Національна академія наук України
Інститут Теоретичної Фізики імені М. М. Боголюбова
Національна академія наук України
Інститут Теоретичної Фізики імені М. М. Боголюбова

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Побережнюк Роман Володимирович

УДК 531.311; 530.199

# Дисертація

# Фазові перетворення та критична точка сильновзаємодіючої матерії в ядро-ядерних зіткненнях

01.04.02 – теоретична фізика

Подається на здобуття наукового ступеня кандидат фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

____________________________________

Науковий керівник — Горенштейн Марк Ісакович,
доктор фіз.-мат. наук, професор

Київ – 2017

## АНОТАЦІЯ

**Побережнюк Р. В. Фазові перетворення та критична точка сильновзаємодіючої матерії в ядро-ядерних зіткненнях. - Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.**

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 "теоретична фізика". - Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України, Київ, 2017.

Дисертація присвячена теоретичному вивченню флуктуацій та середніх чисел частинок в околі фазового переходу деконфайнмента та в околі критичної точки ядерної матерії в ядро-ядерних зіткненнях в рамках статистичних моделей.

В дисертації статистична модель ранньої стадії (Statistical Model of the Early Stage, SMES) використовується як модель фазового переходу деконфайнмента в сильновзаємодіючій матерії, народженій в релятивістських ядро-ядерних зіткненнях. Модель була запропонована в кінці 1990-х років для центральних зіткнень ядер свинець-свинець (Pb+Pb) на енергіях прискорювача CERN SPS. Вона передбачила декілька можливих сигналів деконфайнмента, які пізніше спостерігалися в експерименті NA49. Формалізм великого канонічного ансамблю використовувався в моделі для обчислення ентропії та повного числа дивних частинок. Це наближення може застосовуватися для реакцій в яких середнє число частинок – носіїв зарядів, що зберігаються, є значно більшим за одиницю. Нещодавні результати експерименту NA61/SHINE по вимірюванню народжених в непружніх протон-протон (p+p) взаємодіях адронів свідчать в підтримку того, що деконфайнмент може мати місце в цих реакціях. Проте, в цьому випадку середнє число частинок з ненульовим дивним зарядом менше одиниці. Отже для моделювання за допомогою SMES протон-протонних взаємодій необхідно враховувати точне збереження дивності. Це розширення моделі SMES представлене в дисертації. У результаті врахування точного закону збереження дивності температура, тиск та густина енергії системи, а також положення точок початку та кінця змішаної фази зазнають змін. Значна відмінність спостерігається у відношенні дивності до ентропії, яке виявляється суттєво залежним від розмірів системи.

В дисертації модель SMES також використовується для обчислення сере-

днього числа чарівних частинок в центральних Pb+Pb зіткненнях. Через мале число народжуваних чарівних частинок необхідно враховувати точний закон збереження чарівності навіть для центральних Pb+Pb зіткнень. Модель передбачає швидке зростання середнього числа чарівних частинок як функції енергії зіткнення. Проте, середнє число чарівних частинок, обчислене для центральних Pb+Pb зіткнень при енергії на нуклонну пару в системі центра мас $\sqrt{s_{NN}} = 17.3$ GeV, суттєво перевищує експериментально встановлену верхню границю. Таким чином, для несуперечливого опису відкритої чарівності, параметри та/або припущення моделі має бути переглянуто.

Дисертація також містить передбачення SMES стосовно флуктуацій спостережуваних народження адронів в центральних зіткненнях важких іонів і доповнює раніше опубліковані результати розглядом, нещодавно запропонованих, сильноінтенсивних мір флуктуацій (ці експериментальні міри флуктуацій застосовуються через необхідність виключити шум від флуктуацій розмірів системи в ядро-ядерних зіткненнях). В декількох розглянутих випадках передбачена суттєва зміна в залежності від енергії зіткнення цих величин, як результат фазового переходу. Одержані результати надають можливість спостереження нових сигналів деконфайнмента в експериментах по зіткненням важких іонів.

Друга модель що використовується в дисертаційній роботі – це, нещодавно запропонована, модель ван дер Ваальса в формалізмі великого канонічного ансамблю, що враховує ефекти квантової статистики (квантова модель ван дер Ваальса, QvdW). В роботі версія даної моделі з Бозе статистикою застосовується до опису рівноважної системи взаємодіючих $\pi$-мезонів. Рівняння стану ван дер Ваальса враховує взаємодії як притягання (через середнє поле) так і відштовхування (через виключений об'єм). Якщо сила притягання між піонами достатньо велика, виникає гранична температура $T_0$, що являє собою найбільшу температуру при якій система має стабільні розв'язки. Іншими словами, термодинамічна рівновага є неможливою при $T > T_0$. Тиск $p$, густина числа частинок $n$ та густина енергії $\varepsilon$ системи залишаються обмеженими при $T = T_0$. В той же час, при температурі $T$ близькій до $T_0$ теплоємність $C = d\varepsilon/dT$ і нормована варіація розподілу числа частинок $\omega[N]$ (флуктуації числа піонів) є пропорційними до $(T_0 - T)^{-1/2}$ і, таким чином, прямують до нескінченності при $T \to T_0$. Також, гранична температура відповідає найм'якішій точці рівняння стану, тобто квадрат швидкості звуку $c_s^2 = dp/d\varepsilon$ прямує до нуля як $(T_0 - T)^{1/2}$. Дуже схожа термодинамічна поведінка має місце в моделі Хагедорна для спеціального вибору степеневого показника, а саме $m^{-4}$, в перед-експоненційному множнику масового спектру $\rho(m)$.

Наявність граничної температури $T_0$ в моделі QvdW піонного газу є свідченням обмеження в області можливого застосування цієї моделі. Подібно до моделі Хагедорна, гранична температура в піонному газі ван дер Ваальса повинна бути перетворена в температуру переходу деконфайнмента після введення фундаментальних кварк-глюонних ступнів вільності, що може бути зроблено в майбутніх роботах.

Іншим застосуванням квантової моделі ван дер Ваальса в дисертаційній роботі є застосування до опису ядерної матерії (гіпотетичної нескінченної системи взаємодіючих нуклонів). В цьому випадку використовується версія моделі зі статистикою Фермі. Представлено порівняння моделей ядерної матерії QvdW та Валечки. Кожна модель містить два параметра, що характеризують притягання та відштовхування між нуклонами. Значення цих параметрів фіксуються з відомих властивостей ядерної матерії в основному стані. Обидві моделі передбачають фазовий перехід 1-го роду рідина-газ і дуже схожу поведінку в околі критичної точки (кінцевій точці лінії фазового переходу 1-го роду). Критичні індекси та критичні амплітуди в квантовій моделі ван дер Ваальса досліджуються аналітично та чисельно. Існують важливі відмінності в поведінці термодинамічних функцій в даних моделях при великих значеннях густини числа нуклонів. В той же час, обидві моделі входять в клас універсальності моделей середнього поля. Також, розглянуто гібридну модель, в якій взаємодії притягання здійснюються через обміни скалярними $\sigma$ мезонами, як в моделі Валечки, а взаємодії відштовхування реалізуються через поправку виключеного об'єму, як в квантовій моделі ван дер Ваальса.

В дисертації представлені вирази для флуктуацій числа нуклонів поблизу критичної точки ядерної матерії в моделі QvdW. Нормована варіація, коефіцієнт асиметрії $S\sigma$ та куртозис $\kappa\sigma^2$ розподілу числа нуклонів є розбіжними в критичній точці. Виявлено, що область кросоверу фазової діаграми характеризується великим значенням нормованої варіації, майже нульовим коефіцієнтом асиметрії і суттєво від'ємним куртозисом. Нетривіальна структура коефіцієнта асиметрії та куртозиса спостерігається в великій області навколо критичної точки на фазовій діаграмі; зокрема, обидві ці міри можуть приймати великі додатні та від'ємні значення. Газоподібна фаза характеризується додатними значеннями коефіцієнта асиметрії, тоді як рідинна фаза – від'ємними. Сильноінтенсивні міри $\Delta[E^*, N]$ та $\Sigma[E^*, N]$ флуктуацій числа нуклонів та енергії збудження також розглянуто. Ці величини також проявляють сингулярну поведінку поблизу критичної точки. Показано, що міра $\Delta[E^*, N]$ приймає як додатні так і від'ємні значення в околі критичної точки. Виходячи з міркувань універсальності, можна зазначити, що подібна поведінка очікується також в околі гіпотетичної критичної точки КХД. І не зважаючи різну фізичну природу критичної поведінки, в обох випадках флуктуації зарядів можуть бути чутливими до положення відповідної критичної точки та використовуватися для визначення цього положення.

Насамкінець, класичне рівняння стану ван дер Ваальса в формулюванні великого канонічного ансамблю застосовано до дослідження флуктуацій в загальній больцманівській системі взаємодіючих частинок ван дер Ваальса. Нехтування ефектами квантової статистики надало можливість одержати аналітичні вирази для флуктуацій числа частинок, а також для сильноінтенсивних мір флуктуацій числа частинок та енергії. Ці результати є якісно подібними до відповідних результатів одержаних для ядерної матерії в рамках моделі QvdW. Проте, на противагу випадку квантової статистики, больцманівське наближення дозволяє одержати вирази для флуктуацій в універсальному вигляді (представлені в термінах приведених змінних, дані вирази не залежать від конкретних значень параметрів притягання та відштовхування). Таким чином для флуктуацій в моделі ван дер Ваальса виконується закон відповідних станів, тоді як для квантової моделі ван дер Ваальса цей закон виконується лише наближено.

**Ключові слова**: деконфайнмент, ядро-ядерні зіткнення, зіткнення важких іонів, протон-протонні зіткнення, дивність, чарівність, флуктуації, критична точка, газ піонів, гранична температура, критичні індекси, ядерна матерія.

**Список публікацій здобувача.**

1. R. V. Poberezhnyuk, M. Gazdzicki, and M. I. Gorenstein, "Statistical Model of the Early Stage of nucleus-nucleus collisions with exact strangeness conservati-

on," Acta Phys. Polon. B **46**, no. 10, 1991 (2015).

2. V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, M. I. Gorenstein, and R. V. Poberezhnyuk, "Scaled variance, skewness, and kurtosis near the critical point of nuclear matter," Phys. Rev. C **92**, no. 5, 054901 (2015).
3. V. Vovchenko, R. V. Poberezhnyuk, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, "Non-Gaussian particle number fluctuations in vicinity of the critical point for van der Waals equation of state," J. Phys. A **49**, no. 1, 015003 (2016).
4. R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, "Limiting temperature of pion gas with the van der Waals equation of state," J. Phys. G **43**, no. 9, 095105 (2016).
5. R. V. Poberezhnyuk, M. I. Gorenstein, and M. Gazdzicki, "Fluctuations in the Statistical Model of the Early Stage of nucleus-nucleus collisions," Acta Phys. Polon. B **47**, 2055 (2016).
6. R. V. Poberezhnyuk, M. Gazdzicki and M. I. Gorenstein, "Open charm production in central Pb+Pb collisions at the CERN SPS: statistical model estimates," Acta Phys. Polon. B **48**, no. 9, 1461 (2017).
7. R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, "Quantum van der Waals and Walecka models of nuclear matter," Int. J. Mod. Phys. E 26, no. 10, 1750061 (2017).
8. V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, M. I. Gorenstein, R. V. Poberezhnyuk and H. Stoecker, "Critical fluctuations in models with van der Waals interactions," Acta Phys. Polon. B **10**, 753 (2017).
9. R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, "Limiting temperature of pion gas with the van der Waals equation of state," VII Young Scientists Conference "Problems of Theoretical Physics" Program and Abstracts, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv, Ukraine, December 13–15, 2016.
10. R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, "Limiting temperature of pion gas with the van der Waals equation of state," Presentations of Zim'anyi Winter School on Heavy Ion Physics, Wigner Research Center for Physics, Budapest, Hungary, December 5–9, 2016.
11. R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, "Critical point of nuclear matter," Presentations of Zim'anyi Winter School on

Heavy Ion Physics, Wigner Research Center for Physics, Budapest, Hungary, December 5–9, 2017.

12. R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, "Quantum van der Waals model versus Walecka model of nuclear matter," VIII Young Scientists Conference "Problems of Theoretical Physics" Program and Abstracts, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv, Ukraine, December 12–14, 2017.

## ABSTRACT

**Poberezhnyuk R. V. Phase transitions and critical point of strongly interacting matter in nucleus-nucleus collisions. - Qualification scientific work on the rights of the manuscript.**

Thesis for a degree of Candidate of Technical Sciences in specialty 01.04.02 “theoretical physics”. - Bogolubov Institute for Theoretical Physics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, 2017.

Thesis is devoted to the theoretical study of fluctuations and mean particle multiplicities in the vicinity of deconfinement phase transition and critical point of nuclear matter in nucleus-nucleus collisions within statistical models.

In thesis Statistical Model of the Early Stage, SMES, is used to describe a transition between confined and deconfined phases of strongly interacting matter created in nucleus-nucleus collisions. The model was formulated in the late 1990s for central Pb+Pb collisions at the CERN SPS energies. It predicted several signals of the transition (onset of deconfinement) which were later observed by the NA49 experiment. The grand canonical ensemble was used to calculate entropy and strangeness production. This approximation is valid for reactions with mean multiplicities of particles carrying conserved charges being significantly larger than one. Recent results of NA61/SHINE on hadron production in inelastic p+p interactions suggest that the deconfinement may also take place in these reactions. However, in this case mean multiplicity of particles with non-zero strange charge is smaller than one. Thus for the modeling of p+p interactions the exact strangeness conservation has to be implemented in the SMES. This extension of the SMES is presented in the thesis. Exact strangeness conservation law affects temperature, pressure and energy density of the system as much as beginning and end points of the mixed phase. Substantial difference is observed for strangeness to entropy ration which is found to be strongly dependent of the systems size.

The SMES is also used in thesis to calculate mean multiplicity of charm particles in central Pb+Pb collisions. A small number of produced charm particles necessitates the use of the exact charm conservation law. The model predicts a rapid increase of mean charm multiplicity as a function of collision energy. The mean multiplicity calculated for central Pb+Pb collisions at the center of mass energy per nucleon pair $\sqrt{s_{NN}} = 17.3$ GeV exceeds significantly the experimental upper limit. Thus, in order

to describe open charm production model parameters and/or assumptions should be revised.

Thesis also contains SMES predictions on fluctuations of hadron production properties in central heavy ion collisions and extends previously published results by considering the strongly intensive measures of fluctuations (this experimental fluctuation measures are applied in view of necessity to exclude noise from the systems size fluctuations in nucleus-nucleus collisions). In several of the considered cases a significant change in collision energy dependence of calculated quantities as a result of the phase transition is predicted. This provides an opportunity to observe new signals of the onset of deconfinement in heavy ion collisions experiments.

Another model applied in thesis is, recently proposed, van der Waals model in canonical ensemble formulation, which includes effects of quantum statistics (quantum van der Waals model, QvdW). In thesis the Bose statistics version of this model is applied to the equilibrium system of interacting pions. If the attractive interaction between pions is large enough, a limiting temperature $T_0$ emerges, i.e., no thermodynamical equilibrium is possible at $T > T_0$. The system pressure $p$, particle number density $n$, and energy density $\varepsilon$ remain finite at $T = T_0$, whereas for $T$ near $T_0$ both the specific heat $C = d\varepsilon/dT$ and the scaled variance of particle number fluctuations $\omega[N]$ are proportional to $(T_0 - T)^{-1/2}$ and, thus, go to infinity at $T \to T_0$. The limiting temperature also corresponds to the softest point of the equation of state, i.e., the speed of sound squared $c_s^2 = dp/d\varepsilon$ goes to zero as $(T_0 - T)^{1/2}$. Very similar thermodynamical behavior takes place in the Hagedorn model for the special choice of a power, namely $m^{-4}$, in the pre-exponential factor of the mass spectrum $\rho(m)$.

The presence of limiting temperature $T_0$ in QvdW model of pion gas is definitely a signal of the restricted validity of this model. Similar to the Hagedorn model, the limiting temperature of the QvdW pion system should be transformed to the temperature of deconfinement transition when the fundamental quark-gluon degrees of freedom are introduced. This consideration can be done in future studies.

Another implication of quantum van der Waals model in thesis is implication to a description of nuclear matter. The Fermi statistics version of the model is considered for this case. A comparable study of the quantum van der Waals and Walecka models of nuclear matter is presented. Each model contains two parameters which characterize the repulsive and attractive interactions between nucleons. These parameters are fixed in order to reproduce the known properties of the nuclear ground state. Both models predict a first-order liquid-gas phase transition and a very similar behavior in the vicinity of the critical point. Critical exponents and critical amplitudes of the quantum van der Waals model are studied both analytically and numerically. There are important differences in the behavior of the thermodynamical functions of the considered models at large values of the nucleon number density. At the same time both models fall into the universality class of mean-field theory. A hybrid model, where the attractive interactions are mediated through the scalar meson exchange and where the repulsive interactions are modeled by means of the excluded-volume correction, is considered as well for completeness.

Expression for nucleon multiplicity fluctuations near the critical point of nuclear matter are presented in thesis. The scaled variance, skewness, and kurtosis of nucleons multiplicity distribution diverge at the critical point. It is found that the crossover region of the phase diagram is characterized by the large values of the scaled variance, the almost zero skewness, and the significantly negative kurtosis. The rich structures of the skewness and kurtosis are observed in the phase diagram in the wide region around the critical point; namely, they both may attain large positive or negative values. The strongly intensive measures $\Delta[E^*, N]$ and $\Sigma[E^*, N]$ of the particle number and excitation energy fluctuations are also considered, and, similarly, show singular behavior near the critical point. The $\Delta[E^*, N]$ measure is shown to attain both positive and negative values in the vicinity of critical point. Based on universality argument, similar behavior is expected to occur in the vicinity of the QCD critical point. Very different physical origins of the critical behavior in nuclear matter and near the chiral CP are evidently expected. Nevertheless, in both cases the fluctuations of conserved charges are expected to be sensitive probes of critical behavior and may be used to pinpoint the location of the corresponding CP.

Finally, the classical van der Waals (vdW) equation of state in the grand canonical ensemble formulation is used to calculate particle number fluctuations in generic Boltzmann vdW system. Neglecting effects of the quantum statistics provided the analytical expressions particle multiplicity fluctuations, as well as for strongly intensive measures of particle multiplicity and energy fluctuations. These results are qualitatively similar to corresponding results obtained for nuclear matter within QvdW model. However, contrary to the Fermi statistics case, obtained expressions can be presented in reduced variables, in which they have universal form, i.e., they do not depend on particular values of the vdW parameters a and b.

**Key words**: Onset of deconfinement, nucleus-nucleus collisions, proton-proton collisions, charm production, fluctuations, critical point, pion gas, limiting temperature, critical exponents, nuclear matter.

**List of publications of applicant.**

1. R. V. Poberezhnyuk, M. Gazdzicki, and M. I. Gorenstein, "Statistical Model of the Early Stage of nucleus-nucleus collisions with exact strangeness conservation," Acta Phys. Polon. B **46**, no. 10, 1991 (2015).
2. V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, M. I. Gorenstein, and R. V. Poberezhnyuk, "Scaled variance, skewness, and kurtosis near the critical point of nuclear matter," Phys. Rev. C **92**, no. 5, 054901 (2015).
3. V. Vovchenko, R. V. Poberezhnyuk, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, "Non-Gaussian particle number fluctuations in vicinity of the critical point for van der Waals equation of state," J. Phys. A **49**, no. 1, 015003 (2016).
4. R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, "Limiting temperature of pion gas with the van der Waals equation of state," J. Phys. G **43**, no. 9, 095105 (2016).
5. R. V. Poberezhnyuk, M. I. Gorenstein, and M. Gazdzicki, "Fluctuations in the Statistical Model of the Early Stage of nucleus-nucleus collisions," Acta Phys. Polon. B **47**, 2055 (2016).
6. R. V. Poberezhnyuk, M. Gazdzicki and M. I. Gorenstein, "Open charm production in central Pb+Pb collisions at the CERN SPS: statistical model estimates," Acta Phys. Polon. B **48**, no. 9, 1461 (2017).
7. R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, "Quantum van der Waals and Walecka models of nuclear matter," Int. J. Mod. Phys. E 26, no. 10, 1750061 (2017).
8. V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, M. I. Gorenstein, R. V. Poberezhnyuk and H. Stoecker, "Critical fluctuations in models with van der Waals interactions," Acta Phys. Polon. B **10**, 753 (2017).
9. R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein,

"Limiting temperature of pion gas with the van der Waals equation of state," VII Young Scientists Conference "Problems of Theoretical Physics" Program and Abstracts, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv, Ukraine, December 13–15, 2016.

10. R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, "Limiting temperature of pion gas with the van der Waals equation of state," Presentations of Zim'anyi Winter School on Heavy Ion Physics, Wigner Research Center for Physics, Budapest, Hungary, December 5–9, 2016.
11. R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, "Critical point of nuclear matter," Presentations of Zim'anyi Winter School on Heavy Ion Physics, Wigner Research Center for Physics, Budapest, Hungary, December 5–9, 2017.
12. R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, "Quantum van der Waals model versus Walecka model of nuclear matter," VIII Young Scientists Conference "Problems of Theoretical Physics" Program and Abstracts, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv, Ukraine, December 12–14, 2017.

# Зміст

# Перелік умовних позначень

p+p - протон-протонне зіткнення,
A+A - ядро-ядерне зіткнення,
CERN - (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire) Європейська дослідницька організація з фізики високих енергій, Женева, Швейцарія,
SIS - (SchwerIonen Synchrotron) Прискорювач в Дармштадті, Німеччина, AGS - (Alternating Gradient Synchrotron) - Прискорювач важких іонів в Брукхевені, Нью-Йорк, США,
SPS - (Super Proton Synchrotron) - Прискорювач в CERN, Женева, Швейцарія,
RHIC - (Relativistic Heavy Ion Collider) - Прискорювач на зустрічних пучках в Брукхевені, Нью-Йорк, США,
CE - (Canonical Ensemble) - канонічний ансамбль,
GCE - (Grand Canonical Ensemble) - великий канонічний ансамбль,
SMES - (Statistical Model of the Early Stage) - Статистична Модель Ранньої Стадії релятивістських ядро-ядерних зіткнень,
КГП - Кварк-Глюонна Плазма,
КХД - квантова хромодинаміка,
IB-GCE - (Ideal Boltzmann - Grand Canonical Ensemble) - ідеальний газ в великому канонічному ансамблі в больцманівському наближенні,
UrQMD - (Ultra relativistic Quantum Molecular Dynamics), HSD - (Hadron String Dynamics) - пакети симуляцій p+p, A+A та p+A взаємодій,
EV - (Excluded Volume) - поправка виключеного (власного) об'єму частинок,
vdW - (van der Waals) - модель ван дер Ваальса,
QvdW - (Quantum van der Waals) - квантова модель ван дер Ваальса,
RMF - (Relativistic Mean-Field) - релятивістські моделі середнього поля,
GS - (Ground State) - основний стан ядерної матерії.

**Одиниці вимірювання.**

В роботі використовується система одиниць, в якій константа Планка $\hbar$, швидкість світла $c$, та константа Больцмана $k$ рівні одиниці.
MeV - (Mega electron-Volt), GeV - (Giga electron-Volt),
fm - (fermi) 1 fm $\simeq$ 197 MeV$^{-1}$.

# Вступ

**Актуальність теми.**

Фазові перетворення - це захоплюючі фізичні явища. Маленькі зміни температури та тиску призводять до драматичних змін мікроскопічних властивостей речовини. Поширений приклад з повсякденного життя – це кипіння або замерзання води. Фазова діаграма води показана на Рис. 1, де області існування різних

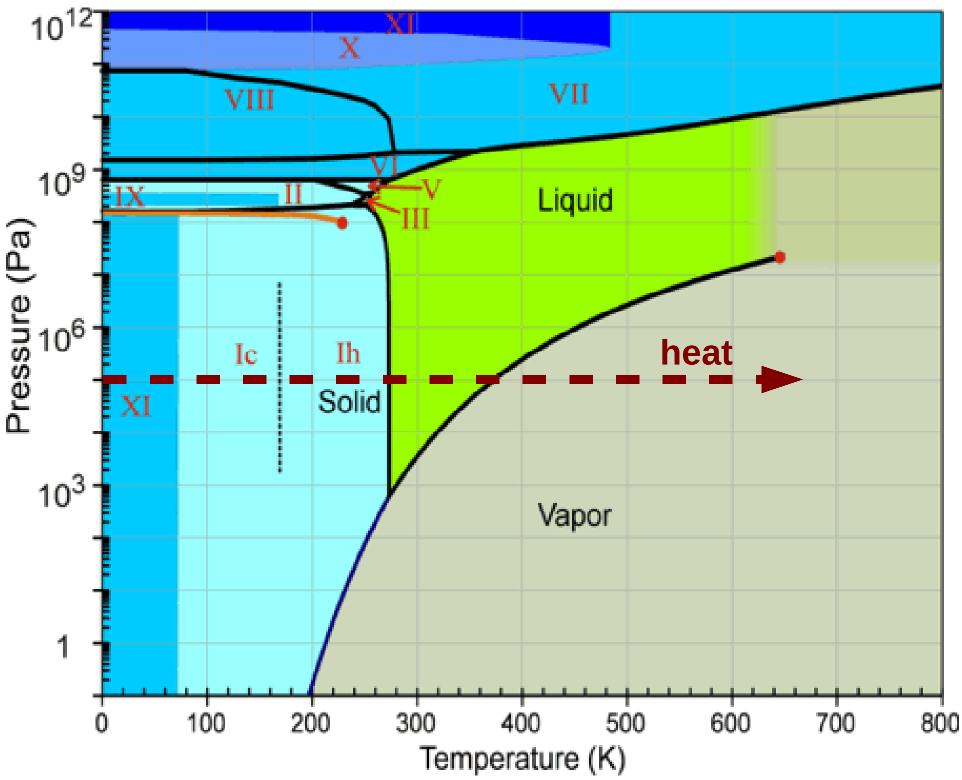



Рис. 1: Фазові стани води. Додаючи тепло (енергію) при сталому тиску вода переходить з твердого стану в рідкий, а потім з рідкого в газоподібний, як вказано пунктирною стрілкою.

фаз води позначені на діаграмі тиску-температури. Гріючи воду ми рухаємося через її різні стани і перетинаємо межі цих станів, як позначино пунктирною стрілкою на Рис. 1 для випадку постійного атмосферного тиску. Залежність температури води від кількості доданого тепла, яка називається кривою нагрівання води, показана на Рис. 2. В чистих фазах, таких як лід, вода або пар, температура зростає монотонно з додаванням тепла. Дві області постійної температури (сходинки) відповідають фазовим переходам лід-рідина та рідина-пар. В цих областях змішаної фази додане тепло використовується для фазового перетворення, а не для збільшення температури як в чистих фазах.

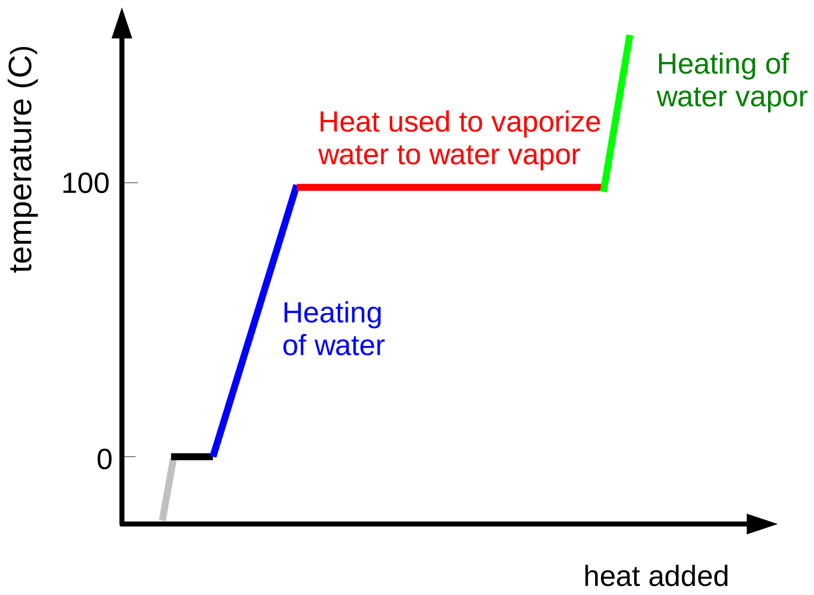



Рис. 2: Крива нагрівання води при сталому атмосферному тиску. Вона відповідає траєкторії фазової діаграми води що позначена пунктирною лінією на Рис. 1.

Властивості води та інших речовин, що нас оточують, та перетворення між їхніми різними фазами визначаються електромагнітними взаємодіями атомів та молекул. З іншого боку, властивості атомного ядра, що складається з нуклонів (протонів та нейтронів) визначаються сильними взаємодіями. Природно виникає запитання: чи сильновзаємодіюча речовина також існує в окремих фазах?. Які властивості цих фаз? При яких температурах відбуваються переходи між ними? Як ці переходи виглядають?

Більш ніж 50 років відомо що адрони (тобто мезони та баріони; всі сильновзаємодіючі частинки) складаються з більш елементарних частинок, кварків та глюонів. Однак, окремі кварки та глюони ніколи не спостерігались. Здається, що вони завжди “ув’язнені” всередині адронів. Але чи може існувати інша фаза сильновзаємодіючої речовини, в якій кварки та глюони рухаються окремо?

Існує 3 параметри що описують термодинамічні властивості системи. В нерелятивістських системах це температура, густина числа частинок та тиск. Рівняння стану пов’язує їх, тобто тиск є добре визначеною функцією температури та густини частинок для даної речовини. В експериментах над водою можна легко зафіксувати значення температури щоб означити точку на фазовій діаграмі на Рис. 1. На противагу воді, число частинок не зберігається в сильновзаємодіючій релятивістській речовині. Замість густини числа частинок зберігається баріонне число, тобто різниця між кількістю баріонів та анти-баріонів. Під-час розрахунків зручно використовувати еквівалентні змінні баріонної густини або баріонного хімічного потенціалу. Фазова діаграма сильновзаємодіючої речовини, що виникає з теоретичного розгляду та результатів експерименту, показана на Рис. 3 в змінних температури та та баріонного хімічного потенціалу. В лабораторних експериментах може бути створена сильновзаємодіюча речовина з різними температурами $T$ та баріонними хімічними потенціалами $\mu_B$. Функціональна залежність тиску від $T$ та $\mu_B$, тобто рівняння стану сильновзаємодіючої речовини, залишається предметом інтенсивних експерементальних та теоретичних досліджень.

Перехід між адронною (білою) та кварковою (кольоровою) фазою сильновзаємодіючої речовини ймовірно мав статися під-час розширення та охолодження раннього Всесвіту, приблизно 1 мікросекунду після Великого Вибуху. Космологічні свідчення цього переходу сьогодні важко ідентифікувати. Густа сильновзаємодіюча речовина існує всередині нейтронних зірок. Свідчення в підтримку існування кваркової речовини в центрі цих зірок з’явилися вже в 1960-х роках, скоро після того, як кваркова гіпотеза була сформована. Одні з перших статей [13, 14] приводили в якості аргумента: “радіус нейтрона приблизно 0.5–1 fm (1 fm = $10^{-15}$ m), тобто густина нейтронів приблизно дорівнює $8{\cdot}10^{14}$ g·cm$^{-3}$, в той час як густина в центрі нейтронної зірки може сягати $10^{16} - 10^{17}$ g·cm$^{-3}$. В цьому випадку, очікується що адрони перекриваються, та їхня індивідуальність ставиться під питання. Таким чином, ми робимо припущення, що речовина при таких густинах є “кварковим супом". Створення речовини в кварковому стані,

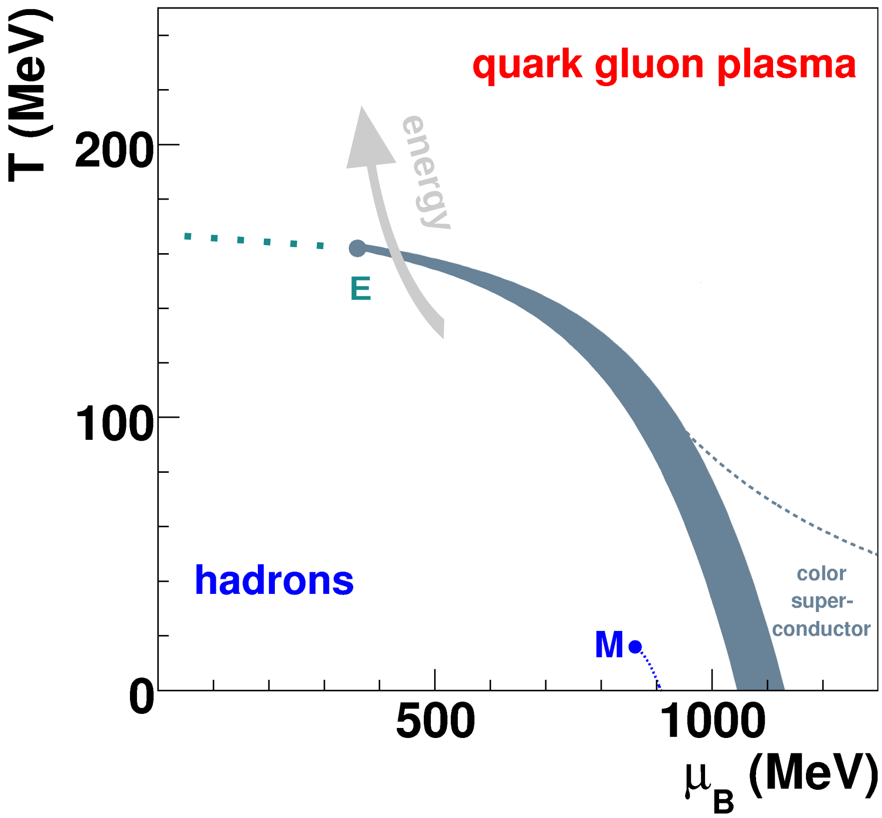



Рис. 3: Фази сильновзаємодіючої речовини. Зі збільшенням енергії зіткнення речовина утворена на ранній стадії ядро-ядерних зіткнень змінює свої властивості як показано стрілкою. При низьких енергіях вона знаходиться в білому стані (адрони), при достатньо високій енергії в кварковій фазі (кварк-глюонна плазма). $M$ це критична точка ядерного фазового переходу рідина-газ. Затемнена стрічка показує фазовий перехід 1-го роду, границю між фазою адронів та КГП. Очікується що ця границя закінчується критичною точкою $E$. В точці $E$ різкий фазовий перехід 1-го роду перетворюється в швидкий фазовий перехід кросоверу, що позначений пунктирною лінією.

тобто в фазі Кварк-Глюонної Плазми (КГП), може бути єдиною можливістю ‘побачити’ кварки та глюони що рухаються вільно в великому об’ємі.

Космологічні та астрофізичні об’єкти з необхідними властивостями нажаль важко досліджувати. Систематичне вивчення властивостей сильновзаємодіючої речовини потребує методу створення такої речовини в добре контрольованих умовах в лабораторії. Зіткнення двох важких ядер являє собою цей метод. Таке зіткнення продукує краплину сильновзаємодіючої речовини з високою густиною енергії, так-званий файербол. Природно очікувати, що зі зростанням енергії зіткнення густина енергії файербола також зростає. У випадку нагрівання води можна спостерігати послідовні перетворення між її фазами. Отже, є надія що, аналогічно, зі збільшенням енергії зіткнення ми зможемо спостерігати аномалії в залежності від енергії зіткнення властивостей народжених адронів і, таким чином, відкрити перехід між різними фазами сильновзаємодіючої речовини, народженої на ранній стадії зіткнень. Стрілка на Рис. 3 схематично відображає зміну положення файєрбола на фазовій діаграмі при зростанні енергія ядро-ядерних зіткнень. При достатньо великій енергії зіткнення ця краплина речовини може досягти фази КГП (див Рис. 3). Нажаль, час життя файєрболу дуже короткий, приблизно $10^{-22}$ секунд. Він швидко розширюється, охолоджується (див Рис. 4) та, насамкінець, розпадається на адрони та декілька легких ядер. Ці продукти розпаду вимірюються за допомогою детекторів, що оточують область зіткнення.

З'являються результати експериментів по високоенергетичним ядерним зіткненням, що свідчать в підтримку існування фазового переходу в сильновзаємодіючій речовині, передбаченого КХД. Це так-званий фазовий перехід деконфайнмента. Коротко розглянемо як відбувався пошук цього фазового перетворення, та його головні результати.

Пошук кваркової фази сильновзаємодіючої речовини, КГП, вже має довгу історію. Активність цього пошуку збільшилась в зв'язку з першими прискореннями ядер кисню та сірки на CERN SPS в 1986-му році ($\sqrt{s}_{NN} \approx 20$ GeV) та ядер свинцю в 1994-му році ($\sqrt{s}_{NN} \approx 17$ GeV). Вимірювання в ряді експериментів засвідчили що критична густина енергії була ймовірно перевищена і матерія з незвичайними властивостями формувалась в ранній стадії зіткнень [18]. Ключовою проблемою було виявлення експериментальних сигналів наявності КГП. Декілька сигналів формування стану КГП під час ранньої стадії зіткнень пропонувались раніше [19–21]. Однак, однозначність цих сигналів була поставлена під питання.

В середині 1990-х років вивчення результатів дослідів CERN-у та AGS в BNL (максимальна енергія $\sqrt{s}_{NN} \approx 5.5$ GeV) поставило [22, 23] цікаве запитання: які енергетичні залежності властивостей адронів між верхніми AGS енергіями та енергіями SPS? У відповідь на це запитання була запропонована Статистична Модель Ранньої Стадії (SMES) процесу зіткнень [24] в якій

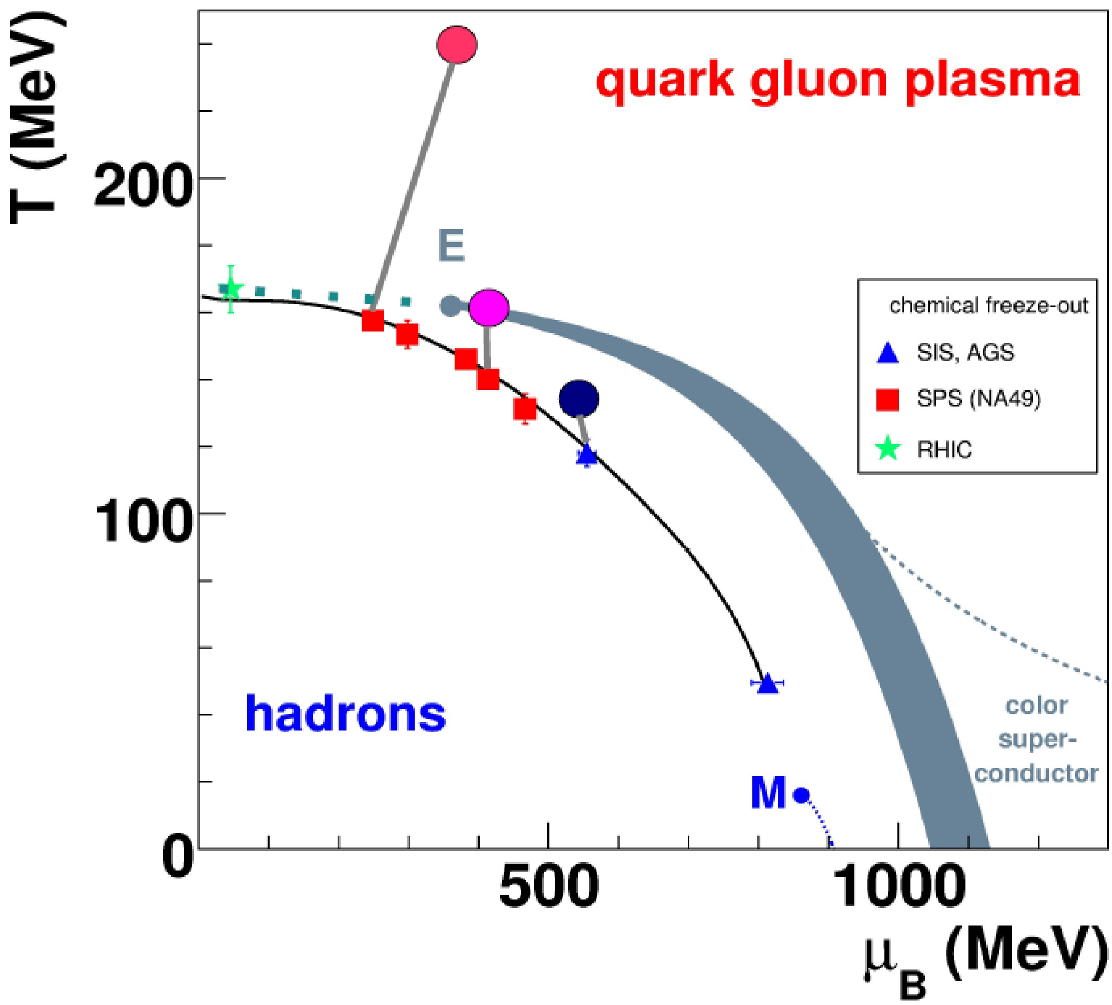



Рис. 4: Параметри сильновзаємодіючої речовини створеної на ранній стадії ядро-ядерних взаємодій показані суцільними кругами для Pb+Pb (Au+Au) зіткнкнь на верхніх AGS енергіях ($\sqrt{s_{NN}} \approx 5.5$ GeV), середніх SPS енергіях ($\sqrt{s_{NN}} \approx 7.6$ GeV) та верхніх SPS енергіях ($\sqrt{s_{NN}} \approx 17$ GeV). Створений файєрбол розширюється та охолоджується вздовж траєкторій позначених суцільними лініями та розпадається в точках фрізаута (суцільні квадрати, трикутники та зірки).

