Національна академія наук України
Інститут фізики
Національної академії наук України
Інститут теоретичної фізики імені М. М. Боголюбова

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Баськов Роман Анатолійович

УДК 538.9

Дисертація

Поширення лазерного випромінювання у турбулентній атмосфері

01.04.02 — теоретична фізика

природничі науки

(104 — Фізика та астрономія)

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.
_____ Р. А. Баськов

Науковий керівник: **Чумак Олександр Олександрович**,
доктор фізико-математичних наук, старший
науковий співробітник

Київ — 2021

АНОТАЦІЯ

Баськов Р. А. Поширення лазерного випромінювання у турбулентній атмосфері. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.04.02 «Теоретична фізика» (10 — Природничі науки). — Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України, Київ, 2021.

В дисертаційній роботі, в рамках методу функції розподілу фотонів у фазовому просторі, продемонстровано та вивчено часово-просторові властивості лазерного випромінювання, що поширюється в оптично неоднорідній атмосфері. Виведено кінетичне рівняння для функції розподілу, що описує еволюцію випромінювання за практично довільних параметрів лазерного пучка та атмосфери. В роботі отримано вираз для середнього значення функції розподілу у фазовому просторі, висвітлено ефект збільшення довжини лазерних імпульсів. В рамках дослідження флуктуацій інтенсивності випромінювання отримано асимптотичний вираз для кореляційної функції четвертого порядку для оптичних полів у атмосфері, частково описано флуктуації інтенсивності в найбільш недоступній для строгого опису області помірної турбулентності.

В земній атмосфері наявні температурні неоднорідності, що призводять до неоднорідностей густини, а ті в свою чергу до флуктуацій показника заломлення. Такі флуктуації показника заломлення спричиняють появу оптичних неоднорідностей атмосфери, розміри яких варіюються від кількох міліметрів до десятків метрів. Статистичні властивості флуктуацій показника заломлення описуються кореляційною функцією та відповідно її

спектром, які можна отримати частково в рамках методу аналізу розмірностей, частково феноменологічно.

Широкий діапазон розмірів неоднорідностей призводить до низки негативних ефектів, таких як розширення пучка, відхилення пучка як цілого, фрагментація пучка тощо. Незважаючи на те, що флуктуації показника заломлення є дуже малими, велика кількість зіткнень із такими неоднорідностями атмосфери призводить до зміни часово-просторових властивостей лазерного пучка. Зокрема, до флуктуацій інтенсивності випромінювання.

Величиною, що характеризує флуктуації інтенсивності є сцинтиляційний індекс, який визначається як нормоване середньоквадратичне значення даних флуктуацій. Сцинтиляційний індекс дозволяє оцінити відношення сигнал/шум для пучка у атмосфері. Для сцинтиляцій, наявні строгі теорії, що побудовані із перших принципів (метод плавних збурень (наближення Ритова), метод Гьюґенса-Кірхгофа, метод інтегралу по траєкторіях тощо), застосовні лише для асимптотичних випадків слабкої та сильної турбулентності. В той же час для області помірної турбулентності досі нема надійних розв'язків. Одним із основних завдань роботи було просунутися глибше в зону помірної турбулентності.

У дослідженнях використано метод функції розподілу фотонів у фазовому просторі. Функція розподілу фотонів є операторною функцією подібною до тих, що використовують у теорії твердого тіла для фононів, електронів тощо і є розподілом фотонної густини у фазовому просторі. Фактично, вона є квантовим аналогом класичної мікроскопічної функції розподілу частинок у фазовому просторі. Інтегрування функції розподілу по всьому простору дає просто оператор кількості фотонів із заданим хвильовим вектором. Сумування по всіх хвильових векторах дає просторову фотонну густину або ж інтенсивність.

Раніше було показано, що для великих відстаней еволюцію функції розподілу можна описати беззіткневим рівнянням Больцмана, де вплив атмо-

сфери проявляється як плавна випадкова сила, що пов'язана із градієнтом показника заломлення. Для розв'язку беззіткневого рівняння Больцмана використовується метод характеристик, а лазерний пучок можливо описати у термінах фотонних "траєкторій". В рамках такого наближення було показано, що при переході помірна-сильна турбулентність врахування кореляцій фотонних "траєкторій" призводить до збільшення значень флуктуацій інтенсивності у 2-3 рази. Показано, що при збільшенні початкового радіусу вклад кореляцій зменшується. Це можна пояснити тим, що початкові значення імпульсу порядку оберненого початкового радіусу. Відповідно, для меншого початкового радіусу об'єм інтегрування по хвильових векторах є більшим, а вклад кореляцій збільшується.

Для загальнішого випадку, коли зміни імпульсів при зіткненнях із неоднорідностями неможливо описати в термінах класичної сили, було виведено рівняння Больцмана-Ланжевена, де вплив неоднорідності атмосфери враховується за допомогою інтегралу зіткнень та ланжевенівського джерело флуктуацій. Інтеграл зіткнень враховує взаємодію між фотонами та неоднорідностями атмосфери, в той час як ланжевенівське джерело враховує стохастичну природу такої взаємодії. Використовуючи теорію збурень для кінетичного рівняння вдалося отримати результати, які дозволяють описати перехід слабка-помірна турбулентність. Повторюючи результати інших строгих теорій в області слабкої турбулентності, отримані результати суттєво відрізняються в зоні переходу слабка-помірна турбулентність. Загалом, в теорії флуктуацій інтенсивності вдалося побудувати теоретичні моделі для слабкої, сильної та переходів слабка-помірна, помірна-сильна турбулентності, які узгоджуються із експериментальними даними.

Для асимптотичного випадку великих відстаней поширення виведено кореляційну функцію четвертого порядку (четвертий момент) для оптичних полів у атмосфері. Для такої асимптотики використано ефект насичення флуктуації. При поширенні на великі відстані когерентне випромінюва-

ння стохастизується значною мірою, через те, що кожна електромагнітна хвиля зазнає багато розсіянь на неоднорідностях. Тож корелятор четвертого порядку можна розбити на попарні кореляції. Показано, що четвертий момент виражається через суму лінійного і квадратичного по середній функції розподілу фотонів членів. Продемонстровано дві характерні властивості четвертого моменту: по-перше, один із доданків — лінійний по інтенсивності — містить дельта-функцію від $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ і має квантову природу, такий доданок прийнято називати дробовим шумом і він суттєвий лише для малої інтенсивності випромінювання; по-друге, кореляція інтенсивності в точках $\mathbf{r}$ і $\mathbf{r}'$ визначаються значеннями функції розподілу в точці $(\mathbf{r}+\mathbf{r}')/2$, тобто, вивчаючи флуктуації на краях пучка, ми можемо отримати інформацію про центр пучка. На прикладі гаусових пучків за допомогою четвертого моменту аналітично показано умови, коли дробовий шум перевершує класичний шум.

Явний вигляд четвертого моменту використано для розрахунку усереднених по апертурі флуктуацій інтенсивності або ж флуктуацій коефіцієнта проходження інтенсивності. Оцінка такої величини важлива для практичних застосувань, оскільки апертура приймача завжди має скінченні розміри. Показано, що у асимптотичному випадку великих відстаней збільшення поперечного імпульсу фотонів, що пов'язане із флуктуаціями показника заломлення визначають довжину кореляції для четвертого моменту, яку можна використати для вибору оптимального діаметру приймача, продемонстровано ефект зменшення флуктуацій при усередненні по апертурі.

Окрім того, в рамках вивчення властивостей перших моментів для інтенсивності та функції розподілу досліджено ряд ефектів. Для великих відстаней було отримано аналітичний вираз для середнього значення функції розподілу фотонів і показано, що більший вклад дають значення функції для якої вектори координати та імпульсу паралельні. Дрейф фотонів призводить до асиметрії функції розподілу у фазовому просторі. Отрима-

но явний вираз для довжини лазерних імпульсів, який, зокрема, дозволяє оцінити можливість перекриття сусідніх імпульсів. Показано, що є два механізми такого видовження, що пов'язані із наявністю оптичної неоднорідності: один пов'язаний із флуктуаціями модуля групової швидкості у повздовжньому напрямку, а другий зі збільшенням поперечного імпульсу фотонів.

Отримані в рамках роботи результати важливі як для фундаментальних досліджень, так і можуть бути застосовані при побудові практичних застосувань у класичних та квантових системах зв'язку, системах віддаленого зондування тощо. Найбільше, зокрема, можна виділити важливість представленого опису області помірної турбулентності, яка є найменш дослідженою в межах строгих теорій, в той же час є найбільш затребуваною для практичних цілей. В рамках роботи показано, що функція розподілу фотонів у фазовому просторі є потужним інструментом для опису властивостей світла при поширенні в атмосфері.

Ключові слова: атмосферна оптика, квантова оптика, сцинтиляції, функція розподілу фотонів, атмосферна турбулентність, флуктуації інтенсивності.

Список публікацій здобувача:

журнальні публікації:

1. *Баськов Р. А.* Вплив турбулентної атмосфери на розширення світлових імпульсів / Р. А. Баськов, О. О. Чумак // Наукові записки. Фізико-математичні науки. Національний університет «Києво-Могилянська академія» — 2009. — Том 87. — с. 45.
2. *Chumak O. O.* Strong Enhancing Effect of Correlations of Photon Trajectories on Laser Beam Scintillations /O. O. Chumak and R. A. Baskov // Phys. Rev. A. — 2016. — Vol. 93. — P. 033821.
3. *Baskov R. A.* Laser-beam scintillations for weak and moderate turbulence

/ R. A. Baskov and O. O. Chumak // Phys. Rev. A. — 2018. — Vol. 97. — P. 043817.

4. *Baskov R.* Forth-order moment of the light fields in atmosphere / R. A. Baskov and O. O. Chumak // J. Opt. — 2020. — Vol. 22. — P. 105603.

тези конференцій:

5. *Baskov R.* The effect of the broadening of the pulses in the laser beam for long-distance propagation trough the turbulent atmosphere / R. Baskov, O. Chumak // Book of Abstracts: 9th International Young Scientists Conference Optics and High Technology Material Science (23–26 October, 2008, Kyiv, Ukraine.) — Kyiv: 2008. — P. 156.
6. *Baskov R. A.* The effect of atmosphere turbulence on broadening of light pulses: long-distance propagation / R. A. Baskov, O. O. Chumak// Book of abstracts: VIII Kharkiv Young Scientists Conference "Radiophysics and Electronics, Biophysics" (25 – 27 November, 2008, Kharkiv, Ukraine). — Kharkiv: 2008. — P. 99.
7. *Baskov R. A.* Scintillations of laser radiation propagating in a turbulent atmosphere: the effect of bending of photon trajectories. / R. A. Baskov, O. O. Chumak // Book of abstracts: NATO ASI on "Special Detection Technique (Polarimetry) and Remote Sensing" (12–25 September, 2010, Kyiv, Ukraine) — Kyiv: 2010. — P. 26.

ABSTRACT

Baskov R. A. Laser beam propagation in turbulent atmosphere — Qualification scientific work in the form of manuscript

Thesis for candidate degree in natural sciences (doctor of philosophy), speciality 01.04.02 "Theoretical physics" (10 — Natural sciences.) — Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the NAS of Ukraine, Kyiv, 2021.

The thesis considers spatiotemporal characteristics of laser radiation in optically inhomogeneous atmosphere. The method of photon distribution function (PDF) is used for description of laser beams in atmosphere. The kinetic equation for PDF that gathers evolution of radiation for wide range of beam and atmosphere parameter is derived from first principles. The quasiclassical distribution function for photon density in the phase-space is obtained from solution of the kinetic equation. The effect of pulse broadening is elucidated in case of long-distance propagation. Considering intensity fluctuations, asymptotic fourth-order moment for light fields is obtained. Besides that fluctuations are rigorously described in the most challenging range of moderate turbulence, providing, in particular, results for transition regions weak-moderate and moderate-strong turbulence regimes.

Temperature variations in Earth's atmosphere introduce density inhomogeneities and, consequently, local fluctuations of refractive index. Corresponding optical inhomogeneities sizes vary from millimeters to hundred meters. Statistical properties of index-of-refraction fluctuations are described in terms of covariance function and its spectrum which are derived from dimensional analysis and phenomenological approach.

An array of negative effects are caused by wide range of sizes of inhomogeneities, such as beam broadening, beam wandering, fragmentation of the beam etc. Despite the very small fluctuations in refractive index, their impact on the beam evolution can be quite significant because of accumulating effect

which occurs along the propagation path. In particular, intensity fluctuations appear as one of the most destructive manifestations of spatiotemporal alterations in the laser beam.

The magnitude of intensity fluctuations are characterized by scintillation index which is defined in classical optics as inverse of signal-to-noise ratio. The existing rigorous first-principles approaches, such as the method of smooth perturbations (Rytov approximation), Huygens-Kirchhoff method, and path-integral method, are applicable merely to the asymptotic regimes of weak and strong optical turbulences. At the same time, maximum scintillations are attributed to the region of moderate turbulence. One of the main aims of the work is to provide reliable description of moderate regime.

The method of photon distribution function is used for study. The PDF is an operator-valued function of the position $\mathbf{r}$ and the wave vector $\mathbf{q}$. It retains the concept of the Wigner function such that the integration with respect to $\mathbf{q}$ or $\mathbf{r}$ results in the field intensity operator or the photon-number operator, respectively. The PDF can be found as a solution of the kinetic equation that accounts for random variations of the refractive index in the atmosphere. This approach has been originally introduced in the solid state physics and has also been successfully applied for a description of quantum radiation in wave guides.

It have been shown that for long-distance propagation evolution of PDF could be described by collisionless Boltzmann equation. In this case, influence of turbulence is presented via smooth random force originating form gradient of refractive index. It is solved using the method of characteristics. Evolution of the laser beam could be described via photon “trajectories”. It is shown that considerable growth of scintillation index (by two to three times) found for moderate turbulence attributed to correlations between photon “trajectories”. It is demonstrated that the maximum of scintillations can be considerably decreased by an increase of the source aperture or the use of

the fast phase diffuser.

Since classical force cannot adequately consider the collisions which are accompanied by a substantial change of the photon momentum, in thesis a more general approach which account for the effect of photon-eddy interactions by means of collision integral was proposed. Moreover, a random nature of photon-eddy collisions is accounted for by the Langevin source with known statistical properties . As a result, a linear Boltzmann-Langevin equation (BLE) describes both the average and fluctuating parts of photon distribution. Utilizing theory of perturbation for solution of BLE description of weak-to-moderate regime of turbulence was provided. The scintillation index obtained in this regime has considerably bigger magnitude than one provided by other rigorous theories. Mainly, such discrepancy attributed to consideration of decrease of photon density due to contribution of collision integral term in BLE. At the same time results are in good agreement with other theories in case of weak turbulence. Overall for scintillation index, it is shown that results for weak, weak-to-moderate, moderate-to-strong, strong, regimes of turbulence are in good agreement with experimental data.

For long propagation path, the explicit expression for fourth-order moment of light is obtained as a sum of linear and quadratic forms of the average distribution function. This moment describes a spatial correlation of four light waves, giving the information about the photon distribution in the cross-section of the beam. The fourth moment can be measured using two small detectors outside the central part of the beam. The linear form describes the shot noise (quantum fluctuations) of photons. The range where the shot noise exceeds the classical noise is found analytically. Derived photon fluctuations are the valuable source of information about statistical properties and local structure of the laser radiation that can be used for applications.

Explicit fourth moment is used for obtaining the aperture averaging of fluctuations. The limited aperture of the receiver is typical for most appli-

cations, so a rigorous analytical result for transmittance of light fluctuations can be useful. In the asymptotic case, the gain in transverse momentum defines the correlation length for the fourth moment. The explicit value of the correlation length can be used for the optimal choice of the detector diameter.

The solution of the averaged kinetic equation for the case of the paraxial beam illustrates the significant anisotropy of the distribution function. The anisotropy is due to photon drift in the direction parallel to the vector $\mathbf{r}$. Explicit expression for pulse broadening is obtained for long-distance propagation, which, in particular, could be used to evaluate such negative effects as overlapping of consequent pulses or fluctuations of its arrival time. It is shown that there are two main mechanisms responsible for pulse broadening attributed to atmospheric turbulence: fluctuations of modulus of group velocity in longitudinal direction; increase of transverse momentum of photons.

The results obtained within thesis are important both for fundamental studies and practical applications in such areas as quantum and classical communications, remote sensing, etc. In particular, the importance of presented description of moderate turbulence region could be emphasized as both the most challenging range and the most desirable for practical purposes. Throughout the work method of photon distribution function is proven to be powerful tool for description of properties of light in atmosphere.

Key words: atmospheric optics, quantum optics, scintillations, photon distribution function, atmospheric turbulence, intensity fluctuations.

List of publications of applicant:

journal publications:

1. *Баськов Р. А.* Вплив турбулентної атмосфери на розширення світлових імпульсів / Р. А. Баськов, О. О. Чумак // Наукові записки. Фізико-математичні науки. Національний університет «Києво-Могилянська академія» — 2009. — Том 87. — с. 45.

2. *Chumak O. O.* Strong Enhancing Effect of Correlations of Photon Trajectories on Laser Beam Scintillations /O. O. Chumak and R. A. Baskov // Phys. Rev. A. — 2016. — Vol. 93. — P. 033821.
3. *Baskov R. A.* Laser-beam scintillations for weak and moderate turbulence / R. A. Baskov and O. O. Chumak // Phys. Rev. A. — 2018. — Vol. 97. — P. 043817.
4. *Baskov R.* Forth-order moment of the light fields in atmosphere / R. A. Baskov and O. O. Chumak // J. Opt. — 2020. — Vol. 22. — P. 105603.

conference abstracts:

5. *Baskov R.* The effect of the broadening of the pulses in the laser beam for long-distance propagation trough the turbulent atmosphere / R. Baskov, O. Chumak // Book of Abstracts: 9th International Young Scientists Conference Optics and High Technology Material Science (23–26 October, 2008, Kyiv, Ukraine.) — Kyiv: 2008. — P. 156.
6. *Baskov R. A.* The effect of atmosphere turbulence on broadening of light pulses: long-distance propagation / R. A. Baskov, O. O. Chumak// Book of abstracts: VIII Kharkiv Young Scientists Conference "Radiophysics and Electronics, Biophysics" (25 – 27 November, 2008, Kharkiv, Ukraine). — Kharkiv: 2008. — P. 99.
7. *Baskov R. A.* Scintillations of laser radiation propagating in a turbulent atmosphere: the effect of bending of photon trajectories. / R. A. Baskov, O. O. Chumak // Book of abstracts: NATO ASI on "Special Detection Technique (Polarimetry) and Remote Sensing" (12–25 September, 2010, Kyiv, Ukraine) — Kyiv: 2010. — P. 26.

ЗМІСТ

Вступ **17**

1. Огляд: лазерне випромінювання в турбулентній атмосфері **27**

1.1. Атмосферна турбулентність і теорія Колмогорова 28

1.2. Флуктуації показника заломлення у турбулентній атмосфері 30

1.2.1. Сила турбулентності і насичення флуктуацій 32

1.3. Класична теорія поширення світла у турбулентній атмосфері 33

1.3.1. Хвильове рівняння для неоднорідного середовища . . 34

1.3.2. Слабка турбулентність: методи збурень Борна та Ритова 35

1.3.3. Сильна турбулентність: параболічне наближення та розширений принцип Гьюґенса-Френеля 37

2. Опис взаємодії лазерного пучка з турбулентною атмосферою методом функції розподілу фотонів **41**

2.1. Функція фотонної густини у фазовому просторі 42

2.1.1. Власні функції і значення $\hat{f}_m(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t)$ 44

2.1.2. Кінетичне рівняння для PDF у атмосфері 46

2.2. Беззіткневе рівняння Больцмана із випадковою силою 49

2.3. Рівняння Больцмана-Ланжевена 52

2.4. Висновки 56

3. Інтенсивність і перший момент для PDF **57**

3.1. Середнє значення функції розподілу $\hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t)$ 57

3.1.1. Граничні умови для початкового випромінювання . . 59

3.1.2. Розв'язок кінетичного рівняння для середнього значення PDF 62

3.1.3. Поперечний імпульс фотонів 64
3.1.4. Розширення пучка 67
3.1.5. Асимптотичне значення функції розподілу фотонів . 68
3.1.6. PDF для беззіткневого рівняння Больцмана 70
3.1.7. Обговорення 72
3.2. Збільшення довжини світлових імпульсів 73
3.2.1. Отримання явного виразу для довжини лазерних імпульсів 73
3.2.2. Обговорення 78
3.3. Висновки 79

4. Сцинтиляційний індекс і другий момент PDF 80

4.1. Ефект кореляції фотонів для помірної і сильної турбулентності 81
4.1.1. Обговорення 90
4.2. Ланжевенівське джерело та інтеграл зіткнень при малій та помірній турбулентності 94
4.2.1. Наближення першого порядку 95
4.2.2. Інтеграл зіткнень у середній інтенсивності 98
4.2.3. Другий порядок розкладу $\delta\hat{f}_2$ і ефект комбінованих флуктуацій $\delta\hat{f}_1 \cdot \delta\hat{f}_2$ 98
4.2.4. Обговорення 101
4.3. Кореляційна функція четвертого порядку для оптичних полів у асимптотичному наближенні великих відстаней 105
4.3.1. Явний вираз для четвертого моменту 110
4.3.2. Усереднення сцинтиляцій по апертурі приймача . . . 112
4.3.3. Обговорення 116
4.4. Висновки 118

Висновки 120

Список використаних джерел 122

Додатки **128**

ВСТУП

Актуальність теми. Опис фізичного механізму поширення лазерного випромінювання в земній атмосфері є предметом жвавого інтересу як для науковців, так і для інженерів [1, 2, 3, 4, 5]. Зокрема, таке зацікавлення викликане наявними і потенційними застосуваннями квантових і класичних систем зв'язку, а також систем віддаленого зондування. Останні досягнення у цих галузях пов'язані із проблемами передачі квантового криптографічного ключа [6, 7], поширення переплутаних (entangled) [8, 9, 10] та стиснутих (squeezed) [11, 12] квантових станів, квантової нелокальності [13, 14], квантової телепортації [15, 16], перевірки фундаментальних законів фізики [17, 18].

Низка ефектів, пов'язаних із наявністю атмосфери, є причиною погіршення оптичного пропускання світлового пучка. Основними джерелами оптичних втрат і спотворення сигналу є дифракційне розширення пучка, атмосферна турбулентність, помилки наведення, абсорбційні втрати [19]. Деякі із цих негативних ефектів можна згладити за допомогою різноманітних технік корекції в режимі реального часу [20, 21] або тестуванням каналів комунікацій [22, 23, 24]. Абсорбційні втрати частково можна зменшити використовуючи "вікна прозорості" атмосфери [25]. Проте решта джерел втрат, що пов'язані із наявністю турбулентної атмосфери і дифракційних ефектів, досі лишаються проблемними і обмежують можливість поліпшення характеристик і продуктивності лазерних систем в атмосфері. Серед іншого, випадкові флуктуації показника заломлення спотворюють фронт фази випромінювання, спричиняючи флуктуації інтенсивності (сцинтиляції), блукання пучка (beam wandering), флуктуації часу приходу фотонів на

детектор, збільшення ширини пучка та інші. Сцинтиляції являють собою найбільш серйозну перешкоду, спричиняючи значне зменшення відношення сигнал-шум (SNR) та погіршуючи робочі характеристики систем лазерного зв'язку.

В земній атмосфері лазерні пучки зазнають впливу турбулентних оптичних неоднорідностей, що виникають у зв'язку із температурними неоднорідностями у граничних із землею шарах атмосфери. Випадково розподілені неоднорідності атмосфери, маючи різну густину, є джерелом локальних флуктуацій показника заломлення. При поширенні на великі відстані лазерні пучки зазнають численних "зіткнень" із турбулентними неоднорідностями, що призводять до поступової зміни статистики випромінювання на гаусову статистику для амплітуд оптичних полів або ж, що аналогічно, на релеєвський розподіл для інтенсивності [26]. В цьому випадку сцинтиляційний індекс, $\sigma^2 = \langle I^2 \rangle / \langle I \rangle^2 - 1$ (I — інтенсивність випромінювання), який є оберненою величиною до відношення сигнал-шум, асимптотично прямує до значення $\sigma^2 = 1$, а відповідні флуктуації інтенсивності називаються насиченими [27].

Врахування флуктуацій інтенсивності відіграє важливу роль при побудові надійних класичних і квантових оптичних систем зв'язку [28, 29], систем віддаленого зондування [30, 31] та адаптивної оптики [32]. Дослідження сцинтиляцій має також застосування у атмосферній фізиці, геофізиці, астрономії, фізиці планет [33]. В той же час теоретичний опис сцинтиляційних явищ для повного спектру параметрів каналу поширення і пучка обмежений зростаючою обчислювальною складністю, коли йдеться про область параметрів, де флуктуації інтенсивності для оптичних пучків найбільші. З метою уникнення цієї перешкоди було запропоновано ряд феноменологічних та напівфеноменологічних підходів, які використовують функції розподілу інтенсивності [34], фазові екрани [35], наближення спектрів турбулентності [36]. Наявні строгі підходи, побудовані на основі

перших принципів, такі як метод плавних збурень (наближення Ритова), метод Гьюґенса-Кірхгофа, метод інтегралу по траєкторіях (path integral), застосовні лише для асимптотичних випадків режиму слабкої та сильної оптичної турбулентності. Водночас максимальні сцинтиляції спостерігають в області помірної турбулентності.

Основна ціль даної роботи — побудова теоретичної моделі, що дозволила би максимально строго описати область помірної турбулентності, доповнивши наявні результати для слабкої і сильної турбулентностей. Зокрема, в роботі запропоновано підхід для опису режиму слабкої, переходу слабка-помірна та помірна-сильна, сильної турбулентностей. Метод основано на техніці функції фотонного розподілу (photon distribution function (PDF)) [37], яку виведено із перших принципів квантової оптики. Цей метод застосовний для довільних квантових станів світла, включаючи когерентні стани, що описують поле лазерного випромінювання.

PDF являє собою операторну функцію, $\hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{q})$, положення $\mathbf{r}$ і хвильового вектора $\mathbf{q}$. Вона включає у себе концепцію функції Віґнера [38], проінтегрувавши $\hat{f}$ по $\mathbf{q}$ чи $\mathbf{r}$ отримаємо оператор інтенсивності поля $\hat{I}(\mathbf{r})$ або ж оператор числа фотонів $\hat{n}_{\mathbf{q}}$, відповідно. Функцію розподілу фотонів можна знайти з кінетичного рівняння, що враховує випадкові флуктуації показника заломлення в атмосфері. Такий підхід вперше було запропоновано у фізиці твердого тіла (див., наприклад, посилання [39]), а також успішно було застосовано для опису квантового випромінювання у хвилеводах [40, 41]. Застосування методу PDF до поширення світла у турбулентній атмосфері було продемонстровано у [37, 42], де використано наближення плавної випадкової сили, що працює для обмеженого набору параметрів каналу і пучка.

В роботі окремо розглянуто помірну турбулентність з боку сильної і слабкої турбулентностей. У першому випадку використано наближення впливу турбулентності як плавної сили і враховано вплив кореляцій фо-

тонних “траєкторій” на флуктуації інтенсивності. У другому — запропоновано більш загальне кінетичне рівняння для PDF у термінах інтегралу зіткнень і ланжавенівського джерела флуктуацій. Наближений розв’язок цього рівняння дозволяє описати характеристики пучка, виходячи за межі застосовності наближення Ритова, у області помірної турбулентності, яка була недоступна для попередніх технік. Таким чином, запропоновані підходи покликані описати ефект максимальних флуктуацій інтенсивності, який наочно проявляється на різних експериментах, демонструючи значення максимуму, які значно перевищують рівень при насиченні флуктуацій [27, 43, 44].

Для того, щоб підкреслити значення цього аспекту дисертаційної роботи, варто згадати слова Дашена [45] щодо області помірної турбулентності. Він розглядав “детальну поведінку хвильових полів на межі між ненасиченим і насиченим режимами” “досі наявною проблемою” у фізиці сцинтиляційних явищ. Такою вона і лишалася досі.

Окрім того, в рамках приведених підходів окремо розглядаються ряд ефектів, пов’язаних із поширенням лазерних пучків у неоднорідному середовищі: вплив на середню інтенсивність, розширення пучка, збільшення характерних поперечних імпульсів фотонів, усереднення флуктуацій інтенсивності по апертурі приймача, збільшення довжини світлових імпульсів, кореляції четвертого порядку оптичних полів, усереднення флуктуацій інтенсивності по апертурі. Перелічені ефекти є важливими для конкретних застосувань лазерних пучків у атмосфері.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась у відділі теоретичної фізики Інституту фізики НАН України. Дослідження, що складають зміст дисертації, виконувались у рамках наступних бюджетних тем. У 2010–2011 рр.: 1.4.1. ВЦ/138 «Нанофізика квантоворозмірних та низьковимірних структур, у тому числі на по-

верхні твердого тіла, в металоорганічних, полімерних та рідкокристалічних системах, молекулярна наноелектроніка» (№ держ. реєст. 0107U002165), 1.4.1. В/133 «Оптичні та транспортні властивості нелінійних і просторово обмежених систем» (№ держ. реєст. 0107U002349); у 2012–2016 рр.: 1.4. В/161 «Явища переносу і дисипації в нелінійних та обмежених середовищах» (№ держ. реєст. 0112U003150), 1.4. ВЦ/156 «Дослідження конденсованих систем на нанометровому рівні з метою з'ясування розмірних фізичних ефектів, розроблення фізичних основ нових електронних і іонних технологій» (№ держ. реєст. 0112U002509); у 2017–2020 рр.: 1.4. В/183 «Релаксаційні та розмірні явища в лінійних та нелінійних середовищах» (№ держ. реєст. 0117U002613), 1.4. ВЦ/188 «Фундаментальні процеси, що визначають властивості новітніх фізичних об'єктів та матеріалів для електроніки, оптоелектроніки, фотоніки та спінтроніки» (№ держ. реєст. 0117U002612). Частину роботи виконано в рамках гранту НАН України, «Ефекти безладу, колективного розсіяння та нерівноважних сил, індуковані рухом пучка частинок» (№ держ. реєст. 0120U100155) у 2020 році.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи було вивчити, як оптична неоднорідність атмосфери впливає на динаміку поширення лазерного випромінювання, зокрема, як наявність флуктуації показника заломлення впивають на флуктуації інтенсивності за різних режимів атмосферної турбулентності. *Завдання* полягало в проведенні аналітичних та числових розрахунків у широкому діапазоні значень параметрів пучка та атмосфери, виявленні нових особливостей поведінки, встановлення їх механізму.

Об'єктами дослідження є лазерне випромінювання в атмосфері, явище взаємодії випромінювання з неоднорідностями атмосфери, ефект насичення флуктуацій інтенсивності.

Предметом дослідження є просторово-часові характеристики лазерно-

го випромінювання при поширенні в атмосфері, вплив неоднорідності атмосфери, пов'язаної із флуктуаціями показника заломлення, на кореляційні властивості і флуктуації інтенсивності випромінювання.

Методи дослідження. В роботі застосовувались як аналітичні методи, так і методи числового моделювання. Для опису лазерного випромінювання в атмосфері використано підхід функції розподілу фотонів у координатно-імпульсному (фазовому) просторі. У випадку великих відстаней поширення або ж сильної турбулентності для знаходження функції розподілу використовувалось наближене беззіткневе рівняння Больцмана. В ньому вплив атмосфери на світлові пучки враховувався як дія плавної випадкової сили на фотонні траєкторії. Розв'язок такого рівняння базувався на методі характеристик. Загальніший і більш детальний опис пучка в атмосфері дає рівняння Больцмана-Ланжевена, яке було одержано в дисертації з використанням гамільтоніана системи. Поставлені задачі розв'язувались, використовуючи теорію збурень та багатократні Фур'є-перетворення. Для отримання усереднених по флуктуаціях показника заломлення величин використовувались наявні моделі спектрів для коваріації показника заломлення. Джерело частково когерентного випромінювання характеризувалось моделлю фазового змішувача з відомими статистичним характеристиками. Для проведення числових розрахунків використовувався обчислювальний кластер. Чисельні алгоритми програмувались за допомогою мов Fortran та Python. Для паралельних обчислень використано пакети MPI та OpenMP.

Наукова новизна отриманих результатів. В дисертаційній роботі отримано такі результати:

1. Отримано аналітичний вираз для опису ефекту видовження лазерних імпульсів при поширенні в земній атмосфері на великі відстані. У термінах випадкової сили, пов'язаної із флуктуаціями показника заломлен-

ня, пояснено два незалежних механізми, що дають внесок у збільшення довжини імпульсів.

2. Продемонстровано вплив кореляцій фотонів у турбулентній атмосфері на величину сцинтиляційного індексу при переході помірна-сильна та сильній турбулентностях. Показано, що кореляції фотонів дають значний внесок у величину сцинтиляційного індексу при наближенні до області помірної турбулентності.
3. Продемонстровано ефект впливу величини початкового радіуса та ступеня когерентності пучка на статистичні властивості лазерного випромінювання в атмосфері, зокрема при переході від сильної та слабкої до помірної турбулентності.
4. З перших принципів виведено кінетичне рівняння для функції розподілу фотонів у фазовому просторі ($\mathbf{r}$-$\mathbf{q}$ простір), що описує поширення лазерного випромінювання при будь-яких параметрах атмосфери. Це кінетичне рівняння дозволяє описати лазерне випромінювання у термінах інтегралу зіткнень і ланжевенівського джерела флуктуацій. Вихід за межі нульового наближення теорії збурень дозволив отримати розв'язок кінетичного рівняння, де вже в першому порядку з'явились якісно нові результати в зоні переходу слабка-помірна турбулентність.
5. Отримано вираз для середньої функції розподілу фотонів у атмосфері; показано, що в конфігураційному просторі існують області, які дають найбільший вклад у величину функції розподілу. Показано анізотропію функції розподілу, яка пов'язана із дрейфом фотонів у координатному просторі.
6. Отримано явний вираз для кореляційної функції четвертого порядку для оптичних полів у атмосфері в наближенні великих відстаней поширення. Продемонстровано особливості цієї кореляційної функції та можливість її застосування для практичних задач, а саме:
   - показано, що кореляція інтенсивності в точках $\mathbf{r}$ і $\mathbf{r}'$ визначаються

значеннями функції розподілу в точці $(\mathbf{r}+\mathbf{r}')/2$. Вивчаючи флуктуації на краях пучка, можна отримати інформацію про його центральну область;

- для гаусових пучків показано, як співвідносяться між собою квантові і класичні флуктуації. Зокрема одержано умову, коли ці флуктуації дають однаковий внесок;
- чисельними методами знайдено залежності сцинтиляційного індексу від усереднення по апертурі приймача у випадку насичених флуктуацій.

Практичне значення отриманих результатів. Робота має теоретичний характер. Результати досліджень, представлені в дисертаційній роботі, доповнюють і розширюють теорію поширення лазерного випромінювання в атмосфері. Рівняння Больцмана-Ланжевена для функції розподілу фотонів є новим способом опису поширення лазерного випромінювання в неоднорідній атмосфері, застосовним практично для довільних параметрів атмосфери та пучка. Його розв'язки можуть слугувати для опису еволюції пучка за широкого спектру значень сили турбулентності і його початкової конфігурації. Зокрема отримані результати для помірної турбулентності дозволяють частково описати лазерне випромінювання для найбільш необхідних з практичної точки зору атмосферних каналів. Такі результати можна використати для побудови класичних та квантових систем зв'язку, систем віддаленого зондування, для астрономічних досліджень тощо. Отримання явного виразу для кореляційної функції четвертого порядку дозволяє відстежувати зміну просторово-часових властивостей лазерного випромінювання. Такі результати важливі для теорії детектування у атмосферних каналах, де враховується скінченний розмір детектора та часова когерентність випромінювання.

Особистий внесок здобувача. Результати, включені до дисертаційної роботи, опубліковані в ряді наукових робіт у співавторстві. В усіх роботах дисертант брав безпосередню участь в постановці задачі, розробці методів її розв'язку, обговоренні, проведенні розрахунків, їх інтерпретації, формулюванні результатів та написанні статей. Результати чисельних розрахунків були отримані автором особисто.

При виконанні роботи [46] здобувач отримав вираз для довжини лазерних імпульсів у атмосфері, показав фізичні механізми, які дають внесок у видовження імпульсів, порівняв результати з попередніми теоріями.

В роботі [47] здобувач зробив наступний крок в ітераційній процедурі врахування впливу атмосфери на пучок, продемонстрував додатковий вклад кореляцій фотонних траєкторій у значення сцинтиляційного індексу за різних параметрів атмосфери, спільно з науковим керівником сформулював пояснення фізичного механізму впливу кореляцій траєкторій на сцинтиляції.

В роботі [48] дисертант використав теорію збурень та числові обчислення для опису флуктуацій інтенсивності лазерного випромінювання в атмосфері за слабкої турбулентності та при переході слабка-помірна турбулентність. Здобувач брав безпосередню участь у проведенні аналітичних розрахунків з використанням методу функції розподілу фотонів та виведенні кінетичного рівняння Больцмана-Ланжевена для функції розподілу. Порівняв результати із результатами інших строгих теорій та експериментальними даними.

В роботі [49] здобувач, на основі кінетичного рівняння Больцмана-Ланжевена отримав вираз для квазікласичної функції розподілу фотонів у фазовому просторі, продемонстрував її асиметричність у фазовому просторі. Вона використана для знаходження аналітичних виразів для поперечного імпульсу і ширини лазерного пучка для асимптотичних випадків. Разом із науковим керівником автор дисертації показав, що для великих відстаней

поширення підхід плавної випадкової сили і підхід з використанням інтегралу зіткнень дають однакові результати для середнього значення функції розподілу фотонів. Дисертант брав безпосередню участь у проведенні аналітичних розрахунків щодо отримання явного виразу для кореляційної функції четвертого порядку для оптичних полів у турбулентній атмосфері. Автором самостійно зроблено розрахунки для кореляційної функції усереднених (по площі вхідної апертури детектора) флуктуацій на великих відстанях. Вказано, що на їх основі можлива оптимізація експериментальних вимірювань.

