

Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України  
Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**Савчук Олег Володимирович**

УДК 539.172.17, 539.172.12

**ДИСЕРТАЦІЯ**  
**Рівняння стану сильновзаємодійної матерії та**  
**релятивістські зіткнення важких іонів**

01.04.02 Теоретична фізика

10 Природничі науки (104 Фізика та астрономія)

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

---

(підпис, ініціали та прізвище здобувача)

Науковий керівник

Горенштейн Марк Ісакович,  
доктор фіз.-мат. наук, професор

Київ – 2024

## Анотація

**Савчук О.В. Рівняння стану сильно взаємодіючої матерії та релятивістські зіткнення важких іонів.** - Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

*Дисертація на здобуття наукового степеня доктора філософії за спеціальністю 01.04.02 "Теоретична фізика" (104 - Фізика та астрономія). - Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова Національної академії наук України, Київ, 2024.*

Теорія сильних взаємодій - квантова хромодинаміка добре визначена математично. Проте, немає надійного способу отримувати передбачення у області температур, що відповідають густинам звичайних ядер та нейтронних зірок, а також частини раннього Всесвіту. Для дослідження властивостей такої речовини, як кварки і глюони, потрібні емпіричні знання, які отримуються на прискорювачах заряджених частинок.

Різноманітні спостереження, отримані у експериментах по зіткненню важких іонів, описуються за допомогою різних, зазвичай феноменологічних, моделей. Система, яка утворюється, еволюціонує, і тому важливим є саме динамічний опис. Таким чином, стандартними підходами вважаються релятивістська гідродинаміка та транспортні моделі. Окремо можуть описуватися рання або кінцева стадія, при цьому важливо будувати самоузгоджений перехід від одного опису до іншого.

Властивості матерії регулюються в динамічному підході заданням потенціалу взаємодії чи рівняння стану, яке можна обчислити методами рівноважної статистичної фізики. Граткова квантова хромодинаміка дозволяє отримувати знання про властивості матерії в умовах нульового баріонного заряду. Розширення граткових обчислень на скінченний баріонний потенціал є теоретичним викликом. Важливо, щоб будь-яке рівняння стану збігалось з гратковими даними.

Обчислюючи коефіцієнти ряду Тейлора, які пов'язані з кумулянтами зарядів, можна зробити аналітичне продовження граткових даних на скінчен-

ний баріонний потенціал. При цьому збіжність ряду може бути обмежена особливістю термодинамічного потенціалу. Теорія Лі-Янга пов'язує особливості у комплексній площині з фазовими переходами і, визначивши радіус збіжності ряду та положення сингулярності, можна оцінити положення критичної точки деконфайнменту. Проте, існують і інші, не критичні особливості або інші фазові переходи, які також можуть стати причинами розбіжності ряду. Як приклад розглядається фазовий перехід у ядерній матерії, властивості якого вважаються добре вивченими.

Оскільки коефіцієнти розкладу тиску у ряд Тейлора за хімічними потенціалами пов'язані з флуктуаціями, вважається, що їх вимірювання у релятивістських зіткненнях важких іонів може стати важливим джерелом інформації про рівняння стану. На практиці, зв'язок експерименту з рівноважними результатами статистичного підходу є складним викликом. Зіткнення - це динамічний процес, і густина та температура системи змінюються, а не відповідають одній точці. Швидка зміна властивостей середовища може призвести до ефектів пам'яті, пов'язаних зі скінченним часом релаксації у системі. Крім того, детектори вимірюють кінцеві імпульси частинок, що утворилися у релятивістських зіткненнях. Флуктуації зарядів, що зберігаються, якщо спостерігати всі частинки, повинні зникати. Тому, зазвичай, розглядається певна підсистема. Класична статистична фізика не передбачає кореляцій між імпульсами частинок. У цьому випадку імовірність частинки потрапити у підпростір детектування чи уникнути його повинна описуватися випробуванням Бернуллі. Сукупність частинок у цьому випадку відповідатиме біноміальному розподілу. Ці припущення застосовуються для обчислення залежності кумулянтів від імовірності детектування та порівнюються з передбаченнями транспортної моделі. Відхилення від біноміального розподілу можуть свідчити про існування кореляцій у імпульсному просторі, які можуть бути викликані законами збереження енергії імпульсу, квантовими ефектами, колективним рухом.

Саме зв'язок між флуктуаціями у координатному просторі та флуктуаціями у імпульсному просторі розглянуто у методі підансамблів. У цьому випадку

ку статистична сума розбивається на добуток статистичних сум підсистем, які скорельовані виключно законами збереження, і будь-які взаємодії між ними є нехтовними (наприклад, об'єм кожної з підсистем є набагато більшим за площу поверхні між ними). Це дозволяє обчислити флуктуації як функції розміру підсистеми в умовах точного збереження заряду та пов'язати їх з флуктуаціями у великому канонічному ансамблі. При наявності колективного руху різні об'єми можуть мати різні швидкості колективних потоків. Тоді, виділяючи певну швидкість чи імпульс, можна виділяти певний об'єм системи і порівнювати його з іншим імпульсом - об'ємом. При цьому флуктуації частинок повинні бути сильно пов'язані з рівнянням стану.

Певні незбіжності виникають при порівнянні результатів такого підходу з експериментом. У цьому випадку можливими можуть бути адронні реакції у розрідженій матерії, яка утворюється після кварк-глюонної плазми і описується адронним афтербернером, або у локальному, а не глобальному законі збереження заряду, який виникає внаслідок початкового стану системи та скінченої швидкості поширення сигналу у середовищі (швидкість звуку). Модифікація сигналу, виміряного колаборацією ALICE у CERN, може бути викликана анігіляціями баріон-антибаріонних пар, що призводить до зменшення числа протонів та антипротонів приблизно на п'ятнадцять відсотків. Але невідомо, як описувати регенерацію цих пар, які, наприклад, утворюються у процесах, де кілька (в середньому п'ять) пі-мезонів утворюють пару баріон-антибаріон. Два можливих сценарія є прийнятними, як впливає з дослідження: локальне збереження заряду та анігіляції, або повна регенерація всіх пар, що анігілювали. Інші спостережувані, такі, що мають різну поведінку в цих двох сценаріях, запропоновано.

В умовах локальної рівноваги кожний елемент рідини повинен мати флуктуації, що відповідають рівноважній термодинаміці, при цьому збереження заряду виконується завдяки кореляціям між різними елементами. Ця нелокальна кореляція зазвичай називається балансуною. Адже вона забезпечує те, що флуктуації зарядів, просумовані по всім гідродинамічним елементам, зникають. У загальному випадку можна розглянути відгук системи на флу-

ктуацію у якомусь фрагменті системи, при цьому балануюча кореляція спочатку повинна бути локалізована до сусідніх елементів системи, а потім вже поширюватися далі. Відгук у лінійному наближенні можна описати функціями Гріна. Підійти можуть функції Гріна з лінійаризованої гідродинаміки. Подібний підхід застосовувався до обчислення кореляції баріонного, електричного та дивного зарядів на Великому адронному колайдері. Гідродинамічне рівняння у цьому випадку зводилося до рівняння дифузії. Проте, в умовах прискорювачів, що відповідають нижчим енергіям, такий підхід необхідно модифікувати. У цьому випадку, внаслідок скінченної густини заряду, рівняння дифузії перетворюється на рівняння дифузії з конвекцією, і флуктуації баріонного, електричного та дивного зарядів стають зв'язаними з флуктуаціями енергії та імпульсу. Тому розглядається еволюція  $7 \times 7$  матриці кореляцій. Оцінено вплив недіагональних елементів цієї матриці та наскільки впливає закон збереження енергії та імпульсу на кореляції електричного, баріонного та дивного зарядів. Результати свідчать, що різноманітні особливості рівняння стану можуть проявлятися у особливостях балануючої кореляції, що робить її цікавою спостережуваною.

Як приклад цього підходу також було розглянуто флуктуації енергії-імпульсу в умовах, що нагадують експеримент ALICE у CERN. У цьому випадку можна окремо розглядати дифузію та гідродинамічну еволюцію енергії-імпульсу. Цікавою спостережуваною тут є так званий горб у кореляціях поперечного імпульсу як функції відносної швидкості та азимутального кута. Існують ідеї, які пов'язують цей горб з кореляціями початкового стану, утворені у глюонних трубках, або жорсткими процесами, пов'язаними з джетами. Але важливо також враховувати кореляцію, що утворилася у рівноважній кварк-глюонній плазмі. Саме таку кореляцію і було отримано, використовуючи гідродинаміку. Результати не заперечують попередні оцінки зсувної в'язкості середовища, та інших особливостей гідродинамічного моделювання і досить непогано, якісно описують експериментальні дані. Найбільшу невизначеність у результат вносить саме моделювання початкової кореляції, тому можна стверджувати, що кореляції поперечного імпульсу є цікавою спостережува-

ною для вивчення початкового стану.

Моделювання зіткнень важких іонів за допомогою транспортних моделей є важливим в умовах низьких енергій. У цьому випадку транспортний опис можна використовувати від початку до кінця. Невизначеним елементом у цьому процесі є енергія взаємодії. Розглядається модифікація цієї енергії з метою інтегрувати фазовий перехід першого роду. Властивості цього переходу в динамічній системі досліджуються. У GSI є діюча та майбутня програма, яка сильно спирається на виміри дилептонів. Саме їх і було обрано в якості спостережуваної, яка досліджувалася. Знайдено, що з фазовим переходом спостерігаються значні модифікації кількості дилептонів, їх спектральні властивості. Цей сигнал може гіпотетично спостерігатися у майбутніх експериментах на прискорювачі SIS100.

**Ключові слова:** ядро-ядерні зіткнення, релятивістська гідродинаміка, рівняння стану, транспортні моделі, флуктуації, анігіляції, адронна фаза.

**Список публікацій:**

1. O. Savchuk, “Sensitivity of transverse momentum correlations to early-stage and thermal fluctuations”, (2024), [arXiv:2402.12504 \[hep-ph\]](#)
2. O. Savchuk та S. Pratt, “Correlations of conserved quantities at finite baryon density”, *Phys. Rev. C* **109**, 024910 (2024), [arXiv:2311.02046 \[nucl-th\]](#)
3. T. Reichert, O. Savchuk, A. Kittiratpattana, P. Li, J. Steinheimer, M. Gorenstein та M. Bleicher, “Decoding the flow evolution in Au+Au reactions at 1.23A GeV using hadron flow correlations and dileptons”, *Phys. Lett. B* **841**, 137947 (2023), [arXiv:2302.13919 \[nucl-th\]](#)
4. O. Savchuk, A. Motornenko, J. Steinheimer, V. Vovchenko, M. Bleicher, M. Gorenstein та T. Galatyuk, “Enhanced dilepton emission from a phase transition in dense matter”, (2022), [arXiv:2209.05267 \[nucl-th\]](#)
5. O. Savchuk, R. V. Poberezhnyuk та M. I. Gorenstein, “Possible origin of HADES data on proton number fluctuations in Au+Au collisions”, *Physics Letters B* **835**, 137540 (2022)

6. O. Savchuk, V. Vovchenko, V. Koch, J. Steinheimer ta H. Stoecker, “Constraining baryon annihilation in the hadronic phase of heavy-ion collisions via event-by-event fluctuations”, *Phys. Lett. B* **827**, 136983 (2022), [arXiv:2106.08239 \[hep-ph\]](#)
7. R. V. Poberezhnyuk, O. Savchuk, M. I. Gorenstein, V. Vovchenko ta H. Stoecker, “Higher order conserved charge fluctuations inside the mixed phase”, (2020), [arXiv:2011.06420 \[hep-ph\]](#)
8. M. Gazdzicki, M. I. Gorenstein, O. Savchuk ta L. Tinti, “Notes on statistical ensembles in the Cell Model”, *Int. J. Mod. Phys. E* **29**, 2050060 (2020)
9. R. V. Poberezhnyuk, O. Savchuk, M. I. Gorenstein, V. Vovchenko, K. Taradiy, V. V. Begun, L. Satarov, J. Steinheimer ta H. Stoecker, “Critical point fluctuations: Finite size and global charge conservation effects”, *Phys. Rev. C* **102**, 024908 (2020), [arXiv:2004.14358 \[hep-ph\]](#)
10. V. Vovchenko, O. Savchuk, R. V. Poberezhnyuk, M. I. Gorenstein ta V. Koch, “Connecting fluctuation measurements in heavy-ion collisions with the grand-canonical susceptibilities”, *Phys. Lett. B* **811**, 135868 (2020), [arXiv:2003.13905 \[hep-ph\]](#)
11. O. Savchuk, R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko ta M. I. Gorenstein, “Binomial acceptance corrections for particle number distributions in high-energy reactions”, *Phys. Rev. C* **101**, 024917 (2020), [arXiv:1911.03426 \[hep-ph\]](#)
12. O. Savchuk, V. Vovchenko, R. V. Poberezhnyuk, M. I. Gorenstein ta H. Stoecker, “Traces of the nuclear liquid-gas phase transition in the analytic properties of hot QCD”, *Phys. Rev. C* **101**, 035205 (2020), [arXiv:1909.04461 \[hep-ph\]](#)

## Abstract

**Savchuk O.V. The Equation of State of Strongly Interacting Matter and Relativistic Heavy-Ion Collisions.** - Qualifying scientific work in the form of a manuscript.

*Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in the specialty 01.04.02 "Theoretical Physics" (104 - Physics and Astronomy). - Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2024.*

The theory of strong interactions, quantum chromodynamics, is well-defined mathematically. However, there is no reliable method for making predictions in the temperature range corresponding to the densities of ordinary nuclei and neutron stars, as well as parts of the early Universe. To explore the properties of such matter, like quarks and gluons, empirical knowledge obtained at accelerators of charged particles is required.

Various observations made in experiments on heavy-ion collisions are described using different, usually phenomenological, models. The system that forms evolves, hence a dynamic description is important. Thus, standard approaches include relativistic hydrodynamics and transport models. Separately, the early or final stage may be described, making it important to build a self-consistent transition from one description to another.

The properties of matter are regulated in a dynamic approach by specifying the interaction potential or the equation of state, which can be calculated using the methods of equilibrium statistical physics. Lattice quantum chromodynamics allows for obtaining knowledge about the properties of matter under conditions of zero baryonic charge. Extending lattice calculations to a finite baryonic potential is a theoretical challenge. It is important that any equation of state should coincide with lattice data.

By calculating the Taylor series coefficients, which are related to the cumulants of charges, it is possible to analytically continue the lattice data to a finite baryonic potential. However, the convergence of the series may be limited by the singularity of the thermodynamic potential. The Lee-Yang theory relates singularities in



the complex plane to phase transitions, and thus, by determining the radius of convergence of the series and the position of the singularity, it is possible to estimate the location of the critical point of deconfinement. However, there are also other, non-critical singularities, or other phase transitions that can also cause series divergence. As an example, a phase transition in nuclear matter, whose properties are considered well-studied, is considered.

Since the coefficients of the pressure series expansion in terms of chemical potentials are related to fluctuations, it is considered that their measurement in relativistic heavy-ion collisions can become an important source of information about the equation of state. In practice, linking experiment to the equilibrium results of the statistical approach is a challenging task. Collisions are a dynamic process, and the density and temperature of the system change rather than correspond to a single point. Rapid changes in the properties of the medium can lead to memory effects associated with the finite relaxation time in the system. Moreover, detectors measure the final momenta of particles formed in relativistic collisions. Charge fluctuations that persist if all particles are observed should disappear. Therefore, a certain subsystem is usually considered. Classical statistical physics does not predict correlations between particle momenta. In this case, the probability of a particle entering the detection subspace or avoiding it should be described by a Bernoulli trial. The set of particles in this case corresponds to a binomial distribution. These assumptions are used to calculate the dependence of cumulants on the probability of detection and are compared with the predictions of the transport model. Deviations from the binomial distribution can indicate the existence of correlations in momentum space, which can be caused by conservation laws of energy and momentum, quantum effects, collective motion.

The relationship between fluctuations in coordinate space and fluctuations in momentum space is considered in the method of subensembles. In this case, the statistical sum is divided into the product of statistical sums of subsystems, which are correlated exclusively by conservation laws, and any interactions between them are negligible (for example, the volume of each subsystem is much larger than the surface area between them). This allows calculating fluctuations as a function

of the subsystem size under conditions of exact charge conservation and relating them to fluctuations in the grand canonical ensemble. In the presence of collective motion, different volumes may have different speeds of collective flows. Then, by selecting a certain speed or momentum, a certain volume of the system can be distinguished and compared with another momentum-volume. In this case, particle fluctuations should be strongly related to the equation of state.

Certain discrepancies arise when comparing the results of this approach with the experiment. In this case, possible reasons could be hadronic reactions in the diluted matter formed after the quark-gluon plasma and described by a hadronic afterburner, or in a local rather than global charge conservation law arising due to the initial state of the system and the finite speed of signal propagation in the medium (speed of sound). Modification of the signal measured by the ALICE collaboration at CERN could be caused by annihilations of baryon-antibaryon pairs, leading to a reduction in the number of protons and antiprotons by approximately fifteen percent. However, it is unknown how to describe the regeneration of these pairs, which, for example, are formed in processes where several (on average five) pi-mesons form a baryon-antibaryon pair. Two possible scenarios are considered acceptable, as the study suggests: local charge conservation and annihilations, or complete regeneration of all pairs that have annihilated. Other observables, which behave differently in these two scenarios, are proposed.

In conditions of local equilibrium, each fluid element must have fluctuations corresponding to equilibrium thermodynamics, with charge conservation ensured by correlations between different elements. This non-local correlation is usually called balancing. It ensures that the charge fluctuations summed over all hydrodynamic elements disappear. In general, the system's response to a fluctuation in some part of the system can initially be localized to neighboring elements and then spread further. The response in the linear approximation can be described by Green's functions. Green's functions from linearized hydrodynamics may apply. Such an approach was used to calculate the correlation of baryonic, electric, and strange charges at the Large Hadron Collider. In this case, the hydrodynamic equation was reduced to a diffusion equation. However, in conditions of accelerators correspondi-

ng to lower energies, this approach needs to be modified. In this case, due to the finite charge density, the diffusion equation transforms into a diffusion equation with convection, and fluctuations of baryonic, electric, and strange charges become linked with fluctuations of energy and momentum. Therefore, the evolution of a  $7 \times 7$  correlation matrix is considered. The impact of off-diagonal elements of this matrix and how much the conservation law of energy and momentum affects the correlations of electric, baryonic, and strange charges are estimated. The results indicate that various features of the equation of state can manifest in the features of the balancing correlation, making it an interesting observable.

As an example of this approach, fluctuations of energy-momentum in conditions resembling the ALICE experiment at CERN were also considered. In this case, diffusion and the hydrodynamic evolution of energy-momentum can be separately considered. An interesting observable here is the so-called ridge in the correlations of transverse momentum as a function of relative rapidity and azimuthal angle. There are ideas that link this ridge to correlations in the initial state, formed in gluon tubes, or hard processes related to jets. However, it is also important to consider the correlation formed in the equilibrated quark-gluon plasma. Such a correlation was obtained using hydrodynamics. The results do not contradict previous estimates of the shear viscosity of the medium, and other features of hydrodynamic modeling and quite well qualitatively describe the experimental data. The greatest uncertainty in the result is introduced by the modeling of the initial correlation, so it can be asserted that correlations of transverse momentum are an interesting observable for studying the initial state.

Modeling collisions of heavy ions using transport models is important in low-energy conditions. In this case, the transport description can be used from start to finish. An undefined element in this process is the interaction energy. Modifying this energy to integrate a first-order phase transition is considered. The properties of this transition in a dynamic system are investigated. GSI has an existing and future program that heavily relies on measurements of dileptons. They were chosen as the observable to be studied. It was found that with the phase transition, significant modifications to the number of dileptons, their spectral properties, are

observed. This signal could potentially be observed in future experiments at the SIS100 accelerator.

**Keywords:** nucleus-nucleus collisions, relativistic hydrodynamics, equation of state, transport models, fluctuations, annihilations, hadronic phase.

**List of publications:**

1. O. Savchuk, “Sensitivity of transverse momentum correlations to early-stage and thermal fluctuations”, (2024), [arXiv:2402.12504 \[hep-ph\]](#)
2. O. Savchuk ra S. Pratt, “Correlations of conserved quantities at finite baryon density”, [Phys. Rev. C \*\*109\*\*, 024910 \(2024\)](#), [arXiv:2311.02046 \[nucl-th\]](#)
3. T. Reichert, O. Savchuk, A. Kittiratpattana, P. Li, J. Steinheimer, M. Gorenstein ra M. Bleicher, “Decoding the flow evolution in Au+Au reactions at 1.23A GeV using hadron flow correlations and dileptons”, [Phys. Lett. B \*\*841\*\*, 137947 \(2023\)](#), [arXiv:2302.13919 \[nucl-th\]](#)
4. O. Savchuk, A. Motornenko, J. Steinheimer, V. Vovchenko, M. Bleicher, M. Gorenstein ra T. Galatyuk, “Enhanced dilepton emission from a phase transition in dense matter”, (2022), [arXiv:2209.05267 \[nucl-th\]](#)
5. O. Savchuk, R. V. Poberezhnyuk ra M. I. Gorenstein, “Possible origin of HADES data on proton number fluctuations in Au+Au collisions”, [Physics Letters B \*\*835\*\*, 137540 \(2022\)](#)
6. O. Savchuk, V. Vovchenko, V. Koch, J. Steinheimer ra H. Stoecker, “Constraining baryon annihilation in the hadronic phase of heavy-ion collisions via event-by-event fluctuations”, [Phys. Lett. B \*\*827\*\*, 136983 \(2022\)](#), [arXiv:2106.08239 \[hep-ph\]](#)
7. R. V. Poberezhnyuk, O. Savchuk, M. I. Gorenstein, V. Vovchenko ra H. Stoecker, “Higher order conserved charge fluctuations inside the mixed phase”, (2020), [arXiv:2011.06420 \[hep-ph\]](#)

8. M. Gazdzicki, M. I. Gorenstein, O. Savchuk ta L. Tinti, “Notes on statistical ensembles in the Cell Model”, [Int. J. Mod. Phys. E \*\*29\*\*, 2050060 \(2020\)](#)
9. R. V. Poberezhnyuk, O. Savchuk, M. I. Gorenstein, V. Vovchenko, K. Taradiy, V. V. Begun, L. Satarov, J. Steinheimer ta H. Stoecker, “Critical point fluctuations: Finite size and global charge conservation effects”, [Phys. Rev. C \*\*102\*\*, 024908 \(2020\), arXiv:2004.14358 \[hep-ph\]](#)
10. V. Vovchenko, O. Savchuk, R. V. Poberezhnyuk, M. I. Gorenstein ta V. Koch, “Connecting fluctuation measurements in heavy-ion collisions with the grand-canonical susceptibilities”, [Phys. Lett. B \*\*811\*\*, 135868 \(2020\), arXiv:2003.13905 \[hep-ph\]](#)
11. O. Savchuk, R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko ta M. I. Gorenstein, “Binomial acceptance corrections for particle number distributions in high-energy reactions”, [Phys. Rev. C\*\*101\*\*, 024917 \(2020\), arXiv:1911.03426 \[hep-ph\]](#)
12. O. Savchuk, V. Vovchenko, R. V. Poberezhnyuk, M. I. Gorenstein ta H. Stoecker, “Traces of the nuclear liquid-gas phase transition in the analytic properties of hot QCD”, [Phys. Rev. C \*\*101\*\*, 035205 \(2020\), arXiv:1909.04461 \[hep-ph\]](#)

# Зміст

<b>1</b>	<b>Мотивація</b>	<b>21</b>
1.1	Адрони та колоровий конфейнмент . . . . .	21
1.2	Кварк-глюонна плазма . . . . .	24
1.3	Теорія зіткнень важких іонів . . . . .	25
1.3.1	Гідродинамічні підходи . . . . .	26
1.3.2	Транспортні підходи . . . . .	28
<b>2</b>	<b>Сліди фазового переходу рідина-газ у аналітичних властивостях квантової хромодинаміки</b>	<b>31</b>
2.1	Вступ . . . . .	31
2.2	Термодинамічні точки розгалуження фазового переходу рідина-газ . . . . .	33
2.3	Точки розгалуження переходу ядерної рідини-газу . . . . .	35
2.3.1	Модель ван дер Ваальса . . . . .	35
2.3.2	Модель Скірма . . . . .	38
2.3.3	Модель Валечки . . . . .	39
2.3.4	Порівняння між моделями . . . . .	41
2.4	Газ адронних резонансів і ядерна речовина . . . . .	42
2.4.1	Точки розгалуження . . . . .	42
2.4.2	Ряд Тейлора . . . . .	45
2.5	Висновки . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Посилення народження дилептонів як сигнал фазового переходу</b>	<b>53</b>

3.1	Динамічний опис зіткнень важких іонів з фазовим переходом .	53
3.1.1	Рівняння стану . . . . .	54
3.1.2	Емісія дилептонів . . . . .	61
3.2	Результати . . . . .	63
3.3	Висновки . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Флуктуації зарядів що зберігаються</b>	<b>72</b>
4.1	Флуктуації числа протонів . . . . .	72
4.1.1	Вступ . . . . .	72
4.1.2	Модель Біноміальної Рестрації частинок у зіткненнях важких ядер . . . . .	74
4.1.3	Флуктуації в умовах експерименту HADES . . . . .	83
4.2	Кореляції зарядів що зберігаються при скінченій густині заряду	89
4.2.1	Загальна теорія кореляцій, обумовлених збереженням . .	89
4.2.2	Гідродинамічний відгук . . . . .	93
4.2.3	Розширення Бьоркена як фонове середовище . . . . .	95
4.2.4	Проектування Кореляцій на Фінальні Стани Адронів . .	98
4.2.5	Рівняння стану . . . . .	101
4.2.6	Результати . . . . .	105
4.2.7	Висновки . . . . .	109
4.3	Локальне збереження заряду і адронні реакції . . . . .	118
4.3.1	Анігіляції та флуктуації . . . . .	118
4.3.2	Порівняння з експериментом . . . . .	122
4.3.3	Локальне збереження числа баріонів . . . . .	123
4.3.4	Чи можна їх розрізнити? . . . . .	125
4.4	Флуктуації поперечного імпульсу . . . . .	128
4.4.1	Теоретичний метод . . . . .	128
4.4.2	Кореляції поперечного імпульсу . . . . .	132
4.4.3	Висновки . . . . .	136
<b>5</b>	<b>Висновки</b>	<b>138</b>

# Вступ

**Актуальність теми.** Існує чотири типи фундаментальних взаємодій: сильна, електромагнітна, слабка та гравітаційна. Цей поділ зумовлений масштабами, на яких діють ці сили, а також особливостями фундаментальних частинок, яким ці взаємодії відповідають. Найзвичнішими для нас є електромагнітна та гравітаційна взаємодії. Гравітація утримує людину на поверхні планети та примушує тіла падати. Вивчення властивостей тіл, які падають, стало основою для зародження фізики.

Електромагнітна взаємодія відповідає за властивості атомів хімічних елементів, зокрема утримує молекулу ДНК разом. Тонкий контроль струму і напруги електричних елементів лежить в основі сучасної електротехніки. Слабкі взаємодії проявляються при дуже великих енергіях у релятивістських зіткненнях лептонів та в ядерних перетвореннях, в лабораторіях та Всесвіті. Сильні взаємодії також можуть бути виявлені в умовах високої енергії. Крім того, вони існують у нормальних умовах і в певному сенсі є визначальними. Достатньо зазначити будову ядра, утвореного з протонів та нейтронів, які взаємодіють саме сильною взаємодією. Або розглядати будову протона чи нейтрона, які складаються з кварків. У цьому випадку виявляється, що майже вся маса частинки викликана взаємодією і знаходиться у переносниках взаємодії, які народжуються з вакууму.

Компактні об'єкти в всесвіті, такі як нейтронні зірки, складаються з густої ядерної матерії. Їх злиття породжує гравітаційні хвилі, які можуть бути виявлені. У цьому випадку невідомою фізикою є саме сильна взаємодія, яка визначає властивості речовини всередині такої зірки. Нажаль, немає надійного теоретичного методу для обчислення величин з квантової хромодинаміки



в умовах ненульової густини заряду, отже, наші знання про цю область можуть бути отримані або з експерименту, або за допомогою феноменологічних моделей.

Саме для того, щоб краще визначити залежність тиску від густини такої матерії, розпочався розвиток прискорювачів при низьких та середніх енергіях, зіткнення на яких, якраз, продукують відповідну густину енергії. Це вимагає розвитку моделей, які відповідають експериментальним спостереженням. Крім того, самі спостереження повинні бути правильно відібрані, і всі їх особливості та недоліки повинні бути зрозумілі та контрольовані. Усе це є мотивацією до вивчення рівнянь стану сильновзаємодіючої матерії та релятивістських зіткнень важких іонів.

**Мета і задачі дослідження.** Метою дисертаційної роботи є моделювання зіткнень протонів і важких ядер за допомогою гідродинамічних, транспортних та статистичних моделей. За допомогою цих моделей повинен проводитися аналіз експериментальних даних. Чутливість різних спостережуваних до особливостей рівняння стану аналізується, щоб підібрати найкращу стратегію для сучасних та майбутніх експериментів.

Зокрема у дисертації було розглянуто:

- Вплив існування фазового переходу типу рідина-газ у ядерній матерії на інтерпретацію ґраткових обчислень в умовах нульової густини.
- Особливості експериментального спостереження флуктуацій числа частинок у імпульсному просторі.
- Вплив вибору підсистеми у якій проводиться вимірювання флуктуацій, а також їх зв'язок з флуктуаціями рівноважної системи у великому канонічному ансамблі.
- Вплив законів збереження заряду та енергії-імпульсу на кореляції частинок, що утворюються в ультрарелятивістських зіткненнях на LHC та RHIC.

- Вплив протонних анігіляцій у адронній фазі на спостережувані після гідродинамічного опису системи.
- Ефекти фазового переходу при густинах, що будуть досягнуті у майбутніх експериментах SIS100 (FAIR) на народження пар лептонів.
- Особливості вимірювання флуктуацій в експериментах при низьких та середніх енергіях.

Об'єктом дослідження є сильновзаємодіюча речовина, яка утворюється в зіткненнях протонів і важких ядер чи може існувати у компактних об'єктах всесвіту.

Предметом дослідження є термодинамічні властивості сильновзаємодіючої матерії та особливості їх пошуку у умовах близьких до реальних експериментів.

**Методи дослідження.** Щоб дослідити динамічний процес зіткнення важких ядер, застосовано гідродинамічні модель в наближенні розв'язку Бйоркена, а також транспортну модель UrQMD, що описує пружні та непружні зіткнення адронів і включає потенціал взаємодії. Статистичний розгляд включав використання термодинамічних ансамблів і наближення середнього поля. Для побудови моделі експериментального спостереження було розглянуто різні статистичні підходи.

**Наукова новизна одержаних результатів.** В дисертаційній роботі новими результатами є:

- Отримано оцінку положення термодинамічної особливості, викликаній існуванням переходу рідина-газ при нульовому баріонному хімічному потенціалі у моделі ван дер Ваалса. Досліджено точність оцінки радіусу збіжності ряду Тейлора з урахуванням існуючої статистики.
- Отримано співвідношення між флуктуаціями у всьому імпульсному просторі та флуктуаціями у підсистемі. Розглянуто старші моменти випад-

кових величин.

- Досліджено термодинамічні флуктуації числа частинок у підсистемі, якщо вся система знаходиться у канонічному ансамблі. Отримано їх зв'язок з флуктуаціями у великому канонічному ансамблі.
- Оцінено радіус дії локального збереження заряду та величину відповідної кореляції в умовах експерименту ALICE на LHC.
- Враховано вплив ефектів протон анти-протонних анігіляцій у адронній фазі на варіацію протонного числа.
- Розглянуто гіпотетичний фазовий перехід при густині, що відповідає двом-трьом нормальним густинам ядерної матерії. Обчислено ефекти цього переходу на спектри та множини дилептонів при енергіях, що відповідають майбутній експериментальній програмі у FAIR.
- Знайдено потенційні виклики, які можуть виникнути при дослідженнях флуктуацій в експериментах при низьких та середніх енергіях.

**Особистий внесок здобувача.** Пораховано положення найближчого нуля Лі-Янга у комплексній площині як функцію температури в адрон-резонансному газі феноменологічним рівнянням стану ван дер Ваальса. Для цього побудовано алгоритм, що послідовно знаходить коефіцієнти ряду Тейлора (до 120-го).

Досліджено вплив інтервалу рапідності, в якому відбувається експериментальне спостереження, на флуктуації зарядів та чисел адронів у транспортній моделі UrQMD. Отримано теоретичне співвідношення між цими флуктуаціями у всій системі та підсистемі, якщо між частинками відсутні будь-які кореляції за винятком закону збереження.

Отримано функціональну залежність флуктуацій у підсистемі канонічного ансамблю з флуктуаціями у великому канонічному ансамблі, якщо розбиття на підсистеми відбувається у координатному просторі та поверхневими ефектами можна знехтувати.

За допомогою транспортної моделі обчислено вплив анігіляцій у адронній фазі на флуктуації протонного числа, а також ефекти локального збереження заряду.

Розглянуто систему рівнянь, що описують гідродинамічний відгук на збурення у семи зарядах, що зберігаються (баріонному, електричному, дивному, енергії та імпульсу) для фонового розв'язку, що відповідає моделі Бйоркена. Обчислено рівноважні кореляції, що виникають внаслідок закону збереження, їх особливості в умовах ненульової густини заряду. Рівноважна кореляція енергії імпульсу була обчислена в сценарії, близькому до експерименту ALICE у CERN.

Використовуючи модифікацію залежного від густини потенціалу, що включає гіпотетичний фазовий перехід, проведено термодинамічне усереднення простору-часу з метою отримати температуру та густину, які система досягає у процесі зіткнення. Після чого отримані температура та густина були використані, щоб отримати спектри ди-лептонів. При цьому розглянуто три різних можливих рівняння стану.

Обчислено флуктуації протонів, нейтронів, легких ядер у імовірнісних моделях, що відтворюють умови експерименту. Застосовано формули біноміальної імовірності частинки опинитися всередині чи зовні системи, в якій проводиться спостереження.

# Розділ 1

## Мотивація

### 1.1 Адрони та колоровий конфейнмент

Загалом будь-які частинки можуть формувати зв'язані стани, якщо їх взаємодія притягальна. Наприклад,  $e^-$  та  $e^+$  можуть формувати позитроній,  $\mu^-$  та  $\mu^+$  також формують зв'язаний стан, з'єднаний електромагнітною взаємодією. Невідомі зв'язані стани, сформовані виключно слабкою взаємодією, хоча гіпотетичні важкі нейтрино з розширень Стандартної моделі могли б формувати зв'язаний стан [13]. Натомість, сильна взаємодія формує множину зв'язаних станів, названих *адронами*.

Не кожна комбінація кварків та антикварків виступає як зв'язаний стан у природі. Експериментально відомі лише стани  $q\bar{q}$ , що називаються *мезонами*, та стани  $qqq$ , що називаються *баріонами*. Пояснення відсутності станів на кшталт  $qq$  або  $qq\bar{q}$  включає властивість кварків, звану "колір". Вона не пов'язана зі спектром відбитого або пропущеного світла, званого кольором у нашому повсякденному житті, але існує аналогія, яка буде пояснена далі. Колір кварків має 3 власні значення, часто позначені як  $r$ ,  $g$  та  $b$ . Кількість кольорів  $N_c = 3$  та необхідність їх введення обґрунтована кількома причинами:

- Експериментально відомі адрони, такі як  $\Delta^{++}(uuu)$  або  $\Omega^-(sss)$ , були б заборонені за принципом Паулі, якби єдиним квантовим числом кварків

був спі́н. Виміряний спі́н  $\Delta^{++}$  становить  $3/2$ , що свідчить про те, що кожен кварк  $u$ , з якого він складається, має проєкцію спіну  $1/2$ . Отже, без додаткових квантових чисел усі кварки  $u$  перебувають у тому ж квантовому стані, що порушує принцип Паулі. З кольором  $\Delta^{++}$  та  $\Omega^-$  дозволені принципом Паулі, оскільки кожен кварк перебуває в іншому кольоровому стані.

- Низка експериментів виміряла співвідношення вироблених адронів до пар  $\mu^- \mu^+$  в зіткненнях,  $R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$ . Це співвідношення пропорційне  $N_c$  і вимірювання показують  $N_c = 3$ .
- Якщо прийняти стандартну модель з довільною кількістю кольорів  $N_c$ , то вона була б неренормалізованою через так звану аксіальну аномалію в електрослабкому секторі. Аномалія скасовується лише для  $N_c = 3$ . Як побічна заувага, це скасування аномалії також вимагає, щоб ферміони були згруповані в сім'ї кварк-лептон.
- Усі адрони, знайдені в природі, інваріантні відносно перетворень у кольоровому просторі, або в математичних термінах, адрони є синглетними представленнями групи  $SU(3)$  (детальніше дивіться в додатку 5). Тут аналогія з нашим повсякденним кольором відіграє роль: як червоний, зелений і синій нашаровуючись дають білий, кольорові кварки складаються в "безколірні" адрони. Тут "безколірність" насправді означає, що адрони не змінюються - є інваріантними - під час перетворень  $SU(3)$  у кольоровому просторі. Виявляється (дивіться додаток 5 для деталей), що комбінації  $qqq$ ,  $q\bar{q}$ ,  $q\bar{q}q\bar{q}$ ,  $qqqq\bar{q}$  мають синглетні представлення групи  $SU(3)$  і тому можуть бути безколірними, тоді як комбінації типу  $qq\bar{q}$ ,  $qq$ ,  $qqqq$  або окремі кварки не можуть бути безколірними за жодних умов.

Спостережуване існування лише безколірних об'єктів у природі часто називають *конфайнментом* або просто конфайнментом, оскільки колір утримується всередині адронів. Визнаючи роль кольору, мікроскопічна квантова тео-

рія поля, яка описує сильну взаємодію, називається квантовою хромодинамікою. Крім баріонів та мезонів конфайнмент дозволяє багато інших комбінацій кварків, включаючи пентакварк  $qqqq\bar{q}$ . Варто зауважити, що у 2015 році два види пентакварків були відкриті колаборацією LHCb на Великому адронному колайдері в CERN [14].

Конфайнмент передбачає, що жоден окремий вільний кварк не може бути спостережений. Це твердження було експериментально перевірено кількома експериментами [15], вимірюючи переріз для включної реакції

$$pp \rightarrow q(\bar{q})X.$$

Найкращий верхній ліміт для перерізу такої реакції наразі встановлено колаборацією CMS і становить  $\sigma < 2.3 \times 10^{-40} \text{ см}^2$ . Це потрібно порівняти з загальним перерізом  $pp$ , який становить порядку 100 mb або  $10^{-25} \text{ см}^2$ . Це означає, що якщо окремі кварки виробляються в  $pp$  зіткненнях, то максимальна середня частота становить  $10^{-15}$  на зіткнення. До цього часу жоден окремий кварк не був спостережений.

Квантова хромодинаміка (КХД) пояснює конфайнмент наступним чином. З ґраткового формулювання КХД можна отримати феноменологічний потенціал кварк-антикварк взаємодії

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \kappa r, \quad (1.1)$$

Квантова хромодинаміка пояснює конфайнмент наступним чином. З ґраткового формулювання КХД можна отримати феноменологічний потенціал взаємодії кварк-антикварк, який зростає з відстанню. Якщо спробувати відокремити кварк та антикварк та відтягнути їх один від одного, їхня енергія взаємодії достатньо велика, щоб виробити нову пару кварк-антикварк з вакууму. Таким чином, замість відокремленого кварка та антикварка отримуються два мезони. Це пояснення не надає повного розуміння конфайнменту. Наприклад, досі незрозуміло, за яких умов кварки не конфайнуються.

КХД передбачає, що при високій енергії зіткнення взаємодія між квар-

ками стає малою. Асимптотична свобода передбачає, що існує можливість отримати деконфайновані кварки при достатньо високій температурі та щільності.

## 1.2 Кварк-глюонна плазма

Як зазначалося раніше, з асимптотичної свободи КХД випливає, що дуже гаряча та/або дуже щільна речовина складається з майже не взаємодіючих кварків. Було запропоновано [16], що шляхом нагрівання та стиснення речовини в зіткненнях важких іонів отримують майже ідеальний газ *деконфайнованих* кварків.

Асимптотична свобода була теоретично встановлена в рамках теорії поля нульової температури для взаємодії двох кварків. У зіткненні важких іонів фізика значно відрізняється: розмір системи набагато більший, ніж розмір окремого нуклону, і тому можна говорити про формування середовища. Чи буде асимптотична свобода зберігатися у тепловій ванні, створеній середовищем? На це питання відповів Едуард Шуряк у 1978 році в однопетльовому наближенні. Він розрахував пропагатор глюона та потенціал між двома кварками в тепловому середовищі з температурою  $T$  [17]:

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi r} e^{-mr} \quad (1.2)$$

$$m^2 = \frac{1}{3} g^2 (N_c + N_f/2) T^2 \quad (1.3)$$

Цей потенціал схожий на потенціал Дебая в класичній плазмі, тому гаряче та щільне середовище кварків було названо кварк-глюонною плазмою. Вона була отримана експериментально на Колайдері важких іонів з релятивістськими енергіями (RHIC) у 2000 році [18–21]. Крім того, було показано, що кварк-глюонна плазма поводить себе як рідина з дуже низькою в'язкістю [22–24]. Низька в'язкість свідчить про те, що КГП, отримана в зіткненнях Au+Au на RHIC, є сильно взаємодіючою, на відміну від ранішої картини слабо взаємодіючого газу (дивіться [25]).



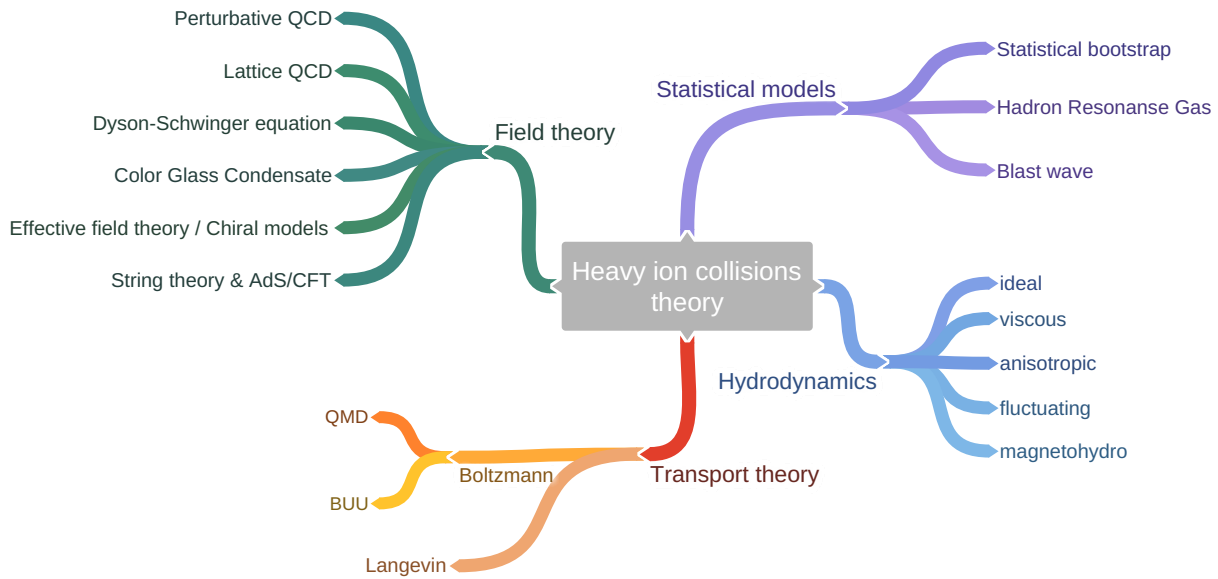


Рис. 1.1: Теоретичні підходи до зіткнень важких іонів [26].

Які фізичні властивості кварк-глюонної плазми? Як і за яких умов відбувається перехід від гадронної матерії до кварк-глюонної плазми? Чи є це фазовим переходом або лише плавним переходом? Якщо фазовий перехід, то якого порядку? Чи існує критична точка і якщо так, де вона розташована і які критичні індекси? Чи існують додаткові фази? Це деякі з питань, які мотивують сучасні експерименти з зіткненнями важких іонів та теоретичні дослідження. Багато з цих питань безпосередньо пов'язані з фазовою діаграмою сильно взаємодіючої матерії.

### 1.3 Теорія зіткнень важких іонів

Теорія зіткнень важких іонів є досить різноманітною: підходи варіюються від повністю мікроскопічних і статичних, решіткової КХД до макроскопічної релятивістської гідродинаміки. Теоретичні підходи можна поділити на чотири гілки, як показано на рис. 1.1: поля теоретичні, транспортні, гідродинамічні та статистичні. Ця дисертація присвячена головним чином транспортним і гідродинамічним і статистичному підходам. Саме тому обговорення їх є більш розширеним.

### 1.3.1 Гідродинамічні підходи

На відміну від статистичних моделей, гідродинамічні підходи описують еволюцію згустку сильновзаємодіючої матерії - фаєрболу, починаючи від термалізації до заморожування (стадії коли частинки перестають взаємодіяти і їх можна проектувати на детектори). Дві необхідні умови застосування гідродинаміки: кожна частина системи перебуває у безпосередній близькості до локальної термодинамічної рівноваги, а середня довжина вільного пробігу набагато менший, ніж розмір системи,

$$l_{mfp} \ll L. \quad (1.4)$$

Типові швидкості розширення при зіткненнях важких іонів порівнянні зі швидкістю світла, тому гідродинамічна теорія має бути релятивістською. Релятивістську гідродинаміку було започатковано у 1953 році роботами Ландау за багаточастинкове виробництво при високоенергетичних зіткненнях протон-протон, протон-ядерний або ядро-ядерні зіткнення [27, 28]. Модель Ландау припускала високу енергію зіткнення, так що два зіткнувшись ядра представляються як плоскі диски через ефект Лоренца. Після зіткнення ці два диски повністю зупиняються, а результуючий плоский диск розширюється уздовж. Модель передбачає гаусівський спектр швидкостей, який дійсно спостерігався на AGS та SPS для чистого заряду. На вищих енергіях ядра не здаються зупиняються так швидко, як передбачає модель Ландау, але скоріше проходять одне крізь інше. Це представлено плоскою ділянкою  $dN/dy$  на серединній швидкості. Таку ситуацію добре описує гідродинамічна модель Бйоркена [29], яка припускає постійний рух вздовж осі зіткнення. Модель Бйоркена дозволяє зробити просту оцінку густини енергії, досягнутої у зіткненні, яка використовується для порівняння з критичною енергетичною щільністю 1 ГеВ/фм<sup>3</sup>, і судити, чи була вироблена кварк-глюонна плазма.

Сучасні підходи (недавній огляд [30]) виходять далеко за межі цих апроксимацій. Однак основні рівняння гідродинаміки, які є нічим іншим, як збереженням енергії, імпульсу та зарядів, записані в тій же формі, як у фунда-

ментальних роботах Ландау [27, 28]:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (1.5)$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (1.6)$$

де  $T^{\mu\nu}$  - тензор енергії-імпульсу рідини, а  $j^\mu$  - 4-струм збережених зарядів.

Що змінилося, так це

- розмірність проблеми
- рівняння стану (EoS)
- початкові умови та симуляції подія за подією
- умови заморожування
- в'язкі корекції

Поперечне розширення включено в симуляції (2+1)D та (3+1)D. Це важливо для опису поперечного потоку, зокрема залежності  $v_2(p_T)$ , де  $v_2$  - друга Фур'є гармоніка розподілу азимутального кута  $\frac{dN}{d\varphi}$ . На відміну від моделей Ландау або Бйоркена, ці часткові диференціальні рівняння не можуть бути аналітично розв'язані та мають бути розв'язані чисельно.

Рівняння стану (EoS) закриває систему рівнянь еволюції гідродинаміки, зв'язуючи тиск з енергетичною щільністю та щільностями збережених зарядів:

$$p = p(\epsilon, n) \quad (1.7)$$

Всі властивості рідини задовані в EoS. Велика перевага гідродинаміки полягає в тому, що EoS може бути явно змінено. Таким чином можна вивчати наслідки передбачуваного переходу від кварк-глюонної плазми до газу адронів на експериментальні спостереження [31]. При низькому  $\mu_b$  EoS обмежено

решітковим КХД, але при вищому  $\mu_b$  потрібно застосовувати феноменологічні моделі.

### 1.3.2 Транспортні підходи

Найбільш загальні мікроскопічні підходи до зіткнень важких іонів, які враховують нерівноважну еволюцію, базуються на релятивістській транспортній теорії. Транспортна теорія формулюється в термінах функції розподілу однієї частинки  $f(t, \vec{r}, \vec{p})$ , яка є не чим іншим, як густиною у фазовому просторі. Припускаючи, що кількість частинок у даній області фазового простору може змінюватися лише через зіткнення та розпади, ігноруючи всі інші джерела кореляцій, можна записати

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \frac{p}{E} + \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \vec{\nabla} U = I_{coll}, \quad (1.8)$$

де  $I_{coll}$  - вираз, який називається інтегралом зіткнень. Це нерелятивістське класичне рівняння Больцмана, але воно все ще актуальне для квантових систем. Воно може бути отримане з квантової ієрархії рівнянь Боголюбова-Борна-Гріна-Кірквуда-Івона ББГКІ для  $N$ -частинкової матриці щільності, обмежуючи її на рівні двох частинок та виконуючи трансформацію Вігнера. Це обмеження припускає, що густина не надто висока:

$$\lambda_{\text{Compton}} \ll l_{mfp}, \quad (1.9)$$

де  $\lambda_{\text{Compton}} = \frac{hc}{M}$  - довжина хвилі Комптона, і  $l_{mfp} \simeq (\rho\sigma)^{-1}$  - середній вільний шлях. Це визначає межу застосовності для рівняння Больцмана, яку, однак, можна подолати, вводячи різні ступені свободи. Інше припущення, зроблене під час обмеження, - так звана гіпотеза молекулярного хаосу:

$$f_2(p_1, x_1; p_2, x_2) = f(p_1, x_1)f(p_2, x_2), \quad (1.10)$$

що передбачає ігнорування всіх кореляцій у фазовому просторі між частинками. Інтеграл зіткнень для класичного випадку записується як

$$I_{coll} = \int \frac{d^3 p_2}{E_2} \frac{d^3 p'_1}{E_1} \frac{d^3 p'_2}{E'_2} \times W(p, p_2 \rightarrow p'_1, p'_2) \times (f'_1 f'_2 - f f_2). \quad (1.11)$$

У квантовому випадку рівняння Больцмана вперше було сформульовано Уелінгом та Уленбеком, і тому рівняння називається ВUU (Больцман-Уелінг-Уленбек):

$$I_{coll} = \int \frac{d^3 p_2}{E_2} \frac{d^3 p'_1}{E_1} \frac{d^3 p'_2}{E'_2} \times W(p, p_2 \rightarrow p'_1, p'_2) \times (f'_1 f'_2 (1 + a f)(1 + a f_2) - f f_2 (1 + a f'_1)(1 + a f'_2)). \quad (1.12)$$

Тут  $a = 1$  для бозонів і  $a = -1$  для ферміонів. Можна побачити, що квантове рівняння ВUU відрізняється від класичного Больцмана лише коефіцієнтами, які враховують квантову статистику в терміні зіткнення.