постулювалось рівняння стану з фазовим переходом 1-го роду. В цій моделі настання деконфайнмента призводило до немонотонної залежності декількох властивостей народжених адронів від енергії. Наприклад, модель передбачила гострий максимум у відношенні множини дивних адронів (адронів що містять $s$ та $\bar{s}$ кварки) до піонів (найлегших адронів) на початку області фазового переходу, при енергії приблизно $\sqrt{s_{NN}} \approx 7.5$ GeV. Це передбачення призвело

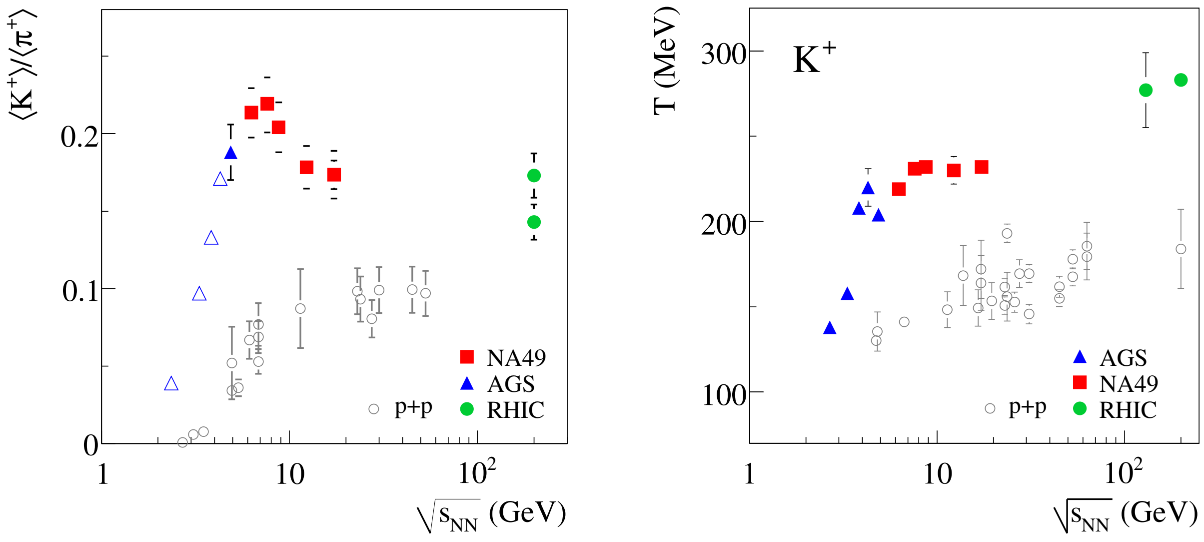



Рис. 5: Криві нагрівання сильновзаємодіючої речовини. Спостережувані властивості адронів (див. текст) нарисовані як функції енергії зіткнення для центральних Pb+Pb (Au+Au) зіткнень (верхня множина точок) та p+p взаємодій (нижня множина точок) [16, 17]

до розширення дослідницької програми SPS, програми енергетичного сканування [25, 26]. В рамках цієї програми лобові (центральні) зіткнення двох ядер свинцю (Pb+Pb) реєструвались на декількох нижніх енергіях SPS ($\sqrt{s}_{NN} =$ 6.3, 7.6, 8.7 та 12.3 GeV); експеримент NA49. Інші досліди важких іонів на SPS (NA45, NA50, NA57 та NA60) брали участь в вибраних запусках цієї програми [27]. Остаточні результати, отримані переважно коллаборацією NA49, якісно підтвердили очікування та передбачення моделі: швидкі зміни властивостей продукції адронів відбуваються всередині вузького діапазону енергій, $\sqrt{s}_{NN} =$ 7–12 GeV [16, 17].

Найбільш яскравий ефект спостерігається в енергетичній залежності відношення повного виходу каонів до повного виходу піонів, $\langle K^+\rangle/\langle\pi^+\rangle$, в центральних Pb+Pb зіткненнях. Це відношення представлено на Рис. 5 ліворуч. Після швидкого порогового підйому відношення демонструє гострий максимум в області SPS і потім, можна сказати, входить в плато при високих енергіях. Каони являють собою найлегші дивні адрони і, зважаючи на приблизну ізоспінову симетрію, вихід $\langle K^+\rangle$ дорівнює приблизно половині дивних (анти-)кварків, що утворюються при зіткненні та містяться в продуктах реакції. Таким чином, дані представлені на Рис. 5 (ліворуч) свідчать про те, що підмножина частинок носіїв дивності в утвореній речовині проходить через гострий максимум в ядро-ядерних зіткненнях на SPS. Ця особливість не спостерігається в протон-протонних реакціях, що відповідають нижній множині точок на Рис. 5 (ліворуч).

Другим важливим результатом являється стаціонарне значення вимірюваної температури $K^+$ мезонів в центральних Pb+Pb зіткненнях на енергіях SPS, що показане на Рис. 5 праворуч. В концепції файєрбола вимірювана температура пов'язана з локальним статистичним рухом частинок та їхньою колективною швидкістю розльоту у напрямку, що перпендикулярний вісі зіткнення.

На даний момент гострий максимум та наступне плато енергетичної залежності відношення $\langle K^+ \rangle / \langle \pi^+ \rangle$ були відтворені лише в рамках статистичної моделі ранньої стадії. В даній моделі це відображає відношення кількості дивних ступенів вільності до не-дивних ступенів вільності при настанні деконфайнмента. Стаціонарне значення вимірюваної температури $K^+$ мезонів було передбачене [28–30] як результат сталості тиску та температури, спричиненої співіснуванням адронної фази з кварковою фазою на ранній стадії ядро-ядерних зіткнень в області енергії SPS.

Ці результати свідчать в підтримку того, що фазовий перехід деконфайнмента в Pb+Pb зіткненнях починається в області енергії SPS. Захоплююча та багата фізика, що може вивчатись за допомогою ядро-ядерних зіткнень на енергіях CERN SPS мотивує експериментальні програми, а саме CERN SPS [31, 32], BNL RHIC [33], FAIR SIS [34] та JINR NICA [35].

В сучасному експерименті NA61, в якості наступних кроків, планується вимірювання відношення каонів до піонів в протон-протонних зіткненнях та повного числа D-мезонів в зіткненнях свинець-свинець. В зв'язку з цим становлять інтерес передбачення статистичної моделі ранньої стадії щодо утворення дивності в p+p взаємодіях та відкритої чарівності[1] в Pb+Pb зіткненнях на енергіях CERN SPS. Передбачення SMES щодо утворення дивності були обчислені в рамках великого канонічного ансамблю (GCE) [24]. Це наближення можна застосовувати для центральних Pb+Pb зіткнень на енергіях SPS. В цих зіткненнях середнє число частинок з ненульовим дивним зарядом значно більше одини-

[1]Відкрита чарівність – це адрони, що містять (анти-)чарівні кварки та мають ненульовий чарівний заряд (напр. $D$-мезон), в той час як закрита чарівність – це адрони, що містять чарівний кварк та анти-чарівний анти-кварк і мають нульовий чарівний заряд (напр. $J/\psi$).

ці. Проте, це наближення не можна застосовувати у випадку непружніх p+p взаємодій при енергіях SPS. В цьому випадку необхідно враховувати точне збереження дивності, що може бути досягнуто з використанням канонічного ансамблю (CE). Опублікована [53] коллаборацією NA49 верхня границя для середньої множинності $D^0 + \bar{D}^0$ мезонів в центральних Pb+Pb зіткненнях при $158A$ GeV, свідчить про необхідність враховувати точне збереження чарівності при обчисленні відкритої чарівності навіть для Pb+Pb зіткнень.

Також в експерименті NA61/SHINE планується вимірювання флуктуацій числа частинок. Флуктуації набагато важче вивчати ніж одиничні адронні властивості. Це може слугувати поясненням проблематичності локалізації критичної точки за допомогою вимірювання флуктуацій. Існує потреба експериментального та теоретичного розвитку розуміння флуктуацій в релятивістських ядро-ядерних зіткненнях. В зв'язку з цим, становлять інтерес теоретичні передбачення впливу можливого фазового переходу деконфайнменту на флуктуації в рамках моделі SMES.

Проте, перший фазовий перехід в сильновзаємодіючій речовині був спостережений при вивченні зіткнень на дуже низьких енергіях [15] (енергія на нуклон-нуклонну пару в системі центра мас $\sqrt{s}_{NN} < 2$ GeV). Цей перехід між ядерною рідиною та ядерним газом відбувається при температурі приблизно $6{\cdot}10^{10}$ K (5 MeV). Лінія фазового переходу та критична точка $M$ знаходиться в області високих $\mu_B$ та низьких $T$ всередині адронної фази фазової діаграми як показано на Рис. 3 та 4.

Відома феноменологія нуклон-нуклонного потенціалу свідчить про взаємодії відштовхування на малих відстанях та про взаємодії притягання на середніх відстанях. Найпростішою моделлю що враховує взаємодії притягання та відштовхування, а також містить фазовий перехід першого роду та критичну точку є модель ван дер Ваальса. Класичне рівняння стану ван дер Ваальса (vdW) нещодавно було узагальнене таким чином, щоб включати ефекти квантової статистики, і застосоване до опису симетричної ядерної матерії в роботах [71, 72]. В цій квантовій моделі ван дер Ваальса (QvdW) взаємодії відштовхування моделюються через поправку виключеного об'єму, тоді як взаємодії притягання описуються пропорційним до густини середнім полем. Модель QvdW досить добре описує основні властивості ядерної матерії. В рамках цієї моделі можливе отримання теоретичних передбачень щодо флуктуацій числа нуклонів в околі фазового переходу та критичної точки ядерної матерії.

Хоча, вочевидь, фізичні картини критичної поведінки ядерної матерії та матерії поблизу критичної точки деконфайнмента суттєво відрізняються, в обох випадках очікується, що флуктуації є чутливими пробами критичної поведінки і можуть використовуватися для визначення положення відповідної критичної точки. Особливий інтерес становлять такі характеристики флуктуацій як коефіцієнт асиметрії та куртозис розподілу числа частинок, оскільки очікується що ці величини є дуже чутливими до положення системи на фазовій діаграмі відносно положення критичної точки.

**Зв'язок роботи з наукоими програмами, планами, темами.**

Дисертаційна робота виконана у відповідності з державною науково-дослідною програмою, що виконувалися в Інституті теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України: "Дослідження сильновзаємодіючої матерії та структури адронів в релятивістських зіткненнях адронів та ядер" 2013 — 2017 рр. (номер державної реєстрації в УкрІНТЕІ – 0113U001092, шифр 1. 4. 1).

**Мета і задачі дослідження.**

Метою досліджень, проведених у дисертації, є теоретичний опис можливих сигналів фазових переходів та критичної точки сильно-взаємодіючої матерії в ядро-ядерних зіткненнях. Для її досягнення було визначено наступні задачі:

1. дослідити вплив можливого фазового переходу деконфайнмента на залежність від енергії зіткнення наступних спостережуваних величин: числа дивних адронів в непружніх p+p взаємодіях, числа чарівних адронів в зіткненнях Pb+Pb, флуктуацій від зіткнення до зіткнення числа адронів;
2. обчислити термодинамічні функції газу взаємодіючих $\pi$-мезонів;
3. одержати вирази для флуктуацій числа нуклонів та дослідити характеристики критичної поведінки в околі критичної точки ядерної матерії.

**Методи дослідження.**

У дисертації для знаходження характеристик утворення адронів в релятивістських ядро-ядерних та протон-протонних зіткненнях застосовувалась статистична модель ранньої стадії, що містить фазовий перехід деконфайнменту. До опису систем взаємодіючих піонів та нуклонів була застосована квантова модель ван дер Ваальса, зі статистикою Бозе та Фермі, відповідно. Для чисельних розрахунків в рамках цих моделей використовувалися методи програмування.

**Наукова новизна одержаних результатів.**

Серед нових наукових результатів, отриманих у роботі, можна відзначити наступні:

1. Поширено якісні теоретичні оцінки моделі SMES залежності відношення числа $K^+$ мезонів до $\pi^+$ мезонів від енергії зіткнення на зіткнення протонів та малих ядер.
2. Зроблено якісну оцінку можливого впливу фазового переходу деконфайнмента на поведінку множинності чарівних мезонів як функції енергії зіткнення до зіткнень ядер свинець-свинець.
3. Запропоновано нові можливі сигнали деконфайнменту, що засновані на вимірюванні сильноінтенсивних мір флуктуацій від зіткнення до зіткнення вимірюваних множинностей адронів.
4. Знайдено обмеження в застосуванні рівноважної статистичної моделі QvdW до опису системи взаємодіючих $\pi$-мезонів, що проявляється у наявності найбільшої можливої температури системи в рамках такої моделі.
5. Одержано вирази для флуктуацій, зокрема коефіцієнта асиметрії та куртозиса розподілу числа взаємодіючих нуклонів, в області критичної точки фазового переходу рідина-газ нескінченної ядерної матерії в наближенні середнього поля. Проаналізовано сингулярну поведінку флуктуацій в околі критичної точки. У випадку класичного газу ван дер Ваальса в великому канонічному ансамблі знайдено аналітичні вирази для коефіцієнта асиметрії та куртозиса розподілу числа частинок.
6. Обчислено критичні індекси критичної точки моделі ядерної матерії в рамках моделі QvdW.

**Практичне значення одержаних результатів.**

Результати дисертаційної роботи можуть бути корисними для пошуку сигналів фазового переходу деконфайнмента та для уточнення положення критичної точки ядерної матерії. Також робота вносять вклад в розуміння критичної поведінки флуктуацій в околі критичної точки, зокрема критичної точки ядерної матерії.

**Особистий внесок здобувача.**

В роботі [1] модель SMES релятивістських ядро-ядерних зіткнень була переформована з врахуванням точного закону збереження дивності. Знайдено вплив точного закону збереження дивності на термодинамічні функції та положення фазового переходу, а також обчислено залежність від енергії зіткнення та від розміру ядер учасників відношення дивності до ентропії у зіткненнях в області енергій SPS.

В роботі [2] в рамках моделі QvdW ядерної матерії одержано вирази для коефіцієнта асиметрії та куртозиса розподілу числа нуклонів як функцій температури та баріонного хімічного потенціалу та досліджено сингулярну поведінку цих величин в околі критичної точки ядерної матерії.

В роботі [3] одержано вирази для коефіцієнта асиметрії та куртозиса розподілу числа частинок як функцій приведеної температури та приведеної густини частинок в газі ван дер Ваальса в великому канонічному ансамблі та досліджено сингулярну поведінку цих величин в околі критичної точки газу ван дер Ваальса.

В роботі [4] виявлено явище граничної температури в моделі QvdW газу взаємодіючих $\pi$-мезонів. Знайдено залежність граничної температури від параметрів моделі та виявлено властивості поведінки фізичних величин в околі граничної температури. Обчислено значення параметрів моделі Хагедорна адронної матерії, при яких значення граничної температури та поведінка фізичних величин в цих двох моделях адронної матерії найбільш близькі.

В роботі [5] в рамках моделі SMES релятивістських ядро-ядерних зіткнень обчислено сильноінтенсивні міри флуктуацій від зіткнення до зіткнення числа частинок. Показано залежність цих величин від флуктуацій повної енергії системи.

В роботі [6] в рамках моделі SMES релятивістських ядро-ядерних зіткнень обчислено залежність від енергії зіткнення повного числа чарівних та античарівних частинок з врахуванням точного закону збереження чарівності.

В роботі [7] з використанням одних і тих же припущень про властивості ядерної матерії при нульовій температурі одержано значення параметрів моделей QvdW, Валечки та гібридної моделі ядерної матерії. Знайдено та порівняно положення критичної точки в цих моделях при даних значеннях параметрів. Обчислено критичні індекси критичної точки газу ван дер Ваальса з Фермі статистикою.

В роботі [8] обчислено сильноінтенсивні міри флуктуацій числа нуклонів та енергії в області критичної точки ядерної матерії з рівнянням стану ван дер Ваальса.

**Апробація результатів дисертації.**

Результати дисертаційної роботи доповідались на конференціях:

1. Zim'anyi Winter School on Heavy Ion Physics, Будапешт, Венгрія, 5-9 грудня 2016 р. (доповідь)
2. Конференція Молодих Вчених Сучасні Проблеми Теоретичної Фізики, Київ, Україна, 13-15 грудня 2016 р. (доповідь)
3. Zim'anyi Winter School on Heavy Ion Physics, Будапешт, Угорщина, 5-9 грудня 2017 р. (доповідь)
4. Конференція Молодих Вчених Сучасні Проблеми Теоретичної Фізики, Київ, Україна, 12-14 грудня 2017 р. (доповідь)

Результати також обговорювалися на семінарах відділу фізики високих густин енергії Інституту теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова.

**Публікації.** Результати дисертації опубліковані у 8 журнальних статтях [1–8], та матеріалах конференцій [9–12].

**Структура дисертації.** Робота складається зі вступу, чотирьох розділів основної частини, загальних висновків, додатка. Обсяг дисертації 120 сторінок, список використаних джерел (129 найменувань) зі списком публікацій автора (12 найменувань) займають 12 сторінок.

# Розділ 1

# Статистична модель ранньої стадії релятивістських ядро-ядерних зіткнень

## 1.1 Формулювання моделі фазового переходу між адронним газом та кварк-глюонною плазмою

Основні припущення, параметри та результати статистичної моделі ранньої стадії (SMES) коротко підсумовані в цій главі. Разом з позначеннями, що використовувалися в оригінальній роботі [24], вони збережені, наскільки це можливо, без змін, що дозволяє пряме порівняння результатів роботи з результатами опублікованими раніше.

Модель SMES є, ймовірно, найпростішою моделлю деконфайнмента. Це призводить до певних переваг та недоліків. Зокрема, модель SMES часто критикується за її прості припущення, що не можуть бути виправдані в рамках популярних динамічних підходів до ядро-ядерних зіткнень.

SMES припускає, що нуклони сповільнюються та втрачають частку $\eta < 1$ їхньої початкової енергії в центральних ядро-ядерних зіткненнях. Вони пролітають далі уносячи їхні баріонні та електричні заряди. Таким чином, розглядається нова народжена матерія. Всі заряди, що зберігаються, цієї матерії дорівнюють нулю. Припускається, що ця матерія утворюється статистичним чином.

Оскільки, в модель SMES матерія, що створена на ранній стадії зіткнення не має зарядів, що зберігаються, її властивості повністю визначаються доступною енергією та об'ємом в якому відбувається статистичне створення нових частинок. В центральних A+A зіткненнях об'єм обирається як лоренцівськи-скорочений в продовжному напрямку об'єм, що займають нуклони які зіштовхуються (нуклони учасники) від одного ядра:

$$V = \frac{4\pi r_0^3 A_p/3}{\sqrt{s_{NN}}/2m_N}\ , \tag{1.1}$$

де $m_N$ – це маса нуклона, $\sqrt{s_{NN}}$ – це енергія нуклонної пари в системі центра мас, $A_p$ – це кількість нуклонів учасників від одного ядра. Значення параметра $r_0$ вибране 1.30 fm з умови, що значення середньої баріонної густини в ядрі, $\rho_0 = 0.11$ fm$^{-3}$.

Лише частка, $\eta$, повної енергії в A+A зіткненнях перетворюється в енергію нових ступенів вільності, створених на ранній стадії. Це відбувається тому, що повне баріонне число уносить частину енергії. Вивільнена при зіткненні (непружня) енергія записується як

$$E \;=\; \eta\,(\sqrt{s_{NN}} \;-\; 2m_N)\,A_p\;, \tag{1.2}$$

де припускається що параметр $\eta$ є незалежним від енергії зіткнення та розміру системи. Для чисельних розрахунків використовується значення $\eta = 0.67$ [24].

Припущення (1.1) та (1.2) з $\eta = 1$ відповідають гідродинамічній моделі Ландау [36]. Аналогічно цій моделі, в SMES ми не розглядаємо конкретний динамічний механізм який призводить до швидкої термалізації речовини. Модель SMES припускає, що створення нових частинок на ранній стадії зіткнення – це статистичний процес, тобто всі мікроскопічні стани, дозволені законами збереження, являються однаково ймовірними.

Передбачення для множинності піонів в рамках SMES основані на припущенні, що ентропія, створена на ранній стадії зіткнення, приблизно зберігається підчас розширення народженої речовини. Дійсно, було спостережено що дисипативний ефект, який оцінюється відношенням повної в'язкості до густини ентропії, є малим для сильновзаємодіючої речовини. Це особливо справджується для області фазового переходу деконфайнмента (див, напр. [37]). Слід також відзначити, що взаємодії між частинками відіграють різну ролі щодо рівноважних властивостей (наприклад рівняння стану) та кінетичних коефіцієнтів (наприклад повної в'язкості). Це може бути ясно проілюстровано простим прикладом системи твердих кульок [38]. Введення радіуса твердого кора частинок $r$ призводить до малих поправок в рівнянні ідеального газу в результаті ефекту виключеного об'єму, проте, оскільки в'язкість зростає як $\propto r^{-2}$, вона сильно залежить від $r$.

Сильновзаємодіючі елементарні частинки – це кварки та глюони. Вважатимемо, що кварковий стан складається з $u$, $d$ та $s$ кварків та відповідних анти-кварків, має внутрішню кількість ступенів вільності, що дорівнює 6 (3 кольори та 2 спінових стани). Вкладом $c$, $b$ та $t$ кварків можна знехтувати через їхню велику масу. Внутрішнє число ступенів вільності для глюонів дорівнює 16 (8 кольорових станів та 2 спінових стана). Вважатимемо, що маси глюонів та не-дивних (анти-) кварків дорівнюють нулю. В якості маси дивних (анти-) кварків візьмемо 175 MeV [24]. Властивості речовини, що знаходиться в рівновазі, описуються рівнянням стану. У випадку кварків та глюонів використовується рівняння стану моделі мішків [39–41], тобто рівняння стану ідеального газу з поправкою у вигляді мішкової константи $B$. Цей рівноважний стан кварків та глюонів називається кварк-глюонною плазмою або Q (від англ. quark) станом.

В моделі SMES використовується ефективна параметризація адронного стану, який будемо називати W (від англ. white) станом. Вважатимемо, що не-дивні ступені вільності, вклади в ентропію яких переважають, є безмасовими бозонами. Їх внутрішнє число ступенів вільності візьмемо як 16, тобто приблизно в 3 рази менше ніж внутрішнє число ефективних ступенів вільності в КГП. Вважатимемо масу дивних ступенів вільності 500 MeV, що дорівнює масі каону. В якості значення внутрішнього числа дивних стеупенів вільності візьмемо число 14. Для W-стану оберемо рівняння стану ідеального газу. Зрозуміло, що до цього опису адронного стану потрібно ставитись лише як до деякої ефективної параметризації. Наведені чисельні значення параметрів були отримані шляхом фітування даних експериментів на AGS по A+A зіткненням, докладніше див. в роботі [24].

Модель припускає, що на ранній стадії A+A зіткнень завжди реалізується стан з максимальною ентропією. В моделі з двома різними (W та Q) фазами від енергії зіткнення залежить вигляд стану, ентропія якого є максимальною. Області енергії, в яких рівноважний стан існує у вигляді чистого W або чистого Q стану, розмежовані областю в якій обидва стани співіснують (змішана фаза). Умова максимальної ентропії еквівалентна припущенню фазового перехода першого роду з критерієм Гіббса для змішаної фази (див Додаток B в [24]). Зокрема, при даній температурі $T$ система знаходиться в чистій W або Q фазі залежно від того, тиск якої фази є більшим. Змішана фаза утворюється якщо обидва тиски рівні між собою, $p_W = p_Q$. Температуру перетворення між W та Q фазами положимо $T_c = 200$ MeV. Слід зазначити, що дані решіточної КХД оцінюють температуру фазового переходу кросоверу як $T_c = 150 - 170$ MeV.

Проте, в даній роботі збережено значення $T_c = 200$ MeV, що припускається в оригінальному формулюванні моделі [24]. Перегляд моделі, що має включати самоузгоджені зміни всіх її параметрів знаходиться за межами даної роботи.

Використовуючи зроблені припущення та значення параметрів, що наведені вище, можнуть бути проведені обчислення та зроблені передбачення в рамках SMES. Вираз для густини енергії на ранній стадії має вигляд:

$$\varepsilon \;\equiv\; \frac{E}{V} = \frac{\eta\rho_0(\sqrt{s_{NN}} - 2m_N)\sqrt{s_{NN}}}{2m_N}\,. \tag{1.3}$$

Функції тиску та густини енергії в W-фазі та Q-фазі дорівнюють:

$$p_W(T) \;=\; \frac{\pi^2 g_W}{90}T^4 \;+\; \frac{g_W^s}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{dk\,k^4}{3(k^2+m_W^2)^{1/2}}\exp\left[-\frac{(k^2+m_W^2)^{1/2}}{T}\right]\;, \tag{1.4}$$

$$\varepsilon_W(T) \;=\; \frac{\pi^2 g_W}{30}T^4 + \frac{g_W^s}{2\pi^2}\int_0^\infty dk\,k^2(k^2+m_W^2)^{1/2}\exp\left[-\frac{(k^2+m_W^2)^{1/2}}{T}\right]\;, \tag{1.5}$$

$$p_Q(T) \;=\; \frac{\pi^2 g_Q}{90}T_c^4 \;+\; \frac{g_Q^s}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{dk\;k^4}{3(k^2+m_Q^2)^{1/2}}\exp\left[-\frac{(k^2+m_Q^2)^{1/2}}{T}\right] \;-\; B\;, \tag{1.6}$$

$$\varepsilon_Q(T) \;=\; \frac{\pi^2 g_Q}{30}T^4 \;+\; \frac{g_Q^s}{2\pi^2}\int_0^\infty dk\,k^2(k^2+m_Q^2)^{1/2}\exp\left[-\frac{(k^2+m_Q^2)^{1/2}}{T}\right] \;+\; B\;. \tag{1.7}$$

Вклад дивних частинок в термодинамічні функції (1.4-1.7) взятий в больцманівському наближенні. Це спрощення є важливим для розгляду в CE який буде проведено в наступному параграфі. Звернемо увагу, що в роботі [24] для дивних кварків був використаний розподіл Фермі з масою $m_Q^* = 175$ MeV. Для того, щоб зменшити відмінність від попередніх результатів для розрахунків положимо більше значення маси дивного кварку, а саме $m_Q = 216.5$ MeV що призведе до такого ж числа дивних частинок при температурі фазового переходу ($T_c = 200$ MeV):

$$\int_0^\infty k^2 dk\;\exp\left(-\sqrt{k^2+m_Q^2}/T_c\right) \;=\; \int_0^\infty k^2 dk\;\left[\exp\left(\sqrt{k^2+m_Q^{*2}}/T_c\right) \;+\; 1\right]^{-1}\,. \tag{1.8}$$

Тоді мішкову константу $B = 570$ MeV/fm$^3$ можна обчислити використовуючи критерій рівних тисків Гіббса:

$$p_W(T_c) \;=\; p_Q(T_c)\;. \tag{1.9}$$

Густина ентропії в чистих фазах ($i$ =W, Q) дорівнює:

$$s_i(T) \;=\; \frac{p_i(T) \;+\; \varepsilon_i(T)}{T}\;. \tag{1.10}$$

В змішаній фазі W та Q фази співіснують. Частину об'єму що зайнята Q фазою позначимо як $\xi$. Густини енергії та ентропії в змішаній фазі дорівнюють:

$$\varepsilon_{\rm mix}(T_c) \;=\; \xi\,\varepsilon_Q(T_c) \;+\; (1-\xi)\,\varepsilon_W(T_c)\;, \tag{1.11}$$

$$s_{\rm mix}(T_c) \;=\; \xi\,s_Q(T_c) \;+\; (1-\xi)\,s_W(T_c)\;. \tag{1.12}$$

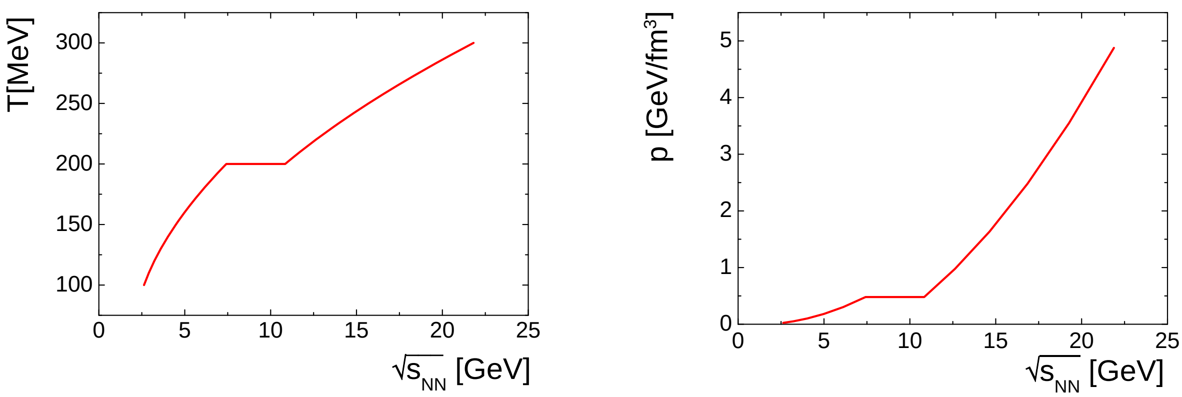



Рис. 1.1: Температура (ліворуч) та тиск (праворуч) речовини створеної на ранній стадії A+A зіткнень як функції енергії зіткнення.

Температура $T$ та тиск $p$ показані як функції енергії зіткнення на Рис. 1.1 ліворуч та праворуч, відповідно. Змішана фаза починається при енергії зіткнення $\sqrt{s_{NN,1}}$ та закінчується при $\sqrt{s_{NN,2}}$:

$$\sqrt{s_{NN,1}} \;=\; 7.42~{\rm GeV}, \qquad \sqrt{s_{NN,2}} \;=\; 10.83~{\rm GeV}\;. \tag{1.13}$$

Еквівалентність критерія Гіббса та умови максимальної ентропії проілюстрована на Рис. 1.2 ліворуч, де відношення $R_i = s_i/s_Q$ представлені для $i =$ W, mix, та Q.

Густина суми чисел дивних та анти-дивних частинок в великому канонічному ансамблі може бути обчислена як,

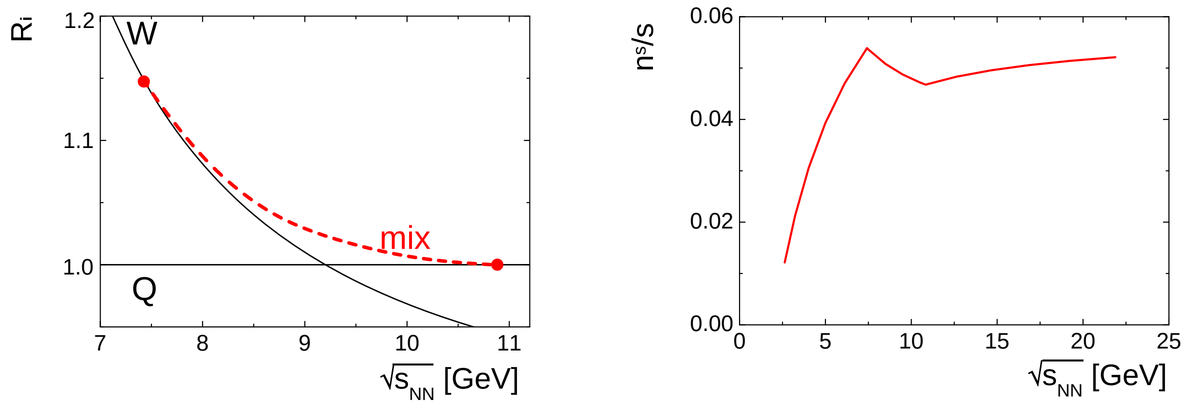



Рис. 1.2: Ліворуч: Відношення густин ентропії $s_i/s_Q$, де $i$ позначає W (суцільна лінія), Q (горизонтальна суцільна лінія), та змішану (пунктирна лінія) фазу, як функція енергії зіткнення. Кружки відповідають початку та кінцю змішаної фази, що обчислюються відповідно до рівняння (1.13). Праворуч: Відношення дивності до ентропії $n^s/s$ як функція енергії зіткнення.

$$n^s_W(T) \;=\; \frac{g^s_W}{2\pi^2}\int_0^\infty dk\, k^2 \exp\left[-\frac{(k^2+m_W^2)^{1/2}}{T}\right] \tag{1.14}$$

$$n^s_Q(T) \;=\; \frac{g^s_Q}{2\pi^2}\int_0^\infty dk\, k^2 \exp\left[-\frac{(k^2+m_Q^2)^{1/2}}{T}\right]\;, \tag{1.15}$$

$$n^s_{mix}(\xi) \;=\; \xi\, n^s_Q(T_c) \;+\; (1-\xi)\, n^s_W(T_c)\;. \tag{1.16}$$

На Рис. 1.2 праворуч показане відношення дивності до ентропії, $n_s/s$, як функція енергії зіткнення.

## 1.2 Врахування точних законів збереження дивності та чарівності в рамках канонічного ансамблю

В цій главі надається увага єдиному аспекту моделі SMES, що стосується ефектів скінченного розміру при утворенні дивних та чарівних адронів. Для того, щоб було можливе пряме порівняння результатів з попередніми опублікованими передбаченнями, всі інші припущення, параметри та позначення моделі збережені без змін.

**Закон збереження дивності.**

В p+p взаємодіях на енергіях CERN SPS середні множинності утворених дивних та анти-дивних частинок менші за одиницю. Таким чином, в цьому випадку, повинно бути враховане точне збереження дивності. В статистичних моделях це досягається в рамках формалізму канонічного ансамбля [42–49]. Статистична сума дивних частинок в канонічному ансамблі враховує, що в кожному мікроскопічному стані системи кількість дивних та анти-дивних зарядів рівна, $N_s = N_{\overline{s}}$. Для чистих W та Q фаз вона має простий вигляд:

$$Z_{ce}(T,V,\lambda) = \sum_{N_s=0}^{\infty}\sum_{N_{\overline{s}}=0}^{\infty}\frac{z^{N_s}}{N_s!}\,\frac{z^{N_{\overline{s}}}}{N_{\overline{s}}!}\,\delta(N_s - N_{\overline{s}})$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi\,\exp\left[z\left(e^{i\phi}+e^{-i\phi}\right)\right] = I_0(2z)\;, \tag{1.17}$$

де

$$z \;=\; z_{W,Q} \;=\; \lambda\,\frac{1}{2}\,V\,n^s_{W,Q}(T)\;. \tag{1.18}$$

Допоміжний параметр $\lambda$ в рівнянні (1.18) введено для обчислення повної густини дивності в CE:

$$n^{s(CE)}_{W,Q}(T,V) \;=\; \frac{1}{V}\left[\frac{\partial \ln Z_{ce}}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=1} \;=\; n^s_{W,Q}(T)\,\frac{I_1\left[V n^s_{W,Q}(T)\right]}{I_0\left[V n^s_{W,Q}(T)\right]}\;. \tag{1.19}$$

Відношення функцій Бесселя $I_1$ та $I_0$ в рівнянні (1.19) виражає пригнічення утвореної дивності (порівняно з її значенням в GCE при тих же значеннях об'єму та густини енергії), як результат накладання закону збереження повної дивності в кожному мікроскопічному стані в CE.

Для того, щоб обчислити термодинамічні функції системи з врахуванням точного закону збереження дивності зручно переписати їх в наступному вигляді:

$$p^{(\mathrm{CE})}_W(T,V) \;=\; \frac{\pi^2 g_W}{90}T^4 \;+\; T\,n^{s(\mathrm{CE})}_W(T,V)\;, \tag{1.20}$$

$$\varepsilon^{(\mathrm{CE})}_W(T,V) \;=\; \frac{\pi^2 g_W}{30}T^4 \;+\; \omega_W(T,V)\,n^{s(\mathrm{CE})}_W(T,V)\;, \tag{1.21}$$

$$p^{(\mathrm{CE})}_Q(T,V) \;=\; \frac{\pi^2 g_Q}{90}T^4 \;+\; T\,n^{s(\mathrm{CE})}_Q(T,V) \;-\; B\;, \tag{1.22}$$

$$\varepsilon^{(\mathrm{CE})}_Q(T,V) \;=\; \frac{\pi^2 g_Q}{30}T^4 \;+\; \omega_Q(T)\,n^{s(\mathrm{CE})}_Q(T,V) \;+\; B\;, \tag{1.23}$$

де $n_{W,Q}^{s(\mathrm{CE})}(T,V)$ дається рівнянням (1.19), а $\omega_{W,Q}(T)$ це середня енергія дивної частинки:

$$\omega_{W,Q}(T) \;=\; \frac{\int_0^\infty dk\, k^2 (k^2+m_{W,Q}^2)^{1/2}\, \exp\left[-\,(k^2+m_{W,Q}^2)^{1/2}/T\right]}{\int_0^\infty dk\, k^2 \exp\left[-\,(k^2+m_{W,Q}^2)^{1/2}/T\right]}\;, \tag{1.24}$$

з $m_W$ в W фазі, та $m_Q$ в Q фазі. Густина ентропії дається рівнянням (1.10).

Для $A_p \gg 1$ об'єм системи (1.1) великий, а значить $V n_{W,Q}^s \gg 1$. Тоді можна показати, що $I_1\left[V n_{W,Q}^s\right]/I_0\left[V n_{W,Q}^s\right] \to 1$ а отже, $n_{W,Q}^{s(\mathrm{CE})} \to n_{W,Q}^s$. В цій (термодинамічній) границі результати для CE та GCE стають еквівалентними, а рівняння (1.20-1.23) співпадають з рівняннями (1.4-1.7).

В змішаній фазі рівняння (1.19) має бути замінене на

$$n_{W,Q}^{s,\mathrm{mix}}(T,V,\xi) \;=\; n_{W,Q}^s(T)\,\frac{I_1[X]}{I_0[X]}\;, \tag{1.25}$$

де

$$X \;=\; X(T,V,\xi) \;=\; \xi\, V\, n_Q^s(T) \;+\; (1-\xi)\, V\, n_W^s(T) \tag{1.26}$$

це повне число дивних та анти-дивних частинок (адронів та кварків разом) в змішаній фазі в великому канонічному ансамблі. Адже умова канонічного ансамблю нульової повної дивності в змішаній фазі має виконуватись усією системою, а не окремо її фазами.

При кожній енергії $\sqrt{s_{NN}}$ необхідно обчислити $V$ та $\varepsilon$ за допомогою рівнянь (1.1) та (1.3), відповідно. CE рівняння (1.19-1.23) використовуються для отримання результатів для чистих W та Q фаз. В змішаній фазі, температура системи $T$ та параметер $\xi$ одержуються як розв'язок рівнянь:

$$\xi\, \varepsilon_Q^{\mathrm{mix}}[T,X] \;+\; (1-\xi)\, \varepsilon_W^{\mathrm{mix}}[T,X] \;=\; \varepsilon(\sqrt{s_{NN}})\;, \tag{1.27}$$

$$p_Q^{\mathrm{mix}}[T,X] \;=\; p_W^{\mathrm{mix}}[T,X]\;, \tag{1.28}$$

де $\varepsilon_{W,Q}^{\mathrm{mix}}$ та $p_{W,Q}^{\mathrm{mix}}$ даються рівняннями (1.20-1.23) з $n_{W,Q}^{s,\mathrm{mix}}$ (1.25) замість $n_{W,Q}^{s,(\mathrm{CE})}$ (1.19).

