ЗОЛОТЕ ІРРАЦІОНАЛЬНЕ ЧИСЛО

Все є число
Піфагор

Микола Григорчук
доктор фіз.-мат. наук,
пров. наук. співроб.
Інституту теоретичної фізики
ім. М.М. Боголюбова
НАН України,
м. Київ

Людство завжди прагло зрозуміти довколишній світ, відшукуючи певні закономірності у явищах і в природі. Ідея гармонії Світобудови і Золотого перетину, що йде від вчення ***Піфагора*** про числову гармонію світу, є чи не найдавнішою науковою парадигмою [1—3]. Це одна з "вічних" проблем, цікавість до якої зростала особливо в періоди найвищого розквіту людської культури. Краса і гармонія ставали важливими категоріями пізнання, навіть його метою, бо художник шукає істину в красі, а вчений — красу в істині. Виявилось, що "золотий перетин" містичним чином супроводжує усе живе й красиве. Нежива природа не знає, що це таке. Постає питання, чи можна "*алгеброю перевірити гармонію*"?

У свій час великий астроном XVI ст. ***Й. Кеплер*** (1571—1630) писав, що "*геометрія має два скарби: один з них — теорема Піфагора, а другий — поділ відрізка в середньо-пропорційному відношенні*". Пригляньмось уважно до цього відношення, аби зрозуміти, що поділ відрізка — це скарб, рівноцінний знаменитій теоремі.

Все, що має початок і кінець, має не тільки свою "золоту середину", а й свій "золотий перетин" (лат. *sectio aurea*, англ. *golden ratio*). Ціле складається з частин, частини ж знаходяться у певному відношенні одна до однієї та до цілого. Якщо ціле розділити на дві нерівні частини, то "золотим" буде такий поділ, за якого ціле так відноситься до своєї більшої частини, як ця більша частина відноситься до меншої частини, або іншими словами, менший відрізок так відноситься до більшого, як більший до всього (рис. 1).

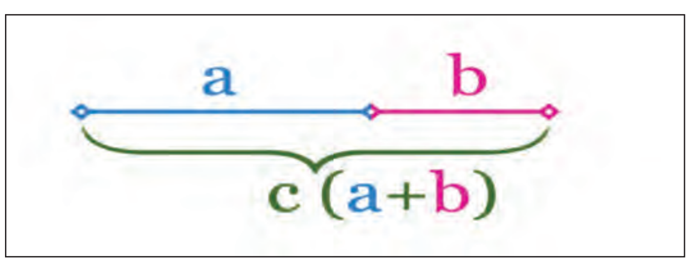


Рис. 1. Золотий поділ відрізка

Це відношення прийнято позначати грецькою буквою $\boldsymbol{\Phi}$ на честь античного скульптора ***Фідія*** (сер. V ст. до н.е. — 431 до н.е.), який керував будівництвом знаменитого Парфенону і, за переказами, часто використовував золоту пропорцію у своїх скульптурах. Число Фідія однак частіше називають "золотим числом", а пропорцію — "золотою". Золота пропорція — є ніби місцем геометричної рівноваги у відношенні як цілого до його частини, так і самих частин. Вона єдина, неповторна, має унікальні властивості. Є якоюсь найбільш знаною з математичних феноменів ідеальною сталою для опису предмета, структури чи навіть процесу.

Відрізок $\boldsymbol{c}$ на рис. 1 можна подати як суму відрізків $\boldsymbol{c = a + b}$. Тоді пропорцію $\boldsymbol{c : a = a : b}$ можна виразити у вигляді рівняння $\boldsymbol{a^2 - ab - b^2 = 0}$. Розділимо його на $\boldsymbol{b^2}$. Позначивши $\boldsymbol{a/b = \Phi}$, одержимо: $\boldsymbol{\Phi^2 - \Phi - 1 = 0}$. Додатнім розв'язком цього зведеного квадратного рівняння є:

$$\Phi = (\sqrt{5} + 1) : 2 = 1{,}618... \qquad (1)$$

Це ні півтора, ні два, а лишень
1,6180339887498948482045 86... .

Тут після коми нескінчене число цифр. У давні часи подібні числа не мали сенсу (лат. *rationabilis* — розумний), тому їх назвали "*ірраціональними*". Можна сказати просто, що золотий перетин — це середнє арифметичне від $\sqrt{5}$ і 1.

Якщо розглядати спочатку відношення меншого відрізка до більшого, тобто $\boldsymbol{b/a}$, то перевернувши дріб для $\boldsymbol{\Phi}$, одержимо:

$$\varphi = 1 : \Phi = (\sqrt{5} - 1) : 2 = 0{,}618... \qquad (2)$$

Число $\boldsymbol{\varphi}$ — є оберненим до $\boldsymbol{\Phi}$. Це унікальний випадок, коли число і обернене до нього відрізняються точно на одиницю, бо всі числа після коми збігаються. Не існує ніяких інших чисел, для яких би таке виконувалось. Тому $\boldsymbol{\Phi}$ і $\boldsymbol{\varphi}$ — золоті числа. Ця властивість однозначно випливає і стає очевидною з самого рівняння для Ф, якщо його переписати як $\boldsymbol{\Phi} - 1 = 1/\boldsymbol{\Phi}$. Число $\boldsymbol{\varphi}$ є розв'язком квадратного рівняння:

$\boldsymbol{\varphi^2 + \varphi - 1 = 0}$.

Золота пропорція, таким чином, відповідає двом числам — мажорному $\boldsymbol{\Phi}$ і мінорному $\boldsymbol{\varphi}$, зворотному до нього. Рівняння для $\boldsymbol{\Phi}$ можна ще переписати так: $\boldsymbol{\Phi^2} = 1 + \boldsymbol{\Phi}$. Замінивши $\boldsymbol{\Phi}$ під коренем на $\sqrt{1+\Phi}$, одержимо: $\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}}$.

Продовжуючи це робити далі й далі, матимемо:

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}} \qquad (3)$$

А якщо скористатись записом $\boldsymbol{\Phi} = 1 + 1/\boldsymbol{\Phi}$ і заміновати $\boldsymbol{\Phi}$ весь час у знаменнику на цей же вираз, то одержимо ланцюговий дріб:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}} \qquad (4)$$

Як мажорне число на одиницю більше від мінорного, так і квадрат мажорного числа на одиницю більший від нього самого. Це випливає з рівняння $\boldsymbol{\Phi^2 = \Phi} + 1$:

$$\Phi^2 = (\sqrt{5} + 3) : 2 = 2{,}618... \qquad (5)$$

Прогресія типу $\boldsymbol{1, \Phi, \Phi^2, ..., \Phi^n}$ — не тільки геометричний, а це ще й арифметичний ряд, у якому кожен окремий його член, починаючи з третього, дорівнює сумі двох попередніх: $\boldsymbol{\Phi^2} = 1 + \boldsymbol{\Phi}$; $\boldsymbol{\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi}$; $\boldsymbol{\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2}$; $\boldsymbol{\Phi^5 = \Phi^4 + \Phi^3}$; ... $\boldsymbol{\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}}$, де $\boldsymbol{n} > 2$. Цей ряд нагадує інший ряд, відомий з давніх часів. Розглянемо цей зв'язок.

Зв'язок із числами Фібоначчі

Італійський математик ***Леонардо*** з міста Піза відомий більше за своїм прізвиськом ***Фібоначчі*** (*Fibonacci* — скорочення від *filius Bonacci* — син ***Боначчі***) (1175 — ~1250) у 1202 році оприлюднив свою математичну працю "Liber abacci" (*abacci* — рахувальна дошка), у якій були зібрані всі відомі на той час математичні задачі. Ця книга зіграла помітну роль у розвитку математики в Західній Європі протягом кількох наступних століть. Зокрема, саме по цій книзі європейці познайомилися з індуськими ("арабськими") цифрами. Одна із задач звучала так: "*Скільки пар кроликів може народитися за один рік від однієї пари кролів?*". У пошуках відповіді Фібоначчі вибудував таку табличку:

Місяці	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Пари кроликів	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Таким чином, він одержав ряд чисел: **0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...**, які з часом дістали назву "*чисел Фібоначчі*" [4]. Це "*живий ряд чисел*", який ніби сам себе продовжує, оскільки побудований так, що, взявши спочатку два числа 0, 1, далі можна утворити ряд, у якому кожне наступне число буде рівним сумі двох попередніх: 0 + 1 = 1; 1 + 1 = 2; 1 + 2 = 3; 2 + 3 = 5; 3 + 5 = 8 і т. д. Його цікавою характеристикою є те, що, окрім перших кількох, результат ділення двох чисел, що стоять поруч у ряді, є приблизно одним і тим же: $5/3 \approx 8/5 \approx 13/8 \approx 21/13 \approx 34/21 \approx 55/34 \approx 89/55 \approx ...$, і коливається довкола значення рівного 1,618 (або 0,618, якщо ділити менше число на більше), яке відповідає значенню золотого перетину! Результат ділення стає стійким, якщо брати члени ряду після 13-го. Можна сказати, що золотий перетин є межею відношення двох сусідніх чисел у ряді Фібоначчі. Воно тим точніше буде наближатись до $\boldsymbol{\Phi}$, чим більшими вибирати сусідні цифри у ряді Фібоначчі. Число Фідія, таким чином, випливає з чисел Фібоначчі і його позначення через букву $\boldsymbol{\Phi}$ було тим більше вдалим.

Фібоначчі також вирішив практичну задачу для торгівлі: як за найменшої кількості важок можна зважити товар? І довів, що оптимальним набором (у вагових одиницях) буде: 1, 2, 4, 8, 16...

Зауважимо, що будь-який ряд із довільними початковими числами, у якого наступний член виходить додаванням двох попередніх $X_{n+1} = X_n + X_{n-1}$, — у великих числах (при $n \to \infty$) прагне до "золотого співвідношення" між сусідніми членами. Тобто до класичної формули знаходження числа Φ ($\Phi = (1+\sqrt{5})/2$) можна додати ще дві: Φ як границя співвідношення між сусідніми членами будь-якого ряду Фібоначчі: $\Phi = lim\ (X_n/X_{n-1})$, при $n \to \infty$, і третя формула виходить з геометрії пентаграми:

$$\Phi = 2 \cos 36°, \text{ або } \Phi = (1/\sin 18°)/2. \qquad (6)$$

У десятинній, п'ятковій та двійковій класичних системах числення за першооснову вибирають натуральні числа 10, 5, 2, із яких уже за певними правилами конструюються інші натуральні, а також раціональні й ірраціональні числа. Зараз уже існує "*ірраціональна арифметика Фібоначчі*" [5], в основі числення якої закладено ірраціональне число Φ, через яке можна виразити будь-яке дійсне число. Вона базується на тому, що сума степенів двох ірраціональних чисел дає ціле число.

Коли ж відрізок, зображений на рис. 1, зігнути так, аби утворилося коло (рис. 2), то дузі, що відповідає меншому з відрізків ***b***, відповідатиме центральний кут, рівний 137,5°. Цей кут називають "золотим". А дузі, що відповідає більшому відрізку ***a***, — кут 222,5° (= 360° — 137,5°). Їх відношення є таким: 222,5°/137,5° = 1,618.

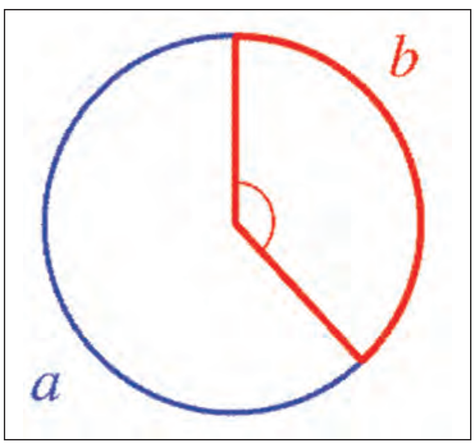


Рис. 2. "Золотий" кут

Якщо відрізок ***c*** прийняти за 100 частин, то більша частина відрізка дорівнює 62-м, а менша — 38-и частинам. Можна побудувати низку відрізків золотої пропорції як у бік збільшення (зростаючий ряд), так і в бік зменшення (спадний ряд). Послідовний ряд відрізків, у якому суміжні відрізки знаходяться у співвідношенні золотого перетину, називають "*золотим вурфом*". Існує поняття "*другого золотого перетину*". Воно витікає з першого. Якщо прийняти довжину цілого відрізка за 100 умовних одиниць, то це буде відношення: 56 : 44 ≈ 1,27. Така пропорція часто зустрічається в архітектурі.

Кеплер, про якого згадувалось на початку, захотів таки поєднати теорему Піфагора з золотим числом. Для цього він побудував прямокутний трикутник, у якому довжина катетів була рівна 1 і $\sqrt{\Phi}$, а гіпотенуза — Φ^2. Очевидно, що $1^2 + (\sqrt{\Phi})^2 = \Phi^2$. Із тих пір такий трикутник називають "*трикутником Кеплера*".