Фізичний сенс рівнянь Больцмана або ВUU дуже простий: для даного інтервалу часу  $dt$  кількість частинок у комірці фазового простору змінилася (ліва частина) настільки ж, наскільки кількість частинок, що ввійшли в неї з інших комірок через зіткнення або розпади (права частина, термін прибутку) мінус кількість частинок, що втекли в інші комірки через зіткнення або розпади (права частина, термін витоку). Рівняння Больцмана може бути записане в явно коваріантній нотації:

$$p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + m \frac{\partial K^\mu f}{\partial p^\mu} = I_{coll}, \quad (1.13)$$

де  $K^\mu$  - вектор чотиривимірної сили Мінковського. Рівняння Больцмана, як записане вище, відноситься лише до одного виду частинок, які зазнають  $2 \rightarrow 2$  еластичних зіткнень. При зіткненнях важких іонів маємо справу з сотнями різних адронів, які також можуть зіткнутися нееластично, розпадатися та формувати резонанси. У цьому випадку рівняння Больцмана пере-

творюється на зв'язану систему рівнянь - стільки, скільки є видів адронів. Зазвичай цю систему розв'язують за допомогою симуляцій методом Монте-Карло, де частинки поширюються згідно з рівняннями руху, отриманими з лівої частини рівняння 1.13, та зіткнення/розпади симулюються за допомогою інтегралу зіткнень.

Залежно від ступеня свободи, існують чисто гадронні транспортні коди, які використовуються при низьких енергіях [32—36], підходи, що включають адрони та струни (наприклад, RQMD [37], UrQMD [38], HSD [39], JAM [40], GiBUU [41]), тільки партони (наприклад, [42, 43], Каскад партонів Занга [44], BAMPS [45]) або партони, адрони та струни разом, наприклад, PHSD [46] або AMPT [47].

## Розділ 2

# Сліди фазового переходу рідина-газ у аналітичних властивостях квантової хромодинаміки

### 2.1 Вступ

Термодинамічні властивості КХД при скінченних температурах та щільностях є важливими питаннями сучасної високоенергетичної ядерної фізики. Особливий інтерес представляє фазова структура матерії КХД та характер переходу між адронами та партонами. При нульовій баріонній щільності, тобто при  $\mu_B = 0$ , цей перехід є плавним, згідно з симуляціями КХД на ґратці [48]. Природа цього переходу при скінченних щільностях ще не встановлена. Експериментальний пошук гіпотетичної хіральної критичної точки (КТ) КХД [49] виконується при ненульових проміжних баріонних щільностях за допомогою вимірювань флуктуацій у зіткненнях важких іонів [50—53] а також непрямих методів решіткової теорії калібрування, таких як розклад Тейлора навколо  $\mu_B = 0$  [54, 55] або аналітичне продовження з уявного

$\mu_B$  [56, 57]. Поточні дані високої якості КХД на решітці при фізичних масах кварків не показують доказів або ознак хіральної КТ і не підтримують існування фазового переходу першого або другого порядку при помірних баріонних щільностях  $\mu_B/T \lesssim \pi$  [58–61]. Розташування або навіть існування тієї КТ не встановлено дотепер. Можливості для фазового переходу при великих баріонних щільностях можуть бути досліджені в зіткненнях важких іонів при помірних енергіях зіткнення, таких як експеримент CBM в FAIR [62], або за допомогою точних спостережень за злиттям нейтронних зірок та астрономії гравітаційних хвиль [63, 64].

На відміну від хіральної КТ КХД, існування фазового переходу між ядерною рідиною та газом з асоційованою КТ при  $T_c \simeq 20$  MeV і  $\mu_B^c \simeq 900$  MeV краще встановлене як теоретично [65–69] так і експериментально [70–72] (див. Ref. [73] для поточних емпіричних оцінок розташування КТ). Цей перехід також доступний на решітці через ефективну теорію [74]. Нещодавно було вказано, що критичність ядерної матерії має значний вплив на вразливість збережених зарядів у гарячій матерії КХД, як у околицях регіону температури плавного переходу при  $\mu_B = 0$  [75], так і вздовж феноменологічної кривої заморожування в зіткненнях важких іонів [76–78]. Незважаючи на те, що ядерний фазовий перехід закінчується при  $T_c \sim 20$  MeV, його залишки, здається, виживають в певних спостережуваних величинах до значно вищих температур.

Наявність фазового переходу та КТ відбивається в аналітичних властивостях термодинамічного потенціалу. Функція тиску, зокрема, стає багатозначною функцією хімічного потенціалу і виявляє особливості гілки розрізу [79]. При підкритичних температурах ці особливості відповідають спінодальним нестабільностям, при  $T = T_c$  особливості зливаються в КТ, а при  $T > T_c$  особливості лежать у комплексних значеннях хімічного потенціалу [80]. Фазові переходи згладжуються в скінченному об'ємі, їх залишки там характеризуються нулями Лі-Янга великого термодинамічного потенціалу [81, 82].



## 2.2 Термодинамічні точки розгалуження фазового переходу рідина-газ

Спочатку розгляньмо систему взаємодіючих нуклонів як класичний реальний газ, описаний рівнянням ван дер Ваальса(vdW). Тиск задається [83]

$$p(T, n) = \frac{T n}{1 - b n} - a n^2, \quad (2.1)$$

де  $a > 0$  і  $b > 0$  відповідно відповідають притягувальним і відштовхувальним взаємодіям. У великому канонічному ансамблі (GCE) густина числа частинок  $n(T, \mu)$  визначається через трансцендентне рівняння [84]:

$$e^{\mu/T} = \frac{n}{\phi(T) (1 - b n)} \exp \left[ \frac{b n}{1 - b n} - \frac{2 a n}{T} \right]. \quad (2.2)$$

Тут

$$\phi(T) = \frac{d m^2 T}{2 \pi^2} K_2(m/T), \quad (2.3)$$

де  $d$  - фактор виродження, а  $m$  - маса частинки<sup>1</sup>. Підставляючи  $n(T, \mu)$  у Рівняння (2.1), можна відновити функцію тиску GCE, тобто повний термодинамічний потенціал у GCE.

При заданих значеннях  $T$  і (комплексного)  $\mu$ , Рівняння (2.2) може мати більше одного розв'язку, що означає, що  $n(T, \mu)$  є багатозначною функцією. Ця багатозначність зумовлює існування точок розгалуження. Ранні дослідження точок розгалуження для класичного рівняння ван дер Ваальса можна знайти у [85]. Тут ми представляємо систематичний аналіз поведінки точок розгалуження, пов'язаних з переходом рідина-газ у ядерній матерії, та їхньої релевантності для фазової діаграми КХД.

---

<sup>1</sup>У нашому розгляді  $d = 4$ ,  $m = 938$  MeV для нуклонів. Ми ігноруємо невелику різницю між масами протонів і нейтронів.

Точки розгалуження  $n(T, \mu)$  визначаються через рівняння [79]

$$(\partial\mu/\partial n)_T = 0 . \quad (2.4)$$

Застосувавши (2.2) це дає

$$\frac{2an_{\text{br}}}{T} (1 - bn_{\text{br}})^2 = 1. \quad (2.5)$$

Рівняння (2.5) є кубічним рівнянням для  $n_{\text{br}}$ , яке визначає точки розгалуження.  $\mu_{\text{br}}$  відновлюється шляхом підстановки  $n_{\text{br}}$  у Рівняння (2.2).

Кубічне рівняння (2.5) має три корені, які явно отримуються за допомогою формул Кардано:

$$n_{\text{br}1,2} = \frac{1}{b} \left( -\frac{q_1 + q_2}{2} \pm i\sqrt{3}\frac{q_1 - q_2}{2} + \frac{2}{3} \right), \quad (2.6)$$

$$n_{\text{br}3} = \frac{1}{b} \left( q_1 + q_2 + \frac{2}{3} \right), \quad (2.7)$$

де  $q_{1,2} = \sqrt[3]{A \pm \sqrt{\Delta}}$  з

$$A = \frac{1}{108} \left( \frac{27b}{a} T - 4 \right), \quad \Delta = A^2 - \frac{1}{9^3}. \quad (2.8)$$

Третій корінь,  $n_{\text{br}3}$ , заданий Рівнянням (2.7), є дійсним при всіх значеннях  $T$  і більший за обмежуючу густину об'єму виключення ван дер Ваальса:  $n_{\text{br}3} > 1/b$ . Отже,  $n_{\text{br}3}$  не доступний у регіоні фізичних розв'язків при будь-якій температурі і, схоже, не пов'язаний з існуванням переходу першого роду у рівнянні ван дер Ваальса.  $n_{\text{br}3}$  тому буде виключений з розгляду в подальшому.

Поведінка двох відповідних коренів (2.6) квалітативно залежить від значення температури. Два корені є дійсними при субкритичних температурах,  $\Delta < 0 \Leftrightarrow T < T_c = 8a/(27b)$ . Вони відповідають точкам спінодалі субкритичних ізотерм, тобто  $(\partial p/\partial n)_T = 0$ .

При критичній температурі,  $\Delta = 0$ ,  $T = T_c$ , два корені стають збіжними.

Вони збігаються з розташуванням КТ,  $n_{\text{br}1} = n_{\text{br}2} = n_c = 1/(3b)$ .

При надкритичних температурах,  $\Delta > 0 \Leftrightarrow T > T_c$ , два корені відповідають парі комплексно спряжених чисел, тобто сингулярності лежать у комплексній площині. Це є проявом так званого переходу кросовера [79].

У цій роботі ми розглядаємо лише аналітичні властивості чистих фаз і не будемо розглядати конструкцію змішаної фази Максвелла.

## 2.3 Точки розгалуження переходу ядерної рідини-газу

У цьому розділі оцінюється залежність від температури розташування точок розгалуження, асоційованих з переходом ядерної рідини-газу, за допомогою різних моделей ядерної речовини. Нижче наведено список розглянутих моделей.

### 2.3.1 Модель ван дер Ваальса

Як найпростішу модель для переходу ядерної рідини-газу ми беремо класичне рівняння ван дер Ваальса (2.1) для нуклонів. Ми беремо значення параметрів vdW  $a = 329 \text{ MeV фм}^3$  і  $b = 3.42 \text{ фм}^3$  з [86]. Ці значення параметрів дають енергію зв'язку  $16 \text{ MeV}$  у основному стані ядра при  $n = n_0 = 0.16 \text{ фм}^{-3}$  у моделі vdW, розширеній для включення статистики Фермі (див. нижче). Розташування точок розгалуження оцінюються за допомогою рівнянь (2.2) та (2.5). Класичне рівняння vdW передбачає перехід ядерної рідини-газу з КТ при наступних значеннях температури та густини:

$$T_c = \frac{8a}{27b} \simeq 28.5 \text{ MeV}, \quad n_c = \frac{1}{3b} \simeq 0.10 \text{ фм}^{-3}. \quad (2.9)$$

Модель відображає якісні особливості, асоційовані з переходом першого роду, але не є точною при малих температурах, де статистику Фермі-Дірака не можна ігнорувати. З тих самих причин класичне рівняння vdW переоцінює

значення критичної температури приблизно на 10 MeV [86, 87].

Квантові статистичні ефекти враховуються у моделі *квантового ван дер Ваальса* (QvdW) [86]. Модель QvdW визначається наступними рівняннями:

$$p(T, \mu) = p_{\text{id}}(T, \mu^*) - a n^2, \quad (2.10)$$

$$n(T, \mu) = (1 - b n) n_{\text{id}}(T, \mu^*), \quad (2.11)$$

$$\mu^* = \mu - b p_{\text{id}}(T, \mu^*) + 2 a n. \quad (2.12)$$

Тут  $n_{\text{id}}$ ,  $p_{\text{id}}$  відповідно є густиною та тиском ідеального газу Фермі. У наближенні Больцмана рівняння (2.10)-(2.12) зводяться до класичних рівнянь vdW (2.1) та (2.2).

Термодинамічні функції при фіксованих  $T$  та  $\mu$  зазвичай визначаються шляхом чисельного розв'язання рівняння (2.12) відносно  $\mu^*$ , що потім дозволяє розраховувати всі інші величини. Значення параметрів vdW такі ж, як і для класичної моделі vdW вище. Модель QvdW передбачає КТ при  $T_c \simeq 19.7$  MeV та  $n_c \simeq 0.07$  фм<sup>-3</sup> ( $\mu_c \simeq 908$  MeV).

Необхідно оцінити похідну  $(\partial\mu/\partial n)_T$ , щоб визначити термодинамічні точки розгалуження. Для цього ми застосовуємо похідну по  $n$  при фіксованому  $T$  до рівнянь (2.11) та (2.12), що дозволяє явно визначити  $(\partial\mu/\partial n)_T$ . Результуюче рівняння  $(\partial\mu/\partial n)_T = 0$  для точок розгалуження має вигляд

$$\frac{2 a n_{\text{br}}}{T} (1 - b n_{\text{br}})^2 \omega_{\text{id}}(T, \mu_{\text{br}}^*) = 1. \quad (2.13)$$

Тут  $\omega_{\text{id}}(T, \mu^*)$  є нормованою варіацією флуктуацій числа частинок ідеального квантового газу у GCE:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{id}}(T, \mu^*) = 1 - \frac{d\eta}{2\pi^2 n_{\text{id}}} \int_0^\infty dk k^2 \\ \times \left[ \exp\left(\frac{\sqrt{m^2 + k^2} - \mu^*}{T}\right) + \eta \right]^{-2}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

з  $\eta = +1$  для ферміонів. У наближенні Максвелла-Больцмана ( $\eta = 0$ ) маємо

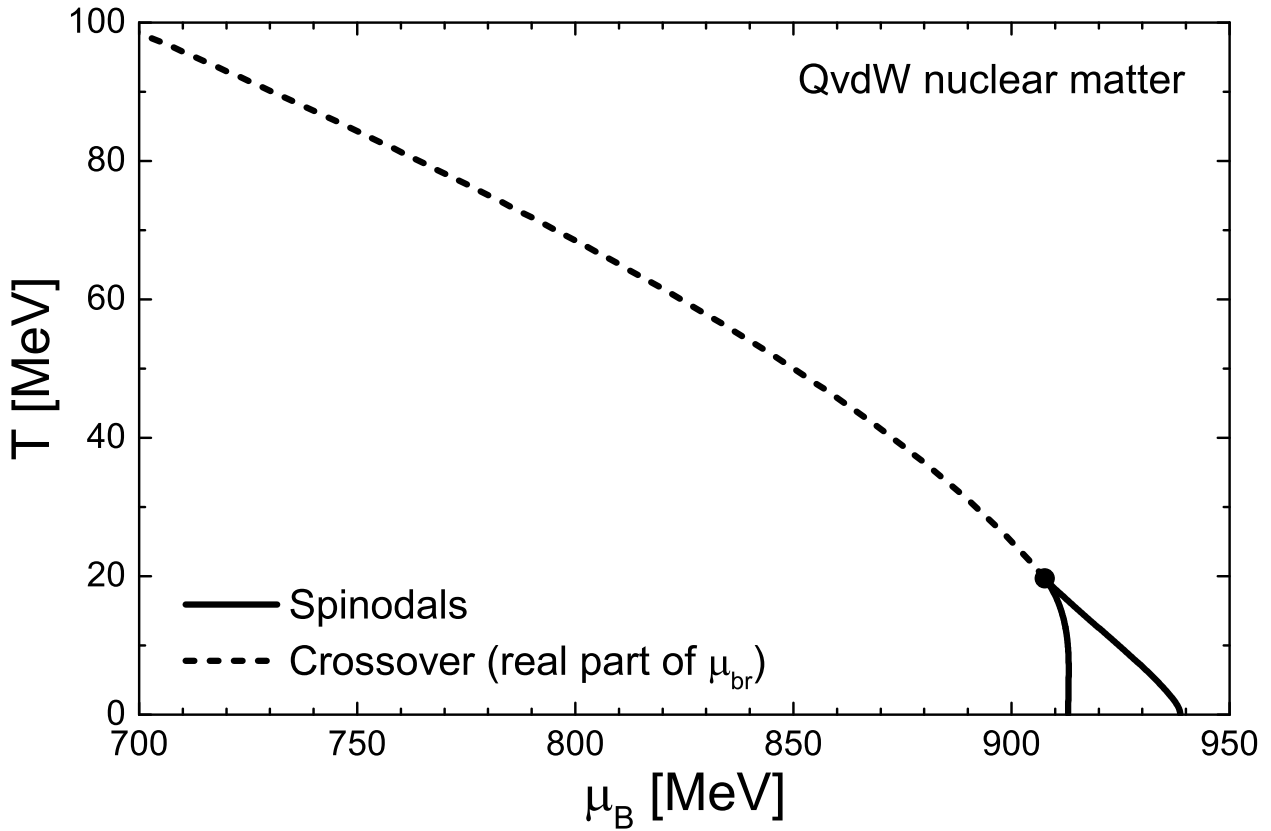


Рис. 2.1: Розташування термодинамічних точок розгалуження, асоційованих з переходом ядерної рідини-газу, у площині  $\mu_B$ - $T$ , оцінене в межах квантової моделі ван дер Ваальса ядерної речовини. Дві суцільні лінії зображують дві спінодали переходу ядерної рідини-газу при  $T < T_c$ . Пунктирна лінія відповідає дійсній частині точки розгалуження кросовера  $\mu_{br}$  при  $T > T_c$ . Коло представляє КТ.

$\omega_{id} = 1$  і рівняння (2.13) зводиться до рівняння (2.5) класичної моделі vdW.

Тут ми розв'язуємо рівняння (2.13) чисельно, щоб визначити  $\mu_{br}^*$ <sup>2</sup>. При  $T = T_c$  розв'язок рівняння (2.13) відповідає КТ. Ми використовуємо КТ як початкову точку чисельної процедури і рухаємося маленькими кроками за температурою незалежно для  $T > T_c$  (кросовер) і  $T < T_c$  (перехід першого роду), використовуючи розв'язок на попередньому кроці як початкове наближення для наступного.

Рисунок 2.1 зображує отримані значення хімічного потенціалу, що відповідають точкам розгалуження. При  $T < T_c$  є два дійсні розв'язки, які відповідають спінодалі переходу першого роду, як обговорювалося у Розділі 2.2 для класичного рівняння vdW. Ці розв'язки зображені на Рисунку 2.1 двома су-

<sup>2</sup> $n_{br}$  розраховується за даним  $\mu_{br}^*$  з рівняння (2.11)

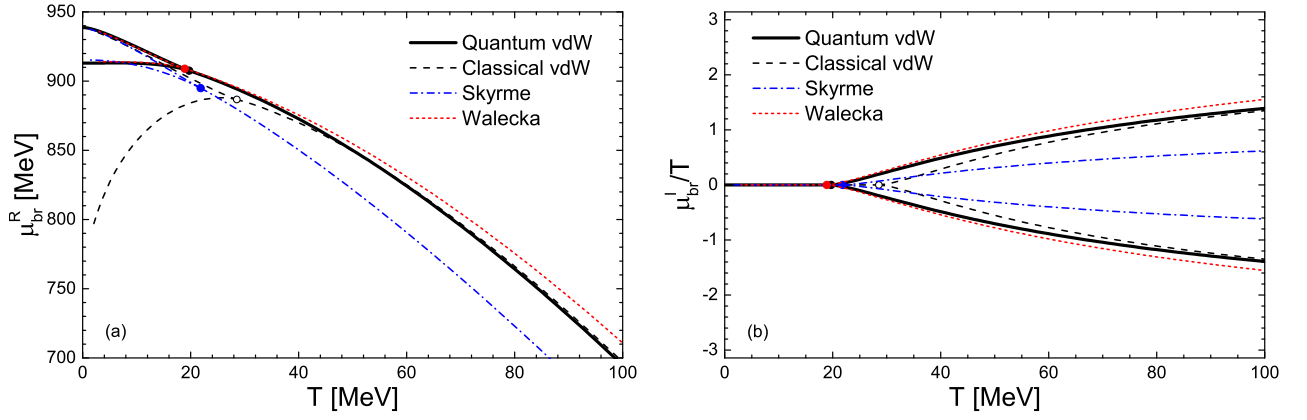


Рис. 2.2: Залежність від температури (а)  $\mu_{br}^R \equiv \text{Re}[\mu_{br}]$  і (б)  $\mu_{br}^I/T \equiv \text{Im}[\mu_{br}/T]$ , оцінена для системи взаємодіючих нуклонів через класичне рівняння ван дер Ваальса (пунктирні чорні лінії), квантове рівняння ван дер Ваальса (суцільні чорні лінії), модель середнього поля Скірма (точково-пунктирні сині лінії) та релятивістську модель середнього поля Валечки (точкові червоні лінії). Точки зображують відповідні розташування критичних точок ядерної речовини у відповідних моделях.

ціальними лініями. При  $T = T_c$  два корені співпадають у КТ. При  $T > T_c$ ,  $\mu_{br}$  має ненульову уявну частину, точки розгалуження відповідають двом комплексно спряженим кореням. Поведінка дійсної частини  $\mu_{br}^R \equiv \text{Re}[\mu_{br}]$  при  $T > T_c$  показана на Рисунку 2.1 пунктирною лінією.

Порівняння між класичною та квантовою моделями vdW може уточнити роль статистики Фермі. Порівняння представлено на Рисунку 2.2, де зображено залежності від температури дійсних та уявних частин  $\mu_{br}$ . Обидві моделі відображають якісно схожу поведінку. Класична модель vdW не дає точного опису  $\mu_{br}$  при малих температурах. Це очікуваний артефакт ігнорування квантової статистики. Результати класичної моделі vdW наближаються до моделі QvdW при великих температурах, де ефекти квантової статистики стають несуттєвими.

### 2.3.2 Модель Скірма

Для перевірки надійності результатів, отриманих у рамках моделі (квантового) vdW, ми розглядаємо термодинамічні точки розгалуження у двох альтернативних моделях ядерної речовини. У моделі Скірма ядерної речовини

притягувальні та відштовхувальні взаємодії моделюються через середнє поле [88, 89],

$$u_{\text{sk}}(n) = -\alpha \left( \frac{n}{n_0} \right) + \beta \left( \frac{n}{n_0} \right)^\gamma, \quad (2.15)$$

що зміщує рівні енергії одночастинкових станів. Тут перший термін відповідає притягувальним взаємодіям середньої дальності, а другий термін - відштовхувальним взаємодіям короткої дальності. Густина числа нуклонів задається самоузгодженим рівнянням,

$$n(T, \mu) = n_{\text{id}}[T, \mu - u_{\text{sk}}(n)] . \quad (2.16)$$

Тут ми використовуємо такі значення параметрів:  $n_0 = 0.16 \text{ фм}^{-3}$ ,  $\gamma = 2$ ,  $\alpha \simeq 122.6 \text{ MeV}$  і  $\beta \simeq 70.4 \text{ MeV}$ . Ці значення параметрів дають енергію зв'язку  $16 \text{ MeV}$  у основному стані ядра при  $n = n_0 = 0.16 \text{ фм}^{-3}$ . Значення  $\gamma = 2$  відповідає так званій жорсткій рівнянні стану Скірма з модулем некомпресійності  $K_0 \simeq 380 \text{ MeV}$ . КТ у цій моделі розташована на  $T_c = 21.9 \text{ MeV}$ ,  $n_c = 0.06 \text{ фм}^{-3}$  ( $\mu_c \simeq 895 \text{ MeV}$ ).

Похідну  $(\partial\mu/\partial n)_T$  можна оцінити з рівняння (2.16) досить прямолінійно. Рівняння точки розгалуження  $(\partial\mu/\partial n)_T = 0$  читається

$$\left[ \alpha \left( \frac{n_{\text{br}}}{n_0} \right) - \beta \gamma \left( \frac{n_{\text{br}}}{n_0} \right)^\gamma \right] \frac{\omega_{\text{id}}[T, \mu - u_{\text{sk}}(n_{\text{br}})]}{T} = 1. \quad (2.17)$$

На практиці, рівняння (2.17) розв'язується чисельно для величини  $\mu_{\text{br}}^* \equiv \mu - u_{\text{sk}}(n_{\text{br}})$ , оскільки рівняння (2.16) дає  $n_{\text{br}}$  як явну функцію  $\mu_{\text{br}}^*$ . Як і для моделі QvdW, розташування КТ використовується як початкова точка чисельної процедури для визначення залежності від температури точок розгалуження.

### 2.3.3 Модель Валечки

Остання модель ядерної речовини, що розглядається, - це модель Валечки [67, 90], яка є одним з найпростіших прикладів релятивістської теорії середнього

поля. Притягувальні та відштовхувальні взаємодії моделюються через обмін скалярними  $\sigma$  та векторними  $\omega$  мезонами відповідно. Мезонні поля обробляються в наближенні середнього поля. Взаємодії призводять до ефективного зміщення хімічного потенціалу  $\mu \rightarrow \mu^*$  та маси  $m \rightarrow m^*$  нуклонів, що призводить до наступної форми гранд-канонічного термодинамічного потенціалу (тиску)<sup>3</sup>

$$p(T, \mu) = p_{\text{id}}(T, \mu^*; m^*) + \frac{(\mu - \mu^*)^2}{2c_v^2} - \frac{(m - m^*)^2}{2c_s^2}. \quad (2.18)$$

Тут  $c_s^2 > 0$  і  $c_v^2 > 0$  є параметрами зв'язування, що відповідають притягувальним та відштовхувальним взаємодіям відповідно. Ефективний хімічний потенціал  $\mu^*$  та ефективна маса  $m^*$  визначаються з рівнянь:

$$\left( \frac{\partial p}{\partial \mu^*} \right)_{m^*} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu - \mu^* = c_v^2 n_{\text{id}}(T, \mu^*; m^*), \quad (2.19)$$

$$\left( \frac{\partial p}{\partial m^*} \right)_{\mu^*} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad m - m^* = c_s^2 n_{\text{id}}^s(T, \mu^*; m^*). \quad (2.20)$$

Тут  $n_{\text{id}}^s$  - це скалярна густина ідеального газу Фермі нуклонів. Густина числа частинок є

$$n(T, \mu) = n_{\text{id}}(T, \mu^*; m^*). \quad (2.21)$$

Значення параметрів зв'язування визначаються з властивостей ядерного основного стану (див. реф. [91] для деталей):  $c_s^2 = 14.6 \text{ фм}^2$  і  $c_v^2 = 11.0 \text{ фм}^2$ . Модель передбачає КТ ядерної речовини при  $T_c = 18.9 \text{ МеВ}$ ,  $n_c = 0.07 \text{ фм}^{-3}$  ( $\mu_c \simeq 909 \text{ МеВ}$ ).

Точки розгалуження визначаються через рівняння (2.4). Для оцінки  $(\partial\mu/\partial n)_T$  ми спочатку зазначаємо, що  $\mu = \mu^* + c_v^2 n$ , як впливає з рівнянь (2.19) та (2.21). Отже,

$$(\partial\mu/\partial n)_T = (\partial\mu^*/\partial n)_T + c_v^2. \quad (2.22)$$

---

<sup>3</sup>Тут ми ігноруємо внесок анти-нуклонів, який є малим у регіоні ядерної речовини фазової діаграми.



$(\partial\mu^*/\partial n)_T$  визначається застосуванням похідної  $(\partial/\partial n)_T$  до рівнянь проміжків (2.19) та (2.20), і розв'язанням отриманої системи лінійних рівнянь для  $(\partial\mu^*/\partial n)_T$  та  $(\partial m^*/\partial n)_T$ :

$$(\partial\mu^*/\partial n)_T = \frac{1 + c_s^2 \partial_{m^*} n_s^*}{\partial_{\mu^*} n^* + c_s^2 (\partial_{\mu^*} n^* \partial_{m^*} n_s^* - \partial_{\mu^*} n_s^* \partial_{m^*} n^*)}. \quad (2.23)$$

Тут  $n^* \equiv n_{\text{id}}(T, \mu^*; m^*)$  і  $n_s^* \equiv n_{\text{id}}^s(T, \mu^*; m^*)$ .

Рівняння точок розгалуження (2.4) читається

$$\begin{aligned} 1 + c_s^2 \partial_{m^*} n_s^* + c_v^2 \partial_{\mu^*} n^* \\ = c_s^2 c_v^2 (\partial_{\mu^*} n_s^* \partial_{m^*} n^* - \partial_{\mu^*} n^* \partial_{m^*} n_s^*). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Це рівняння розв'язується чисельно, щоб визначити  $\mu_{\text{br}}^*$  (рівняння проміжку (2.20) використовується для зв'язку  $m^*$  і  $\mu^*$ ).

### 2.3.4 Порівняння між моделями

Рисунок 2.2 зображує залежність від температури дійсних та уявних частин хімічного потенціалу точки розгалуження, оцінену у чотирьох розглянутих моделях ядерної речовини. Якісна поведінка у всіх моделях узгоджується з аналітичними очікуваннями, отриманими в межах класичної моделі vdW у Розділі 2.2. Як зазначалося раніше, при малих температурах значення  $\mu_{\text{br}}^R$  у класичній моделі vdW досить відрізняються від усіх інших моделей. Це артефакт через відсутність статистики Фермі.

Поведінка при великих температурах якісно схожа у всіх розглянутих моделях. Кількісно моделі QvdW та Валечки дуже схожі, тоді як модель Скірма дає сильнішу залежність від температури дійсної частини  $\mu_{\text{br}}^R$  та менш виражений ріст температури уявної частини  $\mu_{\text{br}}^I/T$ .

При великих температурах класична та квантова моделі vdW дають майже ідентичні результати. Ефекти статистики Фермі незначні при  $T \gtrsim 100$  MeV. Аналітичні результати Розділу 2.2 дуже точно описують  $\mu_{\text{br}}^R$  та  $\mu_{\text{br}}^I$  у цьому режимі.

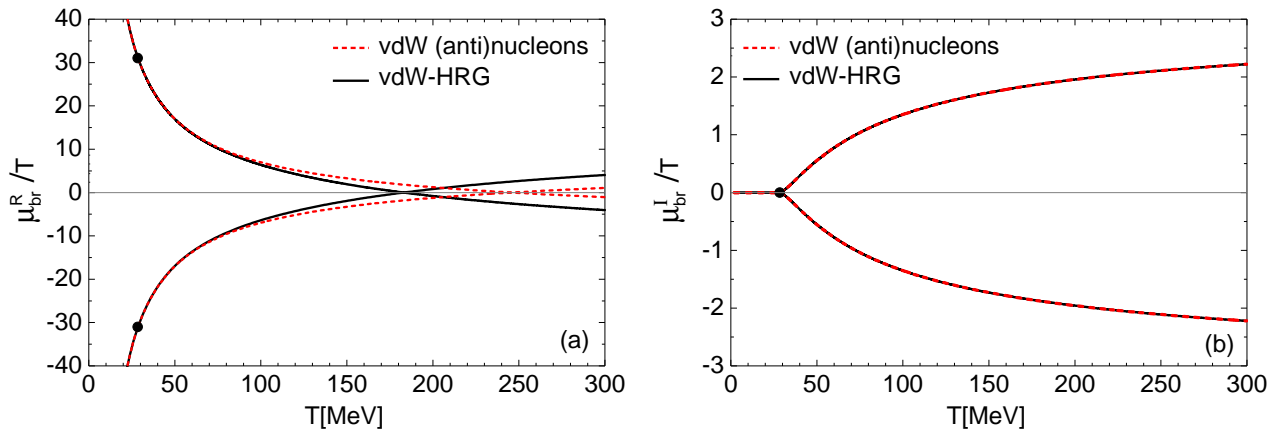


Рис. 2.3: Залежність від температури (а) дійсної частини обмежувальної точки розгалуження розрізу, і (b) уявної частини обмежувальної точки розгалуження розрізу. Розрахунки виконані для моделі vdW-HRG (суцільні чорні лінії) та для моделі vdW лише з (анти)нуклонами (пунктирні червоні лінії). У обох випадках розглядається статистика Максвелла-Больцмана. Кола відповідають критичним точкам відповідно ядерної речовини та анти-ядерної речовини.

## 2.4 Газ адронних резонансів і ядерна речовина

### 2.4.1 Точки розгалуження

При температурах  $T \gtrsim 100$  MeV, які досліджуються в релятивістських зіткненнях важких іонів і в теорії ґраткових калібрувальних полів при скінченній температурі, не можна ігнорувати збудження адронних ступенів свободи, окрім нуклонів. Гаряча адронна фаза зазвичай моделюється в рамках моделі газу адронних резонансів (HRG). Стандартна модель HRG зазвичай не включає властивості ядерної речовини та асоційовану критичність рідина-газ.

Тут ми використовуємо модель vdW-HRG, яка була введена в референції [75] як “мінімальне” розширення моделі HRG для інкорпорації переходу ядерної рідини-газу в картину HRG. У цій роботі ми слідуємо цьому “мініальному” розширенню. Модель vdW-HRG включає взаємодії vdW для всіх пар баріон-баріон (і, за симетрією, всіх пар антибаріон-антибаріон). Параметри  $a$  і  $b$  приймаються однаковими для всіх пар баріонів. Їхні значення дорівнюють параметрам vdW нуклонів (Розділ 2.3). Це забезпечує, що модель vdW-HRG зводиться до моделі vdW ядерної речовини в Розділі 2.3, коли вне-

ски баріонних резонансів стають незначними, як це відбувається для низьких  $T$ , великих  $\mu_B$  регіонів фазової діаграми ядерної речовини.

Ми не включаємо члени vdW для пар баріон-антибаріон, оскільки взаємодії баріон-антибаріон на короткій відстані домінуються анігіляціями, а не відштовхуванням на зразок твердих сфер, як у взаємодіях баріон-баріон. Нарешті, більшість відомих розсіянь мезон-мезон і мезон-баріон домінуються формуванням резонансів. Такі взаємодії вже включені в картину HRG шляхом включення резонансів як окремих частинок. Також зазначимо, що наш список частинок не має резонансів з  $|B| = 2$ , тому, немає подвійного рахування привабливих взаємодій між парами баріон-баріон та антибаріон-антибаріон.

Тиск у моделі vdW-HRG:

$$p(T, \mu) = p_M(T, \mu) + p_B(T, \mu) + p_{\bar{B}}(T, \mu), \quad (2.25)$$

де

$$p_M(T, \mu) = \sum_{j \in M} p_j^{\text{id}}(T, \mu_j) \quad (2.26)$$

$$p_B(T, \mu) = \sum_{j \in B} p_j^{\text{id}}(T, \mu_j^{B*}) - a n_B^2 \quad (2.27)$$

$$p_{\bar{B}}(T, \mu) = \sum_{j \in \bar{B}} p_j^{\text{id}}(T, \mu_j^{\bar{B}*}) - a n_{\bar{B}}^2, \quad (2.28)$$

де  $M$  позначає мезони,  $B(\bar{B})$  для (анти)баріонів,  $\mu = (\mu_B, \mu_S, \mu_Q)$  є хімічними потенціалами для чистого числа баріонів  $B$ , дивності  $S$  і електричного заряду  $Q$ ,  $\mu_j^{B(\bar{B})*} = \mu_j - b p_{B(\bar{B})} - a b n_{B(\bar{B})}^2 + 2 a n_{B(\bar{B})}$  де  $\mu_j = B_j \mu_B + S_j \mu_S + Q_j \mu_Q$  є хімічним потенціалом для виду баріонів  $j$ , з відповідними квантовими числами  $B_j$ ,  $S_j$  і  $Q_j$ .  $n_B$  і  $n_{\bar{B}}$  є загальними густинами баріонів і антибаріонів відповідно.

Ми ігноруємо квантові статистичні ефекти для баріонів і анти-баріонів в подальшому. Як було показано в Розділі 2.3 це є хорошою апроксимацією для температур  $T \gtrsim 80$  MeV (див. Рис. 2.2). Для  $\mu_Q = \mu_S = 0$ , густини

(анти)баріонів  $n_{B(\bar{B})}(T, \mu)$  визначаються трансцендентним рівнянням:

$$b \phi_B(T) e^{\pm \mu_B/T} = \frac{b n_{B(\bar{B})} \exp \left[ \frac{b n_{B(\bar{B})}}{1 - b n_{B(\bar{B})}} - \frac{2 a n_{B(\bar{B})}}{T} \right]}{1 - b n_{B(\bar{B})}}. \quad (2.29)$$

Тут

$$\phi_B(T) = \sum_{i \in B} \frac{d_i m_i^2 T}{2\pi^2} K_2(m_i/T). \quad (2.30)$$

Сума в рівнянні (2.30) охоплює всі баріони в HRG.

Густини  $n_{B(\bar{B})}$  є багатозначними функціями  $\mu_B$ . Як баріони, так і антибаріони призводять до появи точок розгалуження. Через симетрію парності за зарядом відповідні точки розгалуження пов'язані одна з одною через трансформацію  $\mu_B \rightarrow -\mu_B$ . Точки розгалуження  $n_{B(\bar{B})}$  визначаються як

$$\left. \frac{d\mu_B}{dn_{B(\bar{B})}} \right|_{\mu_B = \mu_B^{\text{br}}} = 0. \quad (2.31)$$

Координати точок розгалуження визначаються через відносини для класичного рівняння vdW (Розділ 2.2) з заміною  $\phi(T) \rightarrow \phi_{B(\bar{B})}(T)$ . Рисунок 2.3 зображує залежність від температури дійсних та уявних частин сингулярностей розрізу, асоційованих з переходом ядерної рідини-газу, оцінених у моделі vdW-HRG (суцільні чорні лінії) та моделі vdW лише з (анти)нуклонами (пунктирні червоні лінії). Представлені лише обмежувальні, тобто найближчі до точки розширення  $\mu_B = 0$ , сингулярності. Дві симетричні лінії на (a) відповідають баріонам і антибаріонам. Уявні частини двох комплексно спряжених сингулярностей, представлені на (b), рівні для баріонів та антибаріонів. Кола представляють критичні точки баріонної та антибаріонної речовини. Видно, що дійсна частина знижується з температурою і перетинає нуль приблизно при  $T \simeq 180$  MeV. Це означає, що взаємодії vdW стають релевантними навіть близько до  $\mu_B = 0$  при достатньо великих температурах. Це дійсно було продемонстровано для низки термодинамічних величин в референції [75]. До-

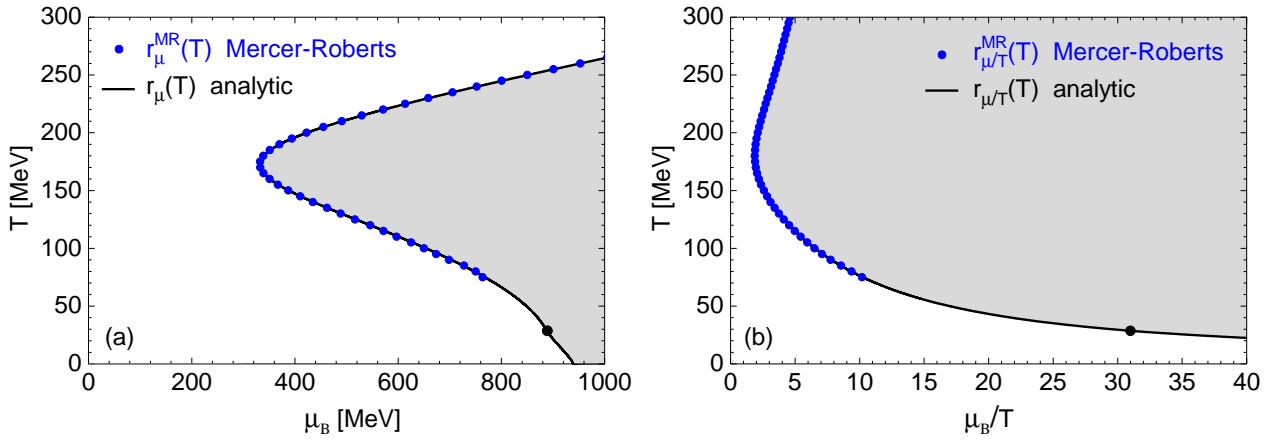


Рис. 2.4: Залежність від температури (а) радіуса збіжності  $r_\mu$  і (b) радіуса збіжності  $r_{\mu/T}$ , розрахована в моделі vdW-HRG (суцільна лінія) чисельно за допомогою аналітичних формул Рівнянь (2.31) і (2.33); і (сині точки) за допомогою оцінювача радіуса збіжності Mercer-Roberts (2.34) для ряду Тейлора (2.32). Затінені області представляють ту частину фазової діаграми, де ряд Тейлора (2.32) функції тиску не збігається. Чорне коло відповідає критичній точці ядерної речовини в класичній моделі vdW.

давання баріонних резонансів призводить до швидшого зниження  $\mu_{\text{br}}^R/T$  до нуля. З іншого боку, резонанси не впливають на поведінку уявної частини  $\mu_{\text{br}}^I/T$ , принаймні не в межах використаної моделі vdW-HRG.

## 2.4.2 Ряд Тейлора

Наявність термодинамічних точок розгалуження призводить до низки наслідків щодо аналітичних властивостей КХД. Особливий інтерес становить ряд Тейлора для тиску в КХД:

$$\frac{p(T, \mu_B) - p(T, 0)}{T^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{2n}^B(T)}{(2n)!} \left(\frac{\mu_B}{T}\right)^{2n}. \quad (2.32)$$

Тут  $\chi_{2k}^B(T) = \partial^{2k}(p/T^4)/\partial(\mu_B/T)^{2k}|_{\mu_B=0}$  є сприйнятливостями числа баріонів, оціненими при  $\mu_B = 0$ . Розширення включає лише парні порядки хімічного потенціалу, як це впливає з симетрії парності за зарядом КХД.

Ряд (2.32) збігається всередині кола в комплексній площині  $\mu_B/T$ . Збіжність обмежена сингулярністю, найближчою до точки розширення, яка лежить на межі кола. КТ є прикладом такої сингулярності. Особливість КТ

полягає в тому, що сингулярність лежить на дійсній осі, що означає, що коефіцієнти ряду Тейлора асимптотично додатні при критичній температурі. Цей факт використовується в різних спробах обмежити розташування КТ КХД за допомогою оцінки низки коефіцієнтів ряду Тейлора на нульовому рівні хімічного потенціалу, перевіряючи, що всі доступні коефіцієнти додатні, і використовуючи різні оцінювачі радіуса збіжності [59, 92, 93]. Зауважимо, що розбіжний ряд Тейлора може з'явитися навіть без наявності фізичних фазових переходів, наприклад, в системах лише з відштовхувальними взаємодіями [94].

Термодинамічні сингулярності, асоційовані з переходом ядерної рідини-газу, обмежують діапазон збіжності ряду Тейлора в моделі vdW-HRG. Очікуваний радіус збіжності в моделі vdW-HRG задається

$$r_\mu = |\mu_B^{\text{br}}| = \sqrt{[\text{Re}(\mu_B^{\text{br}})]^2 + [\text{Im}(\mu_B^{\text{br}})]^2}. \quad (2.33)$$

Тут  $\mu_B^{\text{br}}$  - розташування обмежувальної сингулярності. При  $T > T_c$  це відповідає сингулярностям кросовера [Рівняння (2.6)], які обидві лежать на однаковій відстані від  $\mu_B = 0$ . При  $T = T_c$  це КТ ядерної речовини. При  $T < T_c$  обмежувальна сингулярність - це точка спінодалі, яка розділяє газоподібну та механічно нестабільну ядерні фази (права суцільна крива на Рис. 2.1).<sup>4</sup>

Рисунок 2.4 зображує залежність від температури радіуса збіжності в  $\mu_B$  та у безрозмірних величинах  $\mu_B/T$ . Для температур кросовера,  $T \sim 140 - 170$  MeV, радіус збіжності стає малим,  $r_{\mu/T} \sim 2 - 3$ . Це вказує на реальну можливість, що властивості збіжності ряду Тейлора в повній КХД при температурах кросовера можуть бути визначені залишками переходу ядерної рідини-газу, які проявляють себе у вигляді сингулярностей у комплексній площині.

Ми перевіряємо наші результати моделі vdW-HRG, аналізуючи власти-

---

<sup>4</sup>Точка розгалуження на межі рідкої та механічно нестабільної фази (ліва суцільна крива на Рис. 2.1) не обмежує радіус збіжності ряду Тейлора, незважаючи на її менше значення  $\mu_B^{\text{br}}$ . Причина в тому, що ця точка розгалуження лежить на поверхні Рімана, відмінній від тієї, де розташована точка розширення  $\mu_B = 0$ . Радіус збіжності не впливається третім коренем [Рівняння (2.7)] з тієї ж причини.

вості збіжності ряду Тейлора в цій моделі безпосередньо. Спочатку ми аналізуємо радіус збіжності за поведінкою сприйнятливостей числа баріонів  $\chi_k^B$  при  $\mu_B = 0$ . Ми розраховуємо  $\chi_k^B$  до порядку  $\chi_{120}^B$  чисельно, використовуючи ефективний алгоритм, описаний в додатку. Обчислені значення  $\chi_k^B$  потім використовуються для визначення  $r_{\mu/T}$  за допомогою різних оцінювачів.

Так званий оцінювач співвідношення,  $r_n^{\text{RE}} = |c_n/c_{n+1}|^{1/2}$  з  $c_n \equiv \chi_{2n}/(2n)!$ , не дає корисної оцінки  $r_{\mu/T}$ . Це наслідок того, що обмежувальна сингулярність лежить у комплексній площині, з ненульовою уявною частиною  $\mu_{\text{br}}^I/T \neq 0$ . У такому випадку оцінювач співвідношення не збігається [60, 95].

Точна оцінка радіуса збіжності отримується за допомогою оцінювача Mercer-Roberts [96],

$$r_n^{\text{MR}} = \left| \frac{c_{n+1} c_{n-1} - c_n^2}{c_{n+2} c_n - c_{n+1}^2} \right|^{1/4}, \quad (2.34)$$

та так званої презентації Domb-Sykes [97, 98] (див. деталі в [60]). Отримані значення  $r_\mu$  та  $r_{\mu/T}$  за допомогою 120 коефіцієнтів розкладу Тейлора зображені синіми символами на Рис. 2.4. Ці значення збігаються з попередніми аналітичними очікуваннями, показаними суцільними лініями, що вказує на збіжність оцінювача Mercer-Roberts до правильного значення. Ми також аналізуємо, скільки коефіцієнтів потрібно, щоб отримати значущу оцінку  $r_{\mu/T}$ . Розрахунки показують, що  $r_{\mu/T}$  при  $T = 100 - 200$  MeV можна оцінити з точністю 10% за допомогою 5 – 10 ненульових коефіцієнтів розкладу у ряд Тейлора (див. Табл. 4.1). Зазначимо, що ефективність оцінки  $r_{\mu/T}$  може бути покращена шляхом розгляду модифікованого оцінювача Mercer-Roberts з [95]:

$$r_n^{\text{MMR}} = \left| \frac{(n+1)(n-1)c_{n+1} c_{n-1} - n^2 c_n^2}{(n+2)n c_{n+2} c_n - (n+1)^2 c_{n+1}^2} \right|^{1/4}. \quad (2.35)$$

Це показано у другому рядку Табл. 4.1.

Оцінювач	100 MeV	150 MeV	170 MeV	200 MeV
MR	$\chi_{16}^B$	$\chi_{16}^B$	$\chi_{10}^B$	$\chi_{20}^B$
MMR	$\chi_{22}^B$	$\chi_{10}^B$	$\chi_8^B$	$\chi_{14}^B$

Табл. 2.1: Показує кількість ведучих коефіцієнтів розкладу у ряд Тейлора, необхідних для витягу радіуса збіжності  $r_\mu$  в межах 10% від істинного значення через оцінювач Mercer-Roberts (перший рядок) і модифікований оцінювач Mercer-Roberts (другий рядок) в моделі vdW-HRG.

Далі ми вивчаємо властивості збіжності ряду Тейлора, порівнюючи ізотерми тиску, розраховані за допомогою обмеженого ряду Тейлора навколо  $\mu_B = 0$ , і через повний чисельний розрахунок. Рисунок 2.5 показує це порівняння для ізотерми  $T = 150$  MeV, де аналізується зміщений та масштабований тиск  $[p(T, \mu_B) - p(T, 0)]/T^4$  як функція  $\mu_B/T$ . Обмежений ряд Тейлора добре описує повний результат для  $\mu_B/T < r_{\mu/T}$ , а також у невеликій області за межами  $r_{\mu/T}$ . Ми перевірили, що ця невелика область зменшується до нуля, коли включається все більше і більше членів розширення, і що розбіжність серії при  $\mu_B/T > r_{\mu/T}$  стає все більш і більш очевидною. Отже, для  $\mu_B/T > r_{\mu/T}$  ряд Тейлора може бути розглянутий хіба що як асимптотичний ряд.

Цей розрахунок включає лише адронні ступені свободи. Звичайно, в повний КХД присутні інші механізми, крім переходу ядерної рідини-газу, які впливають на аналітичні властивості термодинамічного потенціалу і які не охоплені моделлю vdW-HRG. Це включає, наприклад, перехід КХД до кварк-глюонних ступенів свободи та асоційовану критичність хіральності. Інший відомий перехід КХД - це перехід Роберта-Вейса при уявному хімічному потенціалі [99], що відбувається при температурах  $T > T_{RW}$ , де  $T_{RW} \sim 208$  MeV [100]. Ці механізми встановляють додаткові обмеження на радіус збіжності ряду Тейлора, крім тих, що пов'язані лише з переходом ядерної рідини-газу, які ми тут вивчаємо. З іншого боку, робота, про яку йдеться тут, лише демонструє, як наявність самого переходу ядерної рідини-газу може впливати на властивості збіжності ряду Тейлора. З тих же причин ми не проводимо тут порівняння вищих кумулянтів  $\chi_{2k}^B$  з даними ґраткової КХД, а лише використовуємо ці



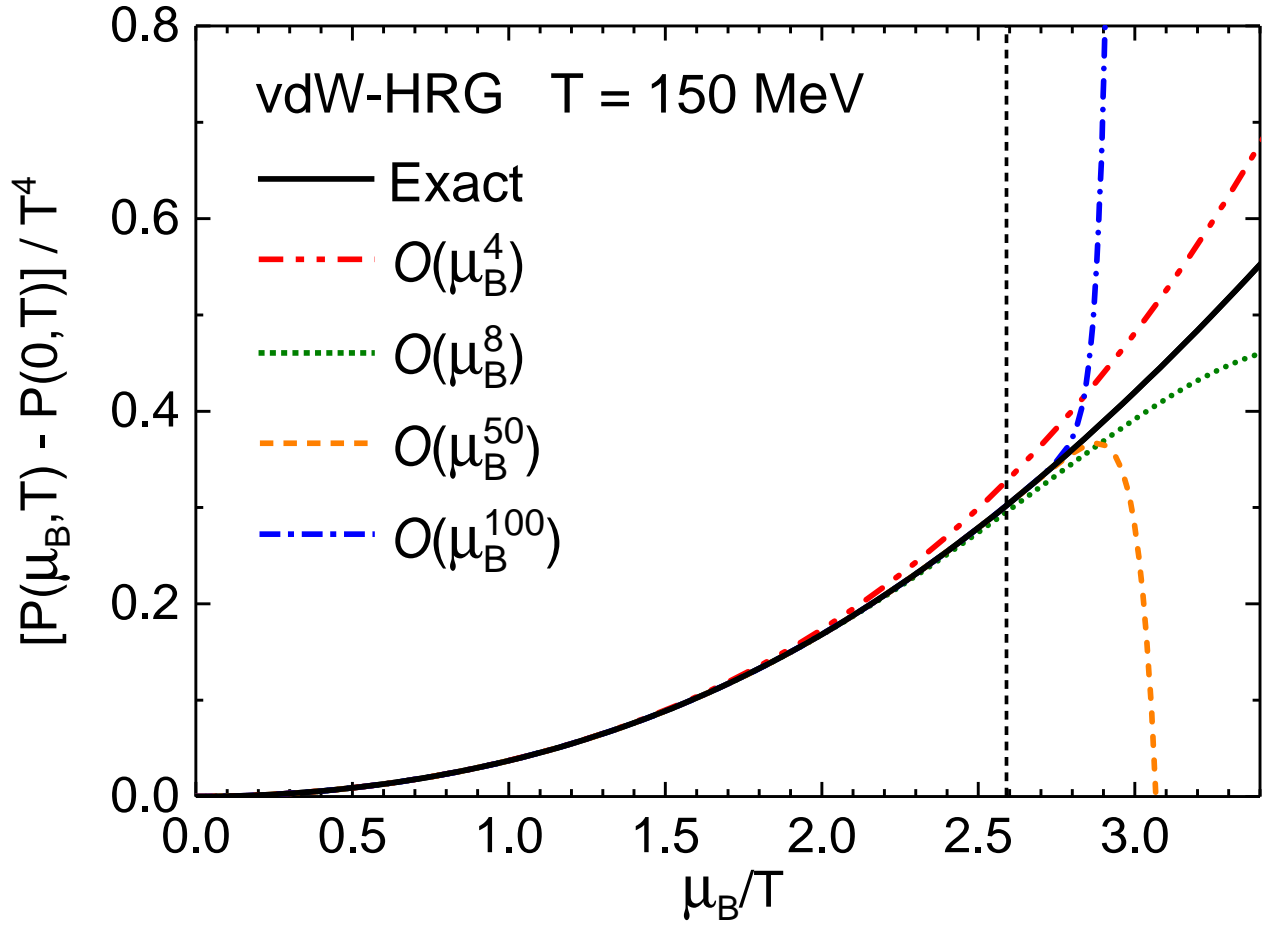


Рис. 2.5: Залежність зміщеного масштабованого тиску  $[p(T, \mu_B) - p(T, 0)]/T^4$  від  $\mu_B/T$ , як розраховано в межах моделі vdW-HRG при  $T = 150$  MeV за допомогою чисельного розв'язку [Рівняння (2.29)] (суцільна чорна лінія) і ряду Тейлора, обмеженого  $\chi_4^B$  (штрихпунктирна червона лінія),  $\chi_8^B$  (точкова зелена лінія),  $\chi_{50}^B$  (штрихова жовта лінія) та  $\chi_{100}^B$  (штрихпунктирна синя лінія). Вертикальна штрихова лінія відповідає значенню радіуса збіжності  $r_{\mu/T} \simeq 2.6$ .

