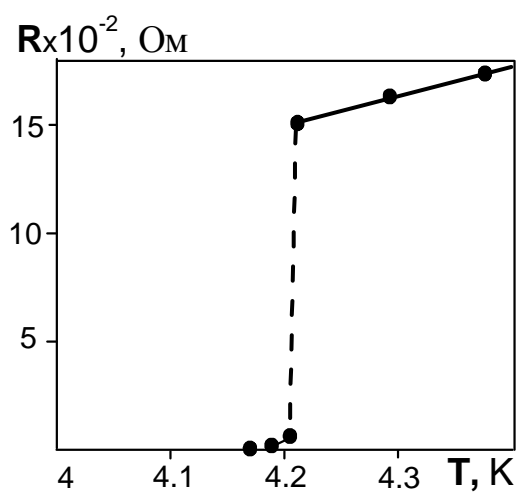


В.М. ЛОКТЄВ

ЛЕКЦІЇ З ФІЗИКИ НАДПРОВІДНОСТІ



**ІНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ ім. М.М. БОГОЛЮБОВА
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ**

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»**

В.М. Локтєв

**ЛЕКЦІЇ
З ФІЗИКИ НАДПРОВІДНОСТІ**
(електронна версія)

Київ 2011

УДК: 74.20.-z; 74.20.De; 74.20.Fg; 74.25.Ha

В.М. Локтєв

Лекції з фізики надпровідності. – Київ, 2011. – 276 с.

Детально викладені основні уявлення та експериментальні факти про фізичну природу макроскопічного квантового явища – надпровідність металів і сплавів. Дано термодинамічний опис явища, далі йде лінійна електродинаміка в рамках спрощеного дворідинного підходу Лондонів. Виведені рівняння феноменологічного квантового опису надпровідності, що спирається на рівняння Гінзбурга-Ландау. Аналізуються характерні особливості слабкої надпровідності, наводяться розв'язки рівнянь, що описують ефекти Джозефсона. Окремо викладаються найсуттєвіші положення мікроскопічної теорії Бардіна-Купера-Шріффера-Боголюбова та причини феномену Купера. Наводяться відомості про деякі нерівноважні процеси та наслідки неоднорідних станів у надпровідниках.

Виклад спирається на знання читачем основ класичної електродинаміки та квантової механіки в обсязі стандартних університетських курсів з фізики. Передбачається також знання елементів статистичної фізики та фізики твердого тіла. Лекції розраховані на наукових працівників, викладачів, аспірантів та студентів магістерського рівня навчання фізичних та інженерних факультетів університетів.

*Затверджено до друку Вченою радою
Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України
та Вченою радою фізико-математичного факультету
Національного технічного університету України «КПІ»*

Рецензенти:

В.Г. Бар'яхтар – академік НАН України,
доктор фіз.-мат. наук, професор

Ю.Б. Гайдідей – доктор фіз.-мат. наук, професор

ISBN 978-966-02-4459-7

© В.М. Локтєв, 2011

ЗМІСТ

Передмова	5
Лекція 1 (<i>Основні експериментальні факти, спостережувані ефекти</i>).....	10
Лекція 2 (<i>Магнітні властивості надпровідників</i>).....	23
Лекція 3 (<i>Термодинаміка надпровідників</i>)	30
Лекція 4 (<i>Феноменологічні підходи до опису надпровідності, теорія Лондонів</i>)	38
Лекція 5 (<i>Глибина проникнення Лондонів, глибина проникнення Піппарда</i>).....	47
Лекція 6 (<i>Квантове узагальнення рівнянь Лондонів та найпростіші їх розв'язки</i>)	58
Лекція 7 (<i>Провідні властивості надпровідників</i>).....	71
Лекція 8 (<i>Теорія Гінзбурга-Ландау</i>).....	81
Лекція 9 (<i>Довжина когерентності, параметр Гінзбурга-Ландау, ефект близькості</i>) ...	96
Лекція 10 (<i>Енергія границі між нормальною та надпровідною фазами</i>).....	111
Лекція 11 (<i>Слабка надпровідність, стаціонарний ефект Джозефсона</i>).....	125
Лекція 12 (<i>Нестаціонарний ефект Джозефсона</i>)	134

Лекція 13 (<i>Проникнення магнітного поля у слабкий контакт</i>)	145
Лекція 14 (<i>Струмові особливості слабких контактів, сквіди, надпровідники II-го роду</i>)	157
Лекція 15 (<i>Вихори Абрикосова, перше та друге критичні магнітні поля</i>).....	167
Лекція 16 (<i>Критичний струм, резистивний стан</i>).....	182
Лекція 17 (<i>Основи мікроскопічної теорії</i>)	197
Лекція 18 (<i>Феномен Купера, теорія Бардіна-Купера-Шріффера</i>)	211
Лекція 19 (<i>Метод рівнянь руху, перетворення Боголюбова, квазічастинкові збудження</i>).....	224
Лекція 20 (<i>Надпровідна щілина, струм розпарювання</i>)	241
Лекція 21 (<i>Нерівноважні процеси, відбиття Андрєєва</i>)	254
Заключні зауваження	270
Рекомендована література, деякі корисні сайти	273
Енергетичні величини та співвідношення між ними	274

ПЕРЕДМОВА

Лекційний курс, який ви тримаєте у руках, розкрили і, сподіваюсь, вивчатимете, присвячений унікальному та дуже цікавому фізичному явищу – надпровідності, важливого при цьому не тільки з фундаментальної, а й з прикладної точки зору його різноманітних застосувань. Матеріал курсу викладався впродовж 1988-1997 рр. на старших курсах фізичного та радіофізичного факультетів Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, а з 1998 р. викладається в рамках підготовки спеціалістів і магістрів на фізико-математичному факультеті Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”. У лекціях робиться спроба представити основні фізичні уявлення про історію, найбільш суттєві для розуміння експериментальні факти, розвиток поглядів та методи опису надпровідників і надпровідних сполук, їх взаємодію з постійними та змінними електромагнітними полями, мікроскопічні причини та механізми виникнення надпровідного стану і, нарешті, деякі питання слабкої надпровідності.

Виклад матеріалу лекцій наближений до історії досліджень в області фізики надпровідних явищ та спирається на поступове накопичення про них експериментальних даних. З методичної точки зору обрано метод такого подання учбового матеріалу, коли воно представлено не у вигляді розширеного підручника, як це, власне, і прийнято у переважній більшості монографій та підручників, а як досить

обмежений і стислий виклад необхідної для входження в предмет інформації, що безпосередньо повідомляється студентам під час лекцій. Тому лекції не перевантажені математикою, методичними або експериментальними деталями, довгими викладками чи складними графіками, а також надто глибокими міркуваннями тощо, які наведені та у деталях викладаються у багаточисельній і багаторівневій літературі з питань надпровідності. Все це пояснюється тим, що ставилася мета якомога більше зосередитись на фізичному змісті та тлумаченні ефектів і процесів, що розглядаються, їх зв'язку з деякими явищами інших розділів фізики, якісних можливостях експериментального спостереження тих чи інших передбачень теорії. Дуже коротко згадуються сучасні напрямки застосувань явища надпровідності, в тому числі високотемпературної. Майже всі результати, що наведені нижче, отримані з “перших принципів” так, щоб студент міг простежити за викладом від початку і до кінця. Проте складні обчислення ми старалися, як вже зазначалося, обминати, наводячи, коли треба, тільки кількісну оцінку або якісні міркування.

Не зупиняючись на короткій характеристиці лекційного посібника – про нього легко дізнатись із змісту, зауважу (в першу чергу, для майбутніх дослідників), що на відміну від багатьох інших розділів фізики в області дослідження фундаментальних властивостей надпровідників ϵ , як говорить лауреат Нобелівської премії 2003 р. видатний російський фізик-теоретик В.Л. Гінзбург, своя “провідна зірка”. Подібне буває не настільки часто, щоб в певній області знань можна було сформулювати наукову задачу, яка б виявилась зрозумілою навіть для

людей, далеких від науки та її основних напрямів. В галузі надпровідності така зірка, або задача-максимум, безумовно, існує.

Нею тепер для дуже великої кількості науковців, інженерів і технологів є відкриття або штучне створення сполук, що здатні переходити у надпровідний стан при нормальних умовах – головним чином, температурних. Вже виник и став використовуваним термін **кімнатно-температурні надпровідники** або **кімнатно-температурна надпровідність**. Зараз, коли пишуться ці рядки, у світі нема людини, у тому числі, із середовища професіоналів-низькотемпературщиків, хто б мав уявлення, як це зробити і чи можна зробити взагалі. Проте, і це надзвичайно важливо, ніхто не висловив принципових заперечень з приводу того, що такі системи не можуть існувати. Тут, здається, велику роль, має зіграти розуміння, що надпровідники з шуканими параметрами можуть бути саме серед штучних сполук, в той час як досі такими були, значною мірою, природні речовини. Як відомо, спеціально синтезовані сполуки по багатьох фізичних параметрах дуже часто переважають природні. Тому виникає надія, що серед останніх, в решті решт, виявиться і критична температура того чи іншого штучного надпровідника.

Ці слова мені особливо хотілося висловити у передмові з надією, що хто-небудь з випускників славетного НТУУ “КПІ” захопиться такою – без перебільшення, загальнолюдською і в той же час благородною – ціллю ошчасливити людство невичерпними можливостями невитратної передачі електричної енергії на будь-які відстані. В усякому разі, хотілося б побажати майбутнім дослідникам

займатися проблемами, які не тільки нетривіальні з наукової точки зору, але й цікавлять людство, важливі для його добробуту і довготривалого перебування на Землі.

Надпровідності ще немає 100-а років і довгий час, близько 50-ти років, її застосування стримувалося поганим розумінням її природи і порівняно обмеженими можливостями техніки низьких температур. Але згодом, у 70-80-ті роки минулого століття, з об'єкту суто фізичних досліджень надпровідність перетворилась у таку, чийі знання і досягнення не тільки проникли у різні галузі техніки, але і створили нові. Надпровідні матеріали використовуються для створення надсильних магнітних полів, кабелів, спроможних переносити великі густини струмів без втрат, потужних моторів і генераторів. Створені і широко застосовуються надчутливі прилади слабкострумової електроніки, резонатори, параметричні перетворювачі частот, з'являються станції підсилення сигналів для мобільного зв'язку тощо. Вже висловлені ідеї щодо створення принципово нових елементів пам'яті та логіки не тільки для класичних, а й для квантових великих і персональних ЕОМ. У зв'язку з цим виникає потреба у спеціалістах, що знайомі з основними результатами та досягненнями фізики надпровідності. Хотів би сподіватися, що цей лекційний курс певною мірою сприятиме підготовці саме таких фахівців.

Для розуміння матеріалу досить знань в обсязі стандартних університетських курсів з основ квантової механіки та фізики твердого тіла, зокрема фізики металів.

Міг би подякувати багато колег за співпрацю та корисні поради, але найбільшу подяку висловлюю

керівництву фізико-математичного факультету НТУУ “КПІ” в особі декана академіка Віктора Григоровича Бар’яхтара та керівництву Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України в особі директора академіка Анатолія Глібовича Загороднього за підтримку цієї книжки та її видання у рік ювілею – 90-річчя від часу заснування НАН України.

Насамкінець, радий скористатися можливістю і висловити глибоку вдячність кандидатів фізико-математичних наук Олені Олександрівні Понежі та Любові Іванівні Шмагайло (обидві – з ІТФ ім. М.М. Боголюбова НАН України), без великої допомоги яких у підготовці рукопису поява лекцій була б практично неможливою.

2007 р., м. Київ

До електронного видання

З великою вдячністю прийняв пропозицію заступника директора ІТФ ім. М.М. Боголюбова НАН України Володимира Івановича Засенка розмістити Лекції на сайті інституту. Роблячи це, повідомляю, що виправив в ньому всі помічені помилки, на переважну більшість з яких мою увагу звертали студенти, які використовували підручник у своєму навчанні. Може, зауважень було й не так багато, але те, що їх висловлювали слухачі та читачі, робить їх врахування простою і в той же час приємною справою.

Як і раніше, сподіваюсь, що Лекції стануть в нагоді і сприятимуть інтересу молоді до такого, можна стверджувати, незрівняного ні з чим явища, як надпровідність, 100-річчя якого весною 2011 року відмітила вся наукова громадськість світу.

2011 р., м. Київ

Лекція 1

1. Основні експериментальні факти

1.1. *Історична довідка.* У 1911 році голандський фізик експериментатор Х. Камерлінг-Онесс, вивчаючи залежність опору ртуті, Hg, від температури T , знайшов, що в околі $T = 4$ К опір зразка несподівано зникав (див. рис. 1.1). Більше того, він не з'являвся ні при жодній більш низькій температурі. Важливо, що опір зникав при скінчених T . Спроби знайти опір у великих зразків не дали результату. Пізніше, використовуючи сучасні прилади, була знайдена верхня границя для опору: він відсутній, по меншій мірі, на рівні $\sim 10^{24}$ ом·см.

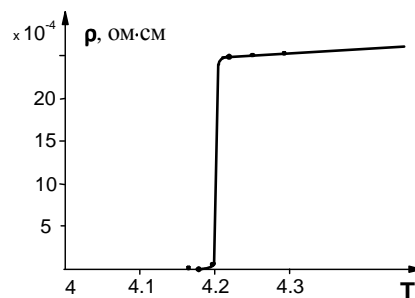


Рис. 1.1

Для порівняння нагадаю, що питомий опір міді при $T=4.2$ К на 15 порядків вище. До речі, мідь не

знає подібного перетворення, хоча її опір є одним з найменших серед відомих металів!!!

Без сумніву, мова може йти про ефект ідеальної провідності – вона була названа **надпровідністю** (НП), а відповідні речовини – **надпровідниками** (НП).

Скоро було відкрито, що багато металів – олово, свинець, індій, алюміній, ніобій та інші – є НП. Цю ж властивість демонструють і багато сплавів.

Температура T_c (або T_k) переходу зветься **критичною температурою**. Було також встановлено, що НП руйнується не тільки від підвищення температури, але й під дією магнітного поля, яке також було назване критичним H_{cm} (іноді H_k). Ми будемо вживати позначення H_{cm} , розуміючи під ним поле, яке знешкоджує НП у масивних зразках. Критичне поле плівок, тонких дротів, шариків тощо, може мати інше значення. Нижче наведені деякі характерні величини T_c та H_{cm} :

Елемент	T_c , К	H_{cm} , Ое
Al	1.175	104.9
Be	0.026	
Hg (α, β)	4.154, 3.95	411, 339
La (α, β)	4.88, 6	800, 1096
Nb	9.25	2060
Pb	7.196	803
Tl	2.38	178
V	5.4	1408
ВТНП купрати	$\sim 10^2$	3.5×10^5

A_3C_{60}	30-40	$> 7 \times 10^4$
-------------	-------	-------------------

Додамо, що на цей час температурний рекорд належить ртутним системам мідно-оксидних високотемпературних НП (ВТНП), або так званим ВТНП купратам, і дорівнює приблизно 164 К. Це багатокомпонентні складні сполуки, вивчення фізичних властивостей яких ще далеко не закінчилося.

Які висновки можна зробити, дивлячись на наведені в таблиці дані? Перш за все, чим вища T_c , тим вище поле H_{cm} . По-друге, в ній не представлені такі найкращі провідники, як мідь, золото, срібло, опір яких в їх звичайному (його звуть **нормальним**) металічному стані є мінімальним у порівнянні з іншими металами. Здавалося б, ці речовини раніше за інші мали б ставати НП та відчувати НП перехід. Проте експеримент демонструє протилежну картину – саме в цих металах НП стан не існує – в усякому разі, до температур, нижчих за 10^{-3} К. Спочатку це не було помічене. Але вже у 1933 р. у книзі “Фізика металлов” радянські дослідники Я.Г. Дорфман і І.К. Кікоїн писали: “Та обставина, що ні Ag, ні Au, ні Cu, ні інші найкращі провідники не переходять у НП стан і, навпаки, погані провідники володіють цією дивною особливістю, свідчить, що механізм НП повністю відрізняється від механізму провідності.”

Зауважимо, що більшу частину класу НП складають сплави і різні багатокомпонентні сполуки. Їх загальна кількість сягає кількох тисяч і весь час зростає. Про це, зокрема, свідчить і кількість речовин, що входять до сімейства ВТНП, яке складають складні три-, чотири-, і навіть п’ятикомпонентні сполуки.

Зараз, завдяки техніці високих тисків, вже вдалося перевести у НП стан і такі справжні діелектрики, як тверді азот і кисень, а от твердий водень поки що переходити у цей стан не бажає, хоча саме для нього фізики очікують найвищої T_c .

Про які особливості НП варто було б також ще згадати? Наприклад, окремі метали або неметали, що входять до складу того чи іншого сплаву, НП не демонструють, а їх комбінація – демонструє: так, Cu, S, Bi не є НП, а от CuS або Cu₂Bi вже переходять в НП стан. Про згадувані вище і відкриті у 1986 р. ВТНП купрати вже й годі говорити – вони чи не найкращим чином підтверджують справедливість висловленої тези.

Більше того, T_c сплаву залежить не лише від складових речовин, але й способу його виготовлення, концентрації компонент, тиску, кристалічної модифікації тощо. Багато сплавів відкрито М.Є. Алексєєвським (СРСР), Маттіасом (США). Саме сплави до відкриття ВТНП мали рекордні T_c :

NbPb	$T_c=18.1$ К
Nb ₃ Al _{0.75} Ge _{0.25}	=20.1 К (1967)
Nb ₃ Ge (плівка)	=22.3-23.7 К (1973).

В останні роки перед відкриттям ВТНП вівся інтенсивний пошук сполук з ще більш високими T_c . Було відкрито багато нових матеріалів – органічні НП, НП з важкими ферміонами, НП з низькою густиною носіїв, молекулярні НП. Проте серед звичайних, або традиційних, НП високотемпературні, а це НП, у яких T_c перевищує хоча б температуру рідкого азоту 77 К, знайти не вдалося. ВТНП сполуки тому і виявились несподіваними, що породили новий клас НП систем,

властивості яких не підпадають в стандартні схеми, про що ми ще будемо говорити.

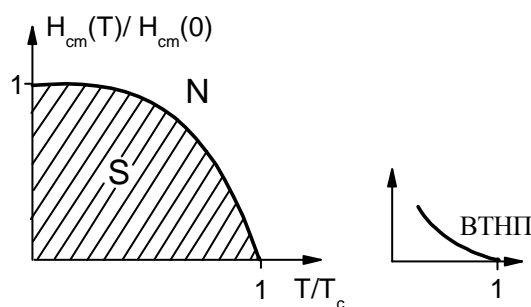
Повернемося до руйнування НП магнітним полем. Експеримент дає залежність

$$H_{cm}(T) = H_{cm}(0) \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right].$$

Звідки маємо:

$$\frac{dH_{cm}(T)}{dT} = -H_{cm}(0) \frac{2T}{T_c^2} = \begin{cases} 0, & T = 0, \\ -\frac{2H_{cm}(0)}{T_c}, & T = T_c. \end{cases}$$

Ці прості співвідношення дозволяють побудувати фазову діаграму НП у змінних Н-Т (див. рис. 1.2),



яка

Рис. 1.2

має вигляд, що показаний на малюнку. Зауважимо, що у ВТНП (див. той же рис.) її кривизна в околі T_c від'ємна.

1.2. *Квантування магнітного потоку.* Якщо взяти кільце з надпровідного матеріалу і за допомогою магнітного поля індукувати в ньому струм (ефект Фарадея), то цей струм буде текти нескінченно довго,

бо нема опору. Цікаво, що у 1959 р. американський фізик Ф. Коллінз вимірював струм в такому кільці 2.5 року і не зафіксував жодних змін.

Як створюється такий струм? Розташуємо кільце при $T > T_c$ у зовнішньому магнітному полі так, щоб силові лінії поля пересікали кільце (див. рис. 1.3). Знизимо T так, щоб вона стала меншою за T_c , і вимкнемо джерело, що створювало поле. У момент вимкнення потік почне зменшуватись і індукувати у кільці електрорушійну силу (е.р.с.), яка внаслідок замкнутості “кільцевої мережі” згенерує в останній струм. Струм буде перешкоджати зменшенню магнітного потоку, але після досягнення полем нуля потік залишиться на тому ж рівні, бо буде визначатися вже полем струму.

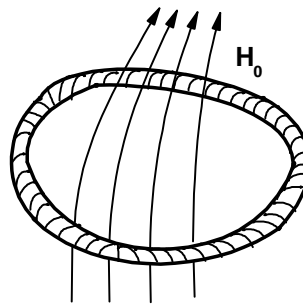


Рис. 1.3

Якщо б кільце мало опір R , то після вимкнення зовнішнього поля струм би зник за час порядку L/R (бо існує часова залежність $\exp(-tR/L)$), де L – індуктивність. Але оскільки $R = 0$, то $t \rightarrow \infty$. Це, як говорять, означає, що потік в кільці виявився “замороженим”. При цьому струм, що створив такий потік, зветься **надструмом**.

На перший погляд, здається, що заморожений потік може бути довільним. Проте експериментально було встановлено дуже важливий факт: магнітний потік в полуму НП циліндрі приймає значення лише кратні деякій розмірній величині

$$\Phi_0 = 2.07 \cdot 10^{-7} \text{Gs} / \text{cm}^2,$$

що визначає фундаментальну константу – **квант магнітного потоку**.

Він сам може бути виражений через фундаментальні константи, а саме:

$$\Phi_0 = \frac{hc}{2e} \equiv \pi \frac{\hbar c}{e}.$$

Вимірювання квантування потоку були виконані у 1961 р., але вже у 30-ті роки дехто висловлював думки, що НП – це квантове явище. Звертаю увагу, що величина кванту магнітного потоку визначається подвоєним електричним зарядом, що, як буде видно далі, має дуже глибокий фізичний зміст.

На якісному рівні квантування потоку, а отже і струму можна пояснити так. Нехай є кільце радіусу r з струмом $I = Ne^*v/2\pi r$, де e^* – деякий ефективний заряд частинок, $N/2\pi r$ – їх густина, v – швидкість. Тоді енергія струму може представлена виразом $\varepsilon = LI^2/2c^2$, де L – індуктивність. З іншого боку, відомо, що повний потік $\Phi = LI/c$, звідки $L = \Phi c/I$. Зробимо низку простих перетворень:

$$\varepsilon = \frac{LI^2}{2c^2} = \frac{\Phi c}{I} \frac{I^2}{2c^2} = \frac{I\Phi}{2c} = \frac{N}{2\pi r} e^* v \frac{\Phi}{2c} = \Phi \frac{N}{2\pi r} \frac{e^* v}{c} \frac{1}{2}.$$

Але енергія частинок, що рухаються, може бути представлена в інший спосіб:

$$\varepsilon = N \frac{mv^2}{2} = Np \frac{v}{2}.$$

Обидві величини є одне і те ж, або

$$\Phi \frac{N e^* v}{2\pi r c} = N p \frac{v}{2},$$

що дає для імпульсу вираз $p = \frac{\Phi e^*}{2\pi r c}$. Знаючи імпульс, $p = mv$, легко запишемо момент імпульсу mvr через стандартні умови

$$pr = \frac{\Phi e^*}{2\pi r c} r = n\hbar,$$

звідки випливає, що

$$\Phi = n \frac{2\pi\hbar c}{e^*} = n \frac{hc}{e^*} \equiv n\Phi_0,$$

якщо $e^* = 2e$ (!!), де (див. вище) $\Phi_0 = hc/2e$, але довго на цю обставину звертали уваги не звертали.

Таким чином, квантування руху веде до квантування потоку і навпаки. Іншою мовою, квантування магнітного потоку однозначно засвідчило квантову природу явища НП.

1.3. *Ефекти Джозефсона*. Вони також є свідченням квантової природи явища НП. Їх передбачив у 1962 р. молодий англійський вчений (більше того, аспірант!) Брайан Джозефсон. Таких ефектів два, обидва носять його ім'я і відносяться до так званої *слабкої НП*.

Що таке слабка НП?

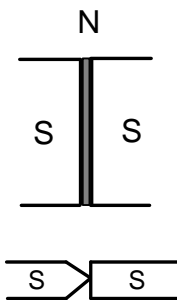


Рис. 1.4

Під слабкою НП розуміють таку НП, коли два НП з'єднані якимось ненадпровідним шаром. Таким слабким зв'язком може бути тунельний перехід, тонко-плівкове звуження, просто торкання одного НП іншим при малій площі дотику (рис. 1.4).

Розрізняють два ефекти Джозефсона – *стаціонарний* та *нестационарний*. Під першим розуміють можливість проходження невеликих струмів через слабке з'єднання, або слабкий зв'язок, навіть коли він є взагалі непровідним. Більше того, такий зв'язок не викликає опору. Тут ми безпосередньо зустрічаємось з важливою властивістю НП – узгодженим когерентним рухом його електронів. Виявляється, і ми побачимо далі, електрони обох НП за допомогою слабого зв'язку можуть об'єднуватись в єдиний квантовий ансамбль. Можна сказати і по-іншому: хвильова функція частинок проникає із однієї області в іншу та інтерферує. В результаті, усі НП електрони описуються єдиною хвильовою функцією. При цьому слабкий зв'язок майже не змінює хвильові функції з обох сторін.

Незважаючи на те, що ми пізніше будемо розбирати ефекти Джозефсона, деяке розуміння стаціонарного ефекту може бути отримане з наступного виразу. Як відомо з квантової механіки, густина струму є

$$\mathbf{j} = i \frac{e\hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi).$$

В загальному випадку хвильову функцію можна представити у вигляді $\psi = |\psi| \exp(i\varphi)$. Тоді прості перетворення дають:

$$\nabla \psi = (\nabla |\psi|)e^{i\varphi} + |\psi|e^{i\varphi}i\nabla\varphi;$$

$$\nabla \psi^* = (\nabla |\psi|)e^{-i\varphi} - |\psi|e^{-i\varphi}i\nabla\varphi.$$

Звідси знаходимо:

$$\begin{aligned} \psi \nabla \psi^* &= |\psi|e^{i\varphi}(\nabla |\psi|)e^{-i\varphi} - |\psi|^2 e^{i\varphi}e^{-i\varphi}i\nabla\varphi = \\ &= |\psi| \nabla |\psi| - i|\psi|^2 \nabla\varphi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi^* \nabla \psi &= |\psi|e^{-i\varphi}(\nabla |\psi|)e^{i\varphi} + |\psi|^2 e^{-i\varphi}e^{i\varphi}i\nabla\varphi = \\ &= |\psi| \nabla |\psi| + i|\psi|^2 \nabla\varphi. \end{aligned}$$

Тоді для струму отримуємо:

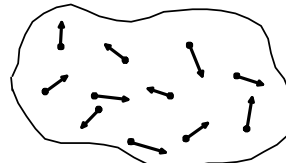
$$\mathbf{j} \sim \frac{e\hbar}{m} |\psi|^2 \nabla\varphi,$$

де $|\psi|^2$ – густина НП електронів.

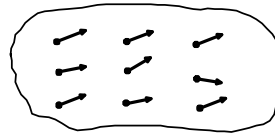
Виникає питання, чому в реальних металах ми не спостерігаємо подібне явище (звичайно, без зовнішнього поля)? З тієї простої причини, що фази хвильових функцій різних електронів, взагалі кажучи, випадкові і їх середнє значення по зразку є однорідним, дорівнюючи нулеві.

НП ж визначається когерентністю, або, краще сказати, внутрішньою впорядкованістю.

Прикладом, що пояснює це, може слугувати ферромагнетик (див. рис. 1.5). У ферромагнетиках при температурі Кюрі T_C усі



$T > T_C, \mathbf{M} = 0$



$T < T_C, \mathbf{M} \neq 0$

Рис. 1.5

ператури Кюрі T_C усі спіни мають різні і випадкові напрямки у просторі, тому повний момент відсутній, тобто $\mathbf{M}=0$. Коли ж напрямки спінів всіх частинок приблизно однакові, як кажуть, скорельовані, то виробляється скінчене значення \mathbf{M} .

Ще більш дивним виглядає нестационарний ефект Джозефсона. Він виникає, коли почати збільшувати струм через слабкий зв'язок так, щоб на ньому з'явилась напруга V . Тоді у цієї напруги, крім постійної складової, з'являється і змінна, яка визначається частотою ω , що пов'язана з величиною напруги співвідношенням:

$$\hbar\omega = 2eV .$$

Цікаво, що першими нестационарний ефект Джозефсона спостерігали харківські фізики І.М. Дмитренко, В.М. Свістунів і І.К. Янсон.

1.4. *Ефект Мейсснера–Оксенфельда*. Відкриття цього ефекту також виявилось несподіваним для дослідників НП. І ось чому. До його відкриття, тобто на протязі цілих 22-ох років після відкриття самої НП, вважалось, що НП – це ідеальний провідник, який, як відомо, характеризується тим, що його опір $R=0$.

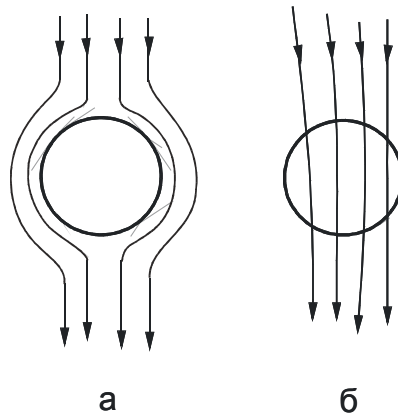
Щоб зрозуміти, як веде себе ідеальний провідник у полі, що не руйнує його ідеальну провідність, розглянемо дві можливості. Спочатку нехай нема поля, а ідеальний провідник має температуру $T < T_c$. Внесемо цей провідник у поле. Із загальних міркувань легко зрозуміти, що поле у такий провідник не проникне. Дійсно, поява поля \mathbf{H} викличе (у відповідності до правила Ленца) народження

поверхневих струмів, що створюють поле, яке направлене проти зовнішнього поля, тому повне поле у НП дорівнює нулеві. Це можна підтвердити і на основі рівняння Максвелла:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

яке пов'язує виникнення електричного поля \mathbf{E} зі зміною магнітної індукції \mathbf{B} . Але в ідеальному провіднику поле $\mathbf{E} = 0$, оскільки $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, або $\mathbf{E} = \sigma^{-1} \mathbf{j} = \rho \mathbf{j}$, де σ – провідність, а $\rho = 0$ – нульовий питомий опір, який вимагає відсутності поля у ідеальному провіднику. Раз $\mathbf{E} = 0$, то і $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$, тобто $\mathbf{B} = \text{const}$. І оскільки до внесення зразка у поле в ньому індукція дорівнювала нулю, то і після внесення ця умова змінитися не може. З третього боку, за умови $\rho = 0$ час проникнення поля до провідника стає безмежним (рис. 1.6, а).

Отже, у провіднику, що вноситься у поле, $\mathbf{B} = 0$. Проте той же стан можна отримати іншим шляхом, а



саме: накладемо поле на ідеальний провідник при $T > T_c$ і охолодимо останній до $T < T_c$. Аналогічний розгляд з використанням рівняння Максвелла

доводить, що в цьому випадку \mathbf{B} в провіднику є скінченим, тобто $\mathbf{B} \neq 0$ (рис. 1.6, б).

Таким чином, результат залежить від способу створення стану, або, як кажуть, від шляху отримання. Саме в такому випадку ми мали б говорити про ідеальний провідник або ідеальну провідність.

В той же час В. Мейсснер і Р. Оксенфельд прямим експериментом довели, що незалежно від способу отримання стану провідника у зовнішньому магнітному полі при $T < T_c$ всередині НП завжди

$$\mathbf{B} = 0 .$$

Це було важливе відкриття, бо однозначно свідчило, що НП як явище не має нічого спільного з ідеальною провідністю. Воно виникає у НП при $H < H_{cm}$ і не залежить від попередньої історії зразка. Відповідний стан є рівноважним, термодинамічно стабільним і має описуватись в рамках термодинамічних підходів.

Отже, можемо зробити принциповий висновок: НП – це такий стан провідних систем, в якому одночасно і завжди виконуються обидві умови:

$$\rho = 0; \quad \mathbf{B} = 0 .$$

Лекція 2

2. Магнітні властивості надпровідників. Надпровідники I-го і II-го роду

В кінці минулої лекції ми записали рівняння НП, визначивши НП стан як такий, що не приймає магнітне поле. Так думали тривалий час, поки, після майже 20-ти років досліджень, не встановили, що всі НП діляться на дві окремі групи – НП I-го роду (НП-I) та НП II-го роду (НП-II).

НП-I – це всі НП елементи (крім ніобію).

НП-II – це сплави та багатокомпонентні хімічні сполуки. Зокрема, ВТНП підтверджують такий поділ і серед відомих ВТНП сполук немає НП-I. Відповідний поділ на НП-I та НП-II спирається на ефект Мейсснера-Оксенфельда.

2.1. *Магнітні властивості НП-I.* Розглянемо намагнічування НП циліндра, що поміщений у поздовжнє магнітне поле \mathbf{H}_0 . Нехай поле зростає. Проте, як ми вже знаємо, індукція всередині НП циліндру змінюватись не повинна. Більше того, у відповідності до раніше встановленого рівняння стану НП $\mathbf{B} = 0$. Коли стане виконуватись умова $H_0 = H_{cn}$, НП має зникнути, і поле проникне у НП (рис. 2.1, а).

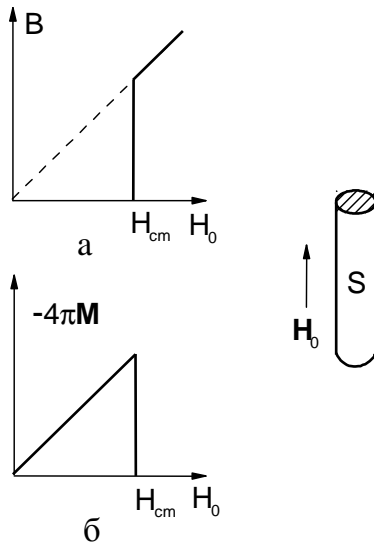


Рис. 2.1

поверхні. Дійсно, внаслідок відсутності магнітних зарядів магнітні силові лінії замкнені та неперервні,

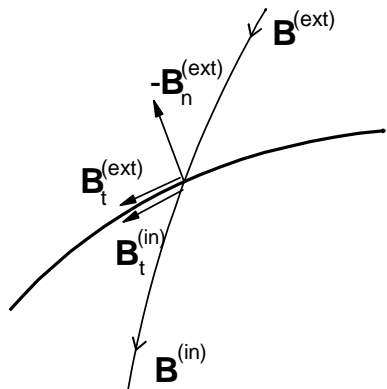


Рис. 2.2

Як відомо,

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}_0 + 4\pi\mathbf{M},$$

де \mathbf{M} – магнітний момент одиниці об'єму. Інколи криву намагнічування будують у вигляді $-4\pi\mathbf{M}$ як функція \mathbf{H}_0 (рис. 2.1, б).

Отримаємо основні магнітні властивості НП з рівнянь $\rho = 0$ та $\mathbf{V} = 0$.

а) По-перше, магнітні силові лінії зовні НП (див. рис. 2.2) завжди мають бути дотичними до його поверхні. Дійсно, внаслідок відсутності магнітних зарядів, тобто $\text{div}\mathbf{B} = 0$. Це, в свою чергу, означає, що вектор \mathbf{B} є завжди дотичним до поверхні НП. Залишаючись

неперервним, $B_n^{(in)} = B_n^{(ext)}$. Але всередині НП індукція $B_n^{(in)} = 0$, тому і зовні $B_n^{(ext)} = 0$. Остання умова і свідчить, що лише дотична компонента $B_t^{(ext)} \neq 0$.

б) По-друге, наслідком попередньої властивості є те, що якщо НП знаходиться у зовнішньому магнітному полі, то по його, НП, поверхні завжди тече струм.

Дане твердження може бути проілюстроване наступним чином (рис. 2.3). Нехай \mathbf{H}_0 – поле в даній

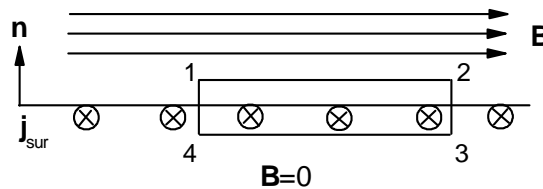


Рис. 2.3

точці поверхні. Відомо, що воно зв'язане з густиною струму в цій же точці рівнянням Максвелла:

$$\text{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

При цьому всередині НП $\mathbf{B}=0$, тому там і $\mathbf{j}=0$. Але нема заборони на поверхневий струм j_{sur} .

Розглянемо контур 1-2-3-4-1 і розрахуємо циркуляцію $\oint \mathbf{B}d\mathbf{l}$, де $d\mathbf{l}$ – елемент контуру. Тоді на відріжку 1-2:

$$\int_1^2 \mathbf{B}d\mathbf{l} = H_0 l_{12}.$$

Відрізки 2-3 та 1-4 не дають внесків, бо нормальні складові вектора \mathbf{B} , як було доведено, відсутні (дорівнюють нулеві) – контур може бути вибраний з

сторонами, перпендикулярними до поверхні. Нарешті,

$$\oint_3^4 \mathbf{B} d\mathbf{l} = 0,$$

оскільки всередині $\mathbf{B}=0$. Таким чином, в цілому

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \int_{sur} \text{rot} \mathbf{B} d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{c} \int_{sur} \mathbf{j}_{sur} d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{I}_{sur},$$

тобто циркуляція магнітної індукції виражається через повний поверхневий струм \mathbf{I}_{sur} . Його густина легко визначається з співвідношення

$$H_0 l_{12} = \frac{4\pi}{c} I_{sur} = \frac{4\pi}{c} j_{sur} l_{12},$$

або в загальному випадку

$$\mathbf{j}_{sur} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{n}, \mathbf{H}_0],$$

що лише відповідає правилу правої руки. Якщо сказати інакше, то поверхневий струм автоматично встановлюється таким, щоб його власне магнітне поле всередині НП точно дорівнювало б зовнішньому, що, в решті решт, і призводить до рівності $\mathbf{B}=0$.

2.2. Проміжний стан. Приклад, що ми розібрали, чесно кажучи, досить простий, хоча і абсолютно вірний. Набагато складнішою є ситуація для тіл іншої форми. Справді, розглянемо поведінку НП кулі, яка поміщена у зовнішнє відносно себе однорідне поле \mathbf{H}_0 соленоїда, зображеного на рисунку 2.4. Якщо поле (його силові лінії) обтікає кулю, то, як впливає з рисунка, напруженість поля в околі екватора буде збільшена (підвищена густина силових ліній), а

поблизу полюсів – зменшена (розрідження силових ліній). Це, в свою чергу, означає, що в області екватора поле $H_{\max} > H_0$, і виникає питання: “Що станеться, коли поле H_{\max} досягне значення H_{ct} ?”

Очевидно, що $H_0 < H_{ct}$, і тому повний перехід кулі до нормального провідного стану неможливий. Але, з іншого боку, неможливо зберегти і НП стан, бо в області екватора поле H вже

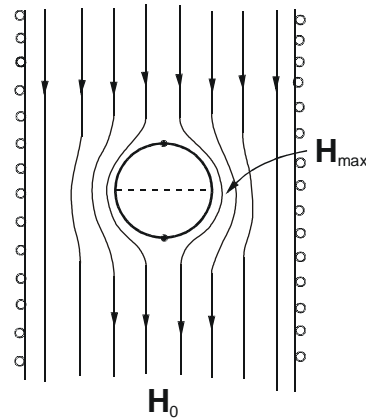


Рис. 2.4

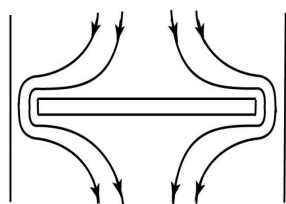
досягло H_{ct} . Розв’язок цього протиріччя знайшов видатний радянський фізик Л.Д. Ландау у 1937 р., припустивши, що куля перейде в так званий **проміжний стан**, тобто розіб’ється на систему НП і нормальних областей, які межують одна з одною. При цьому граничні поверхні, або границі, цих областей, що також зветься **доменами** (домени нормальної і домени НП фаз), завжди паралельні до магнітного поля. Зрозуміло, що в нормальних доменах поле існує, але його напруженість менша за H_{ct} .

Нехай до переходу тіла до проміжного стану максимальне поле на поверхні дорівнює H_{\max} , причому ясно, що $H_{\max} > H_0$. Між ними існує співвідношення:

$$H_{\max} = \frac{H_0}{1 - N_{dem}},$$

де N_{dem} – фактор розмагнічування, значення якого для деяких геометрій наводяться у Таблиці:

Геометрія форми	N_{dem}
циліндр у повздовжньому полі	0
циліндр у поперечному полі	1/2
куля	1/3
пластина у перпендикулярному полі	1



З виписаної простої формули легко знайти поле H_0 , в якому НП тієї чи іншої форми перейде у проміжний стан:

$$H_0 = (1 - N_{dem})H_{cm}.$$

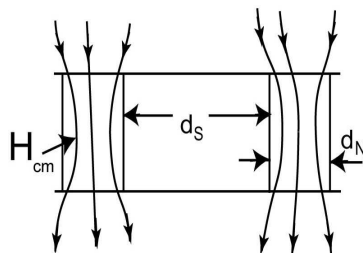


Рис. 2.5

Наприклад, для кулі $H_0 = (2/3)H_{cm}$. Для пластинки (див. рис. 2.5) $H_0 = 0$, тобто вона завжди виявиться у проміжному стані. Це зрозуміло навіть з якісних міркувань: біля країв згущення дуже велике і чим більший, скажімо, радіус диску, тим більше ця концентрація, тобто поле H_{\max} . В

результаті, $H_{\max} \rightarrow \infty$, а $H_0 \rightarrow 0$. На рис. 2.5 показані також розміри d_S та d_N НП і нормального доменів, відповідно. Зрозуміло, що ці параметри є функціями зовнішнього магнітного поля і температури.

Взагалі ж картина доменної структури досить вибаглива і різноманітна (рис. 2.6).

2.3. *Магнітні властивості НП-II.* Хоча відповідні системи ми будемо детальніше розглядати пізніше, все ж таки має сенс коротко сказати, що це таке. Справа в тому, що НП-II не демонструють ефекту

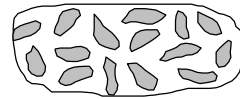


Рис. 2.6

Мейсснера-Оксенфельда у звичному вигляді. Якщо знову взяти циліндр і розташувати його в повздовжньому магнітному полі, то спочатку ми побачимо, що цей циліндр відштовхує поле, як це має місце у випадку НП-I, тобто магнітна індукція всередині речовини дорівнює нулеві. Але, починаючи з деякого поля H_{c1} , в циліндрі з'явиться скінчена індукція \mathbf{V} , яка зростатиме із збільшенням зовнішнього поля. Такий процес відбуватиметься, поки середнє значення $\overline{\mathbf{V}}$ індукції не стане рівним полю \mathbf{H}_0 . Ця умова виконується у іншому полі, яке зветься H_{c2} , коли НП зникне.

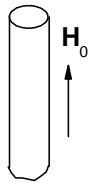
В той же час НП продовжує зберігатися в тонкому приповерхневому шарі до значень поля $H_0 \approx 1.69H_{c2}$, після чого вона зникає.

Лекція 3

3. Термодинамічні властивості надпровідників

3.1. *Критичне поле масивного матеріалу.*
Розрахуємо поле H_{ct} , яке руйнує НП в масивному зразку. Як ми вже знаємо, коли зовнішнє поле

$H_0 < H_{ct}$, то у відповідності до ефекту Мейсснера-Оксенфельда всередині, наприклад, циліндра індукція $\mathbf{V} = 0$, тобто магнітний момент одиниці об'єму



$$\mathbf{M} = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{H}_0.$$

Рис. 3.1 Це, в свою чергу означає, що поверхневі струми створюють момент, який компенсує зовнішнє поле. При зміні поля \mathbf{H}_0 на величину $d\mathbf{H}_0$ джерело поля виконує роботу над одиницею об'єму

$$-\mathbf{M}d\mathbf{H}_0 = \frac{1}{4\pi} \mathbf{H}_0 d\mathbf{H}_0.$$

Звідси випливає, що повна зміна величини поля від 0 до H_0 відповідатиме роботі

$$-\int_0^{H_0} \mathbf{M}d\mathbf{H}_0 = \frac{\mathbf{H}_0^2}{8\pi}.$$

Робота, як відомо, запасається у вигляді вільної енергії НП, що знаходиться у зовнішньому полі. Таким чином, вільну енергію НП у полі $F_S(\mathbf{H}_0)$ можна представити виразом:

$$F_S(\mathbf{H}_0) = F_S(0) + \frac{\mathbf{H}_0^2}{8\pi}.$$

Перехід до нормального стану відбувається у полі H_{cm} , в якому НП зникає, система стає нормальною, а отже

$$F_S(\mathbf{H}_{cm}) = F_N(0),$$

де $F_N(0)$ – вільна енергія нормального металу без поля. Тобто має місце рівність

$$F_S(0) + \frac{\mathbf{H}_{cm}^2}{8\pi} = F_N(0),$$

звідки

$$F_N(0) - F_S(0) = \frac{\mathbf{H}_{cm}^2}{8\pi}.$$

Останнє співвідношення дуже глибоке – воно показує, що поле H_{cm} , тобто критичне поле масивного НП зразка, є мірою вигідності НП стану відносно нормального стану тієї ж системи при тій же температурі $T < T_c$. Воно прямо визначає різницю вільних енергій двох станів. Звідси отримуємо ще

одну назву критичного поля H_{cm} – **критичне термодинамічне поле**.

3.2. *Ентропія надпровідника*. Знайдемо ентропію НП, для чого згадаємо перше начало термодинаміки. Воно гласить:

$$\delta Q = \delta R + \delta U ,$$

де δQ – приріст тепла у тілі, δR – робота, що пішла, наприклад, на збільшення об'єму, а δU – приріст внутрішньої енергії. За означенням вільна енергія має вигляд

$$F = U - TS^{(en)} ,$$

де $S^{(en)}$ – ентропія. Варіація вільної енергії має вигляд:

$$\delta F = \delta U - T\delta S^{(en)} + S^{(en)}\delta T .$$

З іншого боку, для зворотніх процесів $\delta Q = T\delta S^{(en)}$, звідки (див. перше начало) $\delta U = T\delta S^{(en)} - \delta R$. Використовуючи цю рівність, знайдемо:

$$\delta F = \cancel{T\delta S^{(en)}} - \delta R - \cancel{T\delta S^{(en)}} - S^{(en)}\delta T = -\delta R - S^{(en)}\delta T ,$$

тобто ентропія НП

$$S^{(en)} = -\left(\frac{\delta F}{\delta T}\right)_R \equiv -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_R .$$

Використаємо останню формулу і формулу для різниці вільних енергій, а саме:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial}{\partial T}[F_N(0) - F_S(0)] &= (S_N^{(en)} - S_S^{(en)}) = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial H_{cm}^2(T)}{\partial T} = \\
 &= -\frac{1}{4\pi} H_{cm}(T) \left(\frac{\partial H_{cm}(T)}{\partial T} \right)_R.
 \end{aligned}$$

Згадуючи, що

$$H_{cm}(T) = H_{cm}(0) \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2}\right),$$

приходимо до кількох висновків.

а) Насамперед, з теореми Нернста відомо, що при $T=0$ ентропія має дорівнювати нулеві. Це вимагає рівності похідної

$$\left(\frac{\partial H_{cm}(T)}{\partial T} \right)_{T=0} = 0,$$

що прямо впливає з формули для $H_{cm}(T)$.

б) По-друге, ця ж формула, а вона, нагадаю, є результатом експерименту, дає, що

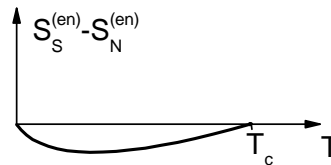
$$\frac{\partial H_{cm}(T)}{\partial T} < 0,$$

звідки отримуємо цікаву нерівність:

$$S_S^{(en)} < S_N^{(en)}.$$

в) По-третє, оскільки при $T=T_c$ поле $H_{cm}(T_c) = 0$, то в цій точці

$$S_S^{(en)} = S_N^{(en)}.$$



Всі три висновки легко зобразити функцією з мінімумом (рис. 3.2).

Таким чином, Рис. 3.2
підсумуємо:

– НП стан має більш низьку ентропію, а це означає, що йому відповідає більший порядок, або НП стан виявляється впорядкованим у порівнянні з нормальним;

– перехід при $T=T_c$ відбувається без виділення скритої теплоти – іншими словами, це є перехід II-го роду;

– при $T < T_c$ різниця ентропій не дорівнює нулю, і якщо перехід іде з нормального стану до НП у зовнішньому магнітному полі, то скрита теплота виділятиметься, тобто магнітне поле змінює рід переходу з II-го на I-ий.

Отже, ми розглянули найпростіші ситуації, записали відповідні формули, і треба звернути увагу на таку дивну обставину. Усього декілька термодинамічних співвідношень і лише один експериментальний факт – температурна залежність критичного поля $H_{cm}(T)$ – дозволяють зробити такий фундаментальний висновок, як наявність впорядкованості у НП стані, хоча поки що і невідомої природи.

3.3. *Теплоємність.* Запишемо ще одну відому термодинамічну формулу:

$$C(T) = T \frac{\partial S^{(en)}}{\partial T}$$

і використаємо вже отримане нами співвідношення:

$$(S_N^{(en)} - S_S^{(en)}) = -\frac{1}{4\pi} H_{cm}(T) \left(\frac{\partial H_{cm}(T)}{\partial T} \right)_R.$$

Продиференціювавши його, маємо:

$$C_S(T) - C_N(T) = \frac{T}{4\pi} \left\{ \left[\frac{\partial H_{cm}(T)}{\partial T} \right]^2 + H_{cm}(T) \frac{\partial^2 H_{cm}(T)}{\partial T^2} \right\}.$$

По-перше, легко довести, що є точка, де $C_S(T) = C_N(T)$ (одночасно – це точка мінімуму різниці $S_N^{(en)} - S_S^{(en)}$). Дійсно, прямо знаходимо:

$$\frac{\partial H_{cm}(T)}{\partial T} = -\frac{2TH_{cm}(0)}{T_c^2}; \quad \frac{\partial^2 H_{cm}(T)}{\partial T^2} = -\frac{2H_{cm}(0)}{T_c^2}.$$

Тепер отримуємо рівняння:

$$C_N(T) - C_S(T) = \frac{T}{4\pi} \left[\frac{4T^2 H_{cm}^2(0)}{T_c^4} - H_{cm}(T) \frac{2H_{cm}(0)}{T_c^2} \right] = 0,$$

розв'язками якого є значення $T = 0$ і $T = T_c / \sqrt{3}$.

При $T = T_c$ поле $H_{cm}(T_c) = 0$; відповідно, різниця

$$C_S(T_c) - C_N(T_c) = \frac{1}{\pi} \frac{H_{cm}^2}{T_c} \text{ зветься формулою Рутгерса.}$$

Вона показує, що, по перше, $C_S(T_c) \neq C_N(T_c)$, або що теплоємність при НП переході змінюється стрибкоподібно, а по-друге, що $C_S(T_c) > C_N(T_c)$.

Хід теплоємності легко зобразити на графіку

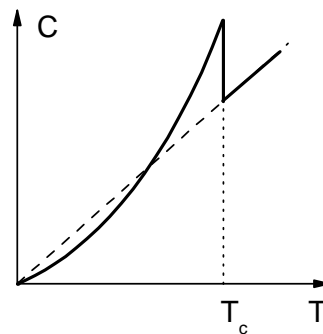


Рис. 3.3

(рис. 3.3). Лінійна поведінка $C_N(T)$ – це просто теплоємність електронів металу, яка $\sim T^*$). Крім того, в області $T \sim T_c$ переходу $C_S(T_c) > C_N(T_c)$, і є точка, у якій $C_S(T) = C_N(T)$, що також впливає з наявності мінімуму у різниці ентропій (що ми вже отримали).

3.4. *Вільна енергія.* З курсу електродинаміки ми знаємо, що коли тіло знаходиться у зовнішньому магнітному полі \mathbf{H}_0 , то всередині тіла магнітне поле задається магнітною індукцією \mathbf{B} . Вона складається з зовнішнього поля та поля струмів, що зветься магнітним моментом \mathbf{M} .

При скінчених температурах основною термодинамічною функцією тіла є вільна енергія $F = U - TS^{(en)}$, мінімум якої відповідає стану рівноваги. Якщо ж тіло поміщене у зовнішнє поле,

*) Електрони в металі утворюють фермі-газ. Поглинати енергію можуть лише ті, що мають можливість для переходів, тобто поблизу енергії Фермі ε_F в шарі $\sim k_B T$. Якщо повне число електронів N_{el} , то поглинаючих $\sim N_{el} k_B T$, а внесок від кожного $(d/2)k_B T$, де d – розмірність простору. Отже їх енергія $\varepsilon_{el} \sim (d/2)k_B T N_{el} k_B T \sim T^2$, а, відповідно, теплоємність $C_{el} = \partial \varepsilon_{el} / \partial T \sim T$. В той же час енергія фононів з густиною $n_{ph}(\mathbf{k})$ і частотою $\omega_{ph}(\mathbf{k}) = v_{ph} k$ має вигляд:

$$\varepsilon_{latt} = \int \omega_{ph}(\mathbf{k}) n_{ph}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = v_{ph} \int \frac{k k^{d-1} dk}{e^{\frac{v_{ph} k}{T}} - 1} \sim T^{d+1} \int \frac{x^d dx}{e^x - 1} \sim T^{d+1},$$

і теплоємність $\sim T^d$, що для звичайних металів з тривимірною ґраткою дає $\sim T^3 (\ll T)$.

його (тіла) вільна енергія змінюється двояко. З одного боку, це енергія $-\frac{\mathbf{H}_0^2}{8\pi}$, що запасена магнітним полем, а з іншого, – це ще і енергія тіла, в якому індукція не дорівнює нулеві.

Тому, коли є поле, необхідно використовувати термодинамічний потенціал Гіббса

$$G = F - R = F - \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}_0}{4\pi},$$

де R – робота, яку виконує поле над тілом.

Як це отримати? Запишемо рівняння Максвелла

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Нехай по тілу течуть струми з густиною \mathbf{j} . Тоді за час Δt поле \mathbf{E} виконає над струмами роботу, яка дорівнює $\delta R = -\Delta t \int \mathbf{E}\mathbf{j}dV$. Як відомо, $\text{rot}\mathbf{H} = (4\pi/c)\mathbf{j}$, звідки для одиничного об'єму знаходимо:

$$\begin{aligned} \delta R &= -\Delta t \frac{c}{4\pi} \int \mathbf{E}\text{rot}\mathbf{H}dV = \Delta t \frac{c}{4\pi} \int \{\text{div}[\mathbf{E}\mathbf{H}] - \mathbf{H}\text{rot}\mathbf{E}\}dV = \\ &= \Delta t \frac{c}{4\pi} \frac{1}{c} \int \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV = \frac{1}{4\pi} \mathbf{H}\mathbf{B}, \end{aligned}$$

де інтеграл від дивергенції дорівнює нулеві, бо потік енергії на нескінченості відсутній.

Лекція 4

4. Деякі підходи до опису надпровідного стану. Ретроспективний погляд

Ми почали з розгляду деяких властивостей НП і побачили їх особливості. Вивчення НП поєднує різні розділи фізики – термодинаміку, електродинаміку, квантову механіку, багато інших. Саме тому теорія НП залишалася не розробленою стільки років. Але теоретики, пропонуючи різні варіанти, не могли зробити те, що від них чекали, бо була невідома причина явища. Першою теорією, яка відповідала хоч на деякі питання, була теорія братів Фріца та Гейнца Лондонів. Як ми побачимо вже скоро, це була теорія, яка шляхом деяких додаткових припущень, що спиралися на експериментальні спостереження, узагальнювала рівняння Максвелла на випадок НП. Проте, чому виникає така поведінка, залишалось незрозумілим.

В дуже нетривіальному припущенні Лондони запропонували поділити всі електрони НП на дві групи – нормальні та надпровідні. Густина n_s надпровідних має залежати від температури T і зменшуватись з її зростанням до нуля при $T = T_c$. Фактично Лондони розвинули *дворідинну модель*, яка

згодом зіграла велику роль при створенні теорії надплинності. Для НП електронів, за думкою Лондонів, опір відсутній, нема також електричного поля, бо у відсутності опору такі електрони мали б дуже сильно прискорюватись.

При цьому, якщо поля нема, то в стаціонарних умовах електрони нормальної рідини, або **нормальної компоненти**, теж залишаються нерухомими. Якщо ж поле змінне, то рухатися можуть обидва колективи. Тоді реальну картину НП можна уявити схемою з паралельним з'єднанням провідників, причому ідеальний провідник має індуктивність, яка забезпечує інерціальні властивості НП електронів.

