

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ ІМЕНІ М. М. БОГОЛЮБОВА

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ШУТОВСЬКИЙ Арсен Миколайович

УДК 538.9

ДИСЕРТАЦІЯ

**ЕФЕКТИ ФАЗОВОЇ КОГЕРЕНТНОСТІ У ТУНЕЛЬНИХ
НАДПРОВІДНИХ КОНТАКТАХ НА ОСНОВІ ОДНОЗОННИХ ТА
ДВОЗОННИХ НАДПРОВІДНИКІВ**

01.04.02 Теоретична фізика

10 Природничі науки (104 Фізика та астрономія)

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ А. М. Шутовський

Науковий керівник: **Сахнюк Василь Євгенович**,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Луцьк — 2023

АНОТАЦІЯ

Шутовський А. М. Ефекти фазової когерентності у тунельних надпровідних контактах на основі однозонних та двозонних надпровідників — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.04.02 «Теоретична фізика» (10 — Природничі науки). — Інститут теоретичної фізики імені М. М. Боголюбова НАН України, Київ, 2023.

У дисертації досліджено вплив так званих ефектів розпаровування на струм-фазову залежність у тунельних надпровідних контактах типу SIS для довільних концентрацій немагнітних домішок при температурах, близьких до критичної температури T_c . Важливо відзначити, що така обставина дозволяє розв'язати задачу шляхом застосування відомої теорії Гінзбурга-Ландау, яка є асимптотичною формою мікроскопічної теорії надпровідності при температурах, близьких до критичної температури T_c . Добре відомо, що в рамках теорії Гінзбурга-Ландау не можна нехтувати просторовою поведінкою параметра впорядкування. Для тунельних надпровідних контактів типу SIS із немагнітними домішками довільної концентрації можна показати, що параметр впорядкування $\Delta(\zeta)$ є одним із двох розв'язків замкнутої системи двох лінійних інтегральних рівнянь. Варто зауважити, що згадані вище лінійні інтегральні рівняння є чинними поблизу IS — границі. У глибині надпровідника параметр впорядкування $\Delta(\zeta)$ є розв'язком так званого рівняння Гінзбурга-Ландау, яке є нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку. У даному дослідженні диференціальне рівняння другого порядку для комплексної функції $\Delta(\zeta)$ зведено до диференціального рівняння другого порядку для дійсної функції $f(\zeta)$. Отримане рівняння має доданок, який містить так звану надплинну швидкість $v_s(\zeta)$. Цей доданок враховує наявність ефектів розпаровування. Також зрозуміло, що рівняння Гінзбурга-Ландау і замкнута система двох лінійних інтегральних рівнянь мають область їхньої спільної чинності. Внаслідок цього гранична умова для рівняння Гінзбурга-Ландау містить константу q_∞ , яка також присутня у формулах для асимптотичних розв'язків замкнутої системи двох лінійних інтегральних рівнянь. Аналітичний вираз для константи

q_∞ отримано шляхом застосування так званого методу квазіортогональності до асимптотики. Після цього представлення комплексного параметра впорядкування $\Delta(\zeta)$ через його абсолютне значення $f(\zeta)$ підставляється у відомий вираз для густини струму $j(\zeta)$ у теорії Гінзбурга-Ландау. Тоді вдається отримати представлення густини струму j через деяку функцію $f_+(\varphi)$, яка є одним із розв'язків замкнутої системи двох алгебричних рівнянь. Ця замкнута система розв'язується шляхом чисельних розрахунків, але вдалось отримати також і наближені аналітичні розв'язки.

Досліджено динаміку флюксонів у чистому і довгому джозефсонівському контакті з нетривіальною струм-фазовою залежністю. Побудовано аналітичний розв'язок модифікованого рівняння синус-Гордона для прозорості діелектричного прошарку, близької до одиниці. Розглянуто також і більш реалістичний випадок, у якому враховано потік неспарених електронів через контакт, на який подається деякий постійний струм. За допомогою узагальненого рівняння синус-Гордона записано закон еволюції енергії контакту в часі. На основі закону збереження енергії контакту отримано аналітичну формулу для рівноважної швидкості флюксона.

Досліджено рівноважні струмові стани в шаруватих надпровідних структурах типу SIS'IS у загальному випадку. Це означає, що на прозорість D прошарку діелектрика і на товщину d проміжного надпровідника не накладено ніяких обмежень. Поставлену задачу розв'язано в рамках методу функції Гріна. На основі диференціального рівняння другого порядку для матричної функції Гріна в конфігураційному представленні побудовано диференціальне рівняння першого порядку для матричних функцій Гріна в так званому t -представленні шляхом виконання процедури згладжування просторової поведінки функцій Гріна на довжинах порядку атомних розмірів. Отримані диференціальні рівняння також називаються квазікласичними рівняннями. Така ж процедура виконується з метою переходу від тривимірної густини струму $\vec{j}(\vec{r})$ до одновимірної густини струму $j(z)$, яку подано через функції Гріна в t -представленні. Дослідження проведено для температур, які не є близькими до критичної температури T_c . Така обставина дозволяє застосувати так звану модель з кусково-сталім параметром впорядкування. У рамках цієї моделі квазікласичні рівняння є точно розв'язуваними диференціальними рівняннями. Отримані вирази для функцій Гріна в t -представленні підставляються в густину струму $j(z)$ на площині $z = \frac{d}{2}$. Внаслідок цього отримано новий аналітичний вираз для струм-фазової залежності.

Побудовано метод функціонального інтегрування у теорії двощілинної надпровідності. Сформульоване наближення середнього поля використовується з метою запровадити матричну функцію Гріна в конфігураційному представленні. Для дослідження тунельних надпровідних контактів на основі двощілинних надпровідників побудовано квазікласичні рівняння для матричних функцій Гріна в t -представленні. Також отримано представлення густини струму $j(z)$ через функції Гріна в t -представленні. Задачу розв'язано в рамках моделі з кусково-сталими параметрами впорядкування, бо дослідження проведено для температур, які не є близькими до критичної температури T_c . Густина струму $j(z)$ обчислено на площині $z = 0$. Отриманий аналітичний вираз для струм-фазової залежності можна використовувати з метою аналізу симетрій параметрів впорядкування.

Ключові слова: надпровідний контакт, параметр впорядкування, лінійне інтегральне рівняння, рівняння Гінзбурга-Ландау, густина струму, струм-фазова залежність, функція Гріна, квазікласичне рівняння.

Список публікацій здобувача:

- *журнальні публікації:*

1. Pastukh O. Yu., Shutovskii A. M., and Sakhnyuk V. E. The effect of depairing on the current-phase relation in SIS junctions in the presence of nonmagnetic impurities of arbitrary concentration // *Low Temp. Phys.* 2017. Vol. 43, no. 6. P. 664—669.
2. Shutovskiy A. M., Svidzinskyi A. V., Sakhnyuk V. E., and Pastukh O. Yu. Microscopic Calculation of Josephson Current in Tunnel Junctions with Two-Gap Superconductors // *Ukr. J. Phys.* 2018. Vol. 63, no. 11. P. 1001—1005.
3. Шутовський А. М., Свідзинський А. В., Сахнюк В. Є. і Пастух О. Ю. Метод функціонального інтегрування в теорії двощілинної надпровідності // *Журн. фіз. досл.* 2019. Т. 23, № 3. С. 3709.
4. Shutovskiy A. M. and Sakhnyuk V. E. Current-phase relation in layered superconducting structures of SIS'IS type // *Condensed Matter Physics.* 2021. Vol. 24, no. 2. P. 23701.
5. Shutovskiy Arsen and Sakhnyuk Vasyl. Current density dependence on phase differences in superconducting tunnel junctions based on two-gap superconductors // *Physica C: Superconductivity and its Applications.* 2021. Vol. 588. P. 1353915.
6. Shutovskiy A, Sakhnyuk V, and Zolotaryuk Y. Fluxon dynamics in long Jose-

phson junctions with nontrivial current-phase relation // *The European Physical Journal B*. 2022. Vol. 95, no. 8. P. 134.

• *тези конференцій:*

7. Шутовський А. М., Пастух О. Ю. і Сахнюк В. Є. Метод функціонального інтегрування в теорії двошлівної надпровідності // Матеріали VIII міжнародної наукової конференції «Релаксаційні, нелінійні й акустооптичні процеси та матеріали» — РНАОПМ'2016. Луцьк—Світязь, Україна : Вежа—Друк. 1—4 червня 2016 р. С. 235.
8. Shutovskiy A. M., Svidzinsky A. V., Sakhnyuk V. E., and Pastukh O. Y. Microscopic calculation of Josephson current in superconducting tunnel junction on the basis of two-band superconductors // VII Young Scientists Conference “Problems of Theoretical Physics”. Kyiv, Ukraine : Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine. December 13—15, 2016. P. 15.
9. Shutovskiy A. M., Svidzinsky A. V., Sakhnyuk V. E., and Pastukh O. Y. The current states in superconducting tunnel junction on the basis of two-band superconductors // VIII International Conference for Professionals & Young Scientists “Low Temperature Physics”. Kharkiv, Ukraine : B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine. May 29 — June 2, 2017. P. 66.
10. Шутовський А. М., Свідзинський А. В. і Сахнюк В. Є. Мікроскопічний розрахунок джозефсонівського струму в контактах на основі двозонних надпровідників // Матеріали II міжнародної наукової конференції «Актуальні проблеми фундаментальних наук» — АПФН'2017. Луцьк—Світязь, Україна : Вежа—Друк. 1—5 червня 2017 року. С. 169.
11. Shutovskiy A. M., Svidzinsky A. V., and Sakhnyuk V. E. The functional integration method in the two-band superconductivity theory // VIII Young Scientists Conference “Problems of Theoretical Physics”. Kyiv, Ukraine : Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine. December 12—14, 2017. P. 37.
12. Shutovskiy A. M., Sakhnyuk V. E., and Viligurskiy O. M. Equilibrium current states in layered superconducting structures // Proceedings of IX International scientific conference «Relaxed, nonlinear, acoustic optical processes and materials» — RNAOPM'2018 / ed. by Myronchuk G., Zamuruieva O., and

- Trokhimchuk P. Lutsk — Lake «Svityaz'», Ukraine : Vezha—Print. June 1—5, 2018. P. 142.
13. Shutovskyi Arsen, Svidzinskyi Anatolii Vadymovych, Pastukh Oleksandr, and Sakhnyuk Vasul. A current density dependence on phase differences in layered superconducting structures of SIS type // IX Conference of Young Scientists “Problems of Theoretical Physics” / Book of Abstracts. Kyiv, Ukraine : Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine. December 4—5, 2018. P. 18.
 14. Шутовський А. М., Сахнюк В. Є. і Бірук О. М. Динаміка флюксонів у джозефсонівських контактах з нетривіальною струм-фазовою залежністю // Матеріали III міжнародної наукової конференції «Актуальні проблеми фундаментальних наук» (APFS—2019). Луцьк—Світязь, Україна : Вежа—Друк. 1—5 червня 2019 року. С. 113.
 15. Шутовський А. М., Сахнюк В. Є., Бірук О. М. і Вілігурський О. М. Ефект Джозефсона в тунельних надпровідних контактах типу $S_{\pm}IS_{\pm}$ та $S_{++}IS_{++}$ // Матеріали IV міжнародної наукової конференції «Актуальні проблеми фундаментальних наук» (APFS—2021). Луцьк—Світязь, Україна : Вежа—Друк. 1—5 червня 2021 року. С. 111.
 16. Шутовський А. і Сахнюк В. Є. Залежність густини струму від різниць фаз у тунельних надпровідних контактах типу SIS на основі двоцілинних надпровідників // XXI Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини — 2021. Львів, Україна : Інститут фізики конденсованих систем НАН України. 11—12 жовтня 2021р. С. 13.
 17. Сахнюк В. Є., Шутовський А. М. і Вілігурський О. М. Чисельний аналіз просторової поведінки параметра впорядкування в одно- та двозонних надпровідниках // Матеріали XI міжнародної наукової конференції «Релаксаційні, нелінійні й акустооптичні процеси та матеріали» — РНАОПМ'2022. Луцьк—Світязь, Україна : Вежа—Друк. 1—5 червня 2022 року. С. 111.

ABSTRACT

Shutovskiy A. M. Phase coherence effects in superconducting tunnel junctions based on single-band and two-band superconductors — Qualification scientific work in the form of manuscript.

Thesis for candidate degree in natural sciences (doctor of philosophy), speciality 01.04.02 “Theoretical physics” (10 — Natural sciences). — Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the NAS of Ukraine, Kyiv, 2023.

The thesis considers the influence of the so-called depairing effects on the current-phase relation in the superconducting tunnel junctions of an SIS type for arbitrary concentrations of nonmagnetic impurities at the temperatures close to the critical temperature T_c . It is important to note that such a circumstance can enable one to solve the problem by a way to apply the well known Ginzburg-Landau theory that is an asymptotical form of microscopic theory of superconductivity at the temperatures close to the critical temperature T_c . In the framework of the Ginzburg-Landau theory, it is well known that the spatial behavior of the order parameter cannot be neglected. For the superconducting tunnel junctions of an SIS type with nonmagnetic impurities of arbitrary concentrations, it can be shown that the order parameter $\Delta(\zeta)$ is one of the two solutions to the closed system of the two linear integral equations. It is significant to note that the above-mentioned linear integral equations are valid near the IS interface. In the depth of the superconductor, the order parameter $\Delta(\zeta)$ is a solution to the so-called Ginzburg-Landau equation that is a nonlinear second order differential equation. In the current research, the second order differential equation for the complex function $\Delta(\zeta)$ is transformed into the second order differential equation for the real function $f(\zeta)$. The obtained equation has a term that contains the so-called superfluid velocity $v_s(\zeta)$. This term takes into account the depairing effects. It is also understood that the Ginzburg-Landau equation and the closed system of the two linear integral equations has a domain of their common validity. As a result, the boundary condition for the Ginzburg-Landau equation contains the constant q_∞ that is also present in the formulas for the asymptotic solutions to the closed system of the two linear integral equations. The analytical expression for the constant q_∞ is obtained by a way to apply the so-called method of quasi-orthogonality to asymptotes. After

that, the representation of the complex order parameter $\Delta(\zeta)$ via its absolute value $f(\zeta)$ is substituted into the well known expression for the current density $j(\zeta)$ in the Ginzburg-Landau theory. As a result, the current density j is presented via some function $f_+(\varphi)$ that is one of the solutions to the closed system of the two algebraic equations. This closed system is solved by a way to perform the numerical calculations, but the approximate analytical solutions are also obtained.

The fluxon dynamics in pure and long Josephson junctions with nontrivial current-phase relation is investigated. An analytical solution of the modified sine-Gordon equation is obtained for the dielectric layer transparencies close to unity. The more realistic case that takes into account the flow of unpaired electrons across a junction biased by the spatially uniform direct current bias is also considered. The generalized sine-Gordon equation is used with the aim to write down the law that describes the time evolution of the junction energy. The conservation law of the junction energy is applied with the aim to derive an analytical expression for the equilibrium fluxon velocity.

The equilibrium current states in the layered superconducting structures of an SIS'IS type are investigated in the general case. This means that no restrictions on the dielectric layer transparency D and the thickness d of an intermediate layer are imposed. The problem is solved in the framework of the Green's function method. The second order differential equation for the matrix Green's function in the configuration representation is transformed into the first order differential equations for the matrix Green's functions in the so-called t -representation by a way to perform a spatial smoothing procedure on the length scales of an order of an atomic size. The obtained differential equations are also called the quasiclassical equations. The same procedure is performed with the aim to replace the three-dimensional current density $\vec{j}(\vec{r})$ by the one-dimensional current density $j(z)$ that is presented via the Green's functions in the t -representation. In the current research, it is supposed that the temperatures are not close to the critical temperature T_c . Such a circumstance can enable one to apply the so-called model with a piecewise constant order parameter. In the framework of this model, the quasiclassical equations are the exactly solvable differential equations. The derived expressions for the Green's functions in the t -representation are substituted into the one-dimensional current density $j(z)$ on the plane $z = \frac{d}{2}$. As a result, a new analytical expression for the current-phase relation is obtained.

The functional integration method in the two band superconductivity theory is

constructed. The formulated mean field approximation is used to introduce the matrix Green's function in the configuration representation. The quasiclassical equations for the matrix Green's functions in the t -representation are derived in order to study the superconducting tunnel junctions based on two-gap superconductors. The expression for the current density $j(z)$ in terms of the Green's functions in the t -representation is also derived. The problem is solved in the framework of the model with the piecewise constant order parameters, because it is supposed that the temperatures are not close to the critical temperature T_c . The current density $j(z)$ is calculated on the plane $z = 0$. The obtained analytical expression for the current-phase relation is used to analyze the pairing symmetries of the order parameters.

Key words: superconducting junction, order parameter, linear integral equation, Ginzburg-Landau equation, current density, current-phase relation, Green's function, quasiclassical equation.

List of applicant's publications:

- *journal publications:*

1. Pastukh O. Yu., Shutovskii A. M., and Sakhnyuk V. E. The effect of depairing on the current-phase relation in SIS junctions in the presence of nonmagnetic impurities of arbitrary concentration // *Low Temp. Phys.* 2017. Vol. 43, no. 6. P. 664—669.
2. Shutovskyi A. M., Svidzinskyi A. V., Sakhnyuk V. E., and Pastukh O. Yu. Microscopic Calculation of Josephson Current in Tunnel Junctions with Two-Gap Superconductors // *Ukr. J. Phys.* 2018. Vol. 63, no. 11. P. 1001—1005.
3. Шутовський А. М., Свідзинський А. В., Сахнюк В. Є. і Пастух О. Ю. Метод функціонального інтегрування в теорії двошліпної надпровідності // *Журн. фіз. досл.* 2019. Т. 23, № 3. С. 3709.
4. Shutovskyi A. M. and Sakhnyuk V. E. Current-phase relation in layered superconducting structures of SIS'IS type // *Condensed Matter Physics.* 2021. Vol. 24, no. 2. P. 23701.
5. Shutovskyi Arsen and Sakhnyuk Vasyl. Current density dependence on phase differences in superconducting tunnel junctions based on two-gap superconductors // *Physica C: Superconductivity and its Applications.* 2021. Vol. 588. P. 1353915.
6. Shutovskyi A, Sakhnyuk V, and Zolotaryuk Y. Fluxon dynamics in long Josephson junctions with nontrivial current-phase relation // *The European Physi-*

cal Journal B. 2022. Vol. 95, no. 8. P. 134.

• *conference abstracts:*

7. Шутовський А. М., Пастух О. Ю. і Сахнюк В. Є. Метод функціонального інтегрування в теорії двоцилінної надпровідності // Матеріали VIII міжнародної наукової конференції «Релаксаційні, нелінійні й акустооптичні процеси та матеріали» — РНАОПМ'2016. Луцьк—Світязь, Україна : Вежа—Друк. 1—4 червня 2016 р. С. 235.
8. Shutovskiy A. M., Svidzinsky A. V., Sakhnyuk V. E., and Pastukh O. Y. Microscopic calculation of josephson current in superconducting tunnel junction on the basis of two-band superconductors // VII Young Scientists Conference “Problems of Theoretical Physics”. Kyiv, Ukraine : Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine. December 13—15, 2016. P. 15.
9. Shutovskiy A. M., Svidzinsky A. V., Sakhnyuk V. E., and Pastukh O. Y. The current states in superconducting tunnel junction on the basis of two-band superconductors // VIII International Conference for Professionals & Young Scientists “Low Temperature Physics”. Kharkiv, Ukraine : B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine. May 29 — June 2, 2017. P. 66.
10. Шутовський А. М., Свідзинський А. В. і Сахнюк В. Є. Мікроскопічний розрахунок джозефсонівського струму в контактах на основі двозонних надпровідників // Матеріали II міжнародної наукової конференції «Актуальні проблеми фундаментальних наук» — АПФН'2017. Луцьк—Світязь, Україна : Вежа—Друк. 1—5 червня 2017 року. С. 169.
11. Shutovskiy A. M., Svidzinsky A. V., and Sakhnyuk V. E. The functional integration method in the two-band superconductivity theory // VIII Young Scientists Conference “Problems of Theoretical Physics”. Kyiv, Ukraine : Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine. December 12—14, 2017. P. 37.
12. Shutovskiy A. M., Sakhnyuk V. E., and Viligurskiy O. M. Equilibrium current states in layered superconducting structures // Proceedings of IX International scientific conference «Relaxed, nonlinear, acoustic optical processes and materials» — RNAOPM'2018 / ed. by Myronchuk G., Zamuruieva O., and Trokhimchuk P. Lutsk — Lake «Svityaz'», Ukraine : Vezha—Print. June 1—5,

2018. P. 142.

13. Shutovskyi Arsen, Svidzinskyi Anatolii Vadymovych, Pastukh Oleksandr, and Sakhnyuk Vasul. A current density dependence on phase differences in layered superconducting structures of SISIS type // IX Conference of Young Scientists “Problems of Theoretical Physics” / Book of Abstracts. Kyiv, Ukraine : Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine. December 4—5, 2018. P. 18.
14. Шутовський А. М., Сахнюк В. Є. і Бірук О. М. Динаміка флюксонів у джозефсонівських контактах з нетривіальною струм-фазовою залежністю // Матеріали III міжнародної наукової конференції «Актуальні проблеми фундаментальних наук» (APFS—2019). Луцьк—Світязь, Україна : Вежа—Друк. 1—5 червня 2019 року. С. 113.
15. Шутовський А. М., Сахнюк В. Є., Бірук О. М. і Вілігурський О. М. Ефект Джозефсона в тунельних надпровідних контактах типу $S_{\pm}IS_{\pm}$ та $S_{++}IS_{++}$ // Матеріали IV міжнародної наукової конференції «Актуальні проблеми фундаментальних наук» (APFS—2021). Луцьк—Світязь, Україна : Вежа—Друк. 1—5 червня 2021 року. С. 111.
16. Шутовський А. і Сахнюк В. Є. Залежність густини струму від різниць фаз у тунельних надпровідних контактах типу SIS на основі двоцілинних надпровідників // XXI Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини — 2021. Львів, Україна : Інститут фізики конденсованих систем НАН України. 11—12 жовтня 2021р. С. 13.
17. Сахнюк В. Є., Шутовський А. М. і Вілігурський О. М. Чисельний аналіз просторової поведінки параметра впорядкування в одно- та двозонних надпровідниках // Матеріали XI міжнародної наукової конференції «Релаксаційні, нелінійні й акустооптичні процеси та матеріали» — РНАОПМ'2022. Луцьк—Світязь, Україна : Вежа—Друк. 1—5 червня 2022 року. С. 111.

ЗМІСТ

Вступ	15
Розділ 1. Залежність струму від різниці фаз у джозефсонівських контактах	24
Розділ 2. Вплив ефектів розпаровування на залежність струму від різниці фаз у тунельних джозефсонівських контактах із немагнітними домішками довільної концентрації	37
2.1. Модель та основні рівняння	38
2.2. Лінійні інтегральні рівняння	40
2.3. Метод квазіортогональності до асимптотики	46
2.4. Рівняння Гінзбурга-Ландау	56
2.5. Густина струму	64
2.5.1. Аналітичні результати	68
2.6. Динаміка флюксонів у довгому джозефсонівському контакті з не- тривіальною струм-фазовою залежністю	72
2.6.1. Надпровідний струм	74
2.6.2. Модифіковане рівняння синус-Гордона	77
2.6.3. Розв'язки модифікованого рівняння синус-Гордона	78
2.6.4. Узагальнене рівняння синус-Гордона	84
2.7. Висновки та обговорення	88
Розділ 3. Стаціонарні властивості шаруватих надпровідних контактів типу SIS/IS	91
3.1. Модель та основні рівняння	91
3.2. Квазікласичні рівняння	94
3.3. Густина струму	105
3.4. Умова зшивання	113
3.4.1. Лівий надпровідник	114
3.4.2. Правий надпровідник	123
3.4.3. Проміжний прошарок	127
3.5. Струм-фазова залежність	132

3.6. Висновки та обговорення	143
Розділ 4. Мікроскопічний розрахунок джозефсонівського струму в тунельних надпровідних контактах на основі двощілинних надпровідників	144
4.1. Статистична сума двощілинного надпровідника	145
4.2. Наближення середнього поля	150
4.3. Рівняння для функцій Гріна	151
4.4. Квазікласичні рівняння	154
4.5. Густина струму	162
4.6. Розв'язки квазікласичних рівнянь	165
4.6.1. Лівий надпровідник	165
4.6.2. Правий надпровідник	169
4.7. Струм-фазова залежність	171
4.8. Висновки та обговорення	176
Висновки	178
Список використаних джерел	181
Додаток А. Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації	195
А.1. Список публікацій	195
А.2. Апробація матеріалів дисертації	195

ВСТУП

Актуальність теми. Ефект Джозефсона [1] є одним із найяскравіших проявів ефектів квантової когерентності у макроскопічному масштабі у фізиці конденсованих систем. Дослідження цього ефекту в просторово неоднорідних надпровідних композиціях (в ролі прикладів можуть бути тунельні надпровідні контакти типу SIS, SNS, SIS'IS та SINIS; літери S, I та N означають відповідно надпровідник, діелектрик та нормальний метал) — це питання, інтерес до якого невпинно зростає та привертає увагу багатьох дослідницьких колективів [2].

При розгляді надпровідних контактів з'ясування таких питань як залежність густини струму в контакті від різниці фаз між берегами контакту $j(\varphi)$, температури, товщини нормального прошарку, коефіцієнта проходження електронів крізь діелектрик та наявності немагнітних домішок у контакті дає можливість краще зрозуміти фізику просторово неоднорідних надпровідних композицій та дозволяє ідентифікувати фізичні процеси, які формують надпровідний струм за різних умов. А це є важливим питанням для прикладного застосування Джозефсонівських контактів [3].

Традиційно формі залежності $j(\varphi)$ не приділяли достатньої уваги та вважали, що $j \sim \sin \varphi$. Таку синусоїдну струм-фазову залежність вважали справедливою особливо для температур, близьких до критичної температури T_c . Однак, детальний аналіз надпровідних контактів дає змогу врахувати низку ефектів, які безпосередньо впливають на форму залежності струму від різниці фаз. Як наслідок, виникає струм-фазова залежність, яка за своєю математичною структурою суттєво відрізняється від традиційної синусоїдної. При розгляді джозефсонівського струму в тунельному надпровідному контакті типу SIS важливим питанням є врахування впливу прозорості діелектричного прошарку D та наявності немагнітних домішок довільної концентрації. Виявляється, що якщо D набуває немалих значень, то числове значення критичного струму контакту може бути близьким до термодинамічно критичного струму масивного надпровідника. Внаслідок немалих значень струму виникає ефект розпаровування куперівських пар та з'являється додаткове, крім спричиненого просторовою неоднорідністю, зменшення модуля параметра впорядкування, що є особливо відчутним поблизу просторової неодно-

рідності. В результаті це відобразиться в ангармонійності $j(\varphi)$. Для температур, близьких до критичної, це питання є ще далеким від остаточного вивчення.

Інша цікава просторово неоднорідна система може бути одержана шляхом послідовного розміщення двох SIS — контактів. Шарувата надпровідна структура типу SIS'IS цікава тим, що в ній за певних значень товщини проміжного надпровідного прошарку може проявлятися так званий режим резонансного тунелювання [4]. Крім того в таких структурах можуть існувати два режими електронного транспорту [5] залежно від товщини проміжного прошарку: когерентний режим, у якому струм на контакті є пропорційний прозорості бар'єра D , та режим, у якому ця когерентність порушується зі збільшенням товщини проміжного прошарку S' і струм стає пропорційним D^2 . Ефекти фазової когерентності у шаруватих надпровідних структурах є також важливими з точки зору їхнього практичного використання, що продемонстровано нещодавніми експериментами з можливості виготовлення джозефсонівських контактів із бажаними для інженерії властивостями, використовуючи відомі методи нашарування [6, 7].

Наступним ускладненням у плані дослідження тунельного надпровідного контакту є використання двозонних надпровідників. Великий інтерес до таких структур спостерігається в останні роки після відкриття надпровідності в дибориді магнію та залізовмісних надпровідниках, для надпровідного стану яких характерною є наявність двох параметрів впорядкування Δ_1 і Δ_2 та, відповідно, двох фаз φ_1 і φ_2 . В таких надпровідниках можуть реалізовуватися стани з s_{++} симетрією, коли обидві фази є однаковими ($\varphi_1 = \varphi_2$), або стани з s_{\pm} симетрією, коли дві фази зсунуті на π ($\varphi_1 = \varphi_2 + \pi$) [8]. У сполуці MgB_2 симетрія параметрів впорядкування є добре відомою [9]: фази обох параметрів впорядкування для основного стану є рівними (s_{++} симетрія). Для залізовмісних надпровідників наразі обговорюється [10, 11] можливість реалізації s_{++} симетрії або s_{\pm} симетрії параметрів впорядкування і це питання є відкритим. Хорошим інструментом для дослідження симетрії параметрів впорядкування є фазочутливі методи, в основі яких є ефект Джозефсона. Тому теоретичні дослідження залежності струму від різниці фаз є важливою складовою в розумінні симетрії параметрів впорядкування у незвичайних надпровідниках.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась на кафедрі теоретичної та комп'ютерної фізики імені А. В. Свідзинського Волинського національного університету імені Лесі Україн-

ки. Представлені у дисертації результати частково отримані відповідно до планів науково-дослідних робіт, які виконувалися спільно з Інститутом теоретичної фізики імені М. М. Боголюбова Національної академії наук України при грантовій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень за конкурсними проектами №Ф76/123—2017 та №Ф76/6—2018: «Вплив просторової неоднорідності та залежних від часу збурень на властивості надпровідних контактів» (2017 рік, номер державної реєстрації 0117U007266), «Стационарні властивості планарних надпровідних контактів типу SIS'IS» (2018 рік, номер державної реєстрації 0018U005518с).

Мета і задачі дослідження. Мета роботи — з'ясувати механізми формування несинусоїдної залежності струму від різниці фаз у тунельних надпровідних контактах на основі однозонних та двозонних надпровідників. Зокрема, в дисертаційній роботі були поставлені такі завдання:

- Дослідити вплив ефектів розпаровування на залежність струму від різниці фаз у тунельних надпровідних контактах типу SIS за наявності немагнітних домішок довільної концентрації для області температур, близьких до критичної.
- Дослідити динаміку флюксонів у чистому і довгому джозефсонівському контакті з нетривіальною струм-фазовою залежністю. Побудувати аналітичний розв'язок модифікованого рівняння синус-Гордона для прозорості діелектричного прошарку, близької до одиниці. Розглянути також і більш реалістичний випадок, у якому враховується потік неспарених електронів через контакт, на який подається деякий постійний струм. За допомогою узагальненого рівняння синус-Гордона записати закон еволюції енергії контакту в часі. На основі закону збереження енергії контакту отримати аналітичну формулу для рівноважної швидкості флюксона.
- Для шаруватих надпровідних структур типу SIS'IS у рамках моделі з кусково-сталім параметром впорядкування побудувати квазікласичні рівняння для функцій Гріна в t -представленні та на їхній основі дослідити залежність струму від різниці фаз.
- Представити статистичну суму двоцілінного надпровідника у формі функціонального інтеграла та сформулювати наближення середнього поля. Побудувати систему рівнянь Горькова для мацубарівських функцій Гріна.

- Побудувати квазікласичні рівняння для функцій Гріна в t -представленні у надпровідних SIS — контактах на основі двоцілинних надпровідників. Одержати формулу для залежності струму від різниць фаз та з'ясувати вплив симетрії параметрів впорядкування у надпровіднику на цю залежність.

Об'єкт дослідження. У даній дисертаційній роботі об'єктом дослідження є тунельні надпровідні SIS — контакти на основі однозонних та двозонних надпровідників і шаруваті надпровідні структури типу SIS'IS на основі однозонних надпровідників.

Предмет дослідження. У даній дисертаційній роботі предметом дослідження є рівноважні струмові стани та, зокрема, залежність густини струму від різниці фаз у надпровідних контактах типу SIS та SIS'IS, ефекти розпаровування, симетрія параметрів впорядкування у двозонних надпровідниках.

Методи дослідження. Для опису рівноважних струмових станів у надпровідному SIS — контакті поблизу критичної температури використано теорію Гінзбурга-Ландау. Граничні умови для параметра впорядкування знайдені методом квазіортогональності до асимптотики. Метод температурних (мацубарівських) функцій Гріна, в рівняннях для яких виконано процедуру згладжування та в підсумку одержано квазікласичні рівняння у t -представленні, використано для одержання струм-фазових залежностей у шаруватому SIS'IS — контакті на основі однозонних надпровідників та в тунельному SIS — контакті на основі двозонних надпровідників.

Наукова новизна отриманих результатів. Основними результатами, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, є такі результати:

- *для контактів на основі однозонних надпровідників*
1. Одержано нову формулу для залежності струму від різниці фаз у надпровідних контактах типу SIS із врахуванням впливу ефектів розпаровування та немагнітних домішок довільної концентрації. Показано, що при невеликій прозорості діелектричного прошарку, коли ефекти розпаровування є суттєвими, залежність струму від різниці фаз є відмінною від синусоїдної залежності $j \sim \sin \varphi$, характерної для $D \ll 1$.
 2. Досліджено динаміку флюксовнів у чистому і довгому джозефсонівському контакті з нетривіальною струм-фазовою залежністю. Побудовано аналі-

тичний розв'язок модифікованого рівняння синус-Гордона для прозорості діелектричного прошарку, близької до одиниці. Розглянуто також і більш реалістичний випадок, у якому враховано потік неспарених електронів через контакт, на який подається деякий постійний струм. За допомогою узагальненого рівняння синус-Гордона записано закон еволюції енергії контакту в часі. На основі закону збереження енергії контакту отримано аналітичну формулу для рівноважної швидкості флюксона.

3. Для просторово неоднорідних надпровідних структур типу SIS'IS у рамках моделі з кусково-сталим параметром впорядкування побудовано квазікласичні рівняння для функцій Гріна в t -представленні та подано через ці функції загальну формулу для густини струму. В підсумку одержано новий аналітичний результат для струм-фазової залежності $j(\varphi)$, чинний для довільних значень коефіцієнта проходження електронів D та товщини проміжного прошарку d . Показано, що залежність струму від d не є монотонною функцією у зв'язку з періодичністю залежності коефіцієнта проходження електронів від d . Нова формула містить у собі вже відомі результати для SIS — контакту ($d = 0$), SINIS — контакту ($\Delta_1 = 0$) та SNS — контакту ($\Delta_1 = 0$ та $D = 1$).

- *для контактів на основі двозонних надпровідників*

4. Метод функціонального інтеграла, який виявився досить ефективним у теорії однощілинної надпровідності, узагальнено на випадок надпровідників із двома енергетичними щілинами.
5. Спираючись на представлення статистичної суми надпровідника у формі функціонального інтеграла, побудовано основні рівняння двощілинного надпровідника в наближенні середнього поля.
6. Побудовано квазікласичні рівняння для функцій Гріна в t -представленні, спираючись на які виконано мікроскопічний опис стаціонарних струмових станів у тунельному надпровідному контакті на основі двозонних надпровідників та одержано нову аналітичну формулу для залежності струму від різниць фаз параметрів впорядкування. Показано, що числове значення струму в контакті залежить від симетрії параметрів впорядкування: для s_{\pm} симетрії числове значення критичного струму контакту є приблизно на 25% меншим від відповідного числового значення критичного струму контакту для s_{++} симетрії.

Практичне значення отриманих результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані результати є внеском у теоретичний опис стаціонарного ефекту Джозефсона в надпровідних контактах різних геометрій та можуть бути основою для подальших теоретичних досліджень, а також можуть використовуватися для аналізу експериментальних даних. Представлена в дисертації схема опису надпровідних контактів використовується в науковій роботі співробітників кафедри теоретичної та комп'ютерної фізики імені А. В. Свідзинського Волинського національного університету імені Лесі Українки та Інституту теоретичної фізики імені М. М. Боголюбова Національної академії наук України. Окремі частини дисертації можуть використовуватись у спецкурсах для аспірантів.

Особистий внесок здобувача. Постановку завдань дослідження здійснив науковий керівник роботи кандидат фізико-математичних наук, доцент Василь Євгенович Сахнюк. У спільних публікаціях авторів дисертації належать:

- отримання граничних умов для рівняння Гінзбурга-Ландау в надпровідних контактах типу SIS за наявності немагнітних домішок довільної концентрації та аналіз залежності струму від різниці фаз;
- побудова аналітичного розв'язку модифікованого рівняння синус-Гордона для близької до одиниці прозорості діелектричного прошарку, застосування узагальненого рівняння синус-Гордона з метою записати закон еволюції енергії контакту в часі, застосування закону збереження енергії контакту з метою отримати аналітичну формулу для рівноважної швидкості флюксона;
- розв'язок квазікласичних рівнянь для функцій Гріна шаруватих надпровідних структур типу SIS/IS, представлення через ці функції густини струму на контакті та одержання формули для струм-фазової залежності;
- побудова представлення статистичної суми двозонного надпровідника у формі функціонального інтеграла та формулювання на його основі наближення середнього поля, побудова системи рівнянь Горькова для мацубарівських функцій Гріна;
- побудова квазікласичних рівнянь у t -представленні для функцій Гріна тунельного SIS — контакту на основі двозонних надпровідників, одержання та аналіз формули для залежності струму від різниць фаз.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації були представлені на таких конференціях:

- VIII Міжнародна наукова конференція «Релаксаційні, нелінійні й акустооптичні процеси та матеріали» (1—4 червня 2016 року, Луцьк).
- VII Young Scientists Conference «Problems of Theoretical Physics» (13—15 грудня 2016 року, Київ).
- VIII International Conference for Professionals & Young Scientists (29 травня — 2 червня 2017 року, Харків).
- II Міжнародна наукова конференція «Актуальні проблеми фундаментальних наук» (1—5 червня 2017 року, Луцьк).
- VIII International Young Scientists Conference «Problems of Theoretical Physics» (12—14 грудня 2017 року, Київ).
- IX Міжнародна наукова конференція «Релаксаційні, нелінійні й акустооптичні процеси і матеріали» (1—5 червня 2018 року, Луцьк).
- IX Conference of Young Scientists «Problems of Theoretical Physics» (4—5 грудня 2018 року, Київ).
- III Міжнародна наукова конференція «Актуальні проблеми фундаментальних наук» (1—5 червня 2019 року, Луцьк).
- IV Міжнародна наукова конференція «Актуальні проблеми фундаментальних наук» (1—5 червня 2021 року, Луцьк).
- XXI Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (11—12 жовтня 2021 року, Львів).
- XI Міжнародна наукова конференція «Релаксаційні, нелінійні й акустооптичні процеси і матеріали» (1—5 червня 2022 року, Луцьк).

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано 17 наукових праць, із яких: 4 статті у провідних наукових виданнях України [12–15], 2 статті у міжнародних дослідницьких журналах [16, 17] та 11 тез конференцій [18–28].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація має такі складові: вступ, розділ із оглядом літератури, три розділи основної частини з викладеними результатами досліджень дисертанта, загальні висновки, список використаних джерел, одну таблицю та 19 рисунків. Робота викладена на 184 сторінках (повний обсяг разом з літературою — 198). Бібліографічний список містить 151 найменування публікацій у вітчизняних та закордонних виданнях.

У **Вступі** обґрунтовано актуальність дослідження, сформульовано мету роботи, визначено наукову новизну і практичну цінність отриманих результатів та

наведено стисло характеристику дисертації.

У **першому розділі** зроблено короткий огляд літератури за темою дисертаційної роботи. Представлені різні підходи, які використовуються при теоретичному вивченні просторово неоднорідних надпровідних структур тунельного типу, та проаналізовано наявні результати з цієї тематики.

Другий розділ присвячений дослідженню впливу ефектів розпаровування на залежність струму від різниці фаз SIS — контактів за наявності немагнітних домішок. Область досліджуваних температур вважається близькою до критичної. Для дослідження просторової поведінки параметра впорядкування у надпровіднику поблизу IS — границі використовуються лінійні інтегральні рівняння, з яких, використовуючи метод квазіортогональності до асимптотики, знайдено граничну умову для рівняння Гінзбурга-Ландау. В рівнянні Гінзбурга-Ландау збережений доданок із надплинною швидкістю, що відображає вплив струму на значення параметра впорядкування. Одержано та проаналізовано залежність струму від різниці фаз для різних значень прозорості діелектричного прошарку та довжини вільного пробігу електронів. Розглянуто асимптотичний випадок, коли прозорість діелектричної плівки є близькою до одиниці. Досліджено динаміку флюксонів у чистому і довгому джозефсонівському контакті з нетривіальною струм-фазовою залежністю. Побудовано аналітичний розв'язок модифікованого рівняння синус-Гордона для прозорості діелектричного прошарку, близької до одиниці. Розглянуто також і більш реалістичний випадок, у якому враховано потік неспарених електронів через контакт, на який подається деякий постійний струм. За допомогою узагальненого рівняння синус-Гордона записано закон еволюції енергії контакту в часі. На основі закону збереження енергії контакту отримано аналітичну формулу для рівноважної швидкості флюксона.

Третій розділ присвячений дослідженню струмових станів шаруватих надпровідних структур типу SIS'IS у рамках моделі з кусково-сталим параметром впорядкування, яка є чинною для температур, неблизьких до критичної. В основі дослідження використано метод функцій Гріна, для яких виконано процедуру згладжування їхньої просторової поведінки на довжинах порядку атомних. В результаті були одержані квазікласичні рівняння для функцій Гріна в t -представленні. Розв'язуючи ці рівняння з відповідними граничними умовами, в підсумку одержано новий аналітичний результат для залежності струму від різниці фаз, чинний для довільних значень коефіцієнта проходження електронів D та для різних

значень товщини проміжного прошарку d . Показано, що нова формула увібрала низку відомих раніше результатів для різних асимптотичних випадків.

У **четвертому розділі** побудовано представлення статистичної суми двозонного надпровідника у формі функціонального інтеграла та сформульовано наближення середнього поля. Одержано рівняння для мацубарівських функцій Гріна, за допомогою яких побудовано квазікласичні рівняння в t -представленні для тунельного SIS — контакту на основі двозонних надпровідників. Подано густину струму через функції Гріна в t -представленні. Розв'язано квазікласичні рівняння для функцій Гріна в t -представленні та одержано струм-фазову залежність. Проаналізовано залежність струму від різниці фаз для різних значень температури та коефіцієнта міжзонного зв'язку. З'ясовано вплив симетрії параметрів впорядкування на числові значення струму.

РОЗДІЛ 1
ЗАЛЕЖНІСТЬ СТРУМУ ВІД РІЗНИЦІ ФАЗ У
ДЖОЗЕФСОНІВСЬКИХ КОНТАКТАХ

У 1962 році фізик-теоретик Браян Девід Джозефсон зробив своє знамените передбачення [1] щодо можливості протікання надпровідного струму через контакт двох надпровідників, розділених тонким діелектричним прошарком, навіть за відсутності різниці потенціалів між ними (стаціонарний ефект Джозефсона). У тій самій статті Джозефсон показав, що якщо струм перевищує певне критичне значення, то на контакті з'являється відмінна від нуля напруга \mathcal{V} і крім стаціонарного струму через надпровідний контакт протікатиме також і нестаціонарний струм, який осцилює із частотою $\omega = \frac{2e\mathcal{V}}{\hbar}$ (нестаціонарний ефект Джозефсона). Варто наголосити на тому, що дуже швидко це передбачення було підтверджене на експерименті [29, 30]. Подальші дослідження ефекту Джозефсона привели до розуміння [31], що цей ефект властивий не тільки SIS — контактам, а й багатьом іншим просторово неоднорідним надпровідним системам, утворених двома надпровідниками, між якими наведений слабкий зв'язок за допомогою прошарку нормального металу, феромагнетика, геометричного звуження тощо.

Для характеристики надпровідного стану використовують комплексну функцію $\Delta = |\Delta| e^{i\varphi}$, яку називають параметром впорядкування. Модуль параметра впорядкування $|\Delta|$ визначає енергетичну щілину в спектрі квазічастинкових збуджень у надпровіднику. Що стосується фази, то виникає непереборне бажання з'ясувати, чи має фаза параметра впорядкування φ спостережувані наслідки та чи дійшов Джозефсон до їхнього відкриття. Якщо надпровідний контакт утворено на основі надпровідників, які описуються за допомогою параметрів впорядкування $\Delta_1 e^{i\varphi_1}$ та $\Delta_2 e^{i\varphi_2}$, то через такий надпровідний контакт, як виявилось [1], може протікати пропорційний синусові різниці фаз $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ надпровідний струм

$$j(\varphi) = j_c \sin \varphi. \quad (1.0.1)$$

Отриманий Джозефсоном результат (1.0.1) є надзвичайно цікавий. Справді, фази кожного з надпровідників самі по собі не є визначені, а за наявності струму між фазами встановлюється когерентність: їхня різниця стає визначеною величи-

ною [32]. З цієї причини ефект Джозефсона можна розглядати як прояв фазової когерентності у макроскопічному масштабі. Максимальний струм j_c , який фігурує у формулі (1.0.1), називається критичним струмом надпровідного контакту.

Залежність струму від різниці фаз є важливою характеристикою джозефсонівських контактів. Співвідношення (1.0.1) є її найпростішим виразом, який зазвичай використовується при вивченні динаміки та продуктивності пристроїв на основі джозефсонівських контактів [33–39].

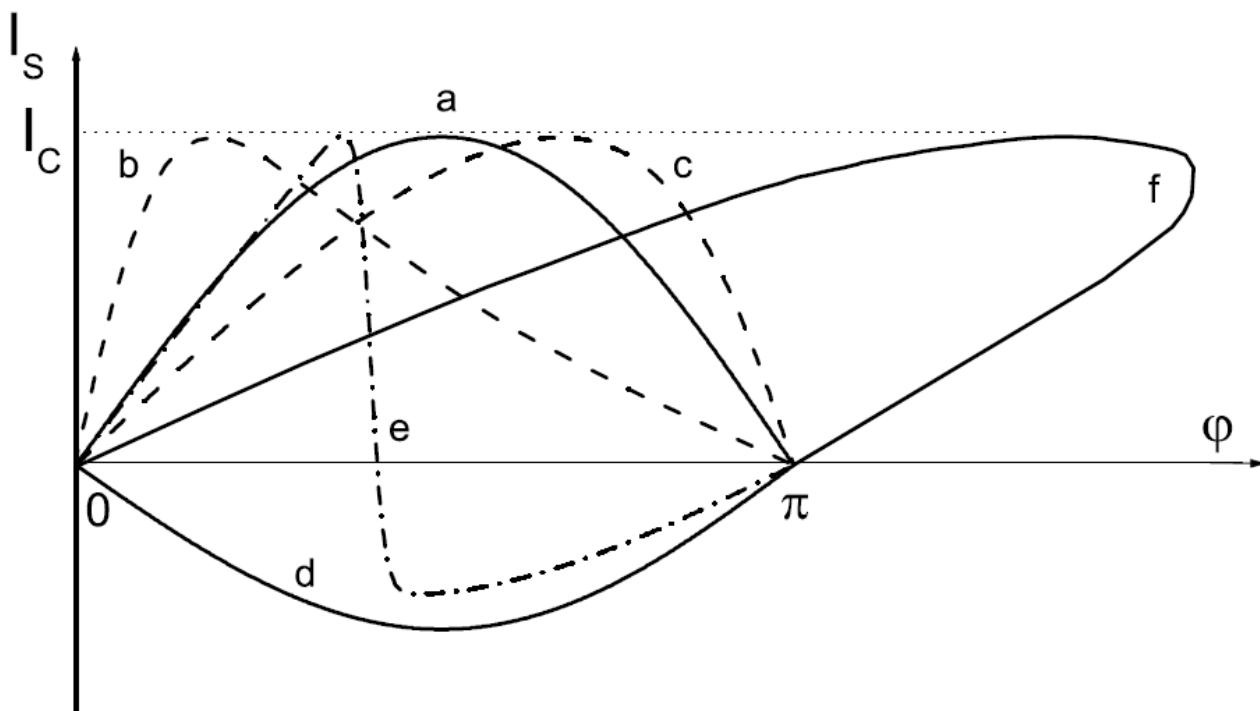


Рис. 1.1: Типи струм-фазових залежностей у надпровідних контактах. Рисунок взято з [2].

Однак, для багатьох просторово неоднорідних надпровідних композицій залежність струму від різниці фаз може суттєво відрізнятися від синусоїдної, що, власне, пояснюється впливом геометрії контакту, його параметрів і числового значення струму [2,31]. Можливі типи струм-фазової залежності зображені на рисунку (1.1).

Крива a відповідає стандартній синусоїдній залежності струму від різниці фаз. Для складніших струм-фазових залежностей струм на контакті може досягати максимального значення як при різниці фаз $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (крива b) [40–43] так і при різниці фаз $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$ (крива c) [44]. Можлива реалізація також і більш екзотичних залежностей для $j_c < 0$, що властиво для так званих π — контактів [45].

Існують численні можливості побудови просторово неоднорідних надпровідних структур за наявності слабкого зв'язку між надпровідниками, в яких може спостерігатися ефект Джозефсона. Однак, лише кілька конфігурацій представляють інтерес як для теоретичного вивчення так і для їхнього практичного використання [2, 34]. До таких структур належить тунельний надпровідний SIS — контакт, про який уже згадувалося вище в контексті відкриття Джозефсона. Важливим є також SNS — контакт, у якому слабкий зв'язок між надпровідниками наведений через прошарок нормального металу. Проте, на відміну від тунельного контакту механізм проникнення електронів через прошарок нормального металу є дещо інший. Струм у системі протікає внаслідок іншого ефекту [32, 46]. У нормальному металі, де немає ефективного притягання між електронами, не можуть виникати куперівські пари. Вони утворюються у надпровіднику та характеризуються хвильовою функцією, яка внаслідок неперервності проникає в нормальну область на відстань порядку довжини когерентності ξ_0 . Тому хвости хвильових функцій куперівських пар зліва та справа від надпровідників, на основі яких утворено контакт, перекриваються та виникає ситуація, коли спарені електрони будуть і в нормальному прошарку. Це є так званий ефект близькості, який забезпечує наявність надпровідного струму в SNS — контакті. Інтерес до таких структур нещодавно зростає [47–50].

У теорії опису надпровідних контактів існує широке розмаїття схем та методів, у рамках яких вивчається залежність струму від різниці фаз, а саме: метод тунельного гамільтоніана [32]; точна схема, заснована на формалізмі функцій Гріна, що задовольняють рівняння Горькова [51]; квазікласичний підхід [52, 53]; теорія Гінзбурга-Ландау [54] тощо. Переваги, недоліки та труднощі у використанні цих підходів описані в монографії [46].

Найпотужнішим, звичайно, є метод функцій Гріна. Однак, для виконання повністю самоузгодженого розрахунку струму в надпровідних контактах методом функцій Гріна необхідно ще розв'язати систему рівнянь Горькова [51], яка в конфігураційному представленні має такий вигляд:

$$\begin{cases} \left(i\omega_n - \hat{\xi} \right) G_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') + \Delta(\vec{r}) F_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \\ \left(i\omega_n + \hat{\xi} \right) F_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') + \Delta^*(\vec{r}) G_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') = 0. \end{cases}$$

Тоді одержані розв'язки для функцій Гріна $G_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}')$ та $F_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}')$ будуть нелінійними функціоналами параметра впорядкування $\Delta(\vec{r})$. А умова самоузгодже-

ності

$$\Delta^*(\vec{r}) = |g| T \sum_{\omega_n} F_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r})$$

виглядатиме як нелінійне інтегральне рівняння відносно функції $\Delta(\vec{r})$. Очевидно, що з технічної точки зору це є доволі складною задачею навіть для виконання чисельних розрахунків, а знаходження аналітичного розв'язку в загальному випадку є неможливим. Тому при дослідженні струм-фазової залежності в надпровідних контактах широко вживаною є модель із кусково-сталим параметром впорядкування. У цій моделі параметр впорядкування вважається сталим у межах кожного з надпровідників, на основі яких утворено надпровідний контакт. А залежність параметра впорядкування від температури звичайно зберігається [2, 31, 46].

Використання такої моделі, коли параметр впорядкування $\Delta(\vec{r})$ міняється в мірілі довжини когерентності ξ_0 , не приводить до якісної похибки в одержаних результатах для струму [32, 46]. Але поблизу критичної температури параметр впорядкування міняється в мірілі довжини $\xi(T) \sim \xi_0 / \sqrt{1 - T/T_c} \gg \xi_0$ і така спрощена модель є непридатною. Тому для одержання коректного результату необхідно враховувати просторову зміну параметра впорядкування.

Поблизу критичної температури розв'язок системи рівнянь Горькова можна одержати наближено у вигляді розкладу за степенями параметра впорядкування, який є малим поблизу критичної температури. Відкривається можливість побудови самоузгодженої теорії, а ті сумніви, що виникають у моделі з кусково-сталим параметром впорядкування, знімаються. Відповідну теорію, яку запропонували Гінзбург і Ландау [54], можна розглядати як асимптотичну форму мікроскопічної теорії надпровідності поблизу критичної температури [46]. У теорії Гінзбурга-Ландау вдається побудувати представлення густини струму через параметр впорядкування, тому в рамках цієї теорії дослідження рівноважних струмових станів у надпровідних контактах, по суті, переноситься на вивчення просторової поведінки параметра впорядкування.

У теорії Гінзбурга-Ландау для параметра впорядкування маємо диференціальне рівняння [54]

$$\frac{\xi^2(T)}{\xi_0^2} \Delta''(\zeta) - \frac{1}{\Delta_\infty^2} |\Delta(\zeta)|^2 \Delta(\zeta) + \Delta(\zeta) = 0.$$

Тут рівняння виписано для випадку порушення однорідності лише в одному напрямку та запроваджено безрозмірну змінну $\zeta = \frac{z}{\xi_0}$. За наявності струму в

контакті параметр впорядкування записують у вигляді формули

$$\Delta(\zeta) = \Delta_\infty f(\zeta) \exp \left\{ 2im\chi(\zeta) \pm i\frac{\varphi}{2} \right\}, \quad (1.0.2)$$

у якій фігурує параметр впорядкування $\Delta_\infty = \sqrt{\frac{8\pi^2}{7\zeta(3)}} T_c \sqrt{1 - T/T_c}$ в просторово однорідному надпровіднику поблизу T_c . Величина φ є стрибком фази на контакті. Функція $\chi(\zeta)$ є неперервною складовою фази параметра впорядкування, яка пов'язана з надплинною швидкістю $v_s(\zeta)$ за допомогою співвідношення $\frac{d\chi(\zeta)}{d\zeta} = \xi_0 v_s(\zeta)$. Функція $f(\zeta)$ є розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{\xi^2(T)}{\xi_0^2} f''(\zeta) - 4m^2 \xi^2(T) v_s^2(\zeta) f(\zeta) + f(\zeta) - f^3(\zeta) = 0. \quad (1.0.3)$$

Строга послідовна схема дослідження залежності струму від різниці фаз у надпровідних контактах, спираючись на теорію Гінзбурга-Ландау, була представлена в роботі [55] (див. також монографії [32, 46]). Автори [32, 46, 55] показали, що рівняння (1.0.3) можна використовувати тоді, коли характерна відстань, на якій зазнає просторової зміни параметр впорядкування, дорівнює $\xi(T)$. Поблизу границі IS параметр впорядкування змінюється швидше: характерною відстанню є довжина когерентності $\xi_0 \ll \xi(T)$, тому рівняння Гінзбурга-Ландау втрачає у цій області свою чинність і параметр впорядкування є розв'язком уже лінійного інтегрального рівняння. Саме завдяки останньому вдається одержати граничну умову для рівняння Гінзбурга-Ландау [55–57]. Така схема дає можливість дослідити залежність струму від різниці фаз у надпровідних контактах без модельного представлення для параметра впорядкування, тобто виконати всі розрахунки самоузгодженим чином.

Відповідний результат: для SIS — контакту [32]

$$j = \frac{3\pi^2}{14\zeta(3)} \frac{env_0}{p_0\xi_0} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \left\{ \int_0^1 x D(x) dx \right\} \sin \varphi \quad (1.0.4)$$

та для SNS — контакту [46]

$$j \cong \frac{5env_0}{2p_0d} e^{-d/\xi_0} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2 \sin \varphi. \quad (1.0.5)$$

Формули (1.0.4) та (1.0.5) одержані в припущенні, що коефіцієнт проходження електронів крізь прошарок діелектрика в SIS — контакті є малим ($D \ll 1$), а товщина нормального прошарку в SNS — контакті є великою ($d \gg \xi_0$). За таких умов

можна вважати, що числове значення струму в контактї є малим у порівнянні з термодинамічним критичним струмом масивного надпровідника, а його вплив на параметр впорядкування є несуттєвим і другий доданок у рівнянні (1.0.3), який відображає цей вплив, можна відкинути. Однак, для немалих D ефекти розпаровування можуть бути суттєвими, тому з метою одержання коректного результату для струм-фазової залежності необхідно зберігати в рівнянні (1.0.3) доданок із надплинною швидкістю.

Дослідження струм-фазової залежності у надпровідних контактах для температур, близьких до критичної, із врахуванням ефектів розпаровування виконувалось у роботах [40–43, 58, 59] (див. також огляд [2]). Спільний результат усіх цих робіт — відмінна від простої синусоїдної (формули (1.0.4) та (1.0.5)), властивої для $D \ll 1$, залежність струму від різниці фаз.

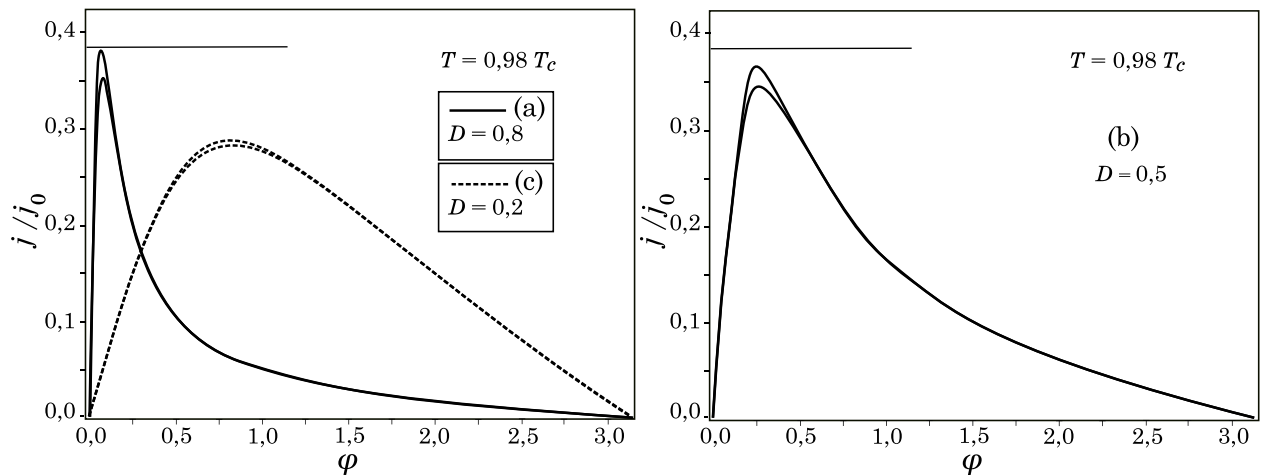


Рис. 1.2: Залежність струму від різниці фаз. Верхня крива відповідає чисельному результату, а нижня — аналітичному. Горизонтальна пряма позначає критичне значення струму в однорідному випадку. Рисунок взято з [41].

У [42] досліджувався вплив прозорості на залежність $j(\varphi)$ у тунельних надпровідних структурах типу SIS для температур, близьких до критичної, та за наявності немагнітних домішок. За основу в роботі взято так звані рівняння Узаделя [60], які є асимптотичною формою рівнянь мікроскопічної теорії надпровідності за наявності немагнітних домішок високої концентрації (це означає, що $l \ll \xi_0$). Літерою l позначають довжину вільного пробігу електронів. Було розглянуто кілька значень коефіцієнта проходження електронів і побудовано відповідні залежності струму від різниці фаз, а також одержано аналітичні результати для частинних інтервалів різниці фаз.

У роботах [40, 41] одержано досить ефективний для всього інтервалу зміни різниці фаз аналітичний результат для струм-фазової залежності тунельного контакту за відсутності домішок. Відповідна формула має такий вигляд:

$$j(\varphi) = \frac{\alpha \sin \varphi}{\beta - \cos \varphi}. \quad (1.0.6)$$

Тут величини α та β є функціями температури та коефіцієнта проходження електронів. Графічно залежність (1.0.6) зображена на рисунку (1.2). Як бачимо, залежність $j(\varphi)$ суттєво відрізняється від синусоїдної залежності зі збільшенням коефіцієнта проходження електронів, а максимум струму зміщується в напрямку області $\varphi < \frac{\pi}{2}$. Подібні дослідження виконані в [58].

Однак, дослідження впливу ефектів розпаровування на струм-фазову залежність іще далеке від завершення, особливо за наявності немагнітних домішок. І саме цей випадок буде детально розглядатись у нашому дослідженні.

Шляхом послідовного розміщення двох тунельних SIS — контактів одержимо шарувату надпровідну структуру типу SIS'IS [5, 61], у якій вважається, що модуль параметра впорядкування внутрішнього надпровідника є меншим за модуль параметра впорядкування зовнішніх надпровідників. Іншими словами, маємо нерівність $|\Delta'| < |\Delta|$. Якщо $|\Delta'| = 0$, то одержимо SINIS — контакт [62], у якому поєднані тунельний тип провідності з ефектом близькості. Яскравою особливістю надпровідних контактів із двома діелектричними прошарками є те, що в них може реалізовуватись так зване резонансне тунелювання [4, 63–66] і числове значення критичного струму такого контакту може перевищувати критичний струм контакту з одним діелектричним прошарком [4]. Такі контакти розглядаються як дуже перспективні у плані їхнього практичного використання [6, 67–70], що продемонстровано експериментами з можливості виготовлення джозефсонівських контактів із бажаними для інженерії властивостями, використовуючи відомі методи нашарування [6, 7].

У теоретичних дослідженнях джозефсонівського струму в двобар'єрних надпровідних структурах найпоширенішим є їхнє модельне представлення, у якому наявність діелектричних прошарків моделюється подвійним дельта-функційним бар'єром. Що стосується параметра впорядкування, то він вважається сталим у межах кожного з надпровідників, які утворюють контакт.

Розглядаючи двобар'єрний джозефсонівський контакт як зв'язану трирівневу квантово-механічну систему, метод типу фінманівського [34, 71] у [72] був уза-

гальнений на випадок SISIS — контакту, в якому всі три надпровідники вважаються ідентичними. У роботах [73, 74] з метою дослідження стаціонарних властивостей надпровідних структур типу SISIS використовувався модифікований метод Охти [75]. Одержана формула [74]

$$I = I_0 \left\{ \frac{\gamma}{2 \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right|} + 1 \right\} \sin \varphi \quad (1.0.7)$$

для залежності струму від різниці фаз містить два доданки: перший відповідає тунелюванню куперівських пар між дотичними надпровідниками, а другий доданок є наслідком прямої взаємодії між зовнішніми надпровідниками.

У формулі (1.0.7) величина φ є різницею фаз між зовнішніми надпровідниками. Якщо $\gamma = 0$, то струм-фазова залежність (1.0.7) перетвориться на класичну синусоїдну залежність струму від різниці фаз у тунельному SIS — контакті.

Хоча феноменологічний опис джозефсонівських контактів і дає змогу зрозуміти загальні риси властивих таким контактам властивостей, але все ж таки такий підхід не є задовільним. Особливо якщо взяти до уваги те, що ми маємо в розпорядженні потужні інструменти, в основі яких використовується мікроскопічна теорія надпровідності [31, 32, 46].

Використовуючи метод функцій Гріна, теоретичне дослідження особливостей протікання надпровідного струму в тривимірному SIS'IS — контакті за відсутності немагнітних домішок виконувалось у [5]. Показано, що в таких контактах можуть існувати два режими електронного транспорту залежно від товщини проміжного прошарку: когерентний режим, у якому струм через контакт є пропорційний прозорості бар'єра, та режим, у якому ця когерентність порушується зі збільшенням товщини проміжного надпровідника і струм стає пропорційним D^2 .

Експериментальне дослідження струму Джозефсона в двобар'єрних тунельних контактах із тонким проміжним прошарком (товщини порядку довжини когерентності) виконувалось у [4]. Використовуючи в основі експерименту двобар'єрну структуру типу Nb/Al — AlO_x — Nb/Al — AlO_x — Nb, автори підтвердили, що числове значення джозефсонівського струму через одинарний тунельний контакт є меншим, ніж через подвійний. З метою теоретичного пояснення цього ефекту використано модель SIS'IS — контакту з кусково-сталим представленням для параметра впорядкування. При цьому вважалось, що його модуль у внутрішньому надпровіднику S' є меншим, ніж у надпровіднику S. А це приводить до форму-

вання профілем параметра впорядкування відповідних надпровідників квантової потенціальної ями. Тому в проміжному прошарку існують дискретні енергетичні рівні, завдяки яким з'являються додаткові канали джозефсонівського тунелювання. Як наслідок, це приводить до збільшення критичного струму Джозефсона в двобар'єрних джозефсонівських контактах. Відповідні теоретичні розрахунки наведені також у [4], спираючись на формалізм рівнянь Боголюбова-де-Жена. Однак, одержати явний аналітичний результат для джозефсонівського струму в цьому формалізмі не вдається і лише використання процедури чисельних обчислень дозволило одержати залежність струму від різниці фаз.

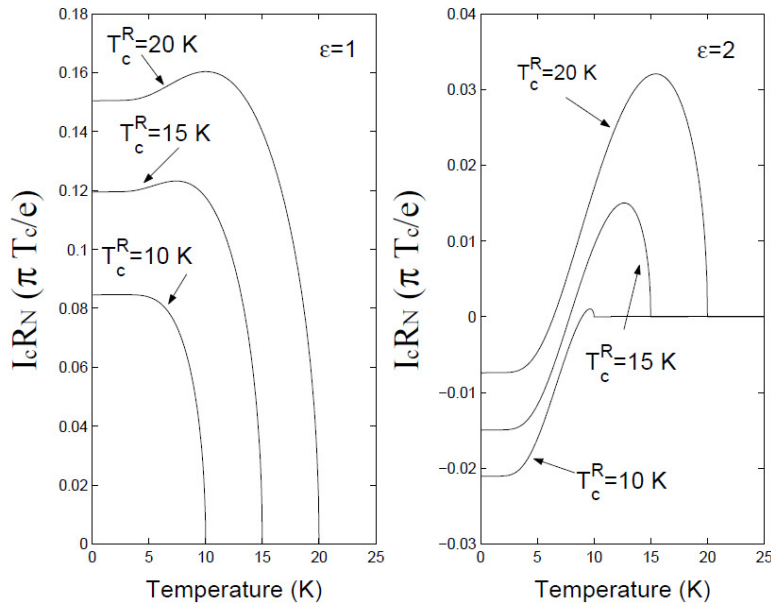


Рис. 1.3: Температурна залежність джозефсонівського струму в контакті між двозонним надпровідником s_{\pm} симетрії з критичною температурою $T_c = 41$ K та однозонним надпровідником з різною T_c^R , вказаною на графіку. Безрозмірний параметр $\varepsilon = \frac{R_{N,\sigma}}{R_{N,\pi}}$ відображає парціальні внески зон σ та π надпровідника з двома щілинами в опір тунельного контакту. Криві побудовано для сталих зв'язку в двозонному надпровіднику $V_{\pi\pi} = 0$ та $V_{\sigma\pi} = V_{\pi\sigma} = -0.35 |V_{\sigma\sigma}|$ [76].

У плані аналітики значно ефективнішим є квазікласичний підхід [46], суть якого полягає в побудові рівнянь теорії надпровідності для функцій, у яких виконано операцію згладжування просторової поведінки по атомній довжині. Це означає, що дрібномасштабні зміни нехтуються і беруться до уваги лише великомасштабні зміни (на довжинах порядку довжини когерентності). Досягнуті в результаті спрощення роблять цей метод найрезультативнішим у теорії надпровідних контактів.