величини для аналізу поведінки тиску, розвинутого за Тейлором.

Також слід зазначити, що перехід рідина-газ у цій роботі обробляється на рівні середнього поля, і асоційована критична поведінка відповідає класу універсальності середнього поля. Вихід за межі наближення середнього поля може змінити клас універсальності та характер сингулярності, асоційованої з критичною точкою фазового переходу [79], що, у свою чергу, змінить поведінку вищих сприйнятливостей  $\chi_{2k}^B$ . Тому вивчення термодинамічних сингулярностей за межами середнього поля може бути цікавим майбутнім завданням, яке може бути досягнуто, наприклад, за допомогою методів ренормгрупи.

## 2.5 Висновки

Наявність переходу ядерної рідини-газу при температурах  $T \lesssim 20$  MeV у КХД призводить до появи термодинамічних точок розгалуження у гранд потенціалі КХД. Ці точки розгалуження відповідають спінодалам переходу першого порядку при  $T < T_c$ , критичній точці при  $T = T_c$ , та сингулярностям кросовера у комплексній площині  $\mu_B$  при  $T > T_c$ . Цей якісний результат, отриманий аналітично в рамках класичного рівняння ван дер Ваальса, є загальним для будь-якого довільного середньопольового опису ядерної речовини, як це впливає з аргументу універсальності для критичної поведінки. З кількісної точки зору, ця поведінка точок розгалуження виявляє помірну залежність від моделі при помірних температурах  $T \lesssim 100$  MeV, тоді як включення всіх інших адронних ступенів свободи також важливе при вищих температурах,  $T \sim 130 - 180$  MeV.

Аналіз моделі газу адронних резонансів ван дер Ваальса вказує на те, що сигнали від переходу ядерної рідини-газу чітко видимі в аналітичних властивостях КХД навіть при температурах кросовера та помірних баріохімічних потенціалах. Зокрема, радіус збіжності ряду Тейлора в моделі vdW-HRG досягає таких малих значень, як  $r_{\mu/T} \sim 2 - 3$  для температур  $T \sim 140 - 170$  MeV. Такі високі температури, як правило, пов'язують лише з хіральним переходом кросовера при  $\mu_B = 0$ . Однак, поточні результати показують, що радіус збіжності ряду Тейлора у КХД при цих температурах чітко демонструє залишки переходу ядерної рідини-газу, у регіоні, де ми очікували сигнали хіральної критичності. Якщо гіпотетична хіральна критична точка знаходиться глибоко в речовині, багатій на баріони, як вказано в недавньому аналізі термодинаміки КХД в межах хірального середньопольового підходу [101], спроби знайти КТ КХД за допомогою методу ряду Тейлора повинні дуже уважно відрізняти передбачувані сигнали передбачуваної хіральної КТ від добре встановленої КТ ядерної речовини рідина-пар.

## Про оцінку сприйнятливостей за числом баріонів у моделі vdW-HRG

Парний порядок сприйнятливості за числом баріонів,  $\chi_{2m}$ , виражається при  $\mu_B = 0$  через похідну  $(2m - 1)$  порядку густини баріонів,  $n_B$ , відносно  $\mu_B/T$ :

$$\chi_{2m}(T) = \frac{\partial^{2m}(p/T^4)}{\partial(\mu_B/T)^{2m}} \Big|_{\mu_B=0} = \frac{1}{T^3} \frac{\partial^{2m-1}(n_B - n_{\bar{B}})}{\partial(\mu_B/T)^{2m-1}} \Big|_{\mu_B=0} = \frac{2}{T^3} \frac{\partial^{2m-1}n_B}{\partial(\mu_B/T)^{2m-1}} \Big|_{\mu_B=0}. \quad (2.36)$$

Тут ми використали Рівняння (2.25), факт, що  $\partial p_{B(\bar{B})}/\partial\mu_B = \pm n_B$  і  $\partial^k n_{\bar{B}}/\partial(\mu_B)^k|_{\mu_B=0} = (-1)^{k+1} \partial^k n_B/\partial(\mu_B)^k|_{\mu_B=0}$ .

Щоб знайти похідну будь-якого порядку  $\partial^k n_B/\partial(\mu_B/T)^k|_{\mu_B=0}$  ми перепишемо Рівняння (2.29) для густини баріонів у наступній формі:

$$f(T, \mu_B) = g(n_B), \quad (2.37)$$

де у моделі vdW-HRG

$$f(T, \mu_B) = \ln[b \phi_B(T)] + \mu_B/T, \quad (2.38)$$

$$g(n_B) = \ln[bn_B] - \ln[1 - bn_B] + \frac{bn_B}{1 - bn_B} - \frac{2an_B}{T}, \quad (2.39)$$

є логарифмами, відповідно, лівої та правої частин Рівняння (2.29). Застосування формули Фаа ді Бруно до Рівняння (2.37) дає,

$$\frac{\partial^n f}{\partial(\mu_B/T)^n} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^k g}{\partial(n_B)^k} B_{n,k} \left( \frac{\partial n_B}{\partial(\mu_B/T)}, \frac{\partial^2 n_B}{\partial(\mu_B/T)^2}, \dots, \frac{\partial^{n-k+1} n_B}{\partial(\mu_B/T)^{n-k+1}} \right), \quad (2.40)$$

де  $B_{n,k}$  є частковими експоненціальними поліномами Белла. Ліва частина Рівняння (2.40),  $\partial^n f/\partial(\mu_B/T)^n$ , дорівнює одиниці для  $n = 1$  і нулю для всіх

$n > 1$ . Використовуючи  $B_{n,1} \left( \frac{\partial n_B}{\partial(\mu_B/T)}, \frac{\partial^2 n_B}{\partial(\mu_B/T)^2}, \dots, \frac{\partial^n n_B}{\partial(\mu_B/T)^n} \right) = \frac{\partial^n n_B}{\partial(\mu_B/T)^n}$ , Рівняння (2.40) можна представити у формі,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial n_B} \frac{\partial^n n_B}{\partial(\mu_B/T)^n} &= \frac{\partial^n f}{\partial(\mu_B/T)^n} - \sum_{k=2}^n \frac{\partial^k g}{\partial(n_B)^k} \times \\ B_{n,k} \left( \frac{\partial n_B}{\partial(\mu_B/T)}, \frac{\partial^2 n_B}{\partial(\mu_B/T)^2}, \dots, \frac{\partial^{n-k+1} n_B}{\partial(\mu_B/T)^{n-k+1}} \right), \end{aligned} \quad (2.41)$$

що пов'язує  $n$ -й порядкову похідну  $n_B$  з усіма її похідними нижчого порядку. Для  $n = 1$  ми отримуємо наступне з Рівняння (2.40):

$$\frac{\partial n_B}{\partial(\mu_B/T)} = \left[ \frac{\partial g}{\partial n_B} \right]^{-1} = n_B \left[ \frac{1}{(1 - bn_B)^2} - \frac{2an_B}{T} \right]^{-1}. \quad (2.42)$$

Підставляючи (2.42) в Рівняння (2.41), можна розрахувати похідну другого порядку,  $\partial^2 n_B / \partial(\mu_B/T)^2$ . Цю процедуру можна потім застосовувати ітеративно для оцінки всіх похідних  $n_B$  відносно  $\mu_B/T$  до бажаного порядку. Сприйнятливість за числом баріонів  $\chi_{2m}$  оцінюються з Рівняння (2.36).

## Розділ 3

# Посилення народження дилептонів як сигнал фазового переходу

### 3.1 Динамічний опис зіткнень важких іонів з фазовим переходом

Оцінка випромінювання дилептонів з динамічної системи яка утворилася в результаті релятивістського зіткнення важких іонів (ЗВІ) вимагає детального мікроскопічного опису зазначеної еволюції. Для цього використано відому та перевірену гадронну транспортну модель UrQMD у її останній версії (v3.5) [38, 102, 103]. Вона базується на траєкторіях гадронів у фазовому просторі, їх двочастинкових зіткненнях та розпадах нестабільних частинок. Уявна частина взаємодій включена через бінарні пружні та нееластичні зіткнення (останні переважно призводять до ексцитацій резонансів та розпадів на енергіях, що розглядаються у роботі, або формування кольорових флюкструбок і їх фрагментацію на вищих енергіях). Реальна частина потенціалу взаємодії реалізована через залежний від густини одночастинковий потенціал  $U(n_B)$ . Використовуючи одночастинковий потенціал, можна розрахувати

потенціальну енергію середнього поля  $V(n_B)$  при густині  $n_B$ , щоб розв'язати класичні рівняння руху. Традиційно, енергію поля на баріон розраховують, використовуючи простий потенціал Скірма [38, 104]. Однак, нещодавно було показано, як також може бути інкорпорована більш складна релятивістська модель Хірального Середнього Поля (CMF) [105]. У подальшому, у UrQMD буде використовуватися CMF EoS, а також дві модифікації рівняння стану CMF, які міститимуть фазові переходи при високих баріонних густинах, з акцентом на послідовне вивчення впливу фазових переходів на випромінювання дилептонів у енергетичному режимі SIS100. Для попередніх досліджень дилептонів в межах UrQMD читач може звернутися до [106–108].

### 3.1.1 Рівняння стану

Динаміка взаємодії баріонів у цьому підході складається з двох внесків: (i) послідовні парні зіткнення та (ii) потенціал, що залежить від густини. Останній включає взаємодії багатьох тіл на скінченній відстані. Хоча явно потрібні зіткнення не було враховано, здається, ніколи не було однозначно показано, що їх введення призводить до істотних змін у динаміці [109, 110].

Опис потенціалу, що залежить від густини, в UrQMD, а також конструкція та мотивація для використаних фазових переходів були детальніше описані в [111]. Наведемо підсумок, а зацікавлений читач може звернути увагу на вищезазначену статтю. Як основу для залежного від густини EoS ми використано модель CMF у її найновішій версії [101]. Модель CMF включає реалістичний опис ядерної матерії з ядерною некомпресійністю  $K_0 = 267$  MeV, порушенням хіральної симетрії у гадронному та кварковому секторах, а також ефективним переходом деконфайнменту. Нещодавно було показано, як EoS CMF може бути ефективно впроваджено в рівняння руху QMD моделі UrQMD [105]:

$$\dot{\mathbf{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} = -\left(\frac{\partial V_i}{\partial n_i} \cdot \frac{\partial n_i}{\partial \mathbf{r}_i}\right) - \left(\sum_{j \neq i} \frac{\partial V_j}{\partial n_j} \cdot \frac{\partial n_j}{\partial \mathbf{r}_i}\right),$$

де  $H$  - загальний гамільтоніан, а  $V = \sum_j V[n_B(r_j)]$  - загальна потенціальна енергія системи<sup>1</sup>. Похідна потенціалу у рівнянні вище розраховується шляхом сумування по всіх можливих парах баріонів  $j \neq i$ .  $V_i$  відповідає потенціальній енергії баріона в позиції  $r_i$ , а локальна густина взаємодії  $n_k$  в позиції  $r_k$  розраховується з припущенням, що кожен частинку можна розглядати як гаусовий хвильовий пакет [38, 112].

Крім похідної потенціальної енергії середнього поля на баріон  $\partial V(n_B)/\partial n_B$ , яка використовується як таблиця що подається до UrQMD, потрібно розрахувати лише локальні густини та градієнти, необхідні для розв'язання рівнянь руху для кожного баріона. Базова енергія середнього поля на баріон  $V(n_B)$  як функція густини баріонів показана оранжевою лінією на верхній панелі Рис. 3.1. Мінімум біля густини насичення відповідає переходу рідина-газ ядерної матерії, при вищій густині потенціал монотонно зростає через наявність відштовхувальних взаємодій та відсутність будь-яких інших фазових переходів.

Для впровадження фазового переходу в модель SMF використовується проста модифікація [111]. Щоб забезпечити існування іншого метастабільного стану в енергії середнього поля на баріон при великих густинах (на додаток до зв'язаного стану від переходу рідина-газ ядерної матерії), оригінальний потенціал SMF обрізається при густині  $n_B^{cut} = 2.1 n_0$  для PT1 і  $2.6 n_0$  для PT2.  $V(n_B)$  для  $n_B > n_B^{cut}$  потім зсувається на  $\Delta n_B = 1.7 n_0$  і  $2.6 n_0$  відповідно.

Конкретний вибір значення для  $n_{cut}$  мотивований двома факторами:

1. Перехід повинен бути досяжним у експериментах із зіткненнями важких іонів (що обмежує діапазон густини до  $n_B^{cut} < 4 - 5 n_0$ ) [105].
2. Густина вища за  $2 n_0$ , щоб уникнути розбіжностей з доступними обмеженнями від зіткнень важких іонів та астрофізичних спостережень [113].

Оскільки енергія складається не лише з потенціалу, але й з кінетичної частини, яка зростає з густиною, однакова глибина потенціалу фактично означає вищу повну енергію. Таким чином, стан матерії високої густини буде співіснувати з системою нижчої густини, але стане нестабільним, як тільки

---

<sup>1</sup>Тут ігнорується залежність від імпульсу.

густина почне зменшуватися через розширення оточуючої її матерії низької густини.

Енергія середнього поля між  $n_B^{cut} < n_B < n_B^{cut} + \Delta n_B$  потім інтерполюється за допомогою полінома третього порядку, щоб створити другий мінімум в енергії на частинку  $V(n_B)$  та забезпечити неперервність також її похідної. Існує нескінченна кількість способів створення такої конструкції, кожен з яких призводить до різних властивостей так створеного переходу. У [114] було показано, що тиск, отриманий з таким залежним від густини потенціалом, вказує на нестабільності за межами спінодальної лінії фазового переходу, для якого густина баріонів є параметром порядку. Крім того, похідні цього тиску щодо хімічного потенціалу будуть розходитися на спінодальних лініях, як очікується для переходу першого роду. Для нескінченних систем ми тому очікуємо, що система буде поводитися так, ніби вона проходить через перехід першого роду. Оскільки ми маємо справу з системами, що є скінченими в просторі та часі, точний фазовий перехід не досягається, оскільки завжди існує скінченна ймовірність, що система буде в одній з фаз або в метастабільному стані. Таким чином, ми перевірили в симуляціях кубу заповненого матерією, що дійсно отримуємо фазове розділення у кластерах у нестабільній області нашої фазової діаграми, як показано на Рис. 3.1. Тому є підстави стверджувати, що досліджується динаміку взаємодіючої матерії, яка в термодинамічному ліміті перейшла б через фазовий перехід за вказаних густин. Інші методи можуть бути використані для конструювання фазових переходів високої густини, наприклад, використання векторного функціоналу густини [115]. Метою цієї роботи є вивчення загальних ознак значного фазового переходу в енергетичному режимі SIS100, тому ми вирішили додати значне поглиблення в потенціал для густин, які достатньо низькі, щоб бути досягнутими зіткненнями важких іонів на прискорювачах SIS18/SIS100. Оскільки ця процедура модифікує EoS CMF лише при високих густинах, вона залишає низькогустинний опис узгодженим з властивостями ядерної матерії



та обмеженнями ґраткової КХД. Результатуюча середня енергія поля на баріон, використана для станів CMF та PT1, а також PT2, показані оранжевою, зеленою та фіолетовою лініями на панелі (а) Рис. 3.1. Тут явно видимі додаткові мінімуми енергії поля призводять до наявності двох співіснуючих станів різної густини.

Варто зазначити, що поточне дослідження не використовує явної зміни динамічних ступенів свободи від гадронів до кварків, але включає ефекти фазового переходу в рівнянні стану на динаміку системи. Тому будь-які ефекти, які б специфічно залежали від аспектів переходу пов'язаних з деконфайнментом, не будуть включені в транспортну симуляцію, однак можуть бути включені в процедуру термодинамічного усереднення. У випадку переходу в підході середнього поля можливий підхід при зміні ступенів свободи було представлено в [116].

Щоб краще зрозуміти очікуваний вплив модифікованого потенціалу на фазову структуру, фазові діаграми двох моделей CMF-PT, у термодинамічному ліміті, були побудовані та показані на панелі (b) Рис. 3.1. Спінодальні лінії [104], межі регіонів, де матерія стає механічно нестабільною, визначаються густинами, при яких ізотермічна швидкість звуку стає уявною. Тиск, а також хімічний потенціал при заданих  $(n_B, T)$  можна розрахувати, використовуючи одночастинкову енергію:

$$U(n_B) = \frac{\partial(n_B \cdot V(n_B))}{\partial n_B}, \mu(n_B) = \mu_{\text{id}}(n_B) - U(n_B),$$

$$P(n_B, T) = P_{\text{id}}(n_B, T) + \int_0^{n_B} n' \frac{\partial U(n')}{\partial n'} dn'. \quad (3.1)$$

де  $P_{\text{id}}(n_B, T)$  та  $\mu_{\text{id}}(n_B)$  є тиском та хімічним потенціалом ідеального газу резонансів гадронів. Отримавши тиск, можна визначити спінодальні лінії, які показані пунктирними лініями на Рис. 3.1. Заштриховані області є спінодальними регіонами відповідного ЕoS. Реалізовані в цій роботі фазові переходи є досить сильними, і оскільки не було розглянуто жодної явної залежності потенціалу від температури, критична точка відсутня при будь-якій скінченній

температурі в обох випадках.

Важається, що підхід QMD вирішує взаємодіючу багаточастинкову систему і не є наближенням середнього поля. Справді, конкретний залежний від густини потенціал, використаний у розв'язанні рівнянь руху молекулярної динаміки, може бути пов'язаний з термодинамічними величинами в наближенні середнього поля, що ми й робимо, якщо розраховуємо тиск та/або швидкість звуку системи, як, наприклад, показано в [105, 114]. Модель SMF, яка використовувалася для побудови залежного від густини потенціалу, також базується на наближенні середнього поля. Однак, як обговорювалося, на практиці будь-яке рівняння стану густини можливе.

Панель (b) Рис. 3.1 також включає усереднені траєкторії центральної комірки для центральних зіткнень при різних енергіях пучка, отримані методом термодинамічного усереднення, описаним нижче. У всіх трьох випадках характер переходу рідина-газ ядерної матерії не змінюється і показаний як сіра заштрихована область. Траєкторії показані тільки після досягнення точки найвищої компресії під час компресії зіткнувшись ядер, що є прямим результатом жорсткості EoS. На найнижчих енергіях пучка максимально досягнута компресія в випадках SMF та PT2 є схожою, тоді як у випадку PT1 досягаються набагато більші густини завдяки фазовому розділенню. На найвищій енергії ефект переходу для PT1 вже набагато менш значний, оскільки максимальна компресія спектриє за межі спінодальної області. Тому ми могли б очікувати побачити ефекти фазового переходу для PT1 вже на найнижчій енергії пучка, тоді як ефекти для PT2 повинні проявитися при  $E_{\text{lab}} = 2 \text{ AGeV}$ . Крім того, пом'якшення також призведе до подовження тривалості життя системи і таким чином до більшого випромінювання дилептонів, як нещодавно було показано в рідинній динамічній симуляції [117]. Далі досліджується, чи виживає такий сигнал під час масової еволюції в повністю мікроскопічній моделі, що не перебуває в рівновазі. Ефекти об'ємної в'язкості [118] не змінюють тривалість життя системи значно, як можна бачити з подовженого часу життя, який з'являється лише в симуляції з фазовим переходом. Нещодавнє дослідження також показує формування густинних грудок лише в

присутності фазового переходу [119]. Ми спостерігаємо майже незалежну від EoS множинність піонів, що вказує на відсутність значного додаткового виробництва ентропії [120].

**Термодинамічне усереднення** Для розрахунку випромінювання дилептонів під час зіткнення буде використано підхід з локальним усередненням величин з метою визначити термодинамічні властивості середовища. Цей підхід був використаний у [121–131] для вилучення властивостей середовища з мікроскопічних транспортних симуляцій. Для цієї процедури 50000 подій найбільш центральних ( $b < 2$  fm) зіткнень Au-Au симулюються для кількох енергій пучка, використовуючи одне з трьох вищезазначених рівнянь стану. Для розрахунку властивостей середовища розраховується усереднені по ансамблю локальні енергетична та баріонна густини на просторово-часовій сітці з  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta ct = 0.5$  fm. Сітка містить  $(100)^4$  комірок, охоплюючи  $-25 < x$  [fm]  $< 25$  у просторі та  $0 < t$  [fm/c]  $< 50$  у часі. Це дозволяє охопити більшу частину (якщо не всю) систему, створену у зіткненнях Au-Au на енергіях  $E_{\text{lab}} = 1 - 10$  AGeV.

Властивості середовища, тобто густина баріонів та температура, можуть бути вилучені з EoS CMF лише у локальній системі відліку кожної точки сітки. Тому локальна швидкість потоку  $u = \gamma(1, \vec{v})$  повинна бути розрахована, використовуючи ідеальний рівноважний тензор енергії-імпульсу рідини:

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P)u^\mu u^\nu - Pg^{\mu\nu},$$

та  $0^{th}$  компонент баріонного потоку:

$$N_B^0 = \gamma n_B,$$

де  $\varepsilon, n_B, P$  є енергетичною та баріонною густинами та тиском у співрухомій системі. Використовуючи енергетичні-, імпульсні- та баріонні густини, отримані з симуляцій UrQMD з усередненням, та тиск з рівняння стану, локальні властивості системи покою  $n_B$  та  $T$  можуть бути знайдені, викори-

стовуючи метод ітерацій з фіксованою точкою, який також використовується в ідеальних гідродинамічних симуляціях [132].<sup>2</sup> Існує кілька варіантів визначення локальної співрухомої системи, як-от система Ландау або система Еккарта, які відрізняються у гідродинаміці другого порядку [133]. Обидва визначення використовувалися у попередніх реалізаціях процедури з усередненням, і значних відмінностей не спостерігалось [121, 122, 124–131]. Це, ймовірно, пов'язано з тим, що невеликі відмінності у швидкості потоку не перекладаються на значні зміни в загальному випромінюванні дилептонів. Для узгодженого визначення температури, використовуючи модель SMF у сценарії неідеальної гідродинаміки, потрібно не лише включити повні поля SMF (векторні та скалярні) у симуляцію UrQMD, але й коефіцієнти транспорту, щоб належним чином обробляти недіагональні елементи, тензора енергії-імпульсу [134]. Це вимагає належного коваріантного опису симуляції QMD, який буде обговорено у майбутніх роботах. Ми оцінили, що використання тензора енергії-імпульсу, отриманого з UrQMD, як описано в тексті, і узгодження цього з EoS SMF дадуть температури, які відрізняються лише на менше ніж 2% від "правильної" рівноважної температури, якби були враховані повні поля.

Зауважте, що ми не використовуємо метод термодинамічного усереднення для ранньої стадії зіткнення, коли система далека від термального рівноваження. Хоча передбачається, що час релаксації менший за час взаємного проникнення [117], випромінювання дилептонів на дуже ранніх стадіях зіткнень часто не розглядається через цю невизначеність. З іншого боку, нещодавнє дослідження показало, що незабаром після взаємного проникнення описані системи досягають стану локальної ізотропії та рівноваги, і припущення про майже гідродинамічний  $T^{\mu\nu}$  виправдані [135]. Крім отримання локальної густини та температури, процедура з усередненням дозволяє визначити локальні густини  $\pi$ ,  $\rho$ —мезонів та  $\Delta$ —баріонів, які можуть бути використані для перевірки, чи система перебуває у локальній хімічній рівновазі.

---

<sup>2</sup>Зауважте, що в цьому методі отримана температура залежить від використаного рівняння стану. Це може призвести до різних результатів, якщо основні ступені свободи не такі самі, як у мікроскопічній симуляції.

Було виявлено, що множинність піонів  $n_\pi$  швидко перевищує прогноз статистичної моделі ідеального газу піонів при даній температурі  $n_\pi^{\text{id}}(T)$  на коефіцієнт

$$\lambda_\pi = \frac{n_\pi}{n_\pi^{\text{id}}(T)} ,$$

який може бути названий фугативністю піонів. Для врахування надлишку числа піонів в розрахунках емісійної здатності дилептонів використовуються значення  $\lambda_\pi$ .

### 3.1.2 Емісія дилептонів

Після того, як відомий просторово-часовий розвиток системи від термодинамічного усереднення, випромінені дилептони та їх спектри як функція інваріантної маси пари  $M$  та кількості руху пари  $k$  можна вивести зі швидкості випромінення:

$$\begin{aligned} \frac{d^8 N}{d^4 x d^4 k} &= -\lambda_\pi^{1.3} \frac{\alpha^2}{\pi^3 M^2} f^{BE}(k^0, T) \frac{1}{3} g^{\mu\nu} \\ &\times \text{Im} [\Pi_{EM}^{\mu\nu}(M, k, n_B, T)] , \end{aligned} \quad (3.2)$$

де  $\alpha$  - це постійна структури елемента, а степінь 1.3 [126, 128] для фугативності піонів походить з того, що не лише піони та мезон  $\rho$ , але й прямі розпади інших резонансів, що містять один чи декілька піонів, внесуть вклад у емісію дилептонів. Припускається, що ефекти фугативності на мезони  $\rho$  та  $\omega$  будуть схожі. Для визначення точних значень показників потрібні додаткові дослідження. Однак наші основні висновки будуть стосуватися частин спектрів поза двома піками. Властивості середовища входять через спектральну функцію  $\Pi_{EM}^{\mu\nu}(M, k, n_B, T)$ , де  $n_B$ ,  $T$  - щільність баріонів та температура локальної системи координат.

У цій роботі ми використовуємо найновішу версію спектральної функції Rapp-Wambach-van-Hees, яка була представлена в [136–138]. Ця спектральна функція описує електромагнітні властивості гарячої та густої адронної речовини, обчислені з внутрішніми  $\rho$ -,  $\omega$ - та  $\phi$ -мезонними спектральними фун-

кціями з теорії багатьох частинок [139], доповнені континуумом та 4-піоними взаємодіями з хіральним змішуванням для мас вище 1 GeV.

Можна припустити, що більшість інших джерел емісії дилептонів, наприклад, пізньостадійні гадронні внески, такі як остаточні розпади мезонів  $\pi^0$ ,  $\eta$ ,  $\omega$  та  $\phi$  (часто називаються "коктейльними" внесками), а також дуже ранні часи емісії, можна відняти від експериментальних вимірювань, як це було зроблено, наприклад, у експериментах NA60 чи HADES. Тому ми симулюємо лише вибірку дилептонів, яка несе інформацію з гарячої та густої фази, тобто канали з  $\rho$ ,  $\omega$  та  $\phi$  в середовищі. На рис. 3.3 показані спектральні функції всіх трьох включених векторних мезонів у вакуумі (суцільна лінія) та в середовищі (пунктирна лінія). Спектральна функція в середовищі показана при температурі  $T = 120$  MeV та три рази насиченість ядра, що є характерним для систем, створених у діапазоні енергій, який ми досліджуємо.  $\rho$ -мезон проявляє найсильніше розширення, а також  $\omega$  та  $\phi$  розширені в середовищі. Цікаво, що в середовищі  $\omega$  виглядає схожим на  $\rho$  в вакуумі, що означає, що можна помилково інтерпретувати малий пік у вимірюваному спектрі дилептонів як  $\rho$ , тоді як він походить насправді з  $\omega$ .

Слід також зазначити, що ця швидкість в середовищі стає більш схожою на чисто кваркову швидкість зі збільшенням температури або щільності, що є наслідком дуальності кварк-гадрон біля переходу відсічення. Це також означає, що спектральна функція в принципі також дійсна для щільностей вище переходу відсічення і тому дозволяє нам робити реалістичні прогнози щодо ефекту фазового переходу. Додаткові явні ефекти на спектральну функцію, наприклад, від критичної точки хіральності [140] або флуктуацій дикварків [141], не є частиною цієї роботи.

Для розуміння та інтерпретації отриманих спектрів та виборів корисно спочатку розглянути регіони у фазовій діаграмі, де дилептони випромінюються у трьох різних сценаріях. Рисунок 3.1.1 показує нормалізовану швидкість випромінювання як функцію щільності баріонів та температури для CMF, а також EoS PT1 та PT2 (зліва направо). Для кожного рівня стану пропонуються три окремі енергії пучка,  $E_{\text{lab}} = 1, 23, 4$  та 10 AGeV, знизу догори. Можна

чітко спостерігати, що, коли система проходить через фазовий перехід і/або відбувається помякшення рівняння стану, емісія при високих щільностях баріонів збільшується. Це відбувається для PT1 вже при 1.23 AGeV та для PT2 при 4 AGeV. Тому в разі фазового переходу ми можемо очікувати збільшення емісії дилептонів та можливе збільшення вилученої температури дилептонів на цих енергіях пучка.

## 3.2 Результати

Часово-імпульсний (надлишковий) інваріантний масовий спектр дилептонів для центральних зіткнень Au-Au при п'яти різних енергіях пучка порівнюється з використанням гадронної спектральної функції в середовищі на рис. 3.4. Тут рівняння стану CMF (суцільні лінії) порівнюються з двома сценаріями фазового переходу PT1 (пунктирні лінії) та PT2 (штриховані лінії).

Окрім піків для мезонів  $\omega$  та  $\phi$ , спектр дуже плаский, і жодного виразного піку  $\rho$  не спостерігається. Спостерігається незначне розширення двох векторних мезонів зі збільшенням енергії пучка та, отже, зі збільшенням щільності системи. Важливо, спостерігається систематичне підвищення спектрів внаслідок фазового переходу.

Для отримання кращого кількісного розуміння впливу фазових переходів, можуть бути корисні обернений нахил, а також інтегровані відносні випромінювання. Таким чином, на рис. 3.5 показана температура дилептонів, яка отримана з експоненційного підгону до розподілу інваріантної маси в двох масових діапазонах,  $0.3 < M < 0.5$  GeV (суцільні лінії) та  $1.2 < M < 1.5$  GeV (пунктирні лінії), як функція енергії пучка. Ці масові діапазони були вибрані для уникнення будь-якого забруднення від  $\omega$  та  $\phi$  в підгонці. Як і очікувалося, діапазон низьких мас показує меншу температуру, ніж проміжний діапазон мас, і вилучена температура монотонно зростає з енергією пучка. Ефекти фазового переходу практично не видно в проміжному діапазоні мас. Однак низький діапазон мас більш чутливий. Спостерігається зменшення температури для PT1 та PT2 на енергіях пучка, коли система проходить через неста-



більшу область, що призводить до трохи довшої емісії на меншій температурі. Спостережений ефект відповідає лише декільком мегаелектронвольтам в температурі, і тому потрібна дуже точна експериментальна визначення температури, щоб використовувати її як сигнал.

Нарешті, на рис. 3.6 показана функція збудження випромінювання дилептонів (верхня панель), а також інтегроване відношення множинності дилептонів для трьох рівнянь стану. Найбільше підвищення спостерігається для швидкості випромінювання дилептонів  $dN_{\ell\bar{\ell}}/dM$  при низьких масах ( $M = 50$  MeV). Тут можна спостерігати збільшення в 2-3 рази відразу, як тільки створена система потрапляє в нестабільну область фазового переходу. Це відповідає також енергії пучка, коли ефект максимальний, тобто можна очікувати максимум у функції збудження швидкості при цій низькій масі як функція енергії пучка.

Чітке підвищення нормованого відносного відношення також видно для обох рівнянь стану з фазовим переходом.<sup>3</sup> У той час як для РТ1 підвищення вже значне при найнижчій енергії пучка, оскільки тут вже досягнута фаза співіснування, для РТ2 підвищення відбувається при вищих енергіях пучка. РТ1 навіть показує максимальне підвищення, порівняно з рівнянням стану СМФ, приблизно при  $E_{\text{lab}} = 6$  AGeV, коли максимальне стискання системи значно перевищує область спінодального регіону, а ефект фазового переходу стає слабким. Для РТ2 надлишок дилептонів збільшується до найвищої енергії пучка, яка вивчається. Однак ми також очікуємо побачити максимум навіть при вищих енергіях пучка, особливо через фазовий перехід з критичною точкою.

Очікується, що релятивістські ефекти стануть більш значущими при збільшенні енергій пучка від 1 до 10 AGeV [41, 142–148]. Їх обробка потребує релятивістської переформулювання поточного підходу. До певної міри це було зроблено у моделі RQMD, для якої потрібні не лише векторні, але й скалярні густинно-залежні потенціали як входні дані. Як правильно та послідовно ре-

---

<sup>3</sup>Зауважте, що ми перевірили, що це збільшення дійсно обумовлене збільшенням відносного випромінювання дилептонів, і що кінцеве число піонів майже не змінюється від рівнянь стану.



алізувати фазовий перехід у векторній та скалярній густині ще не вирішено і буде зроблено у майбутній роботі. Якщо говорити про якісні ефекти сповільненого розвитку, тобто більш тривалий термін служби, то вони мають бути незалежними від релятивістського або нерелятивістського опису, і, отже, висновки нашої роботи очікується, що будуть стійкими, хоча подальші розробки для розуміння кількісних ефектів, безперечно, необхідні.

### 3.3 Висновки

Було показано, що фазовий перехід першого роду у динамічному необоротному описі транспорту зіткнень важких іонів призведе до значного підвищення відношення кількості дилептонів при низькій інваріантній масі та низькій енергії пучка на число заряджених піонів. На відміну від попередніх досліджень, в цій постановці вся еволюція розглядається в межах узгодженого динамічного підходу, що дозволяє нам описувати вироблення частинок, а також динамічну еволюцію системи без введення додаткових параметрів. Крім того, оскільки ми використовуємо мікроскопічну транспортну модель, ефекти обмеженої в'язкості та обмеженого розміру системи враховуються автоматично. Різна величина сигналу, порівняно з [117], може бути зрозуміла як результат скінченої в'язкості, а також різного підходу до ефективних ступенів свободи в процедурі локального термодинамічного усереднення порівняно з гідродинамічним підходом.

Прогнозований коефіцієнт посилення виробництва дилептонів в 2-3 рази при масах  $M \approx 50 \text{ MeV}$  та 1.5 по інтегрованому діапазону є достатньо значними та імовірно будуть виміряні у майбутніх експериментах на SIS100. Крім того, спостерігається зниження температури дилептонів на близько  $5 \text{ MeV}$  у діапазоні низьких мас, коли система, створена у ядерному зіткненні, досягає зони фазового переходу через збільшення енергії пучка.

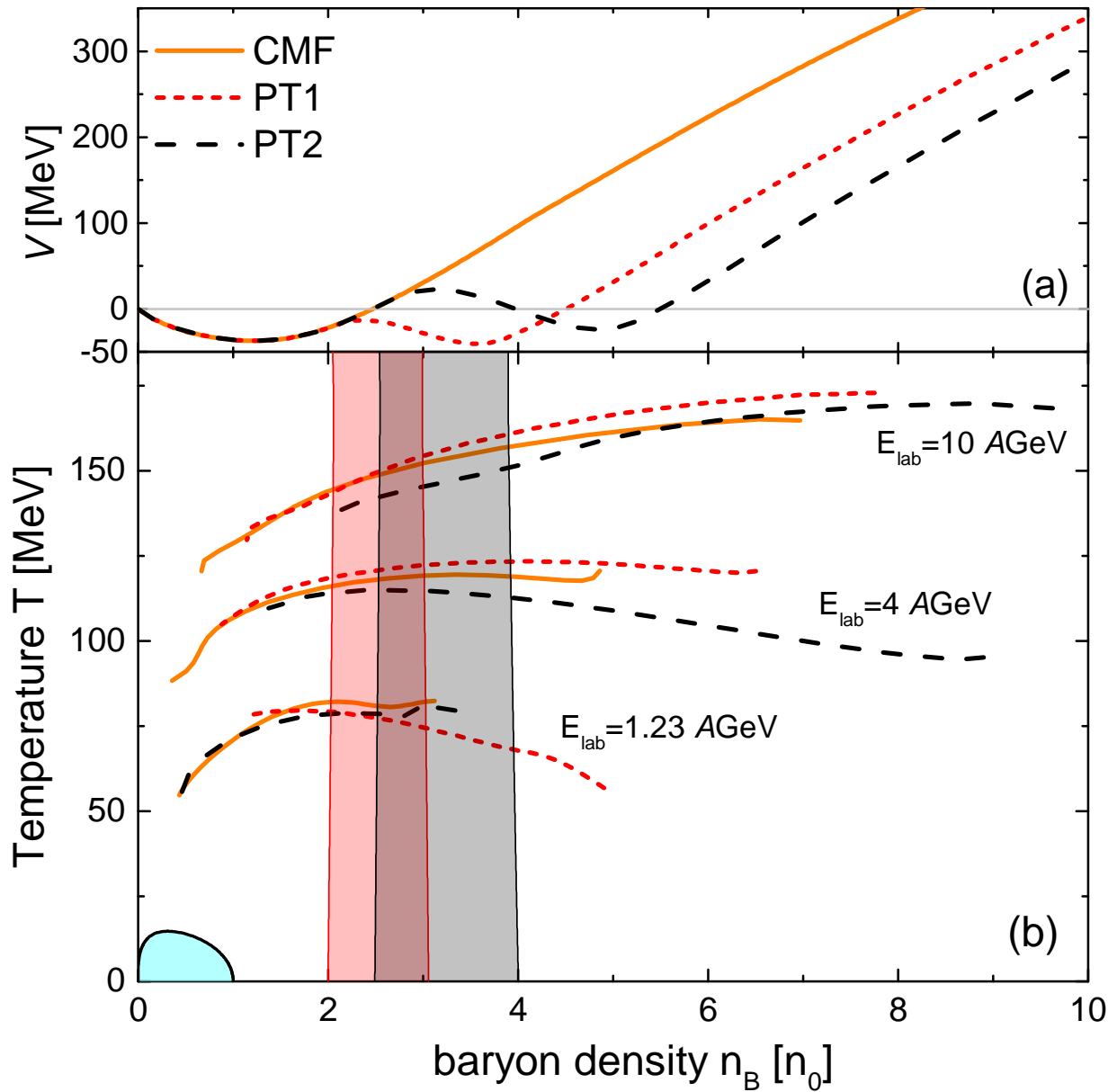


Рис. 3.1: Панель (а): Ефективний потенціал баріонів як функція щільності баріонів  $n_B$  для всіх трьох рівнянь стану. Стандартна версія CMF монотонно зростає при вищих щільностях, тоді як сценарії PT1 та PT2 включають додаткові фазові переходи, які представлені вторинними мінімумами. Панель (б): Траєкторії після усереднення центральної клітини показані як розраховані за допомогою методу термодинамічного усереднення для різних енергій пучка. Області спінодалі PT1 та PT2 на фазовій діаграмі  $n_B$ - $T$  позначені заштрихованими областями.

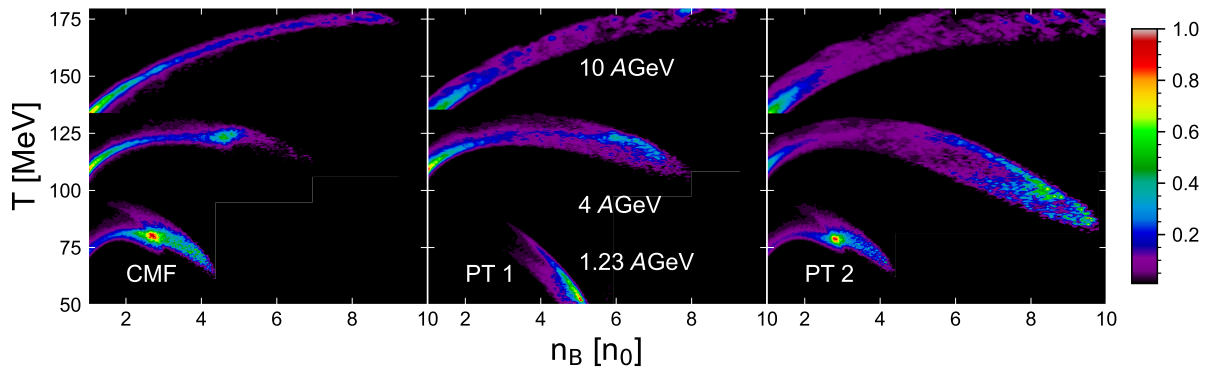


Рис. 3.2: Інтегроване за часом випромінювання дилептонів  $1/N_{l\bar{l}}^{\max} d^2 N_{l\bar{l}}/dT dn_B$ , нормалізоване до його максимального значення  $N_{l\bar{l}}^{\max}$ , для центральних зіткнень Au-Au та трьох різних рівнянь стану та трьох різних енергій пучка. Результати розраховані за допомогою методу термодинамічного усереднення. Випромінювання показано як функція температури та густини, підкреслюючи регіони на фазовій діаграмі, які найбільше сприяють загальному надлишку дилептонів. Чіткі відмінності між рівняннями стану можуть бути спостережені, особливо якщо система розширюється через або поблизу очікуваного фазового переходу.

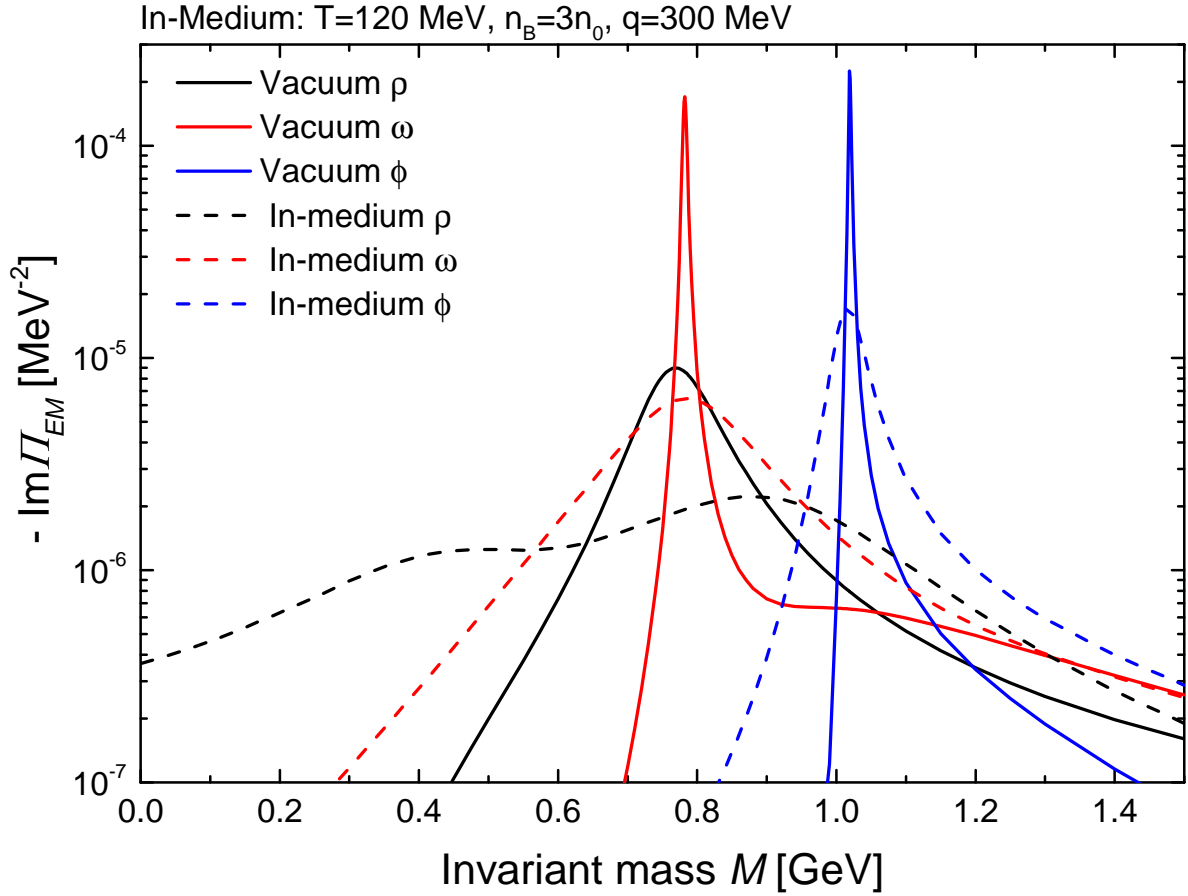


Рис. 3.3: Спектральні функції векторних мезонів  $\rho$  (чорний),  $\omega$  (червоний) та  $\phi$  (синій) як функція їхньої інваріантної маси. Спектральні функції у вакуумі (суцільні лінії) порівнюються з певним вибором спектральних функцій у середовищі при температурі  $T = 120$  MeV, щільності баріонів  $n_B = 3n_0$  та трьох імпульсу  $q = 300$  MeV. Мезон  $\rho$  показує найсильніше розширення, в той час як також мезони  $\omega$  та  $\phi$  розширені у середовищі.

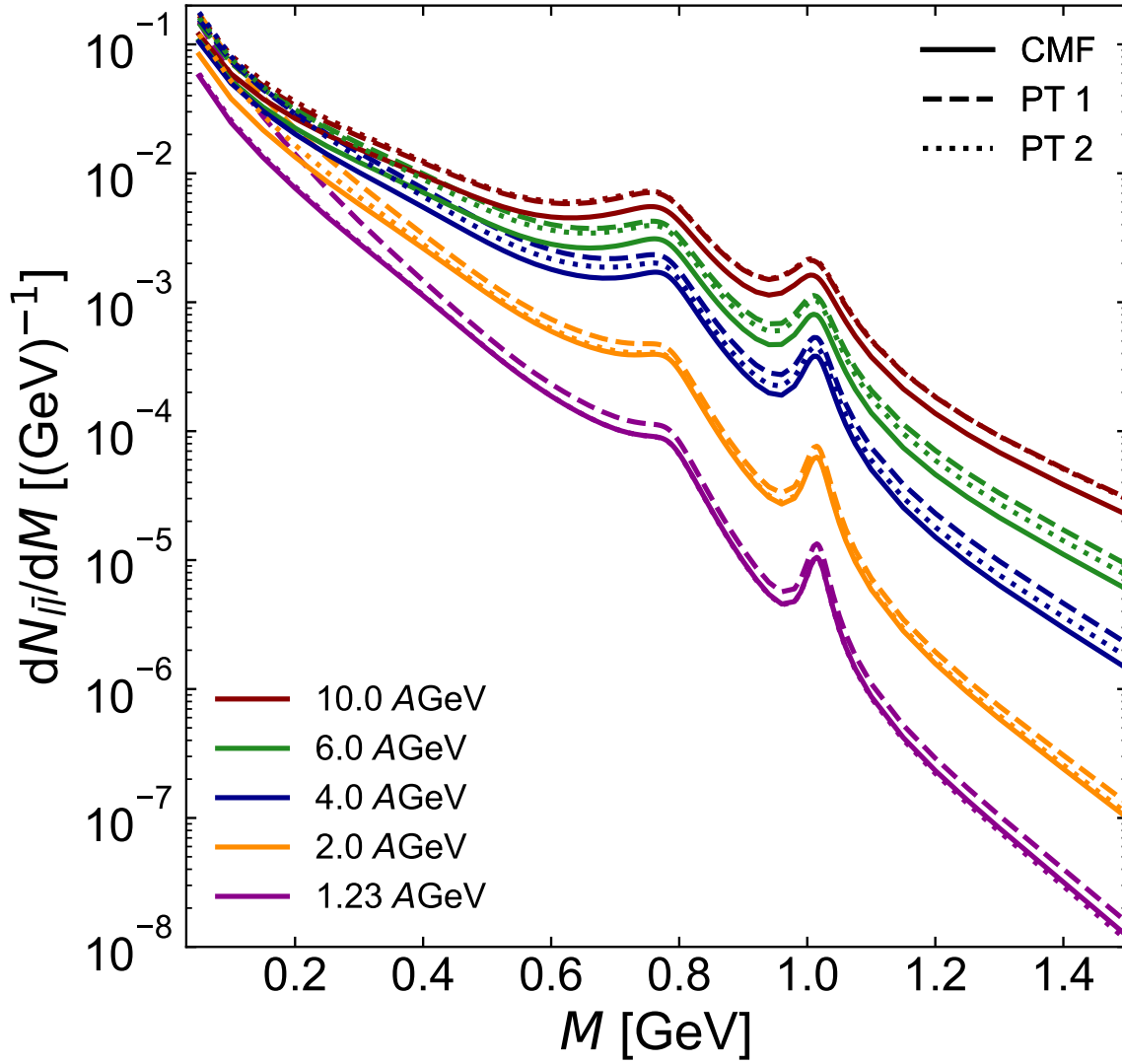


Рис. 3.4: Спектри інваріантної маси дилептонів у центральних зіткненнях Au-Au, розраховані за допомогою CMF та двох CMF-PT рівнянь стану для енергій, доступних на прискорювачі SIS18 та на майбутньому прискорювачі SIS100. Зміни у спектрі дилептонів у середовищі можна спостерігати від 1,23 до 10 AGeV.

