

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ ІМ. М.М. БОГОЛЮБОВА

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ ІМ. М.М. БОГОЛЮБОВА

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

НАЗАРЕНКО Андрій Володимирович

УДК 536.758; 539.1.01; 531.51

ДИСЕРТАЦІЯ

**СТАТИСТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ СИСТЕМ
ІЗ СИЛЬНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ ТА ЕФЕКТИ ҐРАВІТАЦІЇ**

01.04.02 — теоретична фізика

Природничі науки

104 — фізика та астрономія

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ А. В. Назаренко

Науковий консультант: **Гаврилик Олександр Михайлович**,
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2020

АНОТАЦІЯ

Назаренко А.В. Статистичні властивості систем із сильною взаємодією та ефекти гравітації. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика (104 – фізика та астрономія). – Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, Київ, 2020.

Дисертацію присвячено отриманню фазових діаграм і рівнянь стану систем багатьох частинок із сильною та гравітаційною взаємодіями, спільний розгляд яких обумовлюється наявністю подібних станів як конденсатного, надплинного, рідино- і газоподібного, а також наявністю фазових переходів. Особлива увага приділяється впливу геометрії простору-часу і додаткових вимірів на стан речовини із сильною взаємодією. Окрім того, деякі системи характеризуються отриманими функціями розподілу і мультифрактальними величинами, а системи зі скінченним числом ступенів вільності – геометричними параметрами і квантовими спектрами.

У *першому розділі* дисертації описано термодинамічні стани гадронних систем, які складаються з нуклонів (протонів і нейтронів) і піонів за відносно низьких температур і густин, які реалізуються, зокрема, у зіткненнях важких іонів за середніх енергій або на фінальній стадії релятивістських зіткнень.

У *підрозділі 1.1* розвинуто модель системи релятивістських нуклонів з прямою взаємодією з виключеними ступенями вільності мезонів, в якій відтворено рівноважні властивості ядерної матерії, критичні параметри фазового переходу рідина-газ у симетричній матерії (з рівним числом протонів і нейтронів), а також енергетичний спектр надплинної нейтронної матерії в

наближенні Бардіна-Купера-Шріфера. Результати підрозділу 1.2 розширюють діаграму стану ядерної матерії на випадок ґравітаційно деформованого простору. Завдяки узагальненню моделі Валечки квантової гадродинаміки, знайдено критичні параметри фазового переходу рідина-газ симетричної ядерної матерії у конформно-пласкому просторі-часі за малих відхилень масштабного фактору. У підрозділі 1.3, наявність значної кількості піонів в ядерних процесах обумовлює врахування тричастинкової взаємодії між ними. У запропонованій моделі виявлено фазовий перехід рідина-газ в конденсаті піонів з ненульовим електричним зарядом за нульової температури, а також рідино- і газоподібні фази за високих температур з нульовим хімічним потенціалом.

Другий розділ дисертації присвячено окремим процесам і ефектам на різних стадіях ультрарелятивістських ядро-ядерних зіткнень, в яких проявляється кваркова структура гадронів, а саме, швидкоплинним процесам за участю партонів на ранній стадії зіткнення і механізму прояву компактних додаткових вимірів на стадії рівноважної кварк-ґлюонної речовини. Окрім того, приділяється увага термодинамічним властивостям випромінювання (фотонів) за надвисоких, планківських температур.

У підрозділі 2.1, на кінетичному етапі релятивістських ядерних зіткнень описано еволюцію та анізотропію потоків партонів, існування яких має визначальний вплив на спостережувані інтерферометричні дані. Виявлено, що незначне число жорстких партонів обумовлює від'ємну провідність і нестійкість м'якої компоненти (поля) при електромагнітній взаємодії, що сприяє ізотропізації поля. Результати підрозділу 2.2 показують, що термалізована кварк-ґлюонна речовина у зіткненнях ядер приводить за умов Аркані-Хамеда, Дімопулоса і Двалі до ненульової ймовірності прояву додаткових компактних просторових вимірів, число яких не перевищує шість у випадку конфайнменту і є необмеженим, але обумовленим температурою, в режимі домінування випромінювання. На основі введеного в підрозділі 2.3 нового закону дода-

вання 4-імпульсу, що враховує планківське обмеження на енергію згідно з принципами подвійної спеціальної теорії відносності, знайдено термодинамічні функції та модифікований закон Стефана-Больцмана випромінювання чорного тіла за високих температур. Показано, що випромінювання відбувається за температури вище порогової і з густиною енергії, що прямує до певного скінченного значення.

У *третьому розділі* враховується така топологічна особливість компактних двовимірних просторів як рід, яку може мати підпростір додаткових вимірів, поки існуючий (наш) тривимірний простір залишається топологічно тривіальним. Вивчається часова еволюція геометрій ріманових поверхонь роду один (тор) і роду два (крендель), а також квантові спектри геометричних характеристик: просторово- і часоподібних інтервалів, площі. У статистичному описі спектру довжин випадкових двовимірних графів, породжених специфічною групою симетрій, розглядаються аспекти симетризації польових величин на рімановій поверхні роду два.

Так, у підрозділі 3.1, із застосуванням гамільтонового підходу описано часову еволюцію геометрії тороїдального простору в $(2+1)$ -вимірній гравітації Черна-Саймонса з модельним джерелом, наявність якого при квантуванні приводить або до розщеплення вироджених станів власного часу, або до зняття виродження спектра площі. Для двопараметричної ріманової поверхні роду два, означеної в підрозділі 3.2, отримано канонічні змінні дія-кут за допомогою геометричної теорії Вейля-Петерсона. Побудовані на їх базі генератори Лоренца і гамільтоніан задають часову еволюцію геометрії поверхні за сценарієм “великого відскоку” і визначають квантовий дискретний спектр площі фазового простору. У підрозділі 3.3, за допомогою статистичної міри як ряду за групою симетрій ріманової поверхні роду два, обчислено мультифрактальні показники спектру довжин напрямлених графів восьмигілкового дерева Кейлі. Виявлено застосовність теорії ланцюгів Маркова для опису вказаного спектру і міри.

Четвертий розділ присвячено вивченню статистичних властивостей систем електрично заряджених тіл з гравітаційною взаємодією, де електростатичне відштовхування відіграє провідну роль, щоб запобігти колапсу. Дослідження ґрунтується як на розв'язках рівнянь класичної теорії поля в першому наближенні за константами взаємодії, так і на точному розв'язку рівнянь Ейнштейна-Максвелла для екстремальних чорних дір за умови рівності констант гравітаційної і електромагнітної взаємодії. Природа гіпотетичних екстремальних чорних дір надає додаткову перспективу застосування різних статистик (Бозе-Ейнштейна, інфінітної та ін.) і порівняння їх ролі у великому канонічному ансамблі.

Виходячи із загальної теорії відносності в підрозділі 4.1, за допомогою Пуанкаре-інваріантної процедури редукції польових ступенів вільності методами механіки Дірака з в'язами отримано гамільтонів опис та канонічну реалізацію алгебри Пуанкаре в термінах частинкових змінних в першому наближенні за гравітаційною сталою. Поєднуючи результат із релятивістською електромагнітною взаємодією в першому наближенні за константою зв'язку, у підрозділі 4.2 знайдено термодинамічні функції, що характеризують ефект екранування в слабконеідеальній системі релятивістських зарядів з прямою гравітаційною взаємодією в калібрувальній-інваріантній схемі обчислень. У підрозділі 4.3 для ансамблю екстремальних чорних дір, описуваному статистичним розв'язком Маджумдара-Папапетру рівнянь Ейнштейна-Максвелла, здійснено порівняння середнього значення гравітаційної затримки часу в статистиці Бозе-Ейнштейна, інфінітній, Фермі-Дірака і класичній.

У *п'ятому розділі* описано можливі термодинамічні стани в моделях бозе-конденсатної темної матерії з дво- і тричастинковою взаємодіями із застосуванням відповідних модифікацій рівняння Гроса-Пітаєвського. У випадку темної матерії галактичного гало з гравітаційною і парною розсіювальною взаємодіями, зазвичай присутньому ефекту суцільного обертання надається інше тлумачення, яке походить з припущення про структурованість части-

нок темної матерії. На підставі аналізу, модель з тричастинковою взаємодією замінює модель з парною взаємодією у випадку темної матерії галактичного ядра і демонструє появу двох термодинамічних фаз: рідино- і газоподібної.

У підрозділі 5.1 показано, що просторовий розподіл частинок, отриманий у запропонованій моделі з деформованим комутатором для хвильової функції бозе-конденсату з гравітаційною і парною взаємодіями в наближенні Томаса-Фермі, збігається з відомим розподілом бозе-конденсатної темної матерії (гало галактик) з повільним обертанням. Для стаціонарного рівняння Гросса-Пітаєвського з гравітаційною і тричастинковою взаємодіями у підрозділі 5.2 отримано чисельні розв'язки і термодинамічні функції, за допомогою яких виявлено існування рідино- і газоподібного станів, фазовий перехід першого роду між якими обумовлюється квантовими флуктуаціями. Надано оцінки фізичних величин для моделі темної матерії галактичного ядра.

Ключові слова: статистична фізика і термодинаміка, ядро-ядерні зіткнення, теорія гравітації, рівняння стану, фазові переходи першого роду, рівняння Гросса-Пітаєвського, гадрони, кварки і глюони, темна матерія, додаткові виміри.

ABSTRACT

Nazarenko A.V. Statistical properties of the systems with strong interaction and the effects of gravity. — Qualification scientific work in the form of manuscript.

Thesis for doctor of sciences degree in speciality 01.04.02 — theoretical physics (104 — physics and astronomy). — Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the NAS of Ukraine, Kyiv, 2020.

The dissertation is aimed at obtaining the phase diagrams and equations of state of systems of many particles with strong and gravitational interactions, the joint consideration of which is conditioned by the presence of similar states as condensate, superfluid, liquid and gaseous, and the presence of phase transitions. Moreover, attention is paid to the influence of space-time geometry and extra dimensions on the state of matter with strong interaction. There are some systems which are characterized by the distribution functions and multifractal quantities, by geometric parameters and quantum spectra in the case of a finite number of degrees of freedom.

The first Section of the dissertation deals with the thermodynamic states of hadron systems, that consist of nucleons (protons and neutrons) and pions at relatively low temperatures and densities, which are realized, in particular, in collisions of heavy ions at intermediate energies or in the final stage of relativistic collisions.

In Section 1.1 it is constructed a model of a system of relativistic nucleons with direct interaction with eliminated degrees of freedom of mesons, in which the equilibrium properties of nuclear matter, critical parameters of the liquid-gas phase transition in symmetric nuclear matter with equal numbers of protons and neutrons, and the energy spectrum of the superfluid neutron matter in

the Bardeen-Cooper-Schrieffer approximation are successfully reproduced. The results of Section 1.2 extend the diagram of nuclear matter to the case of gravitationally deformed space. Within the generalization of the Walecka model of quantum hadrodynamics, the critical parameters of the liquid-gas phase transition of symmetric nuclear matter in conformally-flat space-time with small deviations of the scale factor are found. In view of a significant number of pions in nuclear processes, we take into account the three-particle interaction between them. Such a model reveals a liquid-gas phase transition in the condensate of pions with a total non-zero electric charge at zero temperature, as well as liquid and gaseous phases at high temperatures with zeroth chemical potential.

The second Section of the dissertation deals with the certain processes and effects at chosen stages of ultrarelativistic nuclear-nuclear collisions, in which the quark structure of hadrons is manifested, namely, transient processes involving partons at the early stage of collision and the mechanism of manifestation of compact extra dimensions at the stage of equilibrated quark-gluon matter. In addition, attention is paid to the thermodynamic properties of radiation (photons) at ultrahigh, Planck temperatures.

In Section 2.1, at the kinetic stage of relativistic nuclear collisions, the evolution and anisotropy of partonic fluxes are described, the existence of which determines the observed interferometric data. It was found that a small number of hard partons causes the negative conductivity and instability of the soft component (field) during electromagnetic interaction, which stimulate the isotropization of the field. The results of Section 2.2 show that the thermalized quark-gluon matter in the collisions of nuclei leads under the conditions of Arkani-Hamed, Dimopoulos and Dvali to a non-zero probability of manifestation of extra compact spatial dimensions, the number of which does not exceed six in the case of confinement and is unlimited, but determined by temperature, in the mode of dominance of radiation. In Section 2.3, due to the new law of

the addition of a 4-momentum introduced, which takes into account the Planck limit on energy according to the principles of the doubly special relativity, thermodynamic functions and a modified Stephen-Boltzmann law of black body radiation at high temperatures are found. It is shown that radiation occurs at temperatures above the threshold, and an energy density goes to certain finite value.

The third Section takes into account a genus as the topological feature of compact two-dimensional spaces, which may be treated as a subspace in additional dimensions, while the existing (our) three-dimensional space remains topologically trivial. The time evolution of the geometries of Riemann surfaces of the genus one (torus) and the genus two (two-holed torus) is studied, as well as the quantum spectra of geometric characteristics, namely, space and time intervals, areas. In the statistical description of the spectrum of lengths of random two-dimensional graphs, aspects of symmetrization of field quantities on the Riemann surface of genus two are considered.

Thus, in Section 3.1, using the Hamiltonian approach, we describe the time evolution of the geometry of toroidal space in $(2+1)$ -dimensional Chern-Simons gravity with a source, the presence of which during quantization leads either to eliminating the degeneracy of area or to splitting of degenerate states of proper time. For the two-parameter Riemann surface in genus two, defined in Section 3.2, the canonical action-angle variables are obtained using the Weyl-Petersson geometric theory. The Lorentz generators and Hamiltonian built on their basis determine the time evolution of surface geometry according to the “big bounce” scenario and determine also the quantum discrete spectrum of the phase space area. In Section 3.3, using a statistical measure as a series over the group of symmetries of the Riemann surface in genus two, multifractal exponents of the length spectrum of directed graphs of octagonal Cayley tree are calculated. The applicability of Markov chain theory for the description of the length spectrum and the measure is revealed.

The fourth Section is devoted to the study of the statistical properties of systems of charged bodies with gravitational interaction, where electrostatic repulsion plays a leading role in preventing collapse. The study is based both on the solution of the equations of classical field theory in the first order approximation in interaction constants and on the exact solution of the Einstein-Maxwell equations for extremal black holes, as a limit case of equality of gravitational and electromagnetic interaction constants. The nature of hypothetical extremal black holes provides additional possibility for the application of various statistics (Bose-Einstein, infinite, etc.) and a comparison of their role in a grandcanonical ensemble.

Starting from the general relativity theory in Section 4.1 and using the Poincare-invariant procedure for reducing field degrees of freedom by Dirac mechanics with constraints, it is obtained a Hamiltonian description and the canonical realization of the Poincare algebra in terms of particle variables in the first order approximation in the gravitational constant. Combining the result with the relativistic electromagnetic interaction in the first order approximation in the coupling constant, in Section 4.2 we found thermodynamic functions that characterize the screening effect in a weakly non-ideal system of relativistic charges with direct gravitational interaction in the gauge-invariant scheme. In Section 4.3, the static Majumdar-Papapetrou solution of the Einstein-Maxwell equations defines the ensemble of extremal black holes and serves to comparing mean value of the gravitational time delay in Bose-Einstein, infinite, Fermi-Dirac, and classical statistics.

The fifth Section describes possible thermodynamic states in models of Bose-condensate dark matter with two- and three-particle interactions using appropriate modifications of the Gross-Pitaevski and Poisson equations. In the case of dark matter of a galactic halo with gravitational and pairwise scattering interactions, another treatment of effect, usually given by rigid rotation, comes from the assumption of the compositeness of dark matter particles. Based on

the analysis, the model with three-particle interaction replaces the model with pairwise interaction in the case of dark matter in the galactic nuclei and demonstrates the appearance of two thermodynamic phases: liquid and gaseous.

The results of Section 5.1 show that the spatial particle distribution obtained in the proposed model with a deformed commutation relations for the Bose-condensate wave function and with gravitational and pairwise interactions in the Thomas-Fermi approximation coincides with the known distribution of Bose-condensate dark matter (of galactic halo). For the stationary Gross-Pitaevski equation with gravitational and three-particle interactions, numerical solutions and thermodynamic functions are obtained in Section 5.2. These reveal the existence of liquid and gaseous states, the first order phase transition between which is due to quantum fluctuations. Estimates of physical quantities for the dark matter model of the galactic nuclei are made.

Key words: statistical physics and thermodynamics, nuclear-nuclear collisions, the theory of gravity, equation of state, first order phase transition, Gross-Pitaevski equation, hadrons, quarks and gluons, dark matter, extra dimensions.

СПИСОК НАУКОВИХ ПРАЦЬ, В ЯКИХ ОПУБЛІКОВАНО ОСНОВНІ НАУКОВІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ

- 1^a. A.V. Nazarenko, Classical relativistic system of pointlike masses with linearized gravitational interaction, *Acta Phys. Slovaca* **53**(1), 1–16 (2003).
- 2^a. A. Nazarenko Thermodynamic functions of a relativistic system of charges in the ring-diagram approximation, *Ukr. J. Phys.* **49**(2), 182–187 (2004).
- 3^a. A.V. Nazarenko, Relativistic direct interaction between nucleons derived from classical field theory, *Int. J. Mod. Phys. E* **13**(3), 631–645 (2004).
- 4^a. A.V. Nazarenko, Quantization of reduced Chern–Simons gravity with a source, *Int. J. Mod. Phys. A* **19**(28), 4883–4897 (2004).
- 5^a. A. Nazarenko, Time level splitting in quantum Chern–Simons gravity, *Class. Quantum Grav.* **22**, 2107–2120 (2005).
- 6^a. A.V. Nazarenko, Superfluidity in a system of neutrons with direct relativistic interaction, *Ukr. J. Phys.* **50**(3), 293–298 (2005).
- 7^a. A.V. Nazarenko, Evaporation of symmetric nuclear matter in weakly curved space, *Int. J. Mod. Phys. E* **15**(3), 561–570 (2006).
- 8^a. D.V. Anchishkin and A.V. Nazarenko, Liquid-like phases of $\pi^+\pi^-$ matter, *J. Phys. Stud.* **10**(2), 93–97 (2006).
- 9^a. M. Gyulassy, Iu.A. Karpenko, A.V. Nazarenko, and Yu.M. Sinyukov, HBT and initial conditions for hydrodynamic expansion in A+A collisions, *Braz. J. Phys.* **27**(3a), 1031–1038 (2007).
- 10^a. Yu.M. Sinyukov, Iu.A. Karpenko, and A.V. Nazarenko, Spacetime scales and initial conditions in relativistic A+A collisions, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **35**, 104071 (5 pages) (2008).
- 11^a. A.V. Nazarenko, The probability of the creation of extra dimensions in nuclear collisions, *Int. J. Mod. Phys. E* **17**(8), 1605–1618 (2008).

- 12^a. Yu.M. Sinyukov, A.V. Nazarenko, and Iu.A. Karpenko, Is early thermalization really needed in A+A collisions?, *Acta Phys. Polonica B* **40**(4), 1109–1117 (2009).
- 13^a. A.V. Nazarenko, Glasma evolution in partonic medium, *J. Phys. Stud.* **14**(3), 3202 (7 pages) (2010).
- 14^a. A.V. Nazarenko, Directed random walk on the lattices of genus two, *Int. J. Mod. Phys. B* **25**(26), 3415–3433 (2011).
- 15^a. A.V. Nazarenko, Directed random walk on the eight-branching Cayley tree, *Вісник Львів. Універ. Серія фізична* **48**, 253–269 (2013).
- 16^a. A.V. Nazarenko, Area quantization of the parameter space of Riemann surfaces in genus two, *Ukr. J. Phys.* **58**(11), 1055–1064 (2013).
- 17^a. A.V. Nazarenko and Yu.A. Kulinich, Relativistic kinematics of two-parametric Riemann surface in genus two, *Hadronic J.* **39**(2), 181–198 (2016).
- 18^a. A.V. Nazarenko and V. Blavatska, A one-dimensional random walk in a multi-zone environment, *J. Phys. A: Math. Theor.* **50**, 185002 (11 pages) (2017).
- 19^a. A.V. Nazarenko and V. Blavatska, Asymmetric random walk in a one-dimensional multi-zone environment, *Ukr. J. Phys.* **62**(6), 508–517 (2017).
- 20^a. A.M. Gavrilik, I.I. Kachurik, M.V. Khelashvili, and A.V. Nazarenko, Condensate of μ -Bose gas as a model of dark matter, *Physica A* **506**, 835–843 (2018).
- 21^a. W.S. Chung, A.M. Gavrilik, and A.V. Nazarenko, Photon gas at the Planck scale within the doubly special relativity, *Physica A* **533**, 121928 (10 pages) (2019).
- 22^a. A.M. Gavrilik and A.V. Nazarenko, Statistics effects in extremal black holes ensemble, *Int. J. Mod. Phys. A* **34**, 1950215 (16 pages) (2019).
- 23^a. A.V. Nazarenko, Partition function of the Bose–Einstein condensate dark matter and the modified Gross–Pitaevskii equation, *Int. J. Mod. Phys. D*

29(2), 2050018 (18 pages) (2020).

- 24^a. A.M. Gavrilik, M.V. Khelashvili, and A.V. Nazarenko, Bose–Einstein condensate dark matter model with three-particle interaction and two-phase structure, *Phys. Rev. D* **102**(8), 083510 (13 pages) (2020).

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ НА НАУКОВИХ КОНФЕРЕНЦІЯХ

1. A.V. Nazarenko, Self-gravitating condensate of deformed bosons, described by the modified Gross–Pitaevskii equation. Bogolyubov Kyiv Conference “Problems of Theoretical and Mathematical Physics”. September 24–26, 2019, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv (Ukraine). Program and Abstracts, 44 (2019).
2. A.V. Nazarenko and A.M. Gavrilik, Statistical effects in extremal black holes ensemble. XI Bolyai-Gauss-Lobachevsky Conference: Non-Euclidean, Non-Commutative Geometry and Quantum Physics. May 19-24, 2019, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv (Ukraine). Book of Abstracts, 29 (2019).
3. A.V. Nazarenko, Directed random walk on the eight-branching Cayley tree. Conference on Physics of Disordered Systems. October 14–16, 2013, Franko Lviv National University, Lviv (Ukraine). Abstract, 27 (2013).
4. A.V. Nazarenko, Area quantization of the parameter space of Riemann surfaces in genus two. International conference “Quantum groups and quantum integrable systems”. June 18–21, 2013, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv (Ukraine). Abstract, 35 (2013).
5. A.V. Nazarenko, Directed random walk on the eight-branching Cayley tree. 8-th Bolyai-Gauss-Lobachevsky Conference: Non-Euclidean Geometry in Modern Physics and Mathematics. May 22-25, 2012, Institute of Electron Physics, Uzhgorod (Ukraine). Conference Programme
iep.org.ua/content/conferenc/bgl_2012/Prog_BGL-8.pdf

6. A.V. Nazarenko, Momentum and space asymmetry of the matter at high-energy density. Internat. Conference “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics”. June 21-27, 2009, Institute of Mathematics, Kyiv (Ukraine). www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2009/Nazarenko.html
7. A.V. Nazarenko, Initial conditions for hydrodynamic expansion of fireball. Zimanyi 2007 Winter School on Heavy Ion Physics. December 5-7, 2007, KFKI RMKI, Budapest (Hungary). Conference Programme www.kfki.hu/~csorgo/school07/programme/index.html
8. A.V. Nazarenko, Probability of creation of extra dimensions in quantum gravity. International Conference “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics”. June 24-30, 2007, Institute of Mathematics, Kyiv (Ukraine). www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2007/Nazarenko.html
9. Yu.M. Sinyukov, Iu. Karpenko, and A.V. Nazarenko, Interferometry analysis and initial conditions in A+A collisions. International School-seminar “New Physics and Quantum Chromodynamics at External Conditions”. May 3–6, 2007, Dnipropetrovsk (Ukraine). Proceedings, 75-85 (2007).
10. A.V. Nazarenko, New quantum effects in (2+1)-dimensional non-empty universe. International Conference “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics”. June 20-26, 2005, Institute of Mathematics, Kyiv (Ukraine). www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2005/Nazarenko.html

ЗМІСТ

Вступ	19
Розділ 1. Термодинаміка систем гадронів	33
1.1. Стани системи нуклонів з прямою взаємодією	35
1.1.1. Гамільтоніан системи нуклонів	37
1.1.2. Рівноважні властивості за нульової температури	44
1.1.3. Фазовий перехід “рідина–газ”	47
1.1.4. Надплинність у системі нейтронів	51
1.2. Випаровування ядерної матерії у конформно-пласкому просторі	60
1.2.1. Узагальнення моделі Валечкі	62
1.2.2. Рівняння стану системи нуклонів	66
1.2.3. Альтернативний підхід	70
1.3. Рідиноподібні стани $\pi^+\pi^-$ матерії	72
1.3.1. Стани конденсату піонів	74
1.3.2. Гаряча піонна рідина	77
Висновки до розділу 1	82
Розділ 2. Системи багатьох частинок за високих густин енергії	83
2.1. Дотермічні потоки партонів та їхня анізотропія	85
2.1.1. Кінетичний і теоретико-польовий описи потоків	86
2.1.2. Ізотропізація абелевого поля	105
2.2. Прояв додаткових вимірів в системі кварків і глюонів	117
2.2.1. Модель. Гамільтонів опис	119
2.2.2. Ймовірність прояву додаткових вимірів	124
2.3. Газ фотонів з планківським обмеженням енергії	133
2.3.1. Нове правило додавання енергії та гамільтоніан	135

2.3.2. Випромінювання чорного тіла	138
2.3.3. Підсумки	148
Висновки до розділу 2	150
Розділ 3. Ефекти гравітації в (2+1)-вимірному просторі-часі	151
3.1. Геометрія тороїдального Всесвіту та спектри характеристик . .	153
3.1.1. Глобальні змінні гравітації Черна–Саймонса	155
3.1.2. Спостережувані у квантовій картині	163
3.1.3. Підсумки	177
3.2. Еволюція геометрії ріманової поверхні роду два	178
3.2.1. Восьмикутник і ріманова поверхня	179
3.2.2. Структура простору параметрів	182
3.2.3. Релятивістська кінематика	187
3.2.4. Підсумки	192
3.3. Статистичні властивості восьмигілкового дерева Кейлі	193
3.3.1. Простір та симетрії	193
3.3.2. Показники спектра графів	194
3.3.3. Підсумки	205
Висновки до розділу 3	206
Розділ 4. Статистичний опис систем тіл з гравітаційною і електромагнітною взаємодіями	207
4.1. Гамільтонів опис прямої гравітаційної взаємодії	210
4.1.1. Гамільтонів опис системи “частинки+гравітаційне поле” .	211
4.1.2. Редукція ступенів вільності поля	217
4.1.3. Підсумки	221
4.2. Екранування в слабконейдеальному релятивістському газі точкових зарядів з гравітаційною взаємодією	222
4.2.1. Ефективний потенціал взаємодії	223
4.2.2. Термодинамічні функції	228

4.3. Роль статистики в ансамблі екстремальних чорних дір	231
4.3.1. Статистичні характеристики ансамблю чорних дір	233
4.3.2. Конкретизація статистики	241
4.3.3. Підсумки	247
Висновки до розділу 4	251
Розділ 5. Моделі бозе-конденсатної темної матерії	252
5.1. Термодинаміка темної матерії з парною взаємодією	255
5.1.1. Статистична сума конденсату із взаємодією	256
5.1.2. Модифіковане рівняння Гросса–Пітаєвського	267
5.1.3. Підсумки	272
5.2. Темна матерія з тричастинковою самодією та її стани	274
5.2.1. Побудова моделі	275
5.2.2. Наближення Томаса–Фермі	279
5.2.3. Врахування квантових флуктуацій	285
5.2.4. Термодинамічні величини і дві фази	290
5.2.5. Підсумки	295
Висновки до розділу 5	297
Висновки	298
Список використаних джерел	301
Додаток А. Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації	333

ВСТУП

Обґрунтування та актуальність теми досліджень. Основну увагу в роботі зосереджено на фізичних системах з двома фундаментальними взаємодіями: сильній і гравітаційній. Побіжний погляд на об'єкти мікро та макросвіту (зокрема, атомні ядра, зорі та їх скупчення) дозволяє встановити спільну рису цих взаємодій – притягання, необхідне для утворення матерії, багаточастинкових структур, неоднорідність і розмаїття яких завдячує ефектам відштовхування (тієї чи іншої природи). Обчислювальні труднощі при описі систем з такими взаємодіями змушують нас звертатись до спрощених моделей, які складають частину наукового пошуку.

Актуальність роботи обумовлена необхідністю опису властивостей матерії в ядро-ядерних зіткненнях, темної матерії, а також явищ з одночасним проявом сильної і гравітаційної взаємодій.

Однією з фундаментальних задач теоретичної фізики є отримання характеристик систем багатьох частинок (речовини) як функцій температури, густини і складу, що визначають фазову діаграму стану речовини.

Застосування єдиного підходу – рівноважного статистичного опису і термодинаміки – до систем із сильною та гравітаційною взаємодією, які існують на різних просторових масштабах, обумовлюється з теоретичної точки зору подібними станами: конденсатним і надплинним [50, 51, 232, 290], рідино- і газоподібним [254], а також наявністю фазових переходів [73, 323]. Хоча рівноважний підхід сильно спрощує картину явищ, він виявляє напрям складної динаміки систем і робить наочним процес розділення фаз, що буває важко досягнути в мікроскопічному формулюванні [99].

Окрім того, стани деяких систем можуть проявлятися і/або обумовлюватися геометрично як в конфігураційному просторі, так і в просторі інших

характеристик. Тоді зручно оперувати функцією розподілу, геометричними величинами і квантовими спектрами [14, 392], мультифрактальними показниками [391].

Через розбіжність вигляду і значень параметрів взаємодії у вакуумі та середовищі доводиться оминати фундаментальні теорії, і звертатись до експериментальних даних за подібних умов задач.

Так, моделі з сильною взаємодією здебільшого спираються на дані з релятивістських зіткнень важких гадронів на прискорювачах частинок [378]. Хоча доступні відомості є опосередкованими і не охоплюють деталі, їх вистачає для статистичного і кінетичного опису процесів в середовищі, а також застосування ефективної квантової гадродинаміки [356].

Поміж мотивуючих нас експериментів відзначимо дослідження мультифрагментації перегрітих ядер [39, 103, 104, 180, 341] як ядерного фазового переходу рідина-газ, передбаченого, зокрема, в рамках польової моделі Валечки [254, 356, 322, 323] та її модифікацій [161, 306, 349]. Для встановлення ролі релятивізму у випаровуванні ядер та критичних параметрів ми пропонуємо модель системи нуклонів з виключеними ступенями вільності мезонів, яка слугує подальшим розвитком теорії прямих взаємодій [260]. Окрім того, розгляд надплинної нейтронної матерії [51, 239] на базі внеску куперівських пар у моделі в наближенні Бардіна-Купера-Шріфера [36] та порівняння з відомими результатами [32, 55, 161, 212, 213, 228, 283, 291, 292, 349] покликані вказати на провідні ефекти та шляхи покращення обчислень.

Разом з тим, узагальнення моделі Валечки на випадок конформно-плаского простору-часу [371] з рівним числом протонів і нейтронів покликане виявити зміну критичних параметрів переходу рідина-газ за малих змін масштабного фактору завдяки перемасштабуванню об'єму і зміні енергетичного спектру.

Таким чином, вказані задачі та їх результати приводять до фазової діаграми ядерної матерії у пласкому та конформно-пласкому просторі-часі за відносно малих температур і густин.

Окрім того, термодинаміка систем гадронів має описувати не лише провідну нуклонну складову, але й стани мезонів. Для дослідження природно обрати пі-мезони, число (множинність) яких є великим в ядерних зіткненнях, і зосередитись на станах піонної матерії в системі відліку, пов'язаній з нею.

На існування конденсату піонів [242, 326, 354, 387] натякають зіткнення протон-ядро [297], які надали спектр дилептонів і межі ефективної маси піонів у середовищі. Пов'язуючи неоднозначність свідчень з різними фазами конденсату [192], доцільно обмежити кіральні моделі [337, 358] три-піонною взаємодією і описати фазовий перехід рідина-газ.

Теоретично, рідино- і газоподібна фази піонної матерії можуть виникати в різних температурних режимах, зокрема, на фінальній стадії релятивістського ядро-ядерного зіткнення, повна картина якого є досить складною.

У роботі ми зосереджуємося на окремих процесах на ранній (кінетичній) і рівноважній кварк-глюонній стадіях, коли фізика гадронів незастосовна.

Виявлена на Колайдері релятивістських важких іонів [7, 5, 187] незалежність інтерферометричних об'ємів від енергії, а також початкові умови гідродинамічної еволюції мають обумовлюватися розвиненими на ранній стадії ядерних зіткнень поперечними потоками некогерентних партонів, еволюція і анізотропія яких визначаються в кінетичному та польовому підходах. Хоча, локальна рівновага вимагає бодай часткової ізотропізації системи [249, 253], її механізм в моделі із електрично взаємодіючими м'якими і жорсткими партонами пов'язується з нестійкістю і від'ємною провідністю їхніх пучків.

Ідея застосовності рівняння дифузії в таких задачах, яке, зазвичай, описує хаотичні блукання [338], стимулює їх незалежний розгляд у багатозонному середовищі з адгезією [275, 276], пов'язаною з ефективною масою частинки.

На стадії рівноважної кварк-глюонної матерії із визначеним рівнянням стану залучаємо ефекти гравітації. Так, надбання теорії струн [91] надихають на пошуки прояву додаткових вимірів, необхідних для єдиної теорії фунда-

ментальних взаємодій. Зокрема, концепція [22] породила ідею їх виявлення через появу мікроскопічних чорних дір [48, 168] в зіткненнях ядер. Радше, переоцінка ймовірності такого сценарію спонукає до розгляду механізму прояву компактних додаткових вимірів в рамках мікроскопічної космологічної моделі з кварк-глюонною речовиною.

Дана задача також пов'язана з процесами ранньої еволюції Всесвіту. Значна роль випромінювання (фотонів) в цю епоху ґтовхає до вивчення його властивостей за надвисоких температур.

Виходячи з подвійної спеціальної теорії відносності (ПСТВ) з додатковим обмеженням на енергію [15, 16, 221] та браку її прямого підтвердження, ми звертаємось до версії ПСТВ з новим законом додавання 4-імпульсу для опису нових термодинамічних ефектів при випромінюванні чорного тіла (газу фотонів) за планківських температур.

Хоча задача з додатковими компактними вимірами сформульована для топології багатовимірного тора з фіксованою геометрією [22], навіть у двох (додаткових) вимірах існує нескінченне число топологій і геометрій простору, властивості якого потребують окремого вивчення.

Так, в модельному $(2+1)$ -вимірному просторі-часі, теорія гравітації еквівалентна польовій теорії Черна-Саймонса [360] і вимагає асоціювання простору з рімановою поверхнею фіксованого роду (тором, зокрема). Таке формулювання потребує *послідовної* редукції полів до скінченного числа глобальних змінних для опису часової еволюції геометрії простору. Окрім того, ідея відсутності у світі з квантовими (і тепловими) флуктуаціями абсолютних значень довжини і кута [14] привела до появи квантової геометрії на тлі $(2+1)$ -вимірної квантової гравітації [110, 111, 112, 301, 302, 303] із знаходженням спектрів просторово- і часоподібних інтервалів, площі. Таким чином, квантування теорії у тороїдальному Всесвіті з обертанням виявляє спектри величин, а також розщеплення квантових рівнів часу, як в ефекті Зеемана.

Після тора роду один природно розглянути ріманову поверхню роду два

(крендель). Для опису властивостей такого простору пасує теорія Вейля-Петерсона. Інтерес до еволюції його геометрії стимулює знаходження інваріантів щодо групи відображень класів (поверхні), утворюючи з яких канонічні генератори Лоренца і гамільтоніан [210], відтворюється новітній космологічний сценарій з “великим відскоком” [26] для глобальних змінних.

Разом з тим, симетризація локальних величини (полів) під дією групи симетрій ріманової поверхні приводить до рядів Пуанкаре [392]. Однак, неспроможність обчислити такий ряд точно навіть за симетріями поверхні роду два і поступова стохастизація членів ряду обумовлюють наближення ланцюгів Маркова, що стає предметом вивчення в теорії хаоса [144, 353].

У статистичному підході звернемося до низки гравітаційних систем з різними відштовхувальними взаємодіями: електростатичною і розсіювальною.

Суперечності на тлі термодинаміки слабконеідеального газу релятивістських точкових зарядів в наближенні Дебая-Хюкеля [194, 390, 47, 175, 195], можна показати, спричинені обчислювальними труднощами, які усуваються і за наявності гравітаційної взаємодії. Окрім того, розрахунки узгоджуються з теорією кулонівської плазми [369, 393]. Однак, граничний випадок за умови рівності констант гравітаційної і електромагнітної взаємодій робить частинки вільними в статистичному підході, що потребує звернення до розв’язку рівнянь Ейнштейна-Максвелла для екстремальних чорних дір [222, 287].

Надаючи оцінку середній затримці часу, обумовленій гравітацією в ансамблі гіпотетичних екстремальних чорних дір [154, 222, 287], можна визначити роль інфінітної статистики, якою їх наділили в праці [344]. Для цього, природно порівняти затримку часу для ансамблів у статистиках Бозе-Ейнштейна, інфінітній, Фермі-Дірака і класичній.

Значний внесок темної матерії та її роль у Всесвіті (особливо у формуванні галактик) спонукає до з’ясування її природи і властивостей, якому служать спостережувані дані супутників і обсерваторій [208, 308]. Приписуючи темній матерії бозе-конденсатне походження [50] без завчасних припущень

про склад, пошук відповідей можливий через аналіз функції розподілу, ротаційних кривих та термодинамічних функцій за умови рівноваги, яка в наших моделях забезпечується дво- і тричастинковим розсіюванням частинок темної матерії, що протидіє тяжінню і дозволяє існування різних термодинамічних фаз: рідино- і газоподібної.

Зв'язок роботи з науковими програмами і темами. Робота виконана у рамках досліджень, що проводяться у відділі математичних методів в теоретичній фізиці Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова: тема “Квантові симетрії і властивості інтегровних та квантово-польових систем”, 2001-2004 рр., шифр 1.2.2, 1.4.7, № д.р. в УкрІНТЕІ 0101U000331; тема “Симетрії, інтегровні системи, класичні і квантові поля”, 2005-2007 рр., шифр 1.4.7, № д.р. в УкрІНТЕІ 0101U006883; тема “Методи теорії симетрій та проблеми нелінійної динаміки в сучасній теорії поля та теорії елементарних частинок”, 2007-2011 рр., шифр 1.4.7, № д.р. в УкрІНТЕІ 0106U007885; тема “Нелінійні квантові осцилятори, інтегровні моделі та квантово-польові системи: симетрії і застосування”, 2012-2016 рр., шифр 1.4.7, № д.р. в УкрІНТЕІ 0112U000052; тема “Симетрії, деформації та інтегровність в моделях квантових полів і частинок” 2017-2021 рр., шифр 1.4.7, № д.р. в УкрІНТЕІ 0117U000238.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є знаходження фазових діаграм і рівняння стану систем із сильною та гравітаційною взаємодіями в рамках запропонованих моделей в статистичному підході. Основна увага в роботі приділяється окремим явищам в ядерній і темній матерії, високоенергетичним явищам з одночасним врахуванням сильної взаємодії і ефектів гравітації, а також розвиненню підходів до задач квантової гравітації, термодинаміки систем електрично заряджених тіл з гравітаційною взаємодією.

Поетапне дослідження пов'язано з такими задачами і завданнями:

1. Розвинути квантову модель релятивістських нуклонів з прямою взаємодією (з виключеними на класичному рівні ступенями вільності полів σ , ω

і ρ мезонів) з параметрами, що відтворюють рівноважні властивості ядерної матерії за нульової температури; знайти критичні параметри фазового переходу типу рідина-газ в симетричній ядерній матерії; встановити енергетичний спектр надплинної нейтронної матерії за нульової температури.

2. Узагальнити польову модель Валечки гадродинаміки у випадку конформно-плаского простору-часу і оцінити критичні параметри фазового переходу рідина-газ симетричної ядерної матерії за зміною масштабного фактору.

3. Побудувати модель $\pi^\pm$ -речовини з тричастинковою взаємодією, яка забезпечує існування рідиноподібного стану, і описати фазовий перехід типу рідина-газ в конденсаті піонів, а також в системі за ненульової температури.

4. Описати еволюцію потоків партонів на ранній стадії ядерних зіткнень та оцінити їхню анізотропію в кінетичній моделі вільного розльоту і в абелевій польовій моделі для подальшого відтворення інтерферометричних характеристик матерії в (не)центральных зіткненнях. Розвинути модель з абелевим полем для електрично заряджених партонів з метою аналізу процесу ізотропізації м'якої моди партонів (поля).

5. За умов концепції Аркані-Хамеда-Дімопулоса-Двалі виникає можливість передачі енергії від кварк-глюонної речовини до гравітаційних мод у звичайних трьох і в додаткових просторових вимірах, ймовірність якої слід визначити в рамках відповідної квантової моделі космологічного типу

6. Для випромінювання чорного тіла з обмеженою максимальною енергією фотона і кожної окремо взятої моди вивести термодинамічні функції (в наближенні середнього поля) і аналог закону Стефана-Больцмана.

7. Поєднуючи гамільтонову механіку з в'язями і групу гомотопій, редукувати $(2+1)$ -вимірну теорію Черна-Саймонса на торі з модельним джерелом до гамільтонової системи зі скінченим числом глобальних змінних. При квантуванні інтервалів і площі, задати форми джерел, що приводять до розщеплення вироджених станів власного часу і зняття виродження спектра площі.

8. Знайти генератори групи Фукса ріманової поверхні роду два на осно-

ві двопараметричного восьмикутника у просторі Лобачевського. За допомогою розкладу на Y-блоки знайти параметри Фенхеля–Нільсена і два-форму Вейля–Петерсона (ВП), звести її до канонічного вигляду в термінах площі ВП, обмеженої ізопериметричною орбітою в просторі параметрів, і кутової змінної. Побудувати генератори Лоренца і гамільтоніан для опису класичної еволюції моделі і знаходження квантового спектру площі ВП.

9. Побудувати статистичну суму моделі напрямлених графів восьмигілкового дерева Кейлі, породженого групою Фукса двопараметричної ріманової поверхні роду два. Обчислити мультифрактальні характеристики спектру довжин графів та звести його обчислення до ланцюга Маркова внаслідок стохастизації ряду (суми).

10. Для опису ефекту екранування в слабконеідеальній системі релятивістських точкових зарядів з прямою гравітаційною взаємодією редукувати ступені вільності гравітаційного поля за допомогою відомої процедури і обчислити термодинамічні і парну кореляційну функції в наближенні кільцевих діаграм.

11. У великому канонічному ансамблі екстремальних чорних дір, за умови балансу між силами гравітаційного притягання і електростатичного відштовхування, вивести середнє значення гравітаційної затримки часу у статистиці Бозе–Ейнштейна, інфінітній, Фермі–Дірака і класичній.

12. На основі функціоналу енергії в наближенні Томаса–Фермі для бозе-конденсату з гравітаційним притяганням і парним розсіюванням обчислити статистичну суму та термодинамічні функції, пов'язані з розв'язком рівняння Гросса–Пітаєвського; деформувати комутаційні співвідношення для хвильової функції і модифікувати обчислення для відтворення ефекту суцільного обертання темної матерії гало карликових галактик.

13. З врахуванням квантових кінематичних аспектів отримати термодинамічні функції бозе-конденсатної темної матерії (галактичного ядра) з відштовхувальною тричастинковою взаємодією. Визначити умови існування рі-

дино- і газоподібних станів, а також з'ясувати роль квантових ефектів у переході між станами.

Об'єктом дослідження є системи багатьох частинок із сильною та гравітаційною взаємодією. Специфіка кожної з них визначається не лише складом, але й вибором додаткової (відштовхувальної) взаємодії. Врахування тих чи інших гравітаційних ефектів в системах із сильною взаємодією залежить від густини енергії речовини, що розглядається.

Предметом дослідження є фазові діаграми і рівняння стану речовини, фазові переходи (першого роду), роль топології і геометрії простору в еволюції систем, вплив матерії на властивості простору-часу і додаткові просторові виміри.

Методи дослідження. У роботі використано відомі аналітичні методи теоретичної фізики та математики, зокрема, диференціальної геометрії, теорії представлень та деформованих алгебр, а також чисельні методи для знаходження на комп'ютері розв'язків неінтегровних диференціальних рівнянь, значень деяких інтегральних функцій, великих масивів випадкових траєкторій та їх характеристик.

Наукова новизна одержаних результатів. У роботі досліджено фізичні системи багатьох частинок із сильною та гравітаційною взаємодією. Виявлено наявність рідино- і газоподібних станів в ядерній, піонній і темній матерії. Описано енергетичний спектр надплинної нейтронної матерії. Шляхом порівняння з результатами у відомих статистиках оцінено прояв інфінітної статистики. Отримано характеристики двопараметричної ріманової поверхні роду два. Виявлено умови прояву гравітаційних ефектів в мікросвіті, зокрема прояву додаткових вимірів. Розвинуто моделі хаотичних блукань в багатозонному середовищі і виявлено наявність перехідної дифузії.

Основними науковими результатами, що виносяться на захист, є такі:

◇ Розвинуто модель системи релятивістських нуклонів з прямою взаємо-

дією, в якій відтворено рівноважні властивості ядерної матерії, критичні параметри фазового переходу рідина-газ у симетричній матерії, а також енергетичний спектр надплинної нейтронної матерії в наближенні Бардіна-Купера-Шріфера.

◇ Знайдено критичні параметри фазового переходу рідина-газ симетричної ядерної матерії у конформно-пласкому просторі-часі за малих відхилень масштабного фактора.

◇ Встановлено наявність переходу рідина-газ в конденсаті піонів з ненульовим електричним зарядом за нульової температури, а також рідино- і газоподібної фаз за високих температур з нульовим хімічним потенціалом.

◇ Для ранньої стадії релятивістських ядерних зіткнень описано еволюцію та анізотропію потоків партонів, які мають визначальний вплив на основні спостережувані інтерферометричні дані. Показано, що незначне число жорстких партонів обумовлює від'ємну провідність і нестійкість м'якої компоненти (поля) при електромагнітній взаємодії, що сприяє ізотропізації.

◇ Показано, що термалізована кварк-глюонна речовина у зіткненнях ядер приводить за умов Аркані-Хамеда, Дімопулоса і Двалі до ненульової ймовірності прояву додаткових компактних просторових вимірів, число яких не перевищує шість у випадку конфайнменту і є необмеженим, але обумовленим температурою, в режимі домінування випромінювання.

◇ За умови планківського обмеження зверху на енергію введено новий закон додавання 4-імпульсів, на підставі якого знайдено термодинамічні функції та модифікований аналог закону Стефана-Больцмана випромінювання чорного тіла за високих температур. Показано, що випромінювання відбувається за температури вище порогової і з обмеженою зверху густиною енергії.

◇ Описано часову еволюцію геометрії тороїдального простору в $(2+1)$ -вимірній гравітації Черна-Саймонса з модельним джерелом, наявність якого при квантуванні приводить або до розщеплення вироджених станів власного часу, або до зняття виродження спектра площі.

◇ Для двопараметричного випадку ріманових поверхонь роду два отримано канонічні змінні дія-кут за допомогою геометричної теорії Вейля–Петерсона. Побудовані генератори Лоренца і гамільтоніан задають часову еволюцію геометрії поверхні за сценарієм “великого відскоку” і визначають квантовий спектр площі фазового простору.

◇ За допомогою статистичної міри як ряду за групою симетрій ріманової поверхні роду два, обчислено мультифрактальні показники спектра довжин напрямлених графів восьмигілкового дерева Кейлі. Виявлено застосовність теорії ланцюгів Маркова для опису вказаного спектру і міри.

◇ У калібрувально-інваріантній схемі обчислень знайдено термодинамічні функції, що характеризують ефект екранування в слабконеідеальній системі релятивістських зарядів з прямою гравітаційною взаємодією.

◇ Для ансамблю екстремальних чорних дір, описуваному статичним розв’язком Маджумдара–Папапетру рівнянь Ейнштейна–Максвелла, отримано середнє значення гравітаційної затримки часу у статистиці Бозе–Ейнштейна, інфінітній, Фермі–Дірака і класичній.

◇ Показано, що просторовий розподіл частинок, отриманий у запропонованій моделі з деформованим комутатором для хвильової функції бозе-конденсату з гравітаційною і парною взаємодіями в наближенні Томаса–Фермі, відтворює відомий розподіл бозе-конденсатної темної матерії гало карликових галактик з повільним обертанням.

◇ Чисельно отримано розв’язки стаціонарного рівняння Гроса–Пітаєвського з гравітаційною і тричастинковою взаємодіями і термодинамічні функції, за допомогою яких виявлено існування рідино- і газоподібного станів, фазовий перехід першого роду між якими обумовлюється квантовими флуктуаціями. Надано оцінки фізичних величин для темної матерії галактичного ядра.

Практичне значення одержаних результатів. Результати, представлені в дисертації мають теоретичний характер і є важливими для досліджень систем із сильною і гравітаційною взаємодією. Результати для систем із сильною взаємодією слугують теоретичним обґрунтуванням для спостережуваних і передбачених ефектів на ранньому та гадронному етапі ядро-ядерних зіткнень. Дослідження моделей з гравітаційними ефектами створює перспективу для експериментальної перевірки засад об'єднання фундаментальних взаємодій. Розвиток моделей бозе-конденсатної темної матерії сприяє з'ясуванню її природи, що є актуальною задачею астрофізики. Нові відомості про властивості частинок з нетривіальними комутаційними співвідношеннями і таких, що описуються інфінітною статистикою, дозволяють краще збагнути їх спостережувані ознаки.

Публікації. Основні результати роботи викладено у 24 фахових наукових виданнях. Список праць за темою дисертації [1^a–24^a] подано після анотації та в додатку А. В списку бібліографічних посилань на першоджерела праці за темою дисертації подано за посиланнями [17, 78, 126, 127, 129, 146, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 273, 274, 275, 276, 277, 334, 336].

Особистий внесок здобувача. Викладені в дисертації оригінальні результати отримано автором самостійно або за його безпосередньої участі. Тринадцять робіт [261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 273, 277] є одноосібними. У виконаних із співавторами роботах, здобувачеві належить:

- польове формулювання моделі піонів з тричастинковою взаємодією, знаходження її розв'язків і умов фазового переходу рідина-газ [17];
- знаходження термодинамічних функцій випромінювання чорного тіла з обмеженням на енергію в наближенні середнього поля [78];
- порівняння макроскопічних характеристик μ -бозе-конденсату і темної матерії карликових галактик [126];
- статистичне формулювання моделі ансамблю екстремальних чорних

- дір і обчислення середньої затримки часу [127];
- чисельне знаходження розв’язків польових рівнянь і термодинамічних функцій в наближенні Томаса-Фермі і з врахуванням квантових ефектів; опис двох фаз і механізму переходу між ними [129];
- обчислення компонент потоків вільних партонів в системах відліку Екарта і Ландау-Ліфшиця; аналітичне виведення слабоанізотропної функції розподілу [146];
- формулювання і обчислення характеристик двопараметричної ріманової поверхні роду два [274];
- знаходження аналітичного розв’язку для функції розподілу у багатозонному середовищі, обчислення середньоквадратичного відхилення, комп’ютерне моделювання [275, 276];
- обчислення потоків партонів в кінетичному описі вільного розльоту для реалістичних нецентральних ядерних зіткнень [334];
- формулювання польової моделі і обчислення польових потоків [336].

Апробація результатів дисертації. Основні результати досліджень доповідалися на наукових семінарах відділу математичних методів в теоретичній фізиці Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України та наукових конференціях:

- Bogolyubov Kyiv Conference “Problems of Theoretical and Mathematical Physics”. September 24–26, 2019, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv (Ukraine);
- XI Bolyai-Gauss-Lobachevsky Conference: Non-Euclidean, Non-Commutative Geometry and Quantum Physics. May 19-24, 2019, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv (Ukraine);
- Conference on Physics of Disordered Systems. October 14–16, 2013, Franko Lviv National University, Lviv (Ukraine);
- International conference “Quantum groups and quantum integrable sys-

- tems". June 18–21, 2013, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv (Ukraine);
- 8-th Bolyai-Gauss-Lobachevsky Conference: Non-Euclidean Geometry in Modern Physics and Mathematics. May 22–25, 2012, Institute of Electron Physics, Uzhgorod (Ukraine);
 - International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics". June 21–27, 2009, Institute of Mathematics, Kyiv (Ukraine);
 - Zimanyi 2007 Winter School on Heavy Ion Physics. December 5–7, 2007, KFKI RMKI, Budapest (Hungary);
 - International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics". June 24–30, 2007, Institute of Mathematics, Kyiv (Ukraine);
 - Workshop of European Research Group on Ultrarelativistic Heavy Ion Physics. March 9–15, 2006, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna (Russia);
 - International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics". June 20–26, 2005, Institute of Mathematics, Kyiv (Ukraine);
 - Bogolyubov Kyiv Conference "Modern Problems of Mathematics and Theoretical Physics". September 13–16, 2004, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv (Ukraine);
 - Annual International Conference "Relativistic Astrophysics, Gravitation and Cosmology". May 21–23, 2003, Astronomical Observatory of Kyiv Taras Shevchenko National University, Kyiv (Ukraine).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається із змісту, вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 393 найменування, і додатку. Повний обсяг дисертації становить 336 сторінок, на 32 з яких міститься список використаних джерел, має 40 рисунків.

РОЗДІЛ 1

ТЕРМОДИНАМІКА СИСТЕМ ГАДРОНІВ

Знаходження характеристик ядерної матерії, як функцій температури, густини і співвідношення між протонами та нейтронами, є важливою задачею ядерної фізики. Її мета полягає у побудові фазової діаграми ядерної матерії, головною особливістю якої є фазовий перехід рідина-газ. Для експериментальної перевірки результатів рівноважного термодинамічного опису (об'ємних властивостей) доводиться досліджувати не лише ядра в основному та збудженому станах, а також сильнозбуджені ядра, далекі від рівноваги, в ядро-ядерних зіткненнях за значних енергій.

Можливість тлумачення розпаду збуджених ядер на нуклони та фрагменти в зіткненнях важких іонів як випаровування перегрітої краплі ядерної матерії була предметом численних теоретичних праць (див. [27, 254, 306]). Аргументи щодо придатності та обґрунтованості термодинамічного підходу впливають з подібності між взаємодією Ван-дер-Ваальса та нуклонними взаємодіями [172, 310, 327, 356]. Перевірка термодинамічної теорії для процесів розпаду перегрітих ядер привела до низки експериментів, проведених на прискорювачах та колайдерах в різних країнах світу [39, 103, 180, 341]. Підсумки декількох експериментальних груп опубліковано в роботі [104], де підтверджено існування ядерного фазового переходу рідина-газ.

Причиною застосування термодинаміки є труднощі мікроскопічного опису ядерних процесів за участю багатьох частинок. Однак, в моделях систем нуклонів виникає проблема відмінності констант взаємодії у вільному просторі та в середовищі [37]. Також часто виявляється, що визначені в різних моделях (як з польовою так і прямою взаємодіями) константи взаємодії не збігаються. Тим не менш, вже надано адекватний опис як рівноважних вла-

стивостей ядерних систем так і фазового переходу рідина–газ, що дозволяє пояснити зворотний процес, а саме – нуклеосинтез в еволюції Всесвіту.

Серед теоретичних підходів до гадродинаміки відзначимо різні модифікації теоретико-польової моделі Валечки [356, 323]. Ці модифікації (див. [349, 254, 27]) зроблено для більш точного опису властивостей ядерної матерії в пласкому просторі-часі. Перевагою польових моделей є можливість відносно простого узагальнення на випадок викривленого простору-часу, що може сприяти дослідженню (зіткнень) важких іонів в сильному гравітаційному полі, зокрема на різних етапах еволюції Всесвіту, та/або в неінерційних системах відліку. З низки праць (див. [371, 374]) вже відомо, що спектри вільних частинок істотно залежать від метрики та кривини простору-часу. Цей факт має відобразитися на (термо)динамічних характеристиках сильновзаємодіючих частинок.

Таким чином, не лише ядро-ядерні зіткнення на прискорювачах, але й різні ситуації, які реалізуються у Всесвіті, надають додаткову можливість для різнобічного вивчення властивостей ядерної матерії.

Серед космічних об'єктів значну увагу привертають нейтронні зорі. Так, робота Мігдала [239] простимулювала дослідження надплинності нейтронної матерії, якому вже присвячено чимало теоретичних праць [212, 228, 283]. Хоча справжні нейтронні зорі складаються не з чисто нейтронної матерії, а надплинний стан не може існувати в усіх областях зорі, однак після роботи Мігдала з'явилася додаткова експериментальна перспектива для перевірки ядерних моделей.

Разом з тим передбачено, що складовою нейтронних зір може бути конденсат піонів. Його інтенсивному дослідженню (за допомогою моделей із самодією типу φ^4) присвячено роботи Мігдала із співавторами [387]. Можливість спостереження конденсату піонів в зіткненнях важких іонів спонукала його теоретичне вивчення протягом останніх десятиліть [242, 326, 354]. Цей конденсатний стан уявляють у вигляді “крапель” з піонів або/і піонної рідини.

У цьому розділі представлено результати досліджень фазового переходу рідина-газ в симетричній ядерній матерії, яка еквівалентна односортній системі, а також в піонній матерії з тричастинковою взаємодією. В рамках розвиненої моделі з прямою взаємодією наводяться значення енергетичної щільності у спектрі надплинної нейтронної матерії.

1.1. Стани системи нуклонів з прямою взаємодією

Протягом останніх років низка багаточастинкових ядерних процесів успішно пояснена та чисельно описана в рамках ефективної теоретико-польової σ -моделі [321] квантової гадродинаміки (КГД). Хоча лінійна модель відображає провідні ефекти в ядерній матерії (за низької густини) [349, 356], однак, включаючи нелінійну самодію мезонів, вдається точніше описати більш широкий клас фізичних ситуацій. Справді, скалярна (σ - σ) самодія зазвичай вводиться у σ -модель для досягнення адекватного значення модуля стисливості K ядерної речовини. Самодія ω -мезонів приводить до пом'якшення рівняння стану за високих густин, що дозволяє, наприклад, отримати граничну масу нейтронної зорі близько 1.8 сонячної маси [161]. Підсумовуючи, можна припустити, що нелінійності не обмежуються лише цими самодіями.

Необхідність введення нелінійностей у явний спосіб зумовлена як потрібними характеристиками так і наближенням, що використовується при їх виведенні. Таким наближенням є наближення середнього поля, яке на практиці не враховує внесків з ненульовим імпульсом передачі, що визначає часову та просторову залежність взаємодії між нуклонами. Це означає, що бозонні поля можуть бути просто виражені через густину нуклонів і виключені з середньої енергії. Іншими словами, виникає перспектива переформулювати взаємодію між нуклонами у вигляді прямої взаємодії (без носіїв).

Взагалі, розв'язати польові рівняння КГД не є тривіальною проблемою. Інший підхід полягає в (і) усуненні полів (носіїв взаємодії між нуклонами) на

класичному рівні та (ii) подальшому квантування отриманої теорії. Оскільки швидкість нуклонів в атомному ядрі в нормальному стані сягає близько $1/4$ швидкості світла [383], то реалістична модель ядерної матерії повинна будуватися на принципах спеціальної відносності, і процедура усунення поля повинна зберігати Пуанкаре-інваріантну структуру теорії. Така процедура була розроблена в нашій роботі [259] на гамільтонову рівні, необхідному для квантування та статистичних досліджень. Важливо, що, розв'язуючи систему польових рівнянь, ми можемо отримати нелінійні розв'язки за константами взаємодії, власне, в межах лінійної теорії поля. Таким чином, після проведення квантування ці нелінійності відіграватимуть роль у термодинамічній картині. З іншого боку, якщо ми маємо намір застосувати наближення середнього поля, можна негайно спростити пошук розв'язків у тому сенсі, як описано вище.

Врахування нелінійних ефектів, що з'являються у розв'язках класичних польових рівнянь, пропонує схему побудови ядерних моделей. Однак потрібно знати, як здійснюється квантування класичної теорії без мезонних полів і чим явно нехтується в наближенні середнього поля заради простоти пошуку розв'язків. Ці питання розглядаються тут в контексті фізичних явищ, і ми використовуємо розв'язки у першому порядку за константами взаємодії, які знайдено у нашій статті [260]. Таким чином, ми починаємо реалізовувати нашу схему з лінійної теорії, яка застосовна до ядерної матерії за низької густини, коли можна вивчати надплинність ядерної матерії та фазовий перехід рідина–газ. Дослідження щільних об'єктів, як нейтронні зорі, не є коректним у даному наближенні. Причому лінійна теорія слабо враховує відмінність між чисто протонним та чисто нейтронним потенціалами взаємодії. Спочатку, ми виводимо рівняння стану ядерної матерії та описуємо фазовий перехід рідина–газ. Заради повноти опису, також обчислимо характеристики надплинної нейтронної матерії.

1.1.1. Гамільтоніан системи нуклонів. Реалізація запропонованого підходу вимагає схеми квантування класичних виразів. Тут ми обмежимося квантовим описом теорії у першому порядку наближення за константами взаємодії, що служить першим кроком до квантування нелінійних теорій.

Через малий час життя масивних квантів, що переносять взаємодію, знехтуємо конденсатом вільних мезонів. Отже, вважатимемо, що скалярні та векторні поля, які відіграють роль носіїв взаємодії між нуклонами в теорії поля, не мають власних ступенів вільності. Це дозволяє виключити ці поля з опису та переформулювати динаміку системи в термінах прямої взаємодії між частинками. Процедура виключення ступенів вільності поля за допомогою методів гамільтонової механіки з в'язями (у значенні Дірака) розроблена в [259]. Вона зберігає гамільтонову структуру та Пуанкаре-інваріантність теорії. Завдяки цій процедурі вже одержано гамільтонів опис релятивістських систем частинок зі скалярними та векторними прямими взаємодіями (лише в термінах канонічних змінних частинок) в лінійному наближенні за константою взаємодії [260]. У даному наближенні отримана взаємодія може бути представлена як суперпозиція різних взаємодій. Таким чином, приходимо до класичного гамільтоніану для числа A релятивістських точкових частинок:

$$H = \sum_{a=1}^A cp_a^0 + \frac{1}{2} \int \left[g_\rho^2 \vec{J}^\mu(\mathbf{x}) \vec{A}_\mu(\mathbf{x}) + g_v^2 J^\mu(\mathbf{x}) A_\mu(\mathbf{x}) - g_s^2 J(\mathbf{x}) A(\mathbf{x}) \right] d^3x, \quad (1.1)$$

де $p_a^0 = \sqrt{m_a^2 c^2 + \mathbf{p}_a^2}$.

Струми J , J^μ , $\vec{J}^\mu$ записуються як $J(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^A j_a \delta^3(\mathbf{x}_a - \mathbf{x})$, де j_a позначає m/p_a^0 , p_a^μ/p_a^0 , і $\vec{\tau}_a p_a^\mu/p_a^0$ у скалярному, векторному та ізовектор-векторному випадку, відповідно. У той самий час, ці величини визначають відповідні поля: $A^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^A j_a G_a^{(\alpha)}(\mathbf{x}_a - \mathbf{x})$, де функція

$$G_a^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{\mathbf{k}^2 + \mu_\alpha^2 - [(\mathbf{k}\mathbf{p}_a)/p_a^0]^2} \quad (1.2)$$

залежить від параметра μ_α , пов'язаного з масою мезона співвідношенням $\mu_\alpha = m_\alpha c/\hbar$ ($\alpha = s, v, \rho$).

На цьому етапі a -та частинка (з масою m_a та ізоспіном $\vec{\tau}_a$) описується координатами $\mathbf{x}_a$ та спряженими імпульсами $\mathbf{p}_a$. Зауважимо, що, виключаючи польові ступені вільності, канонічні координати $\mathbf{x}_a$ не є коваріантними, згідно з теоремою про невзаємодію [84]. У коваріантних виразах ми використовуємо метрику Мінковського $\|\eta^{\mu\nu}\| = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, яка підіймає 4-індекси μ, ν ; g_α^2 – константи взаємодії. Змінні $\vec{\tau}_a, \vec{A}_\mu(\mathbf{x})$ є 3-компонентними векторами в ізоспіновому просторі. Окрім того, $\vec{\tau}_a^2 = \text{const}$, як в рівняннях Вонга [363].

Даний опис релятивістської системи здійснюється у миттєвій формі релятивістської динаміки [95], за допомогою якої усувається хронометрична свобода дії. Аналогічно, систему релятивістських частинок (нуклонів) можна сформулювати в іншій формі релятивістської динаміки, більш зручній для проведення розрахунків, або спричиненою фізичними умовами. Є роботи, присвячені вивченню ядерної матерії у фронтальній формі динаміки (див. [240]). Наш формалізм може також бути розвинений у цій формі.

Виведений класичний Пуанкаре-інваріантний гамільтоніан (1.1) служить відправною точкою у формулюванні нашої моделі системи релятивістських нуклонів, які обмінюються віртуальними скалярними та векторними мезонами. Близькі значення мас протонів і нейтронів дозволяють відразу покласти $m_a = m$, де емпірично $m = 939 \text{ MeV}/c^2$. Тоді, відмінність між протоном та нейтроном визначається лише проекцією ізоспіна $\tau = \pm 1/2$.

Зазвичай, квантова динаміка релятивістської системи ферміонів описується рівнянням Дірака. Квантуючи поле Дірака, гамільтоніан Дірака може бути представлений в термінах операторів народження та знищення, які враховують принцип Паулі для ферміонів. Так ми негайно переходимо до представлення вторинного квантування. Більше того, покладається нормальне впорядкування операторів народження та знищення.

Конструюючи гамільтоніан у представленні вторинного квантування, ми

використовуємо квантове поле Дірака у представленні Шрьодінгера:

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \hat{\psi}(\mathbf{p}) e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\mathbf{x}}, \quad (1.3)$$

$$\hat{\psi}(\mathbf{p}) = \sum_{\Sigma} \left[\hat{a}_{\mathbf{p},\Sigma} u_{\Sigma}^{(+)}(\mathbf{p}) + \hat{b}_{-\mathbf{p},\Sigma}^{\dagger} u_{\Sigma}^{(-)}(-\mathbf{p}) \right]. \quad (1.4)$$

Тут $\hat{a}_{\mathbf{p},\Sigma}^{\dagger}$, $\hat{a}_{\mathbf{p},\Sigma}$ і $\hat{b}_{\mathbf{p},\Sigma}^{\dagger}$, $\hat{b}_{\mathbf{p},\Sigma}$ – оператори народження та знищення вільного нуклона та антинуклона з імпульсом $\mathbf{p}$ та набором квантових чисел $\Sigma = (\sigma, \tau)$, що включає проекцію спіна $\sigma = \pm 1/2$ на вісь z і проекцію ізоспіна $\tau = \pm 1/2$. Припускається, що ортогональні спінори $u_{\Sigma}^{(\pm)}(\mathbf{p})$ ($\bar{u}_{\Sigma_1}^{(\pm)}(\mathbf{p}) u_{\Sigma_2}^{(\mp)}(\mathbf{p}) = 0$) є нормованими:

$$\bar{u}_{\Sigma_1}^{(\pm)}(\mathbf{p}) u_{\Sigma_2}^{(\pm)}(\mathbf{p}) = \pm 2mc \delta_{\Sigma_1, \Sigma_2}, \quad u_{\Sigma_1}^{(\pm)\dagger}(\mathbf{p}) u_{\Sigma_2}^{(\pm)}(\mathbf{p}) = 2p^0 \delta_{\Sigma_1, \Sigma_2}. \quad (1.5)$$

Перше співвідношення забезпечує Лоренц-інваріантність умови нормування, а наявність античастинок у теоретико-польовому формалізмі впливає з принципу причинності.

Ми окремо квантуємо класичні поля та їх джерела (струми) за допомогою правил для одночастинкових функцій. Тоді, квантовані струми і поля є

$$\hat{J}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d^3p'}{\sqrt{2p'^0}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \hat{\psi}(\mathbf{p}') j(\mathbf{p}) \hat{\psi}(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{k}=(\mathbf{p}'-\mathbf{p})/\hbar}, \quad (1.6)$$

$$\hat{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d^3p'}{\sqrt{2p'^0}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \frac{\hat{\psi}(\mathbf{p}') j(\mathbf{p}) \hat{\psi}(\mathbf{p})}{\mathbf{k}^2 + \mu_{\alpha}^2 - [(\mathbf{k}\mathbf{p})/p^0]^2} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{k}=(\mathbf{p}'-\mathbf{p})/\hbar} \quad (1.7)$$

де $p^0 = \sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{p}^2}$. Вектор $\mathbf{k}$ визначає імпульс передачі.

У випадку нелінійних розв'язків за константами взаємодії, коли очікується прояв ефекту запізнення, квантування струмів та полів повинно здійснюватися за правилами для багаточастинкових функцій, і залежність квантованих величин від спінів буде четвертого та вищого порядків.

Оператор Гамільтона записується на основі гамільтоніану Дірака як

$$\hat{H} = c : \int d^3x \hat{\bar{\psi}}(\mathbf{x}) (-i\hbar \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + mc) \hat{\psi}(\mathbf{x}) : + \hat{W}. \quad (1.8)$$

Взаємодію у квантовій теорії виразимо через комбінацію струмів та полів, що понижують та збільшують число частинок (квантів):

$$\hat{W} = \frac{1}{4} : \int \left[g_\rho^2 \hat{J}^\mu(\mathbf{x}) \hat{A}_\mu^\dagger(\mathbf{x}) + g_v^2 \hat{J}^\mu(\mathbf{x}) \hat{A}_\mu^\dagger(\mathbf{x}) - g_s^2 \hat{J}(\mathbf{x}) \hat{A}^\dagger(\mathbf{x}) \right] d^3x : + \text{h.c.} \quad (1.9)$$

Цей гамільтоніан можна використати для перевірки припущень, зроблених раніше. Як зазначалося, у розглянутому випадку можна описати як надплинність, так і фазовий перехід рідина-газ. Розпочнемо з останнього, що вимагає знаходження рівняння стану в наближенні середнього поля.

За низьких густин можна знехтувати спірною структурою хвильових функцій і звести їх до нерелятивістського вигляду:

$$\frac{\bar{u}_{\Sigma_1}^{(\pm)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{2p_1^0}} \frac{u_{\Sigma_2}^{(\pm)}(\mathbf{p}_2)}{\sqrt{2p_2^0}} \approx \pm \delta_{\Sigma_1, \Sigma_2}, \quad \bar{u}_{\Sigma_1}^{(\pm)}(\mathbf{p}_1) u_{\Sigma_2}^{(\mp)}(\mathbf{p}_2) \approx 0. \quad (1.10)$$

Однак, слід зберегти залежність взаємодії від імпульсів, щоб спостерігати перехід між зв'язаним та незв'язаним станами нуклонної системи. Отже, ми розглянемо систему нуклонів з релятивістською взаємодією в рамках нерелятивістської квантової механіки та статистики. Окрім того, відновимо залежність від об'єму V за допомогою заміни:

$$\int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3x = V \delta_{\mathbf{k},0}, \quad \int (\dots) \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} (\dots), \quad (1.11)$$

що потрібно для знаходження тиску.

За температур, що нас цікавлять, внеском антинуклонів можна знехтувати [254]. Справді, термічні розподіли вільних частинок та античастинок відповідно є

$$\langle \hat{a}_{\mathbf{p},\Sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p},\Sigma} \rangle = \frac{1}{1 + \exp[(cp^0 - \mu_\tau)/T]}, \quad \langle \hat{b}_{\mathbf{p},\Sigma}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p},\Sigma} \rangle = \frac{1}{1 + \exp[(cp^0 + \mu_\tau)/T]}, \quad (1.12)$$

де μ_τ – хімічний потенціал. Тоді, за наших умов маємо $\langle \hat{b}_{\mathbf{p},\Sigma}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p},\Sigma} \rangle \ll \langle \hat{a}_{\mathbf{p},\Sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p},\Sigma} \rangle$.

Фізичні спрощення та симетризація взаємодії приводять до кінцевого виразу для гамільтоніану:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}, \quad \hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{p}, \Sigma} c p^0 \hat{a}_{\mathbf{p}, \Sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}, \Sigma}, \quad (1.13)$$

$$\hat{W} = \frac{1}{4V} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\substack{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \\ \Sigma_1, \Sigma_2}} [\Gamma_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}(\mathbf{k}) + \Gamma_{\mathbf{p}_1 + \hbar \mathbf{k}, \mathbf{p}_2 - \hbar \mathbf{k}}(\mathbf{k})] \hat{a}_{\mathbf{p}_1 + \hbar \mathbf{k}, \Sigma_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2 - \hbar \mathbf{k}, \Sigma_2}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2, \Sigma_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_1, \Sigma_1}. \quad (1.14)$$

Матричний елемент Γ , залежний від імпульсів, є

$$\Gamma_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}(\mathbf{k}) = g_v^2 \frac{p_1^\mu p_{\mu 2} / p_1^0 p_2^0}{\mathbf{k}^2 + \mu_v^2} + g_\rho^2 \frac{p_1^\mu p_{\mu 2} / p_1^0 p_2^0}{\mathbf{k}^2 + \mu_\rho^2} \tau_a \tau_b - g_s^2 \frac{m^2 / p_1^0 p_2^0}{\mathbf{k}^2 + \mu_s^2}, \quad (1.15)$$

де ефективні маси $\mathcal{M}_\alpha^2$ ($\alpha = s, v, \rho$), означені як

$$\frac{2}{\mathcal{M}_\alpha^2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{k})} = \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \mu_\alpha^2 - [(\mathbf{k} \mathbf{p}_1) / p_1^0]^2} + \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \mu_\alpha^2 - [(\mathbf{k} \mathbf{p}_2) / p_2^0]^2}$$

враховують ефект скінченності швидкості передачі взаємодії.

Отже, теоретично виведена взаємодія має 4-ферміонний вигляд, запропонований Намбу [255, 256] у фізиці високих енергій.

У термодинамічному описі системи релятивістських нуклонів ми припускаємо, що ядерна матерія знаходиться за умов β -рівноваги щодо реакції $n \leftrightarrow p + e + \bar{\nu}$. Ми враховуємо лише об'ємні ефекти і нехтуємо внеском поверхні¹. Фактично, в нашому підході досліджуються загальні властивості ядерної матерії. Вони мають тлумачитись як екстраполяція характеристик ядер зі скінченним числом нуклонів.

Позначимо через μ_p і μ_n хімічні потенціали протонної та нейтронної компонент. Знайдемо термодинамічний потенціал з виразу

$$\Omega = -T \ln \text{Tr} e^{-\beta(\hat{H} - \mu_p \hat{Z} - \mu_n \hat{N})}, \quad (1.16)$$

¹В рамках крапельної моделі ядер з числом A нуклонів енергія на один нуклон може бути описана формулою Бете-Вайцзекера: $E/A = -a_V + a_S A^{-1/3} + \dots$, де a_V відповідає об'ємній енергії, a_S – внесок поверхні.

де $\beta = 1/T$ – обернена температура. Окрім того, використовуємо позначення

$$\hat{Z} = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma, +\frac{1}{2}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma, +\frac{1}{2}}, \quad \hat{N} = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma, -\frac{1}{2}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma, -\frac{1}{2}}$$

для операторів числа протонів і нейтронів.

Покладемо

$$\hat{\mathbb{H}}_0 \equiv \hat{H}_0 - \mu_p \hat{Z} - \mu_n \hat{N} = \sum_{\mathbf{p}, \Sigma} (cp^0 - \mu_\tau) \hat{a}_{\mathbf{p}, \Sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}, \Sigma}. \quad (1.17)$$

У представленні взаємодії пишемо

$$e^{-\beta(\hat{H} - \mu_p \hat{Z} - \mu_n \hat{N})} = e^{-\beta \hat{\mathbb{H}}_0} \hat{\sigma}(\beta), \quad (1.18)$$

$$\hat{\sigma}(\beta) = T_\lambda \exp \left[- \int_0^\beta \hat{W}(\lambda) d\lambda \right], \quad \hat{W}(\lambda) = e^{\lambda \hat{\mathbb{H}}_0} \hat{W} e^{-\lambda \hat{\mathbb{H}}_0}. \quad (1.19)$$

Тоді, можемо подати термодинамічний потенціал у вигляді

$$\Omega = \Omega_0 - T \ln \langle \hat{\sigma}(\beta) \rangle, \quad (1.20)$$

де потенціал Ω_0 системи невзаємодіючих нуклонів та середнє є

$$\Omega_0 = -T \ln \text{Tr} e^{-\beta \hat{\mathbb{H}}_0}, \quad \langle \hat{\sigma}(\beta) \rangle = \frac{\text{Tr} \left[e^{-\beta \hat{\mathbb{H}}_0} \hat{\sigma}(\beta) \right]}{\text{Tr} \exp(-\beta \hat{\mathbb{H}}_0)}. \quad (1.21)$$

Легко знайти, що

$$\Omega_0 = -T \sum_{\mathbf{p}, \Sigma} \ln \left[1 + e^{-\beta(cp^0 - \mu_\tau)} \right]. \quad (1.22)$$

Уведемо функціонал:

$$Q(\alpha) = \ln \left\langle T_\lambda \exp \left[-\alpha \int_0^\beta \hat{W}(\lambda) d\lambda \right] \right\rangle, \quad (1.23)$$

який пов'язаний з середнім співвідношенням $\langle \hat{\sigma}(\beta) \rangle = Q(1)$.

Оскільки неможливо точно обчислити $Q(1)$, застосуємо теорію збурень. Розкладаючи $Q(\alpha)$ в ряд за степенями параметра α , обмежимося першим ненульовим членом. Оскільки $Q(0) = 0$, перший член розкладу є

$$\left. \frac{dQ(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = - \left\langle \int_0^\beta \hat{W}(\lambda) d\lambda \right\rangle = -\beta \bar{W}. \quad (1.24)$$

Після обчислення сліду приходимо до формули:

$$\bar{W} = \frac{1}{2V} \sum_{\substack{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \\ \Sigma_1, \Sigma_2}} \left[(C_v^2 + C_\rho^2 \tau_1 \tau_2) \frac{p_1^\mu p_{2\mu}}{p_1^0 p_2^0} - C_s^2 \frac{m^2 c^2}{p_1^0 p_2^0} \right] n_{\mathbf{p}_1, \Sigma_1} n_{\mathbf{p}_2, \Sigma_2}, \quad (1.25)$$

де $n_{\mathbf{p}, \Sigma} = (1 + \exp[\beta(cp^0 - \mu_\tau)])^{-1}$; $C_\alpha^2 \equiv g_\alpha^2/\mu_\alpha^2$ – параметри, що характеризують носії взаємодії між нуклонами. Завдяки ізотропії матерії, можна відразу відкинути член, лінійний за скалярним добутком $\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2$.

Оскільки густини протонної та нейтронної компонент є

$$\rho_p = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}, \sigma} n_{\mathbf{p}, \sigma, +\frac{1}{2}}, \quad \rho_n = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}, \sigma} n_{\mathbf{p}, \sigma, -\frac{1}{2}}, \quad (1.26)$$

а повна густина ρ є їх сумою, $\rho = \rho_p + \rho_n$, поправка $\bar{W}$ на взаємодію, яка збігається з середньою енергією взаємодії, записується так:

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \frac{1}{2} V C_v^2 \rho^2 + \frac{1}{8} V C_\rho^2 \rho^2 \delta^2 - \frac{1}{2} V C_s^2 \left(\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \frac{m c n_{\mathbf{p}, \Sigma}}{\sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{p}^2}} \right)^2; \\ \delta^2 &\equiv \left(\frac{\rho_p - \rho_n}{\rho_p + \rho_n} \right)^2 = (1 - 2y)^2. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Параметр δ враховує асиметрію між числом нейтронів і протонів; $y = \rho_p/\rho$ визначає частку протонів в матерії і є сталим у β -рівновазі. Легко бачити, що нерівність $\rho_p/\rho_n \neq 1$ приводить до ізовекторної взаємодії, яка посилює відштовхування між нуклонами. Зауважимо, що вираз для енергії симетрії, означеної як

$$a \equiv \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\bar{W}/A)}{\partial \delta^2} \right|_{\delta=0} = \frac{1}{8} C_\rho^2 \rho$$

збігається з відомою границею за великих густин для лінійних моделей [161].

Отже, застосовуючи анзац про застосовність наближення середнього поля (MFA), ми одержуємо формулу для термодинамічного потенціалу

$$\Omega = \Omega_0 + \bar{W}. \quad (1.28)$$

Дослідимо фазовий перехід рідина–газ в MFA. Однак, дослідження надплинності вимагає іншого підходу і буде проведено згодом. Разом з тим, надплинність ядерної матерії може існувати в обмеженому інтервалі густин ρ , коли сили притягання між нуклонами переважають над силами відштовхування.

В обраному наближенні, використовуючи теорему про малі поправки до термодинамічних функцій [384], середня енергія E описується формулою

$$E = E_0 + \bar{W}, \quad E_0 = \sum_{\mathbf{p}, \Sigma} c p^0 n_{\mathbf{p}, \Sigma}. \quad (1.29)$$

Взагалі кажучи, знайдена середня енергія є функцією хімічних потенціалів μ_p , μ_n , і температури T . Як буде показано, тільки у випадку $T = 0$ вона може бути явно виражена через густину нуклонів.

Одержані формули (1.28), (1.29) демонструють лінійну залежність термодинамічних функцій від відношень g^2/μ^2 . Це означає, що константи C_s^2 , C_v^2 , C_ρ^2 можуть бути сумами відношень g^2/μ^2 усіх скаляр–ізокалярних, вектор–ізокалярних, вектор–ізовекторних мезонів, відповідно. Тоді, описуючи реалістичні процеси, параметри C_α^2 можуть тлумачитись як інтегральні характеристики у сенсі, згаданому вище, і, фактично, не бути характеристиками окремих мезонів.

У подальших дослідженнях зручно перейти від повних функцій Ω , E до потенціалу і середньої енергії на нуклон, а саме, $\omega \equiv \Omega/A$, $e \equiv E/A$.

1.1.2. Рівноважні властивості за нульової температури. Спершу, знайдемо середню енергію при $T = 0$. За такої умови необхідно покласти всі

числа $n_{\mathbf{p},\Sigma}$ рівними одиниці під поверхнею Фермі, яка є сферою у даному випадку, та рівними нулеві за її межами в (1.29). Радіус сфери Фермі визначається імпульсом Фермі

$$p_F = \hbar k_F, \quad k_F = \left(\frac{6\pi^2 \rho}{\gamma} \right)^{1/3}, \quad (1.30)$$

де γ – спін-ізоспінний фактор виродження. Так у випадку симетричної ядерної матерії, маємо $\gamma = 4$.

У термодинамічній границі можна замінити підсумовування за дискретними значеннями $\mathbf{p}$ (в об'ємі V) інтегруванням, що відразу дає

$$\begin{aligned} E = & \frac{\gamma V c}{16\pi^2 \hbar^3} \left\{ p_F (m^2 c^2 + 2p_F^2) \sqrt{m^2 c^2 + p_F^2} - (mc)^4 \operatorname{Arcsinh} \frac{p_F}{mc} \right\} + \frac{1}{8} V C_\rho^2 \rho^2 \delta^2 \\ & + \frac{1}{2} V C_v^2 \rho^2 - \frac{1}{2} V C_s^2 \rho^2 \left(\frac{3mc}{2p_F^2} \right)^2 \left[\sqrt{m^2 c^2 + p_F^2} - \frac{(mc)^2}{p_F} \operatorname{Arcsinh} \frac{p_F}{mc} \right]^2 \end{aligned} \quad (1.31)$$

Якщо покласти $C_\alpha^2 = 0$ ($\alpha = s, v, \rho$), то одержимо відомий вираз для енергії ідеального газу вільних релятивістських ферміонів [384].

За нульової температури, тиск у системі нуклонів визначається похідною від повної енергії E за об'ємом V , що дає рівняння стану у явному вигляді:

$$\begin{aligned} P = & \frac{\gamma c}{16\pi^2 \hbar^3} \left\{ p_F \left(\frac{2}{3} p_F^2 - m^2 c^2 \right) \sqrt{m^2 c^2 + p_F^2} + (mc)^4 \operatorname{Arcsinh} \frac{p_F}{mc} \right\} \\ & + \frac{1}{8} C_\rho^2 \rho^2 \delta^2 + \frac{1}{2} C_v^2 \rho^2 - \frac{1}{2} C_s^2 \rho^2 \left(\frac{3mc}{2p_F^2} \right)^2 \\ & \times \left\{ \frac{4}{9} \frac{p_F^4}{m^2 c^2 + p_F^2} - \left[\frac{m^2 c^2 + \frac{1}{3} p_F^2}{\sqrt{m^2 c^2 + p_F^2}} - \frac{m^2 c^2}{p_F} \operatorname{Arcsinh} \frac{p_F}{mc} \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Ізотермічна стисливість K при $T = 0$ є однією з найважливіших характеристик ядерної матерії і визначається з виразу:

$$\begin{aligned} K^{-1} = & \frac{3cp_F^2}{\sqrt{m^2 c^2 + p_F^2}} + \frac{9}{4} C_\rho^2 \rho \delta^2 + 9C_v^2 \rho \\ & - \frac{9}{2} C_s^2 \rho \frac{m^2 c^2}{m^2 c^2 + p_F^2} \left[1 + \frac{mc}{p_F} \frac{mc}{\sqrt{m^2 c^2 + p_F^2}} \operatorname{Arcsinh} \frac{p_F}{mc} \right]. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Щоб розпочати дослідження поведінки ядерної матерії, маємо визначити три параметра: C_s^2 , C_v^2 , C_ρ^2 . Перш за все, їх значення повинні відтворювати об'ємні властивості ядерної матерії при $T = 0$: нормальну густину ядер, значення енергії зв'язку $\epsilon \equiv E/A - mc^2$ та стисливості у випадку симетричної матерії (коли $N = Z$), енергію симетрії (асиметрії) a .

Обираючи значення параметрів моделі з Таб. 1.1 ($\hbar c = 197.35$ MeV·фм), одержуємо значення рівноважних характеристик, які наведено у Таб. 1.2.

Таблиця 1.1

Параметри моделі

$C_s^2/\hbar c$ [фм ²]	$C_v^2/\hbar c$ [фм ²]	$C_\rho^2/\hbar c$ [фм ²]
51.962	47.269	8.614

Таблиця 1.2

Рівноважні властивості

ρ_0 [фм ⁻³]	ϵ [MeV]	a [MeV]	K^{-1} [MeV]
0.16	-15.5	34	294.4

Ми обираємо густину ρ_0 , рівною центральній густині ядер, яка є однаковою для ядер з різним числом нуклонів. Значення стисливості не є однозначним. Декларується, що прийнятні значення K^{-1} лежать в інтервалі 250 — 350 MeV [306]. Як показано на Рис. 1.1, рівноважне значення енергії на нуклон відповідає мінімуму енергії, залежної від густини. Також видно, що нуклони не можуть бути у зв'язаному стані, якщо $\rho < 0.01$ фм⁻³ або $\rho > 0.32$ фм⁻³.

Відзначимо, що відомо різні параметризації КГД з або без врахування нелінійних ефектів. Усі параметризації (див. [349, 254, 27]), зроблені в МФА, приводять до нерівності $C_s^2 > C_v^2$, яка задовольняється тут. Серед лінійних теорій ми виділимо TW-параметризацію [349], яка забезпечує $\rho_0 = 0.148$ фм⁻³, $\epsilon = -16.3$ MeV, $K^{-1} = 240$ MeV і $a = 32$ MeV. Порівняння цієї параметризації

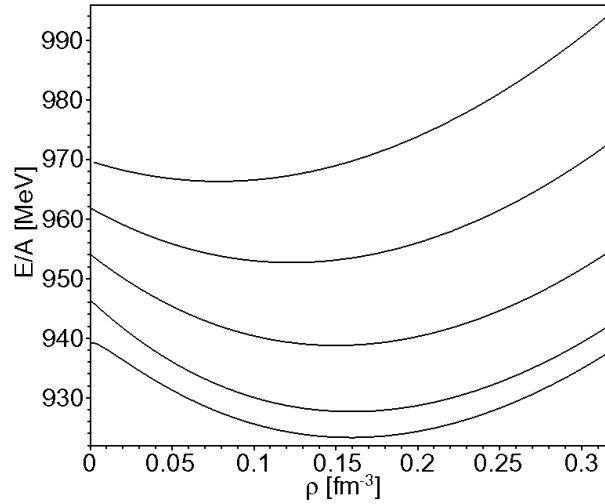


Рис. 1.1. Залежність енергії–маси на нуклон від густини симетричної ядерної матерії при $T = 20$ MeV, $T = 15$ MeV, $T = 10$ MeV, $T = 5$ MeV, $T = 0$ (згори донизу).

з деякими параметризаціями для нелінійних моделей обговорюється в роботі [27]. Можна сказати, що лінійні теорії описують провідні ефекти в ядерній матерії, але демонструють чутливість до зміни модельних параметрів та іншу поведінку за високої густини.

Отже, ми відтворили термодинамічні властивості матерії при $T = 0$ і знайшли значення параметрів моделі, які потрібні для подальшого дослідження системи нуклонів за ненульової температури.

1.1.3. Фазовий перехід “рідина–газ”. Розглянемо систему релятивістських нуклонів з рівним числом нейтронів та протонів за ненульової температури². У цьому випадку ми маємо рівності $N = Z$, $\delta = 0$, $\gamma = 4$ і $\mu_n = \mu_p = \mu$, які показують, що симетрична ядерна матерії поводить як однокомпонентна система.

При $T \neq 0$, хімічний потенціал μ визначається з умови:

$$\frac{\gamma}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\exp \left[\left(c\sqrt{m^2c^2 + p^2} - \mu \right) / T \right] + 1} = \rho. \quad (1.34)$$

²Традиційно, вказуємо температуру в одиницях енергії: 1 MeV відповідає температурі $1.2 \cdot 10^{10}$ K.

З цієї формули неможливо знайти явний вигляд для хімічного потенціалу як функцію температури та густини. Тоді, будемо розглядати μ як незалежну змінну замість ρ . Беручи це до уваги, густина параметризується так

$$\rho(T, \mu) = \alpha I_0(T, \mu), \quad (1.35)$$

де $\alpha \equiv \gamma(mc/\hbar)^3/(2\pi^2) = 21.828 \text{ фм}^{-3}$. Уведемо інтеграли:

$$I_\xi(T, \mu) = \int_0^\infty \frac{(1+z^2)^\xi z^2 dz}{\exp[(mc^2\sqrt{1+z^2} - \mu)/T] + 1}. \quad (1.36)$$

Середня енергія взаємодії $w(T, \mu) \equiv \bar{W}/A$ в термінах T і μ є

$$w(T, \mu) = \frac{\alpha}{2} C_v^2 I_0(T, \mu) - \frac{\alpha}{2} C_s^2 \frac{I_{-1/2}^2(T, \mu)}{I_0(T, \mu)}. \quad (1.37)$$

Середню енергію і термодинамічний потенціал на одну частинку для вільних (невзаємодіючих) нуклонів можна подати так:

$$e_0(T, \mu) = mc^2 \frac{I_{1/2}(T, \mu)}{I_0(T, \mu)}, \quad \omega_0(T, \mu) = -T \frac{K(T, \mu)}{I_0(T, \mu)}; \quad (1.38)$$

$$K(T, \mu) = \int_0^\infty z^2 \ln \left\{ 1 + \exp \left[\frac{\mu - mc^2 \sqrt{1+z^2}}{T} \right] \right\} dz. \quad (1.39)$$

Залежність повної середньої енергії $e \equiv E/A = e_0 + w$ від густини ρ за різних значень температури показано на Рис. 1.1.

Щоб дослідити фазовий перехід “рідина–газ” у системі релятивістських нуклонів, виведемо формулу для тиску з вільної енергії

$$f(T, \mu) = \omega_0(T, \mu) + \mu + w(T, \mu), \quad (1.40)$$

використовуючи співвідношення:

$$P = \rho^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \right)_T = \rho^2(T, \mu) \left(\frac{\partial f(T, \mu)}{\partial \mu} \right)_T \bigg/ \left(\frac{\partial \rho(T, \mu)}{\partial \mu} \right)_T. \quad (1.41)$$

У такий спосіб, знаходимо тиск

$$P(T, \mu) = \alpha T K(T, \mu) + \frac{\alpha^2}{2} C_v^2 I_0^2(T, \mu) - \frac{\alpha^2}{2} C_s^2 I_{-1/2}^2(T, \mu) \times \left[2 \frac{1 - J_{-1/2}(T, \mu)/I_{-1/2}(T, \mu)}{1 - J_0(T, \mu)/I_0(T, \mu)} - 1 \right], \quad (1.42)$$

який виражається через нові інтеграли:

$$J_\xi(T, \mu) = \int_0^\infty \frac{(1+z^2)^\xi z^2 dz}{[\exp[(mc^2\sqrt{1+z^2} - \mu)/T] + 1]^2}. \quad (1.43)$$

Формули (1.35), (1.42) задають рівняння стану у параметричному вигляді. Ізотерми, одержані за їх допомогою, зображено на Рис. 1.2. Стрімке зростання ізотерм (праворуч) відповідає рідкій фазі. Газоподібна фаза представлена лівими частинами ізотерм, де тиск повільно змінюється зі зміною густини.

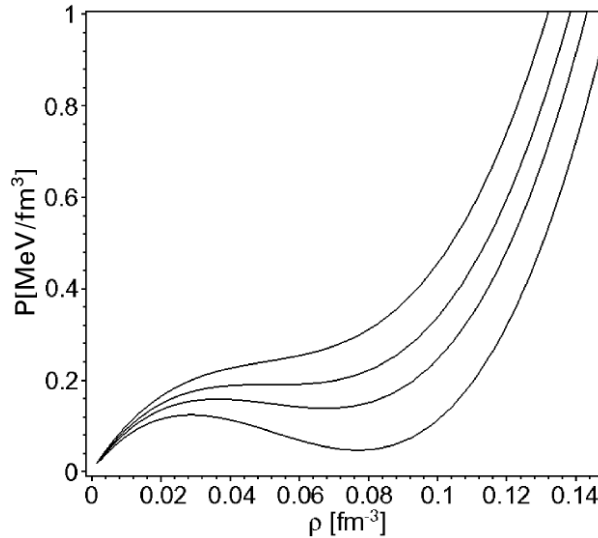


Рис. 1.2. Ізотерми симетричної ядерної матерії при $T = 12$ MeV, $T = 11.336$ MeV, $T = 10.8$ MeV, $T = 10$ MeV (згори донизу).

Щоб обчислити параметри критичної точки фазового переходу, звернемося до умов рівноваги однокомпонентної системи:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_T = 0. \quad (1.44)$$

Наші чисельні оцінки критичної густини, температури та тиску наведено у Таб. 1.3. Виявляється, що відношення ρ_c/ρ_0 є близьким до значення 0.33, яке відповідає моделі Ван-дер-Ваальса.

Таблиця 1.3

Параметри критичної точки

ρ_c [фм ⁻³]	T_c [MeV]	P_c [MeV/фм ³]
0.0514	11.336	0.191

Також, знайдено криву співіснування рідини–газу за допомогою правила Максвелла. Гілка кривої на Рис. 1.3 для низької густини ($\rho < \rho_c$) описує пару, у той час, коли гілка для $\rho > \rho_c$ відповідає рідкій фазі.

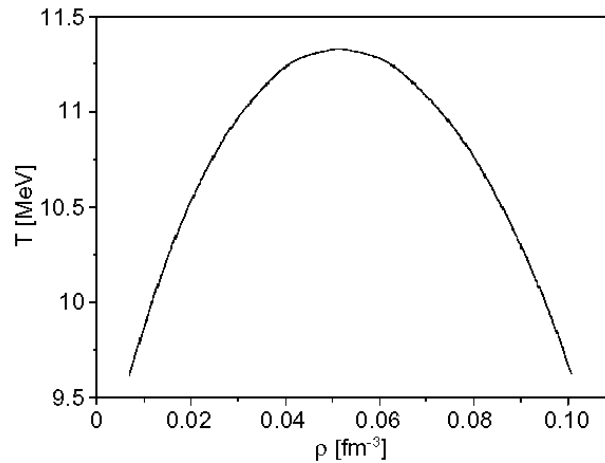


Рис. 1.3. Крива співіснування рідини–газу симетричної ядерної матерії.

