Національна академія наук України
Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова
Національна академія наук України
Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Скрипник Тарас Володимирович

УДК 530.145; 531.01; 517.958

Дисертація
Метод некососиметричних r-матриць та нові інтегровні класичні і квантові системи

01.04.02 — теоретична фізика

природничі науки

(104 — фізика та астрономія)

Подається
на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. _____ Т.В.Скрипник

Київ — 2020

Анотація

Скрипник Т. В. Метод некососиметричних r-матриць та нові інтегровні класичні і квантові системи.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 — теоретична фізика (природничі науки, 104 — фізика та астрономія), Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України.

Дисертація присвячена розвитку методів теорії класичних та квантових інтегровних систем та рівнянь солітонного типу. Дисертація складається із вступу, восьми розділів, висновків та списку використаних джерел.

У вступі дана загальна характеристика роботи: обгрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету роботи та ін.

У першому розділі — " Класичні r-матриці зі спектральними параметрами" — розглядається теорія загальних кососиметричних та некососиметричних класичних r-матриць, їх аналітична структура та влативості. В підрозділі 1.2 дано основні позначення та визначення. В підрозділі 1.3 розглянуто некососиметричний аналог аналітичної поведінки класичних r-матриць в точках загального положення. В підрозділі також сформульовано гіпотезу про аналітичну поведінку класичних r-матриць в околі особливих точок.

Другий розділ дисертації називається "Методи побудови класичних r-матриць". В ньому наведені методи побудови класичних r-матриць та розглянуті їх конкретні приклади. У підрозділі 2.2 окреслена загальна схема зв'язку класичних r- матриць з теорією класичних R-операторів. У підрозділах 2.3 побудовані "деформовані" раціональні r-матриці. У підрозділі 2.4 побудовані деформовані r-матриці "зкручені" за допомогою

автоморфізму скінченного порядку. У підрозділі 2.5 описано метод "редукцій" r-матриць по дії групи автоморфізмів що приводить до r-матриць з попереднього підрозділу. У підрозділі 2.6 описано метод K- зкруту r-матриць.

Третій розділ дисертаційної роботи має назву "Нескінченно-вимірні алгебри Лі і класичні r-матриці". У підрозділі 3.2 описані однополюсні r-матричні алгебри $\mathfrak{g}_r^-$ в регулярних точках. Також явно описані фільтровані комутаційні співвідношення алгебри $\mathfrak{g}_r^-$. У підрозділі 3.3 описана квазіградуйована структура алгебри $\mathfrak{g}_r^-$ та побудовані доповняльна підалгебра $\mathfrak{g}_r^+$ та повна r-матрична алгебра $\mathfrak{g}_r = \mathfrak{g}_r^- + \mathfrak{g}_r^+$. Центральним моментом підрозділу є поняття мультиплікатора, тобто такої мероморфної функції $f(u)$ що $f(u)\mathfrak{g}_r^- \subset \mathfrak{g}_r^-$. У підрозділі 3.4 побудована явна формула квазіградуйованих комутаційних співвідношень в алгебрі $\mathfrak{g}_r$ та її підалгебрах $\mathfrak{g}_r^-$, $\mathfrak{g}_r^+$. Тип квазіградуювання при цьому залежить від "порядку" мультиплікатора. У підрозділі 3.5 побудована "канонічна" форма класичних r-матриць. У підрозділі 3.6 описані дуальні простори до алгебр $\mathfrak{g}_r^-$, $\mathfrak{g}_r^+$ та $\mathfrak{g}_r$. У підрозділі 3.7 описані багатополюсні r-матричні алгебри в регулярних точках та відповідні комутаційні співвідношення. У підрозділах 3.8- 3.9 описані одно- та багатополюсні r-матричні алгебри в особливих точках та відповідні комутаційні співвідношення.

Четвертий розділ дисертаційної роботи має назву "Інтегровні системи та класичні r-матриці". В данному розділі побудовані матриці Лакса і інтеграли руху класично – інтегровних гамільтонових систем пов'язаних з класичним r-матрицями. У підрозділі 4.2 описані перша r-матрична дужка Лі-Пуасона та комутатавна алгебра інтегралів руху "Лакс-інтегровних" систем. У підрозділі 4.3 описаний загальний спосіб побудови матриць Лакса по класичних r-матрицях зі спектральними параметрами. Таким чином побудовані матриці Лакса що відповідають неособливим точкам класичних r-матриць. Таким чином побудовані, зоокрема, матриці Лакса моделей типу Годена. Також в цьому підрозділі описані матриці Лакса що відповідають особливим точкам класичних r-матриць. Таким чином побудовані, зоокрема, матриці Лакса моделей типу Джейнса – Каммінгса – Діке, багатобозонних моделей, моделей Тоди та їх деформацій.

П'ятий розділ дисертаційної роботи має назву "Солітонні рівняння: загальна схема." В данному розділі описаний загальний метод побудови солітонних рівнянь в двох вимірах, що базується на класичних r-матрицях зі спектральними параметрами. Викладено приклади застосування цього методу до нових солітонних рівнянь відкритих автором (анізотропне рівняння НШ з похідною, модифіковані абелева та неабелеві ієрархії Тоди, "подвоєна" векторна ієрархія Ландау – Ліфшиця, анізотропна ієрархія з двома зсувами та ін.). У підрозділах 5.2-5.3 описані матриці Лакса, друга r-матрична дужка Лі-Пуасона та комутатавна алгебра інтегралів руху. У підрозділі 5.4 описані рівняння нульової кривизни з загальними $U-V$ парами зі значеннями в багатополюсних r-матричних алгебрах. У підрозділі 5.5 описані інтегровні ієрархії з загальними $U-V$ парами зі значеннями в r-матричних алгебрах в регулярних точках. Вони співпадають з узагальненою ієрархією рівнянь типу Ландау-Лівшиця та ієрархією узагальненого кірального поля. У підрозділах 5.6-5.10 описані інтегровні ієрархії з загальними $U-V$ парами зі значеннями в r-матричних алгебрах в сингулярних точках. Детальніше, у підрозділі 5.6-5.7 описані "зсунуті" r-матричні дужки Лі-Пуасона та "зсунуті" інтеграли руху. У підрозділах 5.8-5.9 описані "малі" інтегровні ієрархії в сингулярних точках та наведено їх приклади: ієрархія анізотропного двокомпонентного рівняння НШ з похідною, векторне узагальнення ієрархії рівняння Ландау-Лівшиця. У підрозділі 5.10 описані "великі" інтегровні ієрархії в сингулярних точках та наведено їх приклади: анізотропна ієрархія з двома зсувами, "подвоєна" векторна ієрархія рівнянь Ландау-Лівшиця, модифіковані абелеві і неабелеві рівняння Тоди.

Шостий розділ дисертаційної роботи має назву "Квантові інтегровні системи та класичні r-матриці". В данному розділі побудовано широкий клас квантово – інтегровних моделей, що базуються на класичних некососиметричних r-матрицях. Зокрема, побудовані квантово – інтегровні моделі типу Годена та Годена у зовнішньому магнітному полі, квантово – інтегровні моделі типу Джейнса-Камінгса-Діке та квантово – інтегровні багатобозонні моделі, що узагальнюють димери Бозе – Хаббарда. Детальніше, у підрозділі 6.2 описані квантово – інтегровні моделі типу Годена що базуються на класичних некососиметричних r-матрицях. У підрозділі 6.3 описані квантово – інтегровні моделі Годена у зовнішньому магнітному полі що базуються на класичних некососиметричних r-матрицях. У підрозділі 6.4 описані квантово–інтегровні моделі типу Джейнса-Камінгса-Діке що базуються на класичних некососиметричних r-матрицях. У підрозділі 6.5 описані детально додаткові лінійні інтеграли Лакс-інтегровних моделей що базуються на симетріях класичної r-матриці. У підрозділі 6.6 детально описані раціональні моделі типу Джейнса-Камінгса-Діке. У підрозділі 6.7 детально описані Z_2-градуйовані моделі типу Джейнса-Камінгса-Діке. У підрозділі 6.8 описані узагальнені багатобозонні димери Бозе- Хаббарда.

Сьомий розділ дисертаційної роботи має назву “Анзац Бете та класичні r-матриці.” В цьому розділі алгебраїчний анзац Бете поширено на випадок квантово–інтегровних систем пов’язаних з класичними некососиметричними r-матрицями. У випадку алгебр Лі серії $gl(n)$, $n > 2$ ієрархічний анзац Бете узагальнено на нестандартні ланцюжки вкладених підалгебр. Використовуючи його діагоналізовано Z_p–градуйовані гамільтоніани Годена та узагальнені моделі типу Джейнса-Камінгса-Діке та димерів Бозе–Хаббарда, що базуються на Z_2–градуйованих r-матрицях. Детальніше, у підрозділі 7.2 розглянуто алгебраїчний анзац Бете у найпростішому випадку $\mathfrak{g} = sl(2)$. У підрозділі 7.3 розглянуто алгебраїчний анзац Бете у випадку $\mathfrak{g} = gl(n)$ та стандартного ланцюжка вкладених підалгебр $gl(n) \supset gl(n-1) \supset gl(n-2) \supset ... \supset gl(1)$. Розглянуто три параметричних сімейства r-матриць, що допускають даний метод, а також відповідні квантові інтегровні моделі та їх точний розв'язок методом анзацу Бете. Знайдено у загальному вигляді спектр генеруючої функції квадратичних квантових інтегралів. У підрозділі 7.4 розглянуто алгебраїчний анзац Бете у випадку $g = gl(n)$ та нестандартного ланцюжка вкладених підалгебр що включають обмеження $gl(n) \supset gl(n_1) \oplus gl(n - n_1)$. Знайдено у загальному вигляді спектр генеруючої функції квадратичних квантових інтегралів. У підрозділі 7.5 розвинутий метод застосовано до випадку квантових систем Годена базованих на Z_p-градуйованих класичних r-матрицях. У підрозділі 7.6 розвинутий метод застосовано до випадку квантових моделей Джейнса-Камінгса-Діке та узагальнених димерів Бозе–Хаббарда базованих на Z_2-градуйованих класичних r-матрицях.

Восьмий розділ дисертаційної роботи має назву "Інтегровні ферміонні моделі і класичні r-матриці." В данному розділі будується сімейство інтегровних ферміонних моделей типу БКШ з кількома типами ферміонів та гамільтоніанами s- та $p + ip$ – типу. Детальніше, у підрозділі 8.2 описана "ферміонізація" деяких фундаментальних представлень простих алгебри Лі. Підрозділ 8.3 присвячений інтегровним ферміонним моделям s–типу що базуються на раціональних r-матрицях. Показано що існує три типи інтегровних гамільтоніанів, що містять m типів ферміонів, а саме гамільтоніани повязані з алгебрами $gl(2m)$, $sp(2m)$ та $so(2m)$ відповідно. Підрозділ 8.4 присвячений інтегровним ферміонним моделям $p+ip$–типу що базуються на Z_2-градуйованих r-матрицях. Показано що існує три типи інтегровних гамільтоніанів, що містять m типів ферміонів, а саме а саме, гамільтоніани повязані з алгебрами $gl(2m)$, $sp(2m)$ та $so(2m)$ відповідно. Підрозділ 8.5 присвячений діагоналіції отриманих інтегровних ферміонних гамільтоніанів методом анзацу Бете.

Нарешті, у Висновках наведено основні результати дисертації.

Ключові слова: класичні та квантові інтегровні системи, класичні r-матриці, нескінченно-вимірні алгебри Лі, солітонні рівняння,анзац Бете.

Abstract

Skrypnyk T. V. The method of non-skew-symmetric r-matrices and new integrable classical and quantum systems.

Thesis for obtaining of scientific degree of the habilitated doctor of sciences in physics and mathematics according to speciality 01.04.02 — theoretical physics (natural sciences, 104 — physics and astronomy), Institute of Theoretical Physics named after M.M. Bogolyubov of the National Academy of Sciences of Ukraine.

The thesis is devoted to the development of the methods of the theory of classical and quantum integrable systems and equations of soliton type. The thesis consists of the Introduction, eight chapters, conclusions and the bibliographic list.

In the Introduction the general characteristics of the present work is given: the actuality of the thesis topic is grounded, the aim of the thesis is formulated.

In the first chapter — "Classical r-matrices with spectral parameters" the theory of the general skew- and non skew-symmetric classical r-matrices and their analytical behavior is considered. The main definitions and notations are given in the section 1.2. The non-skew-symmetric analogue of the analytical behavior of the classical r-matrix is considered in the section 1.3. In this section the hypothesis about the analytical behavior of the classical r-matric in the neighborhood of singular points is also formulated.

The second chapter of the thesis is called "The methods of construction of the classical r-matrices". In this chapter the methods of construction of the classical r-matrices are given and their concrete examples are considered. In section 2.2. the general scheme of connection of classical r-matrices with classical R-operators is reminded. In section 2.3 "deformed" rational r-matrices are constructed. In section 2.4 "deformed" rational r-matrices are

"twisted" with the help of the finite-order automorphism. In section 2.5. the general method of "twisting" of the classical r-matrices with the help of the finite-order automorphism is described. It leads, in particular, to the classical r-matrices from section 2.4. In section 2.6 the so-called method of K-twist of the r-matrix is described.

The third chapter is called "Infinite-dimensional Lie algebras and classical r-matrices". In the section 3.2 the one-poled r-matrix Lie algebras $\mathfrak{g}_r^-$ in the regular points are described. The corresponding filtered commutation relations are given. In the section 3.3 quasigraded structure of the algebra $\mathfrak{g}_r^-$ is described and the complementary subalgebra $\mathfrak{g}_r^+$ and the full r-matrix Lie algebra $\mathfrak{g}_r = \mathfrak{g}_r^- + \mathfrak{g}_r^+$ are constructed. The central object in this section is the "multiplicator", i.e. such the function $f(u)$ that $f(u)\mathfrak{g}_r^- \subset \mathfrak{g}_r^-$. In the section 3.4 the quasigraded structure if the algebras $\mathfrak{g}_r$, $\mathfrak{g}_r^-$, $\mathfrak{g}_r^+$ is constructed. The type of the quasigrading depends on the "order" of the multiplicator $f(u)$. In the section 3.5 "canonical" form of the classical r-matrix is presented. In the section 3.6 dual spaces to the algebras $\mathfrak{g}_r^-$, $\mathfrak{g}_r^+$ and $\mathfrak{g}_r$ are described. In the section 3.7. many-point r-matrix Lie algebras in the regular points and the corresponding commutation relations are presented. In the sections 3.8 -3.9 one-point and many-point r-matrix Lie algebras in the singular points and the corresponding commutation relations are given.

The forth chapter of the thesis is called "integrable systems and classical r-matrices". In this chapter Lax matrices and integrals of motion of classically integrable hamiltonian systems governed by the classical r-matrices are constructed. In section 4.2 the first r-matrix bracket and the algebra of integrals of motion of Lax-integrable systems are described. In section 4.3 the method of the construction of the Lax matrices using classical r-matrices with spectral parameters is given. In such a way Lax matrices of the Gaudin-type models are constructed. Lax matrices that corresponds to special points of the classical r-matrices are also described. In such a way are constructed Lax matrices of Jaynes-Cummings-Dicke models, of many-boson models, of Toda models and their deformations.

The fifth chapter of the thesis is called "Soliton equations: the general scheme". In this chapter the general method of construction of soliton equations based on classical r-matrices with spectral parameters is given. Examples of the applications of this method to construction of new soliton equations are exposed. They include anisotropic derivative Shredinger hierarchy, modified abelian and non-abelian Toda-field hierarchy, "doubled" vector Landau-Lifshitz hierarchy, anisotropic hierarchy with double shifts etc. In the sections 5.2-5.3 the Lax matrices, second r-matrix bracket and commutative algebra of integrals of motion are described. In the section 5.4 zero-curvature equations with $U - V$ pairs with the values in many-poled r-matrix algebras are presented. In section 5.5. the case of the regular points of the classical r-matrices is considered. The corresponding soliton hierarchies coincide with the generalized Landau-Lifshitz hierarchy and generalized chiral field hierarchy. In the section 5.6-5.10 integrable hierarchies with $U - V$ pairs with the values in many-poled r-matrix algebras in singular points are considered. In more details, in the sections 5.6-5.7 "shifted" r-matrix Poisson brackets and "shifted" integrals of motion are described. In the sections 5.8-5.9 "small" integrable hierarchies with the $U - V$ pairs corresponding to singular points of the classical r-matrices are introduced. Their concrete examples are considered. They are: hierarchy of the anisotropic dNS equation and vector generalization of the Landau-Lifshits hierarchy. In the section 5.10 "large" integrable hierarchies with $U - V$- pairs the values in singular points are described. They are anisotropic "double-shift" hierarchy, "doubled" vector Landau-Lifshitz hierarchy, modified abelian and non-abelian Toda-field hierarchies.

The six chapter of the thesis is called "Quantum integrable systems and classical r-matrices". In this chapter a wide class of quantum integrable models that are based on classical non-skew-symmetric r-matrices is constructed. In particular, quantum integrable models of Gaudin-type with and without external magnetic field, quantum integrable models of Jaynes-Cummings-

Dicke-type and many-boson models that generalize Bose-Hubbard dimer models are obtained. In more details, in the section 6.2 quantum integrable models that generalize Gaudin models are described. In the section 6.3 generalized Gaudin models in an external magnetic field are presented. In the section 6.4 Jaynes-Cummings-Dicke-type models based on the classical non-skew-symmetric r-matrices are introduced. In the section 6.5 additional linear integrals of Lax-integrable systems connected with symmetries of classical r-matrices are calculated. In the section 6.6 "rational" models of the Jaynes-Cummings-Dicke-type are described in details. In the section 6.7 "Z_2-graded" models of the Jaynes-Cummings-Dicke type are presented. In the section 6.8 many-boson generalization of Bose-Hubbard dimmers are proposed.

The seventh paragraph of the thesis is entitled as "Bethe ansatz and classical r-matrices". In this chapter algebraic Bethe ansatz is prolonged onto the case of quantum-integrable models based on classical non-skew-symmetric r-matrices. In the case of the Lie algebras of the type $gl(n)$, $n > 2$ nested Bethe ansatz is generalized onto non-standard chains of the embedded subalgebras. Using it Z_p-graded hamiltonians of the Gaudin type, generalized Jaynes-Cummings-Dicke-type hamiltonians and generalized Bose-Hubbard dimmer hamiltonians are diagonalized. In more details, in the section 7.2. algebraic Bethe ansatz is considered in the simplest case $\mathfrak{g} = sl(2)$. In the section 7.3. the case $\mathfrak{g} = gl(n)$ and nested Bethe ansatz based on the standard chain of the embedded subalgebras $gl(n) \supset gl(n-1) \supset gl(n-2) \supset ... \supset gl(1)$ is analyzed. Three parametric families of the classical r-matrices, that admit this method are considered. In the section 7.4 the nested Bethe ansatz on $g = gl(n)$ compatible with the restriction $gl(n) \supset gl(n_1) \oplus gl(n-n_1)$ is proposed. The spectrum of the generating function of quadratic integrals of motion is found. In the section 7.5 the developed method is applied to the generalized Gaudin model based on Z_p-graded classical r-matrices. In the section 7.6 this method is applied to quantum models of Jaynes-Cummings-Dicke type and to generalized Bose-Hubbard dimmers based on Z_2-graded classical r-matrices.

The eights chapter of the thesis is called “Integrable fermion models and classical r-matrices”. In this chapter the family of integrable fermion models of the BCS-type with several types of fermions and hamiltonians of s- and $p+ip$- type are obtained. In more details, in the section 8.2. fermionization of some fundamental representations of simple Lie algebras is described. The section 8.3 is dedicated to integrable fermion models of the s-type based on the classical rational r-matrices. It is shown that there exist three types of integrable fermion hamiltonians of s-type that contain m-types of the fermions, namely the models connected with the Lie algebras $gl(m)$, $sp(2m)$ and $so(2m)$ correspondingly. The subsection 8.4. is dedicated to integrable fermion models of $p+ip$-type that contain m-types of the fermions and are based on Z_2-graded classical r-matrices. It is shown that there exist three types of integrable fermion hamiltonians of $p+ip$- type that contain m-types of the fermions, namely the models connected with the Lie algebras $gl(m)$, $sp(2m)$ and $so(2m)$ correspondingly.

Finally in the section “Conclusions” the main results of the thesis are listed.

Key words:

Classical and quantum integrable systems, classical r-matrices, infinite-dimensional Lie algebras, soliton equations, Bethe ansatz.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Голод П. Анізотропні квазіградуйовані алгебри на алгебраїчних кривих та інтегровні гамільтонові системи/ П.І.Голод, Т.В. Скрипник//

Наукові записки НАУКМА -сер. фіз.мат. наук- 2000 - Т. 18. - С. 20–25.

2. Skrypnyk T. Quasi-graded Lie algebras on hyperelliptic curves and classical integrable systems/ T.Skrypnyk// Journal of Math.Phys - 2001 - Vol. 42.- No 9.- P. 4570-4581.
3. Skrypnyk T. Integrable hamiltonian systems via quasigraded Lie algebras/T. Skrypnyk// Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine - 2001 - Vol. 32. - No II.
4. Skrypnyk T. Generalized Clebsh and Neuman integrable systems from the special quasigraded Lie algebras on the higher genus curves/ T. Skrypnyk// Ukr. Phys. Jour. . - 2002.- Vol. 37. - No 3. - P. 293-301.
5. Skrypnyk T. Euler equations on the Lie algebras: new interpretation and isomorphism of the integrable cases/ T.Skrypnyk// Reports in Math. Phys. - 2002 - Vol. 50. - Issue 3. - P. 299-305.
6. Skrypnyk T. Lie algebras on hyperelliptic curves and finite-dimensional integrable systems/ T. Skrypnyk// Yadernaya Physica - 2002- Vol. 65 - No 6. - P. 1141-1145.
7. Skrypnyk T. Quasigraded deformations of loop algebras, "deformed" Lax representation and classical integrable systems/ T.Skrypnyk// Czech J. Phys. - 2002 - Vol. 52.- No 11.- 1283-1288.
8. Skrypnyk T. Quasigraded deformations of loop algebras, and hierarchies of integrable equations/ T.Skrypnyk// *Czech J. Phys.* -2003 - Vol. 53 - No 11. - P. 1119-1124.
9. Skrypnyk T. Integrable spin generalization of the generalized Clebsh and Neuman integrable systems/ T.Skrypnyk// J. Phys. A - 2003 - Vol. 36. - P. 4407-4416.

10. Skrypnyk T. Matrix generalization of Landau-Lifshitz equation/ T.Skrypnyk// Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine - 2004 - part 1. - p. 462-469.

11. Skrypnyk T. "Doubled" Landau-Lifshiz hierarchy and special quasigraded Lie algebras/ T.Skrypnyk// Journal of Physics A - 2004 - Vol. 37 - No 31. - C. 7755-7768.

12. Skrypnyk T. Deformations of the loop algebras and classical integrable systems: finite-dimensional integrable systems/ T. Skrypnyk// Reviews in Mathematical Physics - 2004 - Vol. 16 - No 7 .- P. 823-844.

13. Skrypnyk T. Deformations of the loop algebras and hierarchies of integrable equations / T. Skrypnyk // J. Math. Phys . - 2004 - Vol. 45. - No 12. - P. 4578-4595.

14. Skrypnyk T. Quasigraded lie algebras, Kostant–Adler scheme, and integrable hierarchies/ T. Skrypnyk// Teoret. Mat. Fiz.-2005. - Vol. 142.- No 2.- P. 329–345.

15. Skrypnyk T. Dual R-matrix integrability/ T. Skrypnyk // Teoret. Mat. Fiz. - 2005 - Vol. 155.- No 1. - P. 147–160.

16. Skrypnyk T. Integrable deformation of the Toda chain and quasigraded Lie algebras / T. Skrypnyk //J. Phys. A: Math. Gen - 2005 - Vol. A 38.- No 44.- P. 9665.

17. Skrypnyk T. Integrable deformations of the mKdV and SG hierarchies and quasigraded Lie algebras/ T. Skrypnyk// Physica D - 2006 - Vol. 216 - No 2. - P. 247-260.

18. Skrypnyk T. Quasigraded Lie algebras and modified Toda field equations / T.Skrypnyk // SIGMA - 2006 - Vol. 2. - Paper 043. - 14 pages.

19. Skrypnyk T. Modified non-abelian Toda field equations and twisted quasigraded Lie algebras/ T. Skrypnyk // Journal of Mathematical Physics - 2006 - Vol. 47. - No 3. - P. 063509.

20. Skrypnyk T. New integrable Gaudin-type systems, classical r-matrices and quasigraded Lie algebras/ T. Skrypnyk //Phys.Lett. - 2005 - Vol. A 334.- Issues 5-6. - P. 390-399.

21. Skrypnyk T. Integrable quantum spin chains, non-skew symmetric r-matrices and quasigraded Lie algebras/ T.Skrypnyk // Journal of Geometry and Physics - 2006 - Vol. 57. - No 1. - P. 53–67.

22. Skrypnyk T. Generalized quantum Gaudin spin chains, involutive automorphisms and 'twisted' classical r-matrices/T.Skrypnyk //Journal of Mathematical Physics - 2006 - Vol. 47. - Issue 3. - P. 033511.

23. Skrypnyk T. Quantum integrable systems, non-skew symmetric r-matrices and algebraic Bethe anzatz/ T. Skrypnyk // J. Math. Phys. - 2007 - Vol. 48. - No 2. - 023506.

24. Skrypnyk T. Generalized Gaudin systems in the external magnetic field and non-skew-symmetric classical r-matrices/ T. Skrypnyk// J. Phys. - 2007 - Vol. A 40. - P. 13357-13352.

25. Skrypnyk T. Generalized Gaudin spin chains, non-skew symmetric r-matrices and Reflection Equation Algebras./ T. Skrypnyk // Jour. Math. Phys. - 2007 - Vol. 48.. - No 11.- 113521.

26. Skrypnyk T. Classical R-operators and integrable Thirring-type equations/ T.Skrypnyk // Symmetry, Integrability and Geometry - 2008 - Vol. 4. -Paper 011.- 19 p.

27. Skrypnyk T. Generalized n-level Jaynes-Cummings and Dicke models, classical rational r-matrices and nested Bethe ansatz / T.Skrypnyk // J. Phys. A - 2008 - Vol. 41. - p.475202.

28. Skrypnyk T. Integrability and superintegrability of the generalized n-level many-mode Jaynes-Cummings and Dicke models/ T. Skrypnyk// J. Math. Phys. - 2009 - Vol. 50. - No. 10.- P. 103523.

29. Skrypnyk T. Non-skew-symmetric classical r-matrices, algebraic Bethe ansatz and BCS-type systems/ T.Skrypnyk // J. Math. Phys. - 2009 - Vol. 50. - No. 3. - P. 033504.

30. T.Skrypnyk, Spin chains in magnetic field, non-skew-symmetric classical r-matrices and BCS-type integrable systems/ T.Skrypnyk // Nuclear Physics - 2009 - Vol. B 806. - No 3. - P.504-528.

31. Skrypnyk T., Non-skew-symmetric classical r-matrices and integrable cases of the reduced BCS model/ T. Skrypnyk// J. Phys. A - 2009 - Vol. 42. - No. 47. - P.472004.

32. Skrypnyk T., Integrable modifications of Dicke and Jaynes-Cummings models, Bose-Hubbard dimers and classical r-matrices / T. Skrypnyk// J. Phys. A - 2010 - Vol. 43. - No. 20. - P.205205.

33. Skrypnyk T., Lie algebras with triangular decompositions, non-skew-symmetric classical r-matrices and Gaudin-type integrable systems / T. Skrypnyk// J. Geom. Phys. - 2010 - Vol. 60. - No. 3. - P. 491–500.

34. Dubrovin B., Classical double, R-operators, and negative flows of integrable hierarchies/ B. Dubrovin, T. Skrypnyk// Teoret. Mat. Fiz. - 2012 - Vol. 172. - No 1. - P. 40–63.

35. Skrypnyk T. Quasi-periodic functions on the torus and sl(n)-elliptic Lie algebra/ T.Skrypnyk// J. Math. Phys. - 2012 - Vol. 53 - No. 2. - P. 023502.

36. Skrypnyk T. Elliptic three-boson system, "two-level three-mode" JCD-type models and non-skew-symmetric classical r-matrices. / T.Skrypnyk //*Nuclear Phys. B* - 2012 - Vol 856 - No. 2. - P. 552–576.

37. Skrypnyk T. Quasigraded bases in loop algebras and classical rational r-matrices/ T.Skrypnyk// J. Math. Phys. - 2012 - Vol. 53. - No. 8. - P. 083501.

38. Skrypnyk T. Rational r-matrices, higher rank Lie algebras and integrable proton-neutron BCS models/ T. Skrypnyk// Nuclear Phys. - 2012 - Vol. B 863. - No 2. - P. 435–469.

39. Skrypnyk T. Non-skew-symmetric classical r -matrices and integrable "$p_x + ip_y$" proton–neutron BCS models/ T.Skrypnyk// Nuclear Physics B - 2012 - Vol. 864 - No 3. - P. 770–805.

40. Skrypnyk T. Classical r-matrices and integrable BCS models with many types of fermions/ T.Skrypnyk// J. Phys. A - 2012 - Vol. 45. - No. 41. - P. 415203.

41. Skrypnyk T. "Z2-graded" Gaudin models and analytical Bethe ansatz/ T.Skrypnyk// Nuclear Phys. B.- 2013 - Vol. 870. - No 3. - 495–529.

42. Skrypnyk T. Decompositions of quasigraded Lie algebras, non-skew-symmetric classical r-matrices and generalized Gaudin models/T. Skrypnyk // J. Geom. Phys. - 2014 - Vol. 75. - 98–112.

43. Skrypnyk T. Infinite-dimensional Lie algebras, classical r-matrices, and Lax operators: two approaches/ T. Skrypnyk// J. Math. Phys. - 2013 - Vol. 54. - No. 10.- P. 103507-103532.

44. Skrypnyk T. "Many-poled" r-matrix Lie algebras, Lax operators, and integrable systems / T. Skrypnyk// J. Math. Phys. - 2014 - Vol. 55 . - No. 8.- P. 083507.

45. Skrypnyk T. Generalized shift elements and classical r-matrices: construction and applications/ T. Skrypnyk// J. Geom. Phys. - 2014 - Vol. 80. - P. 71–87.

46. Skrypnyk T. General integrable n-level, many-mode Janes-Cummings-Dicke models and classical r-matrices with spectral parameters / T. Skrypnyk// J. Math. Phys. - 2015 - Vol. 56. - No. 2.- P. 023511.

47. Skrypnyk T. Quantum integrable models of interacting bosons and classical r-matrices with spectral parameters/ T. Skrypnyk// J. Geom. Phys. - 2015 - Vol. 97. - P. 133–155.

48. Skrypnyk T. Gaudin-type models, non-skew-symmetric classical r-matrices and nested Bethe ansatz/ T.Skrypnyk// Nuclear Physics B - 2015 - Vol B 891. - No 2. - P. 200-229.

49. Skrypnyk T. Twisted"rational r-matrices and algebraic Bethe ansatz: applications to generalized Gaudin, Bose-Hubbard dimer and Jaynes-Cummings-Dicke-type models/ T.Skrypnyk// Theoretical and Mathematical Physics - 2015 - Vol. 189 - No 1. - P. 125-146.

50. Skrypnyk T. Z_2-graded classical r-matrices and algebraic Bethe ansatz: applications to integrable models of quantum optics and nuclear physics/ T.Skrypnyk// Journal of Physics A. - Vol. 49 . - No 36. - (2016).

51. Skrypnyk T. “Generalized” algebraic Bethe ansatz, Gaudin-type models and Z_p-graded classical r-matrices/ T. Skrypnyk // Nuclear Physics - 2016 - Vol. B. 913 - No. 12 - P. 327-356.

52. Skrypnyk T. Reductions in finite-dimensional integrable systems and special points of classical r-matrices/ T. Skrypnyk// J. Math. Phys. - 2016 - Vol. 57 . - No. 12.- P. 123504.

53. Skrypnyk T. Reductions in soliton hierarchies and special points of classical r-matrices/ T. Skrypnyk// J. Geom. Phys. - 2018 - Vol. 130 . - No. 8 - P. 260-287.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

БКШ	—	Бардін–Купер–Шріфер
БХ	—	Бозе–Хаббард
ДКД	—	Джейнс–Каммінгс-Діке
КАС	—	Костант–Адлер-Саймс
ЛЛ	—	Ландау-Ліфшиць
МГ	—	магнетик Гайзенберга
мКдВ	—	модифікований Кортевег де Вріз
НШ	—	нелінійний Шредінгер
ЯБ	—	Янг-Бакстер

ВСТУП

Цілком інтегровні гамільтонові системи грають важливу роль в теоретичній та математичній фізиці починаючи з 19 сторіччя з часів робіт Ліувіля, Неймана, Клебша та Ковалевської.

Сильним поштовхом для розвитку теорії інтегровних систем та їх застосувань було відкриття у 70-х роках XX сторіччя рівнянь солітонного типу та їх цілковитої інтегровності як нескінченновимірних гамільтонових систем [20]. Це привело до ряду фундаментальних теоретичних наслідків як в класичній, так і в квантовій теорії нелінійних полів у двох вимірах [34] а також до стрімкого розвитку асоційованої теорії скінченновимірних класичних та квантових гамільтонових систем.

Одним з важливих технічних знахідок цієї теорії було відкриття комутаторного представлення для відповідних рівнянь руху — так званого представлення Лакса [50], що існує як для рівнянь солітонного типу, так і для скінченновимірних гамільтонових систем. Це дозволило пов'язати данну теорію з теорією рівнянь типу Ейлера–Арнольда на скінченно- і нескінченновимірних алгебрах Лі "прихованих симетрій".

Іншою ключовою знахідкою було відкриття класичних r-матриць [62] що слугують для задання дужки Пуассона між матричними елементами матриці Лакса. Ця знахідка слугує основою не лише теорії класичних інтегровних систем, а і для їх квантових аналогів що одержуються методом квантування відповідних дужок Пуассона, що призвело до відкриття, так званих, квантових R-матриць та теорії квантових груп.

Довгий час в теорії "Лакс – інтегровних" гамільтонових систем основна увага приділялася, так званим, кососиметричним класичним r-матрицям, оскільки з такими r-матрицями можна асоціювати не лише лінійну, а й квадратичну Пуассонову структуру, яка після деформаційного квантування приводить до структури квантової групи. Теорія класичних інтегровних систем, а також рівнянь солітонного типу що базується на класичних некососиметричних r-матрицях та сама теорія таких r-матриць залишалася слабо розробленою. Тому важливою задачею є розвиток такої теорії, а також побудова фізично цікавих прикладів відповідних скінченновимірних систем та рівняннь солітонного типу. Цьому присвячена перша частина дисертації.

В спеціальній літературі широко побутувала думка що квантова інтегровність систем з лінійною r-матричною структурою є, свого роду, "артефактом" квантової інтегровності систем що базуються на квантових групах і квантових R-матрицях і що, в наслідок цього, квантові інтегровні системи асоційовані лише з кососиметричними r-матрицями. Проте, як було показано автором дисертаційного дослідженння, це помилкова точка зору: квантові інтегровні системи асоціюються також з загальними некососиметричними r-матриями, що жодним чином не пов'язані з квантовими групами. Викладу цих результатів, їх застосувань до фізично цікавих моделей, зокрема до моделей типу БКШ та розвитку методів точного розв'язку відповідних квантово – інтегровних систем присвячена друга части дисертаційного дослідженння.

Актуальність теми.

Однією з важливих задач сучасної теоретичної фізики є розробка методів дослідження моделей класичної та квантової механіки і класичної та квантової теорії поля поза рамками теорії збурень. Класичні та квантові інтегровні моделі є прикладами моделей, в дослідженні яких можна суттєво просунутись і набути необхідний для цієї мети досвід. Особливістю цих моделей є наявність прихованих симетрій, які дозволяють використовувати сучасні алгебраїчні методи для їх досліджень. Актуальність тематики дисертаційної роботи обумовлена тим, що в ній представлено побудова і вивчення алгебр Лі прихованих симетрії, їх застосування до знаходження нових класичних і квантових інтегровних систем і розвиток алгебраїчних методів обрахунку спектру гамільтоніанів побудованих квантових систем.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Результати, що увійшли в дисертаційну роботу, були отримані в рамках планової наукової тематики відділу математичних методів в теоретичній фізиці Інституту теоретичної фізики НАН України тема "Квантові симетрії і властивості інтегровних та квантово-польових систем", 2001–2004 рр., шифр 1.2.2, 1.4.7, № д.р. в УкрІНТЕІ 0101U000331; тема "Симетрії, інтегровні системи, класичні і квантові поля", 2005–2007 рр., шифр 1.4.7, № д.р. в УкрІНТЕІ 0101U006883; тема "Методи теорії симетрій та проблеми нелінійної динаміки в сучасній теорії поля та теорії елементарних частинок", 2008–2010 рр., шифр 1.4.7, № д.р. в УкрІНТЕІ 0106U007885).

Мета і задачі дослідження.

Метою дисертаційної роботи є розвиток теорії класичних та квантових інтегровних систем що базуються на теорії некососиметричних r-матриць та відповідних нескінченновимірних алгебр Лі.

Зокрема, у дисертації розв'язувались наступні задачі:

- Розвиток методів побудови класичних r-матриць зі спектральними параметрами та побудова нових класів некососиметричних r-матриць.

- Побудова нескінченновимірних алгебр прихованих симетрій стартуючи з данної класичної r-матриці.

- Побудова всеможливих матриць Лакса що відповідають данній r-матриці, аналіз відповідних скінченновимірних гамільтонових систем та виявлення нових фізично цікавих прикладів таких систем.

- Побудова ієрархій солітонних рівняннь що відповідають данній класичній r-матриці зі спектральними параметрами та знаходження нових цікавих прикладів солітонних рівняннь у двох вимірах.

- Побудова квантових інтегровних систем що базуються на класичних некососиметричних r-матрицях, знаходження фізично цікавих прикладів таких систем.

- Розвиток методів точного знаходження спектру квантово – інтегровних систем та знаходження спектру конкретних моделей пов'язаних з некососиметричними r-матрицями.

Об'єктами дослідження є класичні та квантові гамільтонові системи та алгебри їх симетрій.

Предметом дослідження є методи побудови класичних та квантових інтегровних систем та рівняннь солітонного типу, а також методи знаходження спектру квантово – інтегровних систем.

В роботі було застосовано наступні **методи дослідження**: метод класичної r-матриці, метод алгебраїчного анзацу Бете.

Наукова новизна одержаних результатів.

В дисертаційній роботі вперше:

1. Побудовані нові класи класичних некососиметричних r-матриць зі спектральними параметрами.

2. Доведено, що з кожною невиродженою класичною r-матрицею зі спектральними параметрами можна асоціювати нескінченновимірну квазігардуйовану алгебру прихованих симетрій відповідних інтегровних гамільтонових систем. Явно побудовані базиси в цих алгебрах та обраховані відповідні комутаційні співвідношення.

3. Пред'явлено конструктивний спосіб побудови по данній r-матриці всіх мероморфних оператовів Лакса скінченновимірних гамільтонових систем, що їй відповідають. Побудовані нові приклади інтегровних систем що одержуються цим методом.

4. Розвинуто метод побудови інтегровних ієрархій рівняннь солітонного типу по данній класичній r-матриці та пред'явлено конструктивний

метод побудови $U - V$–пар для відповідних рівняннь нульової кривизни. Побудовано нові приклади таких рівнянь.

5. Показано, що редукція в теорії солітонних рівняннь та теорії скінченновимірних гамільтонових систем пов'язана зі спеціальними точками класичних r-матриць в яких вони стають виродженими або сингулярними.

6. Побудована теорія квантово – інтегровних систем, що базується на класичних некососиметричних r-матрицях. Побудовані нови приклади таких систем. Зокрема, побудовані інтегровні узагальнення:

   (a) спінових ланцюжків Годена.

   (b) спінових ланцюжків Годена у зовнішньому полі.

   (c) спін – бозонних моделей типу Джейнса – Камінгса – Діке.

   (d) бозонних моделей типу димерів Бозе – Хаббарда.

7. Побудовані спінові ланцюжки застосовані до конструювання інтегровних ферміонних моделей типу БКШ – Річардсона. Побудовано $p + ip$ – аналоги моделей Річардсона з одним та багатьма типами ферміонів та знайдено їх спектр методом анзацу Бете.

8. Метод алгебраїчного анзацу Бете розширено на клас квантово – інтегровних систем пов'язаних з некососиметричними r-матрицями. Показано, що у випадку алгебр $gl(n)$ ієрархічний анзац Бете може бути застосований до нестандартних ланцюжків вкладених підалгебр що включають вкладення $gl(n) \supset gl(n-p) \oplus gl(p)$. Таким чином, знайдено спектр квантово – інтегровних моделей що базуються на алгебрі $gl(n)$, зокрема, Z_p – градуйованих моделей типу Годена та типу Годена у зовнішньому магнітному полі, а також узагальнених моделей Джейнса – Камінгса – Діке та узагальнених димерів Бозе – Хаббарда (випадок $p = 2$).

Практичне значення одержаних результатів.

Результаті, отримані в дисертації, є важливими в:

1. Теорії магнетизму (теорії рівнянь типу Ландау – Ліфшиця, що описує динаміку вектора намагніченості).
2. Фізиці конденсованого стану (теорії надпровідності малих металевих гранул).
3. Ядерній фізиці (теорії протон – нейтронних взаємодій).
4. Квантовій оптиці (теорії взаємодії світла з речовиною).

Крім того, значна частина результатів має загально – теоретичний характер і є важливою при побудові та аналізі класичних та квантових інтегровних систем будь якої фізичної інтерпритації.

Особистий внесок здобувача.

Подавляюча більшість публікацій, на яких базується дисертація, виконана автором дисертації без співавторства.

Апробація роботи.

Матеріали дисертації пройшли апробацію на семінарах ІТФ НАН України (Київ, 2000-2018), Інст. математики НАН України, університетів м. Анжер (Франція), м. Тур (Франція), м. Париж VI-VII (Франція), м. Ліон (Франція), м. Утрехт (Голандія), м. Мілан (Італія), м. Рим (Італія), м. Катанья (Італія), Міжнародного Інституту CICCA (м. Трієст, Італія), доповідалися на IV, V, VI, VII міжнародних конференціях “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics” (Київ, червень 2001; 2003; 2005; 2007), міжнародному колоквіумі “Теоретико-групові методи у фізиці” (Дубна, серпень 2000), XIII Гуцулській робочій нараді “Методи теоретичної та математичної фізики” (Київ, вересень 2000), Робочій нараді НАТО “Некомутативні структури у фізиці і математиці” (Київ, вересень 2000), міжнародній конф. з бі-гамільтонових систем (Бедлево, Польша, серпень 2001), міжнародній конф. “Квантові групи та інтегровні системи” (Прага, Чехія, червень 2002), міжнародній конф. “Квантові групи та інтегровні системи” (Прага, Чехія, червень 2003), міжнародній нараді “Classical and Quantum Integrable Systems” (Дубна, Росія, 22-25 січня 2007), “The 2007 Twente Conference on Lie Groups” (Енсхеде, Нідерланди, 12-14 грудня, 2007), міжнародній конф. “ 30 років бі-гамільтонових систем” (Бедлево, Польша, серпень 2008), міжнародній конф. проекту ЕНІГМА (Трієст, Італія, жовтень 2008), міжнародній конф. “Квантові групи та інтегровні системи” (Прага, Чехія, червень 2009), наукових зборах ІТФ НАНУ (Київ, Україна, березень 2010), міжнародній конф. проекту ДІАДЕМ (Анжер, Франція, вересень 2012), міжнародній конф. з квантових інтегровних систем (Київ, Україна, червень 2013), міжнародній конф. памя’ті П.І.Голода (Київ, Україна, липень 2014), міжнародній конф. ”Фізика і математика нелінійних феноменів”, (Галіполі, Італія, червень 2015), міжнародній конф. “ Інтегровні системи і споріднені структури (Геттінген, Німеччина, березень 2016), міжнародній конф. ”50 років методу оберненої задачі”, (Галіполі, Італія, чер. 2017).

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано 53 статті [7], [65]-[115] у реферовних наукових журналах.

Розділ 1

Класичні r-матриці зі спектральними параметрами

1.1. Вступ

Теорія класичних r-матриць веде свій відлік від роботи Скляніна [62], хоча в неявній (компонентній) формі класичні r-матриці присутні вже в роботі Годена [37]. Класичні r-матриці розподіляються на динамічні та нединамічні, кососиметричні та некососиметричні. Теорія нединамічних кососиметричних r-матриць була розроблена в роботах Бєлавіна та Дрінфельда [2, 3] та завершена в роботах Століна [64].

В цій главі ми розглянемо теорію загальних кососиметричних та некососиметричних r-матриць, їх аналітичну структуру та влативості.

1.2. Позначення і визначення

Нехай $\mathfrak{g}$ – проста скінченно-вимірна алгебра Лі або редуктивна алгебра Лі $gl(n)$. Нехай $\{X_\alpha | \alpha = \overline{1, \mathrm{dim}\mathfrak{g}}\}$ — базис в алгебрі Лі, що задовольняє наступні комутаційні співвідношення:

$$[X_\alpha, X_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{\mathrm{dim}\mathfrak{g}} C^{\gamma}_{\alpha\beta} X_\gamma. \tag{1.2.1}$$

Нехай $(\ ,\ )$ — білінійна симетрична інваріантна форма на алгебрі Лі $\mathfrak{g}$, $g^{\alpha\beta}$ компоненти невиродженої інваріантної форми: $g^{\alpha\beta} = (X^\alpha, X^\beta)$. Надалі підняття чи опускання тензорних індексів буде здійснюватись за допомогою метрики $g^{\alpha\beta} = (X^\alpha, X^\beta)$ чи її оберненої $g_{\alpha\beta}$. Ми будемо використовувати наступне визначення:

Визначення 1. Функція $r(u_1, u_2)$ двох комплексних змінних зі значенням в $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ називається класичною r-матрицею, якщо вона задовольняє узагальнене класичне рівняння Янга-Бакстера:

$$[r_{12}(u_1, u_2), r_{13}(u_1, u_3)] = [r_{23}(u_2, u_3), r_{12}(u_1, u_2)] - [r_{32}(u_3, u_2), r_{13}(u_1, u_3)], \tag{1.2.2}$$

$r_{12}(u_1, u_2) \equiv \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} r^{\alpha\beta}(u_1, u_2) X_\alpha \otimes X_\beta \otimes 1$ etc.

Зауваження 1. Зауважимо, що якщо матриця $r(u_1, u_2)$ кососиметрична, тобто $r_{12}(u_1, u_2) = -r_{21}(u_2, u_1)$ то рівняння (1.2.2) переходить в звичайне класичне рівняння Янга – Бакстера:

$$[r_{12}(u_1, u_2), r_{13}(u_1, u_3)] = [r_{23}(u_2, u_3), r_{12}(u_1, u_2) + r_{13}(u_1, u_3)]. \tag{1.2.3}$$

Всі розв'язки рівняння (1.2.3) кососиметричними. Тому кожний розв'язок рівняння (1.2.3) є розв'язком рівняння (1.2.2). Зауважимо також, що у випадку кососиметричних r-матриць існує така "уніформізуюча" параметризація, що $r_{12}(u_1, u_2) = r_{12}(u_1 - u_2)$, тобто r-матриця ефективно є функцією одної комплексної змінної і відповідне рівняння (1.2.3) може бути записане в наступному вигляді:

$$[r_{12}(u), r_{13}(v)] = [r_{23}(v - u), r_{12}(u) + r_{13}(v)]. \tag{1.2.4}$$

Цей факт несправедливий для загальних некососиметричних класичних r-матриць. Нарешті зауважимо, що кососиметричні r-матриці, як функції уніформізуючого параметру розділяються на три класи: раціональні, тригонометричні та еліптичні [2]. Аналогічна класифікація для некососиметричних r-матриць не відома.

Можно показати, що існує три класи еквівалентності в просторі розв'язків рівняння (1.2.2):

1. калібрувальні перетворення: $r_{12}(u_1,u_2) \to Ad_{g(u_1)} \otimes Ad_{g(u_2)} r_{12}(u_1,u_2)$.
2. репараметризації: $r_{12}(u_1,u_2) \to r_{12}(v_1,v_2)$, де $u_i = u_i(v_i)$, $i \in 1,2$.
3. перемаштабування: $r_{12}(u_1,u_2) \to f(u_2) r_{12}(u_1,u_2)$, де ф-ція $f(u_2)$ – довільна.

Зауваження 2. Зауважимо, що перемаштабування не є перетворенням симетрії звичайного класичного рівняння Янга – Бакстера (1.2.3) тобто воно не зберігає кососиметричність r-матриці.

Ми будемо використовувати наступне визначення:

Визначення 2. Функція $c(u)$ однієї комплексної змінної u зі значенням в алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ називається узагальненим елементом зсуву, якщо вона є розв'язком наступного рівняння:

$$[r_{12}(u,v), c_1(u)] - [r_{21}(v,u), c_2(v)] = 0. \tag{1.2.5}$$

Звернемо увагу, що узагальнені елементи зсуву утворюють лінійний простір, тобто їх можно додавати і множити на константи.

1.3. Аналітичні властивості класичних r-матриць

Одною з найбільш важливих властивостей класичних r-матриць з спектральними параметрами є їх аналітична поведінка. На сьогоднішній день не існую класифікації розв'язків рівняння (1.2.2). Тому ми будемо робити додаткове припущення про аналітичні властивості r-матриць $r(u,v)$.

Визначення 3. Класична r-матриця $r(u,v)$ буде називатись невиродженою, якщо в деякій відкритій області $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \subset \mathbb{C}^2$ вона має наступний розклад:

$$r(u,v) = \frac{\Omega}{(u-v)} + r_0(u,v) \tag{1.3.6}$$

де $r_0(u,v)$ регулярна в $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$ - функція, тобто має розклад в формальні ряди Тейлора по змінних u та v, а $\Omega\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ є тензорним Казиміром:

$$\Omega=\sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} g^{\alpha\beta}X_\alpha\otimes X_\beta. \tag{1.3.7}$$

Зауваження 3. З властивості (1.3.6) слідує що r-матриця $r(u,v)$ є невиродженою в області $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$ в звичайному сенсі, тобто $\det r(u,v)\neq 0$. З властивості (1.3.6) слідує також, що не існує такої підалгебри $\mathfrak{g}'\subset\mathfrak{g}$ і підпростору $\mathfrak{g}''\subset\mathfrak{g}$, що $r(u,v)\in\mathfrak{g}'\otimes\mathfrak{g}$ або $r(u,v)\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}''$, $\forall u,v\in\mathcal{U}$.

Визначення 4. Ми будемо називати точки u та v "регулярними" чи "не особливими", якщо вони належать області $\mathcal{U}$.

Надалі ми будемо розглядати тільки невироджені у вказаному вище сенсі класичні r-матриці. Наприклад, класичні кососиметричні r-матриці є невиродженими, як з точки зору існування розкладу (1.3.6), так і в звичайному матричному сенсі [2]. Тим не менше, можуть існувати точки, що не належать відкритій області $\mathcal{U}$, де аналітичні влативості (1.3.6) не мають місця. Ми будемо використовувати наступне визначення:

Визначення 5. Будемо називати точку ν_0, що належать розширеній комплексній площині "сингулярною" , "особливою" або "спеціальною", якщо одна виконується хоча б одна з наступних двох вимог

$$(i)\ r(u,\nu_0)\in\mathfrak{g}(u^{-1},u))\otimes\bar{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0} \tag{1.3.8}$$

$$(ii)\ r(\nu_0,v)\in\mathfrak{g}_0^{\nu_0}\otimes\mathfrak{g}(v^{-1},v)) \tag{1.3.9}$$

для деякої підалгебри $\mathfrak{g}_0^{\nu_0}$, та деякого нетривіального підпростору $\bar{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0}$, кожен з яких не співпадає з усією алгеброю Лі $\mathfrak{g}$.

Зауваження 4. Точка ν_0 така, що $r(u,\nu_0)=0$ (тобто, коли підпростір $\bar{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0}$ тривіальний) може не бути особливою точкою класичної r-матриці, тому що претворенням $r(u,v) \to f^{-1}(v)r(u,v)$ де $f(\nu_0) = 0$, r-матриця може бути зроблена невиродженою і несингулярною в цій точці. В такому випадку точка ν_0 є спеціальною точкою класичної r-матриці тоді і тільки тоді, коли задовольняється умова (ii).

З визначення (5) слідує зокрема, що r-матриця $r(u,v)$ є виродженою в спеціальних точках в звичайному матричному сенсі тобто $\det r(u,\nu_0) = 0$ чи $\det r(\nu_0,v) = 0$ відповідно.

Зауваження 5. Зауважимо, що крім особливимх точок ν_0, що задовольняють умови $\det r(u,\nu_0) = 0$ можна шукати такі точки $v = \nu_0$, що $r(u,v)$ мають полюси скінченного порядку в точці ν_0. Після множення r-матриці на деяку функцію від змінної v отримується r-матриця, що задовольняє умові $\det r(u,\nu_0) = 0$ тобто цей випадок є еквівалентним попередньому.

Зауважимо, що умови (i)-(ii) ефективно означають, що точка ν_0 не належить до відкритої області $\mathcal{U}$. В усіх відомих випадках аналітична поведінка r-матриці в околі особливох точки $v = \nu_0$ має форму:

$$r(u,v) = (v-\nu_0)^k \frac{\Omega}{(u-v)} + \widetilde{r}_0(u,v), \tag{1.3.10}$$

де $\widetilde{r}_0(u,v)$ це $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$-значна функція регулярна в околі точки $u = \nu_0$, $v = \nu_0$.

Гіпотеза 1.1. *Перетвореннями еквівалентності кожну класичну r-матрицю $r(u,v)$ можно звести до такої форми, що в околі спеціальної точки $v = \nu_0$ виконується розклад (1.3.10) для деякого цілого $k > 0$.*

1.4. Висновки

В цьому розділі ми розглянули визначення та описали теорію загальних класичних нединамічних r-матриць. Ми розглянули некососиметричний аналог аналітичної поведінки класичних r-матриць в точках загального положення [105] та сформулювали гіпотезу про аналітичну поведінку класичних r-матриць в околі особливих точок [114].

Розділ 2

Методи побудови класичних r-матриць

2.1. Вступ

В цій главі будуть наведені методи побудови класичних r-матриць та розглянуті їх приклади. Одним таких методів є теорія R-операторів [17]. Основним прикладом R-операторів є R–оператор типу Адлера – Костанта – Саймса [17], що базується на розкладі алгебри Лі в суму двох підалгебр. Добре відомим є застосування в теорії R–операторів градуйованих алгебр Лі [14, 15]. В серії наших робіт [7], [65]-[77] було запропоновано застосовувати майже градуйовані або квазіградуйовані алгебри Лі в теорії R –операторів типу Адлера – Костанта - Саймса (ця ідея в неявному вигляді містилась в роботах [42] – [43]).

В данному розділі ми будуємо класичні r-матриці, що відповідають найпростішим квазіградуйованим деформаціям алгебр петель в однорідному градуюванні [75, 83, 84]. Ми також розглядаємо метод зсуву класичних r-матриць на постійний тензор [2] та узагальнюємо його на випадок некососиметричних r-матриць [96]. Ми показуємо його зв'язок з теорією R–операторів, що відповідають трикутному розкладу алгебр Лі [96].

Розглянуто також метод редукції r-матриці відносно автоморфізму скінченного порядку [18] та застосовано його до квазіградуйованих алгебр Лі в основному та проміжних квазіградуйуваннях [79]-[82]. Ми розглядаємо комбінований метод побудови r-матриць, що включає квазіградуйовану деформацію, зсув та редукцію відносно автоморфізму [104]. Також описано K – зкручені r-матриці [88], пов'язані з алгебрами відбиття [35].

2.2. Класичні r-матриці та теорія R-операторів.

2.2.1. R-оператори і алгебри Лі

Визначення 6. Нехай $\widetilde{\mathfrak{g}}$ — нескінченновимірна алгебра Лі, R — лінійне відображення $\widetilde{\mathfrak{g}} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$, що задовольняє класичному рівнянню Янга – Бакстера, записаному в операторній формі [17]:

$$R([R(X),Y]+[X,R(Y)])-[R(X),R(Y)]=\frac{1}{4}[X,Y],\ \ \forall X,Y\in\widetilde{\mathfrak{g}}. \quad (2.2.1)$$

Відображення R називається класичним R-оператором.

Відомі два класи класичних R-оператори: оператори Костанта – Адлера – Саймса (далі КАС) і "трикутні" R-оператори.

Розглянемо ці випадки детальніше. Нехай алгебра Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}$ має розклад в пряму суму двох підалгебр $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\pm}$ як лінійних просторів:

$$\widetilde{\mathfrak{g}}=\widetilde{\mathfrak{g}}^{+}+\widetilde{\mathfrak{g}}^{-},$$

Нехай $P^{\pm}$ будуть операторами проекцій на підалгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\pm}$ відповідно. Відомо, що в цьому випадку можливо визначити, так званий, R-оператор типу КАС наступною формулою:

$$R=\frac{1}{2}(P^{+}-P^{-}). \quad (2.2.2)$$

Розглянемо "трикутний" R-оператор. Нехай алгебра Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}$ має трикутний розклад:

$$\widetilde{\mathfrak{g}}=\widetilde{\mathfrak{g}}_{+}+\mathfrak{g}_0+\widetilde{\mathfrak{g}}_{-}, \quad (2.2.3)$$

де сума є прямою сумою векторних просторів, $\widetilde{\mathfrak{g}}_{\pm}$ і $\mathfrak{g}_0$ замкнуті підалгебри Лі і, крім того, $\widetilde{\mathfrak{g}}_{\pm}$ – $\mathfrak{g}_0$-модулі. Нехай R_0 буде розв'язком модифікованого рівняння Янга – Бакстера (2.2.1) на $\mathfrak{g}_0$. Тоді, наступна формула:

$$R=\frac{1}{2}P_{+}+R_0-\frac{1}{2}P_{-}, \quad (2.2.4)$$

де $P_{\pm}$ – є операторами проекції на підалгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_{\pm}$, задає розв'язок модифікованого рівняння Янга – Бакстера (2.2.1) на $\mathfrak{g}$.

Зауваження 6. В випадку алгебр Лі з трикутним розкладом можливо також отримати R-оператор КАС покладаючи в формулі для трикутного оператора $R_0 = \pm\frac{1}{2}P_0$. В цьому випадку КАС R-оператор відповідає розкладу КАС з $\mathfrak{g}^+ = (\mathfrak{g}_+ + \mathfrak{g}_0)$, $\mathfrak{g}^- = \mathfrak{g}_-$ чи $\mathfrak{g}^+ = \mathfrak{g}_+$, $\mathfrak{g}^- = (\mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_-)$.

2.2.2. Класичні r–матриці та класичні R-оператори. Нехай $\widetilde{\mathfrak{g}}$ – алгебра Лі $\mathfrak{g}$-значних функцій однієї комплексної змінної u. Відомо [57], що якщо R-оператор, записаний як інтегральний оператор і має ядро то:

$$R(X)(u_1) = \oint\limits_{u_2=0} (r_{12}(u_1,u_2), X_2(u_2))_2\, du_2, \tag{2.2.5}$$

де $r_{12}(u_1,u_2)$ – є $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$-значною функцією двох комплексних змінних, $X_2 \equiv 1\otimes X$, $(\ ,\ )$ — інваріантна невироджена білінійна форма на $\mathfrak{g}$, тоді функція $r_{12}(u_1,u_2)$ задовольняє узагальненому класичному рівнянню Янга–Бакстера. Тобто, отримавши R-оператори, що задовольняють модифікованому рівнянню Янга-Бакстера (2.2.1) і вираховуючи їх ядра як інтегральних операторів, можливо зконструювати явно рішення узагальненого класичного рівняння Янга–Бакстера. У випадку R-операторів типу КАС і трикутних R-операторів можливо дати явні формули для $r(u_1,u_2)$, використовуючи базис в алгебрі Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}$ і базис в дуальному просторі $\widetilde{\mathfrak{g}}^*$ по відношенню до стандартного спарювання:

$$\langle X,Y\rangle = \oint\limits_{u=0} (X(u),Y(u))\frac{du}{u}, \tag{2.2.6}$$

де $X(u)\in\widetilde{\mathfrak{g}}$, $Y(u)\in\widetilde{\mathfrak{g}}^*$.

Розглянемо ці два випадки детальніше.

1.Випадок R-операторів КАС. Нехай алгебра $\widetilde{\mathfrak{g}}$ ($\mathfrak{g}$-значних функцій змінної u) допускає, як лінійний простір, розклад в суму двох підалгебр. Нехай $X^m_\alpha \equiv X^m_\alpha(u)$, де $m\in\mathbb{Z}, \alpha\in\overline{1,\dim\mathfrak{g}}$ базис в алгебрі Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}$, що узгоджений з цим розкладом, тобто $X^m_\alpha\in\widetilde{\mathfrak{g}}^+$ для $m\geq 0$, $X^m_\alpha\in\widetilde{\mathfrak{g}}^-$ для $m<0$.

Нехай $Y_\alpha^m \equiv Y_\alpha^m(u)$ – базис в дуальному просторі $\widetilde{\mathfrak{g}}^*$ ортогональний до базису X_α^m по відношенню до введоного спарювання $\langle\ ,\ \rangle$. Тоді, як слідує із явної форми R-оператора КАС (2.2.2), функція $r_{12}(u_1,u_2)$ вигляду:

$$r_{1,2}(u_1,u_2)=\frac{1}{2}\Big(\sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}}\sum_{m\geq 0}X_\alpha^m(u_1)\otimes Y_\alpha^m(u_2)-\sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}}\sum_{m<0}X_\alpha^m(u_1)\otimes Y_\alpha^m(u_2)\Big) \tag{2.2.7}$$

задовольняє узагальненному класичному рівнянню Янга – Бакстера.

2.Випадок трикутного R-оператора. Нехай алгебра Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}$ $\mathfrak{g}$-значних функцій від змінної u допускає трикутний розклад $\widetilde{\mathfrak{g}}=\widetilde{\mathfrak{g}}_+ + \mathfrak{g}_0 + \widetilde{\mathfrak{g}}_-$. Нехай $X_\alpha^m \equiv X_\alpha^m(u)$, де $m\in\mathbb{Z},\alpha\in\overline{1,\dim\mathfrak{g}}$ — базис в алгебрі $\widetilde{\mathfrak{g}}$ узгоджений з цим розкладом, тобто $X_\alpha^m\in\widetilde{\mathfrak{g}}_+$, якщо $m>0$, $X_\alpha^m\in\widetilde{\mathfrak{g}}_-$ якщо $m<0$ і $X_\alpha^0\equiv X_\alpha\in\mathfrak{g}_0$. Нехай $Y_\alpha^m\equiv Y_\alpha^m(u)$ — базис в лінійному просторі $\widetilde{\mathfrak{g}}^*$ ортогональний до базису X_α^m по відношенню до спарюванню $\langle\ ,\ \rangle$. Тоді, як слідує з явної форми R-оператора (2.2.4), функція $r_{12}(u_1,u_2)$ вигляду:

$$\begin{aligned}r_{1,2}(u_1,u_2)=\frac{1}{2}\sum_{m>0}\sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}}X_\alpha^m(u_1)\otimes Y_\alpha^m(u_2)+\sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}_0}b^{\alpha\beta}X_\alpha\otimes X_\beta-\\-\frac{1}{2}\sum_{m<0}\sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}}X_\alpha^m(u_1)\otimes Y_\alpha^m(u_2),\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

задовольняє узагальненному класичному рівнянню Янга–Бакстера, якщо

$$b_{12}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}_0}b^{\alpha\beta}X_\alpha\otimes X_\beta$$

задовільняє модифікованому рівнянню Янга–Бакстера на $\mathfrak{g}_0$.

2.2.3. Симетрії і метод "зсуву" класичних r-матриць. В цьому підрозділі ми наведемо один з методів побудови класичних r-матриць і пояснимо його зв'язок з теорією класичних R-операторів.

Ми будемо використовувати наступне визначення.

Визначення 7. Класична $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$– значна r-матриця $r_{12}(u_1,u_2)$ називається $\mathfrak{g}_0$– інваріантною, де $\mathfrak{g}_0$ — підалгебра Лі алгебри $\mathfrak{g}$ якщо

$$[r_{12}(u_1,u_2), X\otimes 1 + 1\otimes X] = 0,\ \forall X\in\mathfrak{g}_0.$$

Має місце наступне Твердження.

Твердження 2.1. *Нехай $r_{12}(u_1,u_2)$ — $\mathfrak{g}_0$-інваріантна класична r-матриця, що задовольняє додатковій умові:*

$$r_{12}(u_1,u_2) + r_{21}(u_2,u_1) = \alpha\Omega_{12}^{(0)}, \tag{2.2.9}$$

де $\Omega_{12}^{(0)}$ — тензорна функція Казиміра на $\mathfrak{g}_0$. Нехай c_{12} — постійний некососиметричний розв'язок модифікованого класичного рівняння Янга–Бакстера на $\mathfrak{g}_0$:

$$[c_{12},c_{13}] - [c_{23},c_{12}] + [c_{32},c_{13}] = -\alpha[\Omega_{32}^{(0)},c_{13}]. \tag{2.2.10}$$

тоді функція

$$r_{12}^c(u_1,u_2) = r_{12}(u_1,u_2) + c_{12}$$

задовольняє узагальнене класичне рівняння Янга – Бакстера.

Зауваження 7. Рівняння (2.2.10) — це одна з можливих тензорних форм постійного модифікованого рівняння Янга – Бакстера на $\mathfrak{g}_0$. Заміною:

$$b_{12} = c_{12} + \frac{\alpha}{2}\Omega_{12}^{(0)}$$

воно може бути зведено до стандартної тензорної форми модифікованих рівнянь Янга – Бакстера на $\mathfrak{g}_0$:

$$[b_{12},b_{13}] - [b_{23},b_{12}] + [b_{32},b_{13}] = \frac{\alpha^2}{4}[\Omega_{23}^{(0)},\Omega_{13}^{(0)}]. \tag{2.2.11}$$

Зауваження 8. У випадку $\alpha = 0$ ми отримуємо, що $r_{12}(u_1,u_2)$ – кососиметрична r-матриця, а c_{12} – постійний некососиметричний розв'язок узагальненого класичного рівняння Янга – Бакстера.

Покажемо тепер зв'язок r-матриць з ядрами R–операторів трикутних і типу КАС. Спершу нагадаємо, що можливо розглянути трикутні R–оператори $R = \frac{1}{2}P_{+} + R_0 - \frac{1}{2}P_{-}$ у випадку $R_0 = \frac{1}{2}P_0$, де P_0– проекційний оператор на підалгебру $\mathfrak{g}_0$. Припустимо, що $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$, тобто що $X \in \mathfrak{g}_0 \subset \widetilde{\mathfrak{g}}$ не залежить від змінної u. Має місце наступне Твердження:

Твердження 2.2. *Ядро $r(u_1, u_2)$ є $\mathfrak{g}_0$–інваріантним, тобто:*

$$[r_{12}(u_1, u_2), X \otimes 1 + 1 \otimes X] = 0, \forall X \in \mathfrak{g}_0.$$

Припустимо, що $\widetilde{\mathfrak{g}}^{*}_{\pm} = \widetilde{\mathfrak{g}}_{\mp}$. В цьому випадку легко показати, що $P^{*}_{\pm} = P_{\mp}$. Нехай, більше того, підалгебра $\mathfrak{g}_0$ буде напівпростою або редуктивною (враховуючи граничний випадок, коли $\mathfrak{g}_0$ є абелевою). В цьому випадку $\mathfrak{g}_0^{*} \simeq \mathfrak{g}_0$ і легко показати, що $P_0^{*} = P_0$ і його ядро співпадає з тензорним Казиміром на $\mathfrak{g}_0$. З цього слідує, що $R + R^{*} = P_0$. З іншого боку, ядро оператора $R + R^{*}$ співпадає з виразом $r_{12}(u_1, u_2) + r_{21}(u_2, u_1)$.

Отже, ми довели наступне Твердження.

Твердження 2.3. *Нехай $\widetilde{\mathfrak{g}}^{*}_{\pm} = \widetilde{\mathfrak{g}}_{\mp}$ і підалгебра $\mathfrak{g}_0$ є напівпростою чи редуктивною. Тоді:*

$$r_{12}(u_1, u_2) + r_{21}(u_2, u_1) = \Omega_0.$$

Іншими словаим, ми показали, що класичні r-матриці що мають спеціальні властивості симетрії, співпадають з ядрами КАС R– оперторів типу $R = \frac{1}{2}(P_{+} + P_0) - \frac{1}{2}P_{-}$. Лишилось показати, що класичні r-матриці $r^{c}_{12}(u_1, u_2)$, зв'язані з R– операторами $R' = \frac{1}{2}P_{+} + R_0 - \frac{1}{2}P_{-}$, де R_0– довільне рішення модифікованого рівняння Янга – Бакстера на $\mathfrak{g}_0$. Дійсно, $R' - R = R_0 - \frac{1}{2}P_0$. З іншого боку, легко показати, що ядро c_{12} оператора $C \equiv R_0 - \frac{1}{2}P_0$ на $\mathfrak{g}_0$, розглянуте як елемент простору $\mathfrak{g}_0 \otimes \mathfrak{g}_0$, задовольняє рівняння (2.2.10) з $\alpha = 1$. Отже, ми показали, що $r_{12}(u_1, u_2)$ і $r^{c}_{12}(u_1, u_2)$ співпадають з ядрами КАС і трикутних – R-операторів, асоційованих з алгебрами Лі з трикутними розкладами.

2.3. "Деформовані" раціональні r-матриці.

Затосуємо метод класичних R–операторів до конструювання класичних r-матриць в складнішому випадку. Ми будемо використовувати наступне:

Визначення 8. Нескінченновимірна алгебра Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}$ називається $\mathbb{Z}$- квазіградуйованою типу (p,q), якщо вона допускає розклад:

$$\widetilde{\mathfrak{g}} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j, \quad \text{такий що} \quad [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \sum_{k=-p}^{q} \mathfrak{g}_{i+j+k}.$$

Має місце наступне Твердження:

Твердження 2.4. *Нехай* $\widetilde{\mathfrak{g}}$*– квазіградуйована алгебра Лі типу* $(0,1)$ *чи* $(1,0)$*. Тоді* $\widetilde{\mathfrak{g}}$ *допускає розклад КАС з* $\widetilde{\mathfrak{g}}_\pm = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}_\pm} \mathfrak{g}^j$.

Розглянемо важливий клас таких алгебр. Нехай $\mathfrak{g}$ – деяка скінченновимірна алгебра Лі з дужкою Лі $[\ ,\ ]$. Одна з можливих реалізацій, описаних вище квазіградуйованих алгебр Лі, це простір петель $\mathfrak{g}(u^{-1},u) = \mathfrak{g}\otimes\mathrm{Pol}(u,u^{-1})$ (ми будемо також використовувати позначення $\mathfrak{g}(u^{-1},u))$ для його розширення рядами Лорана) зі спеціально визначеною дужкою Лі. Дійсно, нехай $X^i_\alpha = X_\alpha \otimes u^i \in \mathfrak{g}^i$ – базис в алгебрі $\widetilde{\mathfrak{g}}$, де X_α – базисний елемент напівпростої, або редуктивної алгебри Лі $\mathfrak{g}$. Тоді легко бачити, що на таких базисних елементах потрібна дужка Лі, може бути визначена наступною формулою:

$$[X^i_\alpha, X^j_\beta]_F = [X_\alpha, X_\beta]^{i+j} + F(X_\alpha, X_\beta)^{i+j+1}, \tag{2.3.12}$$

де $[X_\alpha, X_\beta]^{i+j} \equiv [X_\alpha, X_\beta]\otimes u^{i+j}$, $F(X_\alpha, X_\beta)^{i+j+1} \equiv F(X_\alpha, X_\beta)\otimes u^{i+j+1}$ а кососиметричне відображення $F(\ ,\ )$, задовольняє двом вимогам:

$$\sum_{c.p.\ \{\alpha,\beta,\gamma\}} [F(X_\alpha, X_\beta), X_\gamma] + F([X_\alpha, X_\beta], X_\gamma) = 0. \tag{2.3.13a}$$

$$\sum_{c.p.\ \{\alpha,\beta,\gamma\}} F(F(X_\alpha, X_\beta), X_\gamma) = 0. \tag{2.3.13b}$$

Умова (2.3.13b) є тотожністю Якобі для дужок Лі , визначених за допомогою F: $[\ ,\ ]_1 = F(\ ,\ )$. Умова (2.3.13a) є умовою сумісності двох дужок Лі $[\ ,\ ]$ і $[\ ,\ ]_1$. Проблема конструювання сумісних дужок Лі досліджувалась в багатьох роботах. Ми використаємо наступне Твердження [46]:

Твердження 2.5. *Нехай алгебра Лі $\mathfrak{g}$ така, що $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = 0$. Нехай δ — стандартний кограничний оператор на $\mathfrak{g}$-значних поліформах. Тоді:*

1. *Існує відображення $\Phi_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, що $F = \delta\Phi_1$ розв'язує (2.3.13a).*

2. *Умова (2.3.13b) еквівалентна наступному рівнянню на Φ_1:*

$$\Phi_1(\delta\Phi_1(X, Y)) - [\Phi_1(X), \Phi_1(Y)] = \delta\Phi_2(X, Y), \tag{2.3.14}$$

для деякого лінійного відображення $\Phi_2 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

Приклад 2.1. Найпростіший розв'язок рівняння $\Phi_2 \equiv 0$ відповідає випадку $\Phi_1^2 = 0$. Це редукує рівняння (2.3.14) до класичного рівняння Янга–Бакстера на $\mathfrak{g}$, записаного в операторній формі:

$$\Phi_1([\Phi_1(X), Y] + [X, \Phi_1(Y)]) - [\Phi_1(X), \Phi_1(Y)] = 0, \tag{2.3.15}$$

тобто, будь – який нільпотентний розв'язок постійного рівняння Янга–Бакстера задає також розв'язок рівняння (2.3.14).

Приклад 2.2. Розглянемо випадок класичних матричних алгебр Лі $\mathfrak{g} = gl(n)$, $so(n)$, $sp(n)$ і двох коланцюгів Φ_1, Φ_2 заданих наступними формулами:

$$\Phi_1(X) = \frac{1}{2}(AX + XA), \quad \Phi_2(X) = \frac{1}{4}(AXA - \frac{1}{2}(A^2X + XA^2)),$$

де A – матриця така, що $(AX + XA) \in \mathfrak{g}$. Прямим обрахунком легко показати, що такі коланцюги задовольняють рівняння (2.3.14). Легко показати, також, що $\delta\Phi_1(X, Y) = XAY - YAX$.

Визначення 9. Ми позначатимемо нескінченновимірну алгебру Лі зконструювану за допомогою коцикла $F = \delta\Phi_1$ через $\widetilde{\mathfrak{g}}_F$. По самій конструкції алгебри Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}_F$ є квазіградуйованими типу $(0, 1)$ і допускають розклад в пряму суму двох підалгебр $\widetilde{\mathfrak{g}}_F = \widetilde{\mathfrak{g}}_{F+} + \widetilde{\mathfrak{g}}_{F-}$.

Отже, ми зконструювали спеціальні квазіградуйовані алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_F$, як алгебри петель з модифікованою дужкою Лі. Зараз ми реалізуємо алгебри $\mathfrak{g}(u^{-1}, u)$ як спеціальні підалгебри в алгебрі $\mathfrak{g}(u^{-1}, u))$ відносно стандартної дужки Лі. Це необхідно для конструювання відповідних класичних r-матриць за допомогою формули для ядра КАС R-оператора.

Розглянемо алгебру формальних рядів Лорана $\mathfrak{g}(u^{-1}, u))$. Розглянемо лінійні підпростори $\widetilde{\mathfrak{g}}_{\Phi_-}$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_{\Phi_+}$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_{\Phi} \in \mathfrak{g}(u^{-1}, u))$, натягнуті на наступні базисні елементи:

$$\widetilde{X}_a^n = (1 + u\Phi_1 + u^2\Phi_2 + u^3\Phi_3 + ...) \cdot (X_\alpha u^n) \equiv \Phi(u) \cdot (X_\alpha u^n), \quad (2.3.16)$$

де $n < 0$, $n \geq 0$ і $n \in \mathrm{Z}$ відповідно.

Має місце наступна Лема:

Лема 2.1. *Нехай $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$ і коланцюги Φ_1, Φ_2 задовольняють рівнянню (2.3.14). Тоді коефіцієнти Φ_k, $k > 2$ можуть бути вибрані так, що $\Phi(u)([X, Y] + u\delta\Phi_1(X, Y)) = [\Phi(u)(X), \Phi(u)(Y)]$. Коефіцієнти ряду $\Phi(u)$ визначені з точністю до автоморфізмому $g(u)$ алгебри $\mathfrak{g}(u^{-1}, u))$ наступного вигляду: $g(u) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} g_k u^k$, $g_k \in Aut(\mathfrak{g})$.*

Зауваження 9. Коефіцієнти Φ_k, $k > 2$ с точністю до неоднозначності, пов'язаної з автоморфізмом $g(u)$, обраховуються використовуючи наступну рекурентну формулу:

$$\delta\Phi_k(X, Y) = -\Phi_{k-1}(\delta\Phi_1(X, Y)) + \sum_{l=1}^{k-1} [\Phi_l(X), \Phi_{k-l}(Y)]. \quad (2.3.17)$$

З цього слідує, зокрема, що якщо $\Phi_2 = 0$, то $\Phi_k = 0$, $\forall k > 2$.

Використовуючи цю Лему, легко довести наступне Твердження.

Твердження 2.6. *Нехай $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$ і коланцюги Φ_1, Φ_2 задовольняють рівняння (2.3.14). Тоді лінійні підпростори $\widetilde{\mathfrak{g}}_{\Phi}$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_{\Phi_+}$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_{\Phi_-}$ утворюють замкнуті підалгебри в алгебрі $\mathfrak{g}(u^{-1}, u))$. Більше того, ці алгебри є квазіградуйованими і $\widetilde{\mathfrak{g}}_{\Phi} \simeq \widetilde{\mathfrak{g}}_F$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_{\Phi_+} \simeq \widetilde{\mathfrak{g}}_{F_+}$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_{\Phi_-} \simeq \widetilde{\mathfrak{g}}_{F_-}$.*

Зауваження 10. Відзначимо, що у випадку $\Phi_k = 0, \forall k > 1$ алгебра $\widetilde{\mathfrak{g}}_\Phi$ реалізовується як підалгебра алгебри петель натягнута на мономи:

$$\widetilde{X}_a^n = (X_\alpha u^n + \Phi_1(X_\alpha)u^{n+1}).$$

Зауважимо, також що у цьому випадку $\widetilde{\mathfrak{g}}_\Phi$ не є ізоморфною алгебрі петель $\mathfrak{g}(u, u^{-1})$ оскільки образ зворотнього відображення є формальним рядом Лорана і, взагалі кажучи, не належить до простору поліномів Лорана.

Приклад 2.3. Нехай $\mathfrak{g} = gl(n)$, $so(n)$, $sp(n)$ – класична матрична алгебра Лі і коланцюги Φ_1, Φ_2 визначені як в прикладі (2.2). Прямим обрахунком, використовуючи формулу (2.3.17), можна показати, що відображення $\Phi(u)$, в цьому випадку, визначене наступною формулою:

$$\Phi(u)(X) = \sqrt{1 + Au}X\sqrt{1 + Au}.$$

Отже, ми отрималі функціональну реалізацію алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_F$.

Для конструювання класичної r-матриці необхідно побудувати функціональну реалізацію дуального простору. Ми будемо розглядати стандартне спарювання між елементами $X(u) \in \widetilde{\mathfrak{g}}_\Phi$ і $Y(u) \in \widetilde{\mathfrak{g}}^*_\Phi$ вигляду:

$$\langle X(u), Y(u)\rangle = \oint\limits_{u=0} (X(u), Y(u)),$$

де $(\ ,\ )$ — невироджена інваріантна форма на алгебрі $\mathfrak{g}$. Відносно такого спарювання, базисні елементи дуального простору $\widetilde{\mathfrak{g}}^*_\Phi$, мають вигляд:

$$\widetilde{Y}_a^{-n} = (1 + u\Phi_1^* + u^2\Phi_2^* + ...)^{-1} \cdot (X^\alpha u^{n-1}), \tag{2.3.18}$$

де X^α – базовий елемент дуального базису: $(X_\beta, X^\alpha) = \delta_\beta^\alpha$ і Φ_k^* — лінійний оператор на $\mathfrak{g}$, дуальний до Φ_k по відношенню до скалярного добутку $(\ ,\ )$:

$$(\Phi_k(X), Y) = (X, \Phi_k^*(Y)).$$

Приклад 2.4. Нехай $\Phi_2 = 0$ і $\Phi_1^2 = 0$. В цьому випадку формула (2.3.18) набуває наступного вигляду:

$$\widetilde{Y}_a^{-n} = (1 + u\Phi_1^*)^{-1} \cdot (X^\alpha u^{n-1}) = (1 - u\Phi_1^*) \cdot (X^\alpha u^{n-1}). \tag{2.3.19}$$

Приклад 2.5. Нехай $\mathfrak{g} = gl(n)$, $so(n)$, $sp(n)$ — класична матрична алгебра Лі і коланцюги Φ_1, Φ_2 визначені як в прикладі (2.2), тоді:

$$\widetilde{Y}_a^{-n} = \sqrt{(1+Au)^{-1}} X^\alpha u^{n-1} \sqrt{(1+Au)^{-1}}. \tag{2.3.20}$$

Зауваження 11. З явної форми базисних елементів алгебри та дуального простору у функціональній реалізації зрозуміло, що $\widetilde{\mathfrak{g}}^*_\Phi$ і $\widetilde{\mathfrak{g}}_\Phi$ не співпадають як простори функцій від спектрального параметру. Можливо показати також, що вони не співпадають як $\widetilde{\mathfrak{g}}_\Phi$– модулі. Це означає, що відповідна r-матриця буде некососиметричною.

Тепер, використовуючи формулу для ядра КАС R–оператора, легко показати, що має місце наступна Теорема [84]:

Теорема 2.1. *Нехай* $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = 0$. *Нехай відображення* $\Phi(u) : \mathfrak{g}(u^{-1},u)) \to \mathfrak{g}(u^{-1},u))$, $\Phi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k u^k$ *таке, що* $\Phi_0 = 1$, Φ_1, Φ_2 *задовольняють рівняння (2.3.14) і коефіцієнти* Φ_k *вибрані згідно Леми 2.1. Тоді функція двох комплексних змінних* $r_\Phi(u,v)$*:*

$$r_\Phi(u,v) = \frac{\sum\limits_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} \Phi(u)\cdot(X_\alpha)\otimes(\Phi(v)^{-1})^*\cdot(X^\alpha)}{(u-v)} \tag{2.3.21}$$

задовольняє узагальненому класичному рівнянню Янга – Бакстера.

Зауваження 12. Класична r-матриця (2.3.21) у частковому випадку алгебри Лі $\mathfrak{g} = gl(n)$ була пізніше перевідкрита в роботі [47].

Приклад 2.6. Розглянемо нільпотентні розв'язки рівняння (2.3.14) такі, що $\Phi_1^2 = 0$, $\Phi_2 = 0$. Відповідна r-матриця (2.3.21) набуде вигляду:

$$r_{\Phi_1}(u,v) = \frac{\sum\limits_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} (1+u\Phi_1)\cdot(X_\alpha)\otimes(1-v\Phi_1^*)\cdot(X_\alpha^*)}{(u-v)}. \tag{2.3.22}$$

Враховуючи, що $\Phi_1^2 = 0$ і роблячи прості перетворення, отримаємо:

$$r_{\Phi_1}(u,v) = \frac{\Omega}{(u-v)} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} \Phi_1^{\alpha\beta} X_\alpha \otimes X_\beta, \tag{2.3.23}$$

де $\Phi_1^{\alpha\beta} = g^{\beta\gamma}(\Phi_1)^{\alpha}_{\gamma}$, $g^{\beta\gamma} = (X^{\beta}, X^{\gamma})$. Можна показати, що $r_0 = \sum\limits_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} \Phi_1^{\alpha\beta} X_\alpha \otimes X_\beta$ задовольняють постійне рівняння Янга – Бакстера

$$[(r_0)_{12}, (r_0)_{13}] = [(r_0)_{23}, (r_0)_{12}] - [(r_0)_{32}, (r_0)_{13}].$$

Отже ми отримали в інший спосіб зсунуту раціональну r-матрицю.

Приклад 2.7. Розглянемо класичні матричні алгебри Лі $\mathfrak{g} = gl(n)$, $\mathfrak{g} = so(n)$, $\mathfrak{g} = sp(n)$ і коланцюги Φ_1, Φ_2 визначені як в прикладі (2.2). В цьому випадку, використовуючи приклади (2.5) і (2.3), легко показати, що формула (2.3.21) набуде наступного вигляду:

$$r_\Phi(u,v) = \frac{1}{(u-v)} \sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} \sqrt{1+Au}X_\alpha\sqrt{1+Au} \otimes (\sqrt{1+Av})^{-1} X^*_\alpha (\sqrt{1+Av})^{-1}. \tag{2.3.24}$$

Це, так звана, іраціональна класична r-матриця [84].

У випадку діагональних матриць $A = \mathrm{diag}(a_1, ..., a_n)$ і стандартного матричного базису $X_\alpha = X_{ij}$, $X^*_\alpha = X_{ji}$ одержимо наступну формулу [83]:

$$r_\Phi(u,v) = \frac{1}{(u-v)} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\sqrt{1+a_i u}\sqrt{1+a_j u}}{\sqrt{1+a_i v}\sqrt{1+a_j v}} X_{ij} \otimes X_{ji}. \tag{2.3.25}$$

2.4. Деформовані "зкручені" r-матриці.

Іншим прикладом квазіградуйованих алгебр з розкладом КАС є "зкручені" підалгебри в квазіградуйованих алгебрах Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}_{F}$:

$$\widetilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}_{F} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\overline{j}} \otimes u^j, \tag{2.4.26}$$

де $\mathfrak{g} = \sum\limits_{k=0}^{p-1} \mathfrak{g}_{\overline{k}}$ – $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-градуювання алгебри $\mathfrak{g}$ і $\overline{j}$ означає клас еквівалентності $j \in \mathbb{Z}$ mod$p$ $\mathbb{Z}$. Має місце наступне Твердження [82]:

Твердження 2.7. *Підпростір* $\widetilde{\mathfrak{g}}_F^\sigma$ *є замкнутою підалгеброю в алгебрі* $\widetilde{\mathfrak{g}}_F$ *тоді, і тільки тоді, коли:*

$$F(\mathfrak{g}_{\bar{i}}, \mathfrak{g}_{\bar{j}}) \subset \mathfrak{g}_{\overline{i+j+1}}. \tag{2.4.27}$$

Для ко–границь $F = \delta\Phi_1$ умова (2.4.27) може бути деталізована [104]:

Наслідок 2.1. *Нехай* $F = \delta\Phi_1$, *тоді умова (2.4.27) задовольняється тоді, і тільки тоді, коли:*

$$\Phi_1(\mathfrak{g}_{\bar{i}}) \subset \mathfrak{g}_{\overline{i+1}} \tag{2.4.28}$$

Зауваження 13. Використовуючи автоморфізм σ, умова (2.4.28) може бути переписана наступним чином [104]:

$$\sigma \cdot \Phi_1 = e^{\frac{2\pi i}{p}} \Phi_1 \cdot \sigma. \tag{2.4.29}$$

2.4.1. Функціональна реалізація алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_F^\sigma$ Використовуючи функціональну реалізацію алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_F$, побудовану в попередньому підрозділі, можливо реалізувати алгебру Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}_F^\sigma$ як підалгебру $\widetilde{\mathfrak{g}}_\Phi^\sigma$ в просторі формальних рядів Лорана $\mathfrak{g}((u^{-1}, u))$, натягнуту скінченними лінійними комбінаціями на наступний набір формальних базисних елементів:

$$\widetilde{X}_{\bar{j},\alpha}^{kp+j} = (1+u\Phi_1+u^2\Phi_2+\dots.)\cdot(X_\alpha u^n) \equiv u^{kp+j}\Phi(u)\cdot(X_{\bar{j},\alpha}),\ k \in \mathbb{Z}, j \in \overline{1,p} \tag{2.4.30}$$

де $X_{\bar{j},\alpha}$ — базисний елемент підпростору $\mathfrak{g}_{\bar{j}}$. Використовуючи цю реалізацію, можна показати, що має місце наступне Твердження [104]:

Твердження 2.8. *Лінійний простір* $\widetilde{\mathfrak{g}}_\Phi^\sigma$ *є замкнутою підалгеброю алгебри* $\widetilde{\mathfrak{g}}^\sigma$ *тоді, і тільки тоді коли:*

$$\sigma \cdot \Phi(u) = \Phi(u) \cdot \sigma. \tag{2.4.31}$$

Зауваження 14. Рівняння (2.4.31) тягне за собою рівності:

$$\sigma \cdot \Phi_k = e^{\frac{2\pi i k}{p}} \Phi_k \cdot \sigma. \tag{2.4.32}$$

2.4.2. Функціональна реалізація дуального простору. Напишемо тепер функціональну реалізацію простору $(\widetilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}_{\Phi})^*$. Визначимо спарювання між елементами $X(u)\in\widetilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}_{\Phi}$ і $Y(u)\in(\widetilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}_{\Phi})^*$ наступним чином:

$$\langle X(u), Y(u)\rangle = \oint\limits_{u=0} (X(u), Y(u))\frac{du}{u},$$

де $(\ ,\ )$ — невироджена інваріантна форма на алгебрі $\mathfrak{g}$.

Легко показати, що при таком у виборі спарювання, дуальні елементи до введеного базису в алгебрі Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}_{\Phi}$ мають наступну форму:

$$\widetilde{Y}^{kp+j}_{\alpha} = u^{-kp-j}(1+u\Phi^*_1+u^2\Phi^*_2+\ldots)^{-1}\cdot(X^{\overline{-j},\alpha}), \tag{2.4.33}$$

де $X^{\overline{-j},\alpha}$ – базисний елемент дуального простору $\mathfrak{g}_{\overline{-j}}$:

$$(X_{\bar{i}\beta}, X^{\overline{-j},\alpha}) = \delta_{i,-j}\delta^{\alpha}_{\beta},\quad i,j\in\overline{0,p-1},\ \alpha\in\overline{1,\dim\mathfrak{g}_{\bar{i}}},\ \beta\in\overline{1,\dim\mathfrak{g}_{\overline{-j}}}.$$

2.4.3. Перший розклад КАС і деформовані "зкручені" r-матриці. Легко бачити, що алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}_{\Phi}$ є квазіградуйованими алгебрами типу $(0,1)$, а отже допускають розклад КАС

$$\widetilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}_{\Phi} = (\widetilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}_{\Phi})_+ + (\widetilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}_{\Phi})_-$$

з підалгебрами

$$(\widetilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}_{\Phi})_+ \equiv \sum_{j\geq 0}\mathfrak{g}_j,\quad (\widetilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}_{\Phi})_- \equiv \sum_{j<0}\mathfrak{g}_j,$$

де $\mathfrak{g}_j\equiv\mathfrak{g}_{\bar{j}}\otimes u^j$. Використовуючи цей розклад, явні формули (2.4.30) і (2.4.33) для базису і дуального базису в алгебрі Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}_{\Phi}$ і дуальному просторі $(\widetilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}_{\Phi})^*$ і формулу для r-матриці, що є ядром КАС R-оператора, ми отримуємо, що:

$$r^{\sigma}_{\Phi}(u,v) = \Phi(u)\otimes(\Phi^{-1}(v))^*\frac{\Big(\sum\limits_{j=0}^{p-1}u^jv^{p-j}\sum\limits_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}_{\bar{j}}}X_{\bar{j},\alpha}\otimes X^{\overline{-j},\alpha}\Big)}{(u^p-v^p)}, \tag{2.4.34}$$

де $X_{\bar{j},\alpha}$ — базисний елемент підпростору $\mathfrak{g}_{\overline{-j}}$ і $X^{\overline{-j},\alpha}$ — базисний елемент дуального підпростору, задовільняє узагальненому класичному рівнянню Янга–Бакстера.

2.4.4. Другий розклад КАС і деформовані “зсунуті” r-матриці. Покажемо тепер, що в деяких випадках, алгебра Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}_{\Phi}$ допускає інший розклад в суму двох підалгебр

$$\widetilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}_{\Phi} = (\widetilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}_{\Phi})'_{+} + (\widetilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}_{\Phi})'_{-}, \tag{2.4.35}$$

де

$$(\widetilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}_{\Phi})'_{+} = \mathfrak{g}_{0+} + \sum_{j>0} \mathfrak{g}_j, \quad (\widetilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}_{\Phi})'_{-} = \mathfrak{g}_{0-} + \sum_{j<0} \mathfrak{g}_j, \tag{2.4.36}$$

$\mathfrak{g}_j = \mathfrak{g}_{\bar{j}} \otimes u^j$ і $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{g}_{0+} + \mathfrak{g}_{0-}$ є розкладом підалгебри $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ в суму підпросторів.

Має місце наступне Твердження [104]:

Твердження 2.9. *Нехай виконуються наступні умови (i)* $[\mathfrak{g}_{0\pm}, \mathfrak{g}_{0\pm}] \subset \mathfrak{g}_{0\pm}$, *(ii)* $F(\mathfrak{g}_{0-}, \mathfrak{g}_{0-}) = 0$, *(iii)* $F(\mathfrak{g}_{0-}, \mathfrak{g}_{\overline{-1}}) \subset \mathfrak{g}_{0-}$, *тоді підпростори* $(\widetilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}_{\Phi})_{\pm}$, *задані формулою (2.4.36), є замкнутими підалгебрами Лі.*

Зауваження 15. Відзначимо, що у випадку алгебри петель однієї умови (i) достатньо для того, щоб $(\widetilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}_{\Phi})_{\pm}$ були підалгебрами.

Використовуючи це Твердження отримуємо наступну Теорему [104]:

Теорема 2.2. *Нехай* $c_{12} = \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{\dim \mathfrak{g}_{\bar{0}}} c_{\alpha\beta} X^{\bar{0},\alpha} \otimes X^{\bar{0},\beta}$ *— ядро оператора* $R_0 = P_{0-}$ *проекції на підалгебру* $\mathfrak{g}_{0-}$, *що задовольняє умовам Твердження 2.9. Тоді наступна функція двох комплексних змінних:*

$$r^{\sigma,c}_{\Phi}(u,v) = \Phi(u) \otimes (\Phi^{-1}(v))^{*} \Bigg(\frac{\Big(\sum\limits_{j=0}^{p-1} u^j v^{p-j} \sum\limits_{\alpha=1}^{\dim \mathfrak{g}_{\bar{j}}} X_{\bar{j},\alpha} \otimes X^{\overline{-j},\alpha}\Big)}{(u^p - v^p)} + \\ + \sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim \mathfrak{g}_{\bar{0}}} c_{\alpha\beta} X^{\bar{0},\alpha} \otimes X^{\bar{0},\beta} \Bigg), \tag{2.4.37}$$

задовольняє узагальнене класичне рівняння Янга–Бакстера.

Зауваження 16. Відзначимо, що використовуючи тензор c_{12}, можна ввести лінійний оператор $C : \mathfrak{g}_{\bar{0}} \to \mathfrak{g}_{0-}$ наступною формулою:

$C(X_{\overline{0},\beta}) = \sum\limits_{\alpha=1}^{\dim \mathfrak{g}_{\overline{0}}} c_{\alpha\beta} X^{\overline{0},\alpha}$ за допомогою якого умови Твердження 2.9 переписуються в інший спосіб. Умова (i) записується як модифіковане рівняння Янга – Бакстера на $\mathfrak{g}_{\overline{0}}$:

$$[C(X_{\overline{0},\alpha}), C(X_{\overline{0},\beta})] = C([X_{\overline{0},\alpha}, C(X_{\overline{0},\beta})] + [C(X_{\overline{0},\alpha}), X_{\overline{0},\beta}]) - C([X_{\overline{0},\alpha}, X_{\overline{0},\beta}]), \tag{2.4.38}$$

Умова (ii) набуде вигляду:

$$F(C(X_{\overline{0},\alpha}), C(X_{\overline{0},\beta})) = 0, \ \forall X_{\overline{0},\alpha}, X_{\overline{0},\beta} \in \mathfrak{g}_{\overline{0}}, \tag{2.4.39}$$

а умова (iii) записується наступним чином:

$$C(F(C(X_{\overline{0},\alpha}), X_{\overline{-1},\beta}) = F(C(X_{\overline{0},\alpha}), X_{\overline{-1},\beta}), \ \forall X_{\overline{0},\alpha} \in \mathfrak{g}_{\overline{0}}, \ \forall X_{\overline{0},\beta} \in \mathfrak{g}_{\overline{-1}}. \tag{2.4.40}$$

Приклад 2.8. У випадку $p = 1$ ми отримуємо наступну формулу [104]:

$$r_{\Phi}^{\sigma,c}(u,v) = \Phi(u) \otimes (\Phi^{-1}(v))^{*} \Big(\frac{v \sum\limits_{\alpha=1}^{\dim \mathfrak{g}} X_{\alpha} \otimes X^{\alpha}}{(u-v)} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim \mathfrak{g}} c_{\alpha\beta} X^{\alpha} \otimes X^{\beta} \Big).$$

2.5. Метод “редукцій” відносно автоморфізму.

Іншим методом побудови класичних r-матриць є, так званий, метод редукцій відносно групи симетрій. Нехай G – скінчена підгрупа в групі автоморфізмів алгебри $\mathfrak{g}$. Нехай $g \in G$ — її довільний елемент, $\tilde{g}$ – його продовження на алгебру всіх $\mathfrak{g}$–значних функцій від одної комплексної змінної визначене наступною формулою:

$$\tilde{g} \cdot X(u) = g \cdot X(u^{g}),$$

де група G діє за як група перетворень розширеної комплексної площини і u^{g} образ точки u під дією елемента g: $g \cdot u = u^{g}$.

Нехай r-матриця $r(u,v)$ буде інваріантною відносно дії цієї групи:

$$\tilde{g}\otimes\tilde{g}\cdot r_{12}(u,v)=r_{12}(u,v). \tag{2.5.41}$$

Тоді можливо визначити нову - “редуковану” по відношенню до дії G класичну r-матрицю наступною формулою [18]:

$$r_{12}^{G}(u,v)=\sum_{g\in G}\widetilde{g}\otimes id\cdot r_{12}(u,v)=\sum_{g\in G}id\otimes\widetilde{g}\cdot r_{12}(u,v). \tag{2.5.42}$$

Основний приклад цієї конструкції пов’язаний з випадком, коли $G=Z_p$ – група, породжена автоморфізмом σ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ скінченого порядку p: $G=\{1,\sigma,...,\sigma^{p-1}\}$. В цьому випадку ми маємо, що існує параметризація комплексної площини така, що $u^{\sigma}=\epsilon^{\frac{2\pi i}{p}}u$. Тобто, в цьому випадку:

$$\widetilde{\sigma}X(u)=\sigma X(\epsilon^{\frac{2\pi ik}{p}}u).$$

Розглянемо приклад найпростішої G – інваріантної r-матриці і її редукції:

Приклад 2.9. Нехай класична r-матриця задається наступною формулою:

$$r_{12}(u,v)=\frac{v\Omega_{12}}{u-v}.$$

Завдяки тому, що тензорний Казимір Ω_{12} алгебри $\mathfrak{g}$ є інваріантним під дією автоморфізмів алгебри $\mathfrak{g}$, легко показати, що:

$$\tilde{\sigma}\otimes\tilde{\sigma}\cdot r_{12}(u,v)=r_{12}(u,v).$$

В цьому випадку, використовуючи формулу (2.5.42), ми отримаємо наступну r-матрицю [26] (див. також [96]):

$$r(u,v)=\frac{v^p\Omega_{12}^{(\overline{0})}}{u^p-v^p}+\frac{v^{p-1}u\Omega_{12}^{(\overline{1})}}{u^p-v^p}+...+\frac{vu^{p-1}\Omega_{12}^{(\overline{p-1})}}{u^p-v^p}, \tag{2.5.43}$$

де $\Omega^{(\bar{j})}=\sum\limits_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}_{\bar{j}}}X_{\bar{j},\alpha}\otimes X^{\overline{-j},\alpha}$ — тензорний Казимір, обмежений на підпростір $\mathfrak{g}_{\bar{j}}$, де сам підпростір $\mathfrak{g}_{\bar{j}}$ визначається наступним чином: $\sigma\cdot\mathfrak{g}_{\bar{j}}=\epsilon^{\frac{2\pi ij}{p}}\mathfrak{g}_{\bar{j}}$. Це так звана Z_p-градуйована r-матриця що допускає тригонометричну парамеризацію.

Приклад 2.10. Розглянемо r-матрицю $r^v_\Phi(u,v) \equiv v r_\Phi(u,v)$. Нехай, як і раніше, $G = Z_p$ група породжена автоморфізмом σ порядку p алгебри Лі $\mathfrak{g}$ і $u^\sigma = \epsilon^{\frac{2\pi i}{p}} u$. Нехай відображення $\Phi(u)$ і автоморфізм σ такі, що має місце наступна рівність:

$$\widetilde{\sigma} \cdot \Phi(u) = \Phi(u) \cdot \widetilde{\sigma}.$$

В цьому випадку легко вивести, що $\tilde{\sigma} \otimes \tilde{\sigma} \cdot r^v_\Phi(u,v) = r^v_\Phi(u,v)$. Використовуючи формулу (2.5.42), ми отримуємо наступну r-матрицю:

$$r^\sigma_\Phi(u,v) = \Phi(u) \otimes (\Phi^{-1}(v))^* \frac{\left(\sum\limits_{j=0}^{p-1} u^j v^{p-j} \Omega^{(\bar{j})}\right)}{(u^p - v^p)}, \tag{2.5.44}$$

що співпадає зі зкрученою деформованою r-матрицею.

2.6. K – зкручені некососиметричні r-матриці.

В цьому підрозділі ми зконструюємо некососиметричні класичні r-матриці зі спектральними параметрами стартуючи з стандартної кососиметричної r-матриці зі спектральним параметром і сімейства автоморфізмів алгебри $\mathfrak{g}$.

