Національна академія наук України
Інститут теоретичної фізики імені М. М. Боголюбова

Шутовський Арсен Миколайович

УДК 538.9

Ефекти фазової когерентності у тунельних надпровідних контактах на основі однозонних та двозонних надпровідників

01.04.02 Теоретична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2023

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано у Волинському національному університеті імені Лесі Українки на кафедрі теоретичної та комп'ютерної фізики імені А. В. Свідзинського.

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент
Сахнюк Василь Євгенович,
Волинський національний університет імені Лесі Українки,
завідувач кафедри теоретичної та комп'ютерної фізики
імені А. В. Свідзинського.

Офіційні опоненти: академік НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор
Кордюк Олександр Анатолійович,
Державна наукова установа «Київський академічний
університет», директор;

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Габович Олександр Маркович,
Інститут фізики НАН України, головний науковий
співробітник відділу фізики кристалів.

Захист відбудеться «6» липня 2023 р. об 11 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.191.01 Інституту теоретичної фізики імені М. М. Боголюбова НАН України за адресою: 03143 м. Київ, вул. Метрологічна 14-б.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту теоретичної фізики імені М. М. Боголюбова НАН України.

Автореферат розіслано «6» червня 2023 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 26.191.01,
доктор фізико-математичних наук Золотарюк Я. О.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Ефект Джозефсона є одним із найяскравіших проявів ефектів квантової когерентності у макроскопічному масштабі у фізиці конденсованих систем. Дослідження цього ефекту в просторово неоднорідних надпровідних композиціях (прикладом можуть бути надпровідні контакти SIS, SIS′IS із тунельним типом провідності; літери S та I означають відповідно надпровідник та діелектрик) — це питання, інтерес до якого невпинно зростає та привертає увагу багатьох дослідницьких колективів.

При розгляді надпровідних контактів з'ясування таких питань як залежність густини струму в контакті від різниці фаз між берегами контакту $j\left(\varphi\right)$, температури, товщини нормального прошарку, коефіцієнта проходження електронів крізь діелектрик та наявності немагнітних домішок у контакті дає можливість краще зрозуміти фізику просторово неоднорідних надпровідних композицій та дозволяє ідентифікувати фізичні процеси, які формують надпровідний струм за різних умов. А це є важливим питанням для прикладного застосування джозефсонівських контактів.

Традиційно формі залежності $j\left(\varphi\right)$ не приділяли достатньої уваги та вважали, що $j \sim \sin\varphi$. Таку синусоїдну струм-фазову залежність вважали справедливою особливо для температур, близьких до критичної температури T_c. Однак, детальний аналіз надпровідних контактів дає змогу врахувати низку ефектів, які безпосередньо впливають на форму залежності струму від різниці фаз. Як наслідок, виникає струм-фазова залежність, яка за своєю математичною структурою відрізняється від синусоїдної. При розгляді джозефсонівського струму в тунельному надпровідному контакті типу SIS важливим питанням є врахування впливу прозорості діелектричного прошарку D та немагнітних домішок. Виявляється, що коли D набуває немалих значень, то числове значення критичного струму контакту може бути близьким до термодинамічно критичного струму масивного надпровідника. Внаслідок немалих значень струму виникає ефект розпаровування куперівських пар та з'являється додаткове, крім спричиненого просторовою неоднорідністю, зменшення модуля параметра впорядкування, що є особливо відчутним поблизу просторової неоднорідності. В результаті це відобразиться в ангармонійності $j\left(\varphi\right)$. Для температур, близьких до критичної, це питання є ще далеким від остаточного вивчення.

Інша цікава просторово неоднорідна система може бути одержана шляхом послідовного розміщення двох SIS — контактів. Шарувата надпровідна структура типу SIS′IS цікава тим, що в ній за певних значень товщини проміжного надпровідного прошарку може проявлятися так званий режим резонансного тунелювання. Ефекти фазової когерентності у шаруватих надпровідних структурах є також важливими з точки зору їхнього практичного використання, що продемонстровано нещодавніми експериментами з можливості виготовлення джозефсонівських контактів із бажаними для інженерії властивостями, використовуючи відомі методи нашарування.

Наступним ускладненням у плані дослідження тунельного надпровідного контакту є використання двозонних надпровідників. Великий інтерес до таких структур спостерігається в останні роки після відкриття надпровідності в дибориді магнію та залізовмісних надпровідниках, для надпровідного стану яких характерною є наявність двох параметрів впорядкування Δ_1 і Δ_2 та, відповідно, двох фаз φ_1 і φ_2. В таких надпровідниках можуть реалізовуватися стани з s_{++} симетрією, коли обидві фази є однаковими ($\varphi_1 = \varphi_2$), або стани з $s_{\pm}$ симетрією, коли дві фази зсунуті на π ($\varphi_1 = \varphi_2 + \pi$). У сполуці MgB_2 симетрія параметрів впорядкування є добре відомою: фази обох параметрів впорядкування для основного стану є рівними (s_{++} симетрія). Для залізовмісних надпровідників наразі обговорюється можливість реалізації s_{++} симетрії або $s_{\pm}$ симетрії параметрів впорядкування і це питання є відкритим. Хорошим інструментом для дослідження симетрії параметрів впорядкування є фазочутливі методи, в основі яких є ефект Джозефсона. Тому теоретичні дослідження залежності струму від різниці фаз є важливою складовою в розумінні симетрії параметрів впорядкування у незвичайних надпровідниках.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась на кафедрі теоретичної та комп'ютерної фізики імені А. В. Свідзинського Волинського національного університету імені Лесі Українки. Представлені у дисертації результати частково отримані відповідно до планів науково-дослідних робіт, які виконувалися спільно з Інститутом теоретичної фізики імені М. М. Боголюбова Національної академії наук України при грантовій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень за конкурсними проєктами №Ф76/123—2017 та №Ф76/6—2018: «Вплив просторової неоднорідності та залежних від часу збурень на властивості надпровідних контактів» (2017 рік, номер державної реєстрації 0117U007266), «Стаціонарні властивості планарних надпровідних контактів типу SIS′IS» (2018 рік, номер державної реєстрації 0018U005518c).

Мета і завдання дослідження. Мета роботи — з'ясувати механізми формування несинусоїдної залежності струму від різниці фаз у тунельних надпровідних контактах на основі однозонних та двозонних надпровідників. *Завдання* дисертаційної роботи були такі:

- дослідити вплив ефектів розпаровування на залежність струму від різниці фаз у тунельних надпровідних контактах типу SIS із немагнітними домішками довільної концентрації для області температур, близьких до критичної;
- дослідити динаміку флюксонів у джозефсонівських контактах із несинусоїдною струм-фазовою залежністю;
- для шаруватих SIS′IS — контактів у рамках моделі з кусково сталим параметром впорядкування дослідити особливості фазової залежності струму в широкому діапазоні прозорості діелектричних прошарків;
- використовуючи представлення статистичної суми двозонного надпровідника у формі функціонального інтеграла, сформулювати наближення середнього поля;
- побудувати квазікласичні рівняння для функцій Гріна в t-представленні у надпровідних SIS — контактах на основі двозонних надпровідників та дослідити залежність струму від різниць фаз для широкого діапазону прозорості діелектричного прошарку.

Об'єктами дослідження у даній дисертаційній роботі є тунельні надпровідні SIS — контакти на основі однозонних та двозонних надпровідників і шаруваті надпровідні структури типу SIS′IS на основі однозонних надпровідників.

Предметом дослідження є рівноважні струмові стани та, зокрема, залежність густини струму від різниці фаз у надпровідних контактах типів SIS та SIS′IS, ефекти розпаровування, симетрії параметрів впорядкування у двозонних надпровідниках.

Методи дослідження. Для опису рівноважних струмових станів у надпровідному SIS — контакті поблизу критичної температури використано теорію Гінзбурга-Ландау. Граничні умови для параметра впорядкування знайдені методом квазіортогональності до асимптотики. Метод температурних (мацубарівських) функцій Гріна, в рівняннях для яких виконано процедуру згладжування та в підсумку одержано квазікласичні рівняння у t-представленні, використано для одержання струм-фазових залежностей у шаруватому SIS$'$IS — контакті на основі однозонних надпровідників та в тунельному SIS — контакті на основі двозонних надпровідників.

Наукова новизна отриманих результатів. Основними результатами, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, є такі результати:

- *для контактів на основі однозонних надпровідників*

1. Встановлено струм-фазову залежність у надпровідних SIS — контактах, яка є чинною за наявності немагнітних домішок довільної концентрації та з врахуванням ефектів розпаровування. Показано, що при немалій прозорості діелектричного прошарку, коли ефекти розпаровування є суттєвими, залежність струму від різниці фаз є відмінною від синусоїдної залежності $j \sim \sin\varphi$, характерної для $D \ll 1$.
2. Запропоновано модифіковане рівняння синус-Ґордона з несинусоїдною залежністю струму від різниці фаз для аналізу впливу прозорості діелектричного прошарку на просторову поведінку флюксона. Показано, що зі збільшенням D магнітне поле розподілено більш рівномірно по області флюксона, без вираженого максимуму на осі флюксона, як це властиво для малих D.
3. Для просторово неоднорідних надпровідних структур типу SIS$'$IS у рамках моделі з кусково сталим параметром впорядкування побудовано квазікласичні рівняння для функцій Гріна в t-представленні та подано через ці функції загальну формулу для густини струму.
4. Одержано нову аналітичну формулу для струм-фазової залежності, яка є чинною для довільних значень коефіцієнта проходження електронів та товщини проміжного прошарку d. Показано, що залежність струму від d не є монотонною функцією через періодичність залежності коефіцієнта проходження електронів від d. Нова формула увібрала раніше відомі результати для частинних випадків: SIS — контакт ($d = 0$), SINIS — контакт ($\Delta_1 = 0$) та SNS — контакт ($\Delta_1 = 0$ та $D = 1$).

