14) за константою взаємодії (розглядаючи також похідні $\delta \Gamma_2 / \delta D$ та $\delta \Gamma_2 / \delta G$ як члени взаємодії), отримуємо розклад за числом петель

$$\Gamma_2(D, G) = \sum_{k \geq 1} e^{2k} \Gamma^{(k)}(D, G), \quad (12.14.17)$$

де доданки в сумі задаються двочастинково-незвідними вакуумними діаграмами, тобто маємо розклад в термінах 2ЧН скелетних вакуумних діаграм з одягнутими пропагаторами і голими вершинами. В цьому контексті скелетні діаграми не мають власноенергетичних вставок. Конкретний вибір для функціонала дії отримується обривом цього діаграмного ряду. Так, у найнижчому порядку маємо

$$\Gamma_2(D, G) = -\frac{ie^2}{2} \text{Tr} (G \gamma G \gamma D). \quad (12.14.18)$$

Графічно це відповідає вакуумній діаграмі на рис. 22 з симетрійним коефіцієнтом $1/2$, де пропагатори електронів і фотонів є точними, а вершини

голими. Таким чином, у двопетльовому наближенні ми маємо для Γ вираз:

$$\begin{aligned} \Gamma(D, G) &= \frac{i}{2} \text{Tr} [\ln D^{-1} + D_0^{-1} D - 1] - \\ &- i \text{Tr} [\ln G^{-1} + G_0^{-1} G - 1] - \frac{ie^2}{2} \text{Tr} (G\gamma G\gamma D). \end{aligned} \quad (12.14.19)$$

Рівняння Швінгера—Дайсона, які впливають із двопетльового наближення (а також з будь-якого обриву ряду в (12.14.18)), дають замкнену систему інтегральних рівнянь для пропагаторів D і G . Ще більш просте наближення отримується, якщо в (12.14.5) обмежитися тільки джерелом K ($I = 0$), тоді Γ є функціоналом тільки від G ,

$$\Gamma(G) = -i \text{Tr} [\ln G^{-1} + G_0^{-1} G - 1] - \frac{ie^2}{2} \text{Tr} (G\gamma G\gamma D_0). \quad (12.14.20)$$

З умови екстремуму $\delta\Gamma/\delta G = 0$ отримуємо нелінійне самоузгоджене рівняння для ферміонного пропагатора

$$G^{-1}(x, y) = G_0^{-1}(x - y) + e^2 \gamma^\mu G(x, y) \gamma^\nu D_{0\mu\nu}(x - y) \quad (12.14.21)$$

у так званому «веселковому» наближенні, де при розв'язанні рівняння методом ітерацій виникають діаграми стандартної теорії збурень, схожі на веселку. Обернений ферміонний пропагатор G_0^{-1} визначений в (12.14.8). На трансляційно-інваріантному вакуумі маємо $G(x, y) = G(x - y)$ і тоді ефективна дія визначає ефективний потенціал $\Gamma(G) = -V(G) \int d^4x$. Якщо відомий розв'язок рівняння (12.14.21), то густина енергії вакууму для цього розв'язку виражається формулою

$$V(G) = i \text{Tr} \left[\ln G^{-1} + \frac{1}{2} (G_0^{-1} G - 1) \right], \quad (12.14.22)$$

яка впливає з (12.14.20) і (12.14.21). В імпульсному просторі в калібровці Ландау рівняння (12.14.21) зводиться до такого рівняння (в евклідовій області) для масової функції $B(p^2)$:

$$B(p^2) = m_0 + \frac{3\alpha}{4\pi} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dk^2 k^2 B(k^2)}{k^2 + B^2(k^2)} \left(\frac{\theta(p^2 - k^2)}{p^2} + \frac{\theta(k^2 - p^2)}{k^2} \right), \quad (12.14.23)$$

де Λ — параметр обрізання на максимальному імпульсі, $\theta(x)$ — тета-функція Хевісайда. Це рівняння аналізувалося в багатьох роботах (див. [80, 150] і посилання там), зокрема, було показано, що при малій константі взаємодії α воно має єдиний розв'язок [148]. У випадку, коли гола маса відсутня, $m_0 = 0$, очевидно, рівняння має тривіальний розв'язок $B = 0$,

але є і нетривіальний розв'язок, який виникає, якщо константа взаємодії перевищує деяке критичне значення, $\alpha > \alpha_c$. Позначаючи динамічно згенерований масовий параметр $m = B(0)$, поблизу критичного значення для цього параметра, $\alpha \gtrsim \alpha_c$, було отримано вираз

$$m = c_1 \Lambda \exp\left(-\frac{c_2}{\sqrt{\alpha/\alpha_c - 1}}\right), \quad \alpha_c = \frac{\pi}{3} \sim 1, \quad c_1 = 4, \quad c_2 = \pi. \quad (12.14.24)$$

Динамічна маса (12.14.24) містить у собі як характерні особливості щільни в теорії надпровідності (неаналітична залежність від константи взаємодії), так і динамічної маси в моделі Намбу—Йона-Лазініо (наявність критичної константи).

Як бачимо, динамічна маса m прямує до нескінченності зі зняттям обрізання, $\Lambda \rightarrow \infty$, що схоже на поведінку динамічної маси в класичній моделі Лоренца. Однак маса може залишатися скінченною, якщо константа взаємодії залежить від Λ спеціальним чином [79, 80],

$$\alpha(\Lambda) = \alpha_c \left(1 + \frac{c_2^2}{\ln^2(\mu/c_1\Lambda)}\right), \quad \Lambda \rightarrow \infty, \quad (12.14.25)$$

де μ — деякий параметр розмірності маси. Критична константа α_c може розглядатися як непертурбативна фіксована точка Гелл-Манна—Лоу [79] з бета-функцією [143]

$$\beta(\alpha) = \Lambda \frac{\partial \alpha}{\partial \Lambda} = -\frac{2\alpha_c c_2^2}{\ln^3(\mu/c_1\Lambda)} = -\frac{2\alpha_c}{c_2} (\alpha/\alpha_c - 1)^{3/2}. \quad (12.14.26)$$

Наближення (12.14.20) для ефективної дії можна покращити, включивши всі двочастинково-незвідні діаграми з фотонними лініями, але без вставок ферміонних петель («заморожені» (quenched) ферміони [119]). Форма розв'язку (12.14.24) при цьому зберігається, тільки змінюються значення констант α_c, c_1, c_2 .

Як ми знаємо, в КЕД ефективний заряд зростає зі збільшенням енергії та переданого імпульсу, і на малих відстанях він міг би перевищити значення критичної константи α_c та привести до переходу в нову фазу квантової електродинаміки. Розрахунки функціонального інтеграла на ґратці [133–135] також свідчать про можливість переходу в фазу КЕД зі спонтанним порушенням кіральної симетрії. Існування такої фази обговорювалося з точки зору інтерпретації деяких експериментальних даних [153]. Зауважимо, що ефективна дія $\Gamma(D, G)$ може буде узагальнена так, щоб включити також залежність від повних вершин Γ^μ , що дає розклад по скелетним діаграмам типу представлених на рис. 53.

На останок зазначимо, що 2ЧН квантова ефективна дія застосовується не тільки для дослідження динамічного порушення симетрій. Вона успішно використовується для обчислення термодинамічних величин, властивостей кварк-глюонної плазми, нерівноважних процесів у зовнішніх полях, залежних від часу та квантових процесів у ранньому Всесвіті [47, 56, 58].

ЗАДАЧІ

1. Знайти загальні формули для кореляторів у теорії скалярного поля Φ_n (взаємодія з джерелом $\int d^4x J_n(x)\Phi_n(x)$)

$$\frac{\delta^3 W(J)}{\delta J_n(x)\delta J_m(y)\delta J_l(z)} \quad \text{і} \quad \frac{\delta^4 W(J)}{\delta J_n(x)\delta J_m(y)\delta J_l(z)\delta J_k(w)}$$

за допомогою варіаційних похідних функціонала $\Gamma[\phi_n]$ по ϕ_n . Показати, які фейнманівські діаграми відповідають кожному доданку в цих формулах.

2. Припустимо, що глобальна симетрія $SO(3)$ спонтанно порушена до підгрупи $SO(2)$ з генератором t_3 . Встановити, яким чином поля голдстоунівських бозонів перетворюються відносно нескінченно малих перетворень $SO(3)$.
3. В $(1+1)$ -вимірній моделі скалярного поля

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{\mu^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

з дискретною симетрією $\phi \rightarrow -\phi$ знайти стаціонарний розв'язок для основного стану системи у випадку, коли скалярне поле прямує на просторовій нескінченності до значень поля в різних мінімумах потенціалу, тобто $\phi \rightarrow -\sqrt{6\mu^2/\lambda}$ при $x \rightarrow -\infty$ та $\phi \rightarrow \sqrt{6\mu^2/\lambda}$ при $x \rightarrow +\infty$ (кінковий розв'язок).

4. Модель Гросса—Неве є двовимірною моделлю самовзаємодіючих ферміонів з лагранжевою густиною

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^j i\partial_\mu\gamma^\mu\psi^j + \frac{g^2}{2}(\bar{\psi}^j\psi^j)^2, \quad j = 1, \dots, N,$$

яка має дискретну кіральну симетрію $\psi^j \rightarrow \gamma_5\psi^j$. Показати, що функціональний інтеграл цієї теорії може бути представлений у формі

$$\int \mathcal{D}\psi e^{i\int d^2x\mathcal{L}} = \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\sigma \exp\left[i\int d^2x\left\{\bar{\psi}^j i\partial_\mu\gamma^\mu\psi^j - \sigma\bar{\psi}^j\psi^j - \frac{\sigma^2}{2g^2}\right\}\right],$$

де $\sigma(x)$ — допоміжне скалярне поле. Знайти ефективний потенціал для σ , проінтегрувавши по ψ^j , і показати, що в мінімумі потенціалу поле σ має ненульове вакуумне середнє, яке порушує дискретну кіральну симетрію.

5. Розгляньте вільне скалярне поле ϕ між двома паралельними площинами, розташованими на відстані a , яке задовольняє умови Діріхле $\phi = 0$ на поверхні площин. Використовуючи регуляризацію, за допомогою узагальненої ζ -функції (див. параграф 12.8) обчислити вакуумну енергію поля та визначити, як вона змінюється з відстанню a (ефект Казіміра для скалярного поля).
6. Виразити чотириточкову функцію Гріна через одночастинково-незвідні функції Гріна в теорії скалярного поля зі взаємодією $g\phi^3$.
7. В методі функціональної ренормгрупи, зберігаючи в правій частині рівняння (12.13.27) тільки два перших доданки, знайти розв'язок рівняння для ефективного потенціалу (12.13.26).
8. Використовуючи ефективну дію (12.4.6) для складених полів π і σ в моделі Намбу—Йона-Лазінію і вважаючи ці поля постійними, обчислити ефективний потенціал для полів π і σ .
9. Отримати рівняння (12.14.23) для масової функції $B(p^2)$, а також функції $A(p^2)$ в імпульсному просторі в квантовій електродинаміці, використовуючи рівняння Швінгера—Дайсона для ферміонного пропагатора (12.14.21).

Примітка. Використати перетворення Фур'є для рівняння (12.14.21), калібровку Ландау для вільного фотонного пропагатора і таку форму ферміонного пропагатора $G(p) = -i[\hat{p}A(p^2) - B(p^2)]^{-1}$. Для чотиривимірної інтеграла за імпульсом зробити віківський поворот та проінтегрувати за кутами.

Спонтанне порушення неперервної симетрії неминуче супроводжується появою безмасових частинок — намбу-голдстоунівських бозонів. Це є наслідком теореми, доведеної Намбу, Голдстоуном і Боголюбовим, яка розглядалася в розділі 12. В калібрувальних теоріях векторні бозони також є безмасовими внаслідок калібрувальної симетрії (принаймні в теорії збурень). Безмасові частинки, крім фотона, в природі не спостерігаються, тоді як теорії передбачають існування багатьох таких частинок. Це, зокрема, було суттєвою перешкодою для застосування неабелевих калібрувальних полів у фізиці елементарних частинок. Така суперечлива ситуація існувала до 1964 р., коли було з'ясовано, що теорії, в яких є одночасно і спонтанне порушення симетрії, і локальна калібрувальна інваріантність, приводять до такого надзвичайно важливого явища, як генерація маси у векторних калібрувальних частинок, яке відоме як механізм Хіггса (або ж іноді Андерсона—Хіггса).

Фактично ще Швінгером було показано, що локальна калібрувальна симетрія не забороняє виникнення маси у калібрувальних бозонів поза межами теорії збурень [173, 174]. Цей механізм генерації маси у калібрувальних бозонів отримав назву механізму Швінгера і зобов'язаний появі зв'язаних безмасових частинок, які проявляються як полюс у поляризаційного оператора. Такий механізм був розглянутий в розділі 8.5 на прикладі точно розв'язуваної моделі КЕД у двовимірному просторі-часі. Андерсон показав [29], що механізм Швінгера фактично реалізується в теорії надпровідності БКШ і відповідальний за екранування магнітного поля — ефект Мейснера [23, 30, 77]. Він також висловив припущення, що механізм може працювати і в релятивістських теоріях, наприклад приводити до генерації маси у неабелевих калібрувальних бозонів, що пізніше було реалізовано в роботі Мігдала і Полякова [14].

У 1964 р. механізм Швінгера був реалізований у калібрувальних моделях зі скалярними полями, потенціал взаємодії яких приводить до спонтанного порушення симетрії. Саме цей конкретний механізм генерації мас виявився дуже успішним у застосуванні до опису мас частинок і отримав

назву механізму Хіггса. У Стандартній моделі елементарних частинок механізм Хіггса відіграє ключову роль.

Виклад основних ідей механізму Хіггса можна знайти в багатьох сучасних книгах з теорії поля, що цитуються в списку літератури, а також в оригінальних роботах нобелівських лауреатів П. Хіггса та Ф. Енглера [74, 115, 116]. Спрощений їх виклад разом з історичними фактами можна знайти у статтях [8, 75, 117].

13.1. Модель Хіггса з абелевою симетрією

Розглянемо модель Хіггса, а саме, теорію зарядженого скалярного поля, що взаємодіє з електромагнітним полем, і описується лагранжіаном

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + (D_\mu\phi)^*D^\mu\phi - V(|\phi|), \quad D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \quad (13.1.1)$$

який є інваріантним відносно групи $U(1)$ локальних калібрувальних перетворень

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x). \quad (13.1.2)$$

Потенціал виберемо в формі, що вже використовувалась при дослідженні спонтанного порушення неперервної симетрії (див. рис. 70)

$$V(|\phi|) = -\mu^2\phi^*\phi + \frac{\lambda}{2}(\phi^*\phi)^2, \quad \mu^2 > 0. \quad (13.1.3)$$

Мінімуму потенціалу відповідають конфігурації поля

$$|\phi|^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}. \quad (13.1.4)$$

Але це рівняння фіксує тільки модуль поля ϕ , а його фаза залишається довільною. Виберемо значення

$$\phi_0 = \left(\frac{\mu^2}{\lambda}\right)^{1/2} \quad (13.1.5)$$

в якості представника із множини вакуумів у (13.1.4) і розглянемо комплексне поле у вигляді

$$\phi(x) = \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) + i\phi_2(x)),$$

де $\phi_1(x)$ і $\phi_2(x)$ описують відхилення від точки мінімуму потенціалу. Розкладемо потенціал до членів другого порядку по флуктуаціях $\phi_1(x)$ і $\phi_2(x)$:

$$V(|\phi|) = -\frac{\mu^4}{2\lambda} + \frac{1}{2} \cdot 2\mu^2\phi_1^2 + \mathcal{O}(\phi_i^3). \quad (13.1.6)$$

Поле ϕ_1 отримує масу $m = \sqrt{2}\mu$, а ϕ_2 не має маси і описує безмасовий голдстоунівський бозон.

Поки що ми фактично повторювали те, що було висвітлено раніше при дослідженні спонтанного порушення неперервної симетрії. Розглянемо тепер взаємодію комплексного скалярного поля з електромагнітним полем, кінетичний доданок якого в лагранжіані має вигляд

$$\begin{aligned} (D\phi)^*(D\phi) &= (\partial^\mu\phi^* - ieA^\mu\phi^*)(\partial_\mu\phi + ieA_\mu\phi) = \\ &= \partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi + ieA^\mu(\partial_\mu\phi^*\phi - \phi^*\partial_\mu\phi) + e^2\phi^*\phi A^\mu A_\mu \approx \\ &\approx \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 + \sqrt{2}e\phi_0 A_\mu\partial^\mu\phi_2 + e^2\phi_0^2 A_\mu A^\mu + \dots, \end{aligned} \quad (13.1.7)$$

де в останній рівності ми утримали тільки квадратичні по полях доданки. Для калібрувального поля знаходимо масовий доданок

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_A^2 A_\mu A^\mu, \quad m_A^2 = 2e^2\phi_0^2,$$

де m_A — маса векторного бозона, що виникає за рахунок ненульового вакуумного значення поля ϕ .

Насправді три останні доданки в (13.1.7) можна записати як

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2 + \sqrt{2}e\phi_0 A_\mu)^2 = e^2\phi_0^2 \left(A_\mu + \frac{1}{\sqrt{2}e\phi_0} \partial_\mu\phi_2 \right)^2. \quad (13.1.8)$$

Переходячи до нової змінної

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{\sqrt{2}e\phi_0} \partial_\mu\phi_2, \quad (13.1.9)$$

що має вигляд калібрувального перетворення, бачимо, що голдстоунівський бозон ϕ_2 зникає (!) з теорії. Залишаються масивний векторний бозон (3 ступені вільності) + 1 масивний скаляр (хіггсівський бозон). Ці чотири ступені вільності дорівнюють чотирьом початковим ступеням вільності, а саме: 2 ступеням вільності фотона A_μ та 2 компонентам комплексного скалярного поля.

Інший спосіб визначення спектра збуджень. Для комплексного поля перейдемо до його представлення в полярних координатах

$$\phi = \frac{\rho(x)}{\sqrt{2}} e^{i\theta(x)},$$

і для коваріантної похідної маємо

$$D_\mu\phi(x) = \frac{e^{i\theta(x)}}{\sqrt{2}} [\partial_\mu\rho + i(\partial_\mu\theta + eA_\mu)\rho]. \quad (13.1.10)$$

У цих змінних лагранжіан переписеться таким чином

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2 + \frac{1}{2}\rho^2(\partial_\mu\theta + eA_\mu)^2 - V(\rho). \quad (13.1.11)$$

Локальні калібрувальні перетворення тепер мають вигляд

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda, \quad \theta(x) \rightarrow \theta(x) + \Lambda(x) \quad (13.1.12)$$

[$\rho(x)$ при цьому не перетворюється]. Присутня також глобальна симетрія відносно перетворення $\theta \rightarrow \theta' = \theta + \text{const}$.

Калібрувальним перетворенням можна «знищити» змінну $\theta(x)$ (при умові, що $\theta(x)$ — гладка функція), перейшовши до змінної $A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta$ — заміна, що має форму калібрувального перетворення, і в нових змінних

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2 + \frac{1}{2}\rho^2 e^2 A_\mu'^2 - V(\rho). \quad (13.1.13)$$

Це так звана унітарна калібровка, де поле $\theta(x)$ відсутнє (вибране $\theta(x) = 0$) і де присутні тільки фізичні ступені вільності. Потенціал має мінімум в одній точці

$$\langle\rho\rangle = \rho_0 = \sqrt{2} \left(\frac{\mu^2}{\lambda}\right)^{1/2}. \quad (13.1.14)$$

У цій калібровці немає голдстоунівського бозона тому, що не має глобальної симетрії (поле $\theta(x)$ відсутнє). В довільній калібровці, де $\theta(x) \neq 0$, лагранжіан (13.1.11) на мінімумі потенціалу має калібрувально інваріантний масовий доданок за рахунок присутності допоміжного поля $\theta(x)$. Такий калібрувально інваріантний масовий доданок був вперше запропонований Штюкельбергом (1938 р.).

13.2. R_ξ -калібровка в калібрувальних теоріях зі спонтанним порушенням симетрії

Розглянемо спершу функціональний інтеграл для спонтанно порушеної абелевої калібрувальної теорії з лагранжіаном (13.1.1). Зручно записати поле ϕ в термінах дійсних компонент

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^1 + i\phi^2). \quad (13.2.1)$$

Калібрувальне перетворення (13.1.2) в інфінітезимальній формі запишеться таким чином

$$\delta\phi^1 = -\alpha(x)\phi^2, \quad \delta\phi^2 = \alpha(x)\phi^1, \quad \delta A_\mu = -\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha. \quad (13.2.2)$$

Нехай мінімум потенціалу $V(\phi)$ буде в точці $|\phi|^2 = v^2$. Без втрати загальності ми можемо вважати, що дійсна частина поля ϕ має ненульове вакуумне середнє $\langle \phi^1 \rangle = v$. Визначимо зсунуті змінні

$$\phi^1(x) = v + h(x), \quad \phi^2(x) = \varphi(x),$$

де $h(x)$ — поле Хіггса, $\varphi(x)$ — поле голдстоунівського бозона, в термінах яких лагранжіан приймає вигляд

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu h - eA_\mu\varphi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi + eA_\mu(v+h))^2 - V(\phi). \quad (13.2.3)$$

Локальна симетрія в термінах нових полів визначається таким чином

$$\delta h = -\alpha(x)\varphi, \quad \delta\varphi = \alpha(x)(v+h), \quad \delta A_\mu = -\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha. \quad (13.2.4)$$

Зазначимо, що локальна калібрувальна симетрія не порушується присутністю ненульового вакуумного середнього поля $\langle \phi \rangle = v$. Останнє порушує тільки глобальну симетрію.

Щоб визначити функціональний інтеграл, необхідно зафіксувати калібровку методом Фаддєєва—Попова. Маємо

$$Z = N \int \mathcal{D}A \mathcal{D}h \mathcal{D}\varphi e^{i \int d^4x \mathcal{L}[A,h,\varphi]} \delta(G(A,h,\varphi)) \det \left(\frac{\delta G^\alpha}{\delta \alpha} \Big|_{\alpha=0} \right), \quad (13.2.5)$$

де в калібрувальній функції $G^\alpha \equiv G(A^\alpha, h^\alpha, \varphi^\alpha)$ зроблене калібрувальне перетворення (13.2.4). Можна також використати фіксацію калібровки у вигляді $\delta(G(x) - \omega(x))$. Інтеграл не залежить від $\omega(x)$, і можна проінтегрувати вираз (13.2.5) з вагою $\int \mathcal{D}\omega e^{-\frac{i}{2} \int \omega^2(x) d^4x}$. В результаті знаходимо

$$Z = N' \int \mathcal{D}A \mathcal{D}h \mathcal{D}\varphi e^{i \int d^4x (\mathcal{L}[A,h,\varphi] - \frac{1}{2}(G)^2)} \det \left(\frac{\delta G^\alpha}{\delta \alpha} \Big|_{\alpha=0} \right). \quad (13.2.6)$$

Виберемо калібрувальну функцію у формі

$$G(A, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\xi}} (\partial^\mu A_\mu - \xi e v \varphi). \quad (13.2.7)$$

Це так звана R_ξ -калібровка 'т Хоофта. Ця калібровка є дуже зручною, тому що в ній перехресний доданок $\partial_\mu\varphi A^\mu$ із квадратичної частини лагранжіана \mathcal{L}_2 скорочується з аналогічним доданком із G^2 . Квадратичні доданки при цьому отримують такий вигляд

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{L} - \frac{1}{2}G^2 \right)_2 = & -\frac{1}{2}A_\mu \left[-g^{\mu\nu} \square + \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial^\mu \partial^\nu - (e v)^2 g^{\mu\nu} \right] A_\nu + \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \frac{1}{2}m_h^2 h^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{\xi}{2}(e v)^2 \varphi^2. \end{aligned} \quad (13.2.8)$$

Масовий доданок $m_h^2 h^2$ походить з потенціалу $V(\phi)$. Як бачимо, голдстоунівська частинка, що описується полем φ , в калібровці, відмінній від калібровки Ландау ($\xi \neq 0$), набуває масу

$$m_\varphi^2 = \xi(ev)^2 = \xi m_A^2.$$

Розглянемо оператор

$$\left. \frac{\delta G^\alpha(x)}{\delta \alpha(y)} \right|_{\alpha=0} = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \left(-\frac{1}{e} \square - \xi ev(v+h) \right) \delta(x-y). \quad (13.2.9)$$

Детермінант цього оператора можна записати в експоненті, якщо використати додаткові («духові») поля Фаддєєва—Попова з лагранжіаном

$$\mathcal{L}_{\text{ghost}} = \bar{c} \left[-\square - \xi(ev)^2 \left(1 + \frac{h}{v} \right) \right] c.$$

Духове поле не взаємодіє з A_μ , як в неабелевих теоріях, але взаємодіє з полем Хіггса h .

Знайдемо пропагатори для полів, які визначаються квадратичною частиною лагранжіана. Для векторного поля відповідний оператор в імпульсному просторі має вигляд

$$g^{\mu\nu} k^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) k^\mu k^\nu - m_A^2 g^{\mu\nu} = \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) (k^2 - m_A^2) + \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \frac{k^2 - \xi m_A^2}{\xi},$$

і пропагатор поля A_μ визначається оберненою матрицею

$$\begin{aligned} D_A^{\mu\nu}(k) &= \frac{1}{i(k^2 - m_A^2)} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) + \frac{\xi}{i(k^2 - \xi m_A^2)} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} = \\ &= \frac{1}{i(k^2 - m_A^2)} \left[g^{\mu\nu} - \frac{(1 - \xi)k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi m_A^2} \right]. \end{aligned} \quad (13.2.10)$$

Для поля Хіггса, голдстоунівського бозона і духів легко знайти відповідні пропагатори

$$D_h(k) = \frac{i}{k^2 - m_h^2}, \quad D_\varphi(k) = \frac{i}{k^2 - \xi m_A^2}, \quad D_c(k) = \frac{i}{k^2 - \xi m_A^2}. \quad (13.2.11)$$

Голдстоунівський бозон φ , духове поле c , і поздовжня компонента векторного поля A_μ мають маси, які залежать від калібрувального параметра і тому є нефізичними частинками. Два граничних випадки вибору калібрувального параметра ξ є особливими:

$\xi = 0 \Rightarrow$ калібровка Ландау, в ній усі нефізичні частинки безмасові;

$\xi = \infty \Rightarrow$ унітарна калібровка, в ній усі нефізичні частинки відсутні, а пропагатор векторних частинок приймає вигляд

$$D_A^{\mu\nu} = \frac{1}{i(k^2 - m_A^2)} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m_A^2} \right),$$

і містить в точності три поляризаційних стани, як і повинно бути для масивної частинки зі спіном одиниця.

Елементи матриці розсіяння (S -матриця) не залежать від вибору калібровки (тобто від ξ). В унітарній калібровці всі стани фізичні, тобто виконується унітарність теорії, але важко довести перенормовність теорії. В калібровках з $\xi \neq \infty$ легко довести перенормовність, оскільки всі пропагатори зменшуються як $1/k^2$ при високих імпульсах. У будь-якій калібровці $\xi \neq \infty$ стандартна теорія збурень по константі зв'язку буде перенормовною за підрахунком степенів розбіжності діаграм, тобто всі розбіжності будуть усунуті скінченним набором контрчленів. Таким чином, у таких калібровках можна обчислювати фізичні величини в довільному порядку теорії збурень.

Границя $\xi \rightarrow \infty$ R_ξ -калібровки означає перехід до унітарної калібровки, де немає нефізичних частинок, але, як вже згадувалось вище, в цій калібровці пропагатор векторних частинок поводить себе як константа при великих k і непросто довести перенормовність теорії. Оскільки R_ξ -калібровка інтерполює між перенормовними і унітарною калібровками, а фізичні величини не залежать від вибору калібровки, то маємо доведення, що розглянута теорія є одночасно перенормовною і унітарною.

13.3. Механізм Хіггса в неабелевих калібрувальних теоріях

Перейдемо тепер до розгляду механізму Хіггса в неабелевих калібрувальних теоріях. Для цього розглянемо деяку компактну групу Лі

$$G = G_1 \otimes G_2 \otimes \dots \otimes G_n,$$

де кожна G_i — проста група Лі або $U(1)$. Групові перетворення записуються у формі

$$g = \exp [iQ^a \omega_a], \quad a = 1, \dots, N, \quad [Q^a, Q^b] = if^{abc} Q^c, \quad (13.3.1)$$

де Q^a — генератори групи. Для калібрувальної групи параметри $\omega_a(x)$ залежать від координат, і тому $g(x) = \exp [iQ^a \omega_a(x)]$. Розглянемо наступні поля:

1) N безмасових векторних полів A_μ^a , які належать до приєднаного представлення;

2) K скалярних полів, які належать до представлення $D^{(K)}$ (можливо звідного) групи G ;

3) F ферміонних полів ψ_i , які належать до представлення $D^{(F)}$.

Інфінітезимальні калібрувальні перетворення мають вигляд:

$$\begin{aligned} A_\mu^a &\rightarrow A_\mu^a(x) + f^{abc} A_\mu^b \delta\omega^c(x) + g_{ab}^{-1} \partial_\mu \delta\omega^b(x), \\ \phi_i &\rightarrow \phi_i(x) + i\sigma_{ij}^a \phi_j(x) \delta\omega^a(x), \quad i, j = 1, \dots, K, \\ \psi_l &\rightarrow \psi_l(x) + i\tau_{lm}^a \psi_m(x) \delta\omega^a(x), \quad l, m = 1, \dots, F, \end{aligned} \quad (13.3.2)$$

де $g_{ab} = g_a \delta_{ab}$ і $g_a = g_b$, коли індекси належать до однієї і тієї ж підгрупи G .

Можна вибрати поля ϕ_i дійсними, оскільки кожне комплексне поле можна представити у вигляді пари дійсних. Тоді σ_{ij}^a — уявні і антисиметричні матриці, які, а також τ_{lm}^a , запишемо у вигляді

$$\sigma_{ij}^a = iT_{ij}^a, \quad \tau_{lm}^a = it_{lm}^a,$$

де тепер матриці T_{ij}^a, t_{lm}^a є дійсними і антисиметричними. Інфінітезимальні калібрувальні перетворення перепишуться (візьмемо одну підгрупу з константою g) таким чином

$$\begin{aligned} \delta\phi_i &= -T_{ij}^a \phi_j \delta\omega^a(x), \quad \delta\psi_l = -t_{lm}^a \psi_m \delta\omega^a(x), \\ \delta A_\mu^a &= \frac{1}{g} \partial_\mu \delta\omega^a + f^{abc} A_\mu^b \delta\omega^c. \end{aligned} \quad (13.3.3)$$

Найбільш загальний перенормований лагранжіан, який містить скалярні, ферміонні і калібрувальні поля, і є інваріантним відносно вказаних перетворень і має вигляд

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}_l \gamma^\mu (iD_\mu \psi)_l - \bar{\psi} m_0 \psi + \\ &+ \frac{1}{2} (D_\mu \phi)^i (D^\mu \phi)^i - U(\phi) - \bar{\psi}_l \Gamma_i^{lm} \phi^i \psi_m, \end{aligned} \quad (13.3.4)$$

де коваріантні похідні $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a Q^a$ для скалярів і ферміонів визначаються так:

$$(D_\mu \phi)_i = \partial_\mu \phi_i + gA_\mu^a T_{ij}^a \phi_j, \quad (D_\mu \psi)_l = \partial_\mu \psi_l + gA_\mu^a t_{lm}^a \psi_m. \quad (13.3.5)$$

Тензор напруженості має звичайний вигляд (знак g змінено порівняно з розділом 4)

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (13.3.6)$$

а m_0 є в загальному випадку є матрицею мас для ферміонів. Інваріантність відносно групи G вимагає, щоб для масової матриці m_0 і юкавівських констант Γ_i виконувались співвідношення

$$[t^a, \gamma^0 m_0] = 0, \quad [t^a, \gamma^0 \Gamma_i] = -T_{ij}^a \gamma^0 \Gamma_j, \quad (13.3.7)$$

які випливають з вимоги інваріантності відповідних доданків у лагранжіані відносно перетворень (13.3.3):

$$\delta(\bar{\psi}t_0\psi) = 0, \quad \delta(\bar{\psi}_l\Gamma_i^{lm}\phi^i\psi_m) = 0.$$

Інваріантність потенціалу означає, що

$$\frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi_i} T_{ij}^a \phi_j = 0. \quad (13.3.8)$$

Спонтанне порушення симетрії має місце, якщо рівняння

$$\frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi_i} = 0 \quad (13.3.9)$$

має нетривіальний розв'язок $\langle \phi_i \rangle = (\phi_0)_i$ і масова матриця

$$M_{ij}^2 = \left. \frac{\partial^2 U(\phi)}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right|_{\phi_i = \phi_{0i}} \quad (13.3.10)$$

має невід'ємні власні значення в точці мінімуму ϕ_{0i} .

Поля будемо відраховувати від вакуумного значення $\phi_i(x) = \phi_{0i} + \chi_i(x)$. Простір значень χ_i зручно поділити на два підпростори. Вектори $T^a \phi_0$ відповідають різним перетворенням вакуумного середнього ϕ_0 . Флуктуації для напрямків, де $F_i^a \equiv T_{ij}^a \phi_{0j} \neq 0$, відповідають голдстоунівським бозонам. Флуктуації, ортогональні до цих $T^a \phi_0$, відповідають масивним скалярним полям.

Для квадратичної частини лагранжіана отримуємо

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & -\frac{1}{2} A_\mu^a (-g^{\mu\nu} \square + \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu^a + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi_i)^2 + g \partial^\mu \chi_i A_\mu^a F_i^a + \\ & + \frac{1}{2} (m_A^2)^{ab} A_\mu^a A^{b\mu} - \frac{1}{2} M_{ij}^2 \chi_i \chi_j + \bar{\psi} \gamma^\mu i \partial_\mu \psi - \bar{\psi} t_0 \psi. \end{aligned} \quad (13.3.11)$$

Тут масові матриці мають вигляд:

$$\begin{aligned} (m_A^2)^{ab} &= g^2 F_i^a F_i^b = g^2 (F F^T)^{ab}, \\ M_{ij}^2 &= \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right|_{\phi_i = \phi_{0i}}, \\ m &= m_0 + \Gamma_i \phi_{0i}. \end{aligned} \quad (13.3.12)$$

Визначимо власні вектори для матриць $(m_A^2)^{ab}$ і $(M^2)_{ij}$:

$$\begin{aligned} (m_A^2)^{ab} E_b^{(r)} &= 0, \quad r = 1, \dots, \bar{N}, \quad 0 \leq \bar{N} \leq N, \\ (m_A^2)^{ab} E_b^{(s)} &= m_s^2 E_a^{(s)} \neq 0, \quad s = 1, \dots, N - \bar{N}, \\ M_{ij}^2 e_j^{(p)} &= 0, \quad p = 1, \dots, \bar{K}, \quad 0 \leq \bar{K} \leq K, \\ M_{ij}^2 e_j^{(q)} &= M_q^2 e_i^{(q)}, \quad q = 1, \dots, K - \bar{K}. \end{aligned} \quad (13.3.13)$$

Можна показати, що $\bar{K} = N - \bar{N}$, тобто число начебто намбу-голдстоунівських бозонів збігається з числом масивних векторних бозонів. Механізм Хіггса означає, що намбу-голдстоунівські бозони перетворюються в поздовжні компоненти масивних векторних бозонів.

Продиференціюємо співвідношення (13.3.8) по полю і візьмемо поля в точці мінімуму $\phi_i = \phi_{0i}$. Тоді ми отримуємо рівняння

$$\left. \frac{\partial^2 U(\phi)}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right|_{\phi_i = \phi_{0i}} T_{jk}^a \phi_{0k} = 0, \quad (13.3.14)$$

тобто ненульові вектори $e_j^{(p)} = T_{jk}^p \phi_{0k} \neq 0$ є власними векторами масової матриці M_{ij}^2 з нульовим власним значенням. Число ненульових векторів $e_j^{(p)}$ дорівнює числу порушених генераторів симетрії. Це в свою чергу означає, що число масивних векторних бозонів дорівнює числу порушених генераторів симетрії.

13.4. Квантування неабелевих калібрувальних теорій в R_ξ -калібровці

Перейдемо тепер до квантування неабелевих калібрувальних теорій, використовуючи R_ξ -калібровку. Для цього розглянемо функціональний інтеграл для неабелевого калібрувального поля

$$Z = N \int \mathcal{D}A_\mu(x) \mathcal{D}\chi(x) e^{i \int d^4x \mathcal{L}[A_\mu, \chi]}, \quad (13.4.1)$$

де для спрощення поки що опустимо ферміонні поля. Фіксація калібровки по Фаддееву—Попову відбувається стандартним чином

$$Z = N' \int \mathcal{D}A_\mu(x) \mathcal{D}\chi(x) e^{i \int d^4x (\mathcal{L}[A_\mu, \chi] - \frac{1}{2}(G)^2)} \det \left(\left. \frac{\partial G^\alpha}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \right). \quad (13.4.2)$$

Виберемо R_ξ -калібровку у формі

$$G^a = \frac{1}{\sqrt{\xi}} (\partial_\mu A^{\mu a} - \xi g F_i^a \chi_i). \quad (13.4.3)$$

Зазначимо, що функція G^a містить (автоматично) тільки ті компоненти χ , що знаходяться в підпросторі голдстоунівських бозонів. Це дає в лагранжіані квадратичний внесок

$$-\frac{1}{2}(G^a)^2 = \frac{1}{2} A_\mu^a \left(\frac{1}{\xi} \partial^\mu \partial^\nu \right) A_\nu^a + g \partial_\mu A^{\mu a} F_i^a \chi_i - \frac{1}{2} \xi g^2 [F_i^a \chi_i]^2. \quad (13.4.4)$$

Знову доданки, які змішують A_μ^a і χ_i скорочуються, і повний квадратичний лагранжіан для калібрувальних і голдстоунівських бозонів має вигляд

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & -\frac{1}{2}A_\mu^a \left(\left[-g^{\mu\nu} \square + \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial^\mu \partial^\nu \right] \delta^{ab} - g^2 F_i^a F_i^b \right) A_\nu^b + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi_i)^2 - \\ & - \frac{1}{2} \xi g^2 F_i^a F_j^a \chi_i \chi_j - \frac{1}{2} M_{ij} \chi_i \chi_j, \quad M_{ij} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right|_{\phi_0}. \end{aligned} \quad (13.4.5)$$

Масові матриці калібрувальних і голдстоунівських бозонів тісно пов'язані між собою. Дійсно

$$(m_A^2)^{ab} = g^2 F_i^a F_i^b = g^2 (F F^T)^{ab} \quad (13.4.6)$$

Ця матриця додатно напіввизначена, оскільки в будь-якому базисі її діагональні елементи

$$(m_A^2)^{aa} = g^2 (T^a \phi_0)^2 \geq 0.$$

Якщо деякий генератор T^a залишає вакуум інваріантним, $T^a \phi_0 = 0$, тоді відповідний калібрувальний бозон залишається безмасовим.