"Золотий" прямокутник

"Золотий" прямокутник легко побудувати за допомогою циркуля і лінійки (рис. 3).

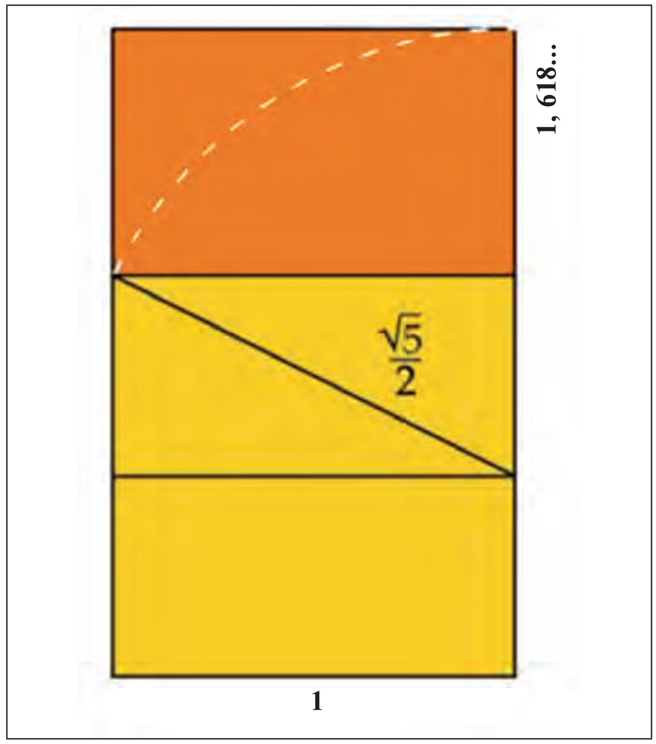


Рис. 3. Побудова "золотого" прямокутника з квадрату

Розділимо квадрат пополам. Проведемо діагональ у півквадраті й, взявши її за радіус, проведемо дугу до перетину з продовженою стороною квадрата. Утворений прямокутник називають "*золотим*", бо відношення довжин його сторін рівне золотому перетину. Він також має цікаві властивості. Якщо від нього відрізати квадрат, то залишиться знову золотий прямокутник, подібний великому. Продовжуючи відрізати квадрати, одержуватимемо усе менші й менші золоті прямокутники, причому вони будуть розташовуватися за логарифмічною спіраллю, яка, як побачимо далі, є важливою у математичних моделях природних об'єктів. Полюс спіралі лежить на перетині діагоналей початкового прямокутника і першого відрізаного (вертикального). Діагоналі всіх наступних, менших і ще менших золотих прямокутників, лежатимуть на цих діагоналях.

Серед об'ємних "золотих" фігур відомий "*золотий кубоїд*". Це прямокутний паралелепіпед з ребрами, що мають довжини 1,0; 1,618 та 0,618. Його повна поверхня рівна 4Φ, а діагональ рівна 2. Описана довкола нього сфера має радіус 1, а це означає, що її поверхня дорівнює 4π. Тому відношення поверхні такої сфери до поверхні золотого кубоїда є π/Φ.

Зв'язок між числами Φ і π

В основі тригонометрії лежить славнозвісне число π, яке вказує, що яке б велике чи яке б мале коло ми не взяли, відношення його довжини до діаметра буде сталим — рівним ірраціональному числу 3,14159... . Точного зв'язку між π і Φ на цей час не встановлено, однак приблизно його можна знайти, якщо побудувати правильний десятикутник зі стороною, рівною одиниці. Якщо з'єднати центр десятикутника з парою сусідніх вершин, то легко помітити, що утворений трикутник матиме дві сторони, рівні радіусу кола Φ. Його довжина буде $2\pi\Phi$. Периметр десятикутника приблизно можна вважати рівним довжині цього кола $2\pi\Phi = 10$. Таким чином, маємо зв'язок: $\pi \approx 5\ \varphi$.

Пентаграма та "золотий" трикутник

У культурах багатьох давніх народів пентаграма вважалася магічним символом, оскільки вона пов'язана з поняттям золотого перетину. Піфагорійці вибрали пентаграму символом свого таємного ордена і вона була у них розпізнавальним знаком для своїх членів. У ***Ґетевому*** "Фаусті" Мефістофель лякається "*пентаграми, що має владу над чортами*".

Простий спосіб побудови пентаграми за допомогою циркуля і лінійки запропонував німецький маляр і графік ***Альбрехт Дюрер*** (1471—1528). Спочатку необхідно побудувати правильний п'ятикутник, такий, у якого довжина всіх сторін однакова (рис. 4, ліва частина).

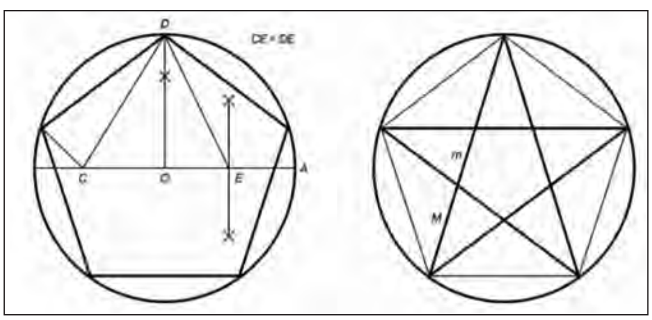


Рис. 4. Побудова правильного п'ятикутника і пентаграми

Нехай точка O буде центром кола, A — точка на колі і E — середина відрізка OA. Проведемо з точки O перпендикуляр до прямої OA, який перетне коло в точці D. Далі, користуючись циркулем, відкладемо на діаметрі відрізок CE = ED. Довжина сторони, вписаного в коло правильного п'ятикутника буде рівною DC. Якщо відкласти на колі відрізки DC, то одержимо п'ять точок, з'єднуючи які й отримаємо п'ятикутник. У колишньому СССР цей символ зображав товарний "знак якості".

Якщо кути п'ятикутника з'єднати через один діагоналями, то одержимо пентаграму, тобто п'ятикутну зірку усередині п'ятикутника (рис. 4, права частина). В утвореній п'ятикутній зірці кожен відтинок ділиться іншим, що його перетинає, у пропорції золотого перетину. На рис. 5 відношення червоного відтинку до зеленого, зеленого до синього і синього до рожевого дорівнює Φ. До того ж, відношення червоного відтинку до віддалі між сусідніми вершинами зірки, яка рівна зеленому відтинку, також дорівнює Φ.

Рис. 5. П'ятикутна зірка

Кожен кінець п'ятикутної зірки являє собою золотий трикутник, оскільки відношення довжини довшої сторони до коротшої (***M/m***) складає добре відоме число — Φ. Сторони трикутника утворюють у вершині кут 36°, а основа, відкладена на бокову сторону, ділить її у пропорції золотого перетину. Символ зірки присутній на гербах і прапорах багатьох країн світу (США, СССР та ін.).

Усередині ж зірки бачимо перевернутий малий п'ятикутник. Провівши по дві лінії з кожної його вершини, знову одержимо п'ятикутну зірку, усередині якої буде ще менший п'ятикутник, і так до нескінченності. Відношення сторін новоутворених трикутників знову ж таки даватиме число Φ.

Історична фреска

Математичне дослідження властивостей золотого перетину триває вже п'яте тисячоліття [6, 7]. Найдавніший "золотий" пам'ятник, який дійшов до наших днів — це давньоєгипетська гробниця архітектора ***Хесіра*** в Саккарі (XXVII ст. до н.е.). Її називають "*академією архітектурного канону*", оскільки в нішах гробничної галереї стояли дерев'яні панно з геометричними ілюстраціями до трактатів ***Імхотепа*** про архітектуру та Хесіра (нині вони зберігаються в Єгипетському музеї, але сам трактат втрачено). Хесіра (Хесі-Ра) — сакральне ім'я легендарного зодчого Імхотепа, будівничого першої великої східчастої піраміди ***Джосера***. Його вважають першим відомим в історії вченим та найбільшим мудрецем старожитності.

Так ось, гробниця Хесіра в плані має золоту пропорцію (рис 6).

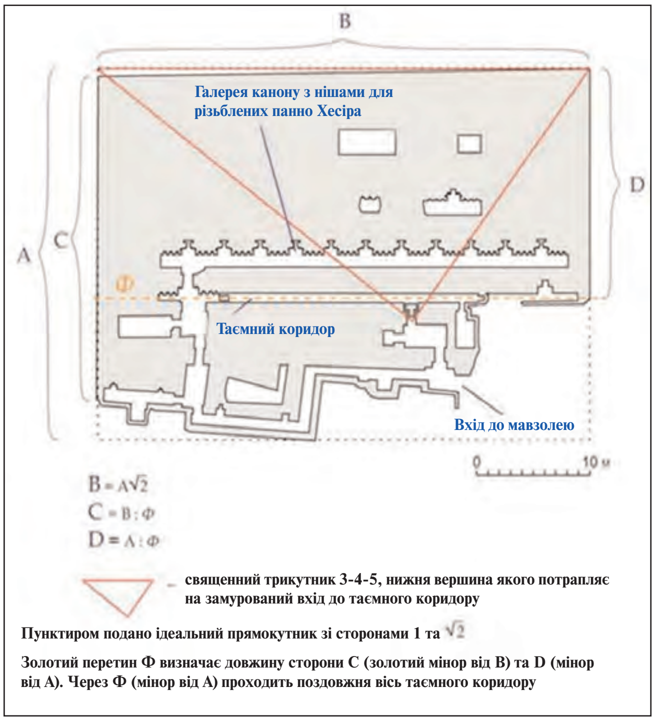


Рис. 6. План гробниці Хесіра в Саккарі

Зодчий Хесіра, зображений на рельєфі дерев'яної панелі із гробниці його імені, тримає в руках вимірювальні інструменти, в яких зафіксовані пропорції золотого поділу. У Стародавньому Єгипті цю знамениту пропорцію було використано також у будівництві гробниці фараона ***Менеса*** [8].

Ймовірно, вже в VI ст. до н.е. давньогрецький філософ і математик ***Піфагор*** мав поняття про золотий перетин, яке він почерпнув у єгиптян і вавилонян. Справді, пропорції піраміди ***Хеопса***, храмів, барельєфів, предметів побуту і прикрас із гробниці ***Тутанхамона*** свідчать, що єгипетські майстри при їх створенні користувалися співвідношенням золотого перетину. Французький архітектор ***Ле Корбюзьє*** (1887—1965) встановив, що у рельєфі з храму фараона ***Сеті I*** в Абідосі та у рельєфі, що зображає фараона ***Рамзеса***, пропорції фігур відповідають величинам золотого перетину.

Еллінів вважають вправними геометрами. Арифметику їх діти вивчали за допомогою геометричних фігур. Квадрат Піфагора та діагональ цього квадрата залишаються й донині основою для побудови динамічних прямокутників (рис. 7).

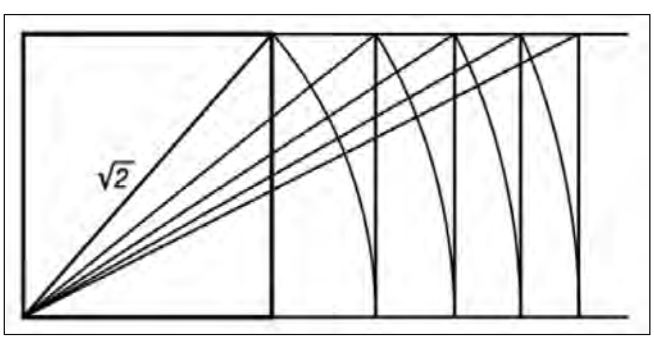
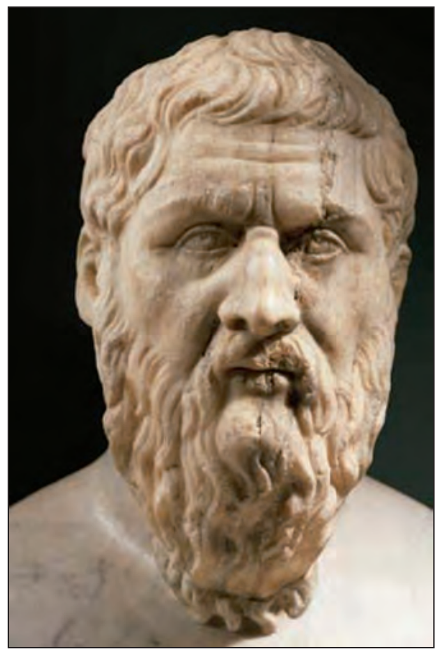


Рис. 7. Динамічні прямокутники

Платон (~ 427—347 рр. до н.е.) у своєму діалозі "Тімей", присвяченому математичним і естетичним поглядам школи Піфагора і, зокрема, питанням золотого поділу, писав, що "*неможливо поєднати найкращим чином дві речі без третьої, яка би їх скріплювала. І це найкращим чином робить пропорція. Бог помістив між вогнем і землею воду і повітря в такому співвідношенні: повітря відноситься до води, як вогонь до повітря, а вода відноситься до землі, як повітря до води*". Тобто: вогонь/повітря = повітря/вода = вода/земля. За допомогою трикутників мислитель будував правильні багатогранники (всі грані якого рівні), асоціюючи їх з чотирма земними стихіями — землею, водою, вогнем і повітрям [9]. Пізніше ***Евклід*** довів, що таких багатогранників є лише п'ять: тетраедр (4 грані — трикутники), гексаедр, або куб (6 квадратів), октаедр (8 трикутників), додекаедр (12 п'ятикутників) й ікосаедр (20 трикутників). Зі золотою пропорцією, однак, пов'язані лише два останні.