Порівняємо одержані параметри з відомими. Екстраполяція експериментальних даних для енергії зв'язку дає значення -15.5 MeV для ядерної матерії, що враховується в нашій моделі. Також, значення T_c фазового переходу в ядерній матерії може бути знайдене екстраполяцією експериментальних даних, одержаних різними дослідницькими групами для типових ядер. Дані ISiS і EOS Collaboration приводять до $T_c = 13.6$ MeV і $T_c = 12.9$ MeV, відповідно. Оскільки, ці значення одержано з точністю 2 MeV, наше (теоретичне)

значення виглядає прийнятним. З іншого боку, воно відрізняється від інших теоретичних оцінок, наприклад, від [254], де $T_c = 14.4$ MeV.

Оскільки параметри критичної точки вже оцінено в численних теоретичних роботах з використанням різних моделей, ми зосередимося на особливостях нашої моделі. По-перше, ми застосували модель, послідовно отриману в рамках теорії прямої взаємодії. Такий підхід є альтернативою польовим і ефективним теоріям і, водночас, здатний описати реалістичні властивості ядерної матерії. По-друге, фазовий перехід рідина–газ головним чином пов’язаний з релятивістською кінематикою, яка залишається єдиним релятивістським ефектом у МФА, виключаючи скінченність швидкості передачі взаємодії. Роль релятивістської кінематики легко довести, розглядаючи нерелятивістський випадок, в якому скалярна взаємодія описується членом $-VC_\sigma^2\rho^2/2$ у $\bar{W}$. Тоді знак $\bar{W}$ буде визначатися сталим виразом $C_s^2 - C_v^2$, що виключає можливість переходу між рідким та газоподібним станами.

1.1.4. Надплинність у системі нейтронів. Теоретичні дослідження надплинності в ядерній матерії розпочато після створення теорії Бардіна-Купера-Шріфера (БКШ) надпровідності металів (теорія надплинності електронного газу в металах) [36], і роботи Бора із співробітниками [51], де описано механізм утворення куперівських пар нуклонів. Якщо надплинність електронного газу забезпечується електрон–фононою взаємодією, надплинність ядерної матерії пов’язана з конкуренцією між силами притягання і відштовхування, викликаними обміном скалярними і векторними мезонами, відповідно.

У наближенні БКШ виконано численні роботи, присвячені надплинності нейтронної речовини. Використовуючи феноменологічні потенціали між-ядерної взаємодії, отримані результати є більш-менш ідентичними і зібрані, наприклад, в [212]. Вони показують, що підхід БКШ дає завищені значення для енергетичного спектру надплинного стану і, отже, є потреба у врахуван-

ні поляризаційних ефектів. Аналогічні висновки одержано з релятивістських моделей [228, 283] на основі ефективної теоретико-польової σ -моделі квантової гадродинаміки.

Маючи лише якісні передбачення в рамках підходу БКШ, спроби зробити розрахунки на основі більш точних реалістичних потенціалів привели до бажаних оцінок енергетичного спектру. Однак, це досягнуто ціною втрати єдності серед підходів [32, 213, 55]. З цієї причини важко сказати, які результати повинні бути стандартними [89]. З іншого боку, розроблено та перевірено різні модифікації наближення хаотичних фаз (НХФ), які обіцяють бути точними при використанні простих моделей [191, 291, 292, 324, 343]. Зрозуміло, що розрахунки в модифікованому НХФ (із залученням варіаційного принципу) залишаються громіздкими і складними для застосування до моделей з реалістичними потенціалами.

Ці факти стимулюють нас дослідити надплинність нейтронів, використовуючи нашу мікроскопічну модель в рамках підходу БКШ. Ми обмежимося цим простим наближенням, оскільки детальне дослідження надплинності та інших явищ втрачає сенс без знання якісних властивостей моделі.

Модельний гамільтоніан, який ми використовуємо, має 4-ферміонну форму і є лінійним за константами зв'язку. Він отриманий шляхом квантування релятивістського (Пуанкаре-інваріантного) класичного гамільтоніану після редукції ступенів вільності мезонних полів. Як відомо [349, 161], лінійні моделі відображають провідні ефекти в ядерній матерії (за малої густини). Зауважимо, що, включаючи нелінійні мезонні самодії, можна описати більш широкий клас фізичних явищ. За низької густини можна дослідити надплинність ядерної речовини та фазовий перехід рідина–газ, який вже розглянуто раніше. Обидва ефекти дозволяють знехтувати спіornoю структурою квантового поля Дірака нуклонів та внеском античастинок. Останнє стає очевидним, пам'ятаючи, що тепловий розподіл антинуклонів описується виразом, що зникає за $T \rightarrow 0$. Окрім того, слід відновити залежність від повного об'єму V , а

релятивістський вигляд взаємодії між нуклонами повинен бути збережений, щоб спостерігати перехід між зв'язаними та незв'язаними станами. Таким чином, ці фізичні спрощення дозволяють вивчати систему з релятивістською взаємодією в рамках нерелятивістського (статистичного) підходу. Хоча ми маємо намір застосувати наближення БКШ, слід зробити деякі узагальнення внаслідок релятивістської форми взаємодії. Вони полягають у введенні двох функцій для опису енергетичної щільності, чия конкуренція визначатиме енергетичний спектр. Як зазначалося вище, ця конкуренція пов'язана із взаємодіями за посередництвом скалярних і векторних мезонів.

Фактично, притягання домінує над відштовхуванням у певній області значень імпульсу (або густини) і послаблюється за межами цієї області. Це означає, що в двох фізично різних ситуаціях ми повинні використовувати два різних підходи [386]. Там, де переважають сили притягання, працює наближення БКШ. Цей природний факт дає нам фізичну основу для оцінки імпульсу обрізання, який характеризує надплинну область для релятивістських моделей в межах формалізму БКШ [228].

Розпочнемо дослідження з гамільтоніану взаємодіючих нейтронів:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}, \quad (1.45)$$

де

$$\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} c p^0 \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma}, \quad p^0 = \sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{p}^2}, \quad (1.46)$$

– гамільтоніан вільних нейтронів. Індекс $\sigma = \pm$ позначає проекцію спіна на вісь z , а саме, $\pm \hbar/2$; $\hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma}^\dagger$, $\hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma}$ позначають оператори народження та знищення вільних нейтронів; c – швидкість світла.

Взаємодія $\hat{W}$ має вигляд

$$\hat{W} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} W_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_2, +}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}_2, -}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}_1, -} \hat{a}_{\mathbf{p}_1, +}; \quad (1.47)$$

$$W_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} = \frac{1}{2} \left[\Gamma_{\mathbf{p}_1} \left(\frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1}{\hbar} \right) + \Gamma_{\mathbf{p}_2} \left(\frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1}{\hbar} \right) \right], \quad (1.48)$$

де збережено лише члени, що відповідають за куперівські пари. Підсумовування за імпульсами здійснюється в інтервалі, обмеженому імпульсом обрізання p_c , який характеризує область надплинності і визначається нижче.

Величини $\Gamma_{\mathbf{p}}(\mathbf{k})$ у випадку ізотропної і однорідної матерії є

$$\Gamma_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}) = \frac{g_v^2}{\mathbf{k}^2 - [(\mathbf{k}\mathbf{p})/p^0]^2 + \mu_v^2} + \frac{g_\rho^2/4}{\mathbf{k}^2 - [(\mathbf{k}\mathbf{p})/p^0]^2 + \mu_\rho^2} - \frac{g_s^2(mc/p^0)^2}{\mathbf{k}^2 - [(\mathbf{k}\mathbf{p})/p^0]^2 + \mu_s^2}, \quad (1.49)$$

де g_i^2 ($i = s, v, \rho$) – константи взаємодії; μ_i – характеристики мезонів, пов'язані з масами m_i так $\mu_i = m_i c/\hbar$.

У межах області надплинності ми ігноруємо залежність матричних елементів від квадрату імпульсу передачі $\mathbf{k}^2$ ($= [(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)/\hbar]^2$), тоді одержуємо

$$W_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} = C_v^2 + \frac{1}{4}C_\rho^2 - \frac{1}{2}C_s^2 \frac{m^2 c^2}{(p_1^0)^2} - \frac{1}{2}C_s^2 \frac{m^2 c^2}{(p_2^0)^2}, \quad (1.50)$$

де $p_{1,2}^0 = \sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{p}_{1,2}^2}$; $C_i^2 \equiv g_i^2/\mu_i^2$ ($i = s, v, \rho$) – параметри носіїв взаємодії між нейтронами. Значення параметрів C_i^2 знайдено вище. Лише відзначимо, що вони задовольняють нерівності: $C_s^2 > C_v^2 > C_\rho^2$, $C_s^2 > C_v^2 + C_\rho^2/4$.

Обране наближення значно спрощує обчислення і нехтує релятивістським ефектом скінченності швидкості передачі взаємодії під час обміну мезонами. Завдяки малим комптонівським довжинам хвиль важких мезонів, дане наближення виявляється справедливим.

Перетворимо гамільтоніан з матричним елементом (1.50) так:

$$\hat{H}' = e^{-\hat{S}} \hat{H} e^{\hat{S}}; \quad (1.51)$$

$$\hat{S} = \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} C_s^2 \frac{m^2 c^2}{(p_1^0 p_2^0)^2} (p_2^0 - p_1^0) \hat{a}_{\mathbf{p}_2, +}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}_2, -}^\dagger - \hat{a}_{-\mathbf{p}_1, -} \hat{a}_{\mathbf{p}_1, +}. \quad (1.52)$$

Це перетворення – канонічне, бо оператор $\hat{S}$ – антиермітовий, $\hat{S}^\dagger = -\hat{S}$.

У лінійному наближенні, яким ми обмежимося, пишемо

$$\hat{H}' = \hat{H}_0 + \hat{W} + [\hat{H}_0, \hat{S}] \equiv \hat{H}_0 + \hat{W}'. \quad (1.53)$$

Завдяки комутаційному співвідношенню для операторів Фермі

$$\begin{aligned} & [a_{\mathbf{p},\pm}^\dagger a_{\mathbf{p},\pm}, \hat{a}_{\mathbf{p}_2,+}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}_2,-}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}_1,-} \hat{a}_{\mathbf{p}_1,+}] = \\ & = (\delta_{\mathbf{p},\pm\mathbf{p}_2} - \delta_{\mathbf{p},\pm\mathbf{p}_1}) \hat{a}_{\mathbf{p}_2,+}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}_2,-}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}_1,-} \hat{a}_{\mathbf{p}_1,+}, \end{aligned} \quad (1.54)$$

взаємодія набуває вигляду

$$\hat{W}' = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} W'_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_2,+}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}_2,-}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}_1,-} \hat{a}_{\mathbf{p}_1,+}; \quad (1.55)$$

$$W'_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} = C_v^2 + \frac{1}{4} C_\rho^2 - C_s^2 \frac{m^2 c^2}{p_1^0 p_2^0}. \quad (1.56)$$

Отже, бачимо, що здійснене перетворення факторизує скалярну взаємодію і робить її схожою на член взаємодії в моделі БКШ.

В рамках статистичного підходу до надплинності, де число частинок не є фіксованим, використовуємо розширений гамільтоніан:

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \varepsilon_p \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma} + \hat{W}', \quad \varepsilon_p = cp^0 - \mu, \quad (1.57)$$

де μ – хімічний потенціал нейтронів.

Надалі ми застосовуємо формалізм, розвинений Боголюбовим в теорії надплинності [372]. Альтернативний підхід до надплинності і надпровідності розвинутий Горьковим на базі кореляційних функцій (див. [386]).

Від гамільтоніану (1.57) перейдемо до модельного гамільтоніану:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_m &= \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \varepsilon_p \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma} + \\ &+ \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} W'_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} (\lambda_{\mathbf{p}_2}^* \hat{a}_{-\mathbf{p}_1,-} \hat{a}_{\mathbf{p}_1,+} + \lambda_{\mathbf{p}_1} \hat{a}_{\mathbf{p}_2,+}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}_2,-}^\dagger - \lambda_{\mathbf{p}_2}^* \lambda_{\mathbf{p}_1}), \end{aligned} \quad (1.58)$$

де комплексне число $\lambda_{\mathbf{p}}$ визначається з рівняння

$$\lambda_{\mathbf{p}} = \langle \hat{a}_{-\mathbf{p},-} \hat{a}_{\mathbf{p},+} \rangle = \frac{\text{Tr}[\hat{a}_{-\mathbf{p},-} \hat{a}_{\mathbf{p},+} \exp(-\hat{\mathcal{H}}_m/T)]}{\text{Tr} \exp(-\hat{\mathcal{H}}_m/T)}. \quad (1.59)$$

Тут T – температура системи (в одиницях енергії).

Використання модельного гамільтоніану замість $\mathcal{H}$ ґрунтується на еквівалентності результатів, які одержуються на їх основі, у термодинамічній межі (див. [372]). Практично, така заміна означає, що ми нехтуємо внеском взаємодії між куперівськими парами і залишаємось з одночастинковим спектром.

Введемо величини:

$$\Delta_V \equiv \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \lambda_{\mathbf{p}}, \quad \Delta_S \equiv \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \frac{mc}{p^0} \lambda_{\mathbf{p}}; \quad (1.60)$$

$$\Delta_p \equiv C_s^2 \Delta_S \frac{mc}{p^0} - \left(C_v^2 + \frac{1}{4} C_\rho^2 \right) \Delta_V. \quad (1.61)$$

Величина Δ_p , як буде видно, відіграє роль енергетичної щільності у спектрі надплинної матерії і відповідає енергії зв'язку куперівської пари нейтронів. Енергетична щільність, яку ми шукаємо, залежить від імпульса і визначається різницею між скалярною та векторною взаємодіями.

Тепер оператор (1.58) перепишеться так

$$\hat{\mathcal{H}}_m = \Lambda + \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \varepsilon_p \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma} - \sum_{\mathbf{p}} (\Delta_p \hat{a}_{\mathbf{p}, +}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}, -}^\dagger + \Delta_p^* \hat{a}_{-\mathbf{p}, -} \hat{a}_{\mathbf{p}, +}), \quad (1.62)$$

де зірка означає комплексне спряження, а стала Λ є

$$\begin{aligned} \Lambda &\equiv -\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} W'_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \lambda_{\mathbf{p}_2}^* \lambda_{\mathbf{p}_1} \\ &= V \left[C_s^2 |\Delta_S|^2 - \left(C_v^2 + \frac{1}{4} C_\rho^2 \right) |\Delta_V|^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Щоб діагоналізувати одержаний гамільтоніан, згідно з Боголюбовим [372] перейдемо від операторів нейтронів до операторів квазічастинок:

$$\hat{a}_{\mathbf{p}, +} = u_p \hat{b}_{\mathbf{p}, +} + v_p \hat{b}_{-\mathbf{p}, -}^\dagger, \quad (1.64)$$

$$\hat{a}_{-\mathbf{p}, -} = u_p \hat{b}_{-\mathbf{p}, -} - v_p \hat{b}_{\mathbf{p}, +}^\dagger. \quad (1.65)$$

Це перетворення є канонічним, якщо $|u_p|^2 + |v_p|^2 = 1$.

Після підстановки операторів в гамільтоніан і запису комплексних чисел як $u_p = |u_p| e^{i\phi}$, $v_p = |v_p| e^{i\psi}$, $\Delta_p = |\Delta_p| e^{i\xi}$, виводимо співвідношення: $\phi +$

$\psi - \xi = 0$. Ця умова пов'язує фази комплексних величин, але не визначає їх. Ми усуваємо свободу вибору фаз за допомогою накладання додаткових (калібрувальних) умов: $\xi = 0$, $\phi = -\psi$. Враховуючи їх, абсолютні значення комплексних чисел повинні задовольняти рівняння:

$$2\varepsilon_p |u_p| |v_p| = \Delta_p (|u_p|^2 - |v_p|^2). \quad (1.66)$$

Його розв'язками є

$$|u_p|^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon_p}{\sqrt{\varepsilon_p^2 + \Delta_p^2}} \right), \quad |v_p|^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_p}{\sqrt{\varepsilon_p^2 + \Delta_p^2}} \right). \quad (1.67)$$

Після підстановки в модельний гамільтоніан приходимо до виразу:

$$\hat{\mathcal{H}}_m = K + \sum_{\mathbf{p}} \sqrt{\varepsilon_p^2 + \Delta_p^2} \left(\hat{b}_{\mathbf{p},+}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p},+} + \hat{b}_{-\mathbf{p},-}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{p},-} \right); \quad (1.68)$$

$$K = \Lambda - \sum_{\mathbf{p}} \left[\sqrt{\varepsilon_p^2 + \Delta_p^2} - \varepsilon_p \right]. \quad (1.69)$$

Нам потрібно знайти рівняння для параметрів Δ_v , Δ_s , які виражаються через $\lambda_{\mathbf{p}}$. Середнє $\lambda_{\mathbf{p}}$ легко знайти:

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathbf{p}} &\equiv \langle \hat{a}_{-\mathbf{p},-} \hat{a}_{\mathbf{p},+} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Delta_p}{\sqrt{\varepsilon_p^2 + \Delta_p^2}} \tanh \frac{\sqrt{\varepsilon_p^2 + \Delta_p^2}}{2T}, \end{aligned} \quad (1.70)$$

де використано температурний розподіл квазічастинок, а саме,

$$\langle \hat{b}_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p},\sigma} \rangle = \frac{1}{\exp \left(\sqrt{\varepsilon_p^2 + \Delta_p^2} / T \right) + 1}. \quad (1.71)$$

Далі, розглянемо систему при $T = 0$, коли $\tanh = 1$. Використовуючи вирази (1.60), (1.61), одержимо бажану систему рівнянь:

$$\Delta_v = \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{p}} \frac{C_s^2 \Delta_s m c / p^0 - (C_v^2 + C_\rho^2 / 4) \Delta_v}{\sqrt{\varepsilon_p^2 + [C_s^2 \Delta_s m c / p^0 - (C_v^2 + C_\rho^2 / 4) \Delta_v]^2}}, \quad (1.72)$$

$$\Delta_S = \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{p}} \frac{mc}{p^0} \frac{C_s^2 \Delta_S mc/p^0 - (C_v^2 + C_\rho^2/4) \Delta_V}{\sqrt{\varepsilon_p^2 + [C_s^2 \Delta_S mc/p^0 - (C_v^2 + C_\rho^2/4) \Delta_V]^2}}. \quad (1.73)$$

Завдяки врахуванню релятивістських ефектів, ці рівняння узагальнюють рівняння для енергетичної щільності в рамках теорії БКШ. За їх допомогою ми дослідимо енергетичний спектр системи в надплинному стані.

Зосередимося на енергії зв'язку куперівської пари нейтронів. Щоб оцінити величину енергетичної щільності, необхідно знати модельні параметри C_i^2 , які повинні відтворювати рівноважні властивості ядерної матерії. Їхні значення наведено у Таб. 1.1.

Замінімо підсумовування інтегруванням в рівняннях (1.72), (1.73):

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} (\dots) = \int (\dots) \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{1}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^{p_c} (\dots) p^2 dp.$$

Ефективний імпульс обрізання p_c для релятивістських моделей визначається з умови занулення підінтегральної функції, залежної від імпульса, як показано в [228]. Оскільки чисельний аналіз дає $p_c/\hbar \approx 1.5 \text{ фм}^{-1}$, то вираз mc/p^0 слабо відрізняється від 1. Отже, з прийнятною точністю покладемо $\Delta = \Delta_V \approx \Delta_S$. Після цього, рівняння для Δ_V , Δ_S зводяться до одного:

$$1 = \frac{1}{4\pi^2\hbar^3} \int_0^{p_c} \frac{C_s^2 mc/p^0 - C_v^2 - C_\rho^2/4}{\sqrt{\varepsilon_p^2 + \Delta^2 [C_s^2 mc/p^0 - C_v^2 - C_\rho^2/4]^2}} p^2 dp, \quad (1.74)$$

та залежність щільності від імпульсу стає

$$\Delta_p = \Delta \left(C_s^2 \frac{mc}{p^0} - C_v^2 - \frac{1}{4} C_\rho^2 \right). \quad (1.75)$$

Оскільки $\mu_i > 3 \text{ фм}^{-1}$ ($i = s, v, \rho$), беручи до уваги, що $\mu_i > p_c/\hbar$, можна тепер аргументувати заміну матричного елемента (1.48) на (1.50).

Покладемо хімічний потенціал μ рівним $c\sqrt{m^2 c^2 + p_F^2}$, де p_F – імпульс Фермі. Оскільки $\varepsilon_{p_F} = 0$, то цікаво розглянути залежність енергетичної щільності $\Delta_F \equiv \Delta_{p_F}$ на рівні Фермі від густини ρ , яка пов'язана з імпульсом Фермі

формулою:

$$p_F = \hbar \left(\frac{6\pi^2 \rho}{\gamma} \right)^{1/3},$$

тут $\gamma = 2$ – спінове виродження.

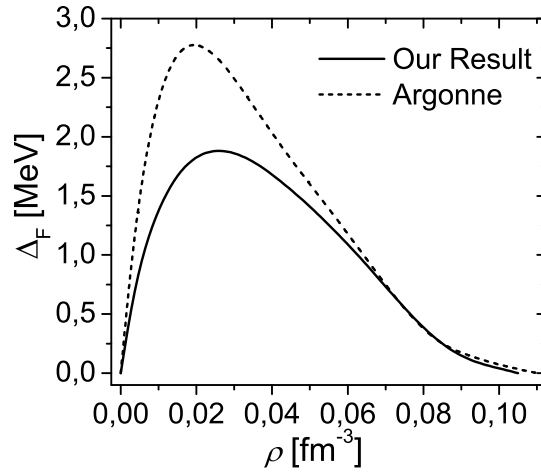


Рис. 1.4. Залежність енергетичної щілини на рівні Фермі від густини нейтронів. Наведено результат для нашої моделі (суцільна) і для моделі з потенціалом Argonne (пунктирна).

Результат чисельних обчислень наведено на Рис. 1.4, де максимальне значення енергетичної щілини для нейтронної матерії становить 1.902 MeV при $\rho = 0.025 \text{ фм}^{-3}$. Для порівняння, на Рис. 1.4 наведено типову залежність щілини від густини в наближенні БКШ в синглетному 1S_0 стані [212]. Видно, що максимальне значення щілини для нейтронної матерії становить близько 2.8 MeV. Розбіжність у значеннях максимумів на Рис. 1.4 можна пояснити відмінністю між мікроскопічним потенціалом, який ми використовували, і феноменологічним потенціалом типу Argonne. Більше того, параметри нашої моделі одержано для рівноважних властивостей (симетричної) ядерної матерії, а не з даних про нейтронну матерію. Такий вибір дає повну картину можливостей моделі з *єдиною* системою параметрів, яка добре описує фазовий перехід рідина-газ [263]. Можна очікувати, що інший вибір параметрів

може привести до кращого узгодження. Тим не менш, інші характеристики (положення максимуму, область надплинного стану) на цих рисунках є близькими. З цієї точки зору наші результати є прийнятними для опису надплинності. З іншого боку, і 2.8 MeV і 1.9 MeV не є реалістичними значеннями для щільності – вони надто великі, що пов'язано з використанням наближення БКШ. Тому подальші дослідження повинні здійснюватись за його межами і враховувати поляризаційні ефекти в середовищі [212].

1.2. Випаровування ядерної матерії у конформно-пласкому просторі

Теоретичні моделі зіткнень важких іонів, які базуються на припущенні про локальну рівновагу, вимагають рівняння стану ядерної речовини як вхідні дані. Один з підходів, який часто використовується для опису гадронних взаємодій, включає різні модифікації моделі Валечки [356, 323], в яких взаємодії ефективно реалізуються в термінах середніх полів. Ці модифікації зроблено для точного опису властивостей ядер та ядерної речовини в пласкому просторі-часі. Тут ми узагальнюємо лінійну модель Валечки на випадок деформованого простору-часу та отримуємо рівняння стану. Такі два завдання можуть служити першими кроками дослідження (зіткнень) важких іонів у сильному гравітаційному полі, яке могло існувати у Всесвіті на різних етапах еволюції та/або в неінерційних системах відліку. З численних праць (див., наприклад, [371, 374]) вже відомо, що спектри вільних частинок істотно залежать від метрики та кривини простору-часу. Цей факт повинен впливати на (термо)динамічні характеристики (сильно)взаємодіючих частинок, які виражаються через параметри метрики.

В принципі, не важко зрозуміти вплив кривини на динаміку багаточастинкової системи. Відомо (див. [76]), що класична динаміка частинок у викривленому просторі визначається приливною силою, спричиненою нетриві-

альною кривою. Звернемо увагу на деякі факти з космологічних моделей з постійною кривиною K просторової геометрії Всесвіту. Якщо $K > 0$, сусідні траєкторії (геодезійні) є стійкими і осцилюють одна біля одної з характерною частотою, що визначається K . Якщо $K < 0$, траєкторії є експоненційно нестійкими і розбігаються з показником Ляпунова, визначеним $|K|$. Отже, частинки, як правило, локалізуються або делокалізуються завдяки кривині (або приливній силі, якщо говорити з точки зору механіки Ньютона). Ці ситуації зображено на Рис. 1.5 і можуть відповідно тлумачитися спостерігачем, пов'язаним з тестовою частинкою, як ефективна притягальна або відштовхувальна взаємодія між частинками.

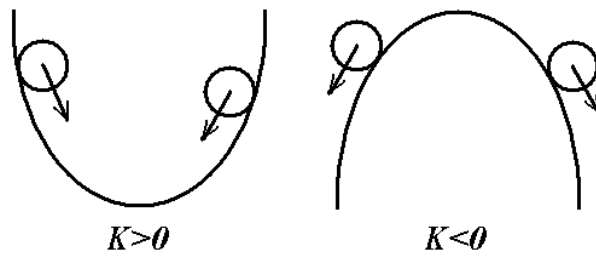


Рис. 1.5. Схематична поведінка частинок у просторах з $K > 0$ і $K < 0$.

В принципі, додаткове притягання або відштовхування повинні змінити критичну температуру T_c ядерного фазового переходу рідина-газ. Очевидно, що притягання підтримує створення рідкої фази і, тим самим, збільшує T_c . Навпаки, ефективне відштовхування зменшує T_c . Такий погляд з класичної динаміки має місце, але можна зробити більш глибокий аналіз.

Справді, можна передбачити дві причини, які змінюють термодинамічні характеристики ядерної матерії в слабковикривленому просторі-часі. Перша причина пов'язана зі зміною об'єму Всесвіту (у порівнянні з об'ємом Всесвіту Мінковського). Друга полягає у зміні енергетичного спектра E квантових частинок.

Перша причина впливає лише на величину термодинамічних функцій, як тиск і густина, пропорційні оберненому об'єму, і зберігає залежність цих ве-

личин від температури. Тому, вважаємо, що зміна T_c спричинена другою причиною, тобто зміною квантового спектру. Це припущення легко підтвердити. А саме, тепловий розподіл частинок визначається співвідношенням E/T , яке демонструє зв'язок між спектром і зміною температури.

Наша мета – оцінити ці ефекти у випадку конформно-плаского простору-часу, що враховує розширення та/або колапс Всесвіту.

1.2.1. Узагальнення моделі Валечкі. Однією з найпростіших моделей квантової гадродинаміки (КГД) є лінійна модель Валечки, яка містить поле баріонів N , яке складається з протонної і нейтронної компонент, поля скалярного $\hat{\sigma}$ та векторного $\hat{A}_\mu$ мезонів. Усі поля та взаємодії описуються Лоренц-коваріантно. Скалярні та векторні компоненти є найважливішими для опису об'ємних властивостей, які є головними тут.

Зазвичай, застосовуючи наближення середнього поля, припускається, що розглядається система відліку (спокою), пов'язана з матерією, так що потік баріонів $\bar{N}\vec{\gamma}N = 0$, а баріонне число зберігається. Окрім того, якщо густина баріонів $\bar{N}\gamma^0 N$ і скалярна густина $\bar{N}N$ є достатньо великими, оператори мезонних полів апроксимуються їх очікуваними значеннями, які є класичними полями:

$$\hat{\sigma} \rightarrow \langle \hat{\sigma} \rangle \equiv \sigma, \quad \hat{A}_\mu \rightarrow \langle \hat{A}_\mu \rangle \equiv (A, \mathbf{0}).$$

Для стаціонарної і однорідної системи, σ і A є сталими і не залежать від простору-часу, і, оскільки, матерія знаходиться у спокої, векторний потенціал покладається $\mathbf{A} = 0$.

В принципі, не складно узагальнити вихідні рівняння моделі Валечки на випадок викривленого простору-часу. Однак, значно ускладнюється задача пошуку розв'язків польових рівнянь. Беручи це до уваги, розпочнемо дослідження ядерної матерії в слабковикривленому просторі на рівні середнього

поля, коли канонічний тензор енергії–імпульсу має вигляд:

$$T_{\mu\nu}[g] = i\bar{N}\gamma_\mu\partial_\nu N + \left(\frac{1}{2}m_s^2\sigma^2 - \frac{1}{2}m_v^2A^2\right)g_{\mu\nu}, \quad (1.76)$$

де $g_{\mu\nu}$ – метрика Мінковського; γ^μ – матриці Дірака.

Польові рівняння моделі записуються так

$$\sigma = \frac{g_s}{m_s^2}\bar{N}N, \quad (1.77)$$

$$A = \frac{g_v}{m_v^2}\bar{N}\gamma^0 N, \quad (1.78)$$

$$0 = (i\gamma^\mu\partial_\mu - g_v\gamma^0 A - M_*)N, \quad (1.79)$$

де однорідне скалярне поле σ зсуває баріонну масу M до значення $M_* \equiv M - g_s\sigma$, а векторне поле A зсуває енергетичний спектр. Квантово-польовий оператор N означено у звичайний спосіб з використанням нормальних мод рівняння Дірака.

Маючи $T_{\mu\nu}[g]$, можна сконструювати тензор енергії–імпульсу системи в нетривіальному просторі–часі. Ця процедура є такою.

У слабковикривленому просторі–часі з метрикою $\bar{g}_{\mu\nu}$, деякий функціонал дії можна подати так

$$S[\bar{g}] = S[g] + \int \frac{\delta S[\bar{g}]}{\delta \bar{g}^{\mu\nu}} \Big|_{\bar{g}=g} (\bar{g}^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}) d^4x. \quad (1.80)$$

Ми зосередимося на стаціонарній, конформно-пласкій метриці $\bar{g}_{\mu\nu}(x) = a^2(\mathbf{x})g_{\mu\nu}$, де $a(\mathbf{x}) = 1 + h(\mathbf{x})$ – масштабний фактор, такий що $h(\mathbf{x}) \ll 1$. Це означає, що функція $h(\mathbf{x})$ є обмеженою у цілому просторі і дозволяє застосувати теорію збурень в лінійному наближенні за $h(\mathbf{x})$, коли

$$\bar{g}_{\mu\nu}(x) \approx [1 + 2h(\mathbf{x})]g_{\mu\nu}, \quad (1.81)$$

і просторова кривина, $K = 6a^{-3}(\mathbf{x})\nabla^2 a(\mathbf{x})$, задається виразом:

$$K \approx 6\nabla^2 h(\mathbf{x}). \quad (1.82)$$

Використовуючи означення тензора енергії–імпульсу,

$$T_{\mu\nu}[g] = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S[g]}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (1.83)$$

знаходимо поправку до функціоналу дії, яка визначається формулою:

$$S[\bar{g}] = S[g] - \int \sqrt{-g} T_{\mu}^{\mu}[g] h(\mathbf{x}) d^4x. \quad (1.84)$$

За допомогою корисних співвідношень,

$$g^{\nu\rho}(x) \frac{\delta}{\delta g^{\rho\mu}(x)} = \bar{g}^{\nu\rho}(x) \frac{\delta}{\delta \bar{g}^{\rho\mu}(x)}, \quad \left(\frac{g(x)}{\bar{g}(x)} \right)^{1/2} \approx 1 - 4h(\mathbf{x}), \quad g = \det(g_{\mu\nu}), \quad (1.85)$$

де ми припустили на мить залежність $g_{\mu\nu}$ від простору і часу, тензор $T_{\mu}^{\nu}[\bar{g}(x)]$ легко виводиться в нашому наближенні:

$$T_{\mu}^{\nu}[\bar{g}(x)] = [1 - 4h(\mathbf{x})] T_{\mu}^{\nu}[g(x)] - \frac{2}{\sqrt{-g(x)}} g^{\nu\rho}(x) \frac{\delta}{\delta g^{\rho\mu}(x)} \int \sqrt{-g(x')} T_{\mu}^{\mu}[g(x')] h(\mathbf{x}') d^4x'. \quad (1.86)$$

Після підстановки відомої варіації,

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (1.87)$$

остаточно одержуємо, що

$$T_{\mu}^{\nu}[\bar{g}(x)] = T_{\mu}^{\nu}[g] + h(\mathbf{x}) (T_{\lambda}^{\lambda}[g] \delta_{\mu}^{\nu} - 4T_{\mu}^{\nu}[g]). \quad (1.88)$$

Цей вираз є лінійною функцією від $h(\mathbf{x})$, яка робить його явно залежним від простору. Хоча ми плануємо дослідити поведінку термодинамічних функцій зі зміною значень $h(\mathbf{x})$, а залежність $T_{\mu}^{\nu}[\bar{g}(x)]$ від простору є поза нашим інтересом, $h(\mathbf{x})$ визначає енергетичний спектр і, отже, повинна бути означена.

Через рівність $T_{\mu}^{\mu}[\bar{g}(x)] = T_{\mu}^{\mu}[g]$, коли залежність від $h(\mathbf{x})$ зникає, від метрики $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$ слід вимагати, щоб скалярна кривина $R[\bar{g}(x)] = 0$ майже всюди. Для конкретики, дослідимо ядерну матерію в просторі з

$$h(\mathbf{x}) = u\theta(z), \quad (1.89)$$

де $\theta(z)$ – функція Хевісайда. Зауважимо, що просторова кривина, $K = 6u\delta'(z)$, є нульовою майже всюди, але є екстремально великою при $z = 0$.

Взагалі кажучи, функція (1.89) описує плаский Всесвіт, який при $z \geq 0$ розширюється (колапсує) у порівнянні з простором Мінковського, якщо $u > 0$ ($u < 0$). Така функція схожа на наближення для дилатона у вигляді кінка (антикінка). Подібний масштабний фактор вже з’являвся в контексті двовимірної дилатонної гравітації [31].

Гамільтоніан системи,

$$H = \int T_0^0[\bar{g}]\sqrt{-\bar{g}}d^3x = \int (T_0^0[g] + h(\mathbf{x})T_\lambda^\lambda[g]) d^3x, \quad (1.90)$$

потрібен для дослідження термодинаміки.

Запишемо гамільтоніан (та інші величини) моделі в лінійному наближенні за параметром u з (1.89), а саме,

$$H = H_0 + u\Delta H, \quad (1.91)$$

де збурення, спричинене деформацією геометрії простору–часу, є

$$\Delta H = M_* \int \bar{N}N\theta(z)d^3x + g_v A \int \bar{N}\gamma^0 N\theta(z)d^3x + V_0 (m_s^2\sigma^2 - m_v^2 A^2). \quad (1.92)$$

Надалі, зручно ввести “об’єми”:

$$V_n = \int a^n(\mathbf{x})d^3x \approx V_0 \left(1 + \frac{1}{2}nu\right), \quad (1.93)$$

V_0 – об’єм простору Мінковського.

Оскільки поле N розкладається за пласкими хвилями, нагадаємо Фур’є образ $\theta(z)$ -функції:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(z)e^{-ikz}dz = \pi\delta(k) - \mathcal{P}\frac{i}{k}. \quad (1.94)$$

Останній член в правій частині (1.94) приводить до недіагонального внеску добутку операторів народження і знищення. Використовуючи наближення середнього поля, яке нехтує такими членами, не діагоналізуємо його.

Тепер обговоримо розв'язок польових рівнянь у випадку слабковикривленого простору-часу, який забезпечує екстремум функціоналу дії і повинен підставлятися в тензор енергії-імпульсу. Позначимо поля як $F = (N, \sigma, A)$ і подамо у вигляді:

$$F = F_0 + u\Delta F,$$

де F_0 – розв'язок рівнянь (1.77)-(1.79); ΔF – збурення.

Тоді, розкладемо функціонал дії:

$$S[\bar{g}, F] = S[\bar{g}, F_0] + \int \frac{\delta S[\bar{g}, F]}{\delta F} \Big|_{F=F_0} (F - F_0) d^4x. \quad (1.95)$$

Другий доданок у правій частині переписується так:

$$u \int \left(\frac{\delta S[g, F_0]}{\delta F_0(x)} - \frac{\delta}{\delta F_0(x)} \int \sqrt{-g} T_\mu^\mu[g, F_0] h(\mathbf{y}) d^4y \right) \Delta F(x) d^4x. \quad (1.96)$$

Завдяки незбуреним польовим рівнянням маємо, що $\delta S[g, F_0]/\delta F_0 = 0$. Варіаційна похідна від виразу, що містить слід $T_\mu^\mu[g, F_0]$, також випадає, оскільки приводить до члена порядку u^2 . Як наслідок, одержуємо

$$S[\bar{g}, F] = S[\bar{g}, F_0].$$

Тому, в першому наближенні, розв'язок F_0 визначає екстремум дії $S[\bar{g}, F]$, і достатньо підставити F_0 в компоненти тензора енергії-імпульсу.

1.2.2. Рівняння стану системи нуклонів. Отже, динаміка баріонів у викривленому та пласкому просторі-часі – різна. Цей факт стимулює нас до вивчення термодинамічних характеристик ядерної матерії в нетривіальному просторі. Дослідимо залежність критичних параметрів (як критична температура T_c , тиск P_c і густина баріонів ρ_c) фазового переходу рідина-газ від параметра u . Аби знайти потрібні залежності, одержимо рівняння стану ядерної матерії.

Наш підхід до ядерної матерії ґрунтується на знаходженні (середнього значення) тензора енергії-імпульсу,

$$\langle T_\mu^\nu[\bar{g}(x)] \rangle \equiv \text{Tr} \left\{ T_\mu^\nu[\bar{g}(x)] e^{-\beta(H-\mu B)} \right\} / \text{Tr} e^{-\beta(H-\mu B)}, \quad (1.97)$$

у багаточастинковому квантовому стані за скінченної температури і густини, де μ і $\beta \equiv 1/T$ – хімічний потенціал і обернена температура; $B = \int \bar{N} \gamma^0 N d^3x$ – баріонний заряд. Здійснюючи обчислення в лінійному наближенні за u , можна замінити гамільтоніан H на H_0 в останній формулі.

Густина середньої енергії, тиск та слід тензора енергії–імпульсу однорідної симетричної (коли $N = Z$) ядерної матерії в просторі–часі Мінковського є

$$\mathcal{E} \equiv \langle T_0^0[g] \rangle = \varepsilon + \frac{1}{2}c_s^2\rho_s^2 + \frac{1}{2}c_v^2\rho_B^2, \quad (1.98)$$

$$P \equiv -\langle T_i^i[g] \rangle = p - \frac{1}{2}c_s^2\rho_s^2 + \frac{1}{2}c_v^2\rho_B^2, \quad (1.99)$$

$$\langle T_\lambda^\lambda[g] \rangle = M_*\rho_s + 2c_s^2\rho_s^2 - c_v^2\rho_B^2, \quad (1.100)$$

де $c_i^2 \equiv g_i^2/m_i^2$; і ми ввели позначення:

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty E(p)(f_+(p) + f_-(p))p^2 dp, \quad (1.101)$$

$$p = -T \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty \{\ln[1 - f_+(p)] + \ln[1 - f_-(p)]\} p^2 dp, \quad (1.102)$$

$$\rho_s = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{M_*}{E(p)} (f_+(p) + f_-(p)) p^2 dp, \quad (1.103)$$

$$\rho_B = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty (f_+(p) - f_-(p)) p^2 dp, \quad (1.104)$$

де $f_\pm(p) = (1 + \exp \beta(E(p) \mp \nu))^{-1}$ – нуклонний і антинуклонний термічні розподіли, залежні від ефективного хімічного потенціалу $\nu = \mu - g_v A$; $E(p) = \sqrt{M_*^2 + p^2}$; $\gamma = 4$ – фактор спин-іспінового виродження.

Зауважимо, що маса нуклона набуває емпіричного значення $M = 939$ MeV, і тільки відношення констант взаємодії до мас (позначені через c_i^2) потрібно визначити у безмежній матерії (нехтуючи поверхневими ефектами). Фактично, ми маємо два параметри, які слід підібрати, щоб відтворити, перш за все, рівноважні властивості симетричної ядерної матерії. Тут ми використовуємо

набір безрозмірних параметрів, $c_s^2 M^2 = 359.348$, $c_v^2 M^2 = 275.116$, знайдений в [322] для лінійної моделі Валечки.

У частині простору ($z > 0$) з перемасштабованою метрикою, знаходимо густину енергії і тиск:

$$\mathcal{E}(u) \equiv \langle T_0^0[\bar{g}(x)] \rangle = \mathcal{E} + 2u \left[\frac{1}{2} M_* \rho_s - 2\varepsilon - \frac{3}{2} c_v^2 \rho_B^2 \right], \quad (1.105)$$

$$P(u) \equiv -\langle T_i^i[\bar{g}(x)] \rangle = P - 2u \left[\frac{1}{2} M_* \rho_s + 2p + \frac{1}{2} c_v^2 \rho_B^2 \right]. \quad (1.106)$$

Зауважимо, що такі самі формули виводяться за допомогою й іншої техніки, що описується в розділі 1.2.3.

При $T = 0$, існує зв'язок між енергією і тиском неоднорідної системи:

$$\int [P(\mathbf{x}) \delta dV_3 + \delta(\mathcal{E}(\mathbf{x}) dV_3)] = 0, \quad (1.107)$$

де $\int \mathcal{E}(\mathbf{x}) dV_3$ – повна енергія у власному об'ємі V_3 ; $dV_3 \approx [1 + 3h(\mathbf{x})] dV_0$; $\delta dV_3 / dV_0 = 3\delta h(\mathbf{x})$.

Співвідношення (1.107) є наслідком збереження тензора енергії–імпульсу в заданому квантовому стані:

$$\langle T_\mu^\nu[\bar{g}(x)] \rangle_{;\nu} = 0. \quad (1.108)$$

Густину баріонів $\rho_B(u)$ у півпросторі $z > 0$ знаходимо так:

$$\rho_B(u) \equiv \frac{\partial P(u)}{\partial \nu} = (1 - 4u) \rho_B. \quad (1.109)$$

Величини $P(u)$ і $\rho_B(u)$ задають рівняння стану в параметричній формі, де T і ν – незалежні термодинамічні параметри. У певному сенсі, наше рівняння стану подібне до барометричної формули, що описує зміну тиску і густини над землею поверхнею. Видно, що при $u > 0$ ($u < 0$), коли Всесвіт розширюється (колапсує), баріонна густина є меншою (більшою) ніж у просторі Мінковського, хоча повний баріонний заряд зберігається. Отже, вплив зовнішнього поля $h(\mathbf{x})$ на ядерну матерію подібний до дії зовнішнього електростатичного поля

на кристали: поле приводить до виникнення поляризації (додаткового тиску у нашому випадку) і деформації форми тіла.

Аби повністю описати модель, слід сформулювати рівняння для ефективної маси M_* (або σ):

$$M_* = M - c_s^2 \rho_s. \quad (1.110)$$

Воно визначає M_* самоузгодженим чином і впливає з теорії в тривіальному просторі. Аналогічно, використовуємо розв'язок для поля A з [323].

Результати чисельних розрахунків в області з $z > 0$, наведено на Рис. 1.6 та Таб. 1.4. Як і очікувалось, у випадку $u > 0$, пов'язаному з ефективним притяганням, критична температура фазового переходу рідина–газ збільшується. У той же час значення критичного тиску і густини баріонів зменшуються, оскільки вони обернено пропорційні об'єму Всесвіту, збільшеному порівняно з об'ємом простору Мінковського. На відміну від цього випадку, інша поведінка параметрів спостерігається при $u < 0$.

Таблиця 1.4

Критичні параметри ядерної матерії при $z > 0$

u	T_c [MeV]	P_c [MeV/фм ³]	ρ_c [фм ⁻³]
-0.01	11.8	0.55	0.074
-0.005	15.3	0.5	0.068
0	18.3	0.43	0.064
0.005	21.3	0.36	0.06
0.01	24.8	0.31	0.054

Важливо зауважити наслідки, отримані з даних Таб. 1.4. Хоча вигляд масштабного фактору суттєво залежить від фізичної ситуації, видно, що його невелике відхилення може суттєво змінити критичні параметри симетричної ядерної матерії. Окрім того, вірогідно, що критична точка може бути відсутньою в гіперболічному просторі за певних значень u . Це явище слід

враховувати при дослідженні ядерної матерії у викривленому просторі-часі або поблизу джерел сильного гравітаційного поля.

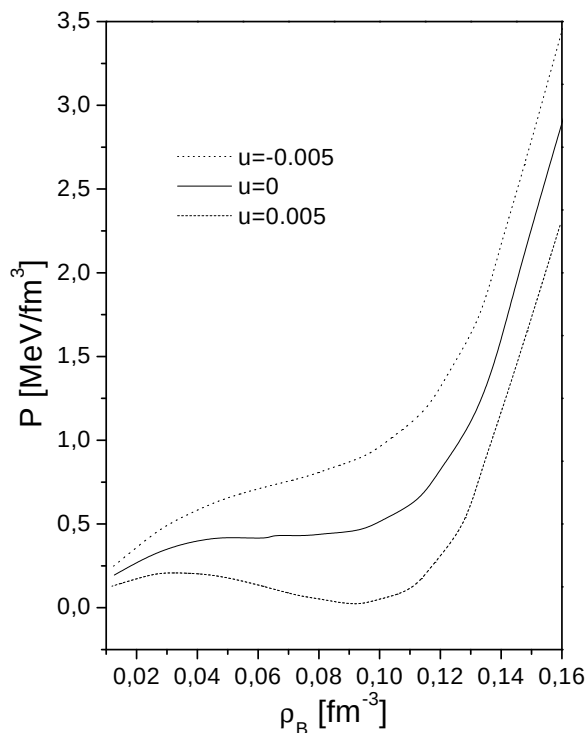


Рис. 1.6. Фазова діаграма симетричної ядерної матерії з різними значеннями параметра u при $T = 18.3$ MeV ($z > 0$).

У контексті фізики важких іонів, зауважимо, що тут описано лише ефекти в об'ємі, тобто об'ємні властивості ядер. В принципі, слід враховувати скінченність ядер, оскільки термодинамічні характеристики ядерної речовини та ядер різні. Окрім того, приливна сила буде впливати на ядра за істотної зміни гравітаційного поля на міжнуклонній відстані.

1.2.3. Альтернативний підхід. У просторі-часі з метрикою $\bar{g}_{\mu\nu} = a^2(\mathbf{x})g_{\mu\nu}$, функціонал дії $S = \int \mathcal{L} d^4x$ моделі Валечки визначається густиною лагранжіана:

$$\mathcal{L} = \bar{N} \left(\hat{D} - g_v A \gamma^0 a^{-1} \right) N a^4 - \frac{m_s^2}{2} \sigma^2 a^4 + \frac{m_v^2}{2} A^2 a^2, \quad (1.111)$$

де

$$\hat{D} = \mathrm{i}a^{-1}\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{3}{2}\mathrm{i}a^{-2}(\gamma^i\partial_i a) - M_* \quad (1.112)$$

– оператор Дірака.

Мезони описуються класичними полями σ і A , які є, загалом, функціями просторових координат. Однак, працюючи з середніми полями, ми не включаємо члени просторової еволюції цих полів в лагранжіан, оскільки їх залежність від координат фіксована.

Зробимо два (конформних) перетворення, щоб модифікувати лагранжіан. По-перше, підставимо $a^{-3/2}N$ замість N , щоб спростити оператор Дірака. По-друге, необхідно замінити поле σ на $a^{-1}\sigma$ заради перемасштабування комптонівських довжин хвиль ($\hbar/mc$) всіх частинок.

Після цих підстановок, модель Валечки у конформно-пласкому просторі-часі зводиться до моделі з масами, залежними від координат:

$$\mathcal{L} = \bar{N} [\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - M_* - Mh(\mathbf{x}) - g_v A\gamma^0] N - \frac{1}{2}m_s^2\sigma^2a^2 + \frac{1}{2}m_v^2A^2a^2. \quad (1.113)$$

Легко бачити, що $\mathcal{L}$ у просторі з метрикою $\bar{g}_{\mu\nu}$ можна відразу вивести за допомогою заміни мас, $m \rightarrow ma$. При $m = 0$, модель інваріантна відносно конформних перетворень, як має бути.

Припустимо, що $\sigma = \text{const}$, $A = \text{const}$ і задовольняють рівняння:

$$g_s \int \bar{N}N d^3x = m_s^2\sigma V_2, \quad g_v \int \bar{N}\gamma^0 N d^3x = m_v^2AV_2, \quad (1.114)$$

які впливають з варіації функціоналу дії.

Гамільтоніан моделі є $H = H_0 + u\Delta H$, де збурення визначається так

$$\Delta H = M \int \bar{N}N\theta(z)d^3x + V_0 \left(\frac{1}{2}m_s^2\sigma^2 - \frac{1}{2}m_v^2A^2 \right). \quad (1.115)$$

Легко одержуємо термодинамічний потенціал в нашому наближенні:

$$\Omega = -V_0P + uV_0\Delta\omega, \quad (1.116)$$

де P задається виразом (1.99),

$$\Delta\omega = \frac{1}{2}M\rho_s + \frac{1}{2}c_v^2\rho_B^2 - \frac{1}{2}c_s^2\rho_s^2. \quad (1.117)$$

Ця поправка збігається з внеском сліду (1.100).

За такого означення тиску: $P(\mathbf{x}) = -\delta\Omega/\delta V_4(\mathbf{x})$, приходимо до (1.106).

1.3. Рідиноподібні стани $\pi^+\pi^-$ матерії

Можливість спостереження конденсату піонів в зіткненнях важких іонів спонукала до теоретичних та експериментальних досліджень протягом останніх десятиліть [187, 354]. Ймовірно, піонний конденсат також є складовою нейтронних зір. Його теоретичний опис зазвичай робиться в рамках феноменологічних моделей, що ведуть до самодії типу φ^4 піонних ступенів вільності (див. [387, 242, 326]).

Оскільки піони є бозонами Голдстоуна для спонтанно порушеної кіральної симетрії, реалістичного опису піонної підсистеми слід чекати від кіральної моделі. За температури, нижчої за температуру кірального фазового переходу $T_\chi \approx 150$ MeV, зауважимо загальну властивість відомих кіральних моделей, а саме, в наближенні третього порядку вони приводять до притягальної дво-частинкової взаємодії (пов'язаною з членом φ^4) та тричастинкового відштовхування (пов'язаного з членом φ^6). Щоб показати це, звернемося до моделей Скірма [337] та Вайнберга [358], де взаємодії можна подати відповідно як

$$\begin{aligned} V_{\text{Skyrme}}(\nu) &\equiv -f_\pi^2 m^2 \text{Tr}(U + U^\dagger - 2)/4 = f_\pi^2 m^2 (\nu^2/2! - \nu^4/4! + \nu^6/6! - \dots), \\ V_{\text{Weinberg}}(\nu) &\equiv f_\pi^2 m^2 \nu^2/(2 + \nu^2/2) = f_\pi^2 m^2 (\nu^2/2 - \nu^4/8 + \nu^6/32 - \dots). \end{aligned}$$

Тут ми використовуємо $U = \exp(i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}/f_\pi) \in SU(2)$; $\nu^2 = \vec{\pi}^2/f_\pi^2$; f_π та m – константа розпаду піона та його маса.

Звернемо увагу, що вказані взаємодії є обмеженими функціями ν . Також зауважимо, що взаємодія Гасера–Лейтвілера, порядку p^4 [118, 119], є притя-

гальною, а експериментальні дані підтверджують існування трипійонних кореляцій в зіткненнях важких іонів [3]. Отже, якщо обмежитись розглядом наближення третього порядку (що веде до релятивістської квантової моделі типу φ^6), можна очікувати наявності фазових переходів першого роду у піонній підсистемі.

Справді, з молекулярної фізики відомо, що нерелятивістська модель φ^6 , на відміну від φ^4 , дозволяє спостерігати не лише фазовий перехід другого роду в конденсатний стан, але і його газоподібну та рідку фази. Це описується розв'язками відповідного рівняння Гросса–Пітаєвського [115, 184]. Зауважимо, що модель φ^6 вже використовувалася в ядерній гідродинаміці та квантовій теорії поля [35]. Тут ми намагаємось отримати подібні результати (без ступенів вільності π^0 мезонів) в контексті фізики надгустих іонів та нейтронних зір, де піонний конденсат відіграє важливу роль у “пом’якшенні” нуклонного рівняння стану [387].

Очевидно, що слід врахувати суттєво різний характер взаємодій у молекулярній фізиці та піонній підсистемі. Окрім того, ми дослідимо умови існування рідкої фази за високих температур (за температури, вищої за температуру T_{cond} фазового переходу в конденсатний стан) з використанням тієї ж моделі. Не виключено, що гаряча $\pi^+\pi^-$ рідина може виникати в релятивістських зіткненнях важких іонів, де піони відіграють провідну роль на кінцевій стадії. Зауважимо, що колективні явища в зіткненнях “частинка–ядро” та “ядро–ядро” добре відомі і мають враховуватися. Існування гарячої піонної рідини вже було передбачено у праці [192].

Оскільки рідкий конденсат $\pi^+\pi^-$ мезонів термодинамічно відрізняється від газоподібного конденсату, то таку відмінність слід враховувати у спробах його реєстрації в зіткненнях важких іонів. З іншого боку, система з великого числа піонів за високих температур, як ми побачимо нижче, також може знаходитись у рідкій фазі, що може суттєво впливати на динаміку нуклонів. Ми говоримо “рідина”, коли маємо справу з густою фазою в термодинаміці.

Однак, та сама “рідина” – це стан з великою амплітудою піонного поля з теоретико-польової точки зору.

1.3.1. Стани конденсату піонів. Густина лагранжіану $\mathcal{L}(\pi^\dagger, \pi)$ нашої моделі є

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \pi^\dagger \partial^\mu \pi - m^2 \pi^\dagger \pi + \frac{A}{2!} (\pi^\dagger \pi)^2 - \frac{B}{3!} (\pi^\dagger \pi)^3, \quad (1.118)$$

де передбачається нормальне впорядкування операторів і відсутність електромагнітної взаємодії. Покладемо $A = m^2/g^2$, $B = 3m^2\lambda/2g^4$, $m = 140$ MeV; g і λ – параметри моделі, які слід визначити.

Стала g відіграє роль константи розпаду піона в середовищі замість вакуумного значення f_π . Параметр моделі λ вводиться для ефективного врахування членів вищого порядку розкладу кіральної взаємодії. Щоб проаналізувати межі значень λ , подамо кіральні взаємодії (які розглянуто вище) так: $V(\nu) = a_2\nu^2 - a_4\nu^4 + a_6\nu^6\lambda(\nu)$, де $a_n \equiv |V^{(n)}(0)|/n!$ і $\nu^2 = 2\pi^\dagger\pi/g^2$. Виявляється, що $\lambda(\nu)$ – неперервна функція, яка спадає від 1 до 0, коли ν пробігає від 0 до ∞ . Отже, якщо $|\nu| > 1$, стала λ , що замінює точну функцію $\lambda(\nu)$, повинна бути меншою за 1, щоб узгодити наш феноменологічний підхід з кіральною теорією.

Ми використовуємо *анзац* про застосовність наближення середнього поля у широкому інтервалі температур. Окрім того, ми обмежимося двома випадками: i) $T = 0$, коли операторне поле π можна замінити класичним комплексним полем ϕ , яке є параметром порядку, що описує конденсат; ii) $T > T_{\text{cond}}$, коли відсутні аномальні середні, і поле π визначається квантовими флуктуаціями χ . Наша мета – дослідити рідиноподібні стани $\pi^+\pi^-$ -матерії у цих двох режимах.

Природно почати з дослідження фаз піонного конденсату при $T = 0$, який виникає у нейтронних зорях та ядрах з густиною, вищою за густину насичення. Такій ситуації відповідає густина лагранжіану $\mathcal{L}(\phi^*, \phi)$. Фактично, заміна π на ϕ нагадує перехід від квантової електродинаміки до класичного

опису електромагнетизму, коли велике число фотонів знаходиться наближено в одному стані. У нашому випадку, перебування великого числа піонів в єдиному стані (конденсаті Бозе–Ейнштейна) дозволяє нам ввести класичну функцію ϕ . На відміну від теорії Максвелла, $\mathcal{L}(\phi^*, \phi)$ містить квантову сталу $\hbar$ ($\hbar = 1$ в наших одиницях). З іншого боку, квантове значення класичних полів розглянуто в праці [170].

З варіації класичного функціоналу дії, одержуємо рівняння:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi + m^2 \phi - A|\phi|^2 \phi + \frac{B}{2}|\phi|^4 \phi = 0, \quad (1.119)$$

яке в стаціонарному випадку (за умов збереження енергії/заряду) формально збігається з рівнянням Гросса–Пітаєвського (яке визначає стан системи) без потенціальної ями [115].

Застосування рівняння (1.119) вимагає виконання наступних умов. По-перше, повне число піонів (множинність) має бути достатньо великим, щоб мати змогу використовувати концепцію конденсату Бозе–Ейнштейна. По-друге, щоб замінити польовий оператор класичним полем, слід припустити розрідженість системи і наявність достатньо низької температури. Це дозволяє уникнути квантового та термічного виснаження конденсату.

Розв’язок рівняння (1.119) суттєво залежить від фізичних та граничних умов. Розглянемо точний статичний квазі-одновимірний розв’язок (“бульбашка”), який записується так:

$$\phi(t, z) = \eta_k(z) \exp \left(-imt \sqrt{1 - k^2} \right), \quad (1.120)$$

де $\eta_k(z)$ – дійсна функція.

Залежність від часу зосереджена у фазі, що відповідає деякому заряду Q . Насправді така підстановка приводить до великого класу розв’язків $\eta_k(z)$ в термінах елементарних і еліптичних функцій [309, 139, 140]. Однак, ми зацікавлені у стійкому, локалізованому розв’язку із збережуваним зарядом.

Для ґраничних умов $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \eta_k(z) = 0$, $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \eta'_k(z) = 0$, існує солітоноподібний розв'язок [309]:

$$\eta_k(z) = \frac{2gk}{\sqrt{\sqrt{1 - 4\lambda k^2} \cosh(2kmz) + 1}}. \quad (1.121)$$

Одержаний результат описує тонкий шар густої фази, зосередженої між розрідженими фазами, і забезпечує локалізацію енергії. Його можна інтерпретувати як область щільної піонної матерії вздовж осі ядро-ядерного зіткнення, геометрія і умови якого тут не враховуються.

Легко показати, що розв'язок (1.120) є псевдоскаляром: достатньо замінити координату z і (квазі)імпульс k на $-z$ і $-k$. Як і повинно бути, ця операція змінює знак функції $\phi(t, z)$.

Параметром порядку системи служить скалярна густина $n(z) \equiv |\phi(t, z)|^2$. Аби визначити (термодинамічну) фазу піонної матерії в щільній області, означимо заряд Q (різницю між числом частинок та античастинок) і повну енергію E одиниці площі:

$$Q = 8g^2 \frac{\sqrt{1 - k^2}}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 4\lambda k^2}}{1 + \sqrt{1 - 4\lambda k^2}}}, \quad (1.122)$$

$$E = m\sqrt{1 - k^2}Q + \frac{g^2 mk}{\lambda} - \frac{g^2 m}{\lambda^{3/2}} (1 - 4\lambda k^2) \operatorname{arctanh} \frac{1 - \sqrt{1 - 4\lambda k^2}}{2k\sqrt{\lambda}}. \quad (1.123)$$

Дані величини параметризуються незалежною змінною k . Зі зміною k поведінка функцій Q та E визначається параметром λ . У той самий час, параметр моделі g впливає лише на амплітуду характеристик.

Оскільки заряд Q зберігається в часі, введемо хімічний потенціал $\mu \equiv \partial E / \partial Q$, який обчислюється так:

$$\mu = (\partial E / \partial k) / (\partial Q / \partial k).$$

Хоча залежність μ від k можна знайти явно, ми не наводимо її через громіздкий вигляд. Лише відзначимо, що $\mu > 0$. Це узгоджується з результатом з

[242], де розглядалися краплі з багатьох піонів за низьких температур.

Як показано на Рис. 1.7, центральна густина $\nu \equiv n(0)/g^2$ і хімічний потенціал μ демонструють загин, типовий для фазового переходу першого роду. Точка переходу, яка збігається з точкою самоперетину залежності $\varepsilon \equiv E/mg^2$ від $q \equiv Q/g^2$, відповідає побудові Максвелла на діаграмі залежності μ від q . Однак, частина графіка із загином не реалізується, оскільки зображає нестійкий (і метастабільний) стан. Щільну фазу природно асоціювати з рідиною, а розріджену – з газом. Наголосимо, що обидві гілки – квантові флюїди.

На Рис. 1.7 видно, що фазовий перехід першого роду у піонному конденсаті відбувається при $0.25 < \lambda < 0.268$, тобто $\lambda < 1$, як було зазначено вище. Так, при $\lambda \approx 0.268$, стійкий та метастійкі розв'язки збігаються. Це визначає критичну точку: в ній похідна від ν , як функція від q , розбіжна. Для $\lambda = 0.25$ домінує парна притягальна взаємодія, і система прямує до колапсу. У цьому випадку заряд обмежується значенням $q \approx 5.3$. З припущення про існування фазового переходу першого роду покладемо тут $\lambda = 0.26$. Значення константи g обговорюється у випадку гарячої піонної матерії.

1.3.2. Гаряча піонна рідина. Зосередимося на описі $\pi^+\pi^-$ -матерії за високих температур в наближенні середнього поля (MFA), коли поле π цілком визначається квантовими флуктуаціями χ . Залишемо операторне поле χ у скінченному об'ємі так

$$\chi(x) = \sum_{\mathbf{p}} [a_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}}(x) + b_{\mathbf{p}}^{\dagger} u_{\mathbf{p}}^*(x)], \quad (1.124)$$

$$u_{\mathbf{p}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}V}} \exp(-iE_{\mathbf{p}}t + i\mathbf{p}\mathbf{x}). \quad (1.125)$$

У законі дисперсії $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_*^2}$, m_* позначає ефективну масу, яку слід визначити; $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$, $b_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ ($a_{\mathbf{p}}$, $b_{\mathbf{p}}$) – оператори народження (знищення) частинок і античастинок з такими комутаційними співвідношеннями:

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{p},\mathbf{q}}, \quad [b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{p},\mathbf{q}}.$$

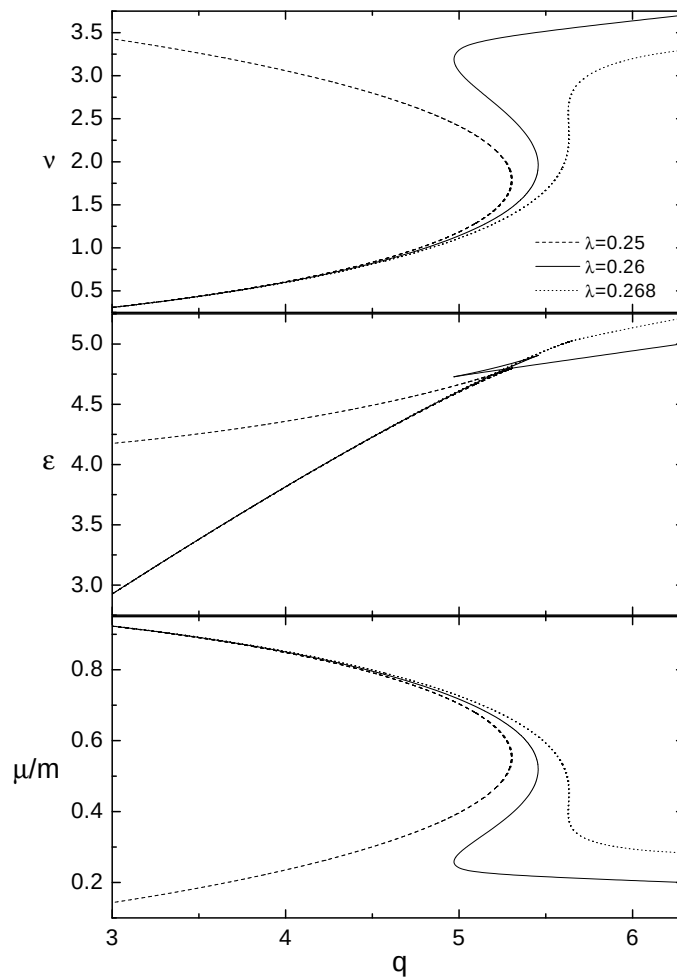


Рис. 1.7. Центральна густина ν , повна енергія ε , відношення хімічного потенціалу μ до m у безрозмірних одиницях як функції приведенного заряду q .

Оператор Гамільтона, $H = \int (\mathcal{H}_0 + \mathcal{W}) d^3x$, що впливає з $\mathcal{L}(\chi^\dagger, \chi)$, визначається такими складовими:

$$\mathcal{H}_0 = \partial_t \chi^\dagger \partial_t \chi + \nabla \chi^\dagger \nabla \chi + m_*^2 \chi^\dagger \chi, \quad (1.126)$$

$$\mathcal{W} = (m^2 - m_*^2) \chi^\dagger \chi - \frac{A}{2!} (\chi^\dagger \chi)^2 + \frac{B}{3!} (\chi^\dagger \chi)^3. \quad (1.127)$$

Маємо

$$H = \sum_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}} (n_{\mathbf{p}} + \bar{n}_{\mathbf{p}}) + \int \mathcal{W} d^3x, \quad (1.128)$$

де $n_{\mathbf{p}} \equiv a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$ і $\bar{n}_{\mathbf{p}} \equiv b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}$ – оператори числа частинок та античастинок.

Розглядаючи член взаємодії як збурення, термодинамічний потенціал є

$$\Omega = T \sum_{\gamma, \mathbf{p}} \ln \left[1 - e^{\beta(\gamma\mu - E_{\mathbf{p}})} \right] + V \mathcal{W}_{\text{MFA}}, \quad (1.129)$$

де μ – хімічний потенціал, $\beta = 1/T$ – обернена температура, $\gamma = \pm 1$.

В обраному наближенні

$$\mathcal{W}_{\text{MFA}} = (m^2 - m_*^2)\sigma + m^2(b\sigma^3 - 2a\sigma^2), \quad (1.130)$$

де $\sigma = \langle \chi^\dagger \chi \rangle$ служить параметром порядку; $a = 1/2g^2$, $b = 3\lambda/2g^4$.

Знайдемо термодинамічно спряжені величини до σ і m_* з умов екстремуму потенціалу $\partial\Omega/\partial m_* = 0$, $\partial\Omega/\partial\sigma = 0$, які приводять до рівняння,

$$\sigma = \frac{1}{V} \sum_{\gamma, \mathbf{p}} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \frac{1}{e^{\beta(E_{\mathbf{p}} - \gamma\mu)} - 1}, \quad (1.131)$$

і відношення мас $s^2 \equiv m_*^2/m^2 = 1 - 4a\sigma + 3b\sigma^2$.

Подальше дослідження термодинамічних властивостей гарячої піонної матерії здійснимо у термодинамічній ґраниці, коли сума за імпульсами замінюється інтегралом. Внеском поверхні знехтуємо.

Виявляється, аби коректно розв'язати в'язь, зручно оперувати безрозмірною змінною s замість σ . Це приводить до розщеплення значень σ на дві гілки: $\sigma = (2g^2/9\lambda)[1 \pm \sqrt{1 - (9/2)\lambda(1 - s^2)}]$. Таке представлення σ дає два рівняння: $F_{\pm}(s, T, \mu) = 0$, де

$$\begin{aligned} F_{\pm}(s, T, \mu) = & 1 \pm \sqrt{1 - \frac{9}{2}\lambda(1 - s^2)} - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{3m}{2\pi g} \right)^2 s^2 \\ & \times \sum_{\gamma} \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{1 + k^2}} \frac{k^2}{e^{\beta(ms\sqrt{1+k^2} - \gamma\mu)} - 1}. \end{aligned} \quad (1.132)$$

Розв'язком рівнянь є функція $s(T, \mu)$, яка обчислюється чисельно.

Можна сказати, що таке розщеплення відповідає за існування двох фаз гарячої піонної матерії. Якщо $s = 1$, одержуємо лише стан ідеального газу.

При включенні взаємодії ($s \neq 1$), може з'явитися нова фаза, яку називаємо гарячою піонною рідиною. Виникнення цієї фази завдячує члену шостого порядку у взаємодії.

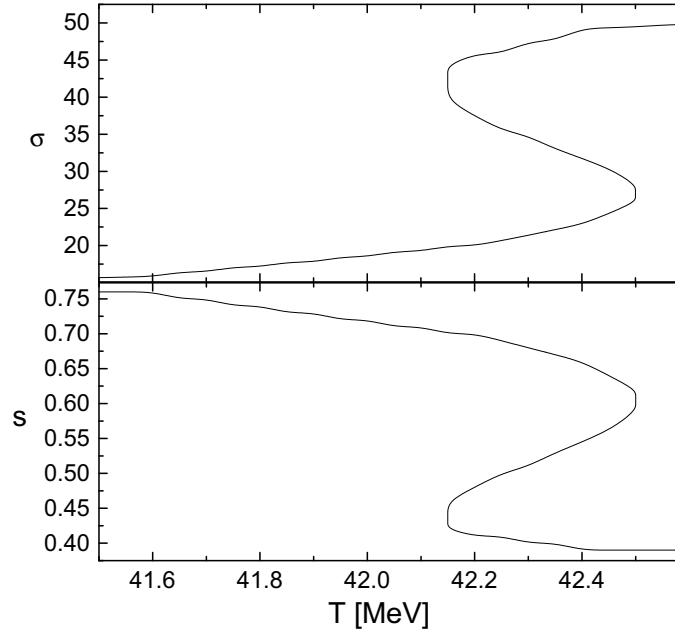


Рис. 1.8. Залежність скалярної густини σ (в MeV^2) і приведеної ефективної маси $s \equiv m_*/m$ від температури.

Для обчислення термодинамічних функцій потрібно знати значення двох параметрів нашої моделі, а саме, g і λ . Ми вже припустили, що $\lambda = 0.26$ для реалізації фазового переходу рідина–газ в конденсаті. Щоб підібрати константу g , спробуємо звернутися до експериментальних даних DLS Collaboration та одержати необхідну інформацію зі спектра ділептонів в зіткненнях протон–ядро [297]. Якщо вважати, що основний внесок у спектр дає анігіляція гарячої $\pi^+\pi^-$ -матерії, можна дійти висновку, що поріг знищення піона не дорівнює подвійній масі вільного піона ($2m$), але менший і приблизно становить $2ms = 260 \text{ MeV}$. Наше припущення до спектрів [297], яке залежить від інваріантної маси кінцевого діелектрона, дає нам температуру фایєрбола, що утворюється при цьому зіткненні, рівну $T = 75 \text{ MeV}$. Отже, щоб знайти g в хімічній рівновазі ($\mu = 0$), нам потрібно підставити ці дані у наші рівнян-

ня. З рівняння $F_+(s, T, 0) = 0$ отримаємо, що $g \approx 8$ MeV. Використовуючи рівняння $F_-(s, T, 0) = 0$, виходить інше значення g . Однак, фазовий перехід рідина–газ тоді не спостерігається.

Припускаючи хімічну рівновагу, існує єдина можливість спостерігати перехід в рідку фазу зі зміною температури. Дійсно, щільна “рідка” фаза з’являється із збільшенням температури (див. Рис. 1.8), що відрізняє її від молекулярної фізики, де число частинок зберігається. На це явище вже вказано в [192]. Критична температура фазового переходу в нашій моделі становить близько 42.3 MeV і є меншою за 136 MeV, як було передбачено в [192]. Однак, це означає, що при $T = 75$ MeV фajerбола піони перебувають у рідкій фазі, якщо сценарій з $g \approx 8$ MeV реалізується в природі. Цей результат вимагає додаткових теоретичних та експериментальних перевірок.

Висновки до розділу 1

У розділі 1 розглянуто термодинамічні властивості систем гадронів: симетричної ядерної матерії за скінченної температури в просторі-часі Мінковського і конформно-пласкому, надплинної нейтронної матерії, і піонної матерії за різних умов. В симетричній ядерній матерії і піонній матерії описано фазові переходи “рідина-газ” та знайдено їхні критичні параметри.

Основними висновками, що виносяться на захист є такі:

- Розвинуто модель системи релятивістських нуклонів з прямою взаємодією, в якій відтворено рівноважні властивості ядерної матерії, критичні параметри фазового переходу рідина-газ у симетричній матерії, а також енергетичний спектр надплинної нейтронної матерії в наближенні Бардіна-Купера-Шріфера.

- Знайдено критичні параметри фазового переходу рідина-газ симетричної ядерної матерії (з рівним числом протонів і нейтронів) у конформно-пласкому просторі-часі за малих відхилень масштабного фактора.

- Встановлено наявність переходу рідина-газ в конденсаті піонів з ненульовим електричним зарядом за нульової температури, а також рідино- і газоподібної фаз за високих температур з нульовим хімічним потенціалом.

Результати розділу опубліковано в 4 працях [17, 263, 266, 267].

РОЗДІЛ 2

СИСТЕМИ БАГАТЬОХ ЧАСТИНОК ЗА ВИСОКИХ ГУСТИН ЕНЕРГІЇ

Релятивістські ядро-ядерні зіткнення надають унікальну можливість дослідження ядерної речовини за екстремальних умов: високої температури і тиску. За таких умов ядерна речовина кардинально змінює свої властивості у порівнянні зі звичайною ядерною матерією. Так, сильно змінюються властивості гадронів, виникають колективні взаємодії, проявляється кварк-глюонна структура гадронів. За великого числа учасників процесів, очікується, що статистично-термодинамічний опис ансамблей сильновзаємодіючих частинок може бути застосовним на стадіях релятивістських ядро-ядерних зіткнень і пов'язаним з непертурбативним підходом до квантової хромодинаміки (КХД) за скінченної температури (див. [378]).

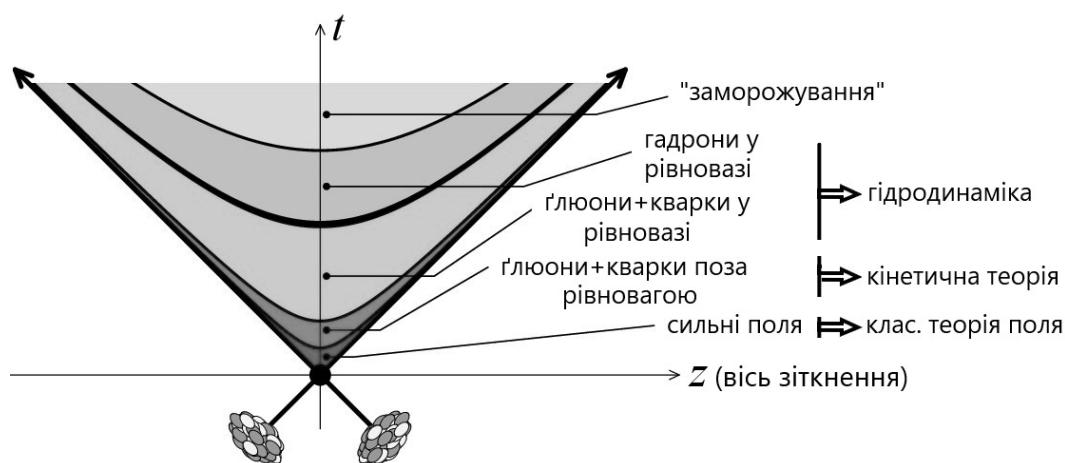


Рис. 2.1. Просторово-часова картина ядро-ядерного зіткнення.

Ми спираємося на просторово-часову картину зіткнення із вказаними на Рис. 2.1 етапами еволюції речовини. Її цілісність забезпечується, зокрема,

тим, що фінал кожного етапу задає початкові умови еволюції наступного.

На особливу увагу заслуговує стан матерії, що передуює зіткненню і визначає в момент зіткнення початкове глюонне поле, яке надалі еволюціонує за Янгом і Мілсом. Отже, стан ядер, що стикаються, ми тлумачимо за концепцією *конденсата кольорового скла* МакЛерана-Венугопалана [131, 232, 233, 234, 235]. В наших задачах, ми звертаємося до початкової просторової конфігурації самодіючого поля, коли ненульовими компонентами хромоелектричного і хромомагнітного полів є повздовжні E_z і H_z .

Здебільшого, ми зосереджуємося на *окремих* процесах та явищах на різних стадіях ядро-ядерного зіткнення (див. Рис. 2.1). Опис всієї картини залишається поза нашою увагою за виключенням задачі про еволюцію поперечних потоків партонів на кінетичному етапі, результат якої чинить значний вплив на інтерферометричні показники, які перевіряються в експериментах. Однак, необхідні доповнення зроблено співавторами в рамках моделі гідродинамічного розширення матерії [11]. Ми оцінюємо і посиляємося на остаточний результат для інтерферометричних радіусів та спектра піонів у зіткненнях Au+Au на Колайдері релятивістських важких іонів (RHIC). Значним досягненням задачі є шлях вирішення “НВТ-загадки” [3, 4, 7].

Ефекти гравітації розглядатимуться на етапі рівноважної системи кварків і глюонів із визначенням рівняння стану з метою оцінити ймовірність прояву додаткових просторових вимірів за великих густин енергії. Наше дослідження мотивоване теоретичними припущеннями і передбаченнями інших авторів і перевіряє фізичні засади їхніх результатів. Зокрема, в роботі [8] показано, що пучок високоенергетичних частинок може охолоджуватися, випаровуючи гравітони у додаткові виміри. Окрім того, у низці праць [200, 48, 168] (див. посилання там) припускається, що за енергій Великого гадронного колайдера (LHC) і за умови існування додаткових вимірів, можуть виникати більш екзотичні гравітаційні об’єкти як мікроскопічні чорні діри. Це вказує на експериментальну можливість виявлення додаткових вимірів завдяки час-

тковому порушенню закону збереження енергії і появи/зникненню гравітонів з додаткових вимірів, як передбачено теорією суперструн.

Звертаючись до Рис. 2.1, тоді, до явищ на гадронному етапі зіткнень слід віднести фазові переходи між рідино- і газоподібним станами в підсистемі піонів, які описано у попередньому розділі.

Перехід від кварків (і глюонів) до гадронів із низкою гравітаційних ефектів привертає інтерес також з точки зору астрофізики і космології, моделі якої використовуються, зокрема, для опису додаткових вимірів. Це дозволяє краще зрозуміти процеси у перші мікросекунди після Великого вибуху. За таких умов, припускається, можуть проявитися також ефекти нещодавно запропонованої *подвійної спеціальної теорії відносності*, яка накладає обмеження не лише на швидкість частинок у природі, але й енергію. У нашій версії теорії одержано термодинамічні функції випромінювання (газу фотонів) чорного тіла і виявлено відхилення його поведінки від закону Стефана-Больцмана.

2.1. Дотермічні потоки партонів та їхня анізотропія

Перші результати фемтоскопії або аналізу Ханбері Брауна–Твіса (НБТ) експериментів на Колайдері релятивістських важких іонів (RHIC), як це було вперше оголошено STAR Collaboration, виявили несподівані результати – так звану головоломку НБТ [2, 3, 4, 7]. Загадка передбачає, по-перше, що абсолютні значення інтерферометричних радіусів/об'ємів в центральних зіткненнях Au+Au суттєво не змінюються на RHIC порівняно з енергіями SPS в ЦЕРНі для зіткнень Pb+Pb, незважаючи на високу множинність. Це суперечило, очікуваному на той час, закону пропорційності між інтерферометричними об'ємами і множинністю. По-друге, відношення зовнішнього та бічного радіусів виявилось іншим, ніж очікувалося в стандартних гідродинамічних та гадронних каскадних картинах. Співвідношення, виміряне STAR та PHENIX

на RHIC є близьким до одиниці в широкому інтервалі імпульсів. На перший погляд ці спостереження суперечать існуванню кварк-глюонної плазми та змішаної фази, оскільки це передбачає тривале піонне випромінювання, яке зазвичай приводить до великого значення співвідношення радіусів.

Ми надаємо пояснення особливостей встановленої поведінки інтерферометричних радіусів на основі аналізу часової еволюції спостережуваних і початкових потоків дотермічної партонної речовини, які передують гідродинамічному розширенню. Також вказано можливі сценарії дотермічної еволюції партонної речовини та надано оцінку колективної швидкості на ранній стадії ультрарелятивістських ядро-ядерних зіткнень.

2.1.1. Кінетичний і теоретико-польовий описи потоків. Проблема формування початкової поперечної швидкості на дотермічній стадії партонів неминуче приводить до складної речовини на початковому етапі ультрарелятивістських ядро-ядерних зіткнень та проблеми термалізації. Ми не торкаємося цієї дуже складної теми, лише розглядаємо досить просту фізичну картину та застосовуємо її феноменологічно.

Спершу уявімо ящик (розміру L), який має ідеальні рефлекторні стінки і містить стоячі (електромагнітні) хвилі всередині. Потім зіткнемо два таких ящика з енергією, яка дозволяє їм повністю розбитися. Тоді стоячі хвилі будуть знищені через стохастизацію, і сильні кореляції між фазами хвиль “вперед” і “назад” з дискретними імпульсами, скажімо, $2\pi/L$ і $-2\pi/L$, сформованими відбиванням від протилежних стінок, зникнуть. Замість них виникнуть хаотичні фази α_{p_i} :

$$\sin \frac{2\pi x_T}{L} = \frac{1}{2} \left(\exp \frac{2\pi i x_T}{L} - \exp \frac{-2\pi i x_T}{L} \right) \Rightarrow \sum \rho_{p_i} e^{\alpha_{p_i}} e^{ip_i x_T}.$$

У випадку слабкого поля ми тоді побачимо, скажімо, два некогерентних фотона, що рухаються протилежно, наприклад, в поперечній площині.

Наведемо тепер аналогію з високо-енергетичними ядро-ядерними зіткнен-

нями, зображуючи їх як зіткнення двох “ящиків” (які містять багато “маленьких ящиків” – нуклонів). Через некомутативність оператора числа глюонів з оператором бусту Лоренца, існує величезне число когерентних партонів у швидко рухомому ящику – цей стан, ймовірно, можна представити в рамках підходу конденсата кольорового скла (ККС) [232, 233, 234, 28, 235]. Відповідно, після зіткнення буде не просто два глюони, а класичне кольорове поле (через велике число заповнення), що розширюється у вакуумі.

Коли число заповнення зменшується, можна побачити картину розширення системи незв’язаних партонів. Це може назвати “вибухом партонів”, коли багато прихованих ступенів вільності, пов’язаних з некогерентними партонами і які мають значний поперечний імпульс, звільняються майже раптово. Оцінка часу термалізації для цієї системи є досить складною проблемою, про яку ми лише згадаємо пізніше. Так виглядає, що партони взаємодіють досить слабо, і механізм нестійкості [248] працює не так швидко, як потрібно для досягнення дуже малого часу (меншого за 1 фм/с) симетризації імпульсу, який потрібен в гідродинамічних моделях для опису еліптичних потоків.

Знову спростимо проблему і розглянемо розвиток поперечної швидкості на дотермічній стадії в наближенні вільного розльоту для цих слабковзаємодіючих частинок.

Почнемо з простого нерелятивістського прикладу. Покладемо початковий розподіл за імпульсами частинок з масою m у вигляді гаусового, сферично-симетричного, з шириною, що відповідає тепловому розподілу Больцмана з однорідною температурою T_0 , без потоків: $\mathbf{u}(t = 0, \mathbf{r}) = 0$. Також врахуємо сферично-симетричний профіль Гауса (з радіусом R_0) для густини частинок. Нехай частинки просто вільно розлітаються. Тоді, згідно з [12], колективні швидкості, які можна означити в будь-який момент часу t за Екартом як

$$u^i = \int \frac{d^3p}{m^4} p^i f(t, \mathbf{x}; p),$$

є

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{r} \frac{tT_0}{mR_0^2 + T_0 t^2}.$$

Видно, що колективні швидкості в системі з вільним розльотом зростають зі зменшенням частинкової маси, зростають разом з початковим параметром T_0 для $m \neq 0$, і не залежать від початкової “температури” при $m = 0$. Якісно, те саме має місце для релятивістського газу партонів.

Розглянемо релятивістську картину партонів з початковим розподілом “поперечного імпульсу” при власному часі Бйоркена $\tau=1$ фм/с, що відповідає компонентам Фур’є для кольорового поля в картині ККС, наведеним в [193]. Припустимо, що після зіткнення такий поперечний спектр буде у некогерентних партонів. Що стосується повздовжніх компонент, ми будемо використовувати локальний тривимірний ізотропний квазітермічний розподіл, як це було запропоновано в [183] на основі механізму продукування партонів Швінгера: партони, створені імпульсом сильного хромоелектричного поля в процесі зіткнення, розподіляються (локально) досить ізотропно через обмежену в часі дію поля. Давайме скористаємося буст-інваріантним наближенням для серединної хуткості та початковим профілем Вудса–Саксона для густини енергії в поперечній площині. Тоді функція розподілу партонів у початковий момент власного часу $\tau = \tau_0$ є:

$$f_0 = \frac{1}{\exp \frac{m_T}{T} \cosh \theta - 1} \frac{1}{\exp \frac{1}{\delta} (r_T - R) + 1}, \quad (2.1)$$

де θ – різниця між частинковою і рідинною хуткостями. Головні параметри розподілу узгоджуються з [193, 183]: $T = 0.465\Lambda_s$, $\delta = 0.67$ фм, $\Lambda_s = 1.3$ ГеВ, $\tau_0 = 1$ фм/с, $R = 7.3$ фм, маса партона приймається рівною $m = m_0 = 0.0358\Lambda_s$.

Еволюція цієї функції визначається рівнянням вільного розльоту:

$$p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = 0. \quad (2.2)$$

Розв'язок цього рівняння описується функцією розподілу f на будь-якій гіперповерхні $\tau = \text{const}$ за допомогою такої заміни аргументів функції f_0 :

$$\mathbf{r}_T \rightarrow \mathbf{r}_T - \frac{\mathbf{p}_T}{m_T} \left(\tau \cosh \theta - \sqrt{\tau_0^2 + \tau^2 \sinh^2 \theta} \right), \quad (2.3)$$

$$\theta \rightarrow \text{arcsinh} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \sinh \theta \right). \quad (2.4)$$

Далі, розглянемо властивості розширення такого вільного потоку буст-інваріантної та циліндрично-симетричної скінченної системи у вакуумі як перше наближення, та обговоримо можливу повну картину ранньої дотермічної стадії.

2.1.1.1. Колективні швидкості і локальна анізотропія в системі партонів. Дослідимо стадію вільного розльоту за припущення, що некогерентна система партонів виникає в момент порядку 1 фм/с як локально ізотропний буст-інваріантний і слабковзаємодіючий газ. Тоді, частинки вільно летять у вакуумі. Сам процес приведе до локальної анізотропії, яку ми розглядаємо в цьому розділі. Збільшення анізотропії може компенсуватися процесом турбулентності (нестійкості) та поступовою термалізацією, пов'язаною з внеском Балеску–Ленарда для полів КХД.

Аналіз локальної анізотропії функції розподілу можна провести двома способами. Перший – пов'язаний з вивченням властивостей функції розподілу, тоді як другий виявляє відмінність між просторовими компонентами тензора енергії-імпульсу у локальній системі відліку. В обох випадках ми змушені розглядати розподіл та тензор енергії-імпульсу в рухомій системі відліку, що визначається колективною швидкістю. Тут ми застосуємо як означення Екарта так і Ландау-Ліфшиця колективних швидкостей $\mathbf{v}(x)$, що відносяться до малих елементів об'єму, пов'язаних з точкою (x^μ) .

Зв'язок між глобальною системою відліку та локальною, що рухається зі швидкістю $\mathbf{v} = (v^i)$, дається перетворенням Лоренца, яке визначається

матрицею:

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \left(\begin{array}{c|c} \gamma & v^i \gamma \\ \hline v^j \gamma & \delta^{ij} + v^i v^j (\gamma - 1)/\mathbf{v}^2 \end{array} \right), \quad (2.5)$$

де $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ – фактор Лоренца; $v \equiv |\mathbf{v}|$.

Тоді, перетворення контраваріантного вектора та тензора виглядають так:

$$a^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a_*^\nu, \quad a^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\lambda a_*^{\lambda\sigma} \Lambda^\nu{}_\sigma, \quad (2.6)$$

де a_*^μ і $a_*^{\mu\nu}$ позначають відповідні об'єкти у рухомій системі відліку.

Зокрема, 3-вектор $\mathbf{p}$ перетворюється як

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_* + \frac{\mathbf{v} (\mathbf{v}\mathbf{p}_*) (1 - \sqrt{1-v^2}) + v^2 E_*}{v^2 \sqrt{1-v^2}}, \quad (2.7)$$

де $E_* = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}_*^2}$.

Можна оцінити анізотропію розподілу імпульсів в різних системах відліку, пов'язаних з різними точками, де 3-імпульс $\mathbf{p}_*$ визначає $\mathbf{p}$ згідно з (2.7).

Локальна анізотропія також проявляється в структурі тензора енергії-імпульсу, який в псевдо-декартових координатах є

$$T^{\mu\nu}(x) = \int p^\mu p^\nu f(x, p) p_T dp_T dy d\phi, \quad (2.8)$$

де Лоренц-інваріантна міра інтегрування d^3p/E в декартових змінних записана в змінних Бйоркена: $(p^\mu) = (m_T \cosh y, p_T \cos \phi, p_T \sin \phi, m_T \sinh y)$.

Щоб знайти $T^{\mu\nu}$ для центральної хуткості, ми чисельно обчислюємо тензор енергії-імпульсу (2.8) із повздовжньою координатою $z = 0$ ($\eta = 0$), коли $\tau = t$. Через симетрійні властивості розподілу, знаходимо $T^{tz} = T^{xz} = T^{yz} = 0$. Нехай ψ задає кутовий напрям щодо радіальної осі x . Зауважимо, що $T^{xy} = 0$ при $\psi = n\pi/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Фіксуємо $\psi = 0$, ненульовими

компонентами тензора енергії-імпульсу будуть такі

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} T^{tt} & T^{tx} & 0 & 0 \\ T^{tx} & T^{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T^{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T^{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Зрозуміло, що напрям колективних швидкостей $\mathbf{v}$ в глобальній системі відліку при $z = 0$ має збігатися з вектором $\mathbf{r}_T$ і, тому, $\mathbf{v} = (v \cos \psi, v \sin \psi, 0)$.

Тензор $T_*^{\mu\nu}$ у рухомій системі відліку, пов'язаний з локальною швидкістю $\mathbf{v}$, визначається з (2.9) з використанням матриці Λ_μ^ν , оберненої до (2.5). (Фактично, матриця Λ_μ^ν виводиться з (2.5) заміною $v^i \rightarrow -v^i$.) У випадку бусту, тензори енергії-імпульсу в двох системах відліку пов'язані як

$$T_*^{\mu\nu} = \Lambda_\lambda^\mu T^{\lambda\sigma} \Lambda_\sigma^\nu. \quad (2.10)$$

Система відліку Екарта. Зосередимося на обчисленні колективної швидкості. У цьому пункті розглянемо 4-швидкість, означену за Екартом:

$$u_E^\mu = \frac{N^\mu}{\sqrt{N_\nu N^\nu}}, \quad (2.11)$$

де потік частинок N^μ обчислюється так:

$$N^\mu = \int p^\mu f(x, p) p_T dp_T dy d\phi.$$

Колективна 3-швидкість задається лише як $\mathbf{v}_E = \mathbf{u}^E/u_0^E$. Залежність поперечної швидкості $v_E = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ від r_T при $\eta = 0$ зображено ліворуч на Рис. 2.2.

Маючи значення колективної швидкості, можна записати функцію розподілу у фіксованій точці простору-часу в рухомій системі відліку Екарта за допомогою перетворення Лоренца (2.7). При $\tau = \tau_0 = 1$ фм/с розподіл є ізотропним, як і повинно бути для початкової умови. З ростом τ , розподіл стає все більш анізотропним, що відображається на розвитку колективної швидкості.

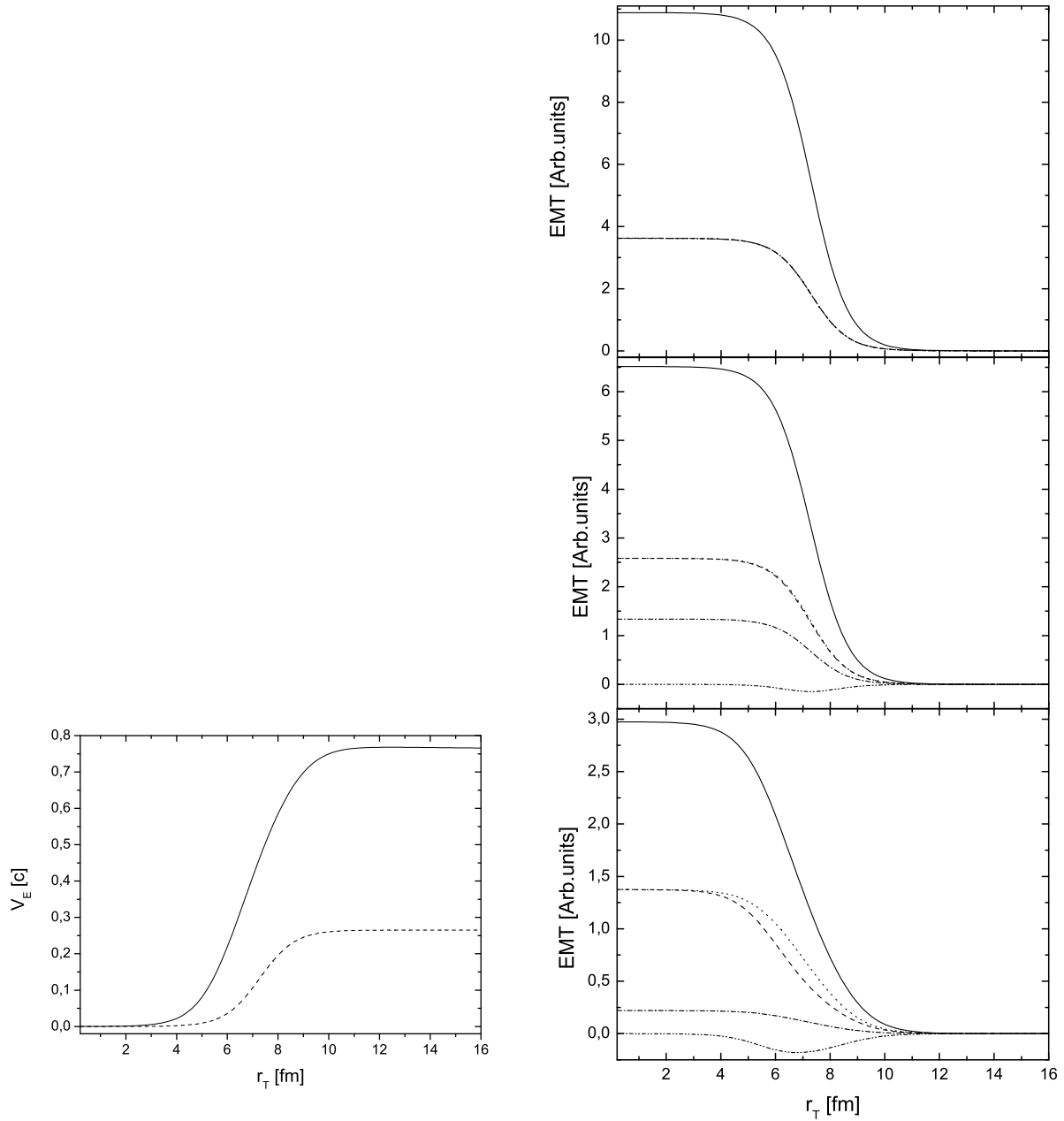


Рис. 2.2. Ліворуч: Поперечна колективна швидкість партонів в наближенні вільного розльоту. Початковий стан для часу 1 фм/с задається (2.1). Пунктирна крива відповідає $\tau=1.5$ фм/с, суцільна – 3 фм/с. Праворуч: Компоненти тензора енергії-імпульсу, T_*^{tt} (суцільна), T_*^{xx} (розривна), T_*^{yy} (пунктирна), T_*^{zz} (штрих-пунктирна), T_*^{tx} (штрих-пунктирна-пунктирна), при $\tau = 1, 1.5, 3$ фм/с (згори донизу) та $\psi = 0$. Рухома система Екарта.

