

**Відгук**  
офіційного опонента про дисертаційну роботу  
**Вахненка Олексія Олексійовича**  
«Нелінійна динаміка багатокомпонентних структурованих  
низьковимірних систем»,  
представлену на здобуття наукового ступеня  
доктора фізико-математичних наук за спеціальністю  
01.04.02 – теоретична фізика

### Актуальність теми дисертації

Дисертаційна робота Вахненка О.О. присвячена моделюванню нелінійних систем, характерною рисою яких є взаємодія кількох підсистем (компонентів), що мають різні фізичні характеристики (сильна-слабка, швидка-повільна, тощо). У більшій частині роботи, моделювання нелінійної динаміки здійснюється в рамках напівдискретних (дискретних за просторовою змінною) систем, що дозволяє певним чином уніфікувати моделювання нелінійних об'єктів різної фізичної природи, включаючи такі актуальні у сучасній науці об'єкти як нанотрубки, наностожки, низьковимірні напівпровідники. Відзначу два важливі аспекти, які роблять роботи автора дуже перспективними з точки зору можливих застосувань: (1) суттєва багатокомпонентність моделей (що призводить до якісно нових рис динаміки нелінійних збуджень порівняно зі стандартними двокомпонентними системами типу Шрьодінгера або Тоди) та (2) інтегровність моделей (зокрема, існування зображення відповідних динамічних систем як умови сумісності системи лінійних рівнянь Лакса). Останній аспект є надзвичайно важливим з точки зору можливості найбільш детального дослідження динаміки, яка не обмежується побудовою явних (солітонних) розв'язків (що, безумовно, представляє первинний інтерес для таких систем), але й дозволяє розбудовувати повний формалізм оберненої задачі розсіяння, який є найбільш ефективним засобом дослідження властивостей таких систем, наприклад, асимптотичної поведінки розв'язків відповідних початкових задач за великим часом. Треба відзначити, що поєднання цих двох аспектів (тобто, знаходження та дослідження нелінійних інтегровних систем, як дискретних, так і неперервних, які відповідають зображенням Лакса у вигляді матричних систем порядку більше ніж 2), є

складною та актуальною математичною задачею, якій присвячено чимало праць у сучасній математичній та математично-фізичній літературі.

Іншою частиною проблематики моделювання багатокомпонентних систем, яка висвітлюється в роботах автора, є моделювання резонансних, нелінійних та релаксаційних ефектів, що спостерігаються при високочастотному механічному збуренні певних зернистих геологічних матеріалів. Побудова теорії, яка, з одного боку, є фізично обґрунтованою та дозволяє пояснити наявні різноманітні експериментальні результати, а з іншого боку, є максимально простою, завжди є нетривіальною задачею. Безумовно, ідея про взаємодію двох підсистем, швидкої та повільної, реалізація якої і дозволила автору побудувати відповідну теорію, виходить за рамки конкретної задачі та є актуальною при моделюванні фізичних явищ багатьох інших класів.

## **Зміст дисертації та основні результати**

Дисертаційна робота Вахненка О.О. складається з анотації, загального вступу до роботи, шести розділів, які розбито на підрозділи, загальних висновків, списку використаних джерел, що містить 255 найменування, та двох додатків, що містять список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів. Кожен розділ супроводжується своїм окремим підсумком. Повний обсяг дисертації становить 333 сторінки.

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми, вказано зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, встановлено мету і завдання, об'єкт, предмет та методи дослідження, наведено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, детально висвітлено особистий внесок здобувача та апробацію отриманих результатів.