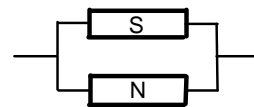


Рис. 4.1

Незважаючи на певні успіхи, теорія Лондонів в той же час не могла дати пояснення одному дуже неприємному для себе факту. З неї випливало, що енергія σ_{NS} границі, що розділяє області нормальної і НП областей (доменів) у проміжному стані, завжди від'ємна. Так відбувалось навіть для циліндра у поздовжньому магнітному полі, який мав би розшаруватись. Проте експерименти до цього не приводили. Подібне спостерігалось лише для тіл іншої форми, а крім того, розміри шарів виявлялись досить великими.

Протиріччя було зняте В.Л. Гінзбургом і Л.Д. Ландау, які також побудували феноменологічну теорію, але включивши в неї квантово-механічні ефекти. Як вони це зробили, ми вивчатимемо далі.

Скажу лише: їм вдалося врахувати, що електрони не є класичними об'єктами і мають описуватись хвильовою функцією так, що густина НП електронів $n_s \sim |\Psi|^2$. При цьому квадрат модуля цієї функції повинен дорівнювати нулю на NS -границі та бути рівним своєму максимальному значенню n_s всередині НП області. Це, в свою чергу, означає, що $\Psi \rightarrow \Psi(\mathbf{r})$ і що величина $\nabla\Psi \neq 0$, яка через $|\nabla\Psi|^2$ визначає кінетичну енергію НП колективу. І оскільки $\nabla\Psi$ найбільш актуальний саме в області міждоменної NS -границі, остання буде мати додаткову позитивну (кінетичну) енергію, як завжди, $\sim (\nabla\Psi)^2$, що може зняти згаданий недолік теорії Лондонів, дозволивши отримати бажаний і фізично зрозумілий результат $\sigma_{NS} > 0$.

Теорію Гінзбурга і Ландау ми більш детально будемо розбирати пізніше, але вже зараз треба мати на увазі, що вони не тільки вперше застосували до НП квантову механіку, але й зробили суттєвий крок, що полягав у глибокому припущенні про залежність багатоелектронної хвильової функції Ψ від єдиної координати \mathbf{r} , а не координат $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_{N_e}$ всіх електронів. Тобто вони (Гінзбург і Ландау) використали уявлення про когерентну колективну поведінку великої кількості окремих частинок, що було і нетривіально, і дозволило передбачити нові ефекти. Недарма ця робота вважається однією з найвидатніших у фізиці ХХ-го століття і була відмічена Нобелівською премією 2003 року.

Варто заради наукової та історичної справедливості сказати і про єдину помилку, що допустили Ландау і Гінзбург. Вона стосується заряду частинок, який в теорії Гінзбурга-Ландау позначався e^* . Хоча Гінзбург вважав його ефективним, Ландау заперечив, і в їх роботі з'явилася фраза, що “немає причин вважати цей заряд відмінним від заряду електрона”.

Подальший важливий розвиток теорія Гінзбурга-Ландау, як її всі називають, отримала в роботах учня Ландау і теж Нобелівського лауреата О.О. Абрикосова, який припустив, що і від'ємна $\sigma_{NS} < 0$ може мати фізичний зміст і фактично передбачив і описав явища, що спостерігаються у НП-II, зокрема, вихорові утворення, через які магнітне поле може проникати в НП до дуже високих своїх значень, зберігаючи при цьому НП стан. Історична правда вимагає також нагадати, що задовго до робіт Абрикосова видатний харківський експериментатор Л.В. Шубніков спостерігав і описав явища, які притаманні НП-II, але не зміг закінчити свої дослідження внаслідок арешту і страти сталінським режимом.

Як і будь-який феноменологічний підхід, теорія Гінзбурга-Ландау не давала відповіді на основне питання, чому і за яких умов в металах утворюється НП колектив електронів. Таке становище зберігалось до початку 50-х років минулого сторіччя, коли англійці Е. Максвелл і К. Рейнольдс відкрили так званий *ізотопічний ефект*, який полягає в існуванні у кожному НП співвідношення

$$T_c \sqrt{M} = \text{const}$$

між критичною температурою і масою ізотопів іонів, що утворюють кристалічну ґратку.

Що визначав цей результат? Те, наприклад, що стан електронів якимось чином залежить від ґратки, хоча багато років до того вважалося, що ґратка є лише джерелом опору. Крім того, що взаємодія електронів з ґраткою теж має визначати саме явище НП. Ізотоп-ефект став тим ключовим поштовхом, який просунув вглиб розуміння НП. Головний крок зробили американські дослідники Дж. Бардін, Л. Купер і Р. Шріффер, які розвинули теорію електронів, що через фонони ґратки взаємодіють між собою. Роль останньої двояка – створення джерел розсіяння і служити причиною об'єднання електронів у зв'язані **двійки** (або бозонні за їх спіном **пари**), які можуть конденсуватись в одному стані, утворюючи **когерентний конденсат**.

Суть полягала у тому, що поблизу поверхні Фермі при наявності притягання між електронами вони завжди об'єднуються в пари, яким би слабким не був потенціал притягання. Це зветься **феноменом Купера**. Тим самим в системі з'являються бозони, які можуть стати надплинними. Теорія надплинності на той час вже була непогано розвинута, що сприяло досить швидкому розвитку теорії на базі підходу БКШ.

Думаю, має сенс нагадати, що таке критерій надплинності Ландау.

Хай є капіляр, по якому тече рідина (рис. 4.2). Її швидкість v , а енергія елемента об'єму $Mv^2/2$. Щоб



Рис. 4.2

записати критерій, треба знати, як перетворюється енергія при переході від однієї системи до іншої.

Дійсно, нехай є частинка з масою m , що рухається з швидкістю \mathbf{v} в лабораторній системі. Енергія частинки $\mathcal{E} = m\mathbf{v}^2/2$. Перейдемо в систему, яка рухається з швидкістю \mathbf{u} так, що $\mathbf{v} = \mathbf{v}_* + \mathbf{u}$ (при цьому $v_* = v - u < v$). В новій системі

$$\mathcal{E}_* = \frac{m\mathbf{v}_*^2}{2} = \frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2} = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} - \frac{2m\mathbf{v}\mathbf{u}}{2} + \frac{m\mathbf{u}^2}{2} = \mathcal{E} + \frac{m\mathbf{u}^2}{2} - \mathbf{p}\mathbf{v}.$$

Повернемося до рідини і перейдемо до системи координат, де рідина покоїться (рис. 4.3). Тоді в цій системі $\mathcal{E} = 0$. Але рухаються стінки, завдяки чому в рідині може народитися збудження з енергією $\mathcal{E}(\mathbf{p})$, де \mathbf{p} – імпульс збудження. Це означає, що імпульс елемента об'єму також \mathbf{p} . Якщо повернутися в систему покою стінок, то можемо зразу написати

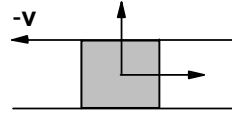


Рис. 4.3

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbf{p}) + \frac{M\mathbf{v}^2}{2} + \mathbf{p}\mathbf{v},$$

де тепер \mathbf{u} – це фактично $-\mathbf{v}$, а $M\mathbf{v}^2/2$ – енергія елемента об'єму. Таким чином, в системі координат нерухомих стінок, енергія складається з енергій елемента, збудження і члена, який є перехідним між збудженням и тим, що воно народилося в середовищі, що рухається.

Коли поява збудження внаслідок тертя рідини об стінки буде вигідною? Зрозуміло, що тоді, коли

енергія системи із збудженням буде нижчою, ніж без нього. Ця умова визначається очевидною рівністю

$$\varepsilon(\mathbf{p}) + \mathbf{p}\mathbf{v} < 0.$$

Найбільш сприятлива ситуація складається, якщо $\mathbf{p}\mathbf{v} < 0$, або напрями руху елемента і збудження протилежні. З цього випливає, що швидкість має задовольняти умові

$$v > \frac{\varepsilon(\mathbf{p})}{p}.$$

Іншою мовою, якщо швидкість руху рідини більша хоча б за мінімальне значення відношення $\varepsilon(\mathbf{p})/p$, в ній будуть спонтанно народжуватись збудження, а вона сама гальмуватись.

Перевіримо цей критерій для різних дисперсій на прикладі спектру загального вигляду, а саме:

$$\varepsilon(\mathbf{p}) \sim p^n,$$

де $n=1, 2$. Тоді для $\varepsilon(\mathbf{p}) = c_{ex}p$, де c_{ex} – швидкість збудження, такою швидкістю буде саме $v = c_{ex}$, і при швидкості рідини $v < c_{ex}$, в останній не будуть народжуватись збудження, тобто вона буде рухатись без тертя, а відповідний рух буде таким, який ми називаємо *надплинним*.

Нехай тепер дисперсія має звичайний вигляд $\varepsilon(\mathbf{p}) \sim p^2$. Звідси маємо $\varepsilon(\mathbf{p})/p = p$ і $\varepsilon(\mathbf{p})/p|_{\min} = p_{\min} = 0$. Тобто для спектру з квадратичним законом дисперсії при будь-якій швидкості будуть

народжуватись елементарні збудження. Це ж буде виконуватись і для усіх $n > 2$.

Отже, НП – це надплинність куперівських пар. Як показано в теорії БКШ, спектр електронів у НП має форму $\varepsilon(\mathbf{p}) = \sqrt{v_F^2 p^2 + \Delta_S^2}$, де v_F – швидкість Фермі, а Δ_S – так звана НП щілина, фізичний смисл якої ми розглядатимемо пізніше. Видно, що $\varepsilon(\mathbf{p})/p$ досягає мінімуму, коли $v \leq v_F$, або фермівська швидкість є граничною для НП конденсату.

5. Лінійна електродинаміка надпровідників. Рівняння Лондонів

5.1. *Перше рівняння.* Розглянемо підхід, який був сформульований братами Лондонами. Вони поставили задачу про опис поведінки НП, що знаходиться у зовнішньому електромагнітному полі. Відповідно до їх міркувань, припустимо, що всі вільні електрони металу розбиті на дві окремі групи: НП електрони з густиною n_S та нормальні електрони з густиною n_N . Зрозуміло, що повна густина n_f ферміонів (які можуть бути і електронами $f = e$, і дірками $f = h$) не що інше, як $n_f = n_N + n_S$. Будемо також припускати, що зовнішні поля настільки малі, що ніяк не відбиваються на величині n_f , тобто поле не генерує нових носіїв в системі.

Щоб вивести рівняння Лондонів, запишемо спочатку рівняння руху одиничного об'єму НП

електронів, які знаходяться в електричному полі \mathbf{E} . Тоді згідно з другим законом Ньютона $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, маємо:

$$m_f \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = e\mathbf{E},$$

або, що теж саме,

$$n_s m_f \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = n_s e \mathbf{E}.$$

В цих виразах m_f і e – маса і заряд електрона, \mathbf{v}_s – швидкість НП (або надплинної) компоненти. Введемо густину надструму

$$\mathbf{j}_s = n_s e \mathbf{v}_s;$$

використовуючи її, прямо приходимо до рівняння:

$$\frac{d}{dt} n_s e \mathbf{v}_s = \frac{n_s e^2}{m_f} \mathbf{E},$$

яке прийнято записувати у вигляді:

$$\frac{m_f}{n_s e^2} \frac{d}{dt} \mathbf{j}_s \equiv \frac{d}{dt} \Lambda \mathbf{j}_s = \mathbf{E},$$

де введено позначення $\Lambda \equiv m_f / n_s e^2$.

Останнє рівняння і є першим рівнянням Лондонів. Воно гласить, що в стаціонарному стані, тобто коли $d\mathbf{j}_s / dt = 0$, електричне поле у НП дорівнює нулеві, або відсутнє. Раніше ми згадували про це, спираючись на фізичні міркування. Це ж був важливий і досить строгий теоретичний результат.

Лекція 5

Рівняння Лондонів

Ми продовжуємо вивчати рівняння Лондонів. В попередньому розділі було отримане перше з цих рівнянь.

5.2. *Друге рівняння Лондонів.* Воно задає зв'язок між надструмом і магнітним полем. Оскільки в загальному випадку магнітне поле і струм взаємозалежні, треба знайти рівняння, яке таку залежність встановлювало б для НП. В той же час, спираючись на експеримент, ми встановили, що магнітне поле у НП не проникає (ефект Мейсснера-Оксенфельда). Проте ми зазначали, що поля нема всередині НП, бо воно екранується (або компенсується) поверхневими надструмами. Тому говорити про повну відсутність поля можна лише у певному наближенні, нехтуючи поверхнею, яка, як фізичне середовище має скінчену товщину. Йдеться саме про приповерхневий шар (зазвичай він складає $\sim 10^2-10^3 \text{ \AA}$), який і є тим середовищем, де надструм визначається полем і навпаки.

Нехай, як і раніше, вільна енергія НП без поля є $F_S(0)$. Густина енергії електронів, що рухаються, можна представити у вигляді:

$$w_{kin} = \frac{m_f \mathbf{v}_S^2}{2} n_S = \frac{m_f e^2 \mathbf{v}_S^2}{2e^2} \frac{n_S^2}{n_S} = \frac{m_f}{2e^2 n_S} \mathbf{j}_S^2 \equiv \frac{\Lambda}{2} \mathbf{j}_S^2.$$

Іншого току у НП нема, тому рівняння Максвелла для НП приймає форму:

$$rot\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_S,$$

за допомогою якої можна переписати w_{kin} . Але спочатку з'ясуємо, чому Лондони використали рівняння Максвелла з надструмом, хоча повинен бути повний струм. Справа в тому, що як ми бачили з першого рівняння, в стаціонарних умовах у НП нема електричного поля, тому нормальні електрони рухатися, а значить – створювати вихорові магнітні поля неспроможні. В цьому полягає дотепність Лондонів, які записали рівняння Максвелла саме в такий спосіб, зрозумівши вирішальну роль НП колективу. Повертаючись до w_{kin} , знаходимо:

$$w_{kin} = \frac{c^2}{16\pi^2} \frac{\Lambda}{2} (rot\mathbf{H})^2 = \frac{c^2 m_f}{2 \cdot 16\pi^2 e^2 n_S} (rot\mathbf{H})^2 \equiv \frac{\lambda_L^2}{8\pi} (rot\mathbf{H})^2$$

де введена трохи інша константа:

$$\lambda_L^2 \equiv \frac{m_f c^2}{4\pi e^2 n_S} = \frac{c^2}{4\pi} \Lambda.$$

Нагадаємо, що $\Lambda = m_f / e^2 n_S$.

З іншого боку, густина енергії магнітного поля є $\mathbf{H}^2 / 8\pi$, тому

$$F_S(\mathbf{H}) = F_S(0) + \int \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} dV + \int w_{kin} dV = F_S(0) + \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{H}^2 + \lambda_L^2 \text{rot}^2 \mathbf{H}) dV$$

Це тільки повна вільна енергія, а її мінімум має відповідати реальному розподілу поля. Знайдемо цей мінімум, припустивши, що поле зазнає малу варіацію так, що

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{r}) + \delta\mathbf{H}(\mathbf{r}).$$

Тоді

$$\delta F_S(\mathbf{H}) = \frac{1}{8\pi} \int (2\mathbf{H}\delta\mathbf{H} + 2\text{rot}\mathbf{H}\text{rot}\delta\mathbf{H}) dV.$$

Використаємо векторну тотожність

$$\text{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{b}\text{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\text{rot}\mathbf{b},$$

що дає

$$\text{div}[\text{rot}\mathbf{H}, \delta\mathbf{H}] = \delta\mathbf{H}\text{rot}\text{rot}\mathbf{H} - \text{rot}\mathbf{H}\text{rot}\delta\mathbf{H},$$

звідки

$$\text{rot}\mathbf{H}\text{rot}\delta\mathbf{H} = \text{rot}\text{rot}\mathbf{H}\delta\mathbf{H} - \text{div}[\text{rot}\mathbf{H}, \delta\mathbf{H}].$$

Підставимо:

$$\delta F_S(\mathbf{H}) = \frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{H} + \lambda_L^2 \text{rot}\text{rot}\mathbf{H}) \delta\mathbf{H} dV - \frac{\lambda_L^2}{4\pi} \int \text{div}[\text{rot}\mathbf{H}, \delta\mathbf{H}] dV.$$

До другого інтегралу застосуємо теорему Стокса:

$$\int \text{div}[\text{rot}\mathbf{H}, \delta\mathbf{H}] dV = \int_{sur} [\text{rot}\mathbf{H}, \delta\mathbf{H}] d\mathbf{S},$$

отримавши замість об'ємного поверхневий інтеграл. Оскільки при цьому поле на поверхні – це зовнішнє

поле, тобто є заданим і для нього $\delta\mathbf{H} = 0$, цей інтеграл не дає внеску в мінімальне значення вільної енергії. Таким чином, умова мінімуму приймає остаточний вигляд:

$$\int (\mathbf{H} + \lambda_L^2 \text{rot rot } \mathbf{H}) \delta\mathbf{H} dV = 0.$$

Як завжди, варіація $\delta\mathbf{H}$ є малою, але довільною, тому друге рівняння Лондонів є наступним:

$$\mathbf{H} + \lambda_L^2 \text{rot rot } \mathbf{H} = 0.$$

Його можна трохи спростити. По-перше, з рівняння $\text{rot } \mathbf{H} = (4\pi/c)\mathbf{j}_s$ маємо $\text{div } \mathbf{j}_s = 0$. По-друге, з нього ж:

$$\mathbf{H} + \lambda_L^2 \text{rot } \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s = 0,$$

або

$$\text{rot } \mathbf{A} + \frac{4\pi}{c} \lambda_L^2 \text{rot } \mathbf{j}_s = 0,$$

де \mathbf{A} – векторний потенціал. Звідси приходимо до зв'язку:

$$\mathbf{j}_s = -\frac{c}{4\pi\lambda_L^2} \mathbf{A} \equiv -\frac{1}{c\Lambda} \mathbf{A},$$

а також $\text{div } \mathbf{j}_s = \text{div } \mathbf{A} = 0$, що свідчить, що лінії надструму неперервні. (Ще раз нагадаємо: $\Lambda = 4\pi\lambda_L^2/c^2$; $\lambda_L^2 = m_f c^2 / 4\pi e^2 n_s$.)

6. Лондонівська глибина проникнення

Дослідимо, як за допомогою рівнянь Лондонів, можна знайти, чи проникає зовнішнє магнітне поле у НП. Для цього вважатимемо, що зразок займає область простору $x > 0$. Зовнішнє поле при цьому прикладене вздовж осі z . Тоді з другого рівняння

$$\mathbf{H}(x) + \lambda_L^2 \text{rotrot} \mathbf{H}(x) = 0$$

маємо (якщо врахуємо, що $\text{rotrota} = \nabla \text{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}$, а також, що $\text{div} \mathbf{H} = 0$):

$$\mathbf{H}(x) - \lambda_L^2 \Delta \mathbf{H}(x) = 0,$$

чому в обраній геометрії відповідає рівняння:

$$\frac{d^2 H_z(x)}{dx^2} - \frac{1}{\lambda_L^2} H_z(x) = 0.$$

Граничні умови для нього: $H_z(0) = H_0; H_z(\infty) = 0$, що відповідає ефекту Мейсснера-Оксенфельда, за яким поля у НП нема.

Нехай розв'язок останнього рівняння має вигляд

$$H_z(x) = H_z(0) \exp\left(-\frac{x}{a}\right).$$

Тоді

$$H_z'(x) = H_z(0) \exp\left(-\frac{x}{a}\right) \frac{1}{a}; \quad H_z''(x) = H_z(0) \exp\left(-\frac{x}{a}\right) \frac{1}{a^2}.$$

З рівняння знаходимо:

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\lambda_L^2} = 0,$$

або $a = \pm \lambda_L$. Загальний вигляд розв'язку

$$H(x) = H_z^{(+)} e^{x/\lambda_L} + H_z^{(-)} e^{-x/\lambda_L}.$$

З граничних умов визначаємо невідомі коефіцієнти:

$$H_z(0) = H_z^{(+)} + H_z^{(-)} = H_0;$$

$$H_z(\infty) = H_z^{(+)} e^{\infty/\lambda} + H_z^{(-)} e^{-\infty/\lambda} = 0.$$

Це дає

$$H_z^{(+)} + H_z^{(-)} = H_0; \quad H_z^{(+)} = 0;$$

$$H_z^{(+)} = 0. \quad H_z^{(-)} = H_0.$$

а отже –

$$H_z(x) = H_0 e^{-x/\lambda_L}.$$

Таким чином, ми отримали, що поле проникає у НП на глибину (див. рис. 5.1)

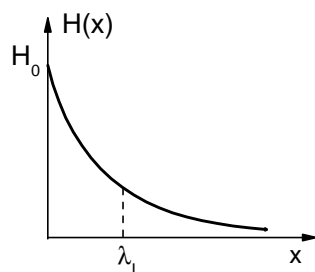


Рис.5.1

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m_f c^2}{4\pi e^2 n_s}},$$

яка так і зветься – **лондонівською глибиною проникнення** магнітного поля.

Продемонструємо, що на таку ж глибину проникає і надструм, що фактично тече по поверхні. Дійсно, як ми говорили вище,

$$\mathbf{j}_s = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \mathbf{H}.$$

По проєкціях з операції *rot* :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & H_z(x) \end{vmatrix}; \quad j_{sx} = \frac{c}{4\pi} \frac{\partial H_z(x)}{\partial y} = 0;$$

$$j_{sy} = \frac{c}{4\pi} \left[-\frac{\partial H_z(x)}{\partial x} \right] = -\frac{c}{4\pi} H_0 e^{-x/\lambda_L} = \frac{cH_0}{4\pi\lambda} e^{-x/\lambda_L}; \quad j_{sz} = 0.$$

При цьому λ_L – залежить від n_s , а $n_s = n_s(T)$.
Експериментально встановлена формула

$$\lambda_L(T) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4}}.$$

Оцінимо величину глибини проникнення. При $T = 0$ величина n_s повинна відповідати густині електронів в металі, так що $n_s(0) \approx 10^{22} \text{ cm}^{-3}$. Решта величин – це відомі константи:

$$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm} / \text{c}; e = 4.8 \cdot 10^{-10} \text{ un.CGSE}, m_f \equiv m_e = 10^{-27} \text{ g}.$$

Підставимо до $\lambda_L(0) = \sqrt{m_f c / 4\pi n_s(0) e^2}$, звідки

$$\begin{aligned} \lambda_L(0) &= \sqrt{\frac{10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{20}}{4 \cdot 3.14 \cdot 4.8^2 \cdot 10^{-20} \cdot 10^{22}}} \cong \sqrt{\frac{10^{-6}}{3.14 \cdot 10^4}} \cong \\ &\cong \frac{10^{-5}}{\sqrt{3}} \text{ cm} = \frac{1000 \text{ \AA}}{\sqrt{3}} \approx 600 \text{ \AA}. \end{aligned}$$

Порівнюємо:

	Al	Cd	Hg	In	Nb	Pb	Sn	Tl
$\lambda_L, \text{Å}$	500	1300	380-450	640	470	390	510	920

Таким чином, по порядку величини формула для $\lambda_L(T)$ правильно дає відповідь на питання про “довжину” лондонівської глибини проникнення.

7. Нелокальна електродинаміка надпровідників

До цього моменту ми розглянули такий зв'язок струму і поля, який зветься локальним. Дійсно, рівняння Лондонів $-c\Delta\mathbf{j}_S(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ пов'язує густину надструму з векторним потенціалом в одній і тій же точці. По суті це свідчить, що розмір носія менше, ніж характерна довжина λ_L , на якій відбувається зміна магнітних величин, зокрема, векторного потенціалу. Величину глибини проникнення ми щойно оцінили. А що таке розмір носія? Якщо б носіями в НП були електрони (чи дірки), то вони, безумовно, вважалися б точковими об'єктами. Але, як ми вже говорили, у НП елементарними носіями виявляються пари, про розмір яких вже можна говорити. Прийнято розмір пар у НП називати *кореляційною довжиною* і позначати її $\xi_S(T)$. В звичайних НП металах ця довжина складає $\xi_S(0) \sim 10^3 \div 10^4 \text{ Å}$, проте у ВТНП вона на 2-3 порядки менша.

Якщо порівняти кореляційну довжину з глибиною проникнення, то видно, що в переважній більшості випадків (практично майже завжди) $\xi_S(0) > \lambda_L(0)$ (або

$\xi_S > \lambda_L$). А це вже показує, що на довжинах $\sim \xi_S$ поле змінюється суттєво і що локальний зв'язок в принципі неможливий.

Нелокальне узагальнення теорії Лондонів було запропоноване англійським фізиком А. Піппардом (між іншим, вчителем Джозефсона) у 1953 р. Він припустив, що зв'язок між полем і струмом має інтегральний вигляд, а саме:

$$\mathbf{j}_S(\mathbf{r}) = \int \hat{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{A}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

де \hat{Q} – оператор, що діє на вектор \mathbf{A} . Радіус такої дії оператора $\hat{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ обирається порядку ξ_S , тобто $\hat{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ є відмінним від нуля, лише коли $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \leq \xi_S$. Так відбувається усереднення при створенні магнітним полем надструму в точці \mathbf{r} завдяки існуванню векторного потенціалу в скінченій області радіуса $\sim \xi_S$, або, що те ж саме, враховується розмір (також $\sim \xi_S$) носія і усереднення його (або відповідного надструму) нелокального зв'язку з магнітним полем. Якщо ж $\xi_S \rightarrow 0$, то необхідно вважати, що $\hat{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rightarrow \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.

Піппард обрав ядро інтегрального зв'язку в такому вигляді:

$$\hat{Q}\mathbf{A} = -\frac{3}{4\pi} \frac{n_S e^2}{m_f c \xi_S} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^4} (\mathbf{A}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{\xi_S}}.$$

В деякому наближенні ця формула нагадує таку, що можна отримати з закону Біо-Савара-Лапласа. Піппард також показав, що закон проникнення поля в НП

відрізняється від експоненти. Проте глибина проникнення вводиться і в цьому випадку у відповідності до означення:

$$\lambda_p = \frac{1}{H_0} \int_0^{\infty} H(x) dx,$$

яке переходить у тотожність $\lambda_p \equiv \lambda_L$, коли $H(x) \sim \exp(-x/\lambda_L)$, що може легко перевірити кожний студент.

Нелокальні задачі досить складні, і в нас немає наміру їх детально розбирати, проте на якісному рівні продемонструємо, як можна отримувати правильні відповіді. Припустимо для цього, що закон проникнення можна апроксимувати експонентою з піппардівською глибиною λ_p . Отже, нехай маємо заряджену частинку з розміром ξ_s . За умовою $\xi_s > \lambda_p$, так що поле проникає в глибину лише на частину її розміру, тобто тільки доля $\sim \lambda_p/\xi_s$ цієї частинки відчуває присутність векторного потенціалу \mathbf{A} . Відповідно, і густина струму має бути у таке ж число λ_p/ξ_s раз меншою. Тоді можна записати

$$\mathbf{j}_s = -\frac{c}{4\pi\lambda_L^2} \frac{\lambda_p}{\xi_s} \mathbf{A} \equiv -\frac{c}{4\pi\lambda_p^2} \mathbf{A},$$

звідки знаходимо:

$$\frac{\lambda_p}{\lambda_L^2 \xi_s} = \frac{1}{\lambda_p^2},$$

що дає $\lambda_p \cong \sqrt[3]{\lambda_L^2 \xi_S}$, причому лондонівська глибина λ_L залишається такою ж. Тоді з умови $\lambda_L \ll \xi_S$ отримуємо цікаве співвідношення:

$$\lambda_L \ll \lambda_p \ll \xi_S.$$

Іншою мовою, введена ефективна глибина проникнення λ_p збільшується (тобто поле проникає глибше), але при цьому можна користуватися локальними рівняннями. Виписана умова досить жорстка і виконується лише по порядку величини. Її важко обґрунтувати в рамках більш строгого розгляду. З іншого боку, при збільшенні температури зростає і $\lambda_L(T)$, тому завжди знайдеться область значень T , де локальний зв'язок відновлюється і всі локальні співвідношення стають справедливими.

Крім того, практично всі НП – це сплави, де довжина вільного пробігу носіїв $l_f \ll \xi_S$. При цьому внаслідок процесів розсіяння з розвалом пар їх кількість та їх розмір стають динамічними змінними, а роль характерної довжини грає l_f (брудні метали). Квантова теорія показує, що в цьому випадку $\lambda_L \rightarrow \lambda_L \sqrt{\xi_S / l_f} \gg \lambda_L$, бо $\xi_S \gg l_f$. Локальні співвідношення знову стають справедливими, а НП – лондонівськими з точки зору їх адекватного опису. Зазначимо, нарешті, що ВТНП сполуки є саме такими.

Лекція 6

8. Квантове узагальнення рівнянь Лондонів

8.1. *Квантовий підхід.* Ми вже багато разів повторювали, що фундаментальними носіями струму у НП є пари, які називаються куперівськими. В непоганому наближенні вони виявляються бозонами, формуючи конденсат з колективу, що збирається на основному рівні. Хвильова функція конденсату в одночастинковому наближенні може бути записана у формі

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{n_s}{2}} e^{i\theta(\mathbf{r})},$$

де нормування враховує, що $n_s / 2$ – це число пар, а n_s – густина електронів, що входять до числа надпровідних.

Якщо частинка масою $2m_f$ і зарядом $2e$ рухається в магнітному полі, то її імпульс має вигляд

$$\hbar \nabla \theta = 2m_f \mathbf{v}_s + \frac{2e}{c} \mathbf{A}.$$

Спробуємо це довести. Дійсно, без поля густина потоку частинок має вигляд:

$$\frac{i\hbar}{4m_f} (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi) = \frac{n_s}{2} \mathbf{v}_s.$$

Тепер використаємо явний вид хвильової функції:

$$\frac{i\hbar}{4m_f} \frac{n_s}{2} \{ e^{i\theta(\mathbf{r})} [-i\nabla\theta(\mathbf{r})] e^{-i\theta(\mathbf{r})} - e^{-i\theta(\mathbf{r})} [i\nabla\theta(\mathbf{r})] e^{i\theta(\mathbf{r})} \} = \frac{n_s}{2} \mathbf{v}_s,$$

звідки

$$\hbar\nabla\theta = 2m_f \mathbf{v}_s.$$

А це ні що інше, ніж імпульс частинки масою $2m_f$ в надпровідному потоці: $2m_f \mathbf{v}_s = \hbar\nabla\theta \equiv \mathbf{p}_s$. При цьому, як відомо, повний, або узагальнений, імпульс частинки – це сума імпульсу \mathbf{p}_s та $(2e/c)\mathbf{A}$. В результаті

$$\mathbf{p}_s \rightarrow \mathbf{p}_s + \frac{2e}{c} \mathbf{A} = 2m_f \mathbf{v}_s + \frac{2e}{c} \mathbf{A} = \hbar\nabla\theta$$

і

$$\hbar\nabla\theta - \frac{2e}{c} \mathbf{A} = 2m_f \mathbf{v}_s,$$

або саме те, що ми записали раніше. Тепер, використовуючи означення

$$\mathbf{j}_s = n_s e \mathbf{v}_s,$$

отримуємо вираз для швидкості $\mathbf{v}_s = \mathbf{j}_s / en_s$ та перепишемо вираз для імпульсу:

$$\frac{2m_f}{en_s} \mathbf{j}_s = \hbar\nabla\theta - \frac{2e}{c} \mathbf{A}.$$

Це дає можливість переписати і вираз для надструму:

$$\mathbf{j}_s = \frac{\hbar en_s}{2m_f} \nabla\theta - \frac{en_s}{m_f c} \mathbf{A} = \frac{e^2 n_s}{m_f c} \left(\frac{\hbar c}{2e} \nabla\theta - \mathbf{A} \right) \equiv \frac{1}{c\Lambda} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla\theta - \mathbf{A} \right),$$

де ми використали вже нам відомі означення:
 $\Lambda = m_f / e^2 n_s$ та $\Phi_0 = \pi \hbar c / e$.

8.2. *Квантування магнітного потоку.* Розглянемо дуже цікавий та важливий для технічних застосувань – інтерференційних приладів, зокрема, – ефект квантування магнітного потоку в НП.

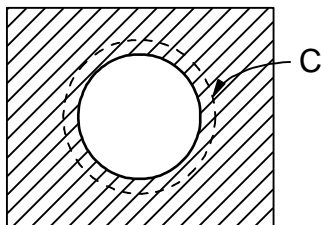


Рис. 6.1

Нехай маємо НП (рис. 6.1) з циліндричною порожниною. Нехай також зовнішнє поле \mathbf{H}_0 паралельно твірній порожнини. Якщо температуру від значень $T > T_c$ знизити до значень $T < T_c$, то виникне поверхневий струм, а в порожнині *заморозиться*, як прийнято говорити, магнітний потік. Розрахуємо його.

Для цього розглянемо контур C на відстані $\gg \lambda_L$ від краю порожнини, де надструм $\mathbf{j}_s = 0$. Це, в свою чергу, свідчить (див. рівняння), що $[(\Phi_0 / 2\pi)\nabla\theta - \mathbf{A}] = 0$. Проінтегруємо:

$$\frac{\Phi_0}{2\pi} \oint_C \nabla\theta \, d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{A} \, d\mathbf{l}.$$

Але правий контурний інтеграл можна перетворити на поверхневий:

$$\oint_C \mathbf{A} \, d\mathbf{l} = \int_{sur} \text{rot} \mathbf{A} \, d\mathbf{S} = \int_{sur} \mathbf{H} \, d\mathbf{S} = \Phi.$$

Видно, таким чином, що $(\Phi_0/2\pi)\oint \nabla\theta d\mathbf{l}$ – це просто повний потік, який захвачується контуром C , або порожниною.

Оскільки θ є фазою хвильової функції, то скільки б ми не обходили контур, якщо $\nabla\theta \cong d\theta/d\varphi$, ми тільки наращуємо фазу. З вимоги однозначності цієї функції відповідний приріст не може бути відмінним від $2\pi n$, де n – ціле число 0, 1, 2... Отже, ми приходимо до висновку, що захвачений потік задовольняє критерію захвату цілого числа квантів потоку:

$$\int_C \nabla\theta d\mathbf{l} = 2\pi n,$$

або $\Phi = n\Phi_0$.

Раніше той же результат ми отримали з умови квантування орбіт частинок, що рухаються поблизу поверхні порожнини. Експеримент, що був проведений у 1961 р., блискуче підтвердив цілочисельність потоку, що захоплюється порожниною. Між іншим, Ф. Лондон також передбачив цей ефект, але “помилився” з зарядом, взявши e , а не $2e$.

8.3. *Особливі випадки квантування.* Хоча отриманий висновок абсолютно справедливий, існують випадки, коли цілочисельність захвату начебто порушується. Розглянемо одну з таких ситуацій.

Нехай маємо тонку діелектричну нитку D радіусу R (рис. 6.2), а на ній тонкий шар НП матеріалу, причому товщина шару $d \ll \lambda_L$ (в принципі, це може бути і тонкий НП циліндр з повітрям всередині). Нехай також є магнітне поле H_0 , паралельно до осі нитки (циліндру). Тепер опустимо температуру нижче критичної. Виникає питання, а який потік захопиться НП шаром (циліндром)?

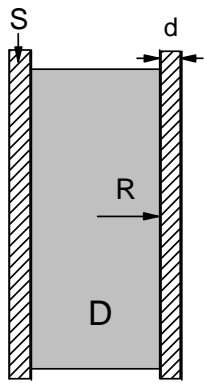


Рис. 6.2

Оскільки, як зазначено, виконується нерівність $d \ll \lambda_L$, можна вважати, що з точністю до членів порядку d/λ_L струм в НП шарі (або плівці) є однорідним, тому інтегрування (див. рівняння для надструму) можна провести точно:

$$c\Lambda \oint_c \mathbf{j}_S d\mathbf{l} = \frac{\Phi_0}{2\pi c} \oint_c \nabla \theta d\mathbf{l} - \oint_c \mathbf{A} d\mathbf{l} \rightarrow c\Lambda j_S \cdot 2\pi R = \Phi_0 n - \Phi,$$

звідки отримуємо:

$$\Phi = -2\pi R c \Lambda j_S + \Phi_0 n = -\frac{2\pi R c m_f}{e^2 n_s} j_S + \Phi_0 n.$$

З іншого боку, в цю формулу входить величина j_S , яку треба зв'язати з полем. Вони дійсно взаємозалежні:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_S.$$

Тепер, враховуючи малу товщину шару і заміняючи похідну, що визначає операцію *rot*, на H_0/d , отримуємо, що має місце співвідношення:

$$H_0 = \frac{4\pi}{c} j_s d,$$

і тим самим магнітний потік

$$\Phi = \pi R^2 H_0 = (4\pi^2 R^2 d / c) j_s,$$

звідки

$$j_s = \frac{c}{4\pi^2 R^2 d} \Phi.$$

Підставимо останній вираз у формулу для потоку:

$$\Phi = \frac{2\pi R c m_f}{e^2 n_s} \frac{c}{4\pi^2 R^2 d} \Phi + \Phi_0 n \rightarrow \left(1 + \frac{m_f c^2}{2\pi e^2 n_s} \frac{1}{Rd}\right) \Phi = \Phi_0 n.$$

В результаті, магнітний потік, що захоплюється, є

$$\Phi = \frac{\Phi_0 n}{\left(1 + \frac{2\lambda_L^2}{Rd}\right)}, \quad \lambda_L \equiv \frac{m_f c^2}{4\pi e^2 n_s}.$$

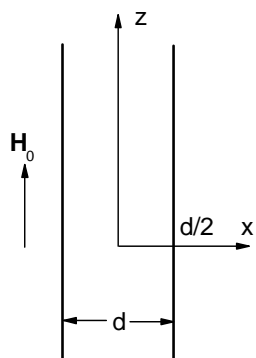
Видно, що якщо $Rd \gg \lambda_L^2$, то $\Phi \rightarrow \Phi_0 n$, тобто захоплення в циліндрі, навіть залишаючись цілочисельним, відбувається так, начебто квант ефективно зменшується. Можна також відзначити, що цей ефективний квант не є фундаментальною величиною,

бо залежить не тільки від параметрів типу R або d , але й (через глибину λ_L) від температури.

9. Розподіл поля в найпростіших конфігураціях надпровідників

9.1. *Пластинка у паралельному полі.* Почнемо з випадку, коли нескінченна пластинка товщиною d розташована у зовнішньому однорідному магнітному полі \mathbf{H}_0 , паралельному поверхні пластини (рис. 6.3).

Нехай площина $x=0$ проходить по центру пластини, а поверхні співпадають з площинами $\pm d/2$. Магнітне поле виберемо направленим вздовж осі z .



Як ми вже знаємо, розподіл поля задовольняє другому рівнянню Лондонів:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} + \lambda_L^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 0 \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad \mathbf{H} - \lambda_L^2 \Delta \mathbf{H} &= 0. \end{aligned}$$

Рис. 6.3

Симетрія задачі така, що $\mathbf{H} \parallel z$ і не залежить від координати y . Тому останнє рівняння для єдиної z -ої проекції є одновимірним:

$$\frac{d^2 H_z(x)}{dx^2} - \frac{1}{\lambda_L^2} H_z(x) = 0.$$

Це рівняння для напівпростору ми розв'язували під час попередньої лекції. Змінюються лише граничні умови, які тепер мають вигляд:

$$H_z\left(\pm\frac{d}{2}\right) = H_0.$$

Сам загальний вигляд розв'язку той же:

$$H_z(x) = H_z(0)e^{x/a},$$

де $H_z(0)$ невідома константа. Знову після підстановки отримуюємо $a = \pm\lambda_L$, що дає:

$$H_z(x) = H_z^{(+)}e^{x/a} + H_z^{(-)}e^{-x/a}.$$

Використовуючи граничні умови, маємо неоднорідну систему:

$$\begin{aligned} H_z^{(+)}e^{d/2\lambda_L} + H_z^{(-)}e^{-d/2\lambda_L} &= H_0; \\ H_z^{(+)}e^{-d/2\lambda_L} + H_z^{(-)}e^{d/2\lambda_L} &= H_0, \end{aligned}$$

детермінант якої

$$\det = \exp(d/\lambda_L) - \exp(-d/\lambda_L) = 2sh\frac{d}{\lambda_L}.$$

З його допомогою знаходимо сталі:

$$H_z^{(+)} = H_z^{(-)} = \frac{H_0e^{d/2\lambda_L} - H_0e^{-d/2\lambda_L}}{2sh(d/\lambda_L)} = H_0 \frac{sh(d/2\lambda_L)}{sh(d/\lambda_L)}$$

і, таким чином, приходимо до остаточного розв'язку:

$$\begin{aligned} H_z(x) &= 2H_0 \frac{sh(d/2\lambda)}{sh(d/\lambda)} ch\frac{x}{\lambda} = \\ &= 2H_0 \frac{sh(d/2\lambda_L)}{2sh(d/2\lambda_L)ch(d/2\lambda_L)} ch\frac{x}{\lambda_L} = H_0 \frac{ch\frac{x}{\lambda_L}}{ch(d/2\lambda_L)}, \end{aligned}$$

який описує поведінку поля в НП пластині.

Знову згадаємо рівняння Лондонів $\text{rot}\mathbf{H} = (4\pi/c)\mathbf{j}_s$, яке дає змогу визначити також розподіл надструму.

$$\text{rot}\mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & H_z(x) \end{vmatrix}; \quad j_s = j_y(x) = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial H_z(x)}{\partial x} =$$

$$= -\frac{c}{4\pi} H_0 \frac{1}{ch} \frac{1}{2\lambda_L} \frac{1}{\lambda_L} sh \frac{x}{\lambda_L} = -\frac{cH_0}{4\pi\lambda_L} \frac{sh \frac{x}{\lambda_L}}{\frac{d}{2\lambda_L}}.$$

З отриманих формул чітко видно, що і поле, і струм проникають в глибину пластини на відстань $\sim \lambda_L$, лише у випадку досить товстої ($d \gg \lambda_L$) пластини. Якщо ж вона тонка і $d \ll \lambda_L$ або хоча б $d < \lambda_L$, можна

розкласти гіперболічні функції по параметрах x/λ_L і $d/2\lambda_L$, знайшовши:

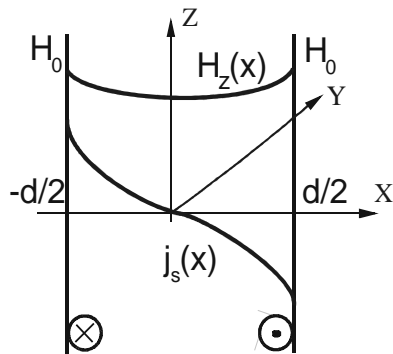


Рис. 6.4

$$H_z(x) = H_0;$$

$$j_s = -\frac{cH_0}{4\pi\lambda_L^2} x.$$

Останні формули демонструють, що магнітне поле повністю проникає в тонку пластину (плівку), а густина

надструму є лінійною функцією координати. При цьому струми течуть так (див. рис. 6.4), щоб компенсувати зовнішнє поле в глибині пластини.

9.2. *Пластина з струмом.* Розв'яжемо “протилежну” задачу, а саме: припустимо, в пластині тієї ж геометрії вздовж

осі y тече надструм, густина якого не залежить від координати z . Нехай сила струму I_s . На поверхні пластини він створює поле \mathbf{H}_1 , причому

$H_z(\pm d/2) = \mp H_{I_s}$, що

впливає з рис. 6.5.

Щоб встановити

граничні умови, використаємо рівняння $\text{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s$,

яке треба помножити на елемент $d\mathbf{S} \parallel y$ і проінтегрувати:

$$\int \text{rot}\mathbf{H}d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j}_s d\mathbf{S},$$

звідки для лівої частини маємо

$$\int \text{rot}\mathbf{H}d\mathbf{S} = \oint \mathbf{H}d\mathbf{l} = H_l l_{12} - H_l l_{34} = 2H_l l_{12},$$

а для правої –

$$\frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j}_s d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{c} j_s l_{12} d.$$

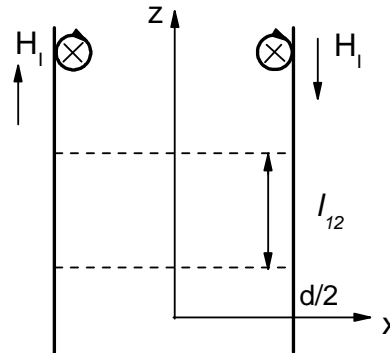


Рис. 6.5

Прирівнюючи обидві частини, знаходимо:

$$2H_{I_s} l_{12} = \frac{4\pi}{c} j_S l_{12} d,$$

або $H_{I_s} = (2\pi d / c) j_S$.

Розв'язуючи те ж саме рівняння і використовуючи той самий загальний розв'язок, запишемо граничні умови для даного випадку:

$$\begin{aligned} H_z^{(+)} e^{d/2\lambda} + H_z^{(-)} e^{-d/2\lambda} &= -H_{I_s}; \\ H_z^{(+)} e^{-d/2\lambda} + H_z^{(-)} e^{d/2\lambda} &= H_{I_s}, \end{aligned} \quad \det = 2sh \frac{d}{\lambda_L}.$$

З цієї системи легко знайти:

$$H_z^{(+)} = -H_z^{(-)} = -\frac{H_{I_s} e^{d/2\lambda_L} + H_{I_s} e^{-d/2\lambda_L}}{2sh(d/\lambda_L)} = -H_{I_s} \frac{ch(d/2\lambda_L)}{sh(d/\lambda_L)};$$

$$\begin{aligned} H_z(x) &= -2H_{I_s} \frac{ch(d/2\lambda_L)}{sh(d/\lambda_L)} sh \frac{x}{\lambda_L} = \\ &= -2H_{I_s} \frac{ch(d/2\lambda_L)}{2sh(d/2\lambda_L)ch(d/2\lambda_L)} sh \frac{x}{\lambda_L} = \\ &= -H_{I_s} \frac{sh \frac{x}{\lambda_L}}{sh(d/2\lambda_L)}. \end{aligned}$$

І знов-таки, використовуючи зв'язок $rot \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_S$,

маємо:

$$j_s = -\frac{c}{4\pi} \frac{dH_z(x)}{dx} = \frac{c}{4\pi\lambda_L} H_{I_s} \frac{ch(x/\lambda_L)}{sh(d/2\lambda_L)}.$$

З формул випливає і видно з рис. 6.6, що для товстої ($d \gg \lambda_L$) пластини поле і струм існують в приповерхневому шарі товщиною $\sim \lambda_L$. В протилежному ($d \ll \lambda_L$) випадку можемо розкласти по відношенням d/λ_L та x/λ_L :

$$j_s = \frac{c}{4\pi\lambda_L} H_{I_s} \frac{2\lambda_L}{d} = \frac{c}{2\pi d} H_{I_s};$$

$$H_z(x) = -\frac{2H_{I_s}}{d} x.$$

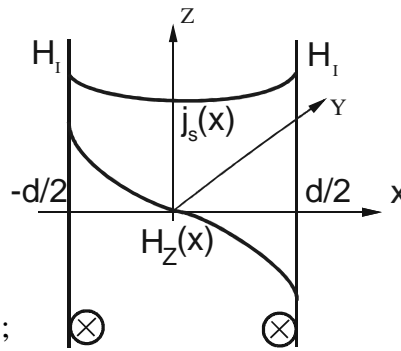


Рис. 6.6

Видно, що тут, навпаки, струм однорідний, а поле змінює знак свого напрямку на обох краях пластини.

9.3. *Пластина з струмом у однорідному полі* $\mathbf{H}_0 \perp \mathbf{j}_s$. Ця задача важлива для практичних застосувань. Дійсно, нехай пластина знаходиться у зовнішньому полі $\mathbf{H}_0 \parallel z$, як це було раніше, і по ній тече надструм $\mathbf{j}_s \parallel y$ (див. рис. 6.7). Як зазначалося, цей струм породжує на краях пластини поле $\mp H_{I_s}$. Ситуація така, що тепер обидва випадки “накладаються”, а оскільки усі рівняння лінійні, повний розв’язок має бути суперпозицією тих, що щойно розібрані.

Розглянемо спочатку випадок, коли $H_0 = H_{I_s}$. Це означає, що зовнішнє поле буде повністю компенсуватись на одній стороні пластини і подвоюватись на протилежній.

З іншого боку, можна добитися, щоб струм тік лише по одній стороні пластини. Таке реалізується, коли зовнішнє поле створюється другою пластинною з

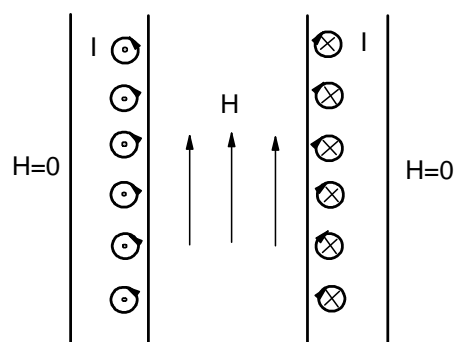


Рис. 6.7

таким же струмом, що, однак, тече в протилежному напрямку. Тоді (див. рис. 6.7) поле в просторі між пластинами подвоюється, тому що створюється двома пластинами. В той же час аналогічні

міркування доводять, що поле зовні пластин взаємно компенсується і дорівнює нулеві. Таким чином, виникає “конденсатор” магнітного поля, коли всередині поле є, а зовні воно відсутнє.

Лекція 7

10. Комплексна провідність надпровідника

До сих пір ми розглядали тільки стаціонарні явища. Тепер спробуємо припустити, що на плоску поверхню НП падає електромагнітна хвиля $\mathbf{E}(t)$. При цьому будемо вважати, що довжина l_f вільного пробігу носіїв мала, тобто виконується наближення нормального скін-ефекту. Іншою мовою, l_f досить мала, а частоти ω не настільки великі, тому $l_f < \lambda_L$, лондонівської глибини проникнення. Частота τ_f^{-1} електронних зіткнень отримується з означення $l_f = v_F \tau_f$ і буде вважатися великою у порівнянні з ω : $1/\tau_f = v_F/l_f \gg \omega$. Таке співвідношення дозволяє вважати часові, викликані хвилею, процеси повільними, а електрони такими, що знаходяться у термодинамічній рівновазі.

Знову згадаємо дворідинну модель НП, тобто вважатимемо, що всі електрони розділені на дві групи, причому $n_f = n_N + n_S$. Рівняння для НП частинок – це перше рівняння Лондонів

$$\mathbf{E}(t) = \Lambda \frac{d\mathbf{j}_S}{dt}.$$

Для нормального колективу електронів, які відчувають зіткнення, пишемо рівняння Ньютона $m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{fr}$, де $\mathbf{F}_{fr} \sim -\mathbf{v}$ – сила тертя, у вигляді:

$$m_f \dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E}(t) - (m_f / \tau_f) \mathbf{v}.$$

Як і у випадку рівняння для \mathbf{j}_S , легко отримуємо:

$$\frac{m_f}{en_N} \frac{d\mathbf{j}_N}{dt} + \frac{m_f}{en_N} \frac{\mathbf{j}_N}{\tau_f} = e\mathbf{E}(t).$$

Згадуючи константи $\Lambda = m_f / e^2 n_S = (4\pi / c^2) \lambda_L^2$, перепишемо це рівняння у спосіб:

$$\mathbf{E}(t) = \frac{m_f n_S}{n_N e^2 n_S} \frac{d\mathbf{j}_N}{dt} + \frac{m_f n_S}{n_N e^2 n_S} \frac{\mathbf{j}_N}{\tau_f} = \frac{n_S}{n_N} \Lambda \left(\frac{d\mathbf{j}_N}{dt} + \frac{\mathbf{j}_N}{\tau_f} \right).$$

Як завжди, оберемо часову залежність електричного поля у гармонічному вигляді: $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \exp(i\omega t)$, з чого випливає така ж залежність і всіх інших величин, що збурюються цим полем. Тоді, поклавши $\mathbf{j}_S(t) = \mathbf{j}_S \exp(i\omega t)$, з першого рівняння Лондонів маємо: $\mathbf{E}_0 = i\omega\Lambda\mathbf{j}_S$, або

$$\mathbf{j}_S = -\frac{i}{\Lambda\omega} \mathbf{E}_0.$$

Це співвідношення свідчить, що $\mathbf{j}_S \neq 0$ лише для $\omega \neq 0$. Якщо ж $\omega \rightarrow 0$, то і амплітуда $\mathbf{E}_0 \rightarrow 0$. Про таку закономірність ми вже говорили. Тепер рівняння для $\mathbf{j}_N(t) = \mathbf{j}_N \exp(i\omega t)$:

$$\mathbf{E}_0 = \left(\frac{n_S}{n_N} \Lambda i \omega + \frac{n_S}{n_N} \Lambda \frac{1}{\tau_f} \right) \mathbf{j}_N,$$

звідки

$$\mathbf{j}_N = \frac{n_N}{n_S \Lambda} \frac{\tau_f}{1 + i \omega \tau_f} \mathbf{E}_0 = \frac{n_N}{n_S} \frac{\tau_f}{\Lambda} \frac{1 - i \omega \tau_f}{1 + (\omega \tau_f)^2} \mathbf{E}_0.$$

Враховуючи, нарешті, що повний струм $\mathbf{j} = \mathbf{j}_N + \mathbf{j}_S$, приходимо до формул:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \left\{ \frac{n_N}{n_S} \frac{\tau_f}{\Lambda} \frac{1}{1 + (\omega \tau_f)^2} - i \left[\frac{n_N}{n_S} \frac{\omega \tau_f^2}{\Lambda} \frac{1}{1 + (\omega \tau_f)^2} + \frac{1}{\Lambda \omega} \right] \right\} \mathbf{E}_0 \equiv \\ &\equiv [\sigma'(\omega) - i \sigma''(\omega)] \mathbf{E}_0, \end{aligned}$$

де введені позначення

$$\sigma'(\omega) = \frac{n_N}{n_S} \frac{\tau_f}{\Lambda} \frac{1}{1 + (\omega \tau_f)^2}$$

і

$$\sigma''(\omega) = \frac{1}{\Lambda \omega} \left[\frac{n_N}{n_S} \frac{(\omega \tau_f)^2}{1 + (\omega \tau_f)^2} + 1 \right]$$

задають реальну та уявну частини комплексної провідності НП у змінному електричному полі.

11. Скін-ефект

11.1. *Нормальний скін-ефект.* Розглянемо, як проникає електромагнітна хвиля у НП. Відомо, що хвиля, яка падає на НП, проникає в нього лише на скінчену глибину – так звану глибину скін-шару.

