

## АНОТАЦІЯ

Лашко Ю.А. Багатокластерна теорія легких атомних ядер. – Рукопис. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика. – Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України. – Київ, 2018.

В даній роботі запропоновано розв'язок важливих проблем, що знаходяться на межі мікроскопічної теорії ядра і теорії розсіяння багаточастинкових квантових систем та виникають при дослідженні взаємодії легких ядер. На основі оригінального мікроскопічного підходу досліджено зв'язані стани легких нейтронно-надлишкових ядер, багатоканальні стани їх неперервного спектра, а також перерізи ядерних реакцій, що супроводжуються збудженням чи перебудовою ядер. Відомості про величину цих перерізів необхідні при постановці експериментів з нейтронно-надлишковими ядрами.

В першому розділі дисертації сформульовано основні положення дискретного представлення дозволених станів, на основі якого вдається точно врахувати вплив принципу Паулі на досліджувані в рамках методу резонуючих груп процеси зіткнення легких атомних ядер. Істотною особливістю цього підходу є звернення до простору Фока-Баргманна, що допомагає отримати простий опис динамічних явищ, які супроводжують процеси зіткнення. Детально аналізується вплив принципу Паулі на динаміку кластер-кластерної взаємодії в одноканальніх бінарних кластерних системах, таких як  ${}^4\text{He} + {}^4\text{He}$ ,  ${}^{16}\text{O} + {}^{16}\text{O}$ ,  ${}^{40}\text{Ca} + {}^{40}\text{Ca}$  та  ${}^4\text{He} + \text{n}$ . Отримано ефективний міжкластерний потенціал, що породжується оператором кінетичної

енергії відносного руху кластерів під впливом принципу Паулі, та встановлено його властивості, а також розраховано радіус та інтенсивність цього потенціалу для вищезгаданих двокластерних систем. Вперше показано, що точне врахування ефектів антисиметризації на оператор кінетичної енергії призводить або до ефективного відштовхування кластерів, або до їх ефективного притягання, і встановлено умови, за яких це відбувається.

В представленні Фока-Баргманна незалежними змінними хвильової функції стають і координати нуклонів, і імпульси, а функція розподілу густини ймовірності визначена в фазовому просторі. Тому це представлення відкриває нові перспективи для аналізу функцій розподілу бінарних кластерних систем, кожному стану такої системи співставляючи сукупність фазових траєкторій ("фазовий портрет") і тим самим підкреслюючи різницю між класичною і квантовою теорією. Хвильова функція бінарної кластерної системи в цьому представленні дає ймовірність реалізаціїожної з траєкторій фазового портрету. Досліджено фазові портрети зв'язаних та резонансних станів ядер  $^{6,7}\text{Li}$  та  $^{7,8}\text{Be}$ , коли кожне з цих ядер розглядається в рамках мікроскопічної двокластерної моделі.

В другому розділі дисертації аналізується вплив принципу Паулі на відносний рух легких ядер в процесі їх зіткнення для багатоканальних бінарних кластерних систем з надлишком нейtronів, таких як  $^6\text{He} + ^6\text{He}$ ,  $^8\text{He} + ^4\text{He}$ ,  $^{10}\text{Be} + ^2\text{n}$ ,  $^{11}\text{Be} + \text{n}$ ,  $^6\text{He} + ^4\text{He}$ . Встановлено, що в багатоканальних зіткненнях кластерів з надлишком нейtronів визначальну роль відіграють власні значення матриці густини бінарної кластерної системи. Дано оцінку перерізів непружного розсіяння, коли враховується збудження взаємодіючих підсистем, а також ефективних перерізів реакцій перебудови ядер в зіткненні.

Розроблено алгоритм розв'язку багатоканальних задач з урахуванням різного типу кластеризацій. Розглядається співіснування різних кластерних конфігурацій в ядрі  $^{12}\text{Be}$  та в тетранейtronі. Досліжується можливість встановлення зв'язку між результатами мікроскопічної моделі та па-

раметрами ортогоналізуючого потенціалу, який часто використовують в макроскопічних моделях для моделювання принципу Паулі.

Третій розділ дисертації присвячено аналізу ролі принципу Паулі на структуру станів дискретного та неперервного спектра трикластерних систем. Розглянуто такі ядра, що мають трикластерну структуру:  ${}^5\text{H} = \text{t} + \text{n} + \text{n}$ ,  ${}^{12}\text{C} = 3\alpha$ ,  ${}^8\text{Li} = \alpha + t + n$ . Вперше здійснено детальний аналіз структури власних функцій і поведінки власних значень трикластерного ядра нормування. Запропоновано шлях розв'язку проблеми  $\text{SU}(3)$  виродження дозволених принципом Паули станів за допомогою власних значень бінарних підсистем. Кожна сімейство дозволених принципом Паулі станів асимптотично відповідає певному бінарному порогу розпаду трикластерної системи на двокластерну підсистему, що знаходиться в основному або збудженному стані гармонічного осцилятора, і третій кластер. Така асимптотична поведінка вказує на можливі канали розпаду трикластерного ядра і дозволяє визначити найбільш важливі канали розпаду ядра, що розглядається.

Обговорюється вплив кластерної поляризації бінарних підсистем на спектр ядра  ${}^{10}\text{Be} = \alpha + \alpha + {}^2n$ , досліджується залежність спектру зв'язаних та резонансних станів  ${}^{10}\text{Be}$  від вибору нуклон-нуклонного потенціалу та проводиться порівняння з експериментальними даними.

Результати, викладені в дисертації, можуть стати теоретичною основою для розвитку уявлень про структуру і властивості слабков'язаних ядерних систем, що останнім часом стали об'єктом інтенсивних експериментальних досліджень. Вивчення цих об'єктів відкриває нові перспективи розв'язку проблеми ядерних взаємодій.

**Ключові слова:** легкі ядра з надлишком нейтронів, кластери, метод резонуючих груп, фазовий портрет, простір Фока-Баргманна, мікроскопічна кластерна модель, принцип Паулі.

### Список публікацій здобувача:

1. Yu .A. Lashko, G. F. Filippov, K. Kato, S. V. Korennov, Scissors mode in

- the SU(3) basis, Progr. Theor. Phys. Suppl. 146 (2002) 585–586.
2. S. V. Korennov, G. F. Filippov, K. Kato, Yu. A. Lashko, Microscopic Hamiltonian of  ${}^9\text{Li}$  and  ${}^{10}\text{Be}$  and the SU(3) basis, Progr. Theor. Phys. Suppl. 146 (2002) 579-580.
  3. Г. Ф. Филиппов, Ю. А. Лашко, С. В. Кореннов и К. Като, О распаде  ${}^{12}\text{Be}$  по каналам  ${}^8\text{He}+\alpha$  и  ${}^6\text{He}+{}^6\text{He}$ , Известия РАН, серия физическая 67 (2003) 1539–1546.
  4. G. F. Filippov, K. Kato, S. V. Korennov, Yu. A. Lashko, Spectrum of  ${}^{10}\text{Be}$  in the approximation of the leading irreducible representation of the SU(3) group, Phys. Atom. Nucl. 66 (2003) 632–643.
  5. G. F. Filippov, Yu. Lashko, S. Korennov, and K. Kato, Norm kernels and the closeness relation for Pauli-allowed basis functions, Few-body Syst. 33 (2003) 173–198.
  6. G. F. Filippov, Yu. A. Lashko, S. V. Korennov, K. Kato,  ${}^6\text{He}+{}^6\text{He}$  Clustering of  ${}^{12}\text{Be}$  in a Microscopic Algebraic Approach, Few-Body Syst. 34 (2004) 209–235.
  7. G. F. Filippov, Yu. A. Lashko, S. V. Korennov, K. Kato, Integral Equations in the Fock-Bargmann Space and the Generator-Coordinate Method, Phys. Atom. Nucl. 67 (2004) 1715–1720.
  8. Gennady Filippov and Yuliya Lashko, Peculiar properties of the cluster-cluster interaction induced by the Pauli exclusion principle, Phys. Rev. C 70 (2004) 064001.
  9. G. Filippov, Y. Lashko, Structure of Light Neutron-Rich Nuclei and Nuclear Reactions Involving These Nuclei, Phys. Part. Nucl. 36 (6) (2005) 714–739.
  10. G. F. Filippov and Yu. A. Lashko, Coexistence of different cluster configurations in light neutron-rich nuclei, Phys. Atom. Nucl. 70 (2007) 1429–1434.

11. Yu. A. Lashko and G. F. Filippov, Multichannel Neutron Scattering on  $^{11}\text{Be}$  Nucleus, *Phys. Atom. Nucl.* 70 (2007) 1017–1035.
12. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Multi-channel nuclear reactions involving light neutron-rich nuclei: microscopic approach, *Phys. Atom. Nucl.* 70 (2007) 1440–1444.
13. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Cluster structure of a low-energy resonance in tetraneutron, *Phys. Atom. Nucl.* 71 (2008) 209–214.
14. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Decay of  $^5\text{H}$  in a microscopic three-cluster model, *Few-body Systems* 44 (2008) 215–218.
15. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, How the Pauli principle governs the decay of three-cluster systems, *Nucl. Phys. A* 806 (2008) 124–145.
16. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, The role of the Pauli principle in three-cluster systems composed of identical clusters, *Nucl. Phys. A* 826 (2009) 24–48.
17. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Continuous Spectrum of Three-Cluster Systems, *Phys. Atom. Nucl.* 75 (2012) 420–429.
18. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Unusual manifestations of the Pauli principle in scattering of atomic nuclei, *УФЖ* 58 (2013) 534–543.
19. Yu.A. Lashko, G.F. Filippov, L. Canton, Scattering of  $^6\text{He}$  on  $\alpha$ -particle: microscopic guidance for orthogonalizing pseudopotentials, *Ukr. J. Phys.* 60 (2015) 406–415.
20. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, V. S. Vasilevsky, M. D. Soloha-Krymchak, Phase Portraits of Quantum Systems, *Few-body Systems* 55 (2014) 817–820.
21. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, V. S. Vasilevsky, Dynamics of two-cluster systems in phase space, *Nucl. Phys. A* 941 (2015) 121–144.

22. Y. A. Lashko, G. F. Filippov, V. S. Vasilevsky, Microscopic three-cluster model of  $^{10}\text{Be}$ , Nucl. Phys. A 958 (2017) 78 – 100.
23. S. V. Korennov, G. F. Filippov, K. Kato, Yu. A. Lashko, M1 transition in  $^9\text{Li}$  and  $^{10}\text{Be}$  and the SU(3) basis, Proceedings of International Symposium on Clustering Aspects of Quantum Many-Body Systems, Kyoto, November 12-14, 2001. World Scientific (2002) 241-244.
24. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, K. Kato, S. V. Korennov, Probing the spectrum of  $^{10}\text{Be}$  in the approximation of the SU(3) leading representation, Proc. of International Symposium on Clustering Aspects of Quantum Many-Body Systems, Kyoto, November 12-14, 2001. World Scientific (2002) 237-240.
25. G. F. Filippov, Yu. A. Lashko, Effective interaction generated by the Pauli exclusion principle in collisions of the light neutron-rich nuclei, Proc. of the International Symposium on Exotic Nuclei, Peterhof, July 5-12, 2004. World Scientific (2005) 142-147.
26. L. Canton, Yu. A. Lashko, K. Amos, P. R. Fraser, S. Karataglidis, J. P. Svenne, D. van der Knijff, Alpha- $^6\text{He}$  scattering and the quest for microscopic guidance for orthogonalizing pseudopotentials, Proc. of the 14th International Conference on Nuclear Reaction Mechanisms, Varenna, June 15 - 19, 2015, CERN, Geneva (2015) 181-188.
27. G. F. Filippov, K. Kato, S. V. Korennov, Yu .A. Lashko, Scissors mode in the SU(3) basis, Abstracts of Yukawa International Seminar "Physics of Unstable Nuclei Kyoto, November 5-10, 2001, p. 112.
28. G. F. Filippov, K. Kato, S. V. Korennov, Yu. A. Lashko, Microscopic Hamiltonian of  $^9\text{Li}$  and  $^{10}\text{Be}$  and the SU(3) basis, Abstracts of Yukawa International Seminar "Physics of Unstable Nuclei Kyoto, November 5-10, 2001, p. 110.

29. G. F. Filippov, K. Kato, S. V. Korennov, Yu .A. Lashko, Probing the spectrum of  $^{10}\text{Be}$  in the approximation of the SU(3) leading representation, Abstracts of International Symposium on Clustering Aspects of Quantum Many-Body Systems, Kyoto, November 12-14, 2001, p. 49.
30. G. F. Filippov, K. Kato, S. V. Korennov, Yu .A. Lashko, M1 transition in  $^9\text{Li}$  and  $^{10}\text{Be}$  and the SU(3) basis, Abstracts of International Symposium on Clustering Aspects of Quantum Many-Body Systems, Kyoto, November 12-14, 2001, p. 48.
31. S. V. Korennov, Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, K. Kato, Practical calculus for the Fock-Bargmann space, Proceedings of International Symposium on new trends of physics, Sapporo, January 20-24, 2003. Hokkaido University (2003) 135-139.
32. Yuliya Lashko and Gennady Filippov, Multi-channel nuclear reactions involving light neutron-rich nuclei: microscopic approach, Book of abstracts of the International conference on nuclear structure and related topics, Dubna, Russia, June 13 - 17, 2006, p. 50.
33. G. F. Filippov, Yu. A. Lashko, Co-existence of different cluster configurations in light neutron-rich nuclei, Book of abstracts of the International conference on nuclear structure and related topics, Dubna, Russia, June 13 - 17, 2006, p. 33.
34. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, How the Pauli principle governs the decay of three-cluster systems, Book of abstracts of the 2nd International Conference on Current Problems in Nuclear Physics and Atomic Energy, June 9 - 15, 2008, Kyiv, Ukraine, p. 130
35. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Can the democratic decay channel be realized in three-cluster systems? Book of abstracts of the Fifth International Conference on Exotic Nuclei and Atomic Masses, September 7 - 13, 2008, Ryn, Poland, p. 81.

36. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Three-cluster structure of the  ${}^8\text{Li}$  nucleus and the Pauli principle, Book of Abstracts of the 4th International Conference on Current Problems in Nuclear Physics and Atomic Energy, September 3-7, 2012, Kyiv, Ukraine, p. 73.
37. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Unusual manifestations of the Pauli principle in scattering of atomic nuclei, Program and Proceedings of the International Conference "Problems of theoretical physics" dedicated to Alexander Davydov 100th birthday, October 8 - 11, 2012, Kyiv, Ukraine, p. 46.

## ANNOTATION

Lashko Yu.A. Many-cluster theory of light neutron-rich nuclei. – Manuscript. Thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences by specialty 01.04.02— theoretical physics. — Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine. — Kyiv, 2018.

In this thesis, solution of the problems, which are at the border of microscopic nuclear theory and many-body quantum system scattering theory and emerge in studies of interaction of the light nuclei, is proposed. Based on the original microscopic approach, discrete and multichannel continuum states of light neutron-rich nuclei as well as effective cross sections for nuclear reactions accompanied by excitation or rearrangement of the nuclei involved in the reactions are investigated. Data on the magnitude of these cross sections are necessary for setting up future experiments with neutron-rich nuclei.

In the first chapter of the thesis, the main theses relating to a discrete representation of Pauli-allowed states are given. Using this representation, the effect of the Pauli exclusion principle on collisions between light atomic nuclei is studied within the resonating-group method. The Fock–Bargmann representation is a specific feature of the method that provides a simple description of the dynamical phenomena accompanying the collision processes.

The influence of the Pauli principle on the dynamics of cluster-cluster interaction in single-channel binary cluster systems, such as  ${}^4\text{He}+{}^4\text{He}$ ,  ${}^{16}\text{O}+{}^{16}\text{O}$ ,  ${}^{40}\text{Ca}+{}^{40}\text{Ca}$  and  ${}^4\text{He}+\text{n}$  is analyzed in details. An effective intercluster potential generated due to the influence of the Pauli principle on the kinetic energy operator of the relative motion of the clusters is obtained. Its properties along with its radius and intensity for the above-mentioned two-cluster systems are established. For

the first time it is shown that an exact treatment of the antisymmetrization effects related to the kinetic energy exclusively results in either an effective repulsion or attraction of the clusters.

Independent variables of the wave function in the Fock–Bargmann representation are both nucleon coordinates and momenta, and the distribution function is determined in phase space. By this reason this representation offers the challenge of analyzing density distribution functions of binary cluster systems. Any quantum state of such system corresponds to the probability of distribution over phase trajectories in this state, or the phase portrait of the state, as opposed to the classical phase portrait. Wave function of binary cluster system in this representation gives the probability for realization of any trajectory of the phase portrait. Density distributions in the Fock–Bargmann space are constructed for bound and resonance states of  $^{6,7}\text{Li}$  and  $^{7,8}\text{Be}$ , provided that all these nuclei are treated within a microscopic two-cluster model.

In the second chapter, the influence of the Pauli exclusion principle on the process of collision of light nuclei for multichannel binary cluster neutron-rich systems, such as  $^6\text{He}+^6\text{He}$ ,  $^8\text{He}+^4\text{He}$ ,  $^{10}\text{Be}+^2\text{n}$ ,  $^{11}\text{Be}+\text{n}$ ,  $^6\text{He}+^4\text{He}$  is analyzed. The eigenvalues of density matrix of a binary cluster system plays a crucial role in multichannel collisions of neutron-rich clusters. The cross sections for inelastic scattering, taking into account the excitation of interacting subsystems, and the effective cross sections for reactions involving rearrangement of the colliding nuclei are estimated.

Algorithm of solving multichannel problems with consideration for different cluster configurations is developed. Co-existence of different cluster configurations in  $^{12}\text{Be}$  and tetraneutron is considered. Possibility to find a link between the results of our microscopic model and the parameters of orthogonalizing pseudo-potential widely used in macroscopic models for simulating Pauli principle is investigated.

The third chapter of the thesis is devoted to analyzing the role of the Pauli principle on the structure of discrete and continuum spectrum states

of three-cluster systems. Nuclei with prominent three-cluster structure, such as  $^5\text{H} = \text{t} + \text{n} + \text{n}$ ,  $^{12}\text{C} = 3\alpha$ ,  $^8\text{Li} = \alpha + t + n$ , are considered. The structure of the eigenfunctions and behavior of the eigenvalues of the three-cluster norm kernel are analyzed. Classification of the eigenvalues of the three-cluster systems with the help of eigenvalues of the two-body subsystem is suggested. Each family of the Pauli-allowed states asymptotically corresponds to a certain binary decay channel of a three-cluster system into a two-cluster subsystem occurring in a ground or an excited harmonic-oscillator state and a remaining cluster. Such asymptotic behavior gives an indication of possible decay channels of a three-cluster nucleus and allows us to specify the most important decay channels of the nucleus under consideration.

The effects of cluster polarization of binary subsystems on the spectrum of bound and resonance states in  $^{10}\text{Be} = \alpha + \alpha + ^2n$  is discussed. The dependence of the spectrum of bound and resonance states in  $^{10}\text{Be}$  on the choice of nucleon-nucleon potential is investigated and comparison with experimental data is performed.

The results presented in the thesis can provide some theoretical grounding for the advancement of concepts about structure and properties of weakly-bound systems, which recently has become an object of intensive experimental investigations. Study of such objects opens up the prospects for solution of the problem of nuclear interactions.

**Key words:** light neutron-rich nuclei, clusters, resonating group method, phase portrait, Fock-Bargmann space, microscopic cluster model, Pauli principle.

### List of publications:

1. Yu .A. Lashko, G. F. Filippov, K. Kato, S. V. Korennov, Scissors mode in the SU(3) basis, *Progr. Theor. Phys. Suppl.* 146 (2002) 585–586.
2. S. V. Korennov, G. F. Filippov, K. Kato, Yu. A. Lashko, Microscopic Hamiltonian of  $^9\text{Li}$  and  $^{10}\text{Be}$  and the SU(3) basis, *Progr. Theor. Phys.*

- Suppl. 146 (2002) 579-580.
3. G. F. Filippov, Yu. Lashko, S. Korennov, and K. Kato, Decay of  $^{12}\text{Be}$  nucleus via  $^8\text{He}+\alpha$  and  $^6\text{He}+^6\text{He}$  channels, Bull. Russ. Acad. Sci.-Physics, 67 (2003) 1696-1703.
  4. G. F. Filippov, K. Kato, S. V. Korennov, Yu. A. Lashko, Spectrum of  $^{10}\text{Be}$  in the approximation of the leading irreducible representation of the SU(3) group, Phys. Atom. Nucl. 66 (2003) 632–643.
  5. G. F. Filippov, Yu. Lashko, S. Korennov, and K. Kato, Norm kernels and the closeness relation for Pauli-allowed basis functions, Few-body Syst. 33 (2003) 173–198.
  6. G. F. Filippov, Yu. A. Lashko, S. V. Korennov, K. Kato,  $^6\text{He}+^6\text{He}$  Clustering of  $^{12}\text{Be}$  in a Microscopic Algebraic Approach, Few-Body Syst. 34 (2004) 209–235.
  7. G. F. Filippov, Yu. A. Lashko, S. V. Korennov, K. Kato, Integral Equations in the Fock-Bargmann Space and the Generator-Coordinate Method, Phys. Atom. Nucl. 67 (2004) 1715–1720.
  8. Gennady Filippov and Yuliya Lashko, Peculiar properties of the cluster-cluster interaction induced by the Pauli exclusion principle, Phys. Rev. C 70 (2004) 064001.
  9. G. Filippov, Y. Lashko, Structure of Light Neutron-Rich Nuclei and Nuclear Reactions Involving These Nuclei, Phys. Part. Nucl. 36 (6) (2005) 714–739.
  10. G. F. Filippov and Yu. A. Lashko, Coexistence of different cluster configurations in light neutron-rich nuclei, Phys. Atom. Nucl. 70 (2007) 1429-1434.
  11. Yu. A. Lashko and G. F. Filippov, Multichannel Neutron Scattering on  $^{11}\text{Be}$  Nucleus, Phys. Atom. Nucl. 70 (2007) 1017–1035.

12. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Multi-channel nuclear reactions involving light neutron-rich nuclei: microscopic approach, *Phys. Atom. Nucl.* 70 (2007) 1440–1444.
13. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Cluster structure of a low-energy resonance in tetraneutron, *Phys. Atom. Nucl.* 71 (2008) 209–214.
14. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Decay of  ${}^5\text{H}$  in a microscopic three-cluster model, *Few-body Systems* 44 (2008) 215–218.
15. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, How the Pauli principle governs the decay of three-cluster systems, *Nucl. Phys. A* 806 (2008) 124–145.
16. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, The role of the Pauli principle in three-cluster systems composed of identical clusters, *Nucl. Phys. A* 826 (2009) 24–48.
17. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Continuous Spectrum of Three-Cluster Systems, *Phys. Atom. Nucl.* 75 (2012) 420–429.
18. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Unusual manifestations of the Pauli principle in scattering of atomic nuclei, *UJP* 58 (2013) 534–543.
19. Yu.A. Lashko, G.F. Filippov, L. Canton, Scattering of  ${}^6\text{He}$  on  $\alpha$ -particle: microscopic guidance for orthogonalizing pseudopotentials, *Ukr. J. Phys.* 60 (2015) 406–415.
20. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, V. S. Vasilevsky, M. D. Soloha-Krymchak, Phase Portraits of Quantum Systems, *Few-body Systems* 55 (2014) 817–820.
21. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, V. S. Vasilevsky, Dynamics of two-cluster systems in phase space, *Nucl. Phys. A* 941 (2015) 121–144.
22. Y. A. Lashko, G. F. Filippov, V. S. Vasilevsky, Microscopic three-cluster model of  ${}^{10}\text{Be}$ , *Nucl. Phys. A* 958 (2017) 78 – 100.

23. S. V. Korennov, G. F. Filippov, K. Kato, Yu. A. Lashko, M1 transition in  ${}^9\text{Li}$  and  ${}^{10}\text{Be}$  and the SU(3) basis, Proceedings of International Symposium on Clustering Aspects of Quantum Many-Body Systems, Kyoto, November 12-14, 2001. World Scientific (2002) 241-244.
24. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, K. Kato, S. V. Korennov, Probing the spectrum of  ${}^{10}\text{Be}$  in the approximation of the SU(3) leading representation, Proc. of International Symposium on Clustering Aspects of Quantum Many-Body Systems, Kyoto, November 12-14, 2001. World Scientific (2002) 237-240.
25. G. F. Filippov, Yu. A. Lashko, Effective interaction generated by the Pauli exclusion principle in collisions of the light neutron-rich nuclei, Proc. of the International Symposium on Exotic Nuclei, Peterhof, July 5-12, 2004. World Scientific (2005) 142-147.
26. L. Canton, Yu. A. Lashko, K. Amos, P. R. Fraser, S. Karataglidis, J. P. Svenne, D. van der Knijff, Alpha- ${}^6\text{He}$  scattering and the quest for microscopic guidance for orthogonalizing pseudopotentials, Proc. of the 14th International Conference on Nuclear Reaction Mechanisms, Varenna, June 15 - 19, 2015, CERN, Geneva (2015) 181-188.
27. G. F. Filippov, K. Kato, S. V. Korennov, Yu .A. Lashko, Scissors mode in the SU(3) basis, Abstracts of Yukawa International Seminar "Physics of Unstable Nuclei Kyoto, November 5-10, 2001, p. 112.
28. G. F. Filippov, K. Kato, S. V. Korennov, Yu. A. Lashko, Microscopic Hamiltonian of  ${}^9\text{Li}$  and  ${}^{10}\text{Be}$  and the SU(3) basis, Abstracts of Yukawa International Seminar "Physics of Unstable Nuclei Kyoto, November 5-10, 2001, p. 110.
29. G. F. Filippov, K. Kato, S. V. Korennov, Yu .A. Lashko, Probing the spectrum of  ${}^{10}\text{Be}$  in the approximation of the SU(3) leading representation,

- Abstracts of International Symposium on Clustering Aspects of Quantum Many-Body Systems, Kyoto, November 12-14, 2001, p. 49.
30. G. F. Filippov, K. Kato, S. V. Korennov, Yu .A. Lashko, M1 transition in  $^9\text{Li}$  and  $^{10}\text{Be}$  and the SU(3) basis, Abstracts of International Symposium on Clustering Aspects of Quantum Many-Body Systems, Kyoto, November 12-14, 2001, p. 48.
  31. S. V. Korennov, Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, K. Kato, Practical calculus for the Fock-Bargmann space, Proceedings of International Symposium on new trends of physics, Sapporo, January 20-24, 2003. Hokkaido University (2003) 135-139.
  32. Yuliya Lashko and Gennady Filippov, Multi-channel nuclear reactions involving light neutron-rich nuclei: microscopic approach, Book of abstracts of the International conference on nuclear structure and related topics, Dubna, Russia, June 13 - 17, 2006, p. 50.
  33. G. F. Filippov, Yu. A. Lashko, Co-existence of different cluster configurations in light neutron-rich nuclei, Book of abstracts of the International conference on nuclear structure and related topics, Dubna, Russia, June 13 - 17, 2006, p. 33.
  34. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, How the Pauli principle governs the decay of three-cluster systems, Book of abstracts of the 2nd International Conference on Current Problems in Nuclear Physics and Atomic Energy, June 9 - 15, 2008, Kyiv, Ukraine, p. 130
  35. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Can the democratic decay channel be realized in three-cluster systems? Book of abstracts of the Fifth International Conference on Exotic Nuclei and Atomic Masses, September 7 - 13, 2008, Ryn, Poland, p. 81.
  36. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Three-cluster structure of the  $^8\text{Li}$  nucleus and the Pauli principle, Book of Abstracts of the 4th International Conference on Nuclear Structure and Related Topics, Dubna, Russia, June 13 - 17, 2006, p. 130.

- ce on Current Problems in Nuclear Physics and Atomic Energy, September 3-7, 2012, Kyiv, Ukraine, p. 73.
37. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Unusual manifestations of the Pauli principle in scattering of atomic nuclei, Program and Proceedings of the International Conference "Problems of theoretical physics" dedicated to Alexander Davydov 100th birthday, October 8 - 11, 2012, Kyiv, Ukraine, p. 46.

# ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b>	<b>21</b>
<b>РОЗДІЛ 1 Одноканальні двокластерні ядерні системи</b>	<b>35</b>
1.1 Вступ . . . . .	35
1.2 Формулювання підходу . . . . .	43
1.3 Загальні положення, що стосуються залежності фазових зсувів від енергії. . . . .	56
1.4 Вплив принципу Паулі на оператор кінетичної енергії . . . . .	60
1.5 Бінарні системи, що складаються з тотожних магічних ядер	71
1.6 Розсіяння нейтрона на альфа-частинці . . . . .	82
1.7 Динаміка двокластерних систем в фазовому просторі . . . . .	86
1.7.1 Вступ . . . . .	86
1.7.2 Представлення Фока-Баргманна . . . . .	92
1.7.3 Модельні проблеми . . . . .	94
1.7.4 Двокластерна модель легких ядер . . . . .	100
1.7.5 Деталі розрахунків . . . . .	105
1.7.6 Результати та обговорення . . . . .	108
1.8 Висновки . . . . .	120
<b>РОЗДІЛ 2 Багатоканальні бінарні кластерні системи з надлишком нейtronів.</b>	<b>123</b>
2.1 Співіснування кластерних конфігурацій ${}^6\text{He}+{}^6\text{He}$ і ${}^8\text{He}+{}^4\text{He}$ в ядрі ${}^{12}\text{Be}$ . . . . .	123
2.1.1 Система ${}^6\text{He}+{}^6\text{He}$ . . . . .	123
2.1.2 Врахування двох кластерних конфігурацій: ${}^4\text{He}+{}^8\text{He}$ і ${}^6\text{He}+{}^6\text{He}$ . . . . .	160
2.1.3 Висновки . . . . .	166
2.2 Співіснування кластерних конфігурацій ${}^{11}\text{Be}+\text{n}$ і ${}^{10}\text{Be}+\text{n}$ в ядрі ${}^{12}\text{Be}$ . . . . .	168

2.2.1	Вступ . . . . .	168
2.2.2	Формулювання підходу . . . . .	171
2.2.3	Кластерна конфігурація $^{11}\text{Be}+n$ . . . . .	177
2.2.4	Кластерна конфігурація $^{10}\text{Be}+^2\text{n}$ . . . . .	185
2.2.5	$^{12}\text{Be}$ як багатоканальна система кластерів: $^{11}\text{Be}+n$ і $^{10}\text{Be}+^2\text{n}$ . . . . .	194
2.2.6	Висновки . . . . .	201
2.3	Кластерна структура резонансного стану малої енергії в те- транейтроні . . . . .	203
2.4	Розсіяння $^6\text{He}$ на $\alpha$ -частинці: вибір параметрів ортогоналізу- ючого псевдопотенціалу на основі мікроскопічного підходу .	213
2.4.1	Ядро нормування системи $^6\text{He}+\alpha$ . . . . .	215
2.4.2	Заборонені принципом Паулі стани . . . . .	218
2.4.3	Дозволені принципом Паулі стани . . . . .	221
2.4.4	Потенціал Паулі . . . . .	223
2.4.5	Фази пружного $^6\text{He}+\alpha$ розсіяння, $L^\pi = 0^+$ . . . . .	224
2.4.6	Висновки . . . . .	227
<b>РОЗДІЛ 3</b>	<b>Трикластерні системи</b>	<b>229</b>
3.1	Як принцип Паулі визначає тип розпаду трикластерних систем	229
3.1.1	Вступ . . . . .	229
3.1.2	Теоретична модель і ядро нормування . . . . .	233
3.1.3	Власні значення і власні функції ядра нормування си- стем ${}^A\text{X} = {}^{A-2}\text{X} + n + n$ . . . . .	237
3.1.4	Асимптотичні рівняння для коефіцієнтів розкладу .	243
3.1.5	Дозволені принципом Паулі стани системи ${}^3\text{H}+n+n$	248
3.1.6	Ядро ${}^5\text{H}$ в рамках мікроскопічної трикластерної моде- лі ${}^3\text{H}+n+n$ . . . . .	258
3.1.7	Наближення однієї гілки дозволених станів трикла- стерної системи ${}^3\text{H}+n+n$ . . . . .	261

3.1.8	Наближення фіксованої кількості гілок дозволених станив трикластерної системи ${}^3\text{H} + n + n$ . . . . .	266
3.1.9	Висновки . . . . .	270
3.2	Трикластерні системи, утворені з тотожніх кластерів . . . . .	274
3.2.1	Вступ . . . . .	274
3.2.2	Ядро нормування системи трьох ферміонів . . . . .	278
3.2.3	Ядро нормування системи трьох бозонів . . . . .	283
3.2.4	Ядро нормування трьох дінейтронів . . . . .	286
3.2.5	Ядро нормування системи трьох $\alpha$ -частинок . . . . .	292
3.2.6	Висновки . . . . .	305
3.3	Структура ядра ${}^8\text{Li}$ в рамках мікроскопічної трикластерної моделі $\alpha + t + n$ . . . . .	309
3.3.1	Власні значення і власні функції ядра нормування системи ${}^8\text{Li} = \alpha + t + n$ . . . . .	310
3.3.2	Бінарні кластерні конфігурації ядра ${}^8\text{Li}$ . . . . .	313
3.3.3	${}^8\text{Li} = {}^7\text{Li} + n$ . . . . .	314
3.3.4	${}^8\text{Li} = {}^5\text{He} + t$ . . . . .	315
3.3.5	${}^8\text{Li} = {}^4\text{H} + \alpha$ . . . . .	316
3.3.6	Дозволені принципом Паулі стани системи $\alpha + t + n$ .	317
3.3.7	Висновки . . . . .	319
3.4	Вплив кластерної поляризації на спектр ядра ${}^{10}\text{Be}$ . . . . .	321
3.4.1	Вступ . . . . .	321
3.4.2	Метод . . . . .	323
3.4.3	Вибір вхідних параметрів моделі . . . . .	332
3.4.4	Вплив форми нуклон-нуклонного потенціалу на спектр ${}^{10}\text{Be}$ . . . . .	335
3.4.5	Поляризація . . . . .	341
3.4.6	Висновки . . . . .	348

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ** 355

**Додаток А. Список публікацій здобувача за темою дисертації** 355  
**та відомості про апробацію результатів дисертації** 355

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

МРГ – метод резонуючих груп

АВМРГ – алгебраїчна версія методу резонуючих груп АМД – антисиметризована молекулярна динаміка

ФМД – ферміонна молекулярна динаміка

МГК – метод генераторних координат

Базис кутового моменту –  $l$ -базис

## ВСТУП

Тривалий час легкі ядра з надлишком нейтронів були недосяжні для експериментальних досліджень. Проте в останні роки були створені прискорювачі радіоактивних пучків, що дозволяють вивчати ядра з малим часом життя. В результаті було отримано багато нових даних щодо нейтронно-надлишкових ядер, що стимулює розвиток теоретичних моделей, спроможних пояснити властивості таких ядер і передбачити ефекти, які не спостерігаються у стабільних атомних ядер, але властиві ядерним системам, що перебувають в екстремальних умовах.

Наразі загальноприйнятым вважається уявлення про кластерну структуру легких ядер і можливість, вивчаючи їх, виходити з положення про відносну стабільність ядерних підсистем (кластерів). Найбільш повний опис нуклонних систем, утворених з легких ядер з надлишком нейтронів, дають мікроскопічні моделі, здатні точно врахувати вимоги принципу Паулі. Останній суттєво впливає на поведінку кластерів на малих відстанях між ними, а також на розпад компаунд-систем, що утворюються на проміжній стадії зіткнення легких ядер.

В даній роботі запропоновано розв'язок важливих проблем, що знаходяться на межі мікроскопічної теорії ядра і теорії розсіяння багаточастинкових квантових систем та виникають при дослідженні взаємодії легких ядер. На основі оригінального мікроскопічного підходу досліджено зв'язані стани легких нейтронно-надлишкових ядер, багатоканальні стани їх неперервного спектра, а також перерізи ядерних реакцій, що супроводжуються збудженням чи перебудовою ядер. Відомості про величину цих перерізів необхідні при постановці експериментів з нейтронно-надлишковими ядрами.

**Актуальність теми** В останні дводцять років в Японії (RIKEN), США (MSU), Германії (GSI), Росії (ОІЯД), Франції (GANIL) та в інших наукових центрах світу з'явились унікальні установки, на яких вдається прискорювати інтенсивні пучки важких іонів, що мають надзвичайно малий час життя. В результаті їх зіткнення з легкими ядрами утворюються ядерні системи з унікальними властивостями. В розпорядженні теоретиків опинився багатий експериментальний матеріал, і перед ними постали нові проблеми, що стимулювало бурхливий розвиток теорії так званих "екзотичних" ядер. Наразі зусилля експериментаторів і теоретиків багатьох наукових центрів США, Європи (Бельгія, Скандинавія, Італія, Франція) та Азії (Японія) зосереджені на розв'язку тих задач, що виникли у зв'язку з появою нового об'єкта дослідження – нестабільних ядер.

Вивчення екзотичних ядер дає інформацію про ядра, що знаходяться в екстремальних умовах. В таких ядрах змінюється співвідношення між кулонівською і ядерною взаємодією, характерне для стабільних ядер, що приводить до появи нових, незвичних властивостей. Виявилось, що на відміну від ядер, розташованих поблизу долини стабільності, в екзотичних ядрах не співпадають зарядовий і масовий просторові розподіли. Були відкриті гало-ядра, просторовий розподіл ядерної матерії в яких суттєво перевищує звичайні розміри атомних ядер.

В області ядер  $N=20$  несподіваною виявилась нестабільність двічі магічного ядра  $^{28}\text{O}$ . Дослідження розпадних характеристик ядер поблизу  $^{44}\text{S}$  дали першу інформацію про існування деформованих ядер з  $N=28$ . Були отримані ядра  $^{45}\text{Fe}$ ,  $^{49}\text{Ni}$  з екстремальним відношенням  $N/Z$ . Отримано найважче двічі магічне самоспряжене ядро  $^{100}\text{Sn}$  ( $Z=N=50$ ).

Відповіді на які питання ми очікуємо отримати, вивчаючи екзотичні ядра?

- Визначення положення межі ядерної стабільності нуклонних систем в залежності від числа нейtronів і протонів.

Такі системи можуть бути стійкими щодо розпаду ядра на ті чи ін-

ші фрагменти, але, знаходячись поблизу межі ядерної стабільності, вони мають надзвичайно малий період бета-розпаду, коли є надлишок нейтронів або протонів. На особливу увагу заслуговують системи, які знаходяться поза межами ядерної стабільності, за умови, що їх основні та збуджені стани є резонансами з досить великим часом життя. Яскравим прикладом такої системи є тетранейtron, що в останні кілька років став об'єктом пильної уваги як експериментаторів, так і теоретиків. Питання про існування зв'язаного стану або низькоенергетичного резонансу системи чотирьох нейтронів є однією з найбільш актуальних проблем ядерної фізики, що відкривають шлях до розуміння малонуклонних систем і нуклон-нуклонної взаємодії.

- Чи існують в області екзотичних ядер ті ж самі магічні числа, як і для ядер долини стабільності?

Відповідь на це питання особливо важлива, оскільки дозволить отримати додаткову інформацію про форму атомних ядер і, зокрема, про супердеформовані ядра в основному стані. Досі супердеформовані ядра були виявлені лише у збуджених станах. Для екзотичних ядер можлива поява нових магічних чисел, обумовлена сильно деформованими станами.

- Як змінюються властивості атомних ядер в тому випадку, коли співвідношення між числом нейтронів і протонів відрізняється від рівноважних значень, характерних для ядер долини стабільності?

Наразі твердо встановлено існування нейtronного гало і нейtronного шару в легких ядрах з надлишком нейтронів.

- Які якісно нові явища очікуються при розпаді екзотичних ядер?

Якщо основними модами радіоактивного розпаду ядер поблизу долини стабільності є  $\alpha$ - і  $\beta$ -розпади та  $\gamma$ -переходи, то при наближенні до меж нуклонної стабільності драматично змінюється енергія Фермі для протонів і нейтронів. Внаслідок цього з'являються нові моди розпаду

- випромінювання запізнілих нейтронів, протонів, дейtronів, тритонів і випромінювання двох і трьох нейтронів із збуджених станів ядер.
- Як зміниться наші уявлення про еволюцію Всесвіту з появою нової інформації про властивості екзотичних ядер?

Помітне розширення кількості ізотопів за рахунок ядер, віддалених від долини стабільності, дозволяє не лише більш детально досліджувати ті явища, які вже були виявлені раніше, але й вивчати нові явища в ядрах, що знаходяться в екстремальних умовах. Ядра, віддалені від долини стабільності, мають інше середнє поле, обумовлене інтерференцією кулонівської і ядерної взаємодії.

Все це робить екзотичні ядра предметом пріоритетних досліджень.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами** Роботи, на основі яких написана дана дисертація, виконані в рамках бюджетних тем відділу структури атомних ядер Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України "Мікроскопічна теорія структури зв'язаних станів та резонансів ядерних систем" (№ 0106U007833), "Закономірності, властиві неперервному спектру легких атомних ядер, які проявляються в процесі їх зіткнень та розпаду" (№ 0112U000051) та пошукових тем "Фундаментальні властивості фізичних систем в екстремальних умовах" (№ 0107U000396), "Мікроскопічні та феноменологічні моделі фундаментальних фізичних процесів у мікро- та макросвіті" (№ 0112U000056).

**Мета і задачі дослідження** Мета роботи – побудувати мікроскопічну теорію розпаду багатоканальних нуклонних систем, що утворюються на проміжній стадії зіткнення легких ядер, здатну адекватно описати спостережувані властивості таких систем і передбачити нові ефекти, які можна очікувати в результаті теоретичного дослідження структури їх резонансів та неперервного спектра.

Для досягнення поставленої мети треба розв'язати наступні задачі:

- З'ясувати вплив принципу Паулі на відносний рух легких ядер з надлишком нейтронів в процесі їх зіткнення для реакцій  $^{11}\text{Be} + \text{n}$  та  $^{10}\text{Be} + ^2\text{n}$ , а також  $^8\text{He} + ^4\text{He}$  і  $^6\text{He} + ^6\text{He}$ ;
- Знайти ефективні перерізи непружного розсіяння нейтрона на ядрі  $^{11}\text{Be}$ , що супроводжується вильотом ядра  $^{10}\text{Be}$  та двох нейтронів, а також перерізи непружного розсіяння альфа-частинки на ядрі  $^8\text{He}$ , що супроводжується вильотом двох ядер  $^6\text{He}$ ;
- На прикладі ядра  $^{12}\text{Be}$  розв'язати проблему співіснування різних кластерних конфігурацій у ядер з надлишком нейтронів;
- Дослідити неперервний спектр мультинейтронних систем з урахуванням можливості утворення різних типів кластерних конфігурацій, відповідальних за розпад таких систем.
- Розв'язати проблему SU(3) виродження дозволених принципом Пауля станів трикластерних систем;
- Встановити асимптотику хвильових функцій неперервного спектра трикластерних систем, яка узгоджується з вимогами принципу Паулі

**Методи дослідження** В дисертаційній роботі використовувались методи нерелятивістської квантової механіки, теорії розсіяння та числові методи.

Всі розрахунки були виконані в рамках алгебраїчної версії методу резонуючих груп, згідно якій ядра розглядалися як системи двох або трьох слабкозв'язаних кластерів, на які вони розпадаються вище найнижчого порогу розвалу. Функції, що описують внутрішню структуру кластерів, фіксувались, а хвильові функції відносного руху кластерів були представлені у вигляді розкладу по базису дозволених принципом Паулі станів гармонічного осцилятора. Метод резонуючих груп розкриває головні особливості динаміки кластерних мод в легких ядрах, а його алгебраїчна версія, розроблена у відділі структури атомних ядер, усуває обчислювальні труднощі,

які виникають від час практичної реалізації МРГ і перешкоджають широкому використанню підходу.

Щоб максимально спростити обчислення, зручно працювати не з хвильовими функціями в координатному просторі, а з їх образами в просторі Фока-Баргманна (просторі цілих аналітичних функцій комплексної змінної). Саме в просторі Фока-Баргманна і була отримана переважна частина результатів, викладених в даній роботі.

**Наукова новизна отриманих результатів** Наукова новизна отриманих результатів полягає в тому, що вперше:

- Встановлено, що в багатоканальних зіткненнях кластерів з надлишком нейтронів визначальну роль відіграють власні значення матриці густини (ядра нормування) бінарної кластерної системи. Серед різних дозволених станів кластерної системи вони виділяють ті, що реалізуються з найбільшою ймовірністю, а також визначають, по якому каналу буде розпадатись ядро, що утворилось в результаті зіткнення кластерів.
- Отримано ефективний міжкластерний потенціал, що породжується оператором кінетичної енергії відносного руху кластерів під впливом принципу Паулі. Вивчено основні властивості ефективного потенціалу і розраховано радіус та інтенсивність цього потенціалу для ряду бінарних кластерних систем, таких як  ${}^4\text{He} + {}^4\text{He}$ ,  ${}^{16}\text{O} + {}^{16}\text{O}$  та  ${}^{40}\text{Ca} + {}^{40}\text{Ca}$ . Ми вперше показали, що точне врахування ефектів антисиметризації на оператор кінетичної енергії призводить або до ефективного відштовхування кластерів, або до їх ефективного притягання, і встановили умови, за яких це відбувається.
- Запропоновано алгоритм розв'язку багатоканальних задач з урахуванням різного типу кластеризацій. Якщо наближення однієї бінарної конфігурації дозволяє вивчати лише такі стани ядра, які здатні розпадатись на два певні кластери в їх основному або у збудженному стані,

то враховуючи зв'язок бінарних конфігурацій, що мають різний кластерний склад, можна дати відповідь на питання про конкуренцію між такими каналами розпаду складеного ядра, яким відповідає різна кластерна структура. В результаті вдається оцінити величину ефективних перерізів ядерних реакцій, що супроводжуються збудженням або перебудовою кластерів.

- Вперше здійснено детальний аналіз структури власних функцій і поведінки власних значень трикластерного ядра нормування. Запропоновано шлях розв'язку проблеми  $SU(3)$  виродження дозволених принципом Паулі станів за допомогою власних значень бінарних підсистем. Кожне сімейство дозволених принципом Паулі станів асимптотично відповідає певному бінарному порогу розпаду трикластерної системи на двокластерну підсистему, що знаходиться в основному або збудженному стані гармонічного осцилятора, і третій кластер. Така асимптотична поведінка вказує на можливі канали розпаду трикластерного ядра і дозволяє визначити найбільш важливі канали розпаду ядра, що розглядається.
- Показано, що ядро нормування методу генераторних координат є симетричним ядром інтегрального рівняння, а його власні функції, визначені в просторі Фока-Баргманна, утворюють повний набір ортонормованих станів (що класифікуються за допомогою індексів  $SU(3)$ -симетрії), дозволених принципом Паулі. Ця інтерпретація дозволила нам розвинути метод, який навіть за наявності  $SU(3)$ -виродження, що виникає в задачі розсіяння двох ядер з відкритою р-оболонкою, вказує послідовний шлях введення додаткових квантових чисел для класифікації базисних станів.
- В представленні Фока-Баргманна незалежними змінними хвильової функції стають і координати нуклонів, і імпульси, а функція розподілу густини ймовірності визначена в фазовому просторі. Тому це пред-

ствалення відкриває нові перспективи для аналізу функцій розподілу бінарних кластерних систем, кожному стану такої системи співставляючи сукупність фазових траекторій ("фазовий портрет") і тим самим підкреслюючи різницю між класичною і квантовою теорією. Хвильова функція бінарної кластерної системи в цьому представленні дає ймовірність реалізації кожної з траекторій фазового портрету.

**Практичне значення отриманих результатів.** Результати, викладені в дисертації, можуть стати теоретичною основою для розвитку уявлень про структуру і властивості слабкозв'язаних ядерних систем, що останнім часом стали об'єктом інтенсивних експериментальних досліджень. Вивчення цих об'єктів відкриває нові перспективи розв'язку проблеми ядерних взаємодій.

**Особистий внесок здобувача.** Результати, що представлені в дисертаційній роботі, отримані здобувачем особисто.

В роботах [1] та [23] автором реалізовано механізм проектування прямого добутку незвідних представлень групи  $SU(3)$  на стани, що характеризуються певною  $SU(3)$ -симетрією та ізоспіном. Це може допомогти в аналізі ізовекторних  $M1$  переходів, що спостерігаються в середніх і важких парнопарних ядрах.

В роботі [2], де досліджувався розпад  $^{12}\text{Be}$  по каналах  $^8\text{He} + \alpha$  і  $^6\text{He} + ^6\text{He}$ , автор побудував повний базис станів гармонічного осциллятора додатної парності і з нульовим повним орбітальним моментом, дозволених принципом Паулі. Також автор розрахував власні значення матриці густини та дослідив їх залежність від числа осциляторних квантів, а також встановив міру перекриття базисних функцій різних каналів.

В роботах [3], [4] та [24] автор брав участь в розробці алгоритму реалізації наближення лідируючого  $SU(3)$  незвідного представлення для мікрокопічного гамільтоніана з потенціальною енергією нуклон-нуклонної взаємодії та побудував ефективний гамільтоніан для  $^9\text{Li}$  та  $^{10}\text{Be}$ , що відтво-

рює результати обчислень з нуклон-нуклонними потенціалами, вживаних в теорії легких ядер.

В роботі [5] автор знайшов розв'язки інтегральних рівнянь, що визначають повний базис дозволених принципом Паулі станів, для бінарних кластерних систем, які складаються з нейтронно-надлишкових ядер  $p$ -оболонки та нуклона або альфа-частинки.

В роботі [6] автор з'ясував структуру станів неперервного спектра ядра  $^{12}\text{Be}$ , що заселяються на проміжній стадії  $^6\text{He} + ^6\text{He}$  розсіяння.

В роботі [7] автор встановив аналітичні співвідношення, які дали можливість інтерпретувати ядро нормування бінарної кластерної системи як умову повноти базису дозволених принципом Паулі хвильових функцій.

В роботі [8] автором було відкрито, що вплив обмінних ефектів на кінетичну енергію відносного руху ядер може призводити до їх ефективного притягання та встановлено умови, за яких це відбувається.

В роботах [9] та [25] автор отримав ефективний між'ядерний потенціал, що породжується оператором кінетичної енергії під впливом принципу Паулі, встановив його основні властивості та розрахував радіус та інтенсивність цього потенціалу для ряду бінарних кластерних систем.

В роботі [10] автор встановив співвідношення між різними пружнimi і непружнimi процесами в системі двох кластерних конфігурацій  $^{11}\text{Be} + n$  і  $^{10}\text{Be} + ^2n$ .

В роботах [11] та [12] автор показав, що збільшення числа залучених конфігурацій супроводжується, по-перше, збільшенням максимальних власних значень, по-друге, появою кількох гілок збуджень з особливо великими, більшими за одиницю власними значеннями дозволених станів. Це свідчить про значне ефективне притягання кластерів, обумовлене обмінними ефектами.

В роботі [13] автор реалізував наближення двох зв'язаних кластерних конфігурацій для тетранейтрона та встановив, за яких умов можливе існування резонансного стану в тетранейтроні.

В роботах [14], [15], [16], [17] автор запропонував класифікацію власних значень ядер нормування для трикластерних систем за допомогою власних значень бінарних підсистем і встановив асимптотичні умови для станів неперевного спектра трикластерних систем, а в роботі [18] застосував цей підхід для дослідження неперевного спектра ядра  $^5\text{H}$ .

В роботах [19] та [26] автор оцінив інтенсивність і радіус ефективної взаємодії між ядром  $^6\text{He}$  та  $\alpha$ -частинкою, обумовленої обмінними ефектами, на основі мікроскопічної моделі та сформулював рекомендації до вибору параметрів ортогоналізуючого потенціалу, який використовують в макроскопічних моделях для моделювання принципу Паулі.

В роботах [20] та [21] автор розробив та реалізував представлення у фазовому просторі векторів квантових станів двокластерних систем.

В роботі [22] автор з'ясував вплив поляризації кластерів  $^6\text{He}$  та  $^8\text{Be}$  на структуру зв'язаних станів та резонансів ядра  $^{10}\text{Be}$ , використовуючи потенціал Міннесоти за нуклон-нуклонний потенціал.

**Апробація результатів дисертації.** Дисертаційна робота має достатній рівень апробації. Основні її результати доповідались на семінарах відділу структури атомних ядер і наукових сесіях Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, на семінарах інших провідних наукових центрів України (Інститут ядерної фізики НАН України, Національний науковий центр „Харківський фізико-технічний інститут“), Росії (Об'єднаний інститут ядерних досліджень м. Дубна), Італії (відділення Національного Інституту ядерної фізики в м. Падуя), Японії (Університет Хоккайдо, м. Саппоро), Німеччині (Фізико-технічний інститут м. Брауншвейг). Крім того результати доповідались на 26 міжнародних наукових конференціях:

1. Yukawa International Seminar "Physics of Unstable Nuclei Kyoto, November 5-10, 2001.
2. International Symposium on "Clustering Aspects of Quantum Many-Body

Systems Kyoto, November 12-14, 2001.

3. The 52th meeting on nuclear spectroscopy and nuclear structure (Nucleus-2002), Moscow, Russia, 18-22 June, 2002.
4. The 1st Center for Nuclear Study International Summer School, RIKEN, Tokyo, Japan, August 19-23, 2002.
5. International Symposium on new trends of physics, Sapporo, January 20-24, 2003. Hokkaido University (2003)
6. International Symposium on Exotic Nuclei, St.-Petersburg, Russia, June 25-28, 2003.
7. International Symposium "Direct reactions with exotic beams Surrey, Great Britain, July 9-12, 2003.
8. International symposium on exotic nuclei "EXON-2004 Peterhoff, Russia, 5-12 July, 2004.
9. Carpathian Summer School of Physics "Exotic Nuclei and Nuclear/Particle Astrophysics Mamaia-Constanta, Romania, June 13-24, 2005.
10. Bogolyubov conference, dedicated to the 40y years since foundation of the Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv, 24 - 26 January, 2006.
11. The International conference on nuclear structure and related topics, Dubna, Russia, June 13 - 17, 2006.
12. The International Symposium on Exotic Nuclei "EXON2006 Khanty-Mansiysk, Russia, 17-22 July 2006.
13. The 13th Euro Summer School on Exotic Beams, Trento, Italy, 11-15 September 2006.
14. The Erice School on Nuclear Physics: "Radioactive Beams, Nuclear Dynamics and Astrophysics Erice, Sicily, Italy, September 16-24, 2006.

15. Bogolyubov conference, Kyiv, 4-5 December, 2007.
16. 20th European conference on few-body system, Pisa, Italy, 10-14 September, 2007.
17. II International Conference on Current Problems in Nuclear Physics and Atomic Energy, June 9 - 15, 2008, Kyiv, Ukraine.
18. The Fifth International Conference on Exotic Nuclei and Atomic Masses, September 7 - 13 , 2008, Ryn, Poland.
19. International Conference "Nuclear structure and related topics June 30 - July 4, 2009, Dubna, Russia.
20. the 4th International Conference on Current Problems in Nuclear Physics and Atomic Energy, September 3-7, 2012, Kyiv, Ukraine.
21. International Conference "Problems of theoretical physics"dedicated to Alexander Davydov 100th birthday, October 8 - 11, 2012, Kyiv, Ukraine
22. The 22nd European Conference on Few Body Problems in Physics, September 9-13, 2013, Krakow, Poland.
23. EMMI program "Halo Physics at the Neutron Drip Line GSI, Darmstadt, Germany, Jan 29 - Feb 7, 2014.
24. 14th international conference on nuclear reaction mechanisms, Varenna (Italy), Villa Monastero June 15 - 19, 2015.
25. WE-Heraeus-Seminar on "Few-body physics: Advances and prospects in Theory and Experiment 17 - 20 April 2016, the Physikzentrum Bad Honnef, Germany.
26. Bogolyubov Conference "Problems of Theoretical Physics Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, May 24-26, 2016, Kiev.
27. III International Workshop "Nuclear Physics and Astrophysics April 14-16, 2016, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan.

**Публікації.** Матеріали дисертації опубліковані в 22 наукових статтях в реферованих провідних наукових виданнях [1]- [22], 4 статтях в матеріалах конференцій [23]- [26] та 11 тезах конференцій [27]- [37].

**Структура і об'єм дисертації.** Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, списку використаних джерел. Матеріал викладено на 375 сторінках, містить 82 рисунки, 25 таблиць та список цитованої літератури з 183 найменувань.

## РОЗДІЛ 1

### Одноканальні двокластерні ядерні системи

#### 1.1 Вступ

Тривалий час легкі ядра з надлишком нейтронів здавались недосяжним об'єктом для експериментальних досліджень з тієї причини, що періоди  $\beta^-$ -розпаду таких ядер надзвичайно малі<sup>1</sup>. Однак в останні роки були створені вимірювальні пристрої, що дозволяють вивчати ядра з дуже малим часом життя. Такі пристрої з'явились спочатку у відповідь на запити, пов'язані з проблемою ідентифікації надважких ізотопів. Пізніше їх почали використовувати і при вивчені легких нестабільних ядер, особливо тоді, коли були введені в дію прискорювачі радіоактивних пучків. В результаті було отримано багато нових даних щодо ядер з надлишком нейтронів, що стимулювало їх теоретичну інтерпретацію і розвиток моделей, що пояснюють властивості таких ядер, а також передбачають різні ефекти, що не спостерігаються у атомних ядер долини стабільності, але, можливо, властиві ядерним системам, що знаходяться в екстремальних умовах.

Варто відзначити кілька проблем, що становлять загальний інтерес. По-перше, визначення положення межі ядерної стабільності нуклонних систем в залежності від числа нейтронів і протонів. Такі системи можуть бути стійкими по відношенню до розвалу ядра на ті чи інші фрагменти, але, знаходячись поблизу межі ядерної стабільності, вони мають вкрай малий період  $\beta^-$ -розпаду, коли є надлишок нейтронів, або  $\beta^+$ -розпаду у випадку

---

**Примітка 1.** Наприклад, час життя ядра  $^{12}\text{Be}$  в основному стані становить  $\sim 0.018$  sec.

надлишку протонів. Особливої уваги заслуговують системи, які знаходяться поза межею ядерної стабільності, за умови, що їх основні і збуджені стани є резонансами з достатньо великим часом життя.

Інша цікава особливість слабкозв'язаних ядер полягає в тому, що навіть при відносно малих енергіях їх збудження виявляються відкритими відразу кілька каналів розпаду, що суттєво ускладнює теоретичні розрахунки залежності від енергії  $S$ -матриці розсіяння і кутових розподілів вильоту продуктів різних реакцій.

Аналіз процесів зіткнення легких атомних ядер зазвичай обмежується розрахунком фаз пружного розсіяння або, коли це вдається зробити, елементів  $S$ -матриці. При цьому поведінка ядер, що зіштовхуються, на малих відстанях між ними зазвичай залишається поза полем зору дослідників. Між тим, особливого значення область компактних ядерних конфігурацій набуває при вивченні ролі принципу Паулі, його точному врахуванні і аналізі його впливу на поведінку ядер по мірі їх зближення. Однак велика кількість незалежних змінних у хвильової функції компаунд-системи перешкоджає створенню наочної картини спостережуваних явищ традиційними засобами.

Найбільш повний опис нуклонних систем, складених з легких ядер, дають мікроскопічні моделі, що можуть враховувати принцип Паулі. Таким вимогам задовольняють підходи, в основу яких покладені ідеї методу резонуючих груп (МРГ) [38]. Зараз вже практично загальновизнаним є уявлення про кластерну структуру легких ядер і про можливості, вивчаючи їх, виходити з положення про відносну стабільність ядерних підсистем (кластерів). Важливо, що МРГ відкриває перспективу вивчення не лише зв'язаних станів атомних ядер, але і станів неперервного спектра, що мають в загальному випадку багатоканальну структуру. При цьому принцип Паулі враховується точно.

Слабке місце стандартного варіанту МРГ полягає в надзвичайній громіздкості систем рівнянь, з якими доводиться мати справу, що суттєво ускла-

дноє теоретичний аналіз явищ, що супроводжують процеси зіткнення кластерів. До того ж доводиться усувати значні труднощі, якщо брати до уваги навіть самі прості ступені вільності, необхідні для опису збудження кластерів. Певною компенсацією за другий із вказаних недоліків є одночасне врахування різних кластерних конфігурацій.

Альтернативою традиційним прийомам МРГ стали успішно втілені розв'язки рівнянь кластерної динаміки за допомогою стохастичних підходів [39, 40] і в рамках методу генераторної координати (МГК) [41]. В роботах [42] зіткнення легких атомних ядер вивчалось на основі ідей антисиметризованої молекулярної динаміки (АМД).

Стохастичні підходи передбачають випадкову вибірку коефіцієнтів розкладу хвильової функції кластерної системи по гаусоїдах і тим спрощують розв'язок рівнянь МРГ для зв'язаних станів. Предметом МГК стало дослідження гіперповерхонь потенціальної енергії в просторі генераторних координат, що дозволило простежити за еволюцією хвильової функції взаємодіючих кластерів в залежності від відстані між ними. Нарешті, АМД зводить задачу до побудови в фазовому просторі класичних траєкторій всіх нуклонів ядра і при цьому враховує вплив на ці траєкторії принципу Паулі.

Основна складність теоретичного дослідження процесів зіткнення легких ядер пов'язана з необхідністю брати до уваги принцип Паулі, що суттєво впливає на поведінку ядер при зменшенні відстані між ними. Тривалий час, щоб обійти цю проблему, до звичайного кластер-кластерного потенціалу додавали потенціал, що моделює дію принципу Паулі, наприклад, жорсткий кор [43]. Інший шлях, до якого звертались в останні роки, особливо в рамках методу гіперсферичних функцій, зводиться до введення додаткової нуклон-нуклонної взаємодії, що перешкоджає, як і принцип Паулі, зближенню нуклонів, що знаходяться в одинакових станах [44]. Нарешті, у зв'язку з розвитком моделі ортогональних умов [45] виявилось доцільним вводити в динамічні рівняння оператори проектування на заборонені стани з наступним виключенням цих станів з хвильової функції

ядерної системи [46].

Стандартний варіант МРГ забезпечує точне врахування принципу Паулі. Однак досить важко виділити зобов'язаний оператору антисиметризації внесок у хвильову функцію і в  $S$ -матрицю розсіяння, звертаючись до рівнянь цього підходу, записаних в координатному представленні.

Найбільш прозорий шлях врахування принципу Паулі полягає в побудові повного базису дозволених станів гармонічного осцилятора і їх власних значень для того, щоб хвильові функції ядерної системи представити у вигляді лінійних суперпозицій дозволених станів і звести задачу їх визначення до розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь для коефіцієнтів розкладу. Корисно також, для перевірки цілого ряду положень, що стосуються елементів  $S$ -матриці розсіяння, мати повний базис заборонених станів, власні значення яких за визначенням рівні нулю.

Особливо простий вигляд дозволені і заборонені стани мають в просторі Фока-Баргманна [47] (фактично, в просторі відповідним чином визначених комплексних генераторних параметрів), де кількість незалежних змінних базисних функцій скорочується до мінімуму. Якщо в координатному представленні хвильова функція деякого стану дає нам розподіл імовірності по координатах, а хвильова функція імпульсного представлення приводить нас до розподілу імовірності по імпульсах, то в представленні Фока-Баргманна незалежними змінними хвильової функції стають і координати нуклонів, і імпульси, а функція розподілу визначена в фазовому просторі. Іншими словами, знаючи хвильову функцію того або іншого стану в представленні Фока-Баргманна, можна знайти імовірність розподілу по фазових траєкторіях в цьому стані або “фазовий портрет” стану. Переход від хвильової функції координатного або імпульсного представлення до хвильової функції представлення Фока-Баргманна здійснюється за допомогою інтегрального перетворення, ядром якого є модифіковані орбіталі Блоха-Брінка [5].

Зауважимо, що представлення Фока-Баргманна зовсім не еквівалентне

АМД, оскільки при кожному значенні енергії та інших квантових чисел АМД дає лише одну фазову траєкторію, а не імовірність розподілу по континуму фазових траєкторій, як представлення Фока-Баргманна. АМД є класичною границею для представлення Фока-Баргманна, коли серед множини фазових траєкторій можна виділити найбільш імовірну і близьку до траєкторії АМД при тій же енергії.

Дискретний базис дозволених станів не є перешкодою для дослідження станів неперервного спектра ядерних систем. Коефіцієнти розкладу хвильових функцій атомних ядер по цьому базису задовольняють простим асимптотичним співвідношенням і правильно відтворюють як експоненційне затухання хвильових функцій зв'язаних станів поза областью дії ядерних сил, так і слабко затухаючі осциляції хвильових функцій неперервного спектра, в тому числі і з урахуванням кулонівської взаємодії.

Власні значення дозволених станів для багатьох бінарних систем були обчислені в роботах [48, 49], в яких обговорювалися значні спрощення, пов'язані з використанням дискретного представлення базису гармонічного осцилятора в просторі генераторних координат. Однак потім, щоб розв'язати рівняння МРГ, виконувалось перетворення, що повертає ядро нормування і ядро гамільтоніана в координатний простір. Між тим, для виконання реальних розрахунків нема необхідності переходити від матричних елементів і хвильових функцій дискретного варіанту МГК до матричних елементів і хвильових функцій МРГ. Простіше всі розрахунки, і в тому числі розв'язок динамічних рівнянь МРГ, виконувати в просторі Фока-Баргманна – просторі генераторних координат. Що ж стосується повернення в координатний простір, то його доцільно здійснювати вже після того, як отримано розв'язок в просторі Фока-Баргманна. Ця знахідка суттєво спрощує всі обчислення.

Кількість заборонених станів, як і величини власних значень дозволених станів, безпосередньо впливають на структуру хвильових функцій дискретного і неперервного спектра. Так число заборонених станів визначає радіус

тієї області найменших відстаней між кластерами, де пригнічені хвильові функції, принаймі доки енергія останніх не перевищує деякого граничного значення. Вона буде тим більша, чим більше нуклонів входить до складу кожного кластера. Що ж стосується власних значень дозволених станів, то від них залежить поведінка хвильових функцій поза тією областю, де вони пригнічені забороненими станами. Власні значення формують ефективний потенціал взаємодії кластерів, появі якого зобов'язана оператору антисиметризації і від якого залежить, якими будуть коефіцієнти розкладу хвильової функції по базису дозволених станів.

Поведінка власних значень в залежності від числа осциляторних квантів відома. Всі вони прагнуть до одиниці, коли число квантів  $\nu$  перевищує деяке  $\nu_{\max}$ , що вказує на межу області дії оператора антисиметризації.

Найбільші власні значення (класифіковані за допомогою індексів SU(3)-симетрії і додаткових квантових чисел у випадку виродження) відповідають базисним станам лідируючих SU(3)-незвідних представлень. Амплітуди останніх максимальні для станів дискретного спектра системи кластерів і домінують в станах неперервного спектра з малою надпороговою енергією.

Ефективна взаємодія, обумовлена дією принципу Паулі, з'явилається перш за все як результат модифікації матриці оператора кінетичної енергії, яка має трьохдіагональний вигляд в представленні базису гармонічного осцилятора. Через дію оператора антисиметризації недіагональні елементи цієї матриці містять власні значення дозволених станів. Саме завдяки цій обставині обертаються на нуль матричні елементи, що пов'язують дозволені і заборонені стани, а фаза розсіяння виявляється відмінною від нуля навіть за відсутності кластер-кластерної взаємодії, що породжується нуклон-нуклонним потенціалом. Амплітуда зміни фази пропорційна кількості заборонених станів, і вона тим більша, чим інтенсивніший ефективний потенціал і чим більший його радіус.

Використовуючи базис гармонічного осцилятора для побудови дозволе-

них станів, можна безпосередньо судити про характер кластер-кластерної взаємодії, обумовленої обміном нуклонів в процесі зближення кластерів. Аналіз матриці оператора кінетичної енергії відносного руху кластерів показує, що вплив принципу Паулі на процес зіткнення кластерів зводиться до трьох ефектів. По-перше, усунення заборонених станів створює ефективне відштовхування на малих відстанях між кластерами (м'який кор), радіус дії і інтенсивність якого зростають зі збільшенням кількості заборонених принципом Паулі станів. Хвильові функції відносного руху кластерів в цій області пригнічені, причому тим сильніше, чим більша кількість заборонених станів і чим менша енергія станів неперервного спектра. Про інтенсивність м'якого кору можна судити, маючи в своєму розпорядженні фазові портрети станів неперервного спектра, що відрізняються значенням енергії. Як тільки енергія відносного руху кластерів починає перевищувати висоту кору, серед фазових траєкторій з'являються такі, які відповідають проникненню кластерів в класично недосяжну область.

По-друге, поза м'яким кором (в тій області, де власні значення дозволених станів відмінні від одиниці) виникає додаткова ефективна взаємодія кластерів. В тому випадку, коли власні значення прагнуть до одиниці знизу, додаткова взаємодія також виявляється відштовхуванням. Якщо ж власні значення прагнуть до одиниці зверху, то взаємодія поза м'яким кором є притяганням. По-третє, в цій же області власні значення підсилюють відцентровий потенціал в системі двох кластерів, якщо вони перевищують одиницю, або послаблюють його, якщо вони менші за одиницю.

Якщо кластери, що зіштовхуються, містять нуклони в відкритій  $p$ -оболонці, доцільно залучити дозволені стани, що відтворюють не лише відносний рух кластерів, але і їх збудження. В результаті ми приходимо до багатоканальної задачі, коли стає можливим вивчати і пружні зіткнення кластерів і ядерні реакції, що супроводжуються збудженням кластерів. Оскільки порогові енергії різних каналів відрізняються, то є область енергій, де поряд з відкритими каналами є і закриті. Тому становить інтерес дослідження

залежності від енергії асимптотичних нормувальних констант, що характеризують амплітуду хвильових функцій в закритих каналах. Це було предметом роботи [6].

Для кожної з ядерних компаунд-систем можна вказати кілька кластерних конфігурацій, кожна з яких відповідає тому чи іншому набору кластерів, що вивільняються в результаті ядерної реакції. Беручи до уваги різні кластерні конфігурації, ми входимо за рамки традиційного бінарного МРГ і суттєво уточнюємо хвильову функцію ядерної системи на малих відстанях між кластерами, що помітно знижує енергію основного стану компаунд-ядра і збагачує його спектр. Звичайно, хвильова функція уточнюється і на великих відстанях, де зростає кількість відкритих каналів и, отже, кількість непружніх процесів, що реалізуються в ядерних зіткненнях.

Далі в другому підрозділі дано визначення твірної функції, що генерує повний базис дозволених принципом Паулі базисних функцій в координатному просторі і в просторі Фока-Баргманна. Там же вводиться інтеграл перекриття генераторних функцій, який є ядром інтегрального рівняння. Звернення до цього інтегрального рівняння вирішує питання про побудову в явному вигляді дозволених базисних функцій, щоб потім вивести систему алгебраїчних рівнянь дискретного представлення для реалізації методу резонуючих груп. В тому ж розділі пояснюються шляхи розв'язку цієї системи алгебраїчних рівнянь. В третьому підрозділі обговорюються загальні положення, що стосуються залежності фазових зсувів від енергії і, зокрема, ті, що пов'язані з узагальненою теоремою Левінсона. Предметом четвертого підрозділу є питання про вплив принципу Паулі на структуру матриці оператора кінетичної енергії. Потім в п'ятому підрозділі дискретне представлення методу резонуючих груп використовується для аналізу відносно простих одноканальних систем. В шостому підрозділі на прикладі розсіяння нейтрона на альфа-частинці розглядається найпростіший приклад ефективного притягання, обумовленого впливом принципу Паулі на кінетичну

енергію відносного руху ядер. Нарешті, в сьомому підрозділі увага зосереджена на аналізі фазових портретів бінарних кластерних систем. Висновки наведені в останньому, восьмому підрозділі.

## 1.2 Формулювання підходу

**В чому полягає наближення** Слідуючи методу резонуючих груп, далі будемо вважати, що досліджувані в цьому розділі ядерні системи складаються з двох кластерів. Хвильова функція МРГ буде мати вигляд антисиметризованого добутку внутрішніх хвильових функцій кластерів і хвильової функції їх відносного руху. Внутрішні хвильові функції кластерів фіксовані<sup>1</sup>, а хвильову функцію відносного руху кластерів, яка залежить лише від вектора Якобі досліджуваної бінарної системи, знаходять в результаті розв'язку інтегро-диференціального рівняння. Останнє отримують шляхом підстановки хвильової функції МРГ в рівняння Шредінгера і інтегрування по одночастинкових координатах.

Як вже згадувалось вище, практична реалізація традиційної версії МРГ потребує подолання значних обчислювальних труднощів, які невідворотно виникають через вплив принципу Паулі, що призводить до появи великої кількості обмінних доданків. Скорочення кількості незалежних динамічних змінних можливо на основі методу генераторної координати, що передбачає перехід від координатного (або імпульсного) представлення до представлення генераторних параметрів.

Вихідним пунктом МГК є визначення генераторної функції, що містить повний базис дозволених принципом Паулі станів  $\psi_n(\{\mathbf{r}\})$ , визначених в координатному просторі, а також їх образів  $\psi_n(\{\mathbf{R}\})$  в просторі генераторних координат. Тут  $\{\mathbf{r}\}$  - сукупність нуклонних векторів, а  $\{\mathbf{R}\}$  – набір генераторних параметрів, за допомогою яких ми б хотіли передати динаміку ступенів вільності, що нас цікавлять.  $n$  – сукупність квантових чисел бази-

---

**Примітка 1.** В якості таких функцій часто вибирають функції трансляційно-інваріантної моделі оболонок.

сних функцій. Звичайно, генераторна функція має бути антисиметричною відносно перестановки нуклонних координат. Тому будемо будувати її у вигляді детермінанта Слейтера  $\Phi(\{\mathbf{R}\}, \{\mathbf{r}\})$ , складеного з нуклонних орбіталей. В якості просторових хвильових функцій нуклонів ядра виберемо модифіковані орбіталі Блоха-Брінка, що водночас є твірними функціями базису гармонічного осцилятора. Якщо один з кластерів містить  $A_1$  нуклонів, а другий –  $A_2$  нуклонів і  $A_1, A_2 \leq 4$ , досить двох  $s$ -орбіталей:

$$\phi_1(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{\pi^{3/4}} \exp \left( -\frac{1}{2} \mathbf{r}_i^2 + \sqrt{2} (\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{r}_i) - \frac{1}{2} \mathbf{R}_1^2 \right), \quad i \in A_1;$$

$$\phi_2(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{\pi^{3/4}} \exp \left( -\frac{1}{2} \mathbf{r}_i^2 + \sqrt{2} (\mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{r}_i) - \frac{1}{2} \mathbf{R}_2^2 \right), \quad i \in A_2.$$

Кожна з цих орбіталей є власною функцією оператора координати  $\hat{\mathbf{r}}_i$

$$\hat{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \mathbf{R}_k + \vec{\nabla}_{\mathbf{R}_k} \right), \quad k = 1, 2,$$

визначеного в просторі Фока-Баргманна, що відповідає власному значенню  $\mathbf{r}_i$ . До того ж вона є ядром інтегрального перетворення від координатного представлення до представлення Фока-Баргманна [47], в якому незалежними змінними є комплексні вектори

$$\mathbf{R} = \frac{\vec{\xi} + i\vec{\eta}}{\sqrt{2}}$$

Тут  $\vec{\xi}$  і  $\vec{\eta}$  – вектори координати і імпульса, відповідно.

Якщо ж один з кластерів (або обидва) містять нуклони в  $p$ -оболонці, крім наведених вище орбіталей доводиться залучати орбіталі наступного вигляду:

$$\phi_{\mathbf{u}_k}(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{\pi^{3/4}} \sqrt{2} (\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{r}_i) \exp \left( -\frac{\mathbf{r}_i^2}{2} + \sqrt{2} (\mathbf{R}_k \cdot \mathbf{r}_i) - \frac{\mathbf{R}_k^2}{2} \right), \quad k = 1, 2;$$

$$\phi_{\mathbf{v}_k}(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{\pi^{3/4}} \sqrt{2} (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{r}_i) \exp \left( -\frac{\mathbf{r}_i^2}{2} + \sqrt{2} (\mathbf{R}_k \cdot \mathbf{r}_i) - \frac{\mathbf{R}_k^2}{2} \right), \quad k = 1, 2.$$

Тут генераторні параметри  $\mathbf{R}_k$  вказують положення центра мас кожного з кластерів, а параметри  $\mathbf{u}_k$ ,  $\mathbf{v}_k$  введені для опису їх внутрішніх ступенів

вільності. Далі в цьому розділі для простоти викладу будемо розглядати ядерні бінарні системи, складені з  $s$ -кластерів, коли залишається лише два генераторних параметри  $\mathbf{R}_1$  і  $\mathbf{R}_2$ .

Повний базис дозволених принципом Паулі станів в просторі Фока-Баргманна разом з їх власними значеннями можна отримати, звернувшись до інтегралу перекриття  $\bar{I}(\mathbf{S}_k, \mathbf{R}_k)$  двох детермінантів Слейтера, який визначають наступним чином:

$$\bar{I}(\mathbf{S}_k, \mathbf{R}_k) = \int \Phi(\mathbf{S}_k, \{\mathbf{r}\}) \Phi(\mathbf{R}_k, \{\mathbf{r}\}) d\tau,$$

тут інтегрування проводиться по всіх одночастинкових змінних.

Рух центра мас усувається шляхом переходу від векторів  $\mathbf{R}_{1,2}$  до векторів Якобі:

$$\mathbf{R} = \sqrt{\frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}} (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2), \quad \mathbf{R}_{\text{cm}} = \frac{1}{\sqrt{A}} (A_1 \mathbf{R}_1 + A_2 \mathbf{R}_2)$$

тоді

$$\bar{I}(\mathbf{S}_k, \mathbf{R}_k) = \exp(\mathbf{R}_{\text{cm}} \cdot \mathbf{S}_{\text{cm}}) I(\mathbf{S}, \mathbf{R}),$$

де  $I(\mathbf{S}, \mathbf{R})$  – трансляційно-інваріантний інтеграл перекриття, який зазвичай називають ядром нормування.

**Дискретний базис в просторі Фока-Баргманна і умова його повноти.** Дозволені базисні функції  $\psi(\mathbf{R})$  є власними функціями ядра нормування і їх можна знайти, розв'язуючи інтегральне рівняння

$$\Lambda\psi(\mathbf{R}) = \int I(\mathbf{S}, \mathbf{R}) \psi(\mathbf{S}^*) d\mu_{\mathbf{S}}. \quad (1.1)$$

тут  $d\mu_{\mathbf{S}}$  – міра Баргманна:

$$d\mu_{\mathbf{S}} = \exp \{-(\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^*)\} d\vec{\xi} d\vec{\eta}.$$

Залишається питання про вибір квантових чисел  $n$  базисних функцій  $\psi_n(\mathbf{R})$ . В якості одного з них доцільно взяти повне число осциляторних квантів  $\nu$ . Після цього інтегро-диференційне рівняння традиційної версії МРГ для

хвильової функції відносного руху кластерів вдається звести до системи лінійних алгебраїчних рівнянь для коефіцієнтів розкладу по базису станів гармонічного осцилятора, дозволених принципом Паулі. Крім того, ядро нормування  $I(\mathbf{S}, \mathbf{R})$  можна представити тоді у вигляді суми вироджених ортогональних ядер, кожному з яких відповідає певне число квантів. Тому розв'язок рівняння (1.1) здійснюється стандартними алгебраїчними методами для вироджених ядер.

Для повного опису власних функцій ядра нормування,крім числа осциляторних квантів  $\nu$  необхідно вказати індекси  $(\lambda, \mu)$  їх SU(3)-симетрії, додаткове квантове число  $\alpha_{(\lambda, \mu)}$ , якщо є кілька різних  $(\lambda, \mu)$  мультиплетів, орбітальний момент  $L$  і його проекцію  $M$ , і ще одне додаткове квантове число  $\alpha_L$ , якщо  $(\lambda, \mu)$  мультиплет має кілька станів з одинаковими значеннями  $L$ .

Оскільки ядро нормування  $I(\mathbf{S}, \mathbf{R})$  можна розглядати також як ядро інтегрального рівняння (1.1), йому можна співставити розклад Гільберта-Шмідта:

$$I(\mathbf{S}, \mathbf{R}) = \sum_n \Lambda_n \psi_n(\mathbf{S}) \psi_n(\mathbf{R}), \quad (1.2)$$

де кожне з  $\Lambda_n$  – власне значення ядра нормування, що відповідає власній функції  $\psi_n(\mathbf{R})$ .

В такому записі  $\psi_n(\mathbf{S}) \psi_n(\mathbf{R})$  є згорткою двох тензорів, а  $\psi_n(\mathbf{R})$  – хвильовий пакет SU(3) незвідного представлення  $(\lambda, \mu)$  або, інакше, багатокомпонентний тензор. Звичайно, власні функції ядра нормування ортогональні з мірою Баргманна і нормовані на кількість станів незвідного представлення  $(\lambda, \mu)$  [50].

$$\int d\mu_{\mathbf{R}} \psi_{(\lambda, \mu)}(\mathbf{R}) \psi_{(\lambda, \mu)}(\mathbf{R}^*) = \frac{(\lambda + 1)(\mu + 1)(\lambda + \mu + 2)}{2}.$$

Таке нормування відповідає статистичній інтерпретації ядра  $I(\mathbf{S}, \mathbf{R})$  як матриці густини змішаної системи [51].Хоча при побудові ядра нормування інтегрування проводиться по всіх одночастинкових змінних, але генераторні параметри  $\mathbf{R}$  і  $\mathbf{S}$  твірних функцій  $\Phi(\mathbf{R}, \{\mathbf{r}\})$  і  $\Phi(\mathbf{S}, \{\mathbf{r}\})$  мають сенс тих

ступенів вільності, динаміка яких вивчається, на фоні ступенів вільності, хвильові функції яких фіксовані і які доцільно віднести до ступенів вільності "термостата". З цієї причини власні значення ядра нормування природно розглядати, як елементи матриці густини, приведеної до діагонального вигляду. Вони пропорційні імовірності перебування системи в станах, визначених відповідними власними функціями.

Важливо відзначити, що ядро нормування буде мати діагональний вигляд лише за умови  $SU(3)$ -класифікації власних значень  $\Lambda_{n,(\lambda,\mu)}$  і власних функцій  $\psi_{n,(\lambda,\mu)}(\mathbf{R})$ . Так, наприклад, зберігаючи в якості квантового числа  $\nu$ , можна замість індексів  $SU(3)$ -симетрії  $(\lambda, \mu)$  ввести квантові числа базису кутового момента – орбітальні моменти кожного з кластерів  $l_1, l_2$ , а також момент їх відносного руху  $l$  (див., наприклад, [5, 6]). Функції  $SU(3)$ -базису і функції базису кутового момента пов'язані матрицею унітарного перетворення. Але будь-яке унітарне перетворення, виконане над базисними функціями  $\psi_n(\mathbf{R})$ , з необхідністю руйнує діагональну форму ядра  $I(\mathbf{S}, \mathbf{R})$ , оскільки власні значення  $\Lambda_{n,(\lambda,\mu)}$  відмінні від одиниці в деякій області<sup>1</sup>  $\nu_{\min} < \nu < \nu_{\max}$ . В границі ж великого числа квантів всі власні значення прагнуть до одиниці. Тому ядро інтегрального рівняння (1.1) до того ж є особливим, оскільки точка згущення його власних значень скінчена [52]. Зауважимо, що власні значення не залежать від індексів редукції  $SU(3) \supset O(3)$  тобто від орбітального момента  $L$  і його проекції на власну  $K$  і зовнішню  $M$  осі.

Власні значення виявляються відмінними від нуля, лише починаючи з деякого мінімального числа квантів  $\nu_{\min}$ . У випадку врахування лише бінарної кластеризації при  $\nu = \nu_{\min}$ , є лише один дозволений  $SU(3)$  мультиплет  $(\lambda_0, \mu_0)$ , що відповідає схемі Елліотта для спектра трансляційно-інваріантної осциляторної моделі оболонок, що породжується лідируючим представленням [53]. Проте крім ортонормованого базису цієї схеми ми знаходимо ще і власне значення  $\Lambda_{(\lambda_0, \mu_0)}$ . Якщо розрахунки ведуться ли-

---

**Примітка 1.** Розміри цієї області визначаються перш за все кількістю нуклонів в кожному з кластерів.

ше в рамках базису лідируючого представлення, то це власне значення не впливає на реальні результати розрахунків. Воно вступає в гру, коли ми не обмежуємося мультиплетом  $(\lambda_0, \mu_0)$  і залучаємо всі інші мультиплети з числом квантів  $\nu > \nu_{\min}$  разом з їх власними значеннями.

Спочатку зупинимось на питанні класифікації  $SU(3)$ -мультиплетів, обмежившись бінарною кластеризацією і  $SU(3)$ -незвідними представленнями з парними індексами симетрії  $\lambda$  і  $\mu^1$ . Коли  $\nu = \nu_{\min} + 2$ , то дозволені стани належать кільком (в найпростішому випадку, двом) незвідним представленням –  $(\lambda_0 + 2, \mu_0)$  і  $(\lambda_0, \mu_0 + 4)$ . Разом з ними з'являються два їх власних значення  $\Lambda_{(\lambda_0+2,\mu_0)}$  і  $\Lambda_{(\lambda_0,\mu_0+4)}$ . Із збільшенням  $\nu$  кількість дозволених  $SU(3)$ -незвідних представлень зростає, поки не стане максимально допустимою і однаковою для всіх  $\nu$ , починаючи з деякого значення  $\nu_1$ .

Незвідні представлення з різним числом квантів можна розподілити між кількома гілками так, щоб стани, що належать одній гілці, мали однакове значення індексу симетрії  $\mu$  і відрізнялись лише значеннями першого індексу  $\lambda$ . Так до першої гілки ми віднесемо незвідне представлення  $(\lambda_0 + \nu - \nu_{\min}, \mu_0)$ , до другої гілки – незвідні представлення  $(\lambda_0 + \nu - \nu_{\min} - 2, \mu_0 + 4)$ , і т.д. Ієрархія серед цих незвідних представлень визначається величиною власних значень  $\Lambda_{\nu,(\lambda,\mu)}$ . Лідируючими представленнями є ті, у яких значення  $\Lambda_{\nu,(\lambda,\mu)}$  максимальні. Зокрема, до них відносяться представлення  $(\lambda_0 + \nu - \nu_{\min}, \mu_0)$ .

Для багатьох відомих нам систем (наприклад,  ${}^8\text{He} + {}^4\text{He}$  і  ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$ ), хоча і не для всіх, гілки  $(\lambda_0 + \nu - \nu_{\min}, \mu_0)$  відповідають найменш симетричним  $SU(3)$  представленням. А найбільш симетричні представлення з'являються тоді, коли  $\nu = \nu_1$ . У випадку трикластерної системи або системи з великою кількістю кластерів кількість дозволених  $SU(3)$  незвідних представлений необмежено зростає зі збільшенням  $\nu$ .

Розклад (1.2) можна також трактувати як умову повноти базису дозволених принципом Паулі станів в просторі Фока-Баргманна. Справді, в

---

**Примітка 1.** Іншими словами, обмежившись станами,  $D_2$  симетрія яких  $A$

координатному представленні умова повноти для базису ортонормованих функцій  $\varphi_n(\mathbf{r})$  має вигляд:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \sum_n \varphi_n(\mathbf{r}) \varphi_n^*(\mathbf{r}').$$

В просторі Фока-Баргманна образом дельта-функції є інтеграл перекриття модифікованих орбіталей Блоха-Брінка, рівний  $\exp(\mathbf{R}\mathbf{S})$ , тому умова повноти для базисних функцій  $f_n(\mathbf{R})$  (образів функцій  $\varphi_n(\mathbf{r})$ ) набуває вигляду:

$$\exp(\mathbf{R}\mathbf{S}) = \sum_n f_n(\mathbf{R}) f_n(\mathbf{S}). \quad (1.3)$$

розклад Гільберта-Шмідта (1.2) в двох відношеннях відрізняється від виразу (1.3). По-перше, (1.2) містить лише дозволені принципом Паулі станови<sup>1</sup>. По-друге, як уже згадувалось вище, функції  $\psi_{\{n\}}(\mathbf{R})$  визначаються однозначно, на відміну від  $f_n(\mathbf{R})$ , які визначені з точністю до унітарного перетворення, що залишає квадратичну форму (1.3) діагональною.

**Розв'язок системи рівнянь дискретного представлення** Після того, як побудовані твірні інваріанти  $\Phi(\mathbf{S}, \{\mathbf{r}\})$  і  $\Phi(\mathbf{R}, \{\mathbf{r}\})$ , хвильову функцію  $\Phi(\{\mathbf{r}\})$  методу генераторної координати, що підлягає визначенню, представимо у вигляді інтеграла Хілла-Уіллера

$$\Phi(\{\mathbf{r}\}) = \int C(\mathbf{R}^*) \Phi(\mathbf{R}, \{\mathbf{r}\}) d\mu_{\mathbf{R}},$$

що містить нову невідому функцію  $C(\mathbf{R}^*)$ . Рівняння для останньої випливає з варіаційного принципу для функціонала

$$\int \int C(\mathbf{S}^*) [H(\mathbf{S}, \mathbf{R}) - E(\mathbf{S}, \mathbf{R})] C(\mathbf{R}^*) d\mu_{\mathbf{S}} d\mu_{\mathbf{R}} = 0, \quad (1.4)$$

де множник Лагранжа  $E$  має сенс енергії, а  $H(\mathbf{S}, \mathbf{R})$  – ядро гамільтоніана системи кластерів. Його також можна представити у вигляді розкладу по дозволених базисних функціях

$$H(\mathbf{S}, \mathbf{R}) = \int \Phi(\mathbf{S}, \mathbf{r}) \hat{H} \Phi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) d\tau = \sum_n \sum_{\tilde{n}} \psi_n(\mathbf{S}) \langle n | \hat{H} | \tilde{n} \rangle \psi_{\tilde{n}}(\mathbf{R}). \quad (1.5)$$

---

**Примітка 1.** Власні значення заборонених станів за визначенням дорівнюють нулю і тому не містяться в ядрі нормування.

Щоб звести функціонал (1.4) до алгебраїчного виразу, розкладемо невідомі функції  $C(\mathbf{R}^*)$  [ $C(\mathbf{S}^*)$ ] по базису дозволених станів:

$$C(\mathbf{R}^*) = \sum_n C_n^* \psi_n(\mathbf{R}^*), \quad C(\mathbf{S}^*) = \sum_{\tilde{n}} C_{\tilde{n}} \psi_{\tilde{n}}(\mathbf{S}^*).$$

Скориставшись розкладами (1.2) і (1.5) для ядра нормування і ядра гамільтоніана, відповідно, а також ортонормованістю дозволених власних функцій, прийдемо до наступного виразу:

$$\sum_n \sum_{\tilde{n}} C_n^* \left( \langle n | \hat{H} | \tilde{n} \rangle - E \Lambda_n \delta_{n,\tilde{n}} \right) C_{\tilde{n}} = 0. \quad (1.6)$$

З (1.6) випливає, що коефіцієнти  $C_{\tilde{n}}$  задовольняють системі алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{\tilde{n}} \langle n | \hat{H} | \tilde{n} \rangle C_{\tilde{n}} - E \Lambda_n C_n = 0. \quad (1.7)$$

Звичайно,  $n$  набуває всіх допустимих для дозволених базисних функцій значень.

Явний вигляд системи рівнянь (1.7) вказує на те, що коефіцієнти  $C_n$  є власними векторами узагальненої задачі на власні значення [54]. Тому власні вектори різних станів ортогональні і нормовані з вагою  $\Lambda_n$ :

$$\sum_n \Lambda_n C_n^{\kappa*} C_n^{\kappa'} = \delta_{\kappa,\kappa'}, \quad \sum_n \Lambda_n C_n^{E*} C_n^{E'} = \delta(E - E'), \quad \sum_n \Lambda_n C_n'^{\kappa*} C_n^E = 0.$$

Тут  $C_n^{\kappa}$  – власні вектори дискретних станів з енергією  $E_{\kappa} = -\kappa^2/2 < 0$ , а  $C_n^E$  – власні вектори станів неперервного спектра з енергією  $E > 0$ .

Зі збільшенням числа радіальних квантів  $\nu = 2k$  компоненти власних векторів дискретних станів бінарної кластерної системи спадають експоненційно, як

$$C_n^{\kappa} = A_n^{\kappa} \frac{\sqrt{2} \exp\{-\sqrt{2|E_{\kappa}|}\sqrt{4k+2l+3}\}}{\sqrt{r_0} \sqrt[4]{4k+2l+3}}.$$

тут  $n$  – квантові числа базису кутового момента,  $l$  – орбітальний момент відносного руху кластерів,  $r_0$  – осциляторна довжина,  $A_n^{\kappa}$  – асимптотична нормувальна константа [55].

Асимптотична поведінка власних векторів для станів неперервного спектра  $\{C_n^E\}$  при великих значеннях числа квантів  $\nu$  виражається через функції Ханкеля першого і другого роду і елементи  $S$ -матриці розсіяння або ж через функції Бесселя і Неймана і елементи  $K$ -матриці [5, 6].

Переозначимо коефіцієнти розкладу  $C_{\tilde{n}}$ , поклавши  $\bar{C}_{\tilde{n}} = \sqrt{\Lambda_{\tilde{n}}} C_{\tilde{n}}$ . тоді прийдемо до еквівалентної форми рівнянь (1.7):

$$\sum_{\tilde{n}} \frac{\langle n | \hat{H} | \tilde{n} \rangle}{\sqrt{\Lambda_n \Lambda_{\tilde{n}}}} \bar{C}_{\tilde{n}} - E \bar{C}_n = 0. \quad (1.8)$$

Звичайно, розв'язком як (1.7), так і (1.8) будуть хвильові функції  $\Psi_\kappa(\mathbf{R})$ ,  $\Psi_E(\mathbf{R})$  в просторі Фока-Баргманна або ж функції  $\Psi_\kappa(\mathbf{r})$ ,  $\Psi_E(\mathbf{r})$  в координатному представленні:

$$\Psi_{\kappa(E)}(\mathbf{R}) = \sum_n \sqrt{\Lambda_n} C_n^{\kappa(E)} \psi_n(\mathbf{R}), \quad \Psi_{\kappa(E)}(\mathbf{r}) = \sum_n \sqrt{\Lambda_n} C_n^{\kappa(E)} \psi_n(\mathbf{r}). \quad (1.9)$$

Відзначимо, що в розкладах (1.9) беруть участь одні і ті ж коефіцієнти  $C_n^\kappa$  і  $C_n^E$ .

**Густини функції розподілу в фазовому просторі** Матриця густини в представленні Фока-Баргманна визначається виразом:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{S}, \mathbf{R}) &= \sum_\kappa \left\{ \sum_n \sqrt{\Lambda_n} C_n^{\kappa*} \psi_n(\mathbf{S}) \sum_{\tilde{n}} \sqrt{\Lambda_{\tilde{n}}} C_{\tilde{n}}^\kappa \psi_{\tilde{n}}(\mathbf{R}) \right\} \\ &+ \int dE \left\{ \sum_n \sqrt{\Lambda_n} C_n^*(E) \psi_n(\mathbf{S}) \sum_{\tilde{n}} \sqrt{\Lambda_{\tilde{n}}} C_{\tilde{n}}(E) \psi_{\tilde{n}}(\mathbf{R}) \right\}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Сума відповідає дискретним станам, а інтеграл – неперервному спектру. Ця матриця густини дає нам інформацію про поведінку густини функції розподілу  $\rho(\mathbf{S}, \mathbf{R})$  в фазовому просторі. Зауважимо, що в виразі (1.10) незалежних змінних набагато менше, ніж у функції розподілу в координатному просторі  $\rho(\mathbf{r})$ <sup>1</sup> і проблема аналізу функції  $\rho(\mathbf{S}, \mathbf{R})$  вже не здається нездоланною. В цьому і полягає перевага методу генераторної координати,

---

**Примітка 1.** Нагадаємо, що під  $\mathbf{r}$  ми розуміємо сукупність нуклонних векторів  $\{\mathbf{r}\}$ .

взагалі, і представлення Фока-Баргманна, зокрема. Представлення Фока-Баргманна дає нам, таким чином, найпростіший засіб реалізації методу генераторної координати і відкриває нові перспективи для аналізу функцій розподілу кластерних систем.

Після інтегрування по фазовому простору приведена до діагонального вигляду матриця густини системи взаємодіючих кластерів (1.10), якщо всі стани системи дискретні, зводиться до суми:

$$\int \rho(\mathbf{R}, \mathbf{R}^*) d\mu_{\mathbf{R}} = \sum_{\kappa} \sum_n |C_n^{\kappa}|^2 \Lambda_n,$$

де

$$(C_n^{\kappa})^2 \Lambda_n = \left| \int \psi_n(\mathbf{R}^*) \Psi_{\kappa}(\mathbf{R}) d\mu_{\mathbf{R}} \right|^2$$

– імовірність реалізації стану  $\psi_n(\mathbf{R})$  в хвильовій функції системи кластерів  $\Psi_{\kappa}(\mathbf{R})$ .

Коли число квантів  $\nu$  велике, інформацію про поведінку функції  $\Psi(\mathbf{r})$  при великих значеннях  $|\mathbf{q}|$  можна отримати безпосередньо з коефіцієнтів  $\{\sqrt{\Lambda_n} C_n\}$ , оскільки справедливе асимптотичне співвідношення<sup>1</sup>

$$\Psi(|\mathbf{q}| = r_{\nu}) = \frac{\sqrt{\Lambda_n} C_n}{\sqrt{2r_0}(2\nu + 2l + 3)^{1/4}}. \quad (1.11)$$

де  $r_{\nu} = r_0 \sqrt{2\nu + 2l + 3}$  – точка повороту в полі  $r^2/2$  гармонічного осцилятора з енергією  $\nu + l + 3/2$ .

Щоб зрозуміти походження цього співвідношення, досить згадати про  $\delta$ -подібну поведінку функцій гармонічного осцилятора з великим значенням  $\nu$  в околі точки повороту

$$\psi_{\nu l}(r) r^{3/2} \simeq \sqrt{2}\delta(r - r_{\nu}),$$

Отже, асимптотична оцінка густини функції розподілу при великих  $|\mathbf{q}|$  має вигляд

$$\rho(|\mathbf{q}| = r_{\nu}) \sim \Lambda_n \frac{|C_n|^2}{2r_{\nu}}. \quad (1.12)$$

---

**Примітка 1.** Нагадаємо, що число квантів  $\nu$  лише одне з квантових чисел, що містяться в індексі  $n$ .

Оцінка (1.12) корисна при аналізі збіжності розкладу хвильової функції, коли треба переконатися, що, незважаючи на звернення до дискретного представлення гармонічного осцилятора, збіжність має місце і для зв'язаних станів, і для станів неперервного спектра.

**Дискретне представлення і неперервний спектр.** На той факт, що дискретне представлення вдається пристосувати для розв'язку задач неперервного спектра, вперше було вказано в роботі [56]. Далі нас буде цікавити спеціальний випадок дискретного представлення – ортонормований базис дозволених принципом Паулі станів гармонічного осцилятора, визначений в просторі Фока-Баргманна, де базисні функції мають особливо простий вигляд і виражаються через степені комплексних векторів. Тому хвильові функції дискретного представлення зводяться до степеневих рядів, радіус збіжності яких нескінченно великий. Справедливість цього твердження забезпечується тим, що всі хвильові функції в просторі Фока-Баргманна є цілими і аналітичними, а тому їх ряди по степенях комплексних векторів збігаються в будь-якій скінченній області комплексного простору.