Для пропагатора калібрувальних бозонів знаходимо

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(k) &= \frac{1}{i} \left[\frac{1}{k^2 - g^2 F F^T} \left(g^{\mu\nu} - \frac{(1 - \xi) k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi g^2 F F^T} \right) \right]^{ab} = \\ &= \frac{1}{i} \left(\frac{1}{k^2 - g^2 F F^T} \right)^{ab} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) + \frac{k^\mu k^\nu}{i k^2} \left(\frac{\xi}{k^2 - \xi g^2 F F^T} \right)^{ab}. \end{aligned} \quad (13.4.7)$$

Масова матриця поздовжніх калібрувальних бозонів має вигляд

$$\xi (m_A^2)^{ab} = \xi g^2 (F F^T)^{ab}, \quad (13.4.8)$$

водночас для масової матриці голдстоунівських бозонів маємо

$$(m_G^2)_{ij} = \xi g^2 F_i^a F_j^a = \xi g^2 (F^T F)_{ij}. \quad (13.4.9)$$

Пропагатор полів χ набуває форму

$$D_{ij}(k) = \left(\frac{i}{k^2 - \xi g^2 F^T F - M^2} \right)_{ij}, \quad (13.4.10)$$

де матриці $\xi g^2 F^T F$ і M проєктують на ортогональні підпростори

$$M \cdot (\xi g^2 F^T F) = 0.$$

Побудуємо лагранжіан духових полів. Оскільки

$$\delta \phi_i = \delta \chi_i = -\alpha^a(x) T_{ij}^a \phi_j, \quad \delta A_\mu^a = \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a - f^{abc} \alpha^b A_\mu^c = \frac{1}{g} (D_\mu \alpha)^a, \quad (13.4.11)$$

звідки і з (13.4.3) знаходимо оператор

$$\frac{\partial G^a(x)}{\partial \alpha^b(y)} = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \left[\frac{1}{g} (\partial_\mu D^\mu)^{ab} + \xi g (T^a \phi_0)_i T_{ij}^b (\phi_0 + \chi)_j \right] \delta(x - y). \quad (13.4.12)$$

Детермінант цього оператора дає внесок у лагранжіан, який описує взаємодію полів з духами (ghost)

$$\mathcal{L}_{\text{ghost}} = \bar{c}^a \left[-(\partial_\mu D^\mu)^{ab} - \xi g^2 (T^a \phi_0) \cdot T^b (\phi_0 + \chi) \right] c^b. \quad (13.4.13)$$

Для пропагатора духів маємо

$$D_{\text{ghost}}^{ab}(k) = \left(\frac{i}{k^2 - \xi g^2 F F^T} \right)^{ab}. \quad (13.4.14)$$

Правила Фейнмана для пропагаторів векторних, скалярних, голдстоунівських, а також духових полів зображені нижче:

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \mu \\ a \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} \nu \\ b \end{array} &= \left(\frac{-i}{k^2 - g^2 F F^T} \left[g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi g^2 F F^T} \right] \right)^{ab}, \\ i \text{---} \text{---} \text{---} j &= \left(\frac{i}{k^2 - \xi g^2 F^T F - M^2} \right)_{ij}, \\ a \text{---} \text{---} \text{---} b &= \left(\frac{i}{k^2 - \xi g^2 F F^T} \right)^{ab}. \end{aligned} \quad (13.4.15)$$

Ці пропагатори використовуються при обчисленні фейнманівських діаграм в неабелевих теоріях.

13.5. Приклади спонтанного порушення симетрії

Наведемо тепер приклади спонтанного порушення симетрії у випадку групи $SU(2)$, і візьмемо спочатку скалярні поля ϕ у фундаментальному представленні (дублет). Цей приклад має безпосередній стосунок до Стандартної моделі, де група $SU(2)$ є калібрувальною групою слабких взаємодій, а скалярне хіггсівське поле утворює дублет. Масова матриця векторних полів походить з квадрату коваріантної похідної поля ϕ ,

$$\begin{aligned} & [(\partial_\mu - ig A_\mu^a \tau^a) \phi]^\dagger [(\partial^\mu - ig A^{b\mu} \tau^b) \phi] \Big|_{\phi=\phi_0} \sim \\ & \sim g^2 \phi_0^\dagger \tau^a \tau^b \phi_0 A_\mu^a A^{b\mu} = \frac{g^2}{2} \phi_0^\dagger \{\tau^a, \tau^b\} \phi_0 A_\mu^a A^{b\mu}. \end{aligned} \quad (13.5.1)$$

Для відповідного вакуумного середнього і матриць Паулі в якості генераторів групи $SU(2)$,

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad \tau^a = \frac{\sigma^a}{2}, \quad \{\tau^a, \tau^b\} = \frac{1}{2} \delta^{ab},$$

масовий доданок (13.5.1) векторного поля приймає вигляд

$$\frac{g^2}{4} \phi_0^\dagger \phi_0 A_\mu^a A^{a\mu} = \frac{g^2 v^2}{8} A_\mu^a A^{a\mu}$$

з масою $m_A = \frac{gv}{2}$. У розглянутому випадку симетрія $SU(2)$ повністю порушена (немає залишкової симетрії вакууму), і всі векторні поля отримали масу.

Проаналізуємо випадок, коли поле ϕ перетворюється по векторному (приєднаному) представленню $SU(2)$. Якщо ϕ — дійсний вектор, тоді

$$(D_\mu \phi)^a = \partial_\mu \phi^a + g \varepsilon^{abc} A_\mu^b \phi^c.$$

За наявності у поля ϕ ненульового вакуумного середнього знаходимо з кінетичного доданка для скалярного поля в лагранжіані

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{1}{2} (D_\mu \phi)^2 \Rightarrow \frac{g^2}{2} (\varepsilon^{abc} A_\mu^b \phi_0^c)^2. \quad (13.5.2)$$

Виберемо вектор ϕ_0^c вздовж осі 3 (див. рис. 77), тобто $\langle \phi^c \rangle = \phi_0^c = v \delta^{c3}$. Це вакуумне середнє залишається інваріантним відносно поворотів навколо третьої осі, тобто $T_3 \phi = 0$, тоді як $T_{1,2} \phi \neq 0$. Маємо залишкову $U(1)$ симетрію вакууму і два порушених генератора. Тоді з лагранжіана отримуємо масовий доданок для векторних полів

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{g^2}{2} v^2 (\varepsilon^{ab3} A_\mu^b) (\varepsilon^{ab'3} A_\mu^{b'}) = \frac{g^2 v^2}{2} [(A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2], \quad (13.5.3)$$

де ми використали $\varepsilon^{ab3} \varepsilon^{ab'3} = \delta^{bb'}$. Тобто компоненти A_μ^1, A_μ^2 отримали масу $m_A = gv$, а A_μ^3 залишалась безмасовою у відповідності з теоремою про генерацію маси калібрувальних полів при спонтанному порушенні симетрії.

13.6. Монополь 'т Хоффта—Полякова

У параграфі 4.3 ми навели приклад нетривіального стаціонарного розв'язку рівнянь полів Янга—Міллса з групою $SU(2)$, який відповідає монополю Ву—Янга. Електричне поле дорівнює нулю для цього розв'язку, а магнітне має форму монополя. Однак внаслідок того, що відповідне магнітне поле зростає як $B \sim 1/r^2$ при $r \rightarrow 0$, цей розв'язок має розбіжну

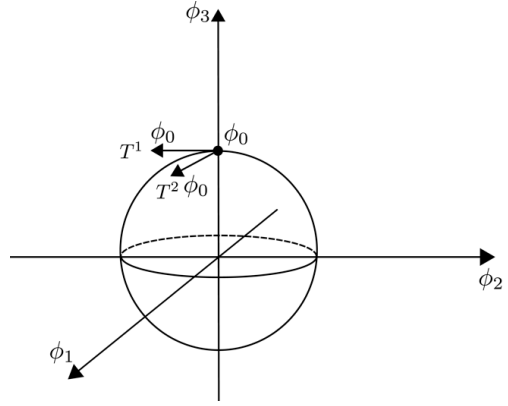


Рис. 77. Вакуумне середнє ϕ_0 є інваріантним відносно генератора T_3 , але генератори $T_{1,2}$ змінюють його положення

повну енергію. У 1974 р. 'т Хоофт і Поляков показали [15, 187], що в теорії неабелевих полів, які взаємодіють зі скалярними полями зі спонтанним порушенням симетрії існують розв'язки у формі магнітного монополя на великих відстанях, які мають скінченну енергію. Розв'язки монопольного типу мають багато властивостей, притаманних частинкам, як-от скінчена енергія, стійкість і локалізація в просторі.

Розгляд монополя 'т Хоофта—Полякова розпочнемо з лагранжіана моделі Джорджі—Глешоу

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{a\mu\nu} + \frac{1}{2}(D^\mu\phi)^a(D_\mu\phi)^a - V(\phi), \quad (13.6.1)$$

який описує взаємодію калібрувальних бозонів групи $SU(2) \simeq SO(3)$ з триплетом хіггсівських скалярів ϕ^a , де

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + e\varepsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \\ (D_\mu\phi)^a = \partial_\mu\phi^a + e\varepsilon^{abc}A_\mu^b\phi^c, \quad V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^a\phi^a - v^2)^2.$$

Ми шукаємо стаціонарні розв'язки для магнітного монополя для якого електричне поле дорівнює нулю, тому вибираємо калібровку $A_0^a = 0$. У цьому випадку функціонал енергії (гамільтоніан) моделі приймає форму

$$\mathcal{E} = \int d^3x \left[\frac{1}{4}(F_{ij}^a)^2 + \frac{1}{2}(D_i\phi^a)^2 + V(\phi) \right], \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (13.6.2)$$

Оскільки всі три доданки в енергії додатні, то для скінченності енергії інтеграл від кожного доданка повинен бути збіжним. Мінімум потенціальної енергії скалярного поля $V(\phi)$ визначається рівнянням $\phi^a\phi^a = v^2$, тобто цьому мінімуму відповідає спонтанне порушення симетрії $SO(3) \rightarrow SO(2)$.

Очевидно, що для скінченності енергії скалярне поле повинно прямувати на просторовій нескінченності до свого значення на сфері $\phi^a\phi^a = v^2$. Якою б не була конфігурація скалярного поля у довільному обмеженому об'ємі простору завжди можна, виконуючи калібрувальне перетворення, досягти того, що скалярне поле направлено вздовж одного напрямку, наприклад третього. Тоді в цій області калібрувальне поле непорушеної $SO(2)$ підгрупи $SO(3)$ визначається компонентою A_i^3 з відповідним тензором напруженості $\partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3$. Калібрувально інваріантний вираз для цього тензора напруженості був знайдений 'т Хоофтом

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a \hat{\phi}^a - \frac{1}{e}\varepsilon^{abc}\hat{\phi}^a D_\mu\hat{\phi}^b D_\nu\hat{\phi}^c, \quad (13.6.3)$$

де $\hat{\phi}^a = \phi^a / \sqrt{\phi^b\phi^b}$. Цей вираз можна переписати також у вигляді

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu(A_\nu^a\hat{\phi}^a) - \partial_\nu(A_\mu^a\hat{\phi}^a) - \frac{1}{e}\varepsilon^{abc}\hat{\phi}^a\partial_\mu\hat{\phi}^b\partial_\nu\hat{\phi}^c. \quad (13.6.4)$$

У калібровці з постійним $\hat{\phi}^a$ тензор $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ являє собою звичайний тензор електромагнітного поля $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu(A_\nu^a \hat{\phi}^a) - \partial_\nu(A_\mu^a \hat{\phi}^a)$, наприклад, в калібровці $\hat{\phi}^a = (0, 0, 1)$ отримуємо $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3$.

Магнітний заряд g виражається стандартним чином через потік магнітного поля $B_i = \epsilon_{ijk} \mathcal{F}_{jk}/2$ крізь замкнену поверхню

$$g = \int \partial_k B_k d^3x = \frac{1}{2} \int \epsilon_{ijk} \partial_k \mathcal{F}_{ij} d^3x = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int \mathcal{F}_{ij} d^2S_k. \quad (13.6.5)$$

Рівняння руху для калібрувальних і скалярних полів мають вигляд

$$(D_\nu F^{\mu\nu})_a = e \epsilon_{abc} \phi_b (D^\mu \phi)_c, \quad (13.6.6)$$

$$(D^\mu D_\mu \phi)_a = -\lambda \phi_a (\phi^b \phi^b - v^2). \quad (13.6.7)$$

Для того щоб знайти монопольний розв'язок, 'т Хоофт і Поляков припустили, що асимптотика поля ϕ^a на просторовій нескінченності $r \rightarrow \infty$ є така

$$\phi^a = v \frac{x^a}{r}, \quad (13.6.8)$$

тобто квадрат скалярного поля $\phi^a \phi^a$ прямує до свого значення в мінімумі потенціальної енергії v^2 , а саме, скалярне поле ϕ^a на нескінченності визначається напрямком у координатному просторі. Очевидно, що така асимптотика поля описує відображення просторової нескінченності, яка є сферою S^2 , у многовид S^2 вироджених вакуумних станів. Таке відображення є топологічно нетривіальним, тому є стабільним.

Для скінченності енергії необхідно, щоб $D_i \phi^a = 0$ на нескінченності з точністю до величин порядку r^{-2} , що забезпечується наступною асимптотичною поведінкою калібрувального поля на нескінченності (порівняйте з монополем Ву–Янга (4.3.1))

$$A_i^a = \epsilon_{aij} \frac{x^j}{er^2} \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (13.6.9)$$

При цьому $(F_{ij}^a)^2/4 \simeq 2/e^2 r^4$, тому відповідний інтеграл в енергії з цим доданком є збіжним на нескінченності. Крім того, внаслідок того, що ми працюємо тільки з просторовими координатами, ми далі у цьому параграфі не розрізняємо верхні та нижні компоненти.

Анзац для скалярного і калібрувального полів, який використали 'т Хоофт і Поляков для пошуку сферично симетричного монополя, має такий вигляд

$$\phi^a = \frac{x^a}{er^2} H(evr), \quad A_i^a = \epsilon_{aij} \frac{x^j}{er^2} (1 - K(evr)), \quad (13.6.10)$$

де H і K — невідомі безрозмірні функції. Для цього анзацу маємо

$$F_{ij}^a = -2\epsilon_{aij} \frac{(1-K)}{er^2} + \epsilon_{ijk} x_k x_a \frac{(1-K)^2}{er^4} - (\epsilon_{ajk} x_k x_i - \epsilon_{aik} x_k x_j) \frac{2(1-K) + \xi K'_\xi}{er^4}, \quad (13.6.11)$$

$$(D_i \phi)^a = \delta_{ai} \frac{HK}{er^2} + \frac{x_i x_a}{er^4} [\xi H'_\xi - (1+K)H], \quad (13.6.12)$$

де $\xi = evr$. Функціонал енергії приймає вигляд

$$\mathcal{E} = \frac{4\pi v}{e} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2} \left[\xi^2 \left(\frac{dK}{d\xi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\xi \frac{dH}{d\xi} - H \right)^2 + \frac{1}{2} (K^2 - 1)^2 + K^2 H^2 + \frac{\lambda}{4e^2} (H^2 - \xi^2)^2 \right]. \quad (13.6.13)$$

Рівняння руху (13.6.6) і (13.6.7) визначають такі рівняння для цих функцій

$$\xi^2 \frac{d^2 K}{d\xi^2} = KH^2 + K(K^2 - 1), \quad (13.6.14)$$

$$\xi^2 \frac{d^2 H}{d\xi^2} = 2HK^2 + \frac{\lambda}{e^2} H(H^2 - \xi^2). \quad (13.6.15)$$

Вони також впливають з функціонала (13.6.13). Граничні умови (13.6.8) і (13.6.9) на просторовій нескінченності забезпечуються такими граничними умовами для функцій H і K :

$$H(\xi) \simeq \xi, \quad K(\xi) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (13.6.16)$$

Крім того, відсутність сингулярності та скінченність енергії розв'язку при $r \rightarrow 0$ забезпечується граничними умовами

$$|H| \leq O(\xi), \quad K - 1 \leq O(\xi) \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow 0. \quad (13.6.17)$$

Система рівнянь (13.6.14) і (13.6.15) є нелінійною, і її розв'язки можна знайти тільки чисельно. Поведінка функцій H/ξ і K показана на рис. 78. Асимптотично при $\xi \rightarrow \infty$ рівняння стають

$$\frac{d^2 K}{d\xi^2} = K, \quad \frac{d^2 h}{d\xi^2} = \frac{2\lambda}{e^2} h, \quad h = H - \xi, \quad (13.6.18)$$

звідки знаходимо

$$K \sim e^{-\xi} = e^{-m_A r}, \quad H - \xi \sim e^{-\sqrt{2\lambda/e^2} \xi} = e^{-\mu r}, \quad (13.6.19)$$

де $\mu = \sqrt{2\lambda/e^2} m_A$, $m_A = ev$.

Підхід до асимптотики визначається комптонівською довжиною хвилі векторної частинки, тобто монополь являє собою частинку скінченного розміру $\sim 1/m_A$.

На малих відстанях (в середині монополя), $r \ll 1/m_A$, скалярне і магнітне поля практично дорівнюють нулю, і початкова симетрія відновлена.

На відстанях $r \gg 1/m_A$ скалярне поле прямує до свого вакуумного значення, а магнітне поле має форму точкового магнітного монополя.

Як показали 'т Хоофт і Поляков, такі розв'язки дійсно існують, їх енергія визначає класичну масу магнітного монополя $M_{\text{мон}}$,

$$\mathcal{E} = \frac{4\pi m_A}{e^2} f(\lambda/e^2) \equiv M_{\text{мон}}, \quad (13.6.20)$$

де $m_A = ev$ — маса векторної частинки (див. розділ 13.5), а функція $f(\lambda/e^2)$ приймає значення порядку одиниці в широкому інтервалі значень λ/e^2 . Масштаб мас векторної частинки та магнітного монополя визначається вакуумним середнім скалярного поля v , яке пов'язане зі спонтанним порушенням початкової симетрії $SO(3) \rightarrow SO(2)$. Очевидно, маса монополя буде значно більшою за масу векторної частинки завдяки малості електромагнітної константи зв'язку, $M_{\text{мон}} \approx m_A/\alpha \gg m_A$.

Зауважимо, що у спеціальній границі, $\lambda \rightarrow 0$ і фіксоване v , рівняння (13.6.14), (13.6.15) допускають точний розв'язок,

$$H(\xi) = \xi \operatorname{cth}(\xi) - 1, \quad K(\xi) = \frac{\xi}{\operatorname{sh}(\xi)}, \quad (13.6.21)$$

для якого $f(0) = 1$ і $M_{\text{мон}} = m_A/\alpha$. Цей спеціальний розв'язок має назву монополя Богомольного—Прасада—Зоммерфельда. Враховуючи також анзац для нульової компоненти векторного поля, $A_0^a(x) = (x^a/er^2) \times J(evr)$, було отримано розв'язки, які мають магнітний і електричний заряди (діони Джулія—Зі).

З асимптотичної поведінки (13.6.9) магнітне поле (13.6.3) визначається першим доданком через швидке зменшення на нескінченності коваріантної похідної $(D_i\phi)^a \sim 1/r^2$. Знаходимо, що

$$B_k = \frac{1}{2}\epsilon_{kij}\mathcal{F}_{ij} \simeq \frac{1}{2}\epsilon_{kij}F_{ij}^a\hat{\phi}^a \simeq -\frac{1}{2}\epsilon_{kij}\epsilon_{aij}\frac{x_a}{er^3} = -\frac{x_k}{er^3}, \quad (13.6.22)$$

тобто на великих відстанях магнітне поле дійсно має форму магнітного поля монополя з магнітним зарядом,

$$g = -\frac{4\pi}{e}. \quad (13.6.23)$$

Оператор електричного заряду $Q = eT^3$ в теорії, що розглядається (T^3 є третьою компонентою операторів ізоспіну), має найменше значення по модулю $q_0 = e/2$. Згідно з рівнянням (13.6.23), магнітний заряд виражається через електричний заряд. Зазначимо, що чим менший електричний заряд, тим більшим є магнітний заряд, тобто має місце електрично-магнітна дуальність, коли електричній теорії зі слабким зв'язком відповідає сильно-взаємодіюча магнітна теорія. Такий зв'язок двох зарядів є наслідком того факту, що має місце спонтанне порушення симетрії простої неабелевої групи до електромагнітної групи симетрії $U(1) \sim SO(2)$.

Вираз (13.6.5) для магнітного заряду у випадку відсутності сингулярних ліній у калібрувальному полі можна переписати як

$$g = -\frac{1}{2e} \int d^3x \epsilon_{ijk} \epsilon_{abc} \partial_k (\hat{\phi}^a \partial_i \hat{\phi}^b \partial_j \hat{\phi}^c) = -\frac{1}{2e} \int \epsilon_{ijk} \epsilon_{abc} \hat{\phi}^a \partial_i \hat{\phi}^b \partial_j \hat{\phi}^c d^2S_k, \quad (13.6.24)$$

де в першій рівності використано тотожність Б'янки $\epsilon_{ijk} \partial_k (\partial_i A_j - \partial_j A_i) = 0$ для першого доданка в \mathcal{F}_{ij} . Якщо ж калібрувальне поле містить сингулярні лінії (струни Дірака), то повний магнітний заряд системи визначається сумою всіх доданків у \mathcal{F}_{ij} . Важливою особливістю останнього виразу є те, що магнітний заряд повністю визначається триплетом хіггсівських полів $\hat{\phi}^a$ і не залежить від поля Янга—Міллса.

Формула (13.6.24) описує перетворення сфер $S_\infty^2 \rightarrow S_\phi^2$ і характеризується цілочисельним індексом Понтрягіна класу гомотопій хіггсівських полів. Таким чином, у загальному випадку одержуємо умову квантування

$$ge = 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (13.6.25)$$

яка є наслідком топології хіггсівських полів і аналогічна умові квантування діраківського монополя. Отже, якщо в теорії існує магнітний монополі з зарядом g і частинка з електричним зарядом q , то добуток цих зарядів дорівнює $gq = 2\pi$, або кратне 2π число, тобто маємо квантування електричного заряду. Для монополя 'т Хоофта—Полякова це автоматично виконується, оскільки електричні заряди всіх частинок в моделі Джорджі—Глешоу кратні $e/2$.

Зауважимо, що монополі виникають у будь-якій теорії, в якій компактна калібрувальна група G порушується до підгрупи $H \times U(1)$, де підгрупа

H однозв'язна. Наприклад, монополі існують в моделі Великого об'єднання з групою $SU(5)$, що розглядається в розділі 15.3, але відсутні в стандартній теорії електрослабких взаємодій, де група $SU(2) \times U(1)$ порушується до електромагнітної підгрупи $U(1)_{em}$, яка є некомпактною [163]. Маси монополів у моделях Великого об'єднання є величинами порядку 10^{15} — 10^{16} ГеВ. Проблема монополів у ранньому Всесвіті привела до розвитку інфляційних космологічних моделей [144]. Існування монополів мало б важливі наслідки для порушення закону збереження баріонного числа при розсіюванні ферміонів на монополях (ефект Рубакова—Калана [17, 57]).

Більше інформації про монополі та інші солітоноподібні розв'язки класичних рівнянь квантової теорії поля, топологію і класи гомотопій, а також посилання на оригінальні статті можна знайти в книжках [157, 169].

ЗАДАЧІ

1. Розглянути калібрувальну теорію з групою $SU(3)$, яка містить скалярне поле у приєднаному представленні. Кінетичний доданок має в цьому випадку вигляд:

$$\text{tr}[(D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi],$$

де $D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + ig[A_\mu, \Phi]$ — дія коваріантної похідної на поле у приєднаному представленні, $\Phi = \Phi^a T^a$, T^a — генератори групи. Нехай поле Φ набуває вакуумне середнє

$$\langle \Phi \rangle = \Phi_0 = |\phi| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

яке порушує початкову симетрію $SU(3)$ до симетрії $SU(2) \times U(1)$. Визначити, які з калібрувальних бозонів A_μ^a набувають масу та знайти їх.

2. Те ж саме завдання для випадку вакуумного середнього

$$\langle \Phi \rangle = \Phi_0 = |\phi| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку визначити також залишкову симетрію.

3. Розглянути калібрувальну теорію з групою $SU(3)$, яка містить скалярне поле у фундаментальному представленні з вакуумним середнім

$$\langle \Phi \rangle = \Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}.$$

Знайти спектр мас калібрувальних бозонів і залишкову симетрію.

4. Розгляньте $SU(5)$ калібрувальну теорію, яка взаємодіє зі скалярним полем Φ в приєднаному представленні, чий потенціал має мінімум, в якому скалярне поле Φ має ненульове вакуумне середнє. Для двох випадків вакуумного середнього

$$\langle \Phi \rangle = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \langle \Phi \rangle = B \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

знайти спектр калібрувальних бозонів і відповідну групу непорушеної симетрії.

5. Використовуючи підстановку (13.6.10) в рівняннях (13.6.6), (13.6.7), отримати рівняння (13.6.14), (13.6.15).
6. Довести вираз (13.6.4).
7. У моделі Джорджі—Глешоу (13.6.1) отримати стаціонарні рівняння руху, де поряд з анзацом (13.6.10) для пошуку сферично симетричних розв'язків присутня і ненульова компонента калібрувального поля $A_0^a(x) = (x^a / er^2) J(evr)$. Виписати функціонал енергії в термінах скалярних функцій H, K, J .
8. Тензор енергії-імпульсу в моделі Джорджі—Глешоу має вигляд

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \mathcal{L} + F_{\mu\lambda}^a F^{\lambda\nu a} + (D_\mu \phi)^a (D_\nu \phi)^a.$$

Для сферично симетричного анзацу монополя 'т Хоофта—Полякова, використовуючи формули (13.6.11), (13.6.12), отримати вирази для компонент T_{00}, T_{ij} в термінах скалярних функцій H, K .

СТАНДАРТНА МОДЕЛЬ СИЛЬНИХ І ЕЛЕКТРОСЛАБКИХ ВЗАЄМОДІЙ

Стандартна модель (СМ) описує всі відомі явища в фізиці частинок [61, 109, 118, 120, 152]. Вона є результатом досягнень кількох поколінь експериментаторів і теоретиків. Якщо до неї додати загальну теорію відносності, яка описує гравітаційну взаємодію, то Стандартна модель — це все, що ми знаємо на сьогодні про найбільш фундаментальні закони природи. В моделі присутні 6 лептонів (електрон, мюон, тау-лептон і три відповідні сорти нейтрино), а також 6 кварків (u, d, c, s, t, b), які об'єднуються в три покоління ферміонів. Частинки з однаковими квантовими числами відрізняються одна від одної значеннями маси в різних поколіннях. Наприклад, мюон має такі самі значення електромагнітного та слабких зарядів, що й електрон, але визначається більшою масою, ніж електрон. Калібрувальні бозони, а саме: фотон, глюони, W^{\pm} - і Z -бозони, відповідальні за електромагнітну, сильну і слабку взаємодії. Крім того, дублет хігсівських полів забезпечує спонтанне порушення електрослабкої симетрії і генерацію мас W^{\pm} -, Z -бозонів і ферміонів.

Сильні взаємодії описуються квантовою хромодинамікою, де обмін глюонами забезпечує взаємодію між кварками, з яких утворюються баріони і мезони. Баріони складаються з трьох кварків різних кольорів, утворюючи безкольоровий стан, мезони складаються з кварків і антикварків, які мають протилежні кольори, утворюючи знов безкольоровий стан. Сильні взаємодії є також відповідальними за утримання протонів і нейтронів в ядрах.

Електромагнітні взаємодії відповідальні за зв'язок електронів з ядрами в атомах або атомів у молекулах. Електромагнітні явища та електромагнітна взаємодія є базовими для наших найважливіших технологій і процесів, що оточують нас у повсякденному житті. Квантова електродинаміка є першим прикладом квантової теорії поля та джерелом багатьох понять, які згодом були використані при формулюванні інших квантово-польових теорій.

Слабкі взаємодії відповідають за процеси розпадів частинок, а також ядерні реакції в зорях. Найвідомішим проявом слабкої взаємодії є бета-розпад і пов'язана з ним радіоактивність. Процеси, зумовлені випромінен-

Сила взаємодій та радіус їх дії

| Взаємодія | Відносна сила | Область дії | Взаємодія | Відносна сила | Область дії |
|----------------------|--------------------------|--|---------------------------|----------------|------------------------------------|
| Гравітація Слабка | 10^{-41} 10^{-15} | ∞ $\ll 1 \text{ фм} = 10^{-13} \text{ см}$ | Електромагнітна Сильна | 10^{-2} 1 | ∞ $\approx 1 \text{ фм}$ |

ням, поглинанням або розсіянням нейтрино, завдячують слабкій взаємодії. У Стандартній моделі слабкі взаємодії об'єднуються з електромагнітними, і тому разом їх часто називають електрослабкі взаємодії.

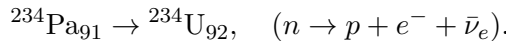
Стандартна модель є узагальненням квантової електродинаміки, тобто є перенормовною теорією поля, яка базується на локальній калібрувальній симетрії

$$SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1).$$

Відносна сила взаємодій при низьких енергіях дуже сильно відрізняється одна від одної і наведена у таблиці 2.

За силу взаємодії відповідають біжучі константи зв'язку, які залежать від енергії. Тому відносна сила взаємодій змінюється з енергією. Наприклад, при енергіях порядку електрослабкого фазового переходу $E \sim 246 \text{ ГеВ}$ електромагнітні та слабкі взаємодії, чия відносна сила значно відрізняється при низьких енергіях, мають приблизно однакову силу, а при планківських енергіях $E \sim 10^{19} \text{ ГеВ}$ відносна сила гравітаційної взаємодії стає порядку одиниці.

На відміну від сильних і електромагнітних взаємодій, слабкі взаємодії не утворюють зв'язаних станів елементарних частинок (вони принаймні невідомі на цей час). Фактично слабкі взаємодії були відкриті в 1896 р. Анрі Беккерелем. Радіоактивність урану — це бета-розпад, а точніше це розпад ізотопу протактинію



Дослідження випромінення β -розпаду показало, що енергетичний спектр неперервний, і оскільки енергії початкового і кінцевого ядра визначені, це становило загадку, для розв'язання якої Паулі запропонував гіпотезу про існування нейтрино.

14.1. Квантова хромодинаміка

Нагадаємо основні особливості теорії сильних взаємодій — квантової хромодинаміки (КХД). Лагранжіан теорії описує взаємодію кварків q_i (з $n_f = 3$ різних ароматів) з глюонами A_μ^a :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^8 F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \sum_{j=1}^{n_f} \bar{q}_j (i\gamma^\mu D_\mu - m_j) q_j, \quad (14.1.1)$$

де тензор напруженості

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c,$$

і коваріантна похідна

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s \sum_a t^a A_\mu^a.$$

Повністю антисиметричні коефіцієнти f_{abc} є структурними константами групи $SU(3)$, генератори t^a нормовані $\text{tr}[t^a t^b] = \delta^{ab}/2$. Кварки належать до фундаментального (триплетного) представлення групи $SU_c(3)$, глюони — до приєданого представлення. Маємо вершини взаємодії (фізичні): кварк-антикварк-глюон, 3-глюонна і 4-глюонна. Принциповою відмінністю КХД від квантової електродинаміки є те, що глюони взаємодіють між собою внаслідок того, що $SU(3)$ є неабелевою групою, і тому структурні константи групи відмінні від нуля. В квантовій електродинаміці фотон взаємодіє з усіма зарядженими частинками, але сам є нейтральним. В КХД глюони мають кольоровий заряд і взаємодіють з усіма частинками, що мають кольоровий заряд, а також між собою.

Як динамічна теорія квантова хромодинаміка характеризується явищами конфайнменту (всі асимптотичні стани є синглетами відносно кольорового заряду, тобто безкольоровими), динамічного порушення кіральної симетрії та асимптотичної свободи. У вільному стані кварки і глюони не спостерігаються внаслідок сильної взаємодії на більших, ніж 1 фм відстанях, вони зв'язані в адрони і мезони; адрони складаються зазвичай з трьох кварків, а мезони — з кварка і антикварка. Відповідний кварковий склад баріонів і мезонів наведено в розділі 4.1.

У теорії поля константа взаємодії модифікується за рахунок взаємодії і стає залежною від переданого квадрата імпульсу Q^2 (див. розділ 10.4),

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\pi}{b \ln(Q^2/\Lambda^2)}, \quad \alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}, \quad b = \frac{11N_c - 2n_f}{6}. \quad (14.1.2)$$

В КХД число кольорів $N_c = 3$ і число ароматів (флейворів) $n_f = 6$, Λ — параметр КХД, приблизно ~ 250 МеВ.

Ефективна константа взаємодії (14.1.2) в КХД прямує до нуля при великих імпульсах (малих відстанях), коли $Q^2 \rightarrow \infty$ внаслідок того, що поляризація вакууму віртуальними кварками і глюонами стає менш ефективною. Це є висвітлене у попередніх розділах явище асимптотичної свободи: кварки слабо взаємодіють на малих відстанях. На малих відстанях потенціал між двома кольоровими зарядами подібний до кулонівського потенціалу, тобто пропорційний $\alpha_s(r)/r$, з ефективним кольоровим зарядом, що зменшується при $r \rightarrow 0$. Водночас формула (14.1.2) показує, що взаємодія між кварками починає зростати, коли Q^2 зменшується, тобто коли

відстань між ними зростає. Це приводить до можливості утворення зв'язаних станів (нагадаємо, що спостережувані адрони є сильно зв'язаними станами кварків). Явище відсутності кварків у вільному стані отримало назву конфайнменту, яке підтверджується експериментально, але точного математичного доведення в КХД досі не існує.

Одним із експериментальних свідчень конфайнменту є утворення так званих адронних струменів у процесі анігіляції електрон-позитронної пари в пару кварк-антикварк, $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$. Дійсно, енергія взаємодії між кварком і антикварком зростає зі збільшенням відстані між ними, аж поки стає енергетично вигідним народження нової кварк-антикваркової пари. Утворені кварки рухаються переважно в тих самих напрямках, що й початкові. В результаті процес народження кварк-антикваркової пари може повторитись. Таким чином, виникають адронні струмені, які складаються з адронів, що летять у двох протилежних напрямках з маленьким кутром розходження. При випромінненні гальмівного глюона може виникнути ще третій струмінь і так далі, але ймовірність таких процесів зменшується із збільшенням кількості струменів.

14.2. Теорія Фермі і лагранжіан електрослабких взаємодій

Перша теорія слабких взаємодій була побудована Фермі в 1934 р. з гамільтоніаном, який містить локальну чотириферміонну взаємодію

$$H_F = H_n^0 + H_p^0 + H_e^0 + H_\nu^0 + \sum_i C_i G_F \int d^3x (\bar{\psi}_p O_i \psi_n) (\bar{\psi}_e O_i \psi_\nu),$$

де набір 16 діраківських матриць наведений в таблиці 3. У доданку взаємодії присутні відомі тоді поля протонів, нейтронів, електронів, а також гіпотетичного на той час нейтрино. Перші чотири доданки в гамільтоніані є вільними гамільтоніанами цих полів. Звернемо увагу, що константа взаємодії Фермі G_F має масову розмірність m^{-2} , тобто теорія Фермі є

Т а б л и ц я 3

Вілінійні форми Дірака

| O_i | Властивості перетворення $\bar{\psi} O_i \psi$ | Число матриць |
|--|--|---------------|
| 1 | Скаляр | 1 |
| γ^μ | Вектор | 4 |
| $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ | Тензор | 6 |
| $\gamma^\mu \gamma_5$ | Аксіальний вектор | 4 |
| $\gamma_5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ | Псевдоскаляр | 1 |

неперенормовною. З сучасної точки зору теорія Фермі описує процес обміну віртуальними W^\pm -бозонами і є застосовною для реакцій з енергіями, меншими приблизно 300 ГеВ. Константа зв'язку, яку знаходять з експериментальних даних, має значення

$$G_F \approx 10^{-4} \text{ MeV} \cdot \text{фм}^3,$$

або в природних одиницях

$$G_F = 1.166 \times 10^{-11} (\text{MeV})^{-2} \approx 10^{-5} m_p^{-2}, \quad (14.2.1)$$

де m_p — маса протона. У Стандартній моделі константа Фермі виражається через вакуумне середнє хіггсівського поля $G_F = 1/(\sqrt{2}v^2)$. Згодом, після відкриття мюонів і дивних частинок, теорія Фермі була узагальнена на випадок реакцій з цими частинками. Приклади слабких розпадів мюонів, піонів та каонів є такими

$$\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \bar{\nu}_\mu/\nu_\mu + \nu_e/\bar{\nu}_e,$$

$$\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu/\bar{\nu}_\mu,$$

$$K^\pm \rightarrow \pi^0 + \mu^\pm + \nu_\mu/\bar{\nu}_\mu,$$

$$K^0 \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e.$$

Важливою характеристикою слабкої взаємодії є те, що вона порушує парність (Лі, Янг, 1956 р., Ву, 1957 р.) оскільки через заряджені струми взаємодіють тільки ферміони з лівою кіральністю і античастинки ферміонів із правою кіральністю. Математично це описується встановленою на початку 60-х років формою універсальної взаємодії Фермі як V—A теорії, тобто взаємодія має вигляд струм \times струм, а самі струми є суперпозицією векторного $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ і аксіального $\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ струмів

$$(\bar{\psi}_p\gamma_\mu(1 - \gamma_5)\psi_n)(\bar{\psi}_e\gamma^\mu(1 - \gamma_5)\psi_\nu)$$

(Фейнман, Гелл-Манн, 1958 р.). Присутність матриці γ_5 відповідальна за порушення парності.