Нехай $U \subset \mathbf{C}$ буде деяка відкрита множина в комплексній площині. Нехай $\sigma(u)$ – мероморфна функція $\sigma : U \to Aut(\mathfrak{g})$, тобто

$$\sigma(u)([X,Y]) = [\sigma(u)(X), \sigma(u)(Y)], \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Ми будемо використовувати наступне позначення: $\sigma_1(u_1) = \sigma(u_1) \otimes 1$, $\sigma_2(u_2) = 1 \otimes \sigma(u_2)$ і т.д. Нехай $\widetilde{\sigma}(u)$ буде підняттям автоморфізму $\sigma(u)$ на алегебру $\mathfrak{g}$- значних мероморфних функцій однієї комплексної змінної u з поточковим множенням функцій задане формулою:

$$\widetilde{\sigma}(u) X(u) = \sigma(u) X(-u),$$

де, по визначенню, $\sigma(u)Y(u) \equiv \sum\limits_{k=-n}^{\infty} \sigma(u)(Y_k) u^k, \forall Y(u) = \sum\limits_{k=-n}^{\infty} Y_k u^k \in \mathfrak{g}(u^{-1}, u))$. На рівні тензорного добутку ми маємо наступну природню дію:

$$\widetilde{\sigma}_1(u_1)\widetilde{\sigma}_2(u_2) r_{12}(u_1,u_2) = \sigma_1(u_1)\sigma_2(u_2) r_{12}(-u_1,-u_2).$$

Очевидно, ми маємо, що $\widetilde{\sigma}(u)([X(u), Y(u)]) = [\widetilde{\sigma}(u)(X(u)), \widetilde{\sigma}(u)(Y(u))]$, де $X(u), Y(u) \in \mathfrak{g}(u^{-1}, u))$ і $\mathfrak{g}(u^{-1}, u))$ є алгеброю $\mathfrak{g}$– значних мероморфних функцій від u. Має місце наступна Теорема [88]:

Теорема 2.3. *Нехай $r_{12}(u_1 - u_2)$– кососиметрична r-матриця, тобто мероморфний роз'вязок рівняння (1.2.3). Нехай однопараметрична сім'я автоморфізмів $\sigma(u)$ алгебри $\mathfrak{g}$ задовільняє наступну умову:*

$$r_{12}(u_1-u_2)+\widetilde{\sigma}_1(u_1)\widetilde{\sigma}_2(u_2)r_{12}(u_1-u_2) = \widetilde{\sigma}_1(u_1)r_{12}(u_1-u_2)+\widetilde{\sigma}_2(u_2)r_{12}(u_1-u_2). \tag{2.6.45}$$

Тоді функція

$$r^{\sigma}_{12}(u_1, u_2) = r_{12}(u_1 - u_2) - \widetilde{\sigma}_2(u_2)r_{12}(u_1 - u_2) \tag{2.6.46}$$

є некососиметричним роз'вязком рівняння (1.2.2).

Розглянемо два найбільш цікавих класа r-матриць (2.6.46) асоційованих з постійним інволютивним чи внутрішнім автоморфізмом відповідно. Завдяки тому факту, що загальний автоморфізм алгебри Лі є добутком внутрішнього автоморфізму і постійного зовнішнього автоморфізму і, що останній у всіх, крім одного випадка, має другий порядок, можна сказати, що випадок загального $\sigma(u)$ є комбінацією цих двох ситуацій. Відзначимо, що ці дві ситуації можуть мати нетривіальне перекриття, що відповідає постійному внутрішньому автоморфізму другого порядку.

2.6.1. Випадок інволютивного автоморфізму. Розглянемо випадок $\sigma(u) \equiv \sigma$, $\sigma^2 = 1$. В цьому випадку умова (2.6.45) набуває форми:

$$(1 \otimes 1 - \widetilde{\sigma}_1)\big(r_{12}(u_1 - u_2) + \widetilde{\sigma}_1\widetilde{\sigma}_2 r_{12}(u_1 - u_2)\big) = \\ = (1 - \widetilde{\sigma}_2)\big(r_{12}(u_1 - u_2) + \widetilde{\sigma}_1\widetilde{\sigma}_2 r_{12}(u_1 - u_2)\big) = 0.$$

і є еквівалентною умові антиінваріантності r-матриці $r_{12}(u_1 - u_2)$ по відношенню до $\widetilde{\sigma}$:

$$r_{12}(u_1 - u_2) = -\widetilde{\sigma}_1\widetilde{\sigma}_2 r_{12}(u_1 - u_2) = -\sigma_1\sigma_2 r_{12}(u_2 - u_1) = \sigma_1\sigma_2 r_{21}(u_1 - u_2).$$

(2.6.47)

З цієї умови слідує, зокрема, що функція $r_{12}^{\sigma_2}(u) \equiv \sigma_2 r_{12}(u)$ є симетричною:

$$r_{12}^{\sigma_2}(u) = r_{21}^{\sigma_1}(u).$$

Формула (2.6.46) набуває простішого вигляду:

$$r_{12}^{\sigma}(u_1, u_2) = r_{12}(u_1 - u_2) - \sigma_2 r_{12}(u_1 + u_2) = r_{12}(u_1 - u_2) + \sigma_1 r_{12}(-u_1 - u_2). \tag{2.6.48}$$

Цей клас r-матриць детально розглянутий в роботі [85]. Тут ми обмежимось розглядом одного прикладу.

Приклад 2.11. Нехай $\mathfrak{g} = so(3)$, і X_i, $i \in \overline{1,3}$ – стандартний ортонормований базис $so(3)$ з комутаційними співвідношеннями:

$$[X_i, X_j] = \epsilon_{ijk} X_k.$$

Розглянемо класичну еліптичну r-матрицю Скляніна [62]:

$$r(u - v) = \sum_{k=1}^{3} r_k(u - v) X_k \otimes X_k, \tag{2.6.49}$$

де $r_k(u)$ виражається через функції Якобі:

$$r_1(u) = \frac{1}{sn(u)},\ r_2(u) = \frac{dn(u)}{sn(u)},\ r_3(u) = \frac{cn(u)}{sn(u)}. \tag{2.6.50}$$

Легко бачити, що $r_{12}(u - v) = -r_{12}(v - u)$ завдяки тому факту, що функції $r_k(u)$ є непарними. Нагадаємо також, що існує два важливі граничні випадки цієї еліптичної r-матриці, а саме тригонометрична і раціональна границі задані формулами:

$$r_1(u) = r_2(u) = \frac{1}{sh(u)},\ r_3(u) = \frac{ch(u)}{sh(u)} \tag{2.6.51}$$

та

$$r_1(u) = r_2(u) = r_3(u) = \frac{1}{u}. \tag{2.6.52}$$

Є два очевидних автоморфізми алгебри $so(3)$, що зберігають діагональну форму r-матриці і задовільняють умові (2.6.47). Це такі автоморфізми:

1) $\sigma(X_k) = X_k$ (тривіальний автоморфізм). Він продукує наступну еліптичну r-матрицю [83]:

$$r^{\sigma}(u,v) = \sum_{k=1}^{3}(r_k(u-v) - r_k(u+v))X_{\kappa} \otimes X_{\kappa}. \tag{2.6.53}$$

2) $\sigma(X_3) = X_3$, $\sigma(X_2) = -X_2$, $\sigma(X_1) = -X_1$. Він продукує іншу еліптичну r-матрицю:

$$r^{\sigma}(u,v) = \sum_{a=1}^{2}(r_a(u-v)+r_a(u+v))X_a \otimes X_a + (r_3(u-v)-r_3(u+v))X_3 \otimes X_3. \tag{2.6.54}$$

Зауважимо, що r-матриці (2.6.53) і (2.6.54) існують також для тригонометричного і раціонального випадків заданих формулами (2.6.51) і (2.6.52).

2.6.2. Випадок внутрішнього автоморфізму. Розглянемо випадок непостійного внутрішнього автоморфізму: $\sigma(u)(X) = Ad_{K(u)}X$, де $K(u)$ – G-значна мероморфна функція змінної u, а G – група Лі алгебри $\mathfrak{g}$. В цьому випадку рівняння (2.6.45) набуває форми квадратного рівняння для групового елементу $K(u)$ і r-матриці $r_{12}(u_1-u_2)$:

$$\begin{aligned} r_{12}(u_1-u_2)K_1(u_1)K_2(u_2) + K_1(u_1)K_2(u_2)r_{12}(-u_1+u_2) = \\ K_1(u_1)r_{12}(-u_1-u_2)K_2(u_2) + K_2(u_2)r_{12}(u_1+u_2)K_1(u_1) \end{aligned} \tag{2.6.55}$$

Відповідна r-матриця $r^{\sigma}_{12}(u_1,u_2)$ має наступний вигляд [88]:

$$r^{\sigma}_{12}(u_1,u_2) \equiv r^{K}_{12}(u_1,u_2) = r_{12}(u_1-u_2) - 1\otimes K(u_2)r_{12}(u_1+u_2)1\otimes K^{-1}(u_2). \tag{2.6.56}$$

Ми будемо називати цю r-матрицю K-зкрученою r-матрицею. Розглянемо приклади r-матриць (2.6.56).

Приклад 2.12. Нехай $\mathfrak{g} = so(3)$, її базис X_k і еліптична r-матриця $r(u-v)$ буде визначена як в попередньому прикладі. Використаємо ізоморфізм $so(3) \simeq sl(2)$ і введемо стандартний кореневий базис в $sl(2)$: $X_0 = iX_3$, $X_\pm = i(X_1 \pm iX_2)$ з комутаційними співвідношеннями:

$$[X_0, X_\pm] = \pm X_\pm, [X_+, X_-] = 2X_0.$$

В цьому базисі ми будем мати, що кососиметрична еліптична r-матриця набуває вигляду:

$$r(u-v) = r_0(u-v)X_0 \otimes X_0 + r_+(u-v)(X_+ \otimes X_- + X_- \otimes X_+)+ \\ + r_-(u-v)(X_+ \otimes X_+ + X_- \otimes X_-), \quad (2.6.57)$$

де $r_0(u) = r_3(u)$, $r_+(u) = \frac{1}{4}(r_2(u) + r_1(u))$, $r_-(u) = \frac{1}{4}(r_2(u) - r_1(u))$ і $r_i(u)$ визначені формулою (2.6.50). В раціональному і тригонометричному випадках $r_2(u) = r_1(u)$ і, отже, $r_-(u) \equiv 0$.

Легко бачити що r-матриця (2.6.57) може розглядатись як елемент простору $sl(2) \otimes sl(2)$ і відповідний груповий автоморфізм як елемент групи $SL(2)$. Враховуючи, що матриця $K(u)$ в формулі (2.6.55) визначена з точністю до скалярного множника, можна розширити цю групу до групи $GL(2)$ вважаючи, що елемент $K(u)$ належить до $GL(2)$.

Прямим обчисленням, використовуючи Теорему додавання для еліптичних функцій Якобі [8], можна показати, що матриця:

$$K(u) \equiv K(u,\xi) = \mathrm{diag}(k_1(u), k_2(u)) \equiv \mathrm{diag}(\frac{sn(u)}{cn(u)} + \frac{sn(\xi)}{cn(\xi)}, -\frac{sn(u)}{cn(u)} + \frac{sn(\xi)}{cn(\xi)})$$

задовільняє рівняння (2.6.55) для довільного ξ. Це дозволяє визначити нову некососиметричу еліптичну r-матрицю, використовуючи формулу (2.6.56). Вона має наступний вигляд:

$$r^K(u,v) = r_0(u,v)X_0 \otimes X_0 + r_{+-}(u,v)X_+ \otimes X_- + r_{-+}(u,v)X_- \otimes X_+ + \\ + r_{++}(u,v)X_+ \otimes X_+ + r_{--}(u,v)X_- \otimes X_-, \quad (2.6.58)$$

де відповідні коефіцієнти задані формулами:

$$r_{+-}(u,v) = r_+(u-v) - r_+(u+v)\frac{k_2(v)}{k_1(v)},$$
$$r_{-+}(u,v) = r_+(u-v) - r_+(u+v)\frac{k_1(v)}{k_2(v)},$$
$$r_{++}(u,v) = r_-(u-v) - r_-(u+v)\frac{k_1(v)}{k_2(v)},$$
$$r_{--}(u,v) = r_-(u-v) - r_-(u+v)\frac{k_2(v)}{k_1(v)},$$
$$r_0(u,v) = r_0(u-v) - r_0(u+v).$$

У випадку $\xi = 0$ $k_2(v) = -k_1(v)$ і r-матриці (2.6.58) і (2.6.54) співпадають.

Наведені вище формули для r-матриці $r^K(u,v)$ мають місце також в раціональному і тригонометричному випадках. В цих випадках необхідно використовувати функції $r_i(u)$, задані формулами (2.6.51) чи (2.6.52) і брати за матрицю $K(u)$ матриці $K(u) = \mathrm{diag}(\frac{sh(u)}{ch(u)} + \frac{sh(\xi)}{ch(\xi)}, \frac{sh(\xi)}{ch(\xi)} - \frac{sh(u)}{ch(u)})$ чи $K(u) = \mathrm{diag}(u+\xi, \xi-u)$ відповідно. Зауважимо, що в раціональному і тригонометричному випадку $r_{++}(u,v) = r_{--}(u,v) = 0$.

2.7. Висновки

В данній главі описано чотири основних методи побудови класичних r-матриць (метод класичного R–оператора, метод “зсуву”, метод “редукції” відносно автоморфізму та метод K -“зкруту”). Побудовані нові класи некососиметричних r-матриць. Оригінальна частина результатів данного розділу опублікована в роботах [7], [65]- [77], [79]-[82],[83, 84, 88, 96, 104].

Розділ 3

Нескінченно-вимірні алгебри Лі і класичні r-матриці.

3.1. Вступ

В цьому розділі описано два метода побудови нескінченновимірних алгебр Лі з розкладом Костанта – Адлера – Саймса базуючись на загальних нединамічних класичних r-матрицях зі спектральними параметрами [105]. Перший метод узагальнює так званий метод Гельфанда–Чєрєдніка [4], [21].Він полягає в конструюванні деяких спеціальних фільтрованих підалгебр в алгебрі $\mathfrak{g}(u^{-1},u))$ доповняльних до підалгебри $\mathfrak{g}((u))$. Другий метод є узагальненням методу Голода [42]-[43] і полягає в побудові по r-матриці спеціальних квазіградуйованих алгебр Лі з природнім розкладом Адлера – Костанта – Саймса [105]. Ключову роль в данному підході відіграє поняття "мультиплікатора" [55]. Квазіградуйована структура r-матричних алгебр Лі дозволяє побудувати їх підфактор-алгебри скінченної корозмірності, що в свою чергу дозволяє асоціювати з такими алгебрами скінченновимірні інтегровні системи. Ми явно описуємо також дуальні простори до побудованих нескінченновимірних алгебр Лі та їх скінченновимірних підфактор-алгебр. Описано також багатополюсні алгебри Лі пов'язані з класичним r-матрицями [106]. Показано, що їх структура залежить від того, чи є полюс "регулярною" чи "сингулярною" точкою r-матриць [114]. Зконструйована канонічна форма класичної r-матриці [105].Приклади r-матричних алгебр пов'язаних з кососиметричноми r-матрицями розглянуті в роботах [97], [99].

3.2. Однополюсні r-матричні алгебри в регулярних точках.

В цьому розділі ми опишемо найпростіший спосіб конструювання спеціальних нескінченно-вимірних алгебр Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$ стартуючи з довільної класичної r-матриці (1.2.2). Ми будемо використовувати наступне означення:

Визначення 10. Нескінченновимірна алгебра Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}$ називається $\mathbb{Z}_+$ – фільтрованою, якщо:

$$\widetilde{\mathfrak{g}} = \sum_{j\geq 0} \mathfrak{g}^{(j)}, \quad \text{та} \quad [\mathfrak{g}^{(i)}, \mathfrak{g}^{(j)}] \subset \sum_{k=0}^{i+j+1} \mathfrak{g}^{(i+j+1-k)}.$$

Має місце наступна теорема:

Теорема 3.1. *З будь-яким розвязком рівняння (1.2.2), що має розклад (1.3.6), можна асоціювати $\mathbb{Z}_+$– фільтровану алгебру Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$ мероморфних функцій однієї комплексної змінної зі значенням в $\mathfrak{g}$.*

Доведення. Ми будемо доводити цю теорему явно, конструюючи базис алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$, будуючи відповідні фільтровані комутаційні співвідношення. Припустимо, що r-матриця $r(u,v) = \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} r^{\alpha\beta}(u,v) X_\alpha \otimes X_\beta$ має розклад (1.3.6) і розглянемо наступну $\mathfrak{g}$-значну функцію від змінної u:

$$X^{(m),\alpha}(u) = \frac{1}{m!}\partial_v^m (r_{12}(u,v), X_2^\alpha)_2|_{v=0} = \frac{1}{m!}\sum_{\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} \partial_v^m (r^{\beta\alpha}(u,v))|_{v=0} X_\beta, \tag{3.2.1}$$

де $m \geq 0, \alpha \in \overline{1,\dim\mathfrak{g}}$, $(\ ,\ )_2$ — скалярний добуток в другому тензорному просторі і $X_2^\alpha = 1 \otimes X^\alpha$. Має місце наступне твердження:

Твердження 3.1. *Елементи $\{X^{(m),\alpha}(u) | m \geq 0, \alpha \in \overline{1,\dim\mathfrak{g}}\}$ утворюють замкнуту алгебру Лі з фільтрованими комутаційними співвідношеннями:*

$$[X^{(m),\beta}(u), X^{(l),\gamma}(u)] = \sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} C_\delta^{\beta\gamma} X^{(l+m+1),\delta}(u)+$$

$$\sum_{\delta,\kappa=1}^{\dim\mathfrak{g}} \Big(\sum_{s=0}^{m} \frac{1}{s!l!} C^\beta_{\delta\kappa}(\partial_1^s\partial_2^l r_0)^{\delta\gamma} X^{(m-s),\kappa}(u) - \sum_{s=0}^{l} \frac{1}{s!m!} C^\gamma_{\delta\kappa}(\partial_1^s\partial_2^m r_0)^{\delta\beta} X^{(l-s),\kappa}(u)\Big), \tag{3.2.2}$$

де $C_\delta^{\beta\gamma}$ *– структурні константи алгебри Лі в дуальному базисі і*

$$(\partial_1^m\partial_2^l r_0)^{\gamma\beta} \equiv (\partial_u^m \partial_v^l r_0^{\gamma\beta}(u,v))|_{u,v=0}.$$

Нарешті, кладучи по визначенню

$$(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-)^{(m)} \equiv \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{X^{(m),\alpha}(u), \alpha \in \overline{1,\dim\mathfrak{g}}\}, \tag{3.2.3}$$

$\widetilde{\mathfrak{g}}_r^- = \sum\limits_{m\geq 0} (\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-)^{(m)}$, ми отримуємо твердження теореми.

Приклад 3.1. Розглянемо найпростіший фільтровані комутаційні співвідношення (3.2.2), що виконуються для базисних елементів $X^{(0),\alpha}(u)$, $X^{(1),\gamma}(u)$ і є найбільш важливими для застосування:

$$[X^{(0),\beta}(u), X^{(0),\gamma}(u)] = \sum_{\delta=1}^{\dim\mathfrak{g}} C_\delta^{\beta\gamma} X^{(1),\delta}(u) + \sum_{\delta,\kappa=1}^{\dim\mathfrak{g}} (C^\beta_{\delta\kappa} r_0^{\delta\gamma} - C^\gamma_{\delta\kappa} r_0^{\delta\beta}) X^{(0),\kappa}(u), \tag{3.2.4}$$

$$\begin{aligned}[X^{(0),\beta}(u), X^{(1),\gamma}(u)] = \sum_{\delta=1}^{\dim\mathfrak{g}} C_\delta^{\beta\gamma} X^{(2),\delta}(u) - \sum_{\delta,\kappa=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^\gamma_{\delta\kappa} r_0^{\delta\beta} X^{(1),\kappa}(u)+ \\ + \sum_{\delta,\kappa=1}^{\dim\mathfrak{g}} (C^\beta_{\delta\kappa}(\partial_2 r_0)^{\delta\gamma} - C^\gamma_{\delta\kappa}(\partial_1 r_0)^{\delta\beta}) X^{(0),\kappa}(u),\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

$$\begin{aligned}[X^{(1),\beta}(u), X^{(1),\gamma}(u)] = \sum_{\delta=1}^{\dim\mathfrak{g}} C_\delta^{\beta\gamma} X^{(3),\delta}(u) + \sum_{\delta,\kappa=1}^{\dim\mathfrak{g}} \Big(C^\beta_{\delta\kappa}(\partial_2 r_0)^{\delta\gamma} - \\ - C^\gamma_{\delta\kappa}(\partial_2 r_0)^{\delta\beta}) X^{(1),\kappa}(u) + (C^\beta_{\delta\kappa}(\partial_1\partial_2 r_0)^{\delta\gamma} - C^\gamma_{\delta\kappa}(\partial_1\partial_2 r_0)^{\delta\beta}) X^{(0),\kappa}(u)\Big).\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Класична r-матриця $r(u,v)$ визначена з точністю до перетворення симетрій. Опишемо як побудований фільтрований базис змінюється під дією цих перетворень. Має місце наступне твердження:

Твердження 3.2. *(i) Фільтровані базиси* $\{X^{(m),\kappa}(u)\}$ *і* $\{X_g^{(m),\kappa}(u)\}$ *асоційовані з* r*-матрицями* $r(u,v)$ *і* $r_g(u,v) \equiv Ad_{g(u_1)} \otimes Ad_{g(u_2)} r(u,v)$ *повязані наступним чином:*

$$X_g^{(m),\alpha}(u) = Ad_{g(u)} \cdot \sum_{k=0}^{m} \sum_{\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} \frac{1}{(m-k)!} (Ad_{g^{(m-k)}(v)|_{v=0}})^{\alpha}_{\beta} X^{(k),\beta}(u),$$

де $g^{(m-k)}(v)|_{v=0} = (\dfrac{d^{m-k}g(v)}{dv^{m-k}})|_{v=0}$.

(ii) Фільтровані базиси $X^{(m),\kappa}(\lambda(u))$ *і* $X^{(k),\delta}(u(\lambda))$ *асоційовані з* r*-матрицями* $r(\lambda,\mu)$ *і* $r(u(\lambda),v(\mu))$ *повязані наступним перетворенням:*

$$X^{(m),\alpha}(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} B_{m,k}(u^{(1)}, u^{(2)}, ..., u^{(m+1-k)}) X^{(k),\alpha}(u),$$

де $B_{m,k}(u^{(1)}, u^{(2)}, ..., u^{(m+1-k)})$ *– це поліноми Белла і* $u^{(s)} \equiv (\dfrac{d^s u(\lambda)}{d\lambda^s})|_{\lambda=0}$.

Дуже важливою властивістю для теорії інтегровних систем є існування алгебри Лі з розкладом в суму двох підалгебр (схема Костанта-Адлера-Сімпса). Опишемо одне з можливих вкладень алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$, як однієї з таких двох підалгебр в більшу алгебру.

Позначимо через $\widetilde{\mathfrak{g}}(u^{-1},u))$ алгебру формальних рядів Лорана від одної комплексної змінної u зі значенням в $\mathfrak{g}$ і $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))$ алгебру формальних рядів Тейлора зі значеннями в $\mathfrak{g}$. Має місце натупне твердження [105]:

Твердження 3.3. *Алгебра Лі* $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$ *є доповняльною до алгебри Лі* $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))$ *в алгебрі Лі* $\widetilde{\mathfrak{g}}(u^{-1},u))$ *тобто:*

$$\widetilde{\mathfrak{g}}(u^{-1},u)) = \widetilde{\mathfrak{g}}((u)) + \widetilde{\mathfrak{g}}_r^-, \tag{3.2.7}$$

де сума є прямою сумою векторих просторів.

3.3. Квазіградуйована структура $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$. Алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^+$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_r$.

Як було явно показано вище, можна асоціювати фільтровану алгебу Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$ з кожною класичною r-матрицею $r(u, v)$. Тим не менше, використовування фільтрованого базиса (3.2.1), не завжди зручне для застосування. Тому є бажаним знаходження іншого базису з більш простими комутаційними співвідношеннями і ясними алгебраїчними властивостями. Дійсно, виявляється, що алгебра $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$, має більш тонку алгебраїчну структуру ніж фільтрована. Ми будемо використовувати наступне визначення:

Визначення 11. Нескінченно–вимірна алгебра $\widetilde{\mathfrak{g}}$ називається $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}_{(\pm)}$)-квазіградуйованою типу $(0, q)$, якщо існує таке ціле число q, що:

$$\widetilde{\mathfrak{g}} = \sum_{j \in \mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{(\pm)})} \mathfrak{g}_j, \quad [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \sum_{k=0}^{q} \mathfrak{g}_{i+j+k}, \forall i, j \in \mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{(\pm)}). \tag{3.3.8}$$

Надалі ми будемо зацікавлені в конструюванні квазіградуйованого базису в алгебрі $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$. Для цього нам буде потрібно наступне визначення [55]:

Визначення 12. Нехай $\widetilde{\mathfrak{g}}^-$ буде довільна доповняльна підалгебра в алгебрі $\mathfrak{g}$-значних формальних рядів Лорана до алгебри $\mathfrak{g}$-значних формальних рядів Тейлора. Ряд Лорана $f(u) = \sum\limits_{k=-n}^{\infty} f_k u^k$, $f_k \in \mathbb{C}$ називається мультиплікатором алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}^-$, якщо $f(u)\widetilde{\mathfrak{g}}^- \subset \widetilde{\mathfrak{g}}^-$. Якщо $f_n \neq 0$, то число n називається порядком мультиплікатора.

Нам буде необхідна також наступна Теорема [55]:

Теорема 3.2. *Нехай підстилаюча скінченно-вимірна алгебра $\mathfrak{g}$ буде простою і $\widetilde{\mathfrak{g}}^-$ буде довільною $\mathfrak{g}$–значною доповняльною підалгеброю до алгеби формальних $\mathfrak{g}$-значних рядів Тейлора в алгебі формальних $\mathfrak{g}$–значних рядів Лорана. Тоді мають місце наступні твердження:*

(i) всі мультиплікатори алгеби $\widetilde{\mathfrak{g}}^-$ мають невід'ємні порядки.

(ii) доповнення до множини всіх порядків мультиплікаторів алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}^-$ у множині всіх натуральних чисел є скінченним.

Зауваження 17. З наведеної Теореми слідує, зокрема, що для довільної алгеби $\widetilde{\mathfrak{g}}^{-}$ завжди існують мультиплікатори скінченних порядків. Завдяки тому факту, що всі порядки є дордатніми числами, завжди існує мультиплікатор мінімального порядку.

Має місце наступна Теорема:

Теорема 3.3. *Нехай n буде порядком мультиплікатора $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-}$, тоді на $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-}$ існує структура $\mathbb{Z}_{-}$– квазіградуйованої алгеби Лі типу* $(0, 2n-1)$.

Ідея доведення. Теорема доводиться явним конструюванням квазіградуйованих підпросторів $(\mathfrak{g}_r^{-})_j$ і відповідних квазіградуйованих базисів. Визначемо шукані підпростори $(\mathfrak{g}_r^{-})_j$ за допомогою фільтрованих підпросторів (3.2.3) і мультиплікаторів $f(u)$ наступним чином:

$$(\mathfrak{g}_r^{-})_{-i-kn} = f^k(u)(\mathfrak{g}_r^{-})^{(i-1)} \ i \in \overline{1,n}, k \geq 0. \tag{3.3.9}$$

Легко бачити, що $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-} = \sum\limits_{j=1}^{\infty}(\mathfrak{g}_r^{-})_{-j}$. Базис в підросторах $(\mathfrak{g}_r^{-})_{-j}$ де $j = i + kn + 1$ має наступну форму:

$$\tilde{X}^{(j),\alpha}(u) \equiv f^k(u)X^{(i),\alpha}(u) = \frac{f^k(u)}{i!}\sum_{\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} \partial_v^i(r^{\beta\alpha}(u,v))|_{v=0}X_\beta, \tag{3.3.10}$$

де $i \in \overline{1,n}, \alpha \in \overline{1,\dim\mathfrak{g}}$, $k \geq 0$.

Використовуючи фільтровані комутаційні співвідношення (3.2.2) і визначення (3.3.9), ми отримуємо:

$$[(\mathfrak{g}_r^{-})_{-(i_1+k_1n)}, (\mathfrak{g}_r^{-})_{-(i_2+k_2n)}] \subset \sum_{s=0}^{i_1+i_2-1}(\mathfrak{g}_r^{-})_{(s-(i_1+i_2+(k_1+k_2)n))}. \tag{3.3.11}$$

враховуючи, що $i_1, i_2 \in \overline{1,n}$, ми отримуємо, що максимальне відхилення від градуйованого закону множення Лі рівне $q = 2n-1$.

Це доводить Теорему.

Вкладення алгебри Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-}$ в алгебру формальних рядів Лорана, зконструйоване в минулому підрозділі, не є найбільш природне вкладення з алгебраїчної точки зору. Зараз ми покажемо як зконструювати інше більш природне вкладення алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$ в іншу алгебру. Виявляється, що квазіградуйована структура дозволяє доповнити алгебу Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$ іншою квазіградуйованою алгебою Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^+$ до "повної" r-матричної алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r$ і кожна з трьох підалгебр в трійці $(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-, \widetilde{\mathfrak{g}}_r^+, \widetilde{\mathfrak{g}}_r)$ визначається самою r-матрицею. Більше того, розклад $\widetilde{\mathfrak{g}}_r = \widetilde{\mathfrak{g}}_r^- + \widetilde{\mathfrak{g}}_r^+$ є наслідком квазіградуйованої структури. Має місце наступне твердження:

Твердження 3.4. *Існує $\mathbb{Z}_+$-квазіградуйована алгебра Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^+$ типу $(0, 2n-1)$, що лінійний простір $\widetilde{\mathfrak{g}}_r = \widetilde{\mathfrak{g}}_r^- + \widetilde{\mathfrak{g}}_r^+$, де сума є прямою сумою векторних просторів, це $\mathbb{Z}$-квазіградуйована алгебра типу $(0, 2n-1)$.*

Ідея доведення. Щоб довести данне твердження, необхідно поширити формулу (3.3.10) на від'ємні степені k. Внаслідок комутаційних співвідношень (3.2.2) формула (3.3.10) поширюється на від'ємні степені k і елементи $\tilde{X}^{(m+kn),\alpha}(u)$, $k \in \mathbb{Z}$, $m \in \overline{1,n}$, $\alpha \in \overline{1, \dim\mathfrak{g}}$ формують замкнену алгебру Лі. Ми будемо позначати цю алгебру $\widetilde{\mathfrak{g}}_r$. Вона включає $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$ як підалгебру. Позначемо за $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^+$ доповняльний до $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$ підпростір в алгебрі $\widetilde{\mathfrak{g}}_r$. Підпростір $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^+$ натягнутий на базисні елементи $\tilde{X}^{(m+kn),\alpha}(u)$, $k < 0$, $m \in \overline{1,n}$, $\alpha \in \overline{1, \dim\mathfrak{g}}$. Можна показати, що $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^+$ — замкнена алгебра Лі.

Зауваження 18. Зауважимо, що перехід до квазіградуйованого базису, може бути інтерпритовано як перехід до іншого базису в алгебри формальних рядів Лорана $\widetilde{\mathfrak{g}}(u^{-1}, u))$. Дійсно, легко бачити, що

$$\tilde{X}^{(i-kn+1),\alpha}(u) \equiv f^{-k}(u) X^{(i),\alpha}(u) = u^{kn-i-1} X^{\alpha} + o(u^{kn-i-1})$$

де $k > 0, i \in \overline{0, n-1}$. Отже, квазіградуйований базис в зконструйованій алгебрі Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^+$, може бути інтерпритований як інший базис в алгебрі формальних рядів Тейлора. Не дивлячись на це, ми віддаємо перевагу іншій інтерпритації. Ми визначаємо алгебри Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^+$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_r$ в дусі визначень [10], тобто їх елементи співпадають з скінченними лінійними комбінаціями нескінченного набору базисних елементів $\tilde{X}^{(i+kn),\alpha}(u)$, $k \in \mathbb{Z}$,

$i \in \overline{1,n}$, $\alpha \in \overline{1,\dim\mathfrak{g}}$. Це визначення є узгодженим з множенням Лі оскільки дужка Лі скінченної лінійної комбінації елементів $\tilde{X}^{(i+kn),\alpha}(u)$ є знову скінченною лінійною комбінацією елементів $\tilde{X}^{(i+kn),\alpha}(u)$, $k \in \mathbb{Z}$, $i \in \overline{1,n}$, $\alpha \in \overline{1,\dim\mathfrak{g}}$. Якщо використовувати данне визначення, то очевидно, що алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^+$ і $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))$, а також $\widetilde{\mathfrak{g}}_r$ і $\widetilde{\mathfrak{g}}(u^{-1},u))$ не є ізоморфними. Більше того, в усіх відомих прикладах, $f(u)$ не тільки формальний ряд Лорана, але і конкретна мероморфна функція, визначена на тій самій Рімановій поверхні, що й відповідна класична r-матриця $r(u,v)$. Отже, зконструйовані алгебри Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^+$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_r$ можуть бути розглянуті як алгебри спеціальних мероморфних функцій на тій самій Рімановій поверхні, що й дана r-матриця.

Зауваження 19. Зауважимо, що зконструйовані в цьому розділі квазіградуйовання не є однорідними, тобто:

$$[(\mathfrak{g}_r)_{-i}, (\mathfrak{g}_r)_{-j}] \subset \sum_{s=0}^{q(-i,-j)} (\mathfrak{g}_r)_{s-(i+j)}, \tag{3.3.12}$$

де $q(-i,-j) \leq q = 2n-1$ і, зокрема, $q(-1,-1)=1$:

$$[(\mathfrak{g}_r)_{-1}, (\mathfrak{g}_r)_{-1}] \subset (\mathfrak{g}_r)_{-2} + (\mathfrak{g}_r)_{-1},$$

В загальному випадку $q(-i,-j) = i+j-1$ якщо $i,j \leq n$.

Саме це дуже спеціальне неоднорідне квазіградуйовання забезпечує розклад алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r$ в пряму суму алгер Лі як векторних просторів якщо $q>1$. Іншими словами, тільки таке спеціальне квазіградуйювання має властивість, що $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^- \equiv \sum\limits_{i=1}^{\infty}(\mathfrak{g}_r)_{-i}$ є замкнутою алгеброю Лі. Всі однорідні квазіградуйовання з $q>1$ $(n>1)$ не забезпечують цю властивість, а отже не можуть бути використані в теорії інтегровних систем.

Зауваження 20. Можно використати інший мультиплікатор алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$ для того, щоб зконструювати квазіградуйований базис, але в застосуваннях необхідна найпростіша форма такого квазіградуйовання пов'язана з мультиплікатором мінімального порядку n_r, який, надалі, буде позначатись просто як n, залежного від конкретної матриці $r(u,v)$. Відповідна трійка $(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-, \widetilde{\mathfrak{g}}_r^+, \widetilde{\mathfrak{g}}_r)$ однозначно визначається самою r-матрицею і буде називатися класичною r-матричною трійкою. Зауважимо, що трійка $(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-, \widetilde{\mathfrak{g}}_r^+, \widetilde{\mathfrak{g}}_r)$ в загальному випадку не є трійкою Маніна, оскільки в загальному випадку $(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^\pm)^* \neq \widetilde{\mathfrak{g}}_r^\mp$.

3.3.1. Ідеали і скінченновимірні фактор алгеби. Існування мультиплікаторів чи, еквівалентно, спеціальних квазіградуйовань є дуже важливою структурною влативістю алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$, зокрема, має місце наступне:

Твердження 3.5. *Нехай $f(u)$ буде мультиплікатор алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$ скінченного порядку n, тоді:*

(i) підпростір $J_f \equiv f(u)\widetilde{\mathfrak{g}}_r^- = \sum\limits_{l=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(\mathfrak{g}_r^-)_{-i-ln}$ є ідеалом алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$.

(ii) існує нескінченне число вкладених ідеалів алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$: $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^- = J_{f^0} \supset J_{f^1} \supset J_{f^2} \supset \cdots \supset J_{f^k} \supset \cdots$, де $J_{f^k} \equiv f^k(u)\widetilde{\mathfrak{g}}_r^- = \sum\limits_{l=k}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(\mathfrak{g}_r^-)_{-i-ln}$.

(iii) корозмірність ідеалу J_{f^k} в $J_{f^{k-1}}$ є рівною $n\dim\mathfrak{g}$.

Зауваження 21. Викорстовуючи це твердження можна визначити структуру скінченновимірної алгебри Лі на кожному фактор-просторі $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-/J_{f^k}$ і зконструйювати інтегровну систему на її дуальному просторі.

Підалгебра $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^+$ має більше ідеалів, ніж підалгебра $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$. Структура ідеалів підалгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^+$ повторює структуру ідеалів алгебри $\mathfrak{g}$-значних поліномів Тейлора. Наступне Твердження є наслідком квазіградуювання $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^+$:

Твердження 3.6. *(i) Нехай $M \geq 0$, тоді $J_M^r = \sum\limits_{k=M}^{\infty}(\mathfrak{g}_r)_k$ є ідеалом в $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^+$.*

(ii) Існує нескінченне число вкладених ідеалів алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^+$:

$$\widetilde{\mathfrak{g}}_r^+ = J_0^r \supset J_1^r \supset J_2^r \supset \cdots \supset J_k^r \supset \cdots.$$

(iii) Корозмірність ідеалів J_M^r в J_{M-1}^r є рівною $\dim\mathfrak{g}$.

Зауваження 22. Використовуючи це твердження, можна визначити структуру скінченновимірної алгебри Лі на фактор-просторах $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^+/J_M^r$ і зконструювати інтегровні системи на їх дуальних просторах.

3.4. Квазіградуйовані комутаційні співвідношення

Як було показано в попередніх підрозділах, алгебри Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$ і $\widetilde{\mathfrak{g}}_r$ є квазіградуйованими. Оскільки доведення цього факту було дещо схематичним, в цьому підрозділі ми зконструюємо комутаційні співвідношення в алгебрах $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$, більш явно, використовуючи описані в Теоремі 3.2 квазіградуйовані базиси. Припустимо для спрощення що мультиплікатор має вигляд

$$f(u) = u^{-n} + \sum_{k=n}^{\infty} f_k u^k.$$

Має місце наступне Твердження:

Твердження 3.7. *Нехай базисні елементи* $\widetilde{X}^{i+1+nl_1}(u)$, $\widetilde{X}^{j+1+nl_2}(u)$, $i, j \in \overline{0, n-1}$, $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$ *алгебри* $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$ *будуть визначені формулою (3.3.10). Тоді мають місце наступні комутаційні співвідношення між елементами* $\widetilde{X}^{i+1+nl_1}(u)$,$\widetilde{X}^{j+1+nl_2}(u)$:

$$[\widetilde{X}^{(i+1+nl_1),\beta}(u), \widetilde{X}^{(j+1+nl_2),\gamma}(u)] =$$
$$= \sum_{\delta=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\beta\gamma}_{\delta} \widetilde{X}^{(i+j+2+n(l_1+l_2)),\delta}(u) + \sum_{s=0}^{i} \sum_{\delta,\kappa=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\beta}_{\delta\kappa} \frac{(\partial_1^s \partial_2^j r_0)^{\delta\gamma}}{s!j!} \widetilde{X}^{(i+1-s+n(l_1+l_2)),\kappa}(u)$$
$$- \sum_{s=0}^{j} \sum_{\delta,\kappa=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\gamma}_{\delta\kappa} \frac{(\partial_1^s \partial_2^i r_0)^{\delta\beta}}{s!i!} \widetilde{X}^{(j+1-s+n(l_1+l_2)),\kappa}(u), \text{ якщо } i+j+2 \leq n. \tag{3.4.13}$$

$$[\widetilde{X}^{(i+1+nl_1),\beta}(u), \widetilde{X}^{(j+1+nl_2),\gamma}(u)] = \sum_{\delta=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\beta\gamma}_{\delta} \widetilde{X}^{(i+j+2+n(l_1+l_2)),\delta}(u)$$
$$- \sum_{\alpha,\delta=1}^{\dim\mathfrak{g}} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(\partial_1^s \partial_2^{i+j+1-n} r_0)^{\alpha}_{\delta}}{s!(i+j+1-n)!} C^{\beta,\gamma}_{\alpha} \widetilde{X}^{(n-s+n(l_1+l_2)),\delta}(u)$$
$$+ \sum_{s=0}^{i} \sum_{\delta,\kappa=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\beta}_{\delta\kappa} \frac{(\partial_1^s \partial_2^j r_0)^{\delta\gamma}}{s!j!} \widetilde{X}^{(i+1-s+n(l_1+l_2)),\kappa}(u) -$$

$$-\sum_{s=0}^{j}\sum_{\delta,\kappa=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\gamma}_{\delta\kappa}\frac{(\partial_1^s\partial_2^i r_0)^{\delta\beta}}{s!i!}\widetilde{X}^{(j+1-s+n(l_1+l_2)),\kappa}(u),\ \textit{якщо } i+j+1\geq n. \tag{3.4.14}$$

Зауваження 23. Відзначимо, що згідно з наших визначень базисні елементи $\widetilde{X}^{(m),\alpha}(u)$, $\alpha\in\overline{1,\dim\mathfrak{g}}$ утворюють підпростір $(\mathfrak{g}_r)_{-m}$.

Розглянемо два класи прикладів алгебр Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{\pm}$ і $\widetilde{\mathfrak{g}}_r$ і відповідних квазіградуйованих структур. Вони будуть повязані з мультиплікаторами першого і другого порядків.

Приклад 3.2. Розглянемо випадок r-матриць і алгебр Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-}$, що мають мультиплікатори порядку один. В цьому випадку ми маємо:

$$f(u)=u^{-1}+uf_1+...$$

Використовуючи це легко отримуємо що:

$$X^{(1),\alpha}(u)=\tilde{X}^{(2),\alpha}(u)-\sum_{\kappa=1}^{\dim\mathfrak{g}}(r_0)^{\beta}_{\kappa}\tilde{X}^{(1),\kappa}(u). \tag{3.4.15}$$

Підставляючи співвідношення (3.4.15) в фільтровані комутаційні співвідношення (3.2.4) і беручи до уваги, що по самому означенню квазіградуйованого базису $\tilde{X}^{(n+1),\alpha}(u)\equiv f^n(u)X^{(0),\alpha}(u)$, ми отримуємо наступні квазіградуйовані комутаційні співвідношення для вибраного базису:

$$[\tilde{X}^{(n+1),\beta}(u),\tilde{X}^{(m+1),\gamma}(u)]=\sum_{\delta=1}^{\dim\mathfrak{g}}C^{\beta\gamma}_{\delta}\tilde{X}^{(n+m+2),\delta}(u)+$$

$$+\sum_{\delta,\epsilon,\kappa=1}^{\dim\mathfrak{g}}(C^{\beta}_{\delta\kappa}r_0^{\delta\gamma}-C^{\gamma}_{\delta\kappa}r_0^{\delta\beta}-C^{\beta\gamma}_{\delta}(r_0)^{\delta}_{\kappa})\tilde{X}^{(n+m+1),\kappa}(u), \tag{3.4.16}$$

де $n,m\in\mathbb{Z}$ для випадку алгеб Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}_r$, і $n,m\in\mathbb{Z}_{\pm}$ для випадку алгебр $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{\mp}$.

Як ми бачимо, відхилення в цих комутаційних співвідношеннях від градуйованого закону множення Лі є $q=2\deg f-1=1$. Розглянутий приклад є найпростішим випадком квазіградуйованих алгебр Лі, що мають схему Костанта-Адлера-Сімса.

Приклад 3.3. Розглянемо випадок r-матриць і алгебр Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}_r$, що мають мультиплікатори другого порядку і наступної форми:

$$f(u) = u^{-2} + f_2 u^2 + ...$$

В результаті, отримуємо:

$$[\tilde{X}^{(2m+1),\beta}(u), \tilde{X}^{(2n+1),\gamma}(u)] = \sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\beta\gamma}_{\alpha} \tilde{X}^{(2m+2n+2),\alpha}(u) + \\ + \sum_{\delta,\kappa=1}^{\dim\mathfrak{g}} (C^{\beta}_{\delta\kappa} r_0^{\delta\gamma} - C^{\gamma}_{\delta\kappa} r_0^{\delta\beta}) \tilde{X}^{(2m+2n+1),\kappa}(u), \quad (3.4.17)$$

$$[\tilde{X}^{(2n+1),\beta}(u), \tilde{X}^{(2m+2),\gamma}(u)] = \sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\beta\gamma}_{\alpha} \tilde{X}^{(2n+2m+3),\delta}(u) - \\ - \sum_{\alpha,\delta,\kappa=1}^{\dim\mathfrak{g}} \left(C^{\gamma}_{\delta\kappa} r_0^{\delta\beta} + C^{\beta\gamma}_{\alpha} (r_0)^{\alpha}_{\kappa} \right) \tilde{X}^{(2n+2m+2),\kappa}(u) + \\ + \sum_{\alpha,\kappa=1}^{\dim\mathfrak{g}} \left(C^{\beta}_{\delta\kappa} (\partial_2 r_0)^{\delta\gamma} - C^{\gamma}_{\delta\kappa} (\partial_1 r_0)^{\delta\beta} - C^{\beta\gamma}_{\alpha} (\partial_1 r_0)^{\alpha}_{\kappa} \right) \tilde{X}^{(2n+2m+1),\kappa}(u), \quad (3.4.18)$$

$$[\tilde{X}^{(2n+2),\beta}(u), \tilde{X}^{(2m+2),\gamma}(u)] = \sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\beta\gamma}_{\alpha} \tilde{X}^{(2n+2m+4),\alpha}(u) + \\ + \sum_{\alpha,\delta,\kappa=1}^{\dim\mathfrak{g}} (C^{\beta}_{\delta\kappa} (\partial_2 r_0)^{\delta\gamma} - C^{\gamma}_{\delta\kappa} (\partial_2 r_0)^{\delta\beta} - C^{\beta\gamma}_{\alpha} (\partial_2 r_0)^{\alpha}_{\kappa}) \tilde{X}^{(2n+2m+2),\kappa}(u) + \\ + \sum_{\alpha,\delta,\kappa=1}^{\dim\mathfrak{g}} \left(C^{\beta}_{\delta\kappa} (\partial_1\partial_2 r_0)^{\delta\gamma} - C^{\gamma}_{\delta\kappa} (\partial_1\partial_2 r_0)^{\delta\beta} - C^{\beta\gamma}_{\alpha} (\partial_1\partial_2 r_0)^{\alpha}_{\kappa} \right) \tilde{X}^{(2n+2m+1),\kappa}(u). \quad (3.4.19)$$

3.5. Канонічна форма класичних r-матриць.

Для того, щоб визначити дуальні простори зконструйованих алгебр Лі $(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^+)^*$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^*$, необхідно вивести спеціальну форму загальної класичної r-матриці зі спектральними параметрами. Має місце наступна Теорема:

Теорема 3.4. *Нехай $f(u)$ буде мультиплікатором $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$ порядку n,*

(i) тоді, відповідна r-матриця може бути представлена в наступній формі:

$$r(u,v)=\frac{\sum\limits_{\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}}\sum\limits_{j=1}^{n}\widetilde{X}^{(j),\gamma}(u)\otimes\widetilde{Y}_\gamma^{(j-n)}(v)}{f(u)-f(v)}, \tag{3.5.20}$$

де $\widetilde{X}^{(j+1),\gamma}(u)\equiv X^{(j),\gamma}(u)$, $X^{(j),\gamma}(u)$ визначена формулою (3.2.1), тобто $X^{(j),\gamma}(u)=\frac{1}{j!}\sum\limits_{\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}}\partial_v^j(r^{\beta\gamma}(u,v))|_{v=0}X_\beta$ і $\mathfrak{g}$-значна функція $\widetilde{Y}_\gamma^{(j-n)}(v)$ є локально – мероморфною функцією з полюсом в точці $v=0$ порядку $\leq n-j+1$.

(ii) явний вигляд функцій $\widetilde{Y}_\gamma^{(j)}(v)$ наступний:

$$\widetilde{Y}_\gamma^{(-j)}(v)=\sum_{i=0}^{n-1}(\mathcal{F}^{-1})_i^j Y_\gamma^{(i)}(v), \tag{3.5.21}$$

де $\mathcal{F}$ це $n\times n$ трикутна матриця з матричними елементами $\mathcal{F}_i^j=F_{j-i}^{(1)}$ якщо $j\geq i$, $\mathcal{F}_i^j=0$ якщо $j<i$ та $F_0^{(1)}=1$,

$$F_m^{(1)}\equiv\sum_{m=1}^{l}(-1)^m\sum_{l_1+l_2+\ldots+l_m=l}f_{-n+l_1}\cdots\cdot f_{-n+l_m},$$

$$Y_\alpha^{(i)}(v)\equiv\sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}}\frac{1}{i!}(\partial_u^i r_{\alpha\beta}(u,v))|_{u=0}X^\beta. \tag{3.5.22}$$

зокрема, якщо $f(u)=u^{-n}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}f_k u^k$, то $\mathcal{F}=id$ і $\widetilde{Y}_\gamma^{(-j)}(v)=Y_\gamma^{(j)}(v)$.

Зауваження 24. Наведенна вище формула для r-матриці є узагальненою теоремою додавання для алгебро-значчних функцій. Дійсно, у випадку кососиметричних матриць таких, що $r_{\alpha\beta}(u,v) = -r_{\beta\alpha}(v,u)$, легко показати, що $Y_\alpha^{(m)}(v) = -X_\alpha^{(m)}(v)$. Припустимо, що, більше того, мультиплікатор $f(u)$ такий, що $f_{-n+k} = 0, \forall k \in \overline{1, n-1}$. В цьому випадку, в силу пункту (ii) Теореми, ми отримуємо $\widetilde{Y}_\gamma^{(-i)}(v) = Y_\gamma^{(i)}(v)$. Отже $\widetilde{Y}_\alpha^{(j-n)}(v) = -X_\alpha^{(n-j)}(v)$. В результаті для класичних кососиметричних матриць, що залежать від різниці спектральних параметрів, отримується наступна Теорема додавання:

$$r(u-v) \equiv \sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} X^{(0),\alpha}(u-v) \otimes X_\alpha = \frac{\sum\limits_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} \sum\limits_{j=1}^{n} X^{(j-1),\alpha}(u) \otimes X_\alpha^{(n-j)}(v)}{f(v) - f(u)}. \quad (3.5.23)$$

Приклад 3.4. Розглянемо найпростіший приклад отриманих вище формул для r-матриці. Нехай $n = 1$ і будемо використовувати таку параметризацію $r(\lambda,\mu)$, що $f(\lambda) = \lambda^{-1}$. В цьому випадку ми отримаємо наступне представлення матриці $r(\lambda,\mu)$:

$$r(\lambda,\mu) = \frac{\sum\limits_{\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}} \widetilde{X}^{(1),\gamma}(\lambda) \otimes \widetilde{Y}_\gamma^{(0)}(\mu)}{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}}, \text{ де} \quad (3.5.24)$$

$$\widetilde{X}^{(1),\alpha}(\lambda) = \sum_{\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} (r^{\beta\alpha}(\lambda,0)) X_\beta = \lambda^{-1}(1+\lambda r_1+\lambda^2 r_2+\ldots)\cdot(X^\alpha) \equiv \frac{1}{\lambda} r(\lambda)\cdot(X^\alpha),$$

і ми ввели для зручності наступні операторні позначення:

$$r_{k+1}(X^a) = \sum_{\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} \frac{1}{k!} \partial_\lambda^k (r_0^{\beta\alpha}(\lambda,0))|_{\lambda=0} X_\beta \quad (3.5.25)$$

Порахуємо явно елементи $\widetilde{Y}_\gamma^{(0)}(\mu)$. Вони даються наступною формулою:

$$\widetilde{Y}_\gamma^{(0)}(\mu) = -\frac{1}{\mu} \sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m (C_0^m)_\gamma^\alpha X_\alpha,$$

де C_0^m – це матричні елементи матриці C перетворені від фільтрованого до квазіградуйованого базису. Можна показати [105] що матриця C_0^m співпадає з коефіцєнтами розкладу $r^{-1}(\lambda)$ по степенях λ: $r^{-1}(\lambda) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_0^m \lambda^m$. В результаті ми отримуємо наступний явний вираз для елементів $\widetilde{Y}_\gamma^{(0)}(\mu)$:

$$\widetilde{Y}_\gamma^{(0)}(\mu) = -\frac{r^{-1}(\mu)(X_\gamma)}{\mu}. \tag{3.5.26}$$

Відповідна r-матриця набуває наступної форми:

$$r(\lambda,\mu) = \frac{\sum\limits_{\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}} r(\lambda)(X^\gamma) \otimes r^{-1}(\mu)(X_\gamma)}{\lambda-\mu}. \tag{3.5.27}$$

Це в точності r-матриця введена в [84] з інших міркувань.

3.5.1. Дуальні простори $(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-)^*$ і $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))^*$.

Для побудови матриць Лакса необхідно дати опис дуальних просторів до зконструйованих алгебр. Розглянемо дуальні простори до алгеб Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}(u^{-1},u))$, $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$. З цією метою введемо спарювання на $\widetilde{\mathfrak{g}}(u^{-1},u))$ задане формулою:

$$\langle X(u), Y(u)\rangle = res_{u=0}(X(u),Y(u)). \tag{3.5.28}$$

Використовуючи це спарення можна ідентифікувати простори $\widetilde{\mathfrak{g}}(u^{-1},u))$ і $\widetilde{\mathfrak{g}}(u^{-1},u))^*$. Тому ми маємо:

$$\widetilde{\mathfrak{g}}(u^{-1},u))^* = \widetilde{\mathfrak{g}}((u))^* + (\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-)^*.$$

Опишемо функціональні реалвзації просторів $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))^*$ і $(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-)^*$. Виявляється що, не дивлячись на те, що алгебра формальних рядів Тейлора $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))$, не залежить від розглядуваної r-матриці, реалізація простору $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))^*$, що відповідає розбиттю $\widetilde{\mathfrak{g}}(u^{-1},u)) = \widetilde{\mathfrak{g}}((u)) + \widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$, буде залежати від неї. Ми будемо позначати реалізацію цього дуального простору через $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))_r^*$.

Має місце наступне Твердження:

Твердження 3.8. *Елемент дуального простору $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))_r^*$ загального положення, що відповідає розкладу $\widetilde{\mathfrak{g}}(u^{-1},u)) = \widetilde{\mathfrak{g}}((u)) + \widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$ і спарюванню (3.5.28), має наступну форму:*

$$L^+(v) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} Y^{(k),\alpha}(v)L_\alpha^{(k)} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} \frac{1}{k!}(\partial_u^k r^{\alpha\beta}(u,v))|_{u=0}L_\alpha^{(k)}X_\beta. \tag{3.5.29}$$

Зауваження 25. Відзначемо, що у випадку загальних некососиметричних r-матриць залежність базисних елементів

$$Y^{(k),\alpha}(v) = \sum_{\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} \frac{1}{k!}(\partial_u^k r^{\alpha\beta}(u,v))|_{u=0}X_\beta$$

простору $\widetilde{\mathfrak{g}}((v))_r^*$ від спектрального параметру v є відмінною від залежності базисних елементів $X^{(k),\alpha}(u) = \sum\limits_{\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} \frac{1}{k!}(\partial_v^k r^{\beta\alpha}(u,v))|_{v=0}X_\beta$ алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$ від спектрального параметру u. Це значить, що неможливо ототожнити ці простори як простори функцій від спетрального параметру. Тільки у випадку кососиметричних r-матриць, тобто коли $r^{\alpha\beta}(u,v) = -r^{\alpha\beta}(v,u)$ формули для базисних елементів співпадають з точністю до замінни $u \leftrightarrow v$.

3.5.2. Дія алгебр $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$ і $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))$ на $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))_r^*$.

З метою застосувань до теорії інтегровних систем, буде необхідно явно визначити дію алгебр $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$, $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))$ на просторі $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))_r^*$. Нехай $X^{(m),\alpha}(u)$ – зконструйований фільтрований базис алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$, $Y^{(l),\beta}(u)$ буде введений вище базис простору $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))_r^*$ дуальний до мономіального базису. Має місце наступне Твердження:

Твердження 3.9. *Дія алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-$ на просторі $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))_r^*$ в зконструйованому базисі дається наступною формулою:*

$$[X^{(m),\alpha}(u), Y^{(l),\beta}(u)] = \sum_{\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}} C_\gamma^{\alpha\beta}Y^{(l+m+1),\gamma}(u) -$$

$$-(\sum_{s=0}^{m}\sum_{\gamma,\delta=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\alpha}_{\gamma\delta}\frac{(\partial_1^l\partial_2^s r_0)^{\beta\gamma}}{s!l!}Y^{(m-s),\delta}(u)+\sum_{s=0}^{l}\sum_{\gamma,\delta=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\beta}_{\gamma\delta}\frac{(\partial_1^s\partial_2^m r_0)^{\gamma\alpha}}{s!m!}Y^{(l-s),\delta}(u)), \tag{3.5.30}$$

Зауваження 26. Відзначемо, що взагалі кажучи, формула дії (3.5.30) відрізняється від приєднаної дії. Дійсно, як легко бачити, формула (3.5.30) співпадає з формулою (3.2.2) тільки у випадку кососиметричних r-матриць, тобто коли $r_0^{\beta\gamma}(u,v) = -r_0^{\gamma\beta}(v,u)$.

Перейдемо до опису коприєднаної дії алгеби $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))$ на просторі $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))_r^*$. Проблема дії мономіального базису алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))$ на $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))_r^*$ полягає в тому, що її дія за допомогою комутатора не зберігає простір $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))_r^*$ як лінійний простір натягнутий на елементи $Y^{(m),\alpha}(u)$. Тому коприєднана дія відмінна від комутатора. Має місце наступне Твердження:

Твердження 3.10. *Коприєднана дія елемента $X(u) \in \widetilde{\mathfrak{g}}((u))$ на $Y(u) \in \widetilde{\mathfrak{g}}((u))_r^*$ задається наступною формулою:*

$$ad^*_{X(u)} \cdot Y(u) = -P_r^*([X(u), Y(u)]), \tag{3.5.31}$$

де P_r^* – проектор на простір $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))_r^*$.

Зауваження 27. З явної форми коприєднананої дії елемента $X(u) \in \widetilde{\mathfrak{g}}((u))$ слідує, що для її знання необхідно знати лише дію $X(u)$ на основній частини функції $Y(u)$, тобто коприєднана дія елементу $X(u)$ на прострі $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))_r^*$ така сама як і його дія на прострі петель $\mathfrak{g} \otimes u^{-1}Pol(u^{-1})$, тобто не залежить від r-матриці. Цей факт був вперше помічений в [15] для випадку кососиметричних еліптичних r-матриць.

3.6. Дуальні простори $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^*$ і $(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^+)^*$.

Тепер ми зконструюємо дуальні простори до алгебр Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}_r$ і $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^+$, що були введені вище, і нову реалізацію дуального простору $(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-)^*$, що відповідає квазіградуйованому базису. Це дасть нам змогу, зокрема, розглянути “скінченні” матриці Лакса, що належить скінченновимірним факторам алгебри $(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-)^*$. Щоб зробити це, ми використаємо зконструйовану канонічну форму класичної r-матриці. Має місце наступна Теорема [105]:

Теорема 3.5. *Розглянемо наступні $\mathfrak{g}$-значні функції:*

$$\widetilde{Y}_\alpha^{(i+nk)}(v) \equiv f^{-k-1}(v)\widetilde{Y}_\alpha^{(i-n)}(v) \tag{3.6.32}$$

де базисні елементи $\widetilde{Y}_\alpha^{(i-n)}(v)$, $i \in \overline{1,n}$, $\alpha \in \overline{1,\dim\mathfrak{g}}$ визначені як в Теоремі (3.4). Тоді:

(i) елементи дуальних просторів $L^{\mp}(v) \in (\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{\mp})^*$ загального положення, що відповідають розкладам $\widetilde{\mathfrak{g}}_r = \widetilde{\mathfrak{g}}_r^- + \widetilde{\mathfrak{g}}_r^+$ і спарюванню (3.5.28), мають наступний вигляд:

$$L^-(v) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} \widetilde{l}^{(i+nk+1),\alpha}\widetilde{Y}_\alpha^{(i+nk+1)}(v), \tag{3.6.33}$$

$$L^+(v) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} \widetilde{l}^{(i-nk+1),\alpha}\widetilde{Y}_\alpha^{(i-nk+1)}(v). \tag{3.6.34}$$

(ii) елемент загального положення простору $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^*$, що відповідає спарюванню (3.5.28), має наступну форму:

$$L(v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} \widetilde{l}^{(i+nk+1),\alpha}\widetilde{Y}_\alpha^{(i+nk+1)}(v), \tag{3.6.35}$$

(iii) дужки Пуасона між компонентами матриці Лакса повторюють комутаційні співвідношення квазіградуйованого базису алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r$:

$$\begin{gathered}\{\widetilde{l}^{(i+1+nk_1),\beta}, \widetilde{l}^{(j+1+nk_2),\gamma}\} = \\ = \sum_{\delta=1}^{\dim\mathfrak{g}} C_\delta^{\beta\gamma}\widetilde{l}^{(i+j+2+n(k_1+k_2)),\delta} + \sum_{s=0}^{i}\sum_{\delta,\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} C_{\delta\alpha}^{\beta}\frac{(\partial_1^s\partial_2^j r_0)^{\delta\gamma}}{s!j!}\widetilde{l}^{(i-s+1+n(k_1+k_2)),\alpha} - \\ - \sum_{s=0}^{j}\sum_{\delta,\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} C_{\delta\alpha}^{\gamma}\frac{(\partial_1^s\partial_2^i r_0)^{\delta\beta}}{s!i!}\widetilde{l}^{(j-s+1+n(k_1+lk_2)),\alpha}, \text{ якщо } i+j+2 \leq n.\end{gathered} \tag{3.6.36}$$

$$\{\widetilde{l}^{(i+1+nk_1),\beta}, \widetilde{l}^{(j+1+nk_2),\gamma}\} = \sum_{\delta=1}^{\dim\mathfrak{g}} C_\delta^{\beta\gamma} \widetilde{l}^{(i+j+2+n(k_1+k_2)),\delta}(u) +$$

$$+ \sum_{s=0}^{i} \sum_{\delta,\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} C_{\delta\alpha}^{\beta} \frac{(\partial_1^s \partial_2^j r_0)^{\delta\gamma}}{s!j!} \widetilde{l}^{(i-s+1+n(k_1+k_2)),\alpha} -$$

$$- \sum_{s=0}^{j} \sum_{\delta,\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} C_{\delta\alpha}^{\gamma} \frac{(\partial_1^s \partial_2^i r_0)^{\delta\beta}}{s!i!} \widetilde{l}^{(j-s+1+n(k_1+k_2)),\alpha}, \ \textit{якщо } i+j+1 \geq n, \tag{3.6.37}$$

де ми припустили що $f(u) = u^{-n} + \sum_{k=n}^{\infty} f_k u^k$.

(iiii) матриці Лакса $L^-(v)$ *і* $L^+(v)$ *задовольняють наступні тензорні дужки Лі-Пуасона:*

$$\{L_1^+(u), L_2^+(v)\} = ([r_{12}(u,v), L_1^+(u)] - [r_{21}(v,u), L_2^+(v)]), \tag{3.6.38a}$$

$$\{L_1^-(u), L_2^-(v)\} = -([r_{12}(u,v), L_1^-(u)] - [r_{21}(v,u), L_2^-(v)]), \tag{3.6.38b}$$

$$\{L_1^+(u), L_2^-(v)\} = -([r_{12}(u,v), L_1^+(u)] + [r_{21}(v,u), L_2^-(v)]). \tag{3.6.38c}$$

Зауваження 28. Відзначемо, що на відміну від алгебр $\widetilde{\mathfrak{g}}_r$,$\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{\pm}$ ми дозволяємо їх дуальним просторам бути ширшими і включати формальні ряди Лорана. Завдяки тому факту, що алгебра $\widetilde{\mathfrak{g}}_r$ складається тільки з скінченних лінійних комбінацій базисних елементів, таке визначення коректне.

Доведення Теореми базується на наступному Твердженні [105]:

Твердження 3.11. *Зконструйовані базиси просторів* $(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^+)^*$ *і* $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))_r^*$ *пов'язані між собою скінченним лінійним перетворенням, тобто можна ототожнити простори* $(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^+)^*$ *і* $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))_r^*$ *як простори функцій.*

Зауваження 29. З Твердження (3.11) слідує, що можна ототожнити дуальні простори $(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^+)^*$ і $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))_r^*$. Можна також ототожнити простори $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))$ і зконструйовані в цьому підрозділі простори $(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^-)^*$ як формальні ряди Лорана завдяки тому факту, що:

$$\widetilde{Y}^{(j+nl),\beta}(v) \equiv f^{-l-1}(v)\widetilde{Y}_\alpha^{(j-n)}(v) = -v^{j+nl-1}X^\beta + o(v^{j+nl-1}), l \geq 0, j \in \overline{1,n},$$

Отже, можна розглядати елемент $\widetilde{Y}^{(j+nl)}_{\beta}(v)$ як базис у просторі $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))$ альтернативний до мономіального базису $v^{i+nk}X_{\alpha}$. Тим не менше, це ототожнення є формальним (на противагу розглядуваного в Твердженні (3.11)) оскільки $\widetilde{Y}^{(m)}_{\alpha}(v)$, $m \geq 0$ виражається через $v^m X_{\alpha}$ і навпаки як нескінченна лінійна комбінація (формальні ряди). Це не дає можливості ототожнити ці простори як простори функції. Наслідком цього є неможливість ототожнення скінченновимірних пуасонових підпросторів в $(\widetilde{\mathfrak{g}}^{-}_{r})^{*}$, що існують завдяки квазіградуйованій структурі алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}^{-}_{r}$, з підпросторами в $\widetilde{\mathfrak{g}}((u))$ натягнутими на поліноміальний від u базис.

3.6.1. Коприєднана дія $\widetilde{\mathfrak{g}}_r$ на $\widetilde{\mathfrak{g}}^{*}_{r}$: явна форма. Опишемо коприєднану дію алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r$ в просторі $\widetilde{\mathfrak{g}}^{*}_{r}$ в термінах зконструйованого базису (така дія необхідна, наприклад, при розгляді рівнянь Лакса). З цією метою необхідно використати відому дію $\widetilde{\mathfrak{g}}_r$ на $(\widetilde{\mathfrak{g}}^{+}_{r})^{*} \simeq \widetilde{\mathfrak{g}}((u))^{*}_{r}$.

Має місце наступне Твердження:

Твердження 3.12. *Нехай мультиплікатор має форму* $f(u) = \dfrac{1}{u^n} + \sum\limits_{k=n}^{\infty} f_k u^k$. *Тоді:*

(i) коприєднана дія алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r$ на просторі $\widetilde{\mathfrak{g}}^{*}_{r}$ дається формулою:

$$[\widetilde{X}^{(i+1+nk),\alpha}(u), \widetilde{Y}^{(-j-nl),\beta}(u)] = \\ = \sum_{\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\alpha\beta}_{\gamma} \widetilde{Y}^{(-j-i-1-n(l+k)),\gamma}(u) - \Big(\sum_{s=0}^{i}\sum_{\gamma,\delta=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\alpha}_{\gamma\delta}\frac{(\partial_1^j\partial_2^s r_0)^{\beta\gamma}}{s!j!}\widetilde{Y}^{(-i+s-n(l+k)),\delta}(u) + \\ + \sum_{s=0}^{j}\sum_{\gamma,\delta=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\beta}_{\gamma\delta}\frac{(\partial_1^s\partial_2^i r_0)^{\gamma\alpha}}{s!i!}\widetilde{Y}^{(-j+s-n(l+k)),\delta}(u)\Big), \text{ якщо } i+j<n, \tag{3.6.39}$$

$$[\widetilde{X}^{(i+1+nk),\alpha}(u), \widetilde{Y}^{(-j-nl),\beta}(u)] = \sum_{\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\alpha\beta}_{\gamma}\Big(\widetilde{Y}^{(-i-j-1-n(l+k)),\gamma}(u) +$$

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{(\partial_1^{(i+j+1-n)}\partial_2^{s-1}r_0)^{\gamma\delta}}{(s-1)!(i+j+1-n)!}\widetilde{Y}_{\delta}^{(s-n-n(l+k))}(u)\Big)-$$

$$-\Big(\sum_{s=0}^{i}\sum_{\gamma,\delta=1}^{\dim\mathfrak{g}}C^{\alpha}_{\gamma\delta}\frac{(\partial_1^{j}\partial_2^{s}r_0)^{\beta\gamma}}{s!j!}\widetilde{Y}^{(-i+s-n(l+k)),\delta}(u)$$

$$+\sum_{s=0}^{j}\sum_{\gamma,\delta=1}^{\dim\mathfrak{g}}C^{\beta}_{\gamma\delta}\frac{(\partial_1^{s}\partial_2^{i}r_0)^{\gamma\alpha}}{s!i!}\widetilde{Y}^{(-j+s-n(l+k)),\delta}(u)\Big),\ \text{якщо}\ i+j\geq n. \tag{3.6.40}$$

Зауваження 30. Можливо також отримати явну формулу коприєднаної дії для випадку загальних мультиплікаторів, використовуючи формулу (3.5.30) і загальний звязок між квазіградуйованим і фільтрованим базисом дуального простору описаний в Теоремі 3.4. В загальному випадку ці формули мають громізкий характер, тому не будуть виписані явно.

3.7. Багатополюсні алгебри Лі в регулярних точках.

В цьому підрозділі ми опишемо вкладення алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu}$ в більшу алгебру. Зконструйована алгебра Лі буде важлива для багатьох застосувань. З цією метою відзначимо, що по самому визначенню алгебра $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu}$ складається зі спеціальних $\mathfrak{g}$-значних мероморфних функцій з полюсом в точці ν. Аналогічним чином можливо розглянути алгебру Лі $\mathfrak{g}$-значних мероморфних функцій з полюсами в інших точках $u=\nu_k$, $k\in\overline{1,N}$. Виявляється,що пряма сума цих підалгебр є також замкнутою алгеброю Лі, в яку $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu}$ вкладається як одна з компонент (як підалгебра з полюсами $\nu_1\equiv\nu$). Має місце наступна Теорема:

Теорема 3.6. *Нехай параметри ν_k,ν_l, $k,l\in\overline{1,N}$ будуть такі, що у околі точок $u=\nu_k$, $v=\nu_l$ матриця $r(u,v)$ має розклад (1.3.6). Тоді:*

(i) з довільним розвязком рівняння (1.2.2) і довільної точки $u=\nu_k$, в околі якої має місце розклад (1.3.6), можна асоціювати $\mathbb{Z}_+$-фільтровану алгебру Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_k}$ мероморфних функцій від одної комплексної змінної зі

значенням в алгебрі Лі $\mathfrak{g}$.

(ii) пряма сума векторних просторів:

$$\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,N} = \sum_{k=1}^{N} \widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_k}$$

є замкнутою алгеброю Лі для довільного числа набору точонк ν_k, $k \in \overline{1,N}$, що задовольняють умови Теореми.

Доведення. Пункт (i) Теореми повторює доведення Теореми 3.1 з заміною $\nu \to \nu_k$. Доведемо пункт (ii) Теореми. Для цього достатньо порахувати комутаційі співвідношення між генераторами $X^{(m),\nu_k,\alpha}(u)$, $X^{(n),\nu_l,\beta}(u)$, $k \neq l$. Розкладаючи праву і ліву частину узагальненого класичного рівняння Янга – Бакстера в ряди Тейлора в околі точок $u_2 = \nu_k$, $u_3 = \nu_l$, покладаючи $u_1 = u$, порівнюючи розклади обох частин рівності по степенях $(u_2 - \nu_k)$, $(u_3 - \nu_l)$ і взявши до уваги визначення функцій $X^{(m),\nu_k,\alpha}(u)$, $X^{(n),\nu_l,\beta}(u)$, ми отримуємо наступні комутаційні співвідношення:

$$[X^{(m),\nu_k,\alpha}(u), X^{(n),\nu_l,\beta}(u)] = \sum_{s=0}^{m} \sum_{\delta,\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\alpha}_{\delta\gamma} \frac{(\partial^s_{\nu_k}\partial^n_{\nu_l} r^{\delta\beta}(\nu_k,\nu_l)}{s!n!} X^{(m-s),\nu_k,\gamma}(u) - \\ - \sum_{s=0}^{n} \sum_{\delta,\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\beta}_{\delta\gamma} \frac{\partial^s_{\nu_l}\partial^m_{\nu_k} r^{\delta\alpha}(\nu_l,\nu_k)}{s!m!} X^{(n-s),\nu_l,\gamma}(u). \quad (3.7.41)$$

З цих комутаційних співвідношень і самого визначення лінійних просторів $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,N}$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_k}$ слідує, що $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,N}$ є алгеброю Лі. Пункт (ii) Теореми доведено.

Приклад 3.5. Розглянемо найпростіший випадок комутаційних співвідношень (3.7.41) детальніше. Ми маємо:

$$[X^{(0),\nu_k,\alpha}(u), X^{(0),\nu_l,\beta}(u)] = \sum_{\delta,\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\alpha}_{\delta\gamma} r^{\delta\beta}(\nu_k,\nu_l) X^{(0),\nu_k,\gamma}(u) - \\ - \sum_{\delta,\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\beta}_{\delta\gamma} r^{\delta\alpha}(\nu_l,\nu_k) X^{(0),\nu_l,\gamma}(u). \quad (3.7.42)$$

$$[X^{(0),\nu_k,\alpha}(u), X^{(1),\nu_l,\beta}(u)] = \sum_{\delta,\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\alpha}_{\delta\gamma}\partial_{\nu_l} r^{\delta\beta}(\nu_k,\nu_l) X^{(0),\nu_k,\gamma}(u) -$$
$$- \sum_{\delta,\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\beta}_{\delta\gamma}\partial_{\nu_l} r^{\delta\alpha}(\nu_l,\nu_k) X^{(0),\nu_l,\gamma}(u) - \sum_{\delta,\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\beta}_{\delta\gamma} r^{\delta\alpha}(\nu_l,\nu_k) X^{(1),\nu_l,\gamma}(u). \tag{3.7.43}$$

$$[X^{(1),\nu_k,\alpha}(u), X^{(1),\nu_l,\beta}(u)] =$$
$$= \sum_{\delta,\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\alpha}_{\delta\gamma}\partial_{\nu_k}\partial_{\nu_l} r^{\delta\beta}(\nu_k,\nu_l) X^{(0),\nu_k,\gamma}(u) + \sum_{\delta,\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\alpha}_{\delta\gamma}\partial_{\nu_l} r^{\delta\beta}(\nu_k,\nu_l) X^{(1),\nu_k,\gamma}(u) -$$
$$- \sum_{\delta,\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\beta}_{\delta\gamma}\partial_{\nu_l}\partial_{\nu_k} r^{\delta\alpha}(\nu_l,\nu_k) X^{(0),\nu_l,\gamma}(u) - \sum_{\delta,\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\beta}_{\delta\gamma}\partial_{\nu_k} r^{\delta\alpha}(\nu_l,\nu_k) X^{(1),\nu_l,\gamma}(u). \tag{3.7.44}$$

3.8. Однополюсні алгебри в особливих точках.

В цьому підрозділі ми введемо і опишемо нескінченно-вимірні алгебри Лі асоційовані з особливими точками класичних r-матриць.

Для того, щоб асоціювати з r-матрицею $r(u,v)$ нескінченно-вимірну алгебру Лі в сингулярній точці $v = \nu_0$, ми будемо використовувати те саме визначення, що і у випадку несингулярних точок, тобто ми зконструюємо набір базисних елементів цієї алгебри наступною формулою:

$$X^{(m),\nu_0,\alpha}(u) = \frac{1}{m!}\partial_v^m (r_{12}(u,v), X_2^{\alpha})_2|_{v=\nu_0} = \frac{1}{m!}\sum_{\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} \partial_v^m (r^{\beta\alpha}(u,v))|_{v=\nu_0} X_{\beta}, \tag{3.8.45}$$

де $m \geq 0, \alpha \in \overline{1, \dim\bar{\mathfrak{g}}_k^{\nu_0}}$, $(\ ,\ )_2$ скалярий добутов в другому тензорному просторі і $X_2^{\alpha} = 1 \otimes X^{\alpha}$. Підпростори $\bar{\mathfrak{g}}_k^{\nu_0} \subset \mathfrak{g}$ визначені наступною формулою:

$$(\partial_v^k r(u,v))|_{v=\nu_0} \in \mathfrak{g}(u^{-1},u)) \otimes \bar{\mathfrak{g}}_k^{\nu_0}. \tag{3.8.46}$$

З узагальненого рівняння Янга – Бакстера (1.2.2) можна вивести, використовуючи розклади r-матриць $r_{12}(u_1,u_2)$ і $r_{13}(u_1,u_3)$, в ряди Тейлора по спектральними параметрам $(u_2-\nu_0)$ і $(u_3-\nu_0)$, що базисні елементи (3.8.45) утворюють замкнену алгебру Лі. Але для того, щоб знайти в явній формі комутаційні співвідношення в цій алгебрі, необхідно знати аналітичні влативості функціїї $r_{23}(u_2,u_3)$ в околі "діагоналі' $u_2=u_3$. З цією метою ми будемо використовувати розклад (1.3.10).

Має місце наступна Теорема:

Теорема 3.7. *Нехай $v=\nu_0$ буде особливою точкою класичної r-матриці $r(u,v)$. Нехай в околі цієї точки має місце розклад (1.3.10) з $k=1$. Тоді елементи $\{X^{(0),\nu_0,\alpha}(u),\ X^{(m),\nu_0,\beta}(u)|m>0,\alpha\in\overline{1,\dim\bar{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0}},\beta\in\overline{1,\dim\mathfrak{g}}\}$ утворюють базис в нескінченно вимірній алгебрі Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0}$ з наступними комутаційними співвідношеннями:*

$$[X^{(0),\nu_0,\alpha}(u),X^{(0),\nu_0,\beta}(u)]=-\sum_{\gamma=1}^{\dim\bar{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0}}C_\gamma^{\alpha\beta}X^{(0),\nu_0,\gamma}(u)+$$
$$+\sum_{\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}}\sum_{\delta=1}^{\dim\bar{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0}}C^{\alpha}_{\gamma\delta}\widetilde{r}_0^{\gamma\beta}(\nu_0,\nu_0)X^{(0),\nu_0,\delta}(u)-\sum_{\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}}\sum_{\delta=1}^{\dim\bar{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0}}C^{\beta}_{\gamma\delta}\widetilde{r}_0^{\gamma\alpha}(\nu_0,\nu_0)X^{(0),\nu_0,\delta}(u),\tag{3.8.47a}$$

$$[X^{(0),\nu_0,\alpha}(u),X^{(l),\nu_0,\beta}(u)]=-\sum_{s=0}^{l-1}\sum_{\gamma,\delta=1}^{\dim\mathfrak{g}}C^{\beta}_{\gamma\delta}\frac{\partial_1^s\widetilde{r}_0^{\gamma\alpha}(\nu_0,\nu_0)}{s!}X^{(l-s),\nu_0,\delta}(u)+$$
$$+\sum_{\gamma,\delta=1}^{\dim\bar{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0}}C^{\alpha}_{\gamma\delta}\frac{\partial_2^l\widetilde{r}_0^{\gamma\beta}(\nu_0,\nu_0)}{l!}X^{(0),\nu_0,\delta}(u)-\sum_{\gamma,\delta=1}^{\dim\bar{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0}}C^{\beta}_{\gamma\delta}\frac{\partial_1^l\widetilde{r}_0^{\gamma\alpha}(\nu_0,\nu_0)}{l!}X^{(0),\nu_0,\delta}(u),\tag{3.8.47b}$$

$$[X^{(m),\nu_0,\alpha}(u),X^{(l),\nu_0,\beta}(u)]=\sum_{\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}}C_\gamma^{\alpha\beta}X^{(l+m),\nu_0,\gamma}(u)+$$

$$\sum_{\gamma,\delta=1}^{\dim\mathfrak{g}}(\sum_{s=0}^{m-1} C^{\alpha}_{\gamma\delta}\frac{\partial_1^s\partial_2^l\widetilde{r}_0^{\gamma\beta}(\nu_0,\nu_0)}{s!l!}X^{(m-s),\nu_0,\delta}(u)-\sum_{s=0}^{l-1} C^{\beta}_{\gamma\delta}\frac{\partial_1^s\partial_2^m\widetilde{r}_0^{\gamma\alpha}(\nu_0,\nu_0)}{s!m!}X^{(l-s),\nu_0,\delta}(u))$$
$$+\sum_{\gamma,\delta=1}^{\dim\bar{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0}} C^{\alpha}_{\gamma\delta}\frac{\partial_1^m\partial_2^l\widetilde{r}_0^{\gamma\beta}(\nu_0,\nu_0)}{l!m!}X^{(0),\nu_0,\delta}(u)-\sum_{\gamma,\delta=1}^{\dim\bar{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0}} C^{\beta}_{\gamma\delta}\frac{\partial_1^l\partial_2^m\widetilde{r}_0^{\gamma\alpha}(\nu_0,\nu_0)}{l!m!}X^{(0),\nu_0,\delta}(u), \tag{3.8.47c}$$

де $C^{\alpha\beta}_{\gamma}$ структурні константи алгебри $\mathfrak{g}$ в дуальному базисі $[X^{\alpha},X^{\beta}]=\sum_{\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\alpha\beta}_{\gamma}X^{\gamma}$ і ми ввели наступні позначення:

$$\partial_1^k\partial_2^l\widetilde{r}_0^{\gamma\alpha}(\nu_0,\nu_0)\equiv(\partial_u^k\partial_v^l\widetilde{r}_0^{\gamma\alpha}(u,v))|_{u,v=\nu_0}.$$

Зауваження 31. Звернемо увагу на технічну важливість умови $k=1$ в розкладі (1.3.10), яка забезпечує лінійну незалежність базису алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0}$, отриманого диференціюванням r-матриці по параметру v.

Зауваження 32. Звернемо увагу на різницю в структурі алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0}$, що відповідає спеціальній точці $v=\nu_0$ від алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu}$, що відповідає несингулярній точці $v=\nu$. Зокрема, на відміну від алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu}$, підалгебра $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0}$ містить підпростір голоморфних по $u=\nu_0$ – функцій натягнений на елементи $\{X^{(0),\nu_0,\alpha}(u)\}$, який утворює, як слідує з комутаційних співвідношень (3.8.47a), скінченно-вимірну алгебру Лі.

Приклад 3.6. Розглянемо найпростіший приклад комутаційних співвідношень (3.8.47), тобто комутаційні співвідношення між базисними елементами $X^{(0),\nu_0,\alpha}(u)$, $X^{(1),\nu_0,\gamma}(u)$, який є важливим для застосувань:

$$[X^{(0),\nu_0,\alpha}(u),X^{(0),\nu_0,\beta}(u)]=-\sum_{\gamma=1}^{\dim\bar{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0}} C^{\alpha\beta}_{\gamma}X^{(0),\nu_0,\gamma}(u)+$$
$$+\sum_{\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}}\sum_{\delta=1}^{\dim\bar{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0}} C^{\alpha}_{\gamma\delta}\widetilde{r}_0^{\gamma\beta}(\nu_0,\nu_0)X^{(0),\nu_0,\delta}(u)-\sum_{\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}}\sum_{\delta=1}^{\dim\bar{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0}} C^{\beta}_{\gamma\delta}\widetilde{r}_0^{\gamma\alpha}(\nu_0,\nu_0)X^{(0),\nu_0,\delta}(u), \tag{3.8.48a}$$

$$[X^{(0),\nu_0,\alpha}(u), X^{(1),\nu_0,\beta}(u)] = -\sum_{\gamma,\delta=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\beta}_{\gamma\delta}\widetilde{r}_0^{\gamma\alpha}(\nu_0,\nu_0)X^{(1),\nu_0,\delta}(u)+$$
$$\sum_{\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}}\sum_{\delta=1}^{\dim\bar{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0}} C^{\alpha}_{\gamma\delta}\partial_2\widetilde{r}_0^{\gamma\beta}(\nu_0,\nu_0)X^{(0),\nu_0,\delta}(u)-\sum_{\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}}\sum_{\delta=1}^{\dim\bar{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0}} C^{\beta}_{\gamma\delta}\partial_1\widetilde{r}_0^{\gamma\alpha}(\nu_0,\nu_0)X^{(0),\nu_0,\delta}(u), \tag{3.8.48b}$$

$$[X^{(1),\nu_0,\alpha}(u), X^{(1),\nu_0,\beta}(u)] = \sum_{\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{\alpha\beta}_{\gamma}X^{(2),\nu_0,\gamma}(u)+$$
$$+\sum_{\delta,\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}} \partial_2(C^{\alpha}_{\delta\gamma}r_0^{\delta\beta}(\nu_0,\nu_0) - C^{\beta}_{\delta\gamma} + r_0^{\delta\alpha}(\nu_0,\nu_0))X^{(1),\nu_0,\gamma}(u)$$
$$+\sum_{\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}}\sum_{\delta=1}^{\dim\bar{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0}} \partial_1\partial_2(C^{\alpha}_{\gamma\delta}r_0^{\delta\beta}(\nu_0,\nu_0) - C^{\beta}_{\gamma\delta}r_0^{\delta\alpha}(\nu_0,\nu_0))X^{(0),\nu_0,\delta}(u). \tag{3.8.48c}$$

3.9. Багатополюсні алгебри в особливих точках.

В цьому підрозділі ми опишемо вкладення алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0}$ в більшу алгебру. Зконструйовані алгебри Лі будуть зустрічатись в багатьох застосуваннях, зокрема до теорії солітоних рівнянь.

Відзначимо, що по самій конструкції алгебра $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0}$ складається зі спеціальних $\mathfrak{g}$-значних мероморфних функцій з полюсами в точці ν_0 плюс скінченно-вимірна підалгебра функцій регулярних в точці ν_0. Аналогічним чином можливо розглянути алгебри Лі мероморфних функцій з полюсами в регулярних точках $u = \nu_k$, $k \in \overline{1,N}$ і інших спеціальних точках $\nu_0^{(i)}$, $i \in \overline{1,M}$. Виявляється, що пряма сума цих підалгебр є замкненою алгеброю Лі, в яку алгебра $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0}$ природним чином вкладається як одна з компонент (як підалгебра з полюсами в точці $\nu_0 \equiv \nu_0^{(1)}$).

Нехай $\mathfrak{g}_k^{\nu_0}$, $\bar{\mathfrak{g}}_k^{\nu_0}$ будуть підпростори $\mathfrak{g}$ визначені наступним чином:

$$(\partial_v^k r(u,v))|_{v=\nu_0} \in \mathfrak{g}(u^{-1},u)) \otimes \bar{\mathfrak{g}}_k^{\nu_0}, \quad (\partial_u^k r(u,v))|_{u=\nu_0} \in \mathfrak{g}_k^{\nu_0} \otimes \mathfrak{g}(v^{-1},v)).$$

Має місце наступне Твердження:

Твердження 3.13. *Нехай лінійні підпростори $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_k}$ натягнені на базисні елементи $X^{(n),\nu_k,\alpha}(u)$, $\alpha \in \overline{1, \dim\mathfrak{g}}$, $n \geq 0$ і лінійні простори $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0^{(i)}}$ натягнені на елементи $X^{(m),\nu_0^{(i)},\beta}(u)$, $\beta \in \overline{1, \dim\bar{\mathfrak{g}}_m^{\nu_0^{(i)}}}$, $m \geq 0$, де точки ν_k є регулярними точками класичної r-матриці $r(u,v)$ і $\nu_0^{(i)}$ є її сингулярними точками, утворюють замкнені алгебри Лі. Нехай токож r-матриця $r(u,v)$ буде аналітичною в околах точок ν_k, $\nu_0^{(i)}$ поза діагоналлю $u = v$. Тоді сума векторних просторів:*

$$\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,N,M} = \sum_{k=1}^{N} \widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_k} + \sum_{i=1}^{M} \widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0^{(i)}} \tag{3.9.49}$$

і замкненою алгеброю Лі.

Зауваження 33. Звернемо увагу, що число N регулярних точок у визначені багатоточкової алгебри є довільним, в той час, як число M сингулярних точок є обмеженим зверху деяким цілим числом M_0 специфічним для кожної r-матриці $r(u,v)$.

Зауваження 34. Зауважимо, що, на відміну від базисних елементів $X^{(0),\nu_k,\alpha}(u)$, $X^{(0),\nu_l,\alpha}(u)$ в регулярних точках, базисні елементи $X^{(0),\nu_0^{(i)},\beta}(u)$ і $X^{(0),\nu_0^{(j)},\beta}(u)$ в сингулярних точках можуть бути лінійно залежними, тобто сума (3.9.49), в загалі кажучи, не є прямою сумою векторних просторів.

Доведення. Щоб довести Твердження необхідно показати, що попарні комутатори базисних елементів підалгебр $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_k}$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_l}$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0^{(i)}}$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0^{(j)}}$ виражаються в термінах базисних елементів цих самих підалгебр. Для випадку базисних елементів, що відповідають двум регулярним точкам цей факт вже був показаний. Розглянемо випадок двох сингулярних точок та одної сингулярної та регулярної точки. З цією метою необхідно розглянути узагальнене класичне рівняння Янга – Бакстера і розкласти його в ряди Тейлора в околі точок $u_2 = \nu_0^{(i)}$, $u_3 = \nu_0^{(j)}$ і $u_2 = \nu_k$, $u_3 = \nu_0^{(j)}$ відповідно. Прямим обчисленням, покладаючи $u_1 \equiv u$ і порівнюючи праву і ліву частину узагальнених класичних рівнянь Янга – Бакстера після зроблених розкладів, ми отримуємо наступне:

$$[X^{(m),\nu_0^{(i)},\alpha}(u), X^{(n),\nu_0^{(j)},\beta}(u)] =$$
$$= \sum_{s=0}^{m} \sum_{\delta=1}^{\dim \mathfrak{g}_s^{\nu_0^{(i)}}} \sum_{\gamma=1}^{\dim \overline{\mathfrak{g}}_{m-s}^{\nu_0^{(i)}}} C^{\alpha}_{\delta\gamma} \frac{\partial^s_{\nu_0^{(i)}} \partial^n_{\nu_0^{(j)}} r^{\delta\beta}(\nu_0^{(i)}, \nu_0^{(j)})}{s!n!} X^{(m-s),\nu_0^{(i)},\gamma}(u)$$
$$- \sum_{s=0}^{n} \sum_{\delta=1}^{\dim \mathfrak{g}_s^{\nu_0^{(j)}}} \sum_{\gamma=1}^{\dim \overline{\mathfrak{g}}_{n-s}^{\nu_0^{(j)}}} C^{\beta}_{\delta\gamma} \frac{\partial^s_{\nu_0^{(j)}} \partial^m_{\nu_0^{(i)}} r^{\delta\alpha}(\nu_0^{(j)}, \nu_0^{(i)})}{s!m!} X^{(n-s),\nu_0^{(j)},\gamma}(u), \quad (3.9.50a)$$

$$[X^{(m),\nu_k,\alpha}(u), X^{(n),\nu_0^{(j)},\beta}(u)] = \sum_{s=0}^{m} \sum_{\delta,\gamma=1}^{\dim \mathfrak{g}} C^{\alpha}_{\delta\gamma} \frac{(\partial^s_{\nu_k} \partial^n_{\nu_0^{(j)}} r^{\delta\beta}(\nu_k, \nu_0^{(j)})}{s!n!} X^{(m-s),\nu_k,\gamma}(u)$$
$$- \sum_{s=0}^{n} \sum_{\delta=1}^{\dim \mathfrak{g}_s^{\nu_0^{(j)}}} \sum_{\gamma=1}^{\dim \overline{\mathfrak{g}}_{n-s}^{\nu_0^{(j)}}} C^{\beta}_{\delta\gamma} \frac{\partial^s_{\nu_0^{(j)}} \partial^m_{\nu_k} r^{\delta\alpha}(\nu_0^{(j)}, \nu_k)}{s!m!} X^{(n-s),\nu_0^{(j)},\gamma}(u). \quad (3.9.50b)$$

Це доводить Твердження.

Зауваження 35. На відміну від співвідношень (3.8.47), співвідношення (3.9.50a)-(3.9.50b) мають місце для довільної залежності $r(u, v)$ від u і v на діагоналі $u = v$ в околі сингулярних точок.

3.10. Висновки

В данному розділі по довільній класичній матриці зі спектральними параметрами побудовані нескінченновимірні квазіградуйовані алгебри Лі з розкладом Адлера – Костанта – Саймса та їх дуальні простори. Побудовані також багатополюсні r-матричні алгебри та показано, що їх структура залежить від того, що чи є полюс регулярною чи сингулярною точкою r-матриці. Оригінальна частина розділу базується на роботах автора [105, 106, 114].

Розділ 4

Класичні інтегровні системи та r-матриці.

4.1. Вступ

Важливість класичних r-матриць в теорії інтегровних систем полягає в можливості задання дужки Пуассона між елементами матриці Лакса таким чином, що її спектральні інваріанти Пуасон–комутують [18, 35, 27]. Крім того, як показано в данному розділі, по данній класичній r-матриці можна побудувати всі мероморфні матриці Лакса що їй відповідають [105, 114]. Відповідна конструкція у випадку кососиметричних r-матриць бере свій початок в роботах [21, 4, 15]. У данному розділі ми узагальнюємо цю конструкцію на випадок некососиметричних r-матриць. Важливою відмінністю некососиметричного випадку від випадку кососиметричних r-матриць є те що в цьому випадку простір матриць Лакса не співпадає з r-матричною алгеброю Лі і відповідні базисні елементи визначаються різними формулами [105, 114].

Інша ідея, що розвивається в данному розділі, є ідея розгляду класичних r-матриць і відповідних матриць Лакса у сингулярних точках. Існування спеціальних матриць Лакса було відзначено вже в роботі [16], проте їх зв'язку з особливими точками r-матриці виявлено не було.

В цьому розділі ми описуємо структуру матриць Лакса пов'язану з сингулярними точками r-матриць. Ми показуємо, що з такими точками пов'язана редукція, тобто зменшення числа незалежних динамічних змінних у відповідних інтегровних системах. Ми також будуємо найбільш характерні однополюсні матриці Лакса пов'язані з особливими точками класичних r-матриць, зокрема, так звані, “елементи зсуву”, однобозонні матриці Лакса, $p-q$ – частину матриці Лакса системи Тоди, і її деформації і т.д. Побудовані також повні матриці Лакса відповідних інтегровних систем, а саме: матриці Лакса узагальнених систем Годена, систем Годена у зовнішньому магнітному полі, класичних систем типу Джейнса – Каммінгса – Діке, багатобозонних систем, систем Тоди та її деформації. Розглянуто відповідні класичні гамільтоніани та інтеграли руху. Результати данного розділу базуються на роботах [79, 83, 87, 90, 91, 95, 98, 105, 107, 108, 109, 114].

4.2. Перша тензорна дужка Лі-Пуасона і комутативна алгебра інтегралів руху.

В цьому короткому підрозділі ми нагадаємо кілька загальних фактів щодо застосування класичних r-матриць в теорійї скінченновимірних інтегровних гамільтонових систем.

Використовуючи класичну r-матрицю $r(u,v)$, можна визначити в просторі певних $\mathfrak{g}$-значних функцій одного комплексного пареметру u таксвану тензорну дужку Лі- Пуасона [27]:

$$\{L_1(u), L_2(v)\} = [r_{12}(u,v), L_1(u)] - [r_{21}(v,u), L_2(v)], \tag{4.2.1}$$

де $L_1(u) = L(u)\otimes 1,\ L_2(v) = 1\otimes L(v),\ L(u) = \sum\limits_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}} L^a(u)X_a.$

Дужка (4.2.1) кососиметрична по визначенню, а умова Якобі для неї виконується якщо r-матриця задовольняє узагальнене класичне рівняння Янга-Бакстера.

Зауваження 36. В кососиметричному випадку, коли $r_{21}(v,u) = -r_{12}(u,v)$ дужка (4.2.1) Співпадає з лінійною дужкою Скляніна:

$$\{L_1(u), L_2(v)\} = [r_{12}(u,v), L_1(u) + L_2(v)].$$

Надалі ми будемо вважати, що "підстилаюча" скінченновимірна алгебра Лі $\mathfrak{g}$ є матричною алгеброю Лі, чи реалізована як підалгебра повної матричної алгебри. Це надасть нам можливість записуаати інваріантні функції G на $\mathfrak{g}^*$ в формі слідів степенів матриці Лакса.

Застосування дужок (4.2.1) до теорії інтегровних систем базується на наступній теоремі [27]:

Теорема 4.1. *Нехай матриця Лакса $L(u)$ задовольняє лінійну дужку Пуасона (4.2.1). Тоді :*

$$\{trL^k(u), trL^m(v)\} = 0, \ \forall k, m \geq 0.$$

Теорема (4.1) забезпечує великий набір функцій в інволюції, які співпадають з інтегралами руху деякої гамільтонової системи. В наступних підрозділах ми пояснемо як конструювати такі системи алгоритмічно, стартуючи з будь-якої класичної r-матриці $r(u, v)$. Основна ціль наступних підрозділів буде зконструювати матриці Лакса $L(u)$ як функцію спектральних параметрів і динамічних змінних, деталізувавши дужку Лі-Пуасона між ними.

4.3. Матриці Лакса і r-матриця

В цьому розділі ми зконструюємо загальні матриці Лакса $L(u)$, що відповідають r-матриці $r(u, v)$. Без втрати загальності ми припустимо, що $L(u)$ локально мероморфна функція спектрального параметру u. З методологічною ціллю ми будемо розрізняти дві ситуації: так звані "одноточкові" та "багатоточкові" матриці Лакса. Для простоти ми розглянемо спершу "одноточкові" матриці Лакса. Структура матриці Лакса різна для випадків "регулярних" і "сингулярних" точок класичних r-матриць. Тому ми розглянемо ці дві ситуації окремо.

4.3.1. Матриці Лакса в регулярних точках Нехай ν буде довільна "регулярна" точка розширеної комплексної площини в околі якої функція

$L(u)$ є диференційовною як функція від u. Розглянемо наступну функцію спектрального пареметру v:

$$Y^{(m),\nu,a}(v) \equiv \sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}} \frac{1}{m!}(\partial_u^m r^{ab}(u,v))|_{u=\nu} X_b, \;\; a \in \overline{1,\dim\mathfrak{g}}.$$

Має місце наступне твердження:

Твердження 4.1. *Для довільного цілого $M \geq 0$ матриці Лакса наступної форми:*

$$L^{+,M,\nu}(v) = \sum_{m=0}^{M} \sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}} L_a^{(m),\nu} Y^{(m),\nu,a}(v) \tag{4.3.2}$$

задовольняє лінійну r-матричну дужку:

$$\{L_1^{+,M,\nu}(u), L_2^{+,M,\nu}(v)\} = [r_{12}(u,v), L_1^{+,M,\nu}(u)] - [r_{21}(v,u), L_2^{+,M,\nu}(v)] \tag{4.3.3}$$

якщо координатні функції $L_a^{(m),\nu}$ задовольняють наступну дужку Лі-Пуасона:

$$\{L_a^{(m),\nu}, L_b^{(n),\nu}\} = \sum_{c=1}^{\dim\mathfrak{g}} C_{a,b}^c L_c^{(m+n),\nu}, \;\; \text{якщо } m+n \leq M, \tag{4.3.4a}$$

$$\{L_a^{(m),\nu}, L_b^{(n),\nu}\} = 0, \;\; \text{якщо } m+n > M. \tag{4.3.4b}$$

Зауваження 37. Відзначимо, що це твердження ефективно означає, що для довільної класичної r-матриці $r(u,v)$ матриця Лакса $L^{+,M,\nu}(v)$ є дуальним елементом підфактор алгебри петель:

$$\mathfrak{g}^{+,M,\nu} \simeq (\mathfrak{g} \otimes \mathrm{Pol(u-\nu)})/(\mathfrak{g} \otimes (u-\nu)^{M+1}\mathrm{Pol(u-\nu)}).$$

Теорема 4.1 Забезпечує широкий набір функцій в інволюції, що співпадають з інтегралами руху гамільтонової системи асоційованою з матрицею Лакса (4.3.2). Комтуючі інтеграли конструюються за допомогою розкладу породжуючої функції в формальний ряд Лорана. Вони можуть бути записані наступним чином:

$$I_m^{k,\nu} = res_{u=\nu}\big((u-\nu)^{-(m+1)} tr(L^{+,M,\nu}(u))^k\big) \tag{4.3.5}$$

Відповідні гамільтонові рівняня руху мають наступний вигляд:

$$\frac{dL_a^{(m),\nu}}{dt_m^{k,\nu}} = \{I_m^{k,\nu}, L_a^{(m),\nu}\},$$

де $t_m^{k,\nu}$ це “час”, що відповідвє гамільтоніану $I_m^{k,\nu}$.

4.3.2. Приклад: матриці Лакса узагальненої дзиги. Найпростіший можливий приклад одноточкових матриць Лакса асоційованих з регулярними точками класичних r-матриць відповідає вибору $M=0$ в формулі (4.3.2). Матриця Лакса $L^{+,(0),\nu}(v)$ записується наступним чином:

$$L^{+,0,\nu}(v) = \sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}} L_a^{(0),\nu} Y^{(0),a}(v) = \sum_{a,b=1}^{\dim\mathfrak{g}} r^{ab}(\nu, v) L_a^{(0),\nu} X_b \tag{4.3.6}$$

Відповідна дужка Лі-Пуасона відтворює дужку Лі алгебри $\mathfrak{g}$:

$$\{L_a^{(0),\nu}, L_b^{(0),\nu}\} = \sum_{c=1}^{\dim\mathfrak{g}} C_{ab}^c L_c^{(0),\nu}.$$

Генеруюча функція $I^2(L^{(0),\nu}(v)) = \frac{1}{2} tr(L^{(0),\nu}(v))^2$ інтегралів другого порядку по динамічним змінним продукує, зокрема, наступні інтеграли:

$$I_{-2}^{2,\nu} = \frac{1}{2}\sum_{a,b=1}^{\dim\mathfrak{g}} g^{ab} L_a^{(0),\nu} L_b^{(0),\nu}, \;\; I_{-1}^{2} = \frac{1}{2}\sum_{a,b=1}^{\dim\mathfrak{g}} r_0^{ab}(\nu,\nu) L_a^{(0),\nu} L_b^{(0),\nu}$$

$$I_0^{2,\nu} = \frac{1}{2}\sum_{a,b,c,d=1}^{\dim\mathfrak{g}} \big(g_{cd} r_0^{ac}(\nu,\nu) r_0^{bd}(\nu,\nu) - 2(\partial_v r_0^{ab}(u,v))|_{u=v=\nu}\big) L_a^{(0),\nu} L_b^{(0),\nu}.$$

Інтерал $I_{-2}^{2,\nu}$ є функцією Каземіра і не продукує гамільтонових потоків. Інтеграли $I_{-1}^{2,\nu}$ і $I_0^{2,\nu}$ є гамільтонами загальної інтегровної дзиги [105].