Часто при оцінці можливості використовувати дискретний базис гармонічного осцилятора, щоб розв'язати задачі неперервного спектра, виникає непорозуміння, зобов'язане своїм походженням зауваженню про те, що реальні хвильові функції і функції базису гармонічного осцилятора мають кардинально різну асимптотику. Якщо перші зі збільшенням радіуса  $r$  спадають дуже повільно, обернено пропорційно його першому степеню, то другі спадають експоненційно, як  $\exp(-r^2/2)$ . Щоб зрозуміти, якою мірою це зауваження стосується проблеми збіжності і чи ставить її під сумнів, звернемося до розкладу хвильової функції неперервного спектра (стан з нульовим орбітальним моментом) з енергією  $E = k^2/2$  по базису гармонічного осцилятора:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} j_0(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin kr}{kr} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(k) (-1)^n \sqrt{\frac{2\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)}} L_n^{1/2}(r^2) \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right).$$

тут  $n$  – радіальне число осциляторних квантів,  $L_n^{1/2}(r^2)$  – поліном Лагерра, а для коефіцієнтів розкладу справедливий вираз:

$$C_n(k) = \sqrt{\frac{2\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)}} L_n^{1/2}(k^2) \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right).$$

Тепер ми можемо порівняти відому нам суму ряду, тобто сферичну функцію Бесселя  $\sqrt{2/\pi} j_0(kr)$ , і її наближене значення, що відповідає частковим сумам

$$\sum_{n=0}^{n_0} C_n(k)(-1)^n \sqrt{\frac{2\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)}} L_n^{1/2}(r^2) \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \quad (1.13)$$

для  $n_0 = 25$  і  $n_0 = 50$ . Нехай  $k = 2$ , а  $r \geq 1$ . Інакше кажучи, ми вважаємо, що асимптотична область відповідає таким значенням радіуса, які перевищують одиницю.

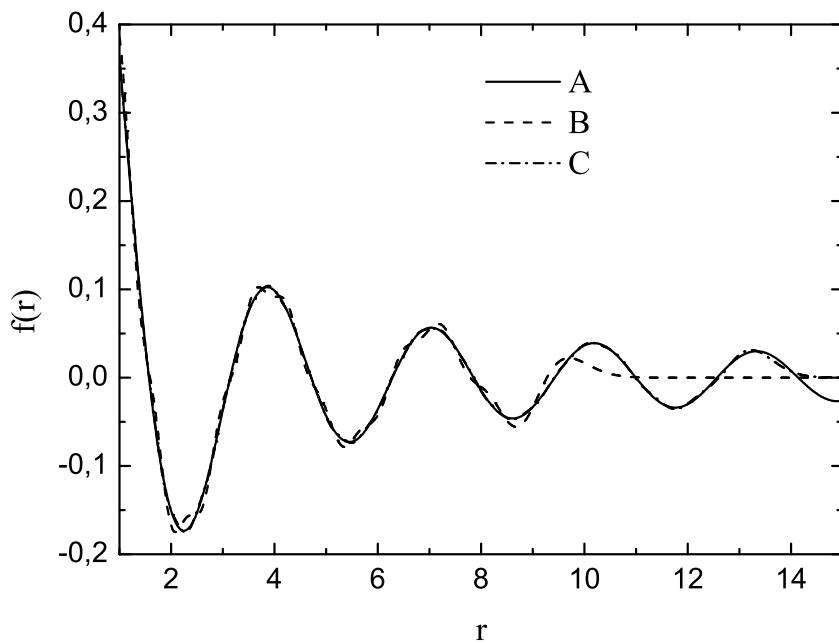


Рис. 1.1 Аproxимація хвильової функції неперервного спектра з енергією  $E = k^2/2$ ,  $k = 2$  розкладами по дискретному базису з числом базисних функцій  $n_0$ . А – точна функція; В –  $n_0 = 25$ ; С –  $n_0 = 50$ .

Як видно з рис. 1.1, навіть при  $n_0 = 25$  асимптотична поведінка хвильової функції неперервного спектра правильно передається аж до  $r \sim r_{n_0} = \sqrt{4n_0 + 3}$ , де  $r_{n_0}$  – точка повороту в поле гармонічного осцилятора. Зі збільшенням числа базисних функцій  $n_0$  збільшується і область, на якій точна хвильова функція добре апроксимується частковою сумою (1.13). Так при  $n_0 = 50$  вдається відтворити хвильову функцію на інтервалі  $1 < r < 14$ , а при  $n_0 = 25$  лише до  $r \sim 10$ . Крім того, збільшення кількості базисних функцій дозволяє уточнити поведінку хвильової функції у внутрішній області  $r < r_{n_0}$ .

При побудові хвильової функції координатного представлення для короткодіючих сил поза областью їх дії використовується відома асимптотика, щоб потім зшити її з хвильовою функцією, отриманою в результаті інтегрування рівняння Шредінгера в області дії ядерних сил. По аналогії з цією процедурою, реалізація представлення Фока-Баргманна зовсім не передбачає необхідності знати хвильову функцію всюди в комплексному просторі. Достатньо лише трохи вийти за границю області дії ядерних сил і оператора антисиметризації, і вимагати, щоб там коефіцієнти розкладу набували граничних асимптотичних значень. Аналогію між координатним представленням і дискретним підкреслює і той факт, що асимптотичні рівняння дискретного представлення гармонічного осцилятора, коли число квантів велике, набувають граничного вигляду рівняння Шредінгера в координатному представленні. Останнє справедливо і у випадку врахування далекодіючих сил, наприклад, кулонівських [57].

Щоб знайти коефіцієнти розкладу хвильової функції по базису гармонічного осцилятора, ми приходимо до системи з нескінченною кількістю однорідних рівнянь. Однак ця система зводиться до системи скінченної кількості неоднорідних алгебраїчних рівнянь, тому що для коефіцієнтів розкладу відомі асимптотичні по числу осциляторних квантів вирази, що містять функції Ханкеля першого і другого роду на множині дискретних точок і елементи  $S$ -матриці розсіяння<sup>1</sup>. В результаті підлягають визначен-

---

**Примітка 1.** Замість функцій Ханкеля іноді доцільно використовувати регулярний і нерегулярний

ню лише елементи  $S$ -матриці і коефіцієнти розкладу при відносно малих значеннях числа квантів.

Класифікація базисних станів за допомогою індексів  $SU(3)$ -симетрії  $(\lambda, \mu)$  спрошує вигляд алгебраїчних рівнянь, але ускладнює матрицю оператора кінетичної енергії відносного руху кластерів. Між тим для базису кутового момента остання має просту трьохдіагональну форму. Функції базису кутового момента пов'язані лише через оператор антисиметризації і цей зв'язок спадає зростом числа квантів експоненційно, на відміну від функцій базису  $SU(3)$ , зв'язок яких слабче обернено пропорційно числу квантів. З цієї причини асимптотика коефіцієнтів розкладу хвильової функції по фізичному базису виражається через функції Ханкеля і елементи  $S$ -матриці, в той час як рівняння для  $SU(3)$ -базису залишаються зв'язаними навіть в граници великого числа квантів. Тому важливою стає задача побудови матриці унітарного перетворення, що пов'язує базис кутового момента з базисом  $SU(3)$ . Після того, як ця матриця визначена, може бути негайно встановлена відповідність між відомою асимптотикою коефіцієнтів розкладу по фізичному базису і асимптотикою коефіцієнтів розкладу по базису  $SU(3)$ .

### **1.3 Загальні положення, що стосуються залежності фазових зсувів від енергії.**

Коефіцієнти розкладу хвильових функцій по базису дозволених принципом Паулі станів, власні значення цих станів, а також елементи  $S$ -матриці розсіяння і її власні фази містять вичерпну інформацію про неперервний спектр складених з кластерів ядерних систем, структуру їх хвильових функцій, ефективні перерізи і кутові розподіли продуктів ядерних реакцій за участю кластерів. При цьому, крім потенціалу нуклон-нуклонної взаємодії, самим істотним чином на поведінку елементів  $S$ -матриці і власних фаз впливають і дозволені принципом Паулі, і заборонені стани. Перелічимо фактори, що формують поведінку коефіцієнтів розкладу і власних фаз.

---

розв'язок різницевого аналогу рівняння Бесселя, тобто функції Бесселя і Неймана.

Залежність фаз розсіяння від енергії при зміні останньої від нуля до нескінченності регулює теорема Левінсона. Згідно цій теоремі, амплітуда зміни фази розсіяння пропорційна кількості зв'язаних станів системи. Кількість заборонених станів грає важливу роль у зв'язку з існуванням узагальненої теореми Левінсона. Узагальнена теорема Левінсона звертається не лише до зв'язаних станів, але і до заборонених принципом Паулі. В сукупності вони і визначають амплітуду зміни фази<sup>1</sup>. Теорема Левінсона є наслідком ортогональності станів неперервного спектра як станам дискретного спектра, так і всім забороненим станам.

Отже, за відсутності станів дискретного спектра амплітуда зміна фази розсіяння  $\delta_l(E)$  визначається кількістю заборонених станів з орбітальним моментом  $l$ . Нехай  $2k_0$  – мінімальне число квантів, при якому реалізується перший дозволений стан. Тоді кількість заборонених станів в цьому каналі, що мають орбітальний момент  $l < 2k_0$ , дорівнює  $k_0 - l/2$  і

$$\delta_l(0) - \delta_l(\infty) = \pi \left( k_0 - \frac{l}{2} \right), \quad l/2 < k_0.$$

Зменшення кількості заборонених станів з ростом  $l$  є наслідком того факту, що побудувати заборонений стан з ненульовим  $l$  можна лише тоді, коли число квантів  $2k \geq l$ . При  $l \geq 2k_0$  заборонені стани відсутні.

Вивчення експериментальних даних розсіяння вже для самих простих систем показало, що залежність фазового зсуву від енергії дійсно підлягає теоремі Левінсона. Зокрема, фазовий аналіз зіткнення двох  $\alpha$ -частинок виявив, що характер зміни фаз  $\alpha$ - $\alpha$  розсіяння в залежності від енергії можна пояснити як проявом узагальненої теореми Левінсона. Так неперервна зміна  $S$ -фази від значення  $2\pi$  при нульовій енергії до нуля, коли енергія прагне до нескінченності, є наслідком того, що система має два заборонені стани з нульовим орбітальним моментом. Ці стани відповідають тому, що в  $s$ -оболонці опинилося шість або вісім нуклонів, що заборонено

---

**Примітка 1.** Якщо нас цікавить лише величина ефективного перерізу розсіяння, то при побудові фази можна обмежитись, наприклад, інтервалом  $(-\pi/2 \leq \delta \leq \pi/2)$ . Однак тоді ми втратимо інформацію про те, скільки у системи зв'язаних або заборонених станів і позбавимо себе можливості перевірити, чи прагне фаза до нуля в границі борнівського наближення.

ципом Паулі. Поведінка  $D$ -фази вказує на існування одного забороненого стану з орбітальним моментом  $l = 2$ . Ця фаза неперервно змінюється від  $\pi$  до нуля. Отже, кількість заборонених станів можна також встановити з даних розсіяння за допомогою фазового аналізу.

Посилання на узагальнену теорему Левінсона потребувало з'ясування формальних причин її справедливості. Питання було поставлене так: яке рівняння Шредінгера для відносного руху двох  $\alpha$ -частинок відтворює спостережувану залежність фаз розсіяння від енергії? Було запропоновано два варіанти [58]. Перший варіант полягав в ідеї використовувати надглибокий потенціал за тієї додаткової умови, що зв'язані стани в цьому потенціалі не мають фізичного сенсу, але моделюють заборонені стани, щоб виконувалась теорема Левінсона. Другий варіант зводився до введення сингулярного відштовхування, яке в результаті також забезпечувало правильну поведінку фази у відповідності з теоремою Левінсона. І в одному, і в другому випадку замість безпосереднього розв'язку мікрокопічних рівнянь МРГ і аналізу причин, відповідальних за справедливість теореми Левінсона, вводяться такі рівняння, в яких спостережувана на експерименті залежність фаз розсіяння від енергії відтворюється за допомогою спеціально підібраних кластер-кластерних потенціалів. Ці потенціали достатньо штучні, щоб на їх основі виявити які-небудь фундаментальні закономірності, властиві поведінці фаз розсіяння і відповідних ефективних перерізів. Між тим МРГ визначає не лише характер оператора потенціальної енергії взаємодії кластерів, але і впливає на формування оператора кінетичної енергії відносного руху кластерів. До чого приводить вплив антисиметризації на останній оператор досі не досліджувалася.

Слід нагадати ще одну роботу [43], в якій Базь А.І. та ін. припустили, що за неперервний спектр  $\alpha$ - $\alpha$  та інших систем відповідальна взаємодія у вигляді кора відносно великого радіуса і потенціалу притягання поза кором. До того ж відзначалось, що поки енергія відносного руху ядер залишається малою, кор можна вважати жорстким. Однак, питання про те, чи

узгоджуються результати роботи [43] з теоремою Левінсона, залишилось без уваги.

Отже, є дві точки зору на характер взаємодії компаунд-систем. Одна з них зводиться до твердження про існування надглибокого потенціалу, що забезпечує виконання теореми Левінсона. Інша припускає, що важливою особливістю кластер-кластерної взаємодії є існування жорсткого кора. Між тим можна показати, що вимоги узагальненої теореми Левінсона будуть виконуватись, якщо гамільтоніан двох компаунд-систем побудований в повній відповідності з вимогами принципу Паулі. Особливість матриці гамільтоніана МРГ, як і матриць потенціальної і кінетичної енергії, полягає в тому, що вони не містять матричних елементів, що пов'язують дозволені стани з забороненими, і матричних елементів, що пов'язують заборонені стани. Феноменологічні гамільтоніани таким умовам не задовольняють.

В роботі [60] матриця оператора кінетичної енергії на дозволених принципом Паулі станах разом з матрицею потенціальної енергії сил Волкова використовувалася для розрахунку фаз  $\alpha$ - $\alpha$  розсіяння в рамках дискретного представлення – алгебраїчної версії МРГ. Головна увага в [60] була приділена проблемі неперервного спектра в дискретному представленні, а той факт, що знайдені там фази розсіяння задовольняють вимогам теореми Левінсона, не обговорювався. Не вивчався і внесок в фази розсіяння від модифікованої принципом Паулі матриці кінетичної енергії. Пізніше, обчисливши власні функції цієї матриці для простих систем, ми переконаємося, що, по-перше, фази, що породжуються лише модифікованим оператором кінетичної енергії, ведуть себе у відповідності з теоремою Левінсона, і, по-друге, вони мають той же порядок величини, що і фази, знайдені з урахуванням потенціальної енергії.

## 1.4 Вплив принципу Паулі на оператор кінетичної енергії

Щоб зрозуміти, як впливають заборонені стани на структуру хвильових функцій неперервного спектра, що задовольняють рівнянням МРГ, розглянемо спочатку власні функції оператора кінетичної енергії відносного руху двох тотожних кластерів. При цьому ми будемо використовувати алгебраїчні рівняння дискретного представлення дозволених базисних станів гармонічного осцилятора і враховувати обумовлену принципом Паулі модифікацію цього оператора:

$$\sum_{\tilde{n}} \langle n | \hat{T} | \tilde{n} \rangle C_{\tilde{n}} - E \Lambda_n C_n = 0. \quad (1.14)$$

В силу особливої простоти оператора кінетичної енергії його твірний матричний елемент можна записати у вигляді:

$$T(\mathbf{R}, \mathbf{S}) = \hat{T}_{\mathbf{R}, \mathbf{S}} I(\mathbf{R}, \mathbf{S}) = \hat{T}_{\mathbf{R}, \mathbf{S}} \sum_n \Lambda_n \psi_n(\mathbf{R}) \psi_n(\mathbf{S}),$$

де

$$\hat{T}_{\mathbf{R}, \mathbf{S}} = -\frac{\hbar^2}{4mr_0^2} (\mathbf{R}^2 - 2(\mathbf{R} \cdot \mathbf{S}) - 3 + \mathbf{S}^2) \quad (1.15)$$

– образ оператора кінетичної енергії в просторі Фока-Баргманна (див., наприклад, [6]). Тут і далі  $m$  – маса нуклона.

З (1.15) негайно випливає, що матриця кінетичної енергії трьохдіагональна в представленні гармонічного осцилятора. Тому

$$T(\mathbf{R}, \mathbf{S}) = \sum_{\nu} \{ \Lambda_{\nu-2} T_{\nu-2, \nu} \psi_{\nu-2}(\mathbf{R}) + \Lambda_{\nu} T_{\nu, \nu} \psi_{\nu}(\mathbf{R}) + \Lambda_{\nu} T_{\nu, \nu+2} \psi_{\nu+2}(\mathbf{R}) \} \psi_{\nu}(\mathbf{S}).$$

Тут  $T_{\nu, \tilde{\nu}}$  – матричні елементи оператора кінетичної енергії  $\hat{T}_{\mathbf{R}}$  на нормованих на одиницю з мірою Баргманна функціях  $\psi_{\nu}(\mathbf{R})$ :

$$T_{\nu, \tilde{\nu}} = \int d\mu_{\mathbf{R}} \psi_{\tilde{\nu}}(\mathbf{R}^*) \hat{T}_{\mathbf{R}} \psi_{\nu}(\mathbf{R}).$$

Ми отримали нелокальний оператор кінетичної енергії. Для простоти тут розглянуто одноканальний випадок, коли базисні функції відрізняються лише числом осциляторних квантів  $\nu$ .

Типове рівняння системи (1.14) має вигляд:

$$\Lambda_{\nu-2}T_{\nu,\nu-2}C_{\nu-2} + \Lambda_\nu(T_{\nu,\nu} - E)C_\nu + \Lambda_\nu T_{\nu,\nu+2}C_{\nu+2} = 0. \quad (1.16)$$

Система рівнянь (1.16) в двох відношеннях відрізняється від стандартної системи дискретного представлення, що не враховує вимог принципу Паулі:

$$T_{\nu,\nu-2}C_{\nu-2} + (T_{\nu,\nu} - E)C_\nu + T_{\nu,\nu+2}C_{\nu+2} = 0. \quad (1.17)$$

По-перше, в ній беруть участь лише матричні елементи, що пов'язують дозволені стани. Тому нема необхідності вводити в вихідний гамільтоніан додатковий потенціал для усунення заборонених станів або для того, щоб хвильова функція обернулась на нуль при зближенні тотожних нуклонів. Такий доданок дав би нульовий внесок в систему рівнянь (1.14), оскільки рівняння дискретного представлення побудовані з урахуванням цих вимог.

По-друге, виключення заборонених станів ще не розв'язує задачу повністю, про що свідчить матриця системи рівнянь (1.16). Вона містить власні значення  $\Lambda_\nu$  дозволених станів і з цієї причини не тутожна матриці оператора кінетичної енергії вільного руху кластерів (1.17).

**Заборонені стани.** Для максимального спрощення задачі, усунувши всі заборонені стани (їх власні значення дорівнюють нулю), власні значення всіх дозволених станів доцільно покласти рівними одиниці. Тоді власну хвильову функцію оператора кінетичної енергії з орбітальним моментом  $l$  і енергією  $E = \kappa^2/2$  в представленні дискретного базису дозволених станів можна записати у вигляді<sup>1</sup>

$$\Psi_l(E) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \left\{ A(l; \kappa) C_{kl}^{reg}(\kappa) - B(l; \kappa) C_{kl}^{irreg}(\kappa) \right\},$$

де  $k$  – число радіальних квантів збудження, а

$$C_{k,l}^{reg}(\kappa) = \left[ \frac{2\Gamma(k+l+3/2)}{\Gamma(k+1)} \right]^{1/2} \frac{\kappa^l \exp(-\kappa^2/2)}{\Gamma(l+3/2)} M(-k, l+3/2; \kappa^2),$$

---

**Примітка 1.** В цьому підрозділі використовується система одиниць  $\hbar = m = r_0 = 1$ .

$$C_{k,l}^{irreg}(\kappa) = (-1)^{l+1} \left[ \frac{2\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+l+3/2)} \right]^{1/2} \frac{\kappa^{-l-1} \exp(-\kappa^2/2)}{\Gamma(-l+1/2)} \\ \times M(-k-l-1/2, -l+1/2; \kappa^2)$$

— регулярний і нерегулярний розв'язки рівняння вільного руху в представленні гармонічного осцилятора [61].

Функцію  $M(a, b, z)$

$$M(a, b, z) = 1 + \frac{a}{b}z + \frac{(a)_2}{(b)_2 2!}z^2 + \dots + \frac{(a)_k}{(b)_k k!}z^k + \dots$$

називають функцією Куммера або виродженою гіпергеометричною функцією [62].

Коефіцієнти  $A(l; \kappa)$  і  $B(l; \kappa)$  визначаються з умови

$$A(l; \kappa)C_{k_0-l/2-1,l}^{reg}(\kappa) - B(l; \kappa)C_{k_0-l/2-1,l}^{irreg}(\kappa) = 0,$$

що відповідає вимозі, що дорівнюють нулю всі коефіцієнти розкладу по базису заборонених станів, починаючи з тих станів, у яких число радіальних квантів дорівнює  $k_0 - l/2 - 1$ .

Тому

$$A(l; \kappa) = C_{k_0-l/2-1,l}^{irreg}(\kappa), \quad B(l; \kappa) = C_{k_0-l/2-1,l}^{reg}(\kappa).$$

Отже,

$$\tan \delta_l(k_0, \kappa) = \frac{C_{k_0-l/2-1,l}^{reg}(\kappa)}{C_{k_0-l/2-1,l}^{irreg}(\kappa)}.$$

І зрештою,

$$\tan \delta_l(k_0; \kappa) = (-1)^{l+1} \frac{\Gamma(k_0 + l/2 + 1/2)}{\Gamma(k_0 - l/2)} \frac{\Gamma(-l + 1/2)}{\Gamma(l + 3/2)} \times \\ \times \frac{\kappa^{2l+1} M(-k_0 + l/2 + 1, l + 3/2; \kappa^2)}{M(-k_0 - l/2 + 1/2, -l + 1/2; \kappa^2)}. \quad (1.18)$$

Як випливає з виразу (1.18), всі фази рівні нулю при  $k_0 = 0$ , тобто за відсутності заборонених станів.

В асимптотичній границі  $k_0 \gg 1$

$$\tan \delta_l(k_0, \kappa) \rightarrow \frac{J_{l+1/2}(\kappa r_0 \sqrt{4k_0 - 1})}{N_{l+1/2}(\kappa r_0 \sqrt{4k_0 - 1})},$$

і, отже,

$$\delta_l(k_0, \kappa) \sim (k_0 - l/2)\pi - \kappa r_0 \sqrt{4k_0 - 1}.$$

цей вираз для фазового зсуву не відрізняється від відомої залежності фази від хвильового числа, коли розсіяння відбувається на жорсткому корі, радіус якого дорівнює  $r_0 \sqrt{4k_0 - 1}$ . Але справедливе воно поки енергія станів неперервного спектра не перевищує деякого граничного значення (фактично, висоти кору, що створюється забороненими станами).

Отже, усунення заборонених станів приводить до того, що для нульового орбітального момента дорівнюють нулю всі коефіцієнти, що відповідають числу квантів  $\nu < 2k_0$ . Якщо  $2k_0 \gg 1$ , то в області малих енергій це з необхідністю приводить до висновку, що хвильова функція відносного руху практично дорівнює нулю в області значень вектора Якобі  $\mathbf{q}$ , що задовольняють нерівності  $|\mathbf{q}| < r_0 \sqrt{4k_0 - 1}$ , в силу згаданого вище асимптотичного співвідношення (1.11), що пов'язує значення коефіцієнтів  $C_n$  і хвильових функцій координатного представлення в дискретних точках. Нагадаємо, що вектор Якобі  $\mathbf{q}$  відносної відстані між кластерами бінарної системи визначається співвідношенням

$$\mathbf{q} = \sqrt{\frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}} \left( \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{r}_{A_1}}{A_1} - \frac{\mathbf{r}_{A_1+1} + \mathbf{r}_{A_1+2} + \dots + \mathbf{r}_{A_1+A_2}}{A_2} \right),$$

де  $\{\mathbf{r}_i\}$  – вектори нуклонів першого кластера, якщо  $i \leq A_1$ , і вектори нуклонів другого кластера, якщо  $A_1 < i \leq A_2$ .

Порівнямо радіус жорсткого кору з радіусом ядер, що зіштовхуються. Нехай  $\langle |\mathbf{r}^2| \rangle_A$  – пропорційний  $r_0^2$  середній квадратичний радіус кожного з кластерів<sup>1</sup>. Підрахуємо відношення

$$r_{\text{core}} \equiv \frac{|\mathbf{R}_{\text{cm}}^1 - \mathbf{R}_{\text{cm}}^2|}{\sqrt{\langle |\mathbf{r}^2| \rangle_A}} = \frac{r_0 \sqrt{\frac{2}{A} \sqrt{4k_0 - 1}}}{\sqrt{\langle |\mathbf{r}^2| \rangle_A}}$$

---

**Примітка 1.** Ми вважаємо, що в якості внутрішніх хвильових функцій кластерів вибрані функції ТІМО.

для різних бінарних систем, що складаються з тотожних кластерів ( $A_1 = A_2 = A$ ).

В Таблиці 1 вказані мінімальне дозволене принципом Паулі число радіальних квантів  $k_0$ , відношення радіусу кора до середньоквадратичного радіусу кожного з кластерів  $r_{\text{core}}$ , а також мінімальна енергія збудження  $E_{\text{ex}}$  компаунд-ядра, при якій відповідна кластерна конфігурація може бути реалізована.

Табл. 1: Дані про бінарні системи, складені з тотожних магічних ядер.

	$k_0$	$r_{\text{core}}$	складене ядро	$E_{\text{ex}}, \hbar\omega$
$\alpha + \alpha$	2	1.76	$^8\text{Be}$	0
$^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$	12	1.65	$^{32}\text{S}$	4
$^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$	40	1.64	$^{80}\text{Zr}$	20
$^{80}\text{Zr} + ^{80}\text{Zr}$	100	1.64	$^{160}\text{Hg}$	60

Як видно з таблиці 1, по мірі зростання числа нуклонів в кожному з кластерів збільшується мінімально допустиме принципом Паулі число квантів хвильової функції відносного руху кластерів, що свідчить про збільшення радіуса відштовхувального кору, що породжується забороненими станами. Звичайно, середньоквадратичний радіус кластерів також зростає і тому  $r_{\text{core}}$  залишається практично незмінним. Важливо відзначити, що в рамках простого наближення, що розглядається в цьому підрозділі, область перекривання хвильових функцій кластерів не перевищує половини середньоквадратичного радіуса кожного з кластерів і тому їх взаємодія була б лише поверхневою.

Звичайно, відразу ж виникає питання, як інтенсивність і радіус відштовхувального кору залежать від типу кластерної конфігурації. Майже очевидно, що, якщо маса одного з кластерів зростає, а другого зменшується, але при цьому повна кількість нуклонів не змінюється, то інтенсивність і радіус кора зменшуються. Максимальними вони будуть для симетричного поділу компаунд-ядра. Підтвердженням цього служить збільшення енергії збудження компаунд-ядра, що допускає симетричну кластерну конфігура-

цію.

Таким чином, власні функції оператора кінетичної енергії в області відносно малих значень енергії подібні власним функціям частинки в полі з жорстким кором, а в області великих значень енергії тотожні хвильовим функціям вільного руху частинки. Отже, ефективна взаємодія між кластерами, що породжується принципом Паулі, суттєво залежить від енергії кластерів, що зіштовхуються, а радіус цієї взаємодії одного порядку з масовим радіусом кластерів.

Звернувшись до простого наближення, ми отримали лише верхню оцінку області перекриття кластерів. Однак при цьому ми не врахували факту існування майже заборонених станів, власні значення яких суттєво менші одиниці. Максимальне число квантів, що їм відповідає, більш ніж в два рази перевищує максимальне число квантів заборонених станів.

**Майже заборонені і майже дозволені стани.** Дія принципу Паулі на характер відносного руху кластерів не зводиться лише до появи заборонених станів, що визначають інтенсивність і радіус сил відштовхування. Інший фактор, який необхідно взяти до уваги, полягає в тому, що власні значення  $\Lambda_\nu$  дозволених станів лише при дуже великих  $\nu$  стають близькими до одиниці, і тоді обміном нуклонами між кластерами можна знехтувати. Цей фактор вступає в гру на тих відстанях, для яких  $|\mathbf{q}| > r_0\sqrt{4k_0 - 1}$ , або, інакше кажучи, для тих коефіцієнтів розкладу  $C_\nu$ , у яких  $\nu > 2k_0$ . Далі ми зосередимо свою увагу на питанні про те, при яких  $\nu$  кластери починають обмінюватись нуклонами і до дії якого ефективного потенціалу цей обмін зводиться. Ті дозволені стани, власні значення яких близькі до нуля, доцільно назвати *майже заборонені*, оскільки за характером їх впливу на хвильову функцію кластерних систем вони подібні забороненим. Стани, власні значення яких менші одиниці, будемо називати *майже дозволеними*, а ті, яким відповідають  $\Lambda_\nu > 1$ , *наддозволеними*.

Відомо, що рівняння системи (1.17) при великих значеннях  $\nu$  набуває асимптотичного вигляду і перетворюється спочатку в різницеве, а потім в

диференційне рівняння Шредінгера для вільного руху з певним орбітальним моментом  $l$  (див. [59]). Такий же вигляд при великих  $\nu$ , коли всі  $\Lambda_\nu$  рівні одиниці, мають і рівняння системи (1.16). Однак в тій області значень  $\nu$ , де власні значення по мірі зменшення числа квантів стають відмінними від одиниці і починають або зменшуватись, залишаючись додатніми, або зростають, граничний вигляд рівнянь ускладнюється і вони стають рівняннями руху в полі потенціалу, що породжується обмінним доданком оператора кінетичної енергії. І наша задача – знайти ці рівняння з тим, щоб виявити обумовлені принципом Паулі основні закономірності в зміні взаємодії кластерів в процесі їх зближення.

Рівняння (1.16) для зіткнення кластерів в стані з орбітальним моментом  $l$  можна записати у вигляді різницевого рівняння:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left\{ \left( 1 + \frac{\Lambda_{\nu-2}}{\Lambda_\nu} \right) \left( \nu + \frac{3}{2} - \frac{(2l+1)^2}{8\nu} \right) + 1 - \frac{\Lambda_{\nu-2}}{\Lambda_\nu} \right\} \frac{1}{4} (C_{\nu+2} - 2C_\nu + C_{\nu-2}) \\ & - \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\Lambda_{\nu-2}}{\Lambda_\nu} + \left( 1 - \frac{\Lambda_{\nu-2}}{\Lambda_\nu} \right) \left( \nu + \frac{3}{2} - \frac{(2l+1)^2}{8\nu} \right) \right\} \frac{1}{4} (C_{\nu+2} - C_{\nu-2}) \\ & + \left\{ \left( 1 + \frac{\Lambda_{\nu-2}}{\Lambda_\nu} \right) \frac{(2l+1)^2}{32\nu} + \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\Lambda_{\nu-2}}{\Lambda_\nu} \right) \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \right\} C_\nu = \frac{mr_0^2}{\hbar^2} EC_\nu. \end{aligned}$$

Останнє рівняння переходить в диференційне рівняння Бесселя в границі  $\nu \gg 1$ , коли власні значення  $\Lambda_\nu$  стають рівними одиниці:

$$\left( \frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d}{dy} - \frac{(2l+1)^2}{4} \frac{1}{y^2} + \frac{mr_0^2}{\hbar^2} 2E \right) C(y) = 0; \quad y = \sqrt{2\nu + 2l + 3}.$$

Діагональну матрицю  $\|U_{\nu,\tilde{\nu}}^{\text{Pauli}} \delta_{\nu,\tilde{\nu}}\|$ ,

$$U_{\nu,\nu}^{\text{Pauli}} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\Lambda_{\nu-2}}{\Lambda_\nu} \right) \frac{(2l+1)^2}{16\nu} + \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\Lambda_{\nu-2}}{\Lambda_\nu} \right) \left( \nu + \frac{1}{2} \right), \quad (1.19)$$

можна розглядати в якості матриці оператора ефективної взаємодії між кластерами, що походить з оператора кінетичної енергії, модифікованого принципом Паулі. Фізичний зміст першого доданку в виразі (1.19) простий. Це відцентровий потенціал, який перенормований за рахунок множника

$$\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\Lambda_{\nu-2}}{\Lambda_\nu} \right).$$

Останній разом з власними значеннями прагне до одиниці, коли  $\nu \rightarrow \infty$ . Якщо власні значення із зростанням  $\nu$  наближаються до одиниці знизу, множник перенормування не перевищує одиниці, і тому спостерігається часткове пригнічення відцентрового потенціалу. В іншому випадку, коли власні значення наближаються до одиниці згори, має місце підсилення відцентрового потенціалу. Однак, в обох випадках цей доданок суттєво менший другого

$$U_{\nu,\nu}^{\text{eff}} = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\Lambda_{\nu-2}}{\Lambda_\nu} \right) \left( \nu + \frac{1}{2} \right),$$

який є ефективним потенціалом скінченного радіусу дії, що породжується впливом принципу Паулі на кінетичну енергію. В подальшому ми будемо називати його *ефективним потенціалом антисиметризації*. Абсолютна величина його інтенсивності зменшується, коли прагне до нуля різниця  $\Lambda_\nu - \Lambda_{\nu-2}$ . Якщо остання із зростанням  $\nu$  залишається від'ємною (власні значення монотонно прагнуть до одиниці згори), то ефективний потенціал антисиметризації виявляється притяганням. Якщо різниця власних значень при такій же зміні  $\nu$  залишається додатною (власні значення монотонно прагнуть до одиниці знизу), то ефективний потенціал антисиметризації є відштовхуванням. Очевидно, що радіус цієї взаємодії залежить від того, як швидко прагнуть власні значення до одиниці із зростанням  $\nu$ .

Справді, як було показано в розділі 1.2, хвильову функцію системи двох кластерів можна представити у вигляді розкладу (1.9). Якщо  $\Lambda_\nu < 1$ , то їх участь в розкладах (1.9) говорить про пригнічення доданків з малим  $\nu$ , що природно розглядати, як дію на малих відстанях ефективних сил відштовхування. Це приводить до зменшення за абсолютною величиною енергії зв'язаних станів і відповідної зміни фаз розсіяння, обумовленої появою додаткового ефективного відштовхування. Якщо ж  $\Lambda_\nu > 1$ , то доданки з малими  $\nu$ , навпаки, виявляються більш імовірними, що можна розглядати як ефективне притягання.

Отже, як випливає із сказаного вище, ефекти антисиметризації не зводяться лише до усунення заборонених станів. Вони проявляються ще і в

характері зміни кінетичної енергії відносного руху кластерів в міру того, як вони зближуються. У випадку вільного руху<sup>1</sup> в стані з певним орбітальним моментом  $l$  єдиним фактором, що змінює швидкість відносного руху кластерів при їх зближенні, є відцентровий потенціал. Він зменшує кінетичну енергію відносного руху кластерів доти, поки вони не зупиняться в точці повороту  $r_\nu = r_0 \sqrt{2\nu + 2l + 3}$  і не почнеться їх розліт. Якщо власні значення  $\Lambda_\nu$  спадають зі зменшенням  $\nu$ , швидкість відносного руху кластерів під впливом ефективного потенціалу антисиметризації зменшується сильніше, ніж у випадку вільного руху. Якщо же із зменшенням  $\nu$  власні значення зростають, то швидкість кластерів збільшується під дією ефективного потенціалу антисиметризації, який в даному випадку відповідає притяганню.

Щоб зрозуміти, як далеко сягає область впливу антисиметризації на структуру хвильових функцій, доцільно звернутись до двох граничних значень числа квантів –  $\nu_{\min}$  і  $\nu_{\max}$ . Поки  $\nu < \nu_{\min}$ , дозволених станів в даній гілці нема і власні значення дорівнюють нулю. Якщо число квантів задовільняє нерівності  $\nu_{\min} \leq \nu \leq \nu_{\max}$ , то власні значення стають додатніми, але відмінними від одиниці. Нарешті, при виконанні нерівності  $\nu > \nu_{\max}$  власні значення можна вважати наближено рівними одиниці. Границне число квантів  $\nu_{\max}$  визначається досить умовно, що вказує на дифузність границі області дії оператора антисиметризації. Величина

$$r_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{A_1 + A_2}{A_1 A_2}} r_0 \sqrt{(2\nu_{\max} + 2l + 3)},$$

визначає відстань між центрами мас двох ядерних кластерів, на якій вступають в гру обмінні ефекти. Ця відстань більш, ніж в два рази, перевищує середньоквадратичний радіус кластерів і тому взаємодія ядер на такій відстані є результатом дифузності їх граничного шару.

Радіус дії оператора антисиметризації доцільно також порівняти з радіусом сил взаємодії між кластерами, що породжується потенціалом нуклон-

---

**Примітка 1.** Коли нема будь-яких сил взаємодії між кластерами і вплив принципу Паулі на їх рух не враховується.

нуклонних сил. Значення матричних елементів оператора потенціальної енергії, що використовуються в алгебраїчній версії МРГ, безпосередньо випливають з виразу для ядра потенціальної енергії  $U(\mathbf{R}, \mathbf{S})$ , визначеного в просторі Фока-Баргманна. Це ядро є цілою функцією незалежних змінних  $\mathbf{R}$  і  $\mathbf{S}$  і його, подібно до ядра кінетичної енергії, можна інтерпретувати, як результат дії на ядро нормування деякого оператора, що містить параметри потенціалу нуклон-нуклонного взаємодії. Побудова матричних елементів  $\langle \nu, l | U | \nu, l \rangle$  оператора потенціальної енергії МРГ потребує розкладу ядра  $U(\mathbf{R}, \mathbf{S})$  потенціальної енергії по степенях  $\mathbf{R}$  і  $\mathbf{S}$  і подальшого проектування на стани з певним значенням кутового момента, що здійснюється аналітично. Оператор антисиметризації усуває всі матричні елементи оператора потенціальної енергії, що пов'язують дозволені стани з забороненими, і, звичайно, ті, які побудовані лише на заборонених станах.

В границі великого числа осциляторних квантів  $\nu$  матриця потенціальної енергії кластерів еквівалентна діагональній матриці  $\|\delta_{\nu, \tilde{\nu}} U(r_\nu)\|$  (див. [57]), яка зі збільшенням  $\nu$  спадає так само швидко, як в координатному просторі спадає кластер-кластерний потенціал  $U(r)$ :

$$\sum_{\nu_{\min}}^{\infty} \langle \nu, l | U | \tilde{\nu}, l \rangle C_{\tilde{\nu}, l} = U(r_\nu) C_{\nu, l},$$

тоді як для короткодіючого кластер-кластерного потенціалу ми приходимо до висновку про швидке спадання матричних елементів еквівалентної діагональної матриці, а закон їх спадання можна вказати a priori. Так, для гаусівської нуклон-нуклонної взаємодії

$$U(r_\nu) \sim U_0 \exp \left\{ -\frac{r_0^2(2\nu + 2l + 3)}{b_0^2} \frac{A_1 + A_2}{A_1 A_2} \right\}, \quad (1.20)$$

де  $b_0$  – радіус гаусівського потенціалу, а  $U_0$  – його інтенсивність.  $U(r_\nu)$  включає як пряму, так і обмінну взаємодію. Ці доданки не розділені, оскільки це зруйнувало б симетрію ядра потенціальної енергії.

Строго кажучи, вираз (1.20) неявно містить також власні значення ядра нормування  $\Lambda_\nu$ . Однак, ця залежність не може привести до збільшення ра-

діусу дії оператора потенціальної енергії кластерів, оцінку якого ми отримуємо за допомогою екстраполяції асимптотичного співвідношення (1.20) на область не дуже великих  $\nu$ . Зі збільшенням числа нуклонів в кожному із взаємодіючих кластерів кількість заборонених станів зростає. Тому навіть для мінімально допустимого значення числа осциляторних квантів асимптотична оцінка (1.20) виявляється справедливою<sup>1</sup>. Кількість майже заборонених станів також збільшується, що приводить до пригнічення матричних елементів потенціальної енергії.

При великих значеннях числа осциляторних квантів  $\nu$  хвильової функції відносного руху кластерів елементи матриці ефективного потенціалу, що походить з обмінного доданку оператора кінетичної енергії, прагнуть до нуля з наближення власних значень  $\Lambda_\nu$  до одиниці. Тому радіус цього потенціалу можна оцінити за допомогою співвідношення

$$\Lambda_\nu - 1 \sim \beta(\nu)\alpha^{-\nu} = \beta(\nu) \exp\{-\nu \ln \alpha\}, \quad (1.21)$$

де параметр  $\alpha > 1$  цілком визначається типом кластерної конфігурації даної ядерної системи. Отже, він однаковий для всіх гілок SU(3)-незвідних представлень. Що ж стосується параметра  $\beta(\nu)$ , то його залежність від числа квантів має степеневий характер і відрізняється для різних SU(3)-представлень в межах однієї кластерної конфігурації.

З (1.21) випливає, що ефективний потенціал антисиметризації спадає за експоненційним законом зі збільшенням числа квантів, як і породжувана нуклон-нуклонними силами кластер-кластерна взаємодія. Порівнюючи показники експоненційного спадання виразів (1.20) і (1.21), можна визначити, який з потенціалів є більш далекодіючим. Виявляється, що

$$\frac{A_1 + A_2}{A_1 A_2} \frac{2r_0^2}{b_0^2} \gg \ln \alpha$$

навіть для самих простих бінарних кластерних систем, що складаються з  $s$ -кластерів, таких як  ${}^4\text{He} + n$ ,  ${}^4\text{He} + {}^4\text{He}$  та ін. Це означає, що при зближенні кластерів спочатку вони зазнають впливу ефективного потенціалу,

---

**Примітка 1.** За умови, що осциляторна довжина  $r_0$  вибрана у відповідності з експериментальним значенням радіусів кластерів

обумовленого зміною кінетичної енергії під дією принципу Паулі. І лише на самих малих відстанях між кластерами вступає в гру породжуваний нуклон-нуклонними силами потенціал взаємодії між кластерами.

Далі на прикладі різних бінарних систем, складених з  $s$ - і  $p$ -кластерів, ми продемонструємо, як залежать власні значення (а, отже, параметри ефективної кластер-кластерної взаємодії) від числа нуклонів компаунд-системи і від типу кластерної конфігурації. Що ж стосується інтенсивності ефективного потенціалу антисиметризації, то його ми обговоримо пізніше, в контексті з фазовими портретами в представленні Фока-Баргманна.

## 1.5 Бінарні системи, що складаються з тотожних магічних ядер

Наша найближча мета – звернувшись до самих простих прикладів з одним відкритим каналом (зіткненням двох тотожних магічних ядер), продемонструвати вплив ефективного потенціалу антисиметризації на поведінку фаз пружного розсіяння, а також хвильових функцій дискретного представлення (коєфіцієнтів розкладу хвильових функцій по повному базису дозволених станів). Кластерні системи, що розглядаються в цьому розділі, цікаві тим, що кожному значенню числа квантів  $\nu$  відповідає лише один  $SU(3)$  мультиплет  $(\nu, 0)$ , що суттєво спрощує вираз для дозволених ортонормованих базисних функцій в просторі Фока-Баргманна (вони будується з цілих ступенів одного комплексного вектора) і дає лише два набори власних значень: один для парних, а інший для непарних станів. Отже, ядро нормування, що породжує повний набір дозволених станів, має вигляд:

$$I(\mathbf{R}, \mathbf{S}) = \sum_{\nu=\nu_{\min}}^{\infty} \Lambda_{\nu} \sum_{L,M} \psi_{\nu,L,M}(\mathbf{R}) \psi_{\nu,L,M}(\mathbf{S}).$$

Далі ми обмежимося станами з парним числом квантів  $\nu = 2k$  і  $L = 0$ .

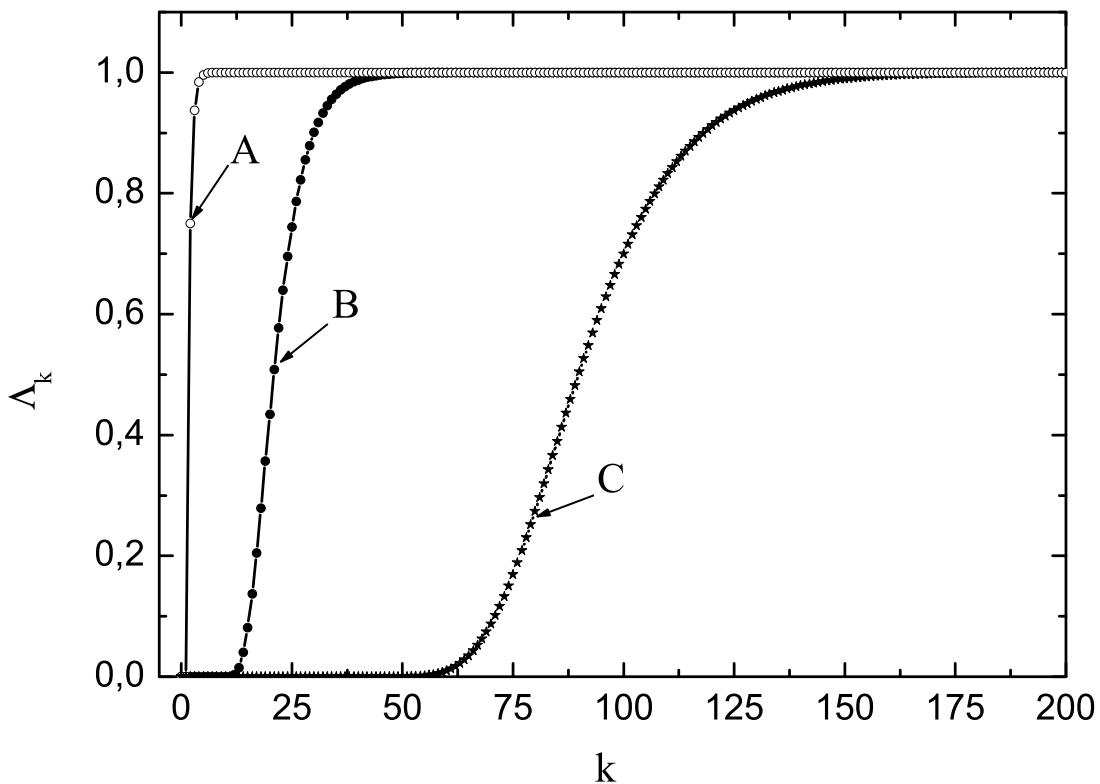


Рис. 1.2 Власні значення  $\Lambda_k$  ядер нормування для одноканальних кластерних систем в залежності від числа квантів  $k$ . А –  $\alpha$ - $\alpha$ ; В –  $^{16}\text{O}$ - $^{16}\text{O}$ ; С –  $^{40}\text{Ca}$ - $^{40}\text{Ca}$ .

На рис. 1.2 показана залежність власних значень  $\Lambda_k$  від радіального числа квантів  $k$  для трьох різних систем –  $\alpha$ - $\alpha$ ,  $^{16}\text{O}$ - $^{16}\text{O}$  і  $^{40}\text{Ca}$ - $^{40}\text{Ca}$ . Як уже відзначалось в підрозділі 1.4, кількість заборонених станів помітно зростає зі збільшенням кількості нуклонів в кожному з кластерів. Крім того, зростає також кількість майже заборонених і майже дозволених станів, що свідчить про розширення тієї області, де вступають в гру обмінні ефекти. Якщо для  $\alpha$ - $\alpha$  системи максимальне число квантів, що визначає границю області дії оператора антисиметризації,  $k_{\max} \simeq 5$ , то для системи  $^{40}\text{Ca}$ + $^{40}\text{Ca}$  воно становить уже 150. Про характер і величину ефективного потенціалу  $U_{k,k}^{\text{eff}}$  для системи  $^{40}\text{Ca}$ - $^{40}\text{Ca}$  можна судити по рис. 1.3.

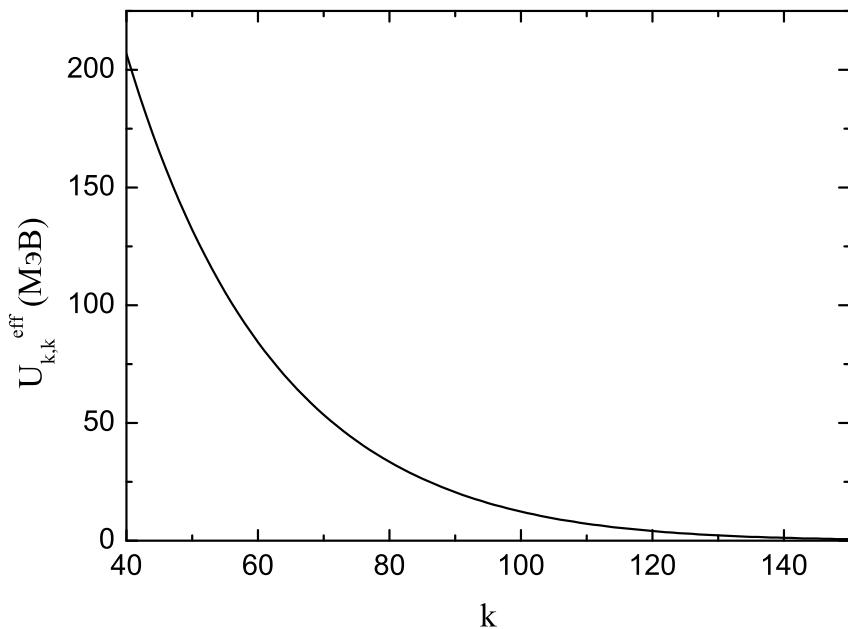


Рис. 1.3 Ефективний потенціал  $U_{k,k}^{\text{eff}}$  для системи  ${}^{40}\text{Ca}-{}^{40}\text{Ca}$  в залежності від числа квантів  $k$ .

Їого дія сягає аж до відстаней між центрами мас кластерів порядку 11 фм, тобто далеко за межі радіуса кожного з кластерів.

Оскільки всі власні значення монотонно прагнуть до одиниці знизу, ефективна взаємодія, що породжується впливом принципу Паулі на оператор кінетичної енергії, відповідає відштовхуванню. Саме тому при малих енергіях хвильові функції систем, що розглядаються, пригнічені в тій області, де власні значення дозволених станів близькі до нуля. Хвильові функції дискретного представлення при енергії 5 MeV для  $\alpha-\alpha$ ,  ${}^{16}\text{O}-{}^{16}\text{O}$  і  ${}^{40}\text{Ca}-{}^{40}\text{Ca}$  систем зображені на рис. 1.4.

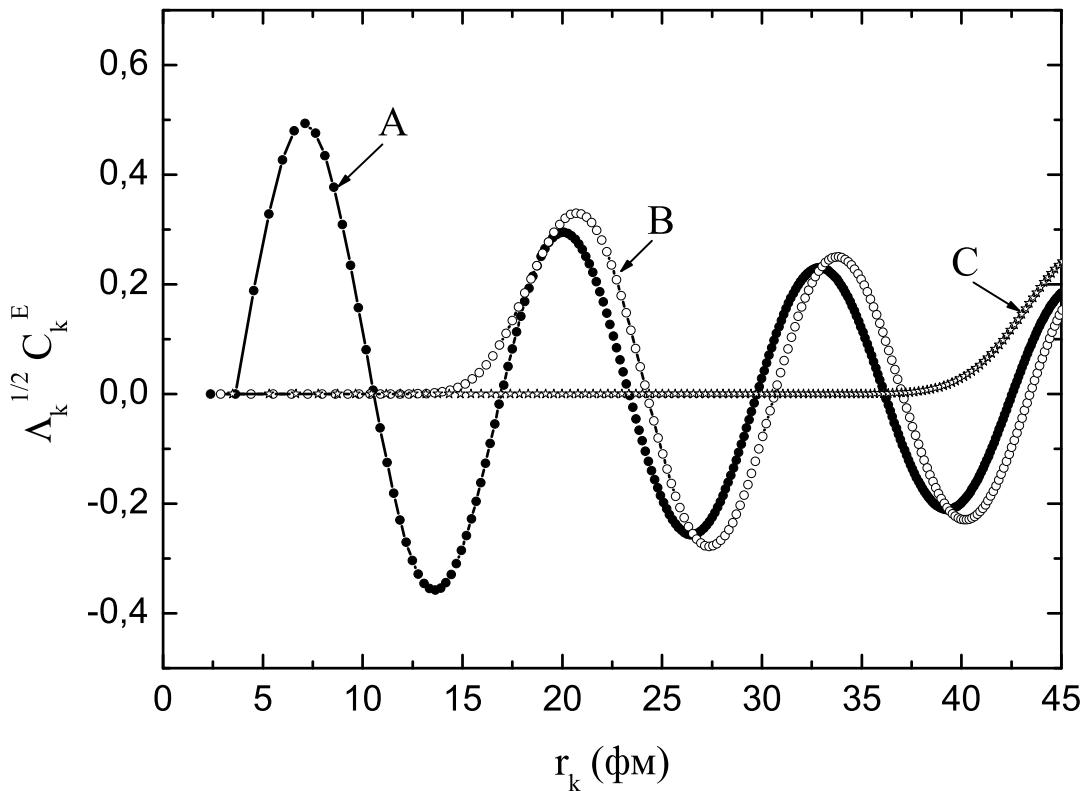


Рис. 1.4 Коефіцієнти розкладу  $\sqrt{\Lambda_k} C_k^E$  по базису дозволених станів хвильових функцій неперервного спектра одноканальних кластерних систем при  $E = 5$  MeВ. А –  $\alpha$ - $\alpha$ ; В –  $^{16}\text{O}$ - $^{16}\text{O}$ ; С –  $^{40}\text{Ca}$ - $^{40}\text{Ca}$ .

Хвильова функція дискретного представлення має вигляд сукупності коефіцієнтів розкладу  $\sqrt{\Lambda_k} C_k^E$  по базису дозволених станів. Якщо за незалежну змінну вибрати  $r_k = r_0\sqrt{4k+3}$ , поведінка коефіцієнтів нагадує поведінку суперпозиції функцій Бесселя  $J_{1/2}(r_k\sqrt{2E})$  і Неймана<sup>1</sup>  $N_{1/2}(r_k\sqrt{2E})$ .

Очевидно, що рівність нулю коефіцієнтів розкладу хвильової функції по заборонених станах завжди має місце і не залежить від енергії. Між тим, коефіцієнти розкладу майже заборонених станів виявляються малими, поки мала енергія відносного руху кластерів. Однак з ростом енергії абсолютна величина цих коефіцієнтів зростає, що демонструє рис. 1.5, де

**Примітка 1.** тут  $m = \hbar = 1$ .

представлена хвильова функція системи  $^{16}\text{O}-^{16}\text{O}$  при енергії 50 МеВ.

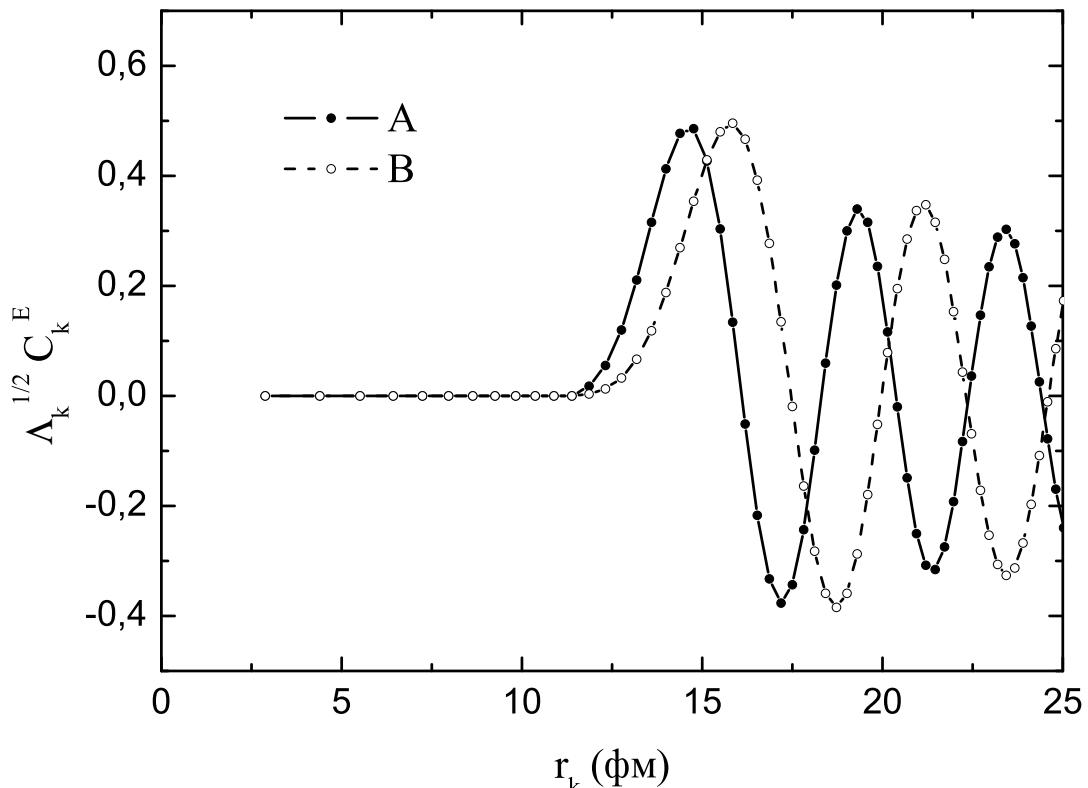


Рис. 1.5 Коефіцієнти розкладу  $\sqrt{\Lambda_k} C_k^E$  по базису дозволених станів хвильових функцій неперервного спектра системи  $^{16}\text{O}-^{16}\text{O}$  при  $E = 50$  МеВ. А – взято до уваги лише вплив принципу Паулі на оператор кінетичної енергії; В – врахована також кулонівська взаємодія.

Додатковим фактором пригнічення деякої кількості перших коефіцієнтів розкладу є кулонівський потенціал. Як видно з рисунка 1.5, врахування кулонівської взаємодії приводить до того, що максимум хвильової функції зсувається в сторону великих значень  $r_k$ . Обговорюване явище пов'язане з тим, що при зближенні кластерів відбувається їх гальмування не лише через кулонівські сили, але і завдяки дії принципу Паулі, а подолати це гальмування кластери здатні лише тоді, коли енергія їх буде достатньо великою.

Вплив кулонівського потенціалу на формування фазових зсувів  $^{16}\text{O}$ - $^{16}\text{O}$  розсіяння в стані з орбітальним моментом  $L = 0$  показано на рис. 1.6.

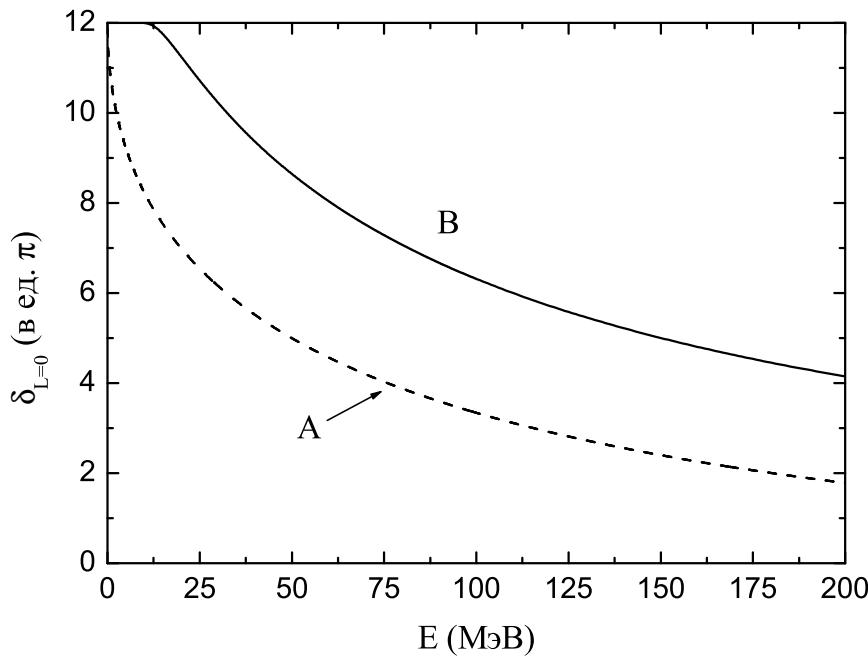


Рис. 1.6 Фази пружного розсіяння  $^{16}\text{O}$ - $^{16}\text{O}$ . А – фаза, отримана з урахуванням лише модифікованого оператора кінетичної енергії; В – взятий до уваги також кулонівський потенціал.

Доки енергія відносного руху кластерів менша за висоту кулонівського бар'єру ( $\sim 20$  MeВ), домінуючий вплив на поведінку фази розсіяння має кулонівська взаємодія і тому на цьому інтервалі енергій фаза експоненційно мала. Проте, як буде показано в наступному підрозділі, інтенсивність ефективної взаємодії відштовхування, обумовленої впливом принципу Паулі на оператор кінетичної енергії, на порядок перевищує висоту кулонівського бар'єру. Тому при енергіях  $E > 20$  MeВ фаза формується, в першу чергу, модифікованим оператором кінетичної енергії. Амплітуда зміни фази розсіяння визначається кількістю заборонених станів і становить  $12\pi$ . Ядерна кулонівська фаза перевищує лише ядерну фазу на величину порядку  $(2.5 - 3)\pi$ . Цей факт необхідно брати до уваги, аналізуючи кутові

розділи продуктів розсіяння.

**“Фазові портрети” і фази розсіяння.** В цьому підрозділі ми звернемося до аналізу руху кластерів за допомогою функції розподілу імовірності допустимих фазових траєкторій, визначених в фазовому просторі імпульсів  $\eta$  і координат  $\xi$  (фазових портретів). Фазові траєкторії відповідають континууму точок заданої висоти над  $(\xi, \eta)$  площиною. Імовірність реалізації фазової траєкторії пропорційна цій висоті.

Щоб побудувати фазові траєкторії класичної механіки, необхідно при заданих значеннях енергії та інших інтегралів руху знайти залежність імпульса від координати. Тоді фазовий портрет відповідає сукупності фазових траєкторій, що відрізняються значенням енергії. В представленні Фока-Баргманна фазовий портрет бінарної системи містить всі можливі траєкторії при фіксованих значеннях енергії і орбітального момента.

Для зв’язаних станів системи двох кластерів є лише фінітні траєкторії (см. рис. 1.7). Серед них відзначимо ті, які проходять навколо однієї з точок фазового простору, де густина імовірності розподілу має абсолютний максимум. Їм відповідає нульовий імпульс і значення координати, близькі до точок повороту в полі, що створює зв’язаний стан. Саме в околі двох таких точок бінарна система знаходиться більшу частину часу. Є серед фінітних траєкторій і такі, які охоплюють область, що містить обидві точки повороту. На рис. 1.7 представлена фінітні траєкторії зв’язаного стану системи двох ядер  $^3\text{H}$ , що відповідає нульовим значенням повного спіну і орбітального моменту. Потенціал  $^3\text{H}-^3\text{H}$  взаємодії моделюється діагональним матричним елементом в тому базисному стані, який відповідає найнижчій конфігурації трансляційно-інваріантній моделі оболонок. Такий модельний потенціал забезпечує спостережувану порогову енергію розвалу ядра  $^6\text{He}$  по каналу  $^3\text{H}+^3\text{H}$  (12.3 MeV [63]) і близький до експериментального значення середньоквадратичний радіус  $^6\text{He}$ , рівний 2.24 fm.

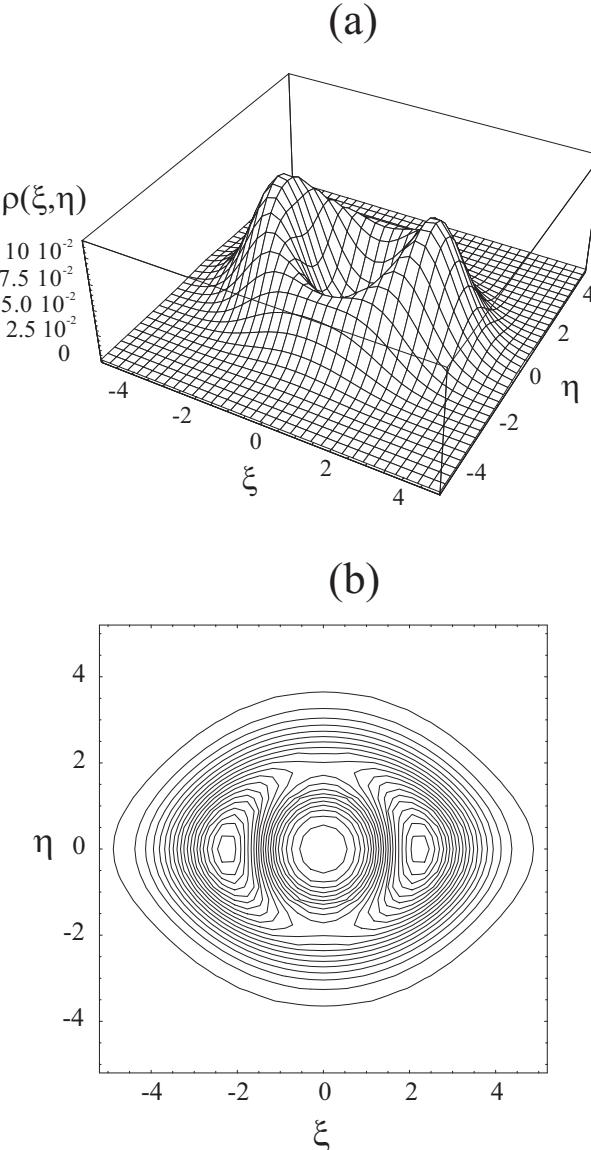


Рис. 1.7 Фазовий портрет зв'язаного стани системи  ${}^3\text{H}-{}^3\text{H}$ . (а) Густота розподілу імовірності  $\rho(\xi, \eta)$  в залежності від безрозмірних координат  $\xi$  і імпульса  $\eta$ . (б) Фазові траєкторії.

В станах неперервного спектра фазовий портрет містить поряд з інфінітними також фінітні траєкторії. Якщо перші подібні до класичних для задачі зіткнення двох частинок, то останні вказують на факт гальмування кластерів, що зіштовхуються. Воно відбувається і тоді, коли кластери зупиняються, підлетівши один до одного на мінімальну для їх енергії відстань, і тоді, коли вони, маючи енергію, що перевищує бар'єр ефективного відштовхування, проходять, не зупиняючись, нульове значення координати. Поведінка фазових траєкторій в околі початку координат відображає

існування обмінних ефектів в процесі зіткнення кластерів. Крім того, поки енергія відносного руху кластерів менша тієї, яка потрібна для квазікласичної границі, поряд з головними максимумами густини розподілу є і інші у відповідності з поведінкою хвильової функції координатного представлення.

Якщо ефективний потенціал антисиметризації є притяганням, то точки повороту, а разом з ними точки максимуму густини, поки енергія менша бар'єра Паулі, знаходяться ближче до початку координат, ніж у випадку відштовхування. В свою чергу максимум густини розподілу більше, ніж при відштовхуванні. Ясно, що в результаті ефективний переріз ядерних реакцій повинен збільшуватись.

Є два граничних випадки, коли можна передбачити поведінку найбільш імовірних квантових траєкторій, оскільки вони наближаються до відомих класичних. Результати квантової механіки мають бути тотожні результатам класичної, якщо енергія системи необмежено зростає або якщо квантові траєкторії визначені в тій області фазового простору, де набуває великих значень координата  $\xi$ . Із збільшенням енергії і, отже, абсолютноого значення відповідного їй імпульса, вклад фінітних траєкторій зменшується, а інфінітні згущаються навколо класичних фазових траєкторій відносного руху двох частинок. Якщо ж енергія залишається незмінною, але необмежено росте модуль координати, знову виявляється справедливою квазікласична апроксимація і квантові траєкторії в цій області фазового простору знову згущаються навколо класичних з додатнім і від'ємним імпульсом.

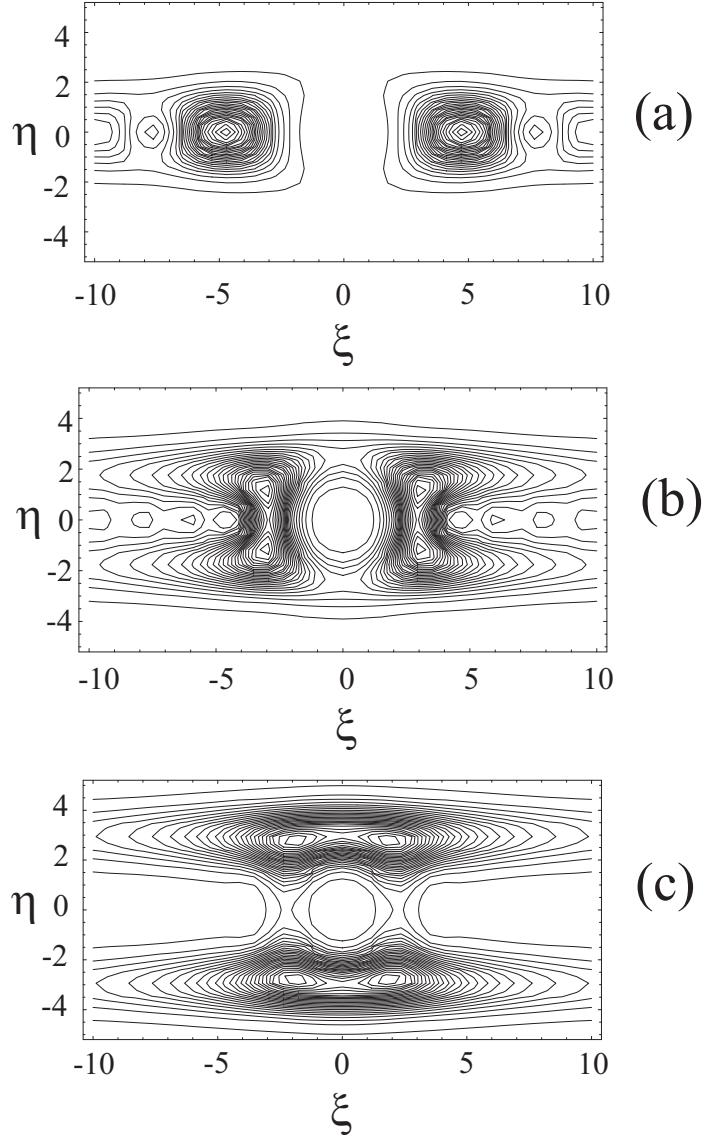


Рис. 1.8 Фазові траєкторії для системи  $\alpha$ - $\alpha$  при енергії в с.ц.м. (а)  $E = 5$  MeB; (б)  $E = 35$  MeB; (в)  $E = 100$  MeB.  $\xi$  і  $\eta$  – безрозмірні координата і імпульс.

Тепер звернемося до конкретних прикладів, що ілюструють сформульовані вище загальні міркування за умови, що потенціальна енергія взаємодії кластерів не береться до уваги. На рис. 1.8 представлена фазові траєкторії для  $\alpha$ - $\alpha$  розсіяння при трьох різних значеннях енергії відносного руху кластерів.

Аналізуючи фазові портрети  $\alpha$ - $\alpha$  зіткнення, можна оцінити і розміри області впливу принципу Паулі  $r_{\text{eff}}$  на кластери, і інтенсивність ефективного відштовхування. Поки енергія  $E$  системи не досягла деякого критично-

го значення, існує область міжкластерних відстаней, де фазові траєкторії практично відсутні, іншими словами, імовірність їх реалізації мала (див. рис. 1.8 (а)). Більш того, всі інфінітні траєкторії відповідають відштовхуванню, що створюється завдяки принципу Паулі. Відстань між центрами мас двох  $\alpha$ -частинок, коли ефекти антисиметризації грають важливу роль, наближено дорівнює 4.65 Фм. В той же час для двох ядер  $^{16}\text{O}$  вона становить  $r_{\text{eff}} \simeq 7.12$  Фм. І в тому, і в іншому випадку радіус області впливу принципу Паулі перевищує середній квадратичний радіус взаємодіючих кластерів.

Рисунок 1.8 (б) відповідає енергії, що дорівнює висоті бар'єра Паулі (35 МеВ для  $\alpha$ - $\alpha$  системи і 350 МеВ  $^{16}\text{O}$ - $^{16}\text{O}$  системи). При такій енергії  $\alpha$ -кластери можуть опинитись в області, недосяжній для класичної механіки, і тому може бути реалізовано два види інфінітних квантових траєкторій.

Нарешті, рис. 1.8 (с) ілюструє поведінку  $\alpha$ -кластерів, коли енергія їх відносного руху перевищує висоту бар'єру Паулі. Тоді більшість фазових траєкторій відповідають проходженню кластерів один через одний.

Фазовий портрет  $^{16}\text{O}$ - $^{16}\text{O}$  зіткнення при енергії 50 МеВ представлений на рис. 1.9 (а,б). При цьому було взято до уваги лише перенормований оператор кінетичної енергії. Як відзначалось вище, найбільш імовірні квантові траєкторії при великих значеннях координати  $\xi$  зосереджені в околі класичної траєкторії. Максимум густини розподілу знаходитьться в точці повороту. Як видно з рис. 1.9 (с,д), загальний характер поведінки квантових траєкторій не змінюється при врахуванні кулонівської взаємодії. Що ж стосується максимуму густини, то він дещо змістився в сторону великих значень  $\xi$  і до того ж збільшилось значення густини в точці максимуму. Оскільки кулонівська взаємодія збільшує інтенсивність ефективного відштовхування кластерів, в цьому випадку потрібно більше значення  $\eta$ , щоб досягнути області відносно малих  $\xi$ . Але разом з тим кулонівське відштовхування, будучи далекодіючим, дещо згладжує ефективну взаємодію кластерів, обумовлену принципом Паулі, що приводить до збільшення імовірності зна-

ходження кластерів в точці повороту.

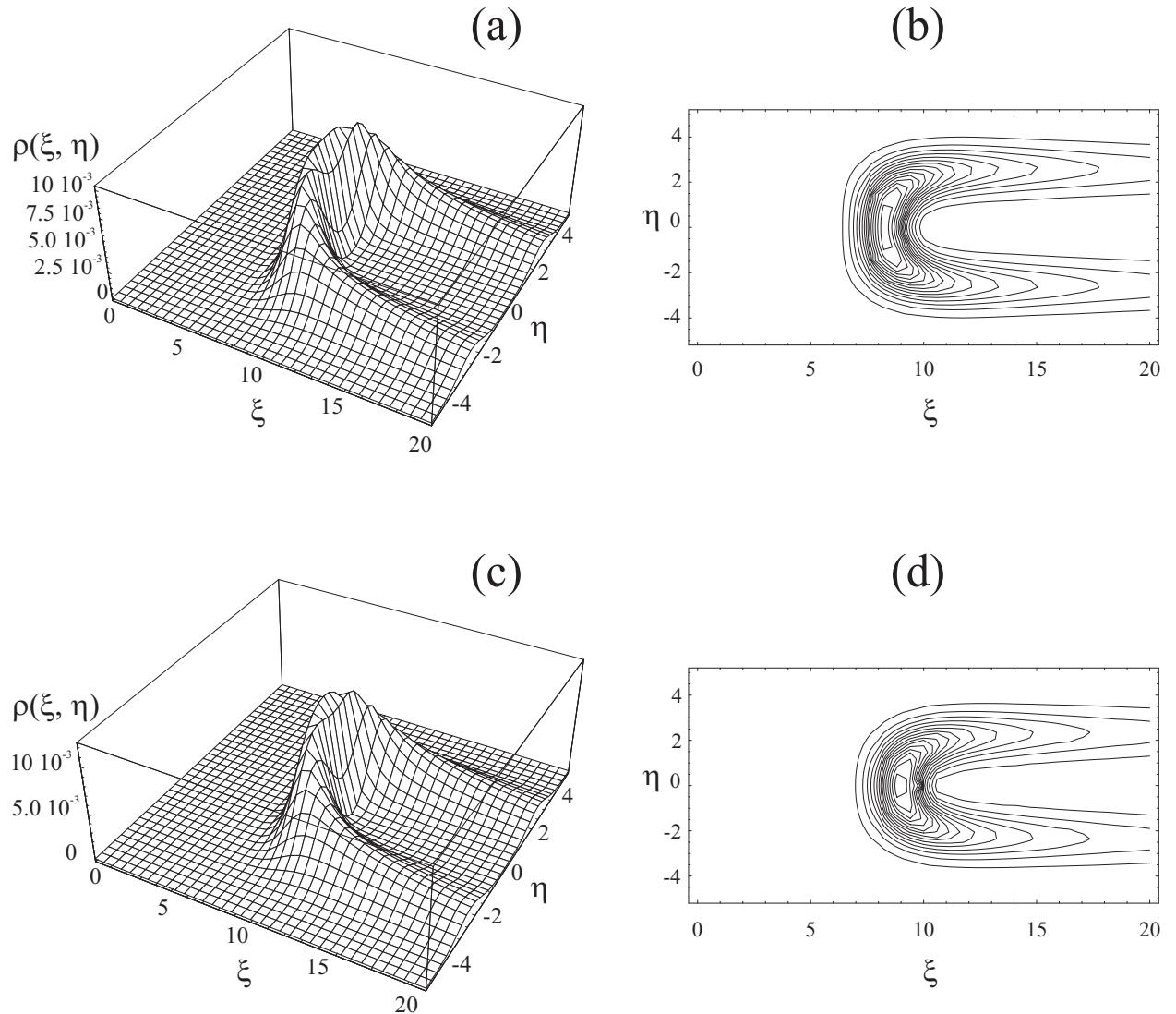


Рис. 1.9 Фазовий портрет розсіяння  $^{16}\text{O}-^{16}\text{O}$  при  $E = 50$  МeВ в с.ц.м. з урахуванням лише впливу антисиметризації на оператор кінетичної енергії (а, б), а також з урахуванням ще і кулонівської взаємодії (с, д). (а) і (с): густина розподілу імовірності  $\rho(\xi, \eta)$  в залежності від безрозмірних координати  $\xi$  і імпульса  $\eta$ . (б) і (д): фазові траекторії.

## 1.6 Розсіяння нейтрона на альфа-частинці

Розсіяння нейтрона на  $\alpha$ -частинці є одним з найпростіших прикладів, який наочно демонструє ефективне притягання кластерів, обумовлене впли-

вом принципу Паулі на кінетичну енергію їх відносного руху. Для цієї системи фаза розсіяння не може бути відтворена за допомогою оптичного потенціалу, що симулює дію принципу Паулі.

Ядро нормування системи  $\alpha+n$ , що генерує повний базис дозволених принципом Паулі станів чи, інакше кажучи ядро інтегрального рівняння, має вигляд:

$$I_{n+\alpha}(\mathbf{R}, \mathbf{S}) = \exp(\mathbf{R} \cdot \mathbf{S}) - \exp\left[-\frac{1}{4}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{S})\right]. \quad (1.22)$$

Це ядро нормування не містить заборонених принципом Паулі станів. Вони вже виключені з нього. Отже, його можна порівняти з результатом дії потенціалу відштовхування, який усуває заборонені стани. Але ми повинні також врахувати власні значення дозволених станів. Отже, за умови, що принцип Паулі симулюється деяким феноменологічним потенціалом, на цьому етапі слід ввести додаткову взаємодію, щоб відтворити динаміку системи після усунення заборонених станів. В підрозділі 1.4 ми обговорювали головні властивості такого додаткового феноменологічного потенціалу.

Власні значення ядра нормування для системи  $\alpha+n$  дорівнюють:

$$\Lambda_\nu = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^\nu.$$

Очевидно, в границі  $\nu \rightarrow \infty$  власні значення наближаються до одиниці знизу, якщо число квантів парне ( $\nu = 2k$ ); і згори, якщо число квантів непарне ( $\nu = 2k + 1$ ). Мінімальне число квантів  $\nu_{\min}$ , яке відповідає найнижчому дозволеному принципом Паулі стану, дорівнює одиниці. Це означає, що гілка, яка належить до  $SU(3)$  незвідного представлення  $(2k+1, 0)$  з'являється першою і її власні значення є найбільшими.

Щоб проілюструвати наші висновки щодо характерних властивостей ефективної взаємодії, обумовленої принципом Паулі, доцільно розглянути фази пружного розсіяння нейтрона на  $\alpha$ -частинці<sup>1</sup> в станах з  $L^\pi = 0^+$  [Рис. 1.10 (a)] і  $L^\pi = 1^-$  [Рис. 1.10 (b)]. Нульовий орбітальний момент від-

---

**Примітка 1.** Ці фазові зсуви були розраховані раніше [88], але нашою метою є показати, якою мірою вони породжуються оператором антисиметризації.

повідає власним значенням  $\Lambda_{2k} < 1$ , тоді як власні значення  $\Lambda_{2k+1}$ , що перевищують одиницю, відповідають моменту  $L = 1$ .

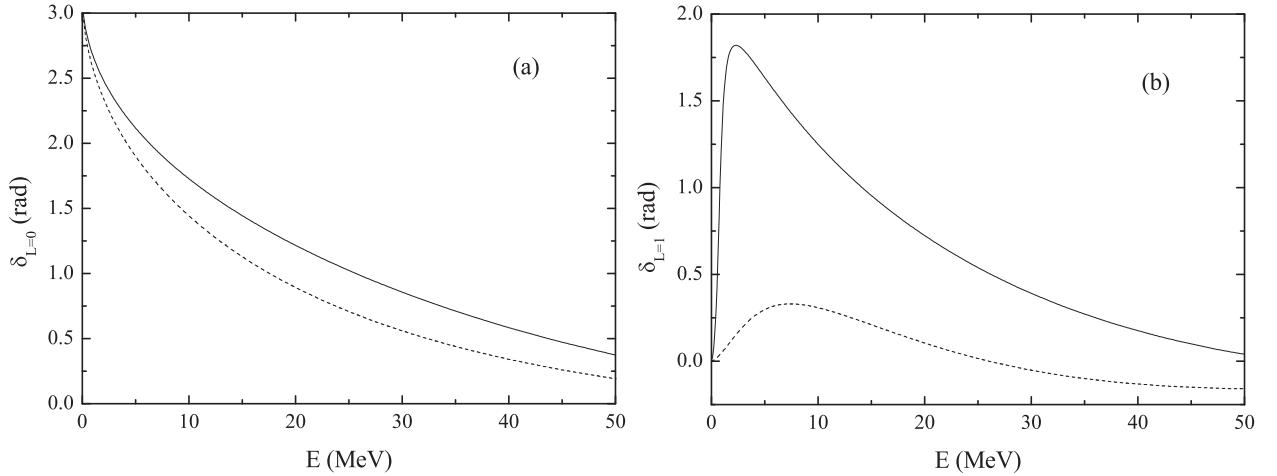


Рис. 1.10 Фази  $\alpha+n$  розсіяння в станах з (а)  $L = 0$  і (б)  $L = 1$ . Суцільна крива: фази розсіяння, отримані в наближенні нульового радіусу дії ядерних сил. Пунктирна крива: фази розсіяння, отримані з урахуванням лише кінетичного обмінного потенціалу (див. деталі в тексті).

Поведінка фаз розсіяння  $\delta_{L=0}$  і  $\delta_{L=1}$  для випадку, коли враховуються лише ефекти антисиметризації на кінетичну енергію і в наближенні нульового радіусу ядерних сил представлена на рис. 1.10. В цьому наближенні потенціальна енергія взаємодії нейтрона з  $\alpha$ -частинкою симулюється єдиним параметром, діагональним матричним елементом оператора потенціальної енергії  $\hat{U}$  в стані з мінімальним числом парних (для  $L = 0$ ) чи непарних (для  $L = 1$ ) квантів, тобто

$$\langle(\nu, 0)|U|(\nu', 0)\rangle = \begin{cases} U_0 = -5.52 \text{ MeV} & \text{if } \nu = \nu' = \nu_{min} = 2, L = 0 \\ \bar{U}_0 = -11.05 \text{ MeV} & \text{if } \nu = \nu' = \nu_{min} = 1, L = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Параметр  $\bar{U}_0$  було вибрано так, щоб відтворити положення максимуму повного перерізу пружного розсіяння  $E_r = 0.92 \pm 0.04$  MeВ [63]. Напівширина  $\Gamma = 1.3$  MeВ також добре узгоджується з експериментальним значенням  $\Gamma = 1.2$  MeВ, хоча величина повного перерізу в максимумі вдвічі більша за

його експериментальне значення 7.6 бн. [63]. Що стосується параметра  $U_0$ , його було вибрано так, щоб забезпечити прийнятний опис експериментально спостережуваної фази пружного  $\alpha+n$  розсіяння для  $L = 0$  при низьких енергіях [64].

Поки енергія  $E$  відносного руху кластерів мала, фаза пружного розсіяння з моментом  $L$  задовольняє закону

$$\delta_L \sim \pi n - a_L (2E)^{L+1/2},$$

тобто як для стандартного короткодіючого потенціалу. Тут  $n$  – кількість зв'язаних станів. Якщо  $L = 0$ ,  $a_0$  – довжина розсіяння. Система  $\alpha+n$  не має зв'язаних станів, але має один заборонений принципом Паулі стан при  $k = 0$  з орбітальним моментом  $L = 0$ , який, як відомо, має такий самий вплив на поведінку фази розсіяння  $\delta_0$ , як і зв'язаний стан [91]. Отже, при нульовій енергії фаза розсіяння  $\delta_0$  має відраховуватися від  $\pi$ . Не існує заборонених станів з непарним числом квантів  $i$ , отже, фазу розсіяння  $\delta_1$  слід покласти рівній нулю при нульовій енергії.

Додатній знак довжини розсіяння  $a_0$  підтверджує відоме припущення про те, що принцип Паулі можна симулювати за допомогою потенціалу відштовхування. Звісно, притягання  $\bar{U}_0$  виявляється недостатньо сильним; інакше воно б змінило знак фази розсіяння і довжини розсіяння.

Як видно з рис. 1.10 (b),  $a_{L=1} < 0$ . Отже, ефективна взаємодія, що спричиняється обмінним кінетичним потенціалом, є притягувальною в станах з орбітальним моментом  $L = 1$ . Інтенсивність цього притягування, викликаного ефектами антисиметризації, що з'являються виключно з кінетичної енергії, недостатньо висока, щоб забезпечити існування експериментально спостережуваного резонансу  $L^\pi = 1^-$  в неперервному спектрі ядра  ${}^5\text{He}$ <sup>1</sup>. Але внеском від кінетичного обмінного потенціалу не можна знехтувати, оскільки радіус дії останнього потенціалу перевищує радіус дії ядерних сил.

---

**Примітка 1.** Як відомо, врахування спін-орбітальної взаємодії приводить до розщеплення стану  $L^\pi = 1^-$ ; і, в результаті, з'являються дві фази розсіяння  $\delta_{3/2}$  і  $\delta_{1/2}$ , кожна з яких має резонансну поведінку. В нашому випадку ми маємо лише один резонанс.

Слід наголосити, що залежність від енергії фази розсіяння  $\delta_1$  не можна відтворити, симулюючи дію принципу Паулі за допомогою м'якого чи жорсткого кору. Таке наближення не було б адекватним, оскільки не могло б пояснити додатній знак фазового зсуву при малих енергіях.

## 1.7 Динаміка двокластерних систем в фазовому просторі

**1.7.1 Вступ** Ідея формулювання квантової механіки у фазовому просторі дискутується у численних публікаціях [67–72]. Більша частина таких досліджень концентрується на встановленні зв'язку між квантовою та класичною механіками. Завдяки принципу невизначеності, не існує єдиного визначення фазового простору. З цієї причини, були запропоновані різні квантові розподіли у фазовому просторі. Зокрема, квантові стани Вігнерра та Хушімі в фазовому простору презентували функцію розподілу (див. визначення, наприклад, в роботах [67, 68]), а рівняння руху були рівняння типу Ліувілля.

Іншу можливість для опису динаміки кванто-механічних систем реалізує представлення вектора стану. В цьому випадку квантовий стан презентується хвильовою функцією, а рівняння руху є рівняннями типу Шредінгера. Визначення фазового простору пов'язують із вибором деякого оператора, який повинний бути діагональним і в координатному, і в імпульсному представленні. В координатному просторі оператор координати діагональний, в імпульсному просторі нелокальний. В той же час, імпульсне представлення діагоналізує оператор імпульсу, але робить нелокальним оператор координати. Очевидно, що оператор координати та оператор імпульсу не можуть бути діагональними одночасно через принцип невизначеності. Тому потрібно шукати інший шлях.

В роботі [69] згадувалось, що представлення квантового стану як амплітуди ймовірності, яка залежить від двох змінних, пов'язаних із координа-

тою та імпульсом, було сформульовано досить давно в роботах Фока [73] і Баргманна [47]. В просторі Фока-Баргманна квантовий стан представляється цілою функцією комплексної змінної, де реальна та уявна частина цієї змінної пропорційні координаті та імпульсу, відповідно. Представлення Фока-Баргманна діагоналізує оператор народження, але робить нелокальним оператор анігіляції.

Кvantово-механічну проблему можна розв'язувати в одному із перерахованих вище просторів. Образ Фока-Баргманна для хвильової функції можна отримати із хвильової функції координатного простору за допомогою лінійного перетворення, між тим як густини розподілу Вігнера та Хушімі використовують білінійне перетворення по відношенню до хвильової функції в координатному просторі. Однак, представлення Фока-Баргманна тісно пов'язане з густиною розподілу Хушімі. Остання дорівнює квадрату образу Фока-Баргманна відповідної хвильової функції в координатному просторі, помноженому на міру Баргманна.

В роботах [70, 71], Торрес-Вега та Фредерік запропонували представлення у фазовому просторі для квантових векторів стану. Автори постулювали наявність повного набору станів  $|q, p\rangle$  таких, що у фазовому просторі квантовий стан  $|\psi\rangle$  представлений  $\mathcal{L}^2(2)$  хвильовою функцією  $\psi(p, q) = \langle q, p|\psi\rangle$ . Тут  $q, p$  дійсні величини, а оператори координати та моменту у базисі цих функцій мають вигляд:

$$\widehat{Q} = \frac{q}{2} + i\hbar \frac{\partial}{\partial p}, \quad \widehat{P} = \frac{p}{2} - i\hbar \frac{\partial}{\partial q}. \quad (1.23)$$

Таким чином, Торрес-Вега та Фредерік розробили формулювання хвильових функцій квантової механіки у фазовому просторі. Такі хвильові функції задовольняють рівнянню Шредінгера у фазовому просторі, а квадрат абсолютноного значення хвильової функції грає роль густини розподілу у фазовому просторі та підкоряється рівнянню Ліувілля. Однак, вектор квантового стану у фазовому просторі не має єдиного визначення, оскільки існує безліч базисів, які залежать від двох дійсних змінних  $p, q$  та які приводять до вищезгаданих операторів координати та імпульсу  $\widehat{Q}$  and  $\widehat{P}$ .

В роботі [71], автори використали когерентні стани як базисні вектори та продемонстрували, що довільний когерентний стан приводить до виразу (1.23) для операторів координат та імпульсу  $\hat{Q}$  і  $\hat{P}$ . Більше того, вони прийшли до висновку, що тільки в представленні когерентних станів можливо визначити оператори координат та імпульсу у такий спосіб.

Слідуючи Клаудеру та Переломову, в роботі [71] набір когерентних станів був визначений як результат дії оператора Вейля  $\hat{D}(q, p)$  (оператор трансляції у фазовому просторі)

$$\hat{D}(q, p) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (p \hat{Q} - q \hat{P}) \right\}$$

на деякий довільний нормований вектор  $|\chi\rangle$  :

$$|q, p; \chi\rangle \equiv \hat{D}(q, p)|\chi\rangle.$$

Для будь-якого фіксованого вектора  $|\chi\rangle$  набір когерентних станів  $|q, p; \chi\rangle$  забезпечує неперервне представлення квантових станів, де коефіцієнти розкладу можна інтерпретувати як хвильові функції у фазовому просторі.

Тоді  $|\psi_\chi(q, p)|^2$  є "роздіженою" густинною розподілу у фазовому просторі, яка визначає ймовірність того, що система локалізована в околі центру зміщеного стану  $\chi$  деякої "роздіженої" області. Міра "дифузності" залежить від вибору вектора  $\chi$ . Якщо ми виберемо основний стан гармонійного осцилятора в якості вектора  $\chi$ , тоді  $|\psi_\chi(q, p)|^2$  буде визначати імовірність знайти систему в елементі фазового об'єму  $\Delta q \Delta p = h$  в околі точки  $(q, p)$ .

Рівняння Шредінгера у фазовому просторі не залежить явно від вибору вектора  $\chi$ . Однак у розрахунках середніх значень різних операторів потрібно використовувати хвильові функції, які належать тому ж представленню когерентних станів, що і вектор  $\chi$ . Це можна досягнути вимогою, щоб вектор  $\chi$  був власним вектором деякого оператора. Таким чином, для однозначного формулювання квантової механіки необхідно розв'язувати два рівняння у фазовому просторі.

Виникає питання, чи можливо сформулювати квантову механіку у фазовому просторі, щоб одного рівняння було досить і для розв'язання квантово-

механічної проблеми, і для визначення представлення. Як було встановлено у роботі [71], представлення Фока-Баргманна пропонує найкращу відповідь на поставлене запитання. Представлення Фока-Баргманна – це представлення вектора стану в комплексній площині, яке побудовано на відображені бозонних операторів народження та анігіляції  $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ :

$$\hat{a} \rightarrow \frac{\partial}{\partial R}, \quad \hat{a}^\dagger \rightarrow R. \quad (1.24)$$

В цьому представленні квантова механіка може бути однозначно побудована завдяки тому, що оператор народження  $\hat{a}^\dagger$  діагональний у такому представленні. Співвідношення  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$  доповнюється співвідношенням бозонних операторів і операторів координати  $\hat{Q}$  та імпульсу  $\hat{P}$ :

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{b} \hat{Q} - i \frac{b}{\hbar} \hat{P} \right), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{b} \hat{Q} + i \frac{b}{\hbar} \hat{P} \right),$$

де  $b$  – осциляторна довжина.

Для конкретного гамільтоніану  $\hat{H}(\hat{Q}, \hat{P})$  можна зафіксувати співвідношення між операторами  $\hat{Q}, \hat{P}$  та бозонними операторами  $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ , вибираючи певне значення осциляторної довжини  $b$ . Тоді гамільтоніан можна виразити через бозонні оператори  $\hat{H}(\hat{Q}, \hat{P}) \rightarrow \mathcal{H}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ . Отже, вектор  $\chi$  повністю визначається значенням осциляторної довжини  $b$ . В цьому випадку, вектор  $\chi$  є вакуумним вектором  $|0\rangle$ .

Представлення Фока-Баргманна можна асоціювати із довільним когерентним станом Глаубера, який побудований на власному векторі  $\chi$  оператора анігіляції  $a$ . Згідно з Переломовим [74], когерентний стан описує хвильовий пакет для гармонійного осцилятора, що не розпливається. Крім цього, такі когерентні стани мінімізують співвідношення невизначеності Гайзенберга  $\Delta q \Delta p \geq \hbar$ . Тому когерентні стани – це такі квантові стани, які найбільше схожі на класичні. Рівняння Шредінгера у представленні Фока-Баргманна має наступний вигляд:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \mathcal{H}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) |\psi\rangle \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_{FB}(R) = \mathcal{H} \left( \frac{\partial}{\partial R}, R \right) \psi_{FB}(R), \quad (1.25)$$

де

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{q}{b} + i \frac{b}{\hbar} p \right).$$

Таким чином, повний базис хвильових функцій, які належать до класу когерентних станів та мінімізують співвідношення невизначеності Гайзенберга, може бути однозначно побудований в результаті розв'язку рівняння Шредінгера в представленні Фока-Баргманна (1.24).

Ми точно слідуємо цій стратегії та представляємо хвильові функції, а також густини розподілу у представленні Фока-Баргманна. Однак, ми не розв'язуємо рівняння типу (1.25), а використовуємо інший шлях для отримання точної хвильової функції квантово-механічної системи. Ми приділяємо головну увагу аналізу ядерних систем з чіткою двокластерною структурою, тоді як автори робіт [69, 71] досліджували одновимірні системи, у яких розв'язки рівнянь можна було знайти в аналітичній формі. Значні зусилля докладені для визначення тієї частини фазового простору, яка найбільш важлива для реалізації динаміки двокластерних систем. Ми також запропонували шлях для дослідження густин розподілу у фазовому просторі у тривимірному випадку, коли густина розподілу ймовірностей залежить від шести змінних: абсолютних величин координат та імпульсу, і чотирьох кутів.

Існує певна схожість нашого методу із методом антисиметризованої молекулярної динаміки (АМД) [75, 76] та методом ферміонної молекулярної динаміки (ФМД) [77, 78]. АМД і ФМД інтенсивно використовуються для вивчення кластерної динаміки в легких атомних ядер та апелюють до фазового простору. Всі три методи використовують одинакові одночастинкові орбіталі для побудови багаточастинкової хвильової функції у вигляді детермінант Слете́ра. Це означає, що всі методи використовують одну й ту саму частину загального простору Гільберта, за умови, що всі вони беруть до уваги один і той же тип кластеризації системи нуклонів. Однак, між нашим методом та методами АМД та ФМД існує багато відмінностей. По-перше, в нашему методі ми використовуємо детермінанти Слете́ра як твірні функції для повного базису багаточастинкових осциляторних функцій, які описують найбільш важливі з фізичної точки зору типи чи моди

руху багаточастинкової системи. В нашому методі параметр кластеризації служить генераторним параметром, який дає нам можливість виділяти потрібні базисні функції з нескінченного набору осциляторних функцій. Водночас, у методах АМД і ФМД це незалежні змінні фазового простору. Використовуючи набір осциляторних функцій, ми зводимо рівняння Шредінгера до матричної форми. Методи АМД і ФМД використовують залежні від часу рівняння, які виводять за допомогою залежного від часу варіаційного принципу. Після того, як ми отримали хвильові функції у дискретному осциляторному представленні, ми потім переходимо до простору Фока-Баргманна або фазового простору, де ми аналізуємо фазові траєкторії квантової багаточастинкової системи.

Слід наголосити, що всі результати, які представлені в даному розділі, отримані в рамках формалізму фазового простору для квантово-механічних систем, який справедливий для скінченних значень  $\hbar$  і коли  $\hbar$  прямує до нуля. Ми розглянемо деякі прості модельні проблеми, а також реалістичні двокластерні системи. Модельні проблеми, такі як тривимірний гармонійний осцилятор та вільний рух частинки, допоможуть нам виявити особливості фазових портретів. Однак, наша головна мета - дослідження реальних фізичних систем, а саме, легких атомних ядер. Всі розрахунки проведено в рамках мікроскопічної двокластерної моделі, яка базується на методі резонуючих груп [79]. Наш аналіз починається з припущення, що ядра, які ми будемо розглядати, мають наступну кластерну структуру:  ${}^6Li = \alpha + d$ ,  ${}^7Li = \alpha + t$ ,  ${}^7Be = \alpha + {}^3He$ ,  ${}^8Be = \alpha + \alpha$ . Ми не будемо розв'язувати інтегро-диференційне рівняння методу резонуючих груп у фазовому просторі, як це робили автори роботи [70], замість цього ми будемо працювати із гамільтоніаном МРГ в представленні функцій гармонійного осцилятора, які дозволені принципом Паулі та побудовані у просторі Фока-Баргманна. Такий спосіб дозволяє нам інтегро-диференційне рівняння МРГ перетворити у систему лінійних рівнянь для коефіцієнтів розкладу хвильової функції двокластерної системи по базисних функціях гармонійного осцилятора.

В пункті 1.7.2 вводяться всі необхідні означення та формулюється наш підхід до побудови розподілу густин імовірності в просторі Фока-Баргманна. В пункті 1.7.3 ефективність запропонованого підходу демонструється на двох простих модельних проблемах: гармонійному осциляторі та вільному русі тривимірної частинки. В пункті 1.7.4 дано короткий огляд використаної двокластерної моделі. Деталі розрахунків наведено в пункті 1.7.5. Фазові портрети для зв'язаних та резонансних станів легких атомних ядер представлені в пункті 1.7.6. Нарешті, в пункті 1.8 отримані результати інтерпретуються.