Апробація матеріалів дисертації. Матеріали роботи було представлено на наукових семінарах відділу теоретичної фізики Інституту фізики НАН України, відділу синергетики Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, на науковому семінарі робочої групи з квантової оптики в Інституті фізики університету Ростока (Німеччина), 40-й та 43-й підсумкових наукових конференціях Інституту фізики НАН України (2015, 2018 рр.); окремі результати доповідалися на міжнародних конференціях та семінарах:

- 9th International Young Scientists Conference Optics and High Technology Material Science (SPO 2008), 23 – 26 October 2008, Kyiv, Ukraine;
- VIII Kharkiv Young Scientists Conference “Radiophysics and Electronics, Biophysics”, 25 – 27 November, 2008, Kharkiv, Ukraine;
- NATO Advanced Study Institute on “Special Detection Technique (Polarimetry) and Remote Sensing” 12–25 September 2010, Kyiv, Ukraine.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається із анотації, вступу, чотирьох розділів основної частини з 16 рисунками, висновків, переліку посилань зі 95 найменувань та двох додатків. Кожен розділ основної частини, окрім першого оглядового розділу, закінчується висновками, у яких сформульовано основні результати цього розділу. Повний об’єм дисертації становить 133 сторінки, перелік посилань займає 6 сторінок.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД: ЛАЗЕРНЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ В ТУРБУЛЕНТНІЙ АТМОСФЕРІ

Поширення світла в атмосфері, на відміну від поширення у вакуумі, потребує додатково врахування впливу оптичної неоднорідності середовища на властивості пучка. У даному розділі зробимо короткий огляд основних вихідних положень теорії поширення випромінювання у атмосфері і найбільш розвинених строгих підходів опису відповідних змін просторово-часових властивостей випромінювання.

Наявність атмосфери призводить до низки характерних особливостей поширення світла, порівняно із випадком вакууму, де, для лазерів невисокої енергії, наявна лише дифракція. На додачу до "вакуумної" дифракції, у атмосфері додаються ще ряд факторів, що впливають на лазерне випромінювання, зокрема, поглинання, розсіювання пучка та флуктуації показника заломлення. У випадку високоенергетичних лазерів додається ще теплове розпливання (thermal blooming), нелінійний ефект. Поглинання і розсіювання призводять до затухання — зменшення амплітуди інтенсивності випромінювання, в той час як флуктуації показника заломлення призводять до флуктуацій інтенсивності, додаткового розширення лазерного пучка, зміни просторової когерентності, "блукання" пучка та інших ефектів. Явища поглинання і розсіяння — частотнозалежні і можуть частково нівелюватися так званими "вікнами прозорості" атмосфери (див. Рис. 1.1). В той же час, вплив флуктуації показника заломлення є набагато комплекснішим ефектом. Саме неоднорідність показника заломлення є предметом найбільшої уваги при поширенні світлового випромінювання в атмосфері,

бо суттєво впливає на можливі застосуваннях у галузях астрономії, лазерних систем зв'язку тощо.

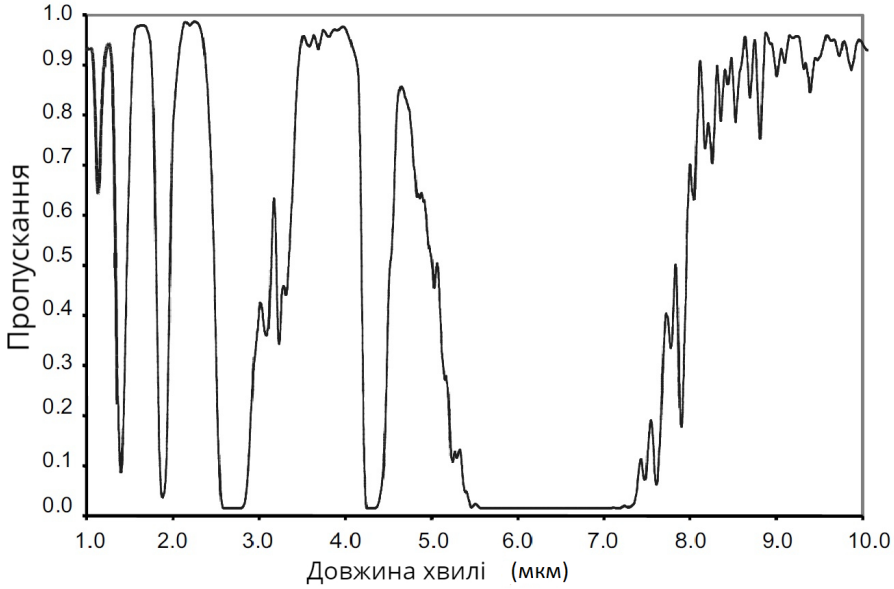

Рис. 1.1. Типова залежність пропускання світлового випромінювання від довжини хвилі [3].

1.1. Атмосферна турбулентність і теорія Колмогорова

Атмосферна турбулентність в першу чергу пов'язана із різницею температур між земною поверхнею та атмосферним повітрям поблизу поверхні, а також із флуктуаціями швидкості вітру. Градієнт температур і вітер спричиняють конвективні процеси у приземному шарі атмосфери і, як результат, замішування різних потоків з утворенням турбулентних вихорів різної величини. Якщо розглядати атмосферу як в'язку рідину, то її цілком природно можна описувати в термінах ламінарної і турбулентної течій, які розрізняються за допомогою безрозмірного параметра, числа Рейнолдса, який залежить від швидкості, розмірів потоку та в'язкості. При критичному значенні числа Рейнолдса відбувається завихрення потоків із замішуванням течій і зміна ламінарного потоку на турбулентний. Для харак-

терних параметрів потоку у приземному шарі значення числа Рейнолдса сягає порядку 10^5 [3] і є приблизно на порядок більшим, ніж характерні значення, при яких течія вважається турбулентною. Зі збільшенням висоти над поверхнею Землі число Рейнолдса зменшується досить швидко і на висотах порядку 1.5–2 кілометри вплив турбулентності зменшується на порядки (див. Розділ 5 у [50]). Для строгого описання атмосфери із перших принципів необхідно було би розв'язати рівняння Нав'є-Стокса для в'язкої рідини, проте ця задача математично є дуже складною, тому теорію турбулентності було побудовано Колмогоровим на основі статистичних методів [51], із використанням ряду наближень і методу аналізу розмірностей.

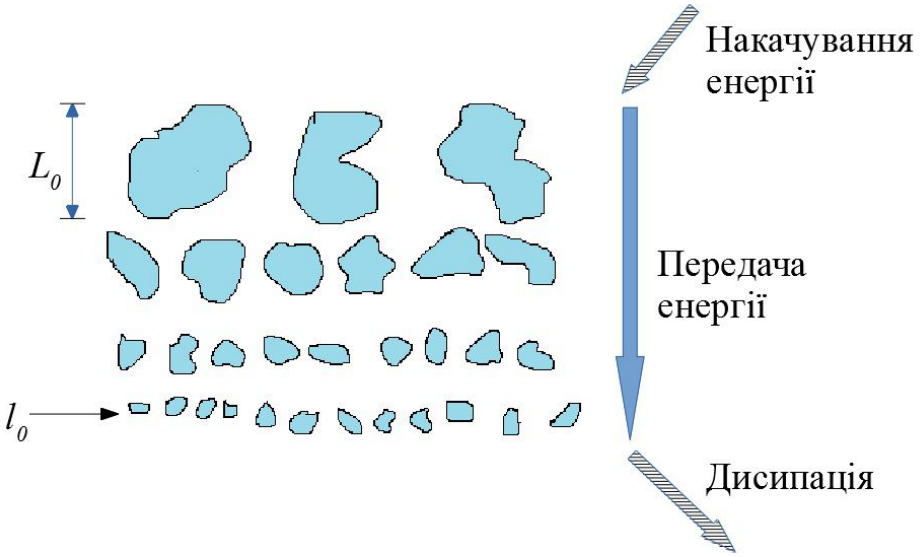

Рис. 1.2. Каскадна теорія Колмогорова, де L_0 і l_0 позначають відповідно зовнішній і внутрнішній радіуси турбулентності. Область між L_0 і l_0 називають інерційним діапазоном.

Зручним методом для візуалізації масштабів у турбулентній атмосфері є так звана теорія енергетичного каскаду, яку запропонував Річардсон [52] (див. Рис. 1.2). Джерелом енергії у системі виступають або вітряні потоки, або конвекція. При достатньо великих значеннях числа Рейнолдса початкові потоки розбиваються на крупномасштабні вихори, які в свою чергу, під дією інерційних сил розбиваються на менші вихори і т.д., формуючи

при цьому неперервний спектр розмірів турбулентних вихорів від максимального, зовнішній радіус турбулентності, L_0, порядку десятків метрів, до мінімального, внутрішній радіус турбулентності l_0, порядку міліметрів для нижніх шарів атмосфери. Діапазон розмірів від L_0 до l_0 називають інерційним. Для діапазону меншого за l_0 превалюють дисипативні процеси пов'язані із в'язкістю — турбулентні вихори зникають, а залишок енергії проявляється у виділенні тепла.

Використовуючи метод аналізу розмірностей Колмогоров показав, що так звана структурна функція для флуктуацій температури в інерційному діапазоні описується степеневим законом із значення 2/3,

$$D_T(R) = \langle (T_1 - T_2)^2 \rangle = C_T^2 R^{2/3},\ l_0 \ll R \ll L_0, \tag{1.1}$$

де T_1 та T_2 позначають температуру у двох точках, відстань між якими R, а C_T^2 — температурна структурна константа, атмосфера вважається ізотропною і статистично однорідною. Використовуючи просторову структурну функцію Колмогоров записав тривимірний спектр флуктуацій температури для інерційного діапазону, який також визначив через степеневу залежність

$$\Phi_T(g) = 0.033 C_T^2 g^{-11/3},\ l_0 \ll R \ll L_0. \tag{1.2}$$

Результати Колмогорова стали основою для опису флуктуацій показника заломлення у турбулентній атмосфері.

1.2. Флуктуації показника заломлення у турбулентній атмосфері

Випадкові флуктуації температури у атмосфері призводять до появи флуктуючої складової показника заломлення, а турбулентні вихори розглядаються як оптичні неоднорідності атмосфери. Флуктуації показника заломлення є функцією простору і часу, тоді показник заломлення загалом

можна записати як

$$n(\mathbf{r},t) = n_0 + \delta n(\mathbf{r},t), \tag{1.3}$$

де $n_0 = \langle n(\mathbf{r},t)\rangle$, δn — зазначені флуктуації. Оскільки δn зазвичай вважають гаусовою випадковою величиною, то очевидно, що $\langle \delta n(\mathbf{r},t)\rangle = 0$. Для так званої "clear-air"(повітря без пилу, дощу та інших механічних перешкод) атмосферної турбулентності вважатимемо δn малою величиною. А також, що часова залежність флуктуацій показника заломлення пов'язана в основному із вітром у даній атмосфері. Тоді $\delta n(\mathbf{r},t) \simeq \delta n(\mathbf{r} - \mathbf{V}(\mathbf{r})t)$, де $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ — локальна швидкість вітру. Таке припущення справедливе для більшості практичних задач. Часто виявляється, що швидкістю вітру можна знехтувати, порівняно зі швидкістю поширення випромінювання. Тоді, для моделі флуктуацій показника заломлення, важливими є лише просторові варіації цієї величини (так звана гіпотеза Тейлора про заморожену турбулентність [53]), у цьому разі можемо із врахуванням нормування (1.3) на n_0 переписати

$$n(\mathbf{r}) = 1 + \delta n(\mathbf{r}), \tag{1.4}$$

Статистичні властивості флуктуацій показника заломлення визначаються його просторовою спектральною густиною. Припускаючи, що атмосфера статистично однорідна і ізотропна, коваріацію $\delta n(\mathbf{r})$ можна виразити через її Фур'є-розклад

$$\langle \delta n(\mathbf{r})\delta n(\mathbf{r}')\rangle = \int\int\int d^3\mathbf{g}\Phi_n(g)\exp\left[i\mathbf{g}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right], \tag{1.5}$$

де $g = |\mathbf{g}|$. Функція $\Phi_n(g)$ відома як спектр флуктуацій показника заломлення у просторі хвильових векторів. Конкретний вигляд спектру в інерційному діапазоні фактично повторює результати дослідження в теорії турбулентності, основи якої заклав Колмогоров. Проте, поза інерційним діапазоном треба було внести ряд модифікацій, які враховують відходження від степеневого закону порядку $-11/3$ [3]. Найбільш уживаним і універ-

сальним є спектр фон Кармана

$$\Phi_n(g) = \frac{0.033C_n^2 \exp\left[-\left(\frac{gl_0}{2\pi}\right)^2\right]}{[g^2 + L_0^{-2}]^{11/6}}, \quad 0 \leqslant g < \infty \tag{1.6}$$

де C_n^2 — структурна константа показника заломлення, яка дозволяє оцінювати величину його флуктуацій (в загальному випадку залежить від відстані для нахилених чи вертикальних траєкторій проходження), величини l_0 і L_0 —, відповідно, внутрішній і зовнішній радіуси турбулентності. Поза використанням спектру фон Кармана, пошук конкретного вигляду спектру, зокрема, для широкого діапазону сили турбулентності та розмірів неоднорідностей атмосфери є окремим предметом багатьох досліджень [3, 54, 55].

1.2.1. Сила турбулентності і насичення флуктуацій. У дослідженнях поширення світлового випромінювання у атмосфері прийнято розрізняти слабку, помірну і сильну турбулентності. Параметром, який найбільш наочно дозволяє представити це розділення у випадку плоскої і сферичної хвиль є параметр Ритова,

$$\sigma_1^2 = 1.23C_n^2 k^{7/6} z^{11/6} \tag{1.7}$$

який виходить із теорії Ритова (див. далі), де k — характерне хвильове число для випромінювання, z — відстань поширення. Відповідно, $\sigma_1^2 < 1$ характерний для слабкої турбулентності, $\sigma_1^2 \sim 1$ — для помірної турбулентності, $\sigma_1^2 > 1$ — для сильної, окремо розглядають $\sigma_1^2 \to \infty$ як режим насичених флуктуацій інтенсивності, коли лазерне випромінювання стохастизується такої мірою, що початкова статистика випромінювання змінюється на гаусову статистику для амплітуд оптичного поля. На Рис. 1.3 представлено типову залежність флуктуацій інтенсивності від сили турбулентності. Видно, що найбільші флуктуації спостерігають у зоні помірної турбулентності, а

при сильній турбулентності починаються поступове насичення флуктуацій і відповідно їх зменшення. При поділі на різні області сили турбулентності для випадку гаусових пучків слід враховувати додаткові особливості у зв'язку із наявністю радіуса пучка і можливості їх фокусування (див. [3]). Виходячи із зазначених означень, будемо послуговуватися ними при описі застосовності тих чи інших методів для опису світла у атмосфері.

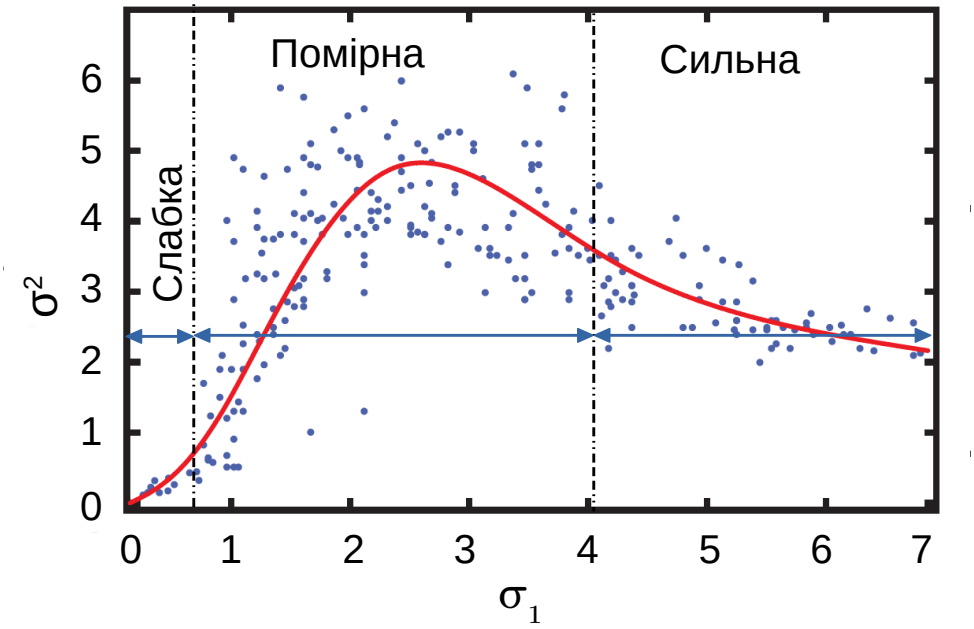

Рис. 1.3. Типове поводження флуктацій інтенсивності в залежності від сили турбулентності. Суцільна лінія демонструє типове поводження сцинтиляційного індексу, точки показують відповідні типові експериментальні дані відтворені із [43].

1.3. Класична теорія поширення світла у турбулентній атмосфері

Дослідження впливу атмосфери на світловий пучок почалися досить давно. За весь час розвитку теорії для такої специфічної задачі було на-

працьовано певний базис. Даний підрозділ присвячено короткому огляду вихідних положень теорії поширення випромінювання у атмосфері і її найбільш розвинених підходів. Зокрема розглянемо наближення Борна і Ритова для слабких флуктуацій, параболічне наближення і розширений принцип Гьюґенса-Френеля для сильної турбулентності та розширений метод Ритова, який був покликаний якісно описати перехід від помірної до сильної турбулентності. Такий огляд сприятиме кращому розумінню подальших розділів роботи. Більш детально про формалізм і здобутки попередніх методів написано у [3, 56].

1.3.1. Хвильове рівняння для неоднорідного середовища. У класичній теорії опису монохроматичного оптичного випромінювання у неоднорідному середовищі використовують стохастичне рівняння Гельмгольца для векторної амплітуди електромагнітного поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$:

$$\nabla^2\mathbf{E} + k^2(1+\delta n)^2\mathbf{E} = 0, \tag{1.8}$$

де $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $k = 2\pi/\lambda$ — хвильовий вектор електромагнітної хвилі із довжиною хвилі λ. Таке рівняння для амплітуди поля можливо отримати знехтувавши поляризаційним членом у відповідному рівнянні Максвела та використавши наближення параксіальних пучків — поперечні розміри пучків набагато менші за відстань поширення [3]. Окрім того, припущення, що коваріація для показника дельта-корельована у напрямку поширення (наближення Маркова)

$$\langle \delta n(z,\rho)\delta n(z',\rho')\rangle = \delta(z-z')A(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'), \tag{1.9}$$

де

$$A(\boldsymbol{\rho}) = 2\pi\int\int dk_x dk_y \Phi_n(k_z=0,k_x,k_y)e^{ik\rho},\ \boldsymbol{\rho}=(x,y), \tag{1.10}$$

використовується для розгляду окремих скалярних компонент вектора $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ у поперечному напрямку $U(\mathbf{r})$. Зазначені припущення дозволяють за-

писати для $U(\mathbf{r})$ аналогічне стохастичне рівняння Гельмгольца

$$\nabla^2 U + k^2(1+\delta n)^2 U = 0, \tag{1.11}$$

Оскільки рівняння (1.11) являє собою диференціальне рівняння із випадковими (random) коефіцієнтами, його розв'язок отримати дуже складно і, відповідно, дотепер точного розв'язку не знайдено. Тож усі класичні підходи в тій чи іншій мірі використовують наближені розв'язки із відповідними обмеженнями щодо можливих діапазонів їх застосувань для конкретних каналів поширення і параметрів пучків.

1.3.2. Слабка турбулентність: методи збурень Борна та Ритова. У перших спробах описати пучок, що поширюється у атмосфері, використовувалося наближення геометричної оптики, тобто ігноруючи дифракційні ефекти на малих радіусах турбулентних вихорів [57, 58], але такий підхід виявився дуже обмеженим. Його можна застосовувати лише до відстаней порядку kl_0^2. Натомість, розглянемо методи збурень Борна та Ритова [3], як найбільш відомі класичні підходи, які різною мірою використовувалися у пізніших модифікованих підходах. Різниця між двома методами збурень полягає у розгляді збурень для комплексних фази або амплітуди.

У наближенні Борна використовують

$$n^2(\mathbf{r}) \approxeq 1 + 2\delta n(\mathbf{r}),\ |\delta n(\mathbf{r})| \ll 1 \tag{1.12}$$

та розклад оптичного поля на суму

$$U(\mathbf{r}) = U_0(\mathbf{r}) + U_1(\mathbf{r}) + U_2(\mathbf{r}) + \dots, \tag{1.13}$$

де U_0 — розв'язок за відсутності турбулентності, а наступні члени розкладу, відповідно, враховують однократне, двократне і так далі розсіяння. Очевидно, таке наближення має сенс лише в області слабкої турбулентності, коли вклад багатократних розсіянь у (1.13) ще малий.

Підставивши (1.13) у рівняння (1.11) отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \nabla^2 U_0 + k^2 U_0 &= 0, \\ \nabla^2 U_1 + k^2 U_1 &= -2k^2 \delta n(\mathbf{r}) U_0(\mathbf{r}), \\ \nabla^2 U_2 + k^2 U_2 &= -2k^2 \delta n(\mathbf{r}) U_1(\mathbf{r}), \end{aligned} \tag{1.14}$$

таким чином, зводячи рівняння із випадковими коефіцієнтами до системи однорідного рівняння і неоднорідних рівнянь із постійними коефіцієнтами зі стохастичним вільним членом. Такі неоднорідні рівняння можна розв'язати методом функції Гріна, отримавши бажану точність у даному наближенні. Проте наближення Борна має обмеженіше застосування, аніж наближення Ритова. В рамках наближення Ритова розв'язок для (1.11) шукають у вигляді

$$U(\mathbf{r}) \equiv U(\boldsymbol{\rho}, z) = \exp[\psi(\boldsymbol{\rho}, z)], \tag{1.15}$$

де ψ — збурення комплексної фази, пов'язаної із розсіянням на турбулентних вихрах

$$\psi(\boldsymbol{\rho}, z) = \psi_0(\boldsymbol{\rho}, z) + \psi_1(\boldsymbol{\rho}, z) + \psi_2(\boldsymbol{\rho}, z) + \dots, \tag{1.16}$$

ψ_0, ψ_1 та ψ_2 позначають відповідно члени нульового, першого і другого порядків наближення. Очевидно, що в нульовому наближенні $\exp(\psi_0) = U_0(\boldsymbol{\rho}, z)$ і розв'язок описує поширення випромінювання за відсутності атмосфери. Подібно до наближення Борна, отримаємо систему рівнянь для збурень комплексної фази, підставивши (1.15) у рівняння (1.11). Вважаючи розв'язок для нульового наближання даним, запишемо рівняння для першого члену порядку

$$\nabla^2 \psi_1 + 2\nabla\psi_0 \nabla\psi_1 + 2k^2 \delta n \simeq 0. \tag{1.17}$$

Використавши метод функції Гріна [59], розв'язок (1.17) запишеться як

$$\psi_1(\mathbf{r}) = \frac{k^2}{2\pi U_0(\mathbf{r})} \int\int\int d^3\mathbf{r}' \delta n(\mathbf{r}') U_0(\mathbf{r}') \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \tag{1.18}$$

де $U_0 = \exp(\psi_0)$. Далі, використовуючи (1.18), моменти ψ_1 можна виразити через моменти флуктуацій показника заломлення.

Перший порядок ψ_1 відповідає наближенню однократного розсіяння на атмосферних неоднорідностях. На практиці, для обчислення середніх для другого і четвертого порядку по оптичних полях, необхідно враховувати щонайменше другий порядок теорії збурень ψ_2 [60]. Перші ж експериментальні перевірки показали, що метод застосовний до відстаней 1 km. Для більших відстаней спостерігали значне відхилення від передбачень методу. Пізніше було пояснено, що наближення Ритова еквівалентне врахуванню розсіяння початкової хвилі на серії фазових екранів [61], але у ньому не враховано достатньою мірою багаторазове розсіяння електромагнітних хвиль на турбулентних вихорах.

1.3.3. Сильна турбулентність: параболічне наближення та розширений принцип Гьюґенса-Френеля. Так як методи малих збурень незастосовні для випадку сильної турбулентності, різні дослідницькі групи шукали можливі варіанти опису ширшого спектру каналів та параметрів пучка. Найуспішнішими були параболічне наближення в підході Маркова та так званий розширений принцип Гьюґенса-Френеля [3, 59].

1.3.3.1. Апроксимаційний підхід Маркова. У цьому методі розглядається пучок, що поширюється вздовж деякої осі, z, у середовищі із випадковими флуктуаціями показника заломлення. У даному підході використовується таке представлення електричного поля:

$$\mathbf{E} = u(x, y, z)e^{ikz}, \tag{1.19}$$

де $u(x, y, z)$ — плавна по z функція. Якщо (1.19) підставити у (1.8), при цьому знехтувавши $\partial^2 u/\partial z^2$ і лишаючи лінійні по флуктуаціях показника

заломлення члени, матимемо:

$$2ik\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2k^2\delta n \cdot u \simeq 0. \tag{1.20}$$

Із рівняння (1.20), відомого як *параболічне наближення*, за допомогою апроксимаційного підходу Маркова [1], можна отримати моменти $\langle u(z,\rho)\rangle$ і $\langle u(z,\rho_1)u^*(z,\rho_2)\rangle$, де $\rho \equiv (x,y)$. У методі допускається специфічний вигляд кореляційної функції для флуктуацій показника заломлення (1.9). Таке наближення відповідає ситуації, коли турбулентні вихори виглядають як плаські диски, що напрямлені нормально до осі z. Далі рівняння (1.20) можемо використати для отримання рівняння для середнього $\langle u\rangle$

$$2ik\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial z} + \frac{\partial^2\langle u\rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\langle u\rangle}{\partial y^2} + 2k^2\langle\delta n \cdot u\rangle \simeq 0. \tag{1.21}$$

У цьому рівнянні бачимо величина $\langle\delta n \cdot u\rangle$ сама по собі є невідомою, тому Татарським було запропоновано наближення [1], в якому використовується наближення Маркова (1.9), коли формулу Новікова-Фуруцу для [62], можемо переписати

$$\langle\delta n(\boldsymbol{\rho}) \cdot u(\mathbf{r})\rangle = \frac{ik}{2}A(z,0)\langle u(\mathbf{r})\rangle, \tag{1.22}$$

відповідно для $\langle u\rangle$ матимемо

$$2ik\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial z} + \frac{\partial^2\langle u\rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\langle u\rangle}{\partial y^2} + ik^3A(z,0)\langle u\rangle = 0. \tag{1.23}$$

Із останнього рівняння можна записати загальний розв'язок для першого моменту u, він залежатиме від конкретного вигляду хвилі на виході із джерела.

Окрім того, можна отримати рівняння для другого моменту $\langle u(z,\rho_1)$ $u^*(z,\rho_2)\rangle$, якщо (1.20) помножити на u^* і використати все ту ж теорему Новікова-Фуруцу. Зрозуміло, що рівняння матиме складніший вигляд, ніж у випадку першого моменту і розв'язок, звичайно, отримати значно важче. Загалом, якщо припустити, що у конкретному випадку розв'язок таки мо-

жна записати у явному вигляді, тоді можна оцінити всі важливі параметри пучка.

Апроксимаційний підхід Маркова має низку обмежень (див. [59]), але значною мірою перевершує спектр можливих застосувань порівняно із методами малих збурень. Основним недоліком методу є його математична складність і неможливість отримання точного розв'язку для вищих моментів для u. Наприклад, для моменту

$$\Gamma_4(z, \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_3, \boldsymbol{\rho}_4) = \langle u(z, \boldsymbol{\rho}_1) u^*(z, \boldsymbol{\rho}_2) u(z, \boldsymbol{\rho}_3) u^*(z, \boldsymbol{\rho}_4) \rangle,$$

де $*$ позначає комплексне спряжене, можливо отримати лише асимптотичні розв'язки для слабкої і сильної турбулентності, лишаючи помірну турбулентність поза розглядом.

1.3.3.2. Розширений принцип Гьюґенса-Френеля. Ще одним визнаним методом опису лазерного випромінювання у атмосфері є використання розв'язку (1.23) у представленні [3, 63]

$$u(z, \boldsymbol{\rho}) = \frac{k}{2\pi i z} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2\boldsymbol{\rho}' u_0(\boldsymbol{\rho}') \exp\left[\frac{ik(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')^2}{2z} + \psi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')\right], \qquad (1.24)$$

де $u_0(\boldsymbol{\rho}')$ — початкове значення u при $z = 0$, $\psi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')$ — випадкова комплексна фаза, що пов'язана із поширенням світла з точки $\boldsymbol{\rho}$ до $\boldsymbol{\rho}'$. Розв'язок записаний у формі (1.24) узагальнює відомий із оптики принцип Гьюґенса-Френеля на випадок поширення у атмосфері. Якщо переписати (1.24) як

$$u(z, \boldsymbol{\rho}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2\boldsymbol{\rho}' u_0(\boldsymbol{\rho}') h(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}'), \qquad (1.25)$$

то $h(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')$ можна трактувати як імпульсну перехідну функцію (impulse response function) системи. Відповідно, моменти для u отримують із моментів для $h(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')$. Конкретний вигляд $\psi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')$ став окремим предметом досліджень, але врешті розширений принцип Гьюґенса-Френеля став одним

із найпоширеніших методів, що отримано із перших принципів. Проте і цей метод врешті має низку принципових недоліків, починаючи із дискусії щодо строгості використання такого методу і можливості розширення принципу Гьюґенса-Френеля [64], завершуючи все тією ж неможливістю отримати розв'язок у закритій формі через математичну складність виразів для моментів вищих порядків.

РОЗДІЛ 2

ОПИС ВЗАЄМОДІЇ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА З ТУРБУЛЕНТНОЮ АТМОСФЕРОЮ МЕТОДОМ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ ФОТОНІВ

У зв'язку із неповнотою опису лазерних пучків у атмосфері за допомогою наявних методів (див. попередній розділ), у [37] було розвинуто метод функції розподілу фотонів (фотонної густини) у фазовому просторі. Як зазначалося у Вступі, функція розподілу являє собою операторну функцію, $\hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{q})$, положення $\mathbf{r}$ і хвильового вектора $\mathbf{q}$. Зокрема вона задовольняє концепції вігнерівської функції [38]. А саме, що проінтегрувавши її по $\mathbf{q}$ чи $\mathbf{r}$ отримаємо оператор просторової фотонної густини (або ж інтенсивності поля) $\hat{I}(\mathbf{r})$ або ж оператор числа фотонів $\hat{n}_{\mathbf{q}}$, відповідно.

Застосування методу функції розподілу давно стало невід'ємним атрибутом багатьох теорій. Найвідомішими і найбільш розвинутими прикладами є застосування цього методу у фізиці плазми і теорії твердого тіла. Аналогічно до функцій розподілу заряджених частинок у фізиці плазми і електронів, у теорії твердого тіла можна визначити функцію фотонної густини. Така функція використовувалась для дослідження взаємодії світла з напівпровідниковою плазмою ще в 1992 році у роботі [65]. Пізніше, в роботі [37], метод був узагальнений для теоретичного дослідження оптичних явищ в атмосфері, а в роботі [66] було розглянуто властивості функції розподілу. У цьому розділі представлено формалізм методу функції фотонної густини. Зокрема буде приведено виведення кінетичного рівняння Больцмана-Ланжевена, запропоноване у роботі [48], в якому вплив атмосфери враховується у термінах інтегралу зіткнень фотонів із оптичними

неоднорідностями, а стохастична природа процесу поширення випромінювання виражається наявністю ланжевенівського джерела.

2.1. Функція фотонної густини у фазовому просторі

У квантовій теорії фотоелектричних вимірювань широко використовується позитивно-частотний оператор [67]

$$\hat{V}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k},m} b_{\mathbf{k},m} \mathbf{e}_{\mathbf{k},m} e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}, \tag{2.1}$$

де $\mathbf{e}_{\mathbf{k},m}$ — вектор поляризації, а m — значення конкретної поляризації. Оператор інтенсивності величини $\hat{V}$ визначається як

$$\hat{I}(\mathbf{r},t) = \hat{V}^{\dagger}(\mathbf{r},t)\hat{V}(\mathbf{r},t). \tag{2.2}$$

Легко бачити, що оператор повної кількості фотонів виражається через $\hat{I}(\mathbf{r},t)$ співвідношенням

$$\hat{n} = \int dV \hat{I}(\mathbf{r},t). \tag{2.3}$$

Якщо $\hat{n}$ — сумарна (за об'ємом) кількість фотонів, то $\hat{I}(\mathbf{r},t)$ можна інтерпретувати як оператор локальної густини фотонів.

Після підстановки виразу (2.1) в (2.2), заміни змінних і внесення часових експонент до операторів народження і знищення одержимо [68]

$$\hat{I}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q},\mathbf{k},m,m'} e^{-i\mathbf{kr}} b^{\dagger}_{\mathbf{q}+\mathbf{k}/2,m} b_{\mathbf{q}-\mathbf{k}/2,m'} \mathbf{e}_{\mathbf{q}+\mathbf{k}/2,m} \mathbf{e}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}/2,m'}. \tag{2.4}$$

Члени з великими $|\mathbf{k}|$ описують процеси, що швидко змінюються в просторі, а хвильові вектори $\mathbf{q} = 2\pi/\lambda$ (див. наступний підрозділ) описують моди випромінювання. В той же час, у багатьох практично важливих випадках, істотними є тільки певні значення хвильових векторів фотонів, наприклад, коли світло генерується лазером чи проходить вузькосмугові

фільтри, а характерні просторові масштаби зміни його інтенсивності значно перевищують довжини хвиль. Наведемо приклад: пучок має поперечний розмір $d \sim 1\ cm$, а довжина хвилі знаходиться у видимому діапазоні $\lambda \sim 0.6\ \mu m$; тоді $d \gg \lambda$ і для детальної інформації про пучок досить обмежити набір $\mathbf{k}$ якимось значенням k_0 ($|\mathbf{k}| < k_0$, де $2\pi/d \ll k_0 \ll 2\pi/\lambda$).

Подібна у фізичному сенсі, але відмінна за формою процедура обмеження вкладів компонент з великими значеннями k у виразі для $\hat{I}$ була описана Манделем у 1966р. Він запропонував усереднювати оператор $\hat{I}$ по невеликому просторовому об'єму ($\tilde{V} \ll V$). Згідно із сказаним, цей об'єм має бути достатньо малим ($\tilde{V} = l_x l_y l_z, l_i \ll d$), але в той же час його розміри зручно взяти значно більшими за характерну довжину хвилі. Тоді оператор

$$\hat{n}(\tilde{V}, t) = \int\limits_{\tilde{V}} dV \hat{I}(\mathbf{r}, t), \tag{2.5}$$

що називається оператором Манделя [67] або ж оператором густини фотонів у об'ємі $\tilde{V}$, описує "загрублену" густину фотонів (а не густину фотонів у заданій точці).

З врахуванням вищесказаного далі будемо використовувати оператор густини фотонів у вигляді:

$$\hat{n}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}, |\mathbf{k}| < k_0, m, m'} e^{-i\mathbf{kr}} b^{\dagger}_{\mathbf{q}+\mathbf{k}/2, m} b_{\mathbf{q}-\mathbf{k}/2, m'} \mathbf{e}_{\mathbf{q}+\mathbf{k}/2, m} \mathbf{e}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}/2, m'}, \tag{2.6}$$

Оскільки характерні значення $|\mathbf{k}|$ обмежено ($|\mathbf{k}| \ll |\mathbf{q}|$), то можна вважати, що

$$\mathbf{e}_{\mathbf{q}+\mathbf{k}/2, m} \approx \mathbf{e}_{\mathbf{q}, m}, \quad \mathbf{e}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}/2, m'} \approx \mathbf{e}_{\mathbf{q}, m'}. \tag{2.7}$$

Тоді, внаслідок ортогональності векторів $\mathbf{e}_{\mathbf{q}, m}, \mathbf{e}_{\mathbf{q}, m'}$ з різними m, m', матимемо $\mathbf{e}_{\mathbf{q}, m} \mathbf{e}_{\mathbf{q}, m'} = \delta_{m, m'}$. Враховувавши це, (2.6) перепишеться у вигляді

$$\hat{n}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}, m, |\mathbf{k}| < k_0} e^{-i\mathbf{kr}} b^{\dagger}_{\mathbf{q}+\mathbf{k}/2, m} b_{\mathbf{q}-\mathbf{k}/2, m}. \tag{2.8}$$

Як бачимо, оператор $\hat{n}$ відрізняється від $\hat{I}$ тим, що охоплює лише незначну область хвильових векторів $\mathbf{k}$ (але якої цілком вистачає для описання фотонного поля, характеристики якого плавно змінюються у просторі).

Далі визначимо функцію розподілу [37, 66, 68]:

$$\hat{f}_m(\mathbf{r},\mathbf{q},t) = \frac{1}{V}\sum_{|\mathbf{k}|<k_0} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} b^{\dagger}_{\mathbf{q}+\mathbf{k}/2,m} b_{\mathbf{q}-\mathbf{k}/2,m}, \tag{2.9}$$

тоді можна переписати

$$\hat{n}(\mathbf{r},t) = \sum_{\mathbf{q},m} \hat{f}_m(\mathbf{r},\mathbf{q},t). \tag{2.10}$$

Можна бачити, що оператор $\hat{f}_m(\mathbf{r},\mathbf{q},t)$ визначає вклад фотонів з різними хвильовими векторами $\mathbf{q}$ і з різними поляризаціями в оператор густини. За аналогією з попереднім розглядом можна стверджувати, що $\hat{f}_m(\mathbf{r},\mathbf{q},t)$ — це функція, що описує густину фотонів у фазовому просторі $(\mathbf{r},\mathbf{q})$. Видно, що оператор $\int dV \hat{f}_m(\mathbf{r},\mathbf{q},t) = b^{\dagger}_{\mathbf{q},m} b_{\mathbf{q},m} \equiv \hat{n}_{\mathbf{q}}$ визначає кількість фотонів з імпульсом $\hbar\mathbf{q}$, а сума по $\mathbf{q}$ і m є оператором густини фотонів у конфігураційному просторі ($\mathbf{r}$-просторі). Як буде показано далі, функцію $\hat{f}_m(\mathbf{r},\mathbf{q},t)$ можна використати для опису оптичних явищ, пов'язаних із поширенням лазерного випромінювання у атмосфері.