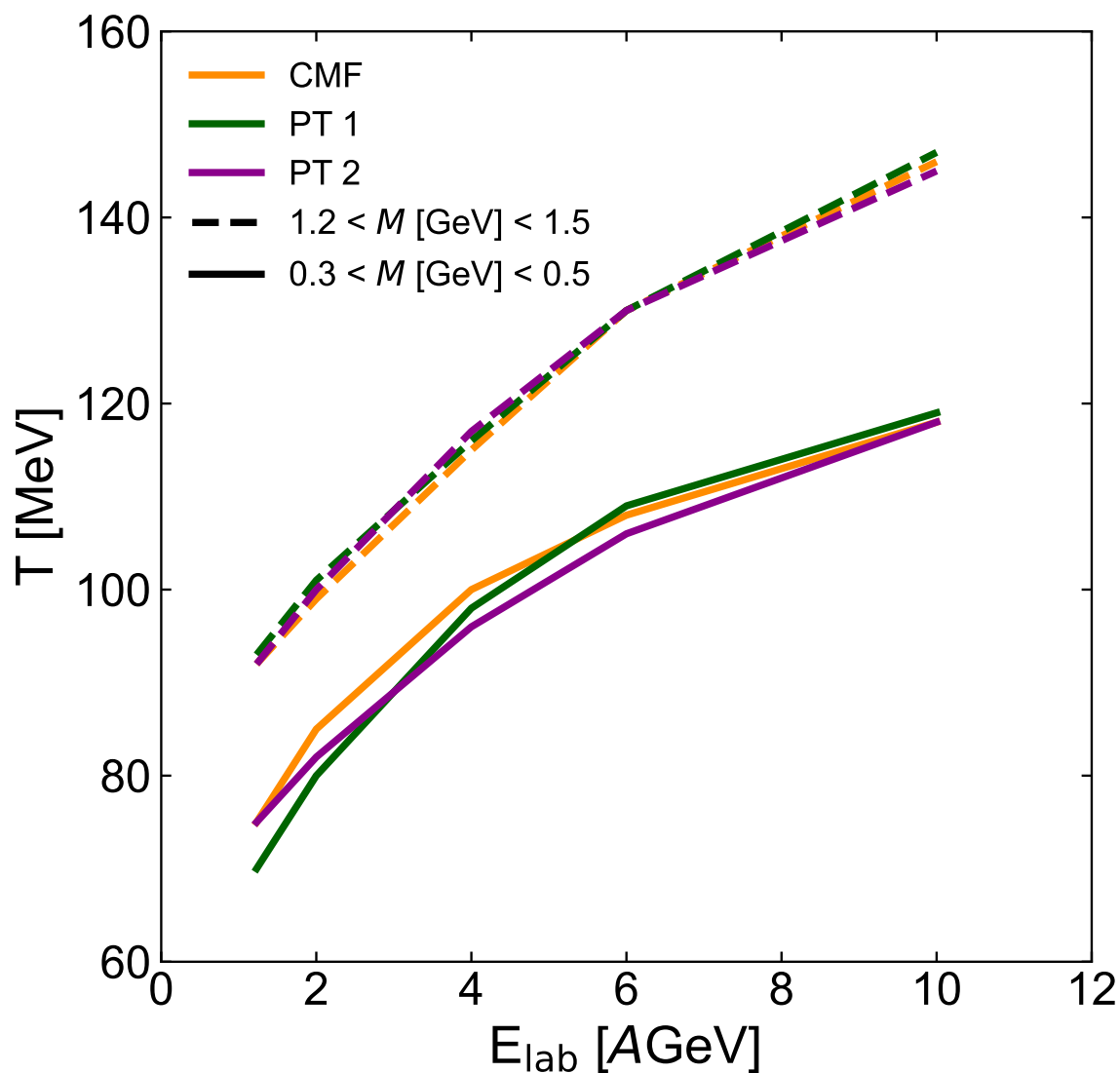


Рис. 3.5: Експитаційна функція температури дилептонів, вилучена через експоненціальні апроксимації спектра інваріантної маси дилептонів в двох різних діапазонах мас. Низький діапазон мас показує меншу температуру та сильнішу чутливість до наявності фазового переходу.

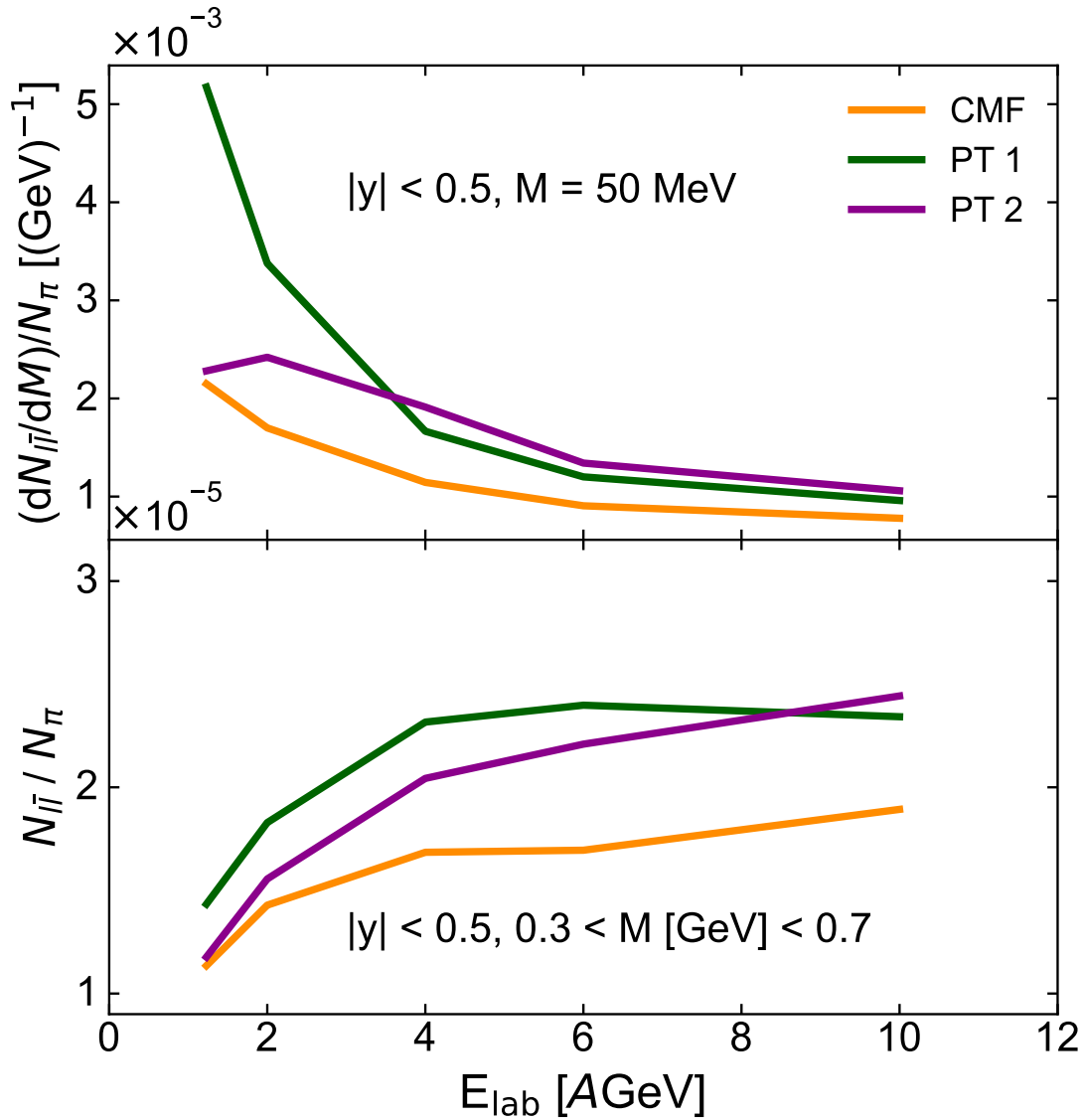


Рис. 3.6: Верхня панель: Випромінювання дилептонів  $dN_{\bar{l}l}/dM$  при  $M = 50$  MeV, інтегрована по всім імпульсам у середині рапідності та нормалізована до спектру заряджених піонів, як функція кінетичної енергії пучка що налітає. При цій низькій масі посилення швидкості випромінювання є дуже сильним, якщо досягнуто фазового переходу. Максимальне посилення відбувається при енергії пучка, коли система входить у фазовий перехід. Нижня панель: Інтегрований спектр дилептонів на кількість заряджених піонів в одиниці рапідності, у середині рапідності, як функції кінетичної енергії пучка що налітає. Дилептони інтегровані у діапазоні низьких мас розподілу інваріантних мас. Можна спостерігати чітке та значне збільшення спектру дилептонів, як тільки досягнуто фазового переходу (або значного пом'якшення). Максимум посилення досягається лише після того, як початкове стиснення явно перевищує щільності співіснування фаз.

## Розділ 4

# Флуктуації зарядів що зберігаються

### 4.1 Флуктуації числа протонів

#### 4.1.1 Вступ

Дослідження фазової діаграми сильно взаємодіючої речовини сьогодні є однією з важливих тем в ядерній та фізиці частинок. Переходи між різними фазами очікується розкрити як специфічні шаблони у флуктуаціях числа частинок у наближенні до критичної точки (КТ) [49, 50, 149—152]. Ще сильніший сигнал можна очікувати від змішаної фази [153—155]. Зокрема, фазовий перехід деконфайнменту при великій баріонній густині, що закінчується гіпотетичною КТ КХД, повинен викликати великі флуктуації зарядів які зберігаються. Це загалом стосується також краще встановленого переходу першого порядку ядерної рідини-газу [65, 70, 156—158].

Флуктуації числа частинок можуть бути характеризовані центральними моментами,  $\langle(\Delta N)^2\rangle \equiv \sigma^2$ ,  $\langle(\Delta N)^3\rangle$ ,  $\langle(\Delta N)^4\rangle$ , де  $\langle\dots\rangle$  позначає усереднення по подіях, а  $\Delta N \equiv N - \langle N \rangle$ . Масштабована варіація  $\omega$ , (нормалізований) скупов-нес  $S\sigma$  та куртозис  $\kappa\sigma^2$  розподілу числа частинок визначаються як наступні



комбінації центральних моментів,

$$\omega[N] = \frac{\sigma^2}{\langle N \rangle} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}, \quad (4.1)$$

$$S\sigma[N] = \frac{\langle (\Delta N)^3 \rangle}{\sigma^2} = \frac{\kappa_3}{\kappa_2}, \quad (4.2)$$

$$\kappa\sigma^2[N] = \frac{\langle (\Delta N)^4 \rangle - 3\langle (\Delta N)^2 \rangle^2}{\sigma^2} = \frac{\kappa_4}{\kappa_2}, \quad (4.3)$$

де  $\kappa_n$  є кумулянтами розподілу  $N$ . Розмірно-незалежні (інтенсивні) міри флуктуацій числа частинок (4.1-4.3) також застосовуються до зарядів які зберігаються, таких як чисте число баріонів  $B$  та електричний заряд  $Q$ .

Маючи зазвичай довші часи рівноваження [159, 160], вважається, що флуктуації зарядів які зберігаються також відображають властивості ранніх стадій зіткнення [151]. Дослідження вищих мір флуктуацій мотивовано їхньою більшою чутливістю до критичних явищ [50, 78, 157, 161–163]. Експериментальні дослідження таких мір флуктуацій тривають [53].

Загальне число баріонів та електричний заряд зберігаються від події до події. Тому фактичні флуктуації зарядів які зберігаються можна побачити лише у скінченних областях реєстрації. Оптимальний вибір області реєстрації є важливою проблемою. Якщо, з іншого боку, область реєстрації занадто мала, домінують тривіальні флуктуації, подібні до Пуассона [150, 164–166]. Область реєстрації повинна бути достатньо великою порівняно з довжинами кореляції, що мають значення для різних фізичних процесів [167, 168].

Флуктуації (чистого) числа баріонів очікуються як важливий сигнал будь-яких критичних явищ. Оскільки детекція нейтронів проблематична, на практиці вивчаються розподіли (чистого) числа протонів. У центральних зіткненнях ядро-ядро флуктуації (чистого) числа протонів вимірюються при різних енергіях зіткнень як функція розміру інтервалу швидкості  $\Delta y$ . При високих енергіях зіткнень флуктуації відповідають розподілу Пуассона при малих  $\Delta y \ll 1$  і вони *монотонно зменшуються* з  $\Delta y$ . Пояснення цієї поведінки нещодавно було розглянуто в [169, 170]. Основні фізичні ефекти, що пригнічують флуктуації числа протонів, - це глобальне збереження числа баріонів

та відштовхувальні взаємодії між протонами, наприклад такі, що відповідають власному об'єму частинки.

Нещодавно були опубліковані дані колаборації HADES для флуктуацій числа протонів [171] для 5% центральних зіткнень Au+Au при енергії зіткнення у центрі мас пари нуклонів  $\sqrt{s_{NN}} = 2.42$  GeV. Зауважимо, що при цій малій енергії виробництво антипротонів незначне. На відміну від даних на енергіях RHIC та LHC, результати HADES демонструють, що масштабована варіація для протонів *монотонно зростає* з  $\Delta y$  від одиниці при  $\Delta y \ll 1$  до  $\omega > 2$  у симетричному інтервалі швидкості  $\Delta Y = 1$  у системі центру мас. Ефекти збереження баріонів та відштовхувальні взаємодії, які, здається, керують поведінкою кумулянтів числа протонів на високих енергіях, не можуть навіть якісно описати дані HADES [172].

Великі флуктуації числа протонів від події до події можуть потенційно бути сигналом аномалій у рівнянні стану створеної речовини. Ця можливість обговорюється в роботі [173], що вимагає сильних кореляцій між випущеними протонами у координатному просторі, наприклад, через можливу присутність КТ у густій ядерній речовині.

#### 4.1.2 Модель Біноміальної Рестрації частинок у зіткненнях важких ядер

##### Корекції прийняття біноміального розподілу

Нехай функція  $P(N)$  позначає нормалізований розподіл імовірностей для спостереження  $N$  частинок даного типу в повному фазовому просторі. Корекції методу біноміальної реєстрації (МБР) для флуктуацій числа частинок припускають, що імовірність  $p(n, x)$  спостерігати  $n$  частинок, виявлених у скінченній  $x$ -області фазового простору, дається як

$$p(n, x) = \sum_{N=n}^{\infty} \frac{N!}{n!(N-n)!} x^n (1-x)^{N-n} P(N) \equiv \sum_{N=n}^{\infty} B(N, n; x) P(N) . \quad (4.4)$$

## МБР для флуктуації числа частинок

Спочатку розглянемо МБР (4.4) застосований до частинок даного типу. Характеристична функція розподілу  $P(N)$  визначається як

$$F_N(k) = \langle e^{ikN} \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} e^{ikN} P(N) = \exp \left[ \sum_{l=1}^{\infty} \kappa_l[N] \frac{(ik)^l}{l!} \right], \quad (4.5)$$

де  $\kappa_l[N]$  —  $l$ -тий кумулянт розподілу  $P(N)$ . Відповідна характеристична функція для кількості прийнятих частинок читається

$$\begin{aligned} f_n(k|x) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{ikn} p(n|x) = \sum_{N=0}^{\infty} P(N) \sum_{n=0}^{n_0} e^{ikn} B(N, n|x) \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} P(N) (1 - x + x e^{ik})^N = \sum_{N=0}^{\infty} P(N) e^{\phi[k|x]N} = F_N(-i\phi[k|x]), \end{aligned} \quad (4.6)$$

де  $\phi[k|x] \equiv \ln(1 - x + x e^{ik})$  є функцією генерування кумулянтів біноміального розподілу та  $F_N$  задано за допомогою Eq. (4.5).

Параметр прийняття  $0 \leq x \leq 1$  має просте значення  $x = \langle n \rangle / \langle N \rangle$ , тобто, він дорівнює співвідношенню середніх множин прийнятих та всіх частинок. При  $x \rightarrow 1$  ми знаходимо  $f_n(k|x) \cong F_N(k|x)$ , тобто,  $p(n|x) \cong P(n)$ .

$$f_n(k|x) \stackrel{x \rightarrow 0}{\cong} 1 - x \langle N \rangle (1 - e^{ik}) \stackrel{x \rightarrow 0}{\cong} \exp[x \langle N \rangle (e^{ik} - 1)], \quad (4.7)$$

що є характеристичною функцією розподілу Пуассона з середнім значенням, рівним  $x \langle N \rangle$ .

Кумулянти розподілу імовірностей  $p(n, x)$  розраховуються як

$$\kappa_l[n|x] = \left( \frac{d}{d(ik)} \right)^l \ln[f_n(k|x)] \Big|_{k=0}. \quad (4.8)$$

Масштабована дисперсія, асиметрія та ексцес для розподілу (4.4) прийнятих

частинок тоді представлені (4.4) наступним чином [174]:

$$\omega_\alpha[n] \equiv \frac{\kappa_2[n|\alpha]}{\kappa_1[n|\alpha]} = 1 - \alpha + \alpha\omega[N] , \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} S\sigma_\alpha[n] &= \frac{\kappa_3[n|\alpha]}{\kappa_2[n|\alpha]} = \frac{\omega[N]}{\omega_\alpha[n]} \{ \alpha^2 S\sigma[N] + 3\alpha(1 - \alpha) \} \\ &+ \frac{1 - \alpha}{\omega_\alpha[n]} (1 - 2\alpha) , \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \kappa\sigma_\alpha^2[n] &= \frac{\kappa_4[n|\alpha]}{\kappa_2[n|\alpha]} = \frac{\omega[N]}{\omega_\alpha[n]} \{ \alpha^3 \kappa\sigma^2[N] \} \\ &+ \frac{\omega[N]}{\omega_\alpha[n]} (1 - \alpha) \{ 6\alpha^2 S\sigma[N] + \alpha(7 - 11\alpha) \} \\ &+ \frac{1 - \alpha}{\omega_\alpha[n]} \{ 1 - 6\alpha(1 - \alpha) \} , \end{aligned} \quad (4.11)$$

де

$$\omega[N] = \frac{\kappa_2[N]}{\kappa_1[N]} , \quad S\sigma[N] = \frac{\kappa_3[N]}{\kappa_2[N]} , \quad \kappa\sigma^2[N] = \frac{\kappa_4[N]}{\kappa_2[N]} . \quad (4.12)$$

Рівняння (4.9) було раніше отримано у роботах [175, 176]. При  $x \rightarrow 1$  у рівняннях (4.9)-(4.11) очевидно знаходимо  $\omega_x[n] \cong \omega[N]$ ,  $S\sigma_x[n] \cong S\sigma[N]$ , та  $\kappa\sigma_x^2[n] \cong \kappa\sigma^2[N]$ , тобто, міри флуктуації МБР наближаються до тих, що у повному фазовому просторі. У протилежному випадку,  $x \rightarrow 0$ , співвідношення кумулянтів є Пуассонівськими, тобто  $\omega_x[n] \cong S\sigma_x[n] \cong \kappa\sigma_x^2[n] \cong 1$ .

Рівняння (4.9)-(4.11) можна розвернути, щоб виразити флуктуації у повному фазовому просторі за допомогою флуктуацій у межах даного біноміального прийняття  $x$ :

$$\omega[N] = 1 - \frac{1 - \omega_x[n]}{x} , \quad (4.13)$$

$$S\sigma[N] = \frac{\omega[n]}{x^2\omega[N]} S\sigma[n] - \frac{1 - x}{x^2\omega[N]} (1 - 2x + 3x\omega[N]) , \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \kappa\sigma^2[N] &= \frac{\omega[n]}{x^3\omega[N]} \kappa\sigma^2[n] \\ &- \frac{1 - x}{x^3\omega[N]} \{ 1 - 6(1 - x)x + (7 - 11x + 6xS\sigma[N])x\omega[N] \} . \end{aligned} \quad (4.15)$$

Треба зазначити, однак, що ці “обернені” відношення слід використовувати з обережністю. За визначенням, як  $\omega[N]$ , так і  $\omega_x[n]$  є невід’ємними величинами. Рівняння (4.9) гарантує, що  $\omega_x[n] \geq 0$  при  $0 \leq x \leq 1$  для будь-якого невід’ємного значення  $\omega[N]$ . Для оберненого відношення (4.13), однак, це не гарантовано: Значення  $0 \leq \omega_x[n] < 1 - x$  перетворюються Eq. (4.13) на беззмістовне негативне значення  $\omega[N]$ . Схожі аргументи можна застосувати до вищих порядків кумулянтів.

Розгляньмо два конкретні приклади розподілу  $P(N)$ . Перший приклад — це розподіл Пуассона,

$$P(N) = \exp(-\langle N \rangle) \frac{\langle N \rangle^N}{N!} . \quad (4.16)$$

Цей розподіл може відповідати, наприклад, рівноважній системі невзаємодіючих частинок Максвелла-Больцмана у великому канонічному ансамблі. Знаходимо

$$\omega[N] = S\sigma[N] = \kappa\sigma^2[N] = 1 \quad (4.17)$$

для флуктуацій у повному фазовому просторі, тоді як Рівняння (4.9)-(4.11) дають

$$\omega_x[n] = S\sigma_x[n] = \kappa\sigma_x^2[n] = 1 \quad (4.18)$$

для флуктуацій у межах прийняття. Величини МБР (4.18) не залежать від параметра прийняття  $x$  і рівні мірам флуктуації (4.17) у повному фазовому просторі. Ця остання властивість процедури МБР є унікальною особливістю розподілу Пуассона (4.16). Як наш другий приклад, ми припускаємо, що кількість частинок у повному фазовому просторі є фіксованою, тобто,

$$P(N) = \delta(N - N_0) . \quad (4.19)$$

Такий сценарій приблизно дійсний для кількості баріонів у  $p + p$  та реакціях

між ядрами при малих та середніх енергіях зіткнення, де виробництво пар баріон-антибаріон є незначним.

Бачимо що,

$$\omega[N] = 0, \quad S\sigma[N] = -1, \quad \kappa\sigma^2[N] = 1. \quad (4.20)$$

Рівняння (4.9)-(4.11) відповідають біноміальному розподілу ймовірностей  $B(n, N, x)$ , даючи

$$\omega_x[n] = 1 - x, \quad S\sigma_x[n] = 1 - 2x, \quad \kappa\sigma_x^2[n] = 1 - 6x(1 - x). \quad (4.21)$$

## МБР для флуктуацій заряду

У цьому підрозділі, ми розглядаємо МБР для флуктуацій зарядів які зберігаються. Ми використовуємо позначення  $N_+$ ,  $N_-$  та  $n_+$ ,  $n_-$ , для позитивно та негативно заряджених частинок у повному просторі та в регіоні прийняття  $x$ , відповідно. Тут збережений заряд може відповідати будь-якому цілому збереженому числу, що переноситься адронами, наприклад електричний заряд або баріонний номер. Без втрати загальності, ми зосереджуємося на випадку тільки з електричним зарядом. Ненульові значення електричного заряду та баріонного номеру кінцевих гадронів, що виявляються у високоенергетичних зіткненнях, є  $\pm 1$ . Таким чином, чистий заряд  $Q$  прямо пов'язаний з кількістю позитивно та негативно заряджених частинок:  $Q = N_+ - N_- = \text{const}$  у повному просторі та  $q = n_+ - n_-$  у межах прийняття.

Функцію розподілу  $N_+$  та  $N_-$  можна представити у наступній загальній формі:

$$\mathcal{P}(N_+, N_-) = \delta(N_+ - N_- - Q) P(N_{\text{ch}}), \quad (4.22)$$

де  $N_{\text{ch}} \equiv N_+ + N_-$ . МБР вводиться як

$$p(n_+, n_- | x_+, x_-) = \sum_{N_+, N_- = 0}^{\infty} \mathcal{P}(N_+, N_-) B(N_+, n_+ | x_+) B(N_-, n_- | x_-) , \quad (4.23)$$

де біноміальні розподіли визначені в (4.4). Параметр  $x_+$  визначений як відношення середньої кількості прийнятих (виміряних) позитивно заряджених частинок до середньої кількості всіх вироблених позитивно заряджених частинок у даному зразку подій зіткнення,  $x_+ = \langle n_+ \rangle / \langle N_+ \rangle$ . Аналогічно,  $x_- = \langle n_- \rangle / \langle N_- \rangle$ . У процедурі МБР ці величини збігаються з ймовірностями для випадково вибраної позитивно (негативно) зарядженої частинки опинитися у межах прийняття детектора. Характеристична функція для розподілу чистого заряду  $q = n_+ - n_-$  у прийнятті може бути розрахована так:

$$\begin{aligned} f_q(k | x_+, x_-) &\equiv \sum_{n_+, n_- = 0}^{\infty} e^{ik(n_+ - n_-)} p(n_+, n_- | x_+, x_-) \\ &= (1 - x_+ + x_+ e^{ik})^{Q/2} (1 - x_- + x_- e^{-ik})^{-Q/2} F_{N_{\text{ch}}}[-i\Phi(k | x_+, x_-)] . \end{aligned} \quad (4.24)$$

Тут

$$\Phi(k | x_+, x_-) \equiv \frac{1}{2} [\ln(1 - x_+ + x_+ e^{ik}) + \ln(1 - x_- + x_- e^{-ik})] \quad (4.25)$$

та  $F_{N_{\text{ch}}}$  є характеристичною функцією розподілу множинності частинок у повному просторі  $P(N_{\text{ch}})$

$$F_{N_{\text{ch}}}(k) \equiv \sum_{N_{\text{ch}}=Q}^{\infty} P(N_{\text{ch}}) e^{ikN_{\text{ch}}} = \exp \left[ \sum_{l=1}^{\infty} \kappa_l[N_{\text{ch}}] \frac{(ik)^l}{l!} \right] . \quad (4.26)$$

$l$ -й кумулянт МБР нетто-заряду,  $q$ , флуктуацій має вигляд

$$\kappa_l[q | x_+, x_-] = \left( \frac{d}{d(ik)} \right)^l \ln[f_q(k | x_+, x_-)] \Big|_{k=0} . \quad (4.27)$$

Чотири перші кумулянти мають вигляд

$$\kappa_1[q] = \langle q \rangle = x_+ \langle N_+ \rangle - x_- \langle N_- \rangle, \quad (4.28)$$

$$\kappa_2[q] = \xi_2^+ \langle N_+ \rangle + \xi_2^- \langle N_- \rangle + \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \kappa_2[N_{ch}] \quad (4.29)$$

$$\kappa_3[q] = \xi_3^+ \langle N_+ \rangle - \xi_3^- \langle N_- \rangle - \frac{3}{4} \Delta x [\xi_2^- + \xi_2^+] \kappa_2[N_{ch}] - \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^3 \kappa_3[N_{ch}] \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \kappa_4[q] = & \xi_4^+ \langle N_+ \rangle + \xi_4^- \langle N_- \rangle + \frac{3}{4} [\xi_2^+ + \xi_2^-]^2 \kappa_2[N_{ch}] + \Delta x [\xi_3^- - \xi_3^+] \kappa_2[N_{ch}] + \\ & + 3 \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 [\xi_2^+ + \xi_2^-] \kappa_3[N_{ch}] + \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^4 \kappa_4[N_{ch}]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Тут  $\langle N_+ \rangle = (\langle N_{ch} \rangle + Q)/2$ ,  $\langle N_- \rangle = (\langle N_{ch} \rangle - Q)/2$ ,  $\Delta x = x_- - x_+$ , і

$$\begin{aligned} \xi_1^\pm &= x_\pm, & \xi_2^\pm &= x_\pm (1 - x_\pm), & \xi_3^\pm &= \xi_2^\pm (1 - 2x_\pm), & (4.32) \\ & & & & \xi_4^\pm &= \xi_2^\pm (1 - 6\xi_2^\pm). \end{aligned}$$

Як видно з рівнянь (4.28)-(4.31), кумулянти *нетто-заряду* МБР розраховуються з урахуванням кумулянтів розподілу  $P(N_{ch})$  зарядженої множинності в повному фазовому просторі. У випадку рівних параметрів приймання,  $x_+ = x_- \equiv x$ , співвідношення кумулянтів спрощуються до

$$\omega_x[q] \equiv \frac{\kappa_2[q]}{\kappa_1[q]} = \frac{\langle N_{ch} \rangle}{Q} (1 - x), \quad (4.33)$$

$$S\sigma_x[q] \equiv \frac{\kappa_3[q]}{\kappa_2[q]} = \frac{Q}{\langle N_{ch} \rangle} (1 - 2x), \quad (4.34)$$

$$\kappa\sigma_x^2[q] \equiv \frac{\kappa_4[q]}{\kappa_2[q]} = 1 + 3x(1 - x) (\omega[N_{ch}] - 2). \quad (4.35)$$

Далі ми використовуватимемо симуляції UrQMD для аналізу, наскільки припущення  $x_+ = x_-$  відповідає реальним умовам.

Вищенаведені результати можна безпосередньо узагальнити для випадку флуктуацій нетто-баріонного числа. Це досягається за допомогою наступних заміни у рівняннях (4.33) та (4.35):  $q \rightarrow b$ ,  $Q \rightarrow B$ ,  $N_{ch} \rightarrow N_B + N_{\bar{B}}$ . Для достатньо малих енергій зіткнень у реакціях  $p + p$  та ядро-ядерних реакціях



маємо  $N_{\bar{B}} \ll N_B$ , що означає, що число баріонів  $N_B$  приблизно дорівнює нетто-баріонному числу  $B$ . Тому,  $(N_B + N_{\bar{B}})/B \cong 1$ ,  $\omega[N_B + N_{\bar{B}}] \cong \omega[N_B] \cong 0$  і рівняння (4.33), (4.35) зводяться до рівнянь (4.21).

Варто зазначити, що масштабована дисперсія (4.33) та асиметрія (4.34) проявляють особливу поведінку у випадку реакцій  $e^+ + e^-$  та/або  $p + \bar{p}$ . У цих реакціях всі глобально збережені заряди дорівнюють нулю, і тому  $\omega_x[q] \equiv \infty$  та  $S\sigma_x[q] \equiv 0$ . З іншого боку, куртозис (4.35) приймає нетривіальні значення для всіх типів реакцій.

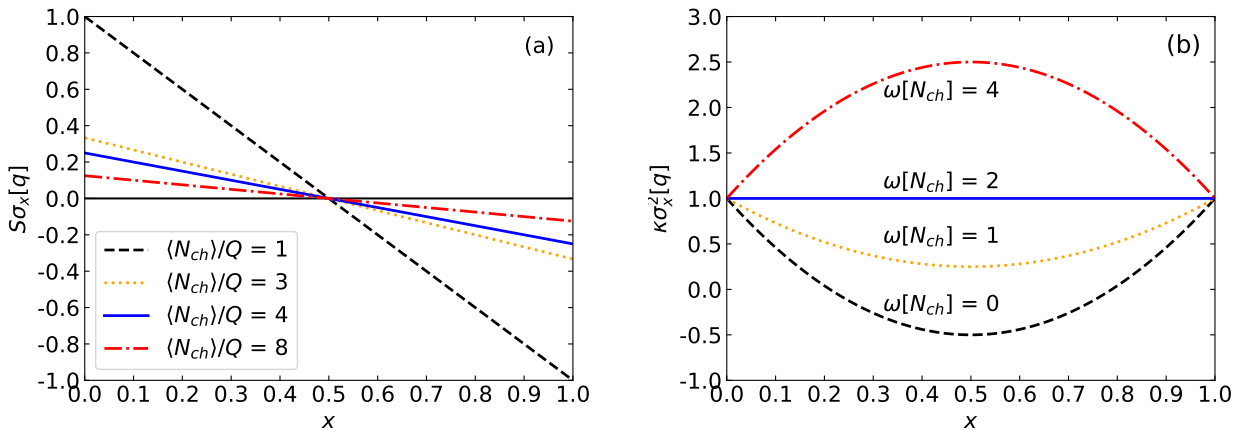


Рис. 4.1: Асиметрія (4.34) (a) та куртозис (4.35) (b) як функції параметра приймання  $x$  при різних значеннях  $\langle N_{ch} \rangle / Q$  та  $\omega[N_{ch}]$ .

Скьюнес нетто-заряду  $S\sigma_x[q]$  (4.34) та куртозис  $\kappa\sigma_x^2[q]$  (4.35) залежать відповідно лінійно та квадратично від параметра приймання  $x$ . Ці залежності показані на рис. 4.1 для різних значень  $\langle N_{ch} \rangle / Q$  та  $\omega[N_{ch}]$ . Співвідношення  $Q/N_{ch}$  визначає нахил залежності скьюнесу від  $x$ .  $S\sigma_x[q]$  дорівнює нулю при  $x = 0.5$  для довільних значень  $Q$  та  $N_{ch}$ . Параболічна залежність куртозису  $\kappa\sigma_x^2$  визначається лише значенням  $\omega[N_{ch}]$ .  $\kappa\sigma_x^2$  (4.35) дорівнює одиниці при  $x = 0$  та  $x = 1$ , тоді як вершина параболічної залежності розташована при  $x = 1/2$ . Ці властивості не залежать від значення  $\omega[N_{ch}]$ . Значення  $\omega[N_{ch}]$  визначає вигин параболи: вона опукла для  $\omega[N_{ch}] < 2$ , увігнута для  $\omega[N_{ch}] > 2$ , і перетворюється на горизонтальну лінію  $\kappa\sigma_x^2 = 1$  для  $\omega[N_{ch}] = 2$  [див. рис. 4.1 (b)].

Зауважимо, що дані про реакції  $p + p$  свідчать, що  $\omega[N_{ch}]$  є зростаючою

функцією енергії зіткнення зі значеннями меншими за 2 при малих енергіях зіткнення та більшими за 2 при великих енергіях зіткнення [177]. Припускаючи  $Q = 2$ , значення  $\langle N_{\text{ch}} \rangle$  та  $\omega[N_{\text{ch}}]$  представлені на рис. 4.1 відповідають приблизно даним  $p + p$  при  $\sqrt{s} \cong 2 \text{ GeV}$ ,  $10 \text{ GeV}$ ,  $20 \text{ GeV}$ , та  $100 \text{ GeV}$  (див., наприклад, Ref. [178]). Подібні аргументи можна застосувати до флуктуацій баріонного числа. Проте, слід зазначити, що флуктуації  $N_B + N_{\bar{B}}$  суттєво менші, ніж флуктуації  $N_+ + N_-$ , тобто,  $\omega[N_B + N_{\bar{B}}] \ll \omega[N_{\text{ch}}]$ . На енергіях SPS та RHIC, розглянутих у цій роботі, можна очікувати, що  $\omega[N_B + N_{\bar{B}}] \leq 1$ .

Для двох статистично корельованих типів частинок функція генерування кумулянтів має вигляд:

$$\ln[F(k_+, k_-)] = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\kappa_{n,m}[N_+, N_-]}{n!m!} (ik_+)^n (ik_-)^m \Rightarrow \quad (4.36)$$

$$\ln[f_q(k|x_+, x_-)] = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\kappa_{n,m}[N_+, N_-]}{n!m!} \phi[k|x_+]^n \phi[-k|x_-]^m, \quad (4.37)$$

як впливає з рівняння (4.6). Тут  $\kappa_{n,m}[N_+, N_-]$  є спільними кумулянтами  $P(N_+, N_-)$ . Вони набувають ненульових значень, якщо існує будь-яка кореляція між позитивно зарядженими та негативно зарядженими частинками.

Тоді, взявши відповідні похідні, можна отримати кумулянти розподілу заряду, див. рівняння (4.27), що робить їх лінійними функціями  $\kappa_{n,m}[N_+, N_-]$ . Зауважимо, що рівняння (4.37) не включає факторіальні моменти [179].

Зазначимо, що біноміальний фільтр також часто використовується для корекції ефективності виявлення [179–181], тобто для того, щоб врахувати факт, що вимірювані частинки в межах приймання не виявляються з ймовірністю 100%. Ефективність виявлення зазвичай залежить від кількості вимірюваних частинок та їхніх імпульсів. Тому, простий біноміальний фільтр може бути недостатнім, і замість нього були розглянуті більш складні локальні та залежні від множинності корекції ефективності [182, 183]. Оскільки опубліковані експериментальні дані зазвичай коригуються з урахуванням ефективності виявлення, ми не розглядаємо корекції ефективності у цій роботі.

### 4.1.3 Флуктуації в умовах експерименту HADES

#### Визначення простору де відбувається вимірювання

Для зв'язку флуктуацій у різних інтервалах швидкості ми припускаємо, що прийом частинок є біноміальним, тобто що кожна частинка даного типу приймається детектором з фіксованою ймовірністю  $\alpha$  [184, 185]. Ця ймовірність  $0 \leq \alpha = \langle n \rangle / \langle N \rangle \leq 1$  дорівнює співвідношенню середньої кількості  $\langle n \rangle$  частинок, прийнятих у фіксованій області простору імпульсів  $\Delta y$ , до середньої кількості  $\langle N \rangle$  частинок того ж типу у “повному” просторі імпульсів  $\Delta Y$ . Повний простір імпульсів не обов'язково означає повний тілесний кут  $4\pi$ . Достатньою умовою для  $\Delta Y$  є повне охоплення  $\Delta y$ . Основне припущення біноміального реєстрації полягає в тому, що ймовірність  $\alpha$  однакова для всіх частинок даного типу та незалежна від будь-яких властивостей конкретної події. Це припущення дозволяє зв'язати кумулянти у скінченній області реєстрації з їх значеннями у більшому, охоплюючому фазовому просторі.

Масштабована варіація, скуповес та куртозис прийнятих частинок у  $\Delta y \leq 1$  тоді представлені використовуючи розподіл (4.4). Зауважте, що параметр реєстрації  $\alpha$  не залежить від загальної кількості частинок  $N$  в кожній окремій події.

При  $\alpha \rightarrow 1$  у рівняннях (4.9-4.11), очевидно, знаходимо  $\omega_\alpha[n] \rightarrow \omega[N]$ ,  $S\sigma_\alpha[n] \rightarrow S\sigma[N]$ , та  $\kappa\sigma_\alpha^2[n] \rightarrow \kappa\sigma^2[N]$ , тобто результати біноміального реєстрації наближаються до тих, що у повному інтервалі швидкості  $\Delta Y = 1$ . У протилежному випадку,  $\alpha \rightarrow 0$ , кумулянтні співвідношення є Пуассонівськими, та  $\omega_\alpha[n]$ ,  $S\sigma_\alpha[n]$ ,  $\kappa\sigma_\alpha^2[n] \rightarrow 1$ .

#### Результати HADES для флуктуацій числа протонів

Для опису флуктуацій числа протонів у центральних зіткненнях Au+Au при  $\sqrt{s_{NN}} = 2.42$  GeV, виміряних колаборацією HADES, ми використовуємо процедуру біноміального реєстрації, окреслену в розділі 4.1.3. Дані HADES для  $\omega$ ,  $S\sigma$ , та  $\kappa\sigma^2$ , виміряні при 5% центральних зіткненнях, представлені для 6 симетричних інтервалів швидкості  $\Delta y = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ , та  $\Delta Y = 1$

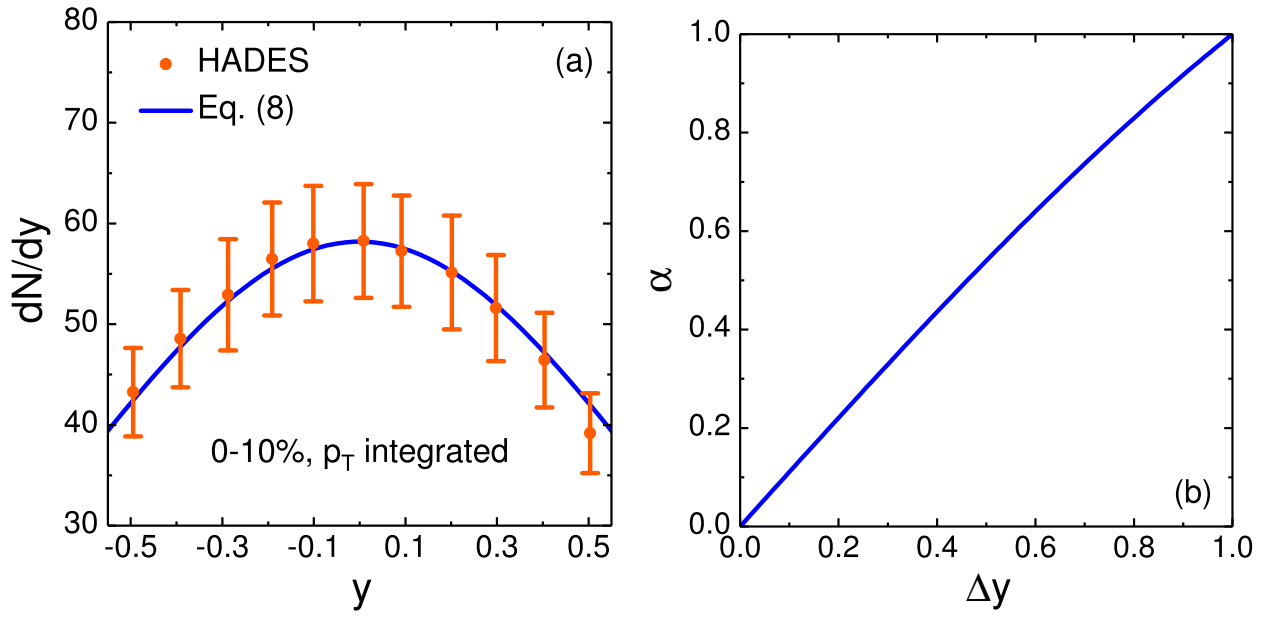


Рис. 4.2: (а): Дані HADES для розподілу швидкості представлені символами, а суцільна лінія показує гауссівське наближення (4.38). (b): Параметр реєстрації  $\alpha$  для даних HADES як функція інтервалу швидкості  $\Delta y$ , розрахований за допомогою Рівняння (4.39).

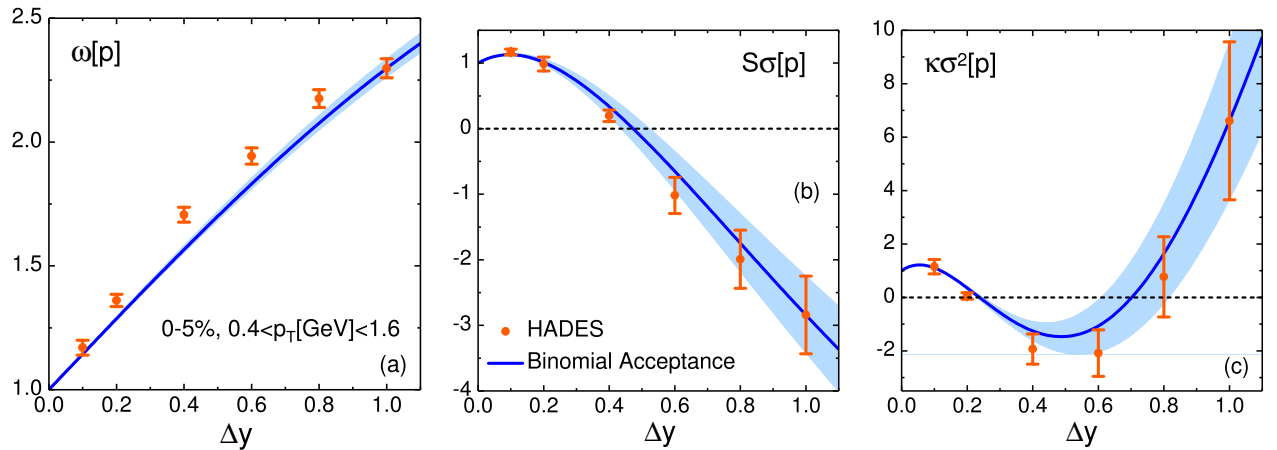


Рис. 4.3: Масштабована варіація (а), скупнес (b), та куртозис (c) розподілу числа протонів як функції інтервалу швидкості  $\Delta y$ . Дані HADES показані символами. Лінія відповідає формулам біноміального реєстрації (4.9-4.11). Сині смуги представляють невизначеності через похибки даних HADES в інтервалі швидкості  $\Delta Y = 1$ .

у системі центру мас. Було застосовано обмеження за поперечним імпульсом  $0.4 < p_T < 1.6$  Гев/с. Далі ми розглядаємо найбільший інтервал швидкості  $\Delta Y = 1$  як “повний” фазовий простір. Величини  $\omega[N]$ ,  $S\sigma[N]$ , та  $\kappa\sigma^2[N]$  для цього інтервалу швидкості розглядаються як значення у повному просторі (4.1-4.3). Вони є вхідними параметрами для формул біноміального реєстрації (4.9-4.11).

Першим кроком процедури біноміального реєстрації є розрахунок відповідних ймовірностей  $\alpha$  для різних інтервалів швидкості. На рисунку 4.2 (а) представлені попередні дані HADES розподілу швидкості протонів для 10% найбільш центральних зіткнень Au+Au [186, 187] у інтервалі швидкості  $\Delta Y = 1$ . Ми наближаємо ці дані гауссівським розподілом

$$\frac{dN}{dy} = C \exp \left[ -\frac{y^2}{2a^2} \right], \quad (4.38)$$

з двома параметрами  $C = 90/\sqrt{2\pi a^2}$  та  $a = 0.62$ , які оцінюють висоту та ширину розподілу. Для будь-якого  $\Delta y \leq 1$  можна визначити ймовірності  $\alpha$  як

$$\alpha = \frac{\int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy \, dN/dy}{\int_{-1/2}^{1/2} dy \, dN/dy}. \quad (4.39)$$

Параметр реєстрації  $\alpha$  як функція  $\Delta y$  показаний на рисунку 4.2 (b). Ми перевірили, що параметр біноміального реєстрації  $\alpha = \alpha(\Delta y)$ , представлений на рисунку 4.2 (b), залишається суттєво незмінним, коли для аналізу розподілу числа протонів використовуються вибірка 5% центральності та додаткові обмеження за  $p_T$ .

Масштабована варіація  $\omega_\alpha[n]$ , асиметрія  $S\sigma_\alpha[n]$ , та куртозис  $\kappa\sigma_\alpha^2[n]$  розподілу числа протонів як функції  $\Delta y$  показані на рисунку 4.3. Можна побачити, що процедура біноміального реєстрації дає добрий збіг з даними HADES для всіх  $\Delta y < 1$ . Отже, знання “глобальних” кумулянтів (у інтервалі швидко-

сті  $\Delta Y = 1$ ) достатньо для відновлення відповідних значень для будь-якого  $\Delta y < 1$ , і жодних “локальних” кореляцій між імпульсами протонів усередині  $\Delta Y$  не спостерігається.

Щоб знайти сигнали цих глобальних флуктуацій, ми пропонуємо розрахувати функцію кореляції для двох довільних неперекривних областей швидкості  $\Delta y_1$  та  $\Delta y_2$ , обидві всередині симетричного інтервалу  $\Delta Y = 1$ , з  $\langle N \rangle$  як середньою кількістю протонів всередині інтервалу  $\Delta Y = 1$  (див. Додаток):

$$\rho(n_1, n_2) \equiv \langle N \rangle \frac{\langle n_1 n_2 \rangle - \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle}{\langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle} = \omega[N] - 1. \quad (4.40)$$

Рівняння (4.40) демонструє універсальні позитивні, оскільки  $\omega[N] > 1$ , кореляції між  $n_1$  та  $n_2$ . Ці кореляції незалежні як від розмірів  $\Delta y_1$  та  $\Delta y_2$ , так і від їх розташування всередині інтервалу швидкості  $\Delta Y = 1$ . Зауважте, що для  $\omega[N] = 0$  ці кореляції були б негативними та дорівнювали б  $\rho = -1$  як наслідок глобального збереження  $N$  в інтервалі  $\Delta Y = 1$ . Негативні значення  $-1 \leq \rho \leq 0$  відповідають малим  $N$ -флуктуаціям з  $0 \leq \omega[N] \leq 1$ . Було б цікаво перевірити співвідношення (4.40) за даними HADES.

## Висновки

Процедура біноміального реєстрації описує масштабовану варіацію, скуповнес та куртозис розподілу числа протонів, що нещодавно виміряно колаборацією HADES у 5% центральних зіткненнях Au+Au при  $\sqrt{s_{NN}} = 2.42$  GeV у кількох інтервалах швидкості. Формули біноміального реєстрації з’єднують спостережувані великі флуктуації числа протонів у інтервалі швидкості  $\Delta Y = 1$  зі спостережуваними флуктуаціями числа протонів. Це відповідає відсутності локальних кореляцій між імпульсами протонів всередині інтервалу швидкості  $\Delta Y = 1$ .

Існуючі дані HADES показують великі негауссові флуктуації числа протонів усередині інтервалу швидкості  $\Delta Y = 1$ . Ці великі флуктуації можуть бути викликані аномаліями в рівнянні стану створеної у зіткненні речовини, які проявляють себе як локальні міжпротонні кореляції в координатному просто-

рі. Однак, великі флуктуації також можуть виникати через деякі глобальні зовнішні причини, які дійсні навіть для системи невзаємодіючих частинок.

Очевидною причиною глобальних флуктуацій числа протонів може бути флуктуації числа учасників нуклонів від події до події. Слід виключити це тривіальне джерело флуктуацій від події до події. На малих енергіях зіткнень це не просте завдання, оскільки немає чітких критеріїв для розрізнення між спостерігачем та учасником нуклонів. Дійсно, на розглянутій енергії зіткнення проєктильні та цільові швидкості приблизно дорівнюють  $\pm 0.74$ , що не далеко від кінематично прийнятої області  $\Delta Y = 1$  для флуктуацій числа протонів. Дані HADES коригуються на флуктуації об'єму [171]. Однак, додаткові дослідження в цьому напрямку були б корисними.

Інше ускладнення на такій низькій енергії зіткнення полягає в значній присутності легких ядерних фрагментів у кінцевому стані. Існування великої частки баріонів у формі ядерних фрагментів може генерувати великі флуктуації числа вільних протонів. Нарешті, колективні потоки баріонів на низьких енергіях зіткнень здаються досить малими, що створює проблему для передачі кореляцій частинок від координатного до імпульсного простору.

Цікавим наслідком картини з глобальними флуктуаціями числа протонів та відсутністю локальних кореляцій між імпульсами протонів є універсальна форма (4.40) для кореляцій множинностей у двох довільних неперекривних інтервалах швидкості  $\Delta y_1$  та  $\Delta y_2$ , обох всередині швидкісної області  $\Delta Y = 1$ . Співвідношення (4.40) можна перевірити, використовуючи наявні дані HADES для протонів при  $\sqrt{s_{NN}} = 2.42$  GeV.

## Отримання рівняння (4.40)

Нехай  $\Delta y_1$  та  $\Delta y_2$  будуть неперекривними областями швидкості, обидві в межах інтервалу  $[-0.5, 0.5]$ , що містять  $n_1$  та  $n_2$  частинок відповідно. Кількість частинок  $N$  у інтервалі  $[-0.5, 0.5]$  описується розподілом ймовірностей  $P(N)$ . Для некорельованих частинок розподіл числа частинок  $P(n_1, n_2; N)$

може бути представлений у наступній формі:

$$P(n_1, n_2; N) = P(N)B(N, n_2|\alpha_2)B(N - n_2, n_1|\alpha_1) , \quad (4.41)$$

де  $\alpha_1 = \langle n_1 \rangle / (\langle N \rangle - \langle n_2 \rangle)$  та  $\alpha_2 = \langle n_2 \rangle / \langle N \rangle$ . Використовуючи рівняння [4.41](#) потім знаходимо

$$\begin{aligned} \langle n_1 n_2 \rangle &= \sum_N \sum_{n_1, n_2} n_1 n_2 P(n_1, n_2; N) \\ &= \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle \left( 1 + \frac{\omega[N] - 1}{N} \right) . \end{aligned} \quad (4.42)$$



## 4.2 Кореляції зарядів що зберігаються при скінченій густині заряду

### 4.2.1 Загальна теорія кореляцій, обумовлених збереженням

Сприйнятливості пов'язані з флуктуаціями, розрахованими у Великому канонічному ансамблі. Загалом, можна розглянути функцію розподілу залежно від будь-якої глобально збереженої величини,

$$Z = \text{Tr} \exp\{-\beta_i Q_i\}. \quad (4.43)$$

Тут, множники Лагранжа,  $\beta_i$ , пов'язані з кожною збереженою величиною  $Q_i$ . Сім величин,  $Q_i$ , - це  $E, P_x, P_y, P_z, B, Q, S$ , енергія, моменти, баріонний номер, електричний заряд та дивність. Для деякого великого об'єму  $\Omega$  можна визначити флуктуації як

$$\frac{1}{\Omega} \langle \delta Q_i \delta Q_j \rangle = \frac{1}{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \ln(Z). \quad (4.44)$$

Множники Лагранжа, пов'язані з енергією, - це обернена температура, тоді як для трьох зарядів вони дорівнюють  $-\mu_i/T$ , де  $\mu_i$  - хімічний потенціал, а  $T$  - температура. Для моментів множники Лагранжа можна пов'язати з  $u_i/T$ , де  $u_i$  - швидкості потоку. Тут термін "сприйнятливості" використовується в найзагальнішому сенсі. Зазвичай, але не завжди, визначення сприйнятливостей заряду - це похідні щільностей заряду за хімічними потенціалами. Це визначення відрізняється від того, яке використовується тут на коефіцієнт  $T$ . У використанні тут всі "сприйнятливості" відповідають лише флуктуаціям без додаткових множників,

$$\chi_{ij} = \frac{1}{\Omega} \langle \delta Q_i \delta Q_j \rangle. \quad (4.45)$$

Для енергії сприйнятливості,  $\langle \delta E \delta E \rangle / \Omega$ , - це  $T^2$ , помножене на специфічну теплоємність.  $3 \times 3$  підмножина  $\chi_{ij}$ , яка посиляється на баріонний номер, електричний заряд та дивність, - це звичайні флуктуації заряду. При скінченій густині баріонів кореляції між енергією та трьома зарядами стають ненульовими. Ці крос-терми не розглядалися настільки ж широко, як кореляції, що включають тільки три заряди або тільки енергію. Нарешті, можуть бути кореляції, які включають три компоненти імпульсу. У рівновазі

$$\frac{1}{\Omega} \langle \delta P_i \delta P_j \rangle = (P + \epsilon) T \delta_{ij}. \quad (4.46)$$

У рівновазі кореляції інтегруються до сприйнятливостей. Якщо  $\rho_i$  - відповідні щільності,

$$\begin{aligned} C_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) &= \langle \delta \rho_i(\vec{r}_i) \delta \rho_j(\vec{r}_j) \rangle \\ &= \chi_{ij} \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j). \end{aligned} \quad (4.47)$$

У зіткненні важких іонів всі величини зберігаються, тому для будь-якого оператора  $A$ ,

$$\begin{aligned} \langle A \delta Q_j \rangle &= 0, \\ \int d^3 r_j \langle A \delta \rho_j(\vec{r}_j) \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (4.48)$$

і для будь-якої збереженої щільності

$$\int d^3 r' C_{ij}(\vec{r}, \vec{r}') = 0. \quad (4.49)$$

Кореляцію можна розділити на локальну, еквілібровану, частину та балансуєчу частину,

$$\begin{aligned} C_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) &= \chi_{ij} \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + C_{B,ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j), \\ \int d^3 r_j C_{B,ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) &= -\chi_{ij}(\vec{r}_i). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Якщо локальна частина не була б еквіліброваною, то еквівалентність все ще була б істинною, але в цьому випадку  $\chi_{ij}$  не було б задано сприйнятливостю в еквіліброваному стані. Замість цього це може бути якась динамічна величина, яка релаксує до еквіліброваного значення.