*Перший розділ* присвячений побудові динамічно-кінетичної моделі нелінійних коливань, що виникають при високочастотному механічному збуренні певних зернистих геологічних матеріалів, яка була б здатна теоретично описувати низку експериментальних результатів: гістерезисну поведінку резонансної кривої, лінійне пом'якшування резонансної частоти з ростом рівня урухомлення, логарифмічний характер відновлювання резонансної частоти після попереднього кондиціювання великим динамічним

деформуванням. Запропонована модель складається з двох зв'язаних нелінійних підсистем, одна з яких порушує симетрію відгуку всієї системи на альтероване зовнішнє збурення і діє подібно до діода з незначним зворотнім просочуванням. Ці підсистеми специфікуються як (i) швидка підсистема повздовжніх зміщень та (ii) повільна підсистема пошкоджених міжзернинних когезійних зв'язків. Продемонстровано, що велике коло експериментальних даних можна трактувати як прояв різноманітних граней взаємодії цих підсистем.

У другому розділі побудовано варіант нелінійної Шрьодінгерової системи на регулярній багатоланцюжковій драбинчастій гратці, який дозволяє ефективно моделювати взаємовпливи між повздовжніми та поперечними солітонними модами. Зокрема, показано, що за певних умов центр солітона здатен оминати навіть інтенсивні перепони, слаломуючи між зигзагоподібно розташованими одновузловими домішками. З іншого боку, розглядаючи вплив локально модифікованих поперечних резонансних міжвузлових зв'язків на повздовжню динаміку солітона встановлено, що недосконалість поперечних сегментів гратки здатна діяти на надхідний солітон і як притягувальний, і як відбивальний потенціал залежно від знаку енергії поперечної моди солітона.

Третій розділ присвячено побудові та ретельному дослідженю інтегровної нелінійної напівдискетної моделі, що описує динаміку внутрішньовузлових збуджень на двоніжковій драбинчастій гратці зі щаблинами, упорядковуваними в зигзагуватий ланцюжок. Цей розділ є найбільш математично навантаженим: у ньому реалізується формалізм метода оберненої задачі розсіяння для аналізу початкових задач, зокрема, формулюються дискретні аналоги рівнянь Марченка для відповідних всхідного та низхідного варіантів зображення нелінійної системи як умови сумісності рівнянь з пари Лакса. Відзначається важливість одночасного використання обох варіантів, що значно підвищує ефективність метода. Знайдено гамільтоніан системи, основні закони збереження та дисперсійні співвідношення для діагональних елементів редукованої матриці монодромії. Отримано багатосолітонний розв'язок, що відповідає невідбивному випадку у термінах спектральних даних. У випадку односолітонної динаміки наведено повну інтерпретацію солітонних параметрів.

Дослідження інтегровних напівдискретних моделей продовжується у четвертому розділі, у якому побудовано чотирикомпонентну гратчасту

систему. Характерною особливістю цієї системи є те, що її динамічні рівняння природньо виписуються для шести полів, які пов'язані між собою двома локальними співвідношеннями – в'язами, причому обидва додаткові поля можуть мати нетривіальне тло (значення, коли параметр гратки прямує до нескінченості). Велику увагу у цьому розділі приділено канонізуванню вихідної системи Шрьодінгерового типу, а саме, її переформулюванню в термінах таких скоригованих польових амплітуд, що відповідна структурна матриця стає розщепленою. Безумовна заслуга автора полягає в тому, що йому вдається успішно здійснити низку відповідних аналітичних кроків.

Відносно нетривіального тла додаткових полів, виявляється, що два параметри цього тла відіграють важливу роль у розподілу системи на сильну та слабку компоненти (в термінах фізично скорегованих польових амплітуд): якісно різними виявляються докритичний та надкритичний режими, а саме: у докритичному режимі, обидві компоненти (сильна та слабка) є підсистемами світлих нелінійних збурень (світлих солітонів), тоді як слабка підсистема у надкритичному режимі характеризується темними солітонами. Границя між режимами характеризується виродженням слабкої підсистеми. Солітонні розв'язки у цьому розділі (як і в наступних розділах) будуються за допомогою перетворення Дарбу.