- *для контактів на основі двозонних надпровідників*

5. Метод функціонального інтеграла, який виявився досить ефективним у теорії однощілинної надпровідності, узагальнено на випадок надпровідників із двома енергетичними щілинами. Показано, що в методі функціонально-

го інтеграла наближення середнього поля виглядає найприроднішим.

6. Побудовано квазікласичні рівняння для функцій Гріна в t-представленні, спираючись на які виконано мікроскопічний опис стаціонарних струмових станів у тунельному надпровідному контакті на основі двозонних надпровідників та одержано нову аналітичну формулу для залежності струму від різниць фаз параметрів впорядкування. Показано, що числове значення струму в контакті залежить від симетрії параметрів впорядкування: для $\mathrm{s}_{\pm}$ симетрії числове значення критичного струму контакту є приблизно на 25% меншим від відповідного числового значення критичного струму контакту для s_{++} симетрії.

Практичне значення отриманих результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані результати є внеском у теоретичний опис стаціонарного ефекту Джозефсона в надпровідних контактах різних геометрій та можуть бути основою для подальших теоретичних досліджень, а також можуть використовуватися для аналізу експериментальних даних. Представлена в дисертації схема опису надпровідних контактів використовується в науковій роботі співробітників кафедри теоретичної та комп'ютерної фізики імені А. В. Свідзинського Волинського національного університету імені Лесі Українки та Інституту теоретичної фізики імені М. М. Боголюбова Національної академії наук України. Окремі частини дисертації можуть використовуватись у спецкурсах для аспірантів.

Особистий внесок здобувача. Постановку завдань дослідження здійснив науковий керівник роботи кандидат фізико-математичних наук, доцент Василь Євгенович Сахнюк. У спільних публікаціях авторові дисертації належить низка результатів.

При виконанні роботи [1] здобувач отримав граничні умови для рівняння Гінзбурга-Ландау в надпровідних контактах типу SIS із немагнітними домішками довільної концентрації та проаналізував залежності струму від різниці фаз.

У дослідженні [2] динаміки флюксонів у джозефсонівських контактах із несинусоїдною струм-фазовою залежністю здобувач описав просторовий розподіл різниці фаз та розподіл магнітного поля в області флюксона.

У роботі [3] здобувач отримав розв'язки квазікласичних рівнянь для функцій Гріна шаруватих надпровідних структур типу SIS$'$IS та представив через ці функції густину струму на контакті, внаслідок чого вдалось отримати формулу для струм-фазової залежності.

У роботі [4] здобувач побудував представлення статистичної суми двозонного надпровідника у формі функціонального інтеграла та сформулював на його основі наближення середнього поля, а в роботі [5] побудував систему рівнянь Горькова для мацубарівських функцій Гріна.

У роботі [6] здобувач побудував квазікласичні рівняння у t-представленні для функцій Гріна тунельного SIS — контакту на основі двозонних надпровідників, а також одержав аналітичну формулу для залежності струму від різниць фаз і проаналізував її.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації були представлені на таких конференціях:

- VIII Міжнародна наукова конференція «Релаксаційні, нелінійні й акустооптичні процеси та матеріали» (1—4 червня 2016 року, Луцьк).
- VII Young Scientists Conference «Problems of Theoretical Physics» (13—15 грудня 2016 року, Київ).
- VIII International Conference for Professionals & Young Scientists (29 травня — 2 червня 2017 року, Харків).
- II Міжнародна наукова конференція «Актуальні проблеми фундаментальних наук» (1—5 червня 2017 року, Луцьк).
- VIII International Young Scientists Conference «Problems of Theoretical Physics» (12—14 грудня 2017 року, Київ).
- IX Міжнародна наукова конференція «Релаксаційні, нелінійні й акустооптичні процеси і матеріали» (1—5 червня 2018 року, Луцьк).
- IX Conference of Young Scientists «Problems of Theoretical Physics» (4—5 грудня 2018 року, Київ).
- III Міжнародна наукова конференція «Актуальні проблеми фундаментальних наук» (1—5 червня 2019 року, Луцьк).
- IV Міжнародна наукова конференція «Актуальні проблеми фундаментальних наук» (1—5 червня 2021 року, Луцьк).
- XXI Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (11—12 жовтня 2021 року, Львів).
- XI Міжнародна наукова конференція «Релаксаційні, нелінійні й акустооптичні процеси і матеріали» (1—5 червня 2022 року, Луцьк).

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано 17 наукових праць, із яких: 4 статті у провідних наукових виданнях України [1, 3–5], 2 статті у міжнародних дослідницьких журналах [2, 6] та 11 тез конференцій [7–17].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація має такі складові: вступ, розділ із оглядом літератури, три розділи основної частини з викладеними результатами досліджень дисертанта, загальні висновки, список використаних джерел, одну таблицю та 19 рисунків. Робота викладена на 184 сторінках (повний обсяг разом з літературою — 198). Бібліографічний список містить 151 найменування публікацій у вітчизняних та закордонних виданнях.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність дослідження, сформульовано мету роботи, визначено наукову новизну і практичну цінність отриманих результатів та наведено стислу характеристику дисертації.

У **першому розділі** зроблено короткий огляд літератури за темою дисертаційної роботи. Представлено різні підходи, які використовуються при теоретичному вивченні просторово неоднорідних надпровідних структур тунельного типу, та проаналізовано наявні результати з цієї тематики.

У **другому розділі** досліджено вплив ефектів розпаровування на форму залежності густини струму j від різниці фаз φ у тунельних надпровідних контактах типу SIS у випадку наявності немагнітних домішок довільної концентрації. Вважається, що просторова однорідність порушена лише в напрямку осі OZ: два півпростори $z < 0$ та $z > 0$ зайняті двома масивними надпровідниками, а тонка діелектрична плівка займає площину $z = 0$. Наявність діелектричної плівки моделюється дельта-функційним потенціалом $U(z) = U_0 \delta(z)$. На коефіцієнт проходження електронів D крізь дельта-функційний потенціальний бар'єр ніякі додаткові умови не накладаються. Область температур вважається близькою до критичної, тому в основі дослідження використовується теорія Гінзбурга-Ландау як асимптотична форма мікроскопічної теорії надпровідності поблизу критичної температури T_c.

У цій теорії можна представити густину струму через параметр впорядкування $\Delta(\zeta)$ за допомогою формули

$$j(\zeta) = \frac{7i\zeta(3)}{16\pi^2} \frac{env_0}{p_0 \xi_0 T_c^2} \left(\Delta \frac{d \overset{*}{\Delta}}{d\zeta} - \overset{*}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\zeta} \right) \chi\left(\frac{\xi_0}{l}\right).$$

Тут $\zeta = z/\xi_0$ – безрозмірна змінна, де $\xi_0 = v_0/(2\pi T_c)$ – довжина когерентності; $\chi(\xi_0/l) = \dfrac{8}{7\zeta(3)} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2(2n+1+\xi_0/l)}$, $\zeta(3) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{-3} \cong 1.20$, l – довжина вільного пробігу електронів, яка, власне, і характеризує вміст домішок у надпровіднику.

Просторова поведінка параметра впорядкування описується нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку — рівнянням Гінзбурга-Ландау

$$\frac{\xi^2(T)}{\xi_0^2}\Delta''(\zeta) - \frac{1}{\Delta_\infty^2}|\Delta(\zeta)|^2\Delta(\zeta) + \Delta(\zeta) = 0, \tag{1}$$

де $\Delta_\infty^2 = \dfrac{8\pi^2 T_c^2}{7\zeta(3)}\left(1 - \dfrac{T}{T_c}\right)$ – квадрат параметра впорядкування у глибині зразка у просторово однорідному випадку; $\xi(T) = \xi_0 \left\{\dfrac{7\zeta(3)}{12}\dfrac{\chi(\xi_0/l)}{1-T/T_c}\right\}^{1/2}$ – характерна довжина в теорії Гінзбурга-Ландау для випадку наявності немагнітних домішок.

За наявності струму в контакті параметр впорядкування зручно представити у вигляді формули

$$\Delta(\zeta) = \Delta_\infty f(\zeta)\exp\left\{2im\chi(\zeta) \pm \frac{i\varphi}{2}\right\}. \tag{2}$$

Величини $\Delta_\infty f(\zeta)$ та $2m\chi(\zeta) \pm \varphi/2$ є, відповідно, модулем і фазою параметра впорядкування. Знаки *«плюс»* та *«мінус»* обираються для областей $z > 0$ та $z < 0$ відповідно. Що стосується функції $\chi(\zeta)$, то вона є неперервною складовою фази параметра впорядкування. Через цю функцію запроваджується надплинна швидкість $v_s(\zeta)$ за допомогою формули $\dfrac{d\chi(\zeta)}{d\zeta} = \xi_0 v_s(\zeta)$.