Енергія зіткнення $\sqrt{s_{NN,1}}$ та температура $T_1$, на початку змішаної фази, а також $\sqrt{s_{NN,2}}$ та $T_2$, в кінці змішаної фази, отримуються як розв'язок рівнянь (1.27,1.28) при $\xi = 0$ та $\xi = 1$, відповідно. Знаходимо:

$$T_1 \;=\; 203.4~\mathrm{MeV}\;, \qquad \sqrt{s_{NN,1}} \;=\; 7.20~\mathrm{GeV}\;, \tag{1.29}$$

$$T_2 \;=\; 202.9~\mathrm{MeV}\;, \qquad \sqrt{s_{NN,2}} \;=\; 10.75~\mathrm{GeV}\;. \tag{1.30}$$

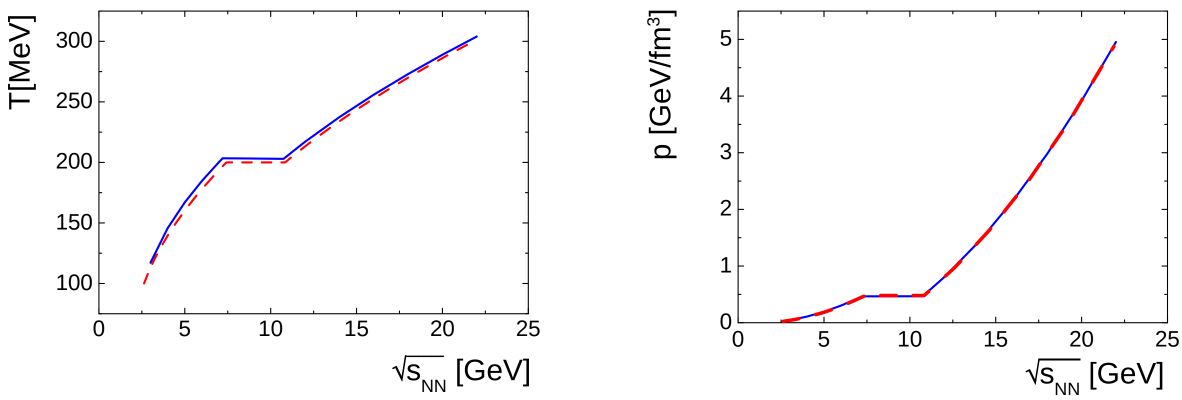



Рис. 1.3: Температура (ліворуч) та тиск (праворуч) в канонічному ансамблі як функції енергії зіткнення показані суцільними лініями. Пунктирні лінії відповідають результатам великого канонічного ансамблю представленим на Рис. 1.1.

Залежності $T$ та $p$ від енергії в рамках CE показана суцільними лініями на Рис. 1.3 ліворуч та праворуч, відповідно. Пунктирні лінії на Рис. 1.3 відповідають результатам великого канонічного ансамбля, що представлені на Рис. 1.1. Криві в CE та в GCE схожі. Трішки більше значення $T$ в CE ніж в GCE мають місце як компенсація канонічного пригнічення густини енергії. Зазначимо, що $\varepsilon$ як функція $\sqrt{s_{NN}}$ дається рівнянням (1.3) і, таким чином, є незалежною від розміру системи. Густина ентропії визначається рівнянням (1.10) в змінних $p$, $\varepsilon$, та $T$. Таким чином, на неї слабо впливає точний закон збереження дивності, що накладається в CE.

Критерій Гіббса (1.28), що використовується в канонічному ансамблі, знову ж таки, є еквівалентом умови максимальності ентропії. Це проілюстровано на Рис. 1.4 ліворуч, де відношення $R_i = (s_i/s_Q)_{\rm CE}$ обчислені в канонічному ансамблі для ентропії $s_W$, $s_Q$ та $s_{mix}$ при $A_p = 1$.

Рисунок 1.4 праворуч демонструє енергетичну залежність відношення дивності до ентропії, $n^s/s$, обчислену в рамках канонічного ансамбля для $A_p = 1, 3$ та 5, а також аналогічний результат для GCE ($A_p \gg 1$).

на Рис. 1.5 показане відношення

$$r \;\equiv\; \frac{[n^s/s]_{\rm CE}}{[n^s/s]_{\rm GCE}} \tag{1.31}$$

як функція $A_p$ при трьох енергіях зіткнення в області фазового переходу. Видно, що канонічне пригнічення відношення дивності до ентропії сильно залежить від

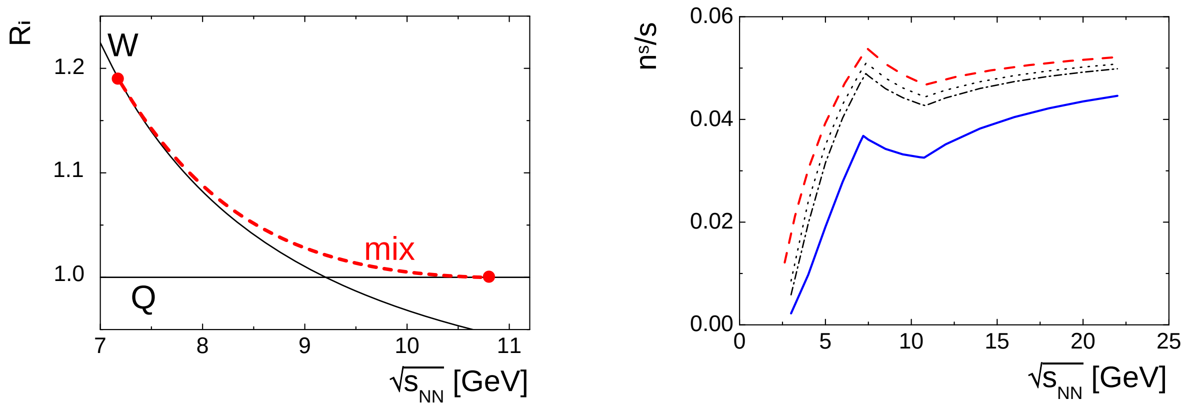



Рис. 1.4: Ліворуч: Відношення густин ентропії $s_i/s_Q$, де $i$ позначає W (суцільна лінія), Q (горизонтальна суцільна лінія), та змішану (пунктирна лінія) фазу, як функція енергії зіткнення в канонічному ансамблі ($A_p = 1$). Кружки відповідають початку та кінцю змішаної фази, що обчислюються відповідно до рівняння (1.29) та рівняння (1.30), відповідно. Праворуч: Відношення дивності до ентропії $n^s/s$ як функція енергії зіткнення в канонічному ансамблі. Суцільна лінія відповідає $A_p = 1$, а пунктирна лінія $A_p \gg 1$ співпадає з результатом для GCE, який представлений на Рис. 1.2 праворуч. Пунктирно-точкова та точкова лінії показують результат, що отриманий в канонічному ансамблі для $A_p = 3$ та 5, відповідно.

кількості учасників $2A_p$. Зі зростанням $A_p$ канонічне пригнічення спадає. Якщо $\sqrt{s_{NN}} > 10$ GeV параметр пригнічення (1.31) є близьким до одиниці вже при $A_p > 10$. канонічне пригнічення зростає зі зменшенням енергії зіткнення, коли повне число дивних частинок мале. Це показано точковою лінією на Рис. 1.5, яка відповідає зіткненням при $\sqrt{s_{NN}} = 5$ GeV.

Остаточно, відношення дивності до ентропії обчислене для центральних Pb+Pb зіткнень (GCE результат) та для непружніх p+p взаємодій (CE результат з $A_p = 1$) представлене на Рис. 1.6 як функція енергії зіткнення, що продовжена аж до діапазону енергій LHC. Лівий рисунок показує два результати окремо, в той час як правий показує їхнє відношення. Енергетична залежність, що була передбачена в рамках SMES лише якісно подібна до виміряної (Рис. 1.7). Очевидно, що SMES, найпростіша модель деконфайнменту, має бути суттєво видозмінена для того, щоб досягнути кількісної згоди з даними.

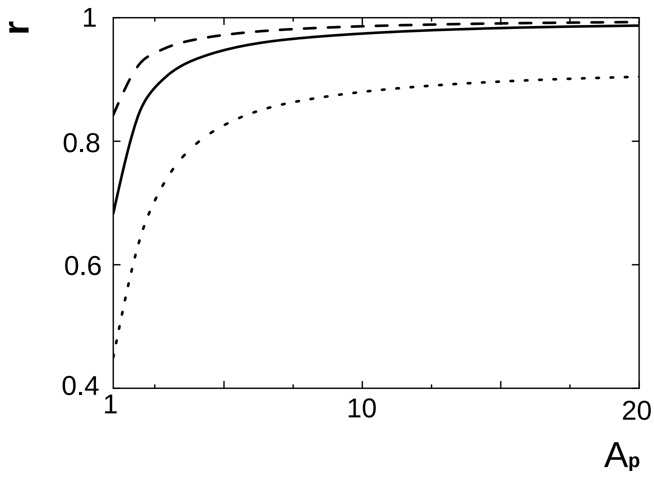
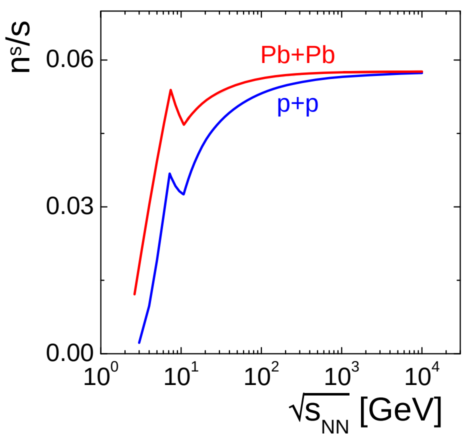



Рис. 1.5: Відношення дивності до ентропії в канонічному ансамблі поділене на відповідне відношення в GCE представлене як функція $A_p$. Подвійне відношення (рівнянняння (1.31)) обчислене на початку змішаної фази, $\sqrt{s_{NN}} \approx 7.3$ GeV (суцільна лінія), нище області змішаної фази $\sqrt{s_{NN}} = 5$ GeV (точкова лінія), вище області змішаної фази $\sqrt{s_{NN}} = 20$ GeV (пунктирна лінія).



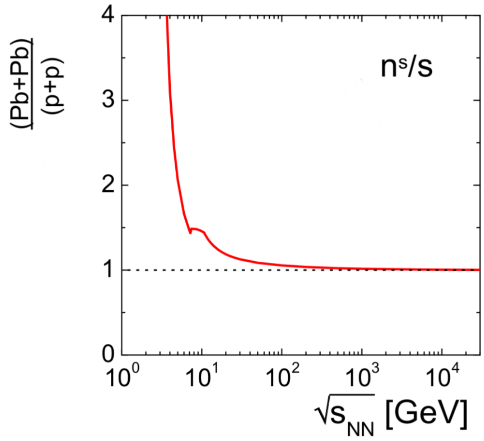




Рис. 1.6: Ліворуч: Залежність від енергії зіткнення відношення дивності до ентропії обчислена в рамках моделі SMES для центральних зіткнень Pb+Pb (GCE результат) та для непружніх p+p взаємодій (CE результат з $A_p = 1$). відношення нарисоване аж до діапазону енергій LHC. Праворуч: Відношення відношень дивності до ентропії обчислена в рамках моделі SMES для центральних зіткнень Pb+Pb та для непружніх p+p взаємодій як функція енергії зіткнення.

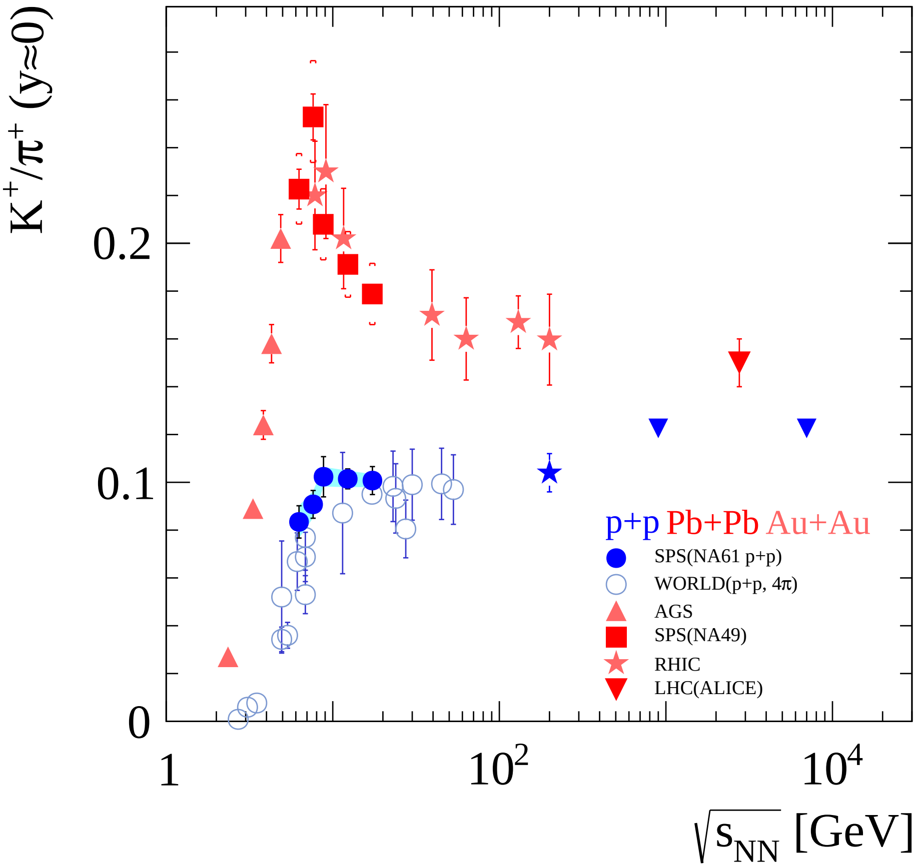



Рис. 1.7: *Рогоподібна* структура в енергетичній залежності відношення $K^+/\pi^+$, що розташована на низьких енергіях CERN SPS, тлумачиться як свідчення настання деконфайнмента. Перший раз ця структура була знайдена при досліді NA49 по центральним зіткненням Pb+Pb. Дивовижно, що її відгук можна розпізнати при непружніх взаємодіях p+p як видно з даних NA61/SHINE.

**Закон збереження чарівності.**

Передбачення моделей стосовно середньої множинності $c\bar{c}$-пар, що утворюються в центральних зіткненнях свинець-свинець на верхніх CERN SPS енергіях, $E_{\text{lab}} = 158A$ GeV, значно відрізняються. Розрахунки пертрубативної-QCD для p+p взаємодій були приведені в роботі [50]. Екстраполяція цих результатів на центральні Pb+Pb зіткнення призводить до оцінки $\langle N_{c\bar{c}} \rangle \cong 0.17$ [51]. Модель адронного резонансного газу з температурою хімічного фрізауту $T \cong 170$ MeV дає оцінку $\langle N_{c\bar{c}} \rangle = 0.3 \div 0.45$ [48]. Модель адронізації ALCOR [52] передбачила $\langle N_{c\bar{c}} \rangle \cong 3.6$. Навіть більше значення, $\langle N_{c\bar{c}} \rangle \cong 8$, було передбачене SMES [24]. Таким чином, передбачення різних моделей відрізняються майже на два порядка.

Передбачення моделей для залежності від розміру системи також сильно відрізняються. В моделях пов'язаних з пертрубативною КХД, $\langle N_{c\bar{c}} \rangle$ є пропорційним до $N_p^{4/3}$, де $N_p$ – це кількість нуклонів учасників в Pb+Pb зіткненнях. Залежність $\langle N_{c\bar{c}} \rangle \sim N_p$ передбачається в обох моделях, SMES [24] та моделі адронного резонансного газу [48]. Поведінка $\langle N_{c\bar{c}} \rangle \sim N_p^{1.7}$ була запропонована в рамках статистичної моделі коалесценції [48].

Коллаборація NA49 опублікувала [53] верхню границю 2.4 для середньої множинності $D^0 + \bar{D}^0$ мезонів, утворених в центральних Pb+Pb зіткненнях при 158*A* GeV. Це дає $\langle N_{c\bar{c}} \rangle < 3.6$, якщо припускається що, подібно до p+p зіткнень, приблизно третина $\bar{c}$ та $c$ кварків адронізуються в $D^0$ та $\bar{D}^0$ мезони.

Ціль даного параграфу обчислити залежність від енергії зіткнення відкритої чарівності в рамках моделі SMES та дослідити залежності результату від параметрів моделі, що пов'язані з утворенням чарівності.

Введемо чарівні ступені вільності припускаючи, що середня множинність носіїв чарівності мала ($\lesssim 1$). Це припущення має два наслідки:

$(i)$ можна знехтувати вкладом чарівних ступенів вільності в густину енергії та тиск системи (таким чином, положення фазового переходу лишається без змін);

$(ii)$ необхідно розглядати канонічний ансамбль (CE) для чарівних частинок, що забезпечує рівне число зарядів чарівності та анти-чарівності в кожному мікроскопічному стані системи.

CE використовувався вище для обчислення множинності дивних частинок в p+p взаємодіях. В рамках моделі SMES, аналогічно випадку дивності, CE формулювання для чарівності призводить до пригнічення продукції чарівності порівняно з продукцією в великому канонічному ансамблі відповідно до фактору, що дорівнює відношенню функцій Бесселя $I_1$ та $I_0$:

$$n_{W,Q}^{c(\mathrm{CE})}(T,V) \;=\; n_{W,Q}^{c}(T)\, \frac{I_1\left[V n_{W,Q}^{c}(T)\right]}{I_0\left[V n_{W,Q}^{c}(T)\right]}\;, \tag{1.32}$$

де густина суми числа чарівних та анти-чарівних частинок в GCE для чистих фаз може бути обчислена як

$$n_{W,Q}^{c}(T) \;=\; \frac{g_{W,Q}^{c}}{2\pi^2}\int_0^\infty dk\, k^2 \exp\left[-\,\frac{\sqrt{k^2+(m_{W,Q}^{c})^2}}{T}\right]\;, \tag{1.33}$$

де $m_W^c \cong 1.9$ GeV – це маса $D$-мезона, $m_Q^c \cong 1.3$ GeV – це маса зачарованого кварка. Фактор виродження для (анти-)чарівних кварків $g_Q^c = 12$, тоді як фактор виродження для (анти-)чарівних частинок в кварк-глюонній фазі, $g_W^c$, розглядається як вільний параметр моделі. В змішаній фазі рівняння (1.32) необхідно замінити на

$$n_{\rm mix}^{c(\rm CE)}(T,V,\xi) \;=\; X\,\frac{I_1[X]}{I_0[X]}\;, \tag{1.34}$$

де

$$X \;=\; X(T,V,\xi) \;=\; \xi\,V\,n_Q^c(T) \;+\; (1-\xi)\,V\,n_W^c(T) \tag{1.35}$$

це середнє число чарівних та анти-чарівних частинок в змішаній фазі, що обчислене в GCE. При кожному $\sqrt{s_{NN}}$ необхідно обчислити $V$ та $\varepsilon = E/V$ відповідно до рівнянь (1.1) та (1.2), і потім середня множинність $c\bar{c}$-пар обчислюється як

$$\langle N_{c\bar{c}}\rangle \;=\; \frac{1}{2}\,n^{c\,(\rm CE)}\,V\;, \tag{1.36}$$

де $n^{c(CE)}$ дана рівнянням (1.32) в чистих фазах або рівнянням (1.34) в змішаній фазі.

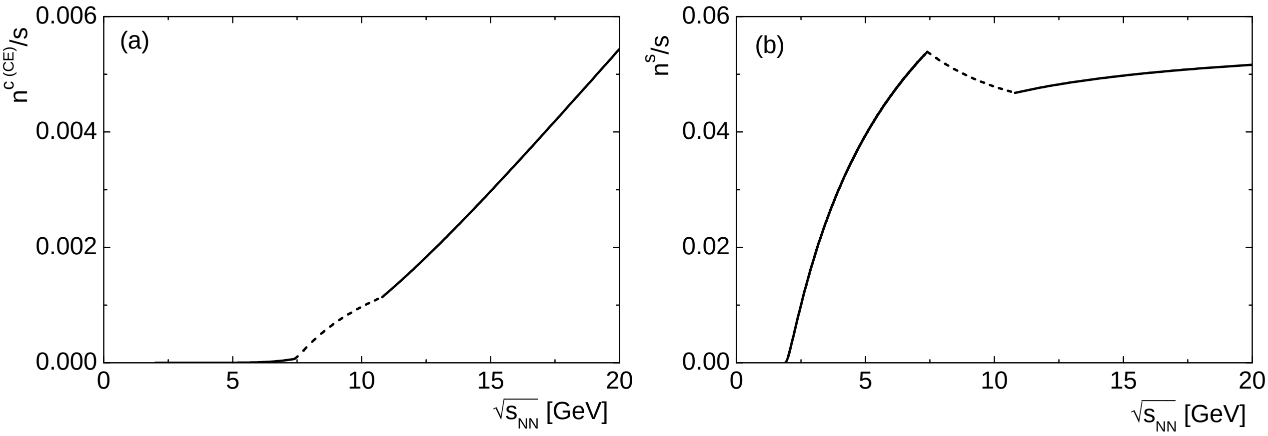



Рис. 1.8: Залежність від енергії зіткнення відношення чарівності до ентропії ($a$) та відношення дивності до ентропії ($b$) обчислені в рамках SMES для центральних Pb+Pb зіткнень. Пунктирними лініями позначена область фазового переходу.

В змішаній фазі температура $T$ та параметр $\xi$ одержуються з розв'язку рівнянь:

$$\xi \;=\; \frac{\varepsilon(\sqrt{s_{NN}})\;-\;\varepsilon_W(T_c)}{\varepsilon_Q(T_c)\;-\;\varepsilon_W(T_c)}\;,\qquad p_Q(T_c)\;=\;p_W(T_c)\;. \tag{1.37}$$

Відношення чарівності до ентропії обчислене для центральних Pb+Pb зіткнень для $g_W^c = 10$ представлене на Рис. 1.8 $(a)$ як функція енергії зіткнення. Відношення дивності до ентропії представлене на Рис. 1.8 $(b)$ для порівняння. В той час як поведінка відношення дивності до ентропії проявляє *рогоподібну* структуру [24], відношення чарівності до ентропії є монотонною функцією енергії зіткнення.

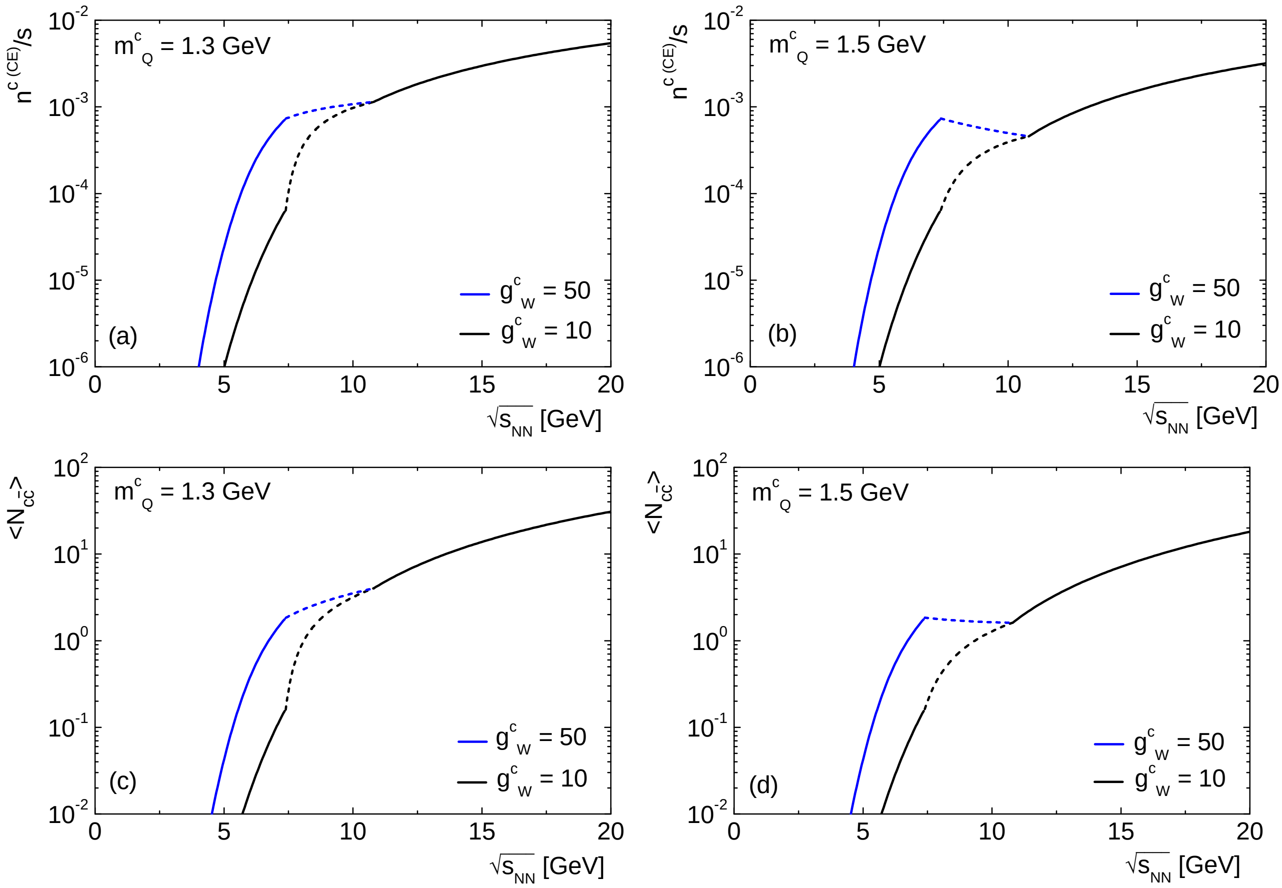



Рис. 1.9: Залежність від енергії зіткнення відношення чарівності до ентропії $(a, b)$ та середньої множинності $c\bar{c}$-пар $(c, d)$ обчислені в рамках SMES для центральних Pb+Pb зіткнень з масою зачарованого кварку 1.3 GeV (ліворуч) та 1.5 GeV (праворуч) та фактором виродження чарівних частинок $g_W^c = 10$ (нижні лінії) та $g_W^c = 50$ (верхні лінії).

На рисунку 1.9 показана залежність від енергії зіткнення результатів для відкритої чарівності з $m_Q^c = 1.3$ GeV та 1.5 GeV, та $g_W^c = 10$ та 50. Як видно з Рис. 1.9, рогоподібна структура відсутня в відношенні чарівності до ентропії з $g_W^c = 10$ та $m_Q^c = 1.3$ GeV, проте появляється для великих (нефізичних) значень $g_W^c = 50$ та $m_Q^c = 1.5$ GeV.

З метою оцінити допустимі значення параметру $g_W^c$ розглянемо чарівність

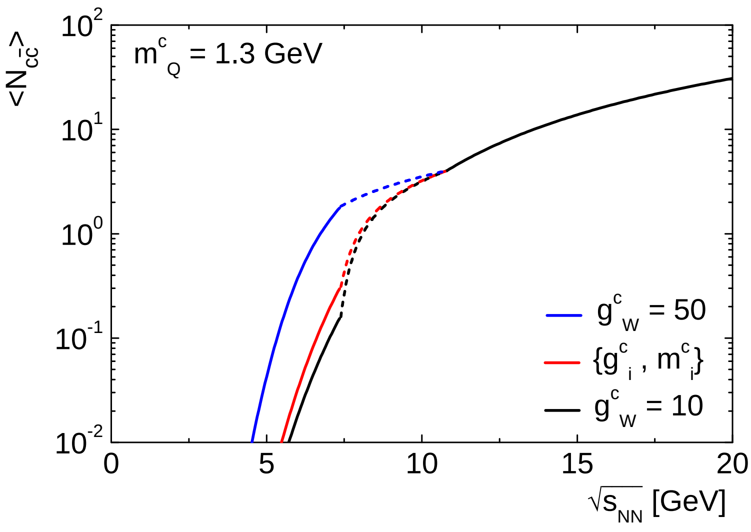



Рис. 1.10: Залежність від енергії зіткнення середньої множинності $c\bar{c}$-пар обчислена в рамках SMES для центральних Pb+Pb зіткнень з масою зачарованого кварку 1.3 GeV. Чорна та синя лінії відповідають припущенням маси $D$-мезона $m_W^c = 1.9$ GeV та ефективного фактору виродження $g_W^c = 10$ та $g_W^c = 50$, відповідно. Червона лінія отримана з врахуванням вкладів (1.38) від усіх не-дивних $D$-мезонів з відповідними масами та факторами виродження $\{m_i^c, g_i^c\}$.

та анти-чарівність в адронній фазі як суму всіх $D$-мезонних станів,

$$n_W^c(T) \;=\; \sum_i \frac{g_i^c}{2\pi^2}\int_0^\infty dk\, k^2 \exp\left[-\,\frac{\sqrt{k^2+(m_i^c)^2}}{T}\right]\,. \qquad (1.38)$$

В сумі (1.38) включено 7 не-дивних чарівних мезонів від $D^0$ ($i = 1$) з $m_1^c = 1.86$ GeV та $g_1^c = 2$ та $D^\pm$ ($i = 2$) з $m_2^c = 1.87$ GeV та $g_2^c = 2$ аж до $D_2^{*0}$ та $D_2^{*\pm}$ ($i = 6, 7$), обидва з яких мають $m_{6,7}^c = 2.46$ GeV та $g_{6,7}^c = 10$. На Рис. 1.10 результат рівняння (1.38) для енергетичної залежності $\langle N_{c\bar{c}}\rangle$ в канонічному ансамблі порівняно з результатами одержаними з рівняння (1.33) для $n_W^c$ з масою $m_W^c = 1.9$ GeV та ефективними факторами виродження $g_W^c = 10$ та $g_W^c = 50$. Результат для повного спектру чарівних мезонів є більшим (на множник 1.9 на початку змішаної фази) у порівнянні з результатом для $g_W^c = 10$, який розглядається як нижня границя, в той час є суттєво меншим (на множник 5.8 на початку змішаної фази) у порівнянні з результатом, який відповідає $g_W^c = 50$.

## 1.3 Сильноінтенсивні міри флуктуацій числа частинок

В цій главі передбачення [54, 55] моделі SMES розширюються на флуктуації властивостей народження адронів в A+A зіткненнях, які пов'язані з фазовим переходом. Це розширення стало можливим оскільки в останні роки були розроблені нові міри флуктуацій, див. [56,57]. На додаток, в даній главі запропоновано новий формалізм моделювання флуктуацій в зіткненнях високих енергій, який може знадобитися в майбутніх дослідженнях.

Припустимо, що енергія фаєрбола $E$ та об'єм $V$ змінюються від зіткнення до зіткнення відповідно до функції розподілу ймовірності $P(E, V)$. Таким чином, густина енергії, $\varepsilon = E/V$, також може змінюватися від зіткнення до зіткнення, що призводить до змін в інших властивостях матерії. Ці зміни залежать від рівняння стану матерії. В даній главі ці обчислення проводяться в рамках великого канонічного ансамблю. Зокрема, відповідно до першого та другого законів термодинаміки, зміна ентропії $\delta S$ ($\delta$ позначає відхилення від середнього значення) пов'язана зі зміною енергії та об'єму наступним чином: $T\delta S = \delta E + p\delta V$, з чого слідує $T\delta S = V\delta\varepsilon + (p+\varepsilon)\delta V$ , де $p$ – це тиск. Використовуючи рівність $TS = E + pV$ знаходимо

$$\frac{\delta S}{S} = \frac{1}{1+p/\varepsilon}\,\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\delta V}{V}\ . \tag{1.39}$$

У випадку, якщо енергія пропорційна до об'єму, а густина енергії стала, $\delta\varepsilon = 0$, з рівняння (1.39) слідує: $\delta S/S = \delta V/V = \delta E/E$. Таким чином, відносні флуктуації ентропії рівні відносним флуктуаціям енергії та об'єму, і є нечутливими до рівняння стану. В інших випадках флуктуації ентропії залежать від рівняння стану (від виду створеної речовини).

Аналогічно до ентропії, середня множинність частинок даного типу змінюється зі зміною $E$ та $V$. Ця зміна залежить від рівняння стану та властивостей частинок, функцією яких є густина енергії $\varepsilon$. Зокрема, середня множинність легких піонів або легких кварків та безмасових глюонів приблизно пропорційна ентропії створеної матерії. При перетині області фазового переходу ефективне число ступенів вільності збільшується, а отже, в області фазового переходу ентропія швидше збільшується зі збільшенням $\sqrt{s_{NN}}$. Як наслідок, флуктуації ентропії, які спричинені флуктуаціями густини енергії, також видозмінюються. Середня множинність дивних адронів в білій фазі або дивних кварків у кварк-глюонній фазі є чутливою до їхніх мас та ефективних числел ступенів вільності. Дані величини швидко змінюються при перетині області фазового переходу, що спричинюється збільшенням густини енергії. В зв'язку з цим має місце зміна флуктуацій середньої множинності дивних частинок, як результат флуктуацій густини енергії.

В рамках моделі SMES фаєрбол створений при зіткненні високої енергії є мікроскопічним станом, що належить ансамблю всіх можливих мікроскопічних станів. Зокрема, множинність частинок – це характеристика однієї події, що змінюється від події-до-події навіть при сталих значеннях $E$ та $V$.

В великому канонічному ансамблі флуктуації множинності частинок відповідають розподілу Пуассона. Розглядаються чотири екстенсивні величини $E$, $V$ та $N$, $N_S$. Розподіл першої пари, $P(E, V)$, задається, тоді як розподіл другої пари $\mathcal{P}(N, N_S)$ слідує з флуктуацій властивостей ансамблю та флуктуацій властивостей події.

Наприклад, нормована варіація множинності частинок може бути виражена [55] як сума нормованої варіації спричиненої початковими флуктуаціями енергії $E$ та об'єму $V$ ($\omega_0$ ) і нормованої варіації множинності частинок при сталих значеннях $E$ та $V$, яка рівна одиниці для розподілу Пуассона:

$$\omega[N] \;=\; 1 \;+\; \omega_0[N]\;, \qquad \omega[N_S] \;=\; 1 \;+\; \omega_0[N_S]\;. \tag{1.40}$$

Для цілей роботи достатньо охарактеризувати розподіл $P(E, V)$ за допомогою його пяти параметрів, що включають перші та другі моменти:

$$\langle\varepsilon\rangle\;,\quad \langle V\rangle\;,\qquad \frac{\sqrt{\langle(\delta\varepsilon)^2\rangle}}{\langle\varepsilon\rangle}\;,\quad \frac{\sqrt{\langle(\delta V)^2\rangle}}{\langle V\rangle}\;,\qquad \frac{\langle\varepsilon\, V\rangle \;-\; \langle\varepsilon\rangle\,\langle V\rangle}{\sqrt{\langle(\Delta\varepsilon)^2\rangle\langle(\Delta V)^2\rangle}}\;, \tag{1.41}$$

останні три з яких, дві нормовані дисперсії та коефіцієнт кореляції, є безрозмірними.

Формулювання моделі SMES та значення параметрів (якщо не стверджується зворотне) такі ж як і в минулих главах. Таким чином, рівняння стану ідеального газу використовується для моделювання білої фази, рівняння стану моделі мішків використовується для фази QGP, та припускається фазовий перехід першого роду між ними.

Оскільки флуктуації об'єму, що відбуваються від події-до-події не можуть бути усунені в експериментальних дослідженнях А+А зіткнень, важливо мінімізувати їх ефект використовуючи спеціальні міри флуктуацій. В рамках *моделі незалежних джерел* було показано можливість побудови мір флуктуацій з перших та других моментів двох екстенсивних величин події, $A$ та $B$, які незалежні від розподілу числа джерел. На ці міри посилались за допомогою терміну *сильноінтенсивні величини* [58]. Перша міра цього типу була введена в роботі [59], а потім ідея була узагальнена [58] та розповсюджена на треті [60] та вищі моменти [61]. В даній главі в рамках моделі SMES будуть обчислені сильноінтенсивні величини, що включають перші та другі моменти величин $A$ та $B$.

Можна побудувати дві сім'ї сильноінтенсивних величин [58]:

$$\Delta[A,B] \;=\; \frac{1}{C_\Delta}\Big[\langle B\rangle\,\omega[A] \;-\; \langle A\rangle\,\omega[B]\Big]\,, \tag{1.42}$$

$$\Sigma[A,B] \;=\; \frac{1}{C_\Sigma}\Big[\langle B\rangle\,\omega[A] \;+\; \langle A\rangle\,\omega[B] \;-\; 2\left(\langle AB\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle\right)\Big]\,, \tag{1.43}$$

де $\omega[X] \;\equiv\; (\langle X^2\rangle \;-\; \langle X\rangle^2)/\langle X\rangle$. Нормуючі множники $C_\Delta$ та $C_\Sigma$ повинні бути пропорційні першим моментам будь-якої екстенсивної величини. Зазначимо, що $\Sigma[A,B]$ містить кореляційний доданок $\langle AB\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle$, напротивагу $\Delta[A,B]$.

В даній главі використовуються дві пари нормуючих множників $C_\Delta$ та $C_\Sigma$. По-перше, використовуються нормуючі множники рівні середньому значенню другого аргумента:

$$C_\Delta \;=\; C_\Sigma \;=\; \langle B\rangle\,. \tag{1.44}$$

Як зазначається в роботі [57], в рамках статистичної моделі ідеального больцманівського газу в формулюванні великого канонічного ансамблю (IB-GCE) $B \sim V$ призводить до:

$$\Delta[A,B] \;=\; \Sigma[A,B] \;=\; \omega^*[A]\,, \tag{1.45}$$

де $\omega^*[A]$ – це нормована варіація $A$ при сталому об'ємі.

По-друге, будемо використовувати нормування

$$C_\Delta \;=\; \langle N\rangle \;-\; \langle N_S\rangle, \qquad\qquad C_\Sigma \;=\; \langle N\rangle \;+\; \langle N_S\rangle \tag{1.46}$$

для множинностей частинок [62]. Воно призводить до $\Delta[N,N_S] = \Sigma[N,N_S] = 1$ в рамках IB-GCE.

В моделі IB-GCE якщо $A$ та $B$ є незалежними в сталому об'ємі, знаходимо що $\omega^*[A]$ та $\omega^*[B]$ можуть бути виражені через $\Sigma[A,B]$ та $\Delta[A,B]$. Введемо величини:

$$\Omega[A,B] \;\equiv\; \frac{1}{2}\Big[\Sigma[A,B]+\Delta[A,B]\Big] \;=\; \omega[A]-\frac{\langle A\,B\rangle\;-\;\langle A\rangle\,\langle B\rangle}{\langle B\rangle}\;, \tag{1.47}$$

$$\Omega[B,A] \;\equiv\; \frac{1}{2}\Big[\Sigma[B,A]+\Delta[B,A]\Big] \;=\; \omega[B]-\frac{\langle A\,B\rangle\;-\;\langle A\rangle\,\langle B\rangle}{\langle A\rangle}\;. \tag{1.48}$$

Тут нормування $\Sigma$ та $\Delta$ дано рівнянням (1.44). Тоді бачимо [58, 61], що

$$\omega^*[A] \;=\; \Omega[A,B]\;, \qquad \omega^*[B] \;=\; \Omega[B,A]\;. \tag{1.49}$$

Передбачення для величин $\Omega$ також одержуються в цій главі.

Чотори екстенсивні величини події $E$, $V$ та $N$, $N_S$ задають шість їхніх пар:

$$[E,V], \quad [N,V], \quad [N_S,V], \quad [N,E], \quad [N_S,E], \quad [N_S,N], \tag{1.50}$$

для яких обчислюються сильноінтенсивні міри флуктуацій. В рамках моделі результати для пари $[E,V]$ залежать лише від обраного розподілу $P(E,V)$. Інші пари включають хоча б одну екстенсивну величину події, флуктуації якої залежать від рівняння стану.

Якщо густина енергії $\varepsilon$ залишається сталою від події до події, то флуктуації енергії та об'єму пов'язані як $E\sim V$. В рамках IB-GCE ці флуктуації не впливають на сильноінтенсивні міри $\Delta$ та $\Sigma$. Однак, флуктуації $\varepsilon$ в рамках моделі SMES призводять до їхньої залежності від $\langle V\rangle$ та $\sqrt{\langle(\delta V)^2\rangle}/\langle V\rangle$. Зокрема, вони стають пропорційними до виразу $1+\langle(\delta V)^2\rangle/\langle V\rangle^2$. Для центральних Pb+Pb зіткнень отримуємо $1+\langle(\delta V)^2\rangle/\langle V\rangle^2\cong 1$ і, таким чином, в наступних обчисленнях прирівняємо цей вираз одиниці.

в моделі SMES з даними значеннями параметрів (див. главу 1.1) середній об'єм та середня густина енергії при $\sqrt{s_{NN}}=10$ GeV дорівнюють $\langle V\rangle = 350$ fm$^3$ та $\langle\varepsilon\rangle = 3.2$ GeV/fm$^3$. Нагадаємо, що їхні залежності від енергії зіткнення взяті як $\langle V\rangle\sim 1/\sqrt{s_{NN}}$ та $\langle\varepsilon\rangle\sim\sqrt{s_{NN}}\,(\sqrt{s_{NN}}-2\,m_N)$. Нормовану дисперсію флуктуацій об'єму покладемо $\sqrt{\langle(\delta V)^2\rangle}/\langle V\rangle = 0$, що є хорошим наближенням для центральних Pb+Pb зіткнень. Будемо використовувати три значення параметра $\sqrt{\langle(\delta\varepsilon)^2\rangle}/\langle\varepsilon\rangle$: 0.17 (суцільна лінія), 0.13 (пунктирна лінія), та 0 (точкована лінія). Значення $\sqrt{\langle(\delta\varepsilon)^2\rangle}/\langle\varepsilon\rangle = 0.17$ розглядається як верхня границя, що ґрунтується на результатах UrQMD та HSD симуляцій [63]. Кореляція між $E$ та $V$ прирівняна нулю.