Анізотропія також спостерігається, порівнюючи компоненти тензора енергії-імпульсу в рухомій системі відліку, яка вводиться за допомогою формули (2.10). Результат чисельних розрахунків наведено на Рис. 2.2 праворуч, де аббревіатура “Arb. units” означає, що функція розподілу – не нормована.

Для $\tau = \tau_0 = 1$ фм/с маємо $T_*^{xx} = T_*^{yy} = T_*^{zz}$, що вказує на ізотропію в початковий момент. З ростом τ , значення T_*^{zz} виявляється значно меншим за T_*^{xx} і T_*^{yy} , які також відрізняються.

Зауважимо, що підстановка $v = v_E$ в (2.10) не прибирає компоненту T_*^{tx} у всій області значень r_T . Надалі ми покажемо, що умова $T_*^{tx} = 0$ визначає систему відліку за Ландау-Ліфшицем.

Система відліку Ландау-Ліфшиця. Означення колективної швидкості за Ландау-Ліфшицем можна сформулювати так:

$$u_L^\mu = \frac{T^{\mu\nu} u_\nu^L}{u_L^\lambda T_{\lambda\sigma} u_L^\sigma}. \quad (2.12)$$

Загалом, цей вираз є рівнянням для u_L^μ , яке слід розв'язати (чисельно). Однак, у випадку циліндричної симетрії, коли вільний розльот відбувається вздовж осі r_T , колективну швидкість можна знайти точно.

Підставляючи вираз для $T_*^{\mu\nu}$, компоненти колективної 4-швидкості в рухомій системі відліку набувають вигляду:

$$(u_{*L}^\mu) = (1, 0, 0, 0) = \left(1, \frac{T_*^{tx}}{T_*^{tt}}, 0, 0\right). \quad (2.13)$$

З умови $T_*^{tx} = 0$ і з (2.10) знаходимо швидкість в глобальній системі відліку:

$$v_L = \frac{T^{tt} + T^{xx}}{2T^{tx}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4(T^{tx})^2}{(T^{tt} + T^{xx})^2}}\right). \quad (2.14)$$

Поведінку v_L зображено на Рис. 2.3 ліворуч. Швидкість v_L також зникає при $\tau = \tau_0$. Хоча v_L є близькою до v_E (див. Рис. 2.2), вони повністю не збігаються, оскільки система не є в локально рівноважному стані.

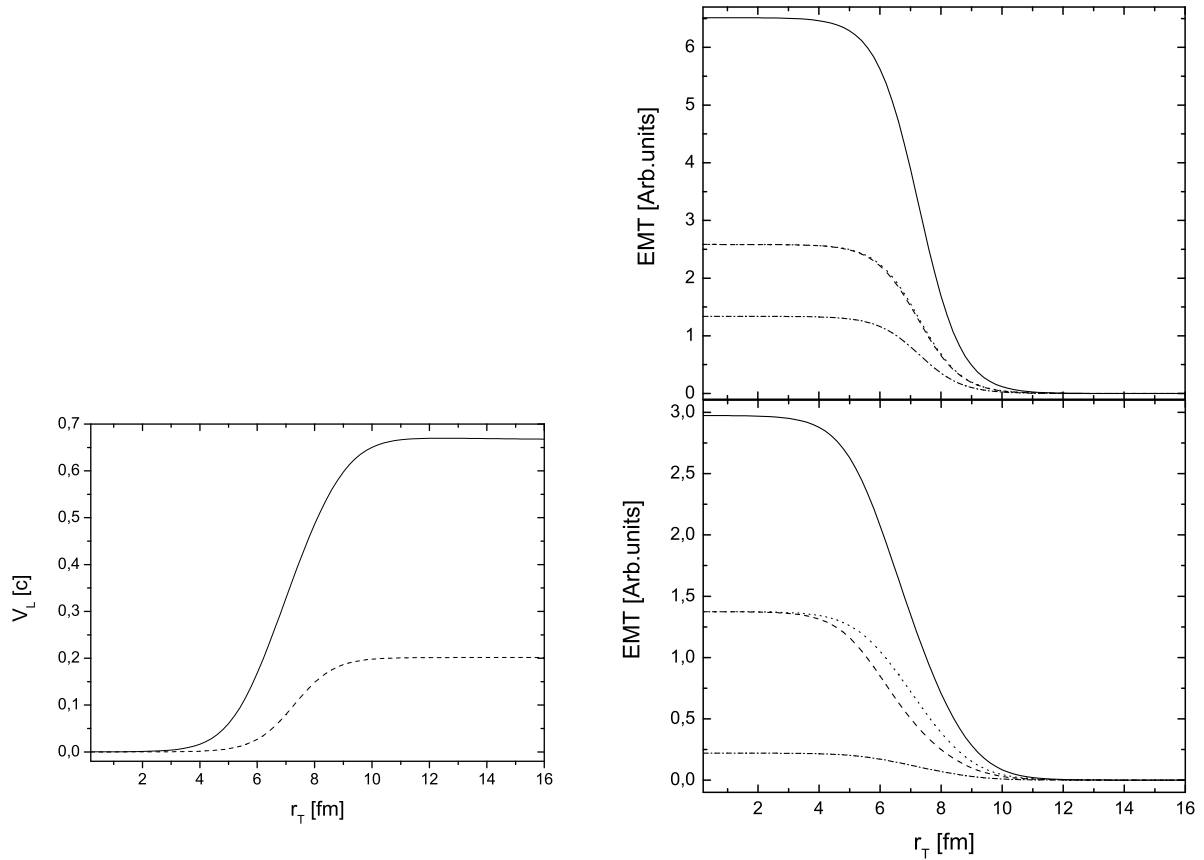


Рис. 2.3. Ліворуч: Поперечна колективна швидкість партонів в наближенні вільного розльоту. Початковий стан для часу 1 фм/с задається (2.1). Пунктирна крива відповідає $\tau=1.5$ фм/с, суцільна – 3 фм/с. Праворуч: Компоненти тензора енергії-імпульсу, T_*^{tt} (суцільна), T_*^{xx} (розривна), T_*^{yy} (пунктирна), T_*^{zz} (штрих-пунктирна), при $\tau = 1.5, 3$ фм/с (згори донизу) та $\psi = 0$. Рухома система Ландау-Ліфшиця.

Для $v = v_L$ у виразі (2.10), анізотропія тензора енергії-імпульсу спостерігається на Рис. 2.3 праворуч і якісно збігається для системи відліку Екарта на Рис. 2.2 праворуч.

Аналіз слабкої анізотропії. З Рис. 2.2–2.3 (праворуч) видно, що просторові діагональні компоненти тензора енергії-імпульсу системи партонів, які були рівними в початковий момент часу [183], відрізняються впродовж вільного разльоту: $T_*^{yy}(x) > T_*^{xx}(x) > T_*^{zz}(x)$. Значення компонент $T_*^{\mu\nu}(x)$, пов'язані з напрямками колективних швидкостей, не рівнозначно спадають з часом. Відповідно, функція розподілу частинок втрачає ізотропію в просторі імпульсів. Тоді, повчально параметризувати цю анізотропію як залежність від $\tau = t$ і r_T за фіксованого $z = 0$.

Корисно проаналізувати випадок слабкої анізотропії і зв'язати наш результат з іншими моделями. З цією метою, подамо функцію розподілу (2.1), (2.3), (2.4) у вигляді $f = F \cdot W$, де

$$F(a) = \frac{1}{\exp \frac{a}{T} - 1}, \quad W(b) = \frac{1}{\exp \frac{b-R}{\delta} + 1}. \quad (2.15)$$

За фіксованих $z = 0$ і $\psi = 0$, аргументами цих функцій є

$$a^2 = E^2 + \xi p_z^2, \quad (2.16)$$

$$b^2 = r_T^2 - 2 \frac{r_T p_x}{m^2 + \mathbf{p}_T^2} \tau_0 (\sqrt{1 + \xi} E - a) + \frac{\mathbf{p}_T^2}{(m^2 + \mathbf{p}_T^2)^2} \tau_0^2 (\sqrt{1 + \xi} E - a)^2, \quad (2.17)$$

де ми ввели параметр анізотропії $\xi(\tau) = \tau^2/\tau_0^2 - 1$; $E = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$. Зауважимо, що таку залежність ξ від власного часу τ відомо з [299] для врахування повздовжнього буст-інваріантного розширення системи партонів.

Запишемо функцію розподілу f в лінійному наближенні за ξ :

$$f \approx f_{\text{iso}} + \frac{\xi(\tau)}{2} \left\{ W(r_T) \frac{dF(E)}{dE} \frac{p_z^2}{E} - F(E) \frac{dW(r_T)}{dr_T} \frac{p^x E \tau_0}{m^2 + \mathbf{p}_T^2} \left(1 - \frac{p_z^2}{E^2} \right) \right\}, \quad (2.18)$$

де $f_{\text{iso}} \equiv F(E)W(r_{\text{T}})$ – початкова ізотропна функція розподілу в глобальній системі відліку.

Видно, що перший член в дужках $\{\}$ відповідає імпульсній анізотропії завдяки неоднорідності, поки другий член характеризує просторову неоднорідність.

У випадку аксіальної симетрії покладемо $\psi = 0$, і перехід до рухомої системи відліку, яка пов'язана з точкою $(x, y = 0, z = 0)$, задається так:

$$p^x = \frac{p_*^x + vE_*}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad E = \frac{E_* + vp_*^x}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad (2.19)$$

$$p^y = p_*^y, \quad p^z = p_*^z, \quad E_* = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}_*^2}. \quad (2.20)$$

В лінійному наближенні за параметром анізотропії, коли v також вважається малою величиною і можна знехтувати добутком $v\xi$, знаходимо

$$\begin{aligned} f_* \approx f_{\text{iso}}^* - W(r_{\text{T}}) \frac{dF(E_*)}{dE_*} p_*^x v + \frac{\xi(\tau)}{2} \left\{ W(r_{\text{T}}) \frac{dF(E_*)}{dE_*} \frac{(p_*^z)^2}{E_*} \right. \\ \left. - F(E_*) \frac{dW(r_{\text{T}})}{dr_{\text{T}}} \frac{p_*^x E_* \tau_0}{m^2 + (\mathbf{p}_{\text{T}}^*)^2} \left[1 - \left(\frac{p_*^z}{E_*} \right)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

де $f_{\text{iso}}^* \equiv F(E_*)W(r_{\text{T}})$ – ізотропна функція розподілу в рухомій системі.

Радіальна колективна швидкість v , фактично, є залежним параметром. Згідно з означенням Екарта,

$$v_E = \int p^x f(x, p) \frac{d^3 p}{E} \bigg/ \int f(x, p) d^3 p, \quad (2.22)$$

(де ми знов поклали $\psi = 0$, і напрям колективної швидкості збігається з віссю x), в лінійному наближенні одержуємо

$$v_E \approx \xi(\tau) \frac{\lambda_0}{\int f_{\text{iso}} d^3 p}, \quad (2.23)$$

де

$$\lambda_n = -\frac{\tau_0}{2} \int \frac{p_x^2 E^n F(E)}{m^2 + \mathbf{p}_{\text{T}}^2} \left(1 - \frac{p_z^2}{E^2} \right) \frac{dW(r_{\text{T}})}{dr_{\text{T}}} d^3 p. \quad (2.24)$$

Подібні обчислення можна провести для колективної швидкості Ландау-Ліфшиця. Результат виглядає так:

$$v_L \approx \xi(\tau) \frac{\lambda_1}{T_{tt}^{\text{iso}} + T_{xx}^{\text{iso}}}, \quad (2.25)$$

де T_{tt}^{iso} і T_{xx}^{iso} – компоненти тензора енергії-імпульсу, знайдені за допомогою ізотропної функції розподілу $f_{\text{iso}} \equiv F(E)W(r_T)$ в глобальній системі відліку.

Тепер порівняємо наші результати із запропонованою П. Роматшке і спів-авторами параметризацією в роботі [298]. Там передбачалось, що функція анізотропного розподілу $h(\mathbf{p})$ не залежить від просторово-часових координат і будується з (довільної) ізотропної функції розподілу шляхом масштабування одного напрямку в просторі імпульсів,

$$h(\mathbf{p}) = h_{\text{iso}}(\sqrt{\mathbf{p}^2 + \xi(\mathbf{n}\mathbf{p})^2}), \quad (2.26)$$

де $\mathbf{n}$ – напрям анізотропії, $\xi > -1$ – сталий параметр, що відображає “силу” анізотропії. Ми опускаємо тут константу нормування $N(\xi)$, яка використовується в [298], але не є важливою в нашій задачі через збереження числа частинок упродовж еволюції, що гарантується рівнянням (2.2).

В лінійному наближенні за ξ , розподіл $h(\mathbf{p})$ перепишеться як

$$h(\mathbf{p}) \approx h_{\text{iso}}(p) + \xi \frac{dh_{\text{iso}}(p)}{dp} \frac{(\mathbf{n}\mathbf{p})^2}{2p}. \quad (2.27)$$

Легко бачити, що вираз (2.18) для центральної області $z = 0, v_z = 0$ зводиться до останньої формули (2.27) для $\xi = \tau^2/\tau_0^2 - 1$, при векторі анізотропії $\mathbf{n}$, напрямленому вздовж осі z (обраному в [298] в частковому випадку), а також за просторово однорідного розподілу, $W(r_T) \equiv \text{const}$, та для безмасових частинок з $E = |\mathbf{p}_*| \equiv p$.

В неоднорідному випадку і в локальній системі відліку, асоційованій з точкою $(x, y = 0, z = 0)$, можна подати лінеаризований вираз (2.21) як

$$f_*(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{p}_*) \approx f_{\text{iso}}^*(\mathbf{x}, |\mathbf{p}_*|) + \xi(\tau)g(\mathbf{x}, \mathbf{p}_*). \quad (2.28)$$

2.1.1.2. Задача про еволюцію на дотермічному етапі. Як це було продемонстровано в [299, 298], *анзац* (2.26) є корисним для аналітичних досліджень закону дисперсії та ізоотропізації, обумовлених нестійкістю. Остання може бути спричинена анізотропією імпульсу в системі ультрарелятивістських електро- або кольорово заряджених частинок. Вираз (2.28) також можна використати для цієї мети. Однак, у нашому випадку, коли припускається, що початкова система партонів формується в квазітермічному стані завдяки механізму Швінгера в імпульсі хромоелектричного поля, проблема полягає в тому, щоб оцінити, чи цей стан, по-перше, зберігає свою (локальну) ізоотропію завдяки механізму нестійкості/турбулентності, а потім, чи він переходить у справжній тепловий стан завдяки взаємодіям.

Вище ми бачили, як анізотропію, спричинену вільним розширенням скінченної системи у вакуумі, можна охарактеризувати в лінійному наближенні одним параметром ξ , який є функцією власного часу τ . Можна оцінити можливий темп зростання анізотропії так:

$$R(\tau) \equiv \frac{1}{f^*(\tau)} \frac{df^*(\tau)}{d\tau} \simeq \frac{2\tau}{\tau_0^2} \frac{g^*}{f_{\text{iso}}^*}. \quad (2.29)$$

Наближена рівність записується для випадку $\frac{\tau}{\tau_0} - 1 \ll 1$.

Для підтримки початкової ізоотропії системи партонів в ультрарелятивістських зіткненнях важких іонів, темп $R(\tau)$ повинен бути меншим за $1/\tau_{\text{iso}}$, де τ_{iso} – характерний (релаксацийний) час ізоотропізації, зумовленої нестійкістю. Оцінювання величини τ_{iso} і швидкості термалізації внаслідок взаємодії є окремою задачею.

Отже, ми проаналізували розвиток поперечних колективних потоків в скінченній нетепловій системі партонів в наближенні вільного розльоту. Результати подано на Рис. 2.2–2.3 (ліворуч). Зауважимо, що на відміну від нерелятивістського випадку, коли початкова ізоотропія в локальних системах спокою функції розподілу зберігається під час еволюції, ультрарелятивістська еволюція не є локально рівноважною, а функція розподілу та тензор

енергії–імпульсу стають анізотропними в локальних системах відліку. Таким чином, розвиток поперечних швидкостей не пов’язаний з гідродинамікою ультрарелятивістського газу. Хоча, виявлено, що отриманий розвиток поперечних швидкостей можна апроксимувати гідродинамічним розширенням з аномально-жорстким рівнянням стану: $P = 0.45\epsilon$ (“нормальну” верхню межу $P = \epsilon/3$ має ультрарелятивістський газ).

Можливо, короткий час термалізації [158] не потрібен для розвитку спостережуваних радіальних потоків. Як показано, вони виникають і, навіть, більш ефективно, на дотермічній або псевдотермічній стадії. Заперечення проти такого сценарію може означати проблему не радіальних, а еліптичних потоків [159]. Останнім потрібна більш рання термалізація для того, щоб початкова геометрична асиметрія в поперечній площині ефективніше трансформувалась в асиметрію імпульсу. Дотермічні поперечні потоки можуть розмити таку асиметрію імпульсів.

Після виключення не-учасників, рішенням проблеми може бути врахування залишку поперечно спрямованого кутового моменту, який система учасників успадковує в площині реакції відразу після зіткнення внаслідок зсуву центра мас ядер, пов’язаного з прицільним параметром [331]. Як показано в [83, 189], відповідний нахил головної осі поздовжнього розширення вносить позитивний внесок в асиметрію імпульсів частинок в площині, поперечній до пучка, або в коефіцієнт v_2 . Врахування гри між дотепловою поперечною швидкістю та кутовим моментом, якого набуває система учасників в нецентральних зіткненнях, може відкрити новий шлях у розумінні проблеми еволюції речовини в ядро–ядерних зіткненнях.

Гідродинамічна картина з початково ненульовим поперечним потоком має допомогти в описі відносної незалежності інтерфометричних об’ємів від енергії в центральних зіткненнях Au+Au та Pb+Pb за рахунок посилення поперечних потоків з енергією. Окрім того, переважно позитивні просторово-часові кореляції для точок випромінювання, які зменшують зовнішній радіус, ре-

алізуються лише в гідродинамічній картині з досить потужним поперечним потоком в початковий момент.

2.1.1.3. Реалістичні Au+Au зіткнення. Розглянемо реалістичні приклади, що ґрунтуються на початкових умовах з концепції ККС.

Згідно із результатами [193], час $\tau_0 \approx 3/\Lambda_s$ (де $\Lambda_s = g^2\mu \equiv 4\pi\alpha_s\mu$, і μ^2 – дисперсія гауссової ваги кольорових зарядів партонів) є прийнятним масштабом для формування глюонів з фізично означеною енергією, і одержано однорідний розподіл поперечних глюонів, що визначає спектр імпульсів на гіперповерхні $(t^2 - x_L^2)^{1/2} = \tau_0$; $\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{t+x_L}{t-x_L} \simeq 0$, $y = \frac{1}{2} \ln \frac{p_0+p_L}{p_0-p_L}$.

Для $p_T < 1.5\Lambda_s$, розподіл має вигляд [193]:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d^2p_T d^2x_T d\eta dy} &= f_0(T_{\text{eff}}) \delta(y - \eta) \\ &\equiv \frac{a_1(b)}{g^2} \left(\exp \left(\sqrt{p_T^2 + m_{\text{eff}}^2} / T_{\text{eff}} \right) - 1 \right)^{-1} \delta(y - \eta), \end{aligned} \quad (2.30)$$

де $m_{\text{eff}} = a_2\Lambda_s$, $T_{\text{eff}} = a_3\Lambda_s$; $a_2 = 0.0358$, $a_3 = 0.465$.

Для скінченних систем ми апроксимуємо профіль розподілу глюонів за допомогою еліпсоїдального гаусіану $\rho(b, \mathbf{r}_T) = \rho_0(b) \exp(-r_1^2/R_1^2 - r_2^2/R_2^2)$, одержаного з кращого підбору густини числа учасників зіткнення з прицільним параметром $\mathbf{b} = (b, 0)$. Зауважимо відмінність просторового розподілу тут від розподілу Вудса-Саксона, який був вжитий раніше.

Стала $a_1(b)$ в (2.30) визначається з порівняння повного числа глюонів з результатами [193] і залежить від способу розмиття δ -функції в (2.30). Для $b = 0$ в зіткненнях Au+Au, покладемо $a_1 \approx 0.09$ після заміни $\frac{dN}{d^2p_T d^2x_T d\eta dy} \rightarrow f_0\left(\frac{T_{\text{eff}}}{\cosh(y-\eta)}\right)$.

Отже, виходимо з такої початкової локальної буст-інваріантної густини фазового простору f при τ_0 :

$$f(x, p)|_{\tau_0} \equiv \frac{dN}{d^3x d^3p} \Big|_{\tau_0} = \frac{f_0\left(\frac{T_{\text{eff}}}{\cosh(y-\eta)}\right)}{\tau_0 m_T \cosh(y-\eta)} \frac{\rho(b, \mathbf{r}_T)}{\rho_0(b)}. \quad (2.31)$$

Нехай фактична термалізація відбувається в момент $\tau_i = 1$ фм/с $> \tau_0$ і партони просто вільно розлітаються між τ_0 і τ_i (див. деталі τ -еволюції густини фазового простору в [331, 146]), і раптово термалізуються при τ_i з тиском $P(\epsilon; \tau_i, x)$, який відповідає результатам КХД на ґратці.

Тоді, для $\tau_0 = 0.3$ фм/с, що відповідає $\Lambda_s = 2$ ГеВ [193], задамо профіль густини енергії з параметрами: $\epsilon(\tau_0, b = 0; \mathbf{r} = 0) \approx 0.09\Lambda_s^4/g^2$, ширина ґаусіана $R_\epsilon(\tau_0, b = 0) \approx 5.33$ фм; $\epsilon(\tau_i = 1, b = 0; \mathbf{r} = 0) \approx 0.022\Lambda_s^4/g^2$; $R_\epsilon(\tau_i, b = 0) \approx 5.4$ фм.

На підставі даних про спектр піонів і інтерферометричні радіуси, покладемо $\Lambda_s^4/g^2 \approx 6$ ГеВ⁴ і, отже, $\epsilon(\tau_0 = 0.3, \mathbf{r} = 0) = 67$ ГеВ/фм³.

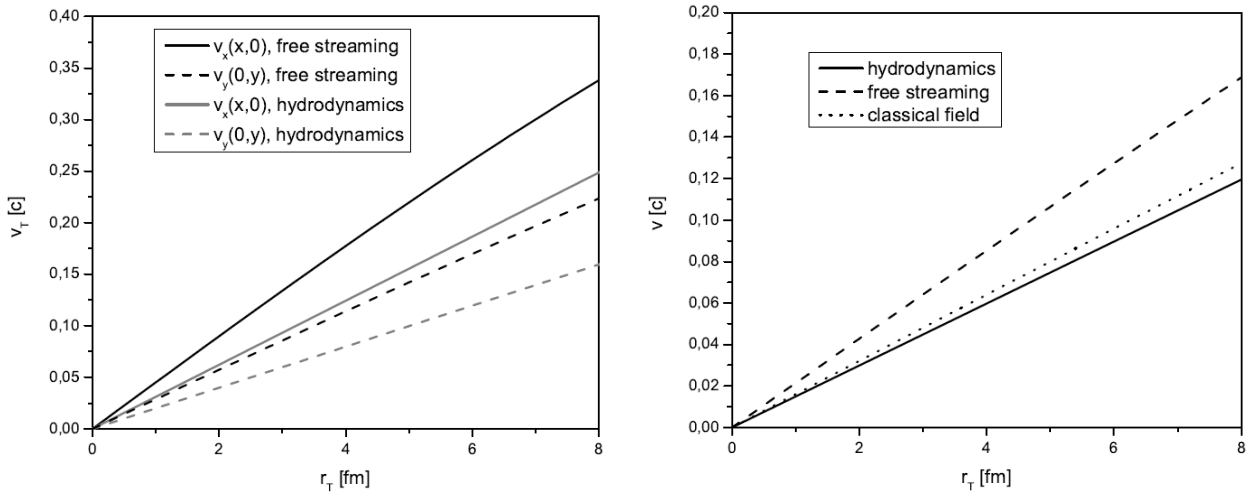


Рис. 2.4. Колективна швидкість, розвинена на дотермічній стадії для моменту $\tau_i = 1$ фм/с, починаючи з $\tau_0 = 0.3$ фм/с. Результати наведено для вільного розльоту партонів, поширення вільного класичного поля, і гідродинамічної еволюції ідеальної рідини з рівнянням стану $p = \epsilon/3$. Ліворуч: нецентральні зіткнення з $b = 6.3$ фм. Праворуч: центральні зіткнення з $b = 0$.

Результати для колективних потоків для $b = 0$ і $b = 6.3$ фм зображено на Рис. 2.4. Ми спостерігаємо подібну поведінку поперечної швидкості та її анізотропію на дотермічній стадії для центральних і нецентральних зіткнень.

Для центральних зіткнень, значення інтерферометричних характеристик піонів, отримані за участю співавторів у повній гідрокінетичній моделі [11, 53]

з початковими потоками, наведені на Рис. 2.5. Порівняння з експериментальними даними підтверджує необхідність врахування потоків на ранній стадії для коректного опису спостережуваних.

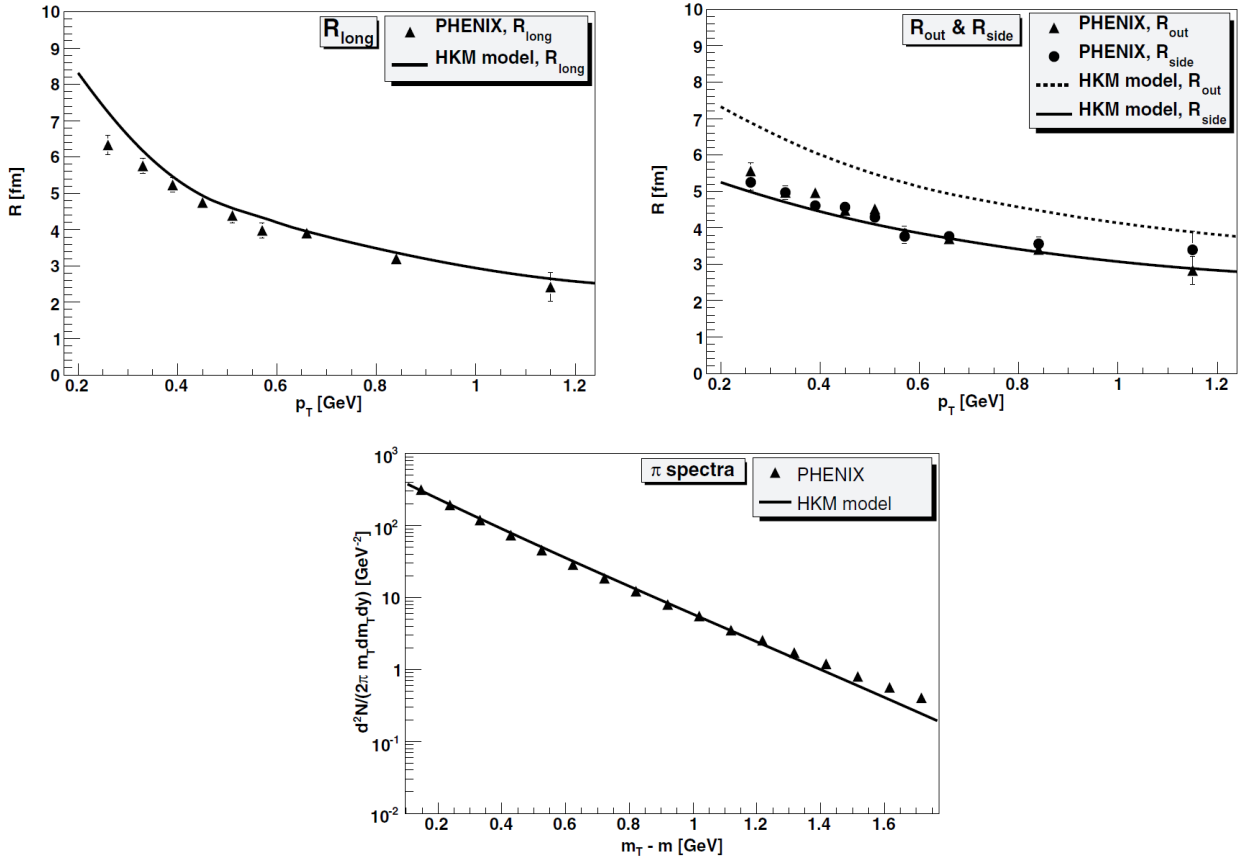


Рис. 2.5. Одночастинковий імпульсний спектр піонів (знизу) та піонні інтерферометричні радіуси: R_{long} (вгорі ліворуч), R_{side} і R_{out} (вгорі праворуч), обчислені в гідрокінетичній моделі (НКМ) та отримані у вимірюваннях PHENIX Collaboration для центральних Au+Au зіткнень (для центральності 0 – 5%) при 200 А · Гев на RHIC.

2.1.1.4. Поширення поля. Розглянемо тепер потоки на ранній дотермічній стадії за допомогою класичного поля. Спростимо ситуацію до простого випадку буст-інваріантної еволюції вільного поля з моменту $\tau_0 \approx 3/\Lambda_s$ [193]. Тим самим, ми приходимо до теорії Максвела з 4-потенціалом A_μ у просторі–

часі з псевдо-циліндричною метрикою

$$ds^2 = d\tau^2 - \tau^2 d\eta^2 - dx^2 - dy^2,$$

де $\tau = \sqrt{t^2 - x_L^2}$, $\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{t+x_L}{t-x_L}$.

Накладаючи калібрування $A_\tau = 0$, яке використовується в концепції ККС, динамічними змінними моделі є $\Phi \equiv A_\eta$, A_i ($i = x, y$). Будемо припускати, що ці потенціали та всі спостережувані не залежать від просторово-часової швидкості η . Потенціали A_x і A_y пов'язані умовою $\partial_i A_i = 0$, яка випливає з калібрувальної умови (Кулона).

Еволюція потенціалів диктується рівняннями Максвелла:

$$\partial_\tau^2 A_i + \frac{1}{\tau} \partial_\tau A_i - \Delta_T A_i = 0, \quad (2.32)$$

$$\partial_\tau^2 \Phi - \frac{1}{\tau} \partial_\tau \Phi - \Delta_T \Phi = 0, \quad (2.33)$$

де $\Delta_T = \partial_i \partial_i$.

Компоненти тензора енергії-імпульсу, необхідні для знаходження колективної швидкості, визначаються з відомої формули:

$$T^{\mu\nu} = -F^{\mu\lambda} F^\nu{}_\lambda + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}, \quad (2.34)$$

де $F_{\lambda\sigma} = \partial_\lambda A_\sigma - \partial_\sigma A_\lambda$.

Якщо $T^{\mu\nu}$ – відомі, колективна швидкість визначається згідно з Ландау–Ліфшицем з рівнянь:

$$u^\mu = \frac{T^{\mu\nu} u_\nu}{u^\lambda T_{\lambda\sigma} u^\sigma}, \quad u^2 = 1. \quad (2.35)$$

Зосередимося на початкових умовах для польових рівнянь. Ми застосовуємо умови, які використовуються для глазми [131]:

$$\partial_\tau A_i|_{\tau_0} = 0, \quad \Phi|_{\tau_0} = 0, \quad (2.36)$$

$$E_z \sim \frac{\partial_\tau \Phi}{\tau} \Big|_{\tau_0} \neq 0, \quad H_z \sim F_{xy}|_{\tau_0} \neq 0. \quad (2.37)$$

Вони означають, що в початковий момент τ_0 електричне і магнітне поле є повздовжнім, а поперечні компоненти відсутні. Іншими словами, шуканий польовий потік відсутній при τ_0 , і ми знаходимо (при $\eta = 0$):

$$T_{tt}|_{\tau_0} \equiv \varepsilon(r_T) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_{r_T} \Psi}{r_T} \Big|_{\tau_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_{\tau} \Phi}{\tau} \Big|_{\tau_0} \right)^2, \quad (2.38)$$

$$T_{tx}|_{\tau_0} = 0. \quad (2.39)$$

Оберемо початковий профіль для густини енергії подібним до випадку системи партонів (частинок) при $b = 0$: $\varepsilon(r_T) = \epsilon_0 \exp\left(-\frac{r_T^2}{2R^2}\right)$. Щоб відтворити його, у початковий момент (власного) часу ми використовуємо такі профілі для потенціалів поля:

$$\partial_{r_T} \Psi|_{\tau_0} = \sqrt{\alpha} r_T f(r_T), \quad \partial_{\tau} \Phi|_{\tau_0} = \sqrt{1 - \alpha} \tau_0 f(r_T), \quad (2.40)$$

де $f(r_T) \equiv \sqrt{2\varepsilon(r_T)}$; α – деяка стала. Оскільки потенціали Ψ , Φ – дійсні, маємо $0 \leq \alpha \leq 1$. У той самий час, величини $T_{tt}(\tau, r_T, \varphi = 0, \eta = 0)$, $T_{tx}(\tau, r_T, \varphi = 0, \eta = 0)$, і $v(\tau, r_T)$ не залежать від α .

Надалі, тлумачимо ці співвідношення (разом з $\partial_{\tau} \Psi|_{\tau_0} = 0$ і $\Phi|_{\tau_0} = 0$) як початкові умови нашої задачі.

Розв'язок виражається через амплітуду поля в момент τ_0 :

$$\Psi_0(k_T) = \sqrt{\alpha} \tilde{f}(k_T), \quad \Phi_0(k_T) = \sqrt{1 - \alpha} \tilde{f}(k_T), \quad (2.41)$$

тут

$$\tilde{f}(k_T) = \int_0^{\infty} f(r_T) J_0(k_T r_T) r_T dr_T. \quad (2.42)$$

Тоді, часова залежність амплітуд набуває вигляду:

$$\tilde{\Psi}(\tau, k_T) = \Psi_0(k_T) \frac{\pi k_T \tau_0}{2} [J_1(k_T \tau_0) Y_0(k_T \tau) - J_0(k_T \tau) Y_1(k_T \tau_0)], \quad (2.43)$$

$$\tilde{\Phi}(\tau, k_T) = \Phi_0(k_T) \frac{\pi k_T \tau}{2} [J_1(k_T \tau_0) Y_1(k_T \tau) - J_1(k_T \tau) Y_1(k_T \tau_0)]. \quad (2.44)$$

Просторова залежність відновлюється за перетворення Беселя–Фур’є:

$$\Psi(\tau, r_T) = r_T \int_0^{\infty} \tilde{\Psi}(\tau, k_T) J_1(k_T r_T) dk_T, \quad (2.45)$$

$$\Phi(\tau, r_T) = \int_0^{\infty} \tilde{\Phi}(\tau, k_T) J_0(k_T r_T) dk_T, \quad (2.46)$$

де вже проінтегровано за кутами.

Таким чином, визначаємо еволюцію тензора енергії–імпульсу (2.34) і поперечних потоків згідно з (2.35). Результат подано на Рис. 2.4. Видно, що він схожий на вільний розльот партонів.

2.1.2. Ізотропізація абелевого поля. Аналіз експериментальних даних свідчить про утворення кварк–глюонної плазми (КГП) в ультрарелятивістських ядро–ядерних зіткненнях [25, 29, 4, 6]. Її локальну термалізацію та ізотропізацію переважно пов’язують зі швидкими процесами, стимульованими нестійкістю за малих часів після зіткнення [249, 250, 251, 253].

У сучасній картині зіткнень важких іонів [378], рання стадія характеризується великим числом партонів з “малими” імпульсами порядку Λ_s , які природно розглядати як класичне поле Янга–Мілса (глазму) у вакуумі [131, 201]. Початкові умови еволюції глазми визначаються концепцією ККС МакЛерана–Венугопалана (МВ) [232, 233, 234, 28, 235], де джерела поля до зіткнення описуються випадково розподіленими валентними кварками гадронів, що стикаються, і розташованими (внаслідок скорочення Лоренца) на нескінченно тонких листах, що рухаються вздовж світлового конуса. Ці джерела також трактуються як жорсткі партони з “великими” імпульсами, які швидко покидають систему *після* зіткнення. Таким чином, оригінальна модель МВ нехтує взаємодією поля з середовищем жорстких партонів.

Просторово-часову динаміку полів Янга–Мілса у вакуумі (“плавлення ККС”) за припущення буст-інваріантності, розподіл енергії та число глюонів

вже досліджували чисельно (див. [209]). Більше того, було показано, що порушення буст-інваріантності спричиняє неабелеву нестійкість Вайбеля [357], що змушує польові (м'які) моди зростати разом з власним часом [300]. Однак, ефект ізотропізації залишався поза цим розглядом.

З іншого боку, жорсткі партони (утворені після моменту зіткнення) з великим поперечним імпульсом p_T описують в рамках теорії переносу, і якщо нехтувати м'яким класичним полем, то еволюція цих партонів визначається рівнянням Больцмана з інтегралом зіткнення [130, 38, 145, 245, 97, 257]¹. Однак, стверджується, що колективні процеси, спричинені м'яким калібрувальним полем, повинні домінувати при переході нестійкої кварк-глюонної плазми до рівноваги. Такі нестійкості виникають внаслідок анізотропного розподілу жорстких партонів [98, 364, 30, 10].

Третій режим, коли зворотна реакція поля на жорсткі партони (як частинки) все ще слабка, але самодія останніх є сильно нелінійною, описується ефективною дією “жорстких петель”, яку виведено в [252] для довільної анізотропії простору імпульсів.

Цікаво відзначити, що чисельні дослідження анізотропних мод жорстких партонів у поєднанні з нестійкими м'якими модами виявили тенденцію неабелевих калібрувальних полів до “абеліанізації” на стадії нестійкості [23, 98]. Це означає, що польові комутатори стають набагато меншими, ніж значення самого поля. Окрім того, динаміка абелевого та неабелевого полів якісно однакова, якщо ці поля відносно слабкі.

Тут ми розглядаємо сценарій еволюції поля з початковими умовами, подібними до ККС, коли також враховується наявність анізотропного (за імпульсами) середовища жорстких партонів. Наша мета – аналітично оцінити поведінку такої системи в короткочасному інтервалі у режимі слабкої взаємодії, коли можливе застосування абеліанізованого варіанту поля. Хоча остання

¹Цей перелік містить також деякі роботи щодо підходів в наближенні часів релаксації до рівняння Больцмана.

умова вимагає розгляду системи за відносно великих часів після зіткнення ядер (як це впливає з чисельних досліджень), але це значно спрощує задачу. Однак, як вже згадано в [146, 336, 334], рання термалізація не є необхідною для опису піонних спектрів, які спостерігаються експериментально.

Оскільки анізотропія імпульсного простору проявляється в коефіцієнтах переносу, обчислимо компоненти тензора провідності та дослідимо вплив нестійкостей на нього. Очікується, що зворотна реакція може привести до від'ємної провідності в буст-інваріантному випадку.

2.1.2.1. Формулювання моделі. У просторі-часі з метрикою

$$ds^2 = d\tau^2 - \tau^2 d\eta^2 - dr_T^2 - r_T^2 d\varphi^2, \quad (2.47)$$

$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2}, \quad \eta = \frac{1}{2} \ln \frac{t+z}{t-z}, \quad (2.48)$$

(τ і η – власний час і просторова-часова швидкість) розглянемо теорію Максвелла з 4-потенціалом A_μ .

Вільна теорія з нульовою швидкістю для центральних зіткнень, коли потенціали параметризуються як $A_\tau = 0$ (ККС-подібне калібрування), $A_\eta \equiv \Phi(\tau, r_T)$, $A_{r_T} = 0$, $A_\varphi \equiv \Psi(\tau, r_T)$, вже випробувана вище для опису просторово-часової еволюції польового потоку (колективної швидкості) на дотермічному етапі зіткнень. Одержані результати якісно збігаються з висновками неабелевої моделі з праці [113].

Узагальнимо рівняння абелевого поля шляхом включення джерел:

$$\partial_\tau^2 \Phi - \frac{1}{\tau} \partial_\tau \Phi - \partial_{r_T}^2 \Phi - \frac{1}{r_T} \partial_{r_T} \Phi = J_\eta(\tau, r_T), \quad (2.49)$$

$$\partial_\tau^2 \Psi + \frac{1}{\tau} \partial_\tau \Psi - \partial_{r_T}^2 \Psi + \frac{1}{r_T} \partial_{r_T} \Psi = J_\varphi(\tau, r_T). \quad (2.50)$$

Тут, $J_\tau = 0$, $J_{r_T} = 0$, і закон збереження (заряду) виконується автоматично.

У контексті ядро-ядерних зіткнень, наявність джерел обумовлюється середовищем. Враховуючи жорстку партонну компоненту (яка виглядає як частинкова підсистема), наша мета – дослідити польову і частинкову динаміку.

Компоненти струму у просторі-часі Мінковського є

$$J^\mu = g \int p^\mu (f_+ - f_-) \frac{d^3 p}{p^0}, \quad (2.51)$$

де $p^0 \equiv |\mathbf{p}|$ (випадок безмасових партонів), $f_\pm$ – функції розподілу (скалярних) партонів. Вважатимемо розподіл партонів анізотропним в просторі імпульсів і однорідним в конфігураційному. Еволюція функцій $f_\pm$ описується рівняннями Власова, які формулюються нижче. Зазначимо, що “ $-g$ ” відповідає заряду електрона в контексті електродинаміки.

Зауважимо, що польову модель з нетривіальною правою стороною рівнянь вже досліджено в [24].

Нехай $(p^\mu) = (p_T \cosh y, p_T \cos \phi, p_T \sin \phi, p_T \sinh y)$, де y – імпульсна швидкість. У таких термінах маємо

$$J_\tau = g \int p_T^2 \cosh \theta (f_+ - f_-) dp_T dy d\phi, \quad (2.52)$$

$$J_\eta = -\tau g \int p_T^2 \sinh \theta (f_+ - f_-) dp_T dy d\phi, \quad (2.53)$$

$$J_{r_T} = -g \int p_T^2 \cos \xi (f_+ - f_-) dp_T dy d\phi, \quad (2.54)$$

$$J_\varphi = -r_T g \int p_T^2 \sin \xi (f_+ - f_-) dp_T dy d\phi, \quad (2.55)$$

де $\theta = y - \eta$, $\xi = \phi - \varphi$.

Враховуючи $J_\tau = J_{r_T} = 0$, різниця $f_+ - f_-$ є непарною функцією θ і ξ . Еволюція розподілів $f_\pm$ генерується рівняннями Власова:

$$(\hat{L} \pm g\hat{F})f_\pm = 0, \quad (2.56)$$

де $\hat{L} \equiv p^\mu \partial_\mu$, $\hat{F} \equiv p^\mu F_{\mu\nu} \partial_\nu$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Для випадково розподілених партонів в початковий момент τ_0 , покладемо $f_+^0 = f_-^0 = f^0$, де f^0 визначається як $(dN_h/d^3x d^3p)|_{\tau_0}$, і $\hat{L}f^0 = 0$. Отже, система є зарядово нейтральною, а струми відсутні при τ_0 .

Використовуючи криволінійні координати, одержуємо

$$\hat{L} = p_T \left(\cosh \theta \partial_\tau + \frac{\sinh \theta}{\tau} \partial_\eta + \cos \xi \partial_{r_T} + \frac{\sin \xi}{r_T} \partial_\varphi \right), \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned}\hat{F} = & -\frac{\partial_\tau \Phi}{\tau} \partial_y + \frac{\partial_{r_T} \Phi}{\tau} (\sinh \theta \sin \xi \partial_\phi - \cosh \theta \cos \xi \partial_y) \\ & + \frac{\partial_\tau \Psi}{r_T} (\sinh \theta \sin \xi \partial_y + \cosh \theta \cos \xi \partial_\phi) + \frac{\partial_{r_T} \Psi}{r_T} \partial_\phi.\end{aligned}\quad (2.58)$$

Видно, що оператор сили Лоренца $\hat{F}$ є оператором повороту в просторі імпульсів і, тому, зберігає абсолютне значення поперечного імпульсу p_T . Очікується, що така структура сили Лоренца приводить до перерозподілу імпульсу за різними напрямками і обумовлює нестійкість у системі.

2.1.2.2. Розв'язок рівнянь. Зосередимося на розв'язках системи рівнянь Максвелла–Власова. Поле є доміантним на ранній стадії ядерних зіткнень (на відміну від жорстких частинок), тому опис його динаміки є пріоритетним. Тоді, виразимо частинкові струми через поле. Через складність рівнянь Власова, застосуємо наближення для їх розв'язання.

Флуктуацію функції розподілу, що виникає упродовж малого часового інтервалу $\Delta\tau$, знайдемо в лінійному наближенні за g :

$$f_\pm = f^0 \mp g\delta f. \quad (2.59)$$

У цьому наближенні просторово-часова еволюція поправки δf , яка визначає різницю $f_+ - f_- = -2g\delta f$ і струми, описується рівнянням:

$$\hat{L}\delta f = \hat{F}f^0. \quad (2.60)$$

Зауважимо, що це наближення не дозволяє дослідити ізотропізацію кінематичної частини тензора енергії–імпульсу частинок (жорстких партонів), пропорційної до суми $f_+ + f_-$. Однак, таке наближення дозволяє виявити нестійкість в системі.

Якщо $\tau \rightarrow \tau_0$, існує наближений розв'язок, який є короткотривалим в часі і локалізованим у просторі,

$$\delta f \approx \frac{\tau - \tau_0}{p_T \cosh \theta} \hat{F}f^0. \quad (2.61)$$

Легко перевірити, що дія еволюційного оператора $\hat{L}$ на цей вираз дає

$$\hat{L} \frac{\tau - \tau_0}{p_T \cosh \theta} \hat{F} f^0 = \hat{F} f^0 + (\tau - \tau_0) W(\tau), \quad (2.62)$$

де

$$\begin{aligned} W(\tau) = & \left[\partial_\tau + \frac{\tanh \theta}{\tau} (\partial_\eta + \tanh \theta) \right. \\ & \left. + \frac{\cos \xi}{\cosh \theta} \partial_{r_T} + \frac{\sin \xi}{r_T \cosh \theta} \partial_\varphi \right] (\hat{F} f^0). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Отже, якщо $\tau \rightarrow \tau_0$, останній доданок у правій стороні (2.62) зникає.

Аби зрозуміти це наближення, введемо G – розв’язок такого рівняння:

$$\hat{L} G(\tau, \theta, \mathbf{r}_T | \tau', \theta', \mathbf{r}'_T) = \frac{\delta(\tau - \tau')}{\tau} \delta(\theta - \theta') \delta^2(\mathbf{r}_T - \mathbf{r}'_T), \quad (2.64)$$

де праворуч стоїть 4-мірна δ -функція щодо міри $\tau d\tau d\theta d^2 r_T$.

У випадку $\tau_0 \rightarrow 0$, скористаємося $\mathbf{r}_T$ замість (r_T, φ) і подамо G так:

$$\begin{aligned} G(\tau, \theta, \mathbf{r}_T | \tau', \theta', \mathbf{r}'_T) = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{i}{(2\pi)^4 p_T} \int \frac{e^{i\omega[\tau \cosh(\xi - \theta) - \tau' \cosh(\xi - \theta')] - i\mathbf{k}_T(\mathbf{r}_T - \mathbf{r}'_T)}}{\mathbf{k}_T \mathbf{v}_T - \omega \cosh \xi - i\varepsilon} \omega d\omega d\xi d^2 k_T, \end{aligned} \quad (2.65)$$

де $\mathbf{v}_T \equiv \mathbf{p}_T/p_T$, і враховано загасання Ландау:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x - i\varepsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{x} + i\pi \delta(x). \quad (2.66)$$

За відсутності просторової дисперсії, $k_T \ll \omega \cosh \xi$, маємо

$$\begin{aligned} G(\tau, \theta, \mathbf{r}_T | \tau', \theta', \mathbf{r}'_T) \approx & \frac{1}{p_T} \Theta(\tau \cosh \theta - \tau' \cosh \theta') \\ & \times \delta(\tau \sinh \theta - \tau' \sinh \theta') \delta^2(\mathbf{r}_T - \mathbf{r}'_T). \end{aligned} \quad (2.67)$$

де Θ – функція Хевісайда: $\Theta(x < 0) = 0$, $\Theta(x = 0) = 1/2$, $\Theta(x > 0) = 1$.

Для скейлінгу Бйоркена, коли $\theta \approx 0$, і рівних θ і θ' , одержуємо

$$G(\tau, \theta, \mathbf{r}_T | \tau', \theta', \mathbf{r}'_T) \approx \frac{\Theta(\tau - \tau')}{p_T \tau' \cosh \theta'} \delta(\theta - \theta') \delta^2(\mathbf{r}_T - \mathbf{r}'_T). \quad (2.68)$$

Те саме випливає з умов $\tau \sinh \theta = \text{const}$ і $\sinh \theta d\tau + \tau \cosh \theta d\theta = 0$, де $d\tau = \tau - \tau'$, $d\theta = \theta - \theta'$.

За малих τ і незмінності підінтегрального виразу, одержуємо

$$\begin{aligned} & \int G(\tau, \theta, \mathbf{r}_T | \tau', \theta', \mathbf{r}'_T) F(\tau', \theta', \mathbf{r}'_T) \tau' d\tau' d\theta' d^2 r'_T \approx \\ & \approx \frac{\tau}{p_T \cosh \theta} F(\tau, \theta, \mathbf{r}_T), \end{aligned} \quad (2.69)$$

що визначає розв'язок неоднорідного кінетичного рівняння з джерелом F .

Для початкових буст-інваріантних розподілів в центральних зіткненнях важких іонів, маємо $f^0 = f^0(p_T, \theta) = f^0(p_T, -\theta)$ (де f^0 – функція від r_T). Тоді, одержуємо

$$J_\eta = \sigma_\eta(\tau) \partial_\tau \Phi, \quad J_\varphi = \sigma_\varphi(\tau) \partial_\tau \Psi, \quad (2.70)$$

де означено провідності:

$$\sigma_\eta(\tau) = 2(\tau - \tau_0)\sigma_0, \quad \sigma_\varphi(\tau) = -(\tau - \tau_0)\sigma_0. \quad (2.71)$$

Спільний множник, залежний від початкового розподілу партонів, є

$$\sigma_0 \equiv -2\pi g^2 \int_0^\infty dp_T \int_{-\infty}^\infty dy \partial_y f^0 p_T \tanh \theta. \quad (2.72)$$

Видно, що функції $\sigma_\eta(\tau)$ і $\sigma_\varphi(\tau)$ мають різні знаки. Це говорить про наявність *від'ємної провідності*, яка пов'язана з нестійкістю у системі. Механізм цієї нестійкості легко пояснити: маємо ситуацію, коли частинки (партони) віддають енергію полю.

Тепер проаналізуємо властивості σ_0 . Спершу припустимо, що початковий розподіл f^0 є добутком функції від (p_T, θ) і просторового розподілу $(dN_h/d^3x)|_{\tau_0}$ у поперечній площині. Беручи до уваги парність початкового розподілу щодо змінної θ , знаходимо

$$\sigma_0 = A \left. \frac{dN_h}{d^3x} \right|_{\tau_0} > 0, \quad (2.73)$$

де A – додатна стала, яка виникає після інтегрування за імпульсами.

Отже, $\sigma_\varphi < 0$, поки $\sigma_\eta > 0$, і від'ємна провідність – у поперечній площині.

З'ясуємо, як від'ємна провідність проявляється в лабораторній системі відліку. Вирази (2.70) відображають закон Ома, де $E_\eta \equiv F_{\tau\eta} = \partial_\tau \Phi$, $E_\varphi \equiv F_{\tau\varphi} = \partial_\tau \Psi$ – напруженості електричного поля. Для $E_i = F_{ti}$ в просторі Мінковського, знаходимо, що $E_\eta = \tau E_z$, $E_\varphi = r_T \cosh \eta (-\sin \varphi E_x + \cos \varphi E_y) + r_T \sinh \eta (-\sin \varphi F_{zx} + \cos \varphi F_{zy})$. В таких термінах компоненти струму є

$$J_t = -\sinh \eta \sigma_\eta E_z, \quad J_z = \cosh \eta \sigma_\eta E_z, \quad (2.74)$$

$$J_x = -\frac{\sin \varphi}{r_T} \sigma_\varphi E_\varphi, \quad J_y = \frac{\cos \varphi}{r_T} \sigma_\varphi E_\varphi. \quad (2.75)$$

Для $\eta = 0$ і $\varphi = 0$, маємо $J_t = J_x = 0$, $J_y = \sigma_\varphi E_y$, $J_z = \sigma_\eta E_z$. Отже, від'ємна провідність проявляється за певних умов, пов'язаних зі значеннями кутів в лабораторній системі відліку. Ефект вказує на утворення пучків [253].

Замість довільного розподілу $(dN_h/d^3x)|_{\tau_0}$, дослідимо частковий випадок з $(dN_h/d^3x)|_{\tau_0} = \text{const}$, що спрощує задачу.

Коли σ_0 є сталою, просторова залежність потенціалів поля відразу виводиться з перетворення Беселя–Фур'є:

$$\Phi(\tau, r_T) = \int_0^\infty \Phi_0(k_T) g_\eta(\tau, k_T) J_0(k_T r_T) dk_T, \quad (2.76)$$

$$\Psi(\tau, r_T) = r_T \int_0^\infty \Psi_0(k_T) g_\varphi(\tau, k_T) J_1(k_T r_T) dk_T, \quad (2.77)$$

де використано початкові умови, подібні до ККС:

$$g_\eta|_{\tau_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial_\tau g_\eta}{\tau} \right|_{\tau_0} = k_T, \quad (2.78)$$

$$g_\varphi|_{\tau_0} = 1, \quad \tau \partial_\tau g_\varphi|_{\tau_0} = 0. \quad (2.79)$$

Для довільного $\tau_0 \neq 0$, функції $g_\eta(\tau, k_T)$, $g_\varphi(\tau, k_T)$ виражаються в термінах функцій Гейне. Такі вирази є досить складними для евристичного аналізу моделі та її застосування. З цієї причини ми виписуємо $g_{\eta,\varphi}$ для $\tau_0 \rightarrow 0$:

$$g_\eta = -\frac{k_T}{2\sigma_0} \exp\left(\frac{1}{2}\sigma_0\tau^2\right) M\left(-\frac{k_T^2}{4\sigma_0}, \frac{1}{2}; -\sigma_0\tau^2\right), \quad (2.80)$$

$$g_\varphi = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{2}{\sigma_0}} \exp\left(-\frac{1}{4}\sigma_0\tau^2\right) M\left(\frac{k_T^2 - \sigma_0}{2\sigma_0}, 0; \frac{1}{2}\sigma_0\tau^2\right), \quad (2.81)$$

ду $M(a, b; z)$ – функція Вітекера.

Таким чином, поява від’ємної провідності σ_φ приводить до зростання деяких компонент магнітного та електричного полів у порівнянні з випадком теорії без партонного середовища. Важливо, що магнітне поле демонструє зростання, відводячи частину енергії з резервуара частинок. Отже, нестійкості пов’язані з наявністю експонент в $g_{\eta, \varphi}$; а функції Вітекера лише змінюють фазу коливань у порівнянні з вільною теорією.

Якщо $\sigma_0 \rightarrow 0$ і $\tau_0 \rightarrow 0$, приходимо до відомих виразів (див.[201]):

$$g_\eta(\tau, k_T) = \tau J_1(k_T\tau), \quad g_\varphi(\tau, k_T) = J_0(k_T\tau), \quad (2.82)$$

де $J_n(z)$ – функція Беселя.

Тепер визначимо функції $\Phi_0(k_T)$ і $\Psi_0(k_T)$ з початкових умов. Зауважимо, що $\Psi_0(k_T)$ і $\Phi_0(k_T)$ – флуктуюючі величини в рамках концепції ККС, і спостерігається лише парний корелятор потенціалів (Янга–Мілса). Однак, потенціали поля в нашому підході не є стохастичними величинами на відміну від ідеології ККС, і ми прагнемо задати початкові умови на основі статистично усереднених компонент тензора енергії–імпульсу, що враховують просторову неоднорідність.

Щоб вивести $\Psi_0(k_T)$ і $\Phi_0(k_T)$, застосуємо розподіл густини енергії та вимогу відсутності польового потоку в початковий момент. Для центральної хуткості ($\eta = 0$) і $\varphi = 0$ (усі поперечні напрями є еквівалентними тут), коли $T_{tt} = T_{\tau\tau}$, $T_{tx} = T_{\tau x}$, маємо

$$\begin{aligned} T_{tt}|_{\tau_0} &\equiv \varepsilon(r_T) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_{r_T} \Psi}{r_T} \Big|_{\tau_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_\tau \Phi}{\tau} \Big|_{\tau_0} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$T_{tx}|_{\tau_0} = 0, \quad (2.84)$$

де, припускається, що $\varepsilon(r_T)$ – відома функція.

Трюк полягає у розподіленні енергії між різними компонентами:

$$\partial_{r_T} \Psi|_{\tau_0} = \sqrt{\alpha} r_T f(r_T), \quad \left. \frac{\partial_{\tau} \Phi}{\tau} \right|_{\tau_0} = \sqrt{1 - \alpha} f(r_T), \quad (2.85)$$

де $f(r_T) \equiv \sqrt{2\varepsilon(r_T)}$, а α – деяка стала. Оскільки потенціали Ψ , Φ – дійсні, то $0 \leq \alpha \leq 1$. Виявляється, $\alpha \approx 1/2$, що впливає з порівняння електричної та магнітної напруженостей у чисельному підході. Однак, спостережувані у вільній теорії не залежать від α .

Отже, знаходимо

$$\Psi_0(k_T) = \sqrt{\alpha} \tilde{f}(k_T), \quad \Phi_0(k_T) = \sqrt{1 - \alpha} \tilde{f}(k_T), \quad (2.86)$$

тут

$$\tilde{f}(k_T) = \int_0^{\infty} f(r_T) J_0(k_T r_T) r_T dr_T. \quad (2.87)$$

Ці вирази остаточно визначають поля в нашій моделі.

2.1.2.3. Застосування. Моді класичного поля зазвичай інтерпретуються як м'які партони, потоки яких, як показано в [334], з початковим просторовим ґаусовим розподілом енергії приводять до прийнятних спектрів піонів, що утворюються в зіткненнях на RHIC. Тому, оберемо подібний профіль густини енергії в початковий момент,

$$\varepsilon(r_T) = E \exp\left(-\frac{r_T^2}{2R^2}\right), \quad (2.88)$$

де $E = 45 \text{ Гев}/\text{фм}^3$, $R = 3.768 \text{ фм}$.

Тоді, знаходимо

$$\tilde{f}(k_T) = 2^{3/2} \sqrt{E} R^2 \exp(-k_T^2 R^2). \quad (2.89)$$

На цьому етапі буст-інваріантна функція розподілу f^0 (яка визначає провідності) є повністю довільною. Тому, конкретизуємо її вигляд.

Сконструємо f^0 з ізотропної функції,

$$N_0 \exp \left(-\frac{p^0}{p_h} \right), \quad (2.90)$$

за допомогою заміни $y \rightarrow \theta$ в $p^0 = p_T \cosh y$ і перемасштабування одного з вимірів в імпульсному просторі:

$$f^0 = N(\zeta) \exp \left(-\frac{p_T}{p_h} \sqrt{\cosh^2 \theta + \zeta \sinh^2 \theta} \right). \quad (2.91)$$

Тут, p_h – характерний імпульс, $\zeta > -1$ – параметр, що описує силу анізотропії партонного середовища; $N(\zeta)$ – константа нормування.

Зауважимо, що $\zeta > 0$ відповідає скороченню розподілу вздовж напрямку осі z , тоді як $-1 < \zeta < 0$ відповідає розтягуванню розподілу.

Стала $N(\zeta)$ визначається з умови рівності густини числа частинок в ізотропній та анізотропній системах і дорівнює

$$N(\xi) = N_0 \sqrt{1 + \zeta}. \quad (2.92)$$

Після інтегрування за імпульсами, провідності визначаються множником

$$\sigma_0 = 4\pi g^2 N_0 p_h^2 C(\zeta), \quad (2.93)$$

$$C(\zeta) = \frac{2}{3} (1 + \zeta)^{3/2} F \left(\left[2, \frac{3}{2} \right], \left[\frac{5}{2} \right], -\zeta \right). \quad (2.94)$$

Коефіцієнт $C(\zeta)$ в інтервалі $\zeta \in (-1, \infty)$ задається гіпергеометричною функцією F , і є таким, що $C(-1) = 0$ (для теорії без джерел), $C(0) = 2/3$ (для ізотропного середовища), $C(\infty) = \pi/2$.

Рис. 2.6 (знизу) показує, як експоненційно зростаюча енергія, що передається від жорстких до м'яких партонів, розподіляється між магнітними та електричними полями при $\sigma_0 \neq 0$. Поздовжнє електричне поле все ще домінує (відповідно до початкових умов). Тим не менш, бачимо, що поперечне магнітне поле демонструє нестійку поведінку, чого нема у вільній теорії. Оскільки підсистема частинок передає енергію полю, загальна густина енергії поля (як сума компонент) має тенденцію до зростання в часі.

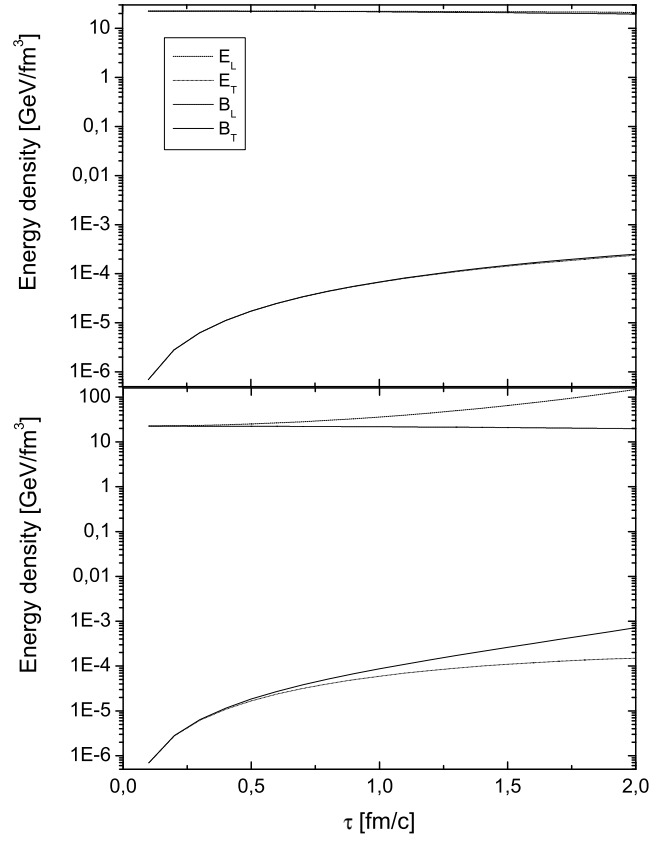


Рис. 2.6. Часова еволюція густини польової енергії, розщеплена на повздовжню і поперечну, електричну (E) та магнітну (B) компоненти при $r_T = 0.1$ фм, $\eta = 0$, $\varphi = 0$. Верхня панель відповідає вільній теорії з $\sigma_0 = 0$. Нижня панель демонструє зростання E_L і B_T при $\sigma_0 = 0.25$ фм $^{-2}$.

Зауважимо, що подібну модель з абелевим полем і жорсткими партонами, коли нехтується буст-інваріантністю полів, розглянуто в [299] в контексті кварк-глюонної плазми (КГП).

2.1.2.4. Висновки. Нами розглянуто модель дотермічної стадії ядро-ядерних зіткнень, яка враховує м'яку ($p_T < \Lambda_s$) і жорстку ($p_T > \Lambda_s$) компоненти партонів із провідним внеском першої. В рамках польового підходу, ми концентруємо увагу на еволюції м'якої компоненти, яка описується буст-інваріантним абелевим полем. За посередництвом електромагнітної взаємодії, ми визначаємо вплив жорсткої компоненти на динаміку поля. Через початкову анізотропію розподілу партонів та умови задачі, подібні до тих, що встановлює концепція конденсата кольорового скла, жорстка компонента проявляє себе через струми – джерела поля. З рівнянь Максвелла-Власова випливає, що струми жорсткої компоненти виражаються у застосованому наближенні через напруженості поля за законом Ома, а провідності для різних компонент відрізняються знаком, і виникає від'ємна провідність. Це свідчить про передачу енергії від жорсткої компоненти до м'якої, що обумовлює її нестійкість і веде до її (часткової) ізотропізації.

Таким чином, у даній задачі мірою анізотропії виступають коефіцієнти переносу – електропровідності, одна з яких набуває від'ємного значення, що свідчить про нестійкість і обумовлює ізотропізацію у системі партонів на дотермічній стадії ядро-ядерних зіткнень.

2.2. Прояв додаткових вимірів в системі кварків і глюонів

Очікування прояву гравітаційних ефектів при TeV-енергіях впливають, зокрема, з концепції Аркані-Хамеда, Дімопуласа і Двалі (АДД) [22], де передбачається, що електрослабкий масштаб $m_{EW} \sim 10^3$ GeV визначає єдиний фундаментальний масштаб найкоротшої відстані в природі. Якщо закони гравітації не змінюються на відстанях до довжини Планка, можна припустити,

що фундаментальна маса M_f в $(3 + d) + 1$ -вимірній теорії має порядок m_{EW} за деякого значення d (число компактних додаткових вимірів в рамках сценарію Калузи–Кляйна). Як зазначено в концепції АДД [22], для задоволення цієї вимоги параметр d повинен дорівнювати 2. При $d = 0$, відновлюється звичайна маса Планка, $M_{Pl} = \sqrt{\hbar c / (16\pi G)} \approx 1.72 \cdot 10^{18}$ ГеВ. Більше того, такий підхід дозволяє визначити фундаментальний масштаб L додаткових вимірів:

$$L^d \sim \frac{M_{Pl}^2}{M_f^{2+d}}. \quad (2.95)$$

Оскільки, обернено-квадратичний закон гравітаційного притягання був перевірений лише на відстанях, що перевищують 1 мм (див. [214] та посилання там), припускають, що різниця в силі взаємодії, спричинена “витіканням” гравітаційного поля в додаткові виміри, які можуть сягати 1 мм, не порушує відомі лабораторні, астрофізичні або космологічні дані. У цій картині, частинки та сили прив’язуються до 3-брани, вкладеної у багатовимірний Всесвіт, а єдиною силою у всьому просторі є гравітація.

Оскільки доказів наявності додаткових вимірів в низькоенергетичних (класичних та квантових) процесах немає, припускається, що їх поява пов’язана з надгустим станом енергії та речовини як термалізована кварк–глюонна плазма, передбачена квантовою хромодинамікою. Отже, метою даного дослідження є визначення ймовірності прояву додаткових вимірів в ультрарелятивістських зіткненнях важких іонів.

Механізм прояву додаткових вимірів можна розділити на два етапи: i) створення матеріальним джерелом гравітаційного поля в наших трьох просторових вимірах; ii) перенесення частини енергії цієї компоненти поля в додаткові виміри, де виникають нові моди гравітаційного поля. Такий механізм схожий на передачу “струсу” (деформації) між шарами в теорії пружності. Така аналогія є буквальною через математичний зв’язок між загальною теорією відносності та теорією пружності [307, 188, 286].

Тут ми розвиваємо феноменологічну модель, що включає матеріальне джерело, яке описується моделлю мішка (MIT Bag model), і гравітаційне поле, представлене двома масштабними факторами, які відображають дві фізично різні групи вимірів, топологія яких фіксована. Константа зв'язку (гравітаційна стала в $(3 + d) + 1$ -вимірному просторі-часі) у цій моделі визначається з (2.95).

Хоча ми застосовуємо підхід з квантової космології (мінісуперпростору), але між нею та нашою моделлю є кілька відмінностей. Ми закладаємо, що 4-вимірний Всесвіт вже існує, тоді як квантова космологія розглядає виникнення та еволюцію Всесвіту з “нічого”.

2.2.1. Модель. Гамільтонів опис. Зупинимось на формулюванні моделі, що містить два взаємодіючих учасника: гравітаційне поле і щільну речовину, що знаходиться у кварк-глюонній фазі. Припускається, що однорідна та ізотропна речовина знаходиться в тривимірному просторі, тоді як гравітаційне поле поширюється в $3 + d$ вимірах. Звичайно, часоподібний параметр еволюції також представлений у моделі і є спільним для матерії та поля. Тоді, щільна матерія, яка утворюється в ядерних зіткненнях, відіграє роль джерела гравітаційного поля в трьох вимірах, збудження якого викликає появу мод гравітаційного поля в додаткових вимірах, число яких ми хочемо оцінити.

Нехай матерія зосереджена у файєрболі з радіусом $r_f \approx 7$ фм, і всі тривимірні явища відбуваються в об'ємі цієї області. Термодинамічні властивості (тиск P і густина енергії ε) кварк-глюонної фази описуються в рамках моделі мішка [138] з врахуванням лише легких кварків і глюонів,

$$P = \frac{\pi^2}{90}gT^4 - B, \quad \varepsilon = \frac{\pi^2}{30}gT^4 + B, \quad (2.96)$$

де T – температура, $g = 37$ – виродження, $B^{1/4} = 200$ МеВ – стала мішка.

Щоб оцінити ймовірність прояву додаткових просторових вимірів, нам слід, очевидно, звернутися до квантової картини, яка забезпечує відповідний

базис. Точніше, нам слід розглянути версію квантової гравітації або космології, щоб знайти квантові стани (мікро) всесвіту та обчислити амплітуду переходу між 3 - та $3 + d$ -вимірними просторами.

Ми не враховуємо варіації топології та геометрії додаткового простору, які можуть виникнути. Навіть, використовуючи гравітаційний континуальний інтеграл, сума по всіх топологіях не є обчислюваною, оскільки не існує алгоритму для встановлення відповідності, чи мають два $3 + d$ -вимірні многовиди однакову топологію. Більше того, є проблема (навіть у двох вимірах) існування великого числа геометрій складної топології. Без збурень неможливо однозначно і фізично задовільно визначити теорію. У вищих вимірах ці проблеми є неконтрольованими. З цих причин ми змушені розглянути модель з фіксованою топологією (додаткового) простору, що дозволяє застосувати канонічне квантування гравітаційного поля.

Зауважимо, що канонічне квантування вимагає встановлення граничних умов та вирішення проблеми впорядкування операторів. Ці проблеми є загальними для моделей квантової космології (мінісуперпростору), що ґрунтуються на рівнянні Вілера–ДеВіта, і мають концептуальне значення для розуміння еволюції Всесвіту.

Повертаючись до фіксування топології, нехай додаткові виміри є компактними і описуються циклічними змінними $\phi_n \in (0, 2\pi L)$, де L – фундаментальна довжина теорії у вищих вимірах, $n = \overline{1, d}$. Тоді, додатковий d -вимірний многовид Σ_d буде компактным і ізоморфним до

$$\underbrace{\mathbb{S} \times \mathbb{S} \dots \times \mathbb{S}}_d. \quad (2.97)$$

Нагадаємо, що в оригінальних моделях Калузи–Кляйна, простір–час покладался, принаймні локально, у вигляді многовиду-добутку $\mathbb{R}_4 \times \Sigma_d$, де Σ_d – компактний “внутрішній простір”, який спочатку ототожнювався з колом.

Заради простоти, ми використовуємо спільний масштабний фактор b для додаткових вимірів. Якщо $b = 0$, то ці виміри – відсутні, і ми маємо справу

з теорією у чотиривимірному просторі-часі. Таке наближення не дозволяє досліджувати варіації геометрії для заданої топології. Тим не менш, це може бути ефективним, якщо розміри вимірів однакового порядку.

Подібним чином можна ввести спільний масштабний фактор для трьох вимірів, і 3-простір є конформно-пласким і ізотропним.

При $x^2 + y^2 + z^2 < r_f^2$, де матерія надгуста, потенціали однорідного гравітаційного поля, a і b , введемо так:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + b^2(t) \sum_{n=1}^d d\phi_n^2, \quad (2.98)$$

що приводить до формалізму з “часом Хаббла”.

Для $x^2 + y^2 + z^2 \gg r_f^2$, метрика асимптотично стає метрикою Мінковського ($d = 0$ і $b = 0$).

Квантові стани моделі описуються хвильовою функцією $\langle a, b | 3 + d \rangle$, залежною від d . Звідси випливає, що амплітуда переходу “3” $\rightarrow$ “3 + d ” для фіксованого b , яке відіграє роль параметру, означена як

$$\left| \int d\mu(a) \langle 3 | a, 0 \rangle \langle a, b | 3 + d \rangle \right|, \quad (2.99)$$

де $\mu(a)$ – міра інтегрування.

З нормованої хвильової функції $\langle a, b | 3 + d \rangle$ можна також знайти ймовірні значення b за фіксованих a і d за профілем густини ймовірності,

$$|\langle a, b | 3 + d \rangle|^2. \quad (2.100)$$

Інша можливість опису додаткових вимірів полягає у знаходженні хвильової функції $\langle 3 + d | a, b_1, b_2, \dots, b_d \rangle$, залежної від $1 + d$ масштабних факторів. Такий підхід можна було б використати для дослідження конфігурацій (геометрій) $3 + d$ -мірного простору. Однак, ми обмежимося простим випадком, окресленим раніше.

Тут, починаючи з дії релятивістської системи “гравітаційне поле+ідеальна рідина”, ми переформулюємо динаміку в термінах канонічних змінних, потрібних для подальшого квантування.

Для матерії, розташованій в області $x^2 + y^2 + z^2 < r_f^2$ 3-простору, має місце закон збереження енергії:

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + P) = 0, \quad (2.101)$$

де крапка означає похідну за t .

Рівняння (2.96) приводять до рівняння стану,

$$P = \frac{1}{3}\varepsilon - \frac{4}{3}B, \quad (2.102)$$

а шляхом інтегрування (2.101) одержуємо залежність густини енергії ε від масштабного фактору:

$$\varepsilon = B + \frac{\mathcal{E}}{a^4}, \quad (2.103)$$

де $\mathcal{E} = \pi^2 g T^4 / 30$, і масштабний фактор при $t = t_0$ покладається $a_0 = 1$.

Отже, функціонал дії ідеальної рідини в системі спокою матерії є

$$\begin{aligned} S_M &= - \int \varepsilon a^3 dt d^3x \\ &= -V_f \int \left(B a^3 + \frac{\mathcal{E}}{a} \right) dt, \end{aligned} \quad (2.104)$$

де $V_f = 4\pi r_f^3 / 3$ – об’єм файєрбола.

Зауважимо, що послідовне виведення S_M можна здійснити, наприклад, за допомогою формалізму з праці [105].

Аби записати функціонал дії для гравітаційного поля, нам потрібно знайти скалярну кривину $(3 + d) + 1$ -вимірного простору-часу. Опустимо внесок, що містить чотиривимірну кривину. Однак, загалом, цей член видається важливим, оскільки виникає як квантова поправка до дії для матерії. Зауважимо, що “квантова поправка” зазвичай включає нескінченне число членів

вищого порядку за кривиною, але в нашому розгляді цілком опускається, а функціонал дії формулюється згідно з Ейнштейном.

Незникаючими символами Крістофеля другого роду будуть

$$\begin{aligned}\Gamma_{xx}^0 = \Gamma_{yy}^0 = \Gamma_{zz}^0 &= a\dot{a}, & \Gamma_{\phi_n\phi_n}^0 &= b\dot{b}, \\ \Gamma_{0x}^x = \Gamma_{0y}^y = \Gamma_{0z}^z &= \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma_{0\phi_n}^{\phi_n} &= \frac{\dot{b}}{b},\end{aligned}\quad (2.105)$$

і скаляр Річчі подається у вигляді:

$$R[a, b] = G[a, b] + \frac{2}{a^3 b^d} \frac{d^2(a^3 b^d)}{dt^2}, \quad (2.106)$$

де можна проігнорувати останній член у правій стороні, який приводить до повної похідної за еволюційним параметром. Введемо позначення:

$$G[a, b] = -6\frac{\dot{a}^2}{a^2} - 6d\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - d(d-1)\frac{\dot{b}^2}{b^2}. \quad (2.107)$$

Як обговорювалося вище, гравітаційне поле має бути однорідним і нетривіальним всередині тривимірного фایрбола, тоді як метрика у просторі поза ним асимптотично прямує до метрики Мінковського (без додаткових вимірів). Тому, можна обмежити область інтегрування у функціоналі дії об'ємом, заповненим кварк-глюонною речовиною. Таке наближення означає, що ми нехтуємо поверхневим внеском, де градієнт тиску, гравітаційні потенціали та кривина, в принципі, можуть бути досить великими. Це наближення працює, якщо профілі розподілу речовини та масштабні фактори зберігаються. Легко зрозуміти, що зміни у розподілі матерії пов'язані з поздовжніми гідродинамічними хвилями, що поширюються зі швидкістю звуку $c_s \equiv \sqrt{dP/d\varepsilon} \approx 0.57c$. Тоді, характерний час цих змін можна оцінити як $\tau_c = r_f/c_s \approx 12.3$ фм/с, який є співмірним з часом життя файрбола. Тоді впливає, що час процесу має обмежуватись величиною $\tau_c \gg \Delta t$.

Отже, функція Лагранжа системи записується так

$$L = V_f [M_{Pl}^2 G[a, b] a^3 b^d - U(a)], \quad (2.108)$$

де застосовано співвідношення $M_f^{2+d} = M_{\text{Pl}}^2 / \int d^d \phi_n$ і введено потенціал для матерії $U(a) = Ba^3 + \mathcal{E}/a$.

Канонічні імпульси, спряжені до масштабних факторів a і b , відповідно є

$$p_a \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = -6M_{\text{Pl}}^2 V_f a^2 b^d \left(2\frac{\dot{a}}{a} + d\frac{\dot{b}}{b} \right), \quad (2.109)$$

$$p_b \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{b}} = -2dM_{\text{Pl}}^2 V_f a^3 b^{d-1} \left((d-1)\frac{\dot{b}}{b} + 3\frac{\dot{a}}{a} \right). \quad (2.110)$$

Розв'язуючи ці співвідношення відносно швидкостей $\dot{a}$, $\dot{b}$, знаходимо

$$\dot{a} = \frac{1}{2(2+d)M_{\text{Pl}}^2 V_f a b^d} \left(\frac{d-1}{3} p_a - \frac{b}{a} p_b \right), \quad (2.111)$$

$$\dot{b} = \frac{1}{d(d+2)M_{\text{Pl}}^2 V_f a^2 b^{d-1}} \left(\frac{b}{a} p_b - \frac{d}{2} p_a \right). \quad (2.112)$$

Канонічний гамільтоніан системи є

$$\begin{aligned} H &\equiv \dot{a}p_a + \dot{b}p_b - L \\ &= \frac{d(d-1)a^2 p_a^2 - 6dabp_a p_b + 6b^2 p_b^2}{12d(d+2)M_{\text{Pl}}^2 V_f a^3 b^d} + V_f U(a). \end{aligned} \quad (2.113)$$

Скористаємося цією функцією після заміни класичних змінних операторами для формулювання рівняння Вілера–ДеВіта.

2.2.2. Ймовірність прояву додаткових вимірів. До квантування, зробимо деякі модифікації. Завдяки загальній коваріантності, система на класичному рівні повинна описуватися гамільтоновою в'яззю $H = 0$, яку можна переписати так

$$\frac{12}{d(d+2)} \left(bp_b - \frac{d}{2} ap_a \right)^2 = a^2 [p_a^2 - \varkappa^2 ab^d U(a)], \quad (2.114)$$

де введено коефіцієнт $\varkappa^2 \equiv 24M_{\text{Pl}}^2 V_f^2 / (\hbar c)^6 \approx 2.5 \cdot 10^{36} \text{ MeV}^{-4}$.

За відсутності коректної ґраниці при $d \rightarrow 0$, зробимо канонічне перетворення. Зручно ввести нові змінні $\xi_d = ab^{d/2}$, $v_d = b^d$ (залежні від d) замість

масштабних факторів a, b . Канонічні імпульси пов'язані так

$$p_\xi = p_a b^{-d/2}, \quad p_v = \frac{1}{db^d} \left(b p_b - \frac{d}{2} a p_a \right), \quad (2.115)$$

$$p_a = \sqrt{v_d} p_\xi, \quad p_b = d v_d^{1-1/d} \left(p_v + \frac{\xi_d}{2 v_d} p_\xi \right). \quad (2.116)$$

У термінах нових канонічних змінних, одержуємо

$$\frac{12d}{d+2} v_d^2 p_v^2 = \xi_d^2 \left[p_\xi^2 - \kappa^2 \frac{\xi_d}{\sqrt{v_d}} U \left(\frac{\xi_d}{\sqrt{v_d}} \right) \right]. \quad (2.117)$$

При $d = 0$, це рівняння зводиться до такого:

$$p_\xi^2 - \kappa^2 \frac{\xi_0}{\sqrt{v_0}} U \left(\frac{\xi_0}{\sqrt{v_0}} \right) = 0, \quad (2.118)$$

де $\xi_0 = a$, $v_0 = 1$, $p_\xi = p_a$, як і повинно бути.

Згідно зі схемою канонічного квантування, замінимо імпульсні змінні диференціальними операторами:

$$p_\xi \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial \xi_d}, \quad p_v \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial v_d}. \quad (2.119)$$

Рівняння Вілера–ДеВітта з нормальним впорядкуванням операторів записується як

$$\left[\xi_d^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_d^2} - \frac{12d}{d+2} v_d^2 \frac{\partial^2}{\partial v_d^2} + \kappa^2 \frac{\xi_d^3}{\sqrt{v_d}} U \left(\frac{\xi_d}{\sqrt{v_d}} \right) \right] \Psi_d = 0. \quad (2.120)$$

При $d = 0$, воно зводиться до звичайного диференціального рівняння:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} + \kappa^2 a U(a) \right] \Psi_0 = 0. \quad (2.121)$$

Зауважимо, що ця границя має сенс завдяки вигляду (просторово-часового інтервалу і) гамільтоніана, де параметр d може бути фрактальною (не цілою) величиною. Окрім того, за неперервної зміни d топологія (2.97) додаткових вимірів теж стає фрактальною. Однак, ми тут не обговорюємо аспекти фрактальної топології.

Для деяких функцій $U(x)$, ці рівняння можна розв'язати точно. Однак, для достатньо великих значень виразу $\varkappa^2 U(x)$ в нашому розгляді цілком застосовне квазікласичне ВКБ наближення.

Також зауважимо, що ми не накладали ґраничні умови на нашу модель, що можна тлумачити як псевдо-евклідовий аналог пропозиції “без меж” Хартлі–Хокінга.

Далі дослідимо часткові режими рівняння стану моделі.

Випадок зв'язаної матерії. Нехай $B \gg \mathcal{E}$, і $U(a) \approx Ba^3$. У цьому випадку (холодної матерії), тиск речовини – від'ємний, і наближено рівний $-B$. Динаміка гравітаційного поля сильно пригнічена в цьому режимі. Тільки зі зменшенням B , можна очікувати зміну поля. Однак, такий (зв'язаний) стан матерії, передбачений КХД, треба дослідити для кращого розуміння явищ, що виникають при об'єднанні сильної та гравітаційної взаємодій.

Стисло опишемо схему подальших обчислень. Обмежуючись першою квантовою поправкою, хвильова функція набуває вигляду:

$$\Psi \sim e^{iS/\hbar}, \quad S \approx S_0 + \frac{\hbar}{i} S_q, \quad (2.122)$$

де сталу Планка $\hbar$ записано явно; S_0 – класична дія, яка задовольняє рівняння Гамільтона–Якобі:

$$\frac{12d}{d+2} v_d^2 \left(\frac{\partial S_0}{\partial v_d} \right)^2 = \xi_d^2 \left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial \xi_d} \right)^2 - \varkappa^2 \frac{\xi_d}{\sqrt{v_d}} U \left(\frac{\xi_d}{\sqrt{v_d}} \right) \right]. \quad (2.123)$$

Квантову поправку S_q знаходимо з рівняння:

$$2\xi_d^2 \frac{\partial S_0}{\partial \xi_d} \frac{\partial S_q}{\partial \xi_d} + \xi_d^2 \frac{\partial^2 S_0}{\partial \xi_d^2} = \frac{12d}{d+2} \left(2v_d^2 \frac{\partial S_0}{\partial v_d} \frac{\partial S_q}{\partial v_d} + v_d^2 \frac{\partial^2 S_0}{\partial v_d^2} \right). \quad (2.124)$$

Підставляючи $U(a)$, хвильова функція в наближенні ВКБ є

$$\Psi_d \sim \frac{v_d}{\xi_d} \exp \left(i\varkappa \sqrt{\frac{B}{3}} \frac{2+d}{6-d} \frac{\xi_d^3}{v_d} \right), \quad (2.125)$$

$$\Psi_0 \sim \frac{1}{a} \exp \left(i\varkappa \frac{\sqrt{B}}{3} a^3 \right) = \frac{\sqrt{v_d}}{\xi_d} \exp \left(i\varkappa \frac{\sqrt{B}}{3} \frac{\xi_d^3}{v_d^{3/2}} \right). \quad (2.126)$$

З вигляду Ψ_d видно, що число додаткових вимірів обмежується $d = 6$. При $d > 6$, хвильова функція стає дійсною і експоненційно загасає. Оскільки $\kappa\sqrt{B} \approx 6.3 \cdot 10^{23}$, $\Psi_{d>6}$ зникає. З іншого боку, хвильова функція

$$\Psi_d^* \sim \frac{v_d}{\xi_d} \exp \left(-i\kappa \sqrt{\frac{B}{3}} \frac{2+d}{6-d} \frac{\xi_d^3}{v_d} \right), \quad (2.127)$$

експоненційно зростає при $d > 6$ і, тому, такий стан – нефізичний. Це підтверджує, що число додаткових вимірів в даній моделі не перевищує шість.

Використовуючи знайдені хвильові функції, розглянемо амплітуду переходу з 3- до $3+d$ -вимірному простору за фіксованого v_d . Припустимо, що всі компактні виміри є відкритими, тобто $v_d = 1$. У цьому випадку, хвильова функція описується загальним виразом:

$$\langle \xi_d | 3+d \rangle = \frac{\sqrt{\Xi}}{\xi_d} \exp \left(i\kappa \sqrt{\frac{B}{3}} \frac{2+d}{6-d} \xi_d^3 \right). \quad (2.128)$$

Ця хвильова функція нормується по відношенню до міри інтегрування:

$$\int_{\Xi}^{\infty} |\langle \xi_d | 3+d \rangle|^2 d\xi_d = 1, \quad (2.129)$$

де нижня межа обрана такою, що $\Xi > 0$. Якщо $\Xi = 1$, маємо точно масштабний фактор простору-часу Мінковського. Це означає, що інтегрування за областю $\xi_d \in (\Xi, \infty)$ враховує лише геометрію розширення. Процес колапсу (коли $\xi_d \in (0, \Xi)$) слід ігнорувати в системі, щоб виключити нефізичну ситуацію. Математично, інтегрування в межах $\xi_d \in (0, \Xi)$ приводить до розбіжностей.

Амплітуду переходу означимо як

$$\mathcal{T}(d) \equiv \left| \int_{\Xi}^{\infty} \langle 3 | \xi_d \rangle \langle \xi_d | 3+d \rangle d\xi_d \right|. \quad (2.130)$$

Результат обчислень можна подати так:

$$\mathcal{T}(d) = \left| 1 + izU \left(1, \frac{5}{3}, -iz \right) \right|, \quad (2.131)$$

де $U(a, b, z)$ – функція Кумера,

$$z = \varkappa \frac{\sqrt{B}}{3} \Xi^3 \left(\sqrt{3 \frac{2+d}{6-d}} - 1 \right). \quad (2.132)$$

При $z \rightarrow \infty$ і $d > 0$, амплітуда переходу прямує до $\mathcal{T} \approx 1/(3z)$. При $d \rightarrow 0$ ($z \rightarrow 0$), маємо використати (2.131), тому $\mathcal{T}(0) = 1$.

У цьому випадку можна ввести густину ймовірності:

$$\mathcal{P}(d) = \mathcal{T}^2(d) \left/ \int_0^6 \mathcal{T}^2(x) dx \right., \quad (2.133)$$

яка залежить від параметра $\mu \equiv \varkappa \sqrt{B} \Xi^3 / 3$. Ми не розглядаємо $d < 0$.

Поведінку $\mathcal{P}(d)$ зображено на Рис. 2.7. Відразу впливає, що ймовірність прояву додаткових вимірів є *скінченною*.

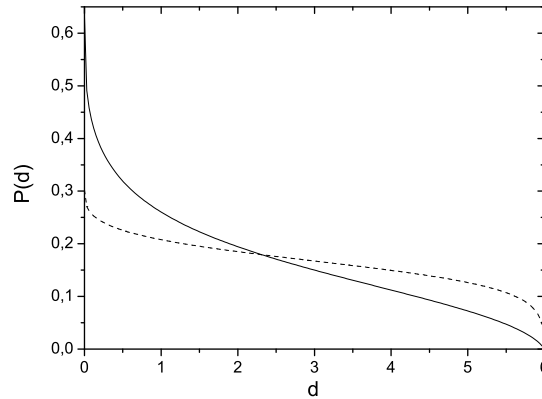


Рис. 2.7. Густина ймовірності прояву додаткових вимірів при $\mu = 0.11$ (суцільна лінія) і $\mu = 0.01$ (пунктирна лінія).

Використовуючи $\mathcal{P}(d)$, дослідимо середнє число додаткових вимірів:

$$\langle d \rangle = \int_0^6 x \mathcal{P}(x) dx, \quad (2.134)$$

як функцію від μ . Отже, одержуємо $\langle d \rangle \rightarrow 3$, коли $\mu \rightarrow 0$, і $\langle d \rangle \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$. Щоб відтворити $\langle d \rangle = 2$, передбачене парадигмою АДД, маємо $\mu \approx 0.11$. В

принципі, можна тлумачити $\Lambda_{\text{eff}} \equiv B\Xi^6$ як густину енергії вакууму. Значення $\langle d \rangle = 2$ одержується для $\Lambda_{\text{eff}} \approx 4.36 \cdot 10^{-38} \text{ MeV}^4$. Оскільки космологічна стала часто інтерпретується як енергія вакууму, видно, що ця величина $\Lambda = 3.956 \cdot 10^{-35} \text{ MeV}^4$ (згідно з [41, 339]) є більшою за Λ_{eff} .

Випадок домінування випромінювання. Покладемо $\mathcal{E} \gg B$, і $U(a) \approx \mathcal{E}/a$. Тоді, температура кварк-глюонного газу є значно вищою за $B^{1/4} = 200 \text{ MeV}$. Цей випадок цікавий тим, що густина енергії (і температура) матерії може змінюватися завдяки гравітаційним ефектам і за наявності додаткових вимірів, поки стала B припускається незмінною.

Оскільки густина енергії $\mathcal{E}$ – функція температури T , яка може змінюватись, введемо квазі-імпульс $k = \kappa\sqrt{\mathcal{E}}$ в якості вільного параметру, і характерний квазі-імпульс $K \approx 2.2 \cdot 10^{23}$ для $T = 200 \text{ MeV}$. Тоді, $k > K$.

Рівняння Вілера–ДеВіта без граничних умов для системи, де домінує випромінювання, розв’язується точно і дає хвильову функцію:

$$\Psi_0 \sim \exp(ika) = \exp\left(ik\frac{\xi_d}{\sqrt{v_d}}\right), \quad (2.135)$$

$$\Psi_d \sim v_d^\lambda \sqrt{\xi_d} H_{\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{48d}{d+2}\lambda(\lambda-1)}}^{(1)}(k\xi_d), \quad (2.136)$$

де $H_\nu^{(1)}$ – функція Ханкеля; λ – довільне число, таке що $\text{Re } \lambda > 0$.

Зауважимо, що Ψ_d є нескінченною при $\xi_d = 0$, якщо $\lambda(\lambda-1) > 0$. Справді, подальший аналіз доводить, що $\lambda(\lambda-1) < 0$ і $\lambda = 1/2 - i\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$. В останньому випадку, індекс функції Ханкеля – чисто уявне число, що приводить до зникнення хвильової функції при $\xi_d = 0$.

Для $k > 10^{23}$, розглянемо асимптотичний вираз для Ψ_d (з точністю до сталої фази):

$$\Psi_d \sim v_d^\lambda \exp(ik\xi_d) \left(1 + i\lambda(\lambda-1)\frac{6d}{d+2}\frac{1}{k\xi_d} + O\left(\frac{1}{(k\xi_d)^2}\right)\right), \quad (2.137)$$

де опустимо член порядку $O(1/(k^2\xi_d^2))$.

З іншого боку, підхід ВКБ приводить до такої класичної дії і першої кван-

тової поправки:

$$S_0 = \sqrt{c + \xi_d^2 k^2} - \sqrt{c} \ln \left(2 \frac{c + \sqrt{c} \sqrt{c + \xi_d^2 k^2}}{\xi_d} \right) - \frac{\sqrt{c}}{2} \sqrt{\frac{d+2}{3d}} \ln v_d + C_1,$$

$$S_q = \frac{1}{2} \ln \frac{\xi_d}{\sqrt{c + \xi_d^2 k^2}} - \sqrt{\frac{3d}{d+2}} \ln \left(2 \frac{c + \sqrt{c} \sqrt{c + \xi_d^2 k^2}}{\xi_d} \right) + C_2,$$

де c , C_1 , C_2 – довільні константи.

Використовуючи ці формули, спробуємо проаналізувати узгодженість наближених розв'язків і пов'язати константи.

Перш за все, розкладемо S_0 і S_q у той самий спосіб як і Ψ_d :

$$S_0 = C_1 - \sqrt{c} \ln(2k\sqrt{c}) - \frac{\sqrt{c}}{2} \sqrt{\frac{d+2}{3d}} \ln v_d + \xi_d k - \frac{c}{2\xi_d k} + O\left(\frac{c^2}{k^2 \xi_d^2}\right),$$

$$S_q = C_2 - \frac{1}{2} \ln k - \sqrt{\frac{3d}{d+2}} \ln(2k\sqrt{c}) - \sqrt{\frac{3d}{d+2}} \frac{\sqrt{c}}{\xi_d k} + O\left(\frac{1}{k^2 \xi_d^2}\right).$$

Порівнюючи $\exp(iS_0 + S_q)$ з Ψ_d з (2.137), зручно покласти

$$C_1 = \sqrt{c} \ln(2k\sqrt{c}), \quad C_2 = \frac{1}{2} \ln k + \sqrt{\frac{3d}{d+2}} \ln(2k\sqrt{c}), \quad c = \frac{3d}{d+2} s^2, \quad (2.138)$$

де s служить новим параметром замість c .

Порівнюючи цей вираз з (2.137) знов, виводимо, що $s = 2i\lambda$ і $\lambda(\lambda - 1) = -(s^2 - 2is)/4$. Для того, щоб $s^2 - 2is \in \mathbb{R}$ (оператор Гамільтона має бути (квазі)ермітовим), знаходимо параметризацію, $s = 2\mu + i$, яка дає $s^2 - 2is = 1 + 4\mu^2$, де $\mu \in \mathbb{R}$.

Ми інтерпретуємо випадок $\mu = 0$ як основний стан системи. Без втрати загальних властивостей, зосередимося на цій ситуації. Ясно, що збуджені стани є менш ймовірними ніж даний випадок.

Тепер обговоримо умову нормування для хвильової функції. Будемо знов припускати, що $v_d = 1$. Тоді, масштабний фактор ξ_d пробігає значення від 0 до ∞ , оскільки немає проблеми з від'ємним тиском і колапсом. Завдяки $\mathbb{Z}_2$ симетрії просторово-часового інтервалу (відносно інверсії знаку масштабних факторів), межі зміни ξ_d можна розширити до $(-\infty, +\infty)$.