4.3.3. Матриці Лакса в сингулярних точках: редукція. Розглянемо матриці Лакса в спеціальних точках. Ми будемо використовувати кілька нових позначень. Нехай $u = \nu_0$ буде спеціальною точкою класичної r-матриці в околі якої $r(u, v)$ є диференційовною як функція u. Визначемо підпростори $\mathfrak{g}_m^{\nu_0} \subset \mathfrak{g}$, що залежить від явної форми класичної r-матриці $r(u, v)$ і сингулярної точки ν_0 наступним чином:

$$(\partial_u^m r(u, v))|_{u=\nu_0} \in \mathfrak{g}_m^{\nu_0} \otimes \mathfrak{g}(v^{-1}, v)), m \geq 0. \tag{4.3.7}$$

Зауваження 38. Відзначимо, що для класичної r-матриці, яка задовольняє в околі точки $u = \nu_0$ умову (1.3.10) з $k = 1$ маємо $\mathfrak{g}_m^{\nu_0} = \mathfrak{g}$ для $m > 0$.

Як і в випадку регулярних точок класичної r-матриці ми будемо розглядати наступні функції спектрального параметру v:

$$\begin{aligned} Y^{(m),\nu_0,a}(v) &\equiv \frac{1}{m!}\langle X^a \otimes 1, (\partial_u^m r_{12}(u, v))|_{u=\nu_0}\rangle = \\ &= \frac{1}{m!}\sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}} (\partial_u^m r^{ab}(u, v))|_{u=\nu_0} X_b, a \in \overline{1, \dim\mathfrak{g}_m^{\nu_0}}. \end{aligned}$$

Має місце наступна формула [106]:

Твердження 4.2. *Для довільного цілого числа $M \geq 0$ матриці Лакса наступного вигляду:*

$$L^{+,M,\nu_0}(v) = \sum_{m=0}^{M} \sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}_m^{\nu_0}} L_a^{(m),\nu_0} Y^{(m),\nu_0,a}(v) \tag{4.3.8}$$

де координатні функції задовольняють наступну дужку Пуасона:

$$\{L_a^{(m),\nu_0}, L_b^{(n),\nu_0}\} = \sum_{c=1}^{\dim\mathfrak{g}_{m+n}^{\nu_0}} C_{a,b}^c L_c^{(m+n),\nu_0}, \text{ якщо } m + n \leq M, \tag{4.3.9a}$$

$$\{L_a^{(m),\nu_0}, L_b^{(n),\nu_0}\} = 0, \text{ якщо } m + n > M. \tag{4.3.9b}$$

де $a \in \overline{1, \dim \mathfrak{g}_m^{\nu_0}}$, $b \in \overline{1, \dim \mathfrak{g}_n^{\nu_0}}$, *задовольняє* r*-матричну дужку Лі-Пуасона:*

$$\{L_1^{+,M,\nu_0}(u), L_2^{+,M,\nu_0}(v)\} = [r_{12}(u,v), L_1^{+,M,\nu_0}(u)] - [r_{21}(v,u), L_2^{+,M,\nu_0}(v)]. \tag{4.3.10}$$

Як і в випадку регулярних точок класичних r-матриць теорема (4.1) забезпечує велику кількість функцій в інволюції, що співпадають з інтегралами руху інтегровних гамільтонових систем асоційованих з матрицею Лакса (4.3.8). Відповідні інтеграли конструюються розкладом генеруючих функцій в алегбру поліномів Лорана. Подібно до випадку регулярних точок вони мають наступний вигляд:

$$I_m^{k,\nu_0} = res_{u=\nu_0}\big((u-\nu_0)^{-(m+1)} tr(L^{+,M,\nu_0}(u))^k\big) \tag{4.3.11}$$

Відповідні гамільтонові рівняння записуються стандартним чином:

$$\frac{dL_a^{(m),\nu_0}}{dt_m^{k,\nu_0}} = \{I_m^{k,\nu_0}, L_a^{(m),\nu_0}\},$$

де t_m^{k,ν_0} - це "час", що відповідає гамільтоніану I_m^{k,ν_0}.

Зауваження 39. Необхідно підкреслити, що за допомогою розгляду сингулярної точки ν_0 класичної r-матриці $r(u,v)$ ми здійснили редукцію в скінченновимірних інтегровних системах асоційованих з даногю r-матрицею. Дійсно, матриця Лакса (4.3.8) містить менше координатних функцій - динамічних змінних розглядуванох гамільтонової системи, тому що по самому визначенню спеціальних точок класичних r-матриць $\dim \mathfrak{g}_0^{\nu_0}$ завжди меньше ніж $\dim \mathfrak{g}$. Отже розмірність всіх гамільтонових систем асоційованих з матрицею Лакса (4.3.8) для фіксованого M меньше ніж розмірність гамільтонових систем асоційованих з (4.3.2) для того ж M. В наступних розділах ми розглянемо кілька прикладів редукованих одноточкових матриць Лакса у відповідних гамільтонових системах.

Зауваження 40. Підкреслимо іншу важливу відмінність в структурі інтегровних систем асоційованих з регулярна і сингулярними точками класичних r-матриць. Перший тип інтегровних систем – це системи типу Ейлера – Арнольда на дуальних просторах

$$\mathfrak{g}^{M,\nu} \equiv \widetilde{\mathfrak{g}}^{+,\nu}(u)/(u-\nu)^M\widetilde{\mathfrak{g}}^{+,\nu}(u), \text{ де } \widetilde{\mathfrak{g}}^{+,\nu}(u) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \mathfrak{g}(u-\nu)^m.$$

Важливо, що кожна алгебра $\mathfrak{g}^{M,\nu}$ містить просту частину ізоморфну до $\mathfrak{g}$. Отже діє незвідним чином на кожному з підпросторів $\mathfrak{g}(u-\nu)^m$. З цього слідує неможливість подальшої редукції матриці Лакса (4.3.2) для фіксованого M.

Другий тип інтегровних систем- це системи типу Ейлера – Арнольда на дуальних просторах

$$\mathfrak{g}^{M,\nu_0} \equiv \widetilde{\mathfrak{g}}^{+,\nu_0}(u)/(u-\nu_0)^M\widetilde{\mathfrak{g}}^{+,\nu_0}(u), \text{ де } \widetilde{\mathfrak{g}}^{+,\nu_0}(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathfrak{g}_m^{\nu_0}(u-\nu_0)^m.$$

Важливим є те, що кожна підалгебра $\mathfrak{g}^{M,\nu_0}$ містить не просту частину $\mathfrak{g}_0^{\nu_0}$, що діє, взагалі кажучи, не незвідним чином на просторах $\mathfrak{g}_m^{\nu_0}(u-\nu_0)^m$. Звідси слідує, що можливо здійснювати подальшу редукцію в операторах Лакса (4.3.8) для фіксованого M. Отже множина всіх можливих матриць Лакса в цьому випадку ширше. Ми ілюструємо це в наступних розділах.

4.3.4. Узагальнені елементи зсуву Розглянемо найпростіший, але важливий приклад матриць Лакса асоційованих з спеціальними точками класичних r-матриць. Ними є "тривіальні" матриці Лакса, що співпадають з узагальненими елементами зсуву.

Має місце наступна теорема:

Теорема 4.2. *Нехай $\nu_0 \in \mathbb{C}$ буде фіксована точка (розширеної) комплексної площини така, що $r_{12}(\nu_0,v) \subset \mathfrak{g}_0^{\nu_0} \otimes \mathfrak{g}(v^{-1},v))$, $(\partial_u r_{12}(u,v))|_{u=\nu_0} \subset \mathfrak{g}_1^{\nu_0} \otimes \mathfrak{g}(v^{-1},v))$, де $\mathfrak{g}_0^{\nu_0} \subset \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1^{\nu_0} \subseteq \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}(v^{-1},v))$ є алгебра $\mathfrak{g}$-значних формальних рядів Лорана. Нехай $X^a \in (\mathfrak{g}_0^{\nu_0}/[\mathfrak{g}_0^{\nu_0},\mathfrak{g}_0^{\nu_0}])^*$,*

$X^b \in (\mathfrak{g}_1^{\nu_0}/[\mathfrak{g}_0^{\nu_0}, \mathfrak{g}_1^{\nu_0}])^*$. *Тоді наступні* $\mathfrak{g}$*-значні функції:*

$$c^{(0),\nu_0,a}(v) = \langle X^a \otimes 1, r_{12}(\nu_0, v)\rangle_1, \tag{4.3.12a}$$

$$c^{(1),\nu_0,b}(v) = \langle X^b \otimes 1, (\partial_u r_{12}(u, v))|_{u=\nu_0}\rangle_1, \tag{4.3.12b}$$

де $\langle\ ,\ \rangle_1$ *означає спарювання в першій компоненті тензорного добутку* $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, *задовольняє рівняння (1.2.5) для відповідної* r*-матриці* $r_{12}(u, v)$.

Зауваження 41. Відзначемо, що розмірність простору елементів зсуву асоційованих з даною спеціальною точкою класичної r-матриці дорівнює

$$n = \dim(\mathfrak{g}_0^{\nu_0}/[\mathfrak{g}_0^{\nu_0}, \mathfrak{g}_0^{\nu_0}]) + \dim(\mathfrak{g}_1^{\nu_0}/[\mathfrak{g}_0^{\nu_0}, \mathfrak{g}_1^{\nu_0}])$$

і узагальнений елемент зсуву асоційований з точкою ν_0 записується наступним чином:

$$c^{(0),\nu_0}(v) = \sum_{a=1}^{\dim(\mathfrak{g}_0^{\nu_0}/[\mathfrak{g}_0^{\nu_0},\mathfrak{g}_0^{\nu_0}])} c_a c^{(0),\nu_0,a}(v) + \sum_{b=1}^{(\dim\mathfrak{g}_1^{\nu_0}/[\mathfrak{g}_0^{\nu_0},\mathfrak{g}_1^{\nu_0}])} c_b c^{(1),\nu_0,b}(v).$$

Зауваження 42. Пояснемо алгебраїчну природу зконструйованих елементів зсуву. З цією метою необхідно розглянути фактор–алгебру

$$\mathfrak{g}^{2,\nu_0} \equiv \widetilde{\mathfrak{g}}^{+,\nu_0}(u)/(u-\nu_0)^2\widetilde{\mathfrak{g}}^{+,\nu_0}(u),\ \text{де}\ \widetilde{\mathfrak{g}}^{+,\nu_0}(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathfrak{g}_m^{\nu_0}(u-\nu_0)^m.$$

Алгебра $\mathfrak{g}^{2,\nu_0}$ є напівпрямий добуток алгебри $\mathfrak{g}_0^{\nu_0}$ і абелевого ідеалу $\mathfrak{g}_1^{\nu_0}$. Ця алгебра має наступний ідеал $[\mathfrak{g}^{2,\nu_0}, \mathfrak{g}^{2,\nu_0}] = [\mathfrak{g}_0^{\nu_0}, \mathfrak{g}_0^{\nu_0}] + [\mathfrak{g}_0^{\nu_0}, \mathfrak{g}_1^{\nu_0}]$. Більше того фактор алгебра $\mathfrak{g}^{2,\nu_0}/[\mathfrak{g}^{2,\nu_0}, \mathfrak{g}^{2,\nu_0}]$ є абелевою. Елемент зсуву (4.3.12) це матриця Лакса дуальна до цього фактору. Відзначемо, що якщо $\mathfrak{g}_0^{\nu_0} = \mathfrak{g}$ тобто точка $\nu_0 = \nu$ є регулярною, тоді описані фактори і відповідні елементи зсуву є тривіальними. Тому елементи зсуву можуть бути асоційовані тільки зі спеціальними точками класичних r-матриць.

Незважаючи на те, що для отримання остаточної формули для елементів зсуву, необхідно додатково аналізувати структуру фактор-просторів $\mathfrak{g}_0^{\nu_0}/[\mathfrak{g}_0^{\nu_0}, \mathfrak{g}_0^{\nu_0}]$ і $\mathfrak{g}_1^{\nu_0}/[\mathfrak{g}_0^{\nu_0}, \mathfrak{g}_1^{\nu_0}]$ є два випадки, коли остаточна фомула отримується негайно. Мають місце наступні наслідки Теореми 4.2:

Наслідок 4.1. *Нехай $\nu_0 \in \mathbb{C}$ буде така точка розширеної комплексної площини, що $r_{12}(\nu_0, v) \subset \mathfrak{g}_0^{\nu_0} \otimes \mathfrak{g}(v^{-1}, v))$ і підалгебра $\mathfrak{g}_0^{\nu_0}$ є абелевою, тоді матриця Лакса*

$$L^{+,0,\nu_0}(v) = \sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}_0^{\nu_0}} \sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}} c_a r^{ab}(\nu_0, v) X_b = c(v), \tag{4.3.13}$$

є узагальненим елементом зсуву, тобто задовільняє рівнянню (1.2.5).

Наслідок 4.2. *Нехай $\nu_0 \in \mathbb{C}$ буде така точка розширеної комплексної площини, що $r_{12}(\nu_0, v) = 0$. тоді матриця Лакса*

$$L^{+,1,\nu_0}(v) = \sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}_1^{\nu_0}} \sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}} c_a (\partial_u r^{ab}(u, v))|_{u=\nu_0} X_b = c(v), \tag{4.3.14}$$

є узагальненим елементом зсуву, тобто задовільняє рівнянню (1.2.5)

Приклад 4.1. Розглянемо стандартну раціональну r-матрицю

$$r_{12}(u, v) = \frac{\Omega_{12}}{u - v}.$$

Розглянемо спеціальну точку цієї r-матриці. В цьому випадку існує тільки одна така точка: $u = \infty$. Ми маємо: $r_{12}(\infty, v) = 0$. Отже Наслідок 4.2 застосований в цьому випадку. Малий парметр за яким необхідно розкладати r-матрицю в околі цієї точки є $t(u) = u^{-1}$. Пряме обчислення дає:

$$\lim_{u\to\infty} \partial_{u^{-1}} r_{12}(u, v) = \Omega_{12}.$$

Використовуючи формулу (4.3.14), ми негайно отримуємо наступний елемент зсуву:

$$c(v) \equiv L^{+,1,\nu_0}(v) = \sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}} c_a X^a.$$

Приклад 4.2. Розглянемо зкручену раціональну r-матрицю (2.5.43) з $p = h$, тобто автоморфізм σ є автоморфізмом Кокстера і алгебра $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ є абелевою. Як було пояснено вище, існують тільки дві спеціальнимі точки r-матриці (2.5.43): $u = \nu_0 = 0$ і $u = \nu_0 = \infty$. Ми будемо розглядати відповідні елементи зсуву окремо.

Нехай $\nu_0 = 0$. В цьому випадку:

$$r_{12}(0, v) = -\Omega^{(\bar{0})}.$$

підалгебра $\mathfrak{g}_0^{\nu_0}$ співпаде з абелевою підалгеброю $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ і тому є застосовним Твердження 4.1. Використовуючи формулу (4.3.13), ми отримуємо наступний елемент зсуву:

$$c(v) = L^{+,0,\nu_0}(v) = -\sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}_{\bar{0}}} c_a X^a.$$

Нехай $\nu_0 = \infty$. В цьому випадку $r_{12}(\infty, v) = 0$ малий параметр, за допомогою якого необхідно розкладати r-матрицю в околі точки $u = \infty$ є $t(u) = u^{-1}$. Пряме обчислення дає:

$$\lim_{u \to \infty} \partial_{u^{-1}} r_{12}(u, v) = v \Omega_{12}^{(\overline{h-1})}.$$

Використовуючи формулу (4.3.14), ми отримуємо наступний елемент:

$$c(v) \equiv L^{+,1,\nu_0}(v) = v \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}_{\bar{1}}} c_a X^a.$$

Приклад 4.3. Розглянемо зкручену деформовану r-матрицю (2.5.44) і асоційовані елементи зсуву, що відповідають двум спеціальним точкам цієї r-матриці, а саме точкам $u = 0$ і $u = \infty$. Обмежемось розглядом випадку кокстерівського автоморфізму σ, тобто випадку $p = h$.

Нехай $\nu_0 = 0$. Тоді підалгебра $\mathfrak{g}_0^0$ співпадає з підалгеброю $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$, і виконуються умови Твердження 4.1. Використовуючи формулу (4.3.13), ми отримаємо наступний елемент зсуву:

$$c(v) = L^{+,0,0}(v) = -\sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}_{\bar{0}}} c_a (\Phi^{-1}(v))^* (X^a).$$

Нехай $\nu_0 = \infty$. Тоді підалгебра $\mathfrak{g}_0^{\infty}$ співпадає з підалгеброю $\Phi_1'(\mathfrak{g}_{\overline{-1}})$ абелевої підалгебри $\mathfrak{g}_{\overline{0}}$ і знову виконуються умови Твердження 4.1. Використовуючи формулу (4.3.13), ми отримуємо наступний елемент зсуву:

$$c(v) = L^{+,0,\infty}(v) = v \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}_{\overline{1}}} \sum_{b=1}^{\dim \mathfrak{g}_{\overline{0}}} (\Phi_1')_a^b c_b (\Phi^{-1}(v))^* (X^a). \tag{4.3.15}$$

4.3.5. Матриця Лакса систем типу Тоди: $p-q$-частина Нехай $\mathfrak{g} = \sum_{j=0}^{p-1} \mathfrak{g}_{\overline{j}}$, $Z_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ це градуювання $\mathfrak{g}$, тобто $[\mathfrak{g}_{\overline{i}}, \mathfrak{g}_{\overline{j}}] \subset \mathfrak{g}_{\overline{i+j}}$, де $\overline{j}$ означає клас еквівалентності елементів $j \in \mathbb{Z} \bmod p\, \mathbb{Z}$. Нехай, більше того, $p = h$ число Кокстера, так що $\mathfrak{g}_{\overline{0}}$ може бути ототожнено з Картанівською підалгеброю $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Підпростір $\mathfrak{g}_{\overline{1}}$ натягнутий на елементи X_{α_i}, $X_{-\theta}$, а підпростір $\mathfrak{g}_{\overline{-1}}$ на елементи $X_{-\alpha_i}$, X_{θ}, де $\alpha_i \in P$, і P є множиною простих коренів, Δ — множина всіх коренів, θ – найдовший корінь і $\{X_\alpha, X_{-\alpha}, H_i | \alpha \in \Delta, i \in \overline{1, \mathrm{rank}\mathfrak{g}}\}$ – базис Картана–Вейля алгебри $\mathfrak{g}$.

Має місце наступне твердження [114]:

Твердження 4.3. *Нехай $\nu_0 \in \mathbb{C}$ є така точка розширеної комплексної площини, що $r_{12}(\nu_0, v) \subset \mathfrak{g}_0^{\nu_0} \otimes \mathfrak{g}(v^{-1}, v))$, де $\mathfrak{g}_0^{\nu_0} \simeq \mathfrak{g}_{\overline{0}}$. Нехай, більше того, $\mathfrak{g}_1^{\nu_0} \simeq \mathfrak{g}_{\overline{1}}$. Нехай $q \equiv \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} q_i H_i$. Тоді з даною r-матрицею $r(u, v)$ і її спеціальною точкою ν_0 можна асоціювати інтегровну систему типу Тоди з наступною $p-q$ частиною матриці Лакса:*

$$L^{+,1,\nu_0}(v) = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} p_i Y^{(0),\nu_0,i}(v) + \sum_{\alpha \in P \cup -\theta} e^{\alpha(q)} Y^{(1),\nu_0,\alpha}(v). \tag{4.3.16}$$

Зауваження 43. Для того, щоб отримати повну матрицю Лакса систем типу Тоди і відповідні комутуючі інтеграли, необхідно розглянути також постійну частину матриці Лакса, що є елементом зсуву. Ми розглнемо повну матрицю Лакса систем типу Тоди в наступних підрозділах.

Приклад 4.4. Розглянемо зкручену раціональну r-матрицю (2.5.43), що відповідає кокстеровському автоморфізму $\mathfrak{g}$. Розглянемо спеціальну точку r-матриці $u = \nu_0 = 0$ і зконструюємо базисні елементи $Y^{(m),\nu_0,a}(v)$ в цій точці. Використовуючи явну фому тензорів $\Omega_{12}^{(\bar{0})}$ і $\Omega_{12}^{(\bar{1})}$, зокрема те, що $\Omega_{12}^{(\bar{0})} = \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} H_i \otimes H_i$ ми отримуємо:

$$Y^{(0),0,i}(v) \equiv H_i,\ Y^{(1),0,-\alpha}(v) \equiv v^{-1} X_{-\alpha},\ \alpha \in P \cup -\theta.$$

Використовуючи Твердження 4.3, отримуємо наступну матрицю Лакса:

$$L(v) = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} p_i H_i + v^{-1}\Big(\sum_{\alpha \in P \cup -\theta} e^{\alpha(q)} X_{-\alpha}\Big), \tag{4.3.17}$$

що є p -q-частиною матриці Лакса замкнутого ланцюжка Тоди [14].

Приклад 4.5. Розглянемо зкручену деформовану r-матрицю (2.5.44). Нехай σ буде кокстеровським автоморфізмом, тобто $p = h$. Точка $u = \nu_0 = 0$ є спеціальною точкою цієї r-матриці. Розглянемо матрицю Лакса (4.3.8) з $M = 1$ в точці $u = 0$. З цією метою конкретизуємо базисні елементи $Y^{(0),\nu_0,a}(v)$ і $Y^{(1),\nu_0,a}(v)$ в цій точці. Легко бачити, $\mathfrak{g}_0^{\nu_0} = \mathfrak{g}_{\bar{0}}$, $\mathfrak{g}_1^{\nu_0} = \mathfrak{g}_{\bar{1}}$, тобто $\mathfrak{g}_0^{\nu_0}$ ідентифікується з підалгеброю Картана $\mathfrak{h}$, а підпростір $\mathfrak{g}_1^{\nu_0}$ натягнутий на елементи X_{α_i}, $X_{-\theta}$, $\alpha_i \in P$, отже задовольняється умови Твердження 4.3. Обрахунок дає:

$$Y^{(0),0,i}(v) = (\Phi^{-1}(v))^*(H_i),$$
$$Y^{(1),0,-\alpha}(v) = v^{-1}(\Phi^{-1}(v))^*(X_{-\alpha}) + (\Phi^{-1}(v))^*(\Phi_1^*(X_{-\alpha})),$$

Використовуючи Твердження 4.3, отримуємо наступну $p-q$-частину матриці Лакса:

$$L(v) = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} p_i (\Phi^{-1}(v))^*(H_i) + \\ + \sum_{\alpha \in P \cup -\theta} e^{\alpha(q)} \Big(v^{-1}(\Phi^{-1}(v))^*(X_{-\alpha}) + (\Phi^{-1}(v))^*(\Phi_1^*(X_{-\alpha}))\Big). \tag{4.3.18}$$

Зауваження 44. На відміну від стандартного ланцюжка Тоди, ця матриця Лакса продукує нетривіальну динаміку сама по собі без додаткових постійних доданків в ній. Не дивлячись на це, для того, щоб розглядати всі моделі типу Тоди однотипно, ми будемо також розглядати розширення цієї матриці Лакса за допомогою постійної частини.

4.3.6. Бозонні матриці Лакса. В цьому підрозділі ми зконструюємо бозонні матриці Лакса використовуючи загальні класичні r-матриці зі спектральними параметрами. Для цієї цілі ми розглянемо певні типи спеціальних точок $u = \nu_0$ r-матриці $r(u, v)$, але спершу введемо кілька позначень.

Розглянемо редуктивну підалгебру $\mathfrak{g}_0^K \subset \mathfrak{g}$, що відповідає набору коренів $\Delta_K \subset \Delta$. З цими даними можна асоціювати канонічний базис класичної алгебри Гейзенберга $\mathcal{H}_K$ наступним чином:

$$\{b_\alpha^+, b_\beta^-\} = \delta_{\alpha\beta},\ \{b_\alpha^+, b_\beta^+\} = \{b_\alpha^-, b_\beta^-\} = 0,\ \text{де } \alpha, \beta \in (\Delta/\Delta_K)_+. \tag{4.3.19}$$

Виявляється [91] що можна реалізувати алгебру $\mathfrak{g}_0^K$ за допомогою координат "народження-знищення" b_α^+, b_β^-. Має місце наступна теорема [91]:

Теорема 4.3. *Нехай для алгебра $\mathfrak{g}$ буде напівпростою з набором коренів Δ. Нехай $\mathfrak{g}_0^K \subset \mathfrak{g}$ буде її редуктивна підалгебра, що містить підалгебру Картана $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ і має Δ_K множиною своїх коренів. Нехай $K \in \mathfrak{h}$ буде такий елемент $\mathfrak{h}$, що $\alpha(K) = 0$ для $\alpha \in \Delta_K$ і b_β^-, b_α^+, де $\alpha, \beta \in (\Delta/\Delta_K)+$ — координати "народження-знищення", що утворюють алгебру Гайзенберга $\mathcal{H}_K$ (4.3.19). Тоді наступні функції*

$$M_H^b = -\sum_{\beta \in (\Delta/\Delta_K)+} \beta(H) b_\beta^- b_\beta^+, \tag{4.3.20a}$$

$$M_{X_\alpha}^b = \sum_{\substack{\gamma-\beta=\alpha,\\ \beta,\gamma \in (\Delta/\Delta_K)+}} N_{-\beta,\gamma} b_\beta^- b_\gamma^+, \tag{4.3.20b}$$

де $H \in \mathfrak{h}$, $X_\alpha \in \mathfrak{g}_a$, $\alpha \in \Delta_K$ утворюють алгебру Лі ізоморфну до $\mathfrak{g}_0^K$.

Тепер ми можемо асоціювати бозонну матрицю Лакса з r-матрицею $r(u, v)$ і її спеціальними точками. Має місце наступна теорема [108]:

Теорема 4.4. *Нехай $\mathfrak{g}(v^{-1}, v))$ – алгебра Лі формальних рядів Лорана зі значенням в $\mathfrak{g}$. Нехай підалгебри $\mathfrak{g}_0^K$, $\mathfrak{g}_{\pm 1}^K$ будуть редуктивна і нільпотентна підалгебри в $\mathfrak{g}$ такі, що $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^K + \mathfrak{g}_1^K + \mathfrak{g}_{-1}^K$. Нехай $\mathfrak{c}(\mathfrak{g}_0^K)$ буде* *центром* $\mathfrak{g}_0^K$. *Нехай* $u=\nu_0$ *буде такою спеціальною точкою* r*-матриці, що виконуються наступні три умови:*

$$(i)\ r_{12}(\nu_0,v)\in\mathfrak{g}_0^{\nu_0}\otimes\mathfrak{g}(v^{-1},v)),\ \ \text{де}\ \mathfrak{g}_0^{\nu_0}\subseteq\mathfrak{g}_0^K\subset\mathfrak{g},$$

$$(ii)\ \partial_u r_{12}(u,v)|_{u=\nu_0}\in\mathfrak{g}_1^{\nu_0}\otimes\mathfrak{g}(v^{-1},v)),\ \ \text{де}\ (\mathfrak{g}_1^K+\mathfrak{g}_{-1}^K)\subseteq\mathfrak{g}_1^{\nu_0}\subseteq\mathfrak{g},$$

$$(iii)\ \partial_u^2 r_{12}(u,v)|_{u=\nu_0}\in\mathfrak{g}_2^{\nu_0}\otimes\mathfrak{g}(v^{-1},v)),\ \ \text{де}\ \mathfrak{c}(\mathfrak{g}_0^K)\subseteq\mathfrak{g}_2^{\nu_0}\subseteq\mathfrak{g}.$$

тоді наступна матриця Лакса:

$$\begin{gathered}L^{Bose}(v)=\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}_0^{\nu_0}}\sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}}l_a^{(0)}(b_\beta^-,b_\alpha^+)r^{ab}(\nu_0,v)X_b+\\+\sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+}\sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}}b_\alpha^+\sqrt{\alpha(K)}\partial_u r^{\alpha b}(u,v)|_{u=\nu_0}X_b+\\\sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+}\sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}}b_\alpha^-\sqrt{\alpha(K)}\partial_u r^{-\alpha b}(u,v)|_{u=\nu_0}X_b+\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}}\sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}}\frac{1}{2}k_i\partial_u^2 r^{ib}(u,v)|_{u=\nu_0}X_b,\end{gathered}\tag{4.3.21}$$

де $K=\sum\limits_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}}k_iH_i\in\mathfrak{c}(\mathfrak{g}_0^K)$, k_i *довільні константи і координати* $l_a^{(0)}(b_\beta^-,b_\alpha^+)$ *виражаються через* b_β^-, b_α^+ *використовуючи формули (4.3.20), задовольняє тензорну дужку Лі-Пуасона(4.2.1).*

Зауваження 45. Пояснемо алгебраїчне походження матриці Лакса (4.3.21). Для цього відзначимо, що фактор-алгебра

$$\mathfrak{g}^{3,\nu_0}\equiv\widetilde{\mathfrak{g}}^{+,\nu_0}(u)/(u-\nu_0)^3\widetilde{\mathfrak{g}}^{+,\nu_0}(u)$$

є напівпрямою сумою підалгебри $\mathfrak{g}_0^{\nu_0}$ і нільпотентної алгебри $\mathfrak{g}_1^{\nu_0}+\mathfrak{g}_2^{\nu_0}$. Остання алгебра має центр – підалгебру $\mathfrak{g}_2^{\nu_0}$. Завдяки тому, що $\mathfrak{g}_0^{\nu_0}\subseteq\mathfrak{g}_0^K$

підпростори $\mathfrak{g}_2^{\nu_0}\bigcap[\mathfrak{g}_0^K,\mathfrak{g}_0^K]$ і $\mathfrak{g}_2^{\nu_0}\bigcap\mathfrak{g}_{\pm1}^K$ будуть ідеалами в $\mathfrak{g}^{3,\nu_0}$. Факторизуючи $\mathfrak{g}^{3,\nu_0}$ по цим ідеалам ми отримуємо фактор–алгебру, що має ідеал $\mathfrak{g}_1^{\nu_0}\bigcap\mathfrak{g}_0^K$. Нарешті, факторизуючи отриману фактор–алгебру по цьому ідеалу, ми отримуємо фактор–алгебру ізоморфну напівпрямій сумі $\mathfrak{g}_0^{\nu_0}$ і алгебри Гейзенберга $\mathcal{H}_K$. Матриця Лакса (4.3.21) належить дуальному простору до цієї алгебри.

Приклад 4.6. Розглянемо стандартну раціональну r-матрицю, а саме:

$$r_{12}(u,v)=\frac{\Omega_{12}}{u-v}.$$

Для того, щоб зконструювати потрібну бозонну матрицю Лакса, ми будемо розглядати спеціальну точку цієї r-матриці, а саме, точку $u=\infty$. Ми маємо $r_{12}(\infty,v)=0$, тобто в позначеннях Теореми 4.4 маємо $\mathfrak{g}_0^\infty=0$. Це спрощує форму шуканої матриці Лакса. Малий параметр, за яким необхідно розкладати r-матрицю в околі точки $u=\infty$ це $t(u)=u^{-1}$. Пряме обчислення дає:

$$\lim_{u\to\infty}\partial_{u^{-1}}r_{12}(u,v)=\Omega_{12}.$$

$$\lim_{u\to\infty}\partial^2_{u^{-1}}r_{12}(u,v)=2v\Omega_{12}.$$

Тобто в нашому випадку $\mathfrak{g}_1^\infty=\mathfrak{g}_2^\infty=\mathfrak{g}$. Тому умови (i)-(iii) Теореми 4.4 завжди виконуються. Більше того, існують різні вкладення тривіальної підалгебри $\mathfrak{g}_0^\infty=0$ в різні редуктивні підалгебри $\mathfrak{g}_0^K$. Іншими словами, існує багато різних типів бозонних матриць Лакса з різним числом бозонів, асоційованих з тою самою раціональною r-матрицей і точкою $u=\infty$. Зафіксуємо деяку підалгебру $\mathfrak{g}_0^K$. Відповідна бозонна матриця (4.3.21) записується наступним чином:

$$L^{Bose}(v)=v\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}g}k_iH_i+\sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+}\sqrt{\alpha(K)}(b_\alpha^+X_{-\alpha}+b_\alpha^-X_\alpha).\qquad(4.3.22)$$

Проілюструємо матрию Лакса (4.3.22) фізично важливим прикладом $\mathfrak{g}=gl(n)$ і елементом K наступної форми: $K=\mathrm{diag}(k_1,...,k_1,k_n)$. Відповідна редуктивна підалгебра $gl(n)_0^K$ має вигляд $gl(n)_0^K=gl(n-1)\oplus gl(1)$.

Нільпотентні підалгебри $gl(n)^K_{\pm 1}$ записуються наступним чином

$$gl(n)^K_{-1} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{X_{1n}, ..., X_{n-1n}\}, \ gl(n)^K_{1} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{X_{n1}, ..., X_{nn-1}\}.$$

Відповідна класична алгебра Гейзенберга натягується на координатні функції b^+_{ni}, b^-_{nj}, $i, j \in \overline{1, n-1}$:

$$\{b^+_{ni}, b^-_{nj}\} = \delta_{ij}, \ \{b^+_{ni}, b^+_{nj}\} = \{b^-_{ni}, b^-_{nj}\} = 0.$$

Бозонна матриця Лакса (4.3.22) має в цьому випадку наступний вигляд:

$$L^{Bose}(v) = v(k_1 \sum_{i=1}^{n-1} X_{ii} + k_n X_{nn}) + \sqrt{(k_1 - k_n)} \sum_{i=1}^{n-1} (b^+_{ni} X_{in} + b^-_{ni} X_{ni}). \quad (4.3.23)$$

Приклад 4.7. Нехай σ буде автоморфізмом другого порядку комплексної простої алгебри Лі $\mathfrak{g}$. Нехай $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} + \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ буде відповідне Z_2-градуювання $\mathfrak{g}$, тобто

$$[\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{0}}] \subset \mathfrak{g}_{\bar{0}}, \ [\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] \subset \mathfrak{g}_{\bar{1}}, \ [\mathfrak{g}_{\bar{1}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] \subset \mathfrak{g}_{\bar{0}}$$

Розглянемо відповідну скручену r-матрицю (2.5.43) з $p = 2$:

$$r(u, v) = \frac{v^2}{u^2 - v^2} \Omega^{\bar{0}}_{12} + \frac{uv}{u^2 - v^2} \Omega^{\bar{1}}_{12}, \quad (4.3.24)$$

де $\Omega^{\bar{0}}_{12} = \sum\limits_{\alpha=1}^{\dim \mathfrak{g}_{\bar{0}}} X_{\bar{0},\alpha} \otimes X^{\bar{0},\alpha}$, $\Omega^{\bar{1}}_{12} = \sum\limits_{\alpha=1}^{\dim \mathfrak{g}_{\bar{1}}} X_{\bar{1},\alpha} \otimes X^{\bar{1},\alpha}$, $X_{\bar{j},\alpha}$, $X^{\bar{j},\alpha}$ дуальні базиси.

Для того, щоб зконструювати бозонну матрицю Лакса, ми припустимо, що автоморфізм σ і відповідне Z_2–градуювання алгебри $\mathfrak{g}$ таке, що

$$\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{g}^K_0, \ \mathfrak{g}_{\bar{1}} = \mathfrak{g}^K_1 + \mathfrak{g}^K_{-1},$$

де алгебра $\mathfrak{g}^K_0$ є редуктивною, підалгебри $\mathfrak{g}^K_0$ є нільпотентними і розклад $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^K_{-1} + \mathfrak{g}^K_0 + \mathfrak{g}^K_1$ є трикутним, тобто $[\mathfrak{g}^K_0, \mathfrak{g}^K_0] \subset \mathfrak{g}^K_0$, $[\mathfrak{g}^K_0, \mathfrak{g}^K_{\pm 1}] \subset \mathfrak{g}^K_{\pm 1}$. Для того, щоб ці визначення були узгодженими необхідно вимагати, щоб, більше того, алгебри $\mathfrak{g}^K_{\pm 1}$ були Абелеві, тобто якщо $\alpha, \beta \in (\Delta/\Delta_K)_+$, то $\alpha + \beta \notin (\Delta/\Delta_K)_+$ (такі градуювання і розклади повязані з ермітовими симетричними просторами). r-матриця (4.3.24) записується в цьому випадку наступним чином:

$$r(u,v)=\frac{v^2}{u^2-v^2}\Big(\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} H_i\otimes H_i+\sum_{\alpha\in(\Delta_K)_+}(X_\alpha\otimes X_{-\alpha}+X_{-\alpha}\otimes X_\alpha)\Big)+$$
$$+\frac{uv}{u^2-v^2}\sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+}(X_\alpha\otimes X_{-\alpha}+X_{-\alpha}\otimes X_\alpha). \quad (4.3.25)$$

Розглянемо одну з особливих точок r-матриці (4.3.24), а саме, точку $u=\infty$. Малий параметр, за яким слід розкладати r-матрицю в околі точки $u=\infty$, це $t(u)=u^{-1}$. Пряме обчислення дає:

$$r(\infty,v)=0,$$

$$\lim_{u\to\infty}\partial_{u^{-1}}r_{12}(u,v)=v\Omega_{12}^{\bar{1}},$$
$$\lim_{u\to\infty}\partial^2_{u^{-1}}r_{12}(u,v)=2v^2\Omega_{12}^{\bar{0}}.$$

Використовуючи той факт, що $\Omega_{12}^{\bar{1}}\in(\mathfrak{g}_1^K\otimes\mathfrak{g}_{-1}^K)\oplus(\mathfrak{g}_{-1}^K\otimes\mathfrak{g}_1^K)$ і $\Omega_{12}^{\bar{0}}\in\mathfrak{g}_0^K\otimes\mathfrak{g}_0^K$ легко показати, що умови (i)-(iii) Теореми 4.4 задоволняються оскільки $\mathfrak{g}_0^\infty=\mathfrak{g}_0^K$, $\mathfrak{g}_1^\infty=\mathfrak{g}_1^K+\mathfrak{g}_{-1}^K$, $\mathfrak{g}_2^\infty=\mathfrak{g}_0^K$. зауважимо що, на відміну від раціонального випадку, ці умови задовільняються тільки для одного фіксованого вибіру підалгебри $\mathfrak{g}_0^K$, $\mathfrak{g}_{\pm1}^K$, а саме для вибору використаного в означенні r-матриці (4.3.25). Базуючись на теоремі 4.4 з r-матрицею (4.3.25) можна асоційювати наступну бозонну матрицю Лакса:

$$L^{Bose}(v)=v\sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+}\sqrt{\alpha(K)}(b_\alpha^+X_{-\alpha}+b_\alpha^-X_\alpha)+v^2\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}}k_iH_i, \quad (4.3.26)$$

Проілюструємо розглядуваний приклад фізично найбільш важливим випадком $\mathfrak{g}=gl(n)$ і $K=\mathrm{diag}(k_1,k_1,....,k_1,k_n)$. Відповідна редуктивнна підалгебра $gl(n)_0^K$ і нільпотентні підалгебри $gl(n)_{\pm1}^K$ були описані в попередньому прикладі. Підалгебра Гейзенберга натягнута на елементи b_{ni}^+, b_{nj}^-, $i,j\in\overline{1,n-1}$ і одиницю:

$$\{b_{ni}^+,b_{nj}^-\}=\delta_{ij},\ \{b_{ni}^+,b_{nj}^+\}=\{b_{ni}^-,b_{nj}^-\}=0.$$

асоційований бозонний оператор Лакса записується наступним чином:

$$L^{Bose}(u) = v^2(k_1 \sum_{i=1}^{n-1} X_{ii} + k_n X_{nn}) + v\sqrt{(k_1 - k_n)} \sum_{i=1}^{n-1} (b_{ni}^{+} X_{in} + b_{ni}^{-} X_{ni})$$

Приклад 4.8. Розглянемо матричну алгебру Лі $\mathfrak{g} = gl(n)$ зі страндартним базисом X_{ij}, $i, j \in \overline{1,n}$ і анізотропну r-матрицю (2.3.25). Як було пояснено вище, r-матриця (2.3.25) має n-бозонних точок $u = \nu_0^{(k)} = -a_k^{-1}$, $k \in \overline{1,n}$. Дійсно, ми маємо:

$$r_A(-a_k^{-1}, v) = -\frac{1}{(1 + a_k v)} \sum_{i,j=1, i\neq k, j\neq k}^{n} \sqrt{\frac{(a_k - a_i)(a_k - a_j)}{(1 + a_i v)(1 + a_j v)}} X_{ij} \otimes X_{ji}. \tag{4.3.27}$$

Надалі ми припустимо, що $a_i \neq a_j$ якщо $i \neq j$, тобто всі спеціальні точки $\nu_0^{(k)}$, $k \in \overline{1,n}$, є різними. За локальний параметр в околі точки $u = \nu_0^{(k)}$ буде вибрана функція $u_k = \sqrt{a_k}\sqrt{1 + a_k u}$. Вводячи позначення $\partial_1^l r_A(-a_k^{-1}, v) \equiv \partial_{u_k}^l r_A(u, v)|_{u=-a_k^{-1}}$, ми отримуємо

$$\partial_1 r_A(-a_k^{-1}, v) = -\frac{1}{(1 + a_k v)^{3/2}} \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \sqrt{\frac{(a_k - a_j)}{(1 + a_j v)}} (X_{kj} \otimes X_{jk} + X_{jk} \otimes X_{kj}), \tag{4.3.28}$$

$$\partial_1^2 r_A(-a_k^{-1}, v) = -\frac{2}{(1 + a_k v)^2} X_{kk} \otimes X_{kk} - \sum_{i,j=1, i\neq k, j\neq k}^{n} \frac{\sqrt{a_k - a_i}\sqrt{a_k - a_j}(2 + (1 + a_k v)(\frac{a_j}{a_k - a_j} + \frac{a_i}{a_k - a_i}))}{a_k (1 + a_k v)^2 \sqrt{(1 + a_i v)(1 + a_j v)}} X_{ij} \otimes X_{ji} \tag{4.3.29}$$

Використовуючи ці формули легко бачити, що $\mathfrak{g}_0^{\nu_0^{(k)}} = gl(n-1) \subset \mathfrak{g}_0^{K_k}$, $\mathfrak{g}_1^{\nu_0^{(k)}} = \mathbb{C}^{n-1} \oplus \mathbb{C}^{n-1} = \mathfrak{g}_1^{K_k} \oplus \mathfrak{g}_{-1}^{K_k}$, $\mathfrak{g}_2^{\nu_0^{(k)}} = gl(n-1) \oplus gl(1) = \mathfrak{g}_0^{K_k}$ і умови (i)-(iii) Теореми 4.4 задовольняються для фіксованого вибору елемента K_k і підалгебр $\mathfrak{g}_0^{K_k}$, $\mathfrak{g}_{\pm1}^{K_k}$. Тут, по самому означенню, $K_k = k_{1,k}\sum\limits_{i=1,i\neq k}^{n} X_{ii} + k_{k,k}X_{kk}$, $\mathfrak{g}_0^{K_k} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{X_{kk}; X_{ij}, i,j \in \overline{1,n}, i,j, \neq k\}$ і $\mathfrak{g}_1^{K_k} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{X_{kj}, j \in \overline{1,n}\}$, $\mathfrak{g}_{-1}^{K_k} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{X_{jk}, j \in \overline{1,n-1}\}$.

Відзначимо, що підалгебра $\mathfrak{g}_0^{\nu_0^{(k)}} = gl(n-1)$ бозонізується за допомогою загальних формул (4.3.20). Для того, щоб здійснити цю бозонізацію, необхідно врахувати, що означення підалгебр $\mathfrak{g}_{\pm1}^{K_k}$ залежить від індексу k. Звідси слідує, що в формулах (4.3.20) вибір позитивних коренів теж не є фіксованим, але залежатиме від індексу k. Детальніше: ми будемо називати корені, що відповідають підалгебрі $\mathfrak{g}_1^{K_k}$ (тобто α_{kj}, $j \neq k$, де $\alpha_{kj}(X_{ii}) = \delta_{ki} - \delta_{ji}$), позитивними, а корені, що відповідають підалгебрі $\mathfrak{g}_{-1}^{K_k}$ (тобто α_{jk}, $j \neq k$) – негативними. За такого вибору формули бозонізації (4.3.20b), (4.3.20a) дадуть для базисних елементів підалгебр $\mathfrak{g}_0^{\nu_0^{(k)}} \simeq gl(n-1)$ наступну відповідь:

$$M_{X_{ij}}^{b_k} = b_{ki}^- b_{kj}^+, \tag{4.3.30}$$

де $i,j \neq k$ і комутаційні співвідношення є канонічними:

$$\{b_{ki}^+, b_{mj}^-\} = \delta_{ij}\delta_{km},\ \{b_{ki}^+, b_{mj}^+\} = \ \{b_{ki}^-, b_{mj}^-\} = 0. \tag{4.3.31}$$

Зконструювавши бозонні точки $\nu_0^{(k)}$, $k \in \overline{1,n}$, бозонізувавши відповідні підалгебри $\mathfrak{g}_0^{\nu_0^{(k)}}$ і використовуючи формули (4.3.27)-(4.3.29), можна написати однобозонні матриці Лакса (4.3.21) наступним чином:

$$\begin{aligned} L^{a_k}(v) = -\Big(&\frac{1}{(1+a_k v)}\sum_{i,j=1,i\neq k,j\neq k}^{n}\sqrt{\frac{(a_k-a_i)(a_k-a_j)}{(1+a_i v)(1+a_j v)}}b_{ki}^- b_{kj}^+ X_{ji} + \\ &+\sum_{j=1,j\neq k}^{n}\frac{\sqrt{k_{k,k}-k_{j,k}}}{\sqrt{(1+a_k v)^3}}\sqrt{\frac{(a_k-a_j)}{(1+a_j v)}}(b_{kj}^+ X_{jk} + b_{kj}^- X_{kj}) + \\ &+\frac{1}{(1+a_k v)^2}\big(\sum_{i=1,i\neq k}^{n} k_{i,k}X_{ii} + k_{k,k}X_{kk}\big)\Big), \end{aligned} \tag{4.3.32}$$

де $k_{i,k} = k_{j,k}$, $\forall i,j \neq k$.

4.3.7. Загальні багатоточкові матриці Лакса. Найбільш цікавим з точки зору застосування до теорії скінченновимірних інтегровних систем є, так звані, багатоточкові матриці Лакса. Як ми побачимо далі, вони визначають, взаємодіючі системи, де кожна підсистема визначена за допомогою одноточкової матриці Лакса.

Розглянемо довільну множину особливих точок $\nu_0^{(i)}$, $i \in \overline{1,S}$ і неособливих точок ν_k, $k \in \overline{1,N}$. Кожна з цих точок визначає свій власний набір матриці Лакса пронумерованих цілим числом, яке визначає максимальний порядок полюса в цій точці. Має місце наступне твердження [106]:

Твердження 4.4. *Нехай матриці Лакса $L^{+,M_k,\nu_k}(v)$ і $L^{+,M_i,\nu_0^{(i)}}(v)$ будуть визначені формулами (4.3.2) і (4.3.8), і їх координатні функції задовольняють дужки Пуасона (4.3.4) і (4.3.9). Нехай, більше того, координатні функції $L_a^{(m),\nu_0^{(i)}}$ і $L_b^{(n),\nu_k}$, що відповідють різним точкам $\nu_0^{(i)}, \nu_k; k \in \overline{1,N}, i \in \overline{1,S}$ комутують відносно дужки Пуасона:*

$$\{L_a^{(m),\nu_0^{(i)}}, L_b^{(n),\nu_0^{(j)}}\} = \{L_a^{(m),\nu_0^{(i)}}, L_b^{(n),\nu_k}\} = \{L_a^{(m),\nu_k}, L_b^{(n),\nu_l}\} = 0.$$

тоді наступна матриця:

$$L(v) = \sum_{i=1}^{S} L^{+,M_i,\nu_0^{(i)}}(v) + \sum_{k=1}^{N} L^{+,M_k,\nu_k}(v) =$$
$$= \sum_{i=1}^{S} \sum_{m=0}^{M_i} \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}_m^{\nu_0^{(i)}}} L_a^{(m),\nu_0^{(i)}} Y^{(m),\nu_0^{(i)},a}(v) + \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=0}^{M_k} \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} L_a^{(m),\nu_k} Y^{(m),\nu_k,a}(v). \tag{4.3.33}$$

задовольняє тензорні дужки Пуасона (4.2.1), тобто:

$$\{L_1(u), L_2(v)\} = [r_{12}(u,v), L_1(u)] - [r_{21}(v,u), L_2(v)].$$

Зауваження 46. Відзначимо, що число N регулярних точок у визначенні багатоточкових матриць Лакса є довільним, в той час, як число S сингулярних точок обмежене зверху деяким невід'ємним цілим числом S_0 специфічним для конкретної r-матриці $r(u,v)$, зокрема S_0, може бути рівне нулю, як у випадку еліптичної r-матриці Скляніна.

Твердження вище означає, що, для того, щоб зконструвати загальну матрицю Лакса скінченновимірної гамільтонової системи, що відповідвє данній r-матриці $r(u, v)$, необхідно зконструювати її одноточкові частини і потім взяти їх суму. Фазовий простір результуючої системи є прямим добутком фазових просторів гамільтонових систем асоційованих з одноточковими матрицями Лакса. Інтеграли руху залежатимуть від всіх координатних функцій. Вони мають вигляд:

$$I_m^{k,\nu_I} = res_{u=\nu_I}\big((u-\nu_I)^{-(m+1)} trL^k(u)\big), \tag{4.3.34}$$

де $\nu_I \in \{\nu_0^{(i)}, \nu_k; k \in \overline{1,N}, i \in \overline{1,S}\}$.

Відповідні гамільтонові рівняння записуються стандартним чином:

$$\frac{dL_a^{(m),\nu_I}}{dt_m^{k,\nu_J}} = \{I_m^{k,\nu_J}, L_a^{(m),\nu_I}\},$$

де t_m^{k,ν_J} - час, що відповідає інтегралу I_m^{k,ν_J}.

Зауваження 47. Завдяки тому факту, що інтегровні системи асоційовані з різними регулярними точками класичних r-матриць і матрицями Лакса з фіксованим максимальним порядком полюсів є еквівалентними, число суттєво різних скінченновимірних інтегровних систем буде ефективно залежати від числа сингулярних точок розглядуваної r-матриці $r(u, v)$.

4.3.8. Узагальнені системи Годена. Найпростіший і найзагальніший приклад багатоточкових матриць Лакса це узагальнені системи Годена. Матриці Лакса цієї системи це сума N одноточкових матриць Лакса $L^{+,\nu_k}(u)$, що відповідають регулярним точкам ν_k:

$$L^N(v) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}} L_a^{(0),\nu_k} Y^{(0),\nu_k,a}(v) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{a,b=1}^{\dim\mathfrak{g}} r^{ab}(\nu_k, v) L_a^{(0),\nu_k} X_b \tag{4.3.35}$$

де дужка Пуасона (4.3.4) записується наступнм чином:

$$\{L_a^{(0),\nu_k}, L_b^{(0),\nu_l}\} = \delta^{kl} \sum_{c=1}^{\dim\mathfrak{g}} C_{a,b}^c L_c^{(0),\nu_k}, \tag{4.3.36}$$

тобто співпадає з дужкою Лі – Пуасона на $\mathfrak{g}^{\oplus N}$. Розглянемо відповідний гамільтоніан другого порядку I^{2,ν_k}_{-1}. Вводячи позначення $S^{(m)}_a = L^{(0),\nu_m}_a$, ми отримуємо наступну форму гамільтоніанів $H^G_k \equiv I^{2,\nu_k}_{-1}$ [83]:

$$H^G_k = \sum_{m=1, m\neq k}^{N} \sum_{a,b=1}^{\dim \mathfrak{g}} r^{a,b}(\nu_m, \nu_k) S^{(m)}_a S^{(k)}_b + \sum_{a,b=1}^{\dim \mathfrak{g}} r^{a,b}_0(\nu_k, \nu_k) S^{(k)}_a S^{(k)}_b, \quad (4.3.37)$$

де $r^{a,b}(\nu_m, \nu_k)$ – це матричні елементи загальної некососиметричної класичної r-матриці, а $r^{a,b}_0(\nu_k, \nu_k)$ – матричні елементи її регулярної частини. Ці інтеграли є узагальненими класичними гамільтоніанами Годена [83].

4.3.9. Узагальнені гамільтоніани Годена в зовнішньому магнітному полі. Наступний простий приклад багатоточкових матриць Лакса є матриці Лакса узагальнених систем Годена в зовнішньому магнітному полі. Матриця Лакса цієї системи є сумою одноточкових матриць Лакса $L^{+,\nu_k}(u)$, що відповідають N регулярним точкам ν_k і елементу зсуву, що відповідає деякій сингулярній точці $\nu^{(i)}_0$ (чи більш загально їх довільній сумі). Для простоти ми не будемо конкретизувати явну форму елементу зсуву, позначаючи його просто $c(u) = \sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}} c^a(u) X_a$. Відповідна матриця Лакса записується наступним чином:

$$L^{N,c}(v) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{a,b=1}^{\dim\mathfrak{g}} r^{ab}(\nu_k, v) L^{(0),\nu_k}_a X_b + \sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}} c^a(v) X_a, \quad (4.3.38)$$

де дужка Пуасона (4.3.4) має стандартний вигляд:

$$\{L^{(0),\nu_k}_a, L^{(0),\nu_l}_b\} = \delta^{kl} \sum_{c=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^c_{a,b} L^{(0),\nu_k}_c, \quad (4.3.39)$$

тобто співпадає з дужкою Лі–Пуасона на $\mathfrak{g}^{\oplus N}$. Використавши введені вище позначення $S^{(m)}_a = L^{(0),\nu_m}_a$ ми отримуємо наступний явний вигляд гамільтоніанів другого порядку $H^{G,c}_k \equiv I^{2,\nu_k}_{-1}$ [87]:

$$H_k^{G,c} = \sum_{m=1,m\neq k}^{N} \sum_{a,b=1}^{\dim \mathfrak{g}} r^{a,b}(\nu_m,\nu_k) S_a^{(m)} S_b^{(k)} + \sum_{a,b=1}^{\dim \mathfrak{g}} r_0^{a,b}(\nu_k,\nu_k) S_a^{(k)} S_b^{(k)} + \\ + \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} S_a^{(k)} c^a(\nu_k). \quad (4.3.40)$$

Ці інтеграли є узагальненими класичними гамільтоніанами Годена в зовнішньому магнітному полі [87], роль якого грає елемент зсуву $c(u)$.

4.3.10. Узагальнені моделі типу Джейнса – Камінгса – Діке. Наступний більш складний клас фізично цікавих моделей асоційованих з матрицями Лакса, що мають "сингулярні" та "регулярні" полюси є моделі типу Джейнса – Камінгса – Діке. Відповідна матриця Лакса є сумою наступних "елементарних" матриць Лакса: N-спінових матриць Лакса (4.3.6) асоційованих з N регулярними точками ν_1,..., ν_N, бозонною матрицею Лакса (4.3.21) асоційованою зі спеціальною точкою ν_0 і елемент зсуву $c(v) = \sum\limits_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}} c^a(v) X_a$ асоційований з тою самою чи будь-якою іншою спеціальною точкою r-матриці:

$$L^{JCD}(v) = L^N(v) + L^{Bose}(v) + c(v).$$

Детальніше:

$$L^{JCD}(v) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{a,b=1}^{\dim\mathfrak{g}} r^{ab}(\nu_k,u) S_a^{(k)} X_b + \sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}_0^{\nu_0}} \sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}} l_a^{(0)}(b_\beta^-, b_\alpha^+) r^{ab}(\nu_0,v) X_b + \\ + \sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+} \sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}} \sqrt{\alpha(K)} (b_\alpha^+ \partial_u r^{\alpha b}(u,v)|_{u=\nu_0} + b_\alpha^- \partial_u r^{-\alpha b}(u,v)|_{u=\nu_0}) X_b + \\ + \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} \sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}} \frac{1}{2} k_i \partial_u^2 r^{ib}(u,v)|_{u=\nu_0} X_b + \sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}} c^a(u) X_a, \quad (4.3.41)$$

де ν_0 – спеціальна бозонна точка класичної r-матриці. Можна виписати явно наступні квадратичні гамільтоніани:

$$H_l^{JCD} \equiv I_{-1}^{2,\nu_l} = \frac{1}{2} res_{u=\nu_l} tr L^2(v)$$

які є точними аналогами узагальнених гамільтоніанів Годена для випадку моделей ДКД. Пряме обчислення дає:

$$
\begin{aligned}
&H_l^{JCD} = H_l^{G,c} + \\
&\sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}} \Big(\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}_0^{\nu_0}} l_a^{(0)}(b_\beta^-, b_\alpha^+) r^{ab}(\nu_0, \nu_l) + \sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+} b_\alpha^+ \sqrt{\alpha(K)} \partial_u r^{\alpha b}(u, \nu_l)|_{u=\nu_0} \Big) S_b^{(l)} \\
&+ \sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}} \Big(\sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+} b_\alpha^- \sqrt{\alpha(K)} \partial_u r^{-\alpha b}(u, \nu_l)|_{u=\nu_0} + \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} \frac{1}{2} k_i \partial_u^2 r^{ib}(u, \nu_l)|_{u=\nu_0} \Big) S_b^{(l)},
\end{aligned}
\tag{4.3.42}
$$

де $H_l^{G,c}$ – це узагальнений гамільтоніан Годена у зовнішньому магнітному полі (4.3.40). Відзначимо, що крім гамільтоніанів H_l^{JCD} існують також гамільтоніани $H_m^0 \equiv I_m^{2,\nu_0} = \frac{1}{2} res_{u=\nu_0} (u-\nu_0)^{-(m+1)} \mathrm{tr} L^2(v)$, але для того, щоб записати їх явну форму, необхідно конкретизувати класичну r-матрицю $r(u,v)$ і її аналітичну поведінку в околі точки $u=\nu_0$.

Приклад 4.9. Розглянемо Z_2-градуйовану r-матрицю (2.5.43). Ця r-матриця має дві спеціальні точки $u=0$ і $u=\infty$. Розглянемо другу з них. Базуючись на теоремі 4.4, можна асоціювати з r-матрицею (2.5.43) і спеціальною точкою $u=\infty$ наступну бозонну матрицю Лакса:

$$
L^{Bose}(u) = u\Big(\sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+} \sqrt{\alpha(K)} (b_\alpha^+ X_{-\alpha} + \sqrt{\alpha(K)} b_\alpha^- X_\alpha \Big) + u^2 \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} k_i H_i,
\tag{4.3.43}
$$

N-спінова матриця Лакса, що відповідає Z_2-градуйованій r-матриці, записується наступним чином:

$$
\begin{aligned}
L^{Spin}(u) = &\sum_{k=1}^{N} \frac{u^2}{(\nu_k^2 - u^2)} \Big(\sum_{i=1}^{\mathrm{rank} g} S_i^{(k)} H_i + \sum_{\alpha\in(\Delta_K)_+} S_\alpha^{(k)} X_{-\alpha} + \sum_{\alpha\in(\Delta_K)_+} S_{-\alpha}^{(k)} X_\alpha \Big) \\
&+ \sum_{k=1}^{N} \frac{u\nu_k}{(\nu_k^2 - u^2)} \Big(\sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+} S_\alpha^{(k)} X_{-\alpha} + \sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+} S_{-\alpha}^{(k)} X_\alpha \Big).
\end{aligned}
\tag{4.3.44}
$$

Для того, щоб отримати повну матрицю Лакса типу ДКД, необхідно описати елементи зсуву, що грають в ДКД-моделях роль параметрів детюнінгу. Можливо показати [107], що завжди існує елемент зсуву наступної форми: $c(u) = \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} c_i H_i$, де $\sum\limits_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} c_i \alpha(H_i) = 0, \forall \alpha \in \Delta_K$, тобто $c(u) \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0^K)$.

Обрахуємо явно ДКД типу інтеграли H_l^{JCD}. Пряме обчислення дає:

$$H_l^{JCD} = \nu_l \sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+} \sqrt{\alpha(K)}(b_\alpha^+ S_{-\alpha}^{(l)} + b_\alpha^- S_{-\alpha}^{(l)}) + \nu_l^2 \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} k_i S_i^{(l)} + H_l^{G,c}. \tag{4.3.45}$$

де $H_l^{G,c}$ – це Z_2-градуйовані гамільтоніани типу Годена у зовнішньому магнітному полі, що записуються наступним чином:

$$H_l^{G,c} = \sum_{k=1}^{N}\Big(\frac{\nu_l^2}{(\nu_k^2-\nu_l^2)}(\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} S_i^{(k)}S_i^{(l)} + \sum_{\alpha\in(\Delta_K)_+} S_\alpha^{(k)}S_{-\alpha}^{(l)} + \sum_{\alpha\in(\Delta_K)_+} S_{-\alpha}^{(k)}S_\alpha^{(l)}) +$$
$$+\frac{\nu_k\nu_l}{(\nu_k^2-\nu_l^2)} \sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+} \big(S_\alpha^{(k)}S_{-\alpha}^{(l)} + S_{-\alpha}^{(k)}S_\alpha^{(l)}\big)\Big) - \frac{1}{2}\sum_{a,b=1}^{\dim\mathfrak{g}_0^K} g^{ab} S_a^{(l)} S_b^{(l)} + \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} c_i S_i^{(l)}, \tag{4.3.46}$$

і g^{ab} компоненти інваріантної метрики (форми Кіллінга–Картана).

Специфікуємо розглядувані Z_2-градуйовані моделі в фізично найбільш важливому прикладі $\mathfrak{g} = gl(n)$ і випадку найбільш виродженого елементу K, що має форму $K = \mathrm{diag}(k_1, k_1, ..., k_1, k_n)$. Відповідна редуктивна підалгебра $gl(n)_0^K$ це $gl(n)_0^K = gl(n-1) \oplus gl(1)$. Нільпотентні підалгебри $gl(n)_{\pm 1}^K$ мають форму $gl(n)_{-1}^K = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{X_{1n}..., X_{n-1n}\}$, $gl(n)_1^K = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{X_{n1}, ..., X_{nn-1}\}$. Підалгебра Гейзенберга натягнута на елементи b_{ni}^+, b_{nj}^-, $i, j \in \overline{1, n-1}$:

$$\{b_{ni}^+, b_{nj}^-\} = \delta_{ij},\ \{b_{ni}^+, b_{nj}^+\} = \{b_{ni}^-, b_{nj}^-\} = 0.$$

Бозонна матриця Лакса записується наступним чином:

$$L^{Bose}(u) = u^2(k_1\sum_{i=1}^{n-1} X_{ii}+k_n X_{nn})+u\sqrt{(k_1-k_n)}\sum_{i=1}^{n-1}(b^+_{ni}X_{in}+b^-_{ni}X_{ni}).$$

N-спінова матриця Лакса має вигляд:

$$L^{Spin}(u) = \sum_{k=1}^{N}\frac{u^2}{(\nu_k^2-u^2)}(\sum_{i,j=1}^{n-1} S^{(k)}_{ij}X_{ji}+S^{(k)}_{nn}X_{nn})+ \\ +\sum_{k=1}^{N}\frac{u\nu_k}{(\nu_k^2-u^2)}\sum_{i=1}^{n-1}\big(S^{(k)}_{in}X_{ni}+S^{(k)}_{ni}X_{in}\big). \quad (4.3.47)$$

а узагальнений елемент зсуву, що грає роль детюнінгу є наступним:

$$c(u) = c_1\sum_{i=1}^{n-1}X_{ii}+c_n X_{nn}.$$

Інтеграли H_l^{JCD} моделі ДКД записуються наступним чином:

$$H_l^{JCD} = \sum_{i=1}^{n}(k_i\nu_l^2+c_i)S_i^{(l)}+\nu_l\sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+}\sqrt{\alpha(K)}(b^+_\alpha S^l_{-\alpha}+b^-_\alpha S^{(l)}_\alpha)- \\ -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{a,b=1}^{\dim\mathfrak{g}_0^K} g^{ab}S_a^{(k)}S_b^{(l)}. \quad (4.3.48)$$

4.3.11. Узагальнені класичні моделі Бозе–Хаббарда. Інший фізично цікавий клас інтеговних моделей асоційованих з багатоточковими матрицями Лакса є узагальнені моделі димерів Бозе–Хаббарда [109].

Отримавши однобозонні матриці Лакса (чи точніше матриці Лакса, що містять один тип бозонів) можна перейти до розгляду "багатобозонних" матриць Лакса, чи точніше матриць Лакса, що містять багато типів бозонів. Для цього відзначимо, що існують випадки, коли розглядувана r-матриця має дві чи більше спеціальних точок $\nu_0^{(1)},\nu_0^{(2)},...,\nu_0^{(S)}$, що задовольняють умовам Теореми 4.4. В цьому випадку можна розглянути суму відповідних "однобозонних" матриць Лакса:

$$L^B(u) = \sum_{i=1}^{S} L^{\nu_0^{(i)}}(u), \quad (4.3.49)$$

де

$$L^{\nu_0^{(i)}}(v) =$$

$$\sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}}(\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}_0^{\nu_0^{(i)}}} l_a^{(0)}(b^-_{\beta,i}, b^+_{\alpha,i}) r^{ab}(\nu_0^{(i)}, v) + \sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_{K_i})_+} b^+_{\alpha,i}\sqrt{\alpha(K_i)}\partial_u r^{\alpha b}(u,v)|_{u=\nu_0^{(i)}}) X_b$$
$$+\sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}}(\sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_{K_i})_+} b^-_{\alpha,i}\sqrt{\alpha(K_i)}\partial_u r^{-\alpha b}(u,v)|_{u=\nu_0^{(i)}} + \sum_{j=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} \frac{1}{2} k_{j,i}\partial_u^2 r^{jb}(u,v)|_{u=\nu_0^{(i)}}) X_b, \tag{4.3.50}$$

і координатні функції $b^-_{\beta,j}$, $b^+_{\alpha,i}$ мають канонічні дужки Пуасона:

$$\{b^+_{\alpha,i}, b^-_{\beta,j}\} = \delta_{ij}\delta_{\alpha,\beta},\ \{b^+_{\alpha,i}, b^+_{\beta,j}\} = \{b^-_{\alpha,i}, b^-_{\beta,j}\} = 0, \tag{4.3.51}$$

$\alpha \in (\Delta/\Delta_{K_i})_+$, $\beta \in (\Delta/\Delta_{K_j})_+$.

Тут форма матриці Лакса $L^{\nu_0^{(i)}}(v)$, елементів Картановської підалгебри $K_i = \sum\limits_{j=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} k_{j,i}H_j$, підалгебр $\mathfrak{g}_0^{K_i}$, підсистем коренів Δ_{K_i} і додаткових підсистем $(\Delta/\Delta_{K_i})_\pm$, а також саме визначення позитивних і негативних коренів і т.д. може залежати від спеціальної точки $\nu_0^{(i)}$.

Зауваження 48. Можна розглянути більш загальну матрицю Лакса багатобозонної моделі додавши до матриці Лакса (4.3.50) довільний елемент зсуву $c(u)$. З метою спрощення, ми будемо розглядати випадок без зсуву.

Розкладаючи генеруючи функції $trL^k(u)$ за степенями спектрального параметра u отримується набір Пуасон - комутуючих функцій, які співпадають з інтегралами руху розглядуваних багато-бозонних систем. Серед комутуючих інтегралів в цьому наборі є наступні гамільтоніани:

$$H^{(-k)}_{\nu_0^{(i)}} = I_k^{2,\nu_0^{(i)}} = \frac{1}{2} res_{u=\nu_0^{(i)}} (u-\nu_0^{(i)})^{-k-1} trL^2(u).$$

На жаль, неможливо записати їх явну форму в загальному випадку, тобто без специфікації конкретної класичної r-матриці $r(u,v)$ і її аналітичної поведінки в околі точки $u=\nu_0$. Нижче ми розглянемо конкретні приклади класичних r-матриць і відповідних гамільтоніанів $H^{(-k)}_{\nu_0^{(i)}}$.

Приклад 4.10. Розглянемо алгебру Лі $\mathfrak{g} = gl(n)$ і анізотропну класичну r-матрицю (2.3.25). Як було відзначено, r-матриця (2.3.25) має n спеціальних точок $u = \nu_0^{(k)} = -a_k^{-1}$, $k \in \overline{1,n}$. Відповідна одноточкова бозонна матриця Лакса зконструйована в прикладі (4.8). Вона має форму:

$$L^{a_k}(v) = -\Big(\frac{1}{(1+a_k v)} \sum_{i,j=1, i\neq k, j\neq k}^{n} \sqrt{\frac{(a_k - a_i)(a_k - a_j)}{(1+a_i v)(1+a_j v)}} b_{ki}^- b_{kj}^+ X_{ji} +$$
$$+ \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{\sqrt{k_{k,k} - k_{j,k}}}{\sqrt{(1+a_k v)^3}} \sqrt{\frac{(a_k - a_j)}{(1+a_j v)}} (b_{kj}^+ X_{jk} + b_{kj}^- X_{kj}) +$$
$$+ \frac{1}{(1+a_k v)^2} \Big(\sum_{i=1, i\neq k}^{n} k_{i,k} X_{ii} + k_{k,k} X_{kk} \Big)\Big),$$

де $k_{i,k} = k_{j,k}$, $\forall i, j \neq k$. Надалі ми покладемо для спрощення $k_{i,j} = k_i^2 \delta_{ij}$.

Загальна класична багатобозонна матриця Лакса асоційована з анізотропною r-матрицею записується наступним чином:

$$L^B(v) = \sum_{k=1}^{n} L^{a_k}(v).$$

Відповідні дужки Лі–Пуасона є канонічними:

$$\{b_{ki}^+, b_{mj}^-\} = \delta_{ij}\delta_{km}, \ \{b_{ki}^+, b_{mj}^+\} = \ \{b_{ki}^-, b_{mj}^-\} = 0. \tag{4.3.52}$$

Коефіцієнти розкладу генеруючих функцій $\mathrm{tr}(L^B(v))^m$ є Пуасон - комутуючими і визначають гамільтоніан інтегровної системи класичних взаємодіючих бозонів. Серед них є, зокрема, наступні гамільтоніани:

$$I_m^{2,a_k} = \frac{1}{2} \mathrm{res}_{v=-a_k^{-1}} (1 + a_k v)^{-m-1} (L^B(v))^2.$$

Цікавими є гамільтоніани $H_{a_i}^{(2)} \equiv I_{-2}^{2,a_i}$, $i \in \overline{1,n}$. Вони мають форму:

$$\frac{1}{a_i^2} H_{a_i}^{(2)} = \frac{1}{2}\Big((\sum_{l=1, l\neq i}^{n} b_{il}^- b_{il}^+)^2 + (\sum_{l=1, l\neq i}^{n} b_{li}^- b_{li}^+)^2 \Big) +$$
$$+ \sum_{k,l=1, l\neq k, l,k\neq i}^{n} \frac{k_i \sqrt{(a_k - a_l)}}{\sqrt{(a_i - a_k)(a_i - a_l)}} (b_{ik}^+ b_{li}^+ b_{lk}^- + b_{ik}^- b_{li}^- b_{lk}^+) +$$

$$+\sum_{l=1,l\neq i}^{n}\frac{\sqrt{-1}k_i k_l}{a_i-a_l}(b^+_{il}b^+_{li}+b^-_{il}b^-_{li})+\sum_{l=1,l\neq i}^{n}\frac{k_i^2}{a_i}\frac{a_l}{a_i-a_l}(b^-_{li}b^+_{li}-b^-_{il}b^+_{il}). \tag{4.3.53}$$

Ці гамільтоніани мають наступну інтерпритацію: перший доданок в них є векторним аналогом нелінійності Керра. Другий доданок – це трибозонна взаємодія: новий феномен відсутній в стандартному $n=2$ димері Бозе – Хаббарда. Третій доданок є векторним аналогом доданку “перескоку” в димері Бозе – Хаббарда. Відзначимо, що “перескок” має місце лише між парами бозонів пронумерованих індексами i,j та j,i відповідно. Четрвертий доданок – це кінетичний член. Для того, щоб побачити що гамільтоніан (4.3.53) дійсно відповідає узагальненню моделі Бозе – Хаббарда, необхідно зробити канонічну заміну змінних $b^+_{ij}=\sqrt{-1}a^-_{ji}, b^-_{kl}=\sqrt{-1}a^+_{lk}$ якщо $i>j, k>l$. В випадку $n=2$ після цієї канонічної заміни гамільтоніан $H^{(2)}_{a_i}$ співпаде з гамільтоніаном димера Бозе–Хаббарда [32], [52].

4.3.12. Повна матриця Лакса систем типу Тоди. Розглянемо інший важливий приклад багато-точкових, а саме двоточкових матриць Лакса. Як вже було зауважено, матриці Лакса систем типу Тоди складаються з p-q–частини і елементу зсуву. Обидві частини відповідають спеціальним точкам класичних r-матриць. Нагадаємо що p-q-частина матриць Лакса була зконструйована в підрозділі 4.3.5 Вона відповдає спеціальній точці r-матриці (надалі ми її будемо позначати $\nu_0^{(1)}$), що задовольняє умовам тверджденяя 4.3 і має наступну форму:

$$L^{+,2,\nu_0^{(1)}}(v)=\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}}p_iY^{(0),\nu_0^{(1)},i}(v)+\sum_{\alpha\in P\cup-\theta}e^{\alpha(q)}Y^{(1),\nu_0^{(1)},\alpha}(v). \tag{4.3.54}$$

Елемент зсуву вдповідає іншій спеціальній точці класичної r-матриці. Позначемо її $\nu_0^{(2)}$. Надалі ми будемо припускати, що ця точка є такою, що задовольняє умови Наслідків 4.1-4.2, тобто:

$$c^{\nu_0^{(2)}}(v) \equiv L^{+,0,\nu_0^{(2)}}(v) = \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}_0^{\nu_0^{(2)}}} \sum_{b=1}^{\dim \mathfrak{g}} c_a r^{ab}(\nu_0^{(2)}, v) X_b$$

або

$$c^{\nu_0^{(2)}}(v) \equiv L^{+,1,\nu_0^{(2)}}(v) = \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}_1^{\nu_0^{(2)}}} \sum_{b=1}^{\dim \mathfrak{g}} c_a (\partial_u r^{ab}(u,v))|_{u=\nu_0^{(2)}} X_b.$$

Отже ми маємо наступний вираз для матриці Лакса системи типу Тоди:

$$L^T(u) = L^{+,2,\nu_0^{(1)}}(u) + c^{\nu_0^{(2)}}(u)$$

Інтегровний гамільтоніан цієї системи конструюється наступним чином:

$$H_0^{(0)} = I_0^{2,\nu_0^1} = \frac{1}{2}\mathrm{res}_{u=\nu_0^{(1)}}(u-\nu_0^{(1)})^{-1}(L^T(u))^2. \tag{4.3.55}$$

Його явна форма може бути написана лише після специфікації класичної r-матриці і спеціальної точки $\nu_0^{(1)}$. Нижче ми розглянемо два приклади матриць Лакса систем типу Тоди і порахуємо відповідні гамільтоніани.

Приклад 4.11. Розглянемо "зкручену" раціональну r-матрицю (2.5.43), що відповідає кокстерівському автоморфізму алгебри $\mathfrak{g}$. Фіксуємо особливу точку цієї r-матриці, а саме $u = \nu_0^{(1)} = 0$ і відповідну їй матрицю Лакса (4.3.17) з прикладу 4.4:

$$L^{+,2,0}(v) = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} p_i H_i + v^{-1}(\sum_{\alpha\in P\cup -\theta} e^{\alpha(q)} X_{-\alpha}).$$

Розглянемо також другу особливу точку цієї r-матриці, а саме $u = \nu_0^{(2)} = \infty$ і відповідну їй матрицю Лакса (4.3.17) – елемент зсуву з прикладу 4.2:

$$c^{\infty}(v) \equiv L^{+,1,\infty}(v) = v \sum_{\alpha\in P\cup -\theta} c_\alpha X_\alpha,$$

де константи c_α – довільні. Матриця Лакса ланцюжка Тоди має форму:

$$L^T(v) = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} p_i H_i + v^{-1}(\sum_{\alpha\in P\cup -\theta} e^{\alpha(q)} X_{-\alpha}) + v \sum_{\alpha\in P\cup -\theta} c_\alpha X_\alpha.$$

Пряме обчислення дає наступну відповідь для гамільтоніана (4.3.55):

$$H_0^{(0)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} p_i^2 + \sum_{\alpha\in P\cup -\theta} c_\alpha e^{\alpha(q)}. \tag{4.3.56}$$

Гамільтоніан (4.3.56) співпадає зі стандартним гамільтоніаном замкнутого ланцюжка Тоди асоційованого з простою алгеброю Лі $\mathfrak{g}$. Якщо $c_{-\theta}=0$, то гамільтоніан (4.3.56) описує відкритий ланцюжок Тоди.

Приклад 4.12. Розглянемо зкручену деформовану r-матрицю (2.5.44), що відповідає кокстерівському автоморфізму алгебри $\mathfrak{g}$. Фіксуємо спеціальну точку цієї r-матриці, а саме, точку $u=\nu_0^{(1)}=0$ і відповідну матрицю Лакса (4.3.18) з прикладу 4.5:

$$L(v) = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} p_i(\Phi^{-1}(v))^*(H_i)+ \\ + \sum_{\alpha\in P\cup -\theta} e^{\alpha(q)}\Big(v^{-1}(\Phi^{-1}(v))^*(X_{-\alpha}) + (\Phi^{-1}(v))^*(\Phi_1^*(X_{-\alpha}))\Big).$$

Розглянемо також другу спеціальну точку цієї r-матриці, а саме, точку $u=\nu_0^{(2)}=\infty$ і відповідний елемент зсуву з прикладу 4.3:

$$c(v) = L^{+,0,\infty}(v) = v\sum_{\alpha\in P\cup -\theta}\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} (\Phi_1')^i_{-\alpha} c_i(\Phi^{-1}(v))^*(X_\alpha),$$

де константи c_i є довільними. Повна матриця Лакса деформованого ланцюжка Тоди має форму:

$$L^{dT}(v) = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}}(p_i + \sum_{\alpha\in P\cup -\theta} e^{\alpha(q)}(\Phi_1^*)^i_{-\alpha})(\Phi^{-1}(v))^*(H_i)+ \\ +v^{-1}\sum_{\alpha\in P\cup -\theta} e^{\alpha(q)}(\Phi^{-1}(v))^*(X_{-\alpha})+v\sum_{\alpha\in P\cup -\theta}\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}}(\Phi_1')^i_{-\alpha}c_i(\Phi^{-1}(v))^*(X_\alpha). \tag{4.3.57}$$

Враховучи, що

$$\Phi^{-1}(v) = 1-(\Phi_1 v+\Phi_2 v^2+\ldots)+(\Phi_1 v+\Phi_2 v^2+\ldots)^2-(\Phi_1 v+\Phi_2 v^2+\ldots)^3+\ldots$$

ми отримаємо наступну відповідь для гамільтоніана (4.3.55)

$$H_0^{(0)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} p_i^2 - \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} \sum_{\alpha\in P\cup-\theta} p_i e^{\alpha(q)}(\Phi_1^*)_i^{\alpha} - \\ - \sum_{\alpha,\beta\in P\cup-\theta} e^{\alpha(q)+\beta(q)}(\Phi_2^*)_{-\alpha}^{\beta} + \sum_{\alpha\in P\cup-\theta} e^{\alpha(q)}c_\alpha. \quad (4.3.58)$$

Гамільтоніан (4.3.58) є магнітною деформацією звичайного гамільтоніану типу Тоди, де параметри деформації є матричні елементи тензорів Φ_1^*, Φ_2^*. Щоб бачити це досить переписати гамільтоніан (4.3.59) у формі:

$$H_0^0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}}(p_i - \sum_{\alpha\in P\cup-\theta} e^{\alpha(q)}(\Phi_1^*)_i^{\alpha})^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}}(\sum_{\alpha\in P\cup-\theta} e^{\alpha(q)}(\Phi_1^*)_i^{\alpha})^2 - \\ - \sum_{\alpha,\beta\in P\cup-\theta} e^{\alpha(q)+\beta(q)}(\Phi_2^*)_{-\alpha}^{\beta} + \sum_{\alpha\in P\cup-\theta} e^{\alpha(q)}c_\alpha. \quad (4.3.59)$$

Приклад 4.13. Деталізуємо цей приклад у випадку алгебри Лі $\mathfrak{g} = gl(n)$ і відображення $\Phi(u)$, що задається формулою:

$$\Phi(u)(X) = (1 + Au)^{\frac{1}{2}}X(1 + Au)^{\frac{1}{2}} \quad (4.3.60)$$

В цьому випадку легко показати що $\Phi_1'(X) = A^{\frac{1}{2}}XA^{\frac{1}{2}}$ а також

$$\Phi_1(X) = \Phi_1^*(X) = \frac{1}{2}(AX+XA), \quad \Phi_2(X) = \Phi_2^*(X) = \frac{1}{4}(AXA - \frac{1}{2}(A^2X+XA^2)).$$

Більше того ми маємо що $\Phi^*(u)(X) = \Phi(u)(X)$, а отже:

$$(\Phi^*(u))^{-1}(X) = (1 + Au)^{-\frac{1}{2}}X(1 + Au)^{-\frac{1}{2}}$$

потрібна матриця A – така що $\sigma \cdot \Phi(u) = \Phi(u) \cdot \sigma$ – має форму [79]:

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} a_i X_{ii+1} + a_n X_{n1},$$

де параметри a_i довільні і X_{ij}, $i, j \in \overline{1, n}$ – стандартний базис алгебри $gl(n)$. Базис картанівської підалгебри в цьому випадку співпадає з елементами $H_i = X_{ii}$, $i \in \overline{1, n}$, елементи X_α, $X_{-\alpha}$ $\alpha \in P$ – це X_{ii+1} і X_{i+1i}, елементи X_θ і $X_{-\theta}$ – це X_{1n} і X_{n1} відповідно. Матриця q записується наступним чином: $q = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i X_{ii}$. Отже матриця Лакса (4.3.57) має вигляд:

$$L^{dT}(v) = \sum_{i=1}^{n}(p_i + \frac{1}{2}(a_i e^{q_i - q_{i+1}} + a_{i-1}e^{q_{i-1}-q_i}))(1+Au)^{-\frac{1}{2}}X_{ii}(1+Au)^{-\frac{1}{2}} +$$
$$+ v^{-1}\sum_{i=1}^{n} e^{q_i - q_{i+1}}(1+Au)^{-\frac{1}{2}}X_{i+1i}(1+Au)^{-\frac{1}{2}} +$$
$$+ v\sum_{i=1}^{n} c_i(1+Au)^{-\frac{1}{2}}X_{ii+1}(1+Au)^{-\frac{1}{2}},$$

де мається на увазі циклічність індексів $q_{n+1} \equiv q_1$, $X_{nn+1} \equiv X_{n1}$, $q_{-1} \equiv q_n$.

Використовуючи загальну формулу (4.3.59) і явні форми для відображень Φ_1^*, Φ_2^* прямими обчисленнями легко отримати наступну форму деформованого гамільтоніану Тоди у цьому випадку:

$$H_0^{(0)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\big(p_i - \frac{1}{2}(a_i e^{q_i - q_{i+1}} + a_{i-1}e^{q_{i-1}-q_i})\big)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 e^{2(q_i - q_{i+1})} + \sum_{i=1}^{n} c_i e^{q_i - q_{i+1}}. \tag{4.3.61}$$

Інтегровний гамільтоніан (4.3.61) був вперше отриманий в [79]. Приклади інших класичних матричних алгебр Лі також розглянуто у [79].

4.4. Висновки

В данному розділі побудовані матриці Лакса і інтеграли руху класично – інтегровних гамільтонових систем пов'язаних з класичним r-матрицями. Зокрема, побудовані матриці Лакса узагальнених моделей Годена, моделей типу Джейнса – Каммінгса – Діке, багатобозонних моделей, моделей Тоди та їх деформацій. Оригінальна частина данного розділу базується на публікаціях [79, 83, 87, 90, 91, 95, 98, 105, 107, 108, 109, 114].

Розділ 5

Солітонні рівняння: загальна схема.

5.1. Вступ

Підхід до конструювання солітонних рівнянь у двох вимірах, що розвивається в данному розділі, виник незалежно та у дещо різних формах у серіях робіт двох груп авторів: П.І.Голода [6, 42] та Фляшки, Нюела і Рат'ю [36, 54]. У роботах [36, 54] цей підхід застосовувася до алгебри петель, а у роботах Голода до алгебри петель та еліптичних алгебр що виникають у контексті рівняння Ландау – Ліфшиця. В данній главі ми розвиваємо цей підхід, поширюючи його на довільні r-матричні алгебри зконструйовані в главі 3. З цією метою ми описуємо загальну схему побудови $U-V$ –пар солітонних ієрархій стартуючи з класичної r-матриці зі спектральним параметрами [105, 106, 115]. Як і у випадку скінченновимірних інтегровних систем, суттєво відрізнятимуться інтегровні ієрархії побудовані по регулярним і сингулярними точками класичних r-матриць. Важливу роль у цій конструкції відіграватимуть також елементи зсуву.

Побудовані інтегровні рівняння розпадаються на два підкласи: так звані "еволюційні" рівняння що утворюють "малі" ієрархії і "неeволюційні" рівняння – так звані "негативні" потоки, що разом з еволюційними рівняннями утворюють "великі" ієрархії. Для кожної класичної r-матриці зі спектральними параметрами існує стандартна мала та велика ієрархії що співпадають з узагальненими ієрархіями магнетика Гайзенберга та кірального поля [105, 106]. Класичні r-матриці що мають особливі точки породжують також додаткові великі і малі ієрархії з ними пов'язані [115].

В цьому розділі розглянуто конкретні приклади інтегровних рівнянь малих та великих ієрархій пов'язаних з різними класичними r-матрицями. Серед них анізотропне рівняння НШ з похідною, векторне узагальнення рівнянь Ландау – Ліфшиця, а також наступні великі ієрархії: "подвоєна" векторна ієрархія Ландау – Ліфшиця, анізотропна ієрархія з двома зсувами, модифікована ієрархія Тоди.

Зауважимо що для застосувань важливими будуть однополюсні чи двополюсні підалгебри загальної багатоточкової r-матричної алгебри Лі і відповідні комутаційні співвідношення. Не дивлячись на це, з міркувань загальності, ми будемо розглядати загальну багатоточкову ситуацію.

Результати розділу базуються на роботах [71, 73, 74, 76, 77, 80, 81, 82, 89, 105, 106, 115].

5.2. Матриці Лакса і тензорні дужки

В цьому підрозділі ми детально опишемо дуальний простір до загальної багатоточкової алгебри Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,N,M} = \sum\limits_{k=1}^{N} \widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_k} + \sum\limits_{i=1}^{M} \widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0^{(i)}}$ і загальну матрицю Лакса, як елемент цього простору. З цією метою ми розглянемо лінійні тензорні дужки Пуасона наступної форми:

$$\{L_1^{-,(\nu_I)}(u), L_2^{-,(\nu_J)}(v)\} = [r_{12}(u,v), L_1^{-,(\nu_I)}(u)] - [r_{21}(v,u), L_2^{-,(\nu_J)}(v)], \quad (5.2.1)$$

де $L_1^{-,(\nu_I)}(u) = L^{-,(\nu_I)}(u) \otimes 1$, $L_2^{-,(\nu_J)}(v) = 1 \otimes L^{-,(\nu_J)}(v)$ і $L^{-,(\nu_I)}(u)$, $L^{-,(\nu_I)}(v)$ матриці Лакса, що відповідають точкам ν_I, ν_J, які належать множині $P \equiv \{\nu_0^{(i)}, \nu_k; k \in \overline{1,N}, i \in \overline{1,M}\}$. Явна форма матриць $L^{-,(\nu_I)}$, $L^{-,(\nu_J)}$ буде специфікована нижче.

Дужки (5.2.1) є коректно визначені. Дійсно, кососиметричність дужок (5.2.1) є очевидною. Легко показати, що тотожність Якобі для дужок (5.2.1) є наслідком узагальненого класичного рівняння Янга – Бакстера. Покажемо, що ці дужки можуть бути записані у вигляді дужок Лі – Пуасона на дуальному просторі до алгебри Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,N,M}$.

Має місце наступне Твердження [115]:

Твердження 5.1. *Існує спарювання* $\langle\ ,\ \rangle : (\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,N,M})^* \times \widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,N,M} \to \mathbb{C}$ *таке, що елемент загального положення простору* $(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,N,M})^*$ *має форму:*

$$L^{-,N,M}(v) = \sum_{i=1}^{M} L^{-,(\nu_0^{(i)})}(v) + \sum_{k=1}^{N} L^{-,(\nu_k)}(v), \tag{5.2.2}$$

де

$$L^{-,(\nu_0^{(i)})}(v) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{\dim \overline{\mathfrak{g}}_m^{\nu_0^{(i)}}} l^{(m),\nu_0^{(i)},\alpha}(v - \nu_0^{(i)})^m X_\alpha, \tag{5.2.3}$$

$$L^{-,(\nu_k)}(v) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{\dim \mathfrak{g}} l^{(m),\nu_k,\alpha}(v - \nu_k)^m X_\alpha \tag{5.2.4}$$

є елементами загального положення дуальних просторів $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0^{(i)}}$ *і* $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_k}$ *відповідно, а дужки Пуасона між динамічними змінними – компоненти матриці Лакса повторюють комутаційні співвідношення введеного базису в алгебрі* $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,N,M}$.

5.3. Інтеграли руху в інволюції на просторі $(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,N,M})^*$.

У попередньому розділі ми описали загальний елемент простору $(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,N,M})^*$ і природні дужки Лі – Пуасона $\{\ ,\ \}$ на $(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,N,M})^*$, записані в тензорній формі. Для того, щоб зконструювати інтегровні ієрархії, необхідно отримати нескінченний набір комутативних функцій на $(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,N,M})^*$ по відношенню до дужки Лі – Пуасона $\{\ ,\ \}$. Має місце наступна Теорема:

Теорема 5.1. *Генеруючі функції* $I^{\nu_I,m}(u) = tr(L^{-,(\nu_I)}(u))^m$, $I^{\nu_J,n}(u) = tr(L^{-,(\nu_J)}(v))^n$, *де точки* ν_I, ν_J *належать до множини* $P \equiv \{\nu_0^{(i)}, \nu_k; k \in \overline{1,N}, i \in \overline{1,M}\}$, *комутують по відношенню до дужки Лі – Пуасона* $\{\ ,\ \}$, *що дається формулою (5.2.1):*

$$\{tr(L^{-,(\nu_I)}(u))^m, tr(L^{-,(\nu_J)}(v))^n\} = 0,$$

Зауваження 49. Теорема 5.1 є дуалізованою версією відповідних Теорем з [77]-[78], що базується на теорії R–оператора. Ця Теорема забезпечує $N+M$– серій генеруючих функцій $I^{\nu_I,m}(u)$ комутативних інтегралів степені m на $(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,N,M})^*$. Фіксована генеруюча функція $I^{\nu_I,m}(u)$ продукує інтеграли $I_n^{\nu_I,m}$ як функцій змінних $l^{(m),\nu_k,\alpha}$ і $l^{(s),\nu_0^{(i)},\beta}$ за допомогою розкладу:

$$I^{\nu_I,m}(u) = tr(L^{(\nu_I)}(u))^m = \sum_{n=0}^{\infty} I_n^{\nu_I,m}(u-\nu_I)^n.$$

Функції $I_n^{\nu_I,m}$ є поліномами по змінних $l^{(m),\nu_k,\alpha}$, $l^{(s),\nu_0^{(i)},\beta}$. Ми використовуватимо їх, генеруючи комутативні потоки солітонних рівнянь.

5.4. Рівняння нульової кривизни і алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,N,M}$

В цьому підрозділі ми узальнемо один з основних Лі-алгебраїчних підходів до теорії солітоних рівнянь на випадок багатоточкових r-матричних алгебр $\sum\limits_{k=1}^{N}\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_k} + \sum\limits_{i=1}^{M}\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0^{(i)}}$. Цей підхід базується на рівняннях нульової кривизни і їх інтерпритації як умови узгодженості двух комутуючих гамільтонових потоків записаних в формі рівнянь Ейлера – Арнольда.

Має місце наступна Теорема:

Теорема 5.2. $\sum\limits_{k=1}^{N}\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_k}+\sum\limits_{i=1}^{M}\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0^{(i)}}$ *– значні функції* $\nabla I_n^{\nu_k,m}$, $\nabla I_s^{\nu_l,p}$, $\nabla I_n^{\nu_0^{(i)},m}$, $\nabla I_n^{\nu_0^{(j)},m}$, $k,l \in \overline{1,N}$, $i,j \in \overline{1,M}$, *де*

$$\nabla I_n^{\nu_k,m}(u) \equiv \sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}}\sum_{s\geq 0}\frac{\partial I_n^{\nu_k,m}}{\partial l^{(s),\nu_k,\alpha}}X^{(s),\nu_k,\alpha}(u), \tag{5.4.5a}$$

$$\nabla I_n^{\nu_0^{(i)},m}(u) \equiv \sum_{s\geq 0}\sum_{\alpha=1}^{\dim\overline{\mathfrak{g}}_s^{\nu_0^{(i)}}}\frac{\partial I_n^{\nu_0^{(i)},m}}{\partial l^{(s),\nu_0^{(i)},\alpha}}X^{(s),\nu_0^{(i)},\alpha}(u), \tag{5.4.5b}$$

є алгебразначними градієнтами функцій $I_n^{\nu_k,m}$, $I_n^{\nu_0^{(i)},m}$ задовольняють рівнянням нульової кривизни:

$$\frac{\partial \nabla I_n^{\nu_k,m}}{\partial t_s^{\nu_l,p}} - \frac{\partial \nabla I_s^{\nu_l,p}}{\partial t_n^{\nu_k,m}} + [\nabla I_n^{\nu_k,m}, \nabla I_s^{\nu_l,p}] = 0, \tag{5.4.6a}$$

$$\frac{\partial \nabla I_n^{\nu_k,m}}{\partial t_s^{\nu_0^{(j)},p}} - \frac{\partial \nabla I_s^{\nu_0^{(j)},p}}{\partial t_n^{\nu_k,m}} + [\nabla I_n^{\nu_k,m}, \nabla I_s^{\nu_0^{(j)},p}] = 0, \tag{5.4.6b}$$

$$\frac{\partial \nabla I_n^{\nu_0^{(i)},m}}{\partial t_s^{\nu_0^{(j)},p}} - \frac{\partial \nabla I_s^{\nu_0^{(j)},p}}{\partial t_n^{\nu_0^{(i)},m}} + [\nabla I_n^{\nu_0^{(i)},m}, \nabla I_s^{\nu_0^{(j)},p}] = 0. \tag{5.4.6c}$$

Зауваження 50. Зауважимо, що отримані рівняння нульової кривизни, можуть розглядатися як рівняння однієї “величезної” інтегровної ієрархії з $\sum\limits_{k=1}^{N} \widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_k} + \sum\limits_{i=1}^{M} \widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0^{(i)}}$ – значними $U-V$-парами. Але, завдяки структурі алгебри, тому факту, що кожний оператор з $U-V$–пари приймає значення тільки в одній підалгебрі $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_k}$ чи $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0^{(i)}}$ і тому факту, що рівняння нульової кривизни містить тільки одну пару алгеброзначних елементів, отримані інтегровні ієрархії ефективно визначаються тільки парою підалгебр $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_k}$ і $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_l}$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_k}$ і $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0^{(j)}}$ чи $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0^{(i)}}$ і $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0^{(j)}}$ відповідно. Крім того, існують інтегровні підієрархії з $U-V$–парами, що приймають значення тільки в $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_k}$ чи $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0^{(i)}}$. В результаті, число нееквівалентних інтегровних ієрархій асоційованих з r-матрицями $r(u,v)$, визначається числом неізоморфних підалгебр в множині $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_k}$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0^{(i)}}$, $k \in \overline{1,N}$, $i \in \overline{1,M_0}$, де M_0 — максимальне число спеціальних точок класичної r-матриці $r(u,v)$. Завдяки тому факту, що підалгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_k}$, $k \in \overline{1,N}$ є ізоморфними, число нееквівалентних інтегровних ієрархій асоційованих з r-матрицею $r(u,v)$, ефективно визначається числом її спеціальних точок.

Ми називатимемо інтегровні ієрархії, що містять тільки $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_k}$– значні чи $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0^{(i)}}$– значні $U-V$ – пари, “малими” ієрархіями, а ієрархії з $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_k} + \widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_l}$– значними, $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_k} + \widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0^{(j)}}$ – значними, чи $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0^{(i)}} + \widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0^{(j)}}$ – значними $U-V$– парами, “великими” ієрархіями.

5.5. Інтегровні ієрархії і регулярні точки r-матриць.

В цьому розділі ми опишемо найпростіші приклади інтегровних рівнянь, що належать до описаних у попередньому розділі малих і великих інтегровних ієрархій, які відповідають регулярним точкам r-матриць.

5.5.1. Узагальнена ієрархія рівнянь типу Ландау – Лівшиця. В цьому підрозділі ми зконструюємо явну форму найпростішого інтегровного рівняння асоційованого з підалгеброю $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_k}$ для довільної фіксованої регулярної точки ν_k. Ці рівняння будуть узагальнювати знамениті рівняння Ландау – Лівшиця та магнетика Гайзенбрга. Розглянемо загальну матрицю Лакса $L^{-,(\nu_k)}(u)$, що належить до простору $(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{\nu_k})^*$:

$$L^{-,(\nu_k)}(u) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}}(u-\nu_k)^m l^{(m),\nu_k,\alpha}X_\alpha.$$

Розглянемо генеруючу функцію комутуючих інтегралів другого порядку:

$$I^2(L^{-,(\nu_k)}(u)) = \frac{1}{2}tr(L^{-,(\nu_k)}(u))^2.$$

Узагальнення рівнянь Ландау – Лівшиця буде відповідати двом найпростішим інтегралам отриманим з функції $I^2(L^{-,(\nu_k)}(u))$ розкладом по степенях спектрального параметру $u-\nu_k$:

$$I^2(L^{-,(\nu_k)}(u)) = \sum_{m=0}^{\infty} I_m^{\nu_k,2}(u-\nu_k)^m.$$

Інтеграли $I_m^{\nu_k,2}$ є поліномами. Найпростіші інтеграли $I_m^{\nu_k,2}$ мають форму:

$$I_0^{\nu_k,2} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} g_{\alpha\beta}l^{(0),\nu_k,\alpha}l^{(0),\nu_k,\beta}, \quad I_1^{\nu_k,2} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} g_{\alpha\beta}l^{(0),\nu_k,\alpha}l^{(1),\nu_k,\beta}.$$

Їх градієнти є $U-V-$ парою узагальненого рівняння Ландау –Лівшиця:

$$U^{\nu_k}(u) \equiv \nabla I_0^{\nu_k,2} = \sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} l_\alpha^{(0),\nu_k} X^{(0),\nu_k,\alpha}(u), \tag{5.5.7a}$$

$$V^{\nu_k}(u) \equiv \nabla I_1^{\nu_k,2} = \sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} (l_\alpha^{(0),\nu_k} X^{(1),\nu_k,\alpha}(u) + l_\alpha^{(1),\nu_k} X^{(0),\nu_k,\alpha}(u)). \qquad (5.5.7b)$$

Відповідні рівняння нульової кривизни (5.4.6a) з $t_1^{2-,\nu_k} \equiv t_k$, $t_0^{2-,\nu_k} \equiv x_k$:

$$\frac{\partial U^{\nu_k}(u)}{\partial t_k} - \frac{\partial V^{\nu_k}(u)}{\partial x_k} + [U^{\nu_k}(u), V^{\nu_k}(u)] = 0, \qquad (5.5.8)$$

можуть бути записані у формі пари двох $\mathfrak{g}$– значних рівнянь:

$$\partial_{x_k} L^{(0),\nu_k} = [L^{(0),\nu_k}, L^{(1),\nu_k} - r_0(\nu_k,\nu_k)(L^{(0),\nu_k})], \qquad (5.5.9a)$$

$$\partial_{t_k} L^{(0),\nu_k} - \partial_{x_k} L^{(1),\nu_k} = [r_0(\nu_k,\nu_k)(L^{(1),\nu_k}), L^{(0),\nu_k}] + [L^{(1),\nu_k}, r_0(\nu_k,\nu_k)(L^{(0),\nu_k})]$$
$$+ [L^{(0),\nu_k}, (\partial_1 r_0(\nu_k,\nu_k) - \partial_2 r_0(\nu_k,\nu_k))(L^{(0),\nu_k})], \quad (5.5.9b)$$

де $L^{(i),\nu_k} \equiv \sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} l_\alpha^{(i),\nu_k} X^\alpha$, $r_0(L^{(0),\nu_k}) \equiv \sum_{\alpha,\delta=1}^{\dim\mathfrak{g}} r_0^{\delta\alpha}(\nu_k,\nu_k) l_\alpha^{(0),\nu_k} X_\delta$ і т.д. Система цих рівнянь є узагальненим рівнянням Ландау – Лівшиця асоційованим з простою алгеброю Лі $\mathfrak{g}$. Для того, щоб написати замість системи двох диференційних рванянь (5.5.9), одну систему диференційних рівнянь в часткових похідних, необхідно виразити $L^{(1),\nu_k}$ через $L^{(0),\nu_k}$, $\partial_{x_k} L^{(0),\nu_k}$, використовуючи рівняння (5.5.9a) і підставити отримані вирази в рівняння (5.5.9b). Форма отриманої залежності $L^{(1),\nu_k}$ від $L^{(0),\nu_k}$, $\partial_{x_k} L^{(0),\nu_k}$, отже і форма результуючих рівнянь в частинних похідних буде залежати від рівнянь коприєднаної орбіти групи G, до якої належить $L^{(0),\nu_k}$. Ми ілюструємо цю процедуру в найпростішому, але найбільш цікавому випадку:

Приклад 5.1. Нехай $\mathfrak{g} = sl(2)$. В цьому випадку коприєднані орбіти групи $SL(2)$ описуються наступним рівнянням:

$$(L^{(0),\nu_k})^2 = c_k Id, \qquad (5.5.10)$$

де c_k–довільне число. В цьому випадку рівняння (5.5.9a) розвязується наступним чином:

$$L^{(1),\nu_k} = r_0(\nu_k,\nu_k)(L^{(0),\nu_k}) + \frac{1}{4c_k}[L^{(0),\nu_k}, \partial_{x_k} L^{(0)}] + c(L^{(0),\nu_k})L^{(0),\nu_k}, \quad (5.5.11)$$

де $c(L^{(0),\nu_k})$ є скалярною функцією від $L^{(0),\nu_k}$, яка обраховується використовуючи той факт, що інтеграл $I_1^{\nu_k,2}(L) = tr(L^{(0),\nu_k}L^{(1),\nu_k}) = c_1^{\nu_k,2}$ є постійний по відношенню до всіх часових потоків. Покладаючи $c_1^{\nu_k,2} = 0$ і приймаючи до уваги, що на вибраній орбіті $tr(L^{(0),\nu_k})^2 = 2c_k$ отримаємо:

$$L^{(1),\nu_k} = \frac{1}{4c_k}[L^{(0),\nu_k}, \partial_{x_k}L^{(0),\nu_k}] - \frac{1}{2c_k}tr\Big(r_0(\nu_k,\nu_k)(L^{(0),\nu_k})L^{(0),\nu_k}\Big)L^{(0),\nu_k} + \\ + r_0(\nu_k,\nu_k)(L^{(0),\nu_k}). \quad (5.5.12)$$

З метою зручності, ми покладемо, надалі, $c_k = \frac{1}{4}$. Підставляючи рівність (5.5.12) в рівняння (5.5.9b), ми отримаємо наступне рівняння:

$$\partial_{t_k}L^{(0),\nu_k} = [L^{(0),\nu_k}, \partial^2_{x_k}L^{(0),\nu_k}] - 2\partial_{x_k}\Big(tr\Big(r_0(\nu_k,\nu_k)(L^{(0),\nu_k})L^{(0),\nu_k}\Big)L^{(0),\nu_k}\Big) + \\ + \Big([r_0(\nu_k,\nu_k)([L^{(0)}, \partial_{x_k}L^{(0),\nu_k}]), L^{(0),\nu_k}] + [[L^{(0),\nu_k}, \partial_{x_k}L^{(0),\nu_k}], r_0(\nu_k,\nu_k)(L^{(0),\nu_k})]\Big) \\ + \partial_{x_k}r_0(\nu_k,\nu_k)(L^{(0),\nu_k}) + [L^{(0),\nu_k}, (\partial_1 r_0(\nu_k,\nu_k) - \partial_2 r_0(\nu_k,\nu_k) - r_0^2(\nu_k,\nu_k))(L^{(0),\nu_k})]. \\ (5.5.13)$$

Це рівняння є найбільш загальним інтегровним $sl(2)$– значним рівнянням Ландау – Лівшиця. На відміну від стандартного рівняння Ландау – Лівшиця, воно містить додаткові члени першого і третього порядку по динамічним змінним.

