Національна академія наук України
Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова

Вахненко Олексій Олексійович

УДК
538.977;534.182;531.395;
517.962.24;530.182.1

НЕЛІНІЙНА ДИНАМІКА БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ СТРУКТУРОВАНИХ НИЗЬКОВИМІРНИХ СИСТЕМ

01.04.02 теоретична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі теорії нелінійних процесів в конденсованих середовищах Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова Національної академії наук України.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Лашкін Володимир Михайлович,
Інститут ядерних досліджень НАН України, старший науковий співробітник відділу фізики плазми та плазмових технологій;

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Шепельський Дмитро Георгійович,
Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України, провідний науковий співробітник відділу математичної фізики;

доктор фізико-математичних наук, доцент
Якименко Олександр Ілліч,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка МОН України, доцент кафедри квантової теорії поля.

Захист відбудеться 28 листопада 2019 року об 11 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.191.01 в Інституті теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова Національної академії наук України за адресою: вул. Метрологічна, 14-б, м. Київ, 03143, Україна.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова Національної академії наук України за адресою: вул. Метрологічна, 14-б, м. Київ, 03143, Україна.

Автореферат розіслано 25 жовтня 2019 року.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 26.191.01
доктор фізико-математичних наук В.Є. Кузьмичев

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Обґрунтування вибору теми досліджень.

Останнім часом напівдискретні нелінійні системи стали важливим атрибутом моделювання динаміки носіїв заряду в нелінійних електричних передавальних мережах, ланцюжках джозефсонівських контактів, а також неодмінним інструментом вивчання поперечного перерозподілу світла у зв’язаних оптичних волокнинах (фотонних ґратках) і хвильоводах під впливом різноманітних факторів та досліджування впливу нелінійних ефектів на стабільність лазерного нагнітання в ланцюжках когерентно зв’язаних напівпровідникових лазерів. З іншого боку, є вагомі підстави, аби моделювання динаміки носіїв заряду в рамках напівдискретних нелінійних систем стало визнаним засобом розгляду і таких важливих фізичних об’єктів як наностьожки, нанотрубки та низьковимірні напівпровідникові регулярні надструктури.

Складність просторової будови багатьох фізичних об’єктів слугує стимулом до розробляння дієвих підходів для адекватного моделювання їхніх властивостей. На цьому тлі інтерес до пошуку багатокомпонентних напівдискретних інтеґровних нелінійних систем видається цілком закономірним. Першими ластівками серед таких систем стали нелінійні системи Шрьодінґерового та Тодового типів. Але ці перші багатокомпонентні напівдискретні інтеґровні нелінійні системи мають таке саме число параметрів повздовжнього міжвузлового зв’язку, як і їхні двокомпонентні прототипи, тому динаміка нелінійних збуджень в цих багатокомпонентних системах не набуває нових якісних рис порівняно з їхніми двокомпонентними попередниками. Стосовно згаданих багатокомпонентних напівдискретних інтеґровних нелінійних систем Шрьодінґерового типу слід вказати також на певну обмеженість трактування параметрів повздовжнього міжвузлового зв’язку як величин, незалежних від часової змінної, та на безпідставне з точки зору фізичних застосувань ігнорування параметрів суто лінійної взаємодії між різними компонентами. Іншою недосконалістю більшости відомих дотепер інтеґровних нелінійних систем Шрьодінґерового типу слід вважати неканонічність їхніх польових амплітуд. У своїй діяльності з побудови та досліджування нових багатокомпонентних напівдискретних інтеґровних нелінійних систем автор дисертації намагався врахувати усі ці виклики. Додатково, з огляду на великий науковий та прикладний інтерес до синтезу та дослідження фізичних властивостей низьковимірних макромолекулярних об’єктів, автор цілеспрямовано керувався ідеєю віднайти способи розширювання регулярної геометричної структури ґратки носія нелінійних збуджень в напрямах, перпендикулярних до осі трансляційної симетрії, і таким чином імітувати просторові структури нанотрубок та наностьожок. З іншого боку, привабливість ідеї про квазіодновимірний характер просторової ґратки невпинно зростала завдяки спроможності кожної побудованої відповідним чином нової багатокомпонентної напівдискретної інтеґровної нелінійної системи Шрьодінґерового типу точно враховувати вплив зовнішнього маґнетного поля в термінах фаз Паєрлса для параметрів когерентної міжвузлові взаємодії. Стосовно моделювання динаміки нелінійних збуджень на квазіодновимірних ґратках, збурених точковими домішковими дефектами або локальними дефектами поперечної резонансної взаємодії, інтуїція, підкріплена поняттям траєкторії центру солітонного пакету, вказала на коло задач з формулювання критеріїв селективного доправляння солітонів крізь збурені ділянки.

Окрім проблематики багатокомпонентних напівдискретних інтеґровних та близьких до інтеґровних нелінійних систем постала потреба в ретельному знайомстві з низкою експериментальних праць, де резонансні, нелінійні та релаксаційні ефекти, висліджені при високочастотному механічному збуренні зернистих геологічних матеріалів, сплелися в досить незвичну картину лінійного (*тобто* суттєво некласичного) пом'якшування резонансної частоти з ростом рушійної амплітуди, гістерезної поведінки резонансних кривих та логарифмічного за часом відновлювання резонансної частоти після зменшення інтенсивности збурення. Свіжий, незашорений схоластичними теоріями, заснованими на концепції штучно вигаданих гістерезних елементів, погляд на усю гаму неодноразово задокументованих експериментальних результатів відразу викликав наснагу пояснити їх з єдиних позицій зрозумілої для експериментаторів фізично вмотивованої теорії, яка би брала до уваги процеси утворювання та заліковування мікротріщин. Досить важливим видається сейсмологічний аспект цієї діяльности.

Зв'язок дисертаційної роботи з науковими програмами, планами, темами, ґрантами.

Результати дисертаційної роботи одержано повністю або частково в Інституті теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова Національної академії наук України при виконанні наступних дослідницьких проектів:

- Нелінійні локалізовані моди в складних системах з шумом та невпорядкованістю (Nonlinear localized modes in complex systems with noise and disorder), ґрант INTAS 96-0158 Європейського Союзу, за координації з Університету острова Кріт (Греція). 1998–2000 рр.
- Транспортні явища в нелінійних ґратках (Transport phenomena in nonlinear lattices), ґрант C. Caratheodory 1911/98 Дослідницької комісії Університету міста Патра (Греція), за співпраці з Факультетом інженерної науки (Engineering Science Department) Університету міста Патра. 1999–2000 рр.
- Динаміка природних матеріалів з огляду на структуровані середовища з нелокальними властивостями (Dynamic of Earth materials treated as structured media with non-local features), ґрант 1747 Українського Науково-Технологічного Центру, фінансований Урядом США, за співпраці з Відділенням наук про Землю і довкілля Лос-Аламоської Національної Лабораторії США (Earth and Environmental Sciences Division, Los Alamos National Laboratory, USA) та Відділенням геодинаміки вибуху Інституту геофізики імені С.І. Субботіна НАН України. 2001–2004 рр.

- Нелінійні процеси в молекулярних та наноструктурах зі складною геометрією, відомча тема, РК № 0103U000104 Відділення фізики і астрономії НАН України. 2003–2005 рр.
- Керована динаміка збуджень в молекулярних та наносистемах зі складною геометричною структурою, відомча тема, РК № 0105U008397 Відділення фізики і астрономії НАН України. 2006–2010 рр.
- Фундаментальні властивості фізичних систем в екстремальних умовах, цільова тема, РК № 0107U000396 Відділення фізики і астрономії НАН України. 2007–2011 рр.
- Ефективне керування динамікою нелінійних збуджень в макромолекулярних та магнітних наносистемах, відомча тема, РК № 0110U007540 Відділення фізики і астрономії НАН України. 2011–2015 рр.
- Мікроскопічні та феноменологічні моделі фундаментальних фізичних процесів у мікро- та макросвіті, цільова тема, РК № 0112U000056 Відділення фізики і астрономії НАН України. 2012–2016 рр.
- Особливості механічних, електронних та магнітних процесів у низьковимірних системах на наномасштабах, відомча тема, РК № 0116U003192 Відділення фізики і астрономії НАН України. 2016–2020 рр.
- Структура та динаміка статистичних і квантово-польових систем, цільова тема, РК № 0117U000240 Відділення фізики і астрономії НАН України. 2017–2021 рр.

Мета і завдання досліджень.
Метою дисертаційної роботи було закласти теоретичні підвалини та дослідити нелінійну динаміку різноманітних багатокомпонентних структурованих низьковимірних систем, придатних для адекватного опису та прогнозування важливих нелінійних фізичних ефектів в геофізичних осадових породах, нелінійних електричних мережах, напівпровідникових надструктурах, природних та синтезованих макромолекулах, синтезованих наностьожках, регулярно впорядкованих зв’язаних оптичних волокнинах. В процесі реалізації цієї мети виникло велике коло теоретичних завдань, серед яких підґрунтям для дисертаційної праці стали наступні задачі.

1. Побудувати самодостатню динамічно-кінетичну нелінійну модель взаємозалежних пружних деформацій та порушених міжзернинних зв’язків з природно вмотивованим асиметричним механізмом утворювання та заліковування мікротріщин, в рамках якої з єдиних позицій відтворити відомі експериментальні ефекти з некласичного резонансного відгуку геофізичних осадових матеріалів на зовнішнє високочастотне збурення, найвиразнішими серед яких є (i) гістерезна поведінка резонансної кривої як на висхідному, так і на низхідному схилах, (ii) лінійне пом’якшування резонансної частоти з ростом рівня урухомлювання, а також (iii) поступове (майже логарифмічне) відновлювання (більшання) резонансної частоти за низького рівня динамічного деформування після попереднього кондиціювання зразка великим динамічним деформуванням.

2. Обґрунтувати можливість гістерезного ефекту пам’яти геофізичних осадових матеріалів про найбільше високочастотне динамічне навантаження (динамічний ефект прикінцевої пам’яти).

3. Побудувати фізично скориговану (канонічну) майже інтеґровну версію багатокомпонентної напівдискретної нелінійної Шрьодінґерової системи, яка завдяки точному врахуванню резонансних міжвузлових зв’язків поперечного типу слугувала би основою для моделювання динаміки внутрішньомолекулярних нелінійних збуджень на регулярних багатоланцюжкових драбинчастих ґратках.

4. Дослідити взаємовпливи між повздовжніми і поперечними внутрішньомолекулярними солітонними модами в збурених багатоланцюжкових ґратках та сформулювати умови міжмодової синхронізації для адресного доправляння скомпактованого нелінійного хвильового збудження до певного вузла трубчастої ґратки, підданої дії однорідного повздовжнього магнетного поля, а також для селективного пропускання солітона крізь ділянку дволанцюжкової ґратки із зиґзаґоподібним розташуванням одновузлових домішок чи для селективного пропускання солітона крізь локальний дефект пропорційно змодифікованих поперечних резонансних міжвузлових зв’язків багатоланцюжкової драбинчастої ґратки.

5. Побудувати інтеґровну нелінійну параметрично збурювану динамічну модель внутрішньовузлових збуджень на пласкій фермоподібній ґратці з двома вузлами в елементарній комірці та започаткувати найдоречнішу симетризовану форму оберненої задачі розсіяння із залученням двох наборів допоміжних лінійних рівнянь та двох комплементарних систем дискретних рівнянь Марченка, в рамках яких знайти чотирикомпонентні багатосолітонні розв’язки моделі з точним урахуванням дії магнетного поля і явно представити односолітонний розв’язок.

6. Знайти основні закони збереження інтеґровної нелінійної динамічної Шрьодінґерової системи внутрішньовузлових збуджень на пласкій фермоподібній ґратці та встановити її Гамільтонове формулювання як в термінах вихідних, так і в термінах фізично скоригованих (канонічних) польових амплітуд.

7. Побудувати напівдискретну інтеґровну нелінійну Шрьодінґерову систему з додатковими тлозалежними параметрами міжвузлового резонансного зв’язку, задану на квазіодновимірній ґратці з двома структурними елементами в елементарній комірці та (з урахуванням параметричного збурювання системи і впливу зовнішнього магнетного поля) знайти її явний шестикомпонентний солітонний розв’язок, для чого розробити спеціальну процедуру перетворення Дарбу та неявного перетворення Беклунда.

8. Знайти основні закони збереження напівдискретної інтеґровної нелінійної чотирикомпонентної Шрьодінґерової системи з додатковими тлозалежними параметрами міжвузлового резонансного зв’язку, сформулювати її Гамільтонове представлення в термінах суттєво нестандартної Пуассонової структури та запропонувати варіанти канонізації динамічних рівнянь системи з огляду на можливу зміну природи збуджених станів окремих підсистем.

9. Запропонувати загальну форму рекурсивного пошуку безмежної ієрархії локальних законів збереження для багатокомпонентних напівдискретних

інтеґровних нелінійних систем, асоційованих з допоміжними спектральними операторами довільного порядку.

10. Обґрунтувати метод побудови параметрично урухомлюваних напівдискретних інтеґровних систем з далекосяжним характером міжвузлової резонансної взаємодії в рамках представлення нульової кривини зі спектральним оператором Абловіца–Ладіка шляхом адекватного збільшення числа членів в лоранівському розкладі еволюційного оператора за степенями спектрального параметра і введення (наперед нереґламентованих) часових залежностей до параметрів резонансної взаємодії. Сформулювати умови виникнення параметричної локалізації солітонного пакету та пересвідчитися в калібрувальній еквівалентності між параметрично розгойдуваними напівдискретними інтеґровними системами з далекосяжним характером резонансної взаємодії в полі зовнішнього просторово лінійного потенціалу і суто параметрично розгойдуваними напівдискретними інтеґровними системами з далекосяжним характером резонансної взаємодії, специфічно підлаштованим у часі.

11. Провести широкий пошук пар самоузгоджених допоміжних операторів Лакса на матрицях третього порядку та матрицях четвертого порядку з метою побудови в рамках доречних напівдискретних матричних рівнянь нульової кривини низки нових багатокомпонентних напівдискретних інтеґровних систем, кожна з яких складалась би зі зв’язаних підсистем суттєво відмінної природи.

12. Побудувати напівдискретну інтеґровну нелінійну Шрьодінґерову систему з кількома типами додаткових тлозалежних параметрів міжвузлового резонансного зв’язку, задану на квазіодновимірній ґратці з трьома структурними елементами в елементарній комірці та (з урахуванням параметричного збурювання системи і впливу зовнішнього магнетного поля) знайти її явний десятикомпонентний солітонний розв’язок.

13. Знайти Пуассонову структуру для напівдискретної інтеґровної нелінійної шестикомпонентної Шрьодінґерової системи з кількома типами додаткових параметрів міжвузлового резонансного зв’язку на інтеркальованій драбинчастій ґратці та сформулювати Гамільтонове представлення динамічних рівнянь цієї системи.