В останні роки особлива увага приділяється тунельним джозефсонівським контактам на основі двозонних надпровідників. Причиною такого підвищеного інтересу до таких структур є відкриття у 2001 році надпровідності у бінарній сполуці MgB_2 з двома незалежними енергетичними щілинами [77]. Пізніше з'ясувалося, що багатозонність надпровідного стану властива також і залізовмісним надпровідникам [10, 11]. Ключове питання, яке постає в дослідженнях багатозонних надпровідників, є симетрія параметра впорядкування. Диборид магнію має дві s-хвильові енергетичні щілини з однаковими фазами в σ та π зонах, що властиво для випадку s_{++} симетрії параметра впорядкування [8, 9, 78]. Для залізовмісних надпровідників питання симетрії параметра впорядкування, незважаючи на численні дослідження, залишається відкритим [79, 80]. Розглядаються різні варіанти симетрії спарювання: p-хвильова [81], d-хвильова [82, 83] та незалежно запропонована в роботах [84–86] s_{\pm} симетрія. Однак, незважаючи на наявні теоретичні дослідження та експериментальні дані [87], у яких здебільшого схильні до реалізації s_{\pm} симетрії як найбільш енергетично вигідної для залізовмісних надпровідників, питання симетрії параметра впорядкування та кількості надпровідних щілин у такого класу надпровідників залишаються дискусійними й досі.

Додатковим і досить потужним джерелом інформації про симетрію параметра впорядкування є залежність струму від різниці фаз у надпровідних контактах. Це пов'язано з тим, що фазочутливі методики дають найточнішу інформацію про симетрію параметра впорядкування у незвичайних надпровідниках і є досить ефективним інструментом для її ідентифікації у надпровідних сполуках, де ця проблема залишається відкритою [88–95]. Тому це є додатковим чинником, що підживлює інтерес у дослідженні ефекту Джозефсона в надпровідних контактах на основі багатозонних надпровідників.

Численні роботи присвячені дослідженню ефекту Джозефсона в надпровідних контактах, що включають двозонні надпровідники [10, 76, 96–105]. Дуже корисним є також огляд [106]. Для дослідження таких контактів застосовуються різні підходи: формалізм рівнянь Боголюбова-де-Жена [96], метод тунельного гамільтоніана [97], метод функцій Гріна [98, 99], метод функціонального інтеграла [100].

Шляхом застосування квазікласичних рівнянь Айленбергера вдалось отримати формулу Амбегаокара-Баратова [103]

$$I_{ij} = \frac{\pi T}{e R_{ij}} \sum_{\omega_n} \frac{\Delta_{\mathcal{L}i}(\omega_n) \Delta_{\mathcal{R}j}(\omega_n)}{\sqrt{\omega_n^2 + \Delta_{\mathcal{L}i}^2(\omega_n)} \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_{\mathcal{R}j}^2(\omega_n)}}$$

для контактів, які утворено на основі двозонних надпровідників. Фізичні величини $\Delta_{\mathcal{L}i}(\omega_n)$ та $\Delta_{\mathcal{R}j}(\omega_n)$ є параметрами впорядкування лівого та правого надпровідників відповідно. Індeksi i та j позначають номер зони в надпровіднику та набувають значень 1 та 2. Фізична величина R_{ij} називається нормальним опором контакту для зон i та j .

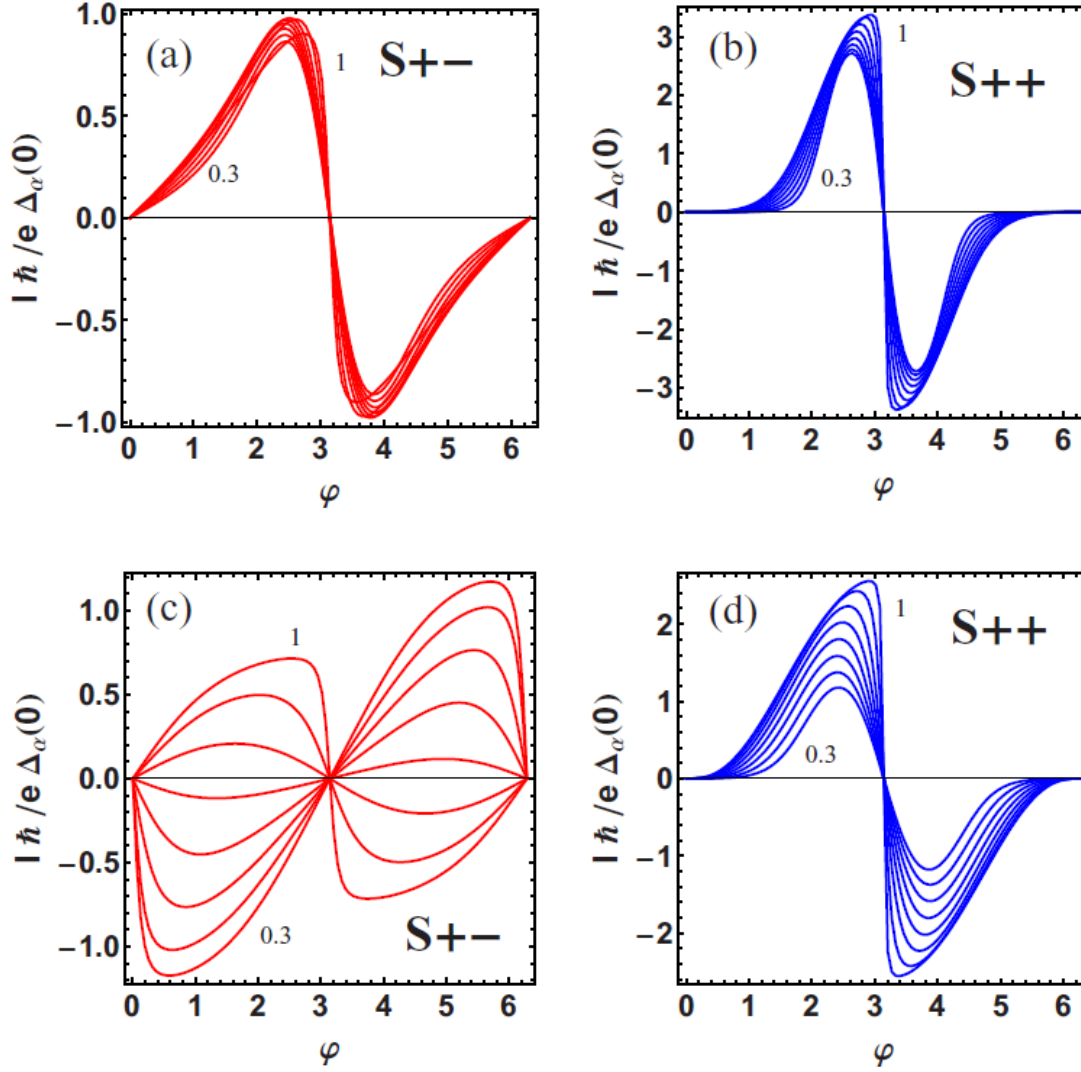


Рис. 1.4: Струм-фазові залежності для джозефсонівських контактів, які утворено на основі двозонних надпровідників із s_{\pm} симетрією та s_{++} симетрією. Графіки побудовано для різних параметрів інтерфейсу гетероструктури та надпровідних берегів. Також варто зауважити, що $T = 0.001 T_c$ [107].

Цікавий результат формула Амбегаокара-Баратова дає для тунельного контакту, коли один із електродів є двозонним надпровідником з s_{\pm} симетрією, а інший електрод є звичайним однозонним надпровідником [76]. У таких контактах, тобто при однакових зонних внесках у нормальний опір, струм може досягати максимуму при відмінних від нуля температурах. Якщо ж зонні внески в нормальний опір

є різними, то критичний струм контакту дорівнює нулеві при певній температурі, яка є відмінною від температури надпровідного переходу. Це проілюстровано на рисунку (1.3).

Така поведінка критичного струму вказує на перемикання основного стану джозефсонівської системи з 0 на π зі збільшенням температури. У [96] була виявлена можливість $0-\pi$ перемикання в $S_{\pm}IS$ — контактах при певному відношенні коефіцієнтів проходження електронів для кожної зони на інтерфейсі контакту.

Струм-фазова залежність точкового контакту, сформованого однозонним і багатозонним надпровідниками, досліджувалась у [101]. Узагальнюючи метод матриць переходу на випадок багатозонного надпровідника, у статті [102] розглянуто точковий контакт між двома двозонними надпровідниками.

Ефект Джозефсона в залізовмісних надпровідниках досліджувався переважно для контактів, утворених звичайним s-хвильовим надпровідником та залізовмісним двозонним надпровідником з s_{\pm} або s_{++} симетрією параметра впорядкування [78, 108–120]. Джозефсонівські контакти, в яких обидва залізовмісні надпровідники є двозонними, вивчались у роботах [97, 107, 121, 122]. Досить ефективна модель, в основі якої використовувався формалізм рівнянь Боголюбова-де-Жена, була запропонована в [107, 122] для опису ефекту Джозефсона в надпровідних контактах типів $S_{\pm}IS_{\pm}$ та $S_{++}IS_{++}$, коли обидва надпровідники є ідентичними двозонними надпровідниками. Шляхом застосування чисельного розв'язку рівнянь автори статті [107] одержали залежність струму від різниці фаз у таких контактах. Це проілюстровано на рисунку (1.4).

З того ж таки рисунка (1.4) слідує, що критичний струм джозефсонівського контакту на основі s_{++} надпровідників набуває більших значень, ніж для контакту на основі s_{\pm} надпровідників. Проте, більш вагомим є висновок про те, що лише для надпровідників із s_{\pm} симетрією параметра впорядкування та лише при певних співвідношеннях параметрів інтерфейсу та надпровідних берегів можлива реалізація π -контакту. Аналіз температурної залежності для критичного струму підтверджує можливість основного стану джозефсонівського контакту з різницею фаз, рівною π .

У згаданих вище роботах, присвячених дослідженню ефекту Джозефсона в надпровідних контактах на основі двозонних надпровідників, переважно використовуються моделі, що приводять до необхідності знаходження розв'язків рівнянь Горькова або Боголюбова-де-Жена. Однак, ця задача є доволі складною. Прості-

шою є схема, в основі якої використовують квазікласичні рівняння, що можуть бути записані у формі Айленбергера та містити функції Гріна зі збіжними аргументами. Однак, зручнішими є квазікласичні рівняння у t -представленні для функцій Гріна з незбіжними аргументами, що дозволяє використати властивості аналітичності функцій Гріна та просто виконати їхню побудову [32, 46]. Такий підхід продемонстрував свою ефективність у випадку надпровідних контактів на основі однозонних надпровідників. Щодо надпровідних контактів на основі двозонних надпровідників, то квазікласичні рівняння у t -представленні вперше були використані в наших дослідженнях [16], результати яких і будуть представлені в даній дисертації.

РОЗДІЛ 2

ВПЛИВ ЕФЕКТІВ РОЗПАРОВУВАННЯ НА ЗАЛЕЖНІСТЬ СТРУМУ ВІД РІЗНИЦІ ФАЗ У ТУНЕЛЬНИХ ДЖОЗЕФСОНІВСЬКИХ КОНТАКТАХ ІЗ НЕМАГНІТНИМИ ДОМІШКАМИ ДОВІЛЬНОЇ КОНЦЕНТРАЦІЇ

У цьому розділі дисертації досліджено вплив ефектів розпаровування на форму залежності густини струму j від різниці фаз φ у тунельних надпровідних контактах типу SIS за наявності немагнітних домішок довільної концентрації. Розглядатиметься загальний випадок без додаткових умов на прозорість діелектричного прошарку D . Область температур вважається близькою до критичної, тому в основі дослідження використовується теорія Гінзбурга-Ландау [54], яка є асимптотичною формою мікроскопічної теорії надпровідності поблизу критичної температури T_c [46]. У цій теорії густина струму подається через параметр впорядкування, просторова поведінка якого описується нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку — рівнянням Гінзбурга-Ландау [54].

Знаходження граничних умов для рівняння Гінзбурга-Ландау є ключовою проблемою, що постає при застосуванні відповідної теорії до опису надпровідних контактів. У поданій тут задачі вирішити цю проблему вдається завдяки тому, що поблизу IS — границі, тобто на відстанях порядку довжини когерентності ξ_0 , просторова поведінка параметра впорядкування описується системою двох лінійних інтегральних рівнянь [32], з яких, використовуючи потужний метод квазіортогональності до асимптотики [57], знаходяться граничні умови.

Залежність густини струму j від різниці фаз φ для різних значень прозорості діелектричного прошарку D та для різних значень довжини вільного пробігу електронів l проаналізовано шляхом виконання чисельних розрахунків. Крім того вдається розвинути досить ефективну аналітику. Нова аналітична формула для струм-фазової залежності виявилася несинусоїдною і доволі добре узгоджується з чисельними розрахунками.

Використовуючи одержану в цьому розділі нову формулу для струм-фазової залежності, також буде проаналізовано динаміку флюксонів у тунельному надпровідному SIS — контакті.

2.1. Модель та основні рівняння

Для початку нам потрібно розібратися з геометрією задачі. Будемо вважати, що півпростори $z < 0$ та $z > 0$ зайняті двома масивними надпровідниками. Що стосується тонкої діелектричної плівки, то вона займає площину $z = 0$. Якщо ми досліджуємо тунельні надпровідні контакти типу SIS із немагнітними домішками довільної концентрації, то нам варто брати до уваги те, що просторову поведінку параметра впорядкування поблизу границі IS потрібно описувати за допомогою замкненої системи двох лінійних інтегральних рівнянь [32]

$$\begin{aligned} \Delta(\zeta) = & \frac{\rho}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_n(\zeta') \left[\exp \left\{ -\frac{|2n'+1|}{x} |\zeta - \zeta'| \right\} + \right. \\ & \left. + (\text{sign}(\zeta\zeta')) R(x) \exp \left\{ -\frac{|2n'+1|}{x} (|\zeta| + |\zeta'|) \right\} \right] d\zeta' \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

та

$$\begin{aligned} \Delta_n(\zeta) = & \Delta(\zeta) + \frac{1}{2\lambda} \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_n(\zeta') \left[\exp \left\{ -\frac{|2n'+1|}{x} |\zeta - \zeta'| \right\} + \right. \\ & \left. + (\text{sign}(\zeta\zeta')) R(x) \exp \left\{ -\frac{|2n'+1|}{x} (|\zeta| + |\zeta'|) \right\} \right] d\zeta'. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

У двох лінійних інтегральних рівняннях (2.1.1) та (2.1.2) присутня безрозмірна змінна $\zeta = \frac{z}{\xi_0}$. Тут ми маємо довжину когерентності $\xi_0 = \frac{v_0}{2\pi T_c}$, у формулі для якої фігурує швидкість Фермі v_0 . У лінійному інтегральному рівнянні (2.1.1) присутня безрозмірна константа зв'язку $\rho = |g| N(0)$, у формулі для якої фігурують константа ефективного притягання g та густина електронних станів на поверхні фермі-сфери $N(0) = \frac{m^2 v_0}{2\pi^2}$. У лінійному інтегральному рівнянні (2.1.2) присутня безрозмірна довжина вільного пробігу електронів $\lambda = \frac{l}{\xi_0}$, яка визначає рівень забруднення надпровідника. Якщо $\lambda \ll 1$, то надпровідник є гранично брудний. А якщо $\lambda \gg 1$, то надпровідник є досить чистий. Фізична величина λ фігурує також у співвідношенні $|2n'+1| = |2n+1| + \frac{1}{\lambda}$, за допомогою якого визначається безрозмірне число n' . Змінна інтегрування $x = \cos \theta$ містить кут θ падіння електрона на границю IS.

Функцію $R(x) = \frac{\alpha^2}{x^2 + \alpha^2}$ називають коефіцієнтом відбивання електронів від дельта-функційного потенціального бар'єра $U(z) = U_0 \delta(z)$, за допомогою якого

і моделюється тонка діелектрична плівка. Також ми запровадили безрозмірний параметр $\alpha = \frac{mU_0}{p_0}$, який містить фермі-імпульс $p_0 = mv_0$. Поняття прозорості діелектричного прошарку $D(x) = 1 - R(x)$ ми теж будемо використовувати. Має також місце зв'язок $\alpha^2 = \frac{1}{D(1)} - 1$. Якщо $D(1) \equiv D$, то тоді $\alpha^2 = \frac{1}{D} - 1$.

Той факт, що лінійні інтегральні рівняння (2.1.1) та (2.1.2) описують просторову поведінку параметра впорядкування поблизу границі IS, означає, що в правому надпровіднику ($z > 0$) ці рівняння є справедливими для $z \sim \xi_0$.

За наявності немагнітних домішок довільної концентрації характерна довжина теорії Гінзбурга-Ландау визначається за допомогою формули

$$\xi(T) = \xi_0 \left\{ \frac{7\zeta(3)}{12} \frac{\chi\left(\frac{\xi_0}{l}\right)}{1 - \frac{T}{T_c}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (2.1.3)$$

у якій присутні позначення $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \cong 1,20$ та

$$\chi\left(\frac{\xi_0}{l}\right) = \frac{8}{7\zeta(3)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \left\{ 2n+1 + \frac{\xi_0}{l} \right\}}. \quad (2.1.4)$$

Оскільки $T \lesssim T_c$, то з формули (2.1.3) випливає, що $\xi_0 \ll \xi(T)$. У глибині правого надпровідника, тобто для $z \sim \xi(T)$, параметр впорядкування буде вже розв'язком диференціального рівняння Гінзбурга-Ландау

$$\frac{\xi^2(T)}{\xi_0^2} \Delta''(\zeta) - \frac{1}{\Delta_\infty^2} |\Delta(\zeta)|^2 \Delta(\zeta) + \Delta(\zeta) = 0, \quad (2.1.5)$$

у якому фігурує позначення

$$\Delta_\infty^2 = \frac{8\pi^2 T_c^2}{7\zeta(3)} \left(1 - \frac{T}{T_c} \right).$$

Оскільки перехід від лінійних інтегральних рівнянь (2.1.1) та (2.1.2) до диференціального рівняння Гінзбурга-Ландау (2.1.5) має бути плавним, то обов'язково знайдеться така точка z , у якій усі три рівняння зберігатимуть свою чинність одночасно. Для такої точки має місце умова

$$\xi_0 \ll z \ll \xi(T). \quad (2.1.6)$$

З нерівності (2.1.6) видно, що точка $z \in$ «нескінченності» у порівнянні з довжиною когерентності ξ_0 та «нулем» у порівнянні з характерною довжиною теорії Гінзбурга-Ландау $\xi(T)$. Іншими словами, нам потрібно спочатку розв'язати замкнену систему лінійних інтегральних рівнянь (2.1.1) та (2.1.2) з метою отримати асимптотику параметра впорядкування $\Delta(\zeta)$ на «нескінченності», яку далі потрібно буде прирівняти до асимптотики розв'язку диференціального рівняння Гінзбурга-Ландау (2.1.5) в «нулі». Отриманий аналітичний вираз для параметра впорядкування $\Delta(\zeta)$ потрібно буде підставляти у формулу [32, 46]

$$j(\zeta) = i \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2} \frac{env_0}{p_0 \xi_0 T_c^2} \left(\Delta \frac{d\Delta^*}{d\zeta} - \Delta^* \frac{d\Delta}{d\zeta} \right) \chi \left(\frac{\xi_0}{l} \right) \quad (2.1.7)$$

для густини струму в мікроскопічній теорії Гінзбурга-Ландау за наявності немагнітних домішок довільної концентрації. У формулі (2.1.7) з'явилася фізична величина n , яка називається концентрацією електронів.

2.2. Лінійні інтегральні рівняння

Замкнену систему двох лінійних інтегральних рівнянь (2.1.1) та (2.1.2) потрібно розв'язати. Буде значно зручніше, якщо ми будемо робити це шляхом переходу до парних і непарних функцій. Варто зауважити, що це дозволить нам виконувати інтегрування по ζ' від 0 до $+\infty$ замість наявного в лінійних інтегральних рівняннях (2.1.1) та (2.1.2) інтегрування по ζ' від $-\infty$ до $+\infty$.

Нехай маємо такі парні функції:

$$\Delta_s(\zeta) = \frac{\Delta(\zeta) + \Delta(-\zeta)}{2}, \quad \Delta_{n,s}(\zeta) = \frac{\Delta_n(\zeta) + \Delta_n(-\zeta)}{2}. \quad (2.2.1)$$

Тоді замкнена система лінійних інтегральних рівнянь (2.1.1) та (2.1.2) дозволяє отримати для парних функцій (2.2.1) таку замкнену систему:

$$\begin{aligned} \Delta_s(\zeta) &= \sum_n \int_0^{+\infty} \Delta_{n,s}(\zeta') \left\{ K^{(n)}(\zeta - \zeta') + K^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta', \\ \Delta_{n,s}(\zeta) &= \Delta_s(\zeta) + \int_0^{+\infty} \Delta_{n,s}(\zeta') \left\{ \tilde{K}^{(n)}(\zeta - \zeta') + \tilde{K}^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta'. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

З метою спрощення записів у формулі (2.2.2) використано символ \sum_n замість символу $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}$. Також ми запровадили такі позначення:

$$\begin{aligned} K^{(n)}(\zeta) &= \frac{\rho}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x} \exp\left(-\frac{|2n'+1|}{x} |\zeta|\right), \\ \tilde{K}^{(n)}(\zeta) &= \frac{1}{2\lambda} \int_0^1 \frac{dx}{x} \exp\left(-\frac{|2n'+1|}{x} |\zeta|\right). \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Варто зауважити, що для інтегральних ядер (2.2.3) виконуються деякі дуже корисні співвідношення. Ми будемо отримувати ті співвідношення, використовуючи добре відомі властивості інтегралів у симетричних межах від парної та непарної підінтегральних функцій. Розгляньмо для початку інтеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left\{ K^{(n)}(\zeta - \zeta') + K^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K^{(n)}(\zeta - \zeta') + K^{(n)}(\zeta + \zeta')}{2} d\zeta' = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} K^{(n)}(\zeta' - \zeta) d\zeta' + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} K^{(n)}(\zeta' + \zeta) d\zeta'. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

У формулі (2.2.4) взято до уваги те, що $K^{(n)}(-\zeta) = K^{(n)}(\zeta)$. Шляхом застосування заміни $\zeta' - \zeta = \zeta''$ та $d\zeta' = d\zeta''$ можна виконати перетворення

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K^{(n)}(\zeta' - \zeta) d\zeta' = \int_{-\infty}^{+\infty} K^{(n)}(\zeta'') d\zeta''. \quad (2.2.5)$$

Заміни $\zeta' + \zeta = \zeta''$ та $d\zeta' = d\zeta''$ дозволяють виконати перетворення

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K^{(n)}(\zeta' + \zeta) d\zeta' = \int_{-\infty}^{+\infty} K^{(n)}(\zeta'') d\zeta''. \quad (2.2.6)$$

Інтеграли (2.2.5) та (2.2.6) підставляємо у формулу (2.2.4). Замість змінної інтегрування ζ'' будемо писати ζ' . Тоді ми отримуємо інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \left\{ K^{(n)}(\zeta - \zeta') + K^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' = \int_{-\infty}^{+\infty} K^{(n)}(\zeta') d\zeta' = 2 \int_0^{+\infty} K^{(n)}(\zeta') d\zeta',$$

який за допомогою перетворення

$$2 \int_0^{+\infty} K^{(n)}(\zeta') d\zeta' = \rho \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{|2n'+1|\zeta'}{x}\right) d\zeta' = \frac{\rho}{|2n'+1|}$$

зводиться до інтеграла

$$\int_0^{+\infty} \left\{ K^{(n)}(\zeta - \zeta') + K^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' = \frac{\rho}{|2n'+1|}. \quad (2.2.7)$$

Якщо взяти до уваги тотожність [55]

$$\rho \sum_n \frac{1}{|2n+1|} = 1,$$

яка називається правилом «обрізання» на дебаївській частоті ω_D , то на основі інтеграла (2.2.7) можна отримати інтеграл

$$\sum_n \left| \frac{2n'+1}{2n+1} \right| \int_0^{+\infty} \left\{ K^{(n)}(\zeta - \zeta') + K^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' = 1. \quad (2.2.8)$$

Розгляньмо тепер інтеграл

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^{+\infty} \zeta' \left\{ K^{(n)}(\zeta - \zeta') - K^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta' \left\{ K^{(n)}(\zeta - \zeta') - K^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta' K^{(n)}(\zeta' - \zeta) d\zeta' - \\ & \quad - \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta' K^{(n)}(\zeta' + \zeta) d\zeta'. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Заміни $\zeta' - \zeta = \zeta''$ та $d\zeta' = d\zeta''$ дозволяють виконати перетворення

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \zeta' K^{(n)}(\zeta' - \zeta) d\zeta' = \int_{-\infty}^{+\infty} (\zeta + \zeta'') K^{(n)}(\zeta'') d\zeta''. \quad (2.2.10)$$

Заміни $\zeta' + \zeta = \zeta''$ та $d\zeta' = d\zeta''$ дозволяють виконати перетворення

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \zeta' K^{(n)}(\zeta' + \zeta) d\zeta' = \int_{-\infty}^{+\infty} (\zeta'' - \zeta) K^{(n)}(\zeta'') d\zeta''. \quad (2.2.11)$$

Оскільки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \zeta'' K^{(n)}(\zeta'') d\zeta'' = 0,$$

то інтеграли (2.2.10) та (2.2.11) перетворюються на інтеграли

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \zeta' K^{(n)}(\zeta' - \zeta) d\zeta' = \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} K^{(n)}(\zeta'') d\zeta'' \quad (2.2.12)$$

та

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \zeta' K^{(n)}(\zeta' + \zeta) d\zeta' = -\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} K^{(n)}(\zeta'') d\zeta'' \quad (2.2.13)$$

відповідно.

Інтеграли (2.2.12) та (2.2.13) підставляємо у формулу (2.2.9). Замість змінної інтегрування ζ'' будемо писати ζ' . Тоді ми отримуємо інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \zeta' \left\{ K^{(n)}(\zeta - \zeta') - K^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' = \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} K^{(n)}(\zeta') d\zeta' = 2\zeta \int_0^{+\infty} K^{(n)}(\zeta') d\zeta',$$

остаточний вигляд якого є таким:

$$\int_0^{+\infty} \zeta' \left\{ K^{(n)}(\zeta - \zeta') - K^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' = \frac{\rho\zeta}{|2n' + 1|}. \quad (2.2.14)$$

На основі тотожності (2.2.14) можна отримати тотожність

$$\sum_n \left| \frac{2n' + 1}{2n + 1} \right| \int_0^{+\infty} \zeta' \left\{ K^{(n)}(\zeta - \zeta') - K^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' = \zeta. \quad (2.2.15)$$

З формули (2.2.3) випливає, що $\tilde{K}^{(n)}(\zeta) = \frac{1}{\rho\lambda} K^{(n)}(\zeta)$. Це означає, що на основі інтегралів (2.2.7) та (2.2.14) можна вже одразу отримати інтеграли

$$\int_0^{+\infty} \left\{ \tilde{K}^{(n)}(\zeta - \zeta') + \tilde{K}^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' = \frac{1}{\lambda |2n' + 1|} \quad (2.2.16)$$

та

$$\int_0^{+\infty} \zeta' \left\{ \tilde{K}^{(n)}(\zeta - \zeta') - \tilde{K}^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' = \frac{\zeta}{\lambda |2n' + 1|} \quad (2.2.17)$$

відповідно.

Справедливість отриманих тотожностей (2.2.8) та (2.2.16) дозволяє зробити висновок про те, що замкнена система (2.2.2) двох лінійних інтегральних рівнянь має точний розв'язок, який можна подати у вигляді таких двох формул:

$$\Delta_s(\zeta) = \mathcal{A}, \quad \Delta_{n,s}(\zeta) = \left| \frac{2n' + 1}{2n + 1} \right| \mathcal{A}. \quad (2.2.18)$$

У формулі (2.2.18) ми запровадили деяку сталу \mathcal{A} .

Нехай маємо такі непарні функції:

$$\Delta_a(\zeta) = \frac{\Delta(\zeta) - \Delta(-\zeta)}{2}, \quad \Delta_{n,a}(\zeta) = \frac{\Delta_n(\zeta) - \Delta_n(-\zeta)}{2}. \quad (2.2.19)$$

Тоді замкнена система лінійних інтегральних рівнянь (2.1.1) та (2.1.2) дозволяє отримати для непарних функцій (2.2.19) таку замкнену систему:

$$\begin{aligned} \Delta_a(\zeta) &= \sum_n \int_0^{+\infty} \Delta_{n,a}(\zeta') \left\{ K^{(n)}(\zeta - \zeta') - K^{(n)}(\zeta + \zeta') + \right. \\ &\quad \left. + (\text{sign}(\zeta\zeta')) \left[K^{(n)}(|\zeta| + |\zeta'|) + K_D^{(n)}(|\zeta| + |\zeta'|) \right] \right\} d\zeta', \\ \Delta_{n,a}(\zeta) &= \Delta_a(\zeta) + \int_0^{+\infty} \Delta_{n,a}(\zeta') \left\{ \tilde{K}^{(n)}(\zeta - \zeta') - \tilde{K}^{(n)}(\zeta + \zeta') + \right. \\ &\quad \left. + (\text{sign}(\zeta\zeta')) \left[\tilde{K}^{(n)}(|\zeta| + |\zeta'|) + \tilde{K}_D^{(n)}(|\zeta| + |\zeta'|) \right] \right\} d\zeta'. \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

У формулі (2.2.20) ми запровадили такі позначення:

$$\begin{aligned} K_D^{(n)}(\zeta) &= \frac{\rho}{2} \int_0^1 \frac{\tau(x) dx}{x} \exp\left(-\frac{|2n' + 1|}{x} |\zeta|\right), \\ \tilde{K}_D^{(n)}(\zeta) &= \frac{1}{2\lambda} \int_0^1 \frac{\tau(x) dx}{x} \exp\left(-\frac{|2n' + 1|}{x} |\zeta|\right). \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Тут $\tau(x) = 2R(x) - 1 = 1 - 2D(x)$. Замкнену систему (2.2.20) можна подати в дещо простішому вигляді для випадку, коли $\zeta > 0$. Тоді матимемо:

$$\begin{aligned} \Delta_a(\zeta) &= \sum_n \int_0^{+\infty} \Delta_{n,a}(\zeta') \left\{ K^{(n)}(\zeta - \zeta') + K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta', \\ \Delta_{n,a}(\zeta) &= \Delta_a(\zeta) + \int_0^{+\infty} \Delta_{n,a}(\zeta') \left\{ \tilde{K}^{(n)}(\zeta - \zeta') + \tilde{K}_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta'. \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

За допомогою детального аналізу замкненої системи (2.2.22) лінійних інтегральних рівнянь для функцій $\Delta_a(\zeta)$ та $\Delta_{n,a}(\zeta)$ можна зробити висновок про те, що асимптотики цих функцій для випадку, коли $\zeta \rightarrow +\infty$ ($z \gg \xi_0$), є лінійними. Це дає нам змогу записати функції $\Delta_a(\zeta)$ та $\Delta_{n,a}(\zeta)$ у такому вигляді:

$$\begin{aligned}\Delta_a(\zeta) &= \zeta + q_\infty + \psi_a(\zeta), \\ \Delta_{n,a}(\zeta) &= \left| \frac{2n'+1}{2n+1} \right| (\zeta + q_\infty) + \psi_{n,a}(\zeta).\end{aligned}\quad (2.2.23)$$

Для функцій $\psi_a(\zeta)$ та $\psi_{n,a}(\zeta)$, які фігурують у формулі (2.2.23), мають місце такі дві умови:

$$\begin{aligned}\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} \psi_a(\zeta) &= 0, \\ \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} \psi_{n,a}(\zeta) &= 0.\end{aligned}\quad (2.2.24)$$

Далі потрібно підставляти вирази (2.2.23) у перше лінійне інтегральне рівняння замкненої системи (2.2.22). Тоді ми приходимо до формули

$$\begin{aligned}&\zeta + q_\infty + \psi_a(\zeta) = \\ &= \sum_n \int_0^{+\infty} \left\{ \left| \frac{2n'+1}{2n+1} \right| (\zeta' + q_\infty) + \psi_{n,a}(\zeta') \right\} \left\{ K^{(n)}(\zeta - \zeta') + K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta',\end{aligned}$$

яку можна подати також і в такому вигляді:

$$\begin{aligned}\zeta + q_\infty + \psi_a(\zeta) &= \sum_n \left| \frac{2n'+1}{2n+1} \right| \int_0^{+\infty} \zeta' \left\{ K^{(n)}(\zeta - \zeta') - K^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' + \\ &+ \sum_n \left| \frac{2n'+1}{2n+1} \right| \int_0^{+\infty} \zeta' \left\{ K^{(n)}(\zeta + \zeta') + K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' + \\ &+ q_\infty \sum_n \left| \frac{2n'+1}{2n+1} \right| \int_0^{+\infty} \left\{ K^{(n)}(\zeta - \zeta') + K^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' - \\ &- q_\infty \sum_n \left| \frac{2n'+1}{2n+1} \right| \int_0^{+\infty} \left\{ K^{(n)}(\zeta + \zeta') - K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' + \\ &+ \sum_n \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta') \left\{ K^{(n)}(\zeta - \zeta') + K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' .\end{aligned}$$

Якщо взяти до уваги інтеграли (2.2.8) та (2.2.15), то щойно отриману тотожність можна перетворити на тотожність

$$\begin{aligned} \psi_a(\zeta) &= \sum_n \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta') \left\{ K^{(n)}(\zeta - \zeta') + K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' + \\ &+ \sum_n \left| \frac{2n'+1}{2n+1} \right| \int_0^{+\infty} \zeta' \left\{ K^{(n)}(\zeta + \zeta') + K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' - \\ &- q_\infty \sum_n \left| \frac{2n'+1}{2n+1} \right| \int_0^{+\infty} \left\{ K^{(n)}(\zeta + \zeta') - K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta'. \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

Далі потрібно підставляти вирази (2.2.23) у друге лінійне інтегральне рівняння замкненої системи (2.2.22). Тоді ми приходимо до формули

$$\begin{aligned} \psi_{n,a}(\zeta) - \psi_a(\zeta) &= \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta') \left\{ \tilde{K}^{(n)}(\zeta - \zeta') + \tilde{K}_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' + \\ &+ \left| \frac{2n'+1}{2n+1} \right| \int_0^{+\infty} \zeta' \left\{ \tilde{K}^{(n)}(\zeta + \zeta') + \tilde{K}_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' - \\ &- q_\infty \left| \frac{2n'+1}{2n+1} \right| \int_0^{+\infty} \left\{ \tilde{K}^{(n)}(\zeta + \zeta') - \tilde{K}_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta', \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

для отримання якої взято до уваги інтеграли (2.2.16) та (2.2.17).

2.3. Метод квазіортогональності до асимптотики

З метою знаходження невідомої сталої q_∞ ми спочатку будемо інтегрувати лінійне інтегральне рівняння (2.2.25) по ζ від 0 до $+\infty$. Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \psi_a(\zeta) d\zeta &= \sum_n \int_0^{+\infty} d\zeta \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta') \left\{ K^{(n)}(\zeta - \zeta') + K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' + \\ &+ \sum_n \left| \frac{2n'+1}{2n+1} \right| \int_0^{+\infty} d\zeta \int_0^{+\infty} \zeta' \left\{ K^{(n)}(\zeta + \zeta') + K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' - \\ &- q_\infty \sum_n \left| \frac{2n'+1}{2n+1} \right| \int_0^{+\infty} d\zeta \int_0^{+\infty} \left\{ K^{(n)}(\zeta + \zeta') - K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta'. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

У подвійних інтегралах отриманої тотожності (2.3.1) доцільно буде змінити порядок інтегрування і виконати заміни $\zeta \longleftrightarrow \zeta'$. Це означає, що ми можемо перетворити тотожність (2.3.1) на тотожність

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \psi_a(\zeta) d\zeta &= \sum_n \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta) d\zeta \int_0^{+\infty} \left\{ K^{(n)}(\zeta - \zeta') + K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' + \\ &+ \sum_n \left| \frac{2n' + 1}{2n + 1} \right| \int_0^{+\infty} \zeta d\zeta \int_0^{+\infty} \left\{ K^{(n)}(\zeta + \zeta') + K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' - \\ &- q_\infty \sum_n \left| \frac{2n' + 1}{2n + 1} \right| \int_0^{+\infty} d\zeta \int_0^{+\infty} \left\{ K^{(n)}(\zeta + \zeta') - K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta'. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

У правій частині тотожності (2.3.2) ми будемо спочатку обчислювати другий і третій подвійні інтеграли. Для цього потрібно взяти до уваги такі функції:

$$\begin{aligned} K^{(n)}(\zeta + \zeta') + K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') &= \rho \int_0^1 \frac{R(x) dx}{x} \exp \left\{ -\frac{|2n' + 1|}{x} (\zeta + \zeta') \right\}, \\ K^{(n)}(\zeta + \zeta') - K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') &= \rho \int_0^1 \frac{D(x) dx}{x} \exp \left\{ -\frac{|2n' + 1|}{x} (\zeta + \zeta') \right\}. \end{aligned}$$

Маючи ці функції, можна обчислити такі інтеграли:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \zeta d\zeta \int_0^{+\infty} \left\{ K^{(n)}(\zeta + \zeta') + K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' &= \frac{\rho}{|2n' + 1|^3} \int_0^1 x^2 R(x) dx, \\ \int_0^{+\infty} d\zeta \int_0^{+\infty} \left\{ K^{(n)}(\zeta + \zeta') - K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' &= \frac{\rho}{|2n' + 1|^2} \int_0^1 x D(x) dx. \end{aligned}$$

Тоді тотожність (2.3.2) набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \psi_a(\zeta) d\zeta &= \sum_n \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta) d\zeta \int_0^{+\infty} \left\{ K^{(n)}(\zeta - \zeta') + K^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' + \\ &+ \sum_n \frac{\rho}{|2n + 1| |2n' + 1|^2} \int_0^1 x^2 R(x) dx - \sum_n \frac{\rho q_\infty}{|2n + 1| |2n' + 1|} \int_0^1 x D(x) dx - \\ &- \sum_n \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta) d\zeta \int_0^{+\infty} \left\{ K^{(n)}(\zeta + \zeta') - K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta'. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Якщо взяти до уваги інтеграл (2.2.7) та інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \left\{ K^{(n)}(\zeta + \zeta') - K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' = \frac{\rho}{|2n' + 1|} \int_0^1 D(x) \exp\left(-\frac{|2n' + 1|\zeta}{x}\right) dx,$$

то тотожність (2.3.3) перетвориться на тотожність

$$\begin{aligned} & \sum_n \frac{\rho}{|2n + 1||2n' + 1|^2} \int_0^1 x^2 R(x) dx - \sum_n \frac{\rho q_\infty}{|2n + 1||2n' + 1|} \int_0^1 x D(x) dx - \\ & - \sum_n \frac{\rho}{|2n' + 1|} \int_0^1 D(x) dx \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta) \exp\left(-\frac{|2n' + 1|\zeta}{x}\right) d\zeta = \int_0^{+\infty} \psi_a(\zeta) d\zeta - \\ & - \sum_n \frac{\rho}{|2n' + 1|} \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Далі потрібно інтегрувати тотожність (2.2.26) по ζ від 0 до $+\infty$. У подвійних інтегралах, які виникнуть, потрібно буде змінити порядок інтегрування і виконати заміни $\zeta \longleftrightarrow \zeta'$. Тоді ми можемо записати, що

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta) d\zeta - \int_0^{+\infty} \psi_a(\zeta) d\zeta = \\ & = \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta) d\zeta \int_0^{+\infty} \left\{ \tilde{K}^{(n)}(\zeta - \zeta') + \tilde{K}_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' + \\ & + \left| \frac{2n' + 1}{2n + 1} \right| \int_0^{+\infty} \zeta d\zeta \int_0^{+\infty} \left\{ \tilde{K}^{(n)}(\zeta + \zeta') + \tilde{K}_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' - \\ & - q_\infty \left| \frac{2n' + 1}{2n + 1} \right| \int_0^{+\infty} d\zeta \int_0^{+\infty} \left\{ \tilde{K}^{(n)}(\zeta + \zeta') - \tilde{K}_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta'. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Другий і третій подвійні інтеграли, які фігурують у правій частині щойно отриманої тотожності (2.3.5) перетворюємо за допомогою таких функцій:

$$\begin{aligned} \tilde{K}^{(n)}(\zeta + \zeta') + \tilde{K}_D^{(n)}(\zeta + \zeta') &= \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \frac{R(x) dx}{x} \exp\left\{-\frac{|2n' + 1|}{x}(\zeta + \zeta')\right\}, \\ \tilde{K}^{(n)}(\zeta + \zeta') - \tilde{K}_D^{(n)}(\zeta + \zeta') &= \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \frac{D(x) dx}{x} \exp\left\{-\frac{|2n' + 1|}{x}(\zeta + \zeta')\right\}. \end{aligned}$$

Маючи ці функції, можна обчислити такі інтеграли:

$$\int_0^{+\infty} \zeta d\zeta \int_0^{+\infty} \left\{ \tilde{K}^{(n)}(\zeta + \zeta') + \tilde{K}_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' = \frac{1}{\lambda |2n' + 1|^3} \int_0^1 x^2 R(x) dx,$$

$$\int_0^{+\infty} d\zeta \int_0^{+\infty} \left\{ \tilde{K}^{(n)}(\zeta + \zeta') - \tilde{K}_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' = \frac{1}{\lambda |2n' + 1|^2} \int_0^1 x D(x) dx.$$

Тоді тотожність (2.3.5) набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta) d\zeta - \int_0^{+\infty} \psi_a(\zeta) d\zeta = \\ & = \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta) d\zeta \int_0^{+\infty} \left\{ \tilde{K}^{(n)}(\zeta - \zeta') + \tilde{K}^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' + \\ & + \frac{1}{\lambda |2n + 1| |2n' + 1|^2} \int_0^1 x^2 R(x) dx - \frac{q_\infty}{\lambda |2n + 1| |2n' + 1|} \int_0^1 x D(x) dx - \\ & - \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta) d\zeta \int_0^{+\infty} \left\{ \tilde{K}^{(n)}(\zeta + \zeta') - \tilde{K}_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta'. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Якщо взяти до уваги інтеграл (2.2.16) та інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \left\{ \tilde{K}^{(n)}(\zeta + \zeta') - \tilde{K}_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' = \frac{1}{\lambda |2n' + 1|} \int_0^1 D(x) \exp\left(-\frac{|2n' + 1|\zeta}{x}\right) dx,$$

то тотожність (2.3.6) перетвориться на тотожність

$$\begin{aligned} & \frac{q_\infty}{\lambda |2n + 1| |2n' + 1|} \int_0^1 x D(x) dx - \frac{1}{\lambda |2n + 1| |2n' + 1|^2} \int_0^1 x^2 R(x) dx + \\ & + \frac{1}{\lambda |2n' + 1|} \int_0^1 D(x) dx \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta) \exp\left(-\frac{|2n' + 1|\zeta}{x}\right) d\zeta = \int_0^{+\infty} \psi_a(\zeta) d\zeta - \\ & - \left| \frac{2n + 1}{2n' + 1} \right| \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Тотожність (2.3.7) потрібно домножити на $\frac{\rho}{|2n+1|}$ та просумувати отриманий результат по n від $-\infty$ до $+\infty$. Тоді ми отримуємо тотожність

$$\begin{aligned} & \sum_n \frac{\rho q_\infty}{\lambda |2n+1|^2 |2n'+1|} \int_0^1 x D(x) dx - \sum_n \frac{\rho}{\lambda |2n+1|^2 |2n'+1|^2} \int_0^1 x^2 R(x) dx + \\ & + \sum_n \frac{\rho}{\lambda |2n+1| |2n'+1|} \int_0^1 D(x) dx \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta) \exp\left(-\frac{|2n'+1|}{x} \zeta\right) d\zeta = \\ & = \int_0^{+\infty} \psi_a(\zeta) d\zeta - \sum_n \frac{\rho}{|2n'+1|} \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Тотожності (2.3.4) та (2.3.8) мають однакові праві частини, внаслідок чого однаковими є також і ліві частини цих тотожностей. У такому випадку ми отримуємо тотожність, у якій стала ρ скорочується. Якщо взяти до уваги співвідношення

$$\left| \frac{2n+1}{2n'+1} \right| + \frac{1}{\lambda |2n'+1|} = 1,$$

то можна прийти до тотожності

$$\begin{aligned} & \sum_n \frac{1}{|2n+1|} \int_0^1 D(x) dx \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta) \exp\left(-\frac{|2n'+1|}{x} \zeta\right) d\zeta = \\ & = \sum_n \frac{1}{|2n+1|^2 |2n'+1|} \int_0^1 x^2 R(x) dx - \sum_n \frac{q_\infty}{|2n+1|^2} \int_0^1 x D(x) dx. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Варто наголосити на тому, що тотожність (2.3.9) можна подати в дещо простішому вигляді, якщо запровадити нову функцію

$$q_{n,a}(\zeta) = q_\infty \left| \frac{2n'+1}{2n+1} \right| + \psi_{n,a}(\zeta). \quad (2.3.10)$$

Тоді ми отримуємо «перше необхідне співвідношення»

$$\begin{aligned} & \sum_n \frac{1}{|2n+1|} \int_0^1 D(x) dx \int_0^{+\infty} q_{n,a}(\zeta) \exp\left(-\frac{|2n'+1|}{x} \zeta\right) d\zeta = \\ & = \chi(\lambda) \int_0^1 x^2 R(x) dx, \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

у якому фігурує позначення для суми

$$\chi(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|2n+1|^2 |2n'+1|}. \quad (2.3.12)$$

Самого лише співвідношення (2.3.11) нам не вистачає. Ми повинні знайти ще одне співвідношення. Для цього ми будемо повертатися до лінійного інтегрального рівняння (2.2.25), яке потрібно домножити на ζ . Отримане рівняння будемо інтегрувати по ζ від 0 до $+\infty$. Тоді виходить, що

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \zeta \psi_a(\zeta) d\zeta &= \sum_n \int_0^{+\infty} \zeta d\zeta \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta') \left\{ K^{(n)}(\zeta - \zeta') + K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' + \\ &+ \sum_n \left| \frac{2n'+1}{2n+1} \right| \int_0^{+\infty} \zeta d\zeta \int_0^{+\infty} \zeta' \left\{ K^{(n)}(\zeta + \zeta') + K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' - \\ &- q_\infty \sum_n \left| \frac{2n'+1}{2n+1} \right| \int_0^{+\infty} \zeta d\zeta \int_0^{+\infty} \left\{ K^{(n)}(\zeta + \zeta') - K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta'. \quad (2.3.13) \end{aligned}$$

У подвійних інтегралах отриманої тотожності (2.3.13) доцільно буде змінити порядок інтегрування і виконати заміни $\zeta \longleftrightarrow \zeta'$. Це означає, що ми можемо перетворити тотожність (2.3.13) на тотожність

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \zeta \psi_a(\zeta) d\zeta &= \sum_n \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta) d\zeta \int_0^{+\infty} \zeta' \left\{ K^{(n)}(\zeta - \zeta') + K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' + \\ &+ \sum_n \left| \frac{2n'+1}{2n+1} \right| \int_0^{+\infty} \zeta d\zeta \int_0^{+\infty} \zeta' \left\{ K^{(n)}(\zeta + \zeta') + K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' - \\ &- q_\infty \sum_n \left| \frac{2n'+1}{2n+1} \right| \int_0^{+\infty} \zeta d\zeta \int_0^{+\infty} \left\{ K^{(n)}(\zeta + \zeta') - K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta'. \quad (2.3.14) \end{aligned}$$

Варто наголосити на тому, що тотожність (2.3.14) можна перетворити за допомогою таких двох інтегралів:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \zeta d\zeta \int_0^{+\infty} \zeta' \left\{ K^{(n)}(\zeta + \zeta') + K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' &= \frac{\rho}{|2n'+1|^4} \int_0^1 x^3 R(x) dx, \\ \int_0^{+\infty} \zeta d\zeta \int_0^{+\infty} \left\{ K^{(n)}(\zeta + \zeta') - K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' &= \frac{\rho}{|2n'+1|^3} \int_0^1 x^2 D(x) dx. \end{aligned}$$

Тоді тотожність (2.3.14) набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \zeta \psi_a(\zeta) d\zeta = \sum_n \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta) d\zeta \int_0^{+\infty} \zeta' \left\{ K^{(n)}(\zeta - \zeta') - K^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' + \\
& + \sum_n \frac{\rho}{|2n+1||2n'+1|^3} \int_0^1 x^3 R(x) dx - \sum_n \frac{\rho q_\infty}{|2n+1||2n'+1|^2} \int_0^1 x^2 D(x) dx + \\
& + \sum_n \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta) d\zeta \int_0^{+\infty} \zeta' \left\{ K^{(n)}(\zeta + \zeta') + K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta'. \quad (2.3.15)
\end{aligned}$$

Якщо взяти до уваги інтеграл (2.2.14) та інтеграл

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \zeta' \left\{ K^{(n)}(\zeta + \zeta') + K_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' = \\
& = \frac{\rho}{|2n'+1|^2} \int_0^1 x R(x) \exp\left(-\frac{|2n'+1|\zeta}{x}\right) dx,
\end{aligned}$$

то тотожність (2.3.15) перетвориться на тотожність

$$\begin{aligned}
& \sum_n \frac{\rho}{|2n+1||2n'+1|^3} \int_0^1 x^3 R(x) dx - \sum_n \frac{\rho q_\infty}{|2n+1||2n'+1|^2} \int_0^1 x^2 D(x) dx + \\
& + \sum_n \frac{\rho}{|2n'+1|^2} \int_0^1 x R(x) dx \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta) \exp\left(-\frac{|2n'+1|\zeta}{x}\right) d\zeta = \\
& = \int_0^{+\infty} \zeta \psi_a(\zeta) d\zeta - \sum_n \frac{\rho}{|2n'+1|} \int_0^{+\infty} \zeta \psi_{n,a}(\zeta) d\zeta. \quad (2.3.16)
\end{aligned}$$

Ми повинні знайти ще одну тотожність, у правій частині якої була би присутня різниця

$$\int_0^{+\infty} \zeta \psi_a(\zeta) d\zeta - \sum_n \frac{\rho}{|2n'+1|} \int_0^{+\infty} \zeta \psi_{n,a}(\zeta) d\zeta.$$

З метою втілення у життя цього задуму нам потрібно повертатися до лінійного інтегрального рівняння (2.2.26) та домножити його на ζ . Отримане рівняння будемо інтегрувати по ζ від 0 до $+\infty$. У подвійних інтегралах, які виникнуть,

потрібно буде змінити порядок інтегрування і виконати заміни $\zeta \longleftrightarrow \zeta'$. Тоді ми можемо записати, що

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \zeta \psi_{n,a}(\zeta) d\zeta - \int_0^{+\infty} \zeta \psi_a(\zeta) d\zeta = \\
& = \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta) d\zeta \int_0^{+\infty} \zeta' \left\{ \tilde{K}^{(n)}(\zeta - \zeta') + \tilde{K}_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' + \\
& + \left| \frac{2n'+1}{2n+1} \right| \int_0^{+\infty} \zeta d\zeta \int_0^{+\infty} \zeta' \left\{ \tilde{K}^{(n)}(\zeta + \zeta') + \tilde{K}_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' - \\
& - q_\infty \left| \frac{2n'+1}{2n+1} \right| \int_0^{+\infty} \zeta d\zeta \int_0^{+\infty} \left\{ \tilde{K}^{(n)}(\zeta + \zeta') - \tilde{K}_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta'. \quad (2.3.17)
\end{aligned}$$

Варто наголосити на тому, що тотожність (2.3.17) можна перетворити за допомогою таких двох інтегралів:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \zeta d\zeta \int_0^{+\infty} \zeta' \left\{ \tilde{K}^{(n)}(\zeta + \zeta') + \tilde{K}_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' = \frac{1}{\lambda |2n'+1|^4} \int_0^1 x^3 R(x) dx, \\
& \int_0^{+\infty} \zeta d\zeta \int_0^{+\infty} \left\{ \tilde{K}^{(n)}(\zeta + \zeta') - \tilde{K}_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' = \frac{1}{\lambda |2n'+1|^3} \int_0^1 x^2 D(x) dx.
\end{aligned}$$

Тоді тотожність (2.3.17) набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \zeta \psi_{n,a}(\zeta) d\zeta - \int_0^{+\infty} \zeta \psi_a(\zeta) d\zeta = \\
& = \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta) d\zeta \int_0^{+\infty} \zeta' \left\{ \tilde{K}^{(n)}(\zeta - \zeta') - \tilde{K}^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' + \\
& + \frac{1}{\lambda |2n+1| |2n'+1|^3} \int_0^1 x^3 R(x) dx - \frac{q_\infty}{\lambda |2n+1| |2n'+1|^2} \int_0^1 x^2 D(x) dx + \\
& + \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta) d\zeta \int_0^{+\infty} \zeta' \left\{ \tilde{K}^{(n)}(\zeta + \zeta') + \tilde{K}_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta'. \quad (2.3.18)
\end{aligned}$$

Якщо взяти до уваги інтеграл (2.2.17) та інтеграл

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \zeta' \left\{ \tilde{K}^{(n)}(\zeta + \zeta') + \tilde{K}_D^{(n)}(\zeta + \zeta') \right\} d\zeta' = \\ & = \frac{1}{\lambda |2n' + 1|^2} \int_0^1 x R(x) \exp\left(-\frac{|2n' + 1|}{x} \zeta\right) dx, \end{aligned}$$

то тотожність (2.3.18) перетвориться на тотожність

$$\begin{aligned} & \frac{q_\infty}{\lambda |2n + 1| |2n' + 1|^2} \int_0^1 x^2 D(x) dx - \frac{1}{\lambda |2n + 1| |2n' + 1|^3} \int_0^1 x^3 R(x) dx - \\ & - \frac{1}{\lambda |2n' + 1|^2} \int_0^1 x R(x) dx \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta) \exp\left(-\frac{|2n' + 1|}{x} \zeta\right) d\zeta = \int_0^{+\infty} \zeta \psi_a(\zeta) d\zeta - \\ & - \left| \frac{2n + 1}{2n' + 1} \right| \int_0^{+\infty} \zeta \psi_{n,a}(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Тотожність (2.3.19) потрібно домножити на $\frac{\rho}{|2n + 1|}$ та просумувати отриманий результат по n від $-\infty$ до $+\infty$. Тоді ми отримуємо тотожність

$$\begin{aligned} & \sum_n \frac{\rho q_\infty}{\lambda |2n + 1|^2 |2n' + 1|^2} \int_0^1 x^2 D(x) dx - \\ & - \sum_n \frac{\rho}{\lambda |2n + 1|^2 |2n' + 1|^3} \int_0^1 x^3 R(x) dx - \\ & - \sum_n \frac{\rho}{\lambda |2n + 1| |2n' + 1|^2} \int_0^1 x R(x) dx \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta) \exp\left(-\frac{|2n' + 1|}{x} \zeta\right) d\zeta = \\ & = \int_0^{+\infty} \zeta \psi_a(\zeta) d\zeta - \sum_n \frac{\rho}{|2n' + 1|} \int_0^{+\infty} \zeta \psi_{n,a}(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

У правій частині тотожності (2.3.20) сформувався різниця

$$\int_0^{+\infty} \zeta \psi_a(\zeta) d\zeta - \sum_n \frac{\rho}{|2n' + 1|} \int_0^{+\infty} \zeta \psi_{n,a}(\zeta) d\zeta,$$

яка фігурує також у правій частині тотожності (2.3.16). Це означає, що однаковими є також і ліві частини тотожностей (2.3.16) та (2.3.20). У такому випадку ми отримуємо тотожність

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{1}{|2n+1||2n'+1|} \int_0^1 x R(x) dx \int_0^{+\infty} \psi_{n,a}(\zeta) \exp\left(-\frac{|2n'+1|\zeta}{x}\right) d\zeta = \\ = \sum_n \frac{q_\infty}{|2n+1|^2 |2n'+1|} \int_0^1 x^2 D(x) dx - \\ - \sum_n \frac{1}{|2n+1|^2 |2n'+1|^2} \int_0^1 x^3 R(x) dx. \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Варто наголосити на тому, що тотожність (2.3.21) можна подати в дещо простішому вигляді, якщо перейти до функції (2.3.10).

Тоді ми отримуємо «друге необхідне співвідношення»

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{1}{|2n+1||2n'+1|} \int_0^1 x R(x) dx \int_0^{+\infty} q_{n,a}(\zeta) \exp\left(-\frac{|2n'+1|\zeta}{x}\right) d\zeta = \\ = \frac{q_\infty}{3} \chi(\lambda) - \chi_1(\lambda) \int_0^1 x^3 R(x) dx, \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

у якому виникло позначення для суми

$$\chi_1(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|2n+1|^2 |2n'+1|^2}. \quad (2.3.23)$$

Продемонстрований метод побудови співвідношень (2.3.11) та (2.3.22) є відомим як «метод квазіортогональності до асимптотики» [57].

Співвідношення (2.3.11) та (2.3.22) побудовано з метою отримати можливість обчислювати сталу q_∞ наближено. Вибір функції $q_{n,a}(\zeta)$ у вигляді сталої

$$q_{n,a}(\zeta) = \left| \frac{2n'+1}{2n+1} \right| \Gamma \quad (2.3.24)$$

перетворює формулу (2.3.22) на формулу

$$q_\infty = \frac{3\chi_1(\lambda)}{\chi(\lambda)} \int_0^1 x^3 R(x) dx + 3\Gamma \int_0^1 x^2 R(x) dx. \quad (2.3.25)$$

Якщо ми підставимо формулу (2.3.24) у формулу (2.3.11), то знайдемо сталу

$$\Gamma = \frac{\chi(\lambda) \int_0^1 x^2 R(x) dx}{S_2 \int_0^1 x D(x) dx}, \quad (2.3.26)$$

у якій виникло позначення для суми

$$S_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|2n+1|^2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Далі потрібно підставляти сталу (2.3.26) у формулу (2.3.25), внаслідок чого ми приходимо до результату

$$q_\infty = \frac{3\chi_1(\lambda)}{\chi(\lambda)} \int_0^1 x^3 R(x) dx + \frac{3\chi(\lambda)}{S_2} \frac{\left\{ \int_0^1 x^2 R(x) dx \right\}^2}{\int_0^1 x D(x) dx}. \quad (2.3.27)$$

2.4. Рівняння Гінзбурга-Ландау

Ми вже наголошували на тому, що якщо $z \sim \xi(T)$, то просторову поведінку параметра впорядкування $\Delta(\zeta)$ потрібно описувати за допомогою рівняння Гінзбурга-Ландау (2.1.5). З метою знаходження загального розв'язку цього рівняння доцільно буде перейти від комплексної функції $\Delta(\zeta)$, яка має розмірність температури T , до деякої дійсної функції $f(\zeta)$, яка вже є безрозмірною.

Нехай між функціями $\Delta(\zeta)$ та $f(\zeta)$ має місце зв'язок

$$\Delta(\zeta) = \Delta_\infty f(\zeta) \exp \left\{ 2im\chi(\zeta) \pm i\frac{\varphi}{2} \right\}. \quad (2.4.1)$$

З формули (2.4.1) видно, що величини $\Delta_\infty f(\zeta)$ та $2m\chi(\zeta) \pm \frac{\varphi}{2}$ є, відповідно, модулем і фазою параметра впорядкування $\Delta(\zeta)$. Варто зауважити, що знаки «плюс» та «мінус» обираємо для областей $z > 0$ та $z < 0$ відповідно. Що стосується функції $\chi(\zeta)$, то вона є неперервною функцією, внаслідок чого можна

записати умову $\lim_{\zeta \rightarrow -0} \chi(\zeta) = \lim_{\zeta \rightarrow +0} \chi(\zeta) = 0$. Функція $\chi(\zeta)$ дає змогу запровадити надплинну швидкість $v_s(\zeta)$ за допомогою формули

$$\frac{d\chi(\zeta)}{d\zeta} = \xi_0 v_s(\zeta). \quad (2.4.2)$$

На основі представлення (2.4.1) знаходимо квадрат модуля

$$|\Delta(\zeta)|^2 = \Delta_\infty^2 f^2(\zeta), \quad (2.4.3)$$

похідну першого порядку

$$\Delta'(\zeta) = \Delta_\infty [f'(\zeta) + 2im\xi_0 v_s(\zeta) f(\zeta)] \exp \left\{ 2im\chi(\zeta) \pm i\frac{\varphi}{2} \right\} \quad (2.4.4)$$

та похідну другого порядку

$$\begin{aligned} \Delta''(\zeta) = \Delta_\infty [f''(\zeta) - 4m^2 \xi_0^2 v_s^2(\zeta) f(\zeta) + \\ + \frac{2im\xi_0}{f(\zeta)} \frac{d}{d\zeta} \{f^2(\zeta) v_s(\zeta)\}] \exp \left\{ 2im\chi(\zeta) \pm i\frac{\varphi}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Далі нам потрібно підставляти формули (2.4.1), (2.4.3) та (2.4.5) у рівняння Гінзбурга-Ландау (2.1.5). Після скорочення на $\Delta_\infty \exp \left\{ 2im\chi(\zeta) \pm i\frac{\varphi}{2} \right\}$ матимемо рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\xi^2(T)}{\xi_0^2} f''(\zeta) - 4m^2 \xi^2(T) v_s^2(\zeta) f(\zeta) + f(\zeta) - f^3(\zeta) + \\ + \frac{2im\xi^2(T)}{\xi_0 f(\zeta)} \frac{d}{d\zeta} [f^2(\zeta) v_s(\zeta)] = 0. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

У рівнянні (2.4.6) потрібно виділити дійсну та уявну частини, внаслідок чого отримуємо диференціальне рівняння другого порядку

$$\frac{\xi^2(T)}{\xi_0^2} f''(\zeta) - 4m^2 \xi^2(T) v_s^2(\zeta) f(\zeta) + f(\zeta) - f^3(\zeta) = 0 \quad (2.4.7)$$

та диференціальне рівняння першого порядку $\frac{d}{d\zeta} [f^2(\zeta) v_s(\zeta)] = 0$, загальний інтеграл якого можна подати за допомогою формули

$$f^2(\zeta) v_s(\zeta) = \mathcal{C}_1. \quad (2.4.8)$$

Для знаходження загального розв'язку диференціального рівняння другого порядку (2.4.7) та сталої інтегрування \mathcal{C}_1 спочатку потрібно буде знайти деякі умови для функції $f(\zeta)$ та похідної $f'(\zeta)$.

Якщо для координати z виконується умова (2.1.6), то аналітичний вираз для параметра впорядкування $\Delta(\zeta)$ є, фактично, асимптотикою рівняння Гінзбурга-Ландау (2.1.5) в «нулі».

Математично це можна описати за допомогою такого розкладу:

$$\Delta(\zeta) \cong \Delta'(+0)\zeta + \Delta(+0), \quad \zeta \rightarrow +0. \quad (2.4.9)$$

Розклад (2.4.9) побудовано для випадку правого надпровідника. Зрозуміло, що аналогічний розклад можна побудувати також і для випадку лівого надпровідника. Відповідний розклад має такий вигляд:

$$\Delta(\zeta) \cong \Delta'(-0)\zeta + \Delta(-0), \quad \zeta \rightarrow -0. \quad (2.4.10)$$

Заміна $\zeta \rightarrow -\zeta$ перетворює розклад (2.4.10) на такий розклад:

$$\Delta(-\zeta) \cong -\Delta'(-0)\zeta + \Delta(-0), \quad \zeta \rightarrow +0. \quad (2.4.11)$$

На основі розкладів (2.4.9) та (2.4.11) отримуємо такі розклади:

$$\begin{aligned} \Delta_s(\zeta) &= \frac{\Delta'(+0) - \Delta'(-0)}{2}\zeta + \frac{\Delta(+0) + \Delta(-0)}{2}, \\ \Delta_a(\zeta) &= \frac{\Delta'(+0) + \Delta'(-0)}{2}\zeta + \frac{\Delta(+0) - \Delta(-0)}{2}, \quad \zeta \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

На основі формул (2.2.18), (2.2.23) та (2.2.24) отримуємо такі асимптотики:

$$\Delta_s(\zeta) = \mathcal{A}, \quad \Delta_a(\zeta) = \mathcal{C}(\zeta + q_\infty), \quad \zeta \rightarrow +\infty. \quad (2.4.13)$$

Записи $\zeta \rightarrow +\infty$ та $\zeta \rightarrow +0$ означають нерівності $z \gg \xi_0$ та $z \ll \xi(T)$, які є складовими частинами єдиної подвійної нерівності (2.1.6).