Платон. Копія роботи Сіланіона

У античній літературі "поділ відрізка в крайньому і середньому відношенні (ἄκρος καὶ μέσος λόγος)" уперше зустрічається в "Початках" Евкліда (~365—300 рр. до н.е.) [10], де воно застосовується для побудови п'яти згаданих вище "платонових тіл". Геніальний олександрійський геометр записав своє спостереження так: "За середньо-пропорційного розділу відрізка відносно його країв, весь відрізок відноситься до більшої своєї частини, як більша до меншої".

Після Евкліда дослідженням золотого перетину переймалися ***Клавдій Птолемей*** (~87—165 рр.), ***Папп*** (III ст. н.е.) та інші. Середньовічна Європа познайомились із золотим перетином за арабським перекладом "Початків" Евкліда. Перекладач ***Дж. Кампано*** (III ст.) із Наварри подав коментарі до перекладу. Секрети золотого перетину ревно оберігались, трималися у суворій таємниці. Вони були відомі лише посвяченим.

ISSN-18197329. Світогляд, 2017, №6 (68)

У середні віки пентаграму демонізували і вона опинилась у руках окультників. Все, що вважалося божественним у античному світі, зазнало опали. В епоху Відродження митці знову зацікавилися пентаграмою і золотим перетином, достосовуючи їх у малярстві й архітектурі. Широкого розголосу набуло зображення будови людського тіла. Вважалося, що тіло людини має божественну досконалість, оскільки закладені в нім пропорції такі самі, як і в головній небесній фігурі — пентаграмі. Італійські художники мали великий емпіричний досвід, але їм бракувало знань. Великий ***Леонардо да Вінчі*** (1452—1519), проникшись тематикою, почав було писати книжку з геометрії. Але тут на його життєвому шляху зустрівся випускник Болонського університету, знаний математик ***Лука Пачолі*** (1445—1517) й довелося відкласти задум. Пачолі був ще й художником. Майстерності його навчав сам ***П'єро делла Франческа*** (~1415—1492), який вже написав книги з цього питання. Одну з них — "Про перспективу в малярстві" — вважають предтечею нарисної геометрії. У часи між ***Фібоначчі*** і ***Галілеєм*** Пачолі був великим світилом, чудово розумів роль науки у мистецтві. У 1496 р. на запрошення герцога ***Моро*** він приїздить у Мілан, де читає лекції з математики.

Якопо де Барбарі. Портрет Луки Пачолі, 1495 р.

В Мілані при дворі Моро в той час працював і Леонардо да Вінчі. У 1509 р. у Венеції була видана книга Пачолі "Про божественну пропорцію" (De divina proportione) з чудово виконаними ілюстраціями, через що вважають, що їх зробив Леонардо. Книга була палким славнем золотої пропорції. Така пропорція лише одна, а її єдиність виражає її "божественну суть". У ній втілена свята триєдність Бога (малий відрізок усоблює Бога-Сина, великий відрізок — Бога-Отця, а весь відрізок — Бога-Духа Святого). Ця пропорція не може бути виражена простим числом, залишається прихованою таємницею і самі математики називають її "ірраціональною". На думку Пачолі, розуміння суті пропорцій наближає людину до Бога. Як Бог, який ніколи не змінюється і представляє все у всьому і все у кожній його частині, так і золотий перетин для усякої неперервної і скінченої величини (незалежно від того, велика вона чи мала) є одним й тим самим, не може бути ні зміненим, ні інакше сприйнятим розумом. Бог дав буття небесній доброчесності, званій "*п'ятою субстанцією*", а за її допомогою й чотирьом іншим стихіям (землі, воді, повітрю, вогню), а вже на їх основі дав буття всяким іншим речам у природі. Подібно й священна пропорція, згідно з Платоном ("Тімей"), дає формальне буття самому небу, бо йому приписується вид тіла, названого додекаедром, який неможливо побудувати без золотого перетину.

Леонардо да Вінчі. Автопортрет, 1515 р.

Леонардо да Вінчі також приділяв багато уваги вивченню золотого перетину. Він виконував перетини стереометричного тіла, утвореного правильними п'ятикутниками, і всякий раз отримував прямокутники з відношенням сторін у золотій пропорції. Тому він й охарактеризував цей перетин як "золотий".

Лише один із п'яти існуючих правильних багатогранників — додекаедр, гранями якого є дванадцять правильних п'ятикутників, претендує на символічне зображення небесного світу. Додекаедр віднайшов ***Гіппас*** (574—522 рр. до н.е.). Ця фігура є ніби самим Всесвітом, квінтесенцією чотирьох "платонових стихій", які співставляються з тетраедром, октаедром, ікосаедром та кубом. У додекаедрі втілена множина відношень золотого перетину, тому цій фігурі відводили головну роль у небесному світі, на чому і настоював Лука Пачолі.

Тіло людини і золотий перетин

У Німеччині в цей час над золотим перетином ламав голову ***Альбрехт Дюрер*** (1471—1528) [11]. Спочатку він застосував принцип пропорції у своїй гравюрі “Немезида або Велика Фортуна” (бл. 1501). Потім детально перевірив теорію пропорцій людського тіла і написав трактат “Чотири книги про пропорції людини” (Нюрнберг, 1528), альтернативний трактату архітектора ***Вітрувія***. Як випливає із одного з листів Дюрера, він зустрічався з Лукою Пачолі під час свого перебування в Італії. Можливо, тому таке важливе місце Дюрер відводив золотому перетину. До наших часів дійшов пропорційний циркуль Дюрера.

У наступні століття правило золотої пропорції стало академічним каноном. Потім були довгі роки боротьби з академізмом і все заново відродилось у середині XIX ст., коли у 1855 р. професор ***Адольф Цейзінг*** (1810—1876) опублікував свою працю “Естетичні дослідження”. Однак він дещо абсолютизував пропорцію золотого перетину, оголосивши її універсальною для всіх явищ природи і мистецтва, через що його вчення називали “*математичною естетикою*”. Цейзінг виконав грандіозну роботу. Він виміряв біля двох тисяч людських тіл і дійшов висновку, що золотий перетин виражає середній статистичний закон [12]. Поділ тіла точкою пупа є найважливішою ознакою золотого перетину. Пропорції чоловічого тіла коливаються в межах середнього відношення 13 : 8 = 1,625 й дещо ближче підходять до величини золотого перетину, ніж пропорції жіночого тіла, відносно якого середні значення пропорції є: 8 : 5 = 1,6. У новонародженого ця пропорція складає 1 : 1, у віці до 13-ти років — ~1,6, а вже в 21 рік — дорівнює чоловічій.

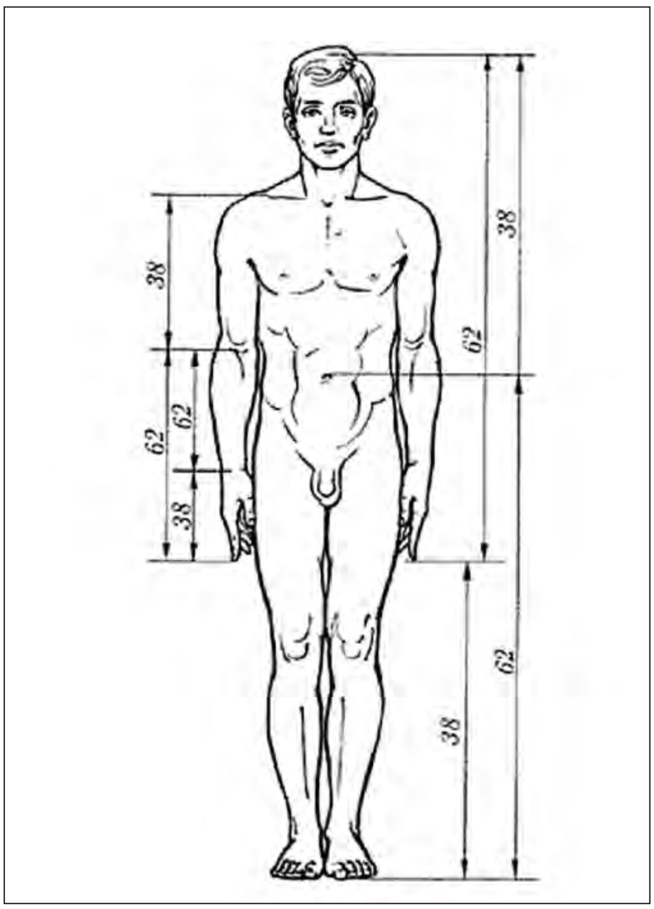


Рис. 8. Пропорції чоловічої фігури

Цікаво, що пропорції золотого перетину проявляються й стосовно інших частин тіла — довжини плеча, передпліччя і кисті, кисті і пальців і т. д. Справедливість своєї теорії Цейзінг перевіряв на грецьких статуях, зокрема на статуї “Аполлона Бельведерського”. Він також дослідив грецькі вази, архітектурні споруди різних епох, рослини, тварини, пташині яйця тощо. Наступна його книга мала назву “Золотий поділ як основний морфологічний закон у природі й мистецтві”. Однак сам термін (нім. *goldener Schnitt*) в широкий обіг ввів у 1835 році молодший брат відомого фізика ***Георга Ома*** (1787—1854) — математик ***Мартин Ом*** (1792—1872) — у другому виданні підручника [13].

Згадані вище А. Дюрер і особливо професор Цейзінг чітко встановили, що всі кістки й різні частини людського тіла є дуже близькими до пропорції золотого перетину. А коли так, то зовнішність або тіло людини вважається ідеально збудованим.

Якщо за центр чоловічого тіла взяти пуп (або пояс) і відміряти відстань від нього до стіп, то вона буде так відноситися до відстані від маківки голови до пупа, як увесь ріст людини відноситься до відстані від пупа до стіп, що є співмірним з числом 1,618. Цьому ж числу у чоловічому тілі відповідає ще низка відстаней (рис. 8): *а*) від рівня плеча до маківки голови і розміру голови; *б*) від точки пупа до маківки голови і від рівня плеча до маківки голови; *в*) від точки пупа до колін і від колін до стіп.

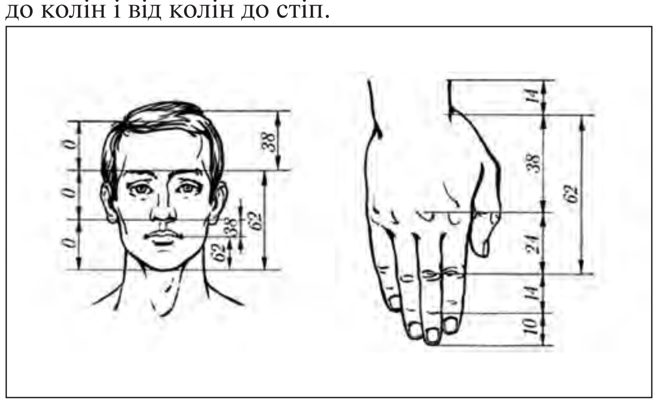
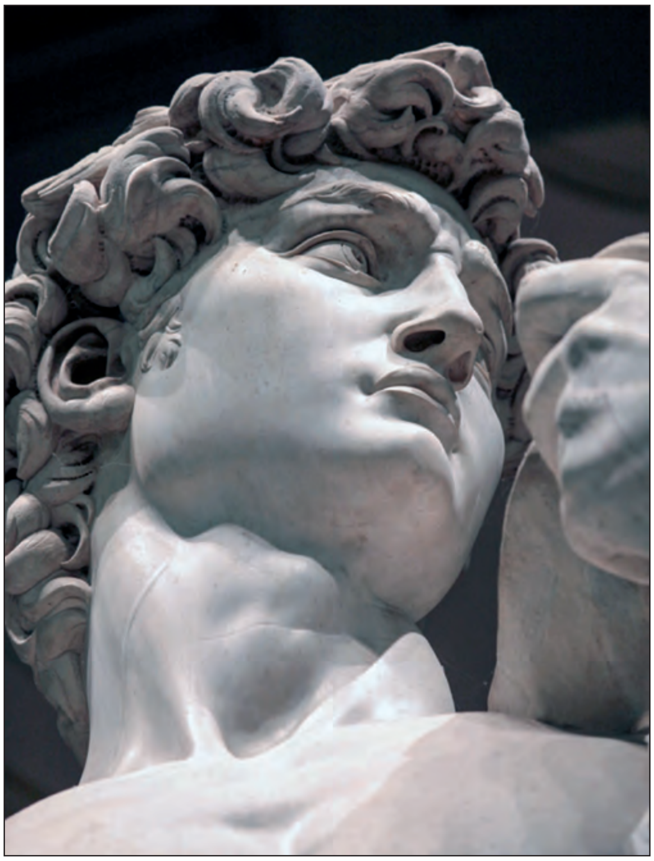


Рис. 9. Пропорції голови та руки

Пропорції голови (рис. 9) також відповідають числу ***Ф***. Це відношення відстаней: *а*) від кінчика підборіддя до кінчика верхньої губи і від кінчика верхньої губи до ніздрів; *б*) від кінчика підборіддя до верхньої лінії брів і від верхньої лінії брів до маківки. А ще відношення: висоти обличчя / ширини обличчя; відстані від центральної точки з’єднання губ до основи носа / довжини носа; висоти обличчя / відстані від кінчика підборіддя до центральної точки з’єднання губ; ширини рота / ширини носа; ширини носа / відстані між ніздрями; відстані між зіницями очей / відстані між бровами. Будову зубів у людини можна вважати ідеальною, якщо ширина двох передніх верхніх зубів відносно їх висоти дає число ***Ф***.