14. В рамках рівняння нульової кривини з доречно узагальненими допоміжними операторами другого порядку сформулювати загальне правило побудови багатокомпонентних напівдискретних інтеґровних нелінійних систем з багатьма типами додаткових параметрів міжвузлового зв’язку, заданих на квазіодновимірних ґратках з довільним числом структурних елементів в елементарній комірці.

Об’єктом досліджень є регулярні та нерегулярні багатокомпонентні структуровані низьковимірні інтеґровні та неінтеґровні нелінійні системи.

Предметом досліджень є нелінійна динаміка та нелінійні динамічні ефекти.

Методи досліджень.

Для адекватного пояснення експериментально встановлених проявів некласичного резонансного відгуку геологічних осадових порід на періодичне зовнішнє збурення впроваджено та використано метод кінетичного опису еволюції тріщин із суттєво відмінними жвавостями їхнього утворювання та заліковування.

Для точного відтворення траєкторій солітонних хвильових пакетів в інтеґровних нелінійних системах на драбинчастих ґратках під дією лінійного потенціалу та майже точної побудови фазового портрету центру солітона на драбинчастій ґратці з модифікованим поперечним зв’язком застосовано аналітичний метод пробних лаґранжіанів, що є добре зарекомендованим наочним попередником для суто комп’ютерних розрахунків.

Усі із запропонованих напівдискретних інтеґровних нелінійних систем сформульовано в рамках матричнозначного напівдискретного рівняння нульової кривини внаслідок багаторазових евристичних спроб знайти якомога більше пар взаємоузгоджених аналітичних виразів для спектрального та еволюційного операторів, оскільки загального самодостатнього методу їхньої побудови наразі не існує.

Для пошуку найважливіших локальних законів збереження більшости досліджуваних напівдискретних інтеґровних нелінійних систем впроваджено та застосовано точний узагальнений метод пошуку ієрархії локальних законів збереження, прийнятний для нелінійних систем, асоційованих з допоміжними лінійними спектральними задачами будь-якого порядку.

Для точної аналітичної побудови розв’язків напівдискретної інтеґровної нелінійної системи двох зв’язаних Шрьодінґерових підсистем розроблено та використано симетричний варіант методу оберненої задачі розсіяння з двома парами взаємно симетричних просторово дискретних допоміжних лінійних задач та двома симетричними наборами дискретизованих рівнянь Марченка.

Найпрозорішим способом пошуку точних аналітичних розв’язків напівдискретних інтеґровних нелінійних систем порівняно з іншими підходами видається метод послідовного одягання тривіального засівного розв’язку за допомоги перетворення Дарбу для функцій допоміжної лінійної задачі у зв’язці з неявним перетворенням Беклунда для польових функцій досліджуваної нелінійної системи. Два варіанти вказаного методу було розроблено та успішно застосовано для пошуку явних солітонних розв’язків чотирикомпонентної інтеґровної нелінійної Шрьодінґерової системи з тлозалежними резонансними взаємодіями та шестикомпонентної інтеґровної нелінійної Шрьодінґерової системи з тлозалежними резонансними взаємодіями завдяки доречним параметризаціям спектральних даних, пов’язаних з відповідними операторами Дарбу.

Щодо методів Гамільтонової динаміки, то вони допомогли скомпактизувати вирази для багатьох систем напівдискретних інтеґровних нелінійних рівнянь. Особливо це стосується чотирикомпонентної інтеґровної нелінійної Шрьодінґерової системи з тлозалежними резонансними взаємодіями, яка змінює природу своїх нелінійних збуджень при переході через деяке критичне значення головного фонового параметра і, як наслідок, приводить до порушення симетрії між своїми двома парами динамічних Гамільтонових рівнянь в кожній з їхніх двох дозволених альтернативних канонічних форм.

Наукова новизна здобутих результатів.

А. Побудовано самодостатню динамічно-кінетичну нелінійну модель взаємозалежних пружних деформацій та порушених міжзернинних зв'язків з природно вмотивованим асиметричним механізмом утворювання та заліковування мікротріщин типу м'якої хлипавки, в рамках якої з єдиних позицій відтворено практично усі відомі експериментальні ефекти з некласичного резонансного відгуку геофізичних осадових матеріалів на зовнішнє високочастотне збурення та передбачено гістерезний ефект пам'яті геофізичних осадових матеріалів про найбільше високочастотне динамічне навантаження.

Б. Запропоновано фізично скориговану (канонічну) майже інтеґровну динамічну модель внутрішньовузлових нелінійних збуджень на регулярних багатоланцюжкових драбинчастих ґратках та сформульовано умови синхронізації повздовжньої та поперечної солітонних мод для адресного доправляння чи для селективного пропускання скомпактованого нелінійного хвильового збудження до певного вузла ґратки, збуреної повздовжнім однорідним магнетним полем або зиґзаґоподібною ділянкою одновузлових домішок чи локальним дефектом пропорційно змодифікованих поперечних резонансних міжвузлових зв'язків.

В. Побудовано інтеґровну нелінійну параметрично збурювану динамічну модель внутрішньовузлових збуджень на пласкій фермоподібній ґратці з двома вузлами в елементарній комірці та започатковано найдоречнішу симетризовану форму оберненої задачі розсіяння із залученням двох наборів допоміжних лінійних рівнянь та двох комплементарних систем дискретних рівнянь Марченка, в рамках яких знайдено чотирикомпонентні багатосолітонні розв'язки моделі з точним урахуванням дії магнетного поля. Знайдено основні закони збереження цієї інтеґровної нелінійної системи та встановлено її Гамільтонове формулювання як в термінах вихідних, так і в термінах фізично скоригованих (канонічних) польових амплітуд.

Г. Побудовано чотирикомпонентну напівдискретну інтеґровну нелінійну Шрьодінґерову систему з додатковими (тлозалежними) параметрами міжвузлового резонансного зв'язку та (з урахуванням параметричного збурювання системи і впливу зовнішнього магнетного поля) знайдено її явний солітонний розв'язок в рамках спеціально створеної процедури перетворення Дарбу та неявного перетворення Беклунда. Сформульовано Гамільтонове представлення цієї системи в термінах суттєво нестандартної Пуассонової структури та запропоновано два фізично рівноцінні варіанти стандартизації динамічних рівнянь системи з невідворотним порушенням симетрії між двома канонізованими підсистемами і зміною природи збуджених станів однієї з підсистем при переході через критичне значення головного фонового параметра.

Ґ. Запропоновано загальну форму рекурсивного пошуку безмежної ієрархії локальних законів збереження для багатокомпонентних напівдискретних інтеґровних нелінійних систем, асоційованих з допоміжними спектральними операторами довільного порядку.

Д. Обґрунтовано метод побудови параметрично урухомлюваних напівдискретних інтеґровних систем з далекосяжним характером міжвузлової резонансної взаємодії та сформульовано умови здійснення параметричної локалізації солітонного пакету. Вказано на калібрувальну еквівалентність між параметрично розгойдуваними напівдискретними інтеґровними системами з далекосяжним характером резонансної взаємодії в полі зовнішнього просторово лінійного потенціалу і суто параметрично розгойдуваними напівдискретними інтеґровними системами з далекосяжним характером резонансної взаємодії, специфічно підлаштованим у часі.

Е. Знайдено шість пар допоміжних операторів Лакса, заданих матрицями третього порядку, та дві пари допоміжних операторів Лакса, заданих матрицями четвертого порядку, кожна з яких в рамках доречного напівдискретного матричного рівняння нульової кривини започаткувала щонайменше одну раніше невідому багатокомпонентну напівдискретну інтеґровну систему, що складається зі зв’язаних підсистем суттєво відмінної природи.

Є. На інтеркальованій драбинчастій ґратці з трьома структурними елементами в елементарній комірці побудовано напівдискретну інтеґровну нелінійну Шрьодінґерову систему з додатковими (тлозалежними) параметрами міжвузлового резонансного зв’язку трьох типів та (з урахуванням параметричного збурювання системи і впливу зовнішнього магнетного поля) знайдено її явний солітонний розв’язок в рамках вдосконаленої процедури перетворення Дарбу та неявного перетворення Беклунда. Виявлено надзвичайно нестандартну Пуассонову структуру цієї нелінійної системи, уособлену п’ятдесятьма п’ятьма фундаментальними дужками Пуассона між польовими амплітудами, та сформульовано Гамільтонове представлення динамічних рівнянь системи.

Ж. В рамках рівняння нульової кривини з доречно узагальненими допоміжними операторами другого порядку сформульовано загальне правило побудови багатокомпонентних напівдискретних інтеґровних нелінійних систем на квазіодновимірних ґратках з довільним числом структурних елементів в елементарній комірці та з багатьма типами додаткових (тлозалежних) параметрів міжвузлового резонансного зв’язку.

Практичне значення здобутих результатів.

Результат з передбачення гістерезного ефекту пам’яті геофізичних осадових матеріалів про найбільше динамічне навантаження (динамічний ефект прикінцевої пам’яті) став стимулом для проведення експериментів з його підтвердження у Відділенні наук про Землю і довкілля Лос-Аламоської Національної лабораторії США (Earth and Environmental Sciences Division, Los Alamos National Laboratory, USA).

Низка оригінальних результатів, представлених в дисертації, увійшла до курсу лекцій “Нелінійні інтеґровні напівдискретні моделі”, прочитаному в 2011 році для студентів 2-го курсу КНУ імені Тараса Шевченка в Науково-освітньому центрі при ІТФ ім. М.М. Боголюбова Національної академії наук України.

Особистий внесок здобувача.

Серед сорока трьох наукових праць [1–43], в яких викладено основні наукові результати дисертації, тридцять наукових праць [1, 3, 4, 8–12, 17, 18, 21–26, 29, 30, 32–43] опубліковано здобувачем одноосібно. Тринадцять наукових праць [2, 5–7, 13–16, 19, 20, 27, 28, 31] опубліковано зі співавторами. Усі оригінальні наукові результати, що увійшли до дисертації з дев'яти спільних праць [2, 5–7, 13, 14, 15, 27, 28], а саме, ідеї, постановки задач, побудови моделей, їхні аналітичні дослідження та висліди (окрім комп'ютерних розрахунків) належать виключно здобувачеві. Щодо оригінальних наукових результатів з інших трьох спільних праць [16, 19, 20], то постановки задач, побудови моделей, їхні аналітичні дослідження та теоретичне передбачення динамічного ефекту прикінцевої пам'яти (окрім комп'ютерних розрахунків та експериментального підтвердження динамічного ефекту прикінцевої пам'яти) належать здобувачеві. Сьомий розділ спільної монографії [31] повністю написано здобувачем за результатами оригінальних наукових праць [13–16, 19, 20].

Аби сконкретизувати деякі аспекти особистого внеску здобувача зі спільних праць, нижче подано розгорнутий перелік доречних результатів. Зокрема, авторові дисертації належать:

- Формули перетворень до фізично скоригованих польових амплітуд зі статті [2].
- Побудова інтеґровної нелінійної моделі Шрьодінґера на багатоланцюжкових драбинчастих ґратках, викладена в статті [5].
- Побудова фізично скоригованої майже інтеґровної версії багатокомпонентної напівдискретної Шрьодінґерової системи та усі результати з селективного транспорту солітонів в нерегулярних і збурених зовнішніми полями ґратках зі статей [6, 7].
- Головні теоретичні результати праць [13–16, 19, 20], а саме – побудова самодостатньої динамічно-кінетичної моделі взаємозалежних пружніх деформацій та порушених міжзернинних зв'язків і пояснення на її основі усих відомих експериментальних результатів з некласичного резонансного відгуку геофізичних осадових порід.
- Теоретичне передбачення динамічного гістерезного ефекту прикінцевої пам'яти, сформульоване в працях [14, 16, 19, 20].
- Побудова нових напівдискретних інтеґровних нелінійних багатокомпонентних систем та асоційованих з ними нових допоміжних спектральних і еволюційних операторів третього і четвертого порядків у відповідности до статей [27, 28].

Апробація результатів дисертації.

Більшість матеріалів дисертаційної роботи було оприлюднено на таких наукових зібраннях:

- Copenhagen Conference on Complex Dynamics in Spatially Extended Systems, 27–30 September 1995, Niels Bohr Institute, Copenhagen (Denmark).

- International Conference “Modern Problems of Theoretical Physics” dedicated to the 90th anniversary of A.S. Davydov. 9–15 December 2002, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyïv (Ukraine).
- International Conference “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics”. 23–29 June 2003, Institute of Mathematics, Kyïv (Ukraine).
- The NATO Advanced Research Workshop “Nonlinear Waves: Classical and Quantum Aspects”. 12–18 July 2003, Universidade de Lisboa, Estoril (Portugal).
- Bogolyubov Kyïv Conference “Modern Problems of Mathematics and Theoretical Physics”. 13–16 September 2004, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyïv (Ukraine).
- Innovations in Nonlinear Acoustics: ISNA17–17th International Symposium on Nonlinear Acoustics including the International Sonic Boom Forum. 18–22 July 2005, State College, Pensilvania (USA).
- The XX Session of the Russian Acoustical Society. 27–31 October 2008, Lomonosov Moscow State University, Moscow (Russia).
- International Conference “Geodynamical Phenomena: from Observations and Experiments to Theory and Modeling”. 20–24 September 2010, Subbotin Institute of Geophysics, Kyïv (Ukraine).
- International Conference “Quantum Groups and Quantum Integrable Systems”. 18–21 June 2013, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyïv (Ukraine).
- Bogolyubov Conference “Problems of Theoretical Physics” dedicated to the 50th anniversary of the Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine. 24–26 May 2016, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyïv (Ukraine).
- The 3rd Walter Thirring International School on Fundamentals of Astroparticle and Quantum Physics. 17–23 September 2017, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyïv (Ukraine).
- IECMSA-2018, 7th International Conference on Mathematical Sciences and Applications. 28–31 August 2018, Ramada Encore Kyïv Hotel, Kyïv (Ukraine).

Публікації.
Основні наукові результати дисертації опубліковано в сорока трьох провідних фахових наукових виданнях [1–43], серед них – в одній монографії [31], тридцяти чотирьох статтях в реферованих наукових журналах [1–11, 13, 14, 17, 18, 21–25, 27–30, 32–37, 43] та восьми працях зі статусом матеріалів конференцій [12, 15, 16, 19, 20, 26, 38, 42].

Структура та обсяг дисертації.
Дисертаційна праця містить усі складові частини, вказані у вимогах до оформлення дисертацій, а саме – титульний аркуш, зміст, анотацію (українською та англійською мовами), основну частину, список бібліографічних посилань на першоджерела та два додатки. Окрім вступу та висновків, до основної частини дисертації входять шість розділів, розбитих на підрозділи. В кінці кожного розділу подано підсумки його основних оригінальних результатів. Загальний

обсяг дисертації складає 333 сторінки тексту, 49 рисунків та 255 бібліографічних посилань на першоджерела.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано вибір теми досліджень для дисертаційної роботи, сформульовано мету і завдання досліджень та вказано на зв'язок цих досліджень з науковими програмами, планами, темами, ґрантами. Розкрито наукову новизну здобутих результатів та висвітлено їхнє практичне значення. Визначено особистий внесок здобувача в наукових працях, опублікованих разом із співавторами. Подано перелік фахових наукових зібрань, на яких апробовано результати дисертаційної роботи.