*П'ятий розділ* присвячено побудові інтегровних систем на гратках, де рушійними ідеями є (i) збільшення числа членів в Лорановому розкладі еволюційного оператора за степенями спектрального параметра та (ii) впровадження часових залежностей до параметрів резонансної взаємодії. При цьому за основу для побудови відповідного спектрального оператора береться як оператор (другого порядку) Абловіца-Ладіка, так і оператори третього та четвертого порядків. Зокрема, автор започаткував новий спектральний оператор третього порядку, який дозволив побудувати раніше невідомі нелінійні системи, що включають в себе динаміку трьох зв'язаних підсистем, дві з яких мають вигляд підсистем типу Тоді з масами структурних елементів, залежних від орієнтаційної польової змінної. Реалізація ідеї узгодженого поєднання кількох полів суттєво відмінної природи зі збереженням інтегровності системи як цілого дозволила автору побудувати системи зі спектральним оператором четвертого порядку, а також кілька систем з операторами третього порядку, які мають деякі риси екситон-фотонної системи Давидова-Кислухи. На цьому шляху знайдено системи, які мають великий потенціал для різноманітних фізичних

застосувань. Зокрема, одна з систем є системою типу Тоди, пов'язаною з підсистемою РТ- симетричних екситонів з наведеною нелінійністю. Інша система складається з двох самозахопних підсистем, поєднаних за допомоги взаємно індукованої нелінійності. Важливим є те, що кожна із запропонованих інтегровних систем допускає Гамільтонове представлення, що характеризується двома парами канонічних польових змінних зі стандартною Пуассоновою структурою.

Нарешті, у шостому розділі розглядається шестикомпонентна система когерентно зв'язаних збуджень, яка облаштована на гратці з трьома структурними елементами в елементарній комірці. Подібно до ситуації, розглянутої у четвертому розділі, цю систему можна записати як динамічні рівняння для десяти компонент, шість з яких є основними, а чотири інші – супутніми, завдяки існуванню чотирьох локальних співвідношень залежності (в'язів), причому супутні поля можуть мати нетривіальне тло. Ненульові фонові значення супутніх полів опосередковують ефективно кілька додаткових типів міжузлової резонансної взаємодії між основними полями і тим самим створюють стъожкоподібну просторову конфігурацію гратки-носія збуджень. Запропоновану шестикомпонентну систему можна трактувати як систему нелінійного Шрьодінгерового типу в тому сенсі, що, за певних умов симетрії та низького рівня збуджень, її основні польові функції наближено мають стосунок до амплітуд присутності збудження на вузлах гратки. Природними умовами симетрії між польовими змінними, а також між параметрами міжузлового резонансного зв'язку є такі, що забезпечують або притягувальний, або відштовхувальний характер нелінійностей в системі. Зокрема, за допомогою перетворення Дарбу, побудовано солітонний розв'язок системи за нелінійостей притягувального типу.

Аналіз інтегровних систем, наведений у 4 та 6 розділах, дозволяє автору сформулювати загальне правило побудови багатокомпонентних систем та відповідних операторів з пари Лакса, пов'язуючи число структурних елементів в елементарній комірці з числом добутків операторів Абловіца–Ладіка. Відповідно, лоранівський розклад еволюційного оператора за степенями спектрального параметра пов'язаний з номером нелінійної системи у відповідній ієрапхії.

## **Обґрунтування отриманих результатів**

Дисертація Вахненка О.О. є цілісною та завершеною науково-дослідною працею. Всі отримані в ній результати є новими і належним чином обґрунтованими. Текст дисертації написано в достатній мірі ясно, виклад логічний і послідовний. Достовірність результатів дисертації підкріплена узгодженістю з відомими раніше результатами.

## **Публікації і апробація результатів роботи**

Відзначу високий загальний рівень наукових видань, де опубліковані результати за темою дисертації: всі 43 наукових статті опубліковані у провідних фахових виданнях, 34 з яких - у реферованих наукових журналах, включених до наукометричних баз Scopus та Web of Science. Результати роботи доповідались на багатьох міжнародних конференціях. Деякі теоретичні результати дозволили обґрунтувати фізичні ефекти, які згодом знайшли своє експериментальне підтвердження.