При охолодженні системи в газоподібний стан кореляції між частинками зникають. У цьому випадку еквілібрована локальна кореляція - це лише та, що відбувається всередині однієї частинки, і сприйнятливості стають

$$\chi_{ij} = \frac{1}{\Omega} \sum_{a \in \Omega} Q_{ai} Q_{aj}, \quad (4.51)$$

де  $Q_{ai}$  - це заряд типу  $i$  на частинці  $a$ . У термінах густини фазового простору,

$$\chi_{ij}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_h \int d^3p f_h(\vec{p}, \vec{r}) Q_i(h, \vec{p}) Q_j(h, \vec{p}), \quad (4.52)$$

де сума розповсюджується на види адронів. Наприклад, якщо  $i$  відноситься до компоненту імпульсу  $p_x$ ,  $Q_i(\vec{p}) = p_x$ , і якщо  $i$  відноситься до дивності,  $Q_i$  просто є дивність виду  $h$ . Таким чином, на момент розпаду, балансуюча кореляція,  $C_{B,ij}$ , охоплює всі кореляції між різними частинками, припускаючи, що речовина є невзаємодіючим газом на момент розпаду.

У відсутності функції джерела  $\langle \delta\rho_i(x_1) \delta\rho_j(x_2) \rangle$  еволюціонує як  $\langle \delta\rho_i(x_1) \rangle \langle \delta\rho_j(x_2) \rangle$  з кожною  $\delta\rho$ , яка веде себе незалежно від просторово-часових координат  $x_1$  і  $x_2$ . Щоб задовольнити правило суми, кореляцію можна виразити так:

$$\langle \delta j_i^\mu(x_1) \delta j_j^\nu(x_2) \rangle = \int d^4X G_{ii'}^{\mu\mu'}(X, x_1) G_{jj'}^{\nu\nu'}(X, x_2) \quad (4.53)$$

$$u_{\mu'}(X) S_{i'j'}(X) u_{\nu'}(X).$$

Тут формалізм виражено з щільністю заряду, заміненою на чотири-потік. Це дозволяє проектувати кореляції через гіперповерхню, яка не обов'язково знаходиться на сталій евклідового часу. Для баріонних, електричних та дивних струмів кількості  $j_i^\mu$  просто є звичайними три зарядними струмами. Густина потоку енергії та імпульсу - це елементи тензора енергії-імпульсу,  $T^{0\mu}$  та  $T^{k\mu}$

відповідно, де  $k$  позначає  $k$ -ту компоненту густини імпульсу. Функції Гріна задовольняють умови нормалізації,

$$\int d\Omega_\mu G_{ii'}^{\mu\mu'}(X, x) u_{\mu'}(X) = \delta_{ii'}, \quad (4.54)$$

де  $x$  відноситься до точки просторово-часу вздовж гіперповерхні, де речовина дисоціює, а  $d\Omega_\mu$  - диференціальний об'єм в системі відліку, де ця дисоція локально одночасна. Розмах цієї гіперповерхні повністю в майбутньому відносно  $X$ , і інтеграл охоплює весь гіпероб'єм. Якщо визначити функцію кроку, так що всередині гіпероб'єму значення є одиницею, а зовні - нуль, елемент диференціального об'єму можна визначити як

$$d\Omega_\mu = d^4y \partial_\mu \Theta(C(y)), \quad (4.55)$$

де  $C(y)$  є додатнім поза поверхнею і від'ємним всередині. Наприклад, визначаючи  $C(y) = T_0 - T$ , визначає гіперповерхню, яка розділяє області з температурою вище і нижче  $T_0$ . У цьому дослідженні, де розглядається просте розширення Бюркена, просторово-подібні гіперповерхні, подібні до тих, які можна бачити при випаровуванні з поверхні, не зустрічаються.

Функції джерела задаються швидкістю зміни сприйнятливостей. Якщо колективна швидкість позначена  $u^\mu(x)$ ,

$$S_{ij}(X) = [u \cdot \partial + (\partial \cdot u)] \chi_{ij}(X). \quad (4.56)$$

У невеликому гідродинамічному об'ємі  $\delta V$  швидкість зміни об'єму дорівнює  $\delta V \partial \cdot u$ , а функція джерела -  $(1/\delta V)(u \cdot \partial)(\delta V \chi_{ij})$ . Отже, якщо  $\chi_{ij}$  зменшується інверсно з об'ємом, джерела немає. Це відбувається для баріонних, електричних та дивних зарядів для ізоентропічного розширення невзаємодіючого газу. Якщо ентропія зберігається, функцію джерела можна ідентифікувати з

$$S_{ij}(x) \approx s(u \cdot \partial) \frac{\chi_{ij}}{s}, \quad (4.57)$$

де  $s$  - густина ентропії, і це стає точним для ізоентропічних розширень. Для ненульових щільностей заряду можна аналогічно замінити  $s$  на баріонні, електричні або дивні щільності, хоча це не враховуватиме дифузію заряду.

Основним викликом у розрахунках кореляцій є пошук функцій Гріна. У кожній точці у просторі-часі,  $X$ , розглядається невелике відхилення кожної з семи величин. Потім записуються рівняння руху для відхилення. Ці рівняння змішують різні величини, тобто  $G_{ii'}^\mu(X, x)$  є діагональним для моментів  $x_0$  негайно після  $X_0$ , але після цього з'являються позадіагональні компоненти. Якщо середні щільності заряду всі нульові, функції Гріна для енергії та імпульсу не змішуються з ними для баріонного номера, електричного заряду або дивності. Функції Гріна для заряду просто є розв'язками рівняння дифузії для початкового збурення заряду в  $X$ . Якщо матриця дифузії є діагональною, як очікується для ідеалізованої плазми кварків-глюонів, еволюції заряду не змішували б три заряди, якщо вони були виражені в базисі  $u, d, s$ . Для відхилень енергії та імпульсу потрібно врахувати гідродинамічну еволюцію. Гідродинаміка змішує компоненти енергії та імпульсу, і якщо середні щільності заряду ненульові, як у випадку низькоенергетичних зіткнень важких іонів, функції Гріна також розвивають позадіагональні компоненти між компонентами енергії/імпульсу та зарядами.

## 4.2.2 Гідродинамічний відгук

Функція Гріна представляє відгук середовища на невелику локалізовану флуктуацію. У цьому дослідженні вона обчислюється шляхом невеликого збурення заряду типу  $i$  у певній точці простору-часу. Сумарне збурення інтегрується до одиниці, а опис його еволюції зроблено у лінійному наближенні. Просторова ширина збурення вважається скінченою, але дуже малою. У границі, коли ширина прямує до нуля, початкове збурення буде дельта-функцією, але це ускладнить рівняння еволюції, що включає просторові похідні і погано впливає на стабільність числового методу.

Тензор пружних напруженостей неперервного середовища у випадку в'язкої

рідини в рамках системи Ландау представлений наступним чином [188]:

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P(\varepsilon, \rho_B, \rho_Q, \rho_S))u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}P + T_\eta^{\mu\nu}. \quad (4.58)$$

У цьому рівнянні  $\varepsilon$  та  $\rho$  позначають енергію та щільність часток відповідно. У цьому дослідженні внесок вязкого  $T_\eta^{\mu\nu}$  означено відповідно до рівняння Нав'є-Стокса,

$$T_\eta^{\mu\nu} = -\eta_s \left( \nabla^\mu u^\nu + \nabla^\nu u^\mu - \frac{2}{3} \Delta^{\mu\nu} \partial \cdot u \right), \quad (4.59)$$

де  $\eta_s$  - коефіцієнт в'язкості зсуву, а  $\Delta^{\mu\nu} = u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}$  діє як проектор, на простір ортогональний до колективної швидкості  $u^\mu$ , а коваріантна похідна  $\nabla^\mu = \Delta^{\mu\nu} \partial_\nu$  представляє просторові похідні в системі рідини. Якщо дозволяється дифузія заряду, зарядний струм може бути виражений як:

$$j_i^\mu = \rho_i u^\mu - D_{ij} \Delta^{\mu\nu} \partial_\nu \rho_j. \quad (4.60)$$

У цьому рівнянні  $D$  представляє матрицю сталих дифузії. Гідродинамічні рівняння еквівалентні законам збереження енергії-моменту:

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (4.61)$$

$$\partial_\nu j^\nu = 0.$$

Припускаючи, що розв'язок для  $\rho(t, \vec{r})$ ,  $\varepsilon(t, \vec{r})$  та  $u^\mu(t, \vec{r})$  може бути розкладений у ряд навколо заданого розв'язку щодо відхилень  $\delta\rho, \delta\varepsilon, \delta u^\mu$ , наша увага в основному буде зосереджена на  $\delta T^{\mu\nu}$ , який лінійний у цих відхиленнях. Ці відхилення повинні відповідати наступним рівнянням:

$$\partial_\nu \delta j^\nu = 0, \quad (4.62)$$

$$\partial_\nu \delta T^{\mu\nu} = 0. \quad (4.63)$$

Для отримання функції Гріна розглядається дуже мале локалізоване від-

хилення в точці простору-часу  $X$ , яке змінюється з часом. Можна призначити невелике гаусове відхилення. Якщо початкове відхилення є у точці простору-часу  $x$ ,

$$\begin{aligned}\delta j_i^\mu(X) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{-|Y^2|/2\sigma^2}, \\ Y^\mu &= X^\mu - (u \cdot X)u^\mu.\end{aligned}\tag{4.64}$$

Тут  $Y$  таке саме, як  $X$ , але з відкинутою часовою компонентою, як визначено у кадрі рідини. Ширина  $\sigma$  повинна бути обрана якомога меншою, але дозволяти диференціювання. У границі  $\sigma \rightarrow 0$  початкове відхилення стає дельта-функцією у просторі координат. Для початкового відхилення потрібно розв'язати відхилення у точці простору-часу з часом  $x$ , і функція Гріна буде

$$G^\mu(X, x)_{ii'} = \delta j_i^\mu(x).\tag{4.65}$$

З урахуванням наявності дисипації всі розв'язки повинні асимптотично наближатися до рівномірного розв'язку. Це особливо важливо для термодинамічних флуктуацій у числі баріонів, імпульсу або енергії. Подібно до теоретичного підходу, наведеного в [189], досліджуються кореляції збережених зарядів, зокрема вплив недіагональних сприйнятливостей в умовах скінченної щільності баріонів.

### 4.2.3 Розширення Бьоркена як фонове середовище

Для найпростішого пояснення того, як еволюція кореляцій відбувається під час гідродинамічного етапу сильно взаємодіючої речовини, в якості фонові гідродинамічної моделі обирається буст-інваріантне розширення Бьоркена. В цьому випадку еволюція спрощується шляхом перетворення часу  $t$  та довгої просторової координати  $z$  на так званий власний час  $\tau$  та просторову

швидкість  $\eta$ :

$$t = \tau \cosh \eta, \quad z = \tau \sinh \eta. \quad (4.66)$$

Енергія та густина  $B, Q, S$  є однорідними у всій системі, і їх часова еволюція задана:

$$\partial_\tau \varepsilon = -\frac{\varepsilon + P}{\tau} + \frac{4\eta_s}{3\tau^2}, \quad (4.67)$$

$$\rho = \rho_0 \frac{\tau_0}{\tau}, \quad (4.68)$$

де  $\tau_0, \rho_0$  представляють початковий час та густину. Чотири-швидкість є

$$u^0 = \cosh \eta, \quad u^z = \sinh \eta. \quad (4.69)$$

Система лінійних рівнянь відгуку подана:

$$\partial_\tau \delta \varepsilon = -\frac{1}{\tau} \delta (\varepsilon + P) - \partial_\eta \frac{\varepsilon + P - \frac{8\eta_s}{3\tau}}{\tau} \delta u^\eta, \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} \partial_\tau \left( \varepsilon + P - \frac{4\eta_s}{3\tau} \right) \delta u^\eta = & -\frac{2}{\tau} \left( \varepsilon + P - \frac{4\eta_s}{3\tau} \right) \delta u^\eta - \partial_\varepsilon P \frac{\partial_\eta \delta \varepsilon}{\tau} \\ & - \partial_\rho P \frac{\partial_\eta \delta \rho}{\tau} + \frac{4\eta_s \partial_\eta^2 \delta u^\eta}{3\tau^2}, \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$\partial_\tau \delta \rho = -\frac{\delta \rho}{\tau} + \frac{\rho + D \partial_\tau \rho}{\tau} \partial_\eta \delta u^\eta + \frac{D}{\tau^2} \partial_\eta^2 \delta \rho, \quad (4.72)$$

$$\partial_\tau \left( \varepsilon + P - \frac{2\eta_s}{3\tau} \right) \delta u^{x,y} = -\frac{1}{\tau} \left( \varepsilon + P - \frac{2\eta_s}{3\tau} \right) \delta u^{x,y} + \frac{\eta_s \partial_\eta^2 \delta u^{x,y}}{\tau^2}, \quad (4.73)$$



де  $\delta u^\eta = \frac{\delta u^z}{u^0}$  вводиться для того, щоб мати буст-інваріантну систему рівнянь (однорідну у  $\eta$ ). Ці рівняння описують гідродинамічну відповідь на деяку збуреність, задану стохастичним струмом  $j_\varepsilon, \vec{j}_P, j_B, j_Q, j_S$ . Ця система також зберігає енергію та кількість руху у лабораторній системі координат:

$$\begin{aligned}\partial_t T^{tt} + \partial_z T^{tz} &= \left( \partial_\tau + \frac{1}{\tau} \right) (\cosh \eta T^{tt} - \sinh \eta T^{tz}) \\ &+ \frac{1}{\tau} \partial_\eta (-\sinh \eta T^{tt} + \cosh \eta T^{tz}) = 0, \\ \partial_t T^{tz} + \partial_z T^{zz} &= \left( \partial_\tau + \frac{1}{\tau} \right) (\cosh \eta T^{tz} - \sinh \eta T^{zz}) \\ &+ \frac{1}{\tau} \partial_\eta (-\sinh \eta T^{tz} + \cosh \eta T^{zz}) = 0,\end{aligned}\tag{4.74}$$

Крім того,  $\rho_\tau$  та  $\rho_\eta$  визначені наступним чином:

$$\begin{aligned}\rho_\tau &= \cosh \eta \delta T^{tt} - \sinh \eta \delta T^{tz} \\ &= \delta \varepsilon \cosh \eta + \left( \varepsilon + P - \frac{4}{3\tau} \eta_s \right) \delta u^\eta \sinh \eta, \\ \rho_\eta &= \cosh \eta \delta T^{tz} - \sinh \eta \delta T^{zz} \\ &= \delta \varepsilon \sinh \eta + \left( \varepsilon + P - \frac{2}{3\tau} \eta_s \right) \delta u^\eta \cosh \eta.\end{aligned}\tag{4.75}$$

Разом з  $\rho_B, \rho_Q, \rho_S$ , вони задовольняють закон збереження:

$$\int \tau d\eta \rho(\tau, \eta) = \text{const}.\tag{4.76}$$

У наступних виразах:

$$\begin{aligned}\delta P_\eta &= \left( \varepsilon + P - \frac{4\eta_s}{3\tau} \right) \delta u^\eta, \\ \delta P_{x,y} &= \left( \varepsilon + P - \frac{2\eta_s}{3\tau} \right) \delta u^{x,y},\end{aligned}\tag{4.77}$$

будемо називати продольною та поперечною кількістю руху відповідно. Використовуючи функції гріна цих рівнянь, корелятори можна виразити насту-

ПНИМ ЧИНОМ:

$$c_{AB} = \int d\tau_j \tau_j d\eta_j G_{AA'}(\eta_1 - \eta_j, \tau_1, \tau_j) G_{BB'}(\eta_2 - \eta_j, \tau_2, \tau_j) \left( \partial_{\tau_j} + \frac{1}{\tau_j} \right) \chi_{A'B'}(\tau_j), \quad (4.78)$$

де  $A, B$  можуть бути будь-якими з наступних:  $\delta E, \delta P_\eta, \delta P_{x,y}, \delta B, \delta Q, \delta S$ . Термін  $c_{AB}$  в Рівнянні (4.94) не охоплює частину кореляції, яка повинна існувати в еквіліброваному гідродинамічному середовищі від самого початку. Ця початкова кореляція може мати будь-яку форму, але водночас обмежена загальним збереженням заряду. У подальшому обговоренні ми виключимо цю початкову кореляцію і розглянемо її як окремий елемент, який може бути незалежно досліджений.

#### 4.2.4 Проектування Кореляцій на Фінальні Стани Адронів

Попередні підрозділи описують, як можна знайти кореляції  $\langle \delta j_i^\mu(x) \delta j_k^\nu(x') \rangle$ , які є функціями простору-часу. Ці кореляції потім повинні бути спроектовані на фінальні частинки. Техніки для цього вже були застосовані для флуктуацій заряджених частинок [190, 191], але для цієї проблеми ми повинні розширити ці ідеї, щоб вони включали кореляції, що включають імпульс і енергію. Як це було зроблено у випадку з зарядами, техніки будуть базуватися на методі Купера-Фрея, де випромінювання з елемента гіперповерхні для некорельованих частинок з малого елемента гіперповерхні  $\delta\Omega_\mu$  визначається виразом

$$\delta dN_h = (p \cdot \delta\Omega) \frac{d^3p}{E_p} f_h(\vec{p}, x), \quad (4.79)$$

де  $f_h(\vec{p}, x)$  - щільність фазового простору адронів типу  $h$  та імпульсу  $\vec{p}$  у точці простору-часу  $x$ , при цьому  $x$  знаходиться на елементі гіперповерхні.

Ефективний алгоритм для генерації частинок, згідно з тепловою щільністю фазового простору, включаючи в'язкі поправки, описаний в [192]. Підхід тут полягатиме в тому, що спочатку інтегрується кожна точка джерела  $X$ . Для кожної точки  $X$  потім генеруються абсолютно некорельовані пари адронів. Два адрони некорельовані з точкою джерела  $X$  і некорельовані один з одним. Функцію кореляції у просторі імпульсів будується шляхом множення кореляцій двох частинок на їх певну вагу.

Для обчислення ваги можна розглянути невелику кількість енергії, імпульсу та заряду,  $\delta Q_i$ , яка проходить через елемент гіперповерхні. Для теплового розподілу щільність фазового простору змінюється шляхом зміни множників Лагранжа, що відповідають кожній збереженій величині,

$$f_h(\vec{p}, x) = f_h^{(0)}(\vec{p}, x) \exp(-\delta\beta_i q_i(h, \vec{p})). \quad (4.80)$$

Тут  $i$  відноситься до семи узагальнених зарядів частинки виду  $h$  і заданих енергії та імпульсу, як описано на початку цього розділу. Величина  $q_i(h, \vec{p})$  - це сім узагальнених зарядів одного адрону. Сім компонент  $\delta\beta$  визначаються, зафіксувавши сім величин,  $\delta Q_i$ , які є зарядами, що проходять через об'єм гіперповерхні  $V$ .

$$\begin{aligned} \delta Q_i &= \sum_h \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 E_p} (p \cdot d\Omega) q_i(h, \vec{p}) \delta f_h(\vec{p}, x) \\ &= - \sum_{h,j} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 E_p} (p \cdot d\Omega) q_i(h, \vec{p}) q_j(h, \vec{p}) f_h^{(0)}(\vec{p}, x) \delta\beta_j. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Якщо гіперповерхня - це гідродинамічна система, можна ідентифікувати  $p \cdot d\Omega/E_p$  як об'єм  $V$ , і праву частину можна ідентифікувати з вразливостями,

$$\begin{aligned} \delta Q_i &= -V \chi_{ij} \delta\beta_j, \\ \delta\beta_i &= -\chi_{ij}^{-1} \delta Q_j / V = -\chi_{ij}^{-1} \delta\rho_j. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Підставивши це в рівняння (4.80), ми маємо зміну щільності фазового про-

сторю

$$\delta f_h(\vec{p}, x) = f_h^{(0)} \left[ -q_i(h, \vec{p}) \chi_{ij}^{-1}(x) \delta \rho_j \right]. \quad (4.83)$$

Все в квадратних дужках можна розглядати як вагу через додаткову загальну щільність заряду  $\delta \rho_j$ .

Для кожного просто-часового об'єму джерела можна потім згенерувати дві незалежні частинки згідно з щільностями фазового простору на гіперповерхні,  $f^{(0)}(\vec{p}, x)$ . Потім парі призначається вага,

$$w(\vec{p}_1, x_1, \vec{p}_2, x_2) = \int d^4X \, q_i(h_1, \vec{p}_1) \chi_{ij}^{-1}(x_1) d\Omega_{1,\mu} G_{j'j}^{\mu\mu'}(X, x_1) \quad (4.84)$$

$$u_{\mu'}(X) S_{j'k'}(X) u_{\nu'}(X) G_{k'm}^{\nu\nu'}(X, x_2) \chi_{mn}^{-1}(x_2) d\Omega_{2,\nu} q_n(h_2, \vec{p}_2).$$

Інтеграл по  $d^4X$  можна провести за допомогою методів Монте-Карло. Для розглянутої у наступному розділі ситуації можна експлуатувати симетрії, що функція джерела залежить лише від власного часу  $\tau$  і що функції Гріна залежать від відносних швидкостей, для спрощення інтегралу. Але, якщо ці підходи мали б бути застосовані більш загально, вищевказаний інтеграл потребував би набагато більш дрібного підходу.

Однією з переваг цього підходу є те, що зважені пари генеруються методом Монте-Карло, тому включати ефекти розпадів досить просто. Розпади адронів можуть бути симульовані з тією самою вагою від батьківських адронів, що призначається дочірнім частинкам. Усі пари дочірніх адронів, один з яких обраний з кожного батька, отримують ту саму вагу, що й батьківська пара. Також доволі просто розглядати різноманітні бінкування кореляцій. Наприклад, якщо ми хочемо обчислити кореляції в поперечній енергії як функції відносної псевдо-бистроти, збільшувався бін з відносною псевдо-бистротою на вагу, помножену на добуток двох поперечних енергій.

## 4.2.5 Рівняння стану

Як рівняння стану (EoS), використовується модель вільної енергії для адронної суміші. Фонові заряди були зафіксовані, щоб відтворити  $Q/B = 0.4$ , як у важких ядрах свинцю або золота, і  $S = 0$ . Всі траєкторії починаються з  $\varepsilon = 3 \text{ GeV fm}^{-3}$  та еволюціонують протягом  $10 \text{ fm/c}$ . Кінцева температура знаходиться у межах  $150 \pm 2 \text{ MeV}$ . Початкова щільність баріонів була обрана в  $8n_0$ , де  $n_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$  представляє нормальну ядерну щільність, а в'язкість знаходиться у діапазоні  $(6 - 8)\frac{s}{4\pi}$ , як очікується для адронного середовища. Це утримує температуру середовища нижче  $190 \text{ MeV}$ , у межах якої може бути гіпотетично можливим адронний тип рівняння стану та транспорт. Стадія після виходу (зазвичай температури нижче  $150 - 160 \text{ MeV}$ ) не може бути описана гідродинамічними моделями та вирішується за допомогою адронних "післясмикань" [193, 194]. Коефіцієнт дифузії  $D$  був обраний нижче від значень, передбачених з КХД на решітці при нульовому баріонному заряді, ближче до значень дифузії, передбачених гадронними фазовими симуляціями, з  $D = \frac{1}{8\pi}T$ . Однак у принципі недіагональна матриця дифузії повинна застосовуватися до зарядів, оскільки дифузія, передбачена різними кінетичними моделями, сильно впливає на масу частинок [195]. Очікується, що електричний заряд переважно несеться легкими мезонами, а баріонний заряд - важкими частинками. Дивною властивістю є те, що дифузійні властивості можуть бути дуже чутливими до адронного складу середовища.

Два типи взаємодій не мають на меті бути особливо реалістичними, але були побудовані для того, щоб надати можливість порівняти різницю між м'яким та жорстким рівняння стану. З цією метою рівняння стану були побудовані так, щоб представляти межі очікувань, а не якусь найкращу догадку. Щільності вільної енергії були обрані залежно від щільності баріонів  $\rho_B$  і

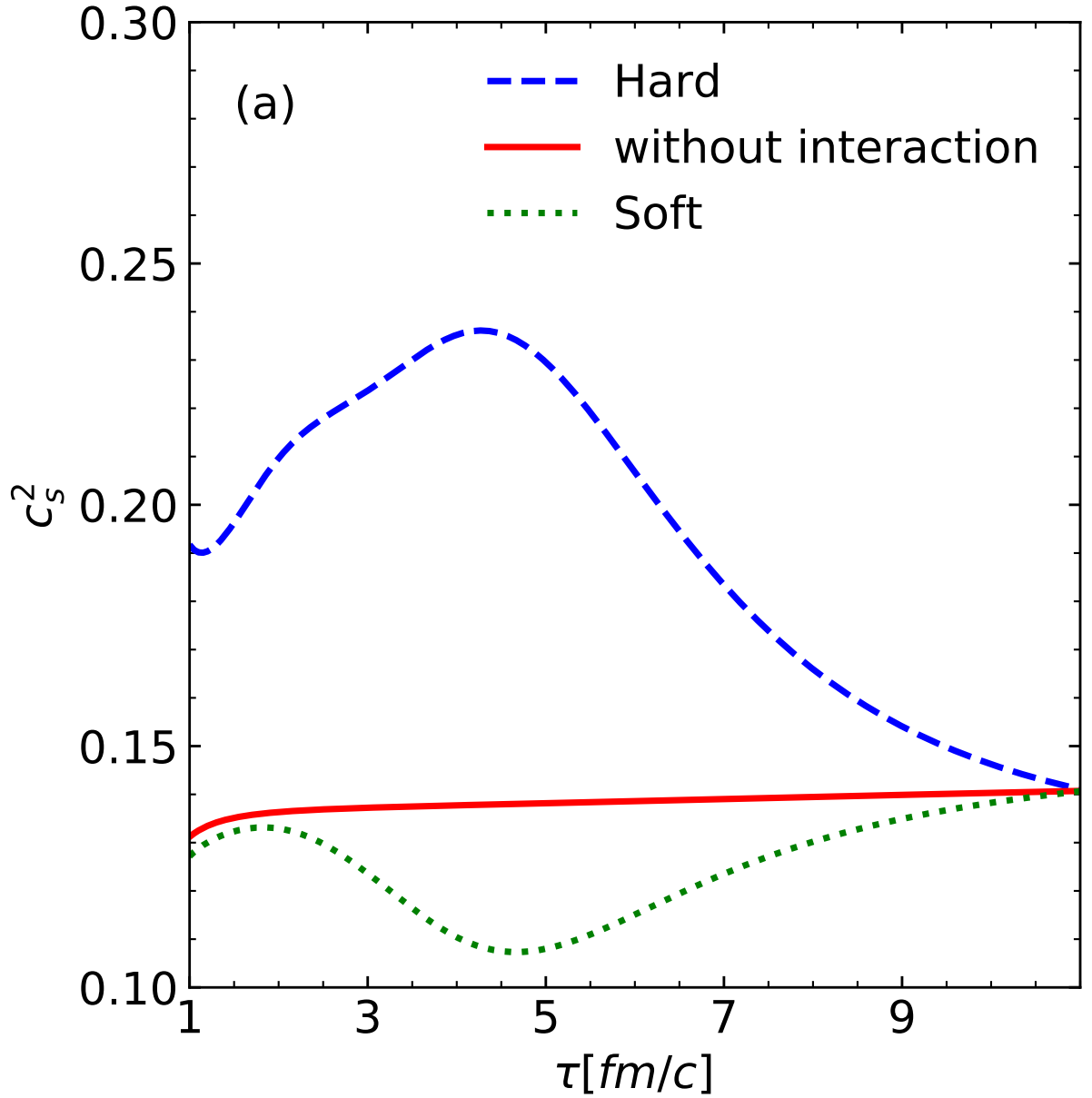


Рис. 4.4: Швидкість звуку відображається для невзаємодіючого (ідеального) гадронного газу резонансів та адронної рідини з двома ілюстративними випадками для взаємодій. Рівняння стану, що включає взаємодії, може бути як жорстким (Жорстке-EoS), так і м'яким (М'яке-EoS) в порівнянні з невзаємодіючим (Ідеальний HRG).

мали форму

$$f_{\text{int}} = \sum_{n=1,2} A_n \left[ y_n^{1/3} - 1 \right], \quad (4.85)$$

$$y_n = 1 + \left( \frac{\rho_B - \rho_0}{\rho_n} \right)^3.$$

Тут  $\rho_0$  було встановлено як щільність розриву, щоб рівняння стану, включаючи флуктуації, поверталось до тих, що в не взаємодіючого газу гадронів в цій точці. Параметри  $A_1, A_2, \rho_1$  та  $\rho_2$  потім були налаштовані, щоб встановити жорсткість рівняння стану в різних діапазонах щільності. Для обох жорстких та м'яких рівнянь стану  $\rho_1$  та  $\rho_2$  були встановлені відповідно на 0.2 та 0.5 фм<sup>-3</sup>. Для жорсткого рівняння стану параметри жорсткості були встановлені на  $A_1 = 0.05, A_2 = 0.1$  ГеВ/фм<sup>3</sup>, а для м'якого рівняння стану  $A_1 = -0.02, A_2 = 0.01$  ГеВ/фм<sup>3</sup>. У м'якому рівнянні стану фазовий перехід відбувається з критичною точкою при  $T = 100$  МеВ при щільності близько  $2\rho_s$ . Цей досить екстремальний приклад повинен допомогти охопити діапазон флуктуацій, які можна було б розглядати.

Початкова щільність баріонів була обрана так, щоб початкова щільність баріонів була вісім разів більшою за ядерну насичену щільність,  $\rho_s = 0.16$  фм<sup>-3</sup>, яка, оскільки щільність баріонів падає як  $1/\tau$ , завжди призводила до однакової кінцевої щільності баріонів,  $\rho_0 = (8/11)\rho_s$ , незалежно від рівняння стану. Початкова температура,  $T_i$  була налаштована для кожного рівняння стану, і для кожного вибору в'язкості, так що кінцева температура,  $T_f$ , була 150 МеВ. За побудовою, швидкість звуку збігається з швидкістю звуку не взаємодіючої адронної суміші на та нижче  $\rho_0$ . На рис. 4.4 швидкість звуку відображається для трьох рівнянь стану. Для випадку не взаємодіючого газу швидкість звуку залишається досить стійкою, з  $c_s^2 \approx 0.14$ . Для жорсткого рівняння стану максимальна швидкість звуку для розглянутих тут еволюцій була приблизно  $c_{s,\max}^2 \approx 0.24$ , тоді як для м'якого рівняння стану швидкість звуку знизилася до  $c_{s,\min}^2 \approx 0.11$ .

Сприйнятливості деяких вибраних збережених зарядів можна спостерігати на рис. 4.5. Сприйнятливості помножені на  $\tau$ , оскільки об'єм гідродинамічної комірки збільшується пропорційно  $\tau$  у моделі Бйоркена. Таким чином, у цьому випадку джерела функцій є точними тими швидкостями, з якими криві на рис. 4.5 піднімаються або падають. Сприйнятливості, які включають енергію або номер баріону, мають сильні піки або яри, для тих самих умов, коли швидкість звуку має максимум або мінімум.

Досить помітно, що сприйнятливість моменту-моменту (помножена на  $\tau$ ),  $(P + \epsilon)T\tau$ , є відносно безособливою і, отже, досить нечутливою до рівняння стану. Це, ймовірно, пов'язано з тим, що взаємодія є функцією щільності баріонів і, звичайно, є енергією, але майже не змінює моменти частинок. Було б цікаво з'ясувати, чи інший клас взаємодій, наприклад, той, який змінює ступені свободи, може виявити себе, надаючи більше структури у цьому випадку. Навіть якщо плоскість сприйнятливості моменту-моменту призводить до невеликої джерела, все одно буде внесок від початкової термалізації,  $\tau < 1$  фм/с. Кореляція поперечних компонент, наприклад,  $\langle \delta P_x \delta P_x \rangle$ , очікується розповсюджуватися дифузійно [189, 196], де в'язкість здійснює роль константи дифузії. Таким чином, кореляції поперечного моменту можуть бути менш чутливими до фазової структури, але більш чутливими до в'язкості. Рівняння стану з критичною точкою мають суміжну змішану фазу на фазовій діаграмі  $((\rho, T))$ . Для м'якого рівняння стану, показаного тут, розділення фаз може відбуватися, але критична температура становить 100 MeV, а траєкторії щільності-температури знаходяться далеко вище критичної точки, і, отже, поза областю змішаної фази.

В межах змішаної фази або регіону співіснування, сприйнятливості визначені неможливими, тобто флуктуації вже не масштабуються лінійно з об'ємом [164, 197]. Тоді можна очікувати виникнення ядерного зародження або кавітації, що представляє собою динамічне утворення нової фази. Цей процес розгортається відносно повільно і викликає виклик застосування традиційних методів рівноважної термодинаміки, таких як побудови Максвелла. У таких випадках можна розглядати метастабільний стан, що відповідає поступовому зростанню ядерного зародження або кавітації [115, 198]. У міжспінодальному регіоні механічна нестабільність спричиняє явище, відоме як спінодальний розклад, де дві фази швидко відокремлюються. Ідеально це можна врахувати у нашому аналізі, інтегруючи відповідне гідродинамічне тло. Зокрема, включення поверхневого натягу та енергетичних членів у гідродинаміку може забезпечити точний опис змішаної фази (для додаткових відомостей див. [199]). Підхід, описаний тут, безумовно, не буде застосовуватися, якщо трає-



кторія щільності-температури проходить через область співіснування фаз на фазовій діаграмі. Тем не менш, варто відзначити, що очікується значна структура у сприйнятливостях, навіть якщо вона лише пролягає в непосредній близькості до області фазового переходу.

## 4.2.6 Результати

### Функції Гріна

Для отримання розв'язку необхідно створити набір функцій Гріна для точкових джерел у  $(\tau, \eta)$ . Використовуючи перевагу розв'язку Бйоркена, ми розглядаємо лише  $(\tau, 0)$  і отримуємо розв'язок для джерела при будь-якому  $\eta$  за допомогою лоренцевих перетворень. Функції Гріна були обчислені, призначивши початковий стан при  $\tau$  у деякому заряді  $X$ :

$$G_{XX}(\tau = \tau, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2\tau}} \exp\left\{-\frac{\eta^2}{2\sigma_\eta^2}\right\}, \quad (4.86)$$

як  $\sigma_\eta \rightarrow 0$ ,  $G_{XX}(\tau = \tau, \eta) \rightarrow \frac{\delta(\eta)}{\tau}$  підходить до розв'язку для точкового джерела (функція Гріна за визначенням). Використання дуже малого, але скінченного сигми регуляризує нашу систему шляхом регуляризації високочастотних мод. На рисунку (4.6) зображено відповідь на гаусівське джерело з  $\sigma_\eta^2 = 0.01$  та  $\tau = 1\text{fm}/c$  при  $\tau = 11\text{fm}/c$ . Видно, що збурення в одному заряді призводить до відповіді в іншому. Це можна уявити з виразів, рівнянь (4.70-4.73). Рівняння (4.72), у своєму другому члені, описує конвекцію фонового заряду за допомогою збурення швидкості. Це ефективно зв'язує відповіді в зарядах з відповідями в енергії-імпульсі. Рівняння (4.70) та (4.71) містять відповідь на флуктуації заряду через залежність від рівняння стану  $P(\varepsilon, \rho_B, \rho_Q, \rho_S)$ .

### Кореляції

Тут порівнюються три рівняння стану: ідеальний газ резонансів гадронів (iHRG) та взаємодіючі гадронні рідини, одна з яких є твердішою, а інша

м'якішою за iHRG. Флуктуації, пов'язані з енергією, продольним імпульсом, густиності баріонів, електричного заряду та дивністю, відокремлені від тих, які включають поперечний імпульс, оскільки кореляції між ними зникають. Продольні гідродинамічні кореляції представлені на рисунку (4.7), і вони показують помітну чутливість до вибраного рівняння стану.

Електричний та дивний заряди  $(s), (y)$  слабо впливають на баріонне середовище, яке використовується. Однак спостерігаються деякі ефекти навколо  $\Delta\eta \approx 0$ . У цьому випадку тверде рівняння стану продукує сильніший пік, тоді як м'яке рівняння стану пригнічує пік в невеликій області. Ці відмінності зникають на хвостах кореляцій. Цей ефект вираженіший для дивного заряду порівняно з електричним зарядом. Це можна пояснити переходом від середовища, що містить велику кількість дивних і заряджених мезонів при високих температурах, до середовища, що домінується холодними баріонами при виході на фрїз-аут. Баріони, більш чутливі до рівняння стану, вносять свій вклад у центральну частину функції кореляції, тоді як хвости створюються набагато раніше у зіткненні. Крос-кореляція між електричним зарядом  $(Q)$  та дивним зарядом  $(S)$  демонструє подібну поведінку  $(t)$  та  $(s)$ , але тут структура піку змінюється з одного максимуму для ідеального газу до двох піків для твердого EoS або значно сильнішого піку для Soft-EoS.

Баріонний заряд  $(m)$  має більш виразні особливості. Зокрема, значення на піку,  $\Delta\eta = 0$ , змінюється від від'ємного до додатного при переході від iHRG до Soft-EoS до Hard-EoS. Взаємодії також посилюють як максимальні, так і мінімальні значення функції кореляції. Це можна зрозуміти з рисунку (4.5), де швидкості зміни  $\tau\chi(\tau)$  набагато вищі для рівняння стану з взаємодіями, і іноді мають різний знак порівняно з iHRG. Розкид кореляції тут становить близько одиниці в просторово-часовій швидкості. Кореляції баріонного заряду з електричним або дивністю досвіджують подібні ефекти від взаємодій  $(r), (w), (n), (o)$ .

Кореляція продольного імпульсу  $\langle\delta P_\eta\delta P_\eta\rangle$   $(g)$  для iHRG значно вужча порівняно з взаємодіючою версією. Очевидно, що в цьому випадку кореляція поширюється далі для твердого рівняння стану (вища швидкість звуку) та

менше для м'якого рівняння стану (менша швидкість звуку). Кореляція імпульсу з іншими зарядами здається пропорційною швидкості зміни сприйнятливості.

Кореляції енергії (а) мають ширину близько половини одиниці в просторово-часовій бистроті. Значення на піку змінюється для твердого і ідеального газового середовища для кореляції  $\langle \delta E \delta E \rangle$ . Варто відзначити, що транспортні коефіцієнти, що відповідають в'язкості для різних рівнянь стану, майже ідентичні. Здається, що частина енергії пригнічується та перетворюється в імпульс. Цікаво побачити, як ця трансформація проявляється в кореляціях при фріз-ауті.

Баланс кореляції поперечного імпульсу, рисунок (4.9) (а), слабо чутливий до рівняння стану. Варто зазначити, що в цьому випадку кореляції поширюються досить далеко, покриваючи майже 5 одиниць бистроти. Тверде рівняння стану має найбільшу ширину, тоді як м'яке рівняння стану має найменшу.

## Фріз-аут

Кінцевий вигляд балансуєчої частини, обчисленої для всіх заряджених частинок при замерзанні, зображено на рисунку (4.14) і рисунку (4.9) відповідно для  $E$ ,  $P_\eta$ ,  $B$ ,  $Q$ ,  $S$ ,  $P_x$  та  $P_y$ .

Перед партікуляцією кореляції  $P_x$  та  $P_y$  мають виражений позитивний пік на середній швидкості з від'ємними спадами навколо нього, рисунок (4.9) (а). Проте після переходу до частинок значення на піку пригнічується, тоді як яри збільшуються, рисунок (4.9) (б). Відмінності між рівняннями стану стають більш виразними, особливо в разі Hard-EoS, де ширина набагато більша, ніж у двох інших випадках.

У координатному просторі  $(\eta, \phi)$  кореляції в поперечному імпульсі були предметом експериментальних досліджень, служачи чутливим сигналом для в'язкості. Одним із помітних рисунків, який було спостережено, є "Перевал" у швидкості. Кореляції в поперечних імпульсах відчувають вплив з різних фізичних процесів, окрім збереження імпульсу. До них входять резонансні та

кластерні розпади, радіальні потоки, анізотропні потоки, флуктуації початкового стану та розпад струменів [200, 201]. Всі ці ефекти, за винятком струменів, можна врахувати в  $(3D+1)$  гідродинамічному моделюванні системи. Оскільки струмени формуються на ранніх етапах зіткнення та зазвичай не є частиною колективного руху, їх важливо розуміти у контексті їх внеску у кореляції  $p_t$ . Як свідчить порівняння наших результатів з даними, гідродинамічна історія та балансуєча кореляція повинні становити значну частину загальної кореляції.

Хоча інші кореляції не мають такої великої ширини, як кореляція поперечного імпульсу, ширина балансуєчих частин збільшується до 2 одиниць швидкості. Це в основному пов'язано з тепловим розподілом частинок у швидкості імпульсу, позначеним як  $y = \eta + \delta y$ , де  $\delta y$  має значення, сконцентровані в діапазоні  $[-0.5, 0.5]$ . Цей ефект розмиває риси і призводить до набагато більш гладкої кореляції.

Балансуєчі частини для дивних та електричних зарядів в основному зберігають свої риси, відрізняючись на середній швидкості, але збігаючись на кінцях. Вони демонструють просту унімодальну структуру, де сильна гідродинамічна відповідь призводить до утворення більшої кількості балансуєчої кореляції. Оскільки ми розглядали лише балансуєчу кореляцію, створену під час гідродинамічного етапу, нормалізація здається пропорційною різниці у схильностях при  $\tau = 1$  та  $\tau = 11 \text{ фм/с}$ , яка, як можна здогадатися з Рисунку (4.5), більша для Hard-EoS. Ця різниця є помітно більш значущою для баріонного заряду. Мінімуми навколо піку в цьому випадку стають менш виразними порівняно з кореляцією перед замерзанням. У випадку ідеального газу резонансних гадронів (iHRG) балансуєча частина, здається, залишається майже постійною навколо 0, повністю втрачаючи будь-яку залежність від швидкості, яка була присутня раніше.

Коли розглядається поздовжній імпульс, кореляція зникає. Це наслідок трансляційної інваріантності в  $\eta$ . Якщо були б використані інші, крім періодичних граничних умов, все було б інакше.

Щодо енергії, ширина тут порівняна з електричними або дивними заряда-

ми, а навіть більша, ніж ширина баріонного заряду. Крім того, здається, що тверде рівняння стану стає набагато більш розповсюдженим порівняно з іншими рівняннями стану, що розглядалися. Це явище відображає присутність гідродинамічних мод у відповідь на початкове збурення.

#### 4.2.7 Висновки

Тут було розглянуто матрицю кореляцій зарядів, що зберігаються  $7 \times 7$  як функцію відносної швидкості точок у яких проводиться вимірювання. Для кореляцій у координатному просторі кореляції були розбиті як функція відносної просторової швидкості,  $\Delta\eta$ , тоді як для кореляцій на кінцевому стані була обрана різниця швидкості імпульсу  $\Delta y$ . Тут була використана дуже проста модель. Припущено було інваріантність відносно повздовжнього перетворення лоренца, що є поганим вибором при нижніх енергіях пучка, та був ігнорований поперечний потік, що є поганим припущенням на будь-яких енергіях. Також застосовані рівняння стану були не особливо фізичними. Кореляції виникають внаслідок еволюції сприйнятливостей і розвиваються відповідно до в'язкої гідродинаміки та дифузії. У фіксований власний час фріз-ауту кореляції були проєкційовані на кореляції вільних адронів та їх продуктів розпаду, без їх перерозсіян у адронній фазі. Наприклад, тут ігнорується анігіляція баріонів. Були враховані лише теплові кореляції, і відсутні кореляції від початкового стану. Кореляції початкового стану можуть бути викликані струменями або мініструменями, або будь-якими локальними флуктуаціями густини енергії через механізм зупинки ядер. Хоча інтегрована сила таких кореляцій також обмежена законами збереження, їхня початкова структура не дуже зрозуміла і може бути набагато складнішою, ніж обговорювані тут теплові кореляції.

Однак ці обчислення були достатніми, щоб проілюструвати потенціал таких кореляцій для обмеження рівняння стану та відповіді на деякі базові питання. Підсумуємо отримані уявлення та уроки, які отримані з цього дослідження.

1. Можливо систематично моделювати повну матрицю кореляцій. Це вимагає одночасного врахування всіх семи величин. Оскільки припущення про інваріантність відносно зсуву по швидкості не відповідає реальній картині при низьких енергіях, а поперечний імпульс був ігнорований, обчислення тут були значно спрощені, проте представлена тут парадигма безумовно може бути розширена на більш реалістичні випадки. Більш реалістичні розрахунки спочатку вимагатимуть ретельного врахування алгоритмів для обробки додаткових розмірностей, і додавання поперечного потоку дозволить кореляціям, що включають  $P_x$  і  $P_y$ , змішуватися з іншими п'ятьма величинами.
2. Усі кореляції були значно чутливі до рівняння стану та коефіцієнтів транспорту. Кореляції часто мали нетривіальні структури, і ширини в бистроті були  $\lesssim 1$ . Кореляції від початкового стану, які були ігноровані тут, мають структури, що характеризуються  $\gtrsim 1$  одиницею бистроти, через більший час, який вони мають на розподіл.

Сила теплових кореляцій для центральних зіткнень була значною, подібно за магнітудою до тих, що бачилися експериментально в кореляціях  $p_t - p_t$  [202], або кореляціях, часто називаних "Перевал" [203]. Таким чином, теплові кореляції, розглянуті тут, не переважають кореляцій початкового стану. З огляду на їхню більшу ширину, є надія, що їх можна дещо відокремити від кореляцій початкового стану, але покази свідчать, що це вимагатиме значного моделювання та аналізу, як експериментального, так і теоретичного.

3. Такі кореляції дуже сплетені між собою, особливо при нижніх енергіях пучка, де чиста густина баріонів значно відрізняється від нуля. На найвищих енергіях кореляції зарядів, таких як баріонний номер, не змішуються з тими, що включають енергію та імпульс. Для зіткнень, вивчених на SPS в CERN або в програмі Beam-Energy-Scan на RHIC, кореляції з'являються між зарядами, такими як баріонний номер, та енергією. Енергетичні та імпульсні кореляції потім змішуються в гідро-

динаміці. Таким чином, важливо одночасно розглядати весь матричний простір кореляцій, який включатиме такі величини, як кореляція між баріонним номером та поперечною енергією.

4. Розрахунок кореляцій за рівнянням стану, коефіцієнтами транспорту та ефектами початкового стану вже представляє собою значний виклик. Виконання зворотного розрахунку, де рівняння стану обмежуються або виводяться з вимірювань, ще складніше. З урахуванням поточних невідзначеностей в початковому стані, особливо при нижніх енергіях пучка, вивчення цього класу кореляцій на поточний час, ймовірно, є передчасним. Проте, як тільки всі елементи моделювання будуть на місці та краще зрозумілі, ці кореляції можуть надати величезний внесок у розуміння еволюції основних властивостей речовини під час зіткнення важких іонів. Ці кореляції можуть мати особливо проникливий внесок у будь-які фазові переходи.

## Рівняння стану зі взаємодією

Оскільки енергія взаємодії головним чином є функцією щільності, природньо виразити вільну енергію Гельмгольца як два окремі внески, які потім додаються разом. Перший внесок у вільну енергію, від невзаємодіючого газу, може бути обчислений, починаючи з гран-канонічного ансамблю. Внесок від взаємодій потім можна додати. Для незалежних від імпульсу взаємодій очікується, що густина вільної енергії через взаємодії залежить лише від щільності, а не від температури, хоча в цьому виведенні цього не передбачено. Можна було б заявити, що взаємодії надають окремий термін до тиску, при цьому обидва терміни оцінюються при тому ж хімічному потенціалі. Але це представляє інший фізичний припущення, яке здається складнішим у вмотивуванні, оскільки більш природньо припускати, що взаємодія внесе вклад як функція щільностей, а не як функція хімічних потенціалів.

Для наших цілей нам потрібно мати термодинамічні величини як функції щільності, а не хімічного потенціалу. Перехід з одного до іншого не є особли-

во складним, якщо у вас немає нестабільної змішаної фази. З цієї причини можна вважати розумним виразити густину вільної енергії як

$$f(\rho, T) = f_{\text{free}}(\vec{\rho}, T) + f_{\text{int}}(\vec{\rho}, T). \quad (4.87)$$

Фактично, якщо взаємодія залежить виключно від щільності, тобто не залежить від імпульсу базових частинок, тоді  $f_{\text{int}}(\rho, T)$  просто є густиною потенціальної енергії, і вона не залежить від температури.

Можна відразу побачити, що

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{\text{tot}}(\vec{\rho}, T) &= \tilde{\mu}_{\text{free}}(\vec{\rho}, T) + \tilde{\mu}_{\text{int}}(\vec{\rho}, T), \\ P_{\text{tot}}(\vec{\rho}, T) &= P_{\text{free}}(\vec{\rho}, T) + P_{\text{int}}(\vec{\rho}, T), \\ \epsilon_{\text{tot}}(\vec{\rho}, T) &= \epsilon_{\text{free}}(\vec{\rho}, T) + \epsilon_{\text{int}}(\vec{\rho}, T). \end{aligned} \quad (4.88)$$

Зверніть увагу, що це визначення  $P_{\text{int}}$  відрізняється від визначення, де загальний тиск визначається розподілом двох внесків при тому самому хімічному потенціалі. Останній вибір був би природнім, якщо б ви працювали у гран-канонічному ансамблі, у термінах  $\vec{\mu}$ , а не у термінах густини.