2.1.1. Власні функції і значення $\hat{f}_m(\mathbf{r},\mathbf{q},t)$. Розгляд власних функцій і власних значень для PDF, який в основному було проведено у роботі [66], дозволить глибше зрозуміти її фізичний зміст і, відповідно, подальший опис динаміки лазерного випромінювання за її допомогою. Вважаючи поляризацію фіксованою, можна ввести оператор

$$\hat{v}^{\dagger}(\mathbf{r},\mathbf{q},t) = V^{-1/2}(\pi/k_0)^{3/2} \sum_{q'<k_0} e^{-i(\mathbf{q}+\mathbf{q}')\cdot\mathbf{r}} b^{\dagger}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'}, \tag{2.11}$$

який, діючи на вакуумний стан $|0\rangle$, генерує нормований збуджений стан $|\mathbf{r},\mathbf{q},t\rangle$,

$$\hat{v}^{\dagger}(\mathbf{r},\mathbf{q},t)|0\rangle = |\mathbf{r},\mathbf{q},t\rangle,\ \langle\mathbf{r},\mathbf{q},t|\mathbf{r},\mathbf{q},t\rangle = 1. \tag{2.12}$$

Можна показати, що функції $|\mathbf{r}, \mathbf{q}, t\rangle$ описують суперпозиційні стани фоківських однофотонних станів, імпульс яких близький до $\mathbf{q}$ і є власними функціями для оператор повної кількості частинок в системі $\hat{N} = \sum_{\mathbf{q}} \hat{n}_{\mathbf{q}}$ із власним значенням одиниця

$$\hat{N}|\mathbf{r}, \mathbf{q}, t\rangle = 1 \times |\mathbf{r}, \mathbf{q}, t\rangle. \tag{2.13}$$

Таким чином стани $|\mathbf{r}, \mathbf{q}, t\rangle$ можна розглядати як однофотонні стани, "розмазані" навколо моди із хвильовим вектором $\mathbf{q}$. Для того, щоб дізнатися просторову конфігурацію $|\mathbf{r}, \mathbf{q}, t\rangle$ на противагу $\hat{N}$ використаємо функції густини фотонів, враховуючи, що $k_0 \ll q$

$$\hat{n}(\mathbf{r}, t)|\mathbf{r}', \mathbf{q}, t\rangle \approx \tilde{\delta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|\mathbf{r}', \mathbf{q}, t\rangle, \tag{2.14}$$

де

$$\tilde{\delta}(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{V} \sum_{k<k_0} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \tag{2.15}$$

Для скінчених k_0 функція $\tilde{\delta}(\mathbf{r})$ локалізована в області, розміри якої порядку π/k_0. Видно, що $|\mathbf{r}', \mathbf{q}, t\rangle$ є приблизно власною функцією оператора густини фотонів. В подібному розгляді можемо показати, що $|\mathbf{r}', \mathbf{q}', t\rangle$ є власною функцією для функції розподілу фотонів $\hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t)$

$$\hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t)|\mathbf{r}', \mathbf{q}', t\rangle \approx \tilde{\delta}_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}\tilde{\delta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|\mathbf{r}', \mathbf{q}', t\rangle, \tag{2.16}$$

де позначка тильди над символом Кронекера означає, що $\mathbf{q} \approx \mathbf{q}'$ з точністю до k_0/q. Помічаючи, що у даному розгляді невизначеність у координаті $\Delta r \sim k_0^{-1}$, невизначеність імпульсу $\Delta q \sim k_0$, бачимо, що $\Delta r \Delta q \sim 1$, тобто наближення відповідає принципу невизначеності Гайзенберґа.

Попередній результат можна легко узагальнити на випадок багаточастинкового стану, хвильову функцію для такого стану можемо записати як

$$|N\{\mathbf{r}_i, \mathbf{q}_i, t\}\rangle = \prod_{i=0}^{N} \hat{v}^\dagger(\mathbf{r}_i, \mathbf{q}_i, t)|0\rangle, \tag{2.17}$$

тоді використовуючи попередні обґрунтування, можемо записати для такого стану

$$\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t)|N\{\mathbf{r}_i,\mathbf{q}_i,t\}\rangle \approx \rho(\mathbf{r},\mathbf{q})|N\{\mathbf{r}_i,\mathbf{q}_i,t\}\rangle, \tag{2.18}$$

де власне значення

$$\rho(\mathbf{r},\mathbf{q}) = \sum_{i=0}^{N} \tilde{\delta}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_i}\tilde{\delta}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i) \tag{2.19}$$

можна інтерпретувати як фотонну густину у фазовому просторі. Якщо узагальнити даний розгляд на випадок довільних часів, то у ρ з'явиться ще залежність від часу

$$\rho(\mathbf{r},\mathbf{q}) = \sum_{i=0}^{N} \tilde{\delta}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_i}\tilde{\delta}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i-\mathbf{c}_{\mathbf{q}_i}t), \tag{2.20}$$

де $\mathbf{c}_{\mathbf{q}} = \partial\omega_{\mathbf{q}}/\partial\mathbf{q}$. У цьому випадку видно, що хвильові пакети зміщуються із часом на відстань $\mathbf{c}_{\mathbf{q}_i}t$, не змінюючи при цьому об'єм локалізації фотонних станів. Так як густина фотонів $\rho(\mathbf{r},\mathbf{q})$ повторює вигляд мікросокпічної функції розподілу для частинок, що не взаємодіють, можемо зробити висновок, що функція розподілу фотонів у фазовому просторі описує фотонне поле у термінах частинок.

2.1.2. Кінетичне рівняння для PDF у атмосфері. Опис еволюції лазерних пучків за допомогою функції розподілу фотонів у фазовому просторі можна узагальнити на випадок поширення пучків у неоднорідному середовищі. Для цього слід врахувати вплив розсіяння фотонів на неоднорідностях і відповідну зміну розподілу фотонів за імпульсами і координатами.

Для фотонного поля в середовищі з випадково неоднорідним показником заломлення гамільтоніан має вигляд

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} b^{\dagger}_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} - \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \hbar\omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}'} b^{\dagger}_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}+\mathbf{k}'}, \tag{2.21}$$

де перший доданок описує електромагнітне поле у вакуумі, а другий враховує вплив флуктуацій показника заломлення на нього. Величини $b^\dagger_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}$ — оператори народження та знищення фотонів з хвильовим вектором $\mathbf{k}$, енергія фотона $\hbar\omega_{\mathbf{k}} = \hbar kc$, де c — швидкість світла у вакуумі, а $n_{\mathbf{k}}$ — Фур'є-образ для флуктуацій показника заломлення $\delta n(\mathbf{r})$. Фур'є-образ визначається для $\delta n(\mathbf{r})$ таким чином

$$n_{\mathbf{k}} = \frac{1}{V}\int dV e^{i\mathbf{kr}}\delta n(\mathbf{r}), \tag{2.22}$$

де V — нормалізуючий об'єм.

Вираз для гамільтоніану (2.21) можна одержати з представлення енергії електромагнітного поля у середовищі з неоднорідним показником заломлення у наближенні малих хвильових векторів $k'(k' \ll k)$ (див. §119 у [69]), де k — характерні хвильові вектори випромінювання, та з врахуванням малості флуктуацій показника заломлення атмосфери $(\delta n(\mathbf{r}) \ll 1)$, використавши розклад оператора квантованого електромагнітного поля по операторам народження та знищення фотонів. Крім того, показник заломлення, як це було згадано в попередньому розділі, вважається незалежним від часу, що справедливо тоді, коли характерні часи зміни конфігурації атмосфери (10^{-3}-10^{-2} c) є значно більшими за час поширення світла від джерела до детектора.

Далі в роботі використовуватимемо таке визначення функції розподілу фотонів у фазовому просторі

$$\hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t) = \frac{1}{V}\sum_{|\mathbf{k}|<k_0} e^{-i\mathbf{kr}} b^\dagger_{\mathbf{q}+\mathbf{k}/2} b_{\mathbf{q}-\mathbf{k}/2}, \tag{2.23}$$

упускаючи індекс m у $f_m(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t)$, оскільки розглядатимемо тільки випадок поляризованого світла з фіксованою поляризацію при його поширенні. Таке спрощення пов'язано з фактом, що зміна поляризації, спричинена турбулентністю, є дуже малою. Більш детально про цей ефект йдеться в роботі [70].

Для отримання конкретного вигляду функції розподілу фотонів у атмосфері запишемо відповідне кінетичне рівняння. Подальший розгляд методу буде проводитись з використанням представлення Гайзенберґа. Тоді зміна оператора $f(\mathbf{r},\mathbf{q},t)$ у часі визначається комутатором

$$\partial_t f(\mathbf{r},\mathbf{q},t) = \frac{1}{i\hbar}[f(\mathbf{r},\mathbf{q},t), H]. \tag{2.24}$$

Підставивши відповідні вирази для гамільтоніану і функції розподілу, матимемо:

$$\begin{aligned}&\partial_t f(\mathbf{r},\mathbf{q},t) + \mathbf{c_q}\partial_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r},\mathbf{q},t)\\ &\quad -i\frac{\omega_0}{V}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} n_{\mathbf{k}'}\left[b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}+\frac{\mathbf{k}'}{2}} b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\frac{\mathbf{k}'}{2}} - b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}-\frac{\mathbf{k}'}{2}} b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}-\frac{\mathbf{k}'}{2}}\right] = 0,\end{aligned} \tag{2.25}$$

або ж використавши визначення функції розподілу фотонів

$$\partial_t f(\mathbf{r},\mathbf{q},t)+\mathbf{c_q}\partial_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r},\mathbf{q},t)-i\omega_0\sum_{\mathbf{k}'} e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}} n_{\mathbf{k}'}\left[f(\mathbf{r},\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}'}{2},t)-f(\mathbf{r},\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}'}{2},t)\right]=0, \tag{2.26}$$

де $\mathbf{c_q} = \partial_{\mathbf{q}}\omega_{\mathbf{q}}$. Перші два члени у кінетичному рівнянні описують поширення випромінювання у вакуумі, в той час як останній член описує взаємодію лазерного пучка із неоднорідною атмосферою. При розгляді конкретних параметрів каналу поширення і мікроскопічної динаміки взаємодії світла із неоднорідностями, загальна форма “турбулентного” члена набуває більш конкретних форм.

У наступних підрозділах покажемо, що у випадку сильної турбулентності або ж великих відстаней поширення характерні імпульси значною мірою стохастизуються через велику кількість зіткнень з неоднорідностями і “турбулентний” член зводиться до плавної випадкової сили, що діє на фотони. У загальному випадку, коли зміна імпульсу при зіткненнях може бути суттєвою, турбулентний член представляється інтегралом зіткнень, який включає весь спектр можливих величин передачі імпульсу, та ланжевенівським джерелом флуктуацій.

2.2. Беззіткневе рівняння Больцмана із випадковою силою

Турбулентний член у (2.26) можна замінити на $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \partial_{\mathbf{q}} \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t)$ [37] у випадку, коли три компоненти хвильових векторів турбулентності $\mathbf{k}'$ набагато менші за відповідні характерні значення хвильового вектора для пучка $\mathbf{q}$, в такому випадку різниця функцій у квадратних дужках з великою точністю (оцінку наближення буде приведено далі в тексті) можна замінити похідною. Величину $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \omega_0 \partial_{\mathbf{r}} n(\mathbf{r})$, ω_0 — центральна частота випромінювання, можна розглядати як випадкову силу, що спричинена оптичною неоднорідністю атмосфери. Враховуючи зазначені наближення кінетичне рівняння (2.26) можна переписати

$$\partial_t \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t) + \mathbf{c}_{\mathbf{q}} \cdot \partial_{\mathbf{r}} \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t) + \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \partial_{\mathbf{q}} \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t) = 0. \tag{2.27}$$

Дане рівняння являє собою беззіткневе рівняння Больцмана із плавно змінною незалежною від імпульсів випадковою силою $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, що діє на точкоподібні частинки.

Загальний розв'язок (2.27) можна записати за допомогою методу характеристик [37]

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t) = \phi\left\{\mathbf{r} - \int\limits_0^t dt' \frac{\partial \mathbf{r}(t')}{\partial t'}; \mathbf{q} - \int\limits_0^t dt' \frac{\partial \mathbf{q}(t')}{\partial t'}\right\}, \tag{2.28}$$

де функція $\phi(\mathbf{r}, \mathbf{q})$ представляє початкове значення $f(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t)$, таким чином

$$\phi(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{kr}} (b^+_{\mathbf{q}+\mathbf{k}/2} b_{\mathbf{q}-\mathbf{k}/2})|_{t=0} \equiv \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{kr}} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{q}). \tag{2.29}$$

Похідні $\frac{\partial \mathbf{r}(t')}{\partial t'}$ і $\frac{\partial \mathbf{p}(t')}{\partial t'}$ мають задовольняти рівняння

$$\frac{\partial \mathbf{r}(t')}{\partial t'} = \mathbf{c}[\mathbf{q}(t')]$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}(t')}{\partial t'} = \mathbf{F}[\mathbf{r}(t')], \tag{2.30}$$

із грачиними умовами $\mathbf{r}(t') = \mathbf{r}$ та $\mathbf{q}(t') = \mathbf{q}$ при $t' = t$. Можемо бачити, що вирази (2.30) збігаються із класичними (ньютонівськими) рівняннями руху для точкових частинок, що рухаються зі швидкістю $\mathbf{c}(\mathbf{q}) \equiv \mathbf{c}_{\mathbf{q}}$ і зазнають впливу зовнішньої сили $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Формальний розв'язок для (2.30) можна записати як

$$\mathbf{q}(t') = \mathbf{q} + \int\limits_{t}^{t'} dt'' \mathbf{F}[\mathbf{r}(\mathbf{q}, t'')] \tag{2.31}$$

і

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}, t') = \mathbf{r} - \mathbf{c}_{\mathbf{q}}(t - t') - \frac{c}{q_0} \int\limits_{t}^{t'} dt''(t'' - t')\mathbf{F}[\mathbf{r}(\mathbf{q}, t'')], \tag{2.32}$$

де $q_0 = \omega_0/c$. Вирази (2.31) та (2.32) можна інтерпретувати як "траєкторії" фотонів, що зазнають впливу атмосферної неоднорідності. Подібна інтерпретація достатньо очікувана, виходячи із розгляду власних значень PDF, які розглянуто вище та наближення $\mathbf{k}' \ll \mathbf{q}$. В такому разі фотони, які описуються функцією розподілу мають достатньо малу відносну невизначеність в імпульсі, $\frac{|\mathbf{q}|}{|\mathbf{k}/2|}$, і тому можуть описуватися в термінах траєкторій (далі в тексті упустимо лапки). Більш точний критерій застосовності інтерпретації фотонних траєкторій і наближення беззіткневого рівняння Больцмана буде приведено нижче.

Формальний розв'язок (2.28) показує, що величина $f(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t)$ не змінюється, якщо рухатися вздовж траєкторій (2.31) and (2.32). За будь-якого набору змінних $(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t)$ функція розподілу $f(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t)$ зберігає своє первинне значення на початку відповідних траєкторій (при $t = 0$), що легко перевірити проінтегрувавши по t' відповідні вирази у (2.28). Рівняння руху (2.31) та (2.32) описують зміщення невеликих елементів початкового розподілу. Термін "фотонна траєкторія" використовується тут безвідносно до кількості і статистики фотонів, такий термін, будучи до певної міри нестрогим, широко використовується у літературі [71].

Слід ще раз підкреслити, при виведенні рівняння (2.27), зокрема, при-

пускається, що $k_0 \ll q_0$. Таке припущення виправдано тим, що з відстанню збільшується ширина лінії (2.32), яка в той же час має бути порядку π/k_0 (див. (2.9)). На практиці, вона може бути більшою за декілька довжин хвиль [67].

Рівняння (2.31) і (2.32) дозволяють переписати вираз (2.28) таким чином

$$f(\mathbf{r},\mathbf{q},t) = \phi\left\{\mathbf{r} - \mathbf{c}_{\mathbf{q}}t + \frac{c}{q_0}\int\limits_0^t dt' t' \mathbf{F}[\mathbf{r}(\mathbf{q},t')]; \mathbf{q} - \int\limits_0^t dt' \mathbf{F}[\mathbf{r}(\mathbf{q},t')]\right\}. \quad (2.33)$$

Як буде показано в наступних розділах, розв'язок рівняння у такому разі можна отримати застосувавши ітераційну процедуру для $\mathbf{r}(\mathbf{q},t')$ по $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Наприклад, у першому наближенні припускається, що самі функції $\mathbf{F}[\mathbf{r}(\mathbf{q},t')]$ залежать від координати як $\mathbf{r}(\mathbf{q},t') \approx \mathbf{r} - \mathbf{c}_{\mathbf{q}}(t-t')$, тобто використовуються прямолінійні траєкторії, що не враховують впливу турбулентності. Наступні порядки теорії включають турбулентні члени в аргументі випадкової сили.

Застосовність беззіткневого рівняння Больцмана для малих відстаней. Для того, щоб фотони розглядати як частинки, густина яких у $(\mathbf{r},\mathbf{q})$-просторі визначається функцією розподілу $f(\mathbf{r},\mathbf{q},t)$, невизначеність у імпульсі, $\mathbf{q}$, має бути малою. Величину невизначеності можна оцінити виходячи із визначення функції розподілу (2.23) як $\tilde{k}/2$. Поблизу джерела випромінювання, за відсутності фазового змішувача та фактично нульового вкладу, що пов'язаний із атмосферою, відношення $\frac{\tilde{q}}{\tilde{k}/2} \sim \frac{\langle q^2\rangle^{1/2}}{\langle k^2/4\rangle^{1/2}} = \frac{(2/r_0^2)^{1/2}}{(2/r_0^2)^{1/2}} = 1$. Таким чином, наприклад, поблизу джерела проведення розрахунків для σ^2 із використанням концепту траєкторій фотонів незастосовне для світла в когерентному стані.

Ситуація суттєво інша для випадку віддаленого приймача. При збільшенні відстані поширення, z, значення $\tilde{q}$ зростають. Відповідне збільшення величини імпульсу фотонів, $\Delta\mathbf{q}$, спричиняється випадковою силою, $\mathbf{F}$. Тож,

хоча середнє значення $\langle \Delta \mathbf{q} \rangle$ дорівнює нулю, ненульове середньоквадратичне значення, як побачимо в наступних розділах, дається виразом [37, 49]

$$\langle \Delta q^2 \rangle = 0.066\pi^2 \Gamma(1/6) q_0^2 {l'_0}^{-1/3} C_n^2 z. \tag{2.34}$$

В той же час значення для $\tilde{k}$ мають протилежну динаміку в часі і їх величина спадає обернено пропорційно до ширини пучка [49, 56]

$$R^2 = \frac{r_0^2}{2}\big[1 + \frac{4z^2}{q_0^2 r_0^2 r_1^2} + \frac{8z^3 T}{r_0^2}\big], \tag{2.35}$$

де $T = 0.558 l_0^{-1/3} C_n^2$, $r_1^2 = r_0^2/\left(1 + 2r_0^2 \lambda_c^{-2}\right)$, λ_c - характерна кореляційна довжина для фазового змішувача (див. в наступному розділі). У випадку, коли останній член у квадратних дужках є домінантним, відношення $\tilde{q}^2/(\tilde{k}/2)^2$ можна оцінити як [47]

$$\langle \Delta q^2 \rangle R^2 \approx 15 \cdot q_0^2 l_0^{-2/3} C_n^4 z^4, \tag{2.36}$$

де припускається, що $\langle \Delta q^2 \rangle$ порядку $\tilde{q}^2$, ігноруючи квадрат початкового радіуса $2/r_0^2$.

Зокрема підставивши $z = 10^3$м, $q_0 = 10^7$м$^{-1}$, and $l_0 = 2\pi \cdot 10^{-3}$м у вираз (2.36), отримаємо $\frac{\tilde{q}}{\tilde{k}/2} \sim 21$, який забезпечує адекватність вищенаведеного опису у термінах траєкторій фотонів для опису достатньо великих відстаней. Така оцінка також застосовна і до частково когерентних пучків. У цьому випадку мінімальні можливі значення відстані z навіть менші, аніж для когерентного випромінювання. Це пояснюється наявністю додаткового, спричиненого фазовим дифузером (див. у наступному розділі), росту $\tilde{q}^2$, який можна оцінити як $\Delta \tilde{q}^2_{diffuser} \sim 2/r_1^2$. При цьому початкове значення $\tilde{k}^2/4 \sim 2/r_0^2$ не залежить від параметрів фазового дифузера.

2.3. Рівняння Больцмана-Ланжевена

Отримання кінетичного рівняння (2.27), що розглянуто в попередньому підрозділі, може бути обґрунтовано лише у випадку, коли всі компоненти

хвильових векторів фотонів $\mathbf{q}$ є достатньо великими. Такий випадок відповідає поширенню випромінювання на великі відстані або ж сильній турбулентності. У рамках дисертаційної роботи розглянуто більш загальний підхід, який необтяжений такими небажаними обмеженнями, і отримано відповідне кінетичне рівняння для PDF.

У кінетичному рівнянні (2.25) останній член у правій стороні описує процес "зіткнень" із атмосферними неоднорідностями. Амплітуда цього процесу визначається $n_{\mathbf{k}'}$, випадковою величиною із середнім $\langle n_{\mathbf{k}'} \rangle = 0$. Два оператора у квадратних дужках у рівнянні (2.25) також залежать від $\mathbf{k}'$. Записавши рівняння Гайзенберґа для цих операторів, можна отримати їх явну залежність від випадкових флуктуацій показника заломлення. Розгляньмо рівняння еволюції для одного із цих операторів

$$\left\{\partial_t - i\left(\omega_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}} - \omega_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'}\right)\right\} b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}} b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'} = \\ i\omega_0 \sum_{\mathbf{k}''} n_{\mathbf{k}''} \left[b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}} b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}''} - b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}-\mathbf{k}''} b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'} \right]. \quad (2.37)$$

Розв'язок можна записати як

$$b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}} b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'}\Big|_t = e^{i(\omega_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}} - \omega_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'})(t-t_0)} \left(b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}} b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'} \right)\Big|_{t_0} + \quad (2.38)$$

$$+ i\omega_0 \sum_{\mathbf{k}''} \int_{t_0}^{t} dt' e^{i(\omega_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}} - \omega_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'})(t-t')} n_{\mathbf{k}''} \left(b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}} b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}''} - b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}-\mathbf{k}''} b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'} \right)\Big|_{t'},$$

де індекси t_0 і t' позначають відповідну залежність операторів від часу.

У виразі (2.38) інтервал часу $t - t_0$ обрано таким чином, що він був великим порівняно з часом взаємодії фотона із турбулентними неоднорідностями π/ck' і достатньо малим порівняно із часом релаксації $1/\nu$, що спричинено цією взаємодією

$$\pi/ck' \ll t - t_0 \ll 1/\nu. \quad (2.39)$$

За допомогою ν позначаємо частоту зіткнень, а величина $1/k'$ представляє характерні довжини атмосферних неоднорідностей. Іншими словами,

часова ієрархія (2.39) означає, що час взаємодії фотонів із оптичними неоднорідностями набагато коротший, аніж час вільного прольоту. Такий критерій є звичним для оцінки застосовності рівняння Больцмана для опису багаточастинкових систем (див., наприклад, [39]).

Підставивши вираз (2.38) і відповідний розв'язок для оператора $b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}-\mathbf{k}'} b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\big|_t$ у рівняння (2.37), отримаємо кінетичне рівняння для $\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t)$

$$\partial_t \hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t) + \mathbf{c}_\mathbf{q} \cdot \partial_\mathbf{r} \hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t) = \hat{K}(\mathbf{r},\mathbf{q},t) - \hat{\nu}_\mathbf{q}\left\{\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t)\right\}, \tag{2.40}$$

де

$$\hat{K}(\mathbf{r},\mathbf{q},t) = \frac{i\omega_0}{V}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} n_{\mathbf{k}'} \Big[e^{i(\omega_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}} - \omega_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'})(t-t_0)} \big(b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}} b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'}\big)\big|_{t=t_0} - \\ - e^{i(\omega_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}-\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}})(t-t_0)} \big(b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}-\mathbf{k}'} b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\big)\big|_{t=t_0}\Big], \tag{2.41}$$

$$\hat{\nu}_\mathbf{q}\left\{\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t)\right\} = \frac{2\pi\omega_0^2}{c}\int d\mathbf{k}'_\perp \psi(\mathbf{k}'_\perp)\big(\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t) - \hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q}+\mathbf{k}'_\perp,t)\big). \tag{2.42}$$

Позначення ($\perp$) позначає перпендикулярні до осі z компоненти відповідних векторів, $\psi(\mathbf{k}'_\perp) = \frac{V}{(2\pi)^3}\langle |n_{\mathbf{k}'_\perp}|^2\rangle$. Значення $\psi(\mathbf{k})$ дається формулою фон Кармана

$$\psi(\mathbf{k}) = 0.033 C_n^2 \frac{\exp(-(kl_0/2\pi)^2)}{(k^2 + L_0^{-2})^{11/6}},$$

де, нагадаємо, структурна константа C_n^2 описує амплітуду флуктуацій показника заломлення, а L_0 та l_0, відповідно, так звані зовнішній і внутрішній радіуси турбулентності, що обмежують спектр характерних $\mathbf{k}'_\perp$. Із (2.40)-(2.42) можемо бачити, що випадкова величина $\hat{K}(\mathbf{r},\mathbf{q},t)$ лінійно залежить $n_{\mathbf{k}'}$. В той час як $\hat{\nu}_\mathbf{q}$ залежить лише від змінної $\langle |n_{\mathbf{k}'_\perp}|^2\rangle$, яка не має випадкового характеру, бо вкладом флуктуюючої частини $n_{\mathbf{k}'} n_{\mathbf{k}''}$ можна знехтувати (для детальнішого опису див. Додаток А).

Лінійне неоднорідне рівняння (2.40) описує еволюцію функції розподілу фотонів у фазовому просторі. Член $\hat{\nu}_\mathbf{q}\big\{\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t)\big\}$ відображає дисипацію

функції розподілу, пов'язану із стохастизацією хвильових векторів фотонів $\mathbf{q}_\perp$. Визначення "дисипація" не означає, що загальна кількість фотонів зменшується, натомість можемо бачити, що сумування членів, що пов'язані із зіткненнями (2.42) по $\mathbf{q}$ дає нуль, тобто кількість фотонів зберігається. Частоту зіткнень ν можемо оцінити за допомогою виразу $\frac{2\pi\omega_0^2}{c}\psi(k'_\perp)k'^2_\perp$, де $k'_\perp$ характерна величина переданого імпульсу. У випадку поширення на великі відстані

$$q_\perp \gg k'_\perp, \tag{2.43}$$

інтеграл зіткнень зводиться до диференціальної форми

$$\hat{\nu}_{\mathbf{q}}\left\{\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t)\right\} = -\frac{\pi\omega_0^2}{c}\int d\mathbf{k}'_\perp\psi(\mathbf{k}'_\perp)\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\mathbf{k}'_\perp\right)^2\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t), \tag{2.44}$$

яка описує дифузієподібний рух у просторі хвильових векторів.

Ланжевенівське джерело флуктуацій у рівнянні (2.40) представлено членом $\hat{K}(\mathbf{r},\mathbf{q},t)$, яке є вираженням випадкових "зіткнень" фотонів із неоднорідностями (див. [39] та [72]). В межах інтервалу, що обмежується нерівністю (2.39), доданки у правій стороні виразу (2.41) мають просту осцилюючу залежність від часу. В такому випадку, обчислення двочасової кореляційної функції $\langle\hat{K}(\mathbf{r},\mathbf{q},t)\hat{K}(\mathbf{r}',\mathbf{q}',t')\rangle$ зводиться до отримання середніх значень добутків операторів у той самий момент часу, t_0. Ланжевенівське джерело повністю зникає при усередненні рівняння (2.40) по флуктуаціях показника заломлення, лишаючи однорідне рівняння для $\langle\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t)\rangle$, яке можна застосувати для обчислення параметрів пучка для будь-яких відстаней.

Кінетичне рівняння із $\hat{K}(\mathbf{r},\mathbf{q},t) = 0$ і інтеграл зіткнень, подібним до (2.44), вперше було запропоновано у роботах [73], [74] для дослідження поширення релятивістських заряджених частинок через неоднорідне середовище (наприклад, через фольгу). Подібність виникає із еквівалентності наближення малих кутів розсіяння, які використано у [73], [74], та параксіального наближення, використаного тут.

2.4. Висновки

У цьому розділі приведено формалізм методу функції розподілу фотонів у фазовому просторі у підрозділі 2.1, представлено попередній наближений підхід беззіткневого кінетичного рівняння Больцмана у підрозділі 2.2, в якому вплив турбулентності зводиться до впливу випадкової класичної сили пов'язаної із градієнтом показника заломлення в атмосфері.

У підрозділі 2.2 приведено критерій застосовності концепції фотонних траєкторій для підходу плавної випадкової сили. Такий критерій можна вивести із оцінки невизначеності поперечного імпульсу фотонів і її залежності від часу поширення пучка.

У підрозділі 2.3, висвітлено результати дисертаційної роботи щодо побудови більш загального підходу для методу функції розподілу фотонів. Зокрема для випадку довільних значень передачі імпульсів при взаємодії лазерного випромінювання із неоднорідностями атмосфери, отримано кінетичне рівняння Больцмана-Ланжевена. В рамках рівняння інтеграл зіткнень описує взаємодію фотонів із оптичними неоднорідностями, а ланжевенівське джерело враховує стохастичну природу такої взаємодії. Показано, що в рамках параксіального наближення для лазерних пучків інтеграл зіткнень зводиться до оператора, що діє у двовимірному імпульсному просторі.

Основні результати розділу опубліковано у праці [47, 48].

РОЗДІЛ 3

ІНТЕНСИВНІСТЬ І ПЕРШИЙ МОМЕНТ ДЛЯ PDF

В даному розділі розглядається перший момент для функції розподілу фотонів у фазовому просторі. За допомогою середнього значення PDF можемо описати ряд параметрів пучка, таких як поперечне збільшення радіуса пучка, приріст поперечного імпульсу фотонів при поширенні в атмосфері. Окрім того, за допомогою середньої функції розподілу можна оцінити значення інтенсивності пучка і її просторові властивості за різного набору параметрів каналу і випромінювання. Використовуючи визначення і властивості PDF додатково розглянемо картину еволюції випромінювання у фазовому просторі і взаємозв'язок між координатним і імпульсним просторами. У другій частині розділу розглянемо вплив турбулентних неоднорідностей на збільшення довжини світлових імпульсів у лазерному пучку і висвітлимо основні механізми, що дають вклад в таке видовження.

3.1. Середнє значення функції розподілу $\hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t)$

Як було зазначено в попередньому розділі густина фотонів у координатному просторі при фіксованій поляризації визначається як сума по всіх $\mathbf{q}$ для оператора фотонної густини, $\hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t)$, у $(\mathbf{r}, \mathbf{q})$-просторі

$$\hat{I}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{q}} \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t). \tag{3.1}$$

В свою чергу, оператор густини фотонів або ж інтенсивність можна представити як

$$\hat{I}(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{I}(\mathbf{r}, t) \rangle + \delta \hat{I}(\mathbf{r}, t), \tag{3.2}$$

де $\langle \hat{I}(\mathbf{r},t)\rangle$ та $\delta\hat{I}(\mathbf{r},t)$, відповідно, середнє значення і флуктуації інтенсивності $\hat{I}(\mathbf{r},t)$. Відповідне усереднення складається з двох частин: усереднення по флуктуацій джерела і по різних конфігураціях турбулентної атмосфери. Обидва усереднення можна провести незалежно, оскільки природа даних флуктуацій різна і між ними немає кореляції. Очевидно, що середнє значення інтенсивності і її флуктуації виражаються відповідно через середнє і флуктуації PDF. Тому явний вираз для останньої однозначно виражає інтенсивність. Як було описано у попередніх розділах, у загальному випадку еволюція оператора фотонної густини у фазовому просторі, $\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t)$, описується рівнянням Больцмана-Ланжевена

$$\partial_t \hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t) + \mathbf{c_q}\cdot\partial_{\mathbf{r}}\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t) = \hat{K}(\mathbf{r},\mathbf{q},t) - \hat{\nu}_{\mathbf{q}}\big\{\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t)\big\}. \tag{3.3}$$

Неоднорідне рівняння (3.3) можна застосувати як для опису еволюції функції розподілу, так і для відповідних флуктуацій. Інтеграл зіткнень $\hat{\nu}_{\mathbf{q}}\big\{\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t)\big\}$ описує розсіяння фотонів на оптичних неоднорідностях. Із виразу для інтегралу зіткнень (2.42) слідує, що величину

$$W(\mathbf{k}'_\perp) = \frac{(2\pi)^3\omega_0^2}{Sc}\psi(\mathbf{k}'_\perp)$$

можна інтерпретувати як ймовірність переходу фотонів зі стану із імпульсом $\mathbf{q}_\perp$ до стану з імпульсом $\mathbf{q}_\perp \pm \mathbf{k}'_\perp$ за одиницю часу. Надалі використовуватимемо величину

$$\nu = \frac{2\pi\omega_0^2}{c}\int d\mathbf{k}'_\perp\psi(\mathbf{k}'_\perp), \tag{3.4}$$

яка буде зручним параметром для опису релаксації системи і не містить залежності від параметрів пучка, характеризуючи лише статистичні властивості неоднорідної атмосфери.

Випадкова природа індивідуальних зіткнень представлена ланжевенівським джерелом флуктуацій, $\hat{K}(\mathbf{r},\mathbf{q},t)$. Зазвичай, кореляційні функції для

ланжевенівських джерел виражаються через ймовірності переходів і середнє значення функцій розподілу (див., наприклад, [72]).

При усередненні рівняння (3.3), ланжевенівське джерело, яке лінійно виражається через гаусівську величину $n_{\mathbf{k}'}$, зникає і кінетичне рівняння для $\langle \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t) \rangle$ зводиться до

$$[\partial_t + \mathbf{c}_{\mathbf{q}} \cdot \partial_{\mathbf{r}} + \hat{\nu}_{\mathbf{q}}] \langle \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t) \rangle = 0. \tag{3.5}$$

Кінетичне рівняння для флуктуюючої частини

$$\delta f(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t) = \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t) - \langle \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t) \rangle \tag{3.6}$$

відповідно запишеться як

$$[\partial_t + \mathbf{c}_{\mathbf{q}} \cdot \partial_{\mathbf{r}} + \hat{\nu}_{\mathbf{q}}] \delta f(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t) = \hat{K}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t). \tag{3.7}$$

Очевидно, що рівняння (3.5) та (3.7) можна використати для отримання виразів для середнього значення та флуктуацій PDF. Початкова конфігурація поля випромінювання на вихідній апертурі визначає граничні умови для $\langle \hat{f} \rangle$. Вільний член, K, являється єдиним джерелом нетривіального розв'язку (3.7) при поширенні лазерних пучків, якщо знехтувати фотонними флуктуаціями на вихідній апертурі. Оцінку флуктуацій PDF буде зроблено в наступному розділі роботи. Поки що ж для опису величин другого порядку по оптичних полях розгляньмо граничні умови, що накладаються на поле випромінювання та знайдемо розв'язок кінетичного рівняння (3.5).

3.1.1. Граничні умови для початкового випромінювання. Статистичні властивості світлового випромінювання залежать не лише від турбулентності, а і від початкової функції розподілу $\phi(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \equiv \langle \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t) \rangle|_{t=0}$, яка визначається конфігурацією вихідного поля. Явний вигляд початкової функції розподілу можна отримати зі своєрідної процедури "зшивання" поля на виході із апертури і поля в атмосфері [37, 49], що визначаються

амплітудами $b_{\mathbf{q}}(b^{\dagger}_{\mathbf{q}})$. Зазвичай, розглядаючи поширення випромінювання у напрямку z і нехтуючи довжиною імпульсу, припускають, що лазерному полю в площині апертури відповідає гаусовий розподіл

$$\Phi(\mathbf{r}_{\perp}) = \left(\frac{2}{\pi r_0^2}\right)^{1/2} e^{-r_{\perp}^2/r_0^2}, \tag{3.8}$$

де r_0 радіус вихідної апертури. Лазерне і вихідне поле мають співвідноситися таким чином

$$\sum_{\mathbf{q}_{\perp},q_z} \left(\frac{2\pi\hbar\omega_{\mathbf{q}}}{V}\right)^{1/2} b_{\mathbf{q}} e^{-i\omega_{\mathbf{q}}t + i\mathbf{q}_{\perp}\cdot\mathbf{r}_{\perp}} \propto \alpha_L b \Phi(\mathbf{r}_{\perp}) e^{-i\omega_0 t}, \tag{3.9}$$

де b – амплітуда моди лазерного поля, $V = SL_z$ — об'єм нормування, а коефіцієнт α_L описує пропускання випромінювання через апертуру. Як і перед тим, можна застосувати параксіальне наближення ($\omega_{\mathbf{q}} \approx cq_z$). Окрім того, зі співвідношення полів випливає, що суму зліва можна обмежити лише членом із $q_z = \omega_0/c = q_0$. Із виразу (3.9), провівши відповідне інтегрування, можемо записати вираз для $b_{\mathbf{q}}$

$$b_{\mathbf{q}} \propto b\alpha_L \frac{r_0}{\sqrt{\hbar\omega_0}} \sqrt{\frac{L_z}{S}} e^{-q_{\perp}^2 r_0^2/4} \delta_{q_z,q_0}. \tag{3.10}$$

Вираз (3.10) дозволяє явно записати $\phi(\mathbf{r},\mathbf{q})$, якщо відоме значення повного потоку фотонів.