Зміст автореферату адекватно відображає основні положення дисертації.

## **Використання результатів дослідження**

З одного боку, наукова цінність отриманих в дисертації результатів полягає у розробці теоретичних положень і висновків, які збагачують та доповнюють теорію інтегровних нелінійних багатокомпонентних дискретних рівнянь, а з іншого боку, отримані результати мають безпосереднє практичне застосування, зокрема, при дослідженні коливань геологічних матеріалів певної структури, а також при моделюванні процесів у нанотрубках та низьковимірних напівпровідниках.

## **Зауваження**

1. Загальне зауваження, що відноситься до усіх розділів дисертації, стосується відсутності структуризації тексту в межах підрозділів (Твердження, Припущення, Лема, Теорема, тощо), що ускладнює

сприйняття результатів, особливо у математично навантажених частинах (перш за все, це стосується Розділу 3).

2. Формули (3.4.5)-(3.4.8), які є «інтегральними» зображеннями розв'язків Йоста за допомогою операторів перетворення з ядрами  $J_{jl}^>$  та  $J_{jl}^<$ , є одним з ключових елементів метода оберненої задачі розсіяння: в термінах цих ядер (точніше, пов'язаних з ними ядер  $K_{jl}^>$  та  $K_{jl}^<$ , див. (3.4.17) та (3.4.18)) формулюється рівняння оберненої задачі Марченка — основне рівняння метода. В той же час, в дисертації проблема побудови  $J_{jl}^>$  та  $J_{jl}^<$  в рамках прямої задачі згадується (стор. 132) дуже побіжно, та відсутні посилання на роботи автора або інші роботи, де б це питання висвітлювалось більш-менш детально.
3. У підрозділі 3.5 наведено вивід рівнянь Марченка, який є справедливим за певних умов, а саме, якщо вірно припущення про те, що нулі діагональних елементів матриць розсіяння є простими. Варто було б навести це припущення у тексті, у явній формі.
4. Означення для матричних елементів граничних еволюційних операторів в момент їх введення (стор. 140, 141) мають вигляд  $A^>(z)$  та  $A^<(z)$ . З іншого боку, у формулах, що дають динаміку даних розсіяння (стор. 155), застосовуються означення трохи інші означення для тих самих функцій,  $A^>(z|\xi)$  та  $A^<(z|\xi)$ , які вказують на можливу залежність цих операторів від часу. Варто було б ввести такі означення з самого початку.
5. Термін «напівдискретна система» застосовується для всіх систем починаючи з третього розділу, але чомусь не застосовується у другому розділі, де теж розглядаються напівдискретні системи.

Вищевказані зауваження не впливають суттєво на загальне цілком позитивне враження від роботи.

## **Висновок**

Вважаю, що дисертаційна робота Вахненка О.О. «Нелінійна динаміка багатокомпонентних структурованих низьковимірних систем», яку подано на

здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика, є глибоким та актуальним дослідженням, що представляє собою значний внесок у теорію нелінійних явищ у низьковимірних системах. За обсягом проведених наукових досліджень, їх актуальністю, новизною, науковим рівнем, кількістю та якістю публікацій, дисертаційна робота повністю відповідає вимогам п. 10, 12, 13 «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого постановою Кабінету Міністрів України № 567 (зі змінами) від 24 липня 2013 року, які висуваються до докторських дисертацій, а її автор, Вахненко Олексій Олексійович, безумовно заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук.

Офіційний опонент

доктор фізико-математичних наук,

провідний науковий співробітник

Фізико-технічного інституту низьких температур

ім. Б.І. Вєркіна НАН України (м. Харків)

  
Д.Г. Шепельський