**1.7.2 Представлення Фока-Баргманна** В цьому пункті та пункті 1.7.3 ми будемо використовувати безрозмірні одиниці енергії та довжини. Енергія  $E$  вимірюється в одиницях  $\frac{\hbar^2}{mb^2}$  ( $m$  – маса частинки) і довжина вимірюється в осциляторних довжинах  $b$ . В пункті 1.7.4 ми будемо використовувати ядерні одиниці. Це значить, що  $\frac{\hbar^2}{mb^2} = 41.47$  МeВ·Фм<sup>2</sup> а осциляторна довжина вимірюється у фм. Конкретні значення осциляторної довжини буде визначено у наступних розділах.

Перехід для хвильової функції від координатного або імпульсного просторів в простір Фока-Баргманна виконується за допомогою інтегрального перетворення Баргманна-Сігала

$$\Psi_E(\mathbf{R}) = \int K(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \Psi_E(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \mathbf{R} = \frac{\vec{\xi} + i\vec{\eta}}{\sqrt{2}}, \quad (1.26)$$

ядром якого є модифікована орбіталь Блоха-Брінка [9]:

$$K(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \frac{1}{\pi^{3/4}} \exp \left( -\frac{\mathbf{r}^2}{2} + \sqrt{2} (\mathbf{r}\mathbf{R}) - \frac{\mathbf{R}^2}{2} \right). \quad (1.27)$$

В просторі Фока-Баргманна хвильова функція є цілою аналітичною функцією комплексного аргументу  $\mathbf{R}$ , а  $\vec{\xi}$  та  $\vec{\eta}$  – це координата та імпульс, відповідно.

Модифіковані орбіталі Блоха-Брінка є власними функціями оператора координат в просторі Фока-Баргманна:

$$\hat{\mathbf{r}}K(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \mathbf{r}K(\mathbf{R}, \mathbf{r}), \quad \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{R} + \nabla_{\mathbf{R}}).$$

З іншого боку, модифікована орбіталь Блоха-Брінка є когерентним станом та генерує повний базис функцій тривимірного гармонійного осцилятора.

Побудувавши хвильову функцію у просторі Фока-Баргманна, ми можемо знайти густину розподілу, яка залежить від шести змінних: абсолютних значень координат та імпульсу  $\xi, \eta$  і чотирьох кутів  $\Omega_{\vec{\xi}}, \Omega_{\vec{\eta}}$ :

$$dD_E(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = |\Psi_E(\mathbf{R})|^2 d\mu_B = |\Psi_E(\mathbf{R})|^2 \exp\left(-\frac{\eta^2 + \xi^2}{2}\right) \frac{d\xi d\eta}{(2\pi)^3}. \quad (1.28)$$

Тут

$$d\mu_B = \exp\{-(\mathbf{R} \cdot \mathbf{S})\} \frac{d\xi d\eta}{(2\pi)^3}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{R}^*$$

міра Баргманна.

По суті,  $dD_E(\vec{\xi}, \vec{\eta})$  це густина розподілу у просторі Фока-Баргманна. На відміну від функції Вігнера, яку часто використовують для побудови густин розподілу у фазовому просторі, ця величина позитивно визначена для усіх значень  $\vec{\xi}$  і  $\vec{\eta}$ . Фактично,  $D_E(\vec{\xi}, \vec{\eta})$  співпадає із густиною розподілу Хушпімі, із точністю до визначення координат  $\vec{\xi}$  та  $\vec{\eta}$ .

Досить складно досліджувати густину розподілу  $D_E(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ , оскільки вона залежить від великого числа змінних. Для розв'язання цієї проблеми та для отримання найбільш можливої фізичної інформації, ми пропонуємо інтегрувати густину розподілу  $D_E(\vec{\xi}, \vec{\eta})$  по кутах  $\Omega_{\vec{\xi}}$  and  $\Omega_{\vec{\eta}}$ . В результаті ми отримаємо густину розподілу  $D_E(\xi, \eta)$  яка залежить тільки від абсолютних значень координат та імпульсу.

$$D_E(\xi, \eta) \equiv \frac{\int d\Omega_{\vec{\xi}} \int d\Omega_{\vec{\eta}} dD_E(\vec{\xi}, \vec{\eta})}{d\xi d\eta}.$$

Важливо нагадати, що змінна  $\xi$  є аналогом відстані між взаємодіючими частинками (кластерами), а змінна  $\eta$  представляє собою імпульс відносного руху частинок (кластерів).

Для фіксованої енергії  $E$  та інших інтегралів руху, таких як орбітальний момент та парність, густина розподілу  $D_E(\xi, \eta)$  складається з нескінченного числа фазових траєкторій. Фазові траєкторії будемо визначати як

неперервну множину точок на площині  $(\xi, \eta)$  для фіксованого значення густини розподілу  $D_E(\xi, \eta) = const$ , при цьому ймовірність реалізації даної фазової траєкторії пропорційна величині  $D_E(\xi, \eta)$ . Далі ми будемо називати нескінчену множину фазових траєкторій для певного квантового стану досліджуваної системи фазовим портретом. Із збільшенням енергії  $E$ , усі квантові фазові портрети поступово наближаються до їх класичної границі. Тому, аналізуючи фазові портрети, ми можемо кількісно оцінити енергію при якій максимум густини розподілу  $D_E(\xi, \eta)$  припадає на класичну траєкторію.

В роботі [20] ми побудували та проаналізували фазові портрети для вільної квантової частинки в одновимірному просторі, а також для частинки у полі гаусівського потенціалу. Тут ми зосередимося на тривимірному випадку. Перед тим, як перейти до аналізу фазових портретів для двокластерних систем, обговоримо густини розподілу станів для тривимірного гармонійного осцилятора із фіксованим числом осциляторних квантів  $N$  та для вільної частинки у тривимірному просторі у стані з орбітальним моментом  $l$ .

### 1.7.3 Модельні проблеми

**Гармонійний осцилятор** Інтеграл перекриття модифікованих орбіталей Блоха-Брінка

$$\langle \mathbf{S} | \mathbf{R} \rangle \equiv \int K(\mathbf{S}, \mathbf{r}) K(\mathbf{R}, \mathbf{r}) d\mathbf{r} = \exp(\mathbf{R}\mathbf{S})$$

генерує повний базис функцій гармонійного осцилятора в представленні Фока-Баргманна:

$$\exp(\mathbf{R}\mathbf{S}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_l N_{nl}^2 R^{2n+l} S^{2n+l} \sum_m Y_{lm}(\Omega_R) Y_{lm}^*(\Omega_S) \quad (1.29)$$

Тут обидві величини - абсолютне значення та кути комплексного вектора  $\mathbf{R}$  набувають комплексних значень:

$$R = \sqrt{\mathbf{R}^2} = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{(\xi^2 - \eta^2) + 2i(\vec{\xi}\vec{\eta})}}, \quad \Omega_R = \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{\vec{\xi} + i\vec{\eta}}{\sqrt{(\xi^2 - \eta^2) + 2i(\vec{\xi}\vec{\eta})}}$$

Кожна базисна функція відповідає стану з повним числом квантів  $N = 2n + l$ , де  $l$  – орбітальний момент, а  $n$  – число радіальних квантів:

$$|n, l, m; \mathbf{R}\rangle = N_{nl} R^{2n+l} Y_{lm}(\Omega_R), \quad N_{nl} = \sqrt{\frac{4\pi}{(2n)!!(2n+2l+1)!!}}. \quad (1.30)$$

Тут, згідно із визначенням (1.28), густина розподілу для стану  $|n, l; \mathbf{R}\rangle$  гармонійного осцилятора повинна бути записана як

$$dD_{n,l}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \frac{1}{2l+1} \sum_m |n, l, m; \mathbf{S}\rangle \langle n, l, m; \mathbf{R}| d\mu_B.$$

В цьому рівнянні ми провели усереднення по проекції  $m$  орбітального моменту.

Виконавши інтегрування по кутовим змінним вектора координати  $\vec{\xi}$  і моменту  $\vec{\eta}$ , ми приходимо до виразу

$$D_{n,l}(\xi, \eta) = \frac{\xi^2 \eta^2}{(2\pi)^3} \int d\Omega_\xi \int d\Omega_\eta dD_{n,l}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \frac{\xi^2 \eta^2}{2\pi^2} \frac{N_{nl}^2}{2^{2n+l}} e^{-(\xi^2 + \eta^2)/2} \times \\ \times \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} d_\nu^l (\xi^2 - \eta^2)^{2n+2\nu} (\xi^2 + \eta^2)^{l-2\nu} {}_2F_1 \left( -n - \nu, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{4(\xi\eta)^2}{(\xi^2 - \eta^2)^2} \right),$$

де

$$d_\nu^l = \frac{(-1)^\nu (2l - 2\nu)!}{2^l \nu! (l - \nu)! (l - 2\nu)!}.$$

Як ми бачимо на правій панелі рис. 1.11, із зростанням орбітального момента  $l$  густина розподілу  $D_{n,l}(\xi, \eta)$  потроху витісняється з області малих значень  $\xi$  та  $\eta$  і звужується.

Ліва панель рис. 1.11 демонструє, що густини розподілу  $D_{n,l}(\xi, \eta)$ , які відповідають фіксованому значенню повного числа осциляторних квантів  $N$ , але різним значенням орбітального моменту  $l$ , має максимум на тому самому колі:

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} = 2n + l + 2. \quad (1.31)$$

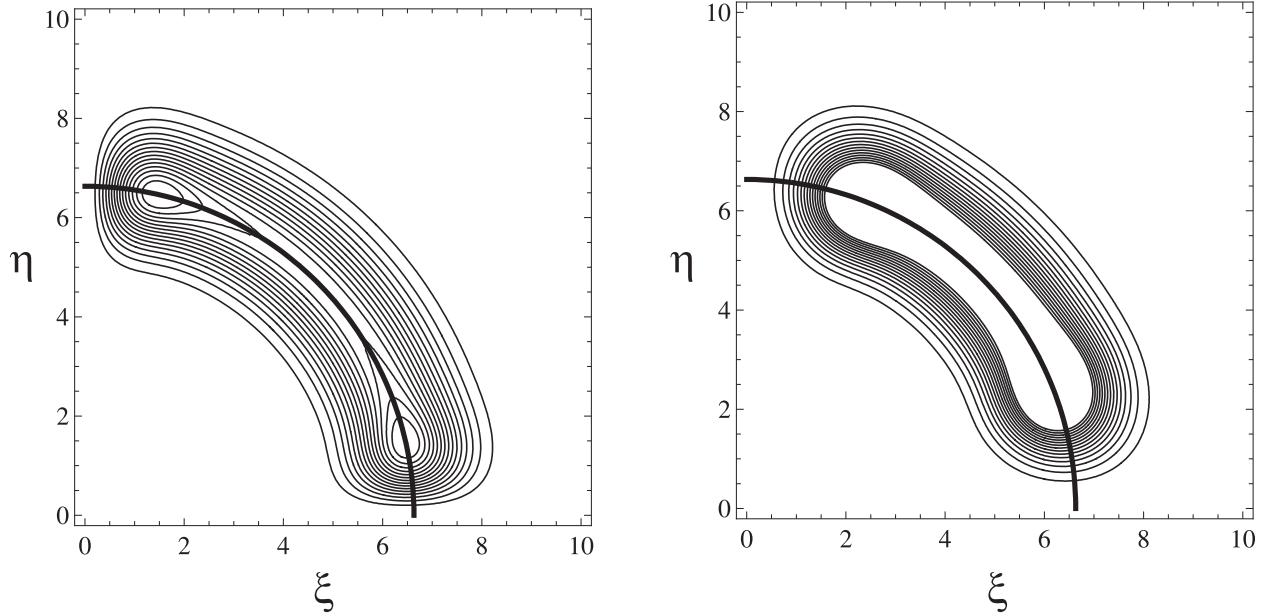


Рис. 1.11 Фазові портрети для тривимірного гармонійного осцилятора  $D_{n,l}(\xi, \eta) = const$  із повним числом осциляторних квантів  $2n + l = 20$  як функція безрозмірних координат  $\xi$  і моменту  $\eta$ . Ліва панель відповідає густині розподілу  $D_{n=10,l=0}(\xi, \eta) = const$ , а права панель показує  $D_{n=5,l=10}(\xi, \eta) = const$ . Широка лінія на обох панелях показує класичну траєкторію, яка визначена рівнянням (1.31).

Рівняння (1.31) описує класичні траєкторії частинки з енергією  $E_{cl} = 2n + l + 2$ .

Тому найбільш імовірний локус точок у фазовому просторі для власного значення тривимірного осцилятора із повним числом осциляторних квантів  $N = 2n + l$  відповідає класичній траєкторії із енергією радше  $E_{cl} = N + 2$ , ніж  $E_{cl} = N + 3/2$ . Максимум густини розподілу для стану з  $N$  квантами одновимірного гармонійного осцилятора співпадав із класичною енергією  $E_{cl} = N$ , а не  $E_{cl} = N + 1/2$  (див. роботи [20, 70]).

**Плоска хвиля** В представленні Фока-Баргманна, плоска хвиля або хвильова функція вільної частинки із моментом  $\mathbf{k}$  має такий вигляд:

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{R}) = \pi^{-3/4} \exp \left\{ -\frac{k^2}{2} - i\sqrt{2}(\mathbf{k}\mathbf{R}) + \frac{R^2}{2} \right\}. \quad (1.32)$$

Легко перевірити, що вона є власною функцією оператора моменту  $\hat{\mathbf{k}}$ :

$$\hat{\mathbf{k}}\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{R}) = \mathbf{k}\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{R}), \quad \hat{\mathbf{k}} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{R} - \nabla_{\mathbf{R}}).$$

Густину розподілу для плоскої хвилі (1.32) має гаусівську залежність від імпульсу  $\eta$  та не залежить від координати  $\xi$ :

$$dD_{\mathbf{k}}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = |\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{R})|^2 d\mu_B = \pi^{-3/2} \exp(-(\mathbf{k} - \vec{\eta})^2) \frac{d\vec{\xi} d\vec{\eta}}{(2\pi)^3}. \quad (1.33)$$

Очевидно, що густину розподілу (1.33) має пік при  $\vec{\eta} = \mathbf{k}$ . Ця лінія співпадає із класичною фазовою траєкторією для вільної частинки з моментом  $\mathbf{k}$ .

Проблема стає більш складною, коли ми розглядаємо рух вільної частинки з певним значенням орбітального моменту  $l$ . Ми можемо розкласти власні функції (1.32) оператора імпульсу  $\hat{k}$  по базисних функціях (1.30) тривимірного гармонійного осцилятора в просторі Фока-Баргманна:

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{R}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_l \sum_m |n, l, m; \mathbf{R}\rangle C_{nl}(k) Y_{lm}(\Omega_k). \quad (1.34)$$

Розклад по осциляторних функціях (1.34) в просторі Фока-Баргманна майже такий самий, як мультипольний розклад плоскої хвилі у координатному просторі.

Коефіцієнти розкладу  $C_{nl}(k)$  співпадають із хвильовими функціями гармонійного осцилятора в імпульсному просторі. Зокрема, для нульового значення орбітального моменту коефіцієнти розкладу  $C_{nl}(k)$  мають вигляд

$$C_{n,l=0}(k) = \sqrt{\frac{2\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)}} L_n^{1/2}(k^2) \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right). \quad (1.35)$$

У загальному випадку у просторі Фока-Баргманна довільну хвильову функцію  $\Psi_{lm}^E(\mathbf{R})$  квантового стану, який характеризується орбітальним моментом  $l$ , його проекцією  $m$  та енергією, можна представити у вигляді нескінченного ряду осциляторних функцій (1.30):

$$\Psi_{lm}^E(\mathbf{R}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_l C_{nl}^E |n, l, m; \mathbf{R}\rangle, \quad (1.36)$$

де коефіцієнти розкладу  $C_{nl}^E$  – це розв'язки системи лінійних алгебраїчних рівнянь, до якої приводиться рівняння Шредінгера. Розклад по осциляторних функціях (1.36) записано у просторі Фока-Баргманна; його можна записати у координатному або імпульсному просторі із тими самими коефіцієнтами розкладу  $\{C_{nl}^E\}$ . Такий спосіб представлення та розрахунку хвильових функцій є основою методу, якому ми слідуємо в даній роботі.

Отже, густину розподілу квантового стану, який описується хвильовою функцією  $\Psi_{lm}^E(\mathbf{R})$  набуває вигляду:

$$dD_{E,l}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \frac{1}{2l+1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} \sum_m C_{nl}^E C_{\tilde{n}l}^E |k, l, m; \mathbf{S}\rangle \langle k, l, m; \mathbf{R}| d\mu_B.$$

Після інтегрування цього виразу по кутовим змінним вектора координати  $\Omega_{\vec{\xi}}$  і імпульсу  $\Omega_{\vec{\eta}}$  отримаємо:

$$\begin{aligned} D_{E,l}(\xi, \eta) &= \frac{\xi\eta}{2\pi^2} (\xi^2 - \eta^2) \exp\left(-\frac{\xi^2 + \eta^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} N_{nl} N_{\tilde{n}l} C_{nl}^E C_{\tilde{n}l}^E \times \\ &\times \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} d_{\nu}^l \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{2}\right)^{l-2\nu} (\xi^2 - \eta^2)^{n+\tilde{n}+2\nu} \\ &\times \text{Im} \left[ B\left(\frac{1}{2} + i\frac{\xi\eta}{\xi^2 - \eta^2}; n + \nu + 1, \tilde{n} + \nu + 1\right) \right], \end{aligned}$$

де  $B(z; a, b)$  – це неповна гамма-функція.

Підставляючи коефіцієнти розкладу (1.35) в цю формулу, ми отримаємо густину розподілу для руху вільної частинки із нульовим значенням орбітального моменту. Рис. 1.12 демонструє фазові портрети для вільного руху частинки з моментами  $k = 1$  і  $k = 5$ .

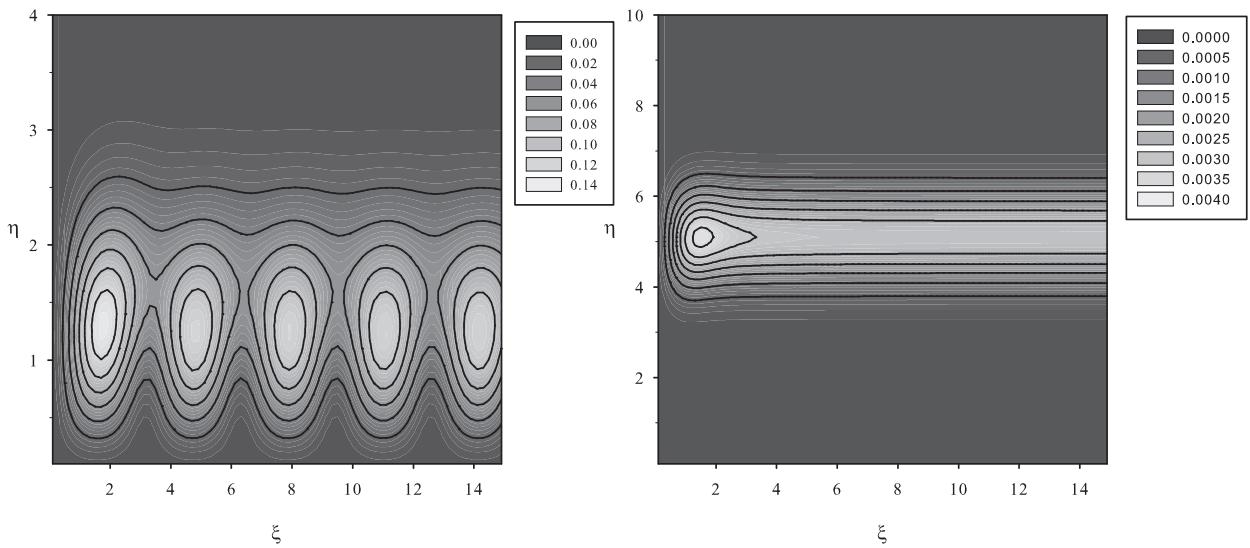


Рис. 1.12 Фазові портрети для руху вільної частинки з енергією  $E = k^2/2$  та з нульовим орбітальним моментом як функція безрозмірних координати  $\xi$  і моменту  $\eta$ . Ліва панель відповідає випадку  $k = 1$ , тоді як права панель відповідає  $k = 5$ .

Як видно із рис. 1.12, для  $k = 1$  густина розподілу осцилює вздовж осі  $\xi$ . Ці осциляції, що приводять до декількох замкнутих траєкторій, мають квантовий характер. Ізростом енергії, густина розподілу стає більш гладкою; всі траєкторії стають інфінітними та наближаються до класичних траєкторій  $\eta \simeq k$ .

Рисунок 1.13 порівнює густини розподілу в просторі Фока-Баргманна, в координатному та імпульсному представленнях для вільної частинки з енергією  $E = k^2/2$ ,  $k = 1$  і нульовим орбітальним моментом.

В координатному просторі хвильова функція вільного руху частинки із нульовим значенням орбітального моменту  $l = 0$  пропорційна сферичній функції Бесселя  $\psi_k(r) = \sqrt{2/\pi} j_0(kr)$ , в той час як в імпульсному просторі вона представлена дельта-функцією Дірака  $\psi_k(p) = \delta(p - k)$ . Як ясно з рис. 1.13, розташування максимумів густини розподілу в просторі Фока-Баргманна в термінах змінної  $\xi$  майже співпадає із максимумами в координатному представленні, між тим максимуми густини розподілу в термінах змінної  $\eta$  знаходяться при  $\eta \simeq 1.25$ , а не при  $\eta = 1$ , як це спостерігається

для густини розподілу в імпульсному просторі.

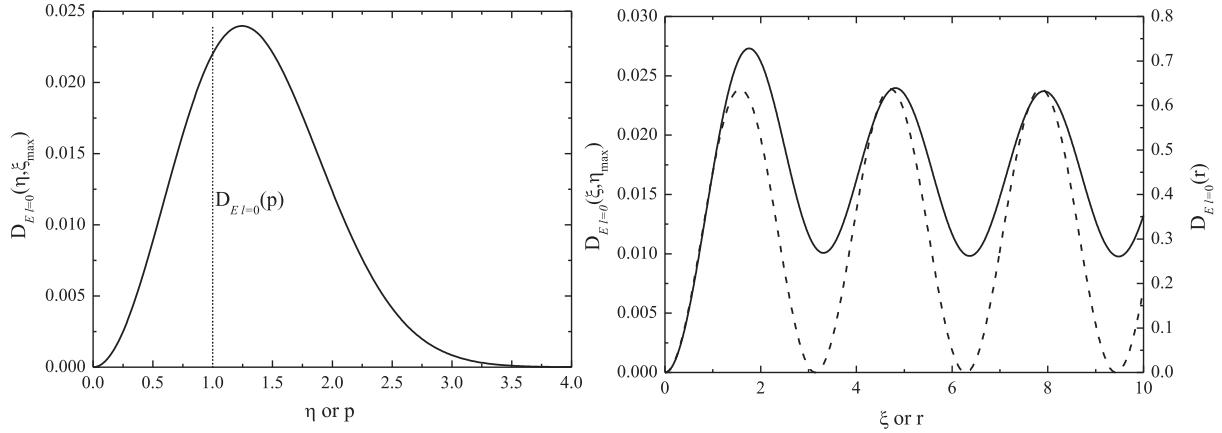


Рис. 1.13 Ліва панель показує густину розподілу  $D_{E,l=0}(\xi_{max}, \eta)$  у фазовому просторі (суцільна лінія) та  $D_{E,l=0}(p)$  в імпульсному просторі (пунктирна лінія) для вільного руху частинки тривимірному просторі з енергією  $E = k^2/2$ ,  $k = 1$  та нульовим значенням орбітального моменту. Права панель показує густину розподілу  $D_{E,l=0}(\xi, \eta_{max})$  у фазовому просторі (суцільна лінія) та  $D_{E,l=0}(p)$  в координатному просторі.

**1.7.4 Двокластерна модель легких ядер** Ми коротко презентуємо головні ідеї двокластерної моделі, яку ми будемо використовувати для дослідження динаміки двокластерних систем. Перш за все, ми обмежимося самими легкими ядрами  $p$ -оболонки.

Хвильову функцію для кластеризації  $A = A_1 + A_2$  представимо у вигляді

$$\Psi_J = \widehat{\mathcal{A}} \left\{ [\Phi_1(A_1) \Phi_2(A_2)]_S \psi_{LS}^J(q) Y_L(\widehat{\mathbf{q}}) \right\}_J, \quad (1.37)$$

де  $\widehat{\mathcal{A}}$  – це оператор антисиметризації,  $\mathbf{q}$  вектор Якобі, пропорційний вектору  $\mathbf{r}$ , що з'єднує центри мас взаємодіючих кластерів

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} \sqrt{\frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}} = \sqrt{\frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}} \left[ \frac{1}{A_1} \sum_{i \in A_1} \mathbf{r}_i - \frac{1}{A_2} \sum_{j \in A_2} \mathbf{r}_j \right]. \quad (1.38)$$

Ми припускаємо, що число нуклонів у кожному кластері  $A_i$  не перевищує 4:  $1 \leq A_i \leq 4$ . Із запису хвильової функції видно, що ми використовуємо схему  $LS$  зв'язку, коли повний спін  $S$  поєднується з повним орбітальним моментом  $L$  та генерує повний кутовий момент  $J$ . Для двох взаємодіючих скластерів повний орбітальний момент  $L$  співпадає із орбітальним моментом відносного руху кластерів.

Для знаходження хвильової функції  $\psi_{LS}^J(q)$  відносного руху кластерів, потрібно розв'язати систему інтегро-диференційних рівнянь (див. деталі в [38]). Ця система рівнянь та форма хвильової функції (1.37) є ключовими елементами добре відомого методу резонуючих груп.

Інтегральна частина інтегро-диференційного рівняння для хвильової функції  $\psi_{LS}^J(q)$  виникає завдяки оператору антисиметризації  $\widehat{\mathcal{A}}$  та нелокальній формі операторів потенціальної та кінетичної енергії, а також ядра нормування. Визначення та обговорення основних властивостей ядер нормування та гамільтоніану можна знайти в роботах [38, 80]. Аналіз рівнянь МРГ та методи їх розв'язку викладені в роботі [81].

Форму та процедуру розв'язування рівнянь МРГ для функції  $\psi_{LS}^J(q)$  можна спростити, якщо використовувати повний набір квадратично-інтегровних функцій. Такий спосіб розв'язування рівнянь МРГ із базисом осциляторних функцій прийнято називати алгебраїчною версією МРГ [59, 82]. Для реалізації алгебраїчної версії, ми залучаємо набір кластерних осциляторних функцій

$$|n, L, S, J\rangle = \widehat{\mathcal{A}} \{ [\Phi_1(A_1) \Phi_2(A_2)]_S \Phi_{nL}(q) Y_L(\widehat{\mathbf{q}}) \}_J, \quad (1.39)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi_{nL}(r, b) &= (-1)^n \mathcal{N}_{nL} b^{-3/2} \rho^{L+1/2} L_n^{L+1/2}(\rho^2), \\ \rho &= \frac{r}{b}, \quad \mathcal{N}_{nL} = \sqrt{\frac{2\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+L+3/2)}} \end{aligned} \quad (1.40)$$

— осциляторна функція у координатному просторі ( $b$  — осциляторна довжина). Нас будуть цікавити хвильові функції та густини розподілу в імпульсному просторі. Їх будемо будувати за допомогою осциляторних функцій в

імпульсному просторі

$$\begin{aligned}\Phi_{nL}(p, b) &= \mathcal{N}_{nL} b^{3/2} \rho^L e^{-\frac{1}{2}\rho^2} L_n^{L+1/2}(\rho^2), \\ \rho &= p \cdot b,\end{aligned}\quad (1.41)$$

Кластерні осциляторні функції  $|n, L, S, J\rangle$  повністю антисиметричні та складають повний набір базисних функцій із специфічними фізичними властивостями. А саме, вони складають частину повного гільбертового простору, яка описує кластеризацію  $A_1 + A_2$  системи  $A$  із фіксованими функціями  $\Phi_1(A_1)$  і  $\Phi_2(A_2)$  внутрішніх станів кластерів. Кластерні осциляторні функції можливо використовувати для розкладу довільної двокластерної функції типу (1.37):

$$\Psi_J = \sum_{LS} \sum_{n=0}^{\infty} C_{nL} |n, L, S, J\rangle. \quad (1.42)$$

Коефіцієнти розкладу  $\{C_{nL}\}$  представляють собою двокластерну хвильову функцію у дискретному, осциляторному представленні та задовольняють систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{LS} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \langle n, L, S, J | \hat{H} | m, L, S, J \rangle - E \cdot \langle n, L, S, J | m, L, S, J \rangle \right] C_{mL} = 0, \quad (1.43)$$

де  $\langle n, L, S, J | \hat{H} | m, L, S, J \rangle$  – матричний елемент оператора Гамільтона між кластерними осциляторними функціями, а  $\langle n, L, S, J | m, L, S, J \rangle$  це інтеграл перекриття функцій або ядро нормування. Для двох кластерів  $s$ -оболонки, ядро нормування має дуже просту форму

$$\langle n, L, S, J | m, L, S, J \rangle = \delta_{n,m} \lambda_n. \quad (1.44)$$

Константи  $\lambda_n$  є власними значеннями оператора антисиметризації. Стани  $|n, L, S, J\rangle$  з  $\lambda_n = 0$  називають забороненими принципом Паулі станами. Заборонені принципом Паулі стани  $n, L, S, J$  не беруть участі в конструюванні хвильової функції (1.37). Тільки дозволені принципом Паулі стани (тобто стани із  $\lambda_n > 0$ ) беруть участь у побудові хвильової функції двокластерних систем.

Рівняння (1.44) показує, що двокластерні осциляторні функції (1.39) не нормовані на одиниці, незважаючи на те, що функції  $\Phi_1(A_1)$ ,  $\Phi_2(A_2)$ ,  $\Phi_{nL}(q)$  і  $Y_{LM}(\hat{\mathbf{q}})$  належним чином нормовані. Оператор антисиметризації  $\hat{\mathcal{A}}$  відповідальний за такі властивості кластерних осциляторних функцій. Перенормовуючи базисні функції

$$|\overline{n, L, S, J}\rangle = |n, L, S, J\rangle / \sqrt{\lambda_n}$$

і коефіцієнти розкладу  $\overline{C}_{nL} = C_{nL}\sqrt{\lambda_n}$ , ми отримуємо стандартну матричну форму рівняння Шредінгера для ортонормованого базису функцій

$$\sum_{LS} \sum_m \left[ \langle \overline{n, L, S, J} | \hat{H} | \overline{m, L, S, J} \rangle - E \cdot \delta_{n,m} \right] \overline{C}_{mL} = 0, \quad (1.45)$$

де індекси  $n$  та  $m$  нумерують тільки дозволені принципом Паулі стани.

Формально, розклад (1.42) хвильової функції включає безмежний набір базисних функцій, проте реально нам потрібний великий, але обмежений набір функцій. В осциляторному просторі ситуація подібна до координатної форми рівняння Шредінгера, де потрібно знайти функцію аж до скінченної відстані  $R_a$ . За межами цієї відстані асимптотична форма хвильової функції добре відома.  $R_a$  визначає відстань між кластерами (частинками), де короткодіюча взаємодія надзвичайно слабка і де домінує асимптотична форма гамільтоніану. Те ж саме справедливо і для дискретного представлення. Нам потрібно розрахувати хвильову функцію до скінченного значення  $n = N_a$ ; починаючи із цього значення числа осциляторних квантів починає працювати асимптотична форма для коефіцієнтів розкладу хвильової функції. Подібно до  $R_a$ , параметр  $N_a$  проводить межу між внутрішньою та асимптотичною областями. Розв'язуючи рівняння Шредінгера числовими методами в координатному та осциляторному просторах, параметри  $R_a$  і  $N_a$  використовують як варіаційні параметри. Потрібно визначити такі мінімальні значення параметрів  $R_a$  і  $N_a$ , що подальше їх збільшення не змінює результати розрахунків.

Для розв'язку системи рівнянь (1.43) або (1.45), потрібно враховувати відповідні граничні умови. Асимптотична форма хвильової функції зв'яза-

ного стану в координатному просторі

$$\begin{aligned}\psi_{LS}^J(q) &\sim \exp\{-\kappa q\}/q, \\ \kappa &= \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}},\end{aligned}\quad (1.46)$$

як було показано в роботі [59], перетворюється у

$$\begin{aligned}C_{nL} &\sim \sqrt{R_n} \exp\{-\kappa b R_n\}/R_n, \\ R_n &= \sqrt{4n + 2L + 3}\end{aligned}\quad (1.47)$$

для коефіцієнтів розкладу хвильової функції. Подібні співвідношення спрavedливі і для хвильової функції неперервного спектру (випадок одного відкритого каналу) в координатному просторі

$$\begin{aligned}\psi_{LS}^J(q) &\sim \sin\left(kq + \delta_L + L\frac{\pi}{2}\right)/q, \\ k &= \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\end{aligned}\quad (1.48)$$

та в осциляторному представленні

$$C_{nL} \sim \sqrt{R_n} \sin\left(kb\sqrt{R_n} + \delta_L + L\frac{\pi}{2}\right)/R_n,\quad (1.49)$$

де  $\delta_L$  – це фаза розсіяння. Щоб уникнути громіздких формул та довгих пояснень, в рівняннях (1.46)-(1.49) ми показуємо асимптотичну форму хвильової функції для нейтральних кластерів. Подібні співвідношення можна написати і для заряджених кластерів.

Існує альтернативна форма для рівняння (1.42). Ми можемо написати розклад хвильової функції відносного руху кластерів по осциляторних функціях із тими ж коефіцієнтами

$$\psi_{LS}^J(q) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{nL} \Phi_{nL}(r, b)\quad (1.50)$$

Подібну форму можна використовувати для побудови міжклusterної хвильової функції  $\psi_{LS}^J(p)$  в імпульсному просторі. Нагадаємо, що функції  $\psi_{LS}^J(q)$  і  $\psi_{LS}^J(p)$  пов'язані між собою інтегральним перетворенням Фур'є-Бесселя

$$\psi_{LS}^J(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dq q^2 j_L(pq) \psi_{LS}^J(q)\quad (1.51)$$

Потрібно зробити одне важливе зауваження. Хвильові функції (1.37) зв'язаних станів традиційно нормовані на одиницю

$$\langle \Psi_J | \Psi_J \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |\bar{C}_{nL}|^2 = 1$$

Але це несправедливо для відповідної міжкластерної хвильові функції

$$\langle \psi_{LS}^J | \psi_{LS}^J \rangle = S_{LJ}. \quad (1.52)$$

В осциляторному представлені ця формула має вигляд

$$S_{LJ} = \sum_{n=0}^{\infty} |C_{nL}|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\bar{C}_{nL}|^2 / \lambda_n. \quad (1.53)$$

Відхилення величини  $S_{LJ}$  від одиниці показує наскільки сильно впливає принцип Паулі на структуру зв'язаного стану.

Розрахувавши коефіцієнти розкладу  $\{C_{nL}\}$ , ми можемо легко побудувати хвильові функції та густини розподілу в координатному, імпульсному та фазовому (або в просторі Фока-Баргманна) просторах.

Ми не будемо зупинятися на розрахунках матричних елементів мікрокопічного гамільтоніану між кластерними осциляторними функціями (1.39). Ми відсилаємо читача до огляду [83], де викладені всі потрібні формулі. З їх допомогою можна розрахувати матричні елементи гамільтоніану, який включає центральні та спін-орбітальні компоненти нуклон-нуклонних сил, а також кулонівську взаємодію.

**1.7.5 Деталі розрахунків** Наша головна мета - це дослідження легких атомних ядер із чіткою двокластерною структурою. Серед цих ядер слід звернути увагу на ядра  ${}^6Li$ ,  ${}^7Li$  та  ${}^7Be$ , оскільки двокластерні пороги їх розпаду  $\alpha + d$ ,  $\alpha + {}^3H$  і  $\alpha + {}^3He$ , відповідно, лежать дуже близько до основного стану цих ядер, а інші дво- та трикластерні канали знаходяться дуже високо по енергії. Існують ґрунтовні підстави вважати (див., наприклад, роботи [84–86]) що канали  $\alpha + d$ ,  $\alpha + {}^3H$  і  $\alpha + {}^3He$  значною мірою відповідальні за структуру зв'язаних та низько розташованих резонансних

станів ядер  ${}^6Li$ ,  ${}^7Li$  та  ${}^7Be$ . Ми також розглянемо ядро  ${}^8Be$  як  $\alpha + \alpha$  конфігурацію, яка генерує набір ротаційних  $0^+$ ,  $2^+$  і  $4^+$  резонансних станів.

Хвильові функції  $\Phi_1(A_1)$  та  $\Phi_2(A_2)$ , які описують внутрішню структуру кластерів, це багаточастинкові осциляторні функції із нульовим значенням повного числа осциляторних квантів та загальним осциляторним радіусом  $b$ .

В наших розрахунках ми використовуємо нуклон-нуклонний потенціал Міннесоти, який був запропонований Таном та його колегами. Центральну частину цього потенціалу подано в роботі [87] а спін-орбітальні компоненти (версія IV) - в роботі [88].

В розрахунках такого типу, ми маємо два вільних параметри. Перший параметр, осциляторний радіус, ми вибираємо так, щоб мінімізувати енергію відповідного двокластерного порогу компаунд-ядра. Іншим словами, ми вибираємо так цей параметр, щоб оптимізувати опис внутрішньої структури кластерів. Другий параметр  $u$ , він визначає непарні компоненти потенціалу Міннесоти, підібрано так, щоб відтворити енергію зв'язаного стану для усіх ядер, крім  ${}^8Be$ . Останнє не має зв'язаних станів, а "основний стан" – це дуже вузький резонансний стан (його енергія  $E=0.0918$  MeВ і ширина  $\Gamma=5.57$  eВ), який можна розглядати як квазірезонансний стан. Тому для  ${}^8Be$ , ми підібрали значення параметру  $u$ , який добре відтворює енергію та ширину  $0^+$  резонансного стану. Для вивчення особливостей  $0^+$  резонансного стану  ${}^8Be$ , ми зробили два типи розрахунків. Перший із них ми тільки що обговорювали. Цей розрахунок ми будемо позначати як резонансний стан (RS). В іншому типі розрахунків, який позначимо як зв'язаний стан (BS), ми виключаємо кулонівську взаємодію і тому отримуємо зв'язаний стан в  ${}^8Be$ .

Для вивчення ефектів кулонівської взаємодії в дзеркальних ядрах  ${}^7Li$  і  ${}^7Be$ , ми використовуємо однакові вхідні параметри, які підігнані до основного стану ядер  ${}^7Li$ . В цьому випадку різниця у положенні зв'язаних та резонансних станів в  ${}^7Li$  і  ${}^7Be$  цілком визначається кулонівською взаємо-

дією.

В нашій моделі повний спін системи  $S$  та повний орбітальний момент  $L$  є квантовими числами. Для двокластерних систем, які ми розглядаємо в даній роботі, повний спін системи співпадає із спіном другого кластеру, оскільки перший кластер, альфа-частинка, має нульовий спін.

Ми використовуємо наступну схему розрахунків. По-перше, ми розраховуємо матричні елементи операторів гамільтоніану та інших операторів (які важливі для фізичних застосувань) між кластерними осциляторними функціями. Ми використовуємо  $N_a = 200$  осциляторних функцій в усіх наших розрахунках. Ця кількість базисних функцій забезпечує нас стабільними та збіжними результатами для зв'язаних станів, а також для станів неперервного спектра. Друге, ми розраховуємо власні значення та власні функції двокластерного гамільтоніану. В результаті ми отримуємо зв'язаний стан (якщо він існує) та спектр псевдозв'язаних станів. Останні представляють собою стани неперервного спектру із хвильовою функцією, яка нормована на одиницю

$$\sum_{n=0}^{N_a-1} |C_n(E_\alpha)|^2 = 1$$

та задовольняють умови

$$C_{N_a}(E_\alpha) = 0,$$

де  $E_\alpha$  енергія  $\alpha$ -го ( $\alpha = 0, 1, 2, \dots, N_a-1$ ) псевдозв'язаного стану. За допомогою власної функції  $\{C_n(E_\alpha)\}$ , ми будуємо густини розподілу у координатному, імпульсному та фазовому просторі (або просторі Фока-Баргманна). По-третє, ми розраховуємо фази пружного розсіяння, розв'язуючи систему лінійних рівнянь, які враховують коректні граничні умови для станів розсіяння.

В Таблиці 2 ми показуємо всі вхідні параметри розрахунків, а також спектр зв'язаних та резонансних станів легких атомних ядер. В таблиці 2 ми приводимо також домінантні двокластерні канали розпаду цих ядер. Експериментальні дані взяті із робіт [89, 90]. Як видно, з вхідними параметрами, які показані в таблиці 2, ми отримуємо досить добрий опис зв'язаних

та резонансних станів ядер, порівнюючи із відповідними експериментальними даними. Однак, енергія та ширина декількох резонансів трохи відрізняється від експериментальних. Це може бути віднесено на рахунок властивостей нуклон-нуклонного потенціалу, а також через деякі обмеження нашої моделі (наприклад, однакові осциляторні довжини для обох взаємодіючих кластерів). Ми розглядаємо цей недолік наших розрахунків як не критичний для інтерпретації та справедливості отриманих результатів, які будуть обговорюватися в подальшому.

Табл. 2: Спектр зв'язних і резонансних станів легких ядер та вхідні параметри розрахунків. Розрахована енергія та ширина приводяться в MeВ, а експериментальні значення енергії та ширини - в MeВ±keВ. Теоретична та експериментальна ширина  $0^+$  резонансу в ядрі  ${}^8Be$  подана в eВ.

Система		Параметри			Теорія		Експеримент	
Ядро	$A_1 + A_2$	$b$ , fm	$u$	$J^\pi$	$E$	$\Gamma$	$E$	$\Gamma$
${}^6Li$	$\alpha + d$	1.3110	0.9254	$1^+$	-1.4750	-	-1.4743	-
				$3^+$	0.8480	0.0284	$0.712 \pm 2$	$0.024 \pm 2$
				$2^+$	4.2880	3.0052	$2.838 \pm 22$	$1.30 \pm 100$
${}^7Li$	$\alpha + {}^3H$	1.3451	0.969	$\frac{3}{2}^-$	-2.4676	-	-2.4670	-
				$\frac{1}{2}^-$	-1.6040	-	-1.9894	-
				$\frac{7}{2}^-$	2.4710	0.1285	2.185	0.069
				$\frac{5}{2}^-$	4.9390	1.7121	4.137	0.918
${}^7Be$	$\alpha + {}^3He$	1.3451	0.969	$\frac{3}{2}^-$	-1.6302	-	-1.5866	-
				$\frac{1}{2}^-$	-0.8161	-	-1.1575	-
				$\frac{7}{2}^-$	3.3360	0.2232	$2.98 \pm 50$	$0.175 \pm 7$
				$\frac{5}{2}^-$	5.7420	2.0207	$5.14 \pm 100$	1.2
${}^8Be$	$\alpha + \alpha$	1.3736	0.950	$0^+$	0.0818	2.40	0.0918	$5.57 \pm 0.25$
				$2^+$	1.2840	0.6418	$3.12 \pm 10$	$1.513 \pm 15$
				$4^+$	9.7970	3.5827	$11.44 \pm 150$	$\approx 3.500$

### 1.7.6 Результати та обговорення

Ми почнемо нашу дискусію із хвильових функцій у координатному просторі. На рис. 1.14 ми показуємо хвильові функції  ${}^8Be$  для 10 найнижчих власних функцій двокластерного гамільтоніану. Як видно, всі хвильові функції мають вузол приблизно

в одній і тій же точці координатного простору. Це типова картина для усіх ядер, які ми розглядаємо. Положення та кількість вузлів залежить від ядра та його орбітального моменту. Поява фіксованих вузлів пов'язана із ортогональністю хвильової функції міжклusterного руху  $\psi_{LS}^J$  хвильовим функціям заборонених станів: кількість вузлів рівна кількості заборонених принципом Паулі станів. Цей факт є ключовим елементом моделі ортогональних умов [45, 91], яка є спрощеною версією МРГ із наближеним трактуванням принципом Паулі та із локальним міжклusterним потенціалом. Хвильові функції у імпульсному просторі також мають вузли, але їх структура не така проста та наочна.

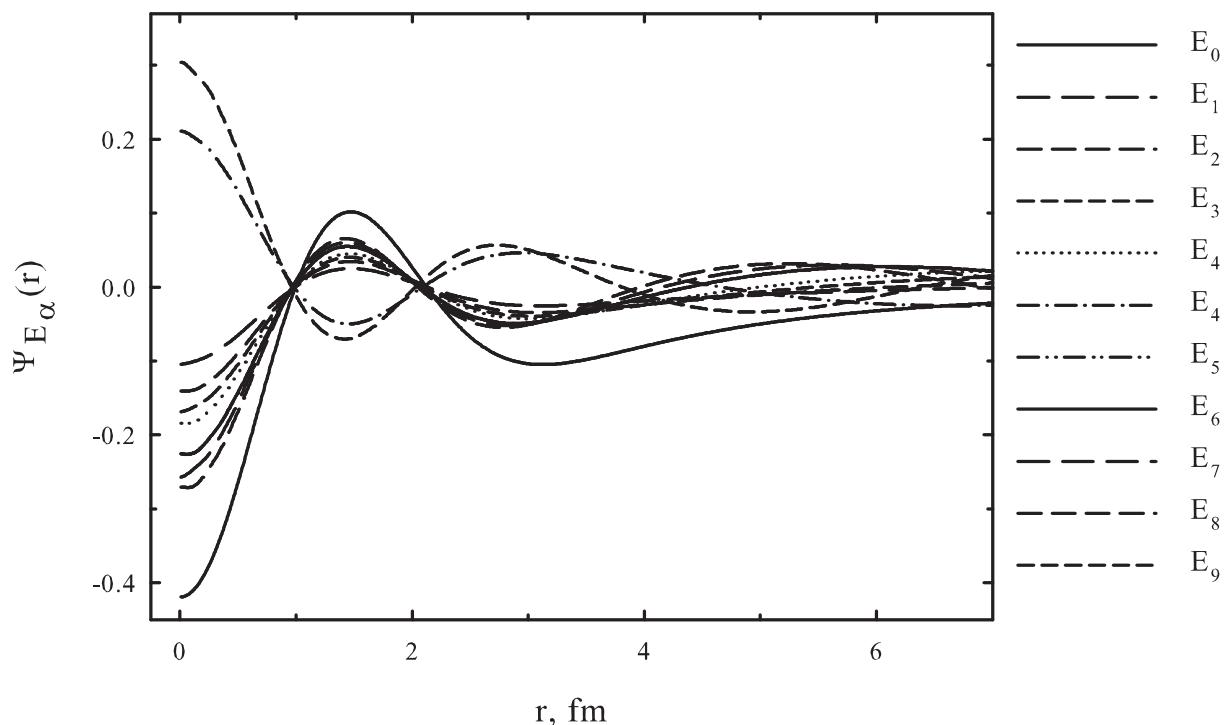


Рис. 1.14 Координатні хвильові функції 10 найнижчих  $0^+$  станів в ядрі  $^{8}Be$ .

На рисунку 1.15 ми порівнюємо хвильові функції у координатному просторі для основних станів ядер  $^6Li$ ,  $^7Li$ ,  $^7Be$  і  $^8Be$  (BS). Хвильові функції  $^7Li$  та  $^7Be$  дуже подібні один до одного на цьому малюнку, незважаючи на

те, що різниця в енергії зв'язку складає 0.84 МeВ.

Щоб продемонструвати чи наш базис осциляторних функцій достатньо великий для досягнення коректних результатів, на рис. 1.15 ми демонструємо асимптотичну поведінку хвильових функцій. Можна бачити, що хвильові функції спадають як  $\exp\{-\kappa q\}/q$  при великих значеннях координати  $q$ . Порядок кривих залежить від енергії зв'язаного стану: чим менше енергія зв'язку, тим нижче розташована відповідна крива.

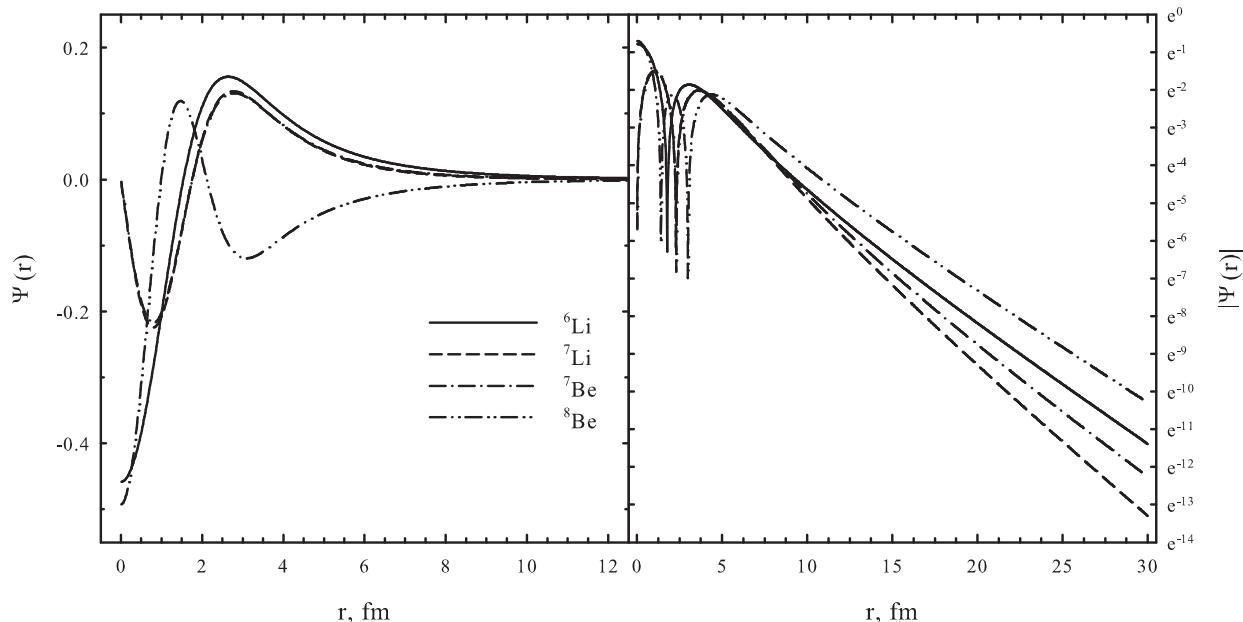


Рис. 1.15 Хвильові функції основного стану  ${}^6Li$ ,  ${}^7Li$ ,  ${}^7Be$  і  ${}^8Be$  в координатному просторі. Зліва показано поведінку хвильових функцій на малих відстанях, а справа демонструється їх асимптотична поведінка.

**Фазові портрети зв'язаних станів** Тепер ми звернемо нашу увагу на фазові портрети двокластерних систем. На рисунках 1.16, 1.17 ми показуємо фазові портрети для зв'язаних станів ядер  ${}^7Li$  і  ${}^7Be$ . Фазовий портрет для основного стану  ${}^6Li$  був показаний у нашій попередній публікації [20]. Загальна риса фазових портретів для зв'язаних станів полягає у тому, що вони концентруються в досить вузькій області фазового простору,

незважаючи на той факт, що деякі ядра є слабков'язаними. Як слід було очікувати, чим більш диспергований стан у координатному просторі, тим більш компактний він в імпульсному просторі та навпаки. Цікаво відзначити, що максимум густини розподілу у фазовому просторі для зв'язаних станів знаходиться при  $\eta \approx 1.0$  і  $3.5 \leq \xi \leq 4$ . Таке значення  $\eta$  суттєво відрізняється від безрозмірного параметра  $k$  (який для найбільш зв'язаного стану в  ${}^7Li$  дорівнює  $k=0.46$ ). На нашу думку, це вказує на чисто квантовий характер густини розподілу для зв'язаних станів.

Як ми бачили на Рис. 1.15, хвильові функції та густини розподілу зв'язаних станів мають вузол у координатному просторі. Крім цього, вузли мають і хвильові функції в імпульсному просторі. Між тим, густини розподілу цих станів не мають вузлів у фазовому просторі в інтервалі  $0 < \eta < \infty$  та  $0 < \xi < \infty$ .

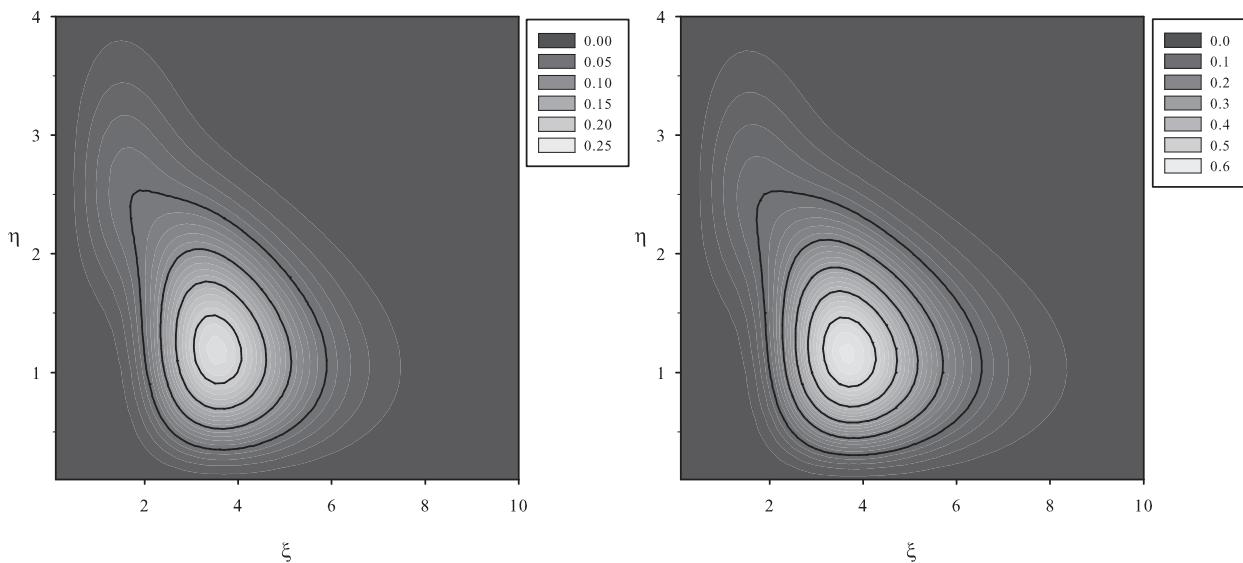


Рис. 1.16 Фазові портрети  $3/2^-$  (вліва) та  $1/2^-$  (справа) зв'язаних станів в  ${}^7Li$ .

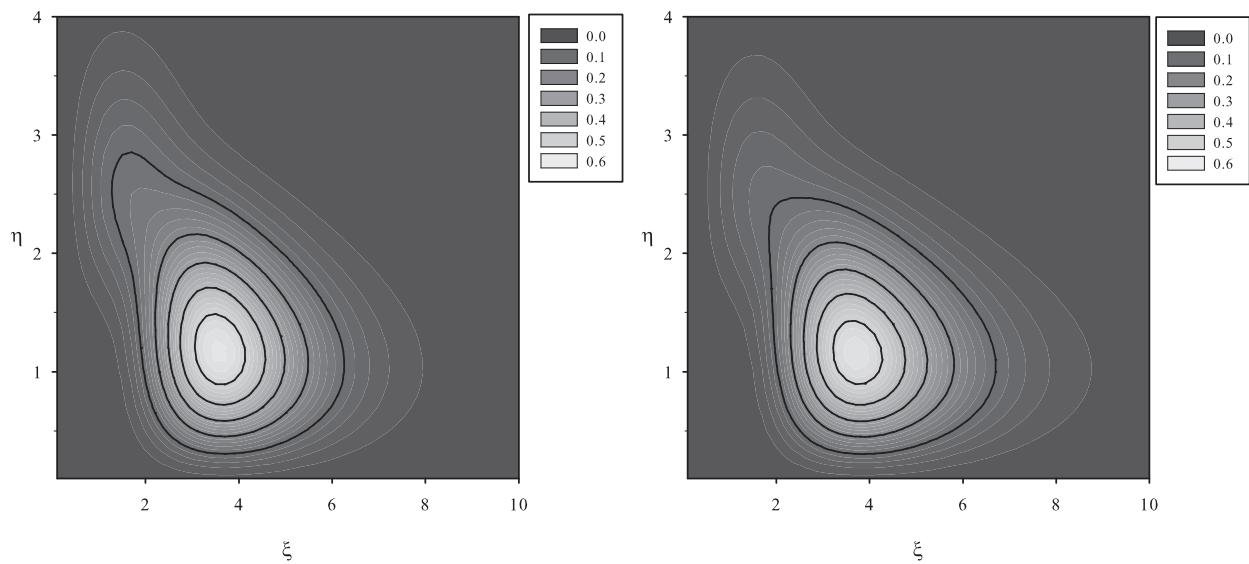


Рис. 1.17 Фазові портрети  $3/2^-$  (зліва) та  $1/2^-$  (справа) зв'язаних станів в  ${}^7Be$ .

**Фазові портрети резонансних станів** У досліджуваних нами ядер існують вузькі та широкі резонансні стани. Найбільш вузький резонанс спостерігається у ядрі  ${}^8Be$ . Дійсно, розрахована нами ширина  $0^+$  резонансного стану становить всього 2.40 еВ. Найбільш широкий резонансний стан спостерігається також у  ${}^8Be$ . Ширина  $4^+$  резонансного стану перевищує 3.5 МеВ. Можна очікувати зовсім різних густин розподілу та форми фазових портретів для вузьких та широких резонансних станів. Це дійсно так, як можна бачити на Рис. 1.18, 1.19, 1.20, де показані фазові портрети для резонансних станів в ядрах  ${}^6Li$ ,  ${}^7Li$  і  ${}^7Be$ . Кожне ядро представлено двома резонансними станами, один з яких вузький ( $3^+$  в  ${}^6Li$ ,  $7/2^-$  в  ${}^7Li$  і  ${}^7Be$ ) а інший - досить широкий ( $2^+$  в  ${}^6Li$ ,  $5/2^-$  в  ${}^7Li$  і  ${}^7Be$ ). Коли ми говоримо "вузький резонансний стан" або "широкий резонансний стан" ми маємо на увазі не тільки абсолютне значення ширини, але і відношення  $\Gamma/E$ . Для вузьких резонансних станів це відношення менше 0.067, а для широких резонансних станів воно перевищує 0.34. Для найбільш вузького  $0^+$  резонансного стану в  ${}^8Be$  це відношення  $\Gamma/E \approx 3 \cdot 10^{-5}$ .

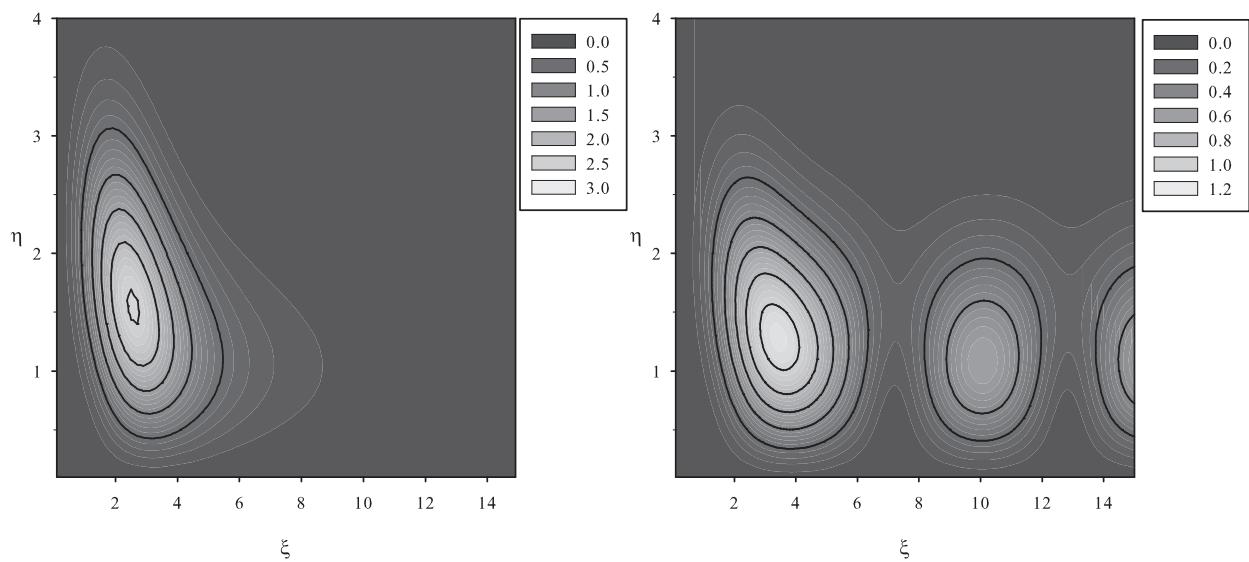


Рис. 1.18 Фазові портрети для  $3^+$  (ліворуч) і  $2^+$  (праворуч) резонансних станів ядра  ${}^6Li$ .

Ми спостерігаємо велику схожість вузьких резонансних станів та зв'язаних станів. Вони реалізують себе у компактній ділянці фазового простору.

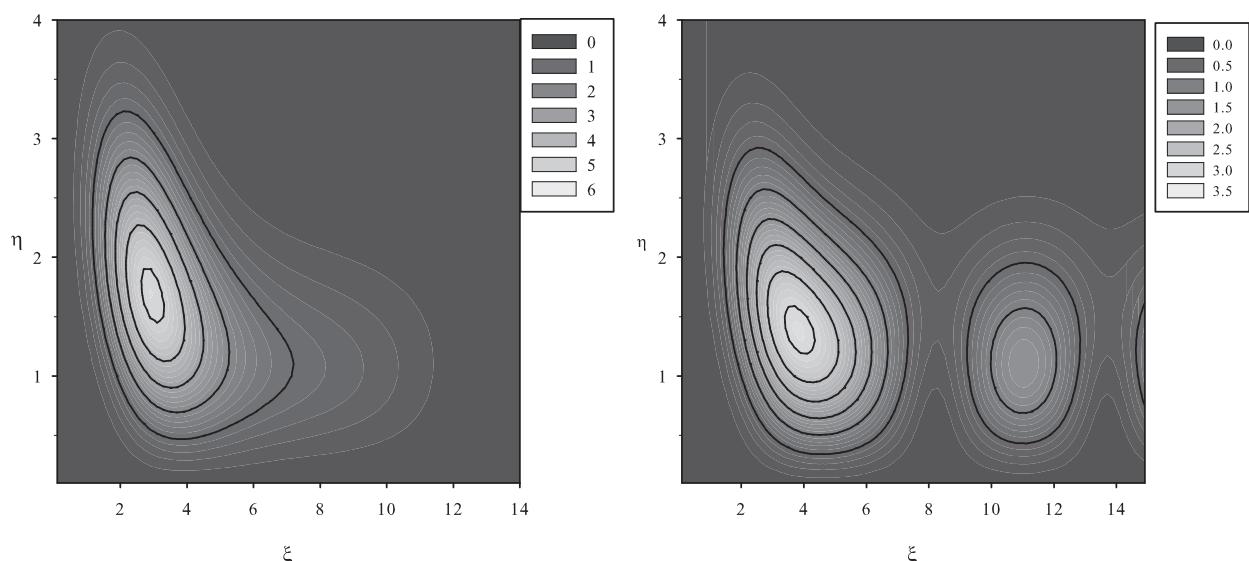


Рис. 1.19 Фазові портрети  $\frac{7}{2}^-$  і  $\frac{5}{2}^-$  резонансних станів в ядрі  ${}^7Li$ .

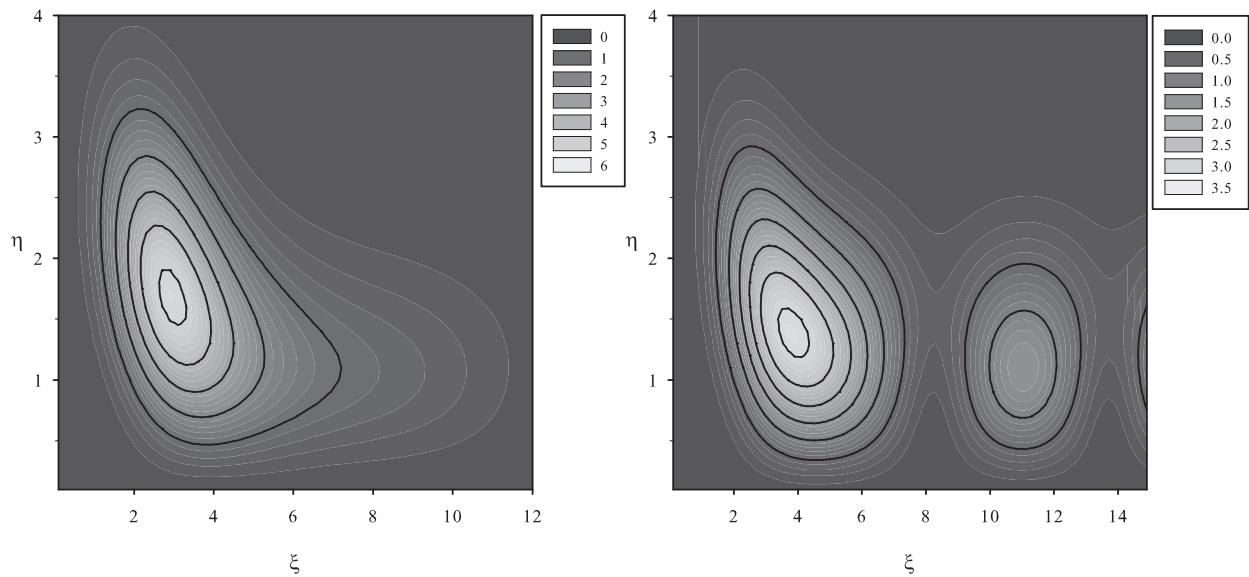


Рис. 1.20 Фазові портрети  $\frac{7}{2}^-$  і  $\frac{5}{2}^-$  резонансних станів в ядрі  $^7Be$ .

Що стосується широких резонансних станів, то вони мають головний максимум при відносно малих значеннях координати  $\xi$  та імпульсу  $\eta$ . Крім цього, вони також мають регулярні максимуми при фіксованих значеннях  $\eta$ , але різних значеннях  $\xi$ . Ці структури відображають осциляторну поведінку координатної хвильової функції, та  $\delta$ -подібну поведінку хвильової функції в імпульсному просторі.

На рисунку 1.21 ми порівнюємо фазові портрети  $0^+$  "основного" стану в ядрі  $^8Be$ , які отримані з та без кулонівської взаємодії (RS та BS розрахунки). Енергія резонансного стану рівна 0.0818 MeВ над  $\alpha + \alpha$  порогом, а енергія зв'язаного стану становить -1.3529 MeВ нижче цього порогу.

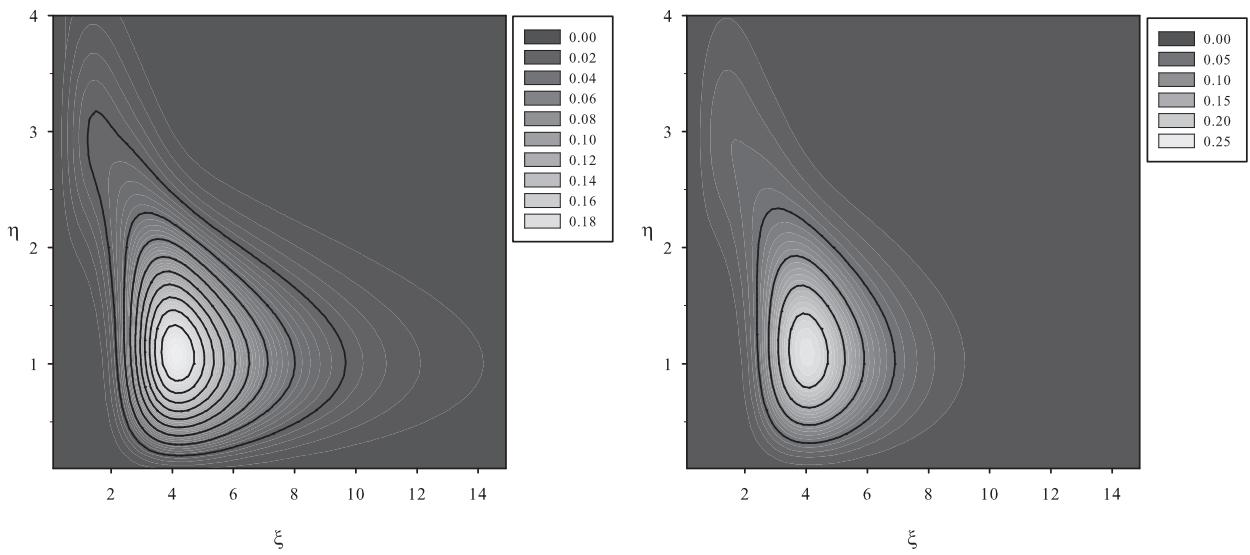


Рис. 1.21 Фазові портрети для  $0^+$  резонансного (зліва) та зв'язаного (справа) станів  ${}^8Be$ .

Видно, що фазові портрети резонансного та зв'язаного станів дуже схожі. Ця схожість може бути пов'язана із тим фактом, що у внутрішній області, де взаємодія між кластерами суттєва, хвильові функції цих станів мають однакову поведінку. Асимптотична частина цих хвильових функцій зовсім різна. Для зв'язаного стану хвильова функція  $\psi(q)$  спадає експоненційно (1.46), між тим як хвильова функція резонансного стану (1.48) спадає повільно. Таким чином, асимптотична частина хвильової функції дає малий внесок в густину розподілу у просторі Фока-Баргманна. Для того, щоб довести, що у внутрішній області функції резонансного та зв'язаного станів дуже подібні, ми показали на Рис. 1.22 густини розподілу в координатному та імпульсному просторі. Дійсно, ці рисунки показують, що між хвильовими функціями або густинами розподілу резонансного та зв'язаного станів у  ${}^8Be$  існує зовсім невелика відмінність. Максимуми густин розподілу знаходяться приблизно в одній точці координатного простору. Однак, максимуми густин розподілу станів BS та RS розташовані при різних значеннях моменту  $p$ , які пов'язані з різними значеннями енергії резонансного стану (0.0809 МeВ) та зв'язаного стану (-1.3529 МeВ). Оскільки в коорди-

натному просторі хвильова функція зв'язаного стану більш компактна, ніж резонансного, то вона більш розосереджена в імпульсному просторі.

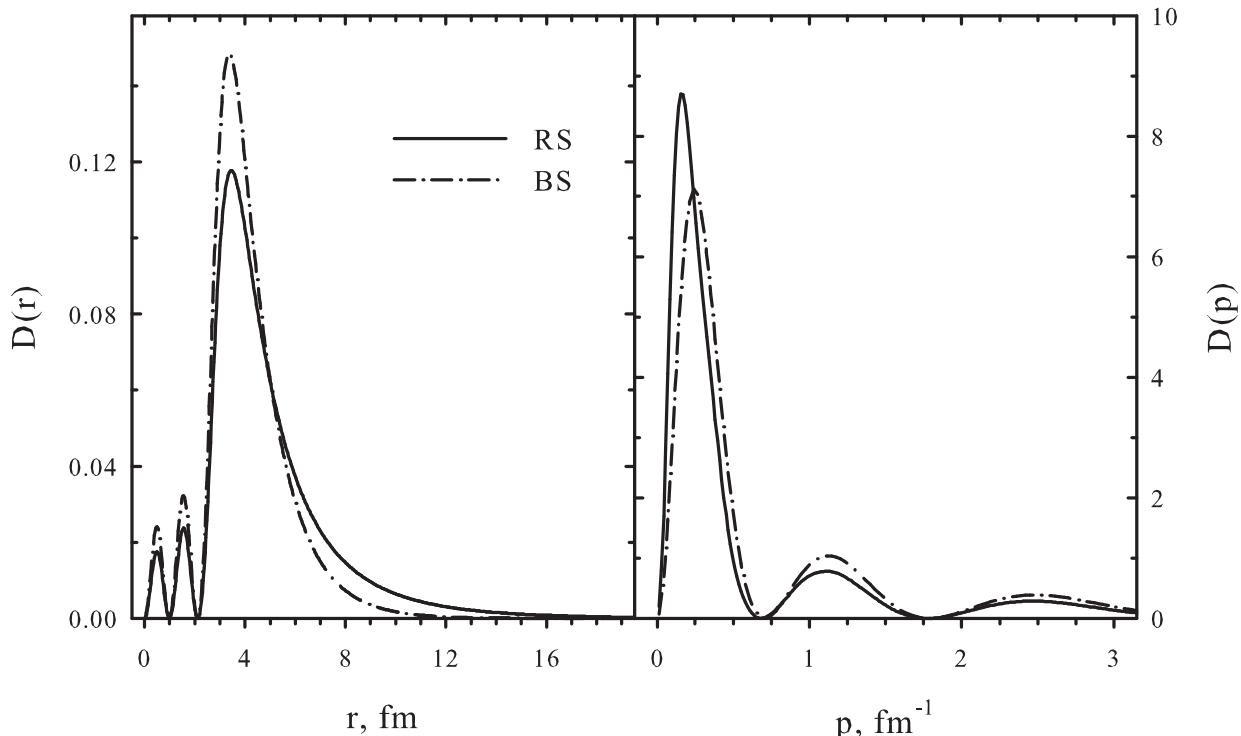


Рис. 1.22 Фазові портрети для резонансного (зліва) та зв'язаного (справа)  $0^+$  станів ядра  ${}^8Be$

Цікаво порівняти густину розподілу в фазовому просторі із густинами розподілу в координатному та імпульсному просторах. Для цього ми знайшли точку у фазовому просторі  $(\xi_{\max}, \eta_{\max})$ , де густину розподілу має максимум. І тоді ми розрахували густини розподілу  $D(\xi, \eta_{\max})$  і  $D(\xi_{\max}, \eta)$ . Таким чином, із великої кількості траєкторій, ми вибрали тільки дві із них: першу з фіксованим моментом  $\eta_{\max}$ , а другу із фіксованою координатою  $\xi$ . Першу траєкторію ми порівняли із густиною розподілу в координатному просторі  $D(r)$ , а другу - із густиною розподілу в імпульсному просторі  $D(p)$ . Ці результати представлені на Рис. 1.23. Ми бачимо, що густини розподілу  $D(\xi, \eta_{\max})$  і  $D(r)$  дуже близькі один до одного, вони мають максимум приблизно в одній точці  $\xi \simeq r$ . Густини розподілу  $D(\xi_{\max}, \eta)$

та  $D(p)$  мають більше відмінностей у своїй поведінці. Максимум функції  $D(p)$  трохи зміщений в область малих  $p$ , по відношенню до максимуму функції  $D(\xi_{\max}, \eta)$ . Таке співвідношення між функціями  $D(\xi, \eta_{\max})$  та  $D(r)$ ,  $D(\xi_{\max}, \eta)$  і  $D(p)$  спостерігається для зв'язаних та резонансних станів інших ядер.

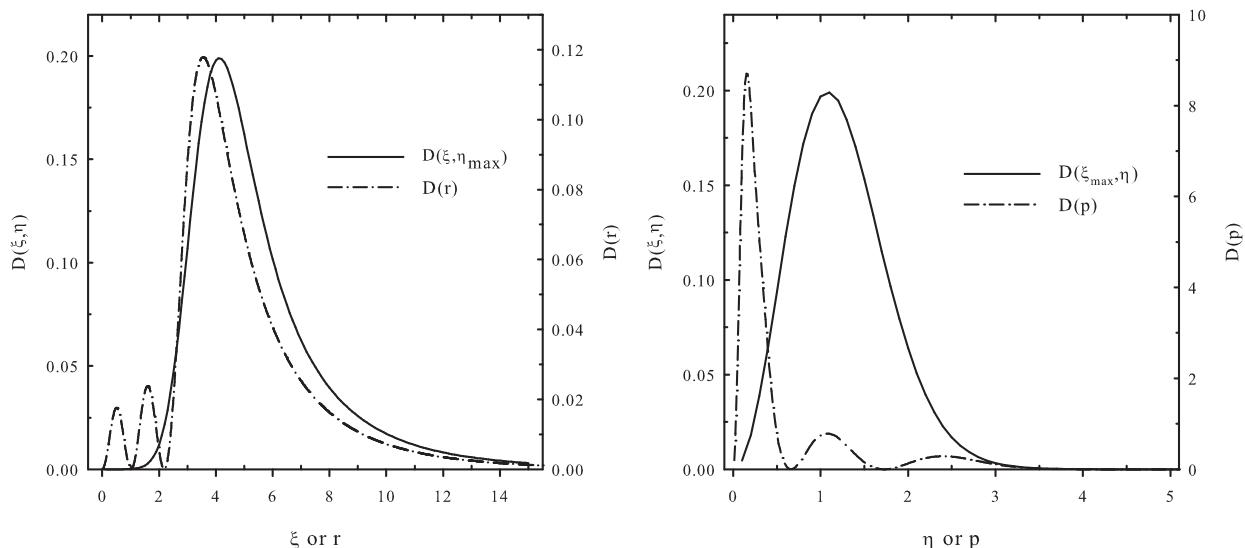


Рис. 1.23 Густини розподілу для  $0^+$  резонансного стану ядра  ${}^8Be$  в фазовому, координатному та імпульсному просторах. Див. більш детально в тексті.

На закінчення цього розділу, ми демонструємо на Рис. 1.24 фазові портрети для широких резонансних  $2^+$  і  $4^+$  станів ядра. Ми бачимо, що осциляції густини розподілу вздовж осі  $\xi$  більш часті для  $4^+$  резонансного стану ніж для  $2^+$  резонансного стану. Це очікувана властивість густин розподілу, оскільки енергія  $4^+$  резонансного стану перевищує енергію  $2^+$  резонансного стану приблизно у 8 разів. Обидва резонансні стани виявляють сильні квантові ефекти, тому що вони мають великий максимум в районі малих міжклusterних відстаней у фазовому просторі.

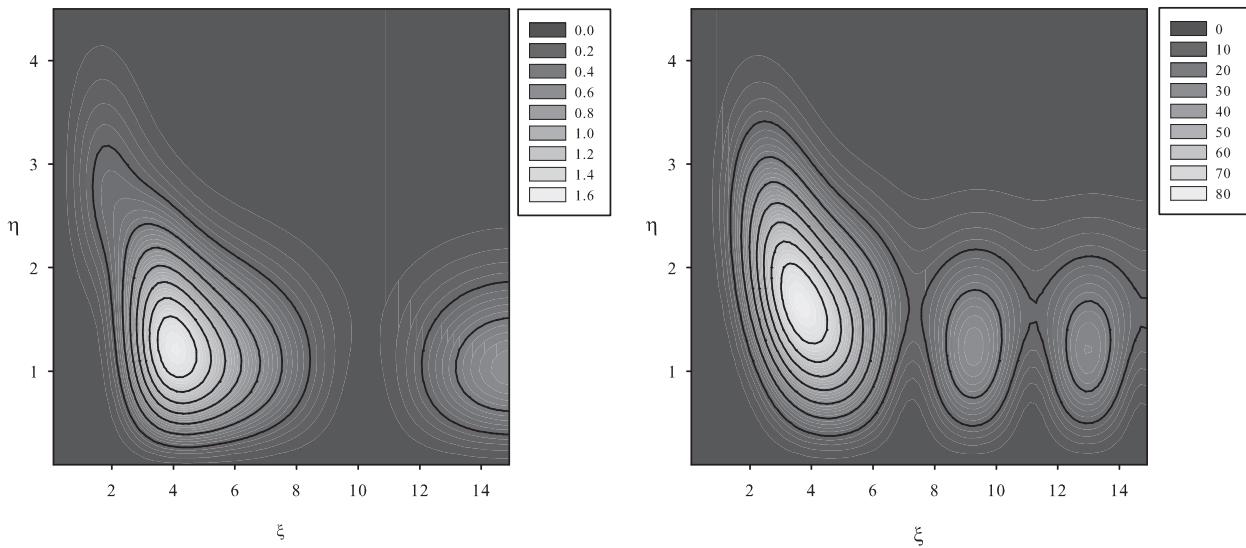


Рис. 1.24 Фазові портрети  $2^+$  (зліва) і  $4^+$  (справа) резонансних станів в ядрі  ${}^8Be$ .

Як і для зв'язаних станів, максимум густини розподілу в фазовому просторі для резонансних станів також спостерігається при значеннях змінної  $\eta$ , яка суттєво відрізняється від відповідного значення безрозмірного параметру  $k$ . Щоб продемонструвати це, ми розглянемо резонансні стани ядра  ${}^8Be$ . Безрозмірний параметр  $k$  для ядра  ${}^8Be$ , у якого  $0^+$  резонансний стан має найменшу енергію, а  $4^+$  резонансний стан має найбільшу енергію, варіюється в межах  $0.086 \leq k \leq 0.944$ . Однак, максимум густини розподілу для  $4^+$  резонансного стану досягається при  $\eta \approx 1.5$ . Це значення потрібно порівнювати з  $k = 0.944$ . Для  $0^+$  резонансного стану момент  $k = 0.086$ ; а максимум спостерігається при  $\eta \approx 1.1$ .

**Класичний режим** В цьому підрозділі ми розглянемо високоенергетичні збудження двокластерних систем. Досі ми розглядали збуджені стани з енергією менше 10 МeВ. Тепер ми будемо розглядати інтервал енергій, де фазові портрети мають явну "класичну форму або де всі квантові траекторії наближаються до класичних траекторій.

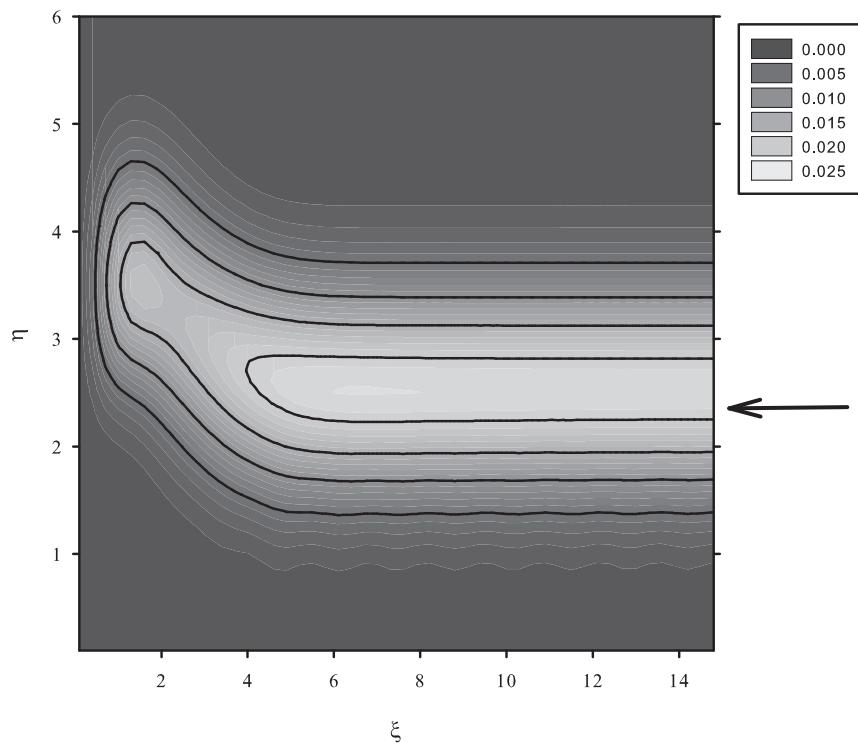


Рис. 1.25 Фазовий портрет  $0^+$  збудженого стану ядра  ${}^8Be$  з енергією  $E=60.21$  МeВ та безрозмірним моментом  $k=2.34$  (ця величина вказана стрілкою).

Давайте розглянемо збуджений  $0^+$  стан ядра  ${}^8Be$  з енергією  $E=60.21$  МeВ, рисунок 1.25. Ця енергія відповідає безрозмірному моменту

$$k = b \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = 2.34.$$

Як бачимо, максимум густини розподілу спостерігається для величини  $\eta$  яка досить близька до зазначеного значення моменту  $k$ . Це значить, що класичний режим реалізується при відносно невеликих енергіях збудження двокластерних систем. Крім цього, видно, що густина розподілу, що показана на Рис. 1.25, подібна до густини розподілу для вільного руху частинки із великим значенням моменту  $k$  (порівняйте із Рис. 1.29 та рівнянням (1.33)). Важливо підкреслити, що класичний режим стає чинним для помірних значень координати  $\xi$ .

Таке співвідношення між квантовою густиною розподілу та її класичною границею спостерігається і для інших значень повного кутового моменту

в ядрі  ${}^8\text{Be}$ , а також для усіх кутових моментів в інших ядер. Чим більше енергія збудженого стану, тим ближче його густина розподілу до класичної траєкторії.

## 1.8 Висновки

В рамках алгебраїчної версії методу резонуючих груп вивчався вплив принципу Паулі на структуру станів дискретного і неперервного спектра компаунд-систем, що утворюються на проміжній стадії зіткнення легких ядер. Аналіз обумовлених оператором антисиметризації обмінних ефектів на кінетичну енергію відносного руху кластерів проводився на основі дискретного представлення повного базису дозволених станів багаточастинкового гармонічного осцилятора, класифікованих за допомогою індексів  $\text{SU}(3)$ -симетрії. Задача на власні функції і власні значення ядра нормування була зведена до розв'язку алгебраїчними методами вироджених інтегральних рівнянь в просторі Фока-Баргманна.

Вплив принципу Паулі на процес зіткнення кластерів зводиться до трьох ефектів, що впливають на динаміку кластер-кластерної взаємодії. По-перше, усунення заборонених станів радикальним чином збільшує амплітуду зміни фази розсіяння, що можна було б моделювати потенціалом відштовхування на малих відстанях між кластерами. Інтенсивність цього моделюючого потенціалу і його радіус тим більша, чим більша кількість заборонених станів. Слід відзначити, проте, що останній не перевищує половини середньоквадратичного радіусу кластерів. По-друге, поза кором з'являється додатковий ефективний потенціал відштовхування або притягання, здатний суттєво впливати на поведінку фаз розсіяння. Нарешті, в цій же області відбувається зменшення або збільшення інтенсивності відцентрового потенціалу, що приводить до деякого послаблення ефективного потенціалу антисиметризації. Відстані між кластерами, на яких вступає в гру принцип Паулі, визначаються розміром тієї області, де власні значення дозволених станів відмінні від одиниці. Ця відстань більш, ніж в два рази, переви-

щує середньоквадратичний радіус кластерів і помітно перевищує радіус сил взаємодії між кластерами, що породжуються ядерним нуклон-нуклонним потенціалом. Відзначимо також, що фази, які породжуються лише модифікованим оператором кінетичної енергії, поводять себе у відповідності з узагальненою теоремою Левінсона, і мають той же порядок величини, що і фази, знайдені з урахуванням потенціальної енергії. Справедливість узагальненої теореми Левінсона в представленні дискретного базису забезпечують такі матричні оператори кінетичної і потенціальної енергії, які не містять матричних елементів, що пов'язують дозволені стани з кожним із заборонених, а також різні заборонені стани.

Оцінки інтенсивності і радіусу ефективного відштовхування кластерів, обумовленого впливом обмінних ефектів на оператор кінетичної енергії, можуть бути отримані за допомогою аналізу фазових портретів зіткнення ядер в представленні Фока-Баргманна. Висота відштовхувального кора приблизно дорівнює енергії, при якій з'являються інфінітні траекторії, що відповідають проникненню кластерів в класично недосяжну область ( $\xi \simeq 0$ ). Максимальними радіус і інтенсивність відштовхування будуть для зіткнення тотожних ядер. Остання на порядок більша за інтенсивність кулонівської взаємодії, і тому вплив антисиметризації на фазові портрети, і на хвильові функції стає домінуючим як тільки енергія відносного руху кластерів перевищить висоту кулонівського бар'єру.

Ми дослідили траекторії двокластерних систем у фазовому просторі. Було використано перетворення Баргманна-Сігала для відображення хвильової функції двокластерної системи із координатного простору у простір Фока-Баргманна. Хвильові функції двокластерних систем досліджувалися у рамках мікроскопічної моделі, яка використовує повний набір осциляторних функцій для розкладу хвильової функції відносного руху кластерів. Кожне ядро було представлено домінантним його поділом на два кластери. Вхідні параметри моделі та нуклон-нуклонного потенціалу були вибрані так, щоб оптимізувати опис внутрішньої структури кластерів та відтворити

положення основного стану ядра по відношенню до двокластерного порогу. Ми розглянули широкий інтервал енергій збудження компаунд-системи, але особливу уваги приділили зв'язаним та резонансним станам. Показано, що зв'язані стані та вузькі резонансні стани реалізують себе у дуже компактній ділянці фазового простору. Фазові портрети збуджених станів з великою енергією збудження мають максимум вздовж лінії, яка співпадає із класичною траєкторією. Ми також розглянули дві модельні проблеми: гармонійний осцилятор та вільний рух частинки, які допомогли нам зрозуміти особливості динаміки реальних фізичних систем у фазовому просторі.

## РОЗДІЛ 2

### Багатоканальні бінарні кластерні системи з надлишком нейтронів.

#### 2.1 Співіснування кластерних конфігурацій ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$ і ${}^8\text{He} + {}^4\text{He}$ в ядрі ${}^{12}\text{Be}$

##### 2.1.1 Система ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$ .

**Вступ** Відомо немало робіт (див., наприклад, [91–93]), в яких було застосовано метод резонуючих груп для вивчення зіткнень легких магічних ядер. Той факт, що потрібно суттєва енергія, щоб збудити ці ядра, спрощує розрахунки, але залишає поза увагою багатоканальні властивості неперервного спектра компаунд-систем. В той же час, багатоканальність природнім чином з'являється в зіткненнях легких ядер з відкритою  $p$ -оболонкою, коли навіть при порівняно невеликих енергіях відкриваються канали розпаду проміжної системи не лише по тому каналу, який був для цієї системи вхідним, але і по каналах, в яких ядра, що зіткнулись, розлітаються у збуджених станах. Як правило, енергія збудження ядер з відкритою оболонкою невелика.

Одним з відносно простих в теоретичному відношенні прикладів зіткнення легких ядер з відкритою  $p$ -оболонкою є розсіяння  ${}^6\text{He}$  на  ${}^6\text{He}$ . У зв'язку з конструюванням прискорювачів інтенсивних пучків цих ядер можна сподіватись, що з часом цей приклад буде предметом майбутніх експериментальних досліджень, тому теоретичні оцінки ефективних перерізів пружного і непружного розсіяння  ${}^6\text{He}$  на  ${}^6\text{He}$  можуть стати орієнтиром для

експериментаторів. З теоретичної точки зору становить інтерес обговорення станів неперервного спектра ядра  $^{12}\text{Be}$ , що заселяються на проміжній стадії  $^6\text{He} + ^6\text{He}$  розсіяння. Ці стани формуються під дією не лише кінематики і динаміки, але і принципу Паулі, точне врахування якого необхідне для усвідомлення його ролі в багатоканальних процесах. Ще один теоретичний напрямок полягає в аналізі тих особливостей неперервного спектра  $^{12}\text{Be}$ , які обумовлені співіснуванням відкритих і закритих каналів цього ядра, що допомагає з'ясувати значення останніх в структурі хвильових функцій вироджених станів неперервного спектра.

Експериментальні дослідження розпаду  $^{12}\text{Be}$ , проведені Фреєром *та ін.* [94], [66] та дослідженням збуджених станів цього ядра в реакції відриву двох нейтронів з пучка екзотичних ядер  $^{14}\text{Be}$  [95] показали, що існує такий інтервал енергій між 12 і 25 МeВ в ядрі  $^{12}\text{Be}$ , що це ядро розпадається переважно по каналах  $^6\text{He} + ^6\text{He}$  і  $^8\text{He} + ^4\text{He}$ . На основі цих експериментальних даних було зроблено припущення, що в ядрі  $^{12}\text{Be}$  існують стани, яким притаманна  $^6\text{He} + ^6\text{He}$  кластерна структура. Це припущення підтверджується розрахунками в рамках антисиметризованої молекулярної динаміки [96, 97], і в квазі-мікроскопічній моделі зв'язаних каналів [98], де цей канал розпаду є домінуючим.

Обидва канали розпаду розглянуто Дискумонтом *та ін.* [99], де кластерні стани  $^{12}\text{Be}$  було розраховано в рамках моделі генераторних координат. На підставі аналізу парціальних ширин резонансних станів, автори вказали на значне змішування кластерних конфігурацій.

В цьому підрозділі ми розглядаємо зіткнення двох ядер  $^6\text{He}$  на основі мікроскопічного підходу – алгебраїчної версії методу резонуючих груп, в рамках якого точно враховується принцип Паулі і кінематика системи, а динаміка моделюється наближенням нульового радіуса ядерних сил. Кінематична інформація отримується з ядра нормування, сконструйованого з одночастинкових орбіталей [100], які є ядрами інтегрального перетворення Баргманна [47]. Ядро нормування визначено в просторі Фока-Баргманна і

розкладено по базису функцій гармонічного осцилятора.

Розрахунок ядер нормування кількох ядерних кластерних систем було зроблено раніше Хектом *та ін.* (див. [101] та посилання там) і Фуджіварою *та ін.* [92]. Обидві групи використовують простір Баргманна [102] та  $SU(3)$ -скалярну властивість ядер нормування. Крім так званих альфа-кластерних систем ( $A = 4n$ ) [103], було розглянуто систему  ${}^6\text{Li} + {}^6\text{Li}$  [101], яка найбільше стосується нашого випадку. В цій роботі наведено ядро нормування системи  ${}^6\text{Li} + {}^6\text{Li}$ . Проектування ядра нормування на базисні стани потребує  $SU(3)$  коефіцієнтів Вігнера [104, 105]. Проте, якщо і базисні функції, і ядро нормування відомі в явному аналітичному вигляді, проектування може бути здійснено значно простіше [5]. Випадок  $SU(3)$  виродження базису потребує спеціального розгляду і шлях усунення такого виродження вказаний в цьому підрозділі.

В цьому підрозділі також обговорюється структура функцій базису кутового момента, який потрібен для визначення асимптотичної поведінки коефіцієнтів розкладу хвильової функції по базису  $SU(3)$  і врахування різних порогових енергій каналів розпаду, що супроводжуються збудженням кластерів. Встановлюється співвідношення між фізичним базисом і базисом  $SU(3)$ .

Пояснюється алгоритм обчислення матричних елементів гамільтоніана на базисних функціях. Повністю мікрокопічний підхід потребує також обчислення і проектування ядра взаємодії, що є більш громіздким завданням. Натомість, щоб вивчити динаміку цієї системи, ми застосували наближення нульового радіусу ядерних сил, тобто моделювали дію потенціалу кількома матричними елементами, підібравши їх так, щоб відтворити деякі ключові експериментальні дані.

**Ядро нормування системи  ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$**  Детальне обговорення ядер нормування в просторі Фока-Баргманна для бінарних систем, кластери яких мають відкриту  $r$ -оболонку, наведено в роботі [5]. Слідуючи описаній там процедурі, можна отримати трансляційно-інваріантне ядро нормування

системи  ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$  у вигляді

$$I = \sum_n I^n(\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2, \bar{\mathbf{R}}; \mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \mathbf{R}^*). \quad (2.1)$$

“Кет”- вектор цієї системи у просторі Фока-Баргманна залежить від двох векторів  $\mathbf{u}_1$  і  $\mathbf{u}_2$ , що відтворюють динаміку нуклонів в відкритій  $p$ -оболонці кожного з кластерів, і вектора Якобі  $\mathbf{R}$ , що описує відносний рух кластерів. Оскільки ми вважаємо, що внутрішня хвильова функція кластера  ${}^6\text{He}$  відноситься до незвідного представлення  $(\lambda, \mu) = (2, 0)$ , степінь внутрішніх кластерних векторів  $\mathbf{u}_k$  дорівнює двійці. "Бра" стан від векторів з рискою. Всі вектори комплексні, а комплексне спряження позначається зірочкою (\*).

Доданок  $I^n$  характеризується числом осциляторних квантів  $n$  вздовж вектора  $\mathbf{R}$ . Щоб виділити в  $I^n$  інтеграли нормування певної  $SU(3)$ -симетрії, запишемо спочатку  $I^n$  у вигляді розкладу по скалярних блоках  $\Phi_{(\lambda', \mu')\nu'}$ , білінійних по декартових компонентах векторів  $\bar{\mathbf{u}}_k$  (а також  $\mathbf{u}_k^*$ ) і однорідних ( $n$ -го степеня однорідності) по компонентах  $\bar{\mathbf{R}}, \mathbf{R}^*$ . Ці блоки, взагалі кажучи, не є  $SU(3)$ -інваріантами. Вони містять стани різних  $SU(3)$ -представлень, найбільш симетричне (лідируюче) з яких є  $(\lambda', \mu')$  і штрих ('') позначає функцію або вираз, що не відноситься повністю до даного  $SU(3)$ -представлення. Коли існує два чи більше блоки, що відносяться до одного й того ж лідируючого представлення, використовується індекс  $\nu'$ , щоб розрізнати їх. Всі блоки інваріантні щодо операції самоспряження, тобто всі вектори мають входити симетричним чином по відношенню до своїх спряжених партнерів. Приклади таких конструкцій для більш простих ядерних систем зустрічались в роботі [5], там їх було не більше трьох для кожної системи. В даному випадку їх 20.

Ми вводимо наступне коротке позначення для семи самоспряженых ска-

лярів  $a_\kappa$ ,

$$\begin{aligned} a_1 &= (\bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{u}_1^*) \quad a_{13} = ([\bar{\mathbf{u}}_1 \times \bar{\mathbf{R}}] \cdot [\mathbf{u}_1^* \times \mathbf{R}^*]) \\ a_2 &= (\bar{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{u}_2^*) \quad a_{23} = ([\bar{\mathbf{u}}_2 \times \bar{\mathbf{R}}] \cdot [\mathbf{u}_2^* \times \mathbf{R}^*]) \\ a_3 &= (\bar{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^*) \quad a_{12} = ([\bar{\mathbf{u}}_1 \times \bar{\mathbf{u}}_2] \cdot [\mathbf{u}_1^* \times \mathbf{u}_2^*]) \\ a_{123} &= ([\bar{\mathbf{u}}_1 \times \bar{\mathbf{u}}_2] \cdot \bar{\mathbf{R}})([\mathbf{u}_1^* \times \mathbf{u}_2^*] \cdot \mathbf{R}^*) \end{aligned}$$

які є власними функціями зведеного оператора Казиміра другого порядку [5]

$$\hat{G}'_2 = (\bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{R}}})(\bar{\mathbf{R}} \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{u}}_1}) + (\bar{\mathbf{u}}_2 \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{R}}})(\bar{\mathbf{R}} \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{u}}_2}) + (\bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{u}}_2})(\bar{\mathbf{u}}_2 \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{u}}_1}), \quad (2.2)$$

і їх індекси  $SU(3)$ -симетрії такі:

$$(\lambda_i, \mu_i) = (1, 0), (\lambda_{ij}, \mu_{ij}) = (0, 1), (\lambda_{123}, \mu_{123}) = (0, 0) \quad (i \neq j = 1, 2, 3).$$

Тоді 20 блоків можна написати у вигляді

$$\Phi_{(\lambda', \mu')\nu'} = \prod_{\kappa} a_{\kappa}^{n_{\kappa}}, \quad \lambda' = \sum_{\kappa} n_{\kappa} \lambda_{\kappa}, \quad \mu' = \sum_{\kappa} n_{\kappa} \mu_{\kappa}.$$

Значення  $n_{\kappa}$  наведені в Таблиці 3. Тоді розклад ядра нормування набуває вигляду

$$I = \frac{1}{2} \sum_n \frac{1}{2!2!n!} \sum_{(\lambda', \mu')\nu'} \Lambda'_{(\lambda', \mu')\nu'} \Phi_{(\lambda', \mu')\nu'}(\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2, \bar{\mathbf{R}}; \mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \mathbf{R}^*), \quad (2.3)$$

де коефіцієнти  $\Lambda'_{(\lambda', \mu')\nu'}$  вказані в Таблиці 4. Існує 14 (порівняй з Таблицею 2 в [101] і обговоренням там)  $SU(3)$ -інваріантів, які можна сконструювати у вигляді лінійних комбінацій  $\Phi_{(\lambda', \mu')\nu'}$ ,

$$F_{(\lambda, \mu)\nu} = \sum_{(\lambda', \mu')\nu'} C_{(\lambda, \mu)\nu}^{(\lambda', \mu')\nu'} \Phi_{(\lambda', \mu')\nu'}. \quad (2.4)$$

Ці інваріанти  $F_{(\lambda, \mu)\nu}$  є проекціями ядер нормування на підпростори представлень з певною  $SU(3)$ -симетрією, де  $\nu$  є додатковим індексом для вироджених станів.