Фазовий змішувач (дифузор). У випадку розгляду частково когерентного випромінювання, на вихідній апертурі з'являється фазовий змішувач, який призводить до появи додаткової випадкової фази випромінювання. Наявність фазового змішувача враховується додатковим фазовим множником $e^{-i\mathbf{a}\mathbf{r}_{\perp}}$ у функції розподілу $\Phi(\mathbf{r}_{\perp})$, де $\mathbf{a}$ – випадкова змінна. У цьому випадку в правій частині рівняння (3.10) має бути замінено $\mathbf{q}_{\perp}$ на $\mathbf{q}_{\perp} + \mathbf{a} \equiv \mathbf{q}_{\mathbf{a}}$ [47]. Така проста модель врахування фазового змішувача можлива за виконання двох умов: (1) час детектування набагато більший за характерні часи зміни $\mathbf{a}$ (повільний детектор) і (2) середньоквадратичне

значення фазових флуктуацій фазового змішувача мають великі значення. [Більш детальний аналіз запропоновано у [75]]. У цьому випадку можна використати для величини **a** гаусовий розподіл

$$P(a_{x,y}) = \frac{\lambda_c}{2\pi^{1/2}} \exp(-a_{x,y}^2 {\lambda_c}^2/4), \tag{3.11}$$

із коваріацією $\langle a_{x,y}^2 \rangle = \lambda_c^{-2}$ і кореляційною функцією вихідного поля для поперечного напрямку (при $t = 0$)

$$\langle E(\mathbf{r}_\perp) E(\mathbf{r}_\perp + \mathbf{\Delta}) \rangle_{\mathbf{a}} = E_0^2 \exp\left(-[r_\perp^2 + (\mathbf{r}_\perp + \mathbf{\Delta})^2] r_0^{-2}\right) \cdot \exp\left(-\Delta^2 \lambda_c^{-2}\right). \tag{3.12}$$

Де використано позначення $E_0 = E(r_\perp = 0, \Delta = 0, t = 0)$, а $\langle ... \rangle_{\mathbf{a}}$ означає усереднення по розподілу $P(a_{x,y})$. Параметр λ_c в показнику експоненти описує зменшення кореляційної довжини у поперечному напрямку. Окрім того, можна побачити, що цей параметр вводить нову характерну довжину, $1/r_1$, у розподілі імпульсів, тобто у просторі **q**-векторів. Зокрема це видно із виразу для функції $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{q})$, яка після усереднення по флуктуаціях величини **a** і використання виразу 3.10 зводиться до

$$\langle \phi(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \rangle_{\mathbf{a}} = b^\dagger b \frac{\alpha_L^2 L_z}{S\hbar\omega_0} r_1^2 \exp\left(-q_\perp^2 \frac{r_1^2}{2} - k_\perp^2 \frac{r_0^2}{8}\right), \tag{3.13}$$

де $r_1^2 = r_0^2 / \left(1 + 2r_0^2 \lambda_c^{-2}\right)$ і упускаються змінні q_z та k_z. Бачимо із виразу (3.13), що спектр $q_\perp$ визначається величиною $\sqrt{2}/r_1$, яка має більші значення у випадку некогерентного пучка. На противагу, характерні значення $\tilde{k}$ залежать лише від початкового радіуса пучка ($\tilde{k} \sim \sqrt{8}/r_0$) [37]. Ефект фазового змішувача зникає у граничному випадку, коли $\lambda_c \to \infty$, оскільки тоді $r_1 \to r_0$.

При поширенні лазерних пучків дифракційні явища і розсіяння на атмосферних неоднорідностях призводять до розширення пучка. Тож, як наслідок, характерні значення $\tilde{k}$ зменшуються. В той же час, як побачимо в цьому розділі, значення $\tilde{q}$ ростуть із відстанню як для броунівських частинок

у просторі $\mathbf{q}_\perp$ (див. [37], [49]). Проте така проста фізична картина опису геометрії пучка виявляється незастосовною для опису сцинтиляцій. Явище сцинтиляцій набагато складніше і його можливо описати лише в рамках висвітлення часово-просторових кореляцій чотирьох хвиль. Такий розгляд буде представлено у наступному розділі.

3.1.2. Розв'язок кінетичного рівняння для середнього значення PDF. Знаючи граничні умови для випромінювання, можемо перейти до розв'язання рівняння для середньої функції розподілу фотонів. Однорідне рівняння (3.5) можна розв'язати використовуючи Фур'є-перетворення. Для цього помножимо всі члени в (3.5) на фактор $\frac{1}{S} \times e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}}$ і проінтегруємо по $\mathbf{r}_\perp$. Для скорочення запису використовуватимемо позначення $f(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t)$ для $\langle \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t) \rangle$. В результаті інтегрування, для Фур'є-образу

$$f(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{q}, t) = \frac{1}{S} \int d\mathbf{r}_\perp f(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t) e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}}, \tag{3.14}$$

отримаємо простіше рівняння

$$(\partial_t - i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{c}_{\mathbf{q}_\perp}) f(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{q}_\perp, t) = -\hat{\nu}_{\mathbf{q}_\perp} \{ f(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{q}_\perp, t) \}, \tag{3.15}$$

в якому використано $\mathbf{c}_{\mathbf{q}_\perp} = c\mathbf{q}_\perp / q_0$ та $|\mathbf{c}_{\mathbf{q}_\perp}| \ll c$, тобто знову ж таки параксіальне наближення. Так як z-компоненти векторів не включено в останнє рівняння, поки що упустимо позначення $\perp$ для скорочення запису і розглядатимемо лише x- та y-компоненти. І повернемо позначення поперечних компонент там, де це буде необхідно. Розв'язок рівняння (3.15) можна записати як добуток

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{q}, t) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}\frac{ct}{q_0}} \times \varphi(\mathbf{k}, \mathbf{q}, t), \tag{3.16}$$

в такому разі нова функція φ задовольняє інтегральне рівняння

$$\partial_t \varphi(\mathbf{k}, \mathbf{q}, t) = -\frac{2\pi\omega_0^2}{c} \int d\mathbf{k}' \psi(\mathbf{k}') \left[\varphi(\mathbf{k}, \mathbf{q}, t) - e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}'\frac{ct}{q_0}} \varphi(\mathbf{k}, \mathbf{q}+\mathbf{k}', t) \right]. \tag{3.17}$$

Ще одне перетворення Фур'є

$$\Phi(\mathbf{k},\mathbf{p},t) = S^{-1}\sum_{\mathbf{q}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}\varphi(\mathbf{k},\mathbf{q},t), \tag{3.18}$$

зводить кінетичне рівняння до рівняння релаксаційного типу

$$\partial_t\Phi(\mathbf{k},\mathbf{p},t) = -\gamma(\mathbf{k},\mathbf{p},t)\Phi(\mathbf{k},\mathbf{p},t). \tag{3.19}$$

Частота релаксації γ визначається як

$$\gamma(\mathbf{k},\mathbf{p},t) = \frac{4\pi\omega_0^2}{c}\int d\mathbf{k}'_\perp\psi(\mathbf{k}'_\perp)\sin^2\left[\left(\mathbf{p}-\mathbf{k}\frac{ct}{q_0}\right)\cdot\frac{\mathbf{k}'_\perp}{2}\right]. \tag{3.20}$$

Незалежні змінні $\mathbf{p},\mathbf{k},t$ визначають вектор $\mathbf{P}(t) = \mathbf{p}-\mathbf{k}tc/q_0$, від якого залежить параметр релаксації: $\gamma \equiv \gamma\big(\mathbf{P}(t)\big)$. В такому разі бачимо, що для великих значень $\mathbf{P}(t)\cdot\mathbf{k}'/2$, величина γ має такі ж значення як ν [див. (3.4)].

Розв'язок рівняння (3.19) можна записати як

$$\Phi(\mathbf{k},\mathbf{p},t) = e^{-\int_0^t dt'\gamma(\mathbf{k},\mathbf{p},t')}\Phi(\mathbf{k},\mathbf{p},t=0). \tag{3.21}$$

Початкове значення $\Phi(\mathbf{k},\mathbf{p},t=0)$ залежить від початкових умов для випромінювання. Зокрема із (3.16) легко бачити, що $\varphi(\mathbf{k},\mathbf{q},t{=}0) \equiv \phi(\mathbf{k},\mathbf{q})$.

Використовуючи рівняння (3.21), отримаємо

$$f(\mathbf{k},\mathbf{q},t){=}\int d\mathbf{p}e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{p}-\mathbf{k}ct/q_0)}e^{-\int_0^t\gamma(\mathbf{k},\mathbf{p},t')}\Phi(\mathbf{k},\mathbf{p},t{=}0). \tag{3.22}$$

Для випадку гаусівських пучків використаємо вираз для початкового випромінювання, взявши функцію $\phi(\mathbf{k},\mathbf{q})$ (упускаємо позначення усереднення по $\mathbf{a}$) з попереднього підрозділу для випадку когерентного пучка. Тоді середню функцію розподілу можемо записати як

$$f(\mathbf{r},\mathbf{q},t){=}C\int d\mathbf{p}\int d\mathbf{k}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{k}ct/q_o)}e^{-k^2r_0^2/8-p^2/2r_0^2}e^{-\int\limits_0^t dt'\gamma(\mathbf{k},\mathbf{p},t')}, \tag{3.23}$$

де константу C можна виразити через повний потік фотонів. При виведені (3.23), було використано співвідношення (3.18) та (3.22).

Вираз (3.23) являє собою аналітичний розв'язок кінетичного рівняння (3.5) у параксіальному наближенні. Отримання середньої функції розподілу включає багатократне (семикратне) інтегрування правої частини (3.23). Проте, деякі висновки щодо форми PDF можливо зробити якісно, без виконання чисельних інтегрувань. Перш за все, розгляньмо випадок великих відстаней поширення, коли характерні значення k^2 та $\mathbf{p}$ малі, через відповідно розширення пучка і збільшення величини імпульсу фотонів [37]. В цьому випадку, вираз для середньої PDF спрощується,

$$f(\mathbf{r},\mathbf{q},t)=C\int d\mathbf{p}\int d\mathbf{k}e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{q}ct/q_0)}e^{-i\mathbf{q}\mathbf{p}}e^{-\int\limits_0^t dt'\gamma(\mathbf{k},\mathbf{p},t')}. \tag{3.24}$$

Перший підінтегральний множник є осцилюючою функцією. Проте він рівний одиниці, якщо $\mathbf{r}=\mathbf{q}ct/q_0$. Як результат, $f(\mathbf{r},\mathbf{q},t)$ має більші значення, якщо вектори $\mathbf{r}$ and $\mathbf{q}$ однаково напрямлені. Дрейф фотонів зі швидкістю $\mathbf{q}c/q_0$ відповідає за асиметрію їх розподілу у векторному просторі $(\mathbf{r},\mathbf{q})$.

Таким чином значення функції розподілу повністю визначаються параметрами вихідного випромінювання і атмосферною турбулентністю. Використовуючи для опису статистичних властивостей атмосфери спектр Татарського, тобто вважаючи L_0 необмеженим, можна проінтегрувати (3.20) по $\mathbf{k}'$ і знайти аналітичний вираз для частоти релаксації γ,

$$\gamma(\mathbf{k},\mathbf{p},t)=\frac{2\pi^2\omega_0^2}{c}0.033C_n^2\Gamma\left(-\frac{5}{6}\right)l_0'^{\frac{5}{3}}\left[1-{}_1F_1\left(-\frac{5}{6},1;-\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{k}\frac{ct}{q_0})^2}{4l_0'^2}\right)\right] \tag{3.25}$$

де ${}_1F_1(a,b;z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a^{(n)}z^n}{b^{(n)}n!}$ — гіпергеометрична функція (функція Кумера), а $a^{(n)}$, $b^{(n)}$ — символи Похгаммера.

3.1.3. Поперечний імпульс фотонів. За допомогою виразу для середнього значення функції розподілу фотонів у фазовому просторі розглянемо вплив турбулентної атмосфери на зміну поперечного імпульсу фо-

тонів. Середньоквадратичне значення для поперечного імпульсу визначається як

$$\langle \mathbf{q}^2 \rangle = \frac{\int d\mathbf{r} \int d\mathbf{q} q^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t)}{\int d\mathbf{r} \int d\mathbf{q} f(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t)}. \tag{3.26}$$

Як і перед тим, розглядаються гаусові пучки із відповідною початковою конфігурацією випромінювання. Використовуючи (3.23) і провівши інтегрування по $\mathbf{r}$ у виразі (3.26), отримаємо

$$\langle \mathbf{q}^2 \rangle = \frac{\int d\mathbf{q} q^2 \int d\mathbf{p} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}} e^{-p^2/2r_0^2} e^{-\gamma_p t}}{\int d\mathbf{q} \int d\mathbf{p} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}} e^{-p^2/2r_0^2} e^{-\gamma_p t}}, \tag{3.27}$$

де $\gamma_p \equiv \gamma(\mathbf{k} = 0, \mathbf{p}, t = 0)$ виражається як

$$\gamma_p = \frac{4\pi\omega_0^2}{c} \int d\mathbf{k}'_\perp \psi(\mathbf{k}'_\perp) \sin^2(\frac{1}{2}\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}'_\perp). \tag{3.28}$$

Для великих відстаней поширення (великі t) лише малі значення γ_p дають суттєвий вклад у (3.27). У цьому випадку, можна використати замість $\sin^2(\frac{1}{2}\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}'_\perp)$ наближене значення $\frac{1}{4}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}'_\perp)^2$. В такому разі, змінні $\mathbf{k}'$ та $\mathbf{p}$ розділяються у виразі для γ_p, як результат отримаємо

$$\int d\mathbf{p} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}} e^{-p^2/2r_0^2 - \gamma_p t} = \int d\mathbf{p} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} - p^2(\alpha t + 1/2r_0^2)}, \tag{3.29}$$

де константа α визначається як

$$\alpha = \frac{\pi\omega_0^2}{2c} \int d\mathbf{k}' k'^2 \psi(k'). \tag{3.30}$$

Після інтегрування у (3.27), отримаємо

$$\langle \mathbf{q}^2 \rangle = \frac{2}{r_0^2} + 4\alpha t, \tag{3.31}$$

і врешті-решт для спектру Татарського

$$\langle \mathbf{q}^2 \rangle = \frac{2}{r_0^2} + 0.066\pi^2 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) C_n^2 q_0^2 l_0'^{-\frac{1}{3}} z. \tag{3.32}$$

Можемо бачити з рівняння (3.29), що у розглянутому випадку основний вклад в інтеграл дає область, де виконується умова $\gamma_p t \sim 1$. Для великих значень t цю величину можна оцінити як $(k'p)^2 \nu t$, де k' і p відповідають характерним значенням даних векторів. Беручи до уваги, що

$(k'p)^2 \sim (k'/q)^2 \ll 1$, бачимо, що

$$\nu t \gg 1. \tag{3.33}$$

Ця нерівність означає, що час поширення t має бути набагато більшим за релаксаційний час ν^{-1}. Такою є загальна умова застосовності асимптотичного наближення (3.32).

Перший доданок у (3.31) включає дифракційні явища, пов'язані із вихідною апертурою. Другий доданок ідентичний тому, що виведено у [37], використовуючи підхід випадкової плавної сили. Як буде показано нижче у підрозділі 3.1.6 таке співпадіння невипадкове.

Окремо розглянемо область близьку до вихідної апертури. Простий аналіз дозволяє описати збільшення імпульсу фотонів $\langle \mathbf{q}^2 \rangle$ на початкових етапах поширення, починаючи від $2/r_0^2$. Для малих значень t, експонента $e^{-\gamma_p t}$ наближено дорівнює $1 - \gamma_p t$. У разі наявності такої лінійної залежності від t, легко отримати відповідні аналітичні вирази. Інтегрування виразу (3.27) по змінних $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}'$ дає

$$\langle \mathbf{q}^2 \rangle = \frac{2}{r_0^2} + 0.066\pi^2 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) C_n^2 q_0^2 {l_0'}^{-\frac{1}{3}} z. \tag{3.34}$$

Легко бачити, що вирази (3.32) та (3.34) ідентичні, хоча вони і отримані для дуже різних моментів часу t. Рівняння (3.34) застосовне, коли

$$\nu t \ll 1. \tag{3.35}$$

Ще одне наближення, незважаючи на суттєву його обмеженість у практичних випадках, можемо привести для відповідності із попередніми результатами класичної теорії поширення лазерного випромінювання в атмосфері. Використавши вираз для спектру Татарського, визначення (3.28) перепишеться за допомогою гіпергеометричної функції як

$$\gamma_p = \frac{2\pi^2 \omega_0^2}{c} 0.033 C_n^2 \Gamma\left(-\frac{5}{6}\right) {l_0'}^{\frac{5}{3}} \left[1 - {}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1; -\frac{\mathbf{p}^2}{4{l_0'}^2}\right)\right]. \tag{3.36}$$

Як бачимо, у випадку, коли внутрішній радіус турбулентності $l_0 \to 0$ маємо випадок, коли аргумент гіпергеометричної функції $\frac{p^2}{4l_0'^2} \gg 1$, в такому випадку сама функція виражається наближенням ${}_1F_1(a,b;z) \xrightarrow[z\gg 1]{} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)}(-z)^{-a}$, а γ_p як степенева функція зі степенем 5/3. Для того, щоб отримати аналітичний вираз використаємо квадратичне наближення $exp(-ax^{5/3}) \approx exp(-a^{6/5}x^2)$, яким послуговувалися у ранніх роботах [76, 77]. В такому разі, після інтегрування для середньоквадратичного значення поперечного імпульсу, матимемо

$$\langle \mathbf{q}_\perp^2 \rangle = \frac{2}{r_0^2} + (1.46 C_n^2 z q_0^2)^{6/5}. \tag{3.37}$$

Як бачимо, для такого наближення характерним є незалежність виразу для поперечного імпульсу від розмірів внутрішнього радіусу турбулентності l_0.

Так як окрім розглянутих випадків існує набагато більший спектр можливих параметрів пучка і каналу поширення випромінювання, то величину $\langle \mathbf{q}^2 \rangle$ для довільних фізичних параметрів, які включено до (3.22), можна отримати чисельно використавши загальний вираз для частоти релаксації (3.25).

3.1.4. Розширення пучка. Розширення пучка описується середнім значенням квадрату відстані від осі z. Використовуючи схему із попереднього підрозділу для поперечного імпульсу, замінимо $\langle \mathbf{q}^2 \rangle$ на $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$ у виразі (3.26)

$$\langle \mathbf{r}^2 \rangle = \frac{\int d\mathbf{r} d\mathbf{k} r^2 e^{-i\mathbf{kr} - \frac{k^2 r_0^2}{8}(1+\frac{4c^2t^2}{q_0^2 r_0^4}) - \int_0^t dt' \gamma(t')}}{\int d\mathbf{r} d\mathbf{k} e^{-i\mathbf{kr} - \frac{k^2 r_0^2}{8}(1+\frac{4c^2t^2}{q_0^2 r_0^4}) - \int_0^t dt' \gamma(t')}}, \tag{3.38}$$

де вже проведено інтегрування по змінних $\mathbf{q}$ та $\mathbf{p}$. Релаксаційний член $\gamma(t')$ у виразі (3.35) визначається як

$$\gamma(t') = \frac{4\pi\omega_0^2}{c} \int d\mathbf{k}' \psi(k') \sin^2\left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' \frac{ct'}{2q_0}\right). \tag{3.39}$$

Як і перед тим, у випадку великих часів t, квадрат синуса у виразі (3.39) можемо замінити квадратом його аргументу. Такий крок значно спрощує інтегрування у виразі (3.38). Як результат, для виразу розширення пучка матимемо

$$\langle \mathbf{r}^2 \rangle = \frac{r_0^2}{2}\left(1 + \frac{4z^2}{r_0^4 q_0^2} + \frac{8z^3 c\alpha}{3r_0^2\omega_0^2}\right). \tag{3.40}$$

Із виразу (3.40) видно, що останній доданок у дужках описує основний вклад у радіус пучка для випадку великих відстаней поширення ($\propto z^3$). Подібні вирази отримувалися в рамках інших методів та наближень [28, 37, 56].

Хоча для випадку малих часів поширення неможливо розкласти експоненту із релаксаційним членом у ряд, оскільки інтегрування по часу не проводиться так легко, як у випадку $\langle \mathbf{q}^2 \rangle$. У ранніх роботах для опису малих відстаней поширення, а також для випадку, коли $l_0 \to 0$ використовували наближення $\frac{k^2 z^2}{4q_0^2 l_0'^2} \gg 1$ із відповідним степеневим наближенням для $\gamma(t')$ і квадратичним наближенням для експоненти, що містить релаксаційну частоту. У такому випадку середнє значення ширини пучка не залежить від внутрішнього радіуса турбулентності і асимптотично виражається як

$$e^{-\int\limits_0^t dt'\gamma(t')} \approx e^{-\frac{z^2}{\rho_0^2 q_0^2}k^2}, \tag{3.41}$$

$$\langle \mathbf{r}_\perp^2 \rangle = \frac{r_0^2}{8} + \frac{z^2}{2r_0^2 q_0^2} + \frac{z^2}{\rho_0^2 q_0^2}, \tag{3.42}$$

де $\rho_0 = (1.46 C_n^2 z q_0^2 \int_0^1 d\tau (1-\tau)^{5/3})^{-3/5}$.Таке наближення часто використовувалося у ранніх роботах [56].

3.1.5. Асимптотичне значення функції розподілу фотонів. Аналітичний вираз для PDF у випадку великих відстаней поширення можна легко записати, проінтегрувавши вираз (3.24) по $\mathbf{p}$ та $\mathbf{k}$

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t) \approx 3C\left(\frac{2\pi q_0}{ct^2\alpha}\right)^2 \exp\left[-\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{q}ct}{2q_0}\right)^2 \frac{4}{\langle \mathbf{r}^2 \rangle_T} - \frac{4q^2}{\langle \mathbf{q}^2 \rangle_T}\right] \tag{3.43}$$

де $\langle \mathbf{r}^2 \rangle_T = \frac{4z^3 c\alpha}{3\omega_0^2}$ і $\langle \mathbf{q}^2 \rangle_T = 4\alpha t$ описують розширення пучка та збільшення імпульсу фотона під впливом атмосферної турбулентності [див. (3.31) та (3.40)]. Константу C можна виразити через повний потік фотонів у напрямку поширення лазера. Для асимптотично великих значень t, вигляд f не залежить від початкової (при $t = 0$) конфігурації поля випромінювання. В тому сенсі, що вигляд функції розподілу визначається в основному "турбулентними" вкладами у її змінні, нехтуючи при цьому початковими значеннями імпульсів і "вакуумним" вкладом для радіусу пучка.

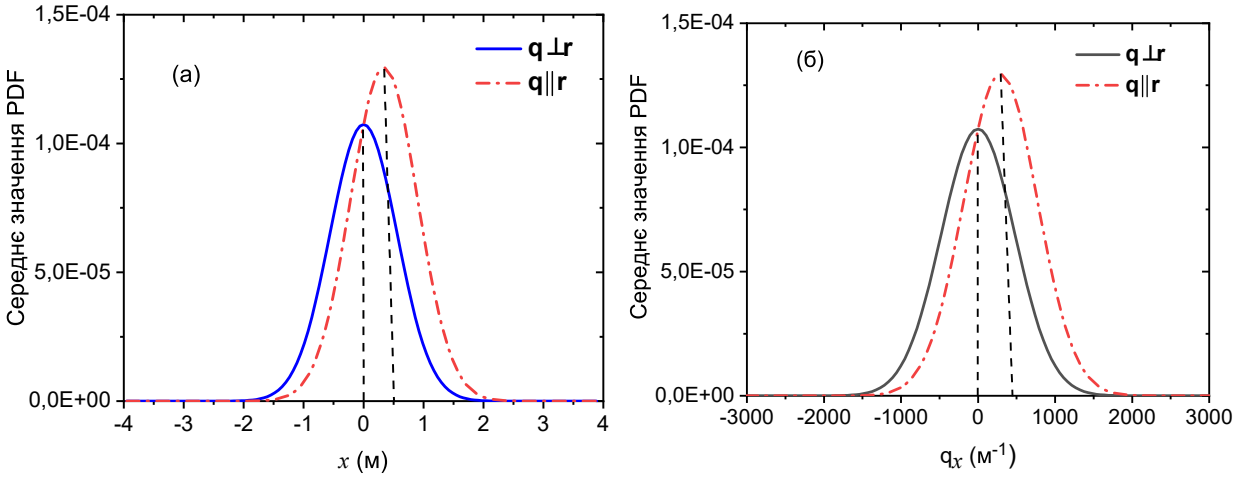

Рис. 3.1. Профіль функції розподілу фотонів у (а) $\mathbf{r}$-просторі із фіксованими $y = 0$, $q_x = 0$, $q_y = \sqrt{\alpha t} \equiv \sqrt{\langle \mathbf{q}^2 \rangle_T}/2$ для суцільної кривої, і $q_x = \sqrt{\langle \mathbf{q}^2 \rangle_T}/2$, $q_y = 0$ для крапка-пунктирної; (б) $\mathbf{q}$-простір із фіксованими $q_y = 0$, $x = 0$, $y = \sqrt{\frac{z^3\alpha}{3q_0^2 c}} \equiv \sqrt{\langle \mathbf{r}^2 \rangle_T}/2$ для суцільної кривої, та $x = \sqrt{\langle \mathbf{r}^2 \rangle_T}/2$, $y = 0$ для крапка-пунктирної. Параметри пучка та атмосферного каналу: $r_0 = 0.01\,\text{м}$, $z = 20\,\text{км}$, $C_n^2 = 2.5 \times 10^{-14}\,\text{м}^{-2/3}$, $l_0/2\pi = 10^{-3}\,\text{м}$, $q_0 = 10^7\,\text{м}^{-1}$.

Просторовий розподіл симетричний відносно напрямленості вектора $\mathbf{q}$ і досягає максимуму при значеннях $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{q}ct}{2q_0}$ [див. Рис. 3.1]. Просумувавши обидві сторони рівності (3.43) по $\mathbf{q}$, отримаємо асимптотичне значення для інтенсивності

$$\langle \hat{I}(\mathbf{r}, t) \rangle = C \frac{4\pi S}{\langle \mathbf{r}^2 \rangle_T} e^{-\frac{r^2}{\langle \mathbf{r}^2 \rangle_T}}, \tag{3.44}$$

який являє собою другий момент по полях випромінювання.

3.1.6. PDF для беззіткневого рівняння Больцмана. Підставивши вираз $-\mathbf{F}\partial_{\mathbf{r}}\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t)$ замість $\hat{K}(\mathbf{r},\mathbf{q},t) - \hat{\nu}_{\mathbf{q}}\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t)$ в праву частину рівняння (3.3), отримаємо альтернативне кінетичне рівняння, у якому турбулентність враховано як плавну випадкову силу $\mathbf{F} = \omega_0\partial_{\mathbf{r}}n(\mathbf{r})$, яка діє на фотони. Як зазначалося у попередньому розділі такий опис застосовний у випадку режиму помірної та сильної турбулентності, коли зміна імпульсу фотонів при зіткненні із оптичними неоднорідностями мала (див., наприклад, [37, 47, 75]).

У цьому підрозділі розглянемо застосовність беззіткневого рівняння Больцмана для опису поширення лазерного пучка. Із випадковою силою $\mathbf{F}$ кінетичне рівняння для пучка в атмосфері запишеться як [37]

$$\{\partial_t + \mathbf{c}_{\mathbf{q}}\partial_{\mathbf{r}} + \mathbf{F}(\mathbf{r})\partial_{\mathbf{q}}\}f(\mathbf{r},\mathbf{q},t) = 0. \tag{3.45}$$

Як було зазначено у Розділі 2 дане кінетичне рівняння розв'язується методом характеристик із заданням відповідних початкових умов (див. вираз (2.28)). Розглядаючи випадок когерентного випромінювання запишемо вираз для граничних умов у формі

$$\phi(\mathbf{k},\mathbf{q}) = C''e^{-(q_\perp^2+k_\perp^2/4)r_0^2/2}, \tag{3.46}$$

де коефіцієнт C'' виражається через повний потік фотонів.

Використавши вирази (2.29), (2.33) та (3.46), отримаємо

$$f(\mathbf{r}_\perp,\mathbf{q}_\perp,t) = C''\sum_{\mathbf{k}_\perp} e^{-i\mathbf{k}_\perp\mathbf{R}(t)-Q^2(t)r_0^2/2-k_\perp^2 r_0^2/8}, \tag{3.47}$$

де

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}_\perp - \mathbf{c}_{\mathbf{q}_\perp}t + \frac{c}{q_0}\int\limits_0^t dt't'\mathbf{F}[\mathbf{r}_\perp(\mathbf{q}_\perp,t')]$$

і

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{q}_\perp - \int\limits_0^t dt' \mathbf{F}[\mathbf{r}_\perp(\mathbf{q}_\perp, t')].$$

Можемо значно спростити розгляд розв'язку, використавши рівність

$$e^{-Q^2 r_0^2/2} = \int \frac{d\mathbf{p}}{2\pi r_0^2} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{Q} - p^2/(2r_0^2)}. \tag{3.48}$$

Підставивши (3.48) у вираз (3.47), отримаємо показник експоненти, який залежить від випадкової сили $\mathbf{F}$ лише лінійно

$$f(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{q}_\perp, t) = \frac{C''}{2\pi r_0^2} \sum_{\mathbf{k}} \int d\mathbf{p} e^{-i\mathbf{k}_\perp\{\mathbf{r} - \mathbf{c_q} t\} - i\mathbf{p}\mathbf{q}}$$
$$\times e^{-k^2 r_0^2/8 - p^2/2r_0^2} e^{i\int_0^t dt' \left(\mathbf{p} - \mathbf{k}\frac{ct'}{q_0}\right)\mathbf{F}[\mathbf{r}(t')]}. \tag{3.49}$$

Останній множник у (3.49) спрощується після усереднення по різних конфігураціях показника заломлення у атмосфері. Припускаючи, що випадкова величина

$$\Pi = i \int\limits_0^t dt' \left(\mathbf{p} - \mathbf{k}\frac{ct'}{q_0}\right) \mathbf{F}[\mathbf{r}(t')]$$

задовольняє гаусову статистику, можемо записати

$$\langle e^{\Pi} \rangle = e^{\langle \Pi^2 \rangle/2} \tag{3.50}$$

де

$$\langle \Pi^2 \rangle = -\frac{8\pi\omega_0^2}{c} \int\limits_0^t dt' \int d\mathbf{k}'_\perp \psi(\mathbf{k}'_\perp) \left[\left(\mathbf{p} - \mathbf{k}_\perp \frac{ct'}{q_0}\right) \cdot \frac{\mathbf{k}'_\perp}{2} \right]^2, \tag{3.51}$$

що дуже подібно до виразу для частоти релаксації γ [див. вираз (3.20)]. При виведенні виразу (3.51) було використано наступні співвідношення

$$\langle n(\mathbf{r}_{t'}) n(\mathbf{r}_{t''}) \rangle = \int d\mathbf{k}' e^{i\mathbf{k}'_\perp(\mathbf{r}_{t'} - \mathbf{r}_{t''}) - ik'_z(z' - z'')} \psi_{\mathbf{k}'}$$
$$\approx \frac{2\pi}{c} \delta(t' - t'') \int d\mathbf{k}'_\perp \psi_{\mathbf{k}'_\perp}, \tag{3.52}$$

де $z' = ct'$, $z'' = ct''$. Використання дельта-функції у виразі (3.52) обґрунтовується тим, що повздовжня до напрямку поширення компонента швидкості фотонів набагато більша за поперечну компоненту, $c \gg cq_\perp/q_0$.

Для великих відстаней поширення, функцію синуса у виразі (3.20) можна замінити на її аргумент, отримавши в результаті $\frac{1}{2}\langle\Pi^2\rangle \approx -\gamma(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{p}, t)$. Після відповідної заміни у (3.20) і усереднення по турбулентній атмосфері у (3.49), отримаємо ідентичні вирази для функцій розподілу, що отримані за допомогою альтернативний підходів. Очевидно, що у випадку великих часів поширення обидва підходи збігаються. Такий результат важливий, оскільки підтверджує застосовність попередніх наближень для підходу випадкової сили.

3.1.7. Обговорення. Функція розподілу фотонів, як специфічний вигляд другого моменту для полів, може адекватно описувати еволюцію лазерних пучків. Як випливає із визначення PDF (2.23), хвильовий вектор $\mathbf{k}$ описує просторовий розподіл поля випромінювання, в той час як хвильовий вектор $\mathbf{q}$ відображає кінетику PDF. Еволюція цих двох величин демонструє протилежну динаміку — просторово-часові зміни пучка призводять до розширення пучка (відповідно, до зменшення характерних значень $\mathbf{k}$) і до збільшення швидкості цього процесу із часом (пропорційна $\mathbf{q}$).

Розв'язок для усередненого кінетичного рівняння у параксіальному випадку демонструє значну анізотропію функції розподілу. Така анізотропія виникає у зв'язку з дрейфом фотонів зі швидкістю $c\mathbf{q}/q_0$ в паралельному до $\mathbf{r}$ напрямку. Як видно із (3.43) центр просторового розподілу пучка рухається зі швидкістю $c\mathbf{q}/(2q_0)$. Простий аналітичний вираз для PDF(3.43) для випадку великих відстаней підтверджує попередню інтерпретацію результатів у підході плавної випадкової сили (див. підрозділ 3.1.6). Асиметрію PDF у фазовому просторі для різної орієнтації векторів $\mathbf{r}$ та $\mathbf{q}$ показано на Рис. 3.1.

3.2. Збільшення довжини світлових імпульсів

Серед інших негативних ефектів, що пов'язані із широким розкидом характерних розмірів неоднорідностей, у випадку сильної турбулентності або коротких світлових імпульсів (порядку пікосекунд) може бути важливим врахування ефекту збільшення довжини імпульсу. Суттєве розповзання імпульсів у повздовжньому напрямку може обмежувати параметри лазерних систем при практичних застосуваннях, наприклад, у квантовій криптографії, призводячи, зокрема, до флуктуації часу потрапляння імпульсу на детектор чи перекривання сусідніх імпульсів. Такі ефекти, очевидно, можуть призводити до спотворення інформації у лазерних системах зв'язку (див., наприклад, роботи [56],[78]).

3.2.1. Отримання явного виразу для довжини лазерних імпульсів. Інтенсивність оптичного випромінювання (з точністю до постійного множника), як було показано вище, виражається через $\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t)$ таким чином [37]

$$\hat{I}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} \hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t), \tag{3.53}$$

де враховано, що ширина спектра випромінювання є малою.

Підставивши сюди загальний розв'язок $\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t)$ для випадку великих відстаней (див. підрозділ 2.2) одержимо

$$\hat{I}(\mathbf{r}) = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{q},\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\left\{\mathbf{r}-\int\limits_0^t dt'\mathbf{c}[\mathbf{q}(t')]\right\}} \left\{ b^{\dagger}_{\mathbf{q}-\int\limits_0^t dt'\mathbf{F}_{\perp}[\mathbf{r}(t')]+\frac{\mathbf{k}}{2}} b_{\mathbf{q}-\int\limits_0^t dt'\mathbf{F}_{\perp}[\mathbf{r}(t')]-\frac{\mathbf{k}}{2}} \right\}_{t=0}. \tag{3.54}$$

Для знаходження середнього значення $\langle\hat{I}(\mathbf{r})\rangle$ врахуємо залежність групової швидкості світла, що входить у вираз (3.54) від флуктуацій показника заломлення. У попередніх роботах ([37], [79]) така залежність враховувалася лише в лінійному наближенні по δn, у поперечної складової. Для оцінки видовження світлових імпульсів необхідно врахувати флуктуації швидкості

в повздовжньому напрямку зі збереженням квадратичних по флуктуаціях членів. Тоді швидкість світла в атмосфері з флуктуючим показником заломлення набуває вигляду

$$\mathbf{c}[\mathbf{q}(t')] = c[1 - \delta n(t') - \frac{q_\perp^2(t')}{2q_0^2}]\mathbf{e}_z + c\frac{\mathbf{q}_\perp(t')}{q_0}[1 - \delta n(t')], \tag{3.55}$$

де повздовжня складова хвильового вектора q_z виражається через поперечну і враховуються лінійні та квадратичні вклади малих величин δn та $\mathbf{F}_\perp$ у виразі для імпульсів $\mathbf{q}_\perp(t)$.

Після заміни змінних $\mathbf{q}_\perp - \int\limits_0^t dt'\mathbf{F}_\perp[\mathbf{r}(t')] \to \mathbf{q}_\perp$ середнє значення інтенсивності набуває вигляду

$$\langle \hat{I}(\mathbf{r})\rangle = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{q},\mathbf{k}} \left\langle e^{-i\mathbf{k}\left\{\mathbf{r} - \int\limits_0^t dt' c[1-\delta n(t') - \frac{q_\perp^2(t')}{2q_0^2}]\mathbf{e}_z + c\frac{\mathbf{q}_\perp(t')}{q_0}[1-\delta n(t')]\right\}} \right\rangle \times \left\langle \left\{ b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}} b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}} \right\}_{t=0} \right\rangle, \tag{3.56}$$

після вищезазначеної заміни залежність $\mathbf{q}_\perp(t')$ має вже дещо інший вигляд, а саме $\mathbf{q}_\perp + \int\limits_0^{t'} \mathbf{F}_\perp(t'')dt''$.

Вираз для середнього під знаком суми у (3.56) розбивається на два незалежних усереднення, як зазначалося у попередніх розділах. Перше після знака суми — усереднення за різними конфігураціями показника заломлення, а друге — за флуктуаціями, зумовлених самим джерелом випромінювання.