З рівнянь (1.42), (1.43) та (1.47) отримуємо $\Omega[E,V] = \Delta[E,V] = \Sigma[E,V] = \omega^*[E] = \langle(\delta E)^2\rangle/\langle E\rangle$. Ця величина показана на Рис. 1.11 як функція $\sqrt{s_{NN}}$ для значень параметрів моделі, що дані вище. Очевидно, що цей результат не є чутливим до рівняння стану.

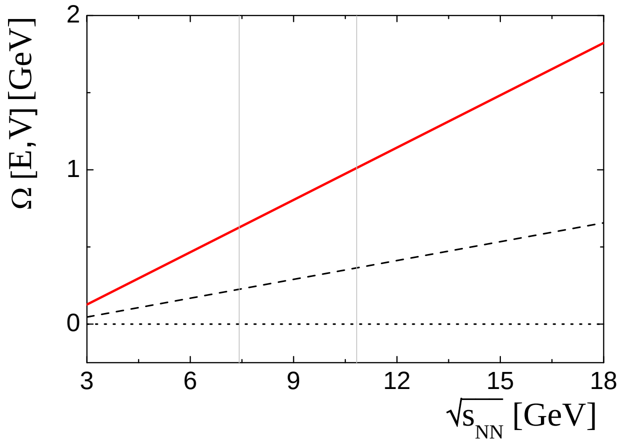



Рис. 1.11: $\Omega[E,V] = \Delta[E,V] = \Sigma[E,V] = \omega^*[E] = \langle(\delta E)^2\rangle/\langle E\rangle$ як функція енергії зіткнення для центральних Pb+Pb зіткнень в області енергій CERN SPS. Див. текст для чисельних значень параметрів моделі та залежностей від $\sqrt{s_{NN}}$. Використовуються нормуючі множники $C_\Delta = C_\Sigma = \langle V\rangle$. Суцільна, пунктирна, і точкована лінії відповідають $\sqrt{\langle(\delta\varepsilon)^2\rangle}/\langle\varepsilon\rangle$ рівному 0.17, 0.13, та 0, відповідно. Вертикальні лінії позначають початок (настання деконфайнменту) та кінець (*найм'якішу точку*) області змішаної фази, $\sqrt{s_{NN}}(OD) \cong 7.4$ GeV та $\sqrt{s_{NN}}(SP) \cong 10.8$ GeV, відповідно.

Флуктуації густини енергії модифікують флуктуації флуктуації множинності частинок. Ця модифікація залежить від рівняння стану і типу частинок. З іншого боку, рівняння стану та властивості частинок значно змінюються при перетині області фазового переходу. Таким чином, очікується, що залежність від енергії зіткнення флуктуацій числа частинок може містити сигнал фазового переходу. Міри флуктуацій, що є чутливими до рівняння стану представлені на Рис. 1.12-1.14 як функції енергії зіткнення, в області яка включає фазовий перехід. Припускається, що флуктуації $N$ та $N_S$ при $\sqrt{\langle(\delta V)^2\rangle}/\langle V\rangle = 0$ та $\sqrt{\langle(\delta\varepsilon)^2\rangle}/\langle\varepsilon\rangle = 0$ являються незалежними та пуассонівськими.

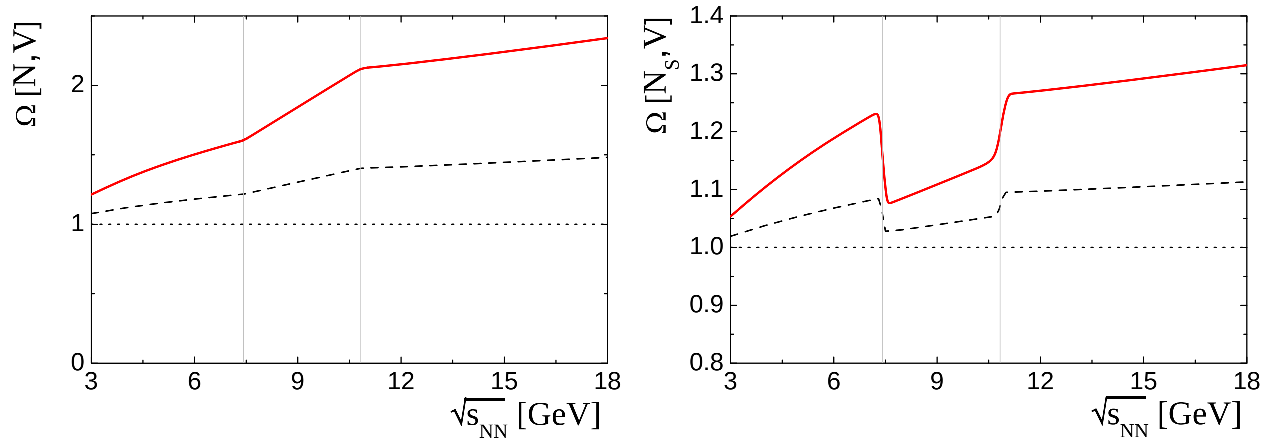



Рис. 1.12: Так само як на Рис. 1.11 але для $\Omega[N, V] = \Delta[N, V] = \Sigma[N, V] = \omega^*[N]$ (ліворуч) та $\Omega[N_S, V] = \Delta[N_S, V] = \Sigma[N_S, V] = \omega^*[N_s]$ (праворуч). Використовуються нормуючі множники $C_\Delta = C_\Sigma = \langle V \rangle$.

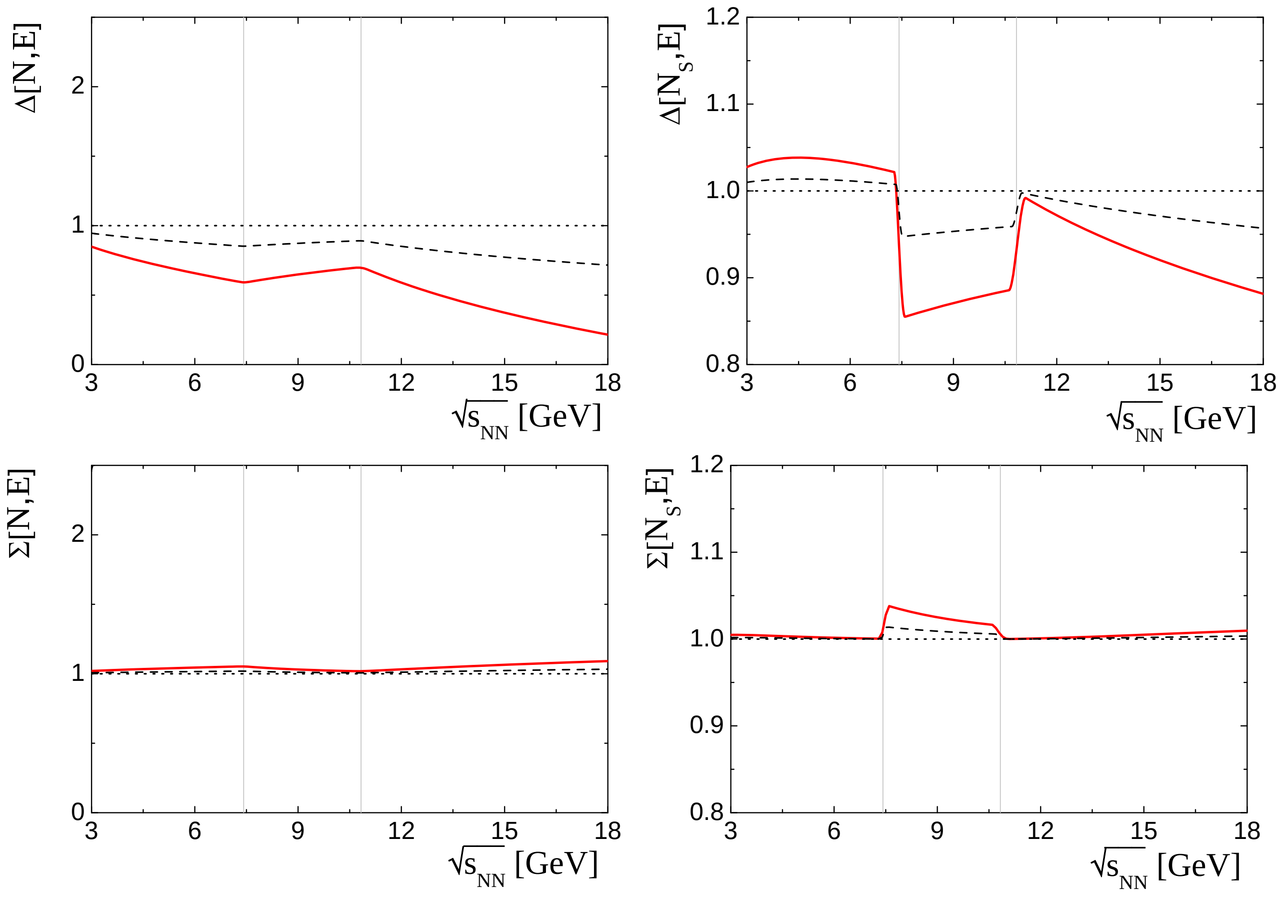



Рис. 1.13: Так само як на Рис. 1.11 та 1.12 але для $\Delta[N, E]$ і $\Sigma[N, E]$ (ліворуч), та $\Delta[N_S, E]$ і $\Sigma[N_S, E]$ (праворуч). Використовуються нормуючі множники $C_\Delta = C_\Sigma = \langle V \rangle$.

Залежність від енергії зіткнення величин $\Omega[N, V] = \Delta[N, V] = \Sigma[N, V] = \omega^*[N]$ та $\Omega[N_S, V] = \Delta[N_S, V] = \Sigma[N_S, V] = \omega^*[N_S]$ показана на Рис. 1.12

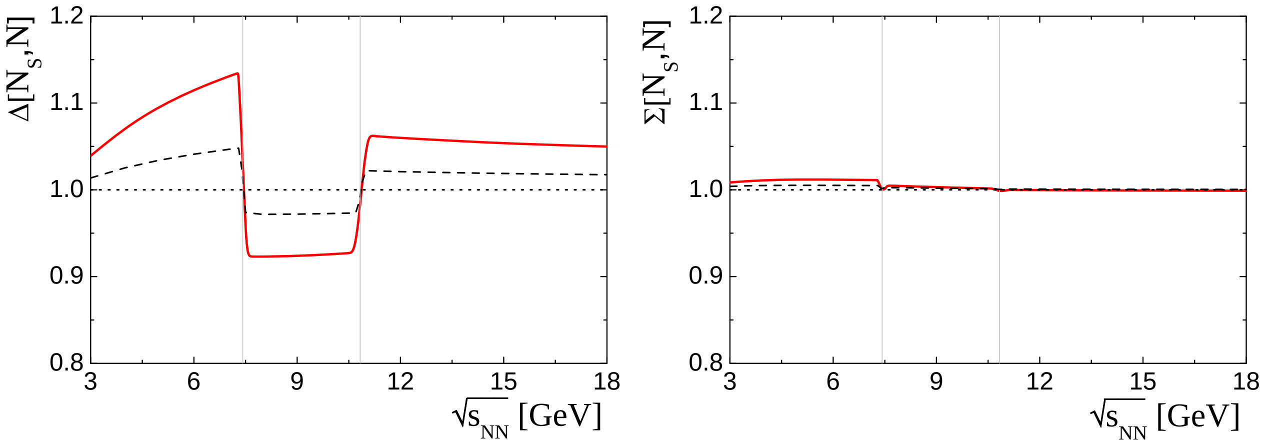



Рис. 1.14: Так само як на Рис. 1.11-1.13 але для $\Delta[N_S, N]$ (ліворуч) та $\Sigma[N_S, N]$ (праворуч). Використовуються нормуючі множники $C_\Delta = \langle N\rangle - \langle N_S\rangle$ та $C_\Sigma = \langle N\rangle + \langle N_S\rangle$.

для центральних Pb+Pb зіткнень при енергіях CERN SPS. При $\sqrt{\langle(\delta\varepsilon)^2\rangle}/\langle\varepsilon\rangle$, що зменшується до нуля результат прямує до одиниці як і передбачає IB-GCE. $\Delta$ та $\Sigma$ дорівнюють одна одній для пар $[N, V]$ та $[N_S, V]$. Це спричинюється обраним наближенням: $N$ та $N_S$ незалежні при сталому об'ємі, $\langle N\rangle \sim V$, $\langle N_S\rangle \sim V$ та $\langle(\delta V)^2\rangle/\langle V\rangle \cong 0$. Загальне зростання $\Omega[N, V]$ та $\Omega[N_S, E]$ зі зростанням $\sqrt{s_{NN}}$, яке можна побачити Рис. 1.12, спричинене ненульовими значеннями $\sqrt{\langle(\delta\varepsilon)^2\rangle}/\langle\varepsilon\rangle$. Модифікація цієї енергетичної залежності спостерігається в області фазового переходу. Слід зазначити, що вимірювання об'єму системи (або величини що пропорційна до об'єму) ймовірно є експериментально складним або навіть неможливим.

Рисунок 1.13 показує міри флуктуацій $\Delta[N, E]$ та $\Sigma[N, E]$, а також $\Delta[N_S, E]$ та $\Sigma[N_S, E]$ як функції енергії зіткнення. Аналогічно результатам представленим на Рис. 1.12 загальна поведінка, спричинена постульованими флуктуаціями густини енергії, зазнає модифікації в області фазового переходу. Найбільш виражено це спостерігається для $\Delta[N_S, E]$.

Насамкінець, залежності від енергії зіткнення $\Delta[N_S, N]$ та $\Sigma[N_S, N]$ показані на Рис. 1.14. В цьому випадку використовується нормування (1.46). Найбільш виражена модифікація поведінки в області фазового переходу спостерігається для $\Delta[N_S, N]$. А для $\Sigma[N_S, N]$ вона спостерігається слабо.

## 1.4 Висновки до розділу 1

В **главі 1.1** приведено формулювання Статистичної Моделі Ранньої Стадії [24] (SMES), що є моделлю фазового переходу між адронним газом та кварк-глюонною плазмою в релятивістських ядро-ядерних зіткненнях.

В **главі 1.2** в модель SMES введено точний закон збереження дивності. Це надало змогу обчислити енергетичну залежність відношення дивності до ентропії для зіткнень протонів та малих ядер при енергіях CERN SPS. Розширення моделі було мотивоване нещодавніми результатами експерименту NA61/SHINE на CERN SPS по продукції адронів в непружніх p+p взаємодіях [64], які є свідченням в підтримку того, що деконфаймент може реалізуватися також в цих реакціях.

Розгляд утворення дивності в рамках канонічного ансамбля призводить до відомого ефекту - повне число дивних та анти-дивних частинок зменшується у порівнянні з отриманим в рамках великого канонічного ансамбля при тих же значеннях об'єму та густини енергії. Проте, обчислення показують лише маленькі зміни температури, тиску, та густини енергії системи. Таким чином, відношення дивності до ентропії є суттєво пригнічиним в малих системах. Чим менше енергія зіткнення, тим менше повне число дивних частинок, а отже, тим сильніше пригнічення дивності. В області змішаної фази, $\sqrt{s_{NN}} = 7 - 11$ GeV, відношення дивності до ентропії в p+p взаємодіях виявилось приблизно в 2 рази менше ніж в центральних Pb+Pb зіткненнях. Зазначимо, що канонічне пригнічення стає досить малим вже для центральних зіткнень ядер проміжних розмірів і ним взагалі можна знехтувати для Pb+Pb зіткнень. Обчислена залежність від енергії зіткнення відношення дивності до ентропії в p+p взаємодіях якісно подібна до виміряної колаборацією NA61/SHINE [64, 65] для відношення $K^+$ до $\pi^+$ (див Рис. 1.7). Проте, кількісне порівняння між моделлю та даними вимагає подальшої видозміни моделі і є поза межами розгляду цієї роботи.

Також в главі 1.2 в рамках SMES була обчислена залежність від енергії зіткнення середнього числа $c\bar{c}$-пар в центральних Pb+Pb зіткненнях. Середня множинність чарівності та її відношення до ентропії демонструє швидке зростання як функція енергії зіткнення в розглянутій області енергій. В центральних Pb+Pb зіткненнях при $\sqrt{s_{NN}} = 17.3$ GeV, $\langle N_{c\bar{c}} \rangle \cong 20$ для $m_Q^c = 1.3$ GeV та

$\langle N_{c\bar{c}} \rangle \cong 8$ для $m_Q^c = 1.5$ GeV. Ці суттєво перевищують експериментальне обмеження, $\langle N_{c\bar{c}} \rangle \cong 3.6$, повідомлене в роботі [53]. Передбачення моделі SMES є чутливими до припущених значень маси зачарованого кварку та фактору виродження чарівних частинок в адронній фазі. Але навіть для екстремальних значень цих параметрів передбачення SMES не узгоджуються з експериментальними даними. Таким чином, кількісний опис продукції чарівності в рамках SMES вимагає перегляду параметрів та/або припущень моделі.

В **главі 1.3** також були зроблені передбачення залежностей сильноінтенсивних величин від енергії зіткнення в центральних зіткненнях важких іонів в районі фазового переходу. Ці передбачення також засновані на моделі SMES. Сильноінтенсивні міри флуктуацій були обчислені для шести пар величин події:

$$[E, V], \quad [N, V], \quad [N_S, V], \quad [N, E], \quad [N_S, E], \quad [N_S, N], \tag{1.51}$$

де $E$ та $V$ позначають енергію та об'єм системи, тоді як $N$ та $N_S$ позначають множинність всіх частинок та дивних частинок, відповідно. В декількох розглянутих випадках залежність від енергії зіткнення зазнає значної модифікації в області фазового переходу. Це надає підстави для експериментального вимірювання сильноінтенсивних мір флуктуацій в ядро-ядерних зіткненнях з метою пошуку передбачених сигналів деконфайнмента. Обчислення показують, що найбільш сильна модифікація проявляється для величини $\Delta[N_S, N]$.

# Розділ 2

# Модель ван дер Ваальса в великому канонічному ансамблі.

## 2.1 Формулювання моделі

Рівняння стану ван дер Ваальса (vdW) – це проста аналітична модель функції тиску $p$ для рівноважних систем частинок зі взаємодіями, як притягання, так і відштовхування. В канонічному ансамблі (CE) вона має вигляд (див., напр., роботи. [66, 67]),

$$p(T,n) \;=\; \frac{NT}{V-bN} \;-\; a\frac{N^2}{V^2} \;\equiv\; \frac{n\,T}{1-bn} \;-\; a\,n^2 \;, \tag{2.1}$$

де $n \equiv N/V$ – це густина числа частинок, тоді як vdW параметри $a > 0$ та $b > 0$ описують, відповідно, взаємодію притягання та відштовхування. Перший доданок в правій частині рівняння (2.1) відповідає поправці виключеного об'єму (Excluded Volume, EV), що проявляється в заміні повного об'єму $V$ доступним об'ємом, $V_{\rm av} = V - b\,N$. Другий відповідає середньому полю, що описує взаємодію притягання між частинками. Що стосується асимптотичної поведінки в околі критичної точки, модель vdW належить класу універсальності *теорії середнього поля*. Кількість частинок $N$ в канонічному ансамблі є фіксованою. Для того, щоб застосувати рівняння стану vdW до опису систем зі змінним числом частинок та обчислити флуктуації числа частинок необхідне формулювання моделі в великому канонічному ансамблі (GCE). Ця процедура спершу була застосована [68, 69] до моделі EV, тобто при $a = 0$ в рівнянні (2.1). В нещодавній роботі [70], повне vdW рівняння (2.1), що включає, як вклад відштовхування, так і притягання, було перенесено з канонічного до великого канонічного ансамбля для систем з больцманівською статистикою. Відповідне узагальнення, яке враховує ефекти квантової статистики було одержано в роботі [71]. Зазначимо, що моделі EV та vdW зручно розглядати в GCE в рамках термодинамічного підходу середнього поля (див роботи [73–75]).

В даному розділі використовуються результати для формулювання в великому канонічному ансамблі [70] як відправна точка для обчислення нормованої варіації, коефіцієнта асиметрії, та куртозиса розподіла числа частинок, а також сильноінтенсивних мір флуктуацій числа частинок та енергії. Больцманівське наближення дає можливість одержати аналітичні вирази для цих мір флуктуацій.

Тиск vdW – це однозначна функція змінних $T$ та $n$ для всіх $T \geq 0$ та $0 \leq n \leq 1/b$. Це рівняння стану містить фазовий перехід першого роду та критичну точку. Критична точка в $(T, n)$-площині, тобто точка $(T_c, n_c)$, відповідає температурі та густині числа частинок, при яких:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_T = 0 , \qquad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial n^2}\right)_T = 0 . \tag{2.2}$$

Термодинамічні величини в критичній точці рівні:

$$T_c = \frac{8a}{27b} , \quad n_c = \frac{1}{3b} , \quad p_c = \frac{a}{27b^2} . \tag{2.3}$$

При $T > T_c$ завжди виконується нерівність,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_T > 0 , \tag{2.4}$$

тоді як при $T < T_c$ появляється інтервал $[n_1, n_2]$, для якого

$$\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_T < 0 . \tag{2.5}$$

Це означає, що vdW ізотерма $p(T, n)$ має локальний максимум при $n = n_1$ та локальний мінімум при $n = n_2 > n_1$ для $T < T_c$. Нестабільна частина (2.5) ізотерми vdW на інтервалі $[n_1, n_2]$, разом з двома додатковими метастабільними частинами $[n_g, n_1]$ та $[n_2, n_l]$ – перетворюється на суміш двух фаз: газ з густиною $n_g < n_1$ та рідина з густиною $n_l > n_2$. Це робиться у відповідності з *правилом рівних площ Максвела* (див, напр. [66, 67]) що призводить до сталості об'єму $p(T, n_g) = p(T, n_l)$ всередині інтервалу густин $[n_g, n_l]$.

В великому канонічному ансамблі тиск повинен визначатися в його природних змінних: температури $T$ та хімічного потенціалу $\mu$. Функція $p(T, \mu)$ містить повну інформацію про рівноважну фізичну систему. Інші термодинамічні величини, такі як густина числа частинок $n(T, \mu)$, густина ентропії $s(T, \mu)$, та густина енергії $\varepsilon(T,\mu)$ можуть бути виражені через тиск та його $T$- та $\mu$-похідні:

$$n(T,\mu) = \left(\frac{\partial p}{\partial \mu}\right)_T , \quad s(T,\mu) = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\mu ,$$
$$\varepsilon(T,\mu) = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\mu + \mu\left(\frac{\partial p}{\partial \mu}\right)_T - p \, . \tag{2.6}$$

Рівняння стану vdW одержується в формі трансцендентного рівняння для густини числа частинок $n \equiv n(T,\mu)$ як функції $T$ та $\mu$ (див роботу [70]):

$$n(T,\mu) \; = \; \frac{n^{\rm id}(T,\mu^*)}{1 \; + \; b\, n^{\rm id}(T,\mu^*)} \, , \quad \mu^* \; = \; \mu \; - \; T\frac{bn}{1 \; - \; bn} \; + \; 2an \, , \tag{2.7}$$

де $n^{\rm id}$ – це густина числа частинок в ідеальному больцманівському газі

$$n^{\rm id}(T,\mu) \; = \; \exp\left(\frac{\mu}{T}\right) \frac{d\, m^2\, T}{2\pi^2}\, K_2\left(\frac{m}{T}\right) \, , \tag{2.8}$$

$d$ – це фактор виродження а $m$ – це маса частинок. $K_2(x)$ – це модифікована функція Бесселя другого роду. Тоді тиск vdW в великому канонічному ансамблі $p(T,\mu)$ одержується підстановкою $n(T,\mu)$ з (2.7) в рівняння (2.1). Слід зазначити, що використовується релятивістська форма рівняння дисперсії, $\omega(k) = \sqrt{m^2+k^2}$, де $\omega$ та $k$ – це енергія та імпульс однієї вільної частинки, відповідно. Це робить даний розгляд доречним для фізики високих енергій.

В великому канонічному ансамблі існує єдиний розв'язок рівняння (2.7) при $T > T_c$, тоді як при $T < T_c$ воно може мати один розв'язок або три різних розв'язки для густини числа частинок $n(T,\mu)$. В останньому випадку, розв'язок що відповідає найбільшому тиску буде реалізовуватися у відповідності з критерієм Гіббса. Змішана фаза в площині $T$-$\mu$ відповідає лінії $\mu = \mu_c(T)$, де два розв'язки з різними густинами числа частинок, $n_g(T,\mu)$ та $n_l(T,\mu)$, відповідають рівним тискам, $p_g(T,\mu) = p_l(T,\mu)$. Правило Максвела рівних площ та критерій Гіббса рівних тисків для газу та рідини для однакових значень $T$ та $\mu$ виявляються еквівалентними описами фазового переходу першого роду рідина-газ (докладніше див. роботу [71]).

## 2.2 Аналітичний розв'язок для флуктуацій числа частинок

Нехай кількість частинок $N$ – це ймовірнісна змінна з нормованим розподілом ймовірності $\mathcal{P}(N)$. Тоді $k$-тий момент $\langle N^k \rangle$ означений як

$$\langle N^k \rangle = \sum_N N^k \mathcal{P}(N) \, . \tag{2.9}$$

Розглянемо варіацію, $\sigma^2 = \langle (\Delta N)^2 \rangle$, де $\Delta N \equiv N - \langle N \rangle$. Нормована варіація,

$$\omega[N] \, \equiv \, \frac{\sigma^2}{\langle N \rangle} \, , \tag{2.10}$$

характеризує ширину розподілу $\mathcal{P}(N)$. $\omega[N] = 1$ для розподілу Пуассона $\mathcal{P}(N) = \exp(-\langle N \rangle) \, \langle N \rangle^N / N!$.

Коефіцієнт асиметрії $S\sigma$ означується як

$$S\sigma \, = \, \frac{\langle (\Delta N)^3 \rangle}{\sigma^2} \, . \tag{2.11}$$

Коефіцієнт асиметрії (Skewness) розподілу визначає степінь асиметрії розподілу $\mathcal{P}(N)$ навколо його середнього значення $\langle N \rangle$. Додатній коефіцієнт асиметрії відповідає розподілу з асиметричним хвостом, що більше розтягнутий *направо*, тобто, у напрямку значень $N$ які $N > \langle N \rangle$. Від'ємний коефіцієнт асиметрії відповідає розподілу з асиметричним хвостом, що більше розтягнутий *наліво*, тобто, у напрямку значень $N$ які $N < \langle N \rangle$. Якщо розподіл $\mathcal{P}(N)$ є симетричним навколо свого середнього значення, тобто *правий* та *лівий* хвости рівні, він має нульовий коєфіцієнт асиметрії. Це має місце у випадку нормального розподілу Гауса, тоді як розподіл Пуассона має додатній коефіцієнт асиметрії, $S\sigma = 1$.

Куртозис (Kurtosis) розподілу $\kappa\sigma^2$ є мірою "піковості" розподілу ймовірності $\mathcal{P}(N)$,

$$\kappa\sigma^2 \, = \, \frac{\langle (\Delta N)^4 \rangle \, - \, 3 \, \langle (\Delta N)^2 \rangle^2}{\sigma^2} \, . \tag{2.12}$$

Куртозис (2.12) показує степінь з якою розподіл в своїй гостроті уступає або перевищує нормальний розподіл Гауса. Додатній куртозис відповідає відносно піковому розподілу. Від'ємний куртозис відповідає відносно плоскому розподілу. Для розподілу Пуассона значення куртозиса додатне, $\kappa\sigma^2 = 1$.

Нормальний розподіл Гауса відповідає нульовому значенню коефіцієнта асиметрії (2.11) та куртозиса (2.12). Таким чином, (сильні) відхилення $S\sigma$ та/або $\kappa\sigma^2$ від нуля є сигналами (сильно) не-гаусівської форми розподілу числа частинок $\mathcal{P}(N)$.

В великому канонічному ансамблі тиск $p$ дано в його природніх змінних $T$ та $\mu$. Флуктуації числа частинок можуть бути охарактеризовані безрозмірними кумулянтами (сприйнятливостями),

$$k_n \;=\; \frac{\partial^n (p/T^4)}{\partial(\mu/T)^n}\;, \tag{2.13}$$

які пов'язані з моментами розподілу числа частинок наступним чином:

$$k_1 = \frac{\langle N\rangle}{VT^3}\;, \quad k_2 = \frac{\langle(\Delta N)^2\rangle}{VT^3}\;, \quad k_3 = \frac{\langle(\Delta N)^3\rangle}{VT^3}\;, \tag{2.14}$$
$$k_4 = \frac{\langle(\Delta N)^4\rangle \;-\; 3\langle(\Delta N)^2\rangle^2}{VT^3}\;,$$

де $\langle\ldots\rangle$ позначає GCE усереднення. Нормована варіація (2.10), коефіцієнт асиметрії (2.11), та коефіцієнт куртозис (2.12) являються інтенсивними мірами флуктуацій що залишаються скінченними при переході до термодинамічної границі $V \to \infty$. Вони можуть бути виражені через сприйнятливості наступним чином:

$$\omega[N] \;=\; \frac{k_2}{k_1}\,, \qquad S\sigma \;=\; \frac{k_3}{k_2}\,, \qquad \kappa\sigma^2 = \frac{k_4}{k_2}\;. \tag{2.15}$$

**Нормована варіація.**

Нормована варіація яка означена рівнянням (2.15) може бути обчислена через похідну по $\mu$ від густини числа частинок. Для чистих фаз в класичному газі ван дер Ваальса вона зводиться до (див також роботу [70])

$$\omega[N] \;=\; \frac{T}{n}\left(\frac{\partial n}{\partial \mu}\right)_T \;=\; \left[\frac{1}{(1-bn)^2} - \frac{2an}{T}\right]^{-1}\;. \tag{2.16}$$

В термінах приведених змінних, $\widetilde{T} \equiv T/T_c$ та $\widetilde{n} \equiv n/n_c$, рівняння (2.16) приймає вигляд

$$\omega[N] = \frac{1}{9}\left[\frac{1}{(3-\widetilde{n})^2} - \frac{\widetilde{n}}{4\widetilde{T}}\right]^{-1}\;, \tag{2.17}$$

і має універсальну форму незалежно від конкретних значень vdW параметрів $a$ та $b$. З рівняння (2.17) слідує що $\omega[N] \to 1$ при $\widetilde{n} \to 0$ (це відповідає граничному випадку ідеального газу та пуассонівському $\mathcal{P}(N)$ розподілу), та $\omega[N] \to 0$ при $\widetilde{n} \to 3$ (це відповідає рідині з найбільшою можливою густиною). Згідно зі своїм означенням, нормована варіація $\omega[N]$ є додатною величиною. Це дійсно справджується для всіх значень $T$ та $n$, що відповідають стабільним, і навіть метастабільним станам. Нормована варіація розбіжна, $\omega[N] \to \infty$, в критичній точці. Вводячи величини $\rho = \widetilde{n} - 1$ та $\tau = \widetilde{T} - 1$ знаходимо при $\tau \ll 1$ та $\rho \ll 1$:

$$\omega[N] \cong \frac{4}{9}\left[\tau + \frac{3}{4}\rho^2 + \tau\rho\right]^{-1} . \tag{2.18}$$

Нормована варіація (2.16) як функція $\widetilde{T}$ та $\widetilde{n}$, показана на Рис. 2.1 як для стабільних, так і для метастабільних чистих фаз.

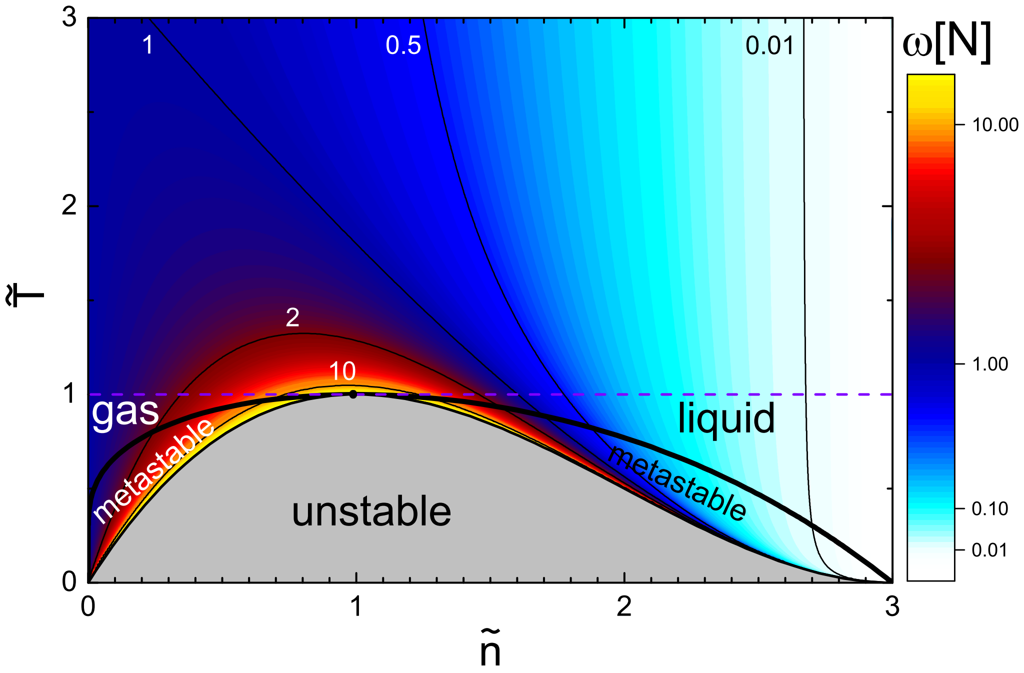



Рис. 2.1: Нормована варіація $\omega[N]$ (2.16) на $(\widetilde{n}, \widetilde{T})$ фазовій діаграмі як для стабільних, так і для метастабільних чистих фаз. Показані декілька ліній сталих значень $\omega[N]$. Сіра зона відображає область де чиста фаза являється механічно нестабільною.

**Коефіцієнт асиметрії.**

Коефіцієнт асиметрії $S\sigma$ може бути обчислений як

$$S\sigma = \frac{k_3}{k_2} = \omega[N] + \frac{T}{\omega[N]}\left(\frac{\partial \omega[N]}{\partial \mu}\right)_T = (\omega[N])^2\left[\frac{1-3bn}{(1-bn)^3}\right] . \tag{2.19}$$

В приведених змінних він має вигляд

$$S\sigma = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(3-\widetilde{n})^2} - \frac{\widetilde{n}}{4\widetilde{T}}\right]^{-2} \left[\frac{1-\widetilde{n}}{(3-\widetilde{n})^3}\right] . \tag{2.20}$$

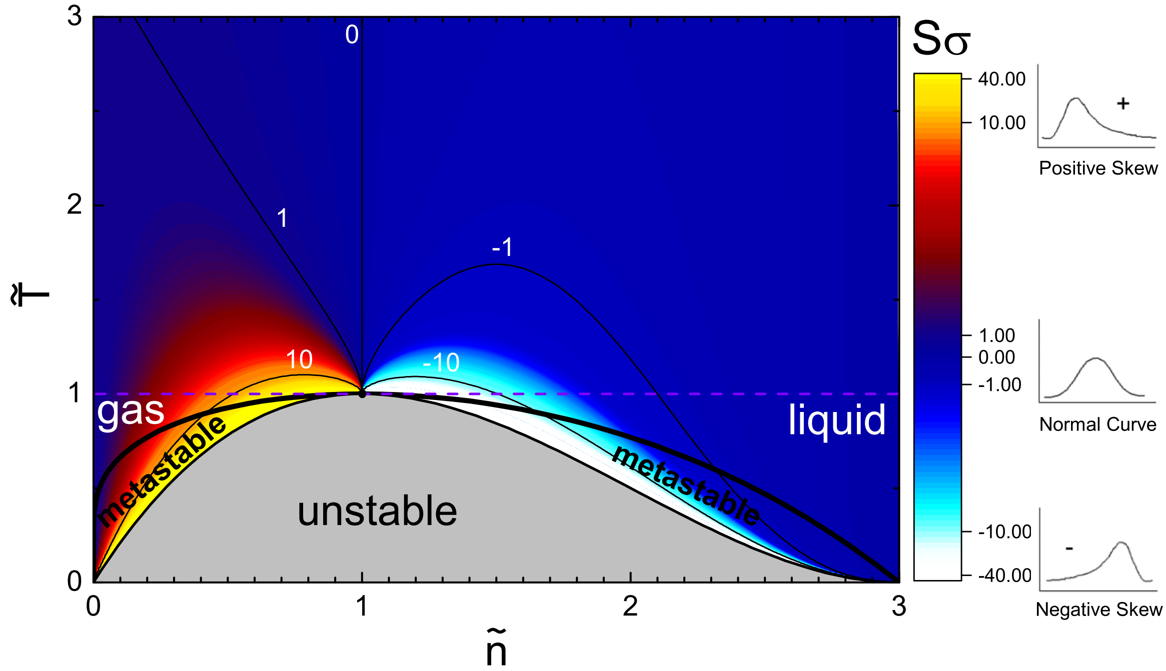



Рис. 2.2: Те саме що на Рис. 2.1 але для коефіцієнта асиметрії $S\sigma$ (2.20). Різні значення коефіцієнта асиметрії проілюстровані за-допомогою типового розподілу $\mathcal{P}(N)$ на правій вкладці.

Коефіцієнт асиметрії $S\sigma$, як функцію приведених температури та густини показано на Рис. 2.2 як для стабільних, так і для метастабільних чистих фаз. З рівнянь (2.19) та (2.20) очевидно, що коефіцієнт асиметрії додатній при $\widetilde{n} < 1$ (газова фаза), від'ємний при $\widetilde{n} > 1$ (рідка фаза), та $S\sigma = 0$ при $\widetilde{n} = 1$. При $\widetilde{n} \to 0$ знаходимо $S\sigma \to 1$. Це маленьке значення асиметрія розподілу числа частинок відповідає розподілу Пуассона що має місце для ідеального больцманівського газу.

В околі критичної точки знаходимо,

$$S\sigma \cong -\frac{2}{3}\rho\left[\tau + \frac{3}{4}\rho^2 + \tau\rho\right]^{-2} . \tag{2.21}$$

Критична точка, $\widetilde{T} = \widetilde{n} = 1$, тобто, $\rho = \tau = 0$, – це точка сингулярності асиметрії. Наприклад, при $\tau = 0$ з рівняння (2.21) знаходимо що $S\sigma \to +\infty$

при $\rho \to +0$ та $S\sigma \to -\infty$ при $\rho \to -0$. Водночас, $S\sigma = 0$ при будь-якому $\tau > 0$ та $\rho = 0$.

**Куртозис.**

Куртозис $\kappa\sigma^2$ може бути обчислений як

$$\kappa\sigma^2 = \frac{k_4}{k_2} = (S\sigma)^2 + T\left(\frac{\partial[S\sigma]}{\partial\mu}\right)_T = \\ 3\,(S\sigma)^2 - 2\,\omega[N]\,S\sigma - 54\,(\omega[N])^3 \frac{\widetilde{n}^2}{(3-\widetilde{n})^4}\,. \tag{2.22}$$

Куртозис $\kappa\sigma^2$, як функцію приведених температури та густини представлено на

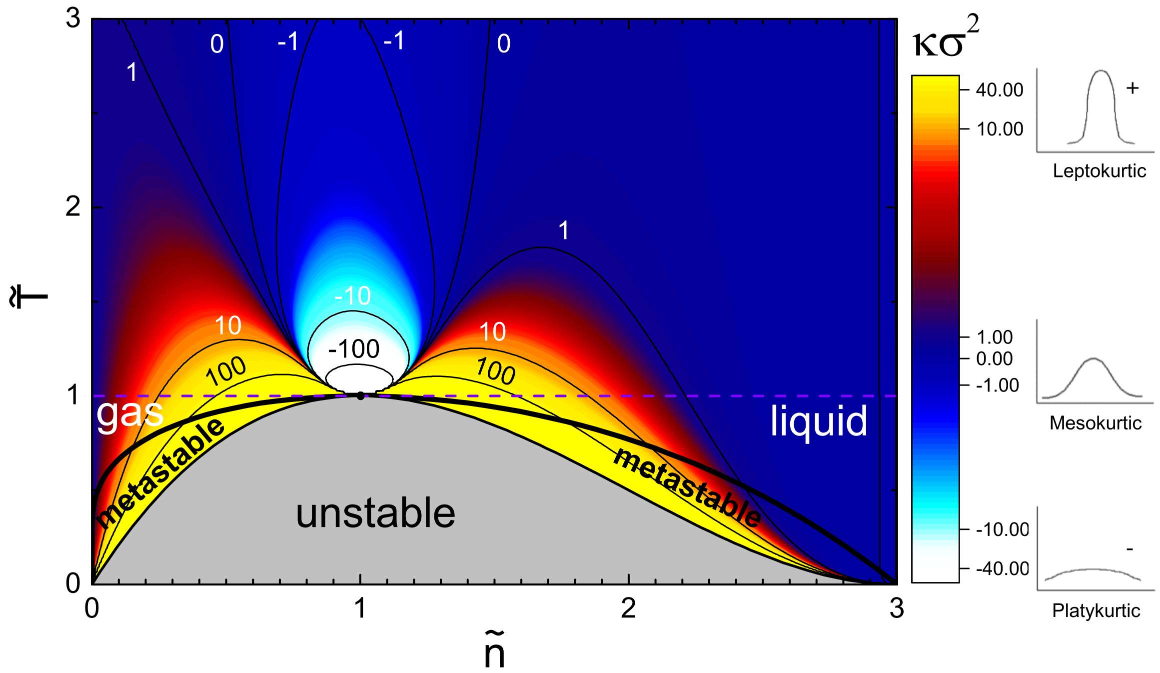



Рис. 2.3: Те саме що на рисунках 2.1 та 2.2 але для куртозиса $\kappa\sigma^2$ (2.22). Різні значення куртозиса проілюстровані за-допомогою типового розподілу $\mathcal{P}(N)$ на правій вкладці.