Використовуючи представлення (2), на основі (1) одержимо:

$$\frac{\xi^2(T)}{\xi_0^2}f''(\zeta) - 4m^2\xi^2(T)\,v_s^2(\zeta)\,f(\zeta) + f(\zeta) - f^3(\zeta) = 0, \tag{3}$$
$$f^2(\zeta)\,v_s(\zeta) = \mathrm{const}.$$

У рівнянні (3) важливим є другий доданок, який містить надплинну швидкість. Саме цей доданок і відображає вплив струму на просторову поведінку параметра впорядкування. У численній кількості статей, присвячених дослідженню надпровідних контактів, коефіцієнт проходження електронів вважається малим, що зумовлює невеликі числові значення струму. Малі значення струму несуттєво впливають на просторову поведінку параметра впорядкування, що дозволяє знехтувати доданком із надплинною швидкістю у рівнянні Гінзбурга-Ландау. У нашому дослідженні на коефіцієнт проходження електронів ніякі додаткові умови не накладались. Отже, він може змінюватись у широкому інтервалі значень, внаслідок чого числове значення струму може бути близьким до термодинамічно критичного струму. Наслідком немалих значень струму є помітний ефект розпаровування. Врахування даного ефекту відображається у збереженні доданка з надплинною швидкістю у рівнянні Гінзбурга-Ландау, що і було зроблено в даному розділі.

Оскільки рівняння Гінзбурга-Ландау одержується в припущенні, що градієнти параметра впорядкування є малі, то його використовують для опису просторової зміни параметра впорядкування на відстанях порядку характерної довжини в теорії Гінзбурга-Ландау $\xi\left(T\right)$. Проте при наближенні до границі IS параметр впорядкування змінюється значно швидше – на відстанях порядку довжини когерентності ξ_0. Тому в цій області рівняння Гінзбурга-Ландау втрачає свою чинність і для коректного опису просторової поведінки параметра впорядкування необхідно звернутися до мікроскопічної теорії надпровідності, з якої для параметра впорядкування одержуємо систему з двох лінійних інтегральних рівнянь:

$$\Delta\left(\zeta\right)=\frac{\rho}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Delta_n\left(\zeta'\right)\left[\exp\left\{-\frac{\left|2n'+1\right|}{x}\left|\zeta-\zeta'\right|\right\}+\right.$$
$$\left.+\left(\operatorname{sign}\left(\zeta\zeta'\right)\right)R\left(x\right)\exp\left\{-\frac{\left|2n'+1\right|}{x}\left(\left|\zeta\right|+\left|\zeta'\right|\right)\right\}\right]d\zeta',$$
$$\Delta_n\left(\zeta\right)=\Delta\left(\zeta\right)+\frac{1}{2\lambda}\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Delta_n\left(\zeta'\right)\left[\exp\left\{-\frac{\left|2n'+1\right|}{x}\left|\zeta-\zeta'\right|\right\}+\right.$$
$$\left.+\left(\operatorname{sign}\left(\zeta\zeta'\right)\right)R\left(x\right)\exp\left\{-\frac{\left|2n'+1\right|}{x}\left(\left|\zeta\right|+\left|\zeta'\right|\right)\right\}\right]d\zeta'.$$

У цих рівняннях: $\rho=\left|g\right|N\left(0\right)$ – безрозмірна константа зв'язку, де g – константа ефективного притягання між електронами, а $N\left(0\right)$ – густина електронних станів на поверхні фермі-сфери; $\lambda=l/\xi_0$ – безрозмірна довжина вільного пробігу електронів. Якщо $\lambda\ll1$, то надпровідник є гранично брудний, а при $\lambda\gg1$ – чистий. Змінна інтегрування $x=\cos\theta$ містить кут θ падіння електрона на границю IS. Функція $R\left(x\right)=\left(U_0/v_0\right)^2\Big/\left[x^2+\left(U_0/v_0\right)^2\right]$ – коефіцієнт відбиття електронів від бар'єра $U\left(z\right)=U_0\delta\left(z\right)$ (функція $D\left(x\right)=1-R\left(x\right)$ – коефіцієнт проходження).

Важливою проблемою, що постає у цьому розділі, є знаходження граничних умов для рівняння Гінзбурга-Ландау. Розв'язати цю проблему вдається завдяки тому факту, що поблизу границі IS, на відстанях порядку довжини когерентності ξ_0, просторова поведінка параметра впорядкування описується системою лінійних інтегральних рівнянь. Однак, якщо відійти вглиб надпровідника, на відстань порядку $\xi\left(T\right)$, то лінійне інтегральне рівняння втрачає свою чинність і параметр впорядкування буде описуватись рівнянням Гінзбурга-Ландау. Зрозуміло, що перехід від лінійного інтегрального рівняння до рівняння Гінзбурга-Ландау та навпаки не може відбуватися різко. Тому логічно вважати, що існує така область, де чинними є обидва рівняння. Зрозуміло, що це область великих z у порівнянні з довжиною когерентності та малих z у порівнянні з характерною довжиною у теорії Гінзбурга-Ландау. Тому, розглядаючи систему лінійних інтегральних рівнянь і рівняння Гінзбурга-Ландау в області їхньої спільної чинності, знаходимо граничну умову для рівняння Гінзбурга-Ландау. В результаті задача про одержання формули для струм-фазової залежності зводиться до знаходження розв'язку такої системи двох алгебричних рівнянь:

$$\begin{aligned} &\frac{\left(\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)^4}{\tau^2 q_\infty^2} f_+^4 - \left(f_\infty^2 - f_+^2\right)^2 \left(\frac{f_+^2}{2} + f_\infty^2 - 1\right) = 0, \\ &f_\infty^4 \left(1 - f_\infty^2\right) = \frac{f_+^4}{4\tau^2 q_\infty^2} \left(\sin\varphi\right)^2 . \end{aligned} \tag{4}$$

У цій системі використано такі позначення: $\tau = \xi_0 / \xi\left(T\right)$;

$$q_\infty = \frac{3\chi_1\left(\lambda\right)}{\chi\left(\lambda\right)} \int\limits_0^1 x^3 R\left(x\right) dx + \frac{12\chi\left(\lambda\right)}{\pi^2} \left\{ \int\limits_0^1 x^2 R\left(x\right) dx \right\}^2 \left\{ \int\limits_0^1 x D\left(x\right) dx \right\}^{-1},$$

де $\chi\left(\lambda\right) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(2n+1\right)^2 \left|2n'+1\right|}$, $\chi_1\left(\lambda\right) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(2n+1\right)^2 \left(2n'+1\right)^2}$, f_+ – значення функції $f\left(\zeta\right)$ при $z \ll \xi\left(T\right)$, $\left|2n'+1\right| = \left|2n+1\right| + 1/\lambda$, f_∞ – значення функції $f\left(\zeta\right)$ вглибині надпровідника ($f_\infty = 1$ без врахування ефектів розпаровування). Знайшовши розв'язок системи (4), струм-фазова залежність знаходиться за такою формулою: $I = \frac{f_+^2}{2\tau q_\infty} \sin\varphi$, $I = \frac{j}{j_0}$, $j_0 = \frac{env_0}{p_0 \xi_0} \sqrt{\frac{12}{7\zeta\left(3\right)} \chi\left(\frac{\xi_0}{l}\right)} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$.

У підсумку систему двох алгебричних рівнянь (4) було розв'язано чисельно. Але завдяки тому, що f_∞^2 мало відрізняється від одиниці (суттєвіше ця відмінність проявляється лише для околу значень різниці фаз φ_c, для якої струм досягає максимуму), вдалось також розвинути доволі непогану аналітику.