В **першому розділі** дисертації викладено теоретичні результати здобувача із систематичного аналітичного та числового моделювання різноманітних нелінійних та релаксаційних явищ, встановлених експериментально для некласичного резонансного відгуку стрижнеподібних зразків осадових порід (здебільшого пісковиків) на повздовжнє високочастотне збуджування.

В *підрозділі 1.1* проаналізовано експериментальні передумови для побудови адекватної двопідсистемної моделі примусових повздовжніх коливань стрижнеподібних осадових порід з урахуванням величезного дизбалансу між жвавостями утворювання та заліковування мікротріщин за допомоги кінетики м'якої хлипавки.

В *підрозділі 1.2* та *підрозділі 1.3* сформульовано теоретичні засади моделювання некласичного резонансного відгуку стрижнеподібних осадових порід на повздовжнє високочастотне збуджування в рамках двох взаємозв'язаних підсистем, а саме – підсистеми повздовжніх зміщень

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\gamma\frac{\partial^3 u}{\partial^2 x\partial t} \tag{1}$$

$$\sigma=\frac{E\,\mathrm{sech}\,\eta}{(r-a)[\cosh\eta\partial u/\partial x+1]^{a+1}}-\frac{E\,\mathrm{sech}\,\eta}{(r-a)[\cosh\eta\partial u/\partial x+1]^{r+1}}\approx E\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2}$$

та підсистеми пошкоджених міжзернинних когезійних зв'язків

$$\partial g/\partial t=-\left[\mu\theta(g-g_\sigma)+\nu\theta(g_\sigma-g)\right](g-g_\sigma), \tag{3}$$

Де t вказує на час, а x – на поточну Лаґранжову координату вздовж стрижня.

Тут ρ та γ – середня густина пісковика та коефіцієнт внутрішнього (Стоксового) тертя в пружній підсистемі, u та σ – поле повздовжніх зміщень та поле повздовжніх напружень стрижня, а E– модуль Юнґа. На загал, параметри r, a, $\mathrm{sech}\,\eta$ емпіричного потенціалу Мі враховують нелінійний характер міжзернинної взаємодії, проте за малих (*по суті* максимально досяжних в експериментах) високочастотних динамічних деформацій вони майже не впливають на лінійну апроксимацію залежности між деформацією $\partial u/\partial x$ та напруженням σ. Нарешті, величина g має сенс концентрації деякого парціального типу мікротріщин зі жвавостями утворювання ν та заліковування μ, підпорядкованими надзвичайно сильній (встановленій самою природою) нервності $\nu \gg \mu$. При цьому ефективну концентрацію мікротріщин $c = \langle g \rangle$, яка безпосередньо впливає на послаблення модуля Юнґа $E = \left(1 - c / c_{\text{cr}}\right) E_{+}$, було розраховано аналітично на основі гіпотези про однорідний розподіл парціальних активаційних бар'єрів в межах певного енергетичного інтервалу. Рівноважні значення g_{σ} та c_{σ} парціальної g та ефективної c концентрацій мікротріщин було враховано в рамках континуальної термодинамічної теорії $c_{\sigma} = c_{0} \exp\left(\upsilon\sigma / kT\right)$ за несуперечливого припущення $g_{\sigma} = c_{\sigma}$. Тут $\upsilon > 0$ – параметр дилатації, k– константа Больцмана, T– температура.

Таким чином, істотні пункти запропонованої моделі полягають у взаємодії між швидкою пружною підсистемою та повільною підсистемою пошкоджених зв'язків з одного боку, і специфікуються нетривіальною (типу м'якої хлипавки) кінетикою розірваних міжзернинних зв'язків – з іншого. Запропонований механізм взаємодії забезпечує, аби пружна підсистема запускала еволюційні процеси в підсистемі порушених зв'язків змінюючи умови її рівноваги, і разом з цим аби підсистема порушених зв'язків зворотньо впливала на пружну підсистему зменшуючи (збільшуючи) її модуль Юнґа пропорційно до надлишкової (заниженої) концентрації дефектів (порушених зв'язків). Внаслідок значного перевищення жвавости розриву зв'язків над жвавістю їхнього відновлювання підсистема порушених зв'язків порушує симетрію динамічного відгуку усієї системи на альтерноване зовнішнє нагнітання. Ця асиметрія породжує більшість нетривіальних гістерезних та релаксаційних ефектів в осадових породах.

Граничні умови, доречні для опису дії зовнішнього рушійного пристрою (трансдюсера), мали вигляд

$$u(x=0\,|\,t) = D(t)\cos\left(\varphi + \int_0^t d\tau\omega(\tau)\right), \quad \sigma(x=L\,|\,t) + \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x=L\,|\,t) = 0, \tag{4}$$

що уможливлювало перелаштовування як рушійної частоти $\omega(t)$, так і рушійної амплітуди $D(t)$. Тут L – довжина стрижня.

В *підрозділі 1.4* проінспектовано кінетику м'якої хлипавки для стрижня з альтернованим рушієм. Підкреслено, що логарифмічного відновлювання резонансної частоти не можна було б зрозуміти без правдоподібного припущення про розподіл жвавостей відновлювання в межах значного, але обмеженого інтервалу. В іншому разі, коли ширина інтервалу розподілу жвавостей відновлювання порушених зв'язків прямує до нуля, повна кінетика відновлювання неминуче звелася б до суто експоненційного розпаду дефектів.

В *підрозділі 1.5* в рамках запропонованої здобувачем моделі відтворено результати усих відомих експериментів з примусових повздовжніх коливань пісковикових стрижнів.

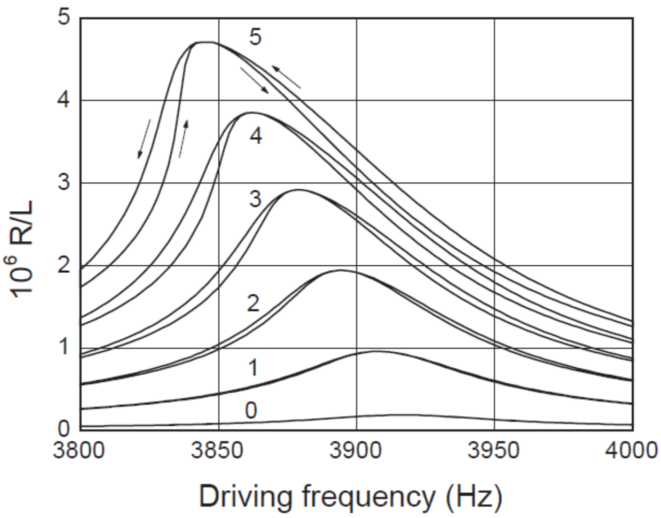

Рис. 1 Підготовлені (кондиційовані) резонансні криві j = 0,1,2,3,4,5 за послідовно збільшуваних значень рушійної амплітуди $D_j = 3.8(j + 0.2\delta_{j0})L{\cdot}10^{-8}$. Стрілки на двох найвищих кривих вказують на напрями прогону частоти коливань рушія. Абсолютне значення швидкости прогону частоти становило $|df/dt|$=400 Hz/min.

Так, в рамках єдиного підходу вдалося пояснити гістерезну поведінку резонансних кривих (Рис. 1), майже лінійний зсув резонансної частоти як функції від амплітуди нагнітання (Рис. 1), майже логарифмічне відновлювання в часі частоти резонансу після вимкнення високоамплітудного нагнітання (кондиціювання), характер еволюції амплітуди відгуку після тимчасової зупинки протягування частоти рушія, стрибки резонансних кривих після тимчасових призупинень зовнішнього нагнітання (заразом як в сенсі протягування частоти, так і в сенсі амплітуди збуджування), пригнічення гістерези за малих водонасиченостей зразка, а також меншання модуля пружности зразка та добротности резонансної кривої з більшанням водонасичености. Як в якісному, так і в кількісному аспектах розроблена модель стала наслідком уявлень про дві зв’язані підсистеми за досить обґрунтованого твердження, що мезоскопічні дефекти в полі внутрішнього напруження утворюються та зникають з суттєво відмінними жвавостями і таким чином зумовлюють асиметрію відгуку всієї системи на зовнішнє збуджування.

На основі розвинутої моделі примусових повздовжніх коливань стрижнеподібних осадових порід в *підрозділі 1.6* подано теоретичне обґрунтування суттєво динамічного гістерезного ефекту прикінцевої (дискретної) пам’яти, який згодом знайшов своє експериментальне підтвердження.

В якості ремарки варто зауважити, що термін “повільна підсистема ”було обрано як синонім до поняття “підсистема пошкоджених міжзернинних когезійних зв’язків”. На перший погляд цей термін видається некоректним, оскільки парціальне кінетичне рівняння м’якої хлипавки містить в собі дві суттєво відмінні жвавості, одна з яких (жвавість розриву зв’язків) може бути співвимірною або навіть більшою за частоту зовнішнього високочастотного рушійного нагнітання. Проте саме швидка жвавість розриву зв’язків і поєднує концентрацію дефектів з амплітудою деформації, коли амплітуда зростає. Як наслідок, ефективна жвавість росту концентрації дефектів визначається повільним більшанням амплітуди деформації за вкрай повільного протягування частоти збуджувача. З іншого боку, коли амплітуда деформації меншає, здатен працювати лише повільний механізм відновлювання зв’язків. Отже на загал, обидві вищевказані обставини і виправдовують використання терміна “повільна підсистема”, оскільки характерні інтервали часу, відповідальні за квазіусталену еволюцію концентрації дефектів, виявляються досить значними порівняно з періодом альтернованої високочастотної деформації в швидкій пружній підсистемі.

В **другому розділі** запропоновано нелінійну модель внутрішньовузлових збуджень Шрьодінґерового типу на драбинчастій ґратці, утвореній довільним числом *M* паралельних ланцюжків з урахуванням поперечних (міжланцюжкових) резонансних зв’язків між збудженнями. На Рис. 2 показано фраґмент ґратки носія збуджень у найпростішому нетривіальному випадку двох поперечно зв’язаних ланцюжків.

Модель сформульовано в термінах фізично скоригованих польових амплітуд, що мають сенс амплітуд присутности збуджень на вузлах ґратки. Досліджено вплив різноманітних збурень на динаміку солітоноподібних збуджень на багатоланцюжкових драбинчастих ґратках.

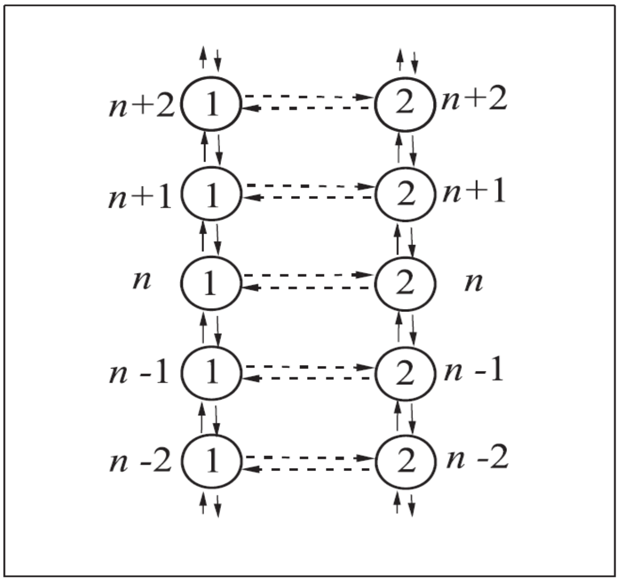

Рис. 2 Фраґмент плаской двоніжкової драбинчастої ґратки носія збуджень для чотирикомпонентної реалізації ($M = 2$) фізично скоригованої напівдискретної інтеґровної нелінійної Шрьодінґерової системи. Кружечки позначають розташування вузлів драбинчастої ґратки. Горизонтальні стрілки вказують на резонансні зв’язки формалізовані параметрами t_{12} чи t_{21} між польовими збудженнями на сусідніх вузлах, належних до протилежних ланцюжків драбинчастої ґратки. Вертикальні стрілки вказують на резонансні зв’язки (з параметрами, знормованими на одиницю) між польовими збудженнями на сусідніх вузлах, належних до певного ланцюжка драбинчастої ґратки.

В *підрозділі 2.1* викладено суть загальної проблеми коректного вибору польових функцій, характерної для більшости напівдискретних нелінійних інтеґровних систем Шрьодінґерового типу. У випадку багатокомпонентних систем ця проблема є досить нетривіальною. Так, для нелінійної Шрьодінґерової системи на драбинчастій ґратці з довільним числом *M* зв’язаних ланцюжків довелося пожертвувати інтеґровністю затравкової системи і обмежитись її вкороченою версією. Показано що, фізично скоригований варіант вкороченої нелінійної еволюційної системи є канонічною Гамільтоновою системою

$$+\mathrm{i}\dot{Q}_\alpha(n) = \frac{\partial H_a}{\partial R_\alpha(n)}, \qquad -\mathrm{i}\dot{R}_\alpha(n) = \frac{\partial H_a}{\partial Q_\alpha(n)} \tag{5}$$

з гамільтоніаном

$$
\begin{aligned}
H_a = &-\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{\beta=1}^{M}\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_\alpha(m)t_{\alpha\beta}Q_\beta(m) - \\
&-\sum_{\beta=1}^{M}\sum_{m=-\infty}^{\infty} E(m+1)E(m)\Big[Q_\beta(m+1)R_\beta(m)+R_\beta(m+1)Q_\beta(m)\Big],
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

де $E(n)=\sqrt{[\exp\rho(n)-1]/\rho(n)}$, $\rho(n)=\sum_{\beta=1}^{M}Q_\beta(n)R_\beta(n)$.Тут $Q_\alpha(n)$ та $R_\alpha(n)$ (з $R_\alpha(m)=Q_\alpha^*(m)$) – амплітуди присутности збудження на α-ому ланцюжку в межах n-ої елементарної комірки, а $t_{\alpha\beta}$– параметри поперечної міжвузлової резонансної взаємодії (з $t_{\beta\alpha}=t_{\alpha\beta}^*$). Крапка над функціями $Q_\alpha(n)$ та $R_\alpha(n)$ в лівих частинах динамічних рівнянь вказує на диференціювання за безрозмірним часом τ.