Нехай на поверхню НП падає хвиля у напрямку x (рис. 7.1). Рівняння, що описують електромагнітні процеси – це рівняння Максвелла:

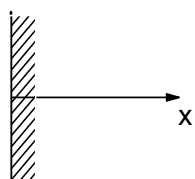


Рис. 7.1

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = (4\pi/c)\mathbf{j} = (4\pi/c)\sigma\mathbf{E};$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -(1/c)\partial\mathbf{H}/\partial t.$$

Подіємо операцією rot на перше рівняння:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} = \nabla\operatorname{div}\mathbf{H} - \Delta\mathbf{H} = -\Delta\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}\mathbf{E},$$

або (внаслідок $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$)

$$-\Delta\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right) \rightarrow \Delta\mathbf{H} - \frac{4\pi}{c^2}\dot{\mathbf{H}} = 0.$$

Нехай $\mathbf{H} \equiv \mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_0 \exp(-iqx + i\omega t)$. Тоді з останнього рівняння отримуємо:

$$-q^2 - \frac{4\pi}{c^2}\sigma i\omega = 0 \rightarrow q^2 = -i\frac{4\pi}{c^2}\omega\sigma \rightarrow q^2 = \frac{e^{-i\pi/2}}{c^2} \frac{4\pi\omega\sigma}{4\pi\omega\sigma},$$

звідки

$$q = \frac{e^{-i\pi/4}}{\left(\frac{c^2}{4\pi\omega\sigma}\right)^{1/2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)}{\left(\frac{c^2}{4\pi\omega\sigma}\right)^{1/2}} = \frac{1-i}{\left(\frac{c^2}{2\pi\omega\sigma}\right)^{1/2}} \equiv \frac{1-i}{\delta},$$

$$\delta \equiv \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\omega\sigma}}.$$

В принципі, задача розв'язана, бо знайдений комплексний хвильовий вектор. Але щоб відчувати відповідь, зробимо деяку деталізацію. Припустимо, що

$T \ll T_c$, тобто нормальна густина настільки мала, що $n_N/n_S \ll 1$, крім того, частоти низькі і $\omega\tau_f \ll 1$, що дає $(n_N/n_S)(\omega\tau_f)^2 \ll 1$. Тоді з загальних виразів:

$$\sigma'(\omega) = \frac{n_N}{n_S} \frac{\tau_f}{\Lambda} \frac{1}{1+(\omega\tau_f)^2} \approx \frac{n_N}{n_S} \frac{\tau_f}{\Lambda};$$

$$\sigma''(\omega) = \frac{1}{\Lambda\omega} \left[\frac{n_N}{n_S} \frac{(\omega\tau_f)^2}{1+(\omega\tau_f)^2} + 1 \right] \approx \frac{1}{\Lambda\omega}.$$

Отже, в цьому наближенні

$$\sigma(\omega) = \sigma'(\omega) - i\sigma''(\omega) \approx \frac{n_N}{n_S} \frac{\tau_f}{\Lambda} - i \frac{1}{\Lambda\omega}, \quad \Lambda = \frac{4\pi}{c^2} \lambda_L^2.$$

Це дає змогу зробити наступні перетворення, а точніше – спрощення:

$$\delta^2 = \frac{c^2}{2\pi\omega} \frac{1}{\sigma(\omega)} = \frac{c^2}{2\pi\omega} \frac{1}{\frac{n_N}{n_S} \frac{\omega\tau_f}{\Lambda} - i \frac{1}{\Lambda\omega}} = \frac{\Lambda c^2}{2\pi \left(\frac{n_N}{n_S} \omega\tau_f - i \right)}$$

$$= \frac{2\lambda_L^2}{\left(\frac{n_N}{n_S} \omega\tau_f - i \right)},$$

звідки

$$\delta = \frac{\sqrt{2}\lambda_L}{\sqrt{\frac{n_N}{n_S} \omega\tau_f - i}}.$$

Для малих частот $\omega\tau_f \ll 1$ і досить низьких температур, коли $n_N \ll n_S$,

$$\delta \approx \sqrt{2} \frac{\lambda_L}{\sqrt{-i}} = \sqrt{2i} \lambda_L = \sqrt{2} \lambda_L \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \lambda_L (1+i).$$

Звідси

$$q = \frac{1-i}{\delta} = \frac{1-i}{1+i} \frac{1}{\lambda_L} = -\frac{i}{\lambda_L};$$

$$H(x) \sim e^{-iqx} = e^{-i(-\frac{i}{\lambda_L}x)} = e^{-x/\lambda_L}.$$

Іншою мовою, низькочастотне поле проникає у НП на ту ж глибину λ_L , що і поле стаціонарне. У загальному ж випадку треба користуватись отриманими формулами для q і δ .

11.2. *Поверхневий імпеданс.* Його визначення широко відомо

$$Z = \frac{4\pi}{c} \frac{E}{H}$$

і має зрозумілий фізичний зміст. Дійсно, якщо на поверхні металу існують змінні електричне $\mathbf{E}(t)$ і магнітне $\mathbf{H}(t)$ поля, причому обидва лежать на поверхні та ортогональні одне до одного, то, як ми вже не раз писали, $(c/4\pi)H = j_{sur}$ і тоді записана величина

$$Z = \frac{4\pi}{c} \frac{E}{H} = \frac{E}{(c/4\pi)H} = \frac{E}{j_{sur}}$$

є ні що інше, ніж поверхневий опір, або **поверхневий імпеданс**.

Знову запишемо рівняння

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E}$$

і представимо, що хвиля з $\mathbf{k} \parallel x$, $\mathbf{E} \parallel y$ та $\mathbf{H} \parallel z$ подає на поверхню, яка задана координатами y і z . Крім того, нехай ненульові проекції пропорційні тій же гармоніці $\exp(-iqx + i\omega t)$. Тоді з рівняння прямо отримуємо:

$$\operatorname{rot} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & H \end{vmatrix}; \quad \rightarrow \quad iqH = \frac{4\pi}{c}\sigma E,$$

тобто $Z = \frac{iq}{\sigma}$. Використаємо знайдене раніше $q = \frac{1-i}{\delta}$,

що дає для імпедансу вираз $Z = \frac{i(1-i)}{\delta\sigma} = \frac{1+i}{\delta\sigma}$.

Проаналізуємо його знову ж таки для важливого випадку досить повільних полів (малі частоти). Тоді

треба врахувати, що $\delta \equiv \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\omega\sigma}} \approx \lambda_L(1+i)$ і

$\sigma(\omega) = \frac{n_N}{n_S} \frac{\tau_f}{\Lambda} - i \frac{1}{\Lambda\omega}$. Це дозволяє записати

$Z = Z' + iZ'' \equiv R + iX_L$, де R – опір, або втрати на нагрів, а X_L – індуктивний опір, зробивши низку перетворені і згадавши, що $\Lambda = (4\pi/c^2)\lambda_L^2$:

$$\begin{aligned}
 Z &= \frac{1+i}{\delta\sigma} = \frac{1}{\lambda_L} \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\lambda_L} \frac{1}{\frac{1}{\Lambda} \left(\frac{n_N \tau_f}{n_S} - i \frac{1}{\omega} \right)} = \\
 &= \frac{1}{\lambda_L} \frac{1}{\frac{c^2}{4\pi\lambda_L^2} \left(\frac{n_N \tau_f}{n_S} - i \frac{1}{\omega} \right)} = \frac{4\pi\lambda_L^2 \omega}{c^2} \frac{1}{\left(\frac{n_N}{n_S} \omega \tau_f - i \right)} = \\
 &= \frac{4\pi\lambda_L \omega}{c^2} \frac{\frac{n_N}{n_S} \omega \tau_f + i}{\left(\frac{n_N}{n_S} \omega \tau_f \right)^2 + 1},
 \end{aligned}$$

звідки

$$R = \frac{4\pi\lambda_L \omega^2}{c^2} \frac{n_N}{n_S} \tau_f; \quad X_L = \frac{4\pi\lambda_L \omega^2}{c^2}.$$

З'ясуємо, як ці активний і індуктивний опори залежать від температури. Для цього ще раз наведемо емпіричну залежність:

$$\lambda_L(T) = \frac{\lambda_L(0)}{\sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4}}.$$

Звідси легко отримуємо:

$$\lambda_L^2(T) = \frac{\lambda_L(0)}{1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4} = \frac{m_f c^4}{4\pi e^2 n_S(T)},$$

тобто $n_S(T) \sim 1 - (T/T_c)^4$, що з умови $n_N(T) + n_S(T) = n_f$ безпосередньо дає температурну поведінку кожної складової колективу носіїв:

$$n_S(T) = n_f [1 - (T/T_c)^4]; \quad n_N(T) = n_f (T/T_c)^4.$$

Ці формули можна підставити у вирази для величин R та X_L :

$$\begin{aligned} R &= \frac{4\pi\lambda_L\omega^2}{c^2} \frac{n_N}{n_S} \tau_f \cong \frac{1}{\sqrt{1-(T/T_c)^4}} \frac{(T/T_c)^4}{1-(T/T_c)^4} = \\ &= \frac{(T/T_c)^4}{[1-(T/T_c)^4]^{3/2}}; \\ X_L &= \frac{1}{\sqrt{1-(T/T_c)^4}}, \end{aligned}$$

отримавши їх температурну поведінку в усьому діапазоні $T \leq T_c$ (рис. 7.2). Може, здається дивним, але ці формули якісно правильно описують температурні зміни обох цих величин, правда, окрім околу $T \rightarrow T_c$. Справа в тому, що ми вважали, що частоти малі і добуток $(n_N/n_S)(\omega\tau_f)^2 \ll 1$. Але при будь-яких малих частотах, настає момент по T , коли $n_S \rightarrow 0$ і ця нерівність стає невиконуваною. Щоб запобігти розбіжності, використаємо вихідну формулу:

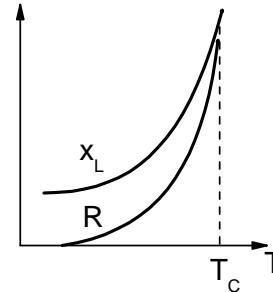


Рис. 7.2

$$\sigma(\omega) = \frac{n_N}{n_S} \frac{\tau_f}{\Lambda} \frac{1}{1+(\omega\tau_f)^2} - \frac{i}{\Lambda\omega} \left[1 + \frac{n_N}{n_S} \frac{(\omega\tau_f)^2}{1+(\omega\tau_f)^2} \right] \approx \frac{n_N}{n_S} \frac{\tau_f}{\Lambda},$$

де ми нехтуємо уявною частиною $\sigma(\omega)$, бо в околі T_c реактивна складова менш важлива. Тоді

$$Z = \frac{iq}{\sigma} = \frac{i(1-i)}{\delta\sigma} = \frac{1+i}{\sqrt{\frac{c^2}{2\pi\sigma\omega}}\sigma} = (1+i) \frac{\sqrt{2\pi\omega}}{c} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} = \bullet$$

Оскільки в цьому наближенні $\sqrt{\sigma(\omega)} = (c/\sqrt{4\pi}\lambda_L)\sqrt{n_N\tau_f/n_S}$, то підставимо і продовжимо:

$$\begin{aligned} \bullet &= (1+i) \frac{\sqrt{2\pi\omega}}{c} \frac{\sqrt{4\pi}}{c} \lambda_L \sqrt{\frac{n_S}{n_N\tau_f}} = (1+i) \frac{2\pi}{c^2} \lambda_L \sqrt{2\omega \frac{n_S}{n_N\tau_f}} = \\ &= \frac{2\pi}{c^2} \sqrt{2\omega\tau_f \frac{n_S}{n_N} \frac{\lambda_L}{\tau_f}} (1+i) = \frac{2\pi}{c^2} (2\omega\tau_f \frac{1}{n_N})^{1/2} \frac{\lambda_S^{1/2}}{\tau_f} \sqrt{\frac{m_f c^2}{4\pi e^2 \lambda_S}} (1+i) \cong \\ &\cong \frac{\sqrt{2\pi}}{ce\tau_f} \left(\frac{m_f}{n_f} \omega\tau_f\right)^{1/2} (1+i), \end{aligned}$$

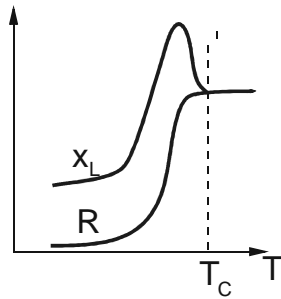


Рис. 7.3

і видно, що n_S скорочується, а $n_N \rightarrow n_f$. При цьому поблизу T_c величини R і X_L стають рівними між собою. На рис. 7.3 приведена їх справжня, тобто спостережувана, температурна поведінка.

Лекція 8

12. Теорія Гінзбурга-Ландау

12.1. *Вступна частина.* Ми розглянули основні положення теорії Лондонів. Ми показали, як вона застосовується у найпростіших ситуаціях. Ми розібрали декілька прикладів. Але чого ми не робили – це не враховували квантових ефектів, в усякому разі, послідовно. Теорія Гінзбурга-Ландау, як вона завжди називається, стала по суті першою спробою врахувати квантові закономірності на феноменологічному рівні. Вона була створена у 1950 р. ХХ-го століття, а через більше ніж півстоліття (у 2003 році) один з її авторів Віталій Лазаревич Гінзбург був удостоєний за неї Нобелівської премії. Публікація, де викладена теорія Гінзбурга-Ландау, стала найцитованішою роботою серед робіт з фізики.

Як можна взагалі включити квантові ефекти до розгляду? Коли ми розглядали термодинаміку НП і записали вираз для ентропії, ми згадували, що НП стан є більш впорядкованим в порівнянні з нормальним станом і що НП перехід є переходом II-го роду. З загальної точки зору, зрозуміло, що НП стан має характеризуватись **параметром порядку**, який відмінний від нуля лише в області $T < T_c$ і рівний

нулеві при $T \geq T_c$. З іншого боку, опис будь-якої системи в рамках квантового підходу передбачає використання хвильової функції $\Psi(\mathbf{r})$.

Гінзбург і Ландау вперше вирішили об'єднати ці два поняття, тобто несподівано для фізиків висловили ідею, що саме $\Psi(\mathbf{r})$ і може бути параметром порядку. Безумовно, це була наукова сміливість, але потрібна була і інтуїція. В основу теорії Гінзбурга-Ландау лягла теорія фазових перетворень II-го роду Ландау.

За цією теорією фазовий перехід II-го роду – це перехід, при якому стан тіла змінюється неперервно або взагалі не змінюється, а деяка симетрія – стрибком. При цьому низькотемпературна фаза виявляється менш симетричною, або, як кажуть, більш впорядкованою. До фазових переходів II-го роду відносяться всі магнітні переходи, переходи, типу порядок-безпорядок у сплавах, перехід ^4He у надплинний стан, нарешті, переходи в металах з нормального стану у надпровідний.

Розглянемо, як неперервна зміна стану може супроводжуватись стрибкоподібною зміною його симетрії. Найбільш наочно це можна простежити на прикладі структурного переходу типу впорядкування. Нехай атоми сортів A_1 та A_2 розташовані в ланцюжку і при достатньо високій T ймовірності заповнення вузлів цими атомами однакові (див. рис. 8.1), або в

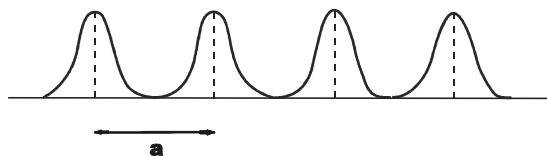


Рис. 8.1

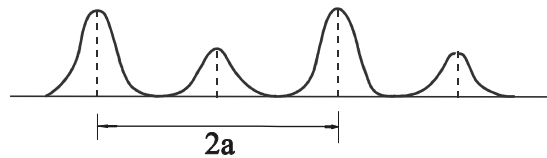


Рис. 8.2

системі існує повний безлад і в кожному місці можна знайти будь-який атом. А от при $T < T_c$ ймовірність заповнення атомами A_1 має інший вигляд, тобто ці атоми розташовуються “через один”. При переході через точку T_c з’являється і зростає із зниженням температури параметр порядку η , а період структури “стрибає” при $T = T_c$ від a до $2a$, або стрибкоподібно змінюється трансляційна симетрія (рис. 8.2).

Повернемося до НП. Відомо, що у своїй теорії фазових перетворень II-го роду Ландау запропонував використовувати вільну енергію системи, яка знаходиться поблизу переходу при температурі $T \approx T_c$, у вигляді розкладу по степенях параметра порядку. В таких умовах він може вважатися малим, а число членів розкладу може бути мінімальним. Тому область застосування теорії Ландау, взагалі кажучи, обмежується нерівністю $|T - T_c| \ll T_c$.

Отже, вважатимемо хвильову функцію $\Psi(\mathbf{r})$ НП електронів параметром порядку. Більше того, тепер зрозуміло, як зручно обрати нормування цієї функції. Як і раніше $|\Psi(\mathbf{r})|^2$ – це густина вже відомих нам в якості фізичних об’єктів куперівських пар, тобто

$$|\Psi(\mathbf{r})|^2 = \frac{n_s}{2}.$$

Нехай НП у своїй нормальній фазі має вільну енергію F_N . Тоді в однорідному випадку $\Psi(\mathbf{r})$ не залежить від координати, а розклад F_S поблизу T_c може бути представлений виразом:

$$F_S(0) = F_N + \alpha |\Psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\Psi|^4,$$

де $F_S(0)$ – густина вільної енергії НП при $\mathbf{H} = 0$, а α і β – деякі феноменологічні коефіцієнти. Видно, що вільна енергія залежить від модуля хвильової функції, бо не може залежати від фази останньої, і крім того, ми фактично розкладаємо по густині n_s . Проте нижче ми побачимо, що не все так просто.

Знайдемо значення $|\Psi|^2$, яке відповідає мінімуму вільної енергії. Іншими словами, запишемо рівняння:

$$\frac{dF_S(0)}{d|\Psi|^2} = 0,$$

або в явному вигляді –

$$\alpha + \beta |\Psi|^2 = 0 \quad \rightarrow \quad |\Psi|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Підставимо знайдене значення, яке, власне, і є параметром порядку, у вільну енергію:

$$F_S(0) - F_N = -\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\beta} = -\frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\beta}.$$

Але ми вже визначали різницю між вільною енергією у магнітному полі та вільною енергією нормального стану, отримавши, що (див. Лекцію 3)

$$F_S(0) - F_N(0) = -\frac{\mathbf{H}_{cm}^2}{8\pi},$$

звідки

$$\frac{\alpha^2}{2\beta} = \frac{\mathbf{H}_{cm}^2}{8\pi}, \quad \text{або} \quad \mathbf{H}_{cm}^2 = 4\pi \frac{\alpha^2}{\beta}.$$

Розглянемо, як залежать від температури коефіцієнти α і β . При $T = T_c$ параметр порядку $|\Psi|^2$ має дорівнювати нулеві, а при $T < T_c$ бути скінченим. Тоді з формули $|\Psi|^2 = -\alpha/\beta$ випливає, що, по меншій мірі, має виконуватись рівність $\alpha(T_c) = 0$, яка можлива, якщо $\alpha(T) \sim (T - T_c)^\alpha$.

При цьому очевидно, степінь повинна бути непарна, щоб забезпечити відсутність параметра порядку вище критичної температури і його скінченність нижче її. Найпростішим в такому разі є залежність $\alpha(T) \sim T - T_c$. Проте справа не тільки в простоті. Ця залежність дає абсолютно вірну температурну поведінку критичного поля $H_{cm}(T)$. Дійсно, ми знаємо, що як функція T критичне поле $H_{cm}(T) = H_{cm}(0)(1 - T^2/T_c^2)$, що поблизу T_c дає $\sim (1 - T/T_c)$ і що ми бачимо з отриманої формули, оскільки $H_{cm} \sim |\alpha|$.

Коефіцієнт β є додатнім і від T залежить слабо. Це, зокрема, випливає з того, що при $T < T_c$ коефіцієнт

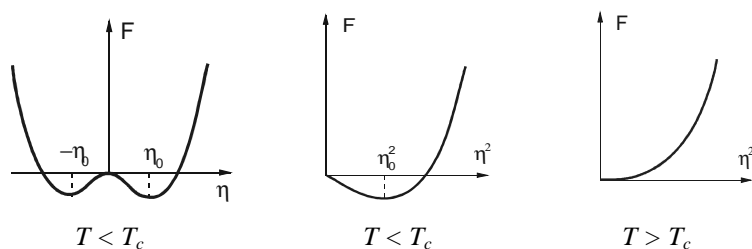


Рис. 8.3

α теж від'ємний, і $|\Psi|^2 > 0$, лише якщо $\beta > 0$. З іншого боку, знову ж таки $\beta > 0$ і вище T_c , де $\alpha > 0$ і $F_s(0)$ досягає мінімуму $|\Psi|^2 = 0$, тобто НП при цьому відсутня. Таким чином, в обох областях треба прийняти позитивність β , тому в першому порядку по $T - T_c$ можна вважати, що $\beta = \text{const} > 0$.

В загальному випадку можна зобразити вільну енергію як функцію параметра порядку (див. рис. 8.3):

$$F = \alpha_0(T - T_c)\eta^2 + \frac{1}{2}\beta\eta^4,$$

з якої випливають усі якісно різні ситуації.

13. Рівняння теорії Гінзбурга-Ландау

13.1. *Густина вільної енергії.* Тепер почнемо розгляд теорії Гінзбурга-Ландау в повному обсязі. Це значить, що крім однорідних, треба взяти до уваги і неоднорідні стани. Для цього запишемо вільну енергію, яка враховує присутність зовнішнього магнітного поля \mathbf{H}_0 (термодинамічний потенціал

Гельмгольца $G_S(\mathbf{H})$). Нагадаю, що ми це розбирали і прийшли до висновку, в цьому випадку від вільної енергії Гіббса віднімається член $\mathbf{H}\mathbf{H}_0/4\pi$, де \mathbf{H} – точне мікроскопічне поле.

Отже, в околі T_c можна згідно підходу Гінзбурга і Ландау записати:

$$G_S(\mathbf{H}) = G_N + \alpha |\Psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\Psi|^4 + \\ + \frac{1}{4m_f} |(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A})\Psi|^2 + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{H}\mathbf{H}_0}{4\pi},$$

де доданок з градієнтом – це густина кінетичної енергії НП електронів системи. Розберемо цей доданок більш детально.

Густина кінетичної енергії частинки з масою m_f в квантовій механіці записується у вигляді:

$$\frac{1}{2m_f} |-i\hbar\nabla\psi|^2, \quad -i\hbar\nabla = \mathbf{p}.$$

Як ми вже говорили, при русі частинки у зовнішньому полі у виразі для густини кінетичної енергії оператор \mathbf{p} замінюється на:

$$-i\hbar\nabla \rightarrow -i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A} = m_f\mathbf{v},$$

$$\text{тому } \mathbf{v} = -\frac{i\hbar}{m_f}\nabla - \frac{e}{m_f c}\mathbf{A}.$$

Оскільки до виразу для густини кінетичної енергії входить саме швидкість \mathbf{v} частинки, стає зрозумілим

розклад для $G_S(\mathbf{H})$. При запису ми врахували, що явище НП пов'язане з куперівськими парами, тому зразу внесли правки $e \rightarrow 2e$ і $m_f \rightarrow 2m_f$, які, між іншим, у Гінзбурга і Ландау були відсутніми.

13.2. Рівняння Гінзбурга-Ландау. Вище записане густина енергії, а повна енергія має вигляд:

$$G_S(\mathbf{H}) = G_N + \int [\alpha |\Psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\Psi|^4 + \frac{1}{4m_f} |(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A})\Psi|^2 + \frac{(\text{rot}\mathbf{A})^2}{8\pi} - \frac{\text{rot}\mathbf{A}\mathbf{H}_0}{4\pi}] dV.$$

Наша мета – знайти такі значення $\Psi(\mathbf{r})$ та $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, які будучи підставленими у $G_S(\mathbf{H})$, мінімізували цей термодинамічний потенціал. При цьому треба враховувати, що хвильова функція є комплексною величиною і можна мінімізувати потенціал $G_S(\mathbf{H})$ по реальній і уявній частинах, а можна – по $\Psi(\mathbf{r})$ і $\Psi^*(\mathbf{r})$. Будемо йти другим шляхом і проваріюємо по $\Psi^*(\mathbf{r})$, розв'язавши варіаційну задачу:

$$\delta_{\Psi^*} G_S(\mathbf{H}) = 0.$$

Тоді

$$\delta_{\Psi^*} G_S(\mathbf{H}) = \delta_{\Psi^*} \left\{ G_N + \int [\alpha \Psi^* \Psi + \frac{\beta}{2} \Psi^* \Psi^* \Psi \Psi + \frac{1}{4m_f} (-i\hbar\nabla\Psi - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi)(i\hbar\nabla\Psi^* - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi^*) + \frac{(\text{rot}\mathbf{A})^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{H}_0 \text{rot}\mathbf{A}}{4\pi}] dV \right\} = \int [\alpha \delta\Psi^* \Psi + \beta \delta\Psi^* |\Psi|^2 +$$

$$+ \frac{1}{4m_f} \left(-i\hbar\nabla\Psi - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi \right) \left(i\hbar\nabla\delta\Psi^* - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\delta\Psi^* \right) dV = \bullet$$

Винести $\delta\Psi^*$ за квадратні дужки неможливо, бо варіація стоїть під операцією похідної. Перетворимо цей вираз, позначивши

$$-i\hbar\nabla\Psi - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi = \phi,$$

і проведемо подальші розрахунки:

$$\begin{aligned} \bullet &= \int [\alpha\delta\Psi^*\Psi + \beta\delta\Psi^*|\Psi|^2\Psi + \\ &+ \frac{1}{4m_f} (i\hbar\nabla\delta\Psi^*)\phi - \frac{1}{4m_f} \frac{2e}{c} \mathbf{A}\phi\delta\Psi^*] dV = \\ &= \int [\alpha\delta\Psi^*\Psi + \beta\delta\Psi^*|\Psi|^2\Psi + \frac{1}{4m_f} i\hbar\nabla(\delta\Psi^*\phi) - \\ &- \frac{1}{4m_f} i\hbar\nabla\phi\delta\Psi^* - \frac{1}{4m_f} \frac{2e}{c} \mathbf{A}\phi\delta\Psi^*] dV = \\ &= \int [\alpha\delta\Psi^*\Psi + \beta\delta\Psi^*|\Psi|^2\Psi + \frac{\delta\Psi^*}{4m_f} \left(-i\hbar\nabla - \frac{1}{4m_f} \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \phi] dV + \\ &+ \frac{1}{4m_f} \int \text{div}(\delta\Psi^*\phi) dV = \int \delta\Psi^* [\alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi + \\ &+ \frac{1}{4m_f} \left(-i\hbar\nabla - \frac{1}{4m_f} \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \left(-i\hbar\nabla - \frac{1}{4m_f} \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \Psi] dV + \\ &\frac{1}{4m_f} \oint_{sur} \left(-i\hbar\nabla\Psi - \frac{1}{4m_f} \frac{2e}{c} \mathbf{A}\Psi \right) d\mathbf{S} \delta\Psi^*. \end{aligned}$$

Знову-таки ми повинні вважати, що варіація довільна, тому цей вираз дорівнює нулеві, лише якщо обидва доданки самі дорівнюють нулю. Таким чином, приходимо до 1-го рівняння теорії Гінзбурга-Ландау

$$\alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi + \frac{1}{4m_f}(i\hbar\nabla + \frac{2e}{c}\mathbf{A})^2\Psi = 0$$

та граничної умови до нього у вигляді

$$(i\hbar\nabla\Psi + \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi)\mathbf{n} = 0,$$

де \mathbf{n} – одиничний вектор, нормальний до поверхні в кожній її точці. Неважко перевірити, що мінімізація вільної енергії по функції Ψ приведе до рівняння, комплексно спряженого до отриманого.

Друге рівняння виводиться подібним чином, але мінімізацією по векторному потенціалу \mathbf{A} . Зробимо це:

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{A}} G_s(\mathbf{H}) = & \int \left[\frac{1}{4m_f} \left(-\frac{2e}{c} \delta\mathbf{A}\Psi^* \right) \left(-i\hbar\nabla\Psi - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi \right) + \right. \\ & + \frac{1}{4m_f} \left(i\hbar\nabla\Psi^* - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi^* \right) \left(-\frac{2e}{c} \delta\mathbf{A}\Psi \right) + \\ & \left. + \frac{\text{rot}\mathbf{A}\text{rot}\delta\mathbf{A}}{4\pi} - \frac{\mathbf{H}_0\text{rot}\delta\mathbf{A}}{4\pi} \right] dV. \end{aligned}$$

Як і вище варіацію (тепер $\delta\mathbf{A}$) неможливо винести за дужки через присутність цієї величини під операцією $\text{rot}\delta\mathbf{A}$. Тому згадаємо векторну тотожність

$$\text{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{b}\text{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\text{rot}\mathbf{b},$$

яка дає змогу переписати попередній вираз наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int (\text{rot}\mathbf{A} - \mathbf{H}_0) \text{rot}\delta\mathbf{A} dV &= \frac{1}{4\pi} \int \text{rot}(\text{rot}\mathbf{A} - \mathbf{H}_0) \delta\mathbf{A} dV - \\ &- \frac{1}{4\pi} \int \text{div}[\text{rot}\mathbf{A} - \mathbf{H}_0, \delta\mathbf{A}] dV = \\ &= \int \delta\mathbf{A} \text{rotrot}\mathbf{A} dV - \frac{1}{4\pi} \oint_{sur} [\text{rot}\mathbf{A} - \mathbf{H}_0, \delta\mathbf{A}] d\mathbf{S}. \end{aligned}$$

Поверхневий інтеграл дорівнює нулеві, бо магнітне поле на поверхні НП має бути заданим, а отже $\delta\mathbf{A}|_{sur} = 0$. В результаті, можемо записати:

$$\begin{aligned} \delta_A G_S(\mathbf{H}) &= \int \delta\mathbf{A} \frac{1}{4\pi} [i\hbar\Psi^*\nabla\Psi - \frac{2e}{c} i\hbar\Psi\nabla\Psi^* + \frac{4e^2}{c^2} |\Psi|^2 \mathbf{A} + \\ &+ \frac{4e^2}{c^2} |\Psi|^2 \mathbf{A} + \frac{1}{4\pi} \text{rotrot}\mathbf{A}] dV = \\ &= \int [\frac{i\hbar e}{2m_f c} (\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) + \frac{2e^2}{m_f c^2} |\Psi|^2 \mathbf{A} + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \text{rotrot}\mathbf{A}] \delta\mathbf{A} dV = 0. \end{aligned}$$

Тепер очевидно, що вираз під інтегралом має дорівнювати у НП нулю, щоб інтеграл давав нуль при будь-якій варіації. Згадаємо також, що згідно з другим рівнянням Лондонів $\text{rot}\mathbf{H} = (4\pi/c)\mathbf{j}_S$, і, з іншого боку, $\text{rot}\mathbf{H} = \text{rotrot}\mathbf{A}$. Ці два співвідношення дозволяють отримати

$$i \frac{\hbar e}{2m_f c} (\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) + \frac{2e^2}{m_f c^2} |\Psi|^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c} \mathbf{j}_S = 0,$$

або

$$\mathbf{j}_s = -i \frac{\hbar e}{2m_f} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{2e^2}{m_f c} |\Psi|^2 \mathbf{A},$$

де внаслідок того, що $2e/4m_f = e/2m_f$, перший доданок має звичайний вигляд.

В теорії НП рівняння Гінзбурга-Ландау прийнято використовувати у безрозмірних змінних. Скористуємося ними, для чого позначимо:

$$\psi \equiv \frac{\Psi}{|\Psi_0|},$$

де

$$|\Psi_0|^2 = \frac{|\alpha|}{\beta}.$$

Тоді перепишемо перше рівняння Гінзбурга-Ландау:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4m_f} (i\hbar\nabla + \frac{2e}{c}\mathbf{A})^2 \Psi + \alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi &= 0; \\ \frac{\hbar^2}{4m_f} (i\nabla + \frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A})^2 \Psi - |\alpha|\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi &= 0; \\ \frac{\hbar^2}{4m_f|\alpha|} (i\nabla + \frac{2\pi e}{\pi\hbar c}\mathbf{A})^2 \frac{\Psi}{|\Psi_0|} - \frac{\Psi}{|\Psi_0|} + \frac{\beta}{|\alpha|} |\Psi|^2 \frac{\Psi}{|\Psi_0|} &= 0; \\ \xi_S^2 (i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0}\mathbf{A})^2 \psi - \psi + |\psi|^2\psi &= 0, \end{aligned}$$

де ми скористалися позначенням кванта потоку $\Phi_0 = \pi\hbar c/e$ і ввели величину ξ_S розмірності довжини:

$$\xi_S^2 = \frac{\hbar^2}{4m_f|\alpha|},$$

зміст якої з'ясуємо трохи пізніше. Гранична умова також переписується:

$$(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A})\mathbf{n}\psi = 0.$$

Фактично вона забезпечує відсутність НП струму через границю (поверхню) зразка, або рівність $\mathbf{j}_s \mathbf{n} = 0$. Проте це справедливо лише у ситуації, коли НП граничить з вакуумом. Якщо ж НП стикається з нормальним металом або напівпровідником, то в феноменологічному підході відповідна гранична умова, що дозволяє $\mathbf{j}_s \neq 0$ через границю, має вигляд:

$$(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A})\mathbf{n}\psi = i\frac{1}{b}\psi,$$

де b – деяка константа.

Перетворимо друге рівняння теорії Гінзбурга-Ландау:

$$\frac{1}{4\pi} \text{rotrot} \mathbf{A} = -i \frac{\hbar e}{2m_f c} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{2e^2}{m_f c^2} |\Psi|^2 \mathbf{A};$$

$$\text{rotrot} \mathbf{A} = -i \frac{2\pi \hbar e}{m_f c} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{8\pi e^2}{m_f c^2} |\Psi|^2 \mathbf{A};$$

$$\text{rotrot} \mathbf{A} = -i \frac{2\pi \hbar e^2 c}{m_f c^2 e} |\Psi_0|^2 (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{8\pi e^2}{m_f c^2} |\Psi_0|^2 |\psi|^2 \mathbf{A};$$

$$\text{rotrot} \mathbf{A} = -i \frac{2e^2 \Phi_0 n_s}{m_f c^2 e} \frac{n_s}{2} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{8\pi e^2 n_s}{m_f c^2} \frac{n_s}{2} |\psi|^2 \mathbf{A};$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = -i \frac{\mathcal{Z} e^2 \Phi_0 n_s}{m_f c^2 \mathcal{Z}} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{4\mathcal{Z} \pi e^2 n_s}{m_f c^2 \mathcal{Z}} |\psi|^2 \mathbf{A};$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = -i \frac{\Phi_0}{4\pi m_f c^2} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{1}{\frac{m_f c^2}{4\pi e^2 n_s}} |\psi|^2 \mathbf{A},$$

звідки, враховуючи, що $\lambda_L^2 \equiv m_f c^2 / 4\pi e^2 n_s$, отримуємо:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = -i \frac{\Phi_0}{4\pi \lambda_L^2} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{|\psi|^2}{\lambda_L^2} \mathbf{A}.$$

Це і є шукане друге рівняння Гінзбурга-Ландау. Воно спрощується, коли зробити заміну $\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})| e^{i\theta(\mathbf{r})}$, яку ми вже робили, отримавши:

$$\begin{aligned} \psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^* &= |\psi| e^{-i\theta} \nabla |\psi| e^{i\theta} + |\psi|^2 e^{-i\theta} e^{i\theta} i \nabla \theta - \\ &- |\psi| e^{i\theta} \nabla |\psi| e^{-i\theta} - |\psi|^2 e^{i\theta} e^{-i\theta} (-i \nabla \theta) = 2i |\psi|^2 \nabla \theta, \end{aligned}$$

що дає

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{\Phi_0}{2\pi \lambda_L^2} |\psi|^2 \nabla \theta - \frac{|\psi|^2}{\lambda_L^2} \mathbf{A} = \frac{|\psi|^2}{\lambda_L^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \mathbf{A} \right).$$

Фактично – це друге рівняння Лондонів ($\lambda_L^2 = c^2 \Lambda / 4\pi$):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s = \frac{4\pi}{c^2 \Lambda} |\psi|^2 \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \mathbf{A} \right),$$

або

$$\mathbf{j}_s = \frac{|\psi|^2}{c\Lambda} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \mathbf{A} \right).$$

Різниця – у присутності $|\psi|^2$, що свідчить про залежність НП струму не тільки від фази та векторного потенціалу, але й від густини частинок. Нагадаємо, що в класичному підході друге рівняння Лондонів має вигляд (див. Лекцію 5)

$$\mathbf{j}_s = -(1/c\Lambda)\mathbf{A}.$$

Лекція 9

Продовжимо вивчати теорію Гінзбурга-Ландау, зосередившись на розв'язках рівнянь, які ми отримали на попередній лекції.

13.3. *Проникнення магнітного поля.* Розглянемо просту задачу, яку ми вже розв'язали, але в підході Лондонів. Мова йде про проникнення магнітного поля в НП з плоскою границею. Нехай, як і раніше, НП займає напівпростір $x > 0$, а зовнішнє поле має напрямок $\mathbf{H}_0 \parallel z$. Оскільки поле затухає вздовж осі x , можна вважати, що

$$H_z(x) = \frac{dA_y(x)}{dx}.$$

Розпишемо перше рівняння

$$\xi_S^2 \left(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right)^2 \psi - \psi + |\psi|^2 \psi = 0,$$

яке можна дещо спростити:

$$\begin{aligned} \xi_S^2 \left[-\Delta \psi + \frac{2\pi}{\Phi_0} i\nabla(\mathbf{A}\psi) + \frac{4\pi^2}{\Phi_0^2} \mathbf{A}^2 \psi \right] - \psi + |\psi|^2 \psi &= 0; \\ -\xi_S^2 \Delta \psi + i\xi_S^2 \frac{2\pi}{\Phi_0} \operatorname{div} \mathbf{A} \psi + \xi_S^2 \frac{4\pi^2}{\Phi_0^2} \mathbf{A}^2 \psi - \psi + |\psi|^2 \psi &= 0. \end{aligned}$$

Оскільки $A_x = A_z = 0$, а $A_y = A_y(x)$, операція

$$\operatorname{div} \mathbf{A} \psi = (\nabla \mathbf{A} \psi) = \left[\mathbf{i} \frac{\partial(A_x \psi)}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial(A_y \psi)}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial(A_z \psi)}{\partial z} \right] = 0.$$

Розглянемо область поблизу T_c , коли $\xi_s^2 \gg 1$, тому можна вважати, що для знаходження хвильової функції досить рівняння:

$$\Delta \psi \equiv \frac{d^2 \psi}{dx^2} = 0,$$

розв'язок якого $\psi(x) = C_1 x + C_0$. З граничної умови $d\psi/dx|_{sur} = 0$ маємо $d\psi/dx = C_1 = 0$. Тоді $\psi(x) = C_0$, і ми можемо покласти $C_0 = 1$.

При дійсній функції ψ та $|\psi|^2 = 1$ треба повернутися до 2-го рівняння, яке приймає форму: $\lambda_L^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} + \mathbf{A} = 0$. Тоді

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \\ &= \operatorname{rot} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & A_y(x) & 0 \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \frac{\partial A_y(x)}{\partial x} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{dA_y(x)}{dx} \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{d^2 A_y(x)}{dx^2} \mathbf{j}, \end{aligned}$$

звідки $\lambda_L^2 d^2 A_y(x)/dx^2 - A_y(x) = 0$. Зважаючи, що $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, або $H_z(x) = dA_y(x)/dx$, останнє рівняння легко переписується до “старого” вигляду:

$$\lambda_L^2 \frac{d^2 A_y(x)}{dx^2} - A_y(x) = \lambda_L^2 \frac{d^2 \left[\frac{dA_y(x)}{dx} \right]}{dx^2} - \frac{dA_y(x)}{dx} =$$

$$= \lambda_L^2 \frac{d^2 H_z(x)}{dx^2} - H_z(x) = 0,$$

який ми вже аналізували. Зрозуміло, що це рівняння має той самий розв'язок $H_z(x) = H_0 \exp(-x/\lambda_L)$.

13.4. *Гradientна інваріантність теорії Гінзбурга-Ландау.* Ми отримали, що рівняння Гінзбурга-Ландау визначаються векторним потенціалом \mathbf{A} , а він, як відомо не є однозначним. Зокрема, можна перейти до іншого векторного поля так, що

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla\chi,$$

де $\chi(\mathbf{r})$ – довільна однозначна функція. При такій заміні спостережуване магнітне поле не змінюється

$$\mathbf{H} = \text{rot}\mathbf{A} = \text{rot}\mathbf{A}',$$

тому що $\text{rot}\nabla = 0$.

Щоб розрахунки не залежали від вибору \mathbf{A} , треба, щоб теорія була gradientно інваріантна, тобто існували такі \mathbf{A}' та ψ' , рівняння для яких мали той самий вигляд.

Це дійсно так і легко перевірити, що якщо зробити заміни вектору-потенціалу

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' + \nabla\chi$$

та хвильової функції

$$\psi \rightarrow \psi' e^{i\frac{2\pi}{\Phi_0}\chi(\mathbf{r})} = |\psi(\mathbf{r})| e^{i[\theta'(\mathbf{r}) + \frac{2\pi}{\Phi_0}\chi(\mathbf{r})]},$$

то рівняння Гінзбурга-Ландау залишаться незмінними. Перевіримо на прикладі другого рівняння, що має вигляд:

$$\text{rotrot}\mathbf{A} = \frac{|\psi|^2}{\lambda_L^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla\theta - \mathbf{A} \right).$$

Підстановка приводить до рівняння

$$\begin{aligned} \text{rotrot}(\mathbf{A}' + \nabla\chi) &= \frac{|\psi'|^2}{\lambda_L^2} \left[\frac{\Phi_0}{2\pi} (\nabla\theta' + \frac{2\pi}{\Phi_0} \nabla\chi) - \mathbf{A}' - \nabla\chi \right] = \\ &= \frac{|\psi'|^2}{\lambda_L^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla\theta' - \mathbf{A}' \right) \end{aligned}$$

у нових змінних, яке є тотожним вихідному рівнянню Гінзбурга-Ландау.

Доведення градієнтної інваріантності першого рівняння Гінзбурга-Ландау пропонується для перевірки замість вправи.

З властивості градієнтної інваріантності рівнянь Гінзбурга-Ландау випливає дуже важливий висновок – хвильова функція може вибиратися реальною, якщо у НП нема отворів (тобто НП є однозв'язним), бо у НП з отворами фаза не є однозначною, а набирає 2π при кожному обході отвору будь-якої форми.

14. Два характерних масштаби

14.1. *Довжина когерентності та глибина проникнення.* На попередній лекції ми дещо формально ввели позначення $\xi_S^2 = \hbar^2 / 4m_f |\alpha|$. Розглянемо тепер його фізичний смисл.

Для цього розберемо простий приклад. Нехай на чисту плоску поверхню НП нанесена плівка нормального металу, що займає на півпростір $x > 0$ (рис. 9.1) Тоді локально, біля поверхні, густина НП електронів зменшиться. Іншою мовою, значення параметра порядку $|\psi|$ на поверхні має і буде відрізнятися від його рівноважної величини у глибині НП, де $|\psi| = 1$. Який є характерний масштаб, що має

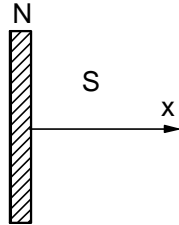


Рис. 9.1

розмірність довжини, на якому параметр порядку відновлює своє значення до 1?

Знову направимо вісь x перпендикулярно до поверхні НП і покладемо, як зазначалося, що на ній $x = 0$. Зрозуміло, що зміна ψ

відбувається саме вздовж цієї осі, тобто $\psi(\mathbf{r}) = \psi(x)$. Крім того, ми розглядаємо напівнескінчений суцільний (тобто однозв'язний) НП, а тому у відповідності до калібрувальної інваріантності можемо обрати функцію $\psi(x)$ дійсною. Тоді перше рівняння Гінзбурга-Ландау приймає вигляд:

$$-\xi_s^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} - \psi + \psi^3 = 0.$$

Можна вважати шар метала настільки тонким, що $\psi(0)$ мало відрізняється від 1. Це дає змогу ввести малу функцію, або

$$\psi(x) = 1 - \varepsilon(x), \quad |\varepsilon(x)| \ll 1.$$

Підставимо й обмежимося першим наближенням:

$$\begin{aligned} \xi_s^2 \frac{d^2 \varepsilon(x)}{dx^2} - 1 + \varepsilon(x) + [1 - \varepsilon(x)]^3 &= \xi_s^2 \frac{d^2 \varepsilon(x)}{dx^2} - 1 + \varepsilon(x) + 1 - 3\varepsilon(x) = \\ &= \xi_s^2 \frac{d^2 \varepsilon(x)}{dx^2} - 2\varepsilon(x) = 0. \end{aligned}$$

Покладемо $\varepsilon(x) \sim e^{x/a}$, звідки $\frac{\xi_s^2}{a^2} - 2 = 0$, тобто $a = \pm \xi_s / \sqrt{2}$. Тепер враховуючи, що $\varepsilon(\infty) = 0$, отримуємо

$$\varepsilon(x) = \varepsilon(0)e^{-\sqrt{2} \frac{x}{\xi_S}}.$$

З цього розв'язку прямо випливає, що величина ξ_S – це той характерний масштаб, на якому відбувається суттєва зміна хвильової функції. Можна також стверджувати, що ξ_S характеризує, або відображає, масштаб неоднорідності у поведінці $\psi(x)$, де ця функція зберігає свою когерентність. Тому величина ξ_S отримала назву *довжини когерентності*.

Інша величина, що була введена нами раніше при виводі рівнянь Гінзбурга-Ландау, – це глибина проникнення магнітного поля

$$\lambda_L^2 = \frac{m_f c^2 \beta}{8\pi e^2 |\alpha|}.$$

Видно, що обидві ці величини поблизу критичної температури T_c розбігаються, як $\frac{1}{\sqrt{T - T_c}}$. При цьому

ми вже згадували, що в усьому температурному інтервалі від 0 до T_c глибина проникнення непогано апроксимується емпіричною залежністю

$$\begin{aligned} \lambda_L(T) &= \frac{\lambda_L(0)}{\sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4}} = \frac{\lambda_L(0)}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right]}} \approx \\ &\approx \frac{\lambda_L(0)}{\sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}}. \end{aligned}$$

З іншого боку, в нас було

$$\lambda_L^2 = \frac{m_f c^2}{4\pi e^2 n_s} = \frac{m_f c^2}{8\pi e^2 \frac{n_s}{2}} = \frac{m_f c^2}{8\pi e^2 |\Psi|^2} = \frac{m_f c^2 \beta}{8\pi e^2 |\alpha|} = \frac{m_f c^2 \beta}{8\pi e^2 (T_c - T)},$$

і ми приходимо до висновку, що теорія Гінзбурга-Ландау дає правильну температурну поведінку лондонівської глибини.

За допомогою обох величин, що обговорюються, в теорії Гінзбурга-Ландау вводиться ще один дуже важливий, як буде видно, параметр, а саме:

$$\kappa_{GL} = \frac{\lambda_L(T)}{\xi_s(T)},$$

який є безрозмірним і який так і зветься – **параметр Гінзбурга-Ландау**. Він практично не залежить від температури. Дійсно

$$\kappa_{GL}^2 = \frac{m_f c^2 \beta}{8\pi e^2 |\alpha|} \frac{4m_f |\alpha|}{\hbar^2} = \frac{m_f^2 c^2 \beta}{2\pi \hbar^2 e^2},$$

а коефіцієнт β дуже слабко, як ми вже знаємо, залежить від T . Згадаємо також, що оскільки

$$F_N(0) - F_S(0) = \frac{H_{cm}^2(T)}{8\pi} = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\beta},$$

то $H_{cm}^2(T) = 4\pi\alpha^2 / \beta$. Тоді неважко отримати:

$$\begin{aligned} \kappa_{GL} &= \frac{m_f c}{\hbar e} \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} = \frac{e}{\hbar c} \sqrt{\frac{m_f^2 c^4 \beta}{2\pi e^4} \frac{32\pi\alpha^2 \beta}{32\pi\alpha^2 \beta}} = \frac{e}{\hbar c} \frac{m_f c^2 \beta}{8\pi e^2 |\alpha|} \sqrt{\frac{32\pi\alpha^2}{\beta}} = \\ &= 2\sqrt{2} \frac{e}{\hbar c} \lambda_L^2 H_{cm} = 2\sqrt{2} \frac{\pi}{\Phi_0} \lambda_L^2 H_{cm}, \end{aligned}$$

де ми скористались відомим означенням $\Phi_0 = \pi\hbar c / e$ і зробили заміну $e / \hbar c = \pi / \Phi_0$. Отже, остаточно маємо “рівняння”:

$$\frac{\lambda_L}{\xi_S} = 2\sqrt{2} \frac{\pi}{\Phi_0} \lambda_L^2 H_{cm},$$

з якого випливає формула:

$$\sqrt{2} H_{cm} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_L\xi_S}.$$

Що можна сказати про параметр Гінзбурга-Ландау? Щоб відповісти на це питання припустимо, що $\kappa_{GL} \ll 1$, або $\lambda_L \ll \xi_S$. Тоді, якщо НП зразок займає напівпростір $x > 0$, зовнішнє поле направлене вздовж вісі z і проникає (див. рис. 9.2) на відносно невелику глибину, параметр порядку, навпаки, спадає повільно в напрямку границі, і величина $|\psi(x)|$ виявляється під впливом магнітного поля в дуже малій області по x . Інакше кажучи, параметр порядку начебто не знає про існування поля і виявляється близьким до своєї максимальної величини

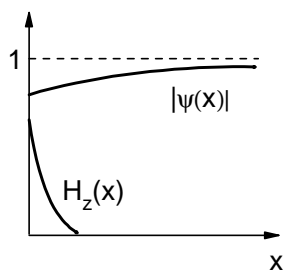


Рис. 9.2

$|\psi_0| = \sqrt{|\alpha| / \beta}$. Таким чином, у випадку $\kappa_{GL} \ll 1$ можна вважати, що магнітне поле майже не впливає на параметр порядку $|\psi(x)| \approx |\psi_0|$.

Вплив магнітного поля на параметр порядку у випадку $\kappa_{GL} \gg 1$, або $\lambda_L \gg \xi_S$, є більш

складним і вимагає розв'язку точних рівнянь Гінзбурга-Ландау. Деякі з таких задач розглядатимуться в наступних частинах курсу.

14.2. *Ефект близькості*. Дуже яскраво роль довжини когерентності проявляється у випадку щільного контакту між нормальним металом N та НП S . Виявляється, що куперівські пари можуть проникати з НП до нормального металу та існувати в ньому деякий час. Це призводить до того, що шар металу поблизу границі (SN -переходу) виявляється надпровідним. Проте проникнення пар з S області до N шару викличе зменшення густини частинок у НП, внаслідок чого величина $|\psi|$ біля границі стане менше

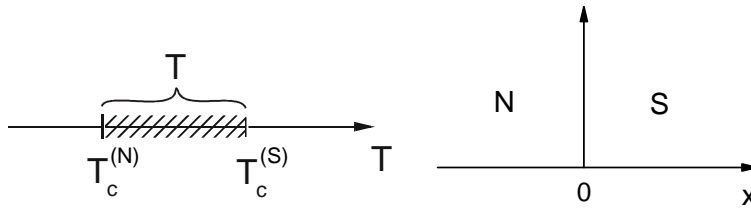


Рис.9.3

Рис. 9.4

і навіть у відсутності зовнішнього магнітного поля.

Саме “перетворення” нормального металу у НП, або проникнення до нього НП хвильової функції, має назву *ефекту близькості*. Щоб зрозуміти, що це таке, розглянемо найпростіший випадок (див. рис. 9.3). Нехай між двома різними НП, температури T_c яких є досить близькими, здійснений хороший контакт. Позначимо ці температури $T_c^{(N)}$ та $T_c^{(S)}$, припустивши, що $T_c^{(S)} > T_c^{(N)}$ і що $T_c^{(S)} - T_c^{(N)} \ll T_c^{(N)}$. Оберемо

температуру всієї системи такою, що $T_c^{(N)} < T < T_c^{(S)}$, тобто матеріал з критичною температурою $T_c^{(N)}$ знаходиться у N -стані, а з температурою $T_c^{(S)}$ – у S -стані. Задамо також систему координат (рис. 9.4) так, щоб плоска границя відповідала площині $x = 0$.

Розглянемо рівняння Гінзбурга-Ландау в області $x > 0$:

$$-\xi_s^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} - \psi + \psi^3 = 0.$$

Помножимо його на ψ' :

$$-\xi_s^2 \psi'' \psi' - \psi \psi' + \psi^3 \psi' = -\frac{d}{dx} \left[\frac{\xi_s^2}{2} (\psi')^2 + \frac{1}{2} \psi^2 - \psi^4 \right] = 0,$$

і проінтегруємо, звідки приходимо до рівності:

$$\frac{\xi_s^2}{2} (\psi')^2 + \frac{1}{2} \psi^2 - \psi^4 = C,$$

в якій C – константа інтегрування. Вона, як завжди, знаходиться з граничної умови щодо поведінки хвильової функції та її похідної при $x \rightarrow \infty$: $\psi(x \rightarrow \infty) \rightarrow 1$, а $\psi'(x \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. Це негайно дає $C = 1/2$. Підставляючи таке значення, можемо знайти рівняння, якому задовольняє похідна:

$$\xi_s^2 (\psi')^2 = \frac{1}{2} - \psi^2 + \frac{1}{2} \psi^4 = \frac{1}{2} (1 - \psi^2)^2,$$

або $\sqrt{2} \xi_s \psi' = \pm (1 - \psi^2)$. Який з двох можливих знаків треба залишити, визначається фізичними міркуваннями: зрозуміло (див. вище рис. для ψ -

функції), що похідна хвильової функції в області $x > 0$ (а ми поки що розглядаємо лише додатні значення аргументу) є позитивною. Тому

$$\sqrt{2}\xi_S\psi' = (1-\psi^2);$$

$$\frac{d\psi}{(1-\psi)(1+\psi)} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\psi}{1-\psi} + \frac{d\psi}{1+\psi} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dx}{\xi_S},$$

тобто

$$\frac{1}{2} \int \left(\frac{d\psi}{1-\psi} + \frac{d\psi}{1+\psi} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\xi_S}; \quad \ln \frac{1+\psi}{1-\psi} = \sqrt{2} \frac{x-x_0}{\xi_S},$$

де x_0 – теж константа інтегрування. З отриманого виразу знаходимо:

$$\frac{1+\psi}{1-\psi} = e^{\sqrt{2} \frac{x-x_0}{\xi_S}}$$

і, нарешті,

$$\psi_S(x) = \frac{e^{\sqrt{2} \frac{x-x_0}{\xi_S}} - 1}{e^{\sqrt{2} \frac{x-x_0}{\xi_S}} + 1} = th \frac{x-x_0}{\sqrt{2}\xi_S},$$

де ми використали позначення S для хвильової функції в НП металі.

Для визначення сталої x_0 згадаємо граничну умову до рівняння Гінзбурга-Ландау, яку ми писали у вигляді:

$$i(\nabla - i \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A})\mathbf{n}\psi = 0,$$

тобто у відсутності поля (коли $\mathbf{A} = 0$) виходить, що на границі $\mathbf{n}\nabla\psi = 0$, або $\psi'(0) \equiv d\psi/dx|_{x=0} = 0$. У нас же $\psi' \rightarrow 0$ лише при $x \rightarrow \infty$, в області границі хвильова функція зменшується, що не може узгодитись з умовою $\psi'(0) = 0$. В той же час, остання умова свідчить лише про те, що НП струм через границю відсутній:

$$\mathbf{j}_s = -i \frac{\hbar e}{2m_f} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = 0,$$

якщо функція дійсна. Але фізичній умові відсутності НП струму відповідає не тільки виписана рівність нулю похідної. Легко перевірити, що струм \mathbf{j}_s через границю також буде відсутнім і тоді, коли ця похідна поблизу границі має скінчене значення і при цьому $\psi'(x) \sim \psi(x)$. Зауважимо, що таке співвідношення завжди має місце для експоненціальних залежностей, найбільш характерних у квантовій механіці. Тому у загальному випадку граничну умову на SN -границі прийнято записувати у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_s}{dx} \Big|_{x=0} &\equiv \psi'_s(0) = \frac{1}{b} \psi_s(0) \equiv \frac{1}{b} \psi_s \Big|_{x=0} \quad \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{\psi_s \Big|_{x=0}} \frac{d\psi_s}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{1}{b}, \end{aligned}$$

причому, очевидно, таку ж рівність треба буде записати і для розв'язку в області $x < 0$.

Константу b , яка теж має розмірність довжини, розраховують в рамках мікроскопічного підходу, у нас же вона – це феноменологічний параметр. Отже,

$$\frac{d}{dx} \operatorname{th} \frac{x-x_0}{\sqrt{2\xi_s}} = \frac{1}{ch^2 \frac{x-x_0}{\sqrt{2\xi_s}}} \frac{1}{\sqrt{2\xi_s}}$$

і при $x=0$ знаходимо зв'язок:

$$\frac{1}{ch^2 \frac{x_0}{\sqrt{2\xi_s}}} \frac{1}{\sqrt{2\xi_s}} = \frac{1}{b} \operatorname{th} \frac{-x_0}{\sqrt{2\xi_s}} \equiv -\frac{1}{b} \frac{\operatorname{sh} \frac{x_0}{\sqrt{2\xi_s}}}{ch \frac{x_0}{\sqrt{2\xi_s}}},$$

або

$$\frac{1}{ch \frac{x_0}{\sqrt{2\xi_s}}} = -\sqrt{2} \frac{\xi_s}{b} \operatorname{sh} \frac{x_0}{\sqrt{2\xi_s}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{2} \frac{b}{\xi_s} = -\operatorname{sh} \frac{x_0}{\sqrt{2\xi_s}} = \operatorname{sh} \frac{|x_0|}{\sqrt{2\xi_s}},$$

який дозволяє знайти досі невідому константу x_0 . Оскільки ця константа виявляється від'ємною, можна зобразити поведінку знайденої функції $\operatorname{th}(x-x_0)/\sqrt{2\xi_s} = \operatorname{th}(x+|x_0|)/\sqrt{2\xi_s}$, і видно, що вона прямує до нуля, коли її аргумент $x \rightarrow -|x_0|$. Але не ця функція визначає поведінку параметра порядку області $x < 0$. Щоб його знайти саме на півпросторі N -металу, запишемо в ньому рівняння Гінзбурга-Ландау. Правда, як видно, в цій області

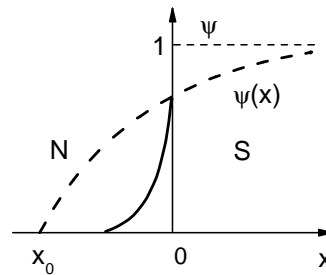


Рис. 9.5

$\alpha_N \equiv T - T_c^{(N)} > 0$. Тому змінюється знак у другого доданку в рівнянні Гінзбурга-Ландау, яке приймає форму:

$$-\xi_N^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} + \psi + \psi^3 = 0,$$

де тепер $\xi_N = \hbar^2 / 4m_f \alpha_N$. Зважаючи на те, що ми знаходимося у нормальному середовищі, можна припустити справедливості нерівності $\psi \ll 1$ і обмежитись наближеним рівнянням:

$$-\xi_N^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} + \psi = 0,$$

розв'язок якого, як завжди, має вигляд $\psi \sim e^{x/a}$. Він дає $a = \pm \xi_N$ і остаточно:

$$\psi_N(x) = \psi_N(0) e^{x/\xi_N},$$

бо необхідно задовольнити умові $\psi_N(x \rightarrow -\infty) \rightarrow 0$.