Більш точно слабка взаємодія (β -розпад) описується гамільтоніаном

$$H_{\text{int}} = \frac{G}{\sqrt{2}} \int d^3x [\bar{\psi}_p\gamma_\mu(C_V + C_A\gamma_5)\psi_n][\bar{\psi}_e\gamma^\mu(1 - \gamma_5)\psi_\nu] + \text{h.c.}, \quad (14.2.2)$$

де h.c. означає ермітово спряжений доданок. Оскільки маємо тільки ліві нейтрино ($P_L = (1 - \gamma_5)/2$ є проектором на стан з лівою кіральністю) і експериментально відношення аксіальної і векторної констант взаємодії $C_A/C_V \simeq -1,255 \pm 0,006$, то слабкий струм для адронів є близьким до чисто лівого.

Квантові числа лептонів

| Квантове число | e^- | e^+ | ν_e | $\bar{\nu}_e$ | μ^- | μ^+ | ν_μ | $\bar{\nu}_\mu$ | τ^- | τ^+ | ν_τ | $\bar{\nu}_\tau$ |
|----------------|-------|-------|---------|---------------|---------|---------|-----------|-----------------|----------|----------|------------|------------------|
| l_e | +1 | -1 | +1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| l_μ | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 | -1 | +1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| l_τ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 | -1 | +1 | -1 |

У 1962 р. експериментально було показано що існує два типа нейтрино, ν_e і ν_μ (Ледерман, Штейнбергер, 1962 р.), і підтверджено збереження окремо електронного, l_e , і мюонного, l_μ , квантового числа (передбаченого Швінгером і Нішіджимою, 1957 р.), тому що експериментально спостерігались розпади $\mu \rightarrow e + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$, в яких зберігаються лептонні квантові числа, але немає розпадів $\mu \rightarrow e + \gamma$, де ці квантові числа не зберігаються. Також, коли мюонні нейтрино взаємодіють з матерією, вони народжують мюони, але ніколи електрони:

$$\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p, \quad \nu_\mu + n \not\rightarrow e^- + p. \quad (14.2.3)$$

Електронні і мюонні квантові числа представлені в таблиці 4. З відкриттям τ -лептона і τ -нейтрино додався ще закон збереження відповідного квантового числа. Лептонні заряди кожного покоління лептонів зберігалися б незалежно, якби маса нейтрино дорівнювала нулю. Однак експериментально спостережувані осциляції нейтрино свідчать про те, що маси нейтрино відмінні від нуля, хоча їх природа поки що невідома.

Слабкі взаємодії лептонів описуються гамільтоніаном взаємодії

$$H_{\text{int}}^{(L)} = \frac{G}{\sqrt{2}} \int d^3x J_\mu^{(L)\dagger}(x) J_\mu^{(L)}(x), \quad (14.2.4)$$

де лептонний струм має вигляд

$$J_\mu^{(L)}(x) = \bar{\psi}_e(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e}(x) + \bar{\psi}_\mu(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_\mu}(x) + \bar{\psi}_\tau(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_\tau}(x). \quad (14.2.5)$$

Знов звернемо увагу на те, що слабкий струм для лептонів є чисто лівим. Прикладами можливих взаємодій є:

1) Розсіяння нейтрино на електроні

$$[\bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_\nu] [\bar{\psi}_\nu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_e] \quad \begin{array}{ccc} \nu_e & \longrightarrow & e^- \\ e^- & \longrightarrow & \nu_e \end{array} \quad (14.2.6)$$

2) Розпад мюона

$$[\bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_\mu] [\bar{\psi}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e}] \quad \begin{array}{c} \mu^- \longrightarrow \\ \longrightarrow \nu_\mu \\ \longleftarrow \bar{\nu}_e \\ \longrightarrow e^- \end{array} \quad (14.2.7)$$

3) Народження мюона

$$[\bar{\psi}_{\nu_e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_e] [\bar{\psi}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_\mu}] \quad \begin{array}{c} \nu_\mu \longrightarrow \\ \longrightarrow \mu^- \\ \longrightarrow \nu_e \\ e^- \longrightarrow \end{array} \quad (14.2.8)$$

У теорії Фермі немає процесів типу

$$[\bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_\mu}] [\bar{\psi}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_e] \quad \begin{array}{c} \nu_\mu \longrightarrow \\ \longrightarrow e^- \\ \longrightarrow \nu_\mu \\ e^- \longrightarrow \end{array}, \quad (14.2.9)$$

в яких беруть участь нейтральні струми. Але вони з'являються в Стандартній моделі, де відповідні процеси зумовлені обміном Z -бозоном. Перерізи таких процесів зовсім малі при невеликих енергіях: $\sigma \sim 10^{-41} - 10^{-44} \text{ см}^2$ ($10^{-17} - 10^{-20}$ барн), наприклад, відношення перерізу розсіяння мюонного нейтрино до його енергії

$$\frac{1}{E_{\nu_\mu}} \sigma(\nu_\mu e^- \rightarrow \nu_\mu e^-) = (1,45 \pm 0,26) \cdot 10^{-42} \text{ см}^2/\text{Гев}.$$

Теорія Фермі добре працювала при невеликих енергіях, але, як ми знаємо, ця теорія є неперенормовною, оскільки константа Фермі G_F має розмірність $[\text{маса}]^{-2}$. Ряд теорії збурень за степенями G_F в ній є одночасно рядом за позитивними степенями енергії, тобто безрозмірним параметром розкладу за теорією збурень є $G_F \Lambda^2$, де Λ — ультрафіолетове обрізання за енергією. Будь-яка амплітуда в теорії Фермі виявляється розбіжною, починаючи з деякого члена ряду теорії збурень, тобто не може бути обчислена. Петльові поправки до амплітуд розсіяння досягають величин, порівняних з деревними виразами при обрізанні $\Lambda \approx 1/\sqrt{G_F} \approx 300 \text{ Гев}$, що пояснює досить успішний опис експериментальних даних деревними формулами при низьких енергіях.

Перейдемо тепер до розгляду сучасної теорії електрослабких взаємодій. Наприкінці 1960-х років Вайнбергом, Глешоу і Саламом була побудована єдина теорія електромагнітної і слабкої взаємодії. Відповідна лагранжева густина електрослабких взаємодій інваріантна відносно калібрувальної групи $SU_L(2) \times U_Y(1)$ і містить три доданки

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}. \quad (14.2.10)$$

Кінетична частина

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + \bar{\psi}_L i\gamma^\mu D_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu D_\mu \psi_R \quad (14.2.11)$$

описує взаємодію калібрувальних полів A_μ^a і B_μ з ферміонами. Тензори напруженості мають вигляд

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\varepsilon_{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \quad a = 1, 2, 3, \quad (14.2.12)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (14.2.13)$$

У кіральному представленні, де матриця γ_5 діагональна

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

визначимо ліві і праві (двокомпонентні) ферміони

$$\psi_{L,R} = P_\mp \psi, \quad \bar{\psi}_{L,R} = \bar{\psi} P_\pm, \quad (14.2.14)$$

де проєктори мають властивості

$$P_\pm = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}, \quad P_\pm^2 = P_\pm, \quad P_\pm P_\mp = 0, \quad P_+ + P_- = I. \quad (14.2.15)$$

Чотирикомпонентний ферміон складається з лівих і правих двокомпонентних ферміонів

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}.$$

Стандартна модель є кіральною теорією в тому сенсі, що ψ_L і ψ_R мають різні властивості по відношенню до перетворень із калібрувальної групи $SU(2)$: всі ψ_L — дублети, тоді як ψ_R — синглети. Стандартний масовий доданок для діраківського поля в термінах лівих і правих полів записується як

$$m\bar{\psi}\psi = m\bar{\psi}(P_+ + P_-)\psi = m\bar{\psi}(P_+^2 + P_-^2)\psi = m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L). \quad (14.2.16)$$

Масовий доданок зв'язує ліві і праві поля, які по-різному перетворюються при перетвореннях із калібрувальної групи. Внаслідок цього такі масові доданки заборонені, тому що порушують $SU_L(2)$ симетрію, яка діє тільки на ліві ферміони. Також і масові доданки для A_μ^a і B_μ полів заборонені локальною $SU_L(2) \times U_Y(1)$ симетрією. Це означає, що всі ферміони і калібрувальні бозони були б безмасовими, якби не спонтанне порушення $SU_L(2) \times U_Y(1)$ симетрії в Стандартній моделі.

Коваріантна похідна діє на ліві і праві ферміони за правилом

$$D_\mu \psi_{L,R} = [\partial_\mu - igt_{L,R}^a A_\mu^a - ig'Y_{L,R} B_\mu] \psi_{L,R}, \quad (14.2.17)$$

де генератори $SU(2)$ алгебри задовольняють

$$[t_{L,R}^a, t_{L,R}^b] = i\varepsilon_{abc}t_{L,R}^c,$$

а 2×2 матриці $Y_{L,R}$ пропорційні одиничній матриці. Зауважимо, що для правих ферміонів завжди $t_R\psi_R = 0$, тобто вони взаємодіють лише з калібрувальним полем B_μ ,

$$D_\mu\psi_R = [\partial_\mu - ig'Y_R B_\mu]\psi_R. \quad (14.2.18)$$

Наступні два доданки описують взаємодію поля Хіггса з калібрувальними полями і ферміонами

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = & (D_\mu\Phi)^*(D^\mu\Phi) + \mu^2\Phi^*\Phi - \frac{\lambda}{2}(\Phi^*\Phi)^2 - \\ & - g_Y(\bar{\psi}_L\Phi\psi_R + \bar{\psi}_R\Phi^\dagger\psi_L), \end{aligned} \quad (14.2.19)$$

де коваріантна похідна діє на скалярне поле за правилом

$$D^\mu\Phi = [\partial_\mu - igt^a A_\mu^a - ig'Y B_\mu]\Phi, \quad (14.2.20)$$

а матриця Y пропорційна одиничній матриці. Потенціальна функція поля Хіггса $U(\Phi) = -\mu^2\Phi^*\Phi + \frac{\lambda}{2}(\Phi^*\Phi)^2$ вибирається у формі, яка приводить до спонтанного порушення симетрії $SU_L(2) \times U_Y(1)$ внаслідок від'ємного значення масового доданка $-\mu^2\Phi^*\Phi$. Звернемо увагу ще раз, що лагранжіан електрослабких взаємодій не містить масових доданків для векторних і ферміонних полів, вони заборонені $SU_L(2) \times U_Y(1)$ симетрією, і маси цих полів будуть виникати у подальшому за рахунок механізму спонтанного порушення симетрії.

14.3. Маса калібрувальних бозонів в електрослабких взаємодіях

Розглянемо спочатку хіггсівський сектор моделі, який приводить до генерації мас калібрувальних бозонів і ферміонів. Скалярне поле належить до фундаментального представлення групи $SU(2)$,

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Phi^\dagger \\ \Phi_0 \end{pmatrix}, \quad (14.3.1)$$

тобто є дублетом відносно $SU(2)$. Дія коваріантної похідної на дублет визначається рівнянням

$$D_\mu\Phi = \left(\partial_\mu - igA_\mu^a\tau^a - \frac{i}{2}g'B_\mu \right)\Phi,$$

де коефіцієнт (надалі гіперзаряд) перед полем B_μ вибирається (за згодою) рівним $1/2$ для хіггсівського поля, $\tau^a = \sigma^a/2$ — генератори групи $SU(2)$

у фундаментальному представленні. Мінімум потенціалу поля Φ зручно вибрати без втрати загальності у формі

$$\Phi_0 = \langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}. \quad (14.3.2)$$

Маси векторних полів виникають з кінетичного доданка поля Φ , який для вакуумного значення Φ_0 приймає вигляд

$$\Delta\mathcal{L}_{\text{mass}} = \frac{1}{2}(0, v) \left(gA_\mu^a \tau^a + \frac{1}{2}g'B_\mu \right) \left(gA^{b\mu} \tau^b + \frac{1}{2}g'B^\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (14.3.3)$$

Записуючи

$$gA_\mu^a \tau^a + \frac{g'}{2}B_\mu = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} gA_\mu^3 + g'B_\mu & g'A_\mu^1 - igA_\mu^2 \\ g'A_\mu^1 + igA_\mu^2 & -gA_\mu^3 + g'B_\mu \end{pmatrix}, \quad (14.3.4)$$

знаходимо квадратичну форму для полів A_μ^a і B_μ :

$$\Delta\mathcal{L}_{\text{mass}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{4} [g^2(A_\mu^1)^2 + g^2(A_\mu^2)^2 + (-gA_\mu^3 + g'B_\mu)^2]. \quad (14.3.5)$$

У матричному вигляді

$$\Delta\mathcal{L}_{\text{mass}} = \frac{v^2}{8} (A_\mu^1, A_\mu^2, A_\mu^3, B_\mu) \begin{pmatrix} g^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^2 & -gg' \\ 0 & 0 & -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu^1 \\ A_\mu^2 \\ A_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}. \quad (14.3.6)$$

Масова матриця має власні значення g^2 , g^2 , $g^2 + g'^2$, 0 , тобто три поля набувають маси, а одне залишається безмасовим. Визначимо поля

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 \mp iA_\mu^2).$$

Квадратична по A_μ^3 і B_μ форма діагоналізується за допомогою підстановок

$$Z_\mu^0 = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(gA_\mu^3 - g'B_\mu), \quad A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(g'A_\mu^3 + gB_\mu). \quad (14.3.7)$$

Корисними є також обернені співвідношення

$$A_\mu^3 = \frac{gZ_\mu^0 + g'A_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad B_\mu = \frac{gA_\mu - g'Z_\mu^0}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (14.3.8)$$

У термінах нових полів W_μ^\pm , Z_μ^0 і A_μ квадратична форма (14.3.5) запишеться

$$\Delta\mathcal{L}_{\text{mass}} = m_W^2 W_\mu^+ W_\mu^- + \frac{1}{2}m_Z^2 (Z_\mu^0)^2, \quad (14.3.9)$$

де маси W - і Z -бозонів визначаються вакуумним середнім скалярного поля:

$$m_W = \frac{gv}{2}, \quad m_Z = \sqrt{g^2 + g'^2} \frac{v}{2}, \quad (14.3.10)$$

і для мас Z - і W -бозонів маємо нерівність $m_Z > m_W$. Поле A_μ залишається безмасовим і ототожнюється з електромагнітним полем. Таким чином, у Стандартній моделі має місце спонтанне порушення симетрії $SU_L(2) \times U_Y(1) \rightarrow U_{em}(1)$.

Зручно використовувати далі саме поля W_μ^\pm , Z_μ^0 , A_μ , які є власними станами масової матриці. Коваріантна похідна, що діє на ферміони, в термінах цих полів запишеться як

$$D_\mu = \partial_\mu - i \frac{g}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ t^+ + W_\mu^- t^-) - i \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} Z_\mu^0 (g^2 t_3 - g'^2 Y) - i \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} A_\mu (t_3 + Y), \quad (14.3.11)$$

де $t^\pm = t_1 \pm it_2$. У спірному представленні групи $SU(2)$

$$t^\pm = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2), \quad t^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_3 = \frac{\sigma_3}{2}.$$

Ми також використали зв'язок початкових полів A_μ^a і B_μ з фізичними полями W_μ^\pm ,

$$A_\mu^1 = \frac{W_\mu^+ + W_\mu^-}{\sqrt{2}}, \quad A_\mu^2 = i \frac{W_\mu^+ - W_\mu^-}{\sqrt{2}}, \quad (14.3.12)$$

а також полями Z_μ^0 і A_μ (14.3.8). Доданок, пропорційний $A_\mu(t_3 + Y)$ явно вказує на те, що безмасовий калібрувальний бозон A_μ відповідає саме генератору $\sigma_3/2 + Y$, який породжує калібрувальне перетворення скалярного поля

$$\Phi \rightarrow e^{i\alpha\sigma_3/2} e^{i\alpha/2} \Phi,$$

де гіперзаряд скалярного поля вибраний $Y = 1/2$, гіперзаряди інших полів будуть визначені нижче. Ототожнимо електричний заряд з функцією констант взаємодії g і g' ,

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad (14.3.13)$$

а генератор електричного заряду визначимо таким чином

$$Q = t_3 + Y. \quad (14.3.14)$$

Ліві поля лептонів і кварків належать до фундаментального (дублетного) представлення $SU_L(2)$:

$$L^e = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad L^\mu = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \quad L^\tau = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L, \quad (14.3.15)$$

$$Q_L^1 = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad Q_L^2 = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \quad Q_L^3 = \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L. \quad (14.3.16)$$

Як ми відзначали раніше, для правих полів $t_3\psi_R = 0$, тобто праві поля

$$e_R, \mu_R, \tau_R, u_R, d_R, c_R, s_R, t_R, b_R \quad (14.3.17)$$

є синглетами відносно $SU_L(2)$. Правильне значення електричного заряду для лівих лептонів e_L, μ_L, τ_L отримуємо, якщо для них покласти $Y = -1/2$:

$$Qe_L = (\sigma_3/2 - 1/2)e_L = -e_L.$$

Водночас для лівих кварків необхідно взяти $Y = \frac{1}{6}$, щоб мати правильні заряди:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. \quad (14.3.18)$$

Для правих полів необхідно покласти

$$Ye_R^- = -1 \cdot e_R^-, \quad (14.3.19)$$

тобто $Y = -1$, оскільки заряд електрона у цьому випадку співпадає з гіперзарядом. Аналогічно $Y = \frac{2}{3}$ для правих кварків u_R, c_R, t_R і $Y = -\frac{1}{3}$ для d_R, s_R, b_R . Легко бачити, що нейтрино є нейтральними ($Q = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$). Донедавна вважалося, що поля правих нейтрино відсутні, тому в Стандартній моделі їх немає.

Відзначимо також важливий факт, що сума зарядів для кожної сім'ї (кварки + лептони) дорівнює нулю:

$$\sum_{\text{дублети}} Q = 0, \quad \sum_{\text{синглети}} Q = 0. \quad (14.3.20)$$

Цей факт відіграє важливу роль для скорочення калібрувальних аномалій, присутність яких зробило б теорію неперенормовною.

14.3.1. Скорочення аномалій кіральних калібрувальних симетрій

У Стандартній моделі частина калібрувальних симетрій є кіральними і потенційно можуть мати квантові аномалії. Тому варто розглянути їх більш детально та показати, що вони скорочуються. Стандартна модель має два струми ферміонних полів, які пов'язані з групами калібрувальних симетрій $SU_L(2)$ та $U_Y(1)$:

$$j_{\mu L}^a = \bar{\psi}_L T^a \gamma_\mu \psi_L = \frac{1}{2} \bar{\psi} T^a \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi, \quad (14.3.21)$$

$$j_{\mu Y} = \bar{\psi}_L Y_L \gamma_{\mu} \psi_L + \bar{\psi}_R Y_R \gamma_{\mu} \psi_R = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma_{\mu} Y_1 \psi + \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma_{\mu} \gamma_5 Y \psi, \quad (14.3.22)$$

де

$$Y_1 = \begin{pmatrix} Y_R & 0 \\ 0 & Y_L \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_R & 0 \\ 0 & -Y_L \end{pmatrix}.$$

Тут T^a є генераторами групи $SU_L(2)$, а Y_L і Y_R — операторами гіперзаряду лівих та правих полів відповідно. Кіральна аномалія калібрувальних струмів визначається формулою (9.6.33), де ключова роль належить коефіцієнтам $d_{abc} = \text{tr}(T_a \{T_b, T_c\})$.

Згідно з формулою (9.6.34), киральний струм при дії на нього коваріантної похідної повинен дорівнювати нулю $D^{ab\mu} j_{\mu}^b = 0$, для того щоб рівняння руху для калібрувальних полів були несуперечливими. Оскільки киральна аномалія визначається коефіцієнтами d_{abc} , це означає, що необхідно показати, що ці коефіцієнти дорівнюють нулю для $SU_L(2)$ і $U_Y(1)$ калібрувальних симетрій у Стандартній моделі.

Отже, ми повинні розглянути випадки, коли генератор T^a може бути або генератором групи $SU_L(2)$, або гіперзарядом Y групи $U(1)$. Оскільки для $SU(2)$ групи квантові аномалії відсутні, необхідно розглянути випадки, коли один, два або три генератора T^a замінюються на гіперзаряд Y у формулі для d_{abc} . Випадок, коли є два генератора Y , легко проаналізувати, тому що всі стани кожного $SU(2)$ -мультиплету мають одне й те саме значення гіперзаряду. В результаті

$$\text{tr}(\tau^a Y Y) \sim \text{tr}(\tau^a) = 0.$$

Якщо тільки один генератор є гіперзарядом маємо

$$\text{tr}(\{\tau^a, \tau^b\} Y) = 2\delta^{ab} \text{tr}(Y).$$

Таким чином, аномалія зводиться до сліду матриці Y (суми гіперзарядів усіх ферміонів)

$$\text{tr}(Y) = \sum_i Y_i = \sum_{\text{leptons}} Y + \sum_{\text{quarks}} Y.$$

Цей слід дорівнює нулю $\text{tr}(Y) = 0$ для кожного покоління

$$\sum_{\text{leptons}} Y = -\frac{1}{2} \times 2 - 1 = -2, \quad \sum_{\text{quarks}} Y = 3 \left(\frac{1}{6} \times 2 + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) = 2,$$

де множник 3 перед дужками враховує три кольорові ступені вільності.

Для того щоб показати, що аномалія відсутня у випадку, коли всі три генератори є оператором гіперзаряду Y , необхідно підрахувати для кожного покоління

$$\text{tr}(Y^3) = \text{tr} Y_R^3 - \text{tr} Y_L^3,$$

знаходимо

$$\sum_{\text{leptons}} \text{tr}(Y^3) = (-1)^3 - 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{3}{4},$$

$$\sum_{\text{quarks}} \text{tr}(Y^3) = 3 \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 2 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \right] = \frac{3}{4}.$$

Таким чином, ця аномалія також зникає. В результаті ми довели, що всі кіральні калібрувальні аномалії скорочуються в Стандартній моделі. Несуперечність СМ означає, що кварки і лептони в природі задовольняють певні умови для кожного покоління. Відсутність, наприклад, одного з кварків зробило б теорію суперечливою.

14.3.2. Кут змішування Вайнберга та електрослабкі взаємодії ферміонів

Зручно ввести кут слабого змішування θ_W , відомий як кут Вайнберга, записавши (14.3.7) у вигляді

$$\begin{pmatrix} Z^0 \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^3 \\ B \end{pmatrix}, \quad (14.3.23)$$

де

$$\cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad (14.3.24)$$

тоді електричний заряд

$$e = g \sin \theta_W. \quad (14.3.25)$$

Записуючи,

$$g^2 t_3 - g'^2 Y = (g^2 + g'^2) t_3 - g'^2 Q, \quad Q = t_3 + Y, \quad (14.3.26)$$

для коваріантної похідної маємо

$$D_\mu = \partial_\mu - i \frac{g}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ t^+ + W_\mu^- t^-) - i \frac{g}{\cos \theta_W} Z_\mu^0 (t_3 - \sin^2 \theta_W Q) - ie A_\mu Q. \quad (14.3.27)$$

Таким чином, константи взаємодії g і g' виражаються через вимірювані величини: заряд електрона і кут змішування. Маси масивних бозонів зв'язані співвідношенням

$$m_W = m_Z \cos \theta_W, \quad (14.3.28)$$

тобто Z -бозон є важчим за W -бозон. Експериментально кут Вайнберга дорівнює

$$\sin^2 \theta_W = 0,22339 \pm 0,00010, \quad (14.3.29)$$

і маси векторних бозонів

$$M_Z = 91,1876 \pm 0,0021 \text{ ГеВ}, \quad M_W = 80,379 \pm 0,012 \text{ ГеВ}, \quad (14.3.30)$$

звідки знаходимо вакуумне середнє $v \simeq 246 \text{ ГеВ}$.

Важливою характеристикою є так званий ρ -параметр

$$\rho = \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta_W} = 1 + \mathcal{O}(\alpha). \quad (14.3.31)$$

Його значення перевірено на експерименті з точністю, кращою 1 %, тобто до рівня однопетльових радіаційних поправок. Маси заряджених лептонів і кварків станом на 2022 р. (Particle Data Group — <http://pdg.lbl.gov>) наведені в таблиці 5. Оскільки кварки не існують у вільному стані, то їх маси визначаються спеціальним чином. Маси легких кварків u, d, s визначаються як значення ренормгрупової масової функції в схемі перенормування незалежної від мас, такої як $\overline{\text{MS}}$ -схема, для енергії $\mu = 2$ ГеВ: $m_i = m_i(\mu = 2 \text{ ГеВ})$, $i = u, d, s$. Маси важких кварків c, b, t визначаються як значення ренормгрупової масової функції для енергії, яка дорівнює масі цього кварка: $m_i = m_i(\mu = m_i)$, $i = c, b, t$.

Усі кварки і лептони групуються в три покоління, де нижній індекс позначає гіперзаряд частинок:

$$Q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{+1/6}^L \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_{+1/6}^L \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_{+1/6}^L$$

$$E_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_{-1/2}^L \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_{-1/2}^L \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_{-1/2}^L$$

$$u_{2/3}^R \quad c_{2/3}^R \quad t_{2/3}^R$$

$$d_{-1/3}^R \quad s_{-1/3}^R \quad b_{-1/3}^R$$

$$e_{-1}^R \quad \mu_{-1}^R \quad \tau_{-1}^R.$$

У цьому списку немає правих нейтрино $\nu_e^R, \nu_\mu^R, \nu_\tau^R$. Вони поки що експериментально не спостерігались, хоча вони, ймовірно, необхідні для опису мас у нейтрино. Інша можливість забезпечити ненульові маси нейтрино — це присутність так званої майоранівської маси для чисто лівих нейтрино, яка буде розглянута нижче.

Для одного покоління кінетична частина в лагранжіані для ферміонів запишеться

$$\mathcal{L}_f = \bar{E}_L i \hat{D} E_L + \bar{e}_R i \hat{D} e_R + \bar{Q}_L i \hat{D} Q_L + \bar{u}_R i \hat{D} u_R + \bar{d}_R i \hat{D} d_R. \quad (14.3.32)$$

Т а б л и ц я 5

Маси заряджених лептонів і кварків

| Частинка | Маса (МеВ) |
|----------|---------------------------------|
| e | $0,5109989461 \pm 0,0000000031$ |
| μ | $105,6583745 \pm 0,00000024$ |
| τ | $1776,86 \pm 0,12$ |
| u | $2,16_{-0,26}^{+0,49}$ |
| d | $4,67_{-0,17}^{+0,48}$ |
| s | $93,4_{-3,4}^{+8,6}$ |
| c | 1270 ± 20 |
| b | 4180_{-20}^{+30} |
| t | $172\,690 \pm 300$ |

При цьому в коваріантній похідній використовуються відповідні значення гіперзаряду Y , наприклад,

$$\begin{aligned}\bar{E}_L i \hat{D} E_L &= \bar{E}_L i \gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig A_\mu^a t^a + i \frac{1}{2} g' B_\mu \right) E_L, \\ \bar{Q}_L i \hat{D} Q_L &= \bar{Q}_L i \gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig A_\mu^a t^a - i \frac{1}{6} g' B_\mu \right) Q_L.\end{aligned}$$

Перепишемо \mathcal{L}_f , використовуючи власні стани векторних бозонів, тобто поля W_μ^\pm , Z_μ^0 , A_μ . Маємо

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_f &= \bar{E}_L i \hat{\partial} E_L + \bar{e}_R i \hat{\partial} e_R + \bar{Q}_L i \hat{\partial} Q_L + \bar{u}_R i \hat{\partial} u_R + \bar{d}_R i \hat{\partial} d_R + \\ &+ g(W_\mu^+ J_W^{\mu+} + W_\mu^- J_W^{\mu-} + Z_\mu^0 J_Z^\mu) + e A_\mu J_{em}^\mu,\end{aligned}\quad (14.3.33)$$

де струми задаються виразами:

$$J_W^{\mu+} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\bar{\nu} \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} e + \bar{u} \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} d \right], \quad (14.3.34)$$

$$J_W^{\mu-} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L), \quad (14.3.35)$$

$$\begin{aligned}J_Z^\mu &= \frac{1}{\cos \theta_W} \left[\bar{\nu}_L \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} \right) \nu_L + \bar{e}_L \gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W \right) e_L + \bar{e}_R \gamma^\mu (\sin^2 \theta_W) e_R + \right. \\ &+ \bar{u}_L \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right) u_L + \bar{u}_R \gamma^\mu \left(-\frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right) u_R + \\ &+ \left. \bar{d}_L \gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W \right) d_L + \bar{d}_R \gamma^\mu \left(\frac{1}{3} \sin^2 \theta_W \right) d_R \right],\end{aligned}\quad (14.3.36)$$

$$J_{em}^\mu = \bar{e} \gamma^\mu (-1) e + \bar{u} \gamma^\mu \left(\frac{2}{3} \right) u + \bar{d} \gamma^\mu \left(-\frac{1}{3} \right) d. \quad (14.3.37)$$

Струм J_{em}^μ , який описує взаємодію заряджених частинок з фотоном, дійсно співпадає зі звичайним електромагнітним струмом.

14.4. Масові доданки ферміонів

Розглянемо тепер взаємодію скалярного поля з ферміонами, яка задається в лагранжіані доданком

$$\Delta \mathcal{L}_e = -g_e (\bar{E}_L \Phi e_R + \bar{e}_R \Phi^\dagger E_L), \quad (14.4.1)$$

де g_e — константа взаємодії. Це взаємодія того самого типу, що була запропонована Юкавою для опису взаємодії нуклонів з піонами. Вираз (14.4.1) очевидно є інваріантним відносно групи $SU_L(2)$, оскільки маємо скалярний добуток комплексних дублетів: відбувається підсумовування по індексам $SU(2)$ групи ($\bar{E}_L \Phi \equiv \bar{E}_{Li} \Phi_i$). Гіперзаряд хіггсівського дублета $Y = 1/2$. Видно, що гіперзаряд $\Delta \mathcal{L}_e$ дорівнює нулю.

При спонтанному порушенні симетрії ферміони набувають масу діраківського типу

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta \mathcal{L}_e = -\frac{g_e v}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) = -\frac{g_e v}{\sqrt{2}} \bar{e} e. \quad (14.4.2)$$

Обидва поля e_L і e_R беруть участь у формуванні маси. Маса електрона визначається вакуумним середнім v ,

$$m_e = \frac{g_e v}{\sqrt{2}}. \quad (14.4.3)$$

З експериментально визначеного відношення мас $\frac{m_e}{m_W} \sim 6 \cdot 10^{-6}$ випливає, що константа g_e повинна бути малою.

Аналогічно для кварків взаємодія з хігсівським полем також є юкавівського типу

$$\Delta \mathcal{L}_q = -g_d \bar{Q}_L \Phi d_R - g_u \varepsilon^{ab} \bar{Q}_{La} \Phi_b^\dagger u_R + \text{h.c.} \quad (14.4.4)$$

Підставляючи вакуумне середнє поля Φ , отримуємо масовий доданок для d - і u -кварків

$$\Delta \mathcal{L}_q = -\frac{g_d v}{\sqrt{2}} \bar{d}_L d_R - \frac{g_u v}{\sqrt{2}} \bar{u}_L u_R + \text{h.c.}, \quad (14.4.5)$$

тобто кварки набувають мас

$$m_d = \frac{g_d v}{\sqrt{2}}, \quad m_u = \frac{g_u v}{\sqrt{2}}. \quad (14.4.6)$$

Аналогічно набувають масу c -, s -, t - і b -кварки другого і третього покоління. Якщо ми хочемо, щоб у нейтрино була маса, то можна було б ввести праве нейтрино ν_R , у якого нульові заряди відносно $SU_L(2) \times U_Y(1)$. Тоді взаємодію із хігсівським полем можна записати як

$$\Delta \mathcal{L}_\nu = -\lambda_\nu \varepsilon^{ab} \bar{E}_{La} \Phi_b^\dagger \nu_R + \text{h.c.} \quad (14.4.7)$$

Для ненульового вакуумного середнього у поля Φ це приводить до діраківської маси у нейтрино. Мізерно мала маса у нейтрино можливо свідчить про відсутність ν_R в природі, і тоді механізм генерації маси у нейтрино повинен бути відмінний від (14.4.7).

З одних лівих нейтрино також можна побудувати масовий доданок

$$\Delta \mathcal{L}_\nu = -m_\nu \left(\epsilon_{\alpha\beta} \nu_L^\alpha \nu_L^\beta + \text{h.c.} \right), \quad (14.4.8)$$

де $\alpha, \beta = 1, 2$ — індекси двовимірних спінорів і $\epsilon_{\alpha\beta}$ антисиметричний тензор. Цей масовий доданок дорівнює нулю в класичній теорії, де поля ν_L^α і ν_L^β комутують, але він ненульовий у квантовій теорії з антикомутуючими ν_L^α і ν_L^β . Це є так звана майоранівська маса, вона порушує збереження лептонного квантового числа. Питання, якої природи — діраківської, майоранівської або, можливо, навіть змішаної — є маса нейтрино активно досліджується як теоретично, так і експериментально. Коротке обговорення розширення Стандартної моделі у нейтринному секторі та можливих механізмів генерації мас нейтрино наведено в розділі 15.1 (див. також [128]).

14.5. Квантові числа полів у Стандартній моделі

Поля, які беруть участь у сильних і електрослабких взаємодіях, їх представлення відносно калібрувальних груп $SU_c(3) \times SU_L(2)$, заряди відносно групи $U_Y(1)$ та баріонне і лептонне числа наведені в таблиці 6.

При енергіях малих, порівняно з масами W - і Z -бозонів, і для діаграм типу зображених на рис. 79 теорія електрослабких взаємодій фактично еквівалентна теорії Фермі. При малих енергіях ми можемо знехтувати p^2 порівняно з масами M_W^2 і M_Z^2 у знаменниках пропагаторів векторних бозонів, і пропагатори стають незалежними від імпульсів

$$\langle W_\mu^+(p)W_\nu^-(-p) \rangle = \frac{g_{\mu\nu}}{i(p^2 - m_W^2)} \approx \frac{ig_{\mu\nu}}{m_W^2}, \quad (14.5.1)$$

$$\langle Z_\mu(p)Z_\nu(-p) \rangle = \frac{g_{\mu\nu}}{i(p^2 - m_Z^2)} \approx \frac{ig_{\mu\nu}}{m_Z^2}. \quad (14.5.2)$$

Тоді процеси з обміном векторними бозонами на рис. 79 стають локальними, які описуються взаємодією струм—струм у теорії Фермі:

$$\Delta\mathcal{L}_W = \frac{g^2}{m_W^2} J_W^{\mu-} J_{\mu W}^+ = \frac{g^2}{2m_W^2} (\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L) (\bar{\nu}_L \gamma_\mu e_L + \bar{u}_L \gamma_\mu d_L).$$

Коефіцієнт при взаємодії струмів можна ототожнити з постійною Фермі

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2}, \quad G_F = 1,166 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}. \quad (14.5.3)$$

Т а б л и ц я 6

Квантові числа полів у Стандартній моделі

| Частинка | $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$ | Баріонне число | Лептонне число |
|--|--|----------------|----------------|
| G_μ^a (глюони) | (8, 1, 0) | 0 | 0 |
| A_μ^a | (1, 3, 0) | 0 | 0 |
| B_μ | (1, 1, 0) | 0 | 0 |
| $q_L^i = \begin{pmatrix} u_L^i \\ d_L^i \end{pmatrix}$ | (3, 2, 1/6) | 1/3 | 0 |
| $q_R^i = \begin{pmatrix} u_R^i \\ d_R^i \end{pmatrix}$ | (3, 1, $\frac{2}{3}$) | 1/3 | 0 |
| $e_L^i = \begin{pmatrix} \nu_L^i \\ e_L^i \end{pmatrix}$ | (1, 2, -1/2) | 0 | 1 |
| $e_R^i = \begin{pmatrix} \nu_R^i \\ e_R^i \end{pmatrix}$ | (1, 1, $-\frac{1}{2}$) | 0 | 1 |
| Φ | (1, 2, 1/2) | 0 | 0 |

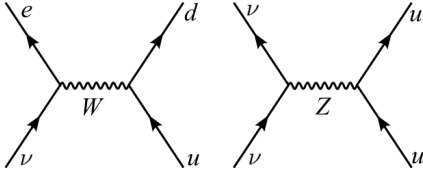


Рис. 79. Приклади процесів за рахунок обміну W - і Z -бозонами

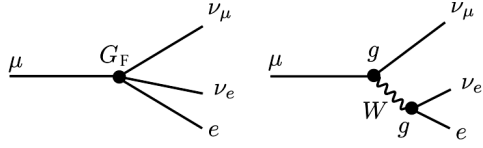


Рис. 80. Розпад мюона в теорії Фермі і в Стандартній моделі

Аналогічно для процесів з обміном Z -бозонами

$$\Delta\mathcal{L}_Z = \frac{g^2}{2m_Z^2} J_{\mu Z} J_Z^\mu = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \left(\sum_f \bar{f} \gamma^\mu (t_3 - \sin^2 \theta_W Q) f \right)^2, \quad (14.5.4)$$

де підсумовування відбувається за всіма лівими і правими ароматами. Цей лагранжіан описує процеси з нейтральними струмами. Як бачимо, маємо модифікацію теорії Фермі в тому, що дублет протона і нейтрона замінюється на дублет кварків

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}.$$

Процес розпаду нейтрона $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ в сучасній теорії електрослабких взаємодій описується розпадом d -кварка $d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$.

Розпад мюона в теорії Фермі і Стандартній моделі на рівні деревних діаграм зображений на рис. 80. Діаграма в теорії Фермі пропорційна $G_F/\sqrt{2}$, а в СМ — $g^2/8m_W^2$.