Рис. 2.3 як для стабільних, так і для метастабільних чистих фаз. З цих рисунків видно що при $\widetilde{T} < 1$ куртозис додатній (leptokurtic) як при $\widetilde{n} < 1$ (газова фаза) так і при $\widetilde{n} > 1$ (рідка фаза).

При підході до критичної точки куртозис розбігається. При $\tau = 0$ та $\rho \ll 1$ знаходимо

$$\kappa\sigma^2 \;\propto\; \rho^{-6}\,. \tag{2.23}$$

Що цікаво, куртозис приймає велике від'ємне значення (platykurtic) при критичній густині $\widetilde{n} = 1$ та температурах трохи вище критичної, $\widetilde{T} > 1$. В цій області знаходимо

$$\kappa\sigma^2 \; \propto \; -\tau^{-3} \; . \tag{2.24}$$

Це означає що розподіл числа частинок має плоску вершину в даній області, значно більш плоску ніж відповідний гаусіан з такою ж шириною. Дана область може бути означена як область *кросоверу*, де має місце швидкий, проте плавний перехід між газоподібною та рідинною фазами. Це узгоджується з аргументами в підтримку того, що область кросоверу поруч з критичною точкою характеризується від'ємним знаком куртозиса [76]. В околі критичної точки куртозис різко змінюється і приймає як від'ємні так і додатні значення.

При $\widetilde{n} \to 0$ рівняння стану vdW відповідає ідеальному больцманівському газу. В цьому випадку, $\mathcal{P}(N)$ прямує до розподілу Пуассона, і, як слідує з рівнянь (2.20) та (2.22), коефіцієнти асиметрії та куртозис прямують до значень пуассонівського розподілу, тобто, $S\sigma \to 1$ та $\kappa\sigma^2 \to 1$. Слід зазначити, що ідеальний больцманівський газ з розподілом Пуассона зберігає невелике відхилення від гаусівського $\mathcal{P}(N)$ розподілу для якого, за означенням, $S\sigma = 0$ та $\kappa\sigma^2 = 0$.

Больцманівське наближення, яке було застосовано в даному розділі відповідає оригінальній версії рівняння vdW. Це дає можливість одержати аналітичні вирази для нормованої варіації, коефіцієнту асиметрії та куртозиса. Зазначимо також, що результати для флуктуацій числа частинок які представлені на Рис. 2.1-2.3 є універсальними, тобто, вони є незалежними від конкретних чисельних значень vdW параметрів $a$ та $b$. Таким чином, ці результати можуть бути застосовані для дуже різних фізичних систем – від критичної точки води з $T_c = 647$ K$^\mathrm{o}$ до критичної точки ядерної матерії з $T_c \cong 2 \times 10^{12}$ K$^\mathrm{o}$. Універсальність одержаних результатів губиться, якщо врахувати ефекти квантової статистики. З іншого боку, в більшості випадків включення статистики Фермі змінює результати лише кількісно, якісно вони залишаються практично такими ж як у випадку больцманівської статистики.

**Сильноінтенсивні величини.**

Одержані результати показують сильне зростання флуктуацій числа частинок в околі критичної точки. Також, флуктуації можуть бути дуже великі в метастабільних станах, тобто, в переохолодженому газі та/або перегрітій рідині. Флуктуаційні сигнали фазового переходу в ядерній матерії можуть бути спостережені при аналізі зіткнень важких іонів. Однак, існує ще одне джерело флуктуацій числа частинок, а саме флуктуації об'єму системи від-події-до-події. Ці флуктуації в основному геометричного походження і їх важко усунути в ядро-ядерних реакціях. Таким чином, експериментально можуть спостерігатися великі флуктуації навіть в простих статистичних системах, наприклад, в ідеальному газі. Сильноінтенсивні величини для статистичних систем у випадку відсутності фазового переходу в рамках формулювання великого канонічного ансамблю є незалежними від об'єму системи та його флуктуацій. Проте, в системах з критичною точкою (більш загально, для фазового переходу другого роду) критична поведінка залежить від об'єму системи і проявляє характерний для скінченного розміру *скейлинг*. З цього слідує, що поблизу критичної точки сильноінтенсивні міри також залежать від об'єму. Таким чином, за допомогою сильноінтенсивних мір можна виключити з розгляду тривіальні флуктуації об'єму для нормальних статистичних систем, і присутність великих флуктуацій в термінах цих мір може розглядатись як свідчення критичної поведінки.

Нижче будуть обчислені сильноінтенсивні міри, що залежать від флуктуацій енергії $E$ та числа частинок $N$ для рівняння стану vdW. Вони означуються як

$$\Delta[E,N] \;=\; C_\Delta^{-1}\Big[\langle N\rangle\omega[E]-\langle E\rangle\omega[N]\Big]\;, \tag{2.25}$$

$$\Sigma[E,N] \;=\; C_\Sigma^{-1}\Big[\langle N\rangle\omega[E]+\langle E\rangle\omega[N]-2\Big(\langle EN\rangle-\langle E\rangle\,\langle N\rangle\Big)\Big]\;, \tag{2.26}$$

де $C_\Delta^{-1}$ та $C_\Sigma^{-1}$ це нормуючі множники, що будуть прийняті [62]

$$C_\Delta \;=\; C_\Sigma \;=\; \langle N\rangle\,\omega[\varepsilon]\;, \tag{2.27}$$

а $\omega[\varepsilon]$ – це нормована варіація розподілу енергії однієї частинки в системі vdW. Щоб продовжити необхідно обчислити $\omega[\varepsilon]$, $\omega[E]$, та $\langle EN\rangle$.

В газі ван дер Ваальса середня енергія однієї частинки $\overline{\epsilon}$ не залежить від параметру $b$, проте, її видозмінює присутність середнього поля притягання:

$$\overline{\epsilon}=\overline{\epsilon}_{\rm id}(T)-a\frac{N}{V}\;=\;3\,T+m\frac{K_1(m/T)}{K_2(m/T)}\;-\;a\,n\;, \tag{2.28}$$

де $\overline{\epsilon}_{\rm id}$ – це середня енергія однієї частинки в релятивістському ідеальному газі. Варіація енергії однієї частинки нечутлива до присутності середнього поля vdW, отримуємо

$$\omega[\epsilon] \;=\; \frac{\overline{\epsilon^2} \;-\; \overline{\epsilon}^2}{\overline{\epsilon}} \;=\; \frac{T^2}{\overline{\epsilon}}\,\frac{\partial\,\overline{\epsilon}_{\rm id}}{\partial T}\;. \tag{2.29}$$

Повна енергія має вигляд:

$$\begin{aligned}\langle E\rangle \;&=\; \left\langle\left(\overline{\epsilon}_{\rm id} - a\frac{N}{V}\right) N\right\rangle \;=\; \overline{\epsilon}_{\rm id}\,\langle N\rangle - \frac{a}{V}\,\langle N^2\rangle \\ &= \overline{\epsilon}_{\rm id}\,\langle N\rangle - \frac{a}{V}\,\langle N\rangle^2 - a\,\frac{\langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2}{V}\;.\end{aligned} \tag{2.30}$$

Перший та другий доданки в правій частині рівняння (2.30) є пропорційними до $\langle N\rangle$. З іншого боку, варіація залишається скінченною зовні критичної точки в термодинамічний границі $V \to \infty$. Таким чином, одержуємо

$$\langle E\rangle \;\cong\; (\overline{\epsilon}_{\rm id} - an)\,\langle N\rangle\;. \tag{2.31}$$

Тоді для $\omega[E]$ знаходимо

$$\omega[E] \equiv \frac{\langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2}{\langle E\rangle} = \frac{1}{\langle E\rangle}\,T^2\left(\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T}\right)_{\mu/T} = \omega[\epsilon] + \frac{(\overline{\epsilon}_{\rm id} - 2an)^2}{\overline{\epsilon}_{\rm id} - an}\,\omega[N]\;. \tag{2.32}$$

Насамкінець, кореляції між $E$ та $N$ можуть бути обчислені наступним чином

$$\langle EN\rangle - \langle E\rangle\,\langle N\rangle \;=\; T^2\left(\frac{\partial\langle N\rangle}{\partial T}\right)_{\mu/T} = (\overline{\epsilon}_{\rm id} - 2an)\,\langle N\rangle\,\omega[N]\;. \tag{2.33}$$

Підставляючи формули, приведені вище, в рівняння (2.25) та (2.26) знаходимо вирази для сильноінтенсивних величин:

$$\Delta[E,N] \;=\; 1 \;-\; \frac{an(2\overline{\epsilon}_{\rm id} - 3an)}{\overline{\epsilon^2_{\rm id}} - \overline{\epsilon}^2_{\rm id}}\,\omega[N], \tag{2.34}$$

$$\Sigma[E,N] \;=\; 1 + \frac{a^2n^2}{\overline{\epsilon^2_{\rm id}} - \overline{\epsilon}^2_{\rm id}}\,\omega[N]\;. \tag{2.35}$$

У відсутності взаємодій притягання (тобто, $a = 0$), з рівнянь (2.34) та (2.35) можна бачити що $\Delta[E,N] = \Sigma[E,N] = 1$. Отже, в моделі виключеного об'єму сильноінтенсивні величини є такими ж як у випадку ідеального больцманівського газу.

Вирази (2.34) та (2.35) для $\Delta[E,N]$ та $\Sigma[E,N]$ стануть більш ясними якщо розглянути нерялятивістьску границю, $\overline{\epsilon}_{\rm id} = 3T/2$ та $\overline{\epsilon^2_{\rm id}} - \overline{\epsilon}^2_{\rm id} = 3T^2/2$. Зазначимо, що енергія спокою, $m$, була виключена, отже, лише кінетична енергія

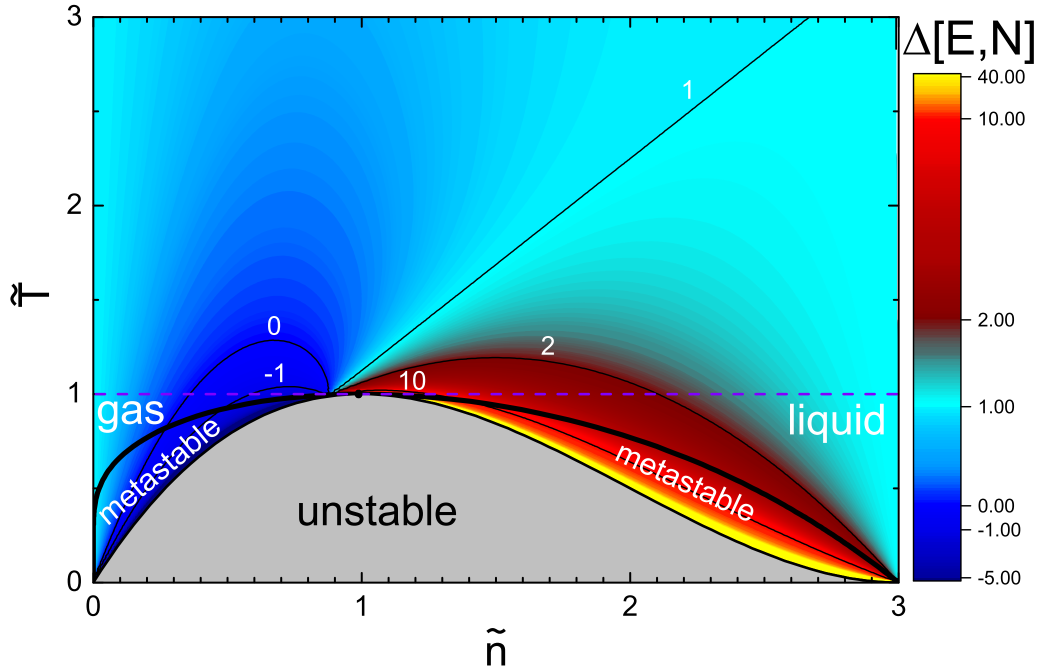



Рис. 2.4: Сильноінтенсивна величина $\Delta[E,N]$ (2.36) на фазовій діаграмі $(\widetilde{n},\widetilde{T})$ як для стабільних, так і для метастабільних чистих фаз. Показані декілька ліній сталих значень $\Delta[E,N]$.

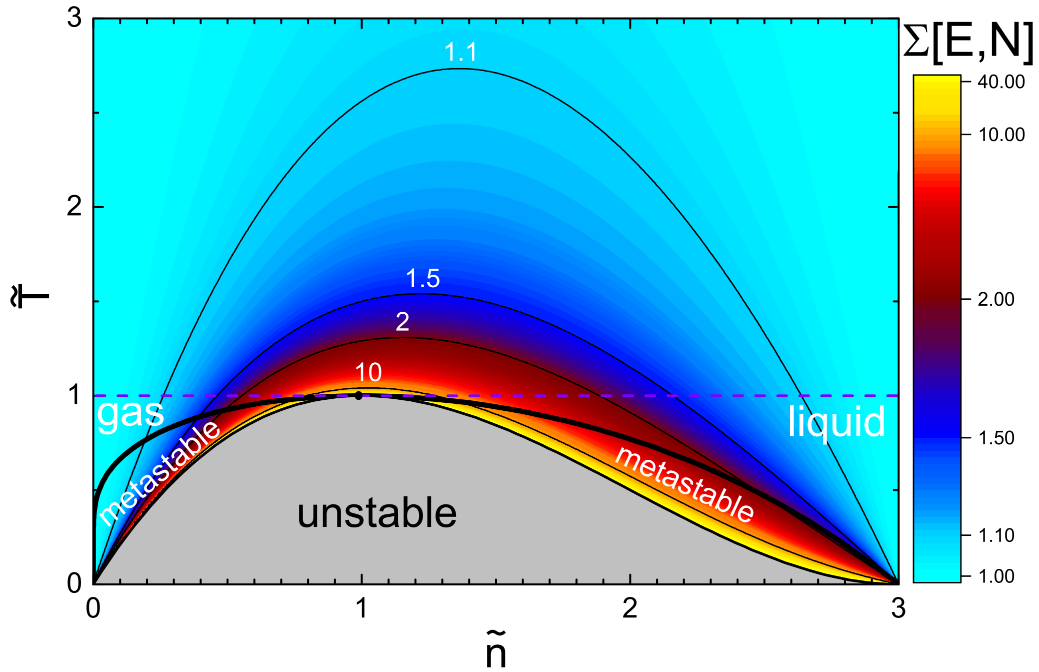



Рис. 2.5: Сильноінтенсивна величина $\Sigma[E,N]$ (2.37) на фазовій діаграмі $(\widetilde{n},\widetilde{T})$ як для стабільних, так і для метастабільних чистих фаз. Показані декілька ліній сталих значень $\Sigma[E,N]$.

флуктуацій дає вклад в $\overline{\epsilon_{\rm id}^2}$. Тоді одержуємо

$$\Delta[E,N] = 1 - \frac{2}{3}\frac{an(3T-3an)}{T^2}\,\omega[N] = 1 - \frac{9\widetilde{n}}{4\widetilde{T}}\left[1 - \frac{9\widetilde{n}}{8\widetilde{T}}\right]\omega[N]\,, \tag{2.36}$$

$$\Sigma[E,N] = 1 + \frac{2}{3}\frac{a^2n^2}{T^2}\,\omega[N] = 1 + \frac{27}{32}\frac{\widetilde{n}^2}{\widetilde{T}^2}\,\omega[N]\,. \tag{2.37}$$

Величини $\Delta[E,N]$ та $\Sigma[E,N]$ представлені на рисунках 2.4 та 2.5, відповідно. Обидві міри $\Sigma[E,N]$ та $\Delta[E,N]$ прямують до одиниці як для границі нульової густини, $\widetilde{n} \to 0$, так і для границі упакування, $\widetilde{n} \to 3$, і є розбіжними в критичній точці. Зазначимо, що міра $\Sigma[E,N]$ є завжди додатною і навіть більшою за одиницю, в той час як міра $\Delta[E,N]$ приймає і додатні і від'ємні значення.

## 2.3 Висновки до розділу 2

Функція тиску vdW (2.1) має простий і загальновідомий вигляд в канонічному ансамблі. Проте, існують підстави для знаходження її формулювання в рамках великого канонічного ансамблю. По-перше, тиск в канонічному ансамблі не дає повного термодинамічного опису системи. Окрім того, великий канонічний ансамбль має очевидні переваги при застосуванні моделі ван дер Ваальса до опису мультикомпонентного адронного газу. формулювання GCE також необхідне для обчислення флуктуацій числа частинок в газі ван дер Ваальса.

В **главі 2.1** описується процедура [70] трансформації функції тиску в канонічному ансамблі в рівняння стану великого канонічного ансамблю. Ця процедура має форму диференційного рівняння 1-го роду для вільної енергії $F$ як функції об'єму $V$. Загальний розв'язок цього рівняння включає граничну умову при $V = V_0$, що береться у вигляді вільної енергії ідеального газу в границі $N/V_0 \to 0$. Це додає до формулювання великого канонічного ансамблю інформацію про маси та фактори виродження частинок, яка відсутня в функції тиску канонічного ансамблю. Слідуючи цій процедурі функцію тиску ван дер Ваальса в канонічному ансамблі (2.1) можна перетворити в трансцендентне рівняння (2.7) для густини числа частинок в великому канонічному ансамблі. Інші термодинамічні функції газу ван дер Ваальса в великому канонічному ансамблі можуть бути одержані однозначним чином.

В **главі 2.2** флуктуації числа частинок аж до четвертого порядку – нормована варіація $\omega[N]$, коефіцієнт асиметрії $S\sigma$, та куртозис $\kappa\sigma^2$ – було обчислено для класичного рівняння стану ван дер Ваальса. Аналітичні формули було одержано та застосовано для аналізу поведінки флуктуацій в околі критичної точки. Отримані результати мають універсальний характер, тобто, вони є незалежними від конкретних значень параметрів $a$ та $b$.

Коефіцієнт асиметрії $S\sigma$ є додатнім при $n < n_c$ та від'ємним при $n > n_c$ для всіх значень температури. Це означає, що газоподібна та рідка фази при $T < T_c$ можуть бути ясно охарактеризовані додатнім та від'ємним значенням коефіцієнта асиметрії $S\sigma$, відповідно. Вище критичної температури $T_c$ на лінії $n = n_c$ коефіцієнт асиметрії рівний нулю. Цій лінії відповідає перехід кросоверу від газоподібної до рідкої речовини.

Куртозис $\kappa\sigma^2$ є дуже чутливим до відстані до критичної точки та, також, має багату структуру. При $T < T_c$ куртозис є додатнім в обох фазах. В околі критичної точки куртозис різко змінюється і може приймати як додатні так і від'ємні значення при $T > T_c$. В області кросоверу одразу над $T_c$ він приймає великі від'ємні значення.

Також було обчислено сильноінтенсивні міри $\Delta[E, N]$ та $\Sigma[E, N]$ для флуктуацій енергії системи та числа частинок. В моделі виключеного об'єму, тобто при $a = 0$, ці міри рівні одиниці, так же як в моделі ідеального газу. Проте,в повному рівнянні ван дер Ваальса вони є розбіжними в критичній точці і значно відрізняються від одиниці в області навколо критичної точки. Ці міри можуть бути використані для вивчення флуктуацій в ядерній матерії яка утворюється при зіткненнях важких іонів.

# Розділ 3

# Модель ван дер Ваальса з квантовою статистикою

## 3.1 Формулювання моделі

Квантове узагальнення рівняння стану ван дер Ваальса [71] є нетривіальною задачею. Виділимо деякі загальні вимоги яким потрібна задовольняти квантова версія цього рівняння:

1. Вона має зводитись до рівняння ідеального *квантового* газу при $a = 0$ та $b = 0$.
2. Вона має бути еквівалентна класичному рівнянню стану ван дер Ваальса (2.1) в області термодинамічних параметрів в якій можна знехтувати квантовою статистикою.
3. Ентропія має бути додатною величиною і прямувати до нуля при $T \to 0$.

Тиск ідеального квантового газу в великому канонічному ансамблі має вигляд

$$p^{\mathrm{id}}(T,\mu) \;=\; \frac{d}{3}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{\boldsymbol{k}^2}{\sqrt{m^2+\boldsymbol{k}^2}}\,\left[\exp\left(\frac{\sqrt{m^2+\boldsymbol{k}^2}-\mu}{T}\right)+\eta\right]^{-1}. \tag{3.1}$$

В рівнянні (3.1), $\eta$ дорівнює +1 для статистики Фермі, -1 для статистики Бозе, та 0 для больцманівського наближення. Всі інші термодинамічні функції можуть бути обчислені з рівнянь (2.6). Вирази для термодинамічних функцій ідеального квантового газу задовольняють третьому закону термодинаміки, тобто $s \geq 0$ та $s \to 0$ при $T \to 0$.

Тепер сформулюємо узагальнення рівняння стану ван дер Ваальса яке враховує ефекти квантової статистики. Зазначимо, що тиск $p(T,\mu)$ для больцманівського випадку може бути переписаний використовуючи рівняння (2.7) як

$$p(T,\mu) \;=\; p^{\mathrm{id}}(T,\mu^*) - a\,n^2\,, \tag{3.2}$$

де

$$\mu^* \;=\; \mu \;-\; b\,p(T,\mu) - a\,b\,n^2 + 2\,a\,n\;. \tag{3.3}$$

Функція $p^{\rm id}$ в рівнянні (3.2) відповідає тиску ідеального газу в больцманівському наближенні, тобто $\eta = 0$ в рівнянні (3.1). Припустимо що квантове рівняння vdW має такий же вигляд як і рівняння (3.2) але включає тиск ідеального *квантового* газу $p^{\rm id}$, тобто для квантового випадку необхідно взяти $\eta = \pm 1$ в рівнянні (3.1), що відповідає статистиці Фермі або Бозе.

У відповідності з (2.6), отримуємо наступне для густини числа частинок:

$$n(T,\mu) \;\equiv\; \left(\frac{\partial p}{\partial \mu}\right)_T \;=\; n^{\rm id}(T,\mu^*)\,(1-bn)\,\left(1 + 2\,a\,\frac{\partial n}{\partial \mu}\right) - 2\,a\,n\,\frac{\partial n}{\partial \mu}\,. \tag{3.4}$$

Це рівняння може бути записане як

$$\Big[n^{\rm id}(T,\mu^*)\,(1-bn) - n\Big]\,\left(1 + 2\,a\,\frac{\partial n}{\partial \mu}\right) \;=\; 0\;. \tag{3.5}$$

Розв'язок цього рівняння, що є фізичним, має наступний вигляд

$$n(T,\mu) = \frac{n^{\rm id}(T,\mu^*)}{1 + b n^{\rm id}(T,\mu^*)}\;, \tag{3.6}$$

де

$$n^{\rm id}(T,\mu) = \frac{d}{2\pi^2}\int_0^\infty dk k^2 \left[\exp\left(\frac{\sqrt{m^2+k^2}-\mu}{T}\right) + \eta\right]^{-1}, \tag{3.7}$$

і має такий же вигляд як і рівняння (2.7). Однак, принципова відмінність полягає в тому, що $n^{\rm id}$ в рівнянні (3.6) – це густина числа частинок ідеального *квантового* газу, тоді як $n^{\rm id}$ в рівнянні (2.7) відповідає ідеальному *класичному* газу, тобто $\eta = 0$, і дана рівнянням (3.7). Також зазначимо, що в квантовому випадку для ефективного хімічного потенціалу $\mu^*$ замість виразів (2.7) повинен використовуватися вираз (3.3).

Рівняння (3.2) та (3.6) – це система двох рівнянь для двох невідомих функцій: $p(T,\mu)$ та $n(T,\mu)$. Модель, що визначається цими рівняннями задовольняє всім означеним умовам. По-перше, при $a = 0$ та $b = 0$ рівняння (3.2) та (3.6) зводяться до виразів ідеального *квантового* газу. По-друге, для тих значень $T$ та $\mu^*$, для яких *квантові* вирази для $p^{\rm id}$ та $n^{\rm id}$ можуть бути апроксимовані больцманівською статистикою, тобто рівнянням (3.7) для $n^{\rm id}$ та $p^{\rm id} = T n^{\rm id}$ для тиску ідеального газу, рівняння (3.2) та (3.6) автоматично стають еквівалентними класичному рівнянню стану ван дер Ваальса (2.1). По-третє, густина ентропії має наступний вигляд

$$s(T,\mu) \;\equiv\; \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\mu} \;=\; \frac{s^{\rm id}(T,\mu^*)}{1 + b\, n^{\rm id}(T,\mu^*)}~, \tag{3.8}$$

а отже, вона завжди є додатною для виразів *квантового* ідеального газу $s^{\rm id}$, та $s \to 0$ при $T \to 0$.

Густина енергії може бути обчислена з рівняння (2.6) як

$$\varepsilon(T,\mu) \;=\; \Big[\overline{\epsilon}_{\rm id}(T,\mu^*) \;-\; a\, n\Big]\, n~, \tag{3.9}$$

де $\overline{\epsilon}_{\rm id}(T,\mu)$ – це середня енергія на одну частинку в ідеальному газі,

$$\overline{\epsilon}_{\rm id}(T,\mu) \;=\; \frac{\varepsilon^{\rm id}(T,\mu)}{n^{\rm id}(T,\mu)}~. \tag{3.10}$$

Тиск в моделі ван дер Ваальса можна записати як функцію температури $T$ та густини числа частинок $n$. З рівняння (3.6) слідує що ефективний хімічний потенціал $\mu^*$ може бути представлений як функція $T$ та $n$,

$$\mu^*(n,T) \;=\; \mu^{\rm id}\Big(\frac{n}{1-bn},T\Big)~, \tag{3.11}$$

де $\mu^{\rm id}(n,T)$ – це хімічний потенціал квантового ідеального газу, який є розв'язком наступного трансцендентного рівняння для даних $n$ та $T$:

$$n \;=\; \frac{d}{2\pi^2}\int_0^{\infty} dk\, k^2 \left[\exp\left(\frac{\sqrt{m^2+k^2}-\mu^{\rm id}}{T}\right)+\eta\right]^{-1}~. \tag{3.12}$$

Рівняння (3.2) може бути записане у вигляді

$$p \;=\; p^{\rm id}\Big[T, \mu^{\rm id}\Big(\frac{n}{1-bn},T\Big)\Big] - a\, n^2~. \tag{3.13}$$

Можна легко перевірити що це рівняння співпадає з рівнянням (2.1) у випадку больцманівської статистики і, таким чином, дійсно може вважатись квантовим узагальненням класичного рівняння ван дер Ваальса в канонічному ансамблі. Також може бути корисним розглянути рівняння ван дер Ваальса з квантовою статистикою в рамках термодинамічного підходу середнього поля розвинутого в роботах [73–75].

## 3.2 Гранична температура в газі $\pi$-мезонів з рівнянням стану ван дер Ваальса

В даній главі рівняння стану ван дер Ваальса з квантовою статистикою застосовується до опису газу взаємодіючих піонів. В цьому випадку формалізм великого канонічного ансамблю є дійсно необхідним: число піонів не зберігається і не може розглядатись як незалежна змінна великого канонічного ансамблю. Зазначимо, що рівняння стану взаємодіючих піонів вивчалося на протязі останніх десятиріч в рамках різних теоретичних підходів (див, напр. [77–81]).

**Газ $\pi$-мезонів з рівнянням стану ван дер Ваальса.**

У випадку газу піонів необхідно використовувати Бозе-статистику, $\eta = -1$ в рівняннях (3.1) та (3.7). Розглядається система піонів з нульовим значенням повного електричного заряду, таким чином, $\pi^+$, $\pi^-$, та $\pi^0$ всі мають нульові хімічні потенціали, тобто, $\mu = 0$ в рівнянні (3.3). В результаті, $p$ та $n$ в рівняннях (3.2) та (3.6) стають функціями однієї змінної, $T$, та рівняння (3.3),(3.1),(3.7), відповідно, приймають вигляд:

$$\mu^* = -\, b\, p(T) - a\, b\, n^2(T) + 2\, a\, n(T)\ , \tag{3.14}$$

$$p^{\rm id}(T,\mu^*) = \\ = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty k^2 dk\, \frac{k^2}{\sqrt{m_\pi^2+k^2}} \left[\exp\left(\frac{\sqrt{m_\pi^2+k^2}-\mu^*}{T}\right) - 1\right]^{-1}\ , \tag{3.15}$$

$$n^{\rm id}(T,\mu^*) = \frac{3}{2\pi^2}\int_0^\infty k^2 dk\, \left[\exp\left(\frac{\sqrt{m_\pi^2+k^2}-\mu^*}{T}\right) - 1\right]^{-1}\ , \tag{3.16}$$

де ми поклали $g = 3$ в якості фактора виродження піонів та $m_\pi \cong 138$ MeV в якості маси піонів. Далі ми фіксуємо значення $b \cong 0.45$ fm$^3$ яке відповідає радіусу твердого кора піонів $r \cong 0.3\,\mathrm{fm}^{-3}$ [82,83] [1]. Значення $a$ розглядається як вільний параметр моделі. Зазначимо також, що густина ентропії $s(T)$ та густина енергії $\varepsilon(T)$ можуть бути обчислені з функції $p(T)$ наступним чином:

$$s\ =\ \frac{dp}{dT}\ , \qquad \varepsilon(T) = T\frac{dp}{dT}\ -\ p\ . \tag{3.17}$$

Розглядається $T \leq 160$ MeV як область де можливе існування піонного газу. При вищих температурах очікується що ефекти пов'язані з деконфайнментом

[1] В наступній главі розглядається як результати моделі залежать від чисельних значень $b$, зокрема при $b \to 0$.

відіграють головну роль. Для кожного значення $T$, при $T \leq 160$ MeV, знаходимо $\mu^* = \mu^*(T)$ розв'язуючи трансцедентні рівняння (3.14), тоді функції $n(T)$ та $p(T)$ одержуються з рівнянь (3.6) та (3.2), відповідно. Якщо рівняння (3.14) має більш ніж один розв'язок для даного $T$, лише розв'язок з більшим значенням $p(T)$ має розглядатися як стабільний у відповідності з критерієм Гіббса. Для рівняння стану ван дер Ваальса в великому канонічному ансамблі цей критерій був розглянутий в роботі [71]

Результати для $\mu^*$, $p$, $n$ та $\varepsilon$ як функцій $T$ представлені на рисунках 3.1 (a)-(d) суцільними лініями для різних значень параметра $a$. Точковані лінії на цих рисунках відповідають ідеальному газу (тобто при $a = 0$ та $b = 0$). В області температури $T \leq 100$ MeV (не показаній на Рис. 3.1) ефекти взаємодії для даних значень $a$ та $b$ є малими, тобто всі криві є дуже близькими до кривих ідеального газу. Це є результатом того, що взаємодії ван дер Вальса залежать від густини числа частинок, і стають незначними при $n \to 0$.

Взаємодії відштовхування пригнічують термодинамічні функції $n(T)$, $p(T)$ та $\varepsilon(T)$ в моделі ван дер Ваальса в порівнянні з функціями ідеального газу піонів. Це ясно видно для кривих з $a = 0$ на рисунках 3.1 (b)-(d). Відштовхування також спричиняє виникнення верхньої границі для густини числа частинок, а саме, $n \leq 1/b \cong 2.21 \text{ fm}^{-3}$. З іншого боку, наявність взаємодій притягання збільшує $n(T)$, $p(T)$, та $\varepsilon(T)$ в порівнянні ідеальним газом піонів. Спостерігається, що рівняння стану vdW з $b = 0.45$ fm$^3$ та $a/b = 200$ MeV є близьким до рівняння стану ідеального газу, тобто вклади взаємодій притягання та відштовхування майже скомпенсовують один одного у всіх термодинамічних функціях.

Зазначимо, що поправка виключеного об'єму ван дер Ваальса знаходиться у відповідності з віріальним розкладом для твердих куль лише при достатньо низькій густині. При великих значеннях частки повного об'єму яку займають частинки скінченного розміру, так-званої частки упакування (packing fraction) $\eta = (bn)/4$, а саме $\eta \gtrsim 0.1$, рівняння ван дер Ваальса суттєво відхиляється від рівняння стану твердих куль. Найвище значення густини числа піонів що отримується в даній роботі це $n_{\max} \simeq 0.30 \text{ fm}^{-3}$, як видно з Рис. 3.1. Таким чином, максимальне значення частки упакування приблизно $\eta_{\max} = 0.034$. При таких значеннях $\eta$ рівняння ван дер Ваальса все ще добре узгоджується з віріальним розкладом для твердих куль (див, напр., Рис. 1 в роботі [75]) і, таким чином,

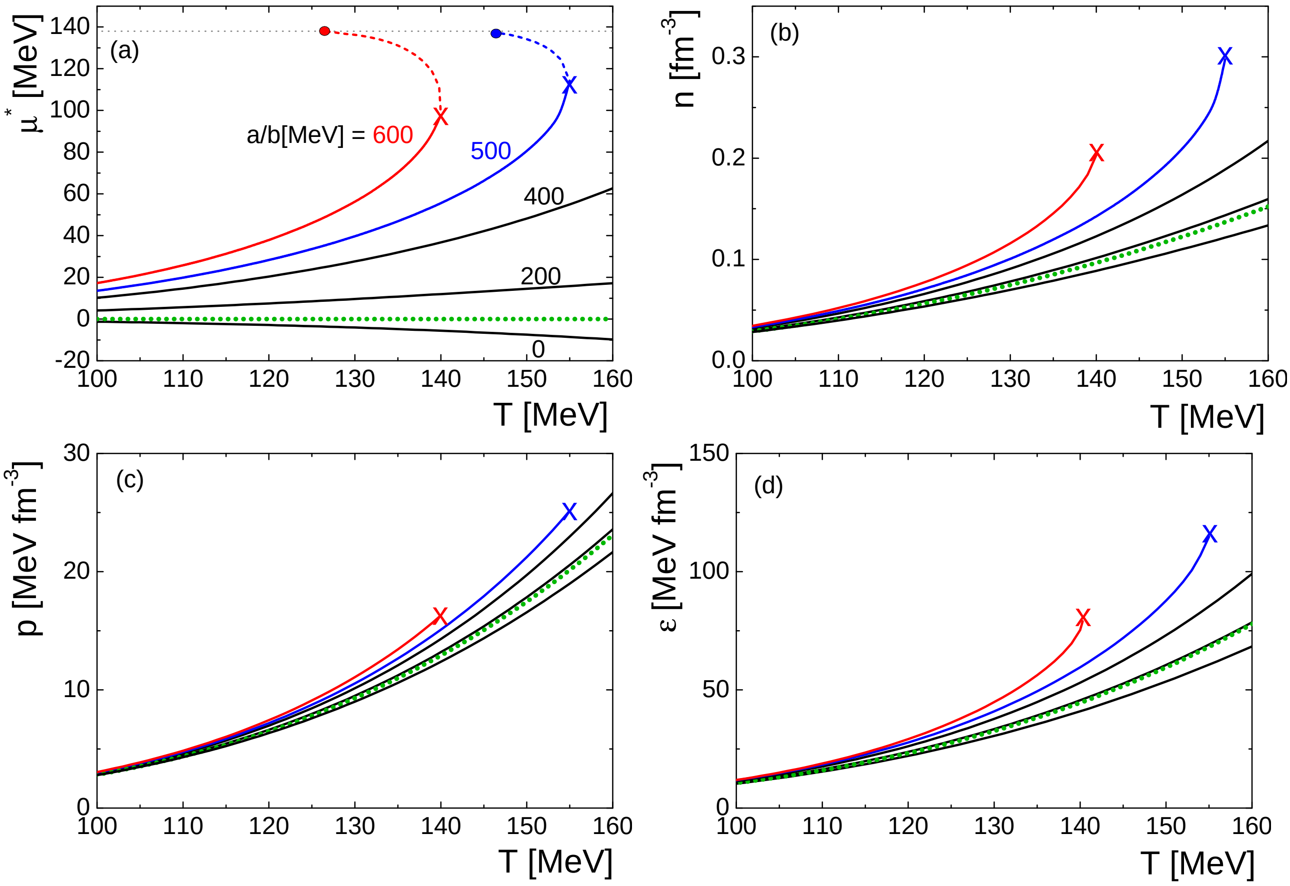



Рис. 3.1: Термодинамічні величини піонного газу з рівнянням стану ван дер Ваальса як функції температури: ефективний хімічний потенціал $\mu^*$ (a), густина числа частинок (b), тиск (c) та густина енергії (d). Значення параметру виключеного об'єму зафіксоване як $b = 0.45$ fm$^3$. Суцільні лінії відповідають розв'язкам з $a/b$ = 0, 200, 400, 500, 600 MeV (знизу догори). Точковані лінії показують поведінку ідеального газу, тобто при $a = 0$ та $b = 0$. Точки граничної температури зображжені символами $\times$. На рисунку (a) нестабільні розв'язки зображені пунктирними сегментами ліній що закінчуються в точках $T = T'$, зображених суцільними кругами.

може використовуватись.

**Гранична температура.**

При великих значеннях параметра $a$ має місце нове явище: виникає гранична температура $T_0$, тобто рівняння (3.14) не має стабільних розв'язків при $T > T_0$ [2]. В той же час, в інтервалі температур $T' \leq T \leq T_0$ виникають нестабільні розв'язки для термодинамічних функцій ван дер Ваальса. Тут температура $T'$ визначена як початкова точка конденсації Бозе-Ейнштейна, тобто $\mu^*(T') = m_\pi$. Значення термодинамічних функцій в граничній температурі $T_0$ зображені символами $\times$ на рисунках 3.1 (a)-(d), тоді як значення при $T = T'$ зображені на Рис. 3.1 (a) кружками, а нестабільні розв'язки показані пунктирними сегментами кривих. Стабільні розв'язки, що показані суцільними лініями на всіх рисунках, відповідають критерію Гіббса, тобто їх тиск більше, ніж тиск нестабільних розв'язків при рівній температурі. Нестабільні розв'язки показані лише для ефективного хімічного потенціалу $\mu^*(T)$, на вкладці (a) рисунка 3.1.

Для того, щоб прояснити фізичне походження граничної температури $T_0$ для піонного газу з рівнянням стану ван дер Ваальса, обчислимо теплоємність, $C = d\varepsilon/dT$, квадрат швидкості звука, $c_s^2 = dp/d\varepsilon$, та нормовану варіацію розподілу числа частинок. Можна показати, що нормована варіація числа частинок в моделі QvdW має вигляд:

$$\begin{aligned}\omega[N] &= \frac{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}{\langle N \rangle} \\ &= \omega_{\text{id}}(T,\mu^*) \left[\frac{1}{(1-bn)^2} - \frac{2an(T,\mu^*)}{T}\,\omega_{\text{id}}(T,\mu^*)\right]^{-1}, \qquad (3.18)\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}&\omega_{\text{id}}(T,\mu^*) = \\ &= \frac{1}{n^{\text{id}}(T,\mu^*)}\,\frac{3}{2\pi^2}\int_0^\infty k^2 dk\,\left[\exp\left(\frac{\sqrt{m_\pi^2+k^2}-\mu^*}{T}\right) - 1\right]^{-2}, \qquad (3.19)\end{aligned}$$

це нормована варіація розподілу числа частинок ідеального піонного газу з хімічним потенціалом $\mu^*$. Як видно з рисунків 3.2 (a)-(c), $c_s^2 \to 0$, тоді як обидві величини $C \to \infty$ та $\omega[N] \to \infty$ при $T \to T_0$. Пряме обчислення виявляє степеневу поведінку при $T \to T_0$: обидва $C$ та $\omega[N]$ пропорційні до $(T_0 - T)^{-1/2}$, та

[2]Звернемо увагу що розглядаються лише температури $T < 160$ MeV.