Явний вигляд для цих інваріантів наведений нижче. Тут використано скорочене позначення

$$\Phi_{(\lambda', \mu')\nu'+\nu''} \equiv \Phi_{(\lambda', \mu')\nu'} + \Phi_{(\lambda', \mu')\nu''}.$$

$(\lambda', \mu')\nu'$	$\backslash$	$\kappa$	1	2	3	12	13	23	123
$(n+4, 0)$		2	2	$n$	0	0	0	0	0
$(n+2, 1)1$		1	1	$n$	1	0	0	0	0
$(n+2, 1)2$		1	2	$n-1$	0	1	0	0	0
$(n+2, 1)3$		2	1	$n-1$	0	0	1	0	0
$(n, 2)1$		0	0	$n$	2	0	0	0	0
$(n, 2)2$		0	2	$n-2$	0	2	0	0	0
$(n, 2)3$		2	0	$n-2$	0	0	2	0	0
$(n, 2)4$		1	0	$n-1$	1	0	1	0	0
$(n, 2)5$		0	1	$n-1$	1	1	0	0	0
$(n, 2)6$		1	1	$n-2$	0	1	1	0	0
$(n-2, 3)1$		0	1	$n-3$	0	2	1	0	0
$(n-2, 3)2$		1	0	$n-3$	0	1	2	0	0
$(n-2, 3)3$		0	0	$n-2$	1	1	1	0	0
$(n-4, 4)$		0	0	$n-4$	0	2	2	0	0
$(n+1, 0)$		1	1	$n-1$	0	0	0	1	0
$(n-1, 1)1$		0	0	$n-1$	1	0	0	1	0
$(n-1, 1)2$		0	1	$n-2$	0	1	0	1	0
$(n-1, 1)3$		1	0	$n-2$	0	0	1	1	0
$(n-3, 2)$		0	0	$n-3$	0	1	1	1	0
$(n-2, 0)$		0	0	$n-2$	0	0	0	2	0

Табл. 3: Степені  $a_\kappa$  в різних блоках  $\Phi_{(\lambda', \mu')\nu'}$ 

$$\begin{aligned}
F_{(n+4, 0)} = & \frac{1}{4n!} \left\{ \Phi_{(n+4, 0)} - \frac{4}{n+4} \Phi_{(n+2, 1)1} - \frac{2}{n+4} \Phi_{(n+2, 1)2+3} + \right. \\
& + \frac{2}{(n+3)(n+4)} \Phi_{(n, 2)1} + \frac{n(n-1)}{(n+3)(n+4)} \Phi_{(n, 2)2+3} + \\
& + \frac{4n(n-1)}{(n+3)(n+4)} \Phi_{(n, 2)4} + \frac{4n}{(n+3)(n+4)} \Phi_{(n, 2)5+6} - \\
& - \frac{2n(n-1)(n-2)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \Phi_{(n-2, 3)1+2} - \frac{4n(n-1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \Phi_{(n-2, 3)3} \\
& + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \Phi_{(n-4, 4)} + \frac{4n}{(n+3)(n+4)} \Phi_{(n+1, 0)} \\
& - \left. \frac{4n}{(n+2)(n+3)(n+4)} \Phi_{(n-1, 1)1} - \frac{4n(n-1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \Phi_{(n-1, 1)2+3} \right\}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{4n(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \Phi_{(n-3,2)} + \frac{2n(n-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \Phi_{(n-2,0)} \Big\}$$

$$\begin{aligned} F_{(n+2,1)1} = & \frac{1}{4n!} \left\{ \Phi_{(n+2,1)1} - \frac{1}{n+2} \Phi_{(n,2)1} - \frac{n}{n+2} \Phi_{(n,2)5+6} + \right. \\ & + \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} \Phi_{(n-2,3)3} - \frac{n^2}{(n+2)(n+4)} \Phi_{(n+1,0)} + \\ & + \frac{2n}{(n+1)(n+4)} \Phi_{(n-1,1)1} + \frac{n^2(n-1)}{(n+1)(n+2)(n+4)} \Phi_{(n-1,1)2+3} - \\ & \left. - \frac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)(n+4)} \Phi_{(n-3,2)} - \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)(n+4)} \Phi_{(n-2,0)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{(n+2,1)2} = & \frac{1}{4(n+4)(n-1)!} \left\{ 2 \Phi_{(n+2,1)2+3} - \Phi_{(n+2,1)1} + \frac{1}{n+2} \Phi_{(n,2)1} \right. \\ & - \frac{2(n-1)}{n+2} \Phi_{(n,2)2+3} - \frac{8(n-1)}{n+2} \Phi_{(n,2)4} + \frac{n-4}{n+2} \Phi_{(n,2)5+6} \\ & + \frac{6(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)} \Phi_{(n-2,3)1+2} - \frac{(n-1)(n-8)}{(n+1)(n+2)} \Phi_{(n-2,3)3} \\ & - \frac{4(n-1)(n-2)(n-3)}{n(n+1)(n+2)} \Phi_{(n-4,4)} + \frac{n-4}{n+2} \Phi_{(n+1,0)} \\ & - \frac{2(n-2)}{(n+1)(n+2)} \Phi_{(n-1,1)1} - \frac{(n-1)(n-8)}{(n+1)(n+2)} \Phi_{(n-1,1)2+3} \\ & \left. + \frac{(n-1)(n-2)(n-12)}{n(n+1)(n+2)} \Phi_{(n-3,2)} + \frac{(n-1)(n-4)}{n(n+1)(n+2)} \Phi_{(n-2,0)} \right\} \end{aligned}$$

$$F_{(n,2)1} = \frac{1}{12n!} \left\{ \Phi_{(n,2)1} - \frac{2n}{n+3} \Phi_{(n-1,1)1} + \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)} \Phi_{(n-2,0)} \right\}$$

$$\begin{aligned} F_{(n,2)2} = & \frac{1}{8(n+2)(n-1)!} \left\{ 2 \Phi_{(n,2)5+6} - \Phi_{(n,2)1} - \frac{4(n-1)}{n} \Phi_{(n-2,3)3} - \right. \\ & - 2 \Phi_{(n+1,0)} + \frac{2(n-1)(n+2)}{n(n+3)} \Phi_{(n-1,1)1} + \frac{4(n-1)}{n(n+3)} \Phi_{(n-1,1)2+3} + \\ & \left. + \frac{2(n-1)(n-2)}{n(n+3)} \Phi_{(n-3,2)} + \frac{n-1}{n+3} \Phi_{(n-2,0)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{(n,2)3} &= \frac{1}{4(n+2)(n+3)(n-2)!} \left\{ \frac{1}{6} \Phi_{(n,2)1} + \Phi_{(n,2)2+3} + 4 \Phi_{(n,2)4} - \Phi_{(n,2)5+6} \right. \\
&\quad - \frac{6(n-2)}{n} \Phi_{(n-2,3)1+2} + \frac{2(n-3)}{n} \Phi_{(n-2,3)3} + \frac{6(n-2)(n-3)}{n(n-1)} \Phi_{(n-4,4)} \\
&\quad - \Phi_{(n+1,0)} - \frac{n-6}{3n} \Phi_{(n-1,1)1} + \frac{2(n-3)}{n} \Phi_{(n-1,1)2+3} \\
&\quad \left. - \frac{3(n-2)(n-5)}{n(n-1)} \Phi_{(n-3,2)} + \frac{n^2 - 13n + 24}{6n(n-1)} \Phi_{(n-2,0)} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{(n-2,3)1} &= \frac{n-1}{12(n+1)!} \left\{ 3\Phi_{(n-2,3)3} - \Phi_{(n-1,1)1+2+3} \right. \\
&\quad \left. - \frac{n-2}{n+2} \Phi_{(n-3,2)} - \frac{n}{n+2} \Phi_{(n-2,0)} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{(n-2,3)2} &= \frac{(n-1)(n-2)}{2(n+2)!} \left\{ \Phi_{(n-2,3)1+2} - \frac{1}{2} \Phi_{(n-2,3)3} - \frac{2(n-3)}{n-2} \Phi_{(n-4,4)} \right. \\
&\quad + \frac{1}{6} \Phi_{(n-1,1)1} - \frac{1}{2} \Phi_{(n-1,1)2+3} - \frac{n-2}{3(n+2)} \Phi_{(n-3,2)} + \frac{n}{3(n+2)} \Phi_{(n-2,0)} \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$F_{(n-4,4)} = \frac{n-3}{4(n+1)!} \left\{ \Phi_{(n-4,4)} - \Phi_{(n-3,2)} + \frac{1}{6} \Phi_{(n-2,0)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
F_{(n+1,0)} &= \frac{1}{2(n+4)(n-1)!} \left\{ \Phi_{(n+1,0)} - \frac{1}{n+1} \Phi_{(n-1,1)1} - \frac{n-1}{n+1} \Phi_{(n-1,1)2+3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(n-1)(n-2)}{n(n+1)} \Phi_{(n-3,2)} + \frac{n-1}{n(n+1)} \Phi_{(n-2,0)} \right\}
\end{aligned}$$

$$F_{(n-1,1)1} = \frac{1}{6(n+3)(n-1)!} \left\{ \Phi_{(n-1,1)1} - \frac{n-1}{(n+1)} \Phi_{(n-2,0)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
F_{(n-1,1)2} &= \frac{1}{6(n+1)(n+3)(n-2)!} \left\{ 2 \Phi_{(n-1,1)2+3} - \Phi_{(n-1,1)1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{4(n-2)}{n-1} \Phi_{(n-3,2)} + \frac{n-3}{n-1} \Phi_{(n-2,0)} \right\}
\end{aligned}$$

$$F_{(n-3,2)} = \frac{(n+1)(n-2)}{4(n+2)!} \left\{ \Phi_{(n-3,2)} - \frac{1}{2} \Phi_{(n-2,0)} \right\}$$

$$F_{(n-2,0)} = \frac{n(n-1)}{12(n+2)!} \Phi_{(n-2,0)}$$

Коефіцієнти  $C_{(\lambda,\mu)\nu}^{(\lambda',\mu')\nu'}$  задовольняють наступним умовам.

- Ядра нормування  $F_{(\lambda,\mu)\nu}$  є власними функціями (2.2), тобто

$$(\hat{G}'_2 - g'_2(\lambda, \mu)) F_{(\lambda,\mu)\nu} = 0. \quad (2.5)$$

- Оскільки ми маємо справу з двома ідентичними кластерами, існує додаткова симетрія відносно перестановки двох кластерів в цілому. Відповідна операція зводиться до перестановки векторів  $\bar{\mathbf{u}}_1$  і  $\bar{\mathbf{u}}_2$ , і зміні знаку у вектора  $\bar{\mathbf{R}}$ . Очевидно, що функції з парним числом квантів,  $n = 2k$ , мають бути симетричними щодо першої операції, а з непарним числом квантів  $n = 2k + 1$  – антисиметричними. Це призводить до додаткової вимоги: блоки  $F_{(\lambda,\mu)\nu}$  мають також бути власними функціями останнього доданку  $\hat{G}'_2$ , тобто,  $(\bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{u}}_2})(\bar{\mathbf{u}}_2 \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{u}}_1})$ .
- Нарешті,  $F_{(\lambda,\mu)\nu}$  є нормованими на розмірність незвідного представлення  $(\lambda, \mu)$  [50]:

$$\int F_{(\lambda,\mu)\nu}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{R}; \mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \mathbf{R}^*) d\mu_b = \dim[\lambda, \mu] = \frac{(\lambda+1)(\mu+1)(\lambda+\mu+2)}{2}, \quad (2.6)$$

де  $d\mu_b$  – міра Баргманна [5].

Обертаючи<sup>1</sup> матрицю коефіцієнтів  $C_{(\lambda,\mu)\nu}^{(\lambda',\mu')\nu'}$ , можна записати результат проектування ядра нормування (2.3) на стани з певною SU(3)-симетрією у вигляді

$$I^n = \sum_{(\lambda,\mu)\nu} \Lambda_{(\lambda,\mu)\nu} F_{(\lambda,\mu)\nu} \quad (2.7)$$

---

**Примітка 1.** Слово "обернення" використовується тут у широкому сенсі, оскільки матриця цих коефіцієнтів не квадратна. Вона може бути зведена до квадратної форми, однак не всі коефіцієнти  $\Lambda'_{(\lambda',\mu')\nu'}$  є незалежними, як видно з Таблиці 4.

де

$$\Lambda_{(\lambda,\mu)\nu} = \frac{1}{2} \sum_{(\lambda',\mu')\nu'} \frac{1}{2!2!n!} (C^{-1})_{(\lambda',\mu')\nu'}^{(\lambda,\mu)\nu} \Lambda'_{(\lambda',\mu')\nu'} \quad (2.8)$$

— власні значення ядра нормування.

---

$(\lambda', \mu')\nu'$	$\Lambda'_{(\lambda', \mu')\nu'}$
$(n+4, 0)$	$\{1 + (-1)^n\} 2^{-1} 3^{-n} \{30 - 3 \cdot 2^{2+n} + 2 \cdot 3^n + n(n-1)(28 - 2^n + 2n(n-5)) - 20\delta(0, n) - 24\delta(2, n) - 48\delta(4, n)\}$
$(n+2, 1)1$	$2^{-1} 3^{-n} \{4(1 - (-1)^n)n^3 + [(-2)^n - 16]n^2 + [(-1)^n(2^n - 12) + 2(14 - 2^n)]n - 4[5 - 2^n + (-1)^n(10 - 52^n + 3^n)]\} + 20\delta(0, n) - 4\delta(1, n) + 4/3\delta(2, n) - 8/9\delta(3, n)$
$(n+2, 1)2, 3$	$2^{-1} 3^{-(n+3)} \{27(1 + (-1)^n)n(n-1)(2^n + 20n - 4n^2 - 40) + 16 3^{2+n}\delta(2, n) + 64 3^n\delta(4, n)\}$
$(n, 2)1$	$3^{-n} \{(n^2 - 3n + 1) + (-1)^n[n^2 + (5 - 2^n)n + 3^n - 2^{n+2} + 6] - 4 \cdot 3^n\delta(0, n) + 2 \cdot 3^n\delta(1, n) - 4 \cdot 3^{n-2}\delta(2, n)\}$
$(n, 2)2, 3$	$3^{-n} (1 + (-1)^n)n(n-1)(n-2)(n-3) - 16/27\delta(4, n)$
$(n, 2)4$	$3^{-n} (1 + (-1)^n)n(n-1)(32 - 2^{n-1} + 4(n-5)n) - 8/3\delta(2, n) - 64/27\delta(4, n)$
$(n, 2)5, 6$	$3^{-n}n(n-1)(6 + (-2)^{n-1} - 2n + 2(-1)^n(1+n)) - 4/3\delta(2, n) + 8/9\delta(3, n)$
$(n-2, 3)1, 2$	$-3^{-n}2(1 + (-1)^n)n(n-1)(n-2)(n-3) + 32/27\delta(4, n)$
$(n-2, 3)3$	$-3^{-n}(n-1)n(6 + (-2)^{n-1} - 2n + 2(-1)^n(1+n)) + 4/3\delta(2, n) - 8/9\delta(3, n)$
$(n-4, 4)$	$3^{-n}(1 + (-1)^n)n(n-1)(n-2)(n-3) - 16/27\delta(4, n)$
$(n+1, 0)$	$-3^{-n}(1 - (-1)^n)n(12 - 2^n + 2(n-3)n) + 4\delta(1, n) + 8/9\delta(3, n)$
$(n-1, 1)1$	$3^{-n}2n(2 - (-2)^{n-1} - n - (-1)^n(2+n)) - 2\delta(1, n) + 8/9\delta(2, n)$
$(n-1, 1)2, 3$	$3^{-n}2(1 - (-1)^n)n(n-1)(n-2) - 8/9\delta(3, n)$
$(n-3, 2)$	$-3^{-n}2(1 - (-1)^n)n(n-1)(n-2) + 8/9\delta(3, n)$
$(n-2, 0)$	$3^{-n}(1 + (-1)^n)n(n-1) - 4/9\delta(2, n)$

Табл. 4: Коефіцієнти розкладу ядра нормування  $I^n$  по блоках  $\Phi_{(\lambda', \mu')\nu'}$ .

**Базисні стани з  $L^\pi = 0^+$**  Далі ми обмежимося доданками ядра нормування, що відповідають нульовому орбітальному моменту  $L = 0$  і дода-

тній парності. Вони входять до складу лише тих представлень, для яких  $n = 2k$ . Таких представлень виявляється чотири, але одне з них дво-кратно вироджене. Індекси симетрії цих незвідних представлень –  $(2k + 4, 0), (2k, 2), (2k - 4, 4)$  і  $(2k - 2, 0)$ . Представлення  $(2k, 2)$  дво-кратно вироджене, що далі буде позначатись додатковим індексом  $\nu = 1, 2$ , і символом  $(2k, 2)_\nu$ . Представимо ядро нормування

$$I_{L=0} = I_{L=0}(\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2, \bar{\mathbf{R}}; \mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \mathbf{R}^*) \quad (2.9)$$

у вигляді розкладу по його власних функціях  $\bar{\Psi}^{(\lambda,\mu)\nu} \equiv \Psi_{L=0}^{(\lambda,\mu)\nu}(\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2, \bar{\mathbf{R}})$  і  $\Psi^{*(\lambda,\mu)\nu} \equiv \Psi_{L=0}^{(\lambda,\mu)\nu}(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \mathbf{R}^*)$ .

$$\begin{aligned} I_{L=0} = & \sum_k \left\{ \Lambda_{(2k+4,0)} \bar{\Psi}^{(2k+4,0)} \Psi^{*(2k+4,0)} + \Lambda_{(2k,2)_1} \bar{\Psi}^{(2k,2)_1} \Psi^{*(2k,2)_1} \right. \\ & + \Lambda_{(2k,2)_2} \bar{\Psi}^{(2k,2)_2} \Psi^{*(2k,2)_2} + \Lambda_{(2k-4,4)} \bar{\Psi}^{(2k-4,4)} \Psi^{*(2k-4,4)} \\ & \left. + \Lambda_{(2k-2,0)} \bar{\Psi}^{(2k-2,0)} \Psi^{*(2k-2,0)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

(Оскільки функції  $L \neq 0$  не обговорюються в цьому підрозділі, індекс  $L = 0$  далі буде опускатися.)

Щоб знайти явний вигляд хвильових функцій  $\Psi^{(\lambda,\mu)}$  невироджених  $SU(3)$ -представлень і відповідних їм власних значень, досить здійснити проектування ядра (2.7) на стани з нульовим орбітальним моментом. В просторі Фока-Баргманна ортонормований базис власних функцій можна також знайти a priori, не звертаючись безпосередньо до ядра нормування з тим, щоб пошук власних значень звести до аналітичного обчислення інтегралів від добутку ядра нормування і власних функцій. Для тих же індексів  $SU(3)$ -симетрії, для яких є виродження, базис, побудований a priori, суттєво спрощує процедуру діагоналізації ядра нормування і подальше визначення власних значень і власних функцій вироджених станів зводить до стандартних алгебраїчних операцій.

З ортонормованості функцій  $\Psi^{(\lambda,\mu)}$  з мірою Баргманна випливає тотожність

$$\int \Psi^{(\lambda,\mu)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{R}) I_{L=0} \Psi^{(\bar{\lambda},\bar{\mu})}(\bar{\mathbf{u}}_1^*, \bar{\mathbf{u}}_2^*, \bar{\mathbf{R}}^*) d\mu_b d\bar{\mu}_b = \Lambda_{(\lambda,\mu)} \delta_{\lambda,\bar{\lambda}} \delta_{\mu,\bar{\mu}}, \quad (2.11)$$

а також інша, еквівалентна:

$$\int I_{L=0} \Psi^{(\lambda,\mu)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{R}) d\mu_b = \Lambda_{(\lambda,\mu)} \Psi^{(\lambda,\mu)}(\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2, \bar{\mathbf{R}}). \quad (2.12)$$

Однак, перш ніж реально використовувати (2.11) і (2.12), необхідно побудувати базисні функції  $\Psi^{(\lambda,\mu)}$ .

**Невироджений випадок** Щоб побудувати базисні функції в просторі Фока-Баргманна, не звертаючись до інтегралу перекриття, слід керуватися наступними вимогами. Функції  $\Psi^{(\lambda,\mu)}$  повинні бути власними функціями зведеного оператора Казимира другого порядку  $\hat{G}'_2$  з власним значенням  $g'_2(\lambda, \mu)$  і бути скалярними конструкціями, тобто відповідати нульовому орбітальному моменту. Крім того, вони мають бути симетричними відносно перестановки векторів  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  і ортонормовані з мірою Баргманна.

Самою простою серед базисних функцій при заданому значенні  $k$  є найменш симетрична функція  $\Psi^{(2k-2,0)}$ :

$$\Psi^{(2k-2,0)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{R}) = \sqrt{\frac{k}{6(2k+2)!}} ([\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2] \cdot \mathbf{R})^2 \mathbf{R}^{2k-2}, \quad (2.13)$$

(тут і нижче використано позначення  $\mathbf{X}^{2\nu} \equiv (\mathbf{X} \cdot \mathbf{X})^\nu$ ). Змішаний добуток трьох векторів має  $SU(3)$ -симетрію  $(0, 0)$ , а  $U(3)$ -симетрію  $[1, 1, 1]$ . Він з'являється щоразу, коли нуклони з заданим напрямком спіну повністю заповнюють осциляторну оболонку. Відзначимо, що  $\Psi^{(2k-2,0)}$  обертається на нуль щоразу, коли колінеарні будь-які два вектори з трійки векторів  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  і  $\mathbf{R}$ . Тому, врахувавши другий степінь змішаного добутку, ми можемо сказати, що функція (2.13) має нуль шостого порядку.

Власні функції, що відносяться до незвідних представлень  $(2k-4, 4)$  та  $(2k+4, 0)$ , мають вигляд:

$$\begin{aligned} \Psi^{(2k-4,4)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{R}) &= \sqrt{\frac{3k(k-1)}{8(4k^2-1)(2k+1)!}} \left\{ [\mathbf{u}_1 \times \mathbf{R}]^2 [\mathbf{u}_2 \times \mathbf{R}]^2 \mathbf{R}^{2k-4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} ([\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2] \cdot \mathbf{R})^2 \mathbf{R}^{2k-2} \right\}; \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned}
\Psi^{(2k+4,0)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{R}) &= \frac{1}{\sqrt{4(2k+5)(2k)!}} \left\{ \mathbf{u}_1^2 \mathbf{u}_2^2 \mathbf{R}^{2k} - \frac{2}{2k+3} [\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2]^2 \mathbf{R}^{2k} \right. \\
&- \frac{2k}{2k+3} ([\mathbf{u}_1 \times \mathbf{R}]^2 \mathbf{u}_2^2 \mathbf{R}^{2k-2} + [\mathbf{u}_2 \times \mathbf{R}]^2 \mathbf{u}_1^2 \mathbf{R}^{2k-2}) \\
&+ \frac{4k(k-1)}{(2k+1)(2k+3)} [\mathbf{u}_1 \times \mathbf{R}]^2 [\mathbf{u}_2 \times \mathbf{R}]^2 \mathbf{R}^{2k-4} \\
&\left. + \frac{4k}{(2k+1)(2k+3)} ([\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2] \cdot \mathbf{R})^2 \mathbf{R}^{2k-2} \right\}. \quad (2.15)
\end{aligned}$$

Очевидно, що функції з більш високою  $SU(3)$ -симетрією мають більш складну структуру. Перший доданок в базисних функціях  $\Psi^{(2k-4,4)}$  і  $\Psi^{(2k+4,0)}$  є їх головним елементом, що визначає кількість вузлів функції. Так, функція представлення  $(2k-4, 4)$  має нуль четвертого порядку, а функція  $\Psi^{(2k+4,0)}$  є безвузловою.

Раніше було встановлено [106], що добуток парних степенів двох векторів можна представити у вигляді суперпозиції гіпергеометричних функцій, кожна з яких має певну  $SU(3)$ -симетрію. Зараз ми маємо добуток парних степенів трьох векторів і знову приходимо до виразів, що мають структуру гіпергеометричних функцій, але тепер уже кількох змінних. Функції базису  $SU(3)$  виражуються через гіпергеометричні функції

$${}_3F_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \gamma; z_1, z_2, z_3),$$

змінними яких є конструкції вигляду

$$z_1 = \frac{[\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2]^2}{\mathbf{u}_1^2 \mathbf{u}_2^2}, \quad z_2 = \frac{[\mathbf{u}_1 \times \mathbf{R}]^2}{\mathbf{u}_1^2 \mathbf{R}^2}, \quad z_3 = \frac{[\mathbf{u}_2 \times \mathbf{R}]^2}{\mathbf{u}_2^2 \mathbf{R}^2}.$$

Ця гіпергеометрична функція визначається так:

$$\begin{aligned}
& {}_3F_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \gamma; z_1, z_2, z_3) \\
&= \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \sum_{m_3=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{m_1} (\alpha_2)_{m_2} (\alpha_3)_{m_3}}{(\gamma)_{m_1+m_2+m_3} m_1! m_2! m_3!} z_1^{m_1} z_2^{m_2} z_3^{m_3},
\end{aligned}$$

де  $(\alpha_i)_{m_i}$  - символ Покхаммера [107].

**Вироджений випадок** Як показано вище, можна записати 6 різних скалярних конструкцій  $\Phi_{(2k,2)\bar{\nu}}$ , в яких реалізується в якості самого симетричного  $SU(3)$ -незвідне представлення  $(\lambda', \mu') = (2k, 2)$ . Отже, можна побудувати 6 функцій  $L^\pi = 0^+$  вказаної симетрії. Але вимогам перестановочної симетрії задовольняють лише чотири з них. Лінійно-незалежних же виявляється лише дві.

Доцільно<sup>1</sup> вибрати в якості ортонормованих функцій такі дві функції:

$$\begin{aligned} \chi^{(2k,2)1}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{R}) &= \frac{k+1}{\sqrt{4(2k+3)!}} \cdot \sqrt{\frac{k(2k-1)}{2k^2+k+1}} \left\{ [\mathbf{u}_1 \times \mathbf{R}]^2 \mathbf{u}_2^2 \mathbf{R}^{2k-2} \right. \\ &+ [\mathbf{u}_2 \times \mathbf{R}]^2 \mathbf{u}_1^2 \mathbf{R}^{2k-2} - \frac{4(k-1)}{2k-1} [\mathbf{u}_1 \times \mathbf{R}]^2 [\mathbf{u}_2 \times \mathbf{R}]^2 \mathbf{R}^{2k-4} \\ &\left. - \frac{2}{(2k-1)(k+1)} ([\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2] \cdot \mathbf{R})^2 \mathbf{R}^{2k-2} \right\}; \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \chi^{(2k,2)2}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{R}) &= \sqrt{\frac{(k+1)(2k^2+k+1)}{2(2k+3)(2k+3)!}} \left\{ [\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2]^2 \mathbf{R}^{2k} \right. \\ &- \frac{k(2k-1)}{2k^2+k+1} ([\mathbf{u}_1 \times \mathbf{R}]^2 \mathbf{u}_2^2 \mathbf{R}^{2k-2} + [\mathbf{u}_2 \times \mathbf{R}]^2 \mathbf{u}_1^2 \mathbf{R}^{2k-2}) \\ &+ \frac{4k(k-1)}{2k^2+k+1} [\mathbf{u}_1 \times \mathbf{R}]^2 [\mathbf{u}_2 \times \mathbf{R}]^2 \mathbf{R}^{2k-4} \\ &\left. - \frac{k(2k-1)}{2k^2+k+1} ([\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2] \cdot \mathbf{R})^2 \mathbf{R}^{2k-2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Головну роль у поведінці цих функцій відіграють вирази

$$[\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2]^2 \mathbf{R}^{2k} \text{ i } [\mathbf{u}_1 \times \mathbf{R}]^2 \mathbf{u}_2^2 \mathbf{R}^{2k-2} + [\mathbf{u}_2 \times \mathbf{R}]^2 \mathbf{u}_1^2 \mathbf{R}^{2k-2}.$$

Обидва вирази є симетричними щодо перестановки векторів  $\mathbf{u}_1$  і  $\mathbf{u}_2$ . Крім того, кожен з них має нуль другого порядку.

Щоб зняти  $SU(3)$ -виродження, ми спершу обчислимо наступні інтеграли:

$$\int \chi^{(2k,2)i}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{R}) I_{L=0} \chi^{(2k,2)j}(\bar{\mathbf{u}}_1^*, \bar{\mathbf{u}}_2^*, \bar{\mathbf{R}}^*) d\mu_b d\bar{\mu}_b = \lambda_{ij}(k), \quad i, j = 1, 2.$$

---

**Примітка 1.** Як буде показано далі, саме ці функції є власними функціями інтегралу перекриття при великих значеннях числа квантів.

Коефіцієнти  $\lambda_{ij}(k)$  вказані нижче.

$$\begin{aligned}\lambda_{11}(k) &= 1 - \frac{4k^3 + 8k^2 + 19k + 16}{2(2k^2 + k + 1)} \left(\frac{4}{9}\right)^k + \\ &+ \frac{48k^4 - 32k^3 - 126k^2 + 47k + 119}{2k^2 + k + 1} \left(\frac{1}{9}\right)^k \\ \lambda_{22}(k) &= 1 - \frac{4k^4 + 77k^2 + 9k + 12}{4(2k^2 + k + 1)} \left(\frac{4}{9}\right)^k + \\ &+ \frac{88k^4 - 200k^3 + 288k^2 - 75k + 3}{2k^2 + k + 1} \left(\frac{1}{9}\right)^k \\ \lambda_{12}(k) &= \frac{\sqrt{2k(2k-1)(k+1)(2k+3)}}{4(2k^2+k+1)} \times \\ &\times \left\{ (7-6k) \left(\frac{4}{9}\right)^k - 8(6k^2-25k+20) \left(\frac{1}{9}\right)^k \right\}\end{aligned}$$

При даному  $n$  ядро нормування  $I^n$  можна записати (див. (2.7)) у вигляді суми ядер нормування з певною  $SU(3)$ -симетрією  $I^{(\lambda,\mu)}$ . Далі ми зосередимо увагу на структурі ядра нормування  $I_{L=0}^{(2k,2)}$  і запишемо його у вигляді

$$I_{L=0}^{(2k,2)} = \sum_{i,j=1}^2 \lambda_{ij}(k) \chi^{(2k,2)i}(\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2, \bar{\mathbf{R}}) \chi^{(2k,2)j}(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \mathbf{R}^*) \quad (2.18)$$

Як випливає з рівнянь (2.12) і (2.18),  $I_{L=0}^{(2k,2)}$  є виродженим ядром інтегрального рівняння (2.12), і отже може бути представлене у формі розкладу Гільберта-Шмідта,

$$I_{L=0}^{(2k,2)} = \Lambda_{(2k,2)1}(k) \bar{\Psi}^{(2k,2)1} \Psi^{*(2k,2)1} + \Lambda_{(2k,2)2}(k) \bar{\Psi}^{(2k,2)2} \Psi^{*(2k,2)2}. \quad (2.19)$$

Ми будемо шукати розв'язок цього інтегрального рівняння у вигляді

$$\begin{aligned}\Psi^{(2k,2)1} &= \cos \alpha(k) \chi^{(2k,2)1} - \sin \alpha(k) \chi^{(2k,2)2}; \\ \Psi^{(2k,2)2} &= \sin \alpha(k) \chi^{(2k,2)1} + \cos \alpha(k) \chi^{(2k,2)2},\end{aligned} \quad (2.20)$$

що задовольняє умову нормування для функцій  $\Psi^{(2k,2)1}$  і  $\Psi^{(2k,2)2}$ . Ми отримали систему лінійних рівнянь другого порядку для кута  $\alpha(k)$  з розв'язком

$$\cos \alpha(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2(k)}}}, \quad \sin \alpha(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2(k)}}},$$

$$x(k) = \frac{2\lambda_{12}(k)}{\lambda_{11}(k) - \lambda_{22}(k)}. \quad (2.21)$$

При зміні числа квантів  $2k$  змінюється і значення кута  $\alpha$ , що відображається на структурі функцій вироджених станів (Табл.5, права колонка). При мінімальному для цього представлення числа квантів, дозволеного принципом Паулі,  $\alpha(k = 3)$  близьке до  $\pi/6$ . При  $k \rightarrow \infty$  кут  $\alpha$  прагне до нуля, оскільки

$$x(k) \rightarrow -\frac{6\sqrt{2}}{k} \left( 1 + \frac{4}{3k} \right) \rightarrow 0. \quad (2.22)$$

Умова рівності нулю детермінанту цієї системи приводить до квадратного рівняння на власні значення

$$\Lambda_{(2k,2)_{1,2}} = \frac{\lambda_{11}(k) + \lambda_{22}(k)}{2} \pm \frac{\lambda_{11}(k) - \lambda_{22}(k)}{2} \sqrt{1 + x^2(k)}, \quad (2.23)$$

Залежність власних значень від числа осциляторних квантів  $k$  також вказана в Табл.5. При  $k = 3$   $\Lambda_{(2k,2)_2}$  обертається на нуль. Це означає, що при мінімальному для цього представлення числі квантів дозволеною є лише одна з двох функцій.

Оскільки власні значення ядра інтегрального рівняння (2.18) мають скінченну граничну точку, в цій точці не можна однозначно визначити функції ядра  $\Psi^{(2k,2)\nu}$ . Розв'язком інтегрального рівняння виявляється будь-яка пара функцій, отримана в результаті довільного унітарного перетворення функцій  $\chi^{(2k,2)1,2}$ . Якщо  $k \rightarrow \infty$ , то  $\lambda_{12}(k) \rightarrow 0$ , а граничні значення  $\lambda_{11}(k)$  і  $\lambda_{22}(k)$  дорівнюють одиниці. Між тим, при всіх скінченних значеннях числа квантів  $2k$ , яким би малим не був коефіцієнт  $\lambda_{12}(k)$  і як би не були близькі до нуля різниці  $(\lambda_{11}(k) - 1)$  і  $(\lambda_{22}(k) - 1)$ , власні функції ядра  $\Psi^{(2k,2)\nu}$  визначаються однозначно. Тому при великих значеннях  $k$  доцільно мати справу з граничним розв'язком інтегрального рівняння, а не з розв'язком граничного рівняння.

**Власні значення ядра нормування** Зараз, коли побудовані базисні функції SU(3)-незвідних представлень, за допомогою співвідношень (2.11)

можуть бути обчислені власні значення невироджених станів:

$$\Lambda_{(2k+4,0)} = 1 - \frac{2^{2k}(2k^2 - k + 6) - 4k(2k - 1)(2k^2 - 5k + 7) - 15}{3^{2k}} \quad (k \geq 5);$$

$$\Lambda_{(2k-4,4)} = 1 - \frac{2^{2k} \cdot 7 - 55}{3^{2k}} \quad (k \geq 3); \quad \Lambda_{(2k-2,0)} = 1 - \frac{2^{2k-2} - 13}{3^{2k}} \quad (k \geq 2).$$

Кожне з обчислених таким чином власних значень належить не лише станам з нульовим орбітальним моментом  $L$ , але всім іншим базисним функціям з тією ж самою  $SU(3)$  симетрією. Зауважимо також, що викладений вище алгоритм побудови власних функцій з  $L = 0$  підказує, як побудувати власні функції з ненульовим значенням орбітального моменту.

Представимо підсумок попередніх обчислень – розклад Гільберта-Шмідта для ядра нормування  $I_{L=0}$ , враховуючи лише відмінні від нуля власні значення:

$$\begin{aligned} I_{L=0} = & \sum_{k=5} \Lambda_{(2k+4,0)} \bar{\Psi}^{(2k+4,0)} \Psi^{*(2k+4,0)} + \sum_{k=4} \Lambda_{(2k,2)_2} \bar{\Psi}^{(2k,2)_2} \Psi^{*(2k,2)_2} \\ & + \sum_{k=3} \Lambda_{(2k,2)_1} \bar{\Psi}^{(2k,2)_1} \Psi^{*(2k,2)_1} + \sum_{k=3} \Lambda_{(2k-4,4)} \bar{\Psi}^{(2k-4,4)} \Psi^{*(2k-4,4)} \\ & + \sum_{k=2} \Lambda_{(2k-2,0)} \bar{\Psi}^{(2k-2,0)} \Psi^{*(2k-2,0)}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Як видно з (2.24), мінімальне число квантів, допустиме принципом Паулі, дорівнює  $n = 2k = 4$ . Із збільшенням числа квантів кількість дозволених станів зростає і лише при  $n = 2k \geq 10$  квантах відносного руху кластерів в інтегралі перекриття  $I_{L=0}$  присутні всі можливі  $SU(3)$ -незвідні представлення (див. Табл. 5).

Велика кількість незвідних представлень ставить питання про їх класифікацію з метою визначити найбільш важливі серед них, принаймі в області малих надпорогових енергій. Як видно з Таблиці 5, всі власні значення, крім  $\Lambda_{(2,0)}$ , менші одиниці і тому породжують ефективний потенціал відштовхування. Найбільші з власних значень належать гілці  $(2k - 2, 0)$ , а найменші – гілці  $(2k + 4, 0)$ . В станах останньої обумовлене дією принципу Паулі відштовхування кластерів максимальне, а радіус дії обмінних ефектів найбільший. Лише коли  $k \geq 14$ , власні значення близькі до одиниці.

$k$	$\Lambda_{(2k+4,0)}$	$\Lambda_{(2k,2)_2}$	$\Lambda_{(2k,2)_1}$	$\Lambda_{(2k-4,4)}$	$\Lambda_{(2k-2,0)}$	$\cos \alpha(k)$
2	0	0	0	0	1.1111	
3	0	0	0.8313	0.4609	0.9959	0.8700
4	0	0.3117	0.9229	0.7352	0.9922	0.8792
5	0.2134	0.5864	0.9592	0.8795	0.9959	0.8896
6	0.4694	0.7657	0.9792	0.9461	0.9981	0.9000
7	0.6730	0.8713	0.9896	0.9760	0.9991	0.9102
8	0.8092	0.9307	0.9947	0.9893	0.9996	0.9198
9	0.8926	0.9633	0.9973	0.9953	0.9998	0.9286
10	0.9411	0.9807	0.9986	0.9979	0.9999	0.9366

Табл. 5: Власні значення  $\Lambda_{(\lambda,\mu)}$  ядра нормування системи  ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$

Крім того, ця гілка починається з  $k = 5$ , тобто пізніше за інші. Дещо менше відштовхування в станах гілки  $(2k, 2)_2$ , мінімальне значення  $k$  для якої дорівнює 4, а власні значення практично дорівнюють одиниці, якщо  $k \geq 13$ . Ще менше відштовхування для гілок  $(2k - 4, 4)$  і  $(2k, 2)_1$ , які починаються при  $k = 3$ . Власні значення цих гілок можна покласти рівними одиниці, якщо  $k \geq 10$ . Звертає на себе увагу той факт, що за відсутності виродження власні значення тим менші, чим вища  $U(3)$ -симетрія (чим більші власні значення  $U(3)$ -оператора Казимира другого порядку).

**Хвильова функція системи  ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$**  Зараз ми маємо повний базис<sup>1</sup>  $\{\Psi_k^{(\lambda,\mu)\nu}\}$  дозволених принципом Паулі станів з  $L = 0$  в каналі  ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$ . Хвильову функцію  $\Psi_{L=0}^E$  цього каналу можна розкласти по цьому базису

$$\Psi_{L=0}^E = \sum_k \sum_{(\lambda_k, \mu)\nu} C_k^{(\lambda, \mu)\nu}(E) \Psi_k^{(\lambda, \mu)\nu}, \quad (2.25)$$

де  $E$  – енергія цього стану, відрахована від порогу розвалу  ${}^{12}\text{Be}$  на два ядра  ${}^6\text{He}$ , а  $C_k^{(\lambda, \mu)\nu}(E)$  – коефіцієнти розкладу. Щоб знайти їх, необхідно розв'язати систему рівнянь АВМРГ [108].

Якщо вивчаються стани дискретного спектра, то звертання до базису  $SU(3)$  незвідних представлень не становить ніяких проблем. Коефіцієнти

---

**Примітка 1.** Базисні функції залежать від  $k$  через індекс  $SU(3)$ -симетрії  $\lambda$ , але інколи його буде вказано як нижній індекс для ясності

розкладу досить швидко спадають, і тому в сумі (2.25) можна обмежитись відносно невеликою кількістю доданків навіть у випадку станів, близьких до порогу розвалу системи. При цьому поведінка коефіцієнтів  $C_k^{(\lambda,\mu)\nu}(E)$  в залежності від  $k$ , дає інформацію про точність моделі оболонок, оскільки в розрахунках, виконаних на основі останньої, обмежуються станами з мінімальним  $k$  і кластерні степені вільності не беруться до уваги.

Якщо ж в рамках АВМРГ вивчається неперервний спектр, то необхідно застосовувати асимптотику  $C_k^{(\lambda,\mu)\nu}(E)$  при великих  $k$ . Між тим асимптотика відома не для цих коефіцієнтів, а для коефіцієнтів розкладу  $C_k^{(l_1,l_2,l)}(E)$  по базису кутового моменту  $\{\Phi_k^{(l_1,l_2,l)}\}$  (далі будемо називати його " $l$ -базис"), квантовими числами якого є число квантів  $2k$ , орбітальні моменти кожного з двох ядер  ${}^6\text{He}$  -  $l_1$  і  $l_2$  і орбітальний момент  $l$  відносного руху цих ядер. Асимптотика коефіцієнтів  $C_k^{(l_1,l_2,l)}(E)$  звичайним для АВМРГ чином виражається через функції Ханкеля першого роду  $H_{l+1/2}^{(1)}(\sqrt{2E}\sqrt{4k+2l+3})$  і другого  $H_{l+1/2}^{(2)}(\sqrt{2E}\sqrt{4k+2l+3})$  і через елементи S-матриці розсіяння [59].

$l$ -базис для системи  ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$  при даному  $k$  і  $L = 0$  складається з п'яти ортонормованих функцій, які мають таку структуру:

$$\begin{aligned} \Phi_k^{(l_1,l_2,l)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{R}) &= N_k^{(l_1,l_2,l)} \times \\ &\times \{\{\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1\}_{l_1} \otimes \{\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2\}_{l_2} \otimes \{\mathbf{R} \otimes \dots \{\mathbf{R} \otimes \{\mathbf{R} \otimes \mathbf{R}\}_{l'}\}_{l''} \dots\}_l\}_{L=0}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Тут  $\{\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}\}_l$  незвідний тензорний добуток [109] рангу  $l$ ,  $N_k^{(l_1,l_2,l)}$  нормувальний множник.

Функції  $l$ -базису мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 \Phi_k^{(0,0,0)} &= \frac{1}{6\sqrt{(2k+1)!}} \mathbf{u}_1^2 \mathbf{u}_2^2 \mathbf{R}^{2k} \\
 \Phi_k^{(2,2,0)} &= \frac{1}{\sqrt{20(2k+1)!}} \left\{ [\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2]^2 \mathbf{R}^{2k} - \frac{2}{3} \mathbf{u}_1^2 \mathbf{u}_2^2 \mathbf{R}^{2k} \right\} \\
 \Phi_k^{(2,2,2)} &= \sqrt{\frac{9k}{28(2k+3)(2k+1)!}} \left\{ ([\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2] \cdot \mathbf{R})^2 \mathbf{R}^{2k-2} - \frac{1}{3} [\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2]^2 \mathbf{R}^{2k} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{3} ([\mathbf{u}_1 \times \mathbf{R}]^2 \mathbf{u}_2^2 + [\mathbf{u}_2 \times \mathbf{R}]^2 \mathbf{u}_1^2) \mathbf{R}^{2k-2} + \frac{4}{9} \mathbf{u}_1^2 \mathbf{u}_2^2 \mathbf{R}^{2k} \right\}; \\
 \Phi_k^{(2,2,4)} &= \sqrt{\frac{5k(k-1)}{14(2k+3)(2k+5)(2k+1)!}} \left\{ -([\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2] \cdot \mathbf{R})^2 \mathbf{R}^{2k-2} \right. \\
 &\quad + \frac{7}{2} [\mathbf{u}_1 \times \mathbf{R}]^2 [\mathbf{u}_2 \times \mathbf{R}]^2 \mathbf{R}^{2k-4} + \frac{4}{5} [\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2]^2 \mathbf{R}^{2k-2} \\
 &\quad \left. - 2 ([\mathbf{u}_1 \times \mathbf{R}]^2 \mathbf{u}_2^2 + [\mathbf{u}_2 \times \mathbf{R}]^2 \mathbf{u}_1^2) \mathbf{R}^{2k-2} + \frac{4}{5} \mathbf{u}_1^2 \mathbf{u}_2^2 \mathbf{R}^{2k} \right\} \\
 \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_k^{(2,0,2)} + \Phi_k^{(0,2,2)}) &= \sqrt{\frac{k}{8(2k+3)(2k+1)!}} \times \\
 &\quad \times \left\{ - ([\mathbf{u}_1 \times \mathbf{R}]^2 \mathbf{u}_2^2 + [\mathbf{u}_2 \times \mathbf{R}]^2 \mathbf{u}_1^2) \mathbf{R}^{2k-2} + \frac{4}{3} \mathbf{u}_1^2 \mathbf{u}_2^2 \mathbf{R}^{2k} \right\}. \tag{2.27}
 \end{aligned}$$

Перехід від базису з квантовими числами  $SU(3)$  до  $l$ -базису здійснюється за допомогою унітарного перетворення:

$$\Psi_k^i = \mathcal{U}_{ij}(k) \Phi_k^j, \quad \Psi_k^i \equiv \Psi_k^{(\lambda,\mu)\nu}, \quad \Phi_k^j \equiv \Phi_k^{(l_1,l_2,l)}, \quad i, j = 1, \dots, 5. \tag{2.28}$$

Оскільки матричні елементи цього перетворення мають громіздкий вигляд при малих  $k$ , в Таблиці 6 ми вказуємо лише їх значення при  $k \rightarrow \infty$ <sup>1</sup>.

Як видно з Таблиці 6, стан з нульовим моментом відносного руху кластерів домінує в функціях  $SU(3)$ -незвідних представлень  $(2k-4, 4)$  і  $(2k, 2)_1$  з однаковою вагою 53%. Стан з моментом  $l = 2$  переважає в функціях  $\Psi^{(2k+4,0)}$  і  $\Psi^{(2k-2,0)}$ , причому його вага в останній функції набуває максимального значення (67%) у порівнянні з іншими представленнями. Нарешті, стан з моментом  $l = 4$  домінує в представленні  $(2k, 2)_2$ . Його вага

**Примітка 1.** Ці граничні значення використовуються для знаходження асимптотики коефіцієнтів розкладу хвильової функції в будь-якому базисі.

	$\Phi_k^{(0,0,0)}$	$\Phi_k^{(2,2,0)}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \Phi_k^{(2,0,2)} + \Phi_k^{(0,2,2)} \right\}$	$\Phi_k^{(2,2,2)}$	$\Phi_k^{(2,2,4)}$
$\Psi^{(2k-2,0)}$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\frac{5}{3\sqrt{15}}$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{14}}{3\sqrt{3}}$	0
$\Psi^{(2k-4,4)}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$	$-\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{15}}$	$-\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$	$-\frac{4}{3\sqrt{21}}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$
$\Psi^{(2k,2)1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3\sqrt{5}}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{7}}$	$-2\sqrt{\frac{2}{35}}$
$\Psi^{(2k,2)2}$	0	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{7}}$	$\frac{4}{\sqrt{35}}$
$\Psi^{(2k+4,0)}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3\sqrt{5}}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{7}}$	$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{35}}$

Табл. 6: Матриця унітарного перетворення від  $SU(3)$  базису до  $l$ -базису при  $k \rightarrow \infty$ 

дорівнює 46%. Зауважимо, що в функції  $\Psi^{(2k-2,0)}$  компонента з  $l = 4$  відсутня.

Оскільки всі власні значення ядра нормування в граници  $k \rightarrow \infty$  стають рівними одиниці, розклад (2.10) залишається діагональним в результаті будь-якого унітарного перетворення базисних функцій  $\Psi^{(\lambda,\mu)\nu}$ . Тому теж саме унітарне перетворення дозволяє виразити асимптотику  $C_k^{(\lambda,\mu)\nu}(E)$  через асимптотику  $C_k^{(l_1,l_2,l)}(E)$ , що і вирішує проблему замикання системи рівнянь АВМРГ для коефіцієнтів  $C_k^{(\lambda,\mu)\nu}(E)$ .

**Гамільтоніан системи  ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$**  Гамільтоніан  $\hat{H}$  системи  ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$  записується у вигляді

$$\hat{H} = \hat{h}_1 + \hat{h}_2 + \hat{T} + \hat{V}_{int}, \quad (2.29)$$

де  $\hat{h}_i$  – гамільтоніан  $i$ -го кластера,  $\hat{T}$  – оператор кінетичної енергії відносного руху в с.ц.м., а  $\hat{V}_{int}$  – оператор потенціальної енергії взаємодії кластерів.

Базуючись на експериментальних даних, ми припускаємо, що основний стан  ${}^6\text{He}$  є  $s$ -хвилею з енергією  $e$ , а резонансний стан  ${}^1$  характеризується  $l = 2$  і енергією  $e + \epsilon$ . Енергію  $E$  системи двох взаємодіючих кластерів  ${}^6\text{He}$  доцільно відраховувати від порогу розвалу ядра  ${}^{12}\text{Be}$  на два кластери  ${}^6\text{He}$ , що знаходяться в основному стані з нульовим орбітальним моментом. Рух кластерів в цьому каналі передають функції  $\Phi_k^{(0,0,0)}$   $l$ -базису. Поріг розвалу цього ж ядра на два кластери  ${}^6\text{He}$ , один з яких знаходиться в збудженному

**Примітка 1.** Його експериментальна ширина становить лише 113 keV, отже, ми будемо розглядати його, як зв'язаний стан.

стані з  $l = 2$ , вище першого порогу на  $\epsilon = 1.8$  MeВ. Вище цього порогу відкривається канал, базисні функції якого

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \Phi_k^{(2,0,2)} + \Phi_k^{(0,2,2)} \right).$$

Нарешті, третій поріг, що знаходиться вище першого на  $2\epsilon = 3.6$  MeВ, відповідає розвалу  $^{12}\text{Be}$  на два збуджених кластери. Вище цього порога відкриті всі п'ять каналів.

Дія оператора  $\hat{h}_1 + \hat{h}_2$  на  $l$ -базисні функції не залежить від числа квантів  $2k$ ,

$$\begin{aligned} (\hat{h}_1 + \hat{h}_2) \Phi_k^{(0,0,0)} &= 2e \Phi_k^{(0,0,0)}; \\ (\hat{h}_1 + \hat{h}_2) \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \Phi_k^{(2,0,2)} + \Phi_k^{(0,2,2)} \right) &= (2e + \epsilon) \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \Phi_k^{(2,0,2)} + \Phi_k^{(0,2,2)} \right); \\ (\hat{h}_1 + \hat{h}_2) \Phi_k^{(2,2,l)} &= (2e + 2\epsilon) \Phi_k^{(2,2,l)}, \quad l = 0, 2, 4. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Порогові енергії враховано введенням оператора

$$\hat{V} = \hat{h}_1 + \hat{h}_2 - 2e,$$

матричні елементи якого в  $l$ -базисі визначаються рівняннями (2.30), а матричні елементи в  $SU(3)$  базисі отримуються за допомогою відомого співвідношення між двома базисами.

**Кінетична енергія і рівняння вільного руху** В  $l$ -базисі, матричні елементи  $\hat{T}$  добре відомі,

$$\begin{aligned} \langle l_1, l_2, l, 2k | \hat{T} | l_1, l_2, l, 2k \rangle &= -\frac{1}{4} \sqrt{(2k - l + 2)(2k + l + 3)}, \\ \langle l_1, l_2, l, 2k | \hat{T} | l_1, l_2, l, 2k \rangle &= \frac{1}{2} \left( 2k + \frac{3}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Щоб обчислити матричні елементи оператора  $\hat{T}$  на функціях базису  $SU(3)$ , слід застосувати співвідношення (2.31) і унітарне перетворення (2.28), або образом оператора кінетичної енергії у просторі Фока-Баргманна

$$\hat{T}_{\mathbf{R}} = -\frac{1}{4} \left( \mathbf{R}^2 - 2(\mathbf{R} \cdot \tilde{\nabla}_{\mathbf{R}}) - 3 + \nabla_{\mathbf{R}}^2 \right). \quad (2.32)$$

безпосередньо подіяти на функції базису  $SU(3)$ , не переходячи до функцій  $l$ -базису [5].

Хвильову функцію  $\Psi_{L=0}$  стану з нульовим орбітальним моментом представимо у вигляді розкладу по базисним станам  $SU(3)$ -базису,

$$\begin{aligned} \Psi_{L=0} = & \sum_{k=2}^{\infty} C_k^{(2k-2,0)} \Psi^{(2k-2,0)} + \sum_{k=3}^{\infty} C_k^{(2k-4,4)} \Psi^{(2k-4,4)} + \\ & + \sum_{k=3}^{\infty} C_k^{(2k,2)1} \Psi^{(2k,2)1} + \sum_{k=4}^{\infty} C_k^{(2k,2)2} \Psi^{(2k,2)2} + \sum_{k=5}^{\infty} C_k^{(2k+4,0)} \Psi^{(2k+4,0)}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Коефіцієнти розкладу  $C_k^j \equiv C_k^{(\lambda,\mu)\nu}$ ,  $j = \overline{1,5}$  задовольняють систему алгебраїчних лінійних однорідних рівнянь

$$\sum_{k',j'} \langle k, j | \hat{H} | k', j' \rangle C_{k'}^{j'} - E \Lambda_k^j C_k^j = 0, \quad \hat{H} = \hat{T} + \hat{V} + \hat{V}_{int}. \quad (2.34)$$

В границі  $k \rightarrow \infty$ , що відповідає великій відстані між кластерами, потенціальна енергія взаємодії кластерів прагне до нуля і система (2.34) з  $\hat{V}_{int} = 0$  визначає асимптотику коефіцієнтів  $C_k^j$ .

Знаючи матрицю унітарного перетворення (2.28), можна знайти асимптотичні значення коефіцієнтів розкладу  $C_k^j$  через коефіцієнти  $C_k^{(l_1,l_2,l)}$ . При малих  $k$  система рівнянь (2.34) стає досить громіздкою в будь-якому базисі. Але на великих відстанях між кластерами система рівнянь для  $l$ -базису розпадається на п'ять незалежних рівнянь:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \sqrt{(2k-l+2)(2k+l+3)} C_{k+1}^{(l_1,l_2,l)} - \frac{1}{4} \sqrt{(2k-l)(2k+l+1)} C_{k-1}^{(l_1,l_2,l)} + \\ + \left\{ \frac{1}{2} \left( 2k + \frac{3}{2} \right) - (E - E_i) \right\} C_k^{(l_1,l_2,l)} = 0, \end{aligned} \quad (2.35)$$

кожне з яких в границі  $k \rightarrow \infty$  переходить в рівняння Бесселя, в той час як рівняння для  $SU(3)$ -базиса залишаються зв'язаними [5].

Отже, асимптотика коефіцієнтів розкладу для  $l$ -базису нам відома. Зручно записати її в вигляді суперпозиції функцій Ханкеля  $H_{l+1/2}^{\pm}$ . Якщо падаюча хвиля в каналі  $(l_1, l_2, l)$ , коефіцієнти розкладу хвильової функції,

що відповідає цьому каналу, задовольняють асимптотичним умовам:

$$C_k^{(l_1, l_2, l)} \equiv C_i^i(\kappa_i \sqrt{4k+3}) = H_{l+1/2}^-(\kappa_i \sqrt{4k+3}) + S_{ii} H_{l+1/2}^+(\kappa_i \sqrt{4k+3}), \quad (2.36)$$

де  $i = 1, \dots, 5$ ,

$$H_{l+1/2}^\pm(\kappa_i \sqrt{4k+3}) = J_{l+1/2}(\kappa_i \sqrt{4k+3}) \pm i N_{l+1/2}(\kappa_i \sqrt{4k+3}), \quad \kappa_i^2 = 2(E - E_i),$$

$E_i$  – порогова енергія  $i$ -го каналу ( $E_i = 0, \epsilon, 2\epsilon$ ),  $S_{ij}$  елементи матриці розсіяння. Ми використовуємо систему одиниць, де  $m = \hbar = 1$  ( $m$  – маса нуклона).

Асимптотична поведінка коефіцієнтів розкладу в вихідних каналах  $(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \tilde{l})$  визначається виразом

$$C_k^{(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \tilde{l})} \equiv C_j^j(\kappa_j \sqrt{4k+3}) = S_{ij} H_{l+1/2}^+(\kappa_j \sqrt{4k+3}), \quad i = \overline{1, 5}, \quad j \neq i. \quad (2.37)$$

Оскільки коефіцієнти розкладу  $C_k^j$  хвильової функції ядра по базису SU(3) пов’язані з коефіцієнтами  $C_k^{(l_1, l_2, l)}$  за допомогою тієї ж матриці унітарного перетворення (2.28), що і самі базисні функції, не становить труднощів знайти асимптотику коефіцієнтів  $C_k^j$  за допомогою співвідношень (2.36), (2.37) і (2.28) та розв’язати систему рівнянь (2.34).

**Основний стан  ${}^{12}\text{Be}$**  Як уже відзначалось раніше, ми обмежуємося станами  ${}^{12}\text{Be}$  з нульовим повним орбітальним моментом і до того ж використовуємо наближення нульового радіуса дії ядерних сил [110], вважаючи, що в цьому наближенні потенціал взаємодії можна моделювати двома параметрами  $U_0$  і  $U_1$  в станах, індекси SU(3)-симетрії яких  $(2k - 2, 0)$ :

$$\langle (2k - 2, 0) | U | (2k' - 2, 0) \rangle = \begin{cases} -44.2 \text{ MeB} & \text{якщо } k = k' = 2 \\ -28.7 \text{ MeB} & \text{якщо } k = k' = 3 \\ 0 & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

Ці два параметри вибрані так, щоб правильно передати величину середнього квадратичного радіуса  ${}^{12}\text{Be}$  ( $2.59 \pm 0.06$  fm [65]) в основному стані і положення над основним станом  ${}^{12}\text{Be}$  порогу його розвалу (10.11 MeB) [66]

на два незбуджених ядра  ${}^6\text{He}$ . Всі інші результати розрахунку з цими параметрами є наслідком їх вибраного значення. Осциляторний радіус  $r_0$  ми поклали рівним 1.37 фм.

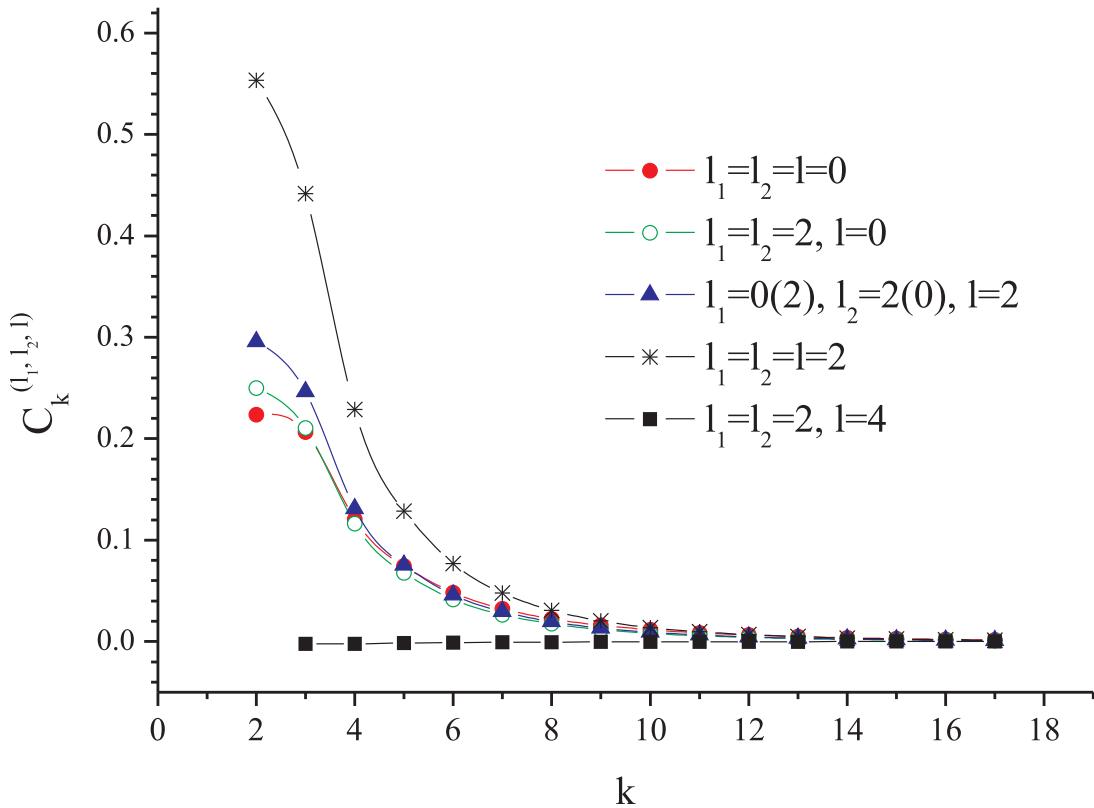


Рис. 2.1 Основний стан  ${}^{12}\text{Be}$ : коефіцієнти розкладу хвильової функції по  $l$ -базису

Розраховані нами коефіцієнти розкладу хвильової функції основного стану  ${}^{12}\text{Be}$  по базису дозволених принципом Паулі станів (див. рис. 2.1) дають наступну інформацію про структуру  ${}^{12}\text{Be}$ . По-перше, це ядро виявляється більш м'яким, ніж це випливає з представлень моделі осциляторних оболонок. Стандартній конфігурації моделі оболонок відповідає дозволена функція з мінімальним числом квантів. Вага цієї функції становить лише 54%. Решта 46% розподілені між базисними станами, в яких число квантів перевищує мінімальне. Суттєва роль цих базисних станів в розкладі хви-

льової функції основного стану навіть при відносно великих значеннях  $k$  підкреслює факт дифузності границі ядра і демонструє правильну асимптотичну поведінку хвильової функції в кожному з п'яти закритих каналів.

Як і хвильова функція в координатному представленні при збільшенні відстані від центру мас ядра (або, інакше, при збільшенні відстані між фрагментами, з яких складено ядро  $^{12}\text{Be}$ ), коефіцієнти розкладу спадають експоненційно зі зростанням числа квантів  $2k$ . Асимптотика коефіцієнтів  $C_0^i(k)$  в  $i$ -тому каналі  $l$ -базису має вигляд:

$$C_0^i(k) \sim A_0^i \sqrt{2} \frac{\exp\{-\sqrt{2(E_i - E_0)}\sqrt{4k + 3}\}}{\sqrt[4]{4k + 3}}, \quad (2.38)$$

де  $E_i$  – порогова енергія для цього каналу,  $E_0$  енергія основного стану  $^{12}\text{Be}$ . Коефіцієнти  $A_0^i$  перед експонентами зазвичай називають асимптотичними нормувальними константами (АНК) [55]. Функція каналу ( $l_1 = l_2 = l = 2$ ) характеризується найбільшим значенням асимптотичної нормувальної константи,  $43.49 \text{ fm}^{-1/2}$ . В каналах ( $l_1 = l_2 = l = 0$ ), ( $l_1 = l_2 = 2, l = 0$ ) і ( $l_1 = 2(0), l_2 = 0(2), l = 2$ ) величини АНК становлять  $12.99 \text{ fm}^{-1/2}$ ,  $25.61 \text{ fm}^{-1/2}$  і  $19.1 \text{ fm}^{-1/2}$ , відповідно. Найменше значення АНК ( $0.8 \text{ fm}^{-1/2}$ ) в каналі ( $l_1 = l_2 = 2, l = 4$ ).

Завдяки великому значенню асимптотичної константи, канал ( $l_1 = l_2 = l = 2$ ) домінує в функції основного стану з вагою 58%, незважаючи на те, що енергія порогу розпаду  $^{12}\text{Be}$  по цьому каналу вище порогу розпаду по каналах ( $l_1 = l_2 = l = 0$ ) і ( $l_1 = 2(0), l_2 = 0(2), l = 2$ ). Вага двох останніх станів дорівнює 12% і 17%, відповідно. На функцію каналу ( $l_1 = l_2 = 2, l = 0$ ) припадає 13% ваги, а вага стану ( $l_1 = l_2 = 2, l = 4$ ) не перевищує  $10^{-5}\%$ .

Можливість розкласти хвильову функцію моделі оболонок для основного стану  $^{12}\text{Be}$  (тобто єдину дозволену при  $k = 2$  функцію, SU(3) симетрія якої (2,0)) по базису  $l$ -станів дає нову інтерпретацію цієї функції. Її склад визначається наступними ваговими внесками  $l$ -станів: 60% для стану ( $l_1 = l_2 = l = 2$ ), 17.5% для стану ( $l_1 = 2(0), l_2 = 0(2), l = 2$ ), ( $l_1 = l_2 = 2, l = 0$ ) – 12.5%, ( $l_1 = l_2 = l = 0$ ) – 10%.

Інформацію про інтенсивність відштовхування в станах різних гілок дають представлені на рис. 2.2 коефіцієнти розкладу хвильової функції основного стану  $^{12}\text{Be} = ^6\text{He} + ^6\text{He}$ , отримані в наближенні нульового радіуса ядерних сил [6].

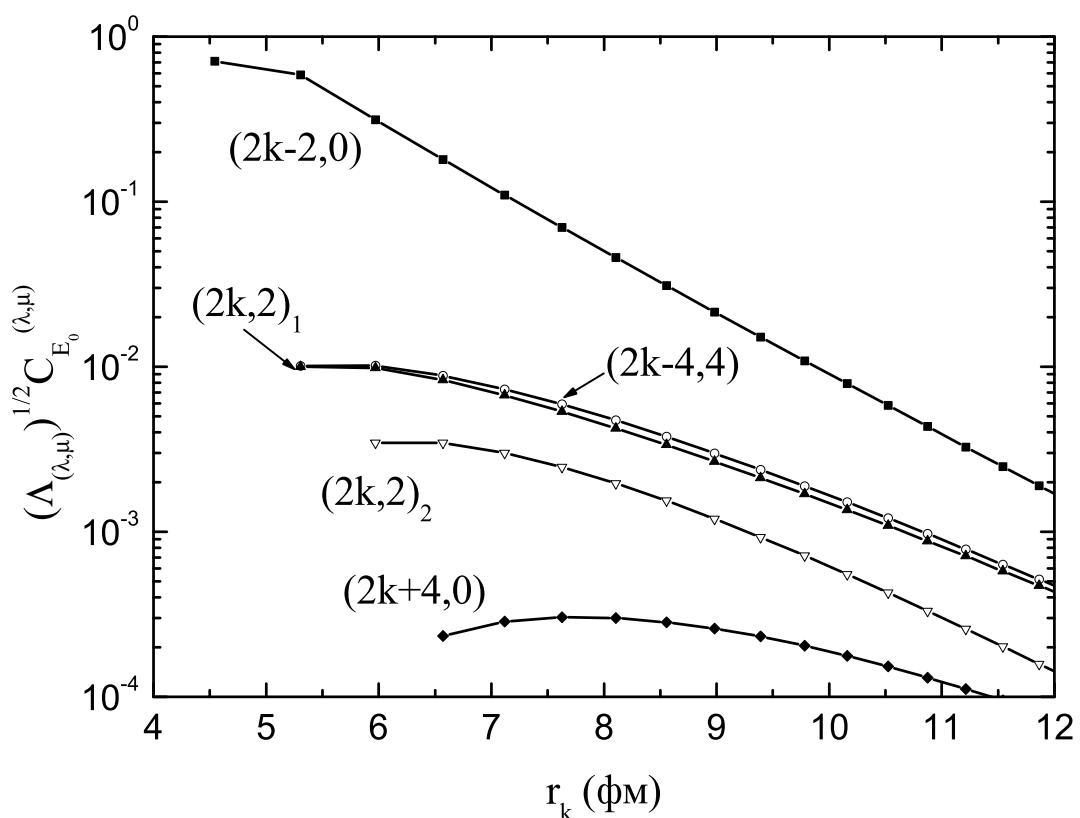


Рис. 2.2 Коефіцієнти розкладу  $\sqrt{\Lambda_{(\lambda,\mu)}} C_{E_0}^{(\lambda,\mu)}(r_k)$  хвильової функції основного стану ядра  ${}^{12}\text{Be} = {}^6\text{He} + {}^6\text{He}$  по SU(3)-базису. Індекси SU(3)-симетрії  $(\lambda, \mu)$  вказані біля кривих.

Порівнюючи коефіцієнти різних гілок, приходимо до висновку, що їх значення задовольняють ті ж нерівності, яким задовольняють власні значення:

$$\Lambda_{(2k-2,0)} \geq \Lambda_{(2k,2)_1} \geq \Lambda_{(2k-4,4)_1} \geq \Lambda_{(2k,2)_2} \geq \Lambda_{(2k+4,0)}$$

за одним невеликим виключенням – коефіцієнти гілки  $(2k - 4, 4, )$  дещо

більші за коефіцієнти  $(2k, 2)_1$ , якщо  $r_k > 6.5$  фм.

**Неперервний спектр** Звичайно, найбільш цікава особливість базису дозволених станів системи  ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$  полягає в тому, що він відповідає п'яти різним каналам. Вище деякої порогової енергії ( $E = 3.6$  MeВ) всі ці канали відкриті. Проте є область енергій неперервного спектра, де відкриті два канали або лише один. Вплив принципу Паулі на систему проявляється в тому, що на малих відстанях між кластерами всі п'ять каналів виявляються зв'язаними. Радіус цієї області визначається тією вимогою, що на її границі п'ять різних власних значень дозволених станів майже рівні одиниці. Як тільки всі власні значення наблизяться до одиниці, стає можливим унітарне перетворення від базису  $SU(3)$  до  $l$ -базису [6], після реалізації якого зв'язок різних каналів  $l$ -базису через оператор кінетичної енергії щезає.

Зв'язок між каналами, що здійснюється через матричні елементи оператора кінетичної енергії за умови, що власні значення різних  $SU(3)$  гілок не тотожні, негайно приводить до появи недіагональних елементів  $S$ -матриці розсіяння і до непружніх процесів при зіткненні двох ядер  ${}^6\text{He}$ . Звісно, і потенціальна енергія взаємодії кластерів може вплинути на перерізи непружного розсіяння. Однак, як і вище, ми обмежимося тут аналізом лише того внеску в перерізи ядерних реакцій, які дають обмінні ефекти з урахуванням їх впливу на оператор кінетичної енергії. Простий оператор потенціальної енергії, який ми використовуємо, не пов'язує різні канали.

Розглянемо хвильову функцію стану неперервного спектра (рис. 2.3 (а)). Енергія  $E = 0.885$  MeВ цього стану перевищує поріг розвалу  ${}^{12}\text{Be}$  на два ядра  ${}^6\text{He}$  в їх основному стані ( $E = 0$ ), але є меншою порога ( $E = 1.8$  MeВ) розвалу  ${}^{12}\text{Be}$  по каналу, коли один з кластерів знаходиться в  $2^+$  збудженному стані. Поки  $r_k < 6$  fm, поведінка коефіцієнтів визначається інтенсивністю відштовхування у відповідних  $SU(3)$ -гілках, як і в хвильовій функції основного стану. Проте при  $r_k > 6$  fm відбувається перебудова їх значень. Домінуючими виявляються коефіцієнти незвідних представлень  $(2k, 2)_1$ , потім  $(2k - 4, 4)$  і  $(2k - 2, 0)$ . Співвідношення між перерахованими

коєфіцієнтами таке, що після проектування на стан  $l$ -базису ми приходимо до базисних функцій відкритого каналу. Базисні функції представлень  $(2k, 2)_2$  при великих  $r_k$  містять  $l$ -базисні функції лише закритих каналів. Тому коефіцієнти розкладу гілки  $(2k, 2)_2$  експоненційно прагнуть до нуля, коли  $r_k$  зростає.

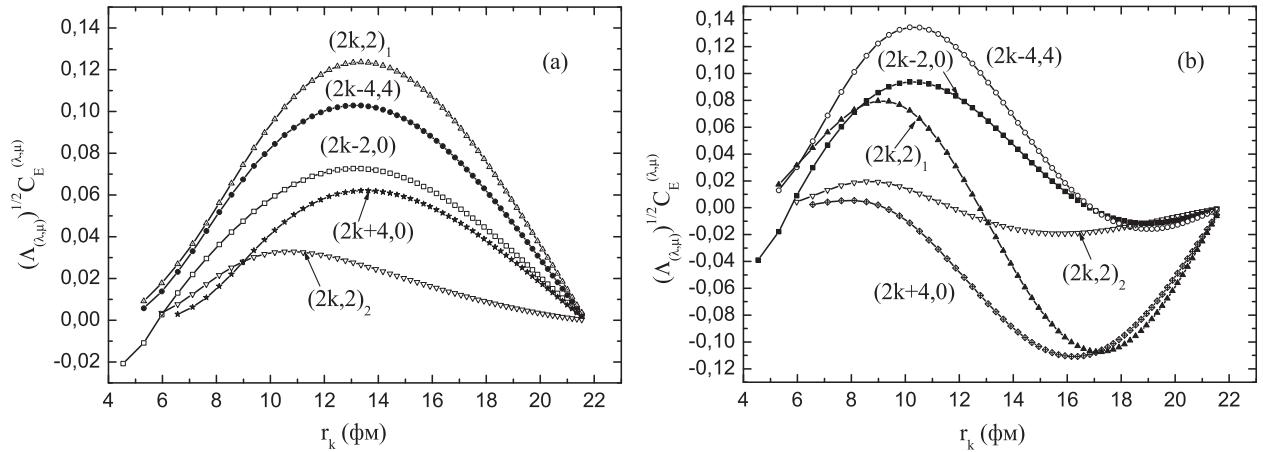


Рис. 2.3 Коефіцієнти розкладу  $\sqrt{\Lambda_{(\lambda,\mu)}}C_E^{(\lambda,\mu)}(r_k)$  станів неперервного спектра ядра  $^{12}\text{Be} = ^6\text{He} + ^6\text{He}$  по  $SU(3)$ -базису при (а)  $E = 0.885$  МeВ і (б)  $E = 3.3$  МeВ. Індекси  $SU(3)$ -симетрій  $(\lambda, \mu)$  вказані біля кривих.

Звернемося, нарешті, до стану, енергія якого  $E = 3.3$  МeВ (рис. 2.3 (б)). Він знаходиться вище порога розвалу  $^{12}\text{Be}$  на два ядра  $^6\text{He}$ , за умови, що одне з них знаходиться в основному, а інше в збудженному стані. В цьому інтервалі енергій всі стани з нульовим орбітальним моментом двократно вироджені, оскільки відкриті два канали. Для коефіцієнтів розкладу спостерігається та ж поведінка, що і в попередньому випадку, з урахуванням тієї обставини, що суттєво відмінними від нуля виявляються коефіцієнти тих  $SU(3)$ -представлень, що містять базисні функції двох відкритих каналів.

Неперервний спектр  $^{12}\text{Be}$  в нашому наближенні починається над порогом розвалу цього ядра на два ядра  $^6\text{He}$  в їх основному стані. Енергію  $E$  цього порога ми поклали рівною нулю. В інтервалі енергій  $0 < E < \epsilon$  відкритий лише канал пружного розсіяння  $^6\text{He} + ^6\text{He}$  і вся інформація про

цей процес міститься в єдиному елементі S-матриці  $S_{11} = \exp(2i\delta_{11})$  або, що те ж саме, в фазі розсіяння  $\delta_{11}(E)$  (рис. 2.4). Вибрана нами модельна взаємодія і обмежений, хоча і нескінчений базис, забезпечують існування лише одного зв'язаного стану. Тому фазу  $\delta_{11}$  доцільно покласти рівною  $\pi$  при нульовій енергії. Як і має бути, її похідна по енергії в околі цієї точки обернено пропорційна кореню квадратному з енергії. А довжина розсіяння

$$a = -\lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{\delta_{11}(\kappa)}{\kappa} = 6.62 \text{ fm}, \quad \kappa = \sqrt{2E} \rightarrow 0.$$

Із зростанням енергії фаза  $\delta_{11}$  монотонно спадає. Лише значне збільшення інтенсивності потенціалу притягання може суттєво сповільнити рух фази вниз і тим більше змусити її рухатись вгору.

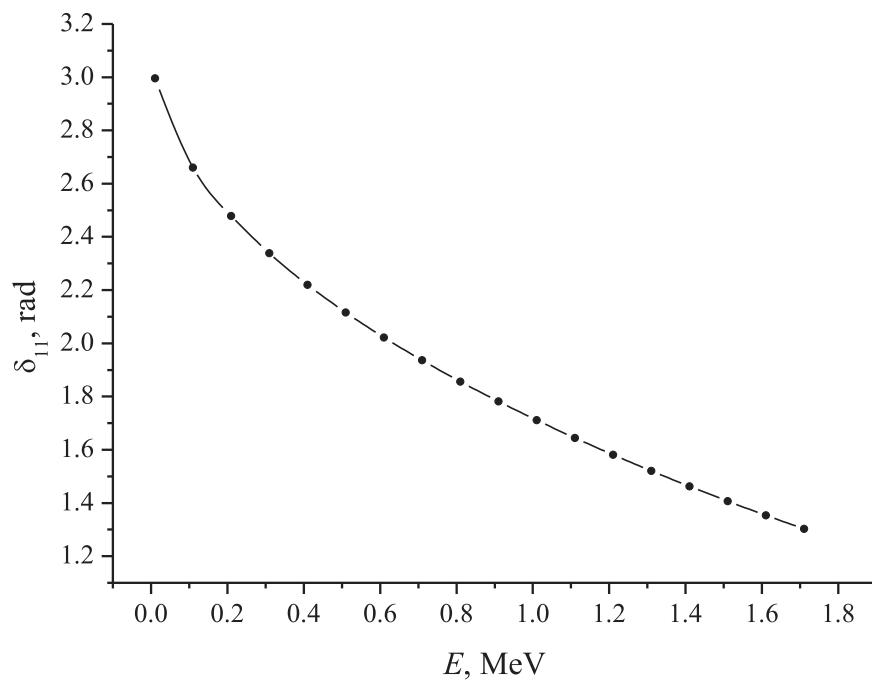


Рис. 2.4 Підпорогове пружне розсіяння в каналі ( $l_1 = l_2 = l = 0$ ).

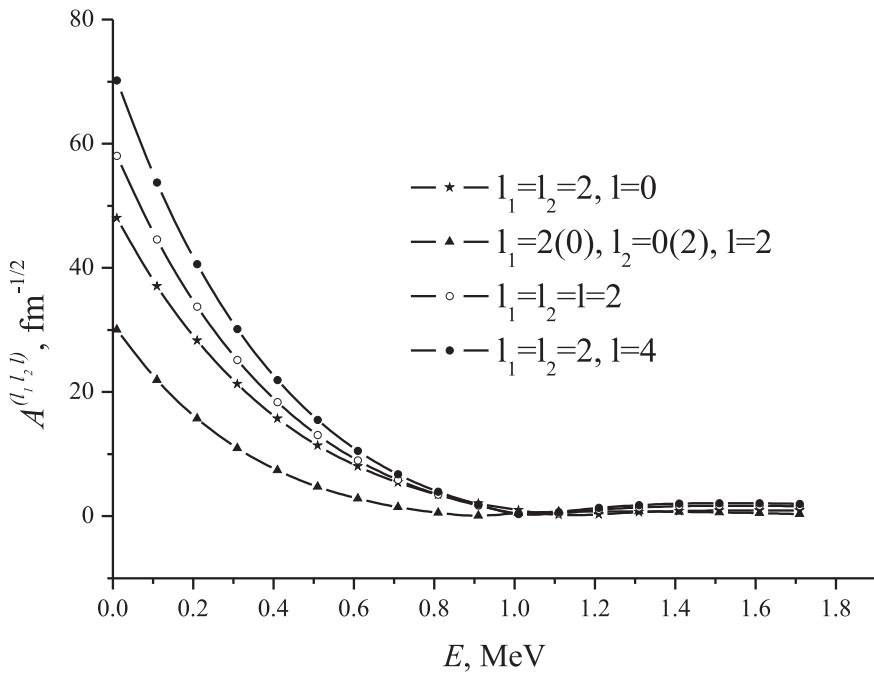


Рис. 2.5 Асимптотичні нормувальні коефіцієнти (АНК) в різних вихідних каналах. Вхідний канал ( $l_1 = l_2 = l = 0$ ).

Поведінка хвильової функції в закритих каналах, поки енергія додатна, але не перевищує  $\epsilon$ , передається представлена на рис. 2.5 залежністю від енергії чотирьох асимптотичних нормувальних констант. Їх величина в кілька разів більша за величину нормувальних констант основного стану. Максимального значення вони набувають безпосередньо над найнижчим порогом (причому, найбільша асимптотична нормувальна константа в каналі ( $l_1 = l_2 = 2, l = 4$ ) – порядку  $70 \text{ fm}^{-1}$ ), а потім монотонно спадають аж до наступного порога.

При енергії  $E = \epsilon = 1.8 \text{ MeV}$  відкривається канал  $l_1 = 2(0), l_2 = 0(2), l = 2$ , в той час як інші три канали залишаються закритими. Отже, поблизу порога ( $E \rightarrow \epsilon$  знизу) хвильова функція цього каналу буде спадати помітно повільніше функцій інших каналів. Справді, як видно з рис. 2.6, на якому представлені хвильові функції станів з  $E = 0.88 \text{ MeV}$  і  $E = 1.61 \text{ MeV}$ , стан  $l_1 = 2(0), l_2 = 0(2), l = 2$  домінує і має самий довгий

хвіст. Причому ця залежність стає більш яскравою з наближенням енергії до порогової.

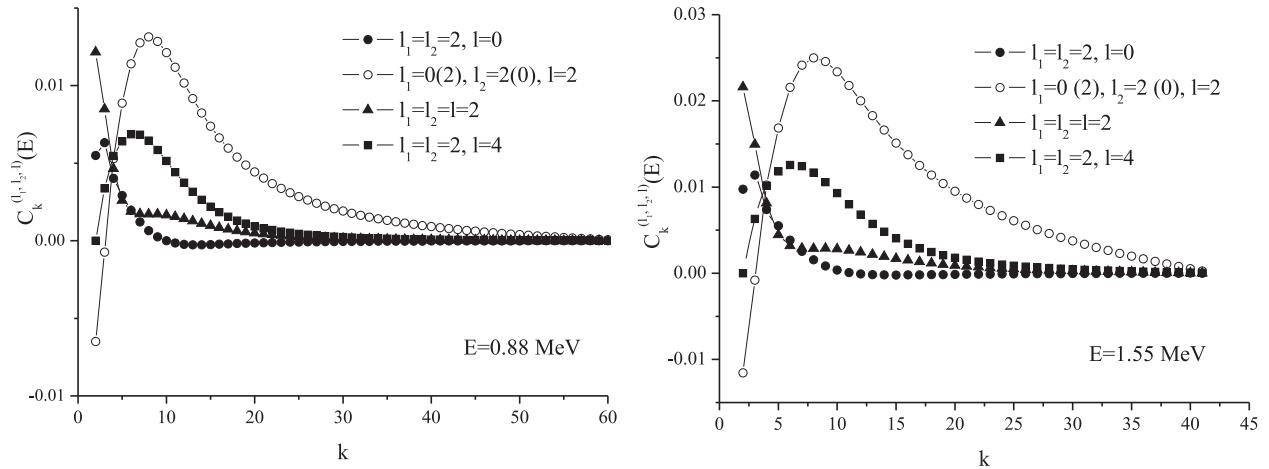


Рис. 2.6 Коефіцієнти розкладу  $C_k^{(l_1, l_2, l)}(E)$  двох станів неперервного спектра (при  $E = 0.88$  MeВ, зліва, і при  $E = 1.55$  MeВ, справа) по  $l$ -базису

Між другим і третім порогами  $S$ -матриця має стандартний двохканальний вигляд,

$$S = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} \quad (2.39)$$

$$S_{11} = \eta \exp(2i\delta_{11}), \quad S_{12} = i\sqrt{1 - \eta^2} \exp(i\delta_{11} + i\delta_{22}),$$

$$S_{21} = i\sqrt{1 - \eta^2} \exp(i\delta_{11} + i\delta_{22}), \quad S_{22} = \eta \exp(2i\delta_{22}).$$

Три асимптотичні нормувальні константи на інтервалі  $\epsilon < E < 2\epsilon$  на порядок менші, ніж в попередньому випадку. При цьому вони залежать не лише від енергії, але і від того, який з двох відкритих каналів є вхідним. На рис. 2.7 зображена залежність нормувальних констант від енергії за умови, що вхідним є канал  $l_1 = l_2 = l = 0$  або  $l_1 = 2(0), l_2 = 0(2), l = 2$ , відповідно.

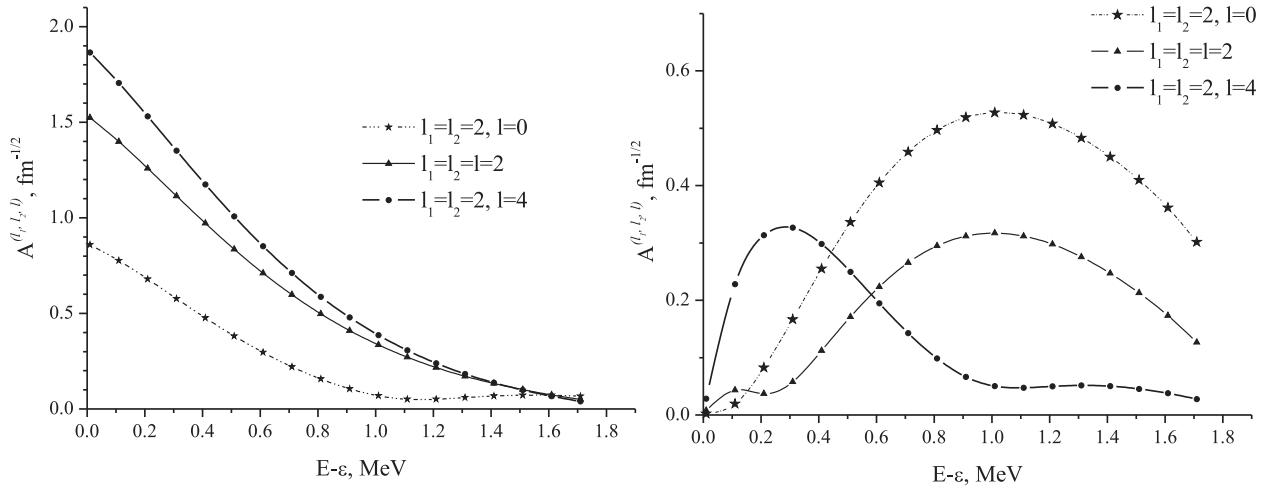


Рис. 2.7 Асимптотичні нормувальні коефіцієнтів різних вихідних каналах і області енергій між двома порогами. Вхідний канал ( $l_1 = l_2 = l = 0$ ) (зліва) і ( $l_1 = 2(0), l_2 = 0(2), l = 2$ ) (справа)

Зліва на рис. 2.7 вхідним каналом є ( $l_1 = l_2 = l = 0$ ). Асимптотичні константи монотонно спадають із збільшенням енергії, набуваючи максимальних значень, коли  $E - \epsilon$  близьке до нуля. В області малих значень  $E - \epsilon$  абсолютні значення констант в каналах ( $l_1 = l_2 = 2, l = 4$ ) і ( $l_1 = l_2 = l = 2$ ) майже в 2 рази перевищують відповідні значення в каналі ( $l_1 = l_2 = 2, l = 0$ ).

Більш цікава залежність від енергії спостерігається для вхідного каналу ( $l_1 = 2(0), l_2 = 0(2), l = 2$ ) (права частина рис. 2.7). Як видно з рисунка, нормувальні константи в каналах ( $l_1 = l_2 = 2, l = 0$ ) і ( $l_1 = l_2 = l = 2$ ) мають широкий максимум при енергії  $E - \epsilon = 1$  МeВ, досягаючи значення  $0.5 \text{ fm}^{-1/2}$  і  $0.3 \text{ fm}^{-1/2}$ , відповідно, і спадають із зростанням енергії. Константа в каналі ( $l_1 = l_2 = 2, l = 4$ ) має більш яскраво виражений максимум при енергії  $E - \epsilon = 0.3$  МeВ і спадає практично до нуля із зростанням енергії. Така поведінка констант може вказувати на наявність резонансу в каналі ( $l_1 = l_2 = 2, l = 4$ ).

Вище третього порогу, коли енергія  $E > 2\epsilon$ , відкриті всі п'ять врахованих нами порогів і тому  $S$ -матриця має розмірність  $5 \times 5$ . Обчисливши елементи  $S$ -матриці, ми знайшли ефективні перерізи пружного і непружно-

го розсіяння на інтервалі енергій від нуля до 30 МeВ.

Переріз пружного розсіяння для вхідного каналу ( $l_1 = l_2 = l = 0$ ) представлено на рис. 2.8. Переріз пружного розсіяння  $\sigma_{11}$  неперервно спадає, набуваючи значення від 5.1 барн при  $E = 0.1$  MeВ до 14 мбарн при  $E = 5$  MeВ. В околі порогів  $E = \epsilon$  і  $E = 2\epsilon$  переріз також не має особливостей. Проте відомо, що існування порогових реакцій може проявлятись в характерній залежності від енергії перерізу пружного розсіяння в області порогу (ефект Вігнера-Базя) [111].

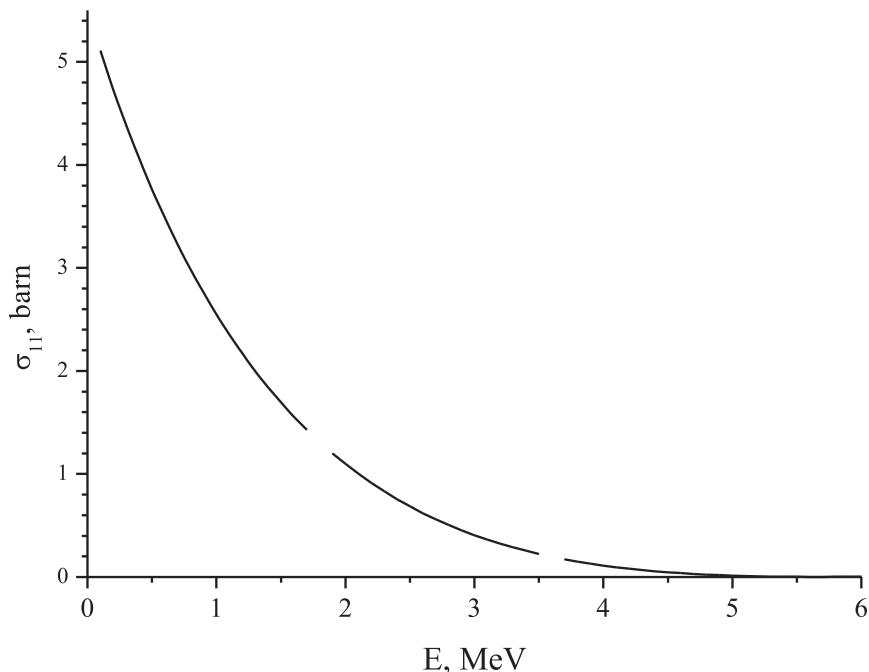


Рис. 2.8 Переріз пружного розсіяння в каналі ( $l_1 = l_2 = l = 0$ ). Розриви в кривій вказують на порогові енергії.

Пояснимо це твердження на прикладі двохканальної матриці розсіяння (2.39). Якщо при енергії  $E = \epsilon$  відкривається канал з орбітальним моментом відносного руху кластерів  $l$ , то при малих додатних  $E - \epsilon = \kappa_1^2/2$  залежність коефіцієнта непружності  $\eta$  від хвильового числа  $\kappa$  визначається наступним співвідношенням:

$$\eta \sim 1 - b\kappa_1^{2l+1} - \dots, \quad b > 0.$$

Тоді переріз пружного розсіяння в області над порогом  $E = \epsilon$  повинен мати вигляд

$$\sigma_{11} = \frac{4\pi}{\kappa^2} \sin^2 \delta_{11} (1 - a\kappa_1^{2l+1} - \dots).$$

А в області під порогом ( $E < \epsilon$ ) матриця розсіяння одновимірна і переріз пружного розсіяння задовольняє закону:

$$\sigma_{11} = \frac{4\pi}{\kappa^2} \sin^2 \delta_{11}. \quad (2.40)$$

Отже, в області порогу в перерізі пружного розсіяння повинна спостерігатись деяка особливість. Очевидно також, що цей ефект може бути суттєвим лише в тому випадку, якщо орбітальний момент каналу, що відкривається при цій енергії, дорівнює нулю. Проте в нашому випадку при енергії  $E = \epsilon$  відкривається канал з моментом  $l = 2$ . Тому для того, щоб дослідити ефект Вігнера-Базя, ми детально вивчили область енергій в околі третього порога  $E = \epsilon$ , оскільки серед каналів, що відкриваються при цій енергії є канал з моментом  $l = 0$ . Але і в околі третього порога переріз монотонно спадає із зростанням енергії. Пояснення ж полягає в наступному.

Виявилося, що першими ненульовими доданками, що визначають поведінку перерізів розсіяння, в розкладі коефіцієнтів непружності  $\eta_{1l}$  в області малих додатних значень  $E - 2\epsilon = \kappa_2^2/2$  є доданки виду  $b_l \kappa_2^{2l+3}$ , а не  $b_l \kappa_2^{2l+1}$ . Отже, ефект Вігнера-Базя буде проявлятись меншою мірою і виявляється справедливими наступні формули в області над порогом  $E = 2\epsilon$ ,

$$\sigma_{1l} = \frac{\pi}{k^2} b_l \{2(E - 2\epsilon)\}^{l+3/2}, \quad l = 0, 2, 4. \quad (2.41)$$

На рис.2.9 представлена залежність перерізів непружного розсіяння в канал ( $l_1 = 2(0), l_2 = 0(2), l = 2$ ) ( $\sigma_{13}$ ) і канали ( $l_1 = l_2 = 2, l = 0, 2, 4$ ), відповідно. Поведінка перерізів не вказує на наявність резонансів в області кількох десятків МeВ над порогом розвалу  ${}^{12}\text{Be} \rightarrow {}^6\text{He} + {}^6\text{He}$ .  $\sigma_{13}$  має широкий максимум в околі 4.4 МeВ над порогом  $E = \epsilon$ , досягаючи значення 102 мб, і монотонно спадає до 39 мб при енергії  $E - \epsilon = 14$  МeВ. Серед перерізів непружного розсіяння в канали, які відкриваються при енергії  $E = 2\epsilon$ ,

домінує переріз розсіяння в стан  $(l_1 = l_2 = 2, l = 4)$ . Цей переріз максимальний при  $E - 2\epsilon \sim 11$  МeВ, де досягає значення 65 мб. Інші перерізи не перевищують 12 мб.

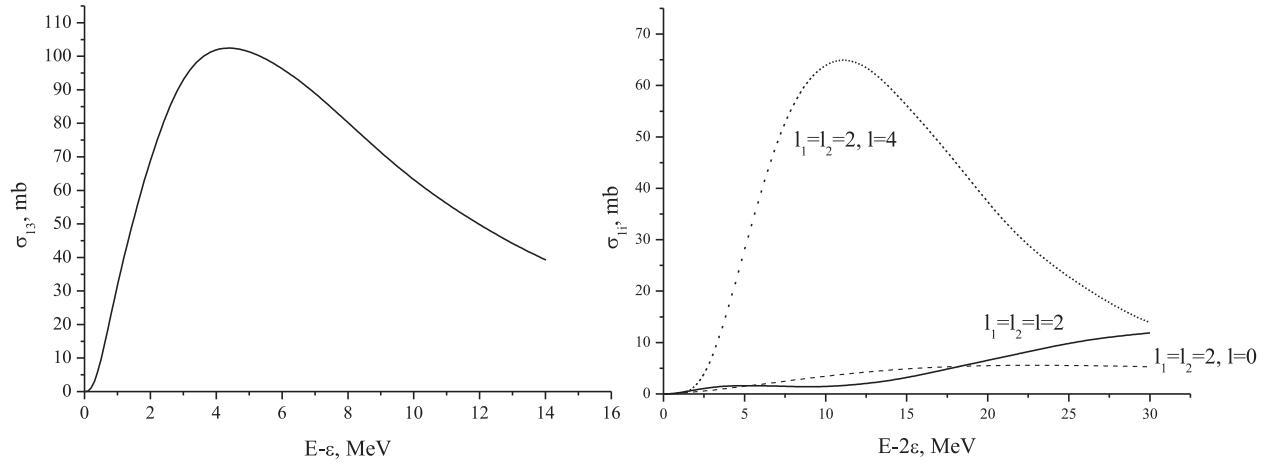


Рис. 2.9 Перерізи непружного розсіяння в каналах ( $l_1 = 2(0), l_2 = 0(2), l = 2$ ) (зліва), і ( $l_1 = l_2 = 2, l = 0, 2, 4$ ) (справа). Вхідний канал ( $l_1 = l_2 = l = 0$ ).

Багатоканальна ситуація створює проблеми при аналізі поведінки власних фаз розсіяння. Безпосередньо над відповідним порогом  $E_{\text{thr}}$ , коли відкриваються ті чи інші канали, фази поводяться так, як того вимагає закон

$$\delta_l(E) = \delta_l(E_{\text{thr}}) + \text{const } E^{l+1/2},$$

де  $\delta_l(E_{\text{thr}})$  – число, кратне  $\pi$ . Питання полягає в тому, від яких значень їх слід відраховувати, коли енергія відповідного каналу над його порогом дорівнює нулю, щоб вони, неперервно змінюючись при подальшому зростанні енергії, прагнули до нуля при її необмеженому зростанні. Проте, маючи в своєму розпорядженні власні фази в області енергій до 16 МeВ, ми побудували їх, враховуючи лише першу вимогу і той факт, що для залежності фаз від енергії характерні кутові точки в околі квазіперетинів. В цих точках похідна фазової кривої стрибком змінює своє значення, щоб уникнути перетину з іншою фазовою кривою. Сумістивши кутові точки різних власних фаз так, щоб їх положення відповідало квазіперетинам, вдається

знайти початкове їх положення, що відповідає вказаним вище умовам (див. рис. 2.10). Вони виконуються, якщо фази двох каналів з  $l = 0$  і одного з каналів з  $l = 2$  відраховувати від  $2\pi$ , а фази ще одного каналу з  $l = 2$  і каналу з  $l = 4$  від  $\pi$ . На рис. 2.10 видно два квазіперетини фазових траєкторій, один при енергїї близько 3.5 МeВ, а інший при енергїї 7.5 МeВ.