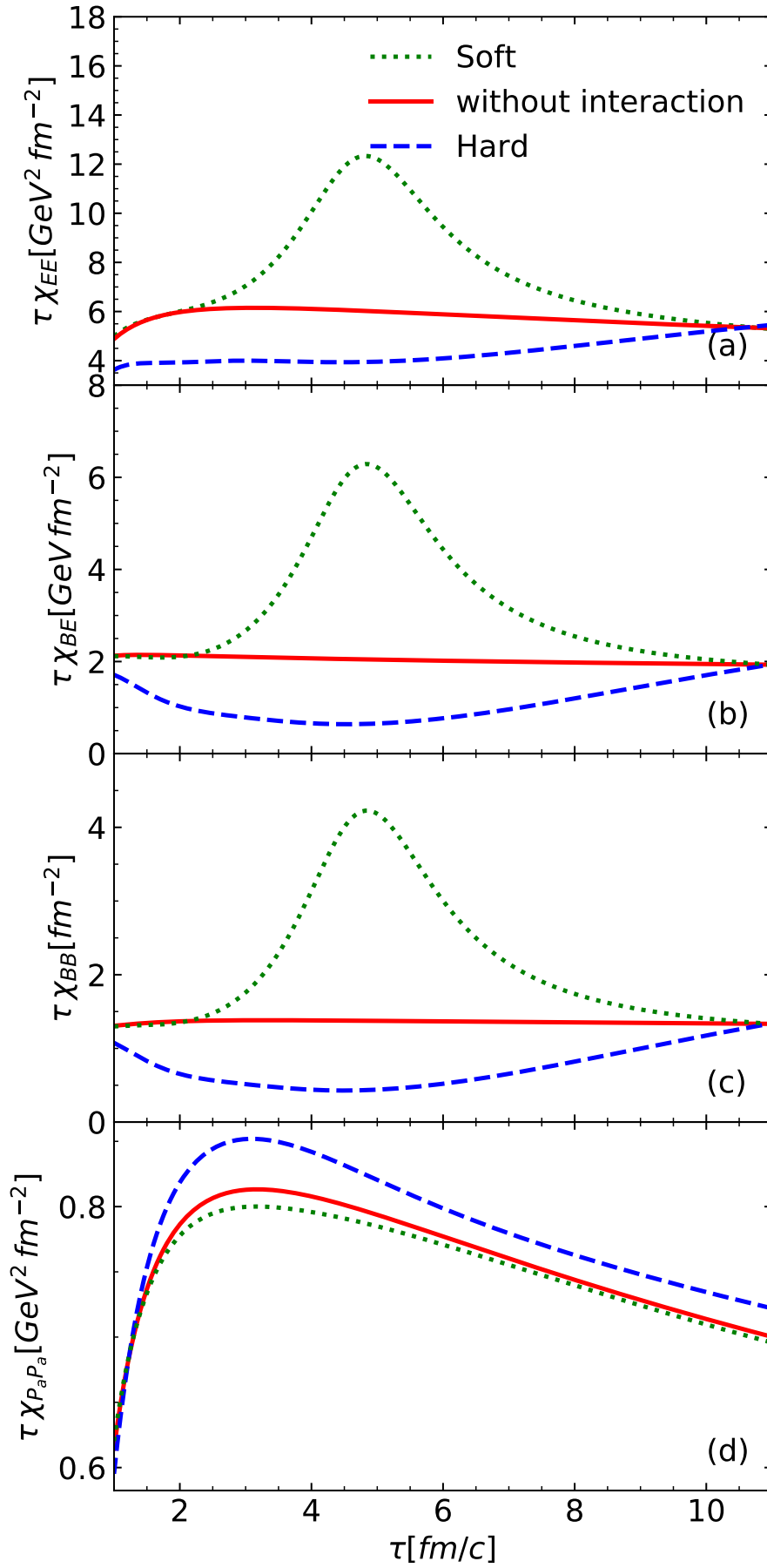


Рис. 4.5: Сприйнятливості енергії-енергії (а), енергії-баріонної щільності (b), баріонно-баріонних щільностей (c) та моменту-моменту (d) показані для трьох рівнянь стану, які були взяті до уваги. Різниця між різними ЕoS відображена в сприйнятливостях збережених зарядів.

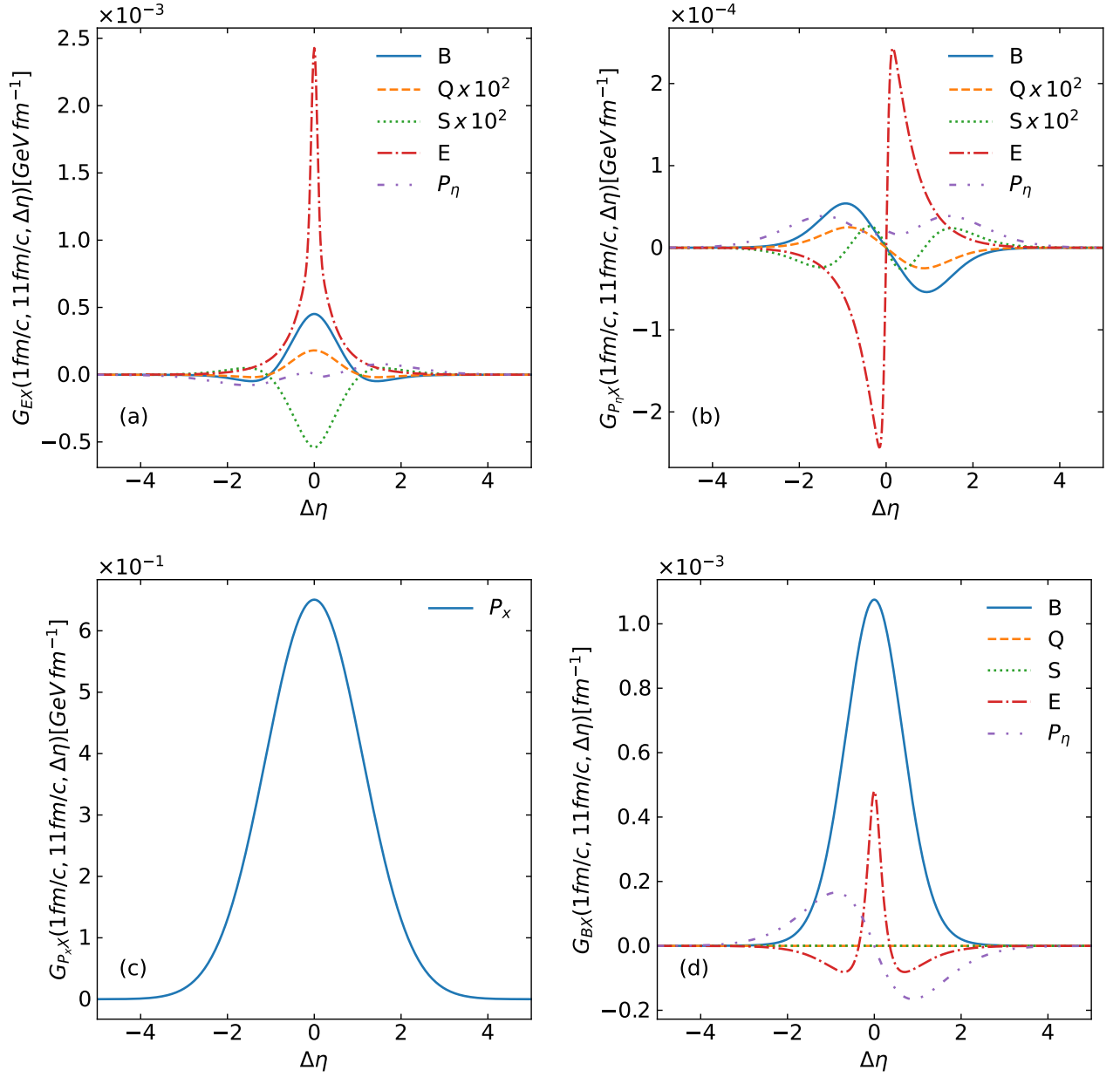


Рис. 4.6: Функції Гріна, позначені як  $G_{YX}(\tau_{\text{джерело}} = 1 \text{ fm}/c, \tau = 11 \text{ fm}/c, \Delta\eta)$ , представляють відповідь на збурення в  $X$ , ініційоване в  $1 \text{ fm}/c$  при  $\eta = 0$ , та спостережене в  $Y$  при  $\Delta\eta$ . Панелі  $a, b, c, d$  відображають  $G_{YX}$  для  $Y = E, P_\eta, P_x$  та  $B$  відповідно. Для кожного  $Y$  кожна панель показує ненулові функції Гріна для описаних в легендах величин. Ці функції обчислені для м'якої версії рівняння стану, додаткові деталі можна знайти в супровідному тексті. Крос-кореляції між різними збереженими зарядами розглядаються, енергію-імпульс, баріонний та електричний заряди. Для підвищення видимості деякі функції були масштабовані великими множниками.

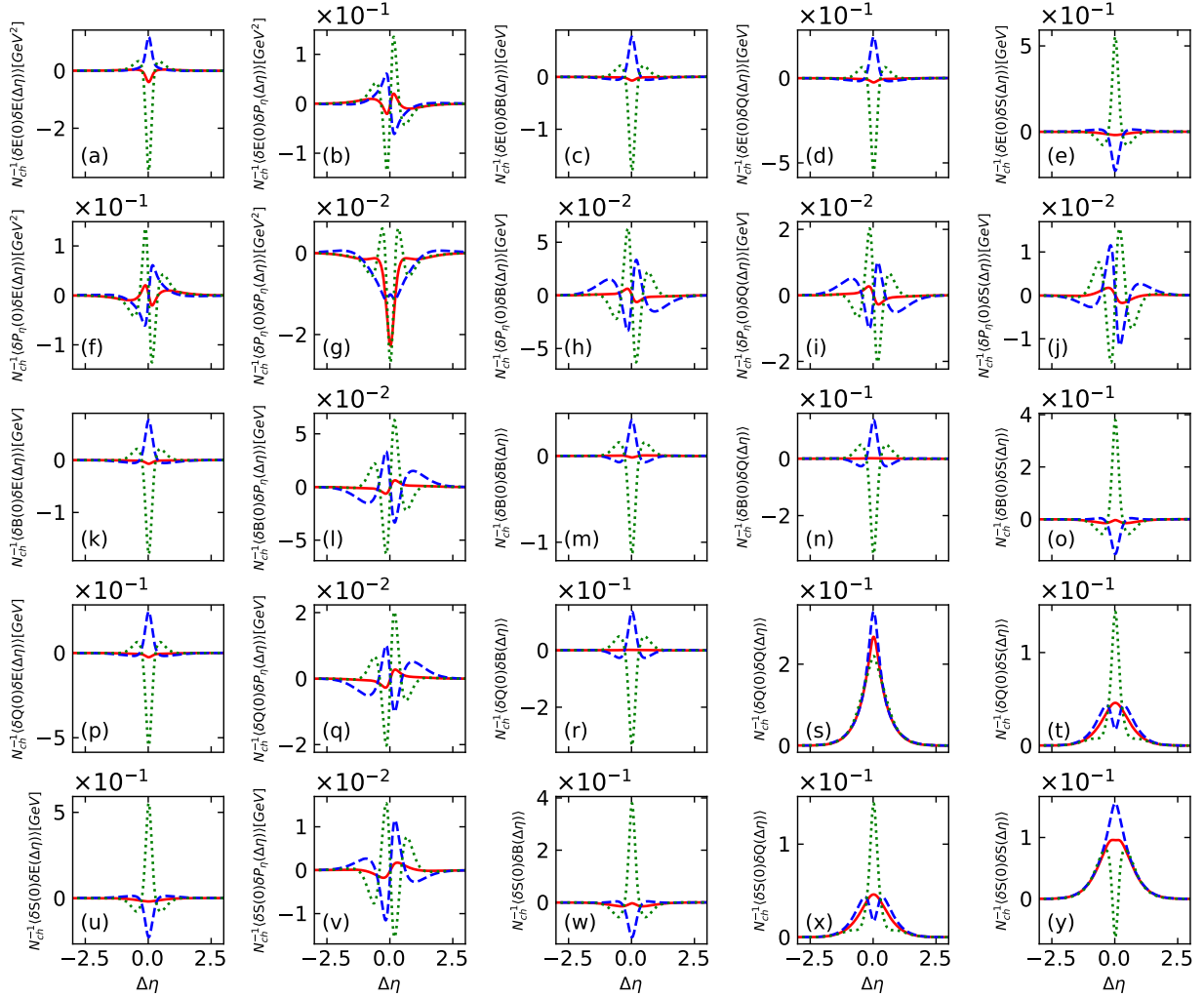


Рис. 4.7: Матриця двохточкових кореляцій для енергії, продольного імпульсу, баріонного, електричного та дивного зарядів представлена як функція відстані у просторово-часовій швидкості у момент фріз-ауту  $\tau = 11\text{fm}/c$ . Розглянуті рівняння стану включають ідеальний газ резонансів гадронів (синій), тверду гадронну рідину (помаранчевий) та м'яку гадронну рідину (зелений). Поперечні флуктуації системи відокремлені від інших спостережуваних і можуть бути знайдені на окремому графіку.  $N_{ch}$  - це кількість заряджених частинок на одиницю  $\eta$ , як передбачено статистичною адронізацією при  $T = 150\text{ MeV}$  з поперечною площею  $S = 100\text{ fm}^2$ .

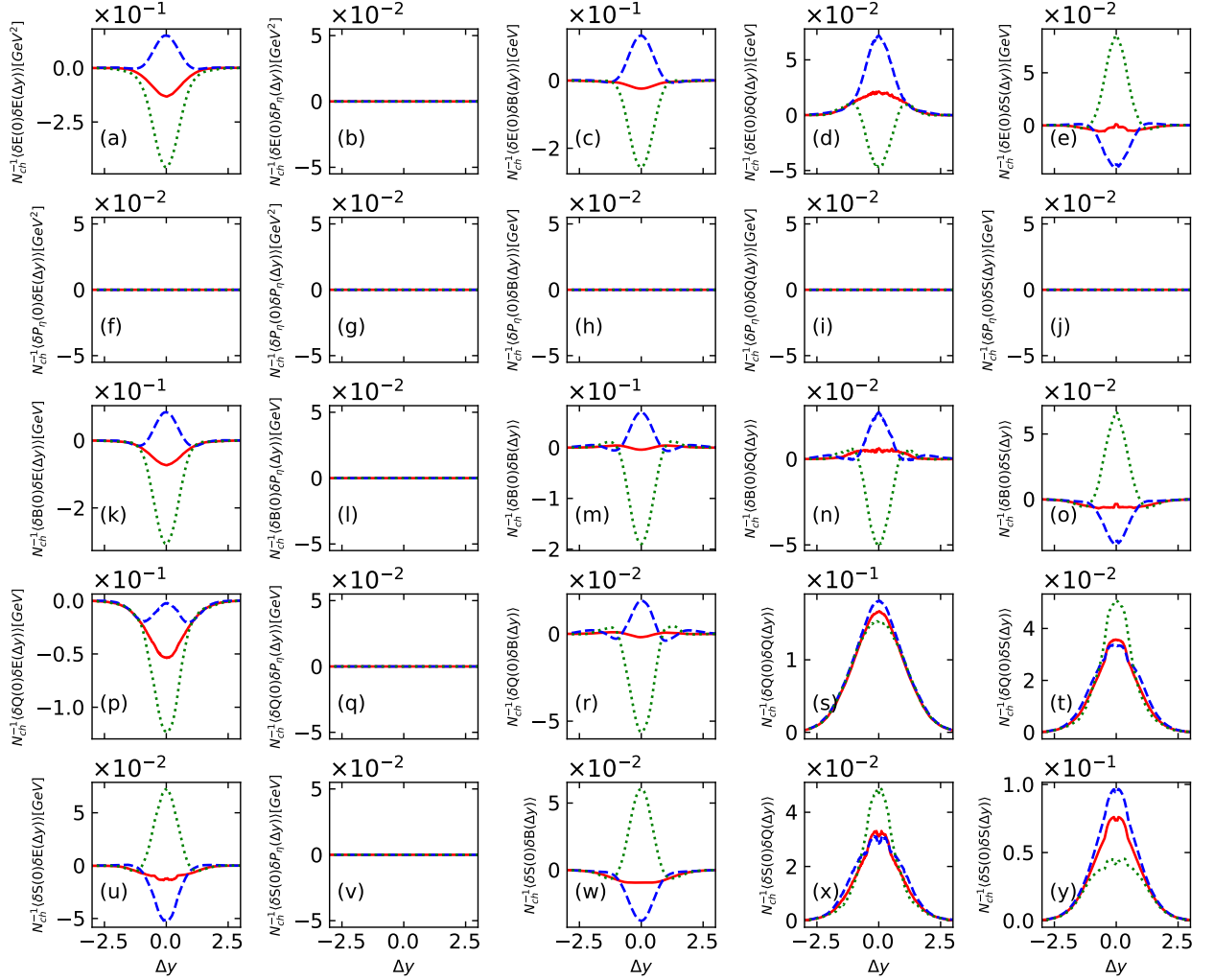


Рис. 4.8: Матриця двохточкових кореляцій для енергії, продольного імпульсу, баріонного, електричного та дивного зарядів представлена як функція залежності від швидкості імпульсу у момент фріз-ауту  $\tau = 11\text{fm}/c$ , обчислена після вибірки всіх заряджених частинок. Розглянуті рівняння стану включають ідеальний газ резонансів гадронів (синій), взаємодіючу гадронну рідину (помаранчевий) та рідину з фазовим переходом (зелений). Важливо відзначити, що поперечні флуктуації системи не впливають на продольні спостережувані, а флуктуації імпульсу повністю компенсуються.  $N_{ch}$  - це кількість заряджених частинок на одиницю  $\eta$ , як передбачено статистичною гадронізацією при  $T = 150\text{ MeV}$  з поперечною площею  $S = 100\text{ fm}^2$ .

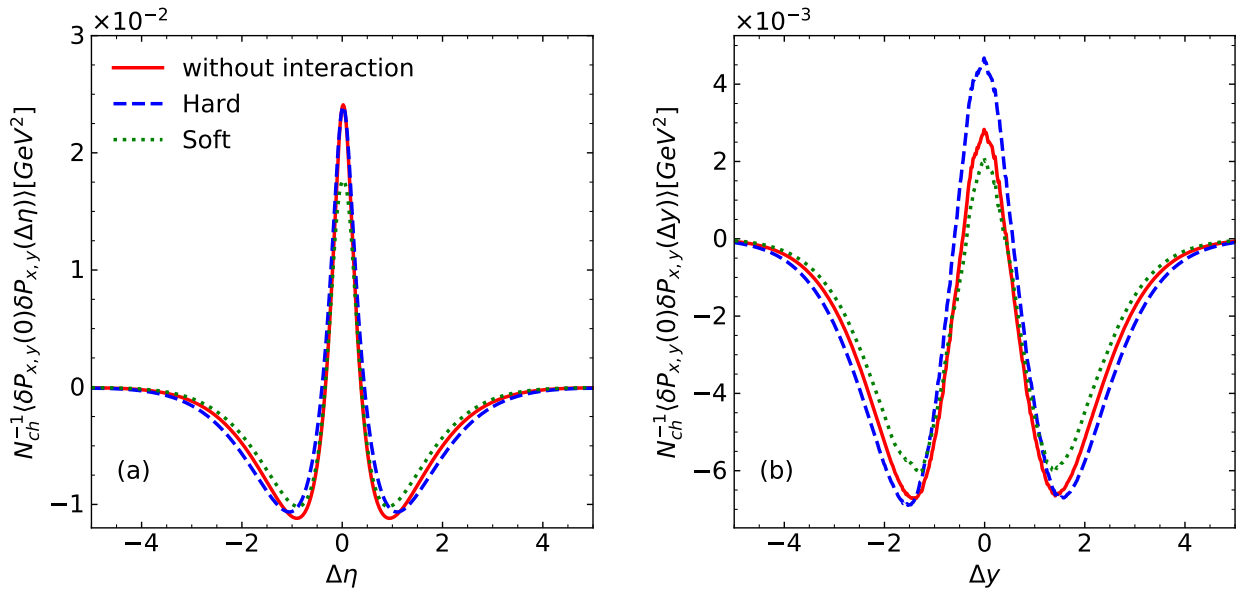


Рис. 4.9: Балансуюча частина для кореляцій поперечного імпульсу  $P_{x,y}$  як функція просторово-часових (ліворуч) або імпульсних (праворуч) різниць швидкості. Як передбачено з гідродинамічної еволюції з тепловими джерелами перед (ліворуч) та після створення частинок (праворуч).  $N_{ch}$  - кількість заряджених частинок на одиницю  $\eta$ , передбачена статистичною адронізацією при  $T = 150$  з поперечною площею  $S = 100^2$ .

## 4.3 Локальне збереження заряду і адронні реакції

### 4.3.1 Анігіляції та флуктуації

Нехай  $\gamma_{B(\bar{B})}$  буде коефіцієнтами модифікації середніх виходів (анти)баріонів під час адронної фази для конкретної енергії зіткнення та центральності, тобто

$$\langle N_{B(\bar{B})}^{\text{fin}} \rangle = \gamma_{B(\bar{B})} \langle N_{B(\bar{B})}^{\text{hyd}} \rangle. \quad (4.89)$$

$\langle N_{B(\bar{B})}^{\text{fin}} \rangle$  є кінцевим середнім виходом (анти)баріонів, а  $\langle N_{B(\bar{B})}^{\text{hyd}} \rangle$  є середнім виходом на початку адронної фази, тобто в кінці гідродинамічної еволюції.  $\gamma_{B(\bar{B})} = 1$  відповідає зникненню чистого ефекту анігіляцій баріонів та регенерацій, тоді як  $\gamma_{B(\bar{B})} < 1$  відповідає придушенню виходів, як спостерігається в транспортних моделях.

Замість середнього, давайте розглянемо тепер дисперсію  $\kappa_2[B - \bar{B}]$  нетто розподілу баріонів. Оскільки нетто кількість баріонів не змінюється в анігіляціях  $B\bar{B}$ , або в будь-якому іншому процесі КХД в цьому випадку,  $\kappa_2[B - \bar{B}]$  не впливається еволюцією адронної фази, доки можна ігнорувати дифузію баріонів у та з області реєстрації:

$$\kappa_2^{\text{fin}}[B - \bar{B}] = \kappa_2^{\text{hyd}}[B - \bar{B}] \quad (4.90)$$

Для отримання інтенсивної (незалежної від об'єму) міри флуктуацій нетто кількості баріонів зручно нормалізувати  $\kappa_2^{\text{fin}}[B - \bar{B}]$  на середню кількість баріонів та антибаріонів,  $\langle N_B + N_{\bar{B}} \rangle$ :

$$B^{\text{fin}} \equiv \frac{\kappa_2^{\text{fin}}[B - \bar{B}]}{\langle N_B^{\text{fin}} + N_{\bar{B}}^{\text{fin}} \rangle} = \frac{\kappa_2^{\text{hyd}}[B - \bar{B}]}{\langle \gamma_B N_B^{\text{hyd}} + \gamma_{\bar{B}} N_{\bar{B}}^{\text{hyd}} \rangle}. \quad (4.91)$$

Впливає з рівняння (4.91), що будь-яке придушення виходів баріонів у адронній фазі ( $\gamma_{B(\bar{B})} < 1$ ) призводить до підвищення нормалізованої дисперсії нетто кількості баріонів. Вимірювання такого підвищення є ключовою ідеєю тут, щоб обмежити анігіляцію.

## Флуктуації на LHC

Для ізоляції ефекту анігіляції на  $B$  інші фізичні механізми, що впливають на цю величину, повинні бути добре контрольовані. У межі некорельованого виробництва баріонів при фріз-ауті (заморозці), як це є у випадку ідеального газу резонансів адронів (HRG) в моделі великого канонічного ансамблю, величина  $B^{\text{hyd}} = \kappa_2^{\text{hyd}}[B - \bar{B}]/\langle N_B^{\text{hyd}} + N_{\bar{B}}^{\text{hyd}} \rangle$  була б рівною одиниці. Однак, відомо з розрахунків на перших принципах на решітці, що кумулянти розподілу кількості баріонів в КХД відхиляються від цієї базової лінії при температурах  $T \sim 150 - 160$  MeV, що відповідає фріз-ауті [59, 204]. Крім того, флуктуації кількості баріонів у зіткненнях важких іонів модифіковані точним збереженням кількості баріонів [205]. Ці дві проблеми нещодавно були розглянуті в Ref. [206] за допомогою узагальненої процедури фріз-ауті Cooper-Frye, названої *субансамбльовим семплером*. У подальшому ми будемо використовувати цей семплер для оцінки ефекту анігіляцій  $B\bar{B}$  на експериментально спостережувані флуктуації від події до події.

Ми обмежуємо наші розрахунки центральними зіткненнями Pb-Pb при 2.76 TeV, де нещодавно стали доступні вимірювання флуктуацій нетто-протонів зроблені Колаборацією ALICE [207]. При цій високій енергії пучка ефект анігіляції баріонів буде найбільш помітним, оскільки баріони та анти-баріони створюються в рівних кількостях. Вимірювання варіації нетто-кількості частинок на LHC має додаткову перевагу, оскільки вони менш чутливі до флуктуацій об'єму [176, 208]. Субансамбльовий семплер з Ref. [206] використовується для генерації подій, що складаються з адронів та резонансів на фріз-ауті, яка відбувається при  $T = 160$  MeV та  $\mu_B = 0$ . Процедура включає ефекти виключеного об'єму баріонів, узгоджені з даними КХД на решітці про

сприйнятливості баріонів [209], а також точне глобальне збереження кількості баріонів (див. Ref. [206] для деталей). Гіперповерхня фріз-ауті включає колективний потік [210, 211], взятий з моделі вибухової хвилі, інваріантної до повздовжнього руху [212], що відповідає циліндру  $r_{\perp} < r_{\max}$  у поперечній площині на постійному значенні  $\tau = \tau_0$  повздовжнього власного часу. Поперечна швидкість параметризується як  $\beta_{\perp} = \beta_s(r_{\perp}/r_{\max})^n$ , з параметрами  $\beta_s = 0.8$ ,  $r_{\max} = 10$  fm, та  $n = 1$ , взятими з Ref. [213]. Значення  $\tau_0 = 11.6$  fm/c взято для відтворення ефективного об'єму на одиницю швидкості  $dV/dy \sim 4000$  fm<sup>3</sup> на фріз-ауті, як це пропонують термальні моделі [214, 215]. Перевірено, що з цим вибором параметрів отримана гіперповерхня точно відтворює результати числових симуляцій гідродинаміки на LHC у гібридній моделі UrQMD з тривимірною гідродинамікою [216]. Для врахування кінцевої подовжньої протяжності системи ми накладаємо обмеження  $|\eta_s| < 4.8$  на подовжню просторово-часову бистроту, яке, як показано в Ref. [206], в сценарії лоренц-інваріантності у повздожній площині, точно відтворює експериментальні оцінки для повної області реєстрації заряджених частинок [217]. Це необхідно для належного врахування точного глобального збереження кількості баріонів.

Згенеровані адрони та резонанси в кожній події потім вводяться в адронний афтербернер UrQMD. Використано UrQMD у двох різних конфігураціях: (i) стандартну конфігурацію, що реалізує анігіляції  $B\bar{B}$  та (ii) другу конфігурацію, де ці реакції були вимкнені. Це дозволяє встановити два крайні випадки: повну анігіляцію без регенерації, яка максимізує ефект, та відсутність анігіляції взагалі (повну регенерацію). Ми додатково розглядаємо сценарій (iii), де ми ігноруємо стадію афтербернера, але замість цього дозволяємо всім резонансам, виробленим на фріз-ауті, негайно розпадатися на кінцеві адрони. Цей сценарій позначений як тільки розпади та був вивчений у оригінальній роботі, . [206]. Було згенеровано 1.76, 2.4 та 2.4 мільйони подій для сценаріїв (i), (ii), (iii) відповідно.

Було перевірено, що середні множинності протонів, як вимірює експеримент ALICE, відтворюються. Через анігіляцію середня кількість баріонів



придушується на коефіцієнт  $\gamma_{B(\bar{B})} = 0.84$ , що відповідає попереднім результатам [218]. Середня кількість баріонів залишається незмінною під час адронної фази, якщо анігіляції вимкнені. Ефект адронного розсіювання на спектри поперечного імпульсу протонів полягає в збільшенні середнього  $p_T$  з  $\langle p_T \rangle = 1.14 \text{ GeV}/c$  (тільки розпади) до  $\langle p_T \rangle = 1.32 \text{ GeV}/c$  (афтербернер з анігіляціями) та  $\langle p_T \rangle = 1.36 \text{ GeV}/c$  (афтербернер без анігіляцій), покращуючи відповідність до даних ALICE ( $\langle p_T \rangle = 1.33 \pm 0.03 \text{ GeV}/c$  [219]) та проявляючи малу чутливість до анігіляцій  $B\bar{B}$ . Це відповідає спостереженням з попередніх досліджень афтербернера [220, 221] та головним чином через численні розсіювання баріон+мезон [222].

Після визначення середньої кількості та забезпечення реалістичного розподілу поперечного імпульсу ми можемо детальніше дослідити ефекти анігіляції. З симуляцій можна обчислити другий кумулянт  $\kappa_2$ . Отримане відношення  $B \times \frac{1}{1-\alpha}$  показано як функцію вікна прийняття за швидкістю,  $|y| < \Delta Y_{\text{acc}}/2$ , на Рис. 4.10. Додатковий множник вводився для усунення впливу глобального збереження баріонів [223], де  $\alpha = \Delta Y_{\text{acc}}/9.6(3)$  [206], де  $9.6(3)$  представляє собою загальну ширину швидкості системи з глобальним (локальним) збереженням.

Всі представлені криві збігаються з одиницею при  $\Delta Y_{\text{acc}} \rightarrow 0$ . Цей ефект "пуассонізації" очікується від теплової системи [167] у границі  $\Delta Y_{\text{acc}} \rightarrow 0$ , але зникає зі збільшенням вікна швидкості.

У відсутності будь-якої анігіляції скорегована  $B$  майже не чутлива до фази афтербернера, оскільки результати зі сценарію з негайним розпадом всіх резонансів практично збігаються з результатами у адронній фазі без анігіляції  $B\bar{B}$ . У цьому випадку зкорегована масштабована варіація показує незначне зменшення з  $\Delta Y_{\text{acc}}$ , досягаючи гран-канонічного значення приблизно 0.94 (пунктирна лінія) при  $\Delta Y_{\text{acc}} \simeq 1.5$ .

Коли враховуються анігіляції  $B\bar{B}$ , масштабна дисперсія виявляє протилежну поведінку. Як функція  $\Delta Y_{\text{acc}}$ , вона наближається до значення приблизно 1.12 (пунктирна-точкована лінія) при великих  $\Delta Y_{\text{acc}}$ . Це відношення при великих  $\Delta Y_{\text{acc}}$  відповідає тому, що очікується з рівняння (4.91) для зменшення

середньої кількості баріонів  $B^{\text{annih.}}/B^{\text{no annih.}} = 0.94/1.12 \simeq 0.84 = \gamma_{B(\bar{B})}$ . Ця чутливість  $B$  при  $\Delta Y_{\text{acc}} \gtrsim 1$  до анігіляції  $B\bar{B}$  може бути легко зрозуміла. При зменшенні середньої кількості часток  $\gamma_{B(\bar{B})}$  другий порядковий кумулянт  $\kappa_2$  залишається практично незмінним. Не складно вважати, що цей спостережуваний параметр можна використовувати для обмеження кількісної ролі анігіляції баріонів та її зворотної реакції під час гадронного розсіювання.

### 4.3.2 Порівняння з експериментом

Результати моделювання щодо масштабної дисперсії нетто-протону  $p$  порівнюються з наявними експериментальними даними від співробітників колаборації ALICE [207] на Рис. 4.11. Експериментальні дані не можуть бути скориговані на прийняття у спосіб, схожий на Рис. (4.10). У цьому випадку ми припускаємо, що протони можуть бути виміряні лише в межах прийняття ALICE  $0.6 < p < 1.5 \text{ GeV}/c$  для різних відрізків уздовжньої псевдобистроти  $|\eta| < \Delta\eta_{\text{acc}}/2$ . Навіть якщо ефект анігіляції  $B\bar{B}$  в такому зменшеному прийнятті не настільки очевидний, як випадкові коливання нетто-баріонів інтегровані за  $p_T$ , як обговорювалося вище, спостережуваний показник все ще чутливий до анігіляції.

Бачимо, що для масштабної дисперсії протонів, як і для баріонів, результати з розпадів та афтербернера без анігіляції  $B\bar{B}$  практично збігаються. Ці сценарії узгоджуються з експериментальними даними з помилками. Оскільки в цьому випадку ефекти глобального збереження баріонів не скориговані,  $p$  зменшується зі збільшенням покриття прийняття.

Коли включаються анігіляції  $B\bar{B}$  (афтербернер з анігіляціями), результати залежності від прийняття помітно переоцінюють дані ALICE, для  $\Delta\eta_{\text{acc}} \gtrsim 1$ . Отже, наявні експериментальні дані не узгоджуються з помітним пригніченням (анти)баріонів у гадронній фазі, як це передбачено UrQMD у цій установці.

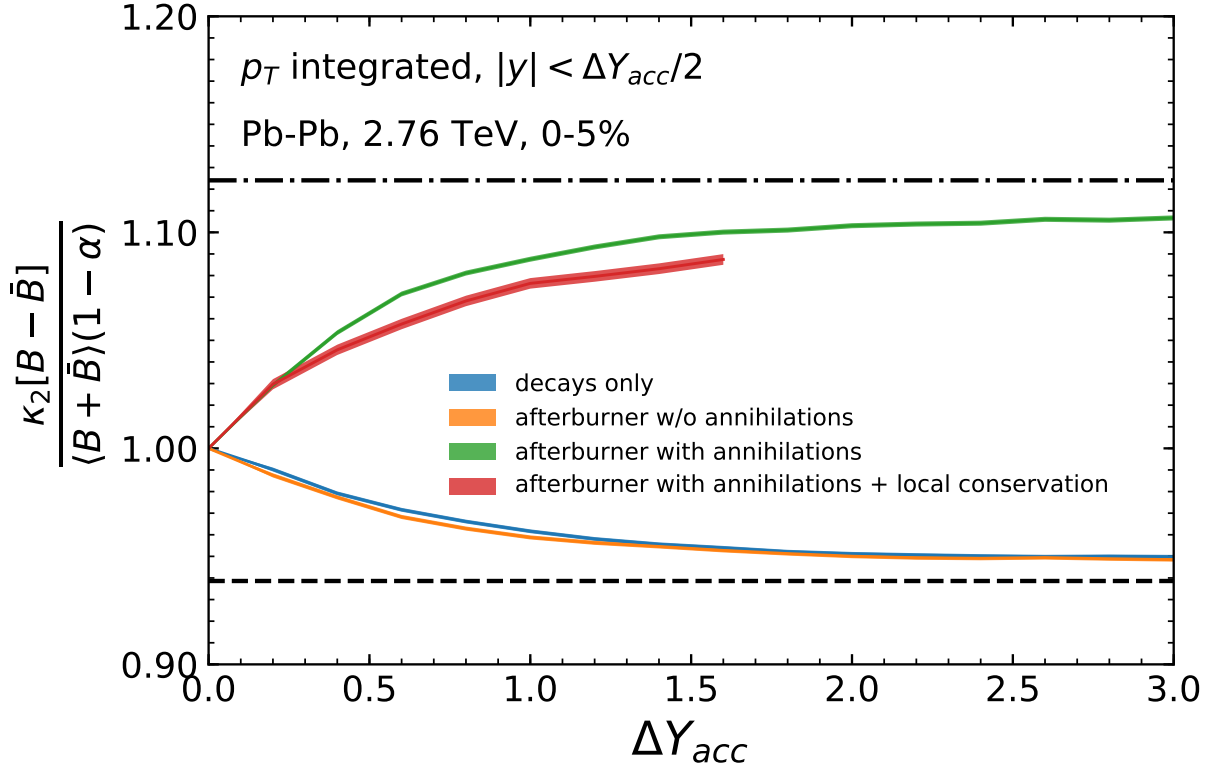


Рис. 4.10: Залежність від вікна по швидкості флуктуації баріонного заряду  $B = \kappa_2[B - \bar{B}] / \langle B + \bar{B} \rangle$  у центральних зіткненнях Pb-Pb на 0-5% на LHC, скоригована з урахуванням збереження баріонного числа через фактор  $1 - \alpha$ . Результати отримані за допомогою рутини партікулізації субансамблю, застосованої до моделі EV-HRG та гіперповерхні вибухової хвилі. Різні смуги відповідають різним сценаріям моделювання адронної фази. Червона смуга відповідає локальному збереженню баріонів у діапазоні швидкостей  $\Delta Y_{\text{cons}} = 3$ . Горизонтальні смуги зображують відповідні гранд-канонічні ліміти, які очікуються у при покритті повного імпульсного простору.

### 4.3.3 Локальне збереження числа баріонів

Однак існує ще одна важлива властивість, яка може впливати на масштабну дисперсію, а саме те, що кількість баріонів зберігається не лише глобально, але й локально, тобто в обмеженому вікні уздовжньої швидкості. Ця можливість обговорювалася у попередній публікації [207]. Там було аргументовано, що дані про флуктуації нетто-протонів у центральних зіткненнях Pb-Pb виявляють перевагу глобального збереження над локальним збереженням баріонів. Аргументація для цього висновку базувалася на спостереженні, що локальне збереження у межах  $\Delta y_{\text{cons}} \lesssim 5$  одиниць у швидкості призведе до сильнішого

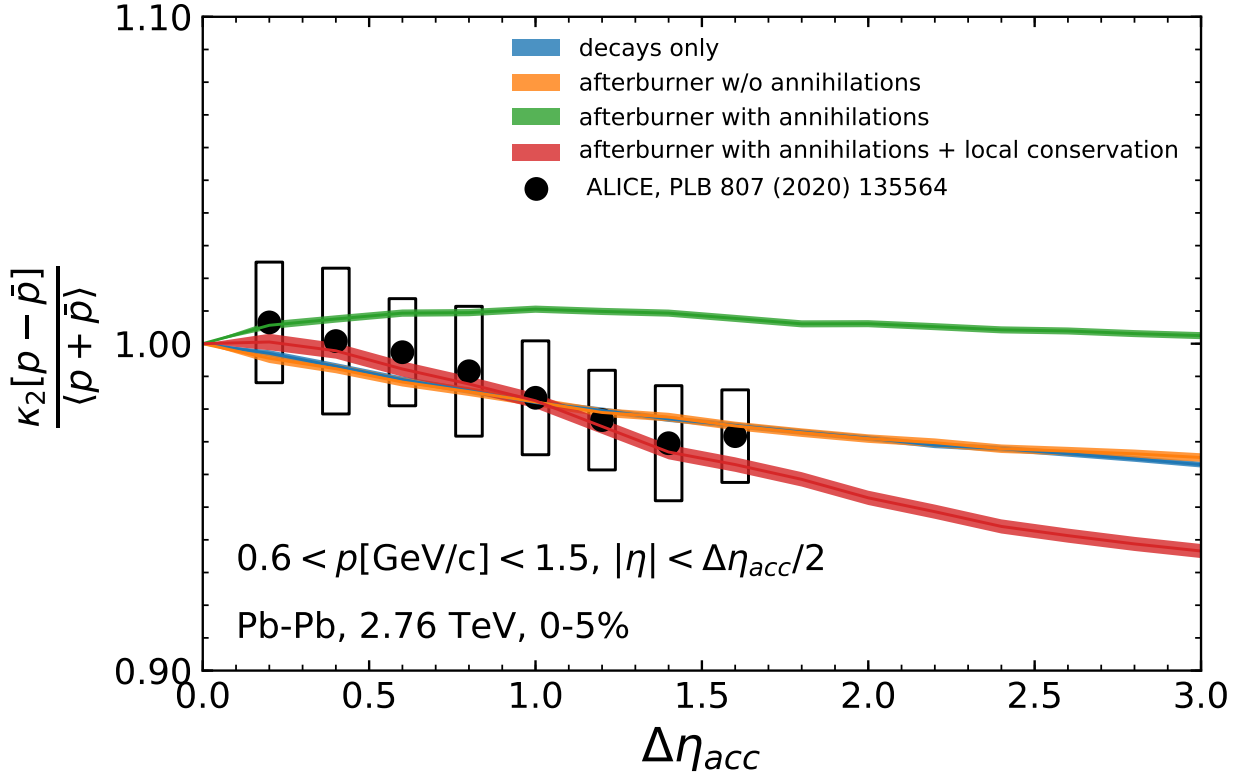


Рис. 4.11: Залежність прийняття псевдо-бистроти нетто-протону  $p = \kappa_2[p - \bar{p}]/\langle p + \bar{p} \rangle$  від псевдо-бистроти в центральних зіткненнях Pb-Pb на LHC. Експериментальні дані колаборації ALICE [207] показані символами з планками помилок.

пригнічення  $p$ , ніж в експерименті. Однак аналіз у Ref. [207] не врахував можливих ефектів анігіляції  $B\bar{B}$ . Як ми показали тут, цей ефект призводить до збільшення  $p$  і, таким чином, може відновити узгодженість з даними. Отже, важливо включити анігіляцію для вивчення ефектів локального збереження.

В літературі обговорюються декілька різних способів моделювання локального збереження баріонів [224–230]. Ми слідуємо підходу Refs. [225, 228] і включаємо ефект, зменшуючи обмеження у просторово-часовій швидкості до  $|\eta_s| < \Delta y_{\text{cons}}/2$ , де  $\Delta y_{\text{cons}}$  - діапазон локального збереження баріонів у відношенні до уздовжньої швидкості. Ми приймаємо значення  $\Delta y_{\text{cons}} = 3$ , яке раніше використовувалося в Ref. [228] для опису кількості адронів у малих системах на LHC в рамках канонічної статистичної моделі.

Обчислення, включаючи локальне збереження баріонів для  $B$  (0.4 мільйони подій), показані на Рис. 4.10 і Рис. 4.11 як червона полоса. Ці обчисле-

ння включають анігіляції  $B\bar{B}$  під час гадронної фази. На Рис. 4.10 корекція на збереження баріонів виконується через фактор  $1 - \alpha$ , де  $\alpha = \Delta Y_{\text{acc}}/3$ . Бачимо, що виправлене  $B$  практично збігається з результатом глобального збереження в межах радіуса збереження  $\Delta Y_{\text{acc}} < 1.5$ . Отже, якщо діапазон збереження баріонів відомий, можна використовувати відповідно виправлене  $B$  для обмеження анігіляції баріонів.

Якщо діапазон збереження не відомий незалежно, картинка стає зовсім іншою. Комбінований ефект локального збереження баріонів та анігіляцій  $B\bar{B}$  на  $p$  в прийнятті ALICE показаний червоною половою на Рис. 4.11. У цьому сценарії обчислення з локальним збереженням та анігіляцією узгоджуються з експериментальними даними. У відсутність анігіляції  $B\bar{B}$  дані значно недооцінюються через локальне збереження, як показано в Ref. [207], однак коли одночасно використовуються як локальне збереження, так і анігіляція  $B\bar{B}$ , узгодженість з даними відновлюється.

#### 4.3.4 Чи можна їх розрізнити?

Надані колаборацією ALICE дані наразі не дозволяють нам відрізнити глобальне збереження без анігіляцій  $B\bar{B}$  від локального збереження з анігіляціями  $B\bar{B}$ , хоча можна аргументувати, що форма залежності  $\Delta\eta_{\text{acc}}$  краще відтворюється останнім сценарієм. Для відповіді на це питання більш точно потрібен додатковий аналіз і, можливо, кількісні обмеження на ефект анігіляції та регенерації під час гадронної фази.

Один з варіантів - дослідити залежність від центральності  $p$ . Ефект гадронної фази (і, таким чином, анігіляція  $B\bar{B}$ ) зменшується для більших параметрів впливу, і в основному може бути проігнорований в периферичних зіткненнях. Експериментальні дані щодо  $p$  [207] дійсно вказують на центральну залежність:  $p$  зменшується з  $0.972 \pm 0.015$  в 0-5% центральних зіткненнях до  $0.935 \pm 0.011$  в 60-70% центральних зіткненнях. Останнє значення було показано в Ref. [228] як узгоджене з локальним збереженням баріонів з  $\Delta y_{\text{cons}} = 3$  без анігіляцій  $B\bar{B}$ . Якщо (локальне) збереження баріонів не залежить від цен-

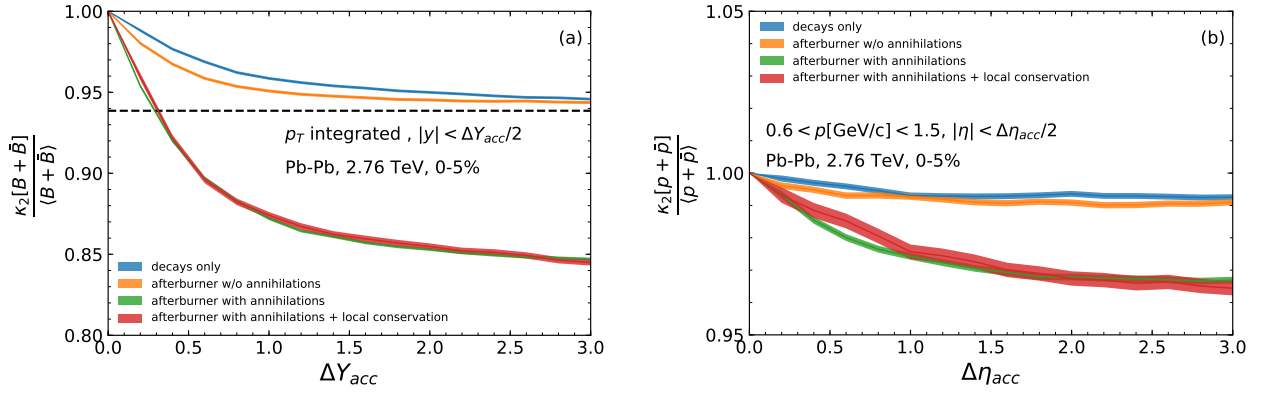


Рис. 4.12: (а) Залежність прийняття від швидкості нетто баріону  $B = \kappa_2[B + \bar{B}] / \langle B + \bar{B} \rangle$  в центральних зіткненнях Pb-Pb на ЛНС. Різні полоси мають ту ж саму сутність, що і на Рис. 4.10. (б) Те саме, що і на Рис. 4.11, але для  $p$ . Обчислення, показані на цьому рисунку, не враховують флуктуації об'єму.

тральності, наприклад, якщо воно визначається створенням кварк-антикварк у ранній стадії зіткнення, центральна залежність даних підтримує сценарій локального збереження + анігіляція  $B\bar{B}$ . Додаткову підтримку для цього сценарію можна знайти у центральній залежності відношення  $p/\pi$ , де дані вказують на погіршення в центральних зіткненнях Pb-Pb [219], узгоджене з ефектом анігіляції  $B\bar{B}$ .

Крім цих вказівок, інший спостережний параметр, який може відрізняти ці два сценарії на основі експериментальних даних, буде дуже корисним. Для розрізнення локального збереження баріонів від анігіляцій  $B\bar{B}$  більш прямо ми пропонуємо дослідити додатковий показник флуктуацій. Зокрема масштабна дисперсія  $B \equiv \kappa_2[B + \bar{B}] / \langle N_B + N_{\bar{B}} \rangle$  [або  $p$  для протонів] загальної кількості баріонів (протонів) + антибаріонів (антипротонів) може бути використана для цієї мети. Цей параметр не чутливий до збереження баріонів на ЛНС, оскільки його корелятор зі збереженим нетто-баріонним числом дорівнює нулю через симетрію:

$$\text{cov}[B + \bar{B}, B - \bar{B}] = \text{cov}[B, B] - \text{cov}[\bar{B}, \bar{B}] \stackrel{\langle B \rangle = \langle \bar{B} \rangle}{=} 0. \quad (4.92)$$

Проте,  $B$  чутливий до анігіляцій, тому може бути використаний для обмеження цього ефекту. Рисунок 4.12 показує результати обчислень для (а)  $B$  як

функцію прийняття швидкості  $\Delta Y_{\text{acc}}$  та (b)  $p$  як функцію прийняття псевдобистроти  $\Delta \eta_{\text{acc}}$ . Подібно до  $B$  та  $p$ , тут демонструється, що корекція на анігіляції  $B\bar{B}$  узгоджує результати з даними, дозволяючи відрізнити ефекти анігіляції від локального збереження баріонів.

## 4.4 Флуктуації поперечного імпульсу

### 4.4.1 Теоретичний метод

У конкретному сценарії зникнення щільності баріонів ми використовуємо формалізм, описаний в посиланні [231]. Припускаючи модель (1+1)D зіткнення важких іонів, з просторово-часовою швидкістю  $\eta$  та власним часом  $\tau$ , кореляція в системі розділена на дві частини:

$$C_{AB}(\Delta\eta, \tau) = \chi_{AB}(\tau) \frac{\delta(\Delta\eta)}{\tau} + C'_{AB}(\Delta\eta, \tau). \quad (4.93)$$

У цьому контексті  $A, B$  відповідають енергії-імпульсу та баріонним, електричним та дивним зарядам, що формують матрицю розміром  $7 \times 7$ . Якщо система еквілібрована, сила локальної кореляції визначається коефіцієнтом сприйнятливості заряду, фундаментальною властивістю речовини. Другий член, збалансована кореляція, розповсюджується та обмежується часом, що пройшов після появи кореляцій.

За допомогою набору функцій Гріна, позначених як  $G_{AB}(\eta_f - \eta_i, \tau_f, \tau_i)$ , які описують відповідь  $B$  при  $\tau = \tau_f, \eta = \eta_f$  на збурення  $A$  при  $\tau = \tau_i, \eta = \eta_i$ , кореляція при  $\Delta\eta \neq 0$  виражається наступним чином:

$$C'_{AB}(\Delta\eta = \eta_2 - \eta_1, \tau_f) = \int_{\tau_0}^{\tau_f} d\tau_j \tau_j \int d\eta_j G_{AA'}(\eta_1 - \eta_j, \tau_f, \tau_j) G_{BB'}(\eta_2 - \eta_j, \tau_f, \tau_j) S_{A'B'}(\tau_j), \quad (4.94)$$

де межі в часовому інтегруванні відповідають початковому часу еволюції  $\tau_0$  та часу відмороження  $\tau_f$ , а  $S(\tau_j)$  є джерелом:

$$S_{AB}(\tau) = (\partial_\mu u^\mu) \chi_{AB} = \left( \frac{1}{\tau} + \partial_\tau \right) \chi_{AB}(\tau). \quad (4.95)$$

Однак рівняння (4.94) не враховує початкової кореляції, яка має природно



існувати в еквіліброваному гідродинамічному середовищі з самого початку. Щоб включити цю початкову кореляцію, ми вводимо термін:

$$C_{AB}^{0'}(\Delta\eta = \eta_2 - \eta_1, \tau_f) = \tau_0^2 \int d\eta_{j_1} d\eta_{j_2} G_{AA'}(\eta_1 - \eta_{j_1}, \tau_f, \tau_0) \\ G_{BB'}(\eta_2 - \eta_{j_1}, \tau_f, \tau_0) C_{A'B'}^{0'}(\eta_{j_2} - \eta_{j_1}, \tau_0), \quad (4.96)$$

Тут, враховуючи збереження заряду, ми визнаємо, що  $\int d\eta_{j_2} C_{AB}^0(\eta_{j_1} - \eta_{j_2}, \tau_0) = -\chi_{AB}(\tau_0)/\tau_0$  для задоволення сумових правил, пов'язаних з законами збереження [231]. Однак точна форма функції залишається невідомою. Для цілей нашого дослідження ми припускаємо, що початкова кореляція відповідає гаусіві з шириною  $\sigma_{AB}$ :

$$C_{AB}^0(\eta_{j_2} - \eta_{j_1}, \tau_0) = -\frac{\chi_{AB}(\tau_0)}{\sqrt{2\pi\sigma_{AB}^2}\tau_0} \exp^{-\frac{(\eta_{j_2}-\eta_{j_1})^2}{2\sigma_{AB}^2}}. \quad (4.97)$$

Визначення точної форми кореляції для початкового стану гідродинамічного симуляції потребувало би комплексного дослідження переносу. Хоча цей дослід у самому собі

має значення, наші висновки в основному зосереджені на частині кореляції, розвиненій під час гідродинамічної стадії, як описано в рівнянні (4.94). Тим часом, в'язка розповсюдження початкової кореляції зробить будь-яку структуру в масштабі  $\Delta\eta < 1$  розмазаною в рівнянні (4.96).