14.6. Хіггсівський бозон

Опишемо тепер взаємодію хіггсівського бозона з іншими полями в лагранжіані електрослабких взаємодій. Параметризуємо комплексний хіггсівський дублет таким чином

$$\Phi(x) = u(x) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}. \quad (14.6.1)$$

Оскільки на спінор діє довільна матриця $u(x)$ із $SU(2)$, то отримуємо найбільш загальний комплекснозначний двокомпонентний спінор. Справді, маємо три дійсних поля як параметри в матриці $u(x)$ і дійсне поле $h(x)$. В унітарній калібровці можна позбавитися $u(x)$, зробивши калібрувальне перетворення, і тоді лагранжіан приймає вигляд

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_\mu \Phi)^* D^\mu \Phi + \mu^2 \Phi^* \Phi - \frac{\lambda}{2} (\Phi^* \Phi)^2, \quad (14.6.2)$$

де тепер

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}. \quad (14.6.3)$$

Мінімум потенціальної енергії буде при $\Phi^*\Phi = \mu^2/\lambda$, $h(x) = 0$. Виберемо конкретне значення для v : $v = \sqrt{2\mu^2/\lambda}$. Потенціальна енергія залежить тільки від поля $h(x)$:

$$V_{\text{Higgs}} = \frac{\lambda v^2 h^2}{2} + \frac{\lambda v h^3}{2} + \frac{\lambda h^4}{8} = \frac{1}{2} m_h^2 h^2 + \frac{\sqrt{\lambda}}{2} m_h h^3 + \frac{1}{8} \lambda h^4, \quad (14.6.4)$$

де $m_h = \sqrt{2\mu^2} = \sqrt{\lambda}v$. Поле $h(x)$ — хіггсівський бозон, його маса m_h визначається невизначеною поки що перенормованою константою взаємодії λ .

З урахуванням кінетичного доданка в унітарній калібровці маємо

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu h)^2 + \left[m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu^0 Z^{0\mu} \right] \left(1 + \frac{h}{v} \right)^2. \quad (14.6.5)$$

Для ферміонів (кварків і лептонів) взаємодія Юкави запишеться

$$\mathcal{L}_f = -m_f \bar{f} f \left(1 + \frac{h}{v} \right). \quad (14.6.6)$$

Маємо такі правила Фейнмана для вершин взаємодії хіггсівського бозона

Two Feynman diagrams showing the interaction of a Higgs boson (dashed line) with a W boson pair (wavy lines) and a Z boson pair (wavy lines). The first diagram shows a W⁺ and W⁻ pair meeting at a vertex with a Higgs boson line, with the value $2i \frac{m_W^2}{v} g^{\mu\nu}$. The second diagram shows a Z⁰ and Z⁰ pair meeting at a vertex with a Higgs boson line, with the value $2i \frac{m_Z^2}{v} g^{\mu\nu}$.

$$\begin{aligned} W^+ W^- \text{ vertex} &= 2i \frac{m_W^2}{v} g^{\mu\nu}, & Z^0 Z^0 \text{ vertex} &= 2i \frac{m_Z^2}{v} g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (14.6.7)$$

Two Feynman diagrams showing the interaction of a Higgs boson (dashed line) with a fermion line and a Higgs boson self-energy loop. The first diagram shows a fermion line with a Higgs boson line attached to a vertex, with the value $-i \frac{m_f}{v}$. The second diagram shows a Higgs boson line with a Higgs boson self-energy loop attached to a vertex, with the value $-3i \frac{m_h^2}{v}$.

$$\begin{aligned} \text{Fermion vertex} &= -i \frac{m_f}{v}, & \text{Higgs self-energy vertex} &= -3i \frac{m_h^2}{v}, \end{aligned} \quad (14.6.8)$$

Three Feynman diagrams showing the interaction of Higgs bosons (dashed lines) with W and Z bosons (wavy lines). The first diagram shows a four-point vertex with four Higgs boson lines, with the value $-3i \frac{m_h^2}{v^2}$. The second diagram shows a three-point vertex with two Higgs boson lines and one W boson line, with the value $2i \frac{m_W^2}{v^2} g^{\mu\nu}$. The third diagram shows a three-point vertex with two Higgs boson lines and one Z boson line, with the value $2i \frac{m_Z^2}{v^2} g^{\mu\nu}$.

$$\begin{aligned} \text{Four-point vertex} &= -3i \frac{m_h^2}{v^2}, & \text{W vertex} &= 2i \frac{m_W^2}{v^2} g^{\mu\nu}, \\ \text{Z vertex} &= 2i \frac{m_Z^2}{v^2} g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (14.6.9)$$

Зазначимо, що константа взаємодії хіггсівського бозона з іншими частинками пропорційна масам цих частинок. Це означає, що частинки з

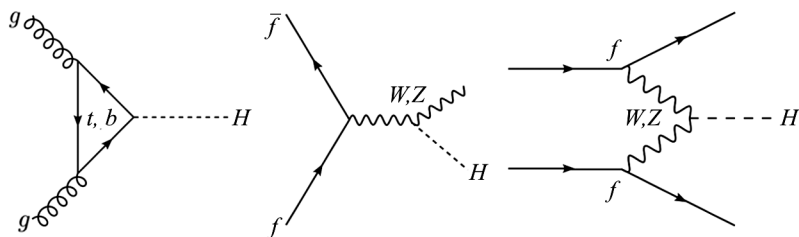


Рис. 81. Діаграми з процесами народження хіггсівського бозона

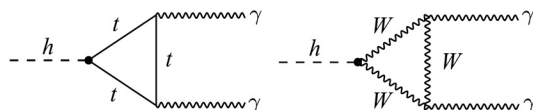


Рис. 82. Розпад хіггсівського бозона

найменшою масою, які легше всього створити, взаємодіють слабо з хіггсівським бозоном, водночас важкі частинки потребують великої енергії для свого народження. Тому хіггсівський бозон було складно детектувати. Він був відкритий у 2012 р., його маса $m_h = 125,25 \pm 0,17$ ГеВ. Діаграми процесів, у яких народжується хіггсівський бозон, показані на рис. 81, а розпад на два фотона — на рис. 82. У зв'язку з цим зауважимо, що розпад Z -бозона, який має спін одиниця, на два фотона неможливий з огляду на теорему Ландау—Янга.

До речі, бозон Хіггса є єдиною відомою фундаментальною скалярною елементарною частинкою. Наявність такої частинки приводить до появи квадратичних розбіжностей у діаграмах власної енергії хіггсівського бозона. Технічно це породжує так звану проблему ієрархій у Стандартній моделі: бозон Хіггса набагато легший за масу Планка $\sim 10^{19}$ ГеВ (або енергію Великого об'єднання $\sim 10^{16}$ ГеВ — див. розділ 15.3). Великі квантові внески в квадрат маси бозона Хіггса за рахунок ультрафіолетового обрізання на масштабі Планка неминуче роблять масу бозона Хіггса великою порівняно з експериментально спостережуваною, якщо немає точного скорочення (fine-tuning) між квадратичними радіаційними поправками та голою масою. В СМ відсутній природний механізм, який контролює радіаційні поправки і забезпечує невелику масу спостережуваного хіггсівського бозона.

Схожі проблеми стосуються юкавівських констант взаємодії електрона і легких кварків з хіггсівським полем, θ -параметра в КХД, і космологічної константи Λ , спостережуване значення якої на 120 порядків менше, ніж очікувалось з теорії. Всі ці проблеми об'єднані тепер під назвою проблеми натуральності констант взаємодій СМ.

14.7. Змішування поколінь. Матриця Кабіббо—Кобаясі—Маскави

У Стандартній моделі існує таке цікаве явище, як змішування поколінь. Безпосереднім наслідком цього є те, що баріонне b_i та лептонне l_i числа кожного i -го покоління не зберігаються. В СМ зберігаються тільки повне баріонне $B = \sum_i b_i$ і лептонне $L = \sum_i l_i$ число (точніше навіть вони порушуються внаслідок квантових аномалій і тільки їх різниця $B - L$ зберігається). Маємо три покоління кварків

$$Q_L^i = \begin{pmatrix} u^i \\ d^i \end{pmatrix}_L = \left[\begin{pmatrix} u \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b_L \end{pmatrix} \right], \quad Y = \frac{1}{6};$$

$$u_R^i = (u_R, c_R, t_R), \quad Y = \frac{2}{3}; \quad d_R^i = (d_R, s_R, b_R), \quad Y = -\frac{1}{3}.$$

Сильна взаємодія всіх ароматів кварків є абсолютно однаковою. З точки зору слабких взаємодій обмін W калібрувальними бозонами переводить ферміони взаємно в межах одного покоління, наприклад, кварки $u \leftrightarrow d$ та лептони $\nu \leftrightarrow e$. Але немає переходів між поколіннями. Хігсівська взаємодія в загальному випадку переміщує покоління і приводить до реакцій із переходами кварків між поколіннями.

Найбільш загальна хігсівська взаємодія з кварками може бути записана у вигляді

$$\mathcal{L}_q = -\lambda_d^{ij} \bar{Q}_L^i \Phi d_R^j - \lambda_u^{ij} \varepsilon^{ab} \bar{Q}_{La}^i \Phi_b^\dagger u_R^j - \lambda_d^{*ij} \bar{d}_R^j \Phi^\dagger Q_L^i - \lambda_u^{*ij} \varepsilon^{ab} \bar{u}_R^j \Phi_b Q_L^i, \quad (14.7.1)$$

де λ_d , λ_u — довільні комплекснозначні матриці. Дискретні симетрії P , C , T накладають на ці матриці деякі обмеження.

14.7.1. Симетрії P , C , T

Розглянемо дискретні симетрії P , C , T та їх збереження в Стандартній моделі. Квантова хромодинаміка інваріантна відносно цих симетрій (якщо доданок $\theta F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu}$ відсутній у лагранжіані КХД). Як ми побачимо, слабкі взаємодії порушують P - і C -симетрії, оскільки ліві і праві поля взаємодіють по-різному по відношенню до груп $SU_L(2)$ і $U_Y(1)$.

При перетвореннях парності і зарядового спряження ліві і праві ферміони перетворюються таким чином

$$\psi_L \xrightarrow{P} \psi_R, \quad \psi_L \xrightarrow{C} \psi_L^C = C \bar{\psi}_L^T, \quad (14.7.2)$$

де ψ_L^C — зарядово спряжений спінор і $C = i\gamma^2\gamma^0$ — матриця зарядового спряження, яка має властивості (7.4.8). Зауважимо, що обидва поля ψ_L і ψ_L^C є лівими

$$\gamma_5 \psi_L = -\psi_L, \quad \gamma_5 \psi_L^C = \gamma_5 C \frac{1 - \gamma_5}{2} \bar{\psi}^T = -\psi_L^C.$$

Перетворення (14.7.2) є, очевидно, наслідком перетворень чотирикомпонентних спінорів: $\psi \xrightarrow{P} \gamma_0 \psi$, $\psi \xrightarrow{C} \psi^C = C\bar{\psi}^T$. Таким чином, операції P і C переводять частинки, які взаємодіють з $SU(2)$, в частинки, які не взаємодіють з $SU(2)$, тому ці симетрії порушені в теорії електрослабких взаємодій, яка є кіральною теорією. Зазначимо, що комбіноване перетворення CP ,

$$\psi_L \rightarrow P\psi_L^C \rightarrow \psi_R^C = C\bar{\psi}_L^T, \quad (14.7.3)$$

переводить ліві кварки в ліві, $L \rightarrow L$, а праві кварки в праві, $R \rightarrow R$, тобто калібрувальна взаємодія зберігає CP -інваріантність.

Розглянемо дію CP на доданки $\bar{Q}_L^i \Phi d_R^j$, які описують взаємодію хіггсівського бозона з кварками. Спочатку розглянемо дію на окремі поля

$$CP: \psi_L \rightarrow C\bar{\psi}_L^T, \quad \psi_R \rightarrow C\bar{\psi}_R^T, \quad (14.7.4)$$

$$CP: \psi_L^\dagger \rightarrow (\bar{\psi}_L^\dagger)^T C^\dagger = (\gamma_0 \psi_L)^T C^\dagger = -\psi_L^T \gamma_0^T C, \quad \bar{\psi}_L \rightarrow -\psi_L^T \gamma_0^T C \gamma_0. \quad (14.7.5)$$

Тоді для білінійних доданків

$$\bar{Q}_L d_R \rightarrow -Q_L^T \gamma_0^T C \gamma_0 C \bar{d}_R^T = \bar{d}_R (\gamma_0^T C \gamma_0 C)^T Q_L = \bar{d}_R C \gamma_0^T C \gamma_0 Q_L = \bar{d}_R Q_L.$$

Таким чином, CP -перетворення діє так:

$$\bar{Q}_L^i \Phi d_R^j \rightarrow \bar{d}_R^j \Phi^\dagger Q_L^i. \quad (14.7.6)$$

Водночас ермітове спряження того ж доданка дає

$$(\bar{Q}_L^i \Phi d_R^j)^\dagger = \bar{d}_R^j \Phi^\dagger Q_L^i, \quad (14.7.7)$$

тобто операція CP еквівалентна заміні операторів на ермітово спряжені, але без зміни коефіцієнтів. Лагранжіан інваріантний відносно CP , якщо коефіцієнти задовольняють умові

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ij}^*, \quad (14.7.8)$$

тобто дійсні. Однак не має ніяких підстав це вимагати. Тому у загальному випадку, як ми побачимо нижче, взаємодія хіггсівського бозона з кварками приводить до порушення CP -інваріантності, а також до змішування поколінь у струмах, пов'язаних із слабкою взаємодією.

14.7.2. Змішування поколінь

Кожну з матриць λ можна діагоналізувати біунітарним перетворенням

$$V^{-1} \lambda W = \tilde{\lambda},$$

де матриці V , W — унітарні, а матриця $\tilde{\lambda}$ — діагональна (дійсна). Це випливає з теореми про полярний розклад довільної комплексної матриці K ,

$$K = HU, \quad H^\dagger = H, \quad UU^\dagger = 1. \quad (14.7.9)$$

Ермітова матриця H може бути діагоналізована за допомогою унітарної матриці V ,

$$V^{-1}HV = \tilde{H}.$$

Тоді для комплексної матриці

$$K = V\tilde{H}V^{-1}U = V\tilde{H}W^{-1}, \quad W = U^{-1}V = U^\dagger V, \quad W^\dagger W = 1,$$

і для матриці λ маємо

$$\lambda = V\tilde{\lambda}W^\dagger = V\tilde{\lambda}W^{-1}. \quad (14.7.10)$$

Зробимо в лагранжіані заміну змінних кваркових полів

$$u_R^i \rightarrow W_u^{ij} u_R^j, \quad d_R^i \rightarrow W_d^{ij} d_R^j. \quad (14.7.11)$$

Оскільки u_R і d_R взаємодіють однаково з усіма калібрувальними полями, W_u і W_d взагалі випадають з теорії. Тобто

$$\sum_i (\bar{u}_R^i \hat{D} u_R^i + \bar{d}_R^i \hat{D} d_R^i) \rightarrow \sum_i (\bar{u}_R^i \hat{D} u_R^i + \bar{d}_R^i \hat{D} d_R^i). \quad (14.7.12)$$

Зробимо аналогічне перетворення для лівих полів

$$u_L^i \rightarrow V_u^{ij} u_L^j, \quad d_L^i \rightarrow V_d^{ij} d_L^j. \quad (14.7.13)$$

В унітарній калібровці, де в хігсівській взаємодії виживають тільки доданки, які містять нижню компоненту хігсівського поля, матриці V_u , V_d випадають, і лагранжіан \mathcal{L}_q стає:

$$\mathcal{L}_q = -m_d^i \bar{d}_L^i d_R^i \left(1 + \frac{\hbar}{v}\right) - m_u^i \bar{u}_L^i u_R^i \left(1 + \frac{\hbar}{v}\right) + \text{h.c.}, \quad (14.7.14)$$

де маси $m_u^i = \tilde{\lambda}_u^{ii} v / \sqrt{2}$, $m_d^i = \tilde{\lambda}_d^{ii} v / \sqrt{2}$. Таким чином, ми перейшли до бази-су таких кваркових полів, які є власними масовими станами. Зазначимо, що \mathcal{L}_q зберігає P , C , T .

У сильних взаємодіях, які описуються квантовою хромодинамікою, матриці V_u , V_d також випадають. Але оскільки u_L і d_L перемішуються слабкими взаємодіями, необхідно окремо розглянути цей сектор.

14.7.3. Матриця Кабіббо—Кобаясі—Маскави

У чисто кінетичних доданках в СМ ці матриці відсутні. Також вони випадають із електромагнітного струму, наприклад,

$$\bar{u}_L^i \gamma^\mu u_L^i \rightarrow \bar{u}_L^i V_u^{\dagger ij} \gamma^\mu V_u^{jk} u_L^k = \bar{u}_L^i \gamma^\mu u_L^i. \quad (14.7.15)$$

Аналогічно вони відсутні в нейтральних струмах.

Розглянемо, однак, заряджений струм

$$J_\mu^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_L^i \gamma^\mu d_L^i \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_L^i \gamma^\mu (V_u^\dagger V_d)^{ij} d_L^j, \quad (14.7.16)$$

який зв'язує три кварка u_L^i з унітарно перетвореним кварковим триплетом d_L^j . Відповідна унітарна матриця $V = V_u^\dagger V_d$ відома як матриця Кабіббо—Кобаясі—Маскави (ККМ).

Для кращого розуміння фізичного змісту матриці ККМ розглянемо спочатку випадок 2×2 унітарної матриці. Її можна записати в загальному вигляді таким чином

$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta_c e^{i\alpha} & \sin \theta_c e^{i\beta} \\ -\sin \theta_c e^{i(\alpha+\gamma)} & \cos \theta_c e^{i(\beta+\gamma)} \end{pmatrix}. \quad (14.7.17)$$

Матриця має 4 параметра: 1 кут обертання і 3 фази. Можна ліквідувати ці фази, виконуючи заміни змінних кваркових полів з постійними фазами $q_L^j \rightarrow e^{i\alpha_j} q_L^j$. Фазове перетворення, загальне для всіх полів, випадає з виразу для струму

$$J^{\mu+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_L^i \gamma^\mu V^{ij} d_L^j,$$

і 3 перетворення, що залишаються, дозволяють усунути фази α , β , γ в матриці V :

$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix}. \quad (14.7.18)$$

Таким чином, заряджений струм для двох поколінь приймає вигляд

$$J^{\mu+} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{u}_L \gamma^\mu d_L^c + \bar{c}_L \gamma^\mu s_L^c], \quad (14.7.19)$$

де для унітарно повернених кварків введено позначення

$$d_L^c = \cos \theta_c d_L + \sin \theta_c s_L, \quad s_L^c = -\sin \theta_c d_L + \cos \theta_c s_L. \quad (14.7.20)$$

Кут θ_c був введений Кабіббо в 1963 р. для пояснення експериментальних результатів з розпадів частинок, де змінюється квантове число дивності (strangeness), його експериментальне значення $\sin \theta_c \simeq 0,22$. Оскільки матриця V дійсна, то в теорії з 2 поколіннями немає порушення CP -симетрії.

У випадку n поколінь $V \in n \times n$ унітарною матрицею, яка визначається n^2 дійсними параметрами. З них $2n - 1$ фаз можна усунути фазовими перетвореннями кваркових полів. Залишається $n^2 - (2n - 1) = (n - 1)^2$ параметрів. Далі число незалежних кутів обертань в n -вимірному просторі дорівнює $\frac{n(n-1)}{2} = n_\theta$. Тому матриця V має n_θ кутів обертань і

$$n_\delta = (n - 1)^2 - \frac{n(n - 1)}{2} = \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$$

фаз. У випадку трьох поколінь, який реалізується в Стандартній моделі $n = 3$, $n_\theta = 3$, $n_\delta = 1$, тобто матриця Кабіббо—Кобаясі—Маскави має одну фазу. Таким чином, для 3 і більше поколінь можливо CP -порушення або еквівалентно порушення інваріантності відносно обернення часу T внаслідок інваріантності теорії під дією трьох дискретних перетворень — CPT -симетрії. Експериментально порушення T -симетрії спостерігалось у розпадах нейтральних каонів.

Є декілька параметризацій матриці V , одна з найбільш використовуваних параметризацій є параметризація Кобаясі—Маскави, яка має вигляд

$$V = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 c_3 & -s_1 s_3 \\ s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta} \\ s_1 s_2 & c_1 s_2 c_3 + c_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix}, \quad (14.7.21)$$

де $c_i = \cos \theta_i$, $s_i = \sin \theta_i$, $i = 1, 2, 3$. На червень 2022 р. для модулів елементів матриці M експериментально визначено такі числові значення

$$|V| = \begin{pmatrix} 0,97435 \pm 0,00016 & 0,22500 \pm 0,00067 & 0,00369 \pm 0,00011 \\ 0,22486 \pm 0,00067 & 0,97349 \pm 0,00016 & 0,04182^{+0,00085}_{-0,00074} \\ 0,00857^{+0,00020}_{-0,00018} & 0,04110^{+0,00083}_{-0,00072} & 0,999118^{+0,000031}_{-0,000036} \end{pmatrix}.$$

Ще одна широко вживана форма ККМ матриці (Particle Data Group parametrization) отримується таким чином. Розглянемо три матриці обертань і фазову матрицю

$$U_{12} = \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_{13} = \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix}, \quad (14.7.22)$$

$$U_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix}, \quad U_\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\delta} \end{pmatrix},$$

де $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$. Тоді матриця ККМ параметризується таким чином

$$V = U_{23} U_\delta^\dagger U_{13} U_\delta U_{12} = \begin{pmatrix} c_{12} c_{13} & s_{12} c_{13} & s_{13} e^{-i\delta} \\ -s_{12} c_{23} - c_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta} & c_{12} c_{23} - s_{12} s_{13} s_{23} e^{i\delta} & c_{13} s_{23} \\ s_{12} s_{23} - c_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta} & -c_{12} s_{23} - s_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta} & c_{13} c_{23} \end{pmatrix}. \quad (14.7.23)$$

Фазу δ знаходимо з вимірювання величини

$$J = \text{Im} [V_{ud} V_{td}^* V_{tb} V_{ub}^*] = c_{12} s_{12} c_{13}^2 s_{13} s_{23} c_{23} \sin \delta, \quad (14.7.24)$$

яка називається інваріантом Ярлског (С. Jarlskog, 1985), і є інваріантною відносно фазових перетворень кварків, при яких матриця V перетворюється таким чином

$$V \rightarrow \text{diag} (e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2}, e^{i\alpha_3}) V \text{diag} (e^{i\beta_1}, e^{i\beta_2}, e^{i\beta_3}). \quad (14.7.25)$$

При цьому елементи V_{jk} перетворюються як $V_{jk} \rightarrow \exp[i(\alpha_j + \beta_k)]V_{jk}$, але J залишається незмінним. Експериментальне значення фази в цій параметризації $\delta_{\text{exp}} \sim 0,0001$.

Для параметризації Кобаясі–Маскави (14.7.21) інваріант J має вигляд

$$J = s_1^2 s_2 s_3 c_1 c_2 c_3 \sin \delta. \quad (14.7.26)$$

Експериментальне значення інваріанта Ярлског $J = 3,08_{-0,13}^{+0,15} \times 10^{-5}$ в параметризації (14.7.23), і значення параметрів

$$\begin{aligned} \sin \theta_{12} &= 0,22500 \pm 0,00067, & \sin \theta_{13} &= 0,00369 \pm 0,00011, \\ \sin \theta_{23} &= 0,04182_{-0,00074}^{+0,00085}, & \delta &= 1,144 \pm 0,027. \end{aligned} \quad (14.7.27)$$

Унітарність матриці V , $VV^\dagger = 1$, означає що

$$\begin{aligned} |V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{ub}|^2 &= 1, \\ |V_{cd}|^2 + |V_{cs}|^2 + |V_{cb}|^2 &= 1, \\ |V_{td}|^2 + |V_{ts}|^2 + |V_{tb}|^2 &= 1. \end{aligned}$$

Використовуючи експериментально знайдені значення для матричних елементів, маємо тест на унітарність:

$$\begin{aligned} |V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{ub}|^2 &= 0,9985 \pm 0,0005, \\ |V_{cd}|^2 + |V_{cs}|^2 + |V_{cb}|^2 &= 1,025 \pm 0,022, \\ |V_{td}|^2 + |V_{ts}|^2 + |V_{tb}|^2 &= 0,9970 \pm 0,0018, \end{aligned} \quad (14.7.28)$$

який, як ми бачимо, виконується в межах експериментальних похибок. Ймовірність переходу кварк в кварк, $q \rightarrow q'$, пропорційна $|V_{qq'}|^2$. Матричні елементи V_{ub} , V_{cb} , V_{tb} , V_{ts} , які пов'язують третє покоління з першими двома, дуже малі. Якщо позначити $\lambda = |V_{us}| = 0,2265$, то зв'язок між другим і третім поколіннями $\sim \lambda^2$, а між першим і третім поколіннями $\sim \lambda^3$. Це легко бачити в ще одній параметризації (параметризація Волфенштейна), яка має вигляд

$$V = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \simeq$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0,3\lambda^3 \\ -\lambda & 1 & 0,8\lambda^2 \\ 0,6\lambda^3 & -0,8\lambda^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (14.7.29)$$

де $\lambda = s_{12} = 0,2253(7)$, $A = 0,82$, $\rho = 0,13$, $\eta = 0,345$. Для кутів змішування маємо $s_{23} = 4,080(14) \cdot 10^{-2} = 0,81\lambda^2$, $s_{13} = 3,82(20) \cdot 10^{-3} = 0,34\lambda^3$ (з відповідними похибками в дужках). Цікаво, що відношення мас кварків у термінах параметра λ мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{m_u}{m_c} &= 1,70(40) \cdot 10^{-3} = 0,65\lambda^4; & \frac{m_d}{m_s} &= 0,050(7) = \lambda^2; \\ \frac{m_c}{m_t} &= 0,747(12) \cdot 10^{-2} = 2,9\lambda^4; & \frac{m_s}{m_b} &= 2,22(25) \cdot 10^{-2} = 0,44\lambda^2; \\ \frac{m_u}{m_t} &= 1,26(20) \cdot 10^{-5} = 1,88\lambda^8; & \frac{m_d}{m_b} &= 1,12(8) \cdot 10^{-3} = 0,44\lambda^4. \end{aligned}$$

Ці ієрархії параметрів у матриці ККМ і мас кварків поки що не мають теоретичного пояснення.

Схожа ситуація зі змішуванням кварків різних поколінь для заряджених слабких струмів має місце для нейтрино. Експериментально про наявність такого змішування і ненульової маси нейтрино свідчать дані нейтринних осциляцій. Дійсно, якщо три типи нейтрино мають маси, то аналогічно матриці ККМ для кварків, може існувати унітарна матриця, яка зв'яже базис нейтрино слабких взаємодій з масовим базисом нейтрино. Така матриця відома в літературі як матриця Понтекорво—Маки—Нагакави—Сакаґаґи (ПМНС). Для трьох поколінь лептонів ця матриця записується в такому вигляді:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad (14.7.30)$$

де зліва наведені поля нейтрино, які беруть участь у слабкій взаємодії, а праворуч — поля нейтрино, які отримують масу після діагоналізації масової матриці нейтрино (механізм появи маси у нейтрино поки невідомий). ПМНС-матриця містить амплітуди ймовірності переходів нейтрино з власним масовим станом в нейтрино з даним ароматом, які пропорційні $|U_{ai}|^2$. Очевидно, що нейтрино з різною масою рухаються з різними швидкостями. Тому, хоча потік нейтрино, який складався на початку з одного типу нейтрино відносно слабкої взаємодії, внаслідок інтерференції доданків з нейтрино різних мас може змінитися, і експериментально може бути задетектоване нейтрино іншого покоління. Нейтринні осциляції спостерігались в астрофізичних спостереженнях сонячних і атмосферних нейтрино, а також в експериментах з реакторними нейтрино і нейтринними пучками, згенерованими на прискорювачах.

Кути зміщення в нейтринному секторі збільшують кількість параметрів у Стандартній моделі. Ми маємо в лагранжіані три калібрувальні константи (g, g', g_s), два параметри в потенціалі Хіггса, 9 юкавівських констант зв'язку для заряджених ферміонів, 4 параметри в матриці ККМ, всього 18 параметрів. Але, якщо врахувати зміщення в нейтринному секторі, то додаються ще 4 параметри (або 6 при наявності майоранівських мас) в матриці ПМНС і 3 юкавівські константи для генерації мас нейтрино. Ще один можливий параметр — це θ_{CP} , який відповідальний за порушення CP -симетрії в КХД, але експериментально його значення близько до нуля. Ймовірно не всі параметри є незалежними, і між ними можуть існувати деякі приховані симетрії та співвідношення. Наприклад, відзначимо таке емпіричне співвідношення між вакуумним середнім скалярного поля, масами векторних бозонів, бозона Хіггса і топ-кварка,

$$v = \sqrt{m_W^2 + m_Z^2 + m_h^2 + m_t^2}, \quad (14.7.31)$$

яке дає вакуумне середнє $v \approx 245,48$ ГеВ, що в межах похибок є близьким до експериментального $v \approx 246,22$ ГеВ. Оскільки всі маси пропорційні v , то, поділивши останню рівність на v , отримуємо співвідношення між деякими константами зв'язку. Таке співвідношення поки що немає пояснення в рамках СМ.

Значна кількість вільних параметрів в СМ наштовхує на думку, що може існувати єдина теорія, яка об'єднує всі калібрувальні взаємодії, тим більш що поведінка калібрувальних констант зв'язку вказує на їх прибілизну рівність при енергіях порядку 10^{15} ГеВ. Ми розглянемо один із можливих варіантів такої об'єднаної теорії у розділі 15.3.

14.8. Нейтральні реакції зі зміною ароматів

Поки що розглядалися процеси, пов'язані із зарядженими слабкими взаємодіями в загальному випадку, а в цьому параграфі зосередимо увагу на нейтральних процесах, у яких має місце зміна аромату. Експериментально добре відомо, що такі процеси є сильно подавленими. Наприклад, відношення ширини розпаду $K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ до ширини розпаду $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ експериментально є таким,

$$\Gamma(K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-) / \Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu) = 10^{-8}, \quad (14.8.1)$$

де кварковий склад K -мезонів характеризується присутністю дивного s або анти- s -кварків

$$K^0 = |d\bar{s}\rangle, \bar{K}^0 = |\bar{d}s\rangle, K^+ = |u\bar{s}\rangle, K^- = |\bar{u}s\rangle, m_{K^0} = 497,611 \pm 0,013 \text{ MeV}.$$

Сильне подавлення процесів зі зміною аромату знаходить природне пояснення в Стандартній моделі: на рівні лагранжіана тільки заряджені

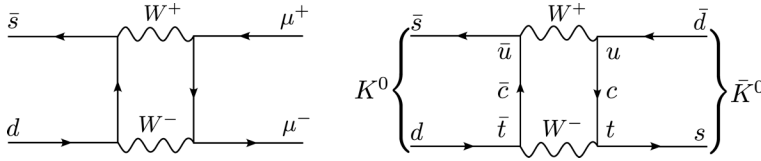


Рис. 83. Розпад K^0 мезона і осциляції $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$

струми змінюють аромат, а нейтральні не міняють. Зазначимо, що нейтральні частинки K^0 і \bar{K}^0 є різними частинками внаслідок різного кваркового складу. Перетворення CP переводить частинку K^0 в \bar{K}^0 і навпаки, тобто ці частинки не є власними станами CP -симетрії. Розпад $K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ може мати місце на рівні однопетльового процесу, але не на деревному рівні (ліва панель на рис. 83), що зумовлює його малість порівняно з деревними процесами. Розпад $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ описується деревною діаграмою в порядку e^2 через обмін віртуальними проміжними W -бозонами.

Ідея осциляцій $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ була вперше висловлена Гелл-Манном і Пайсом в 1955 р. [86]. У Стандартній моделі вони можливі на рівні однопетльової діаграми з урахуванням змішування поколінь (права панель на рис. 83). Таким чином, на рівні петльових діаграм виникають процеси, які змінюють аромати кварків. Фаза ККМ також входить тільки через петльові поправки, тому порушення CP -інваріантності в електрослабких процесах очікується вкрай малим.

В КХД стани K^0 , \bar{K}^0 вироджені по масі. Однак слабкі взаємодії завдяки процесу взаємного перетворення $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$, тобто осциляцій частинка-античастинка, приводять у масовій матриці до доданка, який змішує K^0 і \bar{K}^0 :

$$\mu_{K_0 \bar{K}_0}^2 K_0 \bar{K}_0. \quad (14.8.2)$$

Цей доданок приводить до розщеплення масових станів. Дійсно, якщо CP -симетрія не порушена, тоді стани

$$|K_S^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle), \quad |K_L^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \quad (14.8.3)$$

є власними станами операторів CP -перетворення,

$$CP |K_S^0\rangle = +|K_S^0\rangle, \quad CP |K_L^0\rangle = -|K_L^0\rangle. \quad (14.8.4)$$

Оскільки мезони K^0 і \bar{K}^0 є псевдоскалярами з квантовими числами $J^P = 0^-$, то під дією перетворення парності

$$P |K^0\rangle = -|K^0\rangle, \quad P |\bar{K}^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle.$$

Стани $|K^0\rangle$, $|\bar{K}^0\rangle$ є античастинками один до одного, виберемо фази зарядового перетворення так, що

$$C |K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle, \quad C |\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle, \quad C^2 = 1.$$

У цьому випадку для CP -перетворення мезонів K^0 і \bar{K}^0 маємо $CP|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle$, $CP|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle$, звідки і випливає (14.8.4).

Завдяки наявності в масовій матриці K^0 , \bar{K}^0 -мезонів доданка (14.8.2) її власні стани мають різні маси. Короткоживучий (short-lived) K_S^0 -мезон за рахунок тільки сильних взаємодій розпадається на два π -мезони: $K_S^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$, або $K_S^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$, а довгоживучий (long-lived) K_L^0 -мезон на три π -мезони: $K_L^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$, або $K_L^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$.

У слабких взаємодіях з'являється разом з тим розпад K_S^0 -мезона на три π -мезони, $K_S^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$, чия ширина становить $\sim 3 \cdot 10^{-7}$ від повної ширини розпаду, порушуючи таким чином CP -інваріантність. Експериментально цей факт був встановлений Кроніним та Фітчем у 1964 р. Внаслідок СРТ теореми це означає, що порушується T -інваріантність відносно обернення часу. В СМ за порушення T -симетрії відповідальна ненульова фаза в матриці ККМ. Часи життя мезонів: $K_S^0 \sim 0,9 \cdot 10^{-10}$ с, $K_L^0 \sim 5,1 \cdot 10^{-8}$ с.

Процеси з порушенням CP -інваріантності мають місце і для B -мезонів, які мають наступний кварковий склад

$$B^0 = |d\bar{b}\rangle, \quad \bar{B}^0 = |\bar{d}b\rangle, \quad B^+ = |u\bar{b}\rangle, \quad B^- = |\bar{u}b\rangle, \quad m_{B^0} = 5279,63 \pm 0,20 \text{ MeV}.$$

Для B -мезонів також має місце процес змішування $B^0 \leftrightarrow \bar{B}^0$, аналогічний змішуванню K^0 - і \bar{K}^0 -мезонів. Порушення CP -симетрії спостерігалось у системі $B^0 - \bar{B}^0$ в експериментах колаборацій BaBar (SLAC, USA) і Belle (КЕК, Японія) у 2001 р.

При енергіях та імпульсах, менших за масу W -мезона, пропагатор W -мезона редукується до константи $\sim 1/M_W^2$, і діаграму на правій панелі рис. 83 можна фактично обчислювати як у теорії Фермі із взаємодією

$$\mathcal{L} = G_2 \bar{s} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) d \bar{d} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) s, \quad (14.8.5)$$

де обчислення петльової діаграми дає (внеском масивного t -кварка нехтуємо)

$$G_2 = \frac{G_F^2}{16\pi^2} (m_c - m_u)^2 \sin^2 \theta_c \cos^2 \theta_c \rightarrow \mu_{K^0 \bar{K}^0}^2. \quad (14.8.6)$$

G_2 фактично визначає елемент $\mu_{K^0 \bar{K}^0}^2$ в масовій матриці K^0 - і \bar{K}^0 -мезонів,

$$M_K^2 = \begin{pmatrix} \mu_{K^0}^2 & \mu_{K^0 \bar{K}^0}^2 \\ \mu_{K^0 \bar{K}^0}^2 & \mu_{\bar{K}^0}^2 \end{pmatrix}, \quad (14.8.7)$$

що дозволяє визначити (після діагоналізації) розщеплення мас K_L^0 - і K_S^0 -мезонів

$$\Delta M = M_L - M_S \simeq \frac{4m_c^2 \cos^2 \theta_c}{3\pi m_\mu^2} \Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu), \quad (14.8.8)$$

де $\Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)$ — ширина розпаду. В останній формулі ми знехтували масою u -кварка порівняно з масою s -кварка. Фактично, з цієї формули, знаючи маси K_L^0 і K_S^0 -мезонів, масу мюона і кут Кабіббо з експерименту, знаходять масу чарівного кварка: $m_c \simeq 1$ ГеВ. Таке передбачення маси чарівного кварка було зроблено в роботі Гайллард та Лі [85]. Чарівний кварк був експериментально відкритий у тому самому році.

Перехід $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ можливий тільки при умові, що маси однако-во заряджених кварків різні. Це справедливо і для більш загального твердження: *Ефекти нейтральних процесів зі зміною ароматів можливі тільки при умові відсутності виродження за масами кварків одного заряду.*

14.9. Правила Фейнмана в теорії електрослабких взаємодій

Практичні обчислення діаграм Фейнмана зручно здійснювати в калібровці R_ξ , розглянутій раніше, де присутні також нефізичні частинки, зокрема заряджений бозон Хіггса. Тому наведемо вершини взаємодії з цим бозоном, а також вершини взаємодії W^+ , W^- , Z_0 -бозонів між собою і з гамма квантом

The image shows six Feynman diagrams arranged in a 3x2 grid. Each diagram shows a vertex where a fermion line meets a boson line. The fermion lines are vertical, and the boson lines are horizontal wavy lines.

- Top-left:** A left-handed electron e_L^- line (vertical arrow pointing up) meets a photon γ line (horizontal wavy line). The vertex factor is $-ie\gamma^\mu$.
- Top-right:** A left-handed electron e_L^- line meets a Z^0 boson line. The vertex factor is $\frac{ie\gamma^\mu}{\cos\theta_W \sin\theta_W} \left(-\frac{1}{2} + \sin^2\theta_W\right)$.
- Middle-left:** A right-handed electron e_R^- line meets a photon γ line. The vertex factor is $-ie\gamma^\mu$.
- Middle-right:** A right-handed electron e_R^- line meets a Z^0 boson line. The vertex factor is $\frac{ie\gamma^\mu}{\cos\theta_W \sin\theta_W} (\sin^2\theta_W)$.
- Bottom-left:** A scalar particle ϕ^+ line (vertical dashed line with arrow pointing up) meets a photon γ line. The vertex factor is $ie(p + p')^\mu$.
- Bottom-right:** A scalar particle ϕ^+ line meets a Z^0 boson line. The vertex factor is $\frac{ie(p + p')^\mu}{\cos\theta_W \sin\theta_W} \left(\frac{1}{2} - \sin^2\theta_W\right)$.