В результаті одержано нову аналітичну формулу для залежності струму від різниці фаз

$$I(\varphi) = \frac{I_C\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\varphi}{1-\varepsilon\cos\varphi}. \tag{5}$$

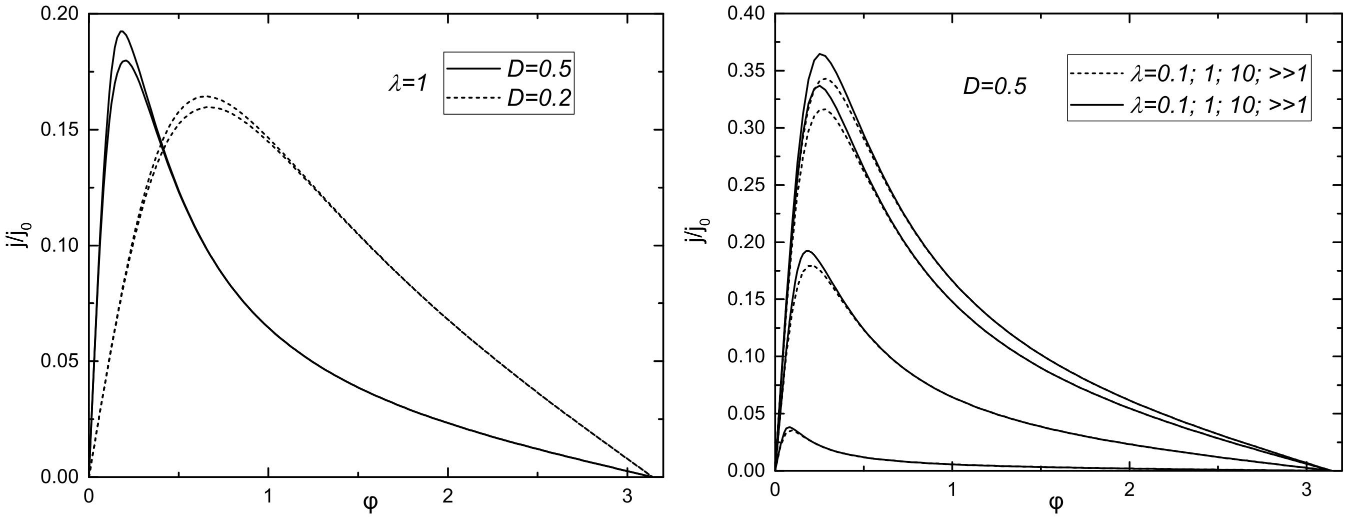

Рис. 1: Залежність безрозмірної густини струму від різниці фаз: 1) для різних значень прозорості плівки діелектрика D при фіксованому значенні безрозмірної довжини вільного пробігу електронів λ (лівий графік); 2) для різних значень безрозмірної довжини вільного пробігу електронів λ при фіксованому значенні прозорості плівки діелектрика D (правий графік). Верхня крива (у парах) відповідає чисельному результатові, а нижня — аналітичному.

$I_C = \varepsilon \Big/ \left[(1+\varepsilon)\sqrt{2}\right]$ – критичний струм контакту, $\varepsilon = \left(1+2\tau^2 q_\infty^2\right)^{-1/2}$ – безрозмірний параметр, що визначає міру відхилення від синусоїдної залежності. На графіках Рис. 1 зображено струм-фазові залежності, які відповідають чисельним розрахункам та аналітичній формулі (5). Як бачимо, обидва результати добре узгоджуються між собою та мають незначну відмінність поблизу максимуму струму. На лівому графіку Рис. 1 видно, що дана відмінність слабне для менших значень прозорості діелектричного прошарку. На правому графіку Рис. 1 бачимо, що внаслідок збільшення безрозмірної довжини вільного пробігу електронів λ росте не лише значення струму, а й різниця між чисельним та аналітичним результатами в області критичного струму. Це пояснюється тим, що при збільшенні λ функція f_∞^2 наближається до одиниці повільніше. Також помітною є відмінність струм-фазової залежності від синусоїдної зі збільшенням коефіцієнта проходження електронів.

Покладаючись на отриманий вираз для струму, в дисертаційній роботі також досліджено динаміку флюксонів у довгих джозефсонівських контактах із несинусоїдною залежністю струму від різниці фаз. Для цього використовувалось модифіковане рівняння синус-Ґордона

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{\bar{c}^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{\lambda_j^2}\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\varphi}{1-\varepsilon\cos\varphi} = 0, \tag{6}$$

у якому λ_j – джозефсонівська глибина проникнення, $\bar{c}$ – швидкість Свіхарта. При запровадженні змінної $\xi = \dfrac{x}{\lambda_j} - V\dfrac{\bar{c}t}{\lambda_j}$ диференціальне рівняння другого порядку в частинних похідних (6) змінюватиметься на звичайне диференціальне рівняння другого порядку $\left(1-V^2\right)\dfrac{d^2\varphi}{d\xi^2} = \dfrac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\varphi}{1-\varepsilon\cos\varphi}$. Одержані на основі цього диференціального рівняння результати зображено на Рис. 2. Для обрахунку значення магнітного поля використовувалась формула $\dfrac{H}{H_0} = \dfrac{d\varphi}{d\xi}$.

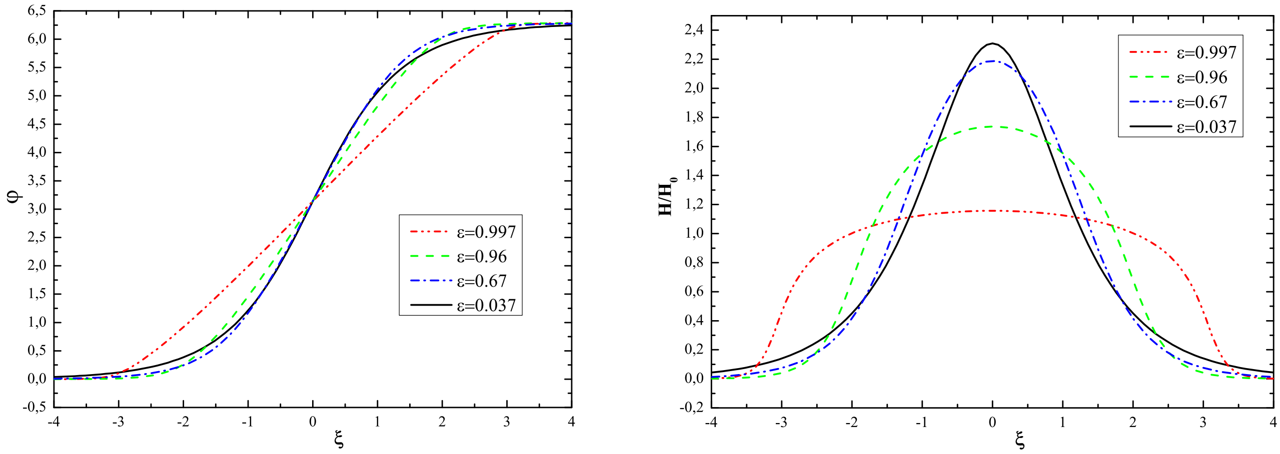

Рис. 2: Просторовий розподіл різниці фаз φ (лівий графік) та безрозмірного магнітного поля $\dfrac{H}{H_0} = \dfrac{d\varphi}{d\xi}$ (правий графік) у довгому джозефсонівському контакті з такими значеннями коефіцієнта проходження D: 0.01 ($\varepsilon = 0.037$); 0.2 ($\varepsilon = 0.67$); 0.5 ($\varepsilon = 0.96$); 0.8 ($\varepsilon = 0.997$). Обрахунки проведено для безрозмірної швидкості флюксона $V = 0.5$ та температури $T = 0.98\ T_c$.

З Рис. 2 бачимо, що збільшення коефіцієнта проходження електронів наближає просторовий розподіл різниці фаз до апроксимації її лінійною функцією на значній внутрішній частині області флюксона. Щодо магнітного поля, то зі збільшенням коефіцієнта проходження поле більш рівномірно розподілене по області флюксона. Межі є чіткішими, а максимум є менш вираженим на відміну від випадку $D \ll 1$, коли на осі флюксона маємо помітний максимум і поле швидко спадає при віддаленні від серцевини. В роботі досліджувався також і більш реалістичний випадок, у якому на контакт подається постійний струм, що перевищує критичний струм контакту. Як наслідок, виникає потік неспарених електронів.

У такій ситуації для флюксона маємо важливу характеристику — рівноважну швидкість. Аналіз цієї швидкості показав, що рухливість флюксона є високою для малих значень коефіцієнта проходження електронів. Це пов'язано з тим, що за цієї умови надпровідність є сильною і дисипативні ефекти, пов'язані з потоком неспарених електронів через контакт, є слабкими. Натомість при збільшенні прозорості діелектричного прошарку D дисипативні ефекти зростають, а рухливість флюксонів зменшується.

Третій розділ присвячено дослідженню залежності густини струму від різниці фаз у шаруватих надпровідних структурах типу SIS$'$IS при довільному значенні коефіцієнта проходження електронів через дві тонкі діелектричні плівки та при довільній товщині внутрішнього прошарку. Вважається, що зовнішні області $z < -d/2$ та $z > d/2$ зайняті однаковими надпровідниками S із критичною температурою T_c, а внутрішня область $|z| < d/2$ зайнята надпровідником S$'$ із критичною температурою $T_c' < T_c$. Область досліджуваних температур вважається неблизькою до критичної, що дозволяє використовувати широковживану в теорії надпровідних контактів модель із кусково сталим параметром впорядкування. У цій моделі вважають модуль параметра впорядкування сталим у межах кожного з надпровідників. При цьому допускається стрибок фази параметра впорядкування внаслідок переходу через контакт. Отже, для розглядуваного SIS$'$IS — контакту маємо таке наближення:

$$\Delta(z) = \begin{cases} \Delta \exp\left(-\dfrac{i\varphi}{2}\right), & z < -d/2, \\ \Delta_1, & |z| < d/2, \\ \Delta \exp\left(\dfrac{i\varphi}{2}\right), & z > d/2. \end{cases}$$

В основі дослідження використано метод функцій Гріна, в якому маємо до справи матричне диференціальне рівняння другого порядку

$$\left\{i\omega_n - \sigma_z\left[\hat{\xi} + U(z)\right] - \hat{\Delta}(z)\right\}\hat{G}_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \tag{7}$$