Видно, що параметр порядку дійсно виникає в N -металі і затухає вглиб нього експоненціально, причому довжина затухання визначається величиною ξ_N .

З умови неперервності функцій $\psi_N(0) = \psi_S(0)$, або $th \frac{|x_0|}{\sqrt{2}\xi_S} = \psi_N(0)$, знаходимо досі невідому амплітуду $\psi_N(0)$, а з неперервності похідних $\psi'_N(0) = \psi'_S(0)$ – параметр ξ_N . Остання рівність легко дає

$$\operatorname{sh} \frac{\sqrt{2} |x_0|}{\xi_S} = \frac{\xi_N}{\sqrt{2} \xi_S},$$

а раніше ми мали (див. вище) $b/\sqrt{2}\xi_S$, звідки $b = \xi_N$. Поведінка обох розв'язків показана на рисунку 9.6.

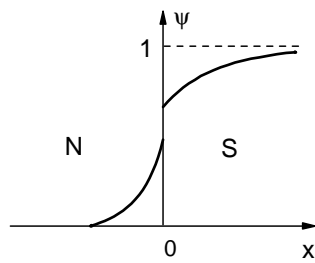


Рис. 9.6

Точний мікророзрахунок дає невеликий розрив, який зростає із збільшенням “нормалізації” нормального металу.

Ефект близькості був вперше спостережений у 1958 р. Він не тільки ще раз продемонстрував і підтвердив квантову природу явища НП, але й став важливим ефектом в надпровідному приладобудуванні.

Лекція 10

15. Енергія границі поділу між нормальною та надпровідною фазами

Під час розгляду магнітних властивостей НП ми ввели уявлення про НП I-го та II-го роду, які по-різному проявляють себе під час дії на них зовнішнього магнітного поля. Це відбувається тому, що енергія σ_{NS} границі поділу між N - та S -фазами у НП-I позитивна, а у НП-II – від’ємна. Тепер ми розрахуємо відповідну енергію і визначимо причину такої різниці. Буде продемонстровано, що все залежить від співвідношення між λ_L та ξ_S . Виявляється, що першому випадку відповідає нерівність $\lambda_L < \xi_S$, а у другому – $\lambda_L > \xi_S$. Більш точно “границя параметрів” буде наведена нижче, з розрахунків. Почнемо з НП-I.

Отже, розглянемо плоску NS -границю НП (рис. 10.1), що знаходиться у проміжному стані. Нехай далеко ліворуч від цієї границі система перебуває в S -стані, а далеко праворуч – в N -стані,

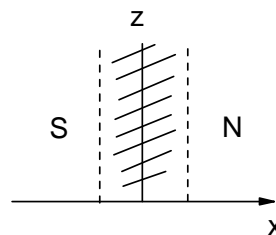


Рис. 10.1

при цьому границя розташована перпендикулярно до вісі x , магнітне ж поле направлено вздовж осі $\mathbf{H} \parallel z$. Оскільки ми, як і вище, припускаємо однозв'язність НП простору, то з калібрувальної інваріантності можна скористатися такою калібровкою вектор-потенціалу \mathbf{A} , що параметр порядку буде описуватися дійсною хвильовою функцією $\psi(\mathbf{r})$. Крім того, проста геометрія задачі свідчить, що всі змінні будуть функціями лише однієї координати x , вектор $\mathbf{A} \parallel y$, а начало координат, тобто границю, розташуємо у точці $x = 0$.

Отже, маємо:

$$\begin{aligned} i) \mathbf{H} &= (0, 0, H_z(x)); \\ ii) \psi &= \psi(x); \\ iii) \mathbf{A} &= (0, A_y(x), 0); \end{aligned} \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & A_y(x) & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial A_y}{\partial x} \mathbf{k} \equiv \frac{dA_y}{dx} \mathbf{k}.$$

Тепер можна записати рівняння Гінзбурга-Ландау і зробити деякі підготовчі для подальшого розгляду перетворення:

$$\xi_s^2 (i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A})^2 \psi - \psi + |\psi|^2 \psi = 0;$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \frac{|\psi|^2}{\lambda_L^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \mathbf{A} \right),$$

при цьому можна покласти $\theta = 0$ внаслідок дійсності функції ψ . Тоді

$$\begin{aligned} & \xi_S^2 (i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A})^2 \psi - \psi + |\psi|^2 \psi = \\ & = \xi_S^2 \left(-\frac{d^2}{dx^2}\right) \psi(x) + \xi_S^2 \left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\right)^2 A_y^2(x) \psi - \psi + \psi^3 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{A} = \text{rot} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & A_y(x) & 0 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial A_y(x)}{\partial x} \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{d^2 A_y(x)}{dx^2} = -\frac{|\psi(x)|^2}{\lambda_L^2} A_y(x). \end{aligned}$$

Замінемо позначення:

$$\begin{aligned} & \xi_S^2 \left(-\frac{d^2}{dx^2}\right) \psi(x) + \xi_S^2 \left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\right)^2 A_y^2(x) \psi - \psi + \psi^3 = 0 \quad \rightarrow \\ & \rightarrow -\xi_S^2 \psi'' + \xi_S^2 \left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\right)^2 A_y^2 \psi - \psi + \psi^3 = 0; \\ & -\frac{d^2 A_y(x)}{dx^2} = -\frac{|\psi(x)|^2}{\lambda_L^2} A_y(x) \quad \rightarrow \lambda_L^2 A_y'' = \psi^2 A_y. \end{aligned}$$

Помножимо перше рівняння на ψ' , а друге на A_y' :

$$\begin{aligned} & -\xi_S^2 \psi'' \psi' + \xi_S^2 \left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\right)^2 A_y^2 \psi \psi' - \psi \psi' + \psi \psi'^3 = 0; \\ & \lambda_L^2 A_y'' A_y = \psi^2 A_y A_y' \end{aligned}$$

і використаємо тотожність

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (A_y \psi)^2 = A_y^2 \psi \psi' + \psi^2 A_y A_y'.$$

Тоді обидва рівняння можна дещо переписати:

$$-\frac{1}{2} \xi_s^2 \frac{d}{dx} (\psi')^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi \xi_s}{\Phi_0} \right)^2 \frac{d}{dx} (A_y \psi)^2 - \left(\frac{2\pi \xi_s}{\Phi_0} \right)^2 \psi^2 A_y A_y' - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \psi^2 + \frac{1}{4} \frac{d}{dx} \psi^4 = 0;$$

$$\frac{1}{2} \lambda_L^2 \frac{d}{dx} (A_y')^2 = \psi^2 A_y A_y',$$

отримавши для першого після використання другого:

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left[\xi_s^2 (\psi')^2 - \left(\frac{2\pi \xi_s}{\Phi_0} \right)^2 (A_y \psi)^2 + \left(\frac{2\pi \xi_s}{\Phi_0} \right)^2 \lambda_L^2 (A_y')^2 + \psi^2 - \frac{1}{2} \psi^4 \right] = 0,$$

або

$$\left[1 - \left(\frac{2\pi \xi_s A_y}{\Phi_0} \right)^2 \right] \psi^2 - \frac{1}{2} \psi^4 + \left(\frac{2\pi \lambda_L \xi_s}{\Phi_0} \right)^2 \left(\frac{dA_y}{dx} \right)^2 + \xi_s^2 \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 = C.$$

Постійну інтегрування C легко визначаємо з граничної умови: при $x \rightarrow -\infty$ функція $\psi \rightarrow 1$, її похідна $\psi' \rightarrow 0$, вектор-потенціал $A_y \rightarrow 0$, звідки $C = 1/2$. Гранична умова демонструє, що далеко ліворуч, у НП фазі, магнітне поле відсутнє, параметр порядку досягає свого максимального значення і прямує до 1. Згадуючи тепер, що параметр Гінзбурга-Ландау (див. Лекцію 9) κ_{GL} зв'язаний з

полем H_{cm} співвідношенням $\sqrt{2}H_{cm} = \Phi_0 / (2\pi\lambda_L\xi_S)$,
можемо переписати отримане нами рівняння у формі:

$$\left[\left(\frac{2\pi\xi_S A_y}{\Phi_0}\right)^2 - 1\right]\psi^2 + \frac{1}{2}\psi^4 = \xi_S^2 \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{H_z}{H_{cm}}\right)^2 - \frac{1}{2},$$

де ми також скористалися тим, що залежне від x
магнітне поле через операцію $\mathbf{H} = \text{rot}\mathbf{A}$ визначається
рівністю $H_z = dA_y / dx$.

Тільки зараз, отримавши деякі корисні
співвідношення, приступимо до розрахунку енергії
 NS -границі поділу між N - та S -станами. При цьому у
НП області необхідно точно знати магнітне поле. А це
область НП, який в цілому знаходиться у проміжному
стані. Значить, десь поряд розташована нормальна
область, в якій значення поля має дорівнювати H_{cm} . А
це значення автоматично встановлюється в
нормальних областях НП, поки він весь не перейде до
 N -стану.

Тому зовнішнє поле по відношенню до S -ділянок
завжди буде дорівнювати тільки H_{cm} . У зв'язку з цим
густина гіббсівської енергії у областях однорідної S -
фази має вигляд:

$$\begin{aligned} G_S^{(\text{hom})}(\mathbf{H}) &= F_S^{(\text{hom})}(\mathbf{H}) - \frac{\mathbf{H}\mathbf{H}_0}{4\pi} = F_S^{(\text{hom})}(\mathbf{H}) - \frac{H_z H_{cm}}{4\pi} = \\ &= F_S^{(\text{hom})}(0) + \frac{H_z^2}{8\pi} - \frac{H_z H_{cm}}{4\pi}. \end{aligned}$$

Ліворуч від NS -границі, як ми зазначали, точне мікроскопічне поле $H_z = 0$, тобто

$$G_S^{(\text{hom})}(0) = F_S^{(\text{hom})}(0),$$

де $F_S^{(\text{hom})}(0)$ – як завжди, густина вільної енергії НП без поля, що, власне, і має бути.

Праворуч від NS -границі, тобто у області теж однорідної N -фази, поле є скінченим, причому $H_z = H_{cm}$, а отже густина вільної енергії

$$F_N^{(\text{hom})}(\mathbf{H}) = F_N^{(\text{hom})}(0) + \frac{H_{cm}^2}{8\pi},$$

де другий доданок не що інше, ніж густина енергії магнітного поля. Але якщо відома вільна енергія, неважко записати вираз для енергії (потенціалу) Гіббса, який за означенням є:

$$\begin{aligned} G_N^{(\text{hom})}(\mathbf{H}) &= F_N^{(\text{hom})}(\mathbf{H}) - \frac{\mathbf{H}\mathbf{H}_0}{4\pi} = F_N^{(\text{hom})}(\mathbf{H}) - \frac{H_z H_{cm}}{4\pi} = \\ &= F_N^{(\text{hom})}(0) + \frac{H_{cm}^2}{8\pi} - \frac{H_{cm}^2}{4\pi} = F_N^{(\text{hom})}(0) - \frac{H_{cm}^2}{8\pi} = F_S^{(\text{hom})}(0), \end{aligned}$$

де ми використали вже добре нам відому рівність, що у області N -стану $H_z = H_{cm}$, а також, що має місце означення: $F_N^{(\text{hom})}(0) = F_S^{(\text{hom})}(0) + H_{cm}^2 / 8\pi$.

Таким чином, ми досить простими розрахунками, що спираються на такі ж прості міркування, прийшли

до висновку, що в умовах рівноваги густина

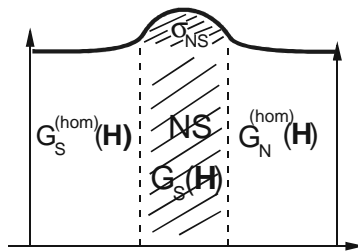


Рис. 10.2

гіббсівського потенціалу (див. рис. 10.2) далеко ліворуч від NS -границі дорівнює густині цього ж потенціалу далеко праворуч від неї. Так, між іншим, і повинно бути. Повторимо:

$$\begin{aligned} \text{ліворуч} - G_S^{(\text{hom})}(\mathbf{H}) &= F_S^{(\text{hom})}(\mathbf{H}) - \frac{H_z H_{cm}}{4\pi} \rightarrow \\ &\rightarrow F_S^{(\text{hom})}(0), (H_z \rightarrow 0); \end{aligned}$$

$$\text{праворуч} - G_N^{(\text{hom})}(\mathbf{H}) = F_S^{(\text{hom})}(0).$$

А що ж відбувається в самій NS -границі, де НП стан є просторово неоднорідним? В ній згідно з рисунком густина може відрізнятися від отриманої величини, тому визначимо енергію граници поділу як різницю:

$$\sigma_{NS} = \int_{-\infty}^{\infty} [G_S(\mathbf{H}) - G_N^{(\text{hom})}(\mathbf{H})] dx,$$

причому

$$G_S(\mathbf{H}) = F_S(\mathbf{H}) - \frac{H_z H_{cm}}{4\pi},$$

а

$$\begin{aligned} F_S(\mathbf{H}) &= F_N^{(\text{hom})}(0) + \frac{H_{cm}^2}{4\pi} (-|\psi|^2 + \frac{1}{2}|\psi|^4 + \\ &+ \xi_S^2 |i\nabla\psi + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A}\psi|^2) + \frac{H_z^2}{8\pi}. \end{aligned}$$

Отримаємо останній вираз, для чого згадаємо, що таке вільна енергія НП у магнітному полі:

$$\begin{aligned}
F_S(\mathbf{H}) &= F_N^{(\text{hom})}(0) + \alpha |\Psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\Psi|^4 + \\
&+ \frac{1}{4m_f} \left| -i\hbar \nabla \Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \Psi \right|^2 + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} = \\
&= F_N^{(\text{hom})}(0) - |\alpha| \Psi_0^2 |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta \Psi_0^4 |\psi|^4 + \\
&+ \frac{\hbar \Psi_0^2}{4m_f} \left| -i\nabla \psi - \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \psi \right|^2 + \frac{H_z^2}{8\pi} = \\
&= F_N^{(\text{hom})}(0) - \frac{\alpha^2}{\beta} |\psi|^2 + \frac{\beta \alpha^2}{2 \beta^2} |\psi|^4 + \\
&+ \frac{\hbar |\alpha|}{4m_f \beta} \left| -i\nabla \psi - \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \psi \right|^2 + \frac{H_z^2}{8\pi} = \\
&= F_N^{(\text{hom})}(0) - \frac{H_{cm}^2}{4\pi} |\psi|^2 + \frac{1}{2} \frac{H_{cm}^2}{4\pi} |\psi|^4 + \\
&+ \frac{H_{cm}^2}{4\pi} \xi_S^2 \left| -i\nabla \psi - \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \psi \right|^2 + \frac{H_z^2}{8\pi} = \\
&= F_N^{(\text{hom})}(0) + \frac{H_{cm}^2}{4\pi} \left(-|\psi|^2 + \frac{1}{2} |\psi|^4 + \right. \\
&\quad \left. + \xi_S^2 \left| -i\nabla \psi + \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \psi \right|^2 \right) + \frac{H_z^2}{8\pi},
\end{aligned}$$

де ми використали позначення, які вже вводили раніше, а саме:

$$\Psi_0^2 = -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{|\alpha|}{\beta}; \quad H_{cm}^2 = 4\pi \frac{\alpha^2}{\beta}; \quad \xi_S^2 = \frac{\hbar^2}{4m_f |\alpha|}.$$

Нарешті, для нашого випадку ми тільки що отримали рівність:

$$G_N^{(\text{hom})}(\mathbf{H}) = F_N^{(\text{hom})}(0) - \frac{H_{cm}^2}{8\pi},$$

яку ми можемо використати для обрахування пошукованої енергії NS -границі:

$$\begin{aligned} \sigma_{NS} &= \int_{-\infty}^{\infty} [G_S(\mathbf{H}) - G_N^{(\text{hom})}(\mathbf{H})] dx = \\ &= \sigma_{NS} = \int_{-\infty}^{\infty} [G_S(\mathbf{H}) - G_N^{(\text{hom})}(\mathbf{H})] dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [F_S(\mathbf{H}) - \frac{H_z H_{cm}}{4\pi} - F_N^{(\text{hom})}(0) + \frac{H_{cm}^2}{8\pi}] dx. \end{aligned}$$

Підставимо шойно знайдену $F_S(\mathbf{H})$:

$$\begin{aligned} \sigma_{NS} &= \int_{-\infty}^{\infty} [F_N^{(\text{hom})}(0) + \frac{H_{cm}^2}{4\pi} (-|\psi|^2 + \frac{1}{2}|\psi|^4 + \xi_S^2 |i\nabla\psi + \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A}\psi|^2) + \\ &\quad + \frac{H_z^2}{8\pi} - \frac{H_z H_{cm}}{4\pi} - F_N^{(\text{hom})}(0) + \frac{H_{cm}^2}{8\pi}] dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\frac{H_{cm}^2}{4\pi} (-|\psi|^2 + \frac{1}{2}|\psi|^4 + \xi_S^2 |i\nabla\psi + \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A}\psi|^2) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{H^2 - 2H_z H_{cm} + H_{cm}^2}{8\pi} dx.$$

Для подальших перетворень зручно згадати, що хвильова функція є дійсною (калібрувальна інваріантність) і що $\mathbf{A} = (0, A_y(x), 0)$. Тоді

$$\begin{aligned} \sigma_{NS} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{H_{cm}^2}{4\pi} \left[-\psi^2 + \frac{1}{2} \psi^4 + \xi_S^2 \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{2\pi \xi_S A_y}{\Phi_0} \right)^2 \psi^2 \right] + \frac{(H_z - H_{cm})^2}{8\pi} \right\} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{H_{cm}^2}{4\pi} \left\{ \left[\left(\frac{2\pi \xi_S A_y}{\Phi_0} \right)^2 - 1 \right] \psi^2 + \frac{1}{2} \psi^4 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \xi_S^2 \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \psi^2 \right\} + \frac{(H_z - H_{cm})^2}{8\pi} \right\} dx, \end{aligned}$$

звідки приходимо до остаточного виразу, якщо використаємо вже отриману тотожність:

$$\left[\left(\frac{2\pi \xi_S A_y}{\Phi_0} \right)^2 - 1 \right] \psi^2 + \frac{1}{2} \psi^4 = \xi_S^2 \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{H_z}{H_{cm}} \right)^2 - \frac{1}{2}.$$

З її допомогою маємо:

$$\begin{aligned} \sigma_{NS} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{H_{cm}^2}{4\pi} \left[\xi_S^2 \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{H_y}{H_{cm}} \right)^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} + \xi_S^2 \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 \right] + \frac{(H_z - H_{cm})^2}{8\pi} \right\} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{H_{cm}^2}{2\pi} \xi_S^2 \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \frac{H_z^2}{8\pi} - \frac{H_{cm}^2}{8\pi} + \frac{H_z^2}{8\pi} - \frac{H_z H_{cm}}{4\pi} + \frac{H_{cm}^2}{8\pi} \right] dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{H_{cm}^2}{2\pi} \xi_S^2 \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \frac{H_z (H_z - H_{cm})}{4\pi} \right] dx = \\
&= \frac{H_{cm}^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\xi_S^2 \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \frac{H_z (H_z - H_{cm})}{2H_{cm}^2} \right] dx.
\end{aligned}$$

Цей достатньо простий вираз, дозволяє, тим не менш, зробити деякі суттєві висновки: насамперед, зауважимо, що у НП області наявне магнітне поле H_z завжди менше, ніж H_{cm} . Отже, другий доданок в останньому інтегралі завжди від'ємний. Якщо додати, що в теорії Лондонів, де нема градієнтних доданків внаслідок відсутності неоднорідних станів і неоднорідного параметра порядку, тобто $\nabla\psi = 0$, то в ній дійсно завжди $\sigma_{NS} < 0$. Така однозначність виглядала нефізичною, але врахування квантових ефектів знімає цю проблему тим, що з'являється новий доданок $\xi_S^2 (\psi')^2$, який є завжди позитивним і, в принципі, може змінювати знак σ_{NS} .

Зробимо відповідні оцінки. В перехідній області, яка і визначає NS -границю, параметр порядку ψ змінюється від 0 до 1. Ця зміна відбувається на довжині порядку довжини когерентності. Тому можна покласти $d\psi/dx \sim \xi_S^{-1}$, або вважати, що $\xi_S^2 (d\psi/dx)^2 \sim 1$. Сама ж похідна відмінна від нуля теж на тій же довжині ξ_S , що, в решті решт, дає:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi_S^2 \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx \sim \xi_S.$$

З іншого боку, другий доданок можна проаналізувати так: функція $f(\mathbf{H}) = H_z^2 - H_z H_{cm}$ має максимум при $H_{\max} = H_{cm} / 2$. Отже, в цілому цей доданок досягає $\{(H_{cm} / 2)[(H_{cm} / 2) - H_{cm}] / 2H_{cm} = -1/8$ всередині NS -границі і дорівнює нулеві як в N -, так і S -фазі. Область, де цей доданок є скінченим, порядку глибини проникнення λ_L , тому внесок цього доданку, будучи від'ємним, $\sim -\lambda_L$.

Розглянемо два граничних випадки.

1) $\kappa_{GL} \ll 1$, або $\lambda_L \ll \xi_S$. Тоді головний доданок – градієнтний і ми приходимо до відповіді, що

$$\sigma_{NS} \sim H_{cm}^2 \xi_S > 0.$$

Точний розрахунок приводить до енергії NS -границі

$$\sigma_{NS} = 1.89 \frac{H_{cm}^2}{8\pi} \xi_S \approx \frac{H_{cm}^2}{4\pi} \xi_S.$$

2) $\kappa_{GL} \gg 1$, або $\lambda_L \gg \xi_S$. Тут головний доданок – польовий, і ми наближено маємо

$$\sigma_{NS} \sim H_{cm}^2 \frac{\lambda_L}{8} < 0,$$

а в точному розрахунку – $\sigma_{NS} = -\frac{H_{cm}^2}{8\pi} \lambda_L$.

Який фізичний сенс отриманих результатів? Зобразимо (див. рис. 10.3) перший випадок, коли $\lambda_L \ll \xi_S$. Видно, що

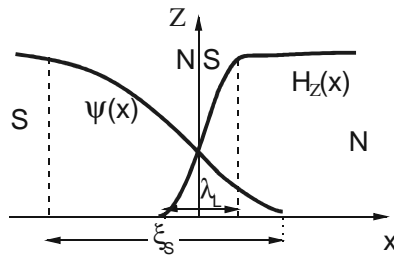


Рис. 10.3

виникає відносно невелика область $\sim \xi_S$, де параметр порядку є малим, а поле практично відсутнє.

Ця ділянка користується “привілеями” НП, тобто є вільним від магнітного поля, але саме на ній параметр порядку малий, що підвищує його енергію у порівнянні з областю, де $|\psi|^2=1$. Іншою мовою, енергія цієї ділянки більше енергії НП ділянок на величину, яку необхідно було витратити, щоб розірвати куперівські пари і тим самим зменшити ψ . Густина енергії дорівнює $H_{cm}^2/8\pi$, а енергія – $(H_{cm}^2/8\pi)\xi_S$, що знаходиться у відповідності до точної формули.

Другий випадок, коли $\lambda_L \gg \xi_S$, ми також зобразили на рисунку (див. рис. 10.4), де знову показана поведінка функцій $\psi(x)$ та $H_z(x)$. Видно, що в це абсолютно інша ситуація. Має місце досить велика область $\sim \lambda_L$, де поле відмінне від нуля, але в той же час $\psi \sim 1$. Присутність поля примушує порівнювати цю

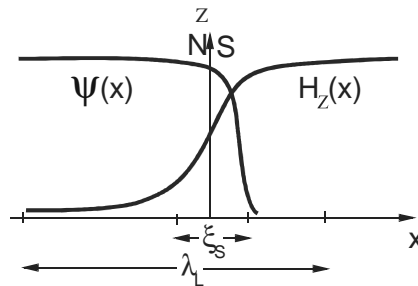


Рис. 10.4

область з N -металом. На відміну від останнього електрони тут, у S -області, знаходяться у впорядкованому НП стані з $\psi \sim 1$, тому їх енергія нижча приблизно на енергію зв'язку. Як і в першому випадку, густина енергії, що йде на розрив куперона

(тобто зв'язаної пари), $\epsilon \sim (-H_{cm}^2 / 8\pi)$, а енергія NS -границі відповідно $(-H_{cm}^2 / 8\pi)\lambda_L$.

Отже, підсумуємо.

Якщо $\kappa_{GL} \ll 1$, енергія NS -границі $\sigma_{NS} > 0$, а відповідні матеріали утворюють **клас НП-I**.

Якщо ж $\kappa_{GL} \gg 1$, енергія NS -границі $\sigma_{NS} < 0$ і відповідні матеріали утворюють **клас НП-II**.

Нарешті, зауважимо, що з точного рівняння для енергії NS -границі випливає, що $\sigma_{NS} = 0$ при значенні $\kappa_{GL} = 1/\sqrt{2}$, тому саме воно є тією чисельною величиною, яка поділяє всі НП на НП-I та НП-II.

Лекція 11

16. Деякі особливості слабкої надпровідності. Фазова когерентність, види слабого зв'язку

У 1962 р. аспірант проф. А. Піппарда Брайан Джоозефсон надрукував роботу, в якій передбачив існування двох нових, раніше невідомих, ефектів. Вони повинні були з'являтися у так званих тунельних переходах між НП, або, іншими словами, НП контактах. Нагадаю, що перший ефект Джоозефсона полягає в тому, що через неметалевий (тунельний) перехід може текти НП струм, точніше – надструм. Важливо, що звичайний – нормальний – струм за тих же умов через такий перехід не тече. Джоозефсон показав, що критичне значення надструму вельми дивно залежить від зовнішнього поля. Коли ж надструм через такий перехід перевищить деяке своє критичне значення, цей перехід стає джерелом електромагнітного випромінювання. Воно і складає зміст другого ефекту Джоозефсона.

Дуже скоро стало зрозуміло, що ефекти Джоозефсона притаманні не тільки тунельним переходам, але й багатьом іншим типам так званого слабого зв'язку, або ділянкам НП ланцюга, в яких критичний струм є суттєво придушеним, а розмір таких ділянок не перевищує довжини когерентності.

Природа ефектів Джозефсона пов'язана з квантовими властивостями НП стану. Ми вже знаємо, що НП стан – це стан з бозе-конденсатом, або станом, в якому майже всі бозе-частинки – пари – знаходяться на єдиному (як правило, основному) квантовому рівні і описуються єдиною хвильовою функцією. Очевидно, що вони когерентні.

Нехай маємо два масивних і ізольованих один від одного шматка НП при одній температурі $T < T_c$. Це значить, що в кожному з них існує конденсат, що описується хвильовою функцією, про яку ми щойно згадували. Оскільки ми припустили рівність температур і однаковість матеріалу НП, то і величини $|\Psi|$ в обох НП мають бути рівними між собою. Проте фази відповідних функцій можуть бути довільними. Так буде до тих пір, поки куски розділені. Зведемо їх, але так, щоб контакт не зміг радикально змінити НП стан у обох НП. Саме тому подібні з'єднання отримали назву *слабких контактів*, або *слабких зв'язків*. Вони грають роль відносно малих збурень, які змішують обидві хвильові функції і призводять до формування єдиної хвильової функції обох НП. Модулі цих функцій, як ми говорили, однакові, але фази мають узгодитись, що, власне, і відбувається через такі слабкі зв'язки. Утворення єдиної хвильової функції – це прямий результат взаємного впливу обох колективів один на другий.

17. Перший, або стаціонарний, ефект Джозефсона

Розглянемо перший ефект Джозефсона, який має також назву *стаціонарного*. Фізично його суть полягає в тому, що достатньо малий струм може текти крізь слабкий зв'язок (див. рис. 11.1) бездисипативно,

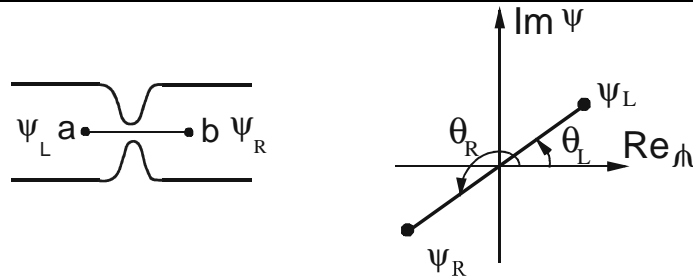


Рис. 11.1

тобто не викликаючи падіння напруги на так званих – лівому L і правому R – “берегах” контакту. При цьому струм, як правило, виявляється настільки малим, що створюваним ним магнітним полем можна нехтувати. Тому у рівняннях Гінзбурга-Ландау густина надструму визначається лише фазою хвильової функції.

Ще одна характерна властивість слабого зв’язку полягає, в тому, що всередині слабого контакту зміна (тобто градієнт) всіх змінних (зокрема, фази) виявляється набагато більшою, ніж зовні, або в самих провідниках, які інколи в цілому теж зветься берегами. Для самого тунельного переходу можна навіть характеризувати не градієнтом фази, а її стрибком на переході, тому будемо говорити про таку “джозефсонівську” різницю фаз

$$\varphi_J = \theta_R - \theta_L,$$

де $\theta_{L,R}$ – фази берегів, умовно лівого L і правого R (див. рис. 11.1), відповідно.

Визначимо деякі очевидні співвідношення:

1. при надструмі $I_S = 0$ через контакт різниця фаз $\varphi_J = 0$;

2. оскільки зміна фаз кожного з берегів на величину, кратну 2π , не змінює фізичний стан, то зрозуміло, що

$$I_s(\varphi_J) = I_s(\varphi_J + 2\pi n),$$

де n – ціле число;

3. зміна знаку різниці фаз φ_J змінює напрямок струму, тобто

$$I_s(\varphi_J) = -I_s(-\varphi_J);$$

4. виконується рівність

$$I_s(\pi) = I_s(0) = 0.$$

Останнє співвідношення має бути доведено. Щоб це зробити, припустимо, що $\theta_L - \theta_R = \pi$, а оскільки $|\psi_L| = |\psi_R|$, то значення ψ_L та ψ_R можуть бути зображені на площині (див. рис. 11.1). Якщо відстань між точками a і b на рис. 11.1 мала, то можна ввести уявлення про градієнт фази (а не про її стрибок). При цьому функція ψ від ψ_L до ψ_R буде змінюватися на площині вздовж прямої, на якій

$$\nabla \theta = 0.$$

Яка найпростіша функція задовольняє усім приведеним умовам 1-4? Легко впевнитись, що такою може бути:

$$I_s(\varphi_J) = I_c \sin \varphi_J,$$

де I_c – максимальний контактний (тунельний) струм між берегами, що зветься **критичним**.

Щоб вивести останню залежність, розглянемо задачу з квантової механіки, в якій, як відомо, часова еволюція хвильової функції описується рівнянням Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi .$$

Отже, припустимо, що деяка система може знаходитись у дискретних станах ψ_μ , які розрізняються квантовими числами μ . Тоді шукану хвильову функцію можна розкласти по цих ортогональних функціях ψ_μ :

$$\psi(t) = \sum_{\psi} C_{\mu}(t) \psi_{\mu} ,$$

звідки

$$i\hbar \dot{C}_{\mu} = \sum_{\nu} H_{\mu\nu} C_{\nu} ,$$

де $H_{\mu\nu} = \int \psi_{\mu} \hat{H} \psi_{\nu} dV$ – матричний елемент переходу між станами μ та ν , а енергія системи в кожному з них задається діагональними величинами $\hat{H}_{\mu\mu}$.

Якщо повернутися до контакту, то нехай у відповідності до теорії електричних ланцюгів, на берегах L та R виникла різниця потенціалів, або напруга, V так, що маємо ситуацію, яка зображена на

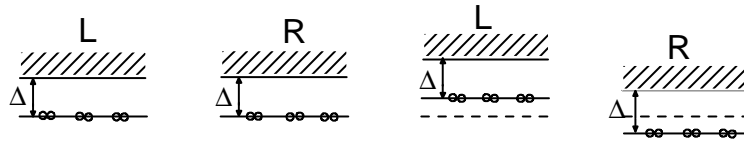


Рис. 11.2

рис. 11.2.

Тоді можна за Р. Фейнманом розглядати два окремі НП (тобто НП- L та НП- R), що мають різні енергії свого основного стану, як дворівневу систему. Це, в свою чергу, означає, що мають місце, або –

краще сказати – можна запровадити, означення для енергій рівнів: $H_{LL} \equiv E_L = eV$ і $H_{RR} \equiv E_R = -eV$.
Перехід з рівня на рівень, або, що теж саме, між берегами, як завжди, визначається у такому випадку матричним елементом $H_{LR} = H_{LR}^* \equiv K$. У цих означеннях рівняння для шуканої хвильової функції набувають форми:

$$i\hbar \frac{\partial C_L}{dt} = eVC_L + KC_R;$$

$$i\hbar \frac{\partial C_R}{dt} = -eVC_R + KC_L.$$

При цьому можна також покласти, що $|C_L|^2 = n_S^{(L)}$ і $|C_R|^2 = n_S^{(R)}$, звідки в загальному вигляді отримуємо:

$$C_{L,R} = \sqrt{n_S^{(L,R)}} e^{i\theta_{L,R}},$$

причому в рівновазі $n_S^{(L)} \approx n_S^{(R)} = n_S$.

Продиференціюємо останнє співвідношення по часу:

$$\dot{C}_{L,R} = \frac{\dot{n}_S^{(L,R)}}{2\sqrt{n_S^{(L,R)}}} e^{i\theta_{L,R}} + i\sqrt{n_S^{(L,R)}} e^{i\theta_{L,R}} \dot{\theta}_{L,R}$$

і підставимо:

$$i\hbar \frac{\dot{n}_S^{(L)}}{2\sqrt{n_S^{(L)}}} e^{i\theta_L} - \sqrt{n_S^{(L)}} e^{i\theta_L} \dot{\theta}_L = eV\sqrt{n_S^{(L)}} e^{i\theta_L} + K\sqrt{n_S^{(R)}} e^{i\theta_R};$$

$$i\hbar \frac{\dot{n}_S^{(R)}}{2\sqrt{n_S^{(R)}}} e^{i\theta_R} - \sqrt{n_S^{(R)}} e^{i\theta_R} \dot{\theta}_R = -eV\sqrt{n_S^{(R)}} e^{i\theta_R} + K\sqrt{n_S^{(L)}} e^{i\theta_L}.$$

Перегрупуємо доданки, використавши вже введене означення $\varphi_J = \theta_R - \theta_L$. Тоді легко знаходимо:

$$i\hbar \dot{n}_S^{(L)} - 2\hbar n_S^{(L)} \dot{\theta}_L = 2eVn_S^{(L)} + 2Kn_S^{(R)} (\cos \varphi_J + i \sin \varphi_J);$$

$$i\hbar \dot{n}_S^{(R)} - 2\hbar n_S^{(R)} \dot{\theta}_R = -2eVn_S^{(R)} + 2Kn_S^{(L)} (\cos \varphi_J - i \sin \varphi_J).$$

Тепер відокремимо дійсні та уявні складові цих рівнянь, враховуючи, що $\dot{n}_S^{(L)} = -\dot{n}_S^{(R)} = \dot{n}_S$; маємо:

$$\begin{aligned}\dot{n}_S &= \frac{2Kn_S}{\hbar} \sin \varphi_J; \\ \dot{\theta}_L &= -\frac{K}{\hbar} \cos \varphi_J - \frac{eV}{\hbar}; \\ \dot{\theta}_R &= -\frac{K}{\hbar} \cos \varphi_J + \frac{eV}{\hbar}.\end{aligned}$$

Струм через контакт має бути пропорційним різниці похідних $\dot{n}_S^{(L)} - \dot{n}_S^{(R)}$. Покажемо це на основі таких міркувань, висловлених також Фейнманом. Дійсно, в перший момент після включення (або з'єднання НП через контакт) густина НП електронів в берегах буде змінюватись із швидкістю відповідно $\dot{n}_S^{(L)}$ та $\dot{n}_S^{(R)}$, і виникне струм $I_S \sim \dot{n}_S^{(L)} - \dot{n}_S^{(R)} \sim \dot{n}_S$. Звичайно, зменшення кількості електронів в одній частині НП ланцюга і збільшення в іншій буде компенсуватися їх приходом з або уходом до джерела. Але на початковій стадії досить прийняти, що $I_S \sim \dot{n}_S$, звідки (див. перше з останніх рівнянь)

$$I_S = I_c \sin \varphi_J,$$

де для критичного струму маємо $I_c = 2Kn_S / \hbar$.

Існує й дещо інший шлях отримання рівняння Джозефсона, який належить радянським дослідникам Л.Г. Асламазову і А.І. Ларкіну. Згідно їх розгляду припускається, що є місток (див. рис. 11.3) настільки короткий, що його довжина $l \ll \xi_S$. У відсутності зовнішнього поля перше рівняння Гінзбурга-Ландау має, як ми вже знаємо, вигляд:

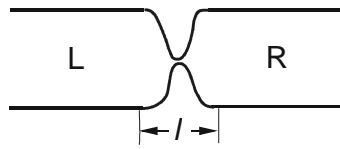


Рис. 11.3

$$-\xi_s^2 \Delta \psi - \psi + \psi |\psi|^2 = 0.$$

Оскільки можна вважати, що у короткому містку $\Delta \psi \sim \psi / l^2$, то при обраному припущенні $l \ll \xi_s$ та необхідній умові $|\psi| \leq 1$, це рівняння фактично перетворюється на

$$\Delta \psi = 0.$$

В області L хвильова функція $\psi = \psi_L e^{i\theta_L}$, в області R – $\psi = \psi_R e^{i\theta_R}$, де відповідні параметри в своїх областях залишаються незмінними. А от в містку записані функції можуть (і мають) інтерферувати. Тож будемо шукати розв'язок у вигляді:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_L e^{i\theta_L} f(\mathbf{r}) + \psi_R e^{i\theta_R} [1 - f(\mathbf{r})],$$

де $f(\mathbf{r}) \rightarrow 1$ при прямуванні координати в область лівого берега та $f(\mathbf{r}) \rightarrow 0$, коли координата відповідає правому берегу. Іншою мовою, лише функція $f(\mathbf{r})$ визначає поведінку розкладу в актуальній області – області містку. Тепер розрахуємо:

$$\nabla \psi = \psi_L e^{i\theta_L} \nabla f - \psi_R e^{i\theta_R} \nabla f; \quad \Delta \psi = (\psi_L e^{i\theta_L} - \psi_R e^{i\theta_R}) \Delta f,$$

звідки для введеної функції знаходимо те ж рівняння $\Delta f = 0$. Сам його розв'язок залежить від конкретних моделей містка, але струм може бути обрахований за допомогою загальної формули:

$$\mathbf{j}_s = -i \frac{\hbar e}{2m_f} |\Psi|^2 (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = \frac{\hbar e}{2m_f} \frac{|\alpha|}{\beta} \text{Im}(\psi^* \nabla \psi).$$

Зробимо послідовно:

$$\begin{aligned}\psi^*(\mathbf{r}) &= \psi_L e^{-i\theta_L} f(\mathbf{r}) + \psi_R e^{-i\theta_R} [1 - f(\mathbf{r})]; \\ \psi^* \nabla \psi &= \{\psi_L e^{-i\theta_L} f(\mathbf{r}) + \psi_R e^{-i\theta_R} [1 - f(\mathbf{r})]\} (\psi_L e^{i\theta_L} - \psi_R e^{i\theta_R}) \nabla f(\mathbf{r}) \rightarrow \\ &\rightarrow \psi_L \psi_R e^{i(\theta_L - \theta_R)} (1 - f) \nabla f - \psi_L \psi_R e^{-i(\theta_L - \theta_R)} f \nabla f = \\ &= \psi_L \psi_R e^{i(\theta_L - \theta_R)} \nabla f - 2\psi_L \psi_R f \nabla f \cos(\theta_L - \theta_R),\end{aligned}$$

звідки уявна частина є не що інше, ніж

$$\text{Im}(\psi^* \nabla \psi) \approx \nabla f \sin(\theta_L - \theta_R).$$

Отже, обидва способи ведуть до одного і того ж рівняння. Проте не можна вважати, що ми вивели рівняння Джозефсона. Як кожне принципово нове рівняння, його неможливо безпосередньо отримати із старих рівнянь або виразів, і Джозефсон фактично постулював його із загальних феноменологічних міркувань, які викладені вище. І наші “виводи” є лише більш-менш послідовною демонстрацією того, що рівняння Джозефсона не суперечить тим рівнянням, які складають фундамент і квантової фізики (рівняння Шредингера), і фізики надпровідності (зокрема, рівняння Гінзбурга-Ландау).

Лекція 12

17. Другий, або нестационарний, ефект Джозефсона

До цього моменту ми неявно вважали, що НП струм через слабкий зв'язок є меншим за критичний. Проте, коли цей струм, що задається зовнішнім джерелом, перевищить критичне значення для даного контакту, на ньому (контакті) з'явиться напруга V . Розглянемо, до чого це призводить.

Для цього знову звернемося до рівняння Шредингера, що описує часову еволюцію стану квантово-механічної системи:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\mathbf{r}, t).$$

Якщо $\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r})e^{i\theta(t)}$ і при цьому $\hat{H}\Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r})$, то

$$i\hbar \Psi(\mathbf{r}) e^{i\theta(t)} i \frac{\partial \theta(t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\mathbf{r}) e^{i\theta(t)},$$

звідки маємо

$$-\hbar \frac{\partial \theta(t)}{\partial t} = E.$$

Іншими словами, ми отримуємо відомий результат з квантової механіки, що похідна від фази

хвильової функції по часу визначає енергію стаціонарних станів (зокрема, коли $\theta = \omega t$, то $\hbar\omega = E$, що добре відомо).

Повернемося до слабкого зв'язку. Нехай на ньому встановилася різниця потенціалів V . Це означає, що енергії E_L та E_R куперівських пар на берегах переходу зв'язані співвідношенням $E_L - E_R = 2eV$, яке ми фактично вже використовували і яке прямо враховує, що заряд тунелюючих через контакт частинок дорівнює $2e$. Тоді для кожного з берегів можна записати:

$$\begin{cases} -\frac{\partial\theta_L(t)}{\partial t} = E_L; \\ -\frac{\partial\theta_R(t)}{\partial t} = E_R; \end{cases} \rightarrow \hbar\frac{\partial\phi_J}{\partial t} = 2eV.$$

Таким чином, ми знову приходимо до рівняння, яке отримали вище, коли розглядали фейнманівський спосіб виведення рівняння Джозефсона.

Що ж відбувається на джозефсонівському контакті, коли крізь нього протікає струм, вищий за критичний? Важливо також, що подібний струм задається ззовні. По-перше, оскільки критичний струм I_c – це надструм, а більшим він бути не може і за означенням, і за фізичними умовами, то в такій ситуації відповідне перевищення буде створюватись струмом нормальної компоненти, або струмом поодиноких електронів. Така обставина негайно приводить нас до так званої резистивної моделі, тобто розгляду слабкого контакту як паралельно увімкнених

власне джозефсонівського, або НІ тунельного переходу, та нормального опору R . При цьому неважко записати повний I струм як суму двох струмів: нормального I_N та НІ струму I_S (рис. 12.1). Очевидно, що ці компоненти можуть бути

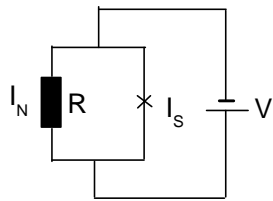


Рис. 12.1

представлені простими і відомими нам виразами. Дійсно, нормальна компонента це не що інше, ніж

$$I_N = \frac{V}{R} = \frac{2eV}{2eR} = \frac{\hbar}{2eR} \frac{\partial \phi_J}{\partial t},$$

де ми скористалися щойно отриманою формулою для часової похідної різниці фаз конденсатів в берегах. Тут треба зробити одне зауваження. З останнього рівняння начебто випливає, що резистивний струм також є струмом пар, бо саме до такого стану відноситься різниця фаз. І так дійсно може бути, бо на поверхні Фермі багато зв'язаних в пари електронів і вони теж можуть одночасно тунелювати. Так що відповідна – парна – компонента загального струму завжди присутня і саме про неї ми говоримо. Що стосується нормальної компоненти, то вона може бути врахована як деяка додаткова стала. Проте легко впевнитися, що остання нічого не змінює в загальній картині, лише переозначаючи величину повного струму і дещо зменшуючи величину парного, з яким, насправді, і пов'язані всі особливості ефекту, який ми зараз вивчаємо.

НП компонента, як ми вже знаємо, визначається виключно різницею фаз:

$$I_S = I_c \sin \varphi_J .$$

Тоді, з урахуванням зробленого зауваження, повний струм через контакт має вигляд:

$$I = I_S + I_N = I_c \sin \varphi_J + \frac{\hbar}{2eR} \frac{\partial \varphi_J}{\partial t} ,$$

який фактично задає рівняння для часової залежності різниці $\varphi_J(t)$ фаз в берегах. Знайдемо її.

Таким чином, маємо рівняння:

$$I = I_c \sin \varphi_J + \frac{\hbar}{2eR} \frac{\partial \varphi_J}{\partial t} ,$$

де величини I , R та I_c вважаються відомими. Це рівняння відносно кута $\varphi_J(t)$, яке можна представити наступним чином:

$$\frac{d\varphi_J}{I - I_c \sin \varphi_J} = \frac{2eR}{\hbar} dt .$$

Будемо його перетворювати:

$$\frac{d\varphi_J}{I - \frac{I_c}{2i}(e^{i\varphi_J} - e^{-i\varphi_J})} = \frac{2ie^{i\varphi_J} d\varphi_J}{2ie^{i\varphi_J} - I_c e^{2i\varphi_J} + I_c} = \frac{2ieR}{i\hbar} dt .$$

Введемо нову змінну $x = ie^{i\varphi_J}$; вона дає $dx = ie^{i\varphi_J} id\varphi_J = -e^{i\varphi_J} d\varphi_J$. Тоді

$$\frac{dx}{2Ix + I_c x^2 + I_c} = i \frac{eR}{\hbar} dt;$$

$$\frac{dx}{x^2 + 2\frac{I}{I_c}x + 1} = \frac{dx}{(x - x_+)(x - x_-)} = i \frac{eRI_c}{\hbar} dt,$$

де $x_{\pm} = -\frac{I}{I_c} \pm \sqrt{\left(\frac{I}{I_c}\right)^2 - 1}$, причому

$$x_+ x_- = \left(-\frac{I}{I_c} + \sqrt{\dots}\right) \left(-\frac{I}{I_c} - \sqrt{\dots}\right) = 1.$$

Перетворюємо далі:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x - x_+} - \frac{dx}{x - x_-} &= ie \frac{RI_c}{\hbar} (x_+ - x_-) dt = i2e \frac{RI_c}{\hbar} \sqrt{\left(\frac{I}{I_c}\right)^2 - 1} dt = \\ &= i2e \frac{R}{\hbar} \sqrt{I^2 - I_c^2} dt \equiv i\omega_J dt, \end{aligned}$$

тобто приходимо до рівняння, яке легко інтегрується:

$$\ln \frac{x - x_+}{x - x_-} = i\omega_J t \quad \rightarrow \quad \frac{x - x_+}{x - x_-} = C e^{i\omega_J t},$$

звідки

$$x = \frac{x_+ - C x_- e^{i\omega_J t}}{1 - C e^{i\omega_J t}}.$$

Повернемося до старої змінної φ_J : $x = ie^{i\varphi_J}$;
 $x^* = -ie^{-i\varphi_J}$ і $x(t) + x^*(t) = -2 \sin \varphi_J(t)$. Використання

цієї змінної дозволяє визначити невідому константу C . Для цього вимагатимемо, щоб в початковий момент виконувалась умова $I = I_c$, тобто $\sin \varphi_J(0) = 1$.

Це, в свою чергу, означає, що $x(0) + x^*(0) = -2$, і можна припустити, що $x(0) = x^*(0) = -1$. Тоді виконується співвідношення

$$\frac{x_+ - Cx_-}{1 - C} = -1 \quad \rightarrow \quad x_+ - Cx_- = -1 + C,$$

звідки

$$\begin{aligned} C &= \frac{1 + x_+}{1 + x_-} = \frac{1 - \frac{I}{I_c} + \sqrt{\dots}}{1 - \frac{I}{I_c} - \sqrt{\dots}} = \frac{[(1 - \frac{I}{I_c}) + \sqrt{\dots}]^2}{(1 - \frac{I}{I_c})^2 + (\sqrt{\dots})^2} = \\ &= \frac{\cancel{1} - 2\frac{I}{I_c} + (\frac{I}{I_c})^2 + (\frac{I}{I_c})^2 - \cancel{1} + 2(1 - \frac{I}{I_c})\sqrt{\dots}}{1 - 2\frac{I}{I_c} + (\frac{I}{I_c})^2 - (\frac{I}{I_c})^2 + 1} = \\ &= \frac{-2\frac{I}{I_c}(1 - \frac{I}{I_c}) + 2(1 - \frac{I}{I_c})\sqrt{\dots}}{2(1 - \frac{I}{I_c})} = x_+. \end{aligned}$$

Знайдене значення константи C дозволяє записати

$$x(t) = \frac{x_+ - x_+ x_- e^{i\omega_J t}}{1 - x_+ e^{i\omega_J t}} = \frac{x_+ - e^{i\omega_J t}}{1 - x_+ e^{i\omega_J t}},$$

де ми скористалися тим, що $x_+x_- = 1$. Згадаємо тепер, що $x(t) = i \exp[i\varphi_j(t)] = i[\cos \varphi_j(t) + i \sin \varphi_j(t)] = i \cos \varphi_j(t) - \sin \varphi_j(t)$ і $x^*(t) = -i \cos \varphi_j(t) - \sin \varphi_j(t)$, що дає

$$\begin{aligned} \sin \varphi_j(t) &= -\frac{1}{2}[x(t) + x^*(t)] = -\frac{1}{2}\left(\frac{x_+ - e^{i\omega_j t}}{1 - x_+ e^{i\omega_j t}} + \frac{x_+ - e^{-i\omega_j t}}{1 - x_+ e^{-i\omega_j t}}\right) = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{x_+ - x_+^2 e^{-i\omega_j t} - e^{i\omega_j t} + x_+ + x_+ - x_+ e^{i\omega_j t} - e^{-i\omega_j t} + x_+}{1 + x_+^2 - 2x_+ \cos \omega_j t} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{4x_+ - 2(1 - x_+^2) \cos \omega_j t}{1 + x_+^2 - 2x_+ \cos \omega_j t} = -\frac{1 - \frac{1 + x_+^2}{2x_+} \cos \omega_j t}{\frac{1 + x_+^2}{2x_+} - \cos \omega_j t} = \bullet \end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$\frac{1 + x_+^2}{2x_+} = \frac{\mathcal{I} + \left(\frac{\mathcal{I}}{I_c}\right)^2 - 2\frac{\mathcal{I}}{I_c}\sqrt{\dots} + \left(\frac{\mathcal{I}}{I_c}\right)^2 - \mathcal{I}}{2\left(-\frac{\mathcal{I}}{I_c} + \sqrt{\dots}\right)} = -\frac{\mathcal{I}}{I_c},$$

приходимо, нарешті, до остаточного виразу (продовження):

$$\bullet = \frac{1 + \frac{\mathcal{I}}{I_c} \cos \omega_j t}{\frac{\mathcal{I}}{I_c} + \cos \omega_j t}.$$

Отже, можна прирівняти $2eV = \hbar \partial \varphi_j / \partial t = 2eR(I - I_c \sin \varphi_j)$ та отримати:

$$\begin{aligned}
 V(t) &= R\left(I - \frac{I_c + I \cos \omega_j t}{\frac{I}{I_c} + \cos \omega_j t}\right) = RI_c \left(\frac{I}{I_c} - \frac{1 + \frac{I}{I_c} \cos \omega_j t}{\frac{I}{I_c} + \cos \omega_j t}\right) = \\
 &= RI_c \frac{\left(\frac{I}{I_c}\right)^2 + \frac{I}{I_c} \cos \omega_j t - 1 - \frac{I}{I_c} \cos \omega_j t}{\frac{I}{I_c} + \cos \omega_j t} = \\
 &= RI_c \frac{\left(\frac{I}{I_c}\right)^2 - 1}{\frac{I}{I_c} + \cos \omega_j t} = R \frac{I^2 - I_c^2}{I + I_c \cos \omega_j t}
 \end{aligned}$$

(нагадаємо, що $\omega_j = 2e \frac{R}{\hbar} \sqrt{I^2 - I_c^2}$).

З одержаного виразу для $V(t)$ видно, що коли $I < I_c$, джозефсонівська частота стає уявною, $\omega_j \rightarrow i\omega_j$, а $\cos \omega_j t \rightarrow \cos i\omega_j t = ch\omega_j t$. При цьому при $t \rightarrow \infty$, тобто коли система досягне рівноваги, $ch\omega_j t \rightarrow \infty$ і тим самим у такому випадку на берегах джозефсонівського контакту зникає напруга, оскільки, як видно, $V(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$.

Інший, фізично красивий, результат впливає з цієї формули для випадку $I_c = 0$:

$$V(t) = R \frac{I^2 - I_c^2}{I + I_c \cos \omega_j t} = IR.$$

По суті остання формула для напруги має звичайний вигляд, проте фактично для іншого току – через слабкий контакт тече парний струм, а не струм одиночних електронів, і саме він забезпечує відповідне падіння напруги.

В результаті, ми знаходимо дивну властивість джозефсонівського переходу. Якщо $I > I_c$, то на переході з'являється скінчена напруга V , причому струм I може бути заданим ззовні і витримуватись в замкненому контурі. Принципово, що в цьому випадку напруга стає залежною від часу, $V \rightarrow V(t)$, через присутність у формулі періодичної функції (див.

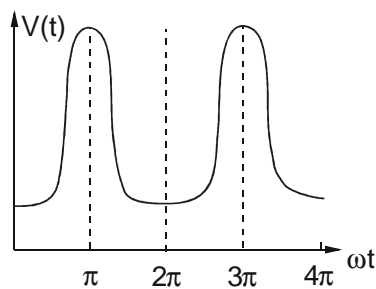


Рис. 12.2

рис. 12.2). Така залежність прямо свідчить, що на контакті виникає періодичний сигнал, а саме явище отримало назву **джозефсонівської генерації**.

Вольтметр постійного струму, підключений до слабкого переходу, покаже середнє по періоду T_J генерації деяке значення. Знайдемо це середнє:

$$\bar{V}(t) = \frac{R}{I_c} (I^2 - I_c^2) \frac{1}{T_J} \int_0^{T_J} \frac{dt}{\frac{I}{I_c} + \cos \omega_J t} =$$

$$(\omega_J = 2\pi\nu_J = 2\pi \frac{1}{T_J}; \quad \omega_J T_J = 2\pi)$$

$$= \frac{R}{I_c} (I^2 - I_c^2) \frac{1}{\omega_J T_J} \int_0^{T_J} \frac{d\omega_J t}{\frac{I}{I_c} + \cos \omega_J t} = \frac{R}{I_c} (I^2 - I_c^2) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dy}{u + \cos y} = \bullet$$

$$(y = \omega_J t \Big|_0^{2\pi}; \quad u \equiv \frac{I}{I_c})$$

Візьмемо інтеграл:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dy}{u + \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z e^{iy} dy}{2ue^{iy} + e^{2iy} + 1} = \\ &= \frac{1}{i\pi} \oint \frac{dz}{2uz + z^2 + 1} = \frac{1}{i\pi} \oint \frac{dz}{(z - z_+)(z - z_-)}, \end{aligned}$$

де використані корені знаменника: $z_{\pm} = -u \pm \sqrt{u^2 - 1}$, з яких лише корінь z_+ лежить всередині кола радіусу $|z|=1$. Далі

$$\bullet = \frac{2\pi i}{i\pi} \frac{1}{z_+ - z_-} = 2 \frac{1}{2\sqrt{u^2 - 1}} = \frac{I_c}{\sqrt{I^2 - I_c^2}}.$$

Отже, можемо записати:

$$\bar{V}(t) = R \sqrt{I^2 - I_c^2} = \frac{\hbar \omega_J}{2e},$$

або $\hbar \omega_J = 2e\bar{V}$. Ця несподівана формула, що отримана Джозефсоном, має прозорий смисл. Якщо середня по

енергії відстань між рівнями куперівських пар на обох берегах слабого переходу складає $2e\bar{V}$, то саме це значення з'являється у вигляді кванту. Це ж саме співвідношення має місце у квантовій фізиці.