Відзначемо, що рівняння (5.5.13) може бути спрощене до більш простого і впізнаванного вигляду. Має місце наступне Твердження:

Твердження 5.2. *Узагальнена $sl(2)$–значне рівняння Ландау – Лівшиця може бути записано в наступній формі:*

$$\partial_{t_k}L^{(0),\nu_k} = [L^{(0),\nu_k}, \partial^2_{x_k}L^{(0),\nu_k}] + 2\partial_{x_k}r_0^{sym}(\nu_k,\nu_k)(L^{(0),\nu_k}) - \\ - (tr\ r_0^{sym}(\nu_k,\nu_k))\partial_x L^{(0),\nu_k} - 2\partial_{x_k}\Big(tr\Big(r_0^{sym}(\nu_k,\nu_k)(L^{(0),\nu_k})L^{(0)}\Big)L^{(0),\nu_k}\Big) + \\ + [L^{(0),\nu_k}, (\partial_1 r_0(\nu_k,\nu_k) - \partial_2 r_0(\nu_k,\nu_k) - r_0^2(\nu_k,\nu_k))(L^{(0),\nu_k})],$$

де $r_0^{sym}(\nu_k,\nu_k)$ – це симетрична частина тензора $r_0(\nu_k,\nu_k)$ записаного в ортогональному базисі.

Зауваження 51. Відзначимо, що у випадку кососиметричних r-матриць ми маємо, що $r_0^{sym}(\nu_k, \nu_k) = 0$, а отже другий, третій і четвертий доданок в правій частині отриманого рівняння зникає і воно набуває стандартнї форми рівнянь Ландау – Лівшиця з тензором анізотропії $J(\nu_k) = (\partial_1 r_0(\nu_k, \nu_k) - \partial_2 r_0(\nu_k, \nu_k) - r_0^2(\nu_k, \nu_k))$, який є симетричним завдяки кососиметричності r-матриці $r(u, v)$.

5.5.2. Велика ієрархія: ієрархія узагальненого кірального поля. Розглянемо найпростіший "від'ємний" потік великої ієрархії, що відповідає алгебрі Лі $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_k} + \widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_l}$ і деяким фіксованим регулярним точкам ν_k і ν_l. Перехід до рівнянь "великої" ієрархії означає "подвоєння" алгебри, яке веде до "подвоєння" комутуючих потоків тобто "подвоєння" часів в ієрархії і одночасно "подвоєння" незалежних динамічних змінних. Проілюструємо це конкретним прикладом.

Розглянемо матриці Лакса $L^{-,(\nu_k)}(u)$ і $L^{-,(\nu_l)}(u)$, що належать до просторів $(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{\nu_k})^*$ і $(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{\nu_l})^*$ відповідно:

$$L^{-,(\nu_k)}(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} (u-\nu_k)^m l^{(m),\nu_k,\alpha} X_\alpha, \quad L^{-,(\nu_l)}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} (u-\nu_l)^n l^{(n),\nu_l,\beta} X_\beta.$$

Розглянемо генеруючі функції інтегралів другого порядку:

$$I^2(L^{-,(\nu_k)}(u)) = \frac{1}{2} tr(L^{-,(\nu_k)}(u))^2, \quad I^2(L^{-,(\nu_l)}(u)) = \frac{1}{2} tr(L^{-,(\nu_l)}(u))^2.$$

Узагальнення рівнянь керального поля відповідає двум найпростішим інтегралам отриманим з функцій $I^2(L^{-,(\nu_k)}(u))$ і $I^2(L^{-,(\nu_l)}(u))$ розкладом за степенями $(u - \nu_k)$ і $(u - \nu_l)$:

$$I^2(L^{-,(\nu_k)}(u)) = \sum_{m=0}^{\infty} I_m^{\nu_k,2} (u - \nu_k)^m, \quad I^2(L^{-,(\nu_l)}(u)) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n^{\nu_l,2} (u - \nu_k)^n.$$

Очевидно, що $I_m^{\nu_k,2}$, $I_n^{\nu_l,2}$ є поліномами. Найпростіші з них наступні:

$$I_0^{\nu_k,2} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} g_{\alpha\beta} l^{(0),\nu_k,\alpha} l^{(0),\nu_k,\beta}, \quad I_0^{\nu_l,2,} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} g_{\alpha\beta} l^{(0),\nu_l,\alpha} l^{(0),\nu_l,\beta}.$$

Їх алгеброзначні градієнти записуються мають вигляд:

$$U(u) = \nabla I_0^{\nu_k,2} = \sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} l_\alpha^{(0),\nu_k} X^{(0),\nu_k,\alpha}(u), \quad V(u) = \nabla I_0^{\nu_l,2} = \sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} l_\alpha^{(0),\nu_l} X^{(0),\nu_l,\alpha}(u) \tag{5.5.14}$$

Рівняння нульової кривизни (5.4.6a) з $t_0^{2,\nu_k} \equiv x_k$, $t_0^{2,\nu_l} \equiv x_l$ дають наступні рівняння на компоненти $l_\alpha^{(0),\nu_k}$ і $l_\beta^{(0),\nu_l}$ матриць $U-V$:

$$\partial_{x_l} l_\alpha^{(0),\nu_k} = -\sum_{\alpha,\beta,\delta=1}^{\dim\mathfrak{g}} C_{\delta,\alpha}^{\beta} r^{\delta\gamma}(\nu_k,\nu_l) l_\beta^{(0),\nu_k} l_\gamma^{(0),\nu_l}, \tag{5.5.15a}$$

$$\partial_{x_k} l_\alpha^{(0),\nu_l} = -\sum_{\alpha,\beta,\delta=1}^{\dim\mathfrak{g}} C_{\delta,\alpha}^{\gamma} r^{\delta\beta}(\nu_l,\nu_k) l_\beta^{(0),\nu_k} l_\gamma^{(0),\nu_l}, \tag{5.5.15b}$$

де ми використали комутаційні співвідношення (3.7.42) для базисних елементів $X^{(0),\nu_k,\alpha}(u)$, $X^{(0),\nu_l,\beta}(u)$.

Вводячи незалежні від спектрального параметру матриці:

$$L^{(0),\nu_k} = \sum_{\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} l_\beta^{(0),\nu_k} X^\beta, \;\; L^{(0),\nu_l} = \sum_{\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}} l_\gamma^{(0),\nu_l} X^\gamma$$

можна переписати рівняння (5.5.15a) в матричній формі:

$$\partial_{x_l} L^{(0),\nu_k} = -[L^{(0),\nu_k}, r(\nu_k,\nu_l)(L^{(0),\nu_l})], \tag{5.5.16a}$$

$$\partial_{x_k} L^{(0),\nu_l} = -[L^{(0),\nu_l}, r(\nu_l,\nu_k)(L^{(0),\nu_k})], \tag{5.5.16b}$$

де $r(\nu_k,\nu_l)(L^{(0),\nu_l}) \equiv \sum\limits_{\gamma,\delta=1}^{\dim\mathfrak{g}} r^{\delta\gamma}(\nu_k,\nu_l) l_\gamma^{(0),\nu_l} X_\delta$ і т.д.

Рівняння (5.5.16) є найбільш загальними анізотропними рівняннями типу кірального поля, де роль тензорів анізотропії грають компоненти r-матриці $r^{\delta\gamma}(\nu_k,\nu_l)$ і $r^{\delta\gamma}(\nu_l,\nu_k)$. В випадку кососиметричних r-матриць рівняння (5.5.16) співпадає з стандартним рівнянням анізотропного кірального поля [22].

Зауваження 52. Відзначимо, що подвоєння ієрархії привело до подвоєння динамічних змінних: ми маємо дві матриці динамічних змінних $L^{(0),\nu_l}$ і $L^{(0),\nu_k}$ в той час, як у випадку малої ієрархії (узагальненої ієрархії Ландау – Лівшиця) ми мали тільку одну матрицю динамічних змінних $L^{(0),\nu_k}$.

Приклад 5.2. Нехай $sl(2) \simeq so(3)$. В цьому випадку, ототожнюючи алгебру Лі $sl(2) \simeq so(3)$ з трьохвимірним векторним простором, а дужку Лі з векторним добутком двох векторів, можна переписати рівняння (5.5.16) у векторній формі:

$$\partial_{x_l} \overrightarrow{L}^{(0),\nu_k} = -[\overrightarrow{L}^{(0),\nu_k} \times r(\nu_k, \nu_l)(\overrightarrow{L}^{(0),\nu_l})],$$

$$\partial_{x_k} \overrightarrow{L}^{(0),\nu_l} = -[\overrightarrow{L}^{(0),\nu_l} \times r(\nu_l, \nu_k)(\overrightarrow{L}^{(0),\nu_k})],$$

де $r(\nu_l, \nu_k)$ діє на $\overrightarrow{L}^{(0),\nu_l}$ як лінійний оператор на вектор. Зауважимо, що вектори $\overrightarrow{L}^{(0),\nu_k}$, $\overrightarrow{L}^{(0),\nu_l}$ задовольняють вимогам $(\overrightarrow{L}^{(0),\nu_i}, \overrightarrow{L}^{(0),\nu_i}) = c_i$, $i \in k, l$, які є наслідком постійності гамільтоніанів $I_0^{\nu_k,2}$, $I_0^{\nu_l,2}$ по відношенню до всіх часових потоків.

5.6. Матриці Лакса і "зсунуті" дужки Пуасона.

Для того, щоб мати змогу отримати всі інтегровні ієрархії в просторі розмірності 1+1, буде необхідно розглянути більш загальні інтеграли отримані з інтегралів $I^{\nu_I,m}(u)$ процедурою "зсуву аргументу". Ці інтеграли перестають бути комутативними по відношенню до дужки (5.2.1), але є комутативними відносно, так званої, "зсунутої" дужки побудованої за допомогою постійної дужки:

$$\{L_1^{-,(\nu_I)}(u), L_2^{-,(\nu_J)}(v)\}_c = [r_{12}(u,v), c_1^{(\nu_I)}(u)] - [r_{21}(v,u), c_2^{(\nu_J)}(v)]. \quad (5.6.17)$$

означеною за допомогою деякої постійної (тобто незалежної від динамічниїх змінних) матриці $c^{(\nu_I)}(u) \in \mathfrak{g}$, асоційованою з точкою ν_I.

Має місце наступне Твердження:

Твердження 5.3. *(i) формула (5.6.17) визначає дужку Пуасона на просторі $(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,N,M})^*$.*

(ii) дужка (5.6.17) є узгодженою з дужкою (5.2.1).

Використовуючи сумісність лінійної і постійної тензорних дужок, можливо визначити наступну "зсунуту" тензорну дужку:

$$\{L_1^{-,(\nu_I)}(u), L_2^{-,(\nu_J)}(v)\}_2 = [r_{12}(u,v), L_1^{-,(\nu_I)}(u) + c_1^{(\nu_I)}(u)] - \\ - [r_{21}(v,u), L_1^{-,(\nu_J)}(u) + c_2^{(\nu_J)}(v)]. \quad (5.6.18)$$

Розглянемо умови, при яких права і ліва частина виразу (5.6.18) є сумісними і не зводяться до стандартної форми (5.2.1). Для цієї мети необхідно розглянути рівність (5.6.18) як функціональну рівність, тобто врахувати розклад функцій $L_1^{-,(\nu_I)}(u)$, $L_2^{-,(\nu_J)}(v)$ за спектральними параметрами. Відзначимо, що ми поки що не фіксували залежність $c_1^{(\nu_I)}(u)$, $c_2^{(\nu_J)}(v)$ від спектральних параметрів u і v. Легко бачити, що в випадку однакової функціональної залежності матриць $L_1^{-,(\nu_I)}(u)$ і $c_1^{(\nu_I)}(u)$, $L_2^{-,(\nu_J)}(v)$ і $c_2^{(\nu_J)}(v)$ від u і v проста заміна змінних $L_1^{-,(\nu_I)}(u) \to L_1^{-,(\nu_I)}(u) + c_1^{(\nu_I)}(u)$, $L_2^{-,(\nu_J)}(v) \to L_2^{-,(\nu_J)}(v) + c_2^{(\nu_J)}(v)$ перетворює дужки (5.6.18) до стандартної форми (5.2.1). Отже, залежність $c_1^{(\nu_I)}(u)$ і $c_2^{(\nu_J)}(v)$ повинна відрізнятися від залежності $L_1^{-,(\nu_I)}(u)$ і $L_2^{-,(\nu_J)}(v)$ від спектральних параметрів u і v для того, щоб введена конструкція була нетривіальною. Завдяки тому факту, що $L_1^{-,(\nu_I)}(u)$, $L_2^{-,(\nu_J)}(v)$ є рядами Тейлора за змінними $(u - \nu_I)$, $(v - \nu_J)$, елементи $c_1^{(\nu_I)}(u)$, $c_2^{(\nu_J)}(v)$ повинні мати полюси в точках ν_I, ν_J. З іншого боку, порівняння правої і лівої сторони виразу (5.6.18), показує, що функції $c_1^{(\nu_I)}(u)$, $c_1^{(\nu_J)}(u)$ не можуть бути довільними рядами Лорана для того, щоб вирази (5.6.17), (5.6.18) були узгодженими. Дійсно, функції $\{L_1^{-,(\nu_I)}(u),\ L_2^{-,(\nu_J)}(v)\}$ є рядами Тейлора за змінними $(u - \nu_I)$ і $(v - \nu_J)$. Отже ліва сторона рівностей (5.6.17) і (5.6.18) не містить негативних степенів змінних $(u - \nu_I)$, $(v - \nu_J)$, в той час, як їх права сторона містить елементи $c_1^{(\nu_I)}(u)$, $c_2^{(\nu_J)}(v)$, тобто може мати полюси в точках ν_I, ν_J.

Має місце наступна Теорема:

Теорема 5.3. *(i) Дужки (5.6.17) і (5.6.18) є коректно визначеними якщо функція $c_1^{(\nu_I)}(u)$ є узагальненим елементом зсуву з полюсом в точці $u=\nu_I$ порядку не більше, ніж один таким, що виконується наступна рівність:*

$$[r_{12}(\nu_I,v), c_{-1}^{(\nu_I)}\otimes 1]=0, \tag{5.6.19}$$

де $c_{-1}^{(\nu_I)}$ є лишком узагального елементу зсуву $c^{(\nu_I)}(u)$ в точці $u=\nu_I$.

(ii) Якщо точка ν_I є регулярною точкою класичної r-матриці, тоді відповідний елемент $c^{(\nu_I)}(u)$ в дужці (5.6.18) є тривіальним.

(iii) Якщо r-матриця $r(u,v)$ в околі особливої точки $\nu_I=\nu_0^{(i)}$ задовольняє умові (1.3.10) з $k=1$, тоді умова (5.6.19) виконується автоматично для будь-якого елемента $c^{(\nu_0^{(i)})}(u)$ асоційованого з цією точкою.

Надалі, ми будемо розглядати дужки зсунуті тільки за допомогою елементів зсуву, що задовольняють умовам Теореми 5.3. Явна форма цих дужок наступна:

$$\{L_1^{-,(\nu_k)}(u), L_2^{-,(\nu_l)}(v)\}_2=[r_{12}(u,v),L_1^{-,(\nu_k)}(u)]-[r_{21}(v,u),L_1^{-,(\nu_l)}(u)], \tag{5.6.20a}$$

$$\begin{aligned}\{L_1^{-,(\nu_k)}(u), L_2^{-,(\nu_0^{(j)})}(v)\}_2=[r_{12}(u,v),L_1^{-,(\nu_k)}(u)]-&\\ -[r_{21}(v,u),L_1^{-,(\nu_0^{(j)})}(u)+c_2^{(\nu_0^{(j)})}(v)],&\end{aligned} \tag{5.6.20b}$$

$$\begin{aligned}\{L_1^{-,(\nu_0^{(i)})}(u), L_2^{-,(\nu_0^{(j)})}(v)\}_2=[r_{12}(u,v),L_1^{-,(\nu_0^{(i)})}(u)+c_1^{(\nu_0^{(i)})}(u)]-&\\ -[r_{21}(v,u),L_1^{-,(\nu_0^{(j)})}(u)+c_2^{(\nu_0^{(j)})}(v)],&\end{aligned} \tag{5.6.20c}$$

де $[r_{12}(u,v),c_1^{(\nu_0^{(i)})}(u)]-[r_{21}(v,u),c_2^{(\nu_0^{(i)})}(v)]=0, i\in\overline{1,M}$ по самому визначенню елементів зсуву.

5.7. Інтеграли руху і зсунута дужка на $(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,N,M})^*$.

В попередньому підрозділі ми визначили зсунуту дужку Лі – Пуасона $\{\ ,\ \}_2$ на $(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,N,M})^*$ за допомогою узагальнених елементів зсуву. Для того, щоб зконструювати інтегровні ієрархії, буде необхідно отримати нескінчений набір функції в інволюції на $(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,N,M})^*$ по відношенню до зконструйованої дужки $\{\ ,\ \}_2$. Має місце наступна Теорема:

Теорема 5.4. *Генеруючи функції* $I^{\nu_I,m}(u) = tr(L^{-,(\nu_I)}(u) + c^{(\nu_I)}(u))^m$, $I^{\nu_J,n}(u) = tr(L^{-,(\nu_J)}(v) + c^{(\nu_J)}(u))^n$, *де точки* ν_I, ν_J *належать множині* $P \equiv \{\nu_0^{(i)}, \nu_k | k \in \overline{1,N}, i \in \overline{1,M}\}$, *а* $c^{(\nu_J)}(u)$ *є узагальненими елементами зсуву такими, що* $c^{(\nu_k)}(u) = 0$ *і* $c^{(\nu_0^{(i)})}(u)$ *задовольняє умовам Твердження 5.3, комутують по відношенню до зсунутих дужок Лі – Пуасона* $\{\ ,\ \}_2$, *що задаються формулою (5.6.20):*

$$\{tr(L^{-,(\nu_k)}(u))^m, tr(L^{-,(\nu_l)}(v))^n\}_2 = 0,$$
$$\{tr(L^{-,(\nu_k)}(u))^m, tr(L^{-,(\nu_0^{(j)})}(v) + c^{(\nu_0^{(j)})}(u))^n\}_2 = 0,$$
$$\{tr(L^{-,(\nu_0^{(i)})}(u) + c^{(\nu_0^{(i)})}(u))^m, tr(L^{-,(\nu_0^{(j)})}(v) + c^{(\nu_0^{(j)})}(u))^n\}_2 = 0.$$

Зауваження 53. Теорема 5.4 є дуалізованою версією відповідної Теореми з роботи [31], що базується на класичних R-операторах і класичному дублі. Теорема дає набір з $N+M$–серій генеруючих функцій комутуючих інтегралів на просторі $(\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,N,M})^*$ по відношенню до зсунутої дужки. Фіксована генеруюча функція продукує інтеграли $I_n^{\nu_k,m}$, що мають таку саму форму, що в незсунутому випадку і інтеграли $I_n^{c,\nu_0^{(i)},m}$, що залежать від компонентів елемента зсуву і визначається за допомогою розкладів:

$$I^{c,\nu_0^{(i)},m}(u) \equiv tr(L^{(\nu_I)}(u) + c^{(\nu_0^{(i)})}(u))^m = \sum_{n=-m}^{\infty} I_n^{c,\nu_0^{(i)},m}(u-\nu_0^{(i)})^n. \quad (5.7.21)$$

Як легко показати, функції $I_n^{c,\nu_0^{(i)},m}$ є неоднорідними завдяки присутності елемента зсуву поліномами по змінних $l^{(s),\nu_0^{(i)},\beta}$. Ми будемо використовувати їх щоб генерувати комутативні потоки солітонних ієрархій, що мають $U-V$–пари, які містять постійний доданок повязаний з присутністю елемента зсуву у відповідних комутуючих інтегралах.

Зауваження 54. Зауважимо, що якщо ми покладемо $c^{(\nu_0^{(i)})}(u) = 0$ ми отримуємо інтеграли $I_n^{\nu_0^{(i)},m}$ розглянуті в попередньому розділі.

5.7.1. Рівняння нульової кривизни і зсунуті інтеграли руху. В цьому підрозділі ми узагальнимо результати підрозділу (5.4), поширивши їх на зсунуті дужки і інтеграли руху. Має місце наступна Теорема [115]:

Теорема 5.5. $\sum\limits_{k=1}^{N} \widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_k} + \sum\limits_{i=1}^{M} \widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0^{(i)}}$*-значні функції* $\nabla I_n^{\nu_k,m}$, $\nabla I_s^{\nu_l,p}$, $\nabla I_n^{c,\nu_0^{(i)},m}$, $\nabla I_n^{c,\nu_0^{(j)},m}$, $k,l \in \overline{1,N}$, $i,j \in \overline{1,M}$, *де*

$$\nabla I_n^{\nu_k,m}(u) \equiv \sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} \sum_{s\geq 0} \frac{\partial I_n^{\nu_k,m}}{\partial l^{(s),\nu_k,\alpha}} X^{(s),\nu_k,\alpha}(u), \tag{5.7.22a}$$

$$\nabla I_n^{c,\nu_0^{(i)},m}(u) \equiv \sum_{s\geq 0} \sum_{\alpha=1}^{\dim\overline{\mathfrak{g}}_s^{\nu_0^{(i)}}} \frac{\partial I_n^{c,\nu_0^{(i)},m}}{\partial l^{(s),\nu_0^{(i)},\alpha}} X^{(s),\nu_0^{(i)},\alpha}(u), \tag{5.7.22b}$$

є алгебразначними градієнтами функцій $I_n^{\nu_k,m}$, $I_n^{c,\nu_0^{(i)},m}$ *задовольняють рівнянню нульової кривизни:*

$$\frac{\partial \nabla I_n^{\nu_k,m}}{\partial t_s^{\nu_0^{(j)},p}} - \frac{\partial \nabla I_s^{c,\nu_0^{(j)},p}}{\partial t_n^{\nu_k,m}} + [\nabla I_n^{\nu_k,m}, \nabla I_s^{c,\nu_0^{(j)},p}] = 0, \tag{5.7.23a}$$

$$\frac{\partial \nabla I_n^{c,\nu_0^{(i)},m}}{\partial t_s^{\nu_0^{(j)},p}} - \frac{\partial \nabla I_s^{c,\nu_0^{(j)},p}}{\partial t_n^{\nu_0^{(i)},m}} + [\nabla I_n^{c,\nu_0^{(i)},m}, \nabla I_s^{c,\nu_0^{(j)},p}] = 0. \tag{5.7.23b}$$

5.8. Малі інтегровні ієрархії.

В цьому підрозділі ми розглянемо інтегровні ієрархії, що мають $U-V$–пари, які приймають значення в одній і тій самій r-матричній підалгебрі $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0^{(j)}}$ асоційованій з особливою точкою $\nu_0^{(j)}$. Ми випишемо явно відповідні інтеграли руху, їх матричні градієнти – $U-V$-пари солітонних рівнянь – а також самі ці рівняння.

5.8.1. Загальні $U-V$-пари. Для того, щоб отримати загальні $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0^{(i)}}$– значні $U-V$– пари для рівнянь нульової кривизни в рамках нашого підходу, необхідно спершу розглянути відповіні матриці Лакса та інтегровні гамільтоніани. Матриці Лакса і відповідні інтеграли будуть залежати від елементів зсуву. Зауважимо, одначе, що елементи зсуву не вплинуть на відповідні дужки Лі – Пуасона у випадку одноточкових алгебр.

Нехай $c^{(\nu_0^{(i)})}(v)$ буде елемент зсуву, що задовольняє умові (1.2.5). Відповідна зсунута матриця Лакса має наступну форму:

$$L^{-,(\nu_0^{(i)})}(v) = c^{(\nu_0^{(i)})}(v) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{\dim \overline{\mathfrak{g}}_m^{\nu_0^{(i)}}} l^{(m),\nu_0^{(i)},\alpha}(v-\nu_0^{(i)})^m X_\alpha. \tag{5.8.24}$$

Явний вигляд матриці Лакса і інтегралів руху залежатиме від явного вигляду елементу зсуву $c^{(\nu_0^{(i)})}(v)$. У випадку інтегровних ієрархій, що пов'язані з підалгебрами $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0^{(i)}}$ форми елемента зсуву може бути різною. Ми обмежимося елементами зсуву, що мають полюси першого порядку:

$$c^{(\nu_0^{(i)})}(v) = c^{(-1)}(v-\nu_0^{(i)})^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c^{(k)}(v-\nu_0^{(i)})^k,$$

для деяких $c^{(k)} \in \mathfrak{g}$. Інтеграли $I^{c,\nu_0^{(i)},m}(u)$ даються розкладами:

$$I^{c,\nu_0^{(i)},m}(v) \equiv tr(L^{-,(\nu_0^{(i)})}(v) + c^{(\nu_0^{(i)})}(v))^m = \sum_{n=-m}^{\infty} I_n^{c,\nu_0^{(i)},m}(v-\nu_0^{(i)})^n.$$

З метою спрощення ми надалі припустимо, що $c^{(k)} \in \overline{\mathfrak{g}}_k^{\nu_0^{(i)}}$, $k \geq 0$ так, що аналітична частина функцій $c^{(\nu_0^{(i)})}(v)$ може бути усунута перевизначенням координатних функцій $l^{(k),\nu_0^{(i)},\alpha}$: $l^{(k),\nu_0^{(i)},\alpha} \to l^{(k),\nu_0^{(i)},\alpha} + c^{(k),\alpha}$. Розглянемо найпростіші інтеграли — $I_0^{c,\nu_0^{(i)},2}$, $I_1^{c,\nu_0^{(i)},2}$, $I_2^{c,\nu_0^{(i)},2}$. Вони мають форму:

$$I_0^{c,\nu_0^{(i)},2} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim \overline{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0^{(i)}}} g_{\alpha\beta} l^{(0),\nu_0^{(i)},\alpha} l^{(0),\nu_0^{(i)},\beta} + \sum_{\alpha=1}^{\dim \overline{\mathfrak{g}}_{-1}^{c}} \sum_{\beta=1}^{\dim \overline{\mathfrak{g}}_1^{\nu_0^{(i)}}} g_{\alpha\beta} c^{(-1),\alpha} l^{(1),\nu_0^{(i)},\beta}, \tag{5.8.25a}$$

$$I_1^{c,\nu_0^{(i)},2} = \sum_{\alpha=1}^{\dim\overline{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0^{(i)}}} \sum_{\beta=1}^{\dim\overline{\mathfrak{g}}_1^{\nu_0^{(i)}}} g_{\alpha\beta} l^{(0),\nu_0^{(i)},\alpha} l^{(1),\nu_0^{(i)},\beta} + \sum_{\alpha=1}^{\dim\overline{\mathfrak{g}}_{-1}^{c}} \sum_{\beta=1}^{\dim\overline{\mathfrak{g}}_2^{\nu_0^{(i)}}} g_{\alpha\beta} c^{(-1),\alpha} l^{(2),\nu_0^{(i)},\beta}. \tag{5.8.25b}$$

$$I_2^{\nu_0^{(i)},2} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim\overline{\mathfrak{g}}_1^{\nu_0^{(i)}}} g_{\alpha\beta} l^{(1),\nu_0^{(i)},\alpha} l^{(1),\nu_0^{(i)},\beta} + \sum_{\alpha=1}^{\dim\overline{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0^{(i)}}} \sum_{\beta=1}^{\dim\overline{\mathfrak{g}}_2^{\nu_0^{(i)}}} g_{\alpha\beta} l^{(0),\nu_0^{(i)},\alpha} l^{(2),\nu_0^{(i)},\beta} + \sum_{\alpha=1}^{\dim\overline{\mathfrak{g}}_{-1}^{c}} \sum_{\beta=1}^{\dim\overline{\mathfrak{g}}_3^{\nu_0^{(i)}}} g_{\alpha\beta} c^{(-1),\alpha} l^{(3),\nu_0^{(i)},\beta}, \tag{5.8.25c}$$

де $\overline{\mathfrak{g}}_{-1}^{c}$ — це підпростір в $\mathfrak{g}$, в якому приймає значення елемент $c^{(-1)}$.

Відповідні матричні градієнти, що генерують найпростіші $U-V-$ пари солітонних рівнянь, записуються наступним чином:

$$\nabla I_0^{c,\nu_0^{(i)},2} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim\overline{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0^{(i)}}} g_{\alpha\beta} l^{(0),\nu_0^{(i)},\alpha} X^{(0),\nu_0^{(i)},\beta}(u) + \sum_{\alpha=1}^{\dim\overline{\mathfrak{g}}_{-1}^{c}} \sum_{\beta=1}^{\dim\overline{\mathfrak{g}}_1^{\nu_0^{(i)}}} g_{\alpha\beta} c^{(-1),\alpha} X^{(1),\nu_0^{(i)},\beta}(u), \tag{5.8.26a}$$

$$\begin{aligned}\nabla I_1^{c,\nu_0^{(i)},2} = {} & \sum_{\alpha=1}^{\dim\overline{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0^{(i)}}} \sum_{\beta=1}^{\dim\overline{\mathfrak{g}}_1^{\nu_0^{(i)}}} g_{\alpha\beta} l^{(1),\nu_0^{(i)},\beta} X^{(0),\nu_0^{(i)},\alpha}(u) + \\ & + \sum_{\alpha=1}^{\dim\overline{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0^{(i)}}} \sum_{\beta=1}^{\dim\overline{\mathfrak{g}}_1^{\nu_0^{(i)}}} g_{\alpha\beta} l^{(0),\nu_0^{(i)},\alpha} X^{(1),\nu_0^{(i)},\beta}(u) + \sum_{\alpha=1}^{\dim\overline{\mathfrak{g}}_{-1}^{c}} \sum_{\beta=1}^{\dim\overline{\mathfrak{g}}_2^{\nu_0^{(i)}}} g_{\alpha\beta} c^{(-1),\alpha} X^{(2),\nu_0^{(i)},\beta}(u).\end{aligned} \tag{5.8.26b}$$

$$\nabla I_2^{c,\nu_0^{(i)},2} = \sum_{\alpha=1}^{\dim\overline{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0^{(i)}}} \sum_{\beta=1}^{\dim\overline{\mathfrak{g}}_2^{\nu_0^{(i)}}} g_{\alpha\beta} l^{(2),\nu_0^{(i)},\beta} X^{(0),\nu_0^{(i)},\alpha}(u) + \sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim\overline{\mathfrak{g}}_1^{\nu_0^{(i)}}} g_{\alpha\beta} l^{(1),\nu_0^{(i)},\alpha} X^{(1),\nu_0^{(i)},\beta}(u)$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{\dim\overline{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0^{(i)}}}\sum_{\beta=1}^{\dim\overline{\mathfrak{g}}_2^{\nu_0^{(i)}}} g_{\alpha\beta}l^{(0),\nu_0^{(i)},\alpha}X^{(2),\nu_0^{(i)},\beta}(u)+\sum_{\alpha=1}^{\dim\overline{\mathfrak{g}}_{-1}^{c}}\sum_{\beta=1}^{\dim\overline{\mathfrak{g}}_3^{\nu_0^{(i)}}} g_{\alpha\beta}c^{(-1),\alpha}X^{(3),\nu_0^{(i)},\beta}(u), \tag{5.8.26c}$$

Зауваження 55. Зауважимо, що $U-V$-пара (5.8.26) містить додатковий постійний доданок. Такі доданки є типовими для ієрархій рівнянь НШ та мКДВ, які є частковими випадками інтегровних ієрархій пов'язаних зі спеціальними точками класичних r-матриць.

Структура інтегровної ієрархії залежатиме в першу чергу від матричного граідієнту, який буде вибраний на роль $U-$ оператора. Він визначає число компонент (полів) в результуючому нелінійному інтегровному рівнянні, тобто функціональна розмірність відповідної системи диференційних рівнянь визначається числом координатних функцій $l^{(k),\nu_0^{(i)},\alpha}$, що входять в визначення U-оператора. Інші функції $l^{(l),\nu_0^{(i)},\alpha}$, що входять в визначення V – оператора з рівнянь нульової кривизни, виражаються через $l^{(k),\nu_0^{(i)},\alpha}$ і її $x-$ похідні, де $x-$ це "час", що відповідає гамільтоновому потоку гамільтоніана, чий матричний градієнт продукує $U-$ оператор. Найбільш природній вибір $U-$ оператора – це найпростіший матричний градієнт $\nabla I_0^{c,\nu_0^{(i)},2}$. В цьому випадку $V-$ оператор найпростішого "номінуючого" рівняння ієрархії – це $\nabla I_1^{c,\nu_0^{(i)},2}$. Завдяки наявності метрики $g_{\alpha\beta}$ в визначенні інтегралу $I_0^{c,\nu_0^{(i)},2}$ і можливій не напівпростій природі елементу загального положення простору $\overline{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0^{(i)}}$, число D координатних функцій , що входять в його визначення, може бути рівним чи меншим ніж $\dim\overline{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0^{(i)}}$. Тут ми приходимо до редукції, тобто пониженню числа незалежних компонент в солітонних рівняннях, яка має місце в спеціальних точках класичних r-матриць $r(u,v)$. Дійсно, розглядаючи U-оператор $\nabla I_0^{c,\nu_0^{(i)},2}$, ми приходимо до інтегровних рівнянь з числом незалежних компонент $D \le \dim\overline{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0^{(i)}} < \dim\mathfrak{g}$. У випадку точок загального положення ν_k, рівняння ієрархіх мають всі $D = \dim\mathfrak{g}$ – компонент. Зменшення числа координатних функцій, що входять в U- оператор, і є потрібна редукція.

Зауваження 56. Інтеграли $I_0^{c\nu_0^{(i)},2}$ чи $\nabla I_1^{c,\nu_0^{(i)},2}$ можуть бути тривіальними, якщо $\dim \overline{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0^{(i)}} = 0$, навіть якщо $\dim \overline{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0^{(i)}} > 0$. В цьому випадку за U чи V оператор необхідно вибирати інший градієнт з набору $\nabla I_n^{c,\nu_0^{(i)},m}$.

5.9. Інтегровні рівняння.

Для того, щоб отримати явну форму інтегровних рівнянь, що відповідають матричним градієнтам $\nabla I_k^{c,\nu_0^{(i)},m}$, зокрема, матричним градієнтам (5.8.26), необхідно знати явну форму комутаційних співвідношень r-матричної алгебри Лі в спеціальних точках. Ми зробимо це за припущення аналітичної властивості (1.3.10) r-матриці $r(u,v)$ в околі точки $v = \nu_0^{(i)}$. В цьому випадку $\overline{\mathfrak{g}}_k^{\nu_0^{(i)}} = \mathfrak{g}$, $k > 0$.

Має місце наступне Твердження:

Твердження 5.4. *Нехай r-матриця $r(u,v)$ в околі точки $u = v = \nu_0^{(i)}$ має розклад (1.3.10). Тоді рівняння нульової кривизни, що відповідають $U - V$ парі (5.8.26a)-(5.8.26b), тобто $U = \nabla I_0^{c,\nu_0^{(i)},2}$, $V = \nabla I_1^{c,\nu_0^{(i)},2}$, еквівалентні наступній системі матричних диференційних рівнянь:*

$$\begin{aligned}\partial_t L^{(0)} - \partial_x L^{(1)} = [L^{(0)}, L^{(1)}] - [L^{(0)}, r_0(L^{(1)})] + [L^{(1)}, r_0(L^{(0)})] + \\ + [L^{(0)}, (\partial_1 r_0 - \partial_2 r_0)(L^{(0)})] - [L^{(1)}, \partial_2 r_0(c^{(-1)})] + [c^{(-1)}, \partial_1 r_0(L^{(1)})] + \\ + [c^{(-1)}, (\partial_1 \partial_1^2 r_0 - \partial_1^2 \partial_1 r_0)(c^{(-1)})]. \quad (5.9.27a)\end{aligned}$$

$$\partial_x L^{(0)} = -([L^{(0)}, r_0(L^{(0)})] + [L^{(1)}, c^{(-1)}] + [c^{(-1)}, \partial_1 \partial_2 r_0(c^{(-1)})]). \quad (5.9.27b)$$

де матриці $L^{(0)}$ і $L^{(1)}$ визначаються наступним чином:

$$L^{(0)} \equiv \sum_{\alpha=1}^{\dim \overline{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0^{(i)}}} \sum_{\beta=1}^{\dim \mathfrak{g}} g_{\alpha\beta} l^{(0),\nu_0^{(i)},\alpha} X^\beta, \;\; L^{(1)} \equiv \sum_{\alpha=1}^{\dim \overline{\mathfrak{g}}_1^{\nu_0^{(i)}}} \sum_{\beta=1}^{\dim \mathfrak{g}} g_{\alpha\beta} l^{(1),\nu_0^{(i)},\alpha} X^\beta$$

а оператори $\partial_1^k \partial_2^l r_0$, $k, l \in \overline{0,2}$ мають вигляд:

$$\partial_1^k \partial_2^l r_0(X) \equiv \langle \partial_1^k \partial_2^l (r_0)_{12}(\nu_0^{(i)}, \nu_0^{(i)}), 1 \otimes X \rangle_2.$$

Зауваження 57. Для того, щоб отримати з двох наборів диференційних рівнянь (5.9.27) один набір диференційних рівнянь в часткових похідних на компоненти матриці $L^{(0)}$, необхідно виразити, використовуючи рівняння (5.9.27b), матрицю $L^{(1)}$ через матриці $L^{(0)}$, $\partial_x L^{(0)}$ і $c^{(-1)}$ і підставити її явну форму в рівняння (5.9.27a). Ми проілюструємо це на прикладах.

5.9.1. Приклад: анізотропне двокомпонентне рівняння пНШ

Нехай $\mathfrak{g} = so(3)$. Розглянемо анізотропну r-матрицю в такій параметрізації:

$$r(\lambda,\mu) = \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(\lambda^2-\mu^2)}\sum_{k=1}^{3}\frac{\mu_k}{\lambda_k}X_k\otimes X_k, \tag{5.9.28}$$

де $\lambda_k^2 = \lambda^2 - a_k^2$, $\mu_k^2 = \mu^2 - a_k^2$ і a_i, $i \in \overline{1,3}$ - довільні комплексні числа. Розглянемо спеціальну точку $\mu = a_3$ і покладемо $a_3 = 0$ (це завжди може бути досягнуто за допомогою зсуву спектрального параметру). В цьому випадку r-матриця набуває вигляду:

$$r(\lambda,\mu) = \frac{1}{(\lambda^2-\mu^2)}\big(\lambda(\mu_1\lambda_2 X_1\otimes X_1 + \mu_2\lambda_1 X_2\otimes X_2) + \mu\lambda_1\lambda_2 X_3\otimes X_3\big), \tag{5.9.29}$$

Однополюсна r-матрична алгебра $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,0}$ в точці $\mu = 0$ має вигляд:

$$\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,0} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\frac{\lambda_2}{\lambda^{2k+1}}a_1X_1, \frac{\lambda_1}{\lambda^{2k+1}}a_2X_2, \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda^{2k+2}}X_3 | k\geq 0\}.$$

Елемент загального положення дуального простору записується так:

$$L^{-,0}(\mu) = (l_1^{(0)}X_1 + l_2^{(0)}X_2) + \mu l_3^{(1)}X_3 + \mu^2(l_1^{(2)}X_1 + l_2^{(2)}X_2) + \mu^3 l_3^{(3)}X_3 + ...$$

Відповідний елемент зсуву має вигляд:

$$c^0(\mu) = \frac{c}{\mu}X_3.$$

Найпростіші нетривіальні зсунуті інтеграли задаються формулами:

$$I_0^{c,0,2} = \frac{1}{2}\big((l_1^{(0)})^2 + (l_2^{(0)})^2\big) + c l_3^{(1)}, \tag{5.9.30a}$$

$$I_2^{c,0,2} = \big(l_1^{(0)}l_1^{(2)} + l_2^{(0)}l_2^{(2)}\big) + \frac{1}{2}(l_3^{(1)})^2 + cl_3^{(3)}. \tag{5.9.30b}$$

Їхні матричні градієнти:

$$\nabla I_0^{c,0,2} = (\frac{\lambda_2}{\lambda}l_1^{(0)}a_1X_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda}l_2^{(0)}a_2X_2) + c\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda^2}X_3, \tag{5.9.31a}$$

$$\nabla I_2^{c,0,2} = (\frac{\lambda_2}{\lambda}l_1^{(2)}a_1X_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda}l_2^{(2)}a_2X_2) + l_3^{(1)}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda^2}X_3 + \frac{1}{\lambda^2}\nabla I_0^{c,0,2} \tag{5.9.31b}$$

підставлені в рівняння нульвої кривизни, продукують наступні диференційні рівняння на координатні функції $l_3^{(1)}$, $l_1^{(0)}$, $l_2^{(0)}$, $l_1^{(2)}$, $l_2^{(2)}$:

$$a_1(\partial_t l_1^{(0)} - \partial_x l_1^{(2)}) = a_2(l_2^{(0)}l_3^{(1)} - cl_2^{(2)}), \tag{5.9.32a}$$

$$a_2(\partial_t l_2^{(0)} - \partial_x l_2^{(2)}) = -a_1(l_1^{(0)}l_3^{(1)} - cl_1^{(2)}), \tag{5.9.32b}$$

$$\partial_x l_3^{(1)} = a_1a_2(l_1^{(0)}l_2^{(2)} - l_2^{(0)}l_1^{(2)}), \tag{5.9.32c}$$

$$\partial_x l_1^{(0)} = a_1a_2(l_2^{(0)}l_3^{(1)} - cl_2^{(2)}). \tag{5.9.32d}$$

$$\partial_x l_2^{(0)} = -a_1a_2(l_1^{(0)}l_3^{(1)} - cl_1^{(2)}). \tag{5.9.32e}$$

Результуючі рівняння в часткових похідних, записуються на координатній функції $l_1^{(0)}$, $l_2^{(0)}$, що входять у визначення $\nabla I_0^{c,0,2}$ як U– оператора. З метою їх отримання необхідно виразити $l_3^{(1)}$ через $l_1^{(0)}$, $l_2^{(0)}$, використовуючи постійність інтегралу $I_0^{c,0,2}$ по відношенню до всіх часових потоків (ми покладемо його значення рівним нулю), виразити $l_2^{(2)}$, $l_1^{(2)}$ через $l_1^{(0)}$, $l_2^{(0)}$ та їх похідні, використовуючи диференційні рівності (5.9.32d)- (5.9.32e) і підставити це все в рівності (5.9.32a)- (5.9.32b). В результаті, ми отримаємо наступні диференційні рівняння:

$$\partial_t l_1^{(0)} - a_1^{-2}\partial_x l_1^{(0)} = \frac{1}{a_1 a_2 c}\partial_x^2 l_2^{(0)} - \frac{1}{c^2}\partial_x (l_1^{(0)}((l_1^{(0)})^2 + (l_2^{(0)})^2)), \quad (5.9.33a)$$

$$\partial_t l_2^{(0)} - a_2^{-2}\partial_x l_2^{(0)} = -\frac{1}{a_1 a_2 c}\partial_x^2 l_1^{(0)} - \frac{1}{c^2}\partial_x (l_2^{(0)}((l_1^{(0)})^2 + (l_2^{(0)})^2)). \quad (5.9.33b)$$

Вводячи новий двокомпонентний вектор $l_1^{(0)} = s_1$, $l_2^{(0)} = s_2$, діагональну два на два матрицю $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2)$ і симплектичну два на два матрицю J, ми можемо переписати рівняння (5.9.33) як одне нелінійне диференційне рівняння в часткових похідних для двокомпонентного вектору $\vec{s}$:

$$\partial_t \vec{s} - A^{-2}\partial_x \vec{s} = \frac{1}{c}\frac{1}{\det A} J\partial_x^2 \vec{s} - \frac{1}{c^2}\partial_x((\vec{s},\vec{s})\vec{s}).$$

Це рівняння є анізотропною деформацією рівняння НШ з похідною. Дійсно, в частково анізотропному випадку $a_1 = a_2 = a \neq 0$, після введення нової часової змінної $\tau = t - a^{-2}x$ і обмеження на дійсну форму $su(2)$, легко показати, що це рівняння переходить в рівняння НШ з похідною.

5.9.2. Приклад: векторне узагальнення ієрархії рівняння ЛЛ. Розглянемо більш складний приклад редукцій в інтегровних ієрархіях асоційованих з алгебрами вищого рангу. В випадку алгебр Лі вищих рангів інтегровні ієрархії загального положення є матричними ієрархіями. В цьому підрозділі ми покажемо як за допомогою спеціальних точок r-матриць редукувати ці ієрархії до векторних.

Нехай $\mathfrak{g}$ це алгебра Лі $so(n)$ зі стандартним матричним базисом X_{ij}, $i,j \in \overline{1,n}$, $X_{ji} = -X_{ij}$. Розглянемо анізотропну $so(n) \otimes so(n)$– значну r-матрицю в наступній параметризації:

$$r(\lambda,\mu) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\lambda_i \lambda_j}{\mu_i \mu_j}\frac{X_{ij}\otimes X_{ij}}{(\lambda^2-\mu^2)}, \quad (5.9.34)$$

де $\lambda_k^2 = \lambda^2 - a_k^2$, $\mu_k^2 = \mu^2 - a_k^2$, a_i, $i \in \overline{1,n}$ – довільні комплексні числа.

Ця r-матриця є багатовимірним узагальненням розглянутої в попередньому розділі r-матриці. Але для $n > 3$ і довільних констант a_i ця r-матриця не має елементів зсуву. Тому не існує $(n-1)$ – компонентних узагальнень солітонного рівняння описаного в попередньому підрозділі.

Легко бачити що r-матриця (5.9.34) має n спеціальних точок $\lambda^2 = a_i^2$ і сингулярних точок $\mu^2 = a_k^2$, сингулярність яких усувається домноженням r-матриці на функцію $f(\mu) = \mu_k$. Дійсно, прямий обрахунок дає:

$$r^{\mu_k}(\lambda, a_k) = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{\lambda_i \lambda_k}{\sqrt{a_k^2 - a_i^2}} \frac{X_{ik} \otimes X_{ik}}{(\lambda^2 - a_k^2)},$$

$$r(a_k, \mu) = \sum_{i,j=1, i,j\neq k}^{n} \frac{\sqrt{a_k^2 - a_i^2}\sqrt{a_k^2 - a_j^2}}{\mu_i \mu_j} \frac{X_{ij} \otimes X_{ij}}{(a_k^2 - \mu^2)}.$$

тому, в цьому випадку ми маємо, що $\mathfrak{g}_0^{a_k} = so(n-1)$, $\bar{\mathfrak{g}}_0^{a_k} = \mathbb{R}^{n-1}$.

Розглянемо одну зі спеціальних точок r-матриці, а саме, точку $\mu = a_1$, і випишемо відповідну одноточкову нескінченновимірну алгебру Лі і малу ієрархію солітонних рівнянь. Пряме обчислення показує, що базис в одноточковій алгебрі, що відповідає точці $\mu = a_1$ і r-матриці $r^{\mu_1}(\lambda, \mu) = \mu_1 r(\lambda, \mu)$, має наступний вигляд:

$$\widetilde{\mathfrak{g}}^{-,a_1} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\frac{\lambda_i \lambda_j}{(\lambda^2 - a_1^2)^k} X_{ij} | k > 0, i, j \in \overline{1,n}, i < j\}.$$

Зокрема, нетривіальні базисні елементи $X_{ij}^{(k),a_1}(u)$, $k \in \overline{0,2}$, $i,j \in \overline{2,n}$ (локальний параметр розкладів в околі цієї точки є μ_1) мають вигляд:

$$X_{1j}^{(0),a_1}(u) = \frac{\lambda_1 \lambda_j}{\sqrt{a_1^2 - a_j^2}} \frac{X_{1j}}{(\lambda^2 - a_1^2)}, \quad X_{ij}^{(1),a_1}(u) = \frac{\lambda_i \lambda_j}{\sqrt{a_1^2 - a_i^2}\sqrt{a_1^2 - a_j^2}} \frac{X_{ij}}{(\lambda^2 - a_1^2)}$$

$$X_{1j}^{(2),a_1}(u) = \frac{\lambda_1 \lambda_j}{\sqrt{a_1^2 - a_j^2}} \frac{X_{1j}}{(\lambda^2 - a_1^2)^2} - \frac{\lambda_1 \lambda_j}{2\sqrt{(a_1^2 - a_j^2)^3}} \frac{X_{1j}}{(\lambda^2 - a_1^2)}.$$

елемент загального положення дуального простору записується так:

$$L^{-,a_1}(\mu) = \sum_{j=2}^{n} l_{1j}^{(0)} X_{1j} + \mu_1 \sum_{i,j=2}^{n} l_{ij}^{(0)} X_{ij} + \mu_1^2 \sum_{j=2}^{n} l_{1j}^{(2)} X_{1j} + ...$$

Найпростіші нетривіальні комутуючі інтеграли мають наступний вигляд:

$$I_0^{a_1,2} = \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}(l_{1j}^{(0)})^2,\ I_2^{a_1,2} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=2,i<j}^{n}(l_{ij}^{(0)})^2 + \sum_{j=2}^{n} l_{1j}^{(0)} l_{1j}^{(2)}.$$

Відповідні матричні градієнти легко обраховуються і мають форму:

$$\nabla I_0^{a_1,2} = \sum_{j=2}^{n} l_{1j}^{(0)} \frac{\lambda_1\lambda_j}{\sqrt{a_1^2 - a_j^2}} \frac{X_{1j}}{(\lambda^2 - a_1^2)},$$

$$\nabla I_2^{a_1,2} = \sum_{j=2}^{n} l_{1j}^{(0)} \frac{\lambda_1\lambda_j}{\sqrt{a_1^2 - a_j^2}} \frac{X_{1j}}{(\lambda^2 - a_1^2)^2} + \sum_{i,j=2,i<j}^{n} l_{ij}^{(1)} \frac{\lambda_i\lambda_j}{\sqrt{a_1^2 - a_i^2}\sqrt{a_1^2 - a_j^2}} \frac{X_{ij}}{(\lambda^2 - a_1^2)}$$
$$+ \sum_{j=2}^{n}(l_{1j}^{(2)} - \frac{l_{1j}^{(0)}}{2(a_1 - a_j)}) \frac{\lambda_1\lambda_j}{\sqrt{a_1^2 - a_j^2}} \frac{X_{1j}}{(\lambda^2 - a_1^2)}.$$

Покладаючи $U = \nabla I_0^{a_1,2}$, $V = \nabla I_2^{a_1,2}$ і підставляючи отримані вирази в рівняння нульової кривизни, ми приходимо до наступних диференційних співвідношень на координатні функції $l_{1j}^{(0)}$, $l_{ij}^{(1)}$, $l_{1j}^{(2)}$:

$$\partial_t l_{1j}^{(0)} - \partial_x \tilde{l}_{1j}^{(2)} = -\sum_{i=2}^{n} \frac{l_{1i}^{(0)} l_{ij}^{(1)}}{(a_1 - a_i)}, \tag{5.9.35a}$$

$$\partial_x l_{1j}^{(0)} = \sum_{i=2}^{n} l_{1i}^{(0)} l_{ij}^{(1)}, \tag{5.9.35b}$$

$$\partial_x l_{ij}^{(1)} = (\tilde{l}_{1i}^{(2)} l_{1j}^{(0)} - \tilde{l}_{1j}^{(2)} l_{1i}^{(0)}), \tag{5.9.35c}$$

$$\tilde{l}_{1j}^{(2)} \equiv (l_{1j}^{(2)} - \frac{l_{1j}^{(0)}}{2(a_1 - a_j)}). \tag{5.9.35d}$$

Використовуючи рівняння (5.9.35b), виразимо $l_{ij}^{(1)}$ через $l_{1j}^{(0)}$ і її похідні:

$$l_{ij}^{(1)} = (l_{1i}^{(0)}\partial_x l_{1j}^{(0)} - l_{1j}^{(0)}\partial_x l_{1i}^{(0)}),$$

де ми врахували, що $I_0^{a_1,2}$ є постійним відносно всіх часових потоків і поклали його значення рівним нулю. Використовуючи цей вираз і рівняння (5.9.35c), отримаємо наступну формулу для координатних функцій $\tilde{l}_{1i}^{(2)}$:

$$\tilde{l}_{1i}^{(2)} = -\partial_x^2 l_{1i}^{(0)} + c(l_{1k}^{(0)})l_{1i}^{(0)},$$

де $c(l_{1k}^{(0)})$ – деяка функція від динамічних змінних $l_{1k}^{(0)}$, явна форма якої обраховується використовуючи постійність інтегралу $I_2^{a_1,2}$ по відношенню до всіх часових потоків. Покладаючи значення $I_2^{a_1,2}$ нулем, взявши до уваги, що $\partial_x I_0^{a_1,2} = \partial_x^2 I_0^{a_1,2} = 0$, а отже

$$\sum_{j=2}^{n} l_{1j}^{(0)}\partial_x l_{1j}^{(0)} = 0, \quad \sum_{j=2}^{n} l_{1j}^{(0)}\partial_x^2 l_{1j}^{(0)} = -\sum_{j=2}^{n} \partial_x l_{1j}^{(0)}\partial_x l_{1j}^{(0)},$$

ми отримуємо наступний вираз для $c(l_{1k}^{(0)})$:

$$c(l_{1k}^{(0)}) = -\frac{3}{2}\sum_{j=2}^{n}(\partial_x l_{1j}^{(0)})^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}\frac{l_{1j}^{(0)}l_{1j}^{(0)}}{(a_1 - a_j)}.$$

Підставляючи це все і рівняння (5.9.35a) і вводячи наступні позначення:

$$s_i = l_{1i+1}^{(0)}, \;\; \hat{J} = \mathrm{diag}(j_1, ..., j_{n-1}) = \mathrm{diag}(\frac{1}{(a_1 - a_2)}, ..., \frac{1}{(a_1 - a_n)})$$

після заміни знаку часового потоку ми отримуємо наступні диференційні рівняння в часткових похідних для $n-1$– компонентного вектора $\overrightarrow{s}$:

$$\partial_t \overrightarrow{s} = \partial_x(\partial_x^2 \overrightarrow{s} + \frac{3}{2}\langle \partial_x \overrightarrow{s}, \partial_x \overrightarrow{s}\rangle \overrightarrow{s}) + \frac{3}{2}\langle \overrightarrow{s}, \hat{J}\overrightarrow{s}\rangle \partial_x \overrightarrow{s}. \tag{5.9.36}$$

Це рівняння є векторним узагальненням першого вищого потоку рівнянь ієрархії Ландау – Лівшиця [45]. Відзначимо, що векторного узагальнення самого рівняння Ландау – Лівшиця не існує. Але існує матричне його узагальнення. Відповідна ієрархія записується для спіну S, що належить до $so(n)$ і має $\frac{n(n-1)}{2}$– компонент, в той час, як ієрархія рівнянь (5.9.36) записується для $(n-1)$ компонент вектора $\overrightarrow{s}$. Це є проявом редукції в інтегровних ієрархіях пов'язаною зі спеціальною точкою r-матриці.

5.10. Великі ієрархії і “від’ємні” потоки.

В цьому підрозділі ми розглянемо так звані великі інтегровні ієрархії. Перехід до рівнянь великої ієрархії означає подвоєння алгебри, що веде, в свою чергу, до подвоєння числа комутативних потоків, тобто до подвоєння часів в ієрархії, і одночасне подвоєння числа динамічних змінних. $U-V-$ пари інтегровних рівнянь таких ієрархій приймають значення в алгебрах $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_k}+\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_l}$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_k}+\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0^{(i)}}$ чи $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0^{(j)}}+\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0^{(i)}}$. Серед рівнянь великої ієрархії є рівняння малих підієрархій з $U-V-$ парами, що приймають значення в одній і тій самі одноточковій підалгебрі і рівняння з U–оператором, що приймає значення в одній одноточковій підалгебрі і V–оператором, що приймає значення в іншій одноточковій підалгебрі. Такі рівняння іноді називають від’ємними потоками інтегровних ієрархій пов’язаних з одноточковими підалгебрами.

Виявляється, що для того, щоб записати відповідні від’ємні потоки інтегровних ієрархій, не потрібно знати аналітичну поведінку r-матриці в околі діагоналі, тому відповідні інтегровні рівняння можуть бути записані в достатньо загальній формі без специфікації конкретної форми r-матриці і її аналітичної прведінки. Більше того, ці рівняння мають (формально) ту саму форму для регулярних і сингуляринх точок по модулю того факту, що число незалежних компонент у відповідних рівняннях буде різним і елементи зсуву будуть тривіальними для випадку регулярних точок. Тому ми не будемо розглядати окремо випадки регулярних і сингуляринх точок r-матриць отримуючи відповідні рівняння як часткові випадки загальної конструкції.

5.10.1. Інтегровні рівняння. Явна форма. Розглянемо найпростіший можливий приклад від’ємного потоку інтегровної ієрархії. З цією метою розглянемо два гамільтоніана (5.8.26a) і їх матричні градієнти записані для двох різних точок $\nu_0^{(i)}$ і $\nu_0^{(j)}$:

$$\nabla I_0^{c,\nu_0^{(i)},2} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim \bar{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0^{(i)}}} g_{\alpha\beta} l^{(0),\nu_0^{(i)},\alpha} X^{(0),\nu_0^{(i)},\beta}(u) + \sum_{\alpha=1}^{\dim \bar{\mathfrak{g}}_{-1}^{c^{\nu_0^{(i)}}}} \sum_{\beta=1}^{\dim \bar{\mathfrak{g}}_1^{\nu_0^{(i)}}} g_{\alpha\beta} c^{\nu_0^{(i)},\alpha} X^{(1),\nu_0^{(i)},\beta}(u), \tag{5.10.37}$$

$$\nabla I_0^{c,\nu_0^{(j)},2} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim \bar{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0^{(j)}}} g_{\alpha\beta} l^{(0),\nu_0^{(j)},\alpha} X^{(0),\nu_0^{(j)},\beta}(u) + \sum_{\alpha=1}^{\dim \bar{\mathfrak{g}}_{-1}^{c^{\nu_0^{(i)}}}} \sum_{\beta=1}^{\dim \bar{\mathfrak{g}}_1^{\nu_0^{(j)}}} g_{\alpha\beta} c^{\nu_0^{(j)},\alpha} X^{(1),\nu_0^{(j)},\beta}(u). \tag{5.10.38}$$

Розглянемо відповідні рівняння нульової кривизни:

$$\frac{\partial \nabla I_0^{c,\nu_0^{(i)},2}}{\partial t_0^{j,2}} - \frac{\partial \nabla I_0^{c,\nu_0^{(j)},2}}{\partial t_0^{i,2}} + [\nabla I^{c,\nu_0^{(i)},2}, \nabla I^{c,\nu_0^{(j)},2}] = 0. \tag{5.10.39}$$

Зауваження 58. З метою спрощення ми надалі розглянемо лише випадок, коли підалгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0^{(j)}}$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_r^{-,\nu_0^{(i)}}$ не перетинаються. Це приведе до виключення з розгляду класу інтегровних моделей, що можуть бути названі узагальненими моделями Тірінга [89].

Система рівнянь (5.10.39) може бути записана наступним чином:

$$\begin{aligned}\partial_{t_0^{j,2}} L^{(0),\nu_0^{(i)}} = -\big([L^{(0),\nu_0^{(i)}}, r(\nu_0^{(i)},\nu_0^{(j)})(L^{(0),\nu_0^{(j)}})] + [L^{(0),\nu_0^{(i)}}, \partial_{\nu_0^{(j)}} r(\nu_0^{(i)},\nu_0^{(j)})(C^{\nu_0^{(j)}})]\\ + [C^{\nu_0^{(i)}}, \partial_{\nu_0^{(i)}} r(\nu_0^{(i)},\nu_0^{(j)})(L^{(0),\nu_0^{(j)}})] + [C^{\nu_0^{(i)}}, \partial_{\nu_0^{(i)}} \partial_{\nu_0^{(j)}} r(\nu_0^{(i)},\nu_0^{(j)})(C^{\nu_0^{(j)}})]\big)\end{aligned} \tag{5.10.40a}$$

$$\begin{aligned}\partial_{t_0^{i,2}} L^{(0),\nu_0^{(j)}} = -\big([L^{(0),\nu_0^{(j)}}, r(\nu_0^{(j)},\nu_0^{(i)})(L^{(0),\nu_0^{(i)}})] + [L^{(0),\nu_0^{(j)}}, \partial_{\nu_0^{(i)}} r(\nu_0^{(j)},\nu_0^{(i)})(C^{\nu_0^{(i)}})]\\ + [C^{\nu_0^{(j)}}, \partial_{\nu_0^{(j)}} r(\nu_0^{(j)},\nu_0^{(i)})(L^{(0),\nu_0^{(i)}})] + [C^{\nu_0^{(j)}}, \partial_{\nu_0^{(i)}} \partial_{\nu_0^{(j)}} r(\nu_0^{(j)},\nu_0^{(i)})(C^{\nu_0^{(i)}})]\big),\end{aligned} \tag{5.10.40b}$$

де $r(\nu_0^{(i)},\nu_0^{(j)})(L^{(0),\nu_0^{(j)}}) \equiv \langle r_{12}(\nu_0^{(i)},\nu_0^{(j)}), 1\otimes L^{(0),\nu_0^{(j)}}\rangle_2$ і ми ввели позначення:

$$L^{(0),\nu_0^{(i)}} = \sum_{\gamma=1}^{\dim \overline{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0^{(i)}}} l_\gamma^{(0),\nu_0^{(i)}} X^\gamma,\;\; L^{(0),\nu_0^{(j)}} = \sum_{\gamma=1}^{\dim \overline{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0^{(j)}}} l_\gamma^{(0),\nu_0^{(j)}} X^\gamma,$$

$$C^{\nu_0^{(i)}} = \sum_{\gamma=1}^{\dim \overline{\mathfrak{g}}_1^{\nu_0^{(i)}}} c_\gamma^{\nu_0^{(i)}} X^\gamma,\;\; C^{\nu_0^{(j)}} = \sum_{\gamma=1}^{\dim \overline{\mathfrak{g}}_1^{\nu_0^{(j)}}} c_\gamma^{\nu_0^{(j)}} X^\gamma.$$

Зауваження 59. Відзначимо редукцію, яка має місце в особливих точках класичних r-матриць. Дійсно, розглянуті $U - V$ – пари і результуючі солітонні рівняння містять, у випадку сингуляринх точок, тільки $\dim \overline{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0^{(i)}} + \dim \overline{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0^{(j)}}$ координатних функцій, в той час, як у випадку регулярних точок ν_k, ν_l число координатних функцій, для яких записується відповідне солітонне рівняння, дорівнює подвоєній розмірності алгебри $\mathfrak{g}$.

Можлива ситуація, коли в сингулярній точці $v = \nu_0^{(i)}$ має місце рівність $r_{12}(u,\nu_0^{(i)}) = 0$, $r_{12}(u,\nu_0^{(j)}) \neq 0$. В цьому випадку, для того, щоб рівняння (5.10.40b) були нетривіальними їх необхідно перевизначити. Нехай $f(v)$ буде така функція, що $r_{12}^f(u,v) = f(v)r_{12}(u,v)$ нетривіальна і несингулярна в точці $v = \nu_0^{(i)}$. Тоді, використовуючи наступний наслідок узагальненого класичного рівняння Янга – Бакстера:

$$[r_{12}^f(u_1,u_2), r_{13}(u_1,u_3)] = [r_{23}(u_2,u_3), r_{12}^f(u_1,u_2)] - [r_{32}^f(u_3,u_2), r_{13}(u_1,u_3)],$$

і можна отримати, замість системи рівнянь (5.10.40), наступну систему:

$$\begin{aligned}\partial_{t_0^{j,2}} L^{(0),\nu_0^{(i)}} = -\big([L^{(0),\nu_0^{(i)}}, r(\nu_0^{(i)},\nu_0^{(j)})(L^{(0),\nu_0^{(j)}})] + [L^{(0),\nu_0^{(i)}}, \partial_{\nu_0^{(j)}} r(\nu_0^{(i)},\nu_0^{(j)})(C^{\nu_0^{(j)}})] \\ + [C^{\nu_0^{(i)}}, \partial_{\nu_0^{(i)}} r(\nu_0^{(i)},\nu_0^{(j)})(L^{(0),\nu_0^{(j)}})] + [C^{\nu_0^{(i)}}, \partial_{\nu_0^{(i)}}\partial_{\nu_0^{(j)}} r(\nu_0^{(i)},\nu_0^{(j)})(C^{\nu_0^{(j)}})]\big)\end{aligned} \tag{5.10.41a}$$

$$\begin{aligned}\partial_{t_0^{i,2}} L^{(0),\nu_0^{(j)}} = -\big([L^{(0),\nu_0^{(j)}}, r^f(\nu_0^{(j)},\nu_0^{(i)})(L^{(0),\nu_0^{(i)}})] + [L^{(0),\nu_0^{(j)}}, \partial_{\nu_0^{(i)}} r^f(\nu_0^{(j)},\nu_0^{(i)})(C^{\nu_0^{(i)}})] \\ + [C^{\nu_0^{(j)}}, \partial_{\nu_0^{(j)}} r^f(\nu_0^{(j)},\nu_0^{(i)})(L^{(0),\nu_0^{(i)}})] + [C^{\nu_0^{(j)}}, \partial_{\nu_0^{(i)}}\partial_{\nu_0^{(j)}} r^f(\nu_0^{(j)},\nu_0^{(i)})(C^{\nu_0^{(i)}})]\big).\end{aligned} \tag{5.10.41b}$$

Зауважимо, що тільки друге рівняння цієї системи відрізняється від відповідного рівняння системи (5.10.40).

У важливому частковому прикладі, коли один з елементів зсуву є тривіальним, наприклад $C^{\nu_0^{(j)}} = 0$ рівняння (5.10.41) спрощуються до форми:

$$\partial_{t_0^{j,2}} L^{(0),\nu_0^{(i)}} = -\big([L^{(0),\nu_0^{(i)}}, r(\nu_0^{(i)}, \nu_0^{(j)})(L^{(0),\nu_0^{(j)}})] + [C^{\nu_0^{(i)}}, \partial_{\nu_0^{(i)}} r(\nu_0^{(i)}, \nu_0^{(j)})(L^{(0),\nu_0^{(j)}})]\big) \tag{5.10.42a}$$

$$\partial_{t_0^{i,2}} L^{(0),\nu_0^{(j)}} = -\big([L^{(0),\nu_0^{(j)}}, r^f(\nu_0^{(j)}, \nu_0^{(i)})(L^{(0),\nu_0^{(i)}})] + [L^{(0),\nu_0^{(j)}}, \partial_{\nu_0^{(i)}} r^f(\nu_0^{(j)}, \nu_0^{(i)})(C^{\nu_0^{(i)}})]\big) \tag{5.10.42}$$

Система цих рівнянь може бути названою узагальненою неабелевою системою Тоди оскільки, в спеціальному частковому прикладі зкручених раціональних r-матриць, ці рівняння співпадають зі звичайною неабелевою системою Тоди. У випадку раціональних r-матриць, зкручених за допомогою кокстерівського автоморфізму, ці рівняння, як легко показати, еквівалентні звичайним скінченнокомпонентним рівнянням Тоди.

Нарешті, у випадку, коли обидва елементи зсуву вибрані нульовими $C^{\nu_0^{(i)}} = C^{\nu_0^{(j)}} = 0$, ми отримуємо наступну систему диференційних рівнянь:

$$\partial_{t_0^{j,2}} L^{(0),\nu_0^{(i)}} = -[L^{(0),\nu_0^{(i)}}, r(\nu_0^{(i)}, \nu_0^{(j)})(L^{(0),\nu_0^{(j)}})], \tag{5.10.43a}$$

$$\partial_{t_0^{i,2}} L^{(0),\nu_0^{(j)}} = -[L^{(0),\nu_0^{(j)}}, r^f(\nu_0^{(j)}, \nu_0^{(i)})(L^{(0),\nu_0^{(i)}})]. \tag{5.10.43b}$$

Ці рівняння можуть розглядатися як редукція рівнянь узагальнених кіральних полів [106] і співпадають з ними, коли точки $\nu_0^{(i)}$, $\nu_0^{(j)}$ є регулярними точками класичних r-матриць.

Зауваження 60. Відзначемо, що в рівняннях (5.10.43) використовуються інтеграли $I_0^{\nu_0^{(i)},2}$ і $I_0^{\nu_0^{(j)},2}$. Як буде показано нижче, ці інтеграли можуть бути тривіальні. Незважаючи на це рівняння (5.10.42) (5.10.43), мають місце, але записуються вони за допомогою інших, так званих, вищих гамільтоніанів $I_0^{\nu_0^{(i)},p}$ і $I_0^{\nu_0^{(j)},q}$ для деяких $p,q>2$. Відповідні солітонні рівняння будуть тими ж, але потрібно перевизначити матриці $L^{(0),\nu_0^{(i)}}$, $L^{(0),\nu_0^{(j)}}$ наступним чином:

$$L^{(0),\nu_0^{(i)}} = \sum_{\gamma=1}^{\dim \overline{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0^{(i)}}} \frac{\partial I_0^{\nu_0^{(i)},p}}{\partial l^{(0),\nu_0^{(i)},\gamma}} X^{\gamma}, \; L^{(0),\nu_0^{(j)}} = \sum_{\gamma=1}^{\dim \overline{\mathfrak{g}}_0^{\nu_0^{(j)}}} \frac{\partial I_0^{\nu_0^{(j)},q}}{\partial l^{(0),\nu_0^{(j)},\gamma}} X^{\gamma}. \quad (5.10.44)$$

Зауваження 61. Відзначемо, що для того, щоб зробити одну чи дві з точок $\nu_0^{(i)}$, $\nu_0^{(j)}$ регулярними, необхідно просто покласти $\nu_0^{(i)} \to \nu_k$ і $\nu_0^{(i)} \to \nu_l$ в цих рівняннях і врахувати, що матриці C^{ν_k}, C^{ν_l} в цьому випадку, тривіальні, а також, що $\mathfrak{g}_0^{\nu_k} = \mathfrak{g}_1^{\nu_k} = \overline{\mathfrak{g}}_0^{\nu_k} = \overline{\mathfrak{g}}_1^{\nu_k} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_0^{\nu_l} = \mathfrak{g}_1^{\nu_l} = \overline{\mathfrak{g}}_0^{\nu_l} = \overline{\mathfrak{g}}_1^{\nu_l} = \mathfrak{g}$.

5.10.2. Приклад: анізотропна ієрархія з двома зсувами. Нехай $\mathfrak{g} = so(3)$. Нехай X_1, X_2, X_3 — стандартний ортонормований базис алгебри $so(3)$. Розглянемо анізотропну r-матрицю в такій параметризації:

$$r(\lambda,\mu) = \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(\lambda^2-\mu^2)} \sum_{k=1}^{3} \frac{\mu_k}{\lambda_k} X_k \otimes X_k, \quad (5.10.45)$$

де $\lambda_k^2 = \lambda^2 - a_k^2$, $\mu_k^2 = \mu^2 - a_k^2$, a_i, $i \in \overline{1,3}$ є довільними комплексними числами. В порівнянні з позначеннями формули (2.3.25) ми зробили заміну $a_k \to a_k^{-2}$, $u \to \lambda^2$, $v \to \mu^2$ і домножили r-матрицю на $\mu_1\mu_2\mu_3$. Ця r-матриця має три особливі точки $\mu^2 = a_i^2$, $i \in \overline{1,3}$.

Розглянемо дві спеціальні точки цієї r-матриці, наприклад, точки a_1 і a_2. Опишемо відповідні одноточкові нескінченновимірні алгебри Лі. Правильним локальним параметром в околі цих точок по відношенню до яких слід диференціювати r-матрицю для того, щоб отримати базисні елементи цих алгебр, є параметри μ_1 і μ_2 відповідно. Пряме обчислення дає:

$$\widetilde{\mathfrak{g}}^{-,a_1} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\frac{\lambda_2\lambda_1}{\lambda_1^{2+2k}}X_3, \frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda_1^{2+2k}}X_2, \frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_1^{2+2k}}X_1\},$$

$$\widetilde{\mathfrak{g}}^{-,a_2} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\frac{\lambda_2\lambda_1}{\lambda_2^{2+2k}}X_3, \frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_2^{2+2k}}X_1, \frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda_2^{2+2k}}X_2\}.$$

Елементи дуального простору загального положення записуються так:

$$L^{-,a_1}(\mu) = (l_3^{(0),a_1}X_3 + l_2^{(0),a_1}X_2) + \mu_1 l_1^{(1),a_1}X_1 + \mu_1^2(l_3^{(2),a_1}X_3 + l_2^{(2),a_1}X_2) + \mu_1^3 l_1^{(3),a_1}X_1 + ..$$

$$L^{-,a_2}(\mu) = (l_3^{(0),a_2}X_3 + l_2^{(0),a_2}X_1) + \mu_2 l_2^{(1),a_1}X_2 + \mu_2^2(l_3^{(2),a_2}X_3 + l_1^{(2),a_2}X_1) + \mu_2^3 l_2^{(3),a_2}X_2 + ..$$

Відповідні елементи зсуву мають вигляд [107]:

$$c^{a_1}(\mu) = \frac{c_1}{\mu_1}X_1, \quad c^{a_2}(\mu) = \frac{c_2}{\mu_2}X_2.$$

Найпростіші зсунуті комутуючі інтеграли мають форму:

$$I_0^{c,a_1,2} = \frac{1}{2}\big((l_2^{(0),a_1})^2 + (l_3^{(0),a_1})^2\big) + c_1 l_1^{(1),a_1},$$

$$I_0^{c,a_2,2} = \frac{1}{2}\big((l_1^{(0),a_2})^2 + (l_3^{(0),a_2})^2\big) + c_2 l_2^{(1),a_2}.$$

Їх матричні градієнти записуються наступним чином:

$$\nabla I_0^{c,a_1,2} = (\sqrt{a_1^2 - a_2^2}\frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda_1^2} l_2^{(0),a_1}X_2 + \sqrt{a_1^2 - a_3^2}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1^2} l_3^{(0),a_1}X_3\big) + c_1\frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_1^2}X_1,$$

$$\nabla I_0^{c,a_2,2} = (\sqrt{a_1^2 - a_1^2}\frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_2^2} l_1^{(0),a_2}X_1 + \sqrt{a_2^2 - a_3^2}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2^2} l_3^{(0),a_2}X_3\big) + c_2\frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda_2^2}X_2.$$

Отримаємо відповідні солітонні рівняння використовуючи загальну формулу (5.10.40). Для цієї мети покладемо $\nu_0^{(i)} = a_1$, $\nu_0^{(j)} = a_2$ і порахуємо значення r-матриці і її похідних в цих точках. Ми отримаємо:

$$r_{12}(a_1, a_2) = \sqrt{a_3^2 - a_1^2}X_1 \otimes X_1, \quad r_{12}(a_2, a_1) = \sqrt{a_3^2 - a_2^2}X_2 \otimes X_2,$$

$$\partial_{\lambda_1} r_{12}(\lambda, \mu)|_{\lambda=a_1,\mu=a_2} = \frac{\sqrt{a_2^2 - a_3^2}}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2}}X_3 \otimes X_3,$$

$$\partial_{\lambda_2} r_{12}(\lambda, \mu)|_{\lambda=a_2,\mu=a_1} = \frac{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}}{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}}X_3 \otimes X_3,$$

$$\partial_{\lambda_1}\partial_{\mu_2} r_{12}(\lambda, \mu)|_{\lambda=a_1,\mu=a_2} = \frac{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}}{a_1^2 - a_2^2}X_2 \otimes X_2,$$

$$\partial_{\lambda_2}\partial_{\mu_1} r_{12}(\lambda, \mu)|_{\lambda=a_2,\mu=a_1} = \frac{\sqrt{a_2^2 - a_3^2}}{a_2^2 - a_1^2}X_1 \otimes X_1,$$

$$\partial_{\mu_1} r_{12}(\lambda,\mu)|_{\lambda=a_2, v=a_1} = \partial_{\mu_2} r_{12}(\lambda,\mu)|_{\lambda=a_1,\mu=a_2} = 0.$$

Підставляючи це в співвідношення (5.10.40), отримуємо наступні рівняння для функцій $S_2 \equiv l_2^{(0),a_1}$, $S_3 \equiv l_3^{(0),a_1}$, $T_1 \equiv l_1^{(0),a_2}$, $T_3 \equiv l_3^{(0),a_2}$:

$$\partial_{t_2} S_2 = -(\sqrt{a_3^2 - a_1^2} S_3 T_1 - c_1 \frac{\sqrt{a_2^2 - a_3^2}}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2}} T_3), \tag{5.10.46a}$$

$$\partial_{t_2} S_3 = -(-\sqrt{a_3^2 - a_1^2} S_2 T_1 + c_1 c_2 \frac{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}}{(a_1^2 - a_2^2)}), \tag{5.10.46b}$$

$$\partial_{t_1} T_1 = (\sqrt{a_3^2 - a_2^2} S_2 T_3 + c_2 \frac{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}}{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}} S_3), \tag{5.10.46c}$$

$$\partial_{t_1} T_3 = (-\sqrt{a_3^2 - a_2^2} S_2 T_1 + c_1 c_2 \frac{\sqrt{a_2^2 - a_3^2}}{(a_2^2 - a_1^2)}), \tag{5.10.46d}$$

де $t_1 \equiv t_0^{a_1,2}$, $t_2 \equiv t_0^{a_2,2}$. Ці рівняння є першим негативним потоком до анізотропної модифікації пНШ розглянутого в попередніх розділах.

5.10.3. Приклад: "подвоєна" ієрархія рівнянь Ландау-Лівшиця. Розглянемо приклад редукцій в інтегровних ієрархіях асоційованих з алгебрами Лі вищого рангу. У випадку загального положення такі інтегровні ієрархії є "подвоєними" матричними ієрархіями [105], [106]. Ми продемонструємо як спеціальні точки класичних r-матриц ведуть до "подвоєних" векторних ієрархій.

Нехай $\mathfrak{g} \simeq so(n)$ з стандартним базисом X_{ij}, $i,j \in \overline{1,n}$, $X_{ji} = -X_{ij}$. Розглянемо анізотропну r-матрицю (2.3.25) наступного вигляду:

$$r(\lambda,\mu) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\lambda_i \lambda_j}{\mu_i \mu_j} \frac{X_{ij} \otimes X_{ij}}{(\lambda^2 - \mu^2)}, \tag{5.10.47}$$

де $\lambda_k^2 = \lambda^2 - a_k^2$, $\mu_k^2 = \mu^2 - a_k^2$, a_i, $i \in \overline{1,n}$ – довільні комплексні числа. В порівнянні з позначеннями формули (2.3.25) ми зробили заміну $a_k \to a_k^{-2}$, $u \to \lambda^2$, $v \to \mu^2$.

Зауваження 62. r-матриця (5.10.47) є прямим узагальненням розглянутої в попередньому прикладу r-матриці. Але для $n > 3$ і загальних параметрів анізотропії a_i ця r-матриця не містить нетривіальних елементів зсуву [107]. Тому рівняння, отримані в цьому підрозділі, не будуть узагальнювати солітонні рівняння отримані в попередньому підрозділі.

Як уже зазначалось вище r-матриця (5.10.47) має n спеціальних точок $\mu^2 = a_i^2$. Розглянемо дві фіксовані спеціальні точки цієї r-матриці, а саме, точки $\mu = a_1$ і $\mu = a_n$. Надалі розглянемо замість r-матриці $r(\lambda, \mu)$ еквівалентну r-матрицю

$$r^{\mu_1\mu_n}(\lambda, \mu) = \mu_1\mu_n r(\lambda, \mu)$$

з тим, щоб уникнути сингулярності в вибраних точках. Відповідні одноточкові нескінченновимірні алгебри Лі будуть мати вигляд:

$$\widetilde{\mathfrak{g}}^{-,a_1} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\frac{\lambda_i\lambda_j}{(\lambda^2 - a_1^2)^k} X_{ij} | k > 0, i, j \in \overline{1,n}, i < j\},$$

$$\widetilde{\mathfrak{g}}^{-,a_n} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\frac{\lambda_i\lambda_j}{(\lambda^2 - a_n^2)^k} X_{ij} | k > 0, i, j \in \overline{1,n}, i < j\}.$$

Нетривіальні базисні елементи $X_{ij}^{(0),a_1}(\lambda)$ і $X_{ij}^{(0),a_n}(\lambda)$ (за локальні параметри в розкладах будуть вибрані змінні μ_1 і μ_n відповідно) мають форму:

$$X_{1j}^{(0),a_1}(\lambda) = \sqrt{a_1^2 - a_n^2}\frac{\lambda_1\lambda_j}{\sqrt{a_1^2 - a_j^2}}\frac{X_{1j}}{(\lambda^2 - a_1^2)},$$

$$X_{in}^{(0),a_n}(\lambda) = \sqrt{a_n^2 - a_1^2}\frac{\lambda_n\lambda_i}{\sqrt{a_n^2 - a_i^2}}\frac{X_{in}}{(\lambda^2 - a_n^2)},$$

де $i \in \overline{1, n-1}$, $j \in \overline{2, n}$.

Елементи дуального простору загального положення записуються так:

$$L^{-,a_1}(\mu) = \sum_{j=2}^{n} l_{1j}^{(0),a_1} X_{1j} + \mu_1 \sum_{i,j=2}^{n} l_{ij}^{(1),a_1} X_{ij} + \mu_1^2 \sum_{j=2}^{n} l_{1j}^{(2),a_1} X_{1j} + ...,$$

$$L^{-,a_n}(\mu) = \sum_{j=1}^{n-1} l_{jn}^{(0),a_n} X_{jn} + \mu_n \sum_{i,j=1}^{n-1} l_{ij}^{(1),a_n} X_{ij} + \mu_n^2 \sum_{j=1}^{n-1} l_{jn}^{(2),a_n} X_{jn} + ...$$

Найпростіші нетривіальні комутуючі інтеграли мають вигляд:

$$I_0^{a_1,2} = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}(l_{1j}^{(0),a_1})^2, \quad I_0^{a_n,2} = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}(l_{jn}^{(0),a_2})^2.$$

Їхні матричні градієнти є наступними:

$$\nabla I_0^{a_1,2} = \sqrt{a_1^2 - a_n^2}\sum_{j=2}^{n}\frac{\lambda_1\lambda_j}{\sqrt{a_1^2 - a_j^2}}\frac{l_{1j}^{(0),a_1}X_{1j}}{(\lambda^2 - a_1^2)},$$

$$\nabla I_0^{a_n,2} = \sqrt{a_n^2 - a_1^2}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\lambda_n\lambda_j}{\sqrt{a_n^2 - a_j^2}}\frac{l_{jn}^{(0),a_n}X_{jn}}{(\lambda^2 - a_n^2)}.$$

Вони утворюють $U{-}V{-}$пару для рівнянь нульвої кривизни найпростішого солітонного рівняння розглянутої великої ієрархії. Вводячи позначення:

$$L^{(0),a_1}(\mu) = \sum_{j=2}^{n} l_{1j}^{(0),a_1}X_{1j}, \quad L^{(0),a_n}(\mu) = \sum_{j=1}^{n-1} l_{jn}^{(0),a_n}X_{jn},$$

покладаючи $\nu_0^{(i)} = a_1$, $\nu_0^{(j)} = a_n$, $j_i = \dfrac{\sqrt{a_i^2 - a_n^2}}{\sqrt{a_1^2 - a_i^2}}$ і приймаючи до уваги, що

$$r^{\mu_1\mu_n}(a_1, a_n) = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\sqrt{a_i^2 - a_1^2}}{\sqrt{a_n^2 - a_i^2}}X_{in}\otimes X_{in}, \quad r^{\mu_1\mu_n}(a_n, a_1) = \sum_{i=2}^{n}\frac{\sqrt{a_i^2 - a_n^2}}{\sqrt{a_1^2 - a_i^2}}X_{1i}\otimes X_{1i}$$

ми отримуємо, використовуючи рівняння (5.10.43), наступні диференційні співвідношення для координатних функцій $l_{1j}^{(0),a_1}$, $l_{jn}^{(0),a_n}$:

$$\partial_{t_1} l_{1n}^{(0),a_n} = -\sum_{i=2}^{n-1} j_i l_{in}^{(0),a_n} l_{1i}^{(0),a_1}, \tag{5.10.48a}$$

$$\partial_{t_1} l_{in}^{(0),a_n} = j_i l_{1n}^{(0),a_n} l_{1i}^{(0),a_1}, \quad i \in \overline{2, n-1} \tag{5.10.48b}$$

$$\partial_{t_n} l_{1n}^{(0),a_1} = -\sum_{i=2}^{n-1} j_i^{-1} l_{in}^{(0),a_n} l_{1i}^{(0),a_1}, \tag{5.10.48c}$$

$$\partial_{t_n} l_{1i}^{(0),a_1} = j_i^{-1} l_{1n}^{(0),a_1} l_{in}^{(0),a_n}, \quad i \in \overline{2, n-1}. \tag{5.10.48d}$$

Рівняння (5.10.48a), (5.10.48c) слідують з рівнянь (5.10.48b), (5.10.48d) і постійності гамільтоніанів $I_0^{a_1,2}$, $I_0^{a_n,2}$ по відношенню до всіх частових потоків. Рівняння (5.10.48b), (5.10.48d) є потрібними солітонними рівняннями. Покладаючи значення інтегралів $I_0^{a_1,2}$ і $I_0^{a_n,2}$ рівними c_+ і c_- відповідно, виражаючи $l_{1n}^{(0),a_1}$ і $l_{1n}^{(0),a_n}$ через $l_{1i}^{(0),a_1}$ і $l_{in}^{(0),a_n}$ і вводячи позначення:

$$s_i^- = l_{in}^{(0),a_n}, \; s_i^+ = l_{1i}^{(0),a_1}, \; i \in \overline{2, n-1},$$

ми отримуємо наступне рівняння для двох $(n-2)$–компонентних векторів:

$$\partial_{t_1} s_i^- = \sqrt{c_- - \langle \overrightarrow{s^-}, \overrightarrow{s^-} \rangle} j_i s_i^+, \tag{5.10.49a}$$

$$\partial_{t_n} s_i^+ = \sqrt{c_+ - \langle \overrightarrow{s^+}, \overrightarrow{s^+} \rangle} j_i^{-1} s_i^-. \tag{5.10.49b}$$

Тепер редукція, що мала місце в спеціальних точках, є очевидною: замість анізотропного рівняння типу кірального поля з $n(n-1)$– компонентами [76], ми отримали нелінійне векторне рівняння з $2(n-2)$– компонентами.

5.10.4. Приклад: модифіковані неабелеві рівняння Тоди. Розглянемо велику інтегровну ієрархію, асоційовану зі скрученими деформованими r-матрицями (2.5.44), що задаються за допомогою відображення $\Phi(u)$ і комутуючого з ним автоморфізму σ [104]:

$$r^{\sigma}_{\Phi}(u,v) = \Phi(u) \otimes (\Phi^{-1}(v))^* \frac{\left(\sum\limits_{j=0}^{p-1} u^j v^{p-j} \sum\limits_{\alpha=1}^{\dim \mathfrak{g}_{\bar{j}}} X_{\bar{j},\alpha} \otimes X^{\overline{-j},\alpha}\right)}{(u^p - v^p)},$$

де $\mathfrak{g} = \sum\limits_{j=1}^{p} \mathfrak{g}_{\bar{j}}$, p- порядок автоморфізму σ, $\sigma(X) = e^{2\pi i k/p} X$ для $X \in \mathfrak{g}_{\bar{k}}$.

Результуючі інтегровні ієрархії будуть модифікованими неабелевими ієрархіями типу Тоди [82]. Як вже вказувалось вище, r-матриця (2.5.44) має дві особливі точки: $v = 0$ і $v = \infty$. Опишемо відповідні одноточкові алгебри і їх дуальні простори. Пряме обчислення дає:

$$\widetilde{\mathfrak{g}}^{-,0} = \Phi(u)(u^{-1}\mathfrak{g}_{\overline{-1}} + u^{-2}\mathfrak{g}_{\overline{-2}} + ... + u^{-p}\mathfrak{g}_{\overline{0}} + ...),$$

$$\widetilde{\mathfrak{g}}^{-,\infty} = \Phi(u)(\mathfrak{g}_{\overline{0}} + u\mathfrak{g}_{\overline{1}} + u^2\mathfrak{g}_{\overline{2}} + ... + u^p\mathfrak{g}_{\overline{0}} + ...).$$

Для того, щоб в явному вигляді написати матрицю Лакса, асоційовану з цими точками, як ряд по змінних u і u^{-1} відповідно, необхідно врахувати розклади функції $\Phi(u)$ в степеневі ряди в околі точок $u = 0$ і $u = \infty$:

$$\Phi(u) = (1 + u\Phi_1 + u^2\Phi_2 + ...), \quad \Phi(u) = (u\Phi_1' + \Phi_0 + u^{-1}\Phi_{-1} + u^{-2}\Phi_{-2} + ...).$$

Припустимо, що відображення Φ_1' є невиродженим (якщо воно вироджене, то це призведе до додаткової редукції не зв'язаної з автоморфізмом σ). В цьому випадку явна форма елементу дуального простору наступна:

$$L^{-,0}(v) = v^1 L^{(1)} + v^2 L^{(2)} + ...,$$

$$L^{-,\infty}(v) = v^{-1} L^{(-1)} + v^{-2} L^{(-2)} + ...,$$

де $L^{(i)} \in \mathfrak{g}_{\bar{i}}$ і ми використали розклад функції $\Phi(v)$ в околі точок $v = 0$ і $v = \infty$ відповідно, а також той факт, що $\Phi_k(\mathfrak{g}_{\bar{i}}) \rightarrow \mathfrak{g}_{\overline{i+k}}$, $\Phi_1'(\mathfrak{g}_{\bar{i}}) \rightarrow \mathfrak{g}_{\overline{i+1}}$, який слідує з умови $\widetilde{\sigma} \cdot \Phi(u) = \Phi(u) \cdot \widetilde{\sigma}$.

Завдяки описаній формі елементів дуального простору, найпростіші з нетривіальних інтегралів мають порядок p. Вони мають виглаяд:

$$I_p^{0,p} = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_p=1}^{\dim \mathfrak{g}_{\bar{1}}} g_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_p} l^{(1),\alpha_1} l^{(1),\alpha_2} ... l^{(1),\alpha_p},$$

$$I_{-p}^{\infty,p} = -\sum_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_p=1}^{\dim \mathfrak{g}_{\overline{-1}}} g_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_p} l^{(-1),\alpha_1} l^{(-1),\alpha_2} ... l^{(-1),\alpha_p},$$

де $g_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_p}$ є G–інваріантними тензорами на алгебрі $\mathfrak{g}$.

Відповідні матричні градієнти записуються наступним чином:

$$\nabla I_p^{0,p} = \frac{1}{u}\sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}_{\overline{-1}}} \frac{\partial I_p^{0,p}}{\partial l^{(1),\alpha}}\Phi(u)(X^{\overline{-1},\alpha}),$$

$$\nabla I_{-p}^{\infty,p} = \sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}_{\overline{-1}}} \frac{\partial I_{-p}^{\infty,p}}{\partial l^{(-1),\alpha}}\Phi(u)(\Phi_1'^{-1}(X^{\overline{0},\alpha})),$$

де ми використали той факт, що координатні функції $l^{(1),\alpha}$ відповідають елементам $\dfrac{1}{u}\Phi(u)(X^{\overline{-1},\alpha})$ алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}^{-,0}$, координатні функції $l^{(-1),\alpha}$ відповідають елементам $-\Phi(u)(\Phi_1'^{-1}(X^{\overline{0},\alpha}))$ алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}^{-,\infty}$.

Беручи $\nabla I_p^{0,p}$ і $\nabla I_{-p}^{\infty,p}$ за $U-V-$ пару для солітоного рівняння, ми отримаємо відповідне солітонне рівняння, використовуючи загальну формулу (5.10.43) і поклавши елементи зсуву $c^0(u)$ і $c^\infty(u)$ рівними нулю.

Покладемо $\nu_0^{(i)} = \infty$, $\nu_0^{(j)} = 0$. В цьому випадку ми маємо $r(0,\infty) = 0$, тому необхідно множити r-матрицю на функцію $f(v) = v$. В результаті отримаємо:

$$r^v(0,\infty) = -\Phi_1'^{-1}\otimes 1\cdot\Omega_{12}^{\overline{0}},\ \ r(\infty,0) = \Phi_1'\otimes 1\cdot\Omega_{12}^{\overline{(-1)}}.$$

Підставляючи це в формулу (5.10.43), ми отримуємо наступні рівняння:

$$\partial_{t_p^{0,p}} L^{(0),\infty} = -[L^{(0),\infty}, r(\infty,0)(L^{(0),0})] = -[L^{(0),\infty}, \Phi_1'(L^{(0),0})], \quad (5.10.50a)$$

$$\partial_{t_{-p}^{\infty,p}} L^{(0),0} = [L^{(0),0}, r^v(0,\infty)(L^{(0),\infty})] = [L^{(0),0}, \Phi_1'^{-1}(L^{(0),\infty})], \quad (5.10.50b)$$

де ми поклали, по самому визначенню, що:

$$L^{(0),\infty} = \sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}_{\overline{-1}}} \frac{\partial I_{-p}^{\infty,p}}{\partial l^{(-1),\alpha}} X^{\overline{1},\alpha} \in \mathfrak{g}_{\overline{1}}, \quad L^{(0),0} = \sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}_{\overline{1}}} \frac{\partial I_p^{0,p}}{\partial l^{(1),\alpha}} X^{\overline{-1},\alpha} \in \mathfrak{g}_{\overline{-1}},$$

і використали в формулі (5.10.44), що згортка робиться по дуальному базису, який має вигляд $(X_{\overline{-1},\alpha})^* = X^{\overline{1},\alpha}$, $(X_{\overline{1},\alpha})^* = X^{\overline{-1},\alpha}$.

Рівняння (5.10.50) є σ-редукованим рівнянням типу анізотропного кірального поля. Їх можна назвати також модифікованими неабелевими рівняннями Тоди. Для того, щоб продемонструвати це, відзначимо, що, використовуючи рівність

$$[\Phi(u)(X), \Phi(u)(Y)] = \Phi(u)([X, Y] + u\delta\Phi_1(X, Y)),$$

легко показати, що має місце наступний гомоморфізм:

$$\Phi_1'(\delta\Phi_1(X, Y)) = [\Phi_1'(X), \Phi_1'(Y)], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Використовуючи цю рівність, вводячи нову матрицю

$$\tilde{L}^{(0),\infty} = \Phi_1'^{-1}(L^{(0),\infty}) \in \mathfrak{g}_{\bar{0}},$$

покладаючи $t_{-p}^{\infty,p} = x$, $t_p^{0,p} = t$, перетворимо рівняння (5.10.50) до форми:

$$\partial_t \tilde{L}^{(0),\infty} = -\delta\Phi_1(\tilde{L}^{(0),\infty}, L^{(0),0}), \tag{5.10.51a}$$

$$\partial_x L^{(0),0} = [L^{(0),0}, \tilde{L}^{(0),\infty}]. \tag{5.10.51b}$$

Відзначимо, що рівняння (5.10.51) може бути отримане також беспосередньо, використовуючи введену вище $U - V$–пару і умову

$$[\Phi(u)(X), \Phi(u)(Y)] = \Phi(u)([X, Y] + u\delta\Phi_1(X, Y)).$$

Як і у випадку звичайної неабелевої системи Тоди, роблячи заміну:

$$L^{(0),0} = g_0 C^{(-1)} g_0^{-1}, \quad \tilde{L}^{(0),\infty} = -(\partial_x g_0) g_0^{-1},$$

де $C^{(-1)}$ є постійним елементом простору $\mathfrak{g}_{\overline{-1}}$, g_0 – це груповий елемент групи Лі G_0 алгебри Лі $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$, ми перетворюємо рівняння (5.10.51) до форми:

$$\partial_t\big((\partial_x g_0) g_0^{-1}\big) = -\delta\Phi_1\big((\partial_x g_0) g_0^{-1}, g_0 C^{(-1)} g_0^{-1}\big), \tag{5.10.52}$$

де $\delta\Phi_1(X, Y) \equiv [\Phi_1(X), Y] + [X, \Phi_1(Y)] - \Phi_1([X, Y])$. Ці рівняння еквівалентні модифікованим неабелевим рівнянням Тоди введеним в [85].

5.10.5. Приклад: модифіковані абелеві рівняння Тоди. Розглянемо абелевий випадок. В цьому випадку група G_0 співпадає з підгрупою Картана і елемент g_0 може бути параметризований наступним чином: $g_0 = \exp \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} \phi_i H_{\alpha_i}$. Використовуючи цю параметризацію отримуємо:

$$\tilde{L}^{(0),\infty} = -\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} \partial_x \phi_i H_{\alpha_i},$$

$$L^{(0),0} = \sum_{\alpha_i \in P \bigcup -\Theta} c_{\alpha_i}^{(-1)} e^{-\alpha_i(\phi)} X_{-\alpha_i},$$

де P – це набір простих коренів, θ – це найдовший корінь, H_{α_i} – базисний елемент підалгебри Картана, що відповідає простому кореню α_i, X_α – це елемент нільпотентної підалгебри, що відповідає кореню α.

Відповідні рівняння (5.10.52) набувають наступного вигляду:

$$\partial_{tx}^2 \phi_k = -\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} \sum_{\alpha_j \in P \bigcup -\Theta} \langle \delta\Phi_1(H_{\alpha_i}, X_{-\alpha_j}), H_{\alpha_k} \rangle c_{\alpha_j}^{(-1)} \partial_x \phi_i e^{-\alpha_j(\phi)}. \tag{5.10.53}$$

Рівняння (5.10.53) є найзагальнішими модифікованими рівняннями Тоди.

В спеціальному частковому випадку класичних матричних алгебр Лі $gl(n)$, $so(n)$, $sp(n)$ і коциклу $\delta\Phi_1$, що задається формулою:

$$\delta\Phi_1(X, Y) = XAY - YAX$$

рівняння (5.10.53) детально розглянуто в работі [81]. В частковому випадку $\mathfrak{g} = gl(n)$ і матриці A, що задається формулою $A = \sum_{i=1}^{n-1} X_{ii+1} + X_{n1}$, де $(X_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ і $c_{\alpha_j}^{(-1)} = 1$, $j \in \overline{1, n}$ рівняння (5.10.53) набувають вигляду:

$$\partial_{xt}^2 \phi_i = \partial_x \phi_i (e^{\phi_{i+1} - \phi_i} - e^{\phi_i - \phi_{i-1}}),$$

де $i \in \overline{1, n}$, $n + 1 \equiv 1$. Ці рівняння співпадають з періодичним випадком нескінченного модифікованого ланцюжка Тоди отриманого в [61].

5.11. Висновки

В розділі описаний загальний метод побудови солітонних рівнянь в двох вимірах, що базується на класичних r-матрицях. Викладено приклади застосування цього методу до солітонних рівнянь відкритих автором (анізотропне рівняння НШ похідною, модифіковані абелева та неабелеві ієрархії Тоди, "подвоєна" векторна ієрархія Ландау – Ліфшиця, анізотропна ієрархія з двома зсувами та ін.). Розділ базується на роботах [71, 73, 74, 76, 77, 80, 81, 82, 89, 105, 106, 115].

Розділ 6

Квантові інтегровні системи та класичні r-матриці.

6.1. Вступ

Квантові інтегровні моделі, пов'язані з класичними r-матрицями, відомі з часів робіт Годена [37]. Довгий час у літературі побутувала думка що такі моделі пов'язані лише з кососиметричними r-матрицями і їх квантова інтегровність є не більш ніж "артефактом" квантової інтегровності моделей, що базуються на квантових R– матрицях, оскільки кососиметричні r-матриці одержуються як "квазікласичні" границі квантових R-матриць.

Оригінальною ідеєю автора було пов'язати квантову інтегровність з некососиметричними r-матрицями, що, в загальному випадку, не пов'язані з квантовими групами та похідними від них структурами. Використовуючи цю ідею у данному розділі ми будуємо квантові інтегровні спінові ланцюжки типу Годена по довільній класичній r-матриці зі спектральними параметрами. Якщо r-матриця кососиметрична, то побудовані квантові ланцюжки співпадають зі стандартними ланцюжками Годена. Для r-матриць, що мають нетривіальні елементи зсуву, ми будуємо також квантові інтегровні моделі типу моделей Годена у зовнішньому магнітному полі. Також у данному розділі дисертації доведена квантова інтегровність класичних моделей типу ДКД, що були зконструйовані у попередньому розділі, та квантова інтегровність багатобозонних моделей типу димерів Бозе – Хаббарда у випадку алгебр $gl(n)$ та Картан – інваріантних r-матриць. Детально розглянуті приклади моделей типу ДКД та димерів Бозе – Хаббарда асоційованих з раціональними та Z_2– градуйованими r-матрицями. Окремо розглянуті додаткові лінійні інтеграли, пов'язані з симетріями класичних r-матриць. Їх використано при побудові інтегровних гамільтоніанів моделей типу ДКД та димерів БХ.