Це означає, що асимптотики (2.4.12) та (2.4.13) є однаковими. Тоді ми можемо записати такі дві тотожності:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta'(+0) - \Delta'(-0)}{2}\zeta + \frac{\Delta(+0) + \Delta(-0)}{2} &= \mathcal{A}, \\ \frac{\Delta'(+0) + \Delta'(-0)}{2}\zeta + \frac{\Delta(+0) - \Delta(-0)}{2} &= \mathcal{C}(\zeta + q_\infty). \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

З рівностей (2.4.14) отримуємо такі чотири рівності:

$$\begin{aligned} \Delta(+0) + \Delta(-0) &= 2\mathcal{A}, & \Delta'(+0) - \Delta'(-0) &= 0, \\ \Delta(+0) - \Delta(-0) &= 2\mathcal{C}q_\infty, & \Delta'(+0) + \Delta'(-0) &= 2\mathcal{C}. \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Якщо від четвертого рівняння системи (2.4.15) відняти друге рівняння цієї ж системи, то можна отримати тотожність $\Delta'(-0) = \mathcal{C}$. Це означає, що в третьому рівнянні системи (2.4.15) можна замінити сталу \mathcal{C} на $\Delta'(-0)$. Утворене внаслідок цього рівняння $\Delta(+0) - \Delta(-0) = 2q_\infty \Delta'(-0)$ та друге рівняння розглядуваної системи можна переписати в такому вигляді:

$$\Delta'(+0) = \Delta'(-0), \quad \Delta(+0) = \Delta(-0) + 2q_\infty \Delta'(-0). \quad (2.4.16)$$

Рівності (2.4.16) можна об'єднати в матричну рівність

$$\begin{pmatrix} \Delta'(+0) \\ \Delta(+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2q_\infty & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta'(-0) \\ \Delta(-0) \end{pmatrix}.$$

Далі потрібно розглянути функції (2.4.1) та (2.4.4) для двох асимптотичних випадків $\zeta \rightarrow -0$ та $\zeta \rightarrow +0$. Оскільки надплинна швидкість $v_s(\zeta)$ є неперервною функцією, то для неї має місце умова $v_s(-0) = v_s(+0) \equiv v_s(0)$. Для спрощення записів будемо використовувати також і такі позначення:

$$f(-0) \equiv f_-, \quad f(+0) \equiv f_+, \quad f'(-0) \equiv f'_-, \quad f'(+0) \equiv f'_+.$$

Тоді ми отримуємо такі результати:

$$\begin{aligned} \Delta(-0) &= \Delta_\infty f_- \exp\left(-i\frac{\varphi}{2}\right), \\ \Delta'(-0) &= \Delta_\infty [f'_- + 2im\xi_0 v_s(0) f_-] \exp\left(-i\frac{\varphi}{2}\right), \\ \Delta(+0) &= \Delta_\infty f_+ \exp\left(i\frac{\varphi}{2}\right), \\ \Delta'(+0) &= \Delta_\infty [f'_+ + 2im\xi_0 v_s(0) f_+] \exp\left(i\frac{\varphi}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

Формули (2.4.17) потрібно підставляти у формули (2.4.16). Тоді ми отримуємо такі дві рівності:

$$\begin{aligned} [f'_+ + 2im\xi_0 v_s(0) f_+] \exp(i\varphi) &= f'_- + 2im\xi_0 v_s(0) f_-, \\ f_+ \exp(i\varphi) &= f_- + 2q_\infty [f'_- + 2im\xi_0 v_s(0) f_-]. \end{aligned}$$

Якщо повиділяти в утворених рівняннях дійсні та уявні частини, то можна отримати чотири рівняння, які утворюють таку замкнену систему:

$$\begin{aligned} f'_+ \cos \varphi - 2m\xi_0 v_s(0) f_+ \sin \varphi &= f'_-, \\ f'_+ \sin \varphi + 2m\xi_0 v_s(0) f_+ \cos \varphi &= 2m\xi_0 v_s(0) f_-, \\ f_+ \cos \varphi &= f_- + 2q_\infty f'_-, \\ f_+ \sin \varphi &= 4q_\infty m\xi_0 v_s(0) f_-. \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

Розгляньмо замкнену систему (2.4.18). Очевидно, що перше рівняння цієї системи є представленням величини f'_- через величини f_+ та f'_+ . Якщо підставити це представлення у третє рівняння замкненої системи (2.4.18), то можна отримати представлення величини f_- через величини f_+ та f'_+ . Знайдені представлення для величин f_- та f'_- через величини f_+ та f'_+ потрібно підставляти в друге та четверте рівняння замкненої системи (2.4.18), внаслідок чого ми приходимо до такої замкненої системи:

$$\begin{aligned} a_{11}f'_+ + a_{12}f_+ &= 0, \\ a_{21}f'_+ + a_{22}f_+ &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

У замкненій системі (2.4.19) маємо такі коефіцієнти:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sin \varphi + 4q_\infty m \xi_0 v_s(0) \cos \varphi, \\ a_{12} &= -8q_\infty m^2 \xi_0^2 v_s^2(0) \sin \varphi, \\ a_{21} &= 8q_\infty^2 m \xi_0 v_s(0) \cos \varphi, \\ a_{22} &= \{1 - 16q_\infty^2 m^2 \xi_0^2 v_s^2(0)\} \sin \varphi - 4q_\infty m \xi_0 v_s(0) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

На основі замкненої системи (2.4.19) двох лінійних рівнянь із двома невідомими можна отримати тотожність $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})f_+ = 0$, яка виконується тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \quad (2.4.21)$$

Маючи коефіцієнти (2.4.20), можна обчислити різницю

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \{\sin \varphi - 4q_\infty m \xi_0 v_s(0)\} \{\sin \varphi + 4q_\infty m \xi_0 v_s(0)\},$$

яка перетворює тотожність (2.4.21) на тотожність

$$\{\sin \varphi - 4q_\infty m \xi_0 v_s(0)\} \{\sin \varphi + 4q_\infty m \xi_0 v_s(0)\} = 0. \quad (2.4.22)$$

Наслідком тотожності (2.4.22) є умова $4q_\infty m \xi_0 v_s(0) = \sin \varphi$, яку можна подати також і за допомогою формули

$$v_s(0) = \frac{\sin \varphi}{4q_\infty m \xi_0}. \quad (2.4.23)$$

Тепер можна знайти сталу інтегрування \mathcal{C}_1 у формулі (2.4.8). Якщо розглянути цю формулу для асимптотичного випадку, коли $\zeta \rightarrow +0$, та взяти до уваги умову

(2.4.23), то можна прийти до результату

$$\mathcal{C}_1 = f_+^2 v_s(0) = \frac{f_+^2 \sin \varphi}{4m\xi_0 q_\infty}. \quad (2.4.24)$$

Якщо підставити сталу інтегрування (2.4.24) у рівняння (2.4.8), то можна отримати представлення для надплинної швидкості

$$v_s(\zeta) = \frac{f_+^2 \sin \varphi}{4m\xi_0 q_\infty} \frac{1}{f^2(\zeta)}. \quad (2.4.25)$$

На основі представлення (2.4.25) отримуємо представлення

$$4m^2 \xi^2(T) v_s^2(\zeta) f(\zeta) = \left(\frac{f_+^2 \sin \varphi}{2\tau q_\infty} \right)^2 \frac{1}{f^3(\zeta)}, \quad (2.4.26)$$

у якому фігурує позначення

$$\tau = \frac{\xi_0}{\xi(T)}. \quad (2.4.27)$$

Якщо запровадити позначення

$$I = \frac{f_+^2 \sin \varphi}{2\tau q_\infty}, \quad (2.4.28)$$

то тотожність (2.4.26) перетвориться на тотожність

$$4m^2 \xi^2(T) v_s^2(\zeta) f(\zeta) = \frac{I^2}{f^3(\zeta)}. \quad (2.4.29)$$

Далі потрібно перетворити рівняння Гінзбурга-Ландау (2.4.7) за допомогою позначення (2.4.27) та отриманого представлення (2.4.29). Тоді виходить, що

$$\frac{1}{\tau^2} f''(\zeta) - \frac{I^2}{f^3(\zeta)} + f(\zeta) - f^3(\zeta) = 0. \quad (2.4.30)$$

Диференціальне рівняння другого порядку (2.4.30) потрібно домножити на добуток $2f'(\zeta)$, внаслідок чого ми отримуємо диференціальне рівняння

$$\frac{d}{d\zeta} \left\{ \frac{1}{\tau^2} (f')^2 + \frac{I^2}{f^2} + f^2 - \frac{f^4}{2} \right\} = 0$$

та перший інтеграл рівняння Гінзбурга-Ландау

$$\frac{1}{\tau^2} (f')^2 + \frac{I^2}{f^2} + f^2 - \frac{f^4}{2} = \mathcal{C}_2. \quad (2.4.31)$$

З метою знаходження невідомої сталої інтегрування \mathcal{C}_2 , яка фігурує в диференціальному рівнянні першого порядку (2.4.31), ми будемо виконувати у цьому ж рівнянні граничний перехід $\zeta \rightarrow +\infty$. З фізичної точки зору це означає, що ми заглиблюємось у надпровідник та отримуємо просторово однорідний випадок. У такому випадку функція $f(\zeta)$ буде сталою величиною, яку логічно буде позначити через f_∞ . Що стосується похідної першого порядку $f'(\zeta)$, то вона прямуватиме до нуля. Те саме можна сказати і про похідну другого порядку $f''(\zeta)$. Тоді ми можемо записати такі три границі:

$$\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} f(\zeta) = f_\infty, \quad \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} f'(\zeta) = 0, \quad \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} f''(\zeta) = 0.$$

Тоді з диференціального рівняння першого порядку (2.4.31) випливає формула для сталої інтегрування

$$\mathcal{C}_2 = f_\infty^2 - \frac{f_\infty^4}{2} + \frac{I^2}{f_\infty^2},$$

яку далі потрібно підставляти в рівняння (2.4.31). Тоді ми отримуємо диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{1}{\tau^2} (f')^2 + f^2 - \frac{f^4}{2} + \frac{I^2}{f^2} = f_\infty^2 - \frac{f_\infty^4}{2} + \frac{I^2}{f_\infty^2},$$

яке можна звести до такого вигляду:

$$\frac{1}{\tau^2} (f')^2 - \frac{f_\infty^2 - f^2}{f^2} \left\{ f^2 - \frac{I^2}{f_\infty^2} - \frac{f^2}{2} (f_\infty^2 + f^2) \right\} = 0. \quad (2.4.32)$$

Варто наголосити на тому, що безрозмірну величину I можна представити через f_∞ . Для цього виконуємо граничний перехід $\zeta \rightarrow +\infty$ у диференціальному рівнянні другого порядку (2.4.30). За таких обставин ми приходимо до тотожності $-\frac{I^2}{f_\infty^3} + f_\infty - f_\infty^3 = 0$, з якої випливає результат

$$I^2 = f_\infty^4 (1 - f_\infty^2). \quad (2.4.33)$$

Далі підставляємо формулу (2.4.33) в рівняння (2.4.32). Внаслідок цього ми приходимо до рівняння

$$\frac{1}{\tau^2} (f')^2 - \frac{f_\infty^2 - f^2}{f^2} \left\{ f^2 - f_\infty^2 (1 - f_\infty^2) - \frac{f^2}{2} (f_\infty^2 + f^2) \right\} = 0,$$

остаточний вигляд якого є таким:

$$\frac{f^2}{\tau^2} (f')^2 - (f_\infty^2 - f^2)^2 \left(\frac{f^2}{2} + f_\infty^2 - 1 \right) = 0. \quad (2.4.34)$$

Диференціальне рівняння першого порядку (2.4.34) потрібно розглянути для асимптотичного випадку, коли $\zeta \rightarrow +0$. Тоді виходить, що

$$\frac{f_+^2}{\tau^2} (f_+^2) - (f_\infty^2 - f_+^2)^2 \left(\frac{f_+^2}{2} + f_\infty^2 - 1 \right) = 0. \quad (2.4.35)$$

Варто зауважити, що величину f_+' можна подати через величину f_+ . Якщо підставити умову (2.4.23) у четверте рівняння системи (2.4.18), то можна отримати рівняння $(f_- - f_+) \sin \varphi = 0$. Оскільки $\sin \varphi$ може бути довільним, то це означає, що

$$f_- = f_+. \quad (2.4.36)$$

Друге та третє рівняння системи (2.4.18) можна подати також і за допомогою формул

$$f_+' \sin \varphi + 2m\xi_0 v_s(0) (f_+ \cos \varphi - f_-) = 0 \quad (2.4.37)$$

та

$$f_+ \cos \varphi - f_- = 2q_\infty f_+' \quad (2.4.38)$$

відповідно.

Якщо підставити рівняння (2.4.38) у рівняння (2.4.37), то можна прийти до тотожності $f_+' \sin \varphi + 4q_\infty m\xi_0 v_s(0) f_+' = 0$, яка через наявність отриманої раніше умови (2.4.23) перетворюється на тотожність $(f_+' + f_+') \sin \varphi = 0$. Тоді внаслідок довільності величини $\sin \varphi$ впливає умова

$$f_+' = -f_+'. \quad (2.4.39)$$

Умови (2.4.36) та (2.4.39) підставляємо в рівняння (2.4.38). У такому випадку ми отримуємо рівняння $2q_\infty f_+' = f_+ (1 - \cos \varphi)$, з якого впливає умова

$$\frac{f_+'}{f_+} = \frac{\left(\sin \frac{\varphi}{2} \right)^2}{q_\infty}. \quad (2.4.40)$$

Граничну умову (2.4.40) підставляємо в рівняння (2.4.35), а вираз (2.4.28) для безрозмірної величини I підставляємо у формулу (2.4.33). Внаслідок цього ми приходимо до такої замкненої системи:

$$\begin{aligned} \frac{\left(\sin \frac{\varphi}{2} \right)^4}{\tau^2 q_\infty^2} f_+^4 - (f_\infty^2 - f_+^2)^2 \left(\frac{f_+^2}{2} + f_\infty^2 - 1 \right) &= 0, \\ f_\infty^4 (1 - f_\infty^2) &= \frac{f_+^4}{4\tau^2 q_\infty^2} (\sin \varphi)^2. \end{aligned} \quad (2.4.41)$$

Далі потрібно буде знайти розв'язок замкненої системи (2.4.41) двох рівнянь, внаслідок чого величина f_+ уже буде відомою. Тоді величина f'_+ , яка визначається за допомогою формули (2.4.40), теж уже буде відомою. У такому випадку можна вважати, що початкові умови для диференціального рівняння другого порядку (2.4.30) уже знайдено!

2.5. Густина струму

Далі нам потрібно перетворювати вираз (2.1.7) для одновимірної густини струму $j(\zeta)$. Якщо поділити похідну першого порядку (2.4.4) на функцію (2.4.1), то можна отримати формулу для відношення

$$\frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\zeta} = \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} + 2im\xi_0 v_s(\zeta). \quad (2.5.1)$$

На основі відношення (2.5.1) отримуємо відношення

$$\frac{1}{\Delta^*} \frac{d\Delta^*}{d\zeta} = \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} - 2im\xi_0 v_s(\zeta). \quad (2.5.2)$$

Якщо від відношення (2.5.2) відняти відношення (2.5.1), то ми прийдемо до різниці

$$\frac{1}{\Delta^*} \frac{d\Delta^*}{d\zeta} - \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\zeta} = -4im\xi_0 v_s(\zeta). \quad (2.5.3)$$

Добуток тотожностей (2.4.3) та (2.5.3) дає нам різницю

$$\Delta \frac{d\Delta^*}{d\zeta} - \Delta^* \frac{d\Delta}{d\zeta} = -4im\xi_0 \Delta_\infty^2 f^2(\zeta) v_s(\zeta). \quad (2.5.4)$$

Варто наголосити на тому, що представлення (2.4.25) для надплинної швидкості $v_s(\zeta)$ та позначення (2.4.28) для безрозмірної величини I дозволяють нам отримати формулу

$$\frac{2m\xi_0}{\tau} f^2(\zeta) v_s(\zeta) = \frac{f_+^2}{2\tau q_\infty} \sin \varphi = I,$$

з якої випливає результат

$$f^2(\zeta) v_s(\zeta) = \frac{\tau I}{2m\xi_0}. \quad (2.5.5)$$

Формулу (2.5.5) потрібно підставляти у формулу (2.5.4). Якщо запровадити запис $I \equiv I(\varphi)$, то можна прийти до результату

$$\Delta \frac{d\Delta^*}{d\zeta} - \Delta^* \frac{d\Delta}{d\zeta} = -2i\tau \Delta_\infty^2 I(\varphi). \quad (2.5.6)$$

Далі підставляємо різницю (2.5.6) у формулу (2.1.7) для одновимірної густини струму $j(\zeta)$. Використовуючи запис $j(\zeta) \equiv j(\varphi)$, приходимо до формули

$$j(\varphi) = \frac{env_0}{p_0\xi_0} \sqrt{\frac{12}{7\zeta(3)} \chi\left(\frac{\xi_0}{l}\right)} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}} I(\varphi). \quad (2.5.7)$$

Формулу (2.5.7) можна звести до формули $I = \frac{j}{j_0}$, у якій фігурує позначення

$$j_0 = \frac{env_0}{p_0\xi_0} \sqrt{\frac{12}{7\zeta(3)} \chi\left(\frac{\xi_0}{l}\right)} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

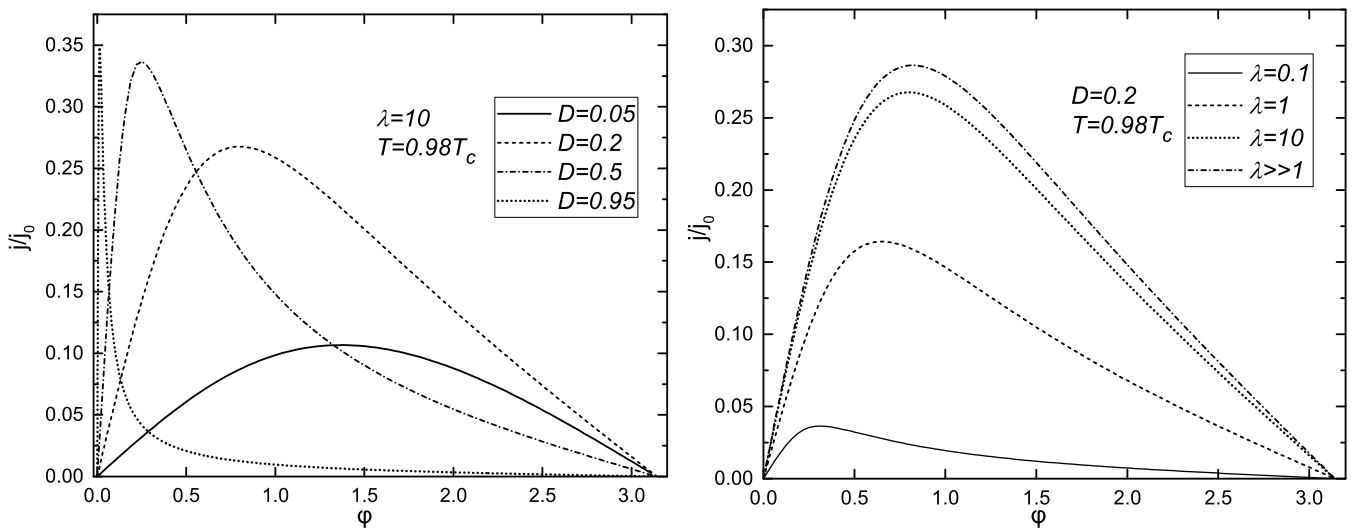


Рис. 2.1: Залежність безрозмірної густини струму $\frac{j}{j_0}$ від різниці фаз φ для таких двох випадків: фіксоване значення безрозмірної довжини вільного пробігу електронів λ та різні значення прозорості діелектричного прошарку D (лівий графік); фіксоване значення прозорості діелектричного прошарку D та різні значення безрозмірної довжини вільного пробігу електронів λ (правий графік).

Замкнену систему (2.4.41) двох рівнянь потрібно розв'язати з метою знайти залежність $f_+(\varphi)$ та підставити її у вираз (2.4.28). Після цього потрібно буде підставляти знайдену залежність $I(\varphi)$ у формулу (2.5.7) для струм-фазової залежності $j(\varphi)$. Знайти точний аналітичний розв'язок системи (2.4.41) у загальному випадку непросто, внаслідок чого вдаємося до чисельних розрахунків.

На лівому графіку рисунка (2.1) видно, що зі збільшенням коефіцієнта проходження електронів D форма кривої починає відрізнятися від синусоїдної і струм досягає свого максимального значення для різниці фаз $\varphi < \frac{\pi}{2}$. Струм досягає

максимального значення для різниці фаз $\varphi = \frac{\pi}{2}$ тоді, коли $D \ll 1$. Очевидним також є і те, що якщо $D > 0.5$, то максимальне значення струму швидко наближається до деякого значення, яке насправді є максимальним значенням струму для просторово однорідного випадку.

Але питання про вплив довжини вільного пробігу електронів на струм-фазову залежність є теж не менш важливим. На правому графіку рисунка (2.1) видно, що безрозмірна довжина вільного пробігу електронів λ суттєво впливає на форму струм-фазової залежності і вже для безрозмірної довжини $\lambda \leq 0.1$ максимальне значення струму є суттєво меншим від відповідного максимального значення у випадку відсутності немагнітних домішок. А якщо $\lambda \geq 10$, то вплив немагнітних домішок є, фактично, відсутнім. Наявність немагнітних домішок відображається також і на формі струм-фазової залежності: максимум струму зміщується в бік менших значень різниці фаз φ .

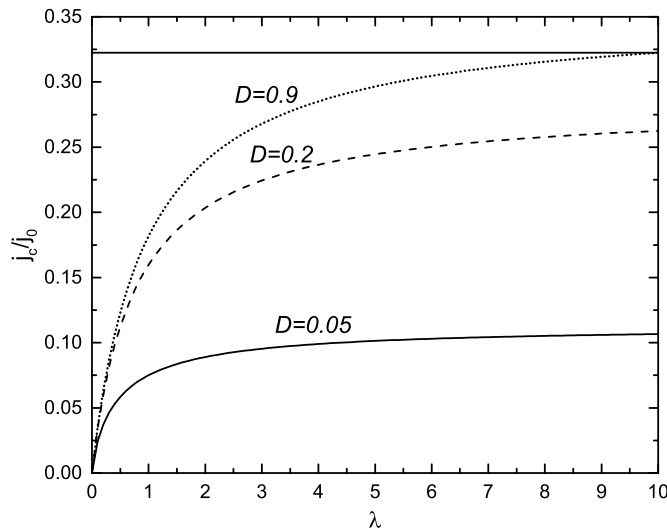


Рис. 2.2: Залежність критичного струму на контакті від безрозмірної довжини вільного пробігу електронів λ для різних значень прозорості D діелектричного прошарку (аналітичні розрахунки). Горизонтальна лінія відповідає значенню критичного струму для просторово однорідного надпровідника.

З рисунка (2.2) видно, що критичне значення струму суттєво залежить від безрозмірної довжини вільного пробігу електронів λ . Якщо зменшується прозорість діелектричного прошарку D , то струм швидше досягає свого максимального значення. Якщо збільшувати D і зменшувати λ , то критичний струм буде рости повільно та наближатиметься до горизонтальної лінії, яка відповідає значенню критичного струму для просторово однорідного надпровідника.

Отже, значення прозорості діелектричного прошарку та наявність немагнітних домішок довільної концентрації суттєво впливають на форму залежності густини струму j від різниці фаз φ у тунельних надпровідних контактах типу SIS.

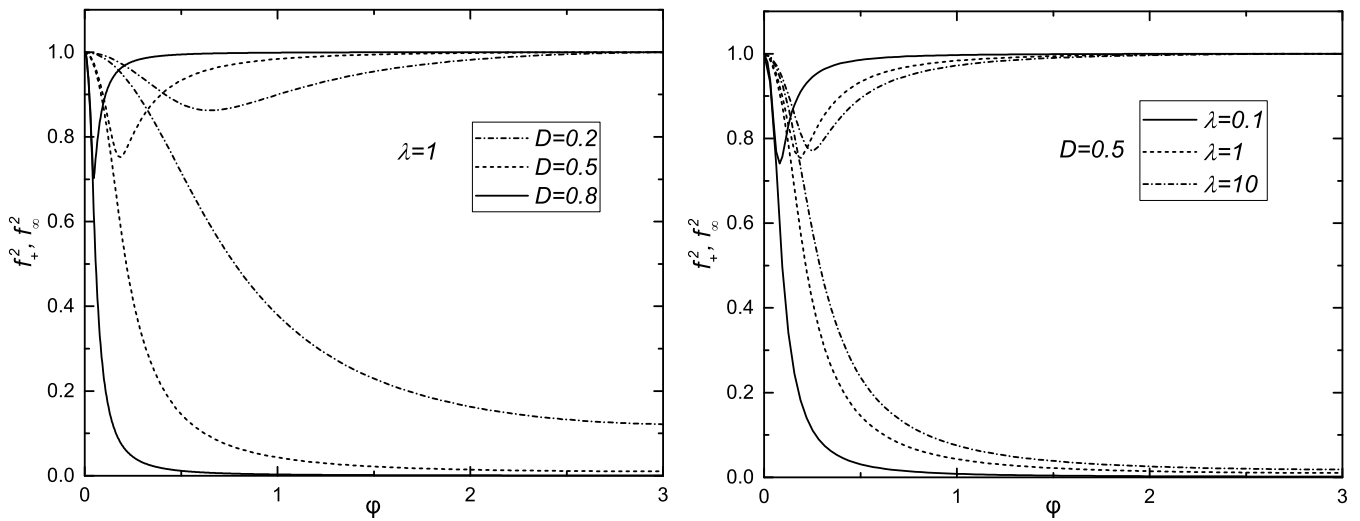


Рис. 2.3: Залежності функцій f_+^2 та f_∞^2 від різниці фаз φ для таких двох випадків: фіксоване значення безрозмірної довжини вільного пробігу електронів λ та різні значення прозорості діелектричного прошарку D (лівий графік); фіксоване значення прозорості діелектричного прошарку D та різні значення безрозмірної довжини вільного пробігу електронів λ (правий графік).

На графіках рисунка (2.3) нижня лінія (у парах із однаковим типом ліній) відповідає асимптотичній поведінці функції $f^2(\zeta)$ поблизу границі IS (це означає, що $\zeta \rightarrow +0$), тобто відповідає величині f_+^2 . Верхня лінія відповідає асимптотичній поведінці функції $f^2(\zeta)$ у глибині надпровідника (це означає, що $\zeta \rightarrow +\infty$), тобто відповідає величині f_∞^2 .

На лівому графіку рисунка (2.3) видно, що значення параметра впорядкування поблизу границі IS та в глибині надпровідника мало відрізняються одне від одного для різниці фаз $\varphi < \varphi_c$. Тобто саме в цій області відображається те, як впливає на еволюцію системи наявність бар'єра з різними можливими значеннями прозорості діелектричного прошарку.

На правому графіку рисунка (2.3) видно, що наслідком збільшення безрозмірної довжини вільного пробігу електронів λ є зменшення різниці між значеннями функцій f_+^2 та f_∞^2 . Тобто навіть для заданого значення прозорості діелектричного прошарку концентрація немагнітних домішок помітно впливає на еволюцію системи в області $0 \leq \varphi \leq \varphi_c$.

2.5.1. Аналітичні результати. На додаток до вже отриманих чисельних результатів можна також отримати аналітичні результати. На графіках рисунка (2.3) видно, що внаслідок збільшення D та зменшення λ функція f_∞^2 швидко наближається до одиниці для різниці фаз $\varphi > \varphi_c$. А для асимптотичних випадків $D \lesssim 1$ та $\lambda \ll 1$ значення функції f_∞^2 є близькими до одиниці на всьому інтервалі зміни різниці фаз φ . У такому випадку ми можемо перетворити замкнену систему (2.4.41) за допомогою заміни $f_\infty^2 = 1 - \varepsilon$. Оскільки параметр ε є близьким до нуля, то можна обмежитися лише доданками з ε у першому степені. Тоді ми отримуємо рівняння

$$\frac{f_+^4 \left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^4}{\tau^2 q_\infty^2} + (1 - f_+^2) \left\{ \varepsilon - \frac{f_+^2}{2} (1 - f_+^2) \right\} = 0 \quad (2.5.8)$$

та

$$\varepsilon = \frac{f_+^4 (\sin \varphi)^2}{4\tau^2 q_\infty^2}. \quad (2.5.9)$$

Рівняння (2.5.9) потрібно підставляти в рівняння (2.5.8). Тоді ми приходимо до рівняння

$$\frac{f_+^4 \left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^4}{\tau^2 q_\infty^2} - \frac{f_+^2}{2} (1 - f_+^2)^2 + (1 - f_+^2) \frac{f_+^4 (\sin \varphi)^2}{4\tau^2 q_\infty^2} = 0,$$

яке внаслідок скорочення на $f_+^2 \neq 0$ та виконання усіх елементарних спрощень перетворюється на квадратне рівняння

$$\left\{ 1 + \frac{(\sin \varphi)^2}{2\tau^2 q_\infty^2} \right\} f_+^4 - 2 \left\{ 1 + \frac{\left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^2}{\tau^2 q_\infty^2} \right\} f_+^2 + 1 = 0 \quad (2.5.10)$$

для величини f_+^2 .

Квадратне рівняння (2.5.10) має розв'язок

$$f_+^2 = \frac{\sqrt{1 + 2\tau^2 q_\infty^2} - 1}{\sqrt{1 + 2\tau^2 q_\infty^2} - \cos \varphi}. \quad (2.5.11)$$

Якщо підставити розв'язок (2.5.11) у формулу (2.4.28), то можна прийти до струм-фазової залежності

$$I(\varphi) = \frac{\tau q_\infty}{\sqrt{1 + 2\tau^2 q_\infty^2} + 1} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + 2\tau^2 q_\infty^2} - \cos \varphi}. \quad (2.5.12)$$

Отримана аналітична формула (2.5.12) для струм-фазової залежності враховує вплив прозорості діелектричного прошарку, яка, до речі, може змінюватися від нуля до одиниці, та наявність у контакті немагнітних домішок довільної концентрації.

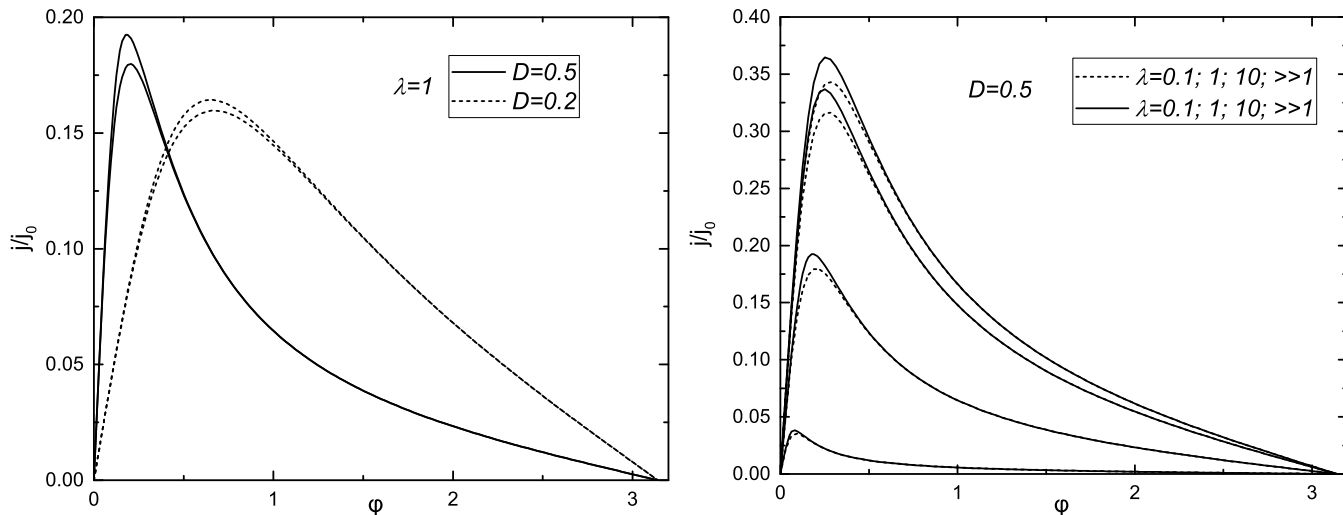


Рис. 2.4: Залежність безрозмірної густини струму $\frac{j}{j_0}$ від різниці фаз φ для таких двох випадків: фіксоване значення безрозмірної довжини вільного пробігу електронів λ та різні значення прозорості діелектричного прошарку D (лівий графік); фіксоване значення прозорості діелектричного прошарку D та різні значення безрозмірної довжини вільного пробігу електронів λ (правий графік). Верхня крива (у парах) відповідає чисельному результату, а нижня — аналітичному.

На графіках рисунка (2.4) зображено струм-фазові залежності, які відповідають чисельним розрахункам та аналітичній формулі (2.5.12). Як бачимо, обидва результати добре узгоджуються між собою та мають незначну відмінність поблизу максимуму струму. На лівому графіку рисунка (2.4) видно, що дана відмінність слабне для менших значень прозорості діелектричного прошарку. На правому графіку рисунка (2.4) легко бачити, що внаслідок збільшення безрозмірної довжини вільного пробігу електронів λ росте не лише значення струму, а й різниця між чисельним та аналітичним результатами в області критичного струму. Це пояснюється тим, що при збільшенні λ функція f_∞^2 наближається до одиниці повільніше (правий графік рисунка (2.3)).

Оскільки вираз для густини струму отримано, то вже можна взятися до розгляду деяких частинних випадків. Оскільки густина струму визначається значенням сталої q_∞ , то нам варто зосередитися на поведінці цієї величини.

Нехай $\lambda \gg 1$, тобто $l \gg \xi_0$. У такому частинному випадку надпровідний контакт буде гранично чистим. Тоді з формули (2.3.27) випливає, що [41]

$$q_\infty = \frac{\pi^4}{28\zeta(3)} \int_0^1 x^3 R(x) dx + \frac{21\zeta(3)}{\pi^2} \frac{\left\{ \int_0^1 x^2 R(x) dx \right\}^2}{\int_0^1 x D(x) dx}.$$

Нехай $\lambda \ll 1$, тобто $l \ll \xi_0$. У такому частинному випадку надпровідний контакт буде гранично брудним. Тоді з формули (2.3.27) випливає, що

$$q_\infty = 3\lambda \int_0^1 x^3 R(x) dx + 3\lambda \frac{\left\{ \int_0^1 x^2 R(x) dx \right\}^2}{\int_0^1 x D(x) dx}.$$

Розгляньмо далі залежність величини q_∞ та густини струму j від прозорості діелектричного прошарку D . Якщо $D \ll 1$, то у порівнянні із другим доданком правої частини формули (2.3.27) перший доданок дає незначний внесок у значення величини q_∞ . Тоді ми відкидаємо перший доданок у правій частині формули (2.3.27), а в другому доданку виконуємо наближення $\int_0^1 x^2 R(x) dx \cong \frac{1}{3}$. Тоді ми отримуємо формулу

$$q_\infty \cong \frac{4\chi(\lambda)}{3\pi^2} \left\{ \int_0^1 x D(x) dx \right\}^{-1}. \quad (2.5.13)$$

З формули (2.5.13) видно, що $q_\infty \gg 1$. Тоді для залежності (2.5.12) матиме місце асимптотика $I(\varphi) \cong \frac{\sin \varphi}{2\tau q_\infty}$, у вираз для якої потрібно підставляти знайдену асимптотику (2.5.13). Отже, формула (2.5.7) зводиться до формули

$$j(\varphi) \cong \frac{21\zeta(3)}{64\chi(\lambda)} \frac{env_0}{p_0\xi_0} \chi\left(\frac{\xi_0}{l}\right) \frac{\Delta_\infty^2}{T_c^2} \left\{ \int_0^1 x D(x) dx \right\} \sin \varphi.$$

На лівому графіку рисунка (2.1) видно, що якщо $D \lesssim 1$, то струм досягає свого максимального значення для різниці фаз $\varphi \ll 1$. Тоді в першому рівнянні

системи (2.4.41) відкидаємо доданок із величиною $\left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^4$, яка є нескінченно малою, та отримуємо два рівняння

$$f_{\infty}^2 = 1 - \frac{f_{+}^2}{2} \quad (2.5.14)$$

та

$$f_{\infty}^2 = f_{+}^2. \quad (2.5.15)$$

Варто зауважити, що наближення $\sin \varphi \cong \varphi$ дає змогу перетворити друге рівняння замкненої системи (2.4.41) на рівняння

$$f_{\infty}^4 (1 - f_{\infty}^2) = \frac{\varphi^2 f_{+}^4}{4\tau^2 q_{\infty}^2}, \quad (2.5.16)$$

а формулу (2.4.28) перетворює на формулу

$$I(\varphi) = \frac{\varphi f_{+}^2}{2\tau q_{\infty}}. \quad (2.5.17)$$

Якщо підставити рівняння (2.5.14) у рівняння (2.5.16), то можна прийти до результату

$$f_{+}^2 = \frac{8\tau^2 q_{\infty}^2}{\left(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 4\tau^2 q_{\infty}^2}\right)^2}. \quad (2.5.18)$$

Формулу (2.5.18) підставляємо у формулу (2.5.17). Тоді виходить, що

$$I(\varphi) = \frac{4\tau q_{\infty} \varphi}{\left(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 4\tau^2 q_{\infty}^2}\right)^2}. \quad (2.5.19)$$

Рівняння (2.5.14) перетворює подвійну нерівність $\frac{2}{3} \leq f_{\infty}^2 \leq 1$ на нерівність $f_{+}^2 \leq \frac{2}{3}$. Якщо взяти до уваги розв'язок (2.5.18), то ми одержимо нерівність

$$\frac{12\tau^2 q_{\infty}^2}{\left(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 4\tau^2 q_{\infty}^2}\right)^2} \leq 1,$$

наслідком якої є нерівність $\varphi_c \leq \varphi \ll 1$. Ця подвійна нерівність, у формулі для якої використано позначення для фази $\varphi_c = \frac{2\tau q_{\infty}}{\sqrt{3}}$, є, до речі, областю визначення функцій (2.5.18) та (2.5.19).

Якщо підставити рівняння (2.5.15) у рівняння (2.5.16), то можна прийти до результату

$$f_+^2 = 1 - \frac{\varphi^2}{4\tau^2 q_\infty^2}. \quad (2.5.20)$$

Формулу (2.5.20) підставляємо у формулу (2.5.17). Тоді виходить, що

$$I(\varphi) = \frac{\varphi}{2\tau q_\infty} \left(1 - \frac{\varphi^2}{4\tau^2 q_\infty^2} \right). \quad (2.5.21)$$

Рівняння (2.5.15) перетворює подвійну нерівність $\frac{2}{3} \leq f_\infty^2 \leq 1$ на подвійну нерівність $\frac{2}{3} \leq f_+^2 \leq 1$. Якщо взяти до уваги розв'язок (2.5.20), то ми одержимо проміжок $0 \leq \varphi \leq \varphi_c$, на якому функції (2.5.20) та (2.5.21) є справедливими.

Для різниці фаз $\varphi = \varphi_c$ струм досягає свого максимального значення, яке відповідає термодинамічно критичному струмові.

Якщо $\varphi > \varphi_c$, то функція f_∞^2 є близькою до одиниці. За таких обставин ми можемо скористатися аналітичною формулою (2.5.12). Оскільки $\tau q_\infty \ll 1$, то

$$I(\varphi) = \frac{\tau q_\infty \sin \varphi}{2\tau^2 q_\infty^2 + 4 \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right)^2}. \quad (2.5.22)$$

Другий доданок у правій частині формули (2.3.27) є несуттєвим у порівнянні із першим доданком, тому для сталої q_∞ будемо мати вираз

$$q_\infty = \frac{3\chi_1(\lambda)}{\chi(\lambda)} \int_0^1 x^3 R(x) dx.$$

2.6. Динаміка флюксонів у довгому джозефсонівському контакті з нетривіальною струм-фазовою залежністю

Існування бездисипаційного струму [1, 29, 34, 35], що протікає через тунельний SIS — контакт, є одним із найяскравіших явищ надпровідності. Числове значення цього струму залежить від різниці $\varphi = \theta_L - \theta_R$ між фазами θ_L та θ_R макроскопічних хвильових функцій лівого та правого надпровідників (також відомої як фаза Джозефсона). У найпростішому випадку цю залежність вважають синусоїдною [123]. Синусоїдний закон використовується в основних підручниках [34, 35] і в більшості наукових робіт, які стосуються ефекту Джозефсона. Насправді різниця

фаз φ підлаштовується під абсолютне значення бездисипаційного струму, що протікає через тунельний SIS — контакт, увімкнений у коло джерела струму. Загалом, коли джозефсонівський контакт поміщають у зовнішнє магнітне поле, різниця фаз φ залежить від просторових координат. Ця залежність визначається так званим рівнянням Фарела-Пренджа або стаціонарним рівнянням синус-Гордона [124]. Це є диференціальне рівняння другого порядку, в якому фігурує фізична величина λ_j , яка називається джозефсонівською глибиною проникнення.

Критичний струм I_C контакту може бути меншим від струму I_B , який подається на контакт від зовнішнього джерела. Як наслідок, на контакті з'являється спад напруги і різниця фаз φ вже є функцією часу [124]. У цьому випадку закон еволюції різниці фаз φ у часі є розв'язком нестационарного рівняння синус-Гордона [125, 126]. Це рівняння повністю інтегрується за допомогою перетворення зворотного розсіяння [125]. На додаток до джозефсонівської глибини проникнення λ_j з'являється так звана швидкість Свіхарта \bar{c} , яка є максимальною швидкістю електромагнітних хвиль у контакті. Розв'язки нестационарного рівняння синус-Гордона можна подати у вигляді топологічних солітонів, які описують проникнення зовнішнього магнітного поля через контакт у вигляді окремих вихорів (флюксонів), що несуть квант магнітного потоку. Флюксони топологічно захищені від малих збурень і їхня чудова стабільність приводить до їхнього застосування в різних програмах квантових обчислень [127–129]. Величезне число публікацій уже присвячено дослідженню динаміки флюксонів у джозефсонівських контактах, але в більшій частині цих робіт залежність надпровідного струму I_S від різниці фаз φ є синусоїдною [125, 126, 130].

Упродовж останніх двох десятиліть несинусоїдні струм-фазові залежності досліджували для тунельних надпровідних контактів різних типів [2, 131, 132]. Наприклад, бігармонійна струм-фазова залежність може з'являтися у надпровідних контактах типів SFS (надпровідник/ферромагнетик/надпровідник) та SIFS (надпровідник/діелектрик/ферромагнетик/надпровідник) [133, 134], а також і в асиметричних масивах трибар'єрних СКВІДів [135]. Така струм-фазова залежність породжує нові цікаві явища: релятивістське уповільнення часу [135]; розповсюдження флюксона без випромінювання [136, 137] та значні зміни швидкості втечі [138]. Складніша струм-фазова залежність виникає також і для контактів типів SIS [16] та SISIS [139], які утворено на основі двоцілинних надпровідників.

У цьому пункті ми маємо намір представити нове рівняння з метою опису

джозефсонівської фазової динаміки з несинусоїдною струм-фазовою залежністю. Використана в цьому дослідженні нетривіальна струм-фазова залежність може виникати в задачах, у яких так звані ефекти розпаровування [12, 41–43] є суттєвими. Вплив прозорості діелектричного прошарку на залежність надпровідного струму від різниці фаз у чистому тунельному SIS — контакті досліджували в роботах [41] та [58]. Стосовно джозефсонівського контакту з немагнітними домішками довільної концентрації, то йому присвячено вже роботу [12]. Метою даного пункту є дослідження властивостей джозефсонівських вихорів (флюксонів) нестационарного модифікованого рівняння синус-Гордона з нетривіальною струм-фазовою залежністю, яку отримано в роботі [12]. Але з метою спрощення чисельних розрахунків будемо вважати, що джозефсонівський контакт є гранично чистим. На додаток до цього ми будемо досліджувати динаміку флюксонів і для більш реалістичного випадку, який бере до уваги потік неспарених електронів через контакт, увімкнений у коло джерела постійного струму. Це означатиме, що в нестационарному рівнянні синус-Гордона з'явиться доданок, який відповідатиме за дисипацію енергії джозефсонівського контакту. Згаданий вище доданок міститиме обернений до опору контакту коефіцієнт, який, очевидно, має залежати від прозорості діелектричного прошарку. Цю залежність буде взято до уваги з метою розрахунку швидкості флюксона як функції постійного струму.

2.6.1. Надпровідний струм. Варто наголосити на тому, що струм-фазову залежність (2.5.12) можна записати також і в більш компактному вигляді. З цією метою доцільно буде запровадити безрозмірний параметр

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\tau^2 q_\infty^2}}, \quad (2.6.1)$$

для якого виконується нерівність $0 < \varepsilon < 1$. За таких обставин ми приходимо до несинусоїдної струм-фазової залежності

$$I(\varphi) = \frac{I_{\max} \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \quad (2.6.2)$$

у формулі для якої ми маємо максимальне значення струму

$$I_{\max} = \frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon) \sqrt{2}}. \quad (2.6.3)$$

Оскільки ми вважаємо, що джозефсонівський контакт є гранично чистим, то

це означає, що для безрозмірних параметрів τ та q_∞ мають місце формули

$$\tau^2 = \left\{ \frac{\xi_0}{\xi(T)} \right\}^2 = \frac{12}{7\zeta(3)} \left(1 - \frac{T}{T_c} \right) \quad (2.6.4)$$

та

$$q_\infty = \frac{\pi^4}{28\zeta(3)} \int_0^1 y^3 \mathcal{R}(y) dy + \frac{21\zeta(3)}{\pi^2} \frac{\left\{ \int_0^1 y^2 \mathcal{R}(y) dy \right\}^2}{\int_0^1 y \mathcal{D}(y) dy} \quad (2.6.5)$$

відповідно.

Тут ми маємо функції

$$\mathcal{D}(y) = \frac{y^2}{y^2 + \left(\frac{mU_0}{p_0} \right)^2}$$

та $\mathcal{R}(y) = 1 - \mathcal{D}(y)$, які називаються коефіцієнтами проходження і відбивання відповідно. Тут $y = \cos \theta$. З формули для коефіцієнта проходження $\mathcal{D}(y)$ можна отримати формулу

$$\left(\frac{mU_0}{p_0} \right)^2 = \frac{1}{\mathcal{D}(1)} - 1.$$

Надалі ми будемо використовувати позначення $\mathcal{D}(1) \equiv D$. Тоді ми можемо записати формулу

$$\left(\frac{mU_0}{p_0} \right)^2 = \frac{1}{D} - 1.$$

Обрахунки всіх трьох інтегралів у формулі (2.6.5) дають нам змогу прийти до остаточного результату

$$q_\infty = \frac{\pi^4}{56\zeta(3)} \left(\frac{1}{D} - 1 \right) \left[1 + \left\{ \frac{1}{D} - 1 \right\} \ln(1 - D) \right] + \frac{42\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{1}{D} - 1 \right)^3 \frac{\left\{ \sqrt{\frac{D}{1-D}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{D}{1-D}} \right\}^2}{1 + \left\{ \frac{1}{D} - 1 \right\} \ln(1 - D)} \quad (2.6.6)$$

для сталої величини q_∞ .

Якщо підставити остаточний результат (2.6.6) для сталої величини q_∞ у формулу (2.6.1) для безрозмірного параметра ε , який можна трактувати як міру несинусоїдності струм-фазової залежності (2.6.2), то можна прийти до залежності $\varepsilon(D)$. З рисунка (2.5) видно, що функція $\varepsilon(D)$ монотонно зростає від $\varepsilon(0) = 0$ до $\varepsilon(1) = 1$.

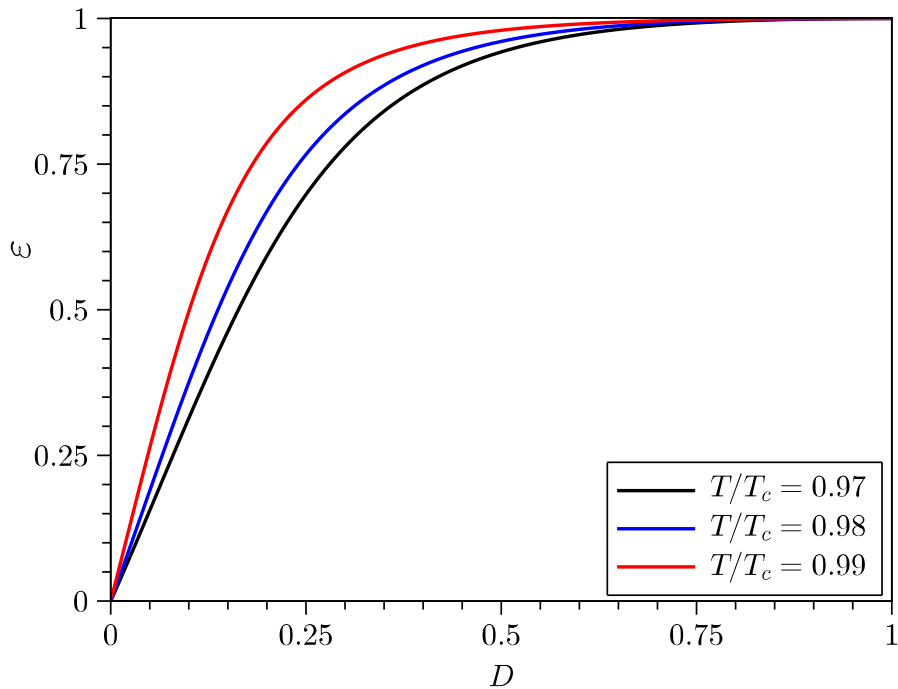


Рис. 2.5: Параметр ε як функція прозорості діелектричного прошарку D для трьох різних значень температури.

Якщо підставити формулу (2.6.4) для величини τ^2 у формулу (2.6.1), то можна отримати залежність безрозмірного параметра ε від відношення $\frac{T}{T_c}$. При температурах, близьких до критичної, ця залежність є суттєвою для $D \lesssim \frac{1}{2}$. А якщо $D \gtrsim \frac{4}{5}$, то параметр ε майже досягає свого максимального значення $\varepsilon = 1$. Ми встановимо температуру $T = 0.98 T_c$ для всіх подальших обрахунків.

Оскільки $I_{\max} \equiv I_C$, то на основі формули (2.6.2) можна отримати залежність надпровідного струму I_S від різниці фаз φ у вигляді формули

$$I_S(\varphi) = \frac{I_C \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi}. \quad (2.6.7)$$

2.6.2. Модифіковане рівняння синус-Гордона. Нас цікавить динаміка магнітного потоку через великий джозефсонівський контакт. У цьому випадку фаза Джозефсона залежить як від просторової координати, так і від часу. Для нетривіальної струм-фазової залежності (2.6.7) можна побудувати модифіковане рівняння синус-Гордона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{\lambda_j^2} \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi} = 0. \quad (2.6.8)$$

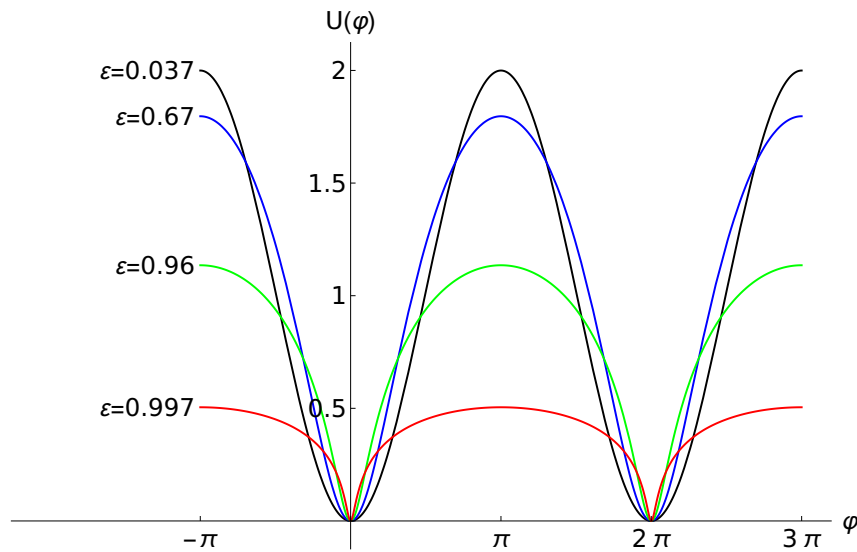


Рис. 2.6: Допоміжний потенціал $U(\varphi)$ для різних значень параметра ε .

Варто наголосити на тому, що різні модифікації рівняння синус-Гордона не є рідкістю у фізиці за межами джозефсонівських контактів. Вони використовуються з метою опису динаміки дислокацій [140], спінових хвиль у ^3He [141] чи нелінійних електромагнітних хвиль у діраківських надґратках [142]. Для спрощення записів доцільно запровадити безрозмірні змінні $\tilde{x} = \frac{x}{\lambda_j}$ та $\tilde{t} = \frac{ct}{\lambda_j}$, але знак «*тильда*» у перетвореному рівнянні синус-Гордона ми будемо опускати. Тоді приходимо до диференціального рівняння другого порядку в частинних похідних

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi} = -U'(\varphi), \quad (2.6.9)$$

у якому запровадили допоміжний потенціал

$$U(\varphi) = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \ln \left(\frac{1 - \varepsilon \cos \varphi}{1 - \varepsilon} \right) \quad (2.6.10)$$

з метою спрощення аналізу рівняння. Допоміжний потенціал (2.6.10) зображено на рисунку (2.6). Параметр ε може змінюватись від 0 до 1. Якщо $\varepsilon \rightarrow 0$, то

вдається відтворити стандартне рівняння синус-Гордона, бо для такого випадку має місце границя

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U(\varphi) = 2 \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right)^2.$$

Якщо $\varepsilon \rightarrow 1$, то свердловини потенціалу $U(\varphi)$ стають більш вузькими, а висота бар'єра

$$\Delta U = U(\pi) - U(0) = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \ln \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)$$

прямує до нуля. Якщо зовнішнє магнітне поле є слабким, то $|\varphi| \ll 1$. Тоді за допомогою наближень $\cos \varphi \cong 1$ та $\sin \varphi \cong \varphi$ вдається перетворити модифіковане рівняння синус-Гордона (2.6.9) на лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку в частинних похідних

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)^{1/2} \varphi = 0,$$

загальний розв'язок якого потрібно шукати у вигляді формули

$$\varphi(x, t) = \varphi(0, 0) \exp \{i(qx - \omega t)\}.$$

Як наслідок, ми отримуємо аналітичну формулу

$$\omega(q) = \left\{ \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)^{1/2} + q^2 \right\}^{1/2}$$

для джозефсонівської плазмової частоти. Що стосується джозефсонівської плазмової частоти $\omega(0)$ для нескінченно великих довжин хвиль, то вона буде зростати, якщо зростатиме параметр ε .

2.6.3. Розв'язки модифікованого рівняння синус-Гордона. Ми запровадили модифіковане рівняння синус-Гордона (2.6.9), яке описує динаміку флюксовнів у довгому джозефсонівському контакті з нетривіальною струм-фазовою залежністю (2.6.7). Нас цікавить окремий випадок розв'язків поступальної хвилі $\varphi = \varphi(x - Vt)$, яка поширюється зі сталою безрозмірною швидкістю V . Якщо запровадити нову просторову змінну $\xi = x - Vt$, то диференціальне рівняння другого порядку в частинних похідних (2.6.9) перетвориться на звичайне диференціальне рівняння другого порядку

$$(1 - V^2) \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi} = U'(\varphi) \quad (2.6.11)$$

для різниці фаз $\varphi(\xi)$, яке можна вважати ньютонівським рівнянням руху частинки маси $1 - V^2 > 0$ у потенціальному полі $-U(\varphi)$. Відомо, що квант магнітного потоку в довгому джозефсонівському контакті переноситься топологічними солітонами (флюксонами). Солітони — це просторово локалізовані хвилі, для яких мають виконуватись такі граничні умови:

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \varphi(\xi) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \varphi(\xi) = \pm 2\pi, \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{d\varphi}{d\xi} = 0. \quad (2.6.12)$$

Знаки «+» та «-» обираємо для флюксона та антифлюксона відповідно. Без втрати загальності ми будемо розглядати тільки флюксони. Як наслідок, модифіковане рівняння синус-Гордона (2.6.11) вдається переписати у вигляді диференціального рівняння першого порядку

$$\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2 = \frac{2U(\varphi)}{1 - V^2} = \frac{2\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon(1 - V^2)} \ln\left(\frac{1 - \varepsilon \cos \varphi}{1 - \varepsilon}\right). \quad (2.6.13)$$

За допомогою розкладу

$$\frac{1}{\varepsilon} \ln\left(\frac{1 - \varepsilon \cos \varphi}{1 - \varepsilon}\right) = 1 - \cos \varphi + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[1 - (\cos \varphi)^{n+1}\right] \frac{\varepsilon^n}{n+1}$$

рівняння (2.6.13) перетвориться на рівняння

$$\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2 = \frac{2\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{1 - V^2} \left\{1 - \cos \varphi + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[1 - (\cos \varphi)^{n+1}\right] \frac{\varepsilon^n}{n+1}\right\}. \quad (2.6.14)$$

Якщо $D \ll 1$, то в такому частинному випадку замість формули (2.6.6) для сталої величини q_∞ будемо мати таку асимптотику:

$$q_\infty \cong \frac{28\zeta(3)}{3\pi^2} \frac{1}{D}, \quad D \ll 1. \quad (2.6.15)$$

Оскільки константа q_∞ є нескінченно великою, то з формули (2.6.1) видно, що параметр ε є нескінченно малим. Тоді диференціальне рівняння (2.6.9) перетворюється на стандартне рівняння синус-Гордона $\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin \varphi = 0$, солітонні розв'язки якого є добре відомі [125]:

$$\varphi(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left(\exp \left\{ \pm \frac{x - x_0 - Vt}{\sqrt{1 - V^2}} \right\} \right).$$

Але якщо в правій частині диференціального рівняння (2.6.14) обмежитись лінійною залежністю за параметром ε , то можна прийти до цілком інтегровного

диференціального рівняння першого порядку

$$\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2 = \frac{4}{1-V^2} \left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^2 \left\{1 + \varepsilon \left(\cos \frac{\varphi}{2}\right)^2\right\},$$

яке є тотожним до подвійного рівняння синус-Гордона. Розв'язок цього рівняння є добре відомий [141]:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\operatorname{sh}(z)} = 0, \quad z = \pm(x - x_0 - Vt) \left(\frac{1+\varepsilon}{1-V^2}\right)^{1/2}.$$

Якщо в правій частині диференціального рівняння (2.6.14) обмежитись квадратичною залежністю за параметром ε , то можна прийти до вже потрійного рівняння синус-Гордона.

Нехай тепер $D \lesssim 1$. За таких обставин замість формули (2.6.6) для сталої величини q_∞ ми будемо мати вже таку асимптотику:

$$q_\infty \cong \frac{\pi^4}{56\zeta(3)} (1 - D), \quad D \lesssim 1. \quad (2.6.16)$$

На жаль, неможливо знайти точний аналітичний розв'язок диференціального рівняння першого порядку (2.6.13) для довільних значень параметра ε . Тому ми змушені вдаватися до чисельних розрахунків. Це було зроблено для кількох значень параметра ε , серед яких є крайні та проміжні значення. Ці значення також наведені в таблиці (2.1).

Просторову поведінку фази Джозефсона, яка задовольняє модифіковане рівняння синус-Гордона (2.6.11) для флюксона, подано на рисунку (2.7) у випадку різних значень параметра ε . Просторову поведінку безрозмірного магнітного поля $\frac{H}{H_0} = \frac{d\varphi}{d\xi}$, яке проникає в серцевину флюксона, подано на рисунку (2.8). Тут ми маємо величину $H_0 = \frac{\hbar}{2e\mu_0\lambda_j\Lambda}$, яку подано через повну глибину проникнення $\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + d$. Величини λ_1 та λ_2 є лондонівськими глибинами проникнення для надпровідників, а величина d є товщиною тонкої діелектричної плівки.

На основі рисунків (2.7) та (2.8) нам вдається зробити такі висновки:

- Якщо параметр ε зростає, то зростає також і приблизна ширина флюксона. Таке зростання є найбільш помітним для $\varepsilon \rightarrow 1$, але є незначним для інших випадків.
- Значне відхилення від синусоїдної струм-фазової залежності робить межі флюксона більш виразними. Якщо $\varepsilon \rightarrow 1$, то просторова поведінка різниці

фаз φ є майже лінійною в ядрі флюксона. Графік залежності безрозмірного магнітного поля $\frac{H}{H_0}$ від просторової координати ξ є більш коробковий. Якщо значення параметра ε є неблизькими до 1, то межі флюксона є досить розмитими. При цьому максимальне значення H ($\xi = 0$) магнітного поля, яке проникає в серцевину флюксона, зменшується.

Таблиця 2.1

Значення прозорості діелектричного прошарку D та безрозмірного параметра ε , які використовувались у рисунках (2.7) та (2.8).

D	0.01	0.2	0.5	0.8
ε	0.037	0.67	0.96	0.997

З асимптотики (2.6.16) видно, що стала величина q_∞ є нескінченно малою для $D \lesssim 1$. У такому частинному випадку безрозмірний параметр ε буде близьким до 1. Оскільки допоміжний потенціал $U(\varphi)$ стає значно плоским для асимптотичного випадку, коли $\varepsilon \lesssim 1$, то ми можемо розвинути допоміжний потенціал $U(\varphi)$ в ряд Тейлора в околі різниці фаз $\varphi = \pi$. Отже,

$$\begin{aligned} U(\varphi) &\approx U(\pi) + \frac{U''(\pi)}{2} (\varphi - \pi)^2 = \\ &= \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \ln \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right)^{1/2} (\varphi - \pi)^2. \end{aligned} \quad (2.6.17)$$

Чисельні результати рисунка (2.7) показують, що просторова поведінка різниці фаз φ у серцевині флюксона є майже лінійною для асимптотичного випадку, коли $\varepsilon \lesssim 1$. Це означає, що ми маємо обмежитись у розкладі (2.6.17) лише сталим доданком. Якщо запровадити новий параметр $\delta = 1 - \varepsilon$, то $\delta \rightarrow 0$ для випадку, коли $\varepsilon \rightarrow 1$. За таких обставин постійний член у розкладі (2.6.17) спадає як $\delta^{1/2} \ln(1/\delta)$, тоді як квадратичний член спадає швидше як $\delta^{1/2}$. Диференціальне рівняння першого порядку (2.6.13) у серцевині флюксона можна замінити більш спрощеною версією:

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \sqrt{\frac{2U(\pi)}{1 - V^2}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon(1 - V^2)} \ln \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)} \equiv C(\varepsilon), \quad |\xi| < \xi_i. \quad (2.6.18)$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку (2.6.18) має такий вигляд:

$$\varphi(\xi) = C(\varepsilon) \xi + A_1, \quad |\xi| < \xi_i. \quad (2.6.19)$$

З рисунка (2.7) видно, що якщо $\xi < -\xi_i$, то $\varphi \cong 0$. Застосування наближень $\cos \varphi \cong 1$ та $\sin \varphi \cong \varphi$ дозволяють нам перетворити модифіковане рівняння синус-Гордона (2.6.11) на лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, яке має такий вигляд:

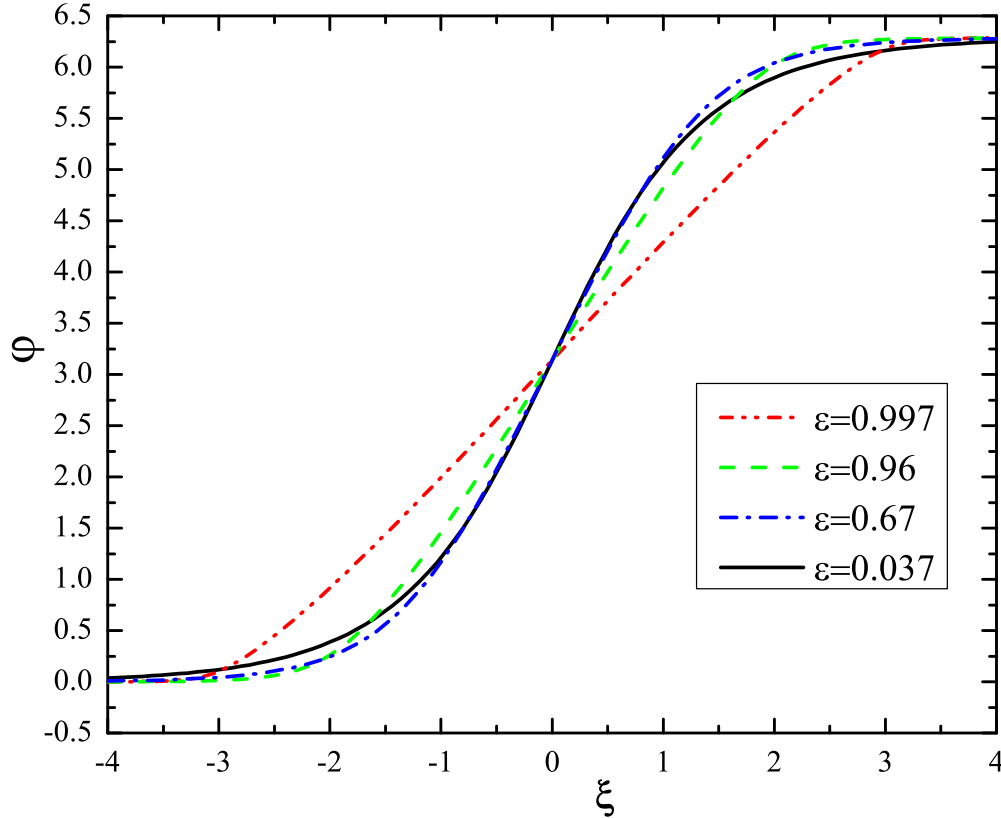


Рис. 2.7: Просторовий розподіл різниці фаз φ для одного флюксона в довгому джоузефсонівському контакті з різними значеннями прозорості діелектричного прошарку D . Обрахунки проведено для температури $T = 0.98 T_c$ та безрозмірної швидкості флюксона $V = 0.5$.

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} - \left\{ \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} \right\}^2 \varphi = 0, \quad \xi < -\xi_i. \quad (2.6.20)$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку (2.6.20) має такий вигляд:

$$\varphi(\xi) = A \exp \left\{ \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^{1/4} \frac{\xi}{\sqrt{1-V^2}} \right\}, \quad \xi < -\xi_i. \quad (2.6.21)$$

З рисунка (2.7) видно, що якщо $\xi > \xi_i$, то $\varphi \cong 2\pi$. Застосування наближень $\cos \varphi \cong 1$ та $\sin \varphi = \sin(\varphi - 2\pi) \cong \varphi - 2\pi$ дозволяють нам перетворити модифіковане рівняння синус-Гордона (2.6.11) на лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, яке має такий вигляд:

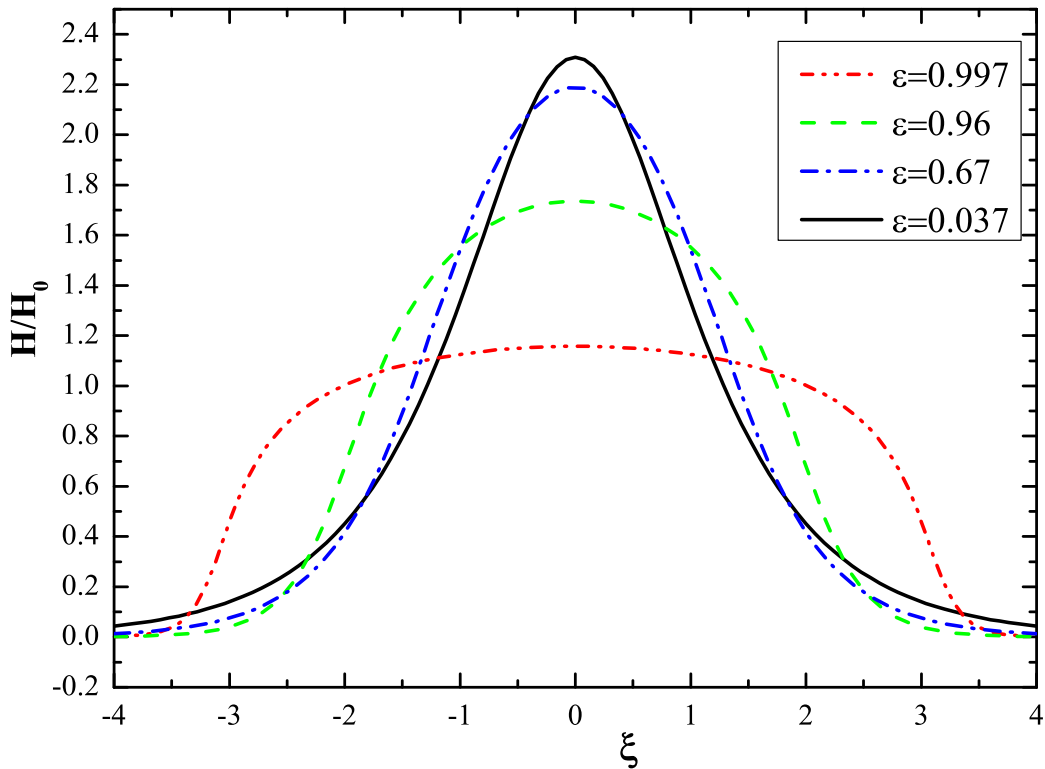


Рис. 2.8: Просторовий розподіл безрозмірного магнітного поля $\frac{H}{H_0} = \frac{d\varphi}{d\xi}$ для одного флюксона в довгому джозефсонівському контакті з різними значеннями прозорості діелектричного прошарку D . Значення параметрів є такими ж як і у випадку рисунка (2.7).

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} - \left\{ \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} \right\}^2 (\varphi - 2\pi) = 0, \quad \xi > \xi_i. \quad (2.6.22)$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку (2.6.22) має такий вигляд:

$$\varphi(\xi) = 2\pi + A_2 \exp \left\{ - \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^{1/4} \frac{\xi}{\sqrt{1-V^2}} \right\}, \quad \xi > \xi_i. \quad (2.6.23)$$

Чотири невідомі сталі величини A , A_1 , A_2 та ξ_i знаходимо за допомогою таких чотирьох умов:

$$\begin{aligned}\varphi(-\xi_i - 0) &= \varphi(-\xi_i + 0), & \varphi'(-\xi_i - 0) &= \varphi'(-\xi_i + 0), \\ \varphi(\xi_i - 0) &= \varphi(\xi_i + 0), & \varphi'(\xi_i - 0) &= \varphi'(\xi_i + 0).\end{aligned}$$

Тоді ми отримуємо результати

$$\xi_i = -\sqrt{1 - V^2} \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right)^{1/4} + \pi \left\{ \frac{2\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon(1 - V^2)} \ln \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right) \right\}^{-1/2}, \quad (2.6.24)$$

$A_1 = \pi$, $A_2 = -A$ та

$$A = C(\varepsilon) \sqrt{1 - V^2} \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right)^{1/4} \exp \left\{ \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)^{1/4} \frac{\xi_i}{\sqrt{1 - V^2}} \right\}.$$

Варто наголосити на тому, що позначення

$$\chi = \sqrt{\frac{2(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} \ln \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)}$$

дозволяє переписати сталу величину A у вигляді формули

$$A = \chi \exp \left(\frac{\pi}{\chi} - 1 \right). \quad (2.6.25)$$

Отже, для внутрішньої області $|\xi| < \xi_i$ просторова поведінка різниці фаз описується лінійною залежністю $\varphi(\xi) = C(\varepsilon)\xi + \pi$. Нахил флюксона визначається сталою $C(\varepsilon)$, яка спадає як $\delta^{1/4} \sqrt{\ln(1/\delta)}$ для випадку, коли $\varepsilon \rightarrow 1$. Оскільки ядро флюксона розташоване в області $|\xi| < \xi_i$, то величина ξ_i за своїм фізичним змістом є напівшириною флюксона. З формули (2.6.24) для напівширини флюксона видно, що якщо $\varepsilon \rightarrow 1$, то $\xi_i > 0$. Це є наслідком того, що перший доданок у правій частині формули (2.6.24) стає нескінченно малим, а другий збільшується. Розрахунок напівширини флюксона на основі аналітичної формули (2.6.24) дає значення $\xi_i \approx 2.74$ для параметрів рисунка (2.7), що є близьким до чисельного результату.