Вольт-амперна характеристика теж впливає з останніх формул. Напруга на контакті показана на рис. 12.2. Зазначу, що ефект генерації, яка справедливо носить ім'я Б. Джозефсона, вперше, ще до появи його роботи, експериментально спостерігали українські дослідники І.М. Дмитренко, В.М. Свистунов та І.К. Янсон у 1964 році з харківського Фізико-технічного інституту низьких температур АН України. Але не зрозумівши, звідки йде коливний електромагнітний сигнал, який фіксують їх прилади, результат до друку не послали і оголосили про нього, тим самим підтвердивши, лише після появи роботи Б. Джозефсона у науковому журналі.

Лекція 13

18. Відгук джозефсонівського контакту на зовнішнє магнітне поле

Розглянемо тунельний перехід типу сендвич (див. рис 13.1). Він складається з двох пластин, які знаходяться у НП стані і розділені тонким шаром діелектрика D . Нехай система розташована у магнітному полі, що паралельне площині переходу. Тоді, як ми вже уявляємо, у приповерхневому шарі виникає екрануючий струм, що компенсує зовнішнє поле. Струм протікає в області порядку лондонівської глибини проникнення λ_L . Проте, як ми неодноразово підкресливали,

НП конденсат обох пластин є єдиним утворенням, а отже, струм має пересікати і площину джозефсонівського переходу, в якому густина критичного струму мала (слабкий

зв'язок, або слабе місце для проходження струму, характеризується не провідністю, а константою K тунелювання). При цьому у діелектрик поле може проникати, в принципі, без обмежень, тому і НП струм може розповсюджуватись в товщу діелектричного

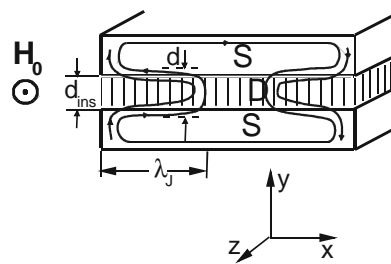


Рис. 13.1

переходу на значну глибину. Спробуємо описати таку ситуацію математично.

18.1. *Рівняння Феррела-Прейнджа (Ferrel-Prange)*. Виберемо систему координат так (рис. 13.2),

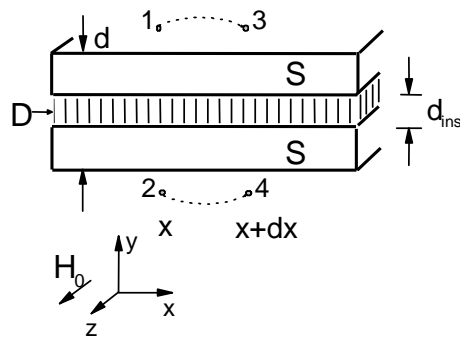


Рис. 13.2

щоб вісь x лежала в площині переходу, а зовнішнє магнітне поле $\mathbf{H}_0 \parallel z$. Нехай область вздовж осі y , де тече струм і магнітне поле відмінне від нуля, має розмір $\sim d$. Тоді з наступного

рисунок видно, що $d \approx 2\lambda_L + d_{ins}$, де d_{ins} – ширина ізолюючого прошарку. Розглянемо тепер (див. рис. 13.2) дві близькі пари точок 1-2 та 3-4 на різних берегах переходу, вибрані ззовні області, яка зайнята магнітним полем. Покладемо відстань між цими точками в кожній парі рівною dx .

Щоб отримати рівняння для опису проникнення поля у діелектрик з тунельним струмом, згадаємо узагальнений імпульс куперівської пари, який ми вже наводили раніше:

$$\hbar \nabla \theta = 2m_f \mathbf{v}_S + \frac{2e}{c} \mathbf{A},$$

де, як завжди, θ – фаза хвильової функції конденсованих пар, \mathbf{v}_S – їх швидкість, \mathbf{A} – векторний потенціал. Проінтегруємо це рівняння по ділянкам $1 \rightarrow 3$ та $4 \rightarrow 2$:

$$\hbar \left(\int_1^3 \nabla \theta d\mathbf{l} + \int_4^2 \nabla \theta d\mathbf{l} \right) = \frac{2e}{c} \left(\int_1^3 \mathbf{A} d\mathbf{l} + \int_4^2 \mathbf{A} d\mathbf{l} \right),$$

де доданки з швидкістю \mathbf{v}_s випали внаслідок припущення, що вибрані точки знаходяться поза межею існування надструму.

Видно, що вираз праворуч наближено дорівнює інтегралу по контуру, а отже:

$$\frac{2e}{c} \oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = \frac{2e}{c} d\Phi,$$

де $d\Phi$ – магнітний потік крізь площину, що охоплюється контуром, який для цілісності додатково включає відрізки 3-4 та 2-1.

Ліворуч маємо:

$$\hbar [\theta_3(x+dx) - \theta_1(x) + \theta_2(x) - \theta_4(x+dx)] = -\frac{2e}{c} d\Phi.$$

Мінус праворуч в останній рівності виникає внаслідок того, що ми, як завжди, скористалися переходом до інтегралу по поверхні від вектора $\text{rot}\mathbf{A} = \mathbf{H}$, а операція ротора дає проекцію $A_y(x)$, яка має від'ємну циркуляцію по “колу” (точніше – контуру) 1-3-4-2, тому що для $\mathbf{H} \parallel z$ повинно бути $A_y(x) < 0$. При цьому можна вважати, що θ_1 і θ_2 , а також θ_3 і θ_4 – це просто значення фази в різних точках на різних берегах переходу. Проте згідно з очевидною умовою відповідна різниця фаз не що інше, як “кут” φ_J . Враховуючи це означення, а також таку обставину, що струм має текти з точки з більшим значенням фази у точку з її меншим значенням, приходимо до співвідношень:

$$\theta_1(x) - \theta_2(x) \equiv \varphi_J(x)$$

та

$$\theta_3(x+dx) - \theta_4(x+dx) \equiv \varphi_J(x+dx),$$

з яких прямо випливає рівняння:

$$\varphi_J(x+dx) - \varphi_J(x) = -\frac{2e}{\hbar c} d\Phi \quad \rightarrow \quad \frac{d\varphi_J}{dx} = -\frac{2\pi}{\Phi_0} \frac{d\Phi}{dx},$$

де знову використано визначення кванту потоку $\Phi_0 = \pi\hbar c/e$. Оскільки, з іншого боку, потік $d\Phi$ через прямокутний “отвір” площиною $d \times dx$ та поле $H_z \equiv H$ пов’язані очевидним співвідношенням

$$d\Phi = H ddx,$$

то $\frac{d\Phi}{dx} = Hd$, де H – напруженість направленою вздовж осі z магнітного поля в переході в точці x . Таким чином, можемо записати:

$$\frac{d\varphi_J}{dx} = -\frac{2\pi}{\Phi_0} Hd,$$

звідки маємо

$$H = -\frac{\Phi_0}{2\pi d} \frac{d\varphi_J}{dx} \quad \rightarrow \quad \frac{dH}{dx} = -\frac{\Phi_0}{2\pi d} \frac{d^2\varphi_J}{dx^2}.$$

Цю похідну ми отримали, щоб використати рівняння Максвелла, яке ми вже неодноразово записували у формі Лондонів:

$$\mathbf{j}_s = \frac{c}{4\pi} \text{rot}\mathbf{H} = \frac{c}{4\pi} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & H(x) \end{vmatrix},$$

причому, як вже відомо, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x) \parallel z$. Тоді

$$j_s^y \equiv j_s = -\frac{c}{4\pi} \frac{dH}{dx},$$

що для похідної прямо дає $dH/dx = -(4\pi/c)j_s$. Тепер, згадуючи рівняння Джозефсона $\mathbf{j}_s = \mathbf{j}_c \sin \varphi_J$, приходимо до рівняння для зміни фази всередині переходу:

$$\frac{dH}{dx} = -\frac{\Phi_0}{2\pi d} \frac{d^2 \varphi_J}{dx^2} = -\frac{4\pi}{c} j_s = -\frac{4\pi}{c} j_c \sin \varphi_J,$$

або остаточно

$$\frac{d^2 \varphi_J}{dx^2} = \frac{8\pi^2 d}{c\Phi_0} j_c \sin \varphi_J \equiv \frac{1}{\lambda_J^2} \sin \varphi_J,$$

де $\lambda_J \equiv \left(\frac{c\Phi_0}{8\pi^2 j_c d}\right)^{1/2}$. Саме це рівняння носить назву **рівняння Феррела-Прейнджа** (1963 р.), а його розв'язки задають розподіл фази φ_J вздовж переходу (у нас, як видно з рис. 13.2, – це вісь x). Знайдемо розв'язки цього рівняння.

Нехай спочатку зовнішнє поле \mathbf{H}_0 дуже слабке, так що виконується умова $H_0 \ll \Phi_0/2\pi\lambda_J d$ іншою мовою, потік поля через “прямокутник” з сторонами $\lambda_J(\parallel x)$ та $d(\parallel y)$, що дорівнює $H_0\lambda_J d$, набагато менший за квант потоку: $H_0\lambda_J d \ll \Phi_0$. Це дає підстави сподіватися, що і струм, який компенсує таке поле, через перехід буде слабким, тобто, відповідно, різниця фаз φ_J на берегах теж буде малою. Тоді

рівняння Феррела-Прейнджа лінійнується, приймаючи просту форму:

$$\frac{d^2 \varphi_J}{dx^2} = \frac{1}{\lambda_J^2} \varphi_J,$$

а його розв'язок, що задовольняє фізично правильній асимптотиці при $x \rightarrow \infty$, має стандартний вигляд:

$$\varphi_J(x) = \varphi_J(0) e^{-x/\lambda_J},$$

звідки

$$H(x) = -\frac{\Phi_0}{2\pi d} \frac{d\varphi_J}{dx} = \frac{\Phi_0}{2\pi d} \frac{\varphi_J(0)}{\lambda_J} e^{-x/\lambda_J} \equiv H_0 e^{-x/\lambda_J}.$$

Ясно видно, що щойно введена величина λ_J є не що інше, як глибина проникнення слабого поля у джозефсонівський (слабкий) контакт, або, що часто те ж саме, у діелектричний прошарок.

Зробимо оцінки: візьмемо $\Phi_0 \approx 2.07 \cdot 10^{-7}$ Гс см², $d \approx 10^{-5}$ см та $j_c \approx 10^2$ А/см²; тоді глибина проникнення

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{c\Phi_0}{8\pi^2 j_c d}} \approx 0.1 \text{ мм}$$

дуже легко вимірюється. Нагадаємо, що $\lambda_L \sim 10^3 - 10^4$ Å, тобто виконується фізично зрозуміла нерівність $\lambda_L \ll \lambda_J$.

18.2. Джозефсонівські вихори. Рівняння Феррела-Прейнджа, яке ми отримали, не має обмежень на величину поля, тому може дати відповідь на питання: що станеться з джозефсонівською системою, коли зовнішнє поле поступово почне зростати. По-перше, права сторона рівняння тепер не може розкладатися,

бо різниця фаз φ_J стає не малою, а отже треба розв'язувати повне рівняння

$$\varphi_J'' = \lambda_J^{-2} \sin \varphi_J,$$

яке в такому вигляді зветься “*sin-Гордон*”. Його розв'язок отримується методами нелінійних рівнянь і має вигляд

$$\varphi_J(x) = 4 \operatorname{arctg} e^{x/\lambda_J},$$

в чому неважко переконатися прямою підстановкою. Виконаємо її, перевіривши рівність “по сторонах” рівняння:

$$\text{ліва} \quad - \quad \varphi_J' = \frac{4}{\lambda_J} \frac{e^{x/\lambda_J}}{1 + e^{2x/\lambda_J}};$$

$$\varphi_J'' = \frac{4}{\lambda_J} \frac{\frac{1}{\lambda_J} e^{x/\lambda_J} (1 + e^{2x/\lambda_J}) - \frac{2}{\lambda_J} e^{x/\lambda_J} e^{2x/\lambda_J}}{(1 + e^{2x/\lambda_J})^2} = \frac{4}{\lambda_J^2} e^{x/\lambda_J} \frac{1 - e^{2x/\lambda_J}}{(1 + e^{2x/\lambda_J})^2};$$

$$\text{права} \quad - \quad \frac{1}{\lambda_J^2} \sin \varphi_J = \frac{4}{\lambda_J^2} \sin \frac{\varphi_J}{4} \cos \frac{\varphi_J}{4} (1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi_J}{4}) =$$

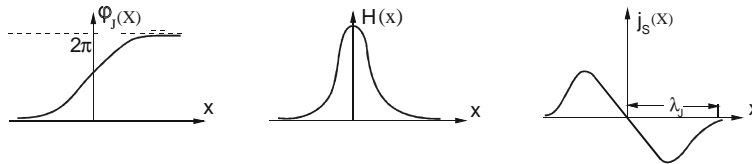


Рис.13.3

$$= \frac{4}{\lambda_J^2} \frac{e^{x/\lambda_J}}{1 + e^{2x/\lambda_J}} \left(1 - \frac{2e^{2x/\lambda_J}}{1 + e^{2x/\lambda_J}}\right) = \frac{4}{\lambda_J^2} e^{x/\lambda_J} \frac{1 - e^{2x/\lambda_J}}{(1 + e^{2x/\lambda_J})^2},$$

$$\text{бо } \sin^2 \frac{\varphi_J}{4} = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_J}{4}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_J}{4}}, \text{ а } \operatorname{tg} \frac{\varphi_J}{4} = e^{x/\lambda_J}.$$

Якщо повернутися до розв'язку, то з нього випливає також поведінка магнітного поля $H(x) \sim d\varphi_J/dx$ та НП струму $j_S(x) \sim d^2\varphi_J/dx^2$ всередині переходу (див. рис. 13.3).

Інакше, в середину переходу прориваються окремі утворення – НП вихори (*vortex* – вихор), що несуть квант магнітного потоку Φ_0 . Розв'язки, що відповідають цим вихорам, носять назву **солітонів** – поодиноких хвильоподібних збуджень джозефсонівських переходів.

Вздовж переходу (вісь x) цей вихор має розмір $\sim 2\lambda_J$, а впоперек (тобто вздовж вісі y) – $d \ll \lambda_J$. Ми дійсно бачили, що для $d \approx 10^{-5}$ см = 10^{-4} мм, довжина $\lambda_J \approx 10^{-1}$ мм, або насправді $d \ll \lambda_J$. Можна показати, що проникнення вихорів у слабкий контакт починається після перевищення полем деякого значення H_{c1} . Його можна знайти, якщо записати вираз для вільної енергії переходу, що можна зробити, виходячи з таких міркувань. При наростанні струму через слабкий зв'язок від нульового значення до j_S за час t в переході запасється певна енергія. Віднесена до одиниці площі переходу, вона дорівнює

$$E_J = \int_0^t j_S V dt,$$

де V , як і вище, – напруга, що виникає на переході в процесі зростання струму. Вираз для неї ми вже писали:

$$V = \frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \varphi_J}{\partial t}.$$

Оскільки $j_S = j_c \sin \varphi_J$, то

$$\begin{aligned}
 E_J &= \int_0^t j_c \sin \varphi_J \frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \varphi_J}{\partial t} dt = \frac{\hbar j_c}{2e} \int_0^t \sin \varphi_J d\varphi_J = \\
 &= -\frac{\hbar j_c}{2e} \cos \varphi_J \Big|_0^t = \frac{\hbar j_c}{2e} (1 - \cos \varphi_J).
 \end{aligned}$$

Крім записаної енергії, що відповідає енергії струму, у переході присутнє магнітне поле, або відповідна магнітна енергія, густина якої на одиницю площі (тут – довжини) має вигляд

$$E(\mathbf{H}) = \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} d.$$

В цілому енергія, що запасена у переході довжиною L , є сумою цих двох:

$$E = E_J + E(\mathbf{H}) = \int_0^L \left[\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} d + \frac{\hbar}{2e} j_c (1 - \cos \varphi_J) \right] dx.$$

Останній вираз легко перетворюється, якщо використати вже відоме нам співвідношення

$$H = -\frac{\Phi_0}{2\pi d} \frac{d\varphi_J}{dx} \text{ шляхом підстановки:}$$

$$E = \int_0^L \left[\left(\frac{\Phi_0}{2\pi d} \right)^2 \left(\frac{d\varphi_J}{dx} \right)^2 + \frac{\hbar}{2e} j_c (1 - \cos \varphi_J) \right] dx \equiv T_{kin} + U_{pot}.$$

Тоді отриману функцію можна мінімізувати щодо φ_J , що дає значення фази, яке відповідає мінімуму E . Але якщо треба знайти рівняння, яке описує поведінку фази, то треба мінімізувати функцію Лагранжа, яка за означенням є різницею кінетичної T_{kin} і потенціальної U_{pot} енергій, а саме: $T_{kin} - U_{pot}$. В такому випадку маємо:

$$\frac{d}{dx} \frac{\delta E}{\delta \frac{d\varphi_J}{dx}} - \frac{\delta E}{\delta \varphi_J} = 2 \frac{\Phi_0^2}{32\pi^3 d} \frac{d^2 \varphi_J}{dx^2} - \frac{\hbar}{2e} j_c \sin \varphi_J = 0.$$

Згадуючи тепер, що квант потоку $\Phi_0 = \pi \hbar c / e$, або $\hbar / e = \Phi_0 / \pi c$, отримуємо:

$$2 \frac{\Phi_0^2}{32\pi^3 d} \frac{d^2 \varphi_J}{dx^2} - \frac{\Phi_0}{2\pi c} j_c \sin \varphi_J = 0;$$

$$\frac{\Phi_0}{8\pi^2 d} \frac{d^2 \varphi_J}{dx^2} - j_c \sin \varphi_J = 0,$$

тобто те ж рівняння Феррела-Прейнджа. Ми, однак, цікавимося значенням енергії E , коли, як ми знаємо, $\varphi_J = 4 \arctg[\exp(x/\lambda_J)]$. Тоді для першого доданку маємо:

$$\frac{d\varphi_J}{dx} = 4 \frac{e^{x/\lambda_J} \frac{1}{\lambda_J}}{1 + e^{2x/\lambda_J}} = \frac{4}{\lambda_J} \frac{e^{x/\lambda_J}}{1 + e^{2x/\lambda_J}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\frac{d\varphi_J}{dx} \right)^2 = \frac{16}{\lambda_J^2} \frac{e^{2x/\lambda_J}}{(1 + e^{2x/\lambda_J})^2},$$

а для другого –

$$1 - \cos \varphi_J = 2 \sin^2 \frac{\varphi_J}{2} = 8 \sin^2 \frac{\varphi_J}{2} \cos^2 \frac{\varphi_J}{2} =$$

$$= 8 \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_J}{4}}{(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_J}{4})^2} = 8 \frac{e^{2x/\lambda_J}}{(1 + e^{2x/\lambda_J})^2},$$

оскільки $\operatorname{tg}(\varphi_J / 4) = \exp(x/\lambda_J)$. Таким чином, підставляючи в E , отримуємо:

$$\begin{aligned}
E &= \int_0^L \left(\frac{\Phi_0^2}{32\pi^3 d} \frac{16}{\lambda_J^2} + 8 \frac{\hbar}{2e} j_c \right) \frac{e^{2x/\lambda_J}}{(1+e^{2x/\lambda_J})^2} dx = \\
&= \left(\frac{16\Phi_0^2}{32\pi^3 d} \frac{8\pi^2 j_c d}{c\Phi_0} + \frac{8\Phi_0 j_c}{2\pi c} \right) \int_0^L \frac{\lambda_J}{2} \frac{e^{2x/\lambda_J}}{(1+e^{2x/\lambda_J})^2} d\left(\frac{2x}{\lambda_J}\right) = \\
&= \left(\frac{4\Phi_0 j_c}{\pi c} + \frac{4\Phi_0 j_c}{\pi c} \right) \frac{\lambda_J}{2} \int_0^{2L/\lambda_J} \frac{e^y dy}{(1+e^y)^2} = \\
&= \frac{4\Phi_0 \lambda_J j_c}{\pi c} \left(-\frac{1}{1+e^y} \right) \Big|_0^{2L/\lambda_J} = \frac{4\Phi_0 \lambda_J j_c}{\pi c} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^{2L/\lambda_J}} \right) = \\
&= \frac{2\Phi_0 \lambda_J j_c}{\pi c} \frac{e^{2L/\lambda_J} - 1}{e^{2L/\lambda_J} + 1} = \frac{2\Phi_0 \lambda_J j_c}{\pi c} \operatorname{th} \frac{L}{\lambda_J},
\end{aligned}$$

де ми скористалися явним виразом $\lambda_J^2 = (c\Phi_0 / 8\pi^2 j_c d)$.

Видно, що якщо вихор поодинокий, тобто $L \gg \lambda_J$, то $E_{\text{vor}}^{(1)} = \frac{2\Phi_0 \lambda_J j_c}{\pi c}$. Це і є вільна енергія (бо за припущенням $T=0$ і $F=E$) поодинокого джозефсонівського вихору. Проте, коли система знаходиться у зовнішньому магнітному полі \mathbf{H}_0 , то, як ми вже відмічали, треба користуватися вільною енергією Гіббса $E - \mathbf{V}\mathbf{H}_0 / 4\pi$, де \mathbf{V} – магнітна індукція всередині тіла. Густина цієї енергії на одиницю площі S_{sq} “під вихором” в переході має вигляд

$$G_{\text{vor}}^{(1)}(\mathbf{H}_0) = E_{\text{vor}}^{(1)} - \frac{\Phi_0 \mathbf{H}_0}{4\pi},$$

де ми поклали $\mathbf{V} = \Phi_0$, внаслідок того, що для $S_{sq} = 1$ потік $\Phi = \mathbf{V}S_{sq} = \Phi_0$. Видно, що поки поле мале, тобто поки зберігається нерівність $G_{\text{vor}}^{(1)}(\mathbf{H}_0) > 0$, утворення в переході вихрового збудження є не вигідним. Але ж

коли величина зовнішнього поля досягає значення $H_0 = H_{c1}$, так що $G_{vor}^{(1)}(H_{c1}) = 0$, поява вихору стає енергетично вигідною, і ми для критичного струму отримуємо:

$$\frac{2\Phi_0 \lambda_j j_c}{\pi c} = \frac{\Phi_0 H_{c1}}{4\pi}; \quad H_{c1} = \frac{8\lambda_j j_c}{c} = \frac{8}{c} \frac{c\Phi_0 \lambda_j}{8\pi^2 \lambda_j^2 d} = \frac{\Phi_0}{\pi^2 \lambda_j d},$$

де ми виразили j_c через λ_j : $\lambda_j^2 = c\Phi_0 / 8\pi^2 j_c d$.

Нарешті, оскільки ми писали для поля, що

$$H(x) = \frac{\Phi_0}{2\pi d} \frac{d\varphi_j}{dx} = \frac{\Phi_0}{2\pi d} \frac{4}{\lambda_j} \frac{e^{x/\lambda_j}}{1 + e^{2x/\lambda_j}},$$

то в центрі вихору $H(0) = \Phi_0 / \pi \lambda_j d$, або $H(0) = \pi H_{c1}$.

Лекція 14

19. Максимальний бездисипативний струм у джозефсонівському переході

19.1. *Випадок сильного поля.* Вище був розібраний випадок слабого зовнішнього магнітного поля. Тепер, навпаки, нехай зовнішнє поле \mathbf{H}_0 таке, що виконується умова $H_0 \gg \Phi_0 / (2\pi\lambda_j d)$, тобто воно створює потік набагато більший за потік одиночного вихору. Записану нерівність можна інтерпретувати і як умову того, що зовнішнє поле досягло такої величини, коли власне поле НІ струму не дає помітного внеску у загальне поле і цією складовою можна взагалі знехтувати. З фізичних міркувань зрозуміло, що в такому випадку у переході одночасно існує досить багато джозефсонівських вихорів (рис. 14.1). Припустимо також, що утворений ними ланцюг зжятий настільки, що відстань між вихорами менша за глибину λ_j . Це, в свою чергу, означає, що за таких умов поле проникає настільки глибоко, що навіть стає справедливою нерівність $\lambda_j \geq L$. Якщо поле НІ струму незначне, поле всередині переходу треба прирівняти до



Рис. 14.1

зовнішнього H_0 , а отже для фази тепер має виконуватись залежність

$$\frac{d\varphi_J}{dx} = \frac{2\pi d}{\Phi_0} H_0,$$

яка прямо свідчить, що фаза є лінійною функцією координати:

$$\varphi_J(x) = \frac{2\pi d}{\Phi_0} H_0 x + C,$$

де C – постійна інтегрування. З останньої формули безпосередньо випливає, що густина НП струму у переході визначається формулою

$$j_s = j_c \sin\left(\frac{2\pi x}{a} + C\right),$$

де для зручності введено період $a \equiv \Phi_0 / H_0 d$ синусоїди. Останній вираз для j_s показує, що НП

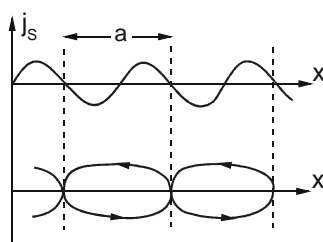


Рис. 14.2

струм у переході є вздовж нього неоднорідним і періодичним по координаті. З рис. 14.2 видно, що в деяких точках струм іде, а в інших повністю взаємо

компенсується. При цьому мова йде про струм вздовж

осі y , або з берега на берег. Можливість зсуву на π є звичайним виродженням для появи топологічних збуджень.

А що таке повний струм через перехід?

Підрахуємо його:

$$\begin{aligned}
 I_s &= j_c \int_{-L/2}^{L/2} \sin\left(\frac{2\pi}{a}x + C\right) dx = -\frac{a}{2\pi} j_c \cos\left(\frac{2\pi}{a}x + C\right) \Big|_{-L/2}^{L/2} = \\
 &= -\frac{a}{2\pi} j_c \left[\cos\left(\frac{\pi L}{a} + C\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{a} - C\right) \right] = \\
 &= -\frac{a}{\pi} \sin\frac{\pi L}{a} \sin C = j_c L \frac{\sin\frac{\pi L}{a}}{\frac{\pi L}{a}} \sin C .
 \end{aligned}$$

Таким чином, при заданому зовнішньому полі H_0 (тобто заданому періоді a вихрової структури у переході) зміна повного струму I_c через перехід викликає зміну константи C (власне, більше нічому змінюватись). Вона підстроюється під кожне значення повного НП струму.

Зрозуміло, що максимальний бездисипативний струм – це просто амплітуда перед $\sin C$, або

$$I_{\max} = j_c L \left| \frac{\sin\frac{\pi L}{a}}{\frac{\pi L}{a}} \right| \equiv I_c \left| \frac{\sin\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}}{\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} \right|,$$

де ми скористалися наступними перетвореннями

$$\pi \frac{L}{a} = \pi \frac{H_0 L d}{\Phi_0} = \pi \frac{\Phi}{\Phi_0},$$

внаслідок явного виразу для періоду a і введення формули для повного потоку через перехід. На рис. 14.3 показана залежність максимального НП

струму через джозефсонівський контакт від величини

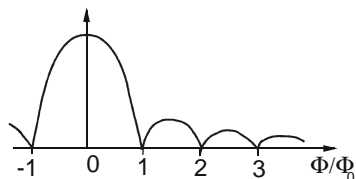


Рис. 14.3

зовнішнього поля, паралельного площині переходу.

19.2. Використання ефектів Джозефсона.

Сквіди. Розглянемо деякі

принципи роботи так званих **сквідів** (на англійській мові SQUID прямо відповідає аббревіатурі від Superconducting Quantum Interference Device), що використовують когерентні ефекти. Фактично сквід – це прилад чи пристрій, який з дуже великою

чутливістю може

вимірювати або магнітне поле, або напругу.

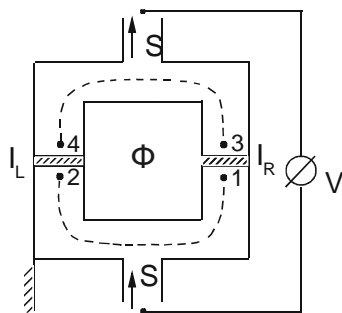


Рис. 14.4

Розглянемо схему найпростішого сквіду (рис. 14.4). Він складається з двох джозефсонівських переходів між двома масивними надпровідниками. Всередині знаходиться котушка, що створює магнітний потік Φ .

Принцип роботи сквіду спирається на залежність повного бездисипативного струму від цього потоку, який виникає завдяки котушці всередині кільця інтерферометра.

Виділимо в кільці дві пари точок 1-2 та 3-4 і проінтегруємо вираз

$$\hbar \nabla \theta = 2m_f \mathbf{v}_s + \frac{2e}{a} \mathbf{A}$$

для узагальненого імпульсу куперівської пари від точки 1 до точки 3 та від точки 4 до точки 2:

$$\theta_3 - \theta_1 + \theta_2 - \theta_4 = \frac{2e}{\hbar c} \left(\int_1^3 \mathbf{A} d\mathbf{l} + \int_4^2 \mathbf{A} d\mathbf{l} \right),$$

де доданок $2m_f \mathbf{v}_s$ знову випав, бо за припущенням всі точки контуру знаходяться в місцях НП, що далекі від границь, де НП струм відсутній та $\mathbf{v}_s = 0$.

Оскільки відстані 1-2 та 3-4 малі у порівнянні з довжиною пунктиру, а векторний потенціал \mathbf{A} не має особливостей поблизу переходів, можна доповнити праву частину останнього рівняння ще цими ділянками. В результаті маємо

$$\varphi_J^{(L)} - \varphi_J^{(R)} = \frac{2e}{\hbar c} \oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = -\frac{2e}{\hbar c} \Phi = -2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0},$$

бо $\Phi_0 = \pi \hbar c / e$ і де введені позначення $\varphi_J^{(L)} \equiv \theta_2 - \theta_1$, $\varphi_J^{(R)} \equiv \theta_4 - \theta_3$ та враховано, як і вище, знак циркуляції. Згадаємо, що

$$I_{L,R} = I_c \sin \varphi_J^{(L,R)}$$

(зрозуміло, вважається, що обидва переходи однакові і що струми I_c через них теж однакові). Тоді повний струм

$$I = I_c (\sin \varphi_J^{(L)} + \sin \varphi_J^{(R)}) = 2I_c \sin \frac{\varphi_J^{(L)} + \varphi_J^{(R)}}{2} \cos \frac{\varphi_J^{(L)} - \varphi_J^{(R)}}{2},$$

звідки

$$I = 2I_c \cos \pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \sin \left(\varphi_J^{(R)} + \pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right).$$

В результаті, при даному значенні повного потоку через кільце Φ єдиним параметром, що підстроюється під даний струм I , є фаза $\varphi_J^{(R)}$. Це, в свою чергу,

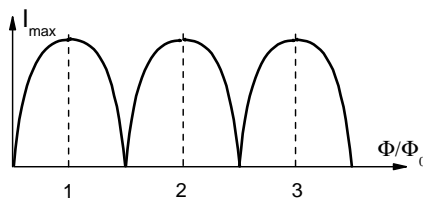


Рис. 14.5

означає, що максимальний струм

$$I_{\max} = 2I_c \left| \cos \pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right|.$$

Видно, що найбільш стабільним є стан надпровідності, коли відношення Φ/Φ_0 дорівнює цілому числу. Навпаки, якщо Φ/Φ_0 є напівцілим числом, то будь-який струм викличе в інтерферометрі резистивний стан, або стан із скінченим опором, а отже – падіння напруги.

Вимірювання демонструють, такий сквід має надзвичайно велику чутливість. Зокрема, мова йде про величини до 10^{-5} від Φ_0 , або 10^{-10} - 10^{-11} Гс. Для порівняння поле Землі ~ 0.5 Гс.

20. Надпровідники II-го роду

Вперше така назва, а саме: НП-II була використана радянським фізиком О.О. Абрикосовим у 1957 р., коли в його роботі на основі теорії Гінзбурга-Ландау була побудована послідовна феноменологічна теорія НП-II та дано пояснення їх магнітним властивостям. Розвиток фізики НП в подальші роки повністю підтвердив теоретичні передбачення Абрикосова, і в 2003 р. він разом з В.Л. Гінзбургом та

американським теоретиком Е. Леггеттом отримав Нобелівську премію.

Треба зауважити, що робота О.О. Абрикосова дуже переконливий приклад (можливо, не такий вже і частий, але подібне трапляється в науці), коли розвиток цілого напрямку був зумовлений теоретичною роботою. Вона для свого часу – початок 50-х років ХХ-го століття – виявилась настільки незвичайною, що спочатку була зустрінута з деякою недовірою – все в ній було нестандартним. І тільки через деякий час, коли з'ясувалося, що складна поведінка НП сплавів і хімічних сполук у магнітному полі знаходить пояснення з єдиної точки зору, підхід Абрикосова завоював популярність. В цих дослідженнях вдалося описати досить великі критичні поля ряду сплавів, що без теорії Абрикосова зробити було неможливо. Експеримент став по суті тріумфом теорії, автору якої ще не було і 30-ти років.

Ми вже розглянули ситуацію, коли енергія границі між S - та N -фазами в металі від'ємна: $\sigma_{NS} < 0$. Це означає, що при певних умовах системі вигідно розшаруватися на області нормальної та НП фаз, причому, якщо ви пам'ятаєте, це відбувається у магнітному полі.

Наведемо криву намагнічування (див. рис. 14.6) циліндра НП-II у паралельному полі. Поки зовнішнє поле $H_0 < H_{c1}$, середнє поле всередині циліндра $\mathbf{B} = 0$, а оскільки

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}_0 + 4\pi\mathbf{M},$$

то умова $\mathbf{B} = 0$ відповідає залежності

$$-4\pi\mathbf{M} = \mathbf{H}_0.$$

Проте в області

$$H_{c1} < H_0 < H_{c2}$$

всередині НП з'являється індукція $\mathbf{B} \neq 0$, але вона менша за $|H_0|$ і НП стан зберігається. У деякому

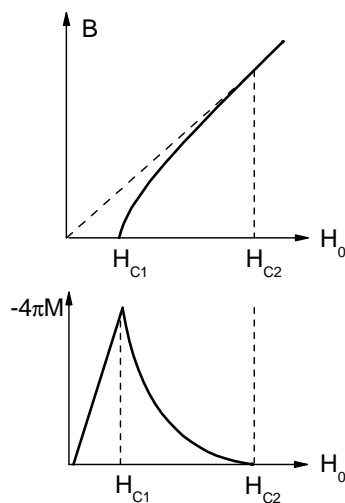


Рис. 14.6

більшому полі $H_0 = H_{c2}$ середнє поле зрівнюється з H_0 (тобто магнітний момент, обумовлений НП струмами, вже не створюється) і НП стан зникає (в усякому разі, в об'ємі).

Таким чином, експериментальні спостереження показали, що ефект Мейсснера-Оксенфельда у даному випадку майже відсутній (тобто магнітне поле

проникає у НП і зберігається у ньому у відносно великому діапазоні магнітних полів). При цьому воно проникає до НП вельми незвичайно (згадайте ефект Джозефсона у зовнішньому полі): прорив поля у товщу НП відбувається у вигляді ниток – **квантованих вихрових ниток**, або, як прийнято говорити, **вихорів Абрикосова**.

Кожний вихор має серцевину, або **кор**, що утворюється N -фазою і за формою представляє собою довгий тонкий циліндр, вісь якого паралельна зовнішньому полю. Параметр порядку ψ в ньому

дорівнює нулеві. Радіус цього циліндра – порядку довжини когерентності ξ_S . Навколо такого циліндра з нормальної фази (див. рис. 14.7) тече струм (вихоровий НП струм), направлений таким чином, щоб створюване ним магнітне поле було орієнтоване вздовж нормальної серцевини і за напрямком співпадало з зовнішнім полем \mathbf{H}_0 .

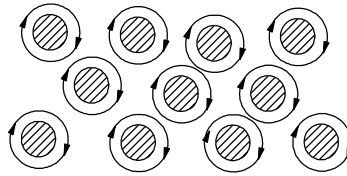


Рис. 14.7

Вихоровий струм при цьому захоплює область радіуса лондонівської глибини проникнення λ_L . Ця область набагато перевищує ξ_S , бо у НП-II $\lambda_L \gg \xi_S$ (відповідно, параметр Гінзбурга-Ландау $\kappa_{GL} \equiv \lambda_L / \xi_S \gg 1$ і може сягати величин $\sim 10^2$ і навіть більше).

Як і повинно бути, вихор несе квант магнітного потоку. А поле H_{c1} як раз і вираховується з умови вигідності утворення одиночного вихору. Ці вихори, проникнувши до НП, розташовуються один від одного на відстані $\sim \lambda$, утворюючи правильну трикутну (тобто щільно упаковану) ґратку. Такий стан називається **змішаним** (не плутати з проміжним для НП-I), або таким, що характеризується частковим проникненням поля у зразок. При цьому у діапазоні $H_{c1} < H_0 < H_{c2}$ він заповнений вихорами.

Виникнувши у полі H_{c1} , ґратка існує і в більш великих полях H_0 . Із зростанням поля її період зменшується, а густина вихорів збільшується.

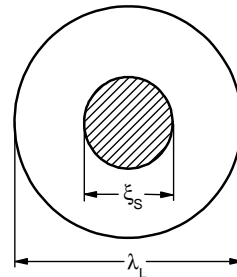
Нарешті, у полі H_{c2} відстань між ними стає $\sim \xi_S$. Це свідчить, що вихори починають перекриватися своїми нормальними серцевинами і $\psi \rightarrow 0$ у всьому об'ємі. В цій точці відбувається перехід II-го роду у N -стан.

Змішаний стан можна спостерігати прямими візуальними методами. Якщо на поверхню НП-II у зовнішньому полі насипати ФМ порошок, то він осяде у відповідності до ліній магнітного потоку і його (порошку) густина буде неоднорідною і більшою у місцях виходу вихорів (або магнітних силових ліній). У електронному мікроскопі картина видна чудово. Вперше це було зроблено німецькими дослідниками у 1967 р. і стало широко застосовуватись для спостереження та дослідження вихорів Абрикосова.

Лекція 15

Продовжимо вивчення НП-II.

20.1. *Поле поодинокого вихору.* Розглянемо найпростішу задачу – структуру поодинокого вихору в НП середовищі. Як ми вже говорили, сам вихор (див. рис. 15.1) представляє собою область нормального металу, яка має радіус порядку довжини когерентності ξ_S і вміщує колові вихорові струми, що охоплюють область радіуса $\sim \lambda_L (\gg \xi_S)$.



Нехай параметр теорії Гінзбурга-Ландау

Рис. 15.1

$\kappa_{GL} \equiv \lambda_L / \xi_S \gg 1$. Тоді на відстані $r \gg \xi_S$ параметр порядку $|\psi|^2 = 1$. Будемо розглядати саме цю область. В ній друге рівняння Гінзбурга-Ландау для $\psi = |\psi| \exp(i\theta)$ має вигляд

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \frac{|\psi|^2}{\lambda_L^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \mathbf{A} \right) = \frac{1}{\lambda_L^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \mathbf{A} \right),$$

або

$$\text{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{\lambda_L^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla\theta - \mathbf{A} \right),$$

де $\mathbf{H} = \text{rot}\mathbf{A}$. Застосувавши, як і раніше, операцію rot до обох частин, отримаємо:

$$\mathbf{H} + \lambda_L^2 \text{rot}\mathbf{H} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \text{rot}\nabla\theta.$$

Відомо, що завжди, і ми це неодноразово використовували, $\text{rot}\nabla = 0$; але у центрі вихору фаза невизначена, бо там $|\nabla\theta| \rightarrow \infty$. Тому, щоб розібратися, що таке функція $\text{rot}\nabla\theta$ у центрі вихору, візьмо інтеграл від цього виразу по поверхні кола деякого невеликого радіусу з центром у центрі вихору:

$$\int_S \text{rot}\nabla\theta d\mathbf{S} = \oint \nabla\theta d\mathbf{l},$$

де контурний інтеграл розраховується по колу, що охоплює площадку S . Зрозуміло, що незалежно від радіусу обраного кола зміна фази складатиме 2π . Тим самим можна покласти, що

$$\int_S \text{rot}\nabla\theta d\mathbf{S} = 2\pi.$$

Таким чином, $\text{rot}\nabla\theta$ це така функція, яка усюди, крім центру вихору, дорівнює нулю. При цьому інтеграл по контуру дорівнює 2π . Це по суті співпадає з означенням δ -функції, і ми можемо формально записати

$$\text{rot}\nabla\theta = 2\pi\delta(\mathbf{r})\mathbf{e}_v,$$

де \mathbf{e}_v – одиничний вектор вздовж вихору.

В результаті приходимо до рівняння поодинокого вихору:

$$\mathbf{H} + \lambda^2 \text{rotrot}\mathbf{H} = \Phi_0 \delta(\mathbf{r}) \mathbf{e}_v$$

з очевидною граничною умовою $H(\infty) = 0$. Оскільки $\text{rotrot} = \nabla \text{div} - \Delta$, а $\text{div}\mathbf{H} = 0$, то рівняння для $\mathbf{H} \parallel z$:

$$H(\mathbf{r}) - \lambda_L^2 \Delta H(\mathbf{r}) = \Phi_0 \delta(\mathbf{r}).$$

Зробимо фур'є-перетворення:

$$H(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} H(\mathbf{k}) d\mathbf{k}; \quad \delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k},$$

які після підстановки у рівняння дають

$$H(\mathbf{k}) = \Phi_0 \frac{1}{1 + \lambda_L^2 \mathbf{k}^2},$$

і, нарешті,

$$\begin{aligned} H(\mathbf{r}) &= \frac{\Phi_0}{(2\pi)^2} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}}{1 + \lambda_L^2 \mathbf{k}^2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_L^2} \frac{1}{2\pi} \int e^{i\lambda_L k \frac{r}{\lambda_L} \cos\varphi} \frac{\lambda_L^2 k d\varphi dk}{1 + \lambda_L^2 \mathbf{k}^2} = \\ &= \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_L^2} \frac{1}{2\pi} \int e^{ix \frac{r}{\lambda_L} \cos\varphi} \frac{x d\varphi dx}{1 + x^2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_L^2} K_0\left(\frac{r}{\lambda_L}\right), \end{aligned}$$

де K_0 – функція Макдональда (інакше – функція Ганкеля уявного аргументу, що помножена на деякий постійний множник). Асимптотики цієї функції досить прості:

$$K_0\left(\frac{r}{\lambda_L}\right) = \begin{cases} \ln \frac{\lambda_L}{r}, & r \ll \lambda_L; \\ \sqrt{\frac{\lambda_L}{r}} e^{-r/\lambda_L}, & r \gg \lambda_L. \end{cases}$$

Іншою мовою, при малих r функція $K_0(r/\lambda_L)$ логарифмічно розбігається і експоненціально меншає на великих від центру вихору відстанях.

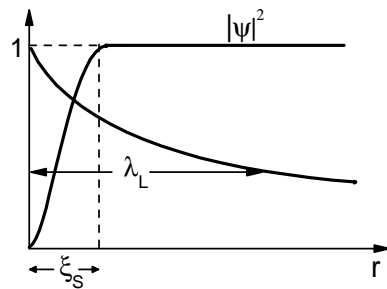


Рис. 15.2

На рис. 15.2 показано розподіл поля $H(\mathbf{r})$ поодинокого вихору разом з розподілом параметра порядку. При цьому поле утворюється саме вихором. Строго кажучи,

у центрі вихору $H(\mathbf{r} \rightarrow 0) \rightarrow \infty$, що, звичайно, не є фізичним, бо формули феноменологічної теорії не можуть бути справедливими при дуже малих $r = |\mathbf{r}|$, які в нашому випадку обмежуються величиною ξ_S . Тому звичайно поле у центрі вихору рахується з логарифмічною точністю, а саме: вважається, що

$$H(0) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_L^2} \ln \kappa_{GL}.$$

Чисельне знаходження розв'язку рівняння для поля вихору при $\kappa_{GL} \gg 1$ дає

$$H(0) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} (\ln \kappa_{GL} - 0.18),$$

що демонструє неістотність поправки.

20.2. *Перше критичне поле.* Визначимо поле H_{c1} , коли утворення і існування вихору всередині НП-II

стає вигідним. Для цього необхідно обчислити вільну енергію НП-П з вихором і її різницю від вільної енергії без вихору. Знову обмежимося випадком $\kappa_{GL} \gg 1$. Це типово лондонівський випадок: іншими словами, величина $|\psi| \approx 1$, тобто однорідна, а отже, доданки з $\nabla\psi$ несуттєві. Тоді (ми це вже писали в п. 5.2 (див. Лекцію 5)) вільна енергія має вигляд:

$$F_S(\mathbf{H}) = F_S(0) + \frac{1}{8\pi} \int [\mathbf{H}^2 + \lambda_L^2 (\text{rot}\mathbf{H})^2] dV \equiv F_S(0) + \Delta F_S(\mathbf{H}),$$

де перший доданок під інтегралом це енергія магнітного поля, а другий – НП струмів і інтеграл береться між двома нескінченими паралельними площинами, перпендикулярними до вихрової лінії, що знаходяться на одиничній відстані одна від одної (рис. 15.3).

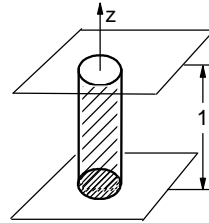


Рис. 15.3

Таким чином, другий доданок, або $\Delta F_S(\mathbf{H})$, – це сума густин потенціальної та кінетичної енергій НП вихору. Треба нагадати, що у випадку отримання рівняння Лондонів енергія $W_{kin} \sim \mathbf{j}_S^2$, а $\mathbf{j}_S \sim \text{rot}\mathbf{H}$ через рівняння Максвелла.

Запишемо вже відому рівність¹

$$(\text{rot}\mathbf{H})^2 = \mathbf{H} \text{rotrot}\mathbf{H} - \text{div}[\text{rot}\mathbf{H}, \mathbf{H}],$$

¹ Вона прямо випливає з векторної тотожності $\text{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{b} \text{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a} \text{rot}\mathbf{b}$ при $\mathbf{a} = \text{rot}\mathbf{H}$ і $\mathbf{b} = \mathbf{H}$.

яку використаємо, щоб переписати вільну енергію:

$$\begin{aligned}\Delta F_s(\mathbf{H}) &= \frac{1}{8\pi} \int \{ \mathbf{H}^2 + \lambda_L^2 \mathbf{H} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \lambda_L^2 \operatorname{div} [\operatorname{rot} \mathbf{H}, \mathbf{H}] \} dV = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H} (\mathbf{H} + \lambda_L^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H}) dV - \frac{\lambda_L^2}{8\pi} \int \operatorname{div} [\operatorname{rot} \mathbf{H}, \mathbf{H}] dV.\end{aligned}$$

За теоремою Гауса

$$\int \operatorname{div} [\operatorname{rot} \mathbf{H}, \mathbf{H}] dV = \oint [\operatorname{rot} \mathbf{H}, \mathbf{H}] d\mathbf{S},$$

де поверхневий інтеграл береться по нескінченно віддаленій поверхні та по площинах $z=0$ і $z=1$ (вихор вважається паралельним осі z). Оскільки поле \mathbf{H} теж направлене вздовж цієї осі, то це означає, що \mathbf{H} перпендикулярно до вище названих площин $z=0$ і $z=1$, а вектор $[\operatorname{rot} \mathbf{H}, \mathbf{H}]$ лежить у них; отже, $d\mathbf{S} \perp [\operatorname{rot} \mathbf{H}, \mathbf{H}]$ і тим самим підінтегральний вираз на цих площинах зникає. А в силу зменшення поля на великих відстанях остаточно отримуємо

$$\oint [\operatorname{rot} \mathbf{H}, \mathbf{H}] d\mathbf{S} = 0.$$

Тому

$$\Delta F_s(\mathbf{H}) = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H} (\mathbf{H} + \lambda_L^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H}) dV.$$

Тобто ми знаходимо, що під інтегралом виникло рівняння, яке визначає поле вихору:

$$\Delta F_s(\mathbf{H}) = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H} \Phi_0 \delta(\mathbf{r}) \mathbf{e}_v dV = \frac{\Phi_0}{8\pi} \mathbf{H}(0) = \frac{\Phi_0^2}{(4\pi\lambda_L)^2} \ln \kappa_{GL},$$

оскільки $H(0) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_L^2} \ln \kappa_{GL}$.

Отже, ми бачимо, що $\Delta F_s(\mathbf{H}) > 0$. Це свідчить, що сам по собі вихор, або його утворення у НП-II, є не вигідним. Проте ми не врахували зовнішнє магнітне поле \mathbf{H}_0 . Поки воно залишається малим, вихори не народжуються, оскільки різниця $\Delta F_s(\mathbf{H})$ позитивна. В результаті, система буде перебувати в *мейсснерівському стані*, коли поле у НП, в тому числі НП-II, не проникає.

Коли ж виникнення вихору стане вигідним? Для цього треба записати густину гіббсівської вільної енергії, що додатково враховує взаємодію вихору з зовнішнім полем, або

$$\Delta G_s(\mathbf{H}) = \Delta F_s(\mathbf{H}) - \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{B} \mathbf{H}_0 dV .$$

Тоді

$$\begin{aligned} \Delta G_s(\mathbf{H}) &= \Delta F_s(\mathbf{H}) - \frac{H_0}{4\pi} \int B dx dy dz = \\ &= \Delta F_s(\mathbf{H}) - \frac{H_0}{4\pi} \int B dx dy dz = \Delta F_s(\mathbf{H}) - \frac{H_0}{4\pi} \int B dx dy \int dz = \\ &= \Delta F_s(\mathbf{H}) - \frac{H_0}{4\pi} \Phi_0 \int dz = \frac{\Phi_0^2}{(4\pi\lambda_L)^2} \ln \kappa_{GL} - \frac{H_0 \Phi_0}{4\pi} . \end{aligned}$$

Для слабких полів $\Delta G_s(\mathbf{H}) > 0$ і вихору утворюватись не вигідно; але коли його “зеєманівська” енергія (другий доданок) стане достатньою, тобто $\Delta G_s(\mathbf{H})$ стане рівним нулеві, поле досягне свого *першого критичного* значення

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_L^2} \ln \kappa_{GL} = \frac{1}{2} H(0); \quad (H(0) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_L^2} \ln \kappa_{GL}),$$

після якого $\Delta G_s(\mathbf{H}) < 0$, і вихори починають спонтанно народжуватися у НП-ІІ із зростанням поля.

Зауважимо, що співвідношення $H(0) = 2H_{c1}$ відповідає дійсності лише для великих значень параметра Гінзбурга-Ландау $\kappa_{GL} \gg 1$. Зробимо оцінки: нехай $\kappa_{GL} = 100$ – тоді $H_{c1} \approx 30$ Ое; тобто ми бачимо, що зовнішнє поле досить швидко починає проникати у НП-ІІ з фактично дуже малих своїх значень.

20.3. *Взаємодія вихорів.* Розглянемо питання про поведінку одного вихору у полі іншого. Як і раніше, будемо вважати, що $\kappa_{GL} \gg 1$. Поки відстань між вихорами $r > \lambda_L$, вони один одного не відчують. Але

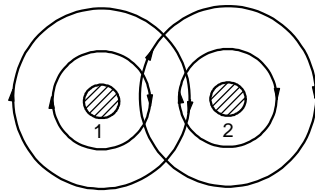


Рис. 15.4

припустимо, що вони підійшли на відстань $r \sim \lambda_L$; тоді серцевина одного вихору виявляється в області НП струму, що обтікає перший вихор, і навпаки. З рис. 15.4 видно, що швидкості електронної рідини на периферії (тобто праворуч і ліворуч від обох вихорів) складаються, а в області між ними – віднімаються. З теорії нестисливих рідин відомо, що чим більше швидкість, тим менший тиск (закон Бернуллі). Іншою мовою, на серцевину кожного

вихору буде діяти сила, що визначається різницею тисків справа і зліва від нього. Таким чином, навіть цей якісний розгляд свідчить, що вихори взаємодіють; при цьому за тією ж аналогією “однойменні” паралельні вихори відштовхуються, а “різнойменні” – притягуються.

Знайдемо цю взаємодію. Для цього запишемо:

$$\Delta F_S^{(12)}(\mathbf{H}) = \frac{1}{8\pi} \int [\mathbf{H}^2 + (\lambda_L \text{rot}\mathbf{H})^2] dV,$$

де тепер \mathbf{H} – поле, створене обома вихорами. Воно має знаходитись з рівняння

$$\mathbf{H} + \lambda_L \text{rotrot}\mathbf{H} = \Phi_0 [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)], \quad \Phi_0 \equiv \Phi_0 \mathbf{e}_v.$$

Далі, розв’язуючи задачу про два вихори у повній відповідності до задачі про один вихор, аналогічно отримуємо вираз

$$\Delta F_S^{(12)}(\mathbf{H}) = \frac{\Phi_0}{8\pi} [\mathbf{H}(\mathbf{r}_1) + \mathbf{H}(\mathbf{r}_2)],$$

який виникає як результат інтегрування обох δ -функцій, причому $\mathbf{H}(\mathbf{r}_1)$ – це поле у центрі першого вихору, а $\mathbf{H}(\mathbf{r}_2)$ – у центрі другого, бо \mathbf{r}_1 та \mathbf{r}_2 – це і є координати їх центрів. Проте тепер кожне з цих полів є сумою поля, що створюється самим вихором, а також поля $\mathbf{H}_{12}(r_{12})$ від другого вихору, де $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$.

Отже, можна записати:

$$\begin{aligned}\Delta F_S^{(12)}(\mathbf{H}) &= \frac{\Phi_0}{8\pi} [\mathbf{H}(0) + \mathbf{H}_{12}(\mathbf{r}_{12}) + \mathbf{H}(0) + \mathbf{H}_{12}(\mathbf{r}_{12})] = \\ &= 2\Delta F_S(\mathbf{H}) + \frac{\Phi_0}{4\pi} \mathbf{H}_{12}(\mathbf{r}_{12}) = 2\Delta F_S(\mathbf{H}) + \frac{\Phi_0}{4\pi} H_{12}(\mathbf{r}_{12}).\end{aligned}$$

Якщо ввести потенціал

$$U(\mathbf{r}_{12}) = \frac{\Phi_0}{4\pi} H_{12}(\mathbf{r}_{12}),$$

з яким зв'язана сила, що припадає на одиницю довжини вихору, то

$$f = -\frac{dU(\mathbf{r}_{12})}{dr_{12}} = -\frac{\Phi_0}{4\pi} \frac{dH(\mathbf{r}_{12})}{dr_{12}}.$$

Використаємо тепер рівняння Максвелла в координатній формі; тоді видно, що

$$\frac{dH(\mathbf{r}_{12})}{dr_{12}} = \frac{4\pi}{c} j_{12}(\mathbf{r}_{12})$$

(бо при $\mathbf{H} \parallel z$ з $rot\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \rightarrow \frac{dH(\mathbf{r}_{12})}{dr_{12}} = [rot\mathbf{H}(\mathbf{r}_{12})]_y$),

де $j_{12}(\mathbf{r}_{12})$ – густина струму, що наведений одним вихором у точці розташування другого, а під точкою розуміється серцевина. В результаті

$$|f| = \frac{\Phi_0}{c} j_{12}.$$

Таким чином, сила, що діє між вихорами одиничної довжини, не відрізняється від сили Лоренца, що задає силу дії поля на струм. Цю силу так і називають, представляючи у загальному випадку:

$$\mathbf{f}_L = \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \Phi_0],$$

де i поле Φ_0 , i сторонній струм j – відносяться до центру вихору. В нашому випадку

$$\mathbf{f}_L = \frac{1}{c} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_0 \end{vmatrix} \rightarrow \left\{ \frac{1}{c} j \Phi_0, 0, 0 \right\}$$

отримаємо відштовхування в напрямку осі x .

20.4. *Друге критичне поле.* В однорідному НП-II змішаний стан характеризується правильною трикутною ґраткою. Із зростанням зовнішнього поля період ґратки зменшується, і коли він зменшується до величини порядку довжини когерентності ξ_S , відбувається фазовий перехід II-го роду із змішаного стану у нормальний. Магнітне поле, коли цей перехід має місце, зветься *другим критичним полем* та позначається H_{c2} .