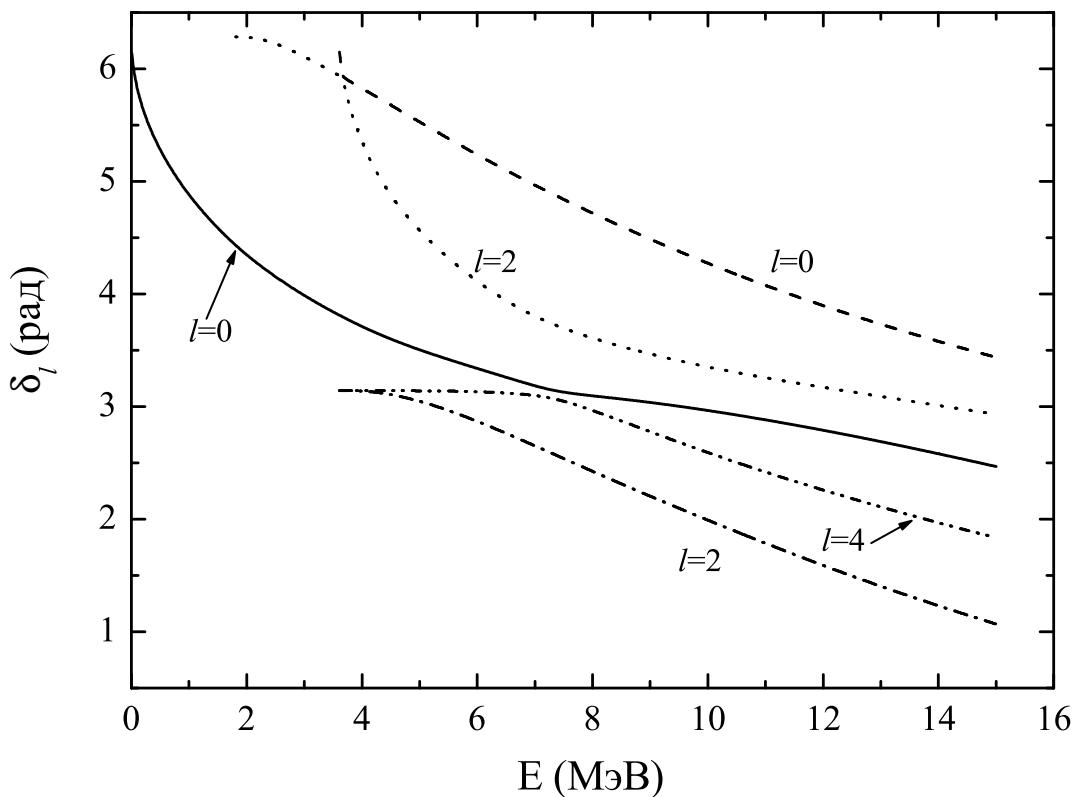


Рис. 2.10 Власні фази  $\delta_l(E)$  системи  ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$ , сформовані модифікованим оператором кінетичної енергії. Значення орбітального моменту  $l$  відносного руху кластерів вказані біля кривих.

Фази не можуть перетинатись з тієї причини, що це суперечило б теоремі єдності розв'язків хвильового рівняння. Після квазіперетину кожна з фаз рухається вздовж того напрямку, вздовж якого рухалась інша фаза до квазіперетину. Спадання фаз із зростанням енергії вказує на відштовхування

через обмінні ефекти і виключає існування резонансів, поки враховується лише одна кластерна конфігурація.

**2.1.2 Врахування двох кластерних конфігурацій:  ${}^4\text{He} + {}^8\text{He}$  і  ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$**  Поряд з кластеризацією  ${}^{12}\text{Be}$  по каналах, в яких кожне з двох ядер  ${}^6\text{He}$  знаходиться в основному чи в збудженному стані, розглянемо також канали  ${}^4\text{He} + {}^8\text{He}$ , допускаючи можливість збудження  $2^+$  стану ядра  ${}^8\text{He}$ . При цьому кожній кластерній конфігурації ми співставимо своє дерево Якобі. Підключення конфігурації  ${}^4\text{He} + {}^8\text{He}$  вносить суттєві поправки в результати розрахунків лише з кластеризацією  ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$ .

Перше за все зростає кількість дозволених станів і з'являється додаткове  $SU(3)$ -виродження. В результаті для повного орбітального моменту  $L = 0$ , повного спіну  $S = 0$  і ізоспіну  $T = 2$  кількість каналів збільшується до семи. Кластеризація  ${}^4\text{He} + {}^8\text{He}$  забезпечує дві додаткові гілки базисних станів,  $SU(3)$ -симетрія яких  $(2k - 2, 0)$  і  $(2k, 2)$ . Базисні стани різних кластерних конфігурацій з одними і тими ж індексами  $SU(3)$ -симетрій не ортогональні, а два стани  $(2, 0)$  навіть ідентичні. Тому, врахувавши дві кластеризації одночасно, прийдемо до нових базисних станів (власних функцій ядра нормування двох зв'язаних кластерних конфігурацій), що є суперпозицією базисних функцій каналів  ${}^4\text{He} + {}^8\text{He}$  і  ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$ .

Почнемо з розкладу Гільберта-Шмідта нового ядра нормування  $I_{(8,4)+(6,6)}$  для станів з  $L = 0$ . Сім різних сум наведені згідно спадання власних значень  $\Lambda_{(\lambda, \mu)}$ .

$$\begin{aligned} I_{(8,4)+(6,6)} = & \sum_{k=2}^{\infty} \Lambda_{(2k-2,0)_1} \psi_{(2k-2,0)_1} \tilde{\psi}_{(2k-2,0)_1} + \sum_{k=3}^{\infty} \Lambda_{(2k,2)_1} \psi_{(2k,2)_1} \tilde{\psi}_{(2k,2)_1} \\ & + \sum_{k=3}^{\infty} \Lambda_{(2k-4,4)} \psi_{(2k-4,4)} \tilde{\psi}_{(2k-4,4)} + \sum_{k=3}^{\infty} \Lambda_{(2k-2,0)_2} \psi_{(2k-2,0)_2} \tilde{\psi}_{(2k-2,0)_2} \\ & + \sum_{k=4}^{\infty} \Lambda_{(2k,2)_2} \psi_{(2k,2)_2} \tilde{\psi}_{(2k,2)_2} + \sum_{k=4}^{\infty} \Lambda_{(2k,2)_3} \psi_{(2k,2)_3} \tilde{\psi}_{(2k,2)_3} \\ & + \sum_{k=5}^{\infty} \Lambda_{(2k+4,0)} \psi_{(2k+4,0)} \tilde{\psi}_{(2k+4,0)}. \end{aligned}$$

Стан  $(2k-2, 0)$  став двократно виродженим, а кратність виродження станів  $(2k, 2)$  збільшилась до трьох. Залежність власних значень різних гілок від числа квантів показана на рис. 2.11.

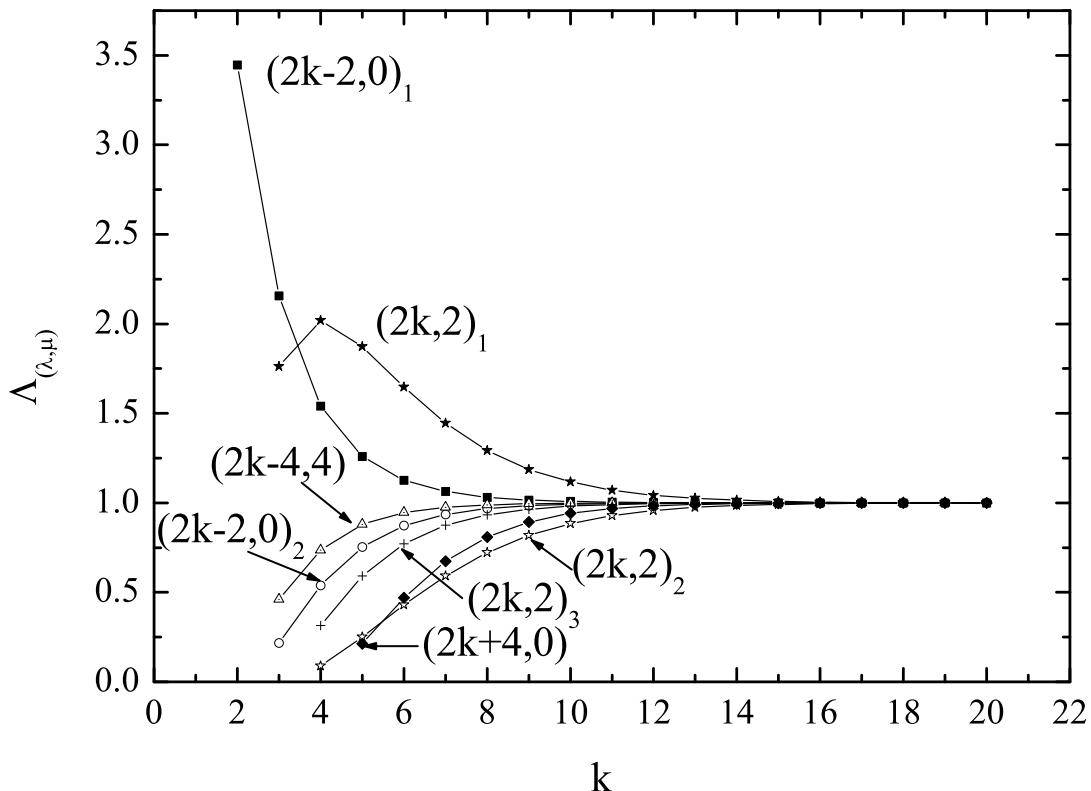


Рис. 2.11 Власні значення  $\Lambda_{(\lambda,\mu)}$  ядра нормування для системи  $^{12}\text{Be}$  за умови врахування двох кластерних конфігурацій (порівняй з табл. 5; див. деталі в тексті). Індекси SU(3)-симетрії  $(\lambda, \mu)$  вказані біля кривих.

Цікава їх особливість полягає в тому, що тепер власні значення двох гілок –  $\Lambda_{(2k-2,0)_1}$  і  $\Lambda_{(2k,2)_1}$  перевищують одиницю. Ефективний потенціал антисиметризації в станах вказаних гілок відповідає притяганню. Це явно відображається на структурі хвильової функції основного стану  $^{12}\text{Be}$ , оскільки тепер домінуючими в виразі для хвильової функції основного стану  $^{12}\text{Be}$  виявилися коефіцієнти розкладу, що належать SU(3) незвідним

представленням  $(2k - 2, 0)_1$ . Базисні функції цих представлень однаковою мірою містять як стани кластеризації  ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$ , так і  ${}^4\text{He} + {}^8\text{He}$ .

Тепер навіть без будь-якого породжуваного нуклон-нуклонними силами потенціалу взаємодії між кластерами у ядерної системи  ${}^{12}\text{Be}$  з'являється зв'язаний стан з енергією  $E_0^* = -50$  кеВ і середньоквадратичним радіусом  $r_{\text{rms}} = 4.4$  fm. На рис. 2.12 показані коефіцієнти розкладу хвильової функції цього стану.

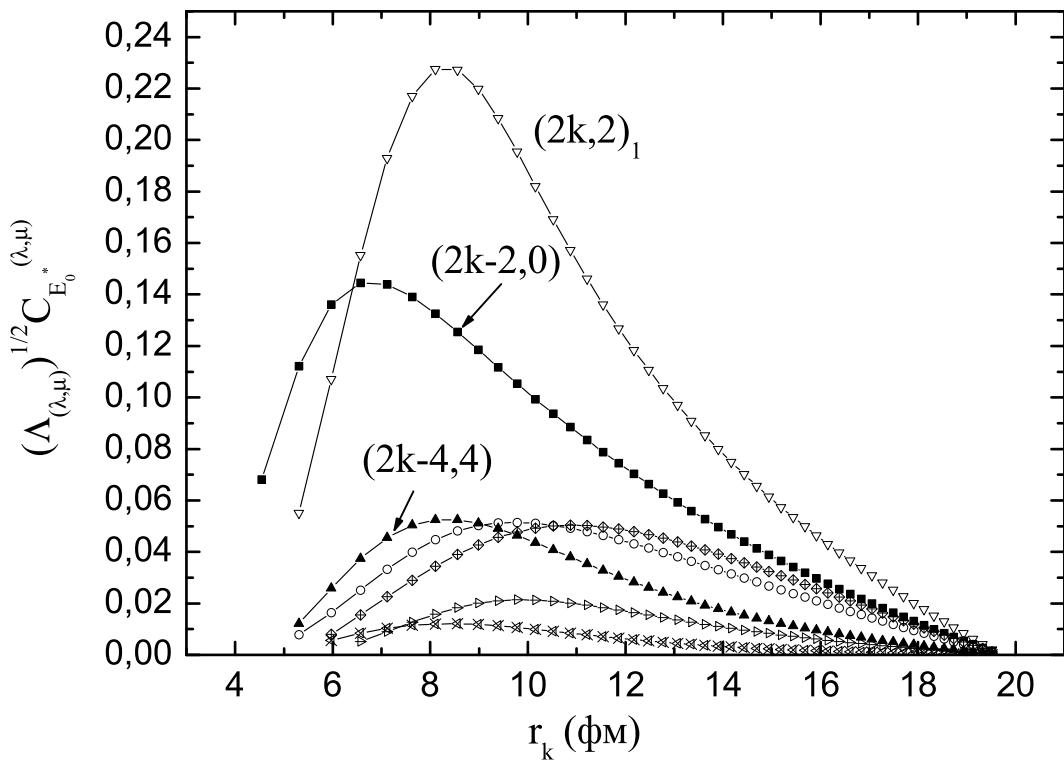


Рис. 2.12 Коефіцієнти розкладу  $\sqrt{\Lambda_{(\lambda,\mu)}} C_{E_0^*}^{(\lambda,\mu)}(r_k)$  хвильової функції основного стану ядра  ${}^{12}\text{Be}$  по  $SU(3)$ -базису за умови врахування двох кластерних конфігурацій і модифікованого оператора кінетичної енергії. Індекси  $SU(3)$ -симетрії  $(\lambda, \mu)$  вказані біля кривих.

Найбільше значення при малих  $r_k$  мають ті з них, які відповідають незвідним представленням  $(2k - 2, 0)_1$  і  $(2k, 2)_1$ . Зв'язаний стан став резуль-

татом притягання, за яке відповідальні дві останні гілки SU(3)-незвідних представень.

Щоб відповісти на питання про існування резонансів ядра  $^{12}\text{Be}$  над порогами його розвалу на  $^6\text{He} + ^6\text{He}$  і  $^8\text{He} + ^4\text{He}$ , дослідимо залежність фаз пружного багатоканального розсіяння від енергії. На рис. 2.13 зображені фази пружного розсіяння, що формуються модифікованим оператором кінетичної енергії.

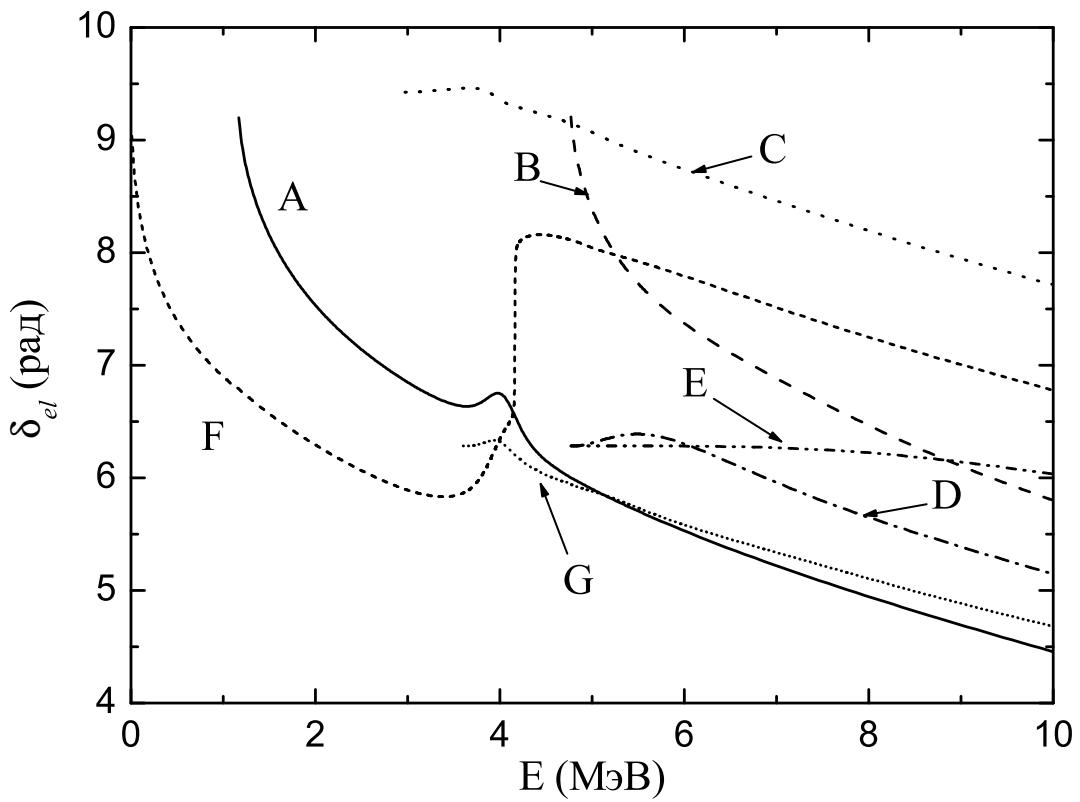


Рис. 2.13 Фази пружного багатоканального розсіяння  $\delta_{el}(E)$ , що формуються модифікованим оператором кінетичної енергії. **Розсіяння  $^6\text{He} + ^6\text{He}$ :** A – ( $l_1 = l_2 = l = 0$ ); B – ( $l_1 = l_2 = 2, l = 0$ ); C – ( $l_1 = 2(0), l_2 = 0(2), l = 2$ ); D – ( $l_1 = l_2 = l = 2$ ); E – ( $l_1 = l_2 = 2, l = 4$ ). **Розсіяння  $^8\text{He} + ^4\text{He}$ :** F – ( $l_1 = l_2 = l = 0$ ); G – ( $l_1 = l = 2, l_2 = 0$ ).

В околі енергії 4 МэВ вище порогу розвалу  $^{12}\text{Be}$  на  $^4\text{He}$  і  $^8\text{He}$  в основному стані відкриті чотири канали. Проте характерна резонансна поведінка

проявляється перш за все у фаз  ${}^8\text{He}-{}^4\text{He}$  і  ${}^6\text{He}-{}^6\text{He}$  розсіяння в станах з орбітальним моментом відносного руху  $l = 0$  за умови, що ядра, які зіштовхуються, незбуджені. У першої фази ми бачимо  $S$ -подібну залежність від енергії, а у другої дисперсійна поведінка. Судячи з величини похідних обговорюваних фаз по енергії, парціальна ширина резонансу  $\Gamma_{8,4}$  в каналі  ${}^8\text{He}+{}^4\text{He}$  становить лише 10 кeВ, і тому час життя в цьому каналі менший, ніж в каналі  ${}^6\text{He}+{}^6\text{He}$  ( $\Gamma_{6,6} = 1.12 \text{ MeB}$ ). Тому і розпад по другому каналу більш імовірний. Звернувшись до аналізу власних фаз розсіяння, приходимо до висновку про існування  $L^\pi = 0^+$  резонансу при енергії  $E = 4.16 \text{ MeB}$  з ширинкою  $\Gamma \sim 1 \text{ MeB}$ .

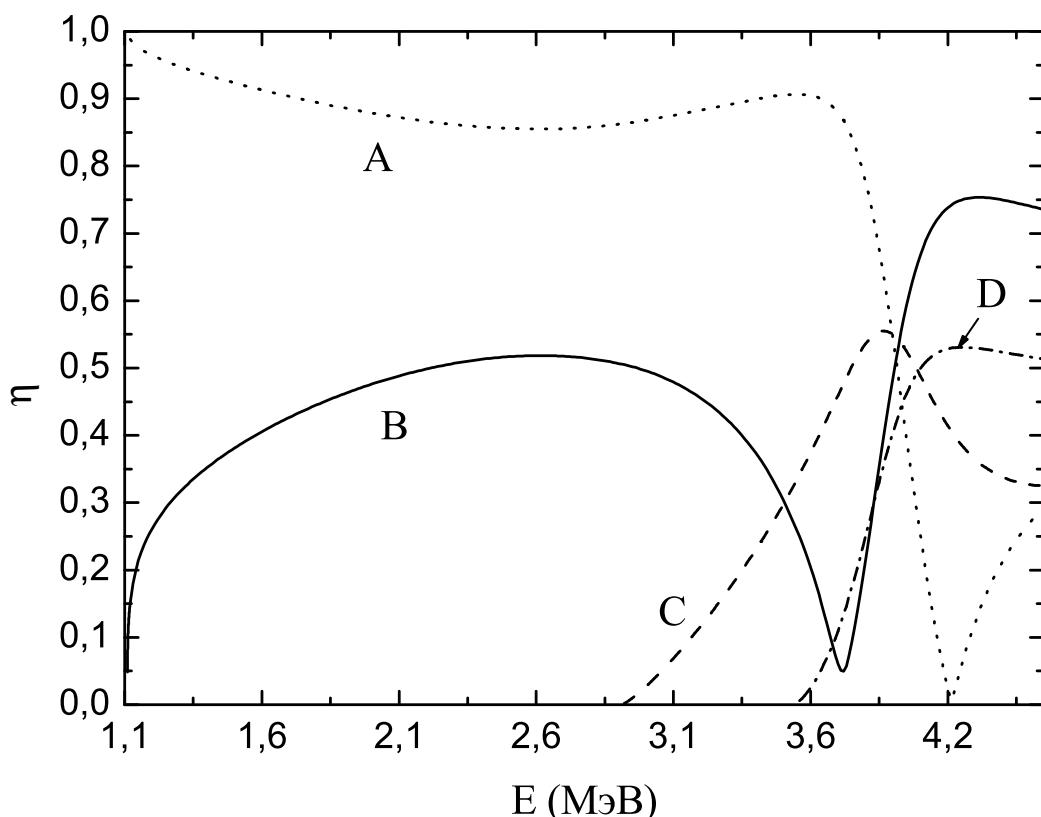


Рис. 2.14 Коефіцієнти непружності  $\eta$  в каналах  ${}^8\text{He}(0^+) + {}^4\text{He}(0^+)$ ,  $l = 0$  (A);  ${}^6\text{He}(0^+) + {}^6\text{He}(0^+)$ ,  $l = 0$  (B);  ${}^6\text{He}(2^+) + {}^6\text{He}(0^+)$ ,  $l = 2$  (C);  ${}^8\text{He}(2^+) + {}^4\text{He}(0^+)$ ,  $l = 2$  (D). Вхідний канал  ${}^8\text{He}(0^+) + {}^4\text{He}(0^+)$ ,  $l = 0$ .

Поведінка коефіцієнтів непружності, представлена на рис. 2.14, і перерізів непружного розсіяння на рис. 2.15 підтверджує висновки, що випливають з аналізу фаз пружного розсіяння відносно  $L^\pi = 0^+$  резонансу.

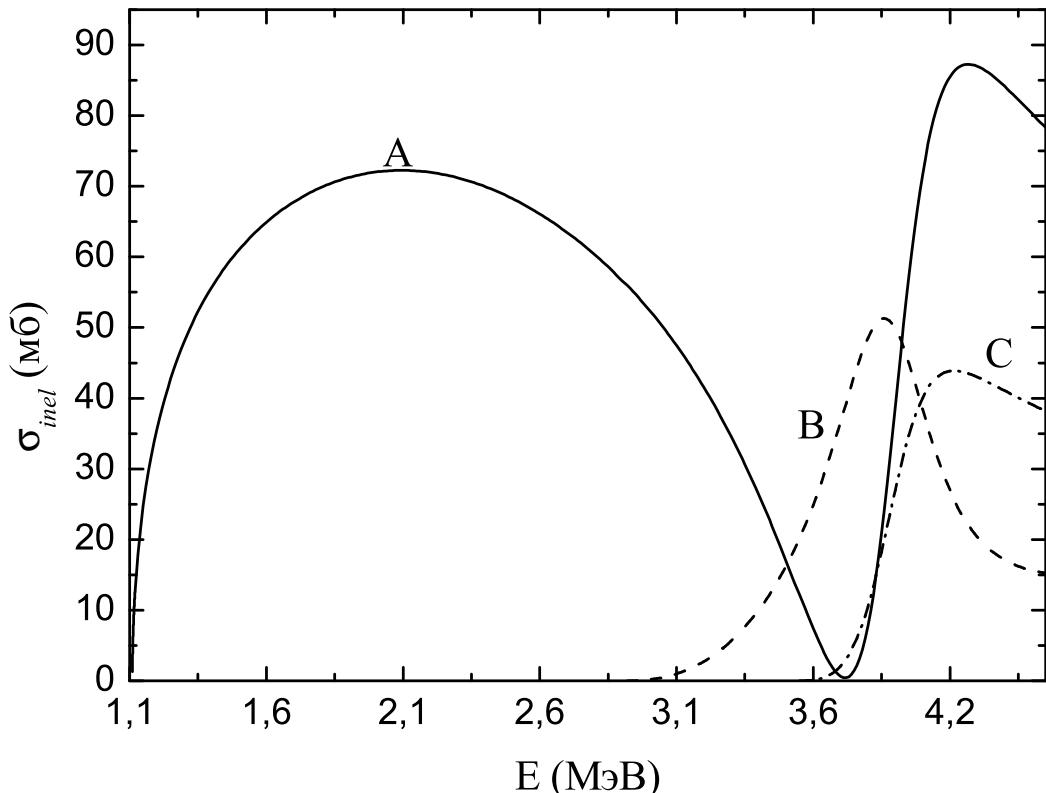


Рис. 2.15 Переріз непружного розсіяння в канали  ${}^6\text{He}(0^+) + {}^6\text{He}(0^+)$ ,  $l = 0$  (A);  ${}^6\text{He}(2^+) + {}^6\text{He}(0^+)$ ,  $l = 2$  (B);  ${}^8\text{He}(2^+) + {}^4\text{He}(0^+)$ ,  $l = 2$  (C). Вхідний канал  ${}^8\text{He}(0^+) + {}^4\text{He}(0^+)$ ,  $l = 0$ .

Як випливає з рис. 2.15, компаунд-ядро, що утворилось в результаті зіткнення ядер  ${}^8\text{He}$  і  ${}^4\text{He}$ , з великою імовірністю розпадається по каналу  ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$ , що узгоджується з зауваженням, зробленим вище. В області резонансу переріз реакції  ${}^8\text{He}({}^4\text{He}, {}^6\text{He}) {}^6\text{He}$  має яскраво виражений максимум і досягає 90 мб. Всі власні фази системи  ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$  монотонно спадають, вказуючи на відсутність резонансів в тому випадку, поки до дослідження неперервного спектра  ${}^{12}\text{Be}$  не залучаються інші кластерні конфігурації.

**2.1.3 Висновки** На прикладі системи  ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$  показано, що в просторі Фока-Баргманна пошук власних значень ядра нормування можна звести до аналітичного обчислення інтегралів від добутку ядра нормування і власних функцій базису  $SU(3)$  (за відсутності  $SU(3)$ -виродження). Останні можна знайти *a priori*. Власні функції вироджених  $SU(3)$ -представлень визначаються в результаті розв'язку інтегрального рівняння з виродженим ядром. Алгоритм розв'язку цього рівняння зводиться до стандартних алгебраїчних операцій. Проте слід врахувати, що власні значення ядра інтегрального рівняння мають скінченну граничну точку. В цій точці функції ядра можна визначити лише з точністю до унітарного перетворення. Між тим, при всіх скінченних значеннях числа осциляторних квантів власні функції ядра визначаються однозначно. Власні функції виродженого  $SU(3)$ -незвідного представлення при малих значеннях  $k$  пов'язані з асимптотичними функціями (власними функціями ядра при  $k \rightarrow \infty$ ) матрицею повороту. При зміні числа квантів змінюється і значення кута повороту, що відображається на структурі функцій вироджених станів. Власні значення ядра нормування прагнуть до одиниці із зростанням  $k$  і їх поправки експоненційно малі. Проте врахування цих малих поправок дозволяє однозначно визначити асимптотичні функції ядра нормування при  $k \rightarrow \infty$ .

Число дозволених принципом Паулі станів зростає із збільшенням числа квантів від одного (при  $n = 2k = 4$ ) до п'яти (при  $n = 2k = 10$ ).

Оператор антисиметризації не пов'язує різні  $SU(3)$  канали, вони зв'язані через оператор кінетичної енергії. В той же час функції  $l$ -базису пов'язані лише через оператор антисиметризації і цей зв'язок спадає із зростанням  $k$  експоненційно, на відміну від функцій базису  $SU(3)$ , зв'язок яких слабче обернено пропорційно  $k$ . Унітарне перетворення від базису  $SU(3)$  до  $l$ -базису розщеплює рівняння асимптотичного при великих  $k$  режиму і тим самим вирішує проблему замикання системи рівнянь АВМРГ для визначення коефіцієнтів розкладу по базису  $SU(3)$ .

Внаслідок впливу принципу Паулі, хвильова функція основного стану

ядра і станів неперервного спектра розподілена по різних каналах  $l$ -базису. Внесок кожного з каналів в хвильову функцію визначається величиною нормувальної константи (що характеризує амплітуду хвильової функції в закритому каналі) і близькістю енергії до порогової для даного каналу. Завдяки великому значенню нормувальної константи в функції основного стану домінує канал ( $l_1 = l_2 = l = 2$ ). Важливо відзначити також факт м'якості ядра  $^{12}\text{Be}$  у порівнянні з передбаченнями моделі оболонок.

Поведінка нормувальних констант для станів неперервного спектру на інтервалі енергій  $\epsilon < E < 2\epsilon$  залежить не лише від енергії, але і від того, який з двох відкритих каналів є вхідним. Досить яскраво виражений пік, який спостерігається в енергетичній залежності нормувальної константи в каналі ( $l_1 = l_2 = 2, l = 4$ ) (за умови, що вхідним каналом є той, в якому збуджується один з кластерів  $^6\text{He}$ ) може свідчити про резонанс в цьому каналі. Поведінка фаз розсіяння не вказує на наявність резонансів.

Суттєве підсилення обмінних ефектів спостерігається при одночасному врахуванні різних кластерних конфігурацій – таких, наприклад, як  $^6\text{He} + ^6\text{He}$  і  $^4\text{He} + ^8\text{He}$ , актуальних для компаунд-ядра  $^{12}\text{Be}$ . Це явище пов'язане з тим, що з'являються нові гілки збуджень з особливо великими, більшими за одиницю власними значеннями дозволених станів. В результаті зобов'язане обмінним ефектам притягання виявляється досить сильним, щоб без участі нуклон-нуклонної взаємодії між нуклонами різних кластерів забезпечити появу і зв'язаного стану, і резонансу.

Завдяки врахуванню принципу Паулі задача зіткнення атомних ядер стає багатоканальною, і продуктами розпаду компаунд-систем, що утворюються в процесі зіткнення, стають збуджені стани взаємодіючих кластерів, а також кластери, структура яких відрізняється від структури вихідних кластерів. В результаті вдається оцінити величину ефективних перерізів ядерних реакцій, що супроводжуються збудженням або перебудовою кластерів. Відомості хоча б про порядок величини цих перерізів можуть бути корисними при постановці майбутніх експериментів.

## 2.2 Співіснування кластерних конфігурацій $^{11}\text{Be} + n$ і $^{10}\text{Be} + ^2\text{n}$ в ядрі $^{12}\text{Be}$

**2.2.1 Вступ** В задачах зіткнення легких ядер з надлишком нейтронів принцип Паулі відіграє важливу роль, істотно впливаючи на поведінку ядер зі зменшенням відстані між ними. Деякі стани виявляються забороненими, в результаті чого хвильові функції відносного руху ядер пригнічені на самих малих відстанях між ядрами. Поза цією областю зміна кінетичної енергії відносного руху під дією принципу Паулі при зближенні ядер призводить до їх ефективної взаємодії [9]. Дослідити властивості такої взаємодії вдається, звертаючись до дискретного представлення - алгебраїчної версії методу резонуючих груп, вихідним пунктом якого є побудова повного базису дозволених станів гармонічного осцилятора та їх власних значень.

Власні значення дозволених станів багатьох кластерних систем вже обчислювались різними авторами (див., наприклад, [42]). Проте лише в результаті розвитку АВМРГ і звертання до простору Фока-Баргмана вдалось безпосередньо використати їх при розв'язку динамічних рівнянь методу резонуючих груп і виявити вплив власних значень на характер поведінки кластерів в процесі зіткнення. Характер взаємодії, обумовленої впливом принципу Паулі, визначається поведінкою власних значень оператора антисиметризації. Вони не можуть набувати від'ємного значення, оскільки пропорційні ймовірності реалізації відповідного дозволеного базисного стану і прямають до одиниці із збільшенням відстані між ядрами. В тому випадку, коли власні значення оператора антисиметризації прямають до одиниці знизу, ефективна взаємодія виявляється взаємодією відштовхування. Якщо ж власні значення прямають до одиниці згори, то можна говорити про існування обумовленого принципом Паулі притягання.

Самий простий приклад притягання спостерігається в станах системи  $^4\text{He} + n$  з повним орбіタルним моментом, що дорівнює одиниці. Це притягання приводить до додатної фази розсіяння нейтрона на  $^4\text{He}$  навіть за

відсутності потенціалу взаємодії між нейтроном і альфа-частинкою, але як результат послідовного врахування принципу Паулі на оператор кінетичної енергії їх відносного руху. Вперше ж вищезгадане явище було виявлено у двох бінарних систем  ${}^6\text{He}+{}^6\text{He}$  і  ${}^4\text{He}+{}^8\text{He}$  [8]. Обидві системи містять кластери з відкритою  $p$ -оболонкою і є двома різними кластерними конфігураціями ядра  ${}^{12}\text{Be}$ . При одночасному врахуванні обох кластерних конфігурацій компаунд-ядра спостерігається суттєве підсилення обмінних ефектів. В результаті зобов'язане обмінним ефектам притягання виявляється досить сильним, щоб навіть без участі нуклон-нуклонної взаємодії між нуклонами різних кластерів забезпечити появу і зв'язаного стану, і резонансу компаунд-ядра  ${}^{12}\text{Be}$ .

Важливо відзначити, що ефективна взаємодія, обумовлена зміною кінетичної енергії відносного руху під дією оператора антисиметризації, виникає лише між такими об'єктами, внутрішня енергія яких може змінюватись в процесі їх зближення. Мова йде про взаємодію ядер, що складаються з нуклонів, або про взаємодію нуклонів, якщо враховується їх кваркова структура. Кінетична енергія відносного руху двох кластерів не є позитивно визначеним оператором, на відміну від повної кінетичної енергії, і тому серед її власних значень можуть бути від'ємні, що відповідає утворенню зв'язаного стану бінарної кластерної системи. Звичайно, енергія такого стану відраховується від порогу розвалу компаунд-ядра на кластери, з яких воно складається.

Такий незвичний прояв обмінних ефектів в станах, власні значення яких перевищують одиницю, поставив питання про пошуки аналогічних станів і в інших кластерних системах. Хорошим прикладом виявилось ядро  ${}^{12}\text{Be}$ , яке можна розглядати як бінарну кластерну систему. Для будь-якої компаунд-систем можна вказати декілька кластерних конфігурацій, кожна з яких відповідає певному набору кластерів, що вивільняються в результаті ядерної реакції. В роботах [8, 9] було показано, що найбільші власні значення відповідають базисним станам, які домінують в станах дискре-

тного спектра бінарної кластерної системи і в станах неперервного спектра з малою надпороговою енергією. Власні значення ізольованих кластерних конфігурацій ядра  $^{12}\text{Be}$  набувають максимального і більшого за одиницю значення при мінімальному числі квантів, що можна інтерпретувати, як притягання на малих відстанях між кластерами. Маючи в своєму розпорядженні декілька парціальних власних значень для станів з мінімальним числом квантів, ми можемо відзначити певні закономірності в їх поведінці, а також вказати на їх залежність від того, якій кластерній конфігурації ядра  $^{12}\text{Be}$  вони відповідають.

Мінімальне власне значення відповідає найбільш симетричній конфігурації, що складається з двох тотожних кластерів - ядер  $^6\text{He}$  в основному  $0^+$  або у збудженому  $2^+$  стані. Максимальне власне значення належить найменш симетричній конфігурації –  $^{11}\text{Be}+n$ . Нейтронний кластер, залишивши стан, що замикає  $p$ -оболонку, знаходиться під дією обмінних сил притягання, що прагнуть повернути його в початкове положення. В стані, що відповідає кластеризації  $^{11}\text{Be}+^2n$ , власні значення менші, і тому меншим є притягання, яке повертає кластер  $^2n$  в початкове положення. Власні значення інших кластерних конфігурацій не такі великі, як і притягання, що породжується цими власними значеннями. Отже, саме конфігурації  $^{11}\text{Be}+n$  і  $^{10}\text{Be}+^2n$  є найбільш екстремальними і з цієї причини заслуговують на особливу увагу. Розгляд цих конфігурацій дозволить зрозуміти, як впливають на динаміку зіткнення такі великі власні значення дозволених станів.

Власні значення були обчислені нами не лише для окремих бінарних кластерних конфігурацій, але й для випадку, коли одночасно враховується кілька різних конфігурацій. Якщо наближення одної бінарної конфігурації дозволяє вивчати лише такі стани ядра, які можуть розпадатись на два певних кластери в їх основному або збудженому стані, то враховуючи зв'язок різних бінарних конфігурацій, можна дати відповідь на питання про конкуренцію між такими каналами розпаду компаунд-ядра, яким відповід-

ає різна кластерна структура.

Загальне положення, встановлене нами для зв'язаних конфігурацій, полягає в тому, що збільшення числа залучених конфігурацій супроводжується, по-перше, збільшенням максимальних власних значень, по-друге, появою кількох гілок збудження з особливо великими (такими, що перевищують одиницю) власними значеннями дозволених станів. Тому цікаво зрозуміти співвідношення між різними пружними та непружними процесами в системі двох кластерних конфігурацій  $^{11}\text{Be}+n$  та  $^{10}\text{Be}+^2n$ , як це було зроблено раніше для випадку  $^6\text{He}+^6\text{He}$  і  $^8\text{He}+^4\text{He}$  [8], не залучаючи спочатку інші конфігурації ядра  $^{12}\text{Be}$ . Оцінка величин ефективних перерізів пружного та непружного зіткнень кластерів, що розглядаються, є корисною як при обговоренні постановки експериментів з радіоактивними пучками, так і для астрофізичних застосувань, коли необхідною є інформація про взаємодію ядер з надлишком нейтронів.

В цьому підрозділі вивчається взаємодія легких ядер з надлишком нейтронів, обумовлена впливом обмінних ефектів на оператор кінетичної енергії їх відносного руху. В пункті 2.2.2 обговорюються дерева Якобі різних бінарних кластерних конфігурацій ядерної системи, а також зв'язок хвильової функції моделі оболонок і функції різних кластерних конфігурацій з мінімальним числом квантів. В пункті 2.2.3 розглядається кластерна конфігурація  $^{11}\text{Be}+n$  ядра  $^{12}\text{Be}$  як приклад системи, де найбільш яскраво проявляється створене принципом Паули притягання. Пункт 2.2.4 присвячено аналізу обмінних ефектів в системі  $^{10}\text{Be}+^2n$ . Нарешті, в пункті 2.2.5 наведено результати одночасного врахування двох вищезгаданих конфігурацій. Висновки представлені в пункті 2.2.6 .

## 2.2.2 Формулювання підходу

**Дерева Якобі для різних бінарних кластерних конфігурацій**  
Перераховуючи різні бінарні кластерні конфігурації, за вихідне положення ми приймаємо гіпотезу, що кожному з кластерів певної конфігурації

може бути співставлено пакет станів  $SU(3)$ -незвідного представлення з мінімальним числом квантів. Такий  $SU(3)$ -мультиплет відповідає схемі Елліотта для спектра трансляційно-інваріантної осциляторної моделі оболонок (TIMO), що породжується лідируючим представленням [53]. Припущення про бінарну кластерну структуру ядра, що розглядається, приводить нас до висновку, що в просторі генераторних координат із всіх можливих векторів Якобі лише кілька будуть брати безпосередню участь у виразах для хвильових функцій і в ядрі нормування. З відносним рухом кластерів ми пов'язуємо вектор Якобі  $\mathbf{R}$ . Незалежними змінними внутрішніх хвильових функцій кластерів є вектори Якобі  $\mathbf{u}_j$ , що належать до того ж дерева Якобі, що і вектор  $\mathbf{R}$ .

Будь-яка інша кластерна конфігурація потребує введення векторів Якобі іншого дерева. Іншими словами, різним конфігураціям відповідають різні дерева, і ця обставина наближає наш підхід до того, який лежить в основі виводу рівнянь Фаддєєва. В принципі, ми можемо звертатись до такої кількості кластерних конфігурацій, яка дорівнює кількості різних дерев Якобі. Вибрали за внутрішні хвильові функції кластерів функції моделі оболонок, що відповідають найбільш компактному заповненню, ми обмежимось мінімально можливою кількістю векторів  $\mathbf{u}_j$  (для кластерів з відкритою  $p$ -оболонкою  $j \leq 3$ ). Перетворення, що пов'язує різні дерева Якобі, є унітарним лише за умови, що задіяні всі  $A - 1$  векторів Якобі системи  $A$ -нуклонів. Тому, щоб знайти матрицю переходу між різними деревами, доводиться залучати також і деяку кількість векторів Якобі, від яких не залежать явно хвильові функції. Такі вектори ми будемо в подальшому позначати  $\mathbf{Q}$ .

Розглянемо далі дерева Якобі, що відповідають двом кластерним конфігураціям ядра  $^{12}\text{Be}$ :  $^{11}\text{Be} + n$  і  $^{10}\text{Be} + ^2n$ . Нехай  $\mathbf{R}_i$ ,  $i = \overline{1, 8}$  – генераторні параметри нейtronів, а  $\mathbf{R}_i$ ,  $i = \overline{9, 12}$  – генераторні параметри протонів. Дерево Якобі для конфігурації  $^{11}\text{Be} + n$  визначимо наступним чином. Оскільки кластер  $^{11}\text{Be}$  містить п'ять нейtronів в  $p$ -оболонці, для його опису потрі-

бно не менше трьох векторів  $\mathbf{u}_i$ . Вектор  $\mathbf{R}$  вказує положення валентного нейтрона відносно центру мас  ${}^{11}\text{Be}$ :

$$\mathbf{R} = \sqrt{\frac{11}{12}} \left( \mathbf{R}_8 - \frac{\sum_{i=1}^7 \mathbf{R}_i + \sum_{i=9}^{12} \mathbf{R}_i}{11} \right),$$

$$\mathbf{u}_1 = \sqrt{2} \left( \frac{\mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_4 + \mathbf{R}_{11} + \mathbf{R}_{12}}{4} - \frac{\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_9 + \mathbf{R}_{10}}{4} \right),$$

$$\mathbf{u}_2 = \sqrt{\frac{8}{5}} \left( \frac{\mathbf{R}_5 + \mathbf{R}_6}{2} - \frac{\sum_{i=1}^4 \mathbf{R}_i + \sum_{i=9}^{12} \mathbf{R}_i}{8} \right),$$

$$\mathbf{u}_3 = \sqrt{\frac{10}{11}} \left( \mathbf{R}_7 - \frac{\sum_{i=1}^6 \mathbf{R}_i + \sum_{i=9}^{12} \mathbf{R}_i}{10} \right).$$

В ядрі  ${}^{10}\text{Be}$  два нейtronних стани в  $p$ -оболонці вільні. Тому достатньо двох векторів  $\bar{\mathbf{u}}_1$  і  $\bar{\mathbf{u}}_2$ , що характеризують внутрішні ступені вільності кластера  ${}^{10}\text{Be}$ , і вектора Якобі  $\bar{\mathbf{R}}$  відносного руху  ${}^{10}\text{Be}$  і динейтрона:

$$\bar{\mathbf{R}} = \sqrt{\frac{5}{3}} \left( \frac{\mathbf{R}_7 + \mathbf{R}_8}{2} - \frac{\sum_{i=1}^6 \mathbf{R}_i + \sum_{i=9}^{12} \mathbf{R}_i}{10} \right),$$

$$\bar{\mathbf{u}}_1 = \sqrt{2} \left( \frac{\mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_4 + \mathbf{R}_{11} + \mathbf{R}_{12}}{4} - \frac{\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_9 + \mathbf{R}_{10}}{4} \right),$$

$$\bar{\mathbf{u}}_2 = \sqrt{\frac{8}{5}} \left( \frac{\mathbf{R}_5 + \mathbf{R}_6}{2} - \frac{\sum_{i=1}^4 \mathbf{R}_i + \sum_{i=9}^{12} \mathbf{R}_i}{8} \right),$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{R}_8 - \mathbf{R}_7).$$

Останній вектор потрібен для того, щоб виразити вектори Якобі конфігурації  ${}^{10}\text{Be}+{}^2n$  через вектори Якобі конфігурації  ${}^{11}\text{Be}+n$ :

$$\mathbf{u}_1 = \bar{\mathbf{u}}_1, \quad \mathbf{u}_2 = \bar{\mathbf{u}}_2, \quad (2.42)$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{11}} \left\{ \sqrt{6} \bar{\mathbf{R}} - \sqrt{5} \bar{\mathbf{Q}} \right\}, \quad \mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{11}} \left\{ \sqrt{5} \bar{\mathbf{R}} + \sqrt{6} \bar{\mathbf{Q}} \right\}. \quad (2.43)$$

За допомогою співвідношень (2.42) можна знайти інтеграли перекриття базисних функцій різних кластерних конфігурацій, необхідні для побудови базису дозволених принципом Паулі станів двох зв'язаних конфігурацій. Звичайно, оскільки вектор  $\bar{Q}$  не фігурує в хвильових функціях системи  $^{10}\text{Be} + ^2n$ , він не дає внеску в інтеграл перекриття з базисними функціями конфігурації  $^{11}\text{Be} + n$ .

**Хвильова функція моделі оболонок і функції МРГ різних кластерних конфігурацій з мінімальним числом квантів** На відміну від моделі оболонок, згідно якій нуклони рухаються незалежно в полі гармонічного осцилятора, хвильова функція бінарної кластерної системи припускає, що той же самий рух нуклонів можна розглядати як відносний рух кластерів, а хвильова функція відносного руху, звичайно, відповідає власній функції гармонічного осцилятора, яка залежить від вектора Якобі, визначеного відповідним чином. Тим часом зрозуміло, що зв'язок між кластерами в реальному ядрі слабший, ніж зв'язок валентних нуклонів з остовом. Зі сказаного випливає, що навіть якщо ми припускаємо можливість моделювати внутрішні функції кластерів функціями ТІМО, то для функції відносного руху кластерів наближення, про яке йшла мова вище, явно не досить, і разом з такою функцією ми повні залучати багато інших, щоб відтворити факт слабкого зв'язку між кластерами.

Найпростішим серед дозволених базисних станів, що забезпечують опис відносного руху кластерів з фіксованими внутрішніми функціями, є той, що відповідає моделі ТІМО після її проектування на повністю антисиметризовану функцію системи кластерів. При мінімальному числі осциляторних квантів кожній з кластерних конфігурацій відповідає одна й та ж дозволена власна функція координатного представлення - хвильова функція моделі оболонок основного стану компаунд-ядра. Проте в представленні дискретного базису МРГ власні функції різних конфігурацій виражуються через вектори Якобі різних дерев. Звичайно, хвильову функцію осциляторної моделі оболонки можна переписати в термінах векторів Якобі того чи

іншого дерева. Таке перетворення було б тотожним за умови, що в ньому беруть участь всі вектори Якобі даного дерева, і воно не давало б інформації про те, яка кластерна конфігурація є найбільш імовірною для дослідженого ядра. Але кожній кластерній конфігурації відповідає свій вектор Якобі, що передає відносний рух двох кластерів бінарної системи, і лише мінімальна кількість векторів Якобі, необхідних для опису внутрішніх ступенів свободи кластерів. Тому визначений в просторі Фока-Баргмана образ дозволеної власної функції гармонічного осцилятора залежить від того, якому дереву Якобі системи двох кластерів він відповідає. В результаті, розглядаючи зразу декілька взаємодіючих кластерних конфігурацій, ми можемо зробити висновок про те, як співвідносяться між собою ймовірності розпаду компаунд-системи по різним бінарним каналам.

Із загальних міркувань випливає, що домінувати повинна та кластеризація, якій відповідає найслабший зв'язок між кластерами. Вона, в свою чергу, повинна належати тому каналу розвалу ядра, що має найнижчий поріг. Чим слабший зв'язок між кластерами, тим більша амплітуда коливань для відносного руху кластерів в цьому каналі, і тим дужче хвильова функція моделі оболонок відрізняється від реальної функції. Але не лише положення порогу розвалу є вказівкою на те, наскільки сильним є зв'язок між кластерами в ядрі. Далі ми продемонструємо, що такою ознакою може бути власне значення ядра нормування ізольованої конфігурації з мінімальним числом квантів.

Легко показати, що для мінімального числа квантів єдина дозволена базисна функція бінарної кластерної системи  $\Psi_{(\lambda_0, \mu_0)}$  в наближенні  $t$  бінарних конфігурацій може бути представлена у вигляді:

$$\Psi_{(\lambda_0, \mu_0)} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_{(\lambda_0, \mu_0)}}} \sum_{i=1}^m \sqrt{\lambda_{(\lambda_0, \mu_0)}^i} \psi_{(\lambda_0, \mu_0)}^i, \quad (2.44)$$

де  $\psi_{(\lambda_0, \mu_0)}^i$  – дозволена базисна функція  $i$ -ї кластерної конфігурації, що належить лідеруючому  $SU(3)$ -незвідному представленню  $(\lambda_0, \mu_0)$ , а  $\lambda_{(\lambda_0, \mu_0)}^i$  – відповідне власне значення.

Як випливає з (2.44), імовірність присутності тої чи іншої кластерної конфігурації в хвильовій функції бінарної кластерної системи пропорційна власному значенню ізольованої конфігурації:

$$\int \Psi_{(\lambda_0, \mu_0)} \psi_i^* d\mu_b = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_{(\lambda_0, \mu_0)}}} \left\{ \sqrt{\lambda_i} + \sum_{j \neq i} \sqrt{\lambda_j} \int \psi_j \psi_i^* d\mu_b \right\}. \quad (2.45)$$

Другий доданок в правій частині (2.45) вказує на те, що на малих відстанях між кластерами вступає в гру зв'язок між різними кластерними каналами через обмін нуклонами різних кластерів. Тут і далі індекси  $SU(3)$ -симетриї  $(\lambda_0, \mu_0)$  опущено для скорочення запису.

За допомогою співвідношення (2.45) ми можемо розташувати власні значення різних конфігурацій у відповідності з їх значимістю: внесок тої чи іншої конфігурації  $\psi_i$  буде тим більшим, чим більше її власне значення.

Найнижче власне значення  $\Lambda_{(\lambda_0, \mu_0)}$  ядра нормування  $t$  зв'язаних конфігурацій визначається виразом:

$$\Lambda_{(\lambda_0, \mu_0)} = \sum_{i=1}^m \lambda_i + 2 \sum_{i < j} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} \int \psi_i \psi_j^* d\mu_b. \quad (2.46)$$

Як видно з (2.46), врахування декількох кластерних конфігурацій суттєво збільшує власне значення найнижчого дозволеного стану компаунд-ядра. В результаті  $\Lambda_{(\lambda_0, \mu_0)}$  буде перевищувати одиницю навіть в тому випадку, якщо власні значення ізольованих конфігурацій  $\lambda_i$  дещо менші за одиницю. Це, в свою чергу, свідчить про підсилення ефективного притягання в стані з мінімальним числом квантів.

Щоб проілюструвати все вищесказане на конкретному прикладі, розглянемо шість різних кластерних конфігурацій ядра  $^{12}\text{Be}$ :  ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$ ,  ${}^8\text{He} + {}^4\text{He}$ ,  ${}^9\text{Li} + {}^3\text{H}$ ,  ${}^{10}\text{Be} + {}^2\text{n}$ ,  ${}^{11}\text{Be} + n$  і  ${}^{11}\text{Li} + p$ . Індивідуальні власні значення цих конфігурацій,  $SU(3)$ -симетрия яких  $(2,0)$ , а число осциляторних квантів мінімальне, наведені в таблиці 7.

Як видно з таблиці 7, найбільшими власними значеннями характеризуються конфігурації  ${}^{11}\text{Be} + n$  і  ${}^{10}\text{Be} + {}^2n$ , що вказує на досить сильне ефективне притягання, обумовлене обмінними ефектами. До того ж, цим кластерним

Табл. 7: Власні значення кластерних конфігурацій ядра  $^{12}\text{Be}$ 

конфігурація	$^{11}\text{Be}+n$	$^{10}\text{Be}+^2\text{n}$	$^9\text{Li}+^3\text{H}$	$^{11}\text{Li}+\text{p}$	$^8\text{He}+^4\text{He}$	$^6\text{He}+^6\text{He}$
$\lambda_{(2,0)}$	5,45	3,24	2,63	2,18	1,19	1,11

каналам відповідають найнижчі пороги розвалу ядра  $^{12}\text{Be}$ . Тому в нас є вагомі підстави вважати, що саме ці кластерні конфігурації є найбільш вірогідними для ядра  $^{12}\text{Be}$ .

### 2.2.3 Кластерна конфігурація $^{11}\text{Be}+n$

В цьому підрозділі ми будемо розглядати бінарну кластерну систему  $^{11}\text{Be}+n$ , зв'язаний стан якої одночасно є основним станом ядра  $^{12}\text{Be}$ , для якого ця кластеризація виявляється одною з можливих. Ядро  $^{12}\text{Be}$  в основному має нульове значення повного спіну і орбітального моменту і додатню парність. З точки зору моделі оболонок  $^{12}\text{Be}$  - магічне ядро, оскільки в нього повністю заповнена нейтронна  $p$ -оболонка. Тому ми будемо вважати, що кластер  $^{11}\text{Be}$  знаходиться в стані  $1/2^-$ , який є збудженим станом  $^{11}\text{Be}$ , в той час як основний стан цього ядра має квантові числа  $1/2^+$ . Додатна парність основного стану  $^{11}\text{Be}$  говорить про те, що його валентний нейtron знаходиться не в  $p$ -оболонці, а в  $sd$ -оболонці, і, отже, кластеризація  $^{11}\text{Be}(1/2^+)+n$  відповідала б збудженному стану  $^{12}\text{Be}$  і при мінімальному числу квантів. Звичайно, навіть припускаючи, що при мінімальному числі квантів всі нейтрони  $^{12}\text{Be}$  знаходяться в  $p$ -оболонці, для опису руху останнього валентного нейтрона ми повинні залучати трансляційно-інваріантні стани інших непарних оболонок. Лише в цьому випадку ми зможемо передати повільне спадання його хвильової функції з віддаленням від остова і, отже, мале значення його енергії зв'язку з остовом.

В рамках моделі Елліотта [53] нормований на кількість станів інтеграл перекриття  $^{12}\text{Be}$  залежить від трьох комплексних векторів  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  і спряжених до них  $\tilde{\mathbf{u}}_1, \tilde{\mathbf{u}}_2, \tilde{\mathbf{u}}_3$ :

$$\frac{1}{720}(\mathbf{u}_1 \tilde{\mathbf{u}}_1)^2 (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3)^2 (\tilde{\mathbf{u}}_1 \tilde{\mathbf{u}}_2 \tilde{\mathbf{u}}_3)^2. \quad (2.47)$$

Індекси його  $SU(3)$ -симетрії  $(2,0)$ , спін дорівнює нулю, ізоспін дорівнює двійці, а повний орбітальний момент може набувати значень  $L = 0$  і  $L = 2$ . Структура виразу (2.47) дуже проста. Квадрату змішаного добутку  $(\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3)$  відповідають три пари  $p$ -нейтронів з протилежно направленими спінами, а другий степінь вектора  $\mathbf{u}_1$  вказує на наявність пари протонів в  $p$ -оболонці.

В представленні конфігурації  $^{11}\text{Be} + n$  трансляційно-інваріантне ядро нормування, що відповідає тому ж значенню повного спіна і ізоспіна, має вигляд

$$I_{^{11}\text{Be}+n} = \frac{1}{144} (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3) (\tilde{\mathbf{u}}_1 \tilde{\mathbf{u}}_2 \tilde{\mathbf{u}}_3) (\mathbf{u}_1 \tilde{\mathbf{u}}_1)^2 \times \\ \times \left( ([\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2] [\tilde{\mathbf{u}}_1 \tilde{\mathbf{u}}_2]) \left\{ \exp(\mathbf{R}\mathbf{S}) - \left( 1 + \frac{12}{11}(\mathbf{R}\mathbf{S}) \right) \exp\left(-\frac{1}{11}(\mathbf{R}\mathbf{S})\right) \right\} + \right. \\ \left. + \frac{24}{11} (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{R}) (\tilde{\mathbf{u}}_1 \tilde{\mathbf{u}}_2 \mathbf{S}) \exp\left(-\frac{1}{11}(\mathbf{R}\mathbf{S})\right) \right).$$

Тут вектор  $\mathbf{R}$  вказує на положення валентного нейтрона по відношенню до центра мас кластера  $^{11}\text{Be}$ . Мінімальний степінь цього вектора відповідає найменшій допустимій відстані між кластерами і найбільш компактному заповненню ядра  $^{12}\text{Be}$ . Ядро нормування для найнижчого стану системи  $^{11}\text{Be} + n$  буде відрізнятись від виразу (2.47) лише заміною  $\mathbf{u}_3 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}_3 \rightarrow \mathbf{S}$ :

$$\frac{1}{720} (\mathbf{u}_1 \tilde{\mathbf{u}}_1)^2 (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3) (\tilde{\mathbf{u}}_1 \tilde{\mathbf{u}}_2 \tilde{\mathbf{u}}_3) (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{R}) (\tilde{\mathbf{u}}_1 \tilde{\mathbf{u}}_2 \mathbf{S}). \quad (2.48)$$

В границі великого числа квантів ( $\nu = 2k + 1$ ) інтеграл перекриття  $I_{^{11}\text{Be}+n}$  набуває факторизованого вигляду:

$$\frac{1}{144} (\mathbf{u}_1 \tilde{\mathbf{u}}_1)^2 (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3) (\tilde{\mathbf{u}}_1 \tilde{\mathbf{u}}_2 \tilde{\mathbf{u}}_3) ([\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2] [\tilde{\mathbf{u}}_1 \tilde{\mathbf{u}}_2]) \frac{1}{(2k+1)!} (\mathbf{R}\mathbf{S})^{2k+1}. \quad (2.49)$$

Хвильова функція кластера  $^{11}\text{Be}$  бере участь в виразі (2.49) в вигляді  $SU(3)$ -пакета  $(2,1)$ , складеного з компонент з орбітальними моментами  $\mathcal{L} = 1, 2, 3$ . В свою чергу, орбітальний момент відносного руху  $l$  нейтронного кластера і  $^{11}\text{Be}$  може набувати лише непарних значень, оскільки насківлять лише стани додатньої парності  $^{12}\text{Be}$ . Надалі ми обмежимось лише тими станами  $^{12}\text{Be}$ , орбітальний момент яких  $L = 0$ , тому при мінімально-му числі квантів з трьох станів незвідного представлення  $(2,1)$  ядра  $^{11}\text{Be}$

реалізується лише стан з моментом  $\mathcal{L} = 1$ . Коли число квантів перевищує мінімальне, може реалізуватись також збуджений стан  $^{11}\text{Be}$  з моментом  $\mathcal{L} = 3$ .

Повний базис дозволених принципом Паулі станів  $^{12}\text{Be}$  з  $L = 0$  в наближенні кластерної конфігурації  $^{11}\text{Be} + n$  отримаємо в результаті проектування ядра нормування  $I_{^{11}\text{Be}+n}$  на стани з певною  $SU(3)$ -симетрією і нульовим моментом:

$$I_{^{11}\text{Be}+n}^{L=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{(2k,0)} \psi_{(2k,0)} \tilde{\psi}_{(2k,0)} + \sum_{k=2}^{\infty} \lambda_{(2k-4,2)} \psi_{(2k-4,2)} \tilde{\psi}_{(2k-4,2)},$$

де власні значення ядра нормування визначаються виразом:

$$\begin{aligned} \lambda_{(2k,0)} &= 1 + 49 \left( \frac{1}{11} \right)^{2k-1} \quad (k \geq 1), \\ \lambda_{(2k-4,2)} &= 1 + (24k + 37) \left( \frac{1}{11} \right)^{2k-1} \quad (k \geq 2). \end{aligned} \quad (2.50)$$

При кожному непарному значенні повного числа квантів  $\nu = 2k + 1 > 1$  базис дозволених станів з повним орбітальним моментом  $L = 0$  містить два  $SU(3)$ -незвідних представлення:

$$\begin{aligned} \psi_{(2k,0)} &= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{k(2k-1)}{(2k+3)(2k+1)!}} (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3) (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{R}) \times \\ &\quad \times \left\{ \mathbf{u}_1^2 \mathbf{R}^2 - \frac{2(k-1)}{2k-1} [\mathbf{u}_1 \mathbf{R}]^2 \right\} \mathbf{R}^{2k-4}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\psi_{(2k-4,2)} = \frac{1}{6\sqrt{2}} \sqrt{\frac{k(k-1)}{(2k-1)(2k+1)!}} (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3) (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{R}) [\mathbf{u}_1 \mathbf{R}]^2 \mathbf{R}^{2k-4}. \quad (2.52)$$

Функції (2.51) ортонормовані з мірою Баргманна. Вони є образами в просторі Фока–Баргманна антисиметричних хвильових функцій, визначених в координатному представленні. Задовільняючи ті ж апріорні вимоги, що і базисні функції в координатному просторі, тобто, трансляційної інваріантності і антисиметрії, вони суттєво простіші за останні. Завдяки тому, що в просторі Фока–Баргманна кількість незалежних змінних базисних функцій скорочується до мінімума, їх вдається представити в явному вигляді

для будь-якого числа квантів. Крім того, хвильова функція того чи іншого стану в представленні Фока–Баргманна містить інформацію про поведінку функції розподілу імовірності в фазовому просторі [9].

Як видно з (2.50), власні значення обох  $SU(3)$ -гілок, що присутні в ядрі нормування цієї конфігурації, прямують до одиниці згори. До того ж, при мінімальному числі квантів власне значення  $\lambda_{(2,0)}$  єдиної дозволеної базисної функції набуває дуже великого значення  $60/11$ . А це свідчить про те, що вплив принципу Паулі на матрицю кінетичної енергії відносного руху  $^{11}\text{Be}$  і нейтрона призводить до досить сильного ефективного притягання, яке може забезпечити існування відносно глибокого зв'язаного стану під порогом розвалу  $^{12}\text{Be} \rightarrow ^{11}\text{Be} + n$ .

Кожна з дозволених  $SU(3)$ -базисних функцій (2.51) може бути представлена у вигляді суперпозиції функцій базису кутового моменту [6], квантовими числами яких, крім числа квантів  $k$ , є орбітальний момент  $\mathcal{L}$  кластера  $^{11}\text{Be}$  і момент відносного руху нейтрона  $l$ :

$$\Phi_k^{(\mathcal{L}=l=1)} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{k}{5(2k+1)!}} \mathbf{u}_1^2 (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{R}) (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3) \mathbf{R}^{2k-2}, \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \Phi_k^{(\mathcal{L}=l=3)} &= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{5k(k-1)}{2(2k+3)(2k+1)!}} \times \\ &\times \left\{ (\mathbf{u}_1 \mathbf{R})^2 (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{R}) (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3) \mathbf{R}^{2k-4} - \frac{1}{5} \mathbf{u}_1^2 (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{R}) (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3) \mathbf{R}^{2k-2} \right\}. \end{aligned}$$

Функції  $l$ -базису і базису  $SU(3)$  зв'язані унітарним перетворенням:

$$\psi_{(2k,0)} = \sqrt{\frac{2k+3}{5(2k-1)}} \Phi_k^{(\mathcal{L}=l=1)} + 2 \sqrt{\frac{2(k-1)}{5(2k-1)}} \Phi_k^{(\mathcal{L}=l=3)}, \quad (2.54)$$

$$\psi_{(2k-4,2)} = 2 \sqrt{\frac{2(k-1)}{5(2k-1)}} \Phi_k^{(\mathcal{L}=l=1)} - \sqrt{\frac{2k+3}{5(2k-1)}} \Phi_k^{(\mathcal{L}=l=3)}. \quad (2.55)$$

Стани  $l$ -базису (2.53) не є власними функціями оператора антисиметризації, і з цієї причини ядро нормування має недіагональний вигляд при

малому числі квантів в представленні  $l$ -базису. Тим часом оператор кінетичної енергії не пов'язує стани  $l$ -базису, на відміну від функцій базису  $SU(3)$ , рівняння для яких залишаються зв'язаними навіть при великому числі квантів. За допомогою матриці унітарного перетворення (2.54) вдається встановити асимптотичну поведінку коефіцієнтів розкладу хвильової функції по базису  $SU(3)$ , скориставшись відомою асимптотикою коефіцієнтів розкладу по  $l$ -базису (вона виражається через функції Ханкеля першого і другого роду  $H_{l+1/2}^{\pm}(\sqrt{2E}\sqrt{4k+2l+3})$  і елементи  $S$ -матриці<sup>1</sup>). В результаті ми отримаємо хвильові функції неперервного спектра, що відповідають енергії  $E > 0$  над найнижчим порогом розвалу компаунд-ядра, а також фази і перерізи як пружного, так і непружного розсіяння, що супроводжується збудженням кластерів.

Далі ми представимо результати розрахунків, отримані з урахуванням лише матриці кінетичної енергії відносного руху  $^{11}\text{Be}$  і нейтрона, модифікованої принципом Паулі.

Поріг розвалу ядра  $^{12}\text{Be}$  на  $^{11}\text{Be}(1/2^+) + n$  знаходиться при енергії 3.168 МeВ [112] над основним станом  $^{12}\text{Be}$ . Оскільки стан  $1/2^-$  є збудженим станом кластера  $^{11}\text{Be}$ , поріг для розпаду  $^{12}\text{Be}$  по каналу  $^{11}\text{Be}(1/2^-) + n$  розташований на 0.32 МeВ вище, ніж по каналу  $^{11}\text{Be}(1/2^+) + n$ . Враховуючи цю обставину, будемо вважати, що розпад  $^{12}\text{Be} \rightarrow ^{11}\text{Be}(1/2^-) + n$  відбувається при енергії, що перевищує порогову енергію 3.488 МeВ над основним станом  $^{12}\text{Be}$ . Також ми врахували можливість збудження кластера  $^{11}\text{Be}$ , що супроводжується переходом зі стану  $\mathcal{L}^\pi = 1^-$  в стан  $\mathcal{L}^\pi = 3^-$ . Енергія збудження останнього складає 3.57 МeВ.

Ефективне притягання  $^{11}\text{Be}$  і нейтрона, що породжується впливом обмінних ефектів на матрицю кінетичної енергії їх відносного руху, виявляється настільки сильним, що навіть без будь-якого породжуваного нуклон-

---

**Примітка 1.** Строго кажучи, точна асимптотика коефіцієнтів розкладу виражається через регулярний і нерегулярний розв'язки рівняння вільного руху в представленні гармонічного осцилятора [113]. Проте слід відзначити, що необхідність залучення більш точної асимптотики виникає лише при дуже малих або дуже великих енергіях, які в даній роботі не розглядаються.

нуклонними силами потенціалу взаємодії між кластерами у ядерній системі  $^{12}\text{Be}$  з'являється зв'язаний стан з енергією  $E_0 = -6.3$  МeВ і середньо-квадратичним радіусом  $r_{\text{rms}} = 3.05 \text{ fm}^1$ . Коефіцієнти розкладу хвильової функції цього стану по базису  $SU(3)$  і по  $l$ -базису представлена на рис. 2.16.

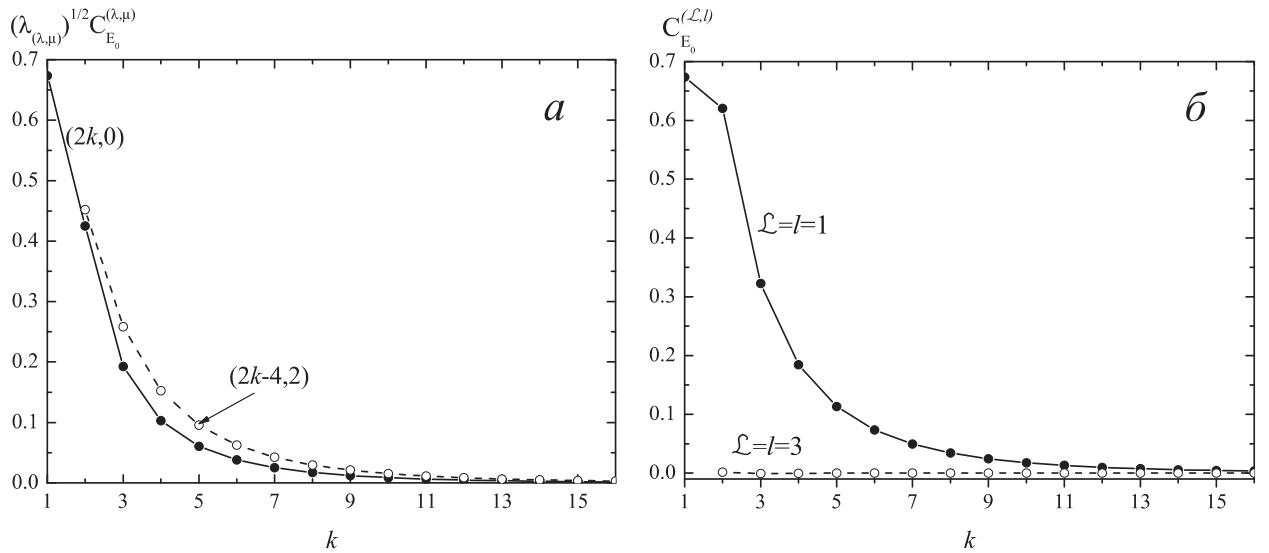


Рис. 2.16 Коефіцієнти розкладу  $\sqrt{\lambda_{(\lambda,\mu)}} C_{E_0}^{(\lambda,\mu)}(k)$  хвильової функції основного стану ядра  $^{12}\text{Be} = ^{11}\text{Be} + n$  (а) по  $SU(3)$ -базису и (б) по  $l$ -базису. Індекси  $SU(3)$ -симетрії  $(\lambda, \mu)$  або значення орбітальних моментів  $(\mathcal{L}, l)$  вказані біля кривих.

Поведінку коефіцієнтів розкладу по базисним функціям двох різних  $SU(3)$ -гілок можна пов'язати з поведінкою власних значень базисних функцій. Максимального значення набуває коефіцієнт розкладу, що відповідає незвідному представленню  $(2, 0)$ , оскільки відповідне йому власне значення  $\lambda_{(2,0)}$  помітно перевищує одиницю. Із збільшенням числа квантів  $k$  власні значення обох гілок швидко прямають до одиниці зверху. При  $k > 1$  вони приблизно рівні, і з цієї причини коефіцієнти розкладу обох  $SU(3)$ -гілок однаково представлені в хвильовій функції основного стану. Що ж стосується парціального складу останньої, то він визначається вагою відповідних  $l$  каналів в дозволеній базисній функції з мінімальним числом квантів  $\psi_{(2,0)}$ , оскільки саме в цьому стані ефективне притягання максимальне. Як

**Примітка 1.** Осциляторна довжина  $r_0$  тут і далі вибрана рівною 1,64 фм

випливає з (2.54), вага стану з моментом  $\mathcal{L} = l = 3$  в найнижчій дозволеній функції дорівнює нулю. Тому в каналі  ${}^{11}\text{Be}(3^-) + n$  не проявляється сильне притягання, породжуване власним значенням  $\lambda_{(2,0)}$ , і коефіцієнти розкладу по базисним функціям цього каналу сильно пригнічені. Відзначимо також, що вага функції моделі оболонок в хвильовій функції основного стану  ${}^{12}\text{Be}$  не перевищує 50%. Решта припадає на стани, в яких валентний нейрон знаходиться в  $rf$ -оболонці або вище, що вказує на дифузність ядра  ${}^{12}\text{Be}$ .

Інформацію про неперервний спектр кластерної системи  ${}^{11}\text{Be} + n$  містять власні фази, що формуються модифікованим оператором кінетичної енергії (див. рис. 2.17).

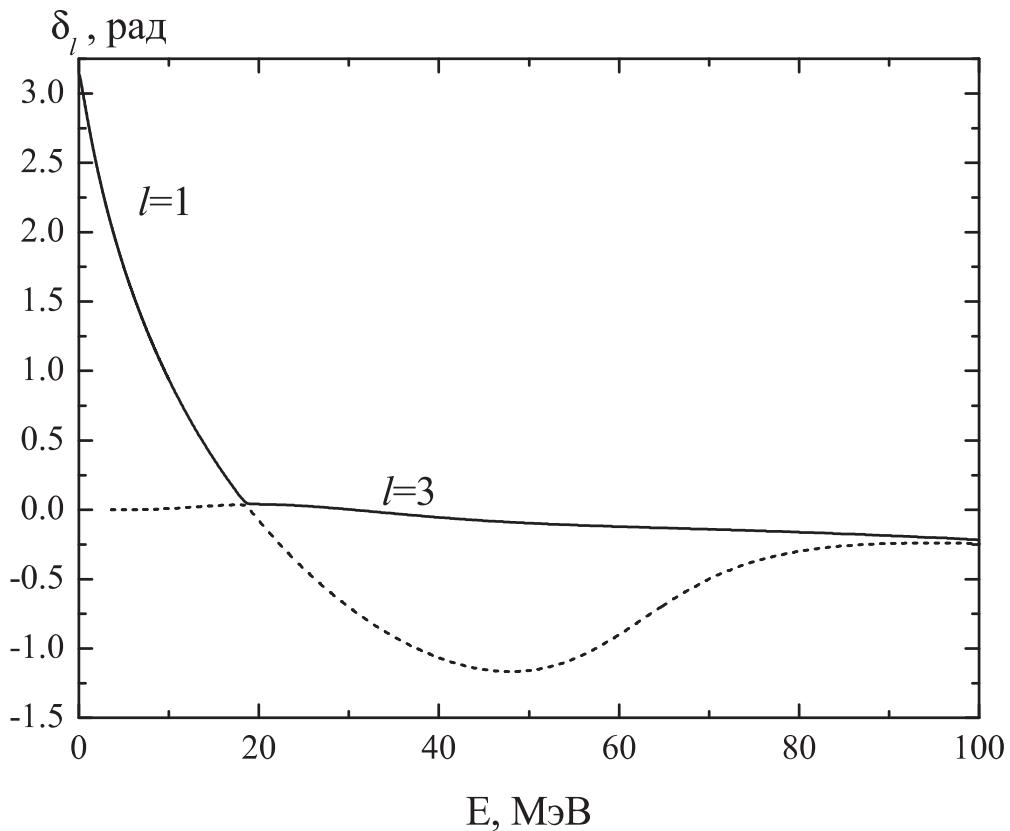


Рис. 2.17 Власні фази  $\delta_l(E)$  системи  ${}^{11}\text{Be} + n$ , що формуються модифікованим оператором кінетичної енергії. Значення орбітального моменту  $l$  вказані біля кривих.

На інтервалі енергій  $0 < E < 3.57$  МэВ можливе лише пружне розсіяння

$^{11}\text{Be}(1^-) + n \rightarrow ^{11}\text{Be}(1^-) + n$ , а вище порогової енергії  $E = 3.57$  МeВ відкривається також канал  $^{11}\text{Be}(3^-) + n$  і задача стає двохканальною. Залежність власних фаз розсіяння від енергії задовольняє вимогам узагальненої теореми Левінсона: поведінка фази  $\delta_{l=1}$  вказує на існування одного зв'язаного стану, а фаза  $\delta_{l=3}$  починається від нуля з тієї причини, що в системі немає заборонених станів. Поведінка фаз розсіяння вказує на відсутність резонансів з  $L = 0$  в неперервному спектрі ядра  $^{12}\text{Be}$  в наближенні кластерної конфігурації  $^{11}\text{Be} + n$ .

Перерізи пружного і непруженого розсіяння нейтрона на ядрі  $^{11}\text{Be}$  представлені на рис. 2.18.

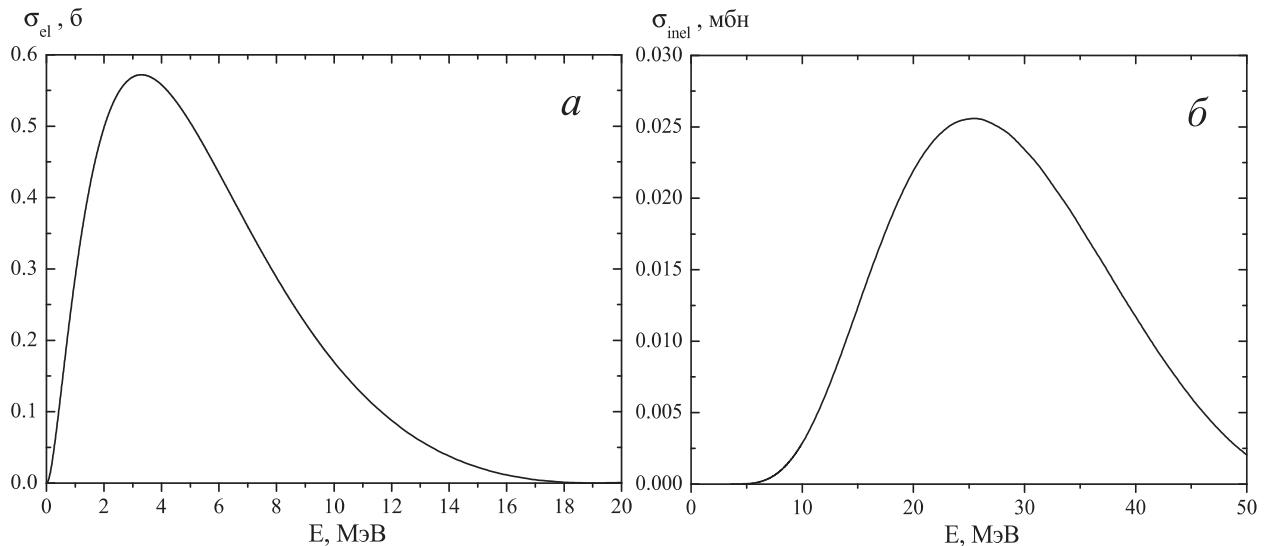


Рис. 2.18 Перерізи пружного розсіяння  $^{11}\text{Be}(1^-) + n \rightarrow ^{11}\text{Be}(1^-) + n$  (а) і непруженого розсіяння  $^{11}\text{Be}(1^-) + n \rightarrow ^{11}\text{Be}(3^-) + n$  (б).

Максимум перерізу пружного розсіяння припадає на область відносно малих енергій  $E < 5$  МeВ над порогом  $^{12}\text{Be} \rightarrow ^{11}\text{Be} + n$ . В максимумі переріз не перевищує значення 0,6 бн. Невеликий за абсолютною величиною переріз розсіяння обумовлений наявністю відцентрового бар'єру, оскільки орбітальний момент відносного руху  $l = 1$ . Що ж стосується перерізу непруженого розсіяння  $^{11}\text{Be}(1^-) + n \rightarrow ^{11}\text{Be}(3^-) + n$ , то він дуже малий з тієї ж причини, з якої функція цього каналу пригнічена в хвильовій функції

основного стану  $^{12}\text{Be}$ : цей канал відсутній в SU(3)-базисній функції з мінімальним числом квантів.

**2.2.4 Кластерна конфігурація  $^{10}\text{Be}+^2\text{n}$**  В цьому підрозділі ми розглянемо конфігурацію  $^{12}\text{Be}=^{10}\text{Be}+^2n$ , допускаючи можливість збудження  $2^+$ - і  $4^+$ -станів ядра  $^{10}\text{Be}$ . Як і в попередньому підрозділі, будемо вважати, що внутрішня хвильова функція кожного кластера відповідає схемі Елліотта. Ядро нормування лідируючого незвідного представлення, індекси симетрії якого  $(2, 2)$  залежить лише від двох комплексних векторів  $\mathbf{u}_1$  і  $\mathbf{u}_2$ :

$$I_{^{10}\text{Be}} = \frac{1}{80} (\mathbf{u}_1 \tilde{\mathbf{u}}_1)^2 ([\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2] [\tilde{\mathbf{u}}_1 \tilde{\mathbf{u}}_2])^2,$$

причому вектор  $\mathbf{u}_2$  входить в інтеграл перекриття  $I_{^{10}\text{Be}}$  лише у вигляді векторного добутку  $[\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2]$ . Справді, кластер  $^{10}\text{Be}$  має в  $p$ -оболонці дві нейтронні дірки, яким і відповідає цей векторний добуток. Орбіталі кожного з двох  $p$ -протонів виражаються через вектор  $\mathbf{u}_1$ . Спектр ядра  $^{10}\text{Be}$  в рамках схеми Елліотта містить п'ять станів з різними значеннями орбітального момента  $\mathcal{L}$ :  $\mathcal{L} = 0, 3, 4$  і два стани з  $\mathcal{L} = 2$ , що відрізняються проекціями моменту  $K$  на власну вісь ядра ( $K = 0$  і  $K = 2$ ) [4].

Наведемо тепер інтеграл нормування для найнижчого стану системи  $^{10}\text{Be}+^2n$

$$\frac{1}{720} (\mathbf{u}_1 \tilde{\mathbf{u}}_1)^2 (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \bar{\mathbf{R}})^2 (\tilde{\mathbf{u}}_1 \tilde{\mathbf{u}}_2 \bar{\mathbf{S}})^2. \quad (2.56)$$

Тут вектор  $\bar{\mathbf{R}}$  служить для опису відносного положення дінейтрона і  $^{10}\text{Be}$ . Вираз (2.56) відрізняється від ядра нормування  $^{12}\text{Be}$  (2.47) в рамках моделі Елліотта заміною обох векторів  $\mathbf{u}_3$  на  $\bar{\mathbf{R}}$  (і  $\tilde{\mathbf{u}}_3 \rightarrow \bar{\mathbf{S}}$ ), оскільки тепер вже обидва валентних нейтрони входять до складу нейтронного кластера. Орбітальний момент дінейтрона дорівнює нулю, а орбітальний момент відносного руху при мінімальному числі квантів може дорівнювати нулю чи двійці. Обмежившись  $L^\pi = 0^+$ -станами  $^{12}\text{Be}$ , негайно приходимо до висновку, що лише значення орбітального момента  $\mathcal{L} = 0, 2$  кластера  $^{10}\text{Be}$  можуть

реалізовуватись в ядрі нормування (2.56). Проте якщо число квантів перевищує мінімальне, то може бути реалізовано також стан  $\mathcal{L} = 4$ . Стан же з моментом  $\mathcal{L} = 3$  відсутній в ядрі нормування системи  ${}^{10}\text{Be} + {}^2\text{n}$  при будь-якому числі квантів, оскільки момент відносного руху  ${}^{10}\text{Be}$  і дінейтрона набуває лише парних значень і, отже, в такому випадку повний орбітальний момент ядра  ${}^{12}\text{Be}$  був би відмінний від нуля.

Використане нами наближення дозволяє кластерам  ${}^{10}\text{Be}$  і  ${}^2\text{n}$ , з яких складається ядро  ${}^{12}\text{Be}$ , віддалятися один від одного по чотирьом різним каналам, на що вказує розклад Гільберта-Шмідта ядра нормування для станів  $L = 0$ :

$$\begin{aligned} I_{{}^{10}\text{Be} + {}^2\text{n}}^{L=0} = & \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\lambda}_{(2k,0)} \bar{\psi}_{(2k,0)} \tilde{\bar{\psi}}_{(2k,0)} + \sum_{k=2}^{\infty} \bar{\lambda}_{(2k-4,2)} \bar{\psi}_{(2k-4,2)} \tilde{\bar{\psi}}_{(2k-4,2)} + \\ & + \sum_{k=2}^{\infty} \bar{\lambda}_{(2k-2,4)} \bar{\psi}_{(2k-2,4)} \tilde{\bar{\psi}}_{(2k-2,4)} + \sum_{k=2}^{\infty} \bar{\lambda}_{(2k+2,2)} \bar{\psi}_{(2k+2,2)} \tilde{\bar{\psi}}_{(2k+2,2)}. \end{aligned}$$

Залежність власних значень дозволених принципом Паулі станів вдається отримати в явному вигляді:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{(2k,0)} &= 1 - (6k - 13) \left\{ \left(\frac{2}{5}\right)^{2k+1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{2k+1} (35 - 3k) \right\}, \quad k \geq 1, \\ \bar{\lambda}_{(2k-4,2)} &= 1 + 4 \left(\frac{2}{5}\right)^{2k} + 67 \left(\frac{1}{5}\right)^{2k}, \quad k \geq 2, \\ \bar{\lambda}_{(2k-2,4)} &= \bar{\lambda}_{(2k+2,2)} = \\ &= 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{2k} (6k + 2) + \left(\frac{1}{5}\right)^{2k} (36k^2 - 30k + 1), \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Власні значення  $SU(3)$ -гілок  $(2k, 0)$  і  $(2k - 4, 2)$  прямують до одиниці звернути  $i$ , отже, породжують притягання кластерів. Нагадаємо, що індекси симетрії цих гілок співпадають з індексами  $SU(3)$ -незвідних представлень, що присутні в ядрі нормування конфігурації  ${}^{11}\text{Be} + n$ . Дві інші гілки власних значень прямують до одиниці знизу і відповідають відштовхуванню. Максимальним серед власних значень конфігурації  ${}^{10}\text{Be} + {}^2\text{n}$  знову є власне значення найнижчого дозволеного стану  $\bar{\lambda}_{(2,0)} = 81/25$ , але воно помітно менше за власне значення з мінімальним числом квантів конфігурації

$^{11}\text{Be}+n$ . Це свідчить про те, що інтенсивність ефективного притягання в системі  $^{10}\text{Be}+^2n$  також значно менша. Проте радіус ефективної взаємодії дещо більший, ніж у випадку  $^{11}\text{Be}+n$ , на що вказує степінь спадання різниці  $\bar{\lambda}_k - 1$  зі зростанням числа квантів  $k$ . Як було показано в [9], ця різниця прямує до нуля за експоненційним законом з наближенням власних значень  $\lambda_\nu$  до одиниці:

$$\lambda_\nu - 1 \sim \beta(\nu) \exp\{-\nu \ln \alpha\}, \quad \nu \rightarrow \infty,$$

де  $\nu$  – повне число квантів, а параметр  $\alpha > 1$  повністю визначається типом кластерної конфігурації даної ядерної системи. Що ж стосується параметра  $\beta(\nu)$ , то його залежність від числа квантів є степеневою і виявляється різною для різних  $SU(3)$ -представлень в межах однієї кластерної конфігурації. Показник експоненти для кластерної конфігурації  $^{11}\text{Be}+n$  дорівнює  $\alpha = 11$ , в той час як для системи  $^{10}\text{Be}+^2n$   $\alpha = 5/2$ . Тому радіус дії обмінних ефектів на оператор кінетичної енергії відносного руху динейтрона і кластера  $^{10}\text{Be}$  більший, ніж у випадку  $^{11}\text{Be}+n$ .

Явний вигляд функцій  $SU(3)$ -базиса  $\bar{\psi}_{(\lambda,\mu)}$  і функцій  $l$ -базису  $\bar{\Phi}_k^{(\mathcal{L},K,l)}$  наведено нижче.

Повний базис дозволених принципом Паулі станів з  $L^\pi = 0^+$ , що містяється в ядрі нормування  $I_{^{10}\text{Be}+^2n}$ , складається з чотирьох  $SU(3)$ -гілок:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{(2k,0)} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2k(2k-1)}{3(k+2)(2k+3)}} \frac{1}{\sqrt{(2k+1)!}} \times \\ &\times \left\{ \mathbf{u}_1^2 (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \bar{\mathbf{R}})^2 \bar{\mathbf{R}}^{2k-2} - \frac{2(k-1)}{2k-1} [\mathbf{u}_1 \bar{\mathbf{R}}]^2 (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \bar{\mathbf{R}})^2 \bar{\mathbf{R}}^{2k-4} \right\}; \end{aligned}$$

$$\bar{\psi}_{(2k-4,2)} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{k(k-1)}{5(k+1)(2k-1)}} \frac{1}{\sqrt{(2k+1)!}} [\mathbf{u}_1 \bar{\mathbf{R}}]^2 (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \bar{\mathbf{R}})^2 \bar{\mathbf{R}}^{2k-4};$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{(2k-2,4)} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3k(k+1)}{10(2k+1)(2k+3)}} \frac{1}{\sqrt{(2k+1)!}} \times \\ &\times \left\{ [\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2]^2 [\mathbf{u}_1 \bar{\mathbf{R}}]^2 \bar{\mathbf{R}}^{2k-2} - \frac{2}{3} \mathbf{u}_1^2 (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \bar{\mathbf{R}})^2 \bar{\mathbf{R}}^{2k-2} - \frac{k-1}{3(k+1)} [\mathbf{u}_1 \bar{\mathbf{R}}]^2 (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \bar{\mathbf{R}})^2 \bar{\mathbf{R}}^{2k-4} \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{(2k+2,2)} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(k+2)(2k+1)}{5(2k+3)(2k+5)}} \frac{1}{\sqrt{(2k+1)!}} \times \\ &\quad \times \left\{ \mathbf{u}_1^2 [\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2]^2 \bar{\mathbf{R}}^{2k} - \frac{2k}{2k+1} [\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2]^2 [\mathbf{u}_1 \bar{\mathbf{R}}]^2 \bar{\mathbf{R}}^{2k-2} - \right. \\ &- \left. \frac{k(2k-1)}{(2k+1)(k+2)} \mathbf{u}_1^2 (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \bar{\mathbf{R}})^2 \bar{\mathbf{R}}^{2k-2} + \frac{2k(k-1)}{(k+2)(2k+1)} [\mathbf{u}_1 \bar{\mathbf{R}}]^2 (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \bar{\mathbf{R}})^2 \bar{\mathbf{R}}^{2k-4} \right\}. \end{aligned}$$

Кожна з дозволених функцій базиса  $SU(3)$  при фіксованому числі квантів  $\epsilon$  суперпозицією чотирьох функцій  $\bar{\Phi}_k^{(\mathcal{L}, K, l)}$   $l$ -базису:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_k^{(\mathcal{L}=0, l=0)} &= \frac{1}{10\sqrt{6(2k+1)!}} \mathbf{u}_1^2 [\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2]^2 \bar{\mathbf{R}}^{2k}; \\ \bar{\Phi}_k^{(\mathcal{L}=l=2, K=0)} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3k}{14(2k+3)}} \frac{1}{\sqrt{(2k+1)!}} \times \\ &\quad \times \left\{ (\mathbf{u}_1 \bar{\mathbf{R}})^2 [\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2]^2 + \mathbf{u}_1^2 (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \bar{\mathbf{R}})^2 - \frac{2}{3} \mathbf{u}_1^2 [\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2]^2 \bar{\mathbf{R}}^2 \right\} \bar{\mathbf{R}}^{2k-2}; \\ \bar{\Phi}_k^{(\mathcal{L}=l=2, K=2)} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{k}{10(2k+3)}} \frac{1}{\sqrt{(2k+1)!}} \left\{ (\mathbf{u}_1 \bar{\mathbf{R}})^2 [\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2]^2 - \mathbf{u}_1^2 (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \bar{\mathbf{R}})^2 \right\} \bar{\mathbf{R}}^{2k-2}; \\ \bar{\Phi}_k^{(\mathcal{L}=4, l=4)} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{7k(k-1)}{2(2k+3)(2k+5)}} \frac{1}{\sqrt{(2k+1)!}} \bar{\mathbf{R}}^{2k-4} \times \\ &\quad \times \left\{ (\mathbf{u}_1 \bar{\mathbf{R}})^2 (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \bar{\mathbf{R}})^2 - \frac{1}{7} (\mathbf{u}_1 \bar{\mathbf{R}})^2 [\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2]^2 \bar{\mathbf{R}}^2 - \frac{1}{7} \mathbf{u}_1^2 (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \bar{\mathbf{R}})^2 \bar{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{35} \mathbf{u}_1^2 [\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2]^2 \bar{\mathbf{R}}^4 \right\}. \end{aligned}$$

Функції  $\bar{\Phi}_k^{(\mathcal{L}, K, l)}$  відповідають моменту  $L = 0$  і додатній парності ядра  ${}^{12}\text{Be}$ . Вони є згорткою хвильових функцій  $\phi_{\mathcal{L}, K}$  схеми Елліотта для ядра  ${}^{10}\text{Be}$ , що відповідають певному значенню орбітального момента  $\mathcal{L}$  і його проекції  $K$  на власну вісь ядра, з функціями відносного руху  $f_l$  дінейтрона і  ${}^{10}\text{Be}$ , орбітальний момент  $l$  яких набуває лише парних значень.

В роботі [4] було показано, що хвильові функції схеми Елліотта можна перевести в простір, де їх образом є лінійні комбінації  $D$ -функцій Вігнера. Базис Елліотта кластера  ${}^{10}\text{Be}$  можна отримати в результаті розкладу ядра нормування  $I_{{}^{10}\text{Be}}$  по  $D$ -функціях Вігнера. Вибрали вісь обертання вздовж

вектора, перпендикулярного векторам  $\mathbf{u}_1$  і  $[\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2]$ , прийдемо до базисних функцій  $\phi_{\mathcal{L}, K+, m}$ , що належать симетричному представленню групи  $D_2$ :

$$\phi_{\mathcal{L}=2, K=0, m} = D_{0, m}^2, \quad \phi_{\mathcal{L}=2, K=2, m} = D_{2+, m}^2; \quad (2.57)$$

$$\phi_{\mathcal{L}=m=0} = D_{0, 0}^0, \quad \phi_{\mathcal{L}=4, m} = \frac{\sqrt{35}}{6} D_{4+, m}^4 - \frac{1}{6} D_{0, m}^4. \quad (2.58)$$

Тут  $m$  – проекція момента на зовнішню вісь. Зауважимо, що функція з моментом  $\mathcal{L} = 4$  представляє собою суперпозицію станів з різними значеннями проекції момента  $K$ . Для функцій же з моментом  $\mathcal{L} = 2$  проекція момента на власну вісь є інтегралом руху і служить додатковим квантовим числом. Що ж стосується функцій відносного руху  $f_{l, m}$ , то вони виражаються через функції Вігнера  $D_{0, m}^l$ , ( $l = 0, 2, 4$ ) з нульовою проекцією на власну вісь ядра в системі координат, де вісь обертання направлена вздовж вектора  $\bar{\mathbf{R}}$ . Згортка цих функцій з функціями (2.57) і (2.58), за умови, що  $\mathcal{L} = 0$  або  $\mathcal{L} = 2$ , буде мати вигляд

$$\bar{\Phi}_k^{(\mathcal{L}, K, l)} = \mathbf{u}_1^2 [\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2]^2 \bar{\mathbf{R}}^{2k} N_k^{(\mathcal{L}, K, l)} D_{K+, 0}^{\mathcal{L}=l}, \quad D_{K+, 0}^{\mathcal{L}=l} = \sum_m D_{K+, m}^{\mathcal{L}} D_{m, 0}^{\mathcal{L}}.$$

Якщо  $\mathcal{L} = 4$ , то

$$\bar{\Phi}_k^{(\mathcal{L}=l=4)} = \mathbf{u}_1^2 [\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2]^2 \bar{\mathbf{R}}^{2k} N_k^{(\mathcal{L}=l=4)} \sum_m \phi_{\mathcal{L}=4, m} D_{m, 0}^{l=4}.$$

Нормувальний коефіцієнт  $N_k^{(\mathcal{L}, K, l)}$  визначається в результаті інтегрування функцій  $\bar{\Phi}_k^{(\mathcal{L}, K, l)}$  з мірою Баргманна.

Обговоримо парціальний склад найнижчої дозволеної  $SU(3)$ -базисної функції, оскільки саме в цьому стані ефективне притягання, обумовлене впливом принципу Паулі, є максимальним. Функція лідируючого  $SU(3)$ -незвідного представлення  $(2, 0)$  є суперпозицією трьох станів  $l$ -базису:

$$\bar{\psi}_{(2, 0)} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{3}} \bar{\Phi}_{k=1}^{(\mathcal{L}=0, l=0)} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{7}{3}} \bar{\Phi}_{k=1}^{(\mathcal{L}=l=2, K=0)} - \frac{\sqrt{5}}{3} \bar{\Phi}_{k=1}^{(\mathcal{L}=l=2, K=2)}.$$

З максимальною вагою 55% в функцію  $\bar{\psi}_{(2, 0)}$  входить стан, що відповідає відносному моменту  $l = 2$ , орбітальному моменту кластера,  ${}^{10}\text{Be}$   $\mathcal{L}^\pi = 2^+$  і його проекції на власну вісь  $K = 2$ . Ця обставина дозволяє припустити,

що внесок останнього стану в хвильові функції ядра  $^{12}\text{Be}$  буде найбільшим при малому числі квантів, принаймі, в області відносно малих енергій. Канал з моментом  $\mathcal{L} = l = 4$  відсутній в найнижчій дозволеній функції, як і стан з  $\mathcal{L} = l = 3$  в функції з мінімальним числом квантів для конфігурації  $^{11}\text{Be} + n$ . Тому слід очікувати, що канал з  $\mathcal{L} = l = 4$  буде представлений незначним чином в хвильових функціях  $^{12}\text{Be}$  і перерізах непружного розсіяння.

На відміну від розглянутої в попередньому параграфі конфігурації  $^{11}\text{Be} + n$ , інтенсивність ефективного притягання між дінейтроном і  $^{10}\text{Be}$ , породжувана впливом принципу Паулі на оператор кінетичної енергії їх відносного руху виявляється недостатньою для утворення зв'язаного стану  $^{12}\text{Be}$ .

Розглянемо поведінку компонент хвильової функції неперервного спектра  $^{12}\text{Be} = ^{10}\text{Be} + ^2n$  в залежності від відстані  $r_k$  між центрами мас кластерів (рис. 2.19). Енергія  $E = 3$  МeВ цього стану перевищує поріг розвалу  $^{12}\text{Be}$  на  $^{10}\text{Be}$  в основному стані і дінейтрон (енергія цього порогу  $E = 0$ ), але менша порогу ( $E = 3.37$  МeВ) розвалу  $^{12}\text{Be}$  по каналу, коли кластер  $^{10}\text{Be}$  знаходиться в стані  $\mathcal{L}^\pi = 2^+, K = 0$ . На малих відстанях між кластерами домінує канал  $^{10}\text{Be}(0^+) + ^2n$ , як і в найнижчій дозволеній базисній функції. На великих відстанях між кластерами хвильова функція єдиного відкритого каналу  $^{10}\text{Be}(0^+) + ^2n$  поводить себе як функція Бесселя, а функції закритих каналів експоненційно спадають, причому тим повільніше, чим менша їх порогова енергія. Як видно з рисунка 2.19, далі інших в класично недосяжну область проникає функція каналу  $\mathcal{L}^\pi = 2^+, K = 0$ , в якому енергія близька до порогової, а хвильова функція каналу  $\mathcal{L}^\pi = 2^+, K = 2$  спадає швидше, оскільки відповідний поріг розвалу знаходиться при енергії  $E = 5.97$  МeВ. Що ж стосується стану з  $\mathcal{L} = l = 4$ , то він сильно пригнічений, як і очікувалось, оскільки він не фігурує в базисній функції  $\bar{\psi}_{(2,0)}$ . До того ж, поріг розвалу  $^{12}\text{Be}$  по цьому каналу досить високий ( $E = 5.97$  МeВ), а також виявляє себе відцентровий бар'єр.