2.6.4. Узагальнене рівняння синус-Гордона. У фізично реалістичному випадку потрібно враховувати потік неспарених електронів через контакт. Крім

того, на контакт може подаватися деякий постійний струм I_B . У такому випадку закон еволюції фази Джозефсона визначається за допомогою узагальненого рівняння синус-Гордона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi} + \alpha(\varepsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \gamma = 0. \quad (2.6.26)$$

Безрозмірний параметр

$$\alpha(\varepsilon) = \frac{\hbar \omega_j}{2eR(D)I_C} \quad (2.6.27)$$

відповідає за внесок неспарених електронів у загальний струм, а безрозмірний параметр $\gamma = \frac{I_B}{I_C}$ є безрозмірним зовнішнім струмом. У формулі (2.6.27) також маємо джозефсонівську плазмову частоту $\omega_j = \frac{\bar{c}}{\lambda_j}$ та опір контакту $R(D)$, який визначається за допомогою формули [32, 46]

$$\frac{1}{R(D)} = e^2 v_0 N(0) \int_0^1 z \mathcal{D}(z) dz. \quad (2.6.28)$$

Для інтеграла

$$\int_0^1 z \mathcal{D}(z) dz = \frac{1}{2} \left[1 + \left\{ \frac{1}{D} - 1 \right\} \ln(1 - D) \right]$$

мають місце такі дві границі:

$$\lim_{D \rightarrow 0} \int_0^1 z \mathcal{D}(z) dz = 0, \quad \lim_{D \rightarrow 1} \int_0^1 z \mathcal{D}(z) dz = \frac{1}{2}.$$

Тоді для параметра (2.6.27) мають місце вже такі дві границі:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon) = 0, \quad \alpha_1 \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \alpha(\varepsilon) = \frac{\hbar \omega_j e v_0 N(0)}{4I_C}.$$

Стала величина α_1 буде розглядатись як деяке максимальне значення, якого набуває безрозмірний параметр (2.6.27) у випадку максимальної прозорості діелектричного прошарку. Оскільки значення $\alpha_1 = 0.2$ відповідає найпоширенішому порядку параметрів дисипації у довгих джозефсонівських контактах [126], то ми будемо використовувати його також і для наших розрахунків.

Узагальнене рівняння синус-Гордона (2.6.26) вперше детально вивчалось у роботі [125]. Якщо нас цікавить динаміка флюксона в джозефсонівському контакті

у момент часу $t \rightarrow +\infty$, то ми можемо використати наближення енергетичного балансу, яке розглядалось у згаданій вище роботі.

Якщо ми домножимо узагальнене рівняння синус-Гордона (2.6.26) на частинну похідну першого порядку $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, то можемо прийти до тотожності

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{(\varphi_x)^2 + (\varphi_t)^2}{2} + U(\varphi) \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha(\varepsilon) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2$$

та проінтегрувати її по x від $-\infty$ до $+\infty$. Внаслідок цього ми отримуємо закон еволюції

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx - \alpha(\varepsilon) \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.6.29)$$

енергії контакту

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{(\varphi_x)^2 + (\varphi_t)^2}{2} + U(\varphi) \right\} dx \quad (2.6.30)$$

в часі.

Припустімо, що в контакті є тільки один флюксон, для якого мають місце граничні умови (2.6.12). За таких обставин перший доданок у правій частині тотожності (2.6.29) дорівнює $\pm 2\pi\gamma V$. Знаки «+» та «-» обираємо для флюксона та антифлюксона відповідно. Без втрати загальності ми будемо розглядати тільки флюксони. Варто зауважити, що в момент часу $t \gg \frac{1}{\alpha(\varepsilon)}$ флюксон буде рухатися з деякою рівноважною швидкістю V_∞ . Дисипація енергії контакту внаслідок тунелювання неспарених електронів [другий інтеграл у правій частині тотожності (2.6.29)] буде скомпенсована споживанням енергії через наявність постійного струму, який подається на контакт. Отже, повна енергія має бути сталою, тобто має виконуватись умова $\frac{dE}{dt} = 0$. Якщо прирівняти праву частину тотожності (2.6.29) до нуля, то можна отримати рівняння

$$\begin{aligned} 2\pi\gamma V_\infty &= \alpha(\varepsilon) \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 dx = \alpha(\varepsilon) V_\infty^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{d\xi} d\varphi = \\ &= \alpha(\varepsilon) V_\infty^2 \sqrt{\frac{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon(1-V_\infty^2)}} \int_0^{2\pi} \left\{ \ln \left(\frac{1-\varepsilon \cos \varphi}{1-\varepsilon} \right) \right\}^{1/2} d\varphi \end{aligned} \quad (2.6.31)$$

та, як наслідок, аналітичну формулу

$$V_{\infty} = \frac{\text{sign}(\gamma)}{\sqrt{1 + \left\{ \frac{4\alpha(\varepsilon)}{\pi\gamma} \Phi(\varepsilon) \right\}^2}} \quad (2.6.32)$$

для рівноважної швидкості флюксона, яку подано через інтеграл

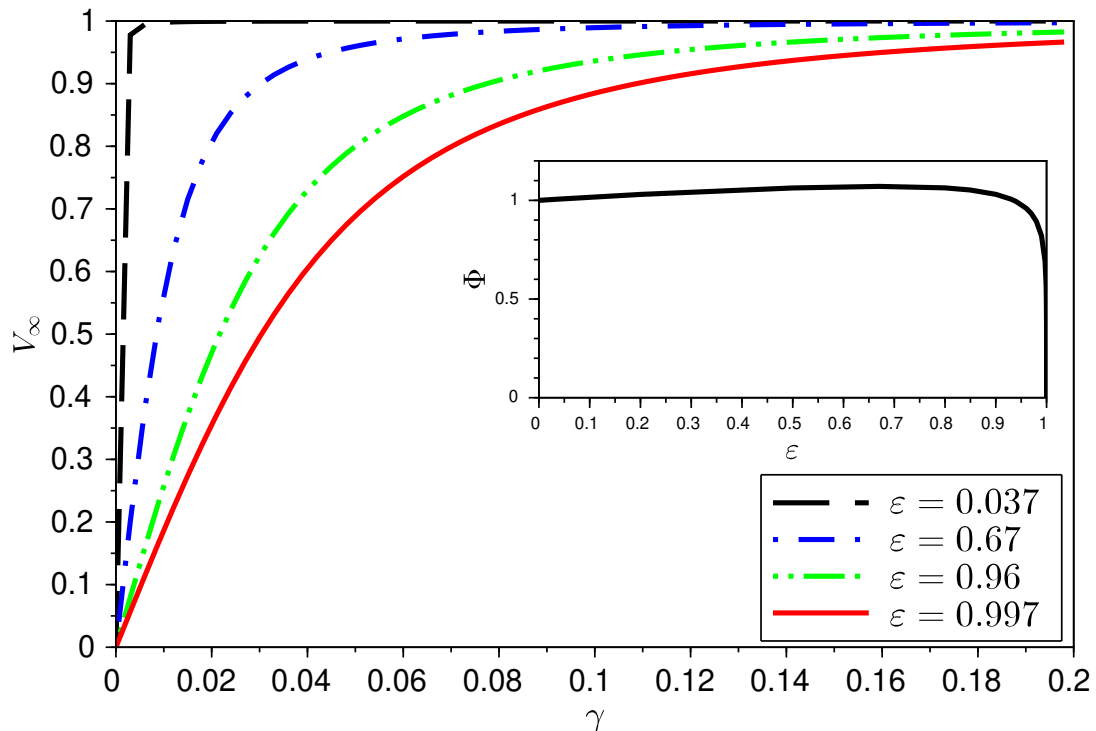


Рис. 2.9: Залежність рівноважної швидкості флюксона від постійного струму для різних значень параметра ε . На вставці зображено функцію $\Phi(\varepsilon)$ [визначається формулою (2.6.33)].

$$\begin{aligned} \Phi(\varepsilon) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\varepsilon}} \int_0^{2\pi} \left\{ \ln \left(\frac{1-\varepsilon \cos \varphi}{1-\varepsilon} \right) \right\}^{1/2} d\varphi \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{\varepsilon}{6} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), & \varepsilon \rightarrow 0, \\ 0, & \varepsilon \rightarrow 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.6.33)$$

Якщо $\varepsilon \rightarrow 0$ (випадок синусоїдної струм-фазової залежності), то можна побачити, що результат (2.6.32) для рівноважної швидкості V_{∞} зводиться до відомої формули МакЛафліна-Скотта [125].

Рівноважну швидкість флюксона V_∞ як функцію безрозмірного зовнішнього струму γ зображено на рисунку (2.9).

Допоміжна функція $\Phi(\varepsilon)$ визначає поведінку нахилу залежності $V_\infty(\gamma)$ для асимптотичного випадку, коли $|\gamma| \ll 1$. У такому асимптотичному випадку для рівноважної швидкості флюксона має місце наближення $V_\infty \approx \frac{\pi\gamma}{4\alpha(\varepsilon)\Phi(\varepsilon)}$. На вкладці рисунка (2.9) видно, що функція $\Phi(\varepsilon)$ досягає свого максимального значення для $\varepsilon \lesssim 1$. Це значення трохи перевищує одиницю для майже всіх значень параметра ε за винятком вузького інтервалу при $\varepsilon \rightarrow 1$. У межах цього інтервалу функція $\Phi(\varepsilon)$ стрімко прямує до нуля. Для випадку нескінченно малої прозорості діелектричного прошарку надпровідність є сильною і дисипативні ефекти, які є наслідком потоку неспарених електронів через контакт, є слабкими. За таких обставин $\alpha(\varepsilon)\Phi(\varepsilon) \rightarrow 0$, внаслідок чого нахил залежності $V_\infty(\gamma)$ є великим. Це означає, що флюксоніві притаманна висока рухливість. Таке є можливим у випадку синусоїдної струм-фазової залежності. Якщо параметр ε збільшується, то рівноважна швидкість флюксона зменшується, бо надпровідність є суттєво ослабленою. Якщо $D \rightarrow 1$, то $\varepsilon \rightarrow 1$ та $\Phi(\varepsilon) \rightarrow 0$. І ми знову повинні спостерігати збільшення швидкості флюксона. Це має відбуватися для дуже високої прозорості діелектричного прошарку $D > 0.99$, що наврядчи буде досягнуто. Це відбувається через те, що енергія флюксона

$$E(V_\infty) \approx \frac{8}{\sqrt{1-V_\infty^2}} = \frac{2\pi\gamma}{\alpha(\varepsilon)\Phi(\varepsilon)} \sqrt{1 + \left\{ \frac{4\alpha(\varepsilon)\Phi(\varepsilon)}{\pi\gamma} \right\}^2} \quad (2.6.34)$$

розбігається при $\Phi(\varepsilon) \rightarrow 0$. Максимальне значення магнітного поля, яке проникає в серцевину флюксона, зменшується при $\varepsilon \rightarrow 1$. А розмір флюксона різко збільшується. Це все показано на рисунку (2.8). Реальна довжина джозефсонівського контакту, досліджена в експериментах, наврядчи перевищує $30\lambda_j$. Тому дуже малоімовірним є те, що такі великі флюксони можна буде коли-небудь вивчати. Робимо висновок про те, що збільшення рівноважної швидкості флюксона при $\varepsilon \rightarrow 1$ є математичним об'єктом, який не може описувати реальні фізичні процеси.

2.7. Висновки та обговорення

У даному розділі представлено дослідження залежності струму від різниці фаз у тунельних надпровідних контактах типу SIS за наявності немагнітних домішок.

Область розглядуваних температур вважалася близькою до критичної, а тому в основі дослідження використовувалась теорія Гінзбурга-Ландау, в якій густина струму подається через параметр впорядкування. Тому, фактично, задача зводилася до дослідження просторової поведінки параметра впорядкування, який у теорії Гінзбурга-Ландау є розв'язком нелінійного диференціального рівняння другого порядку.

Показано, що в надпровідній області поблизу границі IS (на відстанях порядку довжини когерентності ξ_0) рівняння Гінзбурга-Ландау не працює, а просторова поведінка параметра впорядкування описується за допомогою лінійного інтегрального рівняння. Розглядаючи область $\xi_0 \ll z \ll \xi(T)$, встановлено, що асимптотика розв'язку лінійного інтегрального рівняння є лінійною, а відношення коефіцієнтів цієї асимптотики однозначно визначається ядром рівняння і це є ключовим результатом, завдяки якому вдалось одержати граничну умову для рівняння Гінзбурга-Ландау.

На основі отриманих результатів у роботі проведено аналіз впливу прозорості діелектричного прошарку та немагнітних домішок на форму залежності струму від різниці фаз. Встановлено, що збільшення коефіцієнта прозорості D приводить до відмінної від стандартної синусоїдної, властивої для $D \ll 1$, струм-фазової залежності і ця відмінність є особливо помітною для D , близьких до одиниці. Максимум струму в контакті досягається при значенні різниці фаз $\varphi_k < \frac{\pi}{2}$.

Показано, що наявність немагнітних домішок також відображається на залежності струму від різниці фаз, а особливо відчутним є їхній вплив на критичний струм контакту — його числове значення швидко зменшується зі збільшенням концентрації домішок. Однак, вже при довжині вільного пробігу електронів $l \geq 10 \xi_0$ вплив домішок практично відсутній.

Крім чисельних розрахунків у роботі також знайдено для струм-фазової залежності новий аналітичний результат, чинний для широкого інтервалу зміни коефіцієнта проходження електронів та довільної концентрації немагнітних домішок. Незважаючи на певне наближення, використане при одержанні нової формули, одержані на її основі результати дуже добре узгоджуються з чисельними розрахунками. Несуттєва відмінність виникає лише при немалих D у вузькому околі різниці фаз, яка відповідає критичному значенню струму в контакті.

Досліджено динаміку флюксонів у чистому і довгому джозефсонівському контакті з нетривіальною струм-фазовою залежністю. Побудовано аналітичний роз-

в'язок модифікованого рівняння синус-Гордона для прозорості діелектричного прошарку, близької до одиниці. Розглянуто також і більш реалістичний випадок, у якому враховано потік неспарених електронів через контакт, на який подається деякий постійний струм. За допомогою узагальненого рівняння синус-Гордона записано закон еволюції енергії контакту в часі. На основі закону збереження енергії контакту отримано аналітичну формулу для рівноважної швидкості флюксона.

РОЗДІЛ 3

СТАЦІОНАРНІ ВЛАСТИВОСТІ ШАРУВАТИХ НАДПРОВІДНИХ КОНТАКТІВ ТИПУ SIS'IS

Цей розділ присвячено дослідженню стаціонарних властивостей шаруватих надпровідних структур типу SIS'IS [5, 61]. Варто наголосити на тому, що в цьому дослідженні розглянуто загальний випадок. Це означає, що на товщину d проміжного надпровідника S' та на прозорість діелектричного прошарку D не накладено ніяких додаткових обмежень.

Дослідження проведено за допомогою методу функцій Гріна [32, 46], для яких використано процедуру згладжування просторової поведінки на довжинах порядку атомних розмірів. Це дало змогу отримати так звані квазікласичні рівняння [32, 46], які описують просторову поведінку функцій Гріна в масштабі довжини когерентності ξ_0 . Показано, що найкомпактніше ці рівняння можна записати за допомогою так званого t -представлення. У цьому ж представленні записано вираз для густини струму. Розв'язки диференціальних рівнянь першого порядку для функцій Гріна в кожній з трьох областей, зайнятих надпровідниками, знайдено в рамках так званої моделі з кусково-сталим параметром впорядкування. Модулі параметра впорядкування у лівому та правому надпровідниках вважалися однаковими, але відмінними від його значення у проміжному прошарку S' .

Запропонована схема розрахунків дозволила отримати новий аналітичний результат для залежності густини струму j від різниці фаз φ , який, до речі, є справедливим для довільних значень коефіцієнта проходження електронів D крізь подвійний дельта-функційний бар'єр та для довільних значень товщини d проміжного прошарку S' . З отриманої формули можна відтворити низку раніше відомих результатів для різних надпровідних контактів: SNS, SINIS, SISIS та SIS. Це, власне, і є оцінкою правильності отриманого результату.

3.1. Модель та основні рівняння

Для початку потрібно вдало обрати систему координат. Будемо вважати, що площина XOY збігається із серединою проміжного прошарку S' , товщина якого

дорівнює d . Тонкі діелектричні плівки збігаються із площинами $z = \pm \frac{d}{2}$. Що сто- сується лівого та правого надпровідників, то вони займають область $|z| > \frac{d}{2}$. На площині XOY ми маємо трансляційну інваріантність, а просторова однорідність порушується лише в напрямку осі OZ . Тонкі діелектричні плівки, які поміщено між трьома надпровідниками, можна змоделювати за допомогою потенціального поля

$$U(z) = \frac{U_0}{2} \left[\delta \left(z - \frac{d}{2} \right) + \delta \left(z + \frac{d}{2} \right) \right]. \quad (3.1.1)$$

Потенціальне поле (3.1.1) моделює потенціальний бар'єр. Це означає, що має місце нерівність $U_0 > 0$.

Метод температурних або мацубарівських функцій Гріна — це надзвичайно потужний математичний інструмент, який до того ж є широкоживаним у мікроскопічній теорії надпровідності. Варто наголосити на тому, що термодинамічні величини надпровідника можна представити через вищезгадані функції Гріна, які, до речі, є розв'язками замкненої системи рівнянь Горькова

$$\begin{cases} \left(i\omega_n - \hat{\xi} \right) G_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') + \Delta(\vec{r}) F_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \\ \left(i\omega_n + \hat{\xi}_c \right) F_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') + \overset{*}{\Delta}(\vec{r}) G_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') = 0. \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Параметр впорядкування $\Delta(\vec{r})$, який фігурує у замкненій системі диференціальних рівнянь другого порядку (3.1.2), є загальним розв'язком інтегрального рівняння

$$\overset{*}{\Delta}(\vec{r}) = |g| T \sum_{\omega_n} F_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}). \quad (3.1.3)$$

Інтегральне рівняння (3.1.3) називається умовою самоузгодженості. Система двох диференціальних рівнянь (3.1.2) та умова самоузгодженості (3.1.3) містять непарну мацубарівську частоту $\omega_n = \pi T(2n + 1)$ з числами $n \in \mathbb{Z}$ та сталу зв'язку g . Також у системі рівнянь (3.1.2) ми маємо позначення для диференціальних операторів $\hat{\xi} = \frac{1}{2m} \left\{ \hat{p} - e\vec{A}(\vec{r}) \right\}^2 - \mu$ та $\hat{\xi}_c = \frac{1}{2m} \left\{ \hat{p} + e\vec{A}(\vec{r}) \right\}^2 - \mu$. Ми бачимо, що диференціальні оператори $\hat{\xi}$ та $\hat{\xi}_c$ відрізняються один від одного лише знаком заряду e . Надалі ми будемо вважати, що магнітне поле $\vec{A}(\vec{r})$ відсутнє. Це означає, що $\vec{A}(\vec{r}) \equiv 0$. У такому випадку $\hat{\xi} = \hat{\xi}_c = \frac{\left(\hat{p} \right)^2}{2m} - \mu$. Що стосується замкненої системи диференціальних рівнянь другого порядку (3.1.2), то в даному частинному

випадку вона перетворюється на таку замкнену систему:

$$\begin{cases} \left(i\omega_n - \hat{\xi} \right) G_{\omega_n} (\vec{r}, \vec{r}') + \Delta (\vec{r}) F_{\omega_n} (\vec{r}, \vec{r}') = \delta (\vec{r} - \vec{r}'), \\ \left(i\omega_n + \hat{\xi} \right) F_{\omega_n} (\vec{r}, \vec{r}') + \hat{\Delta}^* (\vec{r}) G_{\omega_n} (\vec{r}, \vec{r}') = 0. \end{cases} \quad (3.1.4)$$

Варто наголосити на тому, що для роботи зручніше використовувати матричну форму запису рівнянь (так званий формалізм Намбу). Для цього необхідно додатково запровадити ще дві функції Гріна, які є розв'язками такої замкненої системи рівнянь:

$$\begin{cases} \left(i\omega_n - \hat{\xi} \right) \tilde{F}_{\omega_n} (\vec{r}, \vec{r}') + \Delta (\vec{r}) \tilde{G}_{\omega_n} (\vec{r}, \vec{r}') = 0, \\ \left(i\omega_n + \hat{\xi} \right) \tilde{G}_{\omega_n} (\vec{r}, \vec{r}') + \hat{\Delta}^* (\vec{r}) \tilde{F}_{\omega_n} (\vec{r}, \vec{r}') = \delta (\vec{r} - \vec{r}'). \end{cases} \quad (3.1.5)$$

Тоді замкнені системи (3.1.4) та (3.1.5) можна об'єднати в одне матричне диференціальне рівняння другого порядку

$$\left\{ i\omega_n - \sigma_z \hat{\xi} - \hat{\Delta} (\vec{r}) \right\} \hat{G}_{\omega_n} (\vec{r}, \vec{r}') = \delta (\vec{r} - \vec{r}') \quad (3.1.6)$$

для матричної функції Гріна

$$\hat{G}_{\omega_n} (\vec{r}, \vec{r}') = \begin{pmatrix} G_{\omega_n} (\vec{r}, \vec{r}') & -\tilde{F}_{\omega_n} (\vec{r}, \vec{r}') \\ -F_{\omega_n} (\vec{r}, \vec{r}') & \tilde{G}_{\omega_n} (\vec{r}, \vec{r}') \end{pmatrix}. \quad (3.1.7)$$

У матричному рівнянні (3.1.6) для матричної функції Гріна (3.1.7) фігурують матриці $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ та $\hat{\Delta} (\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta (\vec{r}) \\ \hat{\Delta}^* (\vec{r}) & 0 \end{pmatrix}$. За наявності потенціального поля $U (\vec{r})$ матричне рівняння (3.1.6) для матричної функції Гріна (3.1.7) матиме вже такий вигляд:

$$\left\{ i\omega_n - \sigma_z \left[\hat{\xi} + U (\vec{r}) \right] - \hat{\Delta} (\vec{r}) \right\} \hat{G}_{\omega_n} (\vec{r}, \vec{r}') = \delta (\vec{r} - \vec{r}'). \quad (3.1.8)$$

Деталі отримання формули для густини струму $\vec{j} (\vec{r})$ через функцію Гріна $G_{\omega_n} (\vec{r}, \vec{r}')$ можна знайти в [32, 46]. Тут ми випишемо її кінцевий вигляд:

$$\vec{j} (\vec{r}) = \frac{ie}{m} T \sum_{\omega_n} \lim_{\vec{r}' \rightarrow \vec{r}} (\nabla_{\vec{r}'} - \nabla_{\vec{r}}) G_{\omega_n} (\vec{r}, \vec{r}'). \quad (3.1.9)$$

Далі ми будемо розглядати матричне диференціальне рівняння (3.1.8) для конкретного випадку: шаруватих надпровідних контактів типу SIS'/IS.

3.2. Квазікласичні рівняння

У надпровіднику рух куперівських пар, як цілого, можна вважати квазікласичним. Адже імпульс mv_s , який пов'язаний із рухом куперівської пари, є значно меншим за фермі-імпульс p_0 . Це, до речі, впливає з оцінки $v_s^c \sim \frac{\Delta}{p_0} \sim \frac{T_c}{p_0}$. У такому випадку має місце відношення $\frac{mv_s}{p_0} \ll \frac{T_c}{E_F} \sim \frac{a}{\xi_0}$, у якому фігурує позначення для атомної довжини a . Маючи такий малий параметр, а він особливо малий для низькотемпературних надпровідників, можна виконати так звану операцію згладжування по атомній довжині a просторової поведінки функцій, з якими маємо справу. Зокрема, це може стосуватися параметра впорядкування $\Delta(\vec{r})$. Це дає змогу знехтувати дрібномасштабними змінами, залишивши лише великомасштабні зміни на довжинах порядку довжини когерентності ξ_0 . Виконання такої процедури дозволяє понизити порядок диференціальних рівнянь Горькова та отримати нову систему досить таки простих рівнянь. Хоча сама процедура є дещо копіткою, але її можна виконати лише один раз. Після цього отримані рівняння можна використовувати для надпровідних контактів різних типів.

Ми вже наголошували на тому, що просторова однорідність порушується лише в напрямку осі OZ . Це означає, що $U(\vec{r}) \equiv U(z)$. Те саме стосується і параметра впорядкування $\Delta(\vec{r})$. Тоді ми можемо записати, що $\Delta(\vec{r}) \equiv \Delta(z)$. Отже, матричне диференціальне рівняння другого порядку (3.1.8) перетворюється на диференціальне рівняння другого порядку

$$\left\{ i\omega_n - \sigma_z \left[\hat{\xi} + U(z) \right] - \hat{\Delta}(z) \right\} \hat{G}_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (3.2.1)$$

у якому фігурує позначення для матриці

$$\hat{\Delta}(z) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta(z) \\ * & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.2)$$

Маючи матричну функцію Гріна (3.1.7), ми можемо запровадити поняття матричної функції Гріна в імпульсному представленні. Щоби зробити це, нам варто спочатку розглянути диференціальне рівняння другого порядку

$$\left\{ \hat{\xi} + U(z) \right\} \psi_{\vec{p}}^{(k)}(\vec{r}) = \xi_{\vec{p}} \psi_{\vec{p}}^{(k)}(\vec{r}), \quad (3.2.3)$$

у якому фігурує дисперсійне співвідношення $\xi_{\vec{p}} = \frac{p^2}{2m} - \mu$. Індекс k може набувати значень 1 та 2. Загальним розв'язком диференціального рівняння другого порядку

(3.2.3) є тривимірна хвильова функція

$$\psi_{\vec{p}}^{(k)}(\vec{r}) = \frac{\exp(i\vec{p}_{\perp}\vec{r})}{2\pi} \chi_{p_z}^{(k)}(z). \quad (3.2.4)$$

У формулі (3.2.4) використано позначення для імпульсу $p_z > 0$ і так званого поперечного імпульсу $\vec{p}_{\perp} = p_x \vec{e}_x + p_y \vec{e}_y$. Якщо підставити тривимірну хвильову функцію (3.2.4) у диференціальне рівняння другого порядку (3.2.3), то можна отримати одновимірне диференціальне рівняння

$$\left\{ -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + U(z) \right\} \chi_{p_z}^{(k)}(z) = \frac{p_z^2}{2m} \chi_{p_z}^{(k)}(z), \quad (3.2.5)$$

розв'язками якого є одновимірні хвильові функції

$$\begin{aligned} \chi_{p_z}^{(1)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{C_1}{2} e^{-ip_z z} + i(C_2 - 1) \exp\left\{-ip_z \frac{d}{2}\right\} \operatorname{sign}\left(z + \frac{d}{2}\right) \sin p_z \left(z + \frac{d}{2}\right) + \right. \\ \left. + iC_3 \exp\left\{-ip_z \frac{d}{2}\right\} \operatorname{sign}\left(z - \frac{d}{2}\right) \sin p_z \left(z - \frac{d}{2}\right) + \frac{1 + C_4}{2} e^{ip_z z} \right] \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

та

$$\chi_{p_z}^{(2)}(z) = \chi_{p_z}^{(1)}(-z). \quad (3.2.7)$$

У формулі (3.2.6) сталі коефіцієнти C_1, C_2, C_3 та C_4 потрібно шукати за формулами $C_1 = (C_2 - 1) e^{-ip_z d} + C_3$, $C_2 = \left(1 + \frac{iK}{2p_z}\right) C_4$, $C_3 = -\frac{iK}{2p_z} C_4 e^{ip_z d}$ та

$$C_4 = \frac{e^{-ip_z d}}{\left(1 + \frac{iK}{2p_z}\right)^2 e^{-ip_z d} + \left(\frac{K}{2p_z}\right)^2 e^{ip_z d}}.$$

Тут маємо позначення $K = mU_0$. Маючи сталі коефіцієнти C_4 та C_1 , ми можемо обчислити прозорість діелектричного прошарку

$$D = |C_4|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{K}{p_z}\right)^2 \left(\cos p_z d + \frac{K}{2p_z} \sin p_z d\right)^2}$$

та коефіцієнт відбивання $R = |C_1|^2 = 1 - D$ відповідно. Дуже корисними є тотожності $|C_2|^2 - |C_3|^2 = D$, $C_3^* C_2 - C_2^* C_3 = C_1^* C_4$ та $C_1^* C_4 + C_4^* C_1 = 0$. Для одновимірних хвильових функцій (3.2.6) та (3.2.7) виконується умова нормування

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{p_z}^{*(k)}(z) \chi_{p'_z}^{(k')}(z) dz = \delta_{k,k'} \delta(p_z - p'_z). \quad (3.2.8)$$

Що стосується тривимірних хвильових функцій (3.2.4), то для них виконується вже умова нормування

$$\int \psi_{\vec{p}}^{*(k)}(\vec{r}) \psi_{\vec{p}'}^{(k')}(\vec{r}) d\vec{r} = \delta_{k,k'} \delta(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (3.2.9)$$

Маючи тривимірні хвильові функції (3.2.4), ми можемо побудувати для матричної функції Гріна (3.1.7) розклад

$$\hat{G}_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{i,k} \int d\vec{p} \int d\vec{p}' \hat{G}_{\omega_n}^{i,k}(\vec{p}, \vec{p}') \psi_{\vec{p}}^{(i)}(\vec{r}) \psi_{\vec{p}'}^{*(k)}(\vec{r}'). \quad (3.2.10)$$

За допомогою умови нормування (3.2.9) та розкладу (3.2.10) для матричної функції Гріна (3.1.7) ми можемо отримати вираз для матричної функції Гріна в імпульсному представленні

$$\hat{G}_{\omega_n}^{i,k}(\vec{p}, \vec{p}') = \int d\vec{r} \int d\vec{r}' \hat{G}_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') \psi_{\vec{p}}^{*(i)}(\vec{r}) \psi_{\vec{p}'}^{(k)}(\vec{r}'). \quad (3.2.11)$$

Далі нам потрібно переходити від матричного рівняння (3.2.1) для матричної функції Гріна (3.1.7) у конфігураційному представленні до матричного рівняння для матричної функції Гріна (3.2.11) в імпульсному представленні. Для цього ми будемо використовувати диференціальне рівняння другого порядку (3.2.1), на основі якого можна записати тотожність

$$\begin{aligned} & \int d\vec{r} \int d\vec{r}' \psi_{\vec{p}}^{*(i)}(\vec{r}) \psi_{\vec{p}'}^{(k)}(\vec{r}') \left\{ i\omega_n \hat{G}_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') - \sigma_z \left[\hat{\xi} + U(z) \right] \hat{G}_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') - \right. \\ & \left. - \hat{\Delta}(z) \hat{G}_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') \right\} = \int d\vec{r} \int d\vec{r}' \psi_{\vec{p}}^{*(i)}(\vec{r}) \psi_{\vec{p}'}^{(k)}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Розгляньмо другий доданок у фігурних дужках формули (3.2.12). Ми зможемо перетворити цей доданок, якщо подіємо оператором $\hat{\xi} + U(z)$ на матричну функцію Гріна (3.2.10) у конфігураційному представленні. Беручи до уваги диференціальне рівняння другого порядку (3.2.3), ми можемо отримати тотожність

$$\left[\hat{\xi} + U(z) \right] \hat{G}_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{i,k} \int d\vec{p} \int d\vec{p}' \xi_{\vec{p}} \hat{G}_{\omega_n}^{i,k}(\vec{p}, \vec{p}') \psi_{\vec{p}}^{(i)}(\vec{r}) \psi_{\vec{p}'}^{*(k)}(\vec{r}'). \quad (3.2.13)$$

Розклади (3.2.10) та (3.2.13) дозволяють перетворити ліву частину тотожності (3.2.12). Що стосується правої частини цієї тотожності, то там знімається одне інтегрування через наявність функції $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$. Використовуючи умову нормування

(3.2.9), ми можемо перетворити тотожність (3.2.12) на матричне рівняння

$$\begin{aligned} (i\omega_n - \sigma_z \xi) \hat{G}_{\omega_n}^{i,k}(\vec{p}, \vec{p}') - \sum_{i'} \int d\vec{p}'' \left\{ \int \psi_{\vec{p}}^{*(i)}(\vec{r}) \hat{\Delta}(z) \psi_{\vec{p}''}^{(i')}(\vec{r}) d\vec{r} \right\} \hat{G}_{\omega_n}^{i',k}(\vec{p}'', \vec{p}') = \\ = \delta_{i,k} \delta(\vec{p} - \vec{p}') \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

для матричної функції Гріна (3.2.11) в імпульсному представленні. Тут використано позначення $\xi_{\vec{p}} \equiv \xi$. У фігурних дужках формули (3.2.14) виконується інтегрування по x та по y . Це є прямим наслідком того факту, що параметр впорядкування Δ залежить лише від координати z . У такому випадку ми приходимо до перетворення

$$\int \psi_{\vec{p}}^{*(i)}(\vec{r}) \hat{\Delta}(z) \psi_{\vec{p}''}^{(i')}(\vec{r}) d\vec{r} = \delta(\vec{p}_{\perp} - \vec{p}''_{\perp}) \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{p_z}^{*(i)}(z) \hat{\Delta}(z) \chi_{p_z''}^{(i')}(z) dz. \quad (3.2.15)$$

З формули (3.2.15) видно, що матричні елементи параметра впорядкування містять функцію $\delta(\vec{p}_{\perp} - \vec{p}''_{\perp}) = \delta(p_x - p_x'') \delta(p_y - p_y'')$. Це означає, що має місце так звана діагональність за поперечними імпульсами \vec{p}_{\perp} та \vec{p}''_{\perp} . У правій частині рівняння (3.2.14) фігурує функція $\delta(\vec{p} - \vec{p}') = \delta(\vec{p}_{\perp} - \vec{p}'_{\perp}) \delta(p_z - p'_z)$, яка є діагональною за поперечними імпульсами \vec{p}_{\perp} та \vec{p}'_{\perp} . Очевидно, що цією ж властивістю володіє також і матрична функція Гріна $\hat{G}_{\omega_n}^{i,k}(\vec{p}, \vec{p}')$ в імпульсному представленні. Тоді $\hat{G}_{\omega_n}^{i,k}(\vec{p}, \vec{p}') = \hat{G}_{\omega_n}^{i,k}(\vec{p}_{\perp}, p_z, p'_z) \delta(\vec{p}_{\perp} - \vec{p}'_{\perp})$. Використовуючи вищевказані обставини, матричне рівняння (3.2.14) перетворюється на рівняння

$$\begin{aligned} (i\omega_n - \sigma_z \xi) \hat{G}_{\omega_n}^{i,k}(\vec{p}_{\perp}, p_z, p'_z) - \\ - \sum_{i'} \int_0^{+\infty} dp_z'' \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{p_z}^{*(i)}(z) \hat{\Delta}(z) \chi_{p_z''}^{(i')}(z) dz \right) \hat{G}_{\omega_n}^{i',k}(\vec{p}_{\perp}, p_z'', p'_z) = \\ = \delta_{i,k} \delta(p_z - p'_z). \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Для подальшої роботи нам потрібно заготувати деякі важливі співвідношення. Оскільки характерні значення імпульсів є близькими до фермі-імпульсу p_0 , то має місце розклад $\xi = \frac{p^2}{2m} - \frac{p_0^2}{2m} = \frac{1}{2m} (p - p_0)(p + p_0) \cong v_0 (p - p_0)$. Тут використано позначення для фермі-швидкості $v_0 = \frac{p_0}{m}$. З формули для величини ξ можна отримати формулу $p = p_0 + \frac{\xi}{v_0}$. Цілком аналогічна формула має місце також і для штрихованого імпульсу p' : $p' = p_0 + \frac{\xi'}{v_0}$. Також має місце так звана рівність

поперечних імпульсів $p_x^2 + p_y^2 = (p'_x)^2 + (p'_y)^2$. Але якщо перейти до сферичної системи координат, то $p \sin \theta = p' \sin \theta'$. У такому випадку знаходимо зв'язок

$$\sin \theta' \cong \left(1 + \frac{\xi - \xi'}{p_0 v_0} \right) \sin \theta \quad (3.2.17)$$

між кутами θ і θ' із точністю до величин першого порядку по ξ та ξ' . З тією ж точністю отримуємо результат для косинусів

$$\cos \theta' \cong \cos \theta - \frac{\xi - \xi'}{p_0 v_0} \sin \theta \operatorname{tg} \theta. \quad (3.2.18)$$

Не менш важливим для нас є перетворення різниці $p_z - p'_z$. За допомогою тотожності $\xi - \xi' = \frac{p^2}{2m} - \frac{(p')^2}{2m} = \frac{1}{2m} (p_z - p'_z) (p_z + p'_z) \cong v_0 (p_z - p'_z) \cos \theta$ приходимо до результату

$$p_z - p'_z \cong \frac{\xi - \xi'}{v_0 x}, \quad (3.2.19)$$

у якому використано позначення $\cos \theta \equiv x$. Оскільки $p_z = p \cos \theta$, то ми можемо записати формулу $x = \frac{p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}}$ і нерівність $0 < x < 1$. На основі пере-

творення (3.2.19) ми можемо, фактично, одразу виписати надзвичайно важливі тотожності $\delta(p_z - p'_z) \cong v_0 x \delta(\xi - \xi')$ та $dp'_z \cong \frac{d\xi'}{v_0 x}$. Ми будемо використовувати ці перетворення з метою переходу в матричних рівняннях (3.2.16) для функцій Гріна до змінних ξ та ξ' . Для зручності записів дуже доцільно буде запровадити позначення $\hat{G}_{\omega_n}^{i,k}(\vec{p}_\perp, p_z, p'_z) \equiv \langle \xi, i | \hat{G}_{\omega_n} | k, \xi' \rangle$ та

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{p_z}^{*(i)}(z) \hat{\Delta}(z) \chi_{p'_z}^{(i')}(z) dz \equiv \langle i, p_z | \hat{\Delta}(z) | i', p'_z \rangle \equiv \langle \xi, i | \hat{\Delta}(z) | i', \xi' \rangle.$$

У такому випадку матричне рівняння (3.2.16) перетворюється на рівняння

$$\begin{aligned} & (i\omega_n - \sigma_z \xi) \langle \xi, i | \hat{G}_{\omega_n} | k, \xi' \rangle - \\ & - \frac{1}{v_0 x} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi'' \sum_{i'} \langle \xi, i | \hat{\Delta}(z) | i', \xi'' \rangle \langle \xi'', i' | \hat{G}_{\omega_n} | k, \xi' \rangle = \\ & = v_0 x \delta_{i,k} \delta(\xi - \xi'). \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

Маючи інтегральне рівняння (3.2.20) для матричної функції Гріна, ми можемо вже переходити до так званого t -представлення. Для цього потрібно домножити

рівняння (3.2.20) на $\frac{e^{i\xi t - i\xi' t'}}{2\pi v_0 x}$ та проінтегрувати отримане матричне рівняння за змінними ξ та ξ' . У такому випадку ми приходимо до рівняння

$$\begin{aligned} & \left(i\omega_n + i\sigma_z \frac{\partial}{\partial t} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' \langle \xi, i | \hat{G}_{\omega_n} | k, \xi' \rangle \frac{e^{i\xi t - i\xi' t'}}{2\pi v_0 x} - \\ & - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi''}{v_0 x} \sum_{i'} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' \langle \xi, i | \hat{\Delta}(z) | i', \xi'' \rangle \langle \xi'', i' | \hat{G}_{\omega_n} | k, \xi' \rangle \frac{e^{i\xi t - i\xi' t'}}{2\pi v_0 x} = \\ & = \frac{\delta_{i,k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' e^{i\xi t - i\xi' t'} \delta(\xi - \xi'). \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Тобто, фактично, ми виконуємо зворотне перетворення Фур'є до простору змінних, спряжених до ξ та ξ' . При цьому використовується такий повний набір функцій:

$$\frac{e^{i\xi t}}{\sqrt{2\pi v_0 x}}, \quad \frac{e^{-i\xi t}}{\sqrt{2\pi v_0 x}}.$$

Фур'є-образи для матричних функцій Гріна у так званому t -представленні ми будемо визначати за допомогою формули

$$\langle t, i | \hat{G}_{\omega_n} | k, t' \rangle = \frac{1}{2\pi v_0 x} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' \langle \xi, i | \hat{G}_{\omega_n} | k, \xi' \rangle e^{i\xi t - i\xi' t'}. \quad (3.2.22)$$

Якщо домножити (3.2.22) на $\frac{v_0 x}{2\pi} e^{i\xi_2 t' - i\xi_1 t}$ та проінтегрувати отриманий результат за змінними t і t' , то можна прийти до результату

$$\langle \xi_1, i | \hat{G}_{\omega_n} | k, \xi_2 \rangle = \frac{v_0 x}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \langle t, i | \hat{G}_{\omega_n} | k, t' \rangle e^{i\xi_2 t' - i\xi_1 t}. \quad (3.2.23)$$

Використання формул (3.2.22), (3.2.23) та

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' e^{i\xi t - i\xi' t'} \delta(\xi - \xi') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(t-t')} d\xi = \delta(t - t')$$

дає змогу перейти від рівняння (3.2.21) до так званого інтегро-диференціального

рівняння

$$\begin{aligned} & \left(i\omega_n + i\sigma_z \frac{\partial}{\partial t} \right) \langle t, i | \hat{G}_{\omega_n} | k, t' \rangle - \\ & - \int_{-\infty}^{+\infty} dt'' \sum_{i'} \langle t, i | \hat{\Delta}(z) | i', t'' \rangle \langle t'', i' | \hat{G}_{\omega_n} | k, t' \rangle = \delta_{i,k} \delta(t - t'). \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

Записуючи інтегро-диференціальне рівняння (3.2.24) для матричних функцій Гріна $\langle t, i | \hat{G}_{\omega_n} | k, t' \rangle$ у так званому t -представленні, ми запровадили позначення для матричних елементів

$$\langle t, i | \hat{\Delta}(z) | i', t' \rangle = \frac{1}{2\pi v_0 x} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' \langle \xi, i | \hat{\Delta}(z) | i', \xi' \rangle e^{i\xi t - i\xi' t'}. \quad (3.2.25)$$

Оскільки індекси i та i' можуть набувати значень 1 та 2, то матричних елементів (3.2.25) буде чотири. Для підрахунку цих матричних елементів спочатку потрібно обчислити всі чотири матричні елементи типу

$$\langle \xi, i | \hat{\Delta}(z) | i', \xi' \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{p_z}^{*(i)}(z) \hat{\Delta}(z) \chi_{p_z}^{(i')}(z) dz. \quad (3.2.26)$$

Що стосується одновимірних хвильових функцій $\chi_{p_z}^{(i)}(z)$, то для них використовуємо аналітичні вирази (3.2.6) та (3.2.7), які ми вже отримували раніше. Варто наголосити також і на тому, що ці функції можна окремо розглянути на кожному із таких трьох проміжків: $z < -\frac{d}{2}$, $|z| < \frac{d}{2}$ та $z > \frac{d}{2}$. У такому випадку аналітичну формулу (3.2.6) для одновимірної хвильової функції $\chi_{p_z}^{(1)}(z)$ можна переписати в такому вигляді:

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}} \chi_{p_z}^{(1)}(z) = \begin{cases} e^{ip_z z} + C_1 e^{-ip_z z}, & z < -\frac{d}{2}, \\ C_2 e^{ip_z z} + C_3 e^{-ip_z z}, & |z| < \frac{d}{2}, \\ C_4 e^{ip_z z}, & z > \frac{d}{2}. \end{cases}$$

Що стосується аналітичної формули (3.2.7) для одновимірної хвильової функції $\chi_{p_z}^{(2)}(z)$, то її можна переписати вже так:

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}} \chi_{p_z}^{(2)}(z) = \begin{cases} C_4 e^{-ip_z z}, & z < -\frac{d}{2}, \\ C_2 e^{-ip_z z} + C_3 e^{ip_z z}, & |z| < \frac{d}{2}, \\ e^{-ip_z z} + C_1 e^{ip_z z}, & z > \frac{d}{2}. \end{cases}$$

Якщо $i = 1$ та $i' = 1$, то

$$\begin{aligned}
\langle \xi, 1 | \hat{\Delta}(z) | 1, \xi' \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{p_z}^{*(1)}(z) \hat{\Delta}(z) \chi_{p'_z}^{(1)}(z) dz = \\
&= \int_{-\infty}^{-d/2} \frac{dz}{2\pi} \hat{\Delta}(z) \left[e^{-ip_z z} + C_1^*(p_z) e^{ip_z z} \right] \left[e^{ip'_z z} + C_1(p'_z) e^{-ip'_z z} \right] + \\
&+ \int_{-d/2}^{d/2} \frac{dz}{2\pi} \hat{\Delta}(z) \left[C_2^*(p_z) e^{-ip_z z} + C_3^*(p_z) e^{ip_z z} \right] \left[C_2(p'_z) e^{ip'_z z} + C_3(p'_z) e^{-ip'_z z} \right] + \\
&+ \int_{d/2}^{+\infty} \frac{dz}{2\pi} \hat{\Delta}(z) C_4^*(p_z) C_4(p'_z) e^{-i(p_z - p'_z)z}. \tag{3.2.27}
\end{aligned}$$

Тут ми маємо надзвичайно важливий момент, який полягає у процедурі згладжування просторової поведінки функцій на довжинах порядку атомних розмірів. Маючи експоненти $e^{i(p_z + p'_z)z}$ та $e^{i(p_z - p'_z)z}$, ми будемо брати до уваги те, що перші наближено рівні $e^{2izp_0 \cos \theta}$ та осцилюють на атомних довжинах. В експонентах другого типу великі імпульси Фермі знищуються, внаслідок чого ці експоненти наближено рівні $\exp \left\{ i \frac{\xi - \xi'}{v_0 x} z \right\}$ та осцилюють на довжинах порядку довжини когерентності $\xi_0 \gg a$. Ми маємо поставити собі за мету врахувати лише великомасштабні зміни, внаслідок чого експоненти першого типу ми будемо відкидати. Варто зауважити, що сталі коефіцієнти C_1, C_2, C_3, C_4, R та D є повільними функціями імпульсів p_z та p'_z . Це дозволяє нам обчислювати вищезгадані коефіцієнти, використовуючи наближення $p_z \cong p_0 x$ та $p'_z \cong p_0 x$. Враховуючи все вищесказане, формула (3.2.27) перетворюється на формулу

$$\begin{aligned}
\langle \xi, 1 | \hat{\Delta}(z) | 1, \xi' \rangle &= \int_{-\infty}^{-d/2} \frac{dz}{2\pi} \hat{\Delta}(z) \left[e^{-i(p_z - p'_z)z} + |C_1|^2 e^{i(p_z - p'_z)z} \right] + \\
&+ \int_{-d/2}^{d/2} \frac{dz}{2\pi} \hat{\Delta}(z) \left[|C_2|^2 e^{-i(p_z - p'_z)z} + |C_3|^2 e^{i(p_z - p'_z)z} \right] + \\
&+ |C_4|^2 \int_{d/2}^{+\infty} \frac{dz}{2\pi} \hat{\Delta}(z) e^{-i(p_z - p'_z)z}. \tag{3.2.28}
\end{aligned}$$

Щойно отриману формулу (3.2.28) перетворюємо за допомогою знайденої раніше тотожності (3.2.19) та нової змінної інтегрування $t_1 = \frac{z}{v_0x}$. Для спрощення записів ми будемо використовувати позначення $a = \frac{d}{v_0x}$. У такому випадку ми отримуємо формулу

$$\begin{aligned} \langle \xi, 1 \left| \hat{\Delta}(z) \right| 1, \xi' \rangle &= v_0x \int_{-\infty}^{-a/2} \frac{dt_1}{2\pi} \hat{\Delta}(v_0xt_1) \left[e^{-i(\xi-\xi')t_1} + Re^{i(\xi-\xi')t_1} \right] + \\ &+ v_0x \int_{-a/2}^{a/2} \frac{dt_1}{2\pi} \hat{\Delta}(v_0xt_1) \left[|C_2|^2 e^{-i(\xi-\xi')t_1} + |C_3|^2 e^{i(\xi-\xi')t_1} \right] + \\ &+ v_0xD \int_{a/2}^{+\infty} \frac{dt_1}{2\pi} \hat{\Delta}(v_0xt_1) e^{-i(\xi-\xi')t_1}. \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

Маючи матричні елементи типу (3.2.29), ми вже можемо обчислювати матричні елементи типу (3.2.25). Якщо $i = 1$ та $i' = 1$, то для матричного елемента $\langle t, 1 \left| \hat{\Delta}(z) \right| 1, t'' \rangle$ ми можемо записати формулу

$$\begin{aligned} \langle t, 1 \left| \hat{\Delta}(z) \right| 1, t'' \rangle &= \\ &= \int_{-\infty}^{-a/2} dt_1 \hat{\Delta}(v_0xt_1) \left[\delta(t_1 - t) \delta(t_1 - t'') + R\delta(t_1 + t) \delta(t_1 + t'') \right] + \\ &+ \int_{-a/2}^{a/2} dt_1 \hat{\Delta}(v_0xt_1) \left[|C_2|^2 \delta(t_1 - t) \delta(t_1 - t'') + |C_3|^2 \delta(t_1 + t) \delta(t_1 + t'') \right] + \\ &+ D \int_{a/2}^{+\infty} dt_1 \hat{\Delta}(v_0xt_1) \delta(t_1 - t) \delta(t_1 - t''). \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

Варто зауважити, що інтегрування по змінній t_1 у формулі (3.2.30) для матричного елемента $\langle t, 1 \left| \hat{\Delta}(z) \right| 1, t'' \rangle$ виконується елементарно. І все через наявність дельта-функцій у виразах для підінтегральних функцій. Якщо виконати інтегрування з дельта-функціями, то формула (3.2.30) перетвориться на формулу

$$\langle t, 1 \left| \hat{\Delta}(z) \right| 1, t'' \rangle = \delta(t'' - t) \hat{\Delta}^{1,1}(t, x), \quad (3.2.31)$$

у якій використано позначення для матриці

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}^{1,1}(t, x) &= \theta\left(-\frac{a}{2} - t\right) \hat{\Delta}(v_0xt) + \\ &+ \left[\theta\left(t + \frac{a}{2}\right) - \theta\left(t - \frac{a}{2}\right)\right] \left[|C_2|^2 \hat{\Delta}(v_0xt) + |C_3|^2 \hat{\Delta}(-v_0xt)\right] + \\ &+ \theta\left(t - \frac{a}{2}\right) \left[R\hat{\Delta}(-v_0xt) + D\hat{\Delta}(v_0xt)\right].\end{aligned}$$

Цілком аналогічно шукаємо інші три матричні елементи. Одразу виписуємо для них кінцеві результати:

$$\begin{aligned}\langle t, 1 \mid \hat{\Delta}(z) \mid 2, t'' \rangle &= \delta(t'' - t) \hat{\Delta}^{1,2}(t, x), \\ \langle t, 2 \mid \hat{\Delta}(z) \mid 1, t'' \rangle &= \delta(t'' - t) \hat{\Delta}^{2,1}(t, x), \\ \langle t, 2 \mid \hat{\Delta}(z) \mid 2, t'' \rangle &= \delta(t'' - t) \hat{\Delta}^{2,2}(t, x).\end{aligned}\tag{3.2.32}$$

Матричні функції $\hat{\Delta}^{1,2}(t, x)$, $\hat{\Delta}^{2,1}(t, x)$ та $\hat{\Delta}^{2,2}(t, x)$ шукаємо за такими формулами:

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}^{1,2}(t, x) &= \left[\theta\left(t + \frac{a}{2}\right) - \theta\left(t - \frac{a}{2}\right)\right] \left[\hat{C}_2^* C_3 \hat{\Delta}(v_0xt) + \hat{C}_3^* C_2 \hat{\Delta}(-v_0xt)\right] + \\ &+ \hat{C}_1^* C_4 \theta\left(t - \frac{a}{2}\right) \left[\hat{\Delta}(-v_0xt) - \hat{\Delta}(v_0xt)\right], \\ \hat{\Delta}^{2,1}(t, x) &= \left[\theta\left(t + \frac{a}{2}\right) - \theta\left(t - \frac{a}{2}\right)\right] \left[\hat{C}_3^* C_2 \hat{\Delta}(v_0xt) + \hat{C}_2^* C_3 \hat{\Delta}(-v_0xt)\right] + \\ &+ \hat{C}_1^* C_4 \theta\left(t - \frac{a}{2}\right) \left[\hat{\Delta}(v_0xt) - \hat{\Delta}(-v_0xt)\right], \\ \hat{\Delta}^{2,2}(t, x) &= \theta\left(-\frac{a}{2} - t\right) \hat{\Delta}(-v_0xt) + \\ &+ \left[\theta\left(t + \frac{a}{2}\right) - \theta\left(t - \frac{a}{2}\right)\right] \left[|C_2|^2 \hat{\Delta}(-v_0xt) + |C_3|^2 \hat{\Delta}(v_0xt)\right] + \\ &+ \theta\left(t - \frac{a}{2}\right) \left[D\hat{\Delta}(-v_0xt) + R\hat{\Delta}(v_0xt)\right].\end{aligned}$$

З вищевиписаних результатів для матричних елементів $\langle t, i \mid \hat{\Delta}(z) \mid i', t'' \rangle$ слідує, що вони є діагональні у змінних t та t'' . Це означає, що має місце загальна формула

$$\langle t, i \mid \hat{\Delta}(z) \mid i', t'' \rangle = \delta(t'' - t) \hat{\Delta}^{i,i'}(t, x).$$

Це дозволяє виконати в інтегро-диференціальному рівнянні (3.2.24) інтегрування по змінній t'' . Для стислості записів доцільно буде запровадити нове позначення $\langle t, i \mid \hat{G}_{\omega_n} \mid k, t' \rangle \equiv \hat{G}_{\omega_n}^{i,k}(t, t')$. У такому випадку інтегро-диференціальне

рівняння (3.2.24) перетворюється на диференціальне рівняння першого порядку

$$\left(i\omega_n + i\sigma_z \frac{\partial}{\partial t}\right) \hat{G}_{\omega_n}^{i,k}(t, t') - \sum_{i'} \hat{\Delta}^{i,i'}(t, x) \hat{G}_{\omega_n}^{i',k}(t, t') = \delta_{i,k} \delta(t - t').$$

Проте, надалі зручніше буде працювати не з функціями $\hat{G}_{\omega_n}^{i,k}(t, t')$, а з новими функціями $\hat{\mathcal{G}}^{i,k}(t, t') = \hat{G}_{\omega_n}^{i,k}(t, t') \sigma_z$, рівняння для яких отримуємо на основі вищевиписаного за допомогою множення його на σ_z ліворуч і праворуч. Внаслідок цього приходимо до диференціального рівняння першого порядку

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + i\omega_n \sigma_z\right) \hat{\mathcal{G}}^{i,k}(t, t') - \sum_{i'} \sigma_z \hat{\Delta}^{i,i'}(t, x) \hat{\mathcal{G}}^{i',k}(t, t') = \delta_{i,k} \delta(t - t'). \quad (3.2.33)$$

Ми будемо розв'язувати останні чотири диференціальні рівняння, використовуючи модель із кусково-сталим параметром впорядкування. Ця модель є досить таки широковживаною в теорії надпровідних контактів. У ній нехтують зміною параметра впорядкування під впливом струму чи скінченної прозорості та приймають, що модуль параметра впорядкування є сталим у межах кожного з надпровідників. При цьому допускається стрибок фази параметра впорядкування при переході через контакт. Цей стрибок будемо позначати через φ . Тому без втрати загальності можемо вважати, що на лівому березі фаза параметра впорядкування дорівнює $-\frac{\varphi}{2}$. Що стосується правого берега, то на ньому фаза параметра впорядкування дорівнює $\frac{\varphi}{2}$. Отже, для досліджуваного контакту

$$\begin{aligned} \Delta(z) = & \Delta \left[\theta \left(-\frac{d}{2} - z \right) \exp \left(-i\frac{\varphi}{2} \right) + \theta \left(z - \frac{d}{2} \right) \exp \left(i\frac{\varphi}{2} \right) \right] + \\ & + \Delta_1 \left[\theta \left(z + \frac{d}{2} \right) - \theta \left(z - \frac{d}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

Наближення для параметра впорядкування $\Delta(z)$ можна подати також і за допомогою формули

$$\Delta(z) = \begin{cases} \Delta \exp \left(-i\frac{\varphi}{2} \right), & z < -\frac{d}{2}, \\ \Delta_1, & |z| < \frac{d}{2}, \\ \Delta \exp \left(i\frac{\varphi}{2} \right), & z > \frac{d}{2}. \end{cases}$$

В рамках моделі з кусково-сталим параметром впорядкування (3.2.34) потрібно розглянути також і матрицю (3.2.2). Очевидно, що цю матрицю можна подати

також і за допомогою формули

$$\hat{\Delta}(z) = \frac{\Delta(z) + \Delta^*(z)}{2} \sigma_x + i \frac{\Delta(z) - \Delta^*(z)}{2} \sigma_y. \quad (3.2.35)$$

Тут ми маємо матриці $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ та $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Далі потрібно підставити наближення (3.2.34) у формулу для матриці (3.2.35). Виконуючи нескладні перетворення, приходимо до формули

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}(z) = & \Delta \sigma_x \cos \frac{\varphi}{2} + \Delta \sigma_y \sin \frac{\varphi}{2} + \theta \left(z - \frac{d}{2} \right) \left(\Delta \sigma_x \cos \frac{\varphi}{2} - \Delta \sigma_y \sin \frac{\varphi}{2} - \Delta_1 \sigma_x \right) + \\ & + \theta \left(z + \frac{d}{2} \right) \left(\Delta_1 \sigma_x - \Delta \sigma_x \cos \frac{\varphi}{2} - \Delta \sigma_y \sin \frac{\varphi}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

Матрицю (3.2.36) можна переписати в дещо іншому вигляді, якщо запровадити позначення для нової змінної $t = \frac{z}{v_0 x}$. У такому випадку

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}(v_0 x t) = & \Delta \sigma_x \cos \frac{\varphi}{2} + \Delta \sigma_y \sin \frac{\varphi}{2} + \\ & + \theta \left(t - \frac{a}{2} \right) \left(\Delta \sigma_x \cos \frac{\varphi}{2} - \Delta \sigma_y \sin \frac{\varphi}{2} - \Delta_1 \sigma_x \right) + \\ & + \theta \left(t + \frac{a}{2} \right) \left(\Delta_1 \sigma_x - \Delta \sigma_x \cos \frac{\varphi}{2} - \Delta \sigma_y \sin \frac{\varphi}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

Цілком аналогічно можна отримати матрицю

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}(-v_0 x t) = & \Delta \sigma_x \cos \frac{\varphi}{2} - \Delta \sigma_y \sin \frac{\varphi}{2} + \\ & + \theta \left(t - \frac{a}{2} \right) \left(\Delta \sigma_x \cos \frac{\varphi}{2} + \Delta \sigma_y \sin \frac{\varphi}{2} - \Delta_1 \sigma_x \right) + \\ & + \theta \left(t + \frac{a}{2} \right) \left(\Delta \sigma_y \sin \frac{\varphi}{2} + \Delta_1 \sigma_x - \Delta \sigma_x \cos \frac{\varphi}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

3.3. Густина струму

Представлення тривимірної густини струму $\vec{j}(\vec{r})$ через мацубарівську функцію Гріна $G_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}')$ подається за допомогою відомої формули (3.1.9), яка, власне, є доповненням до замкненої системи двох диференціальних рівнянь другого порядку (3.1.2) для мацубарівських функцій Гріна $G_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}')$ та $F_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}')$. У попередньому пункті виконано перехід від матричного диференціального рівняння другого порядку (3.2.1) для матричної функції Гріна (3.1.7) у конфігураційному представленні до так званих квазікласичних рівнянь (3.2.33) для матричної функції

Гріна $\hat{\mathcal{G}}^{i,k}(t, t')$ у t -представленні, якій відповідає матрична функція Гріна

$$\hat{\mathcal{G}}_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') = \hat{G}_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') \sigma_z = \begin{pmatrix} G_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') & \tilde{F}_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') \\ -F_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') & -\tilde{G}_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') \end{pmatrix} \quad (3.3.1)$$

у конфігураційному представленні. Очевидно, що доповненням до квазікласичних рівнянь (3.2.33) для функцій Гріна у t -представленні має бути вираз густини струму через функції Гріна у цьому ж представленні. З формули (3.1.7) видно, що функція Гріна $G_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}')$ стоїть у першому рядку та першому стовпці матричної функції Гріна $\hat{G}_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}')$. Якщо виділити в матричній рівності (3.2.10) елементи, які стоять у першому рядку та першому стовпці, то можна отримати розклад

$$G_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{i,k} \int d\vec{p} \int d\vec{p}' G_{\omega_n}^{i,k}(\vec{p}, \vec{p}') \psi_{\vec{p}}^{(i)}(\vec{r}) \psi_{\vec{p}'}^{*(k)}(\vec{r}'). \quad (3.3.2)$$

Щойно виписаний розклад (3.3.2) потрібно підставляти у вираз для густини струму (3.1.9). Використовуючи позначення $\nabla_{\vec{r}} \equiv \nabla$, отримуємо вираз для тривимірної густини струму

$$\begin{aligned} \vec{j}(\vec{r}) = & \frac{ie}{m} T \sum_{\omega_n} \int d\vec{p} \int d\vec{p}' \sum_{i,k} G_{\omega_n}^{i,k}(\vec{p}, \vec{p}') \left[\psi_{\vec{p}}^{(i)}(\vec{r}) \nabla \psi_{\vec{p}'}^{*(k)}(\vec{r}) - \right. \\ & \left. - \psi_{\vec{p}'}^{*(k)}(\vec{r}) \nabla \psi_{\vec{p}}^{(i)}(\vec{r}) \right]. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Враховуючи явний вигляд тривимірної хвильової функції $\psi_{\vec{p}}^{(k)}(\vec{r})$ (визначається за допомогою формули (3.2.4)), ми можемо переписати формулу для густини струму в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \vec{j}(\vec{r}) = & \frac{eT}{m(2\pi)^2} \sum_{\omega_n} \sum_{i,k} \int d\vec{p} \int d\vec{p}' G_{\omega_n}^{i,k}(\vec{p}, \vec{p}') e^{i(\vec{p}_{\perp} - \vec{p}'_{\perp})\vec{r}} \left[\vec{e}_z J_{p'_z, p_z}^{k,i}(z) + \right. \\ & \left. + (\vec{p}_{\perp} + \vec{p}'_{\perp}) \chi_{p_z}^{(i)}(z) \chi_{p'_z}^{*(k)}(z) \right]. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Тут використано позначення для чотирьох величин

$$J_{p'_z, p_z}^{k,i}(z) = \chi_{p'_z}^{*(k)}(z) \hat{p}_z \chi_{p_z}^{(i)}(z) - \chi_{p_z}^{(i)}(z) \hat{p}_z \chi_{p'_z}^{*(k)}(z).$$

Ми маємо диференціальний оператор $\hat{p}_z = -i \frac{\partial}{\partial z}$ у формулі для чотирьох величин $J_{p'_z, p_z}^{k,i}(z)$. Варто наголосити на тому, що властивість

$$G_{\omega_n}^{i,k}(\vec{p}, \vec{p}') = G_{\omega_n}^{i,k}(\vec{p}_{\perp}, p_z, p'_z) \delta(\vec{p}_{\perp} - \vec{p}'_{\perp})$$

дає змогу виконати у формулі (3.3.4) інтегрування по \vec{p}'_{\perp} . У такому випадку ми отримуємо формулу

$$\begin{aligned} \vec{j}(\vec{r}) = & \frac{eT}{m(2\pi)^2} \sum_{\omega_n} \sum_{i,k} \int d\vec{p}'_{\perp} \int_0^{+\infty} dp_z \int_0^{+\infty} dp'_z G_{\omega_n}^{i,k}(\vec{p}'_{\perp}, p_z, p'_z) \left[\vec{e}_z J_{p'_z, p_z}^{k,i}(z) + \right. \\ & \left. + 2\vec{p}'_{\perp} \chi_{p_z}^{(i)}(z) \chi_{p'_z}^{*(k)}(z) \right]. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Вираз (3.3.5) для тривимірної густини струму $\vec{j}(\vec{r})$ ми будемо перетворювати, беручи до уваги позначення $G_{\omega_n}^{i,k}(\vec{p}'_{\perp}, p_z, p'_z) \equiv \langle \xi, i | G_{\omega_n} | k, \xi' \rangle$. Також доцільно буде перетворити багатократний інтеграл у формулі (3.3.5) за допомогою замін:

$$\begin{aligned} p_x &= p \sin \theta \cos \alpha \cong \left(p_0 + \frac{\xi}{v_0} \right) \sqrt{1-x^2} \cos \alpha, \\ p_y &= p \sin \theta \sin \alpha \cong \left(p_0 + \frac{\xi}{v_0} \right) \sqrt{1-x^2} \sin \alpha, \\ p_z &= p \cos \theta \cong x \left(p_0 + \frac{\xi}{v_0} \right), \\ p'_z &\cong x \left(p_0 + \frac{\xi}{v_0} \right) + \frac{\xi' - \xi}{v_0 x}. \end{aligned}$$

Ці заміни дають змогу перейти від інтегрування по змінних p_x, p_y, p_z та p'_z до інтегрування по змінних α, x, ξ та ξ' . Елемент об'єму $dp_x dp_y dp_z dp'_z$ можна подати через елемент об'єму $d\alpha dx d\xi d\xi'$ за допомогою перетворення

$$dp_x dp_y dp_z dp'_z = |\mathcal{J}| d\alpha dx d\xi d\xi',$$

у якому фігурує так званий якобіан переходу

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial \alpha} & \frac{\partial p_x}{\partial x} & \frac{\partial p_x}{\partial \xi} & \frac{\partial p_x}{\partial \xi'} \\ \frac{\partial p_y}{\partial \alpha} & \frac{\partial p_y}{\partial x} & \frac{\partial p_y}{\partial \xi} & \frac{\partial p_y}{\partial \xi'} \\ \frac{\partial p_z}{\partial \alpha} & \frac{\partial p_z}{\partial x} & \frac{\partial p_z}{\partial \xi} & \frac{\partial p_z}{\partial \xi'} \\ \frac{\partial p'_z}{\partial \alpha} & \frac{\partial p'_z}{\partial x} & \frac{\partial p'_z}{\partial \xi} & \frac{\partial p'_z}{\partial \xi'} \end{vmatrix} = \frac{1}{v_0 x} \begin{vmatrix} -p_y & \frac{\partial p_x}{\partial x} & \frac{\partial p_x}{\partial \xi} \\ p_x & \frac{\partial p_y}{\partial x} & \frac{\partial p_y}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial p_z}{\partial x} & \frac{\partial p_z}{\partial \xi} \end{vmatrix} = -\frac{p_x}{v_0 x} \begin{vmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial x} & \frac{\partial p_x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial p_z}{\partial x} & \frac{\partial p_z}{\partial \xi} \end{vmatrix} - \\ & - \frac{p_y}{v_0 x} \begin{vmatrix} \frac{\partial p_y}{\partial x} & \frac{\partial p_y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial p_z}{\partial x} & \frac{\partial p_z}{\partial \xi} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v_0 x} \frac{\partial p_z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} (p_x^2 + p_y^2) - \frac{1}{2v_0 x} \frac{\partial p_z}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} (p_x^2 + p_y^2). \end{aligned}$$