Функції Гріна можна отримати з релятивістської гідродинаміки [188]. Для рішення Бьоркена,  $\rho(t, \vec{r})$ ,  $\varepsilon(t, \vec{r})$  та  $u^\mu(t, \vec{r})$  (електрична, дивна, баріонна та енергетична щільності та чотиришвидкість) можуть бути розкладені в ряд за відношенням до збурень  $\delta\rho, \delta\varepsilon, \delta u^\mu$ . Збурення описується набором лінійних

рівнянь:

$$\partial_\tau \delta\varepsilon = -\frac{1}{\tau} \delta(\varepsilon + P) - \partial_\eta \frac{\varepsilon + P - \frac{8\eta_s}{3\tau}}{\tau} \delta u^\eta + j_\varepsilon, \quad (4.98)$$

$$\begin{aligned} \partial_\tau \left( \varepsilon + P - \frac{4\eta_s}{3\tau} \right) \delta u^\eta &= -\frac{2}{\tau} \left( \varepsilon + P - \frac{4\eta_s}{3\tau} \right) \delta u^\eta \\ &- \partial_\varepsilon P \frac{\partial_\eta \delta\varepsilon}{\tau} + \frac{4\eta_s \partial_\eta^2 \delta u^\eta}{3\tau^2} + j_{P_\eta}, \end{aligned} \quad (4.99)$$

$$\partial_\tau \delta\rho = -\frac{\delta\rho}{\tau} + \frac{D}{\tau^2} \partial_\eta^2 \delta\rho + j_\rho, \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned} \partial_\tau \left( \varepsilon + P - \frac{2\eta_s}{3\tau} \right) \delta u^{x,y} &= -\frac{1}{\tau} \left( \varepsilon + P - \frac{2\eta_s}{3\tau} \right) \delta u^{x,y} \\ &+ \frac{\eta_s \partial_\eta^2 \delta u^{x,y}}{\tau^2} + j_{P_{x,y}}, \end{aligned} \quad (4.101)$$

де  $\delta u^\eta = \frac{\delta u^z}{u^0}$ . Для функції Гріна  $j_A = \delta_A(\tau - \tau_j)\delta(\eta - \eta_j)/\tau$  відповідає точковому джерелу. Зв'язок між швидкістю та локальним імпульсом полягає в наступному:

$$\delta P_\eta = \left( \varepsilon + P - \frac{4\eta_s}{3\tau} \right) \delta u^\eta, \quad (4.102)$$

$$\delta P_{x,y} = \left( \varepsilon + P - \frac{2\eta_s}{3\tau} \right) \delta u^{x,y}. \quad (4.103)$$

Рівняння стану відіграє ключову роль у визначенні гідродинамічної еволюції системи та визначає сприйнятливості, необхідні для обчислення кореляцій збережених зарядів. Для нашого рівняння стану ми використали результати співпраці HotQCD [232] для тиску та енергетичної щільності як функції температури, та [233] для сприйнятливостей збережених зарядів.

На верхньому графіку (а) на рис. 4.13 показані  $\chi_{EE}$  та  $\chi_{PP} = \chi_{P_x P_x} = \chi_{P_y P_y} = \chi_{P_\eta P_\eta}$  як монотонні функції  $\tau$ . Їх найбільша швидкість зміни відповідає початковим етапам зіткнення, що свідчить про те, що більшість балансових кореляцій генеруються протягом цього періоду, згідно з рівнянням (4.94). Зокрема,  $\frac{\chi_{PP}(1)}{13\chi_{PP}(13)} \approx 4$ , що свідчить про те, що кореляція, створена протягом гідродинамічної стадії, має порівняльні характеристики з кореляцією з попереднього етапу. Схожа тенденція спостерігається для  $\frac{\chi_{EE}(1)}{13\chi_{EE}(13)} \approx 2$ .

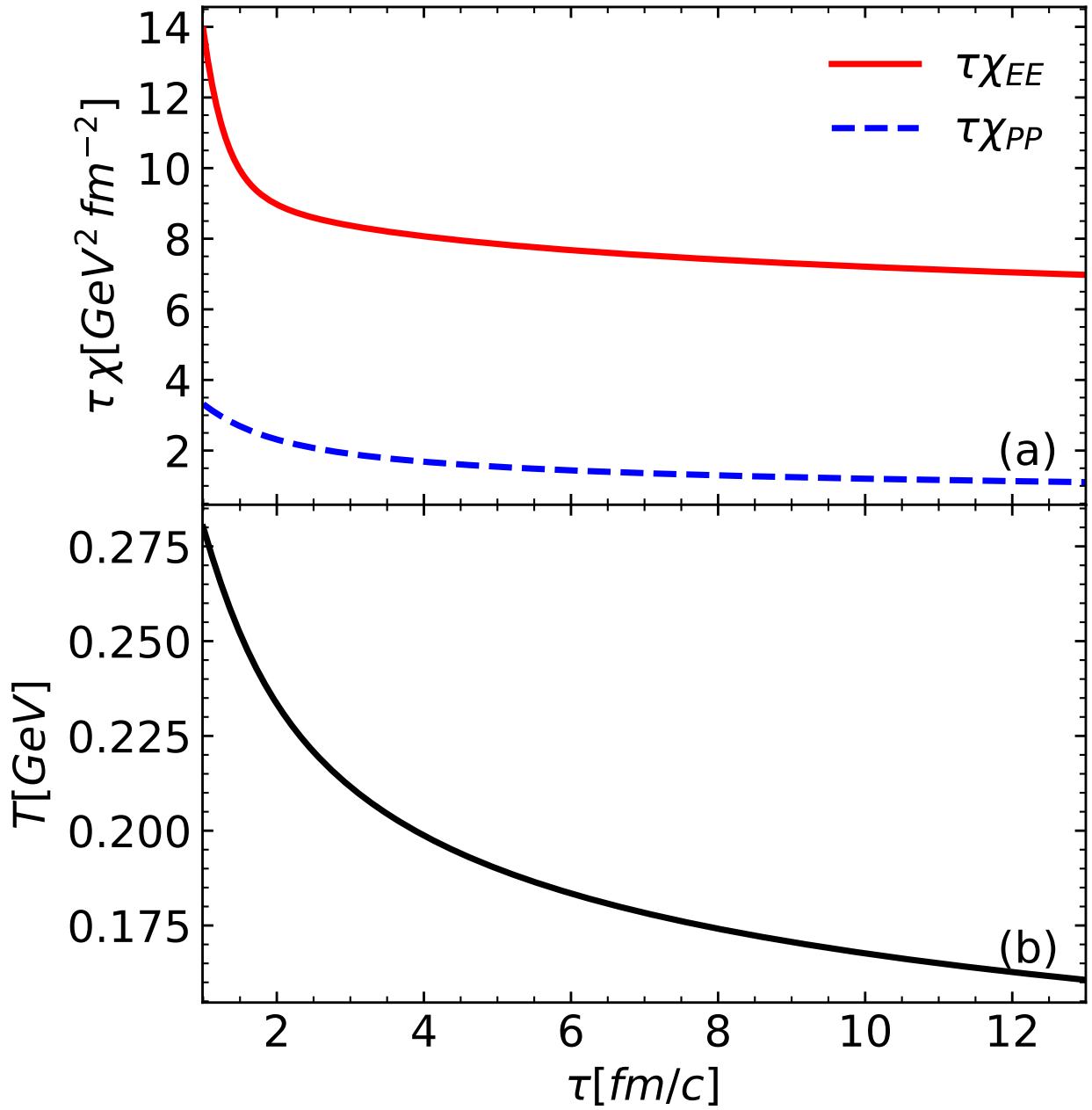


Рис. 4.13: Сприйнятливість, що створює кореляції енергії-імпульсу  $\chi_{PP}$ ,  $\chi_{EE}$  (a) та температура  $T$  (b) як функції власного часу  $\tau$  вздовж рішення Бюркена з рівнянням стану lQCD.

Панель (b) ілюструє зниження температури в результаті розширення у поздовжньому напрямку. Оскільки наша модель передбачає  $\mu_B, \mu_S, \mu_Q = 0$ , всі інші термодинамічні величини, такі як  $P, \varepsilon, s$ , можна обчислити для конкретних значень температури.

Оскільки рівняння стану та сприйнятливості добре обмежені ґратковими обчисленнями, наша увага звернута на транспортні коефіцієнти, зокрема на в'язкість ( $\eta$ ) та дифузію ( $D$ ). Дослідження балансових функцій [234] на-

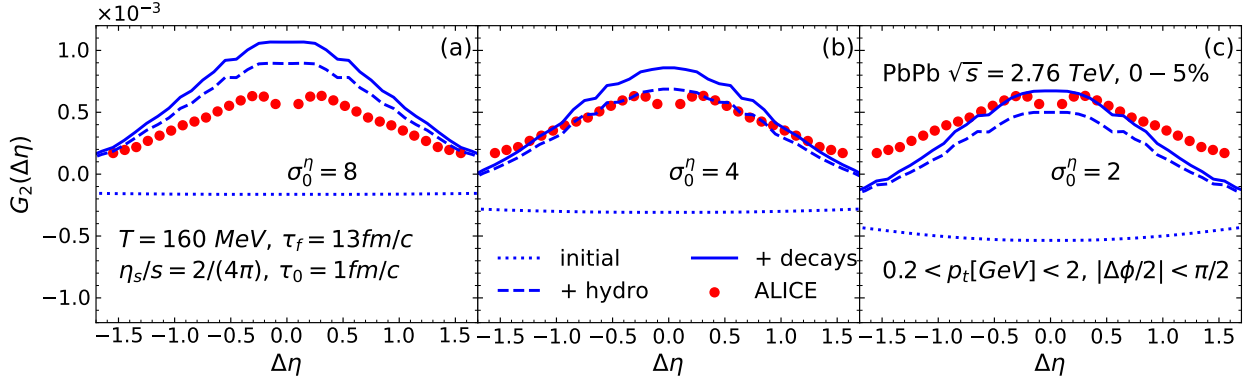


Рис. 4.14: Порівняння обчислень  $G_2(\Delta\eta)$  з вимірюваннями співпраці ALICE [235]. Параметри відляку вдихновлені з [213], та  $\eta_s/s$  було встановлено на рівні  $1/(2\pi)$ . Панелі (a), (b) та (c) показують результати для трьох окремих ширин,  $\sigma_0^\eta$ , попередньої еквілібріумної кореляції. Попередньо еквілібріумні кореляції, крапкові лінії, додаються до гідродинамічних кореляцій, щоб отримати пунктирні лінії, які після додавання ефектів розпаду дають загальну кореляцію, позначену суцільними лініями. Тому що дорівнювальна кореляція має інтегруватися до фіксованого значення, яке є від'ємним, менші значення  $\sigma_0^\eta$  знижують загальну кореляцію для малих  $\Delta\eta$ . Для  $\sigma_0^\eta = 4$  загальна кореляція найбільш наближається до вимірювань ALICE.

дають оцінки для дифузійної константи, з  $D = \frac{T}{2\pi}$  та  $\sigma_{AB} = 0.5$ , де  $A, B$  можуть бути баріонними, електричними та дивними зарядами. Це залишає нас з двома залишковими параметрами:  $\eta_s/s$  та  $\sigma_0^\eta = \sigma_{AB}$ , де  $A, B$  можуть бути  $E, P_x, P_y, P_\eta$ , тобто енергія та імпульс. Ми приймаємо  $\frac{\eta_s}{s} = \frac{1}{2\pi}$  як розумну оцінку та розглядаємо  $\sigma_0^\eta = 2, 4, 8$ . Цей вибір мотивується різними масштабами взаємодій. Теплові та рівноважні зазвичай є короткодійними, з іншого боку, потоки та міні-джети можуть поширюватися кількома одиницями швидкості.

#### 4.4.2 Кореляції поперечного імпульсу

Колаборація ALICE виміряла величину  $G_2$ ,

$$G_2(\eta_1, \eta_2, \phi_1, \phi_2) = \frac{1}{\langle p_{t,1} \rangle \langle p_{t,2} \rangle} \left[ \frac{\int dp_{t,1} dp_{t,2} p_{t,1} p_{t,2} \rho_2(\vec{p}_1, \vec{p}_2)}{\int dp_{t,1} \rho_1(\vec{p}_1) \int dp_{t,2} \rho_1(\vec{p}_2)} - \langle p_{t,1}(\eta_1, \phi_1) \rangle \langle p_{t,2}(\eta_2, \phi_2) \rangle \right],$$

в зіткненнях PbPb при  $\sqrt{s} = 2.76\text{TeV}$  [235],  $\rho_2(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \frac{d^6 N_{ch}}{d\vec{p}_1 d\vec{p}_2}$ ,  $\rho_1(\vec{p}) = \frac{d^3 N_{ch}}{d\vec{p}}$ . Поточне вимірювання корелятора  $G_2$  ґрунтується на відстеженні доріжок заряджених частинок за допомогою детектора TPC у діапазоні поперечних імпульсів  $0.2 \leq p_t \leq 2.0 \text{ GeV}/c$  та діапазоні псевдоспіввідношень  $|\eta| < 0.8$ . Це вимірювання інтегрується по  $\eta_1, \phi_1$  та  $\eta_2, \phi_2$ , але групується за  $\Delta\eta$  та з  $|\Delta\phi| < \frac{\pi}{2}$ . Отримана кореляція називається  $G_2(\Delta\eta)$ . У вимірюваннях ALICE кореляція в залишковому азимутальному прийнятті  $|\Delta\phi| > \frac{\pi}{2}$  показує майже постійну кореляцію в  $\Delta\eta$ .

Для порівняння з експериментальними даними відносної псевдоспіввідношення ми перетворюємо кореляції в просторово-часову швидкість, отримані в гідродинамічному моделюванні, на пари частинок (як це було пояснено в [231], див. також [190, 191]). Кожній парі припускається відсутність кореляції, але кожній парі потім призначається вага на основі кореляцій, які є функціями відносних координат їх точок випромінювання. Якщо частинка розпадається, вага також передається всім її дочкам. Поміж вагами, які впливають з просторових кореляцій, додається другий внесок, який враховує розпади між дочками того самого розпада. Ми відняли фон, що оцінив ALICE, від даних. Кількість  $G_2$  не є інтенсивною і масштабується як  $\langle N_{ch} \rangle^{-1}$ ; тому ми масштабуємо результати нашої моделі за допомогою відношення нашої множинності до тієї, яку виміряла ALICE, щоб зробити належне порівняння з вимірюваннями ALICE.

Найважливішою недолікою нашої моделі є те, що ігнорується поперечний колективний рух. З цієї причини середній  $p_t$  з нашої моделі значно вищий, ніж в експерименті. Оскільки визначення  $G_2$  включає ділення на два множники середнього поперечного імпульсу, вимірювання  $G_2$  є безрозмірним. Таким чином, ігнорування поперечного потоку може не бути настільки серйозним, як можна було б очікувати. Ігнорування поперечного потоку все ще впливає на результати у декількох аспектах. По-перше, кореляції енергія-енергія в системі рухається можуть перетворюватися в кореляції імпульс-імпульс через зростання швидкості. І навпаки, кореляції імпульс-імпульс можуть викликати кореляції енергія-енергія через зростання швидкості. Оскільки поперечний

імпульс,  $p_t$ , не той самий, що  $p_x$  або  $p_y$ , і виражається як величина, яка не є явно збереженою, складно оцінити, як попередні кореляції  $p_t - p_t$  можуть бути під впливом зростання швидкості елементів рідини. По-друге, ширина кореляцій в відносній швидкості повинна звужитися зростанням швидкості. Якщо дві корельовані частинки з імпульсом  $\vec{p}_1$  та  $\vec{p}_2$  будуть зростати в поперечному напрямі, їхня відносна швидкість зменшиться. Нарешті, відсутність поперечного потоку впливає на тривалість зіткнення. Поперечне розширення прискорює охолодження та розпад речовини, що, в свою чергу, зменшує відносне просторове розподілення кореляції. Тим не менш, наше оброблення тут є незамінним, оскільки воно надає загальне уявлення про те, наскільки багато рейки може бути викликано ефектами збереження, що виникають внаслідок еволюції теплових чутливостей.

Кожен розрахунок, представлений на рис. 4.14, включає три внески. Перший внесок походить від передеквільбриованої кореляції, яка потім передається через гідродинамічний етап, як описано в рівнянні (4.96). Цей внесок характеризується гаусовською шириною початкового розподілу,  $\sigma_0^\eta$ . Оскільки ця кореляція повинна інтегруватися до відомого значення, яке є від'ємним, менші ширини дають сильніші від'ємні кореляції при малих  $\Delta\eta$ . Другий внесок, який тут називається гідродинамічним внеском, походить з джерелової функції в рівнянні (4.94). Нарешті, третій внесок - це внесок від частинок, які походять від дочок того самого розпаду. Рис. 4.14 показує кумулятивні суми цих внесків. Початковий та заморожування часу, температура та поперечний радіус були встановлені на  $\tau_0 = 1$  fm/c,  $\tau_f = 13$  fm/c,  $T_f = 160$  MeV,  $R \approx 10.5$  fm, як було запропоновано в [213], а в'язкість була встановлена на  $\eta_s = s/(2\pi)$ . Цей вибір параметрів успішно відтворює множинність заряджених частинок найбільш центральних зіткнень PbPb при  $\sqrt{s} = 2.76$  TeV, виміряних колаборацією ALICE [236], з  $dN_{ch}/d\eta \approx 1600$ .

Три панелі ілюструють результати для трьох варіантів ширини початкової кореляції. У Панелі (а) з  $\sigma_0^\eta = 8$  передеквільбриована кореляція настільки широка, що вона здається майже сталим у відображеному діапазоні швидкостей, що відповідає експериментальному прийняттю. У цьому діапазоні еквілібріу-

$\sigma_0^\eta$	2	4	8
$\sigma_{G_2}$	0.63	0.76	0.88

Табл. 4.1: Ширина балансуєчої кореляції  $G_2(\Delta\eta)$ , витягнута з апроксимації гаусівською функцією, як функція розповсюдження початкової кореляції  $\sigma_0^\eta$ .

мована кореляція має провідний внесок у вимірювання кореляції, і  $G_2$  залишається позитивним. Повна кореляція перевищує дані приблизно на постійний множник 1.7. У панелі (б)  $\sigma_0^\eta$  зменшується до чотирьох одиниць швидкості, що призводить до сильніших від’ємних кореляцій у діапазоні швидкостей. Чиста кореляція знижується ще більше в панелі (в), де  $\sigma_0^\eta$  було встановлено на дві одиниці. Розрахунок з використанням  $\sigma_0^\eta = 4$  найближче підійшов до вимірювань ALICE.

Для характеристики ширини розподілу ми відповідно апроксимуємо розрахунок за допомогою:

$$G_2(\Delta\eta) = A \exp\left\{-\frac{\Delta\eta^2}{2\sigma_{G_2}^2}\right\}, \quad (4.104)$$

в інтервалі  $-1.5 < \eta < 1.5$ , де є доступні дані. Константа  $A$  враховує загальну нормалізацію. Надалі ми ігноруємо можливі відхилення форми від гаусівської; однак може бути використаний більш складний розподіл. Результати апроксимації представлені в Таблиці 4.1. Зазначимо, що ширина, витягнута з квадратичного середнього даних (0.76) [235], узгоджується з шириною нашої моделі (0.6 – 0.9). Внесок від розпадів виявляється помірним, на рівні 10%, зі шириною, яка відповідає гідродинамічній частині.

Ширина залежить від вибору параметрів в нашій моделі. Розповсюдження функцій Гріна в рівняннях (4.94) та (4.96) збільшується або зменшується з в’язкістю та минулим часом. Оскільки в’язкість змінюється в широкому діапазоні  $\eta_s = (1 - 5)s/(4\pi)$ , ширина кореляції змінюється на 20%. Однак інтегрована сила балансуєчої кореляції залишається приблизно однаковою. Якщо початковий час гідродинамічного симулювання зменшується з 1 fm/c до 0.5 fm/c, ширина дорівнюєвої частини в рівнянні (4.96) збільшує-

ться. Крім того, сила дорівножної кореляції змінюється згідно з рівнянням (4.97). Ми підтвердили, що зміна  $0.5 \text{ fm}/c \leq \tau_0 \leq 1 \text{ fm}/c$  не призводить до зміни ширини більше, ніж на кілька відсотків.

Переважно позитивна кореляція у діапазоні 3 одиниць навколо середнього псевдобистроти свідчить про те, що для відповідності даним за магнітудою потрібно  $\sigma_0^\eta \sim 4$ . У всіх випадках досліджень більшість отриманої кореляції у діапазоні  $|\Delta\eta| < 1.5$  походить від гідродинамічного внеску. Це свідчить про те, що структура "гребінця" отримує більшу частину своєї сили від термалізованої плазми кварків і глюонів, що утворюється при зіткненні важких йонів, а не на передеквільбріювальному етапі.

### 4.4.3 Висновки

Гідродинамічна відповідь на локально термалізовані флуктуації була використана для оцінки кореляцій поперечного імпульсу в залежності від різниці псевдобистрот. Ця відповідь забезпечує загальну збереженість енергії, заряду та імпульсу, залежно від транспортних властивостей середовища. Однак важливо зазначити, що наша модель не має важливого елемента у поперечному розширенні. Тому важливо бути обережними, не переінтерпретуючи дивовижно добре відповідність до експериментальних даних. Результати вказують на те, що модель і кореляція  $G_2$ , виміряна співробітництвом ALICE, мають однаковий порядок. Це відповідність, можливо, можна покращити за допомогою гідродинаміки (3+1)D та включенням постгідродинамічного кінетичного етапу.

Ми визначили форму раннього етапу як основний джерело невизначеності в моделюванні кореляцій поперечного імпульсу. Ця характеристика робить кореляції поперечного імпульсу привабливим спостережним у межах досліджень початкового стану. Попередеквільбріювальні кореляції повинні виявити значну ширину, з  $\sigma_0^\eta \sim 4$ , що вказує на довготривалі кореляції у швидкості. Це розширення ще більше підсилюється колективним рухом та дисипативними процесами у середовищі.



Наші результати свідчать про те, що ширину кореляції добре описує використана в аналізі модель. Прогнозована кореляція поперечного імпульсу чутлива до попередеквільбріювальних кореляцій і підтримує попередні оцінки для співвідношення  $\eta_s/s$ . Використання енергетичних та імпульсних схильностей як джерел балансуєючої кореляції забезпечує зв'язок між експериментально виміряними кореляціями та рівнянням стану. Позитивна кореляція, спостережена в даних, підтримує ідею того, що м'яка кореляція поперечного імпульсу зумовлена тепловими флуктуаціями у середовищі квантової хромодинаміки, служить можливим поясненням для "гребінця". Якщо б покращити модель за вищезазначеними напрямками, тобто включити поперечне розширення та краще моделювати розривний етап, гідродинамічний внесок міг би бути впевнено передбачений. Це, можливо, дозволило б виділити попередеквільбріювальні внески за аналізом відмінностей між моделлю та даними.

## Розділ 5

# Висновки

1. Дослідження аналітичних властивостей термодинамічного потенціалу квантової хромодинаміки у частині фазової діаграми які відповідає газу адронів та резонансів, за допомогою моделі ван дер Ваальса, показали що критична точка ядерної матерії може обмежувати радіус збіжності ряду Тейлора. При температурі, що знаходиться в околі псевдо-критичної спостерігається переміщення нуля Лі-Янга з дійсної вісі на уявну. Як наслідок властивості ядерної речовини майже не проявляються в рівняння стану, але все одно можуть обмежувати радіус збіжності ряду Тейлора.

2. Рівняння стану, яке враховує фазовий перехід, може бути інтегроване в транспортну модель. За допомогою цієї моделі температура та густина визначаються через термодинамічне усереднення. Досліджено залежність траєкторії системи від рівняння стану і виявлено ефекти фазового переходу, наприклад, ізотропне нагрівання при проходженні через фазовий перехід. В результаті час існування системи значно збільшується, що відображається на множинності дилептонів. В цілому, дилептони демонструють чутливість до рівняння стану.

3. Були отримані аналітичні вирази, які використовують Метод Біноміальної Реєстрації для аналізу флуктуацій повного числа частинок одного типу або заряду, а також пар скорельованих випадкових величин (два типи частинок, два заряди) у повному просторі. Особливості Методу Біноміальної Реєстрації частинок були досліджені за допомогою моделювання зіткнень у

UrQMD. Відмінності між теоретичними очікуваннями та результатами моделювання у транспортній моделі можна пояснити законами збереження енергії та імпульсу. Крім того, було зауважено вплив баріонної асиметрії на значення скосу. Демонструється, що біноміальний розподіл дозволяє оцінити флуктуації баріонів на основі лише даних про флуктуації протонів. Біноміальні корекції ефективніші в обмеженій підсистемі повного простору. Також були розглянуті результати експерименту NADES, що відповідають зіткненням на низькій енергії. Формули Методу Біноміальної Реєстрації для частинок одного типу були застосовані до аналізу експериментальних даних. Вони кількісно відтворюють поведінку кумулянтів як функцій вікна по рапідності, що може свідчити про відсутність кореляцій між протонами, утвореними внаслідок зіткнень. Великі флуктуації в повному просторі, ймовірно, спричинені ефектами, не пов'язаними безпосередньо з взаємодією, такими як особливості відбору подій для аналізу, взаємодія з матерією та залишковими ядерними фрагментами, а також закони збереження загального баріонного та електричного числа, які зв'язують протони та легкі ядра.

4. Метод підансамблів було застосовано для аналізу флуктуацій кількості протонів на Великому Адронному Колайдері (LHC). Після генерації розподілу частинок та їхніх спектрів на гіперповерхні заморозки, частинки еволюціонують в адронній фазі, моделювання якої здійснюється за допомогою UrQMD. Було розраховано флуктуації числа протонів та оцінено вплив різних стадій розвитку системи на ці флуктуації. Також було досліджено, наскільки реалістичним є локальне збереження заряду. В результаті встановлено, що локальне збереження заряду, як з анігіляціями, так і без них, відповідає даним, отриманим колаборацією. Для розрізнення цих двох сценаріїв було запропоновано використовувати флуктуації сумарної кількості протонів та антипротонів.

5. Кореляції зарядів, які зберігаються при скінченній густині заряду, не можуть бути розділені на флуктуації енергії-імпульсу та баріонного, електричного та дивного зарядів. Таким чином, рівняння дифузії, що описує балансує кореляцію на Великому адронному колайдері (LHC), перетворюється на

рівняння дифузії-конвекції. Балансуюча кореляція є чутливою до рівняння стану і навіть квалітативно відтворює поведінку швидкості звуку, що робить її привабливим об'єктом для спостереження. Окрім того, у умовах ЛНС далекі кореляції поперечного імпульсу можуть бути викликані кореляціями, що сформувалися в термалізованій кварк-глюонній плазмі. Висока чутливість результатів до початкових умов слугує мотивацією для використання кореляцій поперечного імпульсу у дослідженні структури початкового стану зіткнення.

# Глосарій

## Одиниці виміру та конвенції

У цій дисертації використовується природна система одиниць, де  $\hbar = c = k_B = 1$ . У цій системі всі енергії, маси, імпульси та температури виражені в електрон-вольтах (eV, keV, MeV, GeV, TeV). Енергія 1eV є кінетичною енергією електрона, прискореного на один вольт,  $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19}$  Дж. Температура 1 eV відповідає в СІ через  $E = k_B T$  до 11604.5 К. Типовий масштаб довжини в дисертації становить 1 фм, тому конверсії між енергією та довжиною зручно виконувати через

$$E = \frac{\hbar c}{L}, \quad (5.1)$$

де  $\hbar c = 0.19732 \text{ GeV} \cdot \text{фм}$ .

У дисертації прийнято конвенцію високоенергетичної фізики з метричним тензором

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (5.2)$$

Терміни «низька енергія», «середня енергія» та «висока енергія» часто використовуються в дисертації. Діапазони визначені лише приблизно, таблиця [5.1](#) підсумовує прийняту в тексті конвенцію.

Енергія зіткнення	$\sqrt{s}$ [GeV]	Акселератори
“Низька”	$\lesssim 4.5$	Bevalac, Nuclotron, SIS, AGS
“Середня”	$\approx 5 - 20$	SPS, RHIC (BES), FAIR, NICA, JPARC
“Висока”	$\gtrsim 130$	RHIC, LHC

Табл. 5.1: Конвенція для найменування діапазонів енергій релятивістських зіткнень важких іонів.

BUU	Boltzmann-Ueling-Uhlenbeck (transport equations)
EoS	Equation of State
HIC	Heavy Ion Collisions
HRG	Hadron Resonance Gas
QCD	Quantum Chromodynamics
QGP	Quark-Gluon Plasma
QMD	Quantum Molecular Dynamics
Transport codes	
AMPT	A Multi-Phase Transport
BAMPS	Boltzmann Approach to Multi-Parton Scatterings
GiBUU	Gießen BUU
HSD	Hadron-String Dynamics
PHSD	Parton-Hadron-String Dynamics
RQMD	Relativistic Quantum Molecular Dynamics
UrQMD	Ultrarelativistic Quantum Molecular Dynamics
HI centers	
BNL	Berkley National Laboratory (Berkley, USA)
BNL	Brookhaven National Laboratory (Brookhaven, USA)
CERN	Center for European Nuclear Research (Geneva, Switzerland)
GSI	Gesellschaft für Schwerionenforschung (Darmstadt, Germany)
JPARC	Japan Proton Accelerator Research Complex (Tsukuba, Japan)
HI accelerators	
AGS	Alternating Gradient Synchrotron
SIS	Schwerionensynchrotron
SPS	Super Proton Synchrotron
RHIC	Relativistic Heavy Ion Collider
LHC	Large Hadron Collider

## Скорочення

# Гадрони та група $SU(3)$

Гадрони є ступенями свободи, реалізованими в транспортних моделях UrQMD та SMASH, що використовуються в цій дисертації. Насправді, гадрони є одним з основних об'єктів дослідження дисертації. Тим не менш, у головній частині було опущено два важливих питання про гадрони: "чому тільки певні комбінації кварків та антикварків виступають як гадрони?" та "як класифікуються гадрони?" Обидва вони відповідаються за допомогою групи  $SU(3)$ . За визначенням, група  $SU(3)$  є групою матриць  $3 \times 3$   $U$  таких, що  $UU^\dagger = \mathbb{I}$  та  $\det U = 1$ . У наступному визнається її роль у класифікації гадронів та поясненні кольорового ув'язнення (див. розділ [1.1](#)).

Гадрони та кварки є мікроскопічними об'єктами, тому їх властивості визначаються квантовою хвильовою функцією  $|\Psi\rangle$  - комплексною функцією просторової координати, спіну та інших змінних внутрішнього стану частинки. Квадрат модулю хвильової функції  $|\Psi|^2$  є ймовірністю знайти частинку в даній координаті у даному стані. Знаходження хвильової функції квантової системи достатньо для прогнозування її властивостей.

Для одного кварка хвильова функція є добутком кольорової, ароматної, спінової та просторової частин:

$$|\Psi\rangle = |\Psi_{\text{color}}\rangle |\Psi_{\text{flavor}}\rangle |\Psi_{\text{spin}}\rangle |\Psi(x)\rangle \quad (5.3)$$

Зосередимось на кольоровій частині, яка може бути представлена як комплексний вектор з 3 компонентами. Під час поширення вільного кварка колір зберігається. Згідно з теоремою Нетер, кожен закон збереження відповідає симетрії, яка в даному випадку полягає у незмінності взаємодій під час мно-



ження  $|\Psi_{\text{color}}\rangle$  на матриці з групи  $SU(3)$ , іншими словами, незмінність під час кольорових обертань.

У математичних термінах  $SU(3)$  є групою Лі і повністю визначається її алгеброю Лі інфінітезимальних кольорових обертань: для кожної матриці  $U$  з  $SU(3)$

$$U = \exp \left\{ \left( \sum_{k=1}^8 i\alpha_k \lambda_k / 2 \right) \right\}, \quad (5.4)$$

де  $\alpha_k$  — довільні дійсні числа, а матриці  $\lambda_k/2$  називаються генераторами, для  $SU(3)$  вони відомі як матриці Гелл-Манна. Явно виражені,  $\lambda_k$  є

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.5a)$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.5b)$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (5.5b)$$

Вибір базових векторів у кольоровому просторі як

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

дозволяє ввести оператори сходинки з недіагональних матриць Гелла-Манна та оператори проєкції кольорового ізоспіна  $I_3^c$  та кольорового гіперзаряду  $Y_c$  з діагональних матриць:

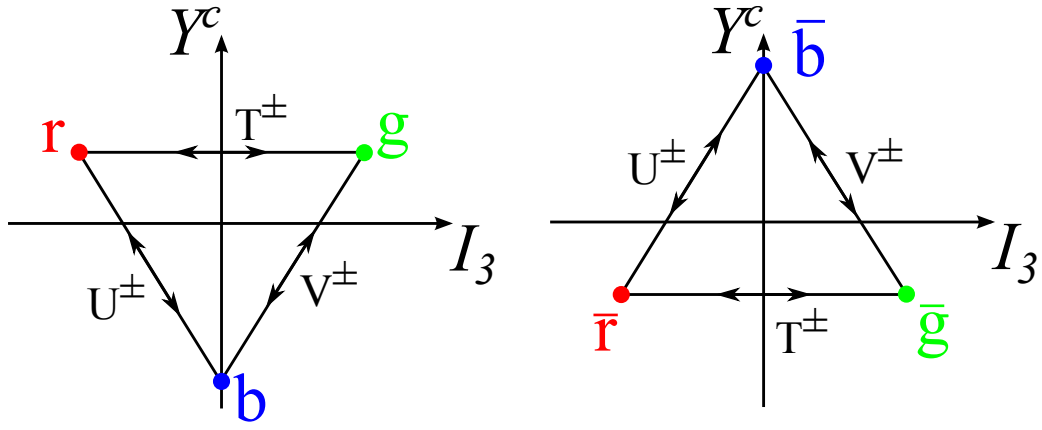


Рис. 5.1: Оператори сходенок групи SU(3) у просторі кольорів кварків.

$$\begin{aligned}
 T^{\pm} &= \frac{1}{2} (\lambda_1 \pm i\lambda_2) \\
 V^{\pm} &= \frac{1}{2} (\lambda_4 \pm i\lambda_5) \\
 U^{\pm} &= \frac{1}{2} (\lambda_6 \pm i\lambda_7) \\
 I_3^c &= \frac{1}{2} \lambda_3 \\
 Y_c &= \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Ці операції перетворюють кольори кварків і антикварків один в одного, як показано на рис. 5.1. Постулюється, що існуючі зв'язані стани є колірними синглетами, що означає, що дія матрицями 5.7 на кожен окремий кварк і антикварк перетворює весь стан у себе самого. Можна показати, що ця вимога однозначно визначає кольорові частини хвильових функцій мезонів та баріонів:

$$|\Psi_c^{q\bar{q}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b}) \tag{5.8}$$

$$|\Psi_c^{qqq}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (rgb - rbg + gbr - grb + brg - bgr) \tag{5.9}$$

Така ж математика використовується для класифікації адронів, але тепер SU(3) діє у просторі ароматів найлегших кварків:  $u$ ,  $d$  та  $s$ . Зауважимо, що симетрія SU(3) кольору є точною, але симетрія SU(3) аромату є лише наближеною, оскільки маси легких кварків не ідентичні.

Адрони повинні бути безкольоровими, але не обов'язково безароматними.

Іншими словами, дозволені всі ароматні представлення. Можна довести, що комбінації кварків розділяються на незвідні представлення  $SU(3)$  в ароматному просторі наступним чином:

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8 \quad (5.10)$$

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1 \quad (5.11)$$

Це означає, що існує 8 мезонів (октет), які перетворюються один в іншого під дією  $SU(3)$  ароматних перетворень, і один мезон, який завжди перетворюється на себе. Що стосується баріонів - 10 баріонів (декуплет), які перетворюються один на іншого, і два фізично еквівалентні октети. Синглет відсутній у природі, оскільки строго кажучи, необхідно враховувати аромат і спін перетворення разом, і в представленні  $SU(3) \times SU(2)$  (група  $SU(2)$  тут для спінових перетворень) ароматний синглет відсутній. Це пояснює класифікацію мезонів на октет і синглет та баріонів на декуплет і октет, як показано на Рисунку 5.2, на якому представлені найлегші мезони та баріони, що складаються з кварків  $u$ ,  $d$ ,  $s$  та їх антикварків. Доповнюючи це зображення векторними мезонами, антибаріонами та вежею збуджень і додаючи ті, що містять важчі кварки, отримуємо зоопарк адронів, спостережуваних у експериментах. Виявлено кілька адронів, які можуть виходити за межі цієї схеми класифікації. Вважається, що це тетракварки або 6-кваркові молекули.

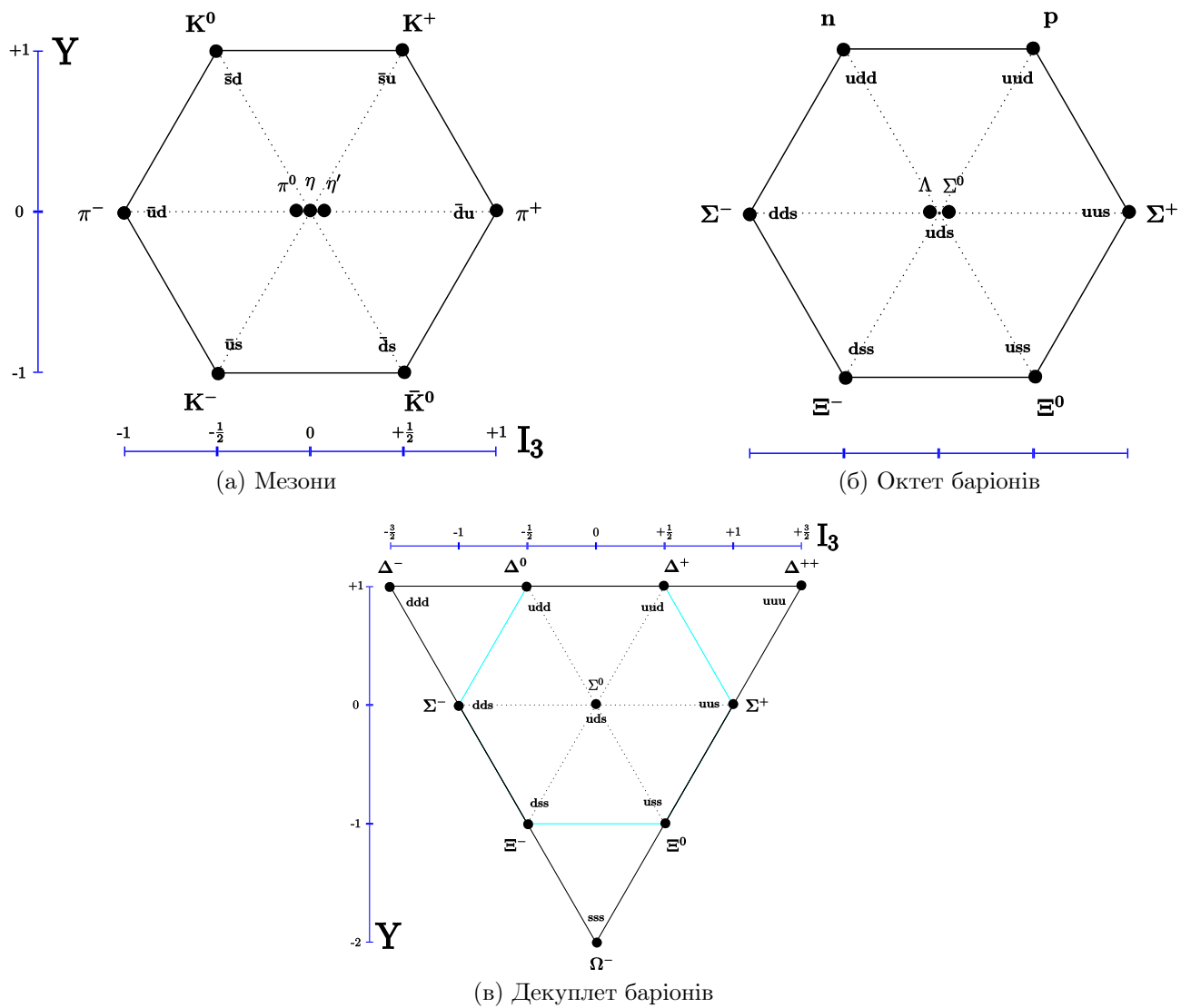


Рис. 5.2: Класифікація адронів, що складаються з легких кварків, у найнижчому енергетичному стані. Зображення взяте з лекцій з КХД Ф. Єгерленера.

Вдячний багатьом людям за підтримку та сприяння, без яких написання цього тезису було б неможливим.

Хочу почати з вираження подяки моєму науковому керівнику, Марку Ісаковичу, за його поради, які допомогли мені просуватися вперед, а також за його терпіння і розуміння моїх характерних особливостей. Безліч наших наукових дискусій сприяли кращому розумінню феноменології зіткнень важких іонів і допомогли мені побачити фізику за складними математичними формулами. Також щиро дякую Володимирі Вовченку та Роману Побережнюку за їх моральну підтримку. Вони навчили мене багатьом важливим речам: застосовувати чисельні методи, створювати витончені ілюстрації та писати зрозумілий текст. Олександр Сташку я також вдячний за знайомство з загальною теорією відносності, а Володимирі Кузнецову – за безліч питань, які допомогли мені краще розібратися в матеріалі. Колектив Інституту Теоретичної Фізики ім. М.М. Боголюбова заслуговує на окрему подяку за натхнення, постійну працю та турботу про студентів, навіть у найскладніших обставинах. Цей інститут – чудове місце для занять наукою.

Моє стажування в Німеччині не відбулося б без підтримки Яна Стайнхаймера та Тетяни Галатюк. Ян чудово володіє програмуванням і знає, як писати роботи, щоб вони користувались популярністю. Тетяна – справжній експерт у фізиці дилептонів, і її ентузіазм постійно спонукав мене до праці.

Кай Жоу ознайомив мене з штучним інтелектом та навчанням машин. У подальшій роботі ми часто використовували ймовірнісні моделі. Хорст Штокер заслуговує подяки за те, що завжди був незадоволений моїми досягненнями, але не відпускав мене. І за те, що постійно намагався навчити мене німецької мови, хоча я так і не зміг її вивчити.

Дякую Скотові Прату за пропозицію пройти стажування в Сполучених Штатах Америки. Це був надзвичайно цінний досвід. Там я мав змогу познайомитися з вченими, які були повні ентузіазму та захоплені своєю працею: Павлом Данілевічем, Агнежкою Соренсен, П'єром Нзабахіману, Тарасом Локотком.

І, нарешті, велика подяка моїм батькам за те, що вони заборонили мені

займатися такою нестійкою справою, як фізика. Якби вони не радили мені робити те, що я хочу, замість того, щоб шукати роботу в індустрії, я, напевно, зараз був би програмістом.

# Література

- [1] O. Savchuk, “Sensitivity of transverse momentum correlations to early-stage and thermal fluctuations”, (2024), [arXiv:2402.12504 \[hep-ph\]](#).
- [2] O. Savchuk та S. Pratt, “Correlations of conserved quantities at finite baryon density”, *Phys. Rev. C* **109**, 024910 (2024), [arXiv:2311.02046 \[nucl-th\]](#).
- [3] T. Reichert, O. Savchuk, A. Kittiratpattana, P. Li, J. Steinheimer, M. Gorenstein та M. Bleicher, “Decoding the flow evolution in Au+Au reactions at 1.23A GeV using hadron flow correlations and dileptons”, *Phys. Lett. B* **841**, 137947 (2023), [arXiv:2302.13919 \[nucl-th\]](#).
- [4] O. Savchuk, A. Motornenko, J. Steinheimer, V. Vovchenko, M. Bleicher, M. Gorenstein та T. Galatyuk, “Enhanced dilepton emission from a phase transition in dense matter”, (2022), [arXiv:2209.05267 \[nucl-th\]](#).
- [5] O. Savchuk, R. V. Poberezhnyuk та M. I. Gorenstein, “Possible origin of HADES data on proton number fluctuations in Au+Au collisions”, *Physics Letters B* **835**, 137540 (2022).
- [6] O. Savchuk, V. Vovchenko, V. Koch, J. Steinheimer та H. Stoecker, “Constraining baryon annihilation in the hadronic phase of heavy-ion collisions via event-by-event fluctuations”, *Phys. Lett. B* **827**, 136983 (2022), [arXiv:2106.08239 \[hep-ph\]](#).
- [7] R. V. Poberezhnyuk, O. Savchuk, M. I. Gorenstein, V. Vovchenko та H. Stoecker, “Higher order conserved charge fluctuations inside the mixed phase”, (2020), [arXiv:2011.06420 \[hep-ph\]](#).

- [8] M. Gazdzicki, M. I. Gorenstein, O. Savchuk ta L. Tinti, “Notes on statistical ensembles in the Cell Model”, [Int. J. Mod. Phys. E \*\*29\*\*, 2050060 \(2020\)](#).
- [9] R. V. Poberezhnyuk, O. Savchuk, M. I. Gorenstein, V. Vovchenko, K. Taradiy, V. V. Begun, L. Satarov, J. Steinheimer ta H. Stoecker, “Critical point fluctuations: Finite size and global charge conservation effects”, [Phys. Rev. C \*\*102\*\*, 024908 \(2020\)](#), [arXiv:2004.14358 \[hep-ph\]](#).
- [10] V. Vovchenko, O. Savchuk, R. V. Poberezhnyuk, M. I. Gorenstein ta V. Koch, “Connecting fluctuation measurements in heavy-ion collisions with the grand-canonical susceptibilities”, [Phys. Lett. B \*\*811\*\*, 135868 \(2020\)](#), [arXiv:2003.13905 \[hep-ph\]](#).
- [11] O. Savchuk, R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko ta M. I. Gorenstein, “Binomial acceptance corrections for particle number distributions in high-energy reactions”, [Phys. Rev. C \*\*101\*\*, 024917 \(2020\)](#), [arXiv:1911.03426 \[hep-ph\]](#).
- [12] O. Savchuk, V. Vovchenko, R. V. Poberezhnyuk, M. I. Gorenstein ta H. Stoecker, “Traces of the nuclear liquid-gas phase transition in the analytic properties of hot QCD”, [Phys. Rev. C \*\*101\*\*, 035205 \(2020\)](#), [arXiv:1909.04461 \[hep-ph\]](#).
- [13] V. F. Dmitriev ta V. V. Flambaum, “Decays of Fourth Generation Bound States”, [Int. J. Mod. Phys. A \*\*27\*\*, 1250179 \(2012\)](#), [arXiv:1208.5634 \[hep-ph\]](#).
- [14] R. Aaij ta in. (LHCb), “Observation of  $J/\psi p$  Resonances Consistent with Pentaquark States in  $\Lambda_b^0 \rightarrow J/\psi K^- p$  Decays”, [Phys. Rev. Lett. \*\*115\*\*, 072001 \(2015\)](#), [arXiv:1507.03414 \[hep-ex\]](#).
- [15] K. A. Olive ta in. (Particle Data Group), “Review of Particle Physics”, [Chin. Phys. C \*\*38\*\*, 090001 \(2014\)](#).
- [16] J. C. Collins ta M. J. Perry, “Superdense Matter: Neutrons Or Asymptotically Free Quarks?”, [Phys. Rev. Lett. \*\*34\*\*, 1353 \(1975\)](#).
- [17] E. V. Shuryak, “Theory of Hadronic Plasma”, [Sov. Phys. JETP \*\*47\*\*, \[Zh. Eksp. Teor. Fiz.74,408\(1978\)\], 212 \(1978\)](#).



- [18] J. Adams та ін. (STAR), “Experimental and theoretical challenges in the search for the quark gluon plasma: The STAR Collaboration’s critical assessment of the evidence from RHIC collisions”, *Nucl. Phys. A* **757**, 102 (2005), [arXiv:nucl-ex/0501009 \[nucl-ex\]](#).
- [19] K. Adcox та ін. (PHENIX), “Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX collaboration”, *Nucl. Phys. A* **757**, 184 (2005), [arXiv:nucl-ex/0410003 \[nucl-ex\]](#).
- [20] I. Arsene та ін. (BRAHMS), “Quark gluon plasma and color glass condensate at RHIC? The Perspective from the BRAHMS experiment”, *Nucl. Phys. A* **757**, 1 (2005), [arXiv:nucl-ex/0410020 \[nucl-ex\]](#).
- [21] B. B. Back та ін., “The PHOBOS perspective on discoveries at RHIC”, *Nucl. Phys. A* **757**, 28 (2005), [arXiv:nucl-ex/0410022 \[nucl-ex\]](#).
- [22] H. Song та U. W. Heinz, “Causal viscous hydrodynamics in 2+1 dimensions for relativistic heavy-ion collisions”, *Phys. Rev. C* **77**, 064901 (2008), [arXiv:0712.3715 \[nucl-th\]](#).
- [23] K. Dusling та D. Teaney, “Simulating elliptic flow with viscous hydrodynamics”, *Phys. Rev. C* **77**, 034905 (2008), [arXiv:0710.5932 \[nucl-th\]](#).
- [24] P. Romatschke та U. Romatschke, “Viscosity Information from Relativistic Nuclear Collisions: How Perfect is the Fluid Observed at RHIC?”, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 172301 (2007), [arXiv:0706.1522 \[nucl-th\]](#).
- [25] E. Shuryak, “Physics of Strongly coupled Quark-Gluon Plasma”, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **62**, 48 (2009), [arXiv:0807.3033 \[hep-ph\]](#).
- [26] D. Oliinychenko, “Interfaces between relativistic hydrodynamics and transport for the dynamical description of heavy ion collisions”, дис. . . . док. (Frankfurt U., лип. 2017).
- [27] L. D. Landau, “On the multiparticle production in high-energy collisions”, *Izv. Akad. Nauk Ser. Fiz.* **17**, 51 (1953).

- [28] S. Z. Belenkij ta L. D. Landau, “Hydrodynamic theory of multiple production of particles”, [Nuovo Cim. Suppl. S \*\*310\*\*, \[Usp. Fiz. Nauk56,309\(1955\)\], 15 \(1956\)](#).
- [29] J. D. Bjorken, “Highly Relativistic Nucleus-Nucleus Collisions: The Central Rapidity Region”, [Phys. Rev. D \*\*27\*\*, 140 \(1983\)](#).
- [30] R. Derradi de Souza, T. Koide ta T. Kodama, “Hydrodynamic Approaches in Relativistic Heavy Ion Reactions”, [Prog. Part. Nucl. Phys. \*\*86\*\*, 35 \(2016\), arXiv:1506.03863 \[nucl-th\]](#).
- [31] L.-G. Pang, K. Zhou, N. Su, H. Petersen, H. Stoecker ta X.-N. Wang, “An EoS-meter of QCD transition from deep learning”, (2016), [arXiv:1612.04262 \[hep-ph\]](#).
- [32] J. Aichelin ta H. Stoecker, “Quantum molecular dynamics. A Novel approach to N body correlations in heavy ion collisions”, [Phys. Lett. B \*\*176\*\*, 14 \(1986\)](#).
- [33] C. M. Ko, “Relativistic Vlasov-Uehling-Uhlenbeck Model for High-energy Heavy Ion Collisions”, [Nucl. Phys. A \*\*495\*\*, 321C \(1989\)](#).
- [34] Y. Pang, T. J. Schlagel ta S. H. Kahana, “Cascade calculation of Au + Au collisions at 11.7-GeV/c”, в 1992 Meeting of the Division of Nuclear Physics of the American Physical Society (Preceded by 2 Workshops both on Oct 14: New Vistas in Physics with High-energy Pion Beams and Neutrons - Their Use for Nuclear Physics and Fundamental Symmetry Tests) Santa Fe, New Mexico, October 15-17, 1992 (1992).
- [35] C. Hartnack, Z. X. Li, L. Neise, G. Peilert, A. Rosenhauer, H. Sorge, H. Stoecker, W. Greiner ta J. Aichelin, “Quantum Molecular Dynamics: A Microscopic Model From Unilac to CERN Energies”, [Nucl. Phys. A \*\*495\*\*, 303C \(1989\)](#).
- [36] W. Cassing, V. Metag, U. Mosel ta K. Niita, “Production of energetic particles in heavy ion collisions”, [Phys. Rept. \*\*188\*\*, 363 \(1990\)](#).