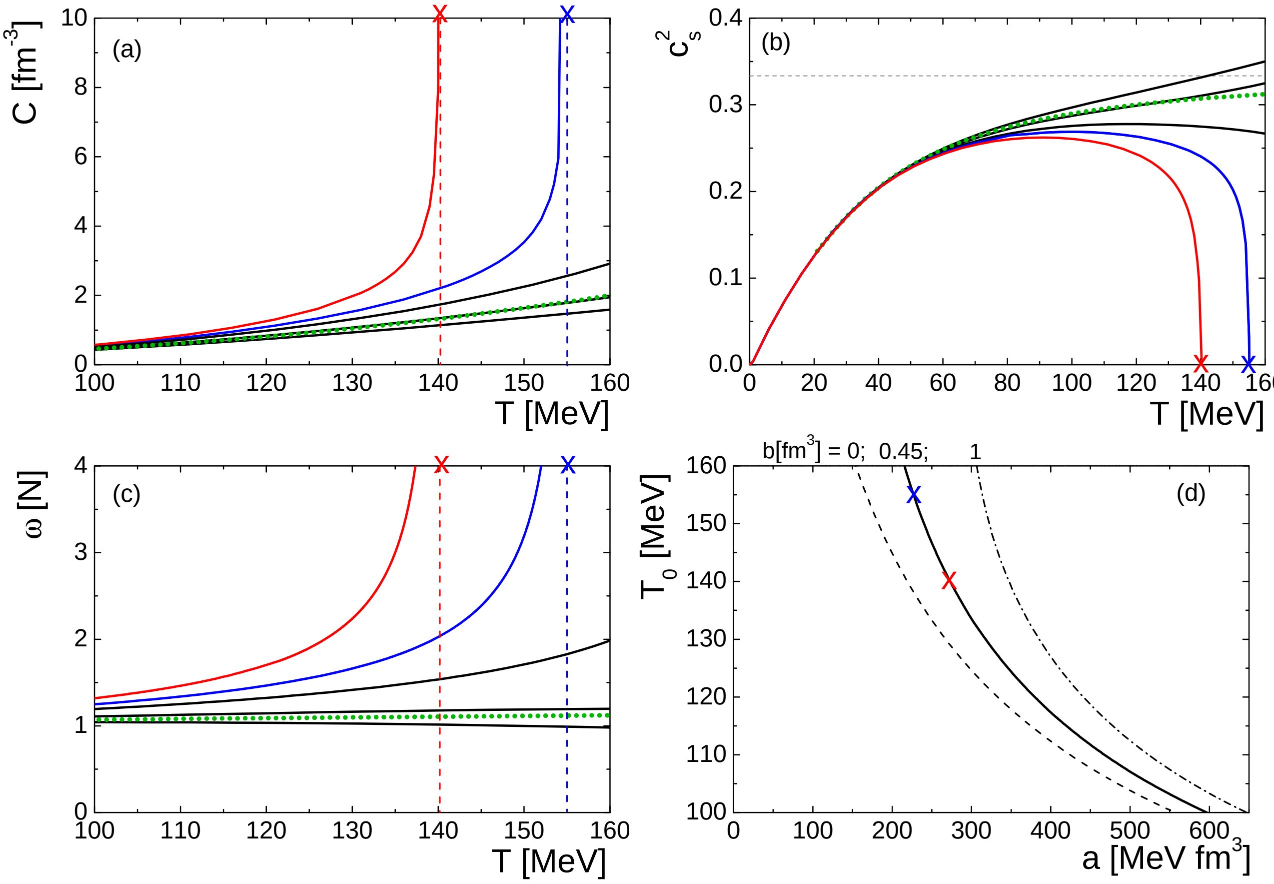



Рис. 3.2: (a) Теплоємність. (b) Квадрат швидкості звука (пунктирна горизонтальна лінія відповідає значенню $c_s^2 = 1/3$, отриманому для ідеального газу безмасових частинок). (c) Нормована варіація $\omega[N]$ (3.18). Суцільні лінії відповідають розв'язкам з $b = 0.45$ fm$^3$ та $a/b = 0$, 200, 400, 500, 600 MeV знизу догори в (a) та (c), і згори донизу в (b). (d) Залежність граничної температури $T_0$ від параметра $a$ для $b = 0$ (пунктирна лінія), $b = 0.45$ fm$^3$ (суцільна лінія) та $b = 1$ fm$^3$ (пунктирно-точкована лінія).

$c_s^2 \propto (T_0 - T)^{1/2}$. Флуктуації повної енергії $E$ мають дуже схожу поведінку до поведінки флуктуацій числа піонів $N$. Таким чином, гранична температура відповідає найм'якішій точці рівняння стану (швидкість звуку дорівнює нулю) та нескінченно великим теплоємності та флуктуаціям. На Рис. 3.2 (d) залежність $T_0$ від параметра $a$ показана для різних значень параметра відштовхування $b$: $b = 0$, $b = 0.45$ fm$^3$ та $b = 1$ fm$^3$. З Рис. 3.2 (d) видно що для кожного значення параметра відштовхування $b$ існує мінімальне значення параметра притягання $a = a_b$ таке що гранична температура $T = T_0 \leq 160$ MeV виникає при всіх $a \geq a_b$, та $T_0$ спадає зі зростанням $a$. При $b = 0.45$ fm$^3$, знаходимо що $T_0 \cong 140$ MeV та 155 MeV при $a \cong 270$ MeV fm$^3$ та 225 MeV fm$^3$, відповідно. Для менших значень $b$, таке само значення граничної температури, $T_0 \cong 140$ MeV та 155 MeV, досягаються при менших значеннях $a$. Зокрема, для $b = 0$, значення $T_0 \cong 140$ MeV та 155 MeV досягаються при $a \cong 219$ MeV fm$^3$ та 168 MeV fm$^3$, відповідно. Зазначимо необхідність додаткової інформації для подальшого обмеження діапазону значень параметрів $a$ та $b$. Виходячи з даного аналізу, найцікавіша з фізичної точки зору поведінка з $T_0 = 150 \pm 10$ MeV має місце при $b$ від 0 до 0.45 fm$^3$ та $a$ від 150 MeV fm$^3$ до 300 MeV fm$^3$.

Параметри $a$ та $b$ були отримані в роботі [71] для системи нуклонів (див розділ 4). Беручи за основу властивості ядерної матерії при нульовій температурі була отримана оцінка для нуклонів $b \simeq 3.42$ fm$^3$ та $a \simeq 329$ MeV fm$^3$. Таким чином, чисельні значення обох параметрів $b$ та $a$ моделі ван дер Ваальса для піонного газу, що розглядається в даному розділі, менші ніж для системи взаємодіючих нуклонів.

В принципі, інформація про параметри $a$ та $b$ може бути одержана з даних по $\pi\pi$-розсіянням. Зазначимо, що другий кластерний інтеграл рівноважного піонного газу був обчислений в роботі [48]. Фазові зсуви в $\pi\pi$ розсіянні були описані виходячи з того, що як відштовхування твердого кора, так і притягання резонансів є однаково важливими і повинні враховуватися одночасно. З обчислень в роботі [48] випливає, що параметр $a$ може приймати значення до декількох сотень MeV fm$^3$, і в загальному випадку може бути залежним від температури. Проте, немає підстав очікувати, що можна знехтувати вищими членами кластерного розкладу. Частини вищих кластерних членів що відповідають притяганню можуть бути представлені як вклади мульти-піонних резонансів. Властивості резонансів (маси та ширини) є мало відомими. Таким чином, точна оцінка чисельних значень параметра $a$ в системі піонів ван дер Ваальса виглядає проблематично, і в даному розділі параметр $a$ розглядається як чисто феноменологічний вільний параметр.

**Порівняння з моделлю Хагедорна.**

Концепція граничної температури в адронному газі була введена в фізику Хагедорном [84–86]. Його гранична температура $T_0 = 160 \pm 10$ MeV виникала в зв'язку з експоненційно зростаючим масовим спектром $\rho(m)$ для збуджених адронних станів при великій масі $m$:

$$\rho(m) \;\cong\; c\, m^{-\alpha} \exp\left(\frac{m}{T_0}\right) \theta(m - M_0)\;, \tag{3.20}$$

де $c$, $M_0$, $T_0$ та $\alpha$ – це параметри моделі. Ці збуджені стани що називаються "фаєрболи" розглядалися як точкові невзаємодіючі частинки. Представлення взаємодій притягання частинок за допомогою резонансів було вперше запропоновано в роботі [87] в рамках статистичної фізики, а потім застосовано до продукції адронів в роботі [88]. Ця ідея була розвинута в рамках формалізму $S$-матриці статистичної механіки в роботі [89].

Спектр $\rho(m)$ може бути знайдено зі статистичного рівняння бутстрапа [90]. В якості вхідних даних це рівняння вимагає спектр низько-лежачих адронних станів. В найпростішій версії моделі, ці вхідні дані зводяться до єдиного найлегшого адрону – піону, і неперервного масового спектру $\rho(m)$, що починається з $M_0 > 2m_\pi$. Тоді тиск в моделі Хагедорна визначається як

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{H}}(T) \;=\; & \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{\mathbf{k}^2}{\sqrt{\mathbf{k}^2+m_\pi^2}}\left[\exp\left(\frac{\sqrt{\mathbf{k}^2+m_\pi^2}}{T}\right) \;-\; 1\right]^{-1} \\ & +\; \frac{T^2}{2\pi^2}\int_{M_0}^{\infty} dm\,\rho(m)\,m^2 K_2(m/T)\;, \end{aligned} \tag{3.21}$$

де $K_2$ – це модифікована функція Бесселя. Перший доданок в правій частині рівняння (3.21) відповідає тиску ідеального Бозе газу піонів, а другий – вкладу всіх збуджених станів (3.20) в больцманівському наближенні. Інші термодинамічні функції моделі Хагедорна можна отримати використовуючи термодинамічні співвідношення (3.17).

З рівнянь (3.20) та (3.21) слідує що термодинамічні функції не існують при $T > T_0$ через розбіжність інтегралу відносно $m$ в рівнянні (3.21). Сингулярна

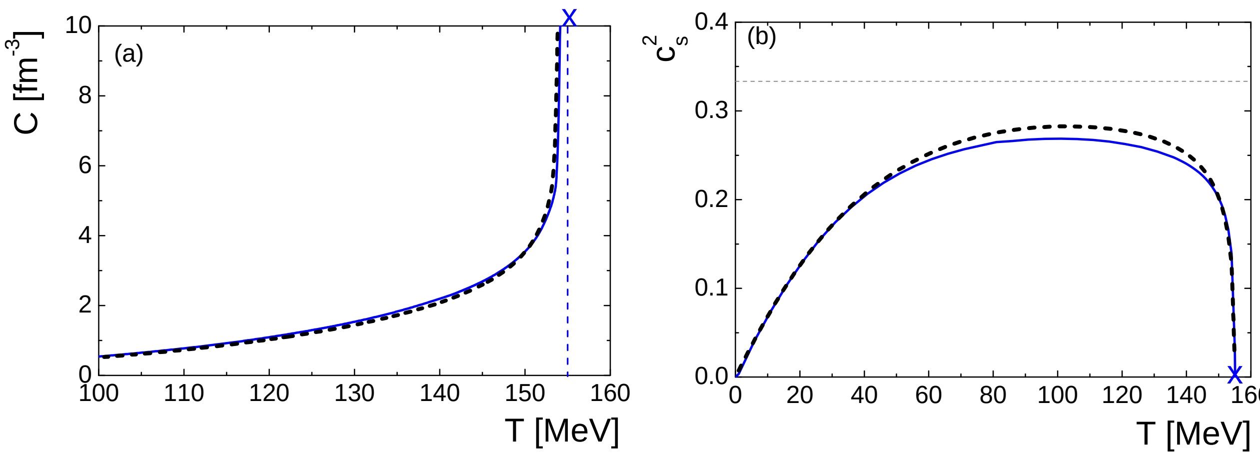



Рис. 3.3: Теплоємкість (a) та квадрат швидкості звуку (b). Суцільні лінії відповідають рівнянню стану ван дер Ваальса з $b = 0.45$ fm$^3$ та $a/b = 500$ MeV. Пунктирні лінії відповідають моделі Хагедорна (3.20) та (3.21) з $T_0 = 155$ MeV, $\alpha = 4$, $c = 3.57$ fm$^{-3}$ та $M_0 = 507$ MeV.

частина інтегралу дає вклад в тиск як $p_H \propto (T_0 - T)^{\alpha-5/2}$ та в густину енергії як $\varepsilon_H \propto (T_0 - T)^{\alpha-7/2}$. Явний розв'язок статистичного рівняння бутстрапа [90] дає $\alpha = 3$ [91]. Таким чином, $\varepsilon_H \propto (T_0 - T)^{-1/2}$ та $\varepsilon_H \to \infty$ при $T \to T_0$. З іншого боку, при $\alpha > 7/2$ всі термодинамічні функції в моделі Хагедорна залишаються скінченними в околі граничної температури $T = T_0$. Більш того, виявляється що існує цікава відповідність між піонним газом з рівнянням стану ван дер Ваальса та моделью Хагедорна з $7/2 < \alpha < 9/2$, тобто поведінка $p_H$ та $\varepsilon_H$ дуже схожа на поведінку $p$ та $\varepsilon$ в моделі QvdW, що представлена на вкладках (b) та (c) на Рис. 3.1 для $a/b = 500$ MeV та 600 MeV. В околі граничної температури $T_0$ теплоємність та квадрат швидкості звуку в моделі Хагедорна ведуть себе як $C \propto (T_0 - T)^{\alpha-9/2}$ та $c_s^2 \propto (T_0 - T)^{9/2-\alpha}$, відповідно. Таким чином, для $\alpha = 4$ поведінка $C$ та $c_s^2$ в моделі Хагедорна при $T \to T_0$ така сама як у піонному газі з рівнянням стану ван дер Ваальса, якщо значення $T_0$ в обох моелях однакові. На Рис. 3.3 представлено порівняння цих двох величин в моделі QvdW з $b = 0.45$ fm$^3$, $a/b = 500$ MeV та моделі Хагедорна з $T_0 = 155$ MeV та $\alpha = 4$.

## 3.3 Висновки до розділу 3

В **главі 3.1** приводиться узагальнення рівняння стану ван дер Ваальса в великому канонічному ансамблі, що враховує ефекти квантової статистики (квантова модель ван дер Ваальса, QvdW) [71]. Це узагальнення являє собою систему двох трансцендентних рівнянь для тиску та густини числа частинок. Дані рівняння мають розв'язок для всіх можливих значень температури, $T \geq 0$, та хімічного потенціалу, $-\infty < \mu < \infty$. Квантове узагальнення рівняння vdW задовольняє всім основним вимогам: воно зводиться до рівняння ідеального Фермі або Бозе газу при $a = 0$ та $b = 0$, до класичного рівняння ван дер Ваальса в больцманівській границі, і для нього виконується 3-й закон термодинаміки, тобто $s \to 0$ при $T \to 0$.

В **главі 3.1** модель QvdW застосовується до опису системи взаємодіючих піонів. Було розглянуто роль взаємодій відштовхування та притягання, що описуються vdW параметрами $b$ та $a$, відповідно. Було знайдено що для $b \cong 0.45$ fm$^3$ та $a/b \cong 200$ MeV рівняння стану ван дер Ваальса для піонів виявляється близьким до відповідного рівняння ідеального піонного газу, тобто взаємодії притяжіння та відштовхування приблизно взаємо-скомпинсовують одна одну.

При кожному значенні параметра $b$ існує мінімальне значення параметра $a = a_b$ таке що гранична температура $T = T_0$ появляється при всіх $a \geq a_b$, та $T_0$ зменшується при зростанні $a$. Коли $T \to T_0$ виникає декілька цікавих ефектів: швидкість звуку прямує до нуля як $(T_0 - T)^{1/2}$, тоді як теплоємність а також нормована варіація розподілу числа частинок прямують до нескінченності як $(T_0 - T)^{-1/2}$.

Представлена модель QvdW для піонів порівнюється з моделлю Хагедорна, в якій також присутній феномен граничної температури. Не дивлячись на те що реалізація механізму притягання між частинками в моделі Хагедорна відрізняється від відповідного механізму в моделі QvdW, було знайдено що дуже схожа термодинамічна поведінка реалізується в обох моделях. Вона має місце для спеціального вибору степеневого показника, а саме $m^{-4}$, в пре-експоненційному множнику масового спектру $\rho(m)$ моделі Хагедорна.

Наявність граничної температури $T_0$ в моделі QvdW піонного газу, безсумнівно, є свідченням обмеження в області можливого застосування цієї моделі. Подібно до моделі Хагедорна, гранична температура в піонному газі ван дер Ваальса повинна бути перетворена в температуру переходу деконфайнмента після введення фундаментальних кварк-глюонних ступеней вільності. Однак, розгляд цього є за межами даної роботи.

# Розділ 4

# Ядерна матерія

В даному розділі рівняння стану ван дер Ваальса з квантовою статистикою застосовується до опису властивостей симетричної ядерної матерії. Зокрема, розглядається Фермі газ нуклонів ($m \cong 938$ MeV та $d = 4$) з взаємодіями притягання та відштовхування, що описуються параметрами ван дер Ваальса $a$ та $b$, відповідно.

Дослідження ядерної матерії має довгу історію. Термодинаміка ядерної матерії та її застосування до утворення ядерних фрагментів в зіткненнях важких іонів була розглянута в роботах [92–97] в 1980-х. Огляд цих ранніх розробок може бути знайдений в роботі [98]. Сьогодні, властивості ядерної матерії описуються багатьма моделями, наприклад такими, які застосовують самоузгоджений підхід середнього поля (relativistic mean-field theory, RMF) [99–103] а також здвоєння парності (parity doubling) [104–106]. В рамках моделей RMF взаємодії розглядаються в підході середнього поля. Взаємодії відштовхування зазвичай опосередковані обміном векторних мезонів, тоді як взаємодії притягання описуються через обмін скалярними мезонами. Поправка виключеного об'єму в моделях середнього поля розглядалась в роботах [69, 74, 107].

Відома феноменологія ядро-ядерного потенціалу засвідчує взаємодії відштовхування на коротких відстанях та взаємодії притягання на середніх відстанях. Подібно до молекулярних систем, фазовий перехід рідина-газ має місце в ядерній матерії. Експериментально, наявність фазового переходу рідина-газ в ядерній матерії була виявлена за-допомогою непрямих спостережень і вперше повідомлена в роботах [108–110]. Перші прямі вимірювання ядерної калоричної кривої були здійснені колаборацією ALADIN [15], і повторені пізніше іншими експериментами [111, 112].

Обмежимось розглядом низьких температур, $T \leq 30$ MeV, і таким чином, знехтуємо утворенням піонів. В даному розділі, ми також нехтуємо можливим утворенням ядерних кластерів та баріонних резонансів (напр. $N^*$ та $\Delta$), які можуть бути важливими при низькій та високій баріонній густині, відповідно. В рамках цих наближень, число нуклонів $N$ є сталим та незалежним параметром в рамках канонічного ансамблю. Хімічний потенціал $\mu$ великого канонічного ансамблю регулює густину числа нуклонів.

**Властивості при** $T=0$.

Для обчислення термодинамічних функцій в GCE використовуються рівняння (3.2), (3.6), (3.8) та (3.9). Нагадаємо, що з використанням змінної $\mu^*$ (3.2), термодинамічні функції квантового газу ван дер Ваальса можуть бути виражені через відповідні функції ідеального квантового газу наступним чином:

$$n(T,\mu)=\frac{n^{\rm id}(T,\mu^*)}{1+b\,n^{\rm id}(T,\mu^*)}~, \tag{4.1}$$

$$p(T,\mu)~=~p^{\rm id}(T,\mu^*)~-~a~\left[\frac{n^{\rm id}(T,\mu^*)}{1+b\,n^{\rm id}(T,\mu^*)}\right]^2~, \tag{4.2}$$

$$\varepsilon(T,\mu)=\frac{\varepsilon^{\rm id}(T,\mu^*)}{1+b\,n^{\rm id}(T,\mu^*)}~-~a~\left[\frac{n^{\rm id}(T,\mu^*)}{1+b\,n^{\rm id}(T,\mu^*)}\right]^2~, \tag{4.3}$$

$$s(T,\mu)=\frac{s^{\rm id}(T,\mu^*)}{1+b\,n^{\rm id}(T,\mu^*)}~. \tag{4.4}$$

При нульовій температурі величини ідеального квантового газу в рівняннях (4.1) – (4.4) можуть бути записані як

$$n^{\rm id}(T=0,\mu^*)~=~\frac{d}{2\pi^2}\int\limits_0^{\sqrt{\mu^{*2}-m^2}}dk\,k^2~=~\frac{d}{6\pi^2}\,(\mu^{*2}-m^2)^{3/2}, \tag{4.5}$$

$$p^{\rm id}(T=0,\mu^*)~=~\frac{d}{6\pi^2}\int\limits_0^{\sqrt{\mu^{*2}-m^2}}dk\,\frac{k^4}{\sqrt{k^2+m^2}}~=$$
$$=~\frac{d}{48\pi^2}\,\mu^*\,\sqrt{\mu^{*2}-m^2}\,(2\mu^{*2}-5m^2)~-~\frac{d}{16\pi^2}\,m^4~\ln\frac{m}{\mu^*+\sqrt{\mu^{*2}-m^2}}, \tag{4.6}$$

$$\varepsilon^{\rm id}(T=0,\mu^*)~=~\frac{d}{2\pi^2}\int\limits_0^{\sqrt{\mu^{*2}-m^2}}dk\,k^2\,\sqrt{k^2+m^2}~=$$
$$=~\frac{d}{16\pi^2}\,\mu^*\,\sqrt{\mu^{*2}-m^2}\,(2\mu^{*2}-m^2)~+~\frac{d}{16\pi^2}\,m^4~\ln\frac{m}{\mu^*+\sqrt{\mu^{*2}-m^2}}, \tag{4.7}$$

$$s^{\mathrm{id}}(T=0,\mu^*) \;=\; \lim_{T\to 0}\frac{\varepsilon^{\mathrm{id}}(T,\mu^*)+p^{\mathrm{id}}(T,\mu^*)-\mu^*\, n^{\mathrm{id}}(T,\mu^*)}{T} \;=\; 0\,. \qquad (4.8)$$

Зафіксуємо параметри $a$ та $b$ таким чином, щоб відтворити властивості ядерної матерії при нульовій температурі (див, напр. роботу [113]), тобто, має виконуватись $p = 0$, $\varepsilon/n = m + E_B \cong 922$ MeV та $n = n_0 \cong 0.16$ fm$^{-3}$ при $T = 0$. Тут $E_B \cong -16$ MeV це енергія зв'язку на один нуклон. Тоді знаходимо, $a \cong 329$ MeV fm$^3$ та $b \cong 3.42$ fm$^3$. Зазначимо, що параметр власного об'єму частинки $b$ може бути виражений через радіус твердого кора піона $r$ як $b = 16\pi r^3/3$. Це дає $r \cong 0.59$ fm для радіусу твердого кора піона.

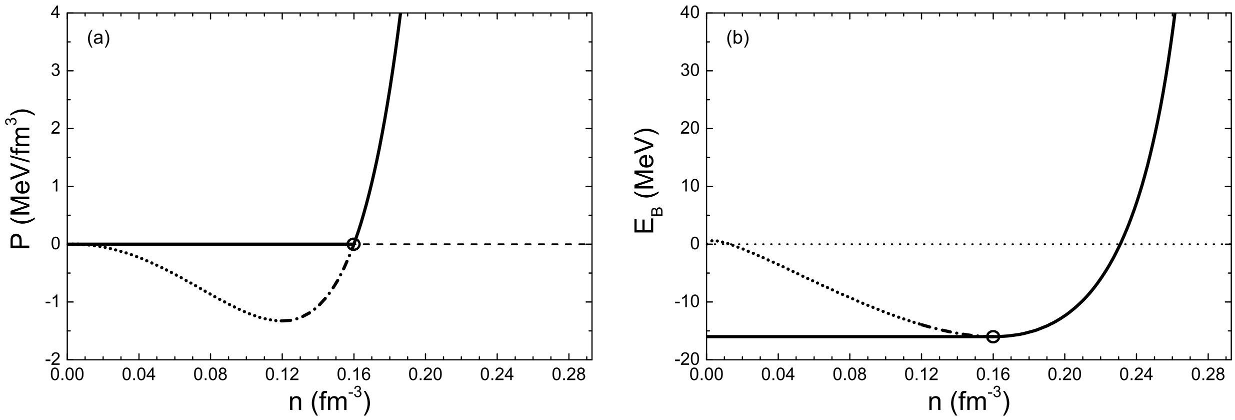



Рис. 4.1: Залежність тиску $p$ (a) та енергії зв'язку $E_B$ (b) від густини нуклонів $n$ при $T = 0$. Параметри ван дер Ваальса наступні: $a \cong 329$ MeV·fm$^3$ та $b \cong 3.42$ fm$^3$ ($r \cong 0.59$ fm). Кружки відповідають стану ядерної матерії при нульовій температурі. Пунктирно-точковані лінії відповідають метастабільній частині ізотерми vdW, тоді як точковані лінії відповідають нестабільній частині.

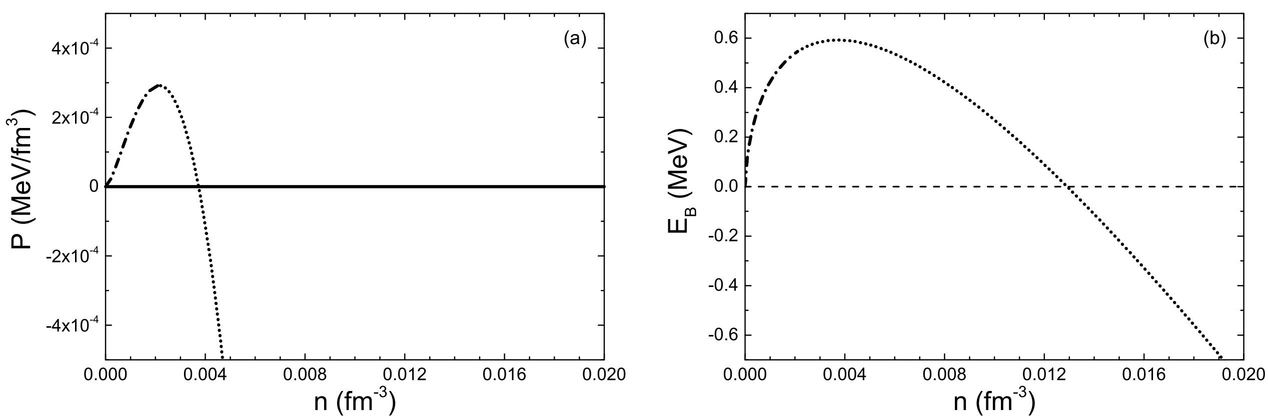



Рис. 4.2: Те саме що на Рис. 4.1, але для малих значень $n$.

Тиск $p$ та енергія зв'язку $E_B$ як функції густини нуклонів $n$ при $T = 0$

показані на Рис. 4.1 (a) та (b), відповідно. Стабільна частина vdW ізотерми зображена на Рис. 4.1 суцільними лініями, тоді як метастабільна та нестабільна частина зображені пунктирно-точкованими та точкованими лініями, відповідно. При дуже малих густинах завжди реалізується газова фаза з поведінкою майже ідеального газу. Однак, при $T = 0$ ця фаза, що краще видна на Рис. 4.2, може існувати лише як метастабільний стан.

Зазначимо, що при будь-якій температурі $T > 0$ хімічний потенціал має добре визначену граничну поведінку $\mu \to -\infty$ при $n \to 0$. При $T = 0$ ситуація інша: при $n = 0$ хімічний потенціал може приймати будь-яке значення менше ніж маса частинки. Змішана фаза при $T = 0$ зображена горизонтальними лініями на Рис. 4.1 (a) та (b). Дві співіснуючі фази при $T = 0$ – це рідка фаза з $n = 0.16$ fm$^{-3}$, $p = 0$, та $\mu = 922$ MeV, та газоподібна фаза з $n = 0$, $p = 0$ та $\mu = 922$ MeV. Це відповідає умові фазової рівноваги Гіббса, тобто температури, тиски та хімічні потенціали співіснуючих фаз є рівними. Стабільна газоподібна фаза при $T = 0$ це, насправді, вакуум з $n = 0$.

## 4.1 Фазова діаграма

Ізотерми в $(T, v)$ та $(T, n)$ координатах ($v \equiv 1/n$) зображені на Рис. 4.3 (a) та (b), відповідно. Вони обчислені в рамках рівняння стану ван дер Ваальса з використанням рівняння (3.13) з $a \cong 329$ MeV fm$^3$ та $b \cong 3.42$ fm$^3$. Критична температура виявляється $T_c \cong 19.7$ MeV. Значення критичної температури в даній моделі близьке до експериментальних оцінок представлених в роботах [111, 112]. При $T < T_c$ реалізуються дві фази: газоподібна та рідка фази розділені фазовим переходом першого роду. Область змішаної фази обчислюється з правила Максвела рівних площ для $p(v)$ ізотерм та відповідає горизонтальним лініям на Рис. 4.3 (a) та затемненій сірій області на Рис. 4.3 (b). Густина числа нуклонів в критичній точці дорівнює $n_c \cong 0.07$ fm$^{-3} \cong 0.4\, n_0$. Нормальна ядерна матерія з $n = n_0 \cong 0.16$ fm$^{-3}$ та $T = 0$ відповідає точці, що знаходиться точно на границі між змішаною та рідинною фазами. Також зазначимо, що максимальне значення густини числа нуклонів в моделі ван дер Ваальса $n_{\max} = 1/b$, що дорівнює $n_{\max} \cong 0.29$ fm$^{-3}$ для даного значення параметра $b$.

Нагадаємо, що в області змішаної фази, густина числа частинок має насту-

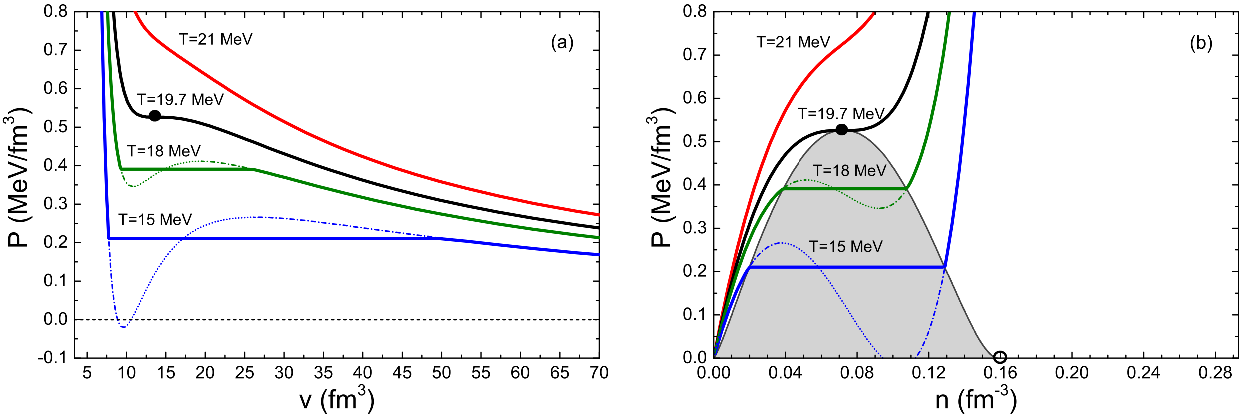



Рис. 4.3: Ізотерми в (a) $(p, v)$ та (b) $(p, n)$ координатах обчислені в квантовій моделі ван дер Ваальса зі значеннями параметрів $a \cong 329$ MeV·fm$^3$ та $b \cong 3.42$ fm$^3$ ($r \cong 0.59$ fm). Пунктирно-точковані лінії представляють метастабільну частину ізотерм при $T < T_c$, тоді як точковані лінії відповідають нестабільній частині. Чорні точки на ізотермі відповідають критичній точці $T = T_c$, тоді як кружок при $T = 0$ в (b) вказує на стан ядерної матерії при нульовій температурі. Затемнена сіра область в (b) позначає область змішаної фази що одержується з конструкції рівних площ максвела для $p(v)$ ізотерм в (a).

пний вигляд

$$n \; = \; \xi n_g \; + \; (1 - \xi) n_l \; , \tag{4.9}$$

де $\xi$ та $1 - \xi$ – це частка об'єму яку займає газоподібна та рідка компонента, відповідно. Значення $n_g$ та $n_l$ в рівнянні (4.9) – це густина частинок, відповідно, газоподібної та рідкої фази на відповідних границях змішаної фази. Поведінка змішаної фази при $T = 0$ особлива. Стабільна газова фаза відсутня при $T = 0$, тобто, $n_g = 0$ на границі змішаної фази, так як ця границя починається з точки $T = 0$ та $n = 0$. Таким чином, лише метастабільна газоподібна фаза при малих густинах і $T = 0$, як видно з Рис. 4.2. Проте, стабільна газоподібна фаза існує при $T > 0$ для достатньо малих значень густини числа частинок, менших за густину $n_g$ газоподібної фази в області змішаної фази, що слідує з конструкції Максвела.

Значення параметрів критичної точки знайдені в рамках моделі ван дер Ваальса з Фермі статистикою для нуклонів сильно відрізняються від відповідних значень класичної моделі ван дер Ваальса. При тих-же значеннях параметрів $a$ та $b$ як і у випадку статистики Фермі, класичне рівняння ван дер Ваальса (2.1), тобто рівняння для больцманівського наближення, дає $T_c = 8a/27b \cong 28.5$ MeV та $n_c = 1/3b \cong 0.10\,\mathrm{fm}^{-3}$. Це є ще одним свідченням важливості ефектів квантової статистики: ці ефекти необхідно враховувати не лише в границі $T \to 0$ але навіть в області критичної точки.

На Рис. 4.4 приведена фазова діаграма симетричної ядерної матерії в $(T, \mu)$ координатах. Представлена густина нуклонів при різних температурах $T$ та хімічних потенціалах $\mu$. При $T < T_c$ існує область $T$-$\mu$ з трьома різними розв'язками для $p(T, \mu)$ при даних $T$ та $\mu$. У відповідності з критерієм Гіббса, реалізується розв'язок з найбільшим тиском, і лише цей розв'язок для $n(T, \mu)$ представлений на Рис. 4.4. Положення критичної точки показане на Рис. 4.4 чорною точкою, тоді як стан ядерної матерії при нульовій температурі відповідає кружку. Зазначимо, що $\mu_0 \cong 922$ MeV відповідає хімічному потенціалу нормальної ядерної матерії яка знаходиться на границі змішаної фази. Значення $\mu < \mu_0$ заборонені при $T = 0$ (ці значення $\mu$ формально призводять до $n = 0$). Значення $\mu > \mu_0$ при $T = 0$ є можливими та відповідають ядерній рідині.

Лінія фазового переходу, $\mu = \mu_{\mathrm{mix}}(T)$, що показана на Рис. 4.4, починається зі стану нормальної ядерної матерії з $T = 0,\ \mu \cong 922$ MeV та закінчується в критичній точці з $T_c \cong 19.7$ MeV, $\mu_{\mathrm{mix}}(T_c) \cong 908$ MeV. Ця лінія представляє всю область змішаної фази позначену сірою ділянкою на Рис. 4.3. При кожному значенні $T < T_c$ два розв'язки, $n_g(T, \mu)$ та $n_l(T, \mu)$, з різними густинами частинок, $n_g(T, \mu) < n_l(T, \mu)$, та рівними тисками, $p_g(T, \mu) = p_l(T, \mu)$, існують на лінії фазового переходу $\mu = \mu_c(T)$. На цій лінії, мають місце розриви термодинамічних величин $n$, $\varepsilon$ та $s$.

При $T > T_c$ існує лише один розв'язок $n(T, \mu)$ для будь-яких значень $T$ та $\mu$, тобто не існує окремої *газоподібної* або *рідкої* фази. Тим не менш, як видно з Рис. 4.3, дуже швидка, проте неперервна, зміна густини числа частинок має місце в вузькій області $T$-$\mu$ навіть при $T > T_c$. Це є проявом феномену так-званого гладкого кросоверу.

При будь-якій $T > 0$, не має обмежень на можливі значення хімічного потенціалу, тобто всі значення $\mu$ між $-\infty$ та $+\infty$ є можливими. Якщо $\mu$ зменшується, густина числа частинок також зменшується і прямує до нуля при $\mu \to -\infty$. При дуже малих значеннях $n$, ефекти взаємодії між частинками, а також ефекти Фермі статистики стають малими, і ними можна знехтувати. В цьому випадку система нуклонів веде себе як ідеальний больцманівський газ. В протилежній границі, $\mu \to \infty$, густина нуклонів $n(T,\mu)$ прямує до її верхнього обмеження $1/b$. Тоді тиск веде себе як $p \cong nT/(1-bn)$ і прямує до нескінченності. Різні теоретичні моделі та їхнє порівняння з експериментальними оцінками властивостей ядерної матерії широко обговорювались в літературі (див. напр. роботи [114–116]).

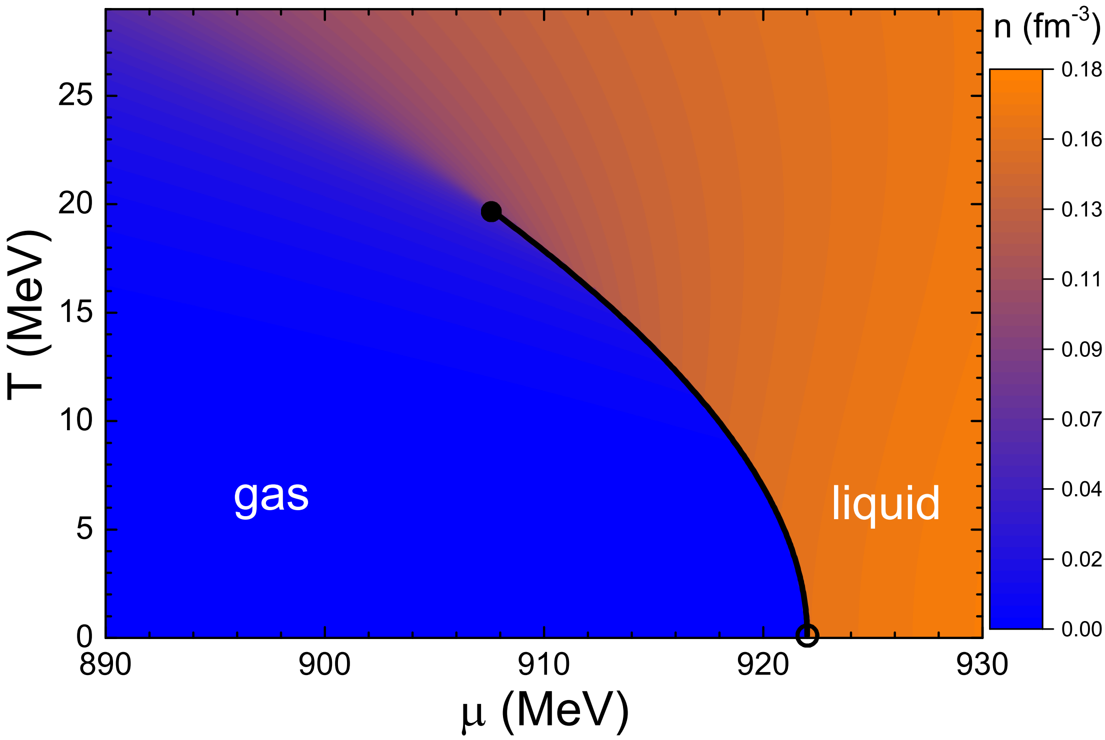



Рис. 4.4: Густина симетричної ядерної матерії в $(T,\mu)$ координатах, обчислена в квантовій моделі ван дер Ваальса зі значеннями параметрів $a \cong 329$ MeV fm$^3$ та $b \cong 3.42$ fm$^3$ ($r \cong 0.59$ fm). Кружок позначає стан ядерної матерії при нульовій температурі, чорна точка позначає критичну точку, а крива фазового переходу позначена чорною лінією.

## 4.2 Флуктуації поблизу критичної точки ядерної матерії

Використовуючи рівняння (2.15) можна обчислити нормовану варіацію $\omega[N]$ як

$$\begin{aligned}\omega[N] &= \frac{k_2}{k_1} = \frac{T}{n}\,\left(\frac{\partial n}{\partial \mu}\right)_T \\ &= \omega_{\rm id}(T,\mu^*)\,\left[\frac{1}{(1-bn)^2} - \frac{2an}{T}\,\omega_{\rm id}(T,\mu^*)\right]^{-1}, \qquad (4.10)\end{aligned}$$

де величина

$$\begin{aligned}\omega_{\rm id}(T,\mu^*) &= 1 - \frac{g\,\eta}{2\,\pi^2\,n}\int_0^\infty dk k^2 \\ &\times \left[\exp\left(\frac{\sqrt{m^2+k^2}-\mu^*}{T}\right)+\eta\right]^{-2}, \qquad (4.11)\end{aligned}$$

з $\eta = 1$ відповідає нормованій варіації розподілу числа частинок ідеального больцманівського газу з Фермі статистикою (в больцманівському наближенні, $\eta = 0$, вона зводиться до $\omega_{\rm id} = 1$).