(14.9.1)

Вершина взаємодії зарядженого хігсівського бозона впливає безпосередньо з кінетичного доданка в лагранжіані $(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi)$, де в коваріантній похідній

$$D_\mu \Phi = (\partial_\mu - igA_\mu^a \tau^a - \frac{i}{2} g' B_\mu) \begin{pmatrix} \Phi^\dagger \\ \Phi_0 \end{pmatrix}$$

потрібно виразити поля A_μ^a, B_μ через поля $W_\mu^+, W_\mu^-, Z_\mu^0, A_\mu$. Випишемо доданки з Φ^\dagger :

$$\begin{aligned} & \left(gA_\mu^a \tau^a + \frac{g'}{2} B_\mu \right) \begin{pmatrix} \Phi^\dagger \\ \Phi_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2} (gA_\mu^3 + g' B_\mu) \Phi^\dagger = \\ & = \frac{1}{2} \left[\frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (gZ_\mu + g'A_\mu) + \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (gA_\mu - g'Z_\mu) \right] \Phi^\dagger = \\ & = eA_\mu \Phi^\dagger + \frac{g}{\cos \theta_W} \left(\frac{1}{2} - \sin^2 \theta_W \right) Z_\mu \Phi^\dagger. \end{aligned} \quad (14.9.2)$$

Похідна $i\overleftrightarrow{\partial}_\mu$ в тричастинковій взаємодії приводить до появи $(p + p')_\mu$ у вершині взаємодії в імпульсному просторі.

Для отримання вершин взаємодії γ і Z^0 з W^\pm запишемо відповідну частину з $F_{\mu\nu}^2$ (для спрощення запису ми не розрізняємо верхні та нижні індекси):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 & \rightarrow -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) g \varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c - \frac{g^2}{4} \varepsilon^{abc} \varepsilon^{ab'c'} A_\mu^b A_\nu^c A_\mu^{b'} A_\nu^{c'} = \\ & = -g (\partial_\mu A_\nu^1 - \partial_\nu A_\mu^1) A_\mu^2 A_\nu^3 + g (\partial_\mu A_\nu^2 - \partial_\nu A_\mu^2) A_\mu^1 A_\nu^3 - \\ & \quad - g (\partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3) A_\mu^1 A_\nu^2 - \frac{g^2}{4} \varepsilon^{abc} \varepsilon^{ab'c'} A_\mu^b A_\nu^c A_\mu^{b'} A_\nu^{c'}. \end{aligned} \quad (14.9.3)$$

Далі використаємо співвідношення (14.3.12). Тричастинкові вершини взаємодії знаходимо з частини лагранжіана (14.9.3):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 & = ig [(\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) W_\mu^- A_\nu^3 - (\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-) W_\mu^+ A_\nu^3 + \\ & \quad + \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3) (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\mu^- W_\nu^+)]. \end{aligned} \quad (14.9.4)$$

Для отримання вершин взаємодії векторних частинок між собою залишилось виразити

$$A_\mu^3 = \cos \theta_W Z_\mu + \sin \theta_W A_\mu, \quad g = e / \sin \theta_W, \quad (14.9.5)$$

знаходимо

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 & = -ie \operatorname{ctg} \theta_W [(\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-) W_\mu^+ Z_\nu - (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) W_\mu^- Z_\nu + \\ & \quad + W_\mu^- W_\nu^+ (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)] - ie [(\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-) W_\mu^+ A_\nu - \\ & \quad - (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) W_\mu^- A_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)]. \end{aligned} \quad (14.9.6)$$

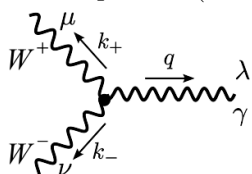
Аналогічно чотиричастинкові вершини взаємодії отримуються з

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & -\frac{e^2}{2\sin^2\theta_W} [W_\mu^+ W_\mu^- W_\nu^+ W_\nu^- - W_\mu^+ W_\mu^+ W_\nu^- W_\nu^-] - \\ & - e^2 \operatorname{ctg}^2 \theta_W [W_\mu^+ W_\mu^- Z_\nu Z_\nu - W_\mu^+ Z_\mu W_\nu^- Z_\nu] - \\ & - e^2 \operatorname{ctg} \theta_W [2W_\mu^+ W_\mu^- Z_\nu A_\nu - W_\mu^+ A_\mu W_\nu^- Z_\nu - W_\mu^+ Z_\mu W_\nu^- A_\nu] - \\ & - e^2 [W_\mu^+ W_\mu^- A_\nu A_\nu - W_\mu^+ A_\mu W_\nu^- A_\nu]. \end{aligned} \quad (14.9.7)$$

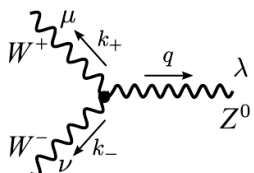
В імпульсному просторі похідні від полів замінюються на імпульси відповідних частинок. Для отримання вершин взаємодії векторних полів робимо фур'є-перетворення для полів у виразах $i \int d^4x \mathcal{L}_3$ та $i \int d^4x \mathcal{L}_4$ і інтегруємо по координатах. Потім беремо варіаційні похідні по полях, наприклад, для вершин взаємодії W -бозонів з гамма-квантом і Z -бозоном це похідні

$$\frac{\delta^3 i S_3}{\delta W_\mu^+(k_+) \delta W_\mu^-(k_-) \delta A_\lambda(q)} \quad \text{і} \quad \frac{\delta^3 i S_3}{\delta W_\mu^+(k_+) \delta W_\mu^-(k_-) \delta Z_\lambda^0(q)}, \quad (14.9.8)$$

що дає вершини (14.9.9):




$$\gamma = ie[g^{\mu\nu}(k_+ - k_-)^\lambda + g^{\nu\lambda}(k_- - q)^\mu + g^{\lambda\mu}(q - k_+)^\nu], \quad (14.9.9)$$




$$Z^0 = ie \operatorname{ctg} \theta_W [g^{\mu\nu}(k_+ - k_-)^\lambda + g^{\nu\lambda}(k_- - q)^\mu + g^{\lambda\mu}(q - k_+)^\nu].$$

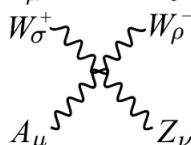
Для вершин взаємодії чотирьох векторних частинок отримуємо



$$= \frac{ie^2}{\sin^2 \theta_W} [2g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - g^{\mu\nu} g^{\sigma\rho} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}], \quad (14.9.10)$$



$$= -ie^2 \operatorname{ctg}^2 \theta_W [2g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}], \quad (14.9.11)$$



$$= -ie^2 \operatorname{ctg} \theta_W [2g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}], \quad (14.9.12)$$

$$\begin{array}{c}
 W_\sigma^+ \text{---} \\
 \diagup \quad \diagdown \\
 \text{---} \quad \text{---} \\
 \diagdown \quad \diagup \\
 A_\mu \quad A_\nu \\
 W_\rho^-
 \end{array}
 = -ie^2 [2g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}]. \quad (14.9.13)$$

У кожній вершині потрібно також врахувати збереження 4-імпульсу $(2\pi)^4 \delta\left(\sum_i p_i\right)$, яке виникає при інтегруванні по координатах.

14.10. Слабкий розпад топ-кварка

У цьому розділі розглянемо слабкий розпад $t \rightarrow W^+ + b$ топ-кварка із зарядом $2/3$ на бозон W^+ і b -кварк з зарядом $-1/3$. Цей процес описується діаграмою на рис. 84. Для кінематики процесу справедливі формули

$$p = q + k, \quad p^2 = m_t^2, \quad q^2 = m_b^2, \quad k^2 = m_W^2,$$

де m_i — відповідні маси частинок. Амплітуда розпаду запишеться у вигляді

$$\begin{aligned}
 M(t \rightarrow W^+ b) &= \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_b^{(s)}(q) \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \times \\
 &\times u_t^{(s')}(p) \varepsilon_\mu^*(k), \quad (14.10.1)
 \end{aligned}$$

де s, s' позначають спінові стани. Ми не будемо враховувати в вершині матрицю змішування кварків. Ширина розпаду обчислюється за відомою формулою (11.2.15)

$$\Gamma = \frac{1}{2m_t} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_q} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \frac{1}{2} \sum_{\text{спіни}} |M(t \rightarrow W^+ b)|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - q - k), \quad (14.10.2)$$

де коефіцієнт $1/2$ походить від усереднення за спінами t -кварка, а підсумовування йде за спіновими станами обох кварків, і використовуються співвідношення

$$E_q = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_b^2}, \quad E_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_W^2}, \quad E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_t^2},$$

$$\delta^{(4)}(p - q - k) = \delta(E_p - E_q - E_k) \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{k}).$$

У системі спокою t -кварка $\mathbf{p} = 0$, $E_p = m_t$. Взнявши до уваги, що для ермітово спряженої амплітуди, маємо

$$\left[\bar{u}_b^{(s)}(q) \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} u_t^{(s')}(p) \right]^\dagger = \bar{u}_t^{(s')}(p) \frac{1 + \gamma_5}{2} \gamma^\mu u_b^{(s)}(q),$$

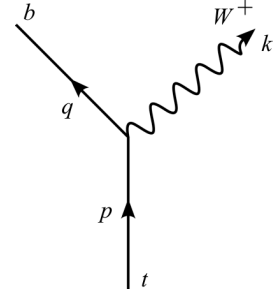


Рис. 84. Розпад t -кварка у найнижчому порядку теорії збурень

проведемо усереднення квадрата амплітуди за початковими спіновими станами та підсумовування за кінцевими спіновими станами

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{ss', \lambda} MM^\dagger &= \sum_{ss'} \frac{g^2}{4} \bar{u}_b^{(s)}(q) \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} u_t^{(s')}(p) \bar{u}_t^{(s')}(p) \frac{1 + \gamma_5}{2} \gamma^\nu u_b^{(s)}(q) \varepsilon_\mu^*(k) \varepsilon_\nu(k) = \\ &= \frac{g^2}{4} \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \left[\sum_{s'} u_t^{(s')}(p) \bar{u}_t^{(s')}(p) \right] \frac{1 + \gamma_5}{2} \gamma^\nu \left[\sum_s u_b^{(s)}(q) \bar{u}_b^{(s)}(q) \right] \right\} \times \\ &\quad \times \varepsilon_\mu^{*(\lambda)}(k) \varepsilon_\nu^{(\lambda)}(k). \end{aligned} \quad (14.10.3)$$

Використовуючи формули підсумовування за спінами ферміонів і поляризаціями W -бозона,

$$\sum_s u^{(s)}(p) \bar{u}^{(s)}(p) = \hat{p} + m, \quad \sum_{\lambda=1,2,3} \varepsilon_\mu^{(\lambda)*}(k) \varepsilon_\nu^{(\lambda)}(k) = -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_W^2},$$

приходимо до виразу

$$\frac{1}{2} \sum_{ss', \lambda} |M|^2 = \frac{g^2}{4} \text{tr} \left[\gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} (\hat{p} + m_t) \frac{1 + \gamma_5}{2} \gamma^\nu (\hat{q} + m_b) \right] \left(-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_W^2} \right).$$

Легко бачити, що маси m_t , m_b кварків випадають внаслідок присутності проекторів. Обчислюючи слід

$$\text{tr} \left[\gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \hat{p} \frac{1 + \gamma_5}{2} \gamma^\nu \hat{q} \right] = \text{tr} \left[\frac{1 + \gamma_5}{2} \gamma^\mu \hat{p} \gamma^\nu \hat{q} \right] = 2(p^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} p \cdot q + p^\nu q^\mu),$$

отримуємо

$$\frac{1}{2} \sum_{ss', \lambda} |M|^2 = \frac{g^2}{2} \left(2pq - \frac{k^2 pq}{m_W^2} + 2 \frac{(pk)(qk)}{m_W^2} \right) = \frac{g^2}{2} \left(pq + 2 \frac{(pk)(qk)}{m_W^2} \right). \quad (14.10.4)$$

Для ширини розпаду маємо

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{g^2}{4m_t} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^2} \frac{1}{4\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_b^2} \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_W^2}} \left(pq + 2 \frac{pk qk}{m_W^2} \right) \times \\ &\quad \times \delta \left(\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_b^2} + \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_W^2} - m_t \right). \end{aligned} \quad (14.10.5)$$

У системі центра мас

$$pq = m_t \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_b^2}, \quad pk = m_t \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_W^2}, \quad qk = (p - k)k = pk - m_W^2.$$

Підінтегральний вираз в (14.10.5) залежить тільки від $|\mathbf{k}|$, тому по кутах можна проінтегрувати, тоді ($x = \mathbf{k}^2$)

$$\Gamma = \frac{g^2}{32m_t\pi} \int_0^\infty \frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{x+m_b^2}\sqrt{x+m_W^2}} \left(pq + 2\frac{pk\ qk}{m_W^2} \right) \frac{\delta(x-x_0)}{\left| \frac{1}{2\sqrt{x_0+m_b^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x_0+m_W^2}} \right|}, \quad (14.10.6)$$

де x_0 — розв'язок рівняння

$$\sqrt{x+m_b^2} + \sqrt{x+m_W^2} = m_t.$$

Маємо

$$\Gamma = \frac{g^2 \sqrt{x_0}}{32\pi m_t^2} \left(2pq + 4\frac{pk\ qk}{m_W^2} \right). \quad (14.10.7)$$

Використовуючи формули

$$m_t = \sqrt{x_0+m_b^2} + \sqrt{x_0+m_W^2} = \frac{m_b^2 - m_W^2}{\sqrt{x_0+m_b^2} - \sqrt{x_0+m_W^2}},$$

$$\sqrt{x_0+m_b^2} - \sqrt{x_0+m_W^2} = \frac{m_b^2 - m_W^2}{m_t},$$

знаходимо з урахуванням малості маси b -кварка, $m_b \ll m_t, m_W$,

$$\sqrt{x_0+m_b^2} = \frac{m_t^2 + m_b^2 - m_W^2}{2m_t} \sim \frac{m_t^2 - m_W^2}{2m_t},$$

$$\sqrt{x_0+m_W^2} = \frac{m_t^2 + m_b^2 + m_W^2}{2m_t} \simeq \frac{m_t^2 + m_W^2}{2m_t}.$$

Також, використовуючи малість маси b -кварка порівняно з масами t -кварка і W -бозона,

$$2pq \simeq m_t^2 - m_W^2, \quad 2pk \simeq m_t^2 + m_W^2, \quad 2qk \simeq m_t^2 - m_W^2, \quad \sqrt{x_0} \simeq \frac{m_t^2 - m_W^2}{2m_t},$$

остаточно для ширини розпаду t -кварка отримуємо

$$\Gamma = \frac{\alpha}{16 \sin^2 \theta_W} \frac{m_t^3}{m_W^2} \left(1 - \frac{m_W^2}{m_t^2} \right)^2 \left(1 + 2\frac{m_W^2}{m_t^2} \right), \quad (14.10.8)$$

де ми використали $g = e/\sin\theta_W$. Для експериментальних значень $\sin^2\theta_W \approx 0,223$, $m_W = 80,4$ ГеВ, $m_t = 173$ ГеВ, знаходимо ширину $\Gamma = 1,44$ ГеВ, що відповідає часу життя t -кварка $\tau = \hbar/\Gamma \approx 3,6 \cdot 10^{-25}$ с. Експериментальне значення парціальної ширини $\Gamma(t \rightarrow Wb) = 1,92_{-0,51}^{+0,58}$ ГеВ. Дуже короткий час життя t -кварка мабуть пояснює відсутність мезонів та баріонів, які є зв'язаними станами t -кварка з іншими кварками.

14.11. Майоранівські ферміони

У теорії слабких взаємодій ми мали справу з двокомпонентними вейлівськими ферміонами. В квантовій електродинаміці ми зустрічались з чотирикомпонентними діраківськими ферміонами, які утворюються двома незалежними лівими та правими вейлівськими ферміонами. Однак існує можливість реалізації чотирикомпонентних ферміонів лише з одного незалежного вейлівського ферміона. Такі ферміони відомі як майоранівські і за побудовою є частинками зі спіном $1/2$, які є власними античастинками, тобто істинно нейтральними частинками. В Стандартній моделі немає майоранівських ферміонів, однак у розширеннях СМ нейтрино можуть бути майоранівськими ферміонами. Зазначимо, що в фізиці конденсованих середовищ розглядається можливість існування квазічастинок, які є майоранівськими ферміонами.

Розглянемо спочатку рівняння Дірака

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi = 0, \quad (14.11.1)$$

яке одержується з лагранжіана

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi, \quad \bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0, \quad (14.11.2)$$

де 4×4 матриці γ^μ задовольняють $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, $\gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 = \gamma_\mu^\dagger$. В термінах двокомпонентних вейлівських ферміонів $\psi_{L,R} = \frac{1 \mp \gamma_5}{2} \Psi$, лагранжіан перепишеться таким чином

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R - m (\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R). \quad (14.11.3)$$

Рівняння Ейлера—Лагранжа дають два зв'язаних рівняння

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = m\psi_R, \quad i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R = m\psi_L, \quad (14.11.4)$$

які в безмасовому випадку $m = 0$ розпадаються на два незалежних рівняння Вейля для двокомпонентних ферміонів

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = 0, \quad i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R = 0. \quad (14.11.5)$$

Нейтрино (ліве поле) і антинейтрино (праве поле) описуються лише двома компонентами для безмасових частинок, і для них можна застосовувати рівняння Вейля. Оскільки зараз ми вже знаємо, що нейтрино мають масу, то виникає питання, чи є спосіб описати масивне поле нейтрино лише з двома незалежними компонентами? З'ясовується, що так, і це є поле Майорани (Majorana).

Рівняння Дірака можна переписати у формі рівняння Шредінгера

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi \quad (14.11.6)$$

з ермітовим гамільтоніаном

$$H = \alpha^i p_i + \beta m, \quad \alpha^i \equiv \gamma^0 \gamma^i, \quad \beta \equiv \gamma^0, \quad p_i = -i \partial_i. \quad (14.11.7)$$

Чи може бути рівняння Дірака дійсним рівнянням, як наприклад, рівняння Клейна—Гордона—Фока? Відповідь очевидно залежить від того, якими є матриці γ^μ . Якщо елементи всіх чотирьох матриць γ^μ є уявними, тоді рівняння Дірака буде дійсним. Таке представлення для матриць Дірака було знайдено італійським фізиком Майорана, який використав той факт, що матриці $U \gamma^\mu U^\dagger$ з довільною унітарною матрицею U також задовольняють алгебрі матриць Дірака. Це представлення має вигляд

$$\begin{aligned} \gamma_M^0 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_M^1 &= \begin{pmatrix} i\sigma^1 & 0 \\ 0 & i\sigma^1 \end{pmatrix}, \\ \gamma_M^2 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_M^3 &= \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (14.11.8)$$

де σ^i — матриці Паулі. Оскільки матриця σ^2 чисто уявна, а матриці σ^1 , σ^3 дійсні, то всі матриці γ^μ уявні, $\gamma_\mu^* = -\gamma_\mu$, і відповідне представлення гамма-матриць називається майоранівським. У цьому представленні рівняння Дірака має дійсні розв'язки, тобто для них виконується

$$\psi^* = \psi. \quad (14.11.9)$$

Такі розв'язки і називаються майоранівськими ферміонами, які є істинно нейтральними частинками, тобто зарядово спряжене поле є тим самим полем, і поля частинок і античастинок однакові. Слід підкреслити, що умова дійсності (14.11.9) має такий простий вигляд тільки в майоранівському представленні. Дійсно, якщо ψ є розв'язок (дійсний) в майоранівському представленні, то в іншому представленні це буде $\Psi = U \psi$ з матрицями $U \gamma_M^\mu U^\dagger$, і умова дійсності в новому представленні буде

$$U U^T \Psi^* = \Psi. \quad (14.11.10)$$

Матриця $U U^T$ є також унітарною, але замість неї прийнято використовувати іншу унітарну матрицю C , яка визначається як

$$U U^T = C \gamma_0, \quad (14.11.11)$$

і умова дійсності в іншому представленні записується як

$$\Psi = C\gamma_0\Psi^* = C\bar{\Psi}^T = \Psi_c, \quad (14.11.12)$$

де матриця C — матриця зарядового спряження, а Ψ_c — зарядово спряжений спіно́р. Тобто умова нейтральності означає, що ферміонне поле збігається із зарядово спряженим полем. Для будь-якого представлення алгебри гамма-матриць матриця C задовольняє співвідношенням

$$C\gamma_\mu^T C^{-1} = -\gamma_\mu. \quad (14.11.13)$$

Наприклад, у вейлівському (кіральному) представленні гамма-матриці мають вигляд

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (14.11.14)$$

а матриця зарядового спряження

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & 0 \\ 0 & i\sigma^2 \end{pmatrix}, \quad C\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (14.11.15)$$

задовольняє умовам $-C = C^{-1} = C^T = C^\dagger$.

Рівняння Дірака в кіральному представленні має вигляд

$$i\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} & m \\ m & -\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (14.11.16)$$

а умова дійсності майоранівського спіно́ра $\Psi = (\psi, \chi)^T$ визначається рівнянням

$$\begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^* \\ \chi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (14.11.17)$$

З останнього рівняння

$$\chi = i\sigma^2\psi^*, \quad (14.11.18)$$

тобто майоранівський чотирикомпонентний спіно́р

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \psi \\ i\sigma^2\psi^* \end{pmatrix} \quad (14.11.19)$$

фактично залежить тільки від двокомпонентного спіно́ра ψ , для якого маємо рівняння

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}\psi + i\sigma^2 m\psi^*. \quad (14.11.20)$$

Це рівняння отримується з дії

$$S = \int d^4x \left[\psi^\dagger (i\partial_t + \sigma^j i\partial_j) \psi - \frac{m}{2} (\psi^\dagger i\sigma^2\psi^* - \psi^T i\sigma^2\psi) \right]. \quad (14.11.21)$$

Масовий доданок має структуру

$$\psi^T i\sigma^2 \psi = \psi_\alpha \epsilon_{\alpha\beta} \psi_\beta, \quad (14.11.22)$$

де $\epsilon_{\alpha\beta}$ — антисиметричний за лоренцовими індексами ($\alpha, \beta = 1, 2$) тензор, і масовий доданок є інваріантним відносно перетворень Лоренца. В класичному випадку, коли поля ψ_α комутують між собою, цей доданок тотожно дорівнює нулю, але в квантовому випадку ферміонні поля антикомутують, і такий масовий доданок є нетривіальним. Зауважимо, що наявність масового доданка порушує $U(1)$ фазові симетрії, які відповідають за збереження окремих (ν, μ, τ) лептонних квантових чисел. У термінах чотирикомпонентного майоранівського спінора дія (14.11.21) з матрицями γ^μ в кіральному представленні має вигляд

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x [\bar{\Psi}_M i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_M - m \bar{\Psi}_M \Psi_M]. \quad (14.11.23)$$

У довільному представленні умова Майорани $\Psi = C\bar{\Psi}^T = \Psi_c$ для двокомпонентних вейльських ферміонів приймає вигляд

$$\psi_R = C\bar{\psi}_L^T = \psi_L^c, \quad \psi_L = C\bar{\psi}_R^T = \psi_R^c, \quad (14.11.24)$$

і для майоранівського поля

$$\Psi = \psi_L + \psi_R = \psi_L + C\bar{\psi}_L^T \quad \text{або} \quad \Psi = \psi_R + \psi_L = \psi_R + C\bar{\psi}_R^T. \quad (14.11.25)$$

Знов-таки, майоранівське поле залежить тільки від одного двокомпонентного спінора. В довільному представленні лагранжіан в (14.11.23) можна записати у вигляді, де є тільки одне, наприклад ліве, поле, замінюючи ψ_R на ψ_L^c :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\bar{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_L^c i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L^c - m \left(\bar{\psi}_L^c \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_L^c \right) \right]. \quad (14.11.26)$$

Цей лагранжіан застосовується для опису нейтрино з майоранівською масою. Звісно, якщо існує праве нейтрино, то в лагранжіан можна додати діраківський масовий доданок.

Найбільш перспективним експериментом для з'ясування природи маси нейтрино є пошук безнейтринного подвійного бета-розпаду. Стандартна модель передбачає, що для деяких ядер може мати місце реакція (подвійний бета-розпад)

$$(Z, A) \rightarrow (Z + 2, A) + 2e^- + 2\bar{\nu}_e. \quad (14.11.27)$$

Така реакція спостерігалася у 11 ядер з часом життя $> 7 \cdot 10^{18}$ років. Перший такий розпад зафіксовано у 1987 р. Якщо існує майоранівське нейтрино, яке співпадає зі своїм антинейтрино ($\bar{\nu}_e = \nu_e$), то можливий безнейтринний подвійний бета-розпад

$$(Z, A) \rightarrow (Z + 2, A) + 2e^-, \quad (14.11.28)$$

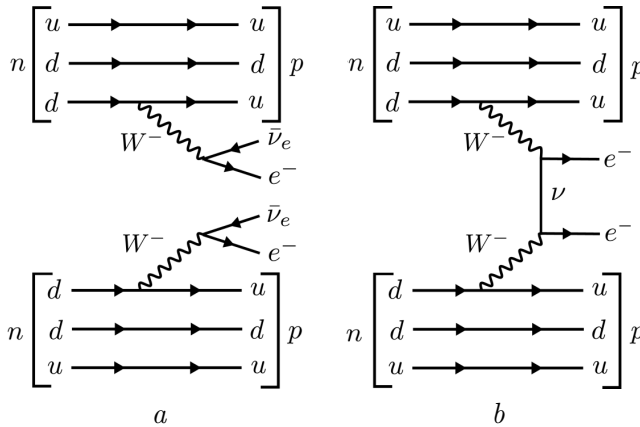


Рис. 85. Подвійний бета-розпад, дозволений у Стандартній моделі (a); безнейтринний подвійний бета-розпад, заборонений у Стандартній моделі (b)

в якому порушується закон збереження лептонного квантового числа: $\Delta L = 2!$ Період напіврозпаду за рахунок такої реакції оцінюється $>10^{25}$ років. Ці два типи розпадів зображені на рис. 85.

Таким чином, на сьогодні Стандартна модель описує, у гарному узгодженні з експериментальними даними, всі взаємодії нейтрино з іншими частинками Стандартної моделі, навіть якщо вважати нейтрино безмасовими. Те, що нейтрино мають масу і не мають заряду, допускає можливість для нейтрино бути майоранівськими частинками. Експериментальне з'ясування того, чи є нейтрино діраківською чи майоранівською частинкою, є важливим для визначення того, яка із запропонованих моделей для виходу за межі Стандартної моделі може бути реалізована.

14.12. Осциляції нейтрино

Гіпотеза про існування нейтрино, нейтральної частинки з дуже малою масою, була запропонована В. Паулі в 1930 р. щоб врятувати закон збереження енергії в процесі бета-розпаду ядер. У листі до учасників фізичної конференції в Тьубінгені Паулі майже вибачливо написав: «Дорогі радіоактивні Пані та Панове,... як відчайдушний спосіб врятувати принцип збереження енергії у бета-розпаді, ... я пропоную ідею нейтральної частинки зі спіном половина». Спочатку Паулі назвав гіпотетичну частинку нейтроном, але після відкриття Дж. Чедвіком у 1932 р. важкої нейтральної частинки, яка і була названа нейтроном, Е. Фермі за пропозицією Е. Амальді запропонував назву нейтрино (маленький нейтрон) для паулівської частинки. В 1934 р. Фермі постулював чотириферміонний гамільтоніан взаємодії, щоб описати бета-розпад з використанням нейтрино, електрона, нейтрона і протона, таким чином з'явилась теорія слабких взаємодій.

Нейтрино було відкрито в 1956 р. К. Кованом і Ф. Райнесом. Фактично спостерігалися антинейтрино, утворені в ядерному реакторі в реакції $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$, які далі взаємодіють з протоном, $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$, утворюючи позитрон. Оскільки позитрон швидко анігілює з електроном у два гамма-кванти, то одночасне детектування нейтрона і двох гамма-квантів і було свідченням існування нейтрино. Мюонні нейтрино були відкриті в 1962 р. Л. Ледерманом, М. Шварцем і Дж. Штейнбергером, а тау-нейтрино спостерігалися у 2000 р. в Фермілабі (США).

Перша ідея осциляції нейтрино була запропонована Б. Понтекорво в 1957 р., який розглянув перетворення нейтрино в антинейтрино, а осциляції нейтрино, тобто перетворення одного сорту нейтрино в інший, були досліджені в роботах японських фізиків З. Макі, М. Накагава і С. Саката на початку 60-х років. Свідчення про осциляції нейтрино походять від спостережень нейтрино від Сонця (Р. Девіс, 1964 р.), кутової анізотропії атмосферних нейтрино і навіть від реакторних нейтрино (вже на початку 2000-х років).

Розглянемо змішування двох сортів діраківських нейтрино, ν_e і ν_μ , які у вільному стані мають маси m_{ν_e} і m_{ν_μ} , відповідно. Якщо має місце змішування, то масові доданки мають вигляд

$$m_{\nu_e} \bar{\nu}_e \nu_e + m_{\nu_\mu} \bar{\nu}_\mu \nu_\mu + m_{e\mu} (\bar{\nu}_e \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu \nu_e). \quad (14.12.1)$$

Діагоналізація за допомогою унітарного перетворення

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}, \quad \text{tg}(2\theta) = \frac{2m_{e\mu}}{m_{\nu_\mu} - m_{\nu_e}} \quad (14.12.2)$$

дає маси

$$m_1 = \frac{1}{2} \left[m_{\nu_\mu} + m_{\nu_e} + \sqrt{(m_{\nu_\mu} - m_{\nu_e})^2 + 4m_{e\mu}^2} \right], \quad (14.12.3)$$

$$m_2 = \frac{1}{2} \left[m_{\nu_\mu} + m_{\nu_e} - \sqrt{(m_{\nu_\mu} - m_{\nu_e})^2 + 4m_{e\mu}^2} \right]. \quad (14.12.4)$$

У разі трьох і більше сортів нейтрино змішування здійснюється за допомогою унітарної матриці ПМНС: $|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle$. Тобто ароматні нейтрино $|\nu_\alpha\rangle$, що утворюються за рахунок електрослабкої взаємодії, є когерентною суперпозицією масових власних станів $|\nu_i\rangle$. Нейтрино ν_e , яке народжується в ядерній реакції на Сонці, буде еволюціонувати в часі та просторі за законом

$$\begin{aligned} |\nu_e(t)\rangle &= \cos \theta |\nu_1(t)\rangle + \sin \theta |\nu_2(t)\rangle = \\ &= \cos \theta e^{-iE_1 t + ip_1 x} |\nu_1\rangle + \sin \theta e^{-iE_2 t + ip_2 x} |\nu_2\rangle. \end{aligned} \quad (14.12.5)$$

Нехай $x = 0$ — точка народження нейтрино ν_e в момент часу $t = 0$, далі нейтрино ν_1, ν_2 розповсюджуються з енергіями E_1, E_2 і імпульсами p_1, p_2 .

Внаслідок малості мас нейтрино є ультрарелятивістськими, $|\mathbf{p}_i| = p_i \gg m_i$, $p_i \simeq E_i \simeq E$, тому

$$E_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2} \simeq p_i + \frac{m_i^2}{2p_i} \approx E + \frac{m_i^2}{2E}. \quad (14.12.6)$$

Еволюція стану $|\nu_e(t)\rangle$ до точки спостереження x приймає вигляд (опускаючи загальний фазовий множник)

$$|\nu_e(t)\rangle = \cos \theta |\nu_1\rangle + \sin \theta \exp\left(i \frac{\Delta m^2}{2E} x\right) |\nu_2\rangle. \quad (14.12.7)$$

Ймовірність того, що електронне нейтрино залишиться тим самим електронним нейтрино, буде

$$\begin{aligned} P_{ee} &= |\langle \nu_e | \nu_e(t) \rangle|^2 = \left| \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \exp\left(i \frac{\Delta m^2}{2E} x\right) \right|^2 = \\ &= 1 - \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4E} x\right). \end{aligned} \quad (14.12.8)$$

Відповідно, ймовірність спостерігати мюонне нейтрино на відстані L є такою

$$P_{e\mu} = 1 - P_{ee} = \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 c^3}{4E\hbar} L\right), \quad (14.12.9)$$

де відновлено фізичні константи c і \hbar . Ця формула часто записується у вигляді

$$P_{e\mu} = \sin^2 2\theta \sin^2 \left[1,27 \left(\frac{\Delta m^2 (\text{eV}^2)}{4E (\text{GeV})} L (\text{км}) \right) \right], \quad (14.12.10)$$

де маса наводиться в одиницях еВ, енергія — в ГеВ, а відстань L — у кілометрах. Як бачимо, необхідною умовою появи осциляцій є наявність різних мас у різних сортів нейтрино та змішування нейтринних сортів ($\theta \neq 0$). Для $\theta = 0, \pi/2$ осциляції відсутні (ароматні стани ν_e і ν_μ мають визначені маси). Цей перехід від одного аромату до іншого є канонічним випадком широко відомого квантово-механічного ефекту, що має місце в системах двох станів, а не є специфічною властивістю тільки нейтрино. Очевидно, спостереження осциляцій за формулою (14.12.10) експериментально можливо, коли аргумент другого множника з синусом у (14.12.10) є порядку одиниці. Тобто експеримент з даною базою L (км) і енергією нейтрино E (ГеВ) є чутливим до різниці квадратів мас нейтрино Δm^2 (еВ²). Наприклад, експеримент з базою $L \sim 10^4$ км, що приблизно дорівнює діаметру Землі, і $E \sim 1$ ГеВ може виміряти різницю маси Δm_{ij}^2 до величини порядку 10^{-4} еВ². Таким чином, експерименти з довгою базою можуть виміряти надзвичайно малу різницю квадратів мас нейтрино.

У середовищі, де є електрони, при певних значеннях густини електронів можливе підсилення нейтринних осциляцій. Це так званий ефект Міхеєва—Смірнова—Волфенштейна, який дає внесок у розв'язання проблеми сонячних нейтрино: наявну різницю між потоком сонячних електронних нейтрино, що виробляються в ядрі Сонця, та потоком нейтрино, який спостерігається на Землі. Еволюція нейтрино у середовищі з високою густиною нейтрино, які виникають під час вибуху наднових, також може впливати на осциляції нейтрино; ця проблема тільки починається досліджуватись.

Експерименти за останні 20 років дали переконливі свідчення існування у нейтрино мас та змішування сортів нейтрино. Експеримент Супер-Каміоканде (СК), який використовує 50-кілотонний водяний черенковський детектор, розташований глибоко під землею в префектурі Гіфу в Японії, був першим експериментом, який представив докази осциляцій $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$ в атмосферних потоках нейтрино. Цей експеримент вимірював потоки нейтрино ν_μ , які народжуються безпосередньо над поверхнею Землі, приблизно 15 км до детектора, і ті, що народжуються безпосередньо під детектором, перетинаючи при цьому повний діаметр Землі (13 000 км) до досягнення детектора. Жодного сигналу про участь в осциляціях нейтрино ν_e не знайдено, тому передбачається, що зникнення нейтрино ν_μ в основному зв'язано з переходами $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$, а отже, розрахунок ймовірності такого переходу відбувався за формулою (14.12.8). Вимірюючи потоки нейтрино в широкому діапазоні E_ν і L , вперше було отримано значення параметрів Δm^2 і $\sin^2 2\theta$:

$$\Delta m_{\text{atm}}^2 = (2-3) \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2, \quad \sin^2(2\theta_{\text{atm}}) = 0,50 \pm 0,13, \quad \frac{L}{E} = 500 \frac{\text{км}}{\text{ГеВ}}.$$

В іншому експерименті пучок нейтрино ν_μ посилався з Фермілаб поблизу Чикаго до шахти Соудан (річка Еш) у Міннесоті, маючи базову лінію 735 км. Ці експерименти виявили докази зникнення ν_μ , що узгоджуються з тими, які знайшов СК ($\Delta m^2 = 2,37 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2$, $\sin^2 2\theta = 0,51$).

Експеримент з реакторними нейтрино проводився в Японії (KamLand experiment) з 2002 р. і триває дотепер. У реакторах виробляється електронне антинейтрино $\bar{\nu}_e$, тому фактично досліджувались переходи $\bar{\nu}_e \leftrightarrow \bar{\nu}_\mu$. Припускаючи справедливність СРТ теореми, результати досліджень мають прямий стосунок до осциляцій сонячних нейтрино. За формулою осциляцій із двома нейтрино знайдено

$$\Delta m_{\odot}^2 = (8,0 \pm 0,4) \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2, \quad \sin^2(2\theta_{\odot}) = 0,31 \pm 0,03, \quad \frac{L}{E} = 15 \cdot 10^3 \frac{\text{км}}{\text{ГеВ}}.$$

У проведених експериментах з осциляцій нейтрино не виникала необхідність залучення нових нейтрино (таких як стерильних нейтрино) для пояснення отриманих результатів. Змішування трьох сортів (ароматів)

нейтрино описується матрицею ПМНС, що містить три кути змішування (так званий сонячний кут змішування θ_{12} , атмосферний кут змішування θ_{23} , і кут змішування θ_{13} , який ще потрібно виміряти), одну фазу Дірака (δ_ν), і потенційно дві фази Майорани (α, β), які присутні, якщо одночасно маємо діраківські та майоранівські масові доданки. Вона задається як

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta_\nu} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta_\nu} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (14.12.11)$$

де $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, і кути лежать в першому квадранті. Подібна параметризація застосовується до матриці Кабіббо—Кобаясі—Маскави $V_{\text{ККМ}}$ з трьома кутами змішування кварків (θ_{12} , θ_{13} і θ_{23}), і однією фазою δ_q . Ненульові фази δ_ν і δ_q приводять до порушення СР в осциляціях нейтрино і в розпадах кварків, відповідно.