Модель адекватно враховує як повздовжню (вздовж ланцюжків), так і поперечну (впоперек ланцюжків) динаміку нелінійних хвильових збуджень. Модель допускає як односолітонні, так і багатосолітонні розв'язки спеціального (факторизованого) типу, коли повздовжні та поперечні солітонні моди є взаємно незалежними. Проте питання про повну інтеґровність моделі в сенсі Лакса залишається відкритим, оскільки представлення нульової кривини для неї не знайдено. Зате наявність точних солітонних розв'язків моделі дає змогу послідовно розглянути низку цікавих задач із впливу зовнішніх електричного та магнетного полів на повздовжню та поперечну динаміку солітоноподібного збудження на квазіодновимірній багатоланцюжковій драбинчастій ґратці. З іншого боку, модель здатна наближено враховувати вплив недосконалостей ґратки, викликаних зиґзаґоподібним розподілом одновузлових домішок чи модифікаційним дефектом поперечних резонансних міжвузлових зв'язків, на повздовжню та поперечну динаміку солітоноподібного збудження.

В *підрозділі 2.2* показано, що солітонні розв'язки запропонованої системи точно враховують дію зовнішнього повздовжнього однорідного магнетного поля за допомоги фаз комплекснозначних параметрів поперечної міжвузлової резонансної взаємодії (фаз Паєрлса). Різноманітні сценарії руху солітоноподібного збудження, виявлені в результаті проведеного дослідження, вказують на важливу роль синхронізації повздовжнього та поперечного рухів солітона, керованої магнетним полем в регулярній ґратці, для селективного транспорту солітонного збудження до наперед вказаного вузла ґратки.

З іншого боку, дія зовнішнього повздовжнього однорідного електричного поля

$$
U=-\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{m=-\infty}^{\infty} m\mathcal{E}R_\alpha(m)Q_\alpha(m) \qquad (7)
$$

на електрично заряджені збудження системи призводить до бездисипативних повздовжніх осциляцій солітона як цілого за механізмом Блоха–Зінера з частотою $\omega_\parallel=\mathcal{E}$. Варто вказати на повну незалежність Блохових осциляцій та поперечних коливань. За співвимірности частот цих мод траєкторія центру солітонного пакету стає замкненою і утворює деяку фігуру Ліссажу. З більшанням напружености зовнішнього поля $\mathcal{E}$ амплітуда осциляцій Блоха меншає за законом $A_{\|} = (2/\mu\mathcal{E})\sinh\mu$, тобто має місце супутній ефект динамічної локалізації повздовжнього руху солітона. Тут параметр $1/\mu$ наближено оцінює повздовжній розмір солітона.

В *підрозділі 2.3* розглянуто задачу про поширювання солітонного збудження на драбинчастій ґратці з регулярно розташованими точковими домішками, дію яких враховано потенціалом

$$U = V\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_\alpha(m)Q_\alpha(m)\sum_{s=0}^{Z-1}\Delta(m-n_\alpha-Mls). \quad (8)$$

Тут $\Delta(m-n)\equiv\delta_{mn}$ – символ Кронекера, а V– зсув енергії домішки. Спираючись на уявлення про незбурену синусоподібну траєкторію руху центру солітонного пакету у випадку дволанцюжкової ґратки ($M=2$) показано, що за умов синхронізації повздовжнього та поперечного рухів солітона доречним вибором початкових параметрів солітонного пакету, солітон здатен безперешкодно оминути одновузлові домішки на значній ділянці їхнього зиґзаґоподібного просторового розташування завдяки слаломному ефекту. Слалом солітона поміж досить сильними притягувальними домішками проілюстровано на Рис. 3.

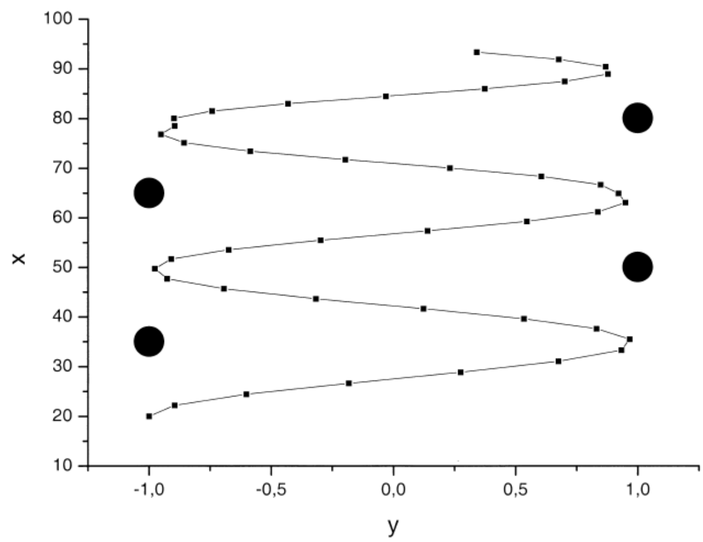

Рис. 3 Траєкторія центру солітона на драбинчастій ґратці з притягувальними точковими домішками з $V=-10$. Темними кружками показано положення домішкових вузлів ґратки. Повздовжню координату центру солітона x подано в одиницях повздовжньої постійної ґратки. На осі абсцис вказано поперечну координату центру солітона.

В *підрозділі 2.4* вивчено повздовжню динаміку солітонного збудження на багатоланцюжковій драбинчастій ґратці з локально модифікованими поперечними міжвузловими зв’язками, змодельованими потенціалом

$$U = -\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_\alpha(m)Q_\alpha(m)\Delta(m-n_t)wt_{\alpha\beta}\ , \quad (9)$$

де w – модифікаційний параметр, n_t – номер елементарної комірки з модифікованими поперечними міжвузловими зв’язками.

В рамках методу пробних лаґранжіанів з односолітонним анзацом

$$Q_\alpha(n) = b_\alpha\sqrt{\ln[1+\sinh^2\mu\ \mathrm{sech}^2\mu(n-x)]}\exp[+\mathrm{i}kn+\mathrm{i}\varphi] \quad (10)$$

повздовжню динаміку солітона як цілого вдалося звести до ефективної Гамільтонової динаміки

$$\dot{x} = \partial \mathscr{H} / \partial k, \qquad \dot{k} = -\partial \mathscr{H} / \partial x \tag{11}$$

$$\mathscr{H} = -\frac{2\sinh\mu}{\mu}\cos k - \eta - \frac{w\eta}{2\mu}\ln\left[1 + \sinh^2\mu\ \mathrm{sech}^2\mu(x - n_t)\right] \tag{12}$$

для координати його центру x і канонічно спряженого до неї квазіімпульсу k. За умови часонезалежних параметрів поперечного зв'язку $t_{\alpha\beta}$ величина $\eta \equiv \sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{\beta=1}^{M} b_\alpha^* t_{\alpha\beta} b_\beta$ зберігається у часі $\dot{\eta} = 0$ і набуває сенсу ефективної константи взаємодії солітона з локальним модифікаційним дефектом поперечних резонансних міжвузлових зв'язків, причому знак цієї константи залежить виключно від початкових умов на поперечні солітонні моди. Цей досить незвичний результат про вплив суто фазових параметрів поперечної динаміки солітона на характер (притягувальний або відштовхувальний) ефективного повздовжнього потенціалу взаємодії солітона з модифікаційним дефектом поперечних резонансних міжвузлових зв'язків підтверджують також і безпосередні комп'ютерні розрахунки траєкторії руху центру солітона.

У **третьому розділі** побудовано і ретельно досліджено нову інтеґровну нелінійну модель шрьодінґерівських полів на пласкій фермоподібній ґратці.

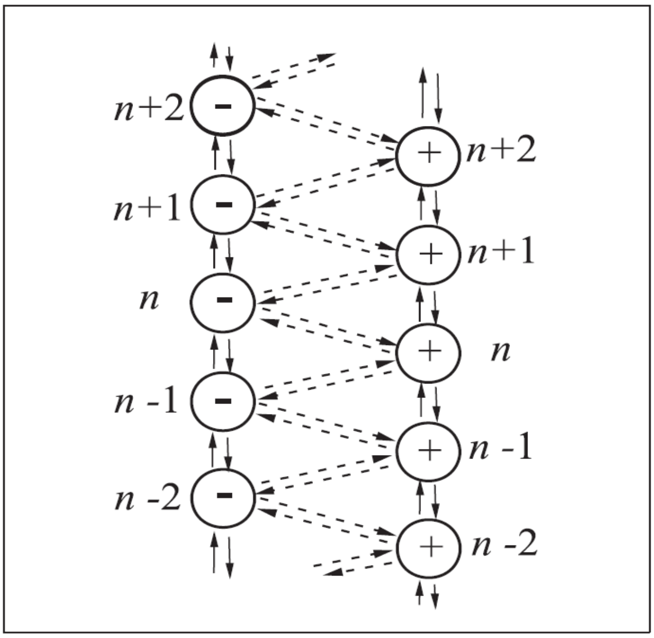

Рис. 4 Фраґмент пласкої фермоподібної ґратки носія збуджень для чотирикомпонентної напівдискретної інтеґровної нелінійної Шрьодінґерової системи.
Кружечки позначають розташування вузлів драбинчастої ґратки. Скісні стрілки вказують на резонансні зв'язки, формалізовані параметрами ω_t^- чи ω_t^+ між польовими збудженнями на сусідніх вузлах, належних до протилежних ланцюжків драбинчастої ґратки. Вертикальні стрілки вказують на резонансні зв'язки, формалізовані параметрами ω_l^- чи ω_l^+ між польовими збудженнями на сусідніх вузлах, належних до певного ланцюжка драбинчастої ґратки.

В *підрозділі 3.1* подано загальне формулювання моделі. У випадку редукції $r_\pm(n) = q_\pm^*(n)$ система рівнянь моделі

$$\frac{+\mathrm{i}\dot{q}_-(n)+2\omega_0 q_-(n)}{1+q_-(n)r_-(n)}+\omega_t^- q_+(n)+\omega_t^+ q_+(n-1)+$$
$$+\omega_l^+ q_-(n-1)[1+q_+(n-1)r_+(n-1)]+\omega_l^- q_-(n+1)[1+q_+(n)r_+(n)]+ \qquad (13)$$
$$+\omega_l^+ q_+(n-1)[q_+(n-1)r_-(n)+q_-(n)r_+(n)]+$$
$$+\omega_l^- q_+(n)[q_+(n)r_-(n)+q_-(n)r_+(n-1)]=0$$

$$\frac{+\mathrm{i}\dot{q}_+(n)+2\omega_0 q_+(n)}{1+q_+(n)r_+(n)}+\omega_t^+ q_-(n)+\omega_t^- q_-(n+1)+$$
$$+\omega_l^- q_+(n+1)[1+q_-(n+1)r_-(n+1)]+\omega_l^+ q_+(n-1)[1+q_-(n)r_-(n)]+ \qquad (14)$$
$$+\omega_l^- q_-(n+1)[q_-(n+1)r_+(n)+q_+(n)r_-(n)]+$$
$$+\omega_l^+ q_-(n)[q_-(n)r_+(n)+q_+(n)r_-(n+1)]=0$$

відповідає притягувальному типові нелінійних членів, а самі польові функції $q_-(n)$, $r_-(n)$ та $q_+(n)$, $r_+(n)$ можна трактувати як майже амплітуди присутности збудження на лівому (–) вузлі та правому (+) вузлі n-тої елементарної комірки, відповідно.

За аналогією з теорією екситонів, величинам ω_l^-, ω_l^+ та ω_t^-, ω_t^+ можна надати сенс параметрів, відповідно, повздовжньої та поперечної міжвузлової резонансної взаємодії, а величину ω_0 розглядати як параметр систематичного зсуву шкали енергії. На загал, усі щойно згадані параметри можна вважати довільними функціями часу τ, тим самим значно розширивши межі застосування моделі аж до опису процесів параметричного керування збудженнями. У випадку редукції $r_\pm(n)=q_\pm^*(n)$ ці функційні параметри зазнають закономірних обмежень за правилом $(\omega_l^-)^*=\omega_l^+$, $(\omega_t^-)^*=\omega_t^+$, $(\omega_0)^*=\omega_0$. При цьому фази параметрів міжвузлового резонансного зв'язку набувають сенсу фаз Паєрлса, відповідальних за зовнішні магнетні поля, що пронизують елементарні клаптики драбинчастої ґратки.

Лінійна частина моделі свідчить про те, що просторові вузли, на яких задано польові амплітуди, разом з прямими лініями, вздовж яких діють резонансні зв'язки, утворюють пласку драбинчасту ґратку на зразок пласкої ферми. Схематичне зображення пласкої фермоподібної ґратки подано на Рис. 4. Така геометрична конфігурація є ідеалізованим аналогом просторової ґратки однієї з реалізацій нанотрубок на основі бору, відомій в англомовній літературі як (1,1) armchair boron nanotube.

З метою відтворення симетрії між двома парами польових амплітуд, в *підрозділі 3.2* запропоновано дві пари допоміжних матричнозначних лінійних рівнянь, асоційованих з додатнім та від'ємним зсувами повздовжньої дискретної просторової координати в двох типах допоміжних функцій під дією двох допустимих типів спектральних операторів, відповідно. Тому виникла необхідність працювати з двома типами рівнянь нульової кривини, а саме – з висхідним рівнянням нульової кривини

$$\dot{L}^{>}(n|z)=A^{>}(n+1|z)L^{>}(n|z)-L^{>}(n|z)A^{>}(n|z) \tag{15}$$

та з низхідним рівнянням нульової кривини

$$\dot{L}^{<}(n|z)=A^{<}(n-1|z)L^{<}(n|z)-L^{<}(n|z)A^{<}(n|z) \tag{16}$$

з наступними висхідним

$$L^{>}(n|z)=\begin{pmatrix} z & +\mathrm{i}q_{+}(n) \\ +\mathrm{i}r_{+}(n) & z^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & +\mathrm{i}q_{-}(n) \\ +\mathrm{i}r_{-}(n) & z^{-1} \end{pmatrix} \tag{17}$$

та низхідним

$$L^{<}(n|z)=\begin{pmatrix} z^{-1} & -\mathrm{i}q_{-}(n) \\ -\mathrm{i}r_{-}(n) & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z^{-1} & -\mathrm{i}q_{+}(n) \\ -\mathrm{i}r_{+}(n) & z \end{pmatrix} \tag{18}$$

спектральними операторами. Тут z – часонезалежний спектральний параметр. Формат автореферату не дозволяє продемонструвати явні вирази для еволюційних операторів $A^{>}(n|z)$ та $A^{<}(n|z)$. Запропонований симетризований підхід має кілька практичних переваг, оскільки значно спрощує пошук розв’язків досліджуваної системи нелінійних еволюційних рівнянь і уможливлює надійний симетрійно вмотивований контроль одержаних результатів.

З огляду на симетрію між польовими амплітудами, в *підрозділах 3.3–3.4* сформульовано два різновиди прямої задачі розсіяння – координатно-висхідний та координатно-низхідний. Започатковано дві пари базових матричнозначних функцій (розв’язків) Йоста (по одній парі на кожен різновид прямої задачі розсіяння) і встановлено взаємно однозначну відповідність між розв’язками Йоста протилежних типів. Представлено також традиційні співвідношення між розв’язками Йоста того самого типу, тим самим ґарантувавши адекватні означення двох різновидів зведеної матриці монодромії.