Зауважимо, що асимптотичний вираз для Ψ_d має полюс при $\xi_d = 0$. Ця властивість є важливою для процедури нормування. Щоб означити контур інтегрування в околі $\xi_d = 0$, звернемось до точного розв'язку (2.136): симетрія профілю $|\Psi_d|^2$ в межах $\xi_d \in (-\infty, 0)$ і $\xi_d \in (0, +\infty)$ зберігається, тільки якщо $\xi_d \rightarrow \xi_d + i0^+$.

Використовуючи відому формулу для δ -функції Дірака:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx = \delta(k), \quad (2.139)$$

хвильова функція $|3, k\rangle = \exp(ik\xi_d)/\sqrt{2\pi}$ при $d = 0$ нормується так

$$\langle 3, q | 3, k \rangle = \delta(k - q). \quad (2.140)$$

Це відношення лише відображає збереження енергії в трьох вимірах.

Умова нормування для хвильової функції при $d > 0$,

$$|3 + d, k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ik\xi_d) \left(1 - i \frac{3d}{2(d+2)} \frac{1}{k\xi_d} \right), \quad (2.141)$$

виглядає як

$$\langle 3 + d, q | 3 + d, k \rangle \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi_d}{2\pi} e^{i\xi_d(k-q)} \left[1 - \frac{3d}{2(d+2)} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{q} \right) \frac{i}{\xi_d + i0^+} \right] \quad (2.142)$$

$$= \delta(k - q) - \frac{3d}{2(d+2)} \frac{q - k}{kq} \theta(q - k). \quad (2.143)$$

Видно, що густина енергії матерії змінюється за додаткових вимірів.

Зауважимо, що член $O(1/(k^2\xi_d^2))$ в $|3 + d, k\rangle$ після інтегрування дає величину порядку $O((k - q)^2/(k^2q^2))$. Тому, наше наближення працює для малих відхилень енергії $|k - q|/k$. Функція θ така, що $\theta(0) = 1/2$.

Після отримання всіх необхідних інгредієнтів, обчислимо амплітуду переходу від 3- до $3 + d$ -вимірного простору:

$$\langle 3, q | 3 + d, k \rangle = \delta(k - q) - \frac{3d}{2(d+2)} \frac{1}{k} \theta(q - k). \quad (2.144)$$

Тут, θ -функція Хевісайда описує охолодження матерії. Зрозуміло, що цей процес пов'язаний з передачею енергії від матерії до вищих вимірів.

Окрім того, існує інший процес, який полягає у зміні об'єму системи. Якщо $v_d \neq 1$, маємо замінити q на $q/\sqrt{v_d}$ в останній формулі.

Ймовірність прояву додаткових вимірів у випадку домінування випромінювання визначається так:

$$\mathcal{W} = \int_0^\infty |\langle 3, q | 3 + d, k \rangle|^2 dk. \quad (2.145)$$

Як прийнято [370], слід зробити заміну:

$$\delta^2(k - q) \rightarrow \delta(k - q) \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{i\xi_d(k-q)} d\xi_d = \delta(k - q). \quad (2.146)$$

Обмежуючись членом порядку $1/q$, знаходимо

$$\mathcal{W} = 1 - \frac{3d}{2(d+2)} \frac{1}{q}. \quad (2.147)$$

Тобто, для збудження додаткових вимірів потрібна значна енергія (або температура T). Однак, модель передбачає нескінченне число додаткових вимірів на відміну від випадку зв'язаної матерії. Оскільки

$$\mathcal{W}_{d \rightarrow \infty} = 1 - \frac{3}{2q}, \quad (2.148)$$

проблематично знайти густину ймовірності в нашому наближенні.

Отже, ми розглянули модель в $3 + d$ просторових вимірах з матерією, яка описується моделлю мішка, з метою оцінити ймовірність прояву та число компактних додаткових вимірів в ядро-ядерних зіткненнях. Гравітаційна стала в $(3 + d) + 1$ -вимірному просторі-часі введена на основі парадигми АДД [22], а топологія додаткових вимірів покладається тороїдальною, згідно із сценарієм Калузи-Кляйна.

Заради спрощення, амплітуду переходу від 3- до $3 + d$ -вимірного простору обчислено в двох режимах моделі мішка: і) випадок повністю зв'язаної матерії

(що еквівалентно моделі з космологічною сталою); ii) випадок домінування випромінювання, коли сталою мішка нехтуємо.

У першому випадку число додаткових вимірів обмежено $d = 6$, що узгоджується з передбаченням теорії суперструн.

У другому випадку показано, що густина енергії (температура) матерії змінюється за присутності додаткових вимірів, число яких тут необмежено.

Можна визначити середнє число додаткових вимірів у першому випадку. За певних умов одержується $\langle d \rangle = 2$, як передбачено АДД.

Важливо підкреслити, що ймовірність виникнення додаткових вимірів є скінченною в обидвох режимах. Ймовірність проміжного режиму тут не розглядалася і є предметом окремого дослідження.

2.3. Газ фотонів з планківським обмеженням енергії

Нещодавна деформація спеціальної теорії відносності, яку називають подвійною спеціальною теорією відносності (ПСТВ), спільно враховує дві інваріантні фундаментальні шкали, які накладають відповідні обмеження: одна з них – шкала швидкості, обмежена швидкістю світла, а інша – енергетична шкала, природно обмежена енергією Планка [16, 15, 216, 217, 221]. ПСТВ важлива для опису динаміки (елементарних) частинок за дуже високих енергій, які наближаються до масштабу Планка. Вважається, що на такому масштабі на структуру простору–часу можуть впливати ефекти квантової гравітації.

Спочатку ПСТВ була введена алгебраїчно з використанням певних деформацій групи Лоренца [216, 217]. Пізніше, її ввели на основі кількох фізичних постулатів, включаючи вимогу її зведення до спеціальної теорії відносності у границі низьких енергій [16, 15].

У звичайній спеціальній теорії відносності імпульс змінюється при перетворенні Лоренца генератором нескінченно малого бусту J як

$$\delta p_0 = \{J, p_0\} = p_1, \quad \delta p_1 = \{J, p_1\} = p_0, \quad (2.149)$$

де розглянуто 1+1 виміри, і $\{, \}$ позначає дужку Пуассона.

З іншого боку, ПСТВ модель Магейхо–Смоліна [221] набуває вигляду

$$\delta p_0 = \{J, p_0\} = \left(1 - \frac{p_0}{\kappa}\right) p_1, \quad \delta p_1 = \{J, p_1\} = p_0 - \frac{p_1^2}{\kappa}, \quad (2.150)$$

де κ відіграє роль енергії Планка (обмеження).

Завдяки фактору $1 - p_0/\kappa$, для $p_0 = \kappa$, маємо $\delta p_0 = 0$, і, отже, інваріантність енергії Планка. При перетворенні (2.150), знаходимо інваріантну велчину $p^2/(1 - p_0/\kappa)^2$, де $p^2 = p_0^2 - p_1^2$.

Моделі ПСТВ передбачають, що імпульс частинки перетворюється нелінійно під дією групи Лоренца. У цьому відношенні, існує безліч способів реалізувати нелінійні представлення групи Лоренца, що підкоряються вищезгаданим постулатам, але для розвинення теорії існують два основні шляхи: або працювати в звичайному просторі–часі, або досліджувати простір–час із залученням координат, що не комутують. У некомутативному випадку, для визначення класичної динаміки Гамільтона використовуються неканонічні дужки Пуассона. Зрозуміло, що залежно від вибору вихідних припущень, моделі можуть приводити до різних фізичних наслідків або передбачень.

Тут ми пропонуємо нове правило “ κ -додавання” для енергій частинок та вивчаємо його властивості, а потім вводимо відповідний гамільтоніан для одномодової багатофотонної системи. На його основі, припускаючи незалежність різних мод, ми досліджуємо термодинаміку випромінювання чорного тіла в рамках ПСТВ і отримуємо основні термодинамічні величини. Наші розрахунки приводять до досить незвичних результатів, особливості яких аналізуються та ілюструються графіками. Окрім основних наслідків та висновків, ми даємо також коротке порівняння з відповідними аспектами у деяких суміжних роботах.

2.3.1. Нове правило додавання енергії та гамільтоніан. Точне дисперсійне співвідношення для ПСТВ в моделі Магейхо–Смоліна [176] є

$$\frac{E^2 - p^2}{(1 - E/\kappa)^2} = m^2, \quad (2.151)$$

де $p_0 = E$ і $p = |\vec{p}|$; m – маса спокою. Це співвідношення перетворюється у звичайне дисперсійне співвідношення через (пряме/зворотнє) відображення

$$\epsilon = \frac{E}{1 - E/\kappa}, \quad \vec{\pi}_i = \frac{\vec{p}_i}{1 - E/\kappa}, \quad (2.152)$$

$$E = \frac{\epsilon}{1 + \epsilon/\kappa}, \quad \vec{p}_i = \frac{\vec{\pi}_i}{1 + \epsilon/\kappa}, \quad (2.153)$$

так що, маємо $\epsilon^2 - \pi^2 = m^2$.

Рівняння (2.153) показує, що $E = \kappa$ у межі $\epsilon \rightarrow \infty$, і з $\epsilon \geq 0$ в (2.153), маємо $E \leq \kappa$, що вказує на існування максимальної енергії в Природі.

Замість недеформованого закону збереження енергії, $\epsilon_{\text{tot}} = \epsilon_1 + \epsilon_2$, ми пропонуємо новий закон з ПСТВ:

$$E_{\text{tot}} = E_1 \oplus_{\kappa} E_2, \quad (2.154)$$

з “ κ -додаванням”

$$a \oplus_{\kappa} b = \frac{\frac{a}{1-a/\kappa} + \frac{b}{1-b/\kappa}}{1 + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{a}{1-a/\kappa} + \frac{b}{1-b/\kappa} \right)}. \quad (2.155)$$

Ясно, що κ -додавання зводиться до звичайного додавання у межі $\kappa \rightarrow \infty$.

Властивості κ -додавання: 1) κ -додавання комутативне: $a \oplus_{\kappa} b = b \oplus_{\kappa} a$; 2) воно асоціативне: $(a \oplus_{\kappa} b) \oplus_{\kappa} c = a \oplus_{\kappa} (b \oplus_{\kappa} c)$; 3) існує 0-тотожність: $a \oplus_{\kappa} 0 = a$; 4) існує обернений елемент $\ominus_{\kappa} a$ для a : $a \oplus_{\kappa} (\ominus_{\kappa} a) = 0$, що дає $\ominus_{\kappa} a = -\frac{a}{1-2a/\kappa}$; 5) κ -додавання κ і будь-якого елемента a дає κ : $a \oplus_{\kappa} \kappa = \lim_{b \rightarrow \kappa} a \oplus_{\kappa} b = \kappa$. Остання властивість вказує, що енергія Планка – максимальна енергія: $E \oplus_{\kappa} \kappa = \kappa$. Окрім того, для будь-яких додатних енергій E_1, E_2 ($\neq \kappa$) ми знаємо, що $E_1 \oplus_{\kappa} E_2 < \kappa$. Отже, енергія Планка – максимальна енергія, так само, як швидкість світла – максимальна швидкість.

Фотони на планківському масштабі. Фотони задовольняють деформоване дисперсійне співвідношення на планківському масштабі, яке збігається з недеформованою теорією, тобто $E = p$.

Однак, енергія фотона задовольняє деформований закон збереження енергії, заданий κ -додаванням. Отже, повна енергія для n фотонів відрізняється від числа n енергій одного фотона, $E_{n \text{ photons}} \neq nE_{1 \text{ photon}}$.

Наприклад, енергія двох тотожних фотонів на планківському масштабі задовольняє

$$E_{2 \text{ photons}} = E_{1 \text{ photon}} \oplus_{\kappa} E_{1 \text{ photon}} = \frac{2E_{1 \text{ photon}}}{1 + E_{1 \text{ photon}}/\kappa}. \quad (2.156)$$

Якщо покласти

$$n \odot_{\kappa} a = \underbrace{a \oplus_{\kappa} a \oplus_{\kappa} \cdots \oplus_{\kappa} a}_n \quad (2.157)$$

енергія n фотонів задається як

$$E_{n \text{ photons}} = n \odot_{\kappa} E_{1 \text{ photon}} = \frac{nE_{1 \text{ photon}}}{1 + (n-1)E_{1 \text{ photon}}/\kappa} \quad (2.158)$$

де вимагаємо $E_{1 \text{ photon}} = h\nu \leq \kappa$. Цікаво, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{n \text{ photons}} = \kappa. \quad (2.159)$$

Отже, гамільтоніан тотожних фотонів на планківському масштабі є

$$H = \frac{Nh\nu}{1 + (N-1)h\nu/\kappa} \quad (2.160)$$

де оператори народження/знищення фотона задовольняють

$$[a, a^{\dagger}] = 1, \quad N = a^{\dagger}a \quad (2.161)$$

і число станів фотона береться як $N|n\rangle = n|n\rangle$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Гамільтоніан (2.160) багатьох одномодових (монохроматичних) фотонів, зв'язаних звичайними бозонними формулами (2.161), принципово відрізняється від відомого вільного (або лінійного) гамільтоніану: він забезпечує нетривіальну самодію в кожній моді. Іншими словами, κ -додавання (2.158) природно приводить до самодії в гамільтоніані (2.160).

Спільне з класом деформованих осциляторів. Варто зазначити, що нелінійний гамільтоніан (2.160) також можна отримати іншим способом поза ПСТВ, а саме в рамках теорії деформованих осциляторів (бозонів).

Конкретний деформований осцилятор (ДО) з операторами народження і знищення $\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}$, які задовольняють співвідношення

$$[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = \phi_\kappa(N+1) - \phi_\kappa(N), \quad \phi_\kappa(N) \equiv \tilde{a}^\dagger \tilde{a} = \frac{N}{1 + \kappa^{-1}(N-1)h\nu}, \quad (2.162)$$

визначається відповідною функцією структурної деформації (ФСД) $\phi_\kappa(N)$ (див. [237]), яка тут залежить від параметра деформації $h\nu/\kappa$. Це приводить до вільного гамільтоніану деформованих бозонів:

$$\tilde{H} = h\nu \tilde{a}^\dagger \tilde{a} = h\nu \phi_\kappa(N),$$

який збігається з (2.160).

У цьому випадку, самодія схована в деформації. Якщо $\kappa^{-1} \rightarrow 0$, H і $\tilde{H}$ зводяться до лінійного гамільтоніану звичайних фотонів.

Явний вигляд ФСД в (2.162) показує її раціональну залежність від оператора числа збуджень N . Дуже подібний ДО, чия ФСД $\phi_\mu(N) = N/(1 + \mu N)$ також має раціональний тип N -залежності, відомий як μ -осцилятор Янусіса [171]. Важливо, що ДО з раціональною нелінійністю принципово відрізняються від відомих одно- і дво-параметричних ДО Фібоначчі [20, 51, 220, 68, 21] на основі ФСД експоненційного типу. Останні допускають також 3-, 4- і 5-параметричні розширення (експоненційного типу), подані в [77, 243, 57], і всі три належать до ДО класу Фібоначчі [121]. Навпаки, ДО з раціональною нелінійністю в ФСД, як μ -осцилятор і подібні, не є Фібоначчі, але є квазі-Фібоначчі ДО [121].

Є низка робіт по дослідженню різних аспектів μ -осцилятора і μ -аналогів моделі Бозе-газу. Згадаймо роботи, що розвивають модель μ -Бозе газу в контексті n -частинкового розподілу та кореляційних функцій [122, 123], або з точки зору μ -деформованої термодинаміки [293]. Нещодавно було запропо-

новано застосування μ -бозе конденсату [126] для ефективного моделювання загальних властивостей темної матерії, що оточує карликові галактики.

2.3.2. Випромінювання чорного тіла. В принципі, існують різні можливості опису модифікованого спектру випромінювання, що складається з нескінченного числа фотонних мод з різними частотами. Найбільш обґрунтована точка зору на ПСТВ багаточастинкових систем [224] пропонує зберегти стандартну аддитивну форму повної енергії і, отже, знехтувати нелокальною взаємодією між різними модами. На практиці ми використовуємо κ -додавання лише для тотожних частинок, тобто для фотонів однакової довжини хвилі. Таким чином, κ -додавання, математично сформульоване для довільно віддалених частинок, викликає додаткове (нелокальне) притягання між монохроматичними фотонами, що зменшує їх загальну енергію-масу. У той же час, густина таких фотонів виявляється порядку планківської густини, $\kappa^3(\hbar c)^{-3}$.

За цих умов, ми не розглядаємо проблему “футбольного м’яча” в ПСТВ [164], яка стосується переважно макроскопічних тіл, і відкидаємо її завдяки фокусуванню на щільній (і компактній) системі, що складається з невзаємодіючих підмножин тотожних квантів світла. Однак, подібно до інших теорій ПСТВ, члени $1/\kappa$ -розкладу повної енергії-маси розбігаються за степеневим законом із збільшенням числа фотонів [164], тоді як точний вираз не перевищує κ . Це пов’язано з особливістю врахування додаткового притягання, яке породжується модифікацією додавання енергії-імпульсу.

Застосовуючи планківське обмеження лише до підсистеми тотожних фотонів з однаковою циклічною частотою ω та числом (заповнення) фотонів n_ω , пишемо

$$E(\{n_\omega\}) = \sum_{\omega} E_{\omega,n}, \quad E_{\omega,n} = \frac{\hbar\omega n_\omega}{1 + \hbar\omega(n_\omega - 1)/\kappa}, \quad (2.163)$$

де операція підсумовування відображає дискретність спектру у скінченному об’ємі V ; дисперсійне співвідношення в трьох просторових вимірах також є

$\omega = c|\mathbf{k}|$, де $\mathbf{k}$ – хвильовий вектор.

Видно, що, загалом, $E_{\omega,n} < \hbar\omega n_{\omega}$. Фізично, це означає наявність додаткового (далекодіючого) притягання між тотожними фотонами, яке зростає разом з n_{ω} . Отже, випромінювання фотонів вимагає *високотемпературного режиму*, порівнюючи температуру з характерною енергією порядку κ , щоб подолати притягальний бар'єр.

З іншого боку, енергія окремого фотона $\hbar\omega$ обмежена умовою $\hbar\omega_{\max} = \kappa$, оскільки $E_{\omega,n} = \kappa n_{\omega} / (n_{\omega} - 1 + \kappa/\hbar\omega) > \kappa$ при $\hbar\omega \gg \kappa$, що є поза ПСТВ.

Ми припускаємо, що подібні обмеження можуть також виникати в інших системах бозонів з додатковим притяганням, навіть не пов'язаних із (модифікованою) спеціальною теорією відносності. Надалі, ми опишемо термодинамічні властивості таких систем.

Велика статистична сума. Формула (2.163) використовується для означення статистичної суми $\mathcal{Z}^{\text{tot}}$ газу фотонів в об'ємі V у великому канонічному ансамблі з температурою $T = \beta^{-1}$, активністю z , і статистичними вагами $\exp(-\beta E_{\omega,n})$, які означено за Гібсом. Оскільки фотонні моди з різними ω розглядаються окремо, функцію $\mathcal{Z}^{\text{tot}}$ подамо так

$$\ln \mathcal{Z}^{\text{tot}} = \sum_{\omega} \ln \mathcal{Z}_{\omega}, \quad (2.164)$$

$$\mathcal{Z}_{\omega} = e^{-\beta\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \exp\left(\beta\kappa \frac{1 - \mu_{\omega}}{1 + \mu_{\omega}(n-1)}\right), \quad \mu_{\omega} = \frac{\hbar\omega}{\kappa}. \quad (2.165)$$

Зауважимо, що залежність параметра деформації μ_{ω} від ω схожа на залежність параметра деформації від імпульсу в [351].

Оскільки значення $E_{\omega,n}$ при $n_{\omega} \geq 1$ лежать всередині енергетичної зони скінченної ширини, $\hbar\omega \leq E_{\omega,n} \leq \kappa$, ряд (2.165) розбігається при $z = 1$. Отже, наявність активності $z < 1$ гарантує збіжність статистичної суми. Тоді, z визначається від'ємним хімічним потенціалом $\nu = -|\nu|$ як $z = \exp(\beta\nu)$, що відповідає системі з ефективним притяганням.

Головна особливість обчислення (2.165) пов'язана з фактором $\sim 1/(1 + \mu_\omega n)$ у мірі Гібса. Його роль статистично можна оцінити за допомогою параметра порядку (середнього поля):

$$\sigma(z, x, \mu_\omega) = \frac{e^{-x}}{\mathcal{Z}_\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - \mu_\omega}{1 + \mu_\omega(n - 1)} z^n \exp\left(x \frac{1 - \mu_\omega}{1 + \mu_\omega(n - 1)}\right). \quad (2.166)$$

Надалі $x \equiv \beta\kappa$, а також припускається, що $\mathcal{Z}_\omega = \mathcal{Z}(z, x, \mu_\omega)$.

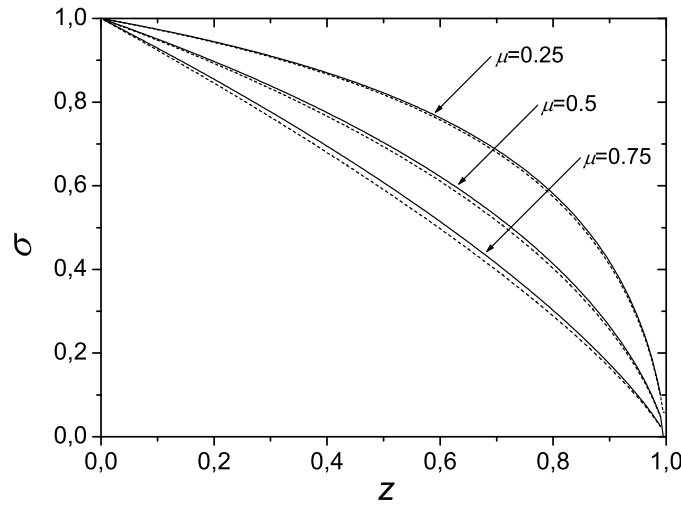


Рис. 2.8. Залежність середнього поля σ від активності z за різних значень μ . Суцільні криві описують точні залежності (2.166), які знайдено чисельно для $\beta\kappa = 0.1$. Пунктирні криві, найближчі до суцільних, одержано аналітично в наближенні MFA (2.169), тобто при $\beta\kappa = 0$.

Можна переконатися, що $\sigma \approx 1$ при $x \gg 1$. Нетривіальна термодинаміка виникає при $x \ll 1$, що вимагає температур T , вищих за κ . Якщо $0 < \mu < 1$, то $0 \leq \sigma \leq 1$. За нефізичних $\mu > 1$, існує область (z, x) , де $\sigma < 0$.

Здійснимо обчислення у припущенні, що $x < 1$ і $0 < \mu < 1$. Існування параметра порядку дозволяє оцінити статистичну суму і термодинамічні функції в наближенні середнього поля (MFA), замінюючи фактор $(1 - \mu_\omega)/(1 + \mu_\omega(n - 1))$ у статистичних вагах (2.165) середнім полем σ_ω . Самоузгоджений

опис вимагає одночасного формулювання рівнянь для статистичної суми і σ_ω :

$$\mathcal{Z}_\omega^{\text{MFA}} \equiv e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \exp(x\sigma_\omega), \quad (2.167)$$

$$\sigma_\omega \equiv \frac{e^{-x}}{\mathcal{Z}_\omega^{\text{MFA}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - \mu_\omega}{1 + \mu_\omega(n-1)} z^n \exp(x\sigma_\omega). \quad (2.168)$$

Одержуємо

$$\mathcal{Z}_\omega^{\text{MFA}} = \frac{e^{x(\sigma_\omega-1)}}{1-z}, \quad \sigma_\omega = \Lambda(z, \mu_\omega), \quad (2.169)$$

де функція

$$\Lambda(z, \mu) = \frac{(1-\mu)(1-z)}{\mu} \Phi(z, 1, \mu^{-1} - 1) \quad (2.170)$$

виражається аналітично через трасцендент Лерха

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(a+n)^s} \quad (2.171)$$

і зображена пунктирними кривими на Рис. 2.8. Зауважимо, що σ_ω збігається з $\sigma(z, 0, \mu_\omega)$, і рівняння моделі в наближенні MFA є простими для розв'язання.

Аби зв'язати $\mathcal{Z}_\omega^{\text{MFA}}$ з $\mathcal{Z}_\omega$, розкладемо $\mathcal{Z}_\omega = e^{-x} \sum_n z^n \exp(x\sigma_\omega + xs_{\omega,n})$ в ряд за флуктуаціями $s_{\omega,n} = (1 - \mu_\omega)/(1 + \mu_\omega(n-1)) - \sigma_\omega$. Прості обчислення приводять до формули:

$$\mathcal{Z}_\omega = \mathcal{Z}_\omega^{\text{MFA}} + e^{x(\sigma_\omega-1)} \sum_{k=1}^{\infty} (-x\sigma_\omega)^k \sum_{m=0}^k \frac{(-\mu_\omega\sigma_\omega)^{-m} (1 - \mu_\omega)^m}{m!(k-m)!} \Phi(z, m, \mu_\omega^{-1} - 1), \quad (2.172)$$

де використано біноміальний розклад та означення $\Phi(z, s, a)$. Зауважимо, що член з індексом $k = 1$ зникає завдяки (2.169).

Термодинамічні функції однієї моди. При обчисленні термодинамічних функцій обмежимося першими ненульовими членами розкладу за малим параметром $x = \beta\kappa$, який явно залежить від T . Маємо

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\omega &= (z \partial_z \ln \mathcal{Z}_\omega^{\text{MFA}})_{\beta, \sigma_\omega} + O(x) \\ &= \frac{z}{1-z} + O(x), \end{aligned} \quad (2.173)$$

$$\begin{aligned}
U_\omega &= -(\partial_\beta \ln \mathcal{Z}_\omega^{\text{MFA}})_{z, \sigma_\omega} + O(x) \\
&= \kappa[1 - \Lambda(z, \mu_\omega)] + O(x),
\end{aligned} \tag{2.174}$$

$$\begin{aligned}
S_\omega &= (\ln \mathcal{Z}_\omega^{\text{MFA}} - x \partial_x \ln \mathcal{Z}_\omega^{\text{MFA}})_{z, \sigma_\omega} + O(x) \\
&= -\ln(1 - z) + O(x).
\end{aligned} \tag{2.175}$$

$$C_\omega = \left(x^2 \partial_x^2 \ln \mathcal{Z}_\omega^{(2)} \right)_{z, \sigma_\omega} + O(x^3), \tag{2.176}$$

де $\mathcal{N}_\omega = (z \partial_z \ln \mathcal{Z}_\omega)_\beta$, $U_\omega = -(\partial_\beta \ln \mathcal{Z}_\omega)_z$ і $S_\omega = (\ln \mathcal{Z}_\omega - x \partial_x \ln \mathcal{Z}_\omega)_z$ – повне середнє число фотонів, повна внутрішня енергія і ентропія. Ці функції відразу оцінено в наближенні MFA. Чисельна перевірка підтверджує добре узгодження $\mathcal{N}_\omega(z)$ (2.173) з точною залежністю, яку одержано для $x \ll 1$.

Теплоємність C_ω вимагає використання статистичної суми у наступному порядку теорії збурень:

$$\mathcal{Z}_\omega^{(2)}(z, x, \mu_\omega, \sigma_\omega) = \mathcal{Z}_\omega^{\text{MFA}}(z, x, \sigma_\omega) [1 + F(z, x, \mu_\omega, \sigma_\omega)], \tag{2.177}$$

$$\begin{aligned}
F(z, x, \mu_\omega, \sigma_\omega) &\equiv \frac{x^2}{2} \left[\frac{(1 - \mu_\omega)^2 (1 - z)}{\mu_\omega^2} \Phi(z, 2, \mu_\omega^{-1} - 1) \right. \\
&\quad \left. - 2\sigma_\omega \Lambda(z, \mu_\omega) + (\sigma_\omega)^2 \right] + x[\Lambda(z, \mu_\omega) - \sigma_\omega],
\end{aligned} \tag{2.178}$$

де функція F вважається малою поправкою.

З виразу $\ln \mathcal{Z}_\omega^{(2)} = \ln \mathcal{Z}_\omega^{\text{MFA}} + F$ (в лінійному наближенні за F), знаходимо

$$C_\omega = x^2 v(z, \mu_\omega) + O(x^3), \tag{2.179}$$

де функція $v(z, \mu) = \partial_x^2 F(z, x, \mu, \Lambda(z, \mu))$ є

$$v(z, \mu) = \frac{(1 - \mu)^2 (1 - z)}{\mu^2} \Phi(z, 2, \mu^{-1} - 1) - \Lambda^2(z, \mu). \tag{2.180}$$

Видно, що вона збігається з дисперсією (енергії)

$$\left\langle \left(\frac{1 - \mu}{1 + \mu(n - 1)} \right)^2 \right\rangle_{\text{MFA}} - \left\langle \frac{1 - \mu}{1 + \mu(n - 1)} \right\rangle_{\text{MFA}}^2. \tag{2.181}$$

Зауважимо, що $C_\omega \equiv (-\beta^2 \partial_\beta U_\omega)_{z, \sigma_\omega} = 0$ випливає з підстановки U_ω до (2.174) або покладання $x = 0$ в (2.179).

Для аналізу корисно порівняти безрозмірну внутрішню енергію одного фотона $u_\omega = U_\omega/(\kappa\mathcal{N}_\omega)$, яка одержується з (2.174) і (2.173), з точною

$$u(z, x, \mu_\omega) = \frac{\mu_\omega \sum_{n=0}^{\infty} n[1 + \mu_\omega(n-1)]^{-1} w_n(z, x, \mu_\omega)}{\sum_{n=0}^{\infty} n w_n(z, x, \mu_\omega)}, \quad (2.182)$$

означеною за допомогою статистичних ваг:

$$w_n(z, x, \mu) = z^n \exp\left(x \frac{1 - \mu}{1 + \mu(n-1)}\right). \quad (2.183)$$

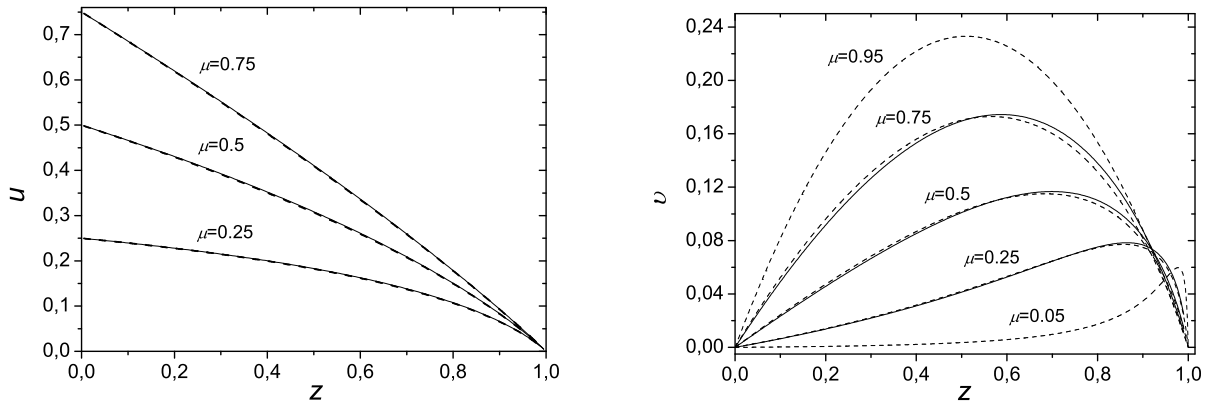


Рис. 2.9. Безрозмірна внутрішня енергія фотона u_ω (ліворуч) і дисперсія v (праворуч) як функції активності z за деяких μ . Суцільні криві представляють точні залежності (2.182) і (2.180) при $\beta\kappa = 0.1$. Пунктирні криві одержано аналітично в наближенні MFA.

Фактично, u_ω в наближенні середнього поля і $u(z, x, \mu_\omega)$ при $x = 0.1$ збігаються на Рис. 2.9 ліворуч, що підтверджує застосовність нашого підходу в режимі високих T . Оскільки повна внутрішня енергія U_ω зростає від 0 до κ при $z \rightarrow 1$, коли $\mathcal{N}_\omega \rightarrow \infty$, це пояснює зникнення u_ω (і $u(z, x, \mu_\omega)$) при $z \rightarrow 1$. Також видно, що внутрішня енергія фотона κu_ω прямує до $\hbar\omega$ при $z \rightarrow 0$.

Тепер, розглянемо теплоємність C_ω одномодової підсистеми. Поведінку $v(z, \mu)$ зображено на Рис. 2.9 праворуч, де її піки в точках (z_p, μ_p) вказують на значні флуктуації, які можна пов'язати з перехідними процесами і які пригнічуються при $x \ll 1$. Тому, очікується існування двох фаз в цій моделі.

Зауважимо, що з (2.180) випливає: $\lim_{\mu \rightarrow 1} v(z, \mu) = z(1 - z)$. Тому, при $\mu \rightarrow 1$, має місце дзеркальна симетрія відносно точки $z = 0.5$.

Характеристики випромінювання. За великих V замінемо дискретний енергетичний спектр неперервним. Тоді, число квантових станів в інтервалі $(\omega, \omega + d\omega)$ задається величиною $(V\omega^2/\pi^2c^3) d\omega$, яка враховує дві поляризації фотонів [289].

Завдяки адитивності енергій різних мод, енергія випромінювання, зосереджена в частотному інтервалі $(\omega, \omega + d\omega) \in d\mathcal{E} = U_\omega(V\omega^2/\pi^2c^3) d\omega$. Отже, спектральна густина випромінювання,

$$\frac{1}{4\pi V} \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{\kappa^3}{4\pi^3 c^3 \hbar^2} e(z, x, \mu_\omega), \quad (2.184)$$

визначається функцією, яка виводиться з $\mathcal{Z}_\omega$:

$$e(z, x, \mu) = \mu^3 \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n[1 + \mu(n-1)]^{-1} w_n(z, x, \mu)}{\sum_{n=0}^{\infty} w_n(z, x, \mu)}. \quad (2.185)$$

Оскільки, $\kappa\mu_\omega = \hbar\omega$ і $x\mu_\omega = \beta\hbar\omega$ не залежать від κ , маємо

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \kappa^3 e(z, x, \mu_\omega) = \frac{(\hbar\omega)^3}{z^{-1} \exp(\beta\hbar\omega) - 1}, \quad (2.186)$$

що відтворює формулу Планка для спектральної густини випромінювання [289].

Після заміни в (2.164) підсумовування інтегруванням за ω з верхньою межею $\omega_{\max} = \kappa/\hbar$, як аргументовано вище, знаходимо повну енергію:

$$\mathcal{E} = \frac{V\kappa^4}{\pi^2(\hbar c)^3} \varepsilon(z, x). \quad (2.187)$$

Тут

$$\varepsilon(z, x) = \int_0^1 e(z, x, \mu) d\mu, \quad \varepsilon_0(z) = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(z, x), \quad (2.188)$$

– безрозмірна енергія випромінювання, зображена на Рис. 2.10.

Аналітично, $\varepsilon_0(z) = \int_0^1 [1 - \Lambda(z, \mu)] \mu^2 d\mu$ і дорівнює

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(z) = & \frac{z}{4} + \frac{z^2}{12} - z(1-z) \left(\frac{\text{Li}_1(z)}{6} - \frac{\text{Li}_2(z)}{2} - \text{Li}_3(z) \right) \\ & - z(1-z) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^4} (k+1) \ln(k+1), \end{aligned} \quad (2.189)$$

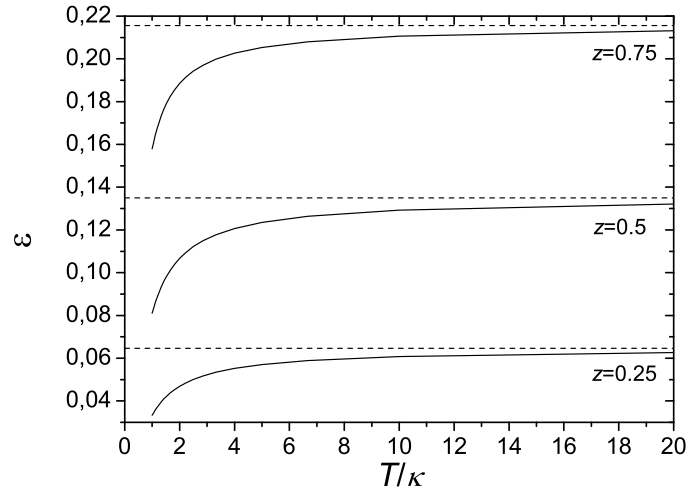


Рис. 2.10. Температурна залежність безрозмірної енергії випромінювання ε з (2.188) за різних z (чисельний результат). Пунктирні прямі відображають значення енергії при $T \rightarrow \infty$, які впливають з $\varepsilon_0(z)$ в (2.189).

де $\text{Li}_s(z)$ – полілогарифмічна (або Бозе) функція: $\text{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k/k^s$.

З Рис. 2.10 видно, що за фіксованого значення активності $\bar{z}$ повна енергія випромінювання (в одиницях $V\kappa^4/\pi^2(\hbar c)^3$) обмежена (коли $T \rightarrow \infty$) відповідним значенням $\varepsilon_0(\bar{z})$. Монотонна функція $\varepsilon_0(z)$ має такі характерні значення: $\varepsilon_0(0) = 0$ і $\varepsilon_0(1) = 1/3$, які впливають з означення $\Lambda(z, \mu)$.

Порівняємо (2.187) з законом Стефана–Больцмана: $\mathcal{E}_{\text{SB}} = \pi^2 V T^4 / (15 \hbar^3 c^3)$ [289]. Поки $\mathcal{E}_{\text{SB}} \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow \infty$, результат ПСТВ передбачає скінченне значення енергії випромінювання за будь-яких великих температур $T \gg \kappa$. Подібність $\mathcal{E}_{\text{SB}}$ і $\mathcal{E}$ полягає у законі четвертого порядку, який визначає залежність повної енергії випромінювання від T і κ відповідно.

Повне число фотонів у випромінюванні чорного тіла, повна енергія та повна ентропія в наближенні середнього поля обчислюються аналітично на основі (2.173)–(2.175):

$$\mathcal{N}^{\text{MFA}} = \frac{V\kappa^3}{3\pi^2(\hbar c)^3} \frac{z}{1-z}, \quad (2.190)$$

$$\mathcal{E}^{\text{MFA}} = \frac{V\kappa^4}{\pi^2(\hbar c)^3} \varepsilon_0(z), \quad (2.191)$$

$$S^{\text{MFA}} = -\frac{V\kappa^3}{3\pi^2(\hbar c)^3} \ln(1-z). \quad (2.192)$$

Рівняння стану виводиться із співвідношення $\beta PV = \ln \mathcal{Z}^{\text{tot}}$. З використанням виразів в наближенні MFA, одержуємо

$$PV = TS^{\text{MFA}} - \mathcal{E}^{\text{MFA}}. \quad (2.193)$$

Ця формула відрізняється від $P = \mathcal{E}_{\text{SB}}/(3V)$ для ультрарелятивістських частинок. З іншого боку, розклад функцій (2.190)–(2.193) в ряд до членів першого порядку за z (коли $0 < z \ll 1$ для $-\ln z \sim \beta\kappa$) дає

$$\tilde{\mathcal{N}} = \frac{V\kappa^3}{3\pi^2(\hbar c)^3} z, \quad \tilde{\mathcal{E}} = \frac{V\kappa^4}{4\pi^2(\hbar c)^3} z, \quad (2.194)$$

$$\tilde{S} = \frac{V\kappa^3}{3\pi^2(\hbar c)^3} z, \quad \tilde{P} = \frac{\kappa^4 z}{12\pi^2(\hbar c)^3} \left(4\frac{T}{\kappa} - 3\right), \quad (2.195)$$

так, що співвідношення для ультрарелятивістських частинок $\tilde{S} = 4\tilde{\mathcal{E}}/(3T)$ і $\tilde{P} = \tilde{\mathcal{E}}/(3V)$ зберігаються при $T = \kappa$. Також, $\tilde{S}/\tilde{\mathcal{N}} = \text{const}$, подібно до звичайного газу фотонів [289].

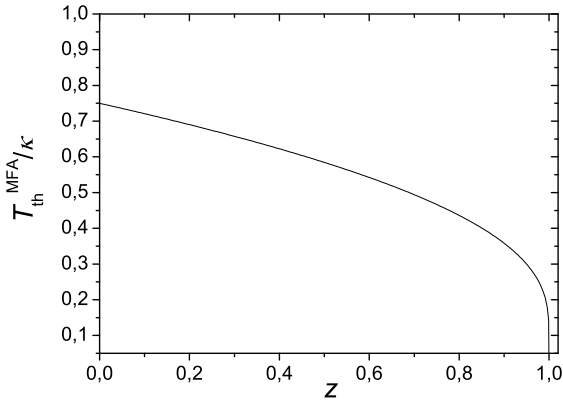


Рис. 2.11. Температурний поріг випромінювання фотонів як функція від z .

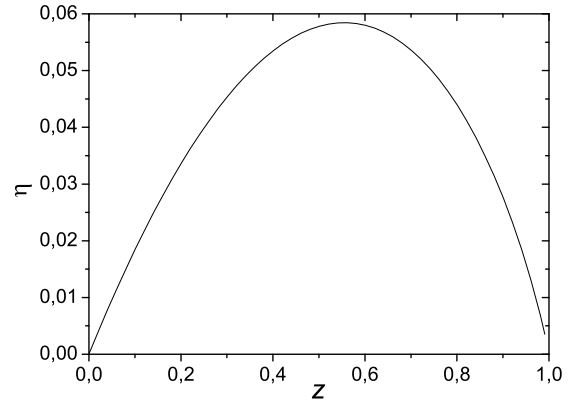


Рис. 2.12. Функція $\eta(z)$, яка визначає залежність теплоємності C^{MFA} від z .

Однак, формули (2.190)–(2.193) не відтворюють відомі вирази для випромінювання чорного тіла в межі $\kappa \rightarrow \infty$, оскільки одержані в наближенні MFA для режиму високих температур.

Випромінювальна здатність в моделі з ефективним притяганням задається умовою $P \geq 0$, яка реалізується за температур T , вищих за поріг T_{th} . Порогову температуру T_{th} , за якої система починає випромінювати, знайдемо з вимоги $P = 0$. Формула (2.193) дозволяє оцінити $T_{\text{th}}^{\text{MFA}}$ як функцію активності z . Аналітично знаходимо

$$\frac{T_{\text{th}}^{\text{MFA}}(z)}{\kappa} = -3 \frac{\varepsilon_0(z)}{\ln(1-z)}, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{T_{\text{th}}^{\text{MFA}}(z)}{\kappa} = \frac{3}{4}, \quad (2.196)$$

і ця залежність зображена на Рис. 2.11.

Шляхом інтегрування (2.179) одержується повна теплоємність в МФА:

$$C^{\text{MFA}} = \frac{V}{T^2} \frac{\kappa^5}{\pi^2 (\hbar c)^3} \eta(z), \quad (2.197)$$

де ми означили $\eta(z) = (1-z)\eta_1(z) - (1-z)^2\eta_2(z)$, і

$$\eta_\alpha(z) = \int_0^1 (\Phi(z, 3-\alpha, \mu^{-1}-1))^\alpha (1-\mu)^2 d\mu, \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.198)$$

Функції $\eta_{1,2}$ можна аналітично обчислити в явному вигляді. Результат обчислень подано на Рис. 2.12.

Випишемо ці функції:

$$\eta_1(z) = \frac{1}{3} + \frac{z}{30} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 10n + 1}{3(n-1)^4} - 2 \frac{n(n+1)}{(n-1)^5} \ln n \right) z^n, \quad (2.199)$$

$$\begin{aligned} \eta_2(z) = & \frac{1}{3} + \frac{z}{6} + \left(4 \ln 2 - \frac{79}{30} \right) z^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2n}{(n-1)^4} \ln n \right. \\ & + 2 \frac{(n-1)^2}{(n-2)^5} \ln(n-1) + \frac{1}{3(n-1)} - \frac{n+1}{(n-1)^3} \\ & \left. + \frac{n}{6(n-2)^2} - \frac{n(n-1)}{(n-2)^4} + A_n \right) z^n. \end{aligned} \quad (2.200)$$

Коефіцієнт $A_3 = 0$ і $A_{n \geq 4} = \sum_{k=1}^{n-3} I(n-2-k, k)$, де

$$I(n, k) = \int_0^1 \frac{\mu^2(1-\mu)^2}{(1+\mu n)(1+\mu k)} d\mu \quad (2.201)$$

$$= \frac{(n+1)^2}{n^4(n-k)} \ln(n+1) - \frac{(k+1)^2}{k^4(n-k)} \ln(k+1) + \frac{1}{6n^3k^3} [2k^2n^2 + 9kn(n+k) + 6(n^2 + kn + k^2)], \quad n \neq k \quad (2.202)$$

$$I(n, n) = \frac{n^2 + 12n + 12}{3n^4} - 2 \frac{(n+1)(n+2)}{n^5} \ln(n+1). \quad (2.203)$$

Знаходимо, що $I(n, n) = \lim_{k \rightarrow n} I(n, k)$, і $I(n-1, n-1)$ вже використано як коефіцієнт в (2.199).

Зауважимо, що теплоємність звичайного випромінювання чорного тіла має залежність $C \sim VT^3$ в той час, коли $C^{\text{MFA}} \sim V\kappa^5 T^{-2}$. Однак, незвична поведінка C^{MFA} є наслідком скінченної ширини енергетичної зони в системі [289] (подібно до магнітних систем), що припускалося на початку.

2.3.3. Підсумки. Запропоновано оригінальне правило κ -додавання, стимільоване ПСТВ, яке демонструє вирішальну роль енергії Планка κ . Це правило природно привело нас до нелінійного гамільтоніана одномодових підсистем фотонів із самодією. Цей гамільтоніан, що має нелінійну (раціональну) залежність від оператора числа збуджень і враховує незалежність різних мод, використано для оцінки основних термодинамічних величин випромінювання чорного тіла. Наявність масштабу κ проявилася в наших основних результатах та фізичних наслідках.

Перш за все, енергія одномодової підсистеми лежить всередині енергетичної зони скінченної ширини, верхня межа якої визначається κ , що впливає на термодинамічні властивості.

Як впливає з рівняння (2.196) і показано на Рис. 2.11, у нашому підході з'являється порогова температура T_{th} (залежна від z). Це означає, що випромінювання виникає при $T > T_{\text{th}}(z)$. Така властивість випромінювання чорного тіла може мати важливі наслідки та несподівані прояви.

Варто підкреслити особливу поведінку одномодової та повної теплоємності (див. Рис. 2.9 і Рис. 2.12), а також її незвичну залежність від температури.

Отримано цікаве рівняння стану, яке суттєво відрізняється від того, що відомо в стандартній фізиці випромінювання чорного тіла.

Прокоментуємо деякі роботи з фізики чорного тіла на основі деформованої термодинаміки [226, 18, 142, 347, 71, 366] і порівняємо їх висновки з відомим результатом [289] та з представленими вище. У згаданих роботах основна новизна, що з'являється внаслідок деформації, полягає в певній модифікації префакторів у виведених версіях закону Стефана–Больцмана. Окрім того, константа Стефана починає залежати від параметра деформації. Закон зсуву Віна все ще зберігається для деформованого бозе-газу, хоча з певним включенням параметра деформації. В [71] формула Планка для деформованого бозе-газу справді відрізняється від звичайної: у формулі Планка з'являються нові члени, які відповідають за взаємодію між фотонами. Подібно до випадку ідеального бозе-газу, загальна енергія деформованого бозе-газу пропорційна до T^4 . Особливістю є те, що стала Стефана–Больцмана ефективно зменшується при деформації.

Більшість представлених тут результатів принципово відрізняється від згаданих, а саме, це стосується енергії, яка лежить у скінченній зоні, особливої поведінки питомої теплоємності та існування порогової температури, з якої починається випромінювання. Можна сподіватись на подальший розвиток даної моделі та на застосування результатів для опису реалістичних об'єктів в астрофізиці та для ефективного моделювання в космології.

Висновки до розділу 2

У розділі 2 розглянуто стани матерії за високих густин енергії, які виникають в ультрарелятивістських ядро-ядерних зіткненнях і передбачаються в космології. За допомогою методів космології проаналізовано сценарій прояву додаткових вимірів в системі кварків і глюонів. Вивчено ефект додаткового принципу відносності, помітна роль якого може проявлятися на ранньому етапі еволюції Всесвіту.

Основними висновками, що виносяться на захист є такі:

- Для ранньої стадії релятивістських ядерних зіткнень описано еволюцію та анізотропію потоків партонів, які мають визначальний вплив на основні спостережувані інтерферометричні дані. Показано, що незначне число жорстких партонів обумовлює від'ємну провідність і нестійкість м'якої компоненти (поля) при електромагнітній взаємодії, що сприяє ізотропізації.

- Показано, що термалізована кварк-глюонна речовина у зіткненнях ядер приводить за умов Аркані-Хамеда, Дімопулоса і Двалі до ненульової ймовірності прояву додаткових компактних просторових вимірів, число яких не перевищує шість у випадку конфайнменту і є необмеженим, але обумовленим температурою, в режимі домінування випромінювання.

- За умови планківського обмеження зверху на енергію введено новий закон додавання 4-імпульсів, на підставі якого знайдено термодинамічні функції та модифікований аналог закону Стефана–Больцмана випромінювання чорного тіла за високих температур. Показано, що випромінювання відбувається за температури вище порогової і з обмеженою зверху густиною енергії.

Результати розділу опубліковано в 6 працях [78, 146, 268, 269, 334, 336].

РОЗДІЛ 3

ЕФЕКТИ ГРАВІТАЦІЇ В $(2+1)$ -ВИМІРНОМУ ПРОСТОРИ-ЧАСІ

У цьому розділі ми враховуємо таку топологічну особливість компактних двовимірних просторів як рід, яку може мати, зокрема, підпростір додаткових вимірів, поки наш тривимірний простір залишається топологічно тривіальним: безмежним і пласким. Так, рід g двовимірних, компактних *ріманових поверхонь* визначається за теоремою Гауса-Боне і асоціюється з числом ручок (або дірок), приєднаних до сфери Рімана [376].

Ріманові поверхні часто використовуються в задачах теорії струн [91], низьковимірної гравітації [211, 279] і квантової геометрії [181]. Деколи, хаотична поведінка в Природі обумовлюється особливістю простору [144].

Тут, ми оперуємо рімановими поверхнями роду *один* і *два*. Математично, вони еквівалентні двовимірним періодичним ґраткам. Так, поверхня з $g = 1$, або тор, споріднена з чотирикутною ґраткою на площині; а крендель з $g = 2$ – з восьмикутною ґраткою в просторі Лобачевського. Періоди ґраток, твірні комірок, а також параметри, які їх визначають, є глобальними у просторі величинами, число незалежних серед яких пов'язано з g .

Автори робіт [360, 230] зауважили, що загальна теорія відносності в $(2+1)$ вимірах еквівалентна калібрувальній $ISO(2, 1)$ теорії поля Черна-Саймонса зі скінченним числом глобальних ступенів вільності, які визначаються топологією. Формулювання в термінах глобальних величин, що задають фізичний фазовий простір, робить гравітацію у малому числі вимірів точно розв'язною та квантованою [360]. Завдяки цьому факту загальні аспекти квантування характеристик порожнього простору-часу в $(2+1)$ вимірах вже відомі [111].

Зазвичай глобальні змінні вводяться *ad hoc*. Потім, симплектична структура індукується за допомогою переформулювання як функціоналу дії так

і відповідної варіаційної задачі в рамках звичайного метричного формалізму Арновіта-Дезера-Мізнера (АДМ) [246, 162, 163] або на підставі співвідношень в групі гомотопій теорії Черна-Саймонса [279, 280, 281]. В рамках геометричного підходу, дужка Пуасона вводиться згідно з теорією Вейля-Петерсона [109, 74].

У включених до дисертації працях [264, 265, 273, 274], глобальні величини та дужка Пуасона між ними, необхідні для опису класичної динаміки і квантування геометричних характеристик, визначаються *двома способами*, кожен з яких застосовується у випадку поверхні певного роду.

У випадку тороїдального простору, ми послідовно редукуємо польову теорію Черна-Саймонса з додатковим джерелом та заданими генераторами еволюції до теорії в термінах *чотирьох* глобальних змінних. Такий перехід здійснюється за допомогою запропонованої нами процедури, яка використовує механіку Дірака з в'язами [373, 375] та гомотопічну групу [376]. Включення додаткового джерела забезпечує прояв нових ефектів у порівнянні з порожнім тороїдальним Всесвітом (див. [62, 63, 106, 111, 225]).

Для версії поверхні роду два [329], ми застосовуємо теорію Вейля-Петерсона [169] для опису симплектичної структури простору *двох* глобальних параметрів, з яких конструюємо генератори еволюції. Спершу, використовуючи рецепт з [9], знаходимо явні вирази для генераторів (Фукса) симетрій поверхні і параметрів Фенхеля-Нільсена. За сценарієм “великого відскоку” з петльової гравітації [210], задаємо динаміку в просторі глобальних величин.

Таким чином, ми розглядаємо класичні і квантові моделі зі скінченним числом канонічних ступенів вільності. З класичних рівнянь руху, продиктованих гравітацією, знаходимо часову еволюцію геометрії просторів в космологічному сенсі. Здійснюючи квантування, одержуються спектри геометричних характеристик, таких як просторові і часові інтервали, площа.

Однак, в рамках задачі про симетризацію локальних величин на поверхні роду два, яка необхідна для побудови польових теорій і зводиться до обчисле-

ння ряду за групою Фукса, ми вивчаємо подібну з математичної точки зору статистичну модель [270]. Там, знаходимо спектр випадкових графів, породжених групою ізометрій поверхні, застосовуємо теорію ланцюгів Маркова для його опису, і наводимо його мультифрактальні показники [391, 338].

Такий підхід обумовлений описом випадкових блукань на дереві Кейлі у задачі (див. [353, 79]) та її належністю до класу стохастичних моделей явищ на нетривіальних геометричних носіях, серед яких відзначимо турбулентність [174, 114], дифузію, обмежену агрегацією [342], полімери [352, 166], динаміку частинок у випадковому магнітному полі [69, 67]. Зокрема, ріманові поверхні також використовуються в моделях більярду як геометричні носії [144, 284].

3.1. Геометрія тороїдального Всесвіту та спектри характеристик

Класичні і квантові аспекти порожнього тороїдального Всесвіту добре вивчені в літературі (див. [62, 63]). Тому, зосередимось на нових ефектах, спричинених додатковою взаємодією із статичним джерелом (моментом) в моделі $(2+1)$ -гравітації Черна-Саймонса.

Зауважимо, що в працях [141, 60] вже розглянуто взаємодію поля зі спіном частинок. Також існують моделі [112], де поля топологічної природи взаємодіють з гравітаційним.

У нашій моделі, перш за все, знайдемо топологічні (глобальні) ступені вільності, на число яких вказують топологічні аргументи: фізичний фазовий простір має складатися з двох пар глобальних канонічних змінних, необхідних для опису динаміки і квантування. Тому, “глобалізація” локальної теорії поля з джерелом є важливою та цікавою задачею.

Для переходу від локально-польового формулювання до канонічного глобального, ми пропонуємо таку процедуру: і) пошук розв’язку рівнянь поля за топологічних умов з введенням глобальних змінних в рамках гамільтонового

опису; ii) усунення зайвих ступенів вільності за допомогою методів гамільтонової механіки Дірака з в'язями [373]. Це дозволяє уникнути повернення до функціонала дії для знаходження дужки Пуасона між параметрами та відразу проквантувати теорію в термінах канонічних змінних. Схожий підхід до $(2+1)$ -мірної гравітації на торі використано в [225].

Класичні розв'язки рівнянь поля (з джерелом і без нього) дозволяють визначити часову еволюцію твірних векторів плаского тора, чия фундаментальна область – паралелограм. Іншими словами, можна відстежити зміну геометрії тороїдального Всесвіту з часом.

Відомо [62], що твірні вектори тора (паралелограма, чії протилежні сторони ототожнюються) в моделі без космологічної сталої (і без джерел) є лінійними функціями часу, а метрика простору-часу є метрикою Казнера. Очікується, що подібна залежність має місце і за наявності сталого в часі джерела (момента), але швидкість зміни геометрії може відрізнятись.

Іншим і важливим аспектом гравітації в $(2+1)$ вимірах простору-часу є її квантові властивості, зокрема, спектри геометричних характеристик і амплітуди переходу між різними квантовими станами.

Незважаючи на те, що задачам $(2+1)$ -вимірної гравітації присвячено численні роботи, чимало з них в певному сенсі є формальними через труднощі з баченням фізичних процесів [279, 280, 281]. Схема канонічного квантування зручна для опису та розуміння динаміки, ймовірностей, а також для фізичного тлумачення [106]. Однак, вона стикається з проблемою впорядкування операторів, якій ми приділяємо увагу.

Традиційно, квантові властивості геометрії простору-часу характеризуються спектрами операторів довжини, часу та площі. Виявляється, у $(2+1)$ вимірах просторовоподібні величини неперервні, тоді як спектр часоподібних інтервалів є дискретним [111]. Окрім того, часто спостерігається, що квантові стани геометричних характеристик вироджуються через високу симетрію системи. Тоді можна передбачити результати включення джерела (зовнішнього

поля): або наявність джерела ліквідує виродження квантових станів, або приведе до розщеплення квантових рівнів.

Ми зосередимось на розщепленні дискретних станів часоподібних інтервалів. Подібне явище добре відоме в квантовій механіці: це – ефект Зеємана (розщеплення квантових станів атома у зовнішньому магнітному полі). У цьому випадку розщеплення виникає внаслідок взаємодії однорідного магнітного поля із сумарним кутовим моментом електронів. Застосовуючи ці ідеї до квантової гравітації, дослідимо квантові стани Всесвіту з обертанням.

Ми також оцінимо ймовірність переходу між станами, що відповідають різним площам компактного Всесвіту в рамках моделі із зовнішнім глобальним кутовим моментом. Зазначимо працю [106], де амплітуда переходу між квантовими станами з різними модулями тора обчислюється в рамках чистої теорії Черна-Саймонса.

3.1.1. Глобальні змінні гравітації Черна–Саймонса.

Гамільтонів опис польової теорії. Як зазначалося вище, є можливість отримати низку нових (квантових) ефектів при розгляді непорожнього $(2+1)$ -вимірного Всесвіту з функціоналом дії, який узагальнює дію Черна-Саймонса шляхом включення взаємодії із моментом I_a^μ :

$$I = \frac{1}{2} \int \epsilon^{\mu\nu\lambda} e_\mu^a (\partial_\nu \omega_{\lambda a} - \partial_\lambda \omega_{\nu a} + \epsilon_{abc} \omega_\nu^b \omega_\lambda^c) d^3x - \int I_a^\mu \omega_\mu^a d^3x. \quad (3.1)$$

Тут, тріада e_μ^a і спінова зв'язність ω_μ^a – незалежні змінні¹. Групові індекси a, b піднімаються і опускаються за допомогою метрики Мінковського $\|\eta_{ab}\| = \text{diag}(-1, 1, 1)$; $\epsilon_{012} = -\epsilon^{012} = 1$; $\epsilon^{ij} \equiv \epsilon^{0ij}$; $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$.

Щоб зберегти інваріантність дії при (інфінітезимальних) калібрувальних перетвореннях:

$$\delta \omega_\mu^a = \partial_\mu \tau^a + \epsilon^{abc} \omega_{\mu b} \tau_c, \quad (3.2)$$

¹Індекси a, b, μ, ν пробігають від 0 до 2; індекси α, β, i, j пробігають від 1 до 2.

джерело I_a^μ має задовольняти умову:

$$\partial_\mu I_a^\mu + \epsilon_a{}^{bc} \omega_{\mu b} I_c^\mu = 0. \quad (3.3)$$

Шарування простору-часу $\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R} \times \Sigma_0$, де зрізи $\Sigma_t = \{x \in \mathbb{M} | x^0 = t\}$ сталого часу утворюють однопараметричну сім'ю $\Sigma = \{\Sigma_t | t \in \mathbb{R}\}$ дифеоморфних замкнених поверхонь роду $g > 0$, приводить до дії:

$$I = \int dt \int_{\Sigma_t} d^2x \mathcal{L} \quad (3.4)$$

з густиною функції Лагранжа

$$\mathcal{L} = -\epsilon^{ij} \eta_{ab} e_i^a \dot{\omega}_j^b - e_0^a R_a - \omega_0^a (T_a + I_a^0) - \omega_i^a I_a^i. \quad (3.5)$$

Форми кривини та кручення визначаються так:

$$R_a \equiv \partial_1 \omega_{2a} - \partial_2 \omega_{1a} + \epsilon_{abc} \omega_1^b \omega_2^c, \quad (3.6)$$

$$T_a \equiv \partial_1 e_{2a} - \partial_2 e_{1a} + \epsilon_{abc} (e_1^b \omega_2^c + e_2^c \omega_1^b). \quad (3.7)$$

Завдяки формулюванню теорії Черна-Саймонса без метрики, динаміка системи описується легко, але виникає проблема інтерпретації результатів. Щоб пов'язати метричну гравітацію з калібрувальною теорією Черна-Саймонса, означимо метрику у стандартний спосіб:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b. \quad (3.8)$$

Таке означення пов'язує спостережувані геометрії простору-часу і калібрувальної теорії в термінах внутрішніх змінних e_μ^a і ω_μ^a . Окрім того, припускається, що топологія простору з нульовою кривиною, а також спінова зв'язність є нетривіальними. Це дозволяє зафіксувати ненульове значення кручення T_a за допомогою джерела. З іншого боку, ненульове кручення не приводить до нетривіальної топології (але до каспів), що використано в системі “частинки+поле” [141, 60].

Розвинемо загальний формалізм з нетривіальним крученням, який застосовний і для чистої теорії Черна-Саймонса. Зауважимо, що член взаємодії з джерелом вимагає, щоб момент I_a^μ був два-формою, яку можна утворити з один-форм, як інтеграли руху.

Для формулювання гамільтонової динаміки, введемо канонічні імпульси, спряжені до $e_\mu^a(t, \mathbf{x})$ і $\omega_\mu^a(t, \mathbf{x})$:

$$p_a^\mu(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}(t, \mathbf{x})}{\partial \dot{e}_\mu^a(t, \mathbf{x})}, \quad \pi_a^\mu(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}(t, \mathbf{x})}{\partial \dot{\omega}_\mu^a(t, \mathbf{x})}. \quad (3.9)$$

Нетривіальні дужки Пуасона є

$$\{e_\mu^a(t, \mathbf{x}), p_b^\nu(t, \mathbf{y})\} = \{\omega_\mu^a(t, \mathbf{x}), \pi_b^\nu(t, \mathbf{y})\} = \delta_b^a \delta_\mu^\nu \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.10)$$

Оскільки лагранжіан – вироджений за Діраком (див. [373]), з (3.9) одержимо первинні в'язі (рівняння першого порядку) в гамільтоновій картині:

$$p_a^0 = 0, \quad \pi_a^0 = 0, \quad (3.11)$$

$$p_a^i = 0, \quad \pi_a^i - \epsilon^{ij} \eta_{ab} e_j^b = 0. \quad (3.12)$$

В'язі свідчать про неможливість виразити швидкості $\dot{e}_\mu^a$, $\dot{\omega}_\mu^a$ через імпульси.

Зауважимо, що канонічну структуру теорій Черна-Саймонса вже проаналізовано, зокрема, в [33]. Тим не менш, ми проаналізуємо рівняння, узагальнені включенням джерела.

Хоча в [360, 279] також декларується, що e_μ^a і ω_μ^a – незалежні змінні, вони виявляються канонічно спряженими в гамільтоновому описі. Справді, так є, якщо виключити імпульси (3.9) з опису і врахувати в'язі (3.12). Така редукція вимагає заміни дужки Пуасона на дужку Дірака, яка і буде визначати нові комутаційні співвідношення. Тут ми зберігаємо розширений фазовий простір до знаходження розв'язків польових рівнянь, і виключаємо всі зайві ступені вільності за допомогою єдиної дужки Дірака.

Перетворення Лежандра приводить до канонічного гамільтоніану

$$H = \int_{\Sigma} d^2x \left[e_0^a R_a + \omega_0^a (T_a + I_a^0) + p_a^\mu \dot{e}_\mu^a + \pi_a^0 \dot{\omega}_0^a + (\pi_a^i - \epsilon^{ij} \eta_{ab} e_j^b) \dot{\omega}_i^a + \omega_i^a I_a^i \right]. \quad (3.13)$$

Невизначені швидкості $\dot{e}_\mu^a$, $\dot{\omega}_\mu^a$ відіграють роль множників Лагранжа.

З умови збереження в'язей $p_a^0 = 0$, $\pi_a^0 = 0$ в часі,

$$\{p_a^0, H\} = 0, \quad \{\pi_a^0, H\} = 0, \quad (3.14)$$

знаходимо вторинні в'язі:

$$R_a = 0, \quad T_a + I_a^0 = 0. \quad (3.15)$$

В'язі (3.12) зберігаються в часі, якщо

$$\dot{\omega}_i^a = \partial_i \omega_0^a + \epsilon^a_{bc} \omega_i^b \omega_0^c, \quad (3.16)$$

$$\dot{e}_i^a = \partial_i e_0^a + \epsilon^a_{bc} (\omega_i^b e_0^c + e_i^b \omega_0^c) - \eta^{ab} \epsilon_{ij} I_b^j. \quad (3.17)$$

Оскільки функції $\dot{e}_i^a$, $\dot{\omega}_i^a$ входять у гамільтоніан в комбінації з в'язями, їх можна замінити даними виразами.

Маючи повну систему в'язей, видно, що, рівняння $p_a^0 = 0$, $\pi_a^0 = 0$ є в'язями першого роду. Отже, поля e_0^a , ω_0^a є довільними функціями. Щоб позбутися калібрувальної свободи, накладемо калібрувальну умову:

$$e_0^a = \delta_0^a, \quad \omega_0^a = 0, \quad (3.18)$$

яка приводить до рівнянь $\dot{\omega}_i^a = 0$, $\dot{e}_i^0 = 0$, $\dot{e}_i^\alpha = \epsilon^\alpha_{\beta} \omega_i^\beta - \eta^{\alpha\beta} \epsilon_{ij} I_\beta^j$. Однак, теорія все ще залишається інваріантною відносно $SO(2)$ калібрувальних перетворень, які впливають з (3.2).

Комутаційні співвідношення між функціями в'язей показують, що (3.12) – система в'язей другого роду, яка ефективно зменшує число ступенів вільності.

Існує дві можливості. Перша полягає в негайному квантуванні польових в'язей (першого роду), дія яких на хвильову функцію дає нуль і, тим самим, визначає її [111, 301, 303]. Другий підхід вимагає пошуку розв'язків класичних рівнянь в'язей з подальшим квантуванням теорії [360]. Ми обираємо другий шлях.

Розв'язки для полів за топологічних умов. Отже, ми маємо всі необхідні рівняння, що описують динаміку. Тепер знайдемо розв'язки, залежні від топології простору. Наша стратегія полягає в розкладі полів за базисом аналітичних функцій, притаманних для поверхні фіксованого роду. Тоді динамічні та топологічні в'язі повинні обрізати нефізичні моди і зберегти фізичні. Ми ілюструємо такий підхід у випадку простору Σ з топологією тора T^2 .

Як відомо [376], тор задається як $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, де $\mathbb{Z}^2$ – дискретна група, яка складається з векторів з цілочисельними координатами. Функції на торі – двоперіодичні функції в $\mathbb{R}^2$: $f(x^1, x^2) = f(x^1 + 1, x^2) = f(x^1, x^2 + 1)$. Тоді, Фур'є-експоненти $\exp 2\pi i(nx^1 + mx^2)$, $n, m \in \mathbb{Z}$, служать в якості базисних функцій. Враховуючи це, символ $\int_{\Sigma} d^2x$ означає інтеграл за компактною областю $\{(x^1, x^2) | x^1, x^2 \in [-1/2, 1/2]\}$.

Нехай ω_i^a і π_a^i – незалежні змінні теорії. Після підстановки $e_i^a = \epsilon_{ij}\eta^{ab}\pi_b^j$ з (3.12) в рівняння $T_a + I_a^0 = 0$, одержуємо закон Гауса, що обмежує імпульси:

$$\partial_i \pi_a^i + \epsilon_{ab}^c \omega_i^b \pi_c^i = I_a^0. \quad (3.19)$$

У термінах π_a^i інтервал записується так:

$$ds^2 = -(dt - \pi_0^2 dx^1 + \pi_0^1 dx^2)^2 + \sum_{\alpha=1,2} (\pi_{\alpha}^2 dx^1 - \pi_{\alpha}^1 dx^2)^2. \quad (3.20)$$

В'язь $R_a = 0$ показує, що простір-час є всюди пласким. Однак, нетривіальність топології вказує на неможливість стягнути довільну замкнену криву на поверхні Σ в точку і приводить до сім'ї глобально нееквівалентних геометрій. Наявність глобальної геометрії є очевидною: якщо простір – топологічно нетривіальний, зв'язність дає внесок у фазу Ааронова–Бома вздовж кривої,

яку не можливо стягнути в точку. Отже, зв'язність визначається голономіями (петлями Вільсона):

$$\hat{\rho}[\gamma] = P \exp \oint_{\gamma} dx^{\mu} \omega_{\mu}^a \hat{J}_a, \quad (3.21)$$

де P позначає впорядкування вздовж шляху і $\hat{J}_a$ – генератори калібрувальної групи $SO(2, 1)$. Оскільки зв'язність ω_{μ}^a є пласкою, $\hat{\rho}[\gamma]$ залежить лише від гомотопічного класу γ .

Загалом, слід писати петлі з повною $ISO(2, 1)$ зв'язністю. Однак, завдяки польовим рівнянням, $ISO(2, 1)$ голономії цілком визначаються $SO(2, 1)$ зв'язностями. Очевидно, що у топологічно тривіальному просторі голономії зводяться до одиничних операторів, і $\omega_{\mu}^a = 0$.

У нашому випадку, є дві незалежні голономії $\hat{\rho}[\gamma_1]$, $\hat{\rho}[\gamma_2]$ вздовж колових перетинів тора, і фундаментальна група $\pi_1(\Sigma) \simeq \mathbb{Z}^2$ з двох генераторів $[\gamma_1]$, $[\gamma_2]$ є абелевою. Це означає, що спінова зв'язність є нетривіальною і визначається двома глобальними параметрами, які комутують в сенсі дужки Пуасона. Ці параметри і є шуканими ступенями вільності, які ми хочемо виділити за допомогою редукції. Фазовий простір у цьому випадку буде описуватись двома парами канонічних змінних, і ми шукаємо двопараметричну сім'ю метрик $g_{\mu\nu}$, індукованих на Σ .

Враховуючи зазначені аргументи і припускаючи всюди незмінність джерела, ступені вільності системи повністю визначаються польовими змінними у фіксованій точці простору. Нехай $\omega_i^a(t, \mathbf{0})$, $\pi_a^i(t, \mathbf{0})$ служать такими змінними, а інші ступені вільності тоді фіксуються в'язями:

$$\omega_i^a(t, \mathbf{x}) - \omega_i^a(t, \mathbf{0}) = 0, \quad \pi_a^i(t, \mathbf{x}) - \pi_a^i(t, \mathbf{0}) = 0. \quad (3.22)$$

Як вказано вище, функції на торі можна розкласти в ряди Фур'є. Дужки Пуасона між коефіцієнтами розкладу $\omega_i^a(t, \mathbf{x})$ і $\pi_a^i(t, \mathbf{x})$ дорівнюють 1 або 0 (але не δ -функції). Тоді, в'язі (3.22) вимагають зникнення коефіцієнтів при $\exp 2\pi i(nx^1 + mx^2)$ для $n, m \neq 0$. Отже, $\omega_i^a(t, \mathbf{0})$ збігається з коефіцієнтом

при 1, і $\{\omega_i^a(t, \mathbf{0}), \pi_b^j(t, \mathbf{0})\} = \delta_b^a \delta_i^j$.

Підстановка $\omega_i^a(t, \mathbf{0})$ і $\pi_a^i(t, \mathbf{0})$ замість локальних полів у в'язі приводить до системи алгебраїчних рівнянь, які пов'язують між собою глобальні змінні. З умови нульової кривини, знаходимо

$$\omega_i^a = \gamma^a u_i, \quad \partial_\mu(\gamma^a u_i) = 0. \quad (3.23)$$

Оскільки накладені умови вимагають, щоб поле ω_i^a було сталим, лише глобальні $SO(2)$ калібрувальні перетворення, які параметризуються сталими τ^a в (3.2), є дозволеними. Зрозуміло, що вони змінюють (повертають) вектор γ^a , але не u_i . Оскільки калібрувально-інваріантні параметри u_i є глобальними (сталими), знаходимо, що вектор γ^a також не залежить від часової та просторових змінних. Ситуація, коли $\gamma^a \gamma_a = 1$, є фізично доцільною.

Імпульси p^i , спряжені до u_i , знайдемо з формули:

$$\int_{\Sigma} \omega_i^a \pi_a^i d^2x = u_i \left(\gamma^a \int_{\Sigma} \pi_a^i d^2x \right) \equiv u_i p^i. \quad (3.24)$$

Як і повинно бути, вираз для p^i визначається коефіцієнтом при 1 у розкладі Фур'є поля π_a^i . Таким чином, дужка Пуасона між u_i і p^i є

$$\{u_i, p^j\} = \delta_i^j. \quad (3.25)$$

Отже, ми описуємо простір розв'язків як ко-дотичну в'язку $T^*\mathbb{R}^2$. Величини u_i і p^i повністю визначаються з початкових умов задачі.

Оскільки співвідношення (3.25) має місце для змінних в однакові моменти часу, то $\dot{p}^i = 0$ при сталих u_i . У нашому калібруванні, маємо

$$\dot{\pi}_0^i = -I_0^i, \quad \dot{\pi}_\alpha^i = \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{ij} u_j \gamma^\beta - I_\alpha^i. \quad (3.26)$$

Тоді, враховуючи, що γ^a – сталий вектор, одержуємо додаткову умову, яка обмежує вигляд джерела I_a^i : $\gamma^a \dot{\pi}_a^i = \dot{p}^i = -\gamma^a I_a^i = 0$.

Легко знайти розв'язок рівнянь (3.26):

$$\pi_0^i = \bar{\pi}_0^i - \int dt I_0^i, \quad \pi_\alpha^i = \bar{\pi}_\alpha^i + \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{ij} u_j \gamma^\beta t - \int dt I_\alpha^i. \quad (3.27)$$

Незалежні від часу величини $\bar{\pi}_a^i$ задовольняють умову:

$$\epsilon_{ab}^c \gamma^b \bar{\pi}_c^i u_i = I_a^0, \quad (3.28)$$

яка випливає з (3.19). Окрім того, видно, що вимагається $\gamma^a I_a^0 = 0$.

Одержуємо загальний розв'язок:

$$\pi_0^i = p^i \gamma_0 + i_0^i, \quad \pi_\alpha^i = p^i \gamma_\alpha + \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{ij} u_j \gamma^\beta t + i_\alpha^i, \quad (3.29)$$

де i_a^i – розв'язок неоднорідного рівняння.

Проаналізуємо деякі ситуації в теорії без джерела. Позначимо частину інтервалу, залежну лише від просторових змінних, як

$$d\sigma^2 = (p^2 dx^1 - p^1 dx^2)^2 + (\gamma^\alpha \gamma_\alpha) t^2 (u_1 dx^1 + u_2 dx^2)^2. \quad (3.30)$$

Якщо вектор γ^a – просторовоподібний, як припускалося вище, і $\gamma^\alpha \gamma_\alpha = 1$, приходимо до відомого виразу для інтервала тороїдального Всесвіту [106], а саме, $ds^2 = -dt^2 + d\sigma^2$.

Для часоподібного вектора γ^a з $\gamma^a \gamma_a = -1$, інтервал набуває вигляду

$$ds_-^2 = -dt^2 + 2\text{sign}(\gamma_0) dt d\Phi - d\Phi^2 + (\gamma^\alpha \gamma_\alpha) t^2 d\Psi^2, \quad (3.31)$$

де $d\Phi \equiv p^2 dx^1 - p^1 dx^2$, $d\Psi \equiv u_1 dx^1 + u_2 dx^2$. Видно, що змінні Φ і Ψ – періодичні, оскільки такими є x^1 і x^2 . Окрім того, змінна Φ є часоподібною.

Отже, за фіксованих t і Ψ , інтервал ds_-^2 стає часоподібним і продукує замкнені часоподібні криві. Тоді, впливає, що розв'язок з часоподібним вектором γ^a приводить до метрики Гьоделя з порушеною причинністю.

Зауважимо, що інтервали (3.30), (3.31) інваріантні щодо $SO(2)$ калібрувальних перетворень (в інфінітезимальному вигляді):

$$\delta\gamma^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \gamma_\beta \tau_0. \quad (3.32)$$

Тепер, слід редукувати вихідний фазовий простір, обмежений польовими рівняннями і топологічними умовами, до фізичного простору $T^*\mathbb{R}^2$ з пар u_i, p^i . Це можна зробити за допомогою заміни повної системи нелінійних в'язей (разом з калібрувальними) на співвідношення для польових змінних, що виражаються в термінах фізичних змінних, які задовольняють систему в'язей. Усунення полів здійснюється просто: слід підставити вирази для полів в термінах u_i, p^i у динамічні величини і ввести дужку Дірака, яка збігається з дужкою Пуасона (3.25).

Зауважимо, що наша параметризація полів змінними u_i, p^i узагальнює відому параметризацію в іншому підході [106, 63] у випадку теорії без джерела і збігається з нею при $I_a^\mu = 0$.

3.1.2. Спостережувані у квантовій картині. Наступним кроком є дослідження геометрії простору із заданою топологією за допомогою геометричних характеристик, а саме, інтервалу та площі Всесвіту.

На класичному рівні (2+1)-гравітація – це система зі скінченним числом ступенів вільності, квантування яких здійснюється за звичайними принципами квантової механіки. Записуючи рівняння Шрьодінгера, нам слід визначити параметр еволюції λ в системі, побудованій за принципами загальної теорії відносності. У рамках формалізму Арновіта-Дезера-Мізнера (АДМ) за нульового значення космологічної сталої параметр еволюції означено як $\lambda = 1/t$ (див. [162, 163]). Однак, через відсутність канонічного гамільтоніана, з рівняння Шрьодінгера впливає лише те, що хвильові функції не повинні залежати від λ і, отже, часу t . Тому задача квантової механіки зводиться до пошуку власних значень операторів геометричних величин і власних функцій, які відіграватимуть роль хвильових функцій.

Порожній всесвіт. По-перше, доцільно розглянути квантування у випадку теорії без джерел з метою відпрацювання підходу, який можна надалі застосувати до моделі з додатковою взаємодією. Тоді, проквантуємо довжи-

ну, час та площу у пласкому тороїдальному Всесвіті та порівняємо наші результати з отриманими в інших підходах, таких як спінова піна та петльова квантова ґравітація. Це цікаво, оскільки схема канонічного квантування враховує повний набір в'язей на відміну від підходів, де гамільтоною в'язю нехтують. Тим не менш, очікується, що ми побачимо ті самі властивості спектрів просторовоподібних та часоподібних інтервалів, зокрема, неперервність та дискретність, про які вже відомо.

Введемо нові канонічні змінні,

$$U = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2}, \quad P = \frac{u_1 p^1 + u_2 p^2}{\sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2}} \quad (3.33)$$

$$J_0 = u_2 p^1 - u_1 p^2, \quad \Omega = \arctan \frac{u_2}{u_1}, \quad (3.34)$$

зручні для подальшого формулювання. Дужки Пуасона між ними є

$$\{U, P\} = \{J_0, \Omega\} = 1. \quad (3.35)$$

Окрім того, введемо нові просторові координати:

$$d\phi = \sin \Omega dx^1 - \cos \Omega dx^2, \quad d\psi = \cos \Omega dx^1 + \sin \Omega dx^2. \quad (3.36)$$

Якобіан повороту змінних дорівнює одиниці. Тоді, координати $\phi, \psi \in [0, 1]$ – періодичні з одиничним періодом, як і початкові.

Після канонічного перетворення інтервал ds^2 на основі розв'язку (3.30) з $\gamma^\alpha \gamma_\alpha = 1$ набуває вигляду:

$$ds^2 = -dt^2 + \left(P d\phi - \frac{J_0}{U} d\psi \right)^2 + t^2 U^2 d\psi^2. \quad (3.37)$$

Отже бачимо, що базисними векторами плаского тороїдального Всесвіту (який уявляється як паралелограм з утотожненими протилежними сторонами) є $(tU, 0)$ і $(-J_0/U, P)$. За наявності кутового моменту J_0 , координати ϕ і ψ вже не є ортогональними. Більше того, оскільки метрика явно залежить від еволюційного параметра t , неможливо знайти хвильову функцію, незалежну

від t . Аби обійти цю трудність, спробуємо перетворити цей вираз так, щоб метрика мала спільний масштабний фактор, який проквантуємо.

Враховуючи, що U , P і J_0 – сталі, корисно звести останній вираз до більш симетричного за два кроки. Перший полягає у заміні:

$$t \rightarrow tUP, \quad (3.38)$$

яка є лише переозначенням калібрування (3.18), а саме, $e_0^a = UP\delta_0^a$.

Друге перетворення має вигляд:

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \rightarrow \hat{A} \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} U & J_0 U^{-2} P^{-1} \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}). \quad (3.39)$$

Оскільки $\det \hat{A} = 1$, область визначення змінних ϕ і ψ зберігається.

Отже, перетворення дають

$$ds^2 = Q (-dt^2 + d\phi^2 + t^2 d\psi^2), \quad (3.40)$$

де сталий масштабний фактор є

$$Q \equiv U^2 P^2 = (u_1 p^1 + u_2 p^2)^2. \quad (3.41)$$

Метрика (3.40) збігається з анізотропною метрикою Казнера і описує Всесвіт, який розширюється вздовж осі ψ . Видно, що фактор Q не можна усунути заміною координат, якобіан якої дорівнює одиниці. Однак, метрику можна звести до метрики Мінковського,

$$ds^2 = -d\tau^2 + dx^2 + dy^2, \quad (3.42)$$

за допомогою перетворення координат:

$$\tau = \sqrt{Q}t \cosh \psi, \quad x = \sqrt{Q}t \sinh \psi, \quad y = \sqrt{Q}\phi. \quad (3.43)$$

Зауважимо, що масштабний фактор Q , який визначається топологічними ступенями вільності u_i і p^i , дорівнює площі двовимірної поверхні фіксованого

часу:

$$A = tQ. \quad (3.44)$$

Тоді, $\sqrt{Q}$ – лінійна характеристика тороїдального Всесвіту, і довжини кривих мають бути пропорційними до цієї величини, яка квантується.

Дійсно, довжину просторовоподібної кривої $c: [0, 1] \rightarrow \Sigma_t$ означимо як

$$L = \ell\sqrt{Q}, \quad \ell = \int_0^1 d\lambda \sqrt{w_\phi^2(\lambda) + t^2 w_\psi^2(\lambda)}, \quad (3.45)$$

де $w_\phi(\lambda) = d\phi(\lambda)/d\lambda$, $w_\psi(\lambda) = d\psi(\lambda)/d\lambda$ – кутові швидкості, які задають напрям кривої за певного значення λ .

З іншого боку, власний час частинки, яка рухається вздовж часоподібної кривої, задається формулою:

$$T = \tau\sqrt{-Q}, \quad \tau = \int_0^1 dt \sqrt{1 - w_\phi^2(t) - t^2 w_\psi^2(t)}. \quad (3.46)$$

Отже, величини, які підлягають квантуванню і визначають спектри довжини і часу, зосереджено в $\sqrt{Q}$. На класичному рівні, мірою L і T є інтегральні характеристики ℓ і τ . При квантуванні, з фізичної точки зору замінимо ℓ на планківську довжину, а τ – на планківський час, які тут дорівнюють 1.

В принципі, квантування виразів L і T можна відразу здійснити за допомогою заміни імпульсів P , J_0 операторами:

$$P \rightarrow \hat{P} = -i\frac{\partial}{\partial U}, \quad J_0 \rightarrow \hat{J}_0 = i\frac{\partial}{\partial \Omega}. \quad (3.47)$$

Однак, ми зіткнемося з проблемою впорядкування операторів в схемі канонічного квантування. У зв'язку з цим, вкажимо два шляхи. Перший полягає у симетричному квантуванні. У цьому випадку маємо

$$\hat{Q} = -\left(U\frac{\partial}{\partial U} + \frac{1}{2}\right)^2, \quad \hat{Q}\Psi_\gamma(U, \Omega) = -(\gamma + 1/2)^2\Psi_\gamma(U, \Omega), \quad (3.48)$$

де $\Psi_\gamma(U, \Omega)$ – хвильова функція.

Другий метод використовує нормальне впорядкування, коли

$$\hat{Q} = -U^2 \frac{\partial^2}{\partial U^2}, \quad \hat{Q}\Psi_\gamma(U, \Omega) = -\gamma(\gamma + 1)\Psi_\gamma(U, \Omega). \quad (3.49)$$

Надалі, будемо працювати у такому підході. Тим не менш, в обидвох випадках видно, що спектр оператора $\hat{Q}$ – вироджений, оскільки він не фіксує залежність хвильової функції від кута Ω .

Без додаткових симетрійних принципів неможливо сказати, чи спектр γ є дискретним або неперервним. Справді, як передбачено у петльовій квантовій гравітації [111] і в моделі спінової піни (див. [110, 87]), Q має бути Казиміром $SO(2, 1)$, означеним так:

$$Q = -J_0^2 + J_1^2 + J_2^2, \quad (3.50)$$

де J_a – канонічні генератори, з комутаційним співвідношеннями в термінах дужки Пуасона:

$$\{J_1, J_2\} = J_0, \quad \{J_1, J_0\} = J_2, \quad \{J_2, J_0\} = -J_1. \quad (3.51)$$

Аби переконатися, що Q – Казимір, наведемо аргументи. Фактично, $UP = u_1 p^1 + u_2 p^2$ – дилатація, яка дозволяє відтворити можливий вигляд генераторів J_1 і J_2 :

$$J_1 = u_1 p^0 = \cos \Omega \sqrt{Q + J_0^2}, \quad J_2 = u_2 p^0 = \sin \Omega \sqrt{Q + J_0^2}, \quad (3.52)$$

де $p^0 \equiv \sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}$.

Такі генератори задовольняють співвідношення (3.50) і (3.51). Генератори J_a можна подати в іншому вигляді, як в [278]. Однак, для збереження умов (3.51), наші вирази та інші мають бути пов'язані канонічним перетворенням.

Зауважимо, що вигляд генераторів нагадує інтеграли руху безмасової частинки з двома ступенями вільності. Отже, з точки зору динаміки тороїдальний Всесвіт – точковий об'єкт у фазовому просторі.

Тлумачення Q в якості Казиміра надає потужний засіб для знаходження власних значень оператора $\hat{Q}$. Порівняння (3.45) і (3.46) вказує, що власні значення $\hat{Q}$ для просторовоподібних величин мають бути додатними, а для часоподібних – від’ємними. Цей факт вимагає використання двох різних серій представлень алгебри $\mathfrak{so}(2, 1)$.

При квантуванні, замінимо J_a операторами $\hat{J}_a$ із співвідношеннями:

$$[\hat{J}_1, \hat{J}_2] = i\hat{J}_0, \quad [\hat{J}_1, \hat{J}_0] = i\hat{J}_2, \quad [\hat{J}_2, \hat{J}_0] = -i\hat{J}_1. \quad (3.53)$$

Утворимо для зручності нові оператори:

$$\hat{H} = \hat{J}_0, \quad \hat{J}_{\pm} = \pm i\hat{J}_1 + \hat{J}_2, \quad (3.54)$$

$$[\hat{H}, \hat{J}_{\pm}] = \pm \hat{J}_{\pm}, \quad [\hat{J}_-, \hat{J}_+] = 2\hat{H}. \quad (3.55)$$

В термінах останніх, оператор Казиміра набуває вигляду

$$\hat{Q} = -\hat{H}^2 + \frac{1}{2}(\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+). \quad (3.56)$$

У просторі власних векторів $|m\rangle$, $m \in \mathbb{Z}$ оператора $\hat{H}$, маємо

$$\hat{H}|m\rangle = m|m\rangle, \quad (3.57)$$

$$\hat{J}_{\pm}|m\rangle = \sqrt{-\gamma(\gamma + 1) + m(m \pm 1)}|m \pm 1\rangle. \quad (3.58)$$

Як аргументовано в [111], застосуємо незвідні унітарні представлення $\mathcal{D}_n^{\pm}$ і $\mathcal{C}_s$, що приводять до розкладу Планшереля L^2 -функції на групі $SO(2, 1)$. Тут, $\mathcal{C}_s$ – представлення головної серії з $\gamma = is - 1/2$ ($s \in \mathbb{R}$) і $m \in \mathbb{Z}$, що забезпечує додатне значення Казиміра у просторовоподібному випадку. Дискретні серії представлень $\mathcal{D}_n^{\pm}$ задають $\gamma = n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$). У цьому випадку, Казимір має від’ємні значення, потрібні для часоподібних величин. Представлення $\mathcal{D}_n^+$ охоплює значення $m = n, n + 1, n + 2, \dots$, а $\mathcal{D}_n^-$ охоплює $m = -n, -n - 1, -n - 2, \dots$

Таким чином, з теорії представлень випливає

$$\hat{L}\Psi = \sqrt{s^2 + 1/4} \Psi, \quad \hat{T}\Psi = \sqrt{n(n - 1)} \Psi. \quad (3.59)$$

З іншого боку, використання симетричного квантування (3.48) дає

$$\hat{L}\Psi = s\Psi, \quad \hat{T}\Psi = (n - 1/2)\Psi. \quad (3.60)$$

Такі спектри одержуються завдяки представленням групи $SU(1, 1)$, яка двічі накриває групу Лоренца $SO(2, 1)$.

Наші результати у двох схемах квантування узгоджуються з власними значеннями операторів довжини і часу, відомими в літературі [111]. Це дозволяє пов'язати канонічний підхід і гомотопічну групу з моделлю спінової піни і петльовою квантовою гравітацією.

Нагадаємо тлумачення спектра часу. Власні значення оператора $\hat{T}$ вказують на дозволені значення часу, необхідні для проходження часоподібного шляху. Якщо часоподібна крива – геодезійна і описує траєкторію вільної масивної частинки, спектр часу може визначати час життя цієї частинки.

Тепер розглянемо квантування площі A Всесвіту. Існують ситуації, коли $A = 0$, що відповідає сингулярностям, виродженню простору. Ці сингулярності є початком і, можливо, кінцем еволюції Всесвіту, і становлять інтерес на класичному і, особливо, квантовому рівнях.

Застосовуючи спектр $\hat{Q}$, одержуємо неперервний спектр оператора площі:

$$\hat{A}\psi \equiv t\hat{Q}\psi = ta\psi, \quad a \in \mathbb{R}_+, \quad (3.61)$$

де $a = s^2 + 1/4$ у схемі нормального впорядкування, і $a = s^2$ – в схемі симетричного впорядкування. Цей результат також відомий в літературі.

За наявності схем квантування просторовоподібних і часоподібних інтервалів у вільній теорії, узагальнимо модель включенням взаємодії.

Розщеплення квантових рівнів часоподібних інтервалів. Для побудови нових моделей і опису нових ефектів на квантовому рівні, зауважимо, що оператори $\hat{Q}$ і $\hat{J}_0$ мають дійсний спектр, і обидва застосовні для опису спостережуваних. Однак, розглянуті вище спектри просторовоподібних і часоподібних величин визначалися лише $\hat{Q}$. Тому, доцільно розглянути моделі,

які залучають обидва оператори.

Одна з можливостей полягає у побудові моделі, де $\hat{Q}$ має дискретний спектр. Тоді, наявність $\hat{J}_0$ буде приводити до розщеплення квантових рівнів оператора $\hat{Q}$. Подібна ситуація реалізується в ефекті Зеемана, де використовується компактна група $SO(3)$. У нашому випадку, розщеплення торкнеться спектрів часоподібних кривих.

Далі ми показуємо, як включення джерела приводить до розщеплення вироджених станів часоподібних інтервалів. Зрозуміло, що головна задача – знайти вигляд додаткової взаємодії. Окрім того, говорячи про Всесвіт, не можна уявити якесь джерело поза Всесвітом, як зовнішнє однорідне магнітне поле в ефекті Зеемана. Тоді, додаткову взаємодію слід конструювати в термінах тих самих змінних, якими описуємо Всесвіт. Однак, додаткова взаємодія може керуватися вільним параметром.

Нехай джерело I_a^μ має компоненти:

$$I_a^0 = 0, \quad I_0^i = 0, \quad I_\alpha^i = \epsilon^{ij} \epsilon_{\alpha\beta} u_j \gamma^\beta h J_0, \quad (3.62)$$

де h – вільний параметр, що включає (виключає) взаємодію.

Таке джерело задовольняє усі необхідні умови, одержані в описі польової динаміки. Вигляд джерела забезпечує відсутність кручення. Статичність I_a^μ виключає можливість врахування кінематичного члена, який описує еволюцію джерела у функціоналі дії, і ми досліджуємо замкнену систему.

За наявності джерела (3.62) інтервал записується так:

$$ds_I^2 = -dt^2 + (p^2 dx^1 - p^1 dx^2)^2 + t^2 (1 - hJ_0)^2 (u_1 dx^1 + u_2 dx^2)^2. \quad (3.63)$$

Отже, включення джерела приводить до заміни $u_i \mapsto u_i(1 - hJ_0)$ у виразі для метрики вільної теорії і впливає на швидкість зміни геометрії простору з часом.

Повторимо перетворення координат, наведені вище, щоб одержати

$$ds_I^2 = Q(1 - hJ_0)^2 (-dt^2 + d\phi^2 + t^2 d\psi^2). \quad (3.64)$$

Власний час на основі нової метрики набуває вигляду

$$T_I = \sqrt{-Q(1 - hJ_0)^2}. \quad (3.65)$$

Якщо “зовнішнє поле” h дорівнює нулеві, цей вираз збігається з (3.46).

Появу J_0 у виразі для T_I можна пов’язати з обертанням Всесвіту. Тому, ми досліджуємо вплив обертання на спектр часу.

При квантуванні, замінимо класичний вираз $Q(1 - hJ_0)^2$ оператором, власні значення і власні функції якого легко знайти:

$$\hat{T}_I \Psi(U, \Omega) = \sqrt{n(n-1)} |1 - hm| \Psi(U, \Omega). \quad (3.66)$$

Видно, що додаткова взаємодія продукує сім’ї станів (мультиплети) і приводить і до зменшення, і до збільшення часу. Можна припустити, що час збільшується за однакового напрямку руху часоподібної кривої і обертання. У випадку протилежних напрямів кривої і обертання, маємо зменшення часу.

Таким чином, включення додаткового джерела суттєво впливає на час життя частинки, яка описується часоподібним інтервалом. При цьому, амплітуда переходу між станами з різними числами m є екстремально малою через ортогональність власних функцій оператора повороту $\hat{J}_0$.

Взаємодія впливає і на спектр довжин, однак через його неперервність ми його не розглядаємо.

Модель з фіксованим крученням. Розглянемо іншу модель з джерелом $J_a^0 = J\delta_a^0$, $J_a^i = 0$, де $J = \text{const} > 0$ – глобальний кутовий момент на просторовій поверхні Σ . Одержуємо розв’язок польових рівнянь:

$$\omega_i^a = \gamma^a u_i, \quad \gamma^a = \delta_1^a, \quad (3.67)$$

$$\pi_1^1 = p^1, \quad \pi_1^2 = p^2, \quad \pi_2^1 = tu_2 + J \frac{\cos^2 \theta}{u_1}, \quad \pi_2^2 = -tu_1 + J \frac{\sin^2 \theta}{u_2}, \quad (3.68)$$

де θ – довільний кут, і $\gamma^a \gamma_a = 1$, як припускалося раніше.