Мікеланджело. Голова Давида. 1504 р.

Відповідність фігури та обличчя людини золотій пропорції вважають ідеалом її краси для людського ока. Точна відповідність цій пропорції, на думку вчених, художників і скульпторів, існує лише у людей досконалої краси. Це чітко демонструє обличчя Давида з однойменної скульптури ***Мікеланджело***, де всі пропорції витримані достеменно.

Розглянувши окремо кисть руки, неважко знайти і у ній золоті пропорції (див. рис. 9). Кожний палець руки має три фаланги. Сума довжин двох перших фаланг пальця стосовно усієї довжини пальця дає (крім великого пальця) число $\boldsymbol{\Phi}$. Такий же результат дістаємо, співвідносячи довжини середнього пальця й мізинця.

Античний римський архітектор ***Вітрувій*** (***Vitruvius***, 80—15 рр. до н.е.) у своєму трактаті "Про архітектуру" (Книга III, розділ I) вважав, що культові архітектурні споруди повинні мати пропорції людини, бо коли вона розкине руки й ноги, то її фігура вписується у досконалі геометричні фігури — коло і квадрат. Для визначення пропорцій чоловічого тіла у відповідності з описаними у трактаті Леонардо да Вінчі у 1490—92 рр. створив рисунок *Вітрувійської людини* (див. рисунок). Разом з поясненнями він мав служити ілюстрацією до книги, присвяченої цьому зодчому. На рисунку зображена фігура оголеного чоловіка у двох накладених одна на одну позиціях: з розведеними руками і зведеними докупи ногами, вписаними в квадрат та з розведеними руками й ногами, вписаними в коло. Досліджуючи рисунок, можна помітити, що поза зі зведеними докупи ногами вписується у квадрат (званий "*стародавнім квадратом*"), а поза з розкинутими у боки ногами вписується у коло. При цьому центром кола є пуп чоловіка, а центром квадрата — міжніжжя.

Зокрема, да Вінчі встановив пропорції, що мають місце для переважної більшості людей чоловічої статі:

— ступня вміщує чотири долоні = 1/7 частина росту;

— лікоть уміщує шість долонь;

— ріст людини вміщує чотири лікті від кінчиків пальців (і, відповідно, 24 долоні);

— розмах людських рук дорівнює її росту;

— віддаль від маківки голови до підборіддя складає 1/8 від росту людини;

— найбільша ширина пліч складає 1/4 росту людини;

— віддаль від ліктя до кінчика пальців складає 1/4 від росту людини, а від ліктя до пахви — 1/8 ;

— довжина руки складає 2/5 від росту людини;

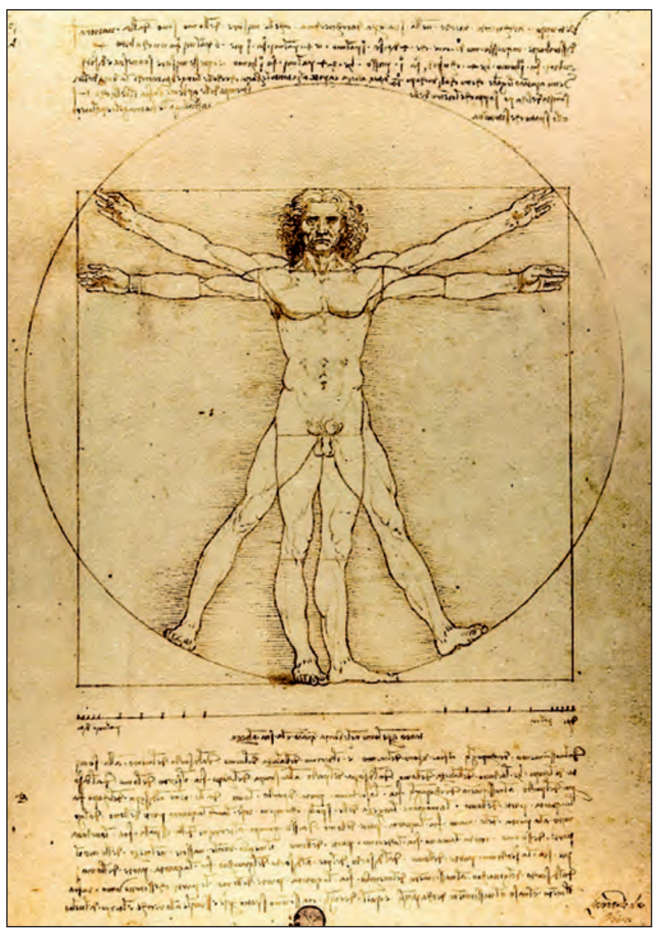
— віддаль від підборіддя до носа складає 1/3 від висоти обличчя;

— віддаль від лінії волосся до брів дорівнює 1/3 висоти обличчя;

— довжина вух дорівнює 1/3 висоти обличчя;

— відстань від кінчика підборіддя до носа і від брів до коренів волосся однакова й дорівнює 1/3 висоти обличчя.

Такі пропорції тіла вважають "канонічними". Повторне відкриття математичних пропорцій людського тіла в XV столітті, зроблене да Вінчі та іншими



Леонардо да Вінчі. Вітрувійська людина, 1490 р.

вченими, стало одним із великих досягнень, що передували італійському Ренесансу. Пізніше ***Корбюзьє*** за цією ж методикою склав свою шкалу, відому під назвою “*Модулор*”, яка вплинула на естетику архітектури XX століття. Модулор — це така вимірювальна система, в основу якої покладений ріст людини. Цю систему широко використовують і сьогодні на Заході при плануванні садів і парків.

Принцип золотого перетину закладений також і всередині людини. Наприклад:

а) У внутрішньому вусі людини є орган “завитка” (*Cochlea*), який сприймає звукові коливання повітря. Цей кістковий лабіринт має вигляд логарифмічної спіралі з кутом 73°43' [6].

б) Механічна робота серця як помпи, що перепомповує кров із вен до артерій, здійснюється за мінімальної витрати енергії і узгоджується з пропорцією золотого перетину. Так, відношення тисків крові, систоли (верхнього) до діастоли (нижнього) у здорових людей становить 124 : 77 мм рт. ст., що відповідає золотій пропорції. Якщо взяти середній тиск крові за одиницю, то систольний тиск крові в аорті буде становити 0,382, а діастольний — 0,618, тобто їх відношення відповідає числу ***Ф***. Це значить, що робота серця і системи кровообігу в організмі оптимізується за принципом золотої пропорції.

Відомості про індивідуальність живої істоти зберігає молекула ДНК. Вона складається з двох переплетених між собою спіралей (рис. 10). Довжина одного витка кожної з двох спіралей складає 34 Å, ширина 21 Å (1 Å = 10^{-8} см). Так ось, 21 і 34 — це цифри, що стоять поруч у ряді Фібоначчі, а отже, їх відношення дорівнює числу ***Ф***! Таким чином, відношення довжини до ширини логарифмічної спіралі молекули ДНК є “золотим” числом.

Рис.10. Ділянка подвійної спіралі молекули ДНК

“Золота” спіраль

Учення про золотий перетин збагатили властивості спіралей, які дуже поширені в природі. Свого часу ***Ґете*** (1749—1832) помітив схильність природи до спіральності і називав спіраль “*кривою життя*”. Йому приписують також введення в науковий обіг слова “*морфологія*”. Він обмірковував створення єдиного вчення про форми, утворення та перетворення органічних тіл. Крім того був поетом і художником (малював і писав акварельними фарбами).

Спіралеподібність можна угледіти в розміщенні зернин соняха, у шишках сосни, ананасах, кактусах, будові листочків троянд, у розміщенні листків на

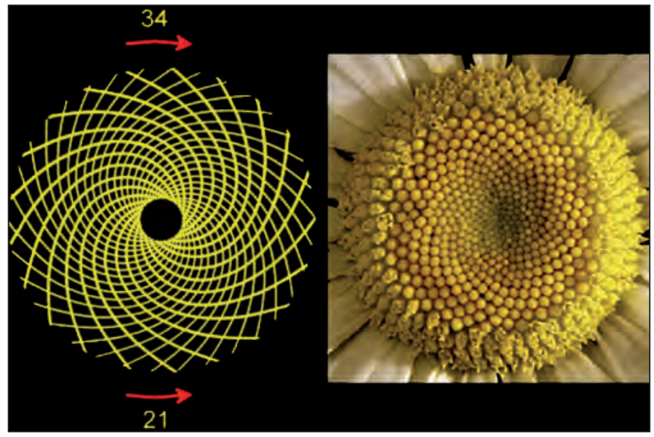


Рис. 11. Форма головки соняшника

Рис. 12. Павутинне плетиво

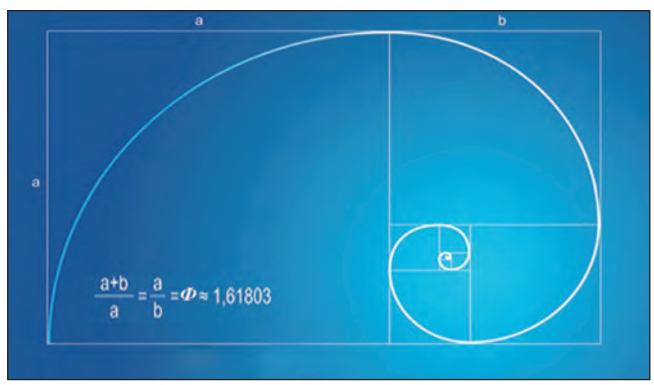


Рис. 13. Логарифмічна спіраль

Рис. 14. Форма мушлі

гілці (“філотаксис”) тощо. Якщо виокремити сонях, то мова йде про співвідношення чисел спіралей, що розгортаються за стрілкою годинника і проти неї (рис. 11). Як видно, ці числа є сусідами у ряді Фібоначчі.

Спіралевидність легко відшукати у павутинному плетиві (рис. 12). Спіраллю закручуються урагани, вода у ванні, вусики рослин. Окремі косяки дрібних риб збиваються докупи перед акулами, утворюючи своїми тілами гігантський вихор: “*Разом нас багато — нас не подолати*”. Молекула ДНК (рис. 10) закручена подвійною спіраллю. Так ось, у всіх цих випадках проявляє себе ряд Фібоначчі, а отже, закон золотого перетину. Якщо числа з ряду Фібоначчі зобразити графічно у вигляді квадратів зі сторонами 1, 1, 2, 3, 5, 8,... і провести огинаючу криву, то одержимо спіраль, зображену на рис. 13. У природі мушля є одним із прикладів такої спіралі, яка розкручується від центру (рис. 14). Її ріст відбувається так, що форма, пропорційно розширюючись, залишається незмінною.

Саме форма мушлі й привернула увагу ***Архімеда*** (287—212 до н.е.). Вивчаючи її, він вивів рівняння спіралі ($r = \alpha\varphi$), яке відоме під назвою “*спіралі Архімеда*”. Ріст її кроку є сталою величиною, незмінною зі зміною кута φ. Однак більш поширеною є логарифмічна спіраль ($r = \alpha \cdot e^{\beta\varphi}$, де α, β — сталі), подана вище на рис. 13, крок якої наростає по мірі її розкручення. На кожному витку це розкручення, як видно з рисунка, підкоряється пропорції золотого перетину.