- [37] H. Sorge, H. Stoecker та W. Greiner, “RELATIVISTIC QUANTUM MOLECULAR DYNAMICS APPROACH TO NUCLEAR COLLISIONS AT ULTRARELATIVISTIC ENERGIES”, *Nucl. Phys. A* **498**, за ред. G. A. Baym, P. Braun-Munzinger та S. Nagamiya, 567C (1989).
- [38] S. A. Bass та ии., “Microscopic models for ultrarelativistic heavy ion collisions”, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **41**, 255 (1998), [arXiv:nucl-th/9803035](#).
- [39] W. Cassing, E. L. Bratkovskaya та S. Juchem, “Excitation functions of hadronic observables from SIS to RHIC energies”, *Nucl. Phys. A* **674**, 249 (2000), [arXiv:nucl-th/0001024 \[nucl-th\]](#).
- [40] Y. Nara, N. Otuka, A. Ohnishi, K. Niita та S. Chiba, “Study of relativistic nuclear collisions at AGS energies from  $p + \text{Be}$  to  $\text{Au} + \text{Au}$  with hadronic cascade model”, *Phys. Rev. C* **61**, 024901 (2000), [arXiv:nucl-th/9904059 \[nucl-th\]](#).
- [41] O. Buss, T. Gaitanos, K. Gallmeister, H. van Hees, M. Kaskulov, O. Lalakulich, A. B. Larionov, T. Leitner, J. Weil та U. Mosel, “Transport-theoretical Description of Nuclear Reactions”, *Phys. Rept.* **512**, 1 (2012), [arXiv:1106.1344 \[hep-ph\]](#).
- [42] K. Geiger та B. Muller, “Dynamics of parton cascades in highly relativistic nuclear collisions”, *Nucl. Phys. B* **369**, 600 (1992).
- [43] D. Molnar та P. Huovinen, “Dissipation and elliptic flow at RHIC”, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 012302 (2005), [arXiv:nucl-th/0404065 \[nucl-th\]](#).
- [44] B. Zhang, “ZPC 1.0.1: A Parton cascade for ultrarelativistic heavy ion collisions”, *Comput. Phys. Commun.* **109**, 193 (1998), [arXiv:nucl-th/9709009 \[nucl-th\]](#).
- [45] Z. Xu та C. Greiner, “Thermalization of gluons in ultrarelativistic heavy ion collisions by including three-body interactions in a parton cascade”, *Phys. Rev. C* **71**, 064901 (2005), [arXiv:hep-ph/0406278 \[hep-ph\]](#).

- [46] W. Cassing та E. L. Bratkovskaya, “Parton transport and hadronization from the dynamical quasiparticle point of view”, *Phys. Rev. C* **78**, 034919 (2008), [arXiv:0808.0022 \[hep-ph\]](#).
- [47] Z.-W. Lin, C. M. Ko, B.-A. Li, B. Zhang та S. Pal, “A Multi-phase transport model for relativistic heavy ion collisions”, *Phys. Rev. C* **72**, 064901 (2005), [arXiv:nucl-th/0411110](#).
- [48] Y. Aoki, G. Endrodi, Z. Fodor, S. D. Katz та K. K. Szabo, “The Order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics”, *Nature* **443**, 675 (2006), [arXiv:hep-lat/0611014 \[hep-lat\]](#).
- [49] M. A. Stephanov, K. Rajagopal та E. V. Shuryak, “Signatures of the tricritical point in QCD”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4816 (1998), [arXiv:hep-ph/9806219 \[hep-ph\]](#).
- [50] M. A. Stephanov, “Non-Gaussian fluctuations near the QCD critical point”, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 032301 (2009), [arXiv:0809.3450 \[hep-ph\]](#).
- [51] V. Koch, в *Relativistic Heavy Ion Physics*, за ред. R. Stock (2010), с. 626—652, [arXiv:0810.2520 \[nucl-th\]](#).
- [52] M. Gazdzicki та P. Seyboth, “Search for Critical Behaviour of Strongly Interacting Matter at the CERN Super Proton Synchrotron”, *Acta Phys. Polon.* **B47**, 1201 (2016), [arXiv:1506.08141 \[nucl-ex\]](#).
- [53] X. Luo та N. Xu, “Search for the QCD Critical Point with Fluctuations of Conserved Quantities in Relativistic Heavy-Ion Collisions at RHIC : An Overview”, *Nucl. Sci. Tech.* **28**, 112 (2017), [arXiv:1701.02105 \[nucl-ex\]](#).
- [54] C. R. Allton, S. Ejiri, S. J. Hands, O. Kaczmarek, F. Karsch, E. Laermann, C. Schmidt та L. Scorzato, “The QCD thermal phase transition in the presence of a small chemical potential”, *Phys. Rev.* **D66**, 074507 (2002), [arXiv:hep-lat/0204010 \[hep-lat\]](#).
- [55] R. V. Gavai та S. Gupta, “QCD at finite chemical potential with six time slices”, *Phys. Rev.* **D78**, 114503 (2008), [arXiv:0806.2233 \[hep-lat\]](#).

- [56] P. de Forcrand та O. Philipsen, “The QCD phase diagram for small densities from imaginary chemical potential”, *Nucl. Phys.* **B642**, 290 (2002), [arXiv:hep-lat/0205016 \[hep-lat\]](#).
- [57] M. D’Elia та M.-P. Lombardo, “Finite density QCD via imaginary chemical potential”, *Phys. Rev.* **D67**, 014505 (2003), [arXiv:hep-lat/0209146 \[hep-lat\]](#).
- [58] P. de Forcrand та O. Philipsen, “The Chiral critical line of  $N(f) = 2+1$  QCD at zero and non-zero baryon density”, *JHEP* **01**, 077 (2007), [arXiv:hep-lat/0607017 \[hep-lat\]](#).
- [59] A. Bazavov та и.н., “The QCD Equation of State to  $\mathcal{O}(\mu_B^6)$  from Lattice QCD”, *Phys. Rev.* **D95**, 054504 (2017), [arXiv:1701.04325 \[hep-lat\]](#).
- [60] V. Vovchenko, J. Steinheimer, O. Philipsen та H. Stoecker, “Cluster Expansion Model for QCD Baryon Number Fluctuations: No Phase Transition at  $\mu_B/T < \pi$ ”, *Phys. Rev.* **D97**, 114030 (2018), [arXiv:1711.01261 \[hep-ph\]](#).
- [61] Z. Fodor, M. Giordano, J. N. Guenther, K. Kapas, S. D. Katz, A. Pasztor, I. Portillo, C. Ratti, D. Sexty та K. K. Szabo, “Searching for a CEP signal with lattice QCD simulations”, в 27th International Conference on Ultrarelativistic Nucleus-Nucleus Collisions (Quark Matter 2018) Venice, Italy, May 14-19, 2018 (2018), [arXiv:1807.09862 \[hep-lat\]](#).
- [62] T. Ablyazimov та и.н. (CBM), “Challenges in QCD matter physics –The scientific programme of the Compressed Baryonic Matter experiment at FAIR”, *Eur. Phys. J.* **A53**, 60 (2017), [arXiv:1607.01487 \[nucl-ex\]](#).
- [63] E. R. Most, L. J. Papenfort, V. Dexheimer, M. Hanauske, S. Schramm, H. Stöcker та L. Rezzolla, “Signatures of quark-hadron phase transitions in general-relativistic neutron-star mergers”, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 061101 (2019), [arXiv:1807.03684 \[astro-ph.HE\]](#).
- [64] A. Bauswein, N.-U. F. Bastian, D. B. Blaschke, K. Chatziioannou, J. A. Clark, T. Fischer та M. Oertel, “Identifying a first-order phase transition in

- neutron star mergers through gravitational waves”, [Phys. Rev. Lett. \*\*122\*\*, 061102 \(2019\)](#), [arXiv:1809.01116 \[astro-ph.HE\]](#).
- [65] G. Sauer, H. Chandra ta U. Mosel, “Thermal properties of nuclei”, [Nucl. Phys. \*\*A264\*\*, 221 \(1976\)](#).
  - [66] L. P. Csernai ta J. I. Kapusta, “Entropy and Cluster Production in Nuclear Collisions”, [Phys. Rept. \*\*131\*\*, 223 \(1986\)](#).
  - [67] B. D. Serot ta J. D. Walecka, “The Relativistic Nuclear Many Body Problem”, [Adv. Nucl. Phys. \*\*16\*\*, 1 \(1986\)](#).
  - [68] J. Zimanyi ta S. A. Moszkowski, “Nuclear Equation of state with derivative scalar coupling”, [Phys. Rev. \*\*C42\*\*, 1416 \(1990\)](#).
  - [69] R. Brockmann ta R. Machleidt, “Relativistic nuclear structure. 1: Nuclear matter”, [Phys. Rev. \*\*C42\*\*, 1965 \(1990\)](#).
  - [70] J. Pochodzalla ta in., “Probing the nuclear liquid - gas phase transition”, [Phys. Rev. Lett. \*\*75\*\*, 1040 \(1995\)](#).
  - [71] J. B. Natowitz, K. Hagel, Y. Ma, M. Murray, L. Qin, R. Wada ta J. Wang, “Limiting temperatures and the equation of state of nuclear matter”, [Phys. Rev. Lett. \*\*89\*\*, 212701 \(2002\)](#), [arXiv:nuc1-ex/0204015 \[nuc1-ex\]](#).
  - [72] V. A. Karnaukhov ta in., “Critical temperature for the nuclear liquid gas phase transition”, [Phys. Rev. \*\*C67\*\*, 011601 \(2003\)](#), [arXiv:nuc1-ex/0302006 \[nuc1-ex\]](#).
  - [73] J. B. Elliott, P. T. Lake, L. G. Moretto ta L. Phair, “Determination of the coexistence curve, critical temperature, density, and pressure of bulk nuclear matter from fragment emission data”, [Phys. Rev. \*\*C87\*\*, 054622 \(2013\)](#).
  - [74] M. Fromm, J. Langelage, S. Lottini, M. Neuman ta O. Philipsen, “Onset Transition to Cold Nuclear Matter from Lattice QCD with Heavy Quarks”, [Phys. Rev. Lett. \*\*110\*\*, 122001 \(2013\)](#), [arXiv:1207.3005 \[hep-lat\]](#).

- [75] V. Vovchenko, M. I. Gorenstein та H. Stoecker, “van der Waals Interactions in Hadron Resonance Gas: From Nuclear Matter to Lattice QCD”, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 182301 (2017), [arXiv:1609.03975 \[hep-ph\]](#).
- [76] K. Fukushima, “Hadron resonance gas and mean-field nuclear matter for baryon number fluctuations”, *Phys. Rev.* **C91**, 044910 (2015), [arXiv:1409.0698 \[hep-ph\]](#).
- [77] V. Vovchenko, L. Jiang, M. I. Gorenstein та H. Stoecker, “Critical point of nuclear matter and beam energy dependence of net proton number fluctuations”, *Phys. Rev.* **C98**, 024910 (2018), [arXiv:1711.07260 \[nucl-th\]](#).
- [78] R. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, A. Motornenko, M. I. Gorenstein та H. Stoecker, “Chemical freeze-out conditions and fluctuations of conserved charges in heavy-ion collisions within quantum van der Waals model”, (2019), [arXiv:1906.01954 \[hep-ph\]](#).
- [79] M. A. Stephanov, “QCD critical point and complex chemical potential singularities”, *Phys. Rev.* **D73**, 094508 (2006), [arXiv:hep-lat/0603014 \[hep-lat\]](#).
- [80] V. Vovchenko, C. Greiner, V. Koch та H. Stoecker, “Phase transition signatures in the cluster expansion in fugacities”, (2019), [arXiv:1909.02276 \[hep-ph\]](#).
- [81] C.-N. Yang та T. D. Lee, “Statistical theory of equations of state and phase transitions. 1. Theory of condensation”, *Phys. Rev.* **87**, [151(1952)], 404 (1952).
- [82] T. D. Lee та C.-N. Yang, “Statistical theory of equations of state and phase transitions. 2. Lattice gas and Ising model”, *Phys. Rev.* **87**, [157(1952)], 410 (1952).
- [83] W. Greiner, L. Neise та H. Stöcker, *Thermodynamics and statistical mechanics*, 2012.



- [84] V. Vovchenko, D. V. Anchishkin та M. I. Gorenstein, “Particle number fluctuations for the van der Waals equation of state”, *J. Phys.* **A48**, 305001 (2015), [arXiv:1501.03785 \[nucl-th\]](#).
- [85] P. Hemmer та E. H. Hauge, “Yang-Lee Distribution of Zeros for a van der Waals Gas”, *Physical Review* **133**, A1010 (1964).
- [86] V. Vovchenko, D. V. Anchishkin та M. I. Gorenstein, “Van der Waals Equation of State with Fermi Statistics for Nuclear Matter”, *Phys. Rev.* **C91**, 064314 (2015), [arXiv:1504.01363 \[nucl-th\]](#).
- [87] S. N. Fedotkin, A. G. Magner та M. I. Gorenstein, “Effects of quantum statistics near the critical point of nuclear matter”, (2019), [arXiv:1903.02361 \[nucl-th\]](#).
- [88] M. Bender, P.-H. Heenen та P.-G. Reinhard, “Self-consistent mean-field models for nuclear structure”, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 121 (2003).
- [89] J. R. Stone та P. .-. Reinhard, “The Skyrme Interaction in finite nuclei and nuclear matter”, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **58**, 587 (2007), [arXiv:nucl-th/0607002 \[nucl-th\]](#).
- [90] J. D. Walecka, “A Theory of highly condensed matter”, *Annals Phys.* **83**, 491 (1974).
- [91] R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin та M. I. Gorenstein, “Quantum van der Waals and Walecka models of nuclear matter”, *Int. J. Mod. Phys.* **E26**, 1750061 (2017), [arXiv:1708.05605 \[nucl-th\]](#).
- [92] M. D’Elia, G. Gagliardi та F. Sanfilippo, “Higher order quark number fluctuations via imaginary chemical potentials in  $N_f = 2 + 1$  QCD”, *Phys. Rev.* **D95**, 094503 (2017), [arXiv:1611.08285 \[hep-lat\]](#).
- [93] S. Datta, R. V. Gavai та S. Gupta, “Quark number susceptibilities and equation of state at finite chemical potential in staggered QCD with  $N_t=8$ ”, *Phys. Rev.* **D95**, 054512 (2017), [arXiv:1612.06673 \[hep-lat\]](#).



- [94] K. Taradiy, A. Motornenko, V. Vovchenko, M. I. Gorenstein та H. Stoecker, “The analytic structure of thermodynamic systems with repulsive interactions”, (2019), [arXiv:1904.08259 \[hep-ph\]](#).
- [95] M. Giordano та A. Pásztor, “Reliable estimation of the radius of convergence in finite density QCD”, *Phys. Rev.* **D99**, 114510 (2019), [arXiv:1904.01974 \[hep-lat\]](#).
- [96] G. Mercer та A. Roberts, “A centre manifold description of contaminant dispersion in channels with varying flow properties”, *SIAM Journal on Applied Mathematics* **50**, 1547 (1990).
- [97] C. Domb та M. Sykes, “On the susceptibility of a ferromagnetic above the Curie point”, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* **240**, 214 (1957).
- [98] C. Domb та M. F. Sykes, “Use of series expansions for the Ising model susceptibility and excluded volume problem”, *Journal of Mathematical Physics* **2**, 63 (1961).
- [99] A. Roberge та N. Weiss, “Gauge Theories With Imaginary Chemical Potential and the Phases of QCD”, *Nucl. Phys.* **B275**, 734 (1986).
- [100] C. Bonati, M. D’Elia, M. Mariti, M. Mesiti, F. Negro та F. Sanfilippo, “Roberge-Weiss endpoint at the physical point of  $N_f = 2 + 1$  QCD”, *Phys. Rev.* **D93**, 074504 (2016), [arXiv:1602.01426 \[hep-lat\]](#).
- [101] A. Motornenko, J. Steinheimer, V. Vovchenko, S. Schramm та H. Stoecker, “Equation of state for hot QCD and compact stars from a mean field approach”, (2019), [arXiv:1905.00866 \[hep-ph\]](#).
- [102] M. Bleicher та ін., “Relativistic hadron hadron collisions in the ultrarelativistic quantum molecular dynamics model”, *J. Phys. G* **25**, 1859 (1999), [arXiv:hep-ph/9909407](#).
- [103] M. Bleicher та E. Bratkovskaya, “Modelling relativistic heavy-ion collisions with dynamical transport approaches”, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **122**, 103920 (2022).

- [104] O. Savchuk, V. Vovchenko, R. V. Poberezhnyuk, M. I. Gorenstein та H. Stoecker, “Traces of the nuclear liquid-gas phase transition in the analytic properties of hot QCD”, [Phys. Rev. C \*\*101\*\*, 035205 \(2020\)](#).
- [105] M. Omana Kuttan, A. Motornenko, J. Steinheimer, H. Stoecker, Y. Nara та M. Bleicher, “A chiral mean-field equation-of-state in UrQMD: effects on the heavy ion compression stage”, [Eur. Phys. J. C \*\*82\*\*, 427 \(2022\)](#), [arXiv:2201.01622 \[nucl-th\]](#).
- [106] S. Vogel, H. Petersen, K. Schmidt, E. Santini, C. Sturm, J. Aichelin та M. Bleicher, “How sensitive are di-leptons from rho mesons to the high baryon density region?”, [Phys. Rev. C \*\*78\*\*, 044909 \(2008\)](#), [arXiv:0710.4463 \[hep-ph\]](#).
- [107] K. Schmidt, E. Santini, S. Vogel, C. Sturm, M. Bleicher та H. Stocker, “Production and evolution path of dileptons at energies accessible to the HADES detector”, [Phys. Rev. C \*\*79\*\*, 064908 \(2009\)](#), [arXiv:0811.4073 \[nucl-th\]](#).
- [108] E. L. Bratkovskaya, J. Aichelin, M. Thomere, S. Vogel та M. Bleicher, “System size and energy dependence of dilepton production in heavy-ion collisions at 1-2 GeV/nucleon energies”, [Phys. Rev. C \*\*87\*\*, 064907 \(2013\)](#), [arXiv:1301.0786 \[nucl-th\]](#).
- [109] D. Oliinychenko, C. Shen та V. Koch (SMASH), “Deuteron production in AuAu collisions at  $\sqrt{s_{NN}}=7\text{--}200$  GeV via pion catalysis”, [Phys. Rev. C \*\*103\*\*, 034913 \(2021\)](#), [arXiv:2009.01915 \[hep-ph\]](#).
- [110] J. Staudenmaier, D. Oliinychenko, J. M. Torres-Rincon та H. Elfner (SMASH), “Deuteron production in relativistic heavy ion collisions via stochastic multi-particle reactions”, [Phys. Rev. C \*\*104\*\*, 034908 \(2021\)](#), [arXiv:2106.14287 \[hep-ph\]](#).
- [111] J. Steinheimer, A. Motornenko, A. Sorensen, Y. Nara, V. Koch та M. Bleicher, “The high-density equation of state in heavy-ion collisions: Constraints from proton flow”, (2022), [arXiv:2208.12091 \[nucl-th\]](#).

- [112] J. Aichelin, “‘Quantum’ molecular dynamics: A Dynamical microscopic n body approach to investigate fragment formation and the nuclear equation of state in heavy ion collisions”, [Phys. Rept. \*\*202\*\*, 233 \(1991\)](#).
- [113] S. Huth et al., “Constraining Neutron-Star Matter with Microscopic and Macroscopic Collisions”, [Nature \*\*606\*\*, 276 \(2022\)](#), [arXiv:2107.06229 \[nucl-th\]](#).
- [114] P. Li, J. Steinheimer, T. Reichert, A. Kittiratpattana, M. Bleicher et Q. Li, “Effects of a phase transition on two-pion interferometry in heavy-ion collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 2.4 - 7.7$  GeV”, (2022), [arXiv:2209.01413 \[nucl-th\]](#).
- [115] A. Sorensen et V. Koch, “Phase transitions and critical behavior in hadronic transport with a relativistic density functional equation of state”, [Phys. Rev. C \*\*104\*\*, 034904 \(2021\)](#), [arXiv:2011.06635 \[nucl-th\]](#).
- [116] W. Cassing et E. Bratkovskaya, “Parton–hadron–string dynamics: An off-shell transport approach for relativistic energies”, [Nuclear Physics A \*\*831\*\*, 215 \(2009\)](#).
- [117] F. Seck, T. Galatyuk, A. Mukherjee, R. Rapp, J. Steinheimer et J. Stroth, “Dilepton Signature of a First-Order Phase Transition”, [Phys. Rev. C \*\*106\*\*, 014904 \(2022\)](#), [arXiv:2010.04614 \[nucl-th\]](#).
- [118] G. S. Denicol, C. Gale et S. Jeon, *The domain of validity of fluid dynamics and the onset of cavitation in ultrarelativistic heavy ion collisions*, 2015.
- [119] O. Savchuk, R. V. Poberezhnyuk, A. Motornenko, J. Steinheimer, M. I. Gorenstein et V. Vovchenko, “Phase transition amplification of proton number fluctuations in nuclear collisions from a transport model approach”, [Physical Review C \*\*107\*\*, 10.1103/physrevc.107.024913 \(2023\)](#).
- [120] G. Vujanovic, J.-F. Paquet, C. Shen, G. S. Denicol, S. Jeon, C. Gale et U. Heinz, “Exploring the influence of bulk viscosity of QCD on dilepton tomography”, [Physical Review C \*\*101\*\*, 10.1103/physrevc.101.044904 \(2020\)](#).

- [121] L. V. Bravina та ін., “Local thermodynamical equilibration in central Au + Au collisions at AGS”, *Phys. Lett. B* **434**, 379 (1998), [arXiv:nuc1-th/9804008](#).
- [122] L. V. Bravina та ін., “Local equilibrium in heavy ion collisions: Microscopic model versus statistical model analysis”, *Phys. Rev. C* **60**, 024904 (1999), [arXiv:hep-ph/9906548](#).
- [123] P. Huovinen, M. Belkacem, P. J. Ellis та J. I. Kapusta, “Dileptons and photons from coarse grained microscopic dynamics and hydrodynamics compared to experimental data”, *Phys. Rev. C* **66**, 014903 (2002), [arXiv:nuc1-th/0203023](#).
- [124] S. Endres, H. van Hees та M. Bleicher, “Studies of Dilepton Production in Coarse-Grained Transport Dynamics”, *PoS CPOD2013*, 052 (2013).
- [125] S. Endres, H. van Hees, J. Weil та M. Bleicher, “Coarse-graining approach for dilepton production at energies available at the CERN Super Proton Synchrotron”, *Phys. Rev. C* **91**, 054911 (2015), [arXiv:1412.1965 \[nuc1-th\]](#).
- [126] S. Endres, H. van Hees, J. Weil та M. Bleicher, “Dilepton production and reaction dynamics in heavy-ion collisions at SIS energies from coarse-grained transport simulations”, *Phys. Rev. C* **92**, 014911 (2015), [arXiv:1505.06131 \[nuc1-th\]](#).
- [127] S. Endres, H. van Hees та M. Bleicher, “Photon and dilepton production at the Facility for Antiproton and Ion Research and beam-energy scan at the Relativistic Heavy-Ion Collider using coarse-grained microscopic transport simulations”, *Phys. Rev. C* **93**, 054901 (2016), [arXiv:1512.06549 \[nuc1-th\]](#).
- [128] T. Galatyuk, P. M. Hohler, R. Rapp, F. Seck та J. Stroth, “Thermal Dileptons from Coarse-Grained Transport as Fireball Probes at SIS Energies”, *Eur. Phys. J. A* **52**, 131 (2016), [arXiv:1512.08688 \[nuc1-th\]](#).

- [129] S. Endres, H. van Hees ta M. Bleicher, “Energy, centrality and momentum dependence of dielectron production at collider energies in a coarse-grained transport approach”, *Phys. Rev. C* **94**, 024912 (2016), [arXiv:1604.06415 \[nucl-th\]](#).
- [130] T. Reichert, G. Inghirami ta M. Bleicher, “Probing chemical freeze-out criteria in relativistic nuclear collisions with coarse grained transport simulations”, *Eur. Phys. J. A* **56**, 267 (2020), [arXiv:2007.06440 \[nucl-th\]](#).
- [131] T. Reichert, G. Inghirami ta M. Bleicher, “A first estimate of  $\eta/s$  in Au+Au reactions at  $E_{lab} = 1.23$  A GeV”, *Phys. Lett. B* **817**, 136285 (2021), [arXiv:2011.04546 \[nucl-th\]](#).
- [132] D. H. Rischke, S. Bernard ta J. A. Maruhn, “Relativistic hydrodynamics for heavy ion collisions. 1. General aspects and expansion into vacuum”, *Nucl. Phys. A* **595**, 346 (1995), [arXiv:nucl-th/9504018](#).
- [133] A. Monnai, “Landau and Eckart frames for relativistic fluids in nuclear collisions”, *Phys. Rev. C* **100**, 014901 (2019).
- [134] G. S. Denicol, E. Molnár, H. Niemi ta D. H. Rischke, “Derivation of fluid dynamics from kinetic theory with the 14-moment approximation”, *The European Physical Journal A* **48**, [10.1140/epja/i2012-12170-x](#) (2012).
- [135] G. Inghirami ta H. Elfner, “The applicability of hydrodynamics in heavy ion collisions at  $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}} = 2.4\text{--}7.7$  GeV”, *The European Physical Journal C* **82**, [10.1140/epjc/s10052-022-10718-x](#) (2022).
- [136] R. Rapp ta J. Wambach, “Low mass dileptons at the CERN SPS: Evidence for chiral restoration?”, *Eur. Phys. J. A* **6**, 415 (1999), [arXiv:hep-ph/9907502](#).
- [137] H. van Hees ta R. Rapp, “Dilepton Radiation at the CERN Super Proton Synchrotron”, *Nucl. Phys. A* **806**, 339 (2008), [arXiv:0711.3444 \[hep-ph\]](#).
- [138] R. Rapp, “Dilepton Spectroscopy of QCD Matter at Collider Energies”, *Adv. High Energy Phys.* **2013**, 148253 (2013), [arXiv:1304.2309 \[hep-ph\]](#).

- [139] R. Rapp та J. Wambach, “Chiral symmetry restoration and dileptons in relativistic heavy ion collisions”, [Adv. Nucl. Phys. \*\*25\*\*, 1 \(2000\)](#), [arXiv:hep-ph/9909229](#).
- [140] R.-A. Tripolt, C. Jung, N. Tanji, L. von Smekal та J. Wambach, “In-medium spectral functions and dilepton rates with the Functional Renormalization Group”, [Nucl. Phys. A \*\*982\*\*, за ред. F. Antinori, A. Dainese, P. Giubellino, V. Greco, M. P. Lombardo та E. Scapparini, 775 \(2019\)](#), [arXiv:1807.04952 \[hep-ph\]](#).
- [141] T. Nishimura, M. Kitazawa та T. Kunihiro, “Anomalous enhancement of dilepton production as a precursor of color superconductivity”, (2022), [arXiv:2201.01963 \[hep-ph\]](#).
- [142] C. M. Ko, Q. Li та R.-C. Wang, “Relativistic Vlasov Equation for Heavy Ion Collisions”, [Phys. Rev. Lett. \*\*59\*\*, 1084 \(1987\)](#).
- [143] C.-M. Ko та Q. Li, “Relativistic Vlasov-Uehling-Uhlenbeck model for heavy-ion collisions”, [Phys. Rev. C \*\*37\*\*, 2270 \(1988\)](#).
- [144] B. Blattel, V. Koch, W. Cassing та U. Mosel, “Covariant Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck approach for heavy-ion collisions”, [Phys. Rev. C \*\*38\*\*, 1767 \(1988\)](#).
- [145] H. Sorge, H. Stoecker та W. Greiner, “Poincare Invariant Hamiltonian Dynamics: Modeling Multi - Hadronic Interactions in a Phase Space Approach”, [Annals Phys. \*\*192\*\*, 266 \(1989\)](#).
- [146] B. Blaettel, V. Koch та U. Mosel, “Transport theoretical analysis of relativistic heavy ion collisions”, [Rept. Prog. Phys. \*\*56\*\*, 1 \(1993\)](#).
- [147] C. Fuchs, E. Lehmann, L. Sehn, F. Scholz, T. Kubo, J. Zipprich та A. Faessler, “Heavy ion collisions and the density dependence of the local mean field”, [Nucl. Phys. A \*\*603\*\*, 471 \(1996\)](#).
- [148] Y. Nara та H. Stoecker, “Sensitivity of the excitation functions of collective flow to relativistic scalar and vector meson interactions in the relativistic quantum molecular dynamics model RQMD.RMF”, [Phys. Rev. C \*\*100\*\*, 054902 \(2019\)](#), [arXiv:1906.03537 \[nucl-th\]](#).

- [149] M. A. Stephanov, K. Rajagopal ta E. V. Shuryak, “Event-by-event fluctuations in heavy ion collisions and the QCD critical point”, *Phys. Rev.* **D60**, 114028 (1999), [arXiv:hep-ph/9903292 \[hep-ph\]](#).
- [150] C. Athanasiou, K. Rajagopal ta M. Stephanov, “Using Higher Moments of Fluctuations and their Ratios in the Search for the QCD Critical Point”, *Phys. Rev.* **D82**, 074008 (2010), [arXiv:1006.4636 \[hep-ph\]](#).
- [151] M. Kitazawa ta M. Asakawa, “Relation between baryon number fluctuations and experimentally observed proton number fluctuations in relativistic heavy ion collisions”, *Phys. Rev. C* **86**, 024904 (2012).
- [152] V. Vovchenko, R. V. Poberezhnyuk, D. V. Anchishkin ta M. I. Gorenstein, “Non-Gaussian particle number fluctuations in vicinity of the critical point for van der Waals equation of state”, *J. Phys. A* **49**, 015003 (2016), [arXiv:1507.06537 \[nucl-th\]](#).
- [153] S. Pratt, C. Montoya ta F. Ronning, “Balancing nuclear matter between liquid and gas”, *Phys. Lett. B* **349**, 261 (1995).
- [154] C. Sasaki, B. Friman ta K. Redlich, “Density fluctuations in the presence of spinodal instabilities”, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 232301 (2007), [arXiv:hep-ph/0702254](#).
- [155] J. Steinheimer ta J. Randrup, “Spinodal amplification of density fluctuations in fluid-dynamical simulations of relativistic nuclear collisions”, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 212301 (2012), [arXiv:1209.2462 \[nucl-th\]](#).
- [156] J. O. Irwin, “The Frequency Distribution of the Difference between Two Independent Variates following the same Poisson Distribution”, *Journal of the Royal Statistical Society* **100**, 415 (1937).
- [157] V. Vovchenko, D. Anchishkin, M. Gorenstein ta R. Poberezhnyuk, “Scaled variance, skewness, and kurtosis near the critical point of nuclear matter”, *Phys. Rev. C* **92**, 054901 (2015), [arXiv:1506.05763 \[nucl-th\]](#).
- [158] J. P. Bondorf, A. S. Botvina, A. S. Ilinov, I. N. Mishustin ta K. Sneppen, “Statistical multifragmentation of nuclei”, *Phys. Rept.* **257**, 133 (1995).



- [159] M. Asakawa, U. W. Heinz ta B. Muller, “Fluctuation probes of quark deconfinement”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2072 (2000), [arXiv:hep-ph/0003169 \[hep-ph\]](#).
- [160] S. Jeon ta V. Koch, “Charged particle ratio fluctuation as a signal for QGP”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2076 (2000), [arXiv:hep-ph/0003168 \[hep-ph\]](#).
- [161] M. A. Stephanov, “On the sign of kurtosis near the QCD critical point”, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 052301 (2011), [arXiv:1104.1627 \[hep-ph\]](#).
- [162] B. J. Schaefer ta M. Wagner, “QCD critical region and higher moments for three flavor models”, *Phys. Rev.* **D85**, 034027 (2012), [arXiv:1111.6871 \[hep-ph\]](#).
- [163] J.-W. Chen, J. Deng, H. Kohyama ta L. Labun, “Robust characteristics of nongaussian fluctuations from the NJL model”, *Phys. Rev. D* **93**, 034037 (2016), [arXiv:1509.04968 \[hep-ph\]](#).
- [164] R. V. Poberezhnyuk, O. Savchuk, M. I. Gorenstein, V. Vovchenko, K. Taradiy, V. V. Begun, L. Satarov, J. Steinheimer ta H. Stoecker, “Critical point fluctuations: Finite size and global charge conservation effects”, *Phys. Rev. C* **102**, 024908 (2020).
- [165] V. A. Kuznietsov, O. Savchuk, M. I. Gorenstein, V. Koch ta V. Vovchenko, “Critical point particle number fluctuations from molecular dynamics”, *Phys. Rev. C* **105**, 044903 (2022).
- [166] S. Pratt ta R. Steinhorst, “Charge conservation and higher moments of charge fluctuations”, *Phys. Rev. C* **102**, 064906 (2020).
- [167] B. Ling ta M. A. Stephanov, “Acceptance dependence of fluctuation measures near the QCD critical point”, *Phys. Rev.* **C93**, 034915 (2016), [arXiv:1512.09125 \[nucl-th\]](#).
- [168] V. Vovchenko, O. Savchuk, R. V. Poberezhnyuk, M. I. Gorenstein ta V. Koch, “Connecting fluctuation measurements in heavy-ion collisions with the grand-canonical susceptibilities”, *Physics Letters B* **811**, 135868 (2020).



- [169] V. Vovchenko ta V. Koch, “Particlization of an interacting hadron resonance gas with global conservation laws for event-by-event fluctuations in heavy-ion collisions”, [Phys. Rev. C \*\*103\*\*, 044903 \(2021\)](#).
- [170] O. Savchuk, V. Vovchenko, V. Koch, J. Steinheimer ta H. Stoecker, “Constraining baryon annihilation in the hadronic phase of heavy-ion collisions via event-by-event fluctuations”, [Physics Letters B \*\*827\*\*, 136983 \(2022\)](#).
- [171] J. Adamczewski-Musch ta in. (HADES), “Proton-number fluctuations in  $\sqrt{s_{NN}}=2.4$  GeV Au + Au collisions studied with the High-Acceptance DiElectron Spectrometer (HADES)”, [Phys. Rev. C \*\*102\*\*, 024914 \(2020\)](#), [arXiv:2002.08701 \[nucl-ex\]](#).
- [172] V. Vovchenko, “Cooper-Frye sampling with short-range repulsion”, [Phys. Rev. C \*\*106\*\*, 064906 \(2022\)](#), [arXiv:2208.13693 \[hep-ph\]](#).
- [173] V. Vovchenko ta V. Koch, “Thermodynamic approach to proton number fluctuations in baryon-rich heavy-ion matter created at moderate collision energies”, [Phys. Lett. B \*\*833\*\*, 137368 \(2022\)](#), [arXiv:2204.00137 \[hep-ph\]](#).
- [174] O. Savchuk, R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko ta M. I. Gorenstein, “Binomial acceptance corrections for particle number distributions in high-energy reactions”, [Phys. Rev. C \*\*101\*\*, 024917 \(2020\)](#).
- [175] V. V. Begun, M. Gazdzicki, M. I. Gorenstein ta O. S. Zozulya, “Particle number fluctuations in canonical ensemble”, [Phys. Rev. C \*\*70\*\*, 034901 \(2004\)](#), [arXiv:nucl-th/0404056 \[nucl-th\]](#).
- [176] P. Braun-Munzinger, A. Rustamov ta J. Stachel, “Bridging the gap between event-by-event fluctuation measurements and theory predictions in relativistic nuclear collisions”, [Nucl. Phys. A \*\*960\*\*, 114 \(2017\)](#), [arXiv:1612.00702 \[nucl-th\]](#).
- [177] V. P. Konchakovski, M. I. Gorenstein ta E. L. Bratkovskaya, “Multiplicity fluctuations in proton-proton and nucleus-nucleus collisions”, [Phys. Lett. B \*\*651\*\*, 114 \(2007\)](#), [arXiv:nucl-th/0703052 \[NUCL-TH\]](#).

- [178] V. P. Konchakovski, B. Lungwitz, M. I. Gorenstein та E. L. Bratkovskaya, “Multiplicity fluctuations in nucleus-nucleus collisions: Dependence on energy and atomic number”, *Phys. Rev.* **C78**, 024906 (2008), [arXiv:0712.2044 \[nucl-th\]](#).
- [179] A. Bzdak та V. Koch, “Acceptance corrections to net baryon and net charge cumulants”, *Phys. Rev. C* **86**, 044904 (2012), [arXiv:1206.4286 \[nucl-th\]](#).
- [180] X. Luo, “Unified description of efficiency correction and error estimation for moments of conserved quantities in heavy-ion collisions”, *Phys. Rev.* **C91**, [Erratum: *Phys. Rev.C*94,no.5,059901(2016)], 034907 (2015), [arXiv:1410.3914 \[physics.data-an\]](#).
- [181] M. Kitazawa, “Efficient formulas for efficiency correction of cumulants”, *Phys. Rev.* **C93**, 044911 (2016), [arXiv:1602.01234 \[nucl-th\]](#).
- [182] A. Bzdak та V. Koch, “Local Efficiency Corrections to Higher Order Cumulants”, *Phys. Rev.* **C91**, 027901 (2015), [arXiv:1312.4574 \[nucl-th\]](#).
- [183] A. Bzdak, R. Holzmann та V. Koch, “Multiplicity dependent and non-binomial efficiency corrections for particle number cumulants Multiplicity-dependent and nonbinomial efficiency corrections for particle number cumulants”, *Phys. Rev.* **C94**, 064907 (2016), [arXiv:1603.09057 \[nucl-th\]](#).
- [184] A. Bzdak та V. Koch, “Acceptance corrections to net baryon and net charge cumulants”, *Phys. Rev. C* **86**, 044904 (2012).
- [185] M. Kitazawa та M. Asakawa, “Revealing baryon number fluctuations from proton number fluctuations in relativistic heavy ion collisions”, *Phys. Rev. C* **85**, 021901 (2012).
- [186] M. Szala (HADES), “Proton and Light Nuclei from Au+Au Collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 2.4$  GeV Measured with HADES”, *Springer Proc. Phys.* **250**, за ред. D. Elia, G. E. Bruno, P. Colangelo та L. Cosmai, 297 (2020).
- [187] S. Harabasz, W. Florkowski, T. Galatyuk, M. Gumberidze, R. Ryblewski, P. Salabura та J. Stroth, “Statistical hadronization model for heavy-ion collisions in the few-GeV energy regime”, *Phys. Rev. C* **102**, 054903 (2020).

- [188] P. Romatschke, “New Developments in Relativistic Viscous Hydrodynamics”, *Int. J. Mod. Phys. E* **19**, 1 (2010), [arXiv:0902.3663 \[hep-ph\]](#).
- [189] S. Pratt ra C. Young, “Relating Measurable Correlations in Heavy Ion Collisions to Bulk Properties of Equilibrated QCD Matter”, *Phys. Rev. C* **95**, 054901 (2017), [arXiv:1612.08983 \[nucl-th\]](#).
- [190] S. Pratt, J. Kim ra C. Plumberg, “Evolution of Charge Fluctuations and Correlations in the Hydrodynamic Stage of Heavy Ion Collisions”, *Phys. Rev. C* **98**, 014904 (2018), [arXiv:1712.09298 \[nucl-th\]](#).
- [191] M. Pradeep, K. Rajagopal, M. Stephanov ra Y. Yin, “Freezing out fluctuations in Hydro+ near the QCD critical point”, *Phys. Rev. D* **106**, 036017 (2022), [arXiv:2204.00639 \[hep-ph\]](#).
- [192] S. Pratt ra G. Torrieri, “Coupling Relativistic Viscous Hydrodynamics to Boltzmann Descriptions”, *Phys. Rev. C* **82**, 044901 (2010), [arXiv:1003.0413 \[nucl-th\]](#).
- [193] D. Oliinychenko ra C. Shen, *Resonance production in PbPb collisions at 5.02 TeV via hydrodynamics and hadronic afterburner*, 2021, [arXiv:2105.07539 \[hep-ph\]](#).
- [194] J. Steinheimer, J. Aichelin ra M. Bleicher, “Nonthermal  $p/\pi$  Ratio at LHC as a Consequence of Hadronic Final State Interactions”, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 042501 (2013), [arXiv:1203.5302 \[nucl-th\]](#).
- [195] J. A. Fotakis, M. Greif, C. Greiner, G. S. Denicol ra H. Niemi, “Diffusion processes involving multiple conserved charges: A study from kinetic theory and implications to the fluid-dynamical modeling of heavy ion collisions”, *Phys. Rev. D* **101**, 076007 (2020), [arXiv:1912.09103 \[hep-ph\]](#).
- [196] S. Pratt, S. Schlichting ra S. Gavin, “Effects of Momentum Conservation and Flow on Angular Correlations at RHIC”, *Phys. Rev. C* **84**, 024909 (2011), [arXiv:1011.6053 \[nucl-th\]](#).

- [197] V. A. Kuznietsov, O. Savchuk, M. I. Gorenstein, V. Koch та V. Vovchenko, “Critical point particle number fluctuations from molecular dynamics”, [Phys. Rev. C \*\*105\*\*, 044903 \(2022\)](#), [arXiv:2201.08486 \[hep-ph\]](#).
- [198] V. A. Kuznietsov, O. Savchuk, R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, M. I. Gorenstein та H. Stoecker, “Molecular dynamics analysis of particle number fluctuations in the mixed phase of a first-order phase transition”, [Phys. Rev. C \*\*107\*\*, 055206 \(2023\)](#), [arXiv:2303.09193 \[hep-ph\]](#).
- [199] S. Pratt, “Consistent implementation of non-zero-range terms into hydrodynamics”, [Phys. Rev. C \*\*96\*\*, 044903 \(2017\)](#).
- [200] P. Bozek та W. Broniowski, “Charge balancing and the fall off of the ridge”, [Nucl. Phys. A \*\*904-905\*\*, за ред. T. Ullrich, B. Wyslouch та J. W. Harris, 479c \(2013\)](#), [arXiv:1210.4315 \[nucl-th\]](#).
- [201] P. Bozek та W. Broniowski, “Charge conservation and the shape of the ridge of two-particle correlations in relativistic heavy-ion collisions”, [Phys. Rev. Lett. \*\*109\*\*, 062301 \(2012\)](#), [arXiv:1204.3580 \[nucl-th\]](#).
- [202] J. Adam та ін. (STAR Collaboration), “Collision-energy dependence of  $p_t$  correlations in Au + Au collisions at energies available at the BNL Relativistic Heavy Ion Collider”, [Phys. Rev. C \*\*99\*\*, 044918 \(2019\)](#).
- [203] B. I. Abelev та ін. (STAR), “Long range rapidity correlations and jet production in high energy nuclear collisions”, [Phys. Rev. C \*\*80\*\*, 064912 \(2009\)](#), [arXiv:0909.0191 \[nucl-ex\]](#).
- [204] S. Borsanyi, Z. Fodor, J. N. Guenther, S. K. Katz, K. K. Szabo, A. Pasztor, I. Portillo та C. Ratti, “Higher order fluctuations and correlations of conserved charges from lattice QCD”, [JHEP \*\*10\*\*, 205 \(2018\)](#), [arXiv:1805.04445 \[hep-lat\]](#).
- [205] A. Bzdak, V. Koch та V. Skokov, “Baryon number conservation and the cumulants of the net proton distribution”, [Phys. Rev. C \*\*87\*\*, 014901 \(2013\)](#), [arXiv:1203.4529 \[hep-ph\]](#).

- [206] V. Vovchenko та V. Koch, “Particlization of an interacting hadron resonance gas with global conservation laws for event-by-event fluctuations in heavy-ion collisions”, *Phys. Rev. C* **103**, 044903 (2021), [arXiv:2012.09954 \[hep-ph\]](#).
- [207] S. Acharya та ін. (ALICE), “Global baryon number conservation encoded in net-proton fluctuations measured in Pb-Pb collisions at  $\sqrt{s_{\text{NN}}} = 2.76$  TeV”, *Phys. Lett. B* **807**, 135564 (2020), [arXiv:1910.14396 \[nucl-ex\]](#).
- [208] V. Skokov, B. Friman та K. Redlich, “Volume Fluctuations and Higher Order Cumulants of the Net Baryon Number”, *Phys. Rev. C* **88**, 034911 (2013), [arXiv:1205.4756 \[hep-ph\]](#).
- [209] V. Vovchenko, A. Pasztor, Z. Fodor, S. D. Katz та H. Stoecker, “Repulsive baryonic interactions and lattice QCD observables at imaginary chemical potential”, *Phys. Lett. B* **775**, 71 (2017), [arXiv:1708.02852 \[hep-ph\]](#).
- [210] P. J. Siemens та J. O. Rasmussen, “Evidence for a blast wave from compress nuclear matter”, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 880 (1979).
- [211] H. Stoecker, A. A. Ogloblin та W. Greiner, “SIGNIFICANCE OF TEMPERATURE MEASUREMENTS IN RELATIVISTIC NUCLEAR COLLISIONS”, *Z. Phys. A* **303**, 259 (1981).
- [212] E. Schnedermann, J. Sollfrank та U. W. Heinz, “Thermal phenomenology of hadrons from 200-A/GeV S+S collisions”, *Phys. Rev. C* **48**, 2462 (1993), [arXiv:nucl-th/9307020](#).
- [213] P. Huovinen, P. M. Lo, M. Marczenko, K. Morita, K. Redlich та C. Sasaki, “Effects of  $\rho$ -meson width on pion distributions in heavy-ion collisions”, *Phys. Lett. B* **769**, 509 (2017), [arXiv:1608.06817 \[hep-ph\]](#).
- [214] A. Andronic, P. Braun-Munzinger, K. Redlich та J. Stachel, “Decoding the phase structure of QCD via particle production at high energy”, *Nature* **561**, 321 (2018), [arXiv:1710.09425 \[nucl-th\]](#).
- [215] V. Vovchenko, M. I. Gorenstein та H. Stoecker, “Finite resonance widths influence the thermal-model description of hadron yields”, *Phys. Rev. C* **98**, 034906 (2018), [arXiv:1807.02079 \[nucl-th\]](#).

- [216] H. Petersen, J. Steinheimer, G. Burau, M. Bleicher ta H. Stöcker, “A Fully Integrated Transport Approach to Heavy Ion Reactions with an Intermediate Hydrodynamic Stage”, *Phys. Rev. C* **78**, 044901 (2008), [arXiv:0806.1695 \[nucl-th\]](#).
- [217] E. Abbas ta in. (ALICE), “Centrality dependence of the pseudorapidity density distribution for charged particles in Pb-Pb collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV”, *Phys. Lett. B* **726**, 610 (2013), [arXiv:1304.0347 \[nucl-ex\]](#).
- [218] F. Becattini, J. Steinheimer, R. Stock ta M. Bleicher, “Hadronization conditions in relativistic nuclear collisions and the QCD pseudo-critical line”, *Phys. Lett. B* **764**, 241 (2017), [arXiv:1605.09694 \[nucl-th\]](#).
- [219] B. Abelev ta in. (ALICE), “Centrality dependence of  $\pi$ , K, p production in Pb-Pb collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV”, *Phys. Rev. C* **88**, 044910 (2013), [arXiv:1303.0737 \[hep-ex\]](#).
- [220] J. Steinheimer, J. Aichelin, M. Bleicher ta H. Stöcker, “Influence of the hadronic phase on observables in ultrarelativistic heavy ion collisions”, *Phys. Rev. C* **95**, 064902 (2017), [arXiv:1703.06638 \[nucl-th\]](#).
- [221] D. Oliinychenko, L.-G. Pang, H. Elfner ta V. Koch, “Microscopic study of deuteron production in PbPb collisions at  $\sqrt{s} = 2.76$  TeV via hydrodynamics and a hadronic afterburner”, *Phys. Rev. C* **99**, 044907 (2019), [arXiv:1809.03071 \[hep-ph\]](#).
- [222] M. Bleicher ta J. Aichelin, “Strange resonance production: Probing chemical and thermal freezeout in relativistic heavy ion collisions”, *Phys. Lett. B* **530**, 81 (2002), [arXiv:hep-ph/0201123](#).
- [223] M. Bleicher, S. Jeon ta V. Koch, “Event-by-event fluctuations of the charged particle ratio from nonequilibrium transport theory”, *Phys. Rev. C* **62**, 061902 (2000), [arXiv:hep-ph/0006201](#).
- [224] P. Castorina ta H. Satz, “Causality Constraints on Hadron Production In High Energy Collisions”, *Int. J. Mod. Phys. E* **23**, 1450019 (2014), [arXiv:1310.6932 \[hep-ph\]](#).

- [225] V. Vovchenko, B. Dönigus ta H. Stoecker, “Multiplicity dependence of light nuclei production at LHC energies in the canonical statistical model”, *Phys. Lett. B* **785**, 171 (2018), [arXiv:1808.05245 \[hep-ph\]](#).
- [226] D. Oliinychenko ta V. Koch, “Microcanonical Particlization with Local Conservation Laws”, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 182302 (2019), [arXiv:1902.09775 \[hep-ph\]](#).
- [227] C. A. Pruneau, “Role of baryon number conservation in measurements of fluctuations”, *Phys. Rev. C* **100**, 034905 (2019), [arXiv:1903.04591 \[nucl-th\]](#).
- [228] V. Vovchenko, B. Dönigus ta H. Stoecker, “Canonical statistical model analysis of p-p , p -Pb, and Pb-Pb collisions at energies available at the CERN Large Hadron Collider”, *Phys. Rev. C* **100**, 054906 (2019), [arXiv:1906.03145 \[hep-ph\]](#).
- [229] P. Braun-Munzinger, A. Rustamov ta J. Stachel, “The role of the local conservation laws in fluctuations of conserved charges”, (2019), [arXiv:1907.03032 \[nucl-th\]](#).
- [230] I. Altsybeev, “Higher-order cumulants of net-charge distributions from local charge conservation”, (2020), [arXiv:2002.11398 \[nucl-th\]](#).
- [231] O. Savchuk ta S. Pratt, “Correlations of conserved quantities at finite baryon density”, *Phys. Rev. C* **109**, 024910 (2024), [arXiv:2311.02046 \[nucl-th\]](#).
- [232] A. Bazavov ta iH., “Equation of state in (2)-flavor QCD”, *Physical Review D* **90**, [10.1103/physrevd.90.094503](#) (2014).
- [233] A. Bazavov ta iH., “Fluctuations and correlations of net baryon number, electric charge, and strangeness: A comparison of lattice QCD results with the hadron resonance gas model”, *Physical Review D* **86**, [10.1103/physrevd.86.034509](#) (2012).

- [234] S. Pratt та C. Plumberg, “Charge balance functions for heavy-ion collisions at energies available at the CERN Large Hadron Collider”, [Phys. Rev. C \*\*104\*\*, 014906 \(2021\)](#).
- [235] S. Acharya та ін. (ALICE), “Longitudinal and azimuthal evolution of two-particle transverse momentum correlations in Pb-Pb collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV”, [Phys. Lett. B \*\*804\*\*, 135375 \(2020\)](#), [arXiv:1910.14393 \[nucl-ex\]](#).
- [236] B. Abelev та ін. (ALICE Collaboration), “Centrality dependence of  $\pi$ ,  $K$ , and  $p$  production in Pb-Pb collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV”, [Phys. Rev. C \*\*88\*\*, 044910 \(2013\)](#).