Просторовий інтервал і площа, записані на основі розв’язку, є

$$d\sigma^2 = (p^2 dx^1 - p^1 dx^2)^2$$

$$+ \left[\left(tu_1 - J \frac{\sin^2 \theta}{u_2} \right) dx^1 + \left(tu_2 + J \frac{\cos^2 \theta}{u_1} \right) dx^2 \right]^2, \quad (3.69)$$

$$A = t(u_1 p^1 + u_2 p^2) + \frac{J}{u_1 u_2} (u_2 p^2 \cos^2 \theta - u_1 p^1 \sin^2 \theta). \quad (3.70)$$

Можна ототожнити J з кутовим моментом Всесвіту, подібно до чорної діри BTZ [62].

Хоча залежність $d\sigma^2$ і A від канонічних змінних u_i і p^i виглядає простою, їх інтерпретація не є очевидною. Тому, перепишемо просторовий інтервал у комплексній формі:

$$d\sigma^2 = |p^2 - i(tu_1 - Ju_2^{-1} \sin^2 \theta)|^2 |dx^1 + T dx^2|^2, \quad (3.71)$$

де

$$T = \frac{-p^1 - i(tu_2 + Ju_1^{-1} \cos^2 \theta)}{p^2 - i(tu_1 - Ju_2^{-1} \sin^2 \theta)} = T_1 + iT_2 \quad (3.72)$$

– модуль тора [376].

Через біголоморфну еквівалентність пласких торів у комплексній площині, які описуються парами комплексних чисел $(p^2 - i(tu_1 - Ju_2^{-1} \sin^2 \theta), -p^1 - i(tu_2 + Ju_1^{-1} \cos^2 \theta))$ і $(1, T)$ [376], одержуємо зв'язок між (2+1)-гравітацією і комплексною геометрією, що підтверджує застосування останньої у низьковимірній теорії [109, 74].

Для більш повної відповідності з теорією ріманових поверхонь, розташуємо паралелограм (плаский тор) у верхній півплощині $\mathcal{H} = \{x + iy | y > 0\}$. Покладемо $\theta = 0$, щоб $\sin^2 \theta = 0$, і введемо функції:

$$\tau_1 = \frac{t^2 u_1 u_2 - p^1 p^2}{(p^2)^2 + (tu_1)^2}, \quad \tau_2 = -t \frac{u_1 p^1 + u_2 p^2}{(p^2)^2 + (tu_1)^2}, \quad (3.73)$$

які збігаються з T_1 і T_2 при $J = 0$.

Складові комплексної величини

$$\pi = -\frac{i}{2t} (p^2 + it u_1)^2 = \pi^1 + i\pi^2 \quad (3.74)$$

є канонічними імпульсами, спряженими до τ_1 і τ_2 (див. [106]):

$$\{\tau_\alpha, \pi^\beta\} = \delta_\alpha^\beta. \quad (3.75)$$

Отже, дійсна та уявна компоненти модуля задаються так

$$T_1 = \tau_1 + \frac{J}{2\sqrt{\pi\bar{\pi}}}, \quad T_2 = \tau_2 - \frac{J}{2\pi^1\sqrt{\pi\bar{\pi}}} \left(\sqrt{\pi\bar{\pi}} - \pi^2 \right), \quad (3.76)$$

де риска означає комплексне спряження. Вони не комутують у сенсі дужки Пуассона, якщо $J \neq 0$, і відіграють роль “коваріантних” координат.

Модулярні перетворення [376],

$$\mathcal{S} : T \rightarrow -T^{-1}, \quad \pi \rightarrow \bar{T}^2\pi, \quad (3.77)$$

$$\mathcal{T} : T \rightarrow T + 1, \quad \pi \rightarrow \pi, \quad (3.78)$$

зберігають площу:

$$A = 2t\tau_2\sqrt{\pi\bar{\pi}} - \frac{Jt}{\pi^1} \left(\sqrt{\pi\bar{\pi}} - \pi^2 \right) = 2tT_2\sqrt{\pi\bar{\pi}}. \quad (3.79)$$

При $J \neq 0$, перетворення $\mathcal{S}$ не є канонічним і означає, що інверсія напряму базисних векторів паралелограма (плаского тора) дає фізично нееквівалентний тор. Іншими словами, тор з базисними векторами $(1, T)$ не є фізично еквівалентним тору з $(-T, 1)$ і $(T, -1)$. З іншого боку, завдяки перетворенню $\mathcal{T}$, тор з $(1, T)$ є еквівалентним тору з $(1, T + n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Отже, фізична еквівалентність вимагає не лише збереження площі, але й інших характеристик як орієнтація. Тому, система з $J \neq 0$ має нижчу (порушену) симетрію у порівнянні з випадком $J = 0$. На квантовому рівні наш висновок відобразиться в додатковій умові на хвильову функцію для системи без джерела, яка є відомою [106].

Зауважимо, що порушена комутативність компонент модуля (коваріантних координат) в термінах дужки Пуассона за наявності джерела природно пояснюється теоремою про невзаємодію [84].

Отже, ми перейшли від u_i , p^i до нових канонічних змінних τ_α , π^α в термінах яких природно тлумачити геометрію моделі. Надалі, знайдемо власні значення і власні функції оператора площі (після квантування), який узагальнено включенням (сталого) кутового моменту J .

Розпочнемо дослідження квантових властивостей з формалізму в термінах u_i, p^i , який називають “спінорним представленням” [106, 61]. Канонічне квантування за допомогою заміни класичних змінних на оператори:

$$p^{1,2} \rightarrow \hat{p}^{1,2} = -i \frac{\partial}{\partial u_{1,2}}; \quad \{u_i, p^j\} = \delta_i^j \rightarrow [u_i, \hat{p}^j] = i\delta_i^j, \quad (3.80)$$

приводить до квантово-механічної задачі:

$$-it \left(u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{1}{2} \right) \psi_a - J i \frac{\partial}{\partial u_1} \psi_a = A \psi_a, \quad (3.81)$$

яка визначає спектр площі A та власні функції (стани) $\psi_a(u_1, u_2)$.

Таке впорядкування операторів забезпечує зв’язок з відомими результатами. Коли кутовий момент J відсутній, рівняння (3.81) задовольняється хвильовою функцією з [106]:

$$u_1^{ia-1/2} \exp \left(i p \frac{u_2}{u_1} \right). \quad (3.82)$$

Якщо включити взаємодію, що порушує симетрію, можемо скористатися виразом (3.82) при $p \equiv 0$:

$$\psi_a(u_1, u_2) \sim u_1^{ia-1/2}, \quad (3.83)$$

де $a \geq 0$ – дійсний неперервний параметр, який визначає спектр: $A = ta$.

Як і очікувалося, хвильова функція не залежить від часу t . З іншого боку, вона та власні значення не містять кутовий момент J . Це пояснюється тим, що залежність хвильової функції від J привела б до залежності від t . Однак, взаємодія усуває виродження квантових станів, пов’язане з параметром p .

Оскільки хвильова функція залишається інваріантною при модулярному перетворенні $\mathcal{T}$, вона відповідає всім можливим конфігураціям тора з фіксованою площею.

Амплітуду переходу між станами з відмінними числами a можна визна-

чити з внутрішнього добутку хвильових функцій, а саме²,

$$\langle a'|a \rangle \equiv C \int_0^\infty u^{i(a-a')-1} du = C \int_{-\infty}^\infty e^{ik(a-a')} dk, \quad (3.84)$$

де C – стала нормування; $k = \ln u$.

Використовуючи інтегральне представлення для δ -функції, знаходимо

$$\langle a'|a \rangle = 2\pi C \delta(a' - a), \quad \int_0^\infty \langle a'|a \rangle da = 1, \quad (3.85)$$

що свідчить про екстремально малу ймовірність переходу (у даній моделі) між станами з різною площею; тут $C = (2\pi)^{-1}$.

Перед розглядом моделі в термінах модулярних змінних, зауважимо, що оператор, який містить J , анігілює хвильову функцію (3.83). Зрозуміло, що ця властивість має проявитися в термінах інших змінних.

При канонічному квантуванні, замість класичної величини A введемо псевдодиференціальний оператор:

$$\hat{A} = 2t\sqrt{\Delta_{1/2}} + Jt \left(\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau_2^2}} - \frac{\partial}{\partial \tau_2} \right) \int d\tau_1, \quad (3.86)$$

де інтеграл – антипохідна,

$$\Delta_{1/2} = -\tau_2^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau_2^2} \right) + i\tau_2 \frac{\partial}{\partial \tau_1} - \frac{1}{4} \quad (3.87)$$

– оператор Мааса ваги $1/2$. Такий вигляд диференціального оператора випливає з узгодження результатів вільної теорії Черна–Саймонса в спіновому представленні і теорії в термінах модуля [106, 61].

Оскільки антипохідна і похідна зазвичай комутують,

$$\int d\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1} = \frac{\partial}{\partial \tau_1} \int d\tau_1 = 1, \quad (3.88)$$

²Оскільки ψ_a залежить лише від u_1 , ми не виписуємо інтеграл за u_2 , який усувається нормуванням.

антипохідна повинна анулювати сталу (по відношенню до даної змінної).

Згідно з висновками в спінорному представленні про анігілюючу дію оператора взаємодії на хвильову функцію, знаходимо, що хвильова функція залежить лише від τ_2 . Це автоматично дає

$$2t\sqrt{-\tau_2^2\frac{\partial^2}{\partial\tau_2^2}-\frac{1}{4}}\psi_a=A\psi_a. \quad (3.89)$$

Подібно до випадку з $J=0$, дана задача розглядається і розв'язується в контексті допоміжної [61]:

$$-4t^2\left(\tau_2^2\frac{\partial^2}{\partial\tau_2^2}+\frac{1}{4}\right)\psi_a=A^2\psi_a. \quad (3.90)$$

Її розв'язком є такі власні значення і власні функції:

$$A=ta, \quad \psi_a(\tau_1, \tau_2) \sim \tau_2^{(ia+1)/2}. \quad (3.91)$$

Одержана хвильова функція вже не визначається хвильовою формою Мааса, як при $J=0$. При $a=0$ хвильова функція $\psi_0(\tau_1, \tau_2) \sim \tau_2^{1/2}$ є “скороченою” у порівнянні з вільною теорією [61]:

$$\Psi_0(\tau_1, \tau_2) \sim \tau_2^{1/2}\eta^2(\tau),$$

де $\eta(\tau)$ – функція Дедекінда.

Дивно, що включення джерела J приводить до спрощення теорії. Однак, це досягається усуненням виродження квантових станів.

В термінах модуля, амплітуда переходу між станами з різною площею є

$$\langle a'|a\rangle=C'\int_0^\infty\tau^{-i(a'-a)/2+1}\frac{d\tau}{\tau^2}. \quad (3.92)$$

де τ^{-2} в мірі інтегрування впливає з міри на верхній півплощині [376]:

$$\frac{d\tau_1d\tau_2}{\tau_2^2}.$$

Заміною змінної інтегрування вираз (3.92) зводиться до (3.85), тобто вирази в термінах (u_i, p^i) і $(\tau_\alpha, \pi^\alpha)$ –еквівалентні. Окрім того, вони схожі на умову нормування плоских хвиль, що описують вільну частинку в квантовій механіці. Стан з $a = 0$ нічим не виділений тут, і ймовірність переходу до нього також екстремально мала.

3.1.3. Підсумки. Нами застосовано теорію в'язей Дірака для редукції фазового простору топологічної гравітації Черна–Саймона у $(2+1)$ вимірах. Такий підхід дозволяє нам витягти канонічні (глобальні) топологічні змінні з локальної теорії поля. Таким чином, розроблена схема є альтернативою процедурі параметризації полів глобальними змінними, що характеризують геометрію простору нульової кривини з топологією тора. Більше того, наша модель узагальнює теорію шляхом включення кутового моменту та результати, відомі в літературі.

Ми показали, що квантування просторовоподібних та часоподібних кривих в термінах глобальних змінних приводить до спектрів, отриманих в рамках петльової квантової гравітації та моделі спінової піни. Це досягнуто шляхом інтерпретації конформного фактора метрики, який квантується, в якості Казіміра $SO(2, 1)$. Цей факт встановлює зв'язок між різними підходами.

За рахунок включення взаємодії поля Черна–Саймонса з кутовим моментом спеціальної форми, досліджено ефект розщеплення квантових вироджених рівнів часу. Таким чином, квантові властивості непорожнього Всесвіту є більш багатими на відміну від випадку порожнього простору-часу.

Показано, що в системі зі сталим крученням порушується симетрія: модулярне перетворення, що зберігає площу, не приводить до фізично еквівалентних станів. На квантовому рівні цей ефект знімає виродження власної хвильової функції оператора площі. На підставі обчислень амплітуди переходу, показана ортогональність станів з різною площею.

3.2. Еволюція геометрії ріманової поверхні роду два

Дослідимо геометродинаміку поверхні роду два, пов'язану з гіперболічним восьмикутником, який вкладається в диск Пуанкаре і який переходить сам у себе при поворотах на кут $\pi/2$. Ототожнюючи протилежні сторони такої області, достатньо використати два дійсних незалежних параметра, щоб описати геометрію восьмикутника і вигляд генераторів групи Фукса. Для опису еволюції геометрії, ми оперуємо інваріантами простору параметрів замість ріманової метрики, яка нам невідома. Зауважимо, що інволюція подібних поверхонь і пов'язані з нею генератори обговорюються в [59, 329].

Після означення простору Тейхмюлера [169] для сім'ї заданих поверхонь, знаходимо змінні Фенхеля–Нільсена, як глобальні координати на ньому, що дозволяє наділити простір параметрів симплектичною два-формою Вейля–Петерсона за теоремою Вольперта [361]. Надалі, демонструємо, що простір параметрів можна щільно покрити замкненими кривими сталого периметра восьмикутника, і описуємо дифеоморфізм, породжений ізопериметричною в'яззю. Ми розглядаємо множину ізопериметричних орбіт як засіб для подальшої параметризації і квантування [392].

Визначаємо канонічно спряжені змінні дія–кут для ізопериметричних орбіт за допомогою ототожнення дії з площею Вейля–Петерсона, яка обмежується замкненою орбітою в просторі параметрів. Це – головний пункт нашого підходу на відміну від формалізму, який базується на локальних параметрах Фенхеля–Нільсена поверхні [181]. Так, ми приходимо до задачі про квантування площі Вейля–Петерсона, яка подібна до задачі петльової квантової ґравітації/космології [302].

Щоб описати геометродинаміку і здійснити квантування, ми розширюємо алгебру змінних дія–кут до генераторів $\mathfrak{su}(1, 1)$, які пов'язані з алгеброю Лоренца в $(2+1)$ -мірному просторі–часі. Такий підхід дозволяє нам сформулювати релятивістську динаміку ріманової поверхні як канонічне перетворен-

ня, яке ґенерується бустом. Реалізація цього приводить до сценарію “великого відскоку” [26, 210] (який є альтернативою до “великого вибуху”) у просторі параметрів. Зауважимо, що квантування Всесвіту, у вигляді ріманової поверхні роду два, алгебраїчно сформульовано в [281].

3.2.1. Восьмикутник і ріманова поверхня. Модель Пуанкаре двовимірного гіперболічного простору задається відкритим диском

$$\mathbb{D} = \{z = x + iy \mid |z| < 1\} \quad (3.93)$$

і метрикою $ds^2 = 4|dz|^2/(1 - |z|^2)^2$.

Геодезійна в $(\mathbb{D}, ds^2)$ – дуга кола всередині $\mathbb{D}$ з радіусом R і центром в точці $z_0 = \sqrt{1 + R^2} \exp(i\phi)$, яка лежить поза одиничним диском. У частковому випадку, геодезійні, які виходять з початку координат є евклідовими прямими (діаметрами). Усі геодезійні ортогонально перетинають ґраницю диска $\partial\mathbb{D}$.

Група всіх ізометрій γ , що зберігають орієнтацію в просторі, диску $(\mathbb{D}, ds^2)$, позначається як $\text{Isom}^+(\mathbb{D})$ і діє через перетворення Мьобіуса:

$$z \mapsto \gamma[z] = \frac{uz + v}{\bar{v}z + \bar{u}}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (3.94)$$

де u і v задовольняють співвідношення $|u|^2 - |v|^2 = 1$; $\bar{u}, \bar{v}$ – відповідні комплексно спряжені величини. Отже, ототожнимо ґенератор γ з елементом групи

$$\text{SU}(1, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ \bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \mid |u|^2 - |v|^2 = 1 \right\}. \quad (3.95)$$

Ріманова поверхня S розуміється тут як компактний двовимірний орієнтований многовид з метрикою сталої від’ємної кривини. Така поверхня одержується з гіперболічного просто зв’язаного восьмикутника $\mathcal{F}$ в $\mathbb{D}$ шляхом склеювання протилежних сторін, сформованих з восьми геодезійних дуг, перетини яких утворюють вершини.

Нехай вершини знаходяться в точках $a \exp(ik\pi/2)$, $b \exp[i(\alpha + k\pi/2)]$ (див. Рис. 3.1 ліворуч), де $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < a, b < 1$ і $k = \overline{0, 3}$. Вимагаємо, щоб су-

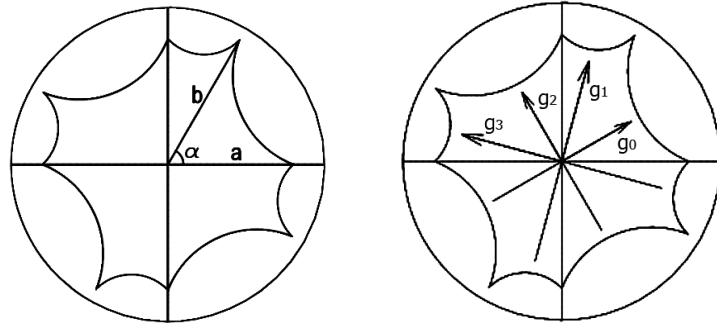


Рис. 3.1. Восьмикутник з $a = 0.8$, $\alpha = \pi/3$ і генератори g_k групи Фукса.

ма внутрішніх кутів восьмикутника $\mathcal{F}$ дорівнювала 2π , і гіперболічна площа $\text{Area}(\mathcal{F}) = 4\pi$ у випадку поверхні роду два – за теоремою Гауса–Боне.

Нехай параметри (a, α) – незалежні дійсні змінні. Знаходимо, що b і внутрішній кут β при вершинах $a \exp(ik\pi/2)$ є

$$b = \left(\sqrt{2}a \cos \tilde{\alpha}\right)^{-1}, \quad \tan \beta = \frac{1 - a^2}{1 - b^2}; \quad \tilde{\alpha} = \alpha - \frac{\pi}{4}. \quad (3.96)$$

За їх допомогою визначаємо область $\mathcal{A}$ дозволеної зміни параметрів (a, α) :

$$-\pi/4 < \tilde{\alpha} < \pi/4, \quad \left(\sqrt{2} \cos \tilde{\alpha}\right)^{-1} < a < 1, \quad (3.97)$$

яку показано далі на Рис. 3.3.

Для правильного восьмикутника, слід покласти $a = 2^{-1/4}$, $\alpha = \pi/4$.

У нашому випадку, границя восьмикутника $\partial\mathcal{F}$ формується з геодезійних двох типів (позначених через “ $\pm$ ”), які цілком визначаються радіусами $R_{\pm}$ і кутами $\phi_{\pm} + k\pi/2$, $k = \overline{0, 3}$, які визначають положення центрів кіл (дуг). Геометричні умови приводять до параметризації:

$$R_{\pm} = \frac{1}{2a} \sqrt{T_{\pm}^2 + (1 - a^2)^2}, \quad \phi_{\pm} = \arctan \left[\left(\frac{T_{\pm}}{1 + a^2} \right)^{\pm 1} \right], \quad (3.98)$$

тут $T_{\pm} = a^2 \pm \tan \tilde{\alpha}$ і $0 < \phi_+ < \alpha < \phi_- < \pi/2$.

Пов’яжемо модельний восьмикутник $\mathcal{F}$ з відповідною поверхнею S і групою Фукса $\Gamma \subset \text{Isom}^+(\mathbb{D})$, ізоморфною фундаментальній групі $\pi_1(S)$.

Оскільки протилежні сторони $\mathcal{F}$ мають однакові довжини, означимо ізометрію $g_k \in \text{Isom}^+(\mathbb{D})$, яка відображає геодезійний граничний сегмент s_{k+4} в

s_k для всіх $k = \overline{0, 3}$ (див. Рис. 3.1 праворуч). Ототожнюючи довільну точку $z \in s_{k+4}$ з $g_k[z] \in s_k$, одержуємо замкнену поверхню. Чотири ізометрії g_k та обернені g_k^{-1} генерують групу Фукса Γ з єдиним співвідношенням:

$$g_0 g_1^{-1} g_2 g_3^{-1} g_0^{-1} g_1 g_2^{-1} g_3 = \text{id}, \quad (3.99)$$

і, тоді, означимо поверхню S як $\mathbb{D}/\Gamma$.

Нами вперше одержано таку залежність g_0 і g_1 від (a, α) :

$$g_0 = N(a, \tilde{\alpha}) \begin{pmatrix} a(1 - \tan \tilde{\alpha}) & (a^2 - \tan \tilde{\alpha}) + i(1 - a^2) \\ (a^2 - \tan \tilde{\alpha}) - i(1 - a^2) & a(1 - \tan \tilde{\alpha}) \end{pmatrix}, \quad (3.100)$$

$$g_1 = N(a, \tilde{\alpha}) \begin{pmatrix} a(1 + \tan \tilde{\alpha}) & (1 - a^2) + i(a^2 + \tan \tilde{\alpha}) \\ (1 - a^2) - i(a^2 + \tan \tilde{\alpha}) & a(1 + \tan \tilde{\alpha}) \end{pmatrix}, \quad (3.101)$$

тут

$$N(a, \tilde{\alpha}) = \frac{-\cos \tilde{\alpha}}{\sqrt{(1 - a^2)(2a^2 \cos^2 \tilde{\alpha} - 1)}}.$$

Решта генераторів одержується за допомогою поворотів:

$$g_{2,3} = R_{\frac{\pi}{2}} g_{0,1} R_{\frac{\pi}{2}}^{-1}, \quad g_k^{-1} = R_{\pi} g_k R_{\pi}^{-1}; \quad (3.102)$$

$$R_{\varphi} = \begin{pmatrix} \exp(i\varphi/2) & 0 \\ 0 & \exp(-i\varphi/2) \end{pmatrix}.$$

Припишемо поверхні мітку групи генераторів Γ . Дві мічені поверхні (S, Γ) і (S', Γ') є еквівалентно міченими, якщо існує ізометрія $\gamma : S \rightarrow S'$, яка задовольняє $g'_k = \gamma g_k \gamma^{-1}$. Тоді, всі еквівалентно мічені поверхні утворюють еквівалентно мічений клас $[S, \Gamma]$ представлення ріманової поверхні S .

Множина всіх еквівалентно мічених класів замкнених і компактних ріманових поверхонь роду g формує простір Тейхмюлера $\mathcal{T}_g$. Дійсна розмірність $\mathcal{T}_g$, як векторного простору, дорівнює $6g - 6$ згідно з теоремою Рімана–Роха. У нашому випадку, ріманові поверхні приводять до підпростору повного $\mathcal{T}_2$.

3.2.2. Структура простору параметрів.

Симплектична два-форма. Гіперболічна ріманова поверхня роду g без границі завжди містить систему з $3g - 3$ простих замкнених геодезійних, які ані гомотопічні одна одній, ані гомотопічно тривіальні. Розріз вздовж тих геодезійних завжди розбиває поверхню на $2g - 2$ пар штанів (Y-блоки, сфери з трьома дірками), які відіграють роль будівельних блоків для поверхні [58].

У нашому випадку, поверхня S є дводірковим тором, який можна розбити на дві пари штанів за допомогою системи з трьох замкнених геодезійних (див. Рис. 3.2 ліворуч). Ця хірургія приводить до обчислення параметрів Фенхеля–Нільсена: довжин ℓ_k зазначених геодезійних і відповідних твістів τ_k (див. означення в [9, 58, 169] та схематичне зображення τ_3 , як гіперболічної відстані (зсуву) між основами перпендикулярів до γ_3 , на Рис. 3.2 праворуч).

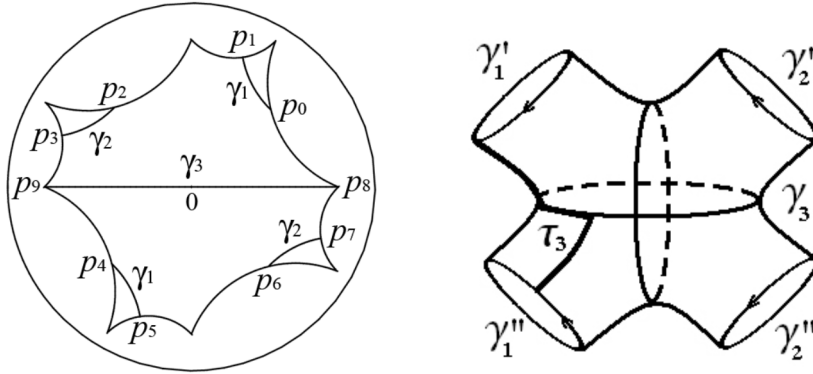


Рис. 3.2. Ліворуч: Розбиття на штани восьмикутника з $a = 0.8$, $\alpha = \pi/3$. Точки $p_0, \dots, p_7$ є серединами сторін. Праворуч: Двоє штанів, які склеюються вздовж γ_3 .

Нами знайдено такі величини для можливого розбиття на штани [272]:

$$\ell_{1,2} = 2 \operatorname{arccosh} \frac{a^2}{1 - a^2}, \quad \ell_3 = 2 \ln \frac{1 + a}{1 - a}, \quad (3.103)$$

$$\tau_{1,2} = \operatorname{arccosh} \left[\frac{2a^2 - 1}{a^2(1 - b^2)} - 1 \right], \quad \tau_3 = \ln \frac{1 + a}{1 - a}. \quad (3.104)$$

Оскільки простір Тейхмюлера $\mathcal{T}_2$ гомеоморфний до $\mathbb{R}^6$, можна утотожнити змінні Фенхеля–Нільсена з глобальними координатами у ньому. Окрім того,

простір Тейхмюлера володіє додатковою структурою, а саме, симплектичною два-формою Вейля–Петерсона. Завдяки теоремі Вольперта [169, 362], ця два-форма для компактних замкнених ріманових поверхонь роду g набуває простого вигляду в термінах змінних Фенхеля–Нільсена,

$$\omega_{\text{WP}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3g-3} d\ell_k \wedge d\tau_k, \quad (3.105)$$

яка інваріантна за будь-якого розбиття на штани. Після введення $\theta_k = 2\pi\tau_k/\ell_k$, простий твіст Дена $\theta_k \rightarrow \theta_k + 2\pi$ дає ізометрично ту саму поверхню.

Підстановка виразів для ℓ_k і τ_k в (3.105) зводить форму Вейля–Петерсона до вигляду

$$\omega_{\text{WP}} = \frac{8a}{(1-a^2)(2a^2 \cos^2 \tilde{\alpha} - 1)} da \wedge d\tilde{\alpha}. \quad (3.106)$$

Щоб переконатись в унікальності останньої формули, розглянемо інше розбиття на штани. У термінах наших параметрів, нове розбиття приводить лише до заміни:

$$a \leftrightarrow b, \quad \tilde{\alpha} \leftrightarrow -\tilde{\alpha}, \quad (3.107)$$

у функціях довжин та твістів для попереднього розбиття. Хоча одержується набір нових функцій, результуюча два-форма ω_{WP} залишається незмінною.

Отже, множина $\mathcal{A}$ дозволених параметрів (a, α) є симплектичним многовидом $(\mathcal{A}, \omega_{\text{WP}})$, а два-форму (3.106) можна розглядати як елемент її площі.

Ізопериметричні орбіти. Оскільки гіперболічна площа дозволених восьмикутників завжди дорівнює 4π , найпростіший спосіб контролювати глобальні зміни поверхні полягає у розгляді периметра восьмикутника:

$$P = 8 \operatorname{arccosh} \frac{1 - a^2 b^2 + \sqrt{(1 - a^2)^2 + (1 - b^2)^2}}{(1 - a^2)(1 - b^2)}. \quad (3.108)$$

Хоча периметр P залишається, вочевидь, інваріантом при автоморфізмі та розбитті на штани, він може набувати того самого значення для різних пар (a, α) . Опишемо тут відповідні орбіти. Навпаки, два параметра *плаского* во-

сьмикутника з тим самим автоморфізмом і властивістю гомотетії однозначно визначаються при фіксуванні площі та периметра.

Для подальших обчислень корисно ввести дві допоміжні величини:

$$T \equiv \tanh(P/16), \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (3.109)$$

де остання відображає існування двох листів в $\mathcal{A}$ з різними $\text{sign } \tilde{\alpha}$.

Для заданої $T(P)$, найбільше та найменше значення a при $\tilde{\alpha} = 0$ є

$$a_{\pm}(T) = \frac{1}{2} \sqrt{2 + T^2 \pm \sqrt{(2 + T^2)^2 - 8}}. \quad (3.110)$$

Розв'язком рівняння $(2 + T^2)^2 = 8$ є $T_{\text{reg}} = \sqrt{2\sqrt{2} - 2}$, що приводить до величин $P_{\text{reg}} = 8 \operatorname{arccosh}(5 + 4\sqrt{2})$ і $a_{\text{reg}} = 2^{-1/4}$, які відповідають правильному восьмикутнику. Отже, $P_{\text{reg}} \approx 24.457$ є найменшим значенням P серед можливих, і траєкторія в $\mathcal{A}$ для P_{reg} стягується в точку.

Ізопериметричні орбіти можна параметризувати так

$$a(T, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{2 + T^2 + \cos \varphi \sqrt{(2 + T^2)^2 - 8}}, \quad (3.111)$$

$$\tilde{\alpha}(T, \varphi) = \arctan \frac{\sqrt{2} \sqrt{(2 + T^2)^2 - 8} \sin \varphi}{2 \sqrt{3T^2 - 2 - \cos \varphi \sqrt{(2 + T^2)^2 - 8}}}, \quad (3.112)$$

де використано циклічну змінну $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Ці орбіти показано на Рис. 3.3 (ліворуч) для P від $P = 25$ до $P = 41$ з кроком 2. Хоча роль периметра восьмикутника не зрозуміла з фізичної точки зору, важливо, що ізопериметрична в'язь гарантує щільне покриття простору $\mathcal{A}$, який має специфічну форму, відповідними орбітами. Цей факт дозволяє проквантувати $(\mathcal{A}, \omega_{\text{WP}})$ у дусі [392]. Щоб реалізувати це, слід отождествити площу Вейля–Петерсона $A_{\text{WP}}(P)$ області в $\mathcal{A}$, обмежену кривою для фіксованого P , зі змінною дії, тобто інтегралом “руху”. Тоді, квантування має дати число квантових “комірок” всередині області. Так виглядає, що цього достатньо, якщо не залучено додаткові фізичні принципи (окрім

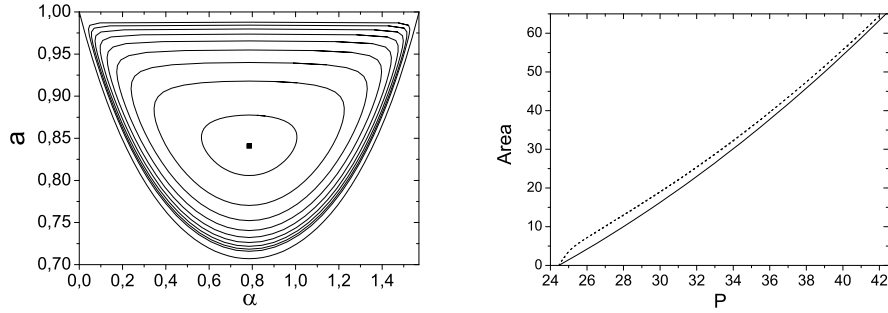


Рис. 3.3. Ліворуч: Простір параметрів $\mathcal{A}$ і орбіти сталого периметра. Праворуч: Площа Вейля–Петерсона області, обмеженої ізопериметричною кривою. Суцільну криву одержано чисельно; пунктирна крива задається (3.116).

квантування). Однак, будемо вимагати $SO(2,1)$ -симетрію динаміки згідно з $(2+1)$ -гравітацією Лоренца.

На підставі форми (3.106), означимо площу Вейля–Петерсона:

$$\begin{aligned} A_{\text{WP}}(P) &\equiv \int_{P=\text{const}} \omega_{\text{WP}} \\ &= \int_{x_-(T)}^{x_+(T)} \frac{8dx}{(1-x)\sqrt{2x-1}} \operatorname{arccosh} f(x, T), \end{aligned} \quad (3.113)$$

де $x \equiv a^2$; функції $x_{\pm}(T) \equiv a_{\pm}^2(T)$ визначаються (3.110);

$$f(x, T) = \frac{1}{\sqrt{1-T^2}} \sqrt{\frac{2x-1}{x}} \sqrt{\frac{T^2-x}{T^2-2x+1}}, \quad (3.114)$$

і враховано позначення (3.109).

Для аналітичної оцінки (3.113), застосуємо асимптотичний розклад:

$$\operatorname{arccosh} z = \ln(2z) - \frac{1}{2 \cdot 2z^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4z^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6z^4} - \dots \quad (3.115)$$

Врахування лише логарифмічного члена дає

$$A_{\text{WP}}^{(0)}(P) = F(T, \sqrt{2x_+(T)-1}) - F(T, \sqrt{2x_-(T)-1}), \quad (3.116)$$

де

$$F(T, \xi) = 16 \ln \frac{2}{\sqrt{1-T^2}} \operatorname{arctanh} \xi + 8 \ln \xi \ln(1+\xi) + 8 \operatorname{dilog} \xi$$

$$\begin{aligned}
& +8 \operatorname{dilog} (1 + \xi) + 4 \sum_{\epsilon=\pm 1} \left\{ \operatorname{dilog} \frac{T + \epsilon \xi}{T - \epsilon} - \operatorname{dilog} \frac{T + \epsilon \xi}{T + \epsilon} \right. \\
& + \operatorname{dilog} \left[\frac{1 - \xi}{2} + \epsilon i \frac{1 + \xi}{2} \right] - \operatorname{dilog} \left[\frac{1 + \xi}{2} + \epsilon i \frac{1 - \xi}{2} \right] \\
& \left. + \operatorname{dilog} \frac{\sqrt{2T^2 - 1} + \epsilon \xi}{\sqrt{2T^2 - 1} + \epsilon} - \operatorname{dilog} \frac{\sqrt{2T^2 - 1} + \epsilon \xi}{\sqrt{2T^2 - 1} - \epsilon} \right\}. \quad (3.117)
\end{aligned}$$

Тут, ділогарифмічну функцію означено як

$$\operatorname{dilog} z = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(1 - z)^p}{p^2}. \quad (3.118)$$

На Рис. 3.3 (праворуч) показано, що $A_{\text{WP}}^{(0)}(P)$ прямує до чисельно знайденої залежності $A_{\text{WP}}(P)$ за великих P , але поведінка при $P \rightarrow P_{\text{reg}}$ виглядає невірною. Однак, похідну $dA_{\text{WP}}(P)/dP$ можна обчислити точно.

Глобальні канонічні змінні. Щоб знайти канонічні змінні для ізопериметричних орбіт, ми вводимо величину:

$$Q(x, T) = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1 - T^2}{\sqrt{T^2 - x_-}} \left[\frac{F(u, k)}{1 - T^2} - \frac{\Pi(u, \nu_1, k)}{1 - x_-} + \frac{\Pi(u, \nu_2, k)}{T^2 - 2x_- + 1} \right], \quad (3.119)$$

де F і Π – еліптичні інтеграли першого і третього роду.

Амплітуда u , модуль k , параметри ν_1 і ν_2 задаються так:

$$\begin{aligned}
u &= \sqrt{\frac{x - x_-}{x_+ - x_-}}, & k &= \sqrt{\frac{x_+ - x_-}{T^2 - x_-}}, \\
\nu_1 &= \frac{x_+ - x_-}{1 - x_-}, & \nu_2 &= 2 \frac{x_+ - x_-}{T^2 - 2x_- + 1}.
\end{aligned} \quad (3.120)$$

Тоді, симплектична форма Вейля–Петерсона набуває вигляду

$$\omega_{\text{WP}} = \varepsilon dQ(x, T) \wedge dP. \quad (3.121)$$

Інтегрування за x дає

$$\frac{dA_{\text{WP}}}{dP} \equiv \oint_{P=\text{const}} \varepsilon dQ(x, T) = \int_{x_-}^{x_+} dQ(x, T) - \int_{x_+}^{x_-} dQ(x, T)$$

$$= 2Q(x_+, T), \quad (3.122)$$

де значення амплітуди $u = 1$ приводить до повних еліптичних інтегралів.

Означимо змінну дії (або “кутовий момент”) так:

$$J(P) = \frac{1}{4\pi} A_{\text{WP}}(P), \quad (3.123)$$

і знайдемо кутову змінну Φ з рівняння $\omega_{\text{WP}} = 2d\Phi \wedge dJ$; дужка Пуасона тоді є $\{J, \Phi\}_{\text{WP}} = 1$. Спершу, маємо

$$d\Phi = \frac{\pi\varepsilon}{Q(x_+, T)} dQ(x, T), \quad \oint_{P=\text{const}} d\Phi = 2\pi, \quad (3.124)$$

де застосовано правило обчислення інтегралів з ε (див. (3.122)).

За фіксованого P , приходимо до виразу для кутової змінної:

$$\Phi = \pi\varepsilon \frac{Q(x, T)}{Q(x_+, T)}, \quad \Phi \in [-\pi, \pi]. \quad (3.125)$$

Тепер, тривіально проквантувати систему в термінах J і Φ , що відразу приводить нас до оцінки спектру площі фазового простору (у планківських одиницях) за відносно великих n :

$$A_{\text{WP}} \sim 4\pi n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.126)$$

Ми уточнимо цю формулу нижче при розгляді теорії відносності.

3.2.3. Релятивістська кінематика. На цьому етапі, геометродинаміка ріманової поверхні в рамках розглядуваної моделі є довільною через чисто калібрувальну природу. Маємо лише геометричні в’язі, які визначають “фізичний сектор” зміни параметрів. Однак, не має означення часу і функції Гамільтона, яка б ґенерувала фізичну еволюцію змінних J і Φ . Тому, звернемося до $(2+1)$ -гравітації, де $\text{SO}(2, 1) \sim \text{SU}(1, 1)$ відіграє роль групи Лоренца. Це дозволяє побудувати динамічну модель.

Розширимо число спостережуваних за допомогою комбінування J і Φ :

$$J_0 = J, \quad J_{\pm} = \sqrt{J^2 - C} \exp(\mp i\Phi), \quad (3.127)$$

де C – стала, така що $J^2 \geq C$.

Алгебра Пуассона нових змінних є алгеброю Лі $\mathfrak{su}(1, 1)$:

$$\{J_+, J_-\}_{\text{WP}} = 2iJ_0, \quad \{J_{\pm}, J_0\}_{\text{WP}} = \pm iJ_{\pm}. \quad (3.128)$$

Більш загально, замість генераторів $J_{0,\pm}$ можна ввести безмежне число величин $L_n = J \exp(in\Phi)$, $n \in \mathbb{Z}$, які генерують алгебру Віта.

Оскільки еволюція консервативної системи зазвичай описується канонічним перетворенням, знаходимо, що $\text{SU}(1,1)$ -перетворення є канонічними тут. Введемо матрицю

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} J_0 & J_+ \\ J_- & J_0 \end{pmatrix}. \quad (3.129)$$

Її визначник $C \equiv J_0^2 - J_+ J_-$ є Казиміром алгебри $\mathfrak{su}(1, 1)$.

Дія матриці $U \in \text{SU}(1, 1)$ виглядає так $\mathcal{M} \mapsto \tilde{\mathcal{M}} = U\mathcal{M}U^\dagger$ і зберігає Казимір, $\det \tilde{\mathcal{M}} = C$.

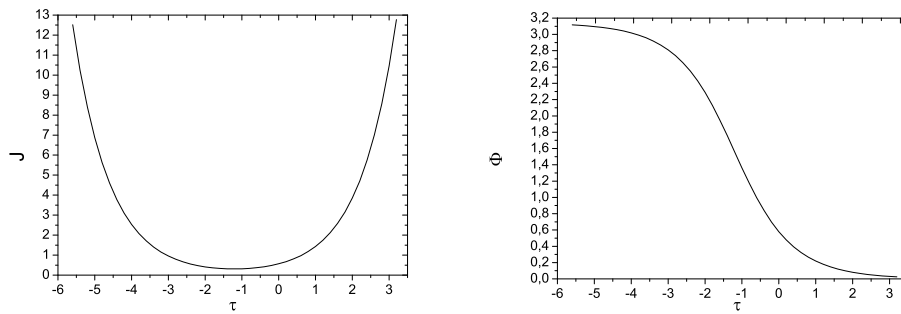


Рис. 3.4. Кутовий момент J і кут Φ як функції внутрішнього часу τ ; $C = 0$, і $a_0 = 0.8$, $\alpha_0 = \pi/3$ є початковими даними. Еволюція поверхні розпочинається з безмежної площі Вейля–Петерсона при $\tau \rightarrow -\infty$, стягується і знов розширюється до безмежної площі при $\tau \rightarrow \infty$.

Релятивістську кінематику поверхні можна згенерувати бустом:

$$U_\tau = \begin{pmatrix} \cosh(\tau/2) & \sinh(\tau/2) \\ \sinh(\tau/2) & \cosh(\tau/2) \end{pmatrix}. \quad (3.130)$$

З обчислень $\mathcal{M}(\tau) = U_\tau \mathcal{M}(0) U_\tau^\dagger$, виводимо траєкторії для $J_{0,\pm}$ або, еквівалентно, для J і Φ :

$$J(\tau) = \check{J} \cosh \tau + \sqrt{\check{J}^2 - C} \sinh \tau \cos \check{\Phi}, \quad (3.131)$$

$$\Phi(\tau) = \arccos \frac{\check{J} \sinh \tau + \sqrt{\check{J}^2 - C} \cosh \tau \cos \check{\Phi}}{\sqrt{J^2(\tau) - C}}, \quad (3.132)$$

де $\check{J} = J[P(a_0, \alpha_0)]$, $\check{\Phi} = \Phi[a_0, P(a_0, \alpha_0)]$ – значення функцій (3.123), (3.125) при $\tau = 0$.

З іншого боку, еволюцію можна описати рівняннями Гамільтона:

$$\partial_\tau J \equiv \{J, H\}_{\text{WP}} = \sqrt{J^2 - C} \cos \Phi, \quad (3.133)$$

$$\partial_\tau \Phi \equiv \{\Phi, H\}_{\text{WP}} = -\frac{J}{\sqrt{J^2 - C}} \sin \Phi, \quad (3.134)$$

де гамільтоніан

$$H(J, \Phi, C) = \sqrt{J^2 - C} \sin \Phi \quad (3.135)$$

належить до алгебри $\mathfrak{so}(2, 1)$.

Звичайно, вигляд гамільтоніану залежить від умов конкретної фізичної задачі. У релятивістській космології, різні сценарії приводять до модифікацій (3.135), які обговорюються, зокрема, в [210].

У нашому випадку, часову залежність функцій $J(\tau)$, $\Phi(\tau)$ зображено на Рис. 3.4. Графіки демонструють “відскок” (подібний до м’яча після стискання) у просторі параметрів. З нулів похідних від (3.131), (3.132) за τ , знаходимо характеристики “відскоку”:

$$\tau_b = -\operatorname{arctanh} \left(\frac{\sqrt{\check{J}^2 - C}}{\check{J}} \cos \check{\Phi} \right),$$

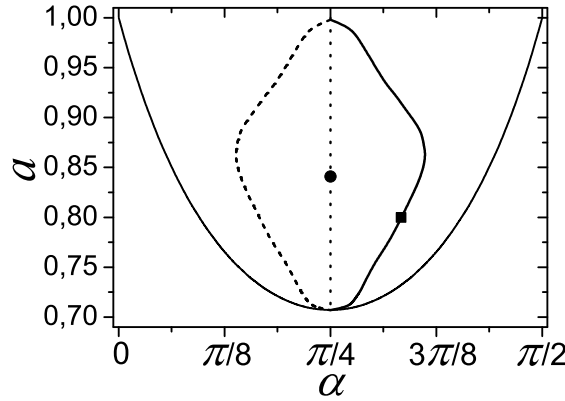


Рис. 3.5. Траєкторія еволюції ріманової поверхні з $C = 0$. Груба лінія – траєкторія з $\varepsilon = 1$ і початковою умовою $a_0 = 0.8$, $\alpha_0 = \pi/3$ (квадрат), пунктирна лінія – для $\varepsilon = -1$.

$$J_b = \sqrt{\check{J}^2 \sin^2 \check{\Phi} + C \cos^2 \check{\Phi}}, \quad \Phi_b = \varepsilon \frac{\pi}{2}. \quad (3.136)$$

В принципі, нас цікавить вигляд траєкторії в просторі параметрів $\mathcal{A}$ без конкретизації еволюційного параметра або часу. Її знаходимо з в'язі:

$$H\{J[P(a, \alpha)], \Phi[a, P(a, \alpha)], C\} = E, \quad (a, \alpha) \in \mathcal{A}, \quad (3.137)$$

де стала E – значення функції Гамільтона H для початкових даних.

На перший погляд, рівняння (3.137) говорить, що точки траєкторії визначаються з абстрактного рівняння $h(a, \alpha, C, E) = 0$ з додатковими сталими C і E . Однак, хочемо наголосити на його структурі, яка відображає ланцюг наших побудов.

У термінах a і α класична траєкторія виглядає як на Рис. 3.5, де нехтується впливом сталої C через її квантову природу, коли $C \sim \hbar^2$. Цікаво зауважити, що геометрія системи не прямує до правильного восьмикутника (груба точка), який має найбільшу інформаційну ентропію [270]. За значень $a_{\min} = 1/\sqrt{2}$ і $a_{\max} = 1$, які відповідають нескінченно далекому минулому і нескінченно далекому майбутньому, кут α гіперболічного восьмикутника сягає одного самого значення – $\pi/4$. Отже, геометрія з $\alpha = \pi/4$ є особливою

тут. Також зауважимо, що є дві конфігурації для $\varepsilon = \pm 1$ (ліва та права, відносно $\tilde{\alpha} = 0$), які не змішуються протягом всієї еволюції, яка ґенерується бустом. Обрана преференція зберігається від початку до кінця. Однак, як бачили раніше, існує дифеоморфізм, який ґенерується умовою збереження периметра гіперболічного восьмикутника і дозволяє перехід між “фазами” з $\varepsilon = \pm 1$. Його комбінація з дією буста може допомогти у побудові нового сценарію класичної геометродинаміки, навіть у випадку, коли ріманова метрика простору параметрів (модулів) є невідомою.

Повертаючись до задачі про квантування, ґенератор J_0 та його спектр описують площу Вейля–Петерсона. З цієї причини, його власні значення мають бути додатними і дискретними.

Використаємо звичний базис $SU(1,1)$, в якому оператор Казиміра і J_0 діагональні. Дія $\mathfrak{su}(1,1)$ ґенераторів на цей ортонормований базис є

$$\begin{aligned} C|j, m\rangle &= j(j-1)|j, m\rangle, & J_0|j, m\rangle &= m|j, m\rangle, \\ J_+|j, m\rangle &= \sqrt{(m-j+1)(m+j)}|j, m+1\rangle, \\ J_-|j, m\rangle &= \sqrt{(m-j)(m+j-1)}|j, m-1\rangle. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Існує два типи (дискретних) представлень: додатна серія з $1/2 \leq j \leq m = j + \mathbb{N}$; і від’ємна серія з $-1/2 \geq j \geq m = j - \mathbb{N}$. Ми обмежимося незвідним представленням з додатним спіном j , причому, покладемо $j = 1/2$. Це приводить до спектру (в планківських одиницях):

$$A_{\text{WP}} = 4\pi \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.139)$$

У класичній картині $A_{\text{WP}} = 0$ для P_{reg} , поки A_{WP} ніколи не зникає на квантовому рівні. Це означає, що конфігурація з правильним восьмикутником недосяжна через квантовий ефект.

Хоча базису $\mathfrak{su}(1,1)$ достатньо для квантування A_{WP} , як глобальної характеристики $\mathcal{A}$, він виглядає не придатним для знаходження спектрів інших геометричних спостережуваних.

3.2.4. Підсумки. Ми приділили значну увагу структурі простору дозволених параметрів $\mathcal{A}$, що визначає геометрію поверхні Рімана роду два з автоморфізмом четвертого порядку. По-перше, використовуючи теорію Вейля–Петерсона (ВП), двомірний простір $\mathcal{A}$ наділяється фундаментальною симплектичною два-формою. Далі, ми щільно покриваємо $\mathcal{A}$ орбітами, породженими ізопериметричною в’яззю, яка накладається на фундаментальну область поверхні. Стверджується, що існування орбіт обумовлено означенням поверхні Рімана. Знайдено канонічно спряжені змінні дія–кут для ізопериметричних орбіт шляхом ототожнення ВП-площі області, обмеженою орбітою, зі змінною дії. Надалі, побудовано релятивістську модель в термінах спеціальних інваріантів без знання ріманової метрики простору $\mathcal{A}$.

Для побудови фізично значущої моделі ми розширили набір глобальних канонічних змінних до генераторів алгебри $\mathfrak{su}(1, 1)$. Це приводить до того, що Казимір алгебри відіграє роль додаткового параметра. Припускаємо, що його значення має бути мінімальним і ненульовим. Однак, після квантування це приводить до незникаючого дискретного спектра ВП-площі фазового простору на відміну від початкової класичної теорії, де ВП-площа обертається в нуль для ріманової поверхні, асоційованої з правильним гіперболічним восьмикутником. Слід враховувати, що ВП-площа визначає геометрію поверхні з точністю до дифеоморфізма в класичній теорії. Також, для знаходження квантових спектрів величин системи за інших умов, можуть знадобитися нескінченні алгебри Віта та Вірасоро замість $\mathfrak{su}(1, 1)$.

Ми дослідили релятивістську кінематику або вільну геометродинаміку ріманової поверхні, породжену бустом Лоренца. Залежність глобальних змінних від часу описує сценарій “великого відскоку”, подібний для величин різного походження. Однак, розв’язуючи рівняння відносно параметрів поверхні, ми отримали траєкторію (незалежну від визначення часу) у просторі $\mathcal{A}$. У цій картині система не прямує до конфігурації правильного восьмикутника, якому відповідає максимальна інформаційна ентропія [270], і на протязі всієї

еволюції зберігає різновид $\mathbb{Z}_2$ симетрії, пов'язаної з дозволеним діапазоном кутової змінної.

3.3. Статистичні властивості восьмигілкового дерева Кейлі

У рамках загальної задачі про обчислення ряду за заданою дискретною групою Γ з метою симетризації локальної (польової) величини $F(z)$,

$$F_{\Gamma}(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma} F(\gamma[z]), \quad z \in \mathbb{C},$$

розглянемо статистичну модель, де Γ – група Фукса ріманової поверхні роду два (яку описано вище), а $F_{\Gamma}(0)$ відповідає статистичній сумі з вагами Больцмана, залежними від спектру гіперболічних довжин графів восьмигілкового дерева Кейлі з кореневою точкою $z = 0$.

Процес отримання графів дерева можна ототожнити із випадковими стрибками частинки між центрами комірок октагональної (восьмикутної) ґратки у напрямку ґраниці області (одиничного диску). Такий рух, який контролюється числом N стрибків, ми характеризуємо сумою відстаней між відвіданими вузлами дерева $\{\gamma[0] | \gamma \in \Gamma\}$ і кореневою точкою.

Отже, розглядувана модель є детермінованою за побудовою, а статистична сума формулюється для заданого покоління N . Для її обчислення ми застосовуємо як числові, так і статистичні методи. Перший – необхідний для виявлення основних властивостей моделі, зокрема, мультифрактальних показників, які ми відтворюємо за допомогою другого, аналітичного, підходу. В рамках статистичного методу створено схему обчислення спектру довжин і зведення статистичної суми до мультиплікативного ланцюга Маркова в наближенні хаотичних блукань.

3.3.1. Простір та симетрії. Подібно до задачі попереднього підрозділу, усі геометричні конструкції розглядатимуться в просторі $(\mathbb{D}, ds^2)$, де $\mathbb{D}$

– одиничний диск (3.93) у комплексній площині $z = x + iy$ з інтервалом ds простору від’ємної кривини. Роль трансляцій у ньому відіграють ізометрії, що задаються перетворенням Мьобіуса (3.94).

Розв’язок рівняння геодезійної $z(s) = x(s) + iy(s)$ в $(\mathbb{D}, ds^2)$ визначається

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{\cos \phi \cosh s + R \sin \phi \sinh s}{\sqrt{1 + R^2} \cosh s + R}, \\ y(s) &= \frac{R \cos \phi \sinh s - \sin \phi \cosh s}{\sqrt{1 + R^2} \cosh s + R}, \end{aligned} \quad (3.140)$$

які означено для $s \in (-\infty, +\infty)$ і які описують дугу всередині $\mathbb{D}$ з радіусом R і центром в точці $z_0 = \sqrt{1 + R^2} \exp(i\phi)$, що лежить за межами $\mathbb{D}$.

Введемо структуру на диску $\mathbb{D}$: ґратку, породжену дією певної групи Γ , що встановлює “періодичний закон”, і асоційовану з нею фундаментальну область $\mathcal{F}$, яка відіграє роль елементарної комірки. Тут, в якості Γ ми обираємо групу Фукса варіанту ріманової поверхні роду два, яка задається генераторами g_k і g_k^{-1} в термінах двох незалежних параметрів (a, α) згідно з (3.100), (3.101), (3.102). А елементарною коміркою $\mathcal{F}$ ґратки є двопараметричний восьмикутник з вершинами в точках $a \exp(i k \pi / 2)$ і $b \exp(i(\alpha + k \pi / 2))$, де $0 < a, b < 1$, $k = \overline{0, 3}$. Усі необхідні зв’язки між вказаними величинами наведено у попередньому підрозділі.

Тоді, можна побудувати октагональну ґратку із заданим фундаментальним восьмикутником. За побудовою, дія елементів групи $\gamma \in \Gamma$ на $\mathcal{F}$ породжує дочірні комірки, які покривають диск:

$$\mathbb{D} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \mathcal{F}.$$

Перші вісім комірок $g_k^{\pm 1} \mathcal{F}$ ($k = \overline{0, 3}$) показано на Рис. 3.6 ліворуч. Видно, що $g_k^{\pm 1} \mathcal{F} \cap \mathcal{F} \subset \partial \mathcal{F}$, як і повинно бути. Звичайно, ця властивість зберігається для всіх сусідніх комірок.

3.3.2. Показники спектра ґрафів. Побудуємо восьмигілкове дерево Кейлі, ізометрично вкладене в $\mathbb{D}$, як ґратку, дуальну до октагональної. Ін-

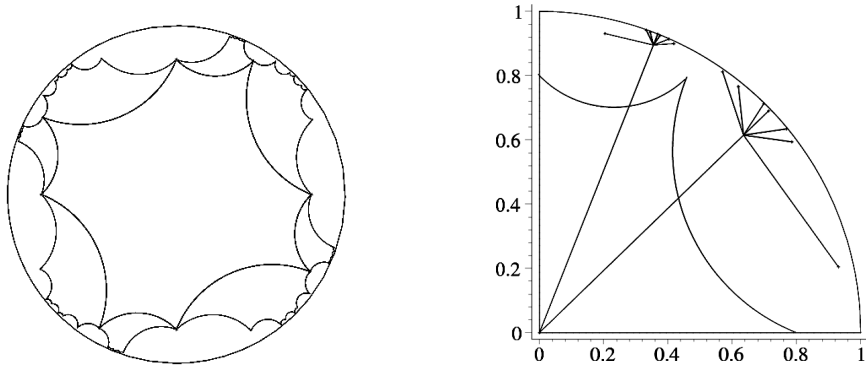


Рис. 3.6. Ліворуч: Фундаментальний восьмикутник з $a = 0.8$, $\alpha = \pi/3$ і дочірні комірки. Праворуч: Чверть восьмикутника і вузли дерева Кейлі першого та другого поколінь (схематично з'єднані прямими, а не геодезійними).

шими словами, ми розглядаємо граф без самоперетинів, який з'єднує центри сусідніх восьмикутників попереднього та наступного поколінь (див. Рис. 3.6 праворуч). Фізично, таку конструкцію можна інтерпретувати як модель деяких полімерів.

Скористаємося загальним виразом для статистичної суми напрямлених блукань в неупорядкованому середовищі на двовимірній ґратці:

$$\mathcal{Z}_N(q) = \sum_{\{z\}} \prod_{t=1}^N p(z_{t-1}|z_t) \exp \left[q \sum_{t=1}^N V(z_t, t) \right], \quad (3.141)$$

де N – число поколінь; z_t – точка t -го покоління випадкової траєкторії; V – випадковий потенціал середовища; p – ймовірність переходу; параметру q можна надати сенс оберненої температури.

Вираз для $\mathcal{Z}_N(q)$ подібний до інтегралу за шляхами фейнманівського квантування, а також до формули сліду Сельберга [144, 392], яка вимагає пошуку спектра геодезійних. Ця обставина обумовлює нашу зацікавленість до розглядуваної задачі.

Ми вивчаємо графи N -го покоління, вузли яких відповідають набору чисел $\{i_1, i_2, \dots, i_N\}$, де $1 \leq i_t \leq 8$, $1 \leq t \leq N$. Також припускаємо, що

$$z_t = \gamma_{i_1} \gamma_{i_2} \dots \gamma_{i_t}[0], \quad V(z_t, t) = d(0, z_t)/N, \quad (3.142)$$

$$p(z_{t-1}|z_t) \rightarrow p(i_{t-1}|i_t) = \begin{cases} 1, & |i_t - i_{t-1}| \neq 4 \\ 0, & |i_t - i_{t-1}| = 4 \end{cases}, \quad (3.143)$$

де $\{\gamma_i | i = \overline{1, 8}\} \equiv \{g_0, g_1, g_2, g_3, g_0^{-1}, g_1^{-1}, g_2^{-1}, g_3^{-1}\}$.

За побудовою, точки z_t і z_{t-1} є центрами сусідніх комірок, пов'язані гілкою дерева. Означення ймовірності переходу $p(i_{t-1}|i_t)$ (узгоджене з означенням генераторів γ_i , $i = \overline{1, 8}$) виключає можливість повернення до відвіданих вузлів. Гіперболічна відстань $d(z, w)$ на диску $(\mathbb{D}, ds^2)$ визначається так:

$$\cosh d(z, w) = 1 + \frac{2|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}. \quad (3.144)$$

У частковому випадку маємо

$$d(0, z) = \ln \frac{1 + |z|}{1 - |z|}. \quad (3.145)$$

У такий спосіб приходимо до виразу для статистичної суми нашої моделі:

$$\mathcal{Z}_N(q) = \sum_{i_1=1}^8 \dots \sum_{i_N=1}^8 \left(\prod_{t=1}^N p(i_{t-1}|i_t) \right) \exp \left[q \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \rho_{i_1, i_2, \dots, i_t} \right], \quad (3.146)$$

де $\rho_{i_1, i_2, \dots, i_t} \equiv d(0, \gamma_{i_1} \gamma_{i_2} \dots \gamma_{i_t} [0])$ – гіперболічна (геодезійна) відстань між точкою t -го покоління і кореневою точкою $O(z = 0)$.

Статистична сума є сумою ваг Больцмана, які залежать від “інтегралу дії”, лінійного за гіперболічною відстанню від заданої кореневої точки:

$$L(i_1, i_2, \dots, i_N) \equiv \sum_{t=1}^N \rho_{i_1, i_2, \dots, i_t}. \quad (3.147)$$

Важливо зауважити, що $\mathcal{Z}_N(q)$ є також функцією параметрів (a, α) , які використано при означенні генераторів групи Γ . Тому, при дослідженні властивостей моделі з $\mathcal{Z}_N(q|a, \alpha)$, фіксуємо параметри ґратки.

Оскільки всі траєкторії не мають самоперетинів і однозначно визначені, число ґрафів $\mathcal{Z}_N(0)$ дорівнює числу кінцевих точок, $v(N) = 8 \times 7^{N-1}$, і статистичну суму (3.146) можна переписати так

$$\mathcal{Z}_N(q) = \sum_{i=1}^{v(N)} e^{qL_i(N)/N}, \quad (3.148)$$

де $L_i(N)$ – інтегральна гіперболічна довжина i -го графа N -го покоління.

Отже, головна мета – оцінити ряд (3.148), залежний від спектру довжин $\{L_i(N)\}$. Щоб розв’язати задачу, спершу проведемо чисельні дослідження для виявлення основних властивостей моделі. По-друге, аналітично обчислимо характеристики в статистичному підході.

Приклад спектру довжин, який одержано чисельно, подано на Рис. 3.7, де значення числа подій залежить від вибору ширини діапазону. Видно, що розподіл довжин L_i наближається до розподілу Гауса,

$$\sim \exp \left(-\frac{(L - \bar{L}_N)^2}{2\sigma_N^2} \right), \quad (3.149)$$

з параметрами, які означено формулами

$$\bar{L}_N = \frac{1}{v(N)} \sum_{i=1}^{v(N)} L_i(N), \quad \sigma_N^2 = \frac{1}{v(N)} \sum_{i=1}^{v(N)} (L_i(N) - \bar{L}_N)^2, \quad (3.150)$$

що приводять до $\bar{L}_5 \approx 41.97$, $\sigma_5^2 \approx 44.5657$.

Хоча процес прямування розподілу до гаусового є повільним, він означає, що структура, згенерована дискретною групою Γ описує неупорядковане середовище і/або напрямлені випадкові блукання. Незважаючи на те, що Рис. 3.7 побудовано для фіксованих параметрів ґратки, модель виявляє ту саму тенденцію для довільної дозволеної пари (a, α) .

Ми здійснюємо подальший аналіз в рамках концепції мультифрактальності, яка полягає у визначенні масштабної залежності критичних показників [391]. Для цього, введемо мультифрактальні моменти порядку q :

$$\mathbf{m}_N^{(q)} = \frac{\mathcal{Z}_N(q)}{\mathcal{Z}_N^q(1)}. \quad (3.151)$$

Тоді, масштабний показник, який зветься спектром мас, є

$$\tau_N(q) = \frac{2}{\ln v(N)} \ln \mathbf{m}_N^{(q)}, \quad (3.152)$$

де множник 2 відповідає розмірності геометричного носія (простору), а $v(N)$ дорівнює числу “клітинок”, якими покривається розглядувана структура.

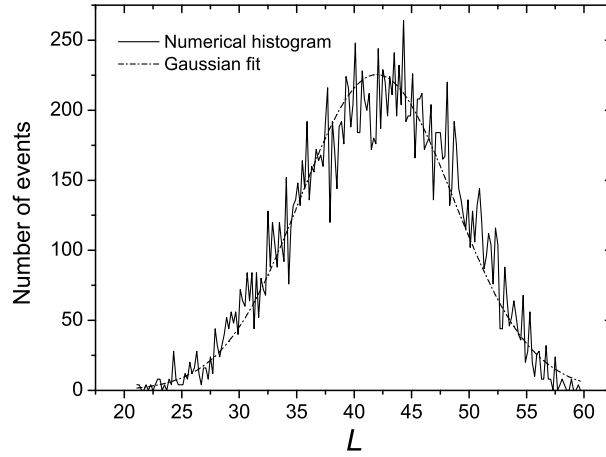


Рис. 3.7. Число подій як функція гіперболічної відстані $L(N = 5)$ та апроксимація гаусіаном для ґратки з $a = 0.8$, $\alpha = \pi/3$.

Показник $\tau_N(q)$ має властивість самоусереднення, тому введемо

$$\tau(q) = \lim_{N \rightarrow \infty} \tau_N(q), \quad (3.153)$$

що визначає спектр фрактальних вимірів $D_q = \tau(q)/(1 - q)$.

Результат обчислень (обмежених $N \leq 5$) подано на Рис. 3.8, де нелінійна залежність τ від q вказує на мультифрактальну поведінку.

Окрім знаходження залежності $\tau(q)$, існує інший еквівалентний спосіб опису мультифрактальності. Зокрема, множину показників мультифрактальних моментів (3.151) пов'язують зі спектром сингулярностей $f(\alpha)$ фрактальної міри [147, 148]. Функцію $f(\alpha)$ називають також спектральною функцією, і задається вона перетворенням Лежандра:

$$f(\alpha) = q\alpha + \tau(q), \quad \alpha(q) = -\frac{d\tau(q)}{dq}, \quad (3.154)$$

де α – відомий показник Ліпшиця–Гьольдера.³ Отже, $f(\alpha)$ визначає вимірність підсистеми, яка характеризується силою сингулярності α . У термінах термодинаміки, α і $f(\alpha)$ – внутрішня енергія e і ентропія $s(e)$ [173, 182].

³Ми зберігаємо прийняте позначення для цього показника [391]. Вважаємо, що завжди зрозуміло з контексту, чи α – кут, який визначає геометрію восьмикутника, чи сила сингулярності.

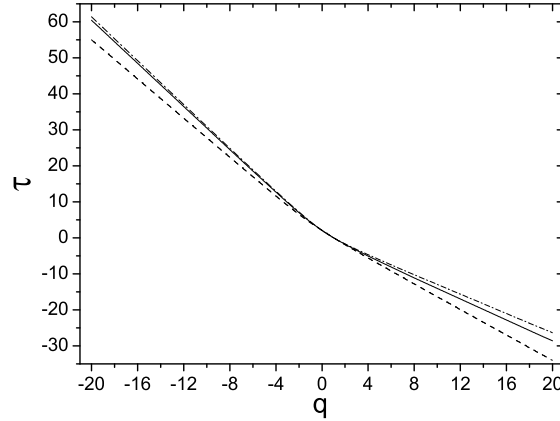


Рис. 3.8. Мультифрактальна поведінка показника $\tau(q)$ для $N = 5$. Суцільна, пунктирна і штрих-пунктирна криві відповідають ґраткам з $(a = 0.8, \alpha = \pi/3)$, $(a = 2^{-1/4}, \alpha = \pi/4)$ і $(a = 0.9, \alpha = \pi/8)$, відповідно.

Функція $f(\alpha)$ завжди додатна на інтервалі $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, де

$$\alpha_{\min} = \lim_{q \rightarrow +\infty} \tau(q)/(1 - q), \quad \alpha_{\max} = \lim_{q \rightarrow -\infty} \tau(q)/(1 - q), \quad (3.155)$$

і найбільше її значення відтворює (фрактальну) розмірність структури, на якій розглядається модель.

Спектральну функцію $f(\alpha)$ для $N = 5$ зображено на Рис. 3.9. Можна зробити висновок про значну роль низьковимірних підмножин ґрафів при відхиленні форми ґратки від правильної. Через неможливість встановлення підмножини ґрафів, що забезпечує провідний внесок, при обчисленні статистичної суми слід враховувати всі ґрафи. Однак, це не виключає можливості наближеної оцінки їхніх довжин.

Для уточнення відмінностей кривих на Рис. 3.9, звернемось до інформаційної ентропії S , яку означено так [391]:

$$S = \alpha_S = f(\alpha_S), \quad \left. \frac{df(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha_S} = 1. \quad (3.156)$$

Значення α_S і $f(\alpha_S)$ можна прямо обчислити при $q = 1$.

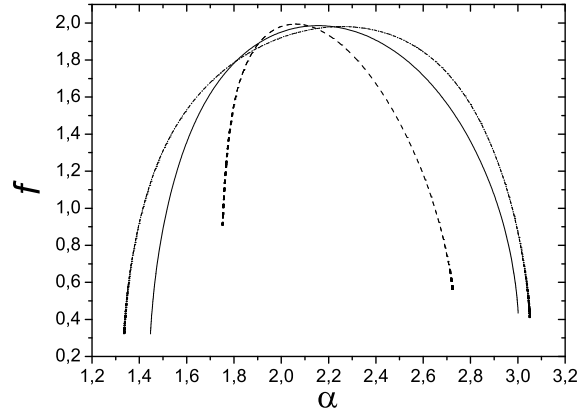


Рис. 3.9. Спектр сингулярностей $f(\alpha)$ для $N = 5$. Суцільна, пунктирна та штрих-пунктирна криві відповідають ґраткам з $(a = 0.8, \alpha = \pi/3)$, $(a = 2^{-1/4}, \alpha = \pi/4)$, and $(a = 0.9, \alpha = \pi/8)$, відповідно.

Знаходимо, що $S(a = 0.9, \alpha = \pi/8) \approx 1.783 < S(a = 0.8, \alpha = \pi/3) \approx 1.865 < S(a = 2^{-1/4}, \alpha = \pi/4) \approx 1.95$. Це співвідношення має просте пояснення: i) завдяки особливій симетрії, правильний восьмикутник має найвищу ентропію, яка не перевищує 2 в нашій моделі; ii) більше відхилення від правильної симетрії приводить до зменшення ентропії.

Оскільки наша задача, математично, є задачею про додавання незалежних випадкових величин, характерну поведінку можна вивести з центральної граничної теореми (ЦГТ), і розвинути підхід з її застосуванням.

По-перше, зведемо еволюцію до мультиплікативного процесу Маркова. Для цього, скористаємося правилом трикутника в $(\mathbb{D}, ds^2)$:

$$\begin{aligned} \cosh d(0, z_t) &= \cosh d(0, z_{t-1}) \cosh d(z_t, z_{t-1}) \\ &\quad - \sinh d(0, z_{t-1}) \sinh d(z_t, z_{t-1}) \cos \theta_{t,t-1}, \end{aligned} \quad (3.157)$$

де $\theta_{t,t-1}$ – кут, протилежний до сторони $(0, z_t)$.

Завдяки тотожностям

$$d(0, \gamma^n[0]) = nd(0, \gamma[0]), \quad d(\tilde{\gamma}[0], \tilde{\gamma}\gamma[0]) = d(0, \gamma[0]), \quad (3.158)$$

для матриць з дійсними компонентами на головній діагоналі, одержуємо, що $d(z_t, z_{t-1}) = d(0, \gamma_{i_t}[0])$ і

$$\cosh d(0, z_t) = \cosh d(0, z_{t-1}) \cosh \ell_{i_t} - \sinh d(0, z_{t-1}) \sinh \ell_{i_t} \cos \theta_{t,t-1}, \quad (3.159)$$

де, враховуючи симетрію ґратки, $\ell_i = \delta_i^+ \ell_+ + \delta_i^- \ell_-$,

$$\ell_+ = d(0, \gamma_{2k-1}[0]), \quad \ell_- = d(0, \gamma_{2k}[0]), \quad k = \overline{1, 4}, \quad (3.160)$$

$$\delta_i^+ = \sum_{k=1}^4 \delta_{i,2k-1}, \quad \delta_i^- = \sum_{k=1}^4 \delta_{i,2k}. \quad (3.161)$$

Для відносно великих $d(0, z_t)$ і $d(0, z_{t-1})$ маємо

$$d(0, z_t) = d(0, z_{t-1}) + \ln (\cosh \ell_{i_t} - \sinh \ell_{i_t} \cos \theta_{t,t-1}). \quad (3.162)$$

Тепер зручно ввести величини

$$\xi_{i,j} = d(0, \gamma_i \gamma_j[0]) - \frac{\ell_i + \ell_j}{2}, \quad i, j = \overline{1, 8}, \quad (3.163)$$

що описують логарифмічний внесок для другого покоління.

Нехтування флуктуаціями $\theta_{t,t-1}$ у вищих поколіннях приводить до оцінки:

$$L(i_1, i_2, \dots, i_N) \simeq N \ell_{i_1} + \sum_{t=2}^N (N+1-t) \xi_{i_{t-1}, i_t} \quad p(i_{t-1}|i_t) \neq 0. \quad (3.164)$$

Дана формула є точною для $i_1 = i_2 = \dots = i_N$, коли $\theta_{t,t-1} = \pi$.

В принципі, можна ввести величини $\xi_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(n)} \sim d(0, \gamma_{i_1} \gamma_{i_2} \dots \gamma_{i_n}[0])$, які відіграють роль кореляцій вищих порядків і які є асиметричними за індексами, на відміну від симетричної матриці $\xi_{i,j} = \xi_{j,i}$. Окрім того, матриці $\xi^{(n)}$ більш точно враховують значення кутів $\theta_{t,t-1}$, тобто флуктуації.

Використовуючи (3.164), легко дати теоретичну оцінку для спектра довжин N -го покоління:

$$L_{\min}^{\text{th}}(N) = N \min(\ell_+, \ell_-) + \frac{N(N-1)}{2} \min(\xi_{i,j}), \quad \text{for } p(i|j) \neq 0,$$

$$\begin{aligned}\bar{L}_N^{\text{th}} &= N \frac{\ell_+ + \ell_-}{2} + \frac{N(N-1)}{2} \bar{\xi}, \quad \bar{\xi} = \frac{1}{56} \sum_{i,j=1}^8 p(i|j) \xi_{i,j}, \quad (3.165) \\ L_{\text{max}}^{\text{th}}(N) &= N \max(\ell_+, \ell_-) + \frac{N(N-1)}{2} \max(\xi_{i,j}) \\ &= \frac{N(N+1)}{2} \max(\ell_+, \ell_-).\end{aligned}$$

Підстановка формули (3.164) в (3.146) приводить до виразу для статистичної суми як неоднорідного мультиплікативного ланцюга Маркова:

$$\mathcal{Z}_N(q) \simeq \sum_{i_1=1}^8 \dots \sum_{i_N=1}^8 \exp(q \ell_{i_1}) \prod_{t=2}^N \mathcal{P}^t(i_{t-1}|i_t), \quad (3.166)$$

де показникові функції відіграють роль початкової умови, і

$$\mathcal{P}^t(i_{t-1}|i_t) = p(i_{t-1}|i_t) \exp \left[q \frac{N+1-t}{N} \xi_{i_{t-1}, i_t} \right] \quad (3.167)$$

– статистична вага переходу, яка залежить від t .

Таким чином, спектр $\{L_i(N)\}$ і статистична сума для довільного N повністю визначаються довжинами $\ell_{\pm}$ і матрицею $\xi_{i,j}$ у даному наближенні.

Проаналізуємо властивості ядра в (3.166) за малих $|q|$:

$$K_{i_1, i_N}(q, N) \equiv \sum_{i_2=1}^8 \dots \sum_{i_{N-1}=1}^8 \prod_{t=2}^N \mathcal{P}^t(i_{t-1}|i_t). \quad (3.168)$$

По-перше, має місце представлення для вектора:

$$\begin{aligned}K_i(q, N) &\equiv \sum_{i_N=1}^8 K_{i, i_N}(q, N) \\ &\simeq K_+(q, N) \delta_i^+ + K_-(q, N) \delta_i^-, \quad (3.169)\end{aligned}$$

яке одержується на базі напіваналітичних спостережень і відображає симетрію ґратки в нашій моделі; $\delta_i^{\pm}$ визначається з (3.161). Завдяки цьому розкладу, (3.166) переписується як

$$\mathcal{Z}_N(q) \simeq 4 \exp(q \ell_+) K_+(q, N) + 4 \exp(q \ell_-) K_-(q, N). \quad (3.170)$$

Ймовірність переходу з початкового стану i до кінцевого f за N кроків є

$$P_{i,f}(q, N) \equiv \frac{K_{i,f}(q, N)}{K_i(q, N)}, \quad \sum_{f=1}^8 P_{i,f}(q, N) = 1. \quad (3.171)$$

Можна переконатися, що $P_{i,f}(0, N \rightarrow \infty) \rightarrow 1/8$, тобто ланцюг (3.166) є ергодичним при $q = 0$. Такий висновок одержується і при розгляді середнього значення $\bar{l}$ (середній крок графів), яке дорівнює

$$\bar{l} \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\bar{L}}{N^2} \rightarrow \frac{1}{2} \bar{\xi}. \quad (3.172)$$

Цей результат не залежить від початкової умови.

Тепер, розташовуючи довжини графів у порядку зростання $L_1 \leq L_2 \leq \dots \leq L_s$ ($s < v(N)$), перепишемо статистичну суму (3.148) як

$$\mathcal{Z}_N(q) = v(N) \sum_{i=1}^s W_i e^{ql_i}, \quad \sum_{i=1}^s W_i = 1, \quad (3.173)$$

де $l_i = L_i/N$, і W_i позначає вагу орбіти для довжини L_i .

Надалі, коефіцієнти W_i припускаються випадково розподіленими. Тобто, значення W_i не залежить від W_k для $i \neq k$, що дозволяє застосувати модель хаотичних блукань. Припускаючи застосовність ЦГТ при $N \rightarrow \infty$, моделюємо розподіл довжин l_i N -го покоління графів за допомогою розподілу Гауса:

$$W_{(N)}(l) = A_N \exp \left(-\frac{(l - N\bar{l})^2}{2Ns^2} \right), \quad (3.174)$$

де $N\bar{l} = \bar{L}_N/N$, $Ns^2 = \sigma_N^2/N^2$, коли $N \rightarrow \infty$; A_N – стала нормування. Можна теоретично оцінити $\bar{l}$ і s^2 за допомогою (3.164) і (3.165).

Ми вже бачили на Рис. 3.7, що гаусове наближення добре узгоджується з чисельними даними. Застосування розподілу Гауса може значно спростити обчислення ряду за групою Γ .

Застосовуючи наближений розподіл (3.174), замінимо суми (3.173) інте-

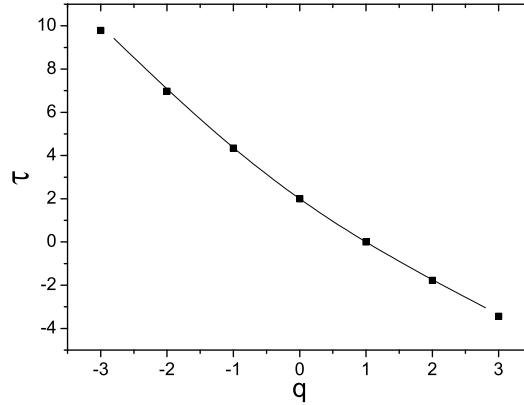


Рис. 3.10. Мультифрактальна поведінка показника $\tau(q)$ для $N = 5$ і ($a = 0.8, \alpha = \pi/3$). Точки та криву одержано на основі статистичних сум (3.148), (3.176), відповідно.

ґралами за великих N :

$$\mathcal{Z}_N(q) \approx v(N) \int_{\ell_{\min}(N)}^{\ell_{\max}(N)} W_{(N)}(l) e^{ql} dl, \quad \int_{\ell_{\min}(N)}^{\ell_{\max}(N)} W_{(N)}(l) dl = 1, \quad (3.175)$$

де $\ell_{\min}(N) = L_{\min}(N)/N$ і $\ell_{\max}(N) = L_{\max}(N)/N$ обрізають хвости ґаусіана.

Після простих обчислень одержуємо, що

$$\mathcal{Z}_N(q) \approx \frac{8}{7} C_N(q) \exp N \left(\frac{1}{2} q^2 s^2 + q\bar{l} + \ln 7 \right), \quad (3.176)$$

де коефіцієнт

$$C_N(q) = \frac{\operatorname{erf} \left(\frac{\ell_{\max}(N) - N\bar{l} - qNs^2}{\sqrt{2Ns^2}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{N\bar{l} + qNs^2 - \ell_{\min}(N)}{\sqrt{2Ns_N^2}} \right)}{\operatorname{erf} \left(\frac{\ell_{\max}(N) - N\bar{l}}{\sqrt{2Ns^2}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{N\bar{l} - \ell_{\min}(N)}{\sqrt{2Ns^2}} \right)} \quad (3.177)$$

відповідає за поверхневі ефекти, які несуттєві на безмежній ґратці Бете.

Порівняння значень $\tau(q)$, які отримано чисельно та аналітично на основі (3.176), зроблено на Рис. 3.10. Видно, що теоретична формула працює в обмеженому інтервалі q (малі $|q|$) і задовільно описує показник $\tau(q)$ при

$1 < N < \infty$. Однак, зауважимо, що існує можливість покращити теоретичний результат за допомогою включення кореляцій вищого порядку $\xi^{(n)}$, наявність яких враховує процеси за межами теорії Маркова.

3.3.3. Підсумки. Ми зосередилися на обчисленні ряду за групою симетрій гіперболічної октагональної ґратки з парою незалежних параметрів. Щоб розвинути аналітичний підхід, побудовано модель напрямлених випадкових ґрафів восьмигілкового дерева Кейлі як дуальної ґратки до заданої октагональної. Обмежуючись ґрафами певного покоління, ряд за групою подано як статистичну суму з вагами Больцмана для ансамблю сумарних гіперболічних відстаней між кореневою точкою і вузлами ґрафа.

Як результат, аналітично знайдено спектр довжин, а статистичну суму зведено до мультиплікативного ланцюга Маркова із застосуванням центральної граничної теореми. Це свідчить про безлад і застосовність методу хаотичних блукань в наших обчисленнях. Отримано спектр масштабних показників за допомогою концепції мультифрактальності.

Проведене дослідження пов'язано із задачею про обчислення сліду Сельберга [392], що використовується при квантуванні систем на ріманових поверхнях і вимагає знання спектра довжин геодезійних (див. [284]). Подібні обчислення також здійснюються при симетризації польових функцій щодо дії відповідної групи і збігаються з обчисленнями рядів Діріхле або Пуанкаре. Лише зауважимо повільну збіжність цих рядів, що вимагає використання акуратних наближень, одному з яких ми присвятили цю роботу.

Більше того, в наших роботах [275, 276] окремо досліджено хаотичну поведінку частинки в одновимірному багатозонному середовищі, кожна зона якого встановлює власний коефіцієнт дифузії, адгезії та швидкість дрейфа. З аналітично знайденої функції розподілу, середньоквадратичного відхилення та ймовірності знаходження частинки в точці простору-часу, виявлено наявність перехідної суб- та супер дифузії за різних умов задачі.

Висновки до розділу 3

У розділі 3 розглянуто модельні двовимірні простори, що описуються рімановими поверхнями роду один (тор) і два (крендель) і еволюціонують за різними сценаріями $(2+1)$ -вимірної гравітації.

Так, у випадку тороїдального Всесвіту, використано теорію Черна-Саймонса з модельним джерелом, за допомогою якої описано класичну часову еволюцію простору і знайдено квантовий спектр геометричних характеристик. З іншого боку, еволюцію поверхні роду два описано за сценарієм “великого відскоку” (big bounce), запропонованого в теорії петльової квантової гравітації. Окрім того, вказані моделі відрізняються способом знаходження топологічних ступенів вільності та симплектичної структури фазового простору, що розширює арсенал теоретичних методів дослідження.

Основними висновками, що виносяться на захист є такі:

- У гамільтоновому підході описано часову еволюцію геометрії тороїдального простору в $(2+1)$ -вимірній гравітації Черна-Саймонса з модельним джерелом, наявність якого при квантуванні приводить або до розщеплення вироджених станів власного часу, або до зняття виродження спектра площі.

- Для двопараметричного випадку ріманових поверхонь роду два отримано канонічні змінні дія-кут за допомогою геометричної теорії Вейля–Петерсона. Побудовані генератори Лоренца і гамільтоніан задають часову еволюцію геометрії поверхні за сценарієм “великого відскоку” і визначають квантовий спектр площі фазового простору.

- За допомогою статистичної міри як ряду за групою симетрій ріманової поверхні роду два, обчислено мультифрактальні показники спектра довжин напрямлених графів восьмигілкового дерева Кейлі. Виявлено застосовність теорії ланцюгів Маркова для опису вказаного спектру і міри.

Результати розділу опубліковано у 8 працях [264, 265, 270, 271, 273, 274, 275, 276].

РОЗДІЛ 4

СТАТИСТИЧНИЙ ОПИС СИСТЕМ ТІЛ З ГРАВІТАЦІЙНОЮ І ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЮ ВЗАЄМОДІЯМИ

Зазвичай, статистичний опис класичних систем взаємодіючих частинок вимагає гамільтонового формулювання динаміки в термінах канонічних змінних. Однак, фундаментальні взаємодії в природі описуються за допомогою полів, вільні моди яких в класичному статистичному описі приводять до відомих розбіжностей, які стимулювали появу квантової механіки. За умов, коли вільне випромінювання є несуттєвим, і за низьких енергій, коли можна знехтувати процесами народження та знищення частинок, доцільним є переформулювання динаміки частинок в термінах прямої взаємодії між ними з виключеними з опису польовими ступенями вільності. Очевидно, що процедура виключення полів – носіїв взаємодії – потребує знаходження і підстановки розв'язку польових рівнянь, виражених через (канонічні) змінні частинок. Однак, релятивістська природа взаємодій вимагає збереження Пуанкаре-інваріантності одержуваної теорії, оскільки редукція не є канонічним перетворенням. Через математичні труднощі, доводиться часто звертатись до наближених методів розв'язання рівнянь поля, а також обирати метод редукції, що гарантує збереження релятивістських симетрій.

Серед методів редукції, відзначимо гамільтонову механіку Дірака з в'язями [375, 373], де фіксовані (рівняннями в'язей) ступені вільності усуваються за допомогою дужки Дірака, яка визначає новий фазовий простір. Така схема апробована в роботах [258, 259, 260] для електромагнітної взаємодії.

Зосереджуючись на моделі з гравітаційною взаємодією, побудуємо, спершу, Пуанкаре-інваріантний гамільтонів опис системи частинок з гравітаційною взаємодією у першому порядку за гравітаційною сталою з точним враху-

ванням релятивізму. Це потребує знаходження метрики простору-часу [156], збурення в яку вносять матеріальні частинки, у загальній теорії відносності.

Далі, обчислимо термодинамічні функції слабконеідеальної системи частинок з гравітаційною і (відштовхувальною) електромагнітною взаємодіями в наближенні кільцевих діаграм [382], провідним ефектом в якому є екранування електричного заряду.

У нерелятивістському випадку і за відсутності тяжіння, ефект екранування описується теорією Дебая-Хюкеля, яка визначає короткосяжний екранований потенціал (і парну кореляційну функцію), що використовується для знаходження вищих поправок до вільної енергії системи, її віріальних коефіцієнтів [369, 393]. Обчислення парної кореляційної функції в системі зарядів з далекосяжною взаємодією здійснюється, зокрема, за допомогою ланцюжка рівнянь Боголюбова [384], а також рівняння Орнштейна-Церніке [393], більш відомого в теорії рідин і розчинів.

Як впливає з робіт [47, 175, 194, 195, 390], опис екранування в системах з різним ступенем врахування релятивізму (поправок за c^{-2}) стикається із труднощами через залежність потенціалу взаємодії від імпульсів частинок. Неоднозначність результатів походить з відмінностей схем обчислень і виглядів взаємодії (обумовлених, зокрема, калібруванням). Підсумовуючи, можна лише стверджувати, що внесок у вільну енергію, обумовлений роботою з екранування, має вигляд:

$$F_{\text{екр}} = \frac{\varkappa^3 V}{12\pi\beta} f^{3/2}(\beta mc^2), \quad (4.1)$$

де $\varkappa^2 = 4\pi e^2 \beta N/V$ – параметр Дебая для N частинок із зарядом $|e|$ і масою m в об'ємі V за температури $T = \beta^{-1}$. Вигляд функції $f(\beta mc^2)$ залежить від моделі і наближень, і $f = 1$ – у нерелятивістському випадку.

Тому, ми намагаємося віднайти спільну схему обчислень $F_{\text{екр}}$ для слабконеідеальної системи частинок з далекосяжними взаємодіями: електромагнітною (в наближенні e^2) і гравітаційною (в наближенні Gm^2) в калібруваннях

Кулона і Лоренца з точним врахуванням релятивізму. У дослідженні газу тотожних (скалярних) частинок за умови електронейтральності, яка забезпечується термостатом, покладаємо $Gm^2 \ll e^2$, що свідчить про провідний внесок електромагнетизму. Роль гравітації зводиться до участі в екрануванні, оскільки самостійне дослідження газу із гравітаційною взаємодією стикається з можливістю колапсу [379, 381].

Однак, виняткова ситуація, коли $Gm^2 = e^2$, привертає особливий інтерес. У нерелятивістській теорії вона означає взаємну компенсацію сил парної взаємодії: Кулона і Ньютона. За такої умови частинки стають вільними, що також видно з термодинаміки. Більш ретельне вивчення цього випадку потребує звернення до загальної теорії відносності.

Справді, для рівнянь Ейнштейна-Максвела існує точний розв'язок Маджумдара-Папапетру [222, 287], який описує статичну систему екстремальних чорних дір (ЧД), тобто електрично заряджених сингулярних об'єктів з $Gm^2 = e^2$ і метрикою в глобальному часі. Вивченню їхніх властивостей присвячено чимало праць, серед яких відзначимо [154, 344]. Довільне розташування таких ЧД у просторі, зазвичай, обмежується лише умовою відсутності перекриття горизонтів подій з гравітаційним радіусом $r_+ = Gmc^{-2}$.

Нами запропоновано статистично характеризувати ансамбль з тотожних екстремальних ЧД величиною середньої затримки часу, спричинену гравітацією ЧД, в точках досяжного спостерігачеві простору. Однак, навіть для однорідного розподілу ЧД у заданій частині простору, будемо враховувати вірогідність конфігурацій з певного числа ЧД, обумовлену внутрішніми (квантовими) властивостями ЧД, які гіпотетично впливають з теорії струн. Ця теорія закликає враховувати внутрішні ступені вільності, недосяжні для зовнішнього спостерігача, які роблять ЧД розрізненими. Це означає, що з міркувань квантової теорії, вони є ані бозонами, ані ферміонами. У роботі [344] екстремальним ЧД приписується інфінітний тип статистики [236, 137, 244, 282, 101], який займає проміжне положення між статистикою

Бозе-Ейнштейна і Фермі-Дірака. Тому, ми порівнюємо середню затримку часу в ансамблях статичних екстремальних ЧД в різних статистиках.

4.1. Гамільтонів опис прямої гравітаційної взаємодії

Виключення ступенів вільності поля, як носія взаємодії, ґрунтується на підстановці розв'язку польових рівнянь в рівняння руху частинок. Через складну форму рівнянь Ейнштейна [102], можна звернутись до лінеаризованої теорії, знайти розв'язки рівнянь поля за допомогою методу функцій Гріна, і негайно виключити польові змінні в інтегралі дії [348, 100]. Це приводить до дії типу Фокера, нелокальність якої є перешкодою при переході до гамільтонової механіки. Подібні проблеми виникають при гамільтонізації електродинаміки Вілера–Фейнмана [359]. Інший спосіб полягає в усуненні польових ступенів вільності *після* переходу до гамільтонового опису. Гравітаційне поле вже усувалося в постньютонівському наближенні [312] в рамках канонічного формалізму Арновіта–Дезера–Мізнера (АДМ) в системі “частинки+поле” [388]. Але зауважимо, що пряма підстановка розв'язку в термінах канонічних змінних частинок у рівняння руху частинок та/або гамільтоніан системи не є коректною з наступної точки зору. Відомо, що коваріантні положення частинок не можуть бути канонічними після редукції поля [84]. Окрім того, пряма підстановка не гарантує збереження комутаційних співвідношень у сенсі дужки Пуасона між компонентами енергії-імпульсу, які задають канонічну реалізацію алгебри Пуанкаре. Ці факти стимулювали появу нового підходу [81, 259], заснованого на теорії в'язей Дірака [96]. Рівняння поля в рамках цього підходу розглядаються як в'язі, які необхідно усунути, що і буде зроблено далі.

Спершу, перейдемо до гамільтонового формулювання класичної релятивістської системи точкових частинок у зовнішньому гравітаційному полі. Надалі, дослідимо теорію Ейнштейна у першому порядку за гравітаційною ста-

лою і одержимо гамільтоніан вільного гравітаційного поля. У гамільтоновому описі системи “поле+частинки”, змінні поля та частинок розглядаються на рівних правах. Усуваючи калібрувальні ступені вільності, переформулюємо калібровано-інваріантно динаміку системи в термінах спостережуваних (фізичних змінних). Надалі, ефективно виключимо фізичні ступені вільності гравітаційного поля в першому порядку наближення за гравітаційною сталою. Це робиться за три етапи [259]: (i) пошук розв’язків рівнянь поля; (ii) перехід до канонічних змінних вільного поля; (iii) редукція вільного поля шляхом накладення додаткових в’язей. Ці в’язі усуваються за допомогою дужки Дірака. Як результат, отримуємо гамільтонів формалізм у змінних частинок.

4.1.1. Гамільтонів опис системи “частинки+гравітаційне поле”.

Розглянемо систему з N точкових частинок, які описуються світовими лініями у викривленому просторі-часі¹ $\gamma_a : \tau_a \mapsto x_a^\mu(\tau_a)$. Коваріантний N -часовий формалізм не може бути використаний для побудови гамільтонової картини. Щоб означити дужку Пуасона системи точкових частинок з полем, маємо застосувати одночасовий формалізм. Введемо спільний еволюційний параметр t і покладемо $\tau_a = t$, $x_a^0(t) = t$. Тоді, координати $\mathbf{x}_a(t) = (x_a^i(t))$ та швидкості $\dot{\mathbf{x}}_a(t) = (\dot{x}_a^i(t))$ є динамічними змінними частинок. Лагранжіан системи точкових частинок в гравітаційному полі задається так:

$$L(t) = - \sum_{a=1}^N m_a \sqrt{g_{00}(t, \mathbf{x}_a) + 2g_{0i}(t, \mathbf{x}_a)\dot{x}_a^i(t) + g_{ik}(t, \mathbf{x}_a)\dot{x}_a^i(t)\dot{x}_a^k(t)}. \quad (4.2)$$

Перейдемо у стандартний спосіб [388, 219] від десяти полів $g_{\mu\nu}$ до функцій

¹Грецькі індекси $\mu, \nu, \dots$ пробігають від 0 до 3; латинські індекси з середини алфавіту, $i, j, k, \dots$ пробігають від 1 до 3, і на обидва типи індексів розповсюджується конвенція про підсумовування. Латинські індекси з початку алфавіту, a, b , позначають частинки і пробігають від 1 до N . Сума за такими індексами вказується явно. Швидкість світла c покладається рівною одиниці.

N , N^i , і 3-мірної метрики γ^{ik} (або γ_{ik}):

$$\gamma_{ik} \equiv -g_{ik}, \quad \gamma^{ik} = -g^{ik} + \frac{g^{0i}g^{0k}}{g^{00}}, \quad \gamma_{ik}\gamma^{kj} = \delta_i^j, \quad (4.3)$$

$$N^i \equiv g_{0k}\gamma^{ki} = \frac{g^{0i}}{g^{00}}, \quad N \equiv \sqrt{g_{00} - g_{ik}N^iN^k} = \sqrt{\frac{1}{g^{00}}}. \quad (4.4)$$

З використанням рівностей $g_{0i} = -g_{ik}N^k$ і $u_a^i(t) \equiv \dot{x}_a^i(t) - N^i(t, \mathbf{x}_a)$, маємо

$$L(t) = - \sum_{a=1}^N m_a \sqrt{N^2(t, \mathbf{x}_a) - \gamma_{ik}(t, \mathbf{x}_a) u_a^i(t) u_a^k(t)}. \quad (4.5)$$

Означимо канонічні імпульси частинок так:

$$k_{ai}(t) \equiv -\frac{\partial L(t)}{\partial \dot{x}_a^i(t)} = -\frac{m_a \gamma_{ik}(t, \mathbf{x}_a) u_a^k(t)}{\sqrt{N^2(t, \mathbf{x}_a) - \gamma_{ik}(t, \mathbf{x}_a) u_a^i(t) u_a^k(t)}}. \quad (4.6)$$

Швидкість частинки виражається в термінах канонічних змінних як

$$\dot{x}_a^i(t) = N^i(t, \mathbf{x}_a) - \frac{N(t, \mathbf{x}_a) k_a^i(t)}{\sqrt{m_a^2 + \gamma^{ik}(t, \mathbf{x}_a) k_{ai}(t) k_{ak}(t)}}, \quad k_a^i(t) = \gamma^{ik}(t, \mathbf{x}_a) k_{ak}(t). \quad (4.7)$$

Відразу знаходимо канонічний гамільтоніан:

$$H = - \sum_{a=1}^N k_{ai} \dot{x}_a^i - L = \sum_{a=1}^N \left[N \sqrt{m_a^2 + \gamma^{ik} k_{ai} k_{ak}} - k_{ai} N^i \right], \quad (4.8)$$

який генерує часову еволюцію в термінах дужки Пуасона:

$$\{x_a^i(t), k_{bj}(t)\} = -\delta_{ab} \delta_j^i. \quad (4.9)$$

У випадку слабкого гравітаційного поля, подамо метрику у вигляді

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (4.10)$$

де $\|\eta_{\mu\nu}\| = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ – метрика плоского простору-часу.