Ріст багатьох живих організмів відбувається у повній відповідності з формою логарифмічної спіралі.

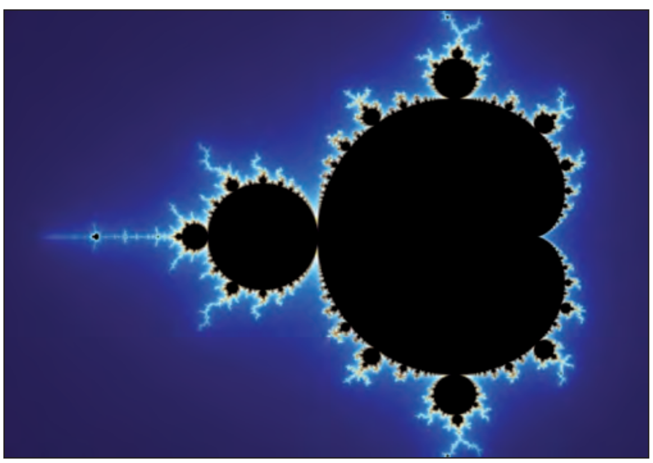
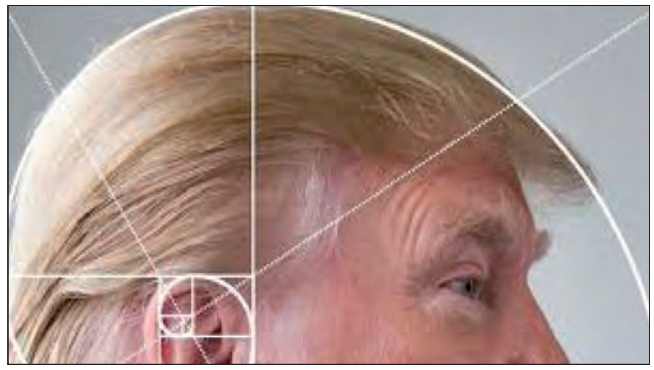


Рис. 15. Множина Мандельброта

Рис. 16. Фрактали в 3D-графіці



Навіть у зачісці президента США *Д. Трампа* (1946) сучасники угледіли спіральність

Гвинтоподібне і спіралевидне розміщення листків на гілках дерев помітили давно. “Золота” спіраль тісно пов’язана з циклами. У листковому циклі (виток довкола гілки, від одного листка до наступного, що росте з того ж боку) і сама їх кількість може виражатися числами з ряду Фібоначчі. Відношення числа обертів на стеблі до числа листків у циклі дає “золоте” число.

Сучасна наука про хаос вивчає прості циклічні операції зі зворотним зв’язком та породжені ними фрактальні форми, невідомі раніше. Збільшення перерізу розкриває дивовижні за своєю художньою складністю фрактали. І тут присутні також логарифмічні спіралі! На рис. 15 подано відомий ряд ***Мандельброта*** — “сторінку зі словника” нескінченості індивідуальних зразків, названих “*юліанськими рядами*”, а на рис. 16 — фрактали у 3D-графіці. Легко розгледіти у їхній формі лінії, що описуються логарифмічною спіраллю. Маємо наочну ілюстрацію ще одного способу виникнення спіральних форм.

Логарифмічну форму росту можна помітити і у молюсків. Роги антилоп, диких козлів, баранів також розвиваються за принципом золотої пропорції. Усі вишукані геометричні форми сніжинок побудовані за принципом золотого перетину.

Принципи формування у природі

Природа здійснила поділ живого на симетричні частини й золоті пропорції. У частинах проявляється повторення будови цілого. І в рослинному, і в тваринному світі золотий перетин проявляється у пропорціях частин перпендикулярно до напрямку росту. Це можна виявити на прикладі придорожньої трави — цикорій. Дослідження пташиних яєць показало, що все розмаїття їх форм коливається між двома типами: одні з них можуть бути вписані у прямокутник золотого перерізу ($a/b = \Phi$), інші — в прямокутник з модулем 1,272 (корінь із Φ). Зараз установлено, що така форма яєць (рис. 17) відповідає більш високій міцності оболонки яйця.

У наведених нижче прикладах проявляється спадковість організації живого, основу якого слід шукати на клітинному і молекулярному рівнях. У мікросвіті тривимірні форми, побудовані за золотими пропорціями, поширені повсюдно. Наприклад, багато вірусів мають геометричну форму ікосаедра, яка зводить до мінімуму число сполучних елементів.

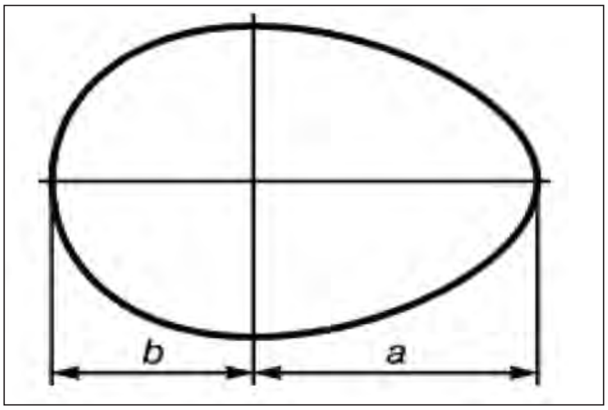


Рис. 17. Контур пташиного яйця

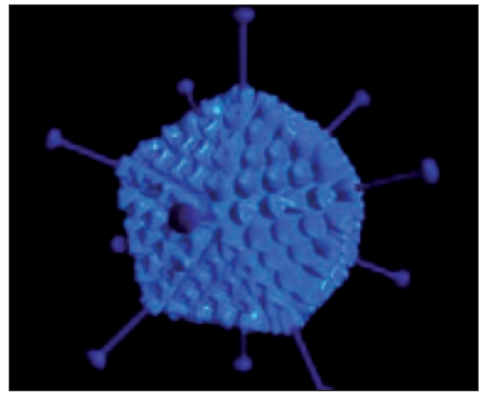


Рис.18. *Adeno*-вірус

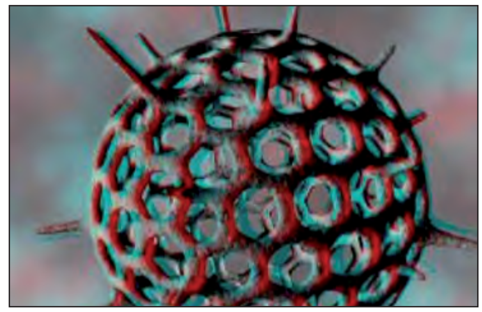


Рис. 19. Вірус *Polyo*

Монтаж таких фігур вимагав би від людини надзвичайних зусиль, тоді як несвідомі віруси самі будують собі настільки складну оболонку із еластичних, гнучких білкових клітинних одиниць. Найбільш відомий із таких вірусів — *Адено-вірус* (рис. 18). У кожному куті ікосаедра розміщено по 12 одиниць капсомерів у формі п'ятикутної призми, а з кутів простягаються шпилькоподібні структури. У 1950-х роках англійські вчені, що вивчали форму вірусів, відразу виявили логарифмічну форму іншого віруса — *Polyo* (рис. 19). Прикладом мікроорганізму з додекаедричною формою скелета може бути — *Circorhegma Dodecahedra*. Загалом, одноклітинні планктонові морські тварини (радіолярії) мають кремнеземні скелети, що нагадують усі п'ять типів правильних багатогранників. Причому розміри цих мікроорганізмів не сягають й 1 мм.

Таким чином, у будові навіть мікроскопічних організмів, які вважаються найбільш примітивною формою життя (в даному випадку у вірусах), присутній ясний задум і здійснено розумний проект. Він прослідковується вже на стадії поділу клітин [1], коли кожна клітина ділиться на дві. Після початкового етапу синхронних поділів, далі клітини діляться лише асинхронно. Одна з них починає пропускати наступний етап поділу. Так, якщо після першого етапу поділу утворюється дві клітини А і В, то далі з них ділитиметься лише клітина В. Після двох етапів асинхронного поділу утвориться три клітини, з яких на третьому етапі ділитимуться дві. Після третього етапу сумарна кількість клітин буде п'ять, з яких далі ділитимуться лише три. Таким чином, у процесі асинхронного поділу з однієї клітини утвориться 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... клітин, що, як бачимо, повторяє ряд Фібоначчі. Сама природа дає приклад, як із мінімальними витратами енергії досягти міцності і надійності в будові живого.

Золотий перетин в архітектурі

Архітектуру вважають "*застиглою музикою*". В архітектурі найголовнішими є краса, спокій і міцність споруди. Ще у першому столітті до н.е. зодчий ***Вітрувій*** сформулював три принципи, за якими слід будувати якісні будівлі, це — міцність, корисність, краса. Будівлі, довершені банями у поєднанні зі золотою пропорцією, володіють всіма цими якостями. Вони безпечні й обтічні. Їхня найбільша міцність і стійкість (до вітрів і сейсмічних хвиль) відомі здавна (напр., куполи собору Св. Софії у Стамбулі чи Св. Петра у Ватикані). Акустика настільки підсилюється, що поневолі доводиться говорити тихіше і уникати суперечок. Внутрішній простір таких будівель зручний й сумірний людині. Вона почувається в них комфортно, зрівноважено і втихомирено. Аби сягнути бажаного, необхідні знання пропорцій, перспективи, механіки й загалом фізики.

Золотий перетин сприймається як найбільш гармонійне співвідношення розмірів будівлі, за яких вона найкраще вписуються в ландшафт. Краса — це гармонія з довколишнім простором, так би мовити, дизайн. У часи розквіту бароко особливо велику увагу приділяли також оздобленню фасаду будівлі.

Вершиною античної архітектури, одним із найкрасивіших її творів, який входить у п'ятірку найвизначніших споруд світу, є давньогрецький храм ***Парфенон*** (447—432 рр. до н.е.; див. рис. 20). Він збудований у доричному стилі під орудою архітектора і скульптора ***Фідія*** архітекторами ***Іктином*** і ***Каллікратом*** у центрі Афін на високій горі-скалі Акрополь. Святилище присвячене ***Афіні Парфенос*** (Діві). Храм вражає своєю величчю і пропорціями. Так буває, коли будівля створена за принципом золотої пропорції. Під цим принципом в архітектурі та мистецтві, зазвичай, розуміють композиції, що містять пропорції, близькі до золотого перетину 3/5 і 5/8.

Парфенон має 8 колон вздовж коротких сторін і по 17 — вздовж довгих. Відношення довжини фасаду споруди до її висоти дорівнює 1,618. В основі фасаду цього храму так само закладені золоті пропорції. Зі схеми фасаду Парфенону видно (рис. 20, а), що пропорції споруди виражаються через різні степені числа φ ($\varphi_1=\varphi$, $\varphi_2=\varphi^2$, $\varphi_3=\varphi^3$, $\varphi_4=\varphi^4$, $\varphi_5=\varphi^5$). Якщо виконати поділ висоти Парфенону за правилом золотого перетину, то потрапимо на ті чи інші виступи фасаду. Ці виступи виготовлені повністю з квадратних плит пентилійського мармуру. Благородство матеріалу, з якого збудували храм, дозволило обмежити застосування звичайного для грецької архітектури розфарбовування, воно лише підкреслює деталі й утворює кольоровий фон (синій та червоний) для скульптури. У плані підлоги Парфенону також можна віднайти "золоті" прямокутники.

При розкопках довкола Парфенону були виявлені циркулі, якими послуговувались архітектори і скульптори античного світу. У цих циркулях, як і у циркулі, знайденому пізніше в Помпеях (нині в Неапольському музеї), були закладені пропорції золотого перетину (рис. 21). Римським прикладом архітектури, в основі якої закладено число Φ, є Пантеон.

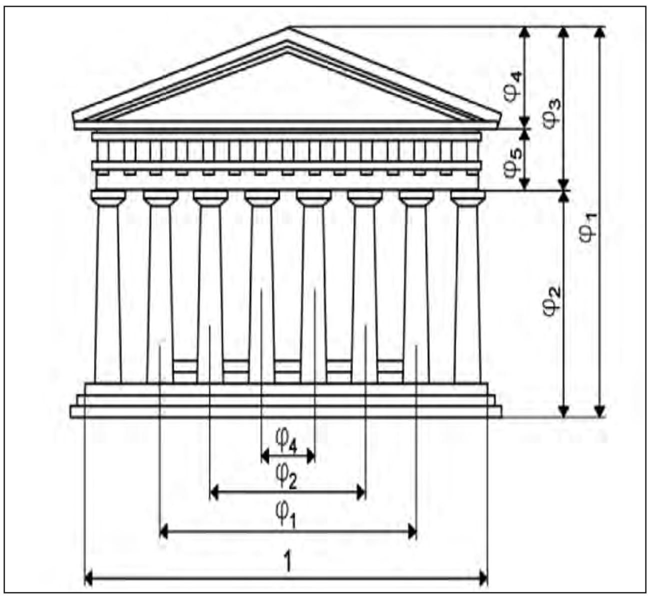


Рис. 20. а) Парфенон (схема фасаду)

Рис. 20. б) Парфенон

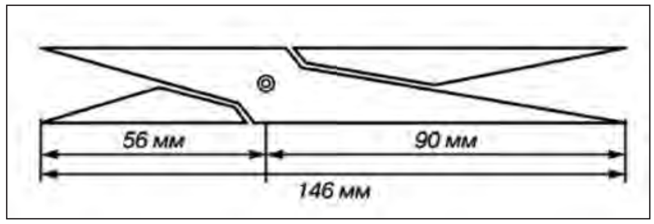


Рис. 21. Золотий перетин античного циркуля

Привертає увагу й споруджений в античні часи ***Поліктетом-молодшим*** амфітеатр в Епідаврі. У першому ярусі амфітеатру було 34 ряди, у другому — 21 (34 : 21 = 1,62). А театральний простір (окіл основи амфітеатру) поділений у відношенні 222,5° до 137,5° (1,618...). Це співвідношення кутів мало місце у більшості античних театрів [3,6].