Обчислюючи елементарні похідні, ми нарешті отримуємо шуканий якобіан переходу $\mathcal{J} = \frac{m^2}{x} \left(1 + \frac{\xi}{p_0 v_0} \right)^2$ та перетворення

$$d\vec{p}'_{\perp} dp_z dp'_z = m^2 \left(1 + \frac{\xi}{p_0 v_0} \right)^2 d\alpha \frac{dx}{x} d\xi d\xi'$$

для елемента об'єму $d\vec{p}_\perp dp_z dp'_z$. Варто наголосити також і на тому, що на поверхні Фермі $\xi \cong 0$. У такому випадку знайдене перетворення для елемента об'єму можна переписати в такому вигляді:

$$d\vec{p}_\perp dp_z dp'_z \cong m^2 d\alpha \frac{dx}{x} d\xi d\xi'.$$

Далі потрібно підставляти щойно виписане перетворення для елемента об'єму у вираз (3.3.5) для тривимірної густини струму $\vec{j}(\vec{r})$. Варто зауважити, що інтегрування по змінній α можна вже одразу виконати. У квадратних дужках формули (3.3.5) ми маємо доданок $2\vec{p}_\perp \chi_{p_z}^{(i)}(z) \chi_{p'_z}^{*(k)}(z)$, який не дає ніякого внеску для густини струму. І все через те, що

$$\int_0^{2\pi} \vec{p}_\perp d\alpha = \int_0^{2\pi} (p_x \vec{e}_x + p_y \vec{e}_y) d\alpha = \left(p_0 + \frac{\xi}{v_0} \right) \sqrt{1-x^2} \int_0^{2\pi} (\vec{e}_x \cos \alpha + \vec{e}_y \sin \alpha) d\alpha = 0.$$

Тоді формула (3.3.5) для тривимірної густини струму $\vec{j}(\vec{r})$ перетворюється на формулу $\vec{j}(\vec{r}) = j(z) \vec{e}_z$, у якій фігурує позначення для вже одновимірної густини струму

$$j(z) = \frac{em}{2\pi} T \sum_{\omega_n} \sum_{i,k} \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' \langle \xi, i | G_{\omega_n} | k, \xi' \rangle J_{p'_z, p_z}^{k,i}(z). \quad (3.3.6)$$

На основі перетворення (3.2.22) ми можемо отримати обернене перетворення для матричних функцій Гріна

$$\langle \xi, i | \hat{G}_{\omega_n} | k, \xi' \rangle = \frac{v_0 x}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{i\xi' t' - i\xi t} \hat{G}_{\omega_n}^{i,k}(t, t')$$

та перетворення для самих функцій Гріна

$$\langle \xi, i | G_{\omega_n} | k, \xi' \rangle = \frac{v_0 x}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{i\xi' t' - i\xi t} G_{\omega_n}^{i,k}(t, t'),$$

яке потрібно підставляти у вираз (3.3.6) для одновимірної густини струму. Внаслідок цього ми приходимо до формули

$$j(z) = \frac{1}{2} \frac{e}{m} N(0) T \sum_{\omega_n} \int_0^1 dx \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \sum_{i,k} G_{\omega_n}^{i,k}(t, t') I^{k,i}(x, t, t'), \quad (3.3.7)$$

у якій фігурують так звана густина електронних станів $N(0) = \frac{m^2 v_0}{2\pi^2}$ на поверхні Фермі та інтеграли

$$I^{k,i}(x, t, t') = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' e^{-i\xi t + i\xi' t'} J_{p'_z, p_z}^{k,i}(z). \quad (3.3.8)$$

У нашому теоретичному дослідженні густина струму j залежить лише від координати z . Це видно з формули (3.3.7). Якщо подивитися на праву частину цієї формули, то можна побачити, що координата z фігурує лише в одному місці: у чотирьох величинах $J_{p'_z, p_z}^{k,i}(z)$. А ці чотири величини визначаються через хвильові функції $\chi_{p_z}^{(i)}(z)$ та $\chi_{p'_z}^{*(k)}(z)$. З формул (3.2.6) та (3.2.7) видно, що одновимірні хвильові функції $\chi_{p_z}^{(1)}(z)$ та $\chi_{p_z}^{(2)}(z)$ мають різні аналітичні вирази на всіх трьох проміжках $z < -\frac{d}{2}$, $|z| < \frac{d}{2}$ та $z > \frac{d}{2}$. А це означає, що різні аналітичні вирази на всіх трьох вищезгаданих проміжках матиме також і наша одновимірна густина струму $j(z)$. Шукати аналітичний вираз для одновимірної густини струму окремо для кожного із трьох проміжків — це, м'яко кажучи, нераціонально. Ми будемо робити це для випадку, коли $-\infty < z < +\infty$. Для цього доцільно буде спочатку записати розклад

$$j(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{j}(q) e^{-iqz} dq, \quad (3.3.9)$$

з якого випливає формула для Фур'є-образу

$$\tilde{j}(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} j(z) e^{iqz} dz. \quad (3.3.10)$$

Далі потрібно підставляти вираз (3.3.7) для одновимірної густини струму у вираз (3.3.10) для Фур'є-образу $\tilde{j}(q)$, внаслідок чого отримуємо формулу

$$\tilde{j}(q) = \frac{1}{2m} e N(0) T \sum_{\omega_n} \int_0^1 dx \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \sum_{i,k} G_{\omega_n}^{i,k}(t, t') \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqz} I^{k,i}(x, t, t') dz.$$

Беручи до уваги формулу (3.3.8) для інтегралів $I^{k,i}(x, t, t')$, ми можемо отримати перетворення

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqz} I^{k,i}(x, t, t') dz = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' e^{-i\xi t + i\xi' t'} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqz} J_{p'_z, p_z}^{k,i}(z) dz. \quad (3.3.11)$$

Для обчислення інтегралів (3.3.11) ми маємо спочатку обчислити всі чотири величини $J_{p'_z, p_z}^{k,i}(z)$, схема підрахунку яких є цілком аналогічною до схеми підрахунку матричних елементів (3.2.26): залишаємо лише ті комплексні експоненти, які залежать від різниці $p_z - p'_z \cong \frac{\xi - \xi'}{v_0 x}$; коефіцієнти при вищезгаданих експонентах, які є функціями імпульсів p_z та p'_z , ми будемо обчислювати шляхом застосування наближень $p_z \cong p_0 x$ та $p'_z \cong p_0 x$. Тому ми можемо вже одразу виписати всі чотири величини $J_{p'_z, p_z}^{k,i}(z)$, наприклад, на проміжку $z < -\frac{d}{2}$. Для зручності записів ми будемо переходити до нової змінної $t_1 = \frac{z}{v_0 x}$. Тоді матимемо:

$$\begin{aligned} J_{p'_z, p_z}^{1,1}(v_0 x t_1) &= \frac{p_0 x}{\pi} \left[e^{i(\xi - \xi')t_1} - R e^{-i(\xi - \xi')t_1} \right], \\ J_{p'_z, p_z}^{1,2}(v_0 x t_1) &= -\frac{p_0 x}{\pi} C_1^* C_4 e^{-i(\xi - \xi')t_1}, \\ J_{p'_z, p_z}^{2,1}(v_0 x t_1) &= \frac{p_0 x}{\pi} C_1^* C_4 e^{-i(\xi - \xi')t_1}, \\ J_{p'_z, p_z}^{2,2}(v_0 x t_1) &= -\frac{p_0 x}{\pi} D e^{-i(\xi - \xi')t_1}, \end{aligned} \quad t_1 < -\frac{a}{2}.$$

У так званому t -представленні області $|z| < \frac{d}{2}$, у якій розміщено проміжний прошарок S' , відповідає область $|t_1| < \frac{a}{2}$. У такому випадку ми отримуємо такі формули:

$$\begin{aligned} J_{p'_z, p_z}^{1,1}(v_0 x t_1) &= \frac{p_0 x}{\pi} \left[|C_2|^2 e^{i(\xi - \xi')t_1} - |C_3|^2 e^{-i(\xi - \xi')t_1} \right], \\ J_{p'_z, p_z}^{1,2}(v_0 x t_1) &= \frac{p_0 x}{\pi} \left[C_2^* C_3 e^{i(\xi - \xi')t_1} - C_3^* C_2 e^{-i(\xi - \xi')t_1} \right], \\ J_{p'_z, p_z}^{2,1}(v_0 x t_1) &= \frac{p_0 x}{\pi} \left[C_3^* C_2 e^{i(\xi - \xi')t_1} - C_2^* C_3 e^{-i(\xi - \xi')t_1} \right], \\ J_{p'_z, p_z}^{2,2}(v_0 x t_1) &= \frac{p_0 x}{\pi} \left[|C_3|^2 e^{i(\xi - \xi')t_1} - |C_2|^2 e^{-i(\xi - \xi')t_1} \right], \end{aligned} \quad |t_1| < \frac{a}{2}.$$

На проміжку $z > \frac{d}{2}$ мають місце вже такі формули:

$$\begin{aligned} J_{p'_z, p_z}^{1,1}(v_0 x t_1) &= \frac{p_0 x}{\pi} D e^{i(\xi - \xi')t_1}, \\ J_{p'_z, p_z}^{1,2}(v_0 x t_1) &= -\frac{p_0 x}{\pi} C_1^* C_4 e^{i(\xi - \xi')t_1}, \\ J_{p'_z, p_z}^{2,1}(v_0 x t_1) &= \frac{p_0 x}{\pi} C_1^* C_4 e^{i(\xi - \xi')t_1}, \\ J_{p'_z, p_z}^{2,2}(v_0 x t_1) &= \frac{p_0 x}{\pi} \left[R e^{i(\xi - \xi')t_1} - e^{-i(\xi - \xi')t_1} \right], \end{aligned} \quad t_1 > \frac{a}{2}.$$

Інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqz} J_{p'_z, p_z}^{k,i}(z) dz$ вже можна обчислювати. Якщо $i = 1$ та $k = 1$, то ми можемо записати, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqz} J_{p'_z, p_z}^{1,1}(z) dz = v_0 x \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 e^{iv_0 x q t_1} J_{p'_z, p_z}^{1,1}(v_0 x t_1).$$

Інтеграл у правій частині ми будемо записувати у вигляді суми трьох інтегралів із проміжками інтегрування $t_1 < -\frac{a}{2}$, $|t_1| < \frac{a}{2}$ та $t_1 > \frac{a}{2}$. На кожному з цих проміжків потрібно замінити величину $J_{p'_z, p_z}^{1,1}(v_0 x t_1)$ на її відповідний аналітичний вираз. У такому випадку ми приходимо до формули

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqz} J_{p'_z, p_z}^{1,1}(z) dz &= \frac{p_0 v_0 x^2}{\pi} \int_{-\infty}^{-a/2} dt_1 e^{iv_0 x q t_1} \left[e^{i(\xi - \xi') t_1} - R e^{-i(\xi - \xi') t_1} \right] + \\ &+ \frac{p_0 v_0 x^2}{\pi} \int_{-a/2}^{a/2} dt_1 e^{iv_0 x q t_1} \left[|C_2|^2 e^{i(\xi - \xi') t_1} - |C_3|^2 e^{-i(\xi - \xi') t_1} \right] + \\ &+ \frac{p_0 v_0 x^2 D}{\pi} \int_{a/2}^{+\infty} dt_1 e^{iv_0 x q t_1} e^{i(\xi - \xi') t_1}, \end{aligned}$$

яку далі потрібно підставляти у формулу (3.3.11). Тоді виходить, що

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqz} I^{1,1}(x, t, t') dz = \\ &= 4\pi p_0 v_0 x^2 \int_{-\infty}^{-\frac{a}{2}} dt_1 e^{iv_0 x q t_1} [\delta(t - t_1) \delta(t' - t_1) - R \delta(t + t_1) \delta(t' + t_1)] + \\ &+ 4\pi p_0 v_0 x^2 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dt_1 e^{iv_0 x q t_1} \left[|C_2|^2 \delta(t - t_1) \delta(t' - t_1) - |C_3|^2 \delta(t + t_1) \delta(t' + t_1) \right] + \\ &+ 4\pi p_0 v_0 x^2 D \int_{\frac{a}{2}}^{+\infty} dt_1 e^{iv_0 x q t_1} \delta(t - t_1) \delta(t' - t_1). \end{aligned}$$

Обчислюючи елементарні інтегралі з дельта-функціями, приходимо до такого

результату:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqz} I^{1,1}(x, t, t') dz &= 4\pi p_0 v_0 x^2 \delta(t - t') \left\{ \theta\left(-\frac{a}{2} - t\right) e^{iv_0 x q t} + \right. \\ &+ \left[\theta\left(t + \frac{a}{2}\right) - \theta\left(t - \frac{a}{2}\right) \right] \left(|C_2|^2 e^{iv_0 x q t} - |C_3|^2 e^{-iv_0 x q t} \right) + \\ &+ \left. \theta\left(t - \frac{a}{2}\right) (D e^{iv_0 x q t} - R e^{-iv_0 x q t}) \right\}. \end{aligned}$$

Цілково аналогічно отримуємо також і такі три інтеграли:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqz} I^{1,2}(x, t, t') dz &= 4\pi p_0 v_0 x^2 \delta(t - t') \left\{ -C_1^* C_4 \theta\left(t - \frac{a}{2}\right) (e^{iv_0 x q t} + e^{-iv_0 x q t}) + \right. \\ &+ \left. \left[\theta\left(t + \frac{a}{2}\right) - \theta\left(t - \frac{a}{2}\right) \right] \left(C_2^* C_3 e^{iv_0 x q t} - C_3^* C_2 e^{-iv_0 x q t} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqz} I^{2,1}(x, t, t') dz &= 4\pi p_0 v_0 x^2 \delta(t - t') \left\{ C_1^* C_4 \theta\left(t - \frac{a}{2}\right) (e^{iv_0 x q t} + e^{-iv_0 x q t}) + \right. \\ &+ \left. \left[\theta\left(t + \frac{a}{2}\right) - \theta\left(t - \frac{a}{2}\right) \right] \left(C_3^* C_2 e^{iv_0 x q t} - C_2^* C_3 e^{-iv_0 x q t} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqz} I^{2,2}(x, t, t') dz &= 4\pi p_0 v_0 x^2 \delta(t - t') \left\{ \theta\left(t - \frac{a}{2}\right) (R e^{iv_0 x q t} - D e^{-iv_0 x q t}) + \right. \\ &+ \left[\theta\left(t + \frac{a}{2}\right) - \theta\left(t - \frac{a}{2}\right) \right] \left(|C_3|^2 e^{iv_0 x q t} - |C_2|^2 e^{-iv_0 x q t} \right) - \\ &- \left. \theta\left(-\frac{a}{2} - t\right) e^{-iv_0 x q t} \right\}. \end{aligned}$$

Знайдені вирази для інтегралів $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqz} I^{k,i}(x, t, t') dz$ потрібно підставляти у вираз для Фур'є-образу

$$\begin{aligned} \tilde{j}(q) &= \frac{1}{2m} e N(0) T \sum_{\omega_n} \int_0^1 dx \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \left\{ G_{\omega_n}^{1,1}(t, t') \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqz} I^{1,1}(x, t, t') dz + \right. \\ &+ G_{\omega_n}^{2,1}(t, t') \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqz} I^{1,2}(x, t, t') dz + G_{\omega_n}^{1,2}(t, t') \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqz} I^{2,1}(x, t, t') dz + \\ &+ \left. G_{\omega_n}^{2,2}(t, t') \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqz} I^{2,2}(x, t, t') dz \right\}. \end{aligned}$$

Через наявність функції $\delta(t - t')$ інтегрування по змінній t' виконується елементарно, після чого отриманий вираз для $\tilde{j}(q)$ можна вже підставляти в розклад (3.3.9) для одновимірної густини струму $j(z)$. У такому випадку

$$\begin{aligned}
j(z) = & 2\pi e v_0 N(0) T \theta \left(-\frac{d}{2} - z \right) \sum_{\omega_n} \int_0^1 x dx \left\{ G_{\omega_n}^{1,1}(t, t) - R G_{\omega_n}^{1,1}(-t, -t) - \right. \\
& \left. - \dot{C}_1^* C_4 G_{\omega_n}^{2,1}(-t, -t) + \dot{C}_1^* C_4 G_{\omega_n}^{1,2}(-t, -t) - D G_{\omega_n}^{2,2}(-t, -t) \right\} + \\
& + 2\pi e v_0 N(0) T \left[\theta \left(z + \frac{d}{2} \right) - \theta \left(z - \frac{d}{2} \right) \right] \sum_{\omega_n} \int_0^1 x dx \left\{ |C_2|^2 G_{\omega_n}^{1,1}(t, t) - \right. \\
& - |C_3|^2 G_{\omega_n}^{1,1}(-t, -t) + \dot{C}_2^* C_3 G_{\omega_n}^{2,1}(t, t) - \dot{C}_3^* C_2 G_{\omega_n}^{2,1}(-t, -t) + \\
& + \dot{C}_3^* C_2 G_{\omega_n}^{1,2}(t, t) - \dot{C}_2^* C_3 G_{\omega_n}^{1,2}(-t, -t) + |C_3|^2 G_{\omega_n}^{2,2}(t, t) - \\
& \left. - |C_2|^2 G_{\omega_n}^{2,2}(-t, -t) \right\} + 2\pi e v_0 N(0) T \theta \left(z - \frac{d}{2} \right) \sum_{\omega_n} \int_0^1 x dx \left\{ D G_{\omega_n}^{1,1}(t, t) - \right. \\
& \left. - \dot{C}_1^* C_4 G_{\omega_n}^{2,1}(t, t) + \dot{C}_1^* C_4 G_{\omega_n}^{1,2}(t, t) - G_{\omega_n}^{2,2}(-t, -t) + R G_{\omega_n}^{2,2}(t, t) \right\}.
\end{aligned}$$

Тут використано позначення $t = \frac{z}{v_0 x}$. Обчислюючи одновимірну густину струму $j(z)$ на площині $z = \frac{d}{2}$, ми приходимо до формули

$$\begin{aligned}
j\left(\frac{d}{2}\right) = & \pi e v_0 N(0) T \sum_{\omega_n} \int_0^1 x dx \left\{ |C_2|^2 G_{\omega_n}^{1,1}\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) - \right. \\
& - |C_3|^2 G_{\omega_n}^{1,1}\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right) + D G_{\omega_n}^{1,1}\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) + \dot{C}_2^* C_3 G_{\omega_n}^{2,1}\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) - \\
& - \dot{C}_3^* C_2 G_{\omega_n}^{2,1}\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right) - \dot{C}_1^* C_4 G_{\omega_n}^{2,1}\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) + \dot{C}_3^* C_2 G_{\omega_n}^{1,2}\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) - \\
& - \dot{C}_2^* C_3 G_{\omega_n}^{1,2}\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right) + \dot{C}_1^* C_4 G_{\omega_n}^{1,2}\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) - G_{\omega_n}^{2,2}\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right) + \\
& \left. + |C_3|^2 G_{\omega_n}^{2,2}\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) - |C_2|^2 G_{\omega_n}^{2,2}\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right) + R G_{\omega_n}^{2,2}\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) \right\}. \quad (3.3.12)
\end{aligned}$$

3.4. Умова зшивання

Знайдений аналітичний вираз (3.3.12) дозволяє обчислювати одновимірну густину струму $j(z)$ на площині $z = \frac{d}{2}$, тобто на правому контакті. Фізичну ве-

личину $j \left(\frac{d}{2} \right)$ подано через функції Гріна $G_{\omega_n}^{i,k}(t, t')$ для таких двох частинних випадків: $t = t' = -\frac{a}{2}$ та $t = t' = \frac{a}{2}$. Для знаходження функцій Гріна на лівому та правому контактах потрібно спочатку розв'язати так звані квазікласичні рівняння (3.2.33), тобто диференціальні рівняння першого порядку для матричних функцій Гріна $\hat{\mathcal{G}}^{i,k}(t, t')$ у t -представленні. Вищезгадані рівняння дуже зручно інтегрувати окремо на кожному із таких трьох проміжків: $t < -\frac{a}{2}$, $|t| < \frac{a}{2}$ та $t > \frac{a}{2}$.

3.4.1. Лівий надпровідник. У нашому дослідженні лівий надпровідник розміщено в області $z < -\frac{d}{2}$. У так званому t -представленні цій області відповідає область $t < -\frac{a}{2}$. Для такого частинного випадку матриці (3.2.37) та (3.2.38) уже не будуть функціями змінної t . Спрощені аналітичні вирази для цих матриць потрібно використати з метою підрахунку матриць $\hat{\Delta}^{i,i'}(t, x)$, які, очевидно, також уже не будуть функціями змінної t . Отже, на проміжку $t < -\frac{a}{2}$ ми маємо такі аналітичні вирази:

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}^{1,1}(t, x) &= \sigma_z \hat{\Delta}_{-\varphi}, & \hat{\Delta}^{1,2}(t, x) &= 0, \\ \hat{\Delta}^{2,1}(t, x) &= 0, & \hat{\Delta}^{2,2}(t, x) &= \sigma_z \hat{\Delta}_{\varphi}. \end{aligned}$$

Тут $\hat{\Delta}_{\varphi} = i\Delta \left(\sigma_x \sin \frac{\varphi}{2} + \sigma_y \cos \frac{\varphi}{2} \right)$. Беручи до уваги спрощені аналітичні вирази для матриць $\hat{\Delta}^{i,i'}(t, x)$, ми можемо переписати диференціальні рівняння першого порядку (3.2.33) у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + i\omega_n \sigma_z - \hat{\Delta}_{-\varphi} \right\} \hat{\mathcal{G}}^{1,1}(t, t') &= \delta(t - t'), \\ \left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + i\omega_n \sigma_z - \hat{\Delta}_{\varphi} \right\} \hat{\mathcal{G}}^{2,1}(t, t') &= 0, \\ \left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + i\omega_n \sigma_z - \hat{\Delta}_{\varphi} \right\} \hat{\mathcal{G}}^{2,2}(t, t') &= \delta(t - t'), \\ \left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + i\omega_n \sigma_z - \hat{\Delta}_{-\varphi} \right\} \hat{\mathcal{G}}^{1,2}(t, t') &= 0. \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Отриману щойно систему (3.4.1) чотирьох диференціальних рівнянь першого порядку для матричних функцій Гріна $\hat{\mathcal{G}}^{i,k}(t, t')$ у так званому t -представленні вже можна розв'язувати. Для початку ми можемо розглянути, наприклад, друге рівняння системи (3.4.1), тобто диференціальне рівняння першого порядку для

матричної функції Гріна $\hat{\mathcal{G}}^{2,1}(t, t')$. Для спрощення записів будемо використовувати позначення $\hat{A}(\varphi) = \omega_n \sigma_z + i \hat{\Delta}_\varphi = \omega_n \sigma_z - \Delta \sigma_y \cos \frac{\varphi}{2} - \Delta \sigma_x \sin \frac{\varphi}{2}$. Для цієї матриці виконується умова $\left\{ \hat{A}(\varphi) \right\}^2 = \tilde{\omega}_n^2$. Тут ми запровадили позначення для частоти $\tilde{\omega}_n = \sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}$. У такому випадку друге рівняння системи (3.4.1) є диференціальним рівнянням першого порядку

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \hat{A}(\varphi) \right\} \hat{L}^{2,1}(t, t') = 0 \quad (3.4.2)$$

для матричної функції

$$\hat{L}^{2,1}(t, t') = i \hat{\mathcal{G}}^{2,1}(t, t'). \quad (3.4.3)$$

Варто зауважити, що диференціальне рівняння першого порядку (3.4.2) для матричної функції (3.4.3) можна переписати також і в такому вигляді:

$$\frac{\partial \hat{L}^{2,1}(t, t')}{\partial t} = -\hat{A}(\varphi) \hat{L}^{2,1}(t, t'). \quad (3.4.4)$$

Ми будемо розв'язувати диференціальне рівняння (3.4.4), підвищуючи порядок цього диференціального рівняння. Для цього варто продиференціювати тотожність (3.4.4) по змінній t . У такому випадку ми можемо записати вираз для похідної другого порядку

$$\frac{\partial^2 \hat{L}^{2,1}(t, t')}{\partial t^2} = -\hat{A}(\varphi) \frac{\partial \hat{L}^{2,1}(t, t')}{\partial t} = \left\{ \hat{A}(\varphi) \right\}^2 \hat{L}^{2,1}(t, t') = \tilde{\omega}_n^2 \hat{L}^{2,1}(t, t'),$$

з якого випливає диференціальне рівняння вже другого порядку

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \tilde{\omega}_n^2 \right) \hat{L}^{2,1}(t, t') = 0. \quad (3.4.5)$$

Отримане диференціальне рівняння другого порядку (3.4.5) можна подати також у вигляді таких двох тотожностей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \hat{L}^{2,1}(t, t')}{\partial t} + \tilde{\omega}_n \hat{L}^{2,1}(t, t') \right] - \tilde{\omega}_n \left[\frac{\partial \hat{L}^{2,1}(t, t')}{\partial t} + \tilde{\omega}_n \hat{L}^{2,1}(t, t') \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \hat{L}^{2,1}(t, t')}{\partial t} - \tilde{\omega}_n \hat{L}^{2,1}(t, t') \right] + \tilde{\omega}_n \left[\frac{\partial \hat{L}^{2,1}(t, t')}{\partial t} - \tilde{\omega}_n \hat{L}^{2,1}(t, t') \right] &= 0. \end{aligned}$$

Першу із двох тотожностей варто домножити на $\frac{1}{2\tilde{\omega}_n} e^{-\tilde{\omega}_n t}$. Другу тотожність потрібно домножити на $-\frac{1}{2\tilde{\omega}_n} e^{\tilde{\omega}_n t}$. Це дає нам змогу отримати похідні від добутків

у лівих частинах тотожностей. Тоді матимемо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ e^{-\tilde{\omega}_n t} \left[\frac{\hat{L}^{2,1}(t, t')}{2} + \frac{1}{2\tilde{\omega}_n} \frac{\partial \hat{L}^{2,1}(t, t')}{\partial t} \right] \right\} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ e^{\tilde{\omega}_n t} \left[\frac{\hat{L}^{2,1}(t, t')}{2} - \frac{1}{2\tilde{\omega}_n} \frac{\partial \hat{L}^{2,1}(t, t')}{\partial t} \right] \right\} &= 0. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що вирази, на які діє диференціальний оператор $\frac{\partial}{\partial t}$, не залежать від змінної t . Тобто ці вирази дорівнюють деяким сталим величинам, які можна дуже легко знайти, розглядаючи загальні розв'язки диференціальних рівнянь на межі $t = -\frac{a}{2}$. Оскільки $\left. \frac{\partial \hat{L}^{2,1}(t, t')}{\partial t} \right|_{t=-\frac{a}{2}} = -\hat{A}(\varphi) \hat{L}^{2,1}\left(-\frac{a}{2}, t'\right)$, то ми отримуємо такі результати:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{L}^{2,1}(t, t')}{2} + \frac{1}{2\tilde{\omega}_n} \frac{\partial \hat{L}^{2,1}(t, t')}{\partial t} &= \frac{\tilde{\omega}_n - \hat{A}(\varphi)}{2\tilde{\omega}_n} \hat{L}^{2,1}\left(-\frac{a}{2}, t'\right) \exp\left\{\tilde{\omega}_n\left(t + \frac{a}{2}\right)\right\}, \\ \frac{\hat{L}^{2,1}(t, t')}{2} - \frac{1}{2\tilde{\omega}_n} \frac{\partial \hat{L}^{2,1}(t, t')}{\partial t} &= \frac{\tilde{\omega}_n + \hat{A}(\varphi)}{2\tilde{\omega}_n} \hat{L}^{2,1}\left(-\frac{a}{2}, t'\right) \exp\left\{-\tilde{\omega}_n\left(t + \frac{a}{2}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Внаслідок додавання щойно отриманих двох тотожностей ми отримуємо формулу для загального розв'язку

$$\begin{aligned} \hat{L}^{2,1}(t, t') &= \left(\frac{\tilde{\omega}_n - \hat{A}(\varphi)}{2\tilde{\omega}_n} \exp\left\{\tilde{\omega}_n\left(t + \frac{a}{2}\right)\right\} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tilde{\omega}_n + \hat{A}(\varphi)}{2\tilde{\omega}_n} \exp\left\{-\tilde{\omega}_n\left(t + \frac{a}{2}\right)\right\} \right) \hat{L}^{2,1}\left(-\frac{a}{2}, t'\right). \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Варто наголосити на тому, що формулу (3.4.6) для загального розв'язку диференціального рівняння першого порядку (3.4.2) можна подати в більш компактному вигляді. Якщо розглянути функцію

$$\hat{X}_\varphi(\tau) = \frac{\tilde{\omega}_n - \hat{A}(\varphi)}{2\tilde{\omega}_n} e^{\tilde{\omega}_n \tau} + \frac{\tilde{\omega}_n + \hat{A}(\varphi)}{2\tilde{\omega}_n} e^{-\tilde{\omega}_n \tau} \quad (3.4.7)$$

та її похідну першого порядку

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{X}_\varphi(\tau)}{\partial \tau} &= \frac{1}{2\tilde{\omega}_n} e^{\tilde{\omega}_n \tau} \left[\tilde{\omega}_n^2 - \tilde{\omega}_n \hat{A}(\varphi) \right] + \frac{1}{2\tilde{\omega}_n} e^{-\tilde{\omega}_n \tau} \left[-\tilde{\omega}_n^2 - \tilde{\omega}_n \hat{A}(\varphi) \right] = \\ &= \frac{1}{2\tilde{\omega}_n} e^{\tilde{\omega}_n \tau} \left[\left\{ \hat{A}(\varphi) \right\}^2 - \tilde{\omega}_n \hat{A}(\varphi) \right] + \frac{1}{2\tilde{\omega}_n} e^{-\tilde{\omega}_n \tau} \left[-\left\{ \hat{A}(\varphi) \right\}^2 - \tilde{\omega}_n \hat{A}(\varphi) \right] = \\ &= -\hat{A}(\varphi) \left\{ \frac{1}{2\tilde{\omega}_n} e^{\tilde{\omega}_n \tau} \left[\tilde{\omega}_n - \hat{A}(\varphi) \right] + \frac{1}{2\tilde{\omega}_n} e^{-\tilde{\omega}_n \tau} \left[\tilde{\omega}_n + \hat{A}(\varphi) \right] \right\}, \end{aligned}$$

то можна скласти таке диференціальне рівняння першого порядку:

$$\frac{\partial \hat{X}_\varphi(\tau)}{\partial \tau} = -\hat{A}(\varphi) \hat{X}_\varphi(\tau), \quad \hat{X}_\varphi(0) = 1. \quad (3.4.8)$$

У формулі (3.4.8) ми маємо диференціальне рівняння першого порядку для матричної функції (3.4.7) за наявності певної початкової умови. Це означає, що ми маємо справу із так званою задачею Коші. Варто наголосити на тому, що загальний розв'язок задачі Коші (3.4.8) знаходиться елементарно. Його можна подати в такому компактному вигляді:

$$\hat{X}_\varphi(\tau) = e^{-\hat{A}(\varphi)\tau}. \quad (3.4.9)$$

Аналітичні вирази (3.4.7) та (3.4.9) для матричної функції $\hat{X}_\varphi(\tau)$ потрібно обов'язково порівняти між собою. Це дає нам змогу встановити справедливність операторної тотожності

$$e^{-\hat{A}(\varphi)\tau} = \frac{\tilde{\omega}_n - \hat{A}(\varphi)}{2\tilde{\omega}_n} e^{\tilde{\omega}_n\tau} + \frac{\tilde{\omega}_n + \hat{A}(\varphi)}{2\tilde{\omega}_n} e^{-\tilde{\omega}_n\tau}. \quad (3.4.10)$$

Щойно отримана операторна тотожність (3.4.10) дає нам змогу подати загальний розв'язок (3.4.6) однорідного диференціального рівняння першого порядку (3.4.2) за допомогою формули

$$\hat{L}^{2,1}(t, t') = e^{-\hat{A}(\varphi)t} \hat{M}^{2,1}(t'), \quad (3.4.11)$$

у якій фігурує позначення $\hat{M}^{2,1}(t') = \exp\left\{-\hat{A}(\varphi)\frac{a}{2}\right\} \hat{L}^{2,1}\left(-\frac{a}{2}, t'\right)$. Отриманий загальний розв'язок (3.4.11) для однорідного диференціального рівняння першого порядку (3.4.2) хоч і має компактний вигляд, але для роботи все ж таки доцільніше буде взяти до уваги операторну тотожність (3.4.10) з метою перетворити формулу (3.4.11) на формулу

$$\hat{L}^{2,1}(t, t') = \frac{\tilde{\omega}_n - \hat{A}(\varphi)}{2\tilde{\omega}_n} \hat{M}^{2,1}(t') e^{\tilde{\omega}_n t} + \frac{\tilde{\omega}_n + \hat{A}(\varphi)}{2\tilde{\omega}_n} \hat{M}^{2,1}(t') e^{-\tilde{\omega}_n t}. \quad (3.4.12)$$

У формулі (3.4.12) потрібно позбутися доданка з експонентою $e^{-\tilde{\omega}_n t}$, яка розбігається для випадку, коли $t \rightarrow -\infty$. Для цього записуємо матрицю

$$\hat{M}^{2,1}(t') = \begin{pmatrix} \alpha_{21}(t') & c_{21}(t') \\ d_{21}(t') & \beta_{21}(t') \end{pmatrix} \quad (3.4.13)$$

та матрицю

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_n + \hat{A}(\varphi) &= \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_n + \omega_n & i\Delta \exp(i\frac{\varphi}{2}) \\ -i\Delta \exp(-i\frac{\varphi}{2}) & \tilde{\omega}_n - \omega_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -i\Delta b \exp(i\frac{\varphi}{2}) & i\Delta \exp(i\frac{\varphi}{2}) \\ -i\Delta \exp(-i\frac{\varphi}{2}) & \frac{i\Delta}{b} \exp(-i\frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (3.4.14)$$

у якій фігурує позначення $b = -\frac{\tilde{\omega}_n + \omega_n}{i\Delta} \exp(-i\frac{\varphi}{2})$. Матрицю (3.4.14) треба помножити на матрицю (3.4.13). Внаслідок цього ми приходимо до формули

$$\begin{aligned}[\tilde{\omega}_n + \hat{A}(\varphi)] \hat{M}^{2,1}(t') &= \begin{pmatrix} -i\Delta b \exp(i\frac{\varphi}{2}) & i\Delta \exp(i\frac{\varphi}{2}) \\ -i\Delta \exp(-i\frac{\varphi}{2}) & \frac{i\Delta}{b} \exp(-i\frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{21}(t') & c_{21}(t') \\ d_{21}(t') & \beta_{21}(t') \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (3.4.15)$$

з якої випливають такі чотири рівності:

$$\begin{aligned}a_{11} &= i\Delta \exp(i\frac{\varphi}{2}) [d_{21}(t') - b\alpha_{21}(t')], \\ a_{12} &= -i\Delta b \exp(i\frac{\varphi}{2}) \left[c_{21}(t') - \frac{1}{b}\beta_{21}(t') \right], \\ a_{21} &= \frac{i\Delta}{b} \exp(-i\frac{\varphi}{2}) [d_{21}(t') - b\alpha_{21}(t')], \\ a_{22} &= -i\Delta \exp(-i\frac{\varphi}{2}) \left[c_{21}(t') - \frac{1}{b}\beta_{21}(t') \right].\end{aligned}$$

Нехай виконуються такі дві умови:

$$c_{21}(t') = \frac{1}{b}\beta_{21}(t'), \quad d_{21}(t') = b\alpha_{21}(t').\quad (3.4.16)$$

Умови (3.4.16) перетворюють матрицю (3.4.13) на матрицю

$$\hat{M}^{2,1}(t') = \begin{pmatrix} \alpha_{21}(t') & \frac{1}{b}\beta_{21}(t') \\ b\alpha_{21}(t') & \beta_{21}(t') \end{pmatrix}\quad (3.4.17)$$

та дозволяють отримати такі чотири умови:

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = 0, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = 0.$$

Ці умови перетворюють тотожність (3.4.15) на тотожність

$$[\tilde{\omega}_n + \hat{A}(\varphi)] \hat{M}^{2,1}(t') = 0.\quad (3.4.18)$$

Матрицю (3.4.17), тотожність (3.4.18) та тотожність

$$\frac{\tilde{\omega}_n - \hat{A}(\varphi)}{2\tilde{\omega}_n} \hat{M}^{2,1}(t') = \frac{2\tilde{\omega}_n - [\tilde{\omega}_n + \hat{A}(\varphi)]}{2\tilde{\omega}_n} \hat{M}^{2,1}(t') = \hat{M}^{2,1}(t'),$$

яка є прямим наслідком тотожності (3.4.18), потрібно підставляти у формулу (3.4.12) для загального розв'язку однорідного диференціального рівняння першого порядку (3.4.2). Тоді ми можемо записати, що

$$\hat{L}^{2,1}(t, t') = e^{\tilde{\omega}_n t} \begin{pmatrix} \alpha_{21}(t') & \frac{1}{b}\beta_{21}(t') \\ b\alpha_{21}(t') & \beta_{21}(t') \end{pmatrix}. \quad (3.4.19)$$

Розгляньмо тепер перше рівняння системи (3.4.1), тобто диференціальне рівняння першого порядку для матричної функції Гріна $\hat{\mathcal{G}}^{1,1}(t, t')$. Це рівняння є, фактично, диференціальним рівнянням першого порядку

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \hat{A}(-\varphi) \right\} \hat{L}^{1,1}(t, t') = \delta(t - t') \quad (3.4.20)$$

для матричної функції

$$\hat{L}^{1,1}(t, t') = i\hat{\mathcal{G}}^{1,1}(t, t'). \quad (3.4.21)$$

Для знаходження загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння першого порядку (3.4.20) доцільно буде розглянути інтеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(t-t')} d\xi = \delta(t - t').$$

Оскільки $\{\hat{A}(-\varphi)\}^2 = \tilde{\omega}_n^2$, то цей інтеграл можна замінити інтегралом

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \left\{ i\xi + \hat{A}(-\varphi) \right\} \left\{ -i\xi + \hat{A}(-\varphi) \right\} \frac{e^{i\xi(t-t')}}{\xi^2 + \tilde{\omega}_n^2} = \delta(t - t').$$

Щойно записаний інтеграл можна переписати також і в такому вигляді:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \hat{A}(-\varphi) \right\} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \left\{ -i\xi + \hat{A}(-\varphi) \right\} \frac{e^{i\xi(t-t')}}{\xi^2 + \tilde{\omega}_n^2} = \delta(t - t'). \quad (3.4.22)$$

Якщо запровадити функцію

$$\mathcal{K}(t - t', \tilde{\omega}_n) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi(t-t')}}{\xi^2 + \tilde{\omega}_n^2} d\xi, \quad (3.4.23)$$

то можна отримати тотожність

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \left\{ -i\xi + \hat{A}(-\varphi) \right\} \frac{e^{i\xi(t-t')}}{\xi^2 + \tilde{\omega}_n^2} = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \hat{A}(-\varphi) \right\} \mathcal{K}(t-t', \tilde{\omega}_n),$$

яку потрібно підставляти у формулу (3.4.22). Тоді ми приходимо до рівняння

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \hat{A}(-\varphi) \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \hat{A}(-\varphi) \right\} \mathcal{K}(t-t', \tilde{\omega}_n) = \delta(t-t'),$$

яке є, по суті, неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \hat{A}(-\varphi) \right\} \hat{L}_1^{1,1}(t-t') = \delta(t-t') \quad (3.4.24)$$

для матричної функції

$$\hat{L}_1^{1,1}(t-t') = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \hat{A}(-\varphi) \right\} \mathcal{K}(t-t', \tilde{\omega}_n) \quad (3.4.25)$$

або неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \tilde{\omega}_n^2 \right) \mathcal{K}(t-t', \tilde{\omega}_n) = \delta(t-t') \quad (3.4.26)$$

для функції (3.4.23). Застосування параметризації

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi^2 + \tilde{\omega}_n^2} &= \frac{1}{2\tilde{\omega}_n} \left(\frac{1}{\tilde{\omega}_n - i\xi} + \frac{1}{\tilde{\omega}_n + i\xi} \right) = \\ &= \frac{1}{2\tilde{\omega}_n} \left(\int_{-\infty}^0 e^{\tilde{\omega}_n \tau} e^{-i\xi \tau} d\tau + \int_0^{+\infty} e^{-\tilde{\omega}_n \tau} e^{-i\xi \tau} d\tau \right) = \frac{1}{2\tilde{\omega}_n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tilde{\omega}_n |\tau|} e^{-i\xi \tau} d\tau \end{aligned}$$

дозволяє виконати для функції (3.4.23) перетворення

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(t-t', \tilde{\omega}_n) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(t-t')} \frac{d\xi}{2\tilde{\omega}_n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tilde{\omega}_n |\tau|} e^{-i\xi \tau} d\tau = \\ &= -\frac{1}{2\tilde{\omega}_n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tilde{\omega}_n |\tau|} e^{-i\xi(\tau-(t-t'))} d\xi = \\ &= -\frac{1}{2\tilde{\omega}_n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tilde{\omega}_n |\tau|} \frac{d\tau}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi(\tau-(t-t'))} d\xi = \\ &= -\frac{1}{2\tilde{\omega}_n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tilde{\omega}_n |\tau|} \delta(\tau - (t-t')) d\tau = -\frac{1}{2\tilde{\omega}_n} e^{-\tilde{\omega}_n |t-t'|}. \end{aligned} \quad (3.4.27)$$

Для функції (3.4.23) потрібно побудувати похідну першого порядку

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{K}(t - t', \tilde{\omega}_n) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi e^{i\xi(t-t')}}{\xi^2 + \tilde{\omega}_n^2} d\xi. \quad (3.4.28)$$

Застосування параметризації

$$\begin{aligned} \frac{\xi}{\xi^2 + \tilde{\omega}_n^2} &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{\tilde{\omega}_n - i\xi} - \frac{1}{\tilde{\omega}_n + i\xi} \right) = \\ &= \frac{1}{2i} \left(\int_{-\infty}^0 e^{\tilde{\omega}_n \tau} e^{-i\xi \tau} d\tau - \int_0^{+\infty} e^{-\tilde{\omega}_n \tau} e^{-i\xi \tau} d\tau \right) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sign } \tau}{2i} e^{-\tilde{\omega}_n |\tau|} e^{-i\xi \tau} d\tau \end{aligned}$$

дозволяє виконати для похідної (3.4.28) перетворення

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{K}(t - t', \tilde{\omega}_n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(t-t')} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sign } \tau}{2} e^{-\tilde{\omega}_n |\tau|} e^{-i\xi \tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sign } \tau}{2} e^{-\tilde{\omega}_n |\tau|} e^{-i\xi(\tau - (t-t'))} d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sign } \tau}{2} e^{-\tilde{\omega}_n |\tau|} \frac{d\tau}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi(\tau - (t-t'))} d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sign } \tau}{2} e^{-\tilde{\omega}_n |\tau|} \delta(\tau - (t - t')) d\tau = \frac{\text{sign}(t - t')}{2} e^{-\tilde{\omega}_n |t-t'|}. \end{aligned} \quad (3.4.29)$$

Функцію (3.4.27) та її похідну першого порядку (3.4.29) потрібно підставляти у формулу (3.4.25) для матричної функції $\hat{L}_1^{1,1}(t - t')$. Тоді ми можемо записати формулу

$$\hat{L}_1^{1,1}(t - t') = \frac{1}{2\tilde{\omega}_n} \left[\tilde{\omega}_n \text{sign}(t - t') + \hat{A}(-\varphi) \right] e^{-\tilde{\omega}_n |t-t'|}. \quad (3.4.30)$$

Розгляньмо різницю тотожностей (3.4.20) та (3.4.24). Якщо ми будемо шукати матричну функцію $\hat{L}^{1,1}(t, t')$ у вигляді розкладу

$$\hat{L}^{1,1}(t, t') = \hat{L}_0^{1,1}(t, t') + \hat{L}_1^{1,1}(t - t'), \quad (3.4.31)$$

то матрична функція $\hat{L}_0^{1,1}(t, t')$ буде загальним розв'язком однорідного диференціального рівняння першого порядку

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \hat{A}(-\varphi) \right\} \hat{L}_0^{1,1}(t, t') = 0. \quad (3.4.32)$$

Для однорідного диференціального рівняння першого порядку (3.4.32) можна побудувати загальний інтеграл

$$\begin{aligned} \hat{L}_0^{1,1}(t, t') &= e^{-\hat{A}(-\varphi)t} \hat{M}^{1,1}(t') = \frac{\tilde{\omega}_n - \hat{A}(-\varphi)}{2\tilde{\omega}_n} \hat{M}^{1,1}(t') e^{\tilde{\omega}_n t} + \\ &+ \frac{\tilde{\omega}_n + \hat{A}(-\varphi)}{2\tilde{\omega}_n} \hat{M}^{1,1}(t') e^{-\tilde{\omega}_n t}. \end{aligned} \quad (3.4.33)$$

Для частинного випадку, коли $t \rightarrow -\infty$, матрична функція (3.4.33) має бути збіжною. Внаслідок цього повинна виконуватись умова

$$\left[\tilde{\omega}_n + \hat{A}(-\varphi) \right] \hat{M}^{1,1}(t') = 0, \quad (3.4.34)$$

з якої випливає формула для матриці

$$\hat{M}^{1,1}(t') = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(t') & -\frac{1}{*b} \beta_{11}(t') \\ -\frac{*}{b} \alpha_{11}(t') & \beta_{11}(t') \end{pmatrix}. \quad (3.4.35)$$

Тотожність (3.4.34), матрицю (3.4.35) та тотожність

$$\frac{\tilde{\omega}_n - \hat{A}(-\varphi)}{2\tilde{\omega}_n} \hat{M}^{1,1}(t') = \frac{2\tilde{\omega}_n - \left[\tilde{\omega}_n + \hat{A}(-\varphi) \right]}{2\tilde{\omega}_n} \hat{M}^{1,1}(t') = \hat{M}^{1,1}(t'),$$

яка є прямим наслідком тотожності (3.4.34), потрібно підставляти у формулу (3.4.33) для загального розв'язку однорідного диференціального рівняння першого порядку (3.4.32). Тоді ми можемо записати, що

$$\hat{L}_0^{1,1}(t, t') = e^{\tilde{\omega}_n t} \begin{pmatrix} \alpha_{11}(t') & -\frac{1}{*b} \beta_{11}(t') \\ -\frac{*}{b} \alpha_{11}(t') & \beta_{11}(t') \end{pmatrix}. \quad (3.4.36)$$

Далі потрібно підставляти матричні функції (3.4.30) та (3.4.36) у формулу для розкладу (3.4.31). Тоді виходить, що

$$\begin{aligned} \hat{L}^{1,1}(t, t') &= e^{\tilde{\omega}_n t} \begin{pmatrix} \alpha_{11}(t') & -\frac{1}{*b} \beta_{11}(t') \\ -\frac{*}{b} \alpha_{11}(t') & \beta_{11}(t') \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{1}{2\tilde{\omega}_n} \left[\tilde{\omega}_n \operatorname{sign}(t - t') + \hat{A}(-\varphi) \right] e^{-\tilde{\omega}_n |t - t'|}. \end{aligned} \quad (3.4.37)$$

Що стосується матричних функцій (3.4.19) та (3.4.37), то їх потрібно підставляти у формули (3.4.3) та (3.4.21) відповідно. Для кращого сприйняття формул

ми будемо використовувати такі позначення:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{21}(t')}{i} \exp\left(-\tilde{\omega}_n \frac{a}{2}\right) &\equiv \alpha_1(t'), & \frac{\beta_{21}(t')}{i} \exp\left(-\tilde{\omega}_n \frac{a}{2}\right) &\equiv \beta_1(t'), \\ \frac{\alpha_{11}(t')}{i} \exp\left(-\tilde{\omega}_n \frac{a}{2}\right) &\equiv \gamma_1(t'), & \frac{\beta_{11}(t')}{i} \exp\left(-\tilde{\omega}_n \frac{a}{2}\right) &\equiv \delta_1(t'). \end{aligned}$$

Тоді для матричних функцій Гріна в t -представленні ми отримуємо аналітичні вирази

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}}^{1,1}(t, t') &= \begin{pmatrix} \gamma_1(t') & -\frac{1}{b} \delta_1(t') \\ -\frac{1}{b} \gamma_1(t') & \delta_1(t') \end{pmatrix} \exp\left\{\tilde{\omega}_n \left(t + \frac{a}{2}\right)\right\} + \\ &+ \frac{1}{2i\tilde{\omega}_n} \left[\tilde{\omega}_n \operatorname{sign}(t - t') + \hat{A}(-\varphi)\right] e^{-\tilde{\omega}_n |t - t'|} \end{aligned} \quad (3.4.38)$$

та

$$\hat{\mathcal{G}}^{2,1}(t, t') = \begin{pmatrix} \alpha_1(t') & \frac{1}{b} \beta_1(t') \\ b\alpha_1(t') & \beta_1(t') \end{pmatrix} \exp\left\{\tilde{\omega}_n \left(t + \frac{a}{2}\right)\right\}. \quad (3.4.39)$$

3.4.2. Правий надпровідник. Що стосується правого надпровідника, то його розміщено вже в області $z > \frac{d}{2}$. У так званому t -представленні цій області відповідає область $t > \frac{a}{2}$. Як і у випадку лівого надпровідника, для правого надпровідника матриці (3.2.37) та (3.2.38) теж уже не будуть функціями змінної t . Спрощені аналітичні вирази для цих матриць потрібно використати з метою підрахунку матриць $\hat{\Delta}^{i,i'}(t, x)$, які, очевидно, також уже не будуть функціями змінної t . Отже, на проміжку $t > \frac{a}{2}$ ми маємо такі аналітичні вирази:

$$\begin{aligned} \sigma_z \hat{\Delta}^{1,1}(t, x) &= \hat{\Delta}_\varphi - 2i\Delta R \sigma_x \sin \frac{\varphi}{2}, \\ \sigma_z \hat{\Delta}^{1,2}(t, x) &= 2i\Delta C_4^* C_1 \sigma_x \sin \frac{\varphi}{2}, \\ \sigma_z \hat{\Delta}^{2,1}(t, x) &= -2i\Delta C_4^* C_1 \sigma_x \sin \frac{\varphi}{2}, \\ \sigma_z \hat{\Delta}^{2,2}(t, x) &= \hat{\Delta}_{-\varphi} + 2i\Delta R \sigma_x \sin \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Беручи до уваги спрощені аналітичні вирази для матриць $\sigma_z \hat{\Delta}^{i,i'}(t, x)$, ми можемо отримати замкнену систему двох диференціальних рівнянь першого порядку для матричних функцій Гріна $\hat{\mathcal{G}}^{1,1}(t, t')$ та $\hat{\mathcal{G}}^{2,1}(t, t')$. Ця система має такий

ВИГЛЯД:

$$\begin{aligned}
& \left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + i\omega_n \sigma_z - \hat{\Delta}_\varphi + 2i\Delta R \sigma_x \sin \frac{\varphi}{2} \right\} \hat{\mathcal{G}}^{1,1}(t, t') - \\
& \quad - 2i\Delta \hat{C}_4^* C_1 \sigma_x \sin \frac{\varphi}{2} \hat{\mathcal{G}}^{2,1}(t, t') = \delta(t - t'), \\
& \left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + i\omega_n \sigma_z - \hat{\Delta}_{-\varphi} - 2i\Delta R \sigma_x \sin \frac{\varphi}{2} \right\} \hat{\mathcal{G}}^{2,1}(t, t') + \\
& \quad + 2i\Delta \hat{C}_4^* C_1 \sigma_x \sin \frac{\varphi}{2} \hat{\mathcal{G}}^{1,1}(t, t') = 0.
\end{aligned} \tag{3.4.40}$$

Що стосується замкненої системи двох диференціальних рівнянь першого порядку для матричних функцій Гріна $\hat{\mathcal{G}}^{2,2}(t, t')$ та $\hat{\mathcal{G}}^{1,2}(t, t')$, то вона матиме вже такий вигляд:

$$\begin{aligned}
& \left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + i\omega_n \sigma_z - \hat{\Delta}_{-\varphi} - 2i\Delta R \sigma_x \sin \frac{\varphi}{2} \right\} \hat{\mathcal{G}}^{2,2}(t, t') + \\
& \quad + 2i\Delta \hat{C}_4^* C_1 \sigma_x \sin \frac{\varphi}{2} \hat{\mathcal{G}}^{1,2}(t, t') = \delta(t - t'), \\
& \left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + i\omega_n \sigma_z - \hat{\Delta}_\varphi + 2i\Delta R \sigma_x \sin \frac{\varphi}{2} \right\} \hat{\mathcal{G}}^{1,2}(t, t') - \\
& \quad - 2i\Delta \hat{C}_4^* C_1 \sigma_x \sin \frac{\varphi}{2} \hat{\mathcal{G}}^{2,2}(t, t') = 0.
\end{aligned} \tag{3.4.41}$$

Розгляньмо замкнену систему (3.4.40) двох диференціальних рівнянь першого порядку для матричних функцій Гріна $\hat{\mathcal{G}}^{1,1}(t, t')$ та $\hat{\mathcal{G}}^{2,1}(t, t')$. Варто наголосити на тому, що цю недиагональну систему рівнянь можна звести до такої діагональної системи:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \hat{A}(\varphi) \right\} \hat{L}(t, t') = \delta(t - t'), \\
& \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \hat{A}(-\varphi) \right\} \hat{M}(t, t') = \delta(t - t').
\end{aligned} \tag{3.4.42}$$

Система (3.4.42) є системою двох диференціальних рівнянь першого порядку для таких матричних функцій:

$$\begin{aligned}
\hat{L}(t, t') &= i\hat{\mathcal{G}}^{1,1}(t, t') + \frac{\hat{C}_1^*}{i\hat{C}_4} \hat{\mathcal{G}}^{2,1}(t, t'), \\
\hat{M}(t, t') &= i\hat{\mathcal{G}}^{1,1}(t, t') - \frac{\hat{C}_4}{i\hat{C}_1} \hat{\mathcal{G}}^{2,1}(t, t').
\end{aligned} \tag{3.4.43}$$

Розгляньмо спочатку перше рівняння системи (3.4.42), яке є неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку для матричної функції $\hat{L}(t, t')$. Варто

наголосити на тому, що загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння можна подати у вигляді розкладу

$$\hat{L}(t, t') = \hat{L}_0(t, t') + \hat{L}_1(t - t'), \quad (3.4.44)$$

у формулі для якого ми маємо загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння першого порядку

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \hat{A}(\varphi) \right\} \hat{L}_0(t, t') = 0 \quad (3.4.45)$$

та частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння першого порядку

$$\begin{aligned} \hat{L}_1(t - t') &= \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \hat{A}(\varphi) \right\} \mathcal{K}(t - t', \tilde{\omega}_n) = \\ &= \frac{1}{2\tilde{\omega}_n} \left[\tilde{\omega}_n \operatorname{sign}(t - t') + \hat{A}(\varphi) \right] e^{-\tilde{\omega}_n |t - t'|}. \end{aligned} \quad (3.4.46)$$

Диференціальне рівняння першого порядку (3.4.45) є подібним до диференціального рівняння першого порядку (3.4.2), яке виникало для випадку лівого надпровідника. Беручи до уваги операторну тотожність (3.4.10), ми можемо вже одразу записати, що

$$\hat{L}_0(t, t') = e^{-\hat{A}(\varphi)t} \hat{E}(t') = \frac{\tilde{\omega}_n - \hat{A}(\varphi)}{2\tilde{\omega}_n} \hat{E}(t') e^{\tilde{\omega}_n t} + \frac{\tilde{\omega}_n + \hat{A}(\varphi)}{2\tilde{\omega}_n} \hat{E}(t') e^{-\tilde{\omega}_n t}. \quad (3.4.47)$$

У формулі (3.4.47) потрібно позбутися доданка з експонентою $e^{\tilde{\omega}_n t}$, яка розбігається для випадку, коли $t \rightarrow +\infty$. Для втілення у життя вищезгаданого задуму варто записати умову

$$\left[\tilde{\omega}_n - \hat{A}(\varphi) \right] \hat{E}(t') = 0, \quad (3.4.48)$$

яка буде виконуватись тоді і тільки тоді, коли матрична функція $\hat{E}(t')$ матиме такий вигляд:

$$\hat{E}(t') = \begin{pmatrix} \alpha(t') & -\overset{*}{b} \beta(t') \\ -\frac{1}{\overset{*}{b}} \alpha(t') & \beta(t') \end{pmatrix}. \quad (3.4.49)$$

Тотожність (3.4.48), матрицю (3.4.49) та тотожність

$$\frac{\tilde{\omega}_n + \hat{A}(\varphi)}{2\tilde{\omega}_n} \hat{E}(t') = \frac{2\tilde{\omega}_n - \left[\tilde{\omega}_n - \hat{A}(\varphi) \right]}{2\tilde{\omega}_n} \hat{E}(t') = \hat{E}(t'),$$

яка є прямим наслідком тотожності (3.4.48), потрібно підставляти у формулу (3.4.47) для загального розв'язку однорідного диференціального рівняння першого порядку (3.4.45). Тоді ми можемо записати, що

$$\hat{L}_0(t, t') = e^{-\tilde{\omega}_n t} \begin{pmatrix} \alpha(t') & -\overset{*}{b} \beta(t') \\ -\frac{1}{\overset{*}{b}} \alpha(t') & \beta(t') \end{pmatrix}. \quad (3.4.50)$$

Далі потрібно підставляти матричні функції (3.4.46) та (3.4.50) у формулу для розкладу (3.4.44). Тоді виходить, що

$$\begin{aligned} \hat{L}(t, t') &= e^{-\tilde{\omega}_n t} \begin{pmatrix} \alpha(t') & -\overset{*}{b} \beta(t') \\ -\frac{1}{\overset{*}{b}} \alpha(t') & \beta(t') \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{1}{2\tilde{\omega}_n} \left[\tilde{\omega}_n \operatorname{sign}(t - t') + \hat{A}(\varphi) \right] e^{-\tilde{\omega}_n |t - t'|}. \end{aligned} \quad (3.4.51)$$

Цілком аналогічно розв'язується друге рівняння системи (3.4.42) для матричної функції $\hat{M}(t, t')$, внаслідок чого ми можемо вже одразу виписати загальний розв'язок

$$\begin{aligned} \hat{M}(t, t') &= e^{-\tilde{\omega}_n t} \begin{pmatrix} \gamma(t') & b\delta(t') \\ \frac{1}{b} \gamma(t') & \delta(t') \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{1}{2\tilde{\omega}_n} \left[\tilde{\omega}_n \operatorname{sign}(t - t') + \hat{A}(-\varphi) \right] e^{-\tilde{\omega}_n |t - t'|}. \end{aligned} \quad (3.4.52)$$

Що стосується матричних функцій (3.4.51) та (3.4.52), то їх потрібно підставляти у формули (3.4.43). З отриманих формул можна легко знайти матричні функції Гріна $\hat{\mathcal{G}}^{1,1}(t, t')$ та $\hat{\mathcal{G}}^{2,1}(t, t')$. Для кращого сприйняття формул ми будемо використовувати такі позначення:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(t')}{i} \exp\left(-\tilde{\omega}_n \frac{a}{2}\right) &\equiv \alpha_2(t'), & \frac{\beta(t')}{i} \exp\left(-\tilde{\omega}_n \frac{a}{2}\right) &\equiv \beta_2(t'), \\ \frac{\gamma(t')}{i} \exp\left(-\tilde{\omega}_n \frac{a}{2}\right) &\equiv \gamma_2(t'), & \frac{\delta(t')}{i} \exp\left(-\tilde{\omega}_n \frac{a}{2}\right) &\equiv \delta_2(t'). \end{aligned}$$

Тоді для матричних функцій Гріна в t -представленні ми отримуємо аналітичні вирази

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}}^{1,1}(t, t') &= \frac{1}{2i\tilde{\omega}_n} \left[\tilde{\omega}_n \operatorname{sign}(t - t') + D\hat{A}(\varphi) + R\hat{A}(-\varphi) \right] e^{-\tilde{\omega}_n |t - t'|} + \\ &+ \begin{pmatrix} D\alpha_2(t') + R\gamma_2(t') & Rb\delta_2(t') - D\overset{*}{b} \beta_2(t') \\ \frac{R}{b} \gamma_2(t') - \frac{D}{\overset{*}{b}} \alpha_2(t') & D\beta_2(t') + R\delta_2(t') \end{pmatrix} \exp\left\{ \tilde{\omega}_n \left(\frac{a}{2} - t \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.4.53)$$

та

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}}^{2,1}(t, t') &= \frac{C_1^* C_4}{2i\tilde{\omega}_n} \left[\hat{A}(\varphi) - \hat{A}(-\varphi) \right] e^{-\tilde{\omega}_n |t-t'|} + \\ &+ C_1^* C_4 \begin{pmatrix} \alpha_2(t') - \gamma_2(t') & -b^* \beta_2(t') - b\delta_2(t') \\ -\frac{1}{b^*} \alpha_2(t') - \frac{1}{b} \gamma_2(t') & \beta_2(t') - \delta_2(t') \end{pmatrix} \exp \left\{ \tilde{\omega}_n \left(\frac{a}{2} - t \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.4.54)$$

3.4.3. Проміжний прошарок. Що стосується проміжного прошарку, то його розміщено вже в області $|z| < \frac{d}{2}$. У так званому t -представленні цій області відповідає область $|t| < \frac{a}{2}$. Як і у випадку крайніх надпровідників, для проміжного прошарку S' матриці (3.2.37) та (3.2.38) теж уже не будуть функціями змінної t . Спрощені аналітичні вирази для цих матриць потрібно використати з метою підрахунку матриць $\hat{\Delta}^{i,i'}(t, x)$, які, очевидно, також уже не будуть функціями змінної t . Отже, на проміжку $|t| < \frac{a}{2}$ ми маємо такі аналітичні вирази:

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}^{1,1}(t, x) &= \Delta_1 \sigma_x \left(|C_2|^2 + |C_3|^2 \right), \\ \hat{\Delta}^{1,2}(t, x) &= \Delta_1 \sigma_x \left(C_2^* C_3 + C_3^* C_2 \right), \\ \hat{\Delta}^{2,1}(t, x) &= \Delta_1 \sigma_x \left(C_2^* C_3 + C_3^* C_2 \right), \\ \hat{\Delta}^{2,2}(t, x) &= \Delta_1 \sigma_x \left(|C_2|^2 + |C_3|^2 \right). \end{aligned}$$

Беручи до уваги спрощені аналітичні вирази для матриць $\sigma_z \hat{\Delta}^{i,i'}(t, x)$, ми можемо отримати замкнену систему двох диференціальних рівнянь першого порядку для матричних функцій Гріна $\hat{\mathcal{G}}^{1,1}(t, t')$ та $\hat{\mathcal{G}}^{2,1}(t, t')$. Ця система має такий вигляд:

$$\begin{aligned} &\left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + i\omega_n \sigma_z - \left(|C_2|^2 + |C_3|^2 \right) i\sigma_y \Delta_1 \right\} \hat{\mathcal{G}}^{1,1}(t, t') - \\ &\quad - \left(C_2 C_3^* + C_2^* C_3 \right) i\sigma_y \Delta_1 \hat{\mathcal{G}}^{2,1}(t, t') = \delta(t - t'), \\ &\left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + i\omega_n \sigma_z - \left(|C_2|^2 + |C_3|^2 \right) i\sigma_y \Delta_1 \right\} \hat{\mathcal{G}}^{2,1}(t, t') - \\ &\quad - \left(C_2 C_3^* + C_2^* C_3 \right) i\sigma_y \Delta_1 \hat{\mathcal{G}}^{1,1}(t, t') = 0. \end{aligned} \quad (3.4.55)$$

Що стосується замкненої системи двох диференціальних рівнянь першого порядку для матричних функцій Гріна $\hat{\mathcal{G}}^{2,2}(t, t')$ та $\hat{\mathcal{G}}^{1,2}(t, t')$, то вона матиме вже

такий вигляд:

$$\begin{aligned}
& \left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + i \omega_n \sigma_z - (|C_2|^2 + |C_3|^2) i \sigma_y \Delta_1 \right\} \hat{\mathcal{G}}^{2,2}(t, t') - \\
& - \left(C_2 \dot{C}_3^* + \dot{C}_2^* C_3 \right) i \sigma_y \Delta_1 \hat{\mathcal{G}}^{1,2}(t, t') = \delta(t - t'), \\
& \left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + i \omega_n \sigma_z - (|C_2|^2 + |C_3|^2) i \sigma_y \Delta_1 \right\} \hat{\mathcal{G}}^{1,2}(t, t') - \\
& - \left(C_2 \dot{C}_3^* + \dot{C}_2^* C_3 \right) i \sigma_y \Delta_1 \hat{\mathcal{G}}^{2,2}(t, t') = 0.
\end{aligned} \tag{3.4.56}$$

Ми розв'яжемо замкнену систему (3.4.55) двох диференціальних рівнянь першого порядку для матричних функцій Гріна $\hat{\mathcal{G}}^{1,1}(t, t')$ та $\hat{\mathcal{G}}^{2,1}(t, t')$. Розглядаючи суму та різницю диференціальних рівнянь, ми можемо перетворити замкнену систему (3.4.55) на таку замкнену систему:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \omega_n \sigma_z - |C_2 - C_3|^2 \sigma_y \Delta_1 \right\} i \left[\hat{\mathcal{G}}^{1,1}(t, t') - \hat{\mathcal{G}}^{2,1}(t, t') \right] = \delta(t - t'), \\
& \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \omega_n \sigma_z - |C_2 + C_3|^2 \sigma_y \Delta_1 \right\} i \left[\hat{\mathcal{G}}^{1,1}(t, t') + \hat{\mathcal{G}}^{2,1}(t, t') \right] = \delta(t - t').
\end{aligned} \tag{3.4.57}$$

Якщо запровадити позначення $A_1 = C_2 - C_3$ та $A_2 = C_2 + C_3$, то два диференціальні рівняння першого порядку замкненої системи (3.4.57) для матричних функцій Гріна $\hat{\mathcal{G}}^{1,1}(t, t')$ та $\hat{\mathcal{G}}^{2,1}(t, t')$ можна записати у вигляді одного диференціального рівняння першого порядку

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \omega_n \sigma_z - |A_k|^2 \sigma_y \Delta_1 \right\} i \left[\hat{\mathcal{G}}^{1,1}(t, t') + (-1)^k \hat{\mathcal{G}}^{2,1}(t, t') \right] = \delta(t - t'). \tag{3.4.58}$$

Для матриці $\hat{A}_k(\omega_n) = \omega_n \sigma_z - |A_k|^2 \sigma_y \Delta_1$, яку ми запровадимо для зручності запису, виконується тотожність $\left\{ \hat{A}_k(\omega_n) \right\}^2 = \left\{ \Omega_k(\omega_n) \right\}^2$, у формулі для якої фігурує позначення для частоти $\Omega_k(\omega_n) = \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_1^2 |A_k|^4}$. У такому випадку диференціальне рівняння першого порядку (3.4.58) є диференціальним рівнянням першого порядку

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \hat{A}_k(\omega_n) \right\} \hat{L}^{(k)}(t, t') = \delta(t - t') \tag{3.4.59}$$

для матричної функції

$$\hat{L}^{(k)}(t, t') = i \left[\hat{\mathcal{G}}^{1,1}(t, t') + (-1)^k \hat{\mathcal{G}}^{2,1}(t, t') \right]. \tag{3.4.60}$$

Далі потрібно розв'язати, тобто проінтегрувати диференціальне рівняння першого порядку (3.4.59) для матричної функції (3.4.60). Для початку варто записати вищезгадане рівняння у такому вигляді:

$$\frac{\partial \hat{L}^{(k)}(t, t')}{\partial t} + \hat{A}_k(\omega_n) \hat{L}^{(k)}(t, t') = \delta(t - t'). \quad (3.4.61)$$

Диференціальне рівняння першого порядку (3.4.61) потрібно домножити зліва на матрицю $e^{\hat{A}_k(\omega_n)t}$. У правій частині утвореної тотожності варто взяти до уваги відому властивість $f(x) \delta(x - x') = f(x') \delta(x - x')$, внаслідок чого ми приходимо до рівняння

$$e^{\hat{A}_k(\omega_n)t} \frac{\partial \hat{L}^{(k)}(t, t')}{\partial t} + \hat{A}_k(\omega_n) e^{\hat{A}_k(\omega_n)t} \hat{L}^{(k)}(t, t') = e^{\hat{A}_k(\omega_n)t'} \delta(t - t').$$