Результати цього розділу є квантовими аналогами результатів розділу 4. Матеріал данного розділу базується на наступних работах автора: [84, 87, 90, 91, 95, 96, 98, 104, 108, 109, 111, 112].

6.2. Спінові ланцюжки і класичні r-матриці.

6.2.1. Загальний випадок. Нехай $\mathfrak{g}$ – проста (чи редуктивна) алгебра Лі. Нехай $X_\alpha, \alpha = \overline{1, \dim\mathfrak{g}}$ – деякий її базис з комутаційними співвідношеннями:

$$[X_\alpha, X_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma.$$

Нехай $\hat{S}^{(i)}_\alpha, \alpha = \overline{1, \dim\mathfrak{g}}, i = \overline{1, N}$ – лінійні оператори в деякому гільбертовому просторі, що утворюють алгебру Лі, ізоморфну до $\mathfrak{g}^{\oplus N}$ з комутаційними співвідношеннями:

$$[\hat{S}^{(i)}_\alpha, \hat{S}^{(j)}_\beta] = \delta^{ij} \sum_{\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^\gamma_{\alpha\beta} \hat{S}^{(j)}_\gamma. \tag{6.2.1}$$

Ми будемо називати $\hat{S}_\alpha$ α-компонентою узагальненого спінового оператора. Оператори $\hat{S}^{(i)}_\alpha$ інтерпритуються як компоненти узагальненого спінового оператора, що відповідає i – тому вузлу узагальненого спільного ланцюжка.

Має місце наступна Теорема [84]:

Теорема 6.1. *Нехай $r(u, v)$ – класична r-матриця з розкладом (1.3.6) і $r_0(u, v)$ – її регулярна частина. Нехай ν_l, $l \in \overline{1, N}$ - регулярні точки* *класичної r-матриці. Тоді оператори $\hat{H}_l^G$, $l \in \overline{1,N}$ вигляду:*

$$\hat{H}_l^G = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} \sum_{k\neq l}^{N} r^{\alpha\beta}(\nu_k,\nu_l)\hat{S}_\alpha^{(k)}\hat{S}_\beta^{(l)} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} r_0^{\alpha\beta}(\nu_l,\nu_l)(\hat{S}_\alpha^{(l)}\hat{S}_\beta^{(l)} + \hat{S}_\beta^{(l)}\hat{S}_\alpha^{(l)}) \tag{6.2.2}$$

утворюють комутативну підалгебру в універсальній огортуючий алгебрі $\mathfrak{A}(\mathfrak{g}^{\oplus N})$ і всіх її представленнях.

Зауваження 63. У випадку кососиметричних r-матриць ми маємо, що

$$r_0^{\alpha,\beta}(\nu_l,\nu_l) = -r_0^{\beta,\alpha}(\nu_l,\nu_l).$$

Отже, додатковий член в гамільтоніані $\hat{H}_l^G$ перетворюється на нуль і ми отримуємо стандартні гамільтоніані Годена [5].

Зауваження 64. Гамільтоніани $\hat{H}_l^G$ можуть бути записані у вигляді:

$$\hat{H}^l = \frac{1}{2} res_{u=\nu_l} \mathrm{tr}\hat{L}^2(u), \tag{6.2.3}$$

де $\hat{L}(u)$ – квантовий оператор Лакса:

$$\hat{L}(u) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} \hat{S}_\alpha^k r^{\alpha\beta}(\nu_k,u)X_\beta.$$

6.2.2. Випадок деформованої раціональної r-матриці $r_\phi(u,v)$

Розглянемо деформовану r-матрицю $r_\phi(u,v)$, що дається формулою

$$r_\phi(u,v) = \frac{\Phi(u)\cdot\Phi^{-1}(v)(\Omega)}{(u-v)},$$

де Ω — тензорний казимір.

З Теореми 6.1 слідує наступний наслідок:

Наслідок 6.1. *Нехай $\mathfrak{g}$ – напівпроста чи редуктивна алгебра Лі. Нехай відображення $\Phi(u) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $\Phi(u) = 1+u\Phi_1+u^2\Phi_2+u^3\Phi_3+\ldots$ таке що Φ_1, Φ_2 задовільняють умову (2.3.14). Тоді в околі точок $u = \nu_k, \nu_l, k, l \in \overline{1,N}$ таких, що $\det\Phi(\nu_k) \neq 0$, оператори $\hat{H}_l^G$, $l = \overline{1,N}$:*

$$\hat{H}_l^G = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} \sum_{k\neq l}^{N} \frac{(\Phi(\nu_k)\Phi^{-1}(\nu_l))^{\alpha\beta}}{(\nu_k-\nu_l)} \hat{S}_\alpha^{(k)} \hat{S}_\beta^{(l)} + \\ + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} (\partial_{\nu_l}\Phi(\nu_l)\Phi^{-1}(\nu_l))^{\alpha\beta} (\hat{S}_\alpha^{(l)}\hat{S}_\beta^{(l)} + \hat{S}_\beta^{(l)}\hat{S}_\alpha^{(l)}) \quad (6.2.4)$$

утворюють комутативну підалгебру в універсальній огортуючий алгебрі $\mathfrak{A}(\mathfrak{g}^{\oplus N})$ і у всіх її представленнях.

Розглянемо конкретні приклади узагальнених гамільтоніанів Година, що відповідають деформованій r-матриці $r_\phi(u,v)$.

6.2.3. Зсунута r-матриця Нехай r-матриця $r_\phi(u,v)$ визначена наступним чином:

$$r_\Phi(u,v) = \frac{\hat{c}}{(u-v)} + \sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} \Phi_1^{\alpha\beta} X_\alpha \otimes X_\beta,$$

що відповідає випадку $\Phi_1^2 = 0$, $\Phi_k = 0$, $k > 1$ у відображенні $\Phi(u)$.

Тоді, відповідні гамільтоніані $\hat{H}_l^G$, $l = \overline{1,N}$ набувають вигляду:

$$\hat{H}_l^G = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} \sum_{k\neq l}^{N} (\frac{g^{\alpha\beta}\hat{S}_\alpha^{(k)}\hat{S}_\beta^{(l)}}{(\nu_k-\nu_l)} + \Phi_1^{\alpha\beta}\hat{S}_\alpha^{(k)}\hat{S}_\beta^{(l)}) + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} \Phi_1^{\alpha\beta}(\hat{S}_\alpha^{(l)}\hat{S}_\beta^{(l)} + \hat{S}_\beta^{(l)}\hat{S}_\alpha^{(l)}).$$

Зауважимо, що тензор $r_0 = \sum\limits_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} \Phi_1^{\alpha\beta} X_\alpha \otimes X_\beta$ некососиметричний нільпотентний розв'язок постійного рівняння Янга – Бакстера:

$$[(r_0)_{12}, (r_0)_{13}] = [(r_0)_{23}, (r_0)_{12}] - [(r_0)_{32}, (r_0)_{13}].$$

6.2.4. Анізотропна r-матриця Розглянемо випадок $\mathfrak{g} = gl(n)$, $\mathfrak{g} = so(n)$, $\mathfrak{g} = sp(n)$ і анізотропну r-матрицю $r_A(u,v)$, що дається формулою

$$r_A(u,v) = \frac{1}{(u-v)} \sum_{ij=1}^{n} \sqrt{\frac{(1+a_i u)(1+a_j u)}{(1+a_i v)(1+a_j v)}} X_{ij} \otimes X_{ji}.$$

і відповідає випадку $\Phi(u)(X) = \sqrt{1+Au}X\sqrt{1+Au}$ з діагональною матрицею $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Відповідні узагальнені гамільтоніані Годена записуються так:

$$\hat{H}_l^G = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(\nu_k - \nu_l)} \sum_{ij=1}^{n} \sqrt{\frac{(1+a_i\nu_k)(1+a_j\nu_k)}{(1+a_i\nu_l)(1+a_j\nu_l)}} \hat{S}_{ij}^k \hat{S}_{ji}^l + \\ + \frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{n} (\frac{a_i}{(1+a_i\nu_l)} + \frac{a_j}{(1+a_j\nu_l)}) \hat{S}_{ij}^l \hat{S}_{ji}^l.$$

Тут на числа ν_k накладена умова регулярності $(1+a_i\nu_k) \neq 0, \forall k \in \overline{1,N}, i \in \overline{1,n}$, а комутаційні співвідношення узагальнених спінових операторів $\hat{S}_{ij}^l$ — це стандартні комутаційні співвідношення алгебр $gl(n)$, $so(n)$ or $sp(n)$. Наприклад, для випадку $\mathfrak{g} = gl(n)$, ми маємо:

$$[\hat{S}_{ij}^m, \hat{S}_{kl}^n] = \delta^{mn}(\delta_{kj}\hat{S}_{il}^n - \delta_{il}\hat{S}_{kj}^n).$$

6.2.5. Випадок r-матриці $r^\sigma(u,v)$. Нехай $r(u-v)$ — класична кососиметрична r-матриця. Нехай $\sigma(u)$ – деяка мероморфна функція від u, що задовільняє рівнянню (2.6.45). Як було показано у в розділі 2 $\sigma(u)$-зкручена r-матриця $r^\sigma(u,v)$ визначається формулою:

$$r^\sigma(u,v) = r(u-v) - \sigma_2(u) r(u+v).$$

Нехай $\nu_k, k \in \overline{1,N}$ — ненульові комплексні числа, що не співпадають з полюсами функції $\sigma(u)$ і $\nu_k \neq \pm\nu_l$. Має місце наступний наслідок Теореми 6.1:

Наслідок 6.2. *Нехай автоморфізм $\sigma(u)$, r-матриця $r(u-v)$ і точки $\nu_k, k \in \overline{1,N}$ будуть визначені як вище. Тоді оператори $\hat{H}_l^G$, $l \in \overline{1,N}$:*

$$\hat{H}_l^G = \sum_{k\neq l}^{N} \sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} (r^{\alpha\beta}(\nu_k - \nu_l)\hat{S}_\alpha^{(k)}\hat{S}_\beta^{(l)} - (\sigma_2(\nu_l)\cdot r)^{\alpha\beta}(\nu_k+\nu_l)\hat{S}_\alpha^{(k)}\hat{S}_\beta^{(l)}) - \\ - \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} (\sigma_2(\nu_l)\cdot r(2\nu_l))^{\alpha\beta}(\hat{S}_\alpha^{(l)}\hat{S}_\beta^{(l)} + \hat{S}_\beta^{(l)}\hat{S}_\alpha^{(l)}) \quad (6.2.5)$$

утворюють комутативну підалгебру в універсальній огортуючий алгебрі алгебри $\mathfrak{A}(\mathfrak{g}^{\oplus N})$ та її представленнях.

Найбільш важливими класами отриманих квантових гамільтоніанів є випадки, коли $\sigma(u)$ постійний інволютивнй, або внутрішній автоморфізм.

6.2.6. Випадок інволютивного автоморфізму. Розглянемо випадок $\sigma(u) \equiv \sigma$ і $\sigma^2 = 1$. В цьому випадку тензор $r_{12}^{\sigma_2}(2u)$ є симетричним і додаткової симетризації операторів $\hat{S}_\alpha^{(l)}$, $\hat{S}_\beta^{(l)}$ у формулі (6.2.5) не потрібно. В цьому випадку узагальнені квантові гамільтоніани Годена $\hat{H}_l^G$ записуються наступним чином:

$$\hat{H}_l^G = \sum_{k=1,k\neq l}^{N} \sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} (r^{\alpha\beta}(\nu_k-\nu_l)-(r^{\sigma_2})^{\alpha\beta}(\nu_k+\nu_l))\hat{S}_\alpha^{(k)}\hat{S}_\beta^{(l)} - \sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} (r^{\sigma_2})^{\alpha\beta}(2\nu_l)\hat{S}_\alpha^{(l)}\hat{S}_\beta^{(l)}. \tag{6.2.6}$$

6.2.7. Випадок внутрішнього автоморфізму. Розглянемо випадок $\sigma(u) = Ad_{K(u)}$. В цьому випадку формула (6.2.5) для узагальнених гамільтоніанів $\hat{H}_l^G$, $l \in \overline{1,N}$ набуває вигляду:

$$\hat{H}_l^G = \sum_{k\neq l}^{N} \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}} (r^{\alpha\beta}(\nu_k-\nu_l) - r^{\alpha\beta}(\nu_k+\nu_l)(Ad_{K(\nu_l)})^\beta_\gamma)\hat{S}_\alpha^{(k)}\hat{S}_\beta^{(l)} - \\ - \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}} r^{\alpha\gamma}(2\nu_l)(Ad_{K(\nu_l)})^\beta_\gamma(\hat{S}_\alpha^{(l)}\hat{S}_\beta^{(l)} + \hat{S}_\alpha^{(l)}\hat{S}_\beta^{(l)}) \tag{6.2.7}$$

де $\nu_k, k \in \overline{1,N}$ – деякі ненульові комплексні числа, що не співпадають з нулями, чи полюсами функції $K(u)$ і $\nu_k \neq \pm\nu_l$.

6.3. Спінові ланцюжки у магнітному полі.

6.3.1. Загальний випадок. Отримаємо квантові аналоги гамільтоніанів (4.3.40), що будуть інтерпритуватися як гамільтоніани системи з

N-спінів у зовнішньому магнітному полі і покажемо їх комутативність. Розглянемо зсунуті квантові оператори Лакса:

$$\hat{L}^c(u) = \hat{L}(u)+c(u) = \sum_{\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} \hat{L}^\beta_c(u)X_\beta \equiv \sum_{k=1}^{N}\sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} r^{\alpha,\beta}(\nu_k,u)\hat{S}^k_\alpha X_\beta+\sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} c^\alpha(u)X_\alpha. \tag{6.3.8}$$

Узагальнений елемент зсуву $c(u)$ є c-значною функцією змінної u як в класичному так і в квантовому випадку і задовільняє рівнянню зсуву (1.2.5). Оператор Лакса (6.3.8) є квантуванням класичного оператора Лакса N дзиг у зовнішньому полі що був зконструйований в розділі 4.

Має місце наступна Теорема [87]:

Теорема 6.2. *Нехай $r(u,v)$ – класична r-матриця і $r_0(u,v)$ — її регулярна частина, ν_k - її регулярні точки. Нехай елемент зсуву $c(u)$ не має полюсів в точках $u=\nu_k$. Тоді:*

(i) Гамільтоніани $\hat{H}^{G,c}_l = \frac{1}{2} res_{u=\nu_l} I^2_c(u)$, де $I^2_c(u) = \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}} g_{\alpha\beta}\hat{L}^\alpha_c(u)\hat{L}^\beta_c(u)$ мають наступний явний вигляд:

$$\hat{H}^{G,c}_l = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}}\Big(\sum_{k\neq l}^{N} r^{\alpha\beta}(\nu_k,\nu_l)\hat{S}^{(k)}_\alpha\hat{S}^{(l)}_\beta+\frac{1}{2}r^{\alpha\beta}_0(\nu_l,\nu_l)(\hat{S}^{(l)}_\alpha\hat{S}^{(l)}_\beta+\hat{S}^{(l)}_\beta\hat{S}^{(l)}_\alpha)\Big)+\sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}} c^\alpha(\nu_l)\hat{S}^l_\alpha. \tag{6.3.9}$$

(ii) Гамільтоніани $\hat{H}^{G,c}_l$, $l\in\overline{1,N}$ утворюють комутативну підалгебру в універсальній огортуючий алгебрі $\mathfrak{A}(\mathfrak{g}^{\oplus N})$ і її представленнях.

6.3.2. Випадок кососиметричних r-матриць Розглянемо випадок класичних кососиметричних r-матриць $r_{12}(u,v) = -r_{21}(v,u)$. Відповідні гамільтоніани Годена в магнітному полі мають наступний вигляд:

$$\hat{H}^c_l = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim\mathfrak{g}}\sum_{k\neq l}^{N} r^{\alpha\beta}(\nu_k,\nu_l)\hat{S}^{(k)}_\alpha\hat{S}^{(l)}_\beta + \sum_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}_0} c^\alpha(\nu_k)\hat{S}^l_\alpha, \tag{6.3.10}$$

де елемент зсуву $c(u)$ задовільняє умові:

$$[r_{12}(u,v), c_1(u)+c_2(v)] = 0.$$

Для того, щоб знайти явно роз'вязок рівняння зсуву, припустимо, що кососиметрична r-матриця має симетрію по відношенню до деякої скінченновимірної групи Лі $G_0 \subset G$, де G – група Лі алгебри Лі $\mathfrak{g}$, тобто:

$$Ad_g \otimes Ad_g r(u,v) = r(u,v), \forall g \in G_0.$$

В такому випадку легко бачити, що

$$[r(u,v), X \otimes 1 + 1 \otimes X] = 0, \forall X \in \mathfrak{g}_0,$$

де $\mathfrak{g}_0$ – алгебра Лі групи Лі G_0. Отже $c \equiv \sum\limits_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}_0} c^\alpha X_\alpha$ є коректно визначеним однорідним (тобто $c(\nu_k) = c$) елементом зсуву.

Зауваження 65. Якщо $r_{12}(u,v) = \dfrac{\Omega_{12}}{u-v}$ — стандартна r-матриця Янга то тоді $[r(u,v), X \otimes 1 + 1 \otimes X] = [\dfrac{\Omega_{12}}{(u-v)}, X \otimes 1 + 1 \otimes X] = 0$, по самому визначенню тензорного казіміру Ω_{12}. Отже, довільний постійний елемент алгебри $\mathfrak{g}$ може бути вибраний за елемент зсуву. Відповідні узагальнені гамільтоніани Годена у магнітному полі (6.3.10) є стандартними [63], [60].

6.4. Квантові інтегровні моделі типу ДКД

6.4.1. Бозонний оператор Лакса В цьому розділі ми розглянемо квантові аналоги класичних моделей Джейнса – Камінгса – Діке зконструйованих в розділі 4. Ми розглянемо квантування $L(u) \to \hat{L}(u)$, $\{\ ,\ \} \to [\ ,\ ]$ лінійної r-матричної дужки задане формулою:

$$[\hat{L}_1(u), \hat{L}_2(v)] = [r_{12}(u,v), \hat{L}_1(u)] - [r_{21}(v,u), \hat{L}_2(v)], \tag{6.4.11}$$

де $\hat{L}_1(u) = \hat{L}(u) \otimes 1$, $\hat{L}_2(v) = 1 \otimes \hat{L}(v)$, $\hat{L}(u) = \sum\limits_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}} \hat{L}^a(u) X_a$.

Має місце наступна Теорема [106]:

Теорема 6.3. *Нехай* $\mathfrak{g}(v^{-1},v))$ *буде алгеброю Лі формальних рядів Лорана. Нехай підалгебри* $\mathfrak{g}_0^K$, $\mathfrak{g}_{\pm 1}^K$ *визначені по напівпростому елементу* K *будуть редуктивною і нільпотентними підалгебрами алгебри* $\mathfrak{g}$ *і* $\mathfrak{c}(\mathfrak{g}_0^K)$ *– центр алгебри* $\mathfrak{g}_0^K$. *Нехай* $u=\nu_0$ *буде такою точкою розширеної комплексної площини що виконуються наступні три умови:*

$$(i)\ r_{12}(\nu_0,v)\in \mathfrak{g}^0_{\nu_0}\otimes\mathfrak{g}(v^{-1},v)),\ \ \text{де}\ \mathfrak{g}^0_{\nu_0}\subseteq\mathfrak{g}_0^K\subset\mathfrak{g},$$

$$(ii)\ \partial_u r_{12}(u,v)|_{u=\nu_0}\in \mathfrak{g}^1_{\nu_0}\otimes\mathfrak{g}(v^{-1},v)),\ \ \text{де}\ (\mathfrak{g}_1^K+\mathfrak{g}_{-1}^K)\subseteq\mathfrak{g}^1_{\nu_0}\subseteq\mathfrak{g},$$

$$(iii)\ \partial_u^2 r_{12}(u,v)|_{u=\nu_0}\in \mathfrak{g}^2_{\nu_0}\otimes\mathfrak{g}(v^{-1},v)),\ \ \text{де}\ \mathfrak{c}(\mathfrak{g}_0^K)\subseteq\mathfrak{g}^2_{\nu_0}\subseteq\mathfrak{g}.$$

Тоді оператор Лаксу вигляду:

$$\hat{L}(v)=\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}^0_{\nu_0}}\sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}}\hat{l}_a^{(0)}r^{ab}(\nu_0,v)X_b+\sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+}\sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}}\hat{l}_\alpha^{(1)}\partial_u r^{\alpha b}(u,v)|_{u=\nu_0}X_b+$$
$$+\sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+}\sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}}\hat{l}_{-\alpha}^{(1)}\partial_u r^{-\alpha b}(u,v)|_{u=\nu_0}X_b+\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}}\sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}}\frac{1}{2}k_i\partial_u^2 r^{ib}(u,v)|_{u=\nu_0}X_b, \tag{6.4.12}$$

де $K=\sum\limits_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}}k_iH_i\in\mathfrak{c}(\mathfrak{g}_0^K)$ *і комутаційні співвідношення між диамічними змінними* $\hat{l}_a^{(0)}$, $\hat{l}_a^{(1)}$ *є наступними:*

$$[\hat{l}_a^{(0)},\hat{l}_b^{(0)}]=\sum_{c=1}^{\dim\mathfrak{g}^0_{\nu_0}}C^c_{ab}\hat{l}_b^{(0)},\ \ [\hat{l}_a^{(0)},\hat{l}_{\pm\beta}^{(1)}]=\sum_{\gamma=1}^{\dim\mathfrak{g}^1_{\nu_0}}C^{\pm\gamma}_{a,\pm\beta}\hat{l}_{\pm\gamma}^{(1)},\ \ [\hat{l}_\alpha^{(1)},\hat{l}_\beta^{(1)}]=\alpha(K)\delta_{\alpha+\beta,0}\hat{1}$$

задовільняє квантовій алгебрі Лакса (6.4.11).

Проаналізуємо структуру алгебри Лакса, що відповідає оператору Лакса (6.4.12). Частина алгебри Лакса згенерована елементами $\hat{l}_\alpha^{(1)}$ утворює алгебру Лі ізоморфну алгебрі Гайзенберга. Дійсно, ми маємо:

$$[\hat{l}_\alpha^{(1)},\hat{l}_\beta^{(1)}]=\alpha(K)\delta_{\alpha+\beta,0}\hat{1}.$$

тому заміна змінних:

$$\hat{l}_{\alpha}^{(1)} = (\alpha(K))^{1/2}\hat{b}_{\alpha}^{+},\ \hat{l}_{-\alpha}^{(1)} = (\alpha(K))^{1/2}\hat{b}_{\alpha}^{-}$$

приводить ці співвідношення до канонічних комутаційних співвідношень алгебри Гайзенберга $\mathcal{H}_K$:

$$[\hat{b}_{\alpha}^{+}, \hat{b}_{\beta}^{-}] = \delta_{\alpha,\beta}\hat{1},\ [\hat{b}_{\alpha}^{+}, \hat{b}_{\beta}^{+}] = [\hat{b}_{\alpha}^{-}, \hat{b}_{\beta}^{-}] = 0,\ \text{де}\ \alpha, \beta \in (\Delta/\Delta_K)_{+}. \tag{6.4.13}$$

Одже, щоб отримати чисто бозонний оператор Лакса, необхідно виразити підалгебру $\mathfrak{g}_{\nu_0}^{0}$ що належить редуктивній підалгебрі $\mathfrak{g}_0^K$ через бозонні оператори народження – знищення.

Має місце наступна Теорема [106].

Теорема 6.4. *Нехай алгебра $\mathfrak{g}$ буде напівпростою з множеною коренів Δ. Нехай $\mathfrak{g}_0^K \subset \mathfrak{g}$ — редуктивна підалгебра, що містить підалгебру Картана $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ і має Δ_K набором своїх коренів. Нехай $K \in \mathfrak{h}$ буде такий елемент підалгебри $\mathfrak{h}$, що $\alpha(K) = 0$ для $\alpha \in \Delta_K$ і $\hat{b}_{\beta}^{-}$, $\hat{b}_{\alpha}^{+}$ бозонні оператори народження – знищення що відповідають кореням $\alpha, \beta \in (\Delta/\Delta_K)+$. Тоді, наступні елементи другого порядку в алгебрі $\mathfrak{U}(\mathcal{H}_K)$:*

$$\hat{M}_H^b = -\sum_{\beta\in(\Delta/\Delta_K)+} \beta(H)\hat{b}_{\beta}^{-}\hat{b}_{\beta}^{+}, \tag{6.4.14a}$$

$$\hat{M}_{X_\alpha}^b = \sum_{\substack{\gamma-\beta=\alpha,\\ \beta,\gamma\in(\Delta/\Delta_K)+}} N_{-\beta,\gamma}\hat{b}_{\beta}^{-}\hat{b}_{\gamma}^{+}, \tag{6.4.14b}$$

де $H \in \mathfrak{h}$, $X_\alpha \in \mathfrak{g}_a$, $\alpha \in \Delta_K$, утворюють алгебру Лі ізоморфну $\mathfrak{g}_0^K$.

Завдяки Теоремі (6.4) і умові $\mathfrak{g}_{\nu_0}^{0} \subset \mathfrak{g}_0^K$ можливо виразити елементи підалгебри $\mathfrak{g}_{\nu_0}^{0}$, тобто оператори $\hat{l}_a^{(0)}$ через бозонні оператори народження – знищення і врешті отримати наступний бозонний оператор Лакса:

$$\hat{L}^{Bose}(v) =$$

$$
= \sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}} (\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}^0_{\nu_0}} \hat{l}^{(0)}_a(\hat{b}^-_\beta, \hat{b}^+_\alpha) r^{ab}(\nu_0, v) + \sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+} \hat{b}^+_\alpha \sqrt{\alpha(K)} \partial_u r^{\alpha b}(u,v)|_{u=\nu_0}) X_b +
$$

$$
+ \sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}} (\sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+} \hat{b}^-_\alpha \sqrt{\alpha(K)} \partial_u r^{-\alpha b}(u,v)|_{u=\nu_0} + \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} \frac{1}{2} k_i \partial^2_u r^{ib}(u,v)|_{u=\nu_0}) X_b. \tag{6.4.15}
$$

Зауваження 66. Відзначимо що для данної сингулярної точки ν_0 може існувати кілька можливостей асоціювання з цією точкою бозонного оператора Лакса. Ми проілюструємо це на прикладі раціональних матриць.

6.4.2. Гамільтоніани типу Джейнса – Камінгса – Діке

Побудувавши квантові бозонні оператори Лакса, можна перейти до конструкції спін – бозонних оператоів Лакса і спін – бозонних гамільтоніанів. Для цього потрібно використати оператори Лакса узагальнених систем Годена у зовнішньому магнітному полі і побудовані бозонні оператори Лакса. Комбінуючи їх ми отримуємо наступне

Наслідок 6.3. *Нехай точки $\nu_1, \ldots, \nu_N$ лежать в області регулярності r-матриці $r(u,v)$, тобто в околі точок ν_i має місце розклад (1.3.6). Нехай $c(u) = \sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}} c^a(u) X_a$ – довільний елемент зсуву. Тоді, квантовий оператор:*

$$
\hat{L}(v) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{a,b=1}^{\dim\mathfrak{g}} r^{ab}(\nu_k, u) \hat{S}^{(k)}_a X_b + \sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}^0_{\nu_0}} \sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}} \hat{l}^{(0)}_a(\hat{b}^-_\beta, \hat{b}^+_\alpha) r^{ab}(\nu_0, v) X_b +
$$

$$
\sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+} \sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}} (\hat{b}^+_\alpha \sqrt{\alpha(K)} \partial_u r^{\alpha b}(u,v)|_{u=\nu_0} + \hat{b}^-_\alpha \sqrt{\alpha(K)} \partial_u r^{-\alpha b}(u,v)|_{u=\nu_0}) X_b
$$

$$
+ \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} \sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}} \frac{1}{2} k_i \partial^2_u r^{ib}(u,v)|_{u=\nu_0} X_b + \sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}} c^a(u) X_a \tag{6.4.16}
$$

задовільняє алгебру Лакса (6.4.11).

Порахуємо гамільтоніани: $\hat{H}_l^{JCD} = \frac{1}{2} res_{u=\nu_l} tr \hat{L}^2(v)$ що є точними аналогами гамільтоніанів типу Годена у випадку моделей Діке. Прямий обрахунок дає їх наступну форму:

$$\hat{H}_l^{JCD} = \hat{H}_l^{G,c} + \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}_{\nu_0}^0} \sum_{b=1}^{\dim \mathfrak{g}} \hat{l}_a^{(0)}(\hat{b}_\beta^-, \hat{b}_\alpha^+) \hat{S}_b^{(l)} r^{ab}(\nu_0, \nu_l) +$$
$$+ \sum_{\alpha \in (\Delta/\Delta_K)_+} \sum_{b=1}^{\dim \mathfrak{g}} \hat{b}_\alpha^+ \hat{S}_b^{(l)} \sqrt{\alpha(K)} \partial_u r^{\alpha b}(u, \nu_l)|_{u=\nu_0} +$$
$$\sum_{b=1}^{\dim \mathfrak{g}} (\sum_{\alpha \in (\Delta/\Delta_K)_+} \hat{b}_\alpha^- \hat{S}_b^{(l)} \sqrt{\alpha(K)} \partial_u r^{-\alpha b}(u, \nu_l)|_{u=\nu_0} + \sum_{i=1}^{\mathrm{rank} \mathfrak{g}} \frac{1}{2} k_i \hat{S}_b^{(l)} \partial_u^2 r^{ib}(u, \nu_l)|_{u=\nu_0}), \tag{6.4.17}$$

де $\hat{H}_l^{G,c}$– є N– спіновий гамільтоніан Годена у зовнішньому магнітному полі.Далі ми покжемо квантову комутативність гамільтоніанів (6.4.17).

6.4.3. Квантова комутативність гамільтоніанів типу ДКД Стандартним способом отримання гамільтоніанів типу ДКД у випадку алгебр Лі $\mathfrak{g} = sl(2)$ є застосування асимптотичної границі і, так званого, представлення Гольстейна – Примакова до стандартних спінових операторів Лакса. У випадку алгебр Лі вищих рангів, явна форма представлення Гольстейна – Примакова повинна залежати від типу коприєднаної орбіти. Для випадку загальних коприєднаних орбіт явні формули типу Гольстейна – Примакова невідомі. Проте, для наших цілей достатньо її асимптотичної версії.

Має місце наступна Теорема [106]:

Теорема 6.5. *Нехай алгебра Лі $\mathfrak{g}$ є напівпростою з набором коренів Δ. Нехай $\mathfrak{g}_0^K \subset \mathfrak{g}$ буде її редуктивною підалгеброю що містить підалгебру Картана $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ і має Δ_K набором своїх коренів. Нехай $K \in \mathfrak{h}$ – такий елемент $\mathfrak{h}$, що $\alpha(K) = 0$ для $\alpha \in \Delta_K$ $\hat{b}_\beta^-$, $\hat{b}_\alpha^+$, $\alpha, \beta \in (\Delta/\Delta_K)_+$, $\hat{b}_\beta^-$, $\hat{b}_\alpha^+$, $\alpha, \beta \in (\Delta/\Delta_K)_+$ – бозонні оператори "народження – знищення". Тоді* *наступні елементи алгебри* $\mathfrak{U}(\mathcal{H}_K)$*:*

$$\hat{S}^{\epsilon}_{H_\alpha} = \frac{\alpha(K)}{\epsilon^2}\hat{1} - \sum_{\beta\in(\Delta/\Delta_K)+} \beta(H_\alpha)\hat{b}^{-}_{\beta}\hat{b}^{+}_{\beta},\ H \in \mathfrak{h} \tag{6.4.18a}$$

$$\hat{S}^{\epsilon}_{X_\alpha} = \sum_{\substack{\gamma-\beta=\alpha,\\ \beta,\gamma\in(\Delta/\Delta_K)+}} N_{-\beta,\gamma}\hat{b}^{-}_{\beta}\hat{b}^{+}_{\gamma},\ \alpha \in \Delta_K \tag{6.4.18b}$$

$$\begin{aligned}\hat{S}^{\epsilon}_{X_\alpha} = \frac{\sqrt{\alpha(K)}}{\epsilon}\hat{b}^{+}_{\alpha} + (\sum_{\substack{\gamma-\beta=\alpha,\\ \beta,\gamma\in(\Delta/\Delta_K)+}} \frac{\sqrt{\gamma(K)}}{2\sqrt{\beta(K)}} N_{-\beta,\gamma}\hat{b}^{-}_{\beta}\hat{b}^{+}_{\gamma} + \\ + \sum_{\substack{\gamma+\beta=\alpha,\\ \beta,\gamma\in(\Delta/\Delta_K)+}} \frac{\sqrt{\beta(K)}}{2\sqrt{\gamma(K)}} N_{\beta,\gamma}\hat{b}^{+}_{\beta}\hat{b}^{+}_{\gamma}) + O(\epsilon),\end{aligned} \tag{6.4.18c}$$

$$\begin{aligned}\hat{S}^{\epsilon}_{X_{-\alpha}} = \frac{\sqrt{\alpha(K)}}{\epsilon}\hat{b}^{-}_{\alpha} + (\sum_{\substack{\gamma-\beta=-\alpha,\\ \beta,\gamma\in(\Delta/\Delta_K)+}} \frac{\sqrt{\beta(K)}}{2\sqrt{\gamma(K)}} N_{-\beta,\gamma}\hat{b}^{-}_{\beta}\hat{b}^{+}_{\gamma} + \\ + \sum_{\substack{\gamma+\beta=\alpha,\\ \beta,\gamma\in(\Delta/\Delta_K)+}} \frac{\sqrt{\gamma(K)}}{2\sqrt{\beta(K)}} N_{-\beta,-\gamma}\hat{b}^{-}_{\beta}\hat{b}^{-}_{\gamma}) + +O(\epsilon),\end{aligned} \tag{6.4.18d}$$

утворюють асимптотичне представлення алгебри $\mathfrak{g}$*, тобто в границі малого параметру* ϵ *отримуємо:*

$$[\hat{S}^{\epsilon}_{a}, \hat{S}^{\epsilon}_{b}] = \sum_{c=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^{c}_{ab}\hat{S}^{\epsilon}_{c} + O(1).$$

Детальніше, оператори (6.4.18a)-(6.4.18b) утворюють точне представлення підалгебри $\mathfrak{g}^{K}_{0}$*, а інші комутаційні співвідношення базових елементів є асимптотичними:*

$$[\hat{S}^{\epsilon}_{X_{\alpha_1}}, \hat{S}^{\epsilon}_{X_{\alpha_2}}] = N_{\alpha_1,\alpha_2}\hat{S}^{\epsilon}_{X_{\alpha_1+\alpha_2}} + O(1),\ \text{якщо}\ \alpha_1+\alpha_2 \neq 0,\ \alpha_1, \in \Delta, \alpha_2 \in \Delta/\Delta_K, \tag{6.4.19a}$$

$$[\hat{S}^{\epsilon}_{X_\alpha}, \hat{S}^{\epsilon}_{X_{-\alpha}}] = \hat{S}^{\epsilon}_{H_\alpha} + O(1),\ \alpha \in (\Delta/\Delta_K), \tag{6.4.19b}$$

$$[\hat{S}^{\epsilon}_{H_i}, \hat{S}^{\epsilon}_{X_\alpha}] = \alpha(H_i)\hat{S}^{\epsilon}_{X_\alpha} + O(1),\ i \in \overline{1, \mathrm{rank}\mathfrak{g}}, \alpha \in (\Delta/\Delta_K). \tag{6.4.19c}$$

Ми будемо також використовувати наступне Твердження:

Твердження 6.1. *Нехай класична r-матриця задовільняє умови (i)-(iii) Теореми (6.3). Нехай K – елемент підалгебри Картана, що централізується підалгеброю $\mathfrak{g}_0^K$, і $\langle\ ,\ \rangle_1$ — спарювання в першій компоненті тензорного добудку. Тоді $\mathfrak{g}$-значні функції:*

$$c^{(0)}(v) = \langle K^* \otimes 1, r_{12}(\nu_0, v)\rangle_1,\ c^{(1)}(v) = \langle K^* \otimes 1, (\partial_u r_{12}(u,v))|_{u=\nu_0}\rangle_1$$

є узагальненими елементами зсуву.

Викорстовуючи це можна довести наступне Твердження [108]:

Твердження 6.2. *Узагальнені гамільтоніани ДКД (6.4.17) співпадають з границею великого спіну в $(N+1)$-тому спіні в узагальнених гамільтоніанах Годена у зовнішньому магнітному полі з $(N+1)$ – спінами.*

Комбінуючи попереднє Твердження і узагальнене асимптотичне представлення Гольстейна–Примакова, отримуємо наступну Теорему [106]:

Теорема 6.6. *Узагальнені інтеграли ДКД взаємно комутують:*

$$[\hat{H}^{JCD}_k, \hat{H}^{JCD}_l] = 0.$$

Довівши комутативність узагальнених інтегралів ДКД $\hat{H}^{JCD}_l$, можна зконструювати узагальнений гамільтоніан ДКД $\hat{H}_{JCD}$ як їх лінійну комбінацію. Зокрема, можна покласти:

$$\hat{H}_{JCD} = \sum_{l=1}^{N} \hat{H}^{JCD}_l = \sum_{l=1}^{N} \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} \sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}} \frac{1}{2} k_i \hat{S}^{(l)}_b \partial_u^2 r^{ib}(u, \nu_l)|_{u=\nu_0} + \sum_{l=1}^{N} \sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}} c^b(\nu_l)\hat{S}^{(l)}_b$$

$$+\sum_{l=1}^{N}\sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+}\sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}}\sqrt{\alpha(K)}(\hat{b}^{+}_{\alpha}\partial_u r^{\alpha b}(u,\nu_l)|_{u=\nu_0}+\hat{b}^{-}_{\alpha}\partial_u r^{-\alpha b}(u,\nu_l)|_{u=\nu_0})\hat{S}^{(l)}_b+$$

$$+\sum_{l=1}^{N}\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}^0_{\nu_0}}\sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}}\hat{l}^{(0)}_a(\hat{b}^{-}_{\beta},\hat{b}^{+}_{\alpha})\hat{S}^{(l)}_b r^{ab}(\nu_0,\nu_l)+\sum_{l=1}^{N}\hat{H}^{G,c}_l. \quad (6.4.20)$$

Цей гамільтоніан може бути інтерпритований як гамільтоніан що описує взаємодію молекули з N n-рівневих атомів, де $n \equiv \mathrm{rank}\mathfrak{g}$ з багатьма модами електромагнітного поля. Перший доданок описує вільну енергію атома, другий доданок (у випадку коли $c(u)$ приймає значення у підалгебрі Картана $\mathfrak{h}$) описує, так званий детюнінг, а компоненти елементу зсуву є параметрами детюнінгу, наступні два доданки описують взаємодію молекули з полем, п'ятий доданок описує додаткову по відношенню до стандартного ДКД – гамільтоніану взаємодію атома з полем і, нарешті, останній доданок — сума узагальнених гамільтоніанів Годена — описує атомну взаємодію. Гамільтоніан $\hat{H}^{JCD}_l$ не містить кінетичного члену. Щоб ввести його необхідно ввести додаткові інтеграли комутучі з $\hat{H}^{JCD}_l$.

6.5. Додаткові інтеграли і симетрії r-матриці.

6.5.1. Загальний випадок. Нехай $\hat{L}(u) = \sum\limits_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}}\hat{L}_a(u)X^a$ – оператор Лакса, що задовільняє тензорну дужку Лі – Пуасона з класичною r-матрицею і довільною допустимою залежністю $\hat{L}_a(u)$ від u.

Має місце наступна Теорема:

Теорема 6.7. *Нехай $\mathfrak{g}$– напівпроста алгебра Лі і $\mathfrak{g}_0$ — її підалгебра. Нехай $\hat{M}_a$, $a\in\overline{1,\dim\mathfrak{g}_0}$ – деякі оператори, що діють на оператори Лакса $\hat{L}(u)$ приєднаним представленням підалгебри $\mathfrak{g}_0$:*

$$[\hat{M}_a,\hat{L}_b(u)]=\sum_{c=1}^{\dim\mathfrak{g}}C^c_{ab}\hat{L}_c(u),\ \ \text{де}\ \ a\in\overline{1,\dim\mathfrak{g}_0},\ b\in\overline{1,\dim\mathfrak{g}}. \quad (6.5.21)$$

Тоді

(i) оператори $\hat{M}_a$ утворюють алгебру ізоморфну до підалгебри $\mathfrak{g}_0$:

$$[\hat{M}_a, \hat{M}_b] = \sum_{c=1}^{\dim\mathfrak{g}_0} C^c_{ab}\hat{M}_c, \quad a, b \in \overline{1, \dim\mathfrak{g}_0} \tag{6.5.22}$$

(ii) підалгебра Лі, породжена операторами $\hat{M}_a$, централізує алгебру інтегралів генерованих $tr\hat{L}^2(u)$:

$$[\hat{M}_a, tr\hat{L}^2(u)] = 0,\ a \in \overline{1, \dim\mathfrak{g}_0}.$$

Зауваження 67. Дана Теорема дозволяє суттєво розширити комутативну підалгебру породжену операторами $\hat{H}_l = \frac{1}{2}res_{u=\nu_l}tr\hat{L}^2(u)$. Дійсно, кожна комутативна підалгебра, зконструйована за допомогою операторів $\hat{M}_a$, буде комутувати з Абелевою підалгеброю генерованою операторами $\hat{H}_l$. На роль такої підалгебри можна взяти підалгебру Гельфенда – Цетліна алгебри $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_0)$ (де $\mathfrak{g}_0$ генеровано операторами $\hat{M}_a$) чи просто деяку комутативну підалгебру алгебри $\mathfrak{g}_0$.

6.5.2. Випадок узагальнених моделей Годена. В цьому підрозділі ми зконструюємо шукані оператори $\hat{M}_a$ для випадку узагальнених моделей Годена і узагальнених моделей Годена у зовнішньому магнітному полі. Розглянемо спершу випадок узагальнених моделей Годена. Має місце наступне Твердження [106]:

Твердження 6.3. *Нехай r-матриця $r(u, v)$ є $\mathfrak{g}_0$-інваріантною. Нехай ν_k, $k \in \overline{1, N}$-регулярні точки r-матриці. Нехай $\hat{L}(u) = \sum_{b,d=1}^{\dim\mathfrak{g}} r^{bd}(\nu_k, u)\hat{S}^{(k)}_b X_d = \sum_{d=1}^{\dim\mathfrak{g}} \hat{L}^d(u)X_d$ – оператор Лакса узагальненої моделі Годена. Тоді оператори $\hat{M}^{spin}_a = \sum_{n=1}^{N} \hat{S}^{(k)}_a$, $a \in \overline{1, \dim\mathfrak{g}_0}$ задовільняють умові (6.5.21).*

Розглянемо випадок узагальнених моделей Годена у зовнішньому магнітному полі. Має місце наступне Твердження [106]:

Твердження 6.4. *Нехай r-матриця $r(u,v)$ є $\mathfrak{g}_0$-інваріантною. Нехай ν_k, $k \in \overline{1,N}$ — регулярні точки r-матриці і $\hat{L}(u) = \sum\limits_{b,d=1}^{\dim\mathfrak{g}} (r^{bd}(\nu_k,u)\hat{S}_b^{(k)} + c^d(u))X_d = \sum\limits_{d=1}^{\dim\mathfrak{g}} \hat{L}^d(u)X_d$ – оператор Лакса узагальненої моделі Годена у зовнішньому магнітному полі. Нехай $\mathfrak{z}(c(u))$ центалізує елемент $c(u)$ в алгебрі $\mathfrak{g}$. Тоді оператори $\hat{M}_a^{spin} = \sum\limits_{n=1}^{N} \hat{S}_a^{(k)}$, де $X_a \in \mathfrak{g}_0 \bigcap \mathfrak{z}(c(u))$ задовільняють співвідношенням (6.5.21).*

Зауваження 68. Відзначимо, що у випадку узагальнених моделей Годена у зовнішньому магнітному полі, симетрія моделі понижується і співпадає з перетином симетрії r-матриці і елемента зсуву $c(u)$.

6.5.3. Випадок моделей типу ДКД. В цьому підрозділі ми розглянемо алгебру додаткових інтегралів для узагальнених моделей ДКД асоційованих з класичними r-матрицями що мають додаткові симетрії. З цією метою ми зконструюємо відповідні оператори симетрії спершу для бозонних операторів Лакса. Має місце наступне Твердження [106]:

Твердження 6.5. *Нехай r-матриця $r(u,v)$ є $\mathfrak{g}_0$-інваріантною, де $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_0^K$. Нехай ν_0 — спеціальна точка r-матриці, описана в Теоремі 6.3 і $\hat{L}(u)$ – є оператор Лакса (6.4.12). Тоді оператори $\hat{M}_{X_a}^{bos}$, $X_a \in \mathfrak{g}_0$, задані формулами (6.4.14), задовільняють умові (6.5.21).*

Отримавши алгебру симетрій бозонних операторів Лакса і операторів Лакса систем типу Годена у зовнішньому магнітному полі, ми можемо зформулювати наступну Теорему [106]:

Теорема 6.8. *Нехай r-матриця $r(u,v)$ є $\mathfrak{g}_0$-інваріантною, де $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_0^K$. Нехай $\hat{L}(u)$ — оператор Лакса (6.4.15), що відповідає узагальненій моделі ДКД з матрицею детюнінгу – елементом зсуву $c(u)$. Тоді оператори:*

$$\hat{M}_{X_a} = \hat{M}_{X_a}^{bos} + \hat{M}_{X_a}^{spin},$$

де $X_a \in \mathfrak{g}_0 \bigcap \mathfrak{z}(c(u))$ *утворюють алгебру симетрії узагальненої моделі ДКД:*

$$[\hat{M}_{X_a}, \mathrm{tr}\hat{L}^2(u)] = 0.$$

6.5.4. Загальний гамільтоніан Картан-симетричних моделей ДКД. В цьому підрозділі ми зконструюємо загальний гамільтоніан частково симетричної моделі ДКД що містить кінетичний доданок. З цією метою ми розглянемо $\mathfrak{g}_0$-інваріантну r-матрицю, де підалгебра $\mathfrak{g}_0$ містить підалгебру Картана $\mathfrak{h}$ алгебри $\mathfrak{g}$. Більше того, ми припустимо що централізатор $\mathfrak{z}(c(u))$ елеметнта зсуву $c(u)$, що використовується в конструкції гамільтоніанів $\hat{H}_l^{JCD}$ також містить підалгебру Картана $\mathfrak{h}$. Це відбувається, наприклад, коли $c(u)$ приймає значення в $\mathfrak{h}$. В такій ситуації можна додати до зконструйованих комутуючих інтегралів $\hat{H}_l^{JCD}$ також комутуючі оператори $\hat{M}_{H_i}$, $i \in \overline{1, \mathrm{rank}\mathfrak{g}}$. Відповідний загальний ДКД – гамільтоніан записується наступним чином:

$$\hat{H}_{JCD} = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} w_i \hat{M}_{H_i} + g \sum_{l=1}^{N} \hat{H}_l^{JCD}, \tag{6.5.23}$$

де параметри g і w_i тобто коефіцієнт взаємодії і частоти є довільними.

Зауваження 69. Можно розглянути трохи більш загальний гамільтоніан, а саме $\hat{H}_{JCD} = \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} w_i \hat{M}_{H_i} + \sum\limits_{l=1}^{N} g_l \hat{H}_l^{JCD}$, але вимога що $\hat{H}_{JCD}$ не містить членів типу атом-атомної взаємодії у випадку кососиметричних r-матриць веде до вибору $g_1 = g_2 = .. = g_l = g$.

Гамільтоніан (6.5.23) все ще містить деяку залишкову симетрію. Має місце наступне Твердження [106]:

Твердження 6.6. *Нехай r-матриця $r(u,v)$ є $\mathfrak{g}_0$-інваріантною, де $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_0^K$. Нехай $\mathfrak{g}_0^W$ – редуктивна підалгебра що централізує елеметнт підалгебри Картана* $W = \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} w_i H_i$. *Тоді оператори* $\hat{M}_{X_a} = \hat{M}_{X_a}^{bos} + \hat{M}_{X_a}^{spin}$, *де* $X_a \in \mathfrak{g}_0 \bigcap \mathfrak{g}_0^W \bigcap \mathfrak{z}(c(u))$ *утворюють алгебру симетрій узагальненого гамільтоніану ДКД (6.5.23), тобто:*

$$[\hat{M}_{X_a}, \hat{H}_{JCD}] = 0.$$

Наслідок 6.4. *Якщо елемент* W *підалгебри Картана є елементом загального положення, тобто* $w_i \neq w_j$, $i, j \in \overline{1, \mathrm{rank}\mathfrak{g}}$, *тоді алгебра симетрії гамільтоніану (6.5.23) співпадає з підалгеброю Картана породженою операторами* $\hat{M}_{H_i}$.

Розглянемо приклад частково симетричних класичних r-матриць алгебра симетрії яких містить підалгебру Картана і відповідні узагальнені гамільтоніани типу ДКД. Основним прикладом таких r-матриць є діагональні в кореневому базисі r-матриці наступної явної форми:

$$r(u,v) = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} r^i(u,v) H_i \otimes H_i + \sum_{\alpha \in (\Delta)_+} (r^{\alpha}(u,v) X_{\alpha} \otimes X_{-\alpha} + r^{-\alpha}(u,v) X_{-\alpha} \otimes X_{\alpha}) \tag{6.5.24}$$

Надалі будемо розглядати тільки діагональні елементи зсуву вигляду:

$$c(u) = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} c_i(u) H_i.$$

Приклад 6.1. Нехай $\mathfrak{g} = gl(n)$. У цьому випадку підалгебра Картана співпадає з алгеброю діагональних матриць і $H_i \equiv X_{ii}$, $i \in \overline{1, n}$ – її ортонормований базис. Множина всіх коренів співпадає з лінійними формами $\alpha_{ij} = w_i - w_j$, де $w_i(H_j) = \delta_{ij}$, і відповідні нормалізовані елементи кореневих просторів $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}$ це $X_{\alpha_{ij}} \equiv X_{ij}$ $(i \neq j)$. Діагональна в цьому базисі r-матриця має вигляд:

$$r(u,v) = \sum_{i=1}^{n} r_{ii}(u,v) X_{ii} \otimes X_{ii} + \sum_{i,j=1, i<j}^{n} (r_{ij}(u,v) X_{ij} \otimes X_{ji} + r_{ji}(u,v) X_{ji} \otimes X_{ij}).$$

Діагональний елемент зсуву дається діагональною матрицею:

$$c(u) = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} c_{ii}(u) X_{ii}.$$

Узагальнені гамільтоніани ДКД (6.5.23) що відповідають r-матриці (6.5.24) і діагональним елементам зсуву мають вигляд:

$$\hat{H}_{JCD} = -\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} w_i \sum_{\beta\in(\Delta/\Delta_K)+} \beta(H_i)\hat{b}_\beta^- \hat{b}_\beta^+ +$$

$$+\sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}}(w_i + \frac{g}{2}k_i\partial_u^2 r^i(u,\nu_l)|_{u=\nu_0} + gc_i(\nu_l))\hat{S}_i^{(l)} +$$

$$+g\sum_{l=1}^{N}\sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+}\sqrt{\alpha(K)}\big(\hat{b}_\alpha^+\hat{S}_{-\alpha}^{(l)}\partial_u r^{\alpha}(u,\nu_l)|_{u=\nu_0}+\hat{b}_\alpha^-\hat{S}_\alpha^{(l)}\partial_u r^{-\alpha}(u,\nu_l)|_{u=\nu_0}\big)+$$

$$+\, g\sum_{l=1}^{N}\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}_{\nu_0}^0}\sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}}\hat{l}_a^{(0)}(\hat{b}_\beta^-,\hat{b}_\alpha^+)\hat{S}_b^l r^{ab}(\nu_0,\nu_l) + g\sum_{l=1}^{N}\hat{H}_l^G. \quad (6.5.25)$$

Цей гамільтоніан може бути інтерпритований як гамільтоніан що описує взаємодію молекули N n-рівневих атомів, де $n \equiv \mathrm{rank}\mathfrak{g}$ з багатьма модами електромагнітного поля. Перший доданок – кінетичний член, що описує енергію $(\Delta/\Delta_K)_+$–мод електромагнітного поля. Другий доданок відповідає вільній енергії N атомів з $n = \mathrm{rank}\mathfrak{g}$ енергетичними рівнями, кожен з яких має енергію $\epsilon_i(\nu_l) = (w_i + \frac{g}{2}k_i\partial_u^2 r^i(u,\nu_l)|_{u=\nu_0} + gc_i(\nu_l))$, $i \in \overline{1,n}$. Наступні два доданки описують стандартну взаємодію атом – поле в наближенні "хвилі що обертається" з константами взаємодії $g_{\pm\alpha}(\nu_l) = g\sqrt{\alpha(K)}\partial_u r^{\pm\alpha}(u,\nu_l)|_{u=\nu_0}$. П'ятий доданок описує додаткову по відношенню до стандартної моделі ДКД взаємодію атом – поле другого порядку по бозонних операторах. І, нарешті, останній доданок – сума узагальнених гамільтоніанів Годена, описує атом-атомну взаємодію. Цей доданок є нулем у випадку кососиметричних r-матриць. В наступих розділах ми розглянемо кілька класів прикладів картан – інваріантних матриць і відповідні загальні інтегровні моделі типу ДКД.

6.6. Раціональні моделі типу ДКД

6.6.1. Оператори Лакса і гамільтоніани типу ДКД Конкретизуємо загальний гамільтоніан типу ДКД для випадку класичних раціональних r-матриць для вигляду:

$$r_{12}(u-v) = \frac{\Omega_{12}}{(u-v)} = \frac{\sum\limits_{a,b=1}^{\dim\mathfrak{g}} g_{ab} X^a \otimes X^b}{(u-v)}, \tag{6.6.26}$$

де $g_{\alpha\beta}$ — невироджена інваріантна метрика на $\mathfrak{g}$.

Нехай $\mathfrak{g}$ як і раніше - напівпроста алгебра Лі або редуктивна алгебра $gl(n)$. Нехай Δ — набір її коренів, $\mathfrak{g}_\alpha$ — кореневий підпростір, X_α — його базисний елемент. Нехай $\Delta_K \subset \Delta$ — замкнута симетрична підмножина множини всіх коренів. Нехай $K = \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{rank} g} k_i H_i$ такий елемент підалгебри Картана що $\alpha(K) = 0, \forall\alpha \in \Delta_K$ а $\mathfrak{g}_K \subset \mathfrak{g}$ — редуктивна підалгебра що містить підалгебру Картана $\mathfrak{h}$ і має множиною своїх коренів підмножину Δ_K. Викорстовуючи загальну формулу (6.4.16), легко отримати що оператор Лакса типу ДКД для цього випадку має вигляд:

$$\hat{L}(u) = u\hat{L}^{(-2)} + \hat{L}^{(-1)} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\hat{L}^{(k)}}{u-\nu_k}, \tag{6.6.27}$$

де

$$\hat{L}^{(-2)} = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank} g} k_i H_i, \tag{6.6.28a}$$

$$\hat{L}^{(-1)} = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank} g} c_i H_i + \sum_{\alpha\in\Delta_K} c_\alpha X_\alpha + \sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+} \sqrt{\alpha(-K)}(\hat{b}_\alpha^+ X_{-\alpha} + \hat{b}_\alpha^- X_\alpha), \tag{6.6.28b}$$

$$\hat{L}^{(k)} = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank} g} \hat{S}_i^{(k)} H_i + \sum_{\alpha\in\Delta_+} \hat{S}_\alpha^{(k)} X_{-\alpha} + \sum_{\alpha\in\Delta_+} \hat{S}_{-\alpha}^{(k)} X_\alpha, \tag{6.6.28c}$$

Тут c_i, c_α, k_i – константи, $\hat{S}^{(k)}_{\pm\alpha}$, $\hat{S}^{(k)}_i$ — компоненти узагальненого спінового оператора у вузлі k і $\hat{b}^+_\alpha$, $\hat{b}^-_\alpha$ бозонні оператори народження-знищення.

Генеруюча функція інтегралів другого порядку має вигляд:

$$I^{(2)}(\hat{L}(u)) = u^2\hat{I}_2 + u\hat{I}_1 + \hat{H}_0 + \sum_{k=1}^{N}\frac{\hat{H}_k}{(u-\nu_k)} + \sum_{k=1}^{N}\frac{\hat{I}_{-2k}}{(u-\nu_k)^2}. \quad (6.6.29)$$

Легко показати, що оператори $\hat{I}_2$, $\hat{I}_1$ і $\hat{I}_{-2k}$, $k \in \overline{1,N}$ — оператори Казиміра відповідної дужки Лі. Нетривіальні оператори другого порядку $\hat{H}_0$ і $\hat{H}_k$ мають – по модулю констант – наступну форму:

$$\hat{H}_0 = \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}g} k_i\hat{S}^{(k)}_i + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+}\alpha(-K)(\hat{b}^+_\alpha\hat{b}^-_\alpha + \hat{b}^-_\alpha\hat{b}^+_\alpha), \quad (6.6.30)$$

$$\hat{H}_k = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}g} c_i\hat{S}^{(k)}_i + \sum_{\alpha\in\Delta_K} c_\alpha\hat{S}^{(k)}_\alpha + \sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+}\sqrt{\alpha(-K)}(\hat{b}^+_\alpha\hat{S}^{(k)}_{-\alpha} + \hat{b}^-_\alpha\hat{S}^{(k)}_\alpha) +$$
$$+ \nu_k\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}g} k_i\hat{S}^{(k)}_i + \sum_{l=1,l\neq k}^{N}\frac{(\hat{S}^{(l)},\hat{S}^{(k)})}{(\nu_l-\nu_k)}. \quad (6.6.31)$$

Як слідує з викладеної вище теорії, вони взаємо комутують.

Більше того в випадку раціональної r-матриці можна показати [94] що

$$[I^{(2)}(\hat{L}(u)), I^{(2)}(\hat{L}(v))] = 0.$$

За гамільтоніан моделі можна взяти лінійну комбінацію цих інтегралів:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + g\sum_{l=1}^{N}\hat{H}_l \quad (6.6.32)$$

Вона має, з точністю до константи, наступний явний вигляд:

$$\hat{H} = \sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+}\Big(\alpha(-K)\hat{b}^+_\alpha\hat{b}^-_\alpha + g\sqrt{\alpha(-K)}\sum_{l=1}^{N}(\hat{b}^+_\alpha\hat{S}^{(l)}_{-\alpha} + \hat{b}^-_\alpha\hat{S}^{(l)}_\alpha)\Big) +$$
$$(6.6.33)$$

$$+\sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}g}((g\nu_l+1)k_i+gc_i)\hat{S}_i^{(l)}+g\sum_{l=1}^{N}\sum_{\alpha\in\Delta_K}c_\alpha\hat{S}_\alpha^{(l)}. \tag{6.6.34}$$

Для того щоб ввести в цей гамільтоніан більш загальний кінетичний член, необхідно розглянути додаткові лінійні інтеграли що існують в наслідок геометричної симетрії класичної r-матриці. Має місце наступна Теорема, що є наслідком загальної Теореми 6.8:

Теорема 6.9. *Нехай $L(u)$ — оператор Лакса узагальненої моделі ДКД визначеної формулами (6.6.27), (6.6.28) з $c_\alpha = 0, \forall\alpha \in \Delta_K$. Нехай $K = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} k_i H_i$, $C = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} c_i H_i$ — постійні елементи підалгебри $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}_K$ і $\mathfrak{g}_C$ — їх редуктивні централізатори у алгебрі $\mathfrak{g}$ і Δ_K, Δ_C відповідні набори коренів. Нехай $\mathfrak{g}_0$ — редуктивна підалгебра алгебри $\mathfrak{g}$ що містить Картанівську підалгебру і має $\Delta_0 \equiv \Delta_K\bigcap\Delta_C$ набором своїх коренів. Тоді*

(i) оператори

$$\hat{M}_\alpha = \sum_{\substack{\gamma-\beta=\alpha,\\ \beta,\gamma\in(\Delta/\Delta_K)+}} N_{-\beta,\gamma}\hat{b}^-_\beta\hat{b}^+_\gamma + \sum_{k=1}^{N}\hat{S}_\alpha^{(k)}, \qquad \text{де } \alpha\in\Delta_0, \tag{6.6.35a}$$

$$\hat{M}_i = -\sum_{\beta\in(\Delta/\Delta_K)+}\beta(H_i)\hat{b}^-_\beta\hat{b}^+_\beta + \sum_{k=1}^{N}\hat{S}_i^{(k)}, \qquad \text{де } i\in\overline{1,\mathrm{rank}\mathfrak{g}} \tag{6.6.35b}$$

є симетріями узагальненої моделі ДКД, тобто

$$[\hat{M}_\alpha,\hat{H}_k] = [\hat{M}_i,\hat{H}_k] = 0, \quad \forall\alpha\in\Delta_0, \quad \forall i\in\overline{1,\mathrm{rank}\mathfrak{g}}.$$

(ii) оператори (6.6.35) утворюють алгебру Лі ізоморфну до $\mathfrak{g}_0$.

Тепер, маючи додаткові комутуючі інтеграли $\hat{M}_i$, що відповідають елементам підалгебри Картана, можна написати загальний гамільтоніан ДКД з довільним кінетичним членом. Він має вигляд:

$$\hat{H}' = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} w_i \hat{M}^b_{H_i} + g \sum_{l=1}^{N} \hat{H}_l =$$
$$= -\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} w_i(\sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)+} \alpha(H_i)\hat{b}^-_\alpha \hat{b}^+_\alpha) + \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} \sum_{k=1}^{N} w_i \hat{S}^{(k)}_i +$$
$$+ g \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} \sum_{k=1}^{N} (\nu_l k_i + c_i)\hat{S}^{(k)}_i + g \sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)+} \sqrt{\alpha(-K)} \sum_{l=1}^{N} (\hat{b}^+_\alpha \hat{S}^{(l)}_{-\alpha} + \hat{b}^-_\alpha \hat{S}^{(l)}_\alpha) \tag{6.6.36}$$

де константи w_i $i \in \overline{1, \mathrm{rank}\mathfrak{g}}$ є довільними.

Введення констант w_i в гамільтоніан зменшує неабелеву симетрію узагальнених моделей ДКД. Має місце наступний аналог Теореми 6.6:

Теорема 6.10. *Нехай гамільтоніан H' дається формулою (6.6.36), $K = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} k_i H_i$, $C = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} c_i H_i$, $W = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} w_i H_i$ — постійні елементи підалгебри $\mathfrak{h}$ і $\mathfrak{g}_K$, $\mathfrak{g}_C$, $\mathfrak{g}_W$ — їх редуктивні стабілізатори в алгебрі $\mathfrak{g}$, Δ_K, Δ_C, Δ_W відповідні набори коренів. Нехай $\mathfrak{g}'_0$ — редуктивна підалгебра алгебри $\mathfrak{g}$, що містить картанівську підалгебру і має $\Delta'_0 \equiv \Delta_K \bigcap \Delta_C \bigcap \Delta_W$ набором своїх коренів. Тоді оператори $\hat{M}^b_{X_\alpha}$ і $\hat{M}^b_{H_i}$ $\forall \alpha \in \Delta_0, \forall i \in \overline{1, \mathrm{rank}\mathfrak{g}}$ є симетріями узагльненої моделі ДКД*

$$[\hat{M}_\alpha, H'] = [\hat{M}_i, H'] = 0, \quad \forall \alpha \in \Delta_0, \quad \forall i \in \overline{1, \mathrm{rank}\mathfrak{g}}$$

і утворюють алгебру Лі ізоморфну до $\mathfrak{g}'_0$.

6.7. Моделі ДКД і зсунуті Z_2- градуйовані r-матриці

6.7.1. Зсунуті Z_2- градуйовані r-матриці Нехай σ — інволютивний автоморфізм алгебри Лі $\mathfrak{g}$, нехай $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} + \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ – відповідне Z_2-градуйовання алгебри $\mathfrak{g}$:

$$[\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{0}}] \subset \mathfrak{g}_{\bar{0}}, \ [\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] \subset \mathfrak{g}_{\bar{1}}, \ [\mathfrak{g}_{\bar{1}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] \subset \mathfrak{g}_{\bar{0}}$$

Нехай $\Omega^{\bar{0}}_{12}$ — тензорний Казимір на алгебрі $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$, c_{12} – постійний некососиметричний розв'язок модифікованого рівняння Янга – Бакстера на $\mathfrak{g}_0$:

$$[c_{12}, c_{13}] - [c_{23}, c_{12}] + [c_{32}, c_{13}] = [\Omega^{\bar{0}}_{32}, c_{13}]. \qquad (6.7.37)$$

Тоді, як слідує з результатів Глави 2 функція:

$$r_{12}(u,v) = \frac{v^2}{u^2-v^2}\Omega^{\bar{0}}_{12} + \frac{uv}{u^2-v^2}\Omega^{\bar{1}}_{12} + c_{12}, \qquad (6.7.38)$$

де $\Omega^{\bar{0}}_{12} = \sum\limits_{\alpha=1}^{\dim \mathfrak{g}_{\bar{0}}} X_{\bar{0},\alpha} \otimes X^{\bar{0},\alpha}$, $\Omega^{\bar{1}}_{12} = \sum\limits_{\alpha=1}^{\dim \mathfrak{g}_{\bar{1}}} X_{\bar{1},\alpha} \otimes X^{\bar{1},\alpha}$, і $X_{\bar{j},\alpha}$, $X^{\bar{j},\alpha}$ — дуальні базиси простору $\mathfrak{g}_{\bar{j}}$ задовільняє узагальнене класичне рівняння Янга – Бакстера. Для того щоб зконструювати моделі типу ДКД асоційовані з Z_2-градуюванням алгебри $\mathfrak{g}$, припустимо,як і в Главі 4 що градуювання таке що:

$$\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{g}^K_0, \;\; \mathfrak{g}_{\bar{1}} = \mathfrak{g}^K_1 + \mathfrak{g}^K_{-1},$$

де $\mathfrak{g}^K_0$ — редуктивна, $\mathfrak{g}^K_{\pm 1}$ нільпотентні і розклад $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^K_{-1} + \mathfrak{g}^K_0 + \mathfrak{g}^K_1$ — трикутний. Для того щоб ці визначення були узгоджженими будемо вимагати щоб $\mathfrak{g}^K_{\pm 1}$ були, більше того, абелевими. Тобто, якщо $\alpha, \beta \in (\Delta/\Delta_K)_+$, то $\alpha + \beta \notin (\Delta/\Delta_K)_+$. Такі градуювання і розклади пов'язані з ермітовими симетричними просторами. Відповідна r-матриця (6.7.38) записується наступим чином:

$$\begin{aligned} r_{12}(u,v) = \frac{v^2}{u^2-v^2}\Big(\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} H_i \otimes H_i + \sum_{\alpha \in (\Delta_K)_+} (X_\alpha \otimes X_{-\alpha} + X_{-\alpha} \otimes X_\alpha)\Big) + \\ + \frac{uv}{u^2-v^2} \sum_{\alpha \in (\Delta/\Delta_K)_+} (X_\alpha \otimes X_{-\alpha} + X_{-\alpha} \otimes X_\alpha) + c_{12}. \end{aligned} \qquad (6.7.39)$$

6.7.2. Оператори Лакса типу ДКД. Розглянемо спеціальну точку r-матриці (6.7.38), а саме, точку $u = \infty$. Малий параметр в околі точки $u = \infty$ це $\nu(u) = u^{-1}$. Пряме обчислення дає:

$$r_{12}(\infty, v) = c_{12},$$

$$\lim\nolimits_{u\to\infty} \partial_{u^{-1}} r_{12}(u,v) = v\Omega^{\bar{1}}_{12},$$

$$\lim_{u\to\infty}\partial^2_{u^{-1}} r_{12}(u,v) = 2v^2\Omega^{\bar{0}}_{12}.$$

Викорстовуючи той факт, що по самому визначенню $c_{12} \in \mathfrak{g}_0^K \otimes \mathfrak{g}_0^K$, $\Omega^{\bar{1}}_{12} \in (\mathfrak{g}_1^K \otimes \mathfrak{g}_{-1}^K) \oplus (\mathfrak{g}_{-1}^K \otimes \mathfrak{g}_1^K)$, і $\Omega^{\bar{0}}_{12} \in \mathfrak{g}_0^K \otimes \mathfrak{g}_0^K$, легко показати, що умови (i)-(iii) Теореми 6.3 є виконані оскільки $\mathfrak{g}^0_\infty = \mathfrak{g}_0^K$, $\mathfrak{g}^1_\infty = \mathfrak{g}_1^K + \mathfrak{g}_{-1}^K$, $\mathfrak{g}^2_\infty = \mathfrak{g}_0^K$. Зауважимо що, на відміну від раціонального випадку, ці умови задовільняються тільки для вибраних підалгебр $\mathfrak{g}_0^K$, $\mathfrak{g}_{\pm 1}^K$, а саме для тих підалгебр, що використовуються у визначенні r-матриць (6.7.39).

Базуючись на Теоремі 6.3, можна асоціювати з r-матрицею (6.7.39) наступний оператор Лакса типу Бозе:

$$\hat{L}^{Bose}(u) = -\sum_{i=1}^{\dim\mathfrak{h}}\sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}_0^K} c^{ib}\Big(\sum_{\beta\in(\Delta/\Delta_K)+}\beta(H_i)\hat{b}^-_\beta\hat{b}^+_\beta\Big)X_b +$$
$$+\sum_{\alpha\in\Delta_K}\sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}_0^K} c^{\alpha b}\Big(\sum_{\substack{\gamma-\beta=\alpha,\\ \beta,\gamma\in(\Delta/\Delta_K)+}} N_{-\beta,\gamma}\hat{b}^-_\beta\hat{b}^+_\gamma\Big)X_b$$
$$+u\Big(\sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+}\sqrt{\alpha(K)}\hat{b}^+_\alpha X_{-\alpha} + \sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+}\sqrt{\alpha(K)}\hat{b}^-_\alpha X_\alpha\Big) + u^2\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} k_i H_i, \tag{6.7.40}$$

N- спіновий оператор Лакса, що відповідає зсунутій Z_2- градуйованій r-матриці, має вигляд:

$$\hat{L}^{Spin}(u) = \sum_{k=1}^{N}\frac{u^2}{(\nu_k^2-u^2)}\Big(\sum_{i=1}^{\mathrm{rank} g}\hat{S}^{(k)}_i H_i + \sum_{\alpha\in(\Delta_K)_+}\hat{S}^{(k)}_\alpha X_{-\alpha} + \sum_{\alpha\in(\Delta_K)_+}\hat{S}^{(k)}_{-\alpha}X_\alpha\Big) +$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\frac{u\nu_k}{(\nu_k^2-u^2)}\Big(\sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+}\hat{S}^{(k)}_\alpha X_{-\alpha} + \sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+}\hat{S}^{(k)}_{-\alpha}X_\alpha\Big) + \sum_{a,b=1}^{\dim\mathfrak{g}_0^K} c^{ab}\hat{S}^{(k)}_a X_b. \tag{6.7.41}$$

Для опису повної матриці Лакса типу ДКД необхідно описати необхідні елементи зсуву що грають в моделях ДКД роль параметрів детюнінгу. Вони мають вигляд $c(u) = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} c_i H_i$, де коефіцієнти c_i такі, що

$\sum\limits_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} c_i\alpha(H_i) = 0$, $\forall\alpha \in \Delta_K$. Повний оператор Лакса типу ДКД є сумою цих трьох частин:

$$\hat{L}(u) = \hat{L}^{Bose}(u) + \hat{L}^{Spin}(u) + c(u).$$

6.7.3. Z_2-градуйовані гамільтоніани типу ДКД В цьому підрозділі ми порахуємо гамільтоніани $\hat{H}_l^{JCD}$ для зсунутої Z_2-градуйованої r-матриці, обчислимо їх симетрію і запишемо "повний" гамільтоніан $\hat{H}^{JCD}$.

Пряме обчислення з використанням формули (6.4.17) дає:

$$\hat{H}_l^{JCD} = \hat{H}_l^G + \nu_l \sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+} \sqrt{\alpha(K)}(\hat{b}_\alpha^+ \hat{S}_{-\alpha}^{(l)} + \hat{b}_\alpha^- \hat{S}_\alpha^{(l)}) + \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} (\nu_l^2 k_i + c_i)\hat{S}_i^{(l)} +$$
$$- \sum_{i=1}^{\dim\mathfrak{h}} \sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}_0^K} c^{ib} (\sum_{\beta\in(\Delta/\Delta_K)+} \beta(H_i)\hat{b}_\beta^- \hat{b}_\beta^+) \hat{S}_b^{(l)} +$$
$$+ \sum_{\alpha\in\Delta_K} \sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}_0^K} c^{\alpha b} (\sum_{\substack{\gamma-\beta=\alpha,\\ \beta,\gamma\in(\Delta/\Delta_K)+}} N_{-\beta,\gamma}\hat{b}_\beta^- \hat{b}_\gamma^+) \hat{S}_b^{(l)}, \quad (6.7.42)$$

де $c = \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} c_i H_i \in \mathfrak{c}(\mathfrak{g}_0^K)$ – елемент зсуву, $\hat{H}_l^G$ – це Z_2- градуйований гамільтоніан типу Годена, що дається наступною явною формулою:

$$\hat{H}_l^G = \sum_{k=1}^{N} \Big(\frac{\nu_l^2}{(\nu_k^2 - \nu_l^2)} (\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} \hat{S}_i^{(k)} \hat{S}_i^{(l)} + \sum_{\alpha\in(\Delta_K)_+} \hat{S}_\alpha^{(k)} \hat{S}_{-\alpha}^{(l)} + \sum_{\alpha\in(\Delta_K)_+} \hat{S}_{-\alpha}^{(k)} \hat{S}_\alpha^{(l)}) +$$
$$+ \frac{\nu_k \nu_l}{(\nu_k^2 - \nu_l^2)} \sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+} \big(\hat{S}_\alpha^{(k)} \hat{S}_{-\alpha}^{(l)} + \hat{S}_{-\alpha}^{(k)} \hat{S}_\alpha^{(l)} \big) + \sum_{a,b=1}^{\dim\mathfrak{g}_0^K} c^{ab} \hat{S}_a^{(k)} \hat{S}_b^{(l)} \Big) +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^{\dim\mathfrak{g}_0^K} (c^{ab} - \frac{1}{2} g^{ab}) (\hat{S}_a^{(l)} \hat{S}_b^{(l)} + \hat{S}_b^{(l)} \hat{S}_a^{(l)}),$$

де g^{ab} – компоненти інваріантної метрики.

Розглянемо геометричні симетрії інтегралів $\hat{H}_l^{JCD}$ і зконструюємо повний гамільтоніан ДКД $\widehat{H}_{JCD}$. Як було пояснено в попередніх розділах, симетрії гамільтоніанів $\hat{H}_l^{JCD}$ залежать від симетрії r-матриці. Завдяки тому факту, що $\Omega_{12}^{\bar{0}}$ і $\Omega_{12}^{\bar{1}}$ є $\mathfrak{g}_0^K$- інваріантними тензорами, симетрії r-матриці співпадуть з підалгеброю $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_0^K$ що реалізують симетрії тензору c_{12}:

$$[c_{12}, X_1 + X_2] = 0, X \in \mathfrak{g}_0^K.$$

Припустимо, що тензор c_{12} є Картан–симетричним, тобто $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$. В цьому випадку можна зконструювати відповідний загальний гамільтоніан ДКД наступним чином:

$$\hat{H}_{JCD} = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} w_i \hat{M}_{H_i} + g \sum_{l=1}^{N} \hat{H}_l^{JCD}.$$

чи, більш явно:

$$\begin{gathered}
\hat{H}_{JCD} = -\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} w_i \sum_{\beta \in (\Delta/\Delta_K)+} \beta(H_i) \hat{b}_\beta^- \hat{b}_\beta^+ + \sum_{l=1}^{N} \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} (w_i + g k_i \nu_l^2 + g c_i) \hat{S}_i^{(l)} + \\
+ g \sum_{l=1}^{N} \nu_l \sum_{\alpha \in (\Delta/\Delta_K)_+} \sqrt{\alpha(K)} (\hat{b}_\alpha^+ \hat{S}_{-\alpha}^l + \hat{b}_\alpha^- \hat{S}_\alpha^{(l)}) - \\
- g \sum_{l=1}^{N} \Big(\sum_{i=1}^{\dim\mathfrak{h}} \sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}_0^K} c^{ib} \sum_{\beta \in (\Delta/\Delta_K)+} \beta(H_i) \hat{b}_\beta^- \hat{b}_\beta^+ \hat{S}_b^{(l)} + \\
+ \sum_{\alpha \in \Delta_K} \sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}_0^K} c^{\alpha b} (\sum_{\substack{\gamma - \beta = \alpha, \\ \beta, \gamma \in (\Delta/\Delta_K)+}} N_{-\beta,\gamma} \hat{b}_\beta^- \hat{b}_\gamma^+) \hat{S}_b^{(l)} \Big) + \\
+ \frac{g}{2} \sum_{k,l=1}^{N} \sum_{a,b=1}^{\dim\mathfrak{g}_0^K} c^{ab} (\hat{S}_a^{(k)} \hat{S}_b^{(l)} + \hat{S}_b^{(l)} \hat{S}_a^{(k)}) - \frac{g}{2} \sum_{k,l=1}^{N} \sum_{a,b=1}^{\dim\mathfrak{g}_0^K} g^{ab} \hat{S}_a^{(k)} \hat{S}_b^{(l)}.
\end{gathered} \tag{6.7.43}$$

Цей гамільтоніан описує взаємодію молекули N n-рівневих атомів, де $n = \mathrm{rank}\mathfrak{g}$ з багатьма модами електромагнітного поля. Перший доданок в ньому – кінетичний член, що описує вільну енергію $(\Delta/\Delta_K)_+$-

мод електромагнітного поля. Другий доданок відповідає вільній енергії N атомів з n енергетичними рівнями, кожен з яких має енергію $\epsilon_i(\nu_l) = (w_i + gk_i\nu_l^2 + gc_i)$, $i \in \overline{1,n}$. Наступний доданок описує взаємодію з атом – поле в наближенні хвилі, що обертається з константами взаємодії $g_{\pm\alpha}(\nu_l) = g\nu_l\sqrt{\alpha(K)}$, четвертий доданок є Штарківським зсувом, п'ятий доданок описує додаткову взаємодію атом – поле і, нарешті, шостий і сьомий доданки, відповідають атомній взаємодії.

Основна різниця між раціональними і Z_2– градуйованими гамільтоніанами типу ДКД полягає в формі залежності $\epsilon_i(\nu_l)$, $g_{\pm\alpha}(\nu_l)$ від l. Детальніше, переходячи до Z_2- градуйованого випадку, отримуємо гамільтоніан в якому постійні взаємодії атом – поле залежні від номеру атому у молекулі. Додаткові доданки в Z_2– градуйованому випадку є платою за це і не можуть бути зроблені нулями, навіть якщо $c_{12} = 0$. Дійсно, найпростіший гамільтоніан (6.7.43) має форму:

$$\hat{H}_{JCD} = -\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} w_i \sum_{\beta\in(\Delta/\Delta_K)+} \beta(H_i)\hat{b}^-_\beta\hat{b}^+_\beta + \sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}}(w_i + gk_i\nu_l^2 + gc_i)\hat{S}^{(l)}_i +$$
$$+ g\sum_{l=1}^{N}\nu_l \sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+}\sqrt{\alpha(K)}(\hat{b}^+_\alpha\hat{S}^l_{-\alpha} + \hat{b}^-_\alpha\hat{S}^{(l)}_\alpha) - \frac{g}{2}\sum_{k,l=1}^{N}\sum_{a,b=1}^{\dim\mathfrak{g}_0^K} g^{ab}\hat{S}^{(k)}_a\hat{S}^{(l)}_b. \tag{6.7.44}$$

Інший простий гамільтоніан (6.7.43) пов'язаний з іншим розв'язком рівнянь (6.7.37), а саме $c_{12} = \Omega^{\bar{0}}_{12}$. В цьому випадку, використовуючи визначення операторів $\hat{M}_a = \hat{M}^{Bose}_a + \hat{M}^{Spin}_a$ і віднімаючи від гамільтоніану (6.7.43) інтеграл $\hat{C}_2(M) = \sum\limits_{a,b=1}^{\dim\mathfrak{g}_0^K} g^{ab}\hat{M}_a\hat{M}_b$, отримуємо гамільтоніан:

$$\hat{H}_{JCD} = -\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} w_i \sum_{\beta\in(\Delta/\Delta_K)+} \beta(H_i)\hat{b}^-_\beta\hat{b}^+_\beta + \sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}}(w_i + gk_i\nu_l^2 + gc_i)\hat{S}^{(l)}_i +$$
$$g\sum_{l=1}^{N}\nu_l \sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+}\sqrt{\alpha(K)}(\hat{b}^+_\alpha\hat{S}^l_{-\alpha} + \hat{b}^-_\alpha\hat{S}^{(l)}_\alpha) - \frac{g}{2}\sum_{i=1}^{\dim\mathfrak{h}}(\sum_{\beta\in(\Delta/\Delta_K)+}\beta(H_i)\hat{b}^-_\beta\hat{b}^+_\beta)^2 -$$

$$-\frac{g}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_K}\Big(\sum_{\substack{\gamma-\beta=\alpha,\\ \epsilon-\delta=-\alpha,\\ \beta,\gamma,\delta,\epsilon\in(\Delta/\Delta_K)+}} N_{-\beta,\gamma}N_{-\delta,\epsilon}\hat{b}^{-}_{\beta}\hat{b}^{+}_{\gamma}\hat{b}^{-}_{\delta}\hat{b}^{+}_{\epsilon}+$$
$$+\sum_{\substack{\gamma-\beta=-\alpha,\\ \epsilon-\delta=\alpha,\\ \beta,\gamma,\delta,\epsilon\in(\Delta/\Delta_K)+}} N_{-\beta,\gamma}N_{-\delta,\epsilon}\hat{b}^{-}_{\overline{\beta}}\hat{b}^{+}_{\gamma}\hat{b}^{-}_{\overline{\delta}}\hat{b}^{+}_{\epsilon}\Big). \quad (6.7.45)$$

Останні доданки в гамільтоніані (6.7.45) (четвертого порядку по бозонним операторам народження – знищення) є нелінійїсю Керра узагальненого на випадок багатьох бозонних мод. Відзначимо, що гамільтоніан (6.7.45) не містить додаткових членів взаємодії типу атом – атом чи атом – поле.

6.8. Z_2-градуйовані моделі ДКД. Випадок $\mathfrak{g} = gl(n)$.

Специфікуємо тепер результати попереднього підрозділу для випадку алгебри $gl(n)$ та тривіального тензора зсуву: $c_{12} = 0$.

6.8.1. **Z_2 – градуйовані r-матриці: випадок алгебри $gl(n)$.** Нехай σ - автоморфізм другого порядку алгебри $gl(n)$. Нехай $gl(n) = gl(n)_{\overline{0}} + gl(n)_{\overline{1}}$ — відповідне Z_2- градуювання, тобто:

$$[gl(n)_{\overline{0}}, gl(n)_{\overline{0}}] \subset gl(n)_{\overline{0}},\ [gl(n)_{\overline{0}}, gl(n)_{\overline{1}}] \subset gl(n)_{\overline{1}},\ [gl(n)_{\overline{1}}, gl(n)_{\overline{1}}] \subset gl(n)_{\overline{0}}$$

В цьому випадку функція:

$$r(u,v) = \frac{v^2}{u^2-v^2}\Omega^{12}_{\overline{0}} + \frac{uv}{u^2-v^2}\Omega^{12}_{\overline{1}} \quad (6.8.46)$$

де $\Omega^{12}_{\overline{0}} = \sum\limits_{\alpha=1}^{\dim gl(n)_{\overline{0}}} X_{\overline{0},\alpha}\otimes X^{\overline{0},\alpha}$, $\Omega^{12}_{\overline{1}} = \sum\limits_{\alpha=1}^{\dim gl(n)_{\overline{1}}} X_{\overline{1},\alpha}\otimes X^{\overline{1},\alpha}$, задовільняє узагальнене класичне рівняння Янга – Бакстера.

Конкретизуємо Z_2-градуювання алгебри $gl(n)$. Покладемо що:

$$gl(n)_{\overline{0}} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{X_{ij} | i,j \in \overline{1,n_1} \cup \overline{n_1+1,n}\} = gl(n_1)\oplus gl(n-n_1),$$

$$gl(n)_{\overline{1}} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{X_{ij}, X_{ji} | i \in \overline{1,n_1}, j \in \overline{n_1+1,n}\}.$$

відповідна r-матриця (6.8.46) набуває форми:

$$r(u,v) = \frac{v^2}{u^2-v^2}(\sum_{i,j=1}^{n_1} X_{ij}\otimes X_{ji} + \sum_{i,j=n_1+1}^{n} X_{ij}\otimes X_{ji}) +$$

$$+\frac{uv}{(u^2-v^2)}\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=n_1+1}^{n}(X_{ij}\otimes X_{ji} + X_{ji}\otimes X_{ij}). \quad (6.8.47)$$

Можна показати, що елемент зсуву $c(u)$ для r-матриці (6.8.47) має вигляд

$$c(u) = (c_1\sum_{i=1}^{n_1} X_{ii} + c_n \sum_{j=n_1+1}^{n} X_{jj}).$$

6.8.2. Узагальнені моделі Годена у зовнішньому магнітному полі. Опишемо явно узагальнені моделі Годена у зовнішньому магнітному полі, що відповідають даній r- матриці. Оператори Лакса узагальнених моделей Годена у зовнішньому магнітному полі для r-матриці (6.8.47) мають вигляд:

$$\hat{L}^S(u) = \sum_{k=1}^{N}(\frac{u^2}{(\nu_k^2-u^2)}(\sum_{i,j=1}^{n_1}\hat{S}_{ij}^{(k)}X_{ji} + \sum_{i,j=n_1+1}^{n}\hat{S}_{ij}^{(k)}X_{ji}) +$$

$$+\frac{\nu_k u}{(\nu_k^2-u^2)}\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=n_1+1}^{n}(\hat{S}_{ji}^{(k)}X_{ij} + \hat{S}_{ij}^{(k)}X_{ji})) + (c_1\sum_{i=1}^{n_1}X_{ii} + c_n\sum_{i=n_1+1}^{n}X_{ii}),$$
$$(6.8.48)$$

де оператори $\hat{S}_{ij}^{(m)}$, $i,j\in\overline{1,n}$, $m\in\overline{1,N}$ утворюють представлення $gl(n)^{\oplus N}$:

$$[\hat{S}_{ij}^{(m)},\hat{S}_{kl}^{(p)}] = \delta^{mp}(\delta_{kj}\hat{S}_{il}^{(m)} - \delta_{il}\hat{S}_{kj}^{(m)}).$$

Генеруюча функція інтегралів другого порядку має настуний розклад:

$$\hat{\tau}_n^S(u) = \hat{H}_0^S + \sum_{l=1}^{N}\frac{\nu_l^2}{\nu_l^2-u^2}\hat{H}_{\nu_l}^S + \sum_{l=1}^{N}\frac{\nu_l^4}{(\nu_l^2-u^2)^2}\hat{C}_l,$$

де $\hat{C}_l = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n} S_{ji}^{(l)}S_{ij}^{(l)}$ – функції Казиміра, $\hat{H}_0^S$ і $\hat{H}_{\nu_l}^S$ – нетривіальні інтеграли. Інтеграли типу Годена $\hat{H}_{\nu_l}^S$, $l\in\overline{1,N}$ мають вигляд:

$$\hat{H}^S_{\nu_l} = \sum_{k=1,k\neq l}^{N} (\frac{\nu_l^2}{(\nu_k^2-\nu_l^2)} (\sum_{i,j=1}^{n_1} \hat{S}^{(k)}_{ji}\hat{S}^{(l)}_{ij} + \sum_{i,j=n_1+1}^{n} \hat{S}^{(k)}_{ji}\hat{S}^{(l)}_{ij}) +$$
$$+ \frac{\nu_k\nu_l}{(\nu_k^2-\nu_l^2)} \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=n_1+1}^{n} (\hat{S}^{(k)}_{ji}\hat{S}^{(l)}_{ij} + \hat{S}^{(k)}_{ij}\hat{S}^{(l)}_{ji})) - (\sum_{i,j=1}^{n_1} \hat{S}^{(l)}_{ji}\hat{S}^{(l)}_{ij} + \sum_{i,j=n_1+1}^{n} \hat{S}^{(l)}_{ji}\hat{S}^{(l)}_{ij}) -$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=n_1+1}^{n} (\hat{S}^{(l)}_{ji}\hat{S}^{(l)}_{ij} + \hat{S}^{(l)}_{ij}\hat{S}^{(l)}_{ji}) + \big(c_1\sum_{i=1}^{n_1}\hat{S}^{(l)}_{ii} + c_n\sum_{i=n_1+1}^{n}\hat{S}^{(l)}_{ii}\big). \tag{6.8.49}$$

Додаткові лінійні інтеграли, пов'язані з симетрією r-матриці, наступні:

$$\hat{M}^S_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \hat{S}^{(k)}_{ij}, \quad i,j \in \overline{1,n_1} \cup \overline{1+n_1,n}. \tag{6.8.50}$$

6.8.3. Оператори Лакса типу Бозе Як слідує з теорії викладеної в Главі 4, для Z_2– градуйованої r-матриці (6.8.47) існує дві спеціальні "бозонні точки" [108] [109]. З ними пов'язано два бозонних оператора Лакса:

$$\hat{L}^B(u) = u\sqrt{k_1-k_n}\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=n_1+1}^{n}(\hat{b}^+_{ij}X_{ji}+\hat{b}^-_{ij}X_{ij}) + u^2(k_1\sum_{i=1}^{n_1}X_{ii} + k_n\sum_{i=n_1+1}^{n}X_{ii}), \tag{6.8.51}$$

$$\hat{L}^A(u) = \sum_{i,j=1}^{n_1}\sum_{s=n_1+1}^{n}\hat{a}^-_{js}\hat{a}^+_{is}X_{ji} - \sum_{i,j=n_1+1}^{n}\sum_{s=1}^{n_1}\hat{a}^-_{si}\hat{a}^+_{sj}X_{ji} -$$
$$-u^{-1}\sqrt{k_1'-k_n'}\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=n_1+1}^{n}(\hat{a}^+_{ij}X_{ji}+\hat{a}^-_{ij}X_{ij}) - u^{-2}(k_1'\sum_{i=1}^{n_1}X_{ii} + k_n'\sum_{i=n_1+1}^{n}X_{ii}), \tag{6.8.52}$$

де оператори $\hat{a}^\pm_{ip}$, $\hat{b}^\pm_{ip}$ задовільняють канонічним комутаційним співвідношенням:

$$[\hat{a}^+_{ip}, \hat{a}^-_{jr}] = \delta_{i,j}\delta_{pr}\hat{1}, \quad [\hat{a}^+_{ip}, \hat{a}^+_{jr}] = 0, \quad [\hat{a}^-_{ip}, \hat{a}^-_{jr}] = 0.$$

$$[\hat{b}^+_{ip}, \hat{b}^-_{jr}] = \delta_{i,j}\delta_{pr}\hat{1}, \quad [\hat{b}^+_{ip}, \hat{b}^+_{jr}] = 0, \quad [\hat{b}^-_{ip}, \hat{b}^-_{jr}] = 0.$$

$$[\hat{a}^+_{ip}, \hat{b}^-_{jr}] = [\hat{a}^-_{ip}, \hat{b}^+_{jr}] = [\hat{a}^+_{ip}, \hat{b}^+_{jr}] = [\hat{a}^-_{ip}, \hat{b}^-_{jr}] = 0.$$

А додаткові "геометричні" інтеграли мають вигляд:

$$\hat{M}^B_{ij} = \sum_{p=1}^{n_1} \hat{b}^-_{pi}\hat{b}^+_{pj}, \quad i,j \in \overline{n_1+1,n}, \qquad \hat{M}^B_{kl} = -\sum_{p=n_1+1}^{n} \hat{b}^-_{lp}\hat{b}^+_{kp}, \quad k,l \in \overline{1,n_1}, \tag{6.8.53a}$$

$$\hat{M}^A_{ij} = \sum_{s=1}^{n_1} \hat{a}^-_{si}\hat{a}^+_{sj}, \quad i,j \in \overline{n_1+1,n}, \qquad \hat{M}^A_{kl} = -\sum_{s=n_1+1}^{n} \hat{a}^-_{ls}\hat{a}^+_{ks}. \quad k,l \in \overline{1,n_1}, \tag{6.8.53b}$$

6.8.4. Оператори Лакса і гамільтоніани моделей ДКД. У зв'язку з існуванням для даної r-матриці двох бозонних операторів Лакса, з нею можна асоціювати дві різні моделі типу ДКД. Розглянемо кожну з них.

Випадок 1. Розглянемо наступний оператор Лакса:

$$\hat{L}^{S,B}(v) = \hat{L}^S(v) + \hat{L}^B(v),$$

де оператори $\hat{L}^S(v)$, $\hat{L}^B(v)$ визначені формулами (6.8.48), (6.8.51). Відповідні геометричні інтеграли мають вигляд:

$$\hat{M}^{S,B}_{ij} = \hat{M}^S_{ij} + \hat{M}^B_{ij}, \quad i,j \in \overline{1,n_1} \cup \in \overline{1+n_1,n},$$

де оператори $\hat{M}^S_{ij}$ і $\hat{M}^B_{ij}$ задаються формулами (6.8.50), (6.8.53a).

Генеруюча функція квантових інтегралів другого порядку:

$$\hat{\tau}^{S,B}_n(u) = \sum_{k=0}^{2} \hat{H}^{S,B}_{2k} u^{2k} + \sum_{l=1}^{N} \frac{\nu_l^2}{\nu_l^2 - u^2} \hat{H}^{S,B}_{\nu_l} + \sum_{l=1}^{N} \frac{\nu_l^4}{(\nu_l^2 - u^2)^2} \hat{C}_l,$$

де $\hat{C}_l = \sum\limits_{i,j=1}^{n} S_{ij}^{(l)} S_{ji}^{(l)}$ – оператор Казиміра l - тої копії алгебри $gl(n)$, $\hat{H}_{2k}^{S,B}$ і $\hat{H}_{\nu_l}^{S,B}$ – нетривіальні інтеграли. Порахуємо явно інтеграли $\hat{H}_{\nu_l}^{S,B}$:

$$\hat{H}_{\nu_l}^{S,B} = \hat{H}_{\nu_l}^{S} + \nu_l \sqrt{k_1 - k_n} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=n_1+1}^{n} (\hat{b}_{ij}^{+} \hat{S}_{ji}^{(l)} + \hat{b}_{ij}^{-} \hat{S}_{ij}^{(l)}) + \nu_l^2 (k_1 \sum_{i=1}^{n_1} \hat{S}_{ii}^{(l)} + k_n \sum_{i=n_1+1}^{n} \hat{S}_{ii}^{(l)}).$$

Узагальнений гамільтоніан типу ДКД має вигляд:

$$\hat{H}^{S,B} = \sum_{i=1}^{n} w_i \hat{M}_{ii}^{S,B} + \sum_{l=1}^{N} \hat{H}_{\nu_l}^{S,B} = \sum_{i=n_1+1}^{n} \sum_{j=1}^{n_1} (w_i - w_j) \hat{b}_{ji}^{-} \hat{b}_{ji}^{+} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{N} (\sum_{i=1}^{n_1} (w_i + c_1 + \nu_l^2 k_1) \hat{S}_{ii}^{(l)} + \sum_{i=n_1+1}^{n} (w_i + c_n + \nu_l^2 k_n) \hat{S}_{ii}^{(l)}) +$$

$$+ \sqrt{k_1 - k_n} \sum_{l=1}^{N} \nu_l \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=n_1+1}^{n} (\hat{b}_{ij}^{+} \hat{S}_{ji}^{(l)} + \hat{b}_{ij}^{-} \hat{S}_{ij}^{(l)}) -$$

$$- \frac{1}{2} (\sum_{k,l=1}^{N} \sum_{i,j=1}^{n_1} \hat{S}_{ij}^{(l)} \hat{S}_{ji}^{(k)} + \sum_{k,l=1}^{N} \sum_{i,j=n_1+1}^{n} \hat{S}_{ij}^{(l)} \hat{S}_{ji}^{(k)}).$$

Перший член в цьому гамільтоніані відповідає кінетичній енергії багатьох мод електромагнітного поля, другий член – вільна енергія N атомів, третій член описує взаємодію між атомом та полем в узагальненій Λ-конфігурації. Нарешті, останній член описує атом – атомну взаємодію.

Випадок 2. Розглянемо інший спін – бозонний оператор Лакса:

$$\hat{L}^{S,A}(v) = \hat{L}^{S}(v) + \hat{L}^{A}(v),$$

де оператори $\hat{L}^{S}(v)$, $\hat{L}^{A}(v)$ визначені формулами (6.8.48), (6.8.52). Для цього оператора Лакса додаткові геометричні інтеграли, пов'язані з симетрією r-матриці наступні:

$$\hat{M}_{ij}^{S,A} = \hat{M}_{ij}^{S} + \hat{M}_{ij}^{A}, \quad i,j \in \overline{1,n_1} \cup \in \overline{1+n_1,n},$$

де $\hat{M}^S_{ij}$ і $\hat{M}^A_{ij}$ задані формулами (6.8.50), (6.8.53b). Генеруюча функція квантових інтегралів другого порядку записується наступним чином:

$$\hat{\tau}^{S,A}_n(u) = \sum_{k=0}^{2} \hat{H}^{S,A}_{2k} u^{-2k} + \sum_{l=1}^{N} \frac{\nu_l^2}{\nu_l^2 - u^2} \hat{H}^{S,A}_{\nu_l} + \sum_{l=1}^{N} \frac{\nu_l^4}{(\nu_l^2 - u^2)^2} \hat{C}_l,$$

де $\hat{C}_l = \sum\limits_{i,j=1}^{n} S^{(l)}_{ij} S^{(l)}_{ji}$ – функція Казиміра l-тої копії алгебри $gl(n)$, $\hat{H}^{S,A}_{2k}$ і $\hat{H}^{S,A}_{\nu_l}$ нетривіальні інтеграли. Інтеграл $\hat{H}^{S,A}_{\nu_l}$ має наступний вигляд:

$$\hat{H}^{S,A}_{\nu_l} = \hat{H}^{S}_{\nu_l} + \nu_l^{-1} \sqrt{k_1' - k_n'} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=n_1+1}^{n} (\hat{a}^+_{ij} \hat{S}^{(l)}_{ji} + \hat{a}^-_{ij} \hat{S}^{(l)}_{ij}) +$$

$$\sum_{i,j=1}^{n_1} \sum_{s=n_1+1}^{n} \hat{a}^-_{js} \hat{a}^+_{is} \hat{S}^{(l)}_{ji} - \sum_{i,j=n_1+1}^{n} \sum_{s=1}^{n_1} \hat{a}^-_{si} \hat{a}^+_{sj} \hat{S}^{(l)}_{ji} - \nu_l^{-2} (k_1' \sum_{i=1}^{n_1} \hat{S}^{(l)}_{ii} + k_n' \sum_{i=n_1+1}^{n} \hat{S}^{(l)}_{ii}).$$

“Фізичний” гамільтоніан типу ДКД записується настуним чином:

$$\hat{H}^{S,A} = \sum_{i=1}^{n} w_i \hat{M}^{S,A}_{ii} + \sum_{l=1}^{N} \hat{H}^{S,A}_{\nu_l} + \frac{1}{2} (\sum_{i,j=1}^{n_1} \hat{M}^{S,A}_{ij} \hat{M}^{S,A}_{ji} + \sum_{i,j=n_1+1}^{n} \hat{M}^{S,A}_{ij} \hat{M}^{S,A}_{ji}),$$

де ми використали той факт, що в алгебру комутуючих інтегралів можна включити оператор Казиміра $\hat{C}^{S,A}_M = (\sum\limits_{i,j=1}^{n_1} \hat{M}^{S,A}_{ij} \hat{M}^{S,A}_{ji} + \sum\limits_{i,j=n_1+1}^{n} \hat{M}^{S,A}_{ij} \hat{M}^{S,A}_{ji})$ алгебри симетрій $gl(n_1) \oplus gl(n - n_1)$. Більш явно, отримуємо:

$$\hat{H}^{S,A} = \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{i=n_1+1}^{n} (w_i - w_j) \hat{a}^-_{ji} \hat{a}^+_{ji} + \sum_{l=1}^{N} (\sum_{i=1}^{n_1} (w_i + c_1 - \nu_l^{-2} k_1') \hat{S}^{(l)}_{ii} +$$

$$+ \sum_{i=n_1+1}^{n} (w_i + c_n - \nu_l^{-2} k_n') \hat{S}^{(l)}_{ii}) + \sqrt{k_1' - k_n'} \sum_{l=1}^{N} \nu_l^{-1} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=n_1+1}^{n} (\hat{a}^+_{ij} \hat{S}^{(l)}_{ji} + \hat{a}^-_{ij} \hat{S}^{(l)}_{ij})$$

$$+ \frac{1}{2} (\sum_{i,j=1}^{n_1} \sum_{s,p=n_1+1}^{n} \hat{a}^-_{js} \hat{a}^+_{is} \hat{a}^-_{ip} \hat{a}^+_{jp} + \sum_{i,j=n_1+1}^{n} \sum_{s,p=1}^{n_1} \hat{a}^-_{si} \hat{a}^+_{sj} \hat{a}^-_{pj} \hat{a}^+_{pi}). \quad (6.8.54)$$

Перший член в цьому гамільтоніані відповідає кінетичній енергії багатьох мод електромагнітного поля, другий член – вільна енергія N – атомів, третій член описує взаємодію між атомом та полем в узагальненій Λ - конфігурації. Останній член описує узагальнену нелінійність Керра.