При будівництві пірамід головним було добитися такого співвідношення її висоти до основи, аби споруда була стійкою. Одна з дивовиж світу, велика піраміда ***Хеопса*** стоїть до наших днів, втративши хіба що у висоті десять метрів. Первісна її висота була 146,5 м (тепер 137 м), довжина основи — 230 м. Піраміда займала площу більше 5 га. Відношення висоти піраміди Хеопса до половини її основи: $146{,}5/115 = \sqrt{\Phi}$. Її переріз, який проходить через вершину, перпендикулярно до двох сторін основи, утворює "*золотий трикутник Паскаля*". У такому разі, як видно зі схематичного рис. 22, довжина висоти, опущеної з вершини піраміди до її основи піраміди, дорівнюватиме Φ. Не лише єгипетські піраміди побудовані у відповідності з досконалими пропорціями золотого перетину, — те ж саме виявлено і для мексиканських пірамід.

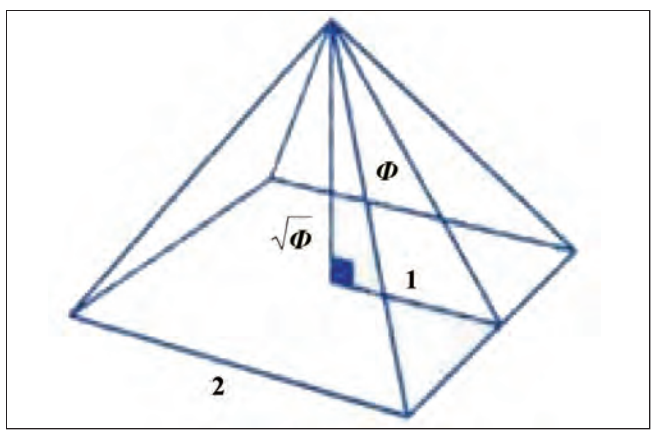


Рис. 22. Схема піраміди Хеопса

Будівничі середньовічних готичних соборів Європи також застосовували пропорції золотого перетину. Золоте співвідношення можна знайти й у будинку собору Паризької Богоматері (Notre-Dame de Paris). На рис. 23 білим та голубим кольорами позначено відповідні розміри.

Відомий архітектор ***Б.-Ф. Растреллі*** (1700—1771) широко використовував золотий перетин у своїй

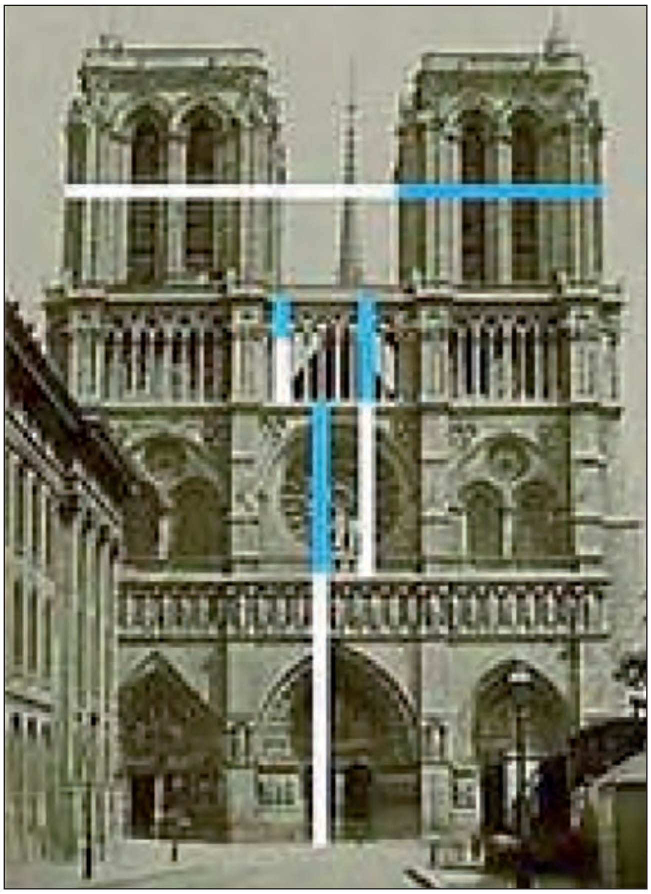


Рис. 23. Собор Нотр-дам-де Парі

творчості. Так, наприклад, в архітектурі Андріївської церкви у Києві [14] можна виявити золоті пропорції у відповідних довжинах. Те саме стосується П'ятницької церкви в Чернігові, збудованої приблизно на початку XIII століття. Співвідношення довжин окремих її елементів майже відповідає золотому перетину. Кількість бань у соборах також становить певну закономірність. Так, Київський Софіївський собор, збудований ***Ярославом Мудрим*** (978—1054 рр.) у 1037 р. має 13 бань, тобто відповідає одному із чисел ряду Фібоначчі.

Золотий перетин у скульптурі

Скульптурні пам'ятники споруджують, аби увіковічнити знаменні події та зберегти у пам'яті нащадків імена людей, які уславилися своїми діями і подвигами. Здавна скульптури будували на базі теорії пропорцій. Відношення частин людського тіла пов'язували з пропорціями золотого перетину, які створюють враження гармонії і краси. Тому скульптори й застосовували їх у своїх творах. Вони знали, що талія ділить досконале чоловіче тіло у співвідношенні золотого перетину. Наприклад, знаменита статуя ***Леохара*** (IV ст. до н.е.) "Аполлон Бельведерський", яку в Стародавній Греції вважали еталоном чоловічої краси, ділиться на частини у золотій пропорції лінією, що проходить через пояс. Прегарна скульптура ***Мікеланджело*** (1475—1564) "Давид" ідеально відповідає співвідношенню золотої пропорції (наприклад, позиція пупа стосовно росту й кінчиків пальців ніг).

Мікеланджело. "Давид", 1501—1504 рр.

Леохар. "Аполлон Бельведерський", прибл. 330 р. до н.е.

Давньогрецький скульптор ***Фідій***, якого величали Гомером скульптури, часто використовував золотий перетин у своїх творах. Найбільш відомими з них є статуї “Зевс Олімпійський” (яку вважали одним із див світу) та “Афіна Парфенос”.

Майже всі античні скульптори увічнили своє ім’я, створюючи досконалі чоловічі та жіночі фігури: ***Мирон*** (V ст. до н.е.) — “Дискобол” та “Афіна і Марсій”; ***Поліклет-старший*** (V ст. до н.е.) — “Доріфор” (Списоносець) та “Гера”; ***Мікеланджело*** — “Давид”; ***Праксите́ль*** (IV ст. до н.е.) — “Гермес” та “Афродіта Кнідська”; ***Фідій*** (V ст. до н.е.) — “Зевс в Олімпії” та “Афіна Парфенос”, ***Лісіпп*** (придворний художник ***Олександра Македонського***, IV ст. до н.е.) — “Геракл, що бореться з левом”, бюсти Олександра Великого та Арістотеля.

Золотий перетин у малярстві

Ще в епоху Відродження художники помітили, що незалежно від форми (горизонтальна чи вертикальна, портрет чи пейзаж) картина має певні місця, які мимоволі притягають увагу глядача. Їх назвали “*зоровими центрами*”. Таких місць на картині усього чотири, і розміщені вони на віддалі 3/8 і 5/8 (≈ 0,62) від відповідних країв площини (рис. 24). Число 3/8 в сумі з 5/8 дає одиницю. Якщо за одиницю довжини вибрати сторону А, то сторона В буде 0,62А, і поділ площини за правилом золотого перетину дасть сітку з прямокутником у центрі (рис. 24), сторони якого підкоряються правилу золотого перетину.

Наявність у картині яскравих вертикалей і горизонталей, що ділять її за принципом золотого перетину, надає зображенню характеру врівноваженості й спокою у відповідності до задуманого художником. Якщо картина динамічна, з бурхливими, шаленими подіями, то згадана геометрична схема композиції стає недоречною.

Перейдемо до прикладів золотого перетину в малярстві. Почнемо з художника, який ще за життя здобув славу неперевершеного, великого вченого, генія, який передбачив наперед багато винаходів, котрі здійснились аж у XX ст. Його особистість — одна з найзагадковіших в історії. Свої численні начерки й нотатки, у яких, як у всякого генія, йшлося про все на світі, він написав лівою рукою, нерозбірливим почерком, до того ж — справа наліво. Його письмо — найбільш відомий зразок дзеркального письма. “*Нехай ніхто не наважується читати мої праці, якщо він не є математиком*”, — писав він. Це ***Леонардо да Вінчі.*** Його шедевр “Мона Ліза” (Джоконда) безкінечно приковує пильну увагу як глядачів, так і дослідників. Виявилося, що композиція портрета базується на золотих трикутниках, які є частинами зіркової пентаграми.

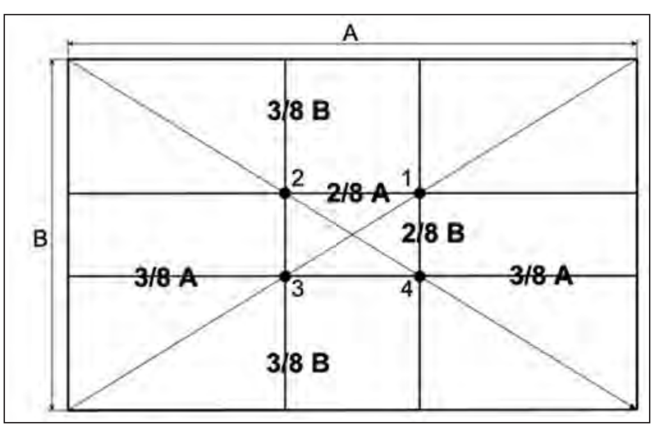
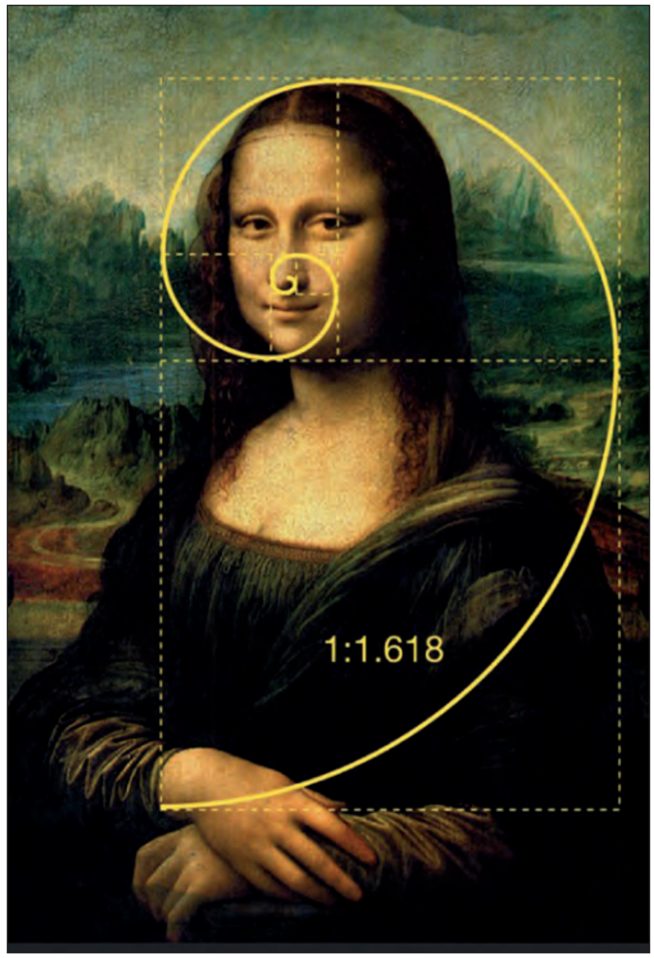


Рис. 24. Зорові центри пейзажної картини



Леонардо да Вінчі. “Мона Ліза”, 1503—05 рр.