Зваживши на властивості регулярности та симетрії розв’язків Йоста, а також матриць монодромії, в *підрозділі 3.5* виведено два типи сумаційних рівнянь Марченка для коефіцієнтів розкладу векторів Йоста за спектральним параметром z та оберненим спектральним параметром $1/z$ і виписано комплементарні формули для польових амплітуд в термінах найнижчих коефіцієнтів розкладу. Аби підкреслити переваги запропонованого симетризованого підходу до прямої та оберненої задач розсіяння, в дисертації звернено особливу увагу на явну недолугість використання лише одного окремого несиметризованого (висхідного чи низхідного) варіанту теорії при побудові розв’язків для польових амплітуд, коли одна з фізично рівноправних пар функцій $q_{+}(n)$, $r_{+}(n)$ чи $q_{-}(n)$, $r_{-}(n)$ потребує залучення вищих коефіцієнтів розкладу векторів Йоста і таким чином призводить до значних і кострубатих перепон в аналітичних розрахунках.

Оскільки вид ядер з рівнянь Марченка суттєво зумовлено даними розсіяння, в *підрозділах 3.6–3.7* одержано звичайні диференційні рівняння, що керують еволюцією даних розсіяння в часі, а також всебічно проаналізовано властивості симетрії даних розсіяння як взагалі, так і за редукції до комплексно спряжених польових амплітуд.

В *підрозділі 3.8* знайдено дисперсійні співвідношення для діагональних елементів обох різновидів матриці монодромії за звичного спрощувального припущення про однакове число нулів в кожному діагональному матричному елементі окремо взятої матриці монодромії, що цілком виправдано принаймні за редукції до комплексно спряжених польових амплітуд.

В *підрозділі 3.9* описано процедуру розв'язування рівнянь Марченка в справді невідбивному випадку і формально одержано багатосолітонний розв'язок початкової (нередукованої) нелінійної системи з еволюцією в часі, опосередкованою часовими залежностями даних розсіяння.

В *підрозділі 3.10* проаналізовано найпростішу реалізацію односолітонної динаміки за редукції до комплексно спряжених польових амплітуд та зроблено повну інтерпретацію солітонних параметрів. Наголошено також на цілком природній кореляції між двовузловою будовою елементарної комірки ґратки-носія та двогілковим розщепленням солітонного розв'язку.

Нарешті, в *підрозділі 3.11* знайдено явно низку найважливіших законів збереження досліджуваної чотирикомпонентної інтеґровної нелінійної ґратчастої системи та вказано на її Гамільтонове представлення як в термінах вихідних польових функцій $q_+(n)$, $r_+(n)$ та $q_-(n)$, $r_-(n)$, так і в термінах спеціально введених $Q_\pm(n)=\sqrt{[q_\pm(n)/r_\pm(n)]\ln[1+q_\pm(n)r_\pm(n)]}$, $R_\pm(n)=Q^*_\pm(n)$ фізично скоригованих функцій $Q_+(n)$, $R_+(n)$ та $Q_-(n)$, $R_-(n)$, що набувають сенсу повноправних амплітуд присутности збудження на правому (+) вузлі та лівому (–) вузлі n-тої елементарної комірки, відповідно.

У **четвертому розділі** побудовано чотирикомпонентну напівдискретну інтеґровну нелінійну Шрьодінґерову систему з тлозалежними міжвузловими резонансними зв'язками, що уособлюють собою принципово новий тип резонансних зв'язків. Виявлено велику низку нетривіальних властивостей цієї системи, важливих для фізичних застосувань.

В *підрозділі 4.1* зроблено загальні вступні зауваження щодо важливости побудови нових багатокомпонентних напівдискретних інтеґровних нелінійних Шрьодінґерових систем для опису найрізноманітніших фізичних явищ та подано еволюційні рівняння

$$\begin{aligned}&+\mathrm{i}\dot{q}_+(n)+\beta q_-(n-1)[1+q_+(n)r_+(n)]+\\&+\alpha q_+(n+1)[q_+(n)r_-(n)-\nu(n)]+\alpha[q_-(n)+q_+(n)\mu(n)]=0\end{aligned}\tag{19}$$

$$\begin{aligned}&+\mathrm{i}\dot{q}_-(n)+\alpha q_+(n+1)[1+q_-(n)r_-(n)]+\\&+\beta q_-(n-1)[q_-(n)r_+(n)-\mu(n)]+\beta[q_+(n)+q_-(n)\nu(n)]=0\end{aligned}\tag{20}$$

$$\begin{aligned}&+\mathrm{i}\dot{\mu}(n)+\alpha q_+(n+1)[r_+(n)+r_-(n)\mu(n)]+\\&+\beta[q_+(n)r_+(n)-q_-(n)r_-(n)]-\alpha r_-(n-1)[q_-(n)+q_+(n)\mu(n)]=0\end{aligned}\tag{21}$$

пропонованої напівдискретної інтеґровної нелінійної Шрьодінґерової системи. Тут крапка над польовими функціями відповідає за диференціювання за часом τ, тоді як часозалежні параметри α і β описують первинний резонансний зв'язок між польовими змінними на сусідніх вузлах, належних до протилежних ланцюжків драбинчастої ґратки. Довільність часових залежностей цих параметрів обмежено лише загальною вимогою їхнього комплексного спряження $\beta^*=\alpha$. Польові змінні $q_+(n)$ і $r_+(n)$ (з $r^*_+(n)=q_+(n)$) наближено характеризують амплітуди присутности збудження на верхньому (плюсовому) вузлі n-тої елементарної комірки драбинчастої ґратки. Аналогічно, польові змінні $q_-(n)$ і $r_-(n)$ (з $r_-^*(n) = q_-(n)$) наближено характеризують амплітуди присутности збудження на нижньому (мінусовому) вузлі n-тої елементарної комірки драбинчастої ґратки. Ці дві пари змінних $q_+(n)$, $r_+(n)$ і $q_-(n)$, $r_-(n)$ складають основний набір динамічних полів на нескінченно довгій $(-\infty < n < +\infty)$ драбинчастій ґратці із зиґзаґоподібним упорядкованням щаблів. При цьому дискретна просторова координата n позначає порядковий номер елементарної комірки ґратки, тоді як індекси + та – слугують аби розрізняти два різновиди вузлів в тій самій елементарній комірці. Навпаки, змінні $\mu(n)$ і $\nu(n)$ (з $\nu^*(n) = \mu(n)$) постають як супутній набір полів, оскільки їх можна виключити із розгляду, використовуючи так звані природні в'язі. Просторову структуру ґратки носія збуджень в представленій нелінійній системі за ненульових фонових значень μ і ν супутніх полів $\mu(n)$ і $\nu(n)$ подано на Рис. 5 як стьожку трикутної ґратки.

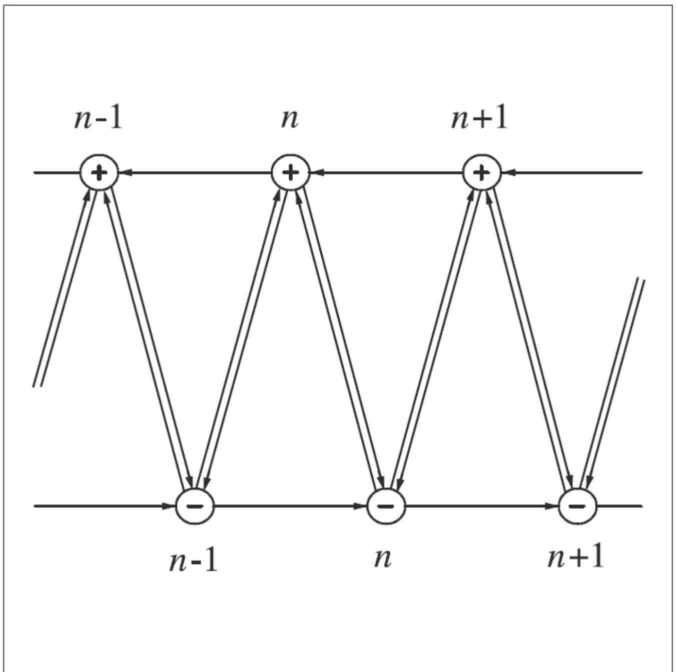

Рис. 5 Фраґмент двоніжкової драбинчастої ґратки-носія для напівдискретної інтеґровної нелінійної Шрьодінґерової системи з тлозалежними міжвузловими резонансними зв'язками.
Кружечки позначають місцезнаходження вузлів драбинчастої ґратки. Скісні стрілки вказують на первинні резонансні зв'язки (формалізовані параметрами α чи β) між основними польовими збудженнями на сусідніх вузлах, належних до протилежних ланцюжків драбинчастої ґратки. Горизонтальні стрілки вказують на складові (тлозалежні) резонансні зв'язки (формалізовані параметрами $-\alpha\nu$ чи $-\beta\mu$) між основними польовими збудженнями на сусідніх вузлах, належних до певного ланцюжка драбинчастої ґратки.

Інтеґровність (в сенсі Лакса) нелінійної Шрьодінґерової системи на стьожці трикутної ґратки доведено в *підрозділі 4.2*, де для неї побудовано представлення нульової кривини

$$\dot{L}(n\,|\,z) = A(n+1\,|\,z)L(n\,|\,z) - L(n\,|\,z)A(n\,|\,z) \tag{22}$$

з доречно вибраними спектральною $L(n|z)$ та еволюційною $A(n|z)$ матрицями другого (а окрім того і четвертого) порядку.

З метою найраціональнішого пошуку солітонних розв'язків досліджуваної нелінійної системи в *підрозділі 4.3* розвинуто адекватну форму перетворення Дарбу для допоміжних функцій асоційованої лінійної задачі, доповнену неявним перетворенням Беклунда для польових функцій оригінальної нелінійної задачі, та вказано на фундаментальну роль спектральних властивостей анзацу матриці Дарбу для відновлювання явного виду функцій Дарбу.

В *підрозділі 4.4* встановлено симетрійні властивості дискретних спектральних даних матриці Дарбу, дотичної до нелінійної Шрьодінґерової системи з нелінійностями притягувального типу.

В *підрозділі 4.5* методом одягання тривіального засівного розв'язку за допомоги розвинутих перетворень Дарбу та Беклунда знайдено ужинковий багатокомпонентний односолітонний розв'язок

$$q_+(n) = +\sinh(2\gamma)\frac{\exp[+2\mathrm{i}(\varkappa_+ + \varkappa_-)(n-\xi-y)+\mathrm{i}\chi]}{\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n-s-x)]} \tag{23}$$

$$q_-(n) = -\sinh(2\gamma)\frac{\exp[+2\mathrm{i}(\varkappa_+ + \varkappa_-)(n+\xi-y)+\mathrm{i}\chi]}{\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n+s-x)]} \tag{24}$$

$$\mu(n) = \mu - \frac{\exp(+2\mathrm{i}\varkappa)\sinh(2\gamma)\sinh[2(\gamma_+ + \gamma_- - \gamma)]}{\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n-s-x)]\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n+s-x)]} \tag{25}$$

для досліджуваної нелінійної Шрьодінґерової системи з нелінійностями притягувального типу. Не вдаючись до докладного формульного представлення кожного із задіяних тут дійсних солітонних параметрів та їхньої інтерпретації, зауважимо, що лише два з них y та x є залежними від часу. При цьому їхні часові залежності суттєвим чином визначаються параматричним розгойдуванням нелінійної системи внаслідок часових залежностей параметрів міжвузлової резонансної взаємодії. І лише за часонезалежних параметрів міжвузлової резонансної взаємодії постають суто лінійні часові залежності в координатних функціях y та x.

В *підрозділі 4.6* показано, що послідовне застосування процедури одягання Дарбу–Беклунда до передущого ужинкового розв'язку породжує в наступному ужинковому розв'язкові один додатковий солітон.

В *підрозділі 4.7* запропоновано прямий узагальнений рекурсивний підхід до пошуку нескінченної множини локальних законів збереження для напівдискретних інтеґровних нелінійних систем, асоційованих з тією чи іншою допоміжною спектральною задачею довільного порядку. В рамках цього підходу знайдено кілька найважливіших локальних законів збереження для нелінійної інтеґровної Шрьодінґерової системи на стьожці трикутної ґратки.

В *підрозділі 4.8* знайдено Гамільтонове представлення для напівдискретної інтеґровної нелінійної Шрьодінґерової системи з тлозалежними міжвузловими резонансними зв'язками, пов'язане з досить складною нестандартною дужкою Пуассона і специфіковане суттєво нерозщепною структурною (симплектичною) матрицею.

В *підрозділах 4.9–4.16* успішно розв'язано задачу з переформулювання оригінальної напівдискретної інтеґровної нелінійної Шрьодінґерової системи з тлозалежними міжвузловими резонансними зв'язками в термінах фізично скоригованих польових амплітуд з усима ознаками амплітуд присутности збуджень на вузлах ґратки. Головна задача в канонізуванні напівдискретної інтеґровної нелінійної Шрьодінґерової системи з тлозалежними міжвузловими резонансними зв'язками полягала у виявленні такого нелінійного перетворення до нових польових змінних, аби відповідна структурна матриця стала розщепною. Щоби просунутися у виконанні цієї мети, було здійснено цілу низку логічних кроків.

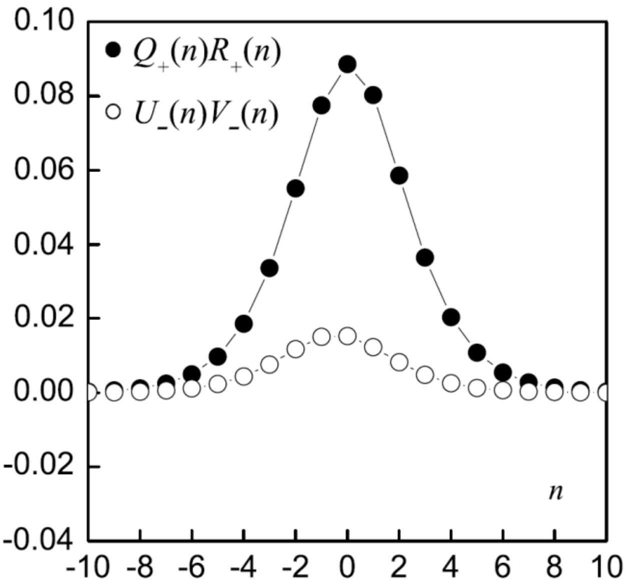

Рис. 6 Типові розподіли сильної $Q_+(n)R_+(n)$ (заповнені кружки) та слабкої $U_-(n)V_-(n)$ (порожні кружки) односолітонних компонент за номером елементарної комірки n у випадку мінус-асиметричної стандартизації в докритичній області $\mu\nu < 1$ фонового параметра $\mu\nu$. Розрахунки зроблено за $\mu = 0.7 = \nu$, $\gamma = 0.15$, $\varkappa = 0$, x=0. Видно, що обидві солітонні компоненти є компонентами світлого типу.