В електрослабких процесах народжуються завжди нейтрино з визначеним ароматом, наприклад, у розпаді зарядженого W -бозона на заряджений лептон \bar{l}_α , $W^+ \rightarrow \bar{l}_\alpha + \nu_\alpha$ народжуються нейтрино з відповідним ароматом α , а нейтрино ν_β детектується за допомогою процесу взаємодії $\nu_\beta \rightarrow W^+ + l_\beta$. Ароматні стани нейтрино $|\nu_\alpha\rangle$ є суперпозицією нейтрино з визначеними масами $|\nu_i\rangle$:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle.$$

Внаслідок ортогональності масових станів, $\langle \nu_i | \nu_j \rangle = \delta_{ij}$, маємо $\langle \nu_\alpha | \nu_\beta \rangle = (UU^\dagger)_{\alpha\beta}$. Матриця U повинна бути унітарною, $UU^\dagger = 1$, що гарантує, що кожен раз, коли ароматне нейтрино α народжує заряджений лептон, цей заряджений лептон завжди буде l_α з ароматом α . Тобто ν_e народжує виключно e , ν_μ народжує виключно μ , те саме справедливо і для ν_τ і τ . Очевидно, масові нейтрино можна представити як лінійні комбінації ароматних нейтрино

$$|\nu_i\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha i} |\nu_\alpha\rangle.$$

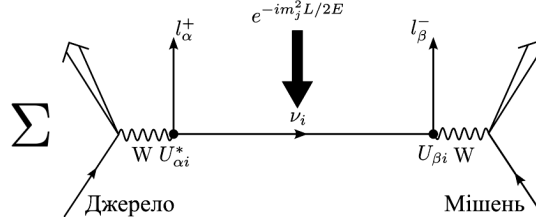
Еволюція ультрарелятивістських нейтрино на відстані L описується формулою

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* |\nu_i(t)\rangle, \quad (14.12.12)$$

а еволюція масових станів визначається

$$|\nu_i(t)\rangle = \exp\left(-i \frac{m_i^2 L}{2E}\right) |\nu_i(0)\rangle. \quad (14.12.13)$$

Рис. 86. Зміна аромату (осциляція) нейтрино у вакуумі



Амплітуда для нейтрино, народженого з ароматом α , яке детектується як нейтрино з ароматом β після подолання відстані L з енергією E , буде

$$\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* e^{-im_i^2 L/2E} U_{\beta i}, \quad (14.12.14)$$

де ми використали ортонормованість масових станів нейтрино. Амплітуди $A(W^+ \rightarrow l_\alpha^+ + \nu_i) = U_{\alpha i}^*$ і $A(\nu_i \rightarrow W^+ + l_\beta^-) = U_{\beta i}$ у формулі (14.12.14) визначають народження ν_α джерелом і детектування ν_β в детекторі, відповідно, а $e^{-im_i^2 L/2E}$ є пропагатор масивного нейтрино ν_i (див. рис. 86). Для ймовірності переходу $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta)$ отримуємо

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = |\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle|^2 = \sum_{ij} (U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) e^{-i\Delta m_{ij}^2 L/2E}, \quad (14.12.15)$$

або, використовуючи унітарність матриці U ,

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i>j} \text{Re} (U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin^2 \left(\Delta m_{ij}^2 \frac{L}{4E} \right) + 2 \sum_{i>j} \text{Im} (U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin \left(\Delta m_{ij}^2 \frac{L}{2E} \right). \quad (14.12.16)$$

Ця формула визначає осциляції для n сортів нейтрино ($i = 1, 2, \dots, n$). Ймовірність осциляцій антинейтрино, $\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta$, описується цією ж формулою, де треба замінити $U \rightarrow U^*$. Для трьох сортів діраківських нейтрино отримані такі значення кутів змішування в матриці (14.12.11):

$$\theta_{12} \simeq 33,5^\circ, \quad \theta_{13} \simeq 8,4^\circ, \quad \theta_{23} \simeq 47,9^\circ. \quad (14.12.17)$$

Ці кути змішування істотно відрізняються від кутів змішування кварків, які значно менші: $\theta_{12} \simeq 13^\circ$, $\theta_{13} \simeq 0,21^\circ$, $\theta_{23} \simeq 2,4^\circ$. З осциляцій нейтрино визначаються шість фундаментальних ароматних параметрів: дві незалежні різниці квадратів мас нейтрино (скажімо, Δm_{21}^2 і Δm_{31}^2), три кути і одна фаза δ_ν . Що стосується фази δ_ν , яка порушує CP -інваріантність, то попередні дані з осциляцій нейтрино дають значення $\delta_\nu \simeq 3\pi/2$, але, як визначити або обмежити майоранівські фази, залишається повністю неясним і

дотепер. Також незрозумілим залишається питання, чи існує якась кореляція між лептонним та кварковим секторами, оскільки ці сектори мають подібні загальні властивості щодо механізмів генерації маси, змішування ароматів та порушення CP -інваріантності.

14.13. Баріонна і лептонна симетрії та їх порушення в Стандартній моделі

Баріонне та лептонне числа елементарних частинок у Стандартній моделі пов'язані з глобальними симетріями відносно $U_B(1)$ і $U_L(1)$ фазових перетворень ферміонних полів з постійними фазами

$$\psi \rightarrow e^{iB\alpha}\psi, \quad \psi \rightarrow e^{iL\beta}\psi,$$

де $L = 1$ для лептонних полів і $B = 1/3$ для кваркових полів. Такий вибір баріонного заряду $1/3$ кваркових полів зумовлений умовою, щоб баріонний заряд нуклонів, які є зв'язаними станами трьох кварків, дорівнював одиниці. Для античастинок баріонний і лептонний заряди є протилежними за знаком, тому, наприклад, мезони, які є зв'язаними станами кварка та антикварка, мають нульовий баріонний заряд.

Баріонний заряд має важливе значення в фізиці елементарних частинок. Його збереження забороняє, наприклад, розпад протона $p \rightarrow e^+ + \pi^0$. Тобто протон є стабільним, тому що не існує більш легких частинок з ненульовим баріонним зарядом. Аналогічно електрон є стабільним, тому що це найлегший заряджений лептон. При низьких енергіях протони і нейтрони утворюють зв'язані стани, тобто ядра. Електрони формують разом з ядрами атоми, утворюючи всю відому нам речовину. Таким чином, підґрунтям стабільності матерії, яка нас оточує, є закони збереження баріонного і лептонного зарядів.

Крім лептонного числа L у Стандартній моделі корисними є поняття лептонних чисел кожного покоління, які наведені в таблиці 4. Ці лептонні числа відповідають за те, що мюон розпадається на електрон, електронне антинейтрино та мюонне нейтрино

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

зі збереженням лептонних мюонного $l_\mu = 1$ і електронного $l_e = 0$ чисел, тоді, як розпад мюона на електрон і фотон

$$\mu^- \rightarrow e^- + \gamma,$$

неможливий, тому що порушується збереження як електронного, так і мюонного лептонних зарядів, хоча повний лептонний заряд, очевидно, зберігається. Для баріонів введення окремих баріонних зарядів для кварків

кожного покоління не є корисним, тому що такі баріонні заряди не зберігаються внаслідок змішування поколінь, розглянутого в параграфі 14.7. Тому практичне значення має тільки повний баріонний заряд.

Експериментально спостережувані осциляції нейтрино, розглянуті в попередньому параграфі, означають, що окремі лептонні числа кожного покоління не зберігаються в природі. Якщо доповнити Стандартну модель і ввести праві нейтрино, тоді виникає змішування лептонів аналогічне змішуванню в кварковому секторі, де матриця Понтекорво—Макі—Накагави—Сакати змішування нейтрино відіграє роль, аналогічну матриці Кабіббо—Кобаясі—Маскави. Якщо ж нейтрино є майоранівськими частинками, тоді навіть повний лептонний заряд $L = l_e + l_\mu + l_\tau$ не зберігається, тому що майоранівський масовий доданок неінваріантний відносно фазових перетворень нейтринних полів.

Як зазначено вище, гамільтоніан Стандартної моделі зберігає в класичній теорії баріонний B та лептонний L заряди, які визначаються проінтегрованими по просторовим координатам часовими компонентами баріонного і лептонного струмів

$$j_B^\mu = \frac{1}{3} \sum_i (\bar{Q}_L^i \gamma^\mu Q_L^i + \bar{u}_R^i \gamma^\mu u_R^i + \bar{d}_R^i \gamma^\mu d_R^i), \quad (14.13.1)$$

$$j_L^\mu = \sum_i (\bar{L}^i \gamma^\mu L^i + \bar{e}_R^i \gamma^\mu e_R^i), \quad (14.13.2)$$

де ферміонні поля, визначені рівняннями (14.3.15)—(14.3.17), $1/3$ в j_B^μ — баріонний заряд кварків, а i — індекс покоління.

Стандартна модель є кіральною теорією. Дійсно, в її електрослабкому секторі калібрувальна група $SU_L(2)$ діє тільки на ліві ферміони (за що відповідальний проектор $P_L = (1 - \gamma_5)/2$ в доданках взаємодії), а група гіперзаряду $U_Y(1)$ є також кіральною, тому що гіперзаряди лівих та правих ферміонів не однакові. Хоча всі калібрувальні аномалії скорочуються в Стандартній моделі, баріонний і лептонний заряди, пов'язані з глобальними симетріями (14.13), не зберігаються внаслідок кіральних аномалій [186].

Для того, щоб знайти аномалію баріонного (14.13.1) і лептонного струмів (14.13.2), зручно використати те, що кіральна аномалія в квантовій електродинаміці (9.6.25) може бути отримана як сума окремих аномалій для струмів лівих і правих ферміонів

$$\partial_\mu j_L^\mu = \frac{e^2}{16\pi^2} F_{\mu\nu} F^{*\mu\nu}, \quad (14.13.3)$$

$$\partial_\mu j_R^\mu = -\frac{e^2}{16\pi^2} F_{\mu\nu} F^{*\mu\nu}. \quad (14.13.4)$$

Це випливає з визначення струмів у термінах лівих і правих полів,

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R, \quad j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi = -\bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R,$$

збереження векторного струму, $\partial_\mu j^\mu = 0$, і аномалії в дивергенції кіраль-ного струму (9.6.25). Для баріонного і лептонного струмів e^2 в (14.13.3) і (14.13.4) замінюється на значення квадратів гіперзаряду відповідних кваркових і лептонних полів, помножене на g'^2 при взаємодії з гіперзарядним калібрувальним полем, а також замінюється на $g^2\text{tr}[T^a T^b] = g^2\delta^{ab}/2$ і $g_s^2\delta^{ab}/2$ при взаємодії з $SU_L(2)$ і $SU_c(3)$ калібрувальними полями, відповідно.

Достатньо визначити внески в аномалію баріонного і лептонного зарядів для ферміонів від одного покоління, тому що вони не залежать від покоління. Тоді, враховуючи рівняння (14.13.3) і (14.13.4) та квантові числа кварків і лептонів у Стандартній моделі нескладно знайти, що

$$\partial_\mu(\bar{Q}_L^i\gamma^\mu Q_L^i) = \frac{g_s^2}{16\pi^2}G_{\mu\nu}^a G^{*a\mu\nu} + \frac{3g^2}{32\pi^2}F_{\mu\nu}^a F^{*a\mu\nu} + \frac{g'^2}{96\pi^2}B_{\mu\nu}B^{*\mu\nu}, \quad (14.13.5)$$

$$\partial_\mu(\bar{u}_R^i\gamma^\mu u_R^i) = -\frac{g_s^2}{32\pi^2}G_{\mu\nu}^a G^{*a\mu\nu} - \frac{g'^2}{12\pi^2}B_{\mu\nu}B^{*\mu\nu}, \quad (14.13.6)$$

$$\partial_\mu(\bar{d}_R^i\gamma^\mu d_R^i) = -\frac{g_s^2}{32\pi^2}G_{\mu\nu}^a G^{*a\mu\nu} - \frac{g'^2}{48\pi^2}B_{\mu\nu}B^{*\mu\nu}, \quad (14.13.7)$$

$$\partial_\mu(\bar{L}_L^i\gamma^\mu L_L^i) = \frac{g^2}{32\pi^2}F_{\mu\nu}^a F^{*a\mu\nu} + \frac{g'^2}{32\pi^2}B_{\mu\nu}B^{*\mu\nu}, \quad (14.13.8)$$

$$\partial_\mu(\bar{e}_R^i\gamma^\mu e_R^i) = -\frac{g'^2}{16\pi^2}B_{\mu\nu}B^{*\mu\nu}, \quad (14.13.9)$$

Константа сильної взаємодії тут позначена g_s , а відповідний тензор напруженості $G_{\mu\nu}^a$. Тоді для аномалій баріонного (14.13.1) і лептонного струмів (14.13.2) ми отримуємо

$$\partial_\mu j_{B,L}^\mu = \frac{n_g}{64\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left(g^2 F_{\mu\nu}^a F_{\alpha\beta}^a - g'^2 B_{\mu\nu}B_{\alpha\beta}\right), \quad (14.13.10)$$

де $n_g = 3$ — число поколінь у Стандартній моделі, $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ — повністю антисиметричний тензор, напруженості полів $F_{\mu\nu}^a$ і $B_{\mu\nu}$ визначені в рівняннях (14.2.12) і (14.2.13), а g і g' є константами зв'язку відповідних калібрувальних груп. Підкреслимо, що внесок глюонних полів в аномалії баріонного і лептонного струмів відсутній. Подробиці отримання формули (14.13.10) можна знайти в роботі [145].

Як зазначалося в параграфі 4.3, внесок у $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}^a F_{\alpha\beta}^a$ дають інстантонні розв'язки, які визначають тунельні переходи між класичними вакуумами полів Янга—Мілса з різним значенням топологічного заряду. Для

групи $SU_L(2)$ такі розв'язки відомі як слабкі інстантони, але внаслідок малого значення константи слабкої взаємодії їх внесок є надзвичайно сильно подавленим при низьких енергіях. Однак у ранньому Всесвіті при температурах, близьких до температури електрослабкого фазового переходу, переходи між станами полів Янга—Міллса з різними значеннями топологічного заряду вже не є подавленими, а відповідні розв'язки відомі як сфалерони [147].

Іншою важливою особливістю рівнянь (14.13.10) є те, що, тоді як повний баріонний і лептонний заряд $B + L$ не зберігається, для різниці баріонного і лептонного зарядів $B - L$ відсутні кіральні аномалії, а тому $B - L$ заряд в точності зберігається в Стандартній моделі.

ЗАДАЧІ

1. Загальний вигляд взаємодії ферміонів зі скалярними полями (взаємодія Юкави) має вид:

$$\bar{\psi}_l \Gamma_i^{lm} \Phi^i \psi_m.$$

З умови інваріантності $\delta(\bar{\psi}_l \Gamma_i^{lm} \Phi^i \psi_m) = 0$ відносно інфінітезимальних калібрувальних перетворень,

$$\delta\psi_l = -t_{lm}^a \psi_m \delta\omega^a(x), \quad \delta\Phi_i = -T_{ij}^a \Phi_j \delta\omega^a(x),$$

отримати умови на набір юкавівських констант зв'язку Γ_i^{lm} .

2. У розширенні Стандартної моделі можуть бути присутні калібрувально інваріантні взаємодії типу

$$\frac{\lambda}{M^2} \varepsilon^{abc} F_{\mu\nu}^a F_{\nu\rho}^b F_{\rho\mu}^c,$$

де M — параметр розмірності маси, який набагато більший від маси Z -бозона $M \gg m_Z$. Вписати вершини взаємодії для полів W , Z , γ .

3. Обчислити ефективну електромагнітну константу взаємодії в Стандартній моделі при енергії 100 ГеВ, враховуючи всі відомі заряджені кварки і лептони з масами, меншими 100 ГеВ, та використовуючи однопетльове наближення.
4. Обчислити ширину розпаду хігсівського бозона на два лептони, $h^0 \rightarrow l^+ l^-$, для неполяризованих l^\pm в найнижчому порядку теорії збурень.
5. Обчислити ширину розпаду Z -бозона на два лептони, $Z \rightarrow l^+ l^-$, для неполяризованих Z і l^\pm в найнижчому порядку теорії збурень. Перевірити, що в наближенні, коли маси лептонів дорівнюють нулю,

$m_l = 0$, $l = e, \mu, \tau$, ширина розпаду на всі лептони приймає простий вигляд

$$\Gamma(Z \rightarrow \text{лептони}) = \frac{G_F m_Z^3}{3\pi\sqrt{2}} \left(\frac{3}{2} - 3 \sin^2 \theta_W + 6 \sin^4 \theta_W \right).$$

6. Використовуючи відомі значення G_F , m_Z , θ_W , оцінити ширину розпаду $\Gamma(Z \rightarrow \text{лептони})$ і час життя Z -бозона за рахунок цього каналу розпаду.

7. Матричний елемент розпаду $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ у теорії Фермі дорівнює

$$M = -\frac{4iG_F}{\sqrt{2}} [\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma^\alpha P_L u_\mu] [\bar{u}_e \gamma_\alpha P_L u_e],$$

де $P_L = (1 - \gamma_5)/2$ — лівий проєктор, а u — спірна хвильова функція відповідної частинки. Для фіксованого спінового стану частинки маємо

$$u(s)\bar{u}(s) = \frac{1}{2}(p_\mu \gamma^\mu + m)(1 - \gamma_5 s_\nu \gamma^\nu),$$

де спіновий стан описується вектором $s^\nu = (m\mathbf{p}\mathbf{n}, \mathbf{s})$ і

$$\mathbf{s} = \mathbf{n} + \frac{(\mathbf{p}\mathbf{n})\mathbf{p}}{m(m + E)},$$

а \mathbf{n} є одиничним вектором поляризації частинки. Використовуючи формулу для ймовірності розпаду (11.2.15), знайти ймовірність розпаду неполяризованого мюона, який знаходиться в стані спокою в лабораторній системі координат, в мюонне нейтрино, електронне антинейтрино та електрон зі спіновим станом, який визначається одиничним вектором \mathbf{n}_e .

8. Обчислити амплітуди $e^- e^+ \rightarrow W^- W^+$ для ліво- і правополяризованих електронів і позитронів де W^- і W^+ мають визначену спіральність. У випадку, коли один з W -бозонів є поздовжньо поляризованим (L), а інший поперечно (T) поляризований показати, що, хоча індивідуальні діаграми дають внески порядку \sqrt{s} , повна амплітуда спадає як $1/\sqrt{s}$.

9. Для процесу розпаду топ-кварка $t \rightarrow b + W^+$ дослідити окремо народження поздовжнього і поперечного W -бозонів. Обчислити ширини розпаду і показати, що

$$\frac{\Gamma(t \rightarrow b + W_L)}{\Gamma(t \rightarrow b + W_T)} = \frac{m_t^2}{2m_W^2}$$

у наближенні, коли можна нехтувати масою b -кварка.

РОЗШИРЕННЯ СТАНДАРТНОЇ МОДЕЛІ

На сьогодні Стандартна модель є найкращим експериментально підтвердженим теоретичним описом взаємодій між елементарними частинками. Існують однак фізичні явища, які неможливо пояснити в СМ, наприклад баріонна асиметрія Всесвіту, маси нейтрино, темна матерія тощо. Для вирішення цих проблем було запропоновано багато різних моделей, які розширюють СМ введенням нових частинок. Нижче ми розглянемо деякі розширення СМ, що дозволяють описати механізм генерації мас нейтрино, нові хіггсівські частинки, а також об'єднання всіх калібрувальних взаємодій в єдину теорію, де група симетрії СМ, $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$, є підгрупою деякої компактної групи більш високого рангу, наприклад груп $SU(5)$, $SO(10)$ та ін.

15.1. Маси нейтрино

Спостереження осциляцій атмосферних і сонячних нейтрино свідчать про необхідність розширення Стандартної моделі, тому що в ній нейтрино не мають маси. Один із простих способів забезпечити масу нейтрино без додавання інших частинок — це розширити Стандартну модель за допомогою майоранівської маси для лівих нейтрино

$$\frac{1}{2} m_\nu \overline{\nu_L^c} \nu_L + \text{h.c.}, \quad (15.1.1)$$

де $\nu_L^c = C \overline{\nu_L^T}$ є зарядово спряженим лівим нейтрино. Хоча такий доданок порушує калібрувальну симетрію $SU_L(2) \times U_Y(1)$, він може бути згенерований внаслідок спонтанного порушення електрослабкої симетрії за допомогою калібрувально інваріантного доданка взаємодії

$$\frac{1}{2} f_{ij} (\overline{L_i^c} \tilde{\Phi}^*) (\tilde{\Phi}^\dagger L_j) + \text{h.c.}, \quad (15.1.2)$$

де L_i є дублетом лептонів лівої киральності Стандартної моделі, f_{ij} є матрицею з індексами поколінь і розмірністю оберненої маси, $\tilde{\Phi} = (i\sigma_2)\Phi^*$, а Φ є хіггсівським дублетом. Очевидно, що цей доданок має масову розмірність

добутку полів $\bar{\nu}$ і тому є неперенормовним. Це означає, що доданок (15.1.2) є ефективним в низькоенергетичній теорії.

Інший спосіб забезпечити масу нейтрино — це додати до Стандартної моделі нейтрино з правою кіральністю. Такі нейтрино не беруть участь ані в сильних, ані в електрослабких взаємодіях. Тому вони відомі ще як стерильні нейтрино. В моделі з правими нейтрино звичайна діраківська маса робить нейтрино масивним

$$m\bar{\nu}\nu = m\bar{\nu}_L\nu_R + m\bar{\nu}_R\nu_L. \quad (15.1.3)$$

Знов-таки, хоча цей доданок є калібрувально неінваріантним, він може бути згенерований внаслідок взаємодії з хіггсівським полем

$$(\bar{L}_i\tilde{\Phi})F_{ij}\nu_{Rj} + \bar{\nu}_{Rj}F_{ji}^*(\tilde{\Phi}^\dagger L_i), \quad (15.1.4)$$

де $L_i = (\nu_{Li}, e_{Li})^T$, $i, j = e, \mu, \tau$, а F_{ij} є матрицею юкавівських констант. Внаслідок спонтанного порушення симетрії нижня компонента хіггсівського поля має вакуумне середнє v . Тоді взаємодія (15.1.4) генерує маси нейтрино

$$m_{ij}\bar{\nu}_{Li}\nu_{Rj} + m_{ij}^*\bar{\nu}_{Ri}\nu_{Lj}, \quad (15.1.5)$$

де $m_{ij} = F_{ij}v/\sqrt{2}$ є діраківською масовою матрицею.

Дуже цікавим механізмом генерації мас нейтрино є так званий механізм гойдалки (seesaw mechanism). Цей підхід використовує діраківські масові доданки для нейтрино разом з майоранівськими масами для правих нейтрино. Зазначимо, що останні не порушують ніякої калібрувальної симетрії і тому не потребують введення додаткових неперенормовних взаємодій. Масовий доданок у механізмі гойдалки має вигляд

$$\frac{1}{2}(\bar{\nu}_L, \bar{\nu}_R^c) \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D^* & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix} + \text{h.c.} \quad (15.1.6)$$

Якщо $|m_D| \ll M$, то масова матриця має два різних масових стани. Розглянемо для спрощення випадок одного покоління. Відповідні стани мають масу

$$m_{1,2} = \frac{M \pm \sqrt{M^2 + 4|m_D|^2}}{2}. \quad (15.1.7)$$

Один з цих масових станів

$$m_2 \approx -\frac{|m_D|^2}{M}$$

може природно мати масу, меншу за еВ, якщо M є дуже великою. Наприклад, для $|m_D| \sim 100$ ГеВ і $M \sim 10^{14}$ ГеВ маємо $m_2 \sim 0,1$ еВ. Таким чином, механізм гойдалки легко пояснює малість мас нейтрино порівняно з іншими масами ферміонів. Наприклад, маса електрона, $m_e = 0,5$ МеВ, який є найлегшим зарядженим лептоном, більш ніж в мільйон разів більша за значення m_2 , розглянутого вище.

15.2. Модель з двома дублетами хіггсівського поля

Вимірювання маси W -бозона на електрон-позитронному і Великому адронному колайдері в ЦЕРНі (Швейцарія), Теватроні в лабораторії Фермі (Батавія, США) дали узгоджене значення

$$m_{W,\text{exp}} = 80,379 \pm 0,012 \text{ GeV.} \quad (15.2.1)$$

Однак колаборація CDF (Collider Detector at Fermilab) в 2022 р. представила нове значення маси W -бозона,

$$m_{W,\text{CDF}} = 80,4335 \pm 0,0094 \text{ GeV,} \quad (15.2.2)$$

що знаходиться в явному протиріччі зі значенням (15.2.1) за попередніми вимірюваннями та з передбаченням Стандартної моделі. Для вирішення цієї суперечності виникає необхідність (крім інших причин) розширити СМ, і одне з можливих розширень — це ввести в СМ ще один дублет поля Хіггса, що ми і розглянемо в цьому розділі.

Мінімальна версія СМ містить один комплексний дублет Хіггса, що після спонтанного порушення електрослабкої симетрії приводить до одного нейтрального СР-парного бозона Хіггса. Однак сектор Хіггса залишається не до кінця відомим, як теоретично, так і експериментально, тому немає фундаментальних причин припускати, що цей сектор має бути мінімальним (тобто містити лише один дублет Хіггса).

Моделі з двома хіггсівськими дублетами, також як і СМ, мають важливу феноменологічну властивість. Для них параметр $\rho = m_W / (m_Z \cos \theta_W) = 1$, і це співвідношення виконується з точністю до скінчених радіаційних поправок. Власне, рівність $\rho = 1$ є початковим критерієм на рівні лагранжіана для відбору моделей, придатних для розширення СМ. Якщо існує кілька скалярних полів, чії електрично нейтральні члени отримують вакуумні середні v_i , то параметр ρ визначається формулою

$$\rho^2 = \frac{\sum_{i=1}^N v_i^2 [T_i(T_i + 1) - Y_i^2]}{2 \sum_{i=1}^N v_i^2 Y_i^2}, \quad (15.2.3)$$

де T_i і Y_i — слабкий ізоспін і гіперзаряд i -го мультиплету. Щоб мати $\rho = 1$ представлення скалярів з ненульовими v_i повинні задовольняти умові $(2T_i + 1)^2 - 12Y_i^2 = 1$. Найпростішим вибором є скаляри з $T_i = \frac{1}{2}$ і $Y_i = \frac{1}{2}$, які відповідають хіггсівському дублету в СМ, і моделі, що розглядаються в цьому розділі, з двома хіггсівськими дублетами.

Сектор Хіггса в моделі з двома дублетами містить три нейтральні і пару заряджених частинок Хіггса з незалежними вільними параметрами

мас. Виявляється, що однопетльові поправки до спостережуваних величин є чутливими до різниці мас між зарядженими та нейтральними бозонами Хіггса і, зокрема, впливають на передбачення m_W .

Сектор Хіггса в лагранжіані моделі містить два дублети комплексних скалярних полів, які перетворюються під дією групи $SU_L(2)$ і обидва мають гіперзаряд $Y = 1/2$,

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \sum_{i=1,2} (D^\mu \Phi_i)^\dagger D_\mu \Phi_i - V(\Phi_1, \Phi_2),$$

$$D_\mu \Phi_i = \left(\partial_\mu - ig \frac{\sigma^a}{2} A_\mu^a - i \frac{g'}{2} B_\mu \right) \Phi_i, \quad (15.2.4)$$

де

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_1^0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_2^+ \\ \phi_2^0 \end{pmatrix}. \quad (15.2.5)$$

Калібрувально інваріантний потенціал з дійсними коефіцієнтами, що означає відсутність порушення CP -симетрії за рахунок хіггсівського сектору, має такий загальний вигляд

$$V(\Phi_1, \Phi_2) = m_{11}^2 \Phi_1^\dagger \Phi_1 + m_{22}^2 \Phi_2^\dagger \Phi_2 - m_{12}^2 (\Phi_1^\dagger \Phi_2 + \Phi_2^\dagger \Phi_1) + \frac{\lambda_1}{2} (\Phi_1^\dagger \Phi_1)^2 +$$

$$+ \frac{\lambda_2}{2} (\Phi_2^\dagger \Phi_2)^2 + \lambda_3 (\Phi_1^\dagger \Phi_1) (\Phi_2^\dagger \Phi_2) + \lambda_4 (\Phi_1^\dagger \Phi_2) (\Phi_2^\dagger \Phi_1) +$$

$$+ \frac{\lambda_5}{2} ((\Phi_1^\dagger \Phi_2)^2 + (\Phi_2^\dagger \Phi_1)^2). \quad (15.2.6)$$

У випадку $m_{12}^2 = 0$ маємо додаткову дискретну симетрію $\Phi_1 \rightarrow \Phi_1$, $\Phi_2 \rightarrow -\Phi_2$, яка дозволяє уникнути нейтральних струмів зі зміною аромату на рівні деревних діаграм. Ця Z_2 -симетрія м'яко порушена, коли $m_{12}^2 \neq 0$. Загалом у потенціалі Хіггса маємо вісім вільних параметрів. Вимога, щоб потенціал V був обмежений знизу, коли $|\Phi_1|, |\Phi_2| \rightarrow \infty$, виражається такими умовами:

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad \lambda_3 > -(\lambda_1 \lambda_2)^{1/2}, \quad \lambda_3 + \lambda_4 \pm |\lambda_5| > -(\lambda_1 \lambda_2)^{1/2}. \quad (15.2.7)$$

Мінімум потенціалу полів Φ_1, Φ_2 відповідає конфігураціям вакуумного поля

$$\Phi_i^0 = \langle \Phi_i \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_i \end{pmatrix}, \quad (15.2.8)$$

де константи v_i визначаються з екстремуму потенціалу

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \Phi_1} \right|_{\Phi_i = \Phi_i^0} = 0, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial \Phi_2} \right|_{\Phi_i = \Phi_i^0} = 0. \quad (15.2.9)$$

З цих рівнянь знаходимо співвідношення між деякими параметрами моделі:

$$\begin{aligned} v_1 m_{11}^2 &= v_2 m_{12}^2 - \frac{v_1}{2} [\lambda_1 v_1^2 + v_2^2 (\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5)], \\ v_2 m_{22}^2 &= v_1 m_{12}^2 - \frac{v_2}{2} [\lambda_2 v_2^2 + v_1^2 (\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5)]. \end{aligned} \quad (15.2.10)$$

Загалом, є чотири можливі розв'язки: 1) $v_1 = v_2 = 0$, 2) $v_1 = 0, v_2 \neq 0$, 3) $v_1 \neq 0, v_2 = 0$, 4) $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$; ми розглянемо найбільш цікавий четвертий випадок. Для полів покладемо

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} \phi_i^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v_i + \eta_i + i\chi_i) \end{pmatrix}. \quad (15.2.11)$$

Поля ϕ_i^+ є комплексними (зарядженими), а η_i і χ_i — дійсними (нейтральними), останні є парними і непарними компонентами комплексного дублета Φ_i відносно CP -перетворення. Розкладаючи потенціал за полями ϕ_i^+, η_i, χ_i відносно екстремуму, у другому порядку отримуємо квадратичну форму, яка визначає масову матрицю цих полів

$$V(\Phi_1, \Phi_2) = (\phi_1^-, \phi_2^-) M_\phi^2 \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_2^+ \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (\eta^T, \chi^T) M_{\eta\chi}^2 \begin{pmatrix} \eta \\ \chi \end{pmatrix} + O(\phi^3), \quad (15.2.12)$$

де $\eta^T = (\eta_1, \eta_2)$, $\chi^T = (\chi_1, \chi_2)$, і поля ϕ_i^- зарядово спряжені до полів ϕ_i^+ . Ми не виписуємо тут вирази для матриць $M_\phi^2, M_{\eta\chi}^2$, дозволяючи отримати їх читачеві самостійно. Матриця M_ϕ^2 має одне нульове власне значення і одне ненульове, а її власними станами є заряджені голдстоунівські бозони G^\pm і масивні заряджені хіггсівські частинки H^\pm , зв'язані унітарним перетворенням з полями ϕ_i^\pm :

$$\begin{pmatrix} G^\pm \\ H^\pm \end{pmatrix} = R(\beta) \begin{pmatrix} \phi_1^\pm \\ \phi_2^\pm \end{pmatrix}, \quad R(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad (15.2.13)$$

$\text{tg } \beta = v_2/v_1$. Аналогічно матриця $M_{\eta\chi}^2$ діагоналізується перетвореннями

$$\begin{pmatrix} G^0 \\ A^0 \end{pmatrix} = R(\beta) \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} H^0 \\ h^0 \end{pmatrix} = R(\alpha) \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \quad (15.2.14)$$

де кут α визначається нижче формулою (15.2.21). Матриця $M_{\eta\chi}^2$ має одне нульове власне значення і три ненульові, її власними станами є безмасовий голдстоунівський бозон G^0 , два CP -парні бозони H^0 і h^0 , і CP -непарний бозон A^0 .

Розглядаючи далі квадратичну форму для калібрувальних полів A_μ^a, B_μ в (15.2.4), знаходимо після діагоналізації масової матриці маси масивних векторних полів (порівняйте з (14.3.10)):

$$m_W = \frac{1}{2}gv, \quad m_Z = \frac{1}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}v, \quad v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}. \quad (15.2.15)$$

Одне поле залишається безмасовим і ототожнюється з електромагнітним полем. Початкова симетрія лагранжіана $SU_L(2) \times U_Y(1)$ порушується до електромагнітної $U_{em}(1)$, три голдстоунівські частинки G^\pm, G^0 стають поздовжніми компонентами масивних векторних частинок W^\pm, Z , і в спектрі є також масивні хігсівські частинки: три нейтральні, H^0, h^0, A^0 і пара заряджених H^\pm . Кут Вайнберга визначається таким самим співвідношенням, що й у Стандартній моделі:

$$\cos \theta_W = \frac{m_W}{m_Z}, \quad (15.2.16)$$

де параметр $\rho = 1$ на рівні лагранжіана.

Для мас хігсівських бозонів отримуємо такі вирази [104]:

$$m_{A^0}^2 = \frac{2m_{12}^2}{\sin(2\beta)} - v^2\lambda_5, \quad (15.2.17)$$

$$m_{H^\pm}^2 = m_{A^0}^2 + \frac{1}{2}v^2(\lambda_5 - \lambda_4), \quad (15.2.18)$$

$$m_H^2 + m_h^2 = (\lambda_1 \cos^2 \beta + \lambda_2 \sin^2 \beta)v^2 + \frac{2m_{12}^2}{\sin(2\beta)}, \quad (15.2.19)$$

$$m_H^2 - m_h^2 = \frac{1}{\cos(2\alpha)} [(\lambda_1 \cos^2 \beta - \lambda_2 \sin^2 \beta)v^2 - 2 \operatorname{ctg}(2\beta)m_{12}^2], \quad (15.2.20)$$

і

$$\sin(2\alpha) = \frac{v^2 \sin(2\beta)\lambda_{345} - 2m_{12}^2}{m_H^2 - m_h^2}, \quad \lambda_{345} = \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5, \quad (15.2.21)$$

де $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$.

Комбінація v фіксується масами векторних бозонів, сім інших вільних параметрів потенціалу Хігса, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_5, \beta, m_{12}^2$, можна виразити через чотири маси хігсівських бозонів та кути змішування α і β ; залишається один незалежний параметр, в якості якого зазвичай вибирається m_{12}^2 . Бозон h ототожнюється зі звичайним бозоном Хігса з масою $m_h = 125$ ГеВ, тоді бозон H має більшу масу $m_H > m_h$. Позитивність мас усіх хігсівських бозонів накладає низку обмежень на параметри потенціалу.

Модель з двома хігсівськими дублетами може приводити до порушення CP -симетрії, якщо параметри m_{12}^2 і λ_5 брати комплексними (див. [68] та посилання там). Ми не наводимо тут розгляд такої можливості, а також не обговорюємо юкавівські взаємодії ферміонів з хігсівськими полями.

Зазначимо лише, що модель з двома дублетами дозволяє більш природно пояснити відношення мас t - і b -кварків, $m_t/m_b \approx 35$, яке в СМ потребує неприродної ієрархії між юкавівськими константами.

Детальніше з моделлю з двома хігсівськими дублетами та іншими можливими розширеннями Стандартної моделі можна ознайомитися в книжці [105].