У лінійному наближенні маємо $g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu$ і одержуємо гамільтоніан:

$$H = \sum_{a=1}^N \sqrt{m_a^2 + \mathbf{k}_a^2} + \frac{1}{2} \int J_{\mu\nu} h^{\mu\nu} d^3x. \quad (4.11)$$

Струм $J_{\mu\nu}$ – тензор енергії–імпульсу вільних частинок, який має вигляд

$$J_{\mu\nu} = \sum_{a=1}^N \frac{k_{a\mu} k_{a\nu}}{\sqrt{m_a^2 + \mathbf{k}_a^2}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a), \quad (4.12)$$

$$k_{a0} = k_a^0 = \sqrt{m_a^2 + \mathbf{k}_a^2}, \quad k_{ai} = -k_a^i.$$

Тепер слід ввести гамільтоніан, який генерує еволюцію поля $h_{\mu\nu}$. Для цього звернемося до загальної теорії відносності.

Точна густина лагранжіану гравітаційного поля теорії Ейнштейна [385] є

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G} \left[-g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma) \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} + \partial_\mu \omega^\mu \right], \quad (4.13)$$

де дивергентний член і зв'язність є

$$\omega^\mu = \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} \partial_\nu g_{\lambda\sigma} (g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}), \quad (4.14)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (4.15)$$

Надалі використовуємо позначення

$$\partial_\mu \equiv \partial / \partial x^\mu, \quad \partial_0 f = \partial f / \partial t \equiv \dot{f}. \quad (4.16)$$

Умова слабкості гравітаційного поля з метрикою (4.10) відразу приводить до густини лагранжіану:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi G} \Gamma, \quad \Gamma = \eta^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma), \quad (4.17)$$

де зв'язність набуває вигляду

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\sigma} (\partial_\nu h_{\sigma\mu} + \partial_\mu h_{\sigma\nu} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}). \quad (4.18)$$

Прямі обчислення дають

$$\begin{aligned} 4\Gamma = & -\pi_{ik} \pi^{ik} + \pi_i^i \pi_k^k + 2\partial^i h_{00} (\partial_i h_k^k - \partial_k h_i^i) - 2\partial^i h_i^j \partial_j h_k^k \\ & + \partial^j h_i^i \partial_j h_k^k + 2\partial_j h_k^i \partial^k h_i^j + \partial_j h_i^k \partial_j h_k^i + \Omega, \end{aligned} \quad (4.19)$$

де введено позначення:

$$\pi_{ik} \equiv \dot{h}_{ik} - \partial_i h_{0k} - \partial_k h_{0i}, \quad (4.20)$$

$$\Omega \equiv -2\partial_0[(h_{00} - h_k^k)\partial^i h_{0i}] + 2\partial^i[(h_{00} - h_k^k)\dot{h}_{0i}] + 4\partial^i[h_{0k}\partial^k h_{0i} - h_{0i}\partial^k h_{0k}]. \quad (4.21)$$

Відкидаючи дивергентний член Ω , одержуємо вираз:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{32\pi G} \left[\frac{1}{2}\pi_{ik}\pi^{ik} - \frac{1}{2}\pi_i^i\pi_k^k - \partial^i h_{00}(\partial_i h_k^k - \partial_k h_i^i) + \partial^i h_i^j \partial_j h_k^k \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}\partial_j h_i^i \partial^j h_k^k - \partial_j h_k^i \partial^k h_i^j + \frac{1}{2}\partial_j h_k^i \partial^j h_i^k \right]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Канонічні польові імпульси теорії є

$$p^{0\mu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{0\mu}} = 0, \quad (4.23)$$

$$p^{ik} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{ik}} = \frac{1}{32\pi G} (\pi^{ik} - \delta^{ik}\pi^{ll}). \quad (4.24)$$

Дужка Пуасона задається співвідношеннями:

$$\{h_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}), p^{\lambda\sigma}(t, \mathbf{y})\} = I_{\mu\nu}^{\lambda\sigma} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad I_{\mu\nu}^{\lambda\sigma} = \frac{1}{2}(\delta_\mu^\lambda \delta_\nu^\sigma + \delta_\nu^\lambda \delta_\mu^\sigma). \quad (4.25)$$

Рівняння (4.23) визначає первинні в'язі [373]. З врахуванням (4.23), знаходимо густину канонічного гамільтоніану (див. [373])

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & 16\pi G \left(p_{ik}p^{ik} - \frac{1}{2}p_i^i p_k^k \right) + 2p^{ik}\partial_i h_{0k} + \frac{1}{32\pi G} [\partial^i h_{00}(\partial_i h_k^k - \partial_k h_i^i) \\ & - \partial^i h_i^j \partial_j h_k^k + \frac{1}{2}\partial_j h_i^i \partial^j h_k^k + \partial_j h_k^i \partial^k h_i^j - \frac{1}{2}\partial_j h_k^i \partial^j h_i^k]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Використовуючи вирази (4.11) і (4.26), приходимо до гамільтоніану системи “частинки+поле”:

$$H = \sum_{a=1}^N \sqrt{m_a^2 + \mathbf{k}_a^2} + \frac{1}{2} \int J^{ik} h_{ik} d^3x + \int \left(\mathcal{H}_g + \frac{1}{2} h_{00} T^0 + h_{0i} T^i \right) d^3x, \quad (4.27)$$

тут

$$\mathcal{H}_g = 16\pi G \left(p_{ik}p^{ik} - \frac{1}{2}p_i^i p_k^k \right) - \frac{1}{64\pi G} h_{kl} \Delta (P^{ik} P^{lj} - P^{kl} P^{ij}) h_{ij}, \quad (4.28)$$

$$T^0 = J^{00} + \frac{1}{16\pi G} \Delta P^{ik} h_{ik}, \quad T^i = J^{0i} - 2\partial_k p^{ik}, \quad (4.29)$$

$$P^{ik} = \eta^{ik} + \Delta^{-1} \partial^i \partial^k. \quad (4.30)$$

Обернений оператор до лапласіану $\Delta \equiv -\partial^i \partial_i$ визначається рівнянням

$$\Delta^{-1} \delta^3(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}. \quad (4.31)$$

В'язі (4.23) пов'язані з калібрувальною інваріантністю рівнянь руху. Вимога збереження (4.23) в часі генерує вторинні в'язі. Повна система в'язей

$$p^{0\mu} \approx 0, \quad T^\mu \approx 0 \quad (4.32)$$

є *першого роду*, оскільки $\{p^{0\mu}, T^\nu\} = 0$. Будемо записувати рівняння в'язей з використанням “слабкої рівності”, щоб відрізнити від рівнянь руху.

Змінні, спряжені до імпульсів $p^{0\mu}$ і функцій T^μ , є нефізичними і довільними. Вони не фіксуються рівняннями руху. Цю довільність можна усунути за допомогою накладання додаткових калібрувальних умов. Інший шлях полягає у переході до калібрувально-інваріантного опису. Такий підхід був започаткований Діраком для електромагнітного поля і застосовується для калібрувально-інваріантного переформулювання динаміки нашої системи.

Можна перекоонатися, що польові змінні

$$Q_0 = -8\pi G \Delta^{-1} P_{ik} p^{ik}, \quad Q_i = -\frac{1}{2} \Delta^{-1} [\partial^k h_{ik} + P_i^l \partial^k h_{lk}] \quad (4.33)$$

задовольняють такі комутаційні співвідношення в сенсі дужок Пуасона:

$$\{Q_\mu(t, \mathbf{x}), T^\nu(t, \mathbf{y})\} = \delta_\mu^\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \{Q_\mu, Q_\nu\} = 0. \quad (4.34)$$

Тоді, пари $(h_{0\mu}, p^{0\mu})$ і (Q_μ, T^μ) утворюють канонічний базис калібрувальних ступенів вільності. Тепер, зосередимося на канонічних змінних, які відповідають калібрувально-інваріантним ступеням вільності. По-перше, розділимо фізичні і калібрувальні ступені вільності за допомогою розкладу [373]:

$$h_{ik} = h_{ik}^\perp + h_{ik}^L, \quad h_{ik}^\perp = P_{ik}^{lm} h_{lm}, \quad h_{ik}^L = L_{ik}^{lm} h_{lm}, \quad (4.35)$$

$$p^{ik} = p_{\perp}^{ik} + p_L^{ik}, \quad p_{\perp}^{ik} = P_{lm}^{ik} p^{lm}, \quad p_L^{ik} = L_{lm}^{ik} p^{lm}. \quad (4.36)$$

Тут, проектори задаються так:

$$P_{lm}^{ik} = \frac{1}{2}(P_l^i P_m^k + P_m^i P_l^k - P^{ik} P_{lm}), \quad L_{lm}^{ik} = I_{lm}^{ik} - P_{lm}^{ik}. \quad (4.37)$$

Тоді, використовуючи співвідношення (4.29) і (4.33), одержуємо

$$h_{ik}^L = -8\pi G P_{ik} \Delta^{-1} (T^0 - J^{00}) + \partial_i Q_k + \partial_k Q_i, \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} p_L^{ik} = & -\frac{1}{16\pi G} P^{ik} \Delta Q_0 + \frac{1}{2} \partial^k \Delta^{-1} (T^i - J^{0i}) \\ & + \frac{1}{2} \partial^i \Delta^{-1} (T^k - J^{0k}) + \frac{1}{2} \partial^i \partial^k \Delta^{-2} \partial_l (T^l - J^{0l}). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Для поперечних (фізичних) складових польових змінних, маємо

$$\{h_{ik}^{\perp}(t, \mathbf{x}), p_{\perp}^{lm}(t, \mathbf{y})\} = P_{ik}^{lm} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.40)$$

Розщеплення (4.35)–(4.36) індукує канонічне перетворення:

$$((x_a^i, k_{ai}), (h_{ik}, p^{ik})) \mapsto ((y_a^i, q_{ai}), (h_{ik}^{\perp}, p_{\perp}^{ik}), (Q_{\mu}, T^{\mu})). \quad (4.41)$$

Перетворення частинкових змінних генерується функціоналом:

$$F = \int Q_{\mu} J^{\mu 0} d^3 x. \quad (4.42)$$

У рамках лінеаризованої теорії одержуємо

$$y_a^i = x_a^i + \{x_a^i, F\}, \quad q_{ai} = k_{ai} + \{k_{ai}, F\}. \quad (4.43)$$

Враховуючи рівняння (4.32) і перетворення (4.41), знаходимо

$$\begin{aligned} H = & \sum_{a=1}^N \sqrt{m_a^2 + \mathbf{q}_a^2} + \frac{1}{2} \int J^{ik} (h_{ik}^{\perp} - 8\pi G P_{ik} \Delta^{-1} J^{00}) d^3 x + \int \mathcal{H}_g^{\perp} d^3 x \\ & + 8\pi G \int \left(\frac{1}{4} J^{00} \Delta^{-1} J^{00} + J^{0i} \Delta^{-1} P_{ik} J^{0k} + \frac{1}{4} \partial_i J^{0i} \Delta^{-2} \partial_k J^{0k} \right) d^3 x. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Гамільтоніан H не залежить від калібрувальних змінних $h_{0\mu}$ і Q_μ , а струм і фізичний гамільтоніан поля задаються виразами:

$$J^{\mu\nu} = \sum_{a=1}^N \frac{q_a^\mu q_a^\nu}{\sqrt{m_a^2 + \mathbf{q}_a^2}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}_a), \quad \mathcal{H}_g^\perp = 16\pi G p_{ik}^\perp p_\perp^{ik} - \frac{1}{64\pi G} h_\perp^{ik} \Delta h_{ik}^\perp. \quad (4.45)$$

Отже, ми виключили калібрувальні ступені вільності і перейшли до опису в термінах спостережуваних Дірака. На цьому етапі, польові і частинкові змінні – рівноправні, що може бути використано для різних цілей. Однак, ми виключимо фізичні ступені вільності гравітаційного поля з опису системи.

4.1.2. Редукція ступенів вільності поля. Переформулюємо систему в термінах частинкових змінних, що особливо ефективно, коли вільне випромінювання не є важливим. Зробимо це за три кроки. (i) Розв'яжемо гамільтонові рівняння поля в лінійному наближенні за гравітаційною сталою за допомогою методу функцій Гріна. У даному наближенні, випередний, запізнений та симетричний розв'язки збігаються, і ми використовуємо симетричну функцію Гріна. (ii) За допомогою відповідного перетворення виділимо канонічні змінні вільного поля, які є розв'язками однорідних рівнянь. (iii) Прирівняємо вільне поле до нуля. Виключимо зафіксовані змінні за допомогою дужки Дірака і знайдемо гамільтоніан.

Запишемо гамільтонові рівняння руху для $h_{ik}^\perp$ і $p_\perp^{ik}$:

$$\dot{h}_{ik}^\perp = 32\pi G p_{ik}^\perp, \quad \dot{p}_\perp^{ik} = -\frac{1}{2} P_{lm}^{ik} J^{lm} + \frac{1}{32\pi G} \Delta h_\perp^{ik}. \quad (4.46)$$

Комбінуючи, їх можна переписати так:

$$\ddot{h}_{ik}^\perp - \Delta h_{ik}^\perp = -16\pi G P_{ik}^{lm} J_{lm}, \quad \dot{p}_\perp^{ik} = \frac{1}{32\pi G} \dot{h}_\perp^{ik}. \quad (4.47)$$

Загальний розв'язок системи (4.47) подамо як

$$h_{ik}^\perp = \phi_{ik}^\perp + \hat{h}_{ik}^\perp, \quad p_\perp^{ik} = \chi_\perp^{ik} + \hat{p}_\perp^{ik} \quad (4.48)$$

Нехай змінні $\phi_{ik}^\perp$ і $\chi_\perp^{ik}$ є загальним розв'язком однорідних рівнянь:

$$\ddot{\phi}_{ik}^\perp - \Delta \phi_{ik}^\perp = 0, \quad \chi_\perp^{ik} = \frac{1}{32\pi G} \dot{\phi}_\perp^{ik}. \quad (4.49)$$

Функції $\hat{h}_{ik}^\perp$ залежать від частинкових змінних і задовольняють неоднорідні польові рівняння з точковоподібними джерелами. Вони визначаються так:

$$\begin{aligned} \hat{h}_{ik}^\perp &= P_{ik}^{lm} \hat{h}_{lm}, \\ \hat{h}_{\mu\nu} &= -16\pi G \sum_{a=1}^N \int G_{\mu\nu}^{\lambda\sigma} [(t-t')^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{y}_a(t'))^2] \frac{q_{a\lambda}(t') q_{a\sigma}(t')}{\sqrt{m_a^2 + \mathbf{q}_a^2(t')}} dt', \end{aligned} \quad (4.50)$$

де

$$G_{\mu\nu}^{\lambda\sigma} [(x^0)^2 - \mathbf{x}^2] = \frac{1}{2} (\delta_\mu^\lambda \delta_\nu^\sigma + \delta_\nu^\lambda \delta_\mu^\sigma - \eta^{\lambda\sigma} \eta_{\mu\nu}) G [(x^0)^2 - \mathbf{x}^2]. \quad (4.51)$$

Підставимо симетричну функцію Гріна $G [(x^0)^2 - \mathbf{x}^2]$ оператора Д'Аламбера. Використовуючи вільночастинкові рівняння із сталими в часі імпульсами частинок, інтегрування дає

$$\hat{h}_{\mu\nu} = -4G \sum_{a=1}^N \frac{q_{a\mu} q_{a\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} m_a^2}{\sqrt{[\mathbf{q}_a(\mathbf{x} - \mathbf{y}_a)]^2 + m_a^2 (\mathbf{x} - \mathbf{y}_a)^2}}. \quad (4.52)$$

Тоді, із залученням означення (4.24), знаходимо

$$\hat{p}_\perp^{ik} = P_{lm}^{ik} \hat{p}^{lm}, \quad \hat{p}_{ik} = \frac{1}{32\pi G} \left[D_t \hat{h}_{ik} - \partial_i \hat{h}_{0k} - \partial_k \hat{h}_{0i} + \delta_{ik} (D_t \hat{h}_l^l - 2\partial_l \hat{h}_0^l) \right], \quad (4.53)$$

де D_t — часова похідна:

$$D_t = \sum_{a=1}^N \frac{q_a^i}{\sqrt{m_a^2 + \mathbf{q}_a^2}} \frac{\partial}{\partial y_a^i}. \quad (4.54)$$

Легко перевірити, що одержані розв'язки задовольняють в'язі в лінійному наближенні за гравітаційною сталою:

$$J^{00} + \frac{1}{16\pi G} \Delta P^{ik} \hat{h}_{ik} \equiv 0, \quad J^{0i} - 2\partial_k \hat{p}^{ik} \equiv 0. \quad (4.55)$$

Наступний крок нашої процедури редукції полягає в (канонічному) переході до польових змінних $\phi_{ik}^\perp$, $\chi_\perp^{ik}$ згідно із співвідношеннями (4.48).

Таке перетворення зачіпає частинкові змінні:

$$y_a^i = z_a^i + \int \left[\left(\phi_{lm}^\perp + \frac{1}{2} \hat{h}_{lm}^\perp \right) \frac{\partial \hat{p}_\perp^{lm}}{\partial \pi_{ai}} - \left(\chi_\perp^{lm} + \frac{1}{2} \hat{p}_\perp^{lm} \right) \frac{\partial \hat{h}_{lm}^\perp}{\partial \pi_{ai}} \right] d^3x, \quad (4.56)$$

$$q_{ai} = \pi_{ai} - \int \left[\left(\phi_{lm}^\perp + \frac{1}{2} \hat{h}_{lm}^\perp \right) \frac{\partial \hat{p}_\perp^{lm}}{\partial z_a^i} - \left(\chi_\perp^{lm} + \frac{1}{2} \hat{p}_\perp^{lm} \right) \frac{\partial \hat{h}_{lm}^\perp}{\partial z_a^i} \right] d^3x. \quad (4.57)$$

У термінах нових змінних ненульові дужки Пуасона є

$$\{z_a^i(t), \pi_{bj}(t)\} = -\delta_{ab}\delta_j^i, \quad \{\phi_{ik}^\perp(t, \mathbf{x}), \chi_\perp^{lm}(t, \mathbf{y})\} = P_{ik}^{lm}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.58)$$

Щоб завершити процедуру, залишається покласти $\phi_{ik}^\perp \approx 0$, $\chi_\perp^{ik} \approx 0$, і усунути зафіксоване поле за допомогою дужки Дірака, яка конструюється так. Оскільки $\phi_{ik}^L \equiv 0$ і $\chi_L^{ik} \equiv 0$ для вільного поля, можна відновити канонічні змінні ϕ_{ik} і χ^{ik} , так що $\phi_{ik}^\perp = P_{ik}^{lm}\phi_{lm}$, $\chi_\perp^{ik} = P_{lm}^{ik}\chi^{lm}$. Тоді, дужка Дірака

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \int \{F, \phi_{ik}(t, \mathbf{x})\} I_{lm}^{ik} \{\chi^{lm}(t, \mathbf{x}), G\} d^3x \quad (4.59)$$

просто збігається з канонічною дужкою Пуасона для частинок.

Відкидаючи внесок вільного поля в гамільтоніані, одержуємо

$$H = \sum_{a=1}^N \sqrt{m_a^2 + \boldsymbol{\pi}_a^2} + \frac{1}{4} \int J^{ik} \left(\hat{h}_{ik}^\perp - 16\pi G P_{ik} \Delta^{-1} J^{00} \right) d^3x \\ + 8\pi G \int \left(\frac{1}{4} J^{00} \Delta^{-1} J^{00} + J^{0i} \Delta^{-1} P_{ik} J^{0k} + \frac{1}{4} \partial_i J^{0i} \Delta^{-2} \partial_k J^{0k} \right) d^3x. \quad (4.60)$$

Видно, що виключення поля привело до зменшення внеску взаємодії вдвічі.

Тепер, струм, залежний від частинкових змінних, є

$$J^{\mu\nu} = \sum_{a=1}^N \frac{\pi_a^\mu \pi_a^\nu}{\sqrt{m_a^2 + \boldsymbol{\pi}_a^2}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}_a). \quad (4.61)$$

Поля $\hat{h}_{ik}$ і $\hat{p}^{ik}$ в нових змінних зберігають вигляд (4.52), (4.53).

Якщо до гамільтоніану додати вираз

$$-\frac{1}{4} D_t \int \left[16\pi G J^{00} \Delta^{-1} P_{ik} \hat{p}^{ik} + J^{0i} \Delta^{-1} \left(\partial^k \hat{h}_{ik} + P_i^l \partial^k \hat{h}_{lk} \right) \right] d^3x, \quad (4.62)$$

остаточно знаходимо

$$H = \sum_{a=1}^N \sqrt{m_a^2 + \boldsymbol{\pi}_a^2} + \frac{1}{4} \int J^{\mu\nu} \hat{h}_{\mu\nu} d^3x. \quad (4.63)$$

Після виключення вільного поля метрика набуває вигляду:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - 4G \sum_{a=1}^N \frac{\pi_{a\mu} \pi_{a\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} m_a^2}{\sqrt{[\boldsymbol{\pi}_a(\mathbf{x} - \mathbf{z}_a)]^2 + m_a^2(\mathbf{x} - \mathbf{z}_a)^2}}, \quad (4.64)$$

де $\pi_{a0} = \sqrt{m_a^2 + \boldsymbol{\pi}_a^2}$.

Комбінація рівнянь (4.43) і (4.56) дає співвідношення між коваріантними положеннями частинок і канонічними змінними:

$$x_a^i = z_a^i + \frac{1}{2} \int \left(\hat{h}_{lm} \frac{\partial \hat{p}^{lm}}{\partial \pi_{ai}} - \hat{p}^{lm} \frac{\partial \hat{h}_{lm}}{\partial \pi_{ai}} \right) d^3x. \quad (4.65)$$

Дужки Дірака між положеннями частинок,

$$\{x_a^i, x_b^j\}^* = \int \left(\frac{\partial \hat{h}_{lm}}{\partial \pi_{bj}} \frac{\partial \hat{p}^{lm}}{\partial \pi_{ai}} - \frac{\partial \hat{p}^{lm}}{\partial \pi_{bj}} \frac{\partial \hat{h}_{lm}}{\partial \pi_{ai}} \right) d^3x \neq 0, \quad (4.66)$$

показують, що x_a^i не можуть бути канонічними змінними, що узгоджується з теоремою про невзаємодію [84].

Пуанкаре-інваріантність початкової системи приводить до десяти зберезуваних величин, які в термінах канонічних змінних дають канонічну реалізацію алгебри Пуанкаре. Після редукції поля, знаходимо вирази для 4-імпульсу і 4-поворотів, які походять від генераторів системи “частинки+поле”:

$$\begin{aligned} P^0 &= \sum_{a=1}^N \sqrt{m_a^2 + \boldsymbol{\pi}_a^2} + \frac{1}{4} \int J^{\mu\nu} \hat{h}_{\mu\nu} d^3x, \\ P^i &= \sum_{a=1}^N \pi_a^i, \quad M^{ik} = \sum_{a=1}^N (z_a^i \pi_a^k - z_a^k \pi_a^i), \\ M^{k0} &= \sum_{a=1}^N z_a^k \sqrt{m_a^2 + \boldsymbol{\pi}_a^2} + \frac{1}{4} \int x^k J^{\mu\nu} \hat{h}_{\mu\nu} d^3x - t P^k. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Сингулярні члени самодії виключаються за допомогою процедури, що використовує потенціал Ріса [156], і генератори задовольняють комутаційні співвідношення алгебри Пуанкаре у першому порядку за G :

$$\begin{aligned}\{P^\mu, P^\nu\}^* &= 0, \quad \{P^\mu, M^{\nu\lambda}\}^* = \eta^{\mu\nu} P^\lambda - \eta^{\mu\lambda} P^\nu, \\ \{M^{\mu\nu}, M^{\lambda\sigma}\}^* &= -\eta^{\mu\lambda} M^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\lambda} M^{\mu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} M^{\mu\lambda} + \eta^{\mu\sigma} M^{\nu\lambda}.\end{aligned}\quad (4.68)$$

Виявляється, що

$$\{x_a^i, M^{k0}\}^* = x_a^k \{x_a^i, H\}^* - \delta^{ik} t, \quad (4.69)$$

тобто частинкові координати задовольняють умову світової лінії.

4.1.3. Підсумки. Отримано калібрувально-інваріантне формулювання лінеаризованої теорії тяжіння, коли частинкові та польові змінні тлумачаться рівноправно. Щоб одержати опис в термінах лише частинкових змінних, ми ефективно виключили польові ступені вільності за допомогою теорії в'язей Дірака. Ця процедура розроблена у нашій праці [259] і використана тут в першому порядку теорії збурень за гравітаційною сталою.

Процедура усунення поля дозволяє отримати зв'язок між коваріантними положеннями частинок і канонічними змінними. Окрім того, такий підхід забезпечує Пуанкаре-інваріантність теорії: десять генераторів Пуанкаре в термінах частинкових змінних задовольняють комутаційні співвідношення алгебри Пуанкаре в даному наближенні.

Знайдено вираз для метричного тензора в теорії Ейнштейна, який залежить від канонічних частинкових змінних (див. (4.64)) і узгоджується з результатом праці [156] в термінах конфігураційних змінних.

Зауважимо, що вираз (4.60) для гамільтоніану взаємодіючих частинок можна тлумачити як такий, що отриманий у калібруванні, подібному до калібрування Кулона в електродинаміці, а (4.63) – у коваріантному калібруванні Лоренца. Оскільки різниця між (4.63) і (4.60) задається похідною (4.62), то вказані гамільтоніани пов'язані канонічним перетворенням.

4.2. Екранування в слабконеідеальному релятивістському газі точкових зарядів з гравітаційною взаємодією

У рамках традиційної статистичної механіки, яка базується на розподілі Гібса та рівнянні Ліувіля, для класичних нерелятивістських систем взаємодіючих частинок розвинуто потужні діаграмні методи [231, 382, 369, 393] знаходження статистичної суми, кореляційних функцій тощо. Діаграмна техніка дозволила обчислити вільну енергію та інші термодинамічні функції системи зарядів з кулонівською далекодіючою взаємодією. Так, перша ненульова поправка до вільної енергії описує екранування зарядів і одержується шляхом підсумовування кільцевих діаграм – внесків попарновзаємодіючих частинок [382, 369, 393]. Однак, фундаментальні взаємодії у фізиці адекватно описуються теорією поля, яка має релятивістську та калібрувальну природу. Тому застосування такої діаграмної техніки в статистичному описі потребує переформулювання взаємодій в термінах канонічних змінних частинок. Здійснюючи перехід від теорії поля до теорії прямих взаємодій, потенціали міжчастинкової релятивістської взаємодії (на відміну від нерелятивістського випадку) виявляються залежними від канонічних імпульсів частинок. Однак, про існування загальної схеми перегруповання і обчислення діаграм для залежних від імпульсів потенціалів нам невідомо.

У піонерській роботі [194] була здійснена спроба обчислення статистичної суми системи зарядів з гамільтоніаном із слабкорелятивістською взаємодією Дарвіна [85] шляхом підсумовування ряду кільцевих діаграм, безпосередньо сформованих на базі залежного від імпульсів потенціалу. Такий спосіб узагальнення нерелятивістської діаграмної техніки зустрівся з проблемою розбіжності вільної енергії. Однак з'явилась низка підходів [194, 390, 47] розрахунку вільної енергії, яка дозволила уникнути зазначеної розбіжності. Запропоновані калькулятивні схеми не змогли обійтись без “додаткових принципів” побудови релятивістської статистичної механіки в межах окремої задачі. З

іншого боку, відмінність закладених різними авторами “принципів”, а разом з тим і результатів, стала предметом дискусії в літературі [175, 195].

Тому, зосереджуючись на обчисленні статистичної суми та термодинамічних функцій релятивістської системи зарядів з гамільтоніаном першого порядку за взаємодією, ми обрали послідовний шлях, що полягає у застосуванні існуючої (нерелятивістської) діаграмної техніки до ефективного потенціалу, одержаного усередненням за імпульсами релятивістського потенціалу.

4.2.1. Ефективний потенціал взаємодії. Скористаємося результатами праць [258, 259, 261], де одержано Пуанкаре-інваріантні гамільтоніани з прямою міжчастинковою взаємодією у першому наближенні за константою взаємодії з точним врахуванням релятивістської кінематики. В загальному вигляді функцію Гамільтона системи N тотожних частинок із суперпозицією електромагнітної та гравітаційної взаємодій у даному наближенні ($\sim e^2, G$) в термінах канонічних змінних (x_a^i, p_{ai}) запишемо так²:

$$H = \sum_{a=1}^N p_a^0 + \frac{1}{2} \sum'_{a,b=1}^N U_{ab}, \quad U = \frac{1}{2} \sum'_{a,b=1}^N U_{ab}, \quad (4.70)$$

$$U_{ab} = \int \left[j_a^\mu a_\mu^b + \frac{1}{2} t_a^{\mu\nu} h_{\mu\nu}^b \right] d^3x = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \nu(\mathbf{k}) u_{ab} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{ab}}, \quad (4.71)$$

$$\mathbf{r}_{ab} = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b, \quad \nu(\mathbf{k}) = \frac{4\pi}{\mathbf{k}^2}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, \quad p_a^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}_a^2}.$$

Тут j_a^μ – парціальний вільночастинковий 4-струм a -ї частинки; $t_a^{\mu\nu}$ – тензор енергії–імпульсу вільної a -ї частинки; V – об’єм системи; штрих над знаком суми означає, що $a \neq b$. 4-Потенціал електромагнітного поля a_μ^b та гравітаційне поле $h_{\mu\nu}^b$, які створюються частинкою b , знаходяться з відповідних польових рівнянь з точковим джерелом (див. [258, 259, 261]). Однак конкретний

²Грецькі індекси $\mu, \nu, \dots$ пробігають від 0 до 3; латинські індекси i, j, k пробігають від 1 до 3. Підсумовування за такими типами індексів здійснюється згідно конвенції з метрикою $\|\eta_{\mu\nu}\| = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Індекси a, b позначають частинки і пробігають від 1 до N . Швидкість світла $c = 1$.

вигляд імпульсної частини u_{ab} потенціалу міжчастинкової взаємодії (4.71) залежить від умов редукції калібрувальної свободи рівнянь електромагнітного та гравітаційного полів. Так із застосуванням калібрувальної умови Лоренца одержується вираз

$$u_{ab} = \frac{p_b^0/p_a^0}{(p_b^0)^2 - (\mathbf{np}_b)^2} \{ e^2 p_a^\mu p_{b\mu} - G [2(p_a^\mu p_{b\mu})^2 - m^4] \}. \quad (4.72)$$

Використовуючи калібрування Кулона, маємо

$$\begin{aligned} u_{ab} = & e^2 \left[1 - \frac{\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b - (\mathbf{np}_a)(\mathbf{np}_b) p_b^0}{(p_b^0)^2 - (\mathbf{np}_b)^2} \frac{p_b^0}{p_a^0} \right] - G \{ p_a^0 p_b^0 - (\mathbf{np}_a)(\mathbf{np}_b) + \\ & + \left(2[\mathbf{p}_a^2 - (\mathbf{np}_a)^2] + \frac{[\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b - (\mathbf{np}_a)(\mathbf{np}_b)]^2}{(p_b^0)^2 - (\mathbf{np}_b)^2} \right) \frac{p_b^0}{p_a^0} - \\ & - 4[\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b - (\mathbf{np}_a)(\mathbf{np}_b)] \}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Незважаючи на зовнішню відмінність одержаних потенціалів, знайдені гамільтоніани є фізично еквівалентними, що впливає з незалежності значень спостережуваних величин від вибору калібрування [373]. В рамках теорії прямих взаємодій, канонічні перетворення, що пов'язують гамільтоніани з (4.72) і (4.73), можна знайти в [259, 261]. З іншого боку, статистична сума (вільна енергія) є калібрувально-інваріантною величиною [377], тому гамільтоніани з імпульсними частинами (4.72) та (4.73) повинні приводити до однакових значень статистичних та термодинамічних величин.

Запишемо статистичну суму системи N тотожних частинок:

$$Z_N = \frac{1}{N!} \int e^{-\beta H} \prod_{a=1}^N \frac{d^3 x_a d^3 p_a}{(2\pi)^3}, \quad (4.74)$$

де $\beta^{-1} = T$ – температура системи.

Тепер здійснимо інтегрування за канонічними імпульсами частинок, щоб знайти ефективний потенціал. Подамо вираз (4.74) так:

$$Z_N = \frac{Z_N^{\text{id}}}{V^N} \int \langle e^{-\beta U} \rangle \prod_{a=1}^N d^3 x_a, \quad (4.75)$$

де статистична сума Z_N^{id} вільних релятивістських частинок має вигляд [177]

$$Z_N^{\text{id}} = \frac{1}{N!} (\xi V)^N, \quad \xi = \int e^{-\beta p_a^0} \frac{d^3 p_a}{(2\pi)^3}, \quad (4.76)$$

а середнє за імпульсами (з функцією розподілу вільних частинок) означається формулою

$$\langle e^{-\beta U} \rangle = \frac{1}{\xi^N} \int e^{-\beta(H_0+U)} \prod_{a=1}^N \frac{d^3 p_a}{(2\pi)^3}; \quad H_0 = \sum_{a=1}^N p_a^0. \quad (4.77)$$

Прагнення знайти ефективний потенціал, лінійний за взаємодією, відразу вказує на різні результати обчислень $\langle u_{ab} \rangle$ для взаємодій (4.72) і (4.73).

Тому, для аналізу властивостей середнього та його обчислення зручно ввести симетризований потенціал парної взаємодії $V_{ab}(=V_{ba})$:

$$V_{ab} = \frac{1}{2}(U_{ab} + U_{ba}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \nu(\mathbf{k}) v_{ab} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{ab}}, \quad U = \frac{1}{2} \sum'_{a,b=1}^N V_{ab}. \quad (4.78)$$

Взаємодію між частинками a і b в термінах симетризованого потенціалу V_{ab} можна тлумачити як взаємодію за допомогою віртуальної фотонної та гравітонної петлі. Подібна однопетльова взаємодія виникає і в квантовій теорії поля у лінійному наближенні за константою взаємодії, яка там забезпечує спільний характер фундаментальних взаємодій.

Симетризовану імпульсну частину v_{ab} потенціалу подамо у вигляді:

$$v_{ab} = f_a^{\bar{\alpha}} A_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} f_b^{\bar{\beta}}. \quad (4.79)$$

Тут $f_a^{\bar{\alpha}}$ – залежний лише від канонічного імпульсу $\mathbf{p}_a$ “вектор”; $A_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ – стала симетрична матриця; $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ – мульти-індекси. Зображення v_{ab} у вигляді (4.79) не є однозначним.

Так, імпульсну частину v_{ab} симетризованого релятивістського потенціалу можна подати у вигляді квадратичної форми:

$$v_{ab} = f_{a(\xi)(\alpha)}^{[\mu][\nu]} A_{[\mu\lambda][\nu\sigma]}^{(\xi\zeta)(\alpha\beta)} f_{b(\zeta)(\beta)}^{[\lambda][\sigma]}, \quad (4.80)$$

де індекси $\xi, \zeta = \overline{1, 2}$ нумерують взаємодії: електромагнітну, гравітаційну; індекси $\alpha, \beta = \overline{1, 2}$ відповідають суб'єктам взаємодій: “струму”, “полю”.

Для взаємодії, записаної на базі формули (4.72), компоненти вектора f_a та матриці A означено так:

$$f_{a(1)(1)}^{[\mu][\nu]} = \frac{p_a^\mu}{p_a^0} \ell^\nu, \quad f_{a(1)(2)}^{[\mu][\nu]} = \frac{p_a^\mu p_a^0}{(p_a^0)^2 - (\mathbf{n} \mathbf{p}_a)^2} \ell^\nu, \quad (4.81)$$

$$f_{a(2)(1)}^{[\mu][\nu]} = \frac{p_a^\mu p_a^\nu}{p_a^0}, \quad f_{a(2)(2)}^{[\mu][\nu]} = \frac{2p_a^\mu p_a^\nu - \eta^{\mu\nu} m^2}{(p_a^0)^2 - (\mathbf{n} \mathbf{p}_a)^2} p_a^0, \quad (4.82)$$

$$A_{[\mu\lambda][\nu\sigma]}^{(\alpha\beta)(\xi\zeta)} = \frac{1}{2} g_\xi \delta_{\xi\zeta} \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\sigma} \delta(3 - \alpha - \beta), \quad (4.83)$$

де ℓ^μ – довільний сталий 4-вектор, такий що $\ell^\mu \ell_\mu = 1$; $g_1 = e^2$, $g_2 = -G$.

Для скорочення запису сукупності індексів позначимо як $\bar{\alpha} = \{(\xi)(\alpha)[\mu][\nu]\}$, $\bar{\beta} = \{(\zeta)(\beta)[\lambda][\sigma]\}$, і приходимо до (4.79), тобто $v_{ab} = f_a^{\bar{\alpha}} A_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} f_b^{\bar{\beta}}$ з $A_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = A_{\bar{\beta}\bar{\alpha}}$.

Вираз (4.79) можна переписати так:

$$\begin{aligned} v_{ab} &= \frac{1}{2} \left[f_a^{\bar{\alpha}} A_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} f_a^{\bar{\beta}} + f_b^{\bar{\alpha}} A_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} f_b^{\bar{\beta}} - (f_a^{\bar{\alpha}} - f_b^{\bar{\alpha}}) A_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} (f_a^{\bar{\beta}} - f_b^{\bar{\beta}}) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[u_{aa} + u_{bb} - (f_a^{\bar{\alpha}} - f_b^{\bar{\alpha}}) A_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} (f_a^{\bar{\beta}} - f_b^{\bar{\beta}}) \right]. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Після прямого підставлення виразів (4.72) і (4.73) виявляється, що u_{aa} є однаковою для вихідних гамільтоніанів,

$$u_{aa} = \frac{e^2 - Gm^2}{1 + [\mathbf{n} \times \mathbf{v}_a]^2}, \quad \mathbf{v}_a = \frac{\mathbf{p}_a}{m}, \quad (4.85)$$

і описує дію рухомого заряду на нерухомий з врахуванням скінченності швидкості передачі взаємодії. Тому імпульсну частину v_{ab} подамо у вигляді:

$$v_{ab} = v_{ab}^{\text{inv}} + v_{ab}^{\text{gauge}}, \quad (4.86)$$

де

$$v_{ab}^{\text{inv}} = \frac{1}{2} (u_{aa} + u_{bb}), \quad v_{ab}^{\text{gauge}} = -\frac{1}{2} (f_a^{\bar{\alpha}} - f_b^{\bar{\alpha}}) A_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} (f_a^{\bar{\beta}} - f_b^{\bar{\beta}}). \quad (4.87)$$

Складова v_{ab}^{inv} є інваріантом відносно групи канонічних перетворень, яка визначає клас еквівалентних гамільтоніанів (4.70). В той час, складова v_{ab}^{gauge} імпульсної частини потенціалу залежить від способу фіксування калібрувальної

свободи польових рівнянь і змінюється відносно зазначеної групи канонічних перетворень. Легко бачити, що $v_{ab}^{\text{gauge}} < 0$ і $|v_{ab}^{\text{gauge}}| < |v_{ab}^{\text{inv}}|$. Окрім того, величина v_{ab}^{gauge} зникає у нерелятивістській межі (коли зникає залежність взаємодії від імпульсів). Оскільки, статистична сума не повинна залежати від вибору калібрувальних умов, ми повинні виключити внесок v_{ab}^{gauge} , використовуючи канонічне перетворення, або на підставі його малості у порівнянні з v_{ab}^{inv} .

Отже, ми знаходимо ефективний потенціал міжчастинкової взаємодії з (4.77), враховуючи лише v_{ab}^{inv} з v_{ab} :

$$W = -\frac{1}{\beta} \ln \langle e^{-\beta U} \rangle = -\frac{1}{\beta} \ln (1 - \beta \langle U \rangle + \dots). \quad (4.88)$$

У лінійному наближенні за константою взаємодії, маємо

$$W = \frac{1}{2} \sum'_{a,b=1}^N W_{ab}, \quad W_{ab} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \nu(\mathbf{k}) \langle u_{aa} \rangle e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{ab}}. \quad (4.89)$$

Введемо ефективну константу взаємодії $Q^2 = \langle u_{aa} \rangle$, і одержуємо

$$Q^2(m\beta) = (e^2 - Gm^2) \frac{K_0(m\beta)}{K_2(m\beta)}, \quad (4.90)$$

де $K_n(z)$ – функція Макдональда. Тут, електромагнітна та гравітаційна взаємодії характеризуються спільною функцією від $m\beta$. Це можна пояснити подібністю польових рівнянь у першому порядку наближення [259, 261].

Проаналізуємо межі діапазону значень $Q^2(m\beta)$:

$$\lim_{z \rightarrow 0} Q^2(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} Q^2(z) = e^2 - Gm^2.$$

Перший випадок відповідає межі $T \rightarrow \infty$, коли взаємодія зникає за високих температур, і зникає відмінність між електромагнітною та гравітаційною взаємодіями. Однак, у нашому підході значення температур обмежено зверху умовою $T < t$. Другий випадок – нерелятивістська межа ($c \rightarrow \infty$).

При розгляді моделі, коли кінематична частина гамільтоніану є релятивістською, а взаємодія – нерелятивістська, з огляду на попередню формулу слід покласти $Q^2 = e^2 - Gm^2$.

4.2.2. Термодинамічні функції. Після інтегрування за канонічними імпульсами у виразі для статистичної суми (4.74) слабконеідеальної одно-сортної системи частинок (електронного газу) з електромагнітною та гравітаційною взаємодіями подамо величину Z_N так:

$$Z_N = Z_N^{\text{id}} Q_N, \quad Q_N = \frac{1}{V^N} \int e^{-\beta W} \prod_{a=1}^N d^3 x_a, \quad (4.91)$$

де Q_N – конфігураційний інтеграл з потенціалом (4.89).

Запишемо вільну енергію Гельмгольца $F = -T \ln Z_N$ у вигляді ряду [393]:

$$F = F^{\text{id}} + F' + F'' - \frac{1}{\beta} (B_2 + B_3 + \dots). \quad (4.92)$$

тут

$$F^{\text{id}} = -T \ln Z_N^{\text{id}} \quad (4.93)$$

– вільна енергія невзаємодіючих релятивістських частинок; поправка F' відповідає високотемпературному наближенню для взаємодії (для однорідного розподілу частинок); F'' характеризує роботу по екрануванню заряду і складається з ряду кільцевих діаграм; B_n – віріальні коефіцієнти.

Тут ми зосередимося лише на обчисленні поправок F' , F'' , нехтуючи віріальними коефіцієнтами. Так як термодинамічна рівновага у системі зарядів забезпечується ефектом екранування [369], спочатку зупинимось на обчисленні F'' . Для потенціалу парної взаємодії в координатному представленні та представленні Фур'є,

$$W(r) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \nu(\mathbf{k}) Q^2(m\beta) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \frac{Q^2(m\beta)}{r}, \quad (4.94)$$

значення F'' можна знайти за допомогою заміни e^2 на $Q^2(m\beta)$ у відомих формулах для кулонівської плазми [382, 369, 393]. Одержуємо

$$F'' = -\frac{\varkappa^3 V}{12\pi\beta} \left[\left(1 - \frac{r_g}{r_0} \right) \frac{K_0(m\beta)}{K_2(m\beta)} \right]^{3/2}, \quad (4.95)$$

де $\alpha^2 = 4\pi e^2 \beta N/V$ – параметр Дебая; $r_0 = e^2/m$ – класичний радіус електрона, $r_g = Gm$ – його гравітаційний радіус.

Рівняння (4.95) відразу вказує на умову застосування рівноважного опису системи: $r_0 > r_g$, що виключає гравітаційно колапсуючі об'єкти. Дана умова виконується автоматично для електронного газу ($r_g/r_0 \sim 10^{-6}$).

Зауважимо, що навіть у нерелятивістському випадку обчислення статистичної суми гравітуючих об'єктів (за відсутності відштовхування, обумовленого електромагнітною взаємодією) втрачає фізичний сенс через нестійкість і можливість колапсу. На калькулятивному рівні це проявляється через розбіжність інтегралів, як показано в [380]. Тому, для систем, де домінує гравітаційна взаємодія, слід використовувати нерівноважну статистичну механіку [381]. За її допомогою можна, зокрема, описувати астрофізичні процеси [379].

Вираз F'' також одержується за допомогою екранованого потенціалу [393]:

$$G(r) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} G(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad G(\mathbf{k}) = \frac{4\pi Q^2(m\beta)}{\mathbf{k}^2 + 4\pi Q^2(m\beta)\beta N/V}, \quad (4.96)$$

який задовольняє рівняння Орнштейна–Церніке:

$$-\beta G(r_{12}) = -\beta W(r_{12}) + \beta^2 \frac{N}{V} \int W(r_{13}) G(r_{32}) d^3 r_3. \quad (4.97)$$

Тоді,

$$F'' = \frac{1}{2} \frac{N^2}{V} \int d^3 r \int_0^1 d\lambda W(r) G(r, \lambda), \quad (4.98)$$

де $G(r, \lambda)$ впливає з $G(r)$ заміною $Q^2(m\beta)$ на $\lambda Q^2(m\beta)$; λ – параметр включення взаємодії.

Якщо знехтувати гравітаційною взаємодією ($G = 0$), одержимо вираз для вільної енергії заряджених частинок у наближенні кільцевих діаграм:

$$F = F^{\text{id}} - \frac{\alpha^3 V}{12\pi\beta} \left(\frac{K_0(m\beta)}{K_2(m\beta)} \right)^{3/2}, \quad (4.99)$$

оскільки $F' = 0$ для електромагнітної взаємодії. Відсутність F' впливає з умови електронейтральності системи, яка вимагає введення зарядженого фону з протилежним знаком заряду при розгляді односортної системи [369]. Відзначимо, що F' природньо зникає при розгляді двокомпонентної системи зарядів протилежного знаку [393].

Відзначимо, наш підхід базується на стандартній діаграмній техніці для ефективного потенціалу і дає скінченне значення вільної енергії системи зарядів, що не вимагає додаткових “принципів” релятивістської статистичної механіки, на відміну від підходів в [390, 47].

Повертаючись до розгляду електронного газу з гравітаційною взаємодією, згідно означення F' (див. [393]), маємо писати

$$F' = \frac{1}{2} \frac{N^2}{V} \int \left(-\frac{Gm^2}{r} \frac{K_0(m\beta)}{K_2(m\beta)} \right) d^3r. \quad (4.100)$$

Інтегрування по всьому простору приводить до ненульового і, взагалі кажучи, розбіжного значення величини F' , що обумовлено відсутністю відштовхування. Однак, у слабконеідеальному електронному газі, коли кінетична енергія домінує над взаємодією (а також є електромагнітне відштовхування), значення F' має бути обмежено належним вибором меж інтегрування.

Припускаючи, що гравітаційні сили беруть участь лише у формуванні зарядового екранування, перепишемо останню формулу так:

$$F' = -\frac{1}{2} \frac{N^2}{V} \frac{K_0(m\beta)}{K_2(m\beta)} \int_0^d \frac{4\pi Gm^2}{r} r^2 dr = -\frac{1}{4} NT \frac{r_g}{r_0}, \quad (4.101)$$

де $d^{-2} = \mathfrak{a}^2 K_0(m\beta)/K_2(m\beta)$. Легко бачити, що за відсутності електромагнітної взаємодії, коли $r_0 \rightarrow 0$, $F' \rightarrow \infty$ згідно (4.100) та висновків в [380].

Після підстановки (4.101), (4.95) в (4.92), одержуємо вираз для вільної енергії гравітуючого електронного газу:

$$F = F^{\text{id}} - \frac{1}{4} NT \frac{r_g}{r_0} - \frac{\mathfrak{a}^3 V}{12\pi\beta} \left[\left(1 - \frac{r_g}{r_0} \right) \frac{K_0(m\beta)}{K_2(m\beta)} \right]^{3/2}. \quad (4.102)$$

Цей вираз втрачає сенс за відсутності електромагнітної взаємодії.

На основі формули (4.102) для вільної енергії знаходимо середнє значення енергії та тиск електронного газу:

$$E = E^{\text{id}} - \frac{\alpha^3 V}{8\pi\beta} \left[\left(1 - \frac{r_g}{r_0} \right) \frac{K_0(m\beta)}{K_2(m\beta)} \right]^{3/2} \left\{ 3 - \frac{2K_1^2(m\beta)}{K_2(m\beta)K_0(m\beta)} \right\}, \quad (4.103)$$

$$P = \frac{TN}{V} \left\{ 1 - \frac{e^2\beta}{6} \alpha \left[\left(1 - \frac{r_g}{r_0} \right) \frac{K_0(m\beta)}{K_2(m\beta)} \right]^{3/2} \right\}. \quad (4.104)$$

Якщо $r_g = 0$, то одержані формули у *нерелятивістській* *л'раниці* відтворюють відомі результати для кулонівської плазми [369].

Зауважимо, що в екстремальному випадку $r_g = r_0$ ($e^2 = Gm^2$) у наведених формулах зникає внесок взаємодії, і відтворюються формули ідеального класичного газу. Однак, наявність електростатичного та гравітаційного полів має впливати на пробну частинку в такій системі. Вивченню такого впливу присвячена наступна задача, що спирається на точний розв'язок загальної теорії відносності.

4.3. Роль статистики в ансамблі екстремальних чорних дір

Через властивість екстремальності, що полягає в еквівалентності електричного заряду і маси однієї чорної діри³, стало можливим знайти статичний розв'язок рівнянь Ейнштейна–Максвела для ансамблю багатьох тотожних чорних дір [222, 287, 154] та вивчити унікальні фізичні явища за різних умов. Квантово-механічний погляд на систему таких “частинок” привів до природного питання про тип статистики, що керує колективом екстремальних чорних дір (ЧД) [344]. Обговорюючи це, з'явилася низка моделей [344, 236, 93, 94], які використовували широкий клас деформованих (квантових) алгебр, які узагальнюють алгебру Гейзенберга. Не менш важливим питанням зали-

³Очікується, що екстремальна конфігурація для зарядженої чорної діри є кінцевою точкою випаровування Хокінга і відповідає стабільному квантовому основному стану [157, 132].

шилося розкриття прояву статистики у значущих ефектах. Відкидаючи можливі високоенергетичні процеси за участю чорних дір, їх ансамбль часто асоціюється з квантовим газом [236, 94, 320]. Таке тлумачення не завжди є фізично правильним. Це спонукало нас випробувати евристичний підхід для аналізу властивостей статичної системи чорних дір, не порушуючи фізичних основ її рівноважного існування.

Тут ми не маємо справи з жодним аспектом квантової гравітації і не звертаємося до термодинаміки (макроскопічної) чорної діри з великим числом ступенів вільності та наслідків випромінювання Хокінга.

Ми обмежуємось вивченням макроскопічних властивостей ансамблю, сформованого з класичних статичних конфігурацій ЧД, які є найбільш вірогідними у зазначеній статистиці. Це чимось схоже на систему спінів, які можуть змінювати свій напрям у вузлах ґратки, але не рухаються в просторі. Розглядаючи гравітаційні об'єкти, нас цікавить середнє значення часового масштабного фактору метрики простору–часу, пов'язане з гравітаційним потенціалом, на відміну від магнітного поля спінової системи. Очікується, що необхідна залежність усередненого потенціалу взаємодії від середнього числа чорних дір буде регулюватися закладеною статистикою.

З точки зору загальної відносності, наша мета – оцінити середню енергію–масу пробної частинки і середню затримку часу. Поки перша характеристика може залежати від гравітації, взаємодій і статистики, друга є властивістю простору–часу. Ми використовуємо (квантові) статистики чотирьох типів, у тому числі інфінітну, введену в [137, 244] і застосовану в [344]. Вважаємо за необхідне порівняти макроскопічні величини, знайдені в статистиці Бозе–Ейнштейна, Фермі–Дірака, класичній та інфінітній.

Розглянемо великий канонічний ансамбль екстремальних чорних дір, і знайдемо характеристики для чотирьох типів статистики.

4.3.1. Статистичні характеристики ансамблю чорних дір. Ми виходимо з розв'язку Маджумдара–Папапетру [222, 287] рівнянь Ейнштейна–Максвелла для N статичних та екстремальних чорних дір з рівними масами m і електричними зарядами $Q = m$ (в одиницях $G = c = \hbar = 1$) з центрами в точках $\{\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^3\}_{i=1}^N$:

$$ds^2 = -U_N^{-2}(\mathbf{r}) dt^2 + U_N^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r}^2, \quad U_N(\mathbf{r}) = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{m}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}_i|}; \quad (4.105)$$

$$d\mathbf{r}^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Вирази (4.105) визначають метрику простору–часу $g_{\mu\nu}(\mathbf{r})$ і електростатичний потенціал поля $A_t = U_N^{-1}(\mathbf{r})$ в $\mathcal{M}_4 \simeq \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{B_i\}_{i=1}^N)$, де $B_i = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{r} - \mathbf{a}_i| \leq r_+\}$ – куля радіуса $r_+ = m$, який відповідає горизонту подій екстремальної чорної діри. У випадку однієї чорної діри з центром в $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$, заміна $r \rightarrow r - m$ приводить до розв'язку Райзнера–Нордстрьома [154].

Ми здійснимо евристичне дослідження макроскопічних властивостей ансамблю чорних дір в різних статистиках, серед яких є інфінітна, застосовність якої аргументувалася в [344]. У випадку статичної і діагональної метрики (4.105), доцільно знайти середнє значення величини $\sqrt{-g_{tt}}$, яка задає гравітаційний і електростатичний потенціал A_t , створений системою екстремальних чорних дір. Окрім того, ця величини є мірою гравітаційної затримки часу, як пояснюється нижче.

У системі відліку спокою, нехай N випадково розподілених (у просторі) екстремальних чорних дір задають фонове поле (геометрію) у даній точці $\mathbf{r}$ розташування статичної пробної частинки. Згідно з (4.105), інфінітезимальний інтервал власного часу там дорівнює $d\tau(\mathbf{r}) = U_N^{-1}(\mathbf{r})dt$, де t – глобальний час (використання якого робить метричний тензор статичним [385]). Тоді, ефект локальної затримки часу оцінюється відношенням інтервалів власного і глобального часу $\Delta\tau/\Delta t$, яке визначається функцією $U_N^{-1}(\mathbf{r})$. Отже, власний час пливе повільніше зі збільшенням $U_N(\mathbf{r})$.

Рівняння $U_N^{-1}(\mathbf{r}) = \text{const}$ генерує еквіпотенціальні орбіти (поверхні), які утворюють, загалом, багатозв'язний многовид однакового плину часу.

Надалі, звернемось до релятивістської механіки частинки з масою m_0 , означену на безмежно великій віддалі від джерел гравітаційного поля. При вільному русі, енергія частинки E в статичному полі зберігається [385] і визначається як

$$E = -m_0 g_{tt} \frac{dt}{ds} = m_0 \frac{\sqrt{-g_{tt}}}{\sqrt{1-v^2}}; \quad (4.106)$$

$$v = \frac{\sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}}{d\tau} = \frac{\sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}}{\sqrt{-g_{tt}} dt}, \quad (4.107)$$

де g_{ij} – просторові компоненти метрики $g_{\mu\nu}$.

Після підстановки $g_{tt} = U_N^{-2}(\mathbf{r})$ в E , накладемо кінематичну в'язь $v = 0$, щоб виключити релятивістську затримку часу. Це приводить до енергії–маси статичної пробної частинки в просторі–часі, сформованому чорними дірами:

$$E_N(\mathbf{r}) = m_0 U_N^{-1}(\mathbf{r}), \quad E_0 = m_0. \quad (4.108)$$

Зауважимо, що, порівнюючи $E_N(\mathbf{r})$ з електростатичним потенціалом $A_t = U_N^{-1}(\mathbf{r})$, $E_N(\mathbf{r})$ можна інтерпретувати як енергію притягання зарядженої пробної частинки до системи з N тотожних, але протилежного знаку зарядів (які перебувають в рівновазі завдяки гравітації).

Нехай (локальна) статистична вага певної конфігурації чорних дір описується мірою Гібса $\exp(-\beta E_N(\mathbf{r}))$, яка контролюється ефективною температурою $T = \beta^{-1}$. Замість температури будемо використовувати безрозмірний параметр $x = \beta m_0$, який, фактично, є порядку m_0/m і припускається малим.

Оскільки загальні властивості переважно закодовано у масі, ми очікуємо на зміни енергії–маси завдяки колективній взаємодії і статистичним ефектам. Отже, ми шукаємо ефективну масу $m_*(\mathbf{r})$ пробної частинки у великому канонічному ансамблі екстремальних чорних дір і оцінюємо вплив взаємодії в термінах макроскопічних (термодинамічних) параметрів, властивість притягання якої повинна приводити до $m_*/m_0 \leq 1$ при $m_0 \rightarrow 0$.

Відзначимо праці [94, 320], де зміна маси чорної діри спричинена модифікацією рівнянь Ейнштейна через деформування статистики. Оцінку впливу однієї чорної діри на іншу в бінарній системі, зроблено в [319]. Відмітимо також [52, 46], де показано рівновагу між пробною частинкою і джерелом (статичного) гравітаційного та електричного поля, якщо вони є екстремальними, тобто мають рівні маси та заряди.

Для знаходження характеристик, введемо твірний функціонал, подібний на велику статистичну суму в термінах (z, T, V) :

$$\mathcal{Z}_{\{d\}}(\mathbf{r}) = \sum_{N=0}^{\infty} d_N z^N Q_N(\mathbf{r}), \quad (4.109)$$

$$Q_N(\mathbf{r}) = \int \left(\prod_{i=1}^N d\mathbf{a}_i \right) \rho_N(\{\mathbf{a}_i\}) \exp(-\beta E_N(\mathbf{r})). \quad (4.110)$$

Тут, z – активність; Q_N – конфігураційний інтеграл; $\rho_N(\{\mathbf{a}_i\})$ задає розподіл чорних дір у просторі; d_N – комбінаторний фактор або виродження ($d_{N=0} = 1$), який визначається статистикою. Зокрема, $d_N = 1$ для звичайної Бозе системи (позначена як “BE”); $d_N = 1/N!$ відповідає класичній (Cl) системі тотожних частинок (подібних до атомів і молекул). У загальному випадку невизначеної (довільної) статистики, присвоюємо індекс “ $\{d\}$ ” для $\mathcal{Z}_{\{d\}}$ та інших функцій. В [241, 56] також продемонстровано, як використовувати різні конструкції статистичної суми у випадку декілької чорних дір.

Функціонал (4.109) дозволяє знайти значення середніх величин згідно із стандартними термодинамічними співвідношеннями, однак не є статистичною сумою у прямому її розумінні.

У статичній моделі робота сил відсутня, і термодинаміка є радше обмеженою. Тому, зосередимося на знаходженні лише ефективної маси

$$m_*(\mathbf{r}) = -(\partial_\beta \ln \mathcal{Z}_{\{d\}}(\mathbf{r}))_{z,V}. \quad (4.111)$$

Існує можливість визначення середнього значення від $m_*(\mathbf{r})$ у просторі. Однак, така процедура тут не використовується через низку наступних припущень.

Зосередимося на однорідному розподілі ЧД $\rho_N(\{\mathbf{a}_i\}) = [(1 - \mu^3)V]^{-N}$, де $V = 4\pi R^3/3$ – повний об’єм, і $\mu = m/R < 1$ – міра гравітаційної взаємодії, яка служить параметром моделі. Умова однорідності приводить до трансляційної інваріантності макроскопічних функцій всередині сфери з радіусом R , яка містить чорні діри. У припущенні $\sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i \simeq \mathbf{0}$, покладемо $\mathcal{Z}_{\{d\}} = \mathcal{Z}_{\{d\}}(\mathbf{0})$, нехтуючи поверхневими ефектами.

Вигляд розподілу $\rho_N(\{\mathbf{a}_i\})$ враховує недосяжність внутрішньої області кожної чорної діри для спостерігача, тобто $|\mathbf{r} - \mathbf{a}_i| > r_+ = m$ для всіх $\mathbf{a}_i$, і мале значення об’єму $\text{Vol}(B_i) = 4\pi m^3/3$ у порівнянні з V . Однак, це ще не виключає можливості перекриття горизонтів подій чорних дір.

Хоча статистична сума $\mathcal{Z}_{\{d\}}$ включає довільно велике число куль $\{B_i\}_{i=1}^{N \rightarrow \infty}$ скінченних розмірів, середнє число чорних дір в ансамблі є

$$\mathcal{N}_{\{d\}} = (z \partial_z \ln \mathcal{Z}_{\{d\}})_{T,V} \Big|_{x=0}, \quad (4.112)$$

і узгоджується з V при $\mu^{-3} > \mathcal{N}_{\{d\}}$. Тут ми покладаємо $x = 0$, оскільки взаємодія пробної частинки з чорними дірами не впливає на їх число.

Можна підсумувати, що властивості системи чорних дір визначаються активністю z і параметром μ , який фіксує розмір (об’єм) системи для заданої маси m чорної діри. Хоча останнє твердження означає наявність границі системи з однорідним розподілом чорних дір (частинок) скінченного розміру, число дір регулюється параметром z і типом обраної статистики. У той самий час, температура контролює вплив системи чорних дір на пробну частинку.

Інтерес до спостережуваних, які одержуються за допомогою тестової частинки в різних точках об’єму системи, фактично вимагає вивчення ансамблю статичних пробних частинок (формулювання якого спрощується в однорідному випадку) на тлі системи чорних дір. Розподіл Гібса показує неможливість отримати будь-яку інформацію про систему екстремальних чорних дір при $x \rightarrow \infty$ і дозволяє згладити флуктуюючі величини.

Обчислення статистичної суми. При усередненні за конфігураціями, скористаємося допоміжною формулою [389]:

$$e^{-1/\kappa} = 1 - \int_0^{\infty} J_1(p) e^{-p^2\kappa/4} dp, \quad \kappa > 0, \quad (4.113)$$

де $J_1(p)$ – функція Беселя першого роду.

Завдяки трансляційній інваріантності, інтеграл Q_N набуває вигляду:

$$Q_N = 1 - \int_0^{\infty} J_1(p) e^{-p^2/(4x)} (\xi(p))^N dp, \quad x = \beta m_0, \quad (4.114)$$

$$\xi(p) = \frac{1}{(1 - \mu^3)V} \int \exp\left(-\frac{p^2}{4x} \frac{m}{|\mathbf{a}|}\right) d\mathbf{a}. \quad (4.115)$$

Маємо

$$(1 - \mu^3) \xi(p) = \frac{3}{R^3} \int_m^R \exp\left(-\frac{p^2}{4x} \frac{m}{a}\right) a^2 da \quad (4.116)$$

$$= (2 - s\mu + s^2\mu^2) \frac{e^{-s\mu}}{2} - \frac{\mu^3}{2} [(2 - s + s^2)e^{-s} + s^3 E_1(s\mu) - s^3 E_1(s)], \quad (4.117)$$

де $s = p^2/(4x)$, і $E_n(s)$ – експоненційний інтеграл:

$$E_n(s) = \int_1^{\infty} e^{-st} t^{-n} dt. \quad (4.118)$$

Поведінка ξ здебільшого визначається виразом $\exp(-s\mu)$ і коригується за допомогою розкладу:

$$(1 - \mu^3)e^{s\mu}\xi = (1 - \mu^3) - (2\mu^4 - 3\mu^3 + \mu) \frac{s}{2} + O(s^2), \quad (4.119)$$

де коефіцієнти біля s^n для довільного $n \geq 0$ зникають при $\mu = 1$.

Враховуючи лише перший член у правій частині рівності, апроксимуємо ξ функцією, яка відтворює найважливіші властивості:

$$\tilde{\xi}(p) = \exp\left(-\frac{p^2}{4x}\mu\right), \quad \tilde{\xi}(0) = \xi(0), \quad \tilde{\xi}(p) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \xi(p). \quad (4.120)$$

Заміна ξ на $\tilde{\xi}$ в (4.114) приводить до виразу

$$\tilde{Q}_N = \exp \left(-\frac{x}{1 + \mu N} \right). \quad (4.121)$$

Зауважимо, що вираз для $\tilde{Q}_N$ можна формально одержати іншими способами. Дійсно, один з них полягає у наївній заміні $U_N(\mathbf{0})$ на $\tilde{U}_N = 1 + mN/R_h$, де $R_h = N/(\sum_{i=1}^N |\mathbf{a}_i|^{-1})$ – середня гармонійна відстань, яка не вимагає подальшого усереднення за $\{\mathbf{a}_i\}$.

Інший шлях пропонує використати мультипольний розклад функції $U_N(\mathbf{R})$, коли $R \gg |\mathbf{a}_i|$ для всіх $\mathbf{a}_i$, який слід обмежити першим членом, щоб одержати $\tilde{U}_N = 1 + mN/R$. Отже, ці приклади підтверджують вигляд $\tilde{Q}_N$ у провідному наближенні. Однак, поправки наступних порядків до $\tilde{Q}_N$ будуть різними.

Таким чином, велика статистична сума зводиться до виразу

$$\tilde{Z}_{\{d\}} = \sum_{N=0}^{\infty} d_N z^N \exp \left(-\frac{x}{1 + \mu N} \right). \quad (4.122)$$

Зокрема, маємо $\tilde{Z}_{\{d\}}(\mu = 0) = \psi_{\{d\}}(z)e^{-x}$, де

$$\psi_{\{d\}}(z) = \sum_{N=0}^{\infty} d_N z^N. \quad (4.123)$$

Це приводить до $m_* = m_0$, як і повинно бути, коли $R \rightarrow \infty$ ($\mu \rightarrow 0$).

Функція $\tilde{Z}_{\{d\}}$ викликає самостійний інтерес і може бути застосована, наприклад, для дослідження квантових багаточастинкових Бозе-систем з μ -деформованим спектром [171, 78], пропорційним до $[N]_{\mu} = N/(1 + \mu N)$, що ефективно враховує притягання. Вираз (4.122) також є зручним для конструювання моделей, які використовують різні статистики, шляхом вибору d_N .

Зауважимо, що можна ввести функцію розподілу ймовірності для одномірного хаотичного блукання вздовж осі $y \in (-\infty; +\infty)$ і в часі $t > 0$ зі швидкістю дрейфа v ,

$$\mathcal{P}(y, \tau; v) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp \left(-\frac{(y - v\tau)^2}{4\tau} \right), \quad (4.124)$$

щоб формально переписати (4.122) так

$$\tilde{\mathcal{Z}}_{\{d\}} = e^{-y^2/4} \sum_{N=0}^{\infty} d_N \sqrt{\tau_N} \frac{\mathcal{P}(y, \tau_N; v)}{\mathcal{P}(y, \tau_0; v)} \quad (4.125)$$

при $y = 2\sqrt{x}$ і $v = 2\sqrt{-\mu^{-1} \ln z}$; де наявність $v \neq 0$ відіграє ключову роль для збіжності. Отже, $\tilde{\mathcal{Z}}_{\{d\}}$ визначає середнє від $\sqrt{\tau_N}$ з дискретним еволюційним параметром $\tau_N = 1 + \mu N$ і $\tau_0 = 1$ в моделі хаотичних блукань. Хоча ця відповідність походить лише з вигляду (4.105), застосування моделі хаотичних блукань до системи чорних дір підтверджується їх випадковим розподілом: включення кожної нової чорної діри до ансамблю супроводжується кроком у “часі” хаотичних блукань.

Використовуючи (4.122), введемо середнє поле (див. [78] і Розділ 2.3):

$$\sigma_{\{d\}}(z, x, \mu) = \frac{1}{\tilde{\mathcal{Z}}_{\{d\}}} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{d_N z^N}{1 + \mu N} \exp\left(-\frac{x}{1 + \mu N}\right), \quad (4.126)$$

яке відразу визначає ефективну масу $m_* = m_0 \sigma_{\{d\}}$ згідно з (4.111). Воно не залежить від просторових координат, і його можна оцінити чисельно.

Аналогічно означимо середнє число чорних дір (див. (4.112)):

$$\mathcal{N}_{\{d\}}(z, \mu) = \frac{1}{\tilde{\mathcal{Z}}_{\{d\}}} \sum_{N=0}^{\infty} N d_N z^N \exp\left(-\frac{x}{1 + \mu N}\right) \Big|_{x=0}. \quad (4.127)$$

Поле $\sigma_{\{d\}}$ також характеризує середню затримку часу $\langle \Delta\tau / \Delta t \rangle$ в ансамблі чорних дір, який підкоряється статистиці, позначеній як “ $\{d\}$ ”. Вплив конкретної статистики на енергію–масу і затримку часу полягає в нерівноправному врахуванні різних конфігурацій чорних дір за допомогою вагових коефіцієнтів d_N . Зокрема, опускаючи на мить активність z , бачимо, що ВЕ-статистика ($d_N = 1$) гарантує рівні ваги для всіх конфігурацій, поки СІ-статистика (з $d_N = 1/N!$) пригнічує багаточастинкові конфігурації за тих самих макроскопічних параметрів.

Щоб аналітично оцінити $\sigma_{\{d\}}$, замінимо дріб $1/(1 + \mu N)$ в (4.122) виразом $\sigma + s_N$, де $0 \leq \sigma \leq 1$ – довільна, на мить, стала (середнє поле), і $s_N =$

$1/(1 + \mu N) - \sigma$ відіграє роль флуктуацій. Розклад $\tilde{\mathcal{Z}}_{\{d\}}$ за s_N приводить до виразу

$$\tilde{\mathcal{Z}}_{\{d\}} = \sum_{N=0}^{\infty} d_N z^N e^{-x\sigma} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} (s_N)^k \right], \quad (4.128)$$

На цьому етапі, $\tilde{\mathcal{Z}}_{\{d\}}$ не залежить від σ . Також припускається, що x – мале.

Зафіксуємо σ з умови $\sum_{N=0}^{\infty} d_N z^N s_N = 0$, що дає

$$\sigma = \Lambda_{\{d\}}(z, \mu), \quad \Lambda_{\{d\}}(z, \mu) = \frac{\Phi_{\{d\}}(z, 1, \mu^{-1})}{\mu \psi_{\{d\}}(z)}, \quad (4.129)$$

де

$$\Phi_{\{d\}}(z, s, a) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{d_N z^N}{(a + N)^s}. \quad (4.130)$$

Згідно з правилами наближення середнього поля (MFA), маємо

$$\mathcal{Z}_{\{d\}}^{\text{MFA}} = \psi_{\{d\}}(z) e^{-x\sigma}, \quad (4.131)$$

де σ розглядається як незалежна змінна при обчисленні термодинамічних співвідношень (похідних). В'язь $\sigma = \Lambda_{\{d\}}(z, \mu)$ слід підставляти лише у кінцеві вирази.

Підставляючи (4.131) замість $\mathcal{Z}_d$ в (4.111), знаходимо

$$\sigma_{\{d\}}^{\text{MFA}} = \Lambda_{\{d\}}(z, \mu). \quad (4.132)$$

Отже, бачимо,

$$\sigma_{\{d\}}^{\text{MFA}}(z, \mu) = \sigma_{\{d\}}(z, 0, \mu), \quad (4.133)$$

що випливає з (4.126).

Середнє число чорних дір легко знаходимо з (4.112):

$$\mathcal{N}_{\{d\}}^{\text{MFA}}(z) = z \partial_z \ln \psi_{\{d\}}(z). \quad (4.134)$$

Зауважимо, що (4.132) і (4.134) представляють характеристики ансамблю екстремальних чорних дір за нульової пробної маси $m_0 \rightarrow 0$ і дозволяють визначити відношення m_*/m_0 і середню затримку часу у заданій статистиці.

В принципі, функція $\sigma_{\{d\}}(\mathcal{N})$ радше наближено характеризує ефективну енергію–масу m_* пробної частинки через нехтування іншими видами взаємодії, окрім гравітаційної. Однак, $\sigma_{\{d\}}(\mathcal{N})$ при $m_0 \rightarrow 0$ описує, незалежно від наявності пробної частинки, два значних ефекта: 1) середню затримку часу як властивість самого простору–часу, і 2) вплив статистики, яка виділяє статистично значимі конфігурації чорних дір, які спільно формують властивості простору–часу.

4.3.2. Конкретизація статистики. Для кращого розуміння, згадаймо основні ідеї нашого підходу. Власне, ми маємо намір розрахувати низку середніх та універсальних характеристик, чисельні значення яких повинні визначатися параметрами чорних дір, їх розподілом у просторі та статистичними вагами, продиктованими статистикою для заданого числа чорних дір. Це означає, що температура та маса пробної частинки відіграють допоміжну роль, і на цьому етапі їх слід виключити з опису.

Хоча існує кілька способів обчислення середніх, ми дотримуємося статистичної фізики систем з довільним числом частинок. Записуючи функцію розподілу, яка формально залежить від T і m_0 , ми отримуємо необхідні середні величини, використовуючи стандартні термодинамічні співвідношення. Після обчислення похідних, слід застосувати обмеження $m_0 = x = 0$. Тоді, мітка “MFA” означає низку перетворень, що дозволяють одержати значення величин при $x = 0$ і, якщо потрібно, знайти поправки до них при $x \neq 0$.

Аналізуючи формули (4.132) і (4.134), можна бачити, що ці функції – зважені арифметичні середні. Це не має дивувати, оскільки енергія та число частинок є адитивними величинами.

Статистика Бозе–Ейнштейна. Щоб випробувати наш підхід і проаналізувати його наслідки, спершу розглянемо найпростіший випадок статистики Бозе, коли фактори виродження дорівнюють $d_N = 1$. Тоді, допоміжні

функції, означені для $0 \leq z < 1$, є

$$\psi_{\text{BE}}(z) = \frac{1}{1-z}, \quad \Lambda_{\text{BE}}(z, \mu) = \frac{1-z}{\mu} \Phi(z, 1, \mu^{-1}), \quad (4.135)$$

де $\Phi(z, s, a) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N (a+N)^{-s}$ – трансцендент Лерха.

У цих термінах одержуємо

$$\sigma_{\text{BE}}^{\text{MFA}} = \Lambda_{\text{BE}}(z, \mu), \quad \mathcal{N}_{\text{BE}}^{\text{MFA}} = \frac{z}{1-z}. \quad (4.136)$$

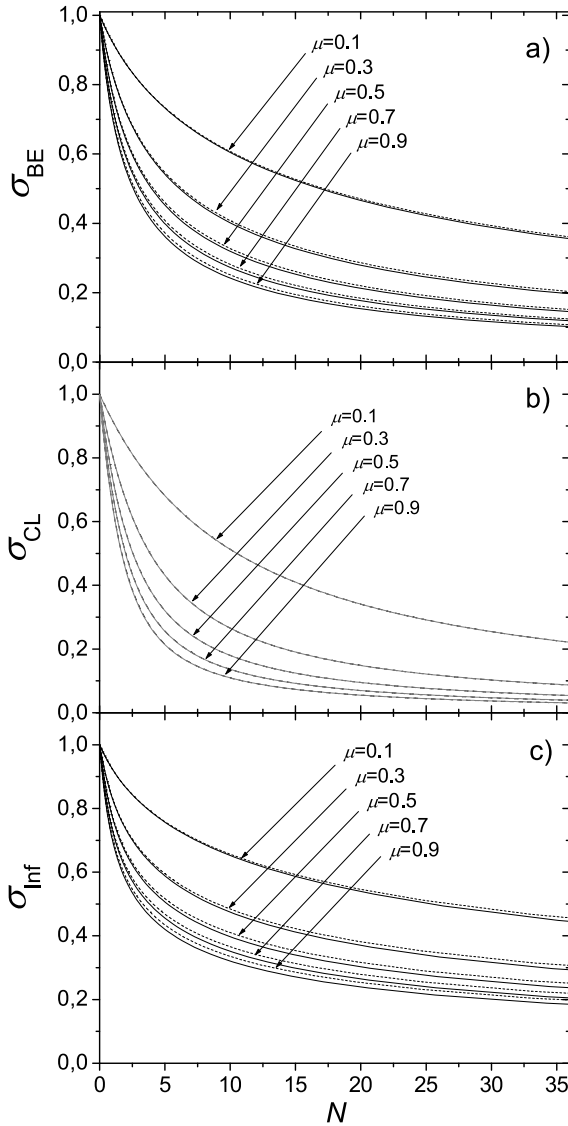


Рис. 4.1. Середнє поле $\sigma_{\{d\}}$ як функція середнього числа чорних дір $\mathcal{N}$ для різних μ у статистиці Бозе (а), класичній (б), інфінітній (с). Суцільні криві демонструють залежність $\sigma_{\{d\}}$ від $\mathcal{N}_{\{d\}}$, задану параметрично (4.126), (4.127) і знайдену чисельно при $x = 0.2$. Пунктирні криві, найближчі до відповідних суцільних, одержано в МФА з використанням (4.136), (4.138), (4.142) (разом з (4.139)), відповідно.

Поведінка (4.126) при $d_N = 1$ і (4.136) на Рис. 4.1(а) підтверджує застосовність нашого підходу і свідчить про зменшення ефективної маси через гравітацію та про посилення затримки часу зі збільшенням середнього числа чорних дір.

Щоб коректно тлумачити результати, необхідно врахувати умову $\mathcal{N} < \mu^{-3}$ розташування числа $\mathcal{N}$ чорних дір (без перекриття горизонтів) у повному об'ємі $V = 4\pi R^3/3 > 4\pi m^3 \mathcal{N}/3$.

Класична статистика. Цей випадок нерозрізнених частинок використовує $d_N = 1/N!$ і приводить до допоміжних функцій:

$$\psi_{\text{Cl}}(z) = e^z, \quad \Lambda_{\text{Cl}}(z, \mu) = \frac{\Gamma(\mu^{-1}) e^{-z}}{\mu \Gamma(\mu^{-1} + 1)} M(\mu^{-1}, \mu^{-1} + 1, z), \quad (4.137)$$

де $M(a, b, z)$ – функція Кумера; $\Gamma(z)$ – гама-функція.

Використовуючи їх при довільному $z \geq 0$, відразу маємо

$$\sigma_{\text{Cl}}^{\text{MFA}} = \Lambda_{\text{Cl}}(z, \mu), \quad \mathcal{N}_{\text{Cl}}^{\text{MFA}} = z. \quad (4.138)$$

На Рис. 4.1(b) спостерігається збіг чисельно порахованої залежності $\sigma_{\text{Cl}}(\mathcal{N}_{\text{Cl}})$ і аналітично виведеної функції $\sigma_{\text{Cl}}^{\text{MFA}}(\mathcal{N}_{\text{Cl}}^{\text{MFA}})$. Також, легко бачити подібність поведінки функцій у BE і Cl випадках.

Інфінітна статистика. Цей тип статистики відповідає спеціальному випадку $q = 0$ так званої куонної статистики, яка визначається комутаційними співвідношеннями $a_i a_j^\dagger - q a_j^\dagger a_i = \delta_{i,j}$ (інші спеціальні значення $q = -1$ і $+1$ відповідають випадкам Фермі- і Бозе-статистики). Тому, в інфінітній (або “Inf”) статистиці, маємо $a_i a_j^\dagger = \delta_{i,j}$. Більше інформації про Inf-статистику можна знайти в [344, 236, 137, 244, 282, 101].

Застосування цього типу статистики до екстремальних чорних дір обґрунтовано у праці [344]. Подальше дослідження інфінітної статистики в [236] приводить до формули для повного числа чорних дір, яка легко адаптується до нашої моделі:

$$\mathcal{N}_{\text{Inf}}^{\text{MFA}} = \frac{1}{z^{-1} - z} = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{1+z} + \frac{z}{1-z} \right), \quad 0 < z < 1. \quad (4.139)$$

Щоб обчислити середнє поле $\sigma_{\text{Inf}}^{\text{MFA}} = \Lambda_{\text{Inf}}(z, \mu)$, знайдемо вагові коефіцієнти d_N і допоміжні функції з використанням формул (4.139), (4.134), (4.129):

$$d_N = \frac{\Gamma([N/2] + 1/2)}{\Gamma(1/2) \Gamma([N/2] + 1)}; \quad (4.140)$$

$$\psi_{\text{Inf}}(z) = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}; \quad (4.141)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{\text{Inf}}(z, \mu) = & \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \left[{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\mu}; \frac{1}{2\mu} + 1; z^2\right) \right. \\ & \left. + \frac{z}{1+\mu} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2}; \frac{1}{2\mu} + \frac{3}{2}; z^2\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.142)$$

Тут, $[N/2]$ означає цілу частину числа $N/2$, і ${}_2F_1(a, b; c; z)$ – гіпергеометрична функція Гауса. Коефіцієнти d_N означено так, що $d_{2k+1} = d_{2k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Повчально порівняти поведінку середнього поля у трьох статистиках, в яких допускається існування необмеженого числа частинок. З Рис. 4.1(с) видно, що σ_{Inf} є більшою за величиною ніж σ_{BE} і σ_{Cl} для того самого значення $\mathcal{N}$, що пояснюється ефективним відштовхуванням, яке походить від внеску статистики Фермі–Дірака і описується доданком $z/(1+z)$ в (4.139). З іншого боку, те, що значення σ_{Cl} є найменшим серед всіх, є радше результатом врахування (нерозрізнених) реплік системи чорних дір, які незалежно діють на пробну частинку, що нефізично.

Отже, бачимо, що гравітація, яка зростає разом із збільшенням числа чорних дір, приводить до зменшення енергії–маси пробної частинки і до посилення затримки часу. Однак, (квантова) статистика суттєво впливає на цю тенденцію.

Порівняння поведінки середнього поля $\sigma_{\{d\}}$ в цих статистиках можна продовжити за допомогою Рис. 4.2. Однак, у випадку $x = 1$, тобто при $m_0 = m$ і $T \simeq m$, можна бачити відносно значення ефективної маси m_*/m окремої чорної діри як результат гравітаційного впливу (без електростатичного) решти чорних дір з ансамблю.

На закінчення, розглянемо випадок статистики Фермі–Дірака з обмеженим числом дозволених станів, яка вводиться нижче.

Статистика Фермі–Дірака. Нехай g – число дозволених станів (енергії) системи чорних дір в об’ємі V . Тоді, коефіцієнти $d_N = 0$ при $N > g$. Число способів розподілення $N \leq g$ нерозрізнених частинок поміж g рівнів

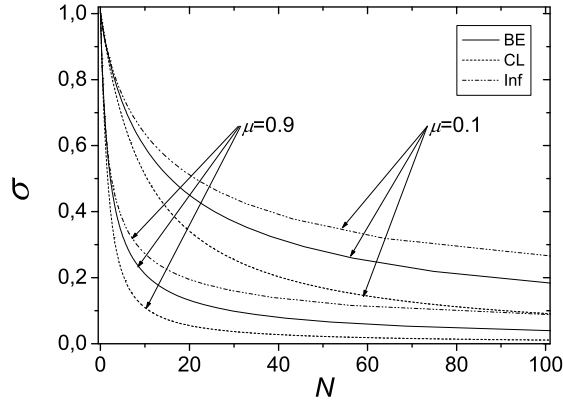


Рис. 4.2. Середнє поле σ як функція середнього числа чорних дір $\mathcal{N}$ при $x = 1$ і за різних μ . Криві демонструють залежність $\sigma_{\{d\}}$ від $\mathcal{N}_{\{d\}}$, задану параметрично (4.126), (4.127) і знайдену чисельно в BE-, CL- і Inf-статистиках.

енергії, максимально з одною частинкою на рівень, задається біноміальним коефіцієнтом,

$$d_N = \frac{g!}{N!(g-N)!}. \quad (4.143)$$

Це відразу приводить до допоміжних функцій, означених при $0 \leq z < 1$:

$$\psi_{\text{FD}}(z) \equiv \sum_{N=0}^g d_N z^N = (1+z)^g, \quad (4.144)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{\text{FD}}(z, \mu) &\equiv \frac{1}{\psi_{\text{FD}}(z)} \sum_{N=0}^g \frac{d_N z^N}{1 + \mu N} \\ &= \frac{{}_2F_1(-g, \mu^{-1}; 1 + \mu^{-1}; -z)}{(1+z)^g}. \end{aligned} \quad (4.145)$$

Останню функцію можна зв'язати з поліномами Якобі $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$.

Використовуючи їх, одержимо

$$\sigma_{\text{FD}}^{\text{MFA}} = \Lambda_{\text{FD}}(z, \mu), \quad \mathcal{N}_{\text{FD}}^{\text{MFA}} = g \frac{z}{1+z}. \quad (4.146)$$

Граничне значення $g = 1$ дає максимальну енергію $m_0/(1+\mu)$ пробної частинки в системі (див. (4.121)), яка асоціюється з рівнем Фермі. З іншого боку, уся (однорідна) система чорних дір може тлумачитися як єдина частин-

ка, яка характеризується параметром μ . Отже, ця ситуація показує, що інші взаємодії (як спин-спінова) не дають тут внеску в енергію.

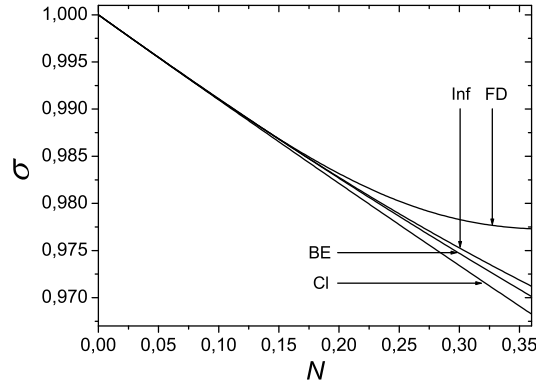


Рис. 4.3. Середнє поле σ як функція середнього числа чорних дір $\mathcal{N}$ при $\mu = 0.1$. Криві відображають залежність $\sigma_{\{d\}}$ від $\mathcal{N}_{\{d\}}$, задану (4.147)–(4.150).

Тепер порівняємо вплив чотирьох статистик (а саме, BE, FD при $g = 1$, Inf та Cl), використовуючи розклад функцій $\Lambda_{\{d\}}(z, \mu)$ і $\mathcal{N}_{\{d\}}^{\text{MFA}}(z)$ за активністю $z \ll 1$, і покладаючи $m_0 = 0$ ($x = 0$) у кінцевих виразах. Тобто, подамо теоретичні результати, які не залежать від наявності пробної частинки за малої густини чорних дір, вимагаючи одночасно $\mu \rightarrow 0$. Опускаючи аббревіатуру “MFA”, маємо

$$\mathcal{N}_{\{d\}}(z) = z [1 + \nu_{\{d\}}(z)], \quad (4.147)$$

$$\sigma_{\{d\}}(z, \mu) = 1 - \frac{\mu z}{1 + \mu} [1 + \lambda_{\{d\}}(z, \mu)], \quad (4.148)$$

де поправки $\nu_{\{d\}}(z)$ і $\lambda_{\{d\}}(z, \mu)$, які визначають відхилення, є

$$\nu_{\text{BE}} = z + z^2, \quad \nu_{\text{FD}} = -z + z^2, \quad \nu_{\text{Inf}} = z^2, \quad \nu_{\text{Cl}} \equiv 0, \quad (4.149)$$

$$\lambda_{\text{BE}} = \frac{z}{1 + 2\mu}, \quad \lambda_{\text{FD}} = -z, \quad \lambda_{\text{Inf}} = \lambda_{\text{Cl}} = -\frac{\mu z}{1 + 2\mu}. \quad (4.150)$$

Видно, що $\nu_{\text{Inf}} = (\nu_{\text{BE}} + \nu_{\text{FD}})/2$ і $\lambda_{\text{Inf}} = (\lambda_{\text{BE}} + \lambda_{\text{FD}})/2$, як припускалося.

Рис. 4.3, на основі наближених формул (4.147)–(4.150), демонструє послаблення гравітаційних ефектів (що еквівалентно посиленню електростатично-

го відштовхування) через принцип Паулі у системі ферміонних екстремальних чорних дір.

Слід підкреслити, що повна картина затримки часу у FD-статистиці, яка описується (4.146), показує значну відмінність від BE- і Inf-статистики. По-перше, середнє число чорних дір прямує до його ґраничного значення, рівне безмежності для BE- і Inf-статистики, але до $g/2$ – для FD-статистики. Відповідно, ґраничне значення затримки часу $\sigma_{\{d\}}^{\text{MFA}}$ спадає до нуля в BE- і Inf-статистиці, поки у FD-статистиці $\sigma_{\text{FD}}^{\text{MFA}}$ сягає деякого скінченного значення, залежного від μ .

З цієї причини, щоб оцінити ефект FD-статистики і порівняти її з BE- і Inf-статистикою (всі типи розглядаються у наближенні (4.147)–(4.150), що показано на Рис. 4.3), ми замінюємо обмежені функції (4.146) від z виразами (4.147), (4.148), які, в принципі, не є обмеженими. Практично, наближені результати відрізняються від точних за побудовою.

Ми вже проінтерпретували ситуацію для $g = 1$ вище. Випадок $g > 1$ вимагає врахування різних станів чорних дір, які можуть бути пов'язані як з їх положеннями в просторі, так і з внутрішніми ступенями вільності, що вимагають детального вивчення, але не в межах нашої моделі.

4.3.3. Підсумки. У прийнятих одиницях, умова екстремальності, яка ґрунтується на рівності сил Кулона та Ньютона, приводить до співвідношення між масою m і електричним зарядом Z (в одиницях заряду електрона):

$$\alpha^{-1/2} \frac{m}{M_{\text{Pl}}} = |Z|, \quad (4.151)$$

$$M_{\text{Pl}} \simeq 1.22 \cdot 10^{19} \text{ GeV} \cdot c^{-2}, \quad \alpha^{-1/2} \simeq 11.7,$$

де $M_{\text{Pl}} = \sqrt{\hbar c / G}$ – маса Планка; $\alpha = e^2 / (4\pi\epsilon_0 \hbar c)$ – стала тонкої структури.

Емпірично, невідомо такі *елементарні* частинки, здатні задовольнити цю умову. Це принципово відрізняє екстремальні чорні діри від елементарних частинок через велику масу $m \geq 1.04 \cdot 10^{18} \text{ GeV}/c^2$ (з нижньою ґраницею

для $|Z| = 1$), яка радше відповідає теоріям великого об'єднання. Однак, припускаючи наявність такої маси у квазікласичних екстремальних чорних дір в основному стані, не зрозуміло, чи випадок $m > M_{\text{Pl}}$, коли комптонівська довжина хвилі є меншою за гравітаційний радіус $r_+ = Gm/c^2$, має квантово-механічне тлумачення.

Ще одна принципова відмінність між відомими частинками та чорними дірами виявляється при зверненні до квантової статистики, якій вони підкоряються. Поки перші належать або до бозонів, або до ферміонів, екстремальні чорні діри дають логічну можливість бути ані ферміонами, ані бозонами [344]. Це впливає з припущення, що внутрішні ступені вільності чорних дір під горизонтом подій можуть еволюціонувати (що робить чорні діри розрізненими), хоча ззовні конфігурація чорних дір залишається статичною.

Доповнюючи ці особливості екстремальних чорних дір обґрунтованим припущенням, що вони представляють стабільні та кінцеві квантові стани випромінювання Хокінга [157, 132], ми отримуємо фізичну мотивацію для вивчення їх як особливих частинок з нетривіальною внутрішньою структурою, яка має проявлятися у статистичному описі ансамблю. Відмовляючись від завдання їх пошуку у Всесвіті, ми вивчаємо фізичні прояви статистики, які приписуємо чорним дірам вручну на основі логічних міркувань.

Ми дослідили статистичні властивості заряджених екстремальних чорних дір на основі статичного розв'язку рівнянь Маджумдара–Папапетру рівнянь Ейнштейна–Максвела [222, 287, 154]. Хоча це передбачає динамічну рівновагу (далекодійчих сил Кулона і Ньютона) в системі N чорних дір за умови екстремальності $m_i^2/M_{\text{Pl}}^2 = \alpha Z_i^2$ ($i = \overline{1, N}$), ми покладаємо характеристики чорних дір такими: $m_i = m$ і $Z_i = Z$, щоб сформувати ансамбль тотожних і заморожених “частинок” з радіусом r_+ . Як зазначається у посиланнях [52, 46], така ідентифікація робить баланс сил більш стабільним, особливо якщо в задачі передбачається наявність пробної (і “екстремальної”) частинки. Ми в основному зосереджуємося на ефекті затримки часу, яку відчуває пробна ча-

стинка. Для цього ми сформулювали статистичну суму на основі міри Гібса і знайшли статистичні характеристики звичайним чином. Ми формально ввели “температуру” статичної системи для проведення розрахунків, яка випадає з кінцевих виразів.

Оскільки динамічна рівновага вимагає лише відсутності перекриття горизонтів, використовуємо рівномірний розподіл чорних дір. Це дозволяє негайно отримати середнє значення затримки часу в об’ємі без додаткового усереднення за положенням пробної частинки у просторі. Здійснюючи розрахунки, нехтуємо екрануванням електричного заряду, що виправдано в розрідженій і однорідній системі, коли радіус Дебая втрачає сенс.

Ми знаходимо затримку в часі на основі ефективної енергії–маси пробної частинки, яка тут не є універсальною характеристикою, оскільки вона не враховує інші взаємодії, окрім гравітаційної. Хоча затримку часу правильно визначено в межі нульової пробної маси, ефективна енергія–маса важкої (і екстремальної) пробної частинки може чинити гравітаційний вплив на систему чорних дір.

Тип квантової статистики враховується шляхом встановлення статистичної ваги конфігурації з фіксованим числом чорних дір, що може посилити/послабити ефект гравітації і привести до різної затримки часу. Статистичні ваги визначають середнє число чорних дір та затримку часу, які отримуються в наближенні середнього поля і не залежать від характеристик пробної частинки, тоді як параметр $\mu = r_+/R$ (R – фіксований радіус системи) служить мірою впливу та розподілу чорних дір у просторі. Завдяки параметру μ , енергія пробної частинки в системі представляє енергетичну зону скінченої ширини і може бути описана деформованими μ числами, які використано в [171, 78, 124, 125].

Розглядаючи тут узагальнену квантову статистику, можна дійти такого висновку. Завдяки однаковій статистичній вазі всіх конфігурацій чорних дір в статистиці Бозе–Ейнштейна, ефект затримки часу (в основному) виявляється

більш значущим, ніж у статистиці Фермі–Дірака, продиктованій принципом Паулі, і в інфінітній статистиці, ефект якої є проміжним між цими двома.

Оскільки власний час спостерігача оцінюється добутком затримки часу σ і деякого інтервалу глобального часу, відмінність у кілька відсотків σ може значно посилитися і, таким чином, вплинути на швидкість еволюційних процесів. Хоча результати, отримані у рамках розглянутих статистик, виглядають подібними, див. Рис. 4.1, загальний ефект, завдяки згаданому фактору, може виявитися значним.

Висновки до розділу 4

У розділі 4 застосовано Пуанкаре-інваріантну процедуру редукції ступенів вільності гравітаційного поля для отримання прямої гравітаційної взаємодії в системі релятивістських частинок. На цій підставі обчислено термодинамічні функції і описано ефект екранування в слабконеідеальному релятивістському газі точкових зарядів із слабкою гравітаційною взаємодією.

Для рівних значень електромагнітної і гравітаційної констант взаємодії, у статистичному дослідженні використано відомий розв'язок рівнянь Ейнштейна-Максвела, що описує ансамбль статичних екстремальних чорних дір. Оцінюючи величину середньої затримки часу у просторі, виявлено вплив обраних квантових статистик, яким можуть підкорятись чорні діри.

Основними висновками, що виносяться на захист є такі:

- У калібрувальній-інваріантній схемі обчислень знайдено термодинамічні функції, що характеризують ефект екранування в слабконеідеальній системі релятивістських зарядів з прямою гравітаційною взаємодією.

- Для ансамблю екстремальних чорних дір, описуваному статичним розв'язком Маджумдара-Папапетру рівнянь Ейнштейна-Максвела, отримано середнє значення гравітаційної затримки часу у статистиці Бозе-Ейнштейна, інфінітній, Фермі-Дірака і класичній. Зокрема виявлено, що затримка часу в інфінітній статистиці є меншою ніж в статистиці Бозе-Ейнштейна.