З цим рівнянням значно легше працювати через те, що сума в лівій частині перетворюється на похідну $\frac{\partial}{\partial t} \left\{ e^{\hat{A}_k(\omega_n)t} \hat{L}^{(k)}(t, t') \right\}$. Праву частину перетворюємо за допомогою тотожності $\delta(t - t') = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\text{sign}(t - t')}{2} \right\}$. Внаслідок виконаних перетворень отримуємо диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ e^{\hat{A}_k(\omega_n)t} \hat{L}^{(k)}(t, t') - \frac{\text{sign}(t - t')}{2} e^{\hat{A}_k(\omega_n)t'} \right\} = 0$$

та його загальний інтеграл

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ \hat{A}_k(\omega_n) t \right\} \hat{L}^{(k)}(t, t') - \frac{\text{sign}(t - t')}{2} \exp \left\{ \hat{A}_k(\omega_n) t' \right\} = \\ & = \exp \left\{ -\hat{A}_k(\omega_n) \frac{a}{2} \right\} \hat{L}^{(k)} \left(-\frac{a}{2}, t' \right) + \frac{\text{sign} \left(\frac{a}{2} + t' \right)}{2} \exp \left\{ \hat{A}_k(\omega_n) t' \right\}, \end{aligned}$$

який можна переписати також і в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \hat{L}^{(k)}(t, t') &= \exp \left\{ -\hat{A}_k(\omega_n) \left(t + \frac{a}{2} \right) \right\} \hat{L}^{(k)} \left(-\frac{a}{2}, t' \right) + \\ &+ \frac{\text{sign}(t - t') + \text{sign} \left(\frac{a}{2} + t' \right)}{2} \exp \left\{ -\hat{A}_k(\omega_n) (t - t') \right\}. \end{aligned} \quad (3.4.62)$$

Матрична функція (3.4.62) є загальним розв'язком неоднорідного диференціального рівняння першого порядку (3.4.61). Доданок у правій частині формули (3.4.62), у якому фігурує стала інтегрування $\hat{L}^{(k)} \left(-\frac{a}{2}, t' \right)$, є загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння. Інший доданок у правій частині формули

(3.4.62) є частинним розв'язком неоднорідного рівняння. У формулі (3.4.62) для загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння першого порядку (3.4.61) ми маємо матричні експоненти типу $\exp \left\{ -\hat{A}_k(\omega_n) \tau \right\}$, які є дуже схожими на матричні експоненти $\exp \left\{ -\hat{A}(\varphi) t \right\}$ та $\exp \left\{ -\hat{A}(-\varphi) t \right\}$ із пунктів про лівий і правий надпровідники. Цілком аналогічно до того, як ми встановлювали справедливість операторної тотожності (3.4.10), ми також можемо легко встановити справедливість операторної тотожності

$$\exp \left\{ -\hat{A}_k(\omega_n) \tau \right\} = \operatorname{ch} \left\{ \Omega_k(\omega_n) \tau \right\} - \hat{A}_k(\omega_n) \frac{\operatorname{sh} \left\{ \Omega_k(\omega_n) \tau \right\}}{\Omega_k(\omega_n)}. \quad (3.4.63)$$

Якщо взяти до уваги позначення (3.4.60), яке ми запровадили вище, то формулу (3.4.62) для загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння першого порядку (3.4.61) можна переписати в такому вигляді:

$$\begin{aligned} & \hat{\mathcal{G}}^{1,1}(t, t') + (-1)^k \hat{\mathcal{G}}^{2,1}(t, t') = \\ & = \exp \left\{ -\hat{A}_k(\omega_n) \left(t + \frac{a}{2} \right) \right\} \left[\hat{\mathcal{G}}^{1,1} \left(-\frac{a}{2}, t' \right) + (-1)^k \hat{\mathcal{G}}^{2,1} \left(-\frac{a}{2}, t' \right) \right] + \\ & + \frac{\operatorname{sign} \left(\frac{a}{2} + t' \right) + \operatorname{sign} (t - t')}{2i} \exp \left\{ -\hat{A}_k(\omega_n) (t - t') \right\}. \end{aligned} \quad (3.4.64)$$

Оскільки індекс k набуває значень 1 та 2, то з формули (3.4.64) можна отримати різницю $\hat{\mathcal{G}}^{1,1}(t, t') - \hat{\mathcal{G}}^{2,1}(t, t')$ та суму $\hat{\mathcal{G}}^{1,1}(t, t') + \hat{\mathcal{G}}^{2,1}(t, t')$. Звідси випливають аналітичні формули для матричних функцій Гріна $\hat{\mathcal{G}}^{1,1}(t, t')$ та $\hat{\mathcal{G}}^{2,1}(t, t')$, які є справедливими на проміжку $|t| < \frac{a}{2}$ і додатково залишаються справедливими у двох точках $t = \pm \frac{a}{2}$ внаслідок неперервності функцій Гріна при переході через контакти. Справедливість формули (3.4.64) на лівій межі $t = -\frac{a}{2}$ вже взято до уваги, про що свідчить наявність у правій частині цієї формули матричних функцій $\hat{\mathcal{G}}^{1,1} \left(-\frac{a}{2}, t' \right)$ та $\hat{\mathcal{G}}^{2,1} \left(-\frac{a}{2}, t' \right)$, через які подано сталу інтегрування. Якщо взяти до уваги справедливість формули (3.4.64) на правій межі $t = \frac{a}{2}$, то можна прийти до матричної тотожності

$$\begin{aligned} & \hat{\mathcal{G}}^{1,1} \left(\frac{a}{2}, t' \right) + (-1)^k \hat{\mathcal{G}}^{2,1} \left(\frac{a}{2}, t' \right) = \\ & = \exp \left\{ -\hat{A}_k(\omega_n) a \right\} \left[\hat{\mathcal{G}}^{1,1} \left(-\frac{a}{2}, t' \right) + (-1)^k \hat{\mathcal{G}}^{2,1} \left(-\frac{a}{2}, t' \right) \right] + \\ & + \frac{\operatorname{sign} \left(\frac{a}{2} + t' \right) + \operatorname{sign} \left(\frac{a}{2} - t' \right)}{2i} \exp \left\{ -\hat{A}_k(\omega_n) \left(\frac{a}{2} - t' \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.4.65)$$

з якої легко отримуємо систему чотирьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими у вигляді двох рівностей

$$\begin{aligned}
& \left[\overset{*}{C}_1 + \overset{*}{C}_4 (-1)^k \right] \left[C_4 (-1)^k \alpha_2(t') + C_1 \gamma_2(t') \right] + \\
& + \frac{\omega_n + \tilde{\omega}_n \operatorname{sign}\left(\frac{a}{2} - t'\right)}{2i\tilde{\omega}_n} \exp\left(-\tilde{\omega}_n \left|\frac{a}{2} - t'\right|\right) = \left(\operatorname{ch} \Omega_k a - \frac{\omega_n \operatorname{sh} \Omega_k a}{\Omega_k} \right) \times \\
& \times \left\{ \gamma_1(t') + (-1)^k \alpha_1(t') + \frac{\omega_n - \tilde{\omega}_n \operatorname{sign}\left(\frac{a}{2} + t'\right)}{2i\tilde{\omega}_n} \exp\left(-\tilde{\omega}_n \left|\frac{a}{2} + t'\right|\right) \right\} + \\
& + \frac{\operatorname{sign}\left(\frac{a}{2} + t'\right) + \operatorname{sign}\left(\frac{a}{2} - t'\right)}{2i} \left\{ \operatorname{ch} \Omega_k \left(\frac{a}{2} - t'\right) - \frac{\omega_n \operatorname{sh} \Omega_k \left(\frac{a}{2} - t'\right)}{\Omega_k} \right\} + \\
& + \frac{i\Delta_1 |A_k|^2 \operatorname{sh} \Omega_k a}{\Omega_k} \left\{ \overset{*}{b} \left[\gamma_1(t') + \frac{\omega_n - \tilde{\omega}_n}{2i\tilde{\omega}_n} \exp\left(-\tilde{\omega}_n \left|\frac{a}{2} + t'\right|\right) \right] + \right. \\
& \left. + (-1)^{k+1} b \alpha_1(t') \right\} \tag{3.4.66}
\end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned}
& \left[C_1 + C_4 (-1)^{k+1} \right] \left\{ \frac{\overset{*}{C}_4 (-1)^k}{\overset{*}{b}} \left[\alpha_2(t') + \frac{\omega_n + \tilde{\omega}_n}{2i\tilde{\omega}_n} \exp\left(-\tilde{\omega}_n \left|\frac{a}{2} - t'\right|\right) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{\overset{*}{C}_1}{b} \left[\gamma_2(t') + \frac{\omega_n + \tilde{\omega}_n}{2i\tilde{\omega}_n} \exp\left(-\tilde{\omega}_n \left|\frac{a}{2} - t'\right|\right) \right] \right\} = \frac{i\Delta_1 |A_k|^2 \operatorname{sh} \Omega_k a}{\Omega_k} \times \\
& \times \left\{ \gamma_1(t') + (-1)^k \alpha_1(t') + \frac{\omega_n - \tilde{\omega}_n \operatorname{sign}\left(\frac{a}{2} + t'\right)}{2i\tilde{\omega}_n} \exp\left(-\tilde{\omega}_n \left|\frac{a}{2} + t'\right|\right) \right\} + \\
& + \frac{\operatorname{sign}\left(\frac{a}{2} + t'\right) + \operatorname{sign}\left(\frac{a}{2} - t'\right)}{2i} \frac{i\Delta_1 |A_k|^2 \operatorname{sh} \Omega_k \left(\frac{a}{2} - t'\right)}{\Omega_k} - \\
& - \left(\operatorname{ch} \Omega_k a + \frac{\omega_n \operatorname{sh} \Omega_k a}{\Omega_k} \right) \left\{ \overset{*}{b} \left[\gamma_1(t') + \frac{\omega_n - \tilde{\omega}_n}{2i\tilde{\omega}_n} \exp\left(-\tilde{\omega}_n \left|\frac{a}{2} + t'\right|\right) \right] + \right. \\
& \left. + (-1)^{k+1} b \alpha_1(t') \right\}. \tag{3.4.67}
\end{aligned}$$

Рівності (3.4.66) та (3.4.67) отримано з матричної рівності (3.4.65), беручи до уваги умови неперервності функцій Гріна при переході через контакти. Матричні функції $\hat{\mathcal{G}}^{1,1}\left(-\frac{a}{2}, t'\right)$ та $\hat{\mathcal{G}}^{2,1}\left(-\frac{a}{2}, t'\right)$ обчислено шляхом застосування отриманих

на проміжку $t < -\frac{a}{2}$ розв'язків (3.4.38) та (3.4.39), справедливості яких зберігається також і на межі $t = -\frac{a}{2}$. Матриці $\hat{\mathcal{G}}^{1,1}\left(\frac{a}{2}, t'\right)$ та $\hat{\mathcal{G}}^{2,1}\left(\frac{a}{2}, t'\right)$ обчислено за допомогою отриманих на проміжку $t > \frac{a}{2}$ розв'язків (3.4.53) та (3.4.54), які є справедливими також і на межі $t = \frac{a}{2}$. Матрична тотожність (3.4.65), з якої отримано рівності (3.4.66) та (3.4.67), називається «умовою зшивання»!

З формули для матричної функції Гріна у t -представленні

$$\hat{\mathcal{G}}^{i,k}(t, t') = \begin{pmatrix} G_{\omega_n}^{i,k}(t, t') & \tilde{F}_{\omega_n}^{i,k}(t, t') \\ -F_{\omega_n}^{i,k}(t, t') & -\tilde{G}_{\omega_n}^{i,k}(t, t') \end{pmatrix}$$

видно, що функція Гріна $G_{\omega_n}^{i,k}(t, t')$ стоїть у першому рядку та першому стовпці виписаної вище матричної функції Гріна. Тоді з формули (3.4.64) для загального розв'язку диференціального рівняння першого порядку (3.4.61) ми можемо отримати формулу

$$\begin{aligned} & G_{\omega_n}^{1,1}(t, t') + (-1)^k G_{\omega_n}^{2,1}(t, t') = \\ & = \left\{ \operatorname{ch} \Omega_k \left(\frac{a}{2} + t \right) - \frac{\omega_n \operatorname{sh} \Omega_k \left(\frac{a}{2} + t \right)}{\Omega_k} \right\} \left\{ \gamma_1(t') + (-1)^k \alpha_1(t') + \right. \\ & + \left. \frac{\omega_n - \tilde{\omega}_n \operatorname{sign} \left(\frac{a}{2} + t' \right)}{2i\tilde{\omega}_n} \exp \left(-\tilde{\omega}_n \left| \frac{a}{2} + t' \right| \right) \right\} + \frac{i\Delta_1 |A_k|^2 \operatorname{sh} \Omega_k \left(\frac{a}{2} + t \right)}{\Omega_k} \times \\ & \times \left\{ b^* \left[\gamma_1(t') + \frac{\omega_n - \tilde{\omega}_n}{2i\tilde{\omega}_n} \exp \left(-\tilde{\omega}_n \left| \frac{a}{2} + t' \right| \right) \right] + (-1)^{k+1} b \alpha_1(t') \right\} + \\ & + \frac{\operatorname{sign} \left(\frac{a}{2} + t' \right) + \operatorname{sign}(t - t')}{2i} \left\{ \operatorname{ch} \Omega_k(t - t') - \frac{\omega_n \operatorname{sh} \Omega_k(t - t')}{\Omega_k} \right\}. \quad (3.4.68) \end{aligned}$$

3.5. Струм-фазова залежність

Формула (3.4.68) для функцій Гріна $G_{\omega_n}^{1,1}(t, t')$ та $G_{\omega_n}^{2,1}(t, t')$ є справедливою на проміжку $|t| < \frac{a}{2}$ та на межах $t = \pm \frac{a}{2}$, внаслідок чого вона дозволяє обчислювати такі 4 величини: $G_{\omega_n}^{1,1}\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$, $G_{\omega_n}^{2,1}\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$, $G_{\omega_n}^{1,1}\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ та $G_{\omega_n}^{2,1}\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$.

Але таке стане можливим лише після того, як буде знайдено дві невідомі сталі інтегрування $\alpha_1(t')$ та $\gamma_1(t')$. Для цього потрібно розв'язати систему чотирьох лінійних рівнянь для чотирьох невідомих $\alpha_1(t')$, $\gamma_1(t')$, $\alpha_2(t')$ та $\gamma_2(t')$. Ця система, яку подано у вигляді рівностей (3.4.66) та (3.4.67), легко розв'язується!

Якщо $t = t' = -\frac{a}{2}$, то згадана вище система розв'язується ще легше. Для такого частинного випадку формула (3.4.68) перетворюється на формулу

$$G_{\omega_n}^{1,1} \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \right) + (-1)^k G_{\omega_n}^{2,1} \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \right) = \gamma_1 \left(-\frac{a}{2} \right) + (-1)^k \alpha_1 \left(-\frac{a}{2} \right) + \frac{\omega_n}{2i\tilde{\omega}_n},$$

яку ми будемо розглядати як систему двох лінійних рівнянь для двох невідомих величин $\alpha_1 \left(-\frac{a}{2} \right)$ та $\gamma_1 \left(-\frac{a}{2} \right)$. Тоді матимемо:

$$\alpha_1 \left(-\frac{a}{2} \right) = G_{\omega_n}^{2,1} \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \right), \quad \gamma_1 \left(-\frac{a}{2} \right) = G_{\omega_n}^{1,1} \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \right) - \frac{\omega_n}{2i\tilde{\omega}_n}. \quad (3.5.1)$$

Варто зауважити, що якщо $t = t' = -\frac{a}{2}$, то рівності (3.4.66) та (3.4.67) дозволяють отримати систему чотирьох лінійних рівнянь для чотирьох невідомих величин $\alpha_1 \left(-\frac{a}{2} \right)$, $\gamma_1 \left(-\frac{a}{2} \right)$, $\alpha_2 \left(-\frac{a}{2} \right)$ та $\gamma_2 \left(-\frac{a}{2} \right)$. Цю систему можна звести до системи двох лінійних рівнянь для двох невідомих $\alpha_1 \left(-\frac{a}{2} \right)$ та $\gamma_1 \left(-\frac{a}{2} \right)$, які можна подати через величини $G_{\omega_n}^{1,1} \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \right)$ та $G_{\omega_n}^{2,1} \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \right)$ за допомогою отриманих формул (3.5.1). Тоді ми отримуємо систему двох лінійних рівнянь для двох невідомих $G_{\omega_n}^{1,1} \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \right)$ та $G_{\omega_n}^{2,1} \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \right)$. З метою спрощення записів ми будемо використовувати такі позначення:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sum_{k=1}^2 [C_1 + C_4 (-1)^k] \left[\left(b + \frac{1}{b} \right) \operatorname{ch} \Omega_k a + \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \left(b - \frac{1}{b} \right) \omega_n + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b} \right) i b^* \Delta_1 |A_k|^2 \right\} \frac{\operatorname{sh} \Omega_k a}{\Omega_k} \right], \\ a_{12} &= \sum_{k=1}^2 (-1)^k [C_1 + C_4 (-1)^k] \left[\left(\frac{1}{b} - b \right) \operatorname{ch} \Omega_k a - \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \left(b + \frac{1}{b} \right) \omega_n + 2i \Delta_1 |A_k|^2 \right\} \frac{\operatorname{sh} \Omega_k a}{\Omega_k} \right], \\ a_{21} &= \sum_{k=1}^2 (-1)^k [C_1^* + C_4^* (-1)^{k+1}] \left[\left(\frac{1}{b} - b^* \right) \operatorname{ch} \Omega_k a - \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \left(b + \frac{1}{b} \right) \omega_n - 2i \Delta_1 |A_k|^2 \right\} \frac{\operatorname{sh} \Omega_k a}{\Omega_k} \right], \\ a_{22} &= \sum_{k=1}^2 [C_1^* + C_4^* (-1)^{k+1}] \left[\left(b + \frac{1}{b} \right) \operatorname{ch} \Omega_k a + \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \left(b - \frac{1}{b} \right) \omega_n + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b} \right) i b \Delta_1 |A_k|^2 \right\} \frac{\operatorname{sh} \Omega_k a}{\Omega_k} \right]. \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

Також ми будемо використовувати такі позначення:

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^2 [C_1 + C_4 (-1)^k] \left[\left(b - \frac{1}{b} \right) \operatorname{ch} \Omega_k a + \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \left(b + \frac{1}{b} \right) \omega_n + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b} \right) i b^* \Delta_1 |A_k|^2 \right\} \frac{\operatorname{sh} \Omega_k a}{\Omega_k} \right], \\
b_2 &= \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} [C_1^* + C_4^* (-1)^{k+1}] \left[\left(b + \frac{1}{b} \right) \operatorname{ch} \Omega_k a + \right. \\
&\quad \left. + \left(b - \frac{1}{b} \right) \omega_n \frac{\operatorname{sh} \Omega_k a}{\Omega_k} \right].
\end{aligned} \tag{3.5.3}$$

Тоді ми можемо записати таку систему:

$$\begin{aligned}
a_{11} G_{\omega_n}^{1,1} \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \right) + a_{12} G_{\omega_n}^{2,1} \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \right) &= b_1, \\
a_{21} G_{\omega_n}^{1,1} \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \right) + a_{22} G_{\omega_n}^{2,1} \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \right) &= b_2.
\end{aligned} \tag{3.5.4}$$

Розв'язок системи (3.5.4) має такий вигляд:

$$G_{\omega_n}^{1,1} \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \right) = \frac{a_{22} b_1 - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad G_{\omega_n}^{2,1} \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \right) = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}. \tag{3.5.5}$$

Якщо взяти до уваги коефіцієнти (3.5.2), то можна обчислити визначник

$$a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \frac{16}{\Delta^2} \left\{ \omega_n^2 + \Delta^2 \left[1 - D \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right)^2 \right] + F_{\omega_n} (x, a, \varphi) \right\}, \tag{3.5.6}$$

у формулі для якого фігурує позначення для функції

$$\begin{aligned}
F_{\omega_n} (x, a, \varphi) &= \left\{ \omega_n^2 + \frac{\Delta^2}{2} \left[1 + \left(\cos \frac{\varphi}{2} \right)^2 \right] \right\} (\operatorname{ch} \Omega_1 a \operatorname{ch} \Omega_2 a - 1) + \\
&\quad + \tilde{\omega}_n \left(\omega_n^2 + \Delta_1 \Delta |A_1|^2 \cos \frac{\varphi}{2} \right) \frac{\operatorname{sh} \Omega_1 a}{\Omega_1} \operatorname{ch} \Omega_2 a + \\
&\quad + \tilde{\omega}_n \left(\omega_n^2 + \Delta_1 \Delta |A_2|^2 \cos \frac{\varphi}{2} \right) \frac{\operatorname{sh} \Omega_2 a}{\Omega_2} \operatorname{ch} \Omega_1 a + \\
&\quad + \left\{ \left(\omega_n^2 + \Delta_1 \Delta |A_1|^2 \cos \frac{\varphi}{2} \right) \left(\omega_n^2 + \Delta_1 \Delta |A_2|^2 \cos \frac{\varphi}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Delta^2}{2} \left(\omega_n^2 + \Delta_1^2 |A_1|^2 |A_2|^2 \right) \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right)^2 \right\} \frac{\operatorname{sh} \Omega_1 a \operatorname{sh} \Omega_2 a}{\Omega_1 \Omega_2}.
\end{aligned} \tag{3.5.7}$$

Далі потрібно використати коефіцієнти (3.5.2) та (3.5.3) для підрахунку двох визначників $a_{22} b_1 - a_{12} b_2$ та $a_{11} b_2 - a_{21} b_1$ у формулі (3.5.5). Отримані вирази для

двох величин $G_{\omega_n}^{1,1} \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \right)$ та $G_{\omega_n}^{2,1} \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \right)$ потрібно просумувати по непарних частотах ω_n . Ті доданки, які внаслідок заміни $\omega_n \rightarrow -\omega_n$ змінюють свій знак на протилежний, будуть відсутніми під знаком суми по ω_n . Адже безпосереднім наслідком властивості $f(-\omega_n) = -f(\omega_n)$ є тотожність $\sum_{\omega_n} f(\omega_n) = 0$.

Тоді ми отримуємо такі результати:

$$\begin{aligned} \sum_{\omega_n} G_{\omega_n}^{1,1} \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \right) &= \sum_{\omega_n} \frac{4D \sin \varphi + E_{\omega_n}(x, a, \varphi)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ \sum_{\omega_n} G_{\omega_n}^{2,1} \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \right) &= \sum_{\omega_n} \frac{8 C_1^* C_4 \exp \left(i \frac{\varphi}{2} \right) \sin \frac{\varphi}{2}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

У формулі (3.5.8) фігурує позначення для функції

$$\begin{aligned} E_{\omega_n}(x, a, \varphi) &= 2 (\operatorname{ch} \Omega_1 a \operatorname{ch} \Omega_2 a - 1) \sin \varphi + \frac{4\Delta_1}{\Delta} |A_1|^2 \tilde{\omega}_n \frac{\operatorname{sh} \Omega_1 a \operatorname{ch} \Omega_2 a}{\Omega_1} \sin \frac{\varphi}{2} + \\ &+ \frac{4\Delta_1}{\Delta} |A_2|^2 \tilde{\omega}_n \frac{\operatorname{ch} \Omega_1 a \operatorname{sh} \Omega_2 a}{\Omega_2} \sin \frac{\varphi}{2} + \left\{ \frac{4\Delta_1}{\Delta} (|A_1|^2 + |A_2|^2) \omega_n^2 \sin \frac{\varphi}{2} - \right. \\ &\left. - 2 (\omega_n^2 - \Delta_1^2 |A_1|^2 |A_2|^2) \sin \varphi \right\} \frac{\operatorname{sh} \Omega_1 a \operatorname{sh} \Omega_2 a}{\Omega_1 \Omega_2}. \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

З аналізу систем рівнянь (3.4.1), (3.4.40), (3.4.41), (3.4.55) та (3.4.56) випливає, що формули для функцій Гріна $\hat{\mathcal{G}}^{2,2}(t, t')$ та $\hat{\mathcal{G}}^{1,2}(t, t')$ можна отримати з уже знайдених формул для функцій Гріна $\hat{\mathcal{G}}^{1,1}(t, t')$ та $\hat{\mathcal{G}}^{2,1}(t, t')$ шляхом одночасного виконання таких замін:

$$\varphi \rightarrow -\varphi, \quad \hat{\mathcal{G}}^{1,1}(t, t') \rightarrow \hat{\mathcal{G}}^{2,2}(t, t'), \quad \hat{\mathcal{G}}^{2,1}(t, t') \rightarrow \hat{\mathcal{G}}^{1,2}(t, t').$$

Тоді на основі результатів (3.5.8) ми отримуємо такі результати:

$$\begin{aligned} \sum_{\omega_n} G_{\omega_n}^{2,2} \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \right) &= - \sum_{\omega_n} \frac{4D \sin \varphi + E_{\omega_n}(x, a, \varphi)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ \sum_{\omega_n} G_{\omega_n}^{1,2} \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \right) &= - \sum_{\omega_n} \frac{8 C_1^* C_4 \exp \left(-i \frac{\varphi}{2} \right) \sin \frac{\varphi}{2}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

Ми отримали значення геть усіх чотирьох функцій Гріна в t -представленні на лівому контакті, тобто для частинного випадку $t = t' = -\frac{a}{2}$. Але отриманих формул (3.5.8) та (3.5.10) для функцій Гріна на лівому контакті, які потрібно буде

підставляти у формулу (3.3.12) для густини струму $j\left(\frac{d}{2}\right)$ на правому контакті, не досить.

На додаток до знайдених аналітичних формул (3.5.8) та (3.5.10) для функцій Гріна в t -представленні на лівому контакті нам потрібно знайти також і формули для функцій Гріна в t -представленні на правому контакті. Це означає, що нам потрібно розглянути частинний випадок $t = t' = \frac{a}{2}$.

Для частинного випадку $t = t' = \frac{a}{2}$ формули (3.4.66) та (3.4.68) перетворюються на формули

$$\begin{aligned} & \left(\operatorname{ch} \Omega_k a - \frac{\omega_n \operatorname{sh} \Omega_k a}{\Omega_k} \right) \left\{ \gamma_1 \left(\frac{a}{2} \right) + (-1)^k \alpha_1 \left(\frac{a}{2} \right) + \frac{\omega_n - \tilde{\omega}_n}{2i\tilde{\omega}_n} \exp(-\tilde{\omega}_n a) \right\} + \\ & + \frac{i\Delta_1 |A_k|^2 \operatorname{sh} \Omega_k a}{\Omega_k} \left\{ b^* \left[\gamma_1 \left(\frac{a}{2} \right) + \frac{\omega_n - \tilde{\omega}_n}{2i\tilde{\omega}_n} \exp(-\tilde{\omega}_n a) \right] + (-1)^{k+1} b \alpha_1 \left(\frac{a}{2} \right) \right\} = \\ & = \left[C_1^* + C_4^* (-1)^k \right] \left[C_4 (-1)^k \alpha_2 \left(\frac{a}{2} \right) + C_1 \gamma_2 \left(\frac{a}{2} \right) \right] + \frac{\omega_n}{2i\tilde{\omega}_n} - \frac{1}{2i} \quad (3.5.11) \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} & \left(\operatorname{ch} \Omega_k a - \frac{\omega_n \operatorname{sh} \Omega_k a}{\Omega_k} \right) \left\{ \gamma_1 \left(\frac{a}{2} \right) + (-1)^k \alpha_1 \left(\frac{a}{2} \right) + \frac{\omega_n - \tilde{\omega}_n}{2i\tilde{\omega}_n} \exp(-\tilde{\omega}_n a) \right\} + \\ & + \frac{i\Delta_1 |A_k|^2 \operatorname{sh} \Omega_k a}{\Omega_k} \left\{ b^* \left[\gamma_1 \left(\frac{a}{2} \right) + \frac{\omega_n - \tilde{\omega}_n}{2i\tilde{\omega}_n} \exp(-\tilde{\omega}_n a) \right] + (-1)^{k+1} b \alpha_1 \left(\frac{a}{2} \right) \right\} = \\ & = G_{\omega_n}^{1,1} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right) + (-1)^k G_{\omega_n}^{2,1} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right) - \frac{1}{2i} \quad (3.5.12) \end{aligned}$$

відповідно.

Тотожності (3.5.11) та (3.5.12) мають однакові ліві частини, внаслідок чого вони мають однакові праві частини. Тоді ми отримуємо тотожність

$$\begin{aligned} & \left[C_1^* + C_4^* (-1)^k \right] \left[C_4 (-1)^k \alpha_2 \left(\frac{a}{2} \right) + C_1 \gamma_2 \left(\frac{a}{2} \right) \right] = \\ & = G_{\omega_n}^{1,1} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right) - \frac{\omega_n}{2i\tilde{\omega}_n} + (-1)^k G_{\omega_n}^{2,1} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right), \end{aligned}$$

яку можна подати також і в такому вигляді:

$$\begin{aligned} & C_4 (-1)^k \alpha_2 \left(\frac{a}{2} \right) + C_1 \gamma_2 \left(\frac{a}{2} \right) = \\ & = \left[C_1 + C_4 (-1)^k \right] \left[G_{\omega_n}^{1,1} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right) - \frac{\omega_n}{2i\tilde{\omega}_n} + (-1)^k G_{\omega_n}^{2,1} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Щойно отриману тотожність можна вважати системою двох лінійних рівнянь для двох невідомих величин $\alpha_2 \left(\frac{a}{2}\right)$ та $\gamma_2 \left(\frac{a}{2}\right)$. Тоді матимемо:

$$\begin{aligned}\alpha_2 \left(\frac{a}{2}\right) &= G_{\omega_n}^{1,1} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) - \frac{\omega_n}{2i\tilde{\omega}_n} + \frac{C_1}{C_4} G_{\omega_n}^{2,1} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right), \\ \gamma_2 \left(\frac{a}{2}\right) &= G_{\omega_n}^{1,1} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) - \frac{\omega_n}{2i\tilde{\omega}_n} + \frac{C_4}{C_1} G_{\omega_n}^{2,1} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right).\end{aligned}\quad (3.5.13)$$

Варто зауважити, що якщо $t = t' = \frac{a}{2}$, то рівності (3.4.66) та (3.4.67) дозволяють отримати систему чотирьох лінійних рівнянь для чотирьох невідомих величин $\alpha_1 \left(\frac{a}{2}\right)$, $\gamma_1 \left(\frac{a}{2}\right)$, $\alpha_2 \left(\frac{a}{2}\right)$ та $\gamma_2 \left(\frac{a}{2}\right)$. Цю систему можна звести до системи двох лінійних рівнянь для двох невідомих $\alpha_2 \left(\frac{a}{2}\right)$ та $\gamma_2 \left(\frac{a}{2}\right)$, які можна подати через величини $G_{\omega_n}^{1,1} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ та $G_{\omega_n}^{2,1} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ шляхом застосування вже отриманих формул (3.5.13). Тоді ми отримуємо систему двох лінійних рівнянь для двох невідомих величин $G_{\omega_n}^{1,1} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ та $G_{\omega_n}^{2,1} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$. Нехай маємо такі позначення:

$$\begin{aligned}c_{11} &= \sum_{k=1}^2 (-1)^k \left[b \left\{ \operatorname{ch} \Omega_k a + \left(\omega_n + \frac{i\Delta_1 |A_k|^2}{b} \right) \frac{\operatorname{sh} \Omega_k a}{\Omega_k} \right\} - [C_1 + C_4 (-1)^{k+1}] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{C_1^*}{b} + \frac{C_4^* (-1)^k}{b} \right) \left\{ \operatorname{ch} \Omega_k a - \left(\omega_n + ib\Delta_1 |A_k|^2 \right) \frac{\operatorname{sh} \Omega_k a}{\Omega_k} \right\} \right], \\ c_{12} &= \sum_{k=1}^2 \left[b \left\{ \operatorname{ch} \Omega_k a + \left(\omega_n + \frac{i\Delta_1 |A_k|^2}{b} \right) \frac{\operatorname{sh} \Omega_k a}{\Omega_k} \right\} + [C_1 + C_4 (-1)^{k+1}] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{C_1^*}{b} + \frac{C_4^* (-1)^k}{b} \right) \left\{ \operatorname{ch} \Omega_k a - \left(\omega_n + ib\Delta_1 |A_k|^2 \right) \frac{\operatorname{sh} \Omega_k a}{\Omega_k} \right\} \right], \\ c_{21} &= \sum_{k=1}^2 \left[b^* \left\{ \operatorname{ch} \Omega_k a + \left(\omega_n - \frac{i\Delta_1 |A_k|^2}{b^*} \right) \frac{\operatorname{sh} \Omega_k a}{\Omega_k} \right\} + [C_1 + C_4 (-1)^{k+1}] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{C_1^*}{b} + \frac{C_4^* (-1)^k}{b} \right) \left\{ \operatorname{ch} \Omega_k a - \left(\omega_n - i b^* \Delta_1 |A_k|^2 \right) \frac{\operatorname{sh} \Omega_k a}{\Omega_k} \right\} \right], \\ c_{22} &= \sum_{k=1}^2 (-1)^k \left[b^* \left\{ \operatorname{ch} \Omega_k a + \left(\omega_n - \frac{i\Delta_1 |A_k|^2}{b^*} \right) \frac{\operatorname{sh} \Omega_k a}{\Omega_k} \right\} - [C_1 + C_4 (-1)^{k+1}] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{C_1^*}{b} + \frac{C_4^* (-1)^k}{b} \right) \left\{ \operatorname{ch} \Omega_k a - \left(\omega_n - i b^* \Delta_1 |A_k|^2 \right) \frac{\operatorname{sh} \Omega_k a}{\Omega_k} \right\} \right].\end{aligned}\quad (3.5.14)$$

Нехай маємо також і такі позначення:

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \sum_{k=1}^2 \frac{(-1)^k}{2i} \left[b \left\{ \operatorname{ch} \Omega_k a + \left(\omega_n + \frac{i\Delta_1 |A_k|^2}{b} \right) \frac{\operatorname{sh} \Omega_k a}{\Omega_k} \right\} + [C_1 + C_4 (-1)^{k+1}] \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\frac{C_1^*}{b} + \frac{C_4^* (-1)^k}{b} \right) \left\{ \operatorname{ch} \Omega_k a - \left(\omega_n + ib\Delta_1 |A_k|^2 \right) \frac{\operatorname{sh} \Omega_k a}{\Omega_k} \right\} \right], \\
 d_2 &= \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2i} \left[b^* \left\{ \operatorname{ch} \Omega_k a + \left(\omega_n - \frac{i\Delta_1 |A_k|^2}{b^*} \right) \frac{\operatorname{sh} \Omega_k a}{\Omega_k} \right\} - [C_1 + C_4 (-1)^{k+1}] \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\frac{C_1^*}{b} + \frac{C_4^* (-1)^k}{b} \right) \left\{ \operatorname{ch} \Omega_k a - \left(\omega_n - i b^* \Delta_1 |A_k|^2 \right) \frac{\operatorname{sh} \Omega_k a}{\Omega_k} \right\} \right]. \quad (3.5.15)
 \end{aligned}$$

Тоді систему двох лінійних рівнянь для двох невідомих величин $G_{\omega_n}^{1,1} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right)$ та $G_{\omega_n}^{2,1} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right)$ можна записати в такому вигляді:

$$\begin{aligned}
 c_{11} G_{\omega_n}^{1,1} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right) + c_{12} G_{\omega_n}^{2,1} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right) &= d_1, \\
 c_{21} G_{\omega_n}^{1,1} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right) + c_{22} G_{\omega_n}^{2,1} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right) &= d_2. \quad (3.5.16)
 \end{aligned}$$

Розв'язок системи (3.5.16) двох лінійних рівнянь для двох невідомих величин має такий вигляд:

$$G_{\omega_n}^{1,1} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right) = \frac{c_{22}d_1 - c_{12}d_2}{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}, \quad G_{\omega_n}^{2,1} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right) = \frac{c_{11}d_2 - c_{21}d_1}{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}. \quad (3.5.17)$$

Якщо взяти до уваги коефіцієнти (3.5.14), то можна отримати досить таки несподіваний результат $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$, який приємно дивує. Далі потрібно використати коефіцієнти (3.5.14) та (3.5.15) для підрахунку двох визначників $c_{22}d_1 - c_{12}d_2$ та $c_{11}d_2 - c_{21}d_1$ у формулі (3.5.17). Отримані вирази для двох величин $G_{\omega_n}^{1,1} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right)$ та $G_{\omega_n}^{2,1} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right)$ потрібно просумувати по непарних частотах ω_n . Тоді ми отримуємо такі результати:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\omega_n} G_{\omega_n}^{1,1} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right) &= \sum_{\omega_n} \frac{4D \sin \varphi - (R - D) E_{\omega_n}(x, a, \varphi)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\
 \sum_{\omega_n} G_{\omega_n}^{2,1} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right) &= \sum_{\omega_n} \frac{2 C_1^* C_4 \left\{ 4 \exp \left(i \frac{\varphi}{2} \right) \sin \frac{\varphi}{2} + E_{\omega_n}(x, a, \varphi) \right\}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (3.5.18)
 \end{aligned}$$

На основі результатів (3.5.18) ми отримуємо такі результати:

$$\sum_{\omega_n} G_{\omega_n}^{2,2} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right) = - \sum_{\omega_n} \frac{4D \sin \varphi - (R - D) E_{\omega_n} (x, a, \varphi)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$

$$\sum_{\omega_n} G_{\omega_n}^{1,2} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right) = - \sum_{\omega_n} \frac{2 C_1^* C_4 \left\{ 4 \exp \left(-i \frac{\varphi}{2} \right) \sin \frac{\varphi}{2} + E_{\omega_n} (x, a, \varphi) \right\}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (3.5.19)$$

Отримані результати (3.5.8), (3.5.10), (3.5.18) та (3.5.19) потрібно підставляти у формулу (3.3.12). Внаслідок цього ми отримуємо струм-фазову залежність

$$j \left(\frac{d}{2} \right) = \pi e v_0 N(0) T \sum_{\omega_n} \int_0^1 \frac{\Delta^2 x \left[D \sin \varphi + \frac{1+D}{8} E_{\omega_n} (x, a, \varphi) \right] dx}{\omega_n^2 + \Delta^2 \left[1 - D \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right)^2 \right] + F_{\omega_n} (x, a, \varphi)} \quad (3.5.20)$$

у шаруватих надпровідних структурах типу SIS'IS.

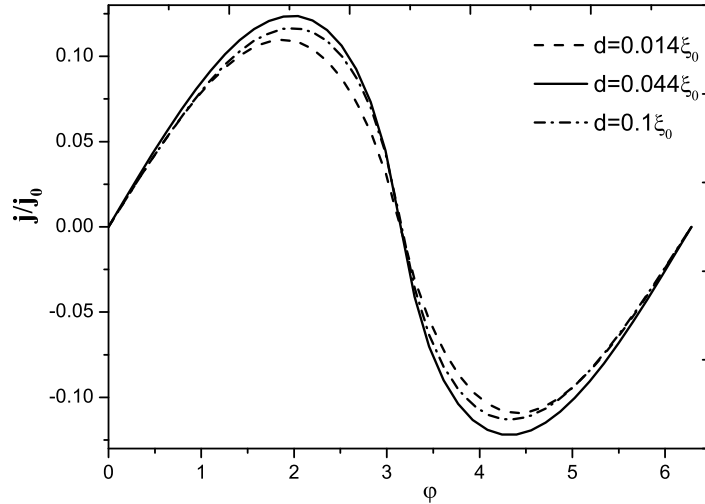


Рис. 3.1: Залежність безрозмірної густини струму $\frac{j}{j_0}$ від різниці фаз φ у випадку різних значень товщини d проміжного прошарку S' . У чисельних розрахунках покладено: $D(1) = 0.1$ та $T = 0.5 T_c'$ (величина T_c' є критичною температурою проміжного прошарку S'). Також маємо позначення $j_0 = \pi e v_0 N(0) T_c$.

Формула (3.5.20), яка є основним результатом даного розділу, містить у собі низку раніше відомих результатів для частинних випадків.

Розгляньмо спочатку частинний випадок, коли $\Delta_1 = \Delta$. Для такого частинного випадку надпровідні контакти типу SIS'IS перетворюються на надпровідні контакти типу SISIS.

Нехай тепер $\Delta_1 = 0$. Для такого випадку проміжний прошарок S' перетворюється на нормальний метал N . Що стосується формули (3.5.20), то вона перетворюється на формулу

$$j\left(\frac{d}{2}\right) = \sum_{\omega_n} \int_0^1 \frac{2\pi e v_0 N(0) T \Delta^2 x D \sin \varphi}{(\tilde{\omega}_n^2 + \omega_n^2) \operatorname{ch} 2\omega_n a + 2\tilde{\omega}_n \omega_n \operatorname{sh} 2\omega_n a + \Delta^2 (R + D \cos \varphi)} dx, \quad (3.5.21)$$

яка описує стаціонарні властивості надпровідних контактів типу SINIS.

Струм-фазову залежність (3.5.21) можна також проаналізувати для асимптотичного випадку, коли $R \ll 1$. Такий випадок означає відсутність діелектричного прошарку I. За таких обставин формула (3.5.21) зводиться до формули [143]

$$j\left(\frac{d}{2}\right) = \sum_{\omega_n} \int_0^1 \frac{2\pi e v_0 N(0) T \Delta^2 x \sin \varphi}{(\tilde{\omega}_n^2 + \omega_n^2) \operatorname{ch} 2\omega_n a + 2\tilde{\omega}_n \omega_n \operatorname{sh} 2\omega_n a + \Delta^2 \cos \varphi} dx, \quad (3.5.22)$$

яка описує стаціонарні властивості надпровідних контактів типу SNS.

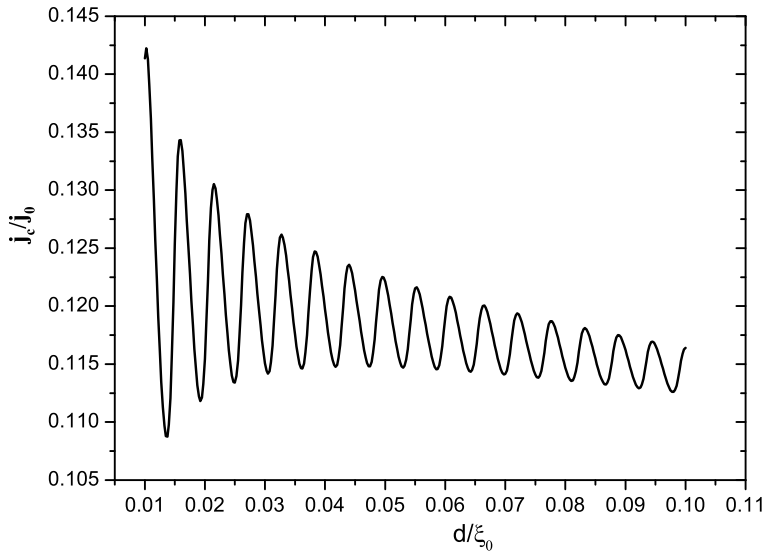


Рис. 3.2: Графік залежності для безрозмірного критичного струму $\frac{j_c}{j_0}$ від товщини d проміжного прошарку S' .

Варто наголосити на тому, що не менш важливу роль відіграє також і вплив товщини d проміжного прошарку S' на форму залежності густини струму від різниці фаз. Якщо $d \gg \xi_0$, то формула (3.5.20) перетворюється на формулу

$$j\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{\pi \Delta^2}{8} e v_0 N(0) T \sum_{\omega_n} \int_0^1 x (1 + D) \frac{\tilde{E}_{\omega_n}(x, a, \varphi)}{\tilde{F}_{\omega_n}(x, a, \varphi)} dx, \quad (3.5.23)$$

у якій фігурують позначення для функцій

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\omega_n}(x, a, \varphi) = & 2 \sin \varphi + \frac{1}{\Omega_1 \Omega_2} \left\{ \frac{4\Delta_1}{\Delta} (|A_1|^2 + |A_2|^2) \omega_n^2 \sin \frac{\varphi}{2} - \right. \\ & \left. - 2 \left(\omega_n^2 - \Delta_1^2 |A_1|^2 |A_2|^2 \right) \sin \varphi \right\} + \frac{4\Delta_1}{\Delta} \left(\frac{|A_1|^2}{\Omega_1} + \frac{|A_2|^2}{\Omega_2} \right) \tilde{\omega}_n \sin \frac{\varphi}{2} \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\omega_n}(x, a, \varphi) = & \omega_n^2 + \frac{\Delta^2}{2} \left[1 + \left(\cos \frac{\varphi}{2} \right)^2 \right] + \frac{\tilde{\omega}_n}{\Omega_1} \left(\omega_n^2 + \Delta_1 \Delta |A_1|^2 \cos \frac{\varphi}{2} \right) + \\ + & \frac{\tilde{\omega}_n}{\Omega_2} \left(\omega_n^2 + \Delta_1 \Delta |A_2|^2 \cos \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{1}{\Omega_1 \Omega_2} \left\{ \frac{\Delta^2}{2} \left(\omega_n^2 + \Delta_1^2 |A_1|^2 |A_2|^2 \right) \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\omega_n^2 + \Delta_1 \Delta |A_1|^2 \cos \frac{\varphi}{2} \right) \left(\omega_n^2 + \Delta_1 \Delta |A_2|^2 \cos \frac{\varphi}{2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

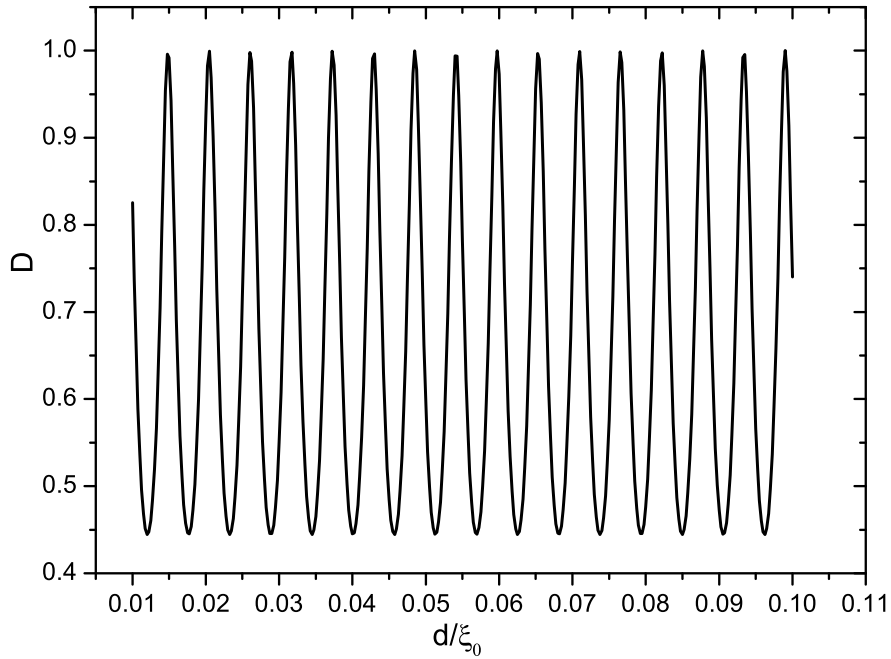


Рис. 3.3: Графік залежності для прозорості діелектричного прошарку $D(1)$ від товщини d проміжного прошарку S' .

Якщо $d \ll \xi_0$, то $E_{\omega_n}(x, a, \varphi) \cong 0$ та $F_{\omega_n}(x, a, \varphi) \cong 0$. Взевши до уваги ці наближення, ми можемо застосувати так зване правило сумачії за непарними мацубарівськими частотами [144, 145]

$$T \sum_{\omega_n} \frac{1}{\omega_n^2 + \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha} \operatorname{th} \frac{\alpha}{2T}$$

з метою перетворити формулу (3.5.20) на формулу [146, 147]

$$j\left(\frac{d}{2}\right) = \pi e v_0 N(0) \Delta \frac{\sin \varphi}{2} \int_0^1 \frac{x D(x) dx}{\sqrt{1 - D(x) \left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^2}} \operatorname{th} \frac{\Delta \sqrt{1 - D(x) \left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^2}}{2T},$$

яка описує стаціонарні властивості надпровідних контактів типу SIS.

У всіх формулах фігурують такі функції:

$$R(x) = 1 - D(x), \quad D(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{mU_0}{p_0 x}\right)^2 \left\{ \cos(dp_0 x) + \frac{mU_0}{2p_0 x} \sin(dp_0 x) \right\}^2}.$$

На рисунку (3.1) зображено залежність безрозмірної густини струму $\frac{j}{j_0}$ від різниці фаз φ у шаруватих надпровідних структурах типу SIS'IS. Чисельні розрахунки проведено на основі отриманої в даному дослідженні струм-фазової залежності (3.5.20). Для визначеності використано співвідношення $T_c = 7.4 T'_c$ між критичною температурою T_c крайніх надпровідників та критичною температурою T'_c проміжного прошарку S' . Варто наголосити на тому, що вищеподане співвідношення між критичними температурами — це співвідношення між критичними температурами ніобію (Nb) та алюмінію (Al) у шаруватих надпровідних контактах типу Nb|Al|Nb. Густина струму j є ще функцією товщини d проміжного прошарку S' . З метою отримати графіки, які подано на рисунку (3.1), розглянуто такі випадки: $d = 0.014 \xi_0$, $d = 0.044 \xi_0$ та $d = 0.1 \xi_0$. Варто наголосити на тому, що для кожного із цих трьох розглянутих випадків максимум безрозмірної густини струму $\frac{j}{j_0}$ перебуває в області $\varphi > \frac{\pi}{2}$. Варто наголосити також і на тому, що числове значення критичного струму для товщини $d = 0.044 \xi_0$ є вищим від відповідного числового значення для товщини $d = 0.014 \xi_0$. Такий цікавий факт можна пояснити залежністю прозорості діелектричного прошарку D від товщини d проміжного прошарку S' , адже згадана вище залежність є періодичною функцією.

На рисунку (3.3) видно, що прозорість діелектричного прошарку D може дорівнювати одиниці для певних значень товщини d проміжного прошарку S' . Це є так звані режими резонансного тунелювання у шаруватих надпровідних структурах типу SIS'IS. Найбільш яскравий прояв режимів резонансного тунелювання можна спостерігати на рисунку (3.2), який містить залежність критичного струму

від товщини d проміжного прошарку S' . Густина струму j подано через прозорість діелектричного прошарку D . Однак, густина струму j подано також і через функції $E_{\omega_n}(x, a, \varphi)$ та $F_{\omega_n}(x, a, \varphi)$. Як наслідок, спостерігаються згасні коливання критичного струму. Зі збільшенням товщини d проміжного прошарку S' середнє значення критичного струму зменшується.

3.6. Висновки та обговорення

У цьому розділі дисертації ми дослідили залежність струму від різниці фаз у двобар'єрних надпровідних контактах, використовуючи в основі дослідження метод функцій Гріна в t -представленні. Для струм-фазової залежності одержано новий аналітичний результат, із аналізу якого можемо зробити такі висновки:

- зменшення товщини проміжного прошарку приводить до зміщення значення різниці фаз, при якому струм у контакті досягає критичного значення, в область $\varphi > \frac{\pi}{2}$;
- для критичного струму зі зміною товщини d проміжного прошарку контакту спостерігаються осциляції, які пов'язані з тим, що коефіцієнт проходження електронів крізь подвійний дельта-функційний потенціальний бар'єр, за допомогою якого моделюються діелектричні плівки, є періодичною функцією змінної d . Однак, ці осциляції є згасні, що пов'язано з послабленням зв'язку між зовнішніми надпровідниками зі збільшенням товщини проміжного прошарку контакту;
- показано, що одержана формула для залежності струму від різниці фаз увібрала низку раніше відомих результатів для асимптотичних випадків, що досліджувались окремо різними авторами.

РОЗДІЛ 4

МІКРОСКОПІЧНИЙ РОЗРАХУНОК ДЖОЗЕФСОНІВСЬКОГО СТРУМУ В ТУНЕЛЬНИХ НАДПРОВІДНИХ КОНТАКТАХ НА ОСНОВІ ДВОЩІЛИННИХ НАДПРОВІДНИКІВ

У цьому розділі досліджено стаціонарні властивості тунельних надпровідних контактів типу SIS на основі двошлілинних надпровідників. Також варто наголосити на тому, що в цьому теоретичному дослідженні розглянуто загальний випадок. Мається на увазі те, що на прозорість діелектричного прошарку D не накладено ніяких додаткових обмежень.

Теоретичне дослідження проведено за допомогою відомого методу функцій Гріна [32, 46], для яких виконано процедуру згладжування просторової поведінки на довжинах порядку атомних розмірів. Це дозволило побудувати так звані квазікласичні рівняння [32, 46], які описують просторову поведінку функцій Гріна в масштабі довжини когерентності ξ_0 . Показано, що найкомпактніше ці рівняння можна записати за допомогою так званого t -представлення. У цьому представленні записано також і вираз для густини струму. Розв'язки диференціальних рівнянь першого порядку для функцій Гріна в кожній з двох областей, зайнятих масивними надпровідниками, знайдено в рамках так званої моделі з кусково-сталими параметрами впорядкування. Модулі параметрів впорядкування у лівому та правому надпровідниках вважалися однаковими, а фази — різними.

Запропонована схема розрахунків дозволила отримати аналітичну формулу для залежності густини струму j від чотирьох різниць фаз $\chi_i - \varphi_k$ (індекси i та k можуть набувати значень 1 та 2), яка, до речі, є справедливою для довільних значень коефіцієнта проходження електронів D крізь дельта-функційний потенціалний бар'єр. Виявилось, що отриманий результат можна використовувати з метою аналізу симетрій параметрів впорядкування.

Метод функціонального інтегрування — це інтегрування у просторі функцій. Ще в далекому 1925 році Норберт Вінер запропонував цей метод, але спільнота фізиків-теоретиків не звернула тоді на нього ніякої уваги. Ситуація різко змінилась у 1948 році з появою статті Річарда Файнмана, у якій амплітуду ймовірності переходу частинки від однієї точки простору до другої було подано у вигляді ін-

теграла по всіх можливих траєкторіях, які поєднують між собою початкову та кінцеву точки.

Метод функціонального інтегрування виявився корисним у теорії однощільної надпровідності, де вдалося побудувати представлення статистичної суми надпровідника у формі функціонального інтеграла [148]. Подібну техніку вдалося розвинути і в теорії двощільної надпровідності, з чого й почнеться цей розділ.

4.1. Статистична сума двощільного надпровідника

Статистичну суму двощільного надпровідника можна подати за допомогою формули

$$Z = \text{Sp} \left(\exp \left\{ -\beta \hat{H}_0 \right\} T_\tau \exp \left\{ - \int_0^\beta \hat{H}_{\text{int}}(\tau) d\tau \right\} \right). \quad (4.1.1)$$

У формулі (4.1.1) ми маємо позначення для так званого уявного часу τ , який може мінятися від 0 до $\beta = \frac{1}{T}$. Оператор \hat{H}_0 називається гамільтоніаном системи вільних електронів і визначається за допомогою формули

$$\hat{H}_0 = \sum_{l,\sigma} \int \hat{\psi}_{l,\sigma}^\dagger(\vec{r}) \hat{\xi} \hat{\psi}_{l,\sigma}(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (4.1.2)$$

У формулі (4.1.2) наявний так званий індекс зони l , який за наявності двох енергетичних щілин може набувати значень 1 та 2. Оператор $\hat{\xi}$ визначається за допомогою формули $\hat{\xi} = \frac{(\hat{p})^2}{2m} - E_F = \frac{(\hat{p})^2}{2m} - \frac{p_0^2}{2m}$. У формулі (4.1.2) ми маємо дві операторні функції $\hat{\psi}_{l,\sigma}^\dagger(\vec{r})$ та $\hat{\psi}_{l,\sigma}(\vec{r})$, які називаються операторами породження і знищення відповідно. Ці оператори є операторами статистики Фермі, внаслідок чого для них мають місце антикомутаційні співвідношення. Також ми маємо у формулі (4.1.1) операторну функцію

$$\hat{H}_{\text{int}}(\tau) = e^{\tau \hat{H}_0} \hat{H}_{\text{int}} e^{-\tau \hat{H}_0}, \quad (4.1.3)$$

у якій фігурує оператор ефективного притягання між електронами

$$\hat{H}_{\text{int}} = - \sum_{l,l'} \int g_{l,l'} \hat{\psi}_{l,\uparrow}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}_{l,\downarrow}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}_{l',\downarrow}(\vec{r}) \hat{\psi}_{l',\uparrow}(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (4.1.4)$$

Оскільки оператор (4.1.4) має бути ермітовим оператором, то це означає, що для сталих зв'язку $g_{l,l'}$ мають виконуватись умови $(g_{l,l'})^* = g_{l,l'}$ та $g_{l,l'} = g_{l',l}$. Для

оператора (4.1.4) можна використовувати також і запис

$$\hat{H}_{\text{int}} = - \sum_{l,l'} g_{l,l'} \int \hat{M}_l^\dagger(\vec{r}) \hat{M}_{l'}(\vec{r}) d\vec{r}, \quad (4.1.5)$$

у якому фігурує позначення

$$\hat{M}_l(\vec{r}) = \hat{\psi}_{l,\downarrow}(\vec{r}) \hat{\psi}_{l,\uparrow}(\vec{r}). \quad (4.1.6)$$

Якщо оператор (4.1.5) описує ефективне притягання між електронами, то цей оператор можна звести до такого діагонального вигляду:

$$\hat{H}_{\text{int}} = - \sum_l \int \hat{A}_l^\dagger(\vec{r}) \hat{A}_l(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (4.1.7)$$

Між формулами (4.1.5) та (4.1.7) потрібно встановити зв'язок. Для цього ми будемо записувати операторну функцію $\hat{A}_l(\vec{r})$ у вигляді розкладу

$$\hat{A}_l(\vec{r}) = \sum_{l'} a_{l,l'} \hat{M}_{l'}(\vec{r}). \quad (4.1.8)$$

У формулі (4.1.8) ми запровадили сталі коефіцієнти $a_{l,l'}$, які будемо вважати дійсними. Тоді на основі розкладу (4.1.8) отримуємо розклад

$$\hat{A}_l^\dagger(\vec{r}) = \sum_{l'} a_{l,l'} \hat{M}_{l'}^\dagger(\vec{r}). \quad (4.1.9)$$

Розклади (4.1.8) та (4.1.9) підставляємо у формулу (4.1.7), після чого потрібно порівняти отриманий результат із формулою (4.1.5). Тоді виходить, що

$$\sum_{l''} a_{l'',l} a_{l'',l'} = g_{l,l'}. \quad (4.1.10)$$

Якщо підставити оператор (4.1.7) у вираз для операторної функції (4.1.3), то можна прийти до результату

$$\hat{H}_{\text{int}}(\tau) = - \sum_l \int \hat{A}_l^\dagger(\vec{r}, \tau) \hat{A}_l(\vec{r}, \tau) d\vec{r}. \quad (4.1.11)$$

У формулі (4.1.11) ми можемо перейти від конфігураційного представлення до імпульсного, якщо взяти до уваги такі два розклади:

$$\hat{A}_l(\vec{r}, \tau) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \hat{A}_l(\vec{p}, \tau) e^{i\vec{p}\vec{r}}, \quad \hat{A}_l^\dagger(\vec{r}, \tau) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \hat{A}_l^\dagger(\vec{p}, \tau) e^{-i\vec{p}\vec{r}}. \quad (4.1.12)$$

Тоді формула (4.1.11) перетворюється на формулу

$$\hat{H}_{\text{int}}(\tau) = - \sum_{l, \vec{p}} \hat{A}_l^\dagger(\vec{p}, \tau) \hat{A}_l(\vec{p}, \tau). \quad (4.1.13)$$

Операторна функція (4.1.13) дозволяє обчислювати операторні експоненти

$$e^{-\hat{H}_{\text{int}}(\tau_k)\Delta\tau} = \exp \left\{ \sum_{l, \vec{p}} \hat{A}_l^\dagger(\vec{p}, \tau_k) \hat{A}_l(\vec{p}, \tau_k) \Delta\tau \right\}, \quad (4.1.14)$$

які фігурують у формулі для впорядкованої експоненти

$$\begin{aligned} & T_\tau \exp \left\{ - \int_0^\beta \hat{H}_{\text{int}}(\tau) d\tau \right\} = \\ & = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[e^{-\hat{H}_{\text{int}}(\tau_n)\Delta\tau} e^{-\hat{H}_{\text{int}}(\tau_{n-1})\Delta\tau} \cdot \dots \cdot e^{-\hat{H}_{\text{int}}(\tau_k)\Delta\tau} \cdot \dots \cdot e^{-\hat{H}_{\text{int}}(\tau_2)\Delta\tau} e^{-\hat{H}_{\text{int}}(\tau_1)\Delta\tau} \right]. \end{aligned}$$

У цій формулі, як і у формулі (4.1.14), ми запровадили позначення для таких величин: $\Delta\tau = \frac{\beta}{n}$ та $\tau_k = k\Delta\tau$.

Функціональний інтеграл будуватимемо на основі параметризації

$$e^{\hat{A}\hat{B}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta e^{-\xi^2 - \eta^2} e^{(\xi+i\eta)\hat{A}} e^{(\xi-i\eta)\hat{B}}}{\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta e^{-\xi^2 - \eta^2}} + \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{(\hat{A}\hat{B})^m - (\hat{A})^m (\hat{B})^m}{m!}. \quad (4.1.15)$$

Розгляньмо параметризацію (4.1.15) для такого частинного випадку:

$$\frac{\hat{A}}{\sqrt{\Delta\tau}} = \hat{A}_l^\dagger(\vec{p}, \tau_k), \quad \frac{\hat{B}}{\sqrt{\Delta\tau}} = \hat{A}_l(\vec{p}, \tau_k), \quad \frac{\xi + i\eta}{\sqrt{\Delta\tau}} = \zeta_l(\vec{p}, \tau_k).$$

У такому разі комутатор $\left[(\xi + i\eta)\hat{A}, (\xi - i\eta)\hat{B} \right]_-$ пропорційний нескінченно малій величині $(\Delta\tau)^2$. Така обставина дозволяє нам перетворити параметризацію (4.1.15) за допомогою наближення $e^{(\xi+i\eta)\hat{A}} e^{(\xi-i\eta)\hat{B}} \cong e^{(\xi+i\eta)\hat{A} + (\xi-i\eta)\hat{B}}$. Операторний

ряд $\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{(\hat{A}\hat{B})^m - (\hat{A})^m (\hat{B})^m}{m!}$ міститиме доданки, які пропорційні нескінченно малим величинам $(\Delta\tau)^2$, $(\Delta\tau)^3$ і так далі. Це означає, що цей операторний ряд

можна відкинути. Наведені вище міркування дозволяють суттєво перетворити параметризацію (4.1.15), внаслідок чого приходимо до результату

$$\begin{aligned} & e^{\hat{A}_l^\dagger(\vec{p}, \tau_k) \hat{A}_l(\vec{p}, \tau_k) \Delta\tau} \cong \\ & \cong \frac{\int d\zeta_l(\vec{p}, \tau_k) \int d\zeta_l^*(\vec{p}, \tau_k) e^{-|\zeta_l(\vec{p}, \tau_k)|^2 \Delta\tau} e^{\zeta_l(\vec{p}, \tau_k) \hat{A}_l^\dagger(\vec{p}, \tau_k) \Delta\tau + \zeta_l^*(\vec{p}, \tau_k) \hat{A}_l(\vec{p}, \tau_k) \Delta\tau}}{\int d\zeta_l(\vec{p}, \tau_k) \int d\zeta_l^*(\vec{p}, \tau_k) e^{-|\zeta_l(\vec{p}, \tau_k)|^2 \Delta\tau}}. \end{aligned}$$

За допомогою цієї тотожності знаходимо операторні експоненти (4.1.14) та впорядковану експоненту

$$\begin{aligned} & T_\tau \exp \left\{ - \int_0^\beta \hat{H}_{\text{int}}(\tau) d\tau \right\} = \\ & = \frac{\int \mathcal{D}\zeta_1 \int \mathcal{D}\zeta_1^* \int \mathcal{D}\zeta_2 \int \mathcal{D}\zeta_2^* e^{-\beta E_0} T_\tau \exp \left\{ - \int_0^\beta \hat{H}_Q(\tau) d\tau \right\}}{\int \mathcal{D}\zeta_1 \int \mathcal{D}\zeta_1^* \int \mathcal{D}\zeta_2 \int \mathcal{D}\zeta_2^* e^{-\beta E_0}}. \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

У формулі (4.1.16) використано такі позначення:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \prod_{\vec{p}} d\zeta_l(\vec{p}, \tau_k) & \equiv \mathcal{D}\zeta_l, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \prod_{\vec{p}} d\zeta_l^*(\vec{p}, \tau_k) & \equiv \mathcal{D}\zeta_l^*. \end{aligned}$$

У формулі (4.1.16) маємо також і такі позначення:

$$\begin{aligned} E_0 & = \frac{1}{\beta} \sum_{l, \vec{p}} \int_0^\beta |\zeta_l(\vec{p}, \tau)|^2 d\tau, \\ \hat{H}_Q(\tau) & = - \sum_{l, \vec{p}} \left[\zeta_l(\vec{p}, \tau) \hat{A}_l^\dagger(\vec{p}, \tau) + \zeta_l^*(\vec{p}, \tau) \hat{A}_l(\vec{p}, \tau) \right]. \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

У формулах (4.1.17) ми можемо перейти від імпульсного представлення до конфігураційного, якщо взяти до уваги такі розклади:

$$\zeta_l(\vec{r}, \tau) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \zeta_l(\vec{p}, \tau) e^{i\vec{p}\vec{r}}, \quad \zeta_l^*(\vec{r}, \tau) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \zeta_l^*(\vec{p}, \tau) e^{-i\vec{p}\vec{r}}. \quad (4.1.18)$$

Тоді застосування розкладів (4.1.12) та (4.1.18) дозволяє нам перетворити формули (4.1.17) на формули

$$E_0 = \frac{1}{\beta} \sum_l \int_0^\beta d\tau \int d\vec{r} |\zeta_l(\vec{r}, \tau)|^2 \quad (4.1.19)$$

та

$$\hat{H}_Q(\tau) = - \sum_l \int d\vec{r} \left[\zeta_l(\vec{r}, \tau) \hat{A}_l^\dagger(\vec{r}, \tau) + \zeta_l^*(\vec{r}, \tau) \hat{A}_l(\vec{r}, \tau) \right]. \quad (4.1.20)$$

Далі підставляємо представлення (4.1.16) у формулу (4.1.1) для статистичної суми двоцілинного надпровідника. Тоді ми приходимо до формули

$$Z = \frac{\int \mathcal{D}\zeta_1 \int \mathcal{D}\zeta_1^* \int \mathcal{D}\zeta_2 \int \mathcal{D}\zeta_2^* \exp(-\beta E_0) Z_B[\zeta_l, \zeta_l^*]}{\int \mathcal{D}\zeta_1 \int \mathcal{D}\zeta_1^* \int \mathcal{D}\zeta_2 \int \mathcal{D}\zeta_2^* \exp(-\beta E_0)}, \quad (4.1.21)$$

у якій фігурує позначення

$$Z_B[\zeta_l, \zeta_l^*] = \text{Sp} \left(\exp \left\{ -\beta \hat{H}_0 \right\} T_\tau \exp \left\{ - \int_0^\beta \hat{H}_Q(\tau) d\tau \right\} \right). \quad (4.1.22)$$

Індекс «В» поставлено на честь Миколи Миколайовича Боголюбова, який уперше почав розглядати функціонали типу (4.1.22).