З рівняння (4.10) видно, що взаємодія відштовхування пригнічує флуктуації числа частинок, в той час як взаємодія притягання навпаки їх збільшує. Нормована варіація (4.10) показана на Рис. 4.5. При будь-якому сталому значенні температури, $\omega[N] \to 1$ при зменшенні $\mu$. В цьому випадку, $n \to 0$ та $\omega_{\rm id}(T,\mu^*) \to 1$, тобто, відтворюються результати больцманівського ідеального газу. Нормована варіація стає малою, $\omega[N] \ll 1$, при великих значеннях $\mu$. В цьому випадку, густина числа частинок прямує до своєї границі, $n \to 1/b$. Нормована варіація (4.10) є розбіжною в критичній точці (зазначимо, що припускається термодинамічна границя $V \to \infty$). Як видно з Рис. 4.5 великі значення $\omega[N] \gg 1$ реалізуються вздовж області кросоверу, навіть далеко від критичної точки.

Використовуючи рівняння (2.15) можна також обчислити коефіцієнт асиметрії

$$S\sigma = \frac{k_3}{k_2} = \omega[N] + \frac{T}{\omega[N]}\,\left(\frac{\partial \omega[N]}{\partial \mu}\right)_T, \qquad (4.12)$$

та куртозис

$$\kappa\sigma^2 = \frac{k_4}{k_2} = (S\sigma)^2 + T\,\left(\frac{\partial [S\sigma]}{\partial \mu}\right)_T, \qquad (4.13)$$

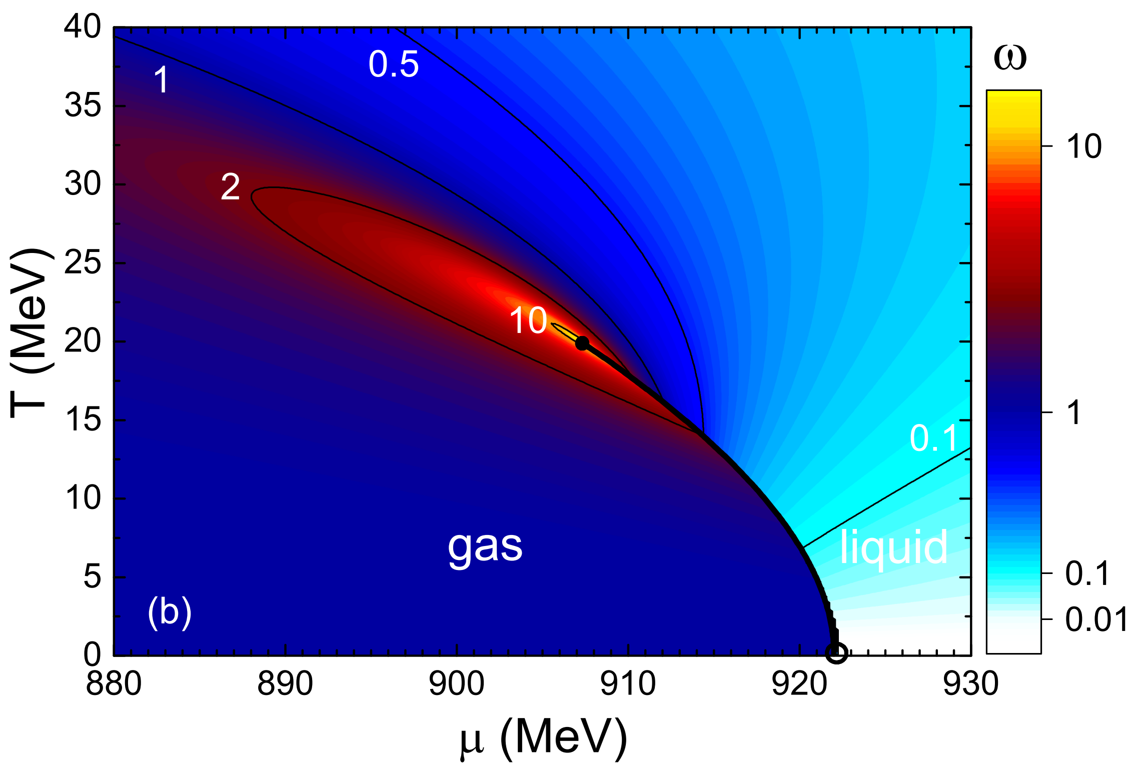



Рис. 4.5: Нормована варіація $\omega[N]$ (4.10) обчислена для симетричної ядерної матерії в $(T, \mu)$ координатах в рамках кантової моделі ван дер Ваальса зі значеннями параметрів $a \cong 329$ MeV fm$^3$ та $b \cong 3.42$ fm$^3$ ($r \cong 0.59$ fm). Кружок позначає стан ядерної матерії при нульовій температурі, чорна точка позначає критичну точку, а крива фазового переходу позначена чорною лінією.

що представлені на Рис. 4.6 (a) та (b), відповідно. Подібно до нормованої варіації, коефіцієнт асиметрії та куртозис є розбіжними в критичній точці. Проте, ці вищі моменти розподілу числа частинок демонструють багатшу структуру: поведінка $S\sigma$ та $\kappa\sigma^2$ принципово залежить від шляху підходу до критичної точки.

Як видно з Рис. 4.6 (a) рідка фаза відповідає $S\sigma < 0$, тоді як газоподібна фаза відповідає $S\sigma > 0$. Лінія $S\sigma = 0$ прямує від критичної точки вздовж області кросоверу, а $T$-$\mu$ області з $S\sigma \gg 1$ та $S\sigma \ll -1$ знаходяться одразу під та над цією лінією, відповідно. З Рис. 4.6 (b) також видно що область кросоверу на фазовій діаграмі характеризується великим від'ємним куртозисом, $\kappa\sigma^2 \ll -1$. Проте, поза області кросоверу спостерігаються великі додатні значення куртозиса, $\kappa\sigma^2 \gg 1$, в достатньо широкій $T$-$\mu$ площі навколо критичної точки ядерної матерії. Ці знайдені закономірності в флуктуаціях поблизу критичної точки якісно знаходяться у згоді з результатами заснованими на ефективних моделях КХД (див. напр. роботи [117–119]) або на універсальних твердженнях

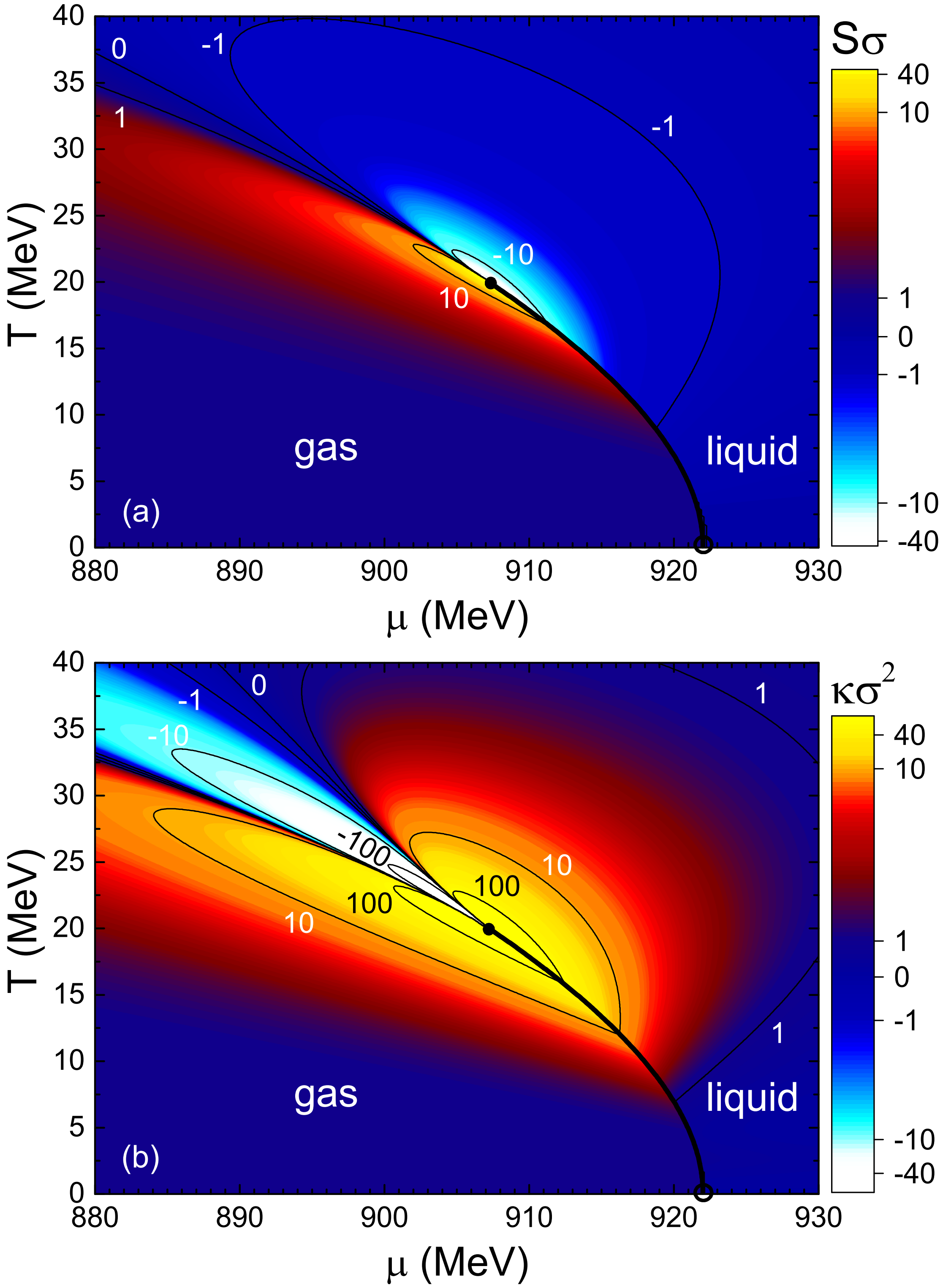



Рис. 4.6: (a) Коефіцієнт асиметрії $S\sigma$ (4.12) та (b) куртозис $\kappa\sigma^2$ (4.13) обчислені для симетричної ядерної матерії в $(T, \mu)$ координатах в рамках моделі ван дер Ваальса для ферміонів.

стосовно критичної поведінки в околі критичної точки КХД [76, 120].

## 4.3 Порівняння моделі ван дер Ваальса з квантовою статистикою та моделі Валечки

В даній главі представлено порівняльне дослідження моделей QvdW та Валечки для ядерної матерії. Обидві моделі містять 2 параметри, що характеризують взаємодію притягання та відштовхування в рамках підходу середнього поля. Значення параметрів фіксуються таким чином, щоб відтворювалися відомі властивості ядерної матерії при нульовій температурі. Передбачення моделей відносно положення критичної точки і ядерної нестисливості порівнюються одне з одним, а також з доступними емпіричними даними. *Гібридна модель*, в якій взаємодії притягання здійснюються через обмін скалярними мезонами а взаємодії відштовхування моделюються через поправку виключеного об'єму, також розглядається для повноти.

Особлива увага в цій главі приділяється критичній поведінці в околі критичної точки. Критичні індекси, що характеризують критичну поведінку, досліджуються як аналітичними так і численними методами в моделі QvdW, і порівнюються з передбаченнями класу універсальності середнього поля.

**Модель Валечки**

Модель середнього поля Валечки ядерної матерії – це перша та найпростіша модель квантової адронної динаміки. Ця модель основана на лоренц-інваріантному лагранжіані, в якому включені зв'язки нуклонного поля зі скалярним полем $\sigma$ мезонів та векторним полем $\omega$ мезонів, і само-взаємодіями скалярного поля знехтувано. Скалярні та векторні мезони виступають в якості обмінних частинок, які переносять, відповідно, взаємодії притягання та відштовхування між нуклонами. В наближення середнього поля мезонні поля та ядерний струм заміняються їхніми середніми значеннями, які припускаються незалежними від положення в просторі та часі. Це надає можливість одержати вираз для функції тиску, що відіграє роль термодинамічного потенціалу в великому канонічному ансамблі, наступного вигляду [121]:

$$p(T,\mu) \;=\; p^{\rm id}(T,\mu^*;m^*) \;+\; \frac{c_{\rm v}^2}{2}\, n(T,\mu) \;-\; \frac{(m-m^*)^2}{2c_{\rm s}^2}\,, \qquad (4.14)$$

де $T$ та $\mu$ це, відповідно, температура та хімічний потенціал системи, $n(T,\mu)$ – це нуклонна густина, $\mu^*$ та $m^*$ – це, відповідно, ефективний хімічний потенціал та ефективна маса нуклонів. $p^{\rm id}$ – це ідеальний Фермі тиск газу невзаємодіючих нуклонів який даний рівнянням (3.1). Останні два доданки в рівнянні (4.14) відповідають вкладам в тиск середнього поля взаємодій відштовхування та притягання між нуклонами. Параметри моделі $c_v^2$ та $c_s^2$ визначають силу взаємодій відштовхування та притягання, відповідно.

Нововведені величини $\mu^*$ та $m^*$ визначаються умовою екстремуму термодинамічного потенціалу (тобто максимуму тиску):

$$\left[\frac{\partial p(T,\mu)}{\partial \mu^*}\right]_{T,m^*} ~=~ 0~, \qquad \left[\frac{\partial p(T,\mu)}{\partial m^*}\right]_{T,\mu} ~=~ 0~. \tag{4.15}$$

Для тиску (4.14) це породжує:

$$\mu^* ~=~ \mu ~-~ c_{\rm v}^2\, n(T,\mu)~, \tag{4.16}$$

$$\frac{m}{m^*} ~=~ 1 ~+~ c_{\rm s}^2 \frac{g_N}{2\pi^2}\int_0^\infty k^2 dk\, \frac{f_{\rm k}(T,\mu^*;m^*)}{\sqrt{m^{*2}+k^2}}~, \tag{4.17}$$

де $f_{\rm k}$ – це середнє число заповнення, що відповідає імпульсу $k$, а $g_N \equiv 4$ – це фактор спін-ізоспін виродження нуклонів. Рівняння (4.16) та (4.17) називаються gap-рівняння. Використовуючи рівняння (4.16), тиск в моделі Валечки можна записати в наступному симетричному вигляді:

$$p(T,\mu) ~=~ p^{\rm id}(T,\mu^*;m^*) ~+~ \frac{(\mu ~-~ \mu^*)^2}{2\, c_{\rm v}^2} ~-~ \frac{(m ~-~ m^*)^2}{2\, c_{\rm s}^2}~. \tag{4.18}$$

З використанням стандартних термодинамічних співвідношень великого канонічного ансамблю,

$$n(T,\mu) ~=~ \left[\frac{\partial p(T,\mu)}{\partial \mu}\right]_T,$$

$$\varepsilon(T,\mu) ~=~ T\left[\frac{\partial p(T,\mu)}{\partial T}\right]_\mu ~+~ \mu\, n(T,\mu) ~-~ p(T,\mu)~, \tag{4.19}$$

функції густини нуклонів та енергії в моделі Валечки:

$$n(T,\mu) ~=~ n^{\rm id}(T,\mu^*;m^*)~, \tag{4.20}$$

$$\varepsilon(T,\mu) ~=~ \varepsilon^{\rm id}(T,\mu^*;m^*) ~+~ \frac{(\mu ~-~ \mu^*)^2}{2\, c_{\rm v}^2} ~+~ \frac{(m ~-~ m^*)^2}{2\, c_{\rm s}^2}~, \tag{4.21}$$

де $n^{\rm id}$ та $\varepsilon^{\rm id}$ – це, відповідно, густина частинок та густина енергії ідеального газу зі статистикою Фермі.

Додатково введемо *гібридну модель*, в якій взаємодії притягання реалізуються завдяки обміну скалярними $\sigma$ мезонами, як в моделі Валечки, а взаємодії відштовхування відповідають поправці виключеного об'єму, як в моделі QvdW. Рівняння для тиску та густини частинок в рамках цієї моделі мають вигляд:

$$p(T,\mu) \;=\; p^{\rm id}(T,\mu^*;m^*) \;-\; \frac{(m-m^*)^2}{2c_{\rm s}^2}\,, \tag{4.22}$$

$$n(T,\mu) \;=\; \frac{n^{\rm id}(T,\mu^*;m^*)}{1\;+\;b\,n^{\rm id}(T,\mu^*;m^*)}\,, \tag{4.23}$$

де ефективний хімічний потенціал $\mu^*$ та ефективна маса нуклонів $m^*$ визначаються наступними gap-рівняннями

$$\mu^* \;=\; \mu \;-\; b\,p^{\rm id}(T,\mu^*;m^*)\,, \tag{4.24}$$

$$\frac{m}{m^*} \;=\; 1 \;+\; \frac{2c_{\rm s}^2}{\pi^2}\left[1+b\,n^{\rm id}(T,\mu^*;m^*)\right]^{-1}\int_0^\infty k^2dk\,\frac{f(k,\mu^*;m^*)}{\sqrt{m^{*2}+k^2}}\,. \tag{4.25}$$

Насамкінець, густину енергії можна отримати зі стандартних термодинамічних співвідношень:

$$\varepsilon \;=\; \frac{\varepsilon^{\rm id}(T,\mu^*;m^*)}{1\;+\;b\,n^{\rm id}(T,\mu^*;m^*)} \;+\; \frac{(m-m^*)^2}{2c_{\rm s}^2}\,. \tag{4.26}$$

Спробуємо розглянути зворотню гібридну модель, в якій взаємодії притягання реалізуються через середнє поле, як в моделі QvdW, а взаємодії відштовхування завдяки обміну векторними $\omega$ мезонами, як в моделі Валечки. Маємо наступну функцію тиску:

$$p(T,\mu^*;m^*) \;=\; p^{\rm id}(T,\mu^*;m^*) \;-\; a\,n^2 \;+\; \frac{c_v^2}{2}\,n^2\,. \tag{4.27}$$

Як бачимо, обидва доданки, що відповідають взаємодіям притягання та відштовхування пропорційні до $n^2$ в цій моделі. Таким чином, ця друга гібридна модель є виродженою і не здатна одночасно описати відштовхування та притягання між частинками.

**Застосування до опису ядерної матерії**

Порівняємо результати моделі QvdW з результатами моделі Валечки для властивостей симетричної ядерної матерії. Нагадаємо, що в даній роботі розгляд обмежується малими температурами, $T \le 30$ MeV, і, таким чином, утворенням піонів знехтувано. Також знехтувано можливим утворенням нуклонних кластерів та баріонних резонансів (напр. $N^*$ та $\Delta$) що можуть бути важливими при низькій та високій баріонній густині, відповідно. В цих наближеннях, число нуклонів $N$ стає величиною що зберігається, та відіграє роль незалежної змінної в формулюванні канонічного ансамблю. В великому канонічному ансамблі, хімічний потенціал $\mu$ регулює густину числа нуклонів. Зафіксуємо параметри притягання та відштовхування для моделі Валечки та гібридної моделі так щоб відтворювалися властивості нескінченної ядерної матерії при $T = 0$ (див, напр. роботу [113]):

$$p \;=\; 0\,, \qquad\qquad \varepsilon/n \;\cong\; m + E_B \;\cong\; 922\;\mathrm{MeV}\,, \\ n \;=\; n_0 \;\cong\; 0.16\;\mathrm{fm}^{-3}\,. \tag{4.28}$$

Де, $E_B \cong -16$ MeV це енергія зв'язку на нуклон.

Нагадаємо, що у випадку моделі QvdW маємо 3 рівняння (4.28) для 3-х невідомих величин, а саме ефективного хімічного потенціалу при нульовій температурі $\mu^*_{\mathrm{GS}}$, $a$ та $b$. Перепишемо ще раз розв'язок цієї системи рівнянь, що представлений в главі 4.1 [2]:

$$\mathrm{QvdW}: \qquad \mu^*_{\mathrm{GS}} \;\cong 998\;\mathrm{MeV}\,, \\ b \;\cong 3.42\;\mathrm{fm}^3\,, \qquad a \;\cong\; 329\;\mathrm{MeV\;fm}^3\,. \tag{4.29}$$

У випадку моделі Валечки необхідно підставити відповідні вирази для термодинамічних величин, а саме (4.14), (4.20) та (4.21) в рівняння (4.28). При нульовій температурі величини ідеального газу, що входять у ці вирази мають вигляд

$$n^{\mathrm{id}}(T=0,\mu^*_{\mathrm{GS}};m^*_{\mathrm{GS}}) \;=\; \frac{g}{2\pi^2}\int\limits_0^{\sqrt{\mu^{*2}_{\mathrm{GS}}-m^{*2}_{\mathrm{GS}}}} dk\,k^2 \;=\; \frac{g}{6\pi^2}\,(\mu^{*2}_{\mathrm{GS}} - m^{*2}_{\mathrm{GS}})^{3/2} \\ =\; \frac{g\,m^{*3}_{\mathrm{GS}}}{6\pi^2}\,(y^2-1)^{3/2}\,, \tag{4.30}$$

$$p^{\mathrm{id}}(T=0,\mu^*_{\mathrm{GS}};m^*_{\mathrm{GS}}) = \frac{g}{6\pi^2}\int\limits_0^{\sqrt{\mu^{*2}_{\mathrm{GS}}-m^{*2}_{\mathrm{GS}}}} dk\,\frac{k^4}{\sqrt{k^2+m^{*2}_{\mathrm{GS}}}} = \frac{g\,m^{*4}_{\mathrm{GS}}}{6\pi^2}\int\limits_0^{\sqrt{y^2-1}} dx\,\frac{x^4}{\sqrt{x^2+1}} \\ = \frac{g\,m^{*4}_{\mathrm{GS}}}{48\pi^2}\,\left[y\sqrt{y^2-1}(-5+2y^2) + 3\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)\right]\,, \tag{4.31}$$

$$\varepsilon^{\rm id}(T=0,\mu^*_{\rm GS};m^*_{\rm GS}) = \frac{g}{2\pi^2}\int\limits_0^{\sqrt{\mu^{*2}_{\rm GS}-m^{*2}_{\rm GS}}} dk\,k^2\,\sqrt{k^2+m^{*2}_{\rm GS}}$$
$$= \frac{g\,m^{*4}_{\rm GS}}{2\pi^2}\int\limits_0^{\sqrt{y^2-1}} dx\,x^2\,\sqrt{x^2+1}\ =$$
$$= \frac{g\,m^{*4}_{\rm GS}}{16\pi^2}\left[y\sqrt{y^2-1}(2y^2-1)-\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)\right]\ , \tag{4.32}$$

$$s^{\rm id}(T=0,\mu^*_{\rm GS};m^*_{\rm GS}) = \lim_{T\to 0}\frac{\varepsilon^{\rm id}(T,\mu^*_{\rm GS};m^*_{\rm GS})+p^{\rm id}(T,\mu^*_{\rm GS};m^*_{\rm GS})-\mu^*_{\rm GS}\,n^{\rm id}(T,\mu^*_{\rm GS};m^*_{\rm GS})}{T}$$
$$=\ 0\ , \tag{4.33}$$

де $y\equiv\mu^*_{\rm GS}/m^*_{\rm GS}$. Додатковий вираз (4.17) також необхідно використати для визначення ефективної маси при нульовій температурі $m^*_{\rm GS}$. При нульовій температурі цей вираз має вигляд

$$\frac{m}{m^*_{\rm GS}}\ =\ 1\ +\ \frac{c_{\rm s}^2\,m^{*2}_{\rm GS}}{\pi^2}\left[y\sqrt{y^2-1}-\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)\right]\ , \tag{4.34}$$

Таким чином, маємо систему 4-х рівнянь для 4-х невідомих $\mu^*_{\rm GS}$, $m^*_{\rm GS}$, $c_{\rm v}^2$ та $c_{\rm s}^2$. Розв'язок для цієї системи рівнянь має вигляд[1]

$$\begin{aligned}\text{Walecka}:\quad &\mu^*_{\rm GS}\cong 573\ \text{MeV}\ ,\quad m^*_{\rm GS}\cong 510\ \text{MeV}\ ,\\ &c_{\rm v}^2\ \cong\ 11.0\ \text{fm}^2\ ,\quad c_{\rm s}^2\ \cong\ 14.6\ \text{fm}^2\ .\end{aligned} \tag{4.35}$$

Для гібридної моделі необхідно використовувати вирази (4.22),(4.23) та (4.26) при розв'язуванні рівнянь (4.28). Одержуємо:

$$\begin{aligned}\text{Hybrid}:\quad &\mu^*_{\rm GS}\cong 897\ \text{MeV}\ ,\quad m^*_{\rm GS}\cong 834\ \text{MeV}\ ,\\ &b\ \cong\ 3.12\ \text{fm}^3\ ,\quad c_{\rm s}^2\ \cong\ 3.46\ \text{fm}^2\ .\end{aligned} \tag{4.36}$$

Залежність енергії на нуклон від густини нуклонів при $T=0$ показана на Рис. 4.7 $(a)$ для моделей Валечки та QvdW. При густині в основному стані $n=n_0\cong 0.16\ \text{fm}^{-3}$ обидві моделі дають $E_B=\varepsilon/n_0-m=-16$ MeV за

[1]Зазначимо, що значення параметрів $c_s^2$ та $c_v^2$ в цій роботі трохи відрізняються від значень одержаних в роботі [122]. Це спричинено іншим значенням ядерної густини при нульовій температурі $n_0\cong 0.15\ \text{fm}^{-3}$ що припускалося в [122].

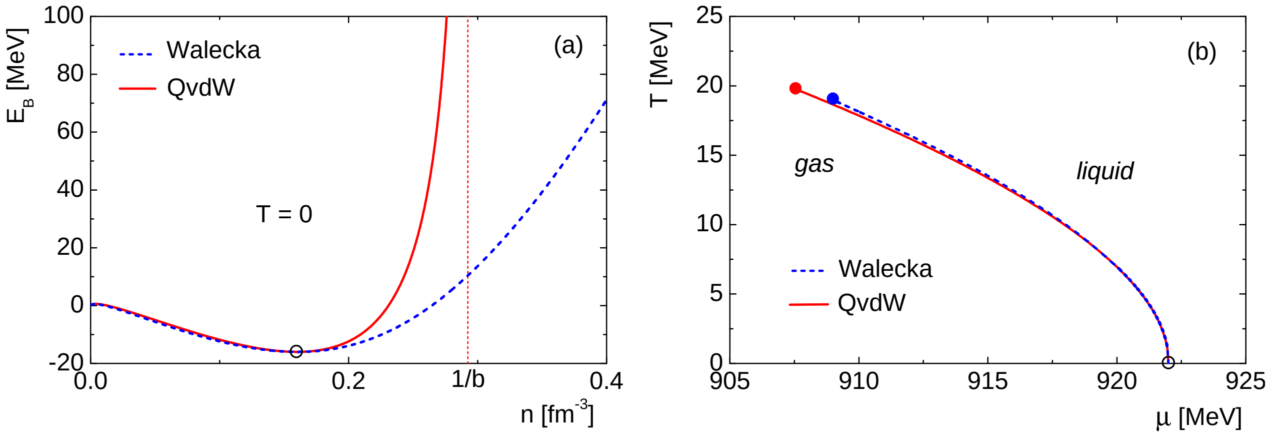



Рис. 4.7: $(a)$: Залежність енергії зв'язку на нуклон при $T = 0$ в моделях Валечки (пунктирна синя лінія) та QvdW (суцільна червона лінія) від густини нуклонів. Кільце позначає основний стан ядерної матерії з $n = n_0 \cong 0.16$ fm$^{-3}$. Гранична густина $n_{\rm lim} = 1/b$ в моделі QvdW показана вертикальною лінією. $(b)$: Лінії фазового переходу 1-го роду рідина-газ в $(\mu, T)$-площині для моделей Валечки (пунктирна синя лінія) та QvdW (суцільна червона лінія). Кружок на кінці кожної кривої позначає критичну точку відповідної моделі, тоді як кільце позначає основний стан ядерної матерії.

побудовою. Ця точка позначена кільцем. Результати для $E_B$ при високих густинах суттєво відрізняються для даних двух моделей. Бачимо, що в моделі QvdW $E_B \to \infty$ при $n \to 1/b$. Це спричинено поправкою виключеного об'єму, яка призводить до існування верхньої границі $n_{\rm lim} = 1/b$ густини нуклонів. Ця верхня границя має місце також в гібридній моделі, так як в ній взаємодії відштовхування також моделюються поправкою виключеного об'єму vdW. На противагу до цього, густина нуклонів необмежена згори в моделі Валечки. Виключений об'єм vdW не може застосовуватись при великих густинах в околі $n_{\rm lim} = 1/b$. Зазначимо, що діапазон можливості застосування може бути розширений на високі баріонні густини завдяки розгляду модифікацій відштовхувального члену vdW. Одна з популярних модифікацій – це модель Карнахана-Старлінга (Carnahan-Starling) [123], яка містить верхню границю густини $n_{\rm lim}^{\rm CS} = 4/b$, і яка нещодавно була успішно застосована в адронній фізиці [75, 124, 125]. Лінії фазового переходу 1-го роду рідина-газ для обох моделей показані на $(\mu, T)$-площині на Рис. 4.7 (b). Кінцеві точки цих ліній відповідають критичній точці. Дві лінії співпадають в точці при $T = 0$.

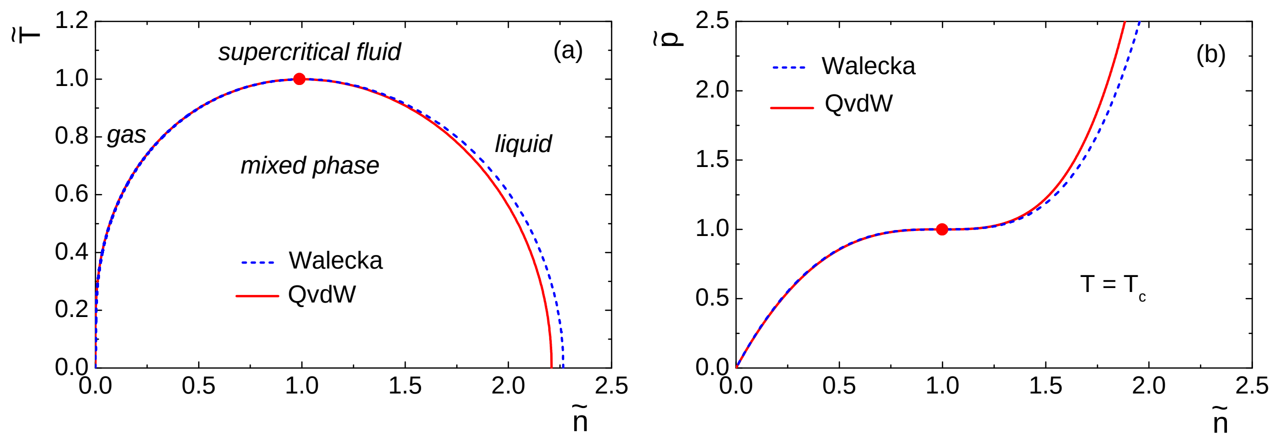



Рис. 4.8: Криві співіснування $(a)$ та критичні ізотерми $(b)$ в приведених змінних обчислені для моделей Валечки (пунктирні сині лінії) та QvdW (суцільні червоні лінії). Кружки відповідають критичній точці.

При $T < T_c$ має місце фазовий перехід 1-го роду між газоподібною та рідинною фазами. Для того, щоб знайти густини газу, $n_g$, та рідини, $n_l$, в змішаній фазі при цих температурах, застосуємо правило рівних площин Максвела до ізотерм $p = p(v \equiv 1/n, T = \mathrm{const})$. При $T = T_c$ ці дві густини співпадають з критичною густиною $n_c$, що дає положення критичної точки. Положення критичної точки разом зі значеннями нестисливості, $K_0 = 9(dp/dn)_{T=0}$, в рамках моделей Валечки, QvdW та гібридної моделі представлені в таблиці 4.1. Експериментальні оцінки [126] для цих значень також показані в таблиці. Всі три моделі, що розглядаються, суттєво перебільшують значення ядерної нестисливості $K_0$. У цьому відношенні зазначимо, що модель Валечки – це найпростіша модель класу RMF моделей, тоді як модель QvdW – це найпростіша модель класу моделей реальних газів. Відомо, що обидві моделі перебільшують емпіричні значення $K_0$. Більш складні моделі, такі як RMF модель Богута-Бодмера (Boguta-Bodmer) [127], або модель реального газу Клаузіса (Clausius) [125], можуть розглядатися для вирішення цієї проблеми. Проте, не очікується що ці модифікації змінять якісні властивості критичної поведінки ядерної матерії, які досліджуються в цій роботі.

Значення $T_c$, $n_c$, $p_c$ та $K_0$ в рамках гібридної моделі розташовані між відповідними значеннями в рамках моделей Валечки та QvdW. Так як всі результати гібридної моделі є проміжними між результатами моделей Валечки та QvdW, вони не представлені на рисунках.

| | Walecka | Hybrid | QvdW | Experiment [126] |
|---|---|---|---|---|
| $T_c$ [MeV] | 18.9 | 19.2 | 19.7 | $17.9 \pm 0.4$ |
| $n_c$ [fm$^{-3}$] | 0.070 | 0.071 | 0.072 | $0.06 \pm 0.01$ |
| $p_c$ [MeV fm$^{-3}$] | 0.48 | 0.50 | 0.52 | $0.31 \pm 0.07$ |
| $K_0$ [MeV] | 553 | 674 | 763 | 250 - 315 |

Табл. 4.1: Положення критичної точки та значення нестисливості при нульовій температурі $K_0$ в рамках моделей Валечки, QvdW та гібридної моделі, разом з їхніми експериментальними оцінками.

Введемо приведені змінні: $\widetilde{T} \equiv T/T_c$, $\widetilde{n} \equiv n/n_c$ та $\widetilde{p} \equiv p/p_c$. Класичне рівняння стану ван дер Ваальса (2.1) стає незалежним від параметрів взаємодії $a$ та $b$ коли виражене в приведених змінних. Ця незалежність від параметрів взаємодії відома як *закон відповідних станів*. Хоча рівняння vdW не описує реальні гази та рідини, відомо що цей закон виконується для багатьох реальних газів та рідин з досить високою точністю (див., напр. [128]). Криві співіснування та критичні ізотерми в приведених змінних для обох моделей представлені на Рис. 4.8 $(a)$ та $(b)$, відповідно. Спостерігається лише невелика різниця між двома моделями, переважно в області високої густини.

**Критичні індекси**

*Критичні індекси* характеризують критичну поведінку термодинамічних величин в околі критичної точки в термінах степеневих виразів (див. напр. [128]). Так-звані термодинамічні критичні індекси – це $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ та $\delta$. Їхні означення представлені в перших двох колонках Табл. 4.2.

Критична поведінка в моделі Валечки вивчалася раніше (див. напр. роботу [122]). Одержані значення критичних індексів наступні: $\alpha = 0$, $\beta = 1/2$, $\gamma = 1$ та $\delta = 3$. Ці значення індексів відповідають класу універсальності моделей *середнього поля*. Численні моделі належать до цього класу, включаючи, напр., класичну модель ван дер Ваальса. Очікується, що критичні індекси в рамках моделі QvdW задовольняють *скейлинговим співвідношенням*

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2\,, \qquad\qquad \gamma = \beta(\delta - 1)\,, \tag{4.37}$$

які називаються скейлинговими співвідношеннями Рушбрука (Rushbrook) та Відова (Widon), відповідно (див. напр. [128]). Отже, достатньо знайти лише пару критичних індексів.

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| індекс | скейлинг | шлях | теорії середнього поля | емпіричні |
| $\alpha$ | $c_{\mathrm{v}} = A\,\tau^{-\alpha}$ | $\tau \to 0^{+}\,,\ \widetilde{n} = 1$ | 0 | 0.11 |
| $\beta$ | $\dfrac{\widetilde{n}_{\mathrm{l}} - \widetilde{n}_{\mathrm{g}}}{2} = B\,(-\tau)^{\beta}$ | $\tau \to 0^{-}$ | $\frac{1}{2}$ | 0.33 |
| $\gamma$ | $\kappa_T = p_c^{-1}\,G\,\tau^{-\gamma}$ | $\tau \to 0^{+}\,,\ \widetilde{n} = 1$ | 1 | 1.24 |
| $\delta$ | $\widetilde{p} - 1 = D\,\lvert\widetilde{n} - 1\rvert^{\delta}\,\mathrm{sgn}(\widetilde{n} - 1)$ | $n \to 1^{\pm}\,,\ \tau = 0$ | 3 | 4.79 |

Табл. 4.2: Термодинамічні критичні індекси. Колонки (1): Скейлингові співвідношення. Тут $\tau = \widetilde{T} - 1$, $c_{\mathrm{v}}$ – це теплоємність при сталій густині. Параметр порядку $\widetilde{n}_{\mathrm{l}} - \widetilde{n}_{\mathrm{g}}$ це ширина області змішаної фази при даній температурі $\widetilde{T}$. $\kappa_T$ – це ізотермічна стисливість, $\kappa_T = n^{-1}[\partial n/\partial p]_T$. (2): Термодинамічний шлях підходу до критичної точки. (3): Значення критичних індексів в класі універсальності теорій середнього поля. (4): Емпіричні значення критичних індексів для реальних газів [129].

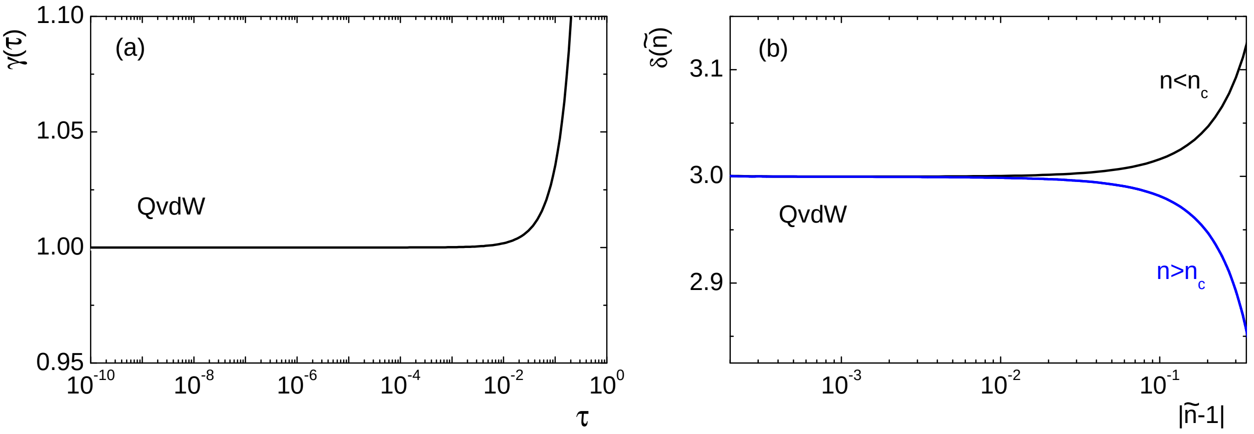



Рис. 4.9: Залежність $\gamma(\tau)$ $(a)$ та $\delta(\widetilde{n})$ $(b)$ індексів як функцій приближення до критичної точки.

Спочатку обчислимо критичний індекс $\gamma$. Можна показати, що ізотермічна стисливість $\kappa_T$ є пропорційною до нормованої варіації розподілу числа частинок, а саме $T\; n\; \kappa_T \;=\; \omega[N]$. Таким чином, при $\tau \;=\; \tilde{T} - 1 \;\;\rightarrow\;\; 0^+$ та $\widetilde{n} \;\;=\;\; 1$ маємо

$$\omega[N] \;=\; \frac{T_c\, n_c}{p_c}\, G\, \tau^{-\gamma}\,, \tag{4.38}$$

де $G$ – це критична амплітуда. Нагадаємо, що нормована варіація в моделі QvdW має вигляд [2]

$$\begin{aligned} \omega[N] \;&\equiv\; \frac{\langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2}{\langle N\rangle} \;=\; \frac{T}{n}\left(\frac{\partial n}{\partial \mu}\right)_T \\ &=\; \omega^{\rm id}(T,\mu^*)\left[\frac{1}{1\;-\;bn^2} \;-\; \frac{2an}{T}\,\omega^{\rm id}(T,\mu^*)\right]^{-1}\;, \end{aligned} \tag{4.39}$$

де $\omega^{\rm id}(T,\mu)$ – це нормована варіація ідеального газу зі статистикою Фермі.