Його точний розрахунок виконати досить складно, але можна оцінити це поле на основі такої задачі. Коли вихори підходять достатньо близько один до одного (див. рис. 15.5), у першому наближенні можна припустити, що вони пронизують тонку пластинку у зовнішньому полі, яке паралельно

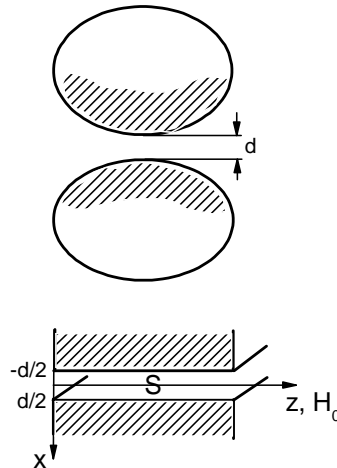


Рис. 15.5

до її поверхні. Знайдемо поле H_{e2} , коли пластинка товщиною $d \ll \lambda_L$, ξ_s перейде у нормальний стан.

Запишемо рівняння Гінзбурга-Ландау:

$$-\xi_s^2 \psi'' + \left(\frac{2\pi\xi_s}{\Phi_0}\right)^2 A^2 \psi - \psi + \psi^3 = 0; \quad \psi' \equiv \frac{d\psi}{dx};$$

$$A'' = \frac{\psi^2}{\lambda_L^2} A,$$

де ми врахували, що внаслідок однозв'язності можна обрати найпростіше калібрування для дійсності функції ψ .

Оскільки система, що розглядається, – це НП-II, тобто $\xi_s \ll \lambda_L$, а $d \ll \xi_s$, то зміною ψ можна зігнорувати, що дозволяє розв'язати друге рівняння (у наближенні, що параметр порядку $\psi \neq \psi(x)$ і залежить лише від поля); тоді, як завжди, представимо: $A(x) \sim e^{ax}$. Легко бачити, що $a = \pm \psi / x$, звідки

$$A(x) = A_1 \operatorname{ch} \psi \frac{x}{\lambda_L} + A_2 \operatorname{sh} \psi \frac{x}{\lambda_L},$$

а також

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix};$$

$$H_z(x) = \frac{\partial A_y}{\partial z} = -A_1 \frac{\psi}{\lambda_L} \operatorname{sh} \psi \frac{x}{\lambda_L} + A_2 \frac{\psi}{\lambda_L} \operatorname{ch} \psi \frac{x}{\lambda_L}.$$

Граничні умови:

$$H_z(\pm \frac{d}{2}) \equiv$$

$$\equiv H(\pm \frac{d}{2}) = \begin{cases} -A_1 \frac{\psi}{\lambda_L} \operatorname{sh} \psi \frac{d}{2\lambda_L} + A_2 \frac{\psi}{\lambda_L} \operatorname{sh} \psi \frac{d}{2\lambda_L} = H_0; \\ A_1 \frac{\psi}{\lambda_L} \operatorname{sh} \psi \frac{d}{2\lambda_L} + A_2 \frac{\psi}{\lambda_L} \operatorname{sh} \psi \frac{d}{2\lambda_L} = H_0. \end{cases}$$

З них випливає: $A_1 = 0$, $A_2 = H_0 \frac{\lambda_L}{\psi} \frac{1}{\operatorname{ch} \psi \frac{d}{2\lambda_L}}$, що дає:

$$A(x) = H_0 \frac{\lambda_L}{\psi} \frac{\operatorname{sh} \psi \frac{x}{\lambda_L}}{\operatorname{ch} \psi \frac{d}{2\lambda_L}}; \quad H(x) = H_0 \frac{\lambda_L}{\psi} \frac{\operatorname{ch} \psi \frac{x}{\lambda_L}}{\operatorname{ch} \psi \frac{d}{2\lambda_L}}.$$

Вважаючи, що плівка дуже тонка, як ми і припускали, представимо:

$$H(x) = H_0; \quad A(x) = H_0 x,$$

і тоді з першого рівняння знаходимо:

$$\left(\frac{2\pi\xi_s}{\Phi_0}\right)^2 H_0^2 x^2 - 1 + \psi^2 = 0; \quad \psi = \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi\xi_s H_0}{\Phi_0}\right)^2 x^2}.$$

Видно, що ми отримали розв'язок, який нібито суперечить зробленому припущенню про незалежність параметра порядку ψ від координати x . Тому, щоб

позбавитись цієї залежності, усереднимо ψ^2 по товщині, або запишемо:

$$\bar{\psi}^2 d = \int_{-d/2}^{d/2} \psi^2 dx = \int_{-d/2}^{d/2} [1 - (\frac{2\pi\xi_s H_0}{\Phi_0})^2 x^2] dx = d - (\frac{2\pi\xi_s H_0}{\Phi_0})^2 \frac{d^3}{12}.$$

Згадуючи також, що $\sqrt{2}H_{cm} = \Phi_0 / 2\pi\lambda_L\xi_s$, приходимо до остаточної відповіді (див. також рис. 15.6):

$$\bar{\psi}^2 = 1 - (\frac{2\pi\xi_s H_0}{2\sqrt{2}\pi\lambda_L\xi_s H_{cm}})^2 \frac{d^2}{12} = 1 - \frac{1}{24} (\frac{H_0}{H_{cm}})^2 (\frac{d}{\lambda_L})^2,$$

яка свідчить, що з ростом поля параметр порядку $\bar{\psi}$ зменшується і в полі

$$H_{cr} = 2\sqrt{6} \frac{\lambda_L}{d} H_{cm} \gg H_{cm} \quad (\lambda \gg d)$$

зникає. Таким чином, чим менше товщина пластинки, тим більше поле H_{cr} і тим останнє більше за H_{cm} .

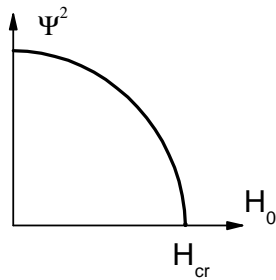


Рис. 15.6

Отримані формули залишаються справедливими лише при малих товщинах, а фізика пояснюється тим, що магнітний момент пластинки набагато менший, чим у масивного зразка і відповідні цьому моменту НП струми не руйнують надпровідність.

Повертаючись до вихорів, у відповідності до обраної аналогії покладемо, що в цьому

випадку $d \sim \xi_S$, звідки $H_{cr} \approx H_{c2} \sim \frac{\lambda_L}{\xi_S} H_{cm} = \kappa_{GL} H_{cm}$.

Зауважимо, що точний розрахунок взаємодії вихорів у пластинках дає $H_{c2} = \sqrt{2} \kappa_{GL} H_{cm}$. Якщо знову використати формули $\sqrt{2} H_{cm} = \Phi_0 / 2\pi \lambda_L \xi_S$ та $H_{c2} = \sqrt{2} (\lambda_L / \xi_S) H_{cm}$, то легко отримати зв'язок $2\pi \xi_S^2 H_{c2} = \Phi_0$, який дозволяє за величиною H_{c2} знаходити довжину ξ_S . Наприклад, величезні поля у ВТНП дають дуже малі значення для величини ξ_S , що пояснюється дуже малим розміром куперівських пар у цих сполуках.

Зауважимо також, що $H_{c2} \gg H_{c1}$:

$$\frac{H_{c2}}{H_{c1}} = \frac{\Phi_0}{2\pi \xi_S^2} \frac{4\pi \lambda_L^2}{\Phi_0 \ln \kappa_{GL}} = \frac{2\kappa_{GL}^2}{\ln \kappa_{GL}} \gg 1;$$

$$\begin{aligned} H_{c2} - H_{c1} &= \frac{\Phi_0}{2\pi} \left(\frac{1}{\xi_S^2} - \frac{\ln \kappa_{GL}}{2\lambda_L^2} \right) = \frac{\Phi_0}{2\pi \xi_S^2} \left(1 - \frac{\ln \kappa_{GL}}{2\kappa_{GL}^2} \right) \approx \\ &\approx \frac{\Phi_0}{4\pi \lambda_L^2} \frac{2\lambda_L^2}{\xi_S^2} = \frac{2\kappa_{GL}^2}{\ln \kappa_{GL}} H_{c1} \gg H_{c1}. \end{aligned}$$

Лекція 16

21. Оборотний магнітний момент НП-II

Оскільки поле проривається у НП-II, цікаво визначити магнітний момент \mathbf{M} в області зовнішніх полів $H_{c1} < H_0 < H_{c2}$, тобто знайти функцію $\mathbf{M}(\mathbf{H}_0)$. В принципі, така задача повинна розв'язуватись шляхом мінімізації вільної енергії та знаходження рівноважної величини моменту. Проте ми застосуємо штучний прийом, запропонований російським вченим В.В. Шмідтом, який багато років викладав курс з фізики НП у Московському фізико-технічному інституті та Московському інституті сталі та сплавів.

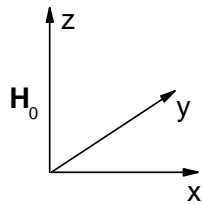


Рис. 16.1

Нехай маємо масивний НП-II, що знаходиться у зовнішньому магнітному полі $\mathbf{H}_0 \parallel z$ (рис. 16.1) і при цьому довжина когерентності є функцією координати, тобто $\xi_s = \xi_s(x)$. Припустимо для визначеності, що залежність $\xi_s(x)$ є зростаючою функцією x . Тоді у відповідності до того, що, як було доведено на попередній лекції, добуток $H_{c2}\xi_s^2 = const$, поле H_{c2} також буде функцією x , але спадаючою.

В таких умовах густина магнітного потоку, або індукція $\mathbf{B} \parallel z$, також стає залежною від x , а це, в свою чергу, означає, що потече струм

$$\mathbf{j}_s = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = -\frac{c}{4\pi} \frac{dB}{dx} \mathbf{j}$$

(треба мати на увазі, що в останньому виразі $\mathbf{j} \parallel y$ – це орт).

Оскільки $\mathbf{B} = \mathbf{H}_0 + 4\pi\mathbf{M}$ і $\mathbf{j}_s \parallel y$, то з отриманого співвідношення знаходимо, що

$$j_s = -\frac{c}{4\pi} 4\pi \frac{dM}{dx} = -c \frac{dM}{dx}.$$

Як ми пам'ятаємо, на кожний вихор діє сила Лоренца

$$\mathbf{f}_L = \frac{1}{c} [\mathbf{j}_s, \Phi_0] = -\frac{1}{c} c \left[\frac{dM}{dx} \mathbf{j}, \Phi_0 \mathbf{e}_z \right] = - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \frac{dM}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_0 \end{vmatrix} = -\Phi_0 \frac{dM}{dx} \mathbf{i},$$

яка, враховуючи, що $dM/dx < 0$, направлена саме вздовж осі x , $\mathbf{f}_L \parallel x$. З іншої сторони, в існуючому полі вихори врівноважені, тобто не рухаються, звідки випливає, що на них діє ще деяка сила. Її походження стає зрозумілим, якщо дійсно виконується припущення, що $\xi_s = \xi_s(x)$. В цих умовах власна енергія вихору, яку ми записували у вигляді

$$\Delta F_s(\mathbf{H}) = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_L} \right)^2 \ln \frac{\lambda_L}{\xi_s}$$

(λ_L – лондонівська глибина проникнення), також буде функцією x , і на вихор буде діяти термодинамічна сила $-\nabla\Delta F_S(\mathbf{H})$, явний вираз якої знаходиться прямим обчисленням:

$$-\nabla\Delta F_S(\mathbf{H}) = -\left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda}\right)^2 \frac{\xi_S}{\lambda_L} \left(-\frac{\lambda_L}{\xi_S^2}\right) \frac{d\xi_S}{dx} = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_L}\right)^2 \frac{1}{\xi_S} \frac{d\xi_S}{dx}.$$

Стандартна умова рівноваги $-\nabla\Delta F_S(\mathbf{H}) + \mathbf{f}_L = 0$ дає рівняння:

$$\left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_L}\right)^2 \frac{1}{\xi_S} \frac{d\xi_S}{dx} - \Phi_0 \frac{dM}{dx} = 0,$$

з якого знаходимо момент

$$M(x) = \frac{\Phi_0}{16\pi^2\lambda_L^2} \ln \frac{\xi_S(x)}{\xi_0},$$

де ξ_0 – константа інтегрування. Як її знайти? Міркування В.В. Шмідта були такими: ми шукаємо залежність $M(\mathbf{H}_0)$, а це означає, що і $\xi_0 = \xi_0(\mathbf{H}_0)$. При цьому, як ми домовлялися, величина $\xi_S(x)$ монотонно зростає із збільшенням x , а величина $H_{c2}(x)$ – монотонно спадає і очевидно, що в деякій точці x_0 виконуватиметься рівність $H_{c2}(x_0) = H_0$. Тоді цій точці зникне магнітний момент, $M(x_0) = 0$, або, що видно з останньої формули, $\xi_S(x_0) = \xi_0$. В той же час можна написати низку рівностей:

$$2\pi\xi_S^2 H_{c2} = \Phi_0 \rightarrow 2\pi\xi_S^2(x) H_{c2}(x) = \Phi_0 \rightarrow \begin{cases} 2\pi\xi_0^2 H_0 = \Phi_0; \\ 2\pi\xi_S^2 H_{c2} = \Phi_0. \end{cases}$$

звідки маємо $\xi_0^2 H_0 = \xi_S^2 H_{c2}$, або $\xi_S / \xi_0 = (H_0 / H_{c2})^{1/2}$.

У підсумку, приходимо до шуканої залежності:

$$M(\mathbf{H}_0) = \frac{\Phi_0}{16\pi^2 \lambda_L^2} \ln \sqrt{\frac{H_0}{H_{c2}}} = -\frac{\Phi_0}{32\pi^2 \lambda_L^2} \ln \frac{H_{c2}}{H_0},$$

з якої легко знаходимо магнітну індукцію

$$B(\mathbf{H}_0) = H_0 - \frac{\Phi_0}{8\pi\lambda_L^2} \ln \frac{H_{c2}}{H_0}.$$

Знову ж таки треба мати на увазі, що наш розгляд справедливий лише за умови $\lambda_L \gg \xi_S$ (або $\kappa_{GL} \gg 1$), тобто для НІІ-ІІ. Розглянемо поведінку магнітного моменту поблизу критичного поля, коли $H_0 \rightarrow H_{c2}$. Тоді можна тотожно записати, що

$$\frac{H_{c2}}{H_0} = \frac{H_{c2} - H_0}{H_0} + 1,$$

звідки маємо

$$M(\mathbf{H}_0) = -\frac{\Phi_0}{32\pi^2 \lambda_L^2} \ln\left(1 + \frac{H_{c2} - H_0}{H_0}\right) \approx -\frac{\Phi_0}{32\pi^2 \lambda_L^2} \frac{H_{c2} - H_0}{H_0}.$$

Згадуючи, що $\Phi_0 = 2\pi\xi_S^2 H_{c2}$, отримуємо

$$-4\pi M(\mathbf{H}_0) = \frac{2\pi\xi_S^2 H_{c2}}{8\pi\lambda_L^2} \frac{H_{c2} - H_0}{H_0} \approx \frac{H_{c2} - H_0}{4\kappa_{GL}^2},$$

або лінійний хід моменту при наближенні величини зовнішнього поля до другого критичного.

Нарешті, дамо відповідь на питання, що представляє собою величина H_{cm} у випадку НП-II. Для НП-I, як ми вже неодноразово підкреслювали, – це критичне (термодинамічне) поле масивного зразка. Саме в цьому полі НП-I переходить у нормальний стан.

У випадку НП-II при такому значенні зовнішнього поля нічого особливого не відбувається, а на кривій $M(\mathbf{H}_0)$ точка $H_0 = H_{cm}$ нічим не виділена. Величину $H_{cm} \equiv H_{cm}(T)$ в діапазоні $T \leq T_c$ можна при цьому розглядати як міру енергетичної вигідності НП стану відносно нормального для даного матеріалу у відсутності поля. Як і раніше, це твердження можна представити умовою:

$$F_N(0) - F_S(0) = \frac{H_{cm}^2}{8\pi},$$

де нульові аргументи вільних енергії відповідають значенню поля.

Але наведене рівняння для різниці вільних енергій можна записати і в інший спосіб, якщо прийняти до уваги, що перехід НП-II до нормального стану буде мати місце саме тоді, коли на його (надпровідника) намагнічування буде витрачена робота, як раз рівна цій різниці – $F_N(0) - F_S(0)$. Формально це означає, наступну рівність:

$$-\int_0^{H_{c2}} M(\mathbf{H}_0) dH_0 = \frac{H_{cm}^2}{8\pi},$$

з якої приходимо до такого визначення:

$$H_{cm}^2 = 2 \int_0^{H_{c2}} [H_0 - B(\mathbf{H}_0)] dH_0,$$

що вичерпує питання.

Ще одне зауваження. Якщо читач десь зустрінеться з тим, що існує ще поле H_{c3} , то не треба дивуватися і думати, що це помилка. Інколи, при дослідженні поверхневих ефектів, виявляється, що аналогічно НП-I системи НП-II мають деякі фізичні параметри, що на поверхнях зразка відрізняються від об'ємних. Тоді вводять уявлення про ті чи інші поверхневі параметри, до набору яких може, зокрема, відноситися і поле H_{c3} . Проте ми не зупинятимемося на цих і подібних до них тонких і спеціальних питаннях фізики НП.

22. Критичний струм у НП-II

Якщо НП-II знаходиться у змішаному стані, то по ньому можна пропускати струм від зовнішнього джерела. Припустимо, що такий струм є перпендикулярним до осей вихорів. Тоді на них буде діяти сила Лоренца (нагадаємо, що коли самого струму (до речі, він зветься *транспортним*) немає, то вихори, як тільки-но ми показали, знаходяться у рівноважному стані), яка може викликати рух кожного вихору та відповідно утвореної ними ґратки. І якщо

НП не має жодного дефекту, то при будь-якій скільки завгодно малій силі Лоренца, вихори почнуть свій рух.

Нижче ми покажемо, що такий рух супроводжується дисипацією енергії (тобто опором). З цього негайно випливає, що *критичний струм* (тобто струм за наявності опору) ідеального (бездефектного) НП дорівнює нулеві.

Тут ми зустрічаємося з тією, достатньо ординарною, ситуацією, коли ідеальна в деякому смислі система виявляється практично некорисною. Нагадаю також напівпровідники, які без легування, тобто в своєму вихідному кристалічно ідеальному стані, виявляються просто діелектриками. Системи ВТНП також набувають своїх властивостей після *допування* (синонім процесу легування). Можна навести й інші приклади.

На щастя, у реальних кристалічних системах, зокрема НП-II, завжди присутні різні дефекти – дислокації або їх скупчення, дислокаційні стінки, включення іншої фази, границі двійників або зерен, пори, за які вихори можуть буквально “зацепитися” та, не маючи можливості подолати таку перешкоду, виявляються і залишаються нерухомими. У зачепленій якимось чином вихровій гратці струм (вже не будь-якої, а тільки скінченої величини) може примусити вихори почати рух. Дійсно, струм викликає силу Лоренца, яка діє на вихори і яка спроможна “відірвати” їх від точок закріплення. Такі точки отримали назву *центрів пінінгу* (*pin* – голка, *pinning* – пришпилювання). Відповідно, густина струму, при

якому вихори зриваються з центрів пінінгу, зветься *критичною густиною* струму \mathbf{j}_c .

Важливо розуміти, що під поняттям дефектів треба собі уявляти не всі можливі неоднорідності, що існують в ґратках. Зокрема, поодинокі домішки, вакансії тощо, вихори просто не “помітять”. Характерний розмір вихору – довжина когерентності ξ_S , яка набагато перевищує постійну ґратки або будь-який атомний розмір. Тому найбільш ефективні для сил пінінгу є дефекти з розмірами $\geq \xi_S$.

Дослідження довели, що критична густина струму може надзвичайно сильно змінюватися у залежності від обробки матеріалу і виявлятися дуже чутливою до його структури. Але що принципово, так це те, що величини T_c або H_{c2} при цьому практично не змінюються. Таким чином (тобто виключно технологічними засобами), вдається досягати у НП магнітах та інших НП пристроях значень густини НП струму $j_c \sim 10^6 \div 10^7$ А/см².

Розглянемо НП-II, по якому тече струм, і припустимо, що в цьому матеріалі багато центрів пінінгу. Який же механізм протікання струму?

Для того, щоб струм йшов по всьому об’єму (перерізу) НП, необхідною умовою є неоднорідний розподіл вихорів. Дійсно, густина транспортного струму і викликане ним поле зв’язані в кожній точці співвідношенням

$$\mathbf{j}_tr = -\frac{c}{4\pi} \text{rot}\mathbf{B},$$

де $|\mathbf{B}| = \Phi_0 n_{vor}$ – середнє значення поля в даному місці, тобто магнітна індукція, усереднена по області, розміри якої набагато більші за відстань між вихорами, а n_{vor} – їх середня густина там же. Із наведеної формули добре видно, що $\mathbf{j}_r \neq 0$ саме там, де, з одного боку, також і $n_{vor} \neq 0$, а з іншого, – треба, щоб $n_{vor} = n_{vor}(\mathbf{r})$, бо ця густина стоїть під знаком диференціальної операції.

Як же виникає такий стан, коли по перерізу НП-II встановлюється критична густина струму? Щоб це

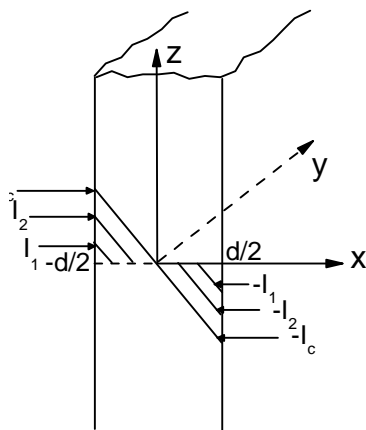


Рис. 16.2

продемонструвати, розглянемо (див. рис. 16.2) нескінчену пластину товщини d , в якій за припущенням є дефекти, що завдяки явищу пінінгу заважають вихорам зсуватися. Нехай при цьому, $d \gg \lambda_L$, а $\mathbf{H}_0 = 0$. Якщо у напрямку осі y тече струм, то спочатку, як у бездефектного НП, струм піде по поверхні (ми це бачили, коли вивчали (див. Лекцію 6, п. 9) розв'язки рівнянь Лондонів для пластини та будували криві розподілу струмів і магнітного поля по товщині), що відповідає ефекту Мейсснера-Оксенфельда.

Коли поле, що створене на поверхні (ми його позначали H_1), перевищить критичне поле H_{c1} , у НП-II

продемонструвати, розглянемо (див. рис. 16.2) нескінчену пластину товщини d , в якій за припущенням є дефекти, що завдяки явищу пінінгу заважають вихорам зсуватися. Нехай при цьому, $d \gg \lambda_L$, а $\mathbf{H}_0 = 0$. Якщо у напрямку осі y тече струм, то спочатку, як у бездефектного НП, струм піде по поверхні (ми це бачили,

почнуть народжуватись вихори (рис. 16.3). У відповідності до напрямків струму та виникаючого завдяки ньому поля вони (вихори) матимуть протилежні напрямки на різних сторонах пластини. Проте, з'являючись на поверхні, ці вихори будуть закріплюватись на неоднорідностях, існування яких у пластині ми припустили, бо без них неможливо створити зразок реального матеріалу. Густина транспортного НП струму у пластині, як ми знаємо, теж неоднорідна і визначається формулою

$$H(x) = -H_1 \frac{sh(x/\lambda_L)}{sh(d/2\lambda_L)},$$

де $H_1 = 2\pi I / c$; при цьому

$$j_s(x) = \frac{cH_1}{4\pi\lambda_L} \frac{sh(x/\lambda_L)}{ch(d/2\lambda_L)}.$$

Оскільки за припущенням розподіл дефектів (а отже і густини $n_{vor}(\mathbf{r})$

вихорів) неоднорідний, виникає скінчена величина $\nabla n_{vor}(\mathbf{r}) \neq 0$. Зрозуміло, що у кожному місці і у кожному момент часу вона буде максимальною, тобто такою, щоб забезпечити протікання критичного струму.

Таким чином, виходячи з наведеного виразу для струму, у деякій області поблизу поверхні, де він найбільший, протікатиме критичний струм, в той час як в інших областях пластини ніякого струму не буде. Нехай струм зростає від величини I_1 до величини $I_2 (> I_1)$. Тоді вихори, зберігши градієнт густини $\nabla n_{vor}(\mathbf{r}) \equiv (\nabla n_{vor})^{cr}$, просунуться до центру. Таке

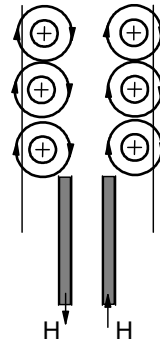


Рис. 16.3

збільшення можна здійснювати до тих пір, поки нуль струму не виявиться на лінії $x = 0$.

Такий стан, коли в кожному місці поперечного перерізу НП тече критичний струм, називається **критичним станом**. (Очевидно, що критичний струм є неоднорідним.)

Припустимо тепер, що НП-II (див. рис. 16.4), знаходиться у зовнішньому магнітному полі, яке вводиться

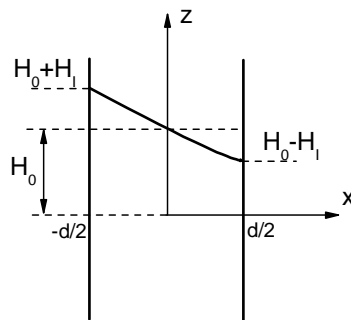


Рис. 16.4

у напрямку $\mathbf{H}_0 \parallel Oz$ і при цьому $H_0 \gg H_c$.

Тоді, нагадаю, на одному боці пластини поле $H_0 + H_c$, а на іншому – $H_0 - H_c$, проте цією різницею за наведеною умовою можна знехтувати. Густина критичного струму у полі H_0 менша, ніж у

відсутності поля, тому величина критичного градієнту густини вихорів також буде меншою.

Дійсно, сила Лоренца, що діє на одиницю довжини вихору,

$$f_L = \frac{1}{c} j_{tr} \Phi_0,$$

а на одиницю об'єму –

$$F_L = \frac{1}{c} j_{tr} B,$$

оскільки сумарна довжина усіх вихорів в одиниці об'єму може бути прирівнена до числа вихорів, що помножене на f_L :

$$F_L = n_{\text{vor}} f_L = n_{\text{vor}} \frac{1}{c} j_{tr} \Phi_0 = \frac{1}{c} j_{tr} B,$$

де, як і вище, $B = n_{\text{vor}} \Phi_0$. Саме ця сила врівноважується у стаціонарному стані силою пінінгу, або силою закріплення вихорів на неоднорідностях. Введемо уявлення про таку силу пінінгу F_p . Критичний струм при цьому має задовільняти рівнянню

$$\frac{1}{c} j_{cr} B = F_p.$$

Зокрема, якщо вважати силу F_p незалежною від зовнішнього поля, то з останнього рівняння випливає пропорційність $j_c \sim 1/B$, яка, як правило, непогано узгоджується з наявними експериментальними спостереженнями.

Зробимо лише одне зауваження.

Якщо дефекти структури НП-II розподілені хітично, то абсолютно жорстка ґратка вихорів на них закріпитися не може. Щоб це зрозуміти, зсунемо ґратку на малу відстань у напрямку дії сили Лоренца. Енергія системи при цьому не зміниться, тому що нове розташування центрів пінінгу відносно жорсткої вихорової ґратки, будучи випадковим, не відрізняється від вихідного, теж випадкового. Відсутність зміни енергії означає відсутність її градієнту, або, що теж саме, повертаючої сили.

Інша ситуація виникає, коли вихорова гратка відповідає пружному середовищу. В ньому вихори підлаштовуються під даний хаотичний розподіл дефектів так, щоб уся система в цілому – центри пінінгу + деформована вихорова гратка – знаходилися у деякому локальному мінімумі. Тому тепер необхідно деяке скінчене зусилля, щоб зірвати вихори з їх центрів пінінгу. При цьому очевидно, що чим м'якша така гратка, тим легше їй підлаштуватися під конкретний розподіл дефектів і тим більша сила пінінгу.

23. Резистивний стан

Розглянемо, нарешті, що відбувається, коли сила Лоренца \mathbf{F}_L , яка створена транспортним струмом, перебільшить силу пінінгу і вихори почнуть рухатись, тобто коли впоперек транспортного струму тече гратка вихорів. Покажемо, що в цьому випадку виникає дисипація енергії, або електроопір. Відповідний стан називається *резистивним*.

Відомо, що течія магнітного поля створює (у відповідності до закону електромагнітної індукції Фарадея) електричне поле \mathbf{E} , яке направлене по струму. Це означає, що відбуватиметься дисипація енергії, яка дорівнюватиме джоульовому теплу $\mathbf{E}\mathbf{j}_r$.

Нехай стала швидкість течії вихорів у напрямку сили Лоренца, тобто перпендикулярно до струму та магнітного поля, дорівнює \mathbf{v}_L . Робота в одиницю часу, що витрачена зовнішнім джерелом на просування вихорів, визначається добутком $\mathbf{F}_L\mathbf{v}_L$, де \mathbf{F}_L –

введена нами сила Лоренца. Зрозуміло, що це і є енергія, що виділятиметься в одиниці об'єму в одиницю часу, або

$$\mathbf{F}_L \mathbf{v}_L = \mathbf{E} \mathbf{j}_{tr},$$

звідки отримуємо

$$E = \frac{F_L v_L}{j_{tr}} = \frac{1}{c} \frac{j_{tr} B v_L}{j_{tr}} = \frac{1}{c} B v_L.$$

Питомий опір НП-II, який з'являється при течії магнітного потоку, позначається як ρ_{f-f} (від flux-flow) та має вигляд

$$\rho_{f-f} = \frac{E}{j_{tr}}.$$

Оскільки рух вихорів, з одного боку, супроводжується виділенням енергії, а з іншого, – є стаціонарним, можна вважати, що вони рухаються у в'язкому середовищі з коефіцієнтом тертя η_{vor} , а відповідно енергія йде на подолання сили тертя $\mathbf{f}_{fr} = -\eta_{vor} \mathbf{v}_L$ – на один вихор.

Рівняння руху для вихору очевидне:

$$f_{fr} + f_L = 0.$$

Для сил на одиницю об'єму тоді маємо:

$$n_{vor} (f_{fr} + f_L) = F_L - \eta_{vor} \frac{B}{\Phi_0} v_L = 0.$$

Як ми показали, $F_L = (1/c) j_{tr} B$, тому

$$\frac{1}{c} j_{tr} B = \eta_{vor} B \frac{v_L}{\Phi_0} \quad \rightarrow \quad v_L = \frac{1}{c \eta_{vor}} j_{tr} \Phi_0.$$

Це дає можливість записати

$$\rho_{f-f} = \frac{E}{j_{tr}} = \frac{1}{c} \frac{B v_L}{j_{tr}} = \frac{1}{c} \frac{1}{j_{tr}} B \frac{1}{c \eta_{vor}} j_{tr} \Phi_0 = \frac{B \Phi_0}{c^2 \eta_{vor}}.$$

Якщо η_v не залежить від B , то видно, що $\rho_{f-f} \sim B$. В температурній області $T \ll T_c$ експеримент свідчить на користь цього співвідношення.

Коефіцієнт η_L в принципі неважко виміряти. У точці $H_0 = H_{c2}$, коли опір вже відповідає нормальному стану, маємо $H_0 = H_{c2} = B$ і

$$\rho_{f-f} \rightarrow \rho_N = \frac{\Phi_0 H_{c2}}{c^2 \eta_{vor}}, \quad \text{або} \quad \eta_L = \frac{\Phi_0 H_{c2}}{c^2 \rho_N}.$$

Щоб уявити порядки величин, наведемо як приклад, що у реальних експериментах при магнітній індукції $B \sim 10^4$ Гс у зразку виникає електричне поле $E \sim 10^{-6}$ В/см, звідки знаходимо

$$v_L = \frac{cE}{B} \approx 3 \cdot 10^{10} \frac{10^{-6}}{300} 10^4 \approx 10^{-2} \text{ см/с},$$

де ми використали перехід до системи одиниць СГСЕ (підкреслено).

Лекція 17

24. Мікроскопічна теорія надпровідності

Як ми вже неодноразово згадували, механізм явища НП, був встановлений (спочатку по суті теоретично) лише через 46 років після відкриття самого явища, коли американські фізики Дж. Бардін, Л. Купер і Р. Шріффер опублікували свою роботу, в якій була викладена теорія, що з того часу так і називається *теорія БКШ*.

Щоб продемонструвати, з якими труднощами зіткнулись фізики, в першу чергу теоретики, достатньо привести такі оцінки. Різниця між вільними енергіями метала в його N- та S-станах, що приходить на 1см^3 , дорівнює, як ми знаємо, величині $H_{cm}^2 / 8\pi \sim 10^5 \text{ ерг/см}^3$ при звичайних значеннях $H_{cm} \sim 10^3 \text{ Ое}$. Оскільки в кубічному сантиметрі знаходиться приблизно 10^{22} електронів провідності, то це означає, що за появу НП відповідає зміна в енергії $\sim 10^5 \text{ ерг/}10^{22} \text{ електрон} \approx 10^{-17} \text{ ерг/електрон} \sim 10^{-5} \text{ eV/електрон}$. Якщо порівняти цю енергію з кулонівською енергією міжелектронної взаємодії, що складає $\sim 1 \text{ eV}$, то вона виключно мала і часто нехтування подібними величинами дозволяє прекрасно описувати ті чи інші явища. Таким чином, треба було пояснити щось таке,

що відбувається з електронною підсистемою провідника (ми це “щось” називали *впорядкуванням*), чому відповідала енергія, на багато порядків нижча за енергію інших відомих взаємодій, і чим зазвичай нехтують.

Перший прямий натяк на можливу природу механізму НП був отриманий після відкриття так званого *ізотопічного ефекту*, про який ми вже згадували. Він полягав у тому, що різні ізотопи одного НП металу мають різні критичні температури, причому виконується залежність

$$T_c M^\alpha = \text{const} ,$$

в якій степінь α – показник ізотоп-ефекту, як правило, близький до 1/2. Саме значення $\alpha=1/2$ називається (або є) канонічним і з ним (тобто з 1/2-ою) порівнюють всі значення, що вимірюються в експерименті. Фактично цей ефект гласить, що для ізотопів НП речовини з масами M і $M + \Delta M$ виконується рівність

$$T_c M^\alpha = (T_c + \Delta T_c)(M + \Delta M)^\alpha ,$$

з якої, враховуючи малість змін, просто впливає зсув критичної температури для більш важкого ($\Delta M > 0$) матеріалу:

$$\Delta T_c \approx -\alpha \frac{\Delta M}{M} T_c .$$

Відкриття ізотоп-ефекту однозначно вказало на активну участь ґратки, а вірніше – коливань її іонного остову, у створенні НП стану. Подальший теоретичний аналіз продемонстрував, що взаємодія

між електронами та коливаннями кристалічної ґратки може викликати додаткову взаємодію вже власне між електронами¹. При певних умовах остання буде мати характер притягання. Якщо воно сильніше за міжелектронне кулонівське відштовхування, то у провіднику виникає ефективне притягання між носіями, результатом якого і буде НП, або більш впорядкований стан.

24.1. *Електрон-фононна взаємодія.* Розглянемо, як же взаємодіють електрони і фонони? Заради простоти спочатку припустимо, що метал знаходиться при температурі $T=0$, коли теплових фононів нема. Їх також нема, якщо ґратку ніщо не збурює, або з нею ніщо не взаємодіє. Коли ж в ній рухається електрон, що має хвильовий вектор \mathbf{k}_1 , він може “налетіти” на нерухомий іон і завдяки процесу розсіяння перейти в інший стан з хвильовим вектором \mathbf{k}'_1 . В такому випадку кажуть, що електрон народив фонон (до розсіяння останній був відсутній). Ґратка є трансляційно інваріантною, тому в ній має виконуватись закон збереження імпульсу:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}'_1 + \mathbf{q}.$$

Далі – цей фонон може бути поглинений другим електронем з хвильовим вектором \mathbf{k}_2 , змусивши його

¹Зауважимо, що у системах ВТНП ізотоп-ефект майже не спостерігається, що деякими дослідниками інтерпретується як свідчення на користь інших взаємодій, які призводять до появи НП конденсату при високих критичних температурах. Проте остаточно відповідне питання не з'ясоване.

перейти в стан \mathbf{k}'_2 . Оскільки фоновий при цьому народився і зник, повинні бути рівними спільні імпульси електронів до і після розсіювання:

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2.$$

В той же час прийнято вважати, що таке розсіювання відповідає електрон-електронному процесу, або, іншою мовою, електрон-електронній взаємодії, яка може бути охарактеризована діаграмою (рис. 17.1):

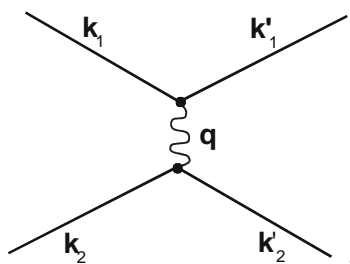


Рис. 17.1

Який же знак цієї взаємодії?

В момент, коли електрон переходить з стану \mathbf{k}_1 у стан \mathbf{k}'_1 виникає коливання електронної густини з частотою

$$\omega = \frac{\varepsilon(\mathbf{k}_1) - \varepsilon(\mathbf{k}'_1)}{\hbar},$$

де $\varepsilon(\mathbf{k}_1)$ і $\varepsilon(\mathbf{k}'_1)$ – енергії початкового і кінцевого станів електрона.

Припустимо, що в результаті такого коливання густини електронів у деякому місці відбулося

локальне зростання їх кількості. Тоді й позитивні іони гратки відчують на собі тимчасовий потенціал притягання, що таким чином виник в цьому місці. З цієї причини вони почнуть рухатися до нього і, маючи відносно велику масу, будуть по інерції продовжувати свій рух навіть після компенсації локального збільшення від'ємного заряду, що, в свою чергу, призведе до лишку позитивного заряду в цьому ж місці. Тепер воно стає центром притягання для електронів, куди вони намагатимуться перетекти з оточуючих областей. Все це дозволяє характеризувати таку динамічну картину як виникнення ефективної міжелектронної взаємодії притягального характеру.

Необхідно, проте, зауважити, що притягання за описаною схемою з'являється лише у тому випадку, коли коливання гратки є вимушеними та відбуваються у фазі з силою, що їх викликала (тобто у фазі з коливаннями, частота яких наведена вище і які відповідають коливаннями електронної густини). Цій умові можна задовольнити, якщо частота вимушуючої сили менше за власну частоту іонної підсистеми. Для останньої характерною є так звана частота Дебая Ω_D , що визначає максимальну частоту граткових коливань (їй відповідає мінімальна довжина хвилі, що дорівнює двом періодам гратки). Нагадаю, що у континуальній моделі (тобто моделі суцільного середовища) величина Ω_D вводиться з умови нормування, або задання числа осциляторів, що знаходяться в одиниці об'єму. Повертаючись до ефективної міжелектронної

взаємодії, приходимо до висновку, що вона виникає для усіх частот, що задовольняють нерівності $\omega < \Omega_D$.

Розглянемо простий осцилятор з масою M та власною частотою Ω_0 , який знаходиться під дією вимушуючої сили $F \exp(i\omega t)$. Розв'язок рівняння руху

$$\ddot{x} + \Omega_0^2 x = \frac{F}{M} e^{i\omega t},$$

має вигляд $x(t) = x_0 \exp(i\omega t)$, де

$$x_0 = \frac{F/M}{\Omega_0^2 - \omega^2}$$

– амплітуда вимушених коливань осцилятора. Видно, що поки виконується нерівність $\omega < \Omega_0$, знак амплітуди, або фаза цих коливань, співпадає із знаком (тобто фазою) сили F . Коли ж, навпаки, $\omega > \Omega_0$, то знак амплітуди коливань осцилятора стає протилежним знаку сили (як кажуть, коливання відбуваються у протифазі до вимушуючої сили).

Якщо повернутися до електронів, то видно, що для того, щоб електрон міг перейти до стану \mathbf{k}'_1 з вихідного стану \mathbf{k}_1 , перше, насамперед, має бути вільним (принцип Паулі). Таке можливо, як відомо, лише поблизу поверхні (або в околі енергії) Фермі ε_F , яку ми зобразимо у вигляді сфери радіусу k_F у \mathbf{k} -просторі. Тоді неважко сформулювати правило взаємодії електронів через фонони (або із залученням фононів, або, нарешті, через взаємодію з ними), яке лежить в основі теорії БКШ: електрони,

енергії яких відрізняються від енергії фермівських електронів не більше, ніж на величину $\hbar\Omega_D$, притягуються один до одного. Енергія цього ефективного притягання позначається $-V$. Усі інші електрони продовжують відштовхуватися (чи цим відштовхуванням можна знехтувати).

Запишемо сформульоване правило у такий спосіб: матричний елемент взаємодії різних електронів

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \begin{cases} -V, & \varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon_F \leq \hbar\Omega_D, \quad \varepsilon(\mathbf{k}') - \varepsilon_F \leq \hbar\Omega_D; \\ 0, & \varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon_F \geq \hbar\Omega_D, \quad \varepsilon(\mathbf{k}') - \varepsilon_F \geq \hbar\Omega_D. \end{cases}$$

Іншою мовою, взаємне притягання відчують лише ті електрони, стани яких лежать у вузькому сферичному шарі, навколо фермівської енергії; його товщина $2\Delta k$ (рис. 17.2) відповідає енергії $2\hbar\Omega_D$:

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar^2(\mathbf{k}_F + \Delta\mathbf{k})^2}{2m} - \frac{\hbar^2(\mathbf{k}_F - \Delta\mathbf{k})^2}{2m} \approx \\ & \approx \frac{4\hbar^2\mathbf{k}_F\Delta\mathbf{k}}{2m} \approx \frac{4\hbar^2k_F\Delta k}{2m} = 2\hbar\omega_D, \end{aligned}$$

звідки

$$\frac{2\Delta k}{k_F} = \frac{\hbar\Omega_D}{\varepsilon_F}.$$

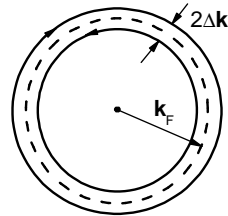


Рис. 17.2

На більш сучасній мові вихідним для отримання ефективною взаємодії є гамільтоніан (або оператор), що відповідає взаємодії електрона з деформацією, яку він викликав у ґратці. Запишемо енергію електрона у найпростішому вигляді:

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m},$$

де m – насправді, ефективна маса. Нехай у кубічному кристалі відбулася деформація, що описується тензором u_{jk} ; тоді

$$\varepsilon(\mathbf{k}) \rightarrow \varepsilon(\mathbf{k}) + C_{jk} u_{jk} + O(\mathbf{k}).$$

У найпростішому випадку обраного нами кубічного кристалу енергія не має зсувних ($j \neq k$) компонент деформаційного тензору, а діагональні є рівними між собою, що дозволяє представити енергію електрона у деформованому кристалі у вигляді

$$\varepsilon(\mathbf{k}) + g_{el-ph} (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = \varepsilon(\mathbf{k}) + g_{el-ph} \Delta v,$$

де Δv – відносна зміна об'єму.

Якщо деформація неоднорідна, то просте узагальнення дає

$$\varepsilon(\mathbf{k}) + g_{el-ph} \Delta v(\mathbf{r}).$$

У представленні вторинного квантування оператор електрон-граткової взаємодії

$$\begin{aligned} H_{int} &= \int d\mathbf{r} \Psi^\dagger(\mathbf{r}) g_{el-ph} \Delta v(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) = \\ &= g_{el-ph} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} c^\dagger(\mathbf{k}_2) c(\mathbf{k}_1) \langle \mathbf{k}_2 | \Delta v(\mathbf{r}) | \mathbf{k}_1 \rangle, \end{aligned}$$

де $|\mathbf{k}\rangle = (1/\sqrt{N}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ – блохівські функції з $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ – періодичними функціями. Як відомо

$$\Delta v(\mathbf{r}) = i \sum_{\mathbf{q}} \frac{1}{\sqrt{2MN\Omega(\mathbf{q})}} |\mathbf{q}| [e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} a(\mathbf{q}) - e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} a^+(\mathbf{q})],$$

де $a^+(\mathbf{q})$ – оператор народження фонона з хвильовим вектором \mathbf{q} та частотою $\Omega(\mathbf{q})$. Це дає:

$$H_{\text{int}} = i \frac{g_{el-ph}}{N} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \frac{1}{\sqrt{2MN\Omega(\mathbf{q})}} |\mathbf{q}| \int d\mathbf{r} [u_{\mathbf{k}_2}^*(\mathbf{r}) u_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{q})\mathbf{r}} - \text{h.c.}] c^+(\mathbf{k}_2) c(\mathbf{k}_1),$$

причому $\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) c(\mathbf{k})$. Враховуючи тепер лише нормальні процеси, тобто такі, для яких $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{q} = 0$, знайдемо, що

$$H_{\text{int}} = i \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} D(\mathbf{k}, \mathbf{q}) c^+(\mathbf{k} + \mathbf{q}) c(\mathbf{k}) [a(\mathbf{q}) - a^+(-\mathbf{q})],$$

де використане позначення

$$D(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = g_{el-ph} \frac{u_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^* u_{\mathbf{k}}}{\sqrt{2M\Omega(\mathbf{q})}} |\mathbf{q}|$$

із середніми по комірни значеннями функцій $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \approx u_{\mathbf{k}}$. З отриманого оператора збурення випливає, що стан електрона з даним \mathbf{k} не є стаціонарним і що електрон постійно перерозсіюється внаслідок незупинних зіткнень з квантами поля деформацій. А оскільки актуальними для НП виявляються електронні стани, які мають бути такими, що $|\mathbf{k}| \approx |\mathbf{k} + \mathbf{q}| \approx k_F$, оператор взаємодії прийнято спрощувати до вигляду:

$$H_{\text{int}} = i \frac{D}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} c^+(\mathbf{k} + \mathbf{q}) c(\mathbf{k}) [a(\mathbf{q}) - a^*(-\mathbf{q})],$$

тому що при цьому спрацьовують також лише вектори $|\mathbf{q}| \rightarrow 2\pi/a$ (тобто брилюєнівські). Тоді остаточно оператор Гамільтона для НП приймає форму:

$$H = H_0 + H_{\text{int}},$$

де

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon(\mathbf{k}) c^+(\mathbf{k}) c(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{q}} \Omega(\mathbf{q}) a^+(\mathbf{q}) a(\mathbf{q}).$$

Його подальше перетворення здійснюється за допомогою канонічного унітарного оператора \hat{S} згідно формальному розкладу:

$$\tilde{H} = H_0 + [\eta H_{\text{int}}, \hat{S}] + \frac{1}{2} [[H_0, \hat{S}] \hat{S}] + \dots = H_0 + \frac{\eta}{2} [H_{\text{int}}, \hat{S}].$$

Так, у випадку, коли

$$H = H_0 + \eta H_{\text{int}}; \quad [H_0, \hat{S}] = -\eta H_{\text{int}},$$

унітарний оператор \hat{S} вибирається з умови компенсації збурення першого порядку по малому параметру $\eta \ll 1$, або

$$[H_0, \hat{S}] + \eta H_{\text{int}} = 0.$$

Якщо врахувати, що незбурений оператор (або оператор нульового порядку) H_0 є діагональним по своїх квантових числах, то з останнього співвідношення легко отримуємо:

$$\langle n | \hat{S} | m \rangle = \eta \frac{\langle n | H_{\text{int}} | m \rangle}{E_m - E_n}.$$

Це дає можливість записати

$$H \rightarrow \tilde{H} \equiv e^{-\hat{S}} H e^{\hat{S}} = H + [H, \hat{S}] + \frac{1}{2} [[H, \hat{S}], \hat{S}] + \dots.$$

Щоб виявити ефективний зв'язок між електронами, зручно обчислювати матричні елементи для фононних операторів, залишаючи електронні у явному вигляді (повторю, що наша мета – отримання ефективного гамільтоніану електронів, що не вміщує електрон-фононної взаємодії, тільки міжелектронну).

Вважатимемо, що система фононів знаходиться при температурі $T = 0$, що означає рівність одного з індексів n або m нулеві (тобто вакуумному індексу). Отже, маємо:

$$\langle 1_{\mathbf{q}} | \hat{S} | \text{vac} \rangle = -i \frac{D}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} c^+(\mathbf{k} - \mathbf{q}) c(\mathbf{k}) \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{k} - \mathbf{q}) - \Omega(\mathbf{q})};$$

$$\langle \text{vac} | \hat{S} | 1_{\mathbf{q}} \rangle = i \frac{D}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} c^+(\mathbf{k} + \mathbf{q}) c(\mathbf{k}) \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \Omega(\mathbf{q})}.$$

В результаті, можна записати:

$$\begin{aligned} \tilde{H} \equiv H_{\text{eff}} &= H_0 + \frac{1}{2} (H_{\text{int}} \hat{S} - \hat{S} H_{\text{int}}) \rightarrow \\ &\rightarrow H_0 + \frac{1}{2} (\langle \text{vac} | H_{\text{int}} \hat{S} | \text{vac} \rangle - \langle \text{vac} | \hat{S} H_{\text{int}} | \text{vac} \rangle), \end{aligned}$$

або у явному виразі –

$$\begin{aligned}
H_{eff} &= \frac{i}{2} \frac{D}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} c^+(\mathbf{k} + \mathbf{q}) c(\mathbf{k}) [a(\mathbf{q}) - a^+(-\mathbf{q})] \hat{S} - \\
&\quad - \frac{i}{2} \frac{D}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \hat{S} c^+(\mathbf{k} + \mathbf{q}) c(\mathbf{k}) [a(\mathbf{q}) - a^+(-\mathbf{q})] = \\
&= \frac{i}{2} \frac{D}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} c^+(\mathbf{k} + \mathbf{q}) c(\mathbf{k}) \langle vac | a(\mathbf{q}) - a^+(-\mathbf{q}) | 1_{\mathbf{q}} \rangle \langle 1_{\mathbf{q}} | \hat{S} | vac \rangle - \\
&\quad - \frac{i}{2} \frac{D}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \langle vac | \hat{S} | 1_{-\mathbf{q}} \rangle c^+(\mathbf{k} + \mathbf{q}) c(\mathbf{k}) \langle 1_{-\mathbf{q}} | a(\mathbf{q}) - a^+(-\mathbf{q}) | vac \rangle.
\end{aligned}$$

Легко бачити, що

$$\langle vac | a(\mathbf{q}) - a^+(-\mathbf{q}) | 1_{\mathbf{q}} \rangle = - \langle 1_{-\mathbf{q}} | a(\mathbf{q}) - a^+(-\mathbf{q}) | vac \rangle = 1,$$

тому можна продовжити:

$$\begin{aligned}
H_{eff} &= H_0 + \frac{i}{2} \frac{D}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \left[-i \frac{D}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}_1} \frac{c^+(\mathbf{k} + \mathbf{q}) c(\mathbf{k}) c^+(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}) c(\mathbf{k}_1)}{\varepsilon(\mathbf{k}_1) - \varepsilon(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}) - \Omega(\mathbf{q})} \right] + \\
&\quad + \frac{i}{2} \frac{D}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \left[i \frac{D}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}_1} \frac{c^+(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}) c(\mathbf{k}_1) c^+(\mathbf{k} + \mathbf{q}) c(\mathbf{k})}{\varepsilon(\mathbf{k}_1) - \varepsilon(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}) + \Omega(\mathbf{q})} \right] = \\
&= H_0 + \frac{D^2}{2N} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{q}} \frac{c^+(\mathbf{k} + \mathbf{q}) c(\mathbf{k}) c^+(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}) c(\mathbf{k}_1)}{\varepsilon(\mathbf{k}_1) - \varepsilon(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}) - \Omega(\mathbf{q})} - \\
&\quad - \frac{D^2}{2N} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{q}} \frac{c^+(\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}) c(\mathbf{k}_1) c^+(\mathbf{k} - \mathbf{q}) c(\mathbf{k})}{\varepsilon(\mathbf{k}_1) - \varepsilon(\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}) + \Omega(\mathbf{q})}.
\end{aligned}$$

Тепер, якщо у першому доданку поміняти $\mathbf{k} \rightleftharpoons \mathbf{k}_1$, а у другому $-\mathbf{q} \rightarrow -\mathbf{q}$, то приходимо до остаточного виразу:

$$\begin{aligned}
 H_{eff} &= H_0 + \frac{D^2}{2N} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{q}} c^+(\mathbf{k}_1 + \mathbf{q})c(\mathbf{k}_1)c^+(\mathbf{k} - \mathbf{q})c(\mathbf{k}) \times \\
 &\times \left[\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{k} - \mathbf{q}) - \Omega(\mathbf{q})} - \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + \Omega(\mathbf{q})} \right] = \\
 &= H_0 + \frac{D^2}{2N} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{q}} c^+(\mathbf{k}_1 + \mathbf{q})c(\mathbf{k}_1)c^+(\mathbf{k} - \mathbf{q})c(\mathbf{k}) \times \\
 &\quad \times \frac{\Omega(\mathbf{q})}{[\varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{k} - \mathbf{q})]^2 - \Omega^2(\mathbf{q})}.
 \end{aligned}$$

Остання дріб свідчить, що коли її знаменник $[\varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{k} - \mathbf{q})]^2 < \Omega^2(\mathbf{q})$, то ефективна взаємодія, яка визначається отриманою поправкою другого порядку, виявляється від'ємною, або такою, що відповідає притяганню. В цьому випадку дійсно, можна записати:

$$H_{eff} = H_0 + V_{eff},$$

де

$$V_{eff} = -\frac{V}{N} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{q}} c^+(\mathbf{k}_1 + \mathbf{q})c(\mathbf{k}_1)c^+(\mathbf{k} - \mathbf{q})c(\mathbf{k}),$$

при умові, що $V \approx D^2 / \Omega_D > 0$ і відповідає притяганню тільки фермівських електронів (вірніше, як ми казали, в околі енергії Фермі). Виведений оператор взаємодії прийнято називати модельним гамільтоніаном БКШ, або, що теж справедливо, БКШ-Боголюбова

(радянський фізик-теоретик М.М. Боголюбов отримав для цього гамільтоніану низку важливих результатів).

Запишемо ефективну взаємодію у канонічному вигляді, для чого введемо спільний $\mathbf{K} = \mathbf{k} + \mathbf{k}_1$ та відносний $\mathbf{p} = (1/2)(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)$ імпульси електронів пари:

$$V_{eff} = -\frac{V}{N} \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} c^+(\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}) c^+(\mathbf{k} - \mathbf{q}) c^+(\mathbf{k}) c(\mathbf{k}_1) =$$

$$= -\frac{V}{N} \sum_{\mathbf{K}} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} c^+(\frac{\mathbf{K}}{2} - \mathbf{p} + \mathbf{q}) c^+(\frac{\mathbf{K}}{2} + \mathbf{p} - \mathbf{q}) c(\frac{\mathbf{K}}{2} + \mathbf{p}) c(\frac{\mathbf{K}}{2} - \mathbf{p}).$$

Зазвичай обмежуються розглядом пар з $\mathbf{K} = 0$ (нерухомий конденсат); тоді приходимо до оператору

$$V_{eff} = -\frac{V}{N} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} c^+(-\mathbf{p} + \mathbf{q}) c^+(\mathbf{p} - \mathbf{q}) c(\mathbf{p}) c(-\mathbf{p}),$$

що тотожно дорівнює

$$V_{eff} = -\frac{V}{N} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} c_{\uparrow}^+(\mathbf{k}_1) c_{\downarrow}^+(-\mathbf{k}_1) c_{\downarrow}(-\mathbf{k}_2) c_{\uparrow}(\mathbf{k}_2),$$

де ми для повноти врахували спін електронів і те, що пари утворюються у синглетному стані з спіном $S_{pair} = 0$. Додамо, що існують НП, в яких пари несуть і скінчений спін, $S_{pair} = 1$, але ми такі системи не розглядатимемо.

Лекція 18

25. Феномен Купера

Ще за рік до появи роботи БКШ нічого не свідчило на користь більш глибокого проникнення у суть проблеми НП, але все досить швидко змінилося після виходу роботи (навіть – коротенької замітки) молодого у 1956 р. американського вченого Леона Купера, в якій, якщо говорити з позицій сьогодення, була розглянута досить штучна (іншою мовою, уможливлена) задача про поведінку двох електронів, що притягуються один до одного. Причина, або джерело, притягання не називалася та не обговорювалася, проте результат виявився важливим і зводився до того, що, насправді, фермі-система є нестійкою до утворення зв'язаних *електронних пар*.