В історії створення картини домінує версія, що банкір ***Джоконд***о замовив намалювати портрет своєї дружини ***Мони Лізи***. Вона не була красунею, привертала увагу до себе хіба що простотою і природністю своєї подоби. На її обличчі був лише смуток і сум. Тоді Леонардо, аби оживити модель, розповів їй веселу бувальщину, яка й викликала у неї усміх. Усмішка повільно зникала, залишаючись лише на кінчиках губ, що надавало обличчю дивовижного, загадкового і навіть трохи лукавого вигляду. Геніальність майстра була у тому, що він “схопив” й зафіксував цю усмішку назавжди. Додаються ще простота пози й краса рук Мони. А довколишній пейзаж робить портрет щиро земним. Спадкоємець картини — учень Леонардо — продав її французькому королю ***Франциску I*** (1494—1547). Після Великої французької революції шедевр висів у спальні ***Наполеона I Бонапарта*** (1769—1821) в палаці Тюїльрі, а вже звідти потрапив у Лувр.

Рафаель. “Афінська школа”, 1511 р.

Ілля Рєпін. “Запорожці пишуть листа турецькому султану”, 1891 р.

Після да Вінчі золотий перетин у своїх творах широко використовував ***Рафаель*** (1483—1520), працюючи над фресками у Ватикані. Французький художник ***Ежен Делакруа*** (1798—1863) писав про нього: "*У поєднанні всіх див грації і простоти, знань і інстинкту в композиції Рафаель досяг такої досконалості, у якій з ним ніхто не зрівняється. У найбільш простих, як і в найбільш величних композиціях, скрізь його розум вносить разом з життям порядок у чарівну гармонію*".

Рафаель хоч і не був математиком, але, як і інші художники тих часів, добре розбирався в геометрії. У знаменитій фресці "Афінська школа", де у храмі науки поруч з іншими філософами давнини в центрі зображено Платона й Арістотеля, увагу приковує група Евкліда, що роздумує над складним кресленням — мудрою комбінацією двох трикутників, побудованою у відповідності з пропорцією золотого перетину: вона може бути вписаною у прямокутник зі співвідношенням сторін 5/8. Це креслення дивовижно легко укладається у верхню ділянку архітектури. На ближчій до глядача ділянці верхній кут трикутника впирається у замковий камінь арки, нижній — у точку збігу перспектив, а бокова ділянка позначає пропорції просторового розриву між двома частинами арок.

На знаменитій картині І. Рєпіна (1844—1930) "Запорожці пишуть листа турецькому султану" також знаходимо мотиви золотого перетину. Для цього досить відміряти відстані з усіх боків картини, рівні довжині чи ширині картини, помноженій на 0,618, аби утворити "золотий" прямокутник, як на рис. 24. У зорові центри потрапляють чотири козаки: лисий, голий з "оселедцем" на голові, у чорній смушевій папасі та з люлькою у руці. Вони ділять за правилом золотого перетину ліву і праву частини картини по вертикалі. Ця четвірка оточує писаря, що сидить у центрі за столом з гусячим пером у руці. Його голову розміщено над нижньою горизонтальною лінією золотого перетину. Довкола писаря (Дмитра Яворницького) й концентрується все дійство. А на діагоналях прямокутника знаходимо з правого боку картини козака-дотепника у білій шапці, а з лівого — козака з перев'язаною головою, за спиною якого можна розгледіти згорнуті червоно-чорний, а поруч — жовто-блакитний стяги. Вони розташовані над верхньою горизонтальною лінією золотого перетину. Зараз ці прапори Ілля Рєпін розгорнув би.

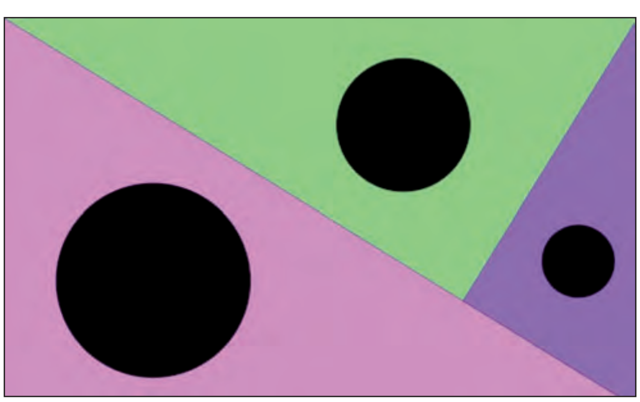


Рис. 25. Поділ фотосітки

Чукутиха. Фото М. Сеньковського, 1926 р.

Золотий перетин у фотографії і кіно

Фотографія з'явилася у 1839 році. Вона відігрівала велике значення для документально точної фіксації об'єкта. З часом фотографія стала освоювати прийоми художнього мистецтва. Як і у випадку картин, аби привернути увагу глядача до головного елемента фотографії, необхідно сумістити цей елемент з одним із зорових центрів. Тому ключові компоненти і лінії кадру повинні бути розміщені в точках 3/8 та 5/8 від країв кадру. Це правило відоме під назвою "*правила третин*", яке за суттю є способом використання золотого перетину. У відповідності до цього правила кадр ділять на три частини по горизонталі і на три по вертикалі. У результаті одержують дев'ять секторів. Деякі фотоапарати та камери мають вмонтовану сітку, побудовану за правилом золотого перетину (рис. 24), що дозволяє відповідним чином фотографувати об'єкти. Згадане правило застосовують таким чином: якщо є очевидний центр композиції (одиноке дерево, сонце на горизонті, будинок, троянда на столі тощо), то його варто помістити на одній із чотирьох точок перетину сітки. Це дозволить отримати найбільш гармонійну композицію. Якщо ж композиція складається з кількох ділянок, різних за змістом, то користуються таким способом: проводять діагональ у прямокутнику сітки. Далі ставлять перпендикуляр до цієї діагоналі так, аби попасти в інший кут прямокутника (рис. 25). У результаті одержують три прямокутних трикутники різних розмірів. Кадр компонують так, аби головні об'єкти потрапляли всередину кожного з цих трикутників.

Проілюструємо сказане на прикладі (див. фото). Це знаменита фотографія 90-літньої гуцулки ***Марії Кречунек-Чукутихи***, зроблена ***Миколою Сеньковським*** у 1926 р. на Верховинщині.

Ця фотографія була відзначена премією "Гран-прі" на міжнародній фотовиставці 1931 р. в Парижі й стала узагальненим образом Гуцульщини. Якщо умовно поділити кадр на частини у пропорції по 1,62 від загальної довжини з кожного боку кадру, то в місцях перетину умовних ліній знаходимо основні зорові центри фотографії, на які, як неважко переконатися, й припадають ключові елементи зображення.

Кіно — вид мистецтва, який увібрав у себе і малярство, і музику і театральність дії. Тому правомірно очікувати прояву золотого перетину й у шедевральних творах цього мистецтва. Для їх виявлення необхідно повну тривалість фільму розділити на 1,618 і подивитися кадри, які припадають на одержаний час, якщо відміряти від початку або кінця фільму. Першими, кого варт пропустити через таке "золоте решето" є безумовно шедеври ***Олександра Довженка***, ***Сергія Параджанова***, ***Івана Миколайчука*** та ***Юрія Ільєнка***.

Золотий перетин у музиці

Й.В. Ґете вважав, що "*велич мистецтва найбільш виразно проявляється у музиці*". На відміну від більшості прикладів, наведених вище, музичний твір розгортається не в просторі, а в часі. Тому золотий перетин у музиці є часовим орієнтиром звучання твору, на який припадає його кульмінація. Всякий музичний твір має часову тривалість і ділиться деякими "естетичними віхами" на окремі частини, які привертають до себе увагу і полегшують загальне сприйняття. Цими віхами можуть бути динамічні та інтонаційно-кульмінаційні місця музичного твору, найбільш густе та інструментально насичене за звучанням місце, зміна ритму, місце закінчення крещендо тощо. Окремі часові інтервали музичного твору, поєднані "кульмінаційною подією", часто знаходяться в співвідношенні золотої пропорції. Буває таке, що у точці золотого перетину з'являється нова музична тема. Золота пропорція у музиці надає особливої стрункості музичному творові.

Давно відомо, що висота звуку при тому ж натязі струни залежить від її довжини. Коли вкоротити струну вдвічі, то одержимо звук, вищий на октаву. На струні довжиною $\boldsymbol{l}$ точка золотого перетину знаходиться на відстані $\boldsymbol{l_g} = 0{,}618\ \boldsymbol{l}$. Ця відстань відповідає двом сусіднім числам Фібоначчі 5 і 8, відношення яких є малою секстою. Вона і вважається найприємнішим для слуху інтервалом.

Переважну більшість видатних творів за темою, інтонаційним співзвуччям, чи за ладовим складом легко розділити на частини, які у відношенні між собою дають число $\boldsymbol{\Phi}$. Виявилось, що талановиті композитори мають більше творів з таким числом. У всіх 27-и етюдах ***Шопена*** (1810—1849) нараховують 178 золотих перетинів [3, 6]. Було встановлено, що не тільки більші частини етюдів діляться за тривалістю у відношенні золотого перетину, але й частини етюдів всередині здебільшого також діляться у такому ж співвідношенні.

Якщо підрахувати кількість тактів у знаменитій сонаті ***Бетховена*** (1770—1827) № 23 "Апасіоната", то можна знайти два основні поділи у центральній структурній одиниці сонати (розробці), де інтенсивно розвиваються теми і змінюють одна одну тональності. У першому поділі 43,25 такти, а в другому — 26,75. Відношення 43,25 : 26,75 = 0,618 : 0,382 = 1,618 дає золоте число. ***Йоганн Себастьян Бах*** (1685—1750) у своїй триголосій інвенції E-dur № 6 BWV 792 використовував двочастинну форму, в якій співвідношення розмірів частин відповідає пропорціям золотого перетину. Перша частина — 17 тактів, друга частина — 24 такти (невеликі невідповідності вирівнюються за рахунок фермати в 34 такти).

Дослідники встановили, що найбільша кількість творів, які містять золотий перетин, є у ***Бетховена*** (97 %), ***Гайдна*** (97 %), ***Моцарта*** (91 %), ***Шопена*** (92 %), ***Шуберта*** (91 %) [3,6]. Серед українських композиторів найбільші відсотки мають твори ***Д.С. Бортнянського***, ***М.В. Лисенка*** та ***К.Г. Стеценка***. Майстер знаменитих скрипок ***Страдиварі*** писав, що за допомогою золотого перетину він визначав місця для *f*-подібних вирізів на корпусах своїх інструментів.

Золотий перетин у поезії

Якщо музика — гармонійне упорядкування звуків, то поезія — гармонійне упорядкування мови. Ритмічність, укладена розмірність віршів, їх емоційна акцентованість споріднює поезію з музикою. Кожен вірш має свій певний ритм і свою мелодійність. Будові віршів, як і музикальним творам, притаманна гармонія. У віршах так само є кульмінаційні моменти, які можуть ділити їх у певних пропорціях. Золотий перетин у поезії проявляється, передовсім, як наявність граничного моменту вірша (кульмінація, сенсовий злом, головна думка твору) у рядку, що припадає на точку поділу загального числа рядків вірша в золотій пропорції. Так, наприклад, якщо вірш містить 100 рядків, то перша точка золотого перетину припаде на 62-ий рядок (62 %), друга — на 38-ий (38 %) і т.д.

Твори ***Тараса Шевченка***, ***Олександра Олеся***, ***Ліни Костенко*** — досконалий зразок найвидатнішої української поезії, зразок найвищого рівня гармонійності і мелодійності вірша. Проаналізуємо їх на наявність золотого перетину за параметром кількості рядків у вірші. Здавалось би, що цей параметр може змінюватися довільно. Насправді, це не зовсім так. Аналіз віршів цих поетів показав, що хоча розміри віршів розподілені дуже нерівномірно, проте виявилося, що є чимало таких, число рядків у яких співвідносяться як сусідні числа ряду Фібоначчі. Проілюструємо, які думки припадають на "золотий" рядок, за довільної кількості рядків, поділеної на число $\boldsymbol{\Phi}$. Виходить ось що.

Так, у вірші Т. Шевченка "І мертвим, і живим, і ненародженим…", у якому 261 рядок, золотий перетин припадає на 161 рядок: "*Раби, подножки, грязь Москви*". А у віршах "Розрита могила" — на 33 рядок: "*Дніпро, брат мій висихає*", "Чигрине, Чигрине" — на 53 рядок: "*мою правду безталанну*", у містерії "Великий льох" — на 338 рядок: "*золота не схоче*", у "Якби-то ти, Богдане п'яний" — на 9 рядок, де керманича топлять "*в багні свинячім*".