Результати розділу опубліковано в 3 працях [127, 261, 262].

РОЗДІЛ 5

МОДЕЛІ БОЗЕ-КОНДЕНСАТНОЇ ТЕМНОЇ МАТЕРІЇ

Поняття темної матерії (ТМ) є досить старим [43, 368] і широко прийнятим у наш час. Її існування підтверджується як спостереженнями гравітаційного лінзування, так і даними про ротаційні криві галактик. Однак, незважаючи на величезну кількість теоретичних та експериментальних досліджень, остаточна природа ТМ залишається досі невідомою.

В останні десятиліття серед розмаїття підходів до ТМ [19, 40, 54, 64, 65, 116, 153, 155, 178, 179, 296, 317], приділяється увага класу моделей бозе-конденсатної темної матерії (конденсат Бозе–Ейнштейна, БЕК), до якого належить “розпорошена ТМ” (FDM), модель “квантової хвильової функції ТМ” (ψ DM), ТМ скалярного поля, надлегка ТМ, див. [330, 202, 165], а також огляди [345, 205, 167, 350, 108, 107] з численними посиланнями. Окрім того, з цим класом тісно пов’язані моделі надплинної ТМ [42, 290].

Основною специфікою моделей БЕК ТМ є наявність далекодіючих кореляцій. Існують варіації моделей, залежно від (і) сорту та значень маси складових ТМ, що варіюються від 10^{-32} еВ до 10^{-21} еВ і навіть вище, а також залежно від того, (ii) чи нехтують самодією [330, 165], або частинки ТМ відчувають якусь самодію, малу чи ні, парну [133, 50] чи більш складну. Випадок без самодії є найбільш обмеженим і вимагає, щоб маса частинки “розпорошеної ТМ” (FDM) становила 10^{-22} еВ для стабільності серцевини з ТМ. Тому, існує більше можливостей при врахуванні певних самодій. Серед досліджених самодій, відзначимо, окрім найпопулярнішої парної, також логотропну [72], cos- та cosh-типу [73, 305, 13, 229]. Дослідження ролі різноманітних самодій надлегких частинок ТМ надзвичайно важливі.

Клас FDM моделей перевершує моделі холодної темної матерії (CDM) [49]

тим, що їм вдається вирішити проблеми CDM, які виникають на малому (тобто галактичному або субгалактичному) масштабі. Зокрема, показано, що БЕК сценарій ТМ, який використовує рівняння Гросса–Пітаєвського (ГП) з квартичним членом у потенціалі скалярної самодії, спільно з рівнянням Пуассона, дозволяє подолати [149, 90] відому проблему каспу/серцевини моделей CDM. Окрім того, власні інструменти моделей БЕК ТМ є досить ефективними, щоб належним чином розглядати гравітаційний колапс [185] гало ТМ [13, 151]. Також, добре описано спостережувані розподіли ТМ в галактиках [308] та криві обертання галактик [50, 151, 34, 196, 92, 367, 197, 80, 66]. Прогнози БЕК ТМ перевіряються за допомогою спостережень галактик різної морфології. Їх вивчення починається з надкомпактних карликових (UCD) галактик [204], для яких запропоновано новий сценарій походження; або з вибірки з восьми найяскравіших карликових сфероїдальних супутників Чумацького Шляху, які, як вважалося, обмежують розмір гало в моделі БЕК ТМ в рамках наближення Томаса–Фермі [92]. Модель БЕК ТМ застосована також до найбільших галактик як Чумацький Шлях, що разом з 12 сусідніми карликовими галактиками із SPARC використовуються для перевірки астрофізичного ефекту обертання гало [367]. Варто згадати, що база даних SPARC дискових галактик типу Хаббла від H0 до Irr (де більшість належить до галактик малої поверхні) часто використовується для порівняння прогнозів БЕК ТМ зі спостережуваною галактичною кінематикою. Вибірка з 12 карликових галактик із SPARC [197] та 139 галактик різних типів, вибрані з бази даних відповідно до якості [80], добре описуються моделлю БЕК ТМ з повільним обертанням. Окрім того, БЕК ТМ із надмасивною чорною дірою в центрі гало порівнювали з профілем густини Наварро–Френка–Вайта (NFW), встановивши 20 галактик SPARC з бажаною точністю даних [66]. Обидві моделі добре описують спостереження, але незрозуміло, якій з них надати перевагу.

Окрім того, вважається, що FDM успішно вирішує співвідношення мас серцевина/гало [13, 316, 34]. Загалом, підхід БЕК до моделювання ТМ, який

базується на (модифікованих версіях) системи рівнянь Гросса–Пітаєвського–Пуасона, допомагає описати відомі та виявляє можливі особливості чи явища, характерні для галактичної серцевини та гало ТМ.

Зазначимо запропоновані в літературі типи бозе-кандидатів на БЕК ТМ: окрім звичайних (але невизначених) бозонів, популярними є аксіони (з масою від 10^{-20} еВ до 1 еВ) [328, 285, 88, 143, 314], бозони Штюкельберга [134], і навіть масивні гравітони [86, 196] (про границі маси якого, див. [294]). Окрім того, в деяких роботах досліджуються специфічні версії деформованих бозонів (що підкоряються статистиці, відмінної від Бозе) у ролі частинок ТМ [101, 128], визнані завдяки факту існування конденсату, аналогічному БЕК. Звернемо увагу, що опис галактичних кривих обертання, отриманий в рамках так званого μ -деформованого підходу, виявляється вдалим [128], навіть без урахування видимої (баріонної) складової галактик.

Зокрема, в нашій роботі [126], математичний апарат якої тут опускається, описано макроскопічні і термодинамічні властивості галактичного гало ТМ, що складається з конденсату вільних бозонів з μ -деформованими функціями середніх. Залежність від параметра деформації μ привноситься за допомогою зміни вагових коефіцієнтів у виразі для статистичної суми, середнього числа частинок та інших термодинамічних величин. Без явного врахування гравітаційної взаємодії, деформація забезпечує додаткове далекосяжне притягання між бозонами, яке регулюється значенням μ і ефект якого є співмірним з дією тяжіння. Як результат, критична температура конденсації $T_c^{(\mu)}$ виявляється вищою за T_c звичайного БЕК, що розширює межі існування конденсатної ТМ, зокрема, у міжзоряному просторі. Окрім того, повна маса μ -деформованого конденсату $M^{(\mu)}$ краще узгоджується із спостережуваними значеннями ніж маса M_{BEC} в моделі із гравітаційною та парною взаємодіями [149].

Таким чином, більш вдалий опис властивостей ТМ за допомогою деформованих частинок у порівнянні із звичайними бозонами може свідчити про специфічну природу (і структуру) частинок ТМ. Ми використовуємо це при-

пущення в задачі наступного підрозділу.

5.1. Термодинаміка темної матерії з парною взаємодією

Розглянемо модель БЕК ТМ з парною взаємодією, сформульовану на основі нерелятивістського рівняння Гросса–Пітаєвського і, яка, як видно з робіт [50, 149, 367, 197], добре описує спостережувані криві обертання карликових галактик.

Перевага цієї моделі пов'язана з чіткою роллю провідних ефектів, які враховуються на тлі математичних спрощень, які також залучають наближення Томаса–Фермі. Так, поведінка системи визначається ньютонівським гравітаційним притяганням та відштовхувальним розсіюванням. Вивчаючи стаціонарні розв'язки гідродинамічного типу завдяки представленню Маделунга для хвильової функції конденсату, застосовуються результати Чандрасекара [70]. Перш за все, проведений аналіз вказує на політропний індекс, рівний $n = 1$ для рівняння стану, що визначає залежність тиску від густини. Також встановлено вплив теплових флуктуацій [150, 152].

Тут, ми хочемо отримати її послідовний опис, використовуючи різні теоретичні підходи. Вважаємо новим отримання середніх макроскопічних характеристик із статистичної суми, які повинні збігатися з результатами, що базуються на розв'язку рівняння Гросса–Пітаєвського. Однак, ми не накладаємо геометричних обмежень, використані в диференціальному численні.

Оскільки обертання всієї ТМ ще не отримало остаточного пояснення (і часто асоціюється з процесами на ранній стадії еволюції Всесвіту [367]), ми по-іншому відтворюємо викликані ним ефекти. Більш конкретно, ми пропонуємо пов'язати ці ефекти із (статистичними) властивостями частинок ТМ при скінченій температурі. Для цього припускаємо, що довжина кореляції набагато більша відстані між частинками, що забезпечується малою масою частинок. Таким чином, використовуючи модель бозе-конденсатної ТМ, мо-

жна визначити параметри частинок ТМ з макроскопічних характеристик, якщо розподіл частинок, який враховує повільне обертання, задовільно описує спостережувані. На практиці, ми деформуємо комутаційні співвідношення для хвильової функції конденсату, що еквівалентно заміні міри інтегрування в статистичній сумі. Використовуючи зв'язок між двома обчислювальними підходами (на основі статистичної суми та рівняння Гросса–Пітаєвського), маємо намір отримати модифіковане рівняння Гросса–Пітаєвського. Фактично, температура має замінити відцентрову енергію в одержаних виразах. Це не суперечить концепції конденсату, якщо температура залишається досить низькою. Однак очікується, що неоднорідність ентропії у просторі буде важливим наслідком такої деформації: вона повинна сягати мінімального значення в області з високою густиною частинок і максимуму у розрідженому середовищі. Хоча ентропія скрізь дорівнює нулеві в моделі з обертанням.

З іншого боку, маємо можливість вивчити наслідки деформації в координатному представленні, оскільки, зазвичай, деформації вводяться в імпульсному представленні [125, 78].

5.1.1. Статистична сума конденсату із взаємодією. Розглянемо статистичну суму $\mathcal{Z}$ бозонів з масою m , які описуються хвильовою функцією $\psi(\mathbf{r})$ і повільно обертаються з циклічною частотою ω у декартовій (xy) -площині при заданій температурі $T = \beta^{-1}$ і хімічному потенціалі μ :

$$\mathcal{Z} = C \int D\psi D\psi^* J[\psi, \psi^*] \exp(-\beta \Gamma_\omega[\psi, \psi^*]), \quad (5.1)$$

$$\Gamma_\omega[\psi, \psi^*] \equiv E[\psi, \psi^*] - \int \nu(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (5.2)$$

$$\nu(\mathbf{r}) \equiv \mu + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2), \quad (5.3)$$

де C – стала нормування, і частинкова густина $\rho(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2 \geq 0$ визначає повне число частинок:

$$\mathcal{N}[\rho] = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}). \quad (5.4)$$

Якобіан $J[\psi, \psi^*] = \text{Det} \|\{\psi(\mathbf{r}_1), \psi^*(\mathbf{r}_2)\}\|$ геометрично визначає міру інтегрування в загальному випадку і виражається в термінах дужок Пуасона¹ для функцій $\psi(\mathbf{r})$ та комплексно спряженої до неї $\psi^*(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned}\{\psi(\mathbf{r}_1), \psi(\mathbf{r}_2)\} &= \{\psi^*(\mathbf{r}_1), \psi^*(\mathbf{r}_2)\} = 0, \\ \{\psi(\mathbf{r}_1), \psi^*(\mathbf{r}_2)\} &= -i\delta^3(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).\end{aligned}\quad (5.5)$$

Обчислимо (5.1) для моделі бозонної хмари, яка геометрично описується кулею $B = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 | |\mathbf{r}| \leq R\}$, $\text{Vol}(B) = 4\pi R^3/3$, і задається функціоналом енергії в наближенні Томаса–Фермі (з нехтуванням кінетичною енергією):

$$E[\psi, \psi^*] = \frac{U}{2} \int_B d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) (1 + \kappa^2 \Delta^{-1}) \rho(\mathbf{r}). \quad (5.6)$$

Тут, $U = 4\pi\hbar^2 a/m$ і $\kappa^2 = 4\pi G m^2/U$ – модельні параметри, які залучають гравітаційну сталу G і довжину розсіяння a ; Δ^{-1} – оператор, обернений до лапласіану, такий, що $\Delta\Delta^{-1} = \Delta^{-1}\Delta = 1$.

Перший член в (5.6) описує парне відштовхування, а другий – гравітаційну взаємодію, для опису якої використовується нерелятивістський гравітаційний потенціал $V(\mathbf{r})$, який задовольняє рівняння Пуасона:

$$\Delta V(\mathbf{r}) = 4\pi G \rho(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in B. \quad (5.7)$$

Щоб означити континуальний інтеграл (за шляхами) $\mathcal{Z}$, використовуємо перетворення Маделунга:

$$\psi = \sqrt{\rho} e^{i\phi}, \quad \rho \in [0; +\infty), \quad \phi \in [0; 2\pi). \quad (5.8)$$

Оскільки міра $J D\psi D\psi^* \sim \prod_{\{\mathbf{r} \in B\}} d\rho(\mathbf{r}) d\phi(\mathbf{r})$, означимо нормування так

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_{\text{vac}}^{-1} \int D\rho \exp(-\beta \Gamma_\omega[\psi, \psi^*]), \quad (5.9)$$

¹У класичній картині ці співвідношення замінюють квантові, $[\hat{a}_{\mathbf{r}}, \hat{a}_{\mathbf{s}}^\dagger] = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{s})$, для операторів народження і знищення в координатному представленні.

$$\mathcal{Z}_{\text{vac}} = \int \mathcal{D}\rho \exp(-\beta E[\psi, \psi^*]). \quad (5.10)$$

Отже, статистична сума нормується за допомогою її вакуумного значення $\mathcal{Z}_{\text{vac}}$, щоб $\mathcal{Z}(\nu = 0) = 1$. Такий вибір гарантує усунення чисто флуктуюючих ступенів вільності, які не фіксуються хімічним потенціалом.

Для системи в кулі B , в якій природно ввести сферичні координати (r, Ω) (де $\Omega = (\theta, \varphi)$ описує точку на одиничній сфері), маємо

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega}, \quad (5.11)$$

$$\Delta_{\Omega} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (5.12)$$

$$\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{r r' \sin \theta} \delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi'). \quad (5.13)$$

Надалі, ми використовуємо дійсні ортонормовані функції $\{\Phi_{nlm}(r, \Omega) | n \in \mathbb{N}; l = 0, 1, \dots; -l \leq m \leq l\}$ [135, 136]:

$$\Phi_{nlm}(r, \Omega) = \sqrt{\frac{2}{R^3}} N_{ln} j_l \left(a_{ln} \frac{r}{R} \right) y_{lm}(\Omega), \quad (5.14)$$

$$N_{ln} = \frac{a_{ln}}{\sqrt{a_{ln}^2 + h_l(h_l - 1) - l(l+1)} j_l(a_{ln})}, \quad (5.15)$$

$$\int_B \Phi_{nlm}(r, \Omega) \Phi_{n'l'm'}(r, \Omega) d\mathbf{r} = \delta_{n,n'} \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}, \quad (5.16)$$

$$d\mathbf{r} = r^2 dr d\Omega = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi,$$

система яких є розв'язком задачі:

$$\Delta \Phi_{nlm} = - \left(\frac{a_{ln}}{R} \right)^2 \Phi_{nlm}, \quad (5.17)$$

$$(r \partial_r \Phi_{nlm}(r, \Omega) + h_l \Phi_{nlm}(r, \Omega))|_{r=R} = 0, \quad (5.18)$$

розв'язана в термінах сферичних функцій Беселя [1],

$$j_l(z) = z^l \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^l \frac{\sin z}{z}, \quad y_l(z) = -z^l \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^l \frac{\cos z}{z}, \quad (5.19)$$

і дійсних ортонормованих сферичних гармонік,

$$y_{lm}(\Omega) = \begin{cases} \sqrt{2} K_l^m P_l^m(\cos \theta) \cos(m\varphi), & m > 0 \\ K_l^0 P_l(\cos \theta), & m = 0 \\ \sqrt{2} K_l^m P_l^{|m|}(\cos \theta) \sin(|m|\varphi), & m < 0 \end{cases}$$

$$K_l^m = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}. \quad (5.20)$$

Тут, $P_l^m(z)$ – поліноми Лежандра.

Система $\{a_{ln}\}$, яка залежить від h_l , визначає спектр системи, де кожне число $a_{ln} \in n$ -м додатним коренем рівняння (умови Робена):

$$a_{ln} j_l'(a_{ln}) + h_l j_l(a_{ln}) = 0, \quad 0 < a_{l1} < a_{l2} < \dots \quad (5.21)$$

Фактично, використовуючи це співвідношення при скінченному h_l , можна виразити похідну j_l' через j_l , коли накладаються змішані граничні умови.

Зауважимо, що умови (5.18), (5.21) виникають через фізичну потребу продовження притягального потенціалу (який включає обертовий) за межі B . При $r \geq R$, потенціал має (мультипольний) вигляд [70]:

$$V_{\text{out}}(\mathbf{r}) = c_{-1} + \sum_{l=0}^{\infty} c_l \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} P_l(\cos \theta), \quad (5.22)$$

$$\Delta V_{\text{out}}(\mathbf{r}) = 0, \quad r \geq R,$$

c_l – сталі. Комбінуючи дві граничні умови,

$$V_{\text{in}}(\mathbf{r})|_{r=R} = V_{\text{out}}(\mathbf{r})|_{r=R},$$

$$\partial_r V_{\text{in}}(\mathbf{r})|_{r=R} = \partial_r V_{\text{out}}(\mathbf{r})|_{r=R}, \quad (5.23)$$

ми спроможні визначити h_l (див. нижче).

Покладаючи $\omega = 0$, розмір $R_\kappa = \pi/\kappa$ бозонної хмари виникає у результаті конкуренції між відштовхуванням, пов'язаним з потенціалом U , та притяганням, викликаним тяжінням. Випадок $R < R_\kappa$ задовольняє умову $\rho(\mathbf{r}) \geq 0$

і описує деяку геометричну в'язь, накладену на R . Однак, модель з незалежним (довільним) R виглядає більш загальною.

Використовуючи повноту системи $\{\Phi_{nlm}(r, \Omega)\}$, пишемо

$$\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \sum_{n,l,m} \Phi_{nlm}(r, \Omega) \Phi_{nlm}(r', \Omega'), \quad (5.24)$$

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{n,l,m} \xi_{nlm} \Phi_{nlm}(r, \Omega), \quad (5.25)$$

де ξ_{nlm} – нові безрозмірні змінні.

Розв'язок загальної задачі у кулі B ,

$$\frac{\Delta + p^2}{\Delta + q^2} G_{p,q}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad G_{p,q}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')|_{|\mathbf{r}|=0} < \infty, \quad (5.26)$$

можна знайти у вигляді:

$$G_{p,q}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + (q^2 - p^2) g_p(\mathbf{r}|\mathbf{r}'), \quad (5.27)$$

$$(\Delta + p^2) g_p(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (5.28)$$

$$g_p(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \sum_{n,l,m} \frac{\Phi_{nlm}(r, \Omega) \Phi_{nlm}(r', \Omega')}{p^2 - (a_{ln}/R)^2}. \quad (5.29)$$

Виконуючи підсумовування за $\{a_{ln}\}$ згідно з [136], функція Гріна $g_p(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ оператора Гельмгольца подається так

$$g_p(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \sum_{l,m} g_{p(l)}(r|r') y_{lm}(\Omega) y_{lm}(\Omega'), \quad (5.30)$$

$$g_{p(l)}(r|r') = p j_l(p r_<) [y_l(p r_>) - j_l(p r_>) H_l(p R)], \quad (5.31)$$

$$H_l(z) = \frac{z y'_l(z) + h_l y_l(z)}{z j'_l(z) + h_l j_l(z)},$$

$$r_< = \min(r, r'), \quad r_> = \max(r, r').$$

Введені позначення зводять інтеграли до алгебраїчних виразів:

$$E[\psi, \psi^*] = \frac{U}{2} \int_B d\mathbf{r} \int_B d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}) G_{0,\kappa}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}')$$

$$= \frac{U}{2V} \sum_{n,l,m} \left[1 - \left(\frac{\kappa R}{a_{ln}} \right)^2 \right] (\xi_{nlm})^2, \quad (5.32)$$

$$\mathcal{N}[\rho] = \sqrt{6} h_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_{n00}}{a_{0n} \sqrt{a_{0n}^2 + h_0(h_0 - 1)}}. \quad (5.33)$$

Обчислення інтегралу Гауса вимагає, щоб всі доданки в E були додатними, тобто за умови $\kappa R < \min a_{ln}$. Оскільки $R = R_\kappa$ у базовій моделі без обертання [149], будемо строго вимагати $\pi < \min a_{ln}$. Ми використовуємо цей критерій для вибору h_l (і $\{a_{ln}\}$).

Також знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} \int_B r^2 (1 - P_2(\cos \theta)) \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} &= \sqrt{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + h_0 - 6h_0/a_{0n}^2}{a_{0n} \sqrt{a_{0n}^2 + h_0(h_0 - 1)}} \xi_{n00} \\ &\quad - \sqrt{\frac{6}{5}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + h_2}{a_{2n} \sqrt{a_{2n}^2 + h_2(h_2 - 1) - 6}} \xi_{n20}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

де враховано, що

$$\int_0^1 j_0(a_{0n}t) t^4 dt = \left[\frac{h_0 + 2}{a_{0n}^2} - \frac{6h_0}{a_{0n}^4} \right] j_0(a_{0n}), \quad (5.35)$$

$$\int_0^1 j_2(a_{2n}t) t^4 dt = \frac{h_2 + 2}{a_{2n}^2} j_2(a_{2n}). \quad (5.36)$$

Оцінюючи якобіан перетворення $\rho(\mathbf{r}) \mapsto \xi_{nlm}$ як

$$\sqrt{\det \left\| V \int_B \frac{\partial \rho(\mathbf{r})}{\partial \xi_{nlm}} \frac{\partial \rho(\mathbf{r})}{\partial \xi_{n'l'm'}} d\mathbf{r} \right\|} = 1, \quad (5.37)$$

маємо еквівалентність мір інтегрування в континуальному інтегралі:

$$\int D\rho = \prod_{n,l,m=-\infty}^{\infty} d\xi_{nlm}, \quad (5.38)$$

Інтегрування за $\{\xi_{nlm} | n = 1, 2, \dots; l = 0, 1, 2, \dots; -l \leq m \leq l\}$ дає

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 \mathcal{Z}_2, \quad \mathcal{Z}_l = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} F_{nl} \right), \quad l = 0, 2; \quad (5.39)$$

де $\mathcal{Z}_{\text{vac}} \sim D^{-1/2}(x, q)$, і

$$D(x, q) = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{l=0}^{\infty} \left[q \left(1 - \frac{x^2}{a_{ln}^2} \right) \right]^{2l+1} \quad (5.40)$$

– визначник Фредгольма $\text{Det} \|q(1 + \kappa^2 \Delta^{-1})\|$ для оператора, означеного в B ; $x = \kappa R$ і $q = \beta U/V$.

Статистичні суми $\mathcal{Z}_0$ і $\mathcal{Z}_2$ визначаються через

$$F_{n0} = \frac{V\beta/(3U)}{a_{0n}^2 - x^2} \frac{[3h_0\mu + m\omega^2 R^2 (2 + h_0 - 6h_0/a_{0n}^2)]^2}{a_{0n}^2 + h_0(h_0 - 1)}, \quad (5.41)$$

$$F_{n2} = \frac{V\beta/(15U)}{a_{2n}^2 - x^2} \frac{m^2\omega^4 R^4 (h_2 + 2)^2}{a_{2n}^2 + h_2(h_2 - 1) - 6}. \quad (5.42)$$

Відразу видно, що функції F_{nl} наслідують сингулярності, які виникають при зміні параметра $x = \kappa R$.

Надалі, означимо великий термодинамічний потенціал

$$\Omega_\omega(T, V, \mu) = -T \sum_{n=1}^{\infty} (F_{n0} + F_{n2}), \quad (5.43)$$

такий що

$$-\frac{\Omega_\omega}{V} = \frac{\mu^2}{2U} A_1(x, h_0) + \mu v A_2(x, h_0) + U \frac{v^2}{2} [A_3(x, h_0) + B(x, h_2)]; \quad (5.44)$$

$$v = \frac{\omega^2}{2\pi Gm}. \quad (5.45)$$

Здійснюючи формальне підсумовування за $\{a_{ln}\}$ за правилами:

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{ln}^2 - x^2} = \frac{x^2 - l(l+1 - h_l)}{h_l x^2} - \frac{x^2 + h_l(h_l - 1) - l(l+1)}{h_l x [x j'_l(x) + h_l j_l(x)]} j'_l(x), \quad (5.46)$$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{ln}^2 + h_l(h_l - 1) - l(l+1)} = \frac{1}{l + h_l}, \quad (5.47)$$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{0n}^2} = \frac{2 + h_0}{3h_0}, \quad 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{2n}^2} = \frac{4 + h_2}{7(2 + h_2)}, \quad (5.48)$$

функції $A_i(x, h_0)$ і $B(x, h_2)$ набувають вигляду

$$A_1(x, h_0) = \frac{3h_0 j_1(x)}{x [x j'_0(x) + h_0 j_0(x)]}, \quad (5.49)$$

$$A_2(x, h_0) = 1 + \frac{x^2(2 + h_0) - 6h_0}{2x[xj'_0(x) + h_0j_0(x)]} j_1(x), \quad (5.50)$$

$$A_3(x, h_0) = \frac{[x^2(2 + h_0) - 6h_0]^2}{12h_0x[xj'_0(x) + h_0j_0(x)]} j_1(x) + x^2 \frac{4h_0 + 5}{15h_0} - 1, \quad (5.51)$$

$$B(x, h_2) = \frac{2 + h_2}{60} x^2 \left[\frac{(2 + h_2) j_2(x)}{xj'_2(x) + h_2j_2(x)} - 1 \right] \quad (5.52)$$

З потенціалу $\Omega_\omega(T, V, \mu)$ знаходимо середнє число частинок $\mathcal{N} = V\bar{\rho}$, середню енергію $\mathcal{E}$ і тиск P :

$$\bar{\rho} = \frac{\mu}{U} A_1 + vA_2, \quad (5.53)$$

$$\frac{\mathcal{E}}{V} = \frac{\mu^2}{2U} A_1 - U \frac{v^2}{2} (A_3 + B), \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{\mu^2}{2U} A_1 + \mu v A_2 + U \frac{v^2}{2} (A_3 + B) \\ &= \frac{U}{2A_1} [\bar{\rho}^2 + v^2 (A_1 A_3 - A_2^2 + A_1 B)]. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Повна ентропія, $S \equiv -\partial_T \Omega_\omega = 0$, зникає тут. Видно, що еліпсоїдальний вигляд хмари приводить до додаткових внесків в $\mathcal{E}$ і P , пов'язаних з $B(x, h_2)$.

За відсутності обертання ($\omega = v = 0$), знак термодинамічних функцій визначається A_1 при $x = \pi$:

$$\begin{aligned} A_1(\pi, h_0) &= -\frac{3h_0}{\pi^2}, \quad A_2(\pi, h_0) = \frac{3h_0}{\pi^2} - \frac{h_0}{2}, \\ A_3(\pi, h_0) &= -\frac{3h_0}{\pi^2} + 1 + h_0 - \pi^2 \left(\frac{h_0}{12} + \frac{1}{15} \right), \\ B(\pi, h_2) &= \frac{2 + h_2}{60} \frac{15\pi^2 - \pi^4}{\pi^2 - 9 + 3h_2}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Щоб задовольнити $\mathcal{E} > 0$ і $P > 0$ (знак $\mathcal{N}$ залежить також від $\text{sign}(\mu)$), слід вимагати $h_0 < 0$. Дійсно, покладаючи $h_0 = -1$, знаходимо, що $a_{01} \approx 4.27479 > \pi$. У той самий час, $a_{01} = \pi/2$ для $h_0 = 1$ приводить до розбіжності інтегралу Гауса $\mathcal{Z}$ та від'ємних величин $\mathcal{E} < 0$, $P < 0$. Зауважимо, що фактор $A_1 = 3/\pi^2$ вже виникав в диференціальному підході [149]. Відразу анонсуємо, що $h_2 = 3$, яке дає $a_{21} \approx 4.4934$. Це відомо з [367, 70] і відтворюється нижче.

Виявляється, що хімічний потенціал $\mu > 0$, і центральна густина хмари без обертання дорівнює μ/U . Щоб знайти μ при $T = 0$ і $x = \pi$, обернемо формулу для $\mathcal{N}$. Маємо

$$\mu = G \frac{m^2 \mathcal{N}}{R_\kappa} + U v \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right), \quad R_\kappa = \frac{\pi}{\kappa}. \quad (5.57)$$

Ця величина дорівнює роботі сил притягання при перенесенні частинки з безмежно віддаленої області до границі хмари.

З іншого боку, з умови екстремуму функціонала $\Gamma_\omega[\psi, \psi^*]$ в термінах дужки Пуасона (5.5),

$$\{\psi(\mathbf{r}), \Gamma_\omega[\psi, \psi^*]\} = 0, \quad (5.58)$$

одержується стаціонарне рівняння Гросса–Пітаєвського для шуканої густини конденсату ρ_ω при $T = 0$:

$$U (1 + \kappa^2 \Delta^{-1}) \rho_\omega = \mu + \frac{m\omega^2 r^2}{3} (1 - P_2(\cos \theta)). \quad (5.59)$$

Його розв'язок задається інтегралом:

$$\begin{aligned} \rho_\omega(r, \theta) &= U^{-1} \int_B G_{\kappa,0}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \nu(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ &= v + (\rho_c - v) j_0(\kappa r) - \frac{v}{6} \frac{x^2 (2 + h_2)}{x j_2'(x) + h_2 j_2(x)} j_2(\kappa r) P_2(\cos \theta); \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\rho_c = v + \frac{h_0 [\mu/U - v + v x^2 (2 + h_0)/(6h_0)]}{x j_0'(x) + h_0 j_0(x)}, \quad (5.61)$$

де центральна густина, $\rho_c = \rho_\omega(0, \theta)$, залежить від x .

Якщо виключити тяжіння, $x = \kappa = 0$, і обертання, $v = \omega = 0$, одержимо однорідний розподіл $\rho_0(r) = (\mu/U) \Theta(R-r)$, обмежений границею і записаний за допомогою функції Хевісайда $\Theta(z)$.

Інтегрування $\rho_\omega(r, \theta)$ за об'ємом кулі B дає число частинок $\mathcal{N}[\rho_\omega]$, яке збігається з (5.53). Окрім того, відповідність між статистичною сумою і розв'язком рівняння Гросса–Пітаєвського виражається співвідношенням:

$$-2\Omega_\omega = \int_B \nu(\mathbf{r}) \rho_\omega(r, \theta) d\mathbf{r}. \quad (5.62)$$

Згідно з (5.27), знаходимо ефективний потенціал:

$$\begin{aligned}
 V_{\text{in}}(r, \theta) &= U^{-1} \int_B g_{\kappa}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \nu(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\
 &= -\frac{v}{\kappa^2} + \frac{\mu}{\kappa^2 U} \left[1 - \frac{h_0 j_0(\kappa r)}{x j'_0(x) + h_0 j_0(x)} \right] - \frac{v}{6\kappa^2} \frac{x^2(2+h_0) - 6h_0}{x j'_0(x) + h_0 j_0(x)} j_0(\kappa r) \\
 &\quad + v \frac{r^2}{6} [1 - P_2(\cos \theta)] + \frac{v}{6\kappa^2} \frac{x^2(2+h_2)}{x j'_2(x) + h_2 j_2(x)} j_2(\kappa r) P_2(\cos \theta), \quad (5.63)
 \end{aligned}$$

який задовольняє рівняння всередині кулі B :

$$\Delta V_{\text{in}} = \rho_{\omega}, \quad r \leq R. \quad (5.64)$$

Вкажемо співвідношення між V_{in} , ρ_{ω} і хімічним потенціалом $\nu(\mathbf{r})$:

$$\rho_{\omega}(r, \theta) = U^{-1} \nu(\mathbf{r}) - \kappa^2 V_{\text{in}}(r, \theta). \quad (5.65)$$

Щоб визначити параметри h_0 і h_2 , пов'яжемо потенціали V_{in} і V_{out} з (5.22) за допомогою ґраничних умов (5.23). Зрозуміло, що c_{-1} , c_0 і c_2 вважаються ненульовими, поки решта випадають з розгляду.

Оскільки співвідношення між потенціалами має місце для довільних дозволених x , зафіксуємо $x = \pi$ заради спрощення. Використовуючи центральну густину ρ_c як незалежну змінну замість хімічного потенціалу μ , приходимо до виразу

$$\begin{aligned}
 V_{\text{in}}(r, \theta) &= -\frac{\rho_c}{\kappa^2} \left[\frac{1}{h_0} + j_0(\kappa r) \right] + v \frac{r^2}{6} [1 - P_2(\cos \theta)] + \\
 &\quad + \frac{v}{\kappa^2} j_0(\kappa r) - \frac{v}{\kappa^2} \frac{2+h_0}{6h_0} \left(\pi^2 - \frac{6h_0}{2+h_0} \right) + \\
 &\quad + \frac{v}{\kappa^2} \frac{\pi^4}{6} \frac{2+h_2}{\pi^2 - 9 + 3h_2} j_2(\kappa r) P_2(\cos \theta). \quad (5.66)
 \end{aligned}$$

Давайте пов'яжемо члени з $P_2(\cos \theta)$. Одержуємо пару рівнянь:

$$\begin{aligned}
 c_2 &= -\frac{v}{\kappa^2} \frac{\pi^2}{6} \left\{ 1 - \frac{6+3h_2}{\pi^2 - 9 + 3h_2} \right\}, \\
 -3c_2 &= -\frac{v}{\kappa^2} \frac{\pi^2}{6} \left\{ 2 - \frac{(2+h_2)(\pi^2 - 9)}{\pi^2 - 9 + 3h_2} \right\}. \quad (5.67)
 \end{aligned}$$

Розв'язуючи, виводимо, що $h_2 = 3$, як і повинно бути [70].

Підстановка $h_2 = 3$ і $h_0 = 1$ в V_{in} відтворює (з точністю до множника $4\pi G$) ефективний потенціал з [367]. Це також приводить до $c_{-1} = 0$.

Однак, ми вже зауважили вище, що підстановка $h_0 = 1$ приводить до розбіжного інтегралу Гауса $\mathcal{Z}$ і від'ємних термодинамічних функцій $\mathcal{E}$ і P . Можливість заміни $h_0 = 1$ на $h_0 = -1$ можна обґрунтувати невизначеністю трьох коефіцієнтів c_{-1} , c_0 і h_0 за допомогою двох (граничних) умов, які накладаються на члени з r^{-1} і r^0 .

Здійснюючи фізичний аналіз розв'язку, покладемо $h_2 = 3$ і $h_0 = -1$. Це відразу обмежує значення параметра $x < a_{01} \approx 4.275$.

Усереднюючи розподіл $\rho_\omega(r, \theta)$ за кутовими змінними,

$$\tilde{\rho}_\omega(r) = \langle \rho_\omega(r, \theta) \rangle = \rho_c [\eta + (1 - \eta) j_0(\kappa r)], \quad (5.68)$$

знаходимо профіль маси $M(r)$ і дотичну швидкість $v_{\text{tan}}(r)$ пробної частинки:

$$M(r) = 4\pi m \int_0^r \tilde{\rho}_\omega(r_*) r_*^2 dr_* = \frac{4\pi m \rho_c r^3}{3} \left[1 + (1 - \eta) \frac{3}{\kappa r} j_1(\kappa r) \right], \quad (5.69)$$

$$v_{\text{tan}}(r) = \sqrt{G \frac{M(r)}{r}} = v_0 \sqrt{\frac{\eta}{3} (\kappa r)^2 + (1 - \eta) (\kappa r) j_1(\kappa r)}, \quad (5.70)$$

де $v_0 = \sqrt{U \rho_c / m}$ і $\eta = v / \rho_c$.

Щоб зафіксувати радіус R , накладемо умову $\tilde{\rho}_\omega(R) = 0$, яка відразу дає співвідношення між $0 \leq \eta < 1$ і $\pi \leq x < a_{01}$:

$$\eta = -\frac{j_0(x)}{1 - j_0(x)}. \quad (5.71)$$

Це дозволяє виділити дозволених значення v і R (для заданих κ і ρ_c) і вирішити задачу про застосовність наближення Томаса–Фермі.

Ротаційні криві $v_{\text{tan}}(r)$ при $0 \leq \eta < 1$ успішно застосовуються для пояснення спостережуваних даних карликових галактик [149, 367]. З іншого боку, частинковий розподіл при $\eta > \eta_{\text{max}}$ ($\eta_{\text{max}} \simeq 0.1785$ на інтервалі $x \in [\pi; 2\pi]$)

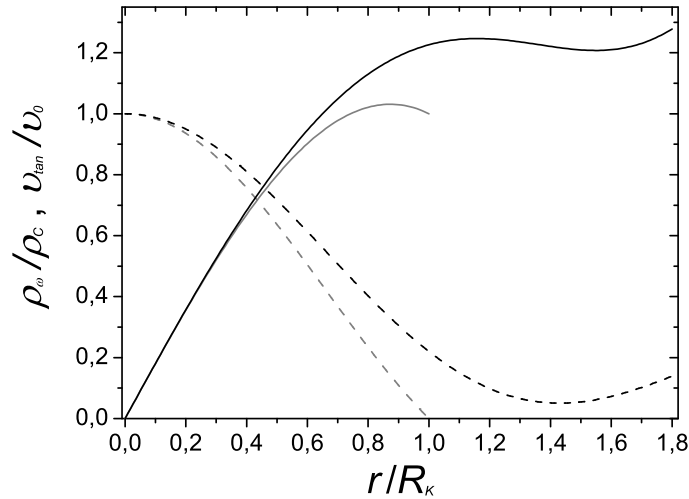


Рис. 5.1. Усереднений розподіл частинок (5.68) (пунктирні лінії) і дотична швидкість (5.70) (суцільні лінії) як безрозмірні функції радіальної відстані r/R_κ за різних η . Сірі лінії відповідають $\eta = 0$ (без обертання), чорні – для $\eta = 0.22$.

не має граничного радіуса R (див. Рис. 5.1). Загалом, його відсутність ускладнює інтерпретацію результатів в наближенні Томаса–Фермі. На практиці, використовується обмеження, зроблене в [197].

Оскільки бозонна хмара має еліпсоїдальну форму, яку можна виявити з рівняння $\rho_\omega(r, \theta) = \text{const}$, деякі макроскопічні характеристики можна відкоригувати для її наочного врахування [367, 70]. Ми опускаємо тут такий розгляд (який неодноразово наводився в літературі).

5.1.2. Модифіковане рівняння Гросса–Пітаєвського. Тепер введемо додаткову взаємодію в систему за допомогою формалізму статистичної суми. Обмежимося включенням потенціалу, який імітує обертання системи в цілому, вивчене раніше. Технічно, ми змінюємо комутаційні співвідношення для макроскопічної хвильової функції і отримуємо нетривіальну міру континуального інтегрування, яка приводить до внеску до енергії.

Отже, ми постулюємо деформовані дужки Пуасона:

$$\begin{aligned}\{\psi(\mathbf{r}_1), \psi(\mathbf{r}_2)\} &= \{\psi^*(\mathbf{r}_1), \psi^*(\mathbf{r}_2)\} = 0, \\ \{\psi(\mathbf{r}_1), \psi^*(\mathbf{r}_2)\} &= -iF(\mathbf{r}_1; \rho) \delta^3(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),\end{aligned}\quad (5.72)$$

де $F(\mathbf{r}_1; \rho)$ – функціонал від густини $\rho = |\psi|^2$ в точці $\mathbf{r}_1$ (або $\mathbf{r}_2$).

Використовуючи перетворення Маделунга (5.8), співвідношення (5.72) дає

$$\{\rho(\mathbf{r}_1), \phi(\mathbf{r}_2)\} = F(\mathbf{r}_2; \rho) \delta^3(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (5.73)$$

що виконується при $\phi(\mathbf{r}) = \tilde{\phi}(\mathbf{r}) F(\mathbf{r}; \rho)$ з канонічною змінною $\tilde{\phi}(\mathbf{r})$, яка задовольняє (5.73) з $F \equiv 1$.

Конструюючи статистичну суму, врахуємо (5.72) і означимо

$$\mathcal{Z}_* = C \int D\psi D\psi^* J[\psi, \psi^*] \exp(-\beta \Gamma_0[\psi, \psi^*]), \quad (5.74)$$

$$\Gamma_0[\psi, \psi^*] = E[\psi, \psi^*] - \mu \mathcal{N}[\rho], \quad (5.75)$$

$$J[\psi, \psi^*] = \prod_{\mathbf{r} \in B} F(\mathbf{r}; \rho), \quad (5.76)$$

де $\mathcal{N}$ і E задаються як (5.4) і (5.6).

Застосовуючи рівність $\det \hat{A} = \exp(\text{Tr} \ln \hat{A})$ до діагональної матриці $\hat{A} = \|\{\psi(\mathbf{r}_1), \psi^*(\mathbf{r}_2)\}\|$, одержимо внесок до енергії, залежний від температури:

$$E_*[\psi, \psi^*] = E[\psi, \psi^*] - \frac{T}{V} \int_B \ln F(\mathbf{r}; \rho) d\mathbf{r}. \quad (5.77)$$

Оскільки $E_*[\psi, \psi^*]$ залежить від ρ (але не ϕ), сформулюємо задачу як

$$\mathcal{Z}_* = \mathcal{Z}_{\text{vac}}^{-1} \int D\rho \exp(-\beta \Gamma_*[\psi, \psi^*]), \quad (5.78)$$

$$\Gamma_*[\psi, \psi^*] \equiv E_*[\psi, \psi^*] - \mu \mathcal{N}[\rho]. \quad (5.79)$$

З умови екстремуму $\Gamma_*[\psi, \psi^*]$, тобто $\delta \Gamma_*[\psi, \psi^*] / \delta \rho(\mathbf{r}) = 0$, приходимо до модифікованого (статичного) рівняння Гроса–Пітаєвського:

$$U(1 + \kappa^2 \Delta^{-1}) \rho(\mathbf{r}) = \mu + T s(\mathbf{r}), \quad (5.80)$$

$$s(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \int_B \frac{1}{F(\mathbf{r}_1; \rho)} \frac{\delta F(\mathbf{r}_1; \rho)}{\delta \rho(\mathbf{r})} d\mathbf{r}_1. \quad (5.81)$$

Оскільки розподіл повільно обертової конденсатної ТМ, як видно з [367, 197], дозволяє успішно описувати криві обертання гало карликових галактик, у нашому евристичному підході припустимо, що $s(\mathbf{r}) \sim (r/R)^2$. Нижче ми обговоримо умови, накладені на F та явний, хоча і гіпотетичний, вигляд $s(\mathbf{r})$.

Як аргументовано вище, розглянемо випадок

$$s(\mathbf{r}) = \tilde{\mu} \left\langle \frac{3}{2} \frac{\mathbf{r}^2}{R^2} \sin^2 \theta - 1 \right\rangle = \tilde{\mu} \left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right), \quad (5.82)$$

де $0 \leq \tilde{\mu}$ – модельний параметр, який характеризує інтенсивність взаємодії; $\langle(\dots)\rangle$ означає середнє за кутами.

Оцінемо температуру T в (5.80), яка замінює вираз $\sim m\omega^2 R^2$. Використовуючи типові характеристики БЕК ТМ з [197], знаходимо

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}T &= \frac{m\omega^2 R^2}{k_B} \\ &= T_0 \left(\frac{mc^2}{10^{-17} \text{ еВ}} \right) \left(\frac{\omega}{10^{-16} \text{ с}^{-1}} \right)^2 \left(\frac{R}{1 \text{ кпк}} \right)^2, \end{aligned} \quad (5.83)$$

$$T_0 \simeq 1.23 \cdot 10^{-23} \text{ К}, \quad k_B T_0 \simeq 1.06 \cdot 10^{-27} \text{ еВ}, \quad (5.84)$$

де величини записано у відповідних одиницях; $k_B \simeq 8.6173 \cdot 10^{-5} \text{ еВ} \cdot \text{К}^{-1}$ – стала Больцмана.

Отже, одержане значення температури є малим і на багато порядків є нижчим за критичну температуру конденсації вільних бозонів [152].

Найбільш вагомим аргументом для нас при виборі вигляду функції $s(\mathbf{r})$ є така властивість твірного функціоналу: $F \rightarrow 0$ при $\mathcal{N} \rightarrow \infty$, що приводить до комутування хвильових функцій $\psi(\mathbf{r})$ і $\psi^*(\mathbf{r})$. Це подібно до заміни квантових операторів народження і знищення комплексними числами.

Отже, найпростіший вигляд локального F є

$$F(\mathbf{r}; \rho) = \exp \left[-\lambda^3 \rho(\mathbf{r}) \left(1 - \frac{\mathbf{r}^2}{R^2} \right) \right], \quad r \leq R, \quad (5.85)$$

$$\int_B \ln F(\mathbf{r}; \rho) \frac{d\mathbf{r}}{V} = -\tilde{\mu} \left(\mathcal{N}[\rho] - \frac{\sigma^2[\rho]}{R^2} \right), \quad (5.86)$$

$$\sigma^2[\rho] = \int_B \mathbf{r}^2 \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\lambda^3}{V},$$

де λ – кореляційна довжина, яка припускається більшою за міжчастинкову відстань, $\lambda^3 \gg V/\mathcal{N}$, заради існування конденсатного стану. У випадку ідеального газу бозонів, можна було б використати теплову довжину хвилі $\lambda_T = \sqrt{2\pi\hbar^2/(mk_B T)}$. Надалі, ми припускаємо, що λ не залежить від термодинамічних змінних.

Таким чином, розв'язок (5.80) є

$$\rho_T(r) = \tilde{v} + (\tilde{\rho}_c - \tilde{v}) j_0(\kappa r), \quad \tilde{v} = \frac{6\tilde{\mu} T}{x^2 U}, \quad (5.87)$$

де центральна густина $\tilde{\rho}_c$ визначається з (5.61) заміною μ і v на $\mu - \tilde{\mu} T$ і $\tilde{v}$, відповідно.

Після введення $\eta = \tilde{v}/\tilde{\rho}_c$ і звернення до (5.71) одержуємо, що дозволений радіус $R = x/\kappa$ є неявною функцією температури T ; $R = \pi/\kappa$ при $T = 0$.

Як очікувалося, (5.87) формально збігається з (5.68) і приводить до ротаційної кривої (5.70). Однак, термодинаміка такої системи дещо інша.

Дійсно, використовуючи попередні результати, коли

$$\frac{\sigma^2[\rho]}{R^2} = \sqrt{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + h_0 - 6h_0/a_{0n}^2}{a_{0n} \sqrt{a_{0n}^2 + h_0(h_0 - 1)}} \xi_{n00}, \quad (5.88)$$

статистична сума, $\mathcal{Z}_* = \exp(-\beta\Omega_{\tilde{\mu}})$, визначається потенціалом $\Omega_{\tilde{\mu}}(T, V, \mu)$:

$$-\frac{\Omega_{\tilde{\mu}}}{V} = \frac{(\mu - \tilde{\mu} T)^2}{2U} A_1(x, h_0) + (\mu - \tilde{\mu} T) \tilde{v} A_2(x, h_0) + U \frac{\tilde{v}^2}{2} A_3(x, h_0), \quad (5.89)$$

Покладемо знов $h_0 = -1$, і переконуємося, що

$$-2\Omega_{\tilde{\mu}} = \int_B (\mu + T s(\mathbf{r})) \rho_T(r) d\mathbf{r}. \quad (5.90)$$

Середнє число частинок $\mathcal{N} = V\bar{\rho}_T$, середня енергія $\mathcal{E}$ і тиск P є

$$\bar{\rho}_T = \frac{\mu - \tilde{\mu}T}{U} A_1 + \tilde{v}A_2, \quad (5.91)$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\mu - \tilde{\mu}T)^2}{2U} A_1 + (\mu - \tilde{\mu}T)\tilde{v}A_2 + U\frac{\tilde{v}^2}{2}A_3 \\ &= \frac{U}{2A_1} [\bar{\rho}_T^2 + \tilde{v}^2(A_1A_3 - A_2^2)], \end{aligned} \quad (5.92)$$

$$\mathcal{E} = PV. \quad (5.93)$$

Цікаво, що (5.93) збігається з термодинамічним співвідношенням для конденсату без обертання при $T = 0$ (порівняйте (5.54) і (5.55) при $v = 0$) [149]. Фізично, ми розглядаємо вихідну систему, але з деформованими частинками. Таке пояснення підтверджується моделями ідеального газу бозонів з деформованими комутаційними співвідношеннями [293].

На відміну від моделі з обертанням, ентропія не зникає тут:

$$S = \int_B s(\mathbf{r})\rho_T(r) d\mathbf{r} = \frac{\lambda^3}{A_1} \left[-\bar{\rho}_T \left(A_1 - \frac{6}{x^2} A_2 \right) + \tilde{v} \frac{6}{x^2} (A_1A_3 - A_2^2) \right]. \quad (5.94)$$

Локально, вона визначається функцією $s(\mathbf{r})$, яка має мінімальне значення в точці $r = 0$ і сягає максимального значення на границі $r = R$.

Аналізуючи

$$\overline{\ln F} = \int_B \ln F(\mathbf{r}; \rho) \frac{d\mathbf{r}}{V} = -\lambda^3 \tilde{\rho}_c \left[\frac{2}{5} \eta + \frac{6}{x^2} (1 - \eta) j_2(x) \right], \quad (5.95)$$

де $\eta = \tilde{v}/\tilde{\rho}_c$. Видно, що $\overline{\ln F} < 0$ для $0 \leq \eta < 1$ і $x < a_{01}$.

Зауважимо, що ненульова температура в нашій моделі не приводить до появи теплової хмари (з частинок ТМ та/або збуджень), з опису якої, можна визначити критичні параметри переходу в конденсатний стан (див. [150]). Неконденсатні ступені вільності не включено у статистичну суму тут. Ми показуємо, як статистичні властивості конденсату деформованих бозонів змінюються залежно від температури (набагато нижчої за температуру конденсації): вона посилює додаткову (локальну) взаємодію між частинками, яка

успадкокується від деформації. Це приводить до неоднорідної ентропії, але до розподілу частинок, як і у випадку конденсату звичайних бозонів з повільним обертанням (лише із заміною $\tilde{v}$ на $v = \omega^2/2\pi Gm$).

5.1.3. Підсумки. Оптимістичні наслідки, а також відсутність термодинамічних функцій в роботах [50, 149, 197] спонукали нас дослідити модель БЕК ТМ з парним відштовхуванням та повільним обертанням в іншому підході, який ґрунтується на обчисленні статистичної суми.

Незважаючи на те, що статистична сума приводить до середніх та термодинамічних функцій, отримано функції Гріна, які є інструментом для пошуку локальних величин. Це дозволяє відтворити відомі результати [367] та зробити низку узагальнень. Перш за все, ми не зв'язуємо κ і R відношенням $\kappa R = \pi$ і використовуємо $x = \kappa R$ як вільний параметр, обмежений умовою $x < a_{01} \approx 4.275$, що є наслідком спроби сформулювати в замкненому вигляді (5.21) граничні умови, накладені в [367, 70]. Для довільних x , можна проконтролювати обчислення статистичної суми і термодинамічних функцій. Узгодження x з циклічною частотою ω визначає граничний радіус R для моделі з обертанням (див. (5.71)).

Теоретичне дослідження можливості опису обертання шляхом деформації комутаційних співвідношень для хвильової функції конденсату приводить до зміни міри інтегрування у виразі для статистичної суми. Формально, отримується ефективний функціонал енергії, який залежить від температури, а з його варіації за хвильовою функцією одержується модифіковане рівняння Гросса–Пітаєвського. Дійсно, такий підхід приводить до розподілу частинок як в моделі з обертанням. Фізично цікаво, що цей тип деформації задає ентропію, неоднорідну в просторі. Керуючись умовою комутативності (в термінах дужок Пуасона) для хвильової функції та комплексно спряженої до неї за високої густини частинок, забезпечується мінімум ентропії в центрі системи та максимум на границі. Окрім того, така деформація не порушує співвідно-

шення між повною енергією та тиском за відсутності обертання [149].

Для відтворення обертання функціонал деформації F задається неоднозначно. Хоча ми вимагали його локальності, для частинкових систем, значно менших за галактики, можна використати

$$F = \exp \left[-\tilde{\mu} \left(\mathcal{N}[\rho] - \frac{\sigma^2[\rho]}{R^2} \right) \right]. \quad (5.96)$$

Як результат, одержується $s(\mathbf{r})$ у тому самому вигляді (5.82).

Хоча параметр $\tilde{\mu}$ припускається малим, ми не використовували жодних наближень. Ще більше можливостей з'являється, якщо дозволити розклад за $\tilde{\mu}$. Для певних цілей зручно ввести, наприклад, альтернативний вираз,

$$F = \frac{1 + (1 - \alpha)\tilde{\mu}\sigma^2[\rho]/R^2}{1 + \tilde{\mu}\mathcal{N}[\rho] - \alpha\tilde{\mu}\sigma^2[\rho]/R^2}, \quad (5.97)$$

де $0 \leq \alpha \leq 1$. Коли $\sigma^2[\rho]/R^2 \rightarrow 0$, одержується система, подібна до [293], де розвинуто $\tilde{\mu}$ -формалізм.

Якщо врахувати внесок кінетичної енергії, у моделі з деформацією очікується поява додаткових членів взаємодії, що походять з неї. Таке узагальнення є предметом майбутніх досліджень.

Дані спостережень залишають можливість того, що ТМ має самодію. Однак, природа частинок ТМ далека від повного розуміння. Тому, увага приділяється таким кандидатам, як слабковзаємодіючі масивні частинки (WIMP) [19], аксіони [65, 317] та стерильні нейтрино [54]. Відзначимо також вічні чорні діри [40, 64], сильновзаємодіючі масивні частинки та надслабковзаємодіючі частинки, і навіть електромагнітно взаємодіючі масивні частинки [116], які, можливо, приховані в нейтральних атомоподібних станах.

Оскільки, серед зазначених кандидатів є ферміони, утворення з них бозоподібних композитів може зіграти роль в розумінні ТМ, а також для застосування нашої моделі. З описової точки зору, деформаційний підхід можна застосувати і для вивчення структурованих частинок [125].

5.2. Темна матерія з тричастинковою самодією та її стани

Нещодавно, значну увагу привернула відштовхувальна самодія шостого порядку у скалярному потенціалі в БЕК, яка якісно змінює ситуацію в БЕК ТМ [215]. Зокрема, це може привести до нетривіальної фазової структури ядра в центральній частині гало ТМ. Згадаймо роботу [73], яка продемонструвала існування двох фаз – “розрідженої” та “щільної” – у співвідношенні маса-радіус (хоча це зроблено в контексті аксіонних зірок з ремаркою, що аналогічні ознаки можуть мати місце в системі аксіонної ТМ).

Дослідимо термодинамічні наслідки включення (відштовхувального) члена тричастинкової самодії в потенціалі моделі БЕК ТМ. Це вимагає використання чисельних методів для знаходження профілів густини ТМ разом з їх властивостями стійкості. На їх основі одержуються основні термодинамічні функції БЕК ТМ. Детальний аналіз останніх, особливо їх взаємних залежностей, дає інформацію про виникаючі фази (стійкі, метастійкі та нестійкі області) та наявність фазового переходу першого роду.

Спершу, наведемо аргументи на користь обраної моделі, з особливою увагою до ролі члена самодії шостого порядку у потенціалі БЕК ТМ.

Далі, у відповідній модифікованій версії рівняння Гроса–Пітаєвського ми розглядаємо член секстичної самодії разом із потенціалом гравітаційної взаємодії, що використовується нелокально. Через останню обставину ми маємо справу з єдиним рівнянням замість нелінійної системи Шрьодінгера–Пуасона. Як важливий етап аналізу, розглянемо наближення Томаса–Фермі (коли через спрямування $\hbar \rightarrow 0$ виключається кінетичний член).

Потім, досліджуємо повну модель. А саме, з урахуванням квантових процесів виконуються обчислення відповідних термодинамічних функцій. На цій підставі, ми встановлюємо існування і детально аналізуємо дві різні фази, що реалізуються в ядрі з ТМ.

5.2.1. Побудова моделі. Опишемо критерії, які дозволяють сформулювати модель ТМ (разом з умовами її застосовності). Наші аргументи випливають із порівняння емпіричних даних для галактик та властивостей деяких теоретичних моделей ТМ, утвореної з частинок (та полів) Бозе.

Масштабний критерій для взаємодій. Серед можливих критеріїв відбору моделей, здатних описувати спостережувані, зосередимося на скейлінгу. Застосовуючи масштабування, оберемо найбільш реалістичну модель.

Розгляд вибірки спостережуваних галактик у широкому діапазоні мас дозволяє нам співвіднести розмір серцевини r_0 і густину маси ρ_0 в центрі. Встановлено, що таке відношення є близьким до $\rho_0 \propto r_0^{-\beta}$ з $\beta \approx 1$. Дійсно, $\beta = 1.3$ для досліджуваної вибірки галактик. Близький результат отримано в [75] з аналізу *карликових сфероїдальних* галактик, який дає подібну кореляцію між радіусом гало та густиною маси, а саме, $\rho_0 \propto r_0^{-1.2}$.

Спершу, розглянемо масштабні співвідношення *розпорошеної* ТМ (FDM), в якій частинки описуються хвильовою функцією $\psi(r) e^{-i\gamma t/\hbar}$ і масою m . Згідно з FDM, стаціонарні рівняння Шрьодінгера–Пуасона є

$$\gamma \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + m V_{\text{gr}} \psi, \quad \Delta V_{\text{gr}}(r) = 4\pi G \rho(r), \quad (5.98)$$

де Δ – оператор Лапласа (лапласіан); $\rho = m|\psi|^2$.

Система має точну масштабну симетрію з параметром λ :

$$r \rightarrow \lambda^{-1} r, \quad \rho \rightarrow \lambda^4 \rho, \quad \psi \rightarrow \lambda^2 \psi, \quad \gamma \rightarrow \lambda^2 \gamma. \quad (5.99)$$

Вона приводить до масштабного співвідношення $\rho_0 \propto r_0^{-4}$ між радіусом r_0 і центральною густиною ρ_0 . Однак, в [90] показано, що це суперечить спостереженням. Дійсно, значення $\beta = 4$ є далеким від $\beta = 1.3$. Хоча реалістичні моделі мають бути застосовними для опису ТМ, як очікується, для великих вибірок галактик, а не для окремих виключень.

Важливий висновок випливає з моделі FDM: щоб досягти значення $\beta \simeq 1$, слід враховувати самодію між частинками темної матерії.

Включення ψ^4 -самодії у модель FDM приводить до масштабного співвідношення з $\beta = 2$, близьким до значення з [90]. Однак, загалом, розв'язки є нестійкими і, отже, не вирішують проблему. Тим не менш, є можливість отримати стабільні розв'язки в потрібному діапазоні параметрів, поєднуючи відштовхувальний і притягальний потенціали так, щоб запобігти колапсу гало або втечі частинок назовні.

Продовжуючи аналіз, протестуємо в деталях ψ^6 -модель. Зрозуміло, що рівняння FDM з відштовхувальним членом ψ^6 не задовольняють масштабну симетрію (5.99). Це ускладнює пошук співвідношення між r_0 і ρ_0 .

Ми змушені застосувати підстановку, щоб продемонструвати, що розв'язок проблеми можна знайти в рамках моделі ψ^6 . Згідно з [314], оцінимо внесок членів повної енергії, використовуючи експоненційний анзац. Цей трюк вже використано в літературі для дослідження стійкості скалярного поля ТМ.

Отже, нехай повна енергія E (у нескінченному об'ємі з елементом $dV(r) = 4\pi r^2 dr$) та її густина $\mathcal{E}$ для сферично-симетричного гало ТМ є

$$E = \int_0^\infty \mathcal{E}(r) dV(r), \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_q + \mathcal{E}_{\text{int}} + \mathcal{E}_{\text{gr}}, \quad (5.100)$$

де

$$\mathcal{E}_q = \frac{\hbar^2}{2m} \left| \frac{d\psi}{dr} \right|^2, \quad \mathcal{E}_{\text{int}} = \frac{U}{3} |\psi|^6, \quad \mathcal{E}_{\text{gr}} = \frac{1}{2} \rho V_{\text{gr}}. \quad (5.101)$$

Хвильова функція ψ нормується так, щоб дати повне число частинок N :

$$N = \int_0^\infty |\psi(r)|^2 dV(r). \quad (5.102)$$

Застосуємо експоненційний анзац для ψ , який задовольняє (5.102):

$$\Phi(r) = \sqrt{\frac{N}{\pi r_0^3}} e^{-\frac{r}{r_0}}. \quad (5.103)$$

Він моделює польову поведінку у внутрішній області $r \lesssim r_s$ для деякого r_s , але не працює у зовнішній області.

Після підстановки (5.103) замість ψ в (5.100), одержуємо

$$E = a \frac{N}{r_0^2} + b \frac{N^3}{r_0^6} - c \frac{N^2}{r_0}, \quad (5.104)$$

$$a = \frac{\hbar^2}{2m}, \quad b = \frac{U}{81\pi^2}, \quad c = \frac{5Gm^2}{16}. \quad (5.105)$$

Щоб обчислити дію оператора Δ та оберненого до нього на функцію $f(r)$ у сферично-симетричному випадку (при знаходженні V_{gr}), достатньо використати їхні радіальні частини, означені так

$$\Delta_r f(r) = \partial_r^2 f(r) + \frac{2}{r} \partial_r f(r), \quad (5.106)$$

$$\Delta_r^{-1} f(r) = -\frac{1}{r} \int_0^r f(s) s^2 ds - \int_r^R f(s) s ds. \quad (5.107)$$

де R – радіус кулі, де зосереджена матерія. Покладемо тут $R \rightarrow \infty$.

Енергія E подається у вигляді:

$$E = b \frac{N}{r_0^6} (N - N_-)(N - N_+), \quad (5.108)$$

$$N_{\pm} = \frac{c r_0^5}{2b} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4ab}{c^2 r_0^6}} \right] > 0. \quad (5.109)$$

У зв'язаному стані: $-\infty < E < 0$, що приводить до умови $N_- < N < N_+$. З оцінки N , як геометричного середнього $\sqrt{N_- N_+}$, одержуємо $N \propto r_0^2$.

Тепер оцінимо центральну густину:

$$\rho_0 \propto \frac{N}{r_0^3} \propto r_0^{-1}. \quad (5.110)$$

Ця залежність з $\beta = 1$ одержується через низку наближень і не може служити остаточною відповіддю. Однак, отримана оцінка є обнадійливою і спонукає дослідити модель з потенціалом ψ^6 .

Профіль “серцевина+хвіст”. Оскільки модель ψ^6 фактично враховує тричастинкову взаємодію, яка є доречною за певних умов у малій області простору (як серцевина), знаходження розподілу ТМ у великій області простору вимагає розширення моделі із запозиченням ідеї з інших моделей.

Моделювання великомасштабної структури у ψ DM моделі показує, що існують структури (як пучки та порожнини), схожі на витоки з CDM. У той самий час, розподіл ТМ на менших, галактичних масштабах відрізняється через хвильову природу ψ DM. Її визначною рисою є формування когерентних стоячих хвиль, які утворюють пласку серцевину в центрі галактичного гало ТМ. Такі серцевини добре описуються солітоноподібним розв’язком рівнянь Шрьодінгера–Пуасона, також відомого як *розв’язок бозонної зорі*, і оточені некогерентною фазою, яка відтворюється профілем Наварро–Френка–Вайта (НФВ) [315, 167].

Таким чином, профіль ψ DM часто подається як

$$\rho(r) = \rho_{core}(r) \theta(r_a - r) + \rho_{NFW}(r) \theta(r - r_a), \quad (5.111)$$

де $\theta(r)$ – функція Хевісайда. У точці $r = r_a$, вимагається $\rho_{core}(r_a) = \rho_{NFW}(r_a)$. Значення r_a обирається, наприклад, із зв’язку мас центрального солітона і усього гало ТМ:

$$M_s \propto M_{halo}^{1/3}. \quad (5.112)$$

Таке співвідношення виникає в [315, 316] і відображає також рівність енергій на одиничну масу для серцевини і для огортуючої області НФВ [34].

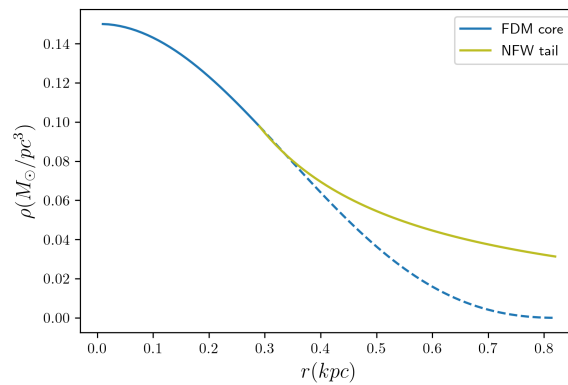


Рис. 5.2. Розв’язок для FDM-серцевини із зовнішньою НФВ частиною.

Часткове “розширення” (5.111) моделі FDM, яке описується так

$$-\Delta_r \psi(r) + \varkappa U_{gr}(r) \psi(r) = \tilde{\gamma} \psi(r), \quad (5.113)$$

$$U_{\text{gr}}(r) = -\frac{1}{r} \int_0^r \psi^2(s) s^2 ds - \int_r^\infty \psi^2(s) s ds, \quad (5.114)$$

зображено на Рис. 5.2 для центральної густини $\rho_0 = 0.15 M_\odot \text{pc}^{-3}$ і маси частинки $m = 1.6 \cdot 10^{-23} \text{ eV}/c^2$;

$$\kappa = \frac{8\pi G}{\hbar^2} \rho_0 m^2 r_*^4 \simeq 1.106; \quad r_* = 1 \text{ крс}. \quad (5.115)$$

Слід ще довести, що форма (5.111) профілю ТМ, складеного із солітоноподібного розв'язку рівнянь поля у внутрішній області і хвоста НФВ у зовнішній області гало, залишається правильною для самодіючого поля. Це підтверджується оцінкою внеску кожного члена в повну енергію. Те саме можна зробити при розгляді співвідношень доданків у рівняннях Шрьодінгера–Пуасона.

Розглянемо показник загасання $g(r)$ самодії $\mathcal{E}_{\text{int}}$ по відношенню до гравітаційного члена $\mathcal{E}_{\text{gr}}$, які задано в (5.101). Отже, введемо

$$g(r) = \frac{q(r)}{q(0)}, \quad q(r) = \frac{\mathcal{E}_{\text{int}}(r)}{\mathcal{E}_{\text{gr}}(r)}. \quad (5.116)$$

Оцінюючи $g(r)$, знов використовуємо (5.103) і одержуємо

$$g(r) = \frac{V_{\text{gr}}(0)}{V_{\text{gr}}(r)} e^{-4\frac{r}{r_0}} \simeq \frac{r}{r_0} e^{-4\frac{r}{r_0}}, \quad r > r_0. \quad (5.117)$$

З іншого боку, існує внутрішня область $r < r_s$ з $g(r) \sim 1$, де r_s – деякий характерний радіус. Ця область повинна містити близько $1/4$ повної маси гало, як у польовій невзаємодіючій моделі.

Оскільки, $g(1.2 r_0) \approx 0.01$ і $g(1.9 r_0) \approx 0.001$, можна знехтувати самодією у зовнішній області гало. У той самий час, наближення НФВ залишається дійсним у зовнішній частині гало навіть у випадку поля з самодією.

5.2.2. Наближення Томаса–Фермі. Хоча розподіл (5.111) є перспективним з точки зору спостережень, модель ψ^6 та її властивості викликають окрему цікавість. Тому, ми маємо намір дослідити підсистему бозонів з гравітаційною та тричастинковою взаємодією, яка може бути вирішальною за високої густини частинок в невеликій області простору, як галактичне ядро.

Ми розпочнемо з моделі БЕК з тричастинковою взаємодією в сферично-симетричному випадку за відсутності гідродинамічних потоків.

Введемо хімічний потенціал $\tilde{\mu}$ і опишемо конденсат дійсною функцією $\psi(r)$ радіальної змінної $r = |\mathbf{r}|$. Вихідним пунктом нашого дослідження є функціонал енергії у кулі $B = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 | |\mathbf{r}| \leq R\}$:

$$\Gamma = 4\pi \int_0^R \left[\frac{\hbar^2}{2m} (\partial_r \psi(r))^2 + m\psi^2(r)V_{\text{ext}}(r) + \frac{U}{3}\psi^6(r) - \tilde{\mu}\psi(r)^2 \right] r^2 dr; \quad (5.118)$$

$$\Delta_r V_{\text{ext}}(r) = 4\pi Gm|\psi(r)|^2, \quad (5.119)$$

де Δ_r – радіальна частина оператора Лапласа (5.106).

Для спрощення опису введемо безрозмірні величини:

$$\begin{aligned} \psi(r) &= \sqrt{\varrho_0} \chi(\xi), \quad r = r_0 \xi, \\ A &= 4\pi \frac{Gm^3 \varrho_0 r_0^4}{\hbar^2}, \quad B = U \frac{\varrho_0^2 r_0^2 m}{\hbar^2}, \quad u = \tilde{\mu} \frac{mr_0^2}{\hbar^2}, \end{aligned} \quad (5.120)$$

де $\chi(\xi)$ – дійсне безрозмірне поле; ϱ_0 і r_0 характеризують *типові значення* центральної густини частинок і розміру системи.

Отже, приходимо до виразу

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_0 \int_0^{\xi_B} \left[\frac{1}{2} (\partial_\xi \chi)^2 - u\chi^2 + A\chi^2\varphi + \frac{B}{3}\chi^6 \right] \xi^2 d\xi, \\ \Gamma_0 &= \frac{4\pi\hbar^2 r_0 \varrho_0}{m}, \quad \Delta_\xi \varphi(\xi) = \chi^2(\xi), \end{aligned} \quad (5.121)$$

де $R = r_0 \xi_B$; Δ_ξ і Δ_ξ^{-1} задаються як (5.106) і (5.107) в термінах змінної ξ замість r ; також, $\chi(\xi) = \psi(r)/\sqrt{\varrho_0}$, див. (5.120).

Відразу оцінимо значення параметрів моделі. Звертаючись до відомих даних для галактичних ядер, припустимо, що центральна густина маси $\rho_0 = m\varrho_0$ є порядку $10^{-20} \text{ кг м}^{-3}$, і маса легких бозонів m є порядку $10^{-22} \text{ еВ с}^{-2}$. Використаємо означення параметра A для знаходження характерного радіуса

r_0 , який визначає $R = r_0 \xi_B$. Одержуємо

$$r_0 \simeq 0.824 \text{ крс} \left[\frac{A}{10} \right]^{1/4} \left[\frac{mc^2}{10^{-22} \text{ еВ}} \right]^{-1/2} \left[\frac{\rho_0}{10^{-20} \text{ кг м}^{-3}} \right]^{-1/4}. \quad (5.122)$$

Оскільки реалістичні значення r_0 є меншими за 1 кпк, оцінимо міру гравітаційної взаємодії як $A \sim 10$. Зауважимо, що (5.122) не є співвідношенням між r_0 і ρ_0 , яке обговорювалося раніше.

Поки тяжіння виглядає як кумулятивний ефект всієї системи, (термо) динаміка внутрішніх процесів визначається відштовхувальною взаємодією між бозонами, представленою параметром $B > A$.

Характерною густиною енергії є величина $\varepsilon_0 = \hbar^2 \rho_0 / (m r_0^2)$. Її комбінування з (5.122) дає

$$\varepsilon_0 \simeq 33.82 \text{ еВ см}^{-3} \left[\frac{A}{10} \right]^{-1/2} \left[\frac{mc^2}{10^{-22} \text{ еВ}} \right]^{-1} \left[\frac{\rho_0}{10^{-20} \text{ кг м}^{-3}} \right]^{3/2}. \quad (5.123)$$

В одиницях тиску, $33.82 \text{ еВ см}^{-3} \simeq 5.42 \cdot 10^{-12} \text{ Па}$.

Детальний аналіз моделі на основі Γ здійснено у наступному підрозділі. Однак, перед розглядом повної моделі дослідимо властивості моделі в наближенні Томаса–Фермі (при $\hbar \rightarrow 0$):

$$\Gamma_{\text{TF}} = \Gamma_0 \int_0^{\xi_B} \left[-u \eta + A \eta \varphi + \frac{B}{3} \eta^3 \right] \xi^2 d\xi, \quad (5.124)$$

де $\eta(\xi) = \chi^2(\xi)$ визначає локальну густину частинок.

Частинковий розподіл $\eta(\xi)$ знаходимо з умови екстремуму функціонала Γ_{TF} , тобто $\delta \Gamma_{\text{TF}} / \delta \eta(\xi) = 0$, що дає інтегральне рівняння:

$$B \eta^2(\xi) + A \varphi(\xi) - u = 0, \quad \varphi(\xi) = \Delta_\xi^{-1} \eta(\xi). \quad (5.125)$$

Зосередимося на розв'язку, який задовольняє умови:

$$\eta(0) = \eta_0, \quad \eta'(0) = 0, \quad \eta(\xi_B) = 0. \quad (5.126)$$

Хімічний потенціал $\mu(\xi)$ системи в гравітаційному полі [384] є такий, що

$$\mu(\xi) + A\varphi(\xi) = u, \quad (5.127)$$

і вводиться для подальших потреб. З врахуванням (5.125), $\mu(\xi)$ визначає частинкову густину $\eta(\xi)$ так

$$\mu(\xi) = B\eta^2(\xi), \quad \mu(\xi_B) = 0. \quad (5.128)$$

Комбінуючи, $\mu(\xi)$ задовольняє рівняння:

$$\Delta_\xi \mu = -\frac{A}{\sqrt{B}} \mu^{1/2}, \quad \mu(0) = B\eta_0^2, \quad \mu'(0) = 0. \quad (5.129)$$

Щоб обчислити η і μ , спершу перетворимо $\varphi(\xi)$ так

$$\varphi(\xi) = -\frac{1}{\xi} \int_0^\xi \eta(s) s^2 ds - \int_\xi^{\xi_B} \eta(s) s ds = -v(\xi_B) + \frac{1}{\xi} \int_0^\xi v(s) ds, \quad (5.130)$$

де допоміжне поле $v(\xi)$ означено як

$$\partial_\xi v(\xi) = \xi \eta(\xi), \quad v(0) = 0; \quad v(\xi) = \int_0^\xi \eta(s) s ds. \quad (5.131)$$

Отже, рівняння (5.129) розв'язується з $\mu(0) = \nu$, де новий параметр

$$\nu = A v(\xi_B) + u > 0 \quad (5.132)$$

поглинає невідому сталу $v(\xi_B)$ завдяки довільності $u < 0$.

Перетворення (5.130) дозволяє переписати Γ_{TF} як

$$\frac{\Gamma_{\text{TF}}}{\Gamma_0} = \int_0^{\xi_B} \left[-u \eta(\xi) + \frac{B}{3} \eta^3(\xi) \right] \xi^2 d\xi - \frac{A}{2} \int_0^{\xi_B} [v(\xi_B) - v(\xi)]^2 d\xi. \quad (5.133)$$

Тут легко розпізнати внески відштовхувальної та притягальної взаємодій.

Щоб вивести (5.125) з варіації (5.133) за η , слід врахувати співвідношення (5.131). Отже, (5.125) зводиться до системи рівнянь:

$$\partial_\xi v(\xi) = \xi \eta(\xi), \quad v(0) = 0, \quad (5.134)$$

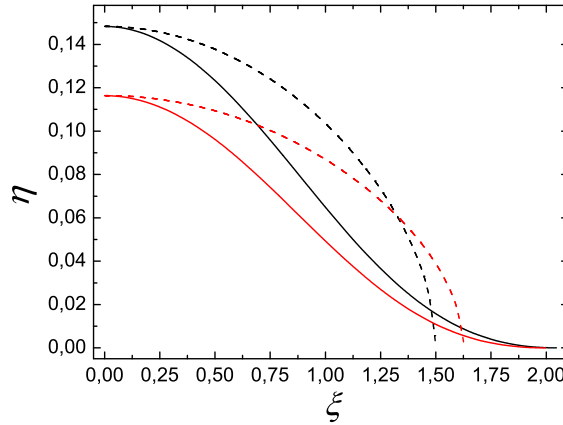


Рис. 5.3. Просторовий залежність густини частинок $\eta(\xi) = \chi^2(\xi)$ в моделях з квантовими флуктуаціями (суцільні криві) і в наближенні Томаса–Фермі (пунктирні криві) при $A = 10$ і за однакових початкових умов. Чорні і червоні криві відповідають $B = 20$ і $B = 30$.

$$\eta(\xi) = \sqrt{\eta_0^2 - \frac{k}{\xi} \int_0^\xi v(s) ds}, \quad \eta_0 = \sqrt{\frac{\nu}{B}}, \quad (5.135)$$

де параметри η_0 і $k = A/B$ вважаються заданими. Рівняння (5.135) показує, що функція $\eta(\xi)$ зникає за деякого значення $\xi = \xi_B$, яке залежить від заданих параметрів (див. Рис. 5.3, пунктирні криві).

Самоузгодженим чином на границі $\xi = \xi_B$ знаходимо:

$$\frac{A}{\xi_B} \int_0^{\xi_B} v(\xi) d\xi = \nu, \quad u = -\frac{A}{\xi_B} \int_0^{\xi_B} \eta(\xi) \xi^2 d\xi. \quad (5.136)$$

Отже, від'ємний хімічний потенціал u збігається з (безрозмірним) гравітаційним потенціалом всієї системи на границі області.

Щоб знайти поля $\eta(\xi)$ і $v(\xi)$, розв'язуємо рівняння (5.135) чисельно з використанням методу Ейлера, оскільки вони не інтегруються аналітично.

Зокрема, при $A = B = \nu$, що досягається перемасштабуванням, задача зводиться до рівняння Лейна–Емдена з політропним індексом $p = 1/2$ для

функції $\theta(\xi) = \eta^2(\xi)$ (див. (5.129)):

$$\Delta_\xi \theta(\xi) = -\theta^p(\xi), \quad \theta(0) = 1. \quad (5.137)$$

Зауважимо, що для нього відомо $\xi_B^{exact} \simeq 2.75269805$ [160].

У загальному випадку, ми шукаємо макроскопічні характеристики системи, наприклад, екстремальне значення функціонала Γ_{TF}^{ex} , яке одержується з Γ_{TF} підстановкою розв'язку $\eta(\xi)$.

Технічно, змінюючи A , B та ν , чисельно знаходимо функції $\eta(\xi)$ і $\nu(\xi)$ (разом зі значеннями ξ_B і $\nu(\xi_B)$) згідно з (5.134) і (5.135). Тоді, використовуючи співвідношення $u = \nu - A \nu(\xi_B)$ і (5.133), обчислюємо Γ_{TF}^{ex} .

При знаходженні макроскопічних характеристик, звернемось до термодинамічних співвідношень при $T = 0$:

$$dp(\xi) = \eta(\xi) d\mu(\xi), \quad p(\xi_B) = 0, \quad (5.138)$$

$$\varepsilon(\xi) = \eta(\xi) \mu(\xi) - p(\xi), \quad \varepsilon(\xi_B) = 0, \quad (5.139)$$

де функції $p(\xi)$ і $\varepsilon(\xi)$ визначають (безрозмірний) середній тиск P і повну внутрішню енергію E :

$$P = \frac{3}{\xi_B^3} \int_0^{\xi_B} p(\xi) \xi^2 d\xi, \quad E = \int_0^{\xi_B} \varepsilon(\xi) \xi^2 d\xi. \quad (5.140)$$

Надалі, $\xi_B^3/3$ характеризує об'єм системи.

Таким чином, слід проінтегрувати співвідношення Гібса–Дюгема (5.138), і підставити $p(\xi)$ в рівняння Ейлера (5.139), щоб знайти $\varepsilon(\xi)$. Так одержуються точні вирази:

$$p(\xi) = \frac{2}{3} B \eta^3(\xi), \quad \varepsilon(\xi) = \frac{1}{3} B \eta^3(\xi), \quad (5.141)$$

які задають рівняння стану при підстановці розв'язку для $\eta(\xi)$.

Повчально виразити *гравітаційну* енергію E_{gr} ,

$$E_{gr} = \frac{A}{2} \int_0^{\xi_B} \eta(\xi) \varphi(\xi) \xi^2 d\xi, \quad (5.142)$$

внутрішню енергію E і повну енергію $E_{\text{tot}} = E + E_{\text{gr}}$ в термінах гравітаційного потенціалу u на границі:

$$u\mathcal{N} = -A \frac{\mathcal{N}^2}{\xi_B}, \quad \mathcal{N} = \int_0^{\xi_B} \eta(\xi) \xi^2 d\xi. \quad (5.143)$$

Використовуючи допоміжні величини і формули:

$$n(\xi) = \int_0^\xi \eta(s) s^2 ds, \quad \mathcal{N} = n(\xi_B), \quad (5.144)$$

$$\varphi(\xi) = -\frac{\mathcal{N}}{\xi_B} - \int_\xi^{\xi_B} \frac{n(s)}{s^2} ds, \quad (5.145)$$

$$\partial_\xi \left(\frac{n^2(\xi)}{\xi} \right) + \frac{n^2(\xi)}{\xi^2} = 2 \frac{n(\xi)}{\xi} \partial_\xi n(\xi), \quad (5.146)$$

$$\frac{1}{\eta(\xi)} \partial_\xi p(\xi) = \partial_\xi \mu(\xi) = -A \frac{n(\xi)}{\xi^2}, \quad (5.147)$$

одержуємо

$$E_{\text{gr}} = -\frac{2A\mathcal{N}^2}{3\xi_B}, \quad E = \frac{A\mathcal{N}^2}{9\xi_B}, \quad E_{\text{tot}} = -\frac{5A\mathcal{N}^2}{9\xi_B}; \quad (5.148)$$

$$\int_0^{\xi_B} p(\xi) \xi^2 d\xi = \frac{2A\mathcal{N}^2}{9\xi_B}. \quad (5.149)$$

Ці вирази є частковим випадком загальних результатів [384] для гравітуючих систем з політропним рівнянням стану при $T = 0$.

5.2.3. Врахування квантових флуктуацій. Повернемось до моделі з квантовою кінематикою, яка описується функціоналом (5.121). Її польові рівняння мають вигляд:

$$\frac{1}{2} \Delta_\xi \chi + u\chi - A\chi\varphi - B\chi^5 = 0, \quad \Delta_\xi \varphi = \chi^2. \quad (5.150)$$

Комбінування рівнянь і введення $v(\xi)$, як вище, дають

$$2 \frac{\Gamma}{\Gamma_0} = \int_0^{\xi_B} \left[(\partial_\xi \chi)^2 - u_* \chi^2(\xi) - \frac{A_*}{2\xi^2} [v(\xi_B) - v(\xi)]^2 + \frac{B_*}{3} \chi^6(\xi) \right] \xi^2 d\xi, \quad (5.151)$$

$$\Delta_\xi \chi + \nu \chi - \chi \frac{A_*}{\xi} \int_0^\xi v(s) ds - B_* \chi^5 = 0, \quad (5.152)$$

$$\partial_\xi v(\xi) = \xi \chi^2(\xi), \quad v(0) = 0, \quad (5.153)$$

$$\nu = A_* v(\xi_B) + u_*, \quad (5.154)$$

де $A_* = 2A$, $B_* = 2B$ і ν (замість $u_* = 2u$) – довільні додатні параметри. Границя системи ξ_B визначається з умови $\chi(\xi_B) = 0$ і є *першим нулем* осцилюючої функції $\chi(\xi)$. Звичайно, значення ξ_B тут відрізняються від знайдених в наближенні Томаса–Фермі за тих самих параметрів A і B , що видно на Рис. 5.3.

Аби знайти розв’язок зі скінченим початковим значенням $\chi_0 = \chi(0) < \infty$, слід покласти $\chi'(0) = 0$. Щоб одержати загасаючий розв’язок (обмежений для дозволених ξ), сформулюємо наступні умови, що фіксують χ_0 .

Підставляючи розклад $\chi(\xi) = \chi_0 + C_2 \xi^2 + \dots$ при $\xi \rightarrow 0$ в (5.152), (5.153), знаходимо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} 6C_2 + \nu \chi_0 - B_* \chi_0^5 &= 0, \\ \nu C_2 - \frac{A_*}{6} \chi_0^3 - 5B_* \chi_0^4 C_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.155)$$

З них випливає, що χ_0 має задовольняти рівняння $S(A_*, B_*, \nu, \chi_0) = 0$, де

$$S(A_*, B_*, \nu, z) = A_* z^2 - (5B_* z^4 - \nu)(\nu - B_* z^4), \quad (5.156)$$

разом з умовою $2C_2 = \chi''(0) \leq 0$. В’язі обмежують χ_0 : $(\nu/5B_*)^{1/4} < \chi_0 < (\nu/B_*)^{1/4}$.

На практиці, спостерігається три режими (для заданих A_* , B_* і ν): 1) відсутність розв’язку; 2) єдиний розв’язок; 3) пара (додатних) розв’язків. Зазвичай, для фіксованих A_* і B_* , але при збільшенні ν , всі режими спостерігаються у зазначеній послідовності.

Відсутність розв’язку (5.155) на кроці 1) приводить до єдино можливого розв’язку автономного рівняння (5.152): $\chi(\xi) = 0$. На етапі 2) одержується

мінімально допустиме значення $\nu_{\min}$. Починаючи з цього порогового значення, система починає еволюціонувати. На етапі 3) з двох можливих розв'язків χ_0 обирається найменший, бо найбільший приводить до розбіжної $\chi(\xi)$.

Фактично, всі величини у моделі, обчислені за фіксованих A і B , є функціями вільного параметра ν . Таким чином, коли говоримо про залежність a від b , слід розуміти графік: $a(b) = \{(b(\nu), a(\nu)) | \nu \geq \nu_{\min}\}$.

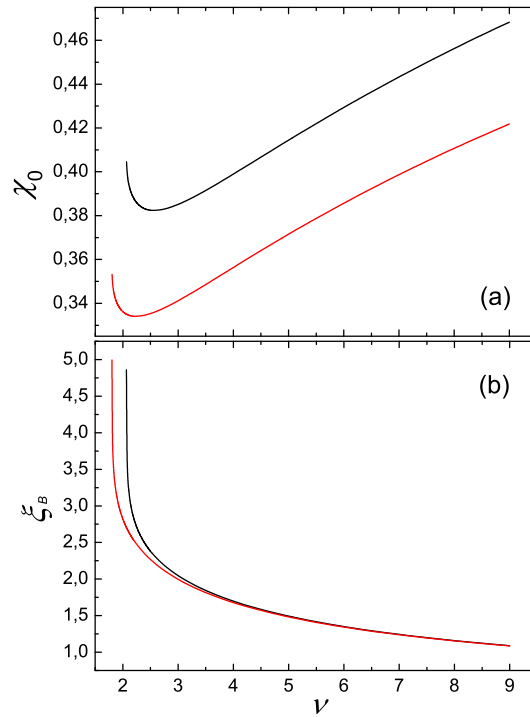


Рис. 5.4. Характеристики поля $\chi(\xi)$ як функції від ν при $A = 10$. Чорна і червона криві відповідають $B = 20$ і $B = 30$. Панель (а) демонструє початкові значення χ_0 з (5.155). Панель (б) показує значення першого нуля, коли $\chi(\xi_B) = 0$. Криві побудовано при $\nu_{\min}^{\text{black}} \simeq 2.066$ і $\nu_{\min}^{\text{red}} \simeq 1.805$, які знайдено чисельно.

Можливі залежності χ_0 від ν показано на Рис. 5.4 (а). Значення ξ_B також продемонстровано на Рис. 5.4 (б): вони обмежують розмір системи. Приклади розподілів $\eta(\xi)$ при $\xi \leq \xi_B$ зображено на Рис. 5.3 (суцільні криві).

На Рис. 5.4 спостерігаємо дві різні моди у поведінці моделі, розділені точкою повороту. Ми припускаємо, що зміна режиму пов'язана з *фазовим пе-*

реходом, який ми дослідимо. Зауважимо, що розмір системи на Рис. 5.4 (b) залежить не лише від параметрів взаємодії A і B (на відміну від [149]), але й від ν , яке визначає домінуючу фазу матерії.

Для аналізу властивостей моделі означимо хімічний потенціал $\mu_q(\xi)$ так

$$\mu_q(\xi) + A\varphi(\xi) - \frac{1}{2\chi(\xi)}\Delta_\xi\chi(\xi) = u. \quad (5.157)$$

Згідно з рівнянням руху (5.150), μ_q визначає χ як

$$\mu_q(\xi) = B\chi^4(\xi), \quad \mu_q(\xi_B) = 0. \quad (5.158)$$

Замінюючи μ на μ_q в (5.138)–(5.139), відтворюються вирази (5.141) для густини внутрішньої енергії $\varepsilon(\xi)$ і локального тиску $p(\xi)$ при $\eta = \chi^2$.

Внутрішній тиск $p(\xi)$ просторово еволюціонує як

$$\frac{\partial_\xi p(\xi)}{\eta(\xi)} = \partial_\xi \mu_q(\xi) = -A \frac{n(\xi)}{\xi^2} + \partial_\xi \left(\frac{1}{2\chi(\xi)} \Delta_\xi \chi(\xi) \right), \quad (5.159)$$

що відрізняється від (5.147) в наближенні Томаса–Фермі. Це – складне гідростатичне рівняння (подібне до (15) в [153]), і ми не розв’язуємо його. Однак, всі необхідні поля можна знайти з рівнянь (5.152)–(5.154).

Тим не менш, (5.159) вказує, що внутрішній тиск p є результатом балансу між тяжінням і квантовими флуктуаціями, внески яких цікаво оцінити.

Щоб зробити це, звернемося до більш простих і відомих співвідношень:

$$p = \frac{2}{3}B\chi^6 = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2}\chi\Delta_\xi\chi + u\chi^2 - A\chi^2\varphi \right], \quad (5.160)$$

де вже підставлено (5.150).

Оскільки хімічний потенціал u складається з двох доданків, згідно з (5.154), введемо такі (парціальні) компоненти тиску:

$$p_\nu = \frac{1}{3} (\chi\Delta_\xi\chi + \nu\chi^2), \quad (5.161)$$

$$p_{\text{gr}} = -\frac{2}{3}A\eta [\nu(\xi_B) + \varphi(\xi)], \quad (5.162)$$

які дають $p_\nu + p_{\text{gr}} = p$ за побудовою. Видно, що $p_\nu \sim \chi^2$ і відповідає за хвильові флуктуації, які регулюються вільним параметром ν , поки $p_{\text{gr}} \sim \chi^4$ і описує парну взаємодію, яка контролюється гравітаційною сталою G , яка входить в параметр A .

Середнє значення тиску p_{gr} задається виразом:

$$VP_{\text{gr}} = -\frac{2}{3}A \int_0^{\xi_B} v(\xi)[v(\xi_B) - v(\xi)] d\xi < 0. \quad (5.163)$$

Це означає, що тиск, створений взаємодіями, є додатним $P - P_{\text{gr}} > 0$. У той самий час, складова $P_\nu > 0$ підтримує тиск всередині системи. З іншої точки зору, дія тиску P_ν (середнього значення від p_ν) еквівалентна зовнішньому впливу на систему.

Покажемо, як p_ν можна пов'язати із зовнішнім полем h теорії Ландау [384]. Перш за все, припустимо, що незбурена теорія задається Γ_{TF} . Пов'язуючи збурення з включенням квантових флуктуацій і поля ν , яке задається руками, частина повного функціонала Γ , яка описує збурення, подається так

$$2\frac{\Gamma_{\text{pert}}}{\Gamma_0} = - \int_0^{\xi_B} \eta(\xi)h(\xi) \xi^2 d\xi, \quad (5.164)$$

$$h(\xi) = \frac{1}{\chi(\xi)} \Delta_\xi \chi(\xi) + \nu. \quad (5.165)$$

Тоді, рівняння руху записується як $(\delta\Gamma/\delta\eta(\xi))_{h=\text{const}} = 0$, що приводить до (5.150). Це означає, що частинкова густина $\eta(\xi)$ є параметром порядку (спряженим до h) такої теорії. Щоб приписати фізичний зміст цьому збуренню, бачимо, що добуток $\eta(\xi)h(\xi)$ є ніщо інше, як тиск p_ν .

Фазові переходи часто пов'язані зі зміною інтенсивних параметрів, таких як температура і тиск (за відсутності магнітного та електричного полів). Оскільки $T = 0$ у нашій моделі, зміни викликаються тиском. Мікроскопічно, припущення про фазовий перехід тепер можна обґрунтувати наявністю

збурення P_ν , яке пов'язано з квантовими флуктуаціями, а також виглядом взаємодії, який гарантує існування двох нееквівалентних фаз матерії.

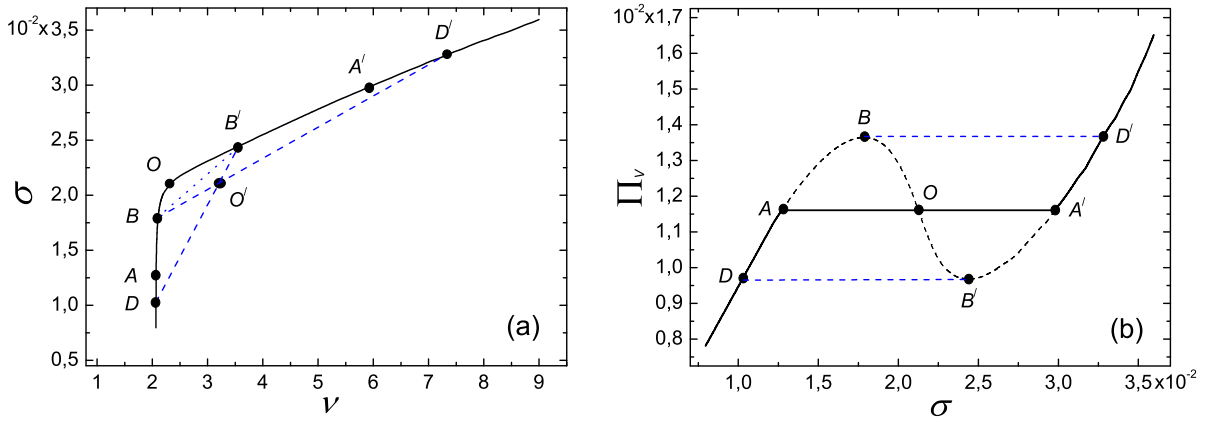


Рис. 5.5. Середня густини σ за фіксованих $A = 10$, $B = 20$ і зміні ν (а) і Π_ν (б). Панель (б) показує метастабільні (AB і $A'B'$) і нестійкий (BB') стани. Пряму AA' побудовано за правилом Максвелла. З'єднання між ключовими точками на панелі (б) *схематично* перенесено на панель (а).

5.2.4. Термодинамічні величини і дві фази. Для аналізу макроскопічних властивостей моделі скористаємося набором величин:

$$P = \frac{2B}{\xi_B^3} \int_0^{\xi_B} \chi^6(\xi) \xi^2 d\xi, \quad (5.166)$$

$$\Pi_\nu = -\frac{(B/A)}{\xi_B^3} \int_0^{\xi_B} [(\partial_\xi \chi(\xi))^2 - \nu \chi^2(\xi)] \xi^2 d\xi, \quad (5.167)$$

$$\sigma = \frac{3}{\xi_B^3} \int_0^{\xi_B} \chi^2(\xi) \xi^2 d\xi, \quad (5.168)$$

$$\tau = \frac{3}{\xi_B^3} \int_0^{\xi_B} (\partial_\xi \chi(\xi))^2 \xi^2 d\xi, \quad (5.169)$$

одержаних за допомогою усереднення за об'ємом $V = \xi_B^3/3$ відповідних функцій: $p(\xi)$ (внутрішній тиск), $(B/A) p_\nu(\xi)$ (премасштабований для зручності

тиск збурення), $\eta(\xi) = \chi^2(\xi)$ (частинкова густина) і $-\chi(\xi)\Delta_\xi\chi(\xi)$ (міра флуктуацій). Оскільки цікаві для нас функції залежать від ν , χ_0 і ξ_B , ми також приділяємо увагу їх поведінці. Опустимо розгляд величин, пов'язаних з даними, наприклад, як внутрішня енергія $E = VP/2$.