Звичайно, це ще не НП (про неї Купер взагалі не згадував); знадобився геній Джона Бардіна – на той час вже Нобелівського лауреата, який не тільки зрозумів результат Купера та його наслідки, але й зумів свідомо сформулювати розв'язувану задачу щодо пошуків реального механізму міжелектронного притягання у металах. Ми вже не говоритимемо про те, що двоелектронна задача не є по-справжньому багатоелектронною, як це має місце у реальних металах, але вона зіграла свою винятково важливу

роль для загального розвитку не тільки теорії НП, але і фізики взагалі.

Задача Купера є важливою і в ідеологічному плані, і в учбовому, тому ми її викладемо практично без змін.

Отже, нехай існують два вільні електрони, які ми заради максимального спрощення будемо вважати безспіновими. Незбурена і несиметризована внаслідок безспіновості частинок власна хвильова функція пари (віднесена до одиниці об'єму) може бути представлена у стандартному мультиплікативному вигляді:

$$\psi_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1} e^{i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2},$$

який легко переписати шляхом введення координат

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2); \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

центру мас та відносного руху, відповідно, які змінюють “зовнішній” вигляд функції:

$$\psi_{\mathbf{K}, \mathbf{k}}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{K}\mathbf{R}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

де, як і має бути, $\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ та $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)/2$ – хвильові вектори спільного та відносного руху, які для пари частинок є квантовими числами, що зберігаються.

Кінетична енергія такої пари тепер теж має бути переписана у спосіб:

$$\hbar^2 \frac{\mathbf{k}_1^2 + \mathbf{k}_2^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{1}{4} \mathbf{K}^2 + \mathbf{k}^2 \right),$$

і ми слідом за Купером покладемо $\mathbf{K} = 0$, з чого зразу ж випливає, що $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$, а $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$. Іншою

мовою, двохчастинкова квантова задача подібно до класичної задачі двох тіл також зводиться до одночастинкової. Тепер ми можемо розглядати задачу про одну частинку, навіть коли вихідні частинки взаємодіють і зберігається лише вектор \mathbf{K} . Дійсно, розглянемо гамільтоніан, в якому є взаємодія і який легко перетворити:

$$H = \frac{\hbar^2}{2m}(\mathbf{k}_1^2 + \mathbf{k}_2^2) + V_{\text{int}} \rightarrow \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{m} + V_{\text{int}} \equiv H_0 + V_{\text{int}}.$$

Власні хвильові функції збуреної системи шукатимемо у вигляді:

$$\psi_{\mathbf{k}=0}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \equiv \chi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} \chi(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} = \sum_{\mathbf{q}} \chi(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}},$$

що дозволяє поставити питання про власні значення λ повного гамільтоніану, або розв'язки рівняння

$$(H - \lambda)\chi(\mathbf{r}) = 0.$$

Запишемо секулярне рівняння

$$\int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} (H_0 + V_{\text{int}} - \lambda) \sum_{\mathbf{q}} \chi(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} = 0,$$

або

$$\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{m} \chi(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{q}} \chi(\mathbf{q}) \langle e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} | V_{\text{int}} | e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \rangle = \lambda \chi(\mathbf{k}).$$

Якщо ввести густину двохелектронних станів $\rho(\varepsilon)$ на одиницю інтервалу енергії, то останнє рівняння набуває вигляду:

$$(\varepsilon - \lambda)\chi(\varepsilon) + \int d\nu \rho(\nu) \chi(\nu) \langle \varepsilon | V_{\text{int}} | \nu \rangle = 0,$$

де згідно припущенню матричний елемент $\langle \varepsilon | V_{\text{int}} | \nu \rangle = -V$ для значень ε та ν , коли вони

знаходяться в інтервалі енергій $\pm\Omega_D$ поблизу енергії Фермі ε_F , а зовні нього $\langle \varepsilon | V_{\text{int}} | \nu \rangle = 0$.

Тепер треба прийняти до уваги, що ми розв'язуємо не тільки двочастинкову задачу, а і задачу про дві взаємодіючі частинки у металі, де крім цих двох частинок є, як кажуть, море ферміонів, що заповнюють усі стани імпульсного (оберненого) простору з $|\mathbf{k}| \leq |\mathbf{k}_F|$. Це, в свою чергу, означає, що хвильова функція $\chi(\mathbf{r})$ у своєму розкладі може будуватися лише із станів з $|\mathbf{k}| > |\mathbf{k}_F|$, причому таких, що знаходяться між \mathbf{k}_F і деяким \mathbf{k}_{max} , що задовольняє умові

$$\frac{1}{2m}(\mathbf{k}_{\text{max}}^2 - \mathbf{k}_F^2) = \varepsilon_{\text{max}} - \varepsilon_F = \Omega_D.$$

Тоді наше секулярне рівняння треба переписати у спосіб:

$$(\varepsilon - \lambda)\chi(\varepsilon) = V \int_{2\varepsilon_F}^{2\varepsilon_{\text{max}}} d\nu \rho(\nu)\chi(\nu),$$

де двійка у межах інтегрування відображає існування двох частинок. Видно, що права частина отриманого рівняння не залежить від ε , а отже шукана хвильова функція має форму

$$\chi(\varepsilon) = \frac{C}{\varepsilon - \lambda},$$

в якій C – деяка стала. Використовуючи знайдену функцію, приходимо до рівняння

$$V \int_{2\varepsilon_F}^{2\varepsilon_{\text{max}}} d\nu \rho(\nu) \frac{C}{\nu - \lambda} = C,$$

або

$$1 - V \int_{2\varepsilon_F}^{2\varepsilon_{\max}} dv \frac{\rho(v)}{v - \lambda} = 0.$$

Оскільки інтервал зміни енергії в інтегралі досить малий, $2\varepsilon_F \leq v \leq 2\varepsilon_{\max}$, можна припустити, що густина станів на відріжку $2\varepsilon_{\max} - 2\varepsilon_F = 2\Omega_D$ залишається постійною, $\rho(v) \approx \text{const} \equiv \rho_F$, що дозволяє розв'язати рівняння аналітично:

$$\frac{1}{\rho_F V} = \int_{2\varepsilon_F}^{2\varepsilon_{\max}} \frac{dv}{v - \lambda} = \ln \frac{2\varepsilon_{\max} - \lambda}{2\varepsilon_F - \lambda} = \ln \frac{2\varepsilon_{\max} - 2\varepsilon_F + \Delta}{\Delta} = \ln \frac{2\Omega_D + \Delta}{\Delta},$$

де замість шуканої власної енергії λ ми ввели енергію $\Delta \equiv 2\varepsilon_F - \lambda$ (тобто $\lambda = 2\varepsilon_F - \Delta$), яку зручно відраховувати від енергії Фермі. При цьому ми шукаємо стан пари з енергією, нижчою за фермівську, тому, зрозуміло, величина зниження $\Delta > 0$. Виявляється, що такий стан дійсно виникає, а його енергія знаходиться з таких простих розрахунків:

$$\frac{\Delta}{2\Omega_D + \Delta} = e^{-\frac{1}{\rho_F V}},$$

звідки

$$\Delta - \Delta e^{-\frac{1}{\rho_F V}} = 2\Omega_D e^{-\frac{1}{\rho_F V}};$$

$$\Delta = \frac{2\Omega_D}{e^{-\frac{1}{\rho_F V}} - 1} \rightarrow \begin{cases} 2\Omega_D e^{-\frac{1}{\rho_F V}}, & \rho_F V \ll 1 \text{ (слабкий зв'язок);} \\ 2\Omega_D e \rho_F V, & \rho_F V \gg 1 \text{ (сильний зв'язок).} \end{cases}$$

Таким чином, як ми і очікували, енергія взаємодіючої пари виявляється нижче вихідної енергії двох вільних фермівських частинок. Іншими словами, у випадку притягання енергія металічної системи знижується і стає менше за енергію сукупності вільних

електронів. В цілому, система виявляється нестійкою відносно утворення окремих пар. Очевидно, що таких пар може бути багато, але наш розгляд, як і розгляд Купера, це не враховував. Тим не менш, можливість утворення ферміонами у металах стабільних, стійких пар отримала назву *феномена Купера*.

Історична справедливість вимагає також згадати, що ідея про “електронні молекули”, або фактично пари, висувалася М.Шафротом, С. Батлером і Дж. Блаттом у 1954-55 рр., щоб у такий спосіб ввести композитні бозони і тим самим звести НП до явища надплинності. Проте автори не змогли зробити коректних розрахунків, щоб ця ідея стала по-справжньому обґрунтованою. Вже після роботи Купера, у 60-ті роки минулого століття, дехто робив спроби розвинути ідеї про пари електронів у реальному просторі, але такі уявлення були у протиріччі з моделями металів, де, як відомо, електрони майже вільні, досить далеко рознесені і майже не взаємодіють. Тільки після відкриття високотемпературних надпровідників стало очевидно, що між *локальними парами*, тобто існуючими у \mathbf{r} -просторі, і так званими *куперівськими парами*, що існують у \mathbf{k} -просторі, немає принципової різниці, проте ці питання лежать за межами нашого курсу.

Врахування скінченої кількості фермі-частинок, а отже – принципу Паулі, як раз і було зроблене у роботі БКШ. Лише одне важливе зауваження: отриманий Купером результат не є наслідком застосування теорії збурень і ніяким чином не може бути представлений розкладом по збуренню V , навіть для випадку $\rho_F V \ll 1$ (насправді, $V/\epsilon_F \ll 1$). Тому таке явище, як НП, не може бути в принципі описано в

рамках теорії збурень у будь-якому її скінченному порядку.

26. Теорія Бардіна-Купера-Шріффера

26.1. *Розподіл електронів у основному стані НП.*
Будемо слідувати видатній, без перебільшення, роботі БКШ і розглянемо задачу про основний стан НП. Спочатку згадаємо деякі відомості з квантової механіки. Для багатоелектронної функції справедливо все те, що і для одноелектронної. Нехай $\psi_n(\{\mathbf{r}_j\})$ повна система функцій N електронів; тоді будь-яка їх хвильова функція може бути представлена розкладом

$$\Psi = \sum_n c_n \psi_n(\{\mathbf{r}_j\}),$$

в якому c_n – амплітуди, а $|c_n|^2$ – ймовірності знайти систему у стані n (це може бути і одне квантове число, і їх набір). Нехай гамільтоніан системи має вигляд

$$H = H_0 + V_{\text{int}},$$

де $H_0 = H_{\text{kin}}$ – оператор кінетичної енергії вільних електронів. Як завжди, енергія визначається середнім

$$\bar{E} = \int \Psi^* H \Psi \{d\mathbf{r}_j\} = \bar{E}_{\text{kin}} + \bar{V}_{\text{int}};$$

$$\bar{V}_{\text{int}} = \sum_{n,m} \int \{d\mathbf{r}_j\} c_n^* c_m \psi_n^*(\{\mathbf{r}_j\}) V_{\text{int}} \psi_m(\{\mathbf{r}_j\}) = \sum_{n,m} c_n^* c_m V_{nm}.$$

Основний стан нормального металу добре відомий: при $T = 0$ найнижчий енергії відповідає такий розподіл електронів у \mathbf{k} -просторі, коли всі стани, що розташовані всередині деякої поверхні, яка зветься

фермівською, зайняті, а решта – поза нею – вільні. При цьому енергія системи частинок є виключно кінетичною, а потенціальної просто нема.

Включимо її саме таким чином, як ми щойно обговорювали, вважаючи, що в енергетичному околі $\pm\Omega_D$ поверхні (енергії) Фермі ε_F електрони починають притягуватись один до одного. Із загальних міркувань можна очікувати, що притягання повинно знизити повну енергію (саме її, а не вільну енергію, бо за припущенням $T=0$) системи. Проаналізуємо структуру взаємодії, яка фактично задається міжелектронним розсіянням, при якому пара електронів з вихідного стану $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\}$ переходить у кінцевий стан $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$.

Такий процес може мати місце лише за умови, коли стан $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\}$ є заповненим, а $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$ – вільним. Відповідне розсіяння здійснюватиметься у повному обсязі, коли будуть задіяні стани як під, так і над поверхнею Фермі, і стає зрозумілим, що вже при $T=0$ проста картина з повністю заповненими станами під сферою Фермі та повністю вільними над нею не може відповідати мінімуму енергії. Тим самим у “гру” залучаються стани з більшими енергіями, і природа допускає деякий програш в одному (кінетичній енергії), щоб виграти в іншому (потенціальній енергії) та в цілому.

Тепер мінімуму повної енергії відповідатиме стан з “розмазаним” біля поверхні Фермі розподілом носіїв по станах, в якому певною мірою пустими виявляються стани під нею і, навпаки, заповненими над нею. При цьому за припущенням БКШ звільнення (заповнення) відбувається попарно, тобто якщо

звільняється (заповнюється) стан $\mathbf{k} \uparrow$, де стрілка відповідає спіну, то теж саме відбувається і з станом $-\mathbf{k} \downarrow$. Справа в тому, і ми це вже обговорювали, при розсіянні виконується закон збереження імпульсу, тобто $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2$, і чим більше таких переходів, тим більше матричних елементів дадуть внесок у загальне зменшення енергії. А оскільки $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \mathbf{K}$, то при будь-якому скінченному векторі \mathbf{K} кількість можливостей для зміни відповідних вихідних (кінцевих) векторів обмежується (це видно, наприклад, з того, що при великих (паралельних) \mathbf{k}_1 та \mathbf{k}_2 може залишитися лише одне значення для \mathbf{q}_1 та \mathbf{q}_2). Тому вибір БКШ $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$ відповідає не тільки формальній умові нерухомої пари, але й дає максимально можливий зв'язок між її різними станами, коли усі вони з області $\pm\Omega_D$ навколо енергії Фермі стають актуальними, роблячи свій внесок в енергію.

Повторюючи міркування БКШ, уявимо, що уся сукупність станів пари нумерується індексом n ; як і в задачі Купера, це можна зробити саме для випадку $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$. Відповідні функції парних станів утворюють повну систему, по якій можна розкласти шукану хвильову функцію основного стану. Що в такому разі означає акт розсіяння пари $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$ в пару $\{\mathbf{q}, -\mathbf{q}\}$? Це фактично значить, що багатоелектронний стан ψ_n , в якому парціальний стан $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$ зайнятий, а такий же стан $\{\mathbf{q}, -\mathbf{q}\}$ вільний, переходить у інший багатоелектронний стан ψ_m , де, навпаки, перший стан, $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$, вже вільний, а другий, $\{\mathbf{q}, -\mathbf{q}\}$, – зайнятий. Як це врахувати у розрахунках, розглядатиметься нижче.

26.2. *Коефіцієнти uv -перетворення.* Щоб знайти енергію багатоелектронної системи з притяганням між електронами, в теорії БКШ вводиться деяка функція $v_{\mathbf{k}} \leq 1$ – ймовірність того, що стан $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$ є заповненим (при цьому, зрозуміло, $1 - v_{\mathbf{k}}^2 = u_{\mathbf{k}}^2$ – задає ймовірність його незаповнення). Тоді амплітуда того, що в системі стан $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$ зайнятий, а відповідно стан $\{\mathbf{q}, -\mathbf{q}\}$ пустий є

$$c_n = \sqrt{v_{\mathbf{k}}^2(1 - v_{\mathbf{q}}^2)} = v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}}.$$

Використовуючи тепер виписану вище формулу квантової механіки, неважко записати модельну енергію такої НП системи наступним чином:

$$E_S = 2 \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon(\mathbf{k})v_{\mathbf{k}}^2 + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} V_{\mathbf{kq}} v_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{q}},$$

де E_S – енергія НП колективу частинок, яка відрховується від фермівського рівня так, що

$$\varepsilon(\mathbf{k}) \equiv \varepsilon^{(free)}(\mathbf{k}) - \varepsilon_F = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_F^2}{2m} \approx \frac{\hbar \mathbf{p}_F}{m} (\mathbf{k} - \mathbf{k}_F),$$

і враховано, що здійснюються саме переходи $\{\mathbf{q}, -\mathbf{q}\} \rightleftharpoons \{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$. Матричний елемент взаємодії задовольняє умові, яку ми вже використовували:

$$V_{\mathbf{kq}} = \begin{cases} -V, & |\varepsilon^{(free)}(\mathbf{k}) - \varepsilon_F| \leq \hbar \Omega_D; \quad |\varepsilon^{(free)}(\mathbf{q}) - \varepsilon_F| \leq \hbar \Omega_D; \\ 0, & |\varepsilon^{(free)}(\mathbf{k}) - \varepsilon_F| \geq \hbar \Omega_D; \quad |\varepsilon^{(free)}(\mathbf{q}) - \varepsilon_F| \geq \hbar \Omega_D. \end{cases}$$

Розглядаючи функцію Ψ як варіаційну, знайдемо таку ймовірність $v_{\mathbf{k}}$, яка мінімізує енергію E_S , тобто отримаємо рівняння $\partial E_S / \partial v_{\mathbf{k}}^2 = 0$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial v_{\mathbf{k}}^2} \left(2 \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon(\mathbf{p}) v_{\mathbf{p}}^2 + \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} V_{\mathbf{p}\mathbf{q}} \sqrt{v_{\mathbf{p}}^2} \sqrt{v_{\mathbf{q}}^2} \sqrt{1-v_{\mathbf{p}}^2} \sqrt{1-v_{\mathbf{q}}^2} \right) = \\
& = 2\varepsilon(\mathbf{k}) + 2 \sum_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{k}\mathbf{q}} \left(\frac{\sqrt{1-v_{\mathbf{k}}^2}}{2\sqrt{v_{\mathbf{k}}^2}} + \frac{-\sqrt{v_{\mathbf{k}}^2}}{2\sqrt{1-v_{\mathbf{k}}^2}} \right) \sqrt{v_{\mathbf{q}}^2} \sqrt{1-v_{\mathbf{q}}^2} = \\
& = 2\varepsilon(\mathbf{k}) + \frac{1-2v_{\mathbf{k}}^2}{u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}} \sum_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{k}\mathbf{q}} u_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}} = \\
& = 2\varepsilon(\mathbf{k}) - \frac{1-2v_{\mathbf{k}}^2}{u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}} V \sum_{|\mathbf{k}_F - \Delta\mathbf{k}| \leq |\mathbf{q}| \leq |\mathbf{k}_F + \Delta\mathbf{k}|} u_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}} = 0.
\end{aligned}$$

Введемо позначення

$$\Delta_S(T=0) \equiv \Delta_S(0) = V \sum_{|\mathbf{k}_F - \Delta\mathbf{k}| \leq |\mathbf{q}| \leq |\mathbf{k}_F + \Delta\mathbf{k}|} u_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}} \equiv V \sum_{\mathbf{q}}^{\bullet} u_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}},$$

де, як і у попередній формулі, сумування йде по шару поблизу ε_F . Тоді видно, що $2u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} / (1-2v_{\mathbf{k}}^2) = \Delta_S(0) / \varepsilon(\mathbf{k})$, звідки отримуємо:

$$\begin{aligned}
\frac{4u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2}{u_{\mathbf{k}}^4 - 2u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^4} &= \frac{4u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2}{1-4u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2} = \frac{\Delta_S^2(0)}{\varepsilon^2(\mathbf{k})} \rightarrow \\
\rightarrow 4u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2 \left[1 + \frac{\Delta_S^2(0)}{\varepsilon^2(\mathbf{k})} \right] &= \frac{\Delta_S^2(0)}{\varepsilon^2(\mathbf{k})},
\end{aligned}$$

де використані тотожності: $1-2v_{\mathbf{k}}^2 = u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2$ та $(u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2)^2 = u_{\mathbf{k}}^4 + 2u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^4 = 1$. В результаті цих перетворень приходимо до алгебраїчного рівняння

$$v_k^4 - v_k^2 + \frac{\Delta_S^2(0)}{E_k^2} = 0; \quad v_k^2 = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{\varepsilon(\mathbf{k})}{E_k^2} \right] \rightarrow \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\varepsilon(\mathbf{k})}{E_k^2} \right],$$

де $E_k \equiv \sqrt{\varepsilon^2(\mathbf{k}) + \Delta_S^2(0)}$, а знак “-” вибраний з фізичних міркувань. Справа в тому, що якщо $|\mathbf{k}|$ все більше віддаляється від $|\mathbf{k}_F|$ то при $\varepsilon(\mathbf{k}) < \varepsilon_F$ коефіцієнт за своїм змістом v_k має все більше наближатися до одиниці, оскільки при зменшенні $|\mathbf{k}|$ стани стають глибшими і ймовірність їх заповнення прямує до 1. У границі $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$ з останньої формули знаходимо:

$$\begin{aligned} v_{k \rightarrow 0}^2 &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\varepsilon^{(free)}(\mathbf{k} \rightarrow 0) - \varepsilon_F}{\sqrt{[\varepsilon^{(free)}(\mathbf{k} \rightarrow 0) - \varepsilon_F]^2 + \Delta_S^2(0)}} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon_F}{\sqrt{\varepsilon_F^2 + \Delta_S^2(0)}} \right) \approx 1 - \frac{\Delta_S^2(0)}{4\varepsilon_F^2} \leq 1. \end{aligned}$$

Відповідно

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\varepsilon(\mathbf{k})}{E_k^2} \right]$$

і $v_{k \rightarrow 0}^2 \approx \Delta_S^2(0) / 4\varepsilon_F^2 \rightarrow 0$.

На рисунку 18.1 показана залежність v_k^2 , з якої дійсно видно, що при $T=0$ функція розподілу електронів у НП виявляється розмитою в околі імпульсу (енергії) Фермі, що цілком обумовлено електрон-електронною кореляцією. Проте не будь-якою, а такою, що має характер притягання! На це як і в феномені Купера, вказує позитивний знак енергії, яка визначається $\Delta_S(0)$.

Ми вже згадували, що функція БКШ є тільки варіаційною, але вона правильно відображає основні риси наслідків кореляції пар електронів у станах \mathbf{k} і $-\mathbf{k}$. Саме це припущення (тобто одночасного і корельованого заповнення або незаповнення відповідних станів) стало ключовим наближенням теорії БКШ. В ній, як ми показали, зниження енергії НП фази обумовлене не тільки вибором пар $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$, але й їх партнерів $\{\mathbf{q}, -\mathbf{q}\}$.

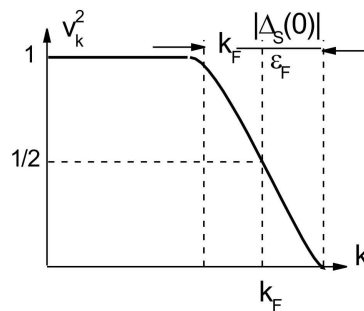


Рис. 18.1

Причина, чому досить проста модель БКШ виявилась настільки вдалою та успішною, полягає у тому, що у реальних фермі-системах (в першу чергу, металах) кореляції електронів майже цілком пов'язані з принципом Паулі, а не з реальною динамічною взаємодією. Тому при правильному виборі форми фермівської багатоелектронної хвильової функції можна обмежитись врахуванням лише взаємодії між вихідною і кінцевою компонентами пари.

На більш формальній мові наближення БКШ – це врахування динамічної кореляції між спеціально вибраними станами двох електронів при збереженні кореляції останніх, обумовленої принципом Паулі.

Лекція 19

27. Метод рівнянь руху

Покажемо, як та сама задача (про знаходження енергії системи) може бути розв'язана по-іншому, більш сучасними методами. Запишемо для цього модельний оператор БКШ у вигляді:

$$H_{BCS} = \sum_{|\mathbf{k}|>0} \varepsilon(\mathbf{k}) [c^+(\mathbf{k})c(\mathbf{k}) + c^+(-\mathbf{k})c(-\mathbf{k})] - \\ -V \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} c^+(\mathbf{k})c^+(-\mathbf{k})c(-\mathbf{q})c(\mathbf{q}),$$

де значок у суми, як ми вже визначали, свідчить, що сумування ведеться в обмеженому інтервалі імпульсного простору. Тепер, враховуючи, що $c(\mathbf{k})$ – це фермі-оператори (тобто $c(\mathbf{k})c(\mathbf{k}) = 0$), запишемо для них стандартні рівняння руху:

$$i\dot{c}(\mathbf{k}) = \varepsilon(\mathbf{k})c(\mathbf{k}) - c^+(-\mathbf{k})V \sum_{\mathbf{q}} c(-\mathbf{q})c(\mathbf{q});$$

$$i\dot{c}^+(-\mathbf{k}) = -\varepsilon(\mathbf{k})c^+(-\mathbf{k}) + c(\mathbf{k})V \sum_{\mathbf{q}} c^+(\mathbf{q})c^+(-\mathbf{q}).$$

Слідом за М.М. Боголюбовим введемо величини

$$B(\mathbf{k}) = \langle 0 | c(-\mathbf{k})c(\mathbf{k}) | 0 \rangle = -B(-\mathbf{k});$$

$$B^*(\mathbf{k}) = \langle 0 | c^+(\mathbf{k})c^+(-\mathbf{k}) | 0 \rangle .$$

Їх треба розуміти в тому сенсі, що правильна хвильова функція основного стану НП є невизначеною відносно кількості частинок у ньому, тобто складається з функцій з різним N , а отже має місце відповідність

$$\langle 0 | c(-\mathbf{k})c(\mathbf{k}) | 0 \rangle \rightarrow \langle N | c(-\mathbf{k})c(\mathbf{k}) | N + 2 \rangle$$

і т.д.

Тепер, повертаючись до виписаних рівнянь, видно, що в них виникає та ж сама величина $\Delta_S(0) = V \sum_{\mathbf{q}} B(\mathbf{q})$, з використанням якої вони набувають вигляду:

$$i\dot{c}(\mathbf{k}) = \varepsilon(\mathbf{k})c(\mathbf{k}) - \Delta_S(0)c^+(-\mathbf{k});$$

$$i\dot{c}^+(-\mathbf{k}) = \varepsilon(\mathbf{k})c^+(-\mathbf{k}) + \Delta_S^*(0)c(\mathbf{k})$$

і яка дозволяє при знаходженні шуканої величини енергії перетворити його на матричний

$$\begin{vmatrix} E_{\mathbf{k}} - \varepsilon(\mathbf{k}) & \Delta_S(0) \\ \Delta_S^*(0) & E_{\mathbf{k}} + \varepsilon(\mathbf{k}) \end{vmatrix} = 0; \quad E_{\mathbf{k}} = \pm \sqrt{\varepsilon^2(\mathbf{k}) + |\Delta_S(0)|^2},$$

де припущено, що $c(\mathbf{k}) \sim \exp(-iE_{\mathbf{k}}t)$. Власні вектори цієї системи рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_{\uparrow}(\mathbf{k}) = u_{\mathbf{k}}c_{\uparrow}(\mathbf{k}) - v_{\mathbf{k}}c_{\downarrow}^+(-\mathbf{k}); \\ \alpha_{\downarrow}^+(-\mathbf{k}) = v_{\mathbf{k}}c_{\uparrow}(\mathbf{k}) + u_{\mathbf{k}}c_{\downarrow}^+(-\mathbf{k}); \\ \alpha_{\downarrow}(-\mathbf{k}) = u_{\mathbf{k}}c_{\downarrow}(-\mathbf{k}) + v_{\mathbf{k}}c_{\uparrow}^+(\mathbf{k}); \\ \alpha_{\uparrow}^+(\mathbf{k}) = -v_{\mathbf{k}}c_{\downarrow}(-\mathbf{k}) + u_{\mathbf{k}}c_{\uparrow}^+(\mathbf{k}), \end{cases}$$

в яких для повноти і загальності врахована спінова змінна. Обернені співвідношення мають вигляд:

$$\begin{cases} c_{\uparrow}(\mathbf{k}) = u_{\mathbf{k}}\alpha_{\uparrow}(\mathbf{k}) - v_{\mathbf{k}}\alpha_{\downarrow}^{\dagger}(-\mathbf{k}); \\ c_{\downarrow}^{\dagger}(-\mathbf{k}) = v_{\mathbf{k}}\alpha_{\uparrow}(\mathbf{k}) + u_{\mathbf{k}}\alpha_{\downarrow}^{\dagger}(-\mathbf{k}); \\ \\ c_{\downarrow}(-\mathbf{k}) = u_{\mathbf{k}}\alpha_{\downarrow}(-\mathbf{k}) + v_{\mathbf{k}}\alpha_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{k}); \\ c_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{k}) = -v_{\mathbf{k}}\alpha_{\downarrow}(-\mathbf{k}) + u_{\mathbf{k}}\alpha_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{k}). \end{cases}$$

Звідси видно, що якщо оператори $\alpha_{\sigma}(\mathbf{k})$, де σ – спін, відповідають **власним** (елементарним) збудженням НП, то введена вище величина

$$B(\mathbf{k}) = \langle 0 | c_{\downarrow}(-\mathbf{k})c_{\uparrow}(\mathbf{k}) | 0 \rangle =$$

$$= \langle 0 | [u_{\mathbf{k}}\alpha_{\downarrow}(-\mathbf{k}) - v_{\mathbf{k}}\alpha_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{k})][u_{\mathbf{k}}\alpha_{\uparrow}(\mathbf{k}) + v_{\mathbf{k}}\alpha_{\downarrow}^{\dagger}(-\mathbf{k})] | 0 \rangle = u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}}$$

виявляється скінченою лише при обох скінчених коефіцієнтах $u_{\mathbf{k}}$ і $v_{\mathbf{k}}$.

Нові оператори зберігають свою фермівську статистику, коли $u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2 = 1$, що, як ми бачили, виконується. Підставляючи їх у рівняння руху і зважаючи на те, що ці змінні вже незалежні, приходимо до рівняння

$$E_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}} = \varepsilon(\mathbf{k})u_{\mathbf{k}} + \Delta_S(0)v_{\mathbf{k}}$$

для uv -коефіцієнтів, яке необхідно розв'язати при тій же умові $u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2 = 1$. Це легко зробити, якщо взяти від нього квадрат; дійсно

$$E_{\mathbf{k}}^2u_{\mathbf{k}}^2 = \varepsilon(\mathbf{k})u_{\mathbf{k}}^2 + 2\varepsilon(\mathbf{k})\Delta_S(0)u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}} + \Delta_S^2(0)v_{\mathbf{k}}^2;$$

$$[\varepsilon^2(\mathbf{k}) + \Delta_S^2(0)]u_{\mathbf{k}}^2 = \varepsilon(\mathbf{k})u_{\mathbf{k}}^2 + 2\varepsilon(\mathbf{k})\Delta_S(0)u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}} + \Delta_S^2(0)v_{\mathbf{k}}^2;$$

$$\Delta_s^2(0)(u_k^2 - v_k^2) = 2\varepsilon(\mathbf{k})\Delta_s^2(0)u_k^2v_k^2 \rightarrow \frac{u_kv_k}{1-2v_k^2} = \frac{\Delta_s(0)}{2\varepsilon(\mathbf{k})},$$

а останнє рівняння ми щойно аналізували. Таким чином, обидва підходи дають один і той же результат.

28. Енергія основного стану

28.1. *Надпровідна щілина.* Як ми вже могли впевнитись, вираз

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\varepsilon(\mathbf{k})}{E_k} \right]$$

мінімізує енергію, яку спробуємо обчислити. Для цього спочатку знайдемо величину $\Delta_s(0)$, яка отримала назву *надпровідної щілини*. Згідно її визначенню, приходимо до виразу

$$\begin{aligned} |\Delta_s(0)| &= V \sum_{\mathbf{q}} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\varepsilon(\mathbf{q})}{E_q} \right] \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\varepsilon(\mathbf{q})}{E_q} \right] \right\}^{1/2} = \\ &= \frac{V}{2} \sum_{\mathbf{q}} \cdot \sqrt{\frac{E_q^2 - \varepsilon^2(\mathbf{q})}{E_q^2}} = \frac{V |\Delta_s(0)|}{2} \sum_{\mathbf{q}} \cdot \frac{1}{E_q}, \end{aligned}$$

де явно використане введене означення $E_q^2 = \varepsilon^2(\mathbf{q}) + |\Delta_s(0)|^2$. Саме останнє розкриває смисл назви *щілина*: спектр елементарних збуджень НП визначається дисперсією віток $E_k = \pm \sqrt{\varepsilon^2(\mathbf{k}) + |\Delta_s(0)|^2}$, і видно, що їх енергія на відміну від енергії $\varepsilon(\mathbf{k})$ нормальної фази ніде не

дорівнює нулеві. Більше того, на Фермі-поверхні, де $\mathbf{k} = \mathbf{k}_F$ і $\varepsilon(\mathbf{k}_F) = 0$, виникає розщеплення $2|\Delta_S(0)|$, яке і визначає щілину між вітками $\pm E_{\mathbf{k}}$. Припускаючи, що вона скінчена, $\Delta_S(0) \neq 0$, приходимо до остаточного рівняння

$$1 = \frac{V}{2} \sum_{\mathbf{q}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2(\mathbf{q}) + |\Delta_S(0)|^2}}$$

для знаходження її шуканої величини, яке, взагалі кажучи, відрізняється від рівняння (див. Лекцію 18)

$$1 = V \int_{2\varepsilon_F}^{2\varepsilon_{\max}} dv \frac{\rho(v)}{v - \lambda},$$

отриманого нами при знаходженні енергії зв'язаного двоелектронного стану куперівської задачі. Різниця особливо чітко виявляється, коли від сумування перейти до інтегрування, а саме:

$$\sum_{\mathbf{q}} \dots \rightarrow \int_{-\hbar\Omega_D}^{\hbar\Omega_D} dv \rho(v) \dots,$$

де в обох випадках $\rho(v)$ – густина електронних станів. Отже, маємо

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{V}{2} \int_{-\hbar\Omega_D}^{\hbar\Omega_D} dv \frac{\rho(v)}{\sqrt{v^2 + |\Delta_S(0)|^2}} \approx \frac{\rho_F V}{2} \int_{-\hbar\Omega_D}^{\hbar\Omega_D} dv \frac{1}{\sqrt{v^2 + |\Delta_S(0)|^2}} = \\ &= \rho_F V \int_0^{\hbar\Omega_D} dv \frac{1}{\sqrt{v^2 + |\Delta_S(0)|^2}} \end{aligned}$$

і ми знову поклали, що $\rho(\nu) \rightarrow \rho(\varepsilon_F) \equiv \rho_F$ – густина фермівських станів. Останній інтеграл табличний, тому отримуємо:

$$\frac{1}{\rho_F V} = \text{Arsh} \frac{\hbar \Omega_D}{|\Delta_S(0)|} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\hbar \Omega_D}{|\Delta_S(0)|} = sh \frac{1}{\rho_F V} = \frac{1}{2} (e^{1/\rho_F V} - e^{-1/\rho_F V}).$$

Як і вище, можемо навести відповіді для двох випадків – слабкого ($\rho_F V \ll 1$) і сильного ($\rho_F V \gg 1$) зв'язків. У першому НП щілина

$$|\Delta_S(0)| = 2\hbar \Omega_D e^{-1/\rho_F V},$$

а у другому –

$$|\Delta_S(0)| = \hbar \Omega_D \rho_F V.$$

Іншими словами, за своїм змістом ці результати нагадують ті, що ми мали для задачі Купера, але тут ми розглянули метал з притяганням між електронами, а не два окремих електрони у морі інших. Цікаво зробити оцінки: покладаючи $\hbar \Omega_D \sim 10^2$ К і, скажімо, $\rho_F V \sim 0.3$, знаходимо, що НП щілина $|\Delta_S(0)| \approx 4$ К, де всі величини виявляються такими, як це і є насправді.

28.2. *Зсув енергії надпровідного стану.* Знаючи величину щілини $\Delta_S(0)$ та коефіцієнти uv -перетворення, обчислимо енергію основного НП стану, яка має бути нижчою за енергію основного стану нормальної фази. Для цього запишемо загальний вираз

$$E_S = 2 \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon(\mathbf{k}) v_{\mathbf{k}}^2 + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} V_{\mathbf{k}\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{q}},$$

який ми вже обговорювали. Коли притягання немає і система знаходиться у N -стані, її енергія визначається сумою

$$E_N = 2 \sum_{|\mathbf{k}| \leq |\mathbf{k}_F|} \varepsilon(\mathbf{k}),$$

оскільки при $T = 0$ всі електрони займають стани до самого рівня Фермі, а двійка показує, що враховуються пари $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$. Якщо енергію НП відраховувати від енергії нормального стану, то це означає, що треба розрахувати положення E_S відносно E_N , або знайти зсув

$$\begin{aligned} E_S - E_N \equiv \Delta E &= 2 \left(\sum_{|\mathbf{k}| \leq |\mathbf{k}_F|} + \sum_{|\mathbf{k}| > |\mathbf{k}_F|} \right) \varepsilon(\mathbf{k}) v_{\mathbf{k}}^2 + \\ &+ \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} V_{\mathbf{k}\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{q}} - 2 \sum_{|\mathbf{k}| \leq |\mathbf{k}_F|} \varepsilon(\mathbf{k}) = \\ &= 2 \sum_{|\mathbf{k}| \leq |\mathbf{k}_F|} \varepsilon(\mathbf{k}) (v_{\mathbf{k}}^2 - 1) + 2 \sum_{|\mathbf{k}| > |\mathbf{k}_F|} \varepsilon(\mathbf{k}) v_{\mathbf{k}}^2 - V \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}} = \\ &= -2 \sum_{|\mathbf{k}| \leq |\mathbf{k}_F|} |\varepsilon(\mathbf{k})| \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{|\varepsilon(\mathbf{k})|}{E_{\mathbf{k}}} \right] - 1 \right\} + \\ &+ 2 \sum_{|\mathbf{k}| > |\mathbf{k}_F|} \varepsilon(\mathbf{k}) \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\varepsilon(\mathbf{k})}{E_{\mathbf{k}}} \right] - \Delta_S^*(0) \frac{\Delta_S(0)}{V}. \end{aligned}$$

де ми явно врахували, що всередині Фермі-сфери, $|\mathbf{k}| \leq |\mathbf{k}_F|$, енергія $\varepsilon(\mathbf{k}) = -|\varepsilon(\mathbf{k})|$, оскільки є від'ємною, а також означення $\Delta_S(0)$. Зробивши,

нарешті, просте скорочення і перевизначивши (що тепер можна зробити) сумування, приходимо до наступного виразу

$$\Delta E = 2 \sum_{|\mathbf{k}| > |\mathbf{k}_F|} \varepsilon(\mathbf{k}) \left[1 - \frac{\varepsilon(\mathbf{k})}{E_{\mathbf{k}}} \right] - \frac{|\Delta_S(0)|^2}{V},$$

в якому також зручно перейти до інтегрування:

$$\begin{aligned} \Delta E &= 2 \int_0^{\hbar\Omega_D} dv \rho(v) \left(v - \frac{v^2}{\sqrt{v^2 + |\Delta_S(0)|^2}} \right) - \frac{|\Delta_S(0)|^2}{V} = \\ &= 2\rho_F |\Delta_S(0)|^2 \int_0^{\hbar\Omega_D/|\Delta_S(0)|} dx \left(x - \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) - \frac{|\Delta_S(0)|^2}{V}. \end{aligned}$$

Перший інтеграл елементарно береться, а у другому і третьому зробимо заміну $x = sh t$; тоді $\sqrt{x^2 + 1} = ch t$ і $dx = ch dt$, після чого маємо:

$$\begin{aligned} \Delta E &= 2\rho_F |\Delta_S(0)|^2 \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\hbar\Omega_D}{|\Delta_S(0)|} \right)^2 \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^{\text{Arsh} \frac{\hbar\Omega_D}{|\Delta_S(0)|}} dt (ch 2t + 1) + \text{Arsh} \frac{\hbar\Omega_D}{|\Delta_S(0)|} \right\} - \frac{|\Delta_S(0)|^2}{V} = \\ &= 2\rho_F |\Delta_S(0)|^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\hbar\Omega_D}{|\Delta_S(0)|} \right)^2 - \frac{1}{4} sh 2t \Big|_0^{\text{Arsh} \frac{\hbar\Omega_D}{|\Delta_S(0)|}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \text{Arsh} \frac{\hbar\Omega_D}{|\Delta_S(0)|} + \text{Arsh} \frac{\hbar\Omega_D}{|\Delta_S(0)|} \right] - \frac{|\Delta_S(0)|^2}{V}. \end{aligned}$$

Згадаємо, що $sh 2t = 2sh t ch t = 2sh t \sqrt{sh^2 t + 1}$ і що $sh \text{Arsh} a = a$, а також скористаємось рівнянням на

щілину, з якого випливає, що $V^{-1} = \rho_F \text{Arsh} \hbar \Omega_D / |\Delta_S(0)|$. Отже, для шуканої різниці отримуємо

$$\begin{aligned} \Delta E &= \rho_F |\Delta_S(0)|^2 \left\{ \left(\frac{\hbar \Omega_D}{|\Delta_S(0)|} \right)^2 - \frac{\hbar \Omega_D}{|\Delta_S(0)|} \left[1 + \left(\frac{\hbar \Omega_D}{|\Delta_S(0)|} \right)^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \text{Arsh} \frac{\hbar \Omega_D}{|\Delta_S(0)|} \right\} - \rho_F |\Delta_S(0)|^2 \text{Arsh} \frac{\hbar \Omega_D}{|\Delta_S(0)|} = \\ &= \rho_F |\Delta_S(0)|^2 \left\{ \left(\frac{\hbar \Omega_D}{|\Delta_S(0)|} \right)^2 - \frac{\hbar \Omega_D}{|\Delta_S(0)|} \left[1 + \left(\frac{\hbar \Omega_D}{|\Delta_S(0)|} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} = \\ &= \rho_F (\hbar \Omega_D)^2 \left\{ 1 - \left[1 + \frac{|\Delta_S(0)|^2}{(\hbar \Omega_D)^2} \right]^{1/2} \right\} < 0, \end{aligned}$$

оскільки другий доданок завжди переважає перший. Граничні випадки легко перевірити, якщо врахувати, що $sh(1/\rho_F V) = \Omega_D / |\Delta_S(0)|$; дійсно

$$\begin{aligned} \Delta E &= \rho_F (\hbar \Omega_D)^2 \{1 - [1 + sh^{-2} \dots]^{1/2}\} = \rho_F (\hbar \Omega_D)^2 \left(1 - \frac{ch \dots}{sh \dots}\right) = \\ &= \rho_F (\hbar \Omega_D)^2 \frac{e^{1/\rho_F V} - e^{-1/\rho_F V} - e^{1/\rho_F V} - e^{-1/\rho_F V}}{e^{1/\rho_F V} - e^{-1/\rho_F V}} = \\ &= -2\rho_F (\hbar \Omega_D)^2 \frac{1}{e^{2/\rho_F V} - 1} = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} -2\rho_F(\hbar\Omega_D)^2 e^{-2/\rho_F V} = -2\rho_F(\hbar\Omega_D)^2 \left(\frac{|\Delta_S(0)|}{2\hbar\Omega_D} \right)^2 = \\ = -\frac{1}{2}\rho_F |\Delta_S(0)|^2, & \rho_F V \ll 1; \\ -2\rho_F(\hbar\Omega_D)^2 \frac{\rho_F V}{2} = -\rho_F(\hbar\Omega_D)^2 \frac{|\Delta_S(0)|}{\hbar\Omega_D} = \\ = -\rho_F \hbar\Omega_D |\Delta_S(0)| = -\frac{|\Delta_S(0)|^2}{V}, & \rho_F V \gg 1. \end{cases}$$

З цих результатів випливає: внаслідок того, що завдяки щілині НП стан завжди енергетично вигідніший за нормальний, металічна система при певних температурах завжди обере тільки його.

Закінчимо цей розділ тим, що згадаємо, що у феноменологічній теорії різниця вільних енергій нормального і НП станів при $T < T_c$ дорівнює $H_{cm}^2(T)/8\pi$, де $H_{cm}(T)$ – критичне термодинамічне магнітне поле руйнування НП. Це, в свою чергу, означає, що для нульової критичної температури і найбільш цікавого з точки зору реальних надпровідників випадку слабкого зв'язку має виконуватися співвідношення

$$\frac{H_{cm}^2(0)}{8\pi} = \frac{1}{2}\rho_F |\Delta_S(0)|^2,$$

з якого прямо знаходимо співвідношення

$$H_{cm}(0) = \sqrt{4\pi\rho_F} |\Delta_S(0)|.$$

Іншою мовою, поле критичне термодинамічне поле безпосередньо зв'язане з НП щілиною, а отже залежить від параметрів електронної системи, а також її взаємодії з фононами.

Зробимо прості оцінки: як правило, 1 см^3 металу вміщує $\sim 10^{22}$ електронів, а ширина зони провідності стандартного металу складає приблизно $10 \text{ eV} \approx 10 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12} \text{ ерг}$, тобто на поверхні Фермі $\rho_F \approx 10^{22}/10 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12} \approx 10^{33} \text{ ерг}^{-1}\text{см}^{-3}$. В результаті, припускаючи, що $|\Delta_S(0)| \approx 10 \text{ K} \approx 10^{-15} \text{ ерг}$, знаходимо, що $H_{cm}(0) \approx 10^{15}(10^{34})^{1/2} \approx 10^2 \text{ ерстед}$, або вельми розумну величину.

29. Спектр елементарних збуджень надпровідника

29.1. *Фізичні наслідки появи надпровідної щілини.*
У попередньому розділі ми ввели поняття про одну з найважливіших характеристик НП – надпровідну щілину, передбачену теорією БКШ. Її (щілини) наступне експериментальне відкриття стало тріумфом теорії. НП щілина, що з'являється в електронному спектрі металів, які зазнають НП перехід, виявилась настільки важливою для розуміння явища НП в цілому, що нижче ми продовжимо вивчення її основних наслідків.

Спочатку з'ясуємо питання про елементарні збудження НП та їх енергію. Для цього виберемо стан пари $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$ в імпульсному просторі, вважаючи, що сам НП знаходиться у своєму основному стані. Який внесок робить саме ця пара у загальну енергію системи? Позначаючи цей внесок $\Delta E_{\mathbf{k}}^{(2)}$, знайдемо його із повної енергії E_S :

$$\Delta E_{\mathbf{k}}^{(2)} = 2\varepsilon(\mathbf{k})v_{\mathbf{k}}^2 - 2Vu_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{q}}v_{\mathbf{q}},$$

де коефіцієнт 2 відображає симетрію суми відносно заміни $\mathbf{k} \rightleftharpoons \mathbf{q}$. Перший доданок при цьому – це кінетична енергія пари $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$, а другий – поправка за рахунок процесів взаємодії з рештою усіх інших пар, коли вибрана пара переходить у стан $\{\mathbf{q}, -\mathbf{q}\}$, і навпаки, коли всі пари можуть породити пару саме в стані $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$. Підставимо у $\Delta E_{\mathbf{k}}^{(2)}$ явний вираз для коефіцієнтів uv -перетворення:

$$\begin{aligned} \Delta E_{\mathbf{k}}^{(2)} &= 2\varepsilon(\mathbf{k}) \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\varepsilon(\mathbf{k})}{E_{\mathbf{k}}} \right] - 2 \left\{ \frac{1}{4} \left[1 - \frac{\varepsilon^2(\mathbf{k})}{E_{\mathbf{k}}^2} \right] \right\}^{1/2} |\Delta_S(0)| = \\ &= \varepsilon(\mathbf{k}) - \frac{\varepsilon^2(\mathbf{k})}{E_{\mathbf{k}}} - \frac{|\Delta_S(0)|^2}{E_{\mathbf{k}}} = \varepsilon(\mathbf{k}) - E_{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

Це внесок окремої пари, яким ми скористуємось, щоб визначити внесок її “складової” – одного електрону. Припустимо для цього, що у НП пара станів $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$ є пустою, і помістимо у один із цих станів надлишковий електрон. Яка ж тепер буде енергія НП з надлишковим, тобто неспареним, електроном? Оскільки електрон лише один, відповідна пара не може приймати участь у процесах електрон-електронного розсіяння, які, як ми знаємо, можуть знижувати енергію E_S НП. Внесок пари $\Delta E_{\mathbf{k}}^{(2)}$ ми знайшли, а енергія системи з одним електроном буде визначатися співвідношенням

$$\Delta E_{\mathbf{k}}^{(1)} = E_S - \Delta E_{\mathbf{k}}^{(2)} + \varepsilon(\mathbf{k}).$$

Фактично ця проста, але глибока формула свідчить, що ми забрали пару, після чого добавили вільний електрон з енергією $\varepsilon(\mathbf{k})$, який прийнято називати *елементарним (квазічастинковим) збудженням* НП,

або просто *квазічастинкою*. Використовуючи в останній формулі отриманий вираз для $\Delta E_{\mathbf{k}}^{(2)}$, маємо

$$\Delta E_{\mathbf{k}}^{(1)} = E_s - \varepsilon(\mathbf{k}) + E_{\mathbf{k}} + \varepsilon(\mathbf{k}) = E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\varepsilon^2(\mathbf{k}) + |\Delta_s(0)|^2}.$$

Тим самим ми приходимо до важливого висновку: додаючи в систему один електрон, ми підвищуємо її енергію на величину $E_{\mathbf{k}}$, яка і визначає енергію квазічастинки у НП. При цьому її мінімальна енергія, або енергія фермівського елементарного збудження з $\mathbf{k} = \mathbf{k}_F$ (внаслідок того, що $\varepsilon(\mathbf{k}_F) = 0$), дорівнює як раз величині НП щілини $|\Delta_s(T)|$, максимальне значення якої відповідає $T = 0$. Це, в свою чергу, і означає, що основний стан НП відокремлений від усіх інших *щілиною*. На сучасній мові, кажуть, що при переході у НП стан *безмасові* квазічастинки металу стають *масивними*, тобто завдяки врахованій міжелектронній кореляції та її наслідку – щілині відбувається *генерація маси*.

Хоча викладені міркування формально правильні, виконати цей процес неможливо, бо у реальності ніхто внести у НП окремих електрон неможливо. Припустимо, що один з електронів пари $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$ перейшов у стан з хвильовим вектором \mathbf{q} . Це означає, що з'явиться не один, а два неспарених вільних електрона у окремих станах \mathbf{q} і $-\mathbf{q}$, що у відповідності до наших аргументів вимагає енергії $\approx 2|\Delta_s(T)|$.

Пари знаходяться (як це називають, *сконденсовані*) на основному рівні, і надлишкові електрони там з'явитися не можуть, оскільки це, образно кажучи, не їх місце. Розрив пари (див. рис. 19.1) супроводжується тим, що обидва електрони пари

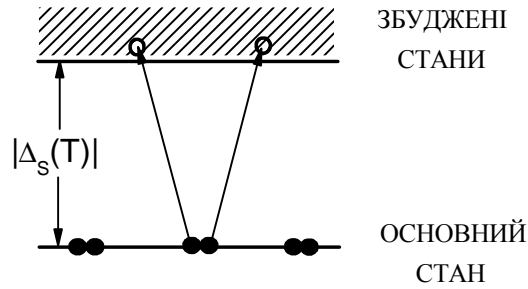


Рис. 19.1

піднімуться на свої одностинкові рівні, а відповідна щілина, що відокремлює основний стан НП від таким чином створеного, складає ту ж, наведену вище, величину $\approx 2|\Delta_S(T)|$ (відповідно по $\approx |\Delta_S(T)|$ на кожний неспарений електрон).

29.2. *Густина станів у НП.* При відомій енергії елементарних збуджень неважко розрахувати густина станів енергетичного спектру НП. Для цього, насамперед, треба записати енергію квазічастинок НП у явному вигляді (див. також рис. 19.2):

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_F^2}{2m}\right)^2 + |\Delta_S(T)|^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar^4 \mathbf{k}_F^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_F)^2}{m^2} + |\Delta_S(T)|^2} \approx$$

$$\begin{aligned} &\approx |\Delta_S(T)| \sqrt{1 + \frac{\hbar^4 \mathbf{k}_F^2}{m |\Delta_S(T)|^2} (\mathbf{k} - \mathbf{k}_F)^2} \approx \\ &\approx |\Delta_S(T)| + \frac{\varepsilon_F}{|\Delta_S(T)|} \frac{\hbar^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_F)^2}{m}. \end{aligned}$$

Згідно визначенню густина квазічастинкових станів у кристалах в загальному випадку має наступний (з точністю до несуттєвих коефіцієнтів) вигляд:

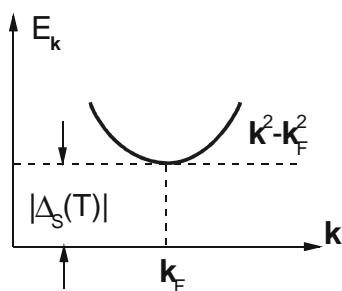


Рис. 19.2

$$\rho(\nu) \sim \int \delta(\nu - E_k) k^{D_{space}-1} dk,$$

де $\delta(\dots)$ – дельта-функція Дірака, а літерою D_{space} позначено можливо різну

просторову розмірність системи. У нашому випадку для тривимірної системи ($D_{space} = 3$) маємо інтеграл

$$\rho(\nu) \sim \int k^2 dk \delta[\nu - |\Delta_S(T)| + a^2(k - k_F)^2];$$

$$a^2 \equiv \hbar^2 \varepsilon_F / |\Delta_S(T)| m,$$

в якому можна зробити просту заміну змінних: $x = a^2(k - k_F)^2$; вона дає змогу записати

$$\rho(\nu) \sim \int \frac{dx}{x^{1/2}} \left(k_F + \frac{x^{1/2}}{a}\right)^2 \delta[\nu - |\Delta_S(T)| - x] \sim \frac{k_F^2}{\sqrt{\nu - |\Delta_S(T)|}},$$

де ми залишили лише головний доданок.

Таким чином, при всіх температурах $T < T_c$ поблизу НП щільності станів має різке збільшення (див. рис. 19.3).

Цей же результат можна отримати у інший спосіб. Дійсно густина станів, або кількість рівнів на одиничний інтервал енергій в об'ємі 1 см^3 матеріалу $\rho(E) = dN_{level} / dE$, де dN_{level} – число власних рівнів в інтервалі dE біля енергії E .

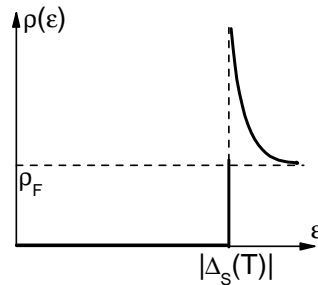


Рис. 19.3

Для вихідного спектру поблизу ϵ_F є справедливою рівність $\rho(\epsilon) = dN_{level} / d\epsilon |_{\epsilon=\epsilon_F} = \rho_F$, тому в цілому для перебудованого внаслідок НП переходу спектра прямо маємо ту ж залежність для густини його станів:

$$\begin{aligned} \rho(E) &= \frac{dN_{level}}{dE} = \frac{dN_{level}}{d\epsilon} \frac{d\epsilon}{dE} \approx \rho_F \frac{d}{dE} \sqrt{E^2 - |\Delta_S|^2} = \\ &= \rho_F \frac{E}{\sqrt{E^2 - |\Delta_S|^2}}; \quad (E^2 > |\Delta_S|^2). \end{aligned}$$

29.3. *Довжина когерентності.* Розрахуємо, нарешті, **довжину когерентності** з квантового підходу БКШ. Для цього згадаємо формулу для коефіцієнта для $v_{\mathbf{k}}^2$, який визначає розподіл спарених електронів у \mathbf{k} -просторі. Оскільки поблизу імпульсу Фермі функція

$$v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_F (\mathbf{k} - \mathbf{k}_F)}{m |\Delta_S(T)|} \right] \equiv \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_F \Delta \mathbf{k}}{m |\Delta_S(T)|} \right]$$

веде себе досить плавно, область її зміни можна оцінити за співвідношенням (див. рис. 18.1) $\hbar^2 k_F \Delta k / m \approx 2 |\Delta_S(T)|$, звідки $\Delta k \sim 2 |\Delta_S(T)| m / \hbar^2 k_F \approx \approx k_F (|\Delta_S(T)| / \varepsilon_F)$. З іншого боку, співвідношення Гайзенберга, $|\Delta x| |\Delta p| = |\Delta x| \hbar |\Delta k| \sim \hbar$ в якому

$$|\Delta x| \sim \frac{1}{|\Delta k|} \sim \frac{\varepsilon_F}{|\Delta_S(T)| k_F} \approx \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m k_F |\Delta_S(T)|} \sim$$

$$\sim \frac{\hbar p_F}{2m |\Delta_S(T)|} = \frac{\hbar v_F}{2 |\Delta_S(T)|} = \xi_S(T) \equiv \xi_S$$

– область простору, де суттєво змінюється параметр порядку у теорії Гінзбурга-Ландау, якому відповідає ψ -функція НП частинок. Тобто ми отримали повне співпадіння.