У ліричного Олександра Олеся, прах якого недавно повернули в Київ, є чимало 8-рядкових віршів [15], у яких 5-й рядок (що відповідає золотому перетину) виражає основну думку. До прикладу, у вірші "Замовкніть всі: великий час прийшов..." поет наголошує: "*На терезах життя і смерті ми...*". А у віршах "Із наших слів, з напівдумок неясних..." — "*Христос Воскрес! Воскресла Україна!*"; "Не той переміг, хто військо розбив..." — "*А той є розбитий, хто віру в бою згубив*"; "Життя солодке і прекрасне..." — "*Але на світі все минає...*".

Подібне зустрічаємо й у ***Ліни Костенко*** [16]. Наприклад, у вірші "Я в людей не проситиму сили" 5-й рядок декларує: "*Я в людей попрошу тільки віри*". А у віршах "Ми мовчимо — поезія і я" — "*Я не зійшла, посіяна в бетон*"; "Не треба думати мізерно" — "*Митцю не треба нагород*"; "Не знаю, чи побачу Вас, чи ні" — "*Я не покличу щастя не моє*".

Золотий перетин і космічний простір

Усі відомі людству галактики у Всесвіті й усі тіла в них існують у вигляді спіралі (рис. 26), яка, як ми вище переконалися, відповідає формулі золотого перетину. Із історії астрономії відомо, що німецький астроном XVIII ст. ***Й. Тіциус*** (1729—1796) за допомогою ряду Фібоначчі в 1766 році встановив емпіричну формулу, яка приблизно описувала відстані між планетами Сонячної системи і Сонцем (середні радіуси орбіт). Вона стала відома завдяки працям іншого німецького астронома ***Е. Боде***. Підтвердило цю формулу і відкриття планети Уран у 1781 р., орбіта якої майже точно лягла на передбачену послідовність. Однак був один випадок, який, здавалось, суперечив цій формулі: між Марсом і Юпітером не було планети. Подальше зосереджене спостереження за цією ділянкою неба привело до відкриття пояса астероїдів. І була висунута гіпотеза, що цей пояс утворився від розпаду планети Фаетон, яка раніше була на цій орбіті. Сталося це на початку XIX ст., уже після смерті Тіциуса.

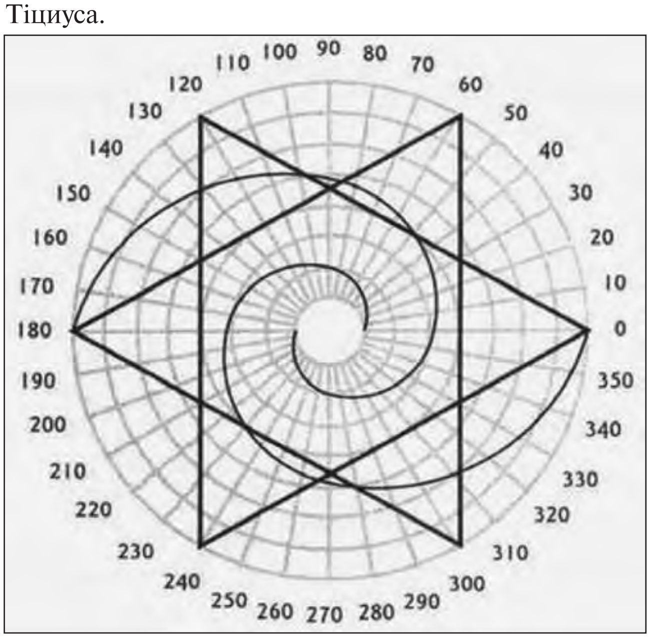


Рис. 27. Галактичні спіралі

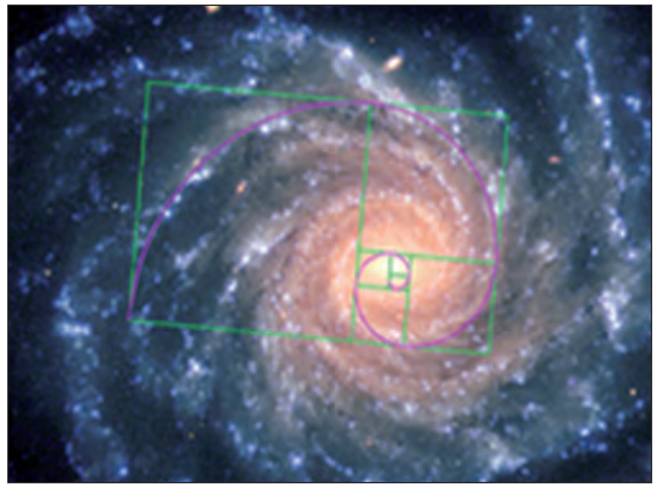


Рис. 26. Спіральність галактики

Орбіта кожної планети довкола Сонця має форму еліпса з мінімальним і максимальним радіусами віддалення від нього. Виявилося, що в усіх восьми планет Сонячної системи це відношення близьке до різних степенів числа ***Ф***. Для Землі ж це відношення просто дорівнює числу ***Ф***.

У літературі можна зустріти дві "золоті" галактичні спіралі, сумісні з зіркою Давида (рис. 27). Якщо звернути увагу на зірки, які виходять із галактики по білій спіралі, то акурат на 180° від однієї зі спіралей йде розгортання іншої спіралі. Тривалий час астрономи вважали, що все, що там є, це те, що ми бачимо — бо якщо щось є видимим, отже воно існує. Вони або зовсім не помічали невидимої частини Всесвіту, або не вважали її важливою. Але невидима сторона Всесвіту, насправді, значно перевищує її видиму сторону і може виявитись важливішою. Таким чином, за допомогою ряду Фібоначчі можна представляти й архітектоніку будови Галактик.

Оптимальні фізичні параметри зовнішнього середовища

Людські органи відчуття характеризуються мінімальними й максимальними параметрами зовнішнього середовища, які людина здатна сприймати. Ці межі називають "*абсолютно нижнім та верхнім порогами чуття*". З'ясовується, що вони також пов'язані золотою пропорцією.

Звук. Відомо, що максимальна гучність звуку, яка викликає больові відчуття, дорівнює 130 децибелам. Якщо розділити цей інтервал на золоте число 1,618, то одержимо 80,35 децибел, які характеризують гучність людського крику. Далі, коли 80,35 децибел поділити на золоте число, то одержимо близько 50 децибел, що відповідають гучності людської мови. Нарешті, якщо 50 децибел поділити на квадрат золотого числа 2,618, то одержимо 19 децибел, що відповідає людському шепоту. Отже, характерні параметри гучності людських звуків пов'язані золотою пропорцією.

Вологість повітря. За температури 18—20 °С оптимальним вважається інтервал вологості 40—60 %. Межі оптимального діапазону вологості можна отримати, якщо абсолютну вологість 100 % двічі розділити на число *Ф*: 100/2,618 = 38,2 % (нижня межа) та 100/1,618 = 61,8 % (верхня межа).

Тиск повітря. За тиску повітря 0,5 МПа у людини виникають неприємні відчуття, погіршується її фізична і психологічна діяльність. За тиску 0,3—0,35 МПа дозволяється лише тимчасова праця, а за тиску 0,2 МПа можна працювати не більше 8 хв. Усі ці характерні параметри пов'язані між собою золотою пропорцією: 0,5/1,618 = 0,31 МПа та 0,5/2,618 = 0,19 МПа.

Температура довколишнього повітря. Межовими параметрами позитивних температур довколишнього повітря, у межах яких можливе існування (з продовженням роду) людини є діапазон від 0° до ~ +(57-58) °С. Розділимо, як і вище, наведений діапазон температур золотим перетином. При цьому одержимо дві межі: ~ 35 °С та ~ 22 °С. Обидві вони є характерними температурами для організму людини: перша близька до температури людського тіла і відповідає максимально можливій температурі навколишнього повітря для організму людини, а друга — найбільш комфортній для неї температурі (36,6/1,618 = 22,62 °С).

Двійні сплави. Функціонально яскраво себе проявляють (тверді, стійкі термічно і до окислення, і до зносу і т. д.) лише у випадку, коли питома вага вихідних компонентів пов'язує їх один з одним якоюсь із золотих пропорцій. Це дозволяє припустити, що золоті перетини можуть бути числовими інваріантами самоорганізованих систем, що важливо для синергетики — науки, яка вивчає процеси самоорганізації в системах.

Оптика. Якщо накласти дві скляні пластини одна на одну, направити на них косий пучок світла і підрахувати відношення інтенсивностей відбитих променів і тих, що пройшли крізь пластинку, то одержимо число *Ф*. Закономірності золотої симетрії можна виявити також в енергетичних переходах елементарних частинок.

Закон хвиль. Згідно з Еллiотом закон хвиль — це модель розвитку і занепаду, а співвідношення між хвилями базується на числах, отриманих із ряду Фібоначчі.

Золотий перетин у побутових речах

Ще давні єгиптяни дотримувалися твердих правил у зображенні предметів повсякденного побуту богів і фараонів. Ці канони художники знали достеменно. Майстри Давньої Греції відвідували Єгипет, аби удосконалити свою майстерність. Окремим видом мистецтва Давньої Греції було виготовлення і розфарбовування різноманітного посуду. У їх витонченій формі легко відшукати пропорції золотого перетину.

Золотий перетин сприймається як найбільш досконале єдине ціле. Людина може нічого не знати про число *Ф*, але у будові предметів, а також у послідовності подій вона підсвідомо відтворює елементи золотої пропорції. Розміри кредитних карток, візиток, гральних карт, поштових марок, конвертів, столів, малярних полотен, екранів, отворів вікон, дверей мало різняться від золотого перетину. Навіть поперечки могильних хрестів на цвинтарях ділять вертикальну основу на висоті числа *Ф* і їх ширина стосовно висоти основи також складає число *Ф*. Альбрехт Дюрер створив було "золотий" шрифт, у якому букви з перетином окреслювалася так, аби відповідати золотій пропорції. Спочатку й формати книг підганяли під число *Ф*, але потім їм стали надавати форму прямокутника з відношенням сторін $\sqrt{2}$. Це зумовлено тим, що при перегинанні такого прямокутника по середній лінії утворюються два прямокутники з таким же співвідношенням сторін.

Одним із сучасних прикладів застосування золотого перетину є численні мозаїки ***Пенроуза***.

Висновки

Описані вище факти свідчать про універсальність чисел Фібоначчі. Принцип золотого перетину — найвищий прояв функціональної і структурної досконалості цілого і його частин у природі, мистецтві, науці й техніці. Усюдисутність числа *Ф* та чисел Фібоначчі в живій природі дозволяє говорити про єдиний механізм їх виникнення та вказує на зв'язок усіх живих істот. Ці числа можна вважати математичним описом формотворних процесів. Письменник ***Д. Браун*** вважає, що число *Ф* зіграло роль цеглини у фундаменті побудови усього живого на Землі [17]. ■

Література

1. **Балашевич Р., Пилипчук І.П.** Золота пропорція як прояв гармонії навколишнього світу. *СвітОгляд*. 2009. № 1. С. 62—71.

2. **Вакарчук І.О.** Божественна пропорція. — Вроцлавський університет, 2009. С. 13—20.

3. **Timerding H.E.** Der Goldene Schnitt. — Leipzig, Berlin: B.G. Teubner, 1925. — 62 s.

4. Адреса англійського сайту, присвяченого ряду Фібоначчі: ***http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/ Fibonacci/***

5. **Bergman G.** A number system with an irrational base. *Mathematics Magazine*. 1957. № 31.P. 98—119.

6. **Livio Mario.** The Golden Ratio: The Story of PHI, the World's Most Astonishing Number. — NY: Brodway Books, 2002. 303 p.

7. **Roger Herz-Fischler.** A Mathematical History of the Golden Number. — Courier Corporation, 2013. 228 c.

8. **Стелік Н.Є.** Гармонія давньоєгипетської архітектури.— Гірки: БГСХА, 2009. 108 с.

9. **Платон.** Собр. сочинений в 4 т., Т. 3. —М.: Мысль, 1994.

10. **Euklide.** Les Éléments. 4 vols. Trad. et comm. B. Vitrac; intr. M. Cavening. — P.: Presses universitaires de France, 1990—2001.

11. **Winzinger Franz.** Albrecht Dürer. — Reinbek, 1971.

12. **Zeising A.** Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Korpers. — Leipzig, 1854.

13. **Ohm M.** Versuch eines vollkommenen, consequenten Systems der Mathematic. — Berlin, 1828.

14. **Асєєв Ю.С.** Шедеври світової архітектури. — К.: Рад. школа, 1982. 88 с.

15. **Олесь Олександр.** Поетичні твори. Т.1. — К.: Дніпро, 1990. 959 с.

16. **Костенко Ліна.** Вибране. — К.: Дніпро, 1989. 559 с.

17. **Браун Ден.** Код да Вінчі. — Харків: КСД, 2006. 478 с.