6.9. Узагальнені моделі Бозе – Хаббарда

6.9.1. Багатобозонні оператори Лакса. Отримавши в попередньому розділі квантові оператори Лакса, що містять бозонні ступені свободи, перейдемо до конструювання багатобозонних операторів Лакса і відповідних багатобозонних гамільтоніанів. З цією метою зауважимо, що можуть існувати ситуаціїї коли розглядувана r-матриця має дві чи багато точок $\nu_0^{(1)}, \nu_0^{(2)}, ..., \nu_0^{(M)}$ що задовільняють умови Теореми 6.3. В цьому випадку можна розглядати суми відповідних однобозонних операторів Лакса:

$$\hat{L}^B(u) = \sum_{i=1}^{M} \hat{L}^{\nu_0^{(i)}}(u), \tag{6.9.55}$$

де однобозонні оператори Лакса задаються наступною формулою

$$\begin{aligned}\hat{L}^{\nu_0^{(i)}}(v) = \sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}_0^{\nu_0^{(i)}}} \sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}} \hat{l}_a^{(0)}(\hat{b}^-_{\beta,i}, \hat{b}^+_{\alpha,i}) r^{ab}(\nu_0^{(i)}, v) X_b + \\ + \sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_{K_i})_+} \sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}} \sqrt{\alpha(K_i)}(\hat{b}^+_{\alpha,i}\partial_u r^{\alpha b}(u,v)|_{u=\nu_0^{(i)}} + \hat{b}^-_{\alpha,i}\partial_u r^{-\alpha b}(u,v)|_{u=\nu_0^{(i)}}) X_b \\ + \sum_{j=1}^{\operatorname{rank}\mathfrak{g}} \sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}} \frac{1}{2} k_{j,i} \partial_u^2 r^{jb}(u,v)|_{u=\nu_0^{(i)}} X_b,\end{aligned} \tag{6.9.56}$$

а оператори $\hat{b}^-_{\beta,j}$, $\hat{b}^+_{\alpha,i}$ мають канонічні комутаційні співвідношення:

$$[\hat{b}^+_{\alpha,i}, \hat{b}^-_{\beta,j}] = \delta_{ij}\delta_{\alpha,\beta}\hat{1},\ [\hat{b}^+_{\alpha,i}, \hat{b}^+_{\beta,j}] = [\hat{b}^-_{\alpha,i}, \hat{b}^-_{\beta,j}] = 0,\ \alpha \in (\Delta/\Delta_{K_i})_+,\ \beta \in (\Delta/\Delta_{K_j})_+. \tag{6.9.57}$$

Тут форма операторів Лакса $\hat{L}^{\nu_0^{(i)}}(v)$, елементів підалгебри Картана $K_i = \sum\limits_{j=1}^{\operatorname{rank}\mathfrak{g}} k_{j,i} H_j$, а також підалгебри $\mathfrak{g}_0^{K_i}$, підсистеми коренів Δ_{K_i} і доповняльні підсистеми $(\Delta/\Delta_{K_i})_\pm$ можуть залежати від спеціальної точки $\nu_0^{(i)}$.

Відзначимо, що Теорема 6.3 має справу з фіксованим кореневим базисом в алгебрі $\mathfrak{g}$ і фіксованою підалгеброю Картана. Але з теорії напівпростих алгебр Лі відомо що існують різні кореневі базиси і різні підалгебри

Картана в алгебрі $\mathfrak{g}$. Можуть існувати спеціальні точки $\nu_0^{(i)}$, $i \in \overline{1, M'}$ що Теорема 6.3 задовільняється для них при іншому виборі підалгебри Картана і кореневому базисі. Такі точки дають додаткові бозонні оператори Лакса. Приклад такої ситуації в частковому випадку алгебри $\mathfrak{g} = sl(2)$ розглянуто в роботі [95]. В подальшому викладі ми обмежимось простішою ситуацією коли всі бозонні точки $\nu_0^{(i)}$ і бозонні оператори Лакса відповідають одному фіксованому вибору підалгебри Картана і одному фіксованому кореневому базису.

6.9.2. Квантова інтегровність Квантова інтегровність гамільтонових систем, що керуються лінійними r-матричними дужками, не слідує напряму з їх класичної інтегровності. В роботі [109] ми довели комутативність генеруючих функцій $\hat{\tau}(u) \equiv tr\hat{L}^2(u)$ у випадку алгебри Лі $\mathfrak{g} = gl(n)$.

Має місце наступна Теорема [109]:

Теорема 6.11. *Нехай $\mathfrak{g} = gl(n)$, r-матриця $r(u, v)$ має розклад 1.3.6 і діагональна в кореневому базисі. Тоді:*

$$[\hat{\tau}(u), \hat{\tau}(u)] = 0. \qquad (6.9.58)$$

Розкладаючи функцію $\hat{\tau}(u)$, отримуємо, завдяки Теоремі 6.11, набір комутуючих операторів що співпадають з інтегралами руху деякої квантової Гамільтонової системи. Якщо відповідний оператор Лакса має полюси в точках $\nu^{(i)}$, то серед квантових інтегралів є наступні гамільтоніани:

$$\hat{H}^{(k)}_{\nu^{(i)}} = \frac{1}{2} res_{u=\nu^{(i)}} (u - \nu^{(i)})^{k-1} \hat{\tau}(u).$$

В наступних підрозділах ми конкретизуємо явну форму цих квантових гамільтоніанів у розглядуваному випадку.

6.9.3. Додаткові інтеграли і симетрії r-матриць. У попередніх розділах були зконструйовані додаткові "геометричні" інтеграли, що пов'язані з симетріями r-матриці. Тепер ми конкретизуємо їх для випадку багатобозонних моделей. Має місце наступне Твердження [109]:

Твердження 6.7. *Нехай $\nu_0^{(i)}$, $i \in \overline{1,M}$ — спеціальні точки класичної r-матриці, що задовільняють умовам Теореми 6.3. Нехай K_i — відповідні елементи Картанівської підалгебри і $\mathfrak{g}_0^{K_i}$ — їхні централізатори. Нехай оператори $\hat{b}^-_{\beta,j}$, $\hat{b}^+_{\alpha,i}$, $\alpha \in (\Delta/\Delta_{K_i})_+$, $\beta \in (\Delta/\Delta_{K_j})_+$ мають канонічні комутаційні співвідношення:*

$$[\hat{b}^+_{\alpha,i}, \hat{b}^-_{\beta,j}] = \delta_{ij}\delta_{\alpha,\beta}\hat{1}, \quad [\hat{b}^+_{\alpha,i}, \hat{b}^+_{\beta,j}] = 0, \quad [\hat{b}^-_{\alpha,i}, \hat{b}^-_{\beta,j}] = 0. \tag{6.9.59}$$

Нехай оператори $\hat{M}^{b_i}_H$, $\hat{M}^{b_i}_{X_a}$ де $H, X_\alpha \in \mathfrak{g}_0$ задані формулами:

$$\hat{M}^{b_i}_H = -\sum_{\beta\in(\Delta/\Delta_{K_i})+} \beta(H)\hat{b}^-_{\beta,i}\hat{b}^+_{\beta,i}, \quad \hat{M}^{b_i}_{X_\alpha} = \sum_{\substack{\gamma-\beta=\alpha,\\ \beta,\gamma\in(\Delta/\Delta_{K_i})+}} N_{-\beta,\gamma}\hat{b}^-_{\beta,i}\hat{b}^+_{\gamma,i},$$

а оператор $\hat{L}^B(u) = \sum\limits_{i=1}^{M} \hat{L}^{\nu_0^{(i)}}(u)$ – оператор Лакса (6.9.55) багатобозонної моделі і r-матриця $r(u,v)$ є $\mathfrak{g}_0$- інваріантна, де $\mathfrak{g}_0 \subset \bigcap\limits_{k=1}^{M} \mathfrak{g}_0^{K_i}$. Тоді оператори $\hat{M}^B_{X_a} = \sum\limits_{i=1}^{M} \hat{M}^{b_i}_{X_a}$, $X_a \in \mathfrak{g}_0$ утворюють алгебру симетрій узагальненої багатобозонної моделі, тобто:

$$[\hat{M}^B_{X_a}, \mathrm{tr}(\hat{L}^B(u))^2] = 0.$$

Розглянемо найважливіший приклад діагональних в кореневому базисі r-матриць (6.5.24). Вони мають наступну явну форму:

$$r(u,v) = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} r^i(u,v)H_i\otimes H_i + \sum_{\alpha\in\Delta_+}(r^\alpha(u,v)X_\alpha\otimes X_{-\alpha} + r^{-\alpha}(u,v)X_{-\alpha}\otimes X_\alpha)$$

Очевидно, що такі r-матриці є Картан-симетричними, тобто $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$. Більше того, очевидно, що $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0^{K_i}$ для довільного елементу K_i підалгебри Картана. Тому, завдяки Теоремі (6.5) і Твердженню (6.7), ми отримуємо що $\forall H \in \mathfrak{h}$ оператор:

$$\hat{M}^B_H = -\sum_{i=1}^{M}\sum_{\beta\in(\Delta/\Delta_{K_i})+} \beta(H)\hat{b}^-_{\beta,i}\hat{b}^+_{\beta,i} \tag{6.9.60}$$

комутує з $\hat{\tau}(u)$.

Використовуючи пункт (ii) Теореми 6.7, отримуємо що $\hat{M}^B_H$ і $\hat{M}^B_{H'}$ комутують між собою $\forall H, H' \in \mathfrak{h}$. Отже, для діагональних в кореневому базисі r-матриць можна розширити алгебру інтегралів за допомогою комутативної алгебри ізоморфної до підалгебри Картана і генерованої $\mathrm{rank}\mathfrak{g}$ операторами $\hat{M}^B_H$, $H \in \mathfrak{h}$. Відзначимо, також, що оператори (6.9.60) є аналогами операторів числа частинок.

6.9.4. Приклад: зсунуті Z_2-градуйовані r-матриці В цьому підрозділі ми розглянемо підклас діагональних в кореневому базисі r-матриць і відповідні багатобозонні моделі. Ми обмежимось випадком $\mathfrak{g} = gl(n)$.

Спеціальні точки Z_2-градуйованої r-матриці і бозонний оператор Лакса: $u = \infty$. Розглянемо спеціальну точку r-матриці (6.7.39), а саме точку $u = \infty$. Параметр, по відношенню до якого потрібно розкладати r-матрицю в околі точки $u = \infty$, це $\nu(u) = u^{-1}$. Пряме обчислення дає:

$$r(\infty, v) = c^{\bar{0}}_{12},\ \lim_{u\to\infty}\partial_{u^{-1}} r_{12}(u,v) = v\Omega^{\bar{1}}_{12},\ \lim_{u\to\infty}\partial^2_{u^{-1}} r_{12}(u,v) = 2v^2\Omega^{\bar{0}}_{12}.$$

Враховуючи той факт, що по самому означенню $c^{\bar{0}}_{12} \in \mathfrak{g}^K_0 \otimes \mathfrak{g}^K_0$, $\Omega^{\bar{1}}_{12} \in (\mathfrak{g}^K_1 \otimes \mathfrak{g}^K_{-1}) \oplus (\mathfrak{g}^K_{-1} \otimes \mathfrak{g}^K_1)$ і $\Omega^{\bar{0}}_{12} \in \mathfrak{g}^K_0 \otimes \mathfrak{g}^K_0$, легко показати що умови (i)-(iii) Теореми 6.3 задовільняються оскільки $\mathfrak{g}^\infty_0 = \mathfrak{g}^K_0$, $\mathfrak{g}^\infty_1 = \mathfrak{g}^K_1 + \mathfrak{g}^K_{-1}$, $\mathfrak{g}^\infty_2 = \mathfrak{g}^K_0$.

Припишемо деяку матрицю K що централізується підалгеброю $\mathfrak{g}^K_0$: $K \equiv K_\infty = \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} k_{i,\infty} H_i$ до точки $u = \infty$. Базуючись на Теоремі 6.3, можна асоціювати з r-матрицею (6.7.39) наступний бозонний оператор Лакса:

$$\hat{L}^\infty(u) = \sum_{i=1}^{\dim\mathfrak{h}} \sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}^K_0} c^{ib}(\alpha_i(C_\infty)\hat{1} - \sum_{\beta\in(\Delta/\Delta_K)+} \beta(H_i)\hat{b}^-_{\beta,\infty}\hat{b}^+_{\beta,\infty})X_b +$$
$$+ \sum_{\alpha\in\Delta_K} \sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}^K_0} c^{\alpha b} \sum_{\substack{\gamma-\beta=\alpha,\\ \beta,\gamma\in(\Delta/\Delta_K)+}} N_{-\beta,\gamma}\hat{b}^-_{\beta,\infty}\hat{b}^+_{\gamma,\infty} X_b$$

$$+u\sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+}\sqrt{\alpha(K_\infty)}(\hat{b}^+_{\alpha,\infty}X_{-\alpha}+\hat{b}^-_{\alpha,\infty}X_\alpha)+u^2\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}}k_{i,\infty}H_i, \quad (6.9.61)$$

де $\alpha_i = H_i^*$ і $C_\infty \in \mathfrak{c}(\mathfrak{g}_0^K)$ — деяка фіксована матриця що належать центру підалгебри $\mathfrak{g}_0^K$. У випадку діагональних r-матриць цей оператор Лакса записується більш просто:

$$\hat{L}^\infty(u) = \sum_{i=1}^{\mathrm{dim}\mathfrak{h}} c^{ii}(\alpha_i(C_\infty)\hat{1} - \sum_{\beta\in(\Delta/\Delta_K)+}\beta(H_i)\hat{b}^-_{\beta,\infty}\hat{b}^+_{\beta,\infty})H_i+$$

$$+\sum_{\alpha\in\Delta_K}c^{\alpha,-\alpha}(\sum_{\gamma-\beta=\alpha,\beta,\gamma\in(\Delta/\Delta_K)+}N_{-\beta,\gamma}\hat{b}^-_{\beta,\infty}\hat{b}^+_{\gamma,\infty})X_{-\alpha}+$$

$$+u\sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+}\sqrt{\alpha(K_\infty)}(\hat{b}^+_{\alpha,\infty}X_{-\alpha}+\hat{b}^-_{\alpha,\infty}X_\alpha)+u^2\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}}k_{i,\infty}H_i, \quad (6.9.62)$$

де оператори $\hat{b}^+_{\alpha,\infty}$, $\hat{b}^-_{\beta,\infty}$, $\alpha \in (\Delta/\Delta_K)_+$ задовільняють канонічні комутаційні співвідношення:

$$[\hat{b}^+_{\alpha,\infty},\hat{b}^-_{\beta,\infty}] = \delta_{\alpha,\beta}\hat{1}, \quad [\hat{b}^-_{\alpha,\infty},\hat{b}^-_{\beta,\infty}] = 0, \quad [\hat{b}^+_{\alpha,\infty},\hat{b}^+_{\beta,\infty}] = 0.$$

Розглянемо випадок алгебри $\mathfrak{g} = gl(n)$ з описаним Z_2 - градуюванням таким, що $\mathfrak{g}_0^K = gl(n_1) + gl(n_2)$, $\mathfrak{g}_1^K \simeq \mathfrak{g}_{-1}^K = \mathbb{C}^{n_1\times n_2}$. Для того щоб отримати більш явні формули для операторів Лакса потрібно специфікувати представлення Йордана – Швінгера для підалгебри $\mathfrak{g}_0^K = gl(n_1) + gl(n_2)$ у цьому випадку. Елемент $K = K_\infty$ має наступну форму: $K_\infty = \mathrm{diag}(k_1,...,k_{n_1},k_{n_1+1},...,k_n)$, $k_1 = ... = k_{n_1}, k_{n_1+1} = ... = k_n$. Ми маємо: $\Delta_K = \{\alpha_{ij}|i,j \in \overline{1,n_1} \text{ or } i,j \in \overline{n_1+1,n}\}$ Ми маємо також що $\Delta_K = \{\alpha_{ij}|i,j \in \overline{1,n_1} \text{ or } i,j \in \overline{n_1+1,n}\}$. Редуктивна підалгебра $gl(n)_K$ має вигляд: $gl(n)_K = gl(n_1) \oplus gl(n_2)$. В цьому випадку отримується наступна реалізація підалгебри $gl(n)_K$ в термінах операторів народження – знищення [91]:

$$\hat{M}^{b_\infty}_{X_{ij}} = c_{n,\infty}\delta_{ij}\hat{1} + \sum_{p=1}^{n_1}\hat{b}^-_{pi,\infty}\hat{b}^+_{pj,\infty}, \quad i,j \in \overline{n_1+1,n}, \quad (6.9.63a)$$

$$\hat{M}^{b_\infty}_{X_{ij}} = c_{1,\infty}\delta_{ij}\hat{1} - \sum_{p=n_1+1}^{n} \hat{b}^-_{jp,\infty}\hat{b}^+_{ip,\infty}, \quad i,j \in \overline{1,n_1}, \tag{6.9.63b}$$

де оператори $\hat{b}^+_{ip,\infty}$, $\hat{b}^-_{jr,\infty}$ задовільняють канонічні комутаціні співвідношення:

$$[\hat{b}^+_{ip,\infty}, \hat{b}^-_{jr,\infty}] = \delta_{i,j}\delta_{pr}\hat{1}, \quad [\hat{b}^+_{ip,\infty}, \hat{b}^+_{jr,\infty}] = 0, \quad [\hat{b}^-_{ip,\infty}, \hat{b}^-_{jr,\infty}] = 0.$$

Зауважимо, що у випадку $n_1 = 1$ or $n_1 = n-1$, отримується стандартне представлення Йордана – Швінгера алгебри $gl(n-1)$. Отже, явна форма оператора Лакса (6.9.62) в цьому випадку наступна:

$$\begin{aligned}\hat{L}^\infty(u) = &\sum_{i,j=1}^{n_1} c^{ij}(c_{1,\infty}\delta_{ij}\hat{1} - \sum_{p=n_1+1}^{n} \hat{b}^-_{jp,\infty}\hat{b}^+_{ip,\infty})X_{ji} \\ &+ \sum_{i,j=n_1+1}^{n} c^{ij}(c_{n,\infty}\delta_{ij}\hat{1} + \sum_{p=1}^{n_1} \hat{b}^-_{pi,\infty}\hat{b}^+_{pj,\infty})X_{ji} + \\ &+ u\sqrt{k_1-k_n}\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=n_1+1}^{n}(\hat{b}^+_{ij,\infty}X_{ji} + \hat{b}^-_{ij,\infty}X_{ij}) + u^2(k_1\sum_{i=1}^{n_1} X_{ii} + k_n\sum_{i=n_1+1}^{n} X_{ii}).\end{aligned} \tag{6.9.64}$$

Оператор Лакса (6.9.64) визначає квантові інтегровні багатобозонні моделі. Щоб отримати аналог гамільтоніану димеру Бозе – Хаббарда, що містить доданок типу "перескоку", потрібно розглянути складніший оператор Лакса. З цією метою ми введемо ще один бозонний оператор Лакса.

Спеціальні точки Z_2- градуйованої r-матриці і бозонний оператор Лакса: $u = 0$. Розглянемо іншу спеціальну точку r-матриці (6.7.39), а саме, точку $u = 0$. Параметр по відношенню до якого потрібно розкладати r-матрицю в околі цієї точки, це спектральний параметр u. Пряме обчислення дає:

$$r(0,v) = -\Omega^{\bar{0}}_{12} + c^{\bar{0}}_{12}, \ (\partial_u r_{12}(u,v))|_{u=0} = -v^{-1}\Omega^{\bar{1}}_{12}, \ \partial^2_u r_{12}(u,v)|_{u=0} = -2v^{-2}\Omega^{\bar{0}}_{12}.$$

Використовуючи той факт, що, по самому означенню, $c_{12}^{\bar{0}} \in \mathfrak{g}_0^K \otimes \mathfrak{g}_0^K$, $\Omega_{12}^{\bar{1}} \in (\mathfrak{g}_1^K \otimes \mathfrak{g}_{-1}^K) \oplus (\mathfrak{g}_{-1}^K \otimes \mathfrak{g}_1^K)$ і $\Omega_{12}^{\bar{0}} \in \mathfrak{g}_0^K \otimes \mathfrak{g}_0^K$, легко показати що умови (i) – (iii) Теореми 6.3 задовільняються бо $\mathfrak{g}_0^0 = \mathfrak{g}_0^K$, $\mathfrak{g}_1^0 = \mathfrak{g}_1^K + \mathfrak{g}_{-1}^K$, $\mathfrak{g}_2^0 = \mathfrak{g}_0^K$.

Припишемо матрицю $K \equiv K_0 = \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} k_{i,0} H_i$ до точки $u = 0$. Базуючись на Теоремі 6.3, асоціюємо з r-матрицею (6.7.39) оператор Лакса:

$$\hat{L}^0(u) = \sum_{i=1}^{\dim\mathfrak{h}} \sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}_0^K} (c^{ib} - g^{ib})(\alpha_i(C_0)\hat{1} - \sum_{\beta\in(\Delta/\Delta_K)+} \beta(H_i)\hat{b}^-_{\beta,0}\hat{b}^+_{\beta,0})X_b +$$
$$+ \sum_{\alpha\in\Delta_K} \sum_{b=1}^{\dim\mathfrak{g}_0^K} (c^{\alpha b} - g^{\alpha b})(\sum_{\substack{\gamma-\beta=\alpha,\\ \beta,\gamma\in(\Delta/\Delta_K)+}} N_{-\beta,\gamma}\hat{b}^-_{\beta,0}\hat{b}^+_{\gamma,0})X_b$$
$$- u^{-1} \sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+} \sqrt{\alpha(K_0)}(\hat{b}^+_{\alpha,0}X_{-\alpha} + \hat{b}^-_{\alpha,0}X_\alpha) - u^{-2}\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} k_{i,0}H_i,$$

де постійний елемент C_0 належить центру алгебри $\mathfrak{g}_0^K$. У випадку діагональних r-матриць цей оператор Лакса записується більш просто:

$$\hat{L}^0(u) = \sum_{i=1}^{\dim\mathfrak{h}} (c^{ii} - 1)(\alpha_i(C_0)\hat{1} - \sum_{\beta\in(\Delta/\Delta_K)+} \beta(H_i)\hat{b}^-_{\beta,0}\hat{b}^+_{\beta,0})H_i +$$
$$+ \sum_{\alpha\in\Delta_K} (c^{\alpha,-\alpha} - 1)(\sum_{\substack{\gamma-\beta=\alpha,\\ \beta,\gamma\in(\Delta/\Delta_K)+}} N_{-\beta,\gamma}\hat{b}^-_{\beta,0}\hat{b}^+_{\gamma,0})X_{-\alpha}$$
$$- u^{-1} \sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+} \sqrt{\alpha(K_0)}(\hat{b}^+_{\alpha,0}X_{-\alpha} + \hat{b}^-_{\alpha,0}X_\alpha) - u^{-2}\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} k_{i,0}H_i, \quad (6.9.65)$$

де оператори $\hat{b}^+_{\alpha,0}$, $\hat{b}^-_{\beta,0}$, $\alpha \in (\Delta/\Delta_K)_+$ задовільняють канонічним комутаційним співвідношенням:

$$[\hat{b}^+_{\alpha,0}, \hat{b}^-_{\beta,0}] = \delta_{\alpha,\beta}\hat{1}, \ [\hat{b}^-_{\alpha,0}, \hat{b}^-_{\beta,0}] = [\hat{b}^+_{\alpha,0}, \hat{b}^+_{\beta,0}] = 0.$$

Розглянемо випадок алгебри $\mathfrak{g} = gl(n)$ з описаним Z_2- градуюванням таким, що $\mathfrak{g}_0^K = gl(n_1) + gl(n_2)$, $\mathfrak{g}_1^K \simeq \mathfrak{g}_{-1}^K = \mathbb{C}^{n_1\times n_2}$. Використовуючи формули типу Йордана – Швінгера, отримуємо:

$$\hat{M}^{b_0}_{X_{ij}} = c_{n,0}\delta_{ij}\hat{1} + \sum_{p=1}^{n_1} \hat{b}^{-}_{pi,0}\hat{b}^{+}_{pj,0}, \quad i,j \in \overline{n_1+1, n}, \tag{6.9.66a}$$

$$\hat{M}^{b_0}_{X_{ij}} = c_{1,0}\delta_{ij}\hat{1} - \sum_{p=n_1+1}^{n} \hat{b}^{-}_{jp,0}\hat{b}^{+}_{ip,0}, \quad i,j \in \overline{1, n_1}, \tag{6.9.66b}$$

Підставляючи це в явну форму оператора Лакса (6.9.65), отримуємо:

$$\begin{gathered}\hat{L}^0(u) = \sum_{i,j=1}^{n_1}(c^{ij}-1)(c_{1,0}\delta_{ij} - \sum_{p=n_1+1}^{n} \hat{b}^{-}_{jp,0}\hat{b}^{+}_{ip,0})X_{ji}+ \\ + \sum_{i,j=n_1+1}^{n}(c^{ij}-1)(c_{n,0}\delta_{ij} + \sum_{p=1}^{n_1} \hat{b}^{-}_{pi,0}\hat{b}^{+}_{pj,0})X_{ji}- \\ u^{-1}\sqrt{k_{1,0}-k_{n,0}}\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=n_1+1}^{n}(\hat{b}^{+}_{ij,0}X_{ji}+\hat{b}^{-}_{ij,0}X_{ij})-u^{-2}(k_{1,0}\sum_{i=1}^{n_1}X_{ii}+k_{n,0}\sum_{i=n_1+1}^{n}X_{ii}),\end{gathered} \tag{6.9.67}$$

де оператори $\hat{b}^{+}_{ip,0}$, $\hat{b}^{-}_{jr,0}$ задовільняють канонічним комутаційним співвідношенням:

$$[\hat{b}^{+}_{ip,0}, \hat{b}^{-}_{jr,0}] = \delta_{i,j}\delta_{pr}\hat{1}, \quad [\hat{b}^{+}_{ip,0}, \hat{b}^{+}_{jr,0}] = 0, \quad [\hat{b}^{-}_{ip,0}, \hat{b}^{-}_{jr,0}] = 0.$$

Загальний бозонний оператор Лакса і інтегровні квантові гамільтоніани Розглянемо суму бозонних операторів (6.9.62) і (6.9.65):

$$\hat{L}^B(u) = \hat{L}^\infty(u) + \hat{L}^0(u),$$

що задовільняє r-матричну алгебру з тією самою Z_2-градуйованою класичною r-матрицею якщо оператори Лакса, що відповідають точкам $u=0$ і $u=\infty$, комутують:

$$[\hat{b}^{+}_{\alpha,0}, \hat{b}^{-}_{\beta,\infty}] = [\hat{b}^{-}_{\alpha,0}, \hat{b}^{-}_{\beta,\infty}] = [\hat{b}^{+}_{\alpha,0}, \hat{b}^{+}_{\beta,\infty}] = 0.$$

Інтеграли, асоційовані з цим оператором Лакса, рахуються як розклади генеруючої функції $\tau(u)$ по степеням параметру u:

$$\tau(u) = \frac{1}{2}tr(\hat{L}^B(u))^2 = \sum_{k=-4}^{4} \hat{H}_k u^k.$$

Викорстовуючи явний вигляд оператора Лакса, легко показати що $\hat{H}_4$, $\hat{H}_{-4}$ – константи і $\hat{H}_3 = \hat{H}_1 = \hat{H}_{-1} = \hat{H}_{-3} = 0$. Пряме обчислення дає:

$$\hat{H}_2 = \sum_{i=1}^{n}(c^{ii}-1)k_{i,\infty}(\hat{M}^{b_0}_{H_i} + \hat{M}^{b_\infty}_{H_i}),\;\; \hat{H}_{-2} = \sum_{i=1}^{n} c^{ii}k_{i,0}(\hat{M}^{b_0}_{H_i} + \hat{M}^{b_\infty}_{H_i})$$

Цікавим є гамільтоніан $\hat{H}_0$, який (з точністю до констант) має вигляд:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_0 = &- \sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+} \sqrt{\alpha(K_0)}\sqrt{\alpha(K_\infty)}(\hat{b}^+_{\alpha,0}\hat{b}^-_{\alpha,\infty} + \hat{b}^-_{\alpha,0}\hat{b}^+_{\alpha,\infty})+ \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}}\big(c^{ii}(\hat{M}^{b_0}_{H_i} + \hat{M}^{b_\infty}_{H_i}) - \hat{M}^{b_0}_{H_i}\big)^2 + \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in(\Delta_K)_+}\big(c^{\alpha,-\alpha}(\hat{M}^{b_0}_{X_\alpha} + \hat{M}^{b_\infty}_{X_\alpha}) - \hat{M}^{b_0}_{X_\alpha}\big)\big(c^{-\alpha,\alpha}(\hat{M}^{b_0}_{X_{-\alpha}} + \hat{M}^{b_\infty}_{X_{-\alpha}}) - \hat{M}^{b_0}_{X_{-\alpha}}\big) \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in(\Delta_K)_+}\big(c^{-\alpha,\alpha}(\hat{M}^{b_0}_{X_{-\alpha}} + \hat{M}^{b_\infty}_{X_{-\alpha}}) - \hat{M}^{b_0}_{X_{-\alpha}}\big)\big(c^{\alpha,-\alpha}(\hat{M}^{b_0}_{X_\alpha} + \hat{M}^{b_\infty}_{X_\alpha}) - \hat{M}^{b_0}_{X_\alpha}\big),
\end{aligned} \tag{6.9.68}$$

де опреатори $\hat{M}^b_{H_i}$ і $\hat{M}^b_{X_\alpha}$ даються формулами (6.4.14b),(6.4.14a).

У випдку $c^{\bar{0}}_{12} = 0$ гамільтоніан (6.9.68) має простішу форму:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_0 = &- \sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+} \sqrt{\alpha(K_0)}\sqrt{\alpha(K_\infty)}(\hat{b}^+_{\alpha,0}\hat{b}^-_{\alpha,\infty} + \hat{b}^-_{\alpha,0}\hat{b}^+_{\alpha,\infty})+ \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}}(\hat{M}^{b_0}_{H_i})^2 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in(\Delta_K)_+}(\hat{M}^{b_0}_{X_\alpha}\hat{M}^{b_0}_{X_{-\alpha}} + \hat{M}^{b_0}_{X_{-\alpha}}\hat{M}^{b_0}_{X_\alpha}).
\end{aligned} \tag{6.9.69}$$

В іншому простому випадку $c^{\bar{0}}_{12} = \Omega^{\bar{0}}_{12}$ ми отримуємо еквівалентний гамільтоніан по модулю заміни: $\hat{b}^{\pm}_{\alpha,0} \leftrightarrow \hat{b}^{\pm}_{\alpha,\infty}$.

Зауважимо, що гамільтоніани (6.9.68) і (6.9.69) не містять кінетичних членів. Для того, щоб отримати їх необхідно розглянути геометричні інтеграли, що існують завдяки Картан – інваріантності r-матриці. Детальніше: завдяки Теоремі 6.5 і Наслідку 6.7, отримуємо, що $\forall H_i \in \mathfrak{h}$ оператори:

$$\hat{M}^B_{H_i} = -(\sum_{\beta\in(\Delta/\Delta_K)+} \beta(H_i)\hat{b}^-_{\beta,0}\hat{b}^+_{\beta,0} + \sum_{\beta\in(\Delta/\Delta_K)+} \beta(H_i)\hat{b}^-_{\beta,\infty}\hat{b}^+_{\beta,\infty})$$

комутують між собою і з функцією $\hat{\tau}(u)$. Загальний інтегровний гамільтоніан що містить кінетичний член, має наступну форму:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} w_i \hat{M}^B_{H_i} + g\hat{H}_0. \tag{6.9.70}$$

Розглянемо найбільш цікавий випадок $\mathfrak{g} = gl(n)$, $\mathfrak{g}^K_0 = gl(n_1) + gl(n_2)$. В цьому випадку $\hat{M}^B_{H_i} \equiv \hat{M}^B_{X_{ii}}$ і $\hat{M}^B_{X_{ij}}$ даються наступними формулами:

$$\hat{M}^B_{X_{ij}} = \sum_{p=1}^{n_1} \hat{b}^-_{pi,0}\hat{b}^+_{pj,0} + \sum_{p=1}^{n_1} \hat{b}^-_{pi,\infty}\hat{b}^+_{pj,\infty}, \text{ якщо } i,j \in \overline{n_1+1,n},$$

$$\hat{M}^B_{X_{ij}} = -(\sum_{p=n_1+1}^{n} \hat{b}^-_{jp,0}\hat{b}^+_{ip,0} + \sum_{p=n_1+1}^{n} \hat{b}^-_{jp,\infty}\hat{b}^+_{ip,\infty}), \text{ якщо } i,j \in \overline{1,n_1}.$$

Гамільтоніан $\hat{H}_0$ записується наступним чином:

$$\hat{H}_0 = -\sqrt{k_{1,0}-k_{n,0}}\sqrt{k_{1,\infty}-k_{n,\infty}}\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=n_1+1}^{n}(\hat{b}^+_{ij,0}\hat{b}^-_{ij,\infty} + \hat{b}^-_{ij,0}\hat{b}^+_{ij,\infty})+$$
$$+\frac{1}{2}(\sum_{i,j=1}^{n_1} + \sum_{i,j=n_1+1}^{n})\big(c^{ij}(\hat{M}^{b_0}_{X_{ij}}+\hat{M}^{b_\infty}_{X_{ij}})-\hat{M}^{b_0}_{X_{ij}}\big)\big(c^{ji}(\hat{M}^{b_0}_{X_{ji}}+\hat{M}^{b_\infty}_{X_{ji}})-\hat{M}^{b_0}_{X_{ji}}\big), \tag{6.9.71}$$

де оператори $\hat{M}^{b_\infty}_{X_{ij}}$ і $\hat{M}^{b_0}_{X_{ji}}$ даються формулами (6.9.63) і (6.9.66) відповідно.

Існують кілька простих рішень постійного модифікованого рівняння Янга – Бакстера на підалгебрі $\mathfrak{g}^K_0$. Перші з них – два згадані розв'язки $c^0_{12} = 0$, $c^0_{12} = \Omega^0_{12}$. Інший розв'язок: $c^0_{12}|_{gl(n_2)} = 0$, $c^0_{12}|_{gl(n_1)} = \Omega^0_{12}$, де $\mathfrak{g}_0^K = gl(n_1) + gl(n_2)$. Відповідний гамільтоніан (6.9.71) записується у цьому випадку так:

$$\hat{H}_0 = -\sqrt{k_{1,0} - k_{n,0}}\sqrt{k_{1,\infty} - k_{n,\infty}}\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=n_1+1}^{n}(\hat{b}^+_{ij,0}\hat{b}^-_{ij,\infty} + \hat{b}^-_{ij,0}\hat{b}^+_{ij,\infty})+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n_1}\hat{M}^{b_\infty}_{X_{ij}}\hat{M}^{b_\infty}_{X_{ji}} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=n_1+1}^{n}\hat{M}^{b_0}_{X_{ij}}\hat{M}^{b_0}_{X_{ji}}. \quad (6.9.72)$$

Загальний квантово-інтегровний гамільтоніан з кінетичним членом наступний:

$$\hat{H} = -\sum_{i=1}^{n_1} w_i(\sum_{p=n_1+1}^{n}\hat{b}^-_{ip,0}\hat{b}^+_{ip,0} + \sum_{p=n_1+1}^{n}\hat{b}^-_{ip,\infty}\hat{b}^+_{ip,\infty})+$$
$$+\sum_{i=n_1+1}^{n} w_i(\sum_{p=1}^{n_1}\hat{b}^-_{pi,0}\hat{b}^+_{pi,0} + \sum_{p=1}^{n_1}\hat{b}^-_{pi,\infty}\hat{b}^+_{pi,\infty})-$$
$$-\sqrt{k_{1,0} - k_{n,0}}\sqrt{k_{1,\infty} - k_{n,\infty}}\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=n_1+1}^{n}(\hat{b}^+_{ij,0}\hat{b}^-_{ij,\infty} + \hat{b}^-_{ij,0}\hat{b}^+_{ij,\infty})+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n_1}(c_{1,\infty}\delta_{ij}\hat{1} - \sum_{p=m_1+1}^{n}\hat{b}^-_{jp,\infty}\hat{b}^+_{ip,\infty})(c_{1,\infty}\delta_{ij}\hat{1} - \sum_{p=m_1+1}^{n}\hat{b}^-_{ip,\infty}\hat{b}^+_{jp,\infty})+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=n_1+1}^{n}(c_{n,0}\delta_{ij}\hat{1} + \sum_{p=1}^{n_1}\hat{b}^-_{pi,0}\hat{b}^+_{pj,0})(c_{n,0}\delta_{ij}\hat{1} + \sum_{p=1}^{n_1}\hat{b}^-_{pj,0}\hat{b}^+_{pi,0}). \quad (6.9.73)$$

Перші два члени в цьому гамільтоніані кінетичні, третій член – матричне узагальнення доданку “перескоку”, четвертий і пятий члени – матричне узагальнення керівської нелінійності.

Розглянемо найпростіший випадок із мінімальним числом бозонів, тобто випадок $n_1 = 1$. В цьому пипадку $\mathfrak{g}_0^K = gl(1) + gl(n-1)$, $\mathfrak{g}_{\pm 1}^K = \mathbb{C}^{n-1}$ і ми маємо $n-1$ бозонів асоційованих з точкою $u = \infty$ і $n-1$ бозонів асоційованих з точкою $u = 0$. Відповідні формули бозонізації даються в цьому випадку сумою двох формул Йордана – Швінгера:

$$\hat{M}^B_{X_{ij}} = \hat{b}^-_{1i,0}\hat{b}^+_{1j,0} + \hat{b}^-_{1i,\infty}\hat{b}^+_{1j,\infty}, \text{ де } i, j \in \overline{2, n}.$$

$$\hat{M}^B_{X_{11}} = -(\sum_{p=2}^{n} \hat{b}^-_{1p,0}\hat{b}^+_{1p,0} + \sum_{p=2}^{n} \hat{b}^-_{1p,\infty}\hat{b}^+_{1p,\infty}).$$

В цьому випадку гамільтоніан (6.9.71) записується наступним чином:

$$\hat{H}_0 = -\sqrt{k_{1,0} - k_{n,0}}\sqrt{k_{1,\infty} - k_{n,\infty}} \sum_{j=2}^{n} (\hat{b}^+_{1j,0}\hat{b}^-_{1j,\infty} + \hat{b}^-_{1j,0}\hat{b}^+_{1j,\infty}) +$$
$$+ \frac{1}{2}\big(c^{11}(\hat{M}^{b_0}_{X_{11}} + \hat{M}^{b_\infty}_{X_{11}}) - \hat{M}^{b_0}_{X_{11}}\big)^2 +$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=2}^{n} \big(c^{ij}(\hat{M}^{b_0}_{X_{ij}} + \hat{M}^{b_\infty}_{X_{ij}}) - \hat{M}^{b_0}_{X_{ij}}\big)\big(c^{ji}(\hat{M}^{b_0}_{X_{ji}} + \hat{M}^{b_\infty}_{X_{ji}}) - \hat{M}^{b_0}_{X_{ji}}\big). \quad (6.9.74)$$

Відзначимо, що оператори $\hat{M}^{b_\infty}_{X_{ij}}$ і $\hat{M}^{b_0}_{X_{ji}}$ містять доданок “зсуву”. Гамільтоніан (6.9.74) має $n-1$ незалежних комутуючих інтегралів $\hat{M}^B_{H_i} = \hat{M}^B_{X_{ii}}$, $i \in \overline{2,n}$ наступної форми:

$$\hat{M}^B_{X_{ii}} = \hat{b}^-_{1i,0}\hat{b}^+_{1i,0} + \hat{b}^-_{1i,\infty}\hat{b}^+_{1i,\infty}.$$

Загальний багатобозонний гамільтоніан, що містить кінетичний член, має форму (6.9.70). В простому $c^{\bar{0}}_{12} = 0$ – випадку він записується так:

$$\hat{H} = \sum_{i=2}^{n} w_i(\hat{b}^-_{1i,0}\hat{b}^+_{1i,0} + \hat{b}^-_{1i,\infty}\hat{b}^+_{1i,\infty}) -$$
$$- g\sqrt{k_{1,0} - k_{n,0}}\sqrt{k_{1,\infty} - k_{n,\infty}} \sum_{j=2}^{n} (\hat{b}^+_{1j,0}\hat{b}^-_{1j,\infty} + \hat{b}^-_{1j,0}\hat{b}^+_{1j,\infty}) +$$
$$+ \frac{g}{2}\big(c_{1,0} - \sum_{i=2}^{n} \hat{b}^-_{1i,0}\hat{b}^+_{1i,0}\big)^2 + \frac{g}{2}\sum_{i,j=2}^{n} (\hat{b}^-_{1i,0}\hat{b}^+_{1j,0} + c_{n,0}\delta_{ij})(\hat{b}^-_{1j,0}\hat{b}^+_{1i,0} + c_{n,0}\delta_{ij}).$$
$$(6.9.75)$$

Це найпростіший багатобозонний аналог димеру Бозе – Хаббарда [95].

Інший простий випадок — це $c^{\bar{0}}_{12}|_{gl(n-1)} = 0$, $c^{\bar{0}}_{12}|_{gl(1)} = \Omega^{\bar{0}}_{12}$, який є еквівалентним покладанню $c_{11} = 1$, $c_{ij} = 0$, $i, j > 1$. Загальний багатобозонний гамільтоніан (6.9.70) записується в цьому випадку наступним чином:

$$\hat{H} = \sum_{i=2}^{n} w_i(\hat{b}^{-}_{1i,0}\hat{b}^{+}_{1i,0} + \hat{b}^{-}_{1i,\infty}\hat{b}^{+}_{1i,\infty}) -$$
$$- g\sqrt{k_{1,0} - k_{n,0}}\sqrt{k_{1,\infty} - k_{n,\infty}}\sum_{j=2}^{n}(\hat{b}^{+}_{1j,0}\hat{b}^{-}_{1j,\infty} + \hat{b}^{-}_{1j,0}\hat{b}^{+}_{1j,\infty}) +$$
$$+ \frac{g}{2}\Big(c_{1,\infty} - \sum_{i=2}^{n}\hat{b}^{-}_{1i,\infty}\hat{b}^{+}_{1i,\infty}\Big)^2 + \frac{g}{2}\sum_{i,j=2}^{n}(\hat{b}^{-}_{1i,0}\hat{b}^{+}_{1j,0} + c_{n,0}\delta_{ij})(\hat{b}^{-}_{1j,0}\hat{b}^{+}_{1i,0} + c_{n,0}\delta_{ij}). \tag{6.9.76}$$

Цей гамільтоніан є інтегровним “векторним” узагальненням димеру Бозе–Хаббарда. Дійсно, у випадку $n = 2$ ми отримуємо наступний гамільтоніан:

$$\hat{H} = w_2(\hat{b}^{-}_{12,0}\hat{b}^{+}_{12,0} + \hat{b}^{-}_{12,\infty}\hat{b}^{+}_{12,\infty}) -$$
$$- g\sqrt{k_{1,0} - k_{2,0}}\sqrt{k_{1,\infty} - k_{2,\infty}}(\hat{b}^{+}_{12,0}\hat{b}^{-}_{12,\infty} + \hat{b}^{-}_{12,0}\hat{b}^{+}_{12,\infty}) +$$
$$+ \frac{g}{2}\big(c_{1,\infty} - \hat{b}^{-}_{12,\infty}\hat{b}^{+}_{12,\infty}\big)^2 + \frac{g}{2}(\hat{b}^{-}_{12,0}\hat{b}^{+}_{12,0} + c_{n,0})^2. \tag{6.9.77}$$

що вточності співпадає з гамільтоніаном димера Бозе–Хаббарда [32]-[52].

6.10. Висновки

В данному розділі побудовано широкий клас квантово – інтегровних моделей, що базуються на класичних некососиметричних r-матрицях. Зокрема, побудовані квантово – інтегровні моделі типу Годена та Годена у зовнішньому магнітному полі, квантово – інтегровні моделі типу Джейнса - Камінгса - Діке та квантово – інтегровні багатобозонні моделі, що узагальнюють димери Бозе – Хаббарда. Результати, представлені в данному розділі, опубліковані в роботах [84, 87, 90, 91, 95, 96, 98, 104, 108, 109, 111, 112].

Розділ 7

Анзац Бете та класичні r-матриці.

7.1. Вступ

Алгебраїчний анзац Бете виник у роботах Ленінградської школи математичної фізики під керівництвом професора Л.Д.Фадєєва в 1979 році для випадку квадратичних (квантово–групових) структур, пов'язаних з інтегровними моделями теорії поля та квантовими R – матрицями [34].

Алгебраїчний анзац Бете у своїй Лі–алгебраїчній версії, пов'язаній з класичними кососиметричними r-матрицями і алгеброю Лі $sl(2)$, був формалізований у роботі [63], але в не явній формі містився вже у працях Годена [37]. Випадок кососиметричних r-матриць і алгебр Лі вищих рангів розглядався у роботі [40].

В серії робіт автора дисертації [86], [92], [110], [113] алгебраїчний анзац Бете був узагальнений на випадок некососиметричних r-матриць та алгебр Лі серії $gl(n)$. У випадку вищих рангів ($n > 2$) алгебраїчний анзац Бете стає "гніздовим", або "ієрархічним" тобто потребує для своєї реалізації ланцюжка вкладених підалгебр. Стандартний ланцюжок вкладених підалгебр, що для алгебри $gl(n)$ використовується як в квантово – груповому [49], так і в Лі – алгебраїчному випадку, співпадає з ланцюжком $gl(n) \supset gl(n) \supset ... \supset gl(1)$. Для випадку класичних некососиметричних r-матриць ми реалізуємо анзац Бете що базується на ланцюжку вкладень $gl(n) \supset gl(n) \supset ... \supset gl(1)$. Проте, виявляється, що вимога фіксації ланцюжка підалгебр $gl(n) \supset gl(n) \supset ... \supset gl(1)$ накладає серйозні обмеження на форму відповідних некососиметричних r-матриць. Існує всього три сімейства некососиметричних r-матриць, які цим обмеженням задовільняють.

Щоб розширити клас допустимих r-матриць, ми розглядаємо узагальнену версію ієрархічного анзацу Бете, що базується на ланцюжках вкладень пов'язаних з різними редукціями з алгебри $gl(n)$ на підалгебру $gl(n-k) \oplus gl(k)$. Ми показуємо, що клас допустимих r-матриць в цьому випадку включає, зокрема, Z_p – градуйовані r-матриці. Ми застосовуємо цю конструкцію для діагоналізації Z_p – градуйованих моделей типу Годена, зконструйованих у попередньому розділі, та у випадку $gl(n)$ до моделей типу ДКД і узагальнених димерів Бозе – Хаббарда.

7.2. Випадок алгебри $sl(2)$

Для формулювання алгебраїчного анзацу Бете необхідно детальніше розглянути алгебру квантових операторів Лакса.

7.2.1. Оператори Лакса та квантові інтеграли. Квантування лінійної тензорної дужки Пуасона досягається відображенням $L(u) \to \hat{L}(u)$, де $\hat{L}(u)$ – матриця Лакса з коефіцієнтами, що є операторами в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, така, що мають місце наступні комутаційні співвідношення:

$$[\hat{L}_1(u), \hat{L}_2(v)] = [r_{12}(u,v), \hat{L}_1(u)] - [r_{21}(v,u), \hat{L}_2(v)], \tag{7.2.1}$$

Для випадку загальної $so(3) \otimes so(3)$–значної r-матриці:

$$r_{12}(u,v) \equiv \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} r^{\alpha\beta}(u,v) X_\alpha \otimes X_\beta$$

ці співвідношення записуються в компонентній формі наступним чином:

$$[\hat{L}^\alpha(u), \hat{L}^\beta(v)] = \sum_{\gamma,\delta=1}^{3} (c^\alpha_{\gamma\delta} r^{\gamma\beta}(u,v) \hat{L}^\delta(u) - c^\beta_{\gamma\delta} r^{\gamma\alpha}(v,u) \hat{L}^\delta(v)). \tag{7.2.2}$$

Розглянемо наступні квадратичні по елементах алгебри Лакса функції:

$$\hat{\tau}(u) = \frac{1}{2}tr(\hat{L}(u))^2 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta=1}^{3} g_{\alpha\beta}\hat{L}^{\alpha}(u)\hat{L}^{\beta}(u), \tag{7.2.3}$$

де $g_{\alpha\beta} = (X_\alpha, X_\beta)$ і $(\ ,\ )$ — інваріантний скалярний добуток.

Має місце наступна Теорема [86]:

Теорема 7.1. *Нехай оператори $\hat{L}(u)$ задовільняють співвідношеням (7.2.1). Нехай $r(u,v)$ – $so(3)\otimes so(3)$-значна r-матриця з розкладом (1.3.6). Тоді функція $\hat{\tau}(u)$ є генератором комутативної алгебри:*

$$[\hat{\tau}(u), \hat{\tau}(v)] = 0. \tag{7.2.4}$$

Зауваження 70. Доведена Теорема є справедливою для всіх можливих типів $sl(2)$– значних операторів Лакса $\hat{L}(u)$, що задовільняють дужку (7.2.1) для даної класичної нединамічної r-матриці $r(u,v)$.

7.2.2. Алгебраїчний анзац Бете. Розглянемо кореневий базис алгебри $so(3)\simeq sl(2)$: $X_3 = i\mathrm{x}_3$, $X_\pm = i(\mathrm{x}_1 \pm i\mathrm{x}_2)$ з наступними стандартними комутаційними співвідношеннями:

$$[X_3, X_\pm] = \pm X_\pm, \quad [X_+, X_-] = 2X_3.$$

В цьому базисі ми маємо, що: $(X_\pm, X_\mp) = 2$, $(X_3, X_3) = 1$, $X^3 = X_3$, $X^\pm = \frac{1}{2}X_\mp$. Розглянемо діагональну в кореневому базисі r-матрицю:

$$r(u,v) = (\frac{1}{2}r^-(u,v)X_+\otimes X_- + \frac{1}{2}r^+(u,v)X_-\otimes X_+ + r^3(u,v)X_3\otimes X_3) \tag{7.2.5}$$

Оператор Лакса в $sl(2)$– базисі записується наступним чином:

$$\hat{L}(u) = \hat{L}^3(u)X_3 + \hat{L}^+(u)X_+ + \hat{L}^-(u)X_-.$$

Дуальні компоненти $L_\alpha(u) = \sum\limits_{\beta=1}^{3} g_{\alpha\beta}L^\beta(u)$ мають наступний вигляд:

$$L_+(u) = 2L^-(u), \quad L_-(u) = 2L^+(u), \quad L_3(u) = L^3(u).$$

Відповідні нетривіальні комутаційні співвідношення мають форму:

$$[\hat{L}_+(u), \hat{L}_3(v)] = -(r^3(u,v)\hat{L}_+(u) + r^-(v,u)\hat{L}_+(v)), \tag{7.2.6a}$$

$$[\hat{L}_-(u), \hat{L}_3(v)] = (r^3(u,v)\hat{L}_-(u) + r^+(v,u)\hat{L}_-(v)), \tag{7.2.6b}$$

$$[\hat{L}_+(u), \hat{L}_-(v)] = 2(r^+(u,v)\hat{L}_3(u) + r^-(v,u)\hat{L}_3(v)), \tag{7.2.6c}$$

Генеруюча функція квантових гамільтоніанів τ записується так:

$$\hat{\tau}(u) = \hat{L}_3^2(u) + \frac{1}{2}(\hat{L}_+(u)\hat{L}_-(u) + \hat{L}_-(u)\hat{L}_+(u)). \tag{7.2.7}$$

Нехай $\mathcal{H}$ — простір незвідного представлення алгебри Лакса. Припустимо, що в просторі представлення $\mathcal{H}$ існує вакуумний вектор $|0\rangle$ такий, що

$$\hat{L}_3(u)|0\rangle = \Lambda_3(u)|0\rangle, \quad \hat{L}_+(u)|0\rangle = 0.$$

Прямим обчисленням легко показати, що вакуумний вектор є також власним вектором для генеруючої функції квантових гамільтоніанів:

$$\hat{\tau}(u)|0\rangle = (\Lambda_3(u)^2 + \partial_u\Lambda_3(u) + (r_0^-(u,u) + r_0^+(u,u))\Lambda_3(u))|0\rangle,$$

де ми використали наступне співвідношення:

$$[\hat{L}_+(u), \hat{L}_-(u)] = 2(\partial_u\hat{L}_3(u) + (r_0^-(u,u) + r_0^+(u,u))\hat{L}_3(u)).$$

Має місце наступна Теорема [86]:

Теорема 7.2. *Розглянемо вектори типу Бете:*

$$|v_1v_2\cdots v_M\rangle = \hat{L}_-(v_1)\hat{L}_-(v_2)\cdots\hat{L}_-(v_M)|0\rangle,$$

де параметри v_i задовільняють узагальненим рівнянням Бете:

$$\Lambda_3(v_i) - \sum_{j=1, j\neq i}^{M} r^3(v_j, v_i) = r_0^3(v_i,v_i) - \frac{1}{2}(r_0^+(v_i,v_i) + r_0^-(v_i,v_i)), \quad i \in \overline{1,M}.$$

(7.2.8)

Тоді вектори $|v_1 v_2 \cdots v_M\rangle$ *є власними векторами генеруючої функції квантових гамільтоніанів* $\hat{\tau}(u)$*:* $\hat{\tau}(u)|v_1 v_2 \cdots v_M\rangle = \Lambda(u|\{v_i\})|v_1 v_2 \cdots v_M\rangle$ *з наступними власними значеннями:*

$$\Lambda(u|\{v_i\}) = (\Lambda_3(u) - \sum_{i=1}^{M} r^3(v_i, u))^2 - \sum_{i=1}^{M} r^+(v_i, u) r^-(v_i, u) + \\ + (r_0^+(u, u) + r_0^-(u, u))\Lambda_3(u) + \partial_u \Lambda_3(u). \quad (7.2.9)$$

Зауваження 71. Зауважимо, що при виводі рівнянь Бете і формули для спектру генеруючої функції не використовується явної фори r-матриці $r(u, v)$. Єдина річ необхідна для доведення Теореми є діагональність r-матриці $r(u, v)$ в кореневому базисі і властивість (1.3.6).

7.3. Випадок алгебри $gl(n)$ і стандартного ланцюжка підалгебр

В цьому підрозділі ми розглянемо алгебраїчний анзац Бете для випадку алгебри $gl(n)$. Результати цього підрозділу узагальнюють результати попереднього підрозділу на випадок довільного n.

7.3.1. r-матриця і елементи зсуву Розглянемо алгебру Лі $\mathfrak{g} = gl(n)$. Нехай $X_{ij}, i, j = \overline{1, n}$ – стандартний базис алгебри $gl(n)$ з комутаційними співвідношеннями:

$$[X_{ij}, X_{kl}] = \delta_{kj} X_{il} - \delta_{il} X_{kj}. \quad (7.3.10)$$

Розглянемо узагальнене класичне рівняння Янга – Бакстера:

$$[r^{12}(u_1, u_2), r^{13}(u_1, u_3)] = [r^{23}(u_2, u_3), r^{12}(u_1, u_2)] - [r^{32}(u_3, u_2), r^{13}(u_1, u_3)], \quad (7.3.11)$$

де $r^{12}(u_1,u_2) \equiv \sum\limits_{i,j,k,l=1}^{n} r_{ij,kl}(u_1,u_2)X_{ij} \otimes X_{kl} \otimes 1$, $r^{13}(u_1,u_3) \equiv \sum\limits_{i,j,k,l=1}^{n} r_{ij,kl}(u_1,u_3)X_{ij} \otimes 1 \otimes X_{kl}$ і $r_{ij,kl}(u,v)$ – матричні елементи r-матриці $r(u,v)$.

Визначення 13. Ми будемо називати $gl(n)$ – значну r-матрицю діагональною в кореневому базисі якщо вона має наступну форму:

$$r(u_1,u_2) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} r_{ji}(u_1,u_2)X_{ij} \otimes X_{ji}. \tag{7.3.12}$$

Діагональні в кореневому базисі r-матриці є автоматично Картан – інваріантними. Зворотнє не вірно: не всі Картан–інваріантні r-матриці діагональні в кореневому базисі.

У випадку діагональних r-матриць узагальнене класичне рівняння Янга – Бакстера (7.3.11) переписується в компонентній формі наступним чином:

$$r_{ij}(u_1,u_2)r_{jl}(u_1,u_3) - r_{il}(u_1,u_2)r_{jl}(u_2,u_3) - r_{il}(u_1,u_3)r_{ij}(u_3,u_2) = 0, \tag{7.3.13}$$

де $i,j,l \in \overline{1,n}$ і всі три індекса не співпадають між собою.

Узагальнені елементи зсуву мають вигляд $c(u) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} c_{ij}(u)X_{ij}$ і задовільняють рівнянню зсуву:

$$[r^{12}(u_1,u_2), c(u_1) \otimes 1] - [r^{21}(u_2,u_1), 1 \otimes c(u_2)] = 0. \tag{7.3.14}$$

В подальшому ми будемо цікавитись лише діагональними елементами зсуву, тобто елементами зсуву наступної форми:

$$c(u) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}(u)X_{ii}.$$

7.3.2. Алгебра операторів Лакса Розглянемо тензорну дужку Лі:

$$[\hat{L}(u_1) \otimes 1, 1 \otimes \hat{L}(u_2)] = [r^{12}(u_1,u_2), \hat{L}(u_1) \otimes 1] - [r^{21}(u_2,u_1), 1 \otimes \hat{L}(u_2)],$$

$$(7.3.15)$$

де $\hat{L}(u) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \hat{L}_{ij}(u) X_{ij}$, $r^{21}(u_2, u_1) = P^{12} r^{12}(u_1, u_2) P^{12}$.

Тензорна дужка (7.3.15) у випадку діагональних r-матриць (7.3.12) переписується в компонентній формі наступним чином:

$$[\hat{L}_{ij}(u_1), \hat{L}_{kl}(u_2)] = \delta_{il}(r_{kl}(u_1, u_2)\hat{L}_{kj}(u_1) + r_{ij}(u_2, u_1)\hat{L}_{kj}(u_2)) - \\ - \delta_{kj}(r_{kl}(u_1, u_2)\hat{L}_{il}(u_1) + r_{ij}(u_2, u_1)\hat{L}_{il}(u_2)). \quad (7.3.16)$$

Зауваження 72. Явна форма операторів $\hat{L}_{ij}(u)$ як функцій комплексного параметру u залежить від конкретної r-матриці, що розглядається.

7.3.3. Квантові інтеграли. Розглянемо наступні лінійні і квадратичні функції по базисним елементам алгебри Лакса:

$$\hat{t}_n(u) = \mathrm{tr}_n \hat{L}(u) = \sum_{i=1}^{n} \hat{L}_{ii}(u), \quad \hat{\tau}_n(u) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}_n \hat{L}^2(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \hat{L}_{ij}(u)\hat{L}_{ji}(u). \quad (7.3.17)$$

Має місце наступна Теорема [109]:

Теорема 7.3. *Нехай $\hat{L}(u)$ – оператор Лакса, що задовільняє комутаційні співвідношення (7.3.15) з діагональною в кореневому базисі класичною r-матрицею.*

Нехай r-матриця $r(u, v)$ в деякому околі $U \times U \subset \mathbb{C}^2$ допускає розклад (1.3.6). Тоді операторно-значні функції $\hat{\tau}_n(u)$ і $\hat{t}_n(u)$ є генераторами комутативної алгебри, тобто:

$$[\hat{t}_n(u), \hat{t}_n(v)] = 0, \quad [\hat{\tau}_n(u), \hat{t}_n(v)] = 0, \quad [\hat{\tau}_n(u), \hat{\tau}_n(v)] = 0.$$

Зауваження 73. Необхідно підкреслити, що оператор:

$$\hat{t}_n(u) = tr_n \hat{L}(u) = \sum_{i=1}^{n} \hat{L}_{ii}(u)$$

взагалі кажучи, не належить до центру алгебри операторів Лакса. Дійсно, навіть в найпростішому випадку діагональних r-матриць з комутаційних співвідношень (7.3.16) слідує що:

$$[\hat{t}_n(u), \hat{L}_{kl}(v)] = (r_{ll}(v,u) - r_{kk}(v,u))\hat{L}_{kl}(v). \tag{7.3.18}$$

Цей вираз не є нулем якщо $r_{kk}(u,v) \neq r_{ll}(u,v)$.

З Теореми 7.3 слідує:

Наслідок 7.1. *Нехай точки ν_l належать до відкритої області U. Тоді всі оператори вигляду $\hat{H}_{\nu_l} = -res_{u=\nu_l}\hat{\tau}_n(u)$ і $\hat{C}_{\nu_m} = -res_{u=\nu_m}\hat{t}_n(u)$, $l,m \in \overline{1,N}$ взаємно комутують.*

Зауваження 74. Оператори $\hat{H}_{\nu_l}$ є точними аналогами узагальнених гамільтоніанів Годена [84] і співпадають з ними за спіціального вибора оператору Лакса. З рівності (7.3.18) легко вивести що оператори $\hat{C}_{\nu_l}$ належать до центру алгебри операторів Лакса.

7.3.4. Ієрархічний анзац Бете: випадок стандартного ланцюжка підалгебр. Основна ідея ієрархічного анзацу Бете, що був запропонований в квантово – груповому випадку в роботі [49] і в Лі – алгебраїчному випадку (для підвипадку кососиметричних r-матриць) в роботі [40], є зведення проблеми діагоналізації генеруючих функцій комутуючих інтегралів алгебри $gl(n)$ до тої самої проблеми у випадку алгебри Лі $gl(n-1)$ і, то застосування цього методу рекурсивно, використовуючи ієрархію вкладених підалгебр $gl(n) \supset gl(n-1) ... \supset gl(1)$. В цьому розділі ми покажемо застосовність цього методу для певного класу некососиметричних класичних r-матриць і зконструюємо відповідні рівняння Бете і формули для спектрів генеруючих функцій квантових інтегралів першого і другого порядку.

Діагоналізація. Діагоналізуємо функцію $\hat{\tau}_n(u)$ за допомогою ієрархічного анзацу Бете. Нехай V – простір незвідного представлення алгебри операторів Лакса. Припустимо, що існує такий вектор $\mathbf{\Omega} \in V$, що:

$$\hat{L}_{ii}(u)\mathbf{\Omega} = \Lambda_{ii}(u)\mathbf{\Omega}, \quad \hat{L}_{kl}(u)\mathbf{\Omega} = 0, \quad i, k, l \in \overline{1, n}, \ k > l \tag{7.3.19}$$

і весь простір V, породжений дією операторів $\hat{L}_{kl}(u)$, $k < l$ на вектор $\mathbf{\Omega}$.

Має місце наступна Теорема [110]:

Теорема 7.4. *Нехай діагональна r-матриця $r(u, v)$ задовільняє умові (1.3.6) і наступним двом умовам:*

$$(i) \ r_{ji}(u, v) = r_{-,i}(u, v), \ r_{ij}(u, v) = r_{+,i}(u, v) \ \forall j \in \overline{i+1, n}, \forall i \in \overline{1, n-1}, \tag{7.3.20a}$$

$$(ii) \ r_{22}(u, v) = r_{33}(u, v) = \ldots = r_{nn}(u, v) \tag{7.3.20b}$$

або

$$(ii)' \ \partial_v r_{22}(u, v) = \partial_v r_{33}(u, v) = \ldots = \partial_v r_{nn}(u, v) \ \text{та} \\ (r^0_{-,i}(u, u) + r^0_{+,i}(u, u)) = 0, \quad \forall i \in \overline{1, n-1}. \tag{7.3.20c}$$

Тоді спектр генеруючої функції $\hat{\tau}_n(u)$ у просторі V має вигляд:

$$2\Lambda_n(u) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\Lambda_{kk}(u) + \sum_{j=1}^{M_{k-1}} r_{kk}(v_j^{(k-1)}, u) - \sum_{j=1}^{M_k} r_{kk}(v_j^{(k)}, u)\Big)^2 + \\ + \sum_{k=1}^{n} \big(\partial_u + (r^0_{-,k}(u, u) + r^0_{+,k}(u, u))\big)\Big((n-k)\Lambda_{kk}(u) - \sum_{i=k+1}^{n} \Lambda_{ii}(u) + \\ (n-k) \sum_{j=1}^{M_{k-1}} r_{kk}(v_j^{(k-1)}, u)\Big) - \sum_{k=1}^{n} (n-k+1) \sum_{j=1}^{M_k} r_{-,k}(v_j^{(k)}, u) r_{+,k}(v_j^{(k)}, u), \tag{7.3.21}$$

де $M_0 = M_n = 0$, M_k, $k \in \overline{1, n-1}$ – невід'ємні цілі числа, $r_{-,n}(u, v) \equiv r_{+,n}(u, v) \equiv 0$ і бистроти $v_i^{(k)}$, $k \in \overline{1, n-1}$, $i \in \overline{1, M_k}$ задовільняють наступні рівняння Бете:

$$\Lambda_{11}(v_i^{(1)}) - \Lambda_{22}(v_i^{(1)}) - (r_{11}^0(v_i^{(1)}, v_i^{(1)}) + r_{22}^0(v_i^{(1)}, v_i^{(1)}))+$$
$$+\frac{n}{2}(r_{-,1}^0(v_i^{(1)}, v_i^{(1)})+r_{+,1}(v_i^{(1)}, v_i^{(1)}))-\frac{n-2}{2}(r_{-,2}^0(v_i^{(1)}, v_i^{(1)})+r_{+,2}(v_i^{(1)}, v_i^{(1)})))$$
$$= \sum_{j=1;j\neq i}^{M_1}\big(r_{11}(v_j^{(1)}, v_i^{(1)}) + r_{22}(v_j^{(1)}, v_i^{(1)})\big) - \sum_{j=1}^{M_2} r_{22}(v_j^{(2)}, v_i^{(1)}), \quad (7.3.22a)$$

$$\Lambda_{k+1k+1}(v_i^{(k+1)}) - \Lambda_{k+2k+2}(v_i^{(k+1)}) - (r_{k+1k+1}^0(v_i^{(k+1)}, v_i^{(k+1)})+$$
$$+r_{k+2k+2}^0(v_i^{(k+1)}, v_i^{(k+1)}))+\frac{n-k}{2}(r_{-,k+1}^0(v_i^{(k+1)}, v_i^{(k+1)})+r_{+,k+1}(v_i^{(k+1)}, v_i^{(k+1)}))$$
$$-\frac{n-k-2}{2}(r_{-,k+2}^0(v_i^{(k+1)}, v_i^{(k+1)}) + r_{+,k+2}^0(v_i^{(k+1)}, v_i^{(k+1)})) =$$
$$= \sum_{j=1;j\neq i}^{M_{k+1}}(r_{k+1k+1}(v_j^{(k+1)}, v_i^{(k+1)}) + r_{k+2k+2}(v_j^{(k+1)}, v_i^{(k+1)}))-$$
$$-\sum_{j=1}^{M_k} r_{k+1k+1}(v_j^{(k)}, v_i^{(k+1)}) - \sum_{j=1}^{M_{k+2}} r_{k+2k+2}(v_j^{(k+2)}, v_i^{(k+1)}), \; k \in \overline{1, n-3}, \quad (7.3.22b)$$

$$\Lambda_{n-1n-1}(v_i^{(n-1)})-\Lambda_{nn}(v_i^{(n-1)})-(r_{n-1n-1}^0(v_i^{(n-1)}, v_i^{(n-1)})+r_{nn}^0(v_i^{(n-1)}, v_i^{(n-1)}))+$$
$$+ r_{-,n-1}^0(v_i^{(n-1)}, v_i^{(n-1)}) + r_{+,n-1}(v_i^{(n-1)}, v_i^{(n-1)}) =$$
$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_{n-1}}(r_{n-1n-1}(v_j^{(n-1)}, v_i^{(n-1)})+r_{nn}(v_j^{(n-1)}, v_i^{(n-1)}))-\sum_{j=1}^{M_{n-2}} r_{n-1n-1}(v_j^{(n-2)}, v_i^{(n-1)}). \quad (7.3.22c)$$

Тут $r_{\pm,i}^0(u,v)$, $r_{ii}^0(u,v)$, $i \in \overline{1,n}$ *означають регулярні частини функцій* $r_{\pm,i}(u,v)$ *і* $r_{ii}(u,v)$ *відповідно.*

Зауваження 75. У вище наведених формулах спектру і рівнянь Бете, необхідно враховувати умову (ii) чи (ii)' . Тобто класти $r_{22}(u,v) = r_{33}(u,v) = ... = r_{nn}(u,v)$ або $\partial_v r_{22}(u,v) = \partial_v r_{33}(u,v) = ... = \partial_v r_{nn}(u,v)$ і $(r_{-,i}^0(u,u) + r_{+,i}^0(u,u)) = 0$, $\forall i \in \overline{1, n-1}$.

Ідея доведення. Діагоналізація функції $\hat{\tau}_n(u)$ здійснюється рекурсивно, використовуючи ланцюжок вкладень $gl(n) \supset gl(n-1) \supset \cdots \supset gl(1)$.

Спектр лінійних інтегралів Опишемо додаткові лінійні інтеграли, що пов'язані з симетрією (Картан – інваріантністю r-матриці). Припустимо, що серед квантових динамічних змінних існують квантові оператори $\hat{M}_{X_{kk}}$, $k \in \overline{1,n}$ такі, що має місце наступна умова [92]:

$$[\hat{M}_{X_{kk}}, \hat{L}_{ij}(u)] = (\delta_{ki} - \delta_{kj})\hat{L}_{ij}(u). \tag{7.3.23}$$

В цьому випадку можна показати, що $[\hat{M}_{X_{kk}}, \hat{M}_{X_{ll}}] = 0$, $k, l \in \overline{1,n}$ і

$$[\hat{M}_{X_{kk}}, \mathrm{tr}\hat{L}(u)] = 0, \quad [\hat{M}_{X_{kk}}, \mathrm{tr}\hat{L}^2(u)] = 0, \quad k \in \overline{1,n},$$

тобто існують додаткові комутуючі інтеграли діагоналізовні разом з $\hat{\tau}_n(u)$. Має місце наступне Твердження [110]:

Твердження 7.1. *Дія додаткових лінійних інтегралів $\hat{M}_{X_{ii}}$, $i \in \overline{1,n}$ на векторах Бете $\mathbf{V}(v^{(1)}_{m_1}, ..., v^{(n-1)}_{m_{n-1}})$ має наступну форму:*

$$\hat{M}_{X_{ii}}\mathbf{V}(v^{(1)}_{m_1}, ..., v^{(n-1)}_{m_{n-1}}) = m_i(M_1, ..., M_{n-1})\mathbf{V}(v^{(1)}_{m_1}, ..., v^{(n-1)}_{m_{n-1}}),$$

де

$$m_i(M_1, ..., M_{n-1}) = m_{ii} + M_{i-1} - M_i,$$

Тут m_{ii} – власне значення оператора $\hat{M}_{X_{ii}}$ на вакуумному векторі $\mathbf{\Omega}$:

$$\hat{M}_{X_{ii}}\mathbf{\Omega} = m_{ii}\mathbf{\Omega}$$

і, по самому визначенню, $M_0 = M_n = 0$.

(Доведення цього Твердження повторює доведення аналогічного Твердження у випадку раціональної r-матриці [92]).

Для повноти порахуємо спектр лінійних інтегралів отриманих за допомогою генеруючої функції $\hat{t}_n(u)$. Має місце наступне Твердження [110]:

Твердження 7.2. *Дія генеруючої функції лінійних інтегралів $\hat{t}_n(u)$ на векторах Бете $\mathbf{V}(v^{(1)}_{m_1}, ..., v^{(n-1)}_{m_{n-1}})$ має наступну форму:*

$$\hat{t}_n(u)\mathbf{V}(v^{(1)}_{m_1}, ..., v^{(n-1)}_{m_{n-1}}) = \sum_{k=1}^{n}(\Lambda_{kk}(u) + \sum_{i=1}^{M_{k-1}} r_{kk}(v^{(k-1)}_i, u) - \sum_{i=1}^{M_k} r_{kk}(v^{(k)}_i, u)) \times \mathbf{V}(v^{(1)}_{m_1}, ..., v^{(n-1)}_{m_{n-1}}).$$

Зауваження 76. У випадку r-матриць, що задовільняють умову (7.3.20b), формула дії оператора $\hat{t}_n(u)$ спрощується до вигляду:

$$\hat{t}_n(u)\mathbf{V}(v^{(1)}_{m_1},...,v^{(n-1)}_{m_{n-1}}) = (\sum_{k=1}^{n}\Lambda_{kk}(u)+\sum_{i=1}^{M_1}r_{22}(v^{(1)}_i,u)-\sum_{i=1}^{M_1}r_{11}(v^{(1)}_i,u)) \\ \times \mathbf{V}(v^{(1)}_{m_1},...,v^{(n-1)}_{m_{n-1}}).$$

7.4. Приклад: випадок раціональної r-матриці

7.4.1. Вектори Бете і спектр інтегралів руху Використовуючи результати попереднього підрозділу і конкретизуючи їх для випадку раціональної r-матриці, отримуємо наступу Теорему [90], [91]:

Теорема 7.5. *Спектр генеруючої функції квадратичних інтегралів руху на ієрархічних векторах Бете має наступний вигляд:*

$$\Lambda_n(u)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Lambda^2_{ii}(u)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)\partial_u\Lambda_{ii}(u)-\Lambda_{11}(u)\sum_{i=1}^{M_1}\frac{1}{(u-v^{(1)}_i)}+ \\ +\sum_{k=2}^{n-1}\Lambda_{kk}(u)(\sum_{i=1}^{M_{k-1}}\frac{1}{(u-v^{(k-1)}_i)}-\sum_{i=1}^{M_k}\frac{1}{(u-v^{(k)}_i)})+\Lambda_{nn}(u)\sum_{i=1}^{M_{n-1}}\frac{1}{(u-v^{(n-1)}_i)}+ \\ +\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{M_k}\frac{1}{(u-v^{(k)}_i)(u-v^{(k)}_j)}+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{M_k}\sum_{j=1}^{M_{k+1}}\frac{1}{(u-v^{(k)}_i)(u-v^{(k+1)}_j)}, \tag{7.4.24}$$

де бистроти $v^{(k)}_i$ задовільняють наступні рівняння Бете:

$$\Lambda_{11}(v^{(1)}_i)-\Lambda_{22}(v^{(1)}_i)=2\sum_{j=1;j\neq i}^{M_1}\frac{1}{(v^{(1)}_i-v^{(1)}_j)}-\sum_{j=1}^{M_2}\frac{1}{(v^{(1)}_i-v^{(2)}_j)}, \tag{7.4.25a}$$

$$\Lambda_{k+1k+1}(v^{(k+1)}_i)-\Lambda_{k+2k+2}(v^{(k+1)}_i)=2\sum_{j=1;j\neq i}^{M_{k+1}}\frac{1}{(v^{(k+1)}_i-v^{(k+1)}_j)}-$$

$$-\sum_{j=1}^{M_k}\frac{1}{(v_i^{(k+1)}-v_j^{(k)})}-\sum_{j=1}^{M_{k+2}}\frac{1}{(v_i^{(k+1)}-v_j^{(k+2)})},\;\; k\in\overline{1,n-3}, \quad (7.4.25b)$$

$$\Lambda_{n-1n-1}(v_i^{(n-1)})-\Lambda_{nn}(v_i^{(n-1)})=\sum_{j=1;j\neq i}^{M_{n-1}}\frac{2}{(v_i^{(n-1)}-v_j^{(n-1)})}-\sum_{j=1}^{M_{n-2}}\frac{1}{(v_i^{(n-1)}-v_j^{(n-2)})}. \quad (7.4.25c)$$

Для обрахунку спектру зконструйованих загальних гамільтоніанів необхідно також діагоналізувати додаткові інтеграли M_{ii}.

Має місце наступа Теорема [91]:

Теорема 7.6. *Спектр додаткових інтегралів $\hat{M}_{X_{ii}}$, $i\in 1,n$ на ієрархічних векторах Бете має вигляд:*

$$m_i(M_1,...,M_{n-1})=m_{ii}+M_{i-1}-M_i, \quad (7.4.26)$$

де m_{ii} — власні значення операторів $\hat{M}_{X_{ii}}$ на вакуумному векторі $\mathbf{\Omega}$:

$$\hat{M}_{X_{ii}}\mathbf{\Omega}=m_{ii}\mathbf{\Omega}.$$

і, по самому визначенню, $M_0=M_n=0$.

7.4.2. Випадок моделей ДКД Конкретизуємо результати попереднього підрозділу які справедливі для будь яких операторів Лакса, що відповідають раціональній r-матриці і мають представлення з вакуумним векором на випадок операторів Лакса раціональної моделі ДКД. Для цього розглянемо представлення алгебри Лакса в Гільбертовому просторі V, що відповідає алгебрі $gl(n)^{\oplus N}\oplus\mathcal{H}_K$, де $\mathcal{H}_K$ описана в попередньому розділі алгебра Гайзенберга, що залежить від елементу підалгебри Картана $K=\sum_{i=1}^{n}k_iX_{ii}$. Оператор Лакса моделі Діке у випадку $c_{\alpha_{ij}}=0$, $\alpha_{ij}\in\Delta_K$ має форму:

$$\hat{L}(u)=u\hat{L}^{(-2)}+\hat{L}^{(-1)}+\sum_{m=1}^{N}\frac{\hat{L}^{(m)}}{u-\nu_m},\;\text{ де }\hat{L}^{(-2)}=\sum_{i=1}^{n}k_iX_{ii},$$

$$\hat{L}^{(-1)} = \sum_{i=1}^{n} c_i X_{ii} + \sum_{i,j=1,i<j}^{n} \sqrt{(k_j - k_i)} \hat{b}_{ij}^{+} X_{ji} + \sum_{i,j=1,i<j}^{n} \sqrt{(k_j - k_i)} \hat{b}_{ij}^{-} X_{ij},$$

$$\hat{L}^{(m)} = \sum_{i,j=1}^{n} \hat{S}_{ij}^{(m)} X_{ji}.$$

Простір незвідного представлення алгебри операторів Лакса буде мати вигляд: $V = (\otimes_{i=1}^{N} V^{\lambda^{(i)}}) \otimes V^{\mathcal{H}_K}$ де $V^{\lambda^{(i)}}$ — простір незвідного представлення алгебри $gl(n)^{(m)}$ пронумерований старшими векторами $\lambda^{(m)} = (\lambda_1^{(m)}, ..., \lambda_n^{(m)})$:

$$\hat{S}_{ii}^{(m)} \mathbf{\Omega}_m = \lambda_i^{(m)} \mathbf{\Omega}_m, \quad \hat{S}_{kl}^{(m)} \mathbf{\Omega}_m = 0, \qquad i, k, l \in \overline{1, n}, \; k < l; m \in \overline{1, N}, \tag{7.4.27}$$

$V^{\mathcal{H}_K}$ — простір незвідного представлення $\mathcal{H}_K$ з вакуумним вектором $\mathbf{\Omega}_0$:

$$\hat{b}_{kl}^{+} \mathbf{\Omega}_0 = 0, \qquad k, l \in \overline{1, n}, \; k < l. \tag{7.4.28}$$

легко бачити, що вакуумний вектор для алгебри Лакса має вигляд:

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_0 \otimes \mathbf{\Omega}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{\Omega}_N.$$

Отже, можна застосовувати техніку ієрархічного анзацу Бете описаного у попередньому підрозділі до раціональної моделі ДКД. Будемо мати:

$$\Lambda_{ii}(u) = uk_i + c_i + \sum_{m=1}^{N} \frac{\lambda_i^{(m)}}{u - \nu_m}, \tag{7.4.29}$$

де $\hat{L}_{ii}(u)\mathbf{\Omega} = \Lambda_{ii}(u)\mathbf{\Omega}$. Підставляючи цей вираз в Теорему 7.5, отримуємо явну формулу спектру генеруючої функції квадратичних інтегралів у випадку раціональних моделей ДКД. Порахуємо явно спектр інтегралів $\hat{H}_0$, $\hat{H}_m$ і додаткових інтегралів $\hat{M}_{X_{ii}}$. Справедливий наступний Наслідок Теорем 7.5,7.6:

Наслідок 7.2. *Спектр інтегралів $\hat{H}_0$, $\hat{H}_m$ на ієрархічних векторах Бете має наступну явну форму:*

$$h_0(M_1,..,M_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{m=1}^{N} k_i\lambda_i^{(m)} - k_1M_1 + \sum_{i=2}^{n-1} k_i(M_{i-1}-M_i) + k_nM_{n-1} + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\big(c_i^2 - (n-2i+1)k_i\big),$$

$$h_m(\{v_i^{(1)}\},...,\{v_i^{(n-1)}\}) = \big(\sum_{i=1}^{n}(\nu_m k_i + c_i)\lambda_i^{(m)} + \sum_{l=1,l\neq m}^{N}\frac{\lambda_i^{(m)}\lambda_i^{(l)}}{\nu_m - \nu_l}\big) - \\ - \lambda_1^{(m)}\sum_{i=1}^{M_1}\frac{1}{\nu_m - v_i^{(1)}} + \sum_{k=2}^{n-1}\lambda_k^{(m)}\big(\sum_{i=1}^{M_{k-1}}\frac{1}{\nu_m - v_i^{(k-1)}} - \sum_{i=1}^{M_k}\frac{1}{\nu_m - v_i^{(k)}}\big) + \\ + \lambda_n^{(m)}\sum_{i=1}^{M_{n-1}}\frac{1}{\nu_m - v_i^{(n-1)}}$$

де бистроти $v_i^{(k)}$, $i \in \overline{1, M_k}$ *задовільняють наступні рівняння Бете:*

$$v_i^{(1)}(k_1-k_2)+(c_1-c_2)+\sum_{k=1}^{N}\frac{(\lambda_1^{(k)}-\lambda_2^{(k)})}{v_i^{(1)}-\nu_k} = \sum_{j=1;j\neq i}^{M_1}\frac{2}{(v_i^{(1)}-v_j^{(1)})} - \sum_{j=1}^{M_2}\frac{1}{(v_i^{(1)}-v_j^{(2)})},$$

$$v_i^{(m+1)}(k_{m+1}-k_{m+2}) + (c_{m+1}-c_{m+2}) + \sum_{k=1}^{N}\frac{(\lambda_{m+1}^{(k)}-\lambda_{m+2}^{(k)})}{v_i^{(m+1)}-\nu_k} = \\ = \sum_{j=1;j\neq i}^{M_{m+1}}\frac{2}{(v_i^{(m+1)}-v_j^{(m+1)})} - \sum_{j=1}^{M_m}\frac{1}{(v_i^{(m+1)}-v_j^{(m)})} - \sum_{j=1}^{M_{m+2}}\frac{1}{(v_i^{(m+1)}-v_j^{(m+2)})}, \\ m \in \overline{1, n-3},$$

$$v_i^{(n-1)}(k_{n-1}-k_n) + (c_{n-1}-c_n) + \sum_{k=1}^{N}\frac{(\lambda_{n-1}^{(k)}-\lambda_n^{(k)})}{v_i^{(n-1)}-\nu_k} = \\ = \sum_{j=1;j\neq i}^{M_{n-1}}\frac{2}{(v_i^{(n-1)}-v_j^{(n-1)})} - \sum_{j=1}^{M_{n-2}}\frac{1}{(v_i^{(n-1)}-v_j^{(n-2)})}.$$

Спектр інтегралів $\hat{M}_{X_{ii}}$, $i \in \overline{1, n}$ *на векторах Бете має вигляд:*

$$m_i(M_1,...,M_{n-1}) = \sum_{l=1}^{n}\lambda_{ii}^{(l)} + (M_{i-1}-M_i),\ \text{де } M_0 = M_n = 0. \quad (7.4.30)$$

Зауваження 77. Спектр узагальненого гамільтоніана ДКД записується наступним чином:

$$h'(\{v_i^{(1)}\},...,\{v_i^{(n-1)}\}) = \sum_{i=1}^{n} w_i m_i(M_1,...,M_{n-1}) + g\sum_{i=1}^{N} h_m(\{v_i^{(1)}\},...,\{v_i^{(n-1)}\}),$$

де $m_i(M_1,...,M_{n-1})$, $h_m(\{v_i^{(1)}\},...,\{v_i^{(n-1)}\})$ визначені вище.

7.5. Випадок алгебри $gl(n)$ і нестандартного ланцюжка підалгебр

В цьому підрозділі ми покажемо як узагальнити ієрархічний анзац Бете використовуючи редукцію проблеми діагоналізації генеруючої функції комутативних інтегралів на алгебрі $gl(n)$ до цієї ж проблеми на підалгебрі $gl(n_1)\oplus gl(n-n_1)$. Ця процедура дозволяє розв'язувати квантові інтегровні моделі асоційовані з r-матрицями несумісними зі стандартним ланцюжком вкладень: $gl(n)\supset gl(n-1)\supset ...\supset gl(1)$.

7.5.1. Редукція на підалгебру $gl(n_1)\oplus gl(n-n_1)$ Нехай V буде простором незвідного простору представлення алгебри операторів Лакса. Припустимо, що існує вакуумний вектор $\mathbf{\Omega}\in V$ такий, що:

$$\hat{L}_{ii}(u)\mathbf{\Omega} = \Lambda_{ii}(u)\mathbf{\Omega},\quad \hat{L}_{kl}(u)\mathbf{\Omega} = 0,\qquad i,k,l\in\overline{1,n},\ k>l \tag{7.5.31}$$

і весь простір V згенерований дією операторів $\hat{L}_{kl}(u)$, $k<l$ на вектор $\mathbf{\Omega}$. Для того щоб діагоналізувати генеруючу функцію $\hat{\tau}(u)$ і зконструйовати відповідний набір власних векторів, ми редукуємо цю проблему до аналогічної проблеми на підалгебрі $gl(n_1)\oplus gl(n-n_1)$.

Редукція проблеми на підалгебру Розглянемо підпростір $V_0\subset V$ що складається з векторів $\mathbf{v}$ таких, що:

$$\hat{L}_{lk}(u)\mathbf{v} = 0,\qquad k\le n_1,\ l>n_1,$$

де $n_1 \in \overline{1,n}$ – деяке ціле число. Використовуючи комутаційні співвідношення в алгебрі операторів Лакса, легко показати, що цей підпростір є інваріантним по відношенню до дії підалгебри алгебри операторів Лакса що приймає значення в підалгебрі $gl(n_1) \oplus gl(n - n_1)$.

Для того, щоб здійснити необхідну редукцію на підалгебру, ми введемо деякі позначення та здійснимо багато допоміжних обрахунків. А саме, нам необхідно модифікувати частини операторів Лакса, що належать $gl(n_1)$ та $gl(n - n_1)$, а саме підняти їх дію з початкових просторів у тензорний добуток початкових просторів на M копій n-вимірних фундаментальних представлень наступним чином:

$$\hat{A}^{(1)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n_1} \hat{L}_{ij}(u) X_{ij} - \sum_{k=1}^{M} \sum_{i,j=1}^{n_1} r_{ij}(v_k, u) X_{ji}^{(k)L} X_{ij}.$$

$$\hat{D}^{(1)}(u) = \sum_{i,j=n_1+1}^{n} \hat{L}_{ij}(u) X_{ij} + \sum_{k=1}^{M} \sum_{j=n_1+1}^{n} r_{ij}(v_k, u) X_{ji}^{(k)R} X_{ij},$$

де верхній індекс L означає ліву дію, а верхній індекс R – праву дію.

Нехай

$$\hat{\tau}^{(1)}_{n_1}(u) = \frac{1}{2} tr_{n_1} (\hat{A}^{(1)}(u))^2, \quad \hat{\tau}^{(1)}_{n-n_1}(u) = \frac{1}{2} tr_{n-n_1} (\hat{D}^{(1)}(u))^2.$$

Припустимо, що задовільняються наступні умови на r-матрицю:

$$r_{ji}(u,v) = r_{-,n_1}(u,v), \quad r_{ij}(u,v) = r_{+,n_1}(u,v), \qquad \forall i \in \overline{1,n_1},\ j \in \overline{n_1+1,n}. \tag{7.5.32}$$

Має місце наступна Теорема:

Теорема 7.7. *Нехай r-матриця $r(u,v)$ така що задовільняються умови (7.5.32). Нехай також*

$$r_{aa}(u,v) = r_{bb}(u,v), \forall a,b \in \overline{1,n_1} \ \text{та}\ r_{kk}(u,v) = r_{ll}(u,v), \forall k,l \in \overline{n_1+1,n} \tag{7.5.33}$$

або

$$\partial_v r_{aa}(u,v) = \partial_v r_{bb}(u,v), \qquad \forall a,b \in \overline{1,n_1},$$
$$\partial_v r_{kk}(u,v) = \partial_v r_{ll}(u,v), \qquad \forall k,l \in \overline{n_1+1,n}$$
$$\text{та виконується також умова} \qquad (r^0_{-,n_1}(u,u) + r^0_{+,n_1}(u,u)) = 0. \tag{7.5.34}$$

Нехай $v_{i_1\ldots i_M,j_1,\ldots j_M} \in V_0$, *де підпростір* V_0 *є підпростором означеним вище. Тоді, вектори наступного вигляду:*

$$\mathbf{v}(v_1,...,v_M) = \sum_{i_1,\ldots,i_M=1}^{n_1} \sum_{j_1,\ldots,j_M=n_1+1}^{n} \hat{L}_{i_1j_1}(v_1)...\hat{L}_{i_Mj_M}(v_M)v_{i_1\ldots i_M,j_1,\ldots j_M}$$

є власними значеннями оператора $\hat{\tau}_n(u)$ *якщо вектори*

$$\mathbf{V} = \sum_{i_1,\ldots,i_M=1}^{n_1} v_{i_1,\ldots i_M,j_1,\ldots,j_M} e^*_{i_1} \otimes ... \otimes e^*_{i_M} \otimes e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_M}$$

(тут e_i *це базисні вектори в просторі* $\mathbb{C}^n$ *— вектори стовпчики з одиницею на* i*– тому місці і нулями скрізь інше і* e^*_i *– дуальні базисні векторі в просторі* $\mathbb{C}^n$ *– вектор рядки з одиницею на місці* i *і нулями скрізь інше) є власними значеннями операторів* $\hat{\tau}^{(1)}_{n_1}(u)$ *і* $\hat{\tau}^{(1)}_{n-n_1}(u)$ *і мають місце наступні рівняння Бете:*

$$res_{u=v_i}(\hat{\tau}^{(1)}_{n_1}(u) + \hat{\tau}^{(1)}_{n-n_1}(u) - \frac{n}{2}\sum_{j=1}^{M} r_{-,n_1}(v_j,u) r_{+,n_1}(v_j,u) Id) = 0, \forall i \in \overline{1,M}. \tag{7.5.35}$$

Власні значення $\Lambda_n(u)$, $\Lambda^{(1)}_{n_1}(u)$, $\Lambda^{(1)}_{n-n_1}(u)$ *операторів* $\hat{\tau}_n(u)$ *і* $\hat{\tau}^{(1)}_{n_1}(u)$, $\hat{\tau}^{(1)}_{n-n_1}(u)$ *зв'язані наступним чином:*

$$\Lambda_n(u) = \Lambda^{(1)}_{n_1}(u) + \Lambda^{(1)}_{n-n_1}(u) - \frac{n}{2}\sum_{j=1}^{M} r_{-,n_1}(v_j,u) r_{+,n_1}(v_j,u) +$$
$$+ \frac{1}{2}\big(\partial_u + (r^0_{-,n_1}(u,u) + r^0_{+,n_1}(u,u))\big)\big((n-n_1)c_{n_1}(u) - n_1 c_{n-n_1}(u)\big),$$

де $c_{n_1}(u)$ *і* $c_{n-n_1}(u)$ *є спектром лінійних операторів Казиміра* $\hat{t}_{n_1}(u)$ *і* $\hat{t}_{n-n_1}(u)$ *підалгебр Лакса зі значеннями в підалгебрах* $gl(n_1)$ *і* $gl(n-n_1)$ *і зі старшими вагами* $(\Lambda_{11}(u),....,\Lambda_{n_1n_1}(u))$ *і* $(\Lambda_{n_1+1n_1+1}(u),....,\Lambda_{nn}(u))$ *відповідно.*

7.5.2. Діагоналізація квадратичної генеруючої функції. Для того, щоб діагоналізувати квадратичну генеруючу функцію комутативних квантових інтегралів, необхідно застосувати рекурсивно Теорему 7.7. З цією метою потрібно зафіксувати ланцюжок вкладених підалгебр, що вживається в рекурсії. Ми будемо використовувати наступний ланцюжок підалгебр: $gl(n)\supset gl(n-n_1)\supset gl(n-n_1-n_2)\supset gl(n-(n_1+...+n_{p-1}))$, де $n_1+n_2+...+n_p=n$, доповнений підлацюжками $gl(n_k)\supset gl(n_k-1)\supset ...\supset gl(1)$, $k\in\overline{1,p}$. Вибір ланцюжка вкладених підалгебр для рекурсії в ієрархічному анзаці Бете накладе деякі умови на відповідну класичну r-матрицю. Має місце наступна Теорема:

Теорема 7.8. *Нехай* r*-матриця* $r(u,v)$ *задовільняє умову (1.3.6) і наступні дві умови:*

$$r_{ji}(u,v)=r_{-,n_1+...+n_s}(u,v),\ \ r_{ij}(u,v)=r_{+,n_1+...+n_s}(u,v),$$
$$\forall i\in\overline{1+n_1+...+n_{s-1},n_1+...+n_s},\ j\in\overline{n_1+...+n_s+1,n},s\in\overline{1,p-1} \tag{7.5.36}$$

$$r_{ji}(u,v)=r_{-,i}(u,v),\ \ r_{ij}(u,v)=r_{+,i}(u,v),$$
$$\forall i\in\overline{1+n_1+...+n_{s-1},n_1+...+n_s-1},\forall j\in\overline{i+1,n_1+...+n_s},s\in\overline{1,p} \tag{7.5.37}$$

наряду з умовою:

$$r_{aa}(u,v)=r_{bb}(u,v),\forall a,b\in\overline{1,n_1}\ \text{і}\ r_{kk}(u,v)=r_{ll}(u,v),\forall k,l\in\overline{n_1+1,n} \tag{7.5.38}$$

тоді спектр генеруючої функції квадратичних квантових інтегралів дається наступною формулою:

$$
\begin{aligned}
\Lambda_n(u) = {} & \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n}\big(\Lambda_{kk}(u) + \sum_{j=1}^{M_{k-1}} r_{kk}(v_j^{(k-1)}, u) - \sum_{j=1}^{M_k} r_{kk}(v_j^{(k)}, u)\big)^2 + \\
& + \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n_k}\big(\partial_u + r^0_{-,l+n_1+\ldots+n_{k-1}}(u,u) + r^0_{+,l+n_1+\ldots+n_{k-1}}(u,u)\big)\times \\
& \times\Big((n_k-l)\Lambda_{l+n_1+\ldots+n_{k-1},l+n_1+\ldots+n_{k-1}}(u) - \sum_{i=l+1}^{n_k}\Lambda_{i+n_1+\ldots+n_{k-1},i+n_1+\ldots+n_{k-1}}(u) + (n_k-l)\times \\
& \times \sum_{j=1}^{M_{l+n_1+\ldots+n_{k-1}-1}} r_{l+n_1+\ldots+n_{k-1},l+n_1+\ldots+n_{k-1}}(v_j^{(l+n_1+\ldots+n_{k-1}-1)}, u)\Big) - \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n_k-1}(n_k-l+1)\times \\
& \times \sum_{j=1}^{M_{l+n_1+\ldots+n_{k-1}}} r_{-,l+n_1+\ldots+n_{k-1}}(v_j^{(l+n_1+\ldots+n_{k-1})}, u) r_{+,l+n_1+\ldots+n_{k-1}}(v_j^{(l+n_1+\ldots+n_{k-1})}, u) + \\
& + \sum_{k=1}^{p-1}(n_k-1)\big(\partial_u + r^0_{-,n_1+\ldots+n_k+1}(u,u) + r^0_{+,n_1+\ldots+n_k+1}(u,u)\big)\times \\
& \times \sum_{j=1}^{M_{n_1+\ldots+n_k}} r_{n_1+\ldots+n_k+1,n_1+\ldots+n_k+1}(v_j^{(n_1+\ldots+n_k)}, u) + \\
& + \sum_{k=1}^{p-1}\sum_{l=1}^{n_k-1}\big(\partial_u + r^0_{-,n_1+\ldots+n_{k-1}+l}(u,u) + r^0_{+,n_1+\ldots+n_{k-1}+l}(u,u)\big)\times \\
& \times \sum_{j=1}^{M_{n_1+\ldots+n_k}} r_{n_1+\ldots+n_k,n_1+\ldots+n_k}(v_j^{(n_1+\ldots+n_k)}, u) - \\
& - \sum_{k=1}^{p-1}(n-(n_1+\ldots+n_{k-1})) \sum_{j=1}^{M_{n_1+\ldots+n_k}} r_{-,n_1+\ldots+n_k}(v_j^{(n_1+\ldots+n_k)}, u) r_{+,n_1+\ldots+n_k}(v_j^{(n_1+\ldots+n_k)}, u) + \\
& + \sum_{k=2}^{p}(n-(n_1+\ldots+n_k))\big(\partial_u + r^0_{-,n_1+\ldots+n_k}(u,u) + r^0_{+,n_1+\ldots+n_k}(u,u)\big)\times \\
& \times \sum_{j=1}^{M_{n_1+\ldots+n_{k-1}}} r_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1,n_1+\ldots+n_{k-1}+1}(v_j^{(n_1+\ldots+n_{k-1})}, u) \\
& + \sum_{k=1}^{p}\big(\partial_u + r^0_{-,n_1+\ldots+n_{k-1}}(u,u) + r^0_{+,n_1+\ldots+n_{k-1}}(u,u)\big)\big((n-(n_1+..+n_k)\times \\
& \quad \times \sum_{l=1}^{n_k}\Lambda_{n_1+\ldots+n_k+l,n_1+\ldots+n_k+l}(u) - n_k \sum_{l=1}^{n-(n_1+\ldots+n_k)}\Lambda_{n_1+\ldots+n_k+l,n_1+\ldots+n_k+l}(u)\big),
\end{aligned}
\tag{7.5.39}
$$

де $M_0 = M_n = 0$, M_k, $k \in \overline{1, n-1}$ *— невід'ємні цілі числа,* $r_{-,n}(u,v) \equiv r_{+,n}(u,v) \equiv 0$ *і бистроти* $v_i^{(k)}$, $k \in \overline{1, n-1}$, $i \in \overline{1, M_k}$ *задовільняють наступним рівнянняя Бете:*

$$
\Lambda_{n_1+\ldots+n_k,n_1+\ldots+n_k}(v_i^{(n_1+\ldots+n_k)}) - \Lambda_{n_1+\ldots+n_k+1,n_1+\ldots+n_k+1}(v_i^{(n_1+\ldots+n_k)}) -
$$

$$
\begin{aligned}
&-(r^0_{n_1+...+n_k,n_1+...+n_k}(v_i^{(n_1+...+n_k)},v_i^{(n_1+...+n_k)})+r^0_{n_1+...+n_k+1,n_1+...+n_k+1}(v_i^{(n_1+...+n_k)},v_i^{(n_1+...+n_k)}))\\
&-\sum_{j=1;j\neq i}^{M_{n_1+...+n_k}}(r_{n_1+...+n_k,n_1+...+n_k}(v_j^{(n_1+...+n_k)},v_i^{(n_1+...+n_k)})+\\
&+r_{n_1+...+n_k+1,n_1+...+n_k+1}(v_j^{(n_1+...+n_k)},v_i^{(n_1+...+n_k)}))+\\
&+\sum_{j=1}^{M_{n_1+...+n_k-1}}r_{n_1+...+n_k,n_1+...+n_k}(v_j^{(n_1+...+n_k-1)},v_i^{(n_1+...+n_k)})+\\
&+\sum_{j=1}^{M_{n_1+...+n_k+1}}r_{n_1+...+n_k+1,n_1+...+n_k+1}(v_j^{(n_1+...+n_k+1)},v_i^{(n_1+...+n_k)}))\\
&+\frac{(n-(n_1+..+n_{k-1}))}{2}(r^0_{-,n_1+...+n_k}(v_i^{(n_1+...+n_k)},v_i^{(n_1+...+n_k)})+\\
&+r^0_{+,n_1+...+n_k}(v_i^{(n_1+...+n_k)},v_i^{(n_1+...+n_k)}))-\\
&-\frac{(n-(n_1+..+n_{k+1}))}{2}(r^0_{-,n_1+...+n_{k+1}}(v_i^{(n_1+...+n_k)},v_i^{(n_1+...+n_k)})+\\
&+r^0_{+,n_1+...+n_{k+1}}(v_i^{(n_1+...+n_k)},v_i^{(n_1+...+n_k)}))-\\
&-(n_k-1)(r^0_{-,n_1+...+n_k+1}(v_i^{(n_1+...+n_k)},v_i^{(n_1+...+n_k)})+r^0_{+,n_1+...+n_k+1}(v_i^{(n_1+...+n_k)},v_i^{(n_1+...+n_k)}))-\\
&-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n_k-1}(r^0_{-,n_1+...+n_k+l}(v_i^{(n_1+...+n_k)},v_i^{(n_1+...+n_k)})+r^0_{+,n_1+...+n_k+l}(v_i^{(n_1+...+n_k)},v_i^{(n_1+...+n_k)}))=0,
\end{aligned}
\tag{7.5.40}
$$

що відповідають ланцюжку

$$gl(n)\supset gl(n-n_1)\supset ...\supset gl(n-(n_1+...+n_{p-1}))$$

а також рівнянням Бете:

$$
\begin{aligned}
&\Lambda_{kk}(v_i^{(k)})-\Lambda_{k+1k+1}(v_i^{(k)})-(r^0_{kk}(v_i^{(k)},v_i^{(k)})+r^0_{k+1k+1}(v_i^{(k)},v_i^{(k)}))+\\
&+\frac{n_1+....+n_s-k+1}{2}(r^0_{-,k}(v_i^{(k)},v_i^{(k)})+r_{+,k}(v_i^{(k)},v_i^{(k)}))-\\
&-\frac{n_1+....+n_s-k-1}{2}(r^0_{-,k+1}(v_i^{(k)},v_i^{(k)})+r^0_{+,k+1}(v_i^{(k)},v_i^{(k)}))\\
&=\sum_{j=1;j\neq i}^{M_k}(r_{kk}(v_j^{(k)},v_i^{(k)})+r_{k+1k+1}(v_j^{(k)},v_i^{(k)}))-\sum_{j=1}^{M_{k-1}}r_{kk}(v_j^{(k-1)},v_i^{(k)})-\\
&\qquad-\sum_{j=1}^{M_{k+1}}r_{k+1k+1}(v_j^{(k+1)},v_i^{(k)})\Big),
\end{aligned}
\tag{7.5.41}
$$

$k\in\overline{n_1+....+n_{s-1}+1,n_1+....+n_s}$, *що відповідають підлацюжкам*

$$gl(n_s)\supset gl(n_s-1)\supset ...\supset gl(1),\qquad s\in\overline{1,p}.$$

Зауваження 78. Відзначимо, що нумерація верхніх індексів бистрот $v_j^{(k)}$ вибрана таким самими чином як нумерація верхніх індексів бистрот в анзаці Бете, що відповідає ланцюжку $gl(n) \supset gl(n-1) \supset ... \supset gl(1)$.