для матричної функції Гріна

$$\hat{G}_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') = \begin{pmatrix} G_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') & -\tilde{F}_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') \\ -F_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') & \tilde{G}_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') \end{pmatrix}. \tag{8}$$

У рівнянні (7): $U(z) = \dfrac{U_0}{2}\left\{\delta\left(z - \dfrac{d}{2}\right) + \delta\left(z + \dfrac{d}{2}\right)\right\}$ – подвійний дельта-функційний бар'єр, що використовується для моделювання двох діелектричних плівок;

$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ – матриця Паулі; $\hat{\xi} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}}\right)^2 - \mu$; $\hat{\Delta}(z) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta(z) \\ \overset{*}{\Delta}(z) & 0 \end{pmatrix}$. Через функцію Гріна подається густина струму:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{ieT}{m} \sum_{\omega_n} \lim_{\vec{r}' \to \vec{r}} \left(\nabla_{\vec{r}'} - \nabla_{\vec{r}}\right) G_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') .$$

Отже, для розв'язання поставленої в цьому розділі задачі необхідно знайти розв'язок рівняння (7). Проте тут є можливість певного спрощення, що досягається шляхом переходу до квазікласичних рівнянь у t-представленні. В основі побудови цих рівнянь використовується процедура згладжування просторової поведінки функцій Гріна на атомних довжинах. Цей метод виявився доволі ефективним у теорії надпровідних контактів для температур, неблизьких до критичної. Деталі процедури побудови квазікласичних рівнянь у t-представленні для контакту типу SIS можна знайти в монографії *Свідзинський А. В. Мікроскопічна теорія надпровідності. Луцьк: Волинський національний університет імені Лесі Українки, 2011. 420 с.* У нашому дослідженні для побудови цих рівнянь принагідно контакту типу SIS′IS необхідно перейти до простору імпульсів. Для цього виконуємо розклад $\hat{G}_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{i,k} \int d\vec{p} \int d\vec{p}' \hat{G}^{i,k}_{\omega_n}(\vec{p}, \vec{p}')\, \psi^{(i)}_{\vec{p}}(\vec{r})\, \psi^{*(k)}_{\vec{p}'}(\vec{r}')$ матричної функції Гріна (8) за повним набором власних функцій $\psi^{(k)}_{\vec{p}}(\vec{r})$, які є розв'язками відповідної одночастинкової задачі: $\left\{\hat{\xi} + U(z)\right\} \psi^{(k)}_{\vec{p}}(\vec{r}) = \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{p_0^2}{2m}\right) \psi^{(k)}_{\vec{p}}(\vec{r})$.

Перехід у простір імпульсів дозволяє скористатися тим, що характерні значення імпульсів електронів, які дають основний внесок у надпровідні ефекти, є близькі до ферміївського. В розрахунках виникають експоненти двох типів: перші $\exp\{i(p_z + p_z')z\} = \exp(2izp_0\cos\theta)$ осцилюють на атомних довжинах, а другі $\exp\{i(p_z - p_z')z\} = \exp\left\{i(\xi - \xi')\frac{z}{v_0 x}\right\}$ осцилюють на довжинах порядку довжини когерентності $\xi_0 \gg a$. Маючи на меті зберегти лише великомасштабні зміни, перші експоненти відкидатимемо. Відповідна процедура означає згладжування просторової поведінки функцій на довжинах порядку атомних розмірів. Після цієї процедури виконуємо зворотне перетворення Фур'є в простір змінних, спряжених до ξ та ξ', завдяки повному наборові функцій: $\frac{e^{i\xi t}}{\sqrt{2\pi v_0 x}}$, $\frac{e^{-i\xi t}}{\sqrt{2\pi v_0 x}}$, $t = \frac{z}{v_0 x}$.

Тоді ми приходимо до квазікласичних рівнянь

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + i\omega_n\sigma_z\right) \hat{\mathcal{G}}^{i,k}(t, t') - \sum_{i'} \sigma_z \hat{\Delta}^{i,i'}(t, x)\, \hat{\mathcal{G}}^{i',k}(t, t') = \delta_{i,k}\delta(t - t') \qquad (9)$$

для матричної функції Гріна

$$\hat{\mathcal{G}}^{i,k}(t,t') = \begin{pmatrix} G^{i,k}_{\omega_n}(t,t') & \tilde{F}^{i,k}_{\omega_n}(t,t') \\ -F^{i,k}_{\omega_n}(t,t') & -\tilde{G}^{i,k}_{\omega_n}(t,t') \end{pmatrix}$$

у t-представленні.

Рівняння (9) розв'язуються окремо для кожної з надпровідних областей, а далі ці розв'язки зшиваються на площинах $z = -d/2$ та $z = d/2$, що дозволяє зафіксувати невідомі сталі. Маючи вирази для функцій Гріна, знаходимо нову формулу для залежності густини струму від різниці фаз

$$\frac{j}{j_0} = \frac{T}{T_c}\sum_{\omega_n}\int_0^1 \frac{\Delta^2 x\left[D\sin\varphi + \frac{1+D}{8}E_{\omega_n}(x,a,\varphi)\right]dx}{\omega_n^2 + \Delta^2\left[1 - D\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2\right] + F_{\omega_n}(x,a,\varphi)}. \tag{10}$$

Тут $D(x) = \left\{1 + \left(\frac{mU_0}{p_0 x}\right)^2\left[\cos(dp_0x) + \frac{mU_0}{2p_0x}\sin(dp_0x)\right]^2\right\}^{-1}$ – коефіцієнт проходження електронів через подвійний δ-функційний бар'єр, $j_0 = \pi e v_0 N(0)T_c$. У формулі (10) також фігурують позначення для двох функцій

$$\begin{aligned} E_{\omega_n}(x,a,\varphi) = {} & 2\left(\operatorname{ch}\Omega_1 a \operatorname{ch}\Omega_2 a - 1\right)\sin\varphi + \frac{4\Delta_1}{\Delta}|A_1|^2\widetilde{\omega}_n\frac{\operatorname{sh}\Omega_1 a\operatorname{ch}\Omega_2 a}{\Omega_1}\sin\frac{\varphi}{2} + \\ & + \frac{4\Delta_1}{\Delta}|A_2|^2\widetilde{\omega}_n\frac{\operatorname{ch}\Omega_1 a\operatorname{sh}\Omega_2 a}{\Omega_2}\sin\frac{\varphi}{2} + \left\{\frac{4\Delta_1}{\Delta}\left(|A_1|^2 + |A_2|^2\right)\omega_n^2\sin\frac{\varphi}{2} - \right. \\ & \left. - 2\left(\omega_n^2 - \Delta_1^2|A_1|^2|A_2|^2\right)\sin\varphi\right\}\frac{\operatorname{sh}\Omega_1 a\operatorname{sh}\Omega_2 a}{\Omega_1\Omega_2} \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} F_{\omega_n}(x,a,\varphi) = {} & \left\{\omega_n^2 + \frac{\Delta^2}{2}\left[1 + \left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2\right]\right\}\left(\operatorname{ch}\Omega_1 a\operatorname{ch}\Omega_2 a - 1\right) + \\ & + \widetilde{\omega}_n\left(\omega_n^2 + \Delta_1\Delta|A_1|^2\cos\frac{\varphi}{2}\right)\frac{\operatorname{sh}\Omega_1 a}{\Omega_1}\operatorname{ch}\Omega_2 a + \\ & + \widetilde{\omega}_n\left(\omega_n^2 + \Delta_1\Delta|A_2|^2\cos\frac{\varphi}{2}\right)\frac{\operatorname{sh}\Omega_2 a}{\Omega_2}\operatorname{ch}\Omega_1 a + \\ & + \left\{\left(\omega_n^2 + \Delta_1\Delta|A_1|^2\cos\frac{\varphi}{2}\right)\left(\omega_n^2 + \Delta_1\Delta|A_2|^2\cos\frac{\varphi}{2}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{\Delta^2}{2}\left(\omega_n^2 + \Delta_1^2|A_1|^2|A_2|^2\right)\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2\right\}\frac{\operatorname{sh}\Omega_1 a}{\Omega_1}\frac{\operatorname{sh}\Omega_2 a}{\Omega_2}. \end{aligned}$$

На Рис. 3, використовуючи (10), побудовано графіки залежності безрозмірної густини струму j/j_0 від різниці фаз φ у шаруватих надпровідних структурах типу

SIS′IS. Для визначеності використано співвідношення $T_c = 7.4\ T_c'$ між критичною температурою T_c крайніх надпровідників та критичною температурою T_c' проміжного прошарку S′. Використане співвідношення між критичними температурами — це співвідношення між критичними температурами ніобію (Nb) та алюмінію (Al) у шаруватих надпровідних контактах типу Nb/AlO_x/Al/AlO_x/Nb. Розглянуто такі значення товщини проміжного прошарку S′: $d = 0.014\ \xi_0$, $d = 0.044\ \xi_0$ та $d = 0.1\ \xi_0$. Для кожного з цих трьох розглянутих випадків максимум безрозмірної густини струму j/j_0 знаходиться в області $\varphi > \pi/2$. Зауважимо, що числове значення критичного струму для товщини $d = 0.044\ \xi_0$ є вищим від відповідного числового значення для товщини $d = 0.014\ \xi_0$. Такий цікавий факт можна пояснити періодичною залежністю коефіцієнта проходження електронів D крізь подвійний дельта-функційний потенціальний бар'єр, за допомогою якого моделюються діелектричні плівки, від товщини d проміжного прошарку S′. Саме через цю залежність можемо спостерігати осциляції критичного струму зі зміною товщини d проміжного прошарку контакту. Однак, ці осциляції є згасні, що пов'язано з послабленням зв'язку між зовнішніми надпровідниками зі збільшенням товщини проміжного прошарку контакту.