Щоб конвертувати значення безрозмірних величин τ , ε , p , P і Π_ν у фізичні одиниці, слід домножити їх на ε_0 з (5.123). Значення густини маси є $\rho_0\sigma$.

Перед детальним описом процесів у системі, перевіримо гіпотезу про наявність фазового переходу. Оскільки змінною характеристикою матерії є її густина σ , прослідкуємо за її перетвореннями за різних (зовнішніх) факторів як ν і Π_ν . Результати обчислень подано на Рис. 5.5. Відразу зауважимо, що залежність σ від міри флуктуацій τ (задана графіком $\sigma(\tau) = \{(\tau(\nu), \sigma(\nu)) | \nu \geq \nu_{\min}\}$) виглядає подібно до Рис. 5.5 (а) і тут не наводиться.

Перш за все, звернемо увагу на стрімку зміну $\sigma(\nu)$ на Рис. 5.5 (а) при $\nu_{\min} \simeq 2.066$. Як вказано вище, $\chi(\xi) = 0$ і, як наслідок, $\sigma = 0$ при $\nu < \nu_{\min}$, поки $\sigma(\nu_{\min}) > 0$. Це можна інтерпретувати як фазовий перехід першого роду. Це явище виникає завдяки правилу знаходження початкового значення χ_0 , див. (5.155). Однак, воно не є предметом нашого дослідження. Більш цікавою є поведінка матерії в околі точки повороту O , тобто при $\nu \rightarrow \nu_{\min}$.

Щоб збагнути процеси в околі точки O , звернемося до Рис. 5.5 (b). Дійсно, загин на Рис. 5.5 (b) виявляє фазовий перехід першого роду, який вказує на існування “газової” та “рідиноподібної” фаз матерії. Цей процес відрізняється від відомого кипіння води через розгляд квантової системи при $T = 0$ і механізм на основі квантових флуктуацій або, альтернативно, пов'язаний зі стисканням Π_ν (яке може виявитись більш зручним у подальшому поясненні процесів і змін макроскопічних величин).

Характеристики, обчислені чисельно, зображено на Рис. 5.6 і поводяться як багатозначні функції від Π_ν . Ці графіки відповідають ізотермам при $T = 0$. Змінюючи параметр B (і A), можна дійти висновки, що область наявності загину, спроектована на вісь Π_ν , залишається незмінною завдяки масшта-

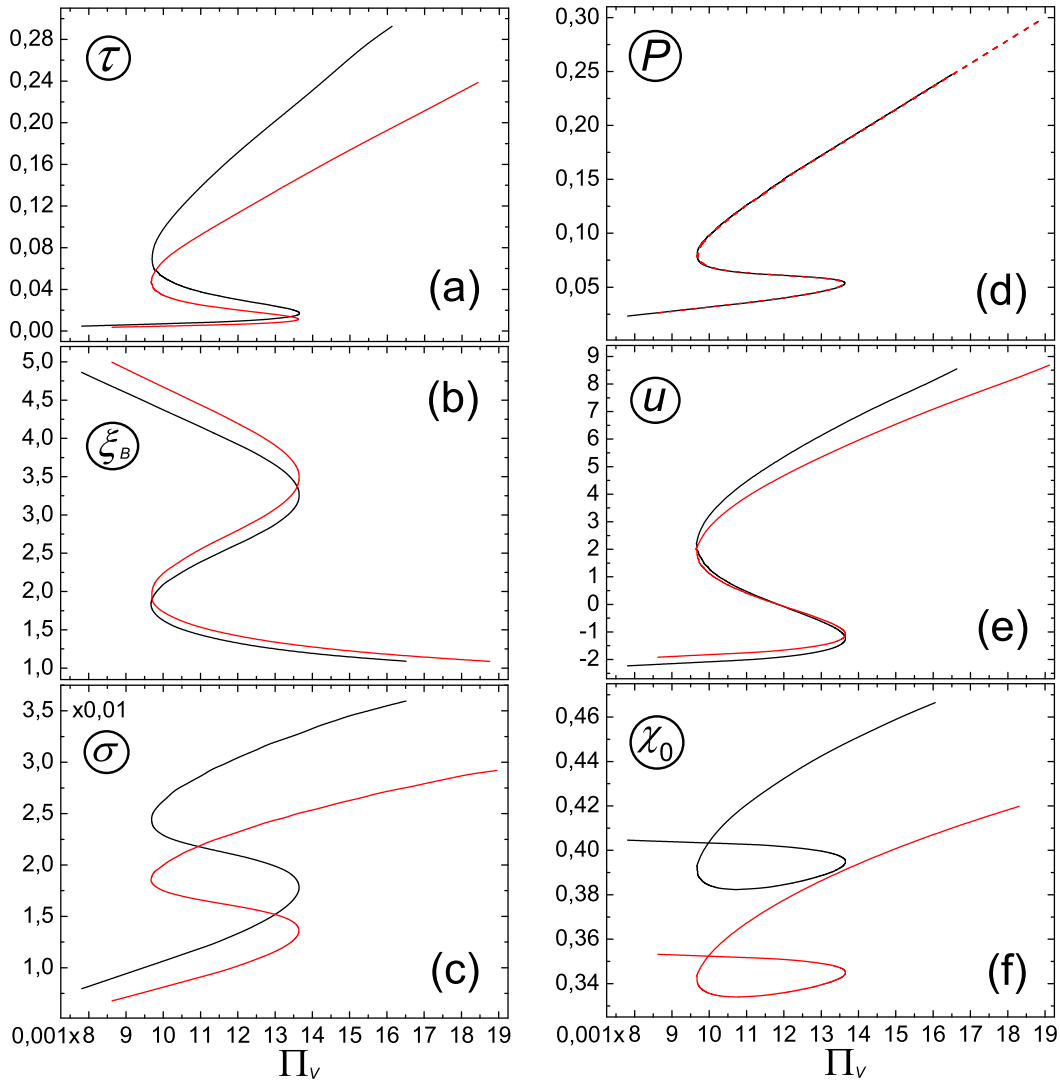


Рис. 5.6. Залежність безрозмірних характеристик від Π_v при $A = 10$. Чорні і червоні лінії відповідають $B = 20$ і $B = 30$.

бному фактору B/A , який включено в означення Π_v . Це означає, що нема можливості досягти критичної точки фазового переходу, коли $\partial \Pi_v / \partial f = 0$ і $\partial^2 \Pi_v / \partial f^2 = 0$ одночасно для будь-якої f з цих функцій, при зміні B (і A). У порівнянні з водою, в даній моделі нема природного параметра, подібного до температури, збільшення якого приводило б до кипіння. Ми припускаємо, що при $T > 0$ також неможливо спостерігати подібний процес, оскільки температура випаровування може виявитися значно вищою за критичну температуру існування конденсату і збігатися (в енергетичних одиницях) з гравітаційною енергією системи. Тим не менш, Рис. 5.6 дозволяє виявити умови перехо-

ду між газовою та рідиноподібною фазами при $T = 0$, якщо така ситуація реалізується в природі.

Розглядаючи для зручності Π_ν як зовнішнє стискання і опускаючи фізичну інтерпретацію області нестійкості (як BB' на Рис. 5.5), Рис. 5.6 дозволяє зробити наступні висновки. З посиленням стискання Π_ν , починаючи з найменшого, видно, що розмір системи ξ_B (b) зменшується, а середня густина σ (c) зростає на протязі процесу. У той самий час, центральна густина χ_0^2 (див. (f)) і флуктуації τ (a) слабо змінюються на першому етапі, але значно зростають після переходу у більш щільну, рідиноподібну фазу. Подібна поведінка спостерігається у хімічного потенціала u (e) та внутрішнього тиску P (див. (d), де криві для різних B накладаються). Природно, що точка співіснування двох фаз, $u = 0$, лежить в області нестійкості.

Зауважимо, що на всіх рисунках із залежностями від стискання Π_ν спостерігається спільна властивість – існування тої самої пари особливих значень Π_ν , тобто $\Pi_\nu^{(1)} \simeq 9.65 \cdot 10^{-3}$ і $\Pi_\nu^{(2)} \simeq 13.65 \cdot 10^{-3}$ у безрозмірних одиницях (або, у фізичних одиницях, $\Pi_\nu^{(1)} \simeq 5.23 \cdot 10^{-14}$ Па і $\Pi_\nu^{(2)} \simeq 7.40 \cdot 10^{-14}$ Па). Завдяки цьому, криві діляться на три області якісно відмінної поведінки: дві “нормальні” частини, які пов’язані зі стійкими станами системи та відповідають стисканням $\Pi_\nu \leq \Pi_\nu^{(1)}$ і $\Pi_\nu \geq \Pi_\nu^{(2)}$, і інтервал нестійкості. Видно, що в області нестійкості має місце зворотна (за напрямом) поведінка функцій у порівнянні з нормальними (стійкими) частинами кривих.

Наші результати передбачають значні флуктуації τ у щільному стані ТМ. Фізично, це відбувається завдяки зростанню ролі відштовхування χ^6 між частинками із збільшенням густини σ . Хоча, пов’язуючи τ з ефективною температурою, рідиноподібна фаза ТМ, можна припустити, перебуває в термалізованому стані, що вже відзначалося в [179]. Одночасне зростання “температури” τ і густини σ нагадує поведінку води в інтервалі температур $t = 0 \div 4^\circ\text{C}$.

Роль сприйнятливості системи при стисканні відіграє ізотермічна стисли-

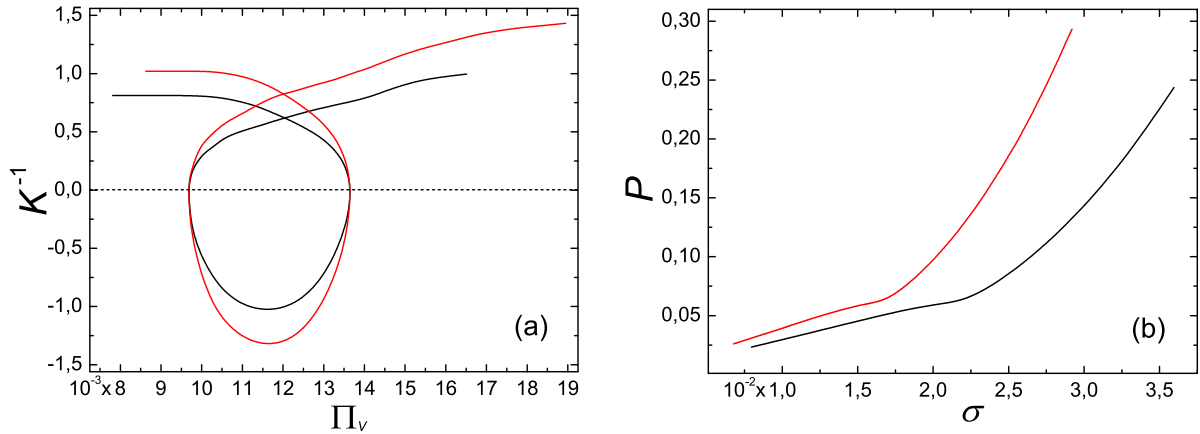


Рис. 5.7. Поведінка оберненої стисливості K^{-1} і внутрішнього тиску P при $A = 10$. Чорна і червона криві відповідають $B = 20$ і $B = 30$.

вість K . Вона та її обернена величина K^{-1} , означені тут як

$$K = \frac{\partial \sigma}{\partial \Pi_\nu}, \quad K^{-1} = \frac{\partial \Pi_\nu}{\partial \sigma}, \quad (5.170)$$

також є важливими характеристиками і обчислюються чисельно (з втратою точності) з використанням залежностей на Рис 5.6 (с). Результат зображено на Рис. 5.7 (а).

Найбільш важлива додатна частина, з $K^{-1} > 0$, складається з двох гілок, які описують дві різні фази матерії з їх особливими властивостями. Цікаво зауважити, що зворотна стисливість поводить себе як стала для низьких значень стискання, скажімо для $\Pi_\nu \leq \Pi_\nu^{(1)}$, а також виявляє зростання для великих значень Π_ν , коли $\Pi_\nu > \Pi_\nu^{(2)}$.

З іншого боку, від'ємна частина оберненої стисливості, $K^{-1} < 0$, описує область нестійкості за проміжних значень стискання, тобто $\Pi_\nu^{(1)} < \Pi_\nu < \Pi_\nu^{(2)}$. У рівноважній статистиці, цією областю зазвичай нехтують в фізичній картині. Однак, як показано в деяких статтях, існують структури (матеріали) з від'ємними K , див. [198, 120, 190, 247]. Окрім того, як продемонстровано в деяких роботах [117, 218], належної уваги вимагають точки з нульовою ефективною швидкістю звуку (які могли б з'явитись в нашій моделі при $\Pi_\nu = \Pi_\nu^{(1)}$ і $\Pi_\nu = \Pi_\nu^{(2)}$). Таким чином, область нестійкості разом з її граничними точками

можна було б розглянути більш ретельно в контексті моделі ТМ.

Залежність внутрішнього тиску P (і внутрішньої енергії E) від середньої густини σ на Рис. 5.7 (b) показує наявність радше фазового переходу другого роду з поворотною точкою, в якій $\partial^2 P / \partial \sigma^2 = 0$. Чисельне дослідження залежностей P від σ за різних значень A і B , які тут не наводяться, не підтверджує наявності загину (який супроводжує фазовий перехід першого роду).

Отже, зображене рівняння стану також виявляє дві фази. Однак, воно не дозволяє прояснити механізм фазового переходу. Окрім того, зі збільшенням значення B , система переходить у рідиноподібний стан за менших значень σ , що свідчить про посилення ролі тричастинкової взаємодії.

Є ще одна властивість у параметра B (при фіксованому $A < B$): чим більшим є (значення) B , тим вищими є величини $\xi_B(\Pi_\nu)$, $K^{-1}(\Pi_\nu)$ і $P(\sigma)$; навпаки, зворотну поведінку демонструють функції $\eta(\xi)$, $\chi_0(\Pi_\nu)$, $\chi_0(\nu)$, $\xi_B(\nu)$, $\tau(\Pi_\nu)$, $u(\Pi_\nu)$ і $\sigma(\Pi_\nu)$. Нарешті, є окремий випадок – величина $P(\Pi_\nu)$, див. Рис. 5.7 (d), яка (майже) не показує залежності від B .

Адіабатичну швидкість звуку c_s можна знайти (у фізичних одиницях) так

$$c_s = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \eta}} \bigg|_{\eta=\chi_0^2} = \frac{\hbar \sqrt{2B}}{m r_0} \chi_0^2. \quad (5.171)$$

Оцінка значень c_s дає

$$c_s \simeq 2.36 \cdot 10^6 \text{ см с}^{-1} \left[\frac{A}{10} \right]^{-1/4} \left[\frac{B}{20} \right]^{1/2} \left[\frac{\chi_0}{0.4} \right]^2 \times \left[\frac{m c^2}{10^{-22} \text{ еВ}} \right]^{-1/2} \left[\frac{\rho_0}{10^{-20} \text{ кг м}^{-3}} \right]^{1/4}, \quad (5.172)$$

що узгоджується з передбаченнями інших моделей [153].

5.2.5. Підсумки. Отримані результати засвідчують, що включення відштовхувальної самодії шостого порядку надлегкої ТМ в рамках модифікації рівняння Гросса–Пітаєвського приводить до нетривіальних властивостей БЕК

ТМ і, отже, до несподіваної структури галактичного ядра. Основні результати дослідження отримано чисельно і представлено у вигляді Рис. 5.4-5.7 з відповідними коментарями.

Як зазначалося, нетривіальну фазову структуру ядра в центральній частині гало ТМ помічено в роботі [73] (а саме, існування розрідженої та щільної фаз та пов'язаного з ними фазового переходу *нульового роду*, що спостерігається через співвідношення маса-радіус). На відміну від неї, ми продемонстрували наявність двох фаз (що складаються зі стійкої, двох метастабільних та нестійкої гілок), так і фазового переходу *першого роду*.

Вже зазначалося, що фазові переходи в ТМ можуть викликати *гравітаційні хвилі* [318, 82, 44], також див. [45]. Особливо, це може мати місце при виникненні нетривіальної фазової структури, коли зливаються або стикаються дві галактики (див. [44, 203, 223]). Цікаво дослідити можливу генерацію гравітаційних хвиль, спричинених фазовими переходами (в ядрі ТМ), як описано тут, і, можливо, з розширенням моделі шляхом включення динамічних аспектів. Доти, поки не одержано такі результати, рисунки 5.4-5.7 можуть розглядатися як фрагмент (із фіксованим часом) всієї картини.

Висновки до розділу 5

У розділі 5 розглянуто макроскопічні властивості моделей бозе-конденсатної темної матерії з дво- та тричастинковими взаємодіями. Окрему увагу ми приділили можливим особливим властивостям частинок темної матерії, спричинених їх композитністю і описаних за допомогою деформацій термодинамічних і комутаційних співвідношень.

У запропонованій картині явищ, ми приписуємо провідну роль парній взаємодії при описі динаміки частинок галактичного гало темної матерії, поки тричастинкова взаємодія, за нашим припущенням, відіграє значну роль у компактному і щільному галактичному ядрі темної матерії. Асимптотично, на великих відстанях від центра галактик, доцільно використовувати розподіл темної матерії, запропонований Наварро, Френком і Вайтом.

До нових явищ в нашому підході слід віднести можливий прояв складеності частинок гало темної матерії, а також наявність рідиноподібного стану в галактичному ядрі темної матерії (за певних умов).

Основними висновками, що виносяться на захист є такі:

- Показано, що просторовий розподіл частинок, отриманий у запропонованій моделі з деформованим комутатором для хвильової функції бозе-конденсату з гравітаційною і парною взаємодіями в наближенні Томаса–Фермі, відтворює відомий розподіл бозе-конденсатної темної матерії гало карликових галактик з повільним обертанням.

- Чисельно отримано розв’язки стаціонарного рівняння Гросса–Пітаєвського з гравітаційною і тричастинковою взаємодіями і термодинамічні функції, за допомогою яких виявлено існування рідино- і газоподібного станів, фазовий перехід першого роду між якими обумовлюється квантовими флуктуаціями. Надано оцінки фізичних величин для темної матерії галактичного ядра.

Результати розділу опубліковано в 3 працях [126, 129, 277].

ВИСНОВКИ

У роботі досліджено фізичні системи багатьох частинок із сильною та гравітаційною взаємодією. Виявлено наявність рідино- і газоподібних станів в ядерній, піонній і темній матерії. Описано енергетичний спектр надплинної нейтронної матерії. Шляхом порівняння з результатами у відомих статистиках оцінено прояв інфінітної статистики. Отримано характеристики двопараметричної ріманової поверхні роду два. Виявлено умови прояву гравітаційних ефектів в мікросвіті, зокрема прояву додаткових вимірів. Розвинуто моделі хаотичних блукань в багатозонному середовищі і виявлено наявність перехідної дифузії.

В дисертаційній роботі отримано такі результати.

- Розвинуто модель системи релятивістських нуклонів з прямою взаємодією, в якій відтворено рівноважні властивості ядерної матерії, критичні параметри фазового переходу рідина-газ у симетричній матерії, а також енергетичний спектр надплинної нейтронної матерії в наближенні Бардіна-Купера-Шріфера.

- Знайдено критичні параметри фазового переходу рідина-газ симетричної ядерної матерії (з рівним числом протонів і нейтронів) у конформно-пласкому просторі-часі за малих відхилень масштабного фактора.

- Встановлено наявність переходу рідина-газ в конденсаті піонів з ненульовим електричним зарядом за нульової температури, а також рідино- і газоподібної фаз за високих температур з нульовим хімічним потенціалом.

- Для ранньої стадії релятивістських ядерних зіткнень описано еволюцію та анізотропію потоків партонів, які мають визначальний вплив на основні спостережувані інтерферометричні дані. Показано, що незначне число жорстких партонів обумовлює від'ємну провідність і нестійкість м'якої компонен-

ти (поля) при електромагнітній взаємодії, що сприяє ізотропізації.

- Показано, що термалізована кварк-глюонна речовина у зіткненнях ядер приводить за умов Аркані-Хамеда, Дімопулоса і Двалі до ненульової ймовірності прояву додаткових компактних просторових вимірів, число яких не перевищує шість у випадку конфайнменту і є необмеженим, але обумовленим температурою, в режимі домінування випромінювання.

- За умови планківського обмеження зверху на енергію введено новий закон додавання 4-імпульсів, на підставі якого знайдено термодинамічні функції та модифікований аналог закону Стефана–Больцмана випромінювання чорного тіла за високих температур. Показано, що випромінювання відбувається за температури вище порогової і з обмеженою зверху густиною енергії.

- Описано часову еволюцію геометрії тороїдального простору в $(2+1)$ -вимірній гравітації Черна–Саймонса з модельним джерелом, наявність якого при квантуванні приводить або до розщеплення вироджених станів власного часу, або до зняття виродження спектра площі.

- Для двопараметричного випадку ріманових поверхонь роду два отримано канонічні змінні дія-кут за допомогою геометричної теорії Вейля–Петерсона. Побудовані генератори Лоренца і гамільтоніан задають часову еволюцію геометрії поверхні за сценарієм “великого відскоку” і визначають квантовий спектр площі фазового простору.

- За допомогою побудованої статистичної міри як ряду за групою симетрій ріманової поверхні роду два, обчислено мультифрактальні показники спектра довжин напрямлених графів восьмигілкового дерева Кейлі. Виявлено застосовність теорії ланцюгів Маркова для опису вказаного спектру і міри.

- У калібрувально-інваріантній схемі обчислень знайдено термодинамічні функції, що характеризують ефект екранування в слабконеідеальній системі релятивістських зарядів з прямою гравітаційною взаємодією.

- Для ансамблю екстремальних чорних дір, описуваному статичним роз-

в'язком Маджумдара–Папапетру рівнянь Ейнштейна–Максвела, отримано середнє значення гравітаційної затримки часу у статистиці Бозе–Ейнштейна, інфінітній, Фермі–Дірака і класичній. Зокрема виявлено, що затримка часу в інфінітній статистиці є меншою ніж в статистиці Бозе–Ейнштейна.

- Показано, що просторовий розподіл частинок, отриманий у запропонованій моделі з деформованим комутатором для хвильової функції бозе-конденсату з гравітаційною і парною взаємодіями в наближенні Томаса–Фермі, відтворює відомий розподіл бозе-конденсатної темної матерії гало карликових галактик з повільним обертанням.

- Чисельно отримано розв'язки стаціонарного рівняння Гросса–Пітаєвського з гравітаційною і тричастинковою взаємодіями і термодинамічні функції, за допомогою яких виявлено існування рідино- і газоподібного станів, фазовий перехід першого роду між якими обумовлюється квантовими флуктуаціями. Надано оцінки фізичних величин для темної матерії галактичного ядра.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. M. Abramowitz and I.A. Stegun, editors, Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables (Dover Publ., New York, 1972).
2. K.H. Ackermann *et al.*, Elliptic flow in $Au + Au$ collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 130\text{GeV}$, *Phys. Rev. Lett.* **86**(3), 402–407 (2001).
3. J. Adams *et al.*, Three-pion Hanbury-Brown–Twiss correlations in relativistic heavy-ion collisions from the STAR experiment, *Phys. Rev. Lett.* **91**(26), 262301 (6 pages) (2003).
4. J. Adams *et al.*, Experimental and theoretical challenges in the search for the quark–gluon plasma: The STAR Collaboration’s critical assessment of the evidence from RHIC collisions, *Nucl. Phys. A* **757**, 102–183 (2005).
5. K. Adcox *et al.* (PHENIX Collaboration), Transverse-mass dependence of two-pion correlations in $Au + Au$ collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 130\text{GeV}$, *Phys. Rev. Lett.* **88**(19), 192302 (6 pages) (2002).
6. K. Adcox *et al.*, Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus–nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX Collaboration, *Nucl. Phys. A* **757**, 184–283 (2005).
7. C. Adler *et al.* (STAR Collaboration), Pion interferometry of $\sqrt{s_{NN}} = 130\text{GeV}$ $Au + Au$ collisions at RHIC, *Phys. Rev. Lett.* **87**(8), 082301 (6 pages) (2001).
8. S.C. Ahern, J.W. Norbury, and W.J. Poyser, Graviton production in relativistic heavy-ion collisions, *Phys. Rev. D* **62**(11), 116001 (4 pages) (2000).
9. A. Aigon-Dupuy, P. Buser, M. Cibils, A.F. Kunzle, and F. Steiner, Hyperbolic octagons and Teichmüller space in genus 2, *J. Math. Phys.* **46**, 033513 (2005).
10. S.V. Akkelin, Fluctuations driven isotropization of the quark-gluon plasma in heavy ion collisions, *Phys. Rev. C* **78**(1), 014906 (9 pages) (2008).

11. S.V. Akkelin, Y. Hama, Iu.A. Karpenko, and Yu.M. Sinyukov, Hydro-kinetic approach to relativistic heavy ion collisions, *Phys. Rev. C* **78**(3), 034906 (15 pages) (2008).
12. S.V. Akkelin and Yu.M. Sinyukov, Phase-space densities and effects of resonance decays in a hydrodynamic approach to heavy ion collisions, *Phys. Rev. C* **70**(6), 064901 (17 pages) (2004).
13. M. Alcubierre, F.S. Guzman, T. Matos, D. Nunez, L.A. Urena-Lopez, and P. Wiederhold, Galactic collapse of scalar field dark matter, *Class. Quantum Grav.* **19**(19), 5017–5024 (2002).
14. J. Ambjorn, B. Durhuus, Th. Jonsson, and O. Jonsson, Quantum geometry: A statistical field theory approach (Cambridge Univ. Press, 1997).
15. G. Amelino-Camelia, Testable scenario for relativity with minimum length, *Phys. Lett. B* **510**, 255–263 (2001).
16. G. Amelino-Camelia, Relativity in spacetimes with short-distance structure governed by an observer-independent (Planckian) length scale, *Int. J. Mod. Phys. D* **11**(1), 35–59 (2002).
17. D.V. Anchishkin and A.V. Nazarenko, Liquid-like phases of $\pi^+\pi^-$ matter, *J. Phys. Stud.* **10**(2), 93–97 (2006).
18. P. Angelopoulou *et al.*, Real Planck distribution for a complex Q-boson gas, *J. Phys. A: Math. Gen.* **27**(17), L605–L609 (1994).
19. G. Arcadi *et al.*, The waning of the WIMP? A review of models, searches, and constraints, *Eur. Phys. J. C* **78**, 203 (2018).
20. M. Arik and D.D. Coon, Hilbert spaces of analytic functions and generalized coherent states, *J. Math. Phys.* **17**(4), 524 (1976).
21. M. Arik, E. Demircan, T. Turgut, L. Ekinici, and M. Mungan, Fibonacci oscillators, *Z. Phys. C* **55**, 89–95 (1992).
22. N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter, *Phys. Lett. B* **429**, 263–272 (1998).

23. P. Arnold and J. Lenaghan, Abelianization of QCD plasma instabilities, *Phys. Rev. D* **70**(11), 114007 (21 pages) (2004).
24. P. Arnold, J. Lenaghan, G.D. Moore, and L.G. Yaffe, Apparent thermalization due to plasma instabilities in the quark-gluon plasma, *Phys. Rev. Lett.* **94**(7), 072302 (4 pages) (2005).
25. I. Arsene *et al.*, Quark–gluon plasma and color glass condensate at RHIC? The perspective from the BRAHMS experiment, *Nucl. Phys. A* **757**, 1–27 (2005).
26. A. Ashtekar, T. Pawłowski, and P. Singh, Quantum nature of the Big Bang, *Phys. Rev. Lett.* **96**(145), 141301 (4 pages) (2006).
27. S.S. Avancini, M.E. Bracco, M. Chiapparini, and D.P. Menezes, Relativistic mean-field approximation in a density dependent parametrization model at finite temperature, *Phys. Rev. C* **67**(2), 024301 (7 pages) (2003).
28. A. Ayala, J. Jalilian-Marian, L. McLerran, and R. Venugopalan Quantum corrections to the Weizsäcker-Williams gluon distribution function at small x , *Phys. Rev. D* **53**(1), 458–475 (1996).
29. B.B. Back *et al.*, The PHOBOS perspective on discoveries at RHIC, *Nucl. Phys. A* **757**, 28–101 (2005).
30. R. Baier, A.H. Mueller, D. Schiff, and D.T. Son, “Bottom-up” thermalization in heavy ion collisions, *Phys. Lett. B* **502**, 51–58 (2001).
31. H. Balasin and D. Grumiller, The ultrarelativistic limit of 2D dilaton gravity and its energy–momentum tensor, *Class. Quantum Grav.* **21**(12), 2859–2872 (2004).
32. M. Baldo and A. Grasso, Dispersive effects in neutron matter superfluidity, *Phys. Lett. B* **485**, 115–120 (2000).
33. M. Banados, L.J. Garay, and M. Henneaux, Existence of local degrees of freedom for higher dimensional pure Chern-Simons theories, *Phys. Rev. D* **53**(2), R593–R596 (1996).
34. N. Bar, D. Blas, K. Blum, and S. Sibiryakov, Galactic rotation curves versus ultralight dark matter: Implications of the soliton-host halo relation, *Phys.*

- Rev. D* **98**(8), 083027 (23 pages) (2018).
35. I.V. Barashenkov and V.G. Makhankov, Soliton-like “bubbles” in a system of interacting bosons, *Phys. Lett. A* **128**, 52–56 (1988).
 36. J. Bardeen, L.N. Cooper, and J.R. Schrieffer, Theory of superconductivity, *Phys. Rev.* **108**(5), 1175–1204 (1957).
 37. L.A. Barreiro, Nuclear saturation with QCD sum rules, arXiv: nucl-th/0001065 (2000).
 38. S.A. Bass, B. Müller, and D.K. Srivastava, Parton rescattering and screening in Au + Au collisions at RHIC, *Phys. Lett. B* **551**, 277–283 (2003).
 39. M. Belkacem *et al.*, Searching for the nuclear liquid-gas phase transition in Au+Au collisions at 35 MeV/nucleon, *Phys. Rev. C* **54**(5), 2435–2444 (1996).
 40. K.M. Belotsky *et al.*, Signatures of primordial black hole dark matter, *Mod. Phys. Lett. A* **29**(37), 1440005 (2014).
 41. C.L. Bennett *et al.*, First-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Preliminary maps and basic results, *Astrophys. J. Suppl.* **148**(1), 1–27 (2003).
 42. L. Berezhiani and J. Khoury, Theory of dark matter superfluidity, *Phys. Rev. D* **92**(10), 103510 (27 pages) (2015).
 43. G. Bertone and D. Hooper, History of dark matter, *Rev. Mod. Phys.* **90**, 045002 (2018).
 44. M. Bezares and C. Palenzuela, Gravitational waves from dark boson star binary mergers, *Class. Quantum Grav.* **35**(23), 234002 (2018).
 45. A. Bhoonah, J. Bramante, S. Nerval, and N.-Q. Song, Gravitational waves from dark sectors, oscillating inflatons, and mass boosted dark matter, arXiv: 2008.12306 (2020).
 46. D. Bini, A. Geralico, and R. Ruffini, Charged massive particle at rest in the field of a Reissner-Nordström black hole, *Phys. Rev. D* **75**(4), 044012 (33 pages) (2007).

47. L.F. Blazhievskii, A partition function representation through Grassmann variables, *Theor. Math. Phys.* **126**(2), 250–257 (2001).
48. M. Bleicher, S. Hofmann, S. Hossenfelder, and H. Stöcker, Black hole production in large extra dimensions at the Tevatron: a chance to observe a first glimpse of TeV scale gravity, *Phys. Lett. B* **548**, 73–76 (2002).
49. G.R. Blumenthal, S.M. Faber, J.R. Primack, and M.J. Rees, Formation of galaxies and large-scale structure with cold dark matter, *Nature* **311**, 517–524 (1984).
50. C.G. Bohmer and T. Harko, Can dark matter be a Bose–Einstein condensate?, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **06**, 025 (2007).
51. A. Bohr, B.R. Mottelson, and D. Pines, Possible analogy between the excitation spectra of nuclei and those of the superconducting metallic state, *Phys. Rev.* **110**(4), 936–938 (1958).
52. W.B. Bonnor, The equilibrium of a charged test particle in the field of a spherical charged mass in general relativity, *Class. Quantum Grav.* **10**(10), 2077–2082 (1993).
53. M.S. Borysova, Yu.M. Sinyukov, S.V. Akkelin, B. Erasmus, and Iu.A. Karpenko, Hydrodynamic source with continuous emission in Au+Au collisions at $\sqrt{s} = 200$ GeV, *Phys. Rev. C* **73**(2), 024903 (8 pages) (2006).
54. A. Boyarsky, M. Drewes, T. Lasserre, S. Mertens, and O. Ruchayskiy, Sterile neutrino dark matter, *Prog. Part. N. Phys.* **104**, 1–45 (2019).
55. P. Bozek, Superfluidity with dressed nucleons, *Phys. Lett. B* **551**, 93–97 (2003).
56. R. Britto-Pacumio, A. Maloney, and A. Strominger, Spinning bound states of two and three black holes, *JHEP* **11**, 054 (2001).
57. I.M. Burban, On $(p, q; \alpha, \beta, l)$ -deformed oscillator and its generalized quantum Heisenberg–Weyl algebra, *Phys. Lett. A* **366**, 308–314 (2007).
58. P. Buser, *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces* (Birkhäuser, 1992).

59. P. Buser and R. Silhol, Some remarks on the uniformizing function in genus 2, *Geometriae Dedicata* **115**, 121–133 (2005).
60. A. Cappelli, M. Ciafaloni, and P. Valtancoli, Classical scattering in 2+1 gravity with N spinning sources, *Phys. Lett. B* **273**(4), 431–437 (1991).
61. S. Carlip, Erratum: (2+1)-dimensional Chern-Simons gravity as a Dirac square root, *Phys. Rev. D* **47**(4), 1729 (1993).
62. S. Carlip, Lectures on (2+1)-dimensional gravity, *J. Korean Phys. Soc.* **28**, 447 (1995).
63. S. Carlip and J.E. Nelson, Comparative quantizations of (2+1)-dimensional gravity, *Phys. Rev. D* **51**(10), 5643–5653 (1995).
64. B. Carr, F. Kühnel, and M. Sandstad, Primordial black holes as dark matter, *Phys. Rev. D* **94**(8), 083504 (28 pages) (2016).
65. D. Castaneda Valle and E.W. Mielke, Relativistic soliton collisions of axion type dark matter, *Phys. Lett. B* **758**, 93–97 (2016).
66. E. Castellanos, C. Escamilla-Rivera, and J. Mastache, Is a Bose–Einstein condensate a good candidate for dark matter? A test with galaxy rotation curves, *Int. J. Mod. Phys. D* **29**(09), 2050063 (2020).
67. H.E. Castillo, C. Chamon, E. Fradkin, P.M. Goldbart, and C. Mudry, Exact calculation of multifractal exponents of the critical wave function of Dirac fermions in a random magnetic field, *Phys. Rev. B* **56**(16), 10668–10677 (1997).
68. A. Chakrabarti and R. Jagannathan, A (p, q) -oscillator realization of two-parameter quantum algebras, *J. Phys. A: Math. Gen.* **24**(13), L711–L718 (1991).
69. C. Chamon, C. Mudry, and X.-G. Wen, Localization in two dimensions, gaussian field theories, and multifractality, *Phys. Rev. Lett.* **77**(20), 4194–4197 (1996).
70. S. Chandrasekhar, The equilibrium of distorted polytropes: (I). The rotational problem, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **93**(5), 390–406 (1933).

71. Z. Chang and S.-X. Chen, Thermodynamics of a deformed Bose gas, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**(46), 9731–9743 (2002).
72. P.H. Chavanis, Dissipative self-gravitating Bose-Einstein condensates with arbitrary nonlinearity as a model of dark matter halos, *Eur. Phys. J. Plus* **132**, 248 (2017).
73. P.H. Chavanis, Phase transitions between dilute and dense axion stars, *Phys. Rev. D* **98**(2), 023009 (2018).
74. L. Chekhov and V.V. Fock, A quantum Teichmüller space, *Theor. Math. Phys.* **120**, 1245–1259 (1999).
75. S.-R. Chen, H.-Yu Schive, and T. Chiueh, Jeans analysis for dwarf spheroidal galaxies in wave dark matter, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **468**(2), 1338–1348 (2017).
76. C. Chicone and B. Mashhoon, Tidal dynamics of relativistic flows near black holes, *Annalen Phys.* **14**, 290–308 (2005).
77. W.S. Chung, K.S. Chung, S.T. Nam, and C.I. Um, Generalized deformed algebra, *Phys. Lett. A* **183**, 363–370 (1993).
78. W.S. Chung, A.M. Gavrilik, and A.V. Nazarenko, Photon gas at the Planck scale within the doubly special relativity, *Physica A* **533**, 121928 (10 pages) (2019).
79. A. Comtet, S. Nechaev, and R. Voituriez, Multifractality in uniform hyperbolic lattices and in quasi-classical Liouville field theory, *J. Stat. Phys.* **102**, 1 (2001).
80. M. Craciun and T. Harko, Constraining Bose-Einstein condensate dark matter with the galaxy rotation curves of the SPARK sample, *Romanian Astron. J.* **29**(2), 109–126 (2019).
81. H. Crater and L. Lusanna, The rest-frame Darwin potential from the Liénard–Wiechert solution in the radiation gauge, *Ann. Phys.* **289**(2), 87–177 (2001).

82. D. Croon, V. Sanz, and G. White, Model discrimination in gravitational wave spectra from dark phase transitions, *J. High Energ. Phys.* **2018**, 203 (2018).
83. T. Csörgő, S.V. Akkelin, Y. Hama, B. Lukacs, and Yu.M. Sinyukov, Observables and initial conditions for self-similar ellipsoidal flows, *Phys. Rev. C* **67**(3), 034904 (5 pages) (2003).
84. D.G. Currie, T.F. Jordan, and E.C.G. Sudarshan, Relativistic invariance and Hamiltonian theories of interacting particles, *Rev. Mod. Phys.* **35**(2), 350–375 (1963).
85. C.G. Darwin, The dynamical motions of charged particles, *Phil. Mag.* **39**(233), 537–551 (1920).
86. S. Das and R.K. Bhaduri, Dark matter and dark energy from a Bose-Einstein condensate, *Class. Quantum Grav.* **32**(10), 105003 (2015).
87. S. Davids, A state sum model for (2+1) Lorentzian quantum gravity, arXiv: gr-qc/0110114 (129 pages) (2001).
88. S. Davidson, Axions: Bose Einstein condensate or classical field?, *Astropart. Phys.* **65**, 101–107 (2015).
89. D.J. Dean and M. Hjorth-Jensen, Pairing in nuclear systems: from neutron stars to finite nuclei, *Rev. Mod. Phys.* **75**(2), 607–656 (2003).
90. H. Deng, M.P. Hertzberg, M.H. Namjoo, and A. Masoumi, Can light dark matter solve the core-cusp problem?, *Phys. Rev. D* **98**(2), 023513 (10 pages) (2018).
91. E. D'Hoker and D.H. Phong, The geometry of string perturbation theory, *Rev. Mod. Phys.* **60**, 917–1065 (1988).
92. A. Diez-Tejedor, A.X. Gonzalez-Morales, and S. Profumo, Dwarf spheroidal galaxies and Bose-Einstein condensate dark matter, *Phys. Rev. D* **90**(4), 043517 (7 pages) (2014).
93. E. Dil and E. Kolay, Solution of deformed Einstein equations and quantum black holes, *Adv. in High Energy Phys.* **2016**, 3973706 (7 pages) (2016).

94. E. Dil, Can quantum black holes be (q, p) -fermions?, *Int. J. Mod. Phys. A* **32**(15), 1750080 (2017).
95. P.A.M. Dirac, Forms of relativistic dynamics, *Rev. Mod. Phys.* **21**(3), 392–399 (1949).
96. P.A.M. Dirac, Generalized Hamiltonian dynamics, *Can. J. Math.* **2**, 129–148 (1950).
97. A. Dumitru and M. Gyulassy, The effective pressure of a saturated gluon plasma, *Phys. Lett. B* **494**, 215–220 (2000).
98. A. Dumitru and Y. Nara, QCD plasma instabilities and isotropization, *Phys. Lett. B* **621**, 89–95 (2005).
99. D. Durand, E. Suraud, and B. Tamain, *Nuclear dynamics in the nucleonic regime* (IOP Publishing Ltd, London, 2001).
100. A.A. Duviriyak, The two-body time-asymmetric relativistic models with field-type interaction, *Gen. Rel. Grav.* **30**, 1147–1169 (1998).
101. Z. Ebadi, B. Mirza, and H. Mohammadzadeh, Infinite statistics condensate as a model of dark matter, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **11**, 057 (2013).
102. A. Einstein Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, *Annalen Phys.* **49**(7), 769–822 (1916).
103. J.B. Elliot *et al.*, Liquid to vapor phase transition in excited nuclei, *Phys. Rev. Lett.* **88**(4), 042701 (4 pages) (2002).
104. J.B. Elliot *et al.*, Constructing the phase diagram of finite neutral nuclear matter, *Phys. Rev. C* **67**(2), 024609 (14 pages) (2003).
105. H.-Th. Elze, T. Kodama, Y. Hama, M. Makler, and J. Rafelski, Variational approach to hydrodynamics - from QGP to general relativity, arXiv: hep-ph/9809570 (1998).
106. K. Ezawa, Transition amplitude in 2+1 dimensional Chern-Simons gravity on a torus, *Int. J. Mod. Phys. A* **9**, 4727–4746 (1994).
107. J.J. Fan, Ultralight repulsive dark matter and BEC, *Phys. Dark Univ.* **14**, 84–94 (2016).

108. E.G.M. Ferreira, Ultra-Light Dark Matter, arXiv: astro-ph/2005.03254 (2020).
109. V.V. Fock, Dual Teichmüller spaces, arXiv: dg-ga/9702018 (32 pages) (1997).
110. L. Freidel, A Ponzano-Regge model of Lorentzian 3-dimensional gravity, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **88**, 237–240 (2000).
111. L. Freidel, E. Livine, and C. Rovelli, Spectra of length and area in (2+1) Lorentzian loop quantum gravity, *Class. Quantum Grav.* **20**(8), 1463 (2003).
112. L. Freidel, R.B. Mann, and E.M. Popescu, Canonical analysis of the BCEA topological matter model coupled to gravitation in (2+1) dimensions, *Class. Quantum Grav.* **22**(16), 3363–3379 (2005).
113. R.J. Fries, J.I. Kapusta, and Y. Li, From color fields to quark gluon plasma, *Nucl. Phys. A* **774**, 861–864 (2006).
114. U. Frisch and G. Parisi, In: *Turbulence and Predicability of Geophysical Flows and Climate Dynamics*, Eds. M. Ghil, R. Benzi, G. Parisi (North-Holland, New York, 1985).
115. A. Gammal, T. Frederico, L. Tomio, and Ph. Chomaz, Liquid-gas phase transition in Bose-Einstein condensates with time evolution, *Phys. Rev. A* **61**(5), 051602 (4 pages) (2000).
116. V.A. Gani, M.Yu. Khlopov, and D.N. Voskresensky, Double charged heavy constituents of dark atoms and superheavy nuclear objects, *Phys. Rev. D* **99**(1), 015024 (7 pages) (2019).
117. C.-J. Gao, M. Kunz, A.R. Liddle, and D. Parkinson, Unified dark energy and dark matter from a scalar field different from quintessence, *Phys. Rev. D* **81**(4), 043520 (9 pages) (2010).
118. J. Gasser and H. Leutwyler, Chiral perturbation theory to one loop, *Ann. Phys.* **158**(1), 142–210 (1984).
119. J. Gasser and H. Leutwyler, Chiral perturbation theory: Expansions in the mass of the strange quark, *Nucl. Phys. D* **250**, 465–516 (1985).

120. R. Gatt and J.N. Grima, Negative compressibility, *Phys. Status Solidi*, **2**(5), 236–238 (2008).
121. A.M. Gavrilik, I.I. Kachurik, and A.P. Rebesh, Quasi-Fibonacci oscillators, *J. Phys. A: Math. Theor.* **43**(24), 245204 (2010).
122. A.M. Gavrilik and A.P. Rebesh, Intercepts of the momentum correlation functions in the μ -Bose gas model and their asymptotics, *Eur. Phys. J. A* **47**, 55 (2011).
123. A.M. Gavrilik and Yu.A. Mishchenko, Exact expressions for the intercepts of r -particle momentum correlation functions in μ -Bose gas model, *Phys. Lett. A* **376**(36), 2484–2489 (2012).
124. A.M. Gavrilik and Yu.A. Mishchenko, Virial coefficients in the $(\tilde{\mu}, q)$ -deformed Bose gas model related to compositeness of particles and their interaction: Temperature-dependence problem, *Phys. Rev. E* **90**(5), 052147 (8 pages) (2014).
125. A.M. Gavrilik and Yu.A. Mishchenko, Correlation function intercepts for $\tilde{\mu}, q$ -deformed Bose gas model implying effective accounting for interaction and compositeness of particles, *Nucl. Phys. B* **891**, 466–481 (2015).
126. A.M. Gavrilik, I.I. Kachurik, M.V. Khelashvili, and A.V. Nazarenko, Condensate of μ -Bose gas as a model of dark matter, *Physica A* **506**, 835–843 (2018).
127. A.M. Gavrilik and A.V. Nazarenko, Statistics effects in extremal black holes ensemble, *Int. J. Mod. Phys. A* **34**, 1950215 (16 pages) (2019).
128. A.M. Gavrilik, I.I. Kachurik, and M.V. Khelashvili, Galaxy rotation curves in the μ -deformation based approach to dark matter, *Ukr. J. Phys.* **64**(11), 1042–1049 (2019).
129. A.M. Gavrilik, M.V. Khelashvili, and A.V. Nazarenko, Bose–Einstein condensate dark matter model with three-particle interaction and two-phase structure, *Phys. Rev. D* **102**(8), 083510 (13 pages) (2020).

130. K. Geiger and B. Müller, Dynamics of parton cascades in highly relativistic nuclear collisions, *Nucl. Phys. B* **369**, 600–654 (1992).
131. F. Gelis and R. Venugopalan, Three lectures on multi-particle production in the glasma, *Acta Phys. Polon. B* **37**, 3253–3314 (2006).
132. S.B. Giddings and A. Strominger, Dynamics of extremal black holes, *Phys. Rev. D* **46**(2), 627–637 (1992).
133. J. Goodman, Repulsive dark matter, *New Astron.* **5**(2), 103–107 (2000).
134. T.R. Govindarajan and N. Kalyanapuram, Stueckelberg Bosons as ultralight dark matter candidate, *Mod. Phys. Lett. A* **34**(40), 1950330 (2019).
135. D.S. Grebenkov and B.-T. Nguyen, Geometrical structure of Laplacian eigenfunctions, *SIAM Review* **55**(4), 601–667 (2013).
136. D.S. Grebenkov, A physicist’s guide to explicit summation formulas involving zeros of Bessel functions and related spectral sums, arXiv: 1904.11190 (2019).
137. O.W. Greenberg, Example of infinite statistics, *Phys. Rev. Lett.* **64**(7), 705–708 (1990).
138. W. Greiner, S. Schramm, and E. Stein, *Quantum chromodynamics* (Springer-Verlag, Berlin, 2002).
139. A.M. Grundland, J.A. Tuszynski, and P. Winternitz, New classes of exact solutions of the ϕ^6 model in 3+1 dimensions, *Phys. Lett. A* **119**, 340–344 (1987).
140. A.M. Grundland, J.A. Tuszynski, and P. Winternitz, Group theory and solutions of classical field theories with polynomial nonlinearities, *Found. Phys.* **23**, 633–665 (1993).
141. K. Gupta and A. Stern, Spin and statistics in 2+1 gravity, preprint SU–4228–463 (1991).
142. R. Gupta, C. Bach, and H. Rosu, Planck distribution for a complex q-boson gas, *J. Phys. A: Math. Gen.* **27**(5), 1427–1433 (1994).
143. A.H. Guth, M.P. Hertzberg, and C. Prescod-Weinstein, Do dark matter axions form a condensate with long-range correlation?, *Phys. Rev. D* **92**(14),

- 103513 (14 pages) (2015).
144. M.C. Gutzwiller, *Chaos in classical and quantum mechanic* (Springer-Verlag, New York, 1990).
 145. M. Gyulassy, Y. Pang, and B. Zhang, Transverse energy evolution as a test of parton cascade models, *Nucl. Phys. A* **626**, 999–1018 (1997).
 146. M. Gyulassy, Iu.A. Karpenko, A.V. Nazarenko, and Yu.M. Sinyukov, HBT and initial conditions for hydrodynamic expansion in A+A collisions, *Braz. J. Phys.* **27**(3a), 1031–1038 (2007).
 147. T.C. Halsey, P. Meakin, and I. Procaccia, Scaling structure of the surface layer of diffusion-limited aggregates, *Phys. Rev. Lett.* **56**(8), 854–857 (1986).
 148. T.C. Halsey, M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, I. Procaccia, and B.I. Shraiman, Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets, *Phys. Rev. A* **33**(2), 1141–1151 (1986).
 149. T. Harko, Bose-Einstein condensation of dark matter solves the core/cusp problem, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **05**, 022 (2011).
 150. T. Harko and E.J.M. Madarassy, Finite temperature effects in Bose-Einstein Condensed dark matter halos, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **01**, 020 (2012).
 151. T. Harko, Gravitational collapse of Bose-Einstein condensate dark matter halos, *Phys. Rev. D* **89**(8), 084040 (17 pages) (2014).
 152. T. Harko, P. Liang, S.-D. Liang, and G. Mocanu, Testing the Bose-Einstein Condensate dark matter model at galactic cluster scale, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **11**, 027 (2015).
 153. T. Harko, Jeans instability and turbulent gravitational collapse of Bose-Einstein condensate dark matter halos, *Eur. Phys. J. C* **79**, 787 (2019).
 154. J.B. Hartle and S.W. Hawking, Solutions of the Einstein-Maxwell equations with many black holes, *Commun. Math. Phys.* **26**(2), 87–101 (1972).
 155. D. Harvey, R. Massey, T. Kitching, A. Taylor, and E. Tittley, The nongravitational interactions of dark matter in colliding galaxy clusters, *Science* **347**, 1462–1465 (2015).

156. P. Havas and J.N. Goldberg, Lorentz-invariant equations of motion of point masses in the general theory of relativity, *Phys. Rev.* **128**(1), 398–414 (1962).
157. S.W. Hawking, Particle creation by black holes, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199–220 (1975).
158. U. Heinz and P. Kolb, Early thermalization at RHIC, *Nucl. Phys. A* **702**, 269–280 (2002).
159. T. Hirano, What can we learn from hydrodynamic analysis of elliptic flow?, *Nucl. Phys. A* **774**(7), 531–534 (2006).
160. G.P. Horedt, Exact solutions of the Lane-Emden equation in N -dimensional space, *Astron. Astrophys.* **160**, 148–156 (1986).
161. C.J. Horowitz and J. Piekarewicz, Neutron radii of ^{208}Pb and neutron stars, *Phys. Rev. C* **64**(6), 062802 (2001).
162. A. Hosoya and K. Nakao, (2+1)-dimensional pure gravity for an arbitrary closed initial surfac, *Class. Quantum Grav.* **7**(2), 163–176 (1990).
163. A. Hosoya and K. Nakao, (2+1)-dimensional quantum gravity: case of torus universe, *Prog. Theor. Phys.* **84**(4), 739–748 (1990).
164. S. Hossenfelder, The soccer-ball problem, *SIGMA* **10**, 074 (8 pages) (2014).
165. W. Hu, R. Barkana, and A. Gruzinov, Fuzzy cold dark matter: The wave properties of ultralight particles *Phys. Rev. Lett.* **85**(6), 1158–1161 (2000).
166. B.D. Hughes, *Random walks and random environments*, Vol. 1 (Clarendon Press, Oxford, 1995).
167. L. Hui, J.P. Ostriker, S. Tremaine, and E. Witten, Ultralight scalars as cosmological dark matter, *Phys. Rev. D* **95**(4), 043541 (32 pages) (2017).
168. T.J. Humanic, B. Koch, and H. Stöcker, Signatures for black hole production from hadronic observables at the Large hadron collider, *Int. J. Mod. Phys. E* **16**(3), 841–851 (2007).
169. Y. Imayoshi and M. Taniguchi, *An introduction to Teichmüller space* (Springer-Verlag, Tokyo, 1992).

170. R. Jackiw, Quantum meaning of classical field theory, *Rev. Mod. Phys.* **49**(3), 681–706 (1977).
171. A. Jannussis, New deformed Heisenberg oscillator, *J. Phys. A: Math. Gen.* **26**(5), L233–L237 (1993).
172. H. Jaqaman, A.Z. Mekjian, and L. Zamick, Nuclear condensation, *Phys. Rev. C* **27**, 2782 (1983).
173. M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, and I. Procaccia, Scaling structure and thermodynamics of strange sets, *Phys. Rev. A* **36**(3), 1409–1420 (1987).
174. M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, A. Libchaber, I. Procaccia, and J. Stavans, Global universality at the onset of chaos: results of a forced Rayleigh-Bénard experiment, *Phys. Rev. Lett.* **55**(25), 2798–2801 (1985).
175. R.D. Jones, Comments on “Time-symmetric, approximately relativistic particle interactions and radiation”, *Phys. Rev. D* **25**(2), 591–592 (1982).
176. S. Judes and M. Visser, Conservation laws in “doubly special relativity”, *Phys. Rev. D* **68**(4), 045001 (4 pages) (2003).
177. F. Jüttner, Das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung in der Relativtheorie, *Annalen Phys.* **34**, 856–882 (1911).
178. F. Kahlhoefer, K. Schmidt-Hoberg, J. Kummer, and S. Sarkar, On the interpretation of dark matter self-interactions in Abell 3827, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **452**(1), L54–L58 (2015).
179. A. Kamada, M. Kaplinghat, A.B. Pace, and H.-B. Yu, Self-interacting dark matter can explain diverse galactic rotation curves, *Phys. Rev. Lett.* **119**(11), 111102 (6 pages) (2017).
180. V.A. Karnaukhov *et al.*, Critical temperature for the nuclear liquid-gas phase transition, *Phys. Rev. C* **67**(1), 011601 (4 pages) (2003).
181. R.M. Kashaev, On the spectrum of Dehn twists in quantum Teichmüller theory, arXiv: math.QA/0008148 (13 pages) (2000).
182. D. Katzen and I. Procaccia, Phase transitions in the thermodynamic formalism of multifractals, *Phys. Rev. Lett.* **58**(12), 1169–1172 (1987).

183. D. Kharzeev, E. Levin, and K. Tuchin, Multiparticle production and thermalization in high-energy QCD, *Phys. Rev. C* **75**(4), 044903 (13 pages) (2007).
184. S. Khlebnikov and I. Tkachev, Quantum dew: Formation of quantum liquid in a nonequilibrium Bose gas, *Phys. Rev. D* **61**(8), 083517 (5 pages) (2000).
185. M.Yu. Khlopov, B.A. Malomed and Ya.B. Zeldovich, Gravitational instability of scalar field and primordial black holes, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **215**, 575–589 (1985).
186. A. Klemm, R. Metzler, and R. Kimmich, Diffusion on random-site percolation clusters: Theory and NMR microscopy experiments with model objects, *Phys. Rev. E* **65**(2), 021112 (11 pages) (2002).
187. S. Kniege *et al.* (NA49 Collaboration), Rapidity and transverse momentum dependence of Bose–Einstein correlations measured at 20, 30, 40, 80 and 158 A.GeV beam energy, *J. Phys. G* **30**(8), S1073–S1077 (2004).
188. S. Kokarev, Gravity as a bend of 4D elastic plate, arXiv: gr-qc/0201009 (2002).
189. P.F. Kolb, P. Huovinen, U. Heinz, and H. Heiselberg, Elliptic flow at SPS and RHIC: from kinetic transport to hydrodynamics, *Phys. Lett. B* **500**, 232–240 (2001).
190. J.A. Kornblatt *et al.*, Materials with Negative compressibilities, *Science* **281**(5374), 143 (1998).
191. D.S. Kosov, A.I. Vdovin, and J. Wambach, Nuclear many-body problem at finite temperature: A TDF approach, arXiv: nucl-th/9710002 (1997).
192. A. Kostyuk, M. Gorenstein, H. Stöcker, and W. Greiner, Phase transition in hot pion matter, *Phys. Lett. B* **500**, 273–278 (2001).
193. A.Krasnitz, R.Venugopalan *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 4309; A. Krasnitz, Y. Nara, R. Venugopalan: *Nucl. Phys.* **A717** (2003) 268, **A727** (2003) 427.
194. J.E. Krizan and P. Havas, Relativistic corrections in the statistical mechanics of interacting particles, *Phys. Rev.* **128**(6), 2916–2924 (1962).

195. J.E. Krizan, Reply to Comments on “Time-symmetric, approximately relativistic particle interactions and radiation”, *Phys. Rev. D* **25**(2), 593–594 (1982).
196. E. Kun, Z. Keresztes, S. Das, and L.A. Gergely, Dark matter as a non-relativistic Bose–Einstein condensate with massive gravitons, *Symmetry* **10**(10), 520 (2018).
197. E. Kun, Z. Keresztes, and L.A. Gergely, Slowly rotating Bose-Einstein condensate compared with the rotation curves of 12 dwarf galaxies, *Astron. Astrophys.* **633**, A75 (9 pages) (2020).
198. R. Lakes and K.W. Wojciechowski, Negative compressibility, negative Poisson’s ratio, and stability *Phys. Status Solidi* **245**(3), 545–551 (2008).
199. L.D. Landau, On the multiparticle production in high-energy collisions, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Fiz.* **17**, 51–64 (1953).
200. G. Landsberg, Black holes at future colliders and beyond, *J. Phys. G* **32**, R337 (2006).
201. T. Lappi, Energy density of the glasma, *Phys. Lett. B* **643**, 11–16 (2006).
202. J.-W. Lee and I.-G. Koh, Galactic halos as boson stars *Phys. Rev. D* **53**(4), 2236–2239 (1996).
203. J.-W. Lee, S. Lim, and D. Choi, BEC dark matter can explain collisions of galaxy clusters, arXiv: 0805.3827 (2008).
204. J.-W. Lee, Characteristic size and mass of galaxies in the Bose–Einstein condensate dark matter model, *Phys. Lett. B* **756**, 166–169 (2016).
205. J.-W. Lee, Brief history of ultra-light scalar dark matter models, *EPJ Web Conf.* **168**, 06005 (2018).
206. S.B. Lee and H. Nakanishi, Finite size analysis of eigenvalue spectrum for random walks on a critical percolation cluster in four dimensions, *J. Phys. A* **33**(15), 2943–2950 (2000).
207. S.-Y. Lee, J. Thompson, S. Raeisi, P. Kurzynski, and D. Kaszlikowski, Quantum information approach to Bose–Einstein condensation of composite bosons, *New J. Phys.* **17**, 113015 (12 pages) (2015).

208. F. Lelli, S.S. McGaugh, and J.M. Schombert, SPARC: Mass Models for 175 Disk Galaxies with Spitzer Photometry and Accurate Rotation Curves, *Astron. J.* **152**(6), 157 (14 pages) (2016).
209. A.V. Leonidov, Dense gluon matter in nuclear collisions, *Phys. Usp.* **48**(4), 323–343 (2005).
210. E.R. Livine and M. Martin-Benito, Group theoretical quantization of isotropic loop cosmology, *Phys. Rev. D* **85**(12), 124052 (25 pages) (2012).
211. R. Loll, Independent loop invariants for 2+1 gravity, *Class. Quantum Grav.* **12**(7), 1655–1662 (1995).
212. U. Lombardo and H. Schulze, Superfluidity in neutron star matter, *Lect. Notes Phys.* **578**, 30 (2001).
213. U. Lombardo, P. Schuck, and W. Zuo, Self-energy effects in the superfluidity of neutron matter, *Phys. Rev. C* **64**(2), 021301 (4 pages) (2001).
214. J.C. Long and J.C. Price, Current short-range tests of the gravitational inverse square law, *Comptes Rendus Physique* **4**, 337–346 (2003).
215. E.K. Luckins and R.A. Van Gorder, Bose–Einstein condensation under the cubic–quintic Gross–Pitaevskii equation in radial domains, *Ann. Phys.* **388**, 206–234 (2018).
216. J. Lukierski, A. Nowicki, H. Ruegg, and V.N. Tolstoy, q -deformation of Poincaré algebra, *Phys. Lett. B* **264**, 331–338 (1991).
217. J. Lukierski, A. Nowicki, and H. Ruegg, New quantum Poincaré algebra and κ -deformed field theory, *Phys. Lett. B* **293**, 344–352 (1992).
218. O. Luongo and H. Quevedo, A unified dark energy model from a vanishing speed of sound with emergent cosmological constant, *Int. J. Mod. Phys. D* **23**(2), 1450012 (2014).
219. L. Lusanna, The N - and 1-time classical descriptions of N -body relativistic kinematics and the electromagnetic interaction, *Int. J. Mod. Phys. A* **12**(4), 645–722 (1997).

220. A.J. Macfarlane, On q -analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group $SU(2)_q$, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**(21), 4581–4588 (1989).
221. J. Magueijo and L. Smolin, Lorentz invariance with an invariant energy scale, *Phys. Rev. Lett.* **88**(19), 190403 (4 pages) (2002).
222. S.D. Majumdar, A class of exact solutions of Einstein’s field equations, *Phys. Rev.* **72**(5), 390–398 (1947).
223. A. Maleki, S. Baghran, and S. Rahvar, Investigation of two colliding solitonic cores in fuzzy dark matter models, *Phys. Rev. D* **101**(2), 023508 (15 pages) (2020).
224. G. Mandanici, Undeformed (additive) energy conservation law in doubly special relativity, *Mod. Phys. Lett. A* **24**(10), 739–745 (2009).
225. N. Manojlovic and A. Mikovic, Ashtekar formulation of (2+1)-dimensional gravity on a torus, *Nucl. Phys. B* **385**, 571–586 (1992).
226. M.A. Martin-Delgado, Planck distribution for a q -boson gas, *J. Phys. A: Math. Gen.* **24**(21), L1285–L1291 (1991).
227. J. Mastorakos and P. Argyrakis, Transport on the percolation backbone, *Phys. Rev. E* **48**(6), 4847–4850 (1993).
228. F. Matera, G. Fabbri, and A. Dellafore, Relativistic approach to superfluidity in nuclear matter, *Phys. Rev. C* **56**(1), 228–237 (1997).
229. T. Matos and L.A. Ureña-López, Quintessence and scalar dark matter in the Universe, *Class. Quantum Grav.* **17**(13), L75–L81 (2001).
230. H.J. Matschull, On the relation between 2+1 Einstein gravity and Chern-Simons theory, *Class. Quantum Grav.* **16**(8), 2599–2609 (1999).
231. J. Mayer and M. Goeppert Mayer, *Statistical Mechanics* (Wiley, New York, 1940).
232. L. McLerran and R. Venugopalan, Computing quark and gluon distribution functions for very large nuclei, *Phys. Rev. D* **49**(5), 2233–2241 (1994).
233. L. McLerran and R. Venugopalan, Gluon distribution functions for very large nuclei at small transverse momentum, *Phys. Rev. D* **49**(7), 3352–3355 (1994).

234. L. McLerran and R. Venugopalan, Green's function in the color field of a large nucleus, *Phys. Rev. D* **50**(3), 2225–2233 (1994).
235. L. McLerran and R. Venugopalan, Fock space distributions, structure functions, higher twists, and small x , *Phys. Rev. D* **59**(9), 094002 (20 pages) (1999).
236. M.V. Medvedev, Properties of particles obeying ambiguous statistics, *Phys. Rev. Lett.* **78**(22), 4147–4150 (1997).
237. S. Meljanac, M. Milekovic, and S. Pallua, Unified view of deformed single-mode oscillator algebras, *Phys. Lett. B* **328**, 55–59 (1994).
238. R. Metzler, J.-H. Jeon, and A.G. Cherstvy, Non-Brownian diffusion in lipid membranes: Experiments and simulations, *Acta BBA-Biomembr.* **1858**(10), 2451–2467 (2016).
239. A.B. Migdal, Superfluidity and the moments of inertia of nuclei, *Sov. Phys. JETP*. **10**(1), 176 (1960).
240. G.A. Miller, Light front nuclear theory, *Nucl. Phys. A* **699**, 247–254 (2002).
241. D. Minic, Infinite statistics and black holes in matrix theory, arXiv: hep-th/9712202 (1997).
242. I.N. Mishustin and W. Greiner, Multipion droplets, *J. Phys. G* **19**(7), L101 (1993).
243. S.S. Mizrahi, J.P. Camargo Lima, and V.V. Dodonov, Energy spectrum, potential and inertia functions of a generalized f -oscillator, *J. Phys. A: Math. Theor.* **37**(11), 3707–3724 (2004).
244. R.N. Mohaparta, Infinite statistics and a possible small violation of the Pauli principle, *Phys. Lett. B* **242**, 407–411 (1990).
245. D. Molnar and M. Gyulassy, New solutions to covariant nonequilibrium dynamics, *Phys. Rev. C* **62**(5), 054907 (12 pages) (2000).
246. V. Moncrief Reduction of the Einstein equations in 2+1 dimensions to a Hamiltonian system over Teichmüller space, *J. Math. Phys.* **30**, 2907 (1989).
247. B. Moore, T. Jaglinski, D.S. Stone, and R.S. Lakes, Negative incremental bulk modulus in foams, *Philos. Mag. Lett.* **86**(10), 651–659 (2007).

248. St. Mrówczyński, Kinetic-theory approach to quark-gluon plasma oscillations, *Phys. Rev. D* **39**(7), 1940–1946 (1989).
249. S. Mrówczyński Plasma instability at the initial stage of ultrarelativistic heavy-ion collisions, *Phys. Lett. B* **314**(1), 118–121 (1993).
250. S. Mrówczyński, Color collective effects at the early stage of ultrarelativistic heavy-ion collisions, *Phys. Rev. C* **49**(4), 2191–2197 (1994).
251. S. Mrówczyński, Color filamentation in ultrarelativistic heavy-ion collisions, *Phys. Lett. B* **393**, 26–30 (1997).
252. S. Mrówczyński, A. Rebhan, and M. Strickland, Hard-loop effective action for anisotropic plasmas, *Phys. Rev. D* **70**(2), 025004 (7 pages) (2004).
253. S. Mrówczyński, Instabilities driven equilibration of the quark–gluon plasma, *Acta Phys. Polon. B* **37**, 427–454 (2006).
254. H. Muller and B.D. Serot, Phase transitions in warm, asymmetric nuclear matter, *Phys. Rev. C* **52**(4), 2072–2091 (1995).
255. Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. I, *Phys. Rev.* **122**(1), 345–358 (1961).
256. Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. II, *Phys. Rev.* **124**(1), 246–254 (1961).
257. Y. Nara, S.E. Vance, and P. Csizmadia, A study of parton energy loss in Au+Au collisions at RHIC using transport theory, *Phys. Lett. B* **531**, 209–215 (2002).
258. A.V. Nazarenko, Canonical realization of the Poincaré algebra for a relativistic system of charged particles plus electromagnetic field, *Proc. of Inst. of Math. of NAS of Ukraine* **30**(2), 343–349 (2000).
259. A.V. Nazarenko, Elimination of the field degrees of freedom in relativistic system of pointlike charges, *Int. J. Mod. Phys. A* **16**(30), 4865–4889 (2001).

260. A.V. Nazarenko, Canonical realization of Poincaré algebra: From field theory to direct-interaction theory, *Proc. of Inst. of Math. of NAS of Ukraine* **43**(2), 652–658 (2002).
261. A.V. Nazarenko, Classical relativistic system of pointlike masses with linearized gravitational interaction, *Acta Phys. Slovaca* **53**(1), 1–16 (2003).
262. A. Nazarenko Thermodynamic functions of a relativistic system of charges in the ring-diagram approximation, *Ukr. J. Phys.* **49**(2), 182–187 (2004).
263. A.V. Nazarenko, Relativistic direct interaction between nucleons derived from classical field theory, *Int. J. Mod. Phys. E* **13**(3), 631–645 (2004).
264. A.V. Nazarenko, Quantization of reduced Chern–Simons gravity with a source, *Int. J. Mod. Phys. A* **19**(28), 4883–4897 (2004).
265. A. Nazarenko, Time level splitting in quantum Chern–Simons gravity, *Class. Quantum Grav.* **22**, 2107–2120 (2005).
266. A.V. Nazarenko, Superfluidity in a system of neutrons with direct relativistic interaction, *Ukr. J. Phys.* **50**(3), 293–298 (2005).
267. A.V. Nazarenko, Evaporation of symmetric nuclear matter in weakly curved space, *Int. J. Mod. Phys. E* **15**(3), 561–570 (2006).
268. A.V. Nazarenko, The probability of the creation of extra dimensions in nuclear collisions, *Int. J. Mod. Phys. E* **17**(8), 1605–1618 (2008).
269. A.V. Nazarenko, Glasma evolution in partonic medium, *J. Phys. Stud.* **14**(3), 3202 (7 pages) (2010).
270. A.V. Nazarenko, Directed random walk on the lattices of genus two, *Int. J. Mod. Phys. B* **25**(26), 3415–3433 (2011).
271. A.V. Nazarenko, Directed random walk on the eight-branching Cayley tree, *Вісник Львів. Універ. Серія фізична* **48**, 253–269 (2013).
272. A.V. Nazarenko, Two-parametric hyperbolic octagons and reduced Teichmueller space in genus two, arXiv: 1301.5446 (12 pages) (2013).
273. A.V. Nazarenko, Area quantization of the parameter space of Riemann surfaces in genus two, *Ukr. J. Phys.* **58**(11), 1055–1064 (2013).

274. A.V. Nazarenko and Yu.A. Kulinich, Relativistic kinematics of two-parametric Riemann surface in genus two, *Hadronic J.* **39**(2), 181–198 (2016).
275. A.V. Nazarenko and V. Blavatska, A one-dimensional random walk in a multi-zone environment, *J. Phys. A: Math. Theor.* **50**, 185002 (11 pages) (2017).
276. A.V. Nazarenko and V. Blavatska, Asymmetric random walk in a one-dimensional multi-zone environment, *Ukr. J. Phys.* **62**(6), 508–517 (2017).
277. A.V. Nazarenko, Partition function of the Bose–Einstein condensate dark matter and the modified Gross–Pitaevskii equation, *Int. J. Mod. Phys. D* **29**(2), 2050018 (18 pages) (2020).
278. J. Nelson, Global constants in (2+1)-dimensional gravity, *Class. Quantum Grav.* **21**, S249 (2004).
279. J.E. Nelson and T. Regge, Homotopy groups and 2+1 dimensional quantum gravity, *Nucl. Phys. B* **328**(1), 190–202 (1989).
280. J.E. Nelson, T. Regge, and F. Zertuche, Homotopy groups and (2+1)-dimensional quantum de Sitter gravity, *Nucl. Phys. B* **339**, 516–532 (1990).
281. J.E. Nelson and T. Regge, 2+1 gravity for genus > 1 , *Commun. Math. Phys.* **141**, 211–223 (1991).
282. Y.J. Ng, Holographic foam, dark energy and infinite statistics, *Phys. Lett. B* **657**, 10–14 (2007).
283. T. Niksic, D. Vretenar, P. Finelli, and P. Ring, Relativistic Hartree–Bogoliubov model with density-dependent meson–nucleon couplings, *Phys. Rev. C* **66**(2), 024306 (15 pages) (2002).
284. H. Ninnemann, Gutzwiller’s octagon and the triangular billiard $T^*(2, 3, 8)$ as models for the quantization of chaotic systems by Selberg’s trace formula, *Int. J. Mod. Phys. B* **9**, 1647–1753 (1995).
285. T. Noumi, K. Saikawa, R. Sato, and M. Yamaguchi, Effective gravitational interactions of dark matter axions, *Phys. Rev. D* **89**(6), 065012 (23 pages) (2014).

286. T. Padmanabhan, Gravity as elasticity of spacetime: A paradigm to understand horizon thermodynamics and cosmological constant, *Int. J. Mod. Phys. D* **13**(10), 2293–2298 (2004).
287. A. Papapetrou, A static solution of the equations of the gravitational field for an arbitrary charge-distribution, *Proc. Roy. Irish Acad. A* **51**, 191–204 (1947).
288. S.V. Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow* (McGraw-Hill, New York, 1980).
289. R.B. Pathria and P.D. Beale, *Statistical mechanics* (Elsevier, Singapore, 2011).
290. P.J.E. Peebles, Fluid dark matter, *Astrophys. J. Lett.* **534**(2), L127–L129 (2000).
291. A. Rabhi, P. Schuck, R. Bennaceur, G. Chanfray, and J. Dukelsky, Restoration of broken symmetries in self-consistent RPA, arXiv: nucl-th/0106064 (2001).
292. A. Rabhi, R. Bennaceur, G. Chanfray, P. Schuck, Self-consistent quasiparticle random phase approximation for the description of superfluid Fermi systems, *Phys. Rev. C* **66**(6), 064315 (21 pages) (2002).
293. A.P. Rebesh, A.M. Gavrilik, I.I. Kachurik, Elements of μ -calculus and thermodynamics of μ -Bose gas model, *Ukr. J. Phys.* **58**(12), 1182–1191 (2013).
294. C. de Rham, J.T. Deskins, A.J. Tolley, and S.-Y. Zhou, Graviton mass bounds, *Rev. Mod. Phys.* **89**(2), 025004 (29 pages) (2017).
295. L.F. Richardson, Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph, *Proc. R. Soc. Lond. A* **110**, 709 (1926).
296. A. Robertson *et al.*, The diverse density profiles of galaxy clusters with self-interacting dark matter plus baryons, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **476**(1), L20–L24 (2018).
297. G. Roche *et al.* (DLS Collaboration), First observation of dielectron production in proton-nucleus collisions below 10 GeV, *Phys. Rev. Lett.* **61**(9), 1069–1072 (1988).

298. P. Romatschke and M. Strickland, Collective modes of an anisotropic quark-gluon plasma, *Phys. Rev. D* **68**(3), 036004 (8 pages) (2003).
299. P. Romatschke and A. Rebhan, Plasma instabilities in an anisotropically expanding geometry, *Phys. Rev. Lett.* **97**(25), 252301 (4 pages) (2006).
300. P. Romatschke and R. Venugopalan, Collective non-Abelian instabilities in a melting color glass condensate, *Phys. Rev. Lett.* **96**(6), 062302 (4 pages) (2006).
301. C. Rovelli and L. Smolin, Loop space representation of quantum general relativity, *Nucl. Phys. B* **331**(1), 80–152 (1990).
302. C. Rovelli and L. Smolin, Discreteness of area and volume in quantum gravity, *Nucl. Phys. B* **442**, 593–619 (1995).
303. C. Rovelli and P. Upadhyaya, Loop quantum gravity and quanta of space: a primer, arXiv: gr-qc/9806079 (11 pages) (1998).
304. M. Sahimi and G.R. Jerauld, Random walks on percolation clusters at the percolation threshold, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **16**(29), L1043–L1050 (1983).
305. V. Sahni and L. Wang, New cosmological model of quintessence and dark matter, *Phys. Rev. D* **62**(10), 103517 (4 pages) (2000).
306. P.K. Sahu and A. Ohnishi, $SU(2)$ Chiral sigma model and properties of neutron stars, *Prog. Theor. Phys.* **104**, 1163–1171 (2000).
307. A.D. Sakharov, Vacuum quantum fluctuations in curved space and the theory of gravitation, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **177**(1), 70–71 (1967).
308. P. Salucci, The distribution of dark matter in galaxies, *Astron. Astrophys. Rev.* **27**, 2 (2019).
309. M. Sanati and A. Saxena, Half-kink lattice solution of the ϕ^6 model, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32**, 4311 (1999).
310. G. Sauer, H. Chandra, and U. Mosel, Thermal properties of nuclei, *Nucl. Phys. A* **264**(2), 221–243 (1976).
311. A.M. Scarfone and P. Narayana Swamy, An interacting ensemble of particles in the context of quantum algebra, *J. Stat. Mech.: Theor. Exper.* **2009**, P02055,

(2009).

312. G. Schäfer, The gravitational quadrupole radiation-reaction force and the canonical formalism of ADM, *Ann. Phys.* **161**(1), 81–100 (1985).
313. H. Scher and E.W. Montroll, Anomalous transit-time dispersion in amorphous solids, *Phys. Rev. B* **12**(6), 2455–2477 (1975).
314. E.D. Schiappacasse and M.P. Hertzberg, Analysis of dark matter axion clumps with spherical symmetry, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **03**, E01 (2018).
315. H.-Yu Schive, T. Chiueh, and T. Broadhurst, Cosmic structure as the quantum interference of a coherent dark wave, *Nat. Phys.* **10**, 496–499 (2014).
316. H.-Yu Schive, M.-H. Liao, T.-P. Woo, S.-K. Wong, T.-H. Chiueh, T. Broadhurst, and W.-Y. Pauchy Hwang, Understanding the core-halo relation of quantum wave dark matter from 3D simulations, *Phys. Rev. Lett.* **113**(26), 261302 (6 pages) (2014).
317. B. Schwabe, J.C. Niemeyer, and J.F. Engels, Simulations of solitonic core mergers in ultralight axion dark matter cosmologies, *Phys. Rev. D* **94**(4), 043513 (10 pages) (2016).
318. P. Schwaller, Gravitational waves from a dark phase transition, *Phys. Rev. Lett.* **115**(18), 181101 (5 pages) (2015).
319. O. Semerák and M. Basovnik, Geometry of deformed black holes. I. Majumdar-Papapetrou binary, *Phys. Rev. D* **94**(4), 044006 (18 pages) (2016).
320. M. Senay and S. Kibaroglu, q -deformed Einstein equations from entropic force, *Int. J. Mod. Phys. A* **33**(36), 1850218 (2018).
321. B.D. Serot and J.D. Walecka, The relativistic nuclear many-body problem, *Adv. Nucl. Phys.* **16**, 1–327 (1986).
322. B.D. Serot and J.D. Walecka, In: *Advances in Nuclear Physics* (Plenum, New York, 1986) **16**, P. 1.
323. B.D. Serot and J.D. Walecka, Recent progress in quantum hadrodynamics, *Int. J. Mod. Phys. E* **6**(4), 515–631 (1997).

324. A.P. Severyukhin, V.V. Voronov, Ch. Stoyanov, and Van N. Giai, Nuclear structure calculations with a separable approximation for Skyrme interactions, *Nucl. Phys. A* **722**, 123–128 (2003).
325. M.F. Shlesinger and B. West (eds.), *Random walks and their applications in the physical and biological sciences* (AIP, New York, 1984) **109**.
326. E.V. Shuryak, Physics of the pion liquid, preprint: BNL-44522 (1990).
327. P.J. Siemens, Nuclear fog, *Nucl. Phys. A* **428**, 189–197 (1984).
328. P. Sikivie and Q. Yang, Bose-Einstein condensation of dark matter axions, *Phys. Rev. Lett.* **103**(11), 111301 (4 pages) (2009).
329. R. Silhol, On some one parameter families of genus 2 algebraic curves and half twists, *Comment. Math. Helv.* **82**, 413–449 (2007).
330. S.-J. Sin, Late-time phase transition and the galactic halo as a Bose liquid, *Phys. Rev. D* **50**(6), 3650–3654 (1994).
331. Yu.M. Sinyukov, Matter evolution and soft physics in A+A collisions, *Act. Phys. Polon. B* **37**, 3343–3370 (2006).
332. Yu.M. Sinyukov and Iu.A. Karpenko, Ellipsoidal flows in relativistic hydrodynamics of finite systems, *Acta Phys. Hung. A* **25**, 141–147 (2006).
333. Yu.M. Sinyukov, Iu. Karpenko, and A.V. Nazarenko, Interferometry analysis and initial conditions in A+A collisions, *Proceedings of the International School-seminar: New Physics and Quantum Chromodynamics at external Conditions* (Dnipropetrovsk, 3–6 May, 2007), 75–85.
334. Yu.M. Sinyukov, Iu.A. Karpenko, and A.V. Nazarenko, Spacetime scales and initial conditions in relativistic A+A collisions, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **35**, 104071 (5 pages) (2008).
335. Yu.M. Sinyukov, S.V. Akkelin, and Iu.A. Karpenko, Hydrokinetic model of the matter evolution in A + A collisions at RHIC and LHC energies, *Phys. Atomic Nuclei.* **71**, 1619–1624 (2008).
336. Yu.M. Sinyukov, A.V. Nazarenko, and Iu.A. Karpenko, Is early thermalization really needed in A+A collisions?, *Acta Phys. Polonica B* **40**(4), 1109–1117

(2009).

337. T.H.R. Skyrme, A unified field theory of mesons and baryons, *Nucl. Phys.* **31**, 556–569 (1962).
338. D. Sornette, *Critical phenomena in natural sciences: chaos, fractals, selforganization, and disorder: concepts and tools* (Springer-Verlag, Berlin, 2000).
339. D.N. Spergel *et al.*, First-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Determination of cosmological parameters, *Astrophys. J. Suppl.* **148**(1), 175–194 (2003).
340. F. Spitzer, *Principles of random walk* (Springer, Berlin, 1976).
341. B.K. Srivastava *et al.*, Multifragmentation and the phase transition: A systematic study of the multifragmentation of 1A GeV Au, La, and Kr, *Phys. Rev. C* **65**(5), 054617 (15 pages) (2002).
342. H. Stanley and P. Meakin, Multifractal phenomena in physics and chemistry, *Nature* **335**, 405–409 (1988).
343. A. Storozhenko, P. Schuck, J. Dukelsky, G. Röpke, and A. Vdovin, Pair fluctuations in ultra-small Fermi systems within self-consistent RPA at finite temperature, *Ann. Phys.* **307**, 308–334 (2003).
344. A. Strominger, Black hole statistics, *Phys. Rev. Lett.* **71**(21), 3397–3400 (1992).
345. A. Suarez, V. Roblez, and T. Matos, A review on the scalar field/Bose-Einstein condensate dark matter model, *Astrophys. Space Sci. Proc.* **38**, 107–142 (2014).
346. J.E. Tanner, Transient diffusion in a system partitioned by permeable barriers. Application to NMR measurements with a pulsed field gradient, *J. Chem. Phys.* **69**(4), 1748 (1978).
347. C. Tsallis, F.C. Sa Barreto, and E.D. Loh, Generalization of the Planck radiation law and application to the cosmic microwave background radiation, *Phys. Rev. E* **52**(2), 1447–1451 (1995).

348. A.Yu. Turygin, Fokker's type action at a distance theory of gravitation, *Gen. Rel. Grav.* **18**, 333–348 (1986).
349. S. Typel and H.H. Wolter, Relativistic mean field calculations with density dependent meson nucleon coupling, *Nucl. Phys. A* **656**, 331–364 (1999).
350. L.A. Urena-Lopez, Brief review on scalar field dark matter models, *EPJ Web Conf.* **168**, 06005 (2018).
351. I.O. Vakarchuk and G.I. Panochko, The theory of a many boson system with the deformed Heisenberg algebra, *Condens. Matter Phys.* **18**(3), 33002 (2015).
352. C. Vanderzande, *Lattice models of polymers* (Cambridge University Press, 1998).
353. R. Voituriez and S. Nechaev, Multifractality of entangled random walks and non-uniform hyperbolic spaces, *J. Phys. A* **33**(32), 5631–5652 (2000).
354. D.N. Voskresenskii, On the possibility of Bose condensation of pions in ultrarelativistic collisions of nuclei, *JETP* **78**(6), 793–805 (1994).
355. J. Vredevoogd and S. Pratt, Universal flow in the first stage of relativistic heavy ion collisions, *Phys. Rev. C* **79**(4), 044915 (7 pages) (2009).
356. J.D. Walecka, A theory of highly condensed matter, *Ann. Phys.* **83**(2), 491–529 (1974).
357. E.S. Weibel, Spontaneously growing transverse waves in a plasma due to an anisotropic velocity distribution, *Phys. Rev. Lett.* **2**(3), 83–84 (1959).
358. S. Weinberg, Nonlinear realizations of chiral symmetry, *Phys. Rev.* **166**(5), 1568–1577 (1968).
359. J.A. Wheeler and R.P. Feynman, Classical electrodynamics in terms of direct interparticle action, *Rev. Mod. Phys.* **21**(3), 425–433 (1949).
360. E. Witten, 2+1 dimensional gravity as an exactly soluble system, *Nucl. Phys. B* **311**, 46–78 (1988/89).
361. S.A. Wolpert, On the Weil-Petersson geometry of the moduli space of curves, *Amer. J. Math.* **107**, 969–997 (1985).

362. S.A. Wolpert, The Weil-Petersson metric geometry, arXiv: math.DG/0801.0175 (2008).
363. S.K. Wong, Field and particle equations for the classical Yang-Mills field and particles with isotopic spin, *Nuovo Cim. A* **65**, 689–694 (1970).
364. Z. Xu and C. Greiner, Thermalization of gluons in ultrarelativistic heavy ion collisions by including three-body interactions in a parton cascade, *Phys. Rev. C* **71**(6), 064901 (40 pages) (2005).
365. Z. Xu, C. Greiner, and H. Stöcker, QCD plasma thermalization, collective flow and extraction of shear viscosity, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **35**(10), 104016 (2008).
366. X.-Y. Zhang, L.-J. Shao, B.-Q. Ma, Photon gas thermodynamics in doubly special relativity, *Astropart. Phys.* **34**(11), 840–845 (2011).
367. X. Zhang, M.H. Chan, T. Harko, S.-D. Liang, and C.S. Leung, Slowly rotating Bose-Einstein condensate galactic dark matter halos, and their rotation curves, *Eur. Phys. J. C* **78**, 346 (2018).
368. F. Zwicky, On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae, *Astrophys. J.* **86**, 217 (1937).
369. Р. Балееску, *Равновесная и неравновесная статистическая механика* (Мир, Москва, 1986), Т. 1.
370. В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц и Л.П. Питаевский, *Квантовая электродинамика* (Наука, Москва, 1980).
371. Н. Биррелл и П. Девис, *Квантованные поля в искривленном пространстве-времени* (Мир, Москва, 1984).
372. Н.Н. Боголюбов и Н.Н. Боголюбов (мл), *Введение в квантовую статистическую механику* (Наука, Москва, 1984).
373. Д.М. Гитман и И.В. Тютин, *Каноническое квантование полей со связями* (Наука, Москва, 1986).
374. А.А. Гриб, С.Г. Мамаев и В.М. Мостепаненко, *Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях* (Энергоатомиздат, Москва, 1988).

375. П. Дирак, *Лекции по квантовой механике* (Мир, Москва, 1968).
376. Б.А. Дубровин, С.П. Новиков и А.Т. Фоменко, *Современная геометрия* (Наука, Москва, 1986).
377. А.А. Дувіряк та А.В. Назаренко, Рівняння Ліувіля для систем із в'язями, *Журн. Фіз. Досл.* **3**(4), 399–408 (1999).
378. В.М. Емельянов, С.Л. Тимошенко и М.Н. Стриханов, *Введение в релятивистскую ядерную физику* (Физматлит, Москва, 2004).
379. Я.Б. Зельдович, Распад однородного вещества на части под действием тяготения., *Астрофизика* **6**(2), 319–335 (1970).
380. Я.Б. Зельдович и И.Д. Новиков, *Строение и эволюция Вселенной* (Наука, Москва, 1975).
381. Я.Б. Зельдович, *Избранные труды. Частицы, ядра, Вселенная* (Наука, Москва, 1985).
382. А. Исихара, *Статистическая физика* (Мир, Москва, 1973).
383. Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц, *Квантовая механика (Нерелятивистская теория)* (Наука, Москва, 1974).
384. Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц, *Статистическая физика* (Наука, Москва, 1976).
385. Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц, *Теория поля* (Наука, Москва, 1973).
386. Е.М. Лифшиц и Л.П. Питаевский, *Статистическая физика (Теория конденсированного состояния)* (Наука, Москва, 1978).
387. А.Б. Мигдал, Д.Н. Воскресенский, Э.Е. Саперштейн и М.А. Троицкий, *Пионные степени свободы в ядерном веществе* (Наука, Москва, 1991).
388. Ч. Мизнер, К. Торн и Дж. Уилер, *Гравитация* (Мир, Москва, 1977).
389. А.П. Прудников, Ю.А. Брычков и О.И. Маричев, *Интегралы и ряды* (Физматлит, Москва, 2003), Т. 2, С. 166, 2.12.9(2).
390. Б.А. Трубников и В.В. Косачев, Термодинамика слабoreлятивистской плазмы, *Журн. Экспер. Теор. Физ.* **54**(3), 939–950 (1968).
391. Е. Федер, *Фракталы* (Мир, Москва, 1991).

392. Н. Харт, *Геометрическое квантование в действии* (Мир, Москва, 1985).
393. И.Р. Юхновский и М.Ф. Головкин, *Статистическая теория классических равновесных систем* (Наукова думка, Киев, 1980).

Додаток А

Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про
апробацію результатів дисертації

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. A.V. Nazarenko, Classical relativistic system of pointlike masses with linearized gravitational interaction, *Acta Phys. Slovaca* **53**(1), 1–16 (2003).
2. A. Nazarenko Thermodynamic functions of a relativistic system of charges in the ring-diagram approximation, *Ukr. J. Phys.* **49**(2), 182–187 (2004).
3. A.V. Nazarenko, Relativistic direct interaction between nucleons derived from classical field theory, *Int. J. Mod. Phys. E* **13**(3), 631–645 (2004).
4. A.V. Nazarenko, Quantization of reduced Chern–Simons gravity with a source, *Int. J. Mod. Phys. A* **19**(28), 4883–4897 (2004).
5. A. Nazarenko, Time level splitting in quantum Chern–Simons gravity, *Class. Quantum Grav.* **22**, 2107–2120 (2005).
6. A.V. Nazarenko, Superfluidity in a system of neutrons with direct relativistic interaction, *Ukr. J. Phys.* **50**(3), 293–298 (2005).
7. A.V. Nazarenko, Evaporation of symmetric nuclear matter in weakly curved space, *Int. J. Mod. Phys. E* **15**(3), 561–570 (2006).
8. D.V. Anchishkin and A.V. Nazarenko, Liquid-like phases of $\pi^+\pi^-$ matter, *J. Phys. Stud.* **10**(2), 93–97 (2006).
9. M. Gyulassy, Iu.A. Karpenko, A.V. Nazarenko, and Yu.M. Sinyukov, HBT and initial conditions for hydrodynamic expansion in A+A collisions, *Braz. J. Phys.* **27**(3a), 1031–1038 (2007).
10. Yu.M. Sinyukov, Iu.A. Karpenko, and A.V. Nazarenko, Spacetime scales and initial conditions in relativistic A+A collisions, *J. Phys. G: Nucl.*

- Part. Phys.* **35**, 104071 (5 pages) (2008).
11. A.V. Nazarenko, The probability of the creation of extra dimensions in nuclear collisions, *Int. J. Mod. Phys. E* **17**(8), 1605–1618 (2008).
 12. Yu.M. Sinyukov, A.V. Nazarenko, and Iu.A. Karpenko, Is early thermalization really needed in A+A collisions?, *Acta Phys. Polonica B* **40**(4), 1109–1117 (2009).
 13. A.V. Nazarenko, Glasma evolution in partonic medium, *J. Phys. Stud.* **14**(3), 3202 (7 pages) (2010).
 14. A.V. Nazarenko, Directed random walk on the lattices of genus two, *Int. J. Mod. Phys. B* **25**(26), 3415–3433 (2011).
 15. A.V. Nazarenko, Directed random walk on the eight-branching Cayley tree, *Вісник Львів. Універ. Серія фізична* **48**, 253–269 (2013).
 16. A.V. Nazarenko, Area quantization of the parameter space of Riemann surfaces in genus two, *Ukr. J. Phys.* **58**(11), 1055–1064 (2013).
 17. A.V. Nazarenko and Yu.A. Kulinich, Relativistic kinematics of two-parametric Riemann surface in genus two, *Hadronic J.* **39**(2), 181–198 (2016).
 18. A.V. Nazarenko and V. Blavatska, A one-dimensional random walk in a multi-zone environment, *J. Phys. A: Math. Theor.* **50**, 185002 (11 pages) (2017).
 19. A.V. Nazarenko and V. Blavatska, Asymmetric random walk in a one-dimensional multi-zone environment, *Ukr. J. Phys.* **62**(6), 508–517 (2017).
 20. A.M. Gavrilik, I.I. Kachurik, M.V. Khelashvili, and A.V. Nazarenko, Condensate of μ -Bose gas as a model of dark matter, *Physica A* **506**, 835–843 (2018).
 21. W.S. Chung, A.M. Gavrilik, and A.V. Nazarenko, Photon gas at the Planck scale within the doubly special relativity, *Physica A* **533**, 121928 (10 pages) (2019).
 22. A.M. Gavrilik and A.V. Nazarenko, Statistics effects in extremal black holes ensemble, *Int. J. Mod. Phys. A* **34**, 1950215 (16 pages) (2019).

23. A.V. Nazarenko, Partition function of the Bose–Einstein condensate dark matter and the modified Gross–Pitaevskii equation, *Int. J. Mod. Phys. D* **29**(2), 2050018 (18 pages) (2020).
24. A.M. Gavrilik, M.V. Khelashvili, and A.V. Nazarenko, Bose–Einstein condensate dark matter model with three-particle interaction and two-phase structure, *Phys. Rev. D* **102**(8), 083510 (13 pages) (2020).

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ НА НАУКОВИХ КОНФЕРЕНЦІЯХ

1. A.V. Nazarenko, Self-gravitating condensate of deformed bosons, described by the modified Gross–Pitaevskii equation. Bogolyubov Kyiv Conference “Problems of Theoretical and Mathematical Physics”. September 24–26, 2019, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv (Ukraine). Program and Abstracts, 44 (2019).
2. A.V. Nazarenko and A.M. Gavrilik, Statistical effects in extremal black holes ensemble. XI Bolyai-Gauss-Lobachevsky Conference: Non-Euclidean, Non-Commutative Geometry and Quantum Physics. May 19-24, 2019, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv (Ukraine). Book of Abstracts, 29 (2019).
3. A.V. Nazarenko, Directed random walk on the eight-branching Cayley tree. Conference on Physics of Disordered Systems. October 14–16, 2013, Franko Lviv National University, Lviv (Ukraine). Abstract, 27 (2013).
4. A.V. Nazarenko, Area quantization of the parameter space of Riemann surfaces in genus two. International conference “Quantum groups and quantum integrable systems”. June 18–21, 2013, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv (Ukraine). Abstract, 35 (2013).
5. A.V. Nazarenko, Directed random walk on the eight-branching Cayley tree. 8-th Bolyai-Gauss-Lobachevsky Conference: Non-Euclidean Geometry in Modern Physics and Mathematics. May 22-25, 2012, Institute of Electron

- Physics, Uzhgorod (Ukraine). Conference Programme
iep.org.ua/content/conferenc/bgl_2012/Prog_BGL-8.pdf
6. A.V. Nazarenko, Momentum and space asymmetry of the matter at high-energy density. Internat. Conference “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics”. June 21-27, 2009, Institute of Mathematics, Kyiv (Ukraine).
www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2009/Nazarenko.html
 7. A.V. Nazarenko, Initial conditions for hydrodynamic expansion of fireball. Zimanyi 2007 Winter School on Heavy Ion Physics. December 5-7, 2007, KFKI RMKI, Budapest (Hungary). Conference Programme
www.kfki.hu/~csorgo/school07/programme/index.html
 8. A.V. Nazarenko, Probability of creation of extra dimensions in quantum gravity. International Conference “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics”. June 24-30, 2007, Institute of Mathematics, Kyiv (Ukraine).
www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2007/Nazarenko.html
 9. Yu.M. Sinyukov, Iu. Karpenko, and A.V. Nazarenko, Interferometry analysis and initial conditions in A+A collisions. International School-seminar “New Physics and Quantum Chromodynamics at External Conditions”. May 3–6, 2007, Dnipropetrovsk (Ukraine). Proceedings, 75-85 (2007).
 10. A.V. Nazarenko, New quantum effects in (2+1)-dimensional non-empty universe. International Conference “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics”. June 20-26, 2005, Institute of Mathematics, Kyiv (Ukraine).
www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2005/Nazarenko.html