З отриманої формули (4.1.21) видно, що задача про обчислення статистичної суми двоцілинного надпровідника розбивається на дві послідовні задачі:

- спочатку потрібно обчислити функціонал (4.1.22), який можна трактувати як статистичну суму системи вільних електронів, що перебувають у полі комплексних джерел електронних пар $\zeta_l(\vec{r}, \tau)$;
- обчислений у першому пункті функціонал далі потрібно усереднити по простору джерел електронних пар із Гауссівським розподілом

$$\exp(-\beta E_0) = \exp \left\{ - \sum_l \int_0^\beta d\tau \int d\vec{r} |\zeta_l(\vec{r}, \tau)|^2 \right\}.$$

Варто зауважити, що формулу (4.1.21) можна звести до формули

$$Z = \frac{\int \mathcal{D}\zeta_1 \int \mathcal{D}\zeta_1^* \int \mathcal{D}\zeta_2 \int \mathcal{D}\zeta_2^* \exp \left\{ -\beta \Omega[\zeta_l, \zeta_l^*] \right\}}{\int \mathcal{D}\zeta_1 \int \mathcal{D}\zeta_1^* \int \mathcal{D}\zeta_2 \int \mathcal{D}\zeta_2^* \exp(-\beta E_0)}, \quad (4.1.23)$$

у якій фігурує термодинамічний потенціал

$$\Omega \left[\zeta_l, \zeta_l^* \right] = \frac{1}{\beta} \sum_l \int_0^\beta d\tau \int d\vec{r} |\zeta_l(\vec{r}, \tau)|^2 - \frac{1}{\beta} \ln \text{Sp} \left(\exp \left\{ -\beta \hat{H}_0 \right\} T_\tau \exp \left\{ -\int_0^\beta \hat{H}_Q(\tau) d\tau \right\} \right). \quad (4.1.24)$$

4.2. Наближення середнього поля

Розбиття задачі про обчислення статистичної суми двоцілинного надпровідника на дві послідовні задачі відкриває широкі можливості для побудови певної наближеної схеми обчислення функціонального інтеграла (4.1.23). На основі розгляду чисельника формули (4.1.23) можна легко зробити висновок про те, що найбільший внесок в інтеграл даватимуть саме ті функціональні змінні, які відповідають мінімумові функціонала (4.1.24). Це означає, що нам потрібно дослідити цей функціонал на мінімум. Для дослідження функціонала (4.1.24) на мінімум доцільно буде запровадити функцію

$$\zeta_l(\vec{r}, \tau; \lambda) = \sum_{l'} a_{l,l'} \Delta_{l'}(\vec{r}, \tau) + \lambda \left[\zeta_l(\vec{r}, \tau) - \sum_{l'} a_{l,l'} \Delta_{l'}(\vec{r}, \tau) \right]. \quad (4.2.1)$$

Функція (4.2.1) містить деякий параметр λ , який будемо вважати дійсним. Також ми запровадили деякі функції $\Delta_l(\vec{r}, \tau)$, яких раніше не було. Ці функції потрібно буде підібрати так, щоб вони робили функціонал (4.1.24) мінімальним. Тобто функції $\Delta_l(\vec{r}, \tau)$ і є шуканими функціональними змінними. Для подальших обчислень виконуємо у формулі (4.1.24) заміну $\zeta_l(\vec{r}, \tau) \longrightarrow \zeta_l(\vec{r}, \tau; \lambda)$, внаслідок чого ми отримуємо функцію

$$\Omega(\lambda) = \frac{1}{\beta} \sum_l \int_0^\beta d\tau \int d\vec{r} |\zeta_l(\vec{r}, \tau; \lambda)|^2 - \frac{1}{\beta} \ln \text{Sp} \left(\exp \left\{ -\beta \hat{H}_0 \right\} T_\tau \exp \left\{ -\int_0^\beta \hat{H}(\tau, \lambda) d\tau \right\} \right), \quad (4.2.2)$$

у якій фігурує позначення для операторної функції

$$\hat{H}(\tau, \lambda) = - \sum_l \int d\vec{r} \left[\zeta_l(\vec{r}, \tau; \lambda) \hat{A}_l^\dagger(\vec{r}, \tau) + \zeta_l^*(\vec{r}, \tau; \lambda) \hat{A}_l(\vec{r}, \tau) \right]. \quad (4.2.3)$$

Маючи функцію (4.2.2), ми можемо побудувати такий розклад:

$$\Omega(1) = \Omega(0) + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{d\Omega(\lambda)}{d\lambda} + \frac{1}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{d^2\Omega(\lambda)}{d\lambda^2} + \dots \quad (4.2.4)$$

У лівій частині формули (4.2.4) маємо величину $\Omega(1) \equiv \Omega \left[\zeta_l, \zeta_l^* \right]$. У правій частині формули (4.2.4) маємо величину

$$\begin{aligned} \Omega(0) = & \frac{1}{\beta} \sum_{l,l'} g_{l,l'} \int_0^\beta d\tau \int d\vec{r} \Delta_l^*(\vec{r}, \tau) \Delta_{l'}(\vec{r}, \tau) - \\ & - \frac{1}{\beta} \ln \text{Sp} \left(\exp \left\{ -\beta \hat{H}_0 \right\} T_\tau \exp \left\{ - \int_0^\beta \hat{H}(\tau, 0) d\tau \right\} \right), \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

у формулі для якої фігурує операторна функція

$$\begin{aligned} \hat{H}(\tau, 0) = & - \sum_l \int d\vec{r} \left[\zeta_l(\vec{r}, \tau; 0) \hat{A}_l^\dagger(\vec{r}, \tau) + \zeta_l^*(\vec{r}, \tau; 0) \hat{A}_l(\vec{r}, \tau) \right] = \\ = & - \sum_{l,l'} g_{l,l'} \int d\vec{r} \left[\Delta_l^*(\vec{r}, \tau) \hat{M}_{l'}(\vec{r}, \tau) + \hat{M}_l^\dagger(\vec{r}, \tau) \Delta_{l'}(\vec{r}, \tau) \right]. \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Функції $\Delta_l(\vec{r}, \tau)$ підбираємо так, щоб виконувалась умова

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{d\Omega(\lambda)}{d\lambda} = 0. \quad (4.2.7)$$

Якщо ми підставимо функцію (4.2.2) в умову (4.2.7), то одержимо інтегральні рівняння для середнього поля $\Delta_l(\vec{r}, \tau)$, які мають такий вигляд:

$$\Delta_l^*(\vec{r}, \tau) = \frac{\text{Sp} \left(\exp \left\{ -\beta \hat{H}_0 \right\} \hat{M}_l^\dagger(\vec{r}, \tau) T_\tau \exp \left\{ - \int_0^\beta \hat{H}(\tau, 0) d\tau \right\} \right)}{\text{Sp} \left(\exp \left\{ -\beta \hat{H}_0 \right\} T_\tau \exp \left\{ - \int_0^\beta \hat{H}(\tau, 0) d\tau \right\} \right)}. \quad (4.2.8)$$

Величина (4.2.5) є термодинамічним потенціалом у наближенні середнього поля.

4.3. Рівняння для функцій Гріна

За наявності двох енергетичних щілин гамільтоніан системи вільних електронів, які перебувають у полі комплексних джерел електронних пар, можна подати

за допомогою формули [149]

$$\begin{aligned} \hat{H}_B = & \sum_{l,\sigma} \int \hat{\psi}_{l,\sigma}^\dagger(\vec{r}) \hat{\xi} \hat{\psi}_{l,\sigma}(\vec{r}) d\vec{r} - \\ & - \sum_{l,l'} g_{l,l'} \int \left[\Delta_l^*(\vec{r}) \hat{\psi}_{l,\downarrow}(\vec{r}) \hat{\psi}_{l',\uparrow}(\vec{r}) + \Delta_{l'}(\vec{r}) \hat{\psi}_{l',\uparrow}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}_{l,\downarrow}^\dagger(\vec{r}) \right] d\vec{r}. \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Комплексні функції $\Delta_l(\vec{r})$ називаються параметрами впорядкування. Маючи вираз (4.3.1) для гамільтоніана \hat{H}_B , ми вже можемо запровадити такі чотири функції Гріна:

$$\begin{aligned} G_l(\vec{r}, \vec{r}'; \tau - \tau') &= \left\langle T_\tau \hat{\psi}_{l,\downarrow}^\dagger(\vec{r}', \tau') \hat{\psi}_{l,\downarrow}(\vec{r}, \tau) \right\rangle, \\ F_l(\vec{r}, \vec{r}'; \tau - \tau') &= \left\langle T_\tau \hat{\psi}_{l,\uparrow}^\dagger(\vec{r}, \tau) \hat{\psi}_{l,\downarrow}^\dagger(\vec{r}', \tau') \right\rangle, \\ \tilde{G}_l(\vec{r}, \vec{r}'; \tau - \tau') &= \left\langle T_\tau \hat{\psi}_{l,\uparrow}(\vec{r}', \tau') \hat{\psi}_{l,\uparrow}^\dagger(\vec{r}, \tau) \right\rangle, \\ \tilde{F}_l(\vec{r}, \vec{r}'; \tau - \tau') &= \left\langle T_\tau \hat{\psi}_{l,\downarrow}(\vec{r}, \tau) \hat{\psi}_{l,\uparrow}(\vec{r}', \tau') \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Кутові дужки у формулі (4.3.2) означають усереднення

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\text{Sp} \left\{ \hat{A} \exp(-\beta \hat{H}_B) \right\}}{\text{Sp} \left\{ \exp(-\beta \hat{H}_B) \right\}}.$$

Також у формулі (4.3.2) використано скорочений запис

$$T_\tau \hat{A}(\tau_1) \hat{B}(\tau_2) = \theta(\tau_1 - \tau_2) \hat{A}(\tau_1) \hat{B}(\tau_2) - \theta(\tau_2 - \tau_1) \hat{B}(\tau_2) \hat{A}(\tau_1).$$

Що стосується операторів породження і знищення, то вони беруться в гайзенбергівському представленні. Це означає, що мають місце такі формули:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{l,\sigma}^\dagger(\vec{r}, \tau) &= \exp \left\{ \tau \hat{H}_B \right\} \hat{\psi}_{l,\sigma}^\dagger(\vec{r}) \exp \left\{ -\tau \hat{H}_B \right\}, \\ \hat{\psi}_{l,\sigma}(\vec{r}, \tau) &= \exp \left\{ \tau \hat{H}_B \right\} \hat{\psi}_{l,\sigma}(\vec{r}) \exp \left\{ -\tau \hat{H}_B \right\}. \end{aligned}$$

Варто зауважити, що всі чотири функції Гріна (4.3.2) можна вважати елементами матриці

$$\hat{G}_l(\vec{r}, \vec{r}'; \tau - \tau') = \begin{pmatrix} G_l(\vec{r}, \vec{r}'; \tau - \tau') & -\tilde{F}_l(\vec{r}, \vec{r}'; \tau - \tau') \\ -F_l(\vec{r}, \vec{r}'; \tau - \tau') & \tilde{G}_l(\vec{r}, \vec{r}'; \tau - \tau') \end{pmatrix}. \quad (4.3.3)$$

Тоді за допомогою похідних

$$\frac{\partial \hat{\psi}_{l,\uparrow}^\dagger(\vec{r}, \tau)}{\partial \tau} = \left[\hat{H}_B, \hat{\psi}_{l,\uparrow}^\dagger(\vec{r}, \tau) \right]_- = \hat{\xi} \hat{\psi}_{l,\uparrow}^\dagger(\vec{r}, \tau) - \hat{\mathcal{E}}_l^*(\vec{r}) \hat{\psi}_{l,\downarrow}(\vec{r}, \tau)$$

та

$$\frac{\partial \hat{\psi}_{l,\downarrow}(\vec{r}, \tau)}{\partial \tau} = \left[\hat{H}_B, \hat{\psi}_{l,\downarrow}(\vec{r}, \tau) \right]_- = -\hat{\xi} \hat{\psi}_{l,\downarrow}(\vec{r}, \tau) - \hat{\mathcal{E}}_l(\vec{r}) \hat{\psi}_{l,\uparrow}^\dagger(\vec{r}, \tau),$$

у виразах для яких фігурує позначення $\hat{\mathcal{E}}_l(\vec{r}) = \sum_{l'} g_{l,l'} \Delta_{l'}(\vec{r})$, можна обчислити

частинну похідну першого порядку $\frac{\partial}{\partial \tau} \hat{G}_l(\vec{r}, \vec{r}'; \tau - \tau')$ та скласти для матричної функції Гріна (4.3.3) диференціальне рівняння другого порядку

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} + \sigma_z \hat{\xi} + \hat{\mathcal{E}}_l(\vec{r}) \right\} \hat{G}_l(\vec{r}, \vec{r}'; \tau - \tau') = -\delta(\tau - \tau') \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (4.3.4)$$

У рівнянні (4.3.4) фігурує матриця $\hat{\mathcal{E}}_l(\vec{r}) = \sum_{l'} g_{l,l'} \hat{\Delta}_{l'}(\vec{r})$, яку подано через матрицю

$$\hat{\Delta}_l(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_l(\vec{r}) \\ \Delta_l^*(\vec{r}) & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3.5)$$

Варто зауважити, що ми можемо спростити диференціальне рівняння другого порядку в частинних похідних (4.3.4) шляхом побудови для матричної функції Гріна (4.3.3) представлення у вигляді суми за всіма непарними мацубарівськими частотами $\omega_n = \pi T (2n + 1)$ з числами $n \in \mathbb{Z}$. Якщо підставити розклад

$$\hat{G}_l(\vec{r}, \vec{r}'; \tau - \tau') = T \sum_{\omega_n} \hat{G}_{l,\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') e^{-i\omega_n(\tau - \tau')}$$

у рівняння (4.3.4), то можна прийти до рівняння

$$\left\{ i\omega_n - \sigma_z \hat{\xi} - \hat{\mathcal{E}}_l(\vec{r}) \right\} \hat{G}_{l,\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (4.3.6)$$

для мацубарівської функції Гріна

$$\hat{G}_{l,\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') = \begin{pmatrix} G_{l,\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') & -\tilde{F}_{l,\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') \\ -F_{l,\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') & \tilde{G}_{l,\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') \end{pmatrix}. \quad (4.3.7)$$

Якщо розглядати випадок наявності потенціального поля $U(\vec{r})$, то замість рівняння (4.3.6) будемо мати рівняння

$$\left\{ i\omega_n - \sigma_z \left[\hat{\xi} + U(\vec{r}) \right] - \hat{\mathcal{E}}_l(\vec{r}) \right\} \hat{G}_{l,\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (4.3.8)$$

4.4. Квазікласичні рівняння

Для початку нам потрібно розібратися із геометрією задачі. Будемо вважати, що тонка діелектрична плівка збігається із площиною $z = 0$. Що стосується двох масивних надпровідників, то вони займають півпростори $z < 0$ та $z > 0$. У такому випадку просторова однорідність порушується лише в напрямку осі OZ . І тоді рівняння (4.3.8) перетворюється на рівняння

$$\left\{ i\omega_n - \sigma_z \left[\hat{\xi} + U(z) \right] - \hat{\mathcal{E}}_l(z) \right\} \hat{G}_{l,\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (4.4.1)$$

Відомо, що тонку діелектричну плівку потрібно моделювати за допомогою дельта-функційного потенціального бар'єра. Це означає, що $U(z) = U_0 \delta(z)$. Для побудови квазікласичних рівнянь потрібно розв'язати тривимірне диференціальне рівняння другого порядку

$$\left\{ \hat{\xi} + U(z) \right\} \psi_{\vec{p}}^{(k)}(\vec{r}) = \xi_{\vec{p}} \psi_{\vec{p}}^{(k)}(\vec{r}) \quad (4.4.2)$$

з дисперсійним співвідношенням $\xi_{\vec{p}} = \frac{p^2}{2m} - E_F = \frac{p^2}{2m} - \frac{p_0^2}{2m}$. Індекс k набуває значень 1 та 2.

Загальний розв'язок тривимірного диференціального рівняння (4.4.2) можна подати за допомогою формули

$$\psi_{\vec{p}}^{(k)}(\vec{r}) = \frac{\exp(i\vec{p}_\perp \vec{r})}{2\pi} \chi_{p_z}^{(k)}(z). \quad (4.4.3)$$

Якщо підставити тривимірну хвильову функцію (4.4.3) у тривимірне диференціальне рівняння другого порядку (4.4.2), то можна прийти до вже одновимірного диференціального рівняння другого порядку

$$\left\{ -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + U(z) \right\} \chi_{p_z}^{(k)}(z) = \frac{p_z^2}{2m} \chi_{p_z}^{(k)}(z), \quad (4.4.4)$$

яке має такі розв'язки [146]:

$$\begin{aligned} \chi_{p_z}^{(1)}(z) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin p_z z, \\ \chi_{p_z}^{(2)}(z) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \sqrt{D} \cos p_z z + \sqrt{R} (\text{sign } z) \sin p_z z \right\}. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

У формулі (4.4.5) використано такі позначення:

$$R = 1 - D, \quad D = \frac{p_z^2}{p_z^2 + K^2}, \quad K = mU_0.$$

Коефіцієнти R та D називаються коефіцієнтами відбивання і проходження відповідно. Оскільки $U_0 > 0$, то $K > 0$. Також має місце нерівність $p_z > 0$.

Для одновимірних функцій (4.4.5) та тривимірних функцій (4.4.3) мають місце умови нормування

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{p_z}^{(k)}(z) \chi_{p'_z}^{(k')}(z) dz = \delta_{k,k'} \delta(p_z - p'_z) \quad (4.4.6)$$

та

$$\int \psi_{\vec{p}}^{*(k)}(\vec{r}) \psi_{\vec{p}'}^{(k')}(\vec{r}) d\vec{r} = \delta_{k,k'} \delta(\vec{p} - \vec{p}') \quad (4.4.7)$$

відповідно.

Маючи тривимірні хвильові функції (4.4.3), ми можемо подати мацубарівську функцію Гріна (4.3.7) у вигляді розкладу

$$\hat{G}_{l,\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{i,k} \int d\vec{p} \int d\vec{p}' \hat{G}_{l,\omega_n}^{i,k}(\vec{p}, \vec{p}') \psi_{\vec{p}}^{(i)}(\vec{r}) \psi_{\vec{p}'}^{*(k)}(\vec{r}'). \quad (4.4.8)$$

За допомогою умови нормування (4.4.7) та розкладу (4.4.8) для матричної функції Гріна (4.3.7) ми можемо отримати вираз для матричної функції Гріна в імпульсному представленні

$$\hat{G}_{l,\omega_n}^{i,k}(\vec{p}, \vec{p}') = \int d\vec{r} \int d\vec{r}' \hat{G}_{l,\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') \psi_{\vec{p}}^{*(i)}(\vec{r}) \psi_{\vec{p}'}^{(k)}(\vec{r}'). \quad (4.4.9)$$

Далі нам потрібно переходити від матричного рівняння (4.4.1) для матричної функції Гріна (4.3.7) у конфігураційному представленні до матричного рівняння для матричної функції Гріна (4.4.9) в імпульсному представленні. Для цього нам потрібно підставляти вищеподаний розклад (4.4.8) для матричної функції Гріна (4.3.7) у диференціальне рівняння другого порядку (4.4.1). Тоді ми отримуємо інтегральне рівняння

$$\begin{aligned} & (i\omega_n - \sigma_z \xi) \hat{G}_{l,\omega_n}^{i,k}(\vec{p}, \vec{p}') - \\ & - \sum_{i'} \int d\vec{p}'' \left\{ \int \psi_{\vec{p}}^{*(i)}(\vec{r}) \hat{\mathcal{E}}_l(z) \psi_{\vec{p}''}^{(i')}(\vec{r}) d\vec{r} \right\} \hat{G}_{l,\omega_n}^{i',k}(\vec{p}'', \vec{p}') = \\ & = \delta_{i,k} \delta(\vec{p} - \vec{p}') \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

для матричної функції Гріна (4.4.9) в імпульсному представленні. Тут ми запровадили позначення $\xi_{\vec{p}} \equiv \xi$. У фігурних дужках формули (4.4.10) виконується

інтегрування по x та по y . Це є прямим наслідком того факту, що параметри впорядкування залежать лише від координати z . У такому випадку ми приходимо до перетворення

$$\int \psi_{\vec{p}}^{*(i)}(\vec{r}) \hat{\mathcal{E}}_l(z) \psi_{\vec{p}'}^{(i')}(\vec{r}) d\vec{r} = \delta(\vec{p}_\perp - \vec{p}'_\perp) \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{p_z}^{(i)}(z) \hat{\mathcal{E}}_l(z) \chi_{p'_z}^{(i')}(z) dz. \quad (4.4.11)$$

З формули (4.4.11) видно, що матричні елементи параметрів впорядкування містять функцію $\delta(\vec{p}_\perp - \vec{p}'_\perp) = \delta(p_x - p'_x) \delta(p_y - p'_y)$. Це означає, що має місце так звана діагональність за поперечними імпульсами \vec{p}_\perp та \vec{p}'_\perp . У правій частині рівняння (4.4.10) фігурує функція $\delta(\vec{p} - \vec{p}') = \delta(\vec{p}_\perp - \vec{p}'_\perp) \delta(p_z - p'_z)$, яка є діагональною за поперечними імпульсами \vec{p}_\perp та \vec{p}'_\perp . Очевидно, що цією ж властивістю володіє також і матрична функція Гріна $\hat{G}_{l,\omega_n}^{i,k}(\vec{p}, \vec{p}')$ в імпульсному представленні. Тоді $\hat{G}_{l,\omega_n}^{i,k}(\vec{p}, \vec{p}') = \hat{G}_{l,\omega_n}^{i,k}(\vec{p}_\perp, p_z, p'_z) \delta(\vec{p}_\perp - \vec{p}'_\perp)$. Використовуючи вищевказані обставини, матричне рівняння (4.4.10) перетворюється на рівняння

$$\begin{aligned} & (i\omega_n - \sigma_z \xi) \hat{G}_{l,\omega_n}^{i,k}(\vec{p}_\perp, p_z, p'_z) - \\ & - \sum_{i'} \int_0^{+\infty} dp''_z \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{p_z}^{(i)}(z) \hat{\mathcal{E}}_l(z) \chi_{p''_z}^{(i')}(z) dz \right) \hat{G}_{l,\omega_n}^{i',k}(\vec{p}_\perp, p''_z, p'_z) = \\ & = \delta_{i,k} \delta(p_z - p'_z). \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

Перетворення (3.2.19) дозволяє дещо спростити рівняння (4.4.12). Якщо взяти до уваги позначення $\hat{G}_{l,\omega_n}^{i,k}(\vec{p}_\perp, p_z, p'_z) \equiv \langle \xi, i | \hat{G}_{l,\omega_n} | k, \xi' \rangle$ та

$$\langle \xi, i | \hat{\mathcal{E}}_l(z) | i', \xi' \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{p_z}^{(i)}(z) \hat{\mathcal{E}}_l(z) \chi_{p'_z}^{(i')}(z) dz, \quad (4.4.13)$$

то рівняння (4.4.12) перетвориться на рівняння

$$\begin{aligned} & (i\omega_n - \sigma_z \xi) \langle \xi, i | \hat{G}_{l,\omega_n} | k, \xi' \rangle - \\ & - \frac{1}{v_0 x} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi'' \sum_{i'} \langle \xi, i | \hat{\mathcal{E}}_l(z) | i', \xi'' \rangle \langle \xi'', i' | \hat{G}_{l,\omega_n} | k, \xi' \rangle = \\ & = v_0 x \delta_{i,k} \delta(\xi - \xi'). \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

Далі нам потрібно переходити до так званого t -представлення. Для цього ми домножимо інтегральне рівняння (4.4.14) на $\frac{e^{i\xi t - i\xi' t'}}{2\pi v_0 x}$. Отримане внаслідок цього

рівняння проінтегруємо за змінними ξ та ξ' від $-\infty$ до $+\infty$. Тоді для матричної функції Гріна

$$\hat{G}_{l,\omega_n}^{i,k}(t,t') = \frac{1}{2\pi v_0 x} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' \langle \xi, i | \hat{G}_{l,\omega_n} | k, \xi' \rangle e^{i\xi t - i\xi' t'} \quad (4.4.15)$$

у так званому t -представленні отримуємо інтегро-диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} \left(i\omega_n + i\sigma_z \frac{\partial}{\partial t} \right) \hat{G}_{l,\omega_n}^{i,k}(t,t') - \int_{-\infty}^{+\infty} dt'' \sum_{i'} \langle t, i | \hat{\mathcal{E}}_l(z) | i', t'' \rangle \hat{G}_{l,\omega_n}^{i',k}(t'',t') = \\ = \delta_{i,k} \delta(t-t'), \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

яке містить позначення для матричних елементів

$$\langle t, i | \hat{\mathcal{E}}_l(z) | i', t' \rangle = \frac{1}{2\pi v_0 x} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' \langle \xi, i | \hat{\mathcal{E}}_l(z) | i', \xi' \rangle e^{i\xi t - i\xi' t'}. \quad (4.4.17)$$

У нашому дослідженні замість матриці (4.3.5) будемо мати матрицю

$$\hat{\Delta}_l(z) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_l(z) \\ \hat{\Delta}_l^*(z) & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4.18)$$

Матрицю $\hat{\mathcal{E}}_l(z) = \sum_{l'} g_{l,l'} \hat{\Delta}_{l'}(z)$ підставляємо у праву частину тотожності (4.4.13) та приходимо до тотожності

$$\langle \xi, i | \hat{\mathcal{E}}_l(z) | i', \xi' \rangle = \sum_{l'} g_{l,l'} \langle \xi, i | \hat{\Delta}_{l'}(z) | i', \xi' \rangle, \quad (4.4.19)$$

у якій фігурують матричні елементи

$$\langle \xi, i | \hat{\Delta}_l(z) | i', \xi' \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{p_z}^{(i)}(z) \hat{\Delta}_l(z) \chi_{p_z'}^{(i')}(z) dz. \quad (4.4.20)$$

Далі потрібно підставляти співвідношення (4.4.19) у праву частину тотожності (4.4.17). Тоді ми приходимо до тотожності

$$\langle t, i | \hat{\mathcal{E}}_l(z) | i', t' \rangle = \sum_{l'} g_{l,l'} \langle t, i | \hat{\Delta}_{l'}(z) | i', t' \rangle, \quad (4.4.21)$$

у якій фігурують матричні елементи

$$\langle t, i \mid \hat{\Delta}_l(z) \mid i', t' \rangle = \frac{1}{2\pi v_0 x} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' \langle \xi, i \mid \hat{\Delta}_l(z) \mid i', \xi' \rangle e^{i\xi t - i\xi' t'}. \quad (4.4.22)$$

Якщо $i = 1$ та $i' = 1$, то з формули (4.4.20) випливає, що

$$\begin{aligned} \langle \xi, 1 \mid \hat{\Delta}_l(z) \mid 1, \xi' \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{p_z}^{(1)}(z) \hat{\Delta}_l(z) \chi_{p'_z}^{(1)}(z) dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left[\hat{\Delta}_l(z) + \hat{\Delta}_l(-z) \right] \chi_{p_z}^{(1)}(z) \chi_{p'_z}^{(1)}(z) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left[\hat{\Delta}_l(z) - \hat{\Delta}_l(-z) \right] \chi_{p_z}^{(1)}(z) \chi_{p'_z}^{(1)}(z). \end{aligned} \quad (4.4.23)$$

У формулі (4.4.23) ми маємо добуток $\chi_{p_z}^{(1)}(z) \chi_{p'_z}^{(1)}(z)$, який можна подати через комплексні експоненти $e^{i(p_z + p'_z)z} \cong e^{2izp_0x}$ та $e^{i(p_z - p'_z)z} \cong \exp\left\{i\frac{\xi - \xi'}{v_0x}z\right\}$. Оскільки ми маємо намір врахувати лише великомасштабні зміни, то експоненти першого типу доведеться відкинути. За таких обставин

$$\langle \xi, 1 \mid \hat{\Delta}_l(z) \mid 1, \xi' \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left[\hat{\Delta}_l(z) + \hat{\Delta}_l(-z) \right] \cos(p_z - p'_z)z. \quad (4.4.24)$$

Якщо взяти до уваги перетворення (3.2.19) та запровадити нову змінну інтегрування $t_1 = \frac{z}{v_0x}$, то формула (4.4.24) перетвориться на формулу

$$\langle \xi, 1 \mid \hat{\Delta}_l(z) \mid 1, \xi' \rangle = \frac{v_0x}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \left[\hat{\Delta}_l(v_0xt_1) + \hat{\Delta}_l(-v_0xt_1) \right] \cos(\xi - \xi')t_1. \quad (4.4.25)$$

До правої частини щойно отриманої матричної тотожності (4.4.25) ми будемо додавати «очевидний нуль», явний вигляд якого буде видно в такій формулі:

$$\begin{aligned} \langle \xi, 1 \mid \hat{\Delta}_l(z) \mid 1, \xi' \rangle &= \frac{v_0x}{4\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \left[\hat{\Delta}_l(v_0xt_1) + \hat{\Delta}_l(-v_0xt_1) \right] \cos(\xi - \xi')t_1 + \right. \\ &\left. + i \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \left[\hat{\Delta}_l(v_0xt_1) + \hat{\Delta}_l(-v_0xt_1) \right] \sin(\xi - \xi')t_1 \right). \end{aligned}$$

Тоді ми можемо записати, що

$$\langle \xi, 1 \mid \hat{\Delta}_l(z) \mid 1, \xi' \rangle = \frac{v_0 x}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \left[\hat{\Delta}_l(v_0 x t_1) + \hat{\Delta}_l(-v_0 x t_1) \right] e^{i(\xi - \xi') t_1}. \quad (4.4.26)$$

Далі розглядаємо формулу (4.4.22) для випадку, коли $i = 1$ та $i' = 1$. Якщо взяти до уваги результат (4.4.26), то можна прийти до формули

$$\langle t, 1 \mid \hat{\Delta}_l(z) \mid 1, t' \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \left[\hat{\Delta}_l(v_0 x t_1) + \hat{\Delta}_l(-v_0 x t_1) \right] \delta(t_1 + t) \delta(t_1 + t').$$

Після обчислення інтеграла отримуємо формулу

$$\langle t, 1 \mid \hat{\Delta}_l(z) \mid 1, t' \rangle = \delta(t - t') \hat{\Delta}_l^{1,1}(t, x),$$

у якій фігурує позначення для матричної функції

$$\hat{\Delta}_l^{1,1}(t, x) = \frac{1}{2} \left[\hat{\Delta}_l(v_0 x t) + \hat{\Delta}_l(-v_0 x t) \right].$$

Цілком аналогічно обчислюємо інші три матричні елементи. Що стосується коефіцієнтів R та D , то до них застосовуємо наближення $p_z \cong p_0 x$ та $p'_z \cong p_0 x$. За таких обставин ми приходимо до таких трьох формул:

$$\begin{aligned} \langle t, 1 \mid \hat{\Delta}_l(z) \mid 2, t' \rangle &= \delta(t - t') \hat{\Delta}_l^{1,2}(t, x), \\ \langle t, 2 \mid \hat{\Delta}_l(z) \mid 1, t' \rangle &= \delta(t - t') \hat{\Delta}_l^{2,1}(t, x), \\ \langle t, 2 \mid \hat{\Delta}_l(z) \mid 2, t' \rangle &= \delta(t - t') \hat{\Delta}_l^{2,2}(t, x). \end{aligned}$$

Тут ми маємо такі три матричні функції:

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_l^{1,2}(t, x) &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{R}(\text{sign } t) + i\sqrt{D} \right] \left[\hat{\Delta}_l(v_0 x t) - \hat{\Delta}_l(-v_0 x t) \right], \\ \hat{\Delta}_l^{2,1}(t, x) &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{R}(\text{sign } t) - i\sqrt{D} \right] \left[\hat{\Delta}_l(v_0 x t) - \hat{\Delta}_l(-v_0 x t) \right], \\ \hat{\Delta}_l^{2,2}(t, x) &= \frac{1}{2} \left[\hat{\Delta}_l(v_0 x t) + \hat{\Delta}_l(-v_0 x t) \right]. \end{aligned}$$

Отже, в загальному випадку має місце формула

$$\langle t, i \mid \hat{\Delta}_l(z) \mid i', t' \rangle = \delta(t - t') \hat{\Delta}_l^{i,i'}(t, x). \quad (4.4.27)$$

Якщо підставити властивість (4.4.27) у тотожність (4.4.21), то можна прийти до властивості

$$\left\langle t, i \left| \hat{\mathcal{E}}_l(z) \right| i', t' \right\rangle = \delta(t - t') \hat{\mathcal{E}}_l^{i, i'}(t, x), \quad (4.4.28)$$

у якій фігурують матричні функції

$$\hat{\mathcal{E}}_l^{i, i'}(t, x) = \sum_{l'} g_{l, l'} \hat{\Delta}_{l'}^{i, i'}(t, x). \quad (4.4.29)$$

Якщо взяти до уваги властивість (4.4.28), то отримане інтегро-диференціальне рівняння (4.4.16) зведеться до диференціального рівняння першого порядку

$$\left(i\omega_n + i\sigma_z \frac{\partial}{\partial t} \right) \hat{G}_{l, \omega_n}^{i, k}(t, t') - \sum_{i'} \hat{\mathcal{E}}_l^{i, i'}(t, x) \hat{G}_{l, \omega_n}^{i', k}(t, t') = \delta_{i, k} \delta(t - t').$$

Проте, надалі зручніше буде працювати не з функціями

$$\hat{G}_{l, \omega_n}^{i, k}(t, t') = \begin{pmatrix} G_{l, \omega_n}^{i, k}(t, t') & -\tilde{F}_{l, \omega_n}^{i, k}(t, t') \\ -F_{l, \omega_n}^{i, k}(t, t') & \tilde{G}_{l, \omega_n}^{i, k}(t, t') \end{pmatrix},$$

а з новими функціями

$$\hat{\mathcal{G}}_l^{i, k}(t, t') = \hat{G}_{l, \omega_n}^{i, k}(t, t') \sigma_z = \begin{pmatrix} G_{l, \omega_n}^{i, k}(t, t') & \tilde{F}_{l, \omega_n}^{i, k}(t, t') \\ -F_{l, \omega_n}^{i, k}(t, t') & -\tilde{G}_{l, \omega_n}^{i, k}(t, t') \end{pmatrix}, \quad (4.4.30)$$

рівняння для яких отримуємо на основі вищевиписаного за допомогою множення його на σ_z ліворуч і праворуч. Внаслідок цього приходимо до диференціального рівняння першого порядку

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + i\omega_n \sigma_z \right) \hat{\mathcal{G}}_l^{i, k}(t, t') - \sum_{i'} \sigma_z \hat{\mathcal{E}}_l^{i, i'}(t, x) \hat{\mathcal{G}}_l^{i', k}(t, t') = \delta_{i, k} \delta(t - t'). \quad (4.4.31)$$

Якщо температура T неблизька до критичної температури T_c , то просторовою поведінкою параметрів впорядкування можна знехтувати [150]. За таких обставин ми можемо застосовувати модель із кусково-сталими параметрами впорядкування. У такому випадку можна записати представлення

$$\Delta_l(z) = \Delta_l[\theta(-z) \exp(i\varphi_l) + \theta(z) \exp(i\chi_l)]. \quad (4.4.32)$$

Тоді матрицю (4.4.18), яку можна подавати також і за допомогою формули

$$\hat{\Delta}_l(z) = \frac{\sigma_x}{2} \left[\Delta_l(z) + \hat{\Delta}_l^*(z) \right] + \frac{i\sigma_y}{2} \left[\Delta_l(z) - \hat{\Delta}_l^*(z) \right],$$

будемо перетворювати за допомогою представлення (4.4.32). У такому випадку ми отримуємо матрицю

$$\hat{\Delta}_l(z) = \frac{\Delta_l \sigma_x}{2} \{ \theta(-z) [\exp(i\varphi_l) + \exp(-i\varphi_l)] + \theta(z) [\exp(i\chi_l) + \exp(-i\chi_l)] \} + \\ + \frac{i\Delta_l \sigma_y}{2} \{ \theta(-z) [\exp(i\varphi_l) - \exp(-i\varphi_l)] + \theta(z) [\exp(i\chi_l) - \exp(-i\chi_l)] \},$$

за допомогою якої знаходимо матриці $\hat{\Delta}_l(v_0 x t)$ та $\hat{\Delta}_l(-v_0 x t)$. Ці дві матричні функції слід використати з метою підрахунку матричних функцій $\hat{\Delta}_l^{i,i'}(t, x)$, які далі потрібно підставляти у формулу (4.4.29).

Тоді матриці $\sigma_z \hat{\mathcal{E}}_l^{1,1}(t, x)$ та $\sigma_z \hat{\mathcal{E}}_l^{2,2}(t, x)$ шукаємо за такими формулами:

$$\sigma_z \hat{\mathcal{E}}_l^{1,1}(t, x) = \frac{1}{4} \left[\sigma_x \left(E_l^{(1)} - E_l^{*(1)} + E_l^{(2)} - E_l^{*(2)} \right) + \right. \\ \left. + i\sigma_y \left(E_l^{(1)} + E_l^{*(1)} + E_l^{(2)} + E_l^{*(2)} \right) \right], \\ \sigma_z \hat{\mathcal{E}}_l^{2,2}(t, x) = \sigma_z \hat{\mathcal{E}}_l^{1,1}(t, x). \quad (4.4.33)$$

З метою підрахунку матриць $\sigma_z \hat{\mathcal{E}}_l^{1,2}(t, x)$ та $\sigma_z \hat{\mathcal{E}}_l^{2,1}(t, x)$ буде дуже доцільно розглянути лівий та правий надпровідники окремо.

Якщо $t < 0$, то мають місце такі формули:

$$\mathcal{C} \sigma_z \hat{\mathcal{E}}_l^{1,2}(t, x) = \frac{1}{4} \left[\sigma_x \left(E_l^{(2)} - E_l^{*(2)} - E_l^{(1)} + E_l^{*(1)} \right) + \right. \\ \left. + i\sigma_y \left(E_l^{(2)} + E_l^{*(2)} - E_l^{(1)} - E_l^{*(1)} \right) \right], \\ \mathcal{C}^* \sigma_z \hat{\mathcal{E}}_l^{2,1}(t, x) = \mathcal{C} \sigma_z \hat{\mathcal{E}}_l^{1,2}(t, x), \quad t < 0. \quad (4.4.34)$$

У формулі (4.4.34) ми запровадили комплексне число $\mathcal{C} = \sqrt{R} + i\sqrt{D}$, для якого має місце умова $|\mathcal{C}|^2 = 1$. Також маємо такі позначення:

$$E_l^{(1)} = \sum_{l'} g_{l,l'} \Delta_{l'} \exp(i\varphi_{l'}), \\ E_l^{(2)} = \sum_{l'} g_{l,l'} \Delta_{l'} \exp(i\chi_{l'}).$$

Якщо $t > 0$, то мають місце вже такі формули:

$$\mathcal{C} \sigma_z \hat{\mathcal{E}}_l^{2,1}(t, x) = \frac{1}{4} \left[\sigma_x \left(E_l^{(2)} - E_l^{*(2)} - E_l^{(1)} + E_l^{*(1)} \right) + \right. \\ \left. + i\sigma_y \left(E_l^{(2)} + E_l^{*(2)} - E_l^{(1)} - E_l^{*(1)} \right) \right], \\ \mathcal{C}^* \sigma_z \hat{\mathcal{E}}_l^{1,2}(t, x) = \mathcal{C} \sigma_z \hat{\mathcal{E}}_l^{2,1}(t, x), \quad t > 0. \quad (4.4.35)$$

4.5. Густина струму

У попередньому пункті ми побудували квазікласичні рівняння (4.4.31) для матричних функцій Гріна (4.4.30) у так званому t -представленні. Згадані вище рівняння є диференціальними рівняннями першого порядку, внаслідок чого робота з такими рівняннями є значно зручнішою від роботи з диференціальним рівнянням другого порядку (4.4.1) для матричної функції Гріна (4.3.7) у конфігураційному представленні.

Очевидно, що доповненням до квазікласичних рівнянь (4.4.31) має бути вираз густини струму через функції Гріна в t -представленні. З метою пошуку згаданого вище виразу нам потрібно спочатку записати представлення тривимірної густини струму $\vec{j}(\vec{r})$ через функцію Гріна $G_{l,\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}')$.

У мікроскопічній теорії двошлілинної надпровідності аналітична формула для густини струму $\vec{j}(\vec{r})$ без магнітного поля ($\vec{A}(\vec{r}) \equiv 0$) має такий вигляд:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{ie}{m} T \sum_{l,\omega_n} \lim_{\vec{r}' \rightarrow \vec{r}} (\nabla_{\vec{r}'} - \nabla_{\vec{r}}) G_{l,\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}'). \quad (4.5.1)$$

Далі потрібно подати тривимірну густину струму $\vec{j}(\vec{r})$ через функції Гріна в імпульсному представленні $G_{l,\omega_n}^{i,k}(\vec{p}, \vec{p}')$. З цією метою нам потрібно повернутися до матричної рівності (4.4.8) та виділити в ній елементи, які стоять у першому рядку та першому стовпці. Тоді ми отримуємо розклад

$$G_{l,\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{i,k} \int d\vec{p} \int d\vec{p}' G_{l,\omega_n}^{i,k}(\vec{p}, \vec{p}') \psi_{\vec{p}}^{(i)}(\vec{r}) \psi_{\vec{p}'}^{*(k)}(\vec{r}'),$$

який далі підставляємо у вираз (4.5.1) для тривимірної густини струму $\vec{j}(\vec{r})$. За таких обставин можна обчислити наявну у формулі (4.5.1) границю і запровадити запис $\nabla_{\vec{r}} \equiv \nabla$. Тоді виходить, що

$$\begin{aligned} \vec{j}(\vec{r}) = & \frac{ie}{m} T \sum_{l,\omega_n} \int d\vec{p} \int d\vec{p}' \sum_{i,k} G_{l,\omega_n}^{i,k}(\vec{p}, \vec{p}') \left[\psi_{\vec{p}}^{(i)}(\vec{r}) \nabla \psi_{\vec{p}'}^{*(k)}(\vec{r}) - \right. \\ & \left. - \psi_{\vec{p}'}^{*(k)}(\vec{r}) \nabla \psi_{\vec{p}}^{(i)}(\vec{r}) \right]. \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

Формулу (4.4.3) підставляємо у формулу (4.5.2) та приходимо до результату

$$\begin{aligned} \vec{j}(\vec{r}) = & \frac{eT}{m(2\pi)^2} \sum_{l,\omega_n} \sum_{i,k} \int d\vec{p} \int d\vec{p}' G_{l,\omega_n}^{i,k}(\vec{p}, \vec{p}') e^{i(\vec{p}_\perp - \vec{p}'_\perp)\vec{r}} \left[\vec{e}_z J_{p'_z, p_z}^{k,i}(z) + \right. \\ & \left. + (\vec{p}'_\perp + \vec{p}_\perp) \chi_{p_z}^{(i)}(z) \chi_{p'_z}^{(k)}(z) \right], \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

у якому фігурує позначення для чотирьох величин

$$J_{p'_z, p_z}^{k, i}(z) = \chi_{p'_z}^{(k)}(z) \hat{p}_z \chi_{p_z}^{(i)}(z) - \chi_{p_z}^{(i)}(z) \hat{p}_z \chi_{p'_z}^{(k)}(z). \quad (4.5.4)$$

Тут ми маємо диференціальний оператор $\hat{p}_z = -i \frac{\partial}{\partial z}$. Варто наголосити на тому, що властивість $G_{l, \omega_n}^{i, k}(\vec{p}, \vec{p}') = G_{l, \omega_n}^{i, k}(\vec{p}_\perp, p_z, p'_z) \delta(\vec{p}_\perp - \vec{p}'_\perp)$ дає змогу суттєво спростити формулу (4.5.3). Після інтегрування по \vec{p}'_\perp отримуємо вираз

$$\begin{aligned} \vec{j}(\vec{r}) = & \frac{eT}{m(2\pi)^2} \sum_{l, \omega_n} \sum_{i, k} \int d\vec{p}_\perp \int_0^{+\infty} dp_z \int_0^{+\infty} dp'_z G_{l, \omega_n}^{i, k}(\vec{p}_\perp, p_z, p'_z) \left[\vec{e}_z J_{p'_z, p_z}^{k, i}(z) + \right. \\ & \left. + 2\vec{p}_\perp \chi_{p_z}^{(i)}(z) \chi_{p'_z}^{(k)}(z) \right]. \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

Перейдімо у формулі (4.5.5) до змінних інтегрування α, x, ξ та ξ' за допомогою формул, які ми мали в розділі про шаруваті надпровідні контакти типу SIS'IS. У такому разі результати $G_{l, \omega_n}^{i, k}(\vec{p}_\perp, p_z, p'_z) \equiv \langle \xi, i | G_{l, \omega_n} | k, \xi' \rangle$ та $\int_0^{2\pi} \vec{p}_\perp d\alpha = 0$ дають нам змогу перетворити формулу (4.5.5) на формулу $\vec{j}(\vec{r}) = j(z) \vec{e}_z$, у якій фігурує позначення для вже одновимірної густини струму

$$j(z) = \frac{em}{2\pi} T \sum_{l, \omega_n} \sum_{i, k} \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' \langle \xi, i | G_{l, \omega_n} | k, \xi' \rangle J_{p'_z, p_z}^{k, i}(z). \quad (4.5.6)$$

Оберненим до перетворення (4.4.15) є перетворення

$$\langle \xi, i | \hat{G}_{l, \omega_n} | k, \xi' \rangle = \frac{v_0 x}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{i\xi't' - i\xi t} \hat{G}_{l, \omega_n}^{i, k}(t, t'),$$

з якого випливає перетворення

$$\langle \xi, i | G_{l, \omega_n} | k, \xi' \rangle = \frac{v_0 x}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{i\xi't' - i\xi t} G_{l, \omega_n}^{i, k}(t, t'). \quad (4.5.7)$$

Далі підставляємо представлення (4.5.7) у формулу (4.5.6) для одновимірної густини струму $j(z)$. Тоді ми приходимо до формули

$$j(z) = \frac{1}{2} \frac{e}{m} N(0) T \sum_{l, \omega_n} \int_0^1 dx \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \sum_{i, k} G_{l, \omega_n}^{i, k}(t, t') I^{k, i}(x, t, t'), \quad (4.5.8)$$

у якій фігурують так звана густина електронних станів $N(0) = \frac{m^2 v_0}{2\pi^2}$ на поверхні Фермі та інтеграли

$$I^{k,i}(x, t, t') = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' e^{-i\xi t + i\xi' t'} J_{p'_z, p_z}^{k,i}(z). \quad (4.5.9)$$

Далі підставляємо одновимірні хвильові функції (4.4.5) у формулу (4.5.4) та обчислюємо всі чотири величини $J_{p'_z, p_z}^{k,i}(z)$, беручи до уваги лише великомасштабні зміни. Це означає, що ми обмежимося лише експонентами $e^{i(p_z - p'_z)z}$, коефіцієнти при яких обчислимо шляхом застосування наближень $p_z \cong p_0 x$ та $p'_z \cong p_0 x$. Якщо виконати заміну $z = v_0 x t_1$ та врахувати перетворення (3.2.19), то можна прийти до таких чотирьох величин:

$$\begin{aligned} J_{p'_z, p_z}^{1,1}(v_0 x t_1) &= J_{p'_z, p_z}^{2,2}(v_0 x t_1) \cong \frac{p_0 x}{2\pi} \left[e^{i(\xi - \xi') t_1} - e^{-i(\xi - \xi') t_1} \right], \\ J_{p'_z, p_z}^{1,2}(v_0 x t_1) &\cong \frac{p_0 x}{2\pi} \left[\left\{ \sqrt{R} (\text{sign } t_1) + i\sqrt{D} \right\} e^{i(\xi - \xi') t_1} - \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \sqrt{R} (\text{sign } t_1) - i\sqrt{D} \right\} e^{-i(\xi - \xi') t_1} \right], \\ J_{p'_z, p_z}^{2,1}(v_0 x t_1) &\cong \frac{p_0 x}{2\pi} \left[\left\{ \sqrt{R} (\text{sign } t_1) - i\sqrt{D} \right\} e^{i(\xi - \xi') t_1} - \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \sqrt{R} (\text{sign } t_1) + i\sqrt{D} \right\} e^{-i(\xi - \xi') t_1} \right]. \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

Оскільки $z = v_0 x t_1$, то формула (4.5.9) перетвориться на формулу

$$I^{k,i}(x, t, t') = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' e^{-i\xi t + i\xi' t'} J_{p'_z, p_z}^{k,i}(v_0 x t_1). \quad (4.5.11)$$

Формули (4.5.10) підставляємо у формулу (4.5.11) та отримуємо такі чотири інтеграли:

$$\begin{aligned} \frac{I^{1,1}(x, t, t')}{2\pi p_0 x} &= \frac{I^{2,2}(x, t, t')}{2\pi p_0 x} = \delta(t - t_1) \delta(t' - t_1) - \delta(t + t_1) \delta(t' + t_1), \\ \frac{I^{1,2}(x, t, t')}{2\pi p_0 x} &= \left\{ \sqrt{R} (\text{sign } t_1) + i\sqrt{D} \right\} \delta(t - t_1) \delta(t' - t_1) - \\ &\quad - \left\{ \sqrt{R} (\text{sign } t_1) - i\sqrt{D} \right\} \delta(t + t_1) \delta(t' + t_1), \\ \frac{I^{2,1}(x, t, t')}{2\pi p_0 x} &= \left\{ \sqrt{R} (\text{sign } t_1) - i\sqrt{D} \right\} \delta(t - t_1) \delta(t' - t_1) - \\ &\quad - \left\{ \sqrt{R} (\text{sign } t_1) + i\sqrt{D} \right\} \delta(t + t_1) \delta(t' + t_1). \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

Далі підставляємо всі інтеграли (4.5.12) у формулу (4.5.8) для одновимірної густини струму $j(z)$. Тоді ми отримуємо вираз

$$j(z) = \pi e v_0 N(0) T \sum_{l, \omega_n} \int_0^1 x dx \left[G_{l, \omega_n}^{1,1}(t, t) - G_{l, \omega_n}^{1,1}(-t, -t) + G_{l, \omega_n}^{2,2}(t, t) - G_{l, \omega_n}^{2,2}(-t, -t) + \left\{ \sqrt{R}(\text{sign } z) + i\sqrt{D} \right\} \left\{ G_{l, \omega_n}^{2,1}(t, t) - G_{l, \omega_n}^{1,2}(-t, -t) \right\} - \left\{ \sqrt{R}(\text{sign } z) - i\sqrt{D} \right\} \left\{ G_{l, \omega_n}^{2,1}(-t, -t) - G_{l, \omega_n}^{1,2}(t, t) \right\} \right], \quad (4.5.13)$$

у якому використано позначення для величини $t = \frac{z}{v_0 x}$.

Одновимірну густину струму $j(z)$, яка визначається за допомогою формули (4.5.13), ми будемо обчислювати на границі IS. Це означає, що $z = 0$. За таких обставин формула (4.5.13) перетворюється на формулу

$$j(0) = 2\pi i e v_0 N(0) T \sum_{l, \omega_n} \int_0^1 x \sqrt{D(x)} \left[G_{l, \omega_n}^{2,1}(0, 0) - G_{l, \omega_n}^{1,2}(0, 0) \right] dx. \quad (4.5.14)$$

4.6. Розв'язки квазікласичних рівнянь

З формули (4.5.14) видно, що з метою підрахунку густини струму $j(0)$ на границі IS потрібно спочатку знайти функції Гріна $G_{l, \omega_n}^{1,2}(t, t')$ та $G_{l, \omega_n}^{2,1}(t, t')$ для випадку, коли $t = t' = 0$. Це означає, що нам потрібно розв'язати квазікласичні рівняння (4.4.31), тобто диференціальні рівняння першого порядку для функцій Гріна (4.4.30) у так званому t -представленні. Вищезгадані рівняння дуже зручно інтегрувати окремо на кожному із таких двох проміжків: $t < 0$ та $t > 0$.

4.6.1. Лівий надпровідник. У нашому дослідженні лівий надпровідник розміщено в області $z < 0$. У так званому t -представленні цій області відповідає область $t < 0$. Для такого випадку нам потрібно взяти до уваги матричні функції (4.4.33) та (4.4.34) з метою перетворити квазікласичні рівняння (4.4.31). За таких обставин для матричних функцій Гріна $\hat{\mathcal{G}}_l^{1,1}(t, t')$ та $\hat{\mathcal{G}}_l^{2,1}(t, t')$ має місце система двох диференціальних рівнянь, яку можна подати у вигляді одного рівняння

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{A}_k \right) \hat{L}^{(k)}(t, t') = \delta(t - t') \quad (4.6.1)$$

для матричної функції

$$\hat{L}^{(k)}(t, t') = i \left[\hat{\mathcal{G}}_l^{1,1}(t, t') + (-1)^k \hat{C}^* \hat{\mathcal{G}}_l^{2,1}(t, t') \right]. \quad (4.6.2)$$

Для матриці

$$\hat{A}_k = \omega_n \sigma_z + \frac{i\sigma_x}{2} \left[E_l^{(k)} - E_l^{*(k)} \right] - \frac{\sigma_y}{2} \left[E_l^{(k)} + E_l^{*(k)} \right]$$

виконується умова $(\hat{A}_k)^2 = \{\omega_n^{(k)}\}^2$, у якій $\omega_n^{(k)} = \sqrt{\omega_n^2 + |E_l^{(k)}|^2}$. Ми також маємо індекс k , який може набувати значень 1 та 2.

Це означає, що з формули (4.6.2) можна отримати такі результати:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}}_l^{2,1}(t, t') &= \frac{\mathcal{C}}{2i} \left[\hat{L}^{(2)}(t, t') - \hat{L}^{(1)}(t, t') \right], \\ \hat{\mathcal{G}}_l^{1,1}(t, t') &= \frac{1}{2i} \left[\hat{L}^{(1)}(t, t') + \hat{L}^{(2)}(t, t') \right]. \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

Диференціальне рівняння першого порядку (4.6.1) потрібно розв'язати, тобто проінтегрувати. З цією метою ми будемо повертатися до результатів (3.4.26) та (3.4.27). Якщо виконати заміну $\tilde{\omega}_n \rightarrow \omega_n^{(k)}$, то можна отримати диференціальне рівняння другого порядку

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \{\omega_n^{(k)}\}^2 \right) \mathcal{K}(t - t', \omega_n^{(k)}) = \delta(t - t') \quad (4.6.4)$$

та його розв'язок

$$\mathcal{K}(t - t', \omega_n^{(k)}) = -\frac{1}{2\omega_n^{(k)}} \exp \left\{ -|t - t'| \omega_n^{(k)} \right\}. \quad (4.6.5)$$

Диференціальне рівняння другого порядку (4.6.4) для функції (4.6.5) можна вважати диференціальним рівнянням першого порядку

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{A}_k \right) \hat{f}^{(k)}(t - t') = \delta(t - t') \quad (4.6.6)$$

для матричної функції

$$\hat{f}^{(k)}(t - t') = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \hat{A}_k \right) \mathcal{K}(t - t', \omega_n^{(k)}). \quad (4.6.7)$$

Заміна $\tilde{\omega}_n \rightarrow \omega_n^{(k)}$ перетворює похідну (3.4.29) на похідну

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{K}(t - t', \omega_n^{(k)}) = \frac{\text{sign}(t - t')}{2} \exp \left\{ -|t - t'| \omega_n^{(k)} \right\}. \quad (4.6.8)$$

Функцію (4.6.5) та похідну (4.6.8) підставляємо у формулу (4.6.7), внаслідок чого ми приходимо до результату

$$\hat{f}^{(k)}(t - t') = \frac{1}{2\omega_n^{(k)}} \left[\omega_n^{(k)} \text{sign}(t - t') + \hat{A}_k \right] \exp \left\{ -|t - t'| \omega_n^{(k)} \right\}. \quad (4.6.9)$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку (4.6.1) ми будемо шукати у вигляді розкладу

$$\hat{L}^{(k)}(t, t') = \hat{L}_0^{(k)}(t, t') + \hat{f}^{(k)}(t - t'). \quad (4.6.10)$$

Далі нам потрібно підставляти розклад (4.6.10) у диференціальне рівняння першого порядку (4.6.1). Якщо взяти до уваги диференціальне рівняння першого порядку (4.6.6), то для матричної функції $\hat{L}_0^{(k)}(t, t')$ можна отримати однорідне диференціальне рівняння першого порядку

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{A}_k \right) \hat{L}_0^{(k)}(t, t') = 0, \quad (4.6.11)$$

загальний розв'язок якого можна подати за допомогою формули

$$\hat{L}_0^{(k)}(t, t') = \exp(-t\hat{A}_k) \hat{E}^{(k)}(t'). \quad (4.6.12)$$

Матрична функція $\hat{E}^{(k)}(t')$ є сталою інтегрування. Цілком аналогічно до того, як ми встановлювали справедливість операторної тотожності (3.4.10), ми також можемо легко встановити справедливість операторної тотожності

$$\exp(-t\hat{A}_k) = \frac{\omega_n^{(k)} - \hat{A}_k}{2\omega_n^{(k)}} \exp\{t\omega_n^{(k)}\} + \frac{\omega_n^{(k)} + \hat{A}_k}{2\omega_n^{(k)}} \exp\{-t\omega_n^{(k)}\}. \quad (4.6.13)$$

Матричну експоненту (4.6.13) підставляємо у формулу (4.6.12) та отримуємо загальний розв'язок

$$\begin{aligned} \hat{L}_0^{(k)}(t, t') &= \frac{\omega_n^{(k)} - \hat{A}_k}{2\omega_n^{(k)}} \hat{E}^{(k)}(t') \exp\{t\omega_n^{(k)}\} + \\ &+ \frac{\omega_n^{(k)} + \hat{A}_k}{2\omega_n^{(k)}} \hat{E}^{(k)}(t') \exp\{-t\omega_n^{(k)}\}. \end{aligned} \quad (4.6.14)$$

У загальному розв'язку (4.6.14) потрібно позбутися доданка з експонентою $\exp\{-t\omega_n^{(k)}\}$, яка розбігається для випадку, коли $t \rightarrow -\infty$. Для цього ми будемо множити матрицю

$$\omega_n^{(k)} + \hat{A}_k = \begin{pmatrix} \omega_n^{(k)} + \omega_n & iE_l^{(k)} \\ -iE_l^{*(k)} & \omega_n^{(k)} - \omega_n \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} b_k E_l^{(k)} & E_l^{(k)} \\ -E_l^{*(k)} & -\frac{1}{b_k} E_l^{*(k)} \end{pmatrix}, \quad (4.6.15)$$

у якій фігурує позначення $b_k = \frac{\omega_n^{(k)} + \omega_n}{iE_l^{(k)}}$, на матрицю

$$\hat{E}^{(k)}(t') = \begin{pmatrix} \alpha_k(t') & c_k(t') \\ a_k(t') & \beta_k(t') \end{pmatrix}. \quad (4.6.16)$$

Тоді ми приходимо до формули

$$\begin{aligned} \left[\omega_n^{(k)} + \hat{A}_k \right] \hat{E}^{(k)}(t') &= i \begin{pmatrix} b_k E_l^{(k)} & E_l^{(k)} \\ -E_l^{*(k)} & -\frac{1}{b_k} E_l^{*(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_k(t') & c_k(t') \\ a_k(t') & \beta_k(t') \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.6.17)$$

з якої випливають такі чотири рівності:

$$\begin{aligned} A_{11}^{(k)} &= i E_l^{(k)} [a_k(t') + b_k \alpha_k(t')], \\ A_{12}^{(k)} &= i b_k E_l^{(k)} \left[c_k(t') + \frac{1}{b_k} \beta_k(t') \right], \\ A_{21}^{(k)} &= -\frac{i E_l^{*(k)}}{b_k} [a_k(t') + b_k \alpha_k(t')], \\ A_{22}^{(k)} &= -i E_l^{*(k)} \left[c_k(t') + \frac{1}{b_k} \beta_k(t') \right]. \end{aligned}$$

Нехай виконуються такі дві умови:

$$a_k(t') + b_k \alpha_k(t') = 0, \quad c_k(t') + \frac{1}{b_k} \beta_k(t') = 0. \quad (4.6.18)$$

Умови (4.6.18) перетворюють матрицю (4.6.16) на матрицю

$$\hat{E}^{(k)}(t') = \begin{pmatrix} \alpha_k(t') & -\frac{1}{b_k} \beta_k(t') \\ -b_k \alpha_k(t') & \beta_k(t') \end{pmatrix} \quad (4.6.19)$$

та дозволяють отримати такі чотири умови:

$$A_{11}^{(k)} = 0, \quad A_{12}^{(k)} = 0, \quad A_{21}^{(k)} = 0, \quad A_{22}^{(k)} = 0.$$

Ці умови перетворюють тотожність (4.6.17) на тотожність

$$\left[\omega_n^{(k)} + \hat{A}_k \right] \hat{E}^{(k)}(t') = 0. \quad (4.6.20)$$

Матрицю (4.6.19), тотожність (4.6.20) та тотожність

$$\frac{\omega_n^{(k)} - \hat{A}_k}{2\omega_n^{(k)}} \hat{E}^{(k)}(t') = \frac{2\omega_n^{(k)} - [\omega_n^{(k)} + \hat{A}_k]}{2\omega_n^{(k)}} \hat{E}^{(k)}(t') = \hat{E}^{(k)}(t'),$$

яка є прямим наслідком тотожності (4.6.20), потрібно підставляти у формулу (4.6.14) для загального розв'язку однорідного диференціального рівняння першого порядку (4.6.11). Тоді ми можемо записати, що

$$\hat{L}_0^{(k)}(t, t') = \begin{pmatrix} \alpha_k(t') & -\frac{1}{b_k} \beta_k(t') \\ -b_k \alpha_k(t') & \beta_k(t') \end{pmatrix} \exp \left\{ t \omega_n^{(k)} \right\}. \quad (4.6.21)$$

Далі потрібно підставляти матричні функції (4.6.9) та (4.6.21) у формулу для розкладу (4.6.10). Тоді виходить, що

$$\begin{aligned} \hat{L}^{(k)}(t, t') &= \begin{pmatrix} \alpha_k(t') & -\frac{1}{b_k}\beta_k(t') \\ -b_k\alpha_k(t') & \beta_k(t') \end{pmatrix} \exp\left\{t\omega_n^{(k)}\right\} + \\ &+ \frac{1}{2\omega_n^{(k)}} \left[\omega_n^{(k)} \operatorname{sign}(t - t') + \hat{A}_k \right] \exp\left\{-|t - t'| \omega_n^{(k)}\right\}. \end{aligned} \quad (4.6.22)$$

4.6.2. Правий надпровідник. Правий надпровідник розміщено в області $z > 0$, якій відповідає область $t > 0$ у t -представленні. Для такого випадку нам потрібно взяти до уваги матричні функції (4.4.33) та (4.4.35) з метою перетворити квазікласичні рівняння (4.4.31). За таких обставин для матричних функцій Гріна $\hat{\mathcal{G}}_l^{1,1}(t, t')$ та $\hat{\mathcal{G}}_l^{2,1}(t, t')$ має місце система двох диференціальних рівнянь, яку можна подати у вигляді одного рівняння

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{A}_k \right) \hat{M}^{(k)}(t, t') = \delta(t - t') \quad (4.6.23)$$

для матричної функції

$$\hat{M}^{(k)}(t, t') = i \left[\hat{\mathcal{G}}_l^{1,1}(t, t') + (-1)^k \mathcal{C} \hat{\mathcal{G}}_l^{2,1}(t, t') \right]. \quad (4.6.24)$$

Варто наголосити на тому, що зі щойно поданої формули (4.6.24) ми можемо отримати такі результати:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}}_l^{2,1}(t, t') &= \frac{\mathcal{C}^*}{2i} \left[\hat{M}^{(2)}(t, t') - \hat{M}^{(1)}(t, t') \right], \\ \hat{\mathcal{G}}_l^{1,1}(t, t') &= \frac{1}{2i} \left[\hat{M}^{(1)}(t, t') + \hat{M}^{(2)}(t, t') \right]. \end{aligned} \quad (4.6.25)$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку (4.6.23) ми будемо шукати у вигляді розкладу

$$\hat{M}^{(k)}(t, t') = \hat{M}_0^{(k)}(t, t') + \hat{f}^{(k)}(t - t'). \quad (4.6.26)$$

Далі нам потрібно підставляти розклад (4.6.26) у диференціальне рівняння першого порядку (4.6.23). Якщо взяти до уваги диференціальне рівняння першого порядку (4.6.6), то для матричної функції $\hat{M}_0^{(k)}(t, t')$ можна отримати однорідне диференціальне рівняння першого порядку

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{A}_k \right) \hat{M}_0^{(k)}(t, t') = 0, \quad (4.6.27)$$

загальний розв'язок якого можна подати за допомогою формули

$$\begin{aligned} \hat{M}_0^{(k)}(t, t') &= \exp(-t\hat{A}_k) \hat{F}^{(k)}(t') = \frac{\omega_n^{(k)} - \hat{A}_k}{2\omega_n^{(k)}} \hat{F}^{(k)}(t') \exp\{t\omega_n^{(k)}\} + \\ &+ \frac{\omega_n^{(k)} + \hat{A}_k}{2\omega_n^{(k)}} \hat{F}^{(k)}(t') \exp\{-t\omega_n^{(k)}\}. \end{aligned} \quad (4.6.28)$$

У загальному розв'язку (4.6.28) потрібно позбутися доданка з експонентою $\exp\{t\omega_n^{(k)}\}$, яка розбігається для випадку, коли $t \rightarrow +\infty$. Для цього ми будемо шукати сталу інтегрування $\hat{F}^{(k)}(t')$ з умови

$$\left[\omega_n^{(k)} - \hat{A}_k\right] \hat{F}^{(k)}(t') = 0. \quad (4.6.29)$$

Оскільки

$$\omega_n^{(k)} - \hat{A}_k = \begin{pmatrix} \omega_n^{(k)} - \omega_n & -iE_l^{(k)} \\ iE_l^{*(k)} & \omega_n^{(k)} + \omega_n \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \frac{1}{b_k} E_l^{(k)} & -E_l^{(k)} \\ E_l^{*(k)} & -b_k E_l^{*(k)} \end{pmatrix},$$

то умова (4.6.29) буде виконуватись тоді, коли

$$\hat{F}^{(k)}(t') = \begin{pmatrix} \gamma_k(t') & b_k^* \delta_k(t') \\ \frac{1}{b_k} \gamma_k(t') & \delta_k(t') \end{pmatrix}. \quad (4.6.30)$$

Тотожність (4.6.29), матрицю (4.6.30) та тотожність

$$\frac{\omega_n^{(k)} + \hat{A}_k}{2\omega_n^{(k)}} \hat{F}^{(k)}(t') = \frac{2\omega_n^{(k)} - [\omega_n^{(k)} - \hat{A}_k]}{2\omega_n^{(k)}} \hat{F}^{(k)}(t') = \hat{F}^{(k)}(t'),$$

яка є прямим наслідком тотожності (4.6.29), потрібно підставляти у формулу (4.6.28) для загального розв'язку однорідного диференціального рівняння першого порядку (4.6.27). Тоді ми можемо записати, що

$$\hat{M}_0^{(k)}(t, t') = \begin{pmatrix} \gamma_k(t') & b_k^* \delta_k(t') \\ \frac{1}{b_k} \gamma_k(t') & \delta_k(t') \end{pmatrix} \exp\{-t\omega_n^{(k)}\}. \quad (4.6.31)$$

Далі потрібно підставляти матричні функції (4.6.9) та (4.6.31) у формулу для розкладу (4.6.26). Тоді виходить, що

$$\begin{aligned} \hat{M}^{(k)}(t, t') &= \begin{pmatrix} \gamma_k(t') & b_k^* \delta_k(t') \\ \frac{1}{b_k} \gamma_k(t') & \delta_k(t') \end{pmatrix} \exp\{-t\omega_n^{(k)}\} + \\ &+ \frac{1}{2\omega_n^{(k)}} \left[\omega_n^{(k)} \operatorname{sign}(t - t') + \hat{A}_k\right] \exp\{-|t - t'| \omega_n^{(k)}\}. \end{aligned} \quad (4.6.32)$$