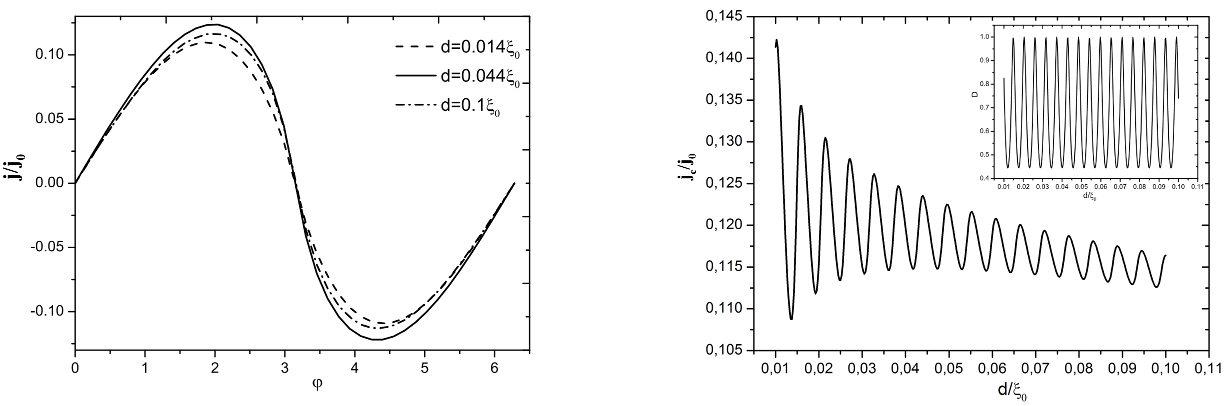

Рис. 3: Зліва: Струм-фазова залежність у випадку різних значень товщини d проміжного прошарку S′. У розрахунках використано: $D\,(1) = 0.1$ та $T = 0.5\ T_c'$. Справа: Графік залежності для безрозмірного критичного струму $\dfrac{j_c}{j_0}$ від товщини d проміжного прошарку S′. На вбудованому графіку показано періодичну залежність коефіцієнта проходження електронів від товщини проміжного прошарку.

Формула (10) для залежності струму від різниці фаз увібрала низку раніше відомих результатів для надпровідних контактів типів SINIS, SNS та SIS. На додаток до загальності одержаного результату це можна також розглядати як підтвердження його достовірності.

У **четвертому розділі** побудовано представлення статистичної суми двозонного надпровідника у формі функціонального інтеграла та, використовуючи це представлення, сформульовано наближення середнього поля, яке у формалізмі функціонального інтеграла виглядає найбільш природним чином. Також було досліджено рівноважні струмові стани в планарних надпровідних контактах типу SIS на основі двощілинних надпровідників для широкого інтервалу зміни коефіцієнта проходження електронів через діелектричну плівку, яку моделюємо дельта-функційним потенціальним бар'єром $U(z) = U_0 \delta(z)$. В основі цього дослідження маємо матричне диференціальне рівняння другого порядку

$$\left\{ i\omega_n - \sigma_z \left[\hat{\xi} + U(z) \right] - \hat{\mathcal{E}}_l(z) \right\} \hat{G}_{l,\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

для мацубарівської функції Гріна

$$\hat{G}_{l,\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') = \begin{pmatrix} G_{l,\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') & -\widetilde{F}_{l,\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') \\ -F_{l,\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') & \widetilde{G}_{l,\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') \end{pmatrix}.$$

Тут є так званий індекс зони l, який у теорії двощілинної надпровідності може набувати значень 1 та 2; $\hat{\mathcal{E}}_l(z) = \sum_{l'} g_{l,l'} \hat{\Delta}_{l'}(z)$, де $g_{l,l'}$ – сталі зв'язку, $g_{1,2}$ – константа міжзонного зв'язку,

$$\hat{\Delta}_l(z) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_l(z) \\ \overset{*}{\Delta}_l(z) & 0 \end{pmatrix}.$$

Що стосується комплексних функцій $\Delta_l(z)$, то вони називаються параметрами впорядкування. Оскільки температури вважаються неблизькими до критичної, то параметри впорядкування можна подати у вигляді кусково сталої функції

$$\Delta_l(z) = \begin{cases} \Delta_l \exp(i\varphi_l), & z < 0, \\ \Delta_l \exp(i\chi_l), & z > 0. \end{cases} \tag{11}$$

З метою обрахунку густини струму використовувалась формула

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{ieT}{m} \sum_{l,\omega_n} \lim_{\vec{r}' \to \vec{r}} (\nabla_{\vec{r}'} - \nabla_{\vec{r}}) G_{l,\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}').$$

На основі процедури згладжування просторової поведінки функцій на довжинах порядку атомних розмірів побудовано так звані квазікласичні рівняння, які описують просторову поведінку функцій Гріна в масштабі довжини когерентності

ξ_0. Показано, що найкомпактніше ці рівняння можна записати за допомогою так званого t-представлення. У цьому представленні записано також і вираз для густини струму. Розв'язки диференціальних рівнянь першого порядку для функцій Гріна в кожній з двох областей, зайнятих масивними надпровідниками, знайдено в рамках моделі з кусково сталими параметрами впорядкування (11). В результаті одержано аналітичну формулу для струм-фазової залежності

$$j = \sum_{i,k} j_{i,k} \sin\left(\chi_i - \varphi_k\right), \qquad (12)$$

яка містить позначення для чотирьох величин

$$j_{i,k} = \pi e v_0 N\left(0\right) T \Delta_i \Delta_k \sum_l g_{l,i} g_{l,k} \sum_{\omega_n} \int\limits_0^1 \frac{x D\left(x\right) dx}{F_l\left(x, \omega_n\right)}, \qquad (13)$$

де $D\left(x\right) = \dfrac{x^2}{x^2 + \left(U_0/v_0\right)^2}$ – коефіцієнт проходження електронів,

$$F_l\left(x, \omega_n\right) = R\left(x\right) \omega_n^{(1)} \omega_n^{(2)} + \frac{D\left(x\right)}{2}\left\{\omega_n^2 + \omega_n^{(1)} \omega_n^{(2)} + \sum_{i,k} g_{l,i} g_{l,k} \Delta_i \Delta_k \cos\left(\chi_i - \varphi_k\right)\right\},$$

$R\left(x\right) = 1 - D\left(x\right)$ – коефіцієнт відбивання електронів. Формула (12) виражає складну залежність струму від чотирьох різниць фаз.

Сумацію за непарними мацубарівськими частотами $\omega_n = \pi T\left(2n + 1\right)$, яка є у формулі (13), можна виконати для таких частинних випадків:

- $\varphi_2 = \varphi_1$ та $\chi_2 = \chi_1$ (s_{++} симетрія);
- $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$ та $\chi_2 = \chi_1 + \pi$ ($s_{\pm}$ симетрія).

Тоді формула (12) зводиться до формули

$$\frac{j}{j_0} = \frac{T}{T_c} \sum_{l=1}^{2} \int\limits_0^1 \frac{x D\left(x\right) \sin\left(\chi_1 - \varphi_1\right) dx}{\widetilde{D}\left(x\right)} Q_l^{\pm}\left(T\right) \operatorname{th}\left\{\frac{Q_l^{\pm}\left(T\right) \widetilde{D}\left(x\right)}{2}\right\},$$

яка містить позначення $j_0 = \dfrac{\pi}{2} e v_0 N\left(0\right) T_c$, $Q_l^{\pm}\left(T\right) = g_{l,1} \dfrac{\Delta_1}{T} \pm g_{l,2} \dfrac{\Delta_2}{T}$ та

$$\widetilde{D}\left(x\right) = \sqrt{1 - D\left(x\right)\left(\sin\frac{\chi_1 - \varphi_1}{2}\right)^2}.$$

На Рис. 4 зображено графіки залежності безрозмірної густини струму j/j_0 від різниці фаз $\chi_1 - \varphi_1$ для обох типів симетрії параметрів впорядкування і при різних значеннях температури T. Як бачимо, максимальний струм досягає більших значень у випадку, коли надпровідники, з яких складається тунельний надпровідний контакт, мають s_{++} симетрію. Якщо ж контакт утворено на основі надпровідників із $s_{\pm}$ симетрією, то в такому випадку критичний струм контакту приблизно на 25% є меншим. Також ми бачимо, що зі зменшенням температури T максимум струму в контакті досягається для різниці фаз $\chi_1 - \varphi_1 > \pi/2$. Це є найбільш помітним для температури $T = 0.001\ T_c$. Вплив константи міжзонного зв'язку $g_{1,2}$ на значення струму в контакті несуттєво залежить від симетрії параметрів впорядкування. Зі збільшенням коефіцієнта міжзонного зв'язку $g_{1,2}$ числове значення густини струму зростає.