7.5.3. Випадок моделей типу Годена. Конкретизуємо отримані відповіді для спектру і рівнянь Бете для випадку узагальнених моделей Годена з та без зовнішнього магнітного поля. Іншими словами, порахуєм спектр відповідних гамільтоніанів. Для того щоб зробити це, необхідно специфікувати явну форму функцій $\Lambda_{ii}(u)$.

У випадку моделей типу Годена, алгебра Лакса співпадає з прямою сумою N алгебр $gl(n)$. Відповідний простір незвідного представлення алгебри $gl(n)^{\oplus N}$ має вигляд $V = (\otimes_{l=1}^{N} V^{\lambda^{(l)}})$, де $V^{\lambda^{(l)}}$ — простір незвідного представлення l– тої копії алгебри $gl(n)$ пронумерований старшими вагами $\lambda^{(l)} = (\lambda_1^{(l)}, ..., \lambda_n^{(l)})$, $l \in \overline{1, N}$. В просторі представлення V існує вектор $\mathbf{\Omega}$ такий що

$$\hat{S}_{ii}^{(l)}\mathbf{\Omega} = \lambda_i^{(l)}\mathbf{\Omega}, \quad \hat{S}_{ij}^{(l)}\mathbf{\Omega} = 0, \qquad i, j \in \overline{1, n}, \; i < j; l \in \overline{1, N}.$$

Використовуючи визначення оператора Лакса, легко бачити, що $\mathbf{\Omega}$ співпадає з вакуумним вектором для відповідного представлення алгебри Лакса. Має місце наступне Твердження (наслідок Теореми 7.8):

Твердження 7.3. *Нехай r-матриця $r(u, v)$ задовільняє умовам (1.3.6), (7.5.36), (7.5.37), (7.5.38). Тоді спектр узагальнених гамільтоніанів Годена у зовнішньому магнітному полі має вигляд:*

$$h_m = h_m^0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(m)} \Big(\sum_{j=1}^{M_{k-1}} r_{kk}(v_j^{(k-1)}, \nu_m) - \sum_{j=1}^{M_k} r_{kk}(v_j^{(k)}, \nu_m) \Big), \qquad (7.5.42)$$

де $M_0 = M_n = 0$ і h_l^0 — власне значення цих гамільтоніанів на вакуумному векторі $\mathbf{\Omega}$:

$$h_m^0 = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{s=1, s\neq l}^{N} r_{kk}(\nu_s, \nu_m) \lambda_k^{(s)} \lambda_k^{(m)} + r_{kk}^0(\nu_l, \nu_m)(\lambda_k^{(l)})^2 \Big) + \sum_{k=1}^{n} c_{kk}(\nu_m) \lambda_k^{(m)} +$$

$$+\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n_k}\big(r^0_{-,l+n_1+\ldots+n_{k-1}}(\nu_m,\nu_m)+r^0_{+,l+n_1+\ldots+n_{k-1}}(\nu_m,\nu_m)\big)\big((n_k-l)\lambda^{(m)}_{l+n_1+\ldots+n_{k-1}}$$
$$-\sum_{i=l+1}^{n_k}\lambda^{(m)}_{i+n_1+\ldots+n_{k-1}})+\sum_{k=1}^{p}\big(r^0_{-,n_1+\ldots+n_{k-1}}(\nu_m,\nu_m)+r^0_{+,n_1+\ldots+n_{k-1}}(\nu_m,\nu_m)\big)\times$$
$$\times\big((n-(n_1+..+n_k)\sum_{l=1}^{n_k}\lambda^{(m)}_{n_1+\ldots+n_k+l}-n_k\sum_{l=1}^{n-(n_1+\ldots+n_k)}\lambda^{(m)}_{n_1+\ldots+n_k+l}\big), \tag{7.5.43}$$

$c_{kk}(\nu_m)$ – *компоненти елементу зсуву – зовнішнього магнітного поля і бистроти* $v_k^{(i)}$, $k\in\overline{1,M_i}$, $i\in\overline{1,n-1}$ *задовільняють рівняння Бете (7.5.40), (7.5.41) з* $\Lambda_{kk}(u)=\sum\limits_{m=1}^{N}\lambda_k^{(m)}r_{kk}(\nu_m,u)+c_{kk}(u)$.

7.6. Приклад: випадок Z_p–градуйованих r-матриць.

7.6.1. Z_p **– градуйовані класичні** r**-матриці.** Нехай $\mathfrak{g}$ — напівпроста або редуктивна алгебра Лі. Нехай $\mathfrak{g}=\sum\limits_{j=0}^{p-1}\mathfrak{g}_{\bar{j}}$ – $Z_p=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ – градуювання алгебри $\mathfrak{g}$, тобто: $[\mathfrak{g}_{\bar{i}},\mathfrak{g}_{\bar{j}}]\subset\mathfrak{g}_{\overline{i+j}}$, де $\bar{j}$ означає клас еквівалентності $j\in\mathbb{Z}$ mod p $\mathbb{Z}$. Відомо що $\mathbb{Z}_p$ – градуювання алгебри $\mathfrak{g}$ може бути визначено за допомогою деякого автоморфізму σ порядку p, такого що $\sigma(\mathfrak{g}_{\bar{i}})=e^{2\pi ik/p}\mathfrak{g}_{\bar{i}}$ і $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ – алгебра σ-інваріантів: $\sigma(\mathfrak{g}_{\bar{0}})=\mathfrak{g}_{\bar{0}}$. Використовуючи ці данні можна визначити наступну класичну r-матрицю (див. Главу 2):

$$r^{\sigma}(u_1,u_2)=\frac{\sum\limits_{j=0}^{p-1}u_1^ju_2^{p-j}\Omega_{12}^{(\bar{j})}}{(u_1^p-u_2^p)}, \tag{7.6.44}$$

де $X_{\alpha,\bar{j}}$ – базис простору $\mathfrak{g}_{\bar{j}}$, $X^{\alpha,\overline{-j}}$ – дуальний базис простору $\mathfrak{g}_{\overline{-j}}$ і $\Omega_{12}^{(\bar{j})}=\sum\limits_{\alpha=1}^{\dim\mathfrak{g}_{\bar{j}}}g_{\bar{j}}^{\alpha\beta}X_{\alpha,\bar{j}}\otimes X_{\beta,\overline{-j}}$ — оператор проекції на підпростір $\mathfrak{g}_{\bar{j}}$, $g_{\bar{j}}^{\alpha\beta}\equiv(X^{\alpha,\overline{-j}},X^{\beta,\bar{j}})$. Зокрема, $\Omega^{(\bar{0})}$ — тензорний Казимір підалгебри $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$.

7.6.2. Випадок алгебри $gl(n)$. Повернемось до алгебри $\mathfrak{g} = gl(n)$ і розглянемо її Z_p- градуювання що відповідає розкладу $n = n_1 + n_2 + ... + n_p$ такому що градуйовані підпростори складаються з блочних матриць. Зокрема, $\mathfrak{g}_{\overline{0}} = \mathrm{diag}(G_{11}, G_{22}, ..., G_{pp})$ де $G_{ii} \in gl(n_i)$ etc. Це градуювання відповідає внутрішньому автоморфізму $\sigma = Ad_g$, де g — діагональна матриця $g = \mathrm{diag}(g_1, g_2, ..., g_n)$, причому $g_1 = ... = g_{n_1} = 1$, $g_{n_1+1} = ... = g_{n_1+n_2} = \epsilon$, $g_{n_1+n_2+1} = ... = g_{n_1+n_2+n_3} = \epsilon^2$, $\cdots$, $g_{n_1+...+n_{p-1}+1} = ... = g_n = \epsilon^{p-1}$, $\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{p}}$. Відповідна r-матриця записана у формі (7.6.44) для $p > 2$ не задовільняє умови анзацу Бете (7.5.36), (7.5.37) ні для якого ланцюжка вкладених підалгебр. Для того щоб задовольнити умови (7.5.36), (7.5.37) необхідно здійснити перетворення еквівалентності. Результуюча r-матриця дається наступним Твердженням:

Твердження 7.4. *Нехай $\mathfrak{g} = gl(n)$ і Z_p- градуювання визначене як вище. Тоді перетворення еквівалентності r-матриця (7.6.44) приводиться до наступного вигляду:*

$$r^{12}(u, v) = \frac{\Omega^{12}}{u - v} + \frac{C^{12}}{v}, \tag{7.6.45}$$

де $\Omega^{12} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} X_{ij} \otimes X_{ji}$ і тензор C^{12} визначений наступним чином:

$$C^{12} = \sum_{s=1}^{p-1} \sum_{i=1+n_1+...+n_{s-1}}^{n_1+n_2+...+n_s} \sum_{j=n_1+n_2+...+n_s+1}^{n} X_{ij} \otimes X_{ji}. \tag{7.6.46}$$

Зауваження 79. Відзначимо що розглядувана r-матриця задовольняє умові регулярності (1.3.6) з:

$$r^0(u, v) = \frac{C^{12}}{v}.$$

Відзначимо також що ця r-матриця діагональна в кореневому базисі.

Приклад 7.1. У випадку $p = 2$ r-матриця (7.6.44) має вигляд:

$$r^{12}(u_1, u_2) = \frac{u_2^2}{u_1^2 - u_2^2}(\sum_{i,j=1}^{n_1} X_{ij} \otimes X_{ji} + \sum_{i,j=n_1+1}^{n} X_{ij} \otimes X_{ji})+$$

$$+\frac{u_1u_2}{u_1^2-u_2^2}\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=n_1+1}^{n}(X_{ij}\otimes X_{ji}+X_{ji}\otimes X_{ij}). \quad (7.6.47)$$

Після калібрувального перетворення, репараметризації і ділення на u_2^2 відповідна r-матриця записується наступним чином:

$$r^{12}(u_1,u_2)=\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n}X_{ij}\otimes X_{ji}}{u_1-u_2}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}\sum\limits_{j=n_1+1}^{n}X_{ij}\otimes X_{ji}}{u_2}. \quad (7.6.48)$$

Визначимо діагональний елемент зсуву для r-матриці (7.6.45).

Твердження 7.5. *Загальний діагональний елемент зсуву для r-матриці (7.6.45) має вигляд:*

$$c(u)=\frac{1}{u}\mathrm{diag}(c_1,...,c_n),\ \text{де}$$

$$c_1=c_2=...=c_{n_1},c_{n_1+1}=...=c_{n_1+n_2},...,c_{n_1+...+n_{p-1}+1}=...=c_{n_1+n_2+...+n_p}.$$

Приклад 7.2. В найпростішому нетривіальному $p=2$ випадку діагональний елемент зсуву має вигляд:

$$c(u)=\frac{1}{u}(c_{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_{ii}+c_{n_1+n_2}\sum_{i=n_1+1}^{n}X_{ii}).$$

7.6.3. Z_p- градуйовані r-матриці і узагальнені моделі Годена. Для Z_p – градуйованої r-матриці (7.6.44), що відповідає випадку $\mathfrak{g}=gl(n)$ вказаному Z_p – градуйованню (7.6.45), оператор Лакса типу Годена записується наступним чином:

$$\hat{L}(u)=\sum_{m=1}^{N}(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\hat{S}_{ij}^{(m)}X_{ji}}{\nu_m-u}+\frac{1}{u}\sum_{s=1}^{p-1}\sum_{i=1+n_1+...+n_{s-1}}^{n_1+n_2+...+n_s}\sum_{j=1+n_1+...+n_s}^{n}\hat{S}_{ij}^{(m)}X_{ji}). \quad (7.6.49)$$

Оператор Лакса типу Годена у зовнішньому магнітному полі має вигляд:

$$\hat{L}^c(u)=\hat{L}(u)+\frac{1}{u}\sum_{k=1}^{p}c_{n_1+...+n_k}\sum_{i=1+n_1+...+n_{k-1}}^{n_1+...+n_k}X_{ii}. \quad (7.6.50)$$

Відповідні гамільтоніани типу Годена і гамільтоніани типу Годена у зовнішньому магнітному полі мають наступний вигляд:

$$\hat{H}_{\nu_l} = \sum_{m=1,m\neq l}^{N} (\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\hat{S}_{ij}^{(m)}\hat{S}_{ji}^{(l)}}{\nu_m - \nu_l} + \frac{1}{\nu_l}\sum_{s=1}^{p-1} \sum_{i=1+n_1+\ldots+n_{s-1}}^{n_1+n_2+\ldots+n_s} \sum_{j=1+n_1+\ldots+n_s}^{n} \hat{S}_{ij}^{(m)}\hat{S}_{ji}^{(l)}) + \\ + \frac{1}{2\nu_l}\sum_{s=1}^{p-1} \sum_{i=1+n_1+\ldots+n_{s-1}}^{n_1+n_2+\ldots+n_s} \sum_{j=1+n_1+\ldots+n_s}^{n} (\hat{S}_{ij}^{(l)}\hat{S}_{ji}^{(l)} + \hat{S}_{ji}^{(l)}\hat{S}_{ij}^{(l)}), \quad (7.6.51)$$

$$\hat{H}^c_{\nu_l} = \hat{H}_{\nu_l} + \frac{1}{\nu_l}\sum_{k=1}^{p} c_{n_1+\ldots+n_k} \sum_{i=1+n_1+\ldots+n_{k-1}}^{n_1+\ldots+n_k} \hat{S}_{ii}^{(l)}. \quad (7.6.52)$$

В наступному підрозділі ми розглянемо діагоналізацію цих гамільтоніанів методом узагальненого ієрархічного анзацу Бете згідно до нової ієрархічної схеми описаної в попередніх підрозділах. Але спершу приведемо небанальний $p = 2$ приклад.

Приклад 7.3. У випадку $p = 2$ оператор Лакса типу Годена (7.6.50) у зовнішньому магнітному полі має вигляд:

$$\hat{L}^c(u) = \sum_{m=1}^{N} (\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\hat{S}_{ij}^{(m)} X_{ji}}{\nu_m - u} + \frac{1}{u}\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=n_1+1}^{n} \hat{S}_{ij}^{(m)} X_{ji}) + \\ + \frac{1}{u}(c_{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{ii} + c_{n_1+n_2}\sum_{i=n_1+1}^{n} X_{ii}).$$

Відповідні гамільтоніани типу Годена у зовнішньому магнітному полі записуються наступним чином:

$$\hat{H}^c_{\nu_l} = \sum_{m=1,m\neq l}^{N} (\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\hat{S}_{ij}^{(m)}\hat{S}_{ji}^{(l)}}{\nu_m - \nu_l} + \frac{1}{\nu_l}\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=n_1+1}^{n} \hat{S}_{ij}^{(m)}\hat{S}_{ji}^{(l)}) + \\ + \frac{1}{2\nu_l}\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=n_1+1}^{n} (\hat{S}_{ij}^{(l)}\hat{S}_{ji}^{(l)} + \hat{S}_{ji}^{(l)}\hat{S}_{ij}^{(l)}) + \frac{1}{\nu_l}(c_{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\hat{S}_{ii}^{(l)} + c_{n_1+n_2}\sum_{i=n_1+1}^{n}\hat{S}_{ii}^{(l)}).$$

Оператор Лакса і гамільтоніани типу Годена отримаються покладанням $c_{n_1} = c_{n_1+n_2} = 0$ у наведених вище формулах.

7.6.4. Ієрархічний анзац Бете для Z_p-градуйованих r-матриць. Перейдемо до розгляду ієрархічного анзацу Бете. Для початку відзначимо, що розглядувані r-матриці в калібровці (7.6.45) задовільняють умовам (7.5.36), (7.5.37) для ланцюжка вкладених підалгебр вигляду $gl(n) \supset gl(n-n_1) \supset gl(n-n_1-n_2) \supset gl(n-(n_1+...+n_{p-1}))$, де $n_1+n_2+...+n_p = n$. Дійсно, ми маємо що

$$r_{ji}(u,v) = \frac{1}{u-v} + \frac{1}{v},$$
$$\forall i \in \overline{1+...+n_{s-1}, n_1+...+n_s},\ j \in \overline{n_1+...+n_s+1, n},\ s \in \overline{1, p-1}, \tag{7.6.53}$$

$$r_{ji}(u,v) = \frac{1}{u-v}, \text{ для всіх інших індеків } i, j, \tag{7.6.54}$$

тому умови (7.5.36) і (7.5.37) задовольняються. Детальніше, ми маємо що:

$$r_{-,n_1+...+n_s}(u,v) = \frac{1}{u-v} + \frac{1}{v},\ r_{+,n_1+...+n_s}(u,v) = \frac{1}{u-v},\ \forall s \in \overline{1, p-1},$$
$$r_{-,i}(u,v) = r_{+,i}(u,v) = \frac{1}{u-v}.$$

Більше того, замість умови (7.5.38), має місце наступна сильніша умова:

$$r_{ii}(u,v) = \frac{1}{u-v},\ i \in \overline{1,n}. \tag{7.6.55}$$

Для застосовності анзацу Бете необхідно гарантувати існування вакуумного вектора в просторі представлень, але, як вказувалось вище, для моделей типу Годена, ця умова виконується автоматично. Отже, необхідно лише специфікувати Твердження 7.3 для r-матриці (7.6.45).

Має місце наступний наслідок Твердження 7.3:

Наслідок 7.3. *Спектр узагальнених гамільтоніанів Годена (7.6.51) і узагальнених гамільтоніанів Годена у зовнішньому магнітному полі (7.6.52) в просторі незвідного представлення алгебри $gl(n)^{\oplus N}$ що нумерується старшою вагою $\lambda^{(l)} = (\lambda_1^{(l)}, ..., \lambda_n^{(l)})$, $l \in \overline{1,N}$ має вигляд:*

$$h_l = h_l^0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(l)} \Big(\sum_{j=1}^{M_{k-1}} \frac{1}{(v_j^{(k-1)} - \nu_l)} - \sum_{j=1}^{M_k} \frac{1}{(v_j^{(k)} - \nu_l)} \Big), \tag{7.6.56}$$

де h_l^0 – власне значення цього гамільтоніану на вакуумному векторі $\mathbf{\Omega}$:

$$h_l^0=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1,s\neq l}^{N}\frac{\lambda_k^{(s)}\lambda_k^{(l)}}{\nu_s-\nu_l}+\frac{1}{\nu_l}\sum_{k=1}^{p}c_{n_1+\ldots+n_k}\sum_{i=n_1+\ldots+n_{k-1}+1}^{n_1+\ldots+n_k}\lambda_i^{(l)}+$$
$$+\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\nu_l}\big((n-(n_1+..+n_k)\sum_{m=1}^{n_k}\lambda^{(l)}_{n_1+\ldots+n_k+m}-n_k\sum_{m=1}^{n-(n_1+\ldots+n_k)}\lambda^{(l)}_{n_1+\ldots+n_k+m}\big),\tag{7.6.57}$$

і $c_{n_1+\ldots+n_k}$ — компоненти елементу зсуву, а бистороти $v_k^{(i)}$, $k\in\overline{1,M_i}$, $i\in\overline{1,n-1}$ задовільняють наступним рівнянням Бете:

$$\sum_{m=1}^{N}\frac{\lambda^{(m)}_{n_1+\ldots+n_k}-\lambda^{(m)}_{n_1+\ldots+n_k+1}}{(\nu_m-v_i^{(n_1+\ldots+n_k)})}+\frac{c_{n_1+\ldots+n_k}-c_{n_1+\ldots+n_{k+1}}}{v_i^{(n_1+\ldots+n_k)}}+\frac{(n_k+n_{k+1})}{2}\frac{1}{v_i^{(n_1+\ldots+n_k)}}$$
$$=\sum_{j=1;j\neq i}^{M_{n_1+\ldots+n_k}}\frac{2}{(v_j^{(n_1+\ldots+n_k)}-v_i^{(n_1+\ldots+n_k)})}-\sum_{j=1}^{M_{n_1+\ldots+n_k-1}}\frac{1}{(v_j^{(n_1+\ldots+n_k-1)}-v_i^{(n_1+\ldots+n_k)})}$$
$$\sum_{j=1}^{M_{n_1+\ldots+n_k+1}}\frac{1}{(v_j^{(n_1+\ldots+n_k+1)}-v_i^{(n_1+\ldots+n_k)})},\tag{7.6.58a}$$

$k\in\overline{1,p-1}$, що відповідають ланцюжку

$$gl(n)\supset gl(n-n_1)\supset gl(n-n_1-n_2)\supset gl(n-(n_1+\ldots+n_{p-1})),$$

$n_1+n_2+\ldots+n_p=n$ і наступним рівнянням Бете:

$$\sum_{m=1}^{N}\frac{\lambda_k^{(m)}-\lambda_{k+1}^{(m)}}{(\nu_m-v_i^{(k)})}=\sum_{j=1;j\neq i}^{M_k}\frac{2}{v_j^{(k)}-v_i^{(k)}}-\sum_{j=1}^{M_{k-1}}\frac{1}{(v_j^{(k-1)}-v_i^{(k)})}-\sum_{j=1}^{M_{k+1}}\frac{1}{(v_j^{(k+1)}-v_i^{(k)})}\tag{7.6.59}$$

$k\in\overline{n_1+\ldots.+n_{s-1}+1,n_1+\ldots.+n_s-1}$ що відповідають ланцюжку:

$$gl(n_s)\supset gl(n_s-1)\supset\ldots\supset gl(1),\ s\in\overline{1,p}.$$

Зауваження 80. Відзначимо, що у випадку систем Годена без зовнішнього магнітного поля необхідно покласти $c_{n_1+\ldots+n_k}=0$, $k\in\overline{1,p}$ у всіх отриманих вище формулах.

Зауваження 81. Відзначимо, що спектр (7.6.57) гамільтоніанів типу Годена для розглянутих r-матриць має той самий вигляд що і для випадку раціональних r-матриць, але бистроти $v_i^{(k)}$ задовольняють іншому набору рівнянь Бете, а саме: рівняння Бете, що відповідають підланцюку $gl(n) \supset gl(n-n_1) \supset gl(n-n_1-n_2) \supset gl(n-(n_1+...+n_{p-1}))$, є відмінними від рівнянь Бете, що отримуються у випадку раціональної r-матриці.

Приклад 7.4. В найпростішому небанальному випадку $p = 2$ єдина група рівнянь Бете, що відрізняється від відповідних рівнянь у випадку раціональної r-матриці, є наступною:

$$\sum_{m=1}^{N} \frac{\lambda_{n_1}^{(m)} - \lambda_{n_1+1}^{(m)}}{(\nu_m - v_i^{(n_1)})} + \frac{c_{n_1} - c_{n_1+n_2}}{v_i^{(n_1)}} + \frac{n}{2}\frac{1}{v_i^{(n_1)}} = \sum_{j=1;j\neq i}^{M_{n_1}} \frac{2}{(v_j^{(n_1)} - v_i^{(n_1)})} - \\ - \sum_{j=1}^{M_{n_1-1}} \frac{1}{(v_j^{(n_1-1)} - v_i^{(n_1)})} - \sum_{j=1}^{M_{n_1+1}} \frac{1}{(v_j^{(n_1+1)} - v_i^{(n_1)})}.$$

Зауважимо також, що випадок $p = 2$, може розглядатись в рамках нашої схеми безпосередньо, не застостовуючи калібровальне перетворення до r-матриці (7.6.47). Відзначимо, що еквівалентні рівняння Бете отримуються у випадку $p = 2$ використовувуючи аналітичний анзац Бете [103].

7.7. Z_2-градуйований випадок

В цьому підрозділі ми діагоналізуємо генеруючу функцію квантових гамільтоніанів узагальнених Z_2 – градуйованих моделей ДКД і БХ. Ми почнемо з більш загальної ситуації.

7.7.1. Загальний випадок. Нехай V – простір незвідного представлення алгебри операторів Лакса. Припустимо, що існує вакуумний вектор $\mathbf{\Omega} \in V$ такий, що:

$$\hat{L}_{ii}(u)\mathbf{\Omega} = \Lambda_{ii}(u)\mathbf{\Omega}, \quad \hat{L}_{kl}(u)\mathbf{\Omega} = 0, \quad i,k,l \in \overline{1,n}, \; k > l \tag{7.7.60}$$

і весь простір V генерований дією генераторів $\hat{L}_{kl}(u)$, $k<l$ на вектор $\mathbf{\Omega}$.

Має місце наступний наслідок загальної Теореми 7.8:

Теорема 7.9. *Нехай r-матриця $r(u,v)$ задана формулою (6.8.47). Тоді*

(i) власні значення генеруючої функції $\hat{\tau}_n(u)$ мають вигляд:

$$\Lambda_n(u,\{v_j^{(k)}\}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{ii}^2(u) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)(u^2\partial_{u^2}-1)\Lambda_{ii}(u)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\Lambda_{kk}(u)(\sum_{i=1}^{M_{k-1}}\frac{u^2}{(v_i^{(k-1)})^2-u^2} - \sum_{i=1}^{M_k}\frac{u^2}{(v_i^{(k)})^2-u^2})+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{M_k}\frac{u^4}{((v_i^{(k)})^2-u^2)((v_j^{(k)})^2-u^2)}-$$
$$-\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{M_k}\sum_{j=1}^{M_{k+1}}\frac{u^4}{((v_i^{(k)})^2-u^2)((v_j^{(k+1)})^2-u^2)}-$$
$$-\frac{n}{2}\sum_{j=1}^{M_{n_1}}\frac{u^2}{(v_i^{(n_1)})^2-u^2} + \frac{1}{2}\big((n-n_1)\sum_{i=1}^{n_1}\Lambda_{ii}(u) - n_1\sum_{i=n_1+1}^{n}\Lambda_{ii}(u)\big), \tag{7.7.61}$$

де $M_0=M_n=0$, M_k, $k\in\overline{1,n-1}$ – невід'ємні цілі числа і бистроти $v_i^{(k)}$, $k\in\overline{1,n-1}$, $i\in\overline{1,M_k}$ задовільняють наступні рівняння Бете:

$$\Lambda_{kk}(v_i^{(k)}) - \Lambda_{k+1k+1}(v_i^{(k)}) + \frac{n}{2}\delta_{kn_1} = \sum_{j=1;j\neq i}^{M_k}\frac{2(v_i^{(k)})^2}{(v_j^{(k)})^2-(v_i^{(k)})^2}-$$
$$-\sum_{j=1}^{M_{k-1}}\frac{(v_i^{(k)})^2}{(v_j^{(k-1)})^2-(v_i^{(k)})^2} - \sum_{j=1}^{M_{k+1}}\frac{(v_i^{(k)})^2}{(v_j^{(k+1)})^2-(v_i^{(k)})^2},\ k\in\overline{1,n-1}, \tag{7.7.62}$$

Власні значення додаткових лінійних інтегралів $\hat{M}_{ii}$, $i\in\overline{1,n}$, що відповідають Картан-симетрії r-матриці записуються наступним чином:

$$m_i(M_1,...,M_{n-1}) = m_{ii} + M_{i-1} - M_i,$$

де m_{ii} – власне значення $\hat{M}_{ii}$ на вакуумному векторі $\mathbf{\Omega}$:

$$\hat{M}_{ii}\mathbf{\Omega} = m_{ii}\mathbf{\Omega}.$$

7.7.2. Спектр Z_2 – градуйованих моделей типу ДКД. Як було показано в попередньому розділі, з даною r-матрицею (6.8.47) можна асоціювати два типу моделей типу ДКД. Нижче ми обчислимо їх спектр.

Випадок 1 Застосуємо отримані вище результати до першої моделі типу ДКД. З цією метою ми конкретизуємо форму власних значень $\Lambda_{ii}(u)$, $i \in \overline{1,n}$ і простору представлення V. Він співпаде в розглянутому випадку з тензорним добутком простору $V = (\otimes_{l=1}^{N} V^{\lambda^{(l)}})$, де $V^{\lambda^{(l)}}$ – простір незвідного представлення алгебри $gl(n)$ пронумерований старшою вагою $\lambda^{(l)} = (\lambda_1^{(l)}, ..., \lambda_n^{(l)})$, $l \in \overline{1,N}$ і бозонного простора Фока $\mathcal{H}_B$. Вектор старшої ваги має вигляд $\mathbf{\Omega}_{SB} = \mathbf{\Omega}_S \otimes \mathbf{\Omega}_B$, де

$$\hat{S}_{ii}^{(l)}\mathbf{\Omega}_S = \lambda_i^{(l)}\mathbf{\Omega}_S, \quad \hat{S}_{ij}^{(l)}\mathbf{\Omega}_S = 0, \quad i,j \in \overline{1,n}, \quad i < j; l \in \overline{1,N}.$$

і $\mathbf{\Omega}_B$ вакуумний вектор бозонів типу B.

Використовуючи визначення оператору Лакса, легко бачити, що $\mathbf{\Omega}_{AB}$ співпадає з вакуумним вектором для відповідного представлення алгебри Лакса, а функції $\Lambda_{ii}(u)$ для цього типу моделей ДКД мають вигляд:

$$\Lambda_{ii}(u) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{l=1}^{N}\lambda_i^{(l)}\frac{u^2}{\nu_l^2 - u^2} + c_i + k_i u^2\Big),$$

де $k_i = k_1$ якщо $i \in \overline{1,n_1}$, $k_i = k_n$ якщо $i \in \overline{n_1+1,n}$, $c_i = c_1$ якщо $i \in \overline{1,n_1}$.

Застосовуючи тепер Теорему 7.9, ми отримуємо, що спектр геометричних інтегралів $\hat{M}_{ii}^{S,B}$, $i \in \overline{1,n}$ має вигляд:

$$m_i^{SB}(M_1, ..., M_{n-1}) = \sum_{m=1}^{N}\lambda_i^{(m)} + M_{i-1} - M_i$$

а спектр інтегралів $\hat{H}_{\nu_l}^{SB}$ дається формулою:

$$h_l^{SB} = h_l^{SB,0} + \nu_l^2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{M_i}\frac{(\lambda_i^{(l)} - \lambda_{i+1}^{(l)})}{(\nu_l^2 - (v_k^{(i)})^2)},$$

де h_l^0 – власне значення на вакуумному векторі:

$$h_l^{SB,0} = \nu_l^2 \sum_{k=1,k\neq l}^{N} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^{(k)} \lambda_i^{(l)}}{(\nu_k^2 - \nu_l^2)} - \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^{(l)})^2 - \sum_{i=1}^{n} (n-2i+1)\lambda_i^{(l)} +$$

$$+ (c_1 + k_1 \nu_l^2 + \frac{1}{2}(n-n_1)) \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i^{(l)} + (c_n + k_n \nu_l^2 - \frac{1}{2} n_1) \sum_{i=1}^{n-n_1} \lambda_{i+n_1}^{(l)}$$

і бистроти $v_i^{(k)}$, $i \in \overline{1, M_k}$, $k \in \overline{1, n-1}$ задовільняють рівнянням Бете:

$$\sum_{l=1}^{N} \frac{(\lambda_k^{(l)} - \lambda_{k+1}^{(l)})(v_i^{(k)})^2}{\nu_l^2 - (v_i^{(k)})^2} + \big((c_1 - c_n + \frac{n}{2}) + (k_1 - k_n)(v_i^{(k)})^2\big)\delta_{kn_1} =$$

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_k} \frac{2(v_i^{(k)})^2}{(v_j^{(k)})^2 - (v_i^{(k)})^2} - \sum_{j=1}^{M_{k-1}} \frac{(v_i^{(k)})^2}{(v_j^{(k-1)})^2 - (v_i^{(k)})^2} - \sum_{j=1}^{M_{k+1}} \frac{(v_i^{(k)})^2}{(v_j^{(k+1)})^2 - (v_i^{(k)})^2}, \tag{7.7.63}$$

Спектр узагальненого гамільтоніана ДКД $\hat{H}^{S,B}$ дається формулою:

$$h^{S,B} = \sum_{i=1}^{n} w_i m_i^{S,B} + \sum_{l=1}^{N} h_l^{S,B}.$$

Випадок 2. Застосуємо отримані вище результати до другої моделі типу ДКД. З цією метою ми конкретизуємо форму власних значень $\Lambda_{ii}(u)$, $i \in \overline{1,n}$ і простору представлення V. Він співпаде в розглянутому випадку з тензорним добутком простору $(\otimes_{l=1}^{N} V^{\lambda^{(l)}})$, де $V^{\lambda^{(l)}}$ – простір незвідного представлення алгебри $gl(n)$ пронумерований старшою вагою $\lambda^{(l)} = (\lambda_1^{(l)}, ..., \lambda_n^{(l)})$, $l \in \overline{1,N}$ і бозонного простора Фока $\mathcal{H}_A$. Вектор старшої ваги має вигляд $\mathbf{\Omega}_{SA} = \mathbf{\Omega}_S \otimes \mathbf{\Omega}_A$, де $\mathbf{\Omega}_S$ визначене як вище і $\mathbf{\Omega}_A$ вакуумний вектор бозонів типу A. Використовуючи визначення оператору Лакса, легко бачити, що $\mathbf{\Omega}_{SA}$ співпадає з вакуумним вектором для відповідного представлення алгебри Лакса, а функції $\Lambda_{ii}(u)$, $i \in \overline{1,n}$ для цього типу моделей ДКД мають вигляд:

$$\Lambda_{ii}(u) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{l=1}^{N} \lambda_i^{(l)} \frac{u^2}{\nu_l^2 - u^2} + c_i - k_i' u^{-2} \Big).$$

де $k'_i = k'_1$ якщо $i \in \overline{1, n_1}$, $k'_i = k'_n$ якщо $i \in \overline{n_1+1, n}$, $c_i = c_1$ якщо $i \in \overline{1, n_1}$, $c_i = c_n$ якщо $i \in \overline{n_1+1, n}$.

Застосовуючи тепер Теорему 7.9, ми отримуємо, що спектр геометричних інтегралів $\hat{M}_{ii}^{S,A}$, $i \in \overline{1, n}$ має вигляд:

$$m_i^{SA}(M_1, ..., M_{n-1}) = \sum_{m=1}^{N} \lambda_i^{(m)} + M_{i-1} - M_i \tag{7.7.64}$$

а спектр інтегралів $\hat{H}_{\nu_l}^{SA}$ дається формулою:

$$h_l^{SA} = h_l^{SA,0} + \nu_l^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{M_i} \frac{(\lambda_i^{(l)} - \lambda_{i+1}^{(l)})}{(\nu_l^2 - (v_k^{(i)})^2)},$$

де h_l^0 – власне значення на вакуумному векторі:

$$h_l^{SA,0} = \nu_l^2 \sum_{k=1, k\neq l}^{N} \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(k)} \lambda_i^{(l)}}{(\nu_k^2 - \nu_l^2)} - \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^{(l)})^2 - \sum_{i=1}^{n} (n - 2i + 1)\lambda_i^{(l)} +$$
$$+ (c_1 - k'_1 \nu_l^{-2} + \frac{1}{2}(n - n_1)) \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i^{(l)} + (c_n - k'_n \nu_l^{-2} - \frac{1}{2} n_1) \sum_{i=1}^{n-n_1} \lambda_{i+n_1}^{(l)}$$

і бистроти $v_i^{(k)}$, $i \in \overline{1, M_k}$, $k \in \overline{1, n-1}$ задовільняють рівнянням Бете:

$$\sum_{l=1}^{N} \frac{(\lambda_k^{(l)} - \lambda_{k+1}^{(l)})(v_i^{(k)})^2}{\nu_l^2 - (v_i^{(k)})^2} + \big((c_1 - c_n) - (k'_1 - k'_n)(v_i^{(k)})^{-2} + \frac{n}{2}\big)\delta_{kn_1} =$$
$$= \sum_{j=1; j\neq i}^{M_k} \frac{2(v_i^{(k)})^2}{(v_j^{(k)})^2 - (v_i^{(k)})^2} - \sum_{j=1}^{M_{k-1}} \frac{(v_i^{(k)})^2}{(v_j^{(k-1)})^2 - (v_i^{(k)})^2} - \sum_{j=1}^{M_{k+1}} \frac{(v_i^{(k)})^2}{(v_j^{(k+1)})^2 - (v_i^{(k)})^2}. \tag{7.7.65}$$

Для обрахунку спектру узагальненого гамільтоніана ДКД $\hat{H}^{S,A}$ необхідно відзначити, що вектори Бете, які є власними векторами генеруючої функції квадратичних інтегралів, є також старшими векторами для представлення алгебри симетрії $gl(n_1) \oplus gl(n - n_1)$ породженої операторами

$\hat{M}_{ij}^{S,A}$. Цей факт доводиться таким самим чином, як і у випадку раціональної r–матриці. Використовуючи це, ми отримаємо, що власні значення оператору $\hat{C}_M^{S,A}$ на векторах Бете мають вигляд:

$$c_M^{S,A} = \sum_{i=1}^{n} (m_i^{SA})^2 + \sum_{i=1}^{n_1} (n_1 - 2i + 1) m_i^{SA} + \sum_{i=1}^{n-n_1} (n - n_1 - 2i + 1) m_{n_1+i}^{SA},$$

де m_i^{SA} визначені формулою (7.7.64).

Спектр узагальненого гамільтоніана ДКД дається формулою:

$$h^{S,A} = \sum_{i=1}^{n} w_i m_i^{S,A} + \sum_{l=1}^{N} h_l^{S,A} + \frac{1}{2} c_M^{S,A}.$$

7.7.3. Спектр Z_2-градуйованих моделей Бозе – Хаббарда. Розглянемо випадок алгебри Лі $\mathfrak{g} = gl(n)$ та найпростішої Z_2 – градуйованої класичної r-матриці з тривіальним зсувом $c_{12} = 0$. Застосуємо загальну Теорему 7.9 до відповідних узагальнених димерів БХ. З цією метою потрібно специфікувати власні значення $\Lambda_{ii}(u)$, $i \in \overline{1,n}$ і простір представлення V.

У випадку “матричних” димерів Бозе – Хаббарда алгебра Лакса співпадає з прямою сумою двух копій алгебри Гайзенберга, кожна з яких має розмірність $2n_1(n - n_1) + 1$. Простір незвідних представлень цієї алгебри має вигляд $V = \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_\infty$, де $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_\infty$ — простори Фока що відповідають двум типам бозонів. В просторі представлення V існує старший вектор $\mathbf{\Omega}_{0,\infty}$ такий, що:

$$\hat{b}_{ij,0}^{+} \mathbf{\Omega}_{0,\infty} = 0, \quad \hat{b}_{ij,\infty}^{+} \mathbf{\Omega}_{0,\infty} = 0, \qquad i \in \overline{1, n_1}, j \in \overline{n_1 + 1, n}.$$

Він співпадає з тензорним добутком вакуумних векторів двох видів бозонів: $\mathbf{\Omega}_{0,\infty} = \mathbf{\Omega}_0 \otimes \mathbf{\Omega}_\infty$. З самого означення оператора Лакса цієї моделі легко бачити що $\mathbf{\Omega}_{0,\infty}$ є вакуумним вектором також для відповідного представлення алгебри Лакса.

Використовуючи визначення вакуумного вектора і самого оператора

Лакса, ми отримуємо що функція $\Lambda_{ii}(u)$ для моделей типу Бозе – Хаббарда має наступний вигляд:

$$\Lambda_{ii}(u) = k_{i,\infty}u^2 - k_{i,0}u^{-2},\ i \in \overline{1,n},$$

де $k_{i,\infty} = k_{1,\infty}$ якщо $i \in \overline{1,n_1}$, $k_{i,\infty} = k_{i,\infty}$ якщо $i \in \overline{n_1+1,n}$, $k_{i,0} = k_{1,0}$ якщо $i \in \overline{1,n_1}$, $k_{i,0} = k_{i,0}$ якщо $i \in \overline{n_1+1,n}$.

Завдяки тому факту, що додаткові інтеграли $\hat{M}^B_{ii}$, $i \in \overline{1,n}$ анулюють вакуумний вектор, ми отримуємо що їхні власні значення на ієрархічних векторах Бете записуються наступним чином:

$$m^B_i(M_1, ..., M_{n-1}) = M_{i-1} - M_i.$$

Спектр єдиного незалежного від $\hat{M}^B_{ii}$ квадратичного інтегралу $\hat{H}_0$ дається наступною формулою:

$$h_0 = (k_{n,\infty} - k_{1,\infty})\sum_{j=1}^{M_{n_1}}(v_j^{(n_1)})^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(M_k - M_{k-1})^2 - \sum_{k=1}^{n} M_k + \frac{n}{2}M_{n_1}.$$

де $M_0 = M_n = 0$, M_k, $k \in \overline{1,n-1}$ — додатні цілі числа і бистроти $v_i^{(k)}$, $k \in \overline{1,n-1}$, $i \in \overline{1,M_k}$ задовільняють наступні рівняння типу Бете:

$$\Big((k_{1,\infty}-k_{n,\infty})(v_i^{(k)})^2-(k_{1,0}-k_{n,0})(v_i^{(k)})^{-2}+\frac{n}{2}\Big)\delta_{kn_1} = \sum_{j=1;j\neq i}^{M_k}\frac{2(v_i^{(k)})^2}{(v_j^{(k)})^2-(v_i^{(k)})^2}$$
$$-\sum_{j=1}^{M_{k-1}}\frac{(v_i^{(k)})^2}{(v_j^{(k-1)})^2-(v_i^{(k)})^2} - \sum_{j=1}^{M_{k+1}}\frac{(v_i^{(k)})^2}{(v_j^{(k+1)})^2-(v_i^{(k)})^2},\ k \in \overline{1,n-1}. \tag{7.7.66}$$

7.8. Висновки

в цьому розділі алгебраїчний анзац Бете поширено на випадок квантово – інтегровних систем пов'язаних з класичними некососиметричними r-матрицями. У випадку алгебр Лі серії $gl(n)$ ієрархічний анзац

Бете узагальнено на нестандартні ланцюжки вкладених підалгебр. Використовуючи його діагоналізовано Z_p–градуйовані гамільтоніани Годена та узагальнені моделі типу ДКД та димери БХ, що базуються на Z_2–градуйованих r-матрицях. Результати данного розділу опубліковані в роботах [86, 92, 110, 113].

Розділ 8

Інтегровні ферміонні моделі і класичні r-матриці

8.1. Вступ

Інтегровні ферміонні моделі типу БКШ зі скінченним числом ферміонів мають довгу історію. Вперше вони з'явилися в роботі Річардсона [58], де застосовувалися до моделей фізики ядра. Перша модель Річардсона [58] містила лише один тип ферміонів. Згодом Річардсоном була запропонована точно–розв'язна модель з двома типами ферміонів [59], що була інтерпритована як $T = 1$ протон–нейтронна модель фізики ядра.

Новий інтерес до моделей Річардсона виник після 1997 року, коли був відкритий їх зв'язок з раціональною моделлю Годена у зовнішньому магнітному полі що базується на алгебрі Лі $sl(2)$ [28]. В роботах різних авторів [24, 25] модель Річардсона з одним типом ферміонів досліджувалось сучасними методами. У роботі [51] було показано що протон – нейтронна модель Річардсона теж може бути інтерпритована як модель Годена у зовнішньому магнітному полі, що відповідає раціональній r-матриці та базується на алгебрі Лі $sp(2)$. В роботах [29, 30] моделі Годена у зовнішньому магнітному полі, що відповідають раціональним r-матрицям та алгебрам Лі $so(6)$, $so(8)$ були застосовані для конструювання інтегровних моделей з багатьма типами ферміонів.

У серії робіт [93, 92, 94] автор дисертації запропонував використовувати для побудови інтегровних ферміонних моделей типу Річардсона некососиметричні r-матриці та алгебру Лі $sl(2)$. Таким чином, зокрема, була побудована, так звана, $p + ip$ – модель типу БКШ [92]. Відзначимо, що кількома місяцями пізніше ця ж модель була перевідкрита в роботі [39].

В данному розділі дисертації ми описуємо інтегровні моделі типу БКШ з багатьма типами ферміонів що одержані за допомогою класичних r-матриць. З цією метою ми конструюємо явні формули ферміонізації деяких фундаментальних представлень алгебр $gl(n)$,$sp(n)$ та $so(2n)$. Використовуючи формули ферміонізації та раціональні спінові системи Годена у зовнішньому магнітному полі, форма якого узгоджена з формою старшої ваги відповідного фундаментального представлення, ми будуємо інтегровні квантові системи з багатьма типами ферміонів [100, 101, 102], що співпадають з моделлю Річардсона у випадку $\mathfrak{g} = sp(2)$ та моделями [29, 30] у випадку $\mathfrak{g} = so(6)$,$so(8)$.

Розглянуто також випадок некососиметричних Z_2-градуйованих класичних r-матриць і алгебр Лі $gl(n)$,$sp(n)$, $so(2n)$ і показано що їм відповідають інтегровні гамільтоніани БКШ типу $p + ip$ з багатьма типами ферміонів [101, 102]. Зокрема, для випадку алгебри $sp(2)$ побудовані моделі є $p + ip$ – аналогами протон – нейтронної моделі Річардсона.

Всі побудовані інтегровні ферміонні моделі діагоналізовані методом аналітичного анзацу – Бете [103].

8.2. Прості алгебри Лі і їх “ферміонізація”

В цьому підрозділі ми опишемо ферміонізацію деяких фундаментальних представлень простих алгебр $so(2n)$, $sp(2n)$ та редуктивної алгебри $gl(n)$.

8.2.1. Прості алгебри Лі і їх редуктивні підалгебри.

Загальний випадок. Нехай $\mathfrak{g}$ — комплексна проста алгебра Лі чи редуктивна алгебра $gl(n)$. Нехай $X_a, a = \overline{1, \dim\mathfrak{g}}$ — базис в $\mathfrak{g}$ з комутаційними співвідношеннями:

$$[X_a, X_b] = \sum_{c=1}^{\dim\mathfrak{g}} C^c_{ab} X_c.$$

В цьому підрозділі ми будемо використовувати кореневий базис в алгебрі $\mathfrak{g}$. Детальніше, нехай Δ — набір коренів алгебри $\mathfrak{g}$, Δ_+ — набір позитивних коренів, $\mathfrak{g}_\alpha$ — кореневий простір, що відповідає кореню α, X_α — базисний елемент цього кореневого простору, H_i — базисний вектор підалгебри Картана $\mathfrak{h}$. Базис в алгебрі $\mathfrak{g}$ складається з елементів $\{X_\alpha, \alpha \in \Delta; H_i, i \in \overline{1, \mathrm{rank}\mathfrak{g}}\}$. Відповідні комутаційні співвідношення мають форму:

$$[X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}] = N_{\alpha_1,\alpha_2} X_{\alpha_1+\alpha_2}, \text{ якщо } \alpha_1 + \alpha_2 \neq 0, \tag{8.2.1a}$$

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha, \tag{8.2.1b}$$

$$[H_i, X_\alpha] = \alpha(H_i) X_\alpha, \tag{8.2.1c}$$

де $H_\alpha \equiv \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} \alpha(H_i) H_i$. Співвідношення ортонормованості записуються наступним чином:

$$(X_\alpha, X_\beta) = \delta_{\alpha+\beta,0},\ (X_\alpha, H_i) = 0,\ (H_i, H_j) = \delta_{ij}.$$

Зауваження 82. Зауважимо, що надалі в цьому підрозділі, латинські індекси a, b, c, d будуть індексувати базисні елементи алгебри $\mathfrak{g}$, незалежно від їх поділу на кореневі простори і картанівські елементи, індекси i, j будуть індексувати базис в підалгебрі Картана, а грецькі індекси $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ будуть означати корені, що належать до Δ.

Нам буде потрібний також опис редуктивних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$. Нехай $\Delta_K \subset \Delta$ буде замкнутий симетричний піднабір з набору всіх коренів.

Тоді існує такий елемент $K = \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} k_i H_i$, що $\alpha(K) = 0$ для $\alpha \in \Delta_K$. Редуктивні підалгебри алгебри $\mathfrak{g}$ відповідають елементам K і піднаборуΔ_K з набору коренів Δ. Ми будемо позначати такі підалгебри $\mathfrak{g}_0^K$. Базис цих підалгебр складається з елементів $\{X_\alpha, \alpha \in \Delta_K; H_i, i \in \overline{1, \mathrm{rank}\mathfrak{g}}\}$ ($\mathrm{rank}\mathfrak{g} = \mathrm{dim}\mathfrak{h}$).

Кожна редуктивна підалгебра $\mathfrak{g}_0^K$ забезпечує свій розклад алгебри $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1}^K + \mathfrak{g}_0^K + \mathfrak{g}_1^K,$$

де $[\mathfrak{g}_0^K, \mathfrak{g}_0^K] \subset \mathfrak{g}_0^K$, $[\mathfrak{g}_0^K, \mathfrak{g}_{\pm 1}^K] \subset \mathfrak{g}_{\pm 1}^K$, $[\mathfrak{g}_{\pm 1}^K, \mathfrak{g}_{\pm 1}^K] \subset \mathfrak{g}_{\pm 1}^K$ і підалгебри $\mathfrak{g}_{\pm 1}^K$ є нільпотентними підалгебрами породженими базисними елементами $\{X_\alpha, \alpha \in (\Delta/\Delta_K)_\pm\}$.

Редуктивна підалгебра $\mathfrak{g}_0^K$ складається з напівпростої частини — ідеалу $[\mathfrak{g}_0^K, \mathfrak{g}_0^K]$ і центру — абелевої підалгебри $\mathfrak{c}(\mathfrak{g}_0^K) \subset \mathfrak{h}$. Зауважимо, що, використовуючи означення алгебри $\mathfrak{g}_0^K$, легко показати, що елемент $K = \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} k_i H_i$ належить до центру $\mathfrak{c}(\mathfrak{g}_0^K)$.

Випадок алгебри $\mathfrak{g} = gl(n)$ Алгебра $\mathfrak{g} = gl(n)$ складається з усіх $n \times n$ матриць. Природній базис алгебри $gl(n)$ складається з елементів X_{ij}, $i, j \in \overline{1, n}$, що є $n \times n$-матрицями з наступними матричними елементами: $(X_{ij})_{ab} = \delta_{ia}\delta_{jb}$. Картанівська підалгебра співпадає з алгеброю діагональних матриць і $H_i \equiv X_{ii}, i \in \overline{1, n}$ є її ортонормованим по відношенню до форми $(X, Y) = \mathrm{tr}XY$ базисом. Набір всіх коренів співпадає з лінійними формами $\alpha_{ij} = \alpha_i - \alpha_j$, де $\alpha_i(H_j) = \delta_{ij}$ і відповідні нормалізовані елементи кореневого простору $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}$ це $X_{\alpha_{ij}} \equiv X_{ij}$ $(i \neq j)$. Довільний елемент картанівської підалгебри має форму $K = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i X_{ii}$ і $\alpha_{ij}(K) = k_i - k_j$. Набір всіх простих коренів складають корені α_{ii+1}, $i \in \overline{1, n-1}$.

Розглянемо вироджений елемент $K \in \mathfrak{h}$ що має форму $K = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i X_{ii}$, де $k_1 = k_2 = ... = k_p$, $k_{p+1} = ... = k_n$. Відповідна редуктивна підалгебра $gl(n)_0^K$: $gl(n)_0^K = gl(p) \oplus gl(n-p)$. Набір коренів Δ_K має вигляд: $\Delta_K = \{\alpha_{ij} : i,j \in \overline{1,p} \bigcup i,j \in \overline{p+1,n}\}$. Абелеві підалгебри $gl(n)^K_{\pm 1}$ мають форму: $gl(n)^K_1 = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{X_{ij}, i \in \overline{1,p}, j \in \overline{p+1,n}\}$, $gl(n)^K_{-1} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{X_{ij}, j \in \overline{1,p}, i \in \overline{p+1,n}\}$. Відповідний піднабір коренів: $(\Delta/\Delta_K)_\pm = \{\pm\alpha_{ij}, i \in \overline{1,p}, j \in \overline{p+1,n}\}$.

Випадок $\mathfrak{g} = sp(2m)$ Ця алгебра Лі складається з матриць X у просторі розмірністю $n = 2m$ таких, що $Xw = -wX$, де w — матриця симплектичної форми в лінійному просторі розмірності $2m$: $w = \begin{pmatrix} 0 & 1_m \\ -1_m & 0 \end{pmatrix}$. Відповідна матриця X явно записується наступним чином: $X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, де підматриці a_{ij} діють у просторі розмірності m і задовільняють вимогам:

$$a_{22} = -a_{11}^T, \quad a_{12} = a_{12}^T, \quad a_{21} = a_{21}^T.$$

Картанівська підалгебра натягується на наступні діагональні матриці:

$$H_i = X_{ii} - X_{i+m,i+m}, \quad i \in \overline{1,m}. \tag{8.2.2}$$

Базис в картанівській підалгебрі ортонормований по відношенню до форми $(X,Y) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}XY$. Набір всіх позитивних коренів співпадає з лінійними формами $\alpha^-_{i,j} = \alpha_i - \alpha_j$, $\alpha^+_{i,j} = \alpha_i + \alpha_j$ та $2\alpha_i$, де $\alpha_i(H_j) = \delta_{ij}$, $i < j$, $i,j \in \overline{1,m}$. Відповідні нормалізовані базисні елементи кореневих просторів $\mathfrak{g}_{\pm\alpha^\pm_{i,j}}$, $\mathfrak{g}_{\pm 2\alpha_i}$ даються формулами:

$$X_{\alpha^-_{i,j}} = X_{i,j} - X_{j+m,i+m}, \quad X_{-\alpha^-_{i,j}} = X_{j,i} - X_{i+m,j+m} \quad i<j;\ i,j \in \overline{1,m}, \tag{8.2.3a}$$

$$X_{\alpha^+_{i,j}} = X_{i,j+m} + X_{j,i+m}, \quad X_{-\alpha^+_{i,j}} = X_{i+m,j} + X_{j+m,i}, \quad i<j; i,j \in \overline{1,m}, \tag{8.2.3b}$$

$$X_{2\alpha_i} = \sqrt{2}X_{i,i+m}, \quad X_{-2\alpha_i} = \sqrt{2}X_{i+m,i}, \quad i \in \overline{1,m}, \tag{8.2.3c}$$

де X_{ij} — базисний елемент алгебри $gl(2m)$ визначений у попередньому прикладі. Набір всіх простих коренів складається з коренів $\alpha^-_{i,i+1}$, $i \in \overline{1,m-1}$ та $2\alpha_m$. Розглянемо вироджений елемент $K \in \mathfrak{h}$ форми $K = \sum_{i=1}^{m} k_i H_i$, де $k_1 = k_2 = ... = k_m$. Відповідна редуктивна підалгебра має вигляд $sp(2m)^K_0 = gl(m)$. Набір коренів Δ_K має форму $\Delta_K = \{\alpha^-_{i,j} : i,j \in \overline{1,m}\}$. Нільпотентні підалгебри $sp(2m)^K_{\pm 1}$ є абелевими і записуються наступним чином: $sp(2m)^K_1 = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{X_{\alpha^+_{i,j}}, X_{2\alpha_i}, i < j; i,j \in \overline{1,m}\}$, $sp(2m)^K_{-1} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{X_{-\alpha^+_{i,j}}, X_{-2\alpha_i}, i < j; i,j \in \overline{1,m}\}$. Відповідний піднабір коренів: $(\Delta/\Delta_K)_\pm = \{\pm\alpha^+_{i,j}, \pm 2\alpha_i, i,j \in \overline{1,m}, i < j\}$.

Випадок алгебри $\mathfrak{g} = so(2m)$. Алгебра Лі $so(2m)$ складається з матриць X в просторі розмірності $2m$ таких, що $Xs = -sX$, де s — матриця симетричної білінійної форми в лінійному просторі розмірності $2m$: $s = \begin{pmatrix} 0 & 1_m \\ 1_m & 0 \end{pmatrix}$. Відповідна матриця X записується так: $X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, де підматриці a_{ij} діють у просторі розмірності m і задовільняють вимогам:

$$a_{22} = -a^T_{11}, \quad a_{12} = -a^T_{12}, \quad a_{21} = -a^T_{21}.$$

Підалгебра Картана має наступний базис:

$$H_i = X_{ii} - X_{i+m,i+m}, \quad i \in \overline{1,m}. \tag{8.2.4}$$

Цей базис картанівської підалгебри є ортонормований по відношенню до форми $(X,Y) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}XY$. Набір позитивних коренів співпадає з лінійними формами $\alpha^-_{i,j} = \alpha_i - \alpha_j$, $\alpha^+_{i,j} = \alpha_i + \alpha_j$ де $\alpha_i(H_j) = \delta_{ij}$, $i < j$; $i,j \in \overline{1,m}$.

Нормалізовані базисні елементи кореневих просторів $\mathfrak{g}_{\pm\alpha^{\pm}_{i,j}}$, $\mathfrak{g}_{\pm 2\alpha_i}$ даються формулами:

$$X_{\alpha^-_{i,j}} = X_{i,j} - X_{j+m,i+m}, \quad X_{-\alpha^-_{i,j}} = X_{j,i} - X_{i+m,j+m} \quad i<j;\ i,j \in \overline{1,m}, \tag{8.2.5a}$$

$$X_{\alpha^+_{i,j}} = X_{j,i+m} - X_{i,j+m}, \quad X_{-\alpha^+_{i,j}} = X_{i+m,j} - X_{j+m,i}, \quad i<j; i,j \in \overline{1,m}, \tag{8.2.5b}$$

де X_{ij} — базисні елементи алгебри $gl(2m)$ визначені як вище. Набір всіх простих коренів складється з коренів $\alpha^-_{i,i+1}$, $i \in \overline{1,m-1}$ та $\alpha^+_{m-1,m}$.

Розглянемо вироджений елемент $K \in \mathfrak{h}$ форми $K = \sum\limits_{i=1}^{m} k_i H_i$, де $k_1 = k_2 = \ldots = k_m$. Відповідна редуктивна підалгебра це $so(2m)^K_0 = gl(m)$. Набір коренів Δ_K має вигляд $\Delta_K = \{\alpha^-_{i,j} : i,j \in \overline{1,m}\}$. Нільпотентні підалгебри $so(2m)^K_{\pm 1}$ є абелевими і мають вигляд: $so(2m)^K_1 = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{X_{\alpha^+_{i,j}}, i<j; i,j \in \overline{1,m}\}$, $sp(2m)^K_{-1} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{X_{-\alpha^+_{i,j}}, i<j; i,j \in \overline{1,m}\}$. Відповідний піднабір коренів — це $(\Delta/\Delta_K)_{\pm} = \{\pm\alpha^+_{i,j}, i,j \in \overline{1,m}, i<j\}$.

8.2.2. Ферміонізація. Важливим технічним засобом в конструюванні інтегровних моделей типу БКШ є ферміонізація інтегровних спінових гамільтоніанів, що базуються на алгебрах Лі. Під ферміонізацією ми будемо розуміти реалізацію комплексної алгебри Лі (прямої суми її N-копій) через n (чи nN) ферміоних операторів народження-знищення (тобто через елементи комплексної алгебри Кліффорда в просторі розмірності $2n$ (чи $2nN$)). Комутаційні співвідношення ферміоних операторів — це стандартні антикомутаційні співвідношення. Детальніше. Нехай $c_{k,i}$,$c^{\dagger}_{l,j}$, $k,l \in \overline{1,N}$, $i,j \in \overline{1,n}$ будуть ферміонними операторами народження – знищення, тобто:

$$c^{\dagger}_{k,i}c_{l,j} + c_{l,j}c^{\dagger}_{k,i} = \delta_{kl}\delta_{ij}1, \qquad c^{\dagger}_{k,i}c^{\dagger}_{l,j} + c^{\dagger}_{l,j}c^{\dagger}_{k,i} = 0, \quad c_{k,i}c_{l,j} + c_{l,j}c_{k,i} = 0. \tag{8.2.6}$$

Ми будемо використовувати стандартне представлення ферміонної алгебри з вакуумним вектором $|0\rangle$ таке, що:

$$c_{l,j}|0\rangle = 0, \qquad \forall l \in \overline{1,N}, j \in \overline{1,n}.$$

і весь простір представлення натягнутий на елементи:

$$c^{\dagger}_{k_1,i_1}c^{\dagger}_{k_2,i_2}....c^{\dagger}_{k_q,i_q}|0\rangle \text{ де } k_s \in \overline{1,N}, i_s \in \overline{1,n}, \ (k_s,i_s) \neq (k_t,i_t) \text{ якщо } s \neq t.$$

Існують різні формули ферміонізації, що залежать від вибраної алгебри Лі і вибраного класу її представлень. В наступних підрозділах ми зконструюємо ферміонізацію певних класів представлень класичних матричних алгебр Лі.

Зауваження 83. Звернемо увагу, що в застосуваннях, індекс i буде нумерувати різні типи ферміонів,а індекс l буде нумерувати ферміони того ж типу.

Випадок $\mathfrak{g} = gl(n)$ В цьому підрозділі ми зконструюємо ферміонну реалізацію фундаментального представлення алгебри $\mathfrak{g} = gl(n)$. Має місце наступне Твердження [100]:

Твердження 8.1. *Нехай $c_{k,i}, c^{\dagger}_{l,j}$, $i,j \in \overline{1,n}$, $k,l \in \overline{1,N}$ задовільняють співвідношенням (8.2.6). Фіксуємо деяке ціле число $p \in \overline{1,n-1}$. Тоді:*

(i) наступні оператори:

$$\hat{S}^{(l)}_{ij} = c_{l,i}c^{\dagger}_{l,j}, \ \text{де } i,j \in \overline{1,p}, \ l \in \overline{1,N}, \tag{8.2.7a}$$

$$\hat{S}^{(l)}_{ij} = c^{\dagger}_{l,i}c_{l,j}, \ \text{де } i,j \in \overline{p+1,n}, \ \ l \in \overline{1,N}, \tag{8.2.7b}$$

$$\hat{S}_{ij}^{(l)} = c_{l,i}c_{l,j}, \ \textit{де} \ i \in \overline{1,p}, j \in \overline{p+1,n}, \ l \in \overline{1,N}, \tag{8.2.7c}$$

$$\hat{S}_{ij}^{(l)} = c_{l,i}^{\dagger}c_{l,j}^{\dagger}, \ \textit{де} \ j \in \overline{1,p}, i \in \overline{p+1,n}, \ \ l \in \overline{1,N} \tag{8.2.7d}$$

утворюють ферміонну реалізацію алгебри $gl(n)^{\oplus N}$*.*

(ii) оператори (8.2.7), діючі на ферміонний вакуумний вектор $|0\rangle$*, породжують скінченновимірне представлення алгебри Лі* $gl(n)^{\oplus N}$ *зі старшою вагою* $\Lambda = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, .., \lambda^{(N)})$*, де* $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = ... = \lambda^{(N)} = \lambda$*,* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ *та* $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_p = 1$*,* $\lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = ... = \lambda_n = 0$*.*

Приклад 8.1. В найпростішому $gl(2)^{\oplus N}$-випадку єдиний змістовний вибір – це $p = 1$ і ми отримуємо наступні форми ферміонізації [92]:

$$\hat{S}_{21}^{(l)} = c_{l,2}^{\dagger}c_{l,1}^{\dagger}, \quad \hat{S}_{12}^{(l)} = c_{l,1}c_{l,2}, \quad \hat{S}_{22}^{(l)} = c_{l,2}^{\dagger}c_{l,2}, \quad \hat{S}_{11}^{(l)} = c_{l,1}c_{l,1}^{\dagger}, \quad l \in 1,2,...N. \tag{8.2.8}$$

Після обмеження на підалгебру $sl(2)^{\oplus N}$ і заміни $\hat{S}_{12}^{(l)} = \hat{S}_{+}^{(l)}$, $\hat{S}_{21}^{(l)} = \hat{S}_{-}^{(l)}$, $\hat{S}_{11}^{(l)} - \hat{S}_{22}^{(l)} = 2\hat{S}_{3}^{(l)}$, ми отримуємо стандартну ферміонізацію алгебри Лі $sl(2)$, що використовується в моделі БКШ – Річардсона [28],[24].

Випадок $\mathfrak{g} = sp(2m)$. Алгебра Лі $sp(2m)$ важлива для застосувань в ядерній фізиці. В цьому підрозділі ми зконструюємо її ферміонізацію. Для цього буде зручно використовувати кореневий базис, що був описаний вище. Має місце наступне Твердження [100]:

Твердження 8.2. *Нехай* $c_{k,i}, c_{l,j}^{\dagger}$*,* $i, j \in \overline{1,2m}$*,* $k, l \in \overline{1,N}$ *задовільняють співвідношення (8.2.6), тоді:*

(i) Наступні оператори:

$$\hat{S}_{i}^{(l)} = (1 - (c_{l,i}^{\dagger}c_{l,i} + c_{l,i+m}^{\dagger}c_{l,i+m})), \ \textit{де} \ i \in \overline{1,m}, \ l \in \overline{1,N}, \tag{8.2.9a}$$

$$\hat{S}^{(l)}_{\alpha^-_{i,j}} = (c_{l,i}c^\dagger_{l,j} - c^\dagger_{l,j+m}c_{l,i+m}),\ \textit{де}\ i<j,\ \ i,j\in\overline{1,m},\quad l\in\overline{1,N}, \tag{8.2.9b}$$

$$\hat{S}^{(l)}_{\alpha^+_{ij}} = (c_{l,i}c_{l,j+m} + c_{l,j}c_{l,i+m}),\ \textit{де}\ i<j,\ \ i,j\in\overline{1,m},\quad l\in\overline{1,N}, \tag{8.2.9c}$$

$$\hat{S}^{(l)}_{2\alpha_i} = \sqrt{2}c_{l,i}c_{l,i+m},\ \ \textit{де}\ i\in\overline{1,m},\quad l\in\overline{1,N}, \tag{8.2.9d}$$

$$\hat{S}^{(l)}_{-\alpha^-_{i,j}} = (\hat{S}^{(l)}_{\alpha^-_{i,j}})^\dagger,\ \hat{S}^{(l)}_{-\alpha^+_{i,j}} = (\hat{S}^{(l)}_{\alpha^+_{i,j}})^\dagger,\ \hat{S}^{(l)}_{-2\alpha_i} = (\hat{S}^{(l)}_{2\alpha_i})^\dagger, \textit{де}\ i<j; i,j\in\overline{1,m}, l\in\overline{1,N} \tag{8.2.9e}$$

утворюють реалізацію алгебри Лі $sp(2m)^{\oplus N}$.

(ii) Оператори (8.2.9), діючі на ферміонний вакуум $|0\rangle$, породжують скінченновимірне представлення алгебри $sp(2m)^{\oplus N}$ зі старшою вагою $\Lambda = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, .., \lambda^{(N)})$, де $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = ... = \lambda^{(N)} = \lambda$, $\lambda = (1, 1, ..., 1)$.

Приклад 8.2. В найпростішому $sp(2)^{\oplus N}$– випадку єдині нетривіальні базисні елементи алгебри – це $\hat{S}^{(l)}_1$, $\hat{S}^{(l)}_{\pm 2\alpha_1}$, формули ферміонізації для яких еквівалентні формулам з попереднього прикладу. Це пояснюється ізоморфізмом малих розмірностей: $sp(2) \simeq sl(2)$.

Приклад 8.3. У випадку $sp(4)^{\oplus N}$, тобто, коли $m = 2$, ми отримуємо наступні формули ферміонізації:

$$\hat{S}^{(l)}_1 = (1 - (c^\dagger_{l,1}c_{l,1} + c^\dagger_{l,3}c_{l,3})),\ quad\hat{S}^{(l)}_2 = (1 - (c^\dagger_{l,2}c_{l,2} + c^\dagger_{l,4}c_{l,4})),$$
$$\hat{S}^{(l)}_{\alpha^-_{1,2}} = (c_{l,1}c^\dagger_{l,2} - c^\dagger_{l,4}c_{l,3}),\quad \hat{S}^{(l)}_{\alpha^+_{1,2}} = (c_{l,1}c_{l,4} + c_{l,2}c_{l,3}),$$
$$\hat{S}^{(l)}_{2\alpha_1} = \sqrt{2}c_{l,1}c_{l,3},\quad \hat{S}^{(l)}_{2\alpha_2} = \sqrt{2}c_{l,2}c_{l,4},$$
$$\hat{S}^{(l)}_{-\alpha^-_{1,2}} = (\hat{S}^{(l)}_{\alpha^-_{1,2}})^\dagger,\quad \hat{S}^{(l)}_{-\alpha^+_{1,2}} = (\hat{S}^{(l)}_{\alpha^+_{1,2}})^\dagger,\quad \hat{S}^{(l)}_{-2\alpha_1} = (\hat{S}^{(l)}_{2\alpha_1})^\dagger, \hat{S}^{(l)}_{-2\alpha_2} = (\hat{S}^{(l)}_{2\alpha_2})^\dagger,$$

де $l\in\overline{1,N}$. Ця ферміонізація еквівалентна до ферміонізації побудованої в роботі [51] для $\mathfrak{g} = so(5)$. Це пояснюється ізоморфізмом малих розмірностей $sp(4) \simeq so(5)$.

Випадок алгебри $\mathfrak{g} = so(2m)$ Алгебра Лі $\mathfrak{g} = so(2m)$ теж важлива для застосуваннь. В цьому підрозділі ми опишемо її ферміонізацію. Має місце наступне Твердження [100]:

Твердження 8.3. *Нехай $c_{k,i}, c^{\dagger}_{l,j}$, $i,j \in \overline{1,2m}$, $k,l \in \overline{1,N}$ задовільняють співвідношення (8.2.6), тоді:*

(i) Наступні оператори:

$$\hat{S}^{(l)}_{i} = (1 - (c^{\dagger}_{l,i}c_{l,i} + c^{\dagger}_{l,i+m}c_{l,i+m})), \text{ де } i \in \overline{1,m},\ l \in \overline{1,N}, \tag{8.2.10a}$$

$$\hat{S}^{(l)}_{\alpha^{-}_{i,j}} = (c_{l,i}c^{\dagger}_{l,j} - c^{\dagger}_{l,j+m}c_{l,i+m}), \text{ де } i<j;\ i,j \in \overline{1,m},\quad l \in \overline{1,N}, \tag{8.2.10b}$$

$$\hat{S}^{(l)}_{\alpha^{+}_{ij}} = (c_{l,j}c_{l,i+m} - c_{l,i}c_{l,j+m}), \text{ де } i<j;\ i,j \in \overline{1,m},\quad l \in \overline{1,N}, \tag{8.2.10c}$$

$$\hat{S}^{(l)}_{-\alpha^{-}_{i,j}} = (\hat{S}^{(l)}_{\alpha^{-}_{i,j}})^{\dagger},\ \hat{S}^{(l)}_{-\alpha^{+}_{i,j}} = (\hat{S}^{(l)}_{\alpha^{+}_{i,j}})^{\dagger}, \quad \text{де } i<j;\ i,j \in \overline{1,m},\ \ l \in \overline{1,N} \tag{8.2.10d}$$

утворюють ферміонну реалізацію алгебри Лі $so(2m)^{\oplus N}$.

(ii) Оператори (8.2.10), діючи на ферміонний вакуум $|0\rangle$, породжують скінченновимірне представлення алгебри $so(2m)^{\oplus N}$ зі старшою вагою $\Lambda = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, .., \lambda^{(N)})$, де $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = ... = \lambda^{(N)} = \lambda$, $\lambda = (1,1,....,1)$.

Приклад 8.4. В $so(4)^{\oplus N}$ – випадку, тобто, коли $m = 2$ ми отримуємо наступні формули ферміонізації:

$$\hat{S}^{(l)}_{1} = (1 - (c^{\dagger}_{l,1}c_{l,1} + c^{\dagger}_{l,3}c_{l,3})), \quad \hat{S}^{(l)}_{2} = (1 - (c^{\dagger}_{l,2}c_{l,2} + c^{\dagger}_{l,4}c_{l,4})),$$
$$\hat{S}^{(l)}_{\alpha^{-}_{1,2}} = (c_{l,1}c^{\dagger}_{l,2} - c^{\dagger}_{l,4}c_{l,3}), \quad \hat{S}^{(l)}_{\alpha^{+}_{1,2}} = (c_{l,2}c_{l,3} - c_{l,1}c_{l,4}),$$
$$\hat{S}^{(l)}_{-\alpha^{-}_{1,2}} = (\hat{S}^{(l)}_{\alpha^{-}_{1,2}})^{\dagger}, \quad \hat{S}^{(l)}_{-\alpha^{+}_{1,2}} = (\hat{S}^{(l)}_{\alpha^{+}_{1,2}})^{\dagger},$$

де $l \in \overline{1,N}$

8.3. Раціональні r-матриці і ферміонні моделі

8.3.1. Раціональні гамільтоніани Годена в зовнішньому полі. Гамільтоніани Годена в зовнішньому магнітному полі для алгебри Лі $\mathfrak{g}$ мають наступний вигляд:

$$\hat{H}_l = \sum_{k=1,k\neq l}^{N} \frac{\sum\limits_{a,b=1}^{\dim\mathfrak{g}} g^{ab}\hat{S}_a^{(k)}\hat{S}_b^{(l)}}{(\nu_l-\nu_k)} + \sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}} k^a\hat{S}_a^{(l)}, \tag{8.3.11}$$

чи, в термінах кореневого базиса:

$$\hat{H}_l = \sum_{k=1,k\neq l}^{N} \frac{1}{(\nu_l-\nu_k)}\Big(\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} \hat{S}_i^{(k)}\hat{S}_i^{(l)} + \sum_{\alpha\in\Delta_+} \hat{S}_\alpha^{(k)}\hat{S}_{-\alpha}^{(l)} + \sum_{\alpha\in\Delta_+} \hat{S}_{-\alpha}^{(k)}\hat{S}_\alpha^{(l)}\Big) + \sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}} k^a\hat{S}_a^{(l)}. \tag{8.3.12}$$

Зауваження 84. Відзначимо, що додатково до гамільтоніанів $\hat{H}_l$, завжди існують оператори Казиміра, що комутують зі всіма гамільтоніанами і мають вигляд:

$$\hat{C}_l^2 = \sum_{a,b=1}^{\dim\mathfrak{g}} g^{ab}\hat{S}_a^{(l)}\hat{S}_b^{(l)}.$$

Зауваження 85. Відзначимо, також, що для алгебри Лі вищих рангів оператори (8.3.11) чи (8.3.12) не утворюють повного сімейства комутативних інтегралів. Для того, щоб зконструювати таке сімейство, необхідно визначити, так звані, вищі гамільтоніани Годена. Ми не будемо обговорювати проблему конструювання вищих гамільтоніанів Годена у квантовому випадку, оскільки для застосуванаь необхідно знати лише квадратичні гамільтоніани (8.3.11) і лінійні інтеграли пов'язані з симетрією r-матриці.

8.3.2. Симетрії раціональних систем Годена у зовнішньому полі. Побудуємо алгебру симетрій систем Годена в магнітному полі.

Має місце наступне Твердження:

Твердження 8.4. *Нехай $\mathfrak{g}_0$ — алгебра Лі, що централізує зовнішнє магнітне поле K, тобто $[X_a, K] = 0$, $\forall X_a \in \mathfrak{g}_0$. Тоді, наступні оператори:*

$$\hat{M}_a = \sum_{k=1}^{N} \hat{S}_a^{(k)}, a \in \overline{1, \dim\mathfrak{g}_0}$$

де $\mathfrak{g}_0$ утворюють алгебру Лі ізоморфну до$\mathfrak{g}_0$ і комутують з гамільтоніанами Годена (8.3.11).

Зауваження 86. Відзначимо, що геометрична симетрія раціональних систем Годена визначається симетрією зовнішнього магнітного поля $K \in \mathfrak{g}$. Ми розглянемо випадок, коли $K \in \mathfrak{h}$ і $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0^K$.

8.3.3. Раціональні гамільтоніани БКШ "вищих рангів".

Раціональні гамільтоніани БКШ у спіновій формі. Для отримання гамільтоніанів БКШ, необхідно розглянути наступну комбінацію раціональних гамільтоніанів Годена у магнітному полі:

$$\hat{H} = \sum_{l=1}^{N} \nu_l \hat{H}_l.$$

Більш явно:

$$\hat{H} = \sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}} \sum_{l=1}^{N} \nu_l k^a \hat{S}_a^{(l)} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1,k\neq l}^{N} (\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}g} \hat{S}_i^{(k)} \hat{S}_i^{(l)} + \sum_{\alpha\in\Delta_+} (\hat{S}_\alpha^{(k)} \hat{S}_{-\alpha}^{(l)} + \hat{S}_{-\alpha}^{(k)} \hat{S}_\alpha^{(l)})). \tag{8.3.13}$$

Для того, щоб отримати фізично змістовний гамільтоніан, необхідно використати симетрію гамільтоніана (8.3.13), що співпадає з централізатором зовнішнього магнітного поля K. Припустимо, що K належить до підалгебри Картана $\mathfrak{h}$ алгебри $\mathfrak{g}$, тоді її редуктивний централізатор $\mathfrak{g}_0^K$ породжується елементами $\hat{M}_a = \sum\limits_{n=1}^{N} \hat{S}_a^{(k)}$, де $X_a \in \mathfrak{g}_0^K$. Отже, елементи Казиміра $\hat{C}^2_{\mathfrak{g}_0^K}$ цього централізатора комутують з усіма узагальненими гамільтоніанами Годена у зовнішньому магнітному полі і можна включити їх в зконструйоване комутативне сімейство разом з операторами Казиміра $\hat{C}_l^2$, $l \in \overline{1,N}$ кожної підалгебри Лі $\mathfrak{g}_l \simeq \mathfrak{g}$ з прямої суми $\mathfrak{g}^{\oplus N}$. Крім того, можна включити в комутативне сімейство також кожний лінійний інтеграл, що належить "глобальній" картанівській підалгебрі. Зокрема, наступний інтеграл: $\hat{h}_{\delta_K} = \sum\limits_{l=1}^{N} \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} \delta_K(H_i)\hat{S}_i^{(l)}$, де $\delta_K \equiv \sum\limits_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+} \alpha$. Це дозволяє розглянути гамільтоніан:

$$\hat{H}_{gBCS} = \sum_{l=1}^{N} \nu_l \hat{H}_l + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N} \hat{C}_l^2 - \frac{1}{2}\hat{C}^2_{\mathfrak{g}_0^K} - \frac{1}{2}\hat{h}_{\delta_K}, \tag{8.3.14}$$

що записується в нормально впорядкованій формі наступним чином:

$$\hat{H}_{gBCS} = \sum_{l=1}^{N} \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} \nu_l k_i \hat{S}_i^{(l)} + \sum_{k,l=1}^{N} \sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+} \hat{S}_{-\alpha}^{(l)} \hat{S}_{\alpha}^{(k)}, \tag{8.3.15}$$

Гамільтоніан (8.3.15) є загальним інтегровним БКШ гамільтоніаном записаним в спіновій формі. Його явна форма залежить від вибраного елемента K картанівської підалгебри.

Зауваження 87. Відзначимо, що, завдяки нашому вибору зовнішнього магнітного поля, гамільтоніан (8.3.15) комутує з операторами $\hat{M}_i = \sum\limits_{k=1}^{N} \hat{S}_i^{(k)}$, $i \in \overline{1, \mathrm{rank}\mathfrak{g}}$ що представляють картанівську симетрію і є пов'язаними з операторами числа частинок.

Раціональні гамільтоніани БКШ у ферміонній формі: випадок $gl(n)$. Розглянемо алгебру Лі $gl(n)$ і спеціально вибраний елемент K. Детальніше, $K = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i X_{ii}$, де $k_1 = k_2 = ..k_p$, $k_{p+1} = ... = k_n$ і ціле число $p \in \overline{1, n-1}$ вибране в такий же спосіб, як у формулах ферміонізації (8.2.7). Для зручності, ми будемо додатково класти $k_1 = -k_n \neq 0$. Відповідна алгебра $\mathfrak{g}_0^K$ співпадає з $gl(p) \oplus gl(n-p)$. Підмножина коренів $(\Delta/\Delta_K)_+$ співпадає з множиною коренів $\alpha_{ij} = \alpha_i - \alpha_j$, де $i \in \overline{1,p}$, $j \in \overline{p+1,n}$. Застосовуючи загальну формулу (8.3.15) для цього вибору алгебри $\mathfrak{g}$ і кореневої підсистеми $(\Delta/\Delta_K)_+$, отримуємо наступний спіновий гамільтоніан:

$$\hat{H}_{gBCS} = \sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} k_i\nu_l S_{ii}^{(l)} + \sum_{k,l=1}^{N}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=p+1}^{n} S_{ji}^{(l)} S_{ij}^{(k)}. \qquad (8.3.16)$$

Після ферміонізації він записується наступним чином:

$$\hat{H}_{gBCS} = \sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} \nu_l c_{l,i}^{\dagger} c_{l,i} - g\sum_{k,l=1}^{N}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=p+1}^{n} c_{l,j}^{\dagger} c_{l,i}^{\dagger} c_{k,i} c_{k,j}, \qquad (8.3.17)$$

де ми викорстали явну форму елемента K, поділили гамільтоніан на k_n, поклали $g \equiv k_1^{-1}$ і відняли від нього вакуумну енергію $E_0 \equiv p\sum_{l=1}^{N}\nu_l$.

Випадок $gl(2m)$**.** Для отримання фізичної інтерпритації гамільтоніану (8.3.17), як гамільтоніану парної взаємодії, ми обмежимось випадком $n = 2m$, $p = m$ і припустимо, що оператори $c_{l,i}$, $c_{l,i}^{\dagger}$ і $c_{l,i+m}$, $c_{l,i+m}^{\dagger}$, відповідають двум станам ферміона з номером l типу i, і протилежними спінами:

$$c_{l,i} \equiv c_{l,i,-},\ c_{l,i}^{\dagger} \equiv c_{l,i,-}^{\dagger},\ c_{l,i+m} \equiv c_{l,i,+},\ c_{l,i+m}^{\dagger} \equiv c_{l,i,+}^{\dagger}, \quad i \in \overline{1,m}, l \in \overline{1,N}.$$

В таких позначеннях гамільтоніан (8.3.17) набуває вигляду:

$$\hat{H}_{gBCS} = \sum_{l=1}^{N}\epsilon_l\sum_{i=1}^{m}(c_{l,i,-}^{\dagger}c_{l,i,-} + c_{l,i,+}^{\dagger}c_{l,i,+}) - g\sum_{k,l=1}^{N}\sum_{i,j=1}^{m} c_{l,j,+}^{\dagger}c_{l,i,-}^{\dagger}c_{k,i,-}c_{k,j,+}, \qquad (8.3.18)$$

Перший член в гамільтоніані (8.3.18) — це кінетичний член ферміонів з вільними енергіями $\epsilon_l \equiv \nu_l$. Другий член описує парну взаємодію ферміонів m різних типів. Взаємодія відбувається між ферміонами протележних спінів і не залежить від їх типу чи від номера ферміону фіксованого типу.

Зауважимо, що з загальних Лі – теоретичних міркувань викладений вище, симетрія гамільтоніану (8.3.18), співпадає з алгеброю Лі $gl(m) \oplus gl(m)$ з наступними базисними елементами:

$$\hat{M}_{ij} = \sum_{l=1}^{N} c_{l,i,-}c_{l,j,-}^{\dagger},\ i,j \in \overline{1,m}, \quad \hat{M}_{st} = \sum_{l=1}^{N} c_{l,s,+}^{\dagger}c_{l,t,+},\ s,t \in \overline{m+1,2m}.$$

(8.3.19)

Ця алгебра Лі містить комутативну підалгебру Картана операторів числа частинок $\hat{M}_{ii}$, $\hat{M}_{ss}$, $i \in \overline{1,m}$, $s \in \overline{m+1,m}$.

Приклад 8.5. Розглянемо найбільш цікавий приклад $gl(4)(m=2)$. В цьому випадку ми маємо два типи ферміонів, що можуть бути інтерпритовані як протони і нейтрони. Вводячи позначення:

$$c_{l,1,-} \equiv n_{l,-},\ c^\dagger_{l,1,-} \equiv n^\dagger_{l,-},\ c_{l,1,+} \equiv n_{l,+},\ c^\dagger_{l,1,+} \equiv n^\dagger_{l,+},$$
$$c_{l,2,-} \equiv p_{l,-},\ c^\dagger_{l,2,-} \equiv p^\dagger_{l,-},\ c_{l,2,+} \equiv p_{l,+},\ c^\dagger_{l,2,+} \equiv p^\dagger_{l,+},$$

ми отримуємо інтегровний протон-нейтронний гамільтоніан типу БКШ:

$$\hat{H}_{gBCS} = \sum_{l=1}^{N} \epsilon_l (n^\dagger_{l,-} n_{l,-} + n^\dagger_{l,+} n_{l,+} + p^\dagger_{l,-} p_{l,-} + p^\dagger_{l,+} p_{l,+}) -$$
$$-g \sum_{k,l=1}^{N} \big(n^\dagger_{l,+} n^\dagger_{l,-} n_{k,-} n_{k,+} + p^\dagger_{l,+} p^\dagger_{l,-} p_{k,-} p_{k,+} + p^\dagger_{l,+} n^\dagger_{l,-} n_{k,-} p_{k,+} + n^\dagger_{l,+} p^\dagger_{l,-} p_{k,-} n_{k,+} \big). \tag{8.3.20}$$

Алгебра симетрії цього гамільтоніану співпадає з алгеброю $gl(2) \oplus gl(2)$ з наступними базисними елементами:

$$\hat{M}_{11} = \sum_{l=1}^{N} (1 - n^\dagger_{l,-} n_{l,-}), \quad \hat{M}_{22} = \sum_{l=1}^{N} (1 - p^\dagger_{l,-} p_{l,-}), \tag{8.3.21a}$$

$$\hat{M}_{12} = \sum_{l=1}^{N} n_{l,-} p^\dagger_{l,-}, \quad \hat{M}_{21} = \sum_{l=1}^{N} p_{l,-} n^\dagger_{l,-}. \tag{8.3.21b}$$

$$\hat{M}_{33} = \sum_{l=1}^{N} n^\dagger_{l,+} n_{l,+}, \quad \hat{M}_{44} = \sum_{l=1}^{N} p^\dagger_{l,+} p_{l,+}, \tag{8.3.21c}$$

$$\hat{M}_{34} = \sum_{l=1}^{N} n^\dagger_{l,+} p_{l,+}, \quad \hat{M}_{43} = \sum_{l=1}^{N} p^\dagger_{l,+} n_{l,+}. \tag{8.3.21d}$$

Ця алгебра Лі містить комутативну підалгебру Картана операторів числа частинок $\hat{M}_{ii}$, $i \in \overline{1,4}$, тобто число протонів і нейтронів з кожним з двох значень спіна $\delta \in (+,-)$ є "хорошим" квантовим числом.

Раціональні гамільтоніани БКШ у ферміонній формі: випадок $sp(2m)$. Розглянемо алгебру Лі $sp(2m)$ і спеціальний елемент $K = \sum\limits_{i=1}^{m} k_i H_i$, де $k_1 = k_2 = ... = k_m$, що задає зовнішнє магнітне поле. Застосовуючи загальну формулу (8.3.15) для цього вибору алгебри Лі $\mathfrak{g}$ і кореневої підсистеми $(\Delta/\Delta_K)_+$, отримуємо наступний спіновий гамільтоніан:

$$\hat{H}_{gBCS} = \sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{m} k_i \nu_l S_i^{(l)} + \sum_{k,l=1}^{N}\Big(\sum_{i=1}^{m} S^{(l)}_{-2\alpha_i} S^{(k)}_{2\alpha_i} + \sum_{i,j=1,i<j}^{m} S^{(l)}_{-\alpha^+_{i,j}} S^{(k)}_{\alpha^+_{i,j}}\Big), \quad (8.3.22)$$

Використовуючи формули ферміонізації (8.2.9) і вводячи позначення:

$$c_{l,i} \equiv c_{l,i,-},\ c^\dagger_{l,i} \equiv c^\dagger_{l,i,-},\ c_{l,i+m} \equiv c_{l,i,+},\ c^\dagger_{l,i+m} \equiv c^\dagger_{l,i+m}, \quad i \in \overline{1,m}, l \in \overline{1,N}$$

ми отримуємо, з точністю до вакуумної енергії $E_0 \equiv m\sum\limits_{l=1}^{N}\nu_l$, наступний вираз для гамільтоніану (8.3.22):

$$\hat{H}_{gBCS} = \sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{m} \epsilon_l (c^\dagger_{l,i,-} c_{l,i,-} + c^\dagger_{l,i,+} c_{l,i,+}) - 2g\sum_{k,l=1}^{N}\sum_{i=1}^{m} c^\dagger_{l,i,+} c^\dagger_{l,i,-} c_{l,i,-} c_{l,i,+} -$$
$$- g\sum_{k,l=1}^{N}\sum_{i,j=1,i<j}^{m} (c^\dagger_{l,j,+} c^\dagger_{l,i,-} + c^\dagger_{l,i,+} c^\dagger_{l,j,-})(c_{k,i,-} c_{k,j,+} + c_{k,j,-} c_{k,i,+}), \quad (8.3.23)$$

де $\epsilon_l = \nu_l$, $g = k_m^{-1}$ і ми використали, що в цьому випадку, $k_1 = k_2 = ... = k_m$ і поділили гамільтоніан (8.3.22) на $(-k_m)$.

Перший член в гамільтоніані (8.3.23) – кінетичний. Другий і третій описує парну взаємодію ферміонів m різних типів. Взаємодія має місце між ферміонами протилежних спінів і не залежить від їх типу чи номеру. Ця взаємодія є менш симетричною, ніж розглянута в попередньому підрозділі у випадку $\mathfrak{g} = gl(2m)$. З загальних міркувань, викладених вище, слідує, що алгебра симетрії для цієї моделі є алгеброю Лі $gl(m)$ породженою операторами:

$$\hat{M}_i = \sum_{l=1}^{N}(1 - (c^{\dagger}_{l,i,-}c_{l,i,-} + c^{\dagger}_{l,i,+}c_{l,i,+})), \text{ де } i \in \overline{1,m}.$$

$$\hat{M}_{\alpha^-_{i,j}} = \sum_{l=1}^{N}(c_{l,i,-}c^{\dagger}_{l,j,-} - c^{\dagger}_{l,j,+}c_{l,i,+}), \text{ де } i < j, \ i,j \in \overline{1,m},$$

$$\hat{M}_{-\alpha^-_{i,j}} = (\hat{M}_{\alpha^-_{i,j}})^{\dagger}, \text{ де } i < j, \ i,j \in \overline{1,m}.$$

Розглянемо найбільш цікавий протон – нейтронний приклад:

Приклад 8.6. Нехай $\mathfrak{g} = sp(4)$ $(m = 2)$. В цьому випадку є два типи ферміонів, що можуть бути інтерпритовані як протони і нейтрони. Вводячи, як і у випадку $gl(4)$, наступні позначення:

$$c_{l,1,-} \equiv n_{l,-}, \ c^{\dagger}_{l,1,-} \equiv n^{\dagger}_{l,-}, \ c_{l,1,+} \equiv n_{l,+}, \ c^{\dagger}_{l,1,+} \equiv n^{\dagger}_{l,+},$$

$$c_{l,2,-} \equiv p_{l,-}, \ c^{\dagger}_{l,2,-} \equiv p^{\dagger}_{l,-}, \ c_{l,2,+} \equiv p_{l,+}, \ c^{\dagger}_{l,2,+} \equiv p^{\dagger}_{l,+},$$

отримуємо інтегровний протон – нейтронний гамільтоніан типу БКШ:

$$\hat{H}_{gBCS} = \sum_{l=1}^{N}\epsilon_l(n^{\dagger}_{l,-}n_{l,-}+n^{\dagger}_{l,+}n_{l,+}+p^{\dagger}_{l,-}p_{l,-}+p^{\dagger}_{l,+}p_{l,+})-2g\sum_{k,l=1}^{N}(n^{\dagger}_{l,+}n^{\dagger}_{l,-}n_{k,-}n_{k,+}$$
$$+ p^{\dagger}_{l,+}p^{\dagger}_{l,-}p_{k,-}p_{k,+}) - g\sum_{k,l=1}^{N}(p^{\dagger}_{l,+}n^{\dagger}_{l,-} + n^{\dagger}_{l,+}p^{\dagger}_{l,-})(n_{k,-}p_{k,+} + p_{k,-}n_{k,+}). \tag{8.3.24}$$

З загальних міркувань, викладених вище, симетрія гамільтоніану (8.3.24) співпадає з алгеброю Лі $gl(2)$ з наступним базисними елементами:

$$\hat{M}_1 = \sum_{l=1}^{N}(1-(n^{\dagger}_{l,-}n_{l,-}+n^{\dagger}_{l,+}n_{l,+})), \quad \hat{M}_2 = \sum_{l=1}^{N}(1-(p^{\dagger}_{l,-}p_{l,-}+p^{\dagger}_{l,+}p_{l,+})), \tag{8.3.25a}$$

$$\hat{M}_{\alpha^-_{1,2}} = \sum_{l=1}^{N}(n_{l,-}p^\dagger_{l,-} - p^\dagger_{l,+}n_{l,+}), \quad \hat{M}_{-\alpha^-_{1,2}} = \sum_{l=1}^{N}(p_{l,-}n^\dagger_{l,-} - n^\dagger_{l,+}p_{l,+}). \quad (8.3.25b)$$

Гамільтоніан (8.3.24) був вперше запропонований в роботі [59]. Він був перевідкритий в контексті теорій інтегровних систем в роботі [51], використовуючи алгебру Лі $so(5)$, що є ізоморфною до $sp(4)$.

Раціональні гамільтоніани БКШ у ферміонній формі: випадок $so(2m)$**.** Отримаємо гамільтоніан БКШ, асоційований з алгеброю Лі $so(2m)$. Для цього використаємо формули ферміонізації (8.2.10) і спеціально вибраний елемент $K = \sum\limits_{i=1}^{m} k_i H_i$, де $k_1 = k_2 = \ldots = k_m$, що задає зовнішнє магнітне поле. Використовуючи загальну формулу (8.3.15) для цього вибору алгебри $\mathfrak{g}$ і кореневої підсистеми $(\Delta/\Delta_K)_+$, отримуємо наступний спіновий гамільтоніан:

$$\hat{H}_{gBCS} = \sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{m} k_i \nu_l S^{(l)}_i + \sum_{k,l=1}^{N}\sum_{i,j=1,i<j}^{m} S^{(l)}_{-\alpha^+_{i,j}} S^{(k)}_{\alpha^+_{i,j}}, \tag{8.3.26}$$

Використовуючи формули ферміонізації (8.2.10) і вводячи позначення:

$$c_{l,i} \equiv c_{l,i,-},\ c^\dagger_{l,i} \equiv c^\dagger_{l,i,-},\ c_{l,i+m} \equiv c_{l,i,+},\ c^\dagger_{l,i+m} \equiv c^\dagger_{l,i,+}, \quad i \in \overline{1,m}, l \in \overline{1,N}$$

отримуємо (з точністю до вакуумної енергії $E_0 \equiv m\sum\limits_{l=1}^{N}\nu_l$) наступний вираз для гамільтоніану (8.3.26):

$$\begin{aligned}\hat{H}_{gBCS} = &\sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}\epsilon_l(c^\dagger_{l,i,-}c_{l,i,-} + c^\dagger_{l,i,+}c_{l,i,+}) - \\ &- g\sum_{k,l=1}^{N}\sum_{i,j=1,i<j}^{m}(c^\dagger_{l,i,+}c^\dagger_{l,j,-} - c^\dagger_{l,j,+}c^\dagger_{l,i,-})(c_{k,j,-}c_{k,i,+} - c_{k,i,-}c_{k,j,+}),\end{aligned} \tag{8.3.27}$$

де $\epsilon_l = \nu_l$, $g = k_m^{-1}$, і ми використали, що $k_1 = k_2 = \ldots = k_m$ і поділили гамільтоніан (8.3.26) на $(-k_m)$.

Перший член в гамільтоні (8.3.27) — це кінетичний член. Третій описує парну взаємодію ферміонів m різних типів. Взаємодія не залежить від типу чи номеру ферміонів. Вона менш симетрична, ніж у випадку $\mathfrak{g} = gl(2m)$. З загальних міркувань, викладених вище, слідує, що алгебра симетрії цієї моделі це $gl(m)$, що дається тими самими формулами що і у випадку $sp(2m)$.

Приклад 8.7. Нехай $\mathfrak{g} = so(4)$ $(m = 2)$. В цьому випадку є два типи ферміонів, що інтерпритуються як протони і нейтрони. Вводячи позначення:

$$c_{l,1,-} \equiv n_{l,-},\ c^{\dagger}_{l,1,-} \equiv n^{\dagger}_{l,-},\ c_{l,1,+} \equiv n_{l,+},\ c^{\dagger}_{l,1,+} \equiv n^{\dagger}_{l,+},$$
$$c_{l,2,-} \equiv p_{l,-},\ c^{\dagger}_{l,2,-} \equiv p^{\dagger}_{l,-},\ c_{l,2,+} \equiv p_{l,+},\ c^{\dagger}_{l,2,+} \equiv p^{\dagger}_{l,+},$$

ми отримуємо такий інтегровний протон – нейтронний гамільтоніан:

$$\hat{H}_{gBCS} = \sum_{l=1}^{N} \epsilon_l (n^{\dagger}_{l,-} n_{l,-} + n^{\dagger}_{l,+} n_{l,+} + p^{\dagger}_{l,-} p_{l,-} + p^{\dagger}_{l,+} p_{l,+}) -$$
$$- g \sum_{k,l=1}^{N} (p^{\dagger}_{l,+} n^{\dagger}_{l,-} - n^{\dagger}_{l,+} p^{\dagger}_{l,-})(n_{k,-} p_{k,+} - p_{k,-} n_{k,+}). \quad (8.3.28)$$

Алгебра симетрії цього гамільтоніану співпадає з $gl(2)$ і задається тими самим формулами, що і в попередньому випадку $\mathfrak{g} = sp(4)$.

8.3.4. Діагоналізація. В цьому розділі ми опишемо спектр отриманих гамільтоніанів типу БКШ в термінах рішень рівнянь Бете.

Нагадаємо, що представлення алгебри Лі $\mathfrak{g}^{\oplus N}$, називається представленням зі старшою вагою $\Lambda = (\lambda^{(1)}, ..., \lambda^{(N)})$, $\lambda^{(l)} = (\lambda^{(l)}_1, ..., \lambda^{(l)}_{\mathrm{rank}\mathfrak{g}})$, $l \in \overline{1, N}$ якщо існує такий вектор $\mathbf{\Omega}$, що:

$$\hat{S}^{(l)}_i \mathbf{\Omega} = \lambda^{(l)}_i \mathbf{\Omega}, \quad \hat{S}^{(l)}_{\alpha} \mathbf{\Omega} = 0, \qquad i \in \overline{1, \mathrm{rank}\mathfrak{g}},\ \forall \alpha \in \Delta_+, \forall\ l \in \overline{1, N}. \quad (8.3.29)$$

Наш розгляд проблеми діагоналізації гамільтоніанів Годена у зовнішньому магнітному полі базується на наступній Теоремі [25]:

Теорема 8.1. *Спектр гамільтоніанів Годена $\hat{H}_l$ у зовнішньому магнітному полі K в скінченновимірному представленні алгебри $\mathfrak{g}^{\oplus N}$ зі старшою вагою $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, ..., \lambda^{(N)})$ характиризується бистротами $v_k^{(i)}$, $k \in \overline{1, M_i}$, $i \in \overline{1, \mathrm{rank}\mathfrak{g}}$ та має наступну форму:*

$$h_l = (\lambda^{(l)}, K) + \sum_{k=1, k\neq l}^{N} \frac{(\lambda^{(l)}, \lambda^{(k)})}{\nu_l - \nu_k} - \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} \sum_{k=1}^{M_i} \frac{(\lambda^{(l)}, \alpha_i)}{\nu_l - v_k^{(i)}}, \tag{8.3.30}$$

де бистроти $v_k^{(i)}$ задовільняють наступні рівняння Бете:

$$(K, \alpha_i) + \sum_{l=1}^{N} \frac{(\lambda^{(l)}, \alpha_i)}{v_k^{(i)} - \nu_l} = \sum_{l=1, l\neq k}^{M_i} \frac{(\alpha_i, \alpha_i)}{v_k^{(i)} - v_l^{(i)}} + \sum_{j=1, j\neq i}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} \sum_{l=1}^{M_j} \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{v_k^{(i)} - v_l^{(j)}}, \tag{8.3.31}$$

а α_i, $i \in \overline{1, \mathrm{rank}\mathfrak{g}}$ – це прості корені.

Зауваження 88. У випадку редуктивної алгебри $gl(n)$ потрібно покласти скрізь в цій Теоремі $\mathrm{rank}\mathfrak{g} \to \mathrm{rank}\mathfrak{g} - 1$.

Інший факт, що буде використовуватись при виведенні спектру узагальнених гамільтоніанів БКШ — наступна властивість векторів Бете:

Твердження 8.5. *Кожний вектор Бете є вектором старшої ваги для представлень алгебр симетрії $\mathfrak{g}_0^K$.*

Зауваження 89. Відзначимо, що з цього Твердження і того факту, що гамільтоніани Годена комутують з глобальною спіновою алгеброю $\mathfrak{g}_0^K$, слідує, що власні значення гамільтоніанів Годена і гамільтоніанів типу БКШ на векторах Бете є виродженими з кратністю виродження рівною розмірності представлення алгебри $\mathfrak{g}_0^K$, що відповідає даному вектору Бете.

Нижче ми розглянемо, випадок за випадком, три класи класичних матричних алгебр Лі, відповідні гамільтоніани БКШ, їх спектр і рівняння Бете. Ми не будемо використовувати мову алгебри Кліффорда, а більш зручну мову напівпростих алгебр Лі та їх представлення.

Випадок $gl(n)$ В цьому підрозділі ми розглянемо діагоналізацію гамільтоніанів БКШ у випадку $gl(n)$. Ми обмежимось розглядом найбільш фізично цікавого випадку $n = 2m$.

Простір незвідного представлення алгебри $gl(2m)^{\oplus N}$ це $V = (\otimes_{l=1}^{N} V^{\lambda^{(l)}})$, де $V^{\lambda^{(l)}}$ – це простір незвідного представлення l-тої копії алгебри $gl(2m)$ пронумерованої старшими вагами $\lambda^{(l)} = (\lambda_1^{(l)}, ..., \lambda_{2m}^{(l)})$, $l \in \overline{1, N}$. Умова (8.3.29) в цьому випадку має наступну форму:

$$\hat{S}_{ii}^{(l)} \mathbf{\Omega} = \lambda_i^{(l)} \mathbf{\Omega}, \quad \hat{S}_{ij}^{(l)} \mathbf{\Omega} = 0, \qquad i, j \in \overline{1, 2m},\ i < j;\ l \in \overline{1, N}, \tag{8.3.32}$$

де $\mathbf{\Omega}$ – це старший вектор. Ми розглянемо представлення з наступною старшою вагою:

$$\lambda_1^{(l)} = \lambda_1^{(l)} = ... = \lambda_m^{(l)} = 1, \quad \lambda_{m+1}^{(l)} = \lambda_{m+2}^{(l)} = ... = \lambda_{2m}^{(l)} = 0, \qquad \forall l \in \overline{1, N}.$$

Зауважимо, що вектор $\mathbf{\Omega}$ співпадає з ферміонним вакуумом $|0\rangle$.