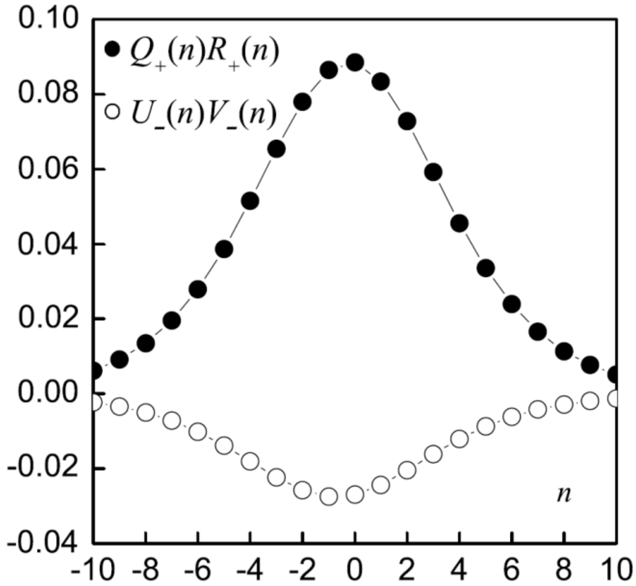

Рис. 7 Типові розподіли сильної $Q_+(n)R_+(n)$ (заповнені кружки) та слабкої $U_-(n)V_-(n)$ (порожні кружки) односолітонних компонент за номером елементарної комірки n у випадку мінус-асиметричної стандартизації в надкритичній області $\mu\nu > 1$ фонового параметра $\mu\nu$. Розрахунки зроблено за $\mu = 1.9 = \nu$, $\gamma = 0.15$, $\varkappa = 0$, $x = 0$. Видно, що обидві солітонні компоненти є компонентами темного типу.

Перш за все, було знайдено кілька найнижчих локальних густин з нескінченної ієрархії і встановлено Пуассонову та Гамільтонову структури системи в термінах первинних польових змінних. Потім, спираючись на так звані природні в'язі, виявлено критичність системи стосовно фонового параметра $\mu\nu$. З урахуванням критичности системи вдалося ввести набір проміжних польових змінних, а потім два варіанти первинно-проміжних польових змінних. Виявилось, що характерною ознакою кожного варіанту первинно-проміжних польових змінних є розщепність притаманної їм структурної матриці, а отже головну перешкоду для канонізації системи було подолано. В процесі стандартизації з'ясовано, що кожна із стандартизованих систем складається із слабкої і сильної підсистем. На загал, симетрія між слабкою підсистемою і сильною підсистемою є суттєво порушеною і підлягає відновленню лише за нульової величини фонового параметра. В докритичній області фонового параметра обидві канонічні підсистеми є підсистемами світлих нелінійних збуджень, тоді як в надкритичній області слабка підсистема обертається в підсистему темних нелінійних збуджень. В самій критичній точці слабка підсистема стає перманентно повністю незбуджуваною. Аби підкреслити відмінності поміж двома рівноправними варіантами стандартизації один з них було названо мінус-асиметричним, а інший – плюс-асиметричним. Перехід від одного типу нелінійних збуджень до іншого було підтверджено мінус-асиметричним та плюс-асиметричним стандартизованими багатокомпонентними односолітонними розв'язками як аналітично, так і графічно, з урахуванням формул для первинного (нестандартизованого) солітонного розв'язку. Рисунки 6 та 7, розраховані за формулами мінус-асиметричної стандартизації, ілюструють принципову відмінність в спільній поведінці двох взаємно асиметричних односолітонних компонент за докритичних $\mu\nu < 1$ (Рис. 6) і надкритичних $\mu\nu > 1$ (Рис. 7) значень головного фонового параметра $\mu\nu$.

В **п'ятому розділі** запропоновано велику низку двокомпонентних та кількакомпонентних напівдискретних інтеґровних нелінійних систем, асоційованих з допоміжними лінійними спектральними задачами другого, третього та четвертого порядків. При цьому допоміжні лінійні спектральні задачі третього та четвертого порядків і узгоджені з ними допоміжні лінійні еволюційні задачі знайдено автором дисертації. З огляду на великий об'єм матеріалу, викладеному у п'ятому розділі дисертації, нижче подано лише словесний опис одержаних там результатів.

В *підрозділі 5.1* запропоновано спосіб побудови параметрично розгойдуваних напівдискретних інтеґровних систем з далекосяжним характером резонансної взаємодії в рамках представлення нульової кривини зі спектральним оператором Абловіца–Ладіка шляхом адекватного збільшення числа членів в лоранівському розкладі еволюційного оператора за степенями спектрального параметра та цілком обґрунтованого введення (наперед нереґламентованих) часових залежностей до параметрів резонансної взаємодії. В рамках оберненої задачі теорії розсіяння цей підхід уможливлює знайти точні солітонні розв'язки системи з далекосяжним характером резонансної взаємодії, спираючись на асимптотичні значення матричних елементів еволюційного оператора за повздовжньою просторовою координатою. З іншого боку, саму інтеґровну нелінійну систему з далекосяжностями *N*-того порядку найпростіше одержати з рівнянь Гамільтона, взявши за функцію Гамільтона суперпозицію $2N$+1 перших інтеґралів руху (що залежать виключно від виду спектрального оператора) з коефіцієнтами (параметрами резонансної взаємодії), залежними від часу. Окрім того сформульовано умови здійснення параметричної локалізації солітонного пакету та вказано на калібрувальну еквівалентність між параметричними коливаннями солітона в параметрично розгойдуваних напівдискретних інтеґровних системах з далекосяжним характером резонансної взаємодії та Блоховими коливаннями солітона в напівдискретних інтеґровних системах з далекосяжним характером резонансної взаємодії під дією лінійного потенціалу. Вказано також на явні перетворення до скоригованих польових амплітуд як найбільш прийнятного засобу для адекватного тлумачення результатів розглянутих фізичних задач.

В *підрозділі 5.2* запропоновано напівдискретну інтеґровну нелінійну модель двох Тодових підсистем, пов'язаних через підсистему орієнтаційного типу, та знайдено її лаґранжівське формулювання. Показано, що допоміжні спектральний та еволюційний оператори моделі є матрицями розміру 3×3. При цьому допоміжна спектральна задача є задачею третього порядку, що дуже ускладнює інтеґрування моделі в рамках будь-якої модифікації методу оберненої задачі теорії розсіяння.

В *підрозділі 5.3* одержано дві загальні напівдискретні інтеґровні нелінійні системи, асоційовані з новими допоміжними лінійними спектральними задачами четвертого та третього порядків, відповідно. Кожна із запропонованих загальних систем є суттєво багатокомпонентною і допускає низку редукованих систем з огляду на різноманітні прийнятні варіанти фіксації попередньо недовизначених функцій вибору. Аналіз показує, що кожна з редукованих систем має складатися з кількох підсистем різної природи і тому варта подальшого ґрунтовного вивчення з метою конкретних фізичних застосувань. Наразі вже побудовано напівдискретну інтеґровну нелінійну систему, що характеризується двома параметрами зв'язку і складається з двох зв'язаних підсистем, перша з яких моделює деяку нелінійну самодуальну мережу дросельно-конденсаторного типу, а друга описує деяку нелінійну ґратчасту підсистему, коливання якої розхитує самодуальна підсистема.

В *підрозділі 5.4* представлено чотири пари нових допоміжних операторів Лакса, заданих матрицями розміру 3×3, що в рамках напівдискретного рівняння нульової кривини здатні зґенерувати велике число нових напівдискретних інтеґровних нелінійних систем, кожна з яких складається з двох зв'язаних підсистем відмінної природи, причому щонайменше кожна друга система має гарні перспективи для фізичних застосувань, оскільки допускає доречне стандартне (канонічне) Гамільтонове формулювання. Достатньо широкий перелік одержаних таким чином систем подано в двох працях здобувача [26,43]. Тут же варто вказати лише на дві найрепрезентативніші напівдискретні інтеґровні нелінійні системи, першою з яких є система взаємозв'язаних *PT*-симетричних екситонів і коливань ґратки нелінійного Тодового типу, а другою – найбільш неочікувана система *PT*-симетричних екситонів і нелінійних коливань ґратки з калібрувальною природою зв'язку між підсистемами.

У **шостому розділі** викладено ключові властивості загальної напівдискретної інтеґровної нелінійної системи на квазіодновимірній ґратці з трьома структурними елементами в елементарній комірці з її наступною редукцією до шестикомпонентної напівдискретної інтеґровної нелінійної системи Шрьодінґера з притягувальним типом нелінійностей.

В *підрозділі 6.1* зауважено, що мотивацією до цього завдання слугувала загальновизнана фундаментальна роль напівдискретних інтеґровних нелінійних Шрьодінґерових систем в найрізноманітніших областях фізичної науки, коли строгий опис більш складних явищ потребує залучення дедалі складніших багатокомпонентних інтеґровних нелінійних моделей.

В *підрозділі 6.2* дисертації виписано усі десять динамічних рівнянь запропонованої нелінійної Шрьодінґерової системи (включно з чотирма рівняннями для супутніх полів). Для скорочення записів нижче подано лише п'ять з них:

$$+\mathrm{i}\dot{\phi}_+(n)+\alpha[\phi(n)+\eta(n)\phi_+(n)]-$$
$$-\alpha[\nu(n)-\phi_+(n)\psi_-(n)]\phi_+(n+1)+\beta[1+\phi_+(n)\psi_+(n)]\phi_-(n-1)=0 \qquad (26)$$

$$+\mathrm{i}\dot{\phi}(n)+\alpha[\phi_-(n)+\mu(n)\phi_+(n)]+\beta[\phi_+(n)+\nu(n)\phi_-(n)]-$$
$$-\alpha[\theta(n)-\phi(n)\psi_-(n)]\phi_+(n+1)-\beta[\eta(n)-\phi(n)\psi_+(n)]\phi_-(n-1)=0 \qquad (27)$$

$$+\mathrm{i}\dot{\phi}_-(n)+\beta[\phi(n)+\theta(n)\phi_-(n)]-$$
$$-\beta[\mu(n)-\phi_-(n)\psi_+(n)]\phi_-(n-1)+\alpha[1+\phi_-(n)\psi_-(n)]\phi_+(n+1)=0 \qquad (28)$$

$$+\mathrm{i}\dot{\eta}(n)+\beta[\psi_+(n)\phi_+(n)-\psi_-(n)\phi_-(n)]+$$
$$+\alpha[\psi(n)+\eta(n)\psi_-(n)]\phi_+(n+1)-\alpha[\phi(n)+\eta(n)\phi_+(n)]\psi_-(n-1)=0 \qquad (29)$$

$$+\mathrm{i}\dot{\mu}(n)-\beta[\psi(n)\phi_-(n)-\psi_+(n)\phi(n)]+$$
$$+\alpha[\psi_+(n)+\mu(n)\psi_-(n)]\phi_+(n+1)-\alpha[\phi_-(n)+\mu(n)\phi_+(n)]\psi_-(n-1)=0, \qquad (30)$$

що відповідає випадку попарного комплексного спряження як основних $\psi_+(n)=+\phi_+^*(n)$, $\psi(n)=+\phi^*(n)$, $\psi_-(n)=+\phi_-^*(n)$, так і допоміжних (супутніх) $\theta(n)=\eta^*(n), \nu(n)=\mu^*(n)$ польових функцій, за умови попарного комплексного спряження $\beta=\alpha^*$ основних параметрів резонансного зв'язку. Залежності параметрів α та β від часу є джерелом параметричного впливу на динаміку представленої нелінійної системи. Фази ж цих комплексних параметрів моделюють дію зовнішнього магнетного поля. Термін "основні польові змінні" зауважує, що запропонована нелінійна система рівнянь насправді є шестикомпонентною у відповідності до числа незалежних (основних) польових змінних, дозволених чотирма природніми в'язями. Згідно з цією термінологією польові змінні $\eta(n)$, $\mu(n)$ та $\theta(n)$, $\nu(n)$ слід вважати залежними (суто допоміжними або супутніми). Аби розрізняти три структурні елементи в межах n-тої елементарної ґратки, першому з них надано мітку плюс (+), другий залишено без мітки, а третьому надано мітку мінус (–). Тим самим забезпечено відповідні маркування і для трьох пар основних польових змінних $\phi_+(n)$, $\psi_+(n)$; $\phi(n)$, $\psi(n)$ та $\phi_-(n)$, $\psi_-(n)$. Основні поля вважались швидкоспадними на обох просторових нескінченностях $|n|\to\infty$, а для кожної пари супутніх полів окремо постулювались специфічні умови просторово однорідного тла (фону) $\lim_{|n|\to\infty}\eta(n)=\eta$, $\lim_{|n|\to\infty}\theta(n)=\theta$ та $\lim_{|n|\to\infty}\mu(n)=\mu$, $\lim_{|n|\to\infty}\nu(n)=\nu$. За таких граничних умов регулярна ґратка-носій, асоційована з основними динамічними полями системи, набула вигляду інтеркальованої драбинчастої ґратки, зображеної на Рис. 8.

В *підрозділі 6.3* запропоновано і явно виписано взаємоузгоджені вирази для спектральної $L(n|z)$ та еволюційної $A(n|z)$ матриць, що в рамках напівдискретного матричного представлення нульової кривини вказує на інтеґровність загальної напівдискретної нелінійної системи на квазіодновимірній ґратці з трьома структурними елементами в елементарній комірці в сенсі Лакса, а отже і на інтеґровність кожної з її допустимих редукцій. Інтеґровність одержаної загальної системи дає змогу явним чином відшукати низку найважливіших локальних законів збереження, дотичних як до динамічних властивостей системи, так і до так званих природніх в’язей. Самі ж природні в’язі за загальним правилом надають частині польових змінних статусу супутніх, тобто залежних від основних польових змінних.