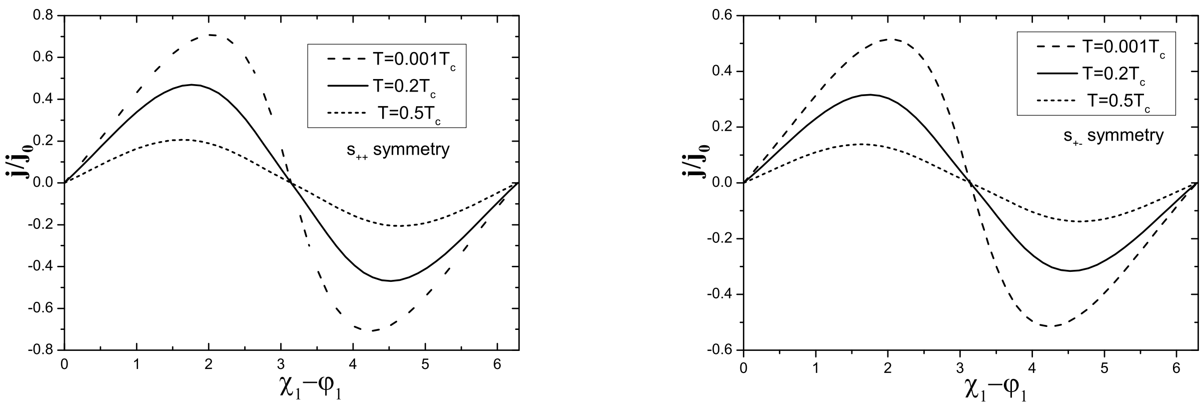

Рис. 4: Залежність безрозмірної густини струму від різниці фаз у тунельному надпровідному контакті, який утворено на основі однакових надпровідників із s_{++} (зліва) та $s_{\pm}$ (справа) симетріями параметрів впорядкування при різних значеннях температури T. Для виконання розрахунків використано: $g_{1,1} = 0.3$, $g_{2,2} = 0.15$, $g_{1,2} = 0.1$ та $U_0/v_0 = 19^{-1/2}$.

ВИСНОВКИ

1. В результаті дослідження рівноважних струмових станів у тунельних надпровідних контактах типу SIS при температурах, близьких до критичної, та за наявності немагнітних домішок одержано формулу для залежності струму від різниці фаз, чинну для довільної концентрації немагнітних домішок. На основі цієї формули показано, що врахування ефектів розпарування приводить до відмінної від синусоїдної струм-фазової залежності, властивої таким контактам при малій прозорості діелектрика. Зі збільшенням коефіцієнта проходження D значення різниці фаз, при якій струм у контакті досягає максимуму, зміщується в напрямку нуля. Вплив домі-

шок на струм у контакті стає відчутним при зменшенні довжини вільного пробігу електронів у область $l < 10\ \xi_0$. І навпаки, зі збільшенням довжини вільного пробігу цей вплив швидко зменшується і вже при $l > 10\ \xi_0$ є несуттєвим.

2. Запропоновано модифіковане рівняння синус-Ґордона з несинусоїдною залежністю струму від різниці фаз для аналізу впливу прозорості діелектричного прошарку на просторову поведінку флюксона. Показано, що зі збільшенням D магнітне поле розподілено більш рівномірно по області флюксона без вираженого максимуму на осі флюксона, як це властиво для малих D.

3. У моделі з кусково сталим параметром впорядкування отримано нову формулу для залежності струму від різниці фаз у двобар'єрному надпровідному SIS′IS — контакті для довільної товщини проміжного надпровідника та довільних значень коефіцієнта проходження електронів. Показано, що критичний струм контакту є осциляційною функцією товщини проміжного прошарку. Зі збільшенням товщини осциляції згасають, що пов'язано з послабленням зв'язку між зовнішніми надпровідниками. Зі зменшенням товщини проміжного прошарку числове значення різниці фаз, при якій струм у контакті досягає максимуму, зміщується в область $\varphi > \pi/2$.

4. Використання методу функціонального інтеграла дає можливість розділити задачу про обчислення статистичної суми двозонного надпровідника на дві послідовні задачі: 1) обчислення статистичної суми системи вільних електронів, що перебувають у полі комплексних джерел електронних пар; 2) усереднення статистичної суми, одержаної у першому пункті, по простору джерел електронних пар із Гауссівським розподілом. Показано, що представлення статистичної суми у вигляді функціонального інтеграла дозволяє сформулювати для двозонного надпровідника наближення середнього поля найбільш природним чином.

5. Побудовано квазікласичні рівняння для функцій Гріна в t-представленні, за допомогою яких виконано мікроскопічний опис стаціонарних струмових станів у тунельному надпровідному контакті на основі двозонних надпровідників та одержано нову аналітичну формулу для залежності струму від різниць фаз параметрів впорядкування. Аналізуючи одержану формулу для випадків, коли фази обох параметрів впорядкування у надпровіднику

є однакові (s_{++} симетрія) та зсунуті на π ($s_{\pm}$ симетрія), встановлено, що для обох випадків зі зменшенням температури максимум струму в контакті досягається при різниці фаз на контакті $\chi_1 - \varphi_1 > \pi/2$. Показано, що числове значення струму в контакті залежить від симетрії параметрів впорядкування: для $s_{\pm}$ симетрії критичний струм приблизно на 25% менший від критичного струму контакту для s_{++} симетрії. Останній факт може використовуватися в експериментальних дослідженнях симетрії параметрів впорядкування двозонних надпровідників.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

[1] Pastukh O. Yu., Shutovskii A. M., and Sakhnyuk V. E. The effect of depairing on the current-phase relation in SIS junctions in the presence of nonmagnetic impurities of arbitrary concentration // *Low Temp. Phys.* 2017. Vol. 43, no. 6. P. 664—669.

[2] Shutovskyi A, Sakhnyuk V, and Zolotaryuk Y. Fluxon dynamics in long Josephson junctions with nontrivial current-phase relation // *The European Physical Journal B*. 2022. Vol. 95, no. 8. P. 134.

[3] Shutovskyi A. M. and Sakhnyuk V. E. Current-phase relation in layered superconducting structures of SIS′IS type // *Condensed Matter Physics*. 2021. Vol. 24, no. 2. P. 23701.

[4] Шутовський А. М., Свідзинський А. В., Сахнюк В. Є. і Пастух О. Ю. Метод функціонального інтеґрування в теорії двощілинної надпровідності // *Журн. фіз. досл.* 2019. Т. 23, № 3. С. 3709.

[5] Shutovskyi A. M., Svidzinskyi A. V., Sakhnyuk V. E., and Pastukh O. Yu. Microscopic Calculation of Josephson Current in Tunnel Junctions with Two-Gap Superconductors // *Ukr. J. Phys.* 2018. Vol. 63, no. 11. P. 1001—1005.

[6] Shutovskyi Arsen and Sakhnyuk Vasyl. Current density dependence on phase differences in superconducting tunnel junctions based on two-gap superconductors // *Physica C: Superconductivity and its Applications*. 2021. Vol. 588. P. 1353915.

[7] Шутовський А. М., Пастух О. Ю. і Сахнюк В. Є. Метод функціонального інтегрування в теорії двощілинної надпровідності // Матеріали VIII міжнародної наукової конференції «Релаксаційні, нелінійні й акустооптичні процеси та матеріали» — РНАОПМ’2016. Луцьк—Світязь, Україна : Вежа—Друк. 1—4 червня 2016 р. С. 235.

[8] Shutowskiy A. M., Svidzinsky A. V., Sakhnyuk V. E., and Pastukh O. Y. Microscopic calculation of josephson current in superconducting tunnel junction on the basis of two-band superconductors // VII Young Scientists Conference "Problems of Theoretical Physics". Kyiv, Ukraine : Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine. December 13—15, 2016. P. 15.

[9] Shutovskyi A. M., Svidzinsky A. V., Sakhnyuk V. E., and Pastukh O. Y. The current states in superconducting tunnel junction on the basis of two-band superconductors // VIII International Conference for Professionals & Young Scientists "Low Temperature Physics". Kharkiv, Ukraine : B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine. May 29 — June 2, 2017. P. 66.

[10] Шутовський А. М., Свідзинський А. В. і Сахнюк В. Є. Мікроскопічний розрахунок джозефсонівського струму в контактах на основі двозонних надпровідників // Матеріали II міжнародної наукової конференції «Актуальні проблеми фундаментальних наук» — АПФН'2017. Луцьк—Світязь, Україна : Вежа—Друк. 1—5 червня 2017 року. С. 169.

[11] Shutovskyi A. M., Svidzinsky A. V., and Sakhnyuk V. E. The functional integration method in the two-band superconductivity theory // VIII Young Scientists Conference "Problems of Theoretical Physics". Kyiv, Ukraine : Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine. December 12—14, 2017. P. 37.