Знову-таки, для $\langle\{b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}} b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\}_{t=0}\rangle$ усереднення повністю залежить від властивостей джерела. З умови зшивки полів лазерного поля та поля, можна знайти співвідношення між ними. Проте на відміну попередньо розглянутого випадку функція $\Phi(\mathbf{r})$ враховує ще ненульову довжину імпульсів у z-напрямку

$$\Phi(\mathbf{r}) = (\frac{2}{\pi})^{3/4}(r_0^2 r_z)^{-1/2} e^{-\mathbf{r}^2/r_0^2 - (z-z_0)^2/r_z^2}, \tag{3.57}$$

тож для частини, що описує усереднення по флуктуаціях джерела випромінювання, отримаємо

$$\left\langle \left\{ b^{\dagger}_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}} b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}} \right\}_{t=0} \right\rangle = \frac{(2\pi)^{3/2} r_0^2 r_z}{V} \left\langle b^{\dagger} b \right\rangle e^{-\mathbf{k}_{\perp}^2 (r_0^2/8) - \mathbf{q}_{\perp}^2 (r_0^2/2) + i k_z z_0} \times$$
$$\times\, e^{-\mathbf{k}_z^2 (r_z^2/8) - (\mathbf{q}_z - \mathbf{q}_0)^2 (r_z^2/2)}, \quad (3.58)$$

При усередненні за різними конфігураціями атмосферних неоднорідностей, послуговуватимемося спектром Татарського для флуктуацій показника заломлення і вважатимемо, що основний вклад у $\mathbf{q}_{\perp}$ дає саме турбулентність, нехтуючи при цьому початковим значенням $\mathbf{q}_{\perp}$. Очевидно, що таке наближення добре виконується при поширенні пучка на великі відстані (при сильній турбулентності). Тоді вираз для $\mathbf{q}_{\perp}$ запишеться як

$$\mathbf{q}_{\perp}(t) \approx \int\limits_0^t dt' \mathbf{F}_{\perp}[\mathbf{r}(t')]. \quad (3.59)$$

В експоненті (3.56) виділимо флуктуючу частину $q_{\perp}^2(t')$, записавши цю величину у вигляді $q_{\perp}^2(t') \equiv q_{\perp}^2(t') - \langle q_{\perp}^2(t') \rangle + \langle q_{\perp}^2(t') \rangle$. Тоді усереднення пов'язані із флуктуаціями показника заломлення зведеться до знаходження середнього значення наступного виразу

$$\left\langle e^{-\int\limits_0^t dt' i k_z c \frac{q_{\perp}^2(t') - \langle q_{\perp}^2(t') \rangle}{2 q_0^2}} e^{-\int\limits_0^t dt' i c k_z n(t')} e^{-\int\limits_0^t dt' i \mathbf{k}_{\perp} c \frac{\mathbf{q}_{\perp}(t')}{q_0}} \right\rangle. \quad (3.60)$$

Можна показати, що (3.60) розбивається на два незалежних усереднення

$$\left\langle e^{-\int\limits_0^t dt' i k_z c \frac{q_{\perp}^2(t') - \langle q_{\perp}^2(t') \rangle}{2 q_0^2}} e^{-\int\limits_0^t dt' i \mathbf{k}_{\perp} c \frac{\mathbf{q}_{\perp}(t')}{q_0}} \right\rangle \times \left\langle e^{-\int\limits_0^t dt' i c k_z n(t')} \right\rangle. \quad (3.61)$$

Це пов'язано із тим, що $n(t')$ є гаусовою випадковою величиною і тим, що у перший множник величина $n(t')$ входять через $\mathbf{F}_{\perp}(\mathbf{r}) \propto \partial n(\mathbf{r}) / \partial \mathbf{r}$.

Знаходження середнього від першого множника у (3.61) залишається складною математичною задачею. Аналітичний розв'язок, який дозволяє

проаналізувати картину на якісному рівні, можна отримати лише в грубому наближенні. Воно полягає в тому, що різницю $q_\perp^2(t') - \langle q_\perp^2(t')\rangle$ вважатимемо малою величиною і знехтуємо кореляціями між експонентами в першому множнику (3.61). В результаті матимемо три незалежні усереднення. Експоненту у виразі $\left\langle e^{-\int\limits_0^t dt' ik_z c\frac{q_\perp^2(t')-\langle q_\perp^2(t')\rangle}{2q_0^2}}\right\rangle$ розкладемо в ряд по різниці $q_\perp^2(t') - \langle q_\perp^2(t')\rangle$, зберігши члени до другого порядку включно. Тоді

$$\left\langle e^{-\int\limits_0^t dt' ik_z c\frac{q_\perp^2(t')-\langle q_\perp^2(t')\rangle}{2q_0^2}}\right\rangle = \left\langle 1 - \frac{1}{2}k_z^2c^2\left(\int\limits_0^t dt'\frac{q_\perp^2(t') - \langle q_\perp^2(t')\rangle}{2q_0^2}\right)^2\right\rangle. \quad (3.62)$$

Усереднивши за флуктуаціями показника заломлення експоненційні множники, отримаємо

$$\left\langle e^{-i\mathbf{k}\left\{\mathbf{r}-\int\limits_0^t dt' c[1-\delta n(\mathbf{r}(t'))-\frac{q_\perp^2(t')}{2q_0^2}]\mathbf{e}_z+c\frac{\mathbf{q}_\perp(t')}{q_0}[1-\delta n(\mathbf{r}(t'))]\right\}}\right\rangle =$$
$$= e^{-i\mathbf{kr}+ik_z(L-3L^2T)-0.7k_z^2TLl_0^{1/3}L_0^{5/3}-k_\perp^2L^3T}(1 - 9k_z^2L^4T^2), \quad (3.63)$$

де $T = 0.558C_n^2l_0^{-1/3}$, а L — відстань на яку поширився імпульс, $L = ct$. [Відзначимо, що в цьому підрозділі позначення z зарезервовано за відповідною координатою у повздовжньому напрямку.]

Підставивши результати усереднення і знайшовши суму по $\mathbf{k}$, $\mathbf{q}$, одержимо остаточний вираз для середньої інтенсивності

$$\langle\hat{I}(\mathbf{r})\rangle = I_0 e^{-\frac{2r_\perp^2}{r_0^2}\left(1+\frac{8L^3T}{r_0^2}\right)^{-1}-\frac{2(z-z_0-L+3L^2T)^2}{r_z^2}\left(1+\frac{5.3TLl_0^{1/3}L_0^{5/3}}{r_z^2}\right)^{-1}}\times$$
$$\times\left(1 - 9k_z^2L^4T^2\left[\frac{1}{4(r_z^2/8 + 0.7TLl_0^{1/3}L_0^{5/3})} - \frac{(z - z_0 - L + 3L^2T)^2}{(r_z^2/8 + 0.7TLl_0^{1/3}L_0^{5/3})^2}\right]\right), \quad (3.64)$$

де константа I_0 визначається інтенсивністю джерела випромінювання і дорівнює $\langle\hat{I}(\mathbf{r} = 0, L = 0)\rangle$.

Для отримання явної залежності довжини імпульсу від відстані L та сили турбулентності використовуємо загальний вираз

$$R_z^2 = \frac{\int z_c^2 \langle \hat{I}(z_c) \rangle dz}{\int \langle \hat{I}(z_c) \rangle dz}, \tag{3.65}$$

де z_c – відстань до центру імпульсу, з (3.64) $z_c = z - z_0 - L + 3L^2T$.

Провівши інтегрування, одержуємо вираз для довжини імпульсу:

$$R_z^2 = 2\left(\frac{r_z^2}{8} + 0.7TLl_0^{1/3}L_0^{5/3}\right)\left(1 + \frac{80}{\frac{1.2\left(r_z^2/8 + 0.7TLl_0^{1/3}L_0^{5/3}\right)}{L^4T^2} + 35}\right). \tag{3.66}$$

З (3.66) можна оцінити, за яких параметрів системи збільшення довжини імпульсу стає одного порядку з початковою довжиною, $\tau_p \sim r_z/c$, тобто, коли ефект видовження стає значним. Такі умови визначаються співвідношеннями

$$\frac{TL^2}{c} \sim \tau_p, \tag{3.67}$$

$$\frac{\sqrt{TLl_0^{1/3}L_0^{5/3}}}{c} \sim \tau_p. \tag{3.68}$$

і співпадають з тими, що наведені в огляді [56], хоч і отримані іншим методом.

З формули (3.66) можна знайти числові оцінки додаткового вкладу у довжину імпульсу внаслідок флуктуацій показника заломлення. При сильній турбулентності ($C_n^2 \sim 10^{-13}\ m^{-2/3}$) і великій відстані поширення ($L = 10^4\ \ m,\ \ L_0 = 10\ \ m$) додатковий вклад приблизно дорівнює $\sim 1,5 \times 10^{-12} c$, що може бути одного порядку або й більшим відстані між імпульсами у деяких високошвидкісних каналах зв'язку. Для випадку слабкої турбулентності ($C_n^2 \sim 10^{-15}\ m^{-2/3}$) і таких же відстаней вкладом флуктуацій показника заломлення можна знехтувати (збільшення довжини порядку $5 \times 10^{-14}\ c$). На Рис. 3.2 показано, як вклади у ширину імпульсу від різних механізмів визначають область, де ці додаткові вклади слід брати до уваги при побудові практичних застосувань.

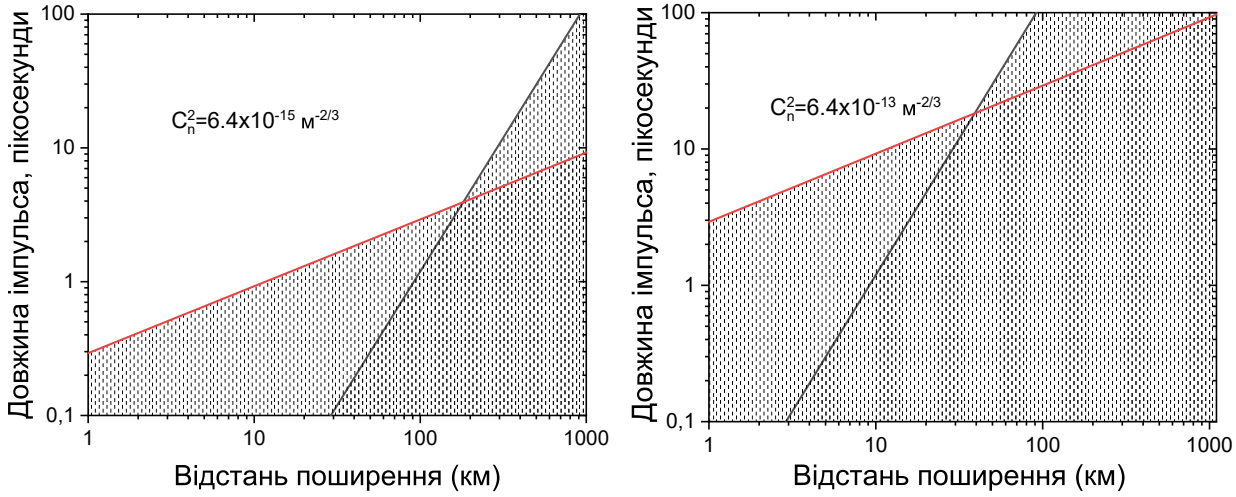

Рис. 3.2. Характерні ширини імпульсів, при яких слід враховувати вплив турбулентності (виділено штрихованою областю). Вклади різних механізмів збільшення ширини імпульсів оцінюються відповідно чорною (3.67) та червоною (3.68) лініями. Параметри пучка на каналу поширення: $r_0 = 0.01$ м, $l_0/2\pi = 10^{-3}$ м, $q_0 = 10^7$ м$^{-1}$.

3.2.2. Обговорення. Видовження імпульсів у випадку великих відстаней поширення лазерного випромінювання пояснюється двома різними фізичними механізмами. Перший з них пов'язаний з тим, що під впливом випадкової сили середньоквадратичне значення перпендикулярної складової імпульсу фотона, $\mathbf{q}_\perp$, зростає з часом як $t^{1/2}$, тобто має ознаки броунівського руху у просторі хвильових векторів. В результаті траєкторії окремих фотонів відрізняються від прямих ліній. Тому фотони, що одночасно вилетіли із джерела, можуть потрапити до детектора в різні моменти часу. Це призводить до флуктуацій часу потрапляння імпульсу до детектора, що проявляється як видовження імпульсу.

Крім цього механізму, важливим є також додаткове збільшення довжини, пов'язане з флуктуаціями модуля групової швидкості фотонів у напрямку поширення. Їхня швидкість флуктуює синхронно з флуктуаціями показника заломлення середовища (відповідний ефект враховується дру-

гим членом у першій квадратній дужці виразу (3.55)). Можна легко переконатися, що два механізми подовження імпульсів не корелюють між собою (із формули (3.66) видно, що в ній відсутні характерні інтерференційні члени).

3.3. Висновки

У даному розділі розглянуто перший момент для функції фотонної густини і відповідні параметри пучка, які з нього можна отримати.

Зокрема у підрозділі 3.1 із рівняння Больцмана-Ланжевена отримано вираз для середнього значення PDF. За його допомогою виведено аналітичні вирази для поперечного імпульсу та ширини пучка за різних наближень. У випадку великих відстаней отримано аналітичний вираз для середньої PDF, показано, що у фазовому просторі наявна асиметрія пов'язана із дрейфом фотонів. Отримані вирази для середньої інтенсивності та PDF, як буде показано у Розділі 4 в асимптотичному наближені є визначальними для опису кореляцій інтенсивності.

Основним результатом висвітленим у підрозділі 3.2 є явний вираз, що описує зміну довжини лазерних імпульсів при поширені їх через турбулентну атмосферу на великі відстані. Отриманий за допомогою фотонної функції розподілу вираз для довжини імпульсу дає змогу визначати цей важливий при практичних застосуваннях параметр для різних значень атмосферної турбулентності і відстаней поширення. Підхід, що застосовано для врахування ефекту видовження імпульсів, може бути використано для з'ясування можливості перекривання сусідніх імпульсів або порушення їх часового впорядкування для окремо взятої реалізації атмосферної неоднорідності.

Основні результати розділу опубліковано у працях [46, 49].

РОЗДІЛ 4

СЦИНТИЛЯЦІЙНИЙ ІНДЕКС І ДРУГИЙ МОМЕНТ PDF

В даному розділі буде розглянуто кореляційні властивості лазерного випромінювання у атмосфері. Саме детальний опис кореляції інтенсивностей і їх флуктуації є визначними для практичних застосувань. Зокрема просторово-часові флуктуації детектованого випромінювання становлять одну із найбільших перешкод для продуктивності лазерних систем зв'язку. Флуктуації інтенсивності оцінюються сцинтиляційним індексом, $\sigma^2 = \langle I^2 \rangle / \langle I \rangle^2 - 1$, величиною оберненою до значень сигнал/шум. Основну увагу при дослідженні сцинтиляцій приділено опису флуктуацій інтенсивності в області помірної турбулентності. Оскільки, незважаючи на те, що задачі опису сцинтиляцій багато років, строгі теорії досі існують лише для слабкої турбулентності — різні модифікації теорії Ритова, та для сильної турбулентності, де використовується ефект насичення флуктуацій (див. Рис. 4.1). Зокрема для опису сильної і переходу сильна-помірна турбулентність буде розглянуто ефект кореляцій траєкторій фотонів у наближенні беззіткневого кінетичного рівняння Больцмана для PDF. Для опису слабкої та переходу слабка-помірна турбулентність використаємо рівняння Больцмана-Ланжевена, яке дозволяє врахувати вплив атмосфери у більш загальному випадку, аніж решта строгих теорій, враховуючи весь спектр зіткнень між фотонами і оптичними неоднорідностями. Окрім того, для асимптотичного випадку великих відстаней поширення буде розглянуто двоточкову кореляційну функцію четвертого порядку для оптичних полів, яка дозволяє описувати просторові властивості флуктуацій.

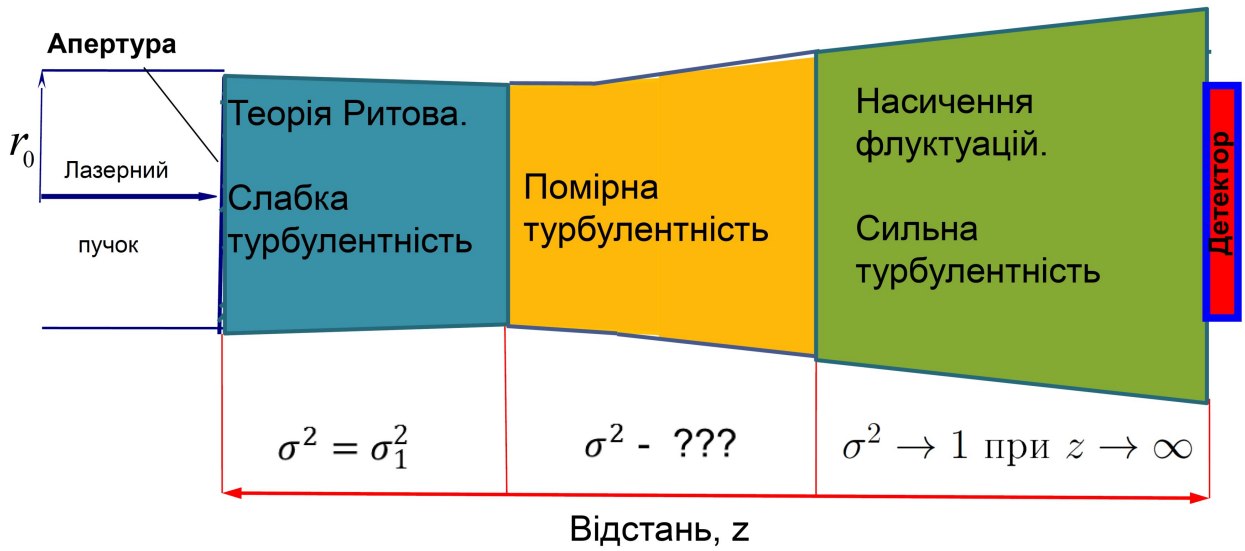

Рис. 4.1. Опис сцинтиляцій для різних областей сили турбулентності.

4.1. Ефект кореляції фотонів для помірної і сильної турбулентності

За допомогою функції розподілу фотонів можна отримати вираз для сцинтиляційного індексу σ^2. За визначенням σ^2 виражається як

$$\sigma^2 = \frac{\langle I^2(\mathbf{r})\rangle - \langle I(\mathbf{r})\rangle^2}{\langle I(\mathbf{r})\rangle^2}. \tag{4.1}$$

Оператор густини фотонів $I(\mathbf{r},t)$, використовуючи розв'язок (2.33) беззіткневого рівняння Больцмана для PDF (2.27), виражається як

$$I(\mathbf{r},t)=\sum_{\mathbf{q}} f(\mathbf{r},\mathbf{q},t)=b^\dagger b\frac{\alpha_L^2 L_z}{S\hbar\omega_0}r_0^2 \times \tag{4.2}$$

$$\times\sum_{\mathbf{q},\mathbf{k}}\exp\left(-i\mathbf{k}\left[\mathbf{r}-\mathbf{c}_{\mathbf{q}}t+\frac{c}{q_0}\int\limits_0^t dt't'\mathbf{F}(\mathbf{r}(\mathbf{q},t'))\right]\right)\exp\left(-Q_{\mathbf{a}}^2\frac{r_0^2}{2}-k^2\frac{r_0^2}{8}\right),$$

де $\mathbf{Q_a} \equiv \mathbf{Q} + \mathbf{a} = \mathbf{q} + \mathbf{a} - \int_0^t dt' \mathbf{F}[\mathbf{r}(\mathbf{q}, t')]$, доданок $\mathbf{a}$ включає фазовий змішувач до розгляду. Сумування проводиться лише по компонентах $\mathbf{q}_\perp$ і $\mathbf{k}_\perp$, в той час як q_z та k_z вважаються фіксованими: $q_z = q_0$ і $k_z = 0$.

Обчислення $\langle I(\mathbf{r}, t)\rangle$ передбачає проведення трьох незалежних усереднень. Одне із них пов'язане із статистичними властивостями джерела. У випадку когерентного джерела, $|\beta\rangle$, маємо $\langle b^\dagger b\rangle = |\beta|^2$. Друге усереднення враховує наявність випадкової фази у фазового змішувача (див.(3.13)). Третє усереднення пов'язане із флуктуюючою силою $\mathbf{F}$. Ці три процедури можна провести незалежно, що значно полегшує можливість аналізу. Окрім того, обчислення спрощуються, якщо використати рівність

$$\exp(-Q^2 r_0^2/2) \equiv \int \frac{d\mathbf{p}}{2\pi r_0^2} \exp(i\mathbf{pQ} - p^2/2r_0^2). \tag{4.3}$$

У такому разі, член в експоненті виразу (4.2) зводиться до лінійної по $\mathbf{F}$ форми. Знову ж таки, вважаючи $\mathbf{F}$ гаусовою випадковою змінною $\langle I(\mathbf{r}, t)\rangle^2$ можна отримати завдяки ітераційній процедурі по $\mathbf{F}$ (значення для $\langle I(\mathbf{r}, t)\rangle$ отримано у попередньому розділі), подібно до того, як це зроблено у роботі [37]. Для спектру флуктуацій показника заломлень використаємо формулу фон Кармана, у цьому випадку $\psi(\mathbf{g})$ визначається як

$$\psi(\mathbf{g}) = 0.033 C_n^2 \frac{\exp[-(gl_0/2\pi)^2]}{[g^2 + L_0^{-2}]^{11/6}}, \ |\mathbf{g}| \equiv g,$$

де $\mathbf{g}$ - тривимірний вектор.

Частина $\langle I^2(\mathbf{r})\rangle$, що пов'язана і усередненням по джерелу має вигляд $\langle b^\dagger b b^\dagger b\rangle$, вона наближено рівна $\langle b^\dagger b^\dagger b b\rangle = |\beta|^4$, коли задовільняється умова $|\beta|^4 \gg |\beta|^2$. Дана умова означає, що початково лазерне випромінювання перебуває у багатофотонному когерентному стані. Усереднення по незалежним випадкових величинах $\mathbf{a}$ та $\mathbf{a}'$ можна використати замість часового усереднення по станах фазового змішувача. Тоді далі матимемо

$$\langle I^2(\mathbf{r}, t)\rangle = \left|\frac{\alpha_L^2 |\beta|^2 L_z r_0^2}{S\hbar\omega_0}\right|^2 \sum_{\substack{\mathbf{q},\mathbf{k},\\ \mathbf{q}',\mathbf{k}'}} \langle e^{-i\mathbf{k}[\mathbf{r}-\mathbf{c_q}t + \frac{c}{q_0}\int_0^t dt' t' \mathbf{F}(\mathbf{r}(\mathbf{q},t'))] - i\mathbf{k}'[\mathbf{r}-\mathbf{c_{q'}}t + \frac{c}{q_0}\int_0^t dt' t' \mathbf{F}(\mathbf{r}(\mathbf{q}',t'))]}$$

$$\times\Big\{e^{-(Q_{\mathbf{a}}^2+Q_{\mathbf{a}'}^2+\frac{k^2+k'^2}{4})\frac{r_0^2}{2}}+e^{-[(\mathbf{Q}_{\mathbf{a}}+\frac{\mathbf{k}}{2})^2+(\mathbf{Q}'_{\mathbf{a}}-\frac{\mathbf{k}'}{2})^2+(\mathbf{Q}_{\mathbf{a}'}-\frac{\mathbf{k}}{2})^2+(\mathbf{Q}'_{\mathbf{a}'}+\frac{\mathbf{k}'}{2})^2]\frac{r_0^2}{4}}\Big\}\Big\rangle. \qquad (4.4)$$

У виразі (4.4) маємо два члени у фігурних дужках, які з'являються лише у випадку, коли чотирьоххвильові кореляції розбиваються на суму попарних кореляцій [37]. Така зміна статистичних властивостей випромінювання має місце у випадку поширення на достатньо великі відстані, коли відбувається достатня стохастизація поперечної компоненти імпульсів фотонів. Більш загальний випадок, який включає режим швидкого детектування (fast detection), розглянуто у [75].

Усереднення виразу (4.4) по $\mathbf{a}$ та $\mathbf{a}'$ дає

$$\langle I^2(\mathbf{r},t)\rangle=\left|\frac{\alpha_L^2|\beta|^2L_zr_1^2}{S\hbar\omega_0}\right|^2\sum_{\substack{\mathbf{q},\mathbf{k},\\ \mathbf{q}',\mathbf{k}'}}\Big\langle e^{-i\{\mathbf{k}[\mathbf{r}-\mathbf{c}_{\mathbf{q}}t]+\mathbf{k}'[\mathbf{r}-\mathbf{c}'_{\mathbf{q}}t]+\frac{c}{q_0}\int_0^t dt't'[\mathbf{k}\mathbf{F}(\mathbf{r}(\mathbf{q},t'))+\mathbf{k}'\mathbf{F}(\mathbf{r}(\mathbf{q}',t'))]\}}$$

$$\times\Big\{e^{-(Q^2+Q'^2)r_1^2/2-(k^2+k'^2)r_0^2/8}+e^{-[(\mathbf{Q}-\mathbf{Q}')^2+(\mathbf{k}+\mathbf{k}')^2/4]r_0^2/4-[(\mathbf{Q}+\mathbf{Q}')^2+(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2/4]r_1^2/4}\Big\}\Big\rangle. \qquad (4.5)$$

За відсутності фазового змішувача $r_0=r_1$ і два доданки у останніх фігурних дужках дають однаковий вклад у (4.5). Так само як і у виразі (4.3), фактор $\exp\big[-(Q^2+Q'^2)\frac{r_1^2}{2}\big]$ можна представити в інтегральній формі

$$\exp\big[-(Q^2+Q'^2)\frac{r_1^2}{2}\big]=\int\frac{d\mathbf{p}d\mathbf{p}'}{(2\pi r_1^2)^2}\exp[i\mathbf{p}\mathbf{Q}+i\mathbf{p}'\mathbf{Q}'-(p^2+p'^2)/2r_1^2]. \qquad (4.6)$$

Як бачимо, показник експоненти у правій стороні лінійний по силі $\mathbf{F}$. Таке ж перетворення застосовне до другого члена в останніх фігурних дужках (4.5). Таким чином, флуктуююча сила наявна у правій стороні (4.5) у вигляді спільного множника, M, який виражається як

$$M=\exp\left(-i\int_0^t dt'\{(\mathbf{p}+\mathbf{k}t'\frac{c}{q_0})\mathbf{F}[\mathbf{r}(\mathbf{q},t')]+(\mathbf{p}'+\mathbf{k}'t'\frac{c}{q_0})\mathbf{F}[\mathbf{r}(\mathbf{q}',t')]\}\right). \qquad (4.7)$$

Обчислення середнього значення I^2 зводиться до усереднення M і проведення багатократного інтегрування. Вважаючи показник експоненти у (4.7)

гаусовою випадковою величиною, можемо записати

$$\langle M\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle\left(\int\limits_0^t dt'\{(\mathbf{p}+\mathbf{k}t'\frac{c}{q_0})\mathbf{F}[\mathbf{r}(\mathbf{q},t')]+(\mathbf{p}'+\mathbf{k}'t'\frac{c}{q_0})\mathbf{F}[\mathbf{r}(\mathbf{q}',t')]\}\right)^2\right\rangle\right)$$

$$\equiv \exp\left(-\frac{1}{2}(\phi_{PP}+2\phi_{PP'}+\phi_{P'P'})\right). \tag{4.8}$$

Два типи кореляційних функцій визначають $\langle M\rangle$:

$$\phi_{PP'} = \int\limits_0^t\int\limits_0^t dt'dt''(\mathbf{p}+\mathbf{k}t'c/q_0)\cdot\langle\mathbf{F}[\mathbf{r}(\mathbf{q},t')]\mathbf{F}[\mathbf{r}(\mathbf{q}',t'')]\rangle\cdot(\mathbf{p}'+\mathbf{k}'t''c/q_0)], \tag{4.9}$$

$$\phi_{PP} = \int\limits_0^t\int\limits_0^t dt'dt''(\mathbf{p}+\mathbf{k}t'c/q_0)\cdot\langle\mathbf{F}[\mathbf{r}(\mathbf{q},t')]\mathbf{F}[\mathbf{r}(\mathbf{q},t'')]\rangle\cdot(\mathbf{p}+\mathbf{k}t''c/q_0)], \tag{4.10}$$

де символами P та P' позначено набір трьох векторних змінних $P = \{\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{k}\}$ та $P' = \{\mathbf{q}',\mathbf{p}',\mathbf{k}'\}$. Кореляційні функції для сили вздовж різних ($\mathbf{q}\neq\mathbf{q}'$) і однакових ($\mathbf{q}=\mathbf{q}'$) траєкторій входять відповідно у вирази (4.9) та (4.10). Першу із них можемо записати як

$$\langle F_\alpha[\mathbf{r}(\mathbf{q},t')]F_\beta[\mathbf{r}(\mathbf{q}',t'')]\rangle = \langle F_\alpha[\mathbf{r}(\mathbf{q},t')-\mathbf{r}(\mathbf{q}',t'')]F_\beta[0]\rangle, \tag{4.11}$$

де α and β позначають x і y - компоненти. Вираз для (4.10) можна отримати відповідно із (4.11), підставивши $\mathbf{q}=\mathbf{q}'$.

Права сторона рівності (4.11) вважається функцією різниці координат $\mathbf{r}(\mathbf{q},t')-\mathbf{r}(\mathbf{q}',t'')$, описуючи випадок статистичної однорідності атмосфери. При проведенні усереднення, слід також враховувати залежність різниці координат від флуктуюючої сили. Ця залежність дається виразом

$$\mathbf{r}(\mathbf{q},t')-\mathbf{r}(\mathbf{q}',t'')=(\mathbf{e}_z c+\mathbf{c}_{\mathbf{q}'})(t'-t'')-\mathbf{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}(t-t')+\frac{c}{q_0}\int\limits_{t'}^{t''}dt_1(t'-t_1)\mathbf{F}[\mathbf{r}(\mathbf{q}',t_1)]$$

$$+\frac{c}{q_0}\int\limits_t^{t'}dt_1(t'-t_1)\{\mathbf{F}[\mathbf{r}(\mathbf{q},t_1)]-\mathbf{F}[\mathbf{r}(\mathbf{q}',t_1)]\}, \tag{4.12}$$

який отримуємо із виразу для траєкторії (2.32). Для ненульової кореляції між відповідними силами, відстань $|\mathbf{r}(\mathbf{q},t') - \mathbf{r}(\mathbf{q}',t'')|$ має бути порядку або меншою за зовнішній радіус турбулентності L_0. Враховуючи, що $c \gg |c_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}|, |c_{\mathbf{q}'}|$, висновуємо, що $|t'-t''| \leqslant L_0/c$. Це означає, що у правій стороні виразу (4.12) можемо покласти $\mathbf{c}_{\mathbf{q}'} = 0$ і знехтувати третім членом, який пропорційний $(t'-t'')^2$. Тоді (4.12) скорочується до

$$\mathbf{r}(\mathbf{q},t') - \mathbf{r}(\mathbf{q}',t'') = \mathbf{e}_z c(t'-t'') - \mathbf{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}(t-t') + \frac{c}{q_0}\int\limits_t^{t'} dt_1(t'-t_1)\{\mathbf{F}[\mathbf{r}(\mathbf{q},t_1)] - \mathbf{F}[\mathbf{r}(\mathbf{q}',t_1)]\}. \qquad (4.13)$$

Останні два члени описують зміщення фотонів одне відносно пов'язане із різницею їх початкових швидкостей. Член $-\mathbf{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}(t-t')$ описує розбіжність двох прямолінійних траєкторій, в той час як останній член враховує різний вплив атмосфери на частинки, що рухаються у різних областях простору, зазнаючи випадкових зіткнень із оптичними неоднорідностями.

Усереднення у (4.11) дещо ускладнене через те, що $\mathbf{r}(\mathbf{q},t')$ і $\mathbf{r}(\mathbf{q}',t'')$ самі залежать від флуктуюючої сили $\mathbf{F}$. Проте обчислення спрощуються, якщо знехтувати специфічною кореляцією між F_α чи F_β і силою, що входить у $\mathbf{r}(\mathbf{q},t')$ чи $\mathbf{r}(\mathbf{q}',t'')$. Обґрунтувати таке спрощення можна таким чином. Явний вираз для α-сили дається виразом

$$F_\alpha[\mathbf{r}(\mathbf{q},t')] = F_\alpha\big[\mathbf{r} - \mathbf{c}_{\mathbf{q}}(t-t') - \frac{c}{q_o}\int\limits_t^{t'} dt_1(t_1-t')\mathbf{F}[\mathbf{r}(\mathbf{q},t_1)]\big]$$

$$= F_\alpha\big[\mathbf{r}_\perp - \mathbf{c}_{\mathbf{q}\perp}(t-t') + c\mathbf{e}_\mathbf{z}t' - \frac{c}{q_o}\int\limits_t^{t'} dt_1(t_1-t')\mathbf{F}[\mathbf{r}(\mathbf{q},t_1)]\big], \qquad (4.14)$$

де використано рівність $z = ct$.

Якщо вищезгадана специфічна кореляція існує, то відстань $|\mathbf{r}(\mathbf{q},t_1) - \mathbf{r}(\mathbf{q},t')|$ можна оцінити за значеннями як $c(t_1 - t') \leqslant L_0$.

Тоді інтеграл у виразі (4.14) матиме значення порядку $(L_0/c)^2\mathbf{F}[\mathbf{r}(\mathbf{q},t_1)]$ і ним можна знехтувати як величиною квадратичною по L_0. Така оцінка означає, що відносне значення останнього члена у виразі (4.14) дається $\Delta q/q_0 \ll 1$, де Δq позначає зміну імпульсу фотона під дією флуктуюючої сили протягом часу L_0/c.

Як бачимо, кореляція між $F_\alpha[\mathbf{r}(\mathbf{q},t')]$ та $\mathbf{F}[\mathbf{r}(\mathbf{q},t_1)]$ є малою. Таким чином, усереднення по $\langle F_\alpha F_\beta\rangle$ можемо провести у два етапи. Спершу отримаємо $\langle F_\alpha F_\beta\rangle$, вважаючи аргументи у F_α і F_β фіксованими. Лише після цього можемо провести усереднення по силах, що входять до виразів аргументів. Дотримуючись цього алгоритму, член (4.9) можемо переписати як

$$\phi_{PP'} = \omega_0^2 \int\limits_0^t \int\limits_0^t dt'dt'' \int d\mathbf{g}\, \psi(g)\mathbf{g}\cdot\big(\mathbf{p}+\mathbf{k}t'\frac{c}{q_0}\big)\,\mathbf{g}\cdot\big(\mathbf{p}'+\mathbf{k}'t''\frac{c}{q_0}\big) \qquad (4.15)$$
$$\times\langle\exp\big(-i\mathbf{g}[\mathbf{r}(\mathbf{q},t')-\mathbf{r}(\mathbf{q}',t'')]\big)\rangle$$

де використано вирази для флуктуюючої сили, $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \omega_0\partial_{\mathbf{r}}n(\mathbf{r})$, і Фур'є-перетворення кореляційної функції, $\langle n(\mathbf{r})n(\mathbf{r}')\rangle$ [див. (1.5)]. Якщо $P = P'$, останній множник у (4.15), як видно із виразу (4.13), зводиться до $\exp\big(-i\mathbf{g}\mathbf{e}_z c(t'-t'')\big)$.

Перший етап усереднення проявляє себе у появі спектральної густини $\psi(g)$ у (4.15). Другий етап — у появі останнього множника у виразі (4.15), який описує кореляцію фотонів.

Одним із важливих етапів обчислення сцинтиляційного індексу, який, зокрема, необхідний для опису сцинтиляцій при помірній турбулентності, є врахування саме впливу кореляцій, що описуються останнім членом у (4.15), на значення $\varphi_{PP'}$. Слід зазначити, що, наприклад, у роботі [37] (див. вираз (44) у цій роботі) такою кореляцією траєкторій $\mathbf{r}(\mathbf{q},t')$ і $\mathbf{r}(\mathbf{q}',t'')$ було повністю знехтувано і використано натомість мультиплікативне наближення

$$\langle\exp(-\mathbf{g}[\mathbf{r}(\mathbf{q},t')-\mathbf{r}(\mathbf{q}',t'')])\rangle \approx \langle\exp(-i\mathbf{g}\mathbf{r}(\mathbf{q},t'))\rangle\langle\exp(i\mathbf{g}\mathbf{r}(\mathbf{q}',t''))\rangle. \quad (4.16)$$

Таке наближення може бути хорошим лише для випадку великих відстаней поширення лазерних пучків, коли фотони долають достатньо велику відстань і втрачають взаємну кореляцію між собою навіть у випадку початково малої різниці траєкторій.

Врахувавши ефект кореляції траєкторій фотонів, можемо просунутися у дуже важливу зону помірних відстаней (турбулентності), де фотони ще досить близько одне до одного і зазнають впливу тих самих турбулентних неоднорідностей. Скорельовані сили призводять до кореляцій у системі фотонів, що призводить до додаткового вкладу у величину сцинтиляцій, тим самим підживлюючи постійний інтерес до проблеми сцинтиляцій при помірній турбулентності.

На Рис. 4.2 зображено застосовність інтерпретації фотонних траєкторій (див. 2.2). За малої (синя область) та переходу слабка-помірна турбулентності через велику невизначеність в імпульсі фотонів неможливо говорити про їх траєкторії (відображено пунктирною лінією), при помірній турбулентності (жовта область) кореляції фотонних траєкторій можуть мати, як побачимо нижче, визначальний вклад у сцинтиляції випромінювання, для сильної турбулентності(зелена область) траєкторії розходяться достатньою мірою, щоб можна було застосовувати мультиплікативне наближення і знехтувати кореляціями траєкторій.