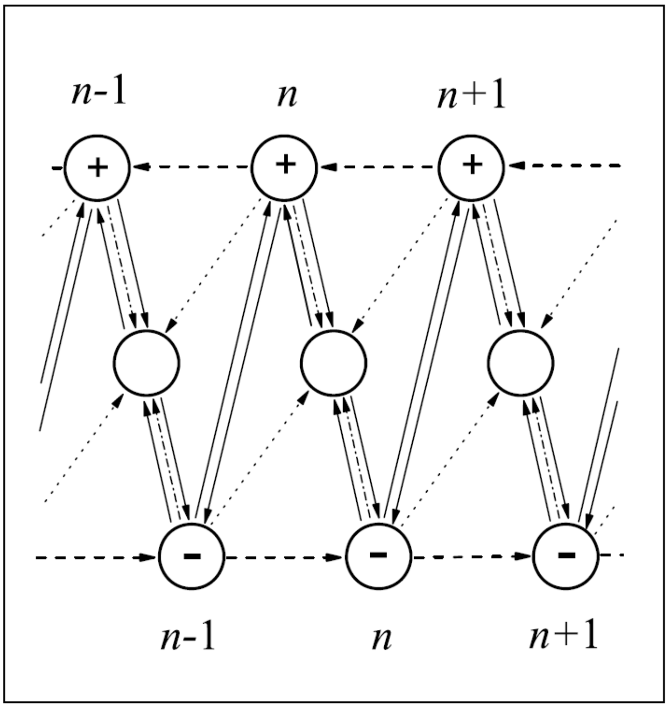

Рис. 8 Фраґмент інтеркальованої драбинчастої ґратки-носія з трьома структурними елементами в елементарній комірці, стосовної до нелінійної інтеґровної системи когерентно зв’язаних збуджень з трьома типами тлозалежних між-вузлових резонансних взаємодій. Кружечки з позначкою плюс складають верхній ланцюжок вузлів ґратки. Кружечки без позначки складають середній (інтеркальований) ланцюжок вузлів ґратки. Кружечки з позначкою мінус складають нижній ланцюжок вузлів ґратки. Неперервні стрілки вказують на первинні міжвузлові резонансні зв’язки, формалізовані параметрами α і β. Горизонтальні штрихові стрілки вказують на тлозалежні міжвузлові резонансні зв’язки, формалізовані параметрами $-\alpha\nu$ і $-\beta\mu$. Скісні штрихпунктирні стрілки вказують на тлозалежні міжвузлові резонансні зв’язки, формалізовані параметрами $\alpha\mu$ і $\beta\nu$. Скісні пунктирні стрілки вказують на тлозалежні міжвузлові резонансні зв’язки, формалізовані параметрами $-\alpha\theta$ і $-\beta\eta$.

Так, поданий в *підрозділі 6.4* детальний розгляд конкретної редукції до напівдискретної інтеґровної нелінійної системи Шрьодінґерового типу вказав на надзвичайно нетривіальний вплив супутніх полів за їхніх ненульовими фонових значень на Пуассонову структуру, уособлену п’ятдесятьма п’ятьма фундаментальними дужками Пуассона між польовими амплітудами, та на Гамільтонове формулювання динаміки системи в цілому.

В *підрозділі 6.5* показано, що представлення нульової кривини для загальної напівдискретної інтеґровної нелінійної системи є неодмінним ключем до інтеґрування рівнянь системи методом послідовного одягання засівного (тривіального або вже відомого) розв’язку в рамках перетворення Дарбу для допоміжної лінійної задачі та неявного перетворення Беклунда для польових функцій. Внаслідок симетрій, притаманних шестикомпонентній напівдискретній інтеґровній нелінійній системі Шрьодінґера з притягувальним типом нелінійностей, загальна схема одягання Дарбу–Беклунда зазнає відчутних спрощень, які приводять до прийнятно параметризованого ужинкового багатокомпонентного солітонного розв’язку, що складається з шести основних та чотирьох супутніх компонент.

В *підрозділі 6.6* звернено увагу на досить продуктивну концепцію супутніх полів, типову для напівдискретних інтеґровних систем, чий допоміжний спектральний оператор має детермінант, залежний від спектрального параметра. Суть справи полягає в тому, що ненульові фонові значення супутніх полів опосередковують ефективно кілька додаткових типів міжвузлової резонансної взаємодії між основними полями і тим самим створюють стьожкоподібну просторову конфігурацію ґратки-носія збуджень. Так, для шестикомпонентної напівдискретної інтеґровної нелінійної системи Шрьодінґера з притягувальним типом нелінійностей такі додаткові резонансні взаємодії асоціюються з наступними трьома типами параметрів міжвузлового резонансного зв’язку: (i) $-\alpha\nu$, $-\beta\mu$; (ii) $\alpha\mu$, $\beta\nu$; (iii) $-\alpha\theta$, $-\beta\eta$. Отже, в цілому вказана система забезпечує чотири типи резонансної міжвузлової взаємодії і таким чином суттєво збагачує свою динамічну поведінку.

Ще один принциповий пункт стосується уніфікованого погляду на деякий досить широкий клас багатокомпонентних напівдискретних інтеґровних нелінійних систем в цілому. Він випливає безпосередньо з порівняння загального виду спектрального оператора, характерного для напівдискретних інтеґровних нелінійних систем на ґратці з двома структурними елементами в елементарній комірці (розглянутого в четвертому розділі дисертації), із загальним видом спектрального оператора, характерного для напівдискретних інтеґровних нелінійних систем на ґратці з трьома структурними елементами в елементарній комірці (розглянутого в шостому розділі дисертації). Це порівняння вказує на універсальне правило: аби одержати загальну напівдискретну інтеґровну нелінійну систему на ґратці з *S* структурними елементами в елементарній комірці в рамках рівняння нульової кривини з доречними допоміжними операторами другого порядку, слід запостулювати спектральний оператор як матрицю з тими самими степенями спектрального параметра *z*, що й добуток *S* операторів Абловіца–Ладіка. Тут оператор Абловіца–Ладіка слід розуміти в його загальновідомому 2×2 матричному представленні

$$L^{AL}(n\,|\,z)=\begin{pmatrix} z & g_{12}(n) \\ g_{21}(n) & z^{-1} \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Щодо еволюційного оператора для *K*-тої інтеґровної нелінійної системи з ієрархії, зґенерованої спектральним оператором для систем із *S* структурними елементами в елементарній комірці, то його лоранівський розклад за степенями спектрального параметра *z* мусить включати ті самі степені, що й добуток 2*K* спектральних операторів Абловіца–Ладіка.

ВИСНОВКИ

В дисертації запропоновано та досліджено велику кількість нелінійних еволюційних моделей багатокомпонентних структурованих низьковимірних систем з огляду на їхнє застосування до об’єктів різноманітної фізичної природи. Серед таких фізичних об’єктів слід вказати на геофізичні осадові породи, нелінійні електричні мережі, напівпровідникові надструктури, природні та синтезовані макромолекули, синтезовані наностьожки, регулярно впорядковані зв’язані оптичні волокнини.

В *підсумках* до **кожного з розділів** дисертації детально викладено практично всі одержані наукові результати. Нижче сформульовано **найважливіші** з них.

Побудовано самодостатню динамічно-кінетичну нелінійну модель взаємозалежних пружніх деформацій та порушених міжзернинних зв'язків з природно вмотивованим асиметричним механізмом утворювання та заліковування мікротріщин типу м'якої хлипавки, в рамках якої з єдиних позицій відтворено практично усі відомі експериментальні ефекти з некласичного резонансного відгуку геофізичних осадових матеріалів на зовнішнє високочастотне збурення, найвиразнішими серед яких є (i) гістерезна поведінка резонансної кривої на висхідному і на низхідному схилах, (ii) лінійне пом'якшування резонансної частоти з ростом рівня урухомлювання, а також (iii) поступове (майже логарифмічне) відновлювання (більшання) резонансної частоти з плином часу за низького рівня динамічного деформування після попереднього кондиціювання зразка великим динамічним деформуванням.

Передбачено гістерезний ефект пам'яти геофізичних осадових матеріалів про найбільше високочастотне динамічне навантаження (динамічний ефект прикінцевої пам'яти), що згодом знайшов своє експериментальне втілення.

Побудовано фізично скориговану (канонічну) майже інтеґровну версію багатокомпонентної напівдискретної нелінійної Шрьодінґерової системи, яка завдяки точному врахуванню резонансних міжвузлових зв'язків поперечного типу слугує основою для моделювання динаміки внутрішньомолекулярних нелінійних збуджень на регулярних багатоланцюжкових драбинчастих ґратках.

Досліджено взаємовпливи між повздовжніми та поперечними внутрішньомолекулярними солітонними модами в збурених багатоланцюжкових ґратках та сформульовано умови міжмодової синхронізації для адресного доправлення скомпактованого нелінійного хвильового збудження до певного вузла трубчастої ґратки, підданої дії однорідного повздовжнього магнетного поля, а також для селективного пропускання солітона крізь ділянку дволанцюжкової ґратки із зиґзаґоподібним розташуванням одновузлових домішок завдяки слаломному ефекту чи для селективного (керованого знаком ефективної енергії поперечної солітонної моди) пропускання солітона крізь локальний дефект пропорційно модифікованих поперечних резонансних міжвузлових зв'язків багатоланцюжкової драбинчастої ґратки.

Побудовано інтеґровну нелінійну параметрично збурювану динамічну модель внутрішньовузлових збуджень на пласкій фермоподібній ґратці з двома вузлами в елементарній комірці та започатковано найбільш доречну симетризовану форму оберненої задачі розсіяння із залученням двох наборів допоміжних лінійних рівнянь та двох комплементарних систем дискретних рівнянь Марченка, в рамках яких знайдено чотирикомпонентні багатосолітонні розв'язки моделі з точним урахуванням дії магнетного поля, ортогонального до площини ґратки. Явно представлено односолітонний розв'язок.

Знайдено основні закони збереження інтеґровної нелінійної динамічної Шрьодінґерової системи внутрішньовузлових збуджень на пласкій фермоподібній ґратці та встановлено її Гамільтонове формулювання в термінах вихідних і фізично скоригованих (канонічних) польових амплітуд.

На квазіодновимірній ґратці з двома структурними елементами в елементарній комірці побудовано напівдискретну інтеґровну нелінійну Шрьодінґерову систему з додатковими параметрами міжвузлового резонансного зв'язку, керованими фоновими значеннями допоміжних полів, та (з урахуванням параметричного збурювання системи і впливу зовнішнього магнетного поля) знайдено її явний шестикомпонентний солітонний розв'язок в рамках спеціально створеної процедури перетворення Дарбу та неявного перетворення Беклунда.

Знайдено основні закони збереження напівдискретної інтеґровної нелінійної чотирикомпонентної Шрьодінґерової системи з додатковими тлозалежними параметрами міжвузлового резонансного зв'язку, сформульовано її Гамільтонове представлення в термінах суттєво нестандартної Пуассонової структури та запропоновано два фізично рівноцінні варіанти стандартизації динамічних рівнянь системи з невідворотнім порушенням симетрії між двома канонізованими підсистемами і зміною природи збуджених станів однієї з підсистем при переході через критичне значення головного фонового параметра.

Запропоновано загальну форму рекурсивного пошуку нескінченної ієрархії локальних законів збереження для багатокомпонентних напівдискретних інтеґровних нелінійних систем, асоційованих з допоміжними лінійними спектральними операторами довільного порядку.

В рамках представлення нульової кривини зі спектральним оператором Абловіца–Ладіка обґрунтовано метод побудови параметрично урухомлюваних напівдискретних інтеґровних систем з далекосяжним характером міжвузлової резонансної взаємодії шляхом адекватного збільшення числа членів в лоранівському розкладі еволюційного оператора за степенями спектрального параметра і введення (наперед нереґламентованих) часових залежностей до параметрів резонансної взаємодії. Сформульовано умови здійснення параметричної локалізації солітонного пакету та вказано на калібрувальну еквівалентність між параметрично розгойдуваними напівдискретними інтеґровними системами з далекосяжним характером резонансної взаємодії в полі зовнішнього просторово лінійного потенціалу і суто параметрично розгойдуваними напівдискретними інтеґровними системами з далекосяжним характером резонансної взаємодії, специфічно підлаштованим у часі.

Знайдено шість пар допоміжних операторів Лакса, заданих матрицями третього порядку, та дві пари допоміжних операторів Лакса, заданих матрицями четвертого порядку, кожна з яких в рамках доречного напівдискретного матричного рівняння нульової кривини започаткувала не менше однієї раніше невідомої багатокомпонентної напівдискретної інтеґровної системи, що складається зі зв'язаних підсистем суттєво відмінної природи.

На квазіодновимірній ґратці з трьома структурними елементами в елементарній комірці побудовано напівдискретну інтеґровну нелінійну Шрьодінґерову систему з додатковими параметрами міжвузлового резонансного зв'язку трьох типів, керованими фоновими значеннями допоміжних полів, та (з урахуванням параметричного збурювання системи і впливу зовнішнього магнетного поля) знайдено її явний десятикомпонентний солітонний розв'язок в рамках вдосконаленої процедури перетворення Дарбу та неявного перетворення Беклунда.

Для напівдискретної інтеґровної нелінійної шестикомпонентної Шрьодінґерової системи з кількома типами додаткових параметрів міжвузлового резонансного зв'язку на інтеркальованій драбинчастій ґратці виявлено надзвичайно нестандартну Пуассонову структуру, уособлену п'ятдесятьма п'ятьма фундаментальними дужками Пуассона між польовими амплітудами, та сформульовано Гамільтонове представлення динамічних рівнянь цієї системи.

В рамках рівняння нульової кривини з доречно узагальненими допоміжними операторами другого порядку сформульовано загальне правило побудови багатокомпонентних напівдискретних інтеґровних нелінійних систем на квазіодновимірних ґратках з довільним числом структурних елементів в елементарній комірці та з багатьма типами додаткових (тлозалежних) параметрів міжвузлового резонансного зв'язку.

СПИСОК ОСНОВНИХ НАУКОВИХ ПРАЦЬ, ОПУБЛІКОВАНИХ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

[1] О.О. Вахненко. Нова повністю інтеґровна дискретизація нелінійного рівняння Шрьодінґера. *Укр. Фіз. Журн*. **40**(1), 118–122 (1995).

[2] O.O. Vakhnenko and V.O. Vakhnenko. Physically corrected Ablowitz–Ladik model and its application to the Peierls-Nabarro problem. *Phys. Lett. A* **196**(5–6), 307–312 (1995).

[3] O.O. Vakhnenko. Nonlinear beating excitations on ladder lattice. *J. Phys. A: Math. Gen*. **32**(30), 5735–5748 (1999).

[4] O.O. Vakhnenko. Nonlinear model of intramolecular excitations on a multileg ladder lattice. *Phys. Rev. E***60**(3), R2492–R2495 (1999).

[5] O.O. Vakhnenko and M.J. Velgakis. Transverse and longitudinal dynamics of nonlinear intramolecular excitations on multileg ladder lattices. *Phys. Rev. E* **61**(6), 7110–7120 (2000).

[6] O.O. Vakhnenko and M.J. Velgakis. Slalom soliton dynamics on a ladder lattice with zig-zag distributed impurities. *Phys. Lett. A* **278**(1–2), 59–67 (2000).

[7] O.O. Vakhnenko and M.J. Velgakis. Multimode soliton dynamics in perturbed ladder lattices. *Phys. Rev. E* **63**(1), 016612 (11 pages) (2001).

[8] O.O. Vakhnenko. Solitons on a zigzag-runged ladder lattice. *Phys. Rev. E* **64**(6), 067601 (4 pages) (2001).

[9] O.O. Vakhnenko. Solitons in parametrically driven discrete nonlinear Schrödinger systems with the exploding range of intersite interactions. *J. Math. Phys*. **43**(5), 2587–2605 (2002).