15.3. Моделі Великого об'єднання

Константи зв'язку в квантовій теорії поля залежать від переданого імпульсу. Нагадаємо, що біжуча константа електромагнітної взаємодії $\alpha(\mu^2)$ згідно з рівнянням (10.3.9) зростає з переданим імпульсом, досягаючи при дуже високих енергіях так званого полюса Ландау. Константа ж сильної взаємодії $\alpha_s(\mu^2)$, навпаки, зменшується з μ внаслідок явища асимптотичної свободи. Бета-функція для калібрувальної константи зв'язку в однопетльовому наближенні, яка враховує внесок калібрувальних бозонів, ферміонів і скалярів, має такий загальний вигляд [102], що узагальнює відповідний вираз (10.4.5) в КХД:

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2} \left[\frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} \sum_{r \text{ (ферміони)}} n_f(r) T_f(r) - \frac{1}{3} \sum_{r \text{ (скаляри)}} n_s(r) T_s(r) \right], \quad (15.3.1)$$

де $C_2(G)$ — квадратичний оператор Казимира групи G , $n_f(r)$ — число комплексних ферміонів даного представлення r , $n_s(r)$ — число комплексних скалярів у представленні r , $T_f(r)$ і $T_s(r)$ — нормування генераторів групи в представленні r (див. формулу (4.4.19)). Для груп $G = SU(N)$ і $G = U(1)$ маємо $C_2(SU(N)) = N$ і $C_2(U(1)) = 0$, відповідно; $T_f(N) = \frac{1}{2}$ і $T_s(N) = \frac{1}{2}$ для фундаментального представлення групи $SU(N)$. Для групи $U(1)$ ферміонні поля із зарядами q_i дають $T_f = \sum_i q_i^2$ (порівняйте з бета-функцією в КЕД (10.3.6)), і аналогічно для скалярів $T_s = \sum_i q_i^2$. У

випадку двокомпонентних ферміонів коефіцієнт $4/3$ в (15.3.1) замінюється на $2/3$. Хігсівський дублет з точки зору гіперзаряду можна розглядати як два комплексних скаляра з гіперзарядом $1/2$. Тоді для n_s дублетів маємо $\sum_i q_i^2 = n_s/2$. Для всіх ферміонів (лівих і правих) в СМ з n_g поколіннями знайдемо суму квадратів їх гіперзарядів, враховуючи кольори кварків,

$$\begin{aligned} T_f &= \sum_i Y_i^2 = 2n_g \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + n_g(-1)^2 + 6n_g \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \\ &+ 3n_g \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3n_g \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{10}{3} n_g. \end{aligned} \quad (15.3.2)$$

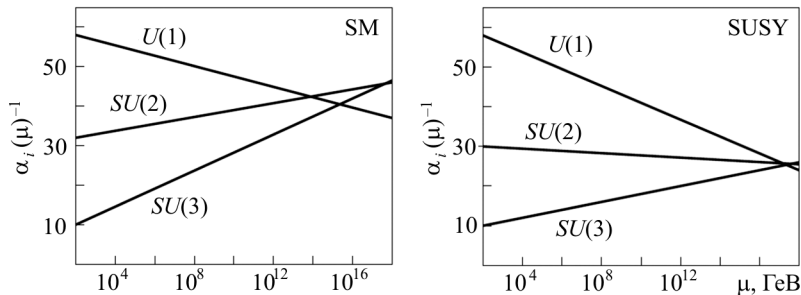


Рис. 87. Еволюція констант взаємодій гіперзарядової α_Y , слабкої α_w та сильної α_s залежно від масштабу μ в СМ (ліва панель) і в суперсиметричному узагальненні СМ (права панель)

Таким чином, для обернених біжучих калібрувальних констант зв'язку в Стандартній моделі з групою $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, коли всі маси частинок значно менші за μ , отримуємо, розв'язуючи рівняння ренормалізаційної групи, таку залежність від μ :

$$\frac{1}{\alpha_i(\mu^2)} = \frac{1}{\alpha_i(M^2)} + b_i \ln \frac{\mu^2}{M^2}, \quad i = s, w, Y, \quad \begin{pmatrix} b_s \\ b_w \\ b_Y \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} 11 - \frac{4n_g}{3} \\ \frac{22}{3} - \frac{4n_g}{3} - \frac{n_s}{6} \\ -\frac{20n_g}{9} - \frac{n_s}{6} \end{pmatrix}, \quad (15.3.3)$$

де константи сильної, слабкої і гіперзарядової взаємодій визначені як $\alpha_s = g_s^2/4\pi$, $\alpha_w = g^2/4\pi$, $\alpha_Y = g'^2/4\pi$. У Стандартній моделі також $n_g = 3$, $n_s = 1$. Початкове значення констант задається на деякому масштабі при низьких енергіях M , в якості якого можна вибрати, наприклад, масу Z -бозона M_Z . Поведінка обернених біжучих калібрувальних констант зв'язку зображена на лівій панелі рис. 87.

Зазначимо, що константа слабкої взаємодії $\alpha_w(\mu^2)$ зменшується з μ так само як і константа сильної взаємодії $\alpha_s(\mu^2)$, тому що вона є константою взаємодії неабелевої калібрувальної групи $SU_L(2)$, тоді як гіперзарядова константа (пов'язана з електромагнітною константою) зростає. Видно, що константи зв'язку перетинаються приблизно в одній точці при $\mu \sim 10^{15}$ ГеВ. При врахуванні додаткових частинок, які виникають у суперсиметричних теоріях, цей масштаб становить $3 \cdot 10^{16}$ ГеВ, і константи перетинаються в одній точці майже ідеально (див. праву панель на рис. 87). Тому природно виникає питання, а чи не відбувається при таких енергіях об'єднання всіх калібрувальних взаємодій? Теорії, де таке має місце, відомі як теорії Великого об'єднання (Grand Unified Theory). Хоча це нагадує об'єднання електричних і магнітних сил в XIX ст., фізичні на-

слідки та математична структура об'єднання калібрувальних взаємодій у моделях Великого об'єднання (ВО) якісно відрізняються.

Математично ідея ВО полягає в тому, що всі калібрувальні взаємодії при енергіях, вищих $\sim 10^{15}$ ГеВ, описуються калібрувальною взаємодією більш високої групи G , а при енергіях, менших за масштаб Великого об'єднання відбувається спонтанне порушення симетрії

$$G \rightarrow SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1). \quad (15.3.4)$$

Зазначимо, що масштаб ВО всього на 4 порядки є меншим за планківський масштаб $M_{Pl} = 1,2 \cdot 10^{19}$ ГеВ. Тому можливо, що при планківських енергіях усі відомі нам взаємодії об'єднуються в одну взаємодію. Такі гіпотетичні теорії відомі як Теорії всього (Theory of Everything) і моделі ВО можуть розглядатись як проміжний крок до формулювання Теорії всього.

Для того, щоб єдина група включала Стандартну модель, її ранг (число генераторів підгрупи Картана) повинен бути не меншим, ніж сума рангів підгруп $SU(3)$, $SU(2)$ і $U(1)$, тобто чотирьох. Історично першою моделлю Великого об'єднання була $SU(5)$ модель, запропонована Джорджі та Глешоу [90] у 1974 р. Група $SU(5)$ є найменшою простою групою Лі, яка містить усі калібрувальні групи Стандартної моделі

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset SU(5). \quad (15.3.5)$$

У СМ всі ферміони можна розглядати як двокомпонентні ліві спінори (праві спінори можна трактувати як зарядово спряжені ліві спінори), тоді маємо всього 45 ферміонних полів: шість лептонів $(e^-, \nu_e, \mu^-, \nu_\mu, \tau^-, \nu_\tau)_L$, три антилептоли $(e^+, \mu^+, \tau^+)_L$, 18 кварків $(u_i, d_i, c_i, s_i, t_i, b_i)_L$, і 18 антикварків $(\bar{u}_i, \bar{d}_i, \bar{c}_i, \bar{s}_i, \bar{t}_i, \bar{b}_i)_L$, де індекс $i = 1, 2, 3$ позначає три кольори. По відношенню до підгрупи $SU(3) \times SU(2)$ лептони є $SU(3)$ синглетами і $SU(2)$ дублетами, антилептоли — синглети відносно обох груп; кварки є триплетами відносно $SU(3)$ і дублетами відносно $SU(2)$, а антикварки належать до комплексно спряженого триплету 3^* групи $SU(3)$ і є $SU(2)$ синглетами. Таким чином, усі ці поля належать до такого представлення $SU(3) \times SU(2)$:

$$3(1, 2) \oplus 3(1, 1) \oplus 3(3, 2) \oplus 6(3^*, 1).$$

Це представлення є комплексним, і є також комплексно спряжене представлення, нееквівалентне до першого. Два найменших незвідних представлення 5^* (антифундаментальне представлення) і 10 (антисиметричне представлення) групи $SU(5)$ дозволяють розмістити в одних і тих самих мультиплетах всі кварки і лептони першого покоління Стандартної моделі таким чином

$$5^*: \quad \chi^\alpha = (d_1^c, d_2^c, d_3^c, \nu_e, e^-)_L^T, \quad (15.3.6)$$

$$\mathbf{10}: \quad \psi_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & u_3^c & -u_2^c & u_1 & d_1 \\ -u_3^c & 0 & u_1^c & u_2 & d_2 \\ u_2^c & -u_1^c & 0 & u_3 & d_3 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^+ \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^+ & 0 \end{pmatrix}_L, \quad (15.3.7)$$

і індекси $\alpha, \beta = 1, \dots, 5$. Тут u_{iL}^c, d_{iL}^c — ліві антикварки (антитриплети відносно кольорової $SU(3)$ і синглети відносно слабкої $SU(2)$), які є зарядово спряженими до правих кварків. Поле $\psi_{\alpha\beta}$ є антисиметричним тензором.

Калібрувальні поля $V_\mu = V_\mu^a L^a$ належать до приєднаного представлення $SU(5)$ (24-плет) з генераторами $L^a = \lambda^a/2, a = 1, \dots, 24$ у фундаментальному представленні, матриці λ^a є узагальненням матриць Гелл-Манна. Підгрупа СМ вбудована в групу $SU(5)$ таким чином: верхній лівий 3×3 блок матриць 5×5 відповідає підгрупі $SU(3)$, а нижній правий 2×2 блок — підгрупі $SU(2)$. Гіперзарядній підгрупі $U_Y(1)$ відповідає діагональний генератор з матрицею L^{24} , гіперзаряд визначається як

$$Y = \sqrt{\frac{5}{3}} L^{24}, \quad L^{24} = \frac{1}{2\sqrt{15}} \text{diag}(2, 2, 2, -3, -3), \quad (15.3.8)$$

а всі генератори нормовані $\text{tr}(L^a)^2 = 1/2$. Для оператора заряду маємо стандартну формулу $Q = t_3 + Y$. Група $SU(5)$ містить 12 додаткових генераторів, яких немає в групі $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$; вони перетворюють кварки в лептони і фактично є відповідальними за розпад протона в цієї моделі. В описаній моделі всі ферміони мають в точності квантові числа ферміонів у СМ по відношенню до $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$:

$$\mathbf{5}^* \rightarrow \left(3^*, 1, \frac{1}{3}\right) \oplus \left(1, 2, -\frac{1}{2}\right), \quad \mathbf{10} \rightarrow \left(3^*, 1, -\frac{2}{3}\right) \oplus \left(3, 2, \frac{1}{6}\right) \oplus (1, 1, 1). \quad (15.3.9)$$

По відношенню до цієї ж підгрупи 24 калібрувальні бозони перетворюються як

$$24 \rightarrow (8, 1, 0) \oplus (1, 3, 0) \oplus (1, 1, 0) \oplus \left(3, 2, -\frac{5}{6}\right) \oplus \left(3^*, 2, \frac{5}{6}\right), \quad (15.3.10)$$

тобто додаткові комплексні векторні поля (позначаються X) мають нетривіальний гіперзаряд. Представлення $\left(3, 2, -\frac{5}{6}\right)$ і $\left(3^*, 2, \frac{5}{6}\right)$ є комплексними, але їх пряма сума є, очевидно, реальним представленням, як і повинно бути для приєднаного представлення.

Взаємодія ферміонів з калібрувальним полем описується лагранжіаном

$$\mathcal{L}_f = \bar{\chi}_\alpha i\gamma^\mu (D_\mu \chi)^\alpha + \bar{\psi}^{\alpha\beta} i\gamma^\mu (D_\mu \psi)_{\alpha\beta}, \quad (15.3.11)$$

де коваріантні похідні діють за правилом (див. (4.1.14))

$$(D_\mu \chi)^\alpha = \partial_\mu \chi^\alpha - ig_5 (A_\mu)_\beta^\alpha \chi^\beta,$$

$$(D_\mu \psi)_{\alpha\beta} = \partial_\mu \psi_{\alpha\beta} + ig_5 \left[(A_\mu)_\alpha^\gamma \psi_{\gamma\beta} + (A_\mu)_\beta^\gamma \psi_{\alpha\gamma} \right].$$

Для опису спонтанного порушення спочатку $SU(5) \rightarrow SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$, а потім $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \rightarrow SU_c(3) \times U(1)_{em}$, вводяться два поля Хіггса: дійсне поле Φ у приєднаному представленні і комплексне поле H у фундаментальному представленні, яке містить хігсівський бозон Стандартної моделі

$$\Phi = \sum_{a=1}^{24} \Phi_a L^a, \quad H = (H_1, H_2, H_3, \phi^+, \phi_0)^T. \quad (15.3.12)$$

Лагранжіан взаємодії полів Φ і H з калібрувальним $SU(5)$ полем має вигляд

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \text{tr} [(D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi] + (D_\mu H)^* (D^\mu H) - V(\Phi, H), \quad (15.3.13)$$

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + ig_5 [V_\mu, \Phi], \quad D_\mu H = \partial_\mu H + ig_5 V_\mu H,$$

і потенціал

$$V(\Phi, H) = -\frac{\mu^2}{2} \text{tr} (\Phi^2) + \frac{a}{4} [\text{tr} (\Phi^2)]^2 + \frac{b}{4} \text{tr} (\Phi^4) - \frac{\mu_5^2}{2} H^\dagger H +$$

$$+ \frac{\lambda}{4} (H^\dagger H)^2 + \alpha H^\dagger H \text{tr} (\Phi^2) + \beta H^\dagger \Phi^2 H, \quad a, b, \lambda > 0. \quad (15.3.14)$$

Для $\mu^2 > 0$ маємо нетривіальний мінімум для вакуумного середнього $\langle \Phi \rangle \neq 0$, який завжди можна вибрати в діагональному вигляді за допомогою $SU(5)$ перетворення

$$\langle \Phi \rangle = \nu \text{diag} \left(1, 1, 1, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right), \quad \nu^2 = \frac{4\mu^2}{15a + 7b}. \quad (15.3.15)$$

Це вакуумне середнє порушує $SU(5)$ симетрію до залишкової симетрії $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$, а 12 голдстоунівських бозонів, що виникають при цьому, стають поздовжніми компонентами полів X, Y , які набувають масу за рахунок взаємодії в кінетичному доданку $\text{tr} [(D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi]$. Маса бозонів X, Y визначається формулою

$$M_X^2 = M_Y^2 = \frac{25}{8} g_5^2 \nu^2 \quad (15.3.16)$$

і ототожнюється з масштабом Великого об'єднання $\sim 10^{15}$ ГеВ. Подальше порушення симетрії $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$ до $SU_c(3) \times U(1)_{em}$ відбувається за рахунок конденсації поля H ; деталі цього вже відомого в СМ механізму ми не будемо розглядати.

Векторні поля X, Y приводять до можливості перетворення кварків у лептони, і тому $SU(5)$ модель передбачає розпад протона в реакціях типу

$$p \rightarrow e^+ + \pi^0, \quad p \rightarrow K^+ + \bar{\nu} \quad (15.3.17)$$

з часом напіврозпаду протона порядку $\tau_p \sim \frac{M_X^2}{\alpha^2 m_p^5} \sim 10^{32}$ років. Однак експериментально було знайдено, що час життя протона перевищує $\tau_p > 10^{34}$ років, тому модель $SU(5)$ треба якось модифікувати.

Цікаву можливість в якості кандидата для теорії ВО представляє група $SO(10)$ [82]. З точки зору теорії груп має місце співвідношення

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset SU(5) \subset SO(10). \quad (15.3.18)$$

У цій групі незвідне спінорне представлення розмірністю 16 містить, крім незвідних представлень $\bar{\mathbf{5}}$ і $\mathbf{10}$ групи $SU(5)$, також праве нейтрино, тобто всі частинки розширеної у нейтринному секторі Стандартної моделі. Тому в цій моделі можна природно пояснити спостережувані ненульові маси нейтрино.

Детальніше з моделями Великого об'єднання, заснованими на групах $SU(5)$ і $SO(10)$, зокрема з механізмом генерації мас ферміонів у цих моделях, а також можливого пояснення баріонної асиметрії Всесвіту, можна ознайомитися в монографії [139].

А. Обчислення детермінантів операторів

Розглянемо приклад обчислення детермінанта оператора $-d^2/dt^2 + \omega^2$, який з'являється в матричному елементі (1.9.13). Для обчислення детермінанта оператора нам треба розв'язати граничну задачу

$$\left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2\right] \varphi(\tau) = \lambda \varphi(\tau), \quad \varphi(0) = \varphi(\beta) = 0. \quad (\text{A.1})$$

Власні функції і власні значення визначені рівнянням

$$\varphi_n(\tau) = \sin \frac{\pi n \tau}{\beta}, \quad \lambda_n = \omega^2 + \frac{\pi^2 n^2}{\beta^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.2})$$

Побудуємо узагальнену дзета-функцію

$$\zeta(s|A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^s} = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{2s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + \nu^2)^s}, \quad \nu = \frac{\beta \omega}{\pi}. \quad (\text{A.3})$$

Збіжність суми потребує щоб $s > 1/2$. Використаємо представлення

$$\frac{1}{a^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} e^{-at}, \quad \operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} s > 0,$$

і запишемо для суми

$$Z_1(s, \nu) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + \nu^2)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} e^{-\nu^2 t} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}.$$

Функція $Z_1(s, \nu)$ належить до сімейства дзета-функцій Епштейна. Для суми під інтегралом скористаємося формулою підсумовування Пуассона

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} + \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{t}}. \quad (\text{A.4})$$

Сума в останній рівності пов'язана з тета-функцією Якобі,

$$\theta_3(v|\tau) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2\pi nv), \quad q = e^{i\pi\tau}, \quad \text{Im } \tau > 0,$$

звідки для $v = 0$, $\tau = \frac{it}{\pi}$ маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} = \frac{1}{2} \left[\theta_3 \left(0 \left| \frac{it}{\pi} \right. \right) - 1 \right].$$

Для тета-функцій Якобі існують перетворення (перетворення Якобі), зокрема в нашому випадку

$$\theta_3 \left(\frac{v}{\tau} \left| -\frac{1}{\tau} \right. \right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}} e^{i\pi v^2 / \tau} \theta_3(v|\tau),$$

або

$$\theta_3(0|\tau) = \sqrt{\frac{i}{\tau}} \theta_3 \left(0 \left| -\frac{1}{\tau} \right. \right) \Rightarrow \theta_3 \left(0 \left| \frac{it}{\pi} \right. \right) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \theta_3 \left(0 \left| -\frac{\pi}{it} \right. \right).$$

Таким чином, використовуючи перетворення Якобі, отримуємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \theta_3 \left(0 \left| \frac{i\pi}{t} \right. \right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} + \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{t}}, \quad (\text{A.5})$$

що очевидно співпадає з (A.4). Для нашої суми маємо

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + \nu^2)^s} &= -\frac{1}{2\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} e^{-\nu^2 t} + \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-3/2} e^{-\nu^2 t} + \\ &+ \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dt t^{s-3/2} e^{-\nu^2 t - \frac{\pi^2 k^2}{t}}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

і обчислюючи інтеграли за допомогою формули

$$\int_0^{\infty} dx x^{\alpha-1} x^{-\gamma x - \frac{\beta}{x}} = 2 \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)^{\alpha/2} K_{\alpha}(2\sqrt{\beta\gamma}), \quad \text{Re } \beta, \gamma > 0,$$

де $K_{\alpha}(x)$ — функція Макдональда, отримуємо відому формулу Ватсона

$$Z_1(s, \nu) = -\frac{1}{2\nu^{2s}} + \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s-1/2)}{2\Gamma(s)\nu^{2s-1}} + \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{\nu} \right)^{s-1/2} K_{s-1/2}(2\pi n\nu).$$

Ці представлення очевидно корисне для знаходження асимптотики при великих значеннях ν . Для розкладу при малих ν знаходимо

$$Z_1(s, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s} \left(1 + \frac{\nu^2}{n^2}\right)^s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\nu^2)^k}{k!} \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)} \zeta(2s+2k), \quad (\text{A.7})$$

де ми використали біноміальний розклад.

Таким чином, для шуканої дзета-функції маємо вираз

$$\zeta(s|A) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\pi\nu}\right)^{2s} + \frac{F(s)}{\Gamma(s)}, \quad (\text{A.8})$$

де

$$F(s) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{2s} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2\nu^{2s-1}} \Gamma(s-1/2) + 2\sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{\nu}\right)^{s-1/2} K_{s-1/2}(2\pi n\nu) \right\}.$$

Функція $\zeta(s|A)$ є аналітичною функцією, яка має полюси в точках $s = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots$. Вона аналітична в точці $s = 0$, тому її похідна

$$\zeta'(s|A)|_{s=0} = \ln \frac{\pi\nu}{\beta} + F(0),$$

де

$$F(0) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(-1/2)\nu}{2} + 2\sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\nu}{\pi n}} K_{-1/2}(2\pi n\nu).$$

Оскільки

$$\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}, \quad K_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z},$$

то знаходимо

$$F(0) = -\pi\nu + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-2\pi\nu n} = -\pi\nu - \ln(1 - e^{-2\pi\nu}).$$

Для похідної дзета-функції в нулі маємо

$$\zeta'(s|A)|_{s=0} = \ln \left[\frac{\pi\nu}{2\beta \operatorname{sh}(\pi\nu)} \right] = \ln \left[\frac{\omega}{2 \operatorname{sh}(\beta\omega)} \right], \quad (\text{A.9})$$

і для детермінанта оператора

$$\det A = \left(\frac{\omega}{2 \operatorname{sh}(\beta\omega)} \right)^{-1}, \quad \det A_0 \stackrel{\omega \rightarrow 0}{=} 2\beta.$$

Для матричного елемента (1.9.13) остаточно отримуємо

$$\begin{aligned} \langle q_f | e^{-\beta H} | q_i \rangle &= \left[\frac{\omega\beta}{\operatorname{sh} \beta\omega} \right]^{1/2} \left(\frac{m}{2\pi\beta} \right)^{1/2} \times \\ &\times \exp \left[-\frac{m\omega}{2 \operatorname{sh} \beta\omega} [(q_f^2 + q_i^2) \operatorname{ch} \beta\omega - 2q_f q_i] \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Статистична сума отримується з останнього виразу, якщо $q_i = q_f = q$ і проінтегрувати по q

$$\text{Tr } e^{-\beta H} = \left(\frac{m\omega}{2\pi \text{sh } \beta\omega} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dq \exp \left[-\frac{m\omega q^2}{\text{sh } \beta\omega} (\text{ch } \beta\omega - 1) \right] = \frac{1}{2 \text{sh } \frac{\beta\omega}{2}}. \quad (\text{A.11})$$

Цю статистичну суму можна, звісно, отримати безпосередньо, підсумовуючи по енергетичним рівням $E_n = \omega(n + 1/2)$

$$\text{Tr } e^{-\beta H} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\omega(n+1/2)} = \frac{1}{2 \text{sh } \frac{\beta\omega}{2}}.$$

Досліджуючи поведінку матричного елемента (A.10) при $T \rightarrow 0$ ($\beta \rightarrow \infty$), можна виділити енергетичні рівні, а також знайти хвильові функції. В цій границі знаходимо

$$\langle q_f | e^{-\beta H} | q_i \rangle \simeq \varphi_0(q_f) \varphi_0^*(q_i) e^{-\beta E_0} \simeq \left(\frac{m\omega}{\pi} \right)^{1/2} e^{-\beta\omega/2} e^{-\frac{m\omega(q_f^2 + q_i^2)}{2}}, \quad (\text{A.12})$$

звідси отримуємо енергію і хвильову функцію найнижчого стану

$$E_0 = \frac{\omega}{2}, \quad \varphi(q) = \left(\frac{m\omega}{\pi} \right)^{1/4} e^{-m\omega q^2/2}. \quad (\text{A.13})$$

Послідовно можна далі визначити енергетичні рівні і хвильові функції інших станів.

Б. Особливості причинних функцій Гріна

Причинні функції Гріна, або еквівалентно — пропагатори частинок, є одними з ключових елементів діаграмної техніки. Пропагатор описує амплітуду руху частинки в просторі, а саме, причинний зв'язок процесів народження і знищення частинки у різних точках простору-часу. Звідси назва — причинні функції Гріна. Полюси останніх в імпульсному просторі визначають закон дисперсії відповідних частинок, а за межею полюсів причинні функції Гріна описують віртуальні частинки у внутрішніх лініях фейнманівських діаграм. Внаслідок особливого значення причинних функцій Гріна ми розглянемо детально у цьому Додатку їх математичні властивості та особливості.

Ферміонний пропагатор

$$S(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{\hat{p} - m + i\varepsilon} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip(x-y)}$$

виражається через причинну функцію $D(x)$

$$S(x-y) = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)_x \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)_x D(x-y)$$

скалярного поля

$$D(x) \equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = -D_c(x).$$

Використовуючи швінгерівське представлення

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = -i \int_0^\infty dt e^{it(p^2 - m^2 + i\varepsilon)}, \quad \varepsilon > 0,$$

ми можемо переписати цю причинну функцію у такому вигляді

$$D(x) = -i \int_0^\infty dt e^{it(-m^2 + i\varepsilon)} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{it(p_0^2 - \mathbf{p}^2) - ip_0 x_0 + i\mathbf{p}\mathbf{x}},$$

який є зручним для аналізу. Дійсно, за допомогою гаусового інтеграла

$$\int_{-\infty}^\infty e^{i(ax^2 + bx)} dx = e^{\frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn}(a)} \sqrt{\frac{\pi}{|a|}} e^{-\frac{ib^2}{4a}},$$

легко проінтегрувати по імпульсах. В результаті знаходимо

$$\begin{aligned} D(x) &= -ie^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4})} \int_0^\infty dt e^{it(-m^2 + i\varepsilon)} \frac{1}{(2\pi)^4} \left(\frac{\pi}{t}\right)^2 e^{-\frac{i}{4t}(x_0^2 - \mathbf{x}^2)} = \\ &= -\frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} e^{-\frac{ix^2}{4t} - im^2 t} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dt e^{-ix^2 t - \frac{im^2}{4t}} \equiv -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dt e^{-i\lambda t - \frac{im^2}{4t}}, \end{aligned}$$

де $\lambda = x^2$. Для подальшого аналізу зручно переписати причинну функцію у вигляді

$$\begin{aligned} D(x) &= \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^\infty \frac{dt}{t} e^{-i\lambda t - \frac{im^2}{4t}} = \\ &= \frac{1}{4\pi i} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\int_0^\infty \frac{dt}{t} \cos\left(\lambda t + \frac{m^2}{4t}\right) - i \int_0^\infty \frac{dt}{t} \sin\left(\lambda t + \frac{m^2}{4t}\right) \right]. \quad (\text{Б.1}) \end{aligned}$$

Далі інтеграл по t виражається через відомі спеціальні функції, при $\lambda > 0$:

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \cos\left(\lambda t + \frac{m^2}{4t}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(m\sqrt{|\lambda|} \operatorname{ch} \theta\right) d\theta = -\pi Y_0\left(m\sqrt{|\lambda|}\right),$$

$\lambda < 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \cos\left(|\lambda|t - \frac{m^2}{4t}\right) &= \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \cos\left(m\sqrt{|\lambda|} \cdot \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right) = \\ &= 2 \int_1^{\infty} \frac{dt}{t} \cos\left[m\sqrt{|\lambda|} \cdot \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = 2 \int_0^{\infty} d\theta \cos\left(m\sqrt{|\lambda|} \operatorname{sh} \theta\right) = 2K_0\left(m\sqrt{|\lambda|}\right), \end{aligned}$$

$\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \sin\left(\lambda t + \frac{m^2}{4t}\right) &= \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \sin\left(m\sqrt{|\lambda|} \cdot \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right) = \\ &= 2 \int_1^{\infty} [\dots] = 2 \int_0^{\infty} d\theta \sin\left(m\sqrt{|\lambda|} \operatorname{ch} \theta\right) = \pi J_0\left(m\sqrt{|\lambda|}\right), \end{aligned}$$

$\lambda < 0$:

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \sin\left(\lambda t + \frac{m^2}{4t}\right) = - \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \sin\left(m\sqrt{|\lambda|} \cdot \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right) = 0,$$

де $J_0(x)$, $Y_0(x)$, $K_0(x)$ — функції Бесселя нульового порядку. В результаті для функції $D(x)$ отримуємо

$$\begin{aligned} D(x) &= \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \theta(\lambda) \left[-\pi Y_0\left(m\sqrt{|\lambda|}\right) - i\pi J_0\left(m\sqrt{|\lambda|}\right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2\theta(-\lambda) K_0\left(m\sqrt{|\lambda|}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

де $\theta(x)$ є функцією Хевісайда. Обчислюючи похідні за формулами

$$\begin{aligned} \{J'_0(x), Y'_0(x), K'_0(x)\} &= -\{J_1(x), Y_1(x), K_1(x)\}, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \theta(\lambda) &= \delta(\lambda), \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} \theta(-\lambda) = -\delta(\lambda), \end{aligned}$$

знаходимо

$$\begin{aligned} D(x) &= \frac{1}{4\pi i} \delta(\lambda) \left[-\pi Y_0\left(m\sqrt{|\lambda|}\right) - i\pi J_0\left(m\sqrt{|\lambda|}\right) - 2K_0\left(m\sqrt{|\lambda|}\right) \right] + \\ &+ \frac{m}{8\pi\sqrt{|\lambda|}} \theta(\lambda) \left[J_1\left(m\sqrt{|\lambda|}\right) - iY_1\left(m\sqrt{|\lambda|}\right) \right] - \frac{mi}{4\pi^2\sqrt{|\lambda|}} \theta(-\lambda) K_1\left(m\sqrt{|\lambda|}\right). \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

Використовуючи відомі асимптотики функцій Бесселя при $x \rightarrow 0$ для виразу в квадратних дужках при $\delta(\lambda)$ в (Б.3), отримуємо остаточний вираз для причинної функції в термінах функцій Бесселя

$$D(x) = -\frac{1}{4\pi}\delta(\lambda) + \frac{m}{8\pi\sqrt{|\lambda|}}\theta(\lambda) \left[J_1\left(m\sqrt{|\lambda|}\right) - iY_1\left(m\sqrt{|\lambda|}\right) \right] - \frac{mi}{4\pi^2\sqrt{|\lambda|}}\theta(-\lambda)K_1\left(m\sqrt{|\lambda|}\right). \quad (\text{Б.4})$$

Розбіжності цієї функції випливають з її поведінки на малих відносних відстанях ($x \rightarrow 0$) і на світловому конусі ($x^2 = 0$). Функція $D(x)$ в рівнянні (Б.4) у границі $\lambda \rightarrow 0$ може бути виражена через елементарні функції

$$D(x) = -\frac{1}{4\pi}\delta(\lambda) + \frac{i}{4\pi^2\lambda} + \frac{m^2}{16\pi}\theta(\lambda) - \frac{im^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{m\sqrt{|\lambda|}}{2}e^{\gamma-1/2}\right). \quad (\text{Б.5})$$

Функції Гріна квантованих полів є сингулярними функціями, які мають особливості на світловому конусі, тобто фактично є узагальненими функціями. Тому добутки причинних функцій потребують довізначення, що зумовлює необхідність регуляризації.

Для безмасових частинок, наприклад для фотона, причинна функція визначається таким виразом

$$D(x) = \frac{i}{4\pi^2} \left[\frac{1}{\lambda} + i\pi\delta(\lambda) \right] = \frac{i}{4\pi^2} \frac{1}{\lambda - i\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (\text{Б.6})$$

1. А.И. Ахиезер и В.Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва, 1981.
2. Г.З. Басеян, С.Г. Матинян и Г.К. Саввиди, Нелинейные плоские волны в безмассовой теории Янга—Миллса, *Письма в ЖЭТФ*. **29**, 641—644 (1980).
3. О.И. Бацула и В.П. Гусынин, Плосковолновые решения в рамках $SU(2)$ -теории Янга—Миллса, *УФЖ*. **26**, 1233—1238 (1981).
4. Н.Н. Боголюбов, *Квазисредние в задачах статистической механики*, препринт ОИЯИ Д-781, Дубна, 1961.
5. Н.Н. Боголюбов и Д.В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва, 1984.
6. І.О. Вакарчук, *Квантова механіка*, ЛНУ імені Івана Франка, Львів, 2012.
7. П.І. Голод, А.У. Клімік, *Математичні основи теорії симетрій*, Наукова думка, Київ, 1992.
8. Е.В. Горбар та В.П. Гусинін, Бозон Хіггса: передбачення, пошук, відкриття, *Вісник НАН України*. (3), 31—41 (2014). <https://doi.org/10.15407/visn2014.03.031>
9. В.П. Гусынин и В.А. Кушнир, Разложение однопетлевого эффективного действия по степеням производных в искривленном пространстве, *Ядерная физика*. **51**, 587—597 (1990).
10. Д.Д. Иваненко (ред.), *Новейшее развитие квантовой электродинамики*, Сборник статей, Изд-во иностранной литературы, Москва, 1954.
11. *Квантовая теория калибровочных полей*, сборник переводов, Мир, Москва, 1977.
12. Л.Д. Ландау, А.А. Халатников и И.М. Халатников, Асимптотическое выражение для гриновской функции фотона в квантовой электродинамике, *ДАН СССР*. **95**, 1177—1180 (1954).
13. Л.Д. Ландау и И.М. Халатников, Градиентные преобразования функций Грина заряженных частиц, *ЖЭТФ*. **29**, 89—95 (1955).
14. А.А. Мигдал и А.М. Поляков, Спонтанное нарушение симметрии сильных взаимодействий и отсутствие безмассовых частиц, *ЖЭТФ*. **51**, 135—146 (1966).
15. А.М. Поляков, Спектр частиц в квантовой теории поля, *Письма в ЖЭТФ*. **20**, 430—431 (1974).
16. О.Л. Ребенко, *Основи сучасної теорії взаємодіючих квантованих полів*, Наукова Думка, Київ, 2007.
17. В.А. Рубаков, Сверхтяжелые магнитные монополи и распад протона, *Письма в ЖЭТФ*. **33**, 658—660 (1981).
18. Ю.Б. Румер и А.И. Фет, *Теория унитарной симметрии*, Наука, Москва, 1970.