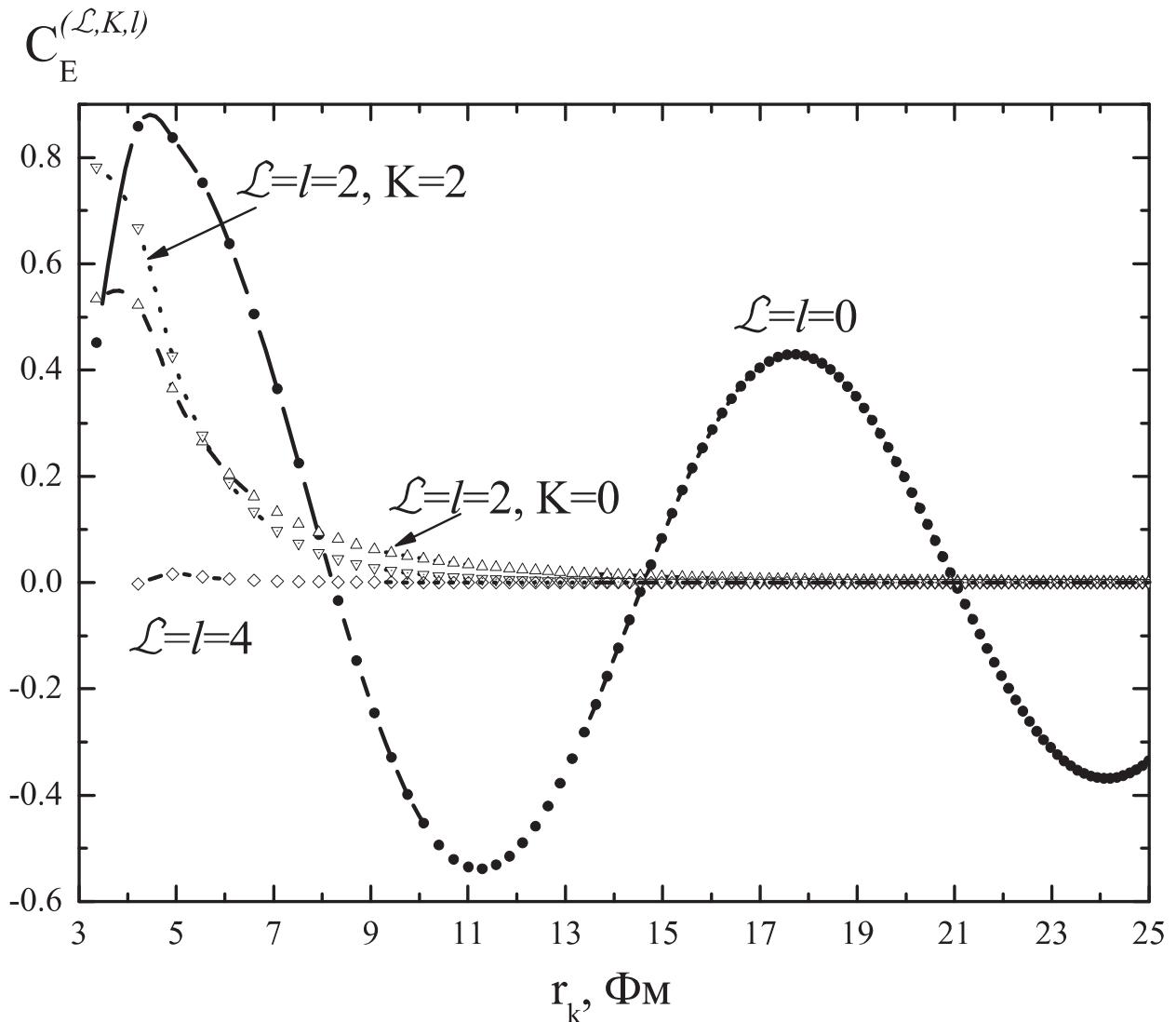


Рис. 2.19 Коефіцієнти розкладу  $C_E^{(\mathcal{L},K,l)}(r_k)$  станів неперервного спектра ядра  $^{12}\text{Be} = ^{10}\text{Be} + ^2n$  по  $l$ -базису при  $E = 3$  МeВ. Квантові числа базисних функцій  $(\mathcal{L}, K, l)$  вказані біля кривих.

Поведінка фаз пружного розсіяння динейтрона на ядрі  $^{10}\text{Be}$  (див. рис. 2.20) вказує на існування  $L^\pi = 0^+$  резонанса при енергії  $E_{\text{res}} = 3.7$  МeВ з шириною  $\Gamma \sim 6$  МeВ.

Оскільки при мінімальному допустимому числі квантів  $k = 1$  дозволено є лише одна суперпозиція функцій  $l$ -базису, кожному з каналів з моментом  $\mathcal{L} = l = 2$  можна співвіднести один заборонений стан.

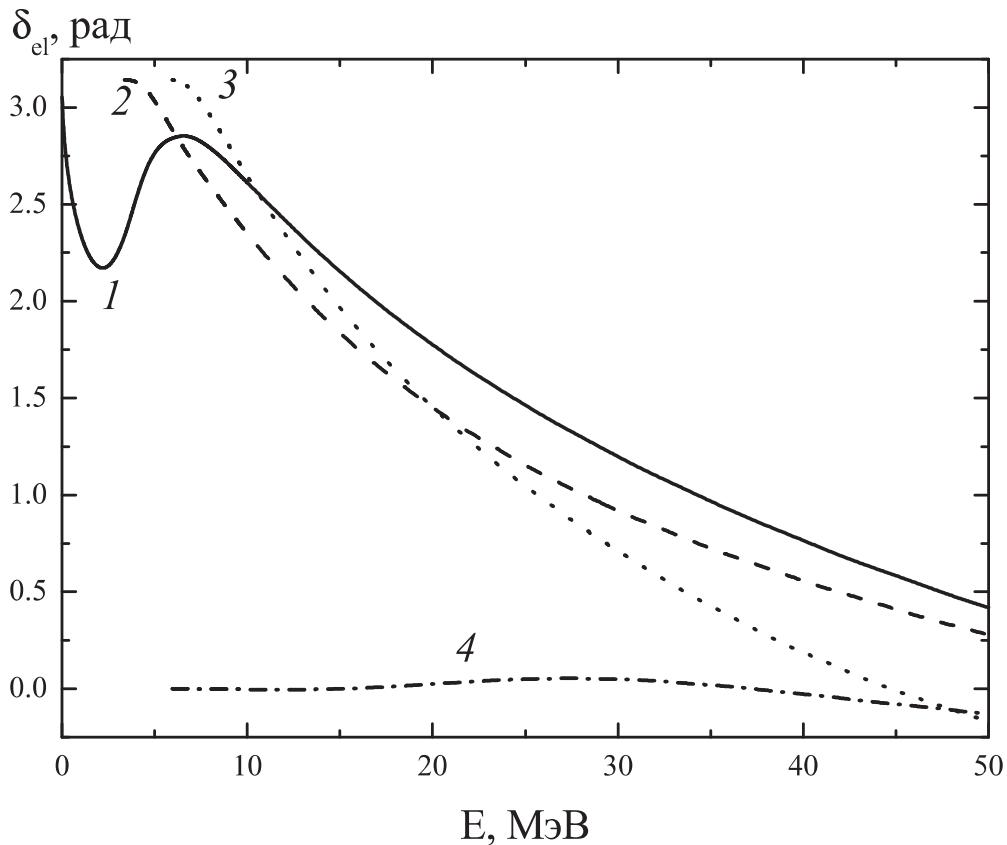


Рис. 2.20 Фази  $\delta_{el}(E)$  пружного багатоканального розсіяння  $^{10}\text{Be} + ^2n$ , що формуються модифікованим оператором кінетичної енергії. Криві: 1 – ( $\mathcal{L} = l = 0$ ); 2 – ( $\mathcal{L} = l = 2, K = 0$ ); 3 – ( $\mathcal{L} = l = 2, K = 2$ ); 4 – ( $\mathcal{L} = l = 4$ ).

Отже, при нульовій енергії над відповідним порогом розвалу фази розсіяння цих каналів повинні починатись від  $\pi$ , як і фаза розсіяння в каналі  $\mathcal{L} = l = 0$ , оскільки їй відповідає один заборонений стан при  $k = 0$ . Фаза  $\delta_{l=4}$  практично дорівнює нулю на інтервалі енергій до 50 MeВ, що свідчить про слабку ефективну взаємодію в цьому каналі.

Поведінка коефіцієнтів непружності, представлена на рис. 2.21, не суперечить припущення про резонанс в області малих енергій над порогом розвалу  $^{12}\text{Be}$  на  $^{10}\text{Be}$  в основному стані та динейtron. Слід також відзначити слабкий зв'язок каналу  $\mathcal{L} = l = 4$  з іншими, що теж є наслідком дії принципу Паулі.

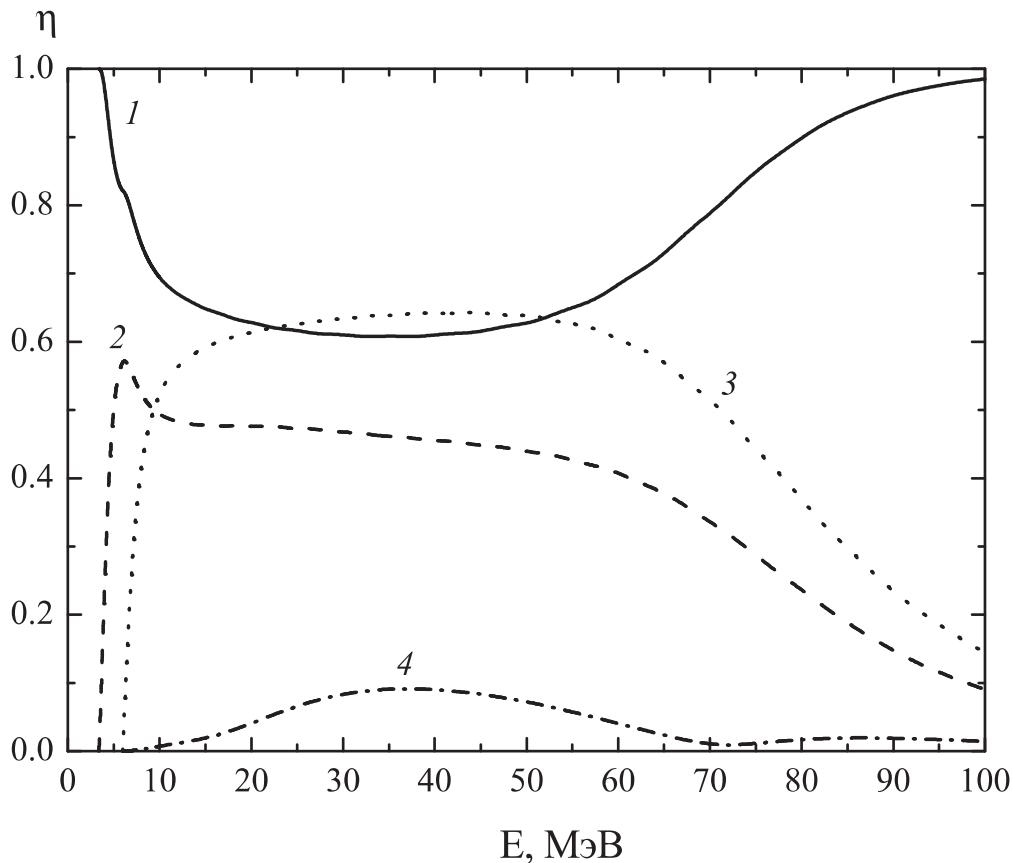


Рис. 2.21 Коефіцієнти непружності  $\eta$  в каналах 1)  $^{10}\text{Be}(0^+) + ^2\text{n}$ ; 2)  $^{10}\text{Be}(2^+, K = 0) + ^2\text{n}, l = 2$ ; 3)  $^{10}\text{Be}(2^+, K = 2) + ^2\text{n}, l = 2$ ; 4)  $^{10}\text{Be}(4^+) + ^2\text{n}, l = 4$ . Вхідний канал  $^{10}\text{Be}(0^+) + ^2\text{n}, l = 0$ .

Нарешті, перерізи непружного розсіяння, що сформовані модифікованим оператором кінетичної енергії, зображені на рис. 2.22.

Можна зробити висновок, що величина перерізів непружного розсіяння, що супроводжуються збудженням кластера  $^{10}\text{Be}$ , значною мірою визначається вагою відповідного каналу в хвильовій функції МРГ з мінімальним числом квантів. Саме тому абсолютна величина перерізу розсіяння  $^{10}\text{Be}(0^+) + ^2\text{n} \rightarrow ^{10}\text{Be}(4^+) + ^2\text{n}$  на три порядки менша перерізів розсіяння в два інших канали.

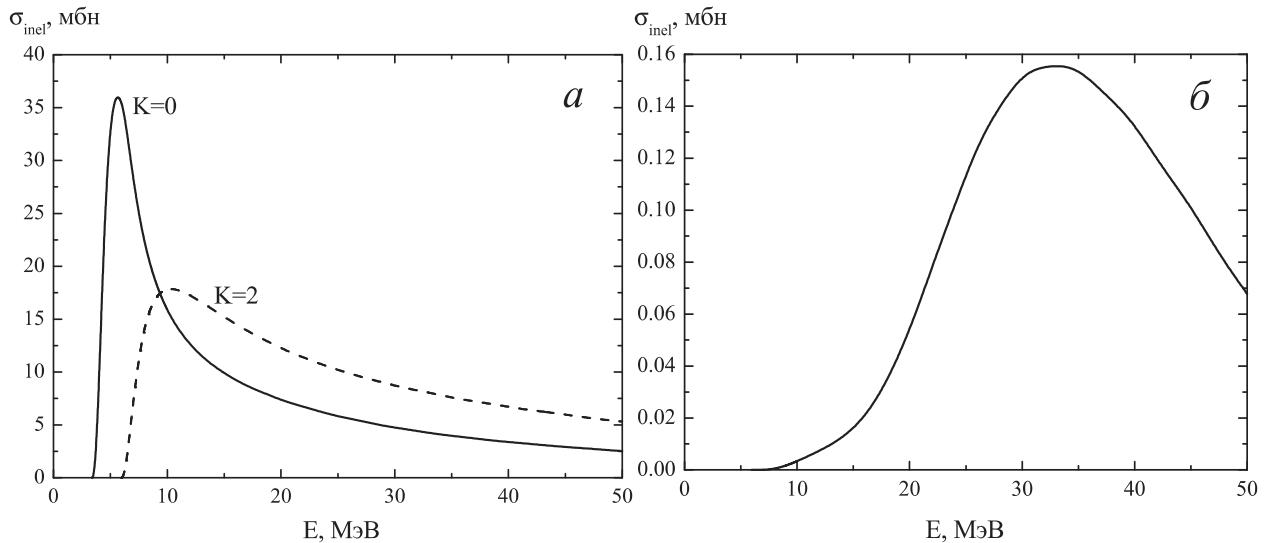


Рис. 2.22 Перерізи непружного розсіяння  $^{10}\text{Be}(0^+)+^2\text{n} \rightarrow ^{10}\text{Be}(2^+)+^2\text{n}$  (а) і розсіяння  $^{10}\text{Be}(0^+)+^2\text{n} \rightarrow ^{10}\text{Be}(4^+)+^2\text{n}$  (б). Значення проекції  $K$  орбітального момента  $^{10}\text{Be}$  на власну вісь ядра вказані біля кривих.

В області резонанса, однак, найбільш імовірною виявляється реакція розсіяння  $^{10}\text{Be}(0^+)+^2\text{n} \rightarrow ^{10}\text{Be}(2^+, K = 0)+^2\text{n}$ , незважаючи на те, що в найнижчій дозволеній функції домінує стан  $^{10}\text{Be}(2^+, K = 2)+^2\text{n}$ . Можливо, це пояснюється меншою пороговою енергією збудження  $2^+$ -стану  $^{10}\text{Be}$  з нульовою проекцією момента на власну вісь ядра.

## 2.2.5 $^{12}\text{Be}$ як багатоканальна система кластерів: $^{11}\text{Be}+n$ і $^{10}\text{Be}+^2\text{n}$

Розглянемо тепер систему двох зв'язаних кластерних конфігурацій ядра  $^{12}\text{Be}$ , враховуючи можливість його кластеризації як по каналу  $^{11}\text{Be}+n$ , так і по каналу  $^{10}\text{Be}+^2\text{n}$ . Пороги розвалу  $^{12}\text{Be}$  по цим двом каналам дуже близькі: розпад  $^{12}\text{Be}$  по каналу  $^{10}\text{Be}+^2\text{n}$  можливий вже при енергії 0.185 MeV над порогом  $^{12}\text{Be} \rightarrow ^{11}\text{Be}+n$ . Тому природно розглядати ці дві конфігурації одночасно, щоб краще передати структуру хвильової функції основного стану  $^{12}\text{Be}$ , а також мати можливість робити висновки про величину перерізів непружного розсіяння, що супроводжується не лише збудженням, але й перебудовою ядер в процесі зіткнення. Дозволені базисні функції цих двох конфігурацій перекриваються, поки число осциляторних квантів збудження не дуже велике. Тому хвильова функція конфігурації  $^{10}\text{Be}+^2\text{n}$  містить

інформацію про можливість розпаду зв'язаного стану цієї конфігурації ще й по каналу  $^{11}\text{Be}+n$ , хоча й за умови, що нейtron віддалився від кластера  $^{11}\text{Be}$  на малу відстань, а не на нескінченно велику. Відзначимо також, що врахування конфігурації  $^{10}\text{Be}+^2n$  дозволяє частково взяти до уваги можливість кластеризації  $^{12}\text{Be}$  по каналу  $^{11}\text{Be}(1/2^+)+n$ , коли валентний нейtron і останній нейtron  $^{11}\text{Be}$  знаходяться в  $sd$ -оболонці.

При підключені двох кластерних конфігурацій число різних гілок дозволених станів ядра  $^{12}\text{Be}$  з орбітальним моментом  $L = 0$ , нульовим значенням повного спіну і ізоспіном  $T = 2$  збільшується до шести. Розклад Гільберта–Шмідта для ядра нормування  $I_{(11,1)+(10,2)}$  в двохконфігураційному наближенні має вигляд:

$$\begin{aligned} I_{(11,1)+(10,2)} = & \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_{(2k,0)_+} \Psi_{(2k,0)_+} \tilde{\Psi}_{(2k,0)_+} + \sum_{k=2}^{\infty} \Lambda_{(2k,0)_-} \Psi_{(2k,0)_-} \tilde{\Psi}_{(2k,0)_-} + \\ & + \sum_{k=2}^{\infty} \Lambda_{(2k-4,2)_+} \Psi_{(2k-4,2)_+} \tilde{\Psi}_{(2k-4,2)_+} + \sum_{k=2}^{\infty} \Lambda_{(2k-4,2)_-} \Psi_{(2k-4,2)_-} \tilde{\Psi}_{(2k-4,2)_-} + \\ & + \sum_{k=2}^{\infty} \Lambda_{(2k-2,4)} \Psi_{(2k-2,4)} \tilde{\Psi}_{(2k-2,4)} + \sum_{k=2}^{\infty} \Lambda_{(2k+2,2)} \Psi_{(2k+2,2)} \tilde{\Psi}_{(2k+2,2)}. \end{aligned}$$

$SU(3)$ -незвідні представлення  $(2k, 0)$  и  $(2k - 4, 2)$  стають двократно виродженими, а оскільки базисні стани різних кластерних конфігурацій з одинаковими індексами  $SU(3)$ -симетрії неортогональні, власні функції ядра нормування системи двох зв'язаних конфігурацій  $\Psi_{(2k,0)\pm}$ ,  $\Psi_{(2k-4,2)\pm}$  є суперпозицією базисних функцій каналів  $^{11}\text{Be}+n$  і  $^{10}\text{Be}+^2n$ . При мінімальному числі квантів в єдиній дозволеній функції  $\Psi_{(2,0)_+}$  лідирує кластеризація  $^{11}\text{Be}+n$ , а зі збільшенням числа квантів вага обох конфігурацій стає однаковою:

$$\Psi_{(\lambda,\mu)\pm} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \psi_{(\lambda,\mu)} \pm \bar{\psi}_{(\lambda,\mu)} \right\}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Базисні функції невироджених представлень  $\Psi_{(2k-2,4)}$  і  $\Psi_{(2k+2,2)}$ , звичайно, співпадають з базисними функціями конфігурації  $^{10}\text{Be}+^2n$ .

Залежність власних значень різних  $SU(3)$ -гілок від числа квантів  $k$  показана на рис. 2.23.

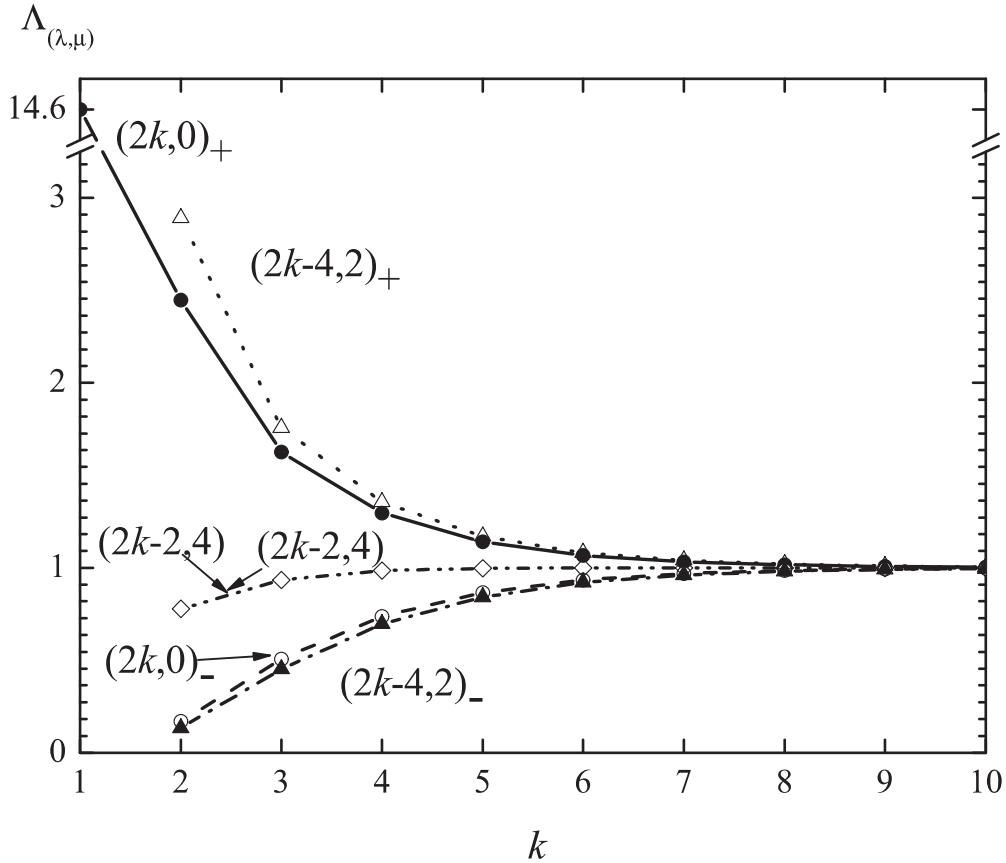


Рис. 2.23 Власні значення  $\Lambda_{(\lambda,\mu)}$  ядра нормування для системи  $^{12}\text{Be}$  за умови врахування двох кластерних конфігурацій (див. деталі в тексті). Індекси  $SU(3)$ -симетрії  $(\lambda, \mu)$  вказані біля кривих.

Власні значення двох вироджених гілок  $\Lambda_{(2k,0)_+}$  и  $\Lambda_{(2k-4,2)_+}$ , власні функції яких при  $k \rightarrow \infty$  є симетричною комбінацією базисних функцій різних кластерних конфігурацій, помітно перевищують одиницю. Особливо великим є власне значення  $\Lambda_{(2,0)_+} = 14.6$ , що відповідає найнижчій дозволеній функції. Ефективна взаємодія кластерів в цих станах відповідає притяганню. Функції  $\Psi_{(\lambda,\mu)_-}$ , на відміну від  $\Psi_{(\lambda,\mu)_+}$ , при великому числі квантів являють собою антисиметричну комбінацію функцій різних конфігурацій. Тому вони мають додатковий вузол, що призводить до відштовхування. Власні значення невироджених гілок також породжують ефективне відштовхування кластерів. Повільне спадання власних значень вироджених  $SU(3)$ -незвідних представлень вказує на збільшення радіусу дії обмінних ефектів при врахуванні обох кластерних конфігурацій ядра  $^{12}\text{Be}$ .

Коефіцієнти розкладу, що належать  $SU(3)$ -незвідним представленням  $(2k, 0)_+$  і  $(2k - 4, 2)_+$ , лідирують в хвильовій функції основного стану  $^{12}\text{Be}$  (рис. 2.24).

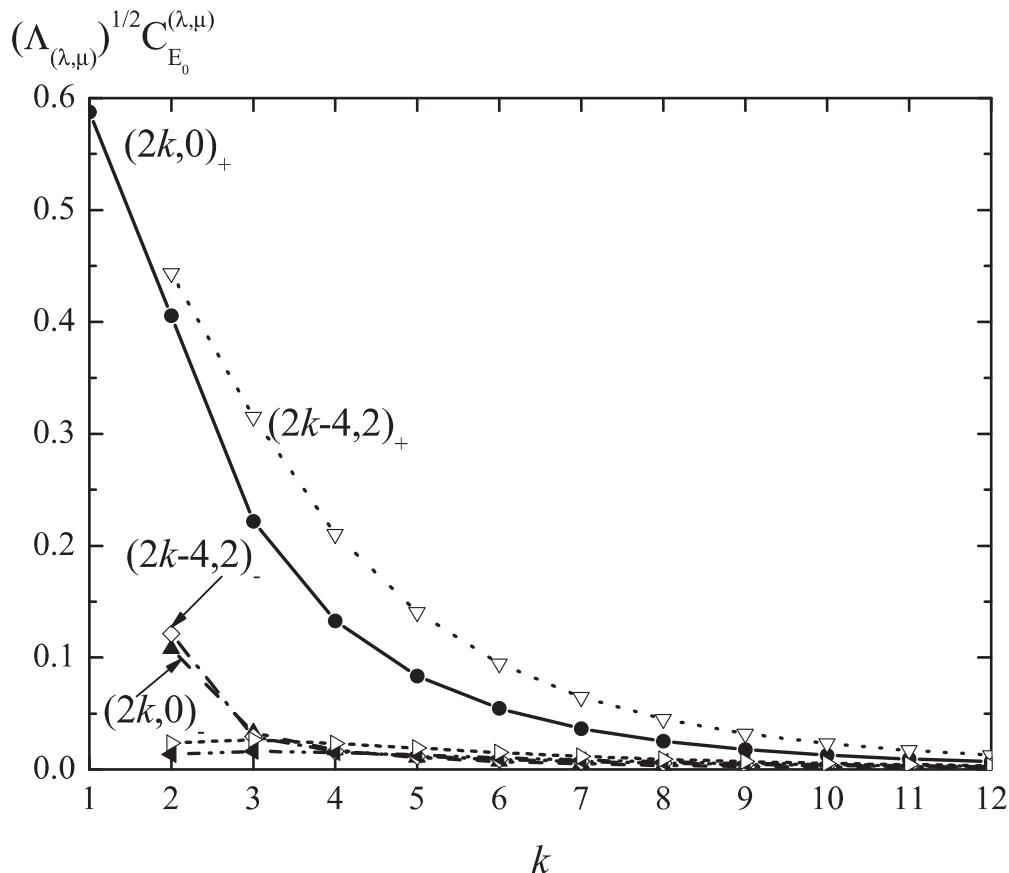


Рис. 2.24 Коефіцієнти розкладу  $\sqrt{\Lambda_{(\lambda,\mu)}} C_{E_0}^{(\lambda,\mu)}(k)$  хвильової функції основного стану ядра  $^{12}\text{Be}$  по  $SU(3)$ -базису у двохконфігураційному наближенні та з урахуванням модифікованого оператора кінетичної енергії. Індекси  $SU(3)$ -симетрії  $(\lambda, \mu)$  вказані біля кривих.

Зв'язаний стан став результатом притягання, за яке відповідають ці  $SU(3)$ -гілки. Енергія зв'язаного стану, що відраховується від порогу розвалу  $^{12}\text{Be}$  на  $^{11}\text{Be}$  і нейtron, дорівнює  $E_0 = -5.74$  MeB, а середньоквадратичний радіус складає 3.22 Фм. Отже, підключення конфігурації  $^{10}\text{Be} + ^2n$  робить ядро  $^{12}\text{Be}$  більш крихким, ніж в припущення його кластерної структури  $^{12}\text{Be} = ^{11}\text{Be} + n$ . Звичайно, власні значення, що перевищують одиницю, стали ще більшими при підключені конфігурації  $^{10}\text{Be} + ^2n$ , що повинно було б підсилити ефективне притягання кластерів. Проте взаємодія кластерів

породжується недіагональними по числу квантів матричними елементами оператора кінетичної енергії, що залежать від відношення власних значень  $\Lambda_{k-1}/\Lambda_k$ , а воно практично не змінилось. Це означає, що інтенсивність ефективного притягання збільшилась не дуже помітно, хоча й збільшився радіус цієї взаємодії. Але, як уже згадувалось, конфігурація  ${}^{10}\text{Be}+^2n$ , крім притягання, привнесла ще й ефективне відштовхування, якого не було в конфігурації  ${}^{11}\text{Be}+n$ .

Крім того, не слід забувати про те, що хвильова функція  ${}^{10}\text{Be}+^2n$  розподілена по станам з різними орбітальними моментами (на відміну від хвильової функції в каналі  ${}^{11}\text{Be}+n$ , яка майже не містить стану  ${}^{11}\text{Be}(3^-)+n$ ). А оськільки для збудження  $2^+$ - і  $4^+$ - станів  ${}^{10}\text{Be}$  потрібна деяка енергія<sup>1</sup>, можна зрозуміти, чому зменшується за абсолютною величиною енергія основного стану  ${}^{12}\text{Be}$ , коли ми беремо до уваги конфігурацію  ${}^{10}\text{Be}+^2n$ .

Зауважимо, що експериментальне значення енергії основного стану  ${}^{12}\text{Be}$  становить  $E_0^{\text{exp}} = -3.488 \text{ MeV}$  нижче порогу розвалу  ${}^{12}\text{Be}$  на  ${}^{11}\text{Be}$  і нейtron, що на 2 MeV менша енергії основного стану  $E_0 = -5.74 \text{ MeV}$ , отриманого в результаті врахування лише матриці кінетичної енергії, модифікованої принципом Паулі.

Отже, врахування потенціальної енергії взаємодії нуклонів, що належать різним кластерам, має привести до їх ефективного відштовхування на малих відстанях між кластерами, тим самим наблизивши енергію зв'язку  ${}^{12}\text{Be}$  по відношенню до найнижчого порогу його розвалу до експериментально спостережуваного значення. Такий ефект може бути досягнутий за рахунок компенсації недіагональних по числу квантів матричних елементів оператора кінетичної енергії матричними елементами оператора потенціальної енергії.

Отже, структура хвильової функції основного стану визначається поведінкою власних значень дозволених станів за одним виключенням: при малому числі квантів коефіцієнти розкладу по SU(3)-незвідним представлен-

---

**Примітка 1.** Порогова енергія збудження того чи іншого стану і ще відцентровий бар'єр.

ням  $(2k, 0)_-$  і  $(2k-4, 2)_-$  перевищують коефіцієнти розкладу, що належать невиродженим представленням  $(2k-2, 4)$  і  $(2k+2, 2)$ , хоча власні значення останніх більші. Таку поведінку коефіцієнтів можна пояснити тим, що дозволені базисні функції гілок  $(2k, 0)_-$  і  $(2k-4, 2)_-$  сильно зв'язані через оператор кінетичної енергії з базисними функціями представлень  $(2k, 0)_+$  і  $(2k-4, 2)_+$  відповідно. Матричні елементи оператора кінетичної енергії, що пов'язують ці представлення, залишаються скінченними навіть при великому числі квантів, а не спадають обернено пропорційно  $k$ , як і інші, недіагональні по індексам  $SU(3)$ -симетрії, матричні елементи.

Важливо відзначити також, що вага функції моделі оболонок в хвильової функції основного стану  $^{12}\text{Be}$  в наближенні двох зв'язаних конфігурацій не перевищує 36%, що узгоджується з експериментальними даними. [114].

Щоб відповісти на питання про існування  $L^\pi = 0^+$  резонансів ядра  $^{12}\text{Be}$  над порогом його розвалу на  $^{10}\text{Be} + ^2n$  і  $^{11}\text{Be} + n$ , дослідимо залежність фаз багатоканального розсіяння від енергії (рис. 2.25).

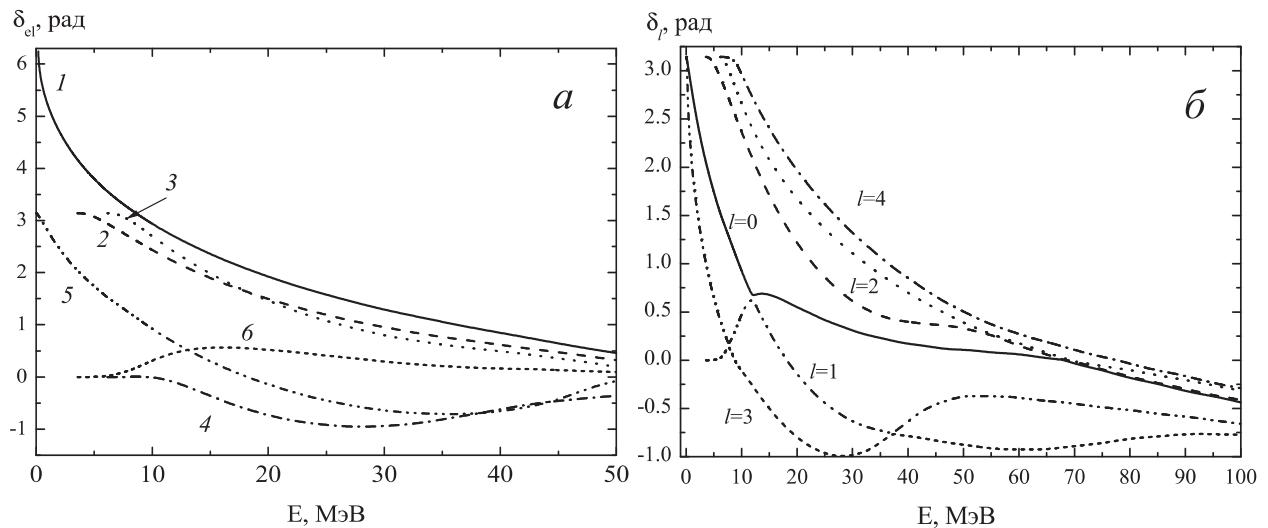


Рис. 2.25 Фази пружного багатоканального розсіяння  $\delta_{el}(E)$  (а) і власні фази  $\delta_l(E)$  (б), що формуються модифікованим оператором кінетичної енергії. Розсіяння  $^{10}\text{Be} + ^2n$ : 1 – ( $\mathcal{L} = l = 0$ ); 2 – ( $\mathcal{L} = l = 2, K = 0$ ); 3 – ( $\mathcal{L} = l = 2, K = 2$ ); 4 – ( $\mathcal{L} = l = 4$ ). Розсіяння  $^{11}\text{Be} + n$ : 5 – ( $\mathcal{L} = l = 0$ ); 6 – ( $\mathcal{L} = l = 3$ ). Значення орбітального моменту  $l$  відносного руху кластерів вказані біля кривих.

Поки ми розглядали конфігурації  ${}^{10}\text{Be}+{}^2n$  і  ${}^{11}\text{Be}+n$  окремо, стани з  $l = 3$  і  $l = 4$  були слабко представлені в хвильових функціях, а відповідні їм фази розсіяння і коефіцієнти непружності були близькі до нуля. В наближенні двох зв'язаних кластерних конфігурацій фази пружного розсіяння з  $l = 3$  і  $l = 4$  стають відмінними від нуля, а фаза розсіяння  ${}^{11}\text{Be}(1^-)+n \rightarrow {}^{11}\text{Be}(3^-)+n$  навіть додатна і має максимум при енергії близько 10 МeВ (рис. 2.25a).

Яку ж перевагу отримують вищезгадані стани з  $l = 3$  і  $l = 4$ , коли ми пов'язуємо дві кластерні конфігурації? По-перше, радіус ефективної взаємодії зростає, оскільки власні значення дозволених станів починають спадати повільніше з ростом числа квантів. По-друге, власні значення вже двох SU(3)-гілок помітно відрізняються від одиниці, що дозволяє притяганню проявитись і в станах з  $l = 3$  і  $l = 4$ . Нарешті, функції  $l$ -базису, що належать різним каналам, сильно перекриваються і тому істотним чином пов'язані через оператор антисиметризації. Багатоканальна природа немонотонної поведінки фази пружного розсіяння з  $l = 3$  підтверджується поведінкою власних фаз розсіяння (рис. 2.25б). В околі енергії 10 МeВ три власні фази починають зростати із збільшенням енергії, одночасно зачинаючи квазіперетину. Відзначимо також, що фази пружного розсіяння задовольняють вимогам узагальненої теореми Левінсона.

Ефективна взаємодія кластерів, обумовлена впливом обмінних ефектів на оператор кінетичної енергії їх відносного руху, призводить до непружних процесів, що супроводжуються збудженням або перебудовою ядер і процесі їх зіткнення. Перерізи непружного багатоканального розсіяння зображені на рис. 2.26.

Як випливає з рис. 2.26, компаунд-ядро, що утворилось в результаті розсіяння нейтрона на ядрі  ${}^{11}\text{Be}$  в основному стані з найбільшою імовірністю буде розпадатись по каналу  ${}^{10}\text{Be}(0^+)+{}^2n$ . Переріз такого процесу в максимумі досягає 30 мбн. В два рази менший переріз непружного розсіяння, що супроводжується  $2^+$ -збудженнями ядра  ${}^{10}\text{Be}$ .

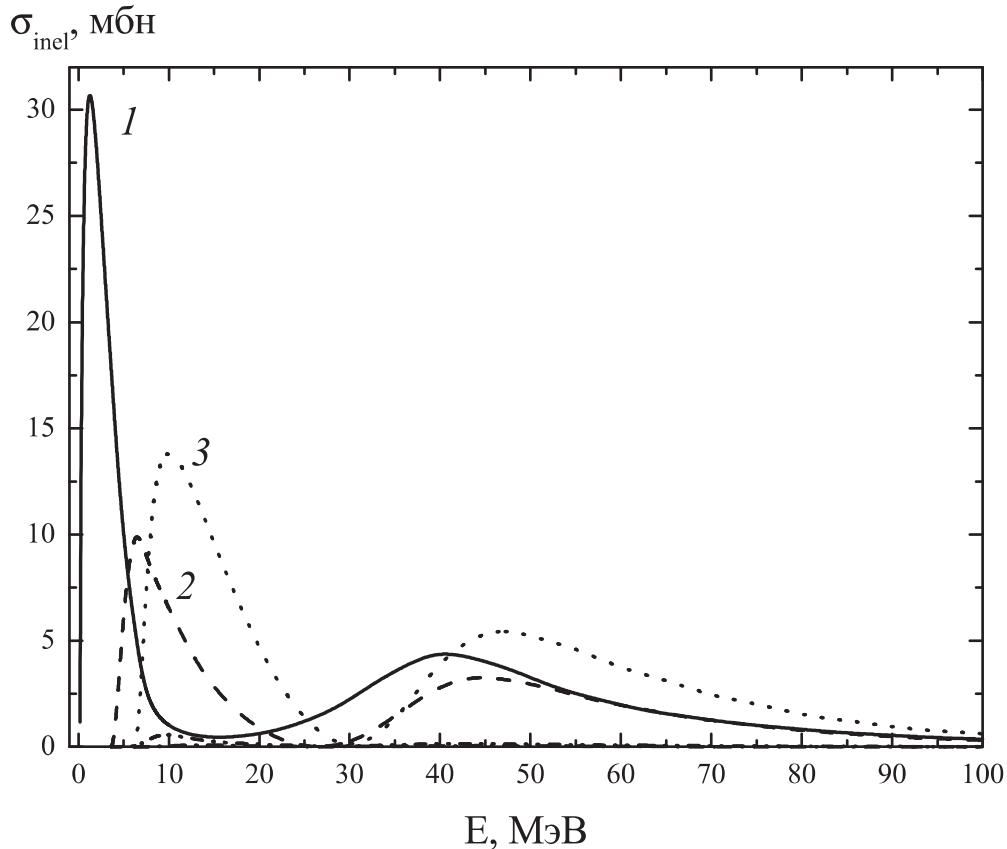


Рис. 2.26 Перерізи непруженого розсіяння в канали 1)  $^{10}\text{Be}(0^+) + ^2\text{n}, l = 0$ ; 2)  $^{10}\text{Be}(2^+, K = 0) + ^2\text{n}, l = 2$ ; 3)  $^{10}\text{Be}(2^+, K = 2) + ^2\text{n}, l = 2$ . Вхідний канал  $^{11}\text{Be}(1^-) + \text{n}, l = 1$ .

Нарешті, імовірність реакцій розсіяння  $^{11}\text{Be}(1^-) + \text{n} \rightarrow ^{11}\text{Be}(3^-) + \text{n}$  і  $^{11}\text{Be}(1^-) + \text{n} \rightarrow ^{10}\text{Be}(4^+) + ^2\text{n}$  близька до нуля.

**2.2.6 Висновки** Вплив принципу Паулі на відносний рух легких ядер з надлишком нейтронів в процесі їх зіткнення досліджувався в рамках мікрокопічного підходу – алгебраїчної версії методу резонуючих груп – на прикладі реакцій  $^{11}\text{Be} + \text{n}$  і  $^{10}\text{Be} + ^2\text{n}$ . Ефективна взаємодія ядер, обумовлена зміною кінетичної енергії їх відносного руху під дією оператора антисиметризації, аналізувалась на основі дискретного представлення дозволених принципом Паулі станів гармонічного осцилятора, класифікованих за допомогою індексів SU(3)-симетрії і визначених в просторі Фока-Баргмана. Власні значення і власні функції ядра нормування бінарних кластерних систем  $^{11}\text{Be} + \text{n}$  и  $^{10}\text{Be} + ^2\text{n}$  пред'являються в явному вигляді.

Показано, що власні значення, що перевищують одиницю і до того ж є максимальними для ядер  $p$ -оболонки, з'являються у ядер кінця  $p$ -оболонки, коли валентний нейтрон замикає нейтронний магічний остов. В таких системах ефективне притягання кластерів на малих відстанях між ними проявляється найбільш яскраво. Прикладом такої системи є кластерна конфігурація  $^{11}\text{Be}+n$  ядра  $^{12}\text{Be}$ . Ефективне притягання нейтрона і  $^{11}\text{Be}$ , породжуване модифікованим оператором кінетичної енергії, створює зв'язаний стан  $^{12}\text{Be}$  з енергією  $E = -6.3$  МeВ нижче порогу розвалу  $^{12}\text{Be}$  на  $^{11}\text{Be}$  і нейтрон. Це дозволяє припустити, що зв'язаний стан ядра  $^{12}\text{Be}$  зобов'язаний своїм походженням впливу обмінних ефектів на оператор кінетичної енергії відносного руху нейтрона і  $^{11}\text{Be}$ . Отже, врахування потенціальної енергії взаємодії кластерів (враховуючи як пряму, так і обмінну взаємодію) повинна дещо ослабити ефективне притягання, тим самим зменшуючи енергію зв'язку  $^{12}\text{Be}$  за абсолютною величиною і наближуючи її значення до еспериментально спостережуваного.

Обговорюється структура дозволених базисних функцій бінарної кластерної системи в наближенні кількох бінарних конфігурацій. Показано, що імовірність присутності кластерної конфігурації в найнижчій базисній функції бінарної кластерної системи пропорційна власному значенню ізольованої конфігурації.

Розглянуто дерева Якобі, що відповідають кластерним конфігураціям  $^{11}\text{Be}+n$  і  $^{10}\text{Be}+^2n$  ядра  $^{12}\text{Be}$ , і встановлено зв'язок між ними. Дано аналіз структури основного стану  $^{12}\text{Be}$  в наближенні двох зв'язаних конфігурацій. Вага функції моделі оболонок в хвильовій функції основного стану  $^{12}\text{Be}$  не перевищує 36%, що вказує на дифузність ядра  $^{12}\text{Be}$ . Отримано оцінку перерізів непружного розсіяння, що супроводжуються збудженням або передовою ядер, що зіштовхуються, тобто реакції  $^{11}\text{Be}(n, ^2n)^{10}\text{Be}$ . Величина перерізів непружного розсіяння значною мірою визначається вагою відповідного каналу в хвильовій функції МРГ з мінімальним числом квантів.

## 2.3 Кластерна структура резонансного стану малої енергії в тетранейтроні

Вперше про експериментальне спостереження ядерно стабільного тетранейтрона повідомлялось в [115]. З того часу всі інші експериментальні спроби знайти зв'язаний або резонансний стан в системі чотирьох нейtronів не були успішними. Проте, нещодавно в експерименті з розвалу  $^{14}\text{Be}$  [116] знайшли 6 подій, які узгоджуються з припущенням про утворення зв'язаного тетранейтрона. Нажаль, кілька інших експериментів [117–119], які здійснили з метою перевірки цих результатів, виявились неспроможними підтвердити або спростувати існування тетранейторна через погану статистику. Загальний висновок більшості теоретичних робіт на цю тему [120–123] полягає в тому, що неможливо з сучасними ядерними гамільтоніанами отримати зв'язаний стан тетранейтрона без того, щоб не зруйнувати багато інших успішних передбачень цих гамільтоніанів. Наприклад, розрахунки в рамках методу гіперсферичних функцій (МГСФ)

[121] свідчать про те, що потрібні дуже сильні чотиринуклонні сили, щоб зв'язати тетранейtron. Проте ні теоретичні, ні експериментальні результати не виключають можливість існування тетранейтрону у вигляді резонансу малої енергії (див. [120, 123, 124]).

В літературі відомі лише кілька теоретичних робіт, в яких розглядається можливість існування резонансу в тетранейтроні. В роботі [123] неперервний спектр системи  $^4\text{n}$  досліджувався в рамках підходу, який поєднує МГСФ і метод резонуючих груп. Поряд з гіпергармоніками з найменшим можливим значенням гіpermоменту автори роботи [123] заликали гіпергармоніки з гіpermоментами  $K = K_{\min} + 2$  і  $K = K_{\min} + 4$ , які відтворюють кластерну конфігурацію  $^2\text{n} + ^2\text{n}$  в тетранейтроні. Аналіз залежності від енергії власних фаз розсіяння привів авторів до висновку, що  $^4\text{n}$  має резонансний стан при енергії 1–3 MeV. Але чітка вказівка на цей резонанс була отримана лише з ефективним нуклон-нуклонним потенціалом Волкова, який, як відомо, неприйнятний для вивчення мультинейтронних систем, оскільки

зв'язує дінейtron.

Найбільш систематичне вивчення чотиринейtronного резонансу було здійснено в [122], де розв'язувались рівняння Фадеєва-Якубовського в координатному просторі з використанням реалістичних  $NN$  сил і досліджувались траекторії полюсів матриці розсіяння в комплексній площині. В роботі [122] було зроблено висновок, що тетранейtron — зв'язаний чи резонансний — може існувати лише в сильному зовнішньому полі і розпався б відразу, як це поле було б усунуте. Ті ж автори відзначають, однак, що в рамках використаних в їх роботі методу неможливе точне визначення положення резонансу [122].

Отже, існування резонансу в тетранейtronі все ще залишається відкритим питанням. В цьому підрозділі тетранейtron розглядається як компаунд-система, де співіснують  $^3n+n$  і  $^2n+^2n$  зв'язані кластерні конфігурації.

Хвильову функцію тетранейtrона ми будемо шукати у вигляді розкладу (1.9) по базису функцій гармонічного осцилятора, дозволених принципом Паулі. Дозволені принципом Паулі базисні функції  $\psi_n$  визначимо в просторі Фока-Баргманна [47], де вони мають винятково простий вигляд. Коефіцієнти розкладу як станів дискретного спектру з енергією  $E_\kappa = -\kappa^2/2 < 0$ , так і станів неперервного спектру  $\{C_n(E)\}$  з енергією  $E > 0$  знайдемо в результаті розв'язку системи лінійних рівнянь (1.7).

Набір квантових чисел  $n$  включає число осциляторних квантів  $\nu$ , індекси  $SU(3)$ -симетрії  $(\lambda, \mu)$ , додаткове квантове число  $\alpha_{(\lambda, \mu)}$ , якщо є кілька різних  $(\lambda, \mu)$  мультиплетів, орбітальний момент  $L$  і його проекція  $M$ , а також  $\alpha_L$ , якщо мультиплет  $(\lambda, \mu)$  має кілька станів з тими самими  $L$ . В цьому підрозділі ми обмежимось розглядом випадку  $L = M = 0$  і, отже, ми будемо використовувати лише перші три квантових числа.

Завдяки обміну нуклонів, що відносяться до різних кластерів, рівняння (1.7) нагадує рівняння Шредінгера для відносного руху двох частинок з сильно нелокальною взаємодією між ними. Це ускладнює аналіз кластер-кластерної взаємодії, що генерується нуклон-нуклонними силами. Проте,

якщо осциляторна довжина  $r_0$  значно менша радіусу дії  $b_0$   $NN$ -потенціалу, матриця потенціальної енергії в представленні гармонічного осцилятора еквівалентна діагональній матриці, що є дискретним аналогом кластер-кластерного потенціалу в координатному просторі:

$$\sum_{\nu'_{\min}}^{\infty} \langle \nu, l | U | \nu', l \rangle C_{\nu',l} = U_{\text{eff}}(r_{\nu}) C_{\nu,l}. \quad (2.59)$$

Для центрального гаусівського нуклон-нуклонного потенціалу

$$U_{\text{eff}}(r_{\nu}) \sim U_0 \exp \left\{ -\frac{r_{\nu}^2}{b_0^2} \right\}, \quad r_{\nu} = \sqrt{\frac{A_1 + A_2}{A_1 A_2}} r_0 \sqrt{2\nu + 2l + 3}, \quad (2.60)$$

де  $U_0$  – інтенсивність гаусівського потенціалу,  $r_{\nu}$  визначає відстань між кластерами (що складаються з  $A_1$  та  $A_2$  нуклонів, відповідно), а  $l$  – орбітальний момент відносного руху кластерів.

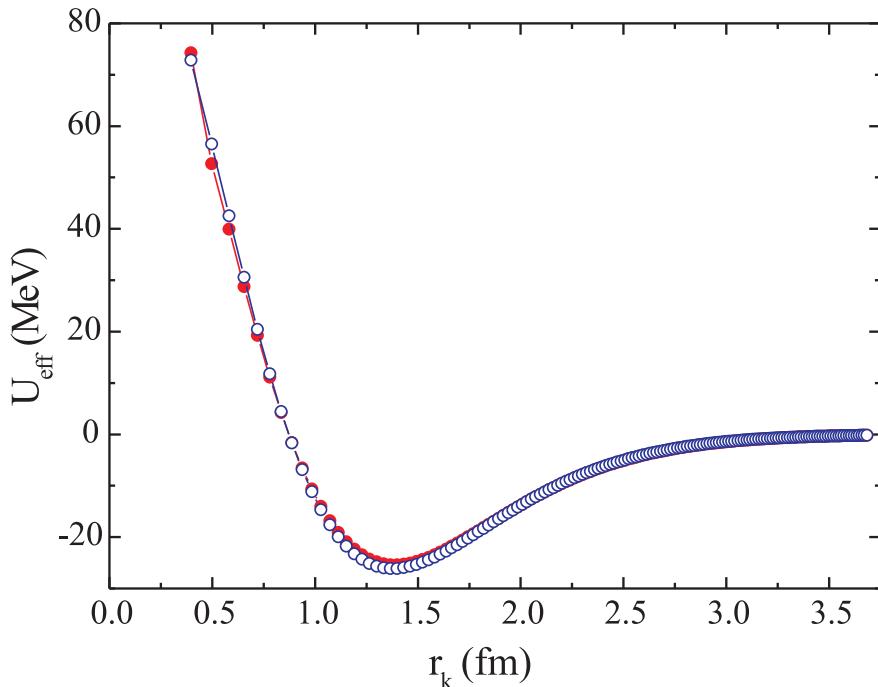


Рис. 2.27 Ефективний  $^2n$ - $^2n$  потенціал, що породжується нуклон-нуклонними силами Сербера. Зафарбовані кружечки:  $\sum_{k'=1}^{\infty} \langle k | U | k' \rangle$ . Порожні кружечки: еквівалентний локальний потенціал  $U_{\text{eff}}(r_k)$  (див. роз'яснення в тексті).

Справедливість співвідношення (2.59) демонструється на рис. 2.27 на прикладі ефективного  $^2n\text{-}^2n$  потенціалу, породжуваного  $NN$  взаємодією Сербера [87] ( $r_0 = 0.15 \Phi_M$ ,  $b_0 = 1.48 \Phi_M$ ,  $\nu = 2k$ ).

Як випливає з (2.60) ефективний кластер-кластерний потенціал експоненційно спадає із збільшенням осциляторної довжини  $r_0$  (див. рис. 2.28).

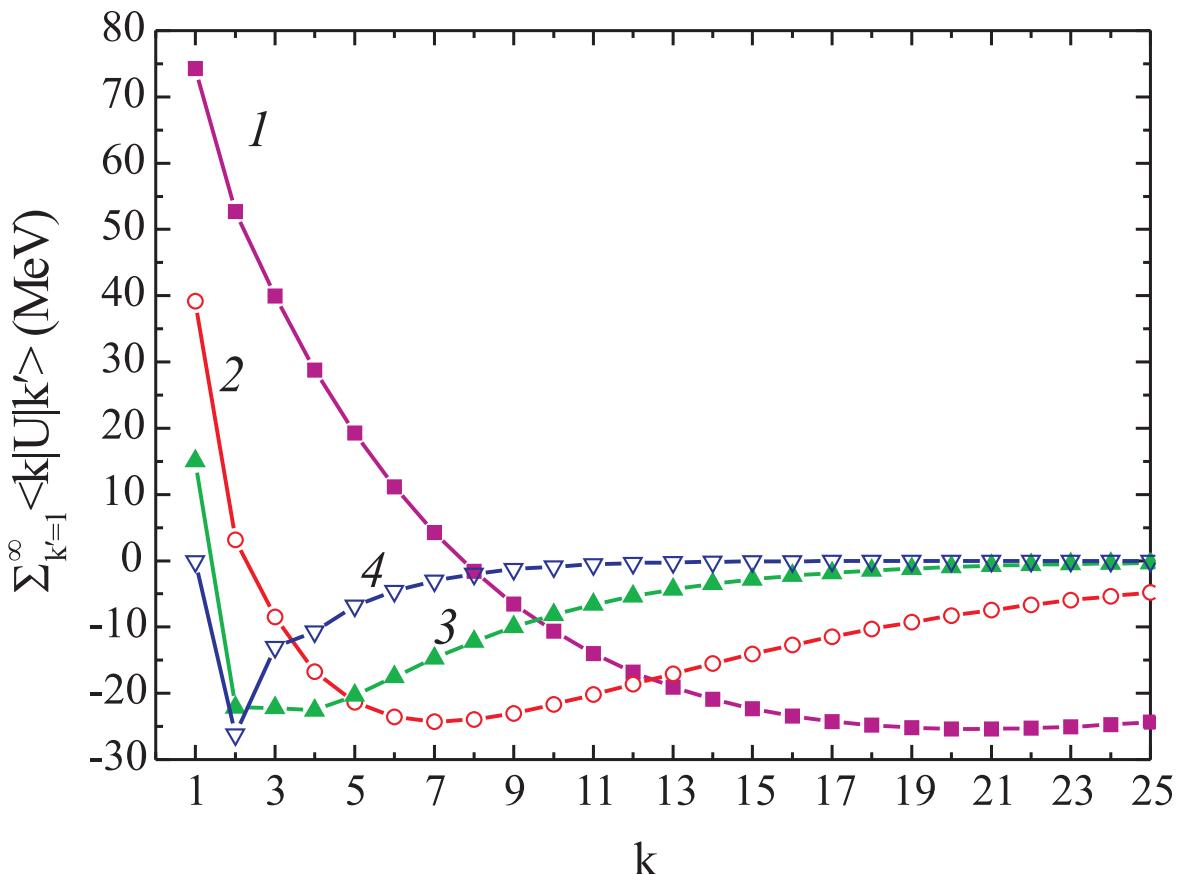


Рис. 2.28 Ефективний  $^2n\text{-}^2n$  потенціал, що породжується взаємодією Сербера в залежності від числа квантів  $k$  при різних значеннях осциляторної довжини  $r_0$ . Криві: 1 –  $r_0 = 0.15 \Phi_M$ ; 2 –  $r_0 = 0.25 \Phi_M$ ; 3 –  $r_0 = 0.35 \Phi_M$ ; 4 –  $r_0 = 0.5 \Phi_M$ .

Здається природнім, що  $r_0$  має бути досить великим, щоб відтворити густину розподілу нейтронів всередині дінейтронних кластерів, тобто  $r_0 > b_0$ . Але тоді ми негайно прийдемо до висновку, що ефективна міжкластерна взаємодія, що походить з  $NN$  потенціалу, має бути несуттєвою і не може

створити резонанс в системі  ${}^4n$ . Ми використали потенціал Гаусівського типу для простоти, але все вище викладене залишається справедливим для будь-якого короткодіючого потенціалу.

Що ж стосується внеску від оператора кінетичної енергії (з її обмінною частиною), то для конфігурації  ${}^2n+{}^2n$  власні значення дозволених станів дорівнюють одиниці. Тому в області найменших відстаней між кластерами взаємодія між двома динейtronами визначається здебільшого вилученням єдиного забороненого принципом Паулі стану, що можна уявити собі, як дію потенціалу відштовхування на малих відстанях між кластерами. Власні функції оператора кінетичної енергії при відносно малих енергіях будуть нагадувати власні функції частинки, що знаходиться в полі жорсткого кору, а в області високих енергій вони будуть співпадати з хвильовими функціями вільного руху частинки.

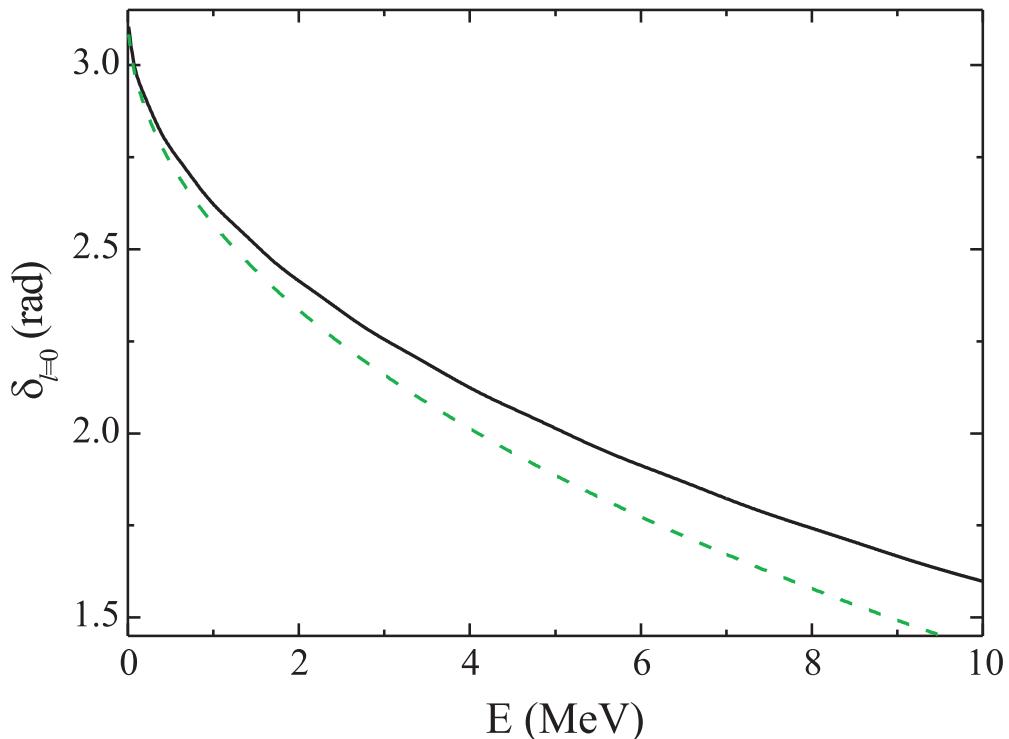


Рис. 2.29 Фаза розсіяння  ${}^2n + {}^2n$ ,  $r_0 = b_0 = 1.48$  Ф.М. Пунктирна лінія: фаза, обчислена з урахуванням лише модифікованого оператора кінетичної енергії. Суцільна лінія: фаза, отримана з урахуванням також  ${}^2n - {}^2n$  потенціалу, що породжується силами Розенфельда [125].

Отже, нема підстав вважати, що тетранейtron може існувати у вигляді резонансу, якщо взяти до уваги лише кластерну конфігурацію  ${}^2n+{}^2n$ . Поведінка фази розсіяння  ${}^2n+{}^2n$  показана на рис. 2.29, підтверджує цей висновок.

Рисунок 2.29 також свідчить на користь того, що  ${}^2n-{}^2n$  взаємодія, породжена  $NN$  силами, має другорядний вплив на фізичні спостережувані величини<sup>1</sup>.

Для будь-якої ядерної компаунд-системи, можна вказати кілька кластерних конфігурацій, що відповідають певному набору кластерів, які вивільнюються в результаті ядерної реакції. Імовірність реалізації кластерної конфігурації в дозволеній принципом Паулі базисній функції бінарної кластерної системи з мінімальним числом квантів пропорційна власному значенню ізольованої кластерної конфігурації [10]. Максимальні власні значення відносяться до  ${}^3n+n$  конфігурації системи  ${}^4n$ . Вони перевищують одиницю і максимальні при мінімальному числі квантів, що можна інтерпретувати як притягання нейтронних кластерів на малих відстанях між ними. Врахування різних кластерних конфігурацій компаунд-ядра призводить до збільшення максимальних власних значень дозволених станів. Більш того, з'являються нові гілки збудження, яким відповідають особливо великі, більші за одиницю, власні значення, що свідчить про істотне притягання кластерів завдяки обмінним ефектам. Отже, у нас є всі підстави вважати, що розгляд  ${}^2n+{}^2n$  і  ${}^3n+n$  зв'язаних конфігурацій системи  ${}^4n$  дозволить дати відповідь на питання про існування зв'язаного стану або резонансу в тетранейtronі.

Зв'язані  ${}^2n+{}^2n$  і  ${}^3n+n$  конфігурації породжують дві гілки двократно вироджених  $SU(3)$  представлень  $(2k, 0)$ . Поведінка власних значень, що відносяться до цих гілок, показана на рис. 2.30. Ефективне притягання проявляє себе в гілці  $(2k, 0)_+$ , в той час як гілка  $(2k, 0)_-$  відповідає відштовхуванню.

---

**Примітка 1.** Ми використали  $NN$  сили Розенфельда, щоб наголосити на тому, що навіть сутто притягувальний  $NN$  потенціал не здатен суттєво вплинути на фазу розсіяння.

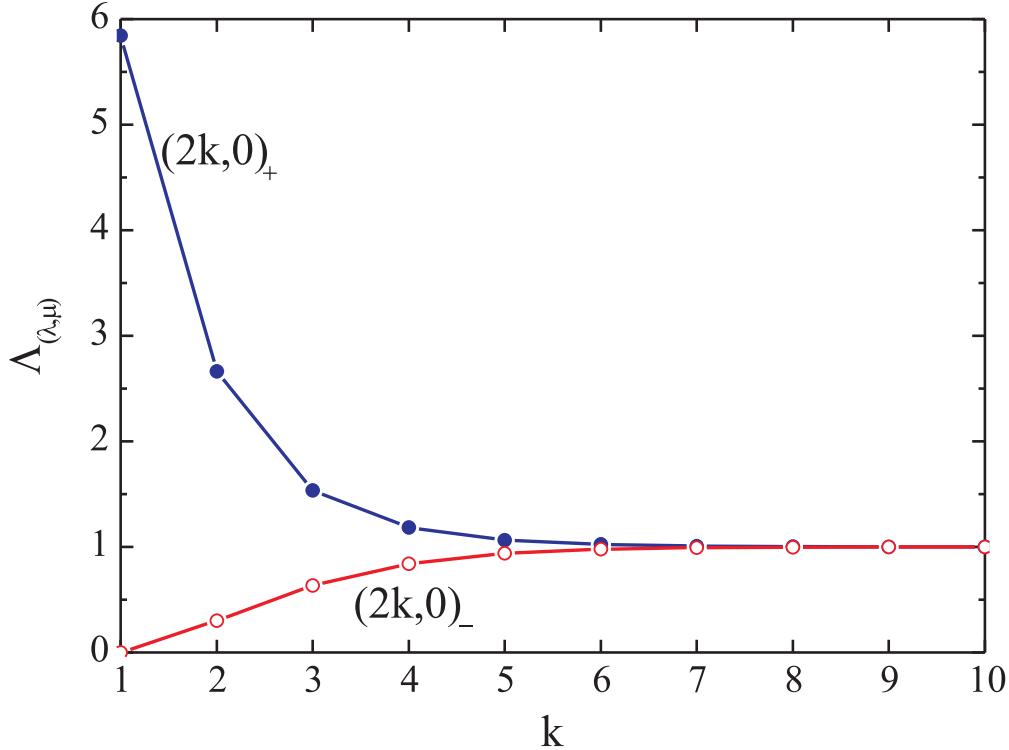


Рис. 2.30 Власні значення  $\Lambda_{(\lambda,\mu)}$  дозволених станів для системи  ${}^4n$  в наближенні двох зв'язаних конфігурацій.

Важливою властивістю цих гілок є те, що на великих відстанях між кластерами ( $k \rightarrow \infty$ ) вони з однаковою вагою містять хвильові функції обох кластерних конфігурацій:

$$\Psi_{(2k,0)\pm} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \psi_{(2k,0)}({}^3n + n) \pm \bar{\psi}_{(2k,0)}({}^2n + {}^2n) \right\}.$$

Повертаючись до аналізу міжкластерної взаємодії, що породжується  $NN$  силами, звернемось до рис. 2.31. Рисунок 2.31 зображує кластер-кластерні потенціали, що породжуються силами Розенфельда і розраховані в наближенні ізольованих кластерних конфігурацій системи  ${}^4n$ . Як видно з рис. 2.31, інтенсивність  ${}^3n$ - $n$  взаємодії більша  ${}^2n$ - ${}^2n$  взаємодії на різницю  $\Delta_u$  внутрішньої енергії  ${}^3n$  кластера і двох дінейтронів. Для потенціала гаусівського типу  $\Delta_u = -0.5V_{13}(1+2r_0^2/b_0^2)^{-3/2}$ , де  $V_{13}$  – інтенсивність взаємодії пари нейтронів в синглетному спіновому стані.

$\Delta_u$  зв'язує SU(3)-гілки  $(2k, 0)_+$  і  $(2k, 0)_-$  навіть при  $k$  (див. рис. 2.32).

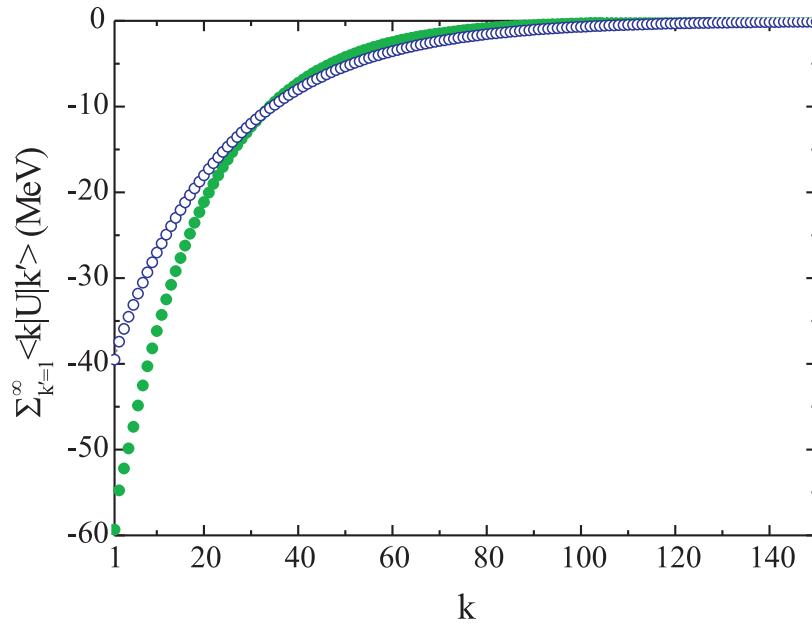


Рис. 2.31 Ефективний міжкластерний потенціал, що породжується силами Розенфельда. Зафарбовані і порожні кружечки:  ${}^3n+n$  і  ${}^2n+{}^2n$  кластерні конфігурації, відповідно.

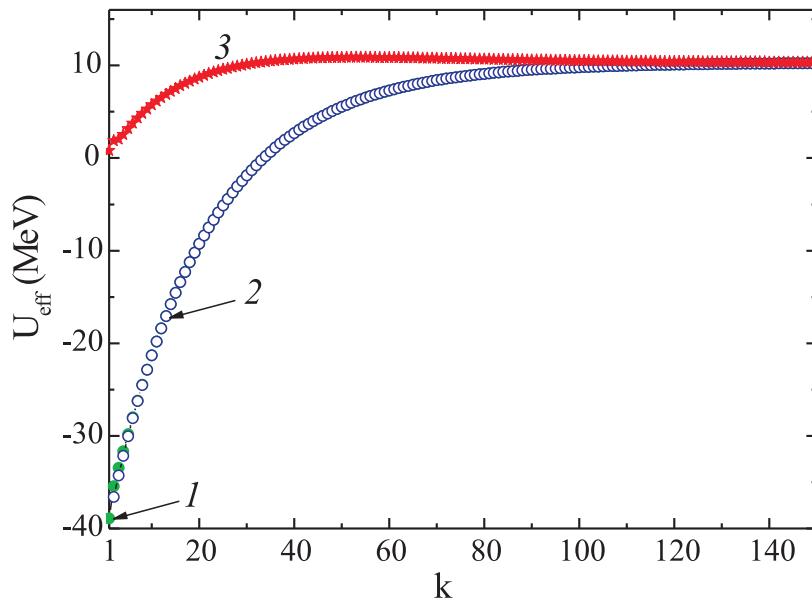


Рис. 2.32 Ефективний кластер-кластерний потенціал  $U_k^{\text{eff}}$ , що породжується силами Розенфельда для системи  ${}^4n$  в двоконфігураційному наближенні. Криві: 1 –  $U_k^{++} = \sum_{k'=1}^{\infty} \langle (2k, 0)_+ | U | (2k', 0)_+ \rangle$ ; 2 –  $U_k^{--} = \sum_{k'=1}^{\infty} \langle (2k, 0)_- | U | (2k', 0)_- \rangle$ ; 3 –  $U_k^{+-} = \sum_{k'=1}^{\infty} \langle (2k, 0)_+ | U | (2k', 0)_- \rangle$ .

Різниця внутрішніх потенціальних енергій  $\Delta_u$  двох дінейтронів і  ${}^3n$ , поряд з різницею їх кінетичних енергій  $\Delta_t$ , призводить до появи порогу розпаду тетранейтрона на  ${}^3n$  і нейtron. Хоча висота такого бар'єру  $\Delta = \Delta_u + \Delta_t$  головним чином визначається різницею внутрішніх кінетичних енергій кластерів <sup>1</sup>, остання не пов'язує базисні функції, що відносяться до різних SU(3)-гілок. В той же час, ненульове  $\Delta_u$  призводить до додаткового відштовхування, яке перешкоджає формуванню резонансу в тетранейтроні.  $\Delta_u$  зменшується із збільшенням осциляторної довжини  $r_0$ . Отже, ефективна взаємодія, породжувана кінетичними обмінними доданками, здатна створити низькоенергетичний резонанс в системі  ${}^4n$  лише при великих  $r_0$ . Рисунок 2.33, який представляє фазу пружного розсіяння  ${}^2n + {}^2n$  в залежності від безрозмірної енергії, підтверджує це припущення.

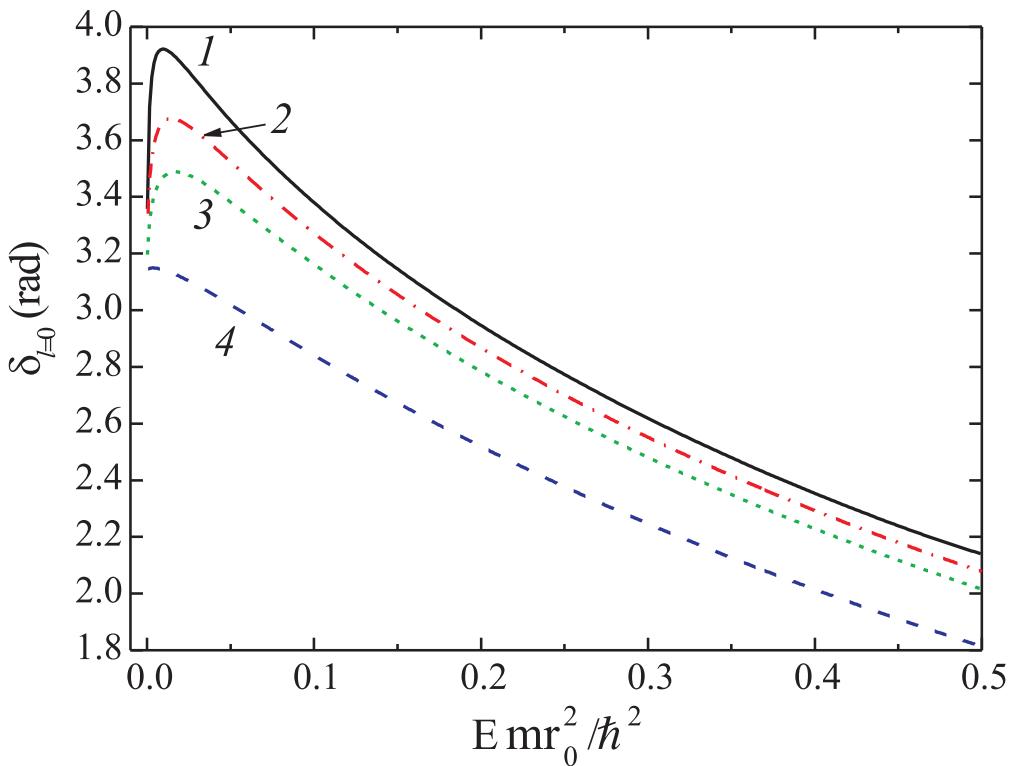


Рис. 2.33 Фаза пружного  ${}^2n + {}^2n$  розсіяння в двоконфігураційному наближенні, за умови, що  $\Delta_u = 0$  (1) і  $\Delta_u \neq 0$  (породжувана нуклон-нуклонними силами Розенфельда радіусом  $b = 1.48 \text{ fm}$ ) при  $r_0 = 10b$  (2);  $r_0 = 5b$  (3) і  $r_0 = b$  (4).

Примітка 1.  $\Delta_t = 0.5\hbar^2/mr_0^2$ ,  $m$  – маса нуклона.

Резонансна поведінка фази розсіяння спостерігається лише при  $r_0$  порядку 10 fm. Такий резонанс має майже нульову енергію над порогом  ${}^4n \rightarrow {}^2n + {}^2n$  і його ширина досить велика порівняно з його енергією. Отже, наші результати узгоджуються з експериментальними даними [116]. Справді, нещодавно автори останньої роботи обговорювали опис цих даних за допомогою резонанса в тетранейтроні в [124]. Вони визнали, що широкий резонанс малої енергії в тетранейтроні може узгоджуватись з подіями, які спостерігались в експерименті [116]. Більше того, теоретичні *ab initio* розрахунки Пайпера [120] також залишають можливість для широкого резонансу в системі  ${}^4n$  з енергією 2 MeV або менше.

Отже, ми виявили, що тетранейтрон може існувати у вигляді компаунд-системи, де співіснують кластерні конфігурації  ${}^3n+n$  і  ${}^2n+{}^2n$ . Вплив принципу Паулі на кінетичну енергію відносного руху нейтронних кластерів приводить до їх притягання. Інтенсивність такого притягання достатня, щоб забезпечити існування резонансу малої енергії в тетранейтроні за умови, що осциляторна довжина достатньо велика. Збільшення осциляторної довжини призводить, в свою чергу, до пригнічення кластер-кластерного потенціалу. Тому результати не залежать від вибору нуклон-нуклонного потенціалу. Ніяких три- та чотири-частикових сил не було залучено до розрахунків.

Ми віримо, що наші теоретичні передбачення можуть дати свіжий погляд на проблему існування резонансних станів в нейтронних системах і допомогти зрозуміти природу таких станів і механізм їх утворення.

## 2.4 Розсіяння ${}^6\text{He}$ на $\alpha$ -частинці: вибір параметрів ортогоналізуючого псевдопотенціалу на основі мікроскопічного підходу

**Вступ** Як свідчать мікроскопічні дослідження, усунення заборонених принципом Паулі станів з хвильової функції двокластерної системи становить лише частину обмінних ефектів. Зокрема, в [8] і [9] було показано, що суттєва частина таких ефектів безпоседнім чином пов'язана з власними значеннями оператора антисиметризації. Ці власні значення не тодіжньо рівні одиниці і характеризують імовірність реалізації того чи іншого базисного стану в хвильовій функції кластерної системи. Врахування власних значень оператора антисиметризації в рівнянні Шредінгера приводить до зміни кінетичної енергії відносного руху кластерів, що можна трактувати як ефективне відштовхування чи ефективне притягання, обумовлене впливом принципу Паулі на оператор кінетичної енергії [8]. Така ефективна взаємодія суттєво впливає на рух кластерів і може спричиняти резонансну поведінку фази розсіяння чи навіть утворення зв'язаного стану ядерної компаунд-системи [9].

Свідчення про ефективне відштовхування кластерів, що є наслідком впливу частково заборонених станів, також спостерігалось в макроскопічних розрахунках ядро-ядерних зіткнень в рамках багатоканального алгебраїчного методу [126]. А саме, автори зауважили, що використання скінченних значень (від кількох МeВ до кількох десятків МeВ) інтенсивності псевдопотенціалу для деяких дозволених принципом Паулі станів приводить до крашого узгодження з експериментальними даними. В роботах [126], [127] використано скінченні значення інтенсивності псевдопотенціалу в якості феноменологічних параметрів. Пов'язати ці параметри з власними значеннями оператора антисиметризації – важлива задача.

В цьому підрозділі ми розглядаємо ядро  ${}^{10}\text{Be}$ , яке нещодавно стало предметом численних експериментальних та теоретичних досліджень [128–

132]. Оскільки поріг розпаду ядра  $^{10}\text{Be}$  на альфа-частинку і  $^6\text{He}$  становить лише 1.2 МeВ над другим  $0^+$  станом ядра  $^{10}\text{Be}$ , в околі цього порогу ми можемо розглядати  $^{10}\text{Be}$  як кластерну систему  $^6\text{He} + ^4\text{He}$ . Ми зауважили, що в системах, які містять кластери з відкритою p-оболонкою, радіус дії ефективного кластер-кластерного потенціалу, породжуваного принципом Паулі, може бути досить великим [8], [10]. Більше того, такі ядра є багатоканальними системами, в яких можуть виникати і ефективне відштовхування, і ефективне притягання. Нарешті, аналіз кластерної системи  $^6\text{He} + ^4\text{He}$  дозволяє зрозуміти роль і структуру заборонених принципом Паулі станів в багатоканальних системах, в яких орбітальні моменти відносного руху кластерів не є інтегралами руху.

Для досягнення цієї мети ми будемо слідувати алгебраїчній версії методу резонуючих груп, першим кроком в реалізації якої є побудова повного базису дозволених принципом Паулі станів гармонічного осцилятора і їх класифікація. Для цього слід знайти власні значення і власні функції ядра нормування  $I$ , тобто інтеграла перекриття двох детермінантів Слейтера, побудованого з одночастинкових орбіталей. Метод побудови ядра нормування двокластерних систем в просторі Фока-Баргманна і детальний аналіз основних властивостей ядра нормування наведено в першому розділі дисертації.

Ядро нормування можна представити у вигляді суми вироджених ортогональних ядер з певним числом осциляторних квантів  $n$ :

$$I = \sum_{n=n_{\min}}^{\infty} \sum_{(\lambda,\mu)} \sum_{\alpha} \Lambda_{n,(\lambda,\mu)_{\alpha}} \sum_{L,M} \psi_{n,(\lambda,\mu)_{\alpha}}^{L,M,\alpha_L} \tilde{\psi}_{n,(\lambda,\mu)_{\alpha}}^{L,M,\alpha_L}.$$

Для повного опису власних функцій  $\psi_{n,(\lambda,\mu)_{\alpha}}^{L,M,\alpha_L}$  і власних значень  $\Lambda_{n,(\lambda,\mu)_{\alpha}}$  ядра нормування, необхідно визначити, поряд з числом осциляторних квантів  $n$ , індекси  $(\lambda, \mu)$  SU(3)-симетрії, додаткове квантове число  $\alpha_{(\lambda,\mu)}$ , якщо є кілька різних  $(\lambda, \mu)$  мультиплетів, повний орбітальний момент  $L$  і його проекцію  $M$ , а також додаткове квантове число  $\alpha_L$ , якщо мультиплет  $(\lambda, \mu)$  має кілька станів з однаковим  $L$ . Тут ми опустимо  $\alpha$ ,  $\alpha_L$  і  $M$ , оскільки вони

зайві в проблемі, що розглядається.

В цьому підрозділі ми не розглядаємо потенціал між кластерами, що породжується нуклон-нуклонними силами, оскільки вважаємо, що основні властивості того впливу, який чинять обмінні ефекти на ядро-ядерну взаємодію, можна встановити, зосередившись на зміні під впливом принципу Паулі оператора кінетичної енергії відносного руху кластерів. На користь такого припущення говорить встановлений нами факт, що радіус дії впливу принципу Паулі на оператор кінетичної енергії значно більший радіусу дії кластер-кластерної взаємодії, породжуваної нуклон-нуклонним потенціалом (see [8]).

Пункт 2.4.1 вводить ядро нормування системи  ${}^6\text{He} + \alpha$ , яке породжує повний базис власних функцій і власних значень оператора антисиметризації досліджуваної системи. В пункті 2.4.2 ми обговорюємо структуру заборонених принципом Паулі станів і даємо рекомендації щодо того, як ці стани можуть бути співставлені з каналами розсіяння, що характеризуються орбітальним моментом ядра  ${}^6\text{He}$  і моментом відносного руху  ${}^6\text{He}$  та  $\alpha$ -частинкою. В пункті 2.4.3 ми представляємо ефективну взаємодію  ${}^6\text{He} + \alpha$ , що породжується частково забороненими і наддозволеними станами і аналізуємо вплив цієї взаємодії на фази пружного розсіяння ядра  ${}^6\text{He}$  на  $\alpha$ -частинці. Висновки дано в пункті 2.4.6 .

**2.4.1 Ядро нормування системи  ${}^6\text{He} + \alpha$**  В цьому пункті ми розглядаємо ядро нормування системи  ${}^6\text{He} + \alpha$ . Як уже згадувалось, ми припускаємо, що внутрішні хвильові функції обох кластерів описуються найнижчими функціями трансляційно-інваріантної моделі оболонок. В рамках цього наближення  $\alpha$ -кластер має заповнену оболонку і може знаходитись лише в  $0^+$  основному стані, тоді як  ${}^6\text{He}$  має два нейтрони в  $p$ -оболонці і може знаходити або в основному  $0^+$  стані або в збудженному  $2^+$  стані, який є досить вузьким резонансом з енергією  $E = 1.8$  МeВ над порогом розвалу  ${}^6\text{He}$  на  $\alpha + n + n$ .

Ядро нормування системи  ${}^6\text{He} + \alpha$  записується у вигляді

$$I = \sum_n \{\Lambda_{(n+2,0)} \langle (n+2,0) | (n+2,0) \rangle + \\ + \Lambda_{(n,1)} \langle (n,1) | (n,1) \rangle + \Lambda_{(n-2,2)} \langle (n-2,2) | (n-2,2) \rangle\},$$

Величини  $\Lambda_{(n+2,0)}$  дорівнюють нулю при  $n < 6$ . Власні значення  $\Lambda_{(n,1)}$  дорівнюють нулю, якщо  $n < 5$  і, нарешті,  $\Lambda_{(n-2,2)}$  зникають при  $n < 4$ . Інакше кажучи, стани, що відносяться до  $SU(3)$  незвідних представлень  $(n-2,2)$  стають дозволеними при  $n \geq 4$ , мінімальне число квантів для  $(\lambda, \mu) = (n, 1)$  станів дорівнює 5, а стани з  $(\lambda, \mu) = (n+2, 0)$  дозволені лише при  $n \geq 6$  (Таблиця 8). Ці власні значення було отримано в роботі [5]. Явні вирази для  $SU(3)$  інваріантів  $\langle (n+2,0) | (n+2,0) \rangle$ ,  $\langle (n,1) | (n,1) \rangle$  і  $\langle (n-2,2) | (n-2,2) \rangle$  також було наведено в [5].  $SU(3)$  інваріанти для системи  ${}^6\text{He} + \alpha$  співпадають з інваріантами для системи  ${}^6\text{He} + p$ .

Табл. 8: Власні значення  $\Lambda_{(\lambda,\mu)}$  ядра нормування системи  ${}^6\text{He} + \alpha$

$k$	States with $n = 2k$			States with $n = 2k + 1$		
	$(n+2,0)$	$(n,1)$	$(n-2,2)$	$(n+2,0)$	$(n,1)$	$(n-2,2)$
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1.2056	0	1.0549	0.4521
3	0.9419	0.2721	1.1587	0.1831	1.2192	0.7650
4	1.2922	0.5698	1.0834	0.4045	1.1795	0.9011
5	1.3264	0.7645	1.0408	0.5983	1.1160	0.9581
6	1.2566	0.8760	1.0194	0.7448	1.0676	0.9821
7	1.1743	0.9363	1.0090	0.8454	1.0371	0.9923
8	1.1090	0.9678	1.0046	0.9097	1.0196	0.9967
9	1.0645	0.9840	1.0019	0.9489	1.0101	0.9985
10	1.0367	0.9921	1.0009	0.9718	1.0051	0.9994

Як видно з Таблиці 8, дві  $SU(3)$ -гілки дотатньої парності і одна  $SU(3)$ -гілка від'ємної парності характеризуються власними значеннями, що перевищують одиницю. Отже, стани, що відносяться до  $(2k+2,0)$ ,  $(2k-2,2)$  і  $(2k+1,1)$   $SU(3)$  гілок можуть бути віднесені до наддозволених станів, тоді

як стани  $(2k,1)$ ,  $(2k+3,0)$  і  $(2k-1,2)$  є частково забороненими. Як випливає з рівняння (1.19), ми можемо очікувати ефективного притягання  ${}^6\text{He}$  і  $\alpha$ -частинки в першому випадку і ефективного відштовхування в останньому випадку.

Працюючи з  $SU(3)$  базисом, стикаєшся з проблемою формулювання асимптотичних умов для коефіцієнтів розкладу хвильової функції по дозволених станах. Ця проблема вирішується звернення до функцій базису кутового моменту  $\Phi_n^{(\mathcal{L}, l, L)}$  ( $l$ -базису), де  $\mathcal{L}$  і  $l$  – парціальні кутові моменти кластера  ${}^6\text{He}$  і відносного руху кластерів, відповідно. До того ж, ті, хто симулює принцип Паулі за допомогою ортогоналізуючого псевдопотенціалу, також використовують парціальні кутові моменти кластерів та момент їх відносного руху в якості квантових чисел різних каналів реакції.

Зауважимо, проте, що ядро нормування має діагональний вигляд лише в  $SU(3)$ -класифікації власних значень  $\Lambda_{(\lambda, \mu)}$  і власних функцій  $\Psi_{(\lambda, \mu)}$ .  $SU(3)$ -базис і базис кутового моменту пов'язані матрицею унітарного перетворення. Будь-яке унітарне перетворення базисних функцій  $\Psi_{(\lambda, \mu)}$  порушує діагональний вигляд  $I$ , оскільки власні значення  $\Lambda_{(\lambda, \mu)}$  відмінні від одиниці в певній області по числу квантів. Функції  $l$ -базису не є власними функціями оператора антисиметризації при малому числі квантів, і орбітальний момент відносного руху кластерів та їх орбітальні моменти не є хорошиими квантовими числами для системи, що складається з несферичних кластерів.

Базисні стани  $\Phi_n^{(\mathcal{L}, l, L)}(\mathbf{u}, \mathbf{r})$   $l$ -базису є згорткою осциляторних функцій, одна з яких описує внутрішню структуру несферичного кластера  ${}^6\text{He}$ , а інша є хвильовою функцією відносного руху  ${}^6\text{He}$  і  $\alpha$ -частинки. При парному числі квантів  $n = 2k$  функції  $\Phi_n^{(\mathcal{L}, l, L)}(\mathbf{u}, \mathbf{r})$  визначаються таким виразом:

$$\Phi_k^{(\mathcal{L}, l, L)}(\mathbf{u}, \mathbf{r}) = \phi_{1-\mathcal{L}/2}^{\mathcal{L}} \left( \frac{u}{r_0} \right) \phi_{k-l/2}^l \left( \frac{r}{r_0} \right) \{Y_{\mathcal{L}}(\hat{u}) \otimes Y_l(\hat{r})\}_{LM};$$

$$\phi_{\nu}^l(r) = (-1)^{\nu} \sqrt{\frac{2\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+l+3/2)}} r^l L_{\nu}^{l+1/2}(r^2) \exp\{-r^2/2\},$$

тоді як при непарному числі квантів  $n = 2k + 1$  ці функції мають вигляд

$$\Phi_k^{(\mathcal{L}, l, L)}(\mathbf{u}, \mathbf{r}) = \phi_{1-\mathcal{L}/2}^{\mathcal{L}}\left(\frac{\mathbf{u}}{r_0}\right) \phi_{k+(1-l)/2}^l\left(\frac{\mathbf{r}}{r_0}\right) \{Y_{\mathcal{L}}(\hat{u}) \otimes Y_l(\hat{r})\}_{LM}.$$

Тут  $r_0$  – осциляторна довжина, яку ми вибрали рівною 1.37 Фм в наших розрахунках, щоб відтворити середньоквадратичний радіус альфа-частинки.

Вектор  $\mathbf{r}$  визначає відносну відстань між  $\alpha$ -частинкою і  ${}^6\text{He}$  кластером, тоді як вектор  $\mathbf{u}$  описує орієнтацію кластера  ${}^6\text{He}$  в просторі. Останній вектор визначає відстань від  $\alpha$ -кора до пари валентних нейтронів в  ${}^6\text{He}$ .

#### 2.4.2 Заборонені принципом Паулі стани

**Додатня парність** Всі стани додатньої парності відповідають парному числу квантів  $n = 2k$ . Є шість заборонених принципом Паулі станів, що відносяться до  $SU(3)$  представлень  $(2,0)$ ,  $(4,0)$ ,  $(0,2)$ ,  $(6,0)$ ,  $(2,1)$ ,  $(4,1)$ . Чотири з цих станів містять  $L = 0$  як найнижчий орбіタルний момент:

$$\begin{aligned} \Psi_{(2,0)}^{L=0} &= \Phi_{k=0}^{(0,0,0)}; \\ \Psi_{(4,0)}^{L=0} &= \sqrt{\frac{5}{9}}\Phi_{k=1}^{(0,0,0)} + \sqrt{\frac{4}{9}}\Phi_{k=1}^{(2,2,0)}; \\ \Psi_{(0,2)}^{L=0} &= \sqrt{\frac{4}{9}}\Phi_{k=1}^{(0,0,0)} - \sqrt{\frac{5}{9}}\Phi_{k=1}^{(2,2,0)}; \\ \Psi_{(6,0)}^{L=0} &= \sqrt{\frac{7}{15}}\Phi_{k=2}^{(0,0,0)} + \sqrt{\frac{8}{15}}\Phi_{k=2}^{(2,2,0)}, \end{aligned}$$

тоді як два останні представлення містять  $L = 1$ :

$$\Psi_{(2,1)}^{L=1} = \Phi_{k=1}^{(2,2,1)}; \quad \Psi_{(4,1)}^{L=1} = \Phi_{k=2}^{(2,2,1)}.$$

Легко зауважити, що принцип Паулі змішує стани з різними парціальними моментами  $\mathcal{L}$  кластера  ${}^6\text{He}$  і моментами  $l$  відносного руху кластерів. Отже, строго кажучи, ми не можемо співставити жоден із заборонених принципом Паулі станів певній функції  $l$ -базису  $\Phi_n^{(\mathcal{L}, l, L)}$ . Проте заборонені принципом

Паулі стани системи  ${}^6\text{He} + \alpha$  з  $L^\pi = 1^+$  складаються лише з компоненти  $\mathcal{L} = l = 2$ , і перший заборонений принципом Паулі стан  $\Psi_{(2,0)}^{L=0}$  містить лише компоненту  $\mathcal{L} = l = 2$ . Отже, ми можемо напевне стверджувати, що в каналі  $\mathcal{L} = l = 2$  є два заборонені принципом Паулі стани, за умови, що  $L^\pi = 1^+$ , і принаймі один заборонений принципом Паулі стан в каналі  $\mathcal{L} = l = 2$  у випадку  $L^\pi = 0^+$ .

Щодо решти трьох заборонених станів, що відповідають  $L^\pi = 0^+$ , вони є суперпозицією двох компонент  $\mathcal{L} = l = 2$  і  $\mathcal{L} = l = 0$ . Аналізуючи вагу цих двох компонент в заборонених принципом Паулі станах, ми можемо припустити, що заборонений стан  $\Psi_{(4,0)}^{L=0}$  можна співставити каналу  $\mathcal{L} = l = 0$ , тоді як заборонені стани  $\Psi_{(0,2)}^{L=0}$  і  $\Psi_{(6,0)}^{L=0}$  можна приписати каналу  $\mathcal{L} = l = 2$ .

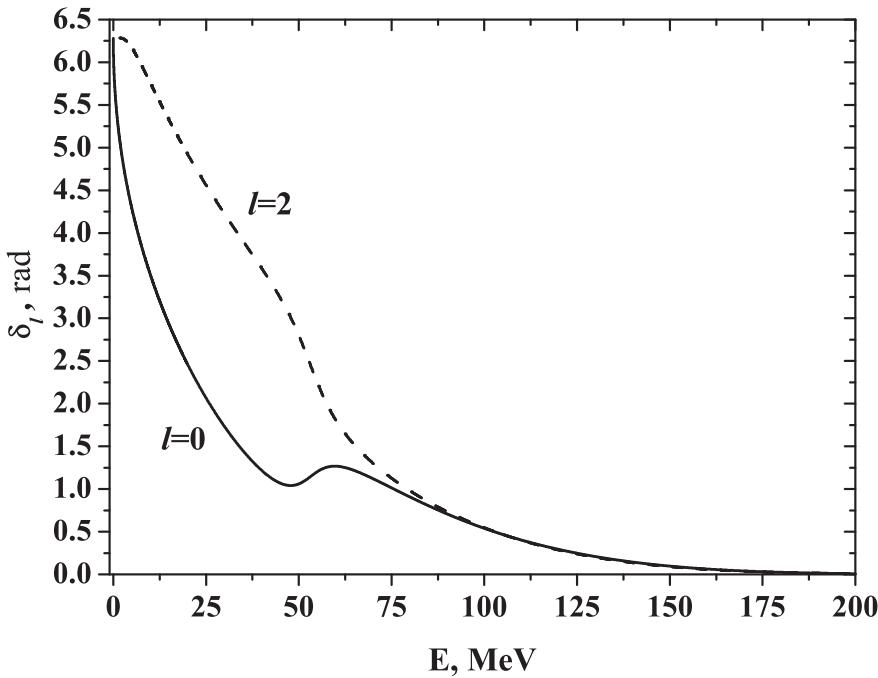


Рис. 2.34 Фазові зсуви  $\delta_l(E)$  для системи  ${}^6\text{He} + \alpha$ , породжувані оператором кінетичної енергії за умови, що всі власні значення дозволених принципом Паулі станів  $\Lambda_n = 1$ . Орбітальні моменти  $l$  відносного руху кластерів вказані на кривих.

У підсумку, ми маємо два заборонені стани для  $L^\pi = 1^+$  і чотири заборонені стани для  $L^\pi = 0^+$ . В першому випадку обидва заборонені стани

відносяться до каналу  $\mathcal{L} = l = 2$ , оскільки повний орбітальний момент  $L = 1$  не може бути реалізовано з  $\mathcal{L} = l = 0$ .

Серед чотирьох заборонених станів, що характеризуються  $L^\pi = 0^+$ , два заборонені стани відносяться до каналу  $\mathcal{L} = l = 0$ , тоді як два інші проявляють себе в каналі  $\mathcal{L} = l = 2$ . Поведінка фаз пружного  ${}^6\text{He} + \alpha$  розсіяння в стані  $L^\pi = 0^+$  компаунд-ядра  ${}^{10}\text{Be}$  підтверджує існування двох заборонених станів в каналі  ${}^6\text{He}(0^+) + \alpha \rightarrow {}^6\text{He}(0^+) + \alpha$  і двох заборонених станів в каналі  ${}^6\text{He}(2^+) + \alpha \rightarrow {}^6\text{He}(2^+) + \alpha$ .

Рис.2.34 представляє фази розсіяння  ${}^6\text{He} + \alpha$  за умови, що всі власні значення дозволених принципом Паулі станів дорівнюють одиниці і що  $L^\pi = 0^+$ . Отже, ці фазові зсуви створені лише забороненими принципом Паулі станами. Як випливає з рис.2.34, амплітуда обох фазових зсувів  $\delta_{l=0}(E)$  і  $\delta_{l=2}(E)$  дорівнює  $2\pi$ . Залежність фаз розсіяння від енергії, коли остання змінюється від нуля до нескінченності регулюється узагальненою теоремою Левінсона. Згідно цієї теореми, амплітуда зміни фази пропорційна кількості зв'язаних станів і заборонених станів системи. Оскільки в цих розрахунках немає зв'язаних станів, ми можемо зробити висновок, що справді і кожному каналі виявляють себе два заборонених стани.

**Від'ємна парність** Є шість заборонених принципом Паулі  $SU(3)$  не-звідних представлень для станів від'ємної парності  $n = 2k + 1$  і всі ці  $SU(3)$  представлення містять  $L = 1$  в якості найменшого орбітального моменту:

$$\begin{aligned}
\Psi_{(3,0)}^{L=1} &= \sqrt{\frac{5}{9}} \Phi_{k=0}^{(0,1,1)} + \sqrt{\frac{4}{9}} \Phi_{k=0}^{(2,1,1)}; \\
\Psi_{(1,1)}^{L=1} &= \sqrt{\frac{4}{9}} \Phi_{k=0}^{(0,1,1)} - \sqrt{\frac{5}{9}} \Phi_{k=0}^{(2,1,1)}; \\
\Psi_{(5,0)}^{L=1} &= \sqrt{\frac{7}{15}} \Phi_{k=1}^{(0,1,1)} + \frac{2}{5} \sqrt{\frac{7}{3}} \Phi_{k=1}^{(2,1,1)} + \frac{2}{5} \Phi_{k=1}^{(2,3,1)}; \\
\Psi_{(3,1)}^{L=1} &= \frac{2}{3\sqrt{5}} \Phi_{k=1}^{(0,1,1)} - \frac{11}{15} \Phi_{k=1}^{(2,1,1)} + \frac{2}{5} \sqrt{\frac{7}{3}} \Phi_{k=1}^{(2,3,1)}; \\
\Psi_{(1,2)}^{L=1} &= \frac{2}{3} \Phi_{k=1}^{(0,1,1)} - \frac{2}{3\sqrt{5}} \Phi_{k=1}^{(2,1,1)} + \sqrt{\frac{7}{15}} \Phi_{k=1}^{(2,3,1)}; \\
\Psi_{(7,0)}^{L=1} &= \sqrt{\frac{3}{7}} \Phi_{k=2}^{(0,1,1)} + 2\sqrt{\frac{3}{35}} \Phi_{k=2}^{(2,1,1)} + 2\sqrt{\frac{2}{35}} \Phi_{k=2}^{(2,3,1)}.
\end{aligned}$$

Базисна функція  $\Phi^{(0,1,1)}$  домінує в трьох заборонених станах:  $\Psi_{(3,0)}$ ,  $\Psi_{(5,0)}$  і  $\Psi_{(7,0)}$ . Функція  $\Phi^{(2,1,1)}$  переважає в заборонених станах  $\Psi_{(1,1)}$  і  $\Psi_{(3,1)}$ , тоді як компонента  $\Phi^{(2,3,1)}$  має максимальну вагу лише в стані  $\Psi_{(1,2)}$ . Отже, можна співставити три заборонені стани каналу  $\mathcal{L} = 0$ ,  $l = 1$ , два заборонені стани каналу  $\mathcal{L} = 2$ ,  $l = 1$  і один заборонений стан каналу  $\mathcal{L} = 2$ ,  $l = 3$ .