[10] O.O. Vakhnenko. Three component nonlinear dynamical system generated by the new third-order discrete spectral problem. *J. Phys. A: Math. Gen*. **36**(20), 5405–5430 (2003).

[11] O.O. Vakhnenko. A discrete nonlinear model of three coupled dynamical fields integrable by the Caudrey method. *Ukr. J. Phys*. **48**(7), 653–666 (2003).

[12] O.O. Vakhnenko. Dynamics of multicomponent solitons in perturbed ladder lattices. *NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry* **153**, 503–510 (2004).
[13] O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko, T.J. Shankland, and J.A. Ten Cate. Strain-induced kinetics of intergrain defects as the mechanism of slow dynamics in the nonlinear resonant response of humid sandstone bars. *Phys. Rev. E* **70** (1), 015602(R) (4 pages) (2004).
[14] O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko, and T.J. Shankland. Soft-ratchet modeling of end-point memory in the nonlinear resonant response of sedimentary rocks. *Phys. Rev. B* **71**(17), 174103 (14 pages) (2005).
[15] O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko, T.J. Shankland, and J.A. TenCate. Soft-ratchet modeling of slow dynamics in the nonlinear resonant response of sedimentary rocks. *AIP Conference Proceedings* **838**(1), 120–123 (2006).
[16] V.O. Vakhnenko, O.O. Vakhnenko, T.J. Shankland, and J.A. TenCate. Dynamical realization of end-point memory in consolidated materials. *AIP Conference Proceedings* **838**(1), 124–127 (2006).
[17] O.O. Vakhnenko. Integrable nonlinear ladder system with background-controlled intersite resonant coupling. *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**(35), 11013–11027 (2006).
[18] O.O. Vakhnenko. Enigma of probability amplitudes in Hamiltonian formulation of integrable semidiscrete nonlinear Schrödinger systems. *Phys. Rev. E* **77**(2), 026604 (9 pages) (2008).
[19] V.O. Vakhnenko, O.O. Vakhnenko, J.A. TenCate, and T.J. Shankland. The dynamics of a sandstone bar under resonance loading. *Proceedings of the XX Session of the Russian Acoustical Society* (Moscow, October 27–31, 2008), 206–209 (2008).
[20] V. Vakhnenko, O. Vakhnenko, J. TenCate, and T. Shankland. Modeling of the nonlinear resonant response in sedimantary rocks. *Геофизическийжурнал* **32**(4), 195–197 (2010).
[21] O.O. Vakhnenko. Inverse scattering transform for the nonlinear Schrödinger system on a zigzag-runged ladder lattice. *J. Math. Phys*. **51**(10), 103518 (45 pages) (2010).
[22] O.O. Vakhnenko. Semidiscrete integrable nonlinear systems generated by the new fourth-order spectral operator. Local conservation laws. *J. Nonlin. Math. Phys.* **18**(3), 401–414 (2011).
[23] O.O. Vakhnenko. Semidiscrete integrable nonlinear systems generated by the new fourth-order spectral operator. Systems of obverse type. *J. Nonlin. Math. Phys*. **18**(3), 415–425 (2011).
[24] O.O. Vakhnenko. New integrable nonlinear lattice systems with two adjustable coupling parameters. *Nonlin. Engineering* **2**(3–4), 97–102 (2013).
[25] O.O. Vakhnenko. Four-wave semidiscrete nonlinear integrable system with *PT*-symmetry. *J. Nonlin. Math. Phys*. **20**(4), 606–622 (2013).
[26] O.O. Vakhnenko. Semidiscrete integrable systems inspired by the Davydov–Kyslukha model. *Ukr. J. Phys*. **58**(11), 1092–1107 (2013).
[27] O.O. Vakhnenko and V.O. Vakhnenko. Low-amplitude instability as a premise for the spontaneous symmetry breaking in the new integrable semidiscrete nonlinear

system. *Chaos, Solitons and Fractals* **60**, 1–10 (2014).
[28] O.O. Vakhnenko and V.O. Vakhnenko. Linear analysis of extended integrable nonlinear ladder network system. *Ukr. J. Phys*. **59**(6), 640–649 (2014).
[29] O.O. Vakhnenko. Integrable nonlinear Schrödinger system on a triangular-lattice ribbon. *J. Phys. Soc. Japan* **84**(1), 014003 (12 pages) (2015).
[30] O.O. Vakhnenko. Nonlinear integrable model of Frenkel-like excitations on a ribbon of triangular lattice. *J. Math. Phys*. **56**(3), 033505 (21 pages) (2015).
[31] В.О. Вахненко та О.О. Вахненко. *Хвильова Динаміка Структурованих Середовищ* (Наукова думка, Київ, 2016).
[32] O.O. Vakhnenko. Coupling-governed metamorphoses of the integrable nonlinear Schrödinger system on a triangular-lattice ribbon. *Phys. Lett. A* **380**(24), 2069–2074 (2016).
[33] O.O. Vakhnenko. Symmetry-broken canonizations of the semi-discrete integrable nonlinear Schrödinger system with background-controlled intersite coupling. *J. Math. Phys.* **57**(11), 113504 (16 pages) (2016).
[34] O.O. Vakhnenko. Asymmetric canonicalization of the integrable nonlinear Schrödinger system on a triangular-lattice ribbon. *Appl. Math. Lett.* **64**, 81–86 (2017).
[35] O.O. Vakhnenko. Distinctive features of the integrable nonlinear Schrödinger system on a ribbon of triangular lattice. *Ukr. J. Phys*. **62**(3), 271–282 (2017).
[36] O.O. Vakhnenko. Semi-discrete integrable nonlinear Schrödinger system with background-controlled inter-site resonant coupling. *J. Nonlin. Math. Phys.* **24**(2), 250–302 (2017).
[37] О.О. Вахненко. Напівдискретна інтеґровна нелінійна Шрьодінґерова система з фоново-керованою міжвузловою резонансною взаємодією. *Укр. Фіз. Журн. Огляди* **12**(1), 3–40 (2017).
[38] O.O. Vakhnenko. Semidiscrete integrable nonlinear Schrödinger system with background-controlled intersite resonant coupling. Short summary of key properties. *Ukr. J. Phys*. **63**(3), 220–225 (2018).
[39] O.O. Vakhnenko. Six-component semi-discrete integrable nonlinear Schrödinger system. *Lett. Math. Phys*. **108**(8), 1807–1824 (2018).
[40] O.O. Vakhnenko. Integrable nonlinear Schrödinger system on a lattice with three structural elements in the unit cell. *J. Math. Phys.* **59**(5), 053504 (25 pages) (2018).
[41] O.O. Vakhnenko. Nonlinear integrable system of coherently coupled excitations on an intercalated ladder lattice. *Eur. Phys. J. Plus* **133**(6), 243 (19 pages) (2018).
[42] O.O. Vakhnenko. Effect of lattice ribbonization via the background-controlled inter-site resonant interactions in nonlinear integrable systems. *AIP Conference Proceedings* **2037**(1), 020027 (11 pages) (2018).
[43] O.O. Vakhnenko. Four-component integrable systems inspired by the Toda and the Davydov–Kyslukha models. *Wave Motion* **88**, 1–12 (2019).

АНОТАЦІЯ

О.О. Вахненко. Нелінійна динаміка багатокомпонентних структурованих низьковимірних систем. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика. – Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, Київ 2019.

Пояснено усі відомі експериментальні ефекти з некласичного резонансного відгуку геофізичних осадових порід. Передбачено динамічний ефект дискретної пам'яти. Побудовано та досліджено велику низку інтеґровних нелінійних динамічних моделей багатокомпонентних структурованих низьковимірних систем, прийнятних для застосування до об'єктів різноманітної фізичної природи. Серед таких фізичних об'єктів слід вказати на нелінійні електричні мережі, напівпровідникові надструктури, природні та синтезовані макромолекули, синтезовані наностьожки, регулярно впорядковані зв'язані оптичні волокнини.

Ключові слова: Повільна динаміка, Гістереза, Осциляції Блоха, Селективний солітонний транспорт, Напівдискретна інтеґровна нелінійна система, Обернена задача розсіяння, Закони збереження, Перетворення Дарбу–Беклунда, Порушення симетрії, Параметрична локалізація.

АННОТАЦИЯ

А.А. Вахненко. Нелинейная динамика многокомпонентных структурированных низкомерных систем.– Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 – теоретическая физика. – Институт теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова НАН Украины, Киев 2019.

Объяснены все известные экспериментальные эффекты по неклассическому резонансному отклику геофизических осадочных пород. Предвидено динамический эффект дискретной памяти. Построено и исследовано большое количество интегрируемых нелинейных динамических моделей многокомпонентных структурированных низкомерных систем, пригодных для использования в объектах разнообразной физической природы. Среди таких физических объектов следует указать на нелинейные электрические цепи, полупроводниковые сверхструктуры, природные и синтезированные макромолекулы, синтезированные наноленты, регулярно упорядоченные связанные оптические волокна.

Ключевые слова: Медленная динамика, Гистерезис, Осцилляции Блоха, Селективный солитонный транспорт, Полудискретная интегрируемая нелинейная система, Обратная задача рассеяния, Законы сохранения, Преобразование Дарбу–Бэклунда, Нарушение симметрии, Параметрическая локализация.

ABSTRACT

O.O. Vakhnenko. Nonlinear dynamics of multi-component structured low-dimensional systems. – **Manuscript.**

Thesis for the Doctor of Sciences in Physics and Mathematics in speciality –01.04.02 – Theoretical Physics. – Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, NAS of Ukraine, Kyïv 2019.

The dissertation proposes and investigates a wide number of nonlinear evolutionary models of multi-component structured low-dimensional systems applicable to the objects of distinct physical origin.

A closed-form description is developed to explain nonlinear and slow dynamics effects exhibited by bar-shaped sedimentary (sandstone) rocks in longitudinal resonance experiments. The phenomenologically correct modeling of mutual feedback between the fast subsystems of longitudinal displacements and the slow subsystems of broken inter-grain and inter-lamina cohesive bonds is shown to elucidate the main experimental findings typical of forced longitudinal oscillations of sandstone bars, namely, (i) hysteretic behavior of a resonance curve on both its upward and downward slopes, (ii) linear softening of resonant frequency with an increase of driving level, and (iii) gradual (almost logarithmic) recovery (increase) of resonant frequency at low dynamical strain. In the framework of the suggested two-subsystem consideration a dynamical effect analogous to the widely known quasi-static effect of hysteresis with discrete (end-point) memory has been predicted, henceforth stimulating its successful experimental observation.

The physically-corrected nearly integrable version of nonlinear Schrödinger system on a regular multi-leg ladder lattice is suggested. The appropriately extended system makes it possible to investigate the interplays between the longitudinal and lateral solitonic modes in perturbed multi-leg lattices with regard to the mode-mode synchronization suitable for the address delivery of a compact nonlinear wave excitation to the proper site of a tubular lattice subjected to the uniform longitudinal magnetic field as well as for the selective transmission of a soliton through an imperfect segment of two-chain or multi-chain lattice. A particular attention is paid to the Bloch–Zener soliton oscillations caused by uniform longitudinal electric field as a perspective mechanism of electromagnetic radiation at terahertz frequencies.

The nonlinear dynamical model of intra-site excitations on a two-leg ladder lattice with the rungs arranged into a zigzag chain is constructed and integrated in the framework of a specially developed inverse scattering technique based on the two complementary sets of auxiliary linear problems and on the two complementary sets of discrete Marchenko equations. The system reduced to that of nonlinear Schrödinger type is studied in details and its physically-corrected Hamiltonian representation and soliton solutions are found explicitly. In the general case of time-dependent inter-site coupling parameters and nonzero Peierls phases, the theory is capable to model the dynamics of parametrically driven nonlinear ladder systems subjected to the transverse external magnetic field.

The most featured items characterizing the semi-discrete nonlinear Schrödinger system with background-controlled inter-site resonant coupling on a regular quasi-one-

dimensional lattice with two structural elements in the unit cell are summarized. The proposed system is shown to be integrable in the Lax sense that makes it possible to obtain its soliton solutions in the framework of a properly parametrized dressing procedure based on the Darboux transformation accompanied by the implicit form of Bäcklund transformation. The system consists of two basic dynamic subsystems and one concomitant subsystem, and its dynamics is embedded into the Hamiltonian formulation accompanied by the highly nonstandard Poisson structure. The nonzero background level of concomitant fields mediates the appearance of an additional type of the inter-site resonant coupling. As a consequence, it establishes the triangular-lattice-ribbon spatial arrangement of location sites for the basic field excitations. By means of tuning the main background parameter the system's dynamics is proved to be switched over between two essentially different regimes separated by the critical point. The physical implications of system's criticality become evident after a rather sophisticated procedure of canonization of basic field variables. The broken symmetry between canonical subsystems gives rise to the crossover effect in the nature of excited states.

A method to construct parametrically driven semi-discrete nonlinear integrable systems with the long-range type of inter-site resonant interactions is motivated. Conditions ensuring the parametric localization of a soliton wave packet in the systems of nonlinear Schrödinger type are formulated. For solitons in semi-discrete integrable systems with long-range resonant interactions the gauge equivalence between the parametric oscillations and the Bloch oscillations caused by the linear potential is strictly indicated.

In the framework of semi-discrete zero-curvature representation based on several new spectral operators of third and fourth orders a considerable number of new integrable few-component nonlinear systems permitting clear canonical Hamiltonian formulations suitable for physical applications has been developed.

The semi-discrete integrable nonlinear Schrödinger system on a intercalated ladder lattice is suggested and considered in details. Besides six truly independent basic field variables, the system is characterized by four concomitant fields whose nonzero background values produce three additional types of inter-site resonant interactions between the basic fields. The resulting effect of lattice ribbonization gives rise to the extremely nonstandard Poisson structure involved into the Hamiltonian equations as well as to the essential enrichment of the whole system's dynamics. The system's multi-component soliton solution is found explicitly in the framework of the Darboux–Bäcklund transformation approach.

The generalized recursive approach generating an infinite hierarchy of local conservation laws for any semi-discrete integrable nonlinear system associated with the auxiliary spectral problem of an arbitrary order is proposed. The main physically important local conservation laws for each integrable nonlinear system considered in dissertation are found.

Keywords: Slow dynamics, Hysteresis, Bloch oscillations, Selective solitonic transport, Semi-discrete integrable nonlinear system, Inverse scattering transform, Conservation laws, Darboux–Bäcklund transformation, Symmetry breaking, Parametrical localization.

Вахненко Олексій Олексійович
Нелінійна динаміка багатокомпонентних структурованих низьковимірних систем
(Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук)

Зам. – 9. Формат 60 × 84/16. Обл.-вид. арк. – 1.25

Підписано до друку 10 жовтня 2019 року Наклад 100 примірників

Поліграфічна дільниця Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова
Національної академії наук України,
03143 м. Київ, вул. Метрологічна, 14-б.