19. А.А. Славнов, Тождества Уорда в калибровочных теориях, *Теоретическая и математическая физика*. **10**, 153–161 (1972). <https://doi.org/10.1007/BF01090719>
20. А.А. Славнов, Инвариантная регуляризация калибровочных теорий, *Теоретическая и математическая физика*. **13**, 174–177 (1972). <https://doi.org/10.1007/BF01035526>
21. Л.Д. Фаддеев, Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов, *Теоретическая и математическая физика*. **1**, 3–18 (1969). <https://doi.org/10.1007/BF01028566>
22. E. Abers and B.W. Lee, Gauge Theories, *Phys. Repts. C*. **9**, 1–141, 1973. [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(73\)90027-6](https://doi.org/10.1016/0370-1573(73)90027-6)
23. A.A. Abrikosov, L.P. Gorkov, and I.E. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*, Dover Publications, London, 1975.
24. A. Actor, Classical Solutions of $SU(2)$ Yang-Mills Theories, *Rev. Mod. Phys.* **51**, 461–525 (1979). <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.51.461>
25. S.L. Adler, Axial Vector Vertex in Spinor Electrodynamics, *Phys. Rev.* **177**, 2426–2438 (1969). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.177.2426>
26. S.L. Adler and W.A. Bardeen, Absence of Higher-Order Corrections in the Anomalous Axial-Vector Divergence Equation, *Phys. Rev.* **182**, 1517–1536 (1969). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.182.1517>
27. S.A. Albeverio, R.J. Høegh-Krohn, and S. Mazzucchi, *Mathematical Theory of Feynman Path Integrals. An Introduction* (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 523), Springer-Verlag, Berlin, 2008. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-76956-9>
28. P.W. Anderson, Coherent Excited States in the Theory of Superconductivity: Gauge Invariance and the Meissner Effect, *Phys. Rev.* **110**, 827–834 (1958). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.110.827>
29. P.W. Anderson, Plasmons, Gauge Invariance, and Mass, *Phys. Rev.* **130**, 439–442 (1963). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.130.439>
30. P.W. Anderson, *Basic Notions of Condensed Matter Physics*, Benjamin-Cummings Publishing Company, Menlo Park, 1984. <https://doi.org/10.4324/9780429494116>
31. T. Aoyama, T. Kinoshita, and M. Nio, Revised and Improved Value of the QED Tenth-Order Electron Anomalous Magnetic Moment, *Phys. Rev. D*. **97**, 036001 (2018). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.036001>
32. N.P. Armitage, E.J. Mele, and A. Vishwanath, Weyl and Dirac Semimetals in Three-Dimensional Solids, *Rev. Mod. Phys.* **90**, 015001 (2018). <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.90.015001>
33. J.F. Ashmore, A Method of Gauge-Invariant Regularization, *Nuovo Cimento Lett.* **4**, 289–290 (1972). <https://doi.org/10.1007/BF02824407>
34. C. Bagnuls and C. Bervillier, Exact Renormalization Group Equations: An Introductory Review, *Phys. Rep.* **348**, 91–157 (2001). [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(00\)00137-X](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00137-X)
35. D. Bailin and A. Love, *Introduction to Gauge Field Theory*, Taylor & Francis Group, New York, 1993. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-82177-6>
36. J.S. Ball and T.-W. Chiu, Analytic Properties of the Vertex Function in Gauge Theories. I, *Phys. Rev. D*. **22**, 2542–2549 (1980). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.22.2542>

37. J.S. Ball and T.-W. Chiu, Analytic Properties of the Vertex Function in Gauge Theories. II, *Phys. Rev. D.* **22**, 2550–2557 (1980). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.22.2542>
38. P.A. Baikov and V.A. Il'in, Status of γ^5 in Dimensional Regularization, *Theor. Math. Phys.* **88**, 789–809 (1991). <https://doi.org/10.1007/BF01019107>
39. U. Bar-Gadda, Infrared Behavior of the Effective Coupling in Quantum Chromodynamics: A Non-perturbative Approach, *Nucl. Phys. B.* **163**, 312–332 (1980). [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(80\)90405-8](https://doi.org/10.1016/0550-3213(80)90405-8)
40. G. Baym and L.P. Kadanoff, Conservation Laws and Correlation Functions, *Phys. Rev.* **124**, 287–299 (1961). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.124.287>
41. G. Baym, Self-consistent Approximations in Many-body Systems, *Phys. Rev.* **127**, 1391–1401 (1962). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.127.1391>
42. A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.S. Schwartz, and Yu.S. Tyupkin, Pseudoparticle Solutions of the Yang–Mills Equations, *Phys. Lett. B.* **59**, 85–87 (1975). [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(75\)90163-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(75)90163-X)
43. J.S. Bell and R. Jackiw, A PCAC Puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the σ -model, *Nuovo Cimento A.* **60**, 47–61 (1969). <https://doi.org/10.1007/BF02823296>
44. F. Berezin, *The Method of Second Quantization*, Academic Press, Orlando, 1966.
45. V.B. Berestetskii, E.M. Lifshitz, and L.P. Pitaevskii, *Quantum Electrodynamics*, Pergamon Press, Oxford, 1982. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-050346-2.50020-9>
46. J. Berges, N. Tetradis, and C. Wetterich, Non-perturbative Renormalization Flow in Quantum Field Theory and Statistical Physics, *Phys. Rep.* **363**, 223–386 (2002). [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(01\)00098-9](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(01)00098-9)
47. J. Berges, Introduction to Nonequilibrium Quantum Field Theory, *AIP Conf. Proc.* **739**, 3–61 (2004). <https://doi.org/10.1063/1.1843591>
48. P. Bergmann and J. Brunings, Non-Linear Field Theories II. Canonical Equations and Quantization, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 480–487 (1949). <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.21.480>
49. A. Bilal, Lectures on Anomalies, Preprint arXiv: 0802.06334 (2008). <https://doi.org/10.48550/arXiv.0802.0634>
50. J.D. Bjorken and S. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1965.
51. J.D. Bjorken and S. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, New York, 1965.
52. N.N. Bogoljubov, V.V. Tolmachev, and D.V. Širkov, A New Method in the Theory of Superconductivity, *Fortschritte der Physik.* **6**, 605–682 (1958). <https://doi.org/10.1002/prop.19580061102>
53. C.G. Bollini and J.J. Giambiagi, Dimensional Renormalization: The Number of Dimensions as a Regularizing Parameter, *Nuovo Cimento B.* **12**, 20–26 (1972).
54. L.M. Brown and T.Y. Cao, Spontaneous Breakdown of Symmetry: Its Rediscovery and Integration into Quantum Field Theory, *Historical Studies in the Physical and Biological Sciences.* **21**, 211–235 (1991). <https://doi.org/10.2307/27757663>
55. L.S. Brown, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511622649>

56. I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov, and I.L. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity*, IOP Publ. Ltd Techno House, Bristol, 1992. <https://doi.org/10.1201/9780203758922>
57. C.G. Callan, Disappearing Dyons, *Phys. Rev. D.* **25**, 2141–2146 (1982). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.25.2141>
58. E. Calzetta and B. Hu, Functional Methods in Nonequilibrium QFT. In: *Nonequilibrium Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008. P. 170–208. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511535123.007>
59. R. Cawley, Determination of the Hamiltonian in the Presence of Constraints, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 413–416 (1979). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.42.413>
60. M. Chanowitz, M. Furman, and I. Hinchliffe, The Axial Current in Dimensional Regularization, *Nucl. Phys. B.* **159**, 225–243 (1979). [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(79\)90333-X](https://doi.org/10.1016/0550-3213(79)90333-X)
61. Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford University Press, Oxford, 1988.
62. S. Coleman, Non-Abelian Plane Waves, *Phys. Lett. B.* **70**, 59–60 (1977). [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(77\)90344-6](https://doi.org/10.1016/0370-2693(77)90344-6)
63. J. Collins, *Renormalization: An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group and the Operator-Product Expansion*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
64. J.M. Cornwall, R. Jackiw, and E. Tomboulis, Effective Action for Composite Operators, *Phys. Rev. D.* **10**, 2428–2445 (1974). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.10.2428>
65. B. DeWitt, *Dynamical Theory of Groups and Fields*, Gordon and Breach, New York, 1965.
66. P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Dover Publications, Mineola, 2013.
67. P.A.M. Dirac, *Principles of Quantum Mechanics*, Snowball Publishing, Lancaster, 2012.
68. M.S. Dmytriiev and V.V. Skalozub, Low-energy Effective Lagrangian of the Two-Higgs-Doublet Model, *Journal of Physics and Electronics.* **29**, 8–20 (2022). <https://doi.org/10.15421/332118>
69. G.V. Dunne, New Strong-Field QED Effects at Extreme Light Infra-structure. Nonperturbative Vacuum Pair Production, *Eur. Phys. J. D.* **55**, 327–340 (2009). <https://doi.org/10.1140/epjd/e2009-00022-0>
70. G.V. Dunne, The Heisenberg-Euler Effective Action: 75 Years On, *Int. J. Mod. Phys. A.* **27**, 1260004 (2012). <https://doi.org/10.1142/S0217751X12600044>
71. N. Dupuis, L. Canet, A. Eichhorn, W. Metzner, J.M. Pawłowski, M. Tissier, and N. Wschebor, The Nonperturbative Functional Renormalization Group and Its Applications, *Phys. Rep.* **910**, 1–114 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2021.01.001>
72. K. Efetov, *Supersymmetry in Disorder and Chaos*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511573057>
73. A. Eichhorn, An Asymptotically Safe Guide to Quantum Gravity and Matter, *Front. Astron. Space Sci.* **5**, 47 (2019). <https://doi.org/10.3389/fspas.2018.00047>

74. F. Englert and R. Brout, Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Bosons, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 321–323 (1964). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.13.321>
75. F. Englert, The BEH Mechanism and Its Scalar Boson, *Rev. Mod. Phys.* **86**, 843–850 (2014). <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.843>
76. L.D. Faddeev and A.A. Slavnov, *Gauge Fields: An Introduction to Quantum Theory*, CRC Press, Boca Raton, 2018. <https://doi.org/10.1201/9780429493829>
77. A.L. Fetter and J.D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, Dover Books on Physics, Courier Corporation, 2003.
78. R.P. Feynman and A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill College, New York, 1965.
79. P.I. Fomin, V.P. Gusynin, and V.A. Miransky, Vacuum Instability of Massless Electrodynamics and the Gell-Mann-Low Eigenvalue Condition for the Bare Coupling Constant, *Phys. Lett. B.* **78**, 136–139 (1978). [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(78\)90366-0](https://doi.org/10.1016/0370-2693(78)90366-0)
80. P.I. Fomin, V.P. Gusynin, V.A. Miransky, and Yu.A. Sitenko, Dynamical Chiral Symmetry Breaking and Particle Mass Generation in Gauge Field Theories, *Riv. Nuovo Cimento.* **6**, 1–90 (1983). <https://doi.org/10.1007/BF02740014>
81. E.S. Fradkin, Concerning Some General Relations of Quantum Electrodynamics, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **29**, 258–261 (1955).
82. H. Fritzsch and P. Minkowski, Unified Interactions of Leptons and Hadrons, *Annals of Physics.* **93**, 193–266 (1975). [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(75\)90211-0](https://doi.org/10.1016/0003-4916(75)90211-0)
83. K. Fujikawa, Path Integral for Gauge Theories with Fermions, *Phys. Rev. D.* **21**, 2848–2857 (1980). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.21.2848>
84. K. Fujikawa and H. Suzuki, *Path Integrals and Quantum Anomalies*, Clarendon Press, Oxford, 2004. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198529132.001.0001>
85. M.K. Gaillard and B.W. Lee, Rare Decay Modes of the K Mesons in Gauge Theories, *Phys. Rev. D.* **10**, 897–916 (1974). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.10.897>
86. M. Gell-Mann and A. Pais, Behavior of Neutral Particles under Charge Conjugation, *Phys. Rev.* **97**, 1387–1389 (1955). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.97.1387>
87. M. Gell-Mann, P. Ramond, and R. Slansky, Color Embeddings, Charge Assignments, and Proton Stability in Unified Gauge Theories, *Rev. Mod. Phys.* **50**, 721–744 (1978). <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.50.721>
88. H. Georgi, *Weak Interactions and Modern Particle Theory*, Dover Publications, Mineola, N.Y., 2009.
89. H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics: From Isospin to Unified Theories*, Benjamin-Cummings, Reading, 1999.
90. H. Georgi and S.L. Glashow, Unity of All Elementary-Particle Forces, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 438–441 (1974). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.32.438>
91. H. Gies, Introduction to the Functional RG and Applications to Gauge Theories. In: A. Schwenk, J. Polonyi, (Eds) *Renormalization Group and Effective Field Theory Approaches to Many-Body Systems*. Lecture Notes in Physics, Vol. 852. Springer, Berlin, Heidelberg, 2012. https://doi.org/10.1007/978-3-642-27320-9_6

92. D.M. Gitman and I.V. Tyutin, *Quantization of Fields with Constraints*, Springer-Verlag, Berlin, 1990. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-83938-2>
93. J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum Physics. A Functional Integral Point of View*, Springer-Verlag, New York, 1987. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4728-9>
94. J. Goldstone, Field Theories with “Superconductor” Solutions, *Nuovo Cimento*. **19**, 154–164 (1961). <https://doi.org/10.1007/BF02812722>
95. J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, Broken Symmetries, *Phys. Rev.* **127**, 965–970 (1962). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.127.965>
96. W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer-Verlag, Berlin, 1996. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61485-9>
97. W. Greiner and J. Reinhardt, *Quantum Electrodynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 2003. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-05246-4>
98. W. Greiner, S. Schramm, and E. Stein, *Quantum Chromodynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 2002. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-04707-1>
99. V.N. Gribov, Quantization of Non-Abelian Gauge Theories, *Nucl. Phys. B.* **139**, 1–19 (1978). [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(78\)90175-X](https://doi.org/10.1016/0550-3213(78)90175-X)
100. C. Grosche and R. Steiner, *Handbook of Feynman Path Integrals*, Springer-Verlag, Berlin, 1998. <https://doi.org/10.1007/BFb0109520>
101. D. Gross and F. Wilczek, Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1343–1346 (1973). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.30.1343>
102. D. Gross and F. Wilczek, Asymptotically Free Gauge Theories. I, *Phys. Rev. D.* **8**, 3633–3652 (1974). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.8.3633>
103. A. Grozin, Lectures on QED and QCD, Preprint arXiv:hep-ph/0508242 (2005). <https://doi.org/10.48550/arXiv.hep-ph/0508242>
104. J.F. Gunion and H.E. Haber, CP-Conserving Two-Higgs-Doublet Model: The Approach to the Decoupling Limit, *Phys. Rev. D.* **67**, 075019 (2003). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.67.075019>
105. J.F. Gunion, H.E. Haber, G. Kane, and S. Dawson, *The Higgs Hunter’s Guide*, *Frontiers in Physics*, Perseus Publishing, Cambridge, 2000, V. 80, P. 1–404.
106. V.P. Gusynin and V.A. Kushnir, On-Diagonal Heat Kernel Expansion in Covariant Derivatives in Curved Space, *Class. Quantum Grav.* **8**, 279–285 (1991). <https://doi.org/10.1088/0264-9381/8/2/009>
107. V.P. Gusynin, V.A. Miransky, and I.A. Shovkovy, Catalysis of Dynamical Flavor Symmetry Breaking by a Magnetic Field in 2 + 1 Dimensions, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3499–3502 (1994). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.73.3499>
108. V.P. Gusynin, V.A. Miransky, and I.A. Shovkovy, Dimensional Reduction and Catalysis of Dynamical Symmetry Breaking by a Magnetic Field, *Nucl. Phys. B.* **462**, 249–290 (1996). [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(96\)00021-1](https://doi.org/10.1016/0550-3213(96)00021-1)
109. F. Halzen and A.D. Martin, *Quarks and Leptons: Introductory Course in Modern Particle Physics*, Wiley, Hoboken, 1991.
110. D. Hanneke, S. Fogwell, and G. Gabrielse, New Measurement of the Electron Magnetic Moment and the Fine Structure Constant, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 120801 (2008). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.120801>
111. D. Hanneke, S.F. Hoogerheide, and G. Gabrielse, Cavity Control of a Single-Electron Quantum Cyclotron: Measuring the Electron Magnetic Moment, *Phys. Rev. A.* **83**, 052122 (2011). <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.83.052122>

112. A. Hanson, T. Regge, and C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems*, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, Italy, 1976. <https://hdl.handle.net/2022/3108>
113. W. Heisenberg and H. Euler, Consequences of Dirac's Theory of Positrons, *Z. Physik.* **98**, 714–732 (1936). <https://doi.org/10.1007/BF01343663>
114. M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, Princeton, 2020. <https://doi.org/10.1515/9780691213866>
115. P.W. Higgs, Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 508–509 (1964). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.13.508>
116. P.W. Higgs, Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons, *Phys. Rev.* **145**, 1156–1162 (1966). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.145.1156>
117. P.W. Higgs, Nobel Lecture: Evading the Goldstone Theorem, *Rev. Mod. Phys.* **86**, 851–853 (2014). <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.851>
118. L. Brown, M. Riordan, M. Dresden, and L. Hoddeson, The Rise of the Standard Model: 1964–1979. In: L. Hoddeson, L. Brown, M. Riordan, and M. Dresden, (Eds) *The Rise of the Standard Model: A History of Particle Physics from 1964 to 1979*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997. P. 3–35, <https://doi.org/10.1017/CBO9780511471094.003>
119. B. Holdom, Raising Condensates Beyond the Ladder, *Phys. Rev. Lett.* **213**, 365–369 (1988). [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(88\)91776-5](https://doi.org/10.1016/0370-2693(88)91776-5)
120. K. Huang, *Quarks, Leptons, and Gauge Fields*, World Scientific, Singapore, 1982. <https://doi.org/10.1142/1409>
121. C. Itzykson and J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, Dover Publications, Mineola, 2006.
122. R. Jackiw and C. Rebbi, Vacuum Periodicity in a Yang–Mills Quantum Theory, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 172–175 (1976). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.37.172>
123. R. Jackiw, Introduction to the Yang–Mills Quantum Theory, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 661–673 (1980). <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.52.661>
124. A.L. Kataev and S.A. Larin, Analytical Five-Loop Expressions for the Renormalization Group QED β -Function in Different Renormalization Schemes, *JETP Lett.* **96**, 64–67 (2012). <https://doi.org/10.1134/S0021364012130073>
125. L.V. Keldysh, Ionization in the Field of a Strong Electromagnetic Wave, *Soviet Physics JETP.* **20** (5), 1307–1314 (1965).
126. I.B. Khriplovich, Green's Functions in Theories With Nonabelian Gauge Group, *Yadernaya Fizika.* **10**, 409–424 (1969).
127. S.K. Kim and M. Baker, Consequences of Gauge Invariance for the Interacting Vertices in Non-Abelian Gauge Theories, *Nucl. Phys. B.* **164**, 152–170 (1980). [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(80\)90506-4](https://doi.org/10.1016/0550-3213(80)90506-4)
128. S.F. King, Neutrino Mass Models, *Reports on Progress in Physics.* **67**, 107–157 (2004). <https://doi.org/10.1088/0034-4885/67/2/R01>
129. A. Kizilersü, T. Sizer, M.R. Pennington, A.G. Williams, and R. Williams, Dynamical Mass Generation in Unquenched QED Using the Dyson–Schwinger Equations, *Phys. Rev. D.* **91**, 065015 (2015). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.065015>
130. H. Kleinert, *Particles and Quantum Fields*, World Scientific, Singapore, 2016. <https://doi.org/10.1142/9915>

131. H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*, World Scientific, Singapore, 2009. <https://doi.org/10.1142/7305>
132. H. Kleinert and V. Schulte-Frohlinde, *Critical Properties of ϕ^4 -Theories*, World Scientific, Singapore, 2000.
133. J.B. Kogut, E. Dagotto, and A. Kocić, New Phase of Quantum Electrodynamics: A Non-Perturbative Fixed Point in Four Dimensions, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 772–775 (1988). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.60.772>
134. J.B. Kogut, E. Dagotto, and A. Kocić, On the Existence of Quantum Electrodynamics, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2416–2419 (1988). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.61.2416>
135. J.B. Kogut, E. Dagotto, and A. Kocić, Strongly Coupled Quenched QED, *Nucl. Phys. B.* **317**, 253–270 (1989). [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(89\)90069-2](https://doi.org/10.1016/0550-3213(89)90069-2)
136. T. Kugo and I. Ojima, Manifestly Covariant Canonical Formulation for the Yang–Mills Field Theory. I. General Formalism, *Prog. Theor. Phys.* **60**, 1869–1889 (1978). <https://doi.org/10.1143/PTP.60.1869>
137. T. Kugo and I. Ojima, Local Covariant Operator Formalism of Non-Abelian Gauge Theories and Quark Confinement Problem, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **66**, 1–130 (1979). <https://doi.org/10.1143/PTPS.66.1>
138. L.D. Landau, A.A. Abrikosov, and I.M. Khalatnikov, On the Quantum Field Theory, *Nuovo Cimento.* **3**, Suppl. 1, 80–104 (1956). <https://doi.org/10.1007/BF02745513>
139. P. Langacker, *The Standard Model and Beyond*, CRC Press, Boca Raton, 2010. <https://doi.org/10.1201/b22175>
140. S. Laporta and E. Remiddi, The Analytical Value of the Electron ($g-2$) at Order α^3 in QED, *Phys. Lett. B.* **379**, 283–291 (1996). [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(96\)00439-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(96)00439-X)
141. S. Laporta, High-Precision Calculation of the 4-Loop Contribution to the Electron $g - 2$ in QED, *Phys. Lett. B.* **772**, 232–238 (2017). <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2017.06.056>
142. G. Leibbrandt, Introduction to the Technique of Dimensional Regularization, *Rev. Mod. Phys.* **47**, 849–876 (1975). <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.47.849>
143. C.N. Leung, S.T. Love, and W.A. Bardeen, Spontaneous Symmetry Breaking in Scale Invariant Quantum Electrodynamics, *Nucl. Phys. B.* **273**, 649–662 (1986). [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(86\)90382-2](https://doi.org/10.1016/0550-3213(86)90382-2)
144. A.D. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, Harwood, Chur, 1990. <https://doi.org/10.1201/9780367807788>
145. A.J. Long, E. Sabancilar, and T. Vachaspati, Leptogenesis and Primordial Magnetic Fields, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics.* **2014** (2), 036 (2014). <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2014/02/036>
146. J.M. Luttinger and J.C. Ward, Ground-State Energy of a Many-Fermion System. II, *Phys. Rev.* **118**, 1417–1427 (1960). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.118.1417>
147. N.S. Manton, Topology in the Weinberg–Salam Theory, *Phys. Rev. D.* **28**, 2019–2026 (1983). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.28.2019>

148. T. Maskawa and T. Nakajima, Spontaneous Breaking of Chiral Symmetry in a Vector-Gluon Model, *Prog. Theor. Phys.* **52**, 1326–1354 (1974). <https://doi.org/10.1143/PTP.52.1326>
149. A.A. Migdal, Effective Low Energy Lagrangian for QCD, *Phys. Lett. B.* **81**, 37–40 (1979). [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(79\)90711-1](https://doi.org/10.1016/0370-2693(79)90711-1)
150. V.A. Miransky, *Dynamical Symmetry Breaking in Quantum Field Theories*, World Scientific, Singapore, 1993. <https://doi.org/10.1142/2170>
151. Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I, *Phys. Rev.* **112**, 345–358 (1961). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.112.345>
152. L.B. Okun, *Leptons and Quarks*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1985. <https://doi.org/10.1016/C2009-0-12165-7>
153. R.D. Peccei, New Phase for an Old Theory?, *Nature.* **332**, 492–493 (1988). <https://doi.org/10.1038/332492b0>
154. M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley, Reading, 1995. <https://doi.org/10.1201/9780429503559>
155. A. Petermann, Fourth Order Magnetic Moment of the Electron, *Helv. Phys. Acta.* **30**, 407–408 (1957).
156. H.D. Politzer, Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1346–1349 (1973). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.30.1346>
157. R. Rajaraman, *Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1982.
158. P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, Westview Press; 2nd edition, Boulder, 2001.
159. C.D. Roberts and A.G. Williams, Dyson-Schwinger Equations and their Application to Hadronic Physics, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **33**, 477–575 (1994). [https://doi.org/10.1016/0146-6410\(94\)90049-3](https://doi.org/10.1016/0146-6410(94)90049-3)
160. B. Rosenstein and B.J. Warr, Dynamical Symmetry Breaking in Four-Fermion Interaction Models, *Phys. Repts.* **205**, 59–108 (1991). [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(91\)90129-A](https://doi.org/10.1016/0370-1573(91)90129-A)
161. V.A. Rubakov, *Classical Theory of Gauge Fields*, Princeton University Press, Princeton, 2002.
162. V.A. Rubakov and D.S. Gorbunov, *Introduction to the Theory of the Early Universe: Hot Big Bang Theory*, World Scientific, Singapore, 2011. <https://doi.org/10.1142/7874>
163. L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511813900>
164. D. Salisbury, K. Sundermeyer, Leon Rosenfeld’s General Theory of Constrained Hamiltonian Dynamics, *Eur. Phys. J. H.* **42**, 23–61 (2017). <https://doi.org/10.1140/epjh/e2016-70042-7>
165. G. Savvidi, From Heisenberg-Euler Lagrangian to the Discovery of Chromomagnetic Gluon Condensation, *Eur. Phys. J. C.* **80**, 65–184 (2020). <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-7711-6>
166. G.K. Savvidy, Infrared Instability of the Vacuum State of Gauge Theories and Asymptotic Freedom, *Phys. Lett. B.* **71**, 133–134 (1977). [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(77\)90759-6](https://doi.org/10.1016/0370-2693(77)90759-6)

167. C. Schubert, On the γ_5 -Problem of Dimensional Renormalization, Preprint HD-THEP-93-46 (1993).
168. L.S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration*, John Wiley, New York, 1981. <https://doi.org/10.1137/1025107>
169. A.S. Schwarz, *Quantum Field Theory and Topology*, Springer-Verlag, Berlin, 2014. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-02943-5>
170. S.S. Schweber, *Relativistic Quantum Field Theory*, Dover Publications, Mineola, 1961.
171. S.S. Schweber, *QED and Men Who Did It: Dyson, Feynman, Schwinger, Tomonaga*, Princeton University Press, Princeton, 1994. <https://doi.org/10.2307/j.ctv10crg18>
172. J.S. Schwinger, On Gauge Invariance and Vacuum Polarization, *Phys. Rev.* **82**, 664–679 (1951). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.82.664>
173. J.S. Schwinger, Gauge Invariance and Mass, *Phys. Rev.* **125**, 397–398 (1962). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.125.397>
174. J.S. Schwinger, Gauge Invariance and Mass. II, *Phys. Rev.* **128**, 2425–2429 (1962). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.128.2425>
175. P. Senjanovic, Path Integral Quantization of Field Theories with Second-Class Constraints, *Ann. Phys.* **100**, 227–261 (1976). [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(76\)90062-2](https://doi.org/10.1016/0003-4916(76)90062-2)
176. M. Shifman, Historical Curiosity: How Asymptotic Freedom of the Yang–Mills Theory Could Have Been Discovered Three Times Before Gross, Wilczek, and Politzer, but Was Not. In: *At the Frontier of Particle Physics, Handbook of QCD*, World Scientific, Singapore, Vol. 1, 2001.
177. M.A. Shubin, *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*, Springer, Berlin, 1987. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-56579-3>
178. C.M. Sommerfield, The Magnetic Moment of the Electron, *Annals of Physics.* **6**, 26–57 (1958). [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(58\)90003-4](https://doi.org/10.1016/0003-4916(58)90003-4)
179. J. Steinberger, On the Use of Subtraction Fields and the Lifetimes of Some Types of Meson Decay, *Phys. Rev.* **76**, 1180–1186 (1949). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.76.1180>
180. R.F. Streater and A.S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and All That*, Princeton University Press, Princeton, 1989. <https://doi.org/10.1515/9781400884230>
181. R. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1982. <https://doi.org/10.1007/BFb0036225>
182. D.G. Sutherland, Current Algebra and Some Non-Strong Mesonic Decays, *Nucl. Phys. B.* **2**, 433–440 (1967). [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(67\)90180-0](https://doi.org/10.1016/0550-3213(67)90180-0)
183. J.C. Taylor, Ward Identities and Charge Renormalization of the Yang–Mills Field, *Nucl. Phys. B.* **33**, 436–444 (1971). [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(71\)90297-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(71)90297-5)
184. G. 't Hooft and M. Veltman, Regularization and Renormalization of Gauge Fields, *Nucl. Phys. B.* **44**, 189–213 (1972). [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(72\)90279-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(72)90279-9)
185. G. 't Hooft, Dimensional Regularization and the Renormalization Group, *Nucl. Phys. B.* **61**, 455–468 (1973). [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(73\)90376-3](https://doi.org/10.1016/0550-3213(73)90376-3)

186. G. 't Hooft, Symmetry Breaking through Bell-Jackiw Anomalies, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 8–11 (1976). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.37.8>
187. G. 't Hooft, Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories, *Nucl. Phys. B.* **79**, 276–284 (1974). [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(74\)90486-6](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90486-6)
188. G. 't Hooft, The Evolution of Quantum Field Theory: From QED to Grand Unification. In: *The Standard Theory of Particle Physics, Advanced Series on Directions in High Energy Physics*, Vol. 26, World Scientific, Singapore, 2016. https://doi.org/10.1142/9789814733519_0001
189. S.B. Treiman, R. Jackiw, and D.J. Gross, *Lectures on Current Algebra and Its Applications*, Princeton University Press, Princeton, 2018. <https://doi.org/10.1515/9781400871506>
190. V.S. Vanyashin and M.V. Terentyev, The Vacuum Polarization of a Charged Vector Field, *Zh. Eksp. Teor. Phys.* **48**, 565–573 (1965).
191. A.N. Vasil'ev and A.K. Kazanskii, Legendre Transforms of the Generating Functionals in Quantum Field Theory, *Theor. Math. Phys.* **12**, 875–887 (1972). <https://doi.org/10.1007/BF01035606>
192. A.N. Vasil'ev, *Functional Methods in Quantum Field Theory and Statistical Physics*, CRC Press, Boca Raton, 1998. <https://doi.org/10.1201/9780203755396>
193. M. Veltman, Theoretical Aspects of High Energy Neutrino Interactions, *Proc. R. Soc. A.* **301**, 107–112 (1967). <https://doi.org/10.1098/rspa.1967.0193>
194. S. Weinberg, New Approach to the Renormalization Group, *Phys. Rev. D.* **8**, 3497–3509 (1973). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.8.3497>
195. S. Weinberg, Critical Phenomena for Field Theorists. In: A. Zichichi, (Ed.) *Understanding the Fundamental Constituents of Matter*. Springer New York, NY, 1978. <https://doi.org/10.1007/978-1-4684-0931-4>
196. S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*. Vol. 1. Foundations, Cambridge University Press, Cambridge, 1995. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139644167>
197. S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*. Vol. 2. Modern Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1996. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139644174>
198. C. Wetterich, Exact Evolution Equation for the Effective Potential, *Phys. Lett. B.* **301**, 90–94 (1993). [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(93\)90726-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(93)90726-X)
199. T.T. Wu, C.N. Yang, T.T. Wu, and C.N. Yang, Some Solutions of the Classical Isotopic Gauge Field Equations. In: H. Mark, S. Fernbach, (Eds) *Properties of Matter under Unusual Conditions*, Wiley-Interscience, New York, 1969. P. 344–354.
200. C. Zener, A theory of the Electric Breakdown of Solid Dielectrics, *Proc. R. Soc. A.* **145**, 523–529 (1934). <https://doi.org/10.1098/rspa.1934.0116>
201. J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford University Press, Oxford, 2021. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198509233.001.0001>
202. J. Zinn-Justin, *Path Integrals in Quantum Mechanics*, Oxford University Press, Oxford, 2005. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198566748.001.0001>
203. B. Zumino, Gauge Properties of Propagators in Quantum Electrodynamics, *J. Math. Phys.* **1**, 1–7 (1960). <https://doi.org/10.1063/1.1703632>

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- адрони і мезони 95, 403
алгебра
Грасмана 35
Лі 59, 93, 105
ампутовані функції Гріна 339
аномальні розмірності 282
аномальний магнітний момент
електрона 217
асимптотична безпека 301
асимптотична свобода 292, 301
баріонна симетрія 448
бета функція 297
брейт-вігнерівський резонанс 308
вершинна функція 169, 214, 223, 288
віківський поворот 186
власна енергія
електрона 164, 196
кварка 287
в'язі
вторинні 56, 77
другого роду 58, 60
первинні 54
першого роду 57, 59
гаусові інтеграли 32
генеруючий функціонал 23, 29
гіперзаряд 415
голдстоунівські бозони 255, 330, 332, 390
грасманові змінні 35
група
абелева $U(1)$ 90, 92, 106
 $SO(10)$ 464
 $SU(2)$ 93, 422
 $SU(3)$ 93, 95, 106, 127, 287, 292–294, 402
детермінант Фаддєєва—Попова 119, 121, 244
дзета-функція
Рімана 45, 300
узагальнена 45, 355, 359, 361, 465
динамічна генерація маси 202
динамічне порушення симетрії 332
диференціальний переріз розсіяння 307
діаграми Фейнмана 145
дужка
Дірака 58, 71
Пуассона 51, 59, 76, 112
духові поля 124
Фаддєєва—Попова 114, 119, 271, 386
електрослабкі взаємодії 401
ефект
Казіміра 354
Рубакова—Калана 399
Швінгера 213
ефективна дія 336, 339, 344, 350, 363, 373
ефективна константа взаємодії 212
ефективний потенціал 342
змінна Мандельстама 312
змішування поколінь 422
інваріант Черна—Понтрягіна 103
індекс діаграми 170
інстантонний розв'язок 101, 104
інтеграл за траєкторіями 16
інфрачервоно стабільна точка 300
калібровка
аксіальна 82
Арновіта—Фінклера 118
Єнні 88
кулонівська 79, 113, 115
Ландау 88, 386
Лоренца 86, 115

- Намбу 121
 світлового конуса 118
 'т Хоофта 384, 385, 390
 Фейнмана 88, 201
 часова (гамільтонова) 79
 унітарна 384, 387, 419
 калібрувальні перетворення 92
 калібрувальна орбіта 60, 85
 калібрувальний принцип 90
 каонні осциляції 430
 квантова електродинаміка 75, 87, 91,
 121, 153, 155, 157, 162, 170, 174, 189,
 191, 196, 203, 208, 229, 235, 347, 403
 квантова хромодинаміка 79, 95, 101,
 110, 122, 157, 168, 204, 263, 271, 284,
 287, 288, 292, 293, 301, 336, 359, 373,
 402, 422, 424
 кіральна аномалія 204, 256, 260, 262
 класифікація перенормовності теорій
 170
 класичний радіус електрона 202
 коваріантна похідна 92
 комутаційні співвідношення 11
 копії Грібова 115
 критичне поле 213
 кут
 зміщення Вайнберга 414
 Кабіббо 425
 лембівський зсув 209
 лептонна симетрія 448
 лінійна σ -модель 328
 локальні калібрувальні перетворення 91
 магнітний монополь 100, 397
 майоранівські ферміони 438
 маси калібрувальних бозонів 414
 маси нейтрино 454
 матриці Гелл-Манна 106
 метод Фаддєєва—Попова 86, 122, 385
 механізм
 Хіггса 390
 Швінгера 204, 381
 моделі Великого Об'єднання 459
 модель
 Джорджі—Глешоу 100, 394
 Намбу—Йона-Лазініо 330
 Хіггса 382
 Швінгера 203
 модифікована схема перенормування
 194
 монополь
 Ву—Янга 100, 393
 Дірака 398
 'т Хоофта—Полякова 393, 398
 нейтральні реакції 429
 нуль-заряд 199
 оператор
 Гамільтона 11
 еволюції 14
 еліптичний 360
 Казіміра 109, 459
 кірального заряду 373
 псевдодиференціальний 360
 Фаддєєва—Попова 128
 хронологічного впорядкування 26
 оптична теорема 314
 осциляції нейтрино 442
 перенормований заряд 198
 переріз розсіяння 306
 перетворення Ландау—Халатнікова—
 Фрадкіна 251
 поворот Віка 31
 поле Наканіші—Лаутрупа 347
 полюс Ландау 213, 291, 297
 поляризаційний оператор 167, 168, 191,
 284
 потенціал
 Коулмена—Вайнберга 356
 Юлінга 211
 правила
 Куткоського 316
 Фейнмана 147, 153
 пропагатор
 скалярного поля 139
 Фейнмана 12, 20
 ферміонного поля 156
 фотона 155
 рівняння
 Дірака 439
 Ейлера—Лагранжа 13, 20, 29, 54, 76,
 97, 438
 Клейна—Гордона—Фока 29, 69, 132
 Шредінгера 11, 14, 439
 Швінгера—Дайсона 130, 133, 244,
 247, 376
 Янга—Міллса 97, 100, 104, 393

- регуляризація
 за допомогою ζ -функції 45, 354, 365
 Паулі—Вілларса 180, 198, 201, 236
 розмірна 185, 189, 236
 Славнова 189
- редукційні формули 319
- ренормалізаційні функції 280
- ренормалізаційна група 277, 363
- розпад
 нейтрального піона 266
 протона 448
- симетрійні коефіцієнти діаграм 148
- симетрія БРСТ 122, 347
- сингулярні лагранжіани 53
- скорочення калібрувальних аномалій 412
- спонтанне порушення симетрії 326, 392
- структурні константи 91
- тензор
 дуальний 96
 електромагнітного поля 395
 Леві-Чивіті 97, 101
 напруженості 'т Хоофта 394
 напруженості неабелев 94, 403, 450
 'т Хоофта 103
- теорема
 БПХЦ 238
 Віка 143, 153
 Голдстоуна 255, 330
 Нетер 133
 СРТ 228, 431
 Фаррі 172, 173
- теорія Фермі 404, 407
- топологічний струм 99
- тотожність
 Б'янкі 96
 Гордона 218
 Ейлера 170
 Урда—Такахаші 136, 251
 Фейнмана 185
 Якобі 96
- тотожності
 Нільсена 347
 Славнова—Тейлора 271—273, 294, 344
- ультрафіолетово стабільна точка 299
- фіксована точка 297, 298
- форм-фактори 224
- функціонал Швінгера 337
- функціональна ренормалізаційна група 367
- функція
 Калана—Симанзіка 282
 Ламберта 295
- хіггсівський бозон 419
- часткове збереження аксіального струму (ЧЗАС) 268
- ширина розпаду 268, 312
- MS схема перенормування 194
- S-матриця 309
- T-матриця 310



ГУСИНІН Валерій Павлович — фізик-теоретик, відомий своїми працями в галузі квантової теорії поля, теорії елементарних частинок і теорії конденсованих середовищ.

Після закінчення в 1971 р. фізичного факультету Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка (нині — Київського національного університету імені Тараса Шевченка) працює в Інституті теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, де пройшов шлях від аспіранта до завідувача відділу астрофізики і елементарних частинок. У 1992 р. захистив докторську дисертацію, професор з 2000 р., у 2012 р. його обрано членом-кореспондентом НАН України.

Упродовж більш як 30 років читав лекції з квантової теорії поля для студентів-бакалаврів 4-го курсу та магістрів фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, а також протягом кількох років — для студентів Києво-Могилянської академії та Київського академічного університету. Ці лекції становили основу даної монографії.

В.П. Гусинін зробив вагомий внесок у розвиток кількох напрямів теоретичної фізики. Одним із головних його досягнень є розроблення механізмів динамічного порушення симетрії і генерації мас ферміонів у квантовій електродинаміці та квантовій хромодинаміці. Ним виконано важливі роботи з розроблення алгоритмів обчислення асимптотичного розкладу ядра теплопровідності для диференціальних операторів різного виду, які отримали застосування в теорії гравітації. Спільно з колегами було відкрито ефект магнітного каталізу — генерації мас ферміонів під впливом зовнішнього магнітного поля, який став широко відомим і використовується як у фізиці елементарних частинок, так і у фізиці твердого тіла.

У фізиці конденсованого стану, ще до відкриття графену, В.П. Гусинін виконав піонерські роботи, в яких було передбачено цілу низку ефектів, властивих саме цьому матеріалу. Серед найбільш яскравих — передбачення незвичайного квантового ефекту Холла, який згодом було відкрито експериментально. Цей фундаментальний результат показав, що елементарні збудження твердих тіл можуть описуватися рівнянням Дірака. Його роботи щодо графену процитовано в статтях нобелівських лауреатів А. Гейма, К. Новосьолова, Г. Штермера, Д. Холдейна, К. фон Клітцинга.

В.П. Гусинін входить до числа найбільш цитованих науковців України. Його відзначено Державною премією України в галузі науки і техніки (2006), премією імені С.І. Пекаря НАН України (2015), нагородою «Лідер науки України. Web of Science Award» (2016) у номінації «Вчений України. За надзвичайні досягнення».



ГОРБАР Едуард Володимирович — фізик-теоретик, відомий своїми працями в галузі квантової теорії поля і теорії конденсованих середовищ.

Після закінчення в 1990 р. фізичного факультету Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка (нині — Київського національного університету імені Тараса Шевченка) вступив до аспірантури Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, де в 1993 р. захистив кандидатську дисертацію. З 1993 по 2011 р. працював в Інституті теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України і в 2010 р. захистив там докторську дисертацію.

З 2011 р. працює професором кафедри квантової теорії поля та космофізики фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Е.В. Горбар спільно з колегами одним із перших у світі почав дослідження динамічного порушення і генерації щільності в графені, зробив вагомий внесок у дослідження квантового ефекту Холла в одно- і двошаровому графені. Він є відомим у світі фахівцем з фізики діраківських та вейлівських напівметалів, співавтором монографії «Electronic properties of Dirac and Weyl semimetals» (World Scientific, 2021). Зокрема, він показав, що електричний струм у кіральній кінетичній теорії у вейлівських напівметалах повинен включати доданок Черна—Саймонса для забезпечення локального збереження електричного заряду в цих матеріалах.

Досліджуючи кіральні аномальні процеси у щільній релятивістській матерії в магнітному полі, Е.В. Горбар знайшов, що спільна дія кірального магнітного ефекту та кірального ефекту розділення приводить до генерації електричного квадрупольного моменту випромінювання заряджених частинок у зіткненнях важких іонів. У дослідженнях генерації первинних магнітних полів у ранньому Всесвіті виконав піонерські роботи із застосування кінетичного підходу до опису ефекту Швінгера в інфляційних моделях магнітогенезу.

Е.В. Горбар входить до числа найбільш цитованих науковців України і є автором понад 130 наукових публікацій. Його відзначено стипендією Президента України для молодих вчених (1997–1998), премією НАН України для молодих вчених (1998), премією імені С.І. Пекаря НАН України (2015).

Наукове видання

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ
ім. М.М. БОГОЛЮБОВА НАН УКРАЇНИ

ГУСИНІН Валерій Павлович
ГОРБАР Едуард Володимирович

ВСТУП
ДО
КВАНТОВОЇ
ТЕОРІЇ
КАЛІБРУВАЛЬНИХ
ПОЛІВ

Редактор *О.О. Мележик*

Художнє оформлення *Є.О. Ільницького*

Технічний редактор *Т.М. Шендерович*

Комп'ютерна верстка *Л.І. Шмагайло*

Підп. до друку 09.10.2023. Формат 70 × 100/16. Гарн. Computer Modern.
Ум. друк. арк. 39,49. Обл.-вид. арк. 34,23. Тираж 150 прим. Зам. 7059.

Видавець і виготовлювач Видавничий дім «Академперіодика» НАН України
вул. Терещенківська, 4, м. Київ, 01024

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 544 від 27.07.2001 р.