Якщо для оцінки знову покласти $|\Delta_S(0)| \sim 1$ К, $v_F \sim 10^8$ см/сек, то $\xi_S \sim 10^{-4}$ см, що також в повній мірі відповідає характерним експериментальним даним.

Лекція 20

30. Залежність величини надпровідної щілини від температури

Це питання дуже важливе, бо величина щілини не може не визначатися температурою. Таке твердження зрозуміле, оскільки само явище НП є температурозалежним і існує лише в певному діапазоні досить низьких, якщо не мати на увазі високотемпературну НП, температур. В точці T_c енергії обох – нормальної та НП – фаз співпадають, $E_N = E_S$, а енергетичний вигравш НП фази у порівнянні з нормальною цілком обумовлений скінченою величиною $|\Delta_S(T)|$, тому логічно припустити, що $\Delta_S(T_c) = 0$. На якісному рівні ми на питання про залежність $\Delta_S(T)$ фактично відповіли; що ж стосується явного виду цієї залежності, то і його зрозуміти нескладно.

Дійсно, як ми вже знаємо, для розриву пари та створення двох вільних елементарних збуджень необхідно витратити енергію, рівну $2|\Delta_S(T)|$. Якщо температура задовольняє умові $T \sim 2|\Delta_S(T)|$, то ясно, що багато електронних пар буде термічно збуджено з їх основного зв'язаного стану у такий, який відповідає вільним електронам. Це, в свою чергу, означає, що у \mathbf{k} -просторі буде багато комірок, заповнених

одиначними електронами, які не приймають участі у взаємних і скорельованих переходах пар типу $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\} \rightleftharpoons \{\mathbf{q}, -\mathbf{q}\}$. Такі переходи, як ми вже знаємо, знижують енергію системи, і якщо їм щось перешкоджає, то, зрозуміло, енергія E_s почне зростати, наближаючись до E_N . Стани ж вільних електронів не роблять внесок у формування НП щільності, яка для $T = 0$ визначалася сумою

$$\Delta_s(0) = V \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}.$$

З цієї формули випливає, що чим більше буде розірваних пар, тим більше елементарних збуджень з'явиться у системі і тим меншою буде величина НП щільності.

Проаналізуємо проблему на якісному рівні.

Відомо, що елементарні збудження у металах підпорядковуються статистиці Фермі-Дірака, а ймовірність заповнення електроном одночастинкового стану з хвильовим вектором \mathbf{k} задається Фермі-розподілом

$$f_{\mathbf{k}} = (e^{E_{\mathbf{k}}/T} + 1)^{-1}; \quad (k_B = 1),$$

де $E_{\mathbf{k}}$ – знайдена вище величина енергії елементарного збудження. При $T \ll E_{\mathbf{k}}$, функція $f_{\mathbf{k}} \sim \exp(E_{\mathbf{k}}/T) \ll 1$, а при $T \gg E_{\mathbf{k}}$ значення $f_{\mathbf{k}} \rightarrow 1/2$.

Якщо хоча б один із станів \mathbf{k} або $-\mathbf{k}$ заповнений, то, як ми вже неодноразово підкреслювали, пара $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$ випадає з участі у формуванні НП стану в цілому. Звідси робимо суттєвий висновок, що

ймовірність того, що пара $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$ взмозі приймати участь у відповідних процесах дорівнює $1 - 2f_{\mathbf{k}}$.

Тоді вираз для повної енергії металічної системи при $T \neq 0$, можна представити у вигляді:

$$E = 2 \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon(\mathbf{k})(1 - 2f_{\mathbf{k}})v_{\mathbf{k}}^2 + 2 \sum_{\mathbf{k}} |\varepsilon(\mathbf{k})| f_{\mathbf{k}} - \\ - V \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} (1 - 2f_{\mathbf{k}}) \sum_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}} (1 - 2f_{\mathbf{q}}).$$

Перший доданок у ньому – кінетична енергія пар (“НП” частинок у теорії Гінзбурга-Ландау), другий – кінетична енергія елементарних збуджень, третє – взаємодія пар з сумарним хвильовим вектором $\mathbf{K} = 0$, що відповідає теорії БКШ. Додаткові множники відображають ймовірності врахованих доданків у сенсі, що оговорений вище.

Для скінчених температур термодинамічний стан системи визначає не енергія, а вільна енергія

$$F = E - TS_{en},$$

де

$$S_{en} = -2 \sum_{\mathbf{k}} [f_{\mathbf{k}} \ln f_{\mathbf{k}} + (1 - f_{\mathbf{k}}) \ln(1 - f_{\mathbf{k}})]$$

– ентропія одиночних елементарних збуджень, або квазічастинок. Тепер знаходження функцій $v_{\mathbf{k}}^2$, що відповідають мінімуму вільної енергії, або, що те ж саме, стану термодинамічної рівноваги, робиться на основі умов

$$\frac{\partial F}{\partial v_{\mathbf{k}}^2} = 0.$$

Виконуючи ті ж самі обчислення, що викладені вище, приходимо до рівняння

$$\frac{u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}}{1 - 2v_{\mathbf{k}}^2} = \frac{\Delta_s(T)}{2\varepsilon(\mathbf{k})},$$

де тепер $\Delta_s(T) = \sum_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}} (1 - 2f_{\mathbf{q}})$. І видно, що у відповідності до температурної поведінки $f_{\mathbf{k}}$ можна стверджувати про існування граничних значень:

$$\Delta_s(T) = \begin{cases} \Delta_s(0), & T \ll \Delta_s(0); \\ 0, & T \gg \Delta_s(0). \end{cases}$$

Як і раніше, коефіцієнти uv -перетворення задовольняють умові $u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2 = 1$ і при цьому

$$v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\varepsilon(\mathbf{k})}{E_{\mathbf{k}}} \right]; \quad u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} = \frac{\Delta_s(T)}{E_{\mathbf{k}}};$$

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\varepsilon^2(\mathbf{k}) + |\Delta_s(T)|^2}.$$

З цих співвідношень маємо рівняння для щільності:

$$\Delta_s(T) = \frac{V}{2} \sum_{\mathbf{q}} \frac{\Delta_s(T)}{E_{\mathbf{q}}} (1 - 2f_{\mathbf{q}}),$$

яке перепишемо шляхом стандартного переходу до інтегрування

$$\Delta_s(T) \left(1 - \frac{V}{2} \int_{-\hbar\Omega_D}^{\hbar\Omega_D} dv \rho(v) \frac{1 - 2f_v}{\sqrt{v^2 + |\Delta_s(T)|^2}} \right) = 0,$$

або, припускаючи, що усюди, крім $T = T_c$, величина $\Delta_s(T) \neq 0$ (рис. 20.1),

$$\frac{1}{\rho_F V} = \int_0^{\hbar\Omega_D} \frac{dv}{\sqrt{v^2 + |\Delta_s(T)|^2}} th \frac{\sqrt{v^2 + |\Delta_s(T)|^2}}{2T}.$$

При $T \rightarrow T_c$ з урахуванням того, що $\Delta_s(T) \rightarrow 0$ (див. рис. 20.1), з останнього рівняння отримуємо рівняння для величини критичної температури:

$$\frac{1}{\rho_F V} = \int_0^{\hbar\Omega_D} \frac{dv}{v} th \frac{v}{2T_c},$$

з якого, як можна показати, випливає, що $T_c = 1.14 \hbar\Omega_D \exp(-1/\rho_F V)$.

Порівнюючи цей вираз з формулою для $|\Delta_s(0)| = 2\hbar\Omega_D \exp(-1/\rho_F V)$, бачимо, що має місце рівність

$$\frac{2|\Delta_s(0)|}{T_c} = 3.52,$$

яке в теорії БКШ має назву **канонічного співвідношення**. Воно знаходить підтвердження в багатьох звичайних НП, в той же час у високотемпературних НП воно дорівнює 5-6, тобто приблизно є вдвічі більшим.

В області малих температур, $T \ll T_c$,

$$\Delta_s(T) \approx \Delta_s(0) \left[1 - \sqrt{\frac{T}{\Delta_s(0)}} e^{-\Delta_s(0)/T} \right],$$

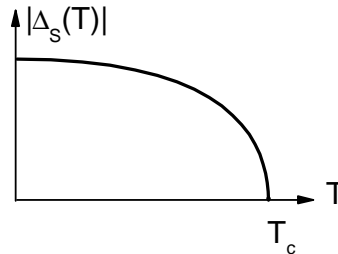


Рис. 20.1

а в поблизу температури переходу, $T \rightarrow T_c$,

$$\Delta_s(T) \approx T_c \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}.$$

Нарешті, формула для T_c дає безпосереднє пояснення ізотоп-ефекту. З множника перед експонентою $T_c \sim \Omega_D \exp(\dots) \sim \sqrt{1/M}$, звідки дійсно $T_c M^{1/2} \approx const$.

31. Незатухаючий струм і ефект Мейсснера-Оксенфельда

31.1. *Струм розпарювання.* Ми ознайомились з найбільш важливою характеристикою НП систем – щільною в їх електронному спектрі. Проте виникає законне питання: “А яке відношення вона має до явища НП?” Справді, а яке?

Так, ми знаємо, що у металах електрони взаємодіють з квантами коливань ґратки, що на відміну від кулонівського відштовхування за деяких умов призводить до міжелектронного притягання. Останнє, як ми могли переконатись, знижує енергію фермі-системи та “розмиває” розподіл Фермі-Дірака у \mathbf{k} -просторі. При цьому в електронному спектрі такої системи виникає щілина (тобто основний стан відокремлений від решти збуджених скінченим енергетичним проміжком без електронних рівнів. Та чи має все це якийсь зв’язок з явищем НП?

Спробуємо показати, як і чому поява НП щілини перетворює метал на надпровідник, тобто створює передумови для існування довго живучого незатухаючого струму. Спочатку звернемося до нормального металу і розглянемо розподіл Фермі у

ньому при $T = 0$, коли по металу тече електричний струм.

По-перше, коли струму нема, всі електрони знаходяться на станах всередині сфери Фермі, а всі стани поза неї – пусті. Помістимо метал в електричне поле \mathbf{E} , що викликає рух електронів, наприклад, вздовж осі x . Тоді їх *прискореному* руху в \mathbf{r} -просторі відповідає *рівномірний* рух з *постійною* швидкістю у \mathbf{k} -просторі. Дійсно, за законом Ньютона $\ddot{x} \equiv \dot{v}_x = eE_x/m$. Згадуючи, що $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m = \hbar\mathbf{k}/m$, маємо: $\mathbf{k} = m\mathbf{v}/\hbar$, або $\dot{k}_x = (e/\hbar)E_x$, а \dot{k}_x є швидкість електрона у \mathbf{k} -просторі, і вона насправді є постійною!

З цього випливає, що вся сфера Фермі почне зсуватися у \mathbf{k} -просторі вздовж осі x (вірніше, осі $\mathbf{k} = (k_x, 0, 0)$). Але такий рух продовжуватиметься доти, поки можуть прискорюватись електрони у \mathbf{r} -просторі. Зіткнення з різними дефектами, домішками, фононами викличуть гальмування електронів, і їх рух стане стаціонарним. У \mathbf{k} -просторі його встановленню відповідатимуть переходи, обумовлені розсіянням електронів, що мають максимальні x -ові компоненти імпульсів, у вільні комірки \mathbf{k} -простору. В результаті виникне динамічна рівновага, яка свідчить, що незважаючи на наявне електричне поле і рівномірний рух електронів у \mathbf{k} -просторі вздовж k_x , теж саме розсіяння призводить до того, що в цілому розподіл електронів у цьому просторі також стає стаціонарним. Сфера Фермі виявляється дещо зсунутою відносно початку координат, що природно для струмового стану. З іншого боку, розсіяння електронів на коливаннях ґратки викликає передачу їй енергії і як наслідок її розігрів.

Тепер звернемося до НП стану. В ньому, як ми знаємо, електрони об'єднані у пари. При цьому струму (навіть у відсутності поля!) відповідатиме стан, в

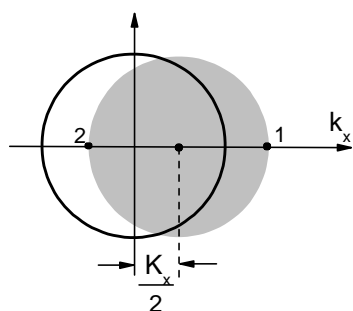


Рис. 20.2

якому усі електронні пари мають однаковий імпульс $\hbar\mathbf{K}$. Нехай струм тече знов-таки вздовж осі Ox , тобто $\mathbf{K} = (K_x, 0, 0)$. Це, в свою чергу, означає (див. рис. 20.2), що “розмита” границя Фермі буде зсунута на величину $\mathbf{K}/2 = (K_x/2, 0, 0)$.

Згадана розмитість стосується одночастинкового фермі-розподілу, або заповнення фермі-станів, у НП, а $K_x/2$ – в силу того, що сумарний імпульс належить двом частинкам одночасно.

Виберемо електронну пару $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\}$, складові імпульси якої дорівнюють $\hbar\mathbf{k}_1 = \hbar(k_F^{(x)} + K_x/2, k_F^{(y)}, k_F^{(z)})$ та $\hbar\mathbf{k}_2 = \hbar(-k_F^{(x)} + K_x/2, -k_F^{(y)}, -k_F^{(z)})$, а в загальному випадку мова йде про стан $\{\mathbf{k} + \mathbf{K}/2, -\mathbf{k} + \mathbf{K}/2\}$ із заданим вище сумарним хвильовим вектором \mathbf{K} пари яка рухається вздовж осі x . В такому стані, проте, енергії електронів пари вже нееквівалентні і в принципі електрону з ефективною масою m та більшою енергією

$$\mathcal{E}^{(free)}(\mathbf{k}_1) = \frac{\hbar^2 (\mathbf{k}_F + \mathbf{K}/2)^2}{2m},$$

здавалося б, вигідно було “скинути” частину своєї кінетичної енергії і перейти в область станів поблизу другого електрону, де енергії менші. Тоді б відбулося зниження енергії на величину

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(free)}(\mathbf{k}_1) - \varepsilon^{(free)}(\mathbf{k}_2) &= \\ &= \frac{\hbar^2(\mathbf{k}_F + \mathbf{K}/2)^2}{2m} - \frac{\hbar^2(\mathbf{k}_F - \mathbf{K}/2)^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{m} k_F^{(x)} K_x. \end{aligned}$$

Але, з іншого боку, ми добре знаємо, що при народженні вільної пари руйнується зв’язана пара, і енергія системи збільшується, як мінімум, на $2|\Delta_S(T)|$ (саме $2|\Delta_S(T)|$, а не $2|\Delta_S(0)|$, бо наш розгляд ніде не торкається T). Звідси стає по суті ясным, що при достатньо малих струмах (або, що те ж саме, малих $|\mathbf{K}|$) вигреш у кінетичній енергії вільних частинок не зможе компенсувати програш у “потенціальній” (краще говорити, енергії кореляції), і пара зберігатиметься як ціле – стабільне – утворення. При цьому очевидно, що струмовий стан менш вигідний, чим нерухомий (безструмовий) стан конденсата. Спостережуваним прикладом є замкнене НП кільце, де зникнення НП стану проявляється, коли струм досягає критичної відмітки згідно умові

$$\frac{\hbar^2}{m} k_F K_{cr} = 2|\Delta_S(T)|,$$

де \mathbf{K}_{cr} – відповідний критичний хвильовий вектор пари як цілого об’єкту, звідки прямо маємо критичний імпульс

$$|\mathbf{P}_{cr}| = \hbar K_{cr} = 2m|\Delta_S(T)|/p_F = 2|\Delta_S(T)|/v_F$$

(v_F – фермівська швидкість). При цьому неважко здогадатись, що для зв’язаної пари (“НП електронів”) $\mathbf{V}_{cr} = \mathbf{P}_{cr} / 2m$ і, відповідно, величина критичного НП струму

$$|\mathbf{j}_S^{(cr)}| = n_S e |\mathbf{V}_{cr}| = \frac{n_S e}{m v_F} |\Delta_S(T)|.$$

Легко прийняти, що, зокрема, при $T = 0$ величина n_S – це, як і було раніше в теорії Лондонів, густина електронної рідини, яка однозначно зв’язана з лондонівською глибиною проникнення магнітного поля

$$\lambda_L^2 = \frac{m c^2}{4 \pi n_S e^2} \quad n_S = \frac{m c^2}{4 \pi \lambda_L^2 e^2}.$$

Крім того, у попередньому розділі ми показали, що довжина когерентності $\xi_S = \hbar v_F / 2 |\Delta_S(T)|$, або $|\Delta_S(T)| = \hbar v_F / 2 \xi_S$. “Збираючи” ці співвідношення, приходимо до такої формули:

$$j_S^{(cr)} = \frac{m c^2}{4 \pi \lambda_L^2 e^2} e \frac{1}{m v_F} \frac{\hbar v_F}{2 \xi_S} = \frac{\hbar c^2}{8 \pi e} \frac{1}{\lambda_L^2 \xi_S},$$

яка зв’язує різні параметри мікроскопічної та феноменологічної теорій.

Ще один подібний зв’язок знайдемо, згадавши наступну формулу теорії Гінзбурга-Ландау:

$$\sqrt{2} H_{cm} = \frac{\Phi_0}{2 \pi \lambda_L \xi_S} = \frac{\pi \hbar c / e}{2 \pi \lambda_L \xi_S} \rightarrow \lambda_L \xi_S = \frac{\hbar c}{2 \sqrt{2} e H_{cm}},$$

використовуючи яку, отримуємо шукане співвідношення

$$j_S^{(cr)} = \frac{\hbar c^2}{8\pi e \lambda_L} \frac{1}{\hbar c} \frac{2\sqrt{2}H_{cm}}{\hbar c} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \frac{c}{\lambda_L} H_{cm}.$$

Отримані співвідношення показують повну відповідність між мікроскопічним і феноменологічним підходами, і оскільки другий з них дуже добре узгоджується з експериментальними спостереженнями, то і перший, тобто мікроскопічний, підхід має їм відповідати.

Струм $\mathbf{j}_S^{(cr)}$ називається *струмом розпарювання*, бо його густина є такою, коли втрачається стійкість (енергетична вигідність) зв'язаних електронних пар і їх окремі складові, або електрони, переходять у свій звичайний вільний стан.

31.2. *Мікроскопічна природа ефекту Мейсснера-Оксенфельда.* Продемонструємо, нарешті, що існування щілини обумовлює ефект Мейсснера-Оксенфельда, для чого використаємо якісні міркування, оскільки строгі розрахунки досить складні і тому виходять за рівень нашого викладу.

Припустимо, що слабе магнітне поле не може змінити хвильову функцію основного стану, що складається з скорельованих пар електронів. Таке припущення може мати місце з таких двох причин:

1. По-перше, хвильова функція основного стану складається зі зв'язаних синглетних за своїм спіном пар електронів, тому дійсно у першому порядку поле на синглетний стан діяти не може (лише через порівняно мале примішування збуджених станів).

2. Присутність у спектрі щілини дозволяє припустити, що подібне примішування навіть ще більше зменшується як раз завдяки їй.

З цих тверджень випливає уявлення про *жорсткість* хвильової функції основного стану, яка свідчить про певну стійкість, або незмінність, хвильової функції саме відносно слабого магнітного поля, яке не може вплинути на когерентний колектив спарених електронів. А це фактично і є ефект Мейсснера-Оксенфельда!

На більш формальній мові можна сказати наступне: нехай $\Psi(\{\mathbf{r}_j\})$ – хвильова функція електронів (треба мати на увазі і підкреслити, що мова йде саме про електрони, бо це за припущенням справжня хвильова функція, а не хвильова функція НП частинок теорії Гінзбурга-Ландау, яка, до речі, є функцією однієї координати \mathbf{r}). Тоді квантово-механічний струм у присутності зовнішнього поля має вигляд:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_j^N \int \{d\mathbf{r}_j\} \left\{ \frac{\hbar e}{2im} [\Psi^*(\{\mathbf{r}_j\}) \nabla_j \Psi(\{\mathbf{r}_j\}) - \Psi(\{\mathbf{r}_j\}) \nabla_j \Psi^*(\{\mathbf{r}_j\})] - \frac{e^2}{mc} \mathbf{A}(\{\mathbf{r}_j\}) |\Psi(\{\mathbf{r}_j\})|^2 \right\} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j),$$

де $\mathbf{A}(\{\mathbf{r}_j\})$ – векторний потенціал цього поля \mathbf{H}_0 . Якщо останнє відсутнє, тобто $\mathbf{A}(\{\mathbf{r}_j\}) = 0$, то і струму у НП, звичайно, нема, і інтеграл від першого доданку дорівнює нулеві.

Таким чином, рівність

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_j^N \int \{d\mathbf{r}_j\} \left\{ \frac{\hbar e}{2im} [\Psi^*(\{\mathbf{r}_j\}) \nabla_j \Psi(\{\mathbf{r}_j\}) - \Psi(\{\mathbf{r}_j\}) \nabla_j \Psi^*(\{\mathbf{r}_j\})] \right\} = 0$$

є нова властивість основного стану, про яку ми припустили, що вона зберігатиметься і у слабкому полі, завдяки жорсткості хвильової функції. Тоді з першого (повного) виразу для струму ми негайно отримуємо співвідношення

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{mc} \sum_j^N \int \{d\mathbf{r}_j\} \mathbf{A}(\{\mathbf{r}_j\}) |\Psi(\{\mathbf{r}_j\})|^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) = -const \mathbf{A}(\mathbf{r}),$$

що є ні що інше, як рівняння Лондонів, яке ми писали у формі

$$\mathbf{j}_s(\mathbf{r}) = -\frac{c}{4\pi\lambda_L^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c\Lambda} \mathbf{A}(\mathbf{r}); \quad \Lambda \equiv \frac{4\pi\lambda_L^2}{c^2}.$$

А з нього і впливає ефект виштовхування зовнішнього магнітного поля з області, де існує НП конденсат, або “НП частинки”, що можуть рухатись у металі без опору, створюючи відповідні екрануючі струми, у чому, власне, і полягає ефект Мейсснера-Оксенфельда.

Лекція 21

32. Нерівноважні процеси у надпровідниках

Розглянемо тепер дуже цікаві і незвичайні процеси, які прямо стосуються явища НП і мають при цьому свою специфіку. Мова йде про існування просторових і часових неоднорідностей та їх змін, вивчення яких значно збагачує наші знання про фізику НП. Як відомо, у металах існує ціла низка квазічастинок – електрони, дірки, їх комплекси, а також плазмони, фонони тощо, крім того, усі вони взаємодіють між собою. Безумовно, ці квазічастинки зберігаються і в НП стані. При цьому в умовах нерівноваги картина будь-якого явища значно збагачується, ми починаємо глибше розуміти саме явище, розробляємо більш адекватні його особливостям поняття та уявлення. Не говорячи вже про те, що багато явищ, що протікають в технічно важливих пристроях і приладах, з якими працюють фахівці з інженерною підготовкою, також мають характер встановлення рівноваги або зміни деяких своїх параметрів (в усякому разі, на певних часах своєї роботи).

32.1. *Квазічастинки: електрони та дірки.* Уточним поняття квазічастинок, або елементарних збуджень, у металах. Почнемо з нормальної фази простого однозонного провідника.

Основний стан (тобто стан, коли відсутні будь-які елементарні збудження при $T = 0$) – це такий стан, у якому вільні електрони заповнюють всі комірки (стани) \mathbf{k} -простору всередині сфери Фермі, а всі стани зовні цієї сфери є пустими. Внесемо у метал ще один – надлишковий – електрон. Тоді йому нічого робити, як зайняти один із станів з $|\mathbf{k}| > |\mathbf{k}_F|$, а енергія системи збільшиться на величину

$$\frac{\hbar^2}{2m}(\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}_F^2),$$

де m – ефективна маса електрона. Проте це не таке тривіальне питання, бо фактично мова, по великому рахунку, йде про дві системи – одна з числом електронів N і інша з числом $N+1$, хоча ми розуміємо, що одиниця нічого не варта при $N \sim 10^{22}$.

Зроблене застереження важливе, щоб зрозуміти, яким буде знак енергії збудження у випадку, коли ми, навпаки, забираємо електрон з металу, тобто з одного із станів з $|\mathbf{k}| < |\mathbf{k}_F|$, створивши у металі *дірку*. Формально, здавалось би, енергія стане меншою на ту ж величину, але з протилежним знаком, тобто

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}_F^2) = \frac{\hbar^2}{2m}(\mathbf{k}_F^2 - \mathbf{k}^2) > 0.$$

Це так, бо останній стан, без сумніву, є збудженим для системи з $N-1$ частинкою, і якщо вона (система) тепер перейде до свого основного стану, вона має виділити енергію, величина якої дається останньою формулою (фактично частинка із стану на поверхні Фермі перейде у більш низький вільний стан). Імпульс такого елементарного

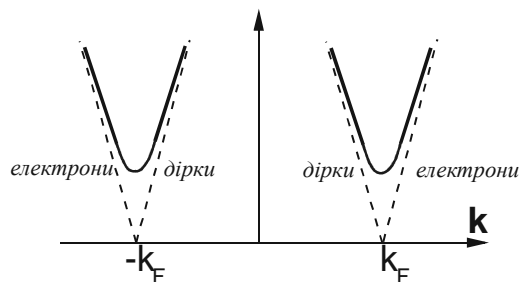


Рис. 21.1

збудження – дірки – дорівнюватиме $-\mathbf{k}$, оскільки імпульс усіх електронів під сферою Фермі дорівнює нулеві, а імпульс дірки – це імпульс решти електронів (тобто без забраного). З іншого боку, створення дірки можна зрозуміти і як перехід одного з внутрішніх електронів на поверхню Фермі; тим самим народження дірки в системі з незмінною кількістю частинок також вимагає затрати енергії, а отже енергія цього елементарного збудження, тобто дірки, як і енергія електрону, є позитивною. Більше того, дірка поводить себе подібно саме позитивному заряду, тому і отримала таку свою назву. Спектр металу в нормальній фазі показано прямими лініями (див. рис. 21.1).

У НП ситуація дещо складніша. Його основний стан є корельованим у сенсі утворення парних станів, а хвильова функція є варіаційною і має вигляд

$$\Psi_{gr} = \prod_{\mathbf{q}} [u_{\mathbf{q}} + v_{\mathbf{q}} c_{\uparrow}^+(\mathbf{q}) c_{\downarrow}^+(-\mathbf{q})] |vac\rangle,$$

де $|vac\rangle$ – вакуумний (безчастинковий) стан, що визначається умовою $c(\mathbf{k})|vac\rangle = 0$, v_k^2 – ймовірність (рис. 21.2) заповнення електронами відповідних комірок з утворенням стану $\{\mathbf{q}, -\mathbf{q}\}$. Внесемо тепер до НП надлишковий електрон, який заповнить будь-який стан \mathbf{k} , причому стан $-\mathbf{k}$ в цьому випадку залишиться вільним. Проте тепер комірка \mathbf{k} -простору НП може виявитись як всередині, так і зовні Фермі-сфери, оскільки і в основному стані згідно з поведінкою ймовірності v_q^2

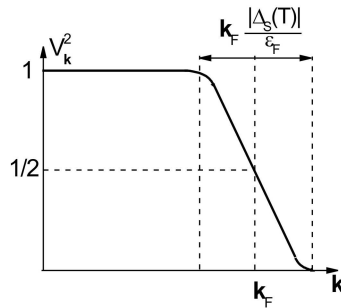


Рис. 21.2

комірки навіть з $|\mathbf{k}| < |\mathbf{k}_F|$

залишаються певною мірою – з ймовірністю u_k^2 – вільними. В результаті ми приходимо до дуже важливого висновку: електронно-подібна квазічастинка у НП стані може мати модуль свого імпульсу і більший, і менший за модуль імпульсу Фермі.

Тотожні міркування придатні і для протилежного випадку створення в НП системі діркового збудження, яке відповідає усуненню з неї електрону. Заберемо, наприклад, електрон із стану $-\mathbf{k}$; тоді в системі залишиться неспарений електрон з імпульсом \mathbf{k} . Така квазічастинка веде себе як дірка і зрозуміло, що і тут модуль імпульсу може бути в силу аргументів, наведених вище, як більшим, так і меншим за $|\mathbf{k}_F|$.

Таким чином, у зв'язку з останніми висловлюваннями можна стверджувати, що збудження

у НП стані, коли стан \mathbf{k} є зайнятим, $-\mathbf{k}$ – вільним, виявляє властивості і електрону, і дірки одночасно.

Як же їх відрізнити? Лише ймовірностями.

Це прямо впливає з виду хвильової функції Ψ_{gr} , яка в наближенні БКШ правильно відображає структуру основного стану. Якщо заради простоти знехтувати спіноюю змінною, то народженню електронно-подібного квазічастинкового збудження у стані \mathbf{k} відповідатиме функція

$$\psi_{\mathbf{k}}^{(el)} = c^+(\mathbf{k})\Psi_{gr} = u_{\mathbf{k}}c^+(\mathbf{k})|vac\rangle,$$

а діркоподібного у стані $-\mathbf{k}$ – функція

$$\psi_{-\mathbf{k}}^{(hole)} = c^+(\mathbf{k})\Psi_{gr} = v_{\mathbf{k}}c^+(-\mathbf{k})|vac\rangle.$$

Тобто саме uv -коефіцієнти визначають ймовірності появи відповідних квазічастинок. І видно, що практично електрон може народитися, коли співвідношення між цими коефіцієнтами таке, що $u_{\mathbf{k}} \gg v_{\mathbf{k}}$; воно, зокрема, виконується для області $|\mathbf{k}| > |\mathbf{k}_F|$ і $(k - k_F)/k_F \gg |\Delta_s(T)|/\varepsilon_F$. Навпаки, народжується майже дірка, коли $|\mathbf{k}| < |\mathbf{k}_F|$ і $(k_F - k)/k_F \gg \gg |\Delta_s(T)|/\varepsilon_F$, де $v_{\mathbf{k}} \gg u_{\mathbf{k}}$. В області ж, де $u_{\mathbf{k}}^2 \approx v_{\mathbf{k}}^2 \sim 1/2$, взагалі внесок обох типів квазічастинок приблизно рівний і однозначно говорити про тип збудження взагалі неправомірно.

Тим не менш, можна вказати швидкість розповсюдження квазічастинкового збудження у реальному просторі; вона задається формулою для групової швидкості

$$v_{\mathbf{k}}^{gr} = \frac{dE_{\mathbf{k}}}{dp_{\mathbf{k}}} = \frac{1}{\hbar} \frac{dE_{\mathbf{k}}}{d\mathbf{k}}; \quad E_{\mathbf{k}}^2 = \varepsilon^2(\mathbf{k}) + |\Delta_s(T)|^2,$$

яка свідчить, що електронно-подібні та дірко-подібні збудження завжди рухаються у різні сторони, оскільки (див. Лекцію 18) $\varepsilon(\mathbf{k}) = \varepsilon^{(free)}(\mathbf{k}) - \varepsilon_F$.

32.2. *Заряд квазічастинки.* Вище ми з'ясували вельми незвичайну особливість квазічастинкових збуджень у НП, яка проявляється в їх неоднозначному типі стосовно того, електрони вони чи дірки. А можна сказати і так: будь-яке збудження у НП є одночасно і електроном, і діркою. Власне, вже з явного вигляду боголюбівських операторів це видно напряду, оскільки вони є суперпозицією операторів народження і знищення електрону, що відповідає операторам знищення і народження дірки. Оскільки коефіцієнти u, v -перетворення є неперервними функціями хвильового вектору, перехід від електронного типу збудження до діркового відбуватиметься теж неперервно, що наводить на думку, що електричний заряд квазічастинкового збудження у НП виявляється не цілим. Відповідні уявлення виникли лише через 22 роки після створення теорії БКШ, у 1979 р., хоча у них не було сформульовано ані нових понять, ані запропоновано нових явищ. Але нові погляди були прийняті фізичною спільнотою, оскільки виявились наглядними і зручними.

Щоб розібрати це питання, умовимось для визначеності вважати заряд електрону -1 ; іншою мовою, будемо рахувати заряд у відносних одиницях, тобто спрощено поклавши $e = -1$.

Тепер припустимо, що температура НП $T < T_c$, і в ньому присутні як спарені, так і неспарені електрони (відповідно, “НП частинки” та елементарні збудження). Для обох цих можливостей ймовірності

розраховуються по-різному. Якщо мова йде про вільні квазічастинкові збудження, то вони розподілені по станах \mathbf{k} -простору згідно з функцією Фермі-Дірака $f_{\mathbf{k}}$, де роль енергії відіграє, як і повинно бути, величина $E_{\mathbf{k}}$. Оскільки ймовірність того, що до народження збудження \mathbf{k} -стан залишався вільним, є $u_{\mathbf{k}}^2$, повна ймовірність знайти електрон у цьому стані дорівнює $f_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}}^2$. З іншого боку, цей стан вже може бути заповнений електроном НП пари, чому мають відповідати дві інші умови: *i*) $1-f_{\mathbf{k}}$ – ймовірність того, що цей стан є вільним від квазічастинки; *ii*) $v_{\mathbf{k}}^2$ – в ньому ж знаходиться спарений електрон. Тоді повна ймовірність перебування електрону в \mathbf{k} -стані складає $(1-f_{\mathbf{k}})v_{\mathbf{k}}^2$.

В цілому ж, ймовірність знайти заряд, що відповідає електрону у вибраному \mathbf{k} -стані є:

$$Q_{\mathbf{k}} = -[f_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}}^2 - (1-f_{\mathbf{k}})v_{\mathbf{k}}^2],$$

а повний заряд –

$$Q_{total} = \sum_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}} = -\sum_{\mathbf{k}} [f_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}}^2 - (1-f_{\mathbf{k}})v_{\mathbf{k}}^2].$$

Якщо НП зазнає зовнішній вплив, який викличе зміни

$$f_{\mathbf{k}} \rightarrow f_{\mathbf{k}} + \delta f_{\mathbf{k}}; \quad u_{\mathbf{k}}^2 \rightarrow u_{\mathbf{k}}^2 + \delta u_{\mathbf{k}}^2; \quad v_{\mathbf{k}}^2 \rightarrow v_{\mathbf{k}}^2 + \delta v_{\mathbf{k}}^2,$$

то це позначиться на величині заряду так, що $Q_{total} \rightarrow Q_{total} + \delta Q_{total}$, де

$$\delta Q_{total} = -\sum_{\mathbf{k}} [(u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2)\delta f_{\mathbf{k}} + (1-2f_{\mathbf{k}})\delta v_{\mathbf{k}}^2].$$

Перший доданок відповідає зміні вихідного заряду квазічастинок. Більш точно: – ймовірність перебування квазічастинки у \mathbf{k} -стані змінюється на $\delta f_{\mathbf{k}}$, а електричний заряд у цьому стані – на $Q_{\mathbf{k}} \delta f_{\mathbf{k}} \equiv -(u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2) \delta f_{\mathbf{k}}$, звідки випливає, чому дорівнює сам заряд у кожному стані. Тепер згадуючи, що $u_{\mathbf{k}}^2 = [1 + \varepsilon(\mathbf{k})/E_{\mathbf{k}}]/2$ і $v_{\mathbf{k}}^2 = [1 - \varepsilon(\mathbf{k})/E_{\mathbf{k}}]/2$ знаходимо, що

$$Q_{\mathbf{k}} = -\frac{\varepsilon(\mathbf{k})}{E_{\mathbf{k}}} = -\frac{\varepsilon(\mathbf{k})}{\sqrt{\varepsilon^2(\mathbf{k}) + E_{\mathbf{k}}^2}}.$$

На рис. 21.3 показана дисперсія квазічастинкових збуджень у НП і зміна їх заряду. В області 1 $Q_{\mathbf{k}}$ близький до +1 (дірка), в області 3 – до -1 (електрон), а в області 2 він плавно змінюється між цими двома його значеннями.

Таким чином, ми дійсно отримали, що заряд квазічастинки у НП може не тільки змінювати свій знак, але й в області $|\mathbf{k}| \sim |\mathbf{k}_F|$ бути нецілим.

Доволі дивний результат!

Внесемо до НП електрон і помістимо його у стан \mathbf{k} . Ми додали до системи заряд -1 (в одиницях e), а у \mathbf{k} -стані виявився, насправді, заряд $Q_{\mathbf{k}} \neq -1$. Де ж

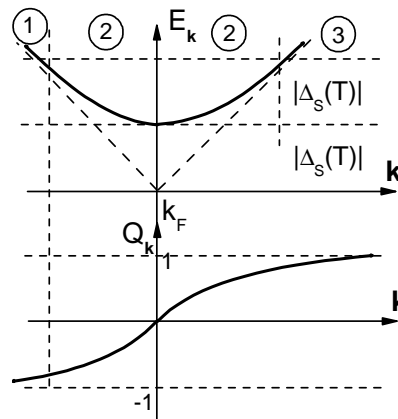


Рис. 21.3

поділася частина заряду $1 - Q_k$? Заряд же має зберігатися!

Справа у тому, що ця частина, $1 - Q_k$, перейшла до інших спарених електронів, чий заряд дещо зміниться. Ми весь час говоримо про ймовірності, оскільки у НП фазі нема повністю заповнених або повністю пустих станів, тому (і це добре видно з формули для δQ_{total}) відбувається перерозподіл спарених і вільних електронів по різних складових так, щоб задовольнити необхідній умові збереження $\delta Q_{total} = -1$.

Внесення або поява додаткового (надлишкового) заряду у НП досить, як ми могли впевнитися, складний процес. Він складається з кількох етапів; спочатку власне, сам акт внесення, який “запускає” наступні перетворення. Зокрема, можна говорити про такі: новий електрон, що з’явився у стані \mathbf{k} , “забирає” собі електрон, що належить конденсату¹, із стану $-\mathbf{k}$ (в останньому випадку також є ймовірності і присутності, і відсутності). Створена пара попадає у конденсат, а “решта” НП електрону у $-\mathbf{k}$ -стані втрачає партнера і виявляється діркою. Все разом узяте демонструє, наскільки тісний зв’язок існує у НП між конденсатом, надконденсатними бозе-частинками

¹Ми називаємо тут (і робили це інколи раніше) НП електрони *конденсатом*, вважаючи, що вони описуються єдиною хвильовою функцією. Хоча це певною мірою не так. На найнижчому рівні (а саме він відповідає справжньому конденсату) при скінченій T знаходяться не всі пари (тобто бозе-частинки) і частина з них виявляються надконденсатними. Проте і перший, і другі (якщо це пари!) утворюють колектив “НП електронів”. Саме тому надконденсатні – зв’язані – пари не є елементарними збудженнями, до яких відносяться лише *вільні* електрони.

і вільними фермі-збудженнями. І будь-які нерівноважності проявляють себе у зміні як $\delta Q_{\mathbf{k}}$ (але не δQ_{total} !), так і різних функцій розподілу, включаючи число частинок у конденсаті.

33. Релаксація заряду квазічастинок

Розглянемо релаксацію заряду у НП та оцінимо її час, тобто час встановлення рівноважного заряду у системі квазічастинок, якщо якийсь збурення вивело цей заряд із рівноваги. При цьому ми припускаємо, що кількість квазічастинок залишається незмінним. Тоді елементарним актом релаксації є перехід квазічастинки із одного стану в \mathbf{k} -просторі у інше. Проте такий перехід можливий лише за участю (поглинанням або випромінюванням) фононів.

Позначимо час релаксації τ_{ε} ; обернений час τ_{ε}^{-1} – це, як відомо, частота непружних зіткнень електронів з фононами, яка не залежить від того, у якому – N - або S -стані – знаходиться металічна система.

З підручників відомо, що ця частота

$$\tau_{\varepsilon}^{-1} = \frac{T}{\hbar} \left(\frac{T}{\Omega_D} \right)^2.$$

Якщо $T \leq T_c$, то це значить, що в цій, близький до переходу, області температур

$$\Delta_S(T) \ll T_c,$$

і виникає питання: чи всі електрон-фононні зіткнення призведуть до релаксації, або розсмоктування, заряду? Щоб пояснити це, ще раз подивимось на рис. 21.4, на якому область 1 відповідає заряду, що близький до $|e|$

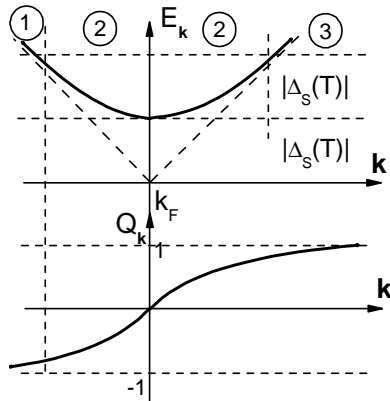


Рис. 21.4

(дірка), області 2 – будь-яка величина заряду, області 3 – заряд, близький до $e < 0$ (електрон).

Припустимо, що до зіткнення електрон мав імпульс із області 3 і кінцевий його стан також лежить в цій же області. Тоді зміна заряду, зрозуміло, не

відбувається. Подібне можна сказати і стосовно дірки з області 1. Інша справа, коли електрон знаходиться в області 2 – найбільш помітної зміни Q_k .

Переходи таких електронів вже можуть призвести до зміни заряду на величину порядку e (мова, повторю, йде про зміну заряду квазічастинки під дією електрон-фононних зіткнень). При вибраній T доля збуджень в області 2 (у порівнянні із загальною їх кількістю) складає $|\Delta_s(T)|/T$ (дійсно $f_\varepsilon \sim (e^{\varepsilon/T} + 1)^{-1} \approx [e^{|\Delta_s(T)|/T} + 1]^{-1} \approx (1/2)[1 - |\Delta_s(T)|/2T]$, де $\varepsilon \sim |\Delta_s(T)|$, оскільки в цій області $|\Delta_s(T)| \leq E_k \leq 2|\Delta_s(T)|$. Тому частота переходів, що призводять до зміни заряду, складає ту ж частину τ_ε^{-1} , і в цілому можна записати

$$\tau_Q^{-1} \approx \frac{|\Delta_s(T)|}{T} \tau_\varepsilon^{-1} \rightarrow \frac{|\Delta_s(T)|}{T_c} \tau_\varepsilon^{-1},$$

де додатково припущено, що $T_c - T \ll T_c$. Звідки випливає, що шуканий час

$$\tau_Q \approx \frac{T_c}{|\Delta_S(T)|} \tau_\varepsilon$$

і навіть прямує до безмежності, $\tau_\varepsilon \rightarrow \infty$, коли $|\Delta_S(T)| \rightarrow 0$.

І справді, прямими експериментами продемонстровано, що у НП поблизу точки переходу заряд релаксує дуже повільно, на 3-4 порядки повільніше, ніж у тому ж металі в його нормальному стані.

34. Андрєєвське відбиття

Закінчимо наш курс розглядом дуже незвичайного явища, що носить ім'я російського вченого О.Ф. Андрєєва, який належить до школи Л.Д. Ландау. Воно стосується такого процесу, як перетворення N -струму в S -струм. Як правило, це відбувається на різних NS -границях, коли тече струм з області (металу), що знаходиться у нормальному (надпровідному) стані, в область, що знаходиться у надпровідному (нормальному) стані.

Домовимося спочатку, що ми розуміємо під означенням “границя” (інколи кажуть “інтерфейс”). В найбільш прямому фізичному смислі – у НП це не різкий перехід, а деяка розмита ділянка, в якій параметр порядку, тобто щільність $|\Delta_S(T)|$, змінюється від свого максимального значення десь в глибині S -стану до нуля у N -металі. Такою може бути і область між N - та S -фазами у проміжному

стані, і на границі NS -границі між НП і нормальним металами в умовах ефекту близькості тощо. Зрозуміло, що така зміна відбуватиметься на довжині когерентності $\sim \xi_S$. Саме таку перехідну область досить плавної зміни величини параметра порядку і прийнято називати NS -границею. При цьому, незважаючи на плавність переходу, відповідні фізичні величини можуть просторово змінюватися досить швидко, як правило, це має експоненціальний характер.

Якщо ж припустити, що температура T не дуже далека від T_c , то і ξ_S буде великою (тобто така границя виявиться досить широкою). Нас буде цікавити, що відбуватиметься з електроном нормальної фази, енергія якого менша за $|\Delta_S(T)|$, коли він пересувається вздовж осі x на NS -границю з боку N -металу. Зобразимо це на рисунку 21.5 графічно.

По мірі наближення до НП області електрон все більше починає відчувати присутність щілини. Спочатку остання мала, так що електронно-подібна частинка НП, у яку перетворюється чистий електрон, матиме енергію E_k , що практично співпадає з енергією вільного електрону $\varepsilon(\mathbf{k})$. При цьому

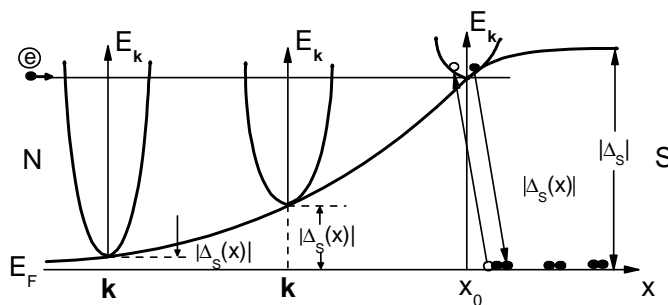


Рис. 21.5

$|\mathbf{k}| > |\mathbf{k}_F|$, $\varepsilon(\mathbf{k}) \gg |\Delta_S(x)|$, і тому $u_{\mathbf{k}}^2 \gg v_{\mathbf{k}}^2$, і ми замінили на рисунку неважливий і незмінний для щілини в даному випадку аргумент T на суттєву змінну, якою є координата x , вздовж якої за припущенням відбувається рух електрону.

У наступний момент цього руху в бік НП області, в іншій точці, щілина підросте, заряд відповідно дещо зменшиться, а імпульс стане ближче до імпульсу Фермі. Останнє може викликати подив – чому? Але треба прийняти до уваги, що рух відбувається у неоднорідному середовищі, отже імпульс не є інтегралом руху, або величиною, що зберігається. Енергія ж $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\varepsilon^2(\mathbf{k}) + |\Delta_S(x)|^2}$, навпаки, зберігатися може, тому зростання $|\Delta_S(x)|$ викличе відповідне зменшення внеску від $\varepsilon(\mathbf{k})$. Заряд і різниця $\mathbf{k} - \mathbf{k}_F$ поступово дійдуть до нуля, коли електронно-подібне збудження досягне деякої точки x_0 , в якій $E_{\mathbf{k}} = |\Delta_S(x_0)|$, тобто $\varepsilon(\mathbf{k}) = 0$, або $\mathbf{k} = \mathbf{k}_F$. Це, в свою чергу, означає, що там, де $\mathbf{k} = \mathbf{k}_F$, частинка матиме нульову групову швидкість $dE_{\mathbf{k}}/d\mathbf{k}$ і згідно з формулою $Q_{\mathbf{k}} = \varepsilon(\mathbf{k})/E_{\mathbf{k}}$, заряд $Q_{\mathbf{k}_F}$.

В цій точці x_0 відбувається відбиття від границі, і збудження переходить на ліву, діркову, вітку спектра елементарних збуджень. Його групову швидкість тепер направлена вліво; іншою мовою, з боку S -фази в N -метал рухається збудження з протилежним знаком заряду. Але рух такого заряду наліво еквівалентний рухові заряду іншого знаку направо. І таким чином ми приходимо до висновку, що електрон

увійшов у НП область, а у метал повернулася дірка, тобто відбувся просторовий переніс заряду.

Проте ми маємо зробити певні застереження. По-перше, нема ніякого зовнішнього джерела, тому загальна кількість електронів зберігається, а поява дірки нетривіальна саме з причини несхідчастого характеру розподілу електронів по імпульсах. По-друге, зміна імпульсу внаслідок неоднорідності простору (присутність границі, що призводить до відбиття). По-третє, на довжині $\sim \xi_S$ ефект близькості обумовлює те, що навіть N -метал набуває рис надпровідника і динаміка квазічастинок у ньому стає більш складною.

Всі ці процеси і явища розглянув у 1964 р. молодий тоді московський вчений О.Ф. Андреев. Він теоретично показав, що зміна заряду квазічастинки у металі поблизу НП області вказує, що у процес переносу струму залучається конденсат. При цьому заряд передається конденсату. Фізично це означає, що налітаюча на NS -границю з N -металу квазічастинка знаходить собі партнера, у парі з яким стає конденсатною, а дірка повертається у метал. Цей ефект добре спостерігається і отримав назву *андреєвське відбиття*.

Вище ми торкнулися лише випадку переходу частинки з нормальної області в НП область, коли вихідна енергія $E_k < |\Delta_S(T)|$ і всі перетворення відбуваються на відстанях, як ми говорили, $\sim \xi_S$. У протилежному випадку $E_k > |\Delta_S(T)|$ проникнення частинки у НП проходить більш просто, зміна заряду (в усякому разі, його знаку) майже не відбувається, а

довжини набагато перевищують довжину когерентності.

Ми зупинилися на цьому явищі, щоб завершуючи лекції, ще раз продемонструвати, наскільки незвична картина супроводжує існування у металах та сплавах електронної НП підсистеми, що складається з спарених і неспарених електронів. Розгляд більш складних явищ, що стосуються андреевського відбиття та НП в цілому, можна знайти у інших, в тому числі рекомендованих, підручниках та монографіях.

ЗАКЛЮЧНІ ЗАУВАЖЕННЯ

Сподіваюсь, ви перегорнули і цю, останню, сторінку лекційного курсу, який по суті є лише вступом до фізики надпровідності. Проте це важливо і означає, що ви зуміли подолати “опір” викладеного матеріалу і хоча б трохи відчувати непереборну привабливість незвичайного світу надпровідних та (на жаль, в меншій степені) надплинних явищ. Це також свідчить, що ви суттєво розширили свої уявлення про фізичні явища, познайомилися з історією майже столітніх інтелектуальних зусиль видатних дослідників, яким разом поступово вдалося зрозуміти та описати такий непростий феномен, як перехід твердих і рідких речовин у стан, коли той чи інший фундаментальний рух в них може відбуватися без будь-якого опору. Кожний новий крок у проникненні в глибини багато в чому загадкових “надявищ” вважався проривом і, як правило, отримував найвище визнання наукової спільноти у вигляді Нобелівської премії з фізики. В результаті, мабуть, жодна інша область фізичної науки в цілому не має стільки Нобелівських лауреатів, скільки їх припадає на фізику низьких температур. Гадаю, буде слушно нагадати їх імена:

– 1913 р., **Х. Камерлінг-Оннес** (Голландія) – за дослідження властивостей речовини при низьких температурах, які привели до отримання рідкого гелію;

– 1962 р., **Л.Д. Ландау** (СРСР) – за піонерські теорії конденсованої матерії, особливо рідкого гелію;

– 1972 р., **Дж. Бардін, Л. Купер, Р. Шріффер** (США) – за створення теорії надпровідності;

– 1978 р., **П.Л. Капиця** (СРСР) – за фундаментальні відкриття та винаходи в області низьких температур;

– 1987 р., **Г. Беднорц, А. Мюллер** (Швейцарія) – за важливий прорив у відкритті надпровідності в керамічних матеріалах;

– 1996 р., **Д. Лі, Д. Ошерофф, Р. Річардсон** (США) – за відкриття надплинності гелію-3;

– 2001 р., **Е. Корнелл, В. Кетерле, К. Віман** (США) – за відкриття конденсації Бозе-Ейнштейна та дослідження властивостей конденсату;

– 2003 р., **О.О. Абрикосов** (США), **В.Л. Гінзбург** (Росія), **Е. Леггетт** (США) – за піонерський внесок у теорію надпровідників та надплинних рідин.

Можна з упевненістю стверджувати, що цей перелік досягнень не є закінченим або зупиненим. Обидва “надявища” носять фундаментальний характер і у багатьох аспектах ще недостатньо досліджені, зберігаючи чимало таємниць.

Безумовно, лекції не охоплюють весь діапазон фізики “надявищ” і фактично відповідають лише першому етапу у вивченні надплинності та надпровідності. Відібраний матеріал, як вже

згадувалось у Передмові, концентрувався на найбільш важливих їх сторонах – насамперед, надпровідності, але виклад адаптувався до можливостей студентів так, щоб вони могли зрозуміти фізичну суть ефектів, що розглядаються, і були спроможними звернутися до більш повних монографій і підручників. Тому в лекціях ми намагалися обминати важкі викладки та складні міркування. З цього випливає, що ознайомившись з спрощеним курсом, ви далеко не увійшли у вже не нову, але активно зростаючу область фізичної науки, яка зветься фізикою надплинності та надпровідності. Одні її розділи майже завершені, проте багато інших бурно розвиваються і зараз навіть важко уявити, коли вони будуть завершуватись. В першу чергу, це стосується високотемпературних надпровідників, теорія яких не побудована, властивості (на початок XXI-го століття) залишаються багато в чому незрозумілими, а використання з цих причин вельми обмежене. Про ще більш цікаву і складну проблему майбутнього – так звані кімнатно-температурні надпровідники – ми згадували у Передмові.

Легкими подальші пошуки не будуть, але можна не сумніватися, що і у теоретичних, і у експериментальних досліджень надплинності та надпровідності, а також у їх застосуваннях попереду ще багато цікавого і несподіваного.

Рекомендована література

1. П.Де Жен. *Сверхпроводимость металлов и сплавов*. “Мир” (1968).
2. Э. Линтон. *Сверхпроводимость*. “Мир” (1971).
3. Д. Тилли, Дж. Тилли. *Сверхтекучесть и сверхпроводимость*. “Мир” (1977).
4. В.З. Кресин. *Сверхпроводимость и сверхтекучесть*. “Наука” (1978).
5. М. Тинкхам. *Введение в сверхпроводимость*. “Атомиздат” (1980).
6. И.М. Дмитренко. *В мире сверхпроводимости*. “Наукова думка” (1981).
7. В.В. Шмидт. *Введение в физику сверхпроводников*. “Физматгиз” (1982).
8. А.А. Абрикосов. *Основы теории металлов*. “Наука” (1987).
9. А.С. Давыдов. *Высокотемпературная сверхпроводимость*. “Наукова думка” (1990).
10. В.П. Минеев, К.В. Самохин. *Введение в теорию сверхпроводимости*. Из-во МФТИ (1998).
11. Я. Довгий. *Чарівне явище надпровідність*. “Євросвіт” (2000).
12. В.Л. Гинзбург, Е.А. Андрюшин. *Сверхпроводимость*. “Альфа М” (2006).
13. В.М. Локтев. *Надпровідність – від гелієвих до кімнатних температур*. Світогляд, № 2 (2011).

Корисні сайти в Інтернеті

www.superconductors.org

www.webelements.com

www.elsevier.com/locate/cryogenics

www.sciencedirect.com/science/journal/09214534

Співвідношення між енергетичними одиницями

Одиниці	см ⁻¹	сек ⁻¹	єрг	eV	°K	$\frac{\text{кал}}{\text{моль}}$
1 см ⁻¹	1	$2,99793 \cdot 10^{10}$	$1,98618 \cdot 10^{-16}$	$1,23977 \cdot 10^{-4}$	1,4388	2,8584
1 сек ⁻¹	$3,33563 \cdot 10^{-11}$	1	$6,6252 \cdot 10^{-27}$	$4,13541 \cdot 10^{-15}$	$4,79940 \cdot 10^{-11}$	$0,95447 \cdot 10^{-10}$
1 єрг	$5,0348 \cdot 10^{15}$	$1,5094 \cdot 10^{26}$	1	$6,2414 \cdot 10^{11}$	$7,244 \cdot 10^{15}$	$1,4407 \cdot 10^{16}$
1 eV	$8,066 \cdot 10^3$	$2,41814 \cdot 10^{14}$	$1,60221 \cdot 10^{-12}$	1	$1,16054 \cdot 10^4$	$2,3082 \cdot 10^4$
1 °K	0,69502	$2,0836 \cdot 10^{10}$	$1,38044 \cdot 10^{-16}$	$0,86167 \cdot 10^{-4}$	1	1,9888
1 $\frac{\text{кал}}{\text{моль}}$	0,34947	$1,0477 \cdot 10^{10}$	$6,9412 \cdot 10^{-17}$	$4,3323 \cdot 10^{-5}$	0,50282	1

$N_{\text{Авогадро}} = 6,022 \cdot 10^{23}$ – число Авогадро

$c = 2,9979 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$ – швидкість світла

$e = 4,8032 \cdot 10^{-10}$ CGSE – заряд електрона

$\hbar = 1,054 \cdot 10^{-27}$ єрг·сек – постійна Планка

$m_e = 9,11 \cdot 10^{-28}$ г – маса електрона

$\frac{\hbar^2}{me^2} = 0,529 \cdot 10^{-8}$ см – боровський радіус

$\frac{me^4}{\hbar^2} = 4,36 \cdot 10^{-11}$ єрг = 27,21 eV – атомна одиниця енергії