**2.4.3 Дозволені принципом Паулі стани** Хоча власні значення оператора антисиметризації не залежать від повного орбітального момента  $L$ , структура дозволених станів залежить. А саме, вага різних парціальних моментів відрізняється для різних значень  $L$ . Більше того, не всі  $SU(3)$  незвідні представлення містять певне значення орбітального момента  $L$ . Отже, інформація про парціальний склад дозволених принципом Паулі станів може бути корисною для оцінки параметрів ортогоналізуючого псевдопотенціалу.

**Додатня парність** Розглянемо перші доданки ядра нормування, що містять базисні стани з орбітальним моментом  $L = 0$  і додатньою парністю. Вони відносяться до двох  $SU(3)$  представлень,  $(2k+2, 0)$  і  $(2k-2, 2)$ . Всі вони мають  $n = 2k$ .

Кожен із станів з  $L = 0$  є суперпозицією базисних функцій  $\Phi_k^{(\mathcal{L}=0, l=0, L=0)}$  і  $\Phi_k^{(\mathcal{L}=2, l=2, L=0)}$

$$\Psi_{(2k+2,0)}^{L=0} = \sqrt{\frac{2k+3}{3(2k+1)}}\Phi_k^{(0,0,0)} + \sqrt{\frac{4k}{3(2k+1)}}\Phi_k^{(2,2,0)};$$

$$\Psi_{(2k-2,2)}^{L=0} = \sqrt{\frac{4k}{3(2k+1)}}\Phi_k^{(0,0,0)} - \sqrt{\frac{2k+3}{3(2k+1)}}\Phi_k^{(2,2,0)}.$$

Якщо  $L = 1$ , є лише один дозволений стан, який може бути записаний як в  $SU(3)$ -базисі, так і в  $l$ -базисі:

$$\Psi_{(2k,1)}^{L=1} = \Phi_k^{(2,2,1)}.$$

Це означає, що ми маємо двоканальну проблему для станів з  $L = 0$  і одноканальну проблему для станів з  $L = 1$ .

Компонента  $\mathcal{L} = l = 0$  має максимальну вагу в дозволеному стані  $\Psi_{(2k-2,2)}$ , тоді як канал  $\mathcal{L} = l = 2$  домінує в стані  $\Psi_{(2k+2,0)}$ .

**Від'ємна парність** Всі стани від'ємної парності відповідають непарному числу квантів  $n = 2k + 1$ . Найнижче значення повного орбітального моменту  $L$  в станах з негативною парністю  $L = 1$ . Кожна дозволена принципом Паулі функція з орбітальним моментом  $L = 1$  є суперпозицією трьох станів  $l$ -базису:

$$\Psi_{(2k+3,0)}^{L=1} = \sqrt{\frac{2k+5}{3(2k+3)}}\Phi_k^{(0,1,1)} + 2\sqrt{\frac{2k+5}{15(2k+3)}}\Phi_k^{(2,1,1)} + 2\sqrt{\frac{k}{5(2k+3)}}\Phi_k^{(2,3,1)},$$

$$\begin{aligned} \Psi_{(2k+1,1)}^{L=1} &= \sqrt{\frac{4}{3(2k+1)(2k+3)}}\Phi_k^{(0,1,1)} - \frac{(6k+5)}{\sqrt{15(2k+1)(2k+3)}}\Phi_k^{(2,1,1)} + \\ &\quad + \sqrt{\frac{4k(2k+5)}{5(2k+1)(2k+3)}}\Phi_k^{(2,3,1)}, \end{aligned}$$

$$\Psi_{(2k-1,2)}^{L=1} = 2\sqrt{\frac{k}{3(2k+1)}}\Phi_k^{(0,1,1)} - 2\sqrt{\frac{k}{15(2k+1)}}\Phi_k^{(2,1,1)} + \sqrt{\frac{2k+5}{5(2k+1)}}\Phi_k^{(2,3,1)}.$$

Всі базисні стани  $l$ -базису  $\Phi_k^{(\mathcal{L}, l, L)}$  рівною мірою представлені в стані  $\Psi_{(2k+3,0)}^{L=1}$ . В той же час, вага компоненти  $\mathcal{L} = 0$ ,  $l = 1$  складає до 60% в дозволеному стані  $\Psi_{(2k+1,1)}^{L=1}$  і практично відсутня в стані  $\Psi_{(2k-1,2)}^{L=1}$ .

**2.4.4 Потенціал Паулі** Система  ${}^6\text{He} + \alpha$  дещо складніша, ніж одноканальний випадок, розглянутий в цьому пункті, оскільки на динаміку руху  $\alpha$ -кластера впливає присутність нейтронів в  $p$ -оболонці ядра  ${}^6\text{He}$ . Завдяки цьому, проблема стає багатоканальною і різні  $SU(3)$ -гілки пов'язуються оператором кінетичної енергії. Тим не менше, ми можемо зробити грубу оцінку ефективного потенціалу Паулі, аналізуючи діагональну частину (по відношенню до  $SU(3)$ -індексів) доданку, обумовленого принципом Паулі, що наведений в рівнянні (1.19) в першому розділі.

На рис. 2.35 залежність потенціалу Паулі

$$U_n^{\text{eff}}(r_n) = \frac{\hbar^2}{mr_0^2} U_{n,n}^{\text{Pauli}}, \quad r_n = \sqrt{\frac{10}{6 \times 4}} r_0 \sqrt{2n+3}$$

від відстані  $r_n$  між центрами мас кластерів  ${}^6\text{He}$  і  $\alpha$  наведена для станів додатньої і від'ємної парності.

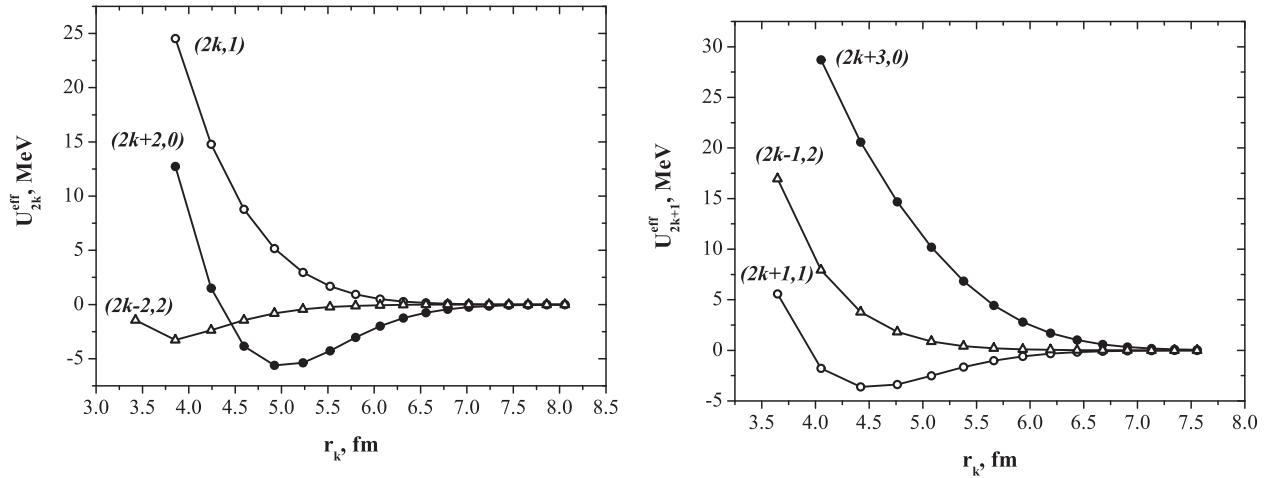


Рис. 2.35 Ефективна взаємодія  ${}^6\text{He} + \alpha$ , породжувана кінетичними обмінними доданками. Індекси  $SU(3)$  симетрії вказані на кривих.

Як очевидно з лівої частини рис. 2.35, гілка  $(2k, 1)$  відповідає відштовхуванню, а гілка  $(2k - 2, 2)$  – притяганню, тоді як гілка  $(2k + 2, 0)$  є сумішшю

відштовхування і притягання. Права частина рис.2.35 свідчить, що для станів від'ємної парності дві гілки  $(2k + 3, 0)$  і  $(2k - 1, 2)$  відштовхувальні, в той час як деяке притягання присутнє лише в гілці  $(2k + 1, 1)$ .

Всі дозволені принципом Паулі стани, окрім стану  $(2k, 1)$ , є суперпозиціями функцій  $l$ -базису. Отже, ми можемо зробити певні висновки лише щодо відштовхування в d-хвилі відносного руху  $\alpha$ -частинки, що розсіюється на  ${}^6\text{He}$ , що знаходиться в першому  $2^+$  стані. В інших випадках ми маємо врахувати також вагу різних парціальних моментів в  $SU(3)$ -базисних функціях.

**2.4.5 Фази пружного  ${}^6\text{He} + \alpha$  розсіяння,  $L^\pi = 0^+$**  Настанок, ми розрахували фази пружного розсіяння  ${}^6\text{He} + \alpha$  для станів додатньої парності і  $L = 0$ , породжувані обмінними доланками оператора кінетичної енергії.

Рівняння для коефіцієнтів розкладу по  $SU(3)$ -базису залишаються зв'язаними навіть в границі великого числа квантів, тоді як система відповідних рівнянь для  $l$ -базису є незв'язаною в цій асимптотичній області. В АВМРГ, асимптотична поведінка коефіцієнтів розкладу  $C_E^{(\mathcal{L}, l, L)}(k)$  по  $l$ -базису вирахується через функції Ханкеля першого і другого роду та елементи матриці розсіяння. Коли всі власні значення  $\Lambda_n$  наближаються до одиниці, стає можливим унітарне перетворення від базису  $SU(3)$  до  $l$ -базису. Отже, ми можемо визначити асимптотичну поведінку коефіцієнтів розкладу хвильової функції по  $SU(3)$ -базису за допомогою матриці унітарного перетворення між двома базисами [5], [6].

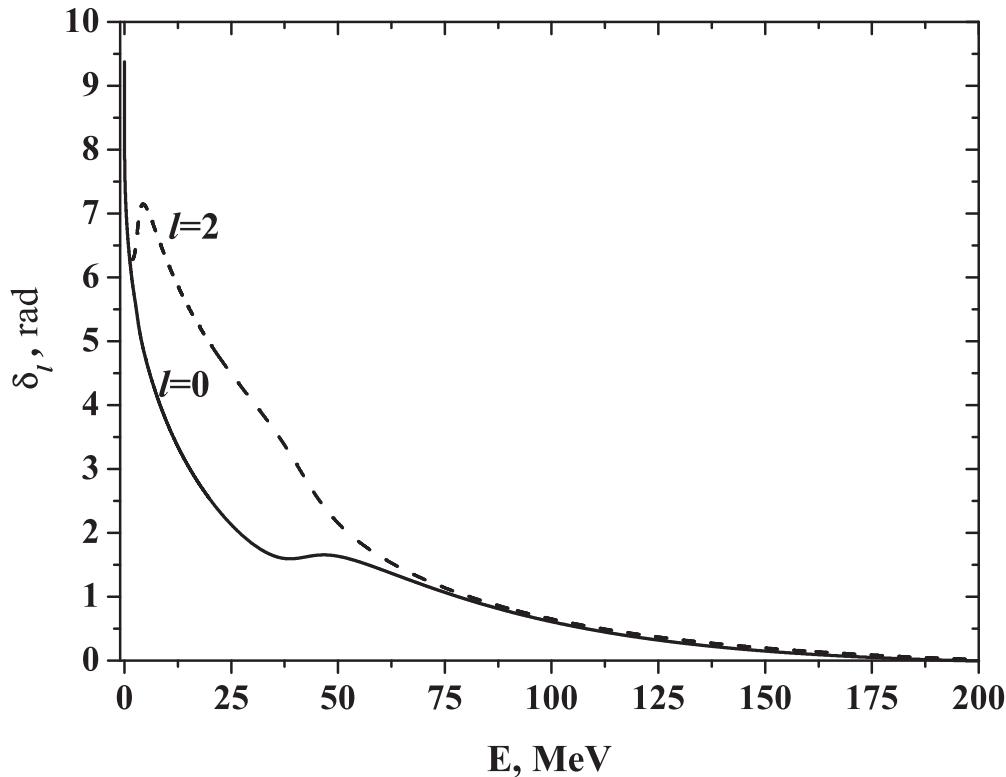


Рис. 2.36 Фазові зсуви  $\delta_l(E)$  для системи  ${}^6\text{He}+\alpha$ , що генеруються модифікованим оператором кінетичної енергії. Орбітальні моменти  $l$  відносного руху кластерів показані на кривих.

Варто відзначити, що зв'язок між SU(3)-каналами через оператор кінетичної енергії за умови, що власні значення різних SU(3)-гілок не ідентичні, негайно призводить до недіагональних елементів  $S$ -матриці і непружних процесів при зіткненні двох кластерів.

Фазові зсуви для  ${}^6\text{He}+\alpha$  розсіяння, отримані з урахуванням власних значень дозволених принципом Паулі станів показано на рис. 2.36. На відміну від фазових зсувів на рис. 2.34, які породжуються виключно забороненими принципом Паулі станами, фазові зсуви на рис. 2.36 генеруються як забороненими, так і дозволеними станами. Оскільки обидва дозволені принципом Паулі стани  $\Psi_{(2k+2,0)}^{L=0}$  і  $\Psi_{(2k-2,2)}^{L=0}$  є наддозволеними, вплив принципу Паулі на кінетичну енергію відносного руху  ${}^6\text{He}$  та  $\alpha$ -частинки призводить до притягання. Це притягання достатньо сильне, щоб навіть без урахування нуклон-нуклонної взаємодії між нуклонами різних кластерів утворився зв'язаний стан з дуже малою енергією  $E_0 \simeq -10$  кeВ нижче

порогу  $^{10}\text{Be} \rightarrow ^6\text{He} + \alpha$ .

Оскільки  $s$ -хвиля дає домінуючий внесок у цей стан, фаза розсіяння  $\delta_{l=0}$  при нульовій енергії дорівнює  $3\pi$ , а не  $2\pi$ . Як видно з рис. 2.36, фаза розсіяння  $\delta_{l=2}$  також має резонансну поведінку. Порівнюючи рис. 2.36 і рис. 2.34, ми можемо зробити висновок, що сукупне ефективне притягання, породжуване наддозволеними станами  $(2k+2,0)$  і  $(2k-2,2)$  є притягувальним для станів  $L^\pi = 0^+$  системи  $^6\text{He} + \alpha$ .

Коефіцієнти розкладу хвильової функції цього стану по базису гармонічного осцилятора показані на рис. 2.37. Як очевидно з рис. 2.35, SU(3)-гілка  $(2k-2,2)$  суперпритягувальна, тоді як гілка  $(2k+2,0)$  відштовхувальна має малих відстанях і притягувальна на великих відстанях між кластерами. Оскільки канал  $^6\text{He}(0^+) + \alpha$  превалює в дозволеному стані  $\Psi_{(2k-2,2)}^{L=0}$ , саме цей канал домінує в хвильовій функції основного стану.

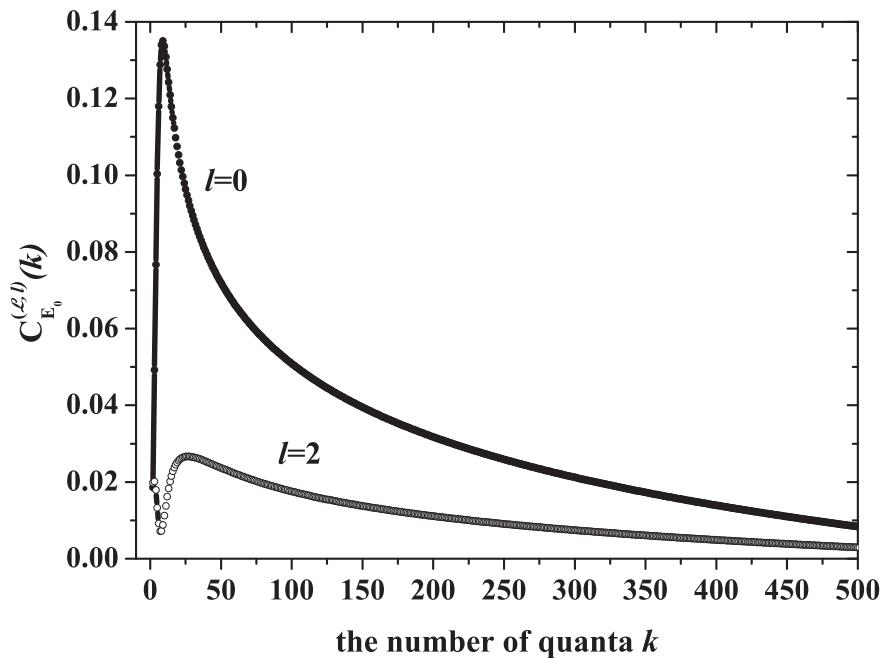


Рис. 2.37 Коефіцієнти  $C_{E_0}^{(\mathcal{L}, l)}(k)$  розкладу хвильової функції  $L^\pi = 0^+$  основного стану ядра  $^{10}\text{Be} = ^6\text{He} + \alpha$  з енергією  $E_0 \simeq -10$  кеВ по  $l$ -базису за умови, що враховано лише модифікований оператор кінетичної енергії. Величини орбітальних моментів  $l = \mathcal{L}$  відносного руху кластерів вказані на кривих.

**2.4.6 Висновки** В цьому підрозділі в рамках мікроскопічної двокластерної моделі ми аналізували вплив принципу Паулі на кінетичну енергію відносного руху ядра  ${}^6\text{He}$  і  $\alpha$ -частинки. Власні значення і власні функції оператора антисиметризації детально досліджено. Побудовано заборонені принципом Паулі стани системи  ${}^6\text{He}+\alpha$  в явному вигляді і обговорено їх структуру. Хоча заборонені принципом Паулі стани в загальному випадку є суперпозиціями функцій  $l$ -базису, кожну з останніх функцій можна співставити певному забороненому стану на підставі парціального складу цього стану. Це саме ті  $l$ -базисні функції, які входять у той чи інший заборонений стан з максимальною вагою. Поведінка фаз пружного розсіяння  $\alpha$ -частинки на ядрі  ${}^6\text{He}$ , що породжується виключно забороненими принципом Паулі станами, підтверджує наші висновки.

Проведений вище аналіз може бути корисним при проектуванні заборонених принципом Паулі станів за допомогою ортогоналізуючих псевдопотенціалів в двокластерних системах, які містять кластери з відкритою оболонкою.

Детально обговорюється структура дозволених принципом Паулі станів. Побудовано потенціал ефективної взаємодії  ${}^6\text{He}-\alpha$ , породжуваної завдяки впливу частково заборонених і наддозволених станів на кінетичну енергію відносного руху кластерів. Ми показали, що частково заборонені стани спричиняють ефективне відштовхування кластерів, в той час як наддозволені стани генерують ефективне притягання кластерів. Ми розглянули розсіяння ядра  ${}^6\text{He}$  на  $\alpha$ -частинці в станах додатної парності та нульового орбітального момента компаунд-ядра  ${}^{10}\text{Be}$ . Це саме той випадок, коли ефективне притягання, що продукується двома гілками наддозволених станів, є найбільш вираженим. Інтенсивність цієї взаємодії виявляється достатньою, щоб забезпечити формування біляпорогового стану ядра  ${}^{10}\text{Be}$  в околі порогу  ${}^{10}\text{Be} \rightarrow {}^6\text{He} + \alpha$  навіть за відсутності нуклон-нуклонної взаємодії між нуклонами різних кластерів.

Слід зауважити, що вищезгадана ефективна взаємодія виникає в резуль-

таті модифікації оператора кінетичної енергії відносного руху кластерів і притаманна всім двокластерним моделям. Характер цієї взаємодії залежить лише від внутрішніх хвильових функцій кластерів. Як тільки ми зафіксуємо ці функції, ми маємо очікувати на деяку ефективну міжкластерну взаємодію, чиї основні властивості визначаються поведінкою власних значень оператора антисиметризації системи, що розглядається.

У підсумку, наші результати могли б допомогти вибрати знак і величину інтенсивності ортогоналізуючого псевдопотенціала, який використовують з метою моделювання впливу частково заборонених і наддозволених станів на розсіяння легких ядер з надлишком нейтронів.

## РОЗДІЛ 3

### Трикластерні системи

#### **3.1 Як принцип Паулі визначає тип розпаду трикластерних систем**

**3.1.1 Вступ** Протягом останніх років надважкий ізотоп водню  ${}^5\text{H}$  став об'єктом численних експериментальних [133–137] і теоретичних [138–142] досліджень. Переважна більшість цих досліджень ставила за мету знаходження енергії і ширини резонансних станів в ядрі  ${}^5\text{H}$ . На жаль, навіть для основного стану  ${}^5\text{H}$  експериментальні значення енергії та ширини суттєво різняться і становлять від  $E_R = 1.8 \pm 0.1$  MeВ з  $\Gamma \leq 0.5$  MeВ [134] до  $E_R = 5.5 \pm 0.2$  MeВ з  $\Gamma = 5.4 \pm 0.5$  MeВ [137]. Детальне обговорення наявних експериментальних даних дано в роботі [143] з висновком, що важко знайти несуперечливий сценарій для всіх експериментальних даних. Теоретичні передбачення також відрізняються: в роботах [140–142] резонанс  $J^\pi = 1/2^+$  спостерігався при  $E_R \simeq 1.5$  MeВ, в той час як в роботах [138, 139] майже вдвічі більша енергія була отримана. Що стосується моделі, то найбільш популярні підходи розглядають ядро  ${}^5\text{H}$  як трикластерну систему, що складається з тритона і двох нейtronів. Таке наближення ґрунтуються на факті, що енергія зв'язку  ${}^3\text{H}$  лише 8.48 MeВ [144], тоді як підсистеми  ${}^2\text{n}$  і  ${}^4\text{H}$  є незв'язаними. В різних типах ядерних реакцій було експериментально показано, що основний стан ядра  ${}^4\text{H}$  нуклонно нестабільний. Згідно з компіляцією [144], спектр ядра  ${}^4\text{H}$  включає чотири широких резонансних стани на інтервалі енергій 3–6 MeВ над порогом  ${}^3\text{H} + n$ . Проте енергії та ширини цих станів не є чітко встановлені і нещодавній експериментальний

аналіз [137, 145] припускає, що вони можуть бути меншими. В роботі [137] основний стан  $2^-$  ядра  $^4\text{H}$  було знайдено при енергії  $E = 1.6 \pm 0.1$  МeВ, в той час як в роботі [144] доловідали про енергію  $3.19 \pm 5.42$  МeВ для цього стану.

В основному, різні трикластерні моделі поділяються на дві групи – макроскопічні і мікроскопічні. В макроскопічних моделях кластери розглядаються як безструктурні частинки, а кластер-кластерна взаємодія описується деякими локальними потенціалами, які підганяються так, щоб відтворити дані щодо кластер-кластерних систем. Що ж стосується принципу Паулі, то він зазвичай симулюється або додатковим потенціалом відштовхування між кластерами або ортогоналізуючим псевдопотенціалом, що містить оператори проектування на заборонені стани. Перший підхід був використаний в роботах [138, 141], де блокування заборонених принципом Паулі станів було реалізовано за допомогою введення відштовхувального кору в  $s$ -хвилі  $^3\text{H}$ -нейтронного потенціалу. Проте такий вибір відштовхувального потенціалу вкрай неоднозначний і в рамках такого наближення не гарантується повного і акуратного усунення заборонених станів. Більш того, макроскопічна трикластерна модель ґрунтуються на припущеннях, що на кластер-кластерну взаємодію не впливає присутність третього кластера, хоча це й не завжди так. Що стосується усунення заборонених принципом Паулі станів за допомогою ортогоналізуючого псевдопотенціалу [146], це може привести до виключення деяких дозволених принципом Паулі станів. Наприклад, в роботі було показано, що деякі із станів системи  $3\alpha$ , отримані в рамках вищезгаданого метода, можуть розглядатись як зайві, коли вони ними не є. Більше того, останні стани відповідають найбільш важливим оболонковим конфігураціям ядра  $^{12}\text{C}$ . Отже, простір дозволених принципом Паулі станів має бути акуратно визначенім, щоб не виключити домінуючі компоненти, потрібні для реалістичного опису трикластерної системи. З цією метою можна визначити заборонені принципом Паулі стани за допомогою хвильових функцій гармонічного осцилятора мікроскопічної

двокластерної підсистеми, як було запропоновано в роботі [147]. Ця ідея базувалась на гіпотезі, що антисиметрична трикластерна хвильова функція має бути ортогональна забороненим станам будь-якої двокластерної підсистеми [148]. Складається враження, що цей метод добре справляється з завданням акуратного усунення заборонених принципом Паулі станів трикластерної системи. Проте він не дозволяє розрізнати дозволені принципом Паулі функції, що відносяться до того самого  $SU(3)$ -мультиплету, тобто добре відома проблема  $SU(3)$ -виродження трикластерних станів не може бути розв'язана в рамках такого підходу. Більш того, усунення заборонених принципом Паулі станів не вичерпує всіх обмінних ефектів. Суттєва частина таких ефектів має безпосередній стосунок до власних значень оператора антисиметризації. Останні власні значення не ідентичні і визначають імовірність реалізації відповідних дозволених базисних станів в хвильовій функції кластерної системи. Включення власних значень оператора антисиметризації в рівняння Шредінгера приводить до зміни кінетичної енергії відносного руху кластерів, коли вони наближаються один до одного. Відповідно, кластери відчувають ефективне відштовхування чи притягування, що виникає з оператора кінетичної енергії, модифікованого принципом Паулі [8]. Така ефективна взаємодія суттєво впливає на динаміку кластер-кластерної взаємодії і може викликати резонансну поведінку фази розсіяння чи навіть зв'язаний стан в ядерній компаунд-системі [9]. Як було показано в роботах [8, 9], найбільші власні значення відповідають тим базисним станам, які домінують в станах дискретного спектру бінарної кластерної системи і в станах неперервного спектру малої надпорогової енергії. Також в роботі [10] спостерігалось, що імовірність присутності певної кластерної конфігурації в найнижчій дозволеній функції бінарної кластерної системи пропорційна власному значенню ізольованої кластерної конфігурації. Отже, власні значення дозволених принципом Паулі станів містять багато інформації про компаунд-систему, що складається з кластерів. В той же час, власні значення, разом з відповідними дозволеними принципом Паулі

лі станами, залежать лише від вибраних внутрішніх функцій кластерів, а не від кластер-кластерного потенціалу і т.ін. Наскільки нам відомо, аналіз структури власних функцій оператора антисиметризації і поведінка його власних значень ніколи раніше не проводився для трикластерних систем, хоча ми віримо, що він міг би допомогти встановити деякі важливі закономірності, яким підлягають трикластерні розпади ядер, що складаються з  $s$ -кластерів.

Головна трудність у вивченні резонансів трикластерних систем полягає в формулюванні правильних асимптотичних граничних умов для хвильової функції у континуумі. Такі граничні умови мають забезпечити неперервний перехід від області малих міжкластерних відстаней, де принцип Паулі дуже важливий, до асимпотичної області, де формуються елементи матриці розсіяння. Серед доступних наразі мікроскопічних досліджень ядра  $^5\text{H}$  [139, 140, 142], хвильова функція станів розсіяння в явному вигляді залучалась лише в роботі [142]. В роботі [139] метод аналітичного продовження константи зв'язку використовувався для дослідження резонансних станів в ядрі  $^5\text{H}$ , в той час як в роботі [140] було застосовано метод комплексного масштабування з тією самою метою. Слід відзначити, що хоча автори роботи [142] проводили розрахунки в рамках тієї ж моделі, що і ми, а саме, в рамках АВМРГ, наші підходи відрізняються кількома аспектами. Щоб класифікувати трикластерні стани і перерахувати канали трикластерного континууму, в роботі [142] використовувались гіперсферичні гармоніки, в той час як ми визначаємо дозволені принципом Паулі стани гармонічного осцилятора в просторі Фока-Баргманна і класифікуємо їх за допомогою індексів SU(3)-симетрії. Останні здаються більш підходящими, оскільки оператор Казимира другого порядку групи SU(3) комутує з оператором перестановки нуклонних координат. Отже, індекси SU(3)-симетрії природнім чином з'являються в якості квантових чисел власних функцій оператора антисиметризації. Гіpermомент, натомість, не може служити квантовим числом дозволених принципом Паулі базисних функцій, оскільки

принцип Паулі змішує стани з різними значеннями гіпер момента. Отже, обмеження на максимальне значення гіпер момента  $K$ , яке фігурує в розрахунках  $K \leq K_{max}$ , приводить до псування дозволених принципом Паулі базисних функцій, що відповідають числу осциляторних квантів  $\nu > K_{max}$ , і цей явище підсилюється із збільшенням  $\nu$ . На підтримку цього висновку в роботі [149] зазначалось, що акуратний опис трикластерної асимптотики потребує базису з великими значеннями гіпер момента.

В цьому підрозділі показано, що правильні граничні умови можна знайти, залучаючи повний базис дозволених принципом Паулі станів гармонічного осцилятора (класифікованих за допомогою індексів SU(3)-симетрії і визначених в просторі Фока-Баргманна) разом з їх власними значеннями. Асимптотична поведінка базисних функцій, що задовольняють вимоги принципу Паулі, вказує на можливі канали розпаду трикластерного ядра і дозволяє визначити найбільш важливі канали розпаду. Така асимптотична поведінка відповідає скоріше послідовному розпаду трикластерної системи, ніж так званому “демократичному розпаду”, що асоціюється з гіперсферичними гармоніками, які широко використовуються для опису трикластерних систем (див. роботи [138, 141, 142]).

В пункті 3.1.2 обговорюється структура ядра нормування ряду трикластерних систем, що складаються з  $s$ -кластера і двох нейtronів. Пункт 3.2.2 присвячено аналізу власних значень і власних функцій ядра нормування систем  ${}^A\mathbf{X} = {}^{A-2}\mathbf{X} + n + n$ , ( $A \leq 6$ ). Асимптотична поведінка коефіцієнтів розкладу хвильової функції неперервного спектру трикластерних систем по базису SU(3) встановлюється в пункті 3.2.3. В пункті 3.2.4 дозволені принципом Паулі стани системи  ${}^5\mathbf{H} = {}^3\mathbf{H} + n + n$  детально розглядаються. Найбільш важливі канали розпаду ядра  ${}^5\mathbf{H}$  визначено і проілюстровано результатами числових розрахунків. Висновки наведені в пункті 3.2.5.

### 3.1.2 Теоретична модель і ядро нормування

Згідно з методом резонуючих груп, ми припускаємо, що ядерні системи, які ми вивчаємо в цьому розділі, складаються з трьох кластерів. Хвильова функція МРГ

шукається у вигляді антисиметризованого добутку внутрішніх хвильових функцій кластерів та хвильової функції їх відносного руху. Як і в попередніх розділах, найпростіші функції трансляційно-інваріантної моделі оболонок вибрані за внутрішні хвильові функції кластерів. Хвильову функцію відносного руху кластерів, яка залежить від двох векторів Якобі розглядуваної трикластерної системи знаходять в результаті розв'язку інтегро-диференційного рівняння, яке отримують після підстановки хвильової функції МРГ в рівняння Шредінгера і інтегрування по одночастинкових координатах. Інтегро-диференційне рівняння зводиться до системи лінійних рівнянь за допомогою розкладу хвильової функції відносного руху кластерів по повному базису дозволених принципом Паулі станів гармонічного осцилятора згідно з АВМРГ. Як і в попередніх розділах, всі розрахунки проводяться в просторі Фока-Баргманна, де базисні функції мають особливо простий вигляд і виражаються через степені комплексних векторів. Таким чином, хвильові функції в дискретному представленні зводяться до степеневих рядів з нескінченим радіусом збіжності. Справедливість цього твердження ґрунтується на тому, що всі хвильові функції в просторі Фока-Баргманна є цілими та аналітичними і, отже, ряди цих функцій по степенях комплексних векторів збігаються в будь-якій скінченній області комплексного простору.

Перш за все АВМРГ потребує побудови повного базису дозволених принципом Паулі станів гармонічного осцилятора та їх класифікації. Це досягається шляхом розв'язку задачі на власні функції та власні значення ядра нормування, тобто інтеграла перекриття двох детермінантів Слейтера, складеного з одночастинкових орбіталей:

$$I(\{\mathbf{S}_j\}, \{\mathbf{R}_j\}) = \int \Phi(\{\mathbf{S}_j\}, \mathbf{r}) \Phi(\{\mathbf{R}_j\}, \mathbf{r}) d\tau. \quad (3.1)$$

Тут інтегрування відбувається по всіх одночастинкових векторах,  $\{\mathbf{R}_j\}$  (або  $\{\mathbf{S}_j\}$ ) позначає набір трьох комплексних векторів, що визначають положення центру мас кластерів в просторі Фока-Баргманна. За просторові одночастинкові хвильові функції ми вибрали модифіковані орбіталі Блоха-

Брінка:

$$\phi(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{\pi^{3/4}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{r}_i^2 + \sqrt{2}(\mathbf{R}_j \cdot \mathbf{r}_i) - \frac{1}{2}\mathbf{R}_j^2\right), \quad i \in A_j,$$

де  $A_j$  – кількість нуклонів  $j$ -го кластера. Кожна з цих орбіталей є власною функцією оператора координати  $\hat{\mathbf{r}}_i$ :

$$\hat{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \mathbf{R}_j + \vec{\nabla}_{\mathbf{R}_j} \right); \quad \mathbf{R}_j = \frac{\vec{\xi}_j + i\vec{\eta}_j}{\sqrt{2}}.$$

визначеного в просторі Фока-Баргманна. Він відповідає власному значенню  $\mathbf{r}_i$ .  $\vec{\xi}_j$  і  $\vec{\eta}_j$  – вектори координати та імпульсу, відповідно. В той же час, орбіталь  $\phi(\mathbf{r}_i)$  є ядром інтегрального перетворення від координатного представлення до представлення Фока-Баргманна і твірною функцією для базису гармонічного осцилятора [150]. Рух центру мас усувається переходом від генераторних параметрів  $\{\mathbf{R}_j\}$  до векторів Якобі:

$$\mathbf{R}_{cm} = \frac{1}{\sqrt{A}} (A_1 \mathbf{R}_1 + A_2 \mathbf{R}_2 + A_3 \mathbf{R}_3),$$

$$\mathbf{a} = \sqrt{\frac{A_1(A_2 + A_3)}{A}} \left( \mathbf{R}_1 - \frac{A_2 \mathbf{R}_2 + A_3 \mathbf{R}_3}{A_2 + A_3} \right), \quad \mathbf{b} = \sqrt{\frac{A_2 A_3}{A_2 + A_3}} (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3).$$

В результаті інтеграл перекриття двох детермінантів Слейтера, утворених з модифікованих орбіталей Блоха-Брінка, генерує повний базис дозволених принципом Паулі станів гармонічного осцилятора разом з їх власними значеннями:

$$I(\{\mathbf{S}_j\}, \{\mathbf{R}_j\}) \Rightarrow I(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}) = \sum_n \Lambda_n \Psi_n(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \Psi_n(\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}).$$

Функції  $\Psi_n$  визначені в просторі Фока-Баргманна і ортонормовані з мірою Баргманна  $d\mu_B$ :

$$d\mu_B = \exp\{-(\mathbf{a}\tilde{\mathbf{a}})\} \frac{d\vec{\xi}_a d\vec{\eta}_a}{(2\pi)^3} \exp\{-(\mathbf{b}\tilde{\mathbf{b}})\} \frac{d\vec{\xi}_b d\vec{\eta}_b}{(2\pi)^3},$$

$n$  позначає набір квантових чисел базисних функцій. Квантові числа і структура функцій  $\Psi_n$  буде обговорюватись в наступному пункті.

Далі дослідимо явні вирази для ядер нормування тих трикластерних систем, які складаються з  $s$ -кластера і двох нейтронів, такі як  ${}^6\text{He}={}^4\text{He}+n+n$ ,  ${}^5\text{H}={}^3\text{H}+n+n$ ,  ${}^4n={}^2n+n+n$ ,  ${}^3n=n+n+n$ . Надалі такі системи будуть позначатись  ${}^A\text{X}={}^{A-2}\text{X}+n+n$ ,  $A \leq 6$ . Ядра нормування для всіх цих систем можна записати в загальному вигляді:

$$\begin{aligned} I_{S_{(nn)}=0} = & \exp(\mathbf{a}\tilde{\mathbf{a}}) \cosh(\mathbf{b}\tilde{\mathbf{b}}) - \exp(\mathbf{a}_+\tilde{\mathbf{a}}) \cosh(\mathbf{b}_+\tilde{\mathbf{b}}) - \\ & - \exp(\mathbf{a}_-\tilde{\mathbf{a}}) \cosh(\mathbf{b}_-\tilde{\mathbf{b}}) + \exp\{(\mathbf{a}_0\tilde{\mathbf{a}})\}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} I_{S_{(nn)}=1} = & \exp(\mathbf{a}\tilde{\mathbf{a}}) \sinh(\mathbf{b}\tilde{\mathbf{b}}) - \exp(\mathbf{a}_+\tilde{\mathbf{a}}) \sinh(\mathbf{b}_+\tilde{\mathbf{b}}) - \\ & - \exp(\mathbf{a}_-\tilde{\mathbf{a}}) \sinh(\mathbf{b}_-\tilde{\mathbf{b}}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Тут  $S_{(nn)}$  позначає спін двонейтронної підсистеми. При цьому розглядається так зване "Т-дерево" векторів Якобі, тобто вектор  $\mathbf{b}$  описує відносну відстань між двома нейтронами, тоді як вектор  $\mathbf{a}$  позначає відстань від третього кластера до центру мас двонейтронної підсистеми. Зауважимо, що  $I_{S_{(nn)}=0}$  симетричний щодо перестановки двох валентних нейтронів, в той час як  $I_{S_{(nn)}=1}$  є антисиметричним, як і має бути.

Кожен доданок в рівняннях (3.2) і (3.3) відповідає певній перестановці ідентичних нуклонів. Перша експонента асоціюється з тотожною перестановою, друга і третя експоненти виникають в результаті перестановки валентного нейтрона і нейтрона, що належить  $s$ -кластеру, тоді як останній доданок відповідає одночасній перестановці двох пар тотожніх нейтронів:

$$\mathbf{a}_\pm = \left(1 - \frac{t}{2}\right) \mathbf{a} \pm \frac{1}{2}\sqrt{t} \mathbf{b}, \quad \mathbf{b}_\pm = \pm \frac{1}{2}\sqrt{t} \mathbf{a} + \frac{1}{2} \mathbf{b}, \quad \mathbf{a}_0 = (1-t) \mathbf{a}. \quad (3.4)$$

Нарешті, параметр  $t$  додатній і дорівнює квадрату тангенса кута повороту від одного дерева Якобі до іншого.  $t$  набуває значення  $3/2$  для ядра  ${}^6\text{He}$ ,  $5/3$  для  ${}^5\text{H}$ ,  $t = 2$  для тетранейтрона і  $t = 3$  для системи трьох нейтронів. Легко зауважити, що параметр  $t$  зменшується із збільшенням кількості нуклонів в  $s$ -кластері.

Власні значення ядра нормування не залежать від вибору дерева Якобі, а от структура власних функцій залежить. Оскільки дозволені базисні

стани системи  ${}^A\mathbf{X} = {}^{A-2}\mathbf{X} + n + n$  набувають найпростішого вигляду в "Т-дереві", саме це дерево найбільше підходить для побудови і аналізу цих станів.

**3.1.3 Власні значення і власні функції ядра нормування систем**  ${}^A\mathbf{X} = {}^{A-2}\mathbf{X} + n + n$ . Обговоримо набір квантових чисел дозволених принципом Паулі станів  $\Psi_n(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Для трикластерних систем, які тут розглядаються,  $n$  включає число осциляторних квантів  $\nu$ , індекси  $(\lambda, \mu)$   $SU(3)$ -симетрії, додаткове квантове число  $k$ , якщо є кілька різних  $(\lambda, \mu)$  мультиплетів, орбіタルний момент  $L$  і його проекція  $M$  і, якщо необхідно, ще одне додаткове квантове число  $\alpha_L$ . Останнє потрібно, щоб розрізняти стани з одинаковим  $L$  в даному  $(\lambda, \mu)$  мультиплеті. Спін двонейтронної підсистеми  $S_{(nn)}$  також є інтегромом руху, поки вимкнена спін-орбіタルна взаємодія. Добре відомо, що діагоналізація ядра нормування вимагає, щоб квантовими числами базисних функцій були індекси  $(\lambda, \mu)$  незвідних представлень групи  $SU(3)$  [92]. Власні значення ядра нормування залежать від повного числа осциляторних квантів і  $(\lambda, \mu)$ , і не залежать від орбіタルних моментів базисних станів. Ми обмежимось розглядом станів нульового орбіタルного моменту  $L = 0$  і додатної парності. Отже, число осциляторних квантів має бути парним і рівним  $2\nu$ , квантові числа  $L$  і  $M$  будемо опускати.

За визначенням, стани  $\Psi_n(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  є власними функціями оператора антисиметризації  $\hat{A}$ :

$$\hat{A}\Psi_{(2\nu-4\mu, 2\mu)_k}^{S_{(nn)}} = \Lambda_{(2\nu-4\mu, 2\mu)_k}^{S_{(nn)}} \Psi_{(2\nu-4\mu, 2\mu)_k}^{S_{(nn)}}.$$

В двокластерних системах власні значення оператора антисиметризації прагнуть до одиниці при  $\nu \rightarrow \infty$  і їх відхилення від одиниці завдяки принципу Паулі. Натомість, власні значення трикластерних систем прагнуть до власних значень двокластерних підсистем із збільшенням числа осциляторних квантів  $\nu$ :

$$\lim_{\nu-2\mu \rightarrow \infty} \Lambda_{(2\nu-4\mu, 2\mu)_k}^{{}^A\mathbf{X}={}^{A-2}\mathbf{X}+n+n} \rightarrow \lambda_k^{{}^{A-1}\mathbf{X}={}^{A-2}\mathbf{X}+n}.$$

Збіг власних значень трикластерних ядер нормування з власними значеннями ядер нормування двокластерних підсистем в границі великого числа квантів відзначався в роботі [151], де розглядалися системи  $3\alpha$  і  $^{16}\text{O}+2\alpha$ . Проте там не було встановлено ніякого зв'язку з додатковим квантовим числом  $k$ , яке позначає стани з однаковими індексами  $\text{SU}(3)$ -симетрії. Це питання буде детально досліджено в наступному пункті. Зараз продовжимо обговорювати дозволені принципом Паулі базисні функції  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{S_{(nn)}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

В просторі Фока-Баргманна останні функції є суперпозиціями власних функцій оператора Казиміра другого порядку:

$$\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{S_{(nn)}=0}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{m=\mu}^{\nu-\mu} D_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{2m-2\mu} \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{2m-2\mu}(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

$$\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{S_{(nn)}=1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{m=\mu}^{\nu-\mu-1} D_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{2m-2\mu+1} \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{2m-2\mu+1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

Функції  $\psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{2m-2\mu}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  та  $\psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{2m-2\mu+1}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  відповідають одному й тому ж числу квантів  $2\nu$ , але відрізняються числом квантів вздовж векторів  $\mathbf{a}$  і  $\mathbf{b}$ . З цієї причини трикластерні стани завжди вироджені навіть у тому випадку, якщо трикластерна система складається лише з  $s$ -кластерів, і ступінь  $\text{SU}(3)$ -виродження сильно зростає із збільшенням числа квантів. В роботі [106] було отримано, що власні функції оператора Казимира, що характеризуються фіксованими ступенями векторів  $\mathbf{a}$  і  $\mathbf{b}$  виражуються через гіпергеометричні функції  ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; Z)$  змінної

$$Z = \frac{[\mathbf{ab}]^2}{\mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2}.$$

А саме,

$$\begin{aligned} \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{2m-2\mu}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= N_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{2m-2\mu} [\mathbf{ab}]^{2\mu} \mathbf{a}^{2\nu-2m-2\mu} \mathbf{b}^{2m-2\mu} \times \\ &\quad \times {}_2F_1 \left( -\nu + m + \mu, -m + \mu; -\nu + 2\mu + \frac{1}{2}; Z \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{2m-2\mu+1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= N_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{2m-2\mu+1} [\mathbf{ab}]^{2\mu} (\mathbf{ab}) \mathbf{a}^{2\nu-2m-2\mu-2} \mathbf{b}^{2m-2\mu} \times \\ &\quad \times {}_2F_1 \left( -\nu + m + \mu + 1, -m + \mu; -\nu + 2\mu + \frac{1}{2}; Z \right). \end{aligned}$$

Тут  $N_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{2m-2\mu}$  and  $N_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{2m-2\mu+1}$  – нормувальні коефіцієнти відповідних базисних функцій.

Ядро нормування  $I_{S_{(nn)}}$  можна записати у вигляді суми парціальних ядер нормування з певним числом квантів  $2\nu$ :

$$I_{S_{(nn)}=0} = \sum_{\nu=0}^{\infty} I_{S_{(nn)}=0}^{2\nu}, \quad I_{S_{(nn)}=1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} I_{S_{(nn)}=1}^{2\nu}.$$

В представленні Фока-Баргманна, при даному  $\nu$  ядро нормування  $I_{S_{(nn)}}^{2\nu}$  завжди можна представити у вигляді суми ядер нормування  $I_{S_{(nn)}}^{(\lambda,\mu)}$  з певною  $SU(3)$ -симетрією. Ми будемо мати справу з відповідною частиною ядра нормування,  $I_{S_{(nn)}}^{(2\nu-4\mu,2\mu)}$ , і запишемо його у вигляді:

$$\begin{aligned} I_{S_{(nn)}=0}^{(2\nu-4\mu,2\mu)} &= \sum_{m=\mu}^{\nu-\mu} \sum_{\tilde{m}=0}^{\nu-m-\mu} \langle 2\nu, 2m - 2\mu | 2\nu, 2m - 2\mu + 2\tilde{m} \rangle \times \\ &\quad \times \left( \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{2m-2\mu} \tilde{\psi}_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{2m-2\mu+2\tilde{m}} + \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{2m-2\mu+2\tilde{m}} \tilde{\psi}_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{2m-2\mu} \right), \\ I_{S_{(nn)}=1}^{(2\nu-4\mu,2\mu)} &= \sum_{m=\mu}^{\nu-\mu-1} \sum_{\tilde{m}=0}^{\nu-m-\mu-1} \langle 2\nu, 2m + 1 - 2\mu | 2\nu, 2m + 1 - 2\mu + 2\tilde{m} \rangle \times \\ &\quad \times \left( \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{2m+1-2\mu} \tilde{\psi}_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{2m+1-2\mu+2\tilde{m}} + \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{2m+1-2\mu+2\tilde{m}} \tilde{\psi}_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{2m+1-2\mu} \right), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \langle 2\nu, 2m - 2\mu | 2\nu, 2m - 2\mu + 2\tilde{m} \rangle &= \delta_{\tilde{m},0} (1 + \delta_{m,0} \delta_{\mu,0} (1-t)^{2\nu}) - \\ &- \frac{2t^{\tilde{m}}}{4^{\nu-\mu}} \left( \frac{t-1}{t-2} \right)^{2\mu} (t-2)^{2(\nu-m-\tilde{m})} \sqrt{\frac{(2\nu-2m-2\mu)!(2m+2\tilde{m}-2\mu)!}{(2\nu-2m-2\tilde{m}-2\mu)!(2m-2\mu)!}} \times \\ &\quad \times {}_2F_1 \left( -2\nu + 2m + 2\mu + 2\tilde{m}, -2m + 2\mu; 2\tilde{m} + 1; \frac{t}{2-t} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle 2\nu, 2m + 1 - 2\mu | 2\nu, 2m + 1 - 2\mu + 2\tilde{m} \rangle &= \delta_{\tilde{m},0} + \\ &+ \frac{2t^{\tilde{m}}}{4^{\nu-\mu}} \left( \frac{t-1}{t-2} \right)^{2\mu} (t-2)^{2(\nu-m-\tilde{m})-1} \sqrt{\frac{(2\nu-2m-2\mu-1)!(2m+2\tilde{m}+1-2\mu)!}{(2\nu-2m-2\tilde{m}-1-2\mu)!(2m+1-2\mu)!}} \times \\ &\quad \times {}_2F_1 \left( -2\nu + 2m + 2\mu + 1 + 2\tilde{m}, -2m - 1 + 2\mu; 2\tilde{m} + 1; \frac{t}{2-t} \right). \end{aligned}$$

Очевидно, дозволені принципом Паулі функції  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{S_{(nn)}}$  можна знайти за допомогою діагоналізації ядер нормування  $I_{S_{(nn)}}^{(2\nu-4\mu,2\mu)}$  при заданому  $\nu$ . Існує  $\nu - 2\mu + 1$  різних станів, що мають SU(3)-симетрію  $(2\nu - 4\mu, 2\mu)$ , але деякі з них відповідають нульовим власним значенням і отже є забороненими принципом Паулі. Кількість останніх функцій залежить від системи, що розглядається. Отже, розв'язуючи задачу на власні функції та власні значення ядра нормування  $I(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}})$  в просторі Фока-Баргманна, ми приходимо до висновку, що всі дозволені принципом Паулі і заборонені функції систем  ${}^A\mathbf{X} = {}^{A-2}\mathbf{X} + n + n$  виражуються через поліноми дискретної змінної.

Коли власні значення  $\Lambda_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{{}^A\mathbf{X}={}^{A-2}\mathbf{X}+n+n}$  ядра нормування наближаються до граничних значень  $\lambda_k^{{}^{A-1}\mathbf{X}={}^{A-2}\mathbf{X}+n}$ , відповідні власні вектори  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}$  набувають простого аналітичного вигляду:

$$\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{S_{(nn)}=0}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{k-2\mu}(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) + \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{k-2\mu}(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) \right), \quad (3.5)$$

$$\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{S_{(nn)}=1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{k-2\mu}(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) - \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{k-2\mu}(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) \right). \quad (3.6)$$

Така асимптотична поведінка має місце за умови, що  $\nu \gg k$ , але як буде показано на прикладі системи  ${}^5\text{H}$ , виконання умови  $\nu \geq k + 5$  є цілком достатнім. Зауважимо, що  $k$  є натуральним цілим числом, таким, що  $2\mu \leq k \leq \nu$ .

Тут  $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1$  і  $\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2$  – вектори Якобі так званого "Y-дерева", де вектор  $\mathbf{b}_1$  ( $\mathbf{b}_2$ ) описує відносну відстань між одним з валентних нейтронів і кластером  ${}^{A-2}\mathbf{X}$ . Відповідно, вектор  $\mathbf{a}_1$  ( $\mathbf{a}_2$ ) визначає положення третього нейтрона щодо центру мас підсистеми  ${}^{A-1}\mathbf{X}$ . Вектори Якобі "T-дерева" пов'язані з векторами Якобі "Y-дерева" унітарним перетворенням:

$$\mathbf{a} = \cos \alpha \mathbf{a}_{1,2} + \sin \alpha \mathbf{b}_{1,2}; \mathbf{b} = \mp \sin \alpha \mathbf{a}_{1,2} \pm \cos \alpha \mathbf{b}_{1,2}.$$

Природно, функція  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{S_{(nn)}=0}$  симетрична щодо заміни векторів  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)$  і  $(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)$ , тоді як  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{S_{(nn)}=1}$  антисиметрична, оскільки така операція відповідає перестановці валентних нейтронів.

Важлива властивість асимптотичних співвідношень (3.5) і (3.6) полягає в тому, що в границі  $\nu \gg k$  коефіцієнти розкладу  $D_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{2m-2\mu}, D_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{2m-2\mu+1}$  можна співставити поліномам Кравчука дискретної змінної [152]:

$$D_{(2n-4\mu,2\mu)_k}^{2m-2\mu} \rightarrow \sqrt{2} \mathcal{K}_{k-2\mu}^{(p)}(2m-2\mu) \frac{\sqrt{\rho_{2m-2\mu}}}{d_{k-2\mu}},$$

$$D_{(2n-4\mu,2\mu)_k}^{2m-2\mu+1} \rightarrow \sqrt{2} \mathcal{K}_{k-2\mu}^{(p)}(2m-2\mu+1) \frac{\sqrt{\rho_{2m-2\mu+1}}}{d_{k-2\mu}}, \quad p = \sin^2 \alpha.$$

Поліноми Кравчука  $\mathcal{K}_{k-2\mu}^{(p)}(m-2\mu)$  визначені на інтервалі  $2\mu \leq m \leq 2\nu-2\mu$  і ортогональні з ваговою функцією  $\rho_{m-2\mu}$  і нормою  $d_{k-2\mu}$

$$\rho_m = \frac{\nu!}{m!(\nu-m)!} p^m q^{\nu-m}, \quad d_k = \sqrt{\frac{\nu!}{k!(\nu-k)!}} (pq)^{k/2}, \quad q = 1 - p,$$

можна виразити через гіпергеометричну функцію:

$$\mathcal{K}_k^{(p)}(m) \cdot \frac{\sqrt{\rho_m}}{d_k} = \frac{(-1)^k \nu!}{\sqrt{(\nu-k)!(\nu-m)!m!k!}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{m+k}{2}} q^{\nu/2} {}_2F_1\left(-k, -m; -\nu; \frac{1}{p}\right)$$

Тут  $\nu, m$  і  $k$  – натуральні цілі числа,  $0 \leq k \leq \nu$ .

Співвідношення ортогональності для поліномів Кравчука виглядає так:

$$\sum_{m=0}^{\nu} \bar{\mathcal{K}}_k^{(p)}(m) \bar{\mathcal{K}}_{\tilde{k}}^{(p)}(m) = \delta_{k,\tilde{k}}, \quad \sum_{k=0}^{\nu} \bar{\mathcal{K}}_k^{(p)}(m) \bar{\mathcal{K}}_k^{(p)}(\tilde{m}) = \delta_{m,\tilde{m}}.$$

Співвідношення симетрії можна записати в наступному вигляді:

$$(-1)^{m+k} \mathcal{K}_k^{(p)}(m) \cdot \frac{\sqrt{\rho_m}}{d_k} = \mathcal{K}_{\nu-k}^{(p)}(\nu-m) \cdot \frac{\sqrt{\rho_{\nu-m}}}{d_{\nu-k}}.$$

Поліноми Кравчука мають граничне значення

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{K}_k^{(p)}(m) \frac{\sqrt{\rho_m}}{d_k} = \frac{1}{\sqrt{2^k} k! \sqrt{\pi 2pq\nu}} H_k \left( \frac{m-p\nu}{\sqrt{2pq\nu}} \right) \exp \left\{ -\frac{(m-p\nu)^2}{4pq\nu} \right\}, \quad (3.7)$$

де  $H_k(x)$  – поліноми Ерміта. Тобто поліноми Кравчука є дискретним аналогом поліномів Ерміта.

Отже, порядок поліномів Кравчука служить додатковим квантовим числом для  $SU(3)$ -вироджених трикластерних станів. Дозволені принципом Паулі базисні стани  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{S_{nn}}$  можна об'єднати в гілки і сімейства, де всі стани певної гілки мають одинаковий індекс симетрії  $\mu$  і сильно перекриваються з відповідною асимптотичною функцією (3.5) чи (3.6), але відрізняються величиною першого індексу  $\lambda$ . Власні значення, що відносяться до даної гілки прагнуть до того самого граничного значення  $\lambda_k^{A-1X}$  із збільшенням числа квантів. Гілки, що мають спільні граничні значення, об'єднуються в сімейства власних станів, які, таким чином, повністю визначаються порядком  $k$  відповідних поліномів Кравчука.

Підтвердження про важливість певного сімейства дозволених принципом Паулі станів можна знайти, аналізуючи поведінку їх власних значень із зростанням числа осциляторних квантів  $\nu$ . У вступі згадувалось, що зміна кінетичної енергії відносного руху кластерів під впливом принципу Паулі спричиняє ефективну взаємодію ядер із наближенням їх один до одного. Як показано в роботах [8, 9], характер такої взаємодії в двокластерних системах визначається поведінкою власних значень оператора антисиметризації. Вони невід'ємні, оскільки вони пропорційні імовірності реалізації відповідного дозволеного базисного стану і прагнуть до одиниці із збільшенням відстані між ядрами. У випадку, коли власні значення оператора антисиметризації наближаються до одиниці знизу, ефективна взаємодія є відштовхувальною. Якщо ж власні значення прагнуть до одиниці згори, виникає притягання, викликане принципом Паулі. Як вказувалось раніше, власні значення  $\Lambda_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{AX=A-2X+n+n}$  трикластерного ядра нормування наближаються до власних значень двокластерної підсистеми  $\lambda_k^{A-1X}$  із збільшенням числа квантів  $\nu$ . Тому природно очікувати, що сімейства станів з  $\Lambda_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k} < \lambda_k$  будуть пригнічені при малих  $\nu$ , що може розглядатись як дія ефективних сил відштовхування на малих міжкластерних відстанях. Натомість, сімейства, які характеризуються  $\Lambda_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k} > \lambda_k$  мають отримати перевагу при малих  $\nu$ , що можна розглядати як ефективне притягання. Справедливість цих на-

ближень для ядра  ${}^5\text{H}$  буде продемонстрована в пункті 3.2.4.

Варто зауважити, що ефективна взаємодія, спричинена зміною в кінетичній енергії відносного руху кластерів під дією оператора антисиметризації виникає лише між об'єктами, чия внутрішня енергія може змінюватись із наближенням їх один до одного<sup>1</sup>. Отже, така взаємодія не може виникнути між двома точковими нуклонами. З цієї причини, дозволені принципом Паулі стани системи  ${}^3\text{n}=\text{n}+\text{n}+\text{n}$  найбільш імовірно мають асимптотичну поведінку, яка відрізняється від (3.5), (3.6).

**3.1.4 Асимптотичні рівняння для коефіцієнтів розкладу** Ми шукаємо хвильову функцію розглядуваної трикластерної системи у вигляді розкладу по  $\text{SU}(3)$ -базису дозволених принципом Паулі станів

$$\Upsilon_{\kappa(E)}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_n \sqrt{\Lambda_n} C_n^{\kappa(E)} \Psi_n(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (3.8)$$

Коефіцієнти розкладу як для дискретних станів з енергією  $E_\kappa = -\kappa^2/2 < 0$ , так і для станів неперервного спектру  $\{C_n(E)\}$  з енергією  $E > 0$  знаходимо в результаті розв'язку системи лінійних рівнянь

$$\sum_{n'} \langle n | \hat{H} | n' \rangle C_{n'} - E \Lambda_n C_n = 0. \quad (3.9)$$

В роботі [6] ми показали, що для того, щоб встановити асимптотичні граничні умови для коефіцієнтів розкладу двокластерної хвильової функції по базису  $\text{SU}(3)$ , потрібен базис з іншим набором квантових чисел (так званий  $l$ -базис або біосциляторний базис). Стани останнього базису за квантові числа мають орбітальні моменти кластерів та момент їх відносного руху. Рівняння (3.9) для коефіцієнтів розкладу по базису  $\text{SU}(3)$  залишаються зв'язаними навіть в асимптотичній області, тоді як система відповідних рівнянь для біосциляторного базису розв'язується при великому числі квантів збудження. Перехід між двома базисами здійснюється за допомогою матриці унітарного перетворення, яку можна знайти, використовуючи

---

**Примітка 1.** Тут ми маємо на увазі взаємодію ядер, які складаються з нуклонів.

техніку інтегрування в просторі Фока-Баргманна, розвинуту авторами цієї роботи. Проте ядро нормування бінарної кластерної системи має діагональний вигляд лише в представленні базису його власних функцій, тобто в представленні  $SU(3)$ -базису. Унітарне перетворення цього базису руйнує діагональний вигляд ядра нормування через відмінність власних значень різних  $SU(3)$  представлень, чого б не сталося у випадку, коли б всі власні значення були однакові. Природа цього явища полягає в тому, що на відміну від функцій базису  $SU(3)$ , функції біосциляторного базису не є власними функціями оператора антисиметризації і, отже, не є інваріантними по відношенню до перестановки нуклонів. Оператор перестановки змішує базисні функції біосциляторного базису з однаковим числом квантів. Проте в міру того, як число квантів зростає, ступінь змішування зменшується експоненційно і при великому числі осциляторних квантів ядро нормування стає практично діагональним також і в біосциляторному базисі. Отже, в цій області можна визначити асимптотичну поведінку коефіцієнтів розкладу по біосциляторному базисі (вона виражається через функції Ханкеля першого та другого роду та елементи  $S$ -матриці розсіяння) і співставити її коефіцієнтам розкладу по базисі  $SU(3)$ .

На відміну від власних значень двокластерних ядер нормування, власні значення трикластерних ядер залишаються нетотожніми навіть в граници  $\nu \rightarrow \infty$ . Існування різних граничних значень  $\lambda_k$  відображає можливість двом кластерам з трьох бути близько один від одного і далеко від третього кластера. Завдяки цьому унітарне перетворення від базису  $SU(3)$  до іншого можливе лише в межах певного сімейства дозволених принципом Паулі станів. Будь-яке перетворення, яке зачіпає стани, що належать різним сімействам (наприклад, перехід до трикластерних гіперсферичних гармонік), зруйнувало б діагональний вигляд ядра нормування і, отже, було б непідходящим в цьому випадку.

Повертаючись до асимптотики  $SU(3)$ -базисних функцій (3.5),(3.6), варто відзначити, що останні функції мають простий фізичний зміст. Вони

відтворюють відносний рух двокластерної підсистеми  $A^{-1}X$ , що знаходиться в основному чи збудженному стані гармонічного осцилятора, і другий нейtron. Така асимптотична поведінка вказує на можливі канали розпаду трикластерного ядра і дозволяє визначити найбільш важливі з них.

В границі  $\nu \gg k$  замість асимптотичних  $SU(3)$  базисних функцій

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \psi_{(2\nu-4\mu, 2\mu)}^{k-2\mu}(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) \pm \psi_{(2\nu-4\mu, 2\mu)}^{k-2\mu}(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) \right)$$

доцільно використовувати функції біосциляторного базису

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \phi_{2\nu, k}^l(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) \pm \phi_{2\nu, k}^l(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) \right),$$

визначені наступним чином:

$$\phi_{2\nu, k}^l(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = N_{\nu, k}^l \mathbf{a}^{2\nu-k-l} \mathbf{b}^{k-l} (\mathbf{ab})^l \cdot \frac{1}{2^l} \sum_{\tilde{l}=0}^{[l/2]} \frac{(-1)^{\tilde{l}} (2l - 2\tilde{l})!}{\tilde{l}!(l-\tilde{l})!(l-2\tilde{l})!} \frac{\mathbf{a}^{2\tilde{l}} \mathbf{b}^{2\tilde{l}}}{(\mathbf{ab})^{2\tilde{l}}}.$$

Стани цього базису серед квантових чисел мають число квантів  $2\nu$ , орбітальні моменти  $l$  підсистеми  $A^{-1}X$ , що співпадають з орбітальним моментом відносного руху цієї підсистеми і нейтрона<sup>1</sup>.  $N_{\nu, k}^l$  – нормувальний коефіцієнт.

При  $\nu \gg k$  змінні в (3.9) розділяються і остання система рівнянь може бути представлена у вигляді суми двох систем рівнянь. Одна з них описує відносний рух підсистеми  $A^{-1}X$  і нейтрона:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \sqrt{(2\nu - k - l)(2\nu - k + l + 1)} C_{\nu-1, k}^l + \frac{1}{2} \left( 2\nu - k + \frac{3}{2} - 2\tilde{E} \right) C_{\nu, k}^l - \\ & -\frac{1}{4} \sqrt{(2\nu - k - l + 2)(2\nu - k + l + 3)} C_{\nu+1, k}^l = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

а інша характеризує саму підсистему  $A^{-1}X = A^{-2} X + n$ :

$$\begin{aligned} & -\sqrt{\frac{\lambda_{k-2}}{\lambda_k}} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{(k - l)(k + l + 1)} C_{\nu-1, k-2}^l + \frac{1}{2} \left( k + \frac{3}{2} - 2\varepsilon \right) C_{\nu, k}^l - \\ & -\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+2}}} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{(k - l + 2)(k + l + 3)} C_{\nu+1, k+2}^l = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

---

**Примітка 1.** Нагадаємо, що ми розглядаємо в цьому підрозділі лише стани з  $L = 0$ .

Тут ми поклали масу нуклона, сталу Планка і осциляторну довжину рівною 1.

Отже, асимптотично трикластерне рівняння Шредінгера (3.9) можна звести до двочастинкової багатоканальної задачі. Повна енергія  $E$  розподіляється між енергією  $\varepsilon$  двокластерної підсистеми  ${}^{A-1}X$  і енергією  $\tilde{E}$  відносного руху вищезгаданої підсистеми і нейtron таким чином, щоб  $\tilde{E} + \varepsilon = E$ . Зауважимо, що рівняння (3.10) відповідає вільному руху нейтрона і підсистеми  ${}^{A-1}X$ , тоді як матриця рівняння (3.11) містить граничні власні значення  $\lambda_k$  дозволених станів і з цієї причини не ідентичні матриці, що відповідає оператору кінетичної енергії вільного руху кластера  ${}^{A-2}X$  і нейтрона. Інакше кажучи, вона містить деяку ефективну кластер-кластерну взаємодію, що походить з оператора кінетичної енергії, модифікованого принципом Паулі. Саме ця взаємодія спричиняє розпад системи  ${}^A X$  через проміжну стадію  ${}^A X \rightarrow {}^{A-1} X + n \rightarrow {}^{A-2} X + n + n$ . Альтернативний канал розпаду  ${}^A X \rightarrow {}^{A-2} X + {}^2 n \rightarrow {}^{A-2} X + n + n$  менш імовірний, оскільки в цьому випадку рівняння (3.11) описувало б вільний рух системи двох нейтронів. Ніщо не змушує нейтрони бути близько один до одного, в той час як є ефективна взаємодія між  ${}^{A-2}X$  кластером і нейtronом. Включення нуклон-нуклонного потенціалу в розгляд не може якісно змінити ситуацію, оскільки притягання між двома нейтронами. Імовірність каналу розпаду  ${}^5H \rightarrow {}^3H + {}^2n \rightarrow {}^3H + n + n$  в ядрі  ${}^5H$  детально обговорюється в пункті 3.2.4 .

З вищепередованого обговорення випливає, що чим більше сімейств дозволених принципом Паулі станів залишено, тим краще опис підсистеми  ${}^{A-1}X$  і тим менша її енергія  $\varepsilon$ . Врахування недостатньої кількості сімейств призводить до занадто локалізованої підсистеми  ${}^{A-1}X$  і отже, до занадто великої енергії  $\varepsilon$ . Варто відзначити також, що в границі великого числа осциляторних квантів  $\nu$  оператор кінетичної енергії не зв'язує стани, що належать до сімейств, які відповідають парному числу квантів  $k$ , з тими, що характеризуються непарним числом  $k$ . Таке явище має місце тому, що парні і непарні

значення  $k$  відповідають станам підсистеми  $A^{-1}X$  різної парності, яка стає інтегралом руху на великих відстанях між підсистемою  $A^{-1}X$  і нейтроном.

Звичайно, кластер-кластерна взаємодія, що генерується нуклон-нуклонним потенціалом, повинна також брати участь в рівнянні (3.11), забезпечуючи реалістичний опис підсистеми  $A^{-1}X$ . Проте врахування нуклон-нуклонної взаємодії між нуклонами різних кластерів не може змінити структуру дозволених принципом Паулі станів і якісним чином вплинути на асимптотичну поведінку коефіцієнтів розкладу хвильової функції по цих станах.

Диференційні рівняння (3.10) і (3.11) стають рівняннями Бесселя в границі великих  $\nu$  і  $k$ :

$$\left( \frac{d^2}{dy_\nu^2} + \frac{1}{y_\nu} \frac{d}{dy_\nu} + 2\tilde{E} - \frac{(2l+1)^2}{4y_\nu^2} \right) C_k^l(y_\nu) = 0; \quad y_\nu = \sqrt{4\nu - 2k + 3}. \quad (3.12)$$

$$\left( \frac{d^2}{dy_k^2} + \frac{1}{y_k} \frac{d}{dy_k} + 2\varepsilon - \frac{(2l+1)^2}{4y_k^2} \right) C_\nu^l(y_k) = 0; \quad y_k = \sqrt{2k + 3}. \quad (3.13)$$

Отже, асимптотичний вигляд коефіцієнтів розкладу по біосциляторному базисі зручно записати через функції Ханкеля  $H_{l+1/2}^\pm$  і елементи матриці розсіяння. Якщо падаюча хвиля в каналі, що характеризується орбітальним моментом  $l$  і енергією  $E - \varepsilon_i$  відносного руху підсистеми і нейтрона, коефіцієнти розкладу в цьому каналі задовільняють асимптотичне співвідношення

$$C_{\nu,k}^l(E - \varepsilon_i) = H_{l+1/2}^{(-)} \left( \sqrt{2(E - \varepsilon_i)} \sqrt{4\nu - 2k + 3} \right) H_{l+1/2}^{(-)} \left( \sqrt{2\varepsilon_i} \sqrt{2k + 3} \right) - \\ - \sum_{j=1}^{k_{\max}} \mathbf{S}_{ij} H_{l+1/2}^{(+)} \left( \sqrt{2(E - \varepsilon_j)} \sqrt{4\nu - 2k + 3} \right) H_{l+1/2}^{(+)} \left( \sqrt{2\varepsilon_j} \sqrt{2k + 3} \right). \quad (3.14)$$

Тут індекс  $i$  позначає різні канали розпаду і його максимально можливе значення дорівнює кількості залучених сімейств. Ми наголошуємо на тому, що рівні енергії  $\varepsilon_i$  підсистеми  $A^{-1}X$  не обов'язково належать до дискретних станів, а можуть відноситись і до станів неперервного спектра. Навіть в останньому випадку можна вказати найбільш імовірні канали розпаду. Наприклад, підсистема  $A^{-1}X$  може не мати зв'язаних станів, але може

мати низькоенергетичний резонанс. В такому випадку трикластерна система  $A^{-2}X + n + n$  швидше за все буде розпадатись через резонансний стан підсистеми  $A^{-1}X$ .

**3.1.5 Дозволені принципом Паулі стани системи  $^3H+n+n$**  Розглянемо трикластерну конфігурацію  $^3H+n+n$  ядра  $^5H$  з  $J^\pi = 1/2^+$  щоб проілюструвати справедливість наших висновків. Сфокусуємо нашу увагу на станах додатної парності, з нульовим повним орбітальним моментом на нульовим спіном двонейтронної підсистеми. Для скорочення запису будемо опускати останні квантові числа в цьому пункті.

В цьому випадку ядро нормування (3.2) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} I = & \cosh(\mathbf{a}\tilde{\mathbf{a}})\cosh(\mathbf{b}\tilde{\mathbf{b}}) - \cosh(\mathbf{a}_+\tilde{\mathbf{a}})\cosh(\mathbf{b}_+\tilde{\mathbf{b}}) - \\ & - \cosh(\mathbf{a}_-\tilde{\mathbf{a}})\cosh(\mathbf{b}_-\tilde{\mathbf{b}}) + \cosh\{(\mathbf{a}_0\tilde{\mathbf{a}})\}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

де  $\mathbf{a}_\pm, \mathbf{b}_\pm$  and  $\mathbf{a}_0$  визначається рівнянням (3.4) з  $t = 5/3$ .

Ядро нормування (3.15) має бути спроектоване на стани з певними індексами SU(3) симетрії  $(2\nu - 4\mu, 2\mu)$  і розкладено по повному базисі власних станів  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  оператора антисиметризації:

$$I_{(2\nu-4\mu,2\mu)} = \sum_{k=2\mu}^{\nu} \Lambda_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k} \Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}.$$

Власні значення ядра нормування можуть бути об'єднані в гілки і сімейства так, як це описано в пункті 3.2.2. Власні значення, що відносяться до перших п'яти сімейств, наведені в Таблиці 9.

Як легко помітити з Таблиці 9, власні значення ядра нормування системи  $^5H$ , що належать до  $k$ -го сімейства прагнуть до власних значень двокластерної підсистеми  $^4H$  із збільшенням числа осциляторних квантів  $\nu$ :

$$\lim_{\nu-2\mu \rightarrow \infty} \Lambda_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{^5H=^3H+n+n} \rightarrow \lambda_k^{^4H=^3H+n} = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k.$$

Очевидно, що індекс  $k$  має зміст числа осциляторних квантів, що припадають на підсистему  $^4H$ . Особливо варто уважи те, що  $\lambda_{k=2\tilde{k}+1} > 1$ , тоді як

Табл. 9: Власні значення  $\Lambda_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}$  ядра нормування системи  ${}^3\text{H}+n+n$ 

$k=1$	$k=2$		$k=3$			$k=4$				$k=5$		
$\nu$	$\mu=0$	$\mu=0$	$\mu=1$	$\mu=0$	$\mu=1$	$\mu=0$	$\mu=1$	$\mu=2$	$\mu=0$	$\mu=1$	$\mu=2$	
1	1.8889											
2	1.4780	0.9541	0.7778									
3	1.3487	0.8814	0.8733	1.0895	1.0649							
4	1.3344	0.8862	0.8879	1.0636	1.0434	1.0161	0.9837	0.9753				
5	1.3334	0.8885	0.8888	1.0431	1.0377	0.9841	0.9847	0.9859	1.0139	1.0034	1.0072	
6	1.3333	0.8888	0.8888	1.0378	1.0371	0.9861	0.9870	0.9875	1.0088	1.0055	1.0048	
7	1.3333	0.8889	0.8889	1.0371	1.0370	0.9873	0.9876	0.9876	1.0056	1.0045	1.0042	
8	1.3333	0.8889	0.8889	1.0370	1.0370	0.9876	0.9876	0.9876	1.0044	1.0042	1.0041	
9	1.3333	0.8889	0.8889	1.0370	1.0370	0.9876	0.9876	0.9876	1.0042	1.0041	1.0041	
10	1.3333	0.8889	0.8889	1.0370	1.0370	0.9876	0.9876	0.9876	1.0041	1.0041	1.0041	

$\lambda_{k=2\tilde{k}} < 1$ . Це вказує на притягання між  ${}^3\text{H}$  і нейтроном в станах з непарним числом квантів  $k = 2\tilde{k} + 1$  і відштовхування в станах з парним числом квантів  $k = 2\tilde{k}$ . Такий висновок можна легко перевірити, аналізуючи асимптотику рівняння (3.11). Більш того, власні значення  $\Lambda_{(2\nu-4\mu,2\mu)_{2\tilde{k}+1}}$  наближаються до граничних власних значень  $\lambda_{2\tilde{k}+1}$  згори, на відміну від  $\Lambda_{(2\nu-4\mu,2\mu)_{2\tilde{k}}}$ , які наближаються до  $\lambda_{2\tilde{k}}$  знизу. Як було сказано в пункті 3.2.2, є вагомі підстави вважати, що сімейства станів, що характеризуються непарним числом квантів  $k$  домінують у хвильовій функції системи  ${}^5\text{H}$ . Таблиця 10 ілюструє той факт, що дозволені принципом Паулі стани  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}$  набувають асимптотичного вигляду

$$\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{\text{as}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{k-2\mu}(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) + \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{k-2\mu}(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) \right),$$

коли  $\Lambda_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}$  наближаються до своїх граничних значень. В Таблиці 10 інтеграли перекриття точних дозволених принципом Паулі станів з їх асимптотичними виразами  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{\text{as}}$  в залежності від числа квантів  $2\nu$  наведені для перших п'яти сімейств власних станів ядра нормування системи  ${}^5\text{H}$ . Як тільки  $\nu \leq 5$ , стани, наведені в Таблиці 10 вичерпують всі можливі функції, дозволені принципом Паулі. Коли  $\nu$  зростає, з'являються нові сімейства станів, що характеризуються  $k > 5$ . Проте власні функції та

Табл. 10: Інтеграли перекриття  $\int \Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k} \Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{\text{as}} d\mu_B$  в залежності від числа квантов  $\nu$  для перших п'яти сімейств дозволених принципом Паулі станів системи  ${}^5\text{H}$ .

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$						
$\nu$	$\mu = 0$	$\mu = 0$	$\mu = 1$	$\mu = 0$	$\mu = 1$	$\mu = 0$	$\mu = 1$	$\mu = 2$	$\mu = 0$	$\mu = 1$	$\mu = 2$
1	0.9701										
2	0.9460	0.9924	1								
3	0.9893	0.9979	0.9934	0.8076	0.9915						
4	0.9996	0.9998	0.9992	0.9007	0.9886	0.9214	0.9629	1			
5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9736	0.9983	0.9706	0.9900	0.9934	0.5887	0.9052	0.9915
6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9981	0.9999	0.9962	0.9979	0.9992	0.7299	0.9907	0.9886
7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	1.0000	0.9995	0.9998	1.0000	0.9294	0.9974	0.9983
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9932	0.9996	0.9999
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	1.0000	1.0000
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

власні стани, що належать до таких сімейств, підлягають тим самим закономірностям, як і стани, наведені в Таблиці 10. Більше того, стани "непарних" сімейств, тобто,  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_{2\tilde{k}+1}}$  домінують над станами  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_{2\tilde{k}}}$ , причому малі  $\tilde{k}$  переважають. Перше сімейство  $\Psi_{(2\nu,0)_{k=1}}$  грає провідну роль у хвильовій функції системи  ${}^5\text{H}$ , за ним йдуть сімейства  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_{k=3}}$  і  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_{k=5}}$ . Така ієрархія серед різних сімейств дозволених принципом Паулі станів ядра  ${}^5\text{H}$  має безпосередній стосунок до поведінки відповідних власних значень  $\Lambda_{(2\nu-4\mu,2\mu)_{2\tilde{k}+1}}$ , що обговорювались вище. Точне врахування ефектів антисиметризації, що відносяться виключно до оператора кінетичної енергії, як було показано, спричиняє ефективне притягання кластерів в гілках, чиї власні значення перевищують їх граничні значення.

В Таблицях 9 і 10 спостерігаємо, що повний простір дозволених принципом Паулі базисних функцій можна поділити на "внутрішню" область, де  $\nu - k < 5$ , і асимптотичну ( $\nu - k \geq 5$ ). В останній області функції  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}$  набувають простого аналітичного вигляду  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{\text{as}}$  і відповідають розпаду ядра  ${}^5\text{H}$  на підсистему  ${}^4\text{H}$  і нейtron, причому кластер  ${}^4\text{H}$  знаходиться в стані з  $k$  осциляторними квантами. У внутрішній області дозволені принципом Паулі стани мають більш складний вигляд, що вказує на обмінні

ефекти, які включають всі три кластери.

Стани  $k$ -го сімейства мають ще одну важливу властивість, яка приводить до домінування малих  $k$ . Чим менше  $k$ , тим більш гладенькими є базисні функції  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}$ . Продемонструємо це на функціях, що належать першому сімейству, яке складається з єдиної гілки  $\Psi_{(2\nu,0)_{k=1}}$ . Остання гілка має надзвичайно простий асимптотичний вигляд:

$$\Psi_{(2\nu,0)_1}^{\text{as}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{2\nu}{(2\nu+1)!}} \left\{ \mathbf{a}_1^{2\nu-2}(\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1) + \mathbf{a}_2^{2\nu-2}(\mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2) \right\},$$

і точна функція  $\Psi_{(2\nu,0)_{k=1}}$  стає нерозрізнюючи від асимптотичної при  $\nu = 5$ . Легко зрозуміти, що  $\Psi_{(2\nu,0)_1}^{\text{as}}$  відповідає розпаду ядра  ${}^5\text{H}$  на підсистему  ${}^4\text{H}$ , що знаходиться в найнижчому стані осциляторної моделі оболонок, і нейтрон. Справді,  $\Psi_{(2\nu,0)_1}^{\text{as}}$  містить лише перший степінь вектора  $\mathbf{b}_1$  або  $\mathbf{b}_2$ , вказуючи на те, що кластер  ${}^3\text{H}$  і нейтрон залишаються на мінімальній відстані один від одного, яка узгоджується з вимогами принципу Паулі. В свою чергу, власні значення першої сімейства  $\Lambda_{(2\nu,0)_1}$  прагнуть до найнижчого власного значення  $\lambda_{k=1} = 4/3$  ядра нормування  ${}^4\text{H}$ . Варто відзначити також, що орбітальний момент  $l$  відносного руху нейтронного кластера і підсистеми  ${}^4\text{H}$ , як і орбітальний момент самої підсистеми  ${}^4\text{H}$  дорівнює  $l = 1$  для станів першої гілки.

Як відзначалось в пункті 3.2.2, при  $\nu \geq k + 5$  коефіцієнти розкладу  $D_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{2m-2\mu}$  дозволених принципом Паулі базисних функцій  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}$  можна співставити поліномам Кравчука дискретної змінної  $2m - 2\mu$ :

$$D_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{2m-2\mu} \rightarrow \sqrt{2} \mathcal{K}_{k-2\mu}^{(5/8)}(2m - 2\mu) \frac{\sqrt{\rho_{2m-2\mu}}}{d_{k-2\mu}}.$$

Залежність коефіцієнтів розкладу першої гілки  $\Psi_{(2\nu,0)_{k=1}}$  від числа квантів  $\nu$  показана на рис. 3.1.

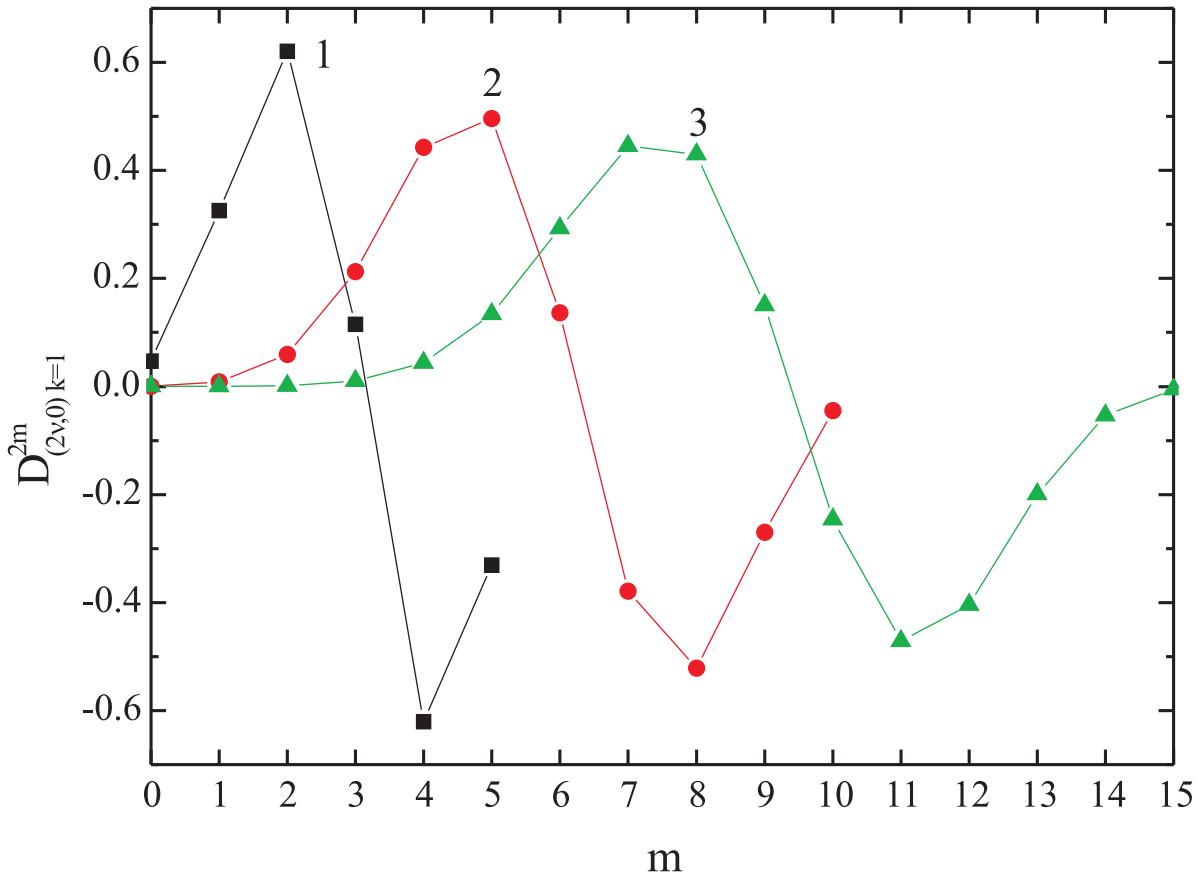


Рис. 3.1 Коефіцієнти розкладу  $D_{(2\nu,0)_{k=1}}^{2m}$  першої гілки в залежності від  $m$  для різних значень числа квантів  $\nu$ . Криві: 1 –  $\nu = 5$ ; 2 –  $\nu = 10$ ; 3 –  $\nu = 15$ .

При даному  $\nu$  існує  $\nu+1$  коефіцієнтів  $D_{(2\nu,0)_{k=1}}^{2m}$ . Як і очікувалось, останні коефіцієнти мають один вузол при всіх  $\nu$ , оскільки їх асимптотична поведінка визначається поліномами Кравчука першого порядку. Зауважимо, що збільшенням  $\nu$  коефіцієнти  $D_{(2\nu,0)_{k=1}}^{2m}$  стають поліномами Ерміта першого порядку, як випливає з (3.7). Очевидно, чим менша кількість вузлів, тим менша кінетична і потенціальна енергія, що відповідає даній гілці. Отже, сімейства дозволених станів, які асоціюються з поліномами Кравчука низьких порядків, домінують.

Слід вказати, що серед власних функцій оператора антисиметризації системи  ${}^5\text{H}$ , що належать до  $SU(3)$  представлення  $(2\nu, 0)$  є безвузлова гілка власних значень  $\Psi_{(2\nu,0)_{k=0}}$ . Проте вона відноситься до заборонених принци-

пом Паулі станів і відповідає нульовому власному значенню. Функції цієї гілки можна записати в аналітичному вигляді для даного  $\nu$ :

$$\Psi_{(2\nu,0)_{k=0}} = N_{(2\nu,0)_{k=0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\nu+1)!}} \left\{ \mathbf{a}_1^{2\nu} + \mathbf{a}_2^{2\nu} \right\},$$

де  $N_{(2\nu,0)_{k=0}}$  – нормувальний коефіцієнт, який прямує до  $1/\sqrt{2}$  із збільшенням  $\nu$ . Коефіцієнти розкладу  $D_{(2\nu,0)_{k=0}}^{2m}$  даються наступним виразом:

$$D_{(2\nu,0)_{k=0}}^{2m} = \left(\frac{3}{8}\right)^{\nu} \sqrt{\frac{(2\nu)!}{(2\nu-2m)!(2m)!}} \left(\frac{5}{3}\right)^m.$$

Структура функції  $\Psi_{(2\nu,0)_{k=0}}$  вказує на те, що один з валентних нейтронів опиняється в  $s$ -стані підсистеми  ${}^4\text{H}$ , що заборонено принципом Паулі.

Обговоримо зараз можливість реалізації іншого каналу розпаду ядра  ${}^5\text{H}$ . На перший погляд здається, що розпад по каналу  ${}^5\text{H} \rightarrow {}^2n + {}^3\text{H} \rightarrow n + n + {}^3\text{H}$  повинен відбуватись поряд з розпадом по каналу  ${}^5\text{H} \rightarrow n + {}^4\text{H} \rightarrow n + n + {}^3\text{H}$ . Проте структура дозволених принципом Паулі функцій не узгоджується з таким припущенням. Базисні функції, що відповідають "дінейtronному" розпаду ядра  ${}^5\text{H}$ , якщо він існує, повинні були б виглядати так

$$\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_{2m}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rightarrow \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{2m-2\mu}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad \mu \leq m \leq \nu - \mu. \quad (3.16)$$

з власними значеннями

$$\lim_{\nu-2\mu \rightarrow \infty} \Lambda_{(2\nu-4\mu,2\mu)_{2m}} \rightarrow \lambda_{2m}^{2n=n+n} = 1.$$

Асимптотична поведінка найпростішої функції, яка відповідає розпаду ядра  ${}^5\text{H}$  на дінейtron, що знаходиться в найнижчому стані моделі оболонок, і тритон, має такий вигляд:

$$\Psi_{(2\nu,0)_{m=0}}^{\text{as}} = \frac{1}{\sqrt{(2\nu+1)!}} \mathbf{a}^{2\nu}. \quad (3.17)$$

З цього випливає, що

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} D_{(2\nu,0)_{m=0}}^{2m} \rightarrow \delta_{m,0}.$$

В Таблиці 11 власні значення тих базисних станів, які найбільше нагадують функції (3.17), наведені поруч з вагою стану  $\psi_{(2\nu,0)}^{m=0}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

Табл. 11: Власні значення функції, яка могла б відповідати "дінейтронному розпаду"  $\Psi_{(2\nu,0)m=0}$  ядра  ${}^5\text{H}$  і інтеграл перекриття

$D_{(2\nu,0)}^{m=0} = \int \Psi_{(2\nu,0)m=0}^{\text{as}} \Psi_{(2\nu,0)m=0} d\mu_B$  в залежності від числа осциляторних квантів  $\nu$ .

$\nu$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Lambda_{(2\nu,0)m=0}$	1.8889	1.4781	1.0895	1.0636	1.0139	1.0087	1.0027	1.0015	1.0008	1.0003
$D_{(2\nu,0)}^{m=0}$	0.8575	0.7304	0.8407	0.7327	0.8564	0.8510	0.8141	0.9518	0.8237	0.9406

Як можна зрозуміти з цієї таблиці, залежність коефіцієнта  $D_{(2\nu,0)}^{m=0}$  від числа квантів  $\nu$  не є монотонною і навіть при  $\nu = 10$  вага функції "дінейтронного розпаду" становить лише 88%. Зауважимо, що вага найпростішої функції  ${}^4\text{H}+n$  в станах першої сімейства сягає 100% при  $\nu = 5$ . Що стосується гілок  $\Psi_{(2\nu,0)_{2m>0}}^{\text{as}}$ , які описують розпад ядра  ${}^5\text{H}$  на дінейtron у стані з  $2m$  квантами і тритон, жоден з дозволених принципом Паулі станів  ${}^5\text{H}$  не мають такої асимптотичної поведінки.

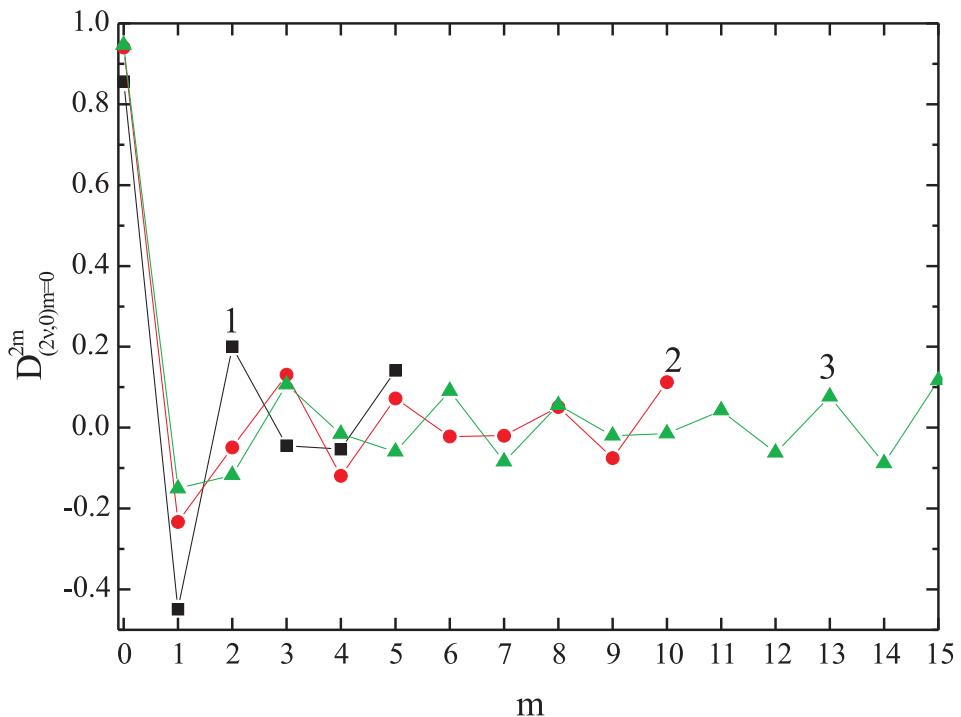


Рис. 3.2 Коефіцієнти розкладу  $D_{(2\nu,0)m=0}^{2m}$  гілки "дінейтронного розпаду" в залежності від  $m$  при різних значеннях числа квантів  $\nu$ . Криві: 1 –  $\nu = 5$ ; 2 –  $\nu = 10$ ; 3 –  $\nu = 15$ .

Рис. 3.2 зображує коефіцієнти розкладу  $D_{(2\nu,0)_{m=0}}^{2m}$  гілки, яка може відповідати моді "дінейтронного розпаду", при різних значеннях числа квантів  $\nu$ . Як випливає з рис. 3.2, коефіцієнти  $D_{(2\nu,0)_{m=0}}^{2m}$  мають суттєвий хвіст навіть при  $\nu = 15$ , вказуючи на те, що функції  $\Psi_{(2\nu,0)_{m=0}}$  все ще не співпадають з їх асимптотичним виразом  $\Psi_{(2\nu,0)_{m=0}}^{\text{as}}$ . Більше того, вона має заражато нулів і отже потрібна досить велика енергія, щоб збудити таку моду. Все вищевикладене свідчить на користь висновку про те, що розпад  ${}^5\text{H} \rightarrow {}^2n + {}^3\text{H} \rightarrow n + n + {}^3\text{H}$  не реалізується. Що стосується станів  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}$ , в яких домінує компонента  $\psi_{(2\nu,0)}^{m=\mu}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , можна вважати, що вони виявляють  $pp$  кореляції у внутрішній області  $\nu - k < 5$ .

Що стосується "демократичного розпаду" ядра  ${}^5\text{H}$ , він малоймовірний через те, що всі граничні значення ядра  ${}^5\text{H}$ , а саме  $\lambda_k^{{}^4\text{H}}$ , різні. Різні граничні значення означають, що немає області, де дозволені принципом Паулі стани трикластерної системи  ${}^5\text{H}$  співпадають з гіперсферичними гармоніками, які описують "демократичний розпад".

Нарешті, рис. 3.3 демонструє коефіцієнти  $C_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^E$ , які з'являються в розкладі хвильової функції  $\Upsilon_{\kappa(E)}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  ядра  ${}^5\text{H}$  з енергією  $E = 10.67$  МeВ над порогом розпаду  ${}^5\text{H} \rightarrow {}^3\text{H} + n + n$  по базисі дозволених принципом Паулі станів  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}$ . Ці коефіцієнти отримано за допомогою діагоналізації гамільтоніана, в якому врахований лише оператор кінетичної енергії відносного руху (з його обмінною частиною). Перші п'ять сімейств дозволених принципом Паулі станів з числом квантів  $\nu \leq \nu_{\max} = 19$  повністю була врахована (загалом 182 функцій), сімейства з  $k > 5$  не враховувались. Осциляторна довжина  $r_0$  була вибрана таким чином, щоб мінімізувати енергію зв'язку кластера  ${}^3\text{H}^1$ . Фактично, власні функції оператора кінетичної енергії, модифікованого принципом Паулі, демонструє, яким чином антисиметризація впливає на коефіцієнти розкладу  $C_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^E$ . Ці власні вектори, по суті, є хвильовими функціями дискретного представлення в борнівському наближенні і вони містять повно інформації про структуру

---

**Примітка 1.** Справді, ми використали те ж значення осциляторної довжини як в роботах [140, 142], присвячених дослідженню структури ядра  ${}^5\text{H}$ .

неперервного спектра  ${}^5\text{H}$ .

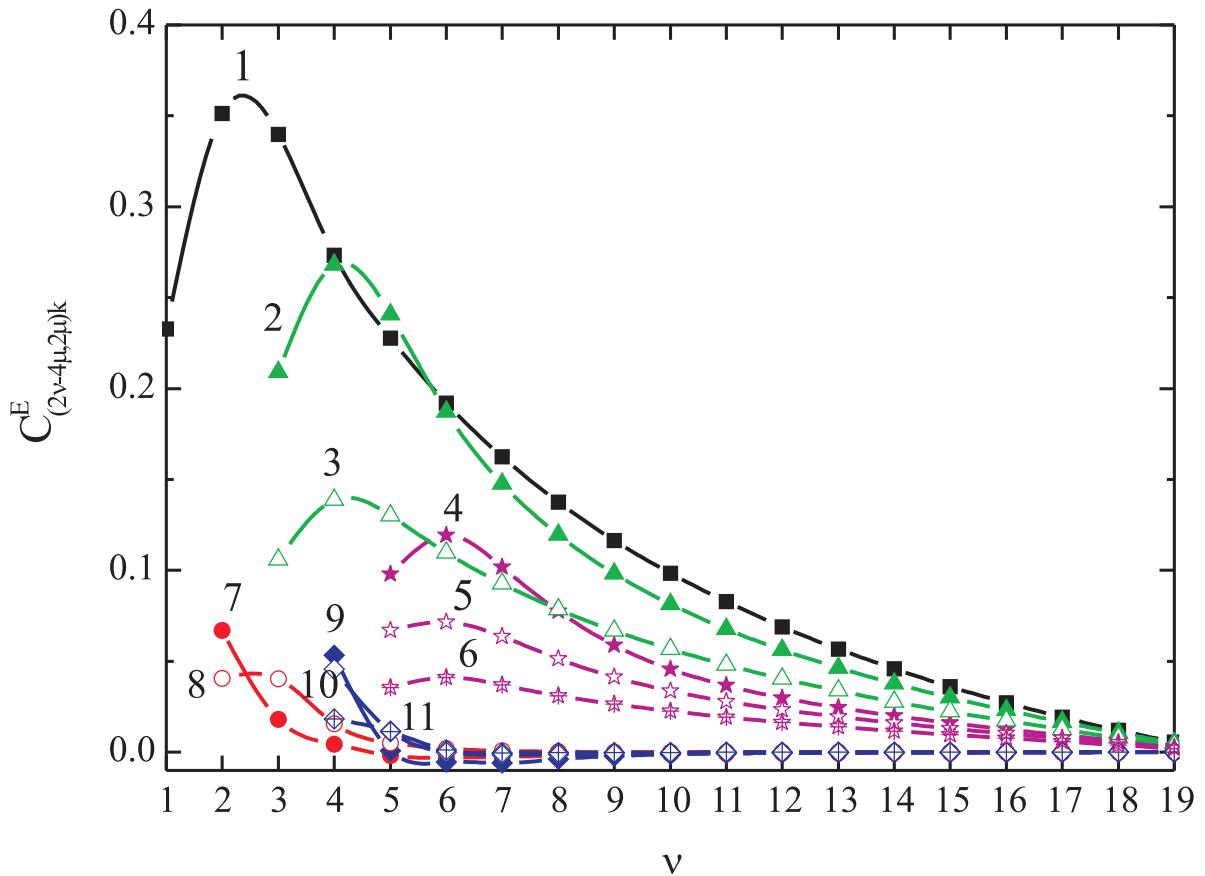


Рис. 3.3 Коефіцієнти розкладу  $C_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^E$  хвильової функції системи  ${}^5\text{H}$  по SU(3)-базису при  $E = 10.67$  MeВ. Криві: 1 –  $(2\nu, 0)_{k=1}$ ; 2 –  $(2\nu, 0)_{k=3}$ ; 3 –  $(2\nu-4, 2)_{k=3}$ ; 4 –  $(2\nu, 0)_{k=5}$ ; 5 –  $(2\nu-4, 2)_{k=5}$ ; 6 –  $(2\nu-8, 4)_{k=5}$ ; 7 –  $(2\nu, 0)_{k=2}$ ; 8 –  $(2\nu-4, 2)_{k=2}$ ; 9 –  $(2\nu, 0)_{k=4}$ ; 10 –  $(2\nu-4, 2)_{k=4}$ ; 11 –  $(2\nu-8, 4)_{k=4}$ .