Має місце наступне Твердження [100]:

Твердження 8.6. *Спектр узагальненого гамільтоніана БКШ (8.3.18) має вигляд:*

$$h_{gBCS} = 2 \sum_{i=1}^{M_m} v_i^{(m)},$$

де бистроти $v_i^{(k)}$, $i \in \overline{1, M_k}$, $k \in \overline{1, 2m-1}$ *задовільняють рівняння Бете:*

$$\sum_{j=1; j\neq i}^{M_1} \frac{2}{(v_i^{(1)} - v_j^{(1)})} - \sum_{j=1}^{M_2} \frac{1}{(v_i^{(1)} - v_j^{(2)})} = 0, \tag{8.3.33a}$$

$$\sum_{j=1; j\neq i}^{M_2} \frac{2}{(v_i^{(2)} - v_j^{(2)})} - \sum_{j=1}^{M_1} \frac{1}{(v_i^{(2)} - v_j^{(1)})} - \sum_{j=1}^{M_3} \frac{1}{(v_i^{(2)} - v_j^{(3)})} = 0, \tag{8.3.33b}$$

$$\dots$$

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_{m-1}} \frac{2}{(v_i^{(m-1)} - v_j^{(m-1)})} - \sum_{j=1}^{M_{m-2}} \frac{1}{(v_i^{(m-1)} - v_j^{(m-2)})} - \sum_{j=1}^{M_m} \frac{1}{(v_i^{(m-1)} - v_j^{(m)})} = 0, \tag{8.3.33c}$$

$$2k_m + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{v_i^{(m)} - \nu_k} = \sum_{j=1;j\neq i}^{M_m} \frac{2}{(v_i^{(m)} - v_j^{(m)})} - \sum_{j=1}^{M_{m-1}} \frac{1}{(v_i^{(m)} - v_j^{(m-1)})} - \sum_{j=1}^{M_{m+1}} \frac{1}{(v_i^{(m)} - v_j^{(m+1)})}, \tag{8.3.33d}$$

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_{m+1}} \frac{2}{(v_i^{(m+1)} - v_j^{(m+1)})} - \sum_{j=1}^{M_m} \frac{1}{(v_i^{(m+1)} - v_j^{(m)})} - \sum_{j=1}^{M_{m+2}} \frac{1}{(v_i^{(m+1)} - v_j^{(m+2)})} = 0, \tag{8.3.33e}$$

$\ldots$

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_{2m-2}} \frac{2}{(v_i^{(2m-2)} - v_j^{(2m-2)})} - \sum_{j=1}^{M_{2m-3}} \frac{1}{(v_i^{(2m-2)} - v_j^{(2m-3)})} - \sum_{j=1}^{M_{2m-1}} \frac{1}{(v_i^{(2m-2)} - v_j^{(2m-1)})} = 0, \tag{8.3.33f}$$

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_{2m-1}} \frac{2}{(v_i^{(2m-1)} - v_j^{(2m-1)})} - \sum_{j=1}^{M_{2m-2}} \frac{1}{(v_i^{(2m-1)} - v_j^{(2m-2)})} = 0. \tag{8.3.33g}$$

Приклад 8.8. В найпростішому $m = 1$ – випадку спектр звичайного гамільтоніана БКШ – Річардсона [58], що дається формулою (8.3.18), записується наступним чином:

$$h_{gBCS} = 2\sum_{i=1}^{M_2} v_i^{(1)},$$

де бистроти $v_i^{(1)}$, $i \in \overline{1, M_1}$ задовільняють наступні рівняння типу Бете (тут ми поклали $k_1 = g^{-1}$):

$$2k_1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{v_i^{(1)} - \nu_k} = \sum_{j=1;j\neq i}^{M_1} \frac{2}{(v_i^{(1)} - v_j^{(1)})}.$$

Спектр m_i, $i \in \overline{1, 2}$ додаткових інтегралів — операторів числа частинок $\widehat{M}_{ii}$, $i \in \overline{1, 2}$ на векторах Бете залежить лише від N та M_1 і має форму:

$$m_1 = N - M_1, \quad m_2 = M_1.$$

Приклад 8.9. Важливим прикладом є протон – нейтронний $m = 2$ – випадок. Спектр узагальненого гамільтоніана БКШ $\hat{H}_{gBCS}$ (8.3.18) має вигляд:

$$h_{gBCS} = 2\sum_{i=1}^{M_2} v_i^{(2)},$$

де бистроти $v_i^{(k)}$, $i \in \overline{1, M_k}$, $k \in \overline{1, 3}$ задовільняють наступним рівнянням Бете (тут $k_2 = g^{-1}$):

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_1} \frac{2}{(v_i^{(1)} - v_j^{(1)})} - \sum_{j=1}^{M_2} \frac{1}{(v_i^{(1)} - v_j^{(2)})} = 0,$$

$$2k_2 + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{v_i^{(2)} - \nu_k} = \sum_{j=1;j\neq i}^{M_2} \frac{2}{(v_i^{(2)} - v_j^{(2)})} - \sum_{j=1}^{M_1} \frac{1}{(v_i^{(2)} - v_j^{(1)})} - \sum_{j=1}^{M_3} \frac{1}{(v_i^{(2)} - v_j^{(3)})},$$

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_3} \frac{2}{(v_i^{(3)} - v_j^{(3)})} - \sum_{j=1}^{M_2} \frac{1}{(v_i^{(3)} - v_j^{(2)})} = 0.$$

Спектр m_i, $i \in \overline{1, 4}$ додаткових інтегралів — операторів числа частинок $\widehat{M}_{ii}$, $i \in \overline{1, 4}$ на векторах Бете залежить лише від N та M_i і має форму:

$$m_1 = N - M_1, \quad m_2 = N + (M_1 - M_2), \; m_3 = (M_2 - M_3), \quad m_4 = M_3.$$

Випадок $sp(2m)$**.** В цьому підрозділі ми розглянемо діагоналізацію гамільтоніанів БКШ у випадку $\mathfrak{g} = sp(2m)$.

Простір незвідного представлення алгебри $sp(2m)^{\oplus N}$ це $V = (\otimes_{l=1}^{N} V^{\lambda^{(l)}})$, де $V^{\lambda^{(l)}}$ — це простір незвідного представлення l-тої копії алгебри $sp(2m)$ пронумерованої старшими вагами $\lambda^{(l)} = (\lambda_1^{(l)}, ..., \lambda_m^{(l)})$, $l \in \overline{1, N}$. Умова (8.3.29) в цьому випадку має наступну форму:

$$\hat{S}_i^{(l)} \mathbf{\Omega} = \lambda_i^{(l)} \mathbf{\Omega},\ \hat{S}_{\alpha_{ij}^-}^{(l)} \mathbf{\Omega} = 0,\ \hat{S}_{\alpha_{ij}^+}^{(l)} \mathbf{\Omega} = 0,\ \hat{S}_{2\alpha_i}^{(l)} \mathbf{\Omega} = 0,\ i, j \in \overline{1, m},\ i < j; l \in \overline{1, N}, \tag{8.3.34}$$

де $\mathbf{\Omega}$ це вектор старшої ваги. Ми розглянемо представлення з наступною старшою вагою:

$$\lambda_1^{(l)} = \lambda_1^{(l)} = ... = \lambda_m^{(l)} = 1, \quad \forall l \in \overline{1, N}.$$

Зауважимо, що вектор $\mathbf{\Omega}$ співпадає з ферміонним вакуумом $|0\rangle$.

Має місце наступне Твердження [100]:

Твердження 8.7. *Спектр узагальненого гамільтоніана БКШ $\hat{H}_{gBCS}$ (8.3.23) має вигляд:*

$$h_{gBCS} = 2 \sum_{i=1}^{M_m} v_i^{(m)},$$

де бистроти $v_i^{(k)}$, $i \in \overline{1, M_k}$, $k \in \overline{1, m}$ задовільняють рівняння Бете:

$$\sum_{j=1; j\neq i}^{M_1} \frac{2}{(v_i^{(1)} - v_j^{(1)})} - \sum_{j=1}^{M_2} \frac{1}{(v_i^{(1)} - v_j^{(2)})} = 0, \tag{8.3.35a}$$

$$\sum_{j=1; j\neq i}^{M_2} \frac{2}{(v_i^{(2)} - v_j^{(2)})} - \sum_{j=1}^{M_1} \frac{1}{(v_i^{(2)} - v_j^{(1)})} - \sum_{j=1}^{M_3} \frac{1}{(v_i^{(2)} - v_j^{(3)})} = 0, \tag{8.3.35b}$$

$$\dots$$

$$\sum_{j=1; j\neq i}^{M_{m-2}} \frac{2}{(v_i^{(m-2)} - v_j^{(m-2)})} - \sum_{j=1}^{M_{m-3}} \frac{1}{(v_i^{(m-2)} - v_j^{(m-3)})} - \sum_{j=1}^{M_{m-1}} \frac{1}{(v_i^{(m-2)} - v_j^{(m-1)})} = 0,$$

(8.3.35c)

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_{m-1}} \frac{2}{(v_i^{(m-1)} - v_j^{(m-1)})} - \sum_{j=1}^{M_{m-2}} \frac{1}{(v_i^{(m-1)} - v_j^{(m-2)})} - \sum_{j=1}^{M_m} \frac{2}{(v_i^{(m-1)} - v_j^{(m)})} = 0, \tag{8.3.35d}$$

$$2k_m + \sum_{k=1}^{N} \frac{2}{v_i^{(m)} - \nu_k} = \sum_{j=1;j\neq i}^{M_m} \frac{4}{(v_i^{(m)} - v_j^{(m)})} - \sum_{j=1}^{M_{m-1}} \frac{2}{(v_i^{(m)} - v_j^{(m-1)})}. \tag{8.3.35e}$$

Приклад 8.10. У фізично важливому $m = 2$ протон – нейтронному випадку спектр узагальненого гамільтоніана БКШ $\hat{H}_{gBCS}$ (8.3.24) має вигляд:

$$h_{gBCS} = 2\sum_{i=1}^{M_2} v_i^{(2)},$$

де бистроти $v_i^{(k)}$, $i \in \overline{1, M_k}$, $k \in \overline{1,2}$ задовільняють наступним рівнянням Бете (тут $k_2 = g^{-1}$):

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_1} \frac{2}{(v_i^{(1)} - v_j^{(1)})} - \sum_{j=1}^{M_2} \frac{2}{(v_i^{(1)} - v_j^{(2)})} = 0,$$

$$2k_2 + \sum_{k=1}^{N} \frac{2}{v_i^{(2)} - \nu_k} = \sum_{j=1;j\neq i}^{M_2} \frac{4}{(v_i^{(2)} - v_j^{(2)})} - \sum_{j=1}^{M_1} \frac{2}{(v_i^{(2)} - v_j^{(1)})}.$$

Ці рівняння Бете, в контексті протон – нейтронної моделі Річардсона [59], були отримані в роботі [51] використовуючи алгебру Лі $so(5) \simeq sp(4)$.

Спектр m_i, $i \in \overline{1,2}$ додаткових інтегралів – операторів числа частинок $\widehat{M}_i$, на векторах Бете залежить лише від N та M_1, M_2 і має вигляд:

$$m_1 = N - M_1, \quad m_2 = N + (M_1 - 2M_2)$$

Випадок $so(2m)$ В цьому підрозділі ми розглянемо діагоналізацію гамільтоніанів БКШ у випадку $so(2m)$.

Простір незвідного представлення алгебри $so(2m)^{\oplus N}$ це $V = (\otimes_{l=1}^{N} V^{\lambda^{(l)}})$, де $V^{\lambda^{(l)}}$ – це простір незвідного представлення i-тої копії алгебри $so(2m)$ пронумерованої старшими вагами $\lambda^{(l)} = (\lambda_1^{(l)}, ..., \lambda_m^{(l)})$, $l \in \overline{1, N}$. Умова (8.3.29) в цьому випадку має наступну форму:

$$\hat{S}_i^{(l)}\mathbf{\Omega} = \lambda_i^{(l)}\mathbf{\Omega}, \quad \hat{S}^{(l)}_{\alpha^-_{kr}}\mathbf{\Omega} = 0, \quad \hat{S}^{(l)}_{\alpha^+_{kr}}\mathbf{\Omega} = 0, \quad i, k, r \in \overline{1, m}, \ k < r; \ l \in \overline{1, N}, \tag{8.3.36}$$

де $\mathbf{\Omega}$ це вектор старшої ваги. Ми розглянемо представлення з наступною старшою вагою:

$$\lambda_1^{(l)} = \lambda_1^{(l)} = ... = \lambda_m^{(l)} = 1, \quad \forall l \in \overline{1, N}.$$

Зауважимо, що вектор $\mathbf{\Omega}$ співпадає з ферміонним вакуумом $|0\rangle$.

Має місце наступне Твердження [100]:

Твердження 8.8. *Спектр узагальненого гамільтоніана БКШ $\hat{H}_{gBCS}$ (8.3.27) має вигляд:*

$$h_{gBCS} = 2\sum_{i=1}^{M_m} v_i^{(m)},$$

де бистроти задовільняють наступні рівняння Бете:

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_1} \frac{2}{(v_i^{(1)} - v_j^{(1)})} - \sum_{j=1}^{M_2} \frac{1}{(v_i^{(1)} - v_j^{(2)})} = 0, \tag{8.3.37a}$$

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_2} \frac{2}{(v_i^{(2)} - v_j^{(2)})} - \sum_{j=1}^{M_1} \frac{1}{(v_i^{(2)} - v_j^{(1)})} - \sum_{j=1}^{M_3} \frac{1}{(v_i^{(2)} - v_j^{(3)})} = 0, \tag{8.3.37b}$$

$$\dots$$

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_{m-3}} \frac{2}{(v_i^{(m-3)} - v_j^{(m-3)})} - \sum_{j=1}^{M_{m-4}} \frac{1}{(v_i^{(m-3)} - v_j^{(m-4)})} - \sum_{j=1}^{M_{m-2}} \frac{1}{(v_i^{(m-3)} - v_j^{(m-2)})} = 0,$$

(8.3.37c)

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_{m-2}} \frac{2}{(v_i^{(m-2)} - v_j^{(m-2)})} - \sum_{j=1}^{M_{m-3}} \frac{1}{(v_i^{(m-2)} - v_j^{(m-3)})} - \sum_{j=1}^{M_{m-1}} \frac{1}{(v_i^{(m-2)} - v_j^{(m-1)})} - $$
$$- \sum_{j=1}^{M_m} \frac{1}{(v_i^{(m-2)} - v_j^{(m)})} = 0, \quad (8.3.37d)$$

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_{m-1}} \frac{2}{(v_i^{(m-1)} - v_j^{(m-1)})} - \sum_{j=1}^{M_{m-2}} \frac{1}{(v_i^{(m-1)} - v_j^{(m-2)})} = 0, \qquad (8.3.37e)$$

$$2k_m + \sum_{k=1}^{N} \frac{2}{v_i^{(m)} - \nu_k} = \sum_{j=1;j\neq i}^{M_m} \frac{2}{(v_i^{(m)} - v_j^{(m)})} - \sum_{j=1}^{M_{m-2}} \frac{1}{(v_i^{(m)} - v_j^{(m-2)})}. \quad (8.3.37f)$$

Приклад 8.11. В найбільш важливому протон – нейтронному $m = 2$-випадку, спектр гамільтоніанів БКШ $\hat{H}_{gBCS}$ (8.3.28) наступний:

$$h_{gBCS} = 2\sum_{i=1}^{M_2} v_i^{(2)},$$

де бистроти $v_i^{(k)}$, $i \in \overline{1, M_k}$, $k \in \overline{1, 2}$ задовільняють рівняння Бете:

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_1} \frac{2}{(v_i^{(1)} - v_j^{(1)})} = 0, \qquad (8.3.38a)$$

$$2k_2 + \sum_{k=1}^{N} \frac{2}{v_i^{(2)} - \nu_k} = \sum_{j=1;j\neq i}^{M_2} \frac{2}{(v_i^{(2)} - v_j^{(2)})}. \qquad (8.3.38b)$$

Зауважимо, що в цьому випадку ми маємо два незалежних набори рівнянь Бете. Це пояснюється ізоморфізмом $so(4) \simeq so(3) \oplus so(3)$. Більше того, легко вивести, що $M_1 = 0$ (виводиться домноженням першого рівняння Бете на $v_i^{(1)}$ і підсумовуванням результату за інтексом i). Отже, рівняння

(8.3.38a) ефективно зникає і залишається лише рівняння (8.3.38b), що співпадає з рівннями Бете для $so(3)$ – магнетиків Годена у зовнішньому магнітному полі та представленням зі спином одиниця в кожному вузлі спінового ланцюжка. Це відображає той факт, що зконструйовані гамільтоніани БКШ у $so(4)$– випадку можуть бути повністю переписані в термінах $so^{\oplus N}(3)$ підалгебри алгебри Лі $so^{\oplus N}(4)$.

Спектр m_i, $i \in \overline{1,2}$ додаткових інтегралів – операторів числа частинок $\widehat{M_i}$ на векторах Бете залежить лише від N, M_2 $(M_1 = 0)$ і має форму:

$$m_i = N - M_2, \quad i \in \overline{1,2}.$$

8.4. Z_2-градуйовані r-матриці і ферміонні моделі

В цьому підрозділі ми побудуємо інтегровні моделі БКШ $p_x + ip_y$-типу з багатьма різновидами ферміонів стартуючи з Z_2-градуйованих r-матриць і відповідних систем типу Годена у зовнішньому магнітному полі.

8.4.1. Z_2-градуйовані r-матриці і системи типу Годена

Z_2-градуйовані r-матриці. Нагадаємо структуру Z_2- градуйованих r-матриць, введених у розділі (2). Нехай алгебра Лі $\mathfrak{g}$, її редуктивна підалгебра $\mathfrak{g}_0^K$, підалгебри $\mathfrak{g}_{\pm 1}^K$ і системи коренів Δ, Δ_K визначені як в попередньому розділі. Розглянемо класичну r-матрицю задану формулою:

$$r_{12}(u,v) = \frac{2v}{u^2 - v^2}\Big(\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} H_i \otimes H_i + \sum_{\alpha \in (\Delta_K)_+} (X_\alpha \otimes X_{-\alpha} + X_{-\alpha} \otimes X_\alpha)\Big) + \\ + \frac{2u}{u^2 - v^2} \sum_{\alpha \in (\Delta / \Delta_K)_+} (X_\alpha \otimes X_{-\alpha} + X_{-\alpha} \otimes X_\alpha). \quad (8.4.39)$$

Ця r-матриця пов'язана із Z_2-градуйованням алгебри $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\overline{0}} + \mathfrak{g}_{\overline{1}}$, де

$$\mathfrak{g}_{\overline{0}} = \mathfrak{g}_0^K, \quad \mathfrak{g}_{\overline{1}} = \mathfrak{g}_1^K + \mathfrak{g}_{-1}^K.$$

Ця r-матриця має наступний елемент зсуву: $c(u) = u^{-1}K$, де K – елемент підалгебри Картана, що централізується підалгеброю $\mathfrak{g}_0^K$.

Матриця Лакса та узагальнені гамільтоніани Годена Розглянемо матрицю Лакса узагальнених систем Годена у зовнішньому магнітному полі, що відповідає r-матриці (8.4.39). Вона має наступний вигляд:

$$\hat{L}(u) = \sum_{k=1}^{N}\Big(\frac{2u}{(\nu_k^2 - u^2)}\Big(\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} \hat{S}_i^{(k)} H_i + \sum_{\alpha\in(\Delta_K)_+} (\hat{S}_\alpha^{(k)} X_{-\alpha} + \hat{S}_{-\alpha}^{(k)} X_\alpha)\Big) +$$
$$+ \frac{2\nu_k}{(\nu_k^2 - u^2)} \sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+} (\hat{S}_\alpha^{(k)} X_{-\alpha} + \hat{S}_{-\alpha}^{(k)} X_\alpha)\Big) + \frac{1}{u}\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} k_i H_i,$$

Відповідні гамільтоніани типу Годена записуються наступним чином:

$$\hat{H}_l = \sum_{k=1,k\neq l}^{N}\Big(\frac{2\nu_l}{(\nu_k^2 - \nu_l^2)}\Big(\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} \hat{S}_i^{(k)} \hat{S}_i^{(l)} + \sum_{\alpha\in(\Delta_K)_+} (\hat{S}_\alpha^{(k)} \hat{S}_{-\alpha}^{(l)} + \hat{S}_{-\alpha}^{(k)} \hat{S}_\alpha^{(l)})\Big) +$$
$$+ \frac{2\nu_k}{(\nu_k^2 - \nu_l^2)} \sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+} (\hat{S}_\alpha^{(k)} \hat{S}_{-\alpha}^{(l)} + \hat{S}_{-\alpha}^{(k)} \hat{S}_\alpha^{(l)})\Big) - \frac{1}{2\nu_l}\Big(\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} \hat{S}_i^{(l)} \hat{S}_i^{(l)} +$$
$$\sum_{\alpha\in(\Delta_K)_+} (\hat{S}_\alpha^{(l)} \hat{S}_{-\alpha}^{(l)} + \hat{S}_{-\alpha}^{(l)} \hat{S}_\alpha^{(l)})\Big) + \frac{1}{2\nu_l} \sum_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+} \big(\hat{S}_\alpha^{(l)} \hat{S}_{-\alpha}^{(l)} + \hat{S}_{-\alpha}^{(l)} \hat{S}_\alpha^{(l)}\big) + \frac{1}{\nu_l}\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} k_i \hat{S}_i^{(l)}, \tag{8.4.40}$$

де $K = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} k_i H_i$.

Зауваження 90. Алгебра симетрії розглянутих гамільтоніанів Годена у зовнішньому магнітному полі співпадає з глобальною спіновою алгеброю $\mathfrak{g}_0^K$. Вона містить підалгебру ізоморфну підалгебрі Картана.

8.4.2. Узагальнені моделі БКШ типу $p_x + ip_y$ В цьому розділі ми випишемо узагальнені гамільтоніани БКШ, що відповідають розглянутим Z_2– градуйованим r-матрицям.

Гамільтоніани БКШ типу $p_x + ip_y$ у спіновій формі. Щоб отримати гамільтоніани БКШ типу $p_x + ip_y$, необхідно спершу розглянути їх спінові аналоги. З цією метою ми розглянемо наступну лінійну комбінацію Z_2–градуйованих гамільтоніанів Годена у магнітному полі:

$$\hat{H}^{p_x+ip_y}_{gBCS} = \sum_{l=1}^{N} \nu_l^{-1} \hat{H}_l + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N} \nu_l^{-2} \hat{C}_l^2, \tag{8.4.41}$$

де $\hat{C}_l^2$ – оператори Казиміра l– тої копії алгебри $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}^{\oplus N}$. Маємо:

$$\hat{H}^{p_x+ip_y}_{gBCS} = \sum_{k=1}^{N} \nu_l^{-2} \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} k_i \hat{S}_i^{(l)} + \sum_{k,l=1}^{N} \nu_k^{-1} \nu_l^{-1} \sum_{\alpha \in (\Delta/\Delta_K)_+} (\hat{S}_\alpha^{(k)} \hat{S}_{-\alpha}^{(l)} + \hat{S}_{-\alpha}^{(k)} \hat{S}_\alpha^{(l)}), \tag{8.4.42}$$

де $K = \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} k_i H_i$ належить до центру алгебри Лі $\mathfrak{g}_0^K$.

Перепишемо гамільтоніан $\hat{H}^{p_x+ip_y}_{gBCS}$ в нормально – впорядкованій формі:

$$\hat{H}^{p_x+ip_y}_{gBCS} = \sum_{k=1}^{N} \nu_l^{-2} \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} (k_i + \delta_K(H_i)) \hat{S}_i^{(l)} + 2 \sum_{k,l=1}^{N} \nu_k^{-1} \nu_l^{-1} \sum_{\alpha \in (\Delta/\Delta_K)_+} \hat{S}_{-\alpha}^{(k)} \hat{S}_\alpha^{(l)}, \tag{8.4.43}$$

де $\delta_K \equiv \sum\limits_{\alpha \in (\Delta/\Delta_K)_+} \alpha$.

Гамільтоніан (8.4.43) є загальним інтегровним гамільтоніаном БКШ $p_x + ip_y$- типу записаним у спіновій формі.

Зауваження 91. Гамільтоніан (8.4.43) комутує з глобальними операторами $\hat{M}_i = \sum\limits_{n=1}^{N} \hat{S}_i^{(k)}$, $i \in \overline{1, \mathrm{rank}\mathfrak{g}}$, що представляють Картанівську симетрію і включаються в комутативне сімейство що діагоналізується одночасно з $\hat{H}^{p_x+ip_y}_{gBCS}$. Це означає що число ферміонів кожного типу є “хорошим” квантовим числом.

8.4.3. Гамільтоніани БКШ типу $p_x + ip_y$: випадок алгебри $gl(n)$. Зараз ми готові отримати гамільтоніани БКШ типу $gl(n)$ з багатьма типами ферміонів. З цією метою ми скористуємося формулами ферміонізації (8.2.7) і спеціально вибраним елементом K описаним в підрозділі 8.2.2. Використовуючи загальну формулу (8.4.43) для цього вибору алгебри $\mathfrak{g}$ і кореневої підсистеми $(\Delta/\Delta_K)_+$, ми отримаємо наступний спіновий гамільтоніан:

$$\hat{H}^{p_x+ip_y}_{gBCS} = \sum_{l=1}^{N} \nu_l^{-2}\Big(\sum_{i=1}^{p}(k_p + (n-p))S^{(l)}_{ii} + \sum_{i=p+1}^{n}(k_n - p)S^{(l)}_{ii}\Big) + \\ + 2\sum_{k,l=1}^{N} \nu_k^{-1}\nu_l^{-1} \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=p+1}^{n} \hat{S}^{(k)}_{ji}\hat{S}^{(l)}_{ij}, \quad (8.4.44)$$

який дає (з точністю до константи) після ферміонізації (8.2.7) наступний гамільтоніан типу БКШ:

$$\hat{H}^{p_x+ip_y}_{gBCS} = \sum_{l=1}^{N} \epsilon_l\Big(\sum_{i=1}^{p}(-k_p - (n-p))c^{\dagger}_{l,i}c_{l,i} + \sum_{i=p+1}^{n}(k_n - p)c^{\dagger}_{l,i}c_{l,i}\Big) + \\ + 2\sum_{k,l=1}^{N}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=p+1}^{n} \sqrt{\epsilon_k}\sqrt{\epsilon_l}c^{\dagger}_{l,j}c^{\dagger}_{l,i}c_{k,i}c_{k,j}, \quad (8.4.45)$$

де ми ввели наступне очевидне позначення: $\epsilon_l \equiv \nu_l^{-2}$.

Гамільтоніани БКШ типу p_x+ip_y: випадок алгебри $gl(2m)$. Розглянемо спеціальний випадок $n = 2m$, $p = m$, покладемо $k_{2m} = -k_m$ і будемо вважати що оператори $c_{l,i}$, $c^{\dagger}_{l,i}$ і $c_{l,i+m}$, $c^{\dagger}_{l,i+m}$ відповідають двом різним станам ферміона номеру l і типу i:

$$c_{l,i} \equiv c_{l,i,-},\ c^{\dagger}_{l,i} \equiv c^{\dagger}_{l,i,-},\ c_{l,i+m} \equiv c_{l,i,+},\ c^{\dagger}_{l,i+m} \equiv c^{\dagger}_{l,i,+},\ i \in \overline{1,m}, l \in \overline{1,N}.$$

В таких позначеннях ми бачимо що гамільтоніан (8.4.45) (після ділення на $-(k_m + m)$) набуває вигляду:

$$\hat{H}^{p_x+ip_y}_{gBCS} = \sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{m} \epsilon_l(c^{\dagger}_{l,i,-}c_{l,i,-} + c^{\dagger}_{l,i,+}c_{l,i,+}) - g\sum_{k,l=1}^{N} \sqrt{\epsilon_k}\sqrt{\epsilon_l}\sum_{i,j=1}^{m} c^{\dagger}_{l,j,+}c^{\dagger}_{l,i,-}c_{k,i,-}c_{k,j,+},$$

(8.4.46)

де $g \equiv 2(k_m + m)^{-1}$.

Перший член в гамільтоніані (8.4.46) - це кінетичний член ферміонів з вільними енергіями $\epsilon_l \equiv \nu_l^{-2}$. Другий член описує парну взаємодію m типів ферміонів. Взаємодія має місце тільки між ферміонами, що знаходяться в протилежних станах і її сила не залежить від типу ферміона, але залежить від його номера, тобто:

$$g_{k,i;l,j} = g\sqrt{\epsilon_k}\sqrt{\epsilon_l}, \quad i, j \in \overline{1, m},\ k, l \in \overline{1, N}.$$

З загальних симетрійних міркувань, алгебра симетрій гамільтоніану (8.4.46) ізоморфна алгебрі Лі $gl(m) \oplus gl(m)$ з наступними генераторами:

$$\hat{M}_{ij} = \sum_{l=1}^{N} c_{l,i,-}c_{l,j,-}^{\dagger},\ i, j \in \overline{1, m}, \quad \hat{M}_{st} = \sum_{l=1}^{N} c_{l,s,+}^{\dagger}c_{l,t,+},\ s, t \in \overline{m+1, 2m}.$$

Ця алгебра Лі містить комутативну підалгебру операторів числа частинок $\hat{M}_{ii}$, $\hat{M}_{ss}$, $i \in \overline{1, m}$, $s \in \overline{m+1, m}$, тобто число частинок кожного типу $i \in \overline{1, m}$ з кожним спіном $\delta \in (+, -)$ є “хорошим” квантовим числом.

Приклад 8.12. Розглянемо найпростіший приклад одного типу ферміонів $m = 1$ ($\mathfrak{g} = gl(2)$). В цьому випадку ми отримуємо наступний гамільтоніан:

$$\hat{H}_{gBCS}^{p_x+ip_y} = \sum_{l=1}^{N} \epsilon_l(c_{l,-}^{\dagger}c_{l,-} + c_{l,+}^{\dagger}c_{l,+}) - g\sum_{k,l=1}^{N} \sqrt{\epsilon_k}\sqrt{\epsilon_l}c_{l,+}^{\dagger}c_{l,-}^{\dagger}c_{k,-}c_{k,+}. \quad (8.4.47)$$

Він співпадає з гамільтоніаном БКШ типу $p_x + ip_y$ відкритим у роботах [92] і [39]. Алгебра симетрій гамільтоніану (8.4.48) – це алгебра $gl(1) \oplus gl(1)$ з наступними генераторами:

$$\hat{M}_{11} = \sum_{l=1}^{N} c_{l,-}c_{l,-}^{\dagger}, \quad \hat{M}_{22} = \sum_{l=1}^{N} c_{l,+}^{\dagger}c_{l,+}.$$

Приклад 8.13. Розглянемо більш складний випадок $m = 2$ ($\mathfrak{g} = gl(4)$). В цьому випадку ми маємо два типи ферміонів, що можуть бути проінтерпритовані як протони і нейтрони. Вводячи наступні позначення

$$c_{l,1,-} \equiv n_{l,-}, \quad c^{\dagger}_{l,1,-} \equiv n^{\dagger}_{l,-}, \quad c_{l,1,+} \equiv n_{l,+}, \quad c^{\dagger}_{l,1,+} \equiv n^{\dagger}_{l,+},$$
$$c_{l,2,-} \equiv p_{l,-}, \quad c^{\dagger}_{l,2,-} \equiv p^{\dagger}_{l,-}, \quad c_{l,2,+} \equiv p_{l,+}, \quad c^{\dagger}_{l,2,+} \equiv p^{\dagger}_{l,+},$$

ми отримуємо наступний інтегровний протон – нейтронний гамільтоніан:

$$\hat{H}^{p_x+ip_y}_{gBCS} = \sum_{l=1}^{N} \epsilon_l (n^{\dagger}_{l,-} n_{l,-} + n^{\dagger}_{l,+} n_{l,+} + p^{\dagger}_{l,-} p_{l,-} + p^{\dagger}_{l,+} p_{l,+}) -$$
$$- g \sum_{k,l=1}^{N} \sqrt{\epsilon_k}\sqrt{\epsilon_l} \big(n^{\dagger}_{l,+} n^{\dagger}_{l,-} n_{k,-} n_{k,+} + p^{\dagger}_{l,+} p^{\dagger}_{l,-} p_{k,-} p_{k,+} + p^{\dagger}_{l,+} n^{\dagger}_{l,-} n_{k,-} p_{k,+}$$
$$+ n^{\dagger}_{l,+} p^{\dagger}_{l,-} p_{k,-} n_{k,+} \big). \quad (8.4.48)$$

З загальних Лі-теоретичних міркувань, симетрія гамільтоніану (8.4.48) дається алгеброю Лі $gl(2) \oplus gl(2)$ з наступними генераторами:

$$\hat{M}_{ij} = \sum_{l=1}^{N} c_{l,i,-} c^{\dagger}_{l,j,-}, \ i,j \in 1,2, \quad \hat{M}_{st} = \sum_{l=1}^{N} c^{\dagger}_{l,s,+} c_{l,t,+}, \ s,t \in 3,4.$$

Ця алгебра Лі містить комутативну підалгебру – алгебру операторів числа частинок $\hat{M}_{ii}$, $i \in \overline{1,4}$, тобто в цьому випадку число протонів і нейтронів кожного спіну $\delta \in (+,-)$ є "хорошим" квантовим числом.

8.4.4. Гамільтоніани БКШ типу $p_x + ip_y$: випадок алгебри $sp(2m)$.

Розглянемо гамільтоніани БКШ типу $p_x + ip_y$, що асоційовані з алгеброю $sp(2m)$. З цією метою ми розглянемо формули ферміонізації (8.2.9) і спеціально вибраний елемент K описаний в підрозділі 8.2.2. Зовнішнє магнітне поле і сама r-матриця визначені за допомогою цього елемену K і мають спільну з ним групу симетрій.

Застосовуючи загальну формулу (8.4.43) для цього вибору алгебри $\mathfrak{g}$ елементу K і кореневої підсистеми $(\Delta/\Delta_K)_+$ ми отримуємо наступний спіновий гамільтоніан типу БКШ:

$$\hat{H}_{gBCS}^{p_x+ip_y} = \sum_{l=1}^{N} \nu_l^{-2} \sum_{i=1}^{m} (k_i + m + 1) S_i^{(l)} + \\ + 2 \sum_{k,l=1}^{N} \nu_k^{-1} \nu_l^{-1} \Big(\sum_{i,j=1, i<j}^{m} S_{-\alpha_{i,j}^+}^{(l)} S_{\alpha_{i,j}^+}^{(k)} + \sum_{i=1}^{m} S_{-2\alpha_i}^{(l)} S_{2\alpha_i}^{(k)} \Big), \quad (8.4.49)$$

Використовуючи формули ферміонізації (8.2.9) і вводячи позначення:

$$c_{l,i} \equiv c_{l,i,-}, \quad c_{l,i}^{\dagger} \equiv c_{l,i,-}^{\dagger}, \quad c_{l,i+m} \equiv c_{l,i,+}, \quad c_{l,i+m}^{\dagger} \equiv c_{l,i,+}^{\dagger}, \quad i \in \overline{1,m}, l \in \overline{1,N}$$

ми отримуємо наступний вираз для гамільтоніана (8.4.49):

$$\hat{H}_{gBCS}^{p_x+ip_y} = \sum_{l=1}^{N} \sum_{i=1}^{m} \epsilon_l (c_{l,i,-}^{\dagger} c_{l,i,-} + c_{l,i,+}^{\dagger} c_{l,i,+}) - \\ - 2g \sum_{k,l=1}^{N} \sqrt{\epsilon_k} \sqrt{\epsilon_l} \sum_{i=1}^{m} c_{l,i,+}^{\dagger} c_{l,i,-}^{\dagger} c_{k,i,-} c_{k,i,+} - \\ - g \sum_{k,l=1}^{N} \sqrt{\epsilon_k} \sqrt{\epsilon_l} \sum_{i,j=1, i<j}^{m} (c_{l,j,+}^{\dagger} c_{l,i,-}^{\dagger} + c_{l,i,+}^{\dagger} c_{l,j,-}^{\dagger})(c_{k,i,-} c_{k,j,+} + c_{k,j,-} c_{k,i,+}), \quad (8.4.50)$$

де $\epsilon_l = \nu_l^{-2}$, $g = 2(k_m + (m+1))^{-1}$ (для того, щоб отримати гамільтоніан (8.4.50) ми відняли від гамільтоніана (8.4.49) вакуумну енергію $(k_m+(m+1))m \sum_{l=1}^{N} \epsilon_l$, помножили цей гамільтоніан на $-(k_m+(m+1))^{-1}$ і використали те, що в нашому випадку $k_1 = ... = k_m$).

Перший член в гамільтоніані (8.4.50) – кінетичний. Другий і третій члени описують парну взаємодію m різних типів ферміонів. Взаємодія відбувається лише між ферміонами що знаходяться в протилежних станах і не залежать від їхнього типу, але залежить від номеру ферміону кожного типу. Взаємодія є менш симетричною, ніж в розглянутому попередньому прикладі випадку алгебри $\mathfrak{g} = gl(2m)$. З загальних міркувань викладених вище слідує, що алгебра симетрії для цієї моделі співпадає з алгеброю $gl(m)$ породженою наступними операторами:

$$\hat{M}_i = \sum_{l=1}^{N}(1 - (c^{\dagger}_{l,i,-}c_{l,i,-} + c^{\dagger}_{l,i,+}c_{l,i,+})), \quad \text{де} \;\; i \in \overline{1,m}.$$

$$\hat{M}_{\alpha^{-}_{i,j}} = \sum_{l=1}^{N}(c_{l,i,-}c^{\dagger}_{l,j,-} - c^{\dagger}_{l,j,+}c_{l,i,+}), \quad \text{де } i<j, \; i,j \in \overline{1,m},$$

$$\hat{M}_{-\alpha^{-}_{i,j}} = (\hat{M}_{\alpha^{-}_{i,j}})^{\dagger}, \quad \text{де} \;\; i<j, \; i,j \in \overline{1,m}.$$

Розглянемо найбільш фізично цікавий приклад подібних гамільтоніанів.

Приклад 8.14. Нехай $m = 2$ ($\mathfrak{g} = sp(4)$). В цьому випадку ми маємо два типи ферміонів, що можуть бути проінтерпритовані як протони і нейтрони. Вводячи наступні позначення:

$$c_{l,1,-} \equiv n_{l,-}, \; c^{\dagger}_{l,1,-} \equiv n^{\dagger}_{l,-}, \; c_{l,1,+} \equiv n_{l,+}, \; c^{\dagger}_{l,1,+} \equiv n^{\dagger}_{l,+},$$
$$c_{l,2,-} \equiv p_{l,-}, \; c^{\dagger}_{l,2,-} \equiv p^{\dagger}_{l,-}, \; c_{l,2,+} \equiv p_{l,+}, \; c^{\dagger}_{l,2,+} \equiv p^{\dagger}_{l,+},$$

ми отримуємо наступні інтегровні протон – нейтронні гамільтоніани БКШ типу $p_x + ip_y$:

$$\hat{H}^{p_x+ip_y}_{gBCS} = \sum_{l=1}^{N} \epsilon_l (n^{\dagger}_{l,-}n_{l,-} + n^{\dagger}_{l,+}n_{l,+} + p^{\dagger}_{l,-}p_{l,-} + p^{\dagger}_{l,+}p_{l,+}) -$$
$$- 2g \sum_{k,l=1}^{N} \sqrt{\epsilon_k}\sqrt{\epsilon_l}(n^{\dagger}_{l,+}n^{\dagger}_{l,-}n_{k,-}n_{k,+} + p^{\dagger}_{l,+}p^{\dagger}_{l,-}p_{k,-}p_{k,+}) -$$
$$- g \sum_{k,l=1}^{N} \sqrt{\epsilon_k}\sqrt{\epsilon_l}(p^{\dagger}_{l,+}n^{\dagger}_{l,-} + n^{\dagger}_{l,+}p^{\dagger}_{l,-})(n_{k,-}p_{k,+} + p_{k,-}n_{k,+}). \quad (8.4.51)$$

Гамільтоніан (8.4.51) є точним $p_x + ip_y$ – аналогом протон – нейтроного гамільтоніану Річардсона [59]. З загальних Лі – теоретичних міркувань слідує, що алгебра симетрії гамільтоніану (8.4.51) співпадає з алгеброю Лі $gl(2)$ і породжується наступними генераторами:

$$\hat{M}_1 = \sum_{l=1}^{N}(1 - (n^{\dagger}_{l,-}n_{l,-} + n^{\dagger}_{l,+}n_{l,+})), \quad \hat{M}_2 = \sum_{l=1}^{N}(1 - (p^{\dagger}_{l,-}p_{l,-} + p^{\dagger}_{l,+}p_{l,+})),$$

$$\hat{M}_{\alpha^-_{1,2}} = \sum_{l=1}^{N}(n_{l,-}p^\dagger_{l,-} - p^\dagger_{l,+}n_{l,+}), \quad \hat{M}_{-\alpha^-_{1,2}} = \sum_{l=1}^{N}(p_{l,-}n^\dagger_{l,-} - n^\dagger_{l,+}p_{l,+}), \text{ де } l \in \overline{1,N}.$$

8.4.5. Гамільтоніани БКШ типу $p_x + ip_y$: випадок алгебри $so(2m)$
Розглянемо гамільтоніанти БКШ типу $p_x + ip_y$ асоційовані з алгеброю $so(2m)$. З цією метою ми використаємо формули ферміонізації (8.2.10) і спеціально вибраний елемент K описаний в підрозділі 8.2.2. Зовнішнє магнітне поле і r-матриця визначені за допомогою цього елементу K і мають з ним однакову групу симетрії.

Застосовуючи загальну формулу (8.4.43) для цього вибору алгебри Лі $\mathfrak{g}$ елементу K і кореневої підсистеми $(\Delta/\Delta_K)_+$, ми отримуємо наступний гамільтоніан БКШ записаний у спіновій формі:

$$\hat{H}^{p_x+ip_y}_{gBCS} = \sum_{l=1}^{N} \nu_l^{-2} \sum_{i=1}^{m}(k_i + m - 1)S^{(l)}_i + 2\sum_{k,l=1}^{N} \nu_k^{-1}\nu_l^{-1} \sum_{i,j=1,i<j}^{m} S^{(l)}_{-\alpha^+_{i,j}} S^{(k)}_{\alpha^+_{i,j}}, \tag{8.4.52}$$

Використовуючи формули ферміонізації (8.2.10) і вводячи позначення:

$$c_{l,i} \equiv c_{l,i,-}, \quad c^\dagger_{l,i} \equiv c^\dagger_{l,i,-}, \quad c_{l,i+m} \equiv c_{l,i,+}, \quad c^\dagger_{l,i+m} \equiv c^\dagger_{l,i,+}, \quad i \in \overline{1,m}, l \in \overline{1,N}$$

ми отримуємо наступний вираз для гамільтоніана (8.4.52):

$$\hat{H}^{p_x+ip_y}_{gBCS} = \sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{m} \epsilon_l(c^\dagger_{l,i,-}c_{l,i,-} + c^\dagger_{l,i,+}c_{l,i,+}) -$$
$$- g\sum_{k,l=1}^{N} \sqrt{\epsilon_k}\sqrt{\epsilon_l} \sum_{i,j=1,i<j}^{m} (c^\dagger_{l,i,+}c^\dagger_{l,j,-} - c^\dagger_{l,j,+}c^\dagger_{l,i,-})(c_{k,j,-}c_{k,i,+} - c_{k,i,-}c_{k,j,+}), \tag{8.4.53}$$

де $\epsilon_l = \nu_l^{-2}$, $g = 2(k_m + (m-1))^{-1}$ і ми використали, що в розглядуваному випадку $k_1 = ... = k_m$, відняли від гамільтоніану (8.4.52) вакуумну енергію $(k_m + (m-1))m \sum_{l=1}^{N} \epsilon_l$ і помножили його на $-(k_m + (m-1))^{-1}$.

Перший член гамільтоніана (8.4.53) – кінетичний. Другий описує парну взаємодію ферміонів m різних типів. Взаємодія є менш симетрична ніж у випадку $\mathfrak{g} = gl(2m)$. З загальних міркувань слідує, що алгебра симетрії цієї моделі це $gl(m)$ і її базис здається тими ж формулами що і в випадку $sp(2m)$.

Приклад 8.15. Нехай $\mathfrak{g} = so(4)$ $(m = 2)$. В цьому випадку ми маємо два типи ферміонів що можуть бути проінтерпритовані як протони і нейтрони. Вводячи наступні позначення:

$$\begin{aligned}
&c_{l,1,-} \equiv n_{l,-}, \quad c^{\dagger}_{l,1,-} \equiv n^{\dagger}_{l,-}, \quad c_{l,1,+} \equiv n_{l,+}, \quad c^{\dagger}_{l,1,+} \equiv n^{\dagger}_{l,+},\\
&c_{l,2,-} \equiv p_{l,-}, \quad c^{\dagger}_{l,2,-} \equiv p^{\dagger}_{l,-}, \quad c_{l,2,+} \equiv p_{l,+}, \quad c^{\dagger}_{l,2,+} \equiv p^{\dagger}_{l,+},
\end{aligned}$$

ми отримуємо протон – нейтронний гамільтоніан БКШ вигляду:

$$\begin{aligned}
\hat{H}^{p_x+ip_y}_{gBCS} = &\sum_{l=1}^{N} \epsilon_l (n^{\dagger}_{l,-} n_{l,-} + n^{\dagger}_{l,+} n_{l,+} + p^{\dagger}_{l,-} p_{l,-} + p^{\dagger}_{l,+} p_{l,+}) -\\
&- g \sum_{k,l=1}^{N} \sqrt{\epsilon_k}\sqrt{\epsilon_l} (p^{\dagger}_{l,+} n^{\dagger}_{l,-} - n^{\dagger}_{l,+} p^{\dagger}_{l,-})(n_{k,-} p_{k,+} - p_{k,-} n_{k,+}).
\end{aligned} \tag{8.4.54}$$

з загальних міркувань (див. Вище) слідує, що алгебра симетрії гамільтоніану (8.4.54) – це алгебра Лі $gl(2)$ і її базис дається тими ж самими формулами що і у випадку алгебри Лі $sp(4)$.

8.5. Діагоналізація.

В цьому підрозділі ми опишемо спектр отриманих в попередньому підрозділі гамільтоніанів типу БКШ в термінах розв'язків рівнянь типу Бете.

Нагадаємо, що представлення алгебри $\mathfrak{g}^{\oplus N}$ називається представлення зі старшою вагою $\Lambda = (\lambda^{(1)}, ..., \lambda^{(N)})$, $\lambda^{(l)} = (\lambda^{(l)}_1, ..., \lambda^{(l)}_{\mathrm{rank}\mathfrak{g}})$, $l \in \overline{1, N}$ якщо існує такий вектор $\mathbf{\Omega}$, що:

$$\hat{S}^{(l)}_i \mathbf{\Omega} = \lambda^{(l)}_i \mathbf{\Omega}, \quad \hat{S}^{(l)}_{\alpha} \mathbf{\Omega} = 0, \quad i \in \overline{1, \mathrm{rank}\mathfrak{g}},\ \forall \alpha \in \Delta_+, \forall\, l \in \overline{1, N}. \tag{8.5.55}$$

Наш розгляд базується на наступній Теоремі [103]:

Теорема 8.2. *Нехай $\mathfrak{g} = gl(n)$, $so(2m)$ або $sp(2m)$ і елемент K Картанівської підалгебри означений як в розділі 8.3.3. Тоді спектр гамільтоніанів Годена у зовнішньому магнітному полі $\hat{H}_l$ (8.4.40) в скінченомірному представленні алгебри Лі $\mathfrak{g}^{\oplus N}$ зі старшою вагою $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, ..., \lambda^{(N)})$ характеризується бистротами $v_k^{(i)}$, $k \in \overline{1, M_i}$, $i \in \overline{1, \mathrm{rank}\mathfrak{g}}$ і має наступну форму:*

$$h_l = h_l^0 + 2\nu_l \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} \sum_{k=1}^{M_i} \frac{(\lambda^{(l)}, \tilde{\alpha}_i)}{(\nu_l^2 - (v_k^{(i)})^2)}, \tag{8.5.56}$$

де:

$$h_l^0 = 2\nu_l \sum_{k=1, k\neq l}^{N} \frac{(\lambda^{(k)}, \lambda^{(l)})}{(\nu_k^2 - \nu_l^2)} - \frac{1}{2\nu_l}\big((\lambda^{(l)}, \lambda^{(l)}) + (\rho^K, \lambda^{(l)})\big) + \frac{1}{2\nu_l}(2K + \rho_K, \lambda^{(l)}), \tag{8.5.57}$$

власне значення гамільтоніану $\hat{H}_l$ на старшому векторі $\mathbf{\Omega}$, $\rho^K = \sum\limits_{\alpha\in(\Delta_K)_+} \alpha$, $\rho_K = \sum\limits_{\alpha\in(\Delta/\Delta_K)_+} \alpha$ і бистроти $v_k^{(i)}$ задовільняють рівнянням Бете:

$$\sum_{l=1}^{N} \frac{(\lambda^{(l)}, \tilde{\alpha}_i)}{(\nu_l)^2 - (v_k^{(i)})^2} + \frac{1}{4(v_k^{(i)})^2}(2K + \rho_K - \rho^K, \tilde{\alpha}_i) = \sum_{l=1, l\neq k}^{M_i} \frac{(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_i)}{(v_l^{(i)})^2 - (v_k^{(i)})^2} - \frac{(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_i)}{4(v_k^{(i)})^2} + \sum_{j=1, j\neq i}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} \sum_{l=1}^{M_j} \frac{(\tilde{\alpha}_j, \tilde{\alpha}_i)}{(v_l^{(j)})^2 - (v_k^{(i)})^2}, \tag{8.5.58}$$

де $\tilde{\alpha}_i$, $i \in \overline{1, \mathrm{rank}\mathfrak{g}}$ – прості корені.

Зауваження 92. Враховуючи визначення (8.4.41) гамільтоніану $\hat{H}_{gBCS}^{p_x+ip_y}$ і явну форму спектру операторів Казиміра, ми отримуємо наступну відповідь для його спектру:

$$h_{gBCS}^{p_x+ip_y} = \sum_{l=1}^{N} \frac{1}{\nu_l^2}(K + \rho_K, \lambda^{(l)}) + 2\sum_{l=1}^{N} \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} \sum_{k=1}^{M_i} \frac{(\lambda^{(l)}, \tilde{\alpha}_i)}{(\nu_l^2 - (v_k^{(i)})^2)}. \tag{8.5.59}$$

Зауваження 93. Заввдяки спеціальній формі елементів K і ρ_K тільки один тип рівнянь (8.5.58) — рівняння, що відповідають одному простому кореню з множини $(\Delta/\Delta_K)_+$, містить доданок пропорційний до $(v_k^{(i)})^{-2}$.

8.5.1. Випадок алгебри $gl(n)$. В цьому підрозділі ми розглянемо діагоналізацію зконструйованих гамільтоніанів БКШ у випадку алгебри $gl(n)$. Для простоти ми обмежимось найбільш цікавим випадком $n = 2m$.

Простір незвідного представлення алгебри $gl(2m)^{\oplus N}$ це $V = (\otimes_{l=1}^{N} V^{\lambda^{(l)}})$, де $V^{\lambda^{(l)}}$ – простір незвідного представлення l– тої копії алгебри $gl(2m)$ зі старшою вагою $\lambda^{(l)} = (\lambda_1^{(l)}, ..., \lambda_{2m}^{(l)})$, $l \in \overline{1, N}$. В просторі представлення V існує старший вектор $\mathbf{\Omega}$ такий, що:

$$\hat{S}_{ii}^{(l)}\mathbf{\Omega} = \lambda_i^{(l)}\mathbf{\Omega}, \quad \hat{S}_{ij}^{(l)}\mathbf{\Omega} = 0, \quad i, j \in \overline{1, 2m}, \ i < j; l \in \overline{1, N}. \tag{8.5.60}$$

Ми будемо розглядати представлення з наступною старшою вагою:

$$\lambda_1^{(l)} = \lambda_1^{(l)} = ... = \lambda_m^{(l)} = 1, \quad \lambda_{m+1}^{(l)} = \lambda_{m+2}^{(l)} = ... = \lambda_{2m}^{(l)} = 0, \quad \forall l \in \overline{1, N}.$$

Зауважимо, що для цього представлення $\mathbf{\Omega}$ співпадає з ферміоним вакуумом$|0\rangle$.

Має місце наступний наслідок Теореми [101]:

Наслідок 8.1. *Спектр узагальненого гамільтоніану БКШ* $\hat{H}_{gBCS}^{p_x+ip_y}$ *(8.4.46) має вигляд:*

$$h_{gBCS}^{p_x+ip_y} = 2\sum_{i=1}^{M_m} E_i^{(m)}, \tag{8.5.61}$$

де енергії $E_i^{(k)}$, $i \in \overline{1, M_k}$, $k \in \overline{1, 2m-1}$ *задовільняють рівняння Бете:*

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_1} \frac{2E_j^{(1)}}{(E_i^{(1)} - E_j^{(1)})} - \sum_{j=1}^{M_2} \frac{E_j^{(2)}}{(E_i^{(1)} - E_j^{(2)})} = 0, \tag{8.5.62a}$$

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_2} \frac{2E_j^{(2)}}{(E_i^{(2)} - E_j^{(2)})} - \sum_{j=1}^{M_1} \frac{E_j^{(1)}}{(E_i^{(2)} - E_j^{(1)})} - \sum_{j=1}^{M_3} \frac{E_j^{(3)}}{(E_i^{(2)} - E_j^{(3)})} = 0, \tag{8.5.62b}$$

...

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_{m-1}} \frac{2E_j^{(m-1)}}{(E_i^{(m-1)}-E_j^{(m-1)})} - \sum_{j=1}^{M_{m-2}} \frac{E_j^{(m-2)}}{(E_i^{(m-1)}-E_j^{(m-2)})} - \sum_{j=1}^{M_m} \frac{E_j^{(m)}}{(E_i^{(m-1)}-E_j^{(m)})} = 0, \tag{8.5.62c}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\epsilon_k}{E_i^{(m)}-\epsilon_k} = -\frac{2}{g} + \sum_{j=1;j\neq i}^{M_m} \frac{2E_j^{(m)}}{(E_i^{(m)}-E_j^{(m)})} - \sum_{j=1}^{M_{m-1}} \frac{E_j^{(m-1)}}{(E_i^{(m)}-E_j^{(m-1)})} - \sum_{j=1}^{M_{m+1}} \frac{E_j^{(m+1)}}{(E_i^{(m)}-E_j^{(m+1)})}, \tag{8.5.62d}$$

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_{m+1}} \frac{2E_j^{(m+1)}}{(E_i^{(m+1)}-E_j^{(m+1)})} - \sum_{j=1}^{M_m} \frac{E_j^{(m)}}{(E_i^{(m+1)}-E_j^{(m)})} - \sum_{j=1}^{M_{m+2}} \frac{E_j^{(m+2)}}{(E_i^{(m+1)}-E_j^{(m+2)})} = 0, \tag{8.5.62e}$$

...

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_{2m-2}} \frac{2E_j^{(2m-2)}}{(E_i^{(2m-2)}-E_j^{(2m-2)})} - \sum_{j=1}^{M_{2m-3}} \frac{E_j^{(2m-3)}}{(E_i^{(2m-2)}-E_j^{(2m-3)})} - \sum_{j=1}^{M_{2m-1}} \frac{E_j^{(2m-1)}}{(E_i^{(2m-2)}-E_j^{(2m-1)})} = 0, \tag{8.5.62f}$$

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_{2m-1}} \frac{2E_j^{(2m-1)}}{(E_i^{(2m-1)}-E_j^{(2m-1)})} - \sum_{j=1}^{M_{2m-2}} \frac{E_j^{(2m-2)}}{(E_i^{(2m-1)}-E_j^{(2m-2)})} = 0. \tag{8.5.62g}$$

Зауваження 94. Спектр додаткових інтегралів $\hat{M}_{ii}$, $i \in \overline{1, 2m}$ має ту саму форму що і в випадку раціональних r-матриць [91] і записується наступним чином [103]:

$$m_i(M_1, ..., M_{2m-1}) = \sum_{l=1}^{N} \lambda_i^{(l)} + (M_{i-1} - M_i), \text{ де } M_0 = M_{2m} = 0. \tag{8.5.63}$$

Приклад 8.16. В найпростішому $m = 1$-випадку спектр $p_x + ip_y$ гамільтоніану БКШ $\hat{H}^{p_x+ip_y}_{gBCS}$ (8.4.47) має форму [92], [94]:

$$h^{p_x+ip_y}_{gBCS} = 2\sum_{i=1}^{M_2} E^{(1)}_i,$$

де енергії $E^{(1)}_i$, $i \in \overline{1, M_1}$ задовільняють наступним рівнянням типу Бете:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\epsilon_k}{E^{(1)}_i - \epsilon_k} = -\frac{2}{g} + \sum_{j=1;j\neq i}^{M_1} \frac{2E^{(1)}_j}{(E^{(1)}_i - E^{(1)}_j)},$$

спектр m_i, $i \in \overline{1, 2}$ додаткових інтегралів що є операторами числа частинок $\widehat{M}_{ii}$, $i \in \overline{1, 2}$ має вигляд:

$$m_1 = N - M_1, \quad m_2 = M_1.$$

Приклад 8.17. У важливому $m = 2$ протон–нейтронному випадку спектр узагальнених гамільтоніананів БКШ $\hat{H}_{gBCS}$ (8.4.48) має форму:

$$h^{p_x+ip_y}_{gBCS} = 2\sum_{i=1}^{M_2} E^{(2)}_i,$$

де енергії $E^{(k)}_i$, $i \in \overline{1, M_k}$, $k \in \overline{1, 3}$ задовільняють наступні рівняння типу Бете:

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_1} \frac{2E^{(1)}_j}{(E^{(1)}_i - E^{(1)}_j)} - \sum_{j=1}^{M_2} \frac{E^{(2)}_j}{(E^{(1)}_i - E^{(2)}_j)} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\epsilon_k}{E^{(2)}_i - \epsilon_k} = -\frac{2}{g} + \sum_{j=1;j\neq i}^{M_2} \frac{2E^{(2)}_j}{(E^{(2)}_i - E^{(2)}_j)} - \sum_{j=1}^{M_1} \frac{E^{(1)}_j}{(E^{(2)}_i - E^{(1)}_j)} - \sum_{j=1}^{M_3} \frac{E^{(3)}_j}{(E^{(2)}_i - E^{(3)}_j)},$$

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_3} \frac{2E^{(3)}_j}{(E^{(3)}_i - E^{(3)}_j)} - \sum_{j=1}^{M_2} \frac{E^{(2)}_j}{(E^{(3)}_i - E^{(2)}_j)} = 0.$$

Спектр m_i, $i \in \overline{1, 4}$ додаткових інтегралів, тобто операторів числа частинок $\widehat{M}_{ii}$, $i \in \overline{1, 4}$ має вигляд:

$$m_1 = N - M_1, \quad m_2 = N + (M_1 - M_2), \quad m_3 = (M_2 - M_3), \quad m_4 = M_3.$$

8.5.2. Діагоналізація. Випадок алгебри $sp(2m)$ В цьому підрозділі ми розглянемо діагоналізацію зконструйованих гамільтоніанів БКШ у випадку алгебри $\mathfrak{g} = sp(2m)$. Простір незвідного представлення алгебри $sp(2m)^{\oplus N}$ має форму $V = (\otimes_{l=1}^{N} V^{\lambda^{(l)}})$ де $V^{\lambda^{(l)}}$ — простір незвідного представлення l-тої копії алгебри $sp(2m)$ з старшою вагою $\lambda^{(l)} = (\lambda_1^{(l)}, ..., \lambda_m^{(l)})$, $l \in \overline{1, N}$. Існує вектор старшої ваги $\mathbf{\Omega}$ такий, що:

$$\hat{S}_i^{(l)}\mathbf{\Omega} = \lambda_i^{(l)}\mathbf{\Omega},\ \hat{S}_{\alpha_{ij}^-}^{(l)}\mathbf{\Omega} = 0,\ \hat{S}_{\alpha_{ij}^+}^{(l)}\mathbf{\Omega} = 0,\ \hat{S}_{2\alpha_i}^{(l)}\mathbf{\Omega} = 0,\ i, j \in \overline{1, m}, i < j; l \in \overline{1, N}, \tag{8.5.64}$$

Ми будемо розглядати представлення з наступною старшою вагою:

$$\lambda_1^{(l)} = \lambda_1^{(l)} = ... = \lambda_m^{(l)} = 1, \quad \forall l \in \overline{1, N}.$$

Має місце наступний наслідок Теореми 8.2:

Наслідок 8.2. *Спектр узагальненого гамільтоніану БКШ* $\hat{H}_{gBCS}^{p_x+ip_y}$ *(8.4.50) має вигляд:*

$$h_{gBCS}^{p_x+ip_y} = 2\sum_{i=1}^{M_m} E_i^{(m)}, \tag{8.5.65}$$

де енергії $E_i^{(k)}$, $i \in \overline{1, M_k}$, $k \in \overline{1, m}$ *задовільняють рівняння Бете:*

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_1} \frac{2E_j^{(1)}}{(E_i^{(1)} - E_j^{(1)})} - \sum_{j=1}^{M_2} \frac{E_j^{(2)}}{(E_i^{(1)} - E_j^{(2)})} = 0, \tag{8.5.66a}$$

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_2} \frac{2E_j^{(2)}}{(E_i^{(2)} - E_j^{(2)})} - \sum_{j=1}^{M_1} \frac{E_j^{(1)}}{(E_i^{(2)} - E_j^{(1)})} - \sum_{j=1}^{M_3} \frac{E_j^{(3)}}{(E_i^{(2)} - E_j^{(3)})} = 0, \tag{8.5.66b}$$

$$\dots$$

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_{m-2}} \frac{2E_j^{(m-2)}}{(E_i^{(m-2)} - E_j^{(m-2)})} - \sum_{j=1}^{M_{m-3}} \frac{E_j^{(m-3)}}{(E_i^{(m-2)} - E_j^{(m-3)})} - \sum_{j=1}^{M_{m-1}} \frac{E_j^{(m-1)}}{(E_i^{(m-2)} - E_j^{(m-1)})} = 0,$$

(8.5.66c)

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_{m-1}} \frac{2E_j^{(m-1)}}{(E_i^{(m-1)} - E_j^{(m-1)})} - \sum_{j=1}^{M_{m-2}} \frac{E_j^{(m-2)}}{(E_i^{(m-1)} - E_j^{(m-2)})} - \sum_{j=1}^{M_m} \frac{2E_j^{(m)}}{(E_i^{(m-1)} - E_j^{(m)})} = 0, \tag{8.5.66d}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{2\epsilon_k}{E_i^{(m)} - \epsilon_k} = -\frac{2}{g} + \sum_{j=1;j\neq i}^{M_m} \frac{4E_j^{(m)}}{(E_i^{(m)} - E_j^{(m)})} - \sum_{j=1}^{M_{m-1}} \frac{2E_j^{(m-1)}}{(E_i^{(m)} - E_j^{(m-1)})}. \tag{8.5.66e}$$

Зауваження 95. Спектр додаткових гамільтоніанів $\hat{M}_i$, $i \in \overline{1,m}$ записується наступним чином [103]:

$$m_i(M_1, ..., M_m) = \sum_{l=1}^{N} \lambda_i^{(l)} + (M_{i-1} - M_i), \text{ де } i \in 1, m-1, M_0 \equiv 0. \tag{8.5.67a}$$

$$m_m(M_1, ..., M_m) = \sum_{l=1}^{N} \lambda_i^{(l)} + (M_{m-1} - 2M_m). \tag{8.5.67b}$$

Приклад 8.18. В найбільш важливому протон – нейтронному $m = 2$– випадку спектр гамільтоніану БКШ $\hat{H}_{gBCS}^{p_x+ip_y}$ (8.4.51) має форму:

$$h_{gBCS}^{p_x+ip_y} = 2\sum_{i=1}^{M_2} E_i^{(2)},$$

де енергії $E_i^{(k)}$, $i \in \overline{1, M_k}$, $k \in \overline{1,2}$ задовільняют наступним рівнянням Бете:

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_1} \frac{2E_j^{(1)}}{(E_i^{(1)} - E_j^{(1)})} - \sum_{j=1}^{M_2} \frac{2E_j^{(2)}}{(E_i^{(1)} - E_j^{(2)})} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{2\epsilon_k}{E_i^{(2)}-\epsilon_k}=-\frac{2}{g}+\sum_{j=1;j\neq i}^{M_2}\frac{4E_j^{(2)}}{(E_i^{(2)}-E_j^{(2)})}-\sum_{j=1}^{M_1}\frac{2E_j^{(1)}}{(E_i^{(2)}-E_j^{(1)})}.$$

Спектр m_i, $i\in\overline{1,2}$ додаткових інтегралів – операторів числа частинок $\widehat{M}_i$, $i\in\overline{1,2}$ має форму:

$$m_1=N-M_1,\quad m_2=N+(M_1-2M_2)$$

8.5.3. Діагоналізація: випадок алгебри $so(2m)$ В цьому підрозділі ми розглянемо діагоналізацію зконструйованих гамільтоніанів БКШ у випадку $\mathfrak{g}=so(2m)$. Простір незвідного представлення алгебри $so(2m)^{\oplus N}$ має вигляд $V=(\otimes_{l=1}^{N}V^{\lambda^{(l)}})$, де $V^{\lambda^{(l)}}$ – простір незвідного представлення l–тої копії алгебри $so(2m)$ зі старшою вагою $\lambda^{(l)}=(\lambda_1^{(l)},....,\lambda_m^{(l)})$, $l\in\overline{1,N}$. Дія на вектор старшої ваги задається формулами:

$$\hat{S}_i^{(l)}\mathbf{\Omega}=\lambda_i^{(l)}\mathbf{\Omega},\ \hat{S}^{(l)}_{\alpha^-_{kr}}\mathbf{\Omega}=0,\ \hat{S}^{(l)}_{\alpha^+_{kr}}\mathbf{\Omega}=0,\quad i,k,r\in\overline{1,m},\ k<r;l\in\overline{1,N}. \tag{8.5.68}$$

Ми розглянемо представлення з наступною старшою вагою:

$$\lambda_1^{(l)}=\lambda_1^{(l)}=...=\lambda_m^{(l)}=1,\quad \forall l\in\overline{1,N}.$$

Зауважимо, що у цьому випадку $\mathbf{\Omega}$ співпадає з ферміонним вакуумом $|0\rangle$. Має місце наступний наслідок Теореми 8.2.

Наслідок 8.3. *Спектр узагальненого гамільтоніану БКШ* $\hat{H}^{p_x+ip_y}_{gBCS}$ *(8.4.53) має вигляд:*

$$h^{p_x+ip_y}_{gBCS}=2\sum_{i=1}^{M_m}E_i^{(m)}, \tag{8.5.69}$$

де енергії $E_i^{(k)}$, $i\in\overline{1,M_k}$, $k\in\overline{1,m}$ *задовільняють рівняння типу Бете:*

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_1}\frac{2E_j^{(1)}}{(E_i^{(1)}-E_j^{(1)})}-\sum_{j=1}^{M_2}\frac{E_j^{(2)}}{(E_i^{(1)}-E_j^{(2)})}=0, \tag{8.5.70a}$$

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_2}\frac{2E_j^{(2)}}{(E_i^{(2)}-E_j^{(2)})}-\sum_{j=1}^{M_1}\frac{E_j^{(1)}}{(E_i^{(2)}-E_j^{(1)})}-\sum_{j=1}^{M_3}\frac{E_j^{(3)}}{(E_i^{(2)}-E_j^{(3)})}=0, \quad (8.5.70b)$$

$$\dots$$

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_{m-3}}\frac{2E_j^{(m-3)}}{(E_i^{(m-3)}-E_j^{(m-3)})}-\sum_{j=1}^{M_{m-4}}\frac{E_j^{(m-4)}}{(E_i^{(m-3)}-E_j^{(m-4)})}-\sum_{j=1}^{M_{m-2}}\frac{E_j^{(m-2)}}{(E_i^{(m-3)}-E_j^{(m-2)})}=0, \quad (8.5.70c)$$

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_{m-2}}\frac{2E_j^{(m-2)}}{(E_i^{(m-2)}-E_j^{(m-2)})}-\sum_{j=1}^{M_{m-3}}\frac{E_j^{(m-3)}}{(E_i^{(m-2)}-E_j^{(m-3)})}-\sum_{j=1}^{M_{m-1}}\frac{E_j^{(m-1)}}{(E_i^{(m-2)}-E_j^{(m-1)})}-\sum_{j=1}^{M_m}\frac{E_j^{(m)}}{(E_i^{(m-2)}-E_j^{(m)})}=0, \quad (8.5.70d)$$

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_{m-1}}\frac{2E_j^{(m-1)}}{(E_i^{(m-1)}-E_j^{(m-1)})}-\sum_{j=1}^{M_{m-2}}\frac{E_j^{(m-2)}}{(E_i^{(m-1)}-E_j^{(m-2)})}=0, \quad (8.5.70e)$$

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{2\epsilon_k}{E_i^{(m)}-\epsilon_k}=-\frac{2}{g}+\sum_{j=1;j\neq i}^{M_m}\frac{2E_j^{(m)}}{(E_i^{(m)}-E_j^{(m)})}-\sum_{j=1}^{M_{m-2}}\frac{E_j^{(m-2)}}{(E_i^{(m)}-E_j^{(m-2)})}. \quad (8.5.70f)$$

Зауваження 96. Спектр додаткових інтегралів $\hat{M}_i$, $i\in\overline{1,m}$ записується наступним чином [103]:

$$m_i(M_1,...,M_m)=\sum_{l=1}^{N}\lambda_i^{(l)}+(M_{i-1}-M_i), \quad \text{де} \quad i\in\overline{1,m-2}, M_0\equiv 0. \quad (8.5.71a)$$

$$m_{m-1}(M_1, ..., M_m) = \sum_{l=1}^{N} \lambda_i^{(l)} + (M_{m-2} - M_{m-1} - M_m), \tag{8.5.71b}$$

$$m_m(M_1, ..., M_m) = \sum_{l=1}^{N} \lambda_i^{(l)} + (M_{m-1} - M_m). \tag{8.5.71c}$$

Приклад 8.19. У фізично важливому $m = 2$ випадку спектр гамільтоніану $\hat{H}_{gBCS}^{p_x+ip_y}$ (8.4.54) має форму:

$$h_{gBCS}^{p_x+ip_y} = 2\sum_{i=1}^{M_2} E_i^{(2)},$$

де енергії $E_i^{(k)}$, $i \in \overline{1, M_k}$, $k \in \overline{1,2}$ задовільняють рівнянням Бете:

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{M_1} \frac{2E_j^{(1)}}{(E_i^{(1)} - E_j^{(1)})} = 0, \tag{8.5.72a}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{2\epsilon_k}{E_i^{(2)} - \epsilon_k} = -\frac{2}{g} + \sum_{j=1;j\neq i}^{M_2} \frac{2E_j^{(2)}}{(E_i^{(2)} - E_j^{(2)})}. \tag{8.5.72b}$$

Зауважимо, що в цьому випадку ми маємо два набора незалежних рівнянь Бете. Це пояснюється ізоморфізмом $so(4) \simeq so(3) \oplus so(3)$. З першого набору цих рівнянь легко виводиться що $M_1 = 0$. Отже, ефективно існує тільки одне рівняння (8.5.72b) що співпадає з рівнянням Бете для Z_2-градуйованого $so(3)$ – магнетику Годена у зовнішньому магнітному полі і представленню зі спіном одиниця у кожному вузлі спінового ланцюжка.

8.6. Висновки

В данному розділі побудоване широке сімейство інтегровних ферміонних моделей типу БКШ з кількома типами ферміонів та інтегровними гамільтоніанами s- та $p_x + ip_y$ – типу. Побудовані моделі узагальнюють результати Річардсона в ядерній фізиці та вводять $p_x + ip_y$ - аналоги його моделей. Результати данного розділу опубліковані в роботах [93, 92, 94, 100, 101, 102, 103].

Основні результати та висновки

На завершення сформулюємо основні результати дисертаційної роботи:

1. Запропоновано новий метод побудови класичних r-матриць зі спектральними параметрами шляхом інфенітезимальних деформацій алгебр петель. Таким чином побудовано широкий клас класичних r-матриць, що є деформаціями стандартних раціональних r-матриць. Також об'єднано метод "деформацій" з методом "зсуву" та "зкруту" r-матриць за допомогою автоморфізму та одержані "зсунуті" та "зкручені" деформовані r-матриці.

2. Побудовано алгебри Лі прихованих симетрій стартуючи з класичної r-матриці зі спектральними параметрами. Показано, що класична r- матриця породжує пучок нескінченновимірних алгебр Лі що нумерується другим спектральним параметром r-матриці. Доведено, що неособливих точках пучка відповідні r-матричні алгебри мають квазіградуйовану структуру та побудовано їх розширення — квазіградуйовані алгебри Лі з розкладом Костанта – Адлера – Саймса, що є узгодженим з квазіградуйованням. Показано, що в особливих точках, де r-матриця вироджується, структура відповідних r-матричних алгебр змінюється.

3. Розроблено метод побудови матриць Лакса стартуючи з даної класичної r-матриці зі спектральними параметрами. Показано, що кожній r-матриці відповідає пучок матриць Лакса, що нумерується першим спектральним параметром r-матриці. Показано, що існують неособливі значення спектрального параметра при яких матриця Лакса описує гамільтонові системи типу Ейлера – Арнольда на "підстилаючій" напівпростій алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ та її розширеннях типу навівпрямої

суми та що існують "особливі" значення спектрального параметра при якому структура матриць Лакса змінюється. Досліджено структуру матриць Лакса в особливих точках, зокрема, описані, так звані, "елементи зсуву", а також "бозонні" Лаксові матриці. Досліджена структура багатополюсних матриць Лакса. Показано, що у випадку коли всі полюси матриць Лакса неособливі, то їм відповідають узагальнені системи Годена та їх розширення. Показано, що матрицям Лакса зі спеціальними полюсами відповідають, зокрема, узагальнені системи Гордена у зовнішньому магнітному полі, спін-бозонні моделі типу ДКД, багатобозонні моделі типу димерів Бозе – Хаббарда та узагальнені ланцюжки Тоди.

4. Розроблено метод побудови інтегровних рівнянь в часткових похідних в просторі розмірності два стартуючи з класичної r-матриці зі спектральними параметрами. Представлені явні формули $U - V$ – пар в найпростіших "номінуючих" рівнянь відповідних ієрархій. Показано, що існують два типи ієрархій: "малі" ієрархії, що включають лише рівняння еволюційного типу і "великі" ієрархії, що містять рівняння "малих" ієрархій та їх, так звані, негативні потоки. Показано, що редукції в інтегровних ієрархіях пов'язані з особливими точками r-матриць, в яких вони стають сингулярними або виродженеми. Побудовані загальні інтегровні ієрархії що пов'язані з неособливими точками r-матриць. Показано, що відповідні "малі" ієрархії співпадають з різноманітними узагальненими рівняннями Ландау – Ліфшиця, а "великі" ієрархії – з узагальненими ієрархіями типу кірального поля. Досліджено також редуковані інтегровні ієрархії пов'язані з особливими точками r-матриць і побудовані приклади таких ієрархій. Показано, що рівняння "великих" інтегровних ієрархій можна виписати в загальному вигляді без специфікації конкретної форми r-матриць. Показано, що існує три типи таких ієрархій: редуковані рівняння типу анізатропного кірального поля, r-матричне узагальне-

ння абелевих та неабелевих рівнянь Тоди та новий клас інтегровних рівнянь які ми назвали "ієрархіями з подвійним зсувом". Побудовано приклади таких ієрархій.

5. Показано, що з класичними некососиметричними r-матрицями зі спектральними параметрами можна асоціювати квантові інтегровні системи. Зокрема, показано, що з довільними класичними некососиметричними r-матрицями можна асоціювати інтегровні узагальнення квантових ланцюжків Годена. Показано також, що з класичними r-матрицями які мають нетривіальні елементи зсуву можна асоціювати квантові інтегровні ланцюжки Годена у зовнішньому магнітному полі, з класичними r-матрицями, що мають особливі точки "бозонного" типу, можна асоціювати квантові інтегровні системи типу ДКД і квантові багатобозонні моделі типу димерів БХ. Детально розглянуто приклади алгебр $gl(n)$ та класичних раціональних і Z_2-градуйованих r-матриць.

6. Розвинуто метод алгебраїчного анзацу Бете (його Лі–алгебраїчна версія), що базується на класичних некососиметричних r-матрицях. У випадку алгебр $gl(n)$ розвинуто метод ієрархічного анзацу Бете що базується на ланцюжку вкладених підалгебр. Розглянуто випадки стандартного ланцюжка вкладених підалгебр $gl(n) \supset gl(n-1) \supset ... \supset gl(1)$ та нестандартних ланцюжків що базуються на редукціях типу $gl(n) \supset gl(n-p) \oplus gl(p)$. Розвинутий метод застосовано до Z_p–градуйованих класичних r-матриць та відповідних моделей типу Годена і, у випадку $p = 2$, до моделей ДКД та БХ.

7. Базуючись на зконструйованих гамільтоніанах Годена у зовнішньому магнітному полі, побудовані інтегровні ферміонні моделі типу БКШ – Річардсона. З цією метою побудовані формули ферміонізації спінових операторів фундаментальних представлень класичних матри-

чних алгебр $gl(n)$, $so(2n)$ та $sp(2n)$. Використовуючи їх та узагальнені гамільтоніани Годена у зовнішньому полі, побудовані інтегровні ферміонні гамільтоніани типу БКШ. Показано, що існує два типи *точних* аналогів гамільтоніанів БКШ – так звані "s" та "$p+ip$" – типи, що базується на раціональних та Z_2 – градуйованих r-матрицях. Показано, що у випадку алгебр рангу один, гамільтоніани БКШ містять лише один тип ферміонів, в той час, як у випадку алгебр Лі вищих рангів відповідні моделі містять багато типів ферміонів. Зокрема, інтегровні моделі що базуються на алгебрах $gl(4)$, $sp(4)$ та $so(4)$ містять два типи ферміонів і можуть інтерпритуватись як інтегровні протон – нейтронні моделі фізики ядра.

Список використаних джерел

1. Белавин А. А. Дискретные группы и интегрируемость квантовых систем/ А. А. Белавин // Функц. анализ и его прил. - 1980. - Т. 14. - No 4. - С. 18–26.

2. Белавин А. А. О решениях классического уравнения Янга–Бакстера для простых алгебр Ли/ А. А. Белавин, В. Г. Дринфельд // Функц. анализ и его прил. - 1982. - Т. 16. - No 3. - С. 1–29.

3. Белавин А. А. О классическом уравнении Янга–Бакстера для простых алгебр Ли/ А. А. Белавин, В. Г. Дринфельд// Функц. анализ и его прил. - 1983. - Т. 17. - No 3. - С. 69–70.

4. Гельфанд И.М. Абстрактний гамильтонов формализм для классических пучков Янга-Бакстера/ И.М.Гельфанд, И.В. Чередник// Успехи мат. наук - 1983 - Т. 38 - No 6.- 133-134.

5. Годен М. Волновая функция Бете М.: (Монография): Мир, 1987. - 352 с.

6. Интегрируемые системы на орбитах афинных груп Ли и периодическая задача для уравнений мКдВ/Голод П. И.// препринт ИТФ -1982-82-44Р.

7. Голод П. Анізотропні квазіградуйовані алгебри на алгебраїчних кривих та інтегровні гамільтонові системи/ П.І.Голод, Т.В. Скрипник//Наукові записки НАУКМА -сер. фіз.мат. наук- 2000 - Т. 18. - С. 20–25.

8. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций: (Монография) М.: Наука, 1968. – 648 с.

9. Захаров В. Е. Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II /В. Е. Захаров,

А. Б. Шабат//Функц. анализ и его прил. - 1979 - Т. 13 - н. 3. - С. 13–22.

10. Кац В. Бесконечномерные алгебры: (Монография) М.: Мир,1993. — 425с.

11. Кричевер И. М. Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов/ И. М. Кричевер, С. П. Новиков// Функц. анализ и его прил. - 1987 - Т. 21. - н.2ю - 46–63.

12. Мамфорд Д. Лекции о тэта-функциях: (Монография) М.: Мир, 1988 - 448 с.

13. Ниров Х. С. О Z-градуированных алгебрах Ли петель, группах петель и уравнениях Тоды/ Х. С. Ниров, А. В. Разумов // ТМФ - 2008 - Т. 154. - н. 3. - С. 451–476.

14. Рейман А.Г., Семенов-тян-Шанский М.А. Интегрируемые системы: (Монография) М.: Институт компъютерных исследований 2003 - 352 с.

15. Рейман А. Г. Алгебры Ли и лаксовы уравнения со спектральным параметром на эллиптической кривой/ А. Г. Рейман , М. А. Семенов-Тян-Шанский// Зап. научн. сем. ЛОМИ. - 1986. - Т. 150. - С. 104–118.

16. Решетихин Н.Ю. Гамильтоновы структуры для интегрируемых моделей теории поля/ Н.Ю.Решетихин, Л.Д. Фаддеев // ТМФ - 1983 - Т. 56. - н. 3. - С. 323–343.

17. Семенов-Тян-Шанский М. А. Что такое классическая r-матрица/ М. А. Семенов-Тян-Шанский// Функц. анализ и его прил. - 1983.- Т. 17. - No 4, - С. 17–33.

18. Семенов-Тян-Шанский М. А. Классическая r-матрица и метод орбит/ М. А. Семенов-Тян-Шанский// Зап. научн. сем. ЛОМИ. - 1983.- Т. 123 . - No 4 , - С. 77 – 91.

19. Тахтаджян Л. А. Решения уравнений треугольников с Zn Zn-симметрией как матричные аналоги дзета- и сигма-функций Вейерштрасса/ Л. А. Тахтаджян// Зап. научн. сем. ЛОМИ - 1983. - Т. 133. - С. 258–276.

20. Тахтаджян Л. А. Гамільтонів підхід в теорії солітонів/ Л. А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев// Москва, Наука - 1986. - 528 С.

21. Чередник И.В. Преобразование Бэклунда-Дарбу для классических пучков Янга-Бакстера/ И.В. Чередник// Функц. анализ и его прил. - 1983. - Т. 17. - No 2. - С. 88–89.

22. Чередник И. В. Эллиптические кривые и матричные солитонные дифференциальные уравнения/ И. В. Чередник// Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом. - 1984 - Т. 22.- 205–265.

23. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства: (Монография) / М.: Мир, 1964. – 534 с.

24. Amico L. Integrable Model for Interacting Electrons in Metallic Grains/ L. Amico, A. Lorenzo, A. Osterloh// Phys. Rev. Lett. - 2001 - Vol. 86 - P. 5759.

25. Asorey M. Chern–Simons theory and BCS superconductivity/ M. Asorey, F. Falceto, G. Sierra// Nucl.Phys. - 2002 - B 622. - P. 593-614.

26. Avan J. Rational and trigonometric constant non-antisymmetric R-matrices/ J. Avan, M. Talon//Phys. Lett. - 1990 - B 241. -P.77-82.

27. Babelon O. Hamiltonian structures and Lax equations/ O. Babelon, C-M. Viallet// Physics Letters, - 1990 - Vol. 237, - Issues 3–4, - P. 411-416.

28. Cambiaggio M.C. Integrability of the pairing hamiltonian/ M.C. Cambiaggio, A.M.F. Rivas , M. Saraceno// Nuclear Physics - 1997 - Vol. 624. - Issue 2. - P. 157–167.

29. Dukelsky J. Breached pairing in trapped three-color atomic Fermi gases/ B.Errea, J.Dukelsky, G. Ortiz//Phys.Rev.- 2009 - Vol. A 79 - P. 051603.
30. Dukelsky J. Richardson-Gaudin algebras and exact solutions of the proton-neutron pairing/ J. Dukelsky, V. Guerguiev// Proc. of the 12-th international conference on Geometry, Integrability and Quantization, Sofia: Avangard Prima 2011, P. 226-236.
31. Dubrovin B. Classical double, R-operators, and negative flows of integrable hierarchies/ B. Dubrovin, T. Skrypnyk// Teoret. Mat. Fiz. - 2012 - Vol. 172. - No 1. - P. 40–63.
32. Enol'skii V.Z. On the quantum inverse scattering method for the DST dimer/ Enol'skii V.Z., Kuznetsov V.B., Salerno M.// Phys., - 1993 - Vol. D 237, - P. 138–152.
33. Etingof P. Lectures on representation theory and Knizhnik-Zamolodchikov equations / P. Etingof, I. Frenkel, A. Kirillov// American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
34. Faddeev L. Quantum inverse problem method I/ L. Faddeev, E. Sklyanin, L. Takhtadgian// Theor. Math. Phys. -1979 -vol. 40. - P. 688-706.
35. Fredel L. Quadratic algebras/ L. Fredel, J.M. Maillet// Phys. Lett. B - 1991 - Vol. 262 - P. 278.
36. Flashka H, Kac-Moody Lie algebras and soliton equations: II. Lax equations associated with $A_1^{(1)}$/ H. Flashka, A. Newell, T. Ratiu//Physica D -1983- Vol.9 - No 3.- 300-323.
37. Gaudin M. Diagonalization d'une class d'hamiltoniens de spin/ Gaudin M. //Le Journal de Physique - 1976- Vol. 37. - Issue 10. - P. 1087-1098.
38. de Groot M. Generalized Drinfel'd-Sokolov hierarchies/ Mark F. de Groot, Timothy J. Hollowood, J. Luis Miramontes// Communications in Mathematical Physics March - 1992 - Vol. 145. - Issue 1. - P. 57-84.

39. Ibanez M. Exactly solvable pairing model for superconductors with px+ipy-wave symmetry/ M. Ibanez, J. Links, G. Sierra, S.-Y. Zhao// Phys. Rev. -2009 - Vol. B 79. - P. 180501.
40. Jurco B. Classical Yang–Baxter equations and quantum integrable systems/B. Jurco// J. Math. Phys. - 1989 - Vol. 30, - P.1289.
41. Harnad J. Dual isomonodromic deformations and moment maps to loop algebras/ J. Harnad// Comm. Math. Phys. - 1994 - Vol. 166. - No 2. - P. 337-365.
42. Holod P.I. Hamiltonian Systems on the Orbits of Affine Lie Groups and Finite-Band Integration of Nonlinear Equations/ P.I. Holod// Nonlinear and Turbulent Processes in Physics, Proceedings of the Second International Workshop held 10-25 October, 1983. Edited by R.Z. Sagdeev. Harwood Academic Publishers, 1984., p.1361.
43. Holod P.I. Hidden symmetry of the Landau–Lifshitz equation, hierarchy of higher equations, and the dual equation for an asymmetric chiral field/ P.I. Holod// Teoret. Mat. Fiz. - 1987 - Vol. 70. - No 1. - P. 18–29.
44. Holod P. Hierarchies of integrable equations associated with hyperelliptic Lie algebras/ Skrypnyk T., Holod P. // Journal of Phys. A - 2001- Vol 34.- No 9.- P. 1123- 1137.
45. Golubchik I.Z. Multicomponent generalization of the hierarchy of Landau-Lifshitz equation/ Golubchik I.Z, Sokolov V.V. // Theor. Math. Phys. - 2000- Vol 124.- No 1.- P. 909-917.
46. Golubchik I.Z. Factorization of loop algebras and compatible Lie brackets/ Golubchik I.Z, Sokolov V.V. // Journal of Nonlinear Math. Phys. - 2005- Vol 12.- sup. 1.-P. 343-350.
47. Odesskii A. V. Pairs of compatible associative algebras, classical Yang-Baxter equations and quiver representations/ Odesskii A.V., Sokolov V.V. // Comm. Math. Phys. - 2008- Vol 278.- No 1.- P. 83-99.

48. Knizhnik V.G. Current algebras and Wess-Zumino model in two dimensions/ V.G. Knizhnik, A.B. Zamolodchikov// Nuclear Physics B, - 1984 - Vol.247 - No 1. - P. 83-103.

49. Kulish P. Diagonalisation of $GL(N)$-invariant transfer matrices and quantum N-wave system (Lee model)/ P. Kulish, N. Reshetikhin// J. Phys. A. - 1983 - Vol. 16, - P. 591.

50. Lax P. Integrals of non-linear equations of evolution and solitary waves/Lax P.// Comm. Pure and Applied Math. -1968 - Vol. 21 - No. 5 - P. 467-490.

51. Links J. Integrability and exact spectrum of a pairing model for nucleons/ J. Links, H.-Q. Zhou, M. D Gould, R. H. McKenzie// J. Phys. A: Math. Gen. - 2002 - Vol. 35. - P. 6459.

52. Links J. Bethe Ansatz Solutions of the Bose–Hubbard Dimer/J. Links, K.Hibberd//SIGMA - 2006 - Vol 2. - Paper 95.- 8 pages.

53. Mikhailov A. V. Two-dimensional generalized Toda lattice/A. V. Mikhailov, M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov//Communications in Mathematical Physics - 1981 - Vol. 79. - Issue 4. - P. 473-488.

54. Newell A. Solitons in mathematics and Physics: (Monography) / SIAM, 1985. – 534 c.

55. Ostapenko V. Endomorphisms of lattices of a Lie algebra over formal power series field/ V. Ostapenko// C.R. Acad. Sci. Paris - 1992 - Vol. 315. - Serie 1. - P. 669–673.

56. Reshetikhin N. The Knizhnik-Zamolodchikov system as a deformation of the isomonodromy problem/ N. Reshetikhin// Lett. in math. Phys. -1982 - Vol. 26 - No.3. -P.167-177.

57. Reyman A.G. Compatible poisson structures for lax equations: An r-matrix approach/ A.G. Reyman, M.A. Semenov-Tian-Shansky// Physics Letters - 1988 - Vol. A130. - Issues 8–9. P. 456–460.

58. Richardson R.W. Exact Eigenstates of the Pairing Force Hamiltonian /R.W. Richardson, N. Sherman// Nucl. Phys. - 1964 - Vol . 52. - P. 221.

59. Richardson R. W. Eigenstates of the J=0, T=1, Charge-Independent Pairing Hamiltonian. I. Seniority-Zero States/ R. W. Richardson// Phys. Rev. - Vol. 144. - P. 874.

60. Rybnikov L. G. The argument shift method and the Gaudin model/ L. G. Rybnikov// Functional Analysis and Its Applications - 2006 - Vol. 40.- No 3. - P. 188-199.

61. Shabat A. To a transformation theory of two-dimensional integrable systems/ A. Shabat, R. Yamilov // Phys. Lett. A . - 1997 - Vol. 277. - P. 15–23.

62. Sklyanin E. On complete integrability of Landau-Lifshitz equation/ M.: LOMI, 1979. - 32 C. - (Preprint LOMI E-3-79/ AN USSR. Steklov mathematical Institute Leningrad Department; 79).

63. Sklyanin E. K. Separation of variables in the Gaudin model/ E. K. Sklyanin// Journal of Soviet Mathematics - 1989 - Vol. 47 - Issue 2. - P. 2473-2488.

64. Stolin A. On rational solutions of Yang-Baxter equations. Maximal orders in loop algebra/ A. Stolin// Communications in Mathematical Physics - 1991. - Vol.141. - P 533-548.

65. Skrypnyk T. Quasi-graded Lie algebras on hyperelliptic curves and classical integrable systems/ T.Skrypnyk// Journal of Math.Phys - 2001 - Vol. 42.- No 9.- P. 4570-4581.

66. Skrypnyk T. Integrable hamiltonian systems via quasigraded Lie algebras/T. Skrypnyk// Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine - 2001 - Vol. 32. - No II.

67. Skrypnyk T. Generalized Clebsh and Neuman integrable systems from the special quasigraded Lie algebras on the higher genus curves/ T. Skrypnyk// Ukr. Phys. Jour. . - 2002.- Vol. 37. - No 3. - P. 293-301.

68. Skrypnyk T. Euler equations on the Lie algebras: new interpretation and isomorphism of the integrable cases/ T.Skrypnyk// Reports in Math. Phys. - 2002 - Vol. 50. - Issue 3. - P. 299-305.

69. Skrypnyk T. Lie algebras on hyperelliptic curves and finite-dimensional integrable systems/ T. Skrypnyk// Yadernaya Physica - 2002- Vol. 65 - No 6. - P. 1141-1145.

70. Skrypnyk T. Quasigraded deformations of loop algebras, "deformed" Lax representation and classical integrable systems/ T.Skrypnyk// Czech J. Phys. - 2002 - Vol. 52.- No 11.- 1283-1288.

71. Skrypnyk T. Quasigraded deformations of loop algebras, and hierarchies of integrable equations/ T.Skrypnyk// *Czech J. Phys.* -2003 - Vol. 53 - No 11. - P. 1119-1124.

72. Skrypnyk T. Integrable spin generalization of the generalized Clebsh and Neuman integrable systems/ T.Skrypnyk// J. Phys. A - 2003 - Vol. 36. - P. 4407-4416.

73. Skrypnyk T. Matrix generalization of Landau-Lifshitz equation/ T.Skrypnyk// Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine - 2004 - part 1. - p. 462-469.

74. Skrypnyk T. "Doubled" Landau-Lifshiz hierarchy and special quasigraded Lie algebras/ T.Skrypnyk// Journal of Physics A - 2004 - Vol. 37 - No 31. - C. 7755-7768.

75. Skrypnyk T. Deformations of the loop algebras and classical integrable systems: finite-dimensional integrable systems/ T. Skrypnyk// Reviews in Mathematical Physics - 2004 - Vol. 16 - No 7 .- P. 823-844.

76. Skrypnyk T. Deformations of the loop algebras and hierarchies of integrable equations / T. Skrypnyk // J. Math. Phys . - 2004 - Vol. 45. - No 12. - P. 4578-4595.

77. Skrypnyk T. Quasigraded lie algebras, Kostant–Adler scheme, and integrable hierarchies/ T. Skrypnyk// Teoret. Mat. Fiz.-2005. - Vol. 142.- No 2.- P. 329–345.

78. Skrypnyk T. Dual R-matrix integrability/ T. Skrypnyk // Teoret. Mat. Fiz. - 2005 - Vol. 155.- No 1. - P. 147–160.

79. Skrypnyk T. Integrable deformation of the Toda chain and quasigraded Lie algebras / T. Skrypnyk //J. Phys. A: Math. Gen - 2005 - Vol. A 38.- No 44.- P. 9665.

80. Skrypnyk T. Integrable deformations of the mKdV and SG hierarchies and quasigraded Lie algebras/ T. Skrypnyk// Physica D - 2006 - Vol. 216 - No 2. - P. 247-260.

81. Skrypnyk T. Quasigraded Lie algebras and modified Toda field equations / T.Skrypnyk // SIGMA - 2006 - Vol. 2. - Paper 043. - 14 pages.

82. Skrypnyk T. Modified non-abelian Toda field equations and twisted quasigraded Lie algebras/ T. Skrypnyk // Journal of Mathematical Physics - 2006 - Vol. 47. - No 3. - P. 063509.

83. Skrypnyk T. New integrable Gaudin-type systems, classical r-matrices and quasigraded Lie algebras/ T. Skrypnyk //Phys.Lett. - 2005 - Vol. A 334.- Issues 5-6. - P. 390-399.

84. Skrypnyk T. Integrable quantum spin chains, non-skew symmetric r-matrices and quasigraded Lie algebras/ T.Skrypnyk // Journal of Geometry and Physics - 2006 - Vol. 57. - No 1. - P. 53–67.

85. Skrypnyk T. Generalized quantum Gaudin spin chains, involutive automorphisms and 'twisted' classical r-matrices/T.Skrypnyk //Journal of Mathematical Physics - 2006 - Vol. 47. - Issue 3. - P. 033511.

86. Skrypnyk T. Quantum integrable systems, non-skew symmetric r-matrices and algebraic Bethe anzatz/ T. Skrypnyk // J. Math. Phys. - 2007 - Vol. 48. - No 2. - 023506.

87. Skrypnyk T. Generalized Gaudin systems in the external magnetic field and non-skew-symmetric classical r-matrices/ T. Skrypnyk// J. Phys. - 2007 - Vol. A 40. - P. 13357-13352.

88. Skrypnyk T. Generalized Gaudin spin chains, non-skew symmetric r-matrices and Reflection Equation Algebras./ T. Skrypnyk // Jour. Math. Phys. - 2007 - Vol. 48.. - No 11.- 113521.

89. Skrypnyk T. Classical R-operators and integrable Thirring-type equations/ T.Skrypnyk // Symmetry, Integrability and Geometry - 2008 - Vol. 4. -Paper 011.- 19 p.

90. Skrypnyk T. Generalized n-level Jaynes-Cummings and Dicke models, classical rational r-matrices and nested Bethe ansatz / T.Skrypnyk // J. Phys. A - 2008 - Vol. 41. - p.475202.

91. Skrypnyk T. Integrability and superintegrability of the generalized n-level many-mode Jaynes-Cummings and Dicke models/ T. Skrypnyk// J. Math. Phys. - 2009 - Vol. 50. - No. 10.- P. 103523.

92. Skrypnyk T. Non-skew-symmetric classical r-matrices, algebraic Bethe ansatz and BCS-type systems/ T.Skrypnyk // J. Math. Phys. - 2009 - Vol. 50. - No. 3. - P. 033504.

93. T.Skrypnyk, Spin chains in magnetic field, non-skew-symmetric classical r-matrices and BCS-type integrable systems/ T.Skrypnyk // Nuclear Physics - 2009 - Vol. B 806. - No 3. - P.504-528.

94. Skrypnyk T., Non-skew-symmetric classical r-matrices and integrable cases of the reduced BCS model/ T. Skrypnyk// J. Phys. A - 2009 - Vol. 42. - No. 47. - P.472004.

95. Skrypnyk T., Integrable modifications of Dicke and Jaynes-Cummings models, Bose-Hubbard dimers and classical r-matrices / T. Skrypnyk// J. Phys. A - 2010 - Vol. 43. - No. 20. - P.205205.

96. Skrypnyk T., Lie algebras with triangular decompositions, non-skew-symmetric classical r-matrices and Gaudin-type integrable systems / T. Skrypnyk// J. Geom. Phys. - 2010 - Vol. 60. - No. 3. - P. 491–500.

97. Skrypnyk T. Quasi-periodic functions on the torus and sl(n)-elliptic Lie algebra/ T.Skrypnyk// J. Math. Phys. - 2012 - Vol. 53 - No. 2. - P. 023502.

98. Skrypnyk T. Elliptic three-boson system, "two-level three-mode" JCD-type models and non-skew-symmetric classical r-matrices. / T.Skrypnyk //*Nuclear Phys. B* - 2012 - Vol 856 - No. 2. - P. 552–576.

99. Skrypnyk T. Quasigraded bases in loop algebras and classical rational r-matrices/ T.Skrypnyk// J. Math. Phys. - 2012 - Vol. 53. - No. 8. - P. 083501.

100. Skrypnyk T. Rational r-matrices, higher rank Lie algebras and integrable proton-neutron BCS models/ T. Skrypnyk// Nuclear Phys. - 2012 - Vol. B 863. - No 2. - P. 435–469.

101. Skrypnyk T. Non-skew-symmetric classical r -matrices and integrable “$p_x + ip_y$” proton–neutron BCS models/ T.Skrypnyk// Nuclear Physics B - 2012 - Vol. 864 - No 3. - P. 770–805.

102. Skrypnyk T. Classical r-matrices and integrable BCS models with many types of fermions/ T.Skrypnyk// J. Phys. A - 2012 - Vol. 45. - No. 41. - P. 415203.

103. Skrypnyk T. "Z2-graded" Gaudin models and analytical Bethe ansatz/ T.Skrypnyk// Nuclear Phys. B.- 2013 - Vol. 870. - No 3. - 495–529.

104. Skrypnyk T. Decompositions of quasigraded Lie algebras, non-skew-symmetric classical r-matrices and generalized Gaudin models/T. Skrypnyk // J. Geom. Phys. - 2014 - Vol. 75. - 98–112.

105. Skrypnyk T. Infinite-dimensional Lie algebras, classical r-matrices, and Lax operators: two approaches/ T. Skrypnyk// J. Math. Phys. - 2013 - Vol. 54. - No. 10.- P. 103507-103532.

106. Skrypnyk T. "Many-poled" r-matrix Lie algebras, Lax operators, and integrable systems / T. Skrypnyk// J. Math. Phys. - 2014 - Vol. 55 . - No. 8.- P. 083507.

107. Skrypnyk T. Generalized shift elements and classical r-matrices: construction and applications/ T. Skrypnyk// J. Geom. Phys. - 2014 - Vol. 80. - P. 71–87.

108. Skrypnyk T. General integrable n-level, many-mode Janes-Cummings-Dicke models and classical r-matrices with spectral parameters / T. Skrypnyk// J. Math. Phys. - 2015 - Vol. 56. - No. 2.- P. 023511.

109. Skrypnyk T. Quantum integrable models of interacting bosons and classical r-matrices with spectral parameters/ T. Skrypnyk// J. Geom. Phys. - 2015 - Vol. 97. - P. 133–155.

110. Skrypnyk T. Gaudin-type models, non-skew-symmetric classical r-matrices and nested Bethe ansatz/ T.Skrypnyk// Nuclear Physics B - 2015 - Vol B 891. - No 2. - P. 200-229.

111. Skrypnyk T. Twisted"rational r-matrices and algebraic Bethe ansatz: applications to generalized Gaudin, Bose-Hubbard dimer and Jaynes-Cummings-Dicke-type models/ T.Skrypnyk// Theoretical and Mathematical Physics - 2015 - Vol. 189 - No 1. - P. 125-146.

112. Skrypnyk T. Z_2-graded classical r-matrices and algebraic Bethe ansatz: applications to integrable models of quantum optics and nuclear physics/ T.Skrypnyk// Journal of Physics A. - Vol. 49 . - No 36. - (2016).

113. Skrypnyk T. "Generalized" algebraic Bethe ansatz, Gaudin-type models and Z_p-graded classical r-matrices/ T. Skrypnyk // Nuclear Physics - 2016 - Vol. B. 913 - No. 12 - P. 327-356.

114. Skrypnyk T. Reductions in finite-dimensional integrable systems and special points of classical r-matrices/ T. Skrypnyk// J. Math. Phys. - 2016 - Vol. 57 . - No. 12.- P. 123504.

115. Skrypnyk T. Reductions in soliton hierarchies and special points of classical r-matrices/ T. Skrypnyk// J. Geom. Phys. - 2018 - Vol. 130 . - No. 8 - P. 260-287.