Подальший аналіз значною мірою спрощується після інтегрування (4.15) по різниці часів $t' - t''$. Наявність величини $\mathbf{e}_z c(t' - t'')$ у $\mathbf{r}(\mathbf{q}, t') - \mathbf{r}(\mathbf{q}', t'')$ (див. вираз (4.13)) дає можливість, використовуючи інтегрування осцилюючої функції $\exp(i\mathbf{e}_z \mathbf{g} c(t' - t''))$, отримати

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d(t' - t'') \exp(i\mathbf{e}_z \mathbf{g} c(t' - t'')) = \frac{2\pi}{c} \delta(g_z), \tag{4.17}$$

де верхню і нижню межі інтегрування замінено на $\mp\infty$. Таке наближення можливе для часів поширення випромінювання, коли $t \gg L_0/c$. Окрім того,

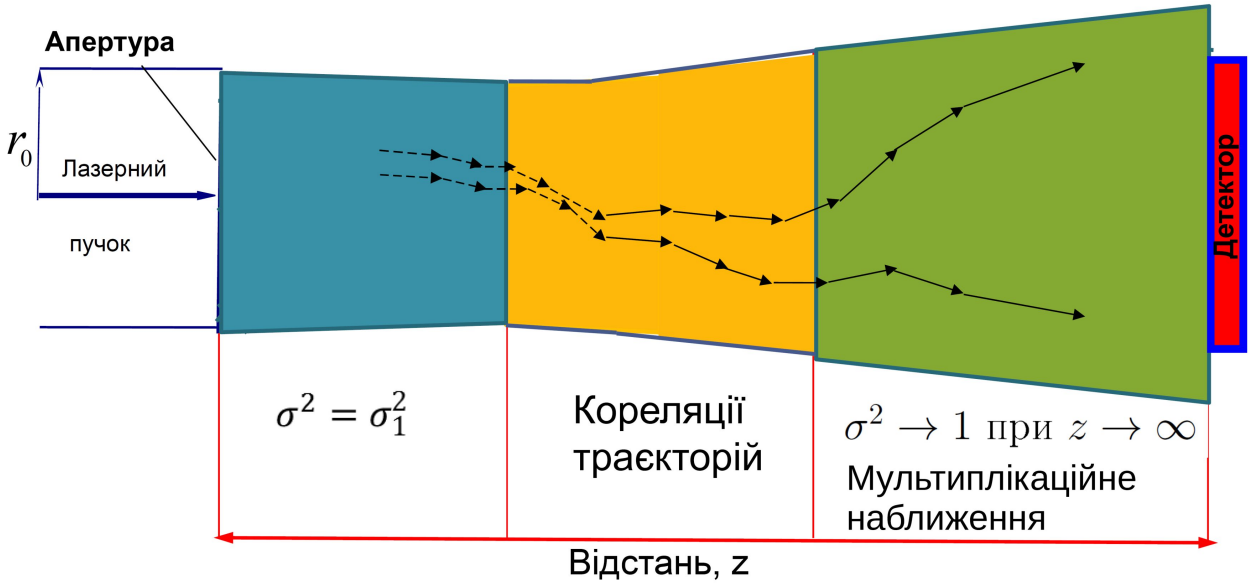

Рис. 4.2. Інтерпретація фотонних траєкторій і вплив кореляції траєкторії на значення сцинтиляційного індексу.

використано заміну $t'' = t'$ у плавно змінній величині, $\left(\mathbf{p}' + \mathbf{k}' t'' c/q_0\right)$.

Рівність (4.17) означає, що лише $g_{x,y}$-компоненти входять до (4.15), зокрема Фур'є-перетворення $\psi(g)$ слід розглядати як функцію двовимірної векторної величини $\mathbf{g}_\perp$: $\psi(g) = \psi\left(\sqrt{g_x^2 + g_y^2}\right)$. Зауваження такої властивості відповідає відомому наближенню Маркова (див. Розділ 1 та [1]), в якому припускається, що кореляція флуктуацій показника заломлення у напрямку поширення являє собою дельта-функцію. Фактично, приведене вище виведення, основане на параксіальному наближенні, підтверджує застосовність підходу Маркова, який, на перший погляд, може видаватися сумнівним.

Використовуючи вирази (4.13) та (4.17), кореляційну функцію (4.15)

можна спростити до

$$\phi_{PP'} = \frac{2\pi\omega_0^2}{c}\int\limits_0^t dt' \int d\mathbf{g}\psi(g)\,\mathbf{g}\cdot\big(\mathbf{p}+\mathbf{k}t'\frac{c}{q_0}\big)\,\mathbf{g}\cdot\big(\mathbf{p}'+\mathbf{k}'t'\frac{c}{q_0}\big)e^{i\mathbf{g}\mathbf{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}(t-t')}$$

$$\times\left\langle \exp\left(-i\mathbf{g}\frac{c}{q_0}\int\limits_{t'}^t dt_1(t_1-t')\{\mathbf{F}[\mathbf{r}(\mathbf{q},t_1)]-\mathbf{F}[\mathbf{r}(\mathbf{q}',t_1)]\}\right)\right\rangle, \qquad (4.18)$$

де всі вектори мають лише x- та y-компоненти. Як бачимо із (4.18), щоб отримати $\phi_{PP'}$ необхідно провести усереднення експоненційної функції, подібної до функції у (4.7). Дотримуючись тієї самої процедури, згадане середнє можемо переписати у вигляді

$$\left\langle \exp\left(-i\mathbf{g}\frac{c}{q_0}\int\limits_{t'}^t dt_1(t_1-t')\{\mathbf{F}[\mathbf{r}(\mathbf{q},t_1)]-\mathbf{F}[\mathbf{r}(\mathbf{q}',t_1)]\}\right)\right\rangle$$

$$=\exp\left(-2\pi c^3\int\limits_{t'}^t dt_1(t_1-t')^2\int d\mathbf{g}'\psi(g')(\mathbf{g}\cdot\mathbf{g}')^2\big[1-\langle e^{-i\mathbf{g}'\cdot[\mathbf{r}(\mathbf{q},t_1)-\mathbf{r}(\mathbf{q}',t_1)]}\rangle\big]\right). \qquad (4.19)$$

Подібна функція виникає у показнику експоненти у правій стороні виразу (4.19) після підстановки виразів для траєкторій (4.12), демонструючи, що таку процедуру може бути проведено багаторазово. Такий алгоритм призводить до появи часової ієрархії $0 < t' \leqslant t_1 ... \leqslant t_i \leqslant t$. Якщо час взаємодії фотонів із турбулентністю, $t - t_i$, короткий, збурення траєкторій мале і зникає при $t_i \to t$, призводячи до того, що обидва значення для траєкторій $\mathbf{r}(\mathbf{q}, t_i)$ та $\mathbf{r}(\mathbf{q}', t_i)$ зводяться до початкових значень $\mathbf{r}$, незважаючи на початкові значення імпульсів $\mathbf{q}$ та $\mathbf{q}'$ (див. граничні умови після (2.30)). Виходячи із відповідного обґрунтування, підставляємо величину

$$\frac{1}{2}\big\langle\big(\mathbf{g}'\cdot[\mathbf{r}(\mathbf{q},t_1)-\mathbf{r}(\mathbf{q}',t_1)]\big)^2\big\rangle \qquad (4.20)$$

замість

$$1-\langle\exp\big(-i\mathbf{g}'\cdot[\mathbf{r}(\mathbf{q},t_1)-\mathbf{r}(\mathbf{q}',t_1)]\big)\rangle \qquad (4.21)$$

припускаючи, що показник експоненти у (4.21) є малим. Лінійний по $\mathbf{g}'$ член розкладу упускається, бо він дає нульовий вклад у інтегрування по $\mathbf{g}'$ у виразі (4.19). Таким чином, (4.21) зводиться до

$$\frac{1}{2}\left\langle\left(\mathbf{g}'\cdot[\mathbf{r}(\mathbf{q},t_1)-\mathbf{r}(\mathbf{q}',t_1)]\right)^2\right\rangle$$

$$\approx\frac{(t-t_1)^2}{2}\left(\mathbf{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\cdot\mathbf{g}'\right)^2+\frac{\pi c^3}{30}(t-t_1)^5\int d\mathbf{g}''\psi(g'')\left(\mathbf{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\cdot\mathbf{g}''\right)^2(\mathbf{g}'\cdot\mathbf{g}'')^2. \quad (4.22)$$

Щоб отримати (4.22), використовується наближення

$$F_\alpha[\mathbf{r}(\mathbf{q},t_2))]-F_\alpha[\mathbf{r}(\mathbf{q}',t_2))]\approx\mathbf{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}(t_2-t)\partial_{\mathbf{r}}F_\alpha[\mathbf{r}+\mathbf{c}_{\mathbf{q}}(t_2-t)], \quad (4.23)$$

$t_1\leqslant t_2\leqslant t$, у дусі попередніх кроків, тобто припускаючи, що ефект впливу турбулентності малий, якщо значення t_2-t мале. В такому разі, підстановка (4.22) у праву сторону виразу (4.19) і інтегрування по змінних $\mathbf{g}'$, $\mathbf{g}''$ та t_1 дають

$$\exp\left\{-2.52\cdot10^{-3}C_n^2{l_0'}^{-7/3}c^3c^2_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}(t-t')^5g^2\left[1+\frac{C_n^2{l_0'}^{-7/3}c^3(t-t')^3}{560}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\cos2\theta}{2}\left(1+\frac{C_n^2{l_0'}^{-7/3}c^3(t-t')^3}{2\cdot560}\right)\right]\right\}, \quad (4.24)$$

де $l_0'=l_0/2\pi$, і θ - кут між двокомпонентними векторами $\mathbf{g}$ та $\mathbf{q}-\mathbf{q}'$.

Після проведення серії взаємних підстановок (4.24), (4.19), (4.18), (4.9), можна порахувати $\langle I^2(\mathbf{r},t)\rangle$. Багатократне інтегрування по змінних $\mathbf{q},\mathbf{q}',\mathbf{p},\mathbf{p}',\mathbf{k},\mathbf{k}',\theta$ і t' проводять як аналітично, так і чисельно. В ході інтегрувань використано спектр Татарського, який є модифікацією спектру фон Кармана (4.1) у випадку $L_0^{-1}=0$. Результати для значень сцинтиляційного індексу σ^2 в залежності від відстані поширення приведено на Рис. 4.3-4.5.

4.1.1. Обговорення. На приведених рисунках 4.3-4.5 можемо бачити важливість впливу кореляції фотонів. Задля спрощення розгляду даного

впливу, вважатимемо лазерні пучки когерентними, $r_0 = r_1$, тоді два доданки у (4.5) дають однаковий вклад у $\langle I^2(\mathbf{r},t)\rangle$. Більше того, якщо покласти $\phi_{PP'} = 0$ у виразі (4.8), упустивши кореляцію фотонів із різними початковими імпульсами, отримаємо $\langle I^2(\mathbf{r},t)\rangle = 2\langle I(\mathbf{r},t)\rangle^2$. Тобто сцинтиляційний індекс, σ^2, рівний одиниці в такому випадку. Така фізична картина реа-

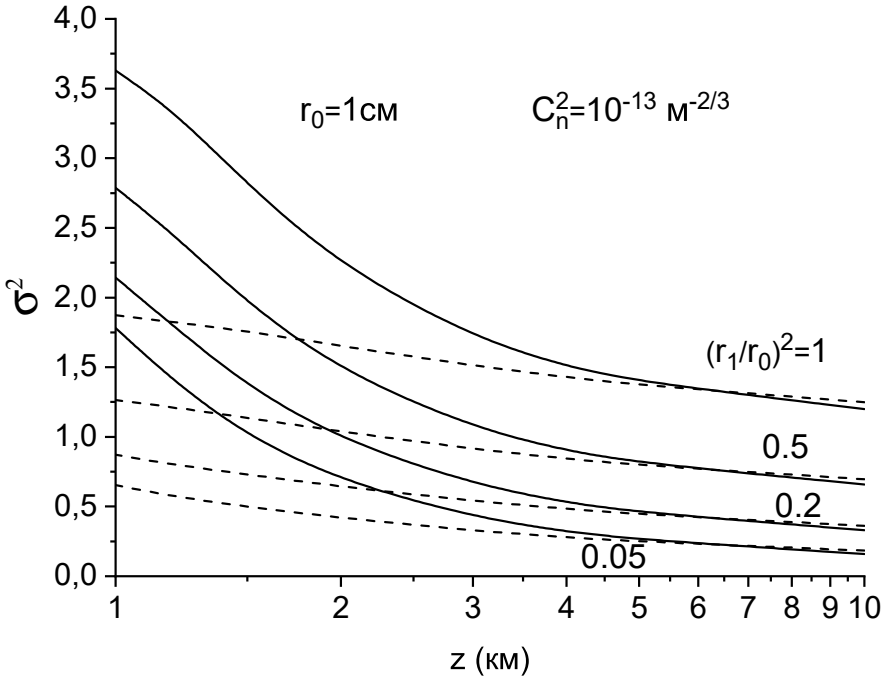

Рис. 4.3. Сцинтиляційний індекс для когерентного та частково когерентного пучків у атмосфері vs. відстань поширення z. Пунктирні криві відповідають мультиплікативному наближенню (4.16) для фотонних кореляцій; суцільні криві отримано за допомогою підходу використаного в даній роботі [див. вирази (4.19 -4.24)]. $C_n^2 = 10^{-13}\,\text{м}^{-2/3}$, $r_0 = 0.01\,\text{м}$, $\frac{l_0}{2\pi} = 10^{-3}\,\text{м}$, and $q_0 = 10^7\,\text{м}^{-1}$. Дві верхні криві відповідають когерентному пучку.

лізується при поширення на великі відстані ($z \to \infty$), коли осцилюючий фактор $e^{i\mathbf{g}\mathbf{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}(t-t')}$ зводить ефективний об'єм інтегрування по $\mathbf{g}$ і $\mathbf{q}-\mathbf{q}'$ до нуля (див. (4.18)). Для скінчених часів t, вклад $\phi_{PP'}$ виявляється значним (див. рисунки 4.3-4.5) і значення сцинтиляційного індексу більші за одиницю. Видно, що $\phi_{PP'}$ дає позитивний вклад в експоненті (4.8), коли вектори $\mathbf{p},\mathbf{k}$ і $\mathbf{p}',\mathbf{k}'$ мають протилежні знаки, а різниця $|\mathbf{q}-\mathbf{q}'|$ не дуже велика.

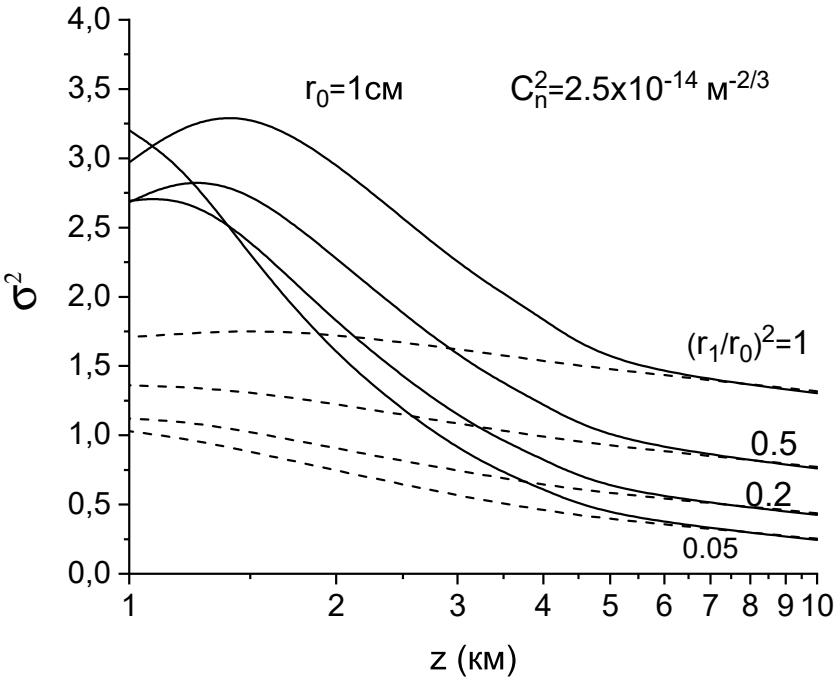

Рис. 4.4. Те саме, що на Рис. 4.3, але для слабшої турбулентності: $C_n^2 = 2.5 \times 10^{-14}$ м$^{-2/3}$.

Найбільш сприятливими є умови, коли

$$\mathbf{p} = -\mathbf{p}', \quad \mathbf{k} = -\mathbf{k}', \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}'. \tag{4.25}$$

У цьому випадку $\phi_{PP} + 2\phi_{PP'} + \phi_{P'P'} = 0$, тобто M рівне одиниці і не залежить від сили турбулентності. Умови (4.25) можна інтерпретувати як передумови своєрідної "суперкореляції"або ж синхронізм чотирьох хвиль, для яких добуток $\langle b^\dagger_{\mathbf{q}+\mathbf{k}/2} b_{\mathbf{q}-\mathbf{k}/2} b^\dagger_{\mathbf{q}-\mathbf{k}/2} b_{\mathbf{q}+\mathbf{k}/2}\rangle \sim \exp[i(\omega_{\mathbf{q}+\mathbf{k}/2} - \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}/2} + \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}/2} - \omega_{\mathbf{q}+\mathbf{k}/2})t] = 1$ не залежить від часу.

Залежність σ^2 від початкового радіуса пучка можна пояснюється тим, що характерні значення початкових імпульсів, $\tilde{q} \sim \sqrt{2}/r_0$, є більшими для малих r_0. Таким чином, об'єм інтегрування по $\mathbf{q} - \mathbf{q}'$ також більший. В той же час, відповідне збільшення $\phi_{PP'}$ виникає лише на коротких відстанях, z, де часові інтервали t достатньо малі, а осцилюючий множник у виразі (4.18) близький за значенням до одиниці. Тож, коли r_0 зменшується, спостерігаємо збільшення σ^2, з одночасним зміщенням області, де фотонні

кореляції дають суттєвий додатковий вклад у флуктуації в сторону малих z (див. Рис. 4.5).

Подібним чином, можна пояснити суттєву різницю між σ^2, що знайдено для моделей плоскої і сферичної хвиль у [80] (див. Рис. 1 і 2 там). Таку різницю можна обґрунтувати вище приведеними аргументами щодо дуже відмінного початкового об'єму у просторі $\mathbf{q}$-векторів для цих двох моделях. Також, можна привести обчислення σ^2 у роботі [81] (див. Рис. 1), де було розглянуто спрощену модель турбулентності, результати якої добре корелюють із результатами кваліфікаційної роботи.

Порівнявши результати даної роботи із тими, що не враховують кореляції між різними траєкторіями (4.16) (відповідно, суцільна і штрихована лінії на Рис. 4.3 та 4.4), бачимо суттєве збільшення значень σ^2 при помірній турбулентності при врахуванні кореляції траєкторій фотонів. Рис. 4.3-4.5 показують, що таке збільшення характерне для відстаней 1-3 км. В той же час, обидва підходи забезпечують відомий ефект насичення флуктуацій на великих відстанях ($z \to \infty$): $\sigma^2 \to r_1^2/r_0^2$.

Фазовий змішувач із коротким характерним часом (високочастотний змішувач) не впливає якісно на вищеописану фізичну картину. Проте, обидва підходи демонструють можливість придушення сцинтиляцій за допомогою фазового змішувача за рахунок зменшення початкової когерентності пучка. Цей ефект фазового змішувача можна пояснити наступним чином. Початковий фазовий профіль, що задається змішувачем, змінний в часі. Траєкторії фотонів залежать від початкового стану випромінювання і відповідно змінюється разом із станом фазового змішувача. "Повільний" детектор усереднює вклад цих фотонів. Тож, хоча атмосфера залишається практично "замороженою" протягом інтеграційного часу детектора, фазовий змішувач забезпечує краще усереднення поширеного випромінювання по профілю показника заломлення, зменшуючи таким чином флуктуації детектованого сигналу.

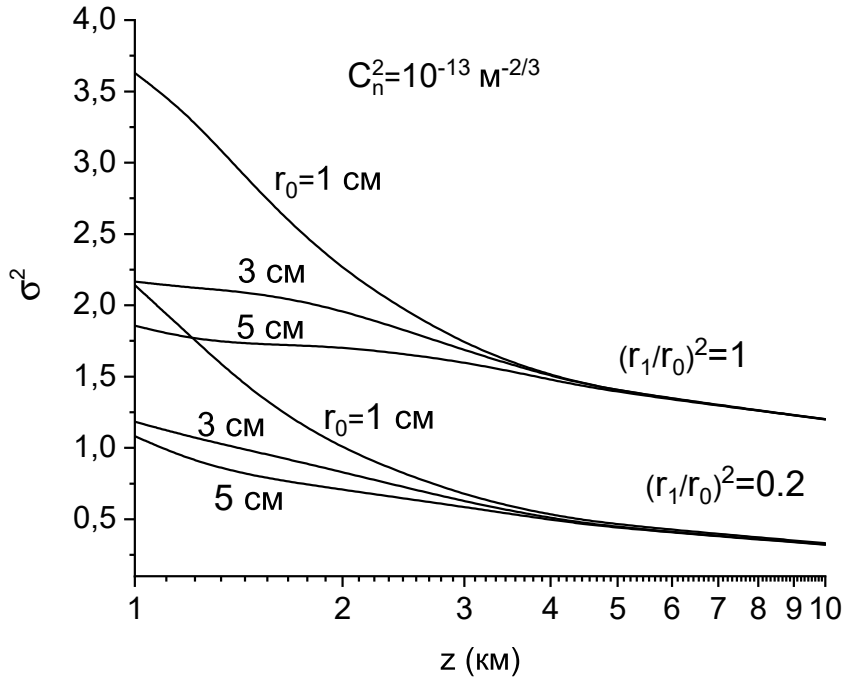

Рис. 4.5. Сцинтиляційний індекс vs. відстань поширення z для різних початкових радіусів пучка: $r_0 = 0.01$ м, 0.03 м, 0.05 м. Решта параметрів такі самі як на Рис. 4.3

4.2. Ланжевенівське джерело та інтеграл зіткнень при малій та помірній турбулентності

Для опису сцинтиляцій при малій та помірній турбулентності використовуватимемо кінетичне рівняння Больцмана-Ланжевена

$$\partial_t \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t) + \mathbf{c_q} \cdot \partial_\mathbf{r} \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t) = \hat{K}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t) - \hat{\nu}_\mathbf{q} \left\{ \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t) \right\}, \tag{4.26}$$

Його можна використати для вивчення ефекту багатократного розсіяння фотонів на їхній розподіл у фазовому просторі. Як зазначалося раніше, сумування $\hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t)$ по $\mathbf{q}$ дасть просторово-часовий розподіл фотонної густини (або ж інтенсивність)

$$\hat{I}(\mathbf{r}, t) = \sum_\mathbf{q} \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, t), \tag{4.27}$$

який складається із середнього значення, $\langle \hat{I}(\mathbf{r},t)\rangle \equiv I(\mathbf{r},t)$, та флуктуацій, $\delta\hat{I}(\mathbf{r},t)$,

$$\begin{aligned}\hat{I}(\mathbf{r},t) &= I(\mathbf{r},t) + \delta\hat{I}(\mathbf{r},t) \\ &= \sum_{\mathbf{q}} f(\mathbf{r},\mathbf{q},t) + \sum_{\mathbf{q}} \delta\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t),\end{aligned} \tag{4.28}$$

де $\delta\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t) = \hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t) - f(\mathbf{r},\mathbf{q},t)$.

Використаємо тут таке визначення сцинтиляційного індексу

$$\sigma^2 = \frac{\langle : \delta\hat{I}^2(\mathbf{r}) : \rangle}{I(\mathbf{r})^2} = \frac{\langle : \hat{I}^2(\mathbf{r}) : \rangle - I(\mathbf{r})^2}{I(\mathbf{r})^2}, \tag{4.29}$$

де символ $\{: .. :\}$ означає нормальне впорядкування операторів народження та знищення. Визначення (4.29) не включає вклад дробового шуму (в попередньому підрозділі ним так само було знехтувано для багатофотонних станів), лінійного по густині фотонів, який входить у флуктуації відліків детектора і виявляється важливим у проблемах квантової оптики. Дробовий шум може бути легко виключений із експериментальних даних, щоби уможливити порівняння із теоретичними обчисленнями.

На відміну від отримання $I(\mathbf{r},t)$, обчислення (4.29) за допомогою рівняння Больцмана-Ланжевена є більш комплексною задачею, бо сцинтиляційний індекс σ^2 квадратичний по флуктуаціях PDF, $\langle \delta\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t)\delta\hat{f}(\mathbf{r}',\mathbf{q}',t')\rangle$. Тож, обчислення σ^2 можливе лише, якщо відома кореляційна функція для розподілу фотонів. Для спрощення розгляду даної задачі у випадку слабкої і переходу слабка-помірна турбулентність, використаємо наближену ітераційну процедуру для значень середнього і флуктуацій $\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t)$.

4.2.1. Наближення першого порядку. Наближення базується на припущенні, що близько до вихідної апертури член, що відповідає за зіткнення не збурює PDF значним чином і ним можна знехтувати. В цьому випадку, середнє значення PDF задовільняє рівняння

$$(\partial_t + \mathbf{c}_{\mathbf{q}} \cdot \partial_{\mathbf{r}}) f_0(\mathbf{r},\mathbf{q},t) = 0. \tag{4.30}$$

Флуктуююча частина $\delta\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t)$ описується подібним рівнянням із включенням ланжевенівського джерела $\hat{K}$

$$(\partial_t + \mathbf{c_q}\cdot\partial_\mathbf{r})\delta\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t) = \hat{K}(\mathbf{r},\mathbf{q},t). \tag{4.31}$$

Рівняння (4.30) та (4.31) виводяться із загального кінетичного рівняння Больцмана-Ланжевена для PDF (4.26) шляхом заміни $\hat{f}$ на $f_0 + \delta\hat{f}$. Ланжевенівське джерело лінійно залежить від $n_{\mathbf{k}_\perp}$, тоді як інтеграл зіткнень, який виключено із рівнянь для цього нижчих порядків ітераційної процедури, є квадратичним по $n_{\mathbf{k}_\perp}$. Таким чином, рівняння (4.30) та (4.31) являють собою найнижчий порядки розкладу рівняння (4.26) по степенях $n_{\mathbf{k}_\perp}$. Загальний розв'язок рівняння (4.31) складається із двох додатків

$$\delta\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t) = \delta\hat{f}_0(\mathbf{r_q}(t'),\mathbf{q},t')|_{t'=0} + \delta\hat{f}_1(\mathbf{r},\mathbf{q},t),$$

де $\mathbf{r_q}(t') = \mathbf{r} - \mathbf{c_q}(t-t')$ і

$$\delta\hat{f}_1(\mathbf{r},\mathbf{q},t) = \int\limits_0^t dt'\hat{K}(\mathbf{r_q}(t'),\mathbf{q},t'). \tag{4.32}$$

Вважаємо площину вихідної апертури стартовими точками траєкторій фотонів (при $t'=0$). Параксіальне наближення накладає низку обмежень на значення хвильових векторів: $q_z \sim q_0 \gg q_\perp, k_\perp, k'_\perp$ і, як наслідок, $z_\mathbf{q}(t'=0) = z - ct = 0$.

Доданок $\delta\hat{f}_0(\mathbf{r_q}(t'),\mathbf{q},t')|_{t'=0}$ описує еволюцію флуктуацій PDF у вакуумі. Надалі, знехтуємо флуктуаціями у початковій конфігурації випромінювання, в такому випадку $\delta\hat{f}_0(\mathbf{r_q}(t'),\mathbf{q},t')|_{t'=0} = 0$ і ненульовий вклад у сцинтиляційний індекс, σ^2, при малих часах поширення t дає лише доданок $\delta\hat{f}_1(\mathbf{r},\mathbf{q},t)$. Сцинтиляційний індекс тоді має такий вигляд

$$\sigma^2 = \frac{\sum\limits_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}\langle :\delta\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t)\delta\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q}',t): \rangle}{(\sum_\mathbf{q} f_0(\mathbf{r},\mathbf{q},t))^2} = \tag{4.33}$$

$$=\frac{\sum\limits_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}\int\limits_0^t\int\limits_0^t dt'dt''\langle:\hat{K}(\mathbf{r}_{\mathbf{q}}(t'),\mathbf{q},t')\hat{K}(\mathbf{r}_{\mathbf{q}'}(t''),\mathbf{q}',t'')\,:\rangle}{(\sum_{\mathbf{q}} f_0(\mathbf{r},\mathbf{q},t))^2},$$

де

$$f_0(\mathbf{r},\mathbf{q},t) = f_0(\mathbf{r}_{\mathbf{q}}(0),\mathbf{q},0), \tag{4.34}$$

$$\sum_{\mathbf{q}} f_0(\mathbf{r},\mathbf{q},t) \equiv I_0(\mathbf{r},t) = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{q},\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{c}_{\mathbf{q}}t)}\langle b^{\dagger}_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}} b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\rangle|_{t=0}. \tag{4.35}$$

Рівність (4.34) означає, що вираз із лівої сторони задовольняє одночасно беззіткневе кінетичне рівняння (4.30) і граничні умови на виході із апертури. Величина $I_0(\mathbf{r},t)$ рівна густині фотонів за відсутності турбулентності.

Чисельник у правій стороні (4.33) можна обчислити, використавши явний вираз (2.41) для $\hat{K}(\mathbf{r},\mathbf{q},t)$ і використавши граничні умови (див. Розділ 3). Тоді сцинтиляційний індекс лінійно залежить від $\langle|n_{\mathbf{k}_\perp}|^2\rangle$ і зводиться до

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 L(z,\rho_0,\rho_1), \tag{4.36}$$

де $\sigma_1^2 = 1.23C_n^2 q_0^{7/6} z^{11/6}$ — параметр Ритова, $\rho_{0,1}^2 = r_{0,1}^2 q_0/z$, r_0 — початковий радіус пучка, $r_1^2 = r_0^2/(1+2r_0^2\lambda_c^{-2})$, величина λ_c описує ефект фазового змішувача, а $L(z,\rho_0,\rho_1)$ — подвійний інтеграл, що визначається як

$$L(z,\rho_0,\rho_1) = 4.24\int\limits_0^1 d\tau\int\limits_0^\infty d\chi\chi^{-8/3}\exp\left\{-\chi^2\left[\frac{q_0 l_0^2}{4\pi^2 z}+\tau^2\frac{\rho_0^2+\rho_1^2}{4+\rho_0^2\rho_1^2}\right]\right\}$$
$$\times\sin^2\left(\frac{\tau\chi^2}{2}-\frac{2\tau^2\chi^2}{4+\rho_0^2\rho_1^2}\right). \tag{4.37}$$

Вирази (4.36) та (4.37) було виведено у [37] із використанням іншого підходу. Із даних виразів у випадку великих значень початкового радіуса пучка ($\rho_0,\rho_1\to\infty$) і нескінченно малого внутрішнього радіуса турбулентності ($l_0\to 0$), отримаємо результат теорії малих збурень (Ритова), $\sigma^2=\sigma_1^2$, бо в такому разі $L\to 1$.

4.2.2. Інтеграл зіткнень у середній інтенсивності. Чисельник у (4.33), так само як знаменник, виведено з точністю до першого порядку. Розширення теорії в сторону помірної турбулентності потребує врахування інтегралу зіткнень $-\hat{\nu}\big\{\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t)\big\}$. Продовжуючи ітераційну процедуру, підставимо наближене значення для PDF (4.34) у інтеграл зіткнень у рівнянні (4.26). Тоді праву сторону (4.26) можемо розглядати як відому функцію. Після усереднення модифікованого рівняння, отримаємо

$$(\partial_t + \mathbf{c_q}\cdot\partial_\mathbf{r})f_1(\mathbf{r},\mathbf{q},t) = -\hat{\nu}_\mathbf{q}\big\{f_0(\mathbf{r},\mathbf{q},t)\big\}, \tag{4.38}$$

де f_1 являє собою перший незникомий член, породжений інтегралом зіткнень. Розв'язок рівняння (4.38), за нульового значення f_1 для граничних умов, має такий вигляд

$$f_1(\mathbf{r},\mathbf{q},t) = -\int\limits_0^t dt'\hat{\nu}_\mathbf{q}\{f_0(\mathbf{r_q}(t'),\mathbf{q},t')\}. \tag{4.39}$$

Вклад $f_1(\mathbf{r},\mathbf{q},t)$ в загальну густину фотонів дається виразом

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{r},t) &\equiv \sum_\mathbf{q} f_1(\mathbf{r},\mathbf{q},t) \qquad (4.40)\\ &= -\frac{\omega_0^2 t}{cS}\sum_{\mathbf{q},\mathbf{k},\mathbf{k}'_\perp}\langle|n_{\mathbf{k}'_\perp}|^2\rangle e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{c_q}t)}\left[1-\frac{\sin(\mathbf{k}\mathbf{c}_{\mathbf{k}'_\perp}t)}{\mathbf{k}\mathbf{c}_{\mathbf{k}'_\perp}t}\right]\langle b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}}b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\rangle|_{t=0}. \end{aligned}$$

Вираз (4.40) враховує розширення пучка, спричинене атмосферними неоднорідностями. Знову таки, оскільки немає кореляції між флуктуаціями джерела і флуктуаціями показника заломлення, усереднення наявні під знаком суми можуть бути проведені незалежно.

Дві величини, $I_0(\mathbf{r},t)$ and $I_1(\mathbf{r},t)$, представляють відповідно члени нульового і першого порядку розкладу середньої інтенсивності (густини фотонів) по степенях $\langle|n_{\mathbf{k}_\perp}|^2\rangle$.

4.2.3. Другий порядок розкладу $\delta\hat{f}_2$ і ефект комбінованих флуктуацій $\delta\hat{f}_1\cdot\delta\hat{f}_2$. Член другого порядку в ітераційній процедурі для флу-

ктуацій PDF, $\delta\hat{f}_2$, описується рівнянням

$$\partial_t \delta\hat{f}_2(\mathbf{r},\mathbf{q},t) + \mathbf{c_q}\cdot\partial_{\mathbf{r}}\delta\hat{f}_2(\mathbf{r},\mathbf{q},t) = -\hat{\nu}_{\mathbf{q}}\{\delta\hat{f}_1(\mathbf{r_q},\mathbf{q},t)\}, \tag{4.41}$$

де функція $\delta\hat{f}_1$, що визначається виразом (4.32), входить до інтегралу зіткнень. Розв'язком рівняння (4.41) є

$$\delta\hat{f}_2(\mathbf{r},\mathbf{q},t) = -\int\limits_0^t dt'\hat{\nu}_{\mathbf{q}}\{\delta\hat{f}_1(\mathbf{r_q}(t'),\mathbf{q},t')\}, \tag{4.42}$$

де інтеграл зіткнень у явній формі запишеться як

$$\hat{\nu}_{\mathbf{q}}\{\delta\hat{f}_1\} = \frac{L_z\omega_0^2}{c}\sum_{\mathbf{k}'_\perp}\langle|n_{\mathbf{k}'_\perp}|^2\rangle\left[\delta\hat{f}_1(\mathbf{r_q}(\mathbf{t}'),\mathbf{q},t') - \delta\hat{f}_1(\mathbf{r_q}(\mathbf{t}'),\mathbf{q}+\mathbf{k}'_\perp,t')\right]. \tag{4.43}$$

Далі розгляньмо комбінований ефект кореляцій $\delta\hat{f}_{1,2}(\mathbf{r},\mathbf{q},t)$ на σ^2. Вклад $\delta\hat{f}_{1,2}$ у густину фотонів визначається сумою $\sum\limits_{\mathbf{q}}(\delta\hat{f}_1(\mathbf{r},\mathbf{q},t) + \delta\hat{f}_2(\mathbf{r},\mathbf{q},t))$, який включає відповідно лінійний і кубічний по $n_{\mathbf{k}_\perp}$ члени. Середнє від квадрату даної величини, яке дає вклад в сцинтиляційний індекс, містить член

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\langle\delta\hat{f}_1(\mathbf{r},\mathbf{q},t)\cdot\delta\hat{f}_2(\mathbf{r},\mathbf{q}_1,t) \;&+\; \delta\hat{f}_2(\mathbf{r},\mathbf{q},t)\cdot\delta\hat{f}_1(\mathbf{r},\mathbf{q}_1,t)\rangle \\ &= 2\sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\langle\delta\hat{f}_1(\mathbf{r},\mathbf{q},t)\cdot\delta\hat{f}_2(\mathbf{r},\mathbf{q}_1,t)\rangle\end{aligned} \tag{4.44}$$

квадратичний по $\langle|n_{\mathbf{k}_\perp}|^2\rangle$. Під час обчислення σ^2, використовуємо даний член і нехтуємо членами порядку $O(\langle|n_{\mathbf{k}_\perp}|^2\rangle^3)$. Далі, використовуючи вирази (4.32) та (4.42), виводимо явний вираз для (4.44)

$$\begin{aligned}&2\sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\langle\delta\hat{f}_1(\mathbf{r},\mathbf{q},t)\cdot\delta\hat{f}_2(\mathbf{r},\mathbf{q}_1,t)\rangle = \\ &\frac{2\omega_0^4}{c^2S^2}\sum_{\substack{\mathbf{q},\mathbf{k},\mathbf{k}'\\ \mathbf{q_1},\mathbf{k_1},\mathbf{k}''}}\langle|n_{\mathbf{k}'}|^2\rangle\langle|n_{\mathbf{k}''}|^2\rangle\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\tau^t d\tau_1 e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{c_q}\tau)-i\mathbf{k}_1\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{c}_{\mathbf{q}_1}\tau_1)}\end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\times\left[1-e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{c}_{\mathbf{k}'}\tau}\right]\left[1-e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{c}_{\mathbf{k}''}\tau_1}\right]\left[1-e^{-i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{c}_{\mathbf{k}''}\tau_1}\right]\left\langle b^{\dagger}_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}}b^{\dagger}_{\mathbf{q}_1+\frac{\mathbf{k}_1}{2}}b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}''}b_{\mathbf{q}_1-\frac{\mathbf{k}_1}{2}-\mathbf{k}''}\right\rangle\Big|_{t-\tau_1},$$

де оператори народження і знищення залежать від часу як у випадку відсутності турбулентності.

Сумування у (4.45) пробігає по перпендикулярних до осі z компонентах векторів $\mathbf{q}, \mathbf{q}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}', \mathbf{k}''$ (позначки $(_\perp)$ прибрано заради скорочення запису), паралельні ж до осі z компоненти мають такі значення

$$q_z = q_{1z} = q_0, \quad k_z = k_{1z} = k'_z = k''_z = 0. \tag{4.46}$$

Рівності (4.46) можна отримати із виразу (3.10).

Умови $k'_z = k''_z = 0$ співставні із наближенням Маркова [1], [56], в якому флуктуації показника заломлення, $\delta n(\mathbf{r})$, вважають дельта-корельованими у напрямку поширення пучка:

$$\langle \delta n(\mathbf{r}_\perp, z)\delta n(\mathbf{r}'_\perp, z')\rangle \sim \delta(z - z').$$

У такому випадку, турбулентні неоднорідності виглядають як пласкі диски орієнтовані нормально до напряму поширення. Спершу може здатися, що подібне представлення кореляційної функції нереалістичне, так як атмосфера вважається статистично однорідною і ізотропною. Такий парадокс можна пояснити ефектом релятивістського скорочення (скорочення Лоренца) для рухомих об'єктів. Відносний рух атмосфери відносно фотонів проявляється у нульовому значенні кореляційної довжини у напрямку руху.