4.7. Струм-фазова залежність

Сталі інтегрування $\alpha_k(t')$, $\beta_k(t')$, $\gamma_k(t')$ та $\delta_k(t')$, які фігурують у формулах (4.6.22) та (4.6.32), потрібно шукати з так званої «умови зшивання». Тут ми маємо на увазі умови неперервності для матричних функцій Гріна $\hat{\mathcal{G}}_l^{1,1}(t, t')$ та $\hat{\mathcal{G}}_l^{2,1}(t, t')$ при переході через границю IS, що з математичної точки зору означає наявність таких двох рівностей:

$$\lim_{t \rightarrow -0} \hat{\mathcal{G}}_l^{1,1}(t, t') = \lim_{t \rightarrow +0} \hat{\mathcal{G}}_l^{1,1}(t, t'), \quad \lim_{t \rightarrow -0} \hat{\mathcal{G}}_l^{2,1}(t, t') = \lim_{t \rightarrow +0} \hat{\mathcal{G}}_l^{2,1}(t, t'). \quad (4.7.1)$$

Якщо $t \rightarrow -0$, то мають місце формули (4.6.3). Що стосується формул для функцій Гріна (4.6.25), то вони справедливі для випадку, коли $t \rightarrow +0$. Тоді ми підставляємо формули (4.6.3) та (4.6.25) в «умову зшивання» (4.7.1), внаслідок чого приходимо до таких матричних рівностей:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^* \left[\hat{M}^{(2)}(0, t') - \hat{M}^{(1)}(0, t') \right] &= \mathcal{C} \left[\hat{L}^{(2)}(0, t') - \hat{L}^{(1)}(0, t') \right], \\ \hat{L}^{(1)}(0, t') + \hat{L}^{(2)}(0, t') &= \hat{M}^{(1)}(0, t') + \hat{M}^{(2)}(0, t'). \end{aligned} \quad (4.7.2)$$

Якщо $t' = 0$, то рівності (4.7.2) перетворюються на такі рівності:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^* \left[\hat{M}^{(2)}(0, 0) - \hat{M}^{(1)}(0, 0) \right] &= \mathcal{C} \left[\hat{L}^{(2)}(0, 0) - \hat{L}^{(1)}(0, 0) \right], \\ \hat{L}^{(1)}(0, 0) + \hat{L}^{(2)}(0, 0) &= \hat{M}^{(1)}(0, 0) + \hat{M}^{(2)}(0, 0). \end{aligned} \quad (4.7.3)$$

Далі потрібно підставляти матричні функції (4.6.22) та (4.6.32) у дві матричні тотожності (4.7.3). Тоді ми отримуємо таку замкнену систему:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^* \left[\frac{\gamma_2(0)}{b_2^*} - \frac{\gamma_1(0)}{b_1^*} \right] - \mathcal{C} [b_1 \alpha_1(0) - b_2 \alpha_2(0)] &= \left\{ \mathcal{C}^* - \mathcal{C} \right\} \frac{i}{2} \left\{ \frac{E_l^{*(2)}}{\omega_n^{(2)}} - \frac{E_l^{*(1)}}{\omega_n^{(1)}} \right\}, \\ \gamma_1(0) + \gamma_2(0) - \alpha_1(0) - \alpha_2(0) &= 0, \\ \mathcal{C}^* [\gamma_2(0) - \gamma_1(0)] - \mathcal{C} [\alpha_2(0) - \alpha_1(0)] &= \left\{ \mathcal{C}^* - \mathcal{C} \right\} \frac{\omega_n}{2} \left\{ \frac{1}{\omega_n^{(1)}} - \frac{1}{\omega_n^{(2)}} \right\}, \\ \frac{\gamma_1(0)}{b_1^*} + \frac{\gamma_2(0)}{b_2^*} + b_1 \alpha_1(0) + b_2 \alpha_2(0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.7.4)$$

Далі підставляємо матриці (4.4.30) та (4.6.22) у тотожність (4.6.2). Тоді якщо $t \rightarrow -0$ та $t' = 0$, то ми отримуємо такі формули:

$$\begin{aligned} \alpha_1(0) &= i G_{l, \omega_n}^{1,1}(0, 0) - i \mathcal{C}^* G_{l, \omega_n}^{2,1}(0, 0) - \frac{\omega_n}{2\omega_n^{(1)}}, \\ \alpha_2(0) &= i G_{l, \omega_n}^{1,1}(0, 0) + i \mathcal{C}^* G_{l, \omega_n}^{2,1}(0, 0) - \frac{\omega_n}{2\omega_n^{(2)}}. \end{aligned} \quad (4.7.5)$$

Далі підставляємо матриці (4.4.30) та (4.6.32) у тотожність (4.6.24). Тоді якщо $t \rightarrow +0$ та $t' = 0$, то ми отримуємо такі формули:

$$\begin{aligned}\gamma_1(0) &= iG_{l,\omega_n}^{1,1}(0,0) - i\mathcal{C}G_{l,\omega_n}^{2,1}(0,0) - \frac{\omega_n}{2\omega_n^{(1)}}, \\ \gamma_2(0) &= iG_{l,\omega_n}^{1,1}(0,0) + i\mathcal{C}G_{l,\omega_n}^{2,1}(0,0) - \frac{\omega_n}{2\omega_n^{(2)}}.\end{aligned}\quad (4.7.6)$$

Формули (4.7.5) та (4.7.6) підставляємо в замкнену систему (4.7.4) чотирьох лінійних рівнянь і приходимо до такої замкненої системи:

$$\begin{aligned}a_{11} \left[iG_{l,\omega_n}^{1,1}(0,0) \right] + a_{12} \left[i\mathcal{C}^* G_{l,\omega_n}^{2,1}(0,0) \right] &= d_1, \\ a_{21} \left[iG_{l,\omega_n}^{1,1}(0,0) \right] + a_{22} \left[i\mathcal{C}^* G_{l,\omega_n}^{2,1}(0,0) \right] &= d_2.\end{aligned}\quad (4.7.7)$$

У лівих частинах рівнянь системи (4.7.7) присутні такі коефіцієнти:

$$\begin{aligned}a_{11} &= -\left\{ \mathcal{C}^* + \mathcal{C} \right\} \left\{ b_1 + \frac{1}{b_1^*} \right\} - \left\{ \mathcal{C}^* - \mathcal{C} \right\} \left\{ b_2 + \frac{1}{b_1^*} \right\}, \\ a_{12} &= \left\{ \mathcal{C}^* + \mathcal{C} \right\} \left\{ b_1 + \frac{1}{b_1^*} \right\} - \left\{ \mathcal{C}^* - \mathcal{C} \right\} \left\{ b_2 + \frac{1}{b_1^*} \right\}, \\ a_{21} &= -\left\{ \mathcal{C}^* + \mathcal{C} \right\} \left\{ b_2 + \frac{1}{b_2^*} \right\} - \left\{ \mathcal{C}^* - \mathcal{C} \right\} \left\{ b_1 + \frac{1}{b_2^*} \right\}, \\ a_{22} &= -\left\{ \mathcal{C}^* + \mathcal{C} \right\} \left\{ b_2 + \frac{1}{b_2^*} \right\} + \left\{ \mathcal{C}^* - \mathcal{C} \right\} \left\{ b_1 + \frac{1}{b_2^*} \right\}.\end{aligned}\quad (4.7.8)$$

У правих частинах рівнянь системи (4.7.7) присутні такі коефіцієнти:

$$\begin{aligned}d_1 &= \left\{ \mathcal{C}^* - \mathcal{C} \right\} \left[\frac{b_1 - b_2}{2} - \left\{ b_1 + \frac{1}{b_1^*} \right\} \frac{\omega_n}{2\omega_n^{(1)}} \right] - \left\{ \mathcal{C}^* + \mathcal{C} \right\} \left\{ b_1 + \frac{1}{b_1^*} \right\} \frac{\omega_n}{2\omega_n^{(1)}}, \\ d_2 &= \left\{ \mathcal{C}^* - \mathcal{C} \right\} \left[\frac{b_2 - b_1}{2} - \left\{ b_2 + \frac{1}{b_2^*} \right\} \frac{\omega_n}{2\omega_n^{(2)}} \right] - \left\{ \mathcal{C}^* + \mathcal{C} \right\} \left\{ b_2 + \frac{1}{b_2^*} \right\} \frac{\omega_n}{2\omega_n^{(2)}}.\end{aligned}\quad (4.7.9)$$

Внаслідок розв'язування системи (4.7.7) отримуємо формулу

$$G_{l,\omega_n}^{2,1}(0,0) = \frac{\mathcal{C}}{i} \frac{a_{11}d_2 - a_{21}d_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.\quad (4.7.10)$$

Детальний аналіз диференціальних рівнянь першого порядку (4.4.31) показує, що формули для функцій Гріна $\hat{\mathcal{G}}_l^{2,2}(t, t')$ та $\hat{\mathcal{G}}_l^{1,2}(t, t')$ можна отримати з уже

знайдених формул для функцій Гріна $\hat{\mathcal{G}}_l^{1,1}(t, t')$ та $\hat{\mathcal{G}}_l^{2,1}(t, t')$ шляхом одночасного виконання таких заміни:

$$\sqrt{D} \rightarrow -\sqrt{D}, \quad \hat{\mathcal{G}}_l^{1,1}(t, t') \rightarrow \hat{\mathcal{G}}_l^{2,2}(t, t'), \quad \hat{\mathcal{G}}_l^{2,1}(t, t') \rightarrow \hat{\mathcal{G}}_l^{1,2}(t, t').$$

Тоді ми підставляємо коефіцієнти (4.7.8) та (4.7.9) у формулу (4.7.10) для величини $G_{l, \omega_n}^{2,1}(0, 0)$, яка після виконання заміни $\sqrt{D} \rightarrow -\sqrt{D}$ перетвориться на величину $G_{l, \omega_n}^{1,2}(0, 0)$. У такому разі отримуємо різницю

$$G_{l, \omega_n}^{2,1}(0, 0) - G_{l, \omega_n}^{1,2}(0, 0) = \frac{\sqrt{D(x)}}{4F_l(x, \omega_n)} \left\{ E_l^{*(2)} E_l^{(1)} - E_l^{*(1)} E_l^{(2)} \right\}, \quad (4.7.11)$$

у якій фігурує позначення для функції

$$F_l(x, \omega_n) = R(x) \omega_n^{(1)} \omega_n^{(2)} + \frac{D(x)}{2} \left[\omega_n^2 + \omega_n^{(1)} \omega_n^{(2)} + \sum_{i,k} g_{l,i} g_{l,k} \Delta_i \Delta_k \cos(\chi_i - \varphi_k) \right].$$

Тут використано позначення для таких двох функцій:

$$R(x) = 1 - D(x), \quad D(x) = \frac{x^2}{x^2 + \left(\frac{mU_0}{p_0} \right)^2}.$$

Далі нам потрібно підставляти різницю (4.7.11) у вираз (4.5.14) для густини струму $j(0) \equiv j$. Тоді ми приходимо до формули

$$j = \sum_{i,k} j_{i,k} \sin(\chi_i - \varphi_k), \quad (4.7.12)$$

яка містить позначення для чотирьох величин

$$j_{i,k} = \pi e v_0 N(0) T \Delta_i \Delta_k \sum_l g_{l,i} g_{l,k} \sum_{\omega_n} \int_0^1 \frac{x D(x) dx}{F_l(x, \omega_n)}. \quad (4.7.13)$$

Струм-фазова залежність (4.7.12) є основним результатом нашого теоретичного дослідження. Густина струму на контакті залежить від чотирьох різниць фаз $\chi_i - \varphi_k$, бо індекси i та k можуть набувати значень 1 та 2. Варто наголосити також і на тому, що чотири величини $j_{i,k}$ також є функціями чотирьох різниць фаз $\chi_i - \varphi_k$. Оскільки поставлену задачу розв'язано в рамках моделі з кусково-сталими параметрами впорядкування, то залежність густини струму j від різниць

фаз $\chi_i - \varphi_k$ є справедливою тоді, коли температура T є неблизькою до критичної температури T_c .

Струм-фазову залежність (4.7.12) отримано для довільного $D \in (0; 1)$, але ще додатково потрібно досліджувати вплив ефектів розпаровування на залежність густини струму від різниць фаз для асимптотичного випадку, коли $D \lesssim 1$. Адже ці ефекти є суттєвими, якщо прозорість діелектричного прошарку D є близькою до одиниці [2, 12, 151].

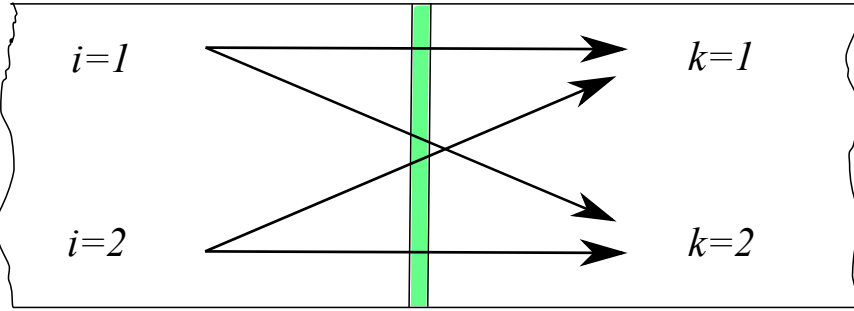


Рис. 4.1: Схематичне зображення складових повного струму, що протікає з одного надпровідника в інший крізь плівку діелектрика в тунельному надпровідному контакті.

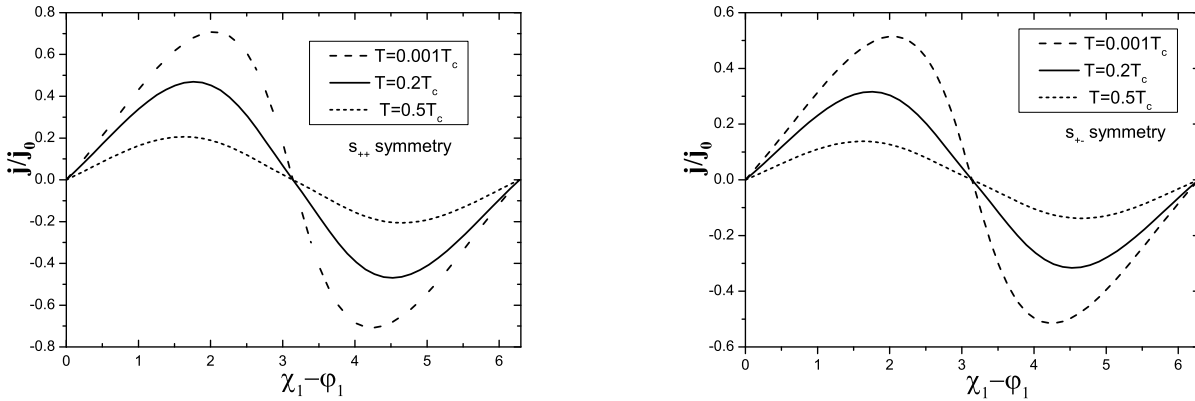


Рис. 4.2: Струм-фазова залежність у тунельному надпровідному контакті, який утворено на основі однакових надпровідників із s_{++} та s_{\pm} симетріями параметрів впорядкування при різних значеннях температури T . Для проведення чисельних розрахунків покладено: $g_{1,1} = 0.3$, $g_{2,2} = 0.15$, $g_{1,2} = 0.1$ та $\frac{mU_0}{p_0} = \frac{1}{\sqrt{19}}$.

Якщо $D \ll 1$, то формула (4.7.13) перетворюється на формулу

$$j_{i,k} = \pi e v_0 N(0) T \Delta_i \Delta_k \sum_l g_{l,i} g_{l,k} \sum_{\omega_n} \frac{1}{\omega_n^{(1)} \omega_n^{(2)}} \int_0^1 x D(x) dx.$$

Сумацію за непарними мацубарівськими частотами $\omega_n = \pi T (2n + 1)$, яка є у формулі (4.7.13), можна виконати для таких частинних випадків:

- $\varphi_2 = \varphi_1$ та $\chi_2 = \chi_1$ (s_{++} симетрія);
- $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$ та $\chi_2 = \chi_1 + \pi$ (s_{\pm} симетрія).

Тоді формула (4.7.13) зводиться до формули

$$\frac{j}{j_0} = \frac{T}{T_c} \sum_{l=1}^2 \int_0^1 \frac{x D(x) \sin(\chi_1 - \varphi_1) dx}{\tilde{D}(x)} Q_l^{\pm}(T) \text{th} \frac{Q_l^{\pm}(T) \tilde{D}(x)}{2}, \quad (4.7.14)$$

яка містить позначення $j_0 = \frac{\pi}{2} e v_0 N(0) T_c$, $Q_l^{\pm}(T) = g_{l,1} \frac{\Delta_1}{T} \pm g_{l,2} \frac{\Delta_2}{T}$ та

$$\tilde{D}(x) = \sqrt{1 - D(x) \left(\sin \frac{\chi_1 - \varphi_1}{2} \right)^2}.$$

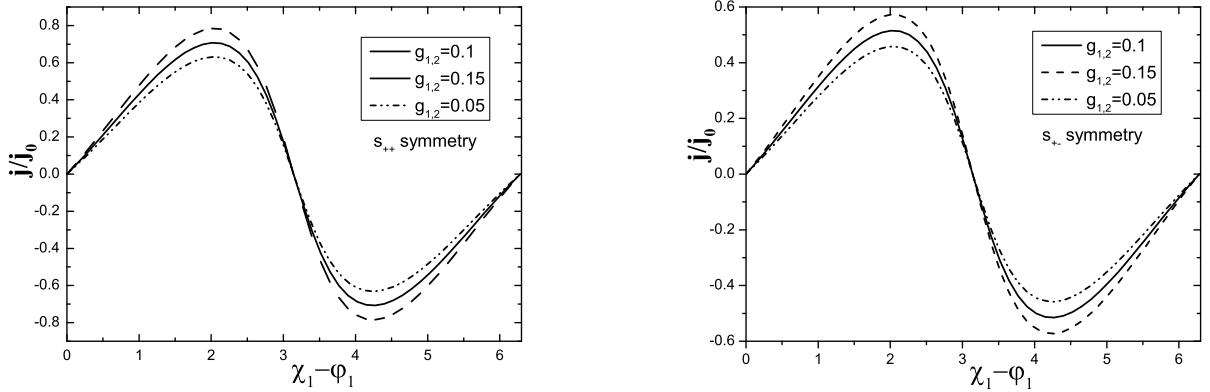


Рис. 4.3: Струм-фазова залежність у тунельному надпровідному контакті, який утворено на основі однакових надпровідників із s_{++} та s_{\pm} симетріями параметрів впорядкування при різних значеннях коефіцієнта міжзонного зв'язку $g_{1,2}$. Варто зауважити, що $g_{1,1} = 0.3$, $g_{2,2} = 0.15$, $T = 0.001 T_c$ та $\frac{mU_0}{p_0} = \frac{1}{\sqrt{19}}$.

Знаки «+» та «-» у формулі для $Q_l^{\pm}(T)$ обираємо для випадків s_{++} симетрії та s_{\pm} симетрії відповідно. Варто наголосити на тому, що прямими наслідками умови (4.1.10) є такі три нерівності:

$$g_{1,1} > 0, \quad g_{2,2} > 0, \quad g_{1,1}g_{2,2} - (g_{1,2})^2 > 0.$$

Як бачимо, права частина формули (4.7.12) складається з чотирьох доданків, кожен із яких описує протікання струму з першої та другої зон першого надпровідника до обох зон другого надпровідника, що схематично зображено на рисунку (4.1).

На рисунку (4.2) зображено графіки залежності безрозмірної густини струму $\frac{j}{j_0}$ від різниці фаз $\chi_1 - \varphi_1$ для обох типів симетрії параметрів впорядкування і при різних значеннях температури T . Як бачимо, максимальний струм досягає більших значень у випадку, коли надпровідники, з яких складається тунельний надпровідний контакт, мають s_{++} симетрію. Якщо ж контакт утворено на основі надпровідників із s_{\pm} симетрією, то в такому випадку критичний струм контакту приблизно на 25% є меншим. Також ми бачимо, що зі зменшенням температури T максимум струму в контакті досягається для різниці фаз $\chi_1 - \varphi_1 > \frac{\pi}{2}$. Це є найбільш помітним для температури $T = 0.001 T_c$.

Вплив константи міжзонного зв'язку $g_{1,2}$ на значення струму в контакті зображено на рисунку (4.3). Як бачимо, характер цього впливу несуттєво залежить від симетрії параметрів впорядкування. Зі збільшенням коефіцієнта міжзонного зв'язку $g_{1,2}$ числове значення густини струму зростає.

4.8. Висновки та обговорення

У цьому розділі метод функціонального інтеграла, який виявився досить ефективним у теорії однощільної надпровідності, поширений на випадок надпровідників із двома енергетичними щілинами. Показано, що в методі функціонального інтеграла наближення середнього поля формулюється найбільш природним чином.

Головним результатом цього розділу є одержана формула для залежності струму від різниці фаз у тунельному надпровідному контакті, який утворено на основі двозонних надпровідників. З аналізу цієї формули встановлено, що струм у контакті формується чотирма внесками — це тунелювання куперівських пар з першої і другої зон одного надпровідника до обох зон другого надпровідника. Показано, що числове значення струму в контакті залежить від симетрії параметра впорядкування: для s_{++} симетрії критичний струм контакту суттєво переважає критичний струм контакту, який утворено на основі надпровідників із s_{\pm} симетрією.

З аналізу впливу константи міжзонного зв'язку $g_{1,2}$ на струм у контакті вста-

новлено, що зі збільшенням коефіцієнта міжзонного зв'язку $g_{1,2}$ числове значення густини струму зростає, а характер цього впливу несуттєво залежить від симетрії параметрів впорядкування.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі представлено результати теоретичного дослідження рівноважних струмових станів у надпровідних контактах із тунельним типом провідності. У дослідженні зроблено головний акцент на вивченні фундаментальних фізичних механізмів, що спричиняють відхилення залежності струму від різниці фаз від стандартної синусоїдної форми. Для цього було розглянуто тунельний надпровідний SIS — контакт у широкому інтервалі значень коефіцієнта проходження електронів та за наявності немагнітних домішок довільної концентрації, що дозволило з'ясувати вплив прозорості та домішок на струм-фазову залежність у таких контактах. Розглянуто шарувату надпровідну структуру типу SIS'IS з довільною товщиною проміжного прошарку та при довільних значеннях прозорості подвійного дельта-функційного бар'єра, сформованого двома діелектричними прошарками. Окрім цього, у роботі вперше для дослідження струм-фазової залежності у тунельних надпровідних контактах типу SIS на основі двозонних надпровідників застосовано формалізм квазікласичних рівнянь у t -представленні, який раніше ефективно використовувався для контактів на основі однозонних надпровідників.

На основі отриманих у ході досліджень результатів ключові висновки можна сформулювати так:

1. Врахування ефектів розпаровування у тунельних надпровідних контактах типу SIS поблизу критичної температури приводить до відмінної від стандартної синусоїдної струм-фазової залежності, властивої таким контактам при малій прозорості діелектрика. Показано, що зі збільшенням коефіцієнта проходження D значення різниці фаз, при якій струм у контакті досягає максимуму, зміщується в напрямку нуля. Домішки суттєво впливають на струм у контакті при довжині вільного пробігу електронів $l \sim \xi_0$. Зі збільшенням довжини вільного пробігу цей вплив швидко зменшується і вже при $l \geq 10 \xi_0$ є несуттєвим.
2. Досліджено динаміку флюксонів у чистому і довгому джозефсонівському контакті з нетривіальною струм-фазовою залежністю. Побудовано аналітичний розв'язок модифікованого рівняння синус-Гордона для прозорості діелектричного прошарку, близької до одиниці. Розглянуто також і більш

реалістичний випадок, у якому враховано потік неспарених електронів через контакт, на який подається деякий постійний струм. За допомогою узагальненого рівняння синус-Гордона записано закон еволюції енергії контакту в часі. На основі закону збереження енергії контакту отримано аналітичну формулу для рівноважної швидкості флюксона.

3. У моделі з кусково-сталим параметром впорядкування отримано нову формулу для залежності струму від різниці фаз у двобар'єрному надпровідному SIS'IS — контакті. За допомогою аналізу одержаного результату показано, що критичний струм контакту є осциляційною функцією товщини проміжного прошарку. Зі збільшенням товщини осциляції починають згасати, що пов'язано з послабленням зв'язку між зовнішніми надпровідниками. Зі зменшенням товщини проміжного прошарку числове значення різниці фаз, при якій струм у контакті досягає максимуму, зміщується в область $\varphi > \frac{\pi}{2}$.
4. Для двозонного надпровідника виконано представлення статистичної суми у вигляді функціонального інтеграла. Показано, що в такому представленні задача про обчислення статистичної суми розбивається на дві послідовні задачі:
 - обчислення статистичної суми системи вільних електронів, що перебувають у полі комплексних джерел електронних пар $\zeta_l(\vec{r}, \tau)$;
 - усереднення статистичної суми, одержаної у першому пункті, по простору джерел електронних пар із Гауссівським розподілом.

Використовуючи представлення статистичної суми у вигляді функціонального інтеграла, сформульовано наближення середнього поля та побудовано основні рівняння мікроскопічної теорії надпровідності у методі функцій Гріна.

5. Побудовано квазікласичні рівняння для функцій Гріна в t -представленні, за допомогою яких виконано мікроскопічний опис стаціонарних струмових станів у тунельному надпровідному контакті на основі двозонних надпровідників та одержано нову аналітичну формулу для залежності струму від різниць фаз параметрів впорядкування. Аналізуючи одержану формулу для випадків, коли фази обох параметрів впорядкування у надпровіднику є однакові (s_{++} симетрія) та зсунуті на π (s_{\pm} симетрія), встановлено, що в обох випадках зі зменшенням температури максимум струму у кон-

такті досягається при різниці фаз на контакті $\chi_1 - \varphi_1 > \frac{\pi}{2}$. Показано, що числове значення струму в контакті залежить від симетрії параметрів впорядкування: для s_{\pm} симетрії числове значення критичного струму контакту є приблизно на 25% меншим від відповідного числового значення критичного струму контакту для s_{++} симетрії. Останній факт може використовуватися в експериментальних дослідженнях симетрії параметрів впорядкування двозонних надпровідників.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Josephson B. D. Possible new effects in superconductive tunnelling // *Phys. Lett.* 1962. Vol. 1, no. 7. P. 251—253.
- [2] Golubov A. A., Kupriyanov M. Yu., and Il'ichev E. The current-phase relation in Josephson junctions // *Rev. Mod. Phys.* 2004. Vol. 76, no. 2. P. 411—469.
- [3] Askerzade Iman, Bozbey Ali, and Cantürk Mehmet. Modern Aspects of Josephson Dynamics and Superconductivity Electronics. Springer International Publishing, 2017. 186 p.
- [4] Nevirkovets I. P. and Shafranjuk S. E. Resonant Josephson tunneling in SIS'IS multilayered devices // *Phys. Rev. B.* 1999. Vol. 59, no. 2. P. 1311—1317.
- [5] Brinkman A. and Golubov A. A. Coherence effects in double-barrier Josephson junctions // *Phys. Rev. B.* 2000. Vol. 61, no. 17. P. 11297—11300.
- [6] Schulze H., Behr R., Müller F., and Niemeyer J. Nb/Al/AlO_x/AlO_x/Al/Nb Josephson junctions for programmable voltage standards // *Applied Physics Letters.* 1998. Vol. 73, no. 7. P. 996—998.
- [7] Nevirkovets I. P., Ketterson J. B., and Lomatch S. Anomalous critical current in double-barrier Nb/Al – AlO_x – Al – AlO_x – Nb devices // *Applied Physics Letters.* 1999. Vol. 74, no. 11. P. 1624—1626.
- [8] Xi X. X. Two-band superconductor magnesium diboride // *Rep. Prog. Phys.* 2008. Vol. 71, no. 11. P. 116501.
- [9] Giubileo F., Roditchev D., Sacks W., Lamy R., Thanh D. X., Klein J., Miraglia S., Fruchart D., Marcus J., and Monod Ph. Two-Gap State Density in MgB₂: A True Bulk Property Or A Proximity Effect? // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 87, no. 17. P. 177008.
- [10] Kamihara Yoichi, Watanabe Takumi, Hirano Masahiro, and Hosono Hideo. Iron-Based Layered Superconductor La [O_{1-x}F_x] FeAs ($x = 0.05—0.12$) with $T_c = 26$ K // *J. Am. Chem. Soc.* 2008. Vol. 130, no. 11. P. 3296—3297.
- [11] Stewart G. R. Superconductivity in iron compounds // *Reviews of Modern Physics.* 2011. Vol. 83, no. 4. P. 1589—1652.
- [12] Pastukh O. Yu., Shutovskii A. M., and Sakhnyuk V. E. The effect of depairing on the current-phase relation in SIS junctions in the presence of nonmagnetic

- impurities of arbitrary concentration // *Low Temp. Phys.* 2017. Vol. 43, no. 6. P. 664—669.
- [13] Shutovskyi A. M., Svidzinskyi A. V., Sakhnyuk V. E., and Pastukh O. Yu. Microscopic Calculation of Josephson Current in Tunnel Junctions with Two-Gap Superconductors // *Ukr. J. Phys.* 2018. Vol. 63, no. 11. P. 1001—1005.
- [14] Шутовський А. М., Свідзинський А. В., Сахнюк В. Є. і Пастух О. Ю. Метод функціонального інтегрування в теорії двошліпної надпровідності // *Журн. фіз. досл.* 2019. Т. 23, № 3. С. 3709.
- [15] Shutovskyi A. M. and Sakhnyuk V. E. Current-phase relation in layered superconducting structures of SIS'IS type // *Condensed Matter Physics.* 2021. Vol. 24, no. 2. P. 23701.
- [16] Shutovskyi Arsen and Sakhnyuk Vasyl. Current density dependence on phase differences in superconducting tunnel junctions based on two-gap superconductors // *Physica C: Superconductivity and its Applications.* 2021. Vol. 588. P. 1353915.
- [17] Shutovskyi A, Sakhnyuk V, and Zolotaryuk Y. Fluxon dynamics in long Josephson junctions with nontrivial current-phase relation // *The European Physical Journal B.* 2022. Vol. 95, no. 8. P. 134.
- [18] Шутовський А. М., Пастух О. Ю. і Сахнюк В. Є. Метод функціонального інтегрування в теорії двошліпної надпровідності // Матеріали VIII міжнародної наукової конференції «Релаксаційні, нелінійні й акустооптичні процеси та матеріали» — РНАОПМ'2016. Луцьк—Світязь, Україна : Вежа—Друк. 1—4 червня 2016 р. С. 235.
- [19] Shutowskiiy A. M., Svidzinsky A. V., Sakhnyuk V. E., and Pastukh O. Y. Microscopic calculation of josephson current in superconducting tunnel junction on the basis of two-band superconductors // VII Young Scientists Conference “Problems of Theoretical Physics”. Kyiv, Ukraine : Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine. December 13—15, 2016. P. 15.
- [20] Shutovskyi A. M., Svidzinsky A. V., Sakhnyuk V. E., and Pastukh O. Y. The current states in superconducting tunnel junction on the basis of two-band superconductors // VIII International Conference for Professionals & Young Scientists “Low Temperature Physics”. Kharkiv, Ukraine : B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences

- of Ukraine. May 29 — June 2, 2017. P. 66.
- [21] Шутовський А. М., Свідзинський А. В. і Сахнюк В. Є. Мікроскопічний розрахунок джозефсонівського струму в контактах на основі двозонних надпровідників // Матеріали II міжнародної наукової конференції «Актуальні проблеми фундаментальних наук» — АПФН'2017. Луцьк—Світязь, Україна : Вежа—Друк. 1—5 червня 2017 року. С. 169.
- [22] Shutovskyi A. M., Svidzinsky A. V., and Sakhnyuk V. E. The functional integration method in the two-band superconductivity theory // VIII Young Scientists Conference “Problems of Theoretical Physics”. Kyiv, Ukraine : Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine. December 12—14, 2017. P. 37.
- [23] Shutovskyi A. M., Sakhnyuk V. E., and Viligurskyi O. M. Equilibrium current states in layered superconducting structures // Proceedings of IX International scientific conference «Relaxed, nonlinear, acoustic optical processes and materials» — RNAOPM'2018 / ed. by Myronchuk G., Zamuruieva O., and Trokhimchuk P. Lutsk — Lake «Svityaz'», Ukraine : Vezha—Print. June 1—5, 2018. P. 142.
- [24] Shutovskyi Arsen, Svidzinskyi Anatolii Vadymovych, Pastukh Oleksandr, and Sakhnyuk Vasul. A current density dependence on phase differences in layered superconducting structures of SISIS type // IX Conference of Young Scientists “Problems of Theoretical Physics” / Book of Abstracts. Kyiv, Ukraine : Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine. December 4—5, 2018. P. 18.
- [25] Шутовський А. М., Сахнюк В. Є. і Бірук О. М. Динаміка флюксонів у джозефсонівських контактах з нетривіальною струм-фазовою залежністю // Матеріали III міжнародної наукової конференції «Актуальні проблеми фундаментальних наук» (APFS—2019). Луцьк—Світязь, Україна : Вежа—Друк. 1—5 червня 2019 року. С. 113.
- [26] Шутовський А. М., Сахнюк В. Є., Бірук О. М. і Вілігурський О. М. Ефект Джозефсона в тунельних надпровідних контактах типу $S_{\pm}IS_{\pm}$ та $S_{++}IS_{++}$ // Матеріали IV міжнародної наукової конференції «Актуальні проблеми фундаментальних наук» (APFS—2021). Луцьк—Світязь, Україна : Вежа—Друк. 1—5 червня 2021 року. С. 111.
- [27] Шутовський А. і Сахнюк В. Є. Залежність густини струму від різниць фаз у

тунельних надпровідних контактах типу SIS на основі двошлілинних надпровідників // XXI Всеукраїнська школа-семинар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини — 2021. Львів, Україна : Інститут фізики конденсованих систем НАН України. 11—12 жовтня 2021р. С. 13.

- [28] Сахнюк В. Є., Шутовський А. М. і Вілігурський О. М. Чисельний аналіз просторової поведінки параметра впорядкування в одно- та двозонних надпровідниках // Матеріали XI міжнародної наукової конференції «Релаксаційні, нелінійні й акустооптичні процеси та матеріали» — РНАОПМ'2022. Луцьк—Світязь, Україна : Вежа—Друк. 1—5 червня 2022 року. С. 111.
- [29] Anderson P. W. and Rowell J. M. Probable Observation of the Josephson Superconducting Tunneling Effect // *Physical Review Letters*. 1963. Vol. 10, no. 6. P. 230—232.
- [30] Yanson I. K., Svistunov V. M., and Dmitrenko I. M. Experimental Observation of the Tunnel Effect for Cooper Pairs with the Emission of Photons // *JETP*. 1965. Vol. 21. P. 650.
- [31] Likharev K. K. Superconducting weak links // *Rev. Mod. Phys.* 1979. Vol. 51, no. 1. P. 101—159.
- [32] Свидзинский Анатолий Вадимович. Пространственно-неоднородные задачи теории сверхпроводимости. Москва : Наука, 1982. 312 с.
- [33] Van Duzer T. and Turner C. W. Principles of Superconductive Devices and Circuits. New York : Elsevier North Holland, 1981.
- [34] Barone A. and Paternò G. Physics and Application of the Josephson Effect. New York : John Wiley & Sons, 1982.
- [35] Likharev K. K. Dynamics of Josephson Junctions and Circuits. New York : Gordon and Breach Science Publishers, 1986.
- [36] Gallop J. C. SQUIDS, the Josephson Effects and Superconducting Electronics. Bristol : Adam Hilger, 1991.
- [37] Orlando T. P. and Delin K. A. Foundations of Applied Superconductivity. New York : Addison-Wesley, 1991.
- [38] Tinkham M. Introduction to Superconductivity. 2 ed. New York : McGraw-Hill, 1996.
- [39] Kadin A. M. Introduction to Superconducting Circuits. New York : John Wiley & Sons, 1999.

- [40] Сахнюк В. Є. і Головій В. М. Залежність струму від різниці фаз у тунельних контактах // *Науковий вісник ВНУ*. 2010. Т. 6. С. 45—48.
- [41] Сахнюк В. і Головій В. Вплив прозорості діелектричного прошарку на форму залежності струму від різниці фаз у контактах типу SIS // *Журн. фіз. досл.* 2011. Т. 15, № 2. С. 2702.
- [42] Kupriyanov M. Yu. Effect of a finite transmission of the insulating layer on the properties of SIS tunnel junctions // *JETP Letters*. 1992. Vol. 56, no. 8. P. 399.
- [43] Barash Yu. S. Anharmonic Josephson current in junctions with an interface pair breaking // *Phys. Rev. B*. 2012. Vol. 85, no. 10. P. 100503.
- [44] Götz M., Grajcar M., Il'ichev E., Khanin V. V., Zorin A. B., Niemeyer J., and Meyer H.-G. Supercurrent-phase relation of an Nb/AlO_x/Al/AlO_x/Nb-based Josephson junction at the superconducting transition of the Al Interlayer // *Phys. Rev. B*. 2000. Vol. 62, no. 22. P. R14645—R14648.
- [45] Bulaevskii L. N., Kuzii V. V., and Sobyenin A. A. Superconducting system with weak coupling to the current in the ground state // *JETP Letters*. 1977. Vol. 25, no. 7. P. 290.
- [46] Свідзинський Анатолій Вадимович. Мікроскопічна теорія надпровідності. Луцьк : Волинський національний університет імені Лесі Українки, 2011. 420 с. Режим доступу: <https://bit.ly/3xaUI9U>.
- [47] Niemeyer J. Josephson arrays for dc and ac metrology // *Supercond. Sci. Technol.* 2000. Vol. 13, no. 5. P. 546—550.
- [48] Ohta Hiroshi, Matsui Toshiaki, Uchikawa Yoshinori, Kobayashi Koichiro, and Aono Masakazu. Nanometer SNS junctions and their application to SQUIDs // *Physica C*. 2001. Vol. 352, no. 1—4. P. 186—190.
- [49] Hadfield R. H., Burnell G., Booij W. E., Lloyd S. J., Moseley R. W., and Blamire M. G. Nanoscale SNS junction fabrication in superconductor-normal metal bilayers // *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*. 2001. Vol. 11, no. 1. P. 1126—1129.
- [50] Hadfield Robert H., Burnell Gavin, Kang Dae-Joon, Blamire Mark G., Dresselhaus Paul, and Benz Samuel P. Nanofabricated SNS junction series arrays in superconductor-normal metal bilayers // *Supercond. Sci. Technol.* 2001. Vol. 14, no. 12. P. 1086—1089.
- [51] Gor'kov L. P. On the Energy Spectrum of Superconductors // *JETP*. 1958. Vol. 7. P. 505.

- [52] Eilenberger G. Transformation of Gorkov's equation for type II superconductors into transport-like equations // *Z. Phys.* 1968. Vol. 214, no. 2. P. 195—213.
- [53] Larkin A. I. and Ovchinnikov Yu. N. Quasiclassical Method in the Theory of Superconductivity // *JETP*. 1969. Vol. 28. P. 1200.
- [54] Гинзбург В. Л. и Ландау Л. Д. К теории сверхпроводимости // *ЖЭТФ*. 1950. Т. 20. С. 1064—1082.
- [55] Galaiko V. P., Svidzinskii A. V., and Slyusarev V. A. Concerning the Theory of Proximity Effects in Superconductors // *JETP*. 1969. Vol. 29. P. 454.
- [56] Svidzinskii A. V. and Golubev L. V. Methods of the theory of current states in superconducting SNS sandwiches at near critical temperatures // *Theor. Math. Phys.* 1984. Vol. 59, no. 1. P. 404—410.
- [57] Svidzinsky A. V. and Sakhnyuk V. E. Current states in SNS junction for arbitrary concentrations of nonmagnetic impurities // *Condensed Matter Physics*. 2000. Vol. 3, no. 3. P. 683—696.
- [58] Sols Fernando and Ferrer Jaime. Crossover from the Josephson effect to bulk superconducting flow // *Phys. Rev. B*. 1994. Vol. 49, no. 22. P. 15913—15919.
- [59] Ivanov Z. G., Kupriyanov M. Yu., Likharev K. K., Meriakri S. V., and Snigirev O. V. Boundary conditions for the Usadel and Eilenberger equations // *Sov. J. Low Temp. Phys.* 1981. Vol. 7. P. 274.
- [60] Usadel Klaus D. Generalized Diffusion Equation for Superconducting Alloys // *Phys. Rev. Lett.* 1970. Vol. 25, no. 8. P. 507—509.
- [61] Brinkman A., Cassel D., Golubov A. A., Kupriyanov M. Yu., Siegel M., and Rogalla H. Double-barrier Josephson junctions: theory and experiment // *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*. 2001. Vol. 11, no. 1. P. 1146—1149.
- [62] Balashov D., Buchholz F.-Im., Schulze H., Khabipov M. I., Dolata R., Kupriyanov M. Yu., and Niemeyer J. Stationary properties of SINIS double-barrier Josephson junctions // *Supercond. Sci. Technol.* 2000. Vol. 13, no. 2. P. 244—250.
- [63] Furusaki Akira, Takayanagi Hideaki, and Tsukada Masaru. Josephson effect of the superconducting quantum point contact // *Phys. Rev. B*. 1992. Vol. 45, no. 18. P. 10563—10575.
- [64] Chrestin A., Matsuyama T., and Merkt U. Critical currents and supercurrent oscillations in Josephson field-effect transistors // *Phys. Rev. B*. 1994. Vol. 49, no. 1. P. 498—504.

- [65] Johansson G., Bratus E. N., Shumeiko V. S., and Wendin G. Resonant multiple Andreev reflections in mesoscopic superconducting junctions // *Phys. Rev. B*. 1999. Vol. 60, no. 2. P. 1382—1393.
- [66] Radović Z., Paltoglou V., Lazarides N., and Flytzanis N. Resonant effects in ballistic Josephson junctions // *Eur. Phys. J. B*. 2009. Vol. 69, no. 2. P. 229—236.
- [67] Maezawa Masaaki and Shoji Akira. Overdamped Josephson junctions with Nb/AlO_x/Al/AlO_x/Nb structure for integrated circuit application // *Applied Physics Letters*. 1997. Vol. 70, no. 26. P. 3603—3605.
- [68] Balashov D., Buchholz F.-Im., Schulze H., Khabipov M. I., Kessel W., and Niemeyer J. Superconductor — insulator — normal — conductor — insulator — superconductor (Nb/Al_xO_y/Al/Al_xO_y/Nb) process development for integrated circuit applications // *Supercond. Sci. Technol.* 1998. Vol. 11, no. 12. P. 1401—1407.
- [69] Balashov D., Khabipov M. I., Buchholz F.-Im., Kessel W., and Niemeyer J. SINIS fabrication process for realizing integrated circuits in RSFQ impulse logic // *Supercond. Sci. Technol.* 1999. Vol. 12, no. 11. P. 864—867.
- [70] Kupriyanov M. Yu., Brinkman A., Golubov A. A., Siegel M., and Rogalla H. Double-barrier Josephson structures as the novel elements for superconducting large-scale integrated circuits // *Physica C: Superconductivity*. 1999. Vol. 326—327. P. 16—45.
- [71] Feynman R. P. Quantum mechanics // *The Feynman Lectures on Physics*. New York : Addison-Wesley, 1965. Vol. 3.
- [72] Mei T. Tunneling effect of Cooper pairs in a superconductor — insulator — superconductor — insulator — superconductor structure // *International Journal of Modern Physics B*. 2002. Vol. 16, no. 24. P. 3697—3705.
- [73] Carapella G., Costabile G., De Luca R., Pace S., Polcari A., and Soriano C. Josephson equations for the simplest superconducting multilayer system // *Physica C: Superconductivity*. 1996. Vol. 259, no. 3. P. 349—355.
- [74] De Luca R. and Romeo F. Sawtooth current-phase relation of a superconducting trilayer system described using Ohta's formalism // *Phys. Rev. B*. 2009. Vol. 79, no. 9. P. 094516.
- [75] Ohta Hiroshi. A self-consistent model of the Josephson junction // *SQUID — Superconducting Quantum Interference Devices and their Applications: Proceedings of the International Conference on Superconducting Quan-*

- tum Devices, Berlin (West), October 4—8, 1976 / ed. by Hahlbohm Hans-D. and Lübbig Heinz. De Gruyter, 2019. P. 35—50.
- [76] Agterberg D. F., Demler Eugene, and Janko B. Josephson effects between multi-gap and single-gap superconductors // *Phys. Rev. B*. 2002. Vol. 66, no. 21. P. 214507.
- [77] Nagamatsu Jun, Nakagawa Norimasa, Muranaka Takahiro, Zenitani Yuji, and Akimitsu Jun. Superconductivity at 39 K in magnesium diboride // *Nature*. 2001. Vol. 410, no. 6824. P. 63—64.
- [78] Lin Shi-Zeng. Josephson effect between a two-band superconductor with s_{++} or s_{\pm} pairing symmetry and a conventional s-wave superconductor // *Phys. Rev. B*. 2012. Vol. 86, no. 1. P. 014510.
- [79] Fernandes Rafael M. and Millis Andrew J. Nematicity as a Probe of Superconducting Pairing in Iron-Based Superconductors // *Phys. Rev. Lett.* 2013. Vol. 111, no. 12. P. 127001.
- [80] Hirschfeld P. J., Korshunov M. M., and Mazin I. I. Gap symmetry and structure of Fe-based superconductors // *Rep. Prog. Phys.* 2011. Vol. 74, no. 12. P. 124508.
- [81] Lee Patrick A. and Wen Xiao-Gang. Spin-triplet p -wave pairing in a three-orbital model for iron pnictide superconductors // *Phys. Rev. B*. 2008. Vol. 78, no. 14. P. 144517.
- [82] Yao Zi-Jian, Li Jian-Xin, and Wang Z. D. Spin fluctuations, interband coupling and unconventional pairing in iron-based superconductors // *New J. Phys.* 2009. Vol. 11, no. 2. P. 025009.
- [83] Si Qimiao and Abrahams Elihu. Strong Correlations and Magnetic Frustration in the High T_c Iron Pnictides // *Phys. Rev. Lett.* 2008. Vol. 101, no. 7. P. 076401.
- [84] Mazin I. I., Singh D. J., Johannes M. D., and Du M. H. Unconventional Superconductivity with a Sign Reversal in the Order Parameter of $\text{LaFeAsO}_{1-x}\text{F}_x$ // *Physical Review Letters*. 2008. Vol. 101, no. 5. P. 057003.
- [85] Barzykin V. and Gor'kov L. P. On superconducting and magnetic properties of iron-oxypnictides // *JETP Letters*. 2008. Vol. 88, no. 2. P. 142—146.
- [86] Chubukov A. V., Efremov D. V., and Eremin I. Magnetism, superconductivity, and pairing symmetry in iron-based superconductors // *Phys. Rev. B*. 2008. Vol. 78, no. 13. P. 134512.

- [87] Chen C.-T., Tsuei C. C., Ketchen M. B., Ren Z.-A., and Zhao Z. X. Integer and half-integer flux-quantum transitions in a niobium–iron pnictide loop // *Nature Phys.* 2010. Vol. 6, no. 4. P. 260—264.
- [88] Il'ichev E., Grajcar M., Hlubina R., IJsselsteijn R. P. J., Hoenig H. E., Meyer H.-G., Golubov A., Amin M. H. S., Zagoskin A. M., Omelyanchouk A. N., and Kupriyanov M. Yu. Degenerate Ground State in a Mesoscopic $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ Grain Boundary Josephson Junction // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 86, no. 23. P. 5369—5372.
- [89] Testa G., Monaco A., Esposito E., Sarnelli E., Kang D.-J., Mennema S. H., Tarte E. J., and Blamire M. G. Midgap state-based π -junctions for digital applications // *Appl. Phys. Lett.* 2004. Vol. 85, no. 7. P. 1202—1204.
- [90] Sarnelli E., Adamo M., De Nicola S., Cibella S., Leoni R., and Nappi C. Amplitude sensitive experiment of pairing symmetry in d_0 - d_0 submicron Y–Ba–Cu–O bicrystal grain boundary junctions // *Supercond. Sci. Technol.* 2013. Vol. 26, no. 10. P. 105013.
- [91] Mahmoodi R., Shevchenko S. N., and Kolesnichenko Yu. A. Josephson effect in point contacts between “ f -wave” superconductors // *Low Temp. Phys.* 2002. Vol. 28, no. 3. P. 184—189.
- [92] Kolesnichenko Yu. A., Omelyanchouk A. N., and Shevchenko S. N. Josephson and spontaneous currents at the interface between two d -wave superconductors with transport current in the banks // *Low Temp. Phys.* 2004. Vol. 30, no. 3. P. 213—217.
- [93] Kolesnichenko Yu. A. and Shevchenko S. N. Josephson effect in a weak link between borocarbides // *Low Temp. Phys.* 2005. Vol. 31, no. 2. P. 137—138.
- [94] Kolesnichenko Yu. A., Omelyanchouk A. N., and Zagoskin A. M. Spontaneous currents in Josephson junctions between unconventional superconductors and d -wave qubits (Review) // *Low Temp. Phys.* 2004. Vol. 30, no. 7. P. 535—553.
- [95] Testa G., Sarnelli E., Monaco A., Esposito E., Ejrnaes M., Kang D.-J., Mennema S. H., Tarte E. J., and Blamire M. G. Evidence of midgap-state-mediated transport in 45° symmetric [001] tilt $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ bicrystal grain-boundary junctions // *Phys. Rev. B.* 2005. Vol. 71, no. 13. P. 134520.
- [96] Sperstad Iver Bakken, Linder Jacob, and Sudbø Asle. Quantum transport in ballistic s_{\pm} -wave superconductors with interband coupling: Conductance spectra, crossed Andreev reflection, and Josephson current // *Phys. Rev. B.* 2009.

Vol. 80, no. 14. P. 144507.

- [97] Wang Da, Lu Hong-Yan, and Wang Qiang-Hua. The Finite Temperature Effect on Josephson Junction between an s-Wave Superconductor and an s_{\pm} -Wave Superconductor // *Chinese Phys. Lett.* 2013. Vol. 30, no. 7. P. 077404.
- [98] Burmistrova A. V. and Devyatov I. A. Microscopic theory for phase-sensitive experiments to determine the symmetry of the order parameter in Fe-based superconductors // *EPL*. 2014. Vol. 107, no. 6. P. 67006.
- [99] Burmistrova A. V., Devyatov I. A., Golubov Alexander A., Yada Keiji, Tanaka Yukio, Tortello M., Gonnelli R. S., Stepanov V. A., Ding Xiaxin, Wen Hai-Hu, and Greene L. H. Josephson current in Fe-based superconducting junctions: Theory and experiment // *Phys. Rev. B*. 2015. Vol. 91, no. 21. P. 214501.
- [100] Ota Yukihiro, Machida Masahiko, Koyama Tomio, and Matsumoto Hideki. Theory of Heterotic Superconductor-Insulator-Superconductor Josephson Junctions between Single- and Multiple-Gap Superconductors // *Phys. Rev. Lett.* 2009. Vol. 102, no. 23. P. 237003.
- [101] Yerin Y. S., Kiyko A. S., Omelyanchouk A. N., and Il'ichev E. Josephson systems based on ballistic point contacts between single-band and multi-band superconductors // *Low Temp. Phys.* 2015. Vol. 41, no. 11. P. 885—896.
- [102] Graser S. and Dahm T. Transfer-matrix approach to multiband Josephson junctions // *Phys. Rev. B*. 2007. Vol. 75, no. 1. P. 014507.
- [103] Brinkman A., Golubov A. A., Rogalla H., Dolgov O. V., Kortus J., Kong Y., Jepsen O., and Andersen O. K. Multiband model for tunneling in MgB_2 junctions // *Phys. Rev. B*. 2002. Vol. 65, no. 18. P. 180517.
- [104] Brinkman A., Golubov A. A., and Kupriyanov M. Yu. Proximity effect in normal metal-multiband superconductor hybrid structures // *Physical Review B*. 2004. Vol. 69, no. 21. P. 214407.
- [105] Tao Y. C., Liu S. Y., Bu. N., Wang J, and Di Y. S. Tunable $0-\pi$ transition by interband coupling in iron-based superconductor Josephson junctions // *New J. Phys.* 2015. Vol. 18, no. 1. P. 013010.
- [106] Yerin Y. and Omelyanchouk A. N. Proximity and Josephson effects in microstructures based on multiband superconductors (Review Article) // *Low Temp. Phys.* 2017. Vol. 43, no. 9. P. 1013—1037.

- [107] Nappi C., Romeo F., Sarnelli E., and Citro R. Quantum waveguide theory of the Josephson effect in multiband superconductors // *Phys. Rev. B*. 2015. Vol. 92, no. 22. P. 224503.
- [108] Burmistrova Angelina V., Devyatov Igor A., Golubov Alexander A., Yada Keiji, and Tanaka Yukio. Theory of Tunneling Spectroscopy of Multi-Band Superconductors // *J. Phys. Soc. Jpn.* 2013. Vol. 82, no. 3. P. 034716.
- [109] Golubov A. A. and Mazin I. I. Designing phase-sensitive tests for Fe-based superconductors // *Appl. Phys. Lett.* 2013. Vol. 102, no. 3. P. 032601.
- [110] Stanev Valentin G. and Koshelev Alexei E. Anomalous proximity effects at the interface of s and s_{\pm} superconductors // *Phys. Rev. B*. 2012. Vol. 86, no. 17. P. 174515.
- [111] Apostolov Stanislav and Levchenko Alex. Josephson current and density of states in proximity circuits with s_{\pm} superconductors // *Phys. Rev. B*. 2012. Vol. 86, no. 22. P. 224501.
- [112] Koshelev A. E. and Stanev V. Proximity fingerprint of s_{\pm} superconductivity // *EPL*. 2011. Vol. 96, no. 2. P. 27014.
- [113] Berg E., Lindner N. H., and Pereg-Barnea T. Metastable π Junction between an s_{\pm} -Wave and an s-Wave Superconductor // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 106, no. 14. P. 147003.
- [114] Ota Yukihiro, Nakai Noriyuki, Nakamura Hiroki, Machida Masahiko, Inotani Daisuke, Ohashi Yoji, Koyama Tomio, and Matsumoto Hideki. Ambegaokar-Baratoff relations for Josephson critical current in heterojunctions with multigap superconductors // *Phys. Rev. B*. 2010. Vol. 81, no. 21. P. 214511.
- [115] Yerin Y. S. and Omelyanchouk A. N. Josephson currents in point contacts between dirty two-band superconductors // *Low Temp. Phys.* 2010. Vol. 36, no. 10. P. 969—973.
- [116] Parker D. and Mazin I. I. Possible Phase-Sensitive Tests of Pairing Symmetry in Pnictide Superconductors // *Phys. Rev. Lett.* 2009. Vol. 102, no. 22. P. 227007.
- [117] Wu Jiansheng and Phillips Philip. Experimental detection of sign-reversal pairing in iron-based superconductors // *Phys. Rev. B*. 2009. Vol. 79, no. 9. P. 092502.
- [118] Ng T. K. and Nagaosa N. Broken time-reversal symmetry in Josephson junction involving two-band superconductors // *EPL*. 2009. Vol. 87, no. 1. P. 17003.

- [119] Golubov A. A., Brinkman A., Tanaka Yukio, Mazin I. I., and Dolgov O. V. Andreev Spectra and Subgap Bound States in Multiband Superconductors // *Phys. Rev. Lett.* 2009. Vol. 103, no. 7. P. 077003.
- [120] Linder Jacob, Sperstad Iver B., and Sudbø Asle. $0-\pi$ phase shifts in Josephson junctions as a signature for the s_{\pm} -wave pairing state // *Phys. Rev. B.* 2009. Vol. 80, no. 2. P. 020503.
- [121] Moor Andreas, Volkov Anatoly F., and Efetov Konstantin B. Realization of the π -state in junctions formed by multiband superconductors with a spin density wave // *Phys. Rev. B.* 2013. Vol. 87, no. 10. P. 100504.
- [122] Nappi C., De Nicola S., Adamo M., and Sarnelli E. Model prediction of high-temperature π -states in iron pnictide superconductor-insulator-superconductor Josephson junctions // *EPL*. 2013. Vol. 102, no. 4. P. 47007.
- [123] Waldram J. R. and Lumley J. M. Direct measurements of the current-phase relation in superconducting weak links // *Revue de Physique Appliquée.* 1975. Vol. 10, no. 1. P. 7—10.
- [124] Schmidt V. V. The Physics of Superconductors: Introduction to Fundamentals and Applications / ed. by Müller Paul and Ustinov Alexey V. Berlin : Springer Berlin Heidelberg, 2012. 207 p.
- [125] McLaughlin D. W. and Scott A. C. Perturbation analysis of fluxon dynamics // *Phys. Rev. A.* 1978. Vol. 18, no. 4. P. 1652—1680.
- [126] Ustinov A. V. Solitons in Josephson junctions // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* 1998. Vol. 123, no. 1—4. P. 315—329.
- [127] Averin Dmitri V., Rabenstein Kristian, and Semenov Vasili K. Rapid ballistic readout for flux qubits // *Phys. Rev. B.* 2006. Vol. 73, no. 9. P. 094504.
- [128] Soloviev I. I., Klenov N. V., Pankratov A. L., Revin L. S., Il'ichev E., and Kuzmin L. S. Soliton scattering as a measurement tool for weak signals // *Phys. Rev. B.* 2015. Vol. 92, no. 1. P. 014516.
- [129] Wustmann W. and Osborn K. D. Reversible fluxon logic: Topological particles allow ballistic gates along one-dimensional paths // *Phys. Rev. B.* 2020. Vol. 101, no. 1. P. 014516.
- [130] Krasnov V. M. and Winkler D. Shape of a moving fluxon in stacked Josephson junctions // *Phys. Rev. B.* 1999. Vol. 60, no. 18. P. 13179—13188.
- [131] Askerzade I. N. Effects of anharmonicity of current-phase relation in Josephson junctions (Review Article) // *Low Temperature Physics.* 2015. Vol. 41, no. 4.

P. 241—259.

- [132] Osin A. S. and Fominov Ya. V. Superconducting phases and the second Josephson harmonic in tunnel junctions between diffusive superconductors // *Phys. Rev. B*. 2021. Vol. 104, no. 6. P. 064514.
- [133] Goldobin E., Koelle D., Kleiner R., and Buzdin A. Josephson junctions with second harmonic in the current-phase relation: Properties of φ junctions // *Phys. Rev. B*. 2007. Vol. 76, no. 22. P. 224523.
- [134] Margaris Ioannis, Paltoglou Vassilis, Alexandrakis Matthew, and Flytzanis Nikolaos. A diagrammatic approach to triplet supercurrents in ferromagnetic Josephson junctions // *The European Physical Journal B*. 2015. Vol. 88, no. 6. P. 145.
- [135] Nishida Munehiro, Kanayama Takafumi, Nakajo Takaya, Fujii Toshiyuki, and Hatakenaka Noriyuki. Bound fluxon pair in one-dimensional SQUID array // *Physica C: Superconductivity*. 2010. Vol. 470, no. 19. P. 832—834.
- [136] Zolotaryuk Yaroslav and Starodub Ivan O. Fluxon mobility in an array of asymmetric superconducting quantum interference devices // *Phys. Rev. E*. 2015. Vol. 91, no. 1. P. 013202.
- [137] Zolotaryuk Yaroslav and Starodub Ivan O. Embedded solitons in the double sine-Gordon lattice with next-neighbor interactions // *Phys. Rev. E*. 2019. Vol. 100, no. 3. P. 032216.
- [138] Askerzade I. N., Askerbeyli R. T., and Ulku I. Effect of unconventional current-phase relation of Josephson junction on escape rate in ac SQUID // *Physica C: Superconductivity and its Applications*. 2022. Vol. 598. P. 1354068.
- [139] De Luca Roberto. Current-phase relation of double-barrier Josephson junctions with a two-gap superconductor as intermediate electrode // *The European Physical Journal B*. 2013. Vol. 86, no. 6. P. 294.
- [140] Peyrard M. and Remoissenet M. Solitonlike excitations in a one-dimensional atomic chain with a nonlinear deformable substrate potential // *Phys. Rev. B*. 1982. Vol. 26, no. 6. P. 2886—2899.
- [141] Condat C. A., Guyer R. A., and Miller M. D. Double sine-Gordon chain // *Phys. Rev. B*. 1983. Vol. 27, no. 1. P. 474—494.
- [142] Kryuchkov Sergei V. and Kukhar Egor I. Nonlinear electromagnetic waves in semi-Dirac nanostructures with superlattice // *The European Physical Journal B*. 2020. Vol. 93, no. 4. P. 62.

- [143] Svidzinsky A. V., Antsygina T. N., and Bratus' E. N. Concerning the theory of the Josephson effect in pure SNS junctions // *Journal of Low Temperature Physics*. 1973. Vol. 10, no. 1—2. P. 131—136.
- [144] Gradshteyn I. S. and Ryzhik I. M. Table of Integrals, Series, and Products / ed. by Jeffrey Alan and Zwillinger Daniel. 7 ed. Academic Press, 2007. 1220 p. Access mode: <http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/TISPISGIMR.pdf>.
- [145] Свідзинський Анатолій Вадимович. Математичні методи теоретичної фізики. 4 вид. Київ : Інститут теоретичної фізики імені М. М. Боголюбова, 2009. Т. 1.
- [146] Свідзинський А., Вілігурський О., Бірук О. і Ракуцький А. До теорії струмових станів у надпровідних контактах // *Журн. фіз. досл.* 1999. Т. 3, № 3. С. 359—369.
- [147] Shygorin P. P., Svidzynskiy A. V., and Materian I. O. Calculation of Josephson Current in a Two-Barrier Tunnel Junction // *Ukr. J. Phys.* 2017. Vol. 62, no. 6. P. 518—525.
- [148] Svidzinskii A. V. Functional integration method in the theory of superconductivity // *Theor. Math. Phys.* 1971. Vol. 9, no. 2. P. 1134—1145.
- [149] Zhitomirsky M. E. and Dao V.-H. Ginzburg-Landau theory of vortices in a multi-gap superconductor // *Phys. Rev. B*. 2004. Vol. 69, no. 5. P. 054508.
- [150] Akhramovich L. N., Rakov Y. A., and Svidzinskii A. V. Josephson current in a snins junction // *Theor. Math. Phys.* 1988. Vol. 77, no. 3. P. 1316—1323.
- [151] Pastukh O. Yu., Sakhnyuk V. E., and Svidzinsky A. V. Current states in symmetrical SNINS junction for arbitrary concentrations of nonmagnetic impurities // *Phys. Lett. A*. 2018. Vol. 382, no. 32. P. 2149—2155.

Додаток А

Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

А.1. Список публікацій

1. Pastukh O. Yu., Shutovskii A. M., and Sakhnyuk V. E. The effect of depairing on the current-phase relation in SIS junctions in the presence of nonmagnetic impurities of arbitrary concentration // *Low Temp. Phys.* 2017. Vol. 43, no. 6. P. 664—669.
2. Shutovskyi A. M., Svidzinskyi A. V., Sakhnyuk V. E., and Pastukh O. Yu. Microscopic Calculation of Josephson Current in Tunnel Junctions with Two-Gap Superconductors // *Ukr. J. Phys.* 2018. Vol. 63, no. 11. P. 1001—1005.
3. Шутовський А. М., Свідзинський А. В., Сахнюк В. Є. і Пастух О. Ю. Метод функціонального інтегрування в теорії двощілинної надпровідності // *Журн. фіз. досл.* 2019. Т. 23, № 3. С. 3709.
4. Shutovskyi A. M. and Sakhnyuk V. E. Current-phase relation in layered superconducting structures of SIS'IS type // *Condensed Matter Physics.* 2021. Vol. 24, no. 2. P. 23701.
5. Shutovskyi Arsen and Sakhnyuk Vasyl. Current density dependence on phase differences in superconducting tunnel junctions based on two-gap superconductors // *Physica C: Superconductivity and its Applications.* 2021. Vol. 588. P. 1353915.
6. Shutovskyi A, Sakhnyuk V, and Zolotaryuk Y. Fluxon dynamics in long Josephson junctions with nontrivial current-phase relation // *The European Physical Journal B.* 2022. Vol. 95, no. 8. P. 134.

А.2. Апробація матеріалів дисертації

1. Шутовський А. М., Пастух О. Ю. і Сахнюк В. Є. Метод функціонального інтегрування в теорії двощілинної надпровідності // Матеріали VIII міжнародної наукової конференції «Релаксаційні, нелінійні й акустооптичні процеси та матеріали» — РНАОПМ'2016. Луцьк—Світязь, Україна :

Вежа—Друк. 1—4 червня 2016 р. С. 235.

2. Shutovskiy A. M., Svidzinsky A. V., Sakhnyuk V. E., and Pastukh O. Y. Microscopic calculation of josephson current in superconducting tunnel junction on the basis of two-band superconductors // VII Young Scientists Conference “Problems of Theoretical Physics”. Kyiv, Ukraine : Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine. December 13—15, 2016. P. 15.
3. Shutovskiy A. M., Svidzinsky A. V., Sakhnyuk V. E., and Pastukh O. Y. The current states in superconducting tunnel junction on the basis of two-band superconductors // VIII International Conference for Professionals & Young Scientists “Low Temperature Physics”. Kharkiv, Ukraine : B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine. May 29 — June 2, 2017. P. 66.
4. Шутовський А. М., Свідзинський А. В. і Сахнюк В. Є. Мікроскопічний розрахунок джозефсонівського струму в контактах на основі двозонних надпровідників // Матеріали II міжнародної наукової конференції «Актуальні проблеми фундаментальних наук» — АПФН’2017. Луцьк—Світязь, Україна : Вежа—Друк. 1—5 червня 2017 року. С. 169.
5. Shutovskiy A. M., Svidzinsky A. V., and Sakhnyuk V. E. The functional integration method in the two-band superconductivity theory // VIII Young Scientists Conference “Problems of Theoretical Physics”. Kyiv, Ukraine : Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine. December 12—14, 2017. P. 37.
6. Shutovskiy A. M., Sakhnyuk V. E., and Viligurskiy O. M. Equilibrium current states in layered superconducting structures // Proceedings of IX International scientific conference «Relaxed, nonlinear, acoustic optical processes and materials» — RNAOPM’2018 / ed. by Myronchuk G., Zamuruieva O., and Trokhimchuk P. Lutsk — Lake «Svityaz’», Ukraine : Vezha—Print. June 1—5, 2018. P. 142.
7. Shutovskiy Arsen, Svidzinskyi Anatolii Vadymovych, Pastukh Oleksandr, and Sakhnyuk Vasul. A current density dependence on phase differences in layered superconducting structures of SISIS type // IX Conference of Young Scientists “Problems of Theoretical Physics” / Book of Abstracts. Kyiv, Ukraine : Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sci-

- ences of Ukraine. December 4—5, 2018. P. 18.
8. Шутовський А. М., Сахнюк В. Є. і Бірук О. М. Динаміка флюксонів у джозефсонівських контактах з нетривіальною струм-фазовою залежністю // Матеріали III міжнародної наукової конференції «Актуальні проблеми фундаментальних наук» (APFS—2019). Луцьк—Світязь, Україна : Вежа—Друк. 1—5 червня 2019 року. С. 113.
 9. Шутовський А. М., Сахнюк В. Є., Бірук О. М. і Вілігурський О. М. Ефект Джозефсона в тунельних надпровідних контактах типу $S_{\pm}IS_{\pm}$ та $S_{++}IS_{++}$ // Матеріали IV міжнародної наукової конференції «Актуальні проблеми фундаментальних наук» (APFS—2021). Луцьк—Світязь, Україна : Вежа—Друк. 1—5 червня 2021 року. С. 111.
 10. Шутовський А. і Сахнюк В. Є. Залежність густини струму від різниць фаз у тунельних надпровідних контактах типу SIS на основі двоциліндричних надпровідників // XXI Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини — 2021. Львів, Україна : Інститут фізики конденсованих систем НАН України. 11—12 жовтня 2021р. С. 13.
 11. Сахнюк В. Є., Шутовський А. М. і Вілігурський О. М. Чисельний аналіз просторової поведінки параметра впорядкування в одно- та двозонних надпровідниках // Матеріали XI міжнародної наукової конференції «Релаксаційні, нелінійні й акустооптичні процеси та матеріали» — РНАОПМ'2022. Луцьк—Світязь, Україна : Вежа—Друк. 1—5 червня 2022 року. С. 111.