[12] Shutovskyi A. M., Sakhnyuk V. E., and Viligurskyi O. M. Equilibrium current states in layered superconducting structures // Proccedings of IX International scientific conference «Relaxed, nonlinear, acoustic optical processes and materials» — RNAOPM'2018 / ed. by Myronchuk G., Zamuruieva O., and Trokhimchuk P. Lutsk — Lake «Svityaz'», Ukraine : Vezha—Print. June 1—5, 2018. P. 142.

[13] Shutovskyi Arsen, Svidzinskyi Anatolii Vadymovych, Pastukh Oleksandr, and Sakhnyuk Vasul. A current density dependence on phase differences in layered superconducting structures of SISIS type // IX Conference of Young Scientists "Problems of Theoretical Physics" / Book of Abstracts. Kyiv, Ukraine : Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine. December 4—5, 2018. P. 18.

[14] Шутовський А. М., Сахнюк В. Є. і Бірук О. М. Динаміка флюксонів у джозефсонівських контактах з нетривіальною струм-фазовою залежністю // Матеріали III міжнародної наукової конференції «Актуальні проблеми фундаментальних наук» (APFS—2019). Луцьк—Світязь, Україна : Вежа—Друк. 1—5 червня 2019 року. С. 113.

[15] Шутовський А. М., Сахнюк В. Є., Бірук О. М. і Вілігурський О. М. Ефект Джозефсона в тунельних надпровідних контактах типу $S_{\pm}IS_{\pm}$ та $S_{++}IS_{++}$ // Матеріали IV міжнародної наукової конференції «Актуальні проблеми фундаментальних наук» (APFS—2021). Луцьк—Світязь, Україна : Вежа—Друк. 1—5 червня 2021 року. С. 111.

[16] Шутовський А. і Сахнюк В. Є. Залежність густини струму від різниць фаз у тунельних надпровідних контактах типу SIS на основі двощілинних надпровідників // XXI Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини — 2021. Львів, Україна : Інститут фізики конденсованих систем НАН України. 11—12 жовтня 2021р. С. 13.

[17] Сахнюк В. Є., Шутовський А. М. і Вілігурський О. М. Чисельний аналіз просторової поведінки параметра впорядкування в одно- та двозонних надпровідниках // Матеріали XI міжнародної наукової конференції «Релаксаційні, нелінійні й акустооптичні процеси та матеріали» — РНАОПМ'2022. Луцьк—Світязь, Україна : Вежа—Друк. 1—5 червня 2022 року. С. 111.

АНОТАЦІЯ

Шутовський А. М. Ефекти фазової когерентності у тунельних надпровідних контактах на основі однозонних та двозонних надпровідників. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 «Теоретична фізика». — ІТФ ім. М. М. Боголюбова НАН України, Київ, 2023.

У дисертації досліджено вплив ефектів розпаровування та немагнітних домішок на форму залежності густини струму від різниці фаз у тунельних надпровідних контактах типу SIS для температур, близьких до критичної, внаслідок чого в основі дослідження використовувалась теорія Гінзбурга-Ландау, яка є асимптотичною формою мікроскопічної теорії надпровідності поблизу критичної температури. Одержану нову формулу для струм-фазової залежності, яка виявилась несинусоїдною, використано з метою дослідження динаміки флюксонів у чистому та довгому джозефсонівському контакті. Запропоновано модифіковане рівняння синус-Ґордона з несинусоїдною залежністю струму від різниці фаз із метою аналізу впливу прозорості діелектричного прошарку на просторову поведінку флюксона. Показано, що при збільшенні прозорості діелектричного прошарку критичне магнітне поле буде зменшуватися. Для температур, неблизьких до критичної, рівноважні струмові стани у просторово неоднорідних надпровідних композиціях досліджуються методом квазікласичних рівнянь, які розв'язуються в рамках моделі з кусково сталими параметрами впорядкування. Як наслідок, отримано такі нові аналітичні результати: струм-фазову залежність у шаруватих надпровідних структурах типу SIS′IS, з якої можна відтворити низку раніше відомих результатів для різних надпровідних контактів; струм-фазову залежність для тунельних надпровідних контактів типу SIS у теорії двозонної надпровідності, метод функцій Гріна якої побудовано за допомогою теорії середнього поля, яку сформульовано на основі побудованого представлення статистичної суми двозонного надпровідника у формі функціонального інтеграла. З'ясувалося, що за допомогою одержаної аналітичної формули для струм-фазової залежності можна досліджувати симетрії параметрів впорядкування.

Ключові слова: надпровідний контакт, параметр впорядкування, лінійне інтегральне рівняння, рівняння Гінзбурга-Ландау, густина струму, струм-фазова залежність, функція Гріна, квазікласичне рівняння.

ABSTRACT

Shutovskyi A. M. Phase coherence effects in superconducting tunnel junctions based on single-band and two-band superconductors. — Manuscript.

Thesis for the Doctor of Philosophy degree (Candidate of Sciences in Physics and Mathematics) in speciality 01.04.02 «Theoretical Physics». — Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the NAS of Ukraine, Kyiv, 2023.

The thesis considers the influence of depairing effects on the current-phase relation in an SIS tunnel junction for arbitrary concentrations of nonmagnetic impurities in the Ginzburg-Landau theory. In the presence of nonmagnetic impurities, the order parameter $\Delta(\zeta)$ can be found by a way to solve the closed system of two linear integral equations that are valid near the IS interface. In the depth of the superconductor, the order parameter $\Delta(\zeta)$ is a solution to the so-called Ginzburg-Landau equation that is a nonlinear second order differential equation. In the current research, the second order differential equation for the complex function $\Delta(\zeta)$ is transformed into the second order differential equation for the real function $f(\zeta)$. The obtained equation has a term that contains the so-called superfluid velocity $v_s(\zeta)$. This term takes into account the depairing effects. It is also understood that the Ginzburg-Landau equation and the closed system of the two linear integral equations have a domain of their common validity. As a result, the boundary condition for the Ginzburg-Landau equation contains the constant q_∞ that is also present in the formulas for the asymptotic solutions to the closed system of the two linear integral equations. The analytical expression for the constant q_∞ is obtained by a way to apply the so-called method of quasi-orthogonality to asymptotes. After that, the representation of the complex order parameter $\Delta(\zeta)$ via its absolute value $f(\zeta)$ is substituted into the well known expression for the current density $j(\zeta)$ in the Ginzburg-Landau theory. As a result, the current density j is presented via some function $f_+(\varphi)$ that is one of the solutions to the closed system of the two algebraic equations. This closed system is solved by a way to perform the numerical calculations, but the approximate analytical solutions are also obtained.

The fluxon dynamics in pure and long Josephson junctions with nontrivial current-phase relation is investigated. An analytical solution of the modified sine-Gordon equation is obtained for the dielectric layer transparencies close to unity. The more realistic case that takes into account the flow of unpaired electrons across a junction biased by the spatially uniform direct current bias is also considered. The generalized

sine-Gordon equation is used with the aim to write down the law that describes the time evolution of the junction energy. The conservation law of the junction energy is applied with the aim to derive an analytical expression for the equilibrium fluxon velocity.

The equilibrium current states in the layered superconducting structures of an SIS′IS type are investigated in the general case. This means that no restrictions on the dielectric layer transparency D and the thickness d of an intermediate layer are imposed. The problem is solved in the framework of the Green's function method. The second order differential equation for the matrix Green's function in the configuration representation is transformed into the first order differential equations for the matrix Green's functions in the so-called t-representation by a way to perform a spatial smoothing procedure on the length scales of an order of an atomic size. The obtained differential equations are also called the quasiclassical equations. The same procedure is performed for the three-dimensional current density $\vec{j}\,(\vec{r})$ in order to derive the one-dimensional current density $j\,(z)$ in terms of the Green's functions in the t-representation. In the current research, the temperatures are not close to the critical temperature. As a result, the model with a piecewise constant order parameter is applied. The derived expressions for the Green's functions in the t-representation are substituted into the one-dimensional current density $j\,(z)$ on the plane $z = d/2$. As a result, a new analytical expression for the current-phase relation is obtained.

The functional integration method in the two-band superconductivity theory is constructed. The formulated mean field approximation is used to introduce the matrix Green's function in the configuration representation. The quasiclassical equations for the matrix Green's functions in the t-representation are derived in order to study the superconducting tunnel junctions based on two-gap superconductors. The expression for the current density $j\,(z)$ in terms of the Green's functions in the t-representation is also derived. The problem is solved in the framework of the model with the piecewise constant order parameters, because the temperatures are not close to the critical temperature. The current density $j\,(z)$ is calculated on the plane $z = 0$. The obtained analytical expression for the current-phase relation is used to analyze the pairing symmetries of the order parameters.

Keywords: superconducting junction, order parameter, linear integral equation, Ginzburg-Landau equation, current density, current-phase relation, Green's function, quasiclassical equation.

Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Папір офсетний.
Обсяг 1,6 ум. друк. арк., 1,6 обл.-вид. арк. Наклад 100 пр.
Зам. 73. Друк – Вежа-Друк (43025, м. Луцьк, вул. Шопена, 12)
Свідоцтво Держ. комітету телебачення та радіомовлення України
ДК № 4607 від 30.08.2013 р.