Вплив турбулентності повністю визначається "діагональними" компонентами $\langle |n_{\mathbf{k}'_\perp}|^2\rangle$ і $\langle |n_{\mathbf{k}''_\perp}|^2\rangle$ кореляційної функції. Як і раніше, наявність лише комбінацій квадратичних членів є результатом статистичної однорідності турбулентної атмосфери.

Остаточний результат даного підрозділу можна представити у загаль-

ному вигляді

$$\sigma^2 = \frac{\sum\limits_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1} \langle \delta\hat{f}_1(\mathbf{r},\mathbf{q},t)[\delta\hat{f}_1(\mathbf{r},\mathbf{q}_1,t) + 2\delta\hat{f}_2(\mathbf{r},\mathbf{q}_1,t)]\rangle}{\big(\sum\limits_{\mathbf{q}} f_0(\mathbf{r},\mathbf{q},t) + f_1(\mathbf{r},\mathbf{q},t)\big)^2}, \tag{4.47}$$

де чисельник і знаменник визначаються виразами (4.33)-(4.37), (4.40), (4.44)-(4.46) та граничними умовами (див. Розділ 3). Провівши низку аналітичних і чисельних обчислень, отримаємо σ^2 для різних параметрів каналу поширення випромінювання. Окрім того, є можливість порівняти значення сцинтиляційних індексів, що отримані для різних порядків пропонованої ітераційної процедури.

4.2.4. Обговорення. Наразі не існує повної теорії сцинтиляцій для довільних параметрів атмосфери. В той же час, існують добре усталені розв'язки для граничних випадків слабкої ($\sigma_1^2 \ll 1$) та сильної ($\sigma_1^2 \gg 1$) турбулентностей. Кінетичне рівняння Больцмана-Ланжевена, в якому розсіяння пучка описується інтегралом зіткнень, застосовний для будь-яких значень параметра Ритова σ_1^2, за виключенням дуже коротких відстаней порядку характерних розмірів турбулентних вихорів. Точний розв'язок цього рівняння отримати досить складно, тому як перший крок обчислюємо розв'язок для середніх значень σ_1^2 ($\sigma_1^2 \leqslant 0.85$, див. затінену область на Рис. 4.6 і $\sigma_1^2 \leqslant 0.75$ для решти рисунків), використовуючи ітераційну схему описану у цьому підрозділі. В той же час, такі значення сцинтиляційного індексу дозволяють описати зону недоступну в рамках підходів подібних до підходу Ритова ($\sigma_1^2 < 0.3$) [56].

Рисунок 4.6 співставляє сцинтиляційні індекси обчислені в рамках підходу Больцмана-Ланжевена із іншими теоретичними підходами та з типовими експериментальними даними, відтвореними з даних Consortini *et al.* [43]. Затемнена область показує область параметрів, яка розглядається у

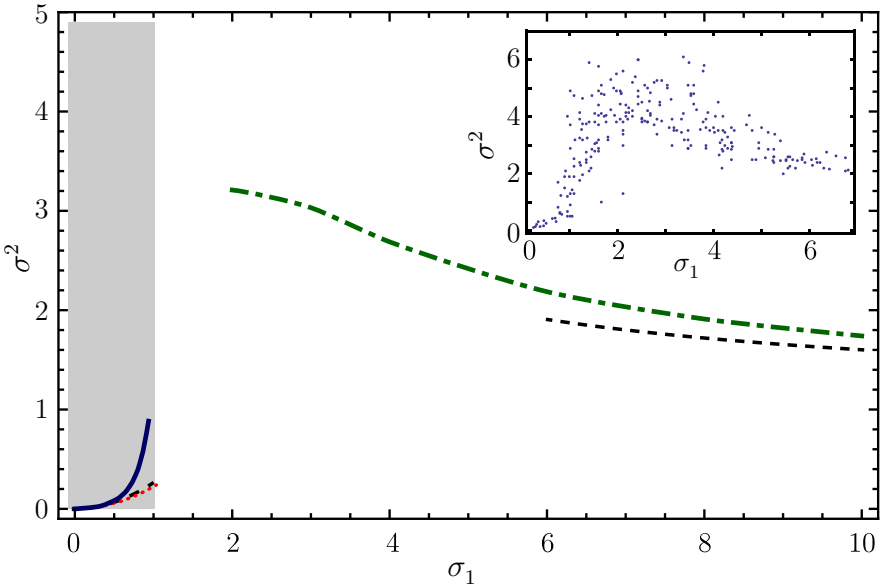

Рис. 4.6. Сцинтиляції як функція параметру Ритова. Результати різних теоретичних підходів якісно порівнюються із експериментальними даними. На графіку наведено результати цього підрозділу (суцільна лінія) [вираз (4.47)], підхід Ритова (пунктирна лінія) [вираз (4.36)], асимптотичні формули методу Гьюґенса-Кірхгофа [63] (штрихована лінії) і результати, які отримано в рамках підходу описаного у попередньому підрозділі та роботі [47] (штрих-пунктирна лінія). Вставлений графік показує типову поведінку експериментальних σ^2 для визначених атмосферних умов (відтворено з роботи [43] для $4\,\text{мм} < l_0 \leqslant 7\,\text{мм}$). Параметри в теоретичних підходах: $l_0 = 6.3\,\text{мм}$, $q_0 = 1.29 \times 10^7\,\text{м}^{-1}$, $r_0 = 0.01\,\text{м}$, $z = 1200\,\text{м}$.

даному підрозділі. Хоча первісно дані в роботі [43] зібрано для сферичних хвиль, пропонується якісне співставлення результатів для висвітлення особливостей сцинтиляцій і переваг запропонованого у кваліфікаційній роботі методу опису цих особливостей. Очікувано, що при малих значеннях параметра Ритова ($\sigma_1^2 \leqslant 0.25$) результати підходу Ланжевена-Больцмана збігаються із результатами для методу Гьюґенса-Кірхгофа, методу Ритова. Проте вони суттєво відрізняються для більших значень, в той же час повторюючи якісно поведінку експериментальних даних для сцинтиляційного

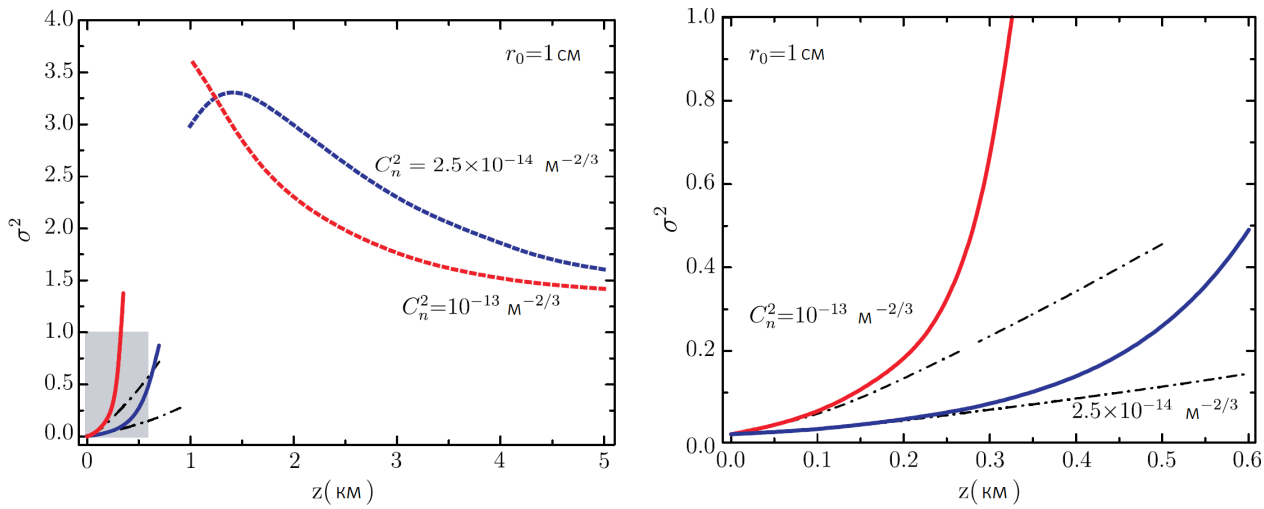

Рис. 4.7. Сцинтиляційний індекс для когерентного пучка vs. відстань поширення z. На правому графіку крапка-штриховані криві отримано за допомогою підходу Ритова [вираз (4.36)]; суцільні криві отримано з врахуванням члену із інтегралом зіткнень [вираз (4.47)]; штриховані криві демонструють результати отримані у роботі [47] (див. Рис. 4.3 та 4.4) із врахуванням кореляцій фотонних траєкторій. Затемнену область на лівому графіку збільшено і зображено на правому графіку. Внутрішній радіус турбулентності $\frac{l_0}{2\pi} = 10^{-3}$ м та хвильове число оптичного випромінювання $q_0 = 10^7$ м$^{-1}$.

індексу при перехідному режимі між слабкою і помірною турбулентністю. Для повноти картини, на рисунку 4.6 приведено теоретичні результати із сторони великих значень параметра Ритова із застосуванням методу, що враховує кореляції траєкторій фотонів із попереднього підрозділу [47] та підходу Гьюґенса-Кірхгофа. Видно, що підхід Гьюґенса-Кірхгофа демонструє обмежений опис для сильної турбулентності, в той час як підхід із [47] значно краще описує сцинтиляційний індекс в зоні переходу від сильної до помірної турбулентності. Більш того, результати підходу врахування кореляцій фотонних траєкторій демонструють тенденцію до зшивання із результатними приведеного наближення в рамках підходу Больцмана-

Ланжевена, в цілому достатньо точно якісно повторюючи особливості сцинтиляцій у цитованому експерименті.

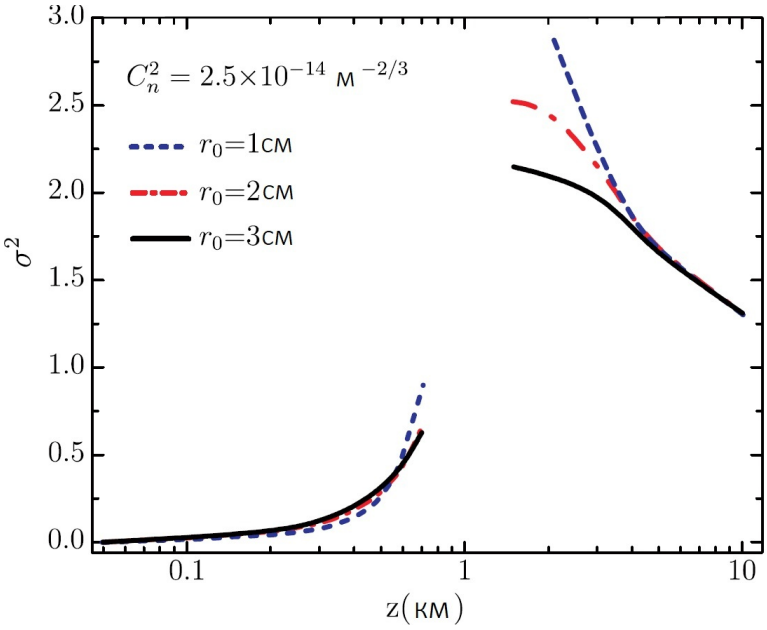

Рис. 4.8. Сцинтиляційний індекс для когерентного пучка vs. відстань поширення z для різних початкових радіусів пучка. Решта параметрів такі самі як на Рис. 4.7. Криві зліва отримано за допомогою запропонованого підходу [вираз (4.47)]; криві справа отримано в межах підходу запропонованого у роботі [47]

Порівняння результатів приведеного підходу із результатами підходу Ритова за різних конфігурацій атмосферного каналу дозволяє більш детально оцінити переваги підходу Больцмана-Ланжевена (Рис. 4.7). Для малих значень σ^2 знову ж таки бачимо повну відповідність обох теорій (збільшена затінена область на правому графіку), проте для більших значень сцинтиляційного індексу бачимо не тільки невідповідність значень, але і різний характер росту $\sigma^2(z, C_n^2)$ у розглянутих випадках. Порівняння із результатами підходу корельованих траєкторій фотонів [47] для режиму переходу помірна-слабка турбулентність демонструє тенденцію до зшивання в проміжній зоні. Окрім того, видно, що максимум σ^2 знаходиться на менших відстанях z, якщо значення структурної константи, C_n^2, є більшим.

Такий результат можна було очікувати, оскільки сильніша взаємодія між фотонами і атмосферними неоднорідностями призводить до швидшого насичення флуктуацій (переходу до гаусової статистики).

Також розглянуто залежність сцинтиляційного індексу від початкового радіуса лазерного пучка. На рисунку 4.8 показано поведінку сцинтиляційного індексу у області, що примикає до зони максимальних значень σ^2. Бачимо, що початкове зростання σ^2 крутіше для менших значень початкових радіусів r_0, що пов'язано із сильнішою кореляцією траєкторій фотонів: кореляція більш суттєва для малих r_0 (див. підрозділ 4.1 або [47]). Це легко пояснюється близькістю траєкторій, які в такому випадку мають більшу ймовірність бути розсіяними на тих самих оптичних неоднорідностях, саме це зумовлює появу кореляцій траєкторій фотонів у ході випадкових розсіянь.

Рисунок 4.9 дозволяє прояснити фізичний механізм, що відповідає за збільшення σ^2 у діапазоні $\sigma_1^2 \leqslant 0.75$ Суцільні криві отримано із виразу (4.47), дані, що зображено крапка-штрихованою кривою отримано тим самим чином, але поклавши $\delta\hat{f}_2 = 0$. Бачимо, що наявна несуттєва різниця між двома наведеними кривими. Тож основну частину розходження між наближенням Ритова і підходом Больцмана-Ланжевена для значень σ^2 можемо пов'язати зі зменшенням фотонної густини через взаємодію із турбулентністю. Це зменшення описується членом f_1 у знаменнику (4.47).

4.3. Кореляційна функція четвертого порядку для оптичних полів у асимптотичному наближенні великих відстаней

Ще однією величиною, що дозволяє описувати просторово-часові особливості поширення пучка в атмосфері є кореляція інтенсивності, яка ви-

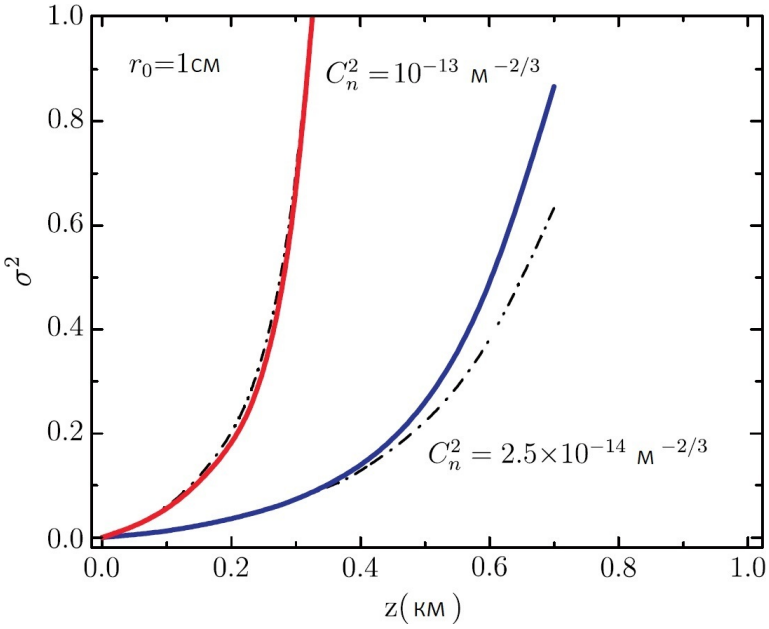

Рис. 4.9. Сцинтиляційний індекс як функція відстані поширення z обчислена з (суцільна) та без (штрихована) врахування вкладу $\delta\hat{f}_2$. Параметрі такі ж як і на Рис. 4.7.

значається як

$$\langle\hat{I}(\mathbf{r},t)\hat{I}(\mathbf{r}',t)\rangle=\frac{1}{V^2}\sum_{\mathbf{q},\mathbf{k},\mathbf{q}',\mathbf{k}'}e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}')}\langle b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}}b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}b^\dagger_{\mathbf{q}'+\frac{\mathbf{k}'}{2}}b_{\mathbf{q}'-\frac{\mathbf{k}'}{2}}\rangle. \tag{4.48}$$

Всі оператори справа дано в момент часу t, який є часом поширення. Можна обґрунтовано вважати, що в асимптотичному випадку великих часів t середнє добутку чотирьох операторів розбивається на попарні добутки, тобто

$$\begin{aligned}\langle b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}}b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}b^\dagger_{\mathbf{q}'+\frac{\mathbf{k}'}{2}}b_{\mathbf{q}'-\frac{\mathbf{k}'}{2}}\rangle\approx&\langle b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}}b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\rangle\langle b^\dagger_{\mathbf{q}'+\frac{\mathbf{k}'}{2}}b_{\mathbf{q}'-\frac{\mathbf{k}'}{2}}\rangle\\&+\langle b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}}b_{\mathbf{q}'-\frac{\mathbf{k}'}{2}}\rangle\langle b^\dagger_{\mathbf{q}'+\frac{\mathbf{k}'}{2}}b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\rangle+\langle b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}}b_{\mathbf{q}'-\frac{\mathbf{k}'}{2}}\rangle\delta_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2},\mathbf{q}'+\frac{\mathbf{k}'}{2}}.\end{aligned} \tag{4.49}$$

Іншими словами, припускається, що квантові амплітуди $b^\dagger$ та b описуються гаусовою статистикою. Таке наближення обґрунтоване, оскільки при $t\to\infty$ кожна початково когерентна електромагнітна хвиля зазнає багатократних зіткнень із випадково розподіленими атмосферними неоднорідностями [26, 45]. Такі “зіткнення” стохастизують імпульси фотонів. [Для

порівняння, у роботі [82] припускається, що гаусова статистика задовольняється із самого початку фотонних траєкторій.] Також враховується, що дотримано умову параксіального наближення, тому компонента хвильового вектора q_z лишається майже незмінною (наближено рівна q_0). Це означає, що флуктуації показника заломлення не мають значного впливу на поширення параксіальних пучків у z-напрямку [1]. Цей ефект у роботі [48] інтерпретовано як наслідок релятивістського скорочення рухомих об'єктів (відносний рух фотонів і неоднорідностей). Поперечна складова імпульсу $\mathbf{q}_\perp$, як зазначалося раніше, з часом росте як у броунівської частинки, що рухається у $\mathbf{q}_\perp$-просторі (див. [37]).

Підставивши (4.49) до (4.48), отримаємо

$$\begin{aligned}\langle \hat{I}(\mathbf{r},t)\hat{I}(\mathbf{r}',t)\rangle \approx & \frac{1}{V^2}\sum_{\mathbf{q},\mathbf{k},\mathbf{q}',\mathbf{k}'} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}')} \\ & \times\Big[\langle b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}} b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\rangle\langle b^\dagger_{\mathbf{q}'+\frac{\mathbf{k}'}{2}} b_{\mathbf{q}'-\frac{\mathbf{k}'}{2}}\rangle + \langle b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}} b_{\mathbf{q}'-\frac{\mathbf{k}'}{2}}\rangle\langle b^\dagger_{\mathbf{q}'+\frac{\mathbf{k}'}{2}} b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\rangle \\ & + \langle b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}} b_{\mathbf{q}'-\frac{\mathbf{k}'}{2}}\rangle\delta_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2},\mathbf{q}'+\frac{\mathbf{k}'}{2}}\Big]. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Використовуючи визначення функції розподілу для фотонів (2.23) та інтенсивності (3.1), можемо переписати в більш змістовній формі

$$\begin{aligned}\langle \hat{I}(\mathbf{r},t)\hat{I}(\mathbf{r}',t)\rangle = & \,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\langle \hat{I}(\mathbf{r},t)\rangle + \langle \hat{I}(\mathbf{r},t)\rangle\langle \hat{I}(\mathbf{r}',t)\rangle \\ & + \sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}\langle f(\frac{\mathbf{r}+\mathbf{r}'}{2},\mathbf{q})\rangle\langle f(\frac{\mathbf{r}+\mathbf{r}'}{2},\mathbf{q}')\rangle e^{i(\mathbf{q}'-\mathbf{q})\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Третій доданок в правій частині отримано використавши формальну заміну індексів у операторах $b_\mathbf{q}$, $b^\dagger_\mathbf{q}$ та в показнику експоненти таким чином

$$\mathbf{k}\to\mathbf{q}-\mathbf{q}'+\frac{\mathbf{k}+\mathbf{k}'}{2},\quad \mathbf{k}'\to\mathbf{q}'-\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}+\mathbf{k}'}{2} \tag{4.51a}$$

$$\mathbf{q}\to\frac{1}{2}\left(\mathbf{q}+\mathbf{q}'+\frac{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}{2}\right),\quad \mathbf{q}'\to\frac{1}{2}\left(\mathbf{q}+\mathbf{q}'-\frac{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}{2}\right).$$

Цей доданок можна переписати в простішій формі

$$\left|\sum_\mathbf{q}\langle f\left(\frac{\mathbf{r}+\mathbf{r}'}{2},\mathbf{q}\right)\rangle e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r})}\right|^2 \equiv \left|\mathscr{F}\left(\frac{\mathbf{r}+\mathbf{r}'}{2},\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)\right|^2,$$

де

$$\mathscr{F}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{\mathbf{q}} \langle \hat{f}(\mathbf{r}_1, \mathbf{q}) \rangle \exp[-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_2]$$

являє собою Фур'є-перетворення $\langle \hat{f}(\mathbf{r}_1, \mathbf{q}) \rangle$ в $\mathbf{q}$-просторі.

Рівняння (4.51) представляє собою результат перемішування чотирьох світлових хвиль при поширенні пучка на великі відстані в напрямку z. Перший доданок в правій частині описує дробовий шум. Він важливий для випадку малої фотонної густини та має квантову природу. Другий доданок є добутком середніх інтенсивностей. Він не враховує кореляції інтенсивності в різних точках $\mathbf{r}$ та $\mathbf{r}'$, він також відсутній у виразі для середньоквадратичних флуктуацій інтенсивності $\langle \delta\hat{I}(\mathbf{r}, t)\delta\hat{I}(\mathbf{r}', t) \rangle$. Третій доданок, як і перший, описує флуктуації. Він виражається як квадратична форма по PDF, яка в загальному випадку не зводиться до добутку інтенсивностей $\langle \hat{I}(\mathbf{r}, t \rangle$.

Точка $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ є винятком, в цьому разі другий і третій член стають однаковими. Як наслідок, сцинтиляційний індекс, σ^2, який визначається як

$$\sigma^2 = \frac{\langle \hat{I}^2 \rangle - \langle \hat{I} \rangle^2}{\langle \hat{I} \rangle^2}, \tag{4.52}$$

дорівнює одиниці, незалежно від значень $\mathbf{r}$. [Тут знехтуємо дробовим шумом.] Це відомий результат для насиченого режиму сцинтиляцій [26]. Маємо підкреслити, що цей результат отримано фактично із умови гаусової статистики для польових операторів у функції розподілу фотонів.

Окремі члени у виразі (4.51), такі як

$$\langle f(\frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2}, \mathbf{q}) \rangle \langle f(\frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2}, \mathbf{q}') \rangle e^{i(\mathbf{q}' - \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}, \tag{4.53}$$

дають вклад у кореляційну функцію для PDF у різних точках $\mathbf{r}$ та $\mathbf{r}'$. В той же час, обидві функції розподілу фотонів у (4.53) залежать від однакової просторової координати $(\mathbf{r} + \mathbf{r}')/2$, яка, очевидно, відрізняється від $\mathbf{r}$ та $\mathbf{r}'$. Як наслідок, кореляційна функція для інтенсивностей різних точках $\mathbf{r}$ та $\mathbf{r}'$

залежить від значень PDF у точці $(\mathbf{r}+\mathbf{r}')/2$. Зокрема це може бути центр пучка ($\mathbf{r} = -\mathbf{r}'$), де функція розподілу фотонів має максимальне значення. Цей приклад показує, що вивчаючи фотонні флуктуації поза центром пучка, можна отримати інформацію про центральну область.

Фізична природа третього члена подібна до ефекту Ганбері-Твіса [83], який описує чотирихвильові кореляції. Властивості поля випромінювання, які залежать від просторової кореляції можуть бути корисні при практичних використаннях лазерних пучків [84].

Явний вираз для третього члена має дуже простий вигляд у "координатному представленні" (широко вживаним у теорії фотоелектричних вимірювань, див. [67]), який базується на модифікованих амплітудах світлового поля

$$b_{\mathbf{r}} = (b_{\mathbf{r}}^{\dagger})^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} b_{\mathbf{q}}.$$

Використовуючи таке "представлення" третій член виражається як $|\langle b_{\mathbf{r}}^{\dagger} b_{\mathbf{r}'}\rangle|^2$, де було використано визначення PDF. Можна обґрунтовано вважати, що для великих значень різниці $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, між амплітудами $b_{\mathbf{r}}^{\dagger}$ і $b_{\mathbf{r}'}$ немає кореляції. І навпаки, ненульові значення $|\langle b_{\mathbf{r}}^{\dagger} b_{\mathbf{r}'}\rangle|^2$ вказують на наявність кореляції фотонної густини в точках $\mathbf{r}$ та $\mathbf{r}'$. Використавши два детектора в цих точках, можливо напряму отримати кореляційну функцію для флуктуацій і порівняти із теоретичним значенням $|\langle b_{\mathbf{r}}^{\dagger} b_{\mathbf{r}'}\rangle|^2$.

Вираз (4.52) визначає відносні флуктуації інтенсивності у визначеній точці $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. Можна очікувати, що повний фотонний потік у напрямку z визначений як

$$I_T(z,t) = c \int d\mathbf{r}_{\perp} \hat{I}(\mathbf{r}) \tag{4.54}$$

не флуктуює, оскільки у моделі відсутнє поглинання на неоднорідностях атмосфери. Це можна обґрунтувати таким чином. Величину флуктуацій $I_T(z,t)$ можна описати за допомогою середнього $\langle[\delta I_T(z,t)]^2\rangle$. Інтегрування

в площині (x, y) дає

$$\langle[\delta I_T(z,t)]^2\rangle = c^2 S \sum_{\mathbf{q}_\perp} \int d\mathbf{r}_\perp \langle \hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q})\rangle^2. \tag{4.55}$$

Вираз (4.55) отримано з використанням співвідношень

$$\int d(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) e^{i(\mathbf{q}_\perp - \mathbf{q}'_\perp)\cdot(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)} = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_\perp - \mathbf{q}'_\perp)$$

та

$$\delta(\mathbf{q}_\perp - \mathbf{q}'_\perp) = \frac{S}{(2\pi)^2} \delta_{\mathbf{q}_\perp, \mathbf{q}'_\perp}.$$

Оцінка відносних флуктуацій, де використано (4.52), дається виразом

$$\frac{\langle[\delta I_T(z,t)]^2\rangle}{\langle I_T(z,t)\rangle^2} \propto (\bar{q}_\perp R)^{-2}, \tag{4.56}$$

де позначення $\bar{q}_\perp$ та R відповідають характерним поперечному імпульсу $q_\perp$ та радіусу пучка. Обидві ці величини зростають із часом t (див. Розділ 3), тож права частина (4.56) асимптотично прямує до нуля. Це типова ситуація для багаточастинкових систем: зазвичай можна знехтувати відносними флуктуації повного числа частинок. Те саме стосується багатофотонного стану, що розглядається в цій роботі.

4.3.1. Явний вираз для четвертого моменту. Повний вираз для четвертого моменту для полів можна отримати після інтегрувань по $\mathbf{q}$ та $\mathbf{q}'$ у (4.51), в результаті отримаємо

$$\langle \hat{I}(\mathbf{r},t)\hat{I}(\mathbf{r}',t)\rangle = \langle \delta I^2_{shot}\rangle + \langle \hat{I}(\mathbf{r},t)\rangle\langle \hat{I}(\mathbf{r}',t)\rangle + \left(\frac{C4\pi S}{\langle \mathbf{r}^2\rangle_T}\right)^2 \exp\left[-\frac{(\mathbf{r}+\mathbf{r}')^2}{2\langle \mathbf{r}^2\rangle_T} - \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2\langle \mathbf{q}^2\rangle_T}{8}\right], \tag{4.57}$$

де використано асимптотичний вираз для функції розподілу (3.43). Дробовий шум можна записати використавши вираз для середньої інтенсивності (3.44), в параксіальному наближенні він записується як

$$\langle \delta I^2_{shot}\rangle = C\frac{4\pi S}{\langle \mathbf{r}^2\rangle_T} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') e^{-\frac{r^2}{\langle \mathbf{r}^2\rangle_T}}. \tag{4.58}$$

З виразу (4.57) видно, що кореляційна довжина визначається характерними значеннями поперечного імпульсу. Ця довжина має значення порядку $(8/\langle \mathbf{q}^2 \rangle_T)^{1/2}$ і зменшується зі збільшенням часу поширення як $t^{-1/2}$. Втрата когерентності означає, що різні частини поля випромінювання поводяться як незалежні одне від одно, як невзаємодіючі частинки. У асимптотичному випадку великих часів, експоненційний множник у виразі (4.57) прямує до дельта-функції, аргументом якої є різниця просторових змінних $[\sim \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')]$. В такому разі, останній доданок у (4.57) можна наближено записати як

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{8\pi}{\langle \mathbf{q}^2 \rangle_T} \langle I(\mathbf{r}, t) \rangle^2, \tag{4.59}$$

де використано вираз для інтенсивності (3.44). Тож повний вираз для флуктуацій фотонної густини можна записати як

$$\langle \delta \hat{I}(\mathbf{r}, t) \delta \hat{I}(\mathbf{r}', t) \rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle \hat{I}(\mathbf{r}, t) \rangle \left(1 + \frac{8\pi}{\langle \mathbf{q}^2 \rangle_T} \langle \hat{I}(\mathbf{r}, t) \rangle \right). \tag{4.60}$$

Бачимо, що права частина являє собою суму дробового шуму і класичного шуму, який квадратично виражається через інтенсивність. У випадку великої інтенсивності, як і можна було очікувати, класичний шум є визначальним. Проте, при збільшені відстані від центра пучка, r, інтенсивність падає і класичний шум дорівнюється або навіть стає меншим, аніж дробовий (квантовий) шум (4.58). Із виразу (4.60) видно, що вклади стають рівними за певної відстані $r = r_q$, коли

$$\langle I(r_q, t) \rangle = \frac{\langle \mathbf{q}^2 \rangle_T}{8\pi}. \tag{4.61}$$

В такому разі радіус r_q позначає межу між областю, де превалюють “класичні” чи “квантові” флуктуації світла.

Умову (4.61) можна легко інтерпретувати. Ліва частина описує двовимірну густину частинок (“фотонів”). Її можна виразити як $\langle I(r_q, t) \rangle = a^{-2}$, де a^2 — площа, що припадає на частинку. З іншої сторони, величина

$\langle \mathbf{q}^2 \rangle_T = (2\pi/\lambda_q)^2$, де λ_q — характерна довжина хвилі для частинок у двовимірному випадку. Використавши нові позначення, умову (4.61) можна переписати в більш змістовному вигляді

$$\lambda_q = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a. \tag{4.62}$$

Величина зліва залежить від часу як $t^{-1/2}$. Це означає, що зі зростанням часу (або відстані поширення $z = ct$) "класична область" a зменшується відповідно. Стає можливою ситуація, коли при великих t флуктуації інтенсивності набувають повністю квантової природи для будь-якої точки в поперечному перерізі пучка.

Проте, слід зазначити, що для випадку великих (але скінчених) значень $\langle \mathbf{q^2} \rangle_T$ і малих радіусів апертури приймача, наближення δ-функції для кореляцій незастосовне. В цьому випадку слід використовувати саме вираз (4.57). Така примітка важлива для випадку, коли усереднення для Γ_4 [див. далі] відбувається по малих областях в площині (x, y).

4.3.2. Усереднення сцинтиляцій по апертурі приймача. Асимптотичне значення для кореляційної функції четвертого порядку можна застосувати для отримання усереднених по апертурі приймача сцинтиляцій випромінювання. Ця фізична величина важлива для вимірювань у атмосфері, оскільки розміри апертури приймача завжди обмежені [85, 86, 87]. Для того, щоб продемонструвати ефект апертури приймача $\mathcal{A}$, використаємо коефіцієнт пропускання для інтенсивності, що визначається як

$$\eta = (4C\pi^2 S)^{-1} \int\limits_{\mathcal{A}} d\mathbf{r} \hat{I}(\mathbf{r}, t), \tag{4.63}$$

де застосовано умову нормованості $\eta = 1$ для апертур $\mathcal{A}$, які набагато більші за радіус пучка. Величина η включає в себе як середнє значення, так і флуктуації, описуючи пропускання оптичного каналу [88].

Флуктуації пропущеного випромінювання описується усередненим по апертурі сцинтиляційним індексом

$$\sigma_\eta^2 = \frac{\langle \eta^2 \rangle - \langle \eta \rangle^2}{\langle \eta \rangle^2}. \tag{4.64}$$

Два моменти для η визначаються як [89]

$$\langle \eta \rangle = \int\limits_{\mathcal{A}} d\mathbf{r} \Gamma_2(\mathbf{r}), \tag{4.65}$$

$$\langle \eta^2 \rangle = \int\limits_{\mathcal{A}} d\mathbf{r} \int\limits_{\mathcal{A}} d\mathbf{r}' \Gamma_4(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \tag{4.66}$$

де умова нормованості дається співвідношеннями: $\Gamma_2(\mathbf{r}) = \langle \hat{I}(\mathbf{r}, t) \rangle / (4C\pi^2 S)$, $\Gamma_4(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \hat{I}(\mathbf{r}, t) \hat{I}(\mathbf{r}', t) \rangle / (4C\pi^2 S)^2$.

Для кругової апертури з радіусом R та великих відстаней поширення можемо виразити моменти для коефіцієнтів пропускання як

$$\langle \eta \rangle = \left(1 - \exp\left[-\frac{R^2}{\langle \mathbf{r}^2 \rangle_T}\right]\right), \tag{4.67}$$

$$\langle \eta^2 \rangle - \langle \eta \rangle^2 = \int\limits_0^{R^2} \frac{d\chi}{\langle \mathbf{r}^2 \rangle_T} \int\limits_0^{R^2} \frac{d\chi'}{\langle \mathbf{r}^2 \rangle_T} I_0 \left(\sqrt{\chi\chi'} \left(\frac{1}{\langle \mathbf{r}^2 \rangle_T} - \frac{\langle \mathbf{q}^2 \rangle_T}{4}\right)\right) \times \exp\left[-(\chi + \chi') \left(\frac{1}{2\langle \mathbf{r}^2 \rangle_T} + \frac{\langle \mathbf{q}^2 \rangle_T}{8}\right)\right], \tag{4.68}$$

де I_0 — модифікована функція Бесселя першого роду. Інтеграл по χ' у виразі (4.68) зводиться до неповної циліндричної функції, аналітичні наближення якої було розглянуто у [90].

У випадку великих R, можна використати наближення дельта-кореляції (4.59), таким чином значно спростивши обчислення (4.66). В такому разі матимемо

$$\langle \eta^2 \rangle - \langle \eta \rangle^2 = \frac{4}{\langle \mathbf{q}^2 \rangle_T \langle \mathbf{r}^2 \rangle_T} \left(1 - \exp\left[-\frac{2R^2}{\langle \mathbf{r}^2 \rangle_T}\right]\right). \tag{4.69}$$

Дві криві для реалістичного набору параметрів представлено на рисунку 4.10. Видно, що обидві криві добре узгоджуються лише для великих значень R. У цьому випадку, значення сцинтиляцій можна оцінювати як

$$\sigma_\eta^2 \sim \frac{1}{\langle \mathbf{q}^2 \rangle_T \langle \mathbf{r}^2 \rangle_T} \approxeq (\langle \mathbf{r}^2 \rangle \langle \mathbf{q}^2 \rangle)^{-1}.$$

Подібний результат отримано із якісних міркувань вище у цьому підрозділі.

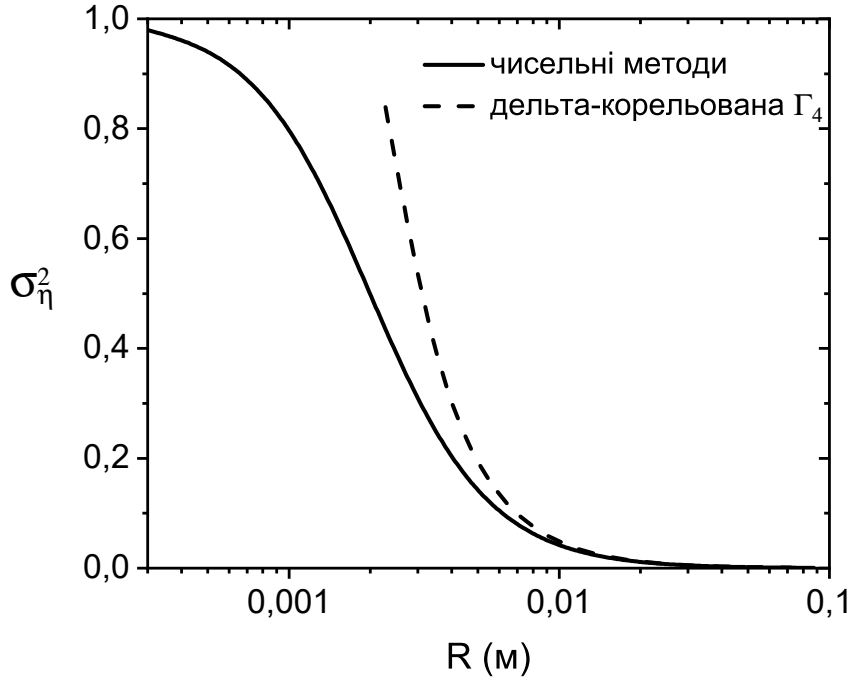

Рис. 4.10. Усереднений по апертурі сцинтиляційний індекс vs. радіус детектора. Суцільна лінія зображує результати числових обчислень для (4.68); пунктирна лінія враховує дельта-корельовану поведінку Γ_4, вираз (4.69). Параметри пучка та каналу поширення: $z = 20\,km$, $C_n^2 = 2.5 \times 10^{-14}\,m^{-2/3}$, $r_0 = 0.01\,m$, $l_0/2\pi = 10^{-3}\,m$, $q_0 = 10^7\,m^{-1}$.