Множник в квадратних дужках в правій частині рівняння (4.39) прямує до нуля при $T \rightarrow\; T_c$. В результаті, $\omega[N]$ розбігається в критичній точці. Розкладемо цей множник в ряд Тейлора в околі критичної температури $T_c$ для $T > T_c$ при критичній густині $n \;=\; n_c$. Нехтуючи членами пропорційними до другої (та вище) степені $\tau$, одержуємо

$$\left[\frac{1}{1\;-\;bn^2} \;-\; \frac{2an}{T}\,\omega^{\rm id}\right] \;\cong\; -\,\frac{2\;a\;n_c}{T_c}\left[T_c\left(\frac{d\omega^{\rm id}}{dT}\right) \;-\; \omega^{\rm id}\right]_{n_c,T_c}\,\tau\;. \tag{4.40}$$

Тут похідна $(d\omega^{\rm id}/dT)$ береться при сталій густині числа частинок $n \;=\; n_c$.

Підставляючи цей результат в рівняння (4.39) отримуємо наступний вираз:

$$\omega[N] \;=\; -\frac{T_c}{2\;a\;n_c}\left[\frac{\omega^{\mathrm{id}}}{T_c(d\omega^{\mathrm{id}}/dT) - \omega^{\mathrm{id}}}\right]_{n_c,T_c} \tau^{-1}\;. \tag{4.41}$$

Порівнюючи рівняння (4.41) з рівнянням (4.38) одержуємо значення критичного індексу $\gamma = 1$ та критичної амплітуди

$$G \;=\; -\;\frac{p_c}{2\;a\;n_c^2}\left[\frac{\omega^{\mathrm{id}}}{T_c(d\omega^{\mathrm{id}}/dT) - \omega^{\mathrm{id}}}\right]_{n_c,T_c} \;\cong\; 0.257\;. \tag{4.42}$$

Значення $\gamma$ одержано аналітично, тоді як значення $G$ – чисельно. Зазначимо, що в больцманівському наближенні $\omega^{\mathrm{id}} \;\equiv\; 1$, та рівняння (4.42) має вигляд $G = p_c/(2an_c^2)$. Використовуючи класичні вирази ван дер Ваальса $p_c = a/27b^2$ та $n_c \;=\; 1/3b$ для критичних параметрів [128], одержуємо що $G \;=\; 1/6$ для класичної моделі vdW. Отже, відхилення критичної амплітуди $G$ в моделі QvdW від її класичного vdW значення – це ефект Фермі статистики. З іншого боку, значення $\gamma = 1$ однакове в обох, класичній та квантовій моделях vdW.

Означення критичного індексу $\gamma$ може також бути записане в наступному вигляді,

$$\gamma \;=\; \lim_{\tau\to+0}\,[\gamma(\tau)]_{\widetilde{n}=1}\;,$$
$$\text{where}\quad \gamma(\tau) \;=\; -\frac{\ln\omega[N] \;+\; \ln\left[\dfrac{T}{2an_c}\,G\right]}{\ln\tau}\;. \tag{4.43}$$

Цей вигляд є досить загальним, і корисним для чисельного визначення $\gamma$. Щоб це проілюструвати, функція $\gamma(\tau)$ показана на Рис. 4.9 $(a)$ для моделі QvdW ядерної матерії. Бачимо, що для $\tau \lesssim 0.01$, $\gamma(\tau)$ вже важко відрізнити від одиниці.

В цій роботі критичний індекс $\delta$ одержується лише чисельно в моделі QvdW ядерної матерії. Аналогічно до рівняння (4.43), індекс $\delta$ (див. Табл. 4.2), може бути переписаний як

$$\delta \;=\; \lim_{\widetilde{n}\to 1}\,[\delta(\widetilde{n})]_{\widetilde{T}=1}\;,\quad \text{where}\quad \delta(\widetilde{n}) \;=\; \frac{\ln|\widetilde{p}\;-\;1| \;+\; \ln D}{\ln|\widetilde{n}\;-\;1|}\;, \tag{4.44}$$

як для $\tilde{n} < 1$, так і для $\tilde{n} > 1$.

Залежність $\delta(\widetilde{n})$ на критичній ізотермі $T = T_c$ представлена на Рис. 4.9 $(b)$ для $n < n_c$ (верхня лінія) та $n > n_c$ (нижня лінія). Обчислення дають $\delta = 3$ та

$$D \;=\; \lim_{\widetilde{n}\to 1}\left[\frac{|\widetilde{p}\;-\;1|}{|\widetilde{n}\;-\;1|^3}\,\mathrm{sgn}(\widetilde{n}\;-\;1)\right]_{\widetilde{T}=1} \;\cong\; 1.4\;. \tag{4.45}$$

Значення $\delta = 3$ співпадає зі значенням передбаченим для класичної моделі ван дер Ваальса. Критична амплітуда $D$ відрізняється від свого класичного vdW значення $D = 3/2$, що є ефектом статистики Фермі. З Рис. 4.9 $(b)$ видно, що $\delta(\widetilde{n})$ важко відрізнити від 3 при $|\widetilde{n} - 1| \lesssim 0.01$, як для $n > n_c$, так і для $n < n_c$.

Скейлингові співвідношення (4.37) дають значення решти критичних індексів для моделі QvdW: $\alpha = 0$, $\beta = 1/2$. Всі значення критичних індексів, одержані для моделі QvdW, співпадають зі значеннями класу універсальності моделей середнього поля. Проте, значення відповідних критичних амплітуд не є універсальними і лишаються різними в різних моделях.

## 4.4 Висновки до розділу 4

В **главі 4.1** представлено опис застосування квантової моделі ван дер Ваальса (QvdW) з Фермі статистикою до нескінченної системи взаємодіючих нуклонів (симетричної ядерної матерії). Параметри ван дер Ваальса взаємодії нуклонів $a$ та $b$ фіксуються з властивостей ядерної матерії в основному стані: $T = 0$, $p = 0$, $n = n_0 = 0.16$ fm$^{-3}$ та $E_{\rm B} = -16$ MeV. Це дає $a = 329$ MeV fm$^3$ та $b = 3.42$ fm$^3$. З цими значеннями параметрів модель QvdW передбачає фазовий перехід першого роду рідина-газ з критичною точкою, що локалізована при $T_c = 19.7$ MeV та $n_c = 0.07$ fm$^{-3}$.

В **главі 4.2** флуктуації в околі критичної точки ядерної матерії – нормована варіація, $\omega[N]$, коефіцієнт асиметрії, $S\sigma$, та куртозис, $\kappa\sigma^2$, – було обчислено в рамках квантового формулювання рівняння стану ван дер Ваальса. Нормована варіація є розбіжною, $\omega[N] \to \infty$, в критичній точці, і великі значення $\omega[N] \gg 1$ реалізуються вздовж області кросоверу навіть далеко від критичної точки. Поведінка $S\sigma$ та $\kappa\sigma^2$ поблизу критичної точки більш складна. Граничні сингулярні значення цих величин залежать від шляху підходу до критичної точки. Багата структура коефіцієнту асиметрії та куртозиса спостерігається в широкій $T$-$\mu$ області навколо критичної точки ядерної матерії. Є надія, що отримані результати можуть бути корисними для виявлення сигналів критичної точки ядерної матерії в експериментах по зіткненням важких іонів.

В **главі 4.3** квантову модель ван дер Ваальса для ядерної матерії було порівняно з моделлю Валечки [121]. Третя модель що вводиться в цьому розділі – це гібридна модель, в якій взаємодії притягання здійснюються через обміни скалярними $\sigma$ мезонами, як в моделі Валечки, а взаємодії відштовхування реалізуються через поправку виключеного об'єму, як в квантовій моделі ван дер Ваальса.

Кожна модель містить два параметра, що характеризують взаємодії відштовхування та притягання між нуклонами. Ці параметри в кожній моделі визначаються таким чином, щоб відтворити властивості ядерної матерії при нульовій температурі. Всі розглянуті моделі передбачають існування фазового переходу рідина-газ та критичної точки. Криві співіснування та ізотерми в приведених змінних є дуже близькими в моделі Валечки та квантовій моделі ван дер Ваальса. Обидві моделі мають однакові критичні індекси, що співпадають з критичними індексами класичної моделі ван дер Ваальса. Таким чином, обидві моделі входять у клас універсальності моделей середнього поля. Результати гібридної моделі знаходяться "посередині" між результатами моделі Валечки та квантової моделі ван дер Ваальса. Примітно, що критичні амплітуди, що характеризують критичну поведінку, є різними в квантовій та класичній моделях ван дер Ваальса.

Незважаючи на значну подібність розглянутих моделей в околі критичної точки, існують важливі відмінності в поведінці їхніх термодинамічних функцій в іншій області фазової діаграми. Якісна відмінність має місце при великих значеннях густини числа нуклонів $n$: як квантова модель ван дер Ваальса, так і гібридна модель містять верхнє обмеження на густину числа нуклонів $n < 1/b$, тоді як такого обмеження немає в моделі Валечки.

# Висновки

Дисертаційну роботу присвячено теоретичному вивченню флуктуацій та середніх чисел частинок в околі можливого фазового переходу деконфайнмента та в околі критичної точки ядерної матерії в ядро-ядерних зіткненнях в рамках статистичних моделей.

**В першому розділі** введено точні закони збереження дивності та чарівності в статистичну модель ранньої стадії [24] релятивістських ядро-ядерних зіткнень. Розширення моделі було мотивоване планами експерименту NA61/SHINE на CERN SPS по вимірюванні продукції дивних адронів в непружніх p+p взаємодіях, а також повного числа чарівних адронів та сильноінтенсивних мір флуктуацій чисел адронів в зіткненнях Pb+Pb. Основні результати розділу наступні:

1. Знайдено вплив точного закону збереження дивності на термодинамічні функції системи адронів та на температури початку та кінця змішаної фази в статистичній моделі ранньої стадії ядро-ядерних зіткнень.
2. З врахуванням точного закону збереження дивності обчислено залежність від енергії зіткнення відношення дивності до ентропії для зіткнень протонів та малих ядер при енергіях CERN SPS.
3. З врахуванням точного закону збереження чарівності обчислено залежність від енергії зіткнення середнього числа $c\bar{c}$-пар в центральних Pb+Pb зіткненнях.
4. Обчислено залежності сильноінтенсивних мір флуктуацій числа адронів від енергії зіткнення в центральних Pb+Pb зіткненнях. На основі нерегулярностей в обчислених залежностей зроблено передбачення для можливих експериментальних сигналів фазового переходу деконфайнмента.

**Другий розділ** є вступом до двох наступних розділів. Він присвячений флуктуаціям числа взаємодіючих частинок з больцманівською статистикою в околі критичної точки. В розділі використовується модель ван дер Ваальса в, нещодавно запропонованому [70], формулюванні великого канонічного ансамблю. Результати:

1. Знайдено універсальні (незалежні від параметрів сили притягання та від-

штовхування), аналітичні вирази для флуктуації числа частинок аж до четвертого моменту, а саме нормованої варіації, коефіцієнта асиметрії та куртозиса розподілу числа частинок в моделі ван дер Ваальса. Також знайдено вирази для сильноінтенсивних мір флуктуацій числа частинок та повної енергії.

2. Знайдено відмінність в поведінці флуктуацій числа частинок в області газоподібної фази, рідинної фази та кросоверу на фазовій діаграмі. Кожну з цих областей охарактеризовано відповідною поведінкою флуктуацій.
3. Досліджено сингулярну критичну поведінку флуктуацій в моделі ван дер Ваальса. Одержано розклад вищезгаданих виразів в околі критичної точки.

В наступних двох розділах використовується, нещодавно запропоноване [71], розширення моделі ван дер Ваальса в великому канонічному ансамблі, що враховує ефекти квантової статистики (квантова модель ван дер Ваальса, QvdW). Зокрема, в **третьому розділі** дана модель з Бозе статистикою застосовується до опису адронної матерії у вигляді системи взаємодіючих $\pi$-мезонів. Основними результатами розділу є:

1. Виявлено явище граничної температури в газі $\pi$-мезонів з рівнянням стану ван дер Ваальса. Це явище полягає в тому, що при кожному значенні параметрів моделі $b \geq 0$ та $a > 0$, існує гранична температура $T_0$, вище якої рівновага в системі неможлива. Знайдено залежність граничної температури від параметрів моделі.
2. Досліджено поведінку термодинамічних функцій в околі граничної температури. Знайдено що ефективний хімічний потенціал, тиск, густина $\pi$-мезонів, густина енергії та швидкість звуку в системі залишаються скінченними в точці $T_0$ тоді як теплоємність та флуктуації числа $\pi$-мезонів прямують до нескінченності при підході до граничної температури зі степеневим показником $1/2$.
3. Знайдено відповідність в поведінці термодинамічних функцій газу $\pi$-мезонів з рівнянням стану ван дер Ваальса та адронної матерії з рівнянням стану Хагедорна.

Насамкінець, **четвертий розділ** присвячено дослідженню флуктуацій числа нуклонів в околі критичної точки фазового переходу рідина-газ ядерної матерії. В даному розділі для опису ядерної матерії використовується квантова модель ван дер Ваальса з Фермі статистикою [71]. Коротко перелічені, результати розділу наступні:

1. Знайдено вирази для нормованої варіації, коефіцієнта асиметрії та куртозиса розподілу числа нуклонів в ядерній матерії в моделі QvdW. Досліджено сингулярну критичну поведінку цих величин в околі критичної точки ядерної матерії. Одержано можливі сигнали газоподібної/рідинної фаз ядерної матерії та кросоверу на основі визначення флуктуацій числа нуклонів.
2. Обчислено критичні індекси в моделі ван дер Ваальса з Фермі статистикою. Визначено клас універсальності моделі. Знайдено вплив квантової статистики на критичні амплітуди критичних індексів $\gamma$ та $\delta$.
3. На основі єдиної граничної умови стану ядерної матерії при нульовій температурі знайдено параметри притягання та відштовхування моделей QvdW та Валечки ядерної матерії. Це надало можливість порівняти ці дві моделі. Зокрема, для моделей QvdW та Валечки при даних значеннях параметрів знайдено та порівняно наступні характеристики: поведінку термодинамічних функцій ядерної матерії, ядерну нестисливість при нульовій температурі, $K_0$, положення критичної точки, критичну поведінку системи в околі критичної точки. Також дані характеристики порівняно з експериментальними оцінками, існуючими на цей час.
4. Розглянуто гібридну модель, що є компромісом між моделями QvdW та Валечки ядерної матерії. Вищезгадані характеристики обчислено для гібридної моделі та порівняно з їх відповідними значеннями в моделях QvdW та Валечки.

Підбиваючи підсумки виконаної роботи, можна відзначити, що отримані результати є вкладом у розуміння поведінки флуктуацій в околі фазових переходів та критичної точки сильновзаємодіючої матерії, а також в розробку їх експериментальних сигналів.

# Список використаних джерел


[1] R. V. Poberezhnyuk, M. Gazdzicki and M. I. Gorenstein, “Statistical Model of the Early Stage of nucleus-nucleus collisions with exact strangeness conservation,” Acta Phys. Polon. B **46**, no. 10, 1991 (2015)

[2] V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, M. I. Gorenstein and R. V. Poberezhnyuk, “Scaled variance, skewness, and kurtosis near the critical point of nuclear matter,” Phys. Rev. C **92**, no. 5, 054901 (2015)

[3] V. Vovchenko, R. V. Poberezhnyuk, D. V. Anchishkin and M. I. Gorenstein, “Non-Gaussian particle number fluctuations in vicinity of the critical point for van der Waals equation of state,” J. Phys. A **49**, no. 1, 015003 (2016)

[4] R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin and M. I. Gorenstein, “Limiting temperature of pion gas with the van der Waals equation of state,” J. Phys. G **43**, no. 9, 095105 (2016)

[5] R. V. Poberezhnyuk, M. I. Gorenstein and M. Gazdzicki, “Fluctuations in the Statistical Model of the Early Stage of nucleus-nucleus collisions,” Acta Phys. Polon. B **47**, 2055 (2016)

[6] R. V. Poberezhnyuk, M. Gazdzicki and M. I. Gorenstein, “Open charm production in central Pb+Pb collisions at the CERN SPS: statistical model estimates,” Acta Phys. Polon. B **48**, 1461 (2017)

[7] R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, “Quantum van der Waals and Walecka models of nuclear matter,” Int. J. Mod. Phys. E **26**, no. 10, 1750061 (2017).

[8] V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, M. I. Gorenstein, R. V. Poberezhnyuk and H. Stoecker, “Critical fluctuations in models with van der Waals interactions,” Acta Phys. Polon. B **10**, 753 (2017).

[9] R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, “Limiting temperature of pion gas with the van der Waals equation of state,”

VII Young Scientists Conference “Problems of Theoretical Physics” Program and Abstracts, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv, Ukraine, December 13–15, 2016.

[10] R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, “Limiting temperature of pion gas with the van der Waals equation of state,” Presentations of Zim’anyi Winter School on Heavy Ion Physics, Wigner Research Center for Physics, Budapest, Hungary, December 5–9, 2016, https://indico.cern.ch/event/592683

[11] R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, “Critical point of nuclear matter,” Presentations of Zim’anyi Winter School on Heavy Ion Physics, Wigner Research Center for Physics, Budapest, Hungary, December 5–9, 2017, https://indico.cern.ch/event/684046

[12] R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, “Quantum van der Waals model versus Walecka model of nuclear matter,” VIII Young Scientists Conference “Problems of Theoretical Physics” Program and Abstracts, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv, Ukraine, December 12–14, 2017.

[13] N. Cabibbo and G. Parisi, “Exponential Hadronic Spectrum and Quark Liberation,” Phys. Lett. **59B**, 67 (1975).

[14] J. C. Collins and M. J. Perry, “Superdense Matter: Neutrons Or Asymptotically Free Quarks?,” Phys. Rev. Lett. **34**, 1353 (1975).

[15] J. Pochodzalla *et al.*, “Probing the nuclear liquid - gas phase transition,” Phys. Rev. Lett. **75**, 1040 (1995).

[16] C. Alt *et al.* [NA49 Collaboration], “Pion and kaon production in central Pb + Pb collisions at 20-A and 30-A-GeV: Evidence for the onset of deconfinement,” Phys. Rev. C **77**, 024903 (2008).

[17] M. Gazdzicki, R. Stock and P. Seyboth, “Has the deconfinement phase transition been seen?,” CERN Cour. **43N7**, 17 (2003).

[18] http://cern.web.cern.ch/CERN/Announcements/2000/NewStateMatter/

[19] J. Rafelski and B. Muller, "Strangeness Production in the Quark - Gluon Plasma," Phys. Rev. Lett. **48**, 1066 (1982) Erratum: [Phys. Rev. Lett. **56**, 2334 (1986)].

[20] P. Koch, B. Muller and J. Rafelski, "Strangeness in Relativistic Heavy Ion Collisions," Phys. Rept. **142**, 167 (1986).

[21] T. Matsui and H. Satz, "$J/\psi$ Suppression by Quark-Gluon Plasma Formation," Phys. Lett. B **178**, 416 (1986).

[22] M. Gazdzicki and D. Roehrich, "Pion multiplicity in nuclear collisions," Z. Phys. C **65**, 215 (1995).

[23] M. Gazdzicki and D. Rohrich, "Strangeness in nuclear collisions," Z. Phys. C **71**, 55 (1996)

[24] M. Gazdzicki and M. I. Gorenstein, "On the early stage of nucleus-nucleus collisions," Acta Phys. Polon. B **30**, 2705 (1999)

[25] P. Seyboth [NA49 Collaboration], "Future plans of the NA49 collaboration," CERN-SPSC-97-26.

[26] M. Gazdzicki, "Pion and strangeness production as signals of QCD phase transition," In *Hirschegg 1997, QCD phase transitions* 217-223

[27] M. Gazdzicki, "Energy scan program at the CERN SPS and an observation of the deconfinement phase transition in nucleus nucleus collisions," J. Phys. G **30**, S161 (2004)

[28] L. Van Hove, "Multiplicity Dependence of p(T) Spectrum as a Possible Signal for a Phase Transition in Hadronic Collisions," Phys. Lett. **118B**, 138 (1982).

[29] C. M. Hung and E. V. Shuryak, "Hydrodynamics near the QCD phase transition: Looking for the longest lived fireball," Phys. Rev. Lett. **75**, 4003 (1995)

[30] M. I. Gorenstein, M. Gazdzicki and K. A. Bugaev, "Transverse activity of kaons and the deconfinement phase transition in nucleus-nucleus collisions," Phys. Lett. B **567**, 175 (2003)

[31] M. Gazdzicki *et al.* [NA49-future Collaboration], "A New SPS programme," PoS CPOD **2006**, 016 (2006)

[32] N. Antoniou *et al.* [NA49-future Collaboration], "Study of hadron production in hadron nucleus and nucleus nucleus collisions at the CERN SPS," CERN-SPSC-2006-034, CERN-SPSC-P-330.

[33] G. S. F. Stephans, "critRHIC: The RHIC low energy program," J. Phys. G **32**, S447 (2006)

[34] P. Senger, T. Galatyuk, D. Kresan, A. Kiseleva and E. Kryshen, "CBM at FAIR," PoS CPOD **2006**, 018 (2006).

[35] A. N. Sissakian, A. S. Sorin and V. D. Toneev, "QCD matter: A search for a mixed quark-hadron phase," arXiv:nucl-th/0608032.

[36] L. D. Landau, Izv. Akad. Nauk Ser. Fiz. **17**, 51 (1953); S. Z. Belenkij and L. D. Landau, Nuovo Cim. Suppl. **3S10**, 15 (1956) [Usp. Fiz. Nauk **56**, 309 (1955)].

[37] L. P. Csernai, J. I. Kapusta and L. D. McLerran, "On the Strongly-Interacting Low-Viscosity Matter Created in Relativistic Nuclear Collisions," Phys. Rev. Lett. **97**, 152303 (2006)

[38] M. I. Gorenstein, M. Hauer and O. N. Moroz, "Viscosity in the excluded volume hadron gas model," Phys. Rev. C **77**, 024911 (2008)

[39] J. Baacke, "Thermodynamics of a Gas of MIT Bags," Acta Phys. Polon. B **8**, 625 (1977).

[40] E. V. Shuryak, "Quantum Chromodynamics and the Theory of Superdense Matter," Phys. Rept. **61**, 71 (1980).

[41] J. Cleymans, R. V. Gavai and E. Suhonen, "Quarks and Gluons at High Temperatures and Densities," Phys. Rept. **130**, 217 (1986).

[42] J. Rafelski and M. Danos, "The Importance of the Reaction Volume in Hadronic Collisions," Phys. Lett. **97B**, 279 (1980).

[43] J. Cleymans, K. Redlich and E. Suhonen, "Canonical description of strangeness conservation and particle production," Z. Phys. C **51**, 137 (1991).

[44] F. Becattini, “A Thermodynamical approach to hadron production in e+ e- collisions,” Z. Phys. C **69**, no. 3, 485 (1996).

[45] F. Becattini, L. Bellucci and G. Passaleva, “Transverse momentum spectra of identified particles in high-energy collisions with statistical hadronization model,” Nucl. Phys. Proc. Suppl. **92**, 137 (2001)

[46] F. Becattini and U. W. Heinz, “Thermal hadron production in p p and p anti-p collisions,” Z. Phys. C **76**, 269 (1997) Erratum: [Z. Phys. C **76**, 578 (1997)]

[47] M. I. Gorenstein, M. Gazdzicki and W. Greiner, “Baryon number conservation and statistical production of anti-baryons,” Phys. Lett. B **483**, 60 (2000)

[48] M. I. Gorenstein, A. P. Kostyuk, H. Stoecker and W. Greiner, “Statistical coalescence model with exact charm conservation,” Phys. Lett. B **509**, 277 (2001)

[49] M. I. Gorenstein, W. Greiner and A. Rustamov, “Strangeness Production in Light and Intermediate size Nucleus-Nucleus Collisions,” Phys. Lett. B **731**, 302 (2014)

[50] R. V. Gavai, S. Gupta, P. L. McGaughey, E. Quack, P. V. Ruuskanen, R. Vogt and X. N. Wang, “Heavy quark production in $pp$ collisions,” Int. J. Mod. Phys. A **10**, 2999 (1995)

[51] P. Braun-Munzinger and J. Stachel, “(Non)thermal aspects of charmonium production and a new look at J / psi suppression,” Phys. Lett. B **490**, 196 (2000)

[52] P. Levai, T. S. Biro, P. Csizmadia, T. Csorgo and J. Zimanyi, “The Production of charm mesons from quark matter at CERN SPS and RHIC,” J. Phys. G **27**, 703 (2001)

[53] C. Alt *et al.* [NA49 Collaboration], “Energy and centrality dependence of anti-p and p production and the anti-Lambda/anti-p ratio in Pb+Pb collisions between 20/A-GeV and 158/A-Gev,” Phys. Rev. C **73**, 044910 (2006).

[54] M. Gazdzicki, M. I. Gorenstein and S. Mrowczynski, “Fluctuations and deconfinement phase transition in nucleus nucleus collisions,” Phys. Lett. B **585**, 115 (2004)

[55] M. I. Gorenstein, M. Gazdzicki and O. S. Zozulya, “Fluctuations of strangeness and deconfinement phase transition in nucleus nucleus collisions,” Phys. Lett. B **585**, 237 (2004)

[56] M. Gazdzicki, M. I. Gorenstein and P. Seyboth, “Recent Developments in the Study of Deconfinement in Nucleus-Nucleus Collisions,” Int. J. Mod. Phys. E **23**, 1430008 (2014)

[57] M. Gazdzicki and P. Seyboth, “Search for Critical Behaviour of Strongly Interacting Matter at the CERN Super Proton Synchrotron,” Acta Phys. Polon. B **47**, 1201 (2016)

[58] M. I. Gorenstein and M. Gazdzicki, “Strongly Intensive Quantities,” Phys. Rev. C **84**, 014904 (2011)

[59] M. Gazdzicki and S. Mrowczynski, “A Method to study ’equilibration’ in nucleus-nucleus collisions,” Z. Phys. C **54**, 127 (1992).

[60] S. Mrowczynski, “Generalizing Phi measure of event-by-event fluctuations in high-energy heavy ion collisions,” Phys. Lett. B **465**, 8 (1999)

[61] E. Sangaline, “Strongly Intensive Cumulants: Fluctuation Measures for Systems With Incompletely Constrained Volumes,”

[62] M. Gazdzicki, M. I. Gorenstein and M. Mackowiak-Pawlowska, “Normalization of strongly intensive quantities,” Phys. Rev. C **88**, no. 2, 024907 (2013)

[63] C. Alt *et al.* [NA49 Collaboration], “Energy Dependence of Multiplicity Fluctuations in Heavy Ion Collisions at the CERN SPS,” Phys. Rev. C **78**, 034914 (2008)

[64] N. Abgrall *et al.*, CERN-SPSC-2014-031, SPSC-SR-145.

[65] N. Abgrall *et al.* [NA61/SHINE Collaboration], "Measurement of negatively charged pion spectra in inelastic p+p interactions at $p_{lab}$ = 20, 31, 40, 80 and 158 GeV/c," Eur. Phys. J. C **74**, no. 3, 2794 (2014)

[66] W. Greiner, L. Neise, and H. Stöcker, *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, 1995 Springer-Verlag New York, Inc.

[67] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics* (Oxford: Pergamon) 1975.

[68] M. I. Gorenstein, V. K. Petrov and G. M. Zinovev, "Phase Transition in the Hadron Gas Model," Phys. Lett. **106B**, 327 (1981).

[69] D. H. Rischke, M. I. Gorenstein, H. Stoecker and W. Greiner, "Excluded volume effect for the nuclear matter equation of state," Z. Phys. C **51**, 485 (1991).

[70] V. Vovchenko, D. V. Anchishkin and M. I. Gorenstein, "Particle number fluctuations for the van der Waals equation of state," J. Phys. A **48**, no. 30, 305001 (2015)

[71] V. Vovchenko, D. V. Anchishkin and M. I. Gorenstein, "Van der Waals Equation of State with Fermi Statistics for Nuclear Matter," Phys. Rev. C **91**, no. 6, 064314 (2015)

[72] K. Redlich and K. Zalewski, "Thermodynamics of Van der Waals Fluids with quantum statistics," Acta Phys. Polon. B **47**, 1943 (2016)

[73] D. Anchishkin, "Particle finite size effects as mean field approximation," Sov. Phys. JETP **75**, 195 (1992).

[74] D. Anchishkin and E. Suhonen, "Generalization of mean field models to account for effects of excluded volume," Nucl. Phys. A **586**, 734 (1995).

[75] D. Anchishkin and V. Vovchenko, "Mean-field approach in the multi-component gas of interacting particles applied to relativistic heavy-ion collisions," J. Phys. G **42**, no. 10, 105102 (2015)

[76] M. A. Stephanov, "On the sign of kurtosis near the QCD critical point," Phys. Rev. Lett. **107**, 052301 (2011)

[77] T. Matsui and B. D. Serot, “The Pion Propagator in Relativistic Quantum Field Theories of the Nuclear Many Body Problem,” Annals Phys. **144**, 107 (1982).

[78] P. Gerber and H. Leutwyler, “Hadrons Below the Chiral Phase Transition,” Nucl. Phys. B **321**, 387 (1989).

[79] I. N. Mishustin and W. Greiner, “Multi - pion droplets,” J. Phys. G **19**, L101 (1993).

[80] A. Kostyuk, M. Gorenstein, H. Stoecker and W. Greiner, “Phase transition in hot pion matter,” Phys. Lett. B **500**, 273 (2001)

[81] K. Fukushima and C. Sasaki, “The phase diagram of nuclear and quark matter at high baryon density,” Prog. Part. Nucl. Phys. **72**, 99 (2013)

[82] A. Andronic, P. Braun-Munzinger, J. Stachel and M. Winn, “Interacting hadron resonance gas meets lattice QCD,” Phys. Lett. B **718**, 80 (2012)

[83] V. Vovchenko, D. V. Anchishkin and M. I. Gorenstein, Phys. Rev. C **91**, no. 2, 024905 (2015) doi:10.1103/PhysRevC.91.024905 [arXiv:1412.5478 [nucl-th]].

[84] R. Hagedorn, “Statistical thermodynamics of strong interactions at high-energies,” Nuovo Cim. Suppl. **3**, 147 (1965).

[85] R. Hagedorn, “Statistical thermodynamics of strong interactions at high energies. 3. Heavy-pair (quark) production rates,” Nuovo Cim. Suppl. **6**, 311 (1968).

[86] R. Hagedorn and J. Ranft, “Statistical thermodynamics of strong interactions at high-energies. 2. Momentum spectra of particles produced in high energy pp collisions,” CERN-TH-715.

[87] E. Beth and G. Uhlenbeck, “The quantum theory of the non-ideal gas. II. Behaviour at low temperatures,” Physica **4**, 915 (1937).

[88] S. Z. Belenkij, Nucl. Phys. **2**, 259 (1956).

[89] R. Dashen, S. K. Ma and H. J. Bernstein, “S Matrix formulation of statistical mechanics,” Phys. Rev. **187**, 345 (1969).

[90] S. C. Frautschi, "Statistical bootstrap model of hadrons," Phys. Rev. D **3**, 2821 (1971).

[91] J. Yellin, "An explicit solution of the statistical bootstrap," Nucl. Phys. B **52**, 583 (1973).

[92] B. K. Jennings, S. Das Gupta and N. Mobed, "Aspects of deuteron production in relativistic heavy ion collisions," Phys. Rev. C **25**, 278 (1982).

[93] G. Röpke, L. Münchow and H. Schulz, "Particle clustering and Mott transitions in nuclear matter at finite temperature," Nucl. Phys. A **379**, 536 (1982).

[94] G. I. Fai and J. Randrup, "Explosion - Evaporation Model For Fragment Production In Medium-energy Nuclear Collisions," Nucl. Phys. A **381**, 557 (1982).

[95] T. Biro, H. W. Barz, B. Lukacs and J. Zimanyi, "Entropy and hadrochemical composition in heavy ion collision," Phys. Rev. C **27**, 2695 (1983).

[96] H. Stoecker, A. A. Ogloblin and W. Greiner, "Significance Of Temperature Measurements In Relativistic Nuclear Collisions," Z. Phys. A **303**, 259 (1981).

[97] L. P. Csernai, P. R. Subramanian, G. Buchwald, G. Graebner, A. Rosenhauer, J. A. Maruhn, W. Greiner and H. Stoecker, "Fragment Emission In High-energy Heavy Ion Reactions," Phys. Rev. C **28**, 2001 (1983).

[98] L. P. Csernai and J. I. Kapusta, "Entropy and Cluster Production in Nuclear Collisions," Phys. Rept. **131**, 223 (1986).

[99] B. D. Serot and J. D. Walecka, "The Relativistic Nuclear Many Body Problem," Adv. Nucl. Phys. **16**, 1 (1986).

[100] J. Zimanyi and S. A. Moszkowski, "Nuclear Equation of state with derivative scalar coupling," Phys. Rev. C **42**, 1416 (1990).

[101] R. Brockmann and R. Machleidt, "Relativistic nuclear structure. 1: Nuclear matter," Phys. Rev. C **42**, 1965 (1990).

[102] H. Mueller and B. D. Serot, "Relativistic mean field theory and the high density nuclear equation of state," Nucl. Phys. A **606**, 508 (1996)

[103] M. Bender, P. H. Heenen and P. G. Reinhard, “Self-consistent mean-field models for nuclear structure,” Rev. Mod. Phys. **75**, 121 (2003).

[104] C. E. Detar and T. Kunihiro, “Linear $\sigma$ Model With Parity Doubling,” Phys. Rev. D **39**, 2805 (1989).

[105] D. Zschiesche, L. Tolos, J. Schaffner-Bielich and R. D. Pisarski, “Cold, dense nuclear matter in a SU(2) parity doublet model,” Phys. Rev. C **75**, 055202 (2007)

[106] J. Steinheimer, S. Schramm and H. Stocker, “The hadronic SU(3) Parity Doublet Model for Dense Matter, its extension to quarks and the strange equation of state,” Phys. Rev. C **84**, 045208 (2011)

[107] L. M. Satarov, M. N. Dmitriev and I. N. Mishustin, “Equation of state of hadron resonance gas and the phase diagram of strongly interacting matter,” Phys. Atom. Nucl. **72**, 1390 (2009)

[108] J. E. Finn *et al.*, “Nuclear Fragment Mass Yields From High-energy Proton - Nucleus Interactions,” Phys. Rev. Lett. **49**, 1321 (1982).

[109] R. W. Minich *et al.*, “Critical Phenomena in Hadronic Matter and Experimental Isotopic Yields in High-energy Proton - Nucleus Collisions,” Phys. Lett. **118B**, 458 (1982).

[110] A. S. Hirsch *et al.*, “Experimental Results From High-energy Proton Nucleus Interactions, Critical Phenomena, And The Thermal Liquid Drop Model Of Fragment Production,” Phys. Rev. C **29**, 508 (1984).

[111] J. B. Natowitz, K. Hagel, Y. Ma, M. Murray, L. Qin, R. Wada and J. Wang, “Limiting temperatures and the equation of state of nuclear matter,” Phys. Rev. Lett. **89**, 212701 (2002)

[112] V. A. Karnaukhov *et al.*, “Critical temperature for the nuclear liquid gas phase transition,” Phys. Rev. C **67**, 011601 (2003)

[113] H. A. Bethe, “Theory of nuclear matter,” Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **21**, 93 (1971).

[114] J. P. Blaizot, “Nuclear Compressibilities,” Phys. Rept. **64**, 171 (1980).

[115] S. Shlomo, V. M. Kolomietz, and G. Colo, Eur. Phys. J. A **30**, 23 (2006).

[116] J. R. Stone, N. J. Stone and S. A. Moszkowski, “Incompressibility in finite nuclei and nuclear matter,” Phys. Rev. C **89**, no. 4, 044316 (2014)

[117] M. Asakawa, S. Ejiri and M. Kitazawa, “Third moments of conserved charges as probes of QCD phase structure,” Phys. Rev. Lett. **103**, 262301 (2009)

[118] S. Chatterjee and K. A. Mohan, “Sign Structure of Susceptibilities of Conserved Charges in the (2+1) Polyakov Quark Meson Model,” arXiv:1502.00648 [nucl-th].

[119] J. W. Chen, J. Deng, H. Kohyama and L. Labun, “Robust characteristics of nongaussian fluctuations from the NJL model,” Phys. Rev. D **93**, no. 3, 034037 (2016)

[120] M. A. Stephanov, “Non-Gaussian fluctuations near the QCD critical point,” Phys. Rev. Lett. **102**, 032301 (2009)

[121] J. D. Walecka, “A Theory of highly condensed matter,” Annals Phys. **83**, 491 (1974).

[122] J. B. Silva, O. Lourenco, A. Delfino, J. S. Sa Martins and M. Dutra, “Critical behavior of mean-field hadronic models for warm nuclear matter,” Phys. Lett. B **664**, 246 (2008).

[123] N.F. Carnahan and K.E. Starling, J. Chem. Phys. **51**, 635 (1969).

[124] L. M. Satarov, K. A. Bugaev and I. N. Mishustin, “Equation of state and sound velocity of a hadronic gas with a hard-core interaction,” Phys. Rev. C **91**, no. 5, 055203 (2015)

[125] V. Vovchenko, “Equations of state for real gases on the nuclear scale,” Phys. Rev. C **96**, no. 1, 015206 (2017)

[126] J. B. Elliott, P. T. Lake, L. G. Moretto and L. Phair, “Determination of the coexistence curve, critical temperature, density, and pressure of bulk nuclear matter from fragment emission data,” Phys. Rev. C **87**, no. 5, 054622 (2013).

[127] J. Boguta and A. R. Bodmer, "Relativistic Calculation of Nuclear Matter and the Nuclear Surface," Nucl. Phys. A **292**, 413 (1977).

[128] R. Balescu, *Equilibrium and nonequilibrium statistical mechanics*, John Wiley and Sons, Inc., 1975.

[129] J. V. Sengers and J. G. Shanks, J. Stat. Phys. **137**, 857 (2009).

# Додатки

## А Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

### А.1 Список публікацій

Результати дисертації опубліковані у 8 журнальних статтях [1–8], та матеріалах конференцій [9–12].

1. R. V. Poberezhnyuk, M. Gazdzicki, and M. I. Gorenstein, "Statistical Model of the Early Stage of nucleus-nucleus collisions with exact strangeness conservation," Acta Phys. Polon. B **46**, no. 10, 1991 (2015).
2. V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, M. I. Gorenstein, and R. V. Poberezhnyuk, "Scaled variance, skewness, and kurtosis near the critical point of nuclear matter," Phys. Rev. C **92**, no. 5, 054901 (2015).
3. V. Vovchenko, R. V. Poberezhnyuk, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, "Non-Gaussian particle number fluctuations in vicinity of the critical point for van der Waals equation of state," J. Phys. A **49**, no. 1, 015003 (2016).
4. R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, "Limiting temperature of pion gas with the van der Waals equation of state," J. Phys. G **43**, no. 9, 095105 (2016).
5. R. V. Poberezhnyuk, M. I. Gorenstein, and M. Gazdzicki, "Fluctuations in the Statistical Model of the Early Stage of nucleus-nucleus collisions," Acta Phys. Polon. B **47**, 2055 (2016).
6. R. V. Poberezhnyuk, M. Gazdzicki and M. I. Gorenstein, "Open charm production in central Pb+Pb collisions at the CERN SPS: statistical model estimates," Acta Phys. Polon. B **48**, no. 9, 1461 (2017).
7. R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, "Quantum van der Waals and Walecka models of nuclear matter," Int. J. Mod. Phys. E 26, no. 10, 1750061 (2017).
8. V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, M. I. Gorenstein, R. V. Poberezhnyuk and

H. Stoecker, “Critical fluctuations in models with van der Waals interactions,” Acta Phys. Polon. B **10**, 753 (2017).

9. R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, “Limiting temperature of pion gas with the van der Waals equation of state,” VII Young Scientists Conference “Problems of Theoretical Physics” Program and Abstracts, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv, Ukraine, December 13–15, 2016.
10. R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, “Limiting temperature of pion gas with the van der Waals equation of state,” Presentations of Zim’anyi Winter School on Heavy Ion Physics, Wigner Research Center for Physics, Budapest, Hungary, December 5–9, 2016.
11. R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, “Critical point of nuclear matter,” Presentations of Zim’anyi Winter School on Heavy Ion Physics, Wigner Research Center for Physics, Budapest, Hungary, December 5–9, 2017.
12. R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, “Quantum van der Waals model versus Walecka model of nuclear matter,” VIII Young Scientists Conference “Problems of Theoretical Physics” Program and Abstracts, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv, Ukraine, December 12–14, 2017.

## A.2 Апробація результатів дисертації

1. Zim’anyi Winter School on Heavy Ion Physics, Будапешт, Венгрія, 5-9 грудня 2016 р. (доповідь)
2. Конференція Молодих Вчених Сучасні Проблеми Теоретичної Фізики, Київ, Україна, 13-15 грудня 2016 р. (доповідь)
3. Zim’anyi Winter School on Heavy Ion Physics, Будапешт, Угорщина, 5-9 грудня 2017 р. (доповідь)
4. Конференція Молодих Вчених Сучасні Проблеми Теоретичної Фізики, Київ, Україна, 12-14 грудня 2017 р. (доповідь)