Розв'язок чисельними методами показує залежність усереднених по апертурі сцинтиляцій від радіусу детектора (див. Рис. 4.11). Наявні дві важливі властивості флуктуацій пропускання інтенсивності. Перша пов'язана із точковою апертурою. У цьому випадку сцинтиляційний індекс прямує до одиниці, вказуючи на ефект насичення флуктуацій. Друга властивість – зникнення флуктуацій для апертур, розміри яких набагато

більші за радіус пучка. Це означає, що повна кількість фотонів незмінна (відсутня дисипація в системі).

Можемо бачити з Рис. 4.11, що зменшення флуктуацій в асимптотичному випадку сильно залежить від величини $\langle \mathbf{q}^2 \rangle$. Подібну залежність від R зауважували у ранніх роботах, описуючи її в термінах довжини когерентності для коваріаційної функції [91, 92].

Окрім того, порівнюючи із попередніми роботами [93, 94], можемо зауважити із Рис. 4.11, що у випадку насиченого режиму флуктуацій на відміну від режиму частково насичених флуктуацій відсутній "сходинковий" ефект для коефіцієнту усереднення по апертурі, тобто наявність двох характерних масштабів, на яких значення усередненого сцинтиляційного індексу падають. Це можна пояснити тим, що другий і третій член у виразі (4.51) мають різні кореляційні властивості, а саме різні кореляційні довжини. У випадку частково насиченого режиму кореляція у цих членах визначається умовами (i) $k, k' \leqslant \langle \mathbf{r}^2 \rangle_T{}^{-1/2}$, (ii) $|\mathbf{q}' - \mathbf{q} + (\mathbf{k} + \mathbf{k}')/2|, |\mathbf{q} - \mathbf{q}' + (\mathbf{k} + \mathbf{k}')/2| \leqslant \langle \mathbf{r}^2 \rangle_T{}^{-1/2}$ відповідно [див. [37, 95], можна порівняти із (4.51a)]. Тож, рухаючись в сторону насичення $\langle \mathbf{r}^2 \rangle_T{}^{-1/2} \to 0$, а умова (i) забезпечує факторизацію інтенсивностей в різних точках для відповідного члену. В той же час умова (ii) не призводить до такої факторизації через своєрідне заплутування змінних $\mathbf{q}', \mathbf{q}, \mathbf{k}, \mathbf{k}'$ у просторі хвильових векторів. Натомість, така умова призводить до появи $\langle \mathbf{q}^2 \rangle_T^{-1/2}$ (або ж ρ_0 у інших роботах), як основної міри кореляції, лишаючи $\langle \mathbf{r}^2 \rangle_T^{-1/2}$ (або ж $\rho_0 q_0 / z$) поза розглядом у випадку насиченого режиму флуктуацій.

Окрім того, для насиченого режиму можна помітити, що значення σ_η^2 не залежить явно від значень параметру Ритова. Структурна константа C_n^2 наявна у σ_η^2 в межах параметрів $\langle \mathbf{r}^2 \rangle_T$ та $\langle \mathbf{q}^2 \rangle_T$ (див. (4.57)).

Спроби описати флуктуації інтенсивності світла у випадку сильної турбулентності робилися Чорнсайдом [91], Ендрьюсом *et al* [93] та іншими. Проте, наскільки відомо здобувачу, строге виведення аналітичного виразу

для σ_η^2 зроблено вперше у цій роботі [49].

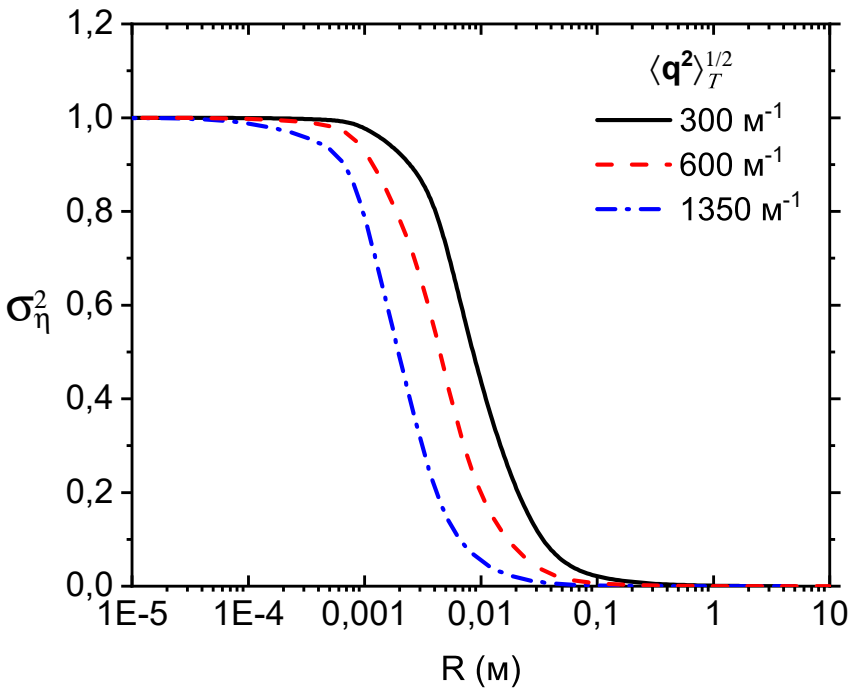

Рис. 4.11. Усереднений по апертурі сцинтиляційний індекс vs. радіус детектора. Три криві представляють собою поширення в трьох каналах, що характеризуються різною величиною зміни поперечного імпульсу від впливу неоднорідної атмосфери. Лінія пунктирною крапкою: $z = 20$ км, $C_n^2 = 2.5 \times 10^{-14}$ м$^{-2/3}$, параметр Ритова $\sigma_R^2 = 62$; пунктирна лінія: $z = 17$ км, $C_n^2 = 5.8 \times 10^{-15}$ м$^{-2/3}$, $\sigma_R^2 = 60$; суцільна лінія: $z = 100$ км, $C_n^2 = 2.5 \times 10^{-16}$ м$^{-2/3}$, $\sigma_R^2 = 66$. Спільні параметри пучка і каналу поширення для всіх кривих: $r_0 = 0.01$ м, $l_0/2\pi = 10^{-3}$ м, $q_0 = 10^7$ м$^{-1}$.

4.3.3. Обговорення. Четвертий момент по оптичних полях описує флуктуації інтенсивності. Рівень шумів, що пов'язаний із даними флуктуаціями шкодить можливим практичним використанням лазерних пучків. В той же час, четвертий момент описує нелокальну природу фотонних флуктуацій. Така специфічна властивість світла застосовна до детальної діагностики (сканування) пучка. Для цих цілей можна використати два детектори.

Розв'язавши рівняння Больцмана-Ланжевена і знайшовши середнє добутку відповідних розв'язків, можливо отримати вираз для кореляційної функції четвертого порядку. В загальному випадку, отримання четвертого моменту для полів пов'язане із великою кількістю інтегрувань, що значно ускладнюють обчислення. В той же час, розрахунки значно спрощуються у випадку поширення на великі відстані, коли можливо використати ефект насичення флуктуацій. Стохастизація поперечного імпульсу у зв'язку із багатократними зіткненнями із неоднорідностями призводить до зміни статистичних властивостей випромінювання, таким чином, що кореляції вищих порядків виражаються через парні кореляції.

Використавши таку властивість, було отримано четвертий момент для флуктуацій $\langle \delta\hat{I}(\mathbf{r},t)\delta\hat{I}(\mathbf{r}',t)\rangle$ як суму лінійного і квадратичного по середніх значеннях PDF членів. Лінійний член (дробовий шум) описує віддалені від центру пучка частини випромінювання, а той час як квадратичний описує звичайні (класичні) флуктуації випромінювання поблизу центру пучка. Дробовий шум є проявом квантових флуктуацій і показує дискретну природу світла за малих інтенсивностей. Аналітично отримано відстань від центра пучка, на якій класичний шум дорівнюється до квантового шуму, така відстань залежить від часу time t та інтенсивності випромінювання.

Явний вираз для четвертого моменту для полів використано для отримання усереднених по апертурі флуктуацій. Обмежені розміри приймача типові для більшості практичних застосувань, тому строго отриманий аналітичний вираз для флуктуацій коефіцієнту проходження світла є дуже корисним. В асимптотичному випадку, приріст поперечного імпульсу визначає кореляційну довжину для четвертого моменту. Значення кореляційної довжини може бути використано для оптимального вибору діаметра приймача.

4.4. Висновки

Специфічні статистичні властивості світла за умов помірної турбулентності довгий час значною мірою приваблювали науковців та інженерів. Протягом десятиріч, опис поширення світла у атмосфері лишається складною теоретичною задачею. У цьому розділі розглянуто найскладніший аспект впливу оптичної неоднорідності атмосфери на лазерні пучки — кореляції четвертого порядку для оптичних полів. Зокрема флуктуації інтенсивності у зоні помірної турбулентності та двоточкова кореляційна функція для інтенсивності.

Проблема опису режиму часткової насиченості флуктуацій (або ж помірної турбулентності) досі лишається невирішеною. В той час, як надійні аналітичні розв'язки існують лише для слабкої на сильної турбулентності, за допомогою функції розподілу фотонів у фазовому просторі, у підрозділі 4.1 було запропоновано підхід, що включає аналітичні та чисельні обчислення, для найскладнішого діапазону проміжних значень сили турбулентності. Для цього діапазону обчислено сцинтиляційний індекс σ^2. Знайдено, що значне збільшення σ^2 (у 2-3 рази) для помірної турбулентності пов'язане із кореляціями між траєкторіями фотонів. Показано, що сцинтиляційний індекс можна значно зменшити за допомогою використання ширшої вихідної апертури пучка або швидкого фазового змішувача. Проаналізовано застосовність підходу функції розподілу для коротких відстаней.

У підрозділі 4.2 використано кінетичне рівняння Больцмана-Ланжевена для функції розподілу, виведене виходячи із перших принципів. Розв'язок знайдено за допомогою ітераційної процедури, яка застосовна у випадку малих відстаней поширення чи достатньо малого впливу турбулентності. В дослідженні використано параксіальне наближення, в рамках якого проблема зводиться до розгляду двовимірних хвильових векторів і спрощує вигляд інтегралу зіткнень та кореляційної функції для ланжевенівського

джерела. Дальший поступ у дослідженні проблеми сцинтиляцій може бути пов'язаний, зокрема, із пошуком розв'язків загальнішого вигляду для кінетичного рівняння.

У підрозділі 4.3 показано, що асимптотичне значення кореляційної функції четвертого порядку для оптичних полів виражається через лінійний і квадратичний по PDF члени, які було отримано в попередньому розділі. Четвертий момент описує рівень шуму для оптичних сигналів і його можна використати для оцінки продуктивності оптичних систем. Зокрема його можна використати для дослідження оптичного випромінювання подібно до вимірювань шумів у галузі фізики поверхні або ж фізики твердого тіла. Отримані результати практично не залежать від конфігурації початкового випромінювання і їх можна використати для опису інших оптичних систем.

Основні результати розділу опубліковано у працях [47, 48, 49].

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі отримано наступні результати:

1. Отримано аналітичний вираз для опису ефекту видовження лазерних імпульсів при поширенні в земній атмосфері. Досліджено два фізичні механізми збільшення довжини імпульсів та вказані значення параметрів пучка і каналу поширення, коли цей ефект потрібно враховувати.
2. Продемонстровано значний вплив фазового дифузора на величину сцинтиляційного індексу. Дифузор, зменшуючи кореляції фотонних траєкторій, тим самим зменшував і сцинтиляційний індекс, особливо в режимі помірної турбулентності. В цій же області найбільше проявляється залежність сцинтиляційного індексу від радіуса апертури джерела.
3. Продемонстровано вплив кореляцій фотонів у турбулентній атмосфері на величину сцинтиляційного індексу при переході помірна-сильна та сильній турбулентностях. Показано, що механізм кореляції фотонів дає суттєвий додатковий внесок у величину сцинтиляційного індексу при наближенні до області помірної турбулентності.
4. Використовуючи гамільтоніан поля в турбулентній атмосфері, виведено кінетичне рівняння Больцмана-Ланжевена для функції розподілу фотонів у фазовому просторі (в **r**-**q** просторі). Його розв'язок методом ітерацій визначає середнє значення функції розподілу та її флуктуації. Вплив турбулентності враховується інтегралом зіткнень та ланжевенівським джерелом флуктуацій. Вже друга ітерація показала чітку тенденцію до "зшивки" значень сцинтиляційного індексу, знайденого за слабкої та сильної турбулентності.
5. Знайдений вираз для середньої функції розподілу фотонів у атмосфері

демонструє істотну анізотропію у фазовому просторі внаслідок дрейфу фотонів у поперечному до осі пучка напрямку. Він використаний для знаходження густини потоку, ширини пучка, середньоквадратичного поперечного імпульсу фотонів.

6. Отримано явний вираз для кореляційної функції четвертого порядку для оптичних полів у атмосфері в наближенні великих відстаней поширення. Продемонстровано ряд особливостей кореляційної функції та її застосування для практичних задач:
   - показано, що кореляція інтенсивності в точках $\mathbf{r}$ і $\mathbf{r}'$ визначаються значеннями функції розподілу в точці $(\mathbf{r}+\mathbf{r}')/2$. Вивчаючи флуктуації на краях пучка можна отримати інформацію про центр пучка;
   - для гаусових пучків показано як між собою співвідносяться квантові і класичні флуктуації. Зокрема, представлено умову, коли ці флуктуації дають однаковий вклад;
   - побудовано криві залежності сцинтиляційного індексу від усереднення по апертурі приймача у асимптотичному наближенні насичених флуктуацій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. V. I. Tatarskii, *The effect of the Turbulent Atmosphere on Wave Propagation.* (National Technical Information Service, U.S. Department of Commerce, Springfield, VA, 1971).
2. Y. Barabanenkov, Y. Kravtsov, S. Rytov, and V. Tatarski, Sov. Phys. Usp., **13**, 551 (1971).
3. L. C. Andrews and R. L. Phillips, *Laser Beam Propagation Through Random Media.* (SPIE Press, Bellingham, WA, 1998).
4. O. Korotkova, L. C. Andrews, and R. L. Phillips, Opt. Eng., **43**, 330 (2004).
5. F. Wang, X. Liu, and Y. Cai, Prog. in Electromagn. Res., **150**, 123 (2015).
6. I. Capraro, A. Tomaello, A. Dall'Arche, F. Gerlin, R. Ursin, G. Vallone, and P. Villoresi, Phys. Rev. Lett. **109**, 200502 (2012).
7. V. C. Usenko *et al.*, New. J. Phys. **14**, 093048 (2012).
8. R. Ursin *et al.*, Nat. Phys. **3**, 481 (2007).
9. J. Yin *et al.*, Science **356**, 1140 (2017).
10. N. Hosseinidehaj and R. Malaney, Phys. Rev. A **91**, 022304 (2015).
11. C. Peuntinger, B. Heim, C. R. Müller, C. Gabriel, C. Marquardt, and G. Leuchs, Phys. Rev. Lett. **113**, 060502 (2014).
12. D. Vasylyev, A. A. Semenov, and W. Vogel, Phys. Rev. Lett. **117**, 090501 (2016).
13. A. A. Semenov and W. Vogel, Phys. Rev. A **81**, 023835 (2010).
14. M. O. Gumberidze, A.A. Semenov, D. Vasylyev, and W. Vogel, Phys. Rev. A **94**, 053801 (2016).
15. X. Ma *et al.*, Nature (London) **489**, 269 (2012).
16. J.-G. Ren *et al.*, Nature (London) **549**, 70 (2017).

17. D. Rideout *et al.*, Class. Quantum Grav. **29**, 224011 (2012).
18. P. Touboul *et al.*, Phys. Rev. Lett. **119**, 231101 (2017).
19. H. Kaushal and G. Kaddoum, IEEE communications surveys and tutorials, **19**(1), 57 (2017).
20. J. P. Bourgoin, B. L. Higgins, N. Gigov, C. Holloway, Ch. J. Pugh, S. Kaiser, M. Cranmer, and T. Jennewein, Optics Express, **23**, 33437 (2015).
21. C. Robert and J. -M. Conan, Phys. Rev. A **93**, 033860 (2016).
22. J. P. Bourgoin, N. Gigov, B. L. Higgins, Z. Yan, E. Meyer-Scott, A. K. Khandani, N. Lutkenhaus, and T. Jennewein, Phys. Rev. A **92**, 052339 (2015).
23. G. Vallone, D. Bacco, D. Dequal, S. Gaiarin, V. Luceri, G. Bianco, and P. Villoresi, Phys. Rev. Lett. **115**, 040502 (2015).
24. D. Dequal, G. Vallone, D. Bacco, S. Gaiarin, V. Luceri, G. Bianco, and P. Villoresi, Phys. Rev. A **93**, 010301(R) (2016).
25. R. M. Measures, Laser Remote Sensing. Fundamentals and Applications (Krieger Publishing, Malabar, 1992).
26. D. A. DeWolf, J. Opt. Soc. Am. **58**, 461 (1968).
27. Yu. A. Kravtsov, Rep. Prog. Phys., **55**, 39, (1992).
28. L. C. Andrews, R. L. Phillips, and C. Y. Hopen, *Laser Beam Scintillation with Applications* (SPIE Press, Bellingham, WA, 2001).
29. C. Erven, B. Heim, E. Meyer-Scott, J. P. Bourgoin, R. Laflamme, G. Weihs, and T. Jennewein, New J. Phys. **14**, 123018 (2012).
30. Ch. L. Rino, *The Theory of Scintillation with Applications in Remote Sensing*, (John Wiley, New York, 2011).
31. J. H. Churnside, Optical remote sensing, in *Wave Propagation in Random Media (Scintillation)*, edited by V. I. Tatarskii, A. Ishimaru, and V. U. Zavorotny (SPIE Press, Bellingham, WA, 1992).
32. E. N. Ribak, E. Gershnik, and M. Cheselka, Opt. Lett. **21**, 435 (1996).

33. V. I. Tatarskii, A. Ishimaru, and V. U. Zavorotny, editors, *Wave Propagation in Random Media (Scintillation)* (SPIE, Bellingham, WA, 1992).
34. E. Jakeman and K. D. Ridley, *Modeling Fluctuations in Scattered Waves* (CRC Press, Boca Raton, FL, 2006).
35. R. Dashen and G. Y.Wang, J. Opt. Soc. Am. A **10**, 1219 (1993).
36. M. Marians, Radio Science **10**, 115 (1975).
37. G. P. Berman and A. A. Chumak, Phys. Rev. A, **74**, 013805 (2006).
38. E. P. Wigner, Phys. Rev. **40**, 749 (1932).
39. A. A. Tarasenko and A. A. Chumak, JETP, **73**, 625 (1977).
40. O. O. Chumak and E. V. Stolyarov, Phys. Rev. A, **88**, 013855 (2013).
41. O. O. Chumak and E. V. Stolyarov, Phys. Rev. A, **90**, 063832 (2014).
42. G. P. Berman, A. A. Chumak, and V. N. Gorshkov, Phys. Rev. E, **76**, 056606 (2007).
43. Consortini *et al.*, J. Opt. Soc. Am. A, Vol. **10**, 2354 (1993).
44. V. Ya. S"edin, S. S. Khmelevtsov, and R. Sh. Tsvik, Izv. Vuzov SSSR, Ser. Radiofiz. **15**, 789 (1972).
45. R. Dashen, J. Math. Phys., **20**, 894 (1979).
46. Баськов Р. А., Чумак О. О., Наук. зап. НаУКМА, Фіз.-мат. науки, **87**, 45 (2009).
47. O. O. Chumak and R. A. Baskov, Phys. Rev. A, **93**, 033821 (2016).
48. R. A. Baskov and O. O. Chumak, Phys. Rev. A **97**, 043817 (2018).
49. R. A. Baskov and O. O. Chumak, J. Opt., **22**, 105603 (2020).
50. Lawson P., *Principles of long baseline stellar interferometry* (JPL, 2000).
51. A. N. Kolmogorov, C. R. (Doki) Acad. Sci. U.S.S.R. **30**, 301 (1941).
52. L. F. Richardson, Weather Prediction by Numerical Process (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1922).
53. G. I. Taylor, Proc. Roy. Soc. A, **164**, 476 (1938).

54. I. Toselli, L. C. Andrews, R. L. Phillips, and V. Ferrero , Proc. SPIE **6708**, Atmospheric Optics: Models, Measurements, and Target-in-the-Loop Propagation, 670803 (2007).
55. V. S. Rao Gudimetla, Richard B. Holmes, Thomas C. Farrell, and Jacob Lucas , Proc. SPIE **8038**, Atmospheric Propagation VIII, 803808 (2011).
56. R. L. Fante, Proc. IEEE, **63**, 1669 (1975).
57. P. Bergmann, Phys.Rev.,**70**, 486 (1946).
58. Tatarskii V. I. *Wave propagation in a Turbulent Medium* (Dover, New York, 1967).
59. Fante R. L. Proc. IEEE, **68**, 1424 (1980).
60. H. T. Yura, C. C. Sung, S. F. Clifford, and R. J. Hill, J. Opt. Soc. Am. **73**, 500 (1983).
61. R. Lee and J. Harp,Proc.IEEE, **57**, 375 (1969).
62. E. Novikov, Sov. Phys., JETP, **20**, 1290 (1965).
63. V. A. Banakh and V. L. Mironov, Opt. Lett. **8**, 259 (1979).
64. Charnotskii M., J. Opt. Soc. Am. A **32**, 1357 (2015).
65. A.I. Rarenko, A.A. Tarasenko, and A.A. Chumak, Ukr. J. Phys., **37**, 1577 (1992).
66. O. Chumak and N. Sushkova, Ukr. J. Phys., **57**, 30 (2012).
67. L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University, Cambridge, 1995).
68. О. Чумак, *Квантова оптика* (Євросвіт, Львів, 2012).
69. *Landau L. D. and Lifhitz E. M. Electrodynamics of Continuous Media.* (Pergamon Press, Oxford, 1984), Vol. 8 of Course of Theoretical Physics.
70. E. Collett and R. Alferness, J. Opt. Soc. Am., **62**, 529 (1972).
71. A.Ya. Polishchuk, M. Zevallos, F.Liu, and R.R. Alfano, Phys. Rev. E, **53**, 5523 (1996).
72. Sh. Kogan, *Electronic Noise and Fluctuations in Solids* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).

73. C. N. Yang, Phys. Rev., **84**, 599 (1951).
74. A. G. Ramm and G. P. Berman, Phys. Rev. B, **51**, 2406 (1995).
75. G.P. Berman and A.A. Chumak, Phys. Rev. A, **79**, 063848 (2009).
76. Brown W. P. J. Opt. Soc. Am. 61, 1051 (1971).
77. В. Л. Миронов, *Распространение лазерного пучка в турбулентной атмосфере* (Издательство “Наука”, Новосибирск, 1981).
78. R. J. Hughes, J. E. Nordholt, D. Derkacs, C. G. Peterson, New J. Phys.**4**, 43.1 (2002).
79. Berman G. P. and Chumak A. A., Proc. of SPIE., **6710**, 67100M (2007).
80. L.C. Andrews and R.L. Phillips, SPIE, **3609**, 90 (1999).
81. Banakh V. A., Buldakov V. M., and Mironov V. L., Opt. Spektrosk., **54**, 1054 (1983).
82. Y. Zhang, C. Ding, L. Pan, and Y. Cai, Appl. Sci., **9** , 244 (2019).
83. M.O. Scully and M.S. Zubairy, *Quantum Optics* (Cambridge U.P., New York, 1996).
84. J. Garnier and K. Solna, Arch. Rational Mech. Anal. **220**, 37 (2016).
85. D. Vasylyev, W. Vogel, and F. Moll, Phys. Rev. A **99**, 053830 (2019).
86. R. Barrios, F. Dios, J. Recolons, and A. Rodriguez, Proc. SPIE **7814**, Free-Space Laser Communications X, 78140C (2010).
87. F. S. Vetelino, C. Young, L. Andrews, and J. Recolons, Appl. Opt. **46**, 2099 (2007).
88. D. Yu. Vasylyev, A. A. Semenov, and W. Vogel, Phys. Rev. Lett. **108**, 220501 (2012).
89. D. Vasylyev, W. Vogel, and A. A. Semenov, Phys. Rev. A **97**, 063852 (2018).
90. D. Vasylyev, A. Semenov, and W. Vogel, Phys. Scr. **2013**, 014062 (2013).
91. J.H. Churnside, Appl. Opt. **30**, 1982 (1991).
92. R. L. Fante, J. Opt. Soc. Am. **73**, 277 (1983).
93. Andrews, L. C., Phillips, R. L., and Hopen, C. Y. Waves in Random Media, **10**(1), 53 (2000).

94. M.-A. Khalighi, N. Schwartz, N. Aitamer, and S. Bourennane, J. Opt. Commun. Netw. **1**(6), 580 (2009), M.-A. Khalighi, N. Aitamer, N. Schwartz, and S. Bourennane// 10th International Conference on Telecommunications, 59 (2009).

95. G. P. Berman, V. N. Gorshkov and S. V. Torous, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **44**, 055402 (2011).

Додаток А

Інтеграл зіткнень у параксіальному наближенні

Інтеграл зіткнень (2.42) можливо отримати використовуючи стандартну процедуру. Проте, можна окремо привести деякі пояснення. Виведення кінетичних рівняння больцманівського типу основане на припущенні, що час взаємодії окремих частинок (фотонів) із розсіювачем є надзвичайно малим. Відповідний критерій визначається у нерівності (2.39), $\pi/ck' \ll t - t_0 \ll 1/\nu$. Окрім цього, додаткового розглядається явна форма для ймовірності розсіювання. У випадку поширення лазерного пучка в атмосфері, процес зіткнення описується оператором

$$\hat{J} = -i\frac{\omega_0}{V}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} n_{\mathbf{k}'}\big[b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}} b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'} - b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}-\mathbf{k}'} b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\big], \tag{A.1}$$

(див. (2.25)). Використовуючи величину $b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}} b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'}$, яку дано у виразі (2.38), можна переписати (A.1) як

$$\hat{J} = -\hat{K}(\mathbf{r},\mathbf{q},t) + \frac{\omega_0^2}{V}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{k}''} n_{\mathbf{k}'} n_{\mathbf{k}''} \times \tag{A.2}$$

$$\times \int_{t_0}^{t} dt' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \Bigg[e^{i(\omega_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}} - \omega_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'})(t-t')} \big(b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}} b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}''} - b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}-\mathbf{k}''} b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'}\big)$$

$$-e^{i(\omega_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}-\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}})(t-t')} \big(b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}-\mathbf{k}'} b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}''} - b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}-\mathbf{k}'-\mathbf{k}''} b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\big)\Bigg]\Bigg|_{t'} = -\hat{K}(\mathbf{r},\mathbf{q},t) + \hat{\tilde{J}},$$

де другий член у квадратних дужках виводиться із першого шляхом заміни змінних $\mathbf{q} \to \mathbf{q} - \mathbf{k}'$, а часовий інтервал $t - t_0$ задовільняє умову (2.39).

Добутки $n_{\mathbf{k}'} n_{\mathbf{k}''}$ та $b^\dagger b$ у виразі (A.2) мають стохастичну природу. Як зазначено в основному тексті, можна знехтувати кореляцією між відповідними стохастичними підсистемами і розглядати їх окремо.

Величина $n_{\mathbf{k}'}n_{\mathbf{k}''}$ містить як ненульове середнє значення так і складову, що флуктуює. Розгляньмо добуток $n_{\mathbf{k}'}n_{\mathbf{k}''}$ більш детально. За визначенням

$$\begin{aligned} n_{\mathbf{k}'}n_{\mathbf{k}''} &= \frac{1}{V^2}\int\int d\mathbf{r}d\mathbf{r}_1 e^{i[\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}+\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r}_1]}\delta n(\mathbf{r})\delta n(\mathbf{r}_1) \\ &= \frac{1}{V^2}\int\int d\mathbf{R}d\mathbf{s}e^{i(\mathbf{k}'+\mathbf{k}'')\cdot\mathbf{R}+i(\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')\cdot\mathbf{s}/2}\delta n(\mathbf{R}+\frac{\mathbf{s}}{2})\delta n(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{s}}{2}), \end{aligned} \tag{A.3}$$

де $\mathbf{R}=(\mathbf{r}+\mathbf{r}_1)/2, \quad \mathbf{s}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$. Діапазон відстаней $s \lesssim l_{corr}$, де кореляційна довжина l_{corr} співставна за величиною із розмірами неоднорідностей, забезпечує основний вклад у середнє значення інтегралу (A.3). У просторово однорідному середовищі, величина $\langle\delta n(\mathbf{R}+\frac{\mathbf{s}}{2})\delta n(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{s}}{2})\rangle$ не залежить від $\mathbf{R}$, а характерні значення величини $|\mathbf{k}'-\mathbf{k}''|$ обмежені значенням $1/l_{corr}$.

Характерні значення R за величиною порядку розмірів системи L. В цьому випадку $|\mathbf{k}'+\mathbf{k}''|\sim 1/L$ прямує до нуля, якщо $L\to\infty$. Це означає, що співвідношення $\mathbf{k}'=-\mathbf{k}''$ застосовне для будь-яких важливих з практичної точки зору значень $\mathbf{k}'$ та $\mathbf{k}''$. Таким чином, маємо

$$\begin{aligned} \langle n_{\mathbf{k}'}n_{\mathbf{k}''}\rangle &= \frac{1}{V}\delta_{\mathbf{k}',-\mathbf{k}''}\int d\mathbf{s}\int\frac{d\mathbf{R}}{V}e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{s}}\langle\delta n(\mathbf{R}+\frac{\mathbf{s}}{2})\delta n(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{s}}{2})\rangle \\ &= \delta_{\mathbf{k}',-\mathbf{k}''}\int\frac{d\mathbf{s}}{V}e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{s}}\langle\delta n(\mathbf{s})\delta n(0)\rangle \\ &= \delta_{\mathbf{k}',-\mathbf{k}''}\langle n(\mathbf{r})n(0)\rangle_{\mathbf{k}'} = \delta_{\mathbf{k}',-\mathbf{k}''}\langle|n_{\mathbf{k}'}|^2\rangle. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Кутові дужки означають усереднення по об'єму V, який, як припускається, набагато більший за кореляційний об'єм l_{corr}^3. Таке усереднення еквівалентне усередненню по великій кількості різних конфігурацій турбулентної атмосфери.

Підстановка $\delta_{\mathbf{k}',-\mathbf{k}''}\langle|n_{\mathbf{k}'}|^2\rangle$ до $n_{\mathbf{k}'}n_{\mathbf{k}''}$ у виразі (A.2) змінює другий член у ньому на

$$\hat{\tilde{J}} = \frac{\omega_0^2}{V}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\langle|n_{\mathbf{k}'}|^2\rangle\int_{t_0}^{t}dt'e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\Big[e^{i(\omega_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}}-\omega_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'})(t-t')}\big(b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}}b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}-b^\dagger_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'}b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'}\big)$$

$$-e^{i(\omega_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}-\mathbf{k}'}-\omega_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}})(t-t')}\left(b^{\dagger}_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}-\mathbf{k}'}b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}-\mathbf{k}'}-b^{\dagger}_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}}b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\right)\Bigg]\Bigg|_{t'}. \tag{A.5}$$

Решта доданків $n_{\mathbf{k}'}n_{\mathbf{k}''}$, в яких $\mathbf{k}' \neq -\mathbf{k}''$, має стохастичну природу і має бути додано до ланжавенівського джерела $\hat{K}(\mathbf{r},\mathbf{q},t)$. Ці доданки практично не дають внеску у $\hat{K}$, тому ними можна знехтувати, якщо задовільняється умова (2.39).

Для коротких часових інтервалів $t-t_0$ [див. (2.39)], функція розподілу не змінюється значним чином, в такому випадку еволюцію операторів $b^{\dagger}_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}}b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}$ можна описати еволюцією у вакуумі

$$b^{\dagger}_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}}b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}|_{t'} = e^{-i(\omega_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}}-\omega_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}})(t-t')}b^{\dagger}_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}}b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}|_{t}. \tag{A.6}$$

Оператори у правій частині виразу (A.6) залежать лише від фіксованого часу t, а інтегрування у виразі (A.5) включає лише експоненційні функції

$$\int\limits_{t_0}^{t} dt' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{i(\omega_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}}-\omega_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'})(t-t')} b^{\dagger}_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}}b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}|_{t'} = b^{\dagger}_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}}b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}|_{t} \int\limits_{t_0}^{t} dt' e^{i(\omega_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}-\omega_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'})(t-t')}. \tag{A.7}$$

Умова (2.39)дозволяє замінити інтервал $t-t_0$ нескінченністю

$$\int\limits_{t_0}^{t} dt' e^{i(\omega_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}-\omega_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'})(t-t')} \approx \int\limits_{0}^{\infty} d\tau e^{i(\omega_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}-\omega_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'}+i\eta)\tau} = \frac{i}{\omega_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}-\omega_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'}+i\eta}, \tag{A.8}$$

де $\eta \to +0$. Подібні міркування застосовні до кожного доданка у виразі (A.5). Тоді вираз (A.5) зводиться до

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{J}} \;=\; & \frac{i\omega_0^2}{V}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\langle|n_{\mathbf{k}'}|^2\rangle e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\Bigg[\frac{b^{\dagger}_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}}b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}}{\omega_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}-\omega_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'}+i\eta} \\ & -\frac{b^{\dagger}_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'}b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'}}{\omega_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}}-\omega_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'}+i\eta}-\frac{b^{\dagger}_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'}b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'}}{\omega_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'}-\omega_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}+i\eta}\end{aligned}$$

$$+\frac{b^{\dagger}_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}} b_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{k}}{2}}}{\omega_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}} + i\eta}\Bigg]\Bigg|_t . \tag{A.9}$$

У двох останніх доданках значення $\mathbf{k}'$ замінено на $-\mathbf{k}'$. Для параксіальних пучків, які розглядаються в роботі, ми можемо використати наближення $\omega_{\mathbf{q}} = cq \approx cq_z$, це означає, що вкладом $q_{x,y}$- компонент можна знехтувати. Тоді, використовуючи рівність

$$\frac{1}{ck'_z - i\eta} - \frac{1}{ck'_z + i\eta} = \frac{2\pi i}{c}\delta(k'_z)$$

та інтегрування по k'_z, вираз (A.9) спрощується до вигляду

$$\hat{\tilde{J}} = \frac{2\pi\omega_0^2}{c}\int d\mathbf{k}'_{\perp}\psi(\mathbf{k}'_{\perp})\big(\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t) - \hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q}+\mathbf{k}'_{\perp},t)\big), \tag{A.10}$$

де використано визначення PDF. Вираз (A.10) збігається із інтегралом зіткнення $\hat{\nu}_{\mathbf{q}}\big\{\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{q},t)\big\}$ представленим у виразі (2.42).

Додаток Б

Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

Б.1. Список публікацій.

1. *Баськов Р. А.* Вплив турбулентної атмосфери на розширення світлових імпульсів / Р. А. Баськов, О. О. Чумак // Наукові записки. Фізико-математичні науки. Національний університет «Києво-Могилянська академія» — 2009. — Том 87. — с. 45.
2. *Chumak O. O.* Strong Enhancing Effect of Correlations of Photon Trajectories on Laser Beam Scintillations /O. O. Chumak and R. A. Baskov // Phys. Rev. A. — 2016. — Vol. 93. — P. 033821.
3. *Baskov R. A.* Laser-beam scintillations for weak and moderate turbulence / R. A. Baskov and O. O. Chumak // Phys. Rev. A. — 2018. — Vol. 97. — P. 043817.
4. *Baskov R.* Forth-order moment of the light fields in atmosphere / R. A. Baskov and O. O. Chumak // J. Opt. — 2020. — Vol. 22. — P. 105603.
5. *Baskov R.* The effect of the broadening of the pulses in the laser beam for long-distance propagation trough the turbulent atmosphere / R. Baskov, O. Chumak // Book of Abstracts: 9th International Young Scientists Conference Optics and High Technology Material Science (23–26 October, 2008, Kyiv, Ukraine.) — Kyiv: 2008. — P. 156.
6. *Баськов Р. А.* Вплив турбулентної атмосфери на розширення світлових імпульсів при поширенні на великі відстані / Р. А. Баськов, О. О. Чумак// Збірник тез: 7-ма Харківська конференція молодих науковців

"Радіофізика та електроніка, біофізика"(25 – 27 листопада, 2008, Харків, Україна). — Харків: 2008. — с. 96.

7. *Baskov R. A.* Scintillations of laser radiation propagating in a turbulent atmosphere: the effect of bending of photon trajectories. / R. A. Baskov, O. O. Chumak // Book of abstracts: NATO ASI on "Special Detection Technique (Polarimetry) and Remote Sensing" (12–25 September, 2010, Kyiv, Ukraine) — Kyiv: 2010. — P. 26.

Б.2. Апробація матеріалів дисертації

Матеріали роботи було представлено на наукових семінарах відділу теоретичної фізики Інституту фізики НАН України, відділу синергетики Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, на науковому семінарі робочої групи з квантової оптики в Інституті фізики університету Ростока (Німеччина), 40-й та 43-й підсумкових наукових конференціях Інституту фізики НАН України (2015, 2018 рр.); окремі результати доповідалися на міжнародних конференціях та семінарах:

- 9th International Young Scientists Conference Optics and High Technology Material Science (SPO 2008), 23 – 26 October 2008, Kyiv, Ukraine;
- VIII Kharkiv Young Scientists Conference "Radiophysics and Electronics, Biophysics", 25 – 27 November, 2008, Kharkiv, Ukraine;
- NATO Advanced Study Institute on "Special Detection Technique (Polarimetry) and Remote Sensing" 12–25 September 2010, Kyiv, Ukraine.