В цьому підрозділі ми розглянули власний вектор оператора кінетичної енергії, модифікованого принципом Паулі, який є найбільш гладким і, отже, відповідає найнижчій енергії  $E$  при даній розмірності матриці гамільтоніана. Звичайно, власні вектори є при будь-якій енергії  $E$ . Проте, щоб отримати менше значення енергії  $E$ , необхідно суттєво збільшити розмірність матриці, залучаючи додаткові сімейства дозволених принципом Паулі станів. Хвильові функції станів неперервного спектра можна знайти або за допомогою процедури діагоналізації або в результаті розв'язку си-

стеми лінійних алгебраїчних рівнянь, використовуючи асимптотичні граничні умови (3.14) для коефіцієнтів розкладу. В останньому випадку енергія задається довільно, і елементи  $S$ -матриці знаходять з розв'язку системи алгебраїчних рівнянь. Діагоналізація матриці гамільтоніана дає хвильові функції неперервного спектра, які мають вузол при заданому числі осциляторних квантів (при  $\nu = \nu_{\max} + 1 = 20$  в нашому випадку). Звичайно, чим більше число осциляторних квантів  $\nu_{\max}$ , тим далі розташований вузол найбільш гладкої функції і тим нижче мінімальне власне значення гамільтоніана.

Рисунок 3.3 підтверджує наш висновок про те, що сімейства, які характеризуються непарним значенням  $k$ , дають більший внесок у хвильову функцію системи  ${}^5\text{H}$ , ніж сімейства з парним значенням  $k$ . Ієрархія серед коефіцієнтів різних гілок даної сімейства встановлюється поведінкою їх власних значень, тобто величиною притягання чи відштовхування у відповідних  $SU(3)$  гілках. З цієї причини коефіцієнти гілок  $(2\nu, 0)_{k=1}$  домінують, наступні за внеском  $(2\nu, 0)_{k=3}$  і  $(2\nu - 4, 2)_{k=3}$ . Нехтування сім'ями станів з  $k = 2$  і  $k = 4$  не може суттєво змінити хвильову функцію  ${}^5\text{H}$  і енергію  $E$ . Мінімальне власне значення  $E = 10.67$  МeВ не можна зменшити, не залучаючи сімейства станів з  $k > 5$  або не враховуючи  $NN$ -потенціал між кластером  ${}^3\text{H}$  і нейtronом. Причина полягає в тому, що енергія  $E$  обмежена знизу внутрішньою енергією  $\varepsilon$  підсистеми  ${}^4\text{H}$ , яка досить велика при даній локалізації  ${}^4\text{H}$ . Максимальна кількість  $k_{\max}$  сімейств дозволених принципом Паулі станів, що залучені до розрахунків, визначає локалізацію підсистеми  ${}^4\text{H}$ . Це означає, що кластер  ${}^3\text{H}$  не відходить від валентного нейтрона далі, ніж на відстань, що визначається числом квантів  $k_{\max} = 5$ . Інакше кажучи, ми не розглядаємо подальше розпливання хвильового пакета, який описує хвильову функцію підсистеми  ${}^4\text{H}$ , припускаючи, що таке розпливання відбувається на великих відстанях між кластерами, тобто за межами області, де формується компаунд-ядро  ${}^5\text{H}$ . Згідно принципу невизначеності, чим менший радіус підсистеми  ${}^4\text{H}$  і, отже, міра локалізації  ${}^4\text{H}$ ,

тим більша його внутрішня енергія.

Звичайно, врахування нуклон-нуклонної взаємодії між кластером  ${}^3\text{H}$  і нейтроном зменшило б цю енергію. Включення "непарних" сімейств з більшими  $k$  також веде до кращого опису підсистеми  ${}^4\text{H}$  і отже, до зменшення енергії  $E$ . Після врахування потенціалу взаємодії між  ${}^3\text{H}$  і нейtronом та залучення деяких додаткових сімейств дозволених принципом Паулі станів  $\varepsilon$  має наблизитись до експериментально спостережуваної енергії резонансу в  ${}^4\text{H}$ . Слід відзначити також, що поведінка коефіцієнтів розкладу  $C_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^E$  підтверджує домінування розпаду  ${}^5\text{H} \rightarrow n + {}^4\text{H} \rightarrow n + n + {}^3\text{H}$ .

**3.1.6 Ядро  ${}^5\text{H}$  в рамках мікроскопічної трикластерної моделі  ${}^3\text{H} + n + n$**  В даному пункті на основі дискретного представлення методу резонуючих груп формулюються фізично коректні граничні умови для станів системи  ${}^5\text{H} = {}^3\text{H} + n + n$ , що знаходяться вище порогу її тричастинкового розвалу. Наведено результати розрахунків з урахуванням лише першої гілки дозволених базисних функцій і здійснено порівняння з розрахунками в наближенні бінарної кластеризації  ${}^5\text{H} = {}^4\text{H} + n$ . Аналізується залежність фази розсіяння від кількості залучених сімейств.

Коли ми залищаємо обмежену кількість сімейств, ми тим самим не дозволяємо одному з нейtronів піти від тритона далі, ніж на деяку фіксовану відстань. В результаті спектр підсистеми  ${}^4\text{H}$  стає квазідискретним, тобто в результаті розпаду  ${}^5\text{H}$  підсистема  ${}^4\text{H}$  може опинитись в одному із станів неперервного спектра з енергією  $\varepsilon_i$  і орбітальним моментом  $l$ . Кількість рівнів тим більша, а відстань між ними тим менша, чим менше локалізована підсистема  ${}^4\text{H}$ .

Якщо ми враховуємо фіксовану кількість сімейств  $k_{\max}$ , то асимптотика коефіцієнтів розкладу виглядає наступним чином:

$$\begin{aligned}
C_{k,\nu}^l(E - \varepsilon_i) = & c_k^l(\varepsilon_i) \left\{ H_{l+1/2}^- \left( \sqrt{2(E - \varepsilon_i)} \sqrt{4\nu - 2k + 3} \right) + \right. \\
& + S_{l,\varepsilon_i \rightarrow l,\varepsilon_i} H_{l+1/2}^+ \left( \sqrt{2(E - \varepsilon_i)} \sqrt{4\nu - 2k + 3} \right) \left. \right\} + \\
& + \sum_{j=1}^{k_{\max}} c_{\varepsilon_j}^l(k) \cdot S_{l,\varepsilon_i \rightarrow l,\varepsilon_j} H_{l+1/2}^+ \left( \sqrt{2(E - \varepsilon_j)} \sqrt{4\nu - 2k + 3} \right).
\end{aligned}$$

Тут  $c_k^l(\varepsilon_i)$  – коефіцієнти розкладу хвильової функції підсистеми  ${}^4\text{H}$ , отримані методом діагоналізації гамільтоніана бінарної системи  ${}^3\text{H} + n$ . Вхідним каналом є канал  $l, \varepsilon_i$ .

Звичайно, для великих значень  $k$  коефіцієнти  $c_k^l(\varepsilon_j)$  стають функцією Бесселя:

$$c_k^l(\varepsilon) = J_{l+1/2} \left( \sqrt{2\varepsilon} \sqrt{2k+3} \right) - \operatorname{tg} \delta_l'(\varepsilon) N_{l+1/2} \left( \sqrt{2\varepsilon} \sqrt{2k+3} \right).$$

Тут  $\delta_l'(\varepsilon)$  – фаза розсіяння нейтрона на тритії.

Неперервний спектр ядра  ${}^5\text{H}$  починається над порогом його розвалу на нейtron і підсистему  ${}^4\text{H}$ , що знаходиться в найнижчому енергетичному стані. Очевидно, що орбітальний момент такого стану  $l = 1$ . Енергія найнижчого стану  $\varepsilon_1$  і коефіцієнти розкладу  $c_k^{l=1}(\varepsilon_1)$  хвильової функції цього стану по базисі гармонічного осцилятора визначаються значенням  $k_{\max}$ . Чим більше  $k_{\max}$ , тим менше значення порогової енергії і тим більше коефіцієнтів  $c_k^{l=1}(\varepsilon_1)$  відмінно від нуля.

Як видно з рівнянь (3.11), в асимптотичній границі оператор кінетичної енергії не зв'язує між собою гілки з парними і непарними значеннями додаткового квантового числа  $k$ . Це явище пов'язано з тим, що  $k$  визначає парність хвильової функції  ${}^4\text{H}$ , яка в границі великого числа квантів  $\nu$  стає інтегралом руху. В роботі [15] ми продемонстрували, що найбільший внесок в хвильову функцію і енергію трикластерної системи  ${}^5\text{H}$  вносять стани сімейств з непарними значеннями  $k$ . При цьому чим менше  $k$ , тим більше вага відповідного сімейства в хвильовій функції.

В цьому пункті реалізовано одноканальне наближення, згідно якому єдиним відкритим каналом розпаду ядра  ${}^5\text{H}$  є канал розпаду на нейtron

і  ${}^4\text{H}$  в найнижчому енергетичному стані  $l^\pi = 1^-$ . При цьому всі залучені стани як у внутрішній області малих відстаней між кластерами, так і в асимптотичній області, є власними функціями оператора антисиметризації. Стани гілок з парними значеннями  $k$  виключені з розгляду, оскільки вони вносять несуттєвий внесок в хвильову функцію  ${}^5\text{H}$ .

В одноканальному наближенні асимптотика коефіцієнтів розкладу набуває вигляду:

$$\begin{aligned} C_{k,\nu}^{l=1}(E - \varepsilon) = & c_k^{l=1}(\varepsilon) \left\{ J_{3/2} \left( \sqrt{2(E - \varepsilon)} \sqrt{4\nu - 2k + 3} \right) - \right. \\ & \left. - \tan \delta_{l=1}(E - \varepsilon) N_{3/2} \left( \sqrt{2(E - \varepsilon)} \sqrt{4\nu - 2k + 3} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Залежність від енергії фази розсіяння  $\delta_{l=1}(E - \varepsilon)$  нейтрона на підсистемі  ${}^4\text{H}$ , що знаходиться в найнижчому енергетичному стані, буде визначати наявність чи відсутність резонансів в трикластерній системі  ${}^5\text{H}$ .

Коефіцієнти розкладу  $c_k^{l=1}(\varepsilon)$  хвильової функції підсистеми  ${}^4\text{H} = {}^3\text{H} + n$  є розв'язком системи лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} -\sqrt{\frac{\lambda_{k-2}}{\lambda_k}} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{(k-1)(k+2)} c_{k-2}^{l=1} + \frac{1}{2} \left( k + \frac{3}{2} - 2\varepsilon \right) c_k^{l=1} - \\ - \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+2}}} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{(k+1)(k+4)} c_{k+2}^{l=1} = 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

в яких кількість рівнянь дорівнює максимальному числу  $k_{\max}$  залучених сімейств.

Таке наближення здається досить обґрунтованим, оскільки поки  $k_{\max}$  не надто велике, в області малих енергій над порогом розвалу  ${}^5\text{H}$  на  ${}^4\text{H}$  і нейtron відкритий лише один канал розпаду, який ми і беремо до уваги. Хвильові функції інших каналів експоненційно спадають.

Розглянемо залежність фази розсіяння і хвильових функцій трикластерної системи  ${}^3\text{H} + n + n$  від числа залучених сімейств дозволених станів. Ми будемо враховувати лише сімейства, що характеризуються непарними значеннями додаткового квантового числа  $k$ , оскільки в роботі [15] було показано, що додавання гілок, які належать сімействам з парним  $k$  практично

не впливає ні на енергію, ні на хвильові функції неперервного спектра  ${}^5\text{H}$ . При цьому будемо слідувати одноканальному наближенню і вважати, що асимптотика коефіцієнтів розкладу хвильової функції  ${}^5\text{H}$  по дозволених станах визначається виразом (3.18). Задача, яку ми поставили перед собою, полягає в спробі зрозуміти, наскільки найнижчі стани неперервного спектра формуються під впливом принципу Паулі і оператора кінетичної енергії. Враховуючи обидва ці фактори на основі трикластерного варіанта АВМРГ, ми приходимо до висновку, що їх вплив приводить до обмінних ефектів притягання.

**3.1.7 Наближення однієї гілки дозволених станів трикластерної системи  ${}^3\text{H} + n + n$**  Тут ми врахуємо лише головну гілку дозволених станів трикластерної системи  ${}^3\text{H} + n + n$ . Як було показано в роботі [15], домінуючою є гілка  $k = 1$ . Власні значення дозволених станів цієї гілки прагнуть до граничного власного значення  $\lambda_{k=1} = 4/3$  згори, що приводить до притягання між кластерами навіть за відсутності нуклон-нуклонної взаємодії між нуклонами різних кластерів.

Якщо ми обмежуємося лише гілкою  $k = 1$ , то в результаті розпаду ядра  ${}^5\text{H}$  утворюється  ${}^4\text{H}$ , що знаходиться в найнижчому стані моделі оболонок, і нейtron. Система рівнянь (3.11) складається в цьому випадку лише з одного рівняння

$$\left(\frac{5}{2} - 2\varepsilon\right) c_{k=1}^{l=1} = 0,$$

розв'язок якого тривіальний:  $\varepsilon = 5/4$ ,  $c_{k=1}^{l=1} = 1$ . Отже, асимптотика коефіцієнтів розкладу хвильової функції  ${}^5\text{H}$  визначається виразом:

$$\begin{aligned} C_{k=1,\nu}^{l=1}(E - 5/4) &= \\ &= J_{3/2} \left( \sqrt{2(E - 5/4)} \sqrt{4\nu + 1} \right) - \tan \delta_{l=1} N_{3/2} \left( \sqrt{2(E - 5/4)} \sqrt{4\nu + 1} \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Через сильну локалізацію підсистеми  ${}^4\text{H}$  внутрішня енергія  $\varepsilon$  виявляється досить великою. Неперервний спектр  ${}^5\text{H}$  починається лише при енергії  $E$ ,

що перевищує внутрішню енергію  ${}^4\text{H}$ .

На рис. 3.4 представлена коефіцієнти розкладу  $C_{k=1,\nu}^{l=1}$  хвильової функції ядра  ${}^5\text{H}$  при енергії 1 MeВ над порогом розвалу  ${}^5\text{H} \rightarrow {}^4\text{H} + n$  в наближенні однієї гілки<sup>1)</sup>.

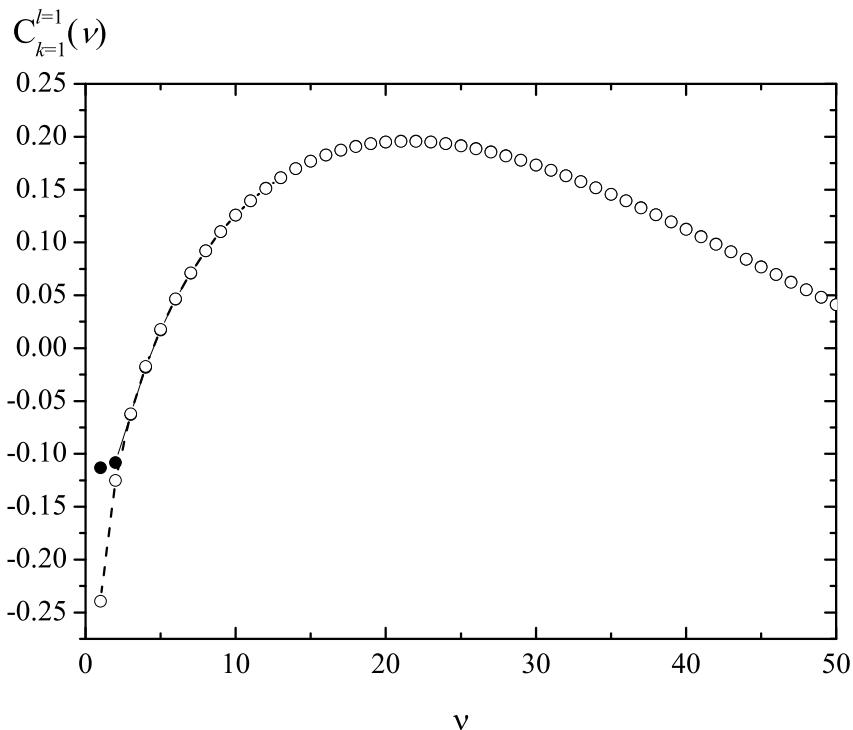


Рис. 3.4 Коефіцієнти розкладу  $C_{k=1,\nu}^{l=1}$  хвильової функції ядра  ${}^5\text{H}$  при енергії  $E - \varepsilon = 1$  MeВ над порогом розвалу  ${}^5\text{H} \rightarrow {}^4\text{H} + n$  в наближенні одної гілки. 1 – точний розв'язок; 2 – асимптотичний вираз (3.20).

Як видно з рисунка 3.4, асимптотичний вираз (3.20) співпадає з точним розв'язком аж до самих малих значень числа квантів  $\nu$ .

Може скластися враження, що наближення однієї гілки еквівалентно розгляду  ${}^5\text{H}$  як бінарної кластерної системи  ${}^4\text{H} + n$ . Дійсно, матриця оператора кінетичної енергії трикластерної системи  ${}^5\text{H}$  на дозволених станах першої гілки тридіагональна, як і матриця оператора кінетичної енергії

**Примітка 1.**) Значення осциляторної довжини  $r_0$  в цьому підпункті ми поклали рівною 1.47 Фм, щоб мінімізувати енергію зв'язку кластера  ${}^3\text{H}$ .

ядра  ${}^5\text{H}$  в припущені його бінарної кластеризації  ${}^4\text{H} + n$ . Тому рівняння Шредінгера для коефіцієнтів розкладу хвильової функції трикластерної системи  ${}^5\text{H}$  по дозволених базисних функціях

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\Lambda_{\nu-1,k=1}}{\Lambda_{\nu,k=1}}}\langle\nu-1,k=1|\hat{T}|\nu,k=1\rangle C_{\nu-1,k=1}^{l=1} + \left(\nu+\frac{1}{4}-\tilde{E}\right)C_{\nu,k=1}^{l=1} - \\ -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\Lambda_{\nu,k=1}}{\Lambda_{\nu+1,k=1}}}\langle\nu,k=1|\hat{T}|\nu+1,k=1\rangle C_{\nu+1,k=1}^{l=1} = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

нагадує рівняння для коефіцієнтів розкладу хвильової функції бінарної системи  ${}^4\text{H} + n$ :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\bar{\Lambda}_{\nu-1}}{\bar{\Lambda}_{\nu}}}\sqrt{(2\nu-2)(2\nu+1)}\bar{C}_{\nu-1}^{l=1} + \left(\nu+\frac{1}{4}-\tilde{E}\right)\bar{C}_{\nu}^{l=1} - \\ -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\bar{\Lambda}_{\nu}}{\bar{\Lambda}_{\nu+1}}}\sqrt{2\nu(2\nu+3)}\bar{C}_{\nu+1}^{l=1} = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

В границі великого числа осциляторних квантів ці рівняння стають тотожними. Проте в області малих  $\nu$  рівняння (3.21) і (3.22) відрізняються в двох відношеннях. По-перше, власні значення  $\bar{\Lambda}_{\nu}$  ядра  ${}^5\text{H}$  в припущені його бінарної конфігурації відрізняються від власних значень  $\Lambda_{\nu,k=1}$  першої гілки дозволених станів трикластерної системи  ${}^5\text{H}={}^3\text{H}+n+n$  (див. табл. 12)<sup>1)</sup>. По-друге, недіагональні матричні елементи оператора кінетичної енергії на

Табл. 12: Власні значення бінарної  ${}^5\text{H}={}^4\text{H}+n$  і трикластерної  ${}^5\text{H}={}^3\text{H}+n+n$  конфігурацій ядра  ${}^5\text{H}$

$\nu$	1	2	3	4	5
$\Lambda_{\nu,k=1}/\lambda_{k=1}$	1,41667	1,10851	1,01153	1,00077	1,00005
$\bar{\Lambda}_{\nu}$	2,5	1,25	1,02539	1,0022	1,00018

дозволених базисних функціях першої гілки  $\langle\nu,k=1|\hat{T}|\nu+1,k=1\rangle$  відрізняються від асимптотичних матричних елементів (див. табл. 13). Як

**Примітка 1.**) В табл. 12 наведено співвідношення власних значень  $\Lambda_{\nu,k=1}$  першої гілки дозволених станів трикластерної системи до граничного власного значення  $\lambda_{k=1}$ , оскільки це відношення прагне до одиниці із збільшенням числа квантів, як і власні значення бінарних кластерних систем.

Табл. 13: Недіагональні матричні елементи оператора кінетичної енергії трикластерної  ${}^5\text{H} = {}^3\text{H} + n + n$  і бінарної  ${}^5\text{H} = {}^4\text{H} + n$  і конфігурацій ядра  ${}^5\text{H}$

$\nu$	1	2	3	4	5
$\langle \nu, k = 1   \hat{T}   \nu + 1, k = 1 \rangle$	-1,10479	-1,4677	-1,84985	-2,34729	-2,85067
$-0,25\sqrt{2\nu(2\nu+3)}$	-0,79057	-1,32288	-1,83712	-2,34521	-2,85044

Табл. 14: Недіагональні матричні елементи оператора кінетичної енергії трикластерної  ${}^5\text{H} = {}^3\text{H} + n + n$  і бінарної  ${}^5\text{H} = {}^4\text{H} + n$  конфігурацій ядра  ${}^5\text{H}$  з урахуванням власних значень

$\nu$	1	2	3	4	5
${}^5\text{H} = {}^3\text{H} + n + n, k = 1$	-1,24895	-1,53645	-1,85976	-2,34813	-2,85074
${}^5\text{H} = {}^4\text{H} + n$	-1,11803	-1,46059	-1,85825	-2,34758	-2,85067

було показано в роботі [8], збільшення недіагональних матричних елементів оператора кінетичної енергії порівняно з асимптотичними приводить до ефективного притягання між кластерами. В бінарних кластерних системах вплив обмінних ефектів на оператор кінетичної енергії зводиться до того, що власні значення дозволених станів відмінні від одиниці. В трикластерних системах вплив принципу Паулі проявляється також в тому, що змінюються структура самих дозволених станів, що також приводить до зміни недіагональних матричних елементів оператора кінетичної енергії. Як видно з табл. 12, власні значення бінарної  ${}^5\text{H} = {}^4\text{H} + n$  конфігурації ядра  ${}^5\text{H}$  перевищують власні значення першої гілки дозволених станів трикластерної системи  ${}^5\text{H} = {}^3\text{H} + n + n$ . Однак вплив обмінних ефектів як на власні значення, так і на структуру першої гілки дозволених станів трикластерної конфігурації  ${}^5\text{H}$  приводить до більших значень матричних елементів оператора кінетичної енергії, ніж у випадку бінарної конфігурації  ${}^5\text{H} = {}^4\text{H} + n$  (див. табл. 14.)

На рис. 3.5 представлена залежність фази розсіяння нейтрона на підсистемі  ${}^4\text{H}$ , що характеризує неперервний спектр ядра  ${}^5\text{H}$ .

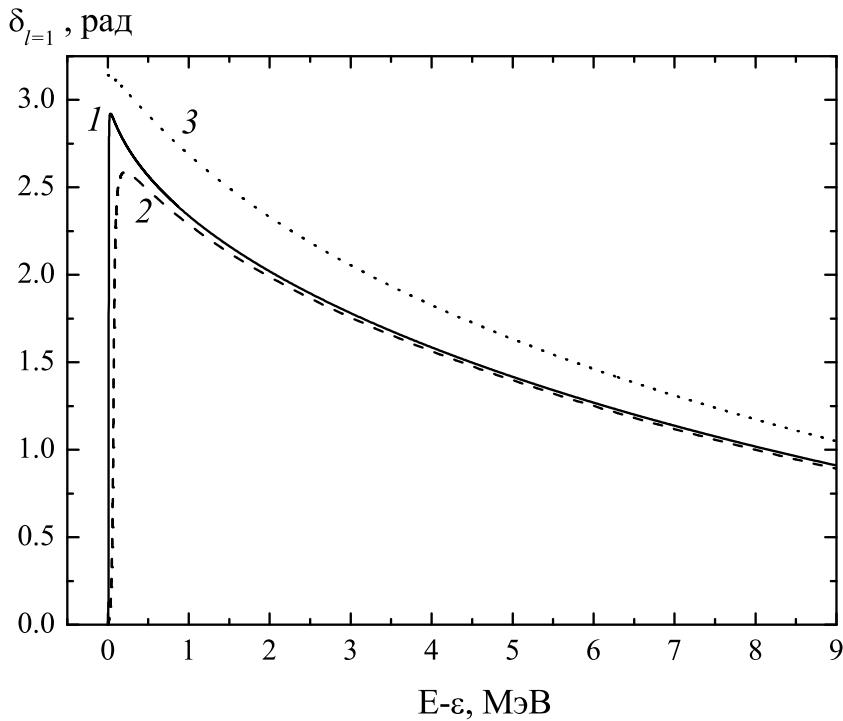


Рис. 3.5 Фаза розсіяння  $\delta_{l=1}$  нейтрона на підсистемі  ${}^4\text{H}$ , що характеризує неперервний спектр ядра  ${}^5\text{H}$ . 1 –  ${}^5\text{H}={}^4\text{H}+n$ ; 2 –  ${}^5\text{H}={}^3\text{H}+n+n$ ,  $k_{\max} = 1$ ,  $\Lambda_{\nu,k=1} = 1$ ; 3 –  ${}^5\text{H}={}^3\text{H}+n+n$ ,  $k_{\max} = 1$ ,  $\Lambda_{\nu,k=1} \neq 1$ .

Розрахунки виконані в двох різних наближеннях: без урахування кластерної структури  ${}^4\text{H}$  і з урахуванням кластерної структури  ${}^4\text{H}={}^3\text{H}+n$ . В останньому наближенні окрім розглянутий варіант, коли враховано вплив принципу Паулі лише на структуру дозволених станів в області малого числа квантів, а власні значення покладені рівними одиниці. Як видно з рис. 3.5, найбільш сильне притягання між кластерами виникає в тому випадку, коли  ${}^5\text{H}$  є трикластерною системою і одночасно враховується вплив обмінних ефектів як на структуру дозволених станів, так і на власні значення останніх. Фаза розсіяння нейтрона на  ${}^4\text{H}$  в припущені бінарної конфігурації  ${}^5\text{H}$  досить близька до фази розсіяння нейтрона на підсистемі  ${}^4\text{H}$  з урахуванням кластерної структури  ${}^4\text{H}$ , якщо власні значення дозволених станів першої гілки трикластерної системи  ${}^5\text{H}={}^3\text{H}+n+n$  вважати рівними одиниці. Це явище пояснюється тим, що недіагональні матричні

елементи оператора кінетичної енергії в цих двох випадках дуже близькі (порівняйте другий рядок табл. 13 і третій рядок табл. 14.)

Відзначимо, що врахування лише першої гілки дозволених станів системи  ${}^5\text{H} = {}^3\text{H} + n + n$  приводить до утворення зв'язаного стану ядра  ${}^5\text{H}$  через надто сильне притягання між кластерами, обумовлене надмірною локалізацією підсистеми  ${}^4\text{H}$ .

**3.1.8 Наближення фіксованої кількості гілок дозволених станів трикластерної системи  ${}^3\text{H} + n + n$ .** Обговоримо зміну поведінки фази розсіяння і хвильових функцій трикластерної системи  ${}^3\text{H} + n + n$  при поступовому збільшенні кількості залучених сімейств  $k_{\max}$  від одного (коли залучається лише гілка  $k = 1$ ) до шести (коли враховуються всі непарні сімейства аж до  $k = 11$ .)

Із збільшенням  $k_{\max}$  підсистема  ${}^4\text{H} = {}^3\text{H} + n$  стає все менш локалізована, а внутрішня енергія  $\varepsilon$  цієї підсистеми зменшується. Хвильова функція  ${}^4\text{H}$ , що є розв'язком системи рівнянь (3.19), вже не буде складатись з одного доданку, як в наближенні одної гілки. Вага стану моделі оболонок в хвильовій функції  ${}^4\text{H}$  буде зменшуватись, а хвильова функція  ${}^4\text{H}$  виявиться розподіленою по станах з різним числом осциляторних квантів. При цьому максимальне число квантів, що припадає на відносний рух нейтрона і тритія, буде рівне найбільшому додатковому квантовому числу  $k$  залучених сімейств.

Поведінка фази розсіяння нейтрона на підсистемі  ${}^4\text{H}$  в залежності від кількості залучених сімейств показано на рис. 3.6. Надто мала кількість залучених гілок приводить до утворення зв'язаного стану підсистеми  ${}^4\text{H} + n$ . Обмінні ефекти, що зв'язують підсистему  ${}^4\text{H}$  і нейtron, не дають нейtronу піти на нескінченість, хоча і тримають його на великій, але скінченній відстані від  ${}^4\text{H}$ . Енергія цього зв'язаного стану максимальна за абсолютною величиною для випадку  $k_{\max} = 1$ .

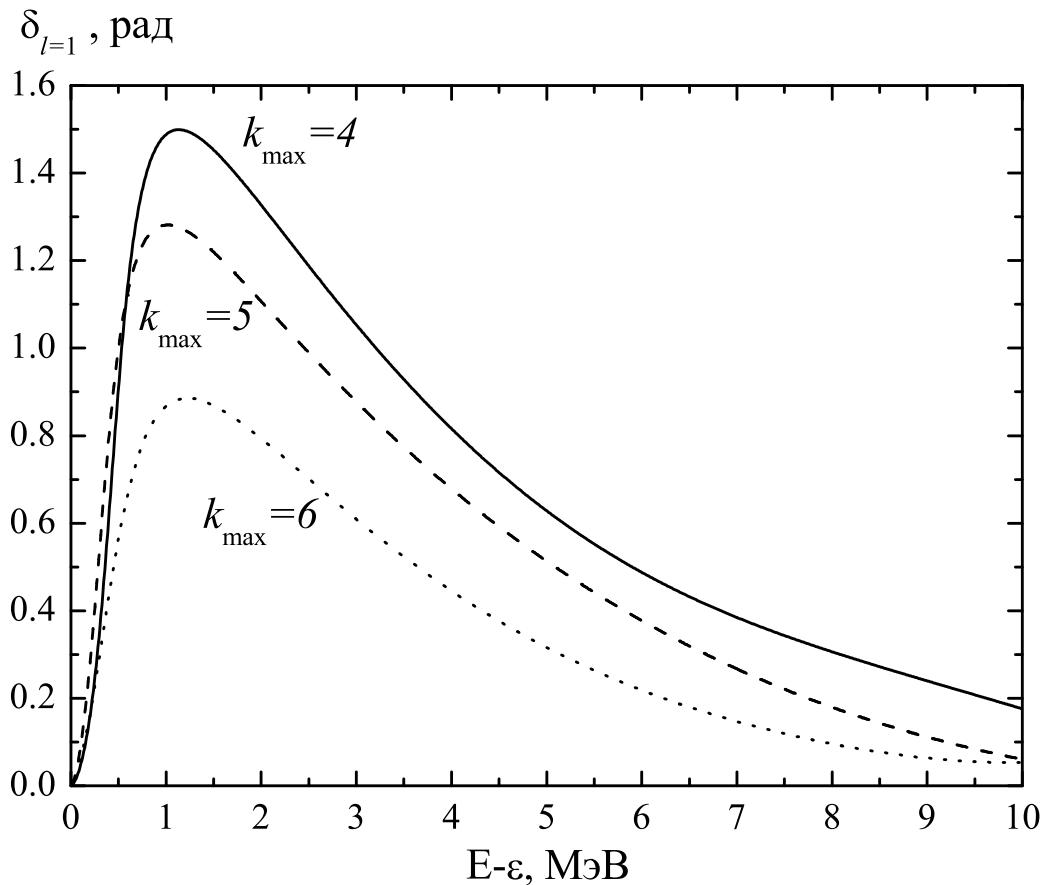


Рис. 3.6 Фаза розсіяння  $\delta_{l=1}$  нейтрона на підсистемі  ${}^4\text{H}$  в залежності від числа  $k_{\max}$  залучених сімейств. Значення  $k_{\max}$  вказані біля кривих.

Із залученням все більшого числа гілок, енергія зв'язку зменшується і при  $k_{\max} = 4$  зв'язаний стан зникає і замість зв'язаного стану в підсистемі  ${}^4\text{H} + n$  з'являється спочату вузький, а потім широкий резонанс і, нарешті, залишається лише, як наслідок делокалізації  ${}^4\text{H}$ , резонансна поведінка фази, що відповідає великому значенню ширини і миттєвому розпаду підсистеми  ${}^4\text{H} + n$ .

Чим більше  $k_{\max}$ , тим більша кількість рівнянь в системі (3.19) і тим менші всі порогові енергії  $\varepsilon_i^l$ . Якщо ми зосередимо увагу на області одноканального розпаду, то ця область поступово звужується із збільшенням  $k_{\max}$ . Але є обмеження на розміри цієї області. Збільшуючи кількість до-

зволених базисних функцій підсистеми  ${}^3\text{H}+n$ , ми одночасно зменшуємо енергію найнижчого стану  ${}^5\text{H}$  і збільшуємо його радіус. Але занадто великий радіус суперечить загальним міркуванням, що стосується створення ядерної системи  ${}^5\text{H}$ , що з'явила в результаті розпаду більш важкого ядра. Наприклад, в роботі [133] ядро  ${}^5\text{H}$  було отримано в результаті реакції  ${}^1\text{H}({}^6\text{He}, {}^2\text{He}){}^5\text{H}$ . Звісно, ядерна система  ${}^5\text{H}$  живе деякий час, поки не розпадеться на  ${}^3\text{H}+n + n$ . Хвильова функція  ${}^4\text{H}$  також має бути певною мірою локалізована, оскільки відомо, що основний стан  ${}^4\text{H}$  є резонансом.

На рис. 3.7 наведена залежність фази розсіяння нейтрона на тритії в стані  $l^\pi = 1^-$ , що з'явила в результаті ефективного притягання, обумовленого впливом обмінних ефектів на оператор кінетичної енергії відносного руху нейтрона і  ${}^3\text{H}$ .

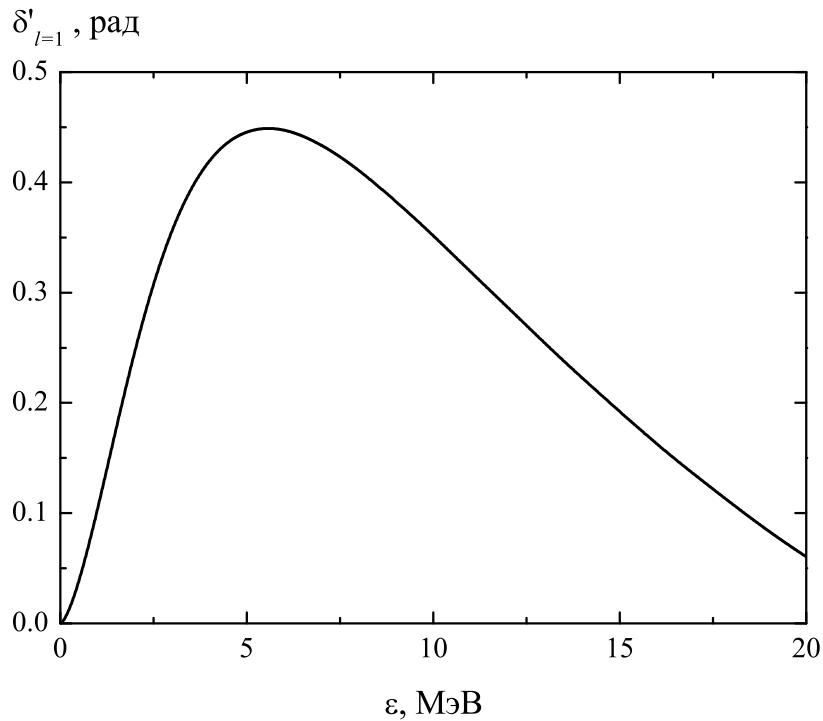


Рис. 3.7 Фаза розсіяння  $\delta'_{l=1}(\varepsilon)$  нейтрона на тритії в стані  $l^\pi = 1^-$ .

З рис. 3.6 і 3.7 випливає, що ширина резонансу в підсистемі  ${}^4\text{H}$  більша ширини резонансу підсистеми  ${}^4\text{H} + n$ . Отже, розпад  ${}^5\text{H}$  відбувається так:

спочатку розпадається підсистема  ${}^3\text{H}+n$ , а потім починає рухатись підсистема  ${}^4\text{H}+n$ . Відзначимо також, що при  $k_{\max} = 6$  в результаті розпаду ядра  ${}^5\text{H}$  підсистема  ${}^4\text{H}$  опиняється в стані з енергією  $\varepsilon = 5.38$  MeВ, яка відповідає максимуму фази розсіяння нейтрона на тритії.

Нарешті, на рис. 3.8 показані коефіцієнти розкладу  $C_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^E$  хвильової функції  ${}^5\text{H}$  по  $SU(3)$ -базису дозволених принципом Паули станів  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}$  в наближенні  $k_{\max} = 6$  з енергією  $E = 7.34$  MeВ над тричастинковим порогом розвалу  ${}^5\text{H} \rightarrow {}^3\text{H}+n+n$ .

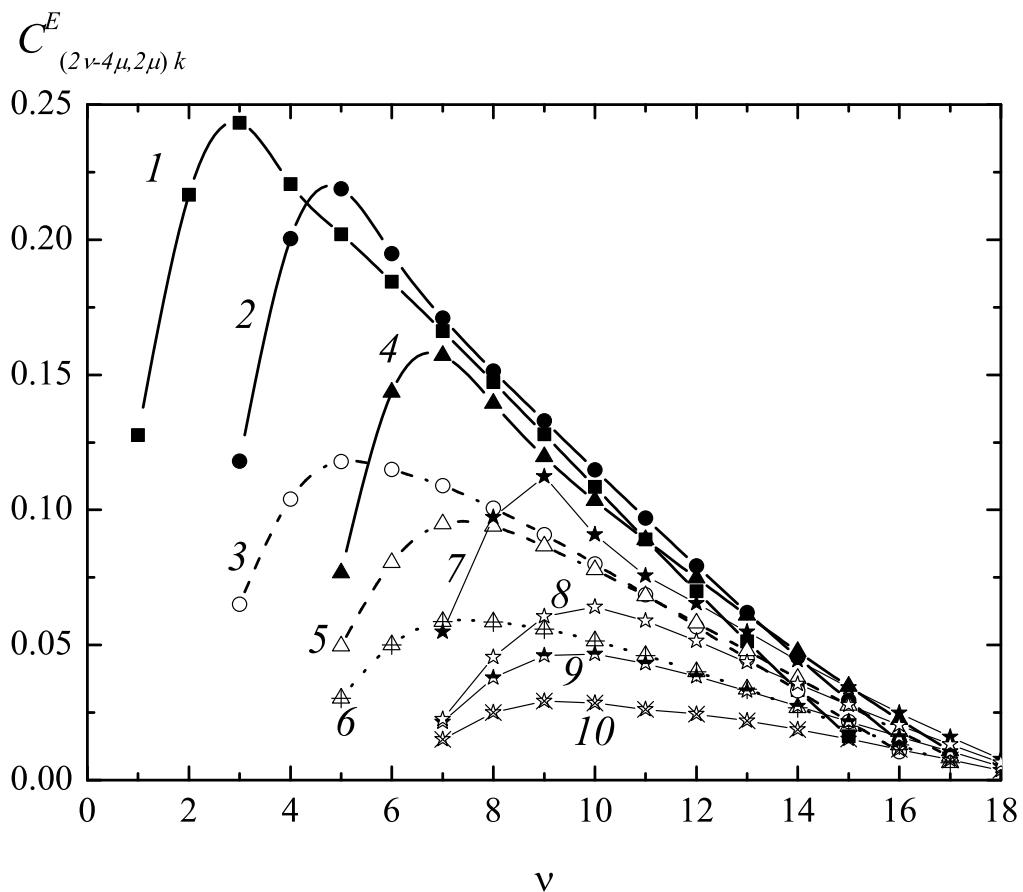


Рис. 3.8 Коефіцієнти розкладу  $C_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^E$  хвильової функції ядра  ${}^5\text{H}$  по  $SU(3)$ -базисі при енергії  $E = 7.34$  MeВ.

1 –  $(2\nu, 0)_{k=1}$ ; 2 –  $(2\nu, 0)_{k=3}$ ; 3 –  $(2\nu-4, 2)_{k=3}$ ; 4 –  $(2\nu, 0)_{k=5}$ ; 5 –  $(2\nu-4, 2)_{k=5}$ ; 6 –  $(2\nu - 8, 4)_{k=5}$ ; 7 –  $(2\nu, 0)_{k=7}$ ; 8 –  $(2\nu - 4, 2)_{k=7}$ ; 9 –  $(2\nu - 8, 4)_{k=7}$ ; 10 –  $(2\nu - 12, 6)_{k=7}$ .

При такому значенні повної енергії  $E$  енергія  $\tilde{E}$  відносного руху валентного нейтрона і підсистеми  ${}^4\text{H}$  близька до енергії, що відповідає максимуму фази розсіяння нейтрона на підсистемі  ${}^4\text{H}$ . На рис. 3.8 представлена коефіцієнти розкладу перших чотирьох гілок.

З рис. 3.8 ми бачимо, що домінуючими є гілки з малими значеннями додаткового квантового числа  $k$  і  $\mu$ . Співвідношення між гілками різних сімейств визначається вагою станів з числом квантів  $k$  в хвильовій функції  ${}^4\text{H}$ . Як випливає з виразу (3.18), при великому числі квантів  $\nu$  хвильові функції всіх гілок з точністю до константи пропорційні суперпозиції функцій Бесселя і Неймана, а ці константи є коефіцієнтами розкладу хвильової функції підсистеми  ${}^4\text{H}$  по дозволених станах.

**3.1.9 Висновки** Запропоновано новий підхід до проблеми багатоканального спектра систем  ${}^A\text{X} = {}^{A-2}\text{X} + n + n$  ( $A \leq 6$ ) на основі дискретиного представлення повного базису дозволених станів багаточастинкового гармонічного осцилятора, які систематизовані за допомогою індексів  $SU(3)$  симетрії і визначені в просторі Фока-Баргманна. Запропонований підхід дозволяє коректний опис трикластерних систем як в області малих міжклластерних відстаней, де принцип Паулі особливо важливий, так і в асимптотичній області, де утворюються елементи матриці розсіяння.

Вперше здійснено детальний аналіз структури власних функцій і поведінки власних значень трикластерного ядра нормування. В загальному вигляді записано систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка генерує дозволені принципом Паулі стани для різних трикластерних систем, що складаються з  $s$ -кластера і двох нейtronів. Ця система залежить від єдиного параметра, який легко знайти для будь-якої трикластерної системи.

Показано, що в просторі Фока-Баргманна дозволені принципом Паулі стани трикластерної системи є суперпозиціями гіпергеометричних функцій, а коефіцієнти розкладу є ортогональними поліномами дискретної змінної. Продемонстровано, що власні значення трикластерної системи прагнуть до власних значень двокластерних підсистем із збільшенням числа

осциляторних квантів  $\nu$ . В той же час, відповідні власні вектори набувають простого аналітичного вигляду, тоді як коефіцієнти розкладу стають поліномами Кравчука із зростанням числа осциляторних квантів. Ми пропонуємо шлях розв'язку проблеми  $SU(3)$  виродження дозволених принципом Паули станів. Порядок поліномів Кравчука служить додатковим квантовим числом, яке класифікує стани, що належать до тих самих  $SU(3)$  незвідних представлень.

Дозволені принципом Паулі стани трикластерних систем  ${}^{A-2}X + n + n$  можна об'єднати в гілки і сімейства так, що всі стани певної гілки мають спільний індекс  $SU(3)$ -симетрії  $\mu$ , але різне значення першого  $SU(3)$ -індексу  $\lambda$ . Власні значення, що належать до даної гілки, прагнуть до одного і того ж власного значення двокластерної підсистеми  $\lambda_k^{A-1}X$  із зростанням числа квантів. Гілки, що мають спільні граничні власні значення, об'єднуються в сімейства власних станів, які повністю визначаються порядком  $k$  відповідних поліномів Кравчука. Кожна сімейство дозволених принципом Паулі станів асимптотично відповідає певному бінарному порогу розпаду трикластерної системи на двокластерну підсистему  ${}^{A-1}X$ , що знаходиться в основному або збудженному стані гармонічного осцилятора, і нейтрон. Така асимптотична поведінка вказує на можливі канали розпаду трикластерного ядра і дозволяє визначити найбільш важливі канали розпаду ядра, що розглядається.

Показано, що сімейства, які характеризуються власними значеннями, що прямують до граничних значень  $\lambda_k$  зверху, є більш важливими при малих  $\nu$ , що можна розглядати як ефективне притягання кластерів через обмінні ефекти. Саме ця взаємодія примушує систему  ${}^AX$  розпадатись через проміжну стадію  ${}^AX \rightarrow {}^{A-1}X + n \rightarrow {}^{A-2}X + n + n$ . Алтернативний канал розпаду  ${}^AX \rightarrow {}^{A-2}X + ^2n \rightarrow {}^{A-2}X + n + n$  не реалізується.

Було спостережено, що відмінність граничних власних значень трикластерного ядра нормування приводить до відсутності такої області, де дозволені принципом Паулі стани системи  ${}^{A-2}X + n + n$  співпадають з гіперсфери-

чними гармоніками, що описують "демократичний розпад". Отже, замість гіперсферичних функцій при  $\nu \gg k$  слід використовувати базисні функції біосциляторного базису, які мають за квантові числа число квантів, орбітальний момент підсистеми  $A^{-1}X$  і момент відносного руху цієї підсистеми і нейтрона. В результаті трикластерне рівняння Шредінгера асимптотично зводиться до двочастинкової багатоканальної задачі, де асимптотичний вигляд коефіцієнтів розкладу по біосциляторному базису виражається через функції Ханкеля та елементи матриці розсіяння.

Справедливість цих висновків була проілюстрована на  $^3H + n + n$  конфігурації ядра  $^5H$ . Зокрема, було показано, що структура дозволених принципом Паулі станів ядра  $^5H$  відповідає послідовному розпаду  $^5H \rightarrow n + ^4H \rightarrow n + n + ^3H$ .

Показано, що в асимптотичній границі рівняння Шредінгера для хвильової функції відносного руху тритія і двох нейtronів зводиться до багатоканальної задачі розсіяння валентного нейтрона на підсистемі  $^4H$ . Запропоновано і реалізовано одноканальне наближення, в рамках якого єдиною характеристикою неперервного спектра ядра  $^5H$  є фаза розсіяння нейтрона на підсистемі  $^4H$ , що знаходиться в найнижчому можливому енергетичному стані.

Досліджено залежність елементів матриці розсіяння і хвильових функцій  $^5H$  від числа  $k_{\max}$  залучених сімейств дозволених принципом Паулі станів. Показано, що зміна числа  $k_{\max}$  залучених сімейств супроводжується появою двох різних за характером тенденцій. Із зростанням  $k_{\max}$  збільшується відстань між кластерами і зменшується кінетична енергія відносного руху трьох кластерів в найнижчому стані неперервного спектра. В той же час, чим менше  $k_{\max}$  і менше відстань між кластерами, тим сильніше ефективне притягання кластерів, обумовлене впливом обмінних ефектів на оператор кінетичної енергії відносного руху трикластерної системи  $^5H$ . Найбільшою мірою це проявляється в наближенні домінуючої гілки  $k_{\max} = 1$ , коли з'являється слабкозв'язаний стан  $^5H$ , що лежить під порогом розвалу  $^5H$  на

$^4\text{H}$  в стані моделі оболонок і нейтрон. Із збільшенням  $k_{\max}$  зв'язаний стан щезає і на його місці з'являється резонанс з малою енергією, що знаходиться над порогом розвалу  $^5\text{H}$  на нейтрон і підсистему  $^4\text{H} = ^3\text{H} + n$  в стані з  $k_{\max}$  квантами відносного руху між тритієм і нейtronом. Із збільшенням кількості залучених сімейств енергія і ширина резонансу  $^5\text{H}$  ростуть, при цьому положення резонансу змінюється набагато повільніше його ширини.

Отримані результати дозволяють припустити, що енергія  $L^\pi = 0^+$ -резонансу в неперервному спектрі  $^5\text{H}$  має бути більша за енергію  $l^\pi = 1^-$ -резонанса ядра  $^4\text{H}$ , а час життя  $^5\text{H}$  менший, ніж  $^4\text{H}$ .

## 3.2 Трикластерні системи, утворені з тотожніх кластерів

**3.2.1 Вступ** Питання про роль принципу Паулі в трикластерних системах має довгу історію. Ще сорок років тому було встановлено, що ядро  $^{12}\text{C}$  має З $\alpha$ -кластерну структуру. З того часу багато мікроскопічних, макроскопічних та напівмікроскопічних кластерних моделей застосовувалось для аналізу структури основного та збудженого станів цього ядра. Зокрема, мікроскопічні З $\alpha$  розрахунки було здійснено в рамках МРГ Камімурою [153] та в рамках методу генераторної координати (МГК) Уегакі [154]. Обидва розрахунки дали достатньо адекватні результати для основного стану  $^{12}\text{C}$  і для деяких збуджених станів. Проте хвильові функції обох моделей занадто складні. Більш того, хоча МРГ забезпечує правильне врахування обміну нуклонів різних кластерів, вимога антисиметрії повної хвильової функції може порушуватись неправильним обрізанням модельного простору. І міра цього порушення невідома. Наприклад, в роботі [153] було проведено розрахунки в рамках МРГ з обрізанням модельного простору по орбітальному моменту відносного руху двох альфа-частинок, який поклали рівним нулеві. В той же час, навіть найнижчий дозволений принципом Паулі стан ядра  $^{12}\text{C}$  є сумішшю станів з  $l = 0, 2$  і  $4$ . Це піднімає питання щодо того, як таке обрізання узгоджується з вимогами принципу Паулі. Що стосується МГК, в розрахунках фігурують семивимірні інтеграли, які обчислюються чисельно, і інтегрування по генераторним координатам заміняється підсумовування по деякій сітці. Проте генераторна координата вважається дійсною і область її значень не є добре визначеною, тоді як лише комплексні генераторні параметри забезпечують існування зворотного перетворення від простору генераторних координат до координатного простору [48].

Ряд макроскопічних моделей також застосовувалось до вивчення ядра  $^{12}\text{C}$  (див., наприклад, роботи [155–157]). В рамках таких моделей кластери вважають безструктурними частинками, які взаємодіють за допомогою локальних потенціалів, що відтворюють експериментальні дані для фаз

$\alpha - \alpha$  розсіяння. Але антисиметризація робить  $\alpha - \alpha$  потенціал нелокальним. Більш того, треба з особливою обережністю усувати заборонені принципом Паулі стани, щоб отримати адекватні результати щодо структури станів малої енергії ядра  $^{12}\text{C}$ . З цієї причини всі макроскопічні моделі нездатні відтворити головні властивості системи  $3\alpha$ .

В роботі [45] було запропоновано модель ортогональних умов (МОУ), яка є наближенням методу резонуючих груп, і застосовано її до дослідження альфа-кластерної структури ядра  $^{12}\text{C}$  в [148, 150]. В МОУ вимагається, щоб міжкластерна хвильова функція була ортогональною до заборонених станів  $i$ , отже, останні стани повністю усуваються з хвильової функції. В двокластерних системах за допомогою МОУ можна отримати лише власні функції оператора антисиметризації, але не їх власні значення, які фігурують в рівнянні Шредінгера і отже впливають на динаміку кластерної системи. Отже, в МОУ частина обмінних ефектів втрачається, хоча вони можуть бути суттєвими, зокрема, для трикластерних систем. Це підтверджується фактом недостатнього зв'язку ядра  $^{12}\text{C}$ , що спостерігається в МОУ порівняно з розрахунками в рамках МРГ [158]. В [159] Хоріучі припустив, що заборонені стани в системі  $3\alpha$  можна звести до заборонених станів в системі  $\alpha - \alpha$  і дозволені принципом Паулі стани в хвильових функціях системи  $3\alpha$  можна визначити з умови їх ортогональності забороненим станам системи  $\alpha - \alpha$ . Хоріучі також зауважив, що дозволені базисні функції мають бути класифіковані за допомогою числа осциляторних квантів та індексів SU(3)-симетрії  $(\lambda, \mu)$ , тому що оператор Казимира другого порядку групи SU(3) комутує з оператором перестановки координат нуклонів. Проте більшість трикластерних станів є SU(3)-виродженими і кратністю SU(3)-виродження швидко зростає із збільшенням числа осциляторних квантів. Дозволені принципом Паулі базисні функції, що відповідають тим самим індексам SU(3)-симетрії, відрізняються своїми власними значеннями і мають бути позначені додатковим квантовим числом. Але МОУ не визначає характер цього квантового числа  $i$ , отже, у випадку SU(3)-виродження ні

власні значення, ні власні функції оператора антисиметризації не можуть бути однозначно визначені.

Нешодавно Фуджівара зі співавторами запропонували новий тип трикластерного рівняння, що використовує ядро нормування двокластерного МРГ для визначення міжкластерної взаємодії [160]. Автори застосували це рівняння для системи, що складається з трьох дінейтронів та трьох альфа-частинок. Результати для енергії зв'язку системи  $3\alpha$ , отримані діагоналізацією гамільтоніана з використанням симетричного трансляційно-інваріантного базису гармонічного осцилятора, порівняли з розрахунками в рамках МРГ та МОУ. Енергія основного стану ядра  $^{12}\text{C}$ , що отримана в [160], близьча до експериментальних даних, ніж величина, отримана в рамках МОУ, але все ще це ядро залишається недозв'язаним на 1.5 MeV порівняно з  $3\alpha$  МРГ. Причина полягає в тому, що трикластерне рівняння, використане в [160], не містить деяких обмінних ефектів, притаманних трикластерному ядру нормування.

Трикластерне ядро нормування містить повну інформацію про модельний простір дозволених принципом Паулі станів відносного руху кластерів. Власні значення і власні функції ядра нормування повністю визначаються внутрішніми хвильовими функціями кластерів. Отже, потрібен детальний аналіз цих величин, щоб зрозуміти структуру трикластерних систем. Проте, є лише кілька робіт з цього приводу. Власні значення і власні функції ядер нормування для систем  $3\alpha$  і  $^{16}\text{O}+2\alpha$  було отримано в [151]. Вони характеризувались SU(3)-індексами і додатковим квантовим числом, але зміст останнього квантового числа не було визначено і не було запропоновано класифікації станів по відношенню до цього числа. Власні стани ядра нормування було розкладено по базисним станам гармонічного осцилятора в декартовому координатному представленні. Лише три найпростіших дозволених стани ядра  $^{24}\text{Mg}$  було наведено в [151], тоді як власні функції ядра нормування  $^{12}\text{C}$  не були представлені. Відзначено збіг деяких власних значень  $^{24}\text{Mg}$  з власними значеннями двокластерних ядер нормування систем

${}^8\text{Be} = \alpha + \alpha$  і  ${}^{20}\text{Ne} = \alpha + {}^{16}\text{O}$  при великому числу квантів, але це явище не було використано для класифікації трикластерних дозволених принципом Паулі станів.

У підсумку, залишаються відкритими ще кілька проблем: побудова власних функцій оператора антисиметризації трикластерних систем в простому вигляді, який легко піддається інтерпретації; повна класифікація цих станів (тобто, розв'язок проблеми  $\text{SU}(3)$ -виродження) і розробка методу обрізання модельного простору, який узгоджувався б з вимогами принципу Паулі.

Ми показали, що для випадку трикластерної системи, що складається з  $s$ -кластера і двох нейтронів, всі ці проблеми можуть бути вирішенні в рамках дискретного представлення повного базису дозволених станів багаточастинкового гармонічного осцилятора ( класифікованого за допомогою індексів  $\text{SU}(3)$  симетрії і визначеного в просторі Фока-Баргманна) [15]. Класифікація власних значень трикластерної системи за допомогою власних значень бінарних підсистем була запропонована в [15]. Ми помітили, що асимптотична поведінка базисних функцій, що задовольняють вимоги принципу Паулі, вказує на можливі канали розпаду трикластерного ядра і дозволяє визначити найбільш важливі канали. Така асимптотична поведінка відповідає скоріше послідовному розпаду трикластерної системи, ніж так званому "демократичному розпаду", що асоціюється з гіперсферичними гармоніками, які широко застосовуються для опису трикластерних систем.

В цьому підрозділі ми застосували наш підхід до трикластерних систем, що складаються з ідентичних  $s$ -кластерів. Ядра нормування системи трьох ферміонів та системи трьох бозонів детально обговорюються в пунктах 3.2.2 і 3.2.3 , відповідно. Пункт 3.2.4 присвячено аналізу власних значень і власних функцій ядра нормування системи трьох дінейtronів. Дозволені принципом Паулі стани системи З $\alpha$ -частинок побудовані і класифіковані в пункті 3.2.5 . Асимптотична поведінка цих функцій встановлена та по-

рівняна з асимптотичною поведінкою ядра нормування системи  ${}^3\text{H} + n + n$ . Висновки наведені в пункті 3.2.6.

**3.2.2 Ядро нормування системи трьох ферміонів** В цьому пункті ми розглядаємо ядро нормування трьох ідентичних ферміонів (наприклад, трьох нуклонів з однаковими проекціями спіну та ізоспіну), яке є головним блоком для побудови ядер нормування трикластерних систем, утворених трьома ідентичними кластерами.

Замість векторів Якобі  $\mathbf{a}$  та  $\mathbf{b}$  введемо нові комплексні вектори

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{a} + i\mathbf{b}}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{a} - i\mathbf{b}}{\sqrt{2}}.$$

Подібне перетворення операторів народження та знищення, як було показано в [161], значно спрощує побудову повного бісферичного базису гармонічного осцилятора для тринуклонних систем. Далі ми продемонструємо, що таке перетворення допоміжне також при побудові SU(3)-базису для системи трьох ферміонів і, що більш важливо, для розв'язку задачі на власні значення і власні функції ядра нормування системи трьох кластерів.

В термінах векторів  $\mathbf{A}$  і  $\mathbf{B}$  ядро нормування трьох ідентичних нуклонів має наступний вигляд:

$$I_{n+n+n}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}) = \frac{1}{3!} \exp \left\{ (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}}) + (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}}) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{3!} \exp \left\{ e^{i\frac{2\pi}{3}} (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}}) + e^{-i\frac{2\pi}{3}} (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}}) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{3!} \exp \left\{ e^{-i\frac{2\pi}{3}} (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}}) + e^{i\frac{2\pi}{3}} (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}}) \right\} - \frac{1}{3!} \exp \left\{ (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}}) + (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}}) \right\} -$$

$$- \frac{1}{3!} \exp \left\{ e^{i\frac{2\pi}{3}} (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}}) + e^{-i\frac{2\pi}{3}} (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}}) \right\} - \frac{1}{3!} \exp \left\{ e^{-i\frac{2\pi}{3}} (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}}) + e^{i\frac{2\pi}{3}} (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}}) \right\}.$$

Останній вираз можна розглядати як результат дії оператора антисиметризації  $\hat{A}$  на першу експоненту, яка містить повний базис як дозволених

так і заборонених принципом Паулі станів гармонічного осцилятора:

$$I_{n+n+n}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}) = \frac{1}{3!} \hat{A} \exp \left\{ (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}}) + (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}}) \right\},$$

де  $\hat{A}$  визначено в просторі Фока-Баргманна

$$\begin{aligned} \hat{A}f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) + f \left( e^{i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{A}, e^{-i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{B} \right) + f \left( e^{-i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{A}, e^{i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{B} \right) - \\ &- f(\mathbf{B}, \mathbf{A}) - f \left( e^{i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{B}, e^{-i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{A} \right) - f \left( e^{-i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{B}, e^{i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{A} \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Перший доданок відповідає тотожній перестановці, другий та третій описують циклічну перестановки, в той час як останні три доданки асоціюються з парними перестановками і, отже, мають знак мінус. Отже, перестановки в системі трьох ідентичних нуклонів відповідають повороту на кут 120 градусів у площині, що проходить через всі нуклони. Очевидно, що такий поворот відповідає переходу від одного дерева Якобі до іншого:

$$\mathbf{A}_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{B}; \quad \mathbf{B}_1 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{A}; \quad \mathbf{A}_2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{B}; \quad \mathbf{B}_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{A},$$

де

$$\mathbf{A}_{1,2} = \frac{\mathbf{a}_{1,2} + i \mathbf{b}_{1,2}}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{B}_{1,2} = \frac{\mathbf{a}_{1,2} - i \mathbf{b}_{1,2}}{\sqrt{2}}.$$

Вектори  $\mathbf{a}_{1,2}, \mathbf{b}_{1,2}$  відносяться до альтернативних дерев Якобі.

Розкладаючи ядро нормування  $I_{n+n+n}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$  по степеням векторів  $\mathbf{A}$  і  $\mathbf{B}$ , ми отримаємо дві суми:

$$\begin{aligned} I_{n+n+n}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2(m!)^2} \left\{ (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}})^m (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}})^m - (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}})^m (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}})^m \right\} + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2m!(m+3k)!} \left\{ (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}})^{m+3k} (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}})^m + (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}})^m (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}})^{m+3k} - \right. \\ &\left. - (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}})^{m+3k} (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}})^m - (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}})^m (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}})^{m+3k} \right\}. \end{aligned}$$

Кожна з двох сумм генерує стани з певним числом осциляторних квантів  $\bar{\nu}$ : одинарна сума відповідає  $\bar{\nu} = 2m$ , тоді як подвійна сума містить стани з  $\bar{\nu} = 2m + 3k$ . Варто відзначити, що лише вирази, які антисиметричні

відносно перестановки нуклонів, входять в наведений вище розклад ядра нормування.

Кожна з цих сум є суперпозицією парціальних ядер нормування  $i_{(\bar{\lambda}, \bar{\mu})}$  з певною SU(3)-симетрією та SU(3)-індексами  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$  (див. [106]):

$$\frac{1}{2(m!)^2} \left\{ (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}})^m (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}})^m - (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}})^m (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}})^m \right\} = \sum_{\bar{\mu}=0}^m i_{(2m-2\bar{\mu}, \bar{\mu})} (\mathbf{A}, \mathbf{B}; \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}),$$

$$\frac{1}{2m!(m+3k)!} \left\{ (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}})^{m+3k} (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}})^m + (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}})^m (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}})^{m+3k} - \right.$$

$$\left. - (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}})^{m+3k} (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}})^m - (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}})^m (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}})^{m+3k} \right\} = \sum_{\bar{\mu}=0}^m i_{(2m+3k-2\bar{\mu}, \bar{\mu})},$$

де

$$i_{(2m-2\bar{\mu}, \bar{\mu})} (\mathbf{A}, \mathbf{B}; \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}) = \frac{(-1)^{\bar{\mu}} (-m)_{\bar{\mu}} (-m)_{\bar{\mu}}}{2(m!)^2 \bar{\mu}! (-2m + \bar{\mu} - 1)_{\bar{\mu}}} ([\mathbf{AB}][\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}}])^{\bar{\mu}} \times$$

$$\times \left\{ (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}})^{m-\bar{\mu}} (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}})^{m-\bar{\mu}} {}_2F_1 (-m + \bar{\mu}, -m + \bar{\mu}; -2m + 2\bar{\mu}; z) - \right.$$

$$\left. - (-1)^{\bar{\mu}} (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}})^{m-\bar{\mu}} (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}})^{m-\bar{\mu}} {}_2F_1 (-m + \bar{\mu}, -m + \bar{\mu}; -2m + 2\bar{\mu}; \tilde{z}) \right\};$$

$$i_{(2m+3k-2\bar{\mu}, \bar{\mu})} (\mathbf{A}, \mathbf{B}; \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}) = \frac{(-1)^{\bar{\mu}} (-m)_{\bar{\mu}} (-m - 3k)_{\bar{\mu}}}{2m!(m+3k)! \bar{\mu}! (-2m - 3k + \bar{\mu} - 1)_{\bar{\mu}}} \times$$

$$\times ([\mathbf{AB}][\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}}])^{\bar{\mu}} \left\{ \left\{ (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}})^{m+3k-\bar{\mu}} (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}})^{m-\bar{\mu}} + (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}})^{m-\bar{\mu}} (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}})^{m+3k-\bar{\mu}} \right\} \times \right.$$

$$\times {}_2F_1 (-m + \bar{\mu}, -m - 3k + \bar{\mu}; -2m - 3k + 2\bar{\mu}; z) -$$

$$- (-1)^{\bar{\mu}} \left\{ (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}})^{m+3k-\bar{\mu}} (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}})^{m-\bar{\mu}} + (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}})^{m-\bar{\mu}} (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}})^{m+3k-\bar{\mu}} \right\} \times$$

$$\left. \times {}_2F_1 (-m + \bar{\mu}, -m - 3k + \bar{\mu}; -2m - 3k + 2\bar{\mu}; \tilde{z}) \right\};$$

Тут  $(-x)_n$  – символ Покхаммера, визначений таким чином:

$$(-x)_n = (-1)^n \frac{x!}{(x-m)!};$$

${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; Z)$  – гіпергеометрична функція з аргументом

$$z = \frac{([\mathbf{AB}][\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}}])}{(\mathbf{AA})(\mathbf{BB})}, \quad \tilde{z} = \frac{([\mathbf{BA}][\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}}])}{(\mathbf{BA})(\mathbf{AB})}.$$

Число осциляторних квантів  $\bar{\nu}$  пов'язане з індексами SU(3)-симетрії  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$  як  $\bar{\nu} = \bar{\lambda} + 2\bar{\mu}$ .

Парціальні ядра нормування  $i_{(\bar{\lambda}, \bar{\mu})}$  нормовані на розмірність  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$  SU(3)-представлення:

$$\int i_{(\bar{\lambda}, \bar{\mu})}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}) d\mu_{\mathbf{A}, \mathbf{B}} = \frac{(\bar{\lambda} + 1)(\bar{\mu} + 1)(\bar{\lambda} + \bar{\mu} + 2)}{2}. \quad (3.24)$$

Варто уважи, що  $i_{(2m-4\mu, 2\mu)} = 0$ . Отже, останнє представлення містить лише заборонені принципом Паулі стани. Очевидно, що стан, який відповідає нульовому числу квантів не може бути реалізований, тобто  $i_{(0,0)} = 0$ .

Базисні функції, що характеризуються нульовим повним орбітальним моментом  $L = 0$ , породжуються представленнями  $i_{(2m+3k-2\bar{\mu}, \bar{\mu})}$  за умови, що обидва індекси SU(3)-симетрії парні:  $2m + 3k = 2\nu$ ,  $\bar{\mu} = 2\mu$ . Ці функції виражуються через гіпергеометричні функції  ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; Z)$  змінної

$$Z = \frac{[\mathbf{AB}]^2}{\mathbf{A}^2 \mathbf{B}^2}.$$

А саме,

$$\begin{aligned} \chi_{(2\nu-4\mu, 2\mu)}^{\nu-3k-2\mu}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= N_{(2\nu-4\mu, 2\mu)}^{\nu-3k-2\mu} (\mathbf{A}^{6k} - \mathbf{B}^{6k}) \mathbf{A}^{2n-2\mu} \mathbf{B}^{2n-2\mu} [\mathbf{AB}]^{2\mu} \times \\ &\times \begin{cases} {}_2F_1(-\nu + n + \mu, -n + \mu; -\nu + 2\mu + \frac{1}{2}; Z), & \nu - 3k = 2n; \\ (\mathbf{AB}) {}_2F_1(-\nu + n + 1 + \mu, -n + \mu; -\nu + 2\mu + \frac{1}{2}; Z), & \nu - 3k = 2n + 1, \end{cases} \\ N_{(2\nu-4\mu, 2\mu)}^{\nu-3k-2\mu} &= \frac{1}{\sqrt{2(\nu + 3k - 2\mu)!(\nu - 3k - 2\mu)!}} \times \\ &\times \sqrt{\frac{(2\nu + 1 - 4\mu)!}{(2\mu)!(2\nu + 1 - 2\mu)!}} \sqrt{\frac{(2\nu - 2\mu)!!(2\nu - 4\mu - 1)!!(2\mu - 1)!!}{(2\nu - 2\mu + 1)!!(2\nu - 4\mu)!!(2\mu)!!}}. \end{aligned}$$

Набір квантових чисел функцій  $\chi_{(2\nu-4\mu, 2\mu)}^{\nu-3k-2\mu}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  включає повне число осциляторних квантів  $2\nu$ , індекси SU(3)-симетрії  $(\lambda, \mu)$ , і додаткове квантове

число  $k$  для  $SU(3)$ -вироджених станів<sup>1</sup>. Повний орбітальний момент  $L$  і його проекція  $M$  дорівнюють нулю, і отже, ми будемо їх опускати в цьому підрозділі

Функції  $\chi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3k-2\mu}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  задовольняють вимоги принципу Паулі. Легко перевірити це, подіявши на ці функції оператором антисиметризації  $\hat{A}$ , визначеним в (3.23).

$$\hat{A}\chi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3k-2\mu}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \Lambda_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k} \chi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3k-2\mu},$$

$$\Lambda_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k} = \begin{cases} 1, & 1 \leq k \leq [\frac{\nu-2\mu}{3}]; \\ 0, & k = 0. \end{cases}$$

Тут  $[x]$  позначає цілу частину  $x$ .

Отже, при будь-якому числі осциляторних квантів  $\nu$  існує  $[\frac{\nu-2\mu}{3}]$  дозволених принципом Паулі станів і один заборонений стан, що відносяться до одного і того ж  $SU(3)$ -представлення  $(2\nu - 4\mu, 2\mu)$ . Всі дозволені стани мають одиничні власні значення, тоді як заборонені стани відповідають нульовим власним значенням. Це означає, що ядро нормування системи трьох нуклонів можна розглядати як матрицю густини чистої системи. Справді, в цьому випадку розглядається динаміка всіх ступенів вільності і не проводиться ніякого усереднення.

В представленні векторів  $\mathbf{A}$  і  $\mathbf{B}$  спроектоване на стани з певною  $SU(3)$ -симетрією ядро нормування  $i_{(2\nu-4\mu,2\mu)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$  має діагональний вигляд:

$$i_{(2\nu-4\mu,2\mu)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}) = \sum_{k=1}^{[\frac{\nu-2\mu}{3}]} \chi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3k-2\mu}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \chi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3k-2\mu}(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}).$$

Отже, розв'язок задачі на власні значення та власні функції ядра нормування трьох нуклонів стає тривіальним. Також легко розрізнати базисні стани, що відносяться до  $SU(3)$ -виродженого представлення, за допомогою додаткового квантового числа  $k$ , яке явним чином фігурує у виразах для

---

**Примітка 1.** Верхній індекс базисних функцій відповідає мінімальному числу квантів вздовж  $\mathbf{A}$  і  $\mathbf{B}$

цих базисних функцій. Проте, завдяки тому факту, що всі власні значення дозволених принципом Паулі станів дорівнюють одиниці, власні функції ядра нормування не можна визначити однозначним чином. Будь-яке унітарне перетворення, застосоване до функцій  $\chi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3k-2\mu}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  дає новий набіл базисних функцій, які також є антисиметричними по відношенню до перестановки нуклонів. Наприклад, гіперсферичні гармоніки можуть бути з успіхом застосовані до вивчення систем трьох нуклонів.

**3.2.3 Ядро нормування системи трьох бозонів** В цьому пункті ми розглянемо ядро нормування системи трьох ідентичних бозонів  $I_{3b}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$ , яке породжує базисні функції, потрібні для опису триклusterної системи, утвореної трьома одинаковими бозонними кластерами, такими як  ${}^6n = {}^2n + {}^2n + {}^2n$  і  ${}^{12}\text{C} = \alpha + \alpha + \alpha$ .

В термінах векторів  $\mathbf{A}$  і  $\mathbf{B}$  ядро нормування трьох ідентичних бозонів дуже схоже на ядро нормування трьох ферміонів:

$$\begin{aligned} I_{3b}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}) &= \frac{1}{3!} \exp \left\{ (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}}) + (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}}) \right\} + \frac{1}{3!} \exp \left\{ e^{i\frac{2\pi}{3}}(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}}) + e^{-i\frac{2\pi}{3}}(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}}) \right\} + \\ &+ \frac{1}{3!} \exp \left\{ e^{-i\frac{2\pi}{3}}(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}}) + e^{i\frac{2\pi}{3}}(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}}) \right\} + \frac{1}{3!} \exp \left\{ (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}}) + (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}}) \right\} + \\ &+ \frac{1}{3!} \exp \left\{ e^{i\frac{2\pi}{3}}(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}}) + e^{-i\frac{2\pi}{3}}(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}}) \right\} + \frac{1}{3!} \exp \left\{ e^{-i\frac{2\pi}{3}}(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}}) + e^{i\frac{2\pi}{3}}(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}}) \right\}. \end{aligned}$$

Єдина різниця між ядрами нормування системи трьох ферміонів та трьох бозонів полягає в тому, що останнє симетричне щодо перестановки нуклонів, тоді як перше антисиметричне. Звичайно,  $I_{3b}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$  можна розглядати як результат дії оператора антисиметризації  $\hat{P}$  на першу експоненту:

$$I_{3b}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}) = \frac{1}{3!} \hat{P} \exp \left\{ (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}}) + (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}}) \right\},$$

де  $\hat{P}$  визначено в просторі Фока-Баргманна наступним чином:

$$\begin{aligned} \hat{P}f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) + f \left( e^{i\frac{2\pi}{3}}\mathbf{A}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\mathbf{B} \right) + f \left( e^{-i\frac{2\pi}{3}}\mathbf{A}, e^{i\frac{2\pi}{3}}\mathbf{B} \right) + \\ &+ f(\mathbf{B}, \mathbf{A}) + f \left( e^{i\frac{2\pi}{3}}\mathbf{B}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\mathbf{A} \right) + f \left( e^{-i\frac{2\pi}{3}}\mathbf{B}, e^{i\frac{2\pi}{3}}\mathbf{A} \right). \quad (3.25) \end{aligned}$$

Значення кожного доданку таке саме, як в рівнянні (3.23).

Розклад ядра нормування  $I_{3b}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$  по ступенях векторів  $\mathbf{A}$  і  $\mathbf{B}$  дає такий результат:

$$\begin{aligned} I_{3b}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2(m!)^2} \left\{ (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}})^m (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}})^m + (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}})^m (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}})^m \right\} + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2m!(m+3k)!} \left\{ (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}})^{m+3k} (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}})^m + (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}})^m (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}})^{m+3k} + \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}})^{m+3k} (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}})^m + (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}})^m (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}})^{m+3k} \right\}. \end{aligned}$$

Звісно, лише вирази, які симетричні відносно перестановки бозонів, входять у вищезгаданий вираз для ядра нормування. Зауважимо, що вся вищезгадана симетрія призводить до суттєвого скорочення базисних станів, які можуть бути реалізовані в ядрі нормування трьох бозонів. Справді, перша експонента  $\exp \{(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}}) + (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}})\}$ , яка генерує як дозволені, так і заборонені принципом Паулі базисні функції, містить у шість разів більше станів, ніж ядро нормування  $I_{3b}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$ .

По аналогії з системою трьох нуклонів, кожна сума відповідає фіксованому числу квантів  $\bar{\nu}$  і може бути представлена у вигляді суми парціальних ядер нормування  $\bar{i}_{(\bar{\lambda}, \bar{\mu})}$ , що відносяться до  $SU(3)$ -представлення  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(m!)^2} \left\{ (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}})^m (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}})^m + (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}})^m (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}})^m \right\} &= \sum_{\bar{\mu}=0}^m \bar{i}_{(2m-2\bar{\mu}, \bar{\mu})} \left( \mathbf{A}, \mathbf{B}; \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}} \right), \\ \frac{1}{2m!(m+3k)!} \left\{ (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}})^{m+3k} (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}})^m + (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}})^m (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}})^{m+3k} + \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}})^{m+3k} (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}})^m + (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}})^m (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}})^{m+3k} \right\} &= \sum_{\bar{\mu}=0}^m \bar{i}_{(2m+3k-2\bar{\mu}, \bar{\mu})}, \end{aligned}$$

де

$$\bar{i}_{(2m-2\bar{\mu}, \bar{\mu})} \left( \mathbf{A}, \mathbf{B}; \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}} \right) = \frac{(-1)^{\bar{\mu}} (-m)_{\bar{\mu}} (-m)_{\bar{\mu}}}{2(m!)^2 \bar{\mu}! (-2m + \bar{\mu} - 1)_{\bar{\mu}}} ([\mathbf{AB}][\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}}])^{\bar{\mu}} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}})^{m-\bar{\mu}}(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}})^{m-\bar{\mu}} {}_2F_1(-m+\bar{\mu}, -m+\bar{\mu}; -2m+2\bar{\mu}; z) + \right. \\
& + (-1)^{\bar{\mu}}(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}})^{m-\bar{\mu}}(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}})^{m-\bar{\mu}} {}_2F_1(-m+\bar{\mu}, -m+\bar{\mu}; -2m+2\bar{\mu}; \tilde{z}) \Big\}; \\
& \bar{i}_{(2m+3k-2\bar{\mu}, \bar{\mu})} \left( \mathbf{A}, \mathbf{B}; \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}} \right) = \frac{(-1)^{\bar{\mu}}(-m)_{\bar{\mu}}(-m-3k)_{\bar{\mu}}}{2m!(m+3k)!\bar{\mu}!(-2m-3k+\bar{\mu}-1)_{\bar{\mu}}} \times \\
& \times ([\mathbf{AB}][\tilde{\mathbf{AB}}])^{\bar{\mu}} \left\{ \left\{ (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}})^{m+3k-\bar{\mu}}(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}})^{m-\bar{\mu}} + (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}})^{m-\bar{\mu}}(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}})^{m+3k-\bar{\mu}} \right\} \times \right. \\
& \times {}_2F_1(-m+\bar{\mu}, -m-3k+\bar{\mu}; -2m-3k+2\bar{\mu}; z) + \\
& + (-1)^{\bar{\mu}} \left\{ (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}})^{m+3k-\bar{\mu}}(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}})^{m-\bar{\mu}} + (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}})^{m-\bar{\mu}}(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}})^{m+3k-\bar{\mu}} \right\} \times \\
& \left. \times {}_2F_1(-m+\bar{\mu}, -m-3k+\bar{\mu}; -2m-3k+2\bar{\mu}; \tilde{z}) \right\}.
\end{aligned}$$

Аргументи  $z$  і  $\tilde{z}$  гіпергеометричних функцій ті самі, що в попередньому пункті.

На відміну від системи трьох ферміонів,  $\bar{i}_{(2m-4\mu, 2\mu)} \neq 0$ , тоді як  $\bar{i}_{(2m-4\mu-2, 2\mu+1)} = 0$ . Отже, для системи трьох бозонів всі стани, що відносяться до представлення  $(2\nu - 4\mu, 2\mu)$ , дозволені принципом Паулі. Базисні функції, що характеризуються нульовим повним орбітальним моментом  $L = 0$  мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
\psi_{(2\nu-4\mu, 2\mu)}^{\nu-3k-2\mu}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= \bar{N}_{(2\nu-4\mu, 2\mu)}^{\nu-3k-2\mu} (\mathbf{A}^{6k} + \mathbf{B}^{6k}) \mathbf{A}^{2n-2\mu} \mathbf{B}^{2n-2\mu} [\mathbf{AB}]^{2\mu} \times \\
&\times \begin{cases} {}_2F_1(-\nu+n+\mu, -n+\mu; -\nu+2\mu+\frac{1}{2}; Z), & \nu-3k=2n; \\ (\mathbf{AB}) {}_2F_1(-\nu+n+1+\mu, -n+\mu; -\nu+2\mu+\frac{1}{2}; Z), & \nu-3k=2n+1, \end{cases} \quad (3.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{N}_{(2\nu-4\mu, 2\mu)}^{\nu-3k-2\mu} &= \frac{1}{\sqrt{2(1+\delta_{k,0})(\nu+3k-2\mu)!(\nu-3k-2\mu)!}} \times \\
&\times \sqrt{\frac{(2\nu+1-4\mu)!}{(2\mu)!(2\nu+1-2\mu)!}} \sqrt{\frac{(2\nu-2\mu)!!(2\nu-4\mu-1)!!(2\mu-1)!!}{(2\nu-2\mu+1)!!(2\nu-4\mu)!!(2\mu)!!}}.
\end{aligned}$$

Функції  $\psi_{(2\nu-4\mu, 2\mu)}^{\nu-3k-2\mu}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  є власними функціями оператора симетризації  $\hat{P}$ , визначеного в (3.25):

$$\hat{P} \psi_{(2\nu-4\mu, 2\mu)}^{\nu-3k-2\mu}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \psi_{(2\nu-4\mu, 2\mu)}^{\nu-3k-2\mu}, \quad 0 \leq k \leq \left[ \frac{\nu-2\mu}{3} \right].$$

Нарешті, при кожному числі осциляторних квантів можна побудувати  $\left[\frac{\nu-2\mu}{3}\right] + 1$  базисних функцій, що належать  $SU(3)$ -представленню  $(2\nu - 4\mu, 2\mu)$  і мають нульовий орбітальний момент, і всі ці стани задовольняють вимоги принципу Паулі.

В наступному пункті ми продемонструємо, що дозволені принципом Паулі стани трикластерних систем, утворених ідентичними бозонними кластерами, можна представити у вигляді суперпозиції власних функцій  $\psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3k-2\mu}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  ядра нормування системи трьох бозонів. Справді, структура останніх функцій відображає симетрію щодо перестановки кластерів як цілого і, на додачу, ці функції є власними функціями оператора Казиміра другого порядку. Далі буде показано, що використовуючи функції  $\psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3k-2\mu}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , можна суттєво спростити задачу на власні функції та власні значення трикластерних систем.

**3.2.4 Ядро нормування трьох дінейтронів** Ядро нормування системи трьох дінейтронів  $I_{3d'}$  можна отримати, піdnісши до квадрата, ядро нормування системи трьох нейtronів  $I_{3n}$ :

$$I_{3d'}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}) = 3! \left[ I_{3n} \left( \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}}, \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{2}}; \frac{\tilde{\mathbf{A}}}{\sqrt{2}}, \frac{\tilde{\mathbf{B}}}{\sqrt{2}} \right) \right]^2.$$

Заміна

$$\mathbf{A} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{B}, \quad \tilde{\mathbf{A}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\mathbf{A}}, \quad \tilde{\mathbf{B}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\mathbf{B}}$$

потрібна, щоб забезпечити коректне усування руху центру мас в системі  $3d'$ . Таке масштабне перетворення векторів Якобі враховує той факт, що кожен кластер в системі  $3d'$  складається з двох нейтронів.

Ядро нормування  $I_{3d'}$  можна представити у вигляді дії оператора антисиметризації, що складається з трьох доданків, на експоненту, яка містить повний базис як дозволених, так і заборонених станів:

$$I_{3d'}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}) = \frac{1}{3!} (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3) \exp \left\{ (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}}) + (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}}) \right\}.$$

Кожен з вищезгаданих операторів об'єднує певну групу перестановок.

Перший оператор  $\hat{A}_1$  співпадає з оператором симетризації  $\hat{P}$  системи трьох бозонів, визначений в (3.25). Отже,  $\hat{A}_1 = \hat{P}$  відповідає перестановці дінейtronних кластерів як цілого.

Друга частина оператора антисиметризації визначена наступним чином:

$$\begin{aligned} \hat{A}_2 f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = & 2 \left\{ f \left( -\frac{\mathbf{A}}{2}, -\frac{\mathbf{B}}{2} \right) + f \left( -e^{i\frac{2\pi}{3}} \frac{\mathbf{A}}{2}, -e^{-i\frac{2\pi}{3}} \frac{\mathbf{B}}{2} \right) + \right. \\ & + f \left( -e^{-i\frac{2\pi}{3}} \frac{\mathbf{A}}{2}, -e^{i\frac{2\pi}{3}} \frac{\mathbf{B}}{2} \right) + f \left( -\frac{\mathbf{B}}{2}, -\frac{\mathbf{A}}{2} \right) + \\ & \left. + f \left( -e^{i\frac{2\pi}{3}} \frac{\mathbf{B}}{2}, -e^{-i\frac{2\pi}{3}} \frac{\mathbf{A}}{2} \right) + f \left( -e^{-i\frac{2\pi}{3}} \frac{\mathbf{B}}{2}, -e^{i\frac{2\pi}{3}} \frac{\mathbf{A}}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Її можна співставити з перестановками нуклонів між всіма трьома дінейtronними кластерами і вона включає одночасні парні або циклічні перестановки нейtronів зі спіном вгору та вниз. Зауважимо, що лише перший доданок оператора  $\hat{A}_2$  призводить до перебудови кластерів в результаті перестановки ідентичних нейtronів. Решта п'ять доданків може бути отримана перестановою кластерів як цілого і наступної перебудови, що пов'язана з першим доданком.

Нарешті, останній оператор  $\hat{A}_3$  має трохи складніший вигляд:

$$\hat{A}_3 = \hat{A}_3^0 + \hat{A}_3^+ + \hat{A}_3^-,$$

де

$$\begin{aligned} \hat{A}_3^0 f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = & -2 \left\{ f \left( \frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{2}, \frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{2} \right) + f \left( e^{i\frac{2\pi}{3}} \frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{2}, e^{-i\frac{2\pi}{3}} \frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{2} \right) + \right. \\ & + f \left( e^{-i\frac{2\pi}{3}} \frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{2}, e^{i\frac{2\pi}{3}} \frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{2} \right) \Big\}; \\ \hat{A}_3^+ f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = & -2 \left\{ f \left( \frac{1}{2} \left[ e^{i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{A} + e^{-i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{B} \right], \frac{1}{2} \left[ e^{i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{A} + e^{-i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{B} \right] \right) + \right. \\ & + f \left( \frac{e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2} \left[ e^{i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{A} + e^{-i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{B} \right], \frac{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}{2} \left[ e^{i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{A} + e^{-i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{B} \right] \right) + \\ & \left. + f \left( \frac{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}{2} \left[ e^{i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{A} + e^{-i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{B} \right], \frac{e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2} \left[ e^{i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{A} + e^{-i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{B} \right] \right) \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_3^- f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = & -2 \left\{ f \left( \frac{1}{2} \left[ e^{-i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{A} + e^{i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{B} \right], \frac{1}{2} \left[ e^{-i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{A} + e^{i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{B} \right] \right) + \right. \\ & + f \left( \frac{e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2} \left[ e^{-i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{A} + e^{i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{B} \right], \frac{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}{2} \left[ e^{-i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{A} + e^{i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{B} \right] \right) + \\ & \left. + f \left( \frac{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}{2} \left[ e^{-i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{A} + e^{i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{B} \right], \frac{e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2} \left[ e^{-i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{A} + e^{i\frac{2\pi}{3}} \mathbf{B} \right] \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Оператор  $\hat{A}_3$  поєднує перестановки нуклонів між двома кластерами, тоді як третій кластер залишається спостерігачем. В цьому випадку відбувається циклічна перестановка нейтронів зі спіном вгору, а над нейтронами зі спіном вниз здійснюється пара перестановка і навпаки. Залежно від того, який з кластерів є спостерігачем, ми отримуємо оператори  $\hat{A}_3^0$ ,  $\hat{A}_3^+$  чи  $\hat{A}_3^-$ . Структура з трьох доданків кожного оператора відповідає трьом циклічним перестановкам кластерів як цілого.

Природньо шукати власні функції ядра нормування системи  $3d'$  у вигляді суперпозиції власних функцій ядра нормування системи трьох бозонів, оскільки дінейтронні кластери мають підлягати бозонній статистиці. Отже, дозволені принципом Паулі базисні функції системи трьох дінейтронів  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , що характеризуються позитивною парністю, нульовими значеннями повного орбіタルного моменту та спіну  $L = S = 0$  та належать до представлення  $(2\nu - 4\mu, 2\mu)$  групи  $SU(3)$  можна записати у вигляді:

$$\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{\nu-2\mu}{3} \rfloor} D_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{\nu-3q-2\mu} \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3q-2\mu}(\mathbf{A}, \mathbf{B}). \quad (3.29)$$

Коефіцієнти розкладу  $D_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{\nu-3q-2\mu}$ , разом з власними значеннями  $\Lambda_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}$ , що відповідають власним значенням  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , можна знайти за допомогою діагоналізації ядра нормування системи трьох дінейтронів  $i_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{3d'}$ , спроектованого на стани з певним числом квантів та певною  $SU(3)$ -симетрією:

$$\begin{aligned} i_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{3d'} = & \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{\nu-2\mu}{3} \rfloor} \sum_{\tilde{q}=0}^{\lfloor \frac{\nu-2\mu}{3} \rfloor - q} \langle 2\nu, \nu - 3q - 2\mu | 2\nu, \nu - 3q - 3\tilde{q} - 2\mu \rangle_{3d'} \times \\ & \times \left( \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3q-2\mu} \tilde{\psi}_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3q-3\tilde{q}-2\mu} + \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3q-3\tilde{q}-2\mu} \tilde{\psi}_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3q-2\mu} \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Щоб побудувати характеристичне рівняння, розглянемо дію оператора антисиметризації  $\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3$  на функції  $\psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3q-2\mu}$ .

Легко перевірити, що

$$\frac{1}{3!} \hat{A}_1 \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3q-2\mu}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3q-2\mu}(\mathbf{A}, \mathbf{B}),$$

$$\frac{1}{3!} \hat{A}_2 \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3q-2\mu}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \frac{1}{2^{2\nu-1}} \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3q-2\mu}(\mathbf{A}, \mathbf{B}).$$

Зауважимо, що всі доданки, що входять у вирази, які визначають оператори  $\hat{A}_1$  чи  $\hat{A}_2$  дають той самий результат, діючи на базисні функції  $\psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3q-2\mu}$ .

Остання частина оператора антисиметризації дає ненульовий результат лише для представлення  $(2\nu, 0)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3!} \hat{A}_3 \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3q-2\mu}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= -\delta_{\mu,0} \frac{6}{4^\nu} \sum_{\tilde{q}=0}^{[\nu/3]-q} \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3q-3\tilde{q}-2\mu}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{(1+\delta_{q,0})(1+\delta_{\tilde{q},-q})}} \frac{(2\nu)!}{\sqrt{(\nu+3q+3\tilde{q})!(\nu-3q-3\tilde{q})!(\nu+3q)!(\nu-3q)!}}. \end{aligned}$$

Відповідно, матричні елементи секулярного рівняння виглядають так:

$$\begin{aligned} \langle 2\nu, \nu-3q-2\mu | 2\nu, \nu-3q-3\tilde{q}-2\mu \rangle_{3d'} &= \\ &= \left(1 + \frac{1}{2^{2\nu-1}}\right) \delta_{\tilde{q},0} - \delta_{\mu,0} \frac{6}{4^\nu} \frac{1}{\sqrt{(1+\delta_{q,0})(1+\delta_{\tilde{q},-q})}} \times \\ &\times \frac{(2\nu)!}{\sqrt{(\nu+3q+3\tilde{q})!(\nu-3q-3\tilde{q})!(\nu+3q)!(\nu-3q)!}}. \end{aligned}$$

Дія оператора антисиметризації  $\hat{A}$  на базисні функції  $\psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3q-2\mu}$  призводить лише до діагональних матричних елементів характеристичного рівняння для  $\mu \neq 0$ :

$$\hat{A} \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3k-2\mu}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \left(1 + \frac{1}{2^{2\nu-1}}\right) \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3k-2\mu}(\mathbf{A}, \mathbf{B}), \quad \mu \neq 0.$$

З цієї причини, дозволені принципом Паулі базисні функції системи  $3d'$ , що належать до  $SU(3)$ -представлення  $(2\nu-4\mu, 2\mu)$  з  $\mu \neq 0$  співпадають

з власними функціями ядра нормування системи трьох бозонів і мають ідентичні, хоч і не рівні одиниці, власні значення  $\Lambda_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}$ :

$$\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3k-2\mu}(\mathbf{A}, \mathbf{B}),$$

$$\Lambda_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k} = 1 + \frac{1}{2^{2\nu-1}}, \quad 0 \leq k \leq \left[ \frac{\nu-2\mu}{3} \right], \quad \mu \neq 0.$$

Дозволені стани представлень  $(2\nu, 0)$  характеризуються тими ж власними значеннями при даному числі осциляторних квантів  $\nu$ . Проте, є також один заборонений принципом Паулі стан, що відповідає нульовому власному значенню:

$$\Lambda_{(2\nu,0)} = (1 - \delta_{k,0}) \left( 1 + \frac{1}{2^{2\nu-1}} \right), \quad 0 \leq k \leq \left[ \frac{\nu}{3} \right].$$

Власні функції  $\Psi_{(2\nu,0)_k}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  оператора антисиметризації мають більш складний вигляд і є суперпозиціями функцій  $\psi_{(2\nu,0)}^{\nu-3q}$  (див. (3.29)). Проте, із збільшенням числа осциляторних квантів заборонений принципом Паулі стан  $\Psi_{(2\nu,0)_{k=0}}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  набуває простого аналітичного вигляду:

$$\begin{aligned} \Psi_{(2\nu,0)_{k=0}} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{(2\nu+1)!}} (\mathbf{a}^{2\nu} + \mathbf{a}_1^{2\nu} + \mathbf{a}_2^{2\nu}) = \\ &= \sum_{q=0}^{\lfloor \nu/3 \rfloor} \sqrt{\frac{6}{1 + \delta_{q,0}}} \left( \frac{1}{2} \right)^\nu \sqrt{\frac{(2\nu)!}{(\nu-3q)!(\nu+3q)!}} \psi_{(2\nu,0)}^{\nu-3q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}). \end{aligned}$$

Досить очевидно, що така асимптотична поведінка відповідає випадку, коли дінейtron віддаляється від підсистеми  ${}^4n = {}^2n + {}^2n$  (тетранейtron), коли остання знаходиться в забороненому принципом Паулі стані.

Подібна поведінка властива також дозволеним принципом Паулі станам. За допомогою унітарного перетворення власні функції ядра нормування системи, що відповідають ненульовим власним значенням, можуть бути перебудовані таким чином

$$\begin{aligned} \Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k} &\rightarrow \Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{\text{as}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \phi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{2k-2\mu}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \phi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{2k-2\mu}(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) + \phi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{2k-2\mu}(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) \right) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{q=0}^{\left[\frac{\nu-2\mu}{3}\right]} \sqrt{\frac{6}{1+\delta_{q,0}}} \bar{\mathcal{K}}_{2k}^{1/2}(\nu-3q-2\mu) \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3q-2\mu}(\mathbf{A}, \mathbf{B}). \quad (3.31)$$

Тут функції  $\phi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{k-2\mu}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  визначені як

$$\begin{aligned} \phi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{2m-2\mu}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= N_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{2m-2\mu} [\mathbf{ab}]^{2\mu} \mathbf{a}^{2\nu-2m-2\mu} \mathbf{b}^{2m-2\mu} \times \\ &\quad \times {}_2F_1\left(-\nu+m+\mu, -m+\mu; -\nu+2\mu+\frac{1}{2}; Z\right), \quad Z = \frac{[\mathbf{ab}]^2}{\mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2} \end{aligned}$$

де  $N_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{2m-2\mu}$  – нормувальний коефіцієнт:

$$N_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{2m-2\mu} =$$

$$= \sqrt{\frac{(2\nu+1-4\mu)!(2\nu-2\mu)!!(2\nu-4\mu-1)!!(2\mu-1)!!}{(2\mu)!(2\nu+1-2\mu)!(2\nu-2m-2\mu)!(2m-2\mu)!(2\nu-2\mu+1)!!(2\nu-4\mu)!!(2\mu)!!}}.$$

$\bar{\mathcal{K}}_{2k}^{1/2}(\nu-3q-2\mu)$  – так звані поліноми Кравчука дискретної змінної [152], визначені і ортогональні на інтервалі  $2\mu \leq m \leq 2\nu-2\mu$ :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{K}}_{2k}^{1/2}(\nu-3q-2\mu) &= \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-2\mu} \frac{(2\nu-4\mu)! {}_2F_1(-2k+2\mu, -\nu+3q+2\mu; -2\nu+4\mu; 2)}{\sqrt{(2k-2\mu)!(2\nu-2k-2\mu)!(\nu-3q-2\mu)!(\nu+3q-2\mu)!}}. \quad (3.32) \end{aligned}$$

Отже, індекс поліномів Кравчука служить додатковим квантовим числом для SU(3)-вироджених станів. В роботі [15] ми показали, що сім'я власних функцій оператора антисиметризації, об'єднує стани  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}$  з однаковим індексом  $k$  і відповідає певному бінарному каналу розпаду трикластерної системи на двокластерну підсистему, що знаходиться у основному чи збудженному стані гармонічного осцилятора, і третій кластер. В свою чергу, власні значення  $\Lambda_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}$  трикластерної системи прагнуть до власних значень двокластерної підсистеми із збільшенням числа осциляторних квантів  $\nu$ . Проте всі власні значення дозволених принципом Паулі станів підсистеми  ${}^2n + {}^2n$  дорівнюють одиниці, на відміну від власних значень підсистеми  ${}^3H + n$  ядра  ${}^5H$ , розглянутого в [15]. З цієї причини власні значення

$\Lambda_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}$  системи  $3d'$  однакові і прагнуть до одиниці для  $1 \leq k \leq [\frac{\nu-2\mu}{3}]$ . Отже, строго кажучи, дозволені принципом Паулі стани системи  $3d'$  не є однозначно визначеними і будь-яке унітарне перетворення може бути застосовано до цих станів без порушення принципу Паулі. Складається враження, що базис гіперсферичних гармонік також можна використовувати для дослідження системи  $3d'$ . Проте існування забороненого стану робить це твердження сумнівним. Справді, оскільки заборонений принципом Паулі стан і дозволені стани мають різні власні значення, унітарне перетворення не може не порушити діагональний вигляд ядра нормування. Отже, перехід до гіперсферичного базису міг би призвести до порушення принципу Паулі.

**3.2.5 Ядро нормування системи трьох  $\alpha$ -частинок** Трансляційно-інваріантне ядро нормування для системи  $3\alpha$  можна отримати, підносячи до квадрату ядро нормування системи трьох дінейtronів:

$$\begin{aligned} I_{3\alpha}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}) &= 3! \left[ I_{3d'}\left(\frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}}, \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{2}}; \frac{\tilde{\mathbf{A}}}{\sqrt{2}}, \frac{\tilde{\mathbf{B}}}{\sqrt{2}}\right) \right]^2 \equiv \\ &\equiv \sum_{i=1}^6 \frac{1}{3!} \hat{\mathcal{A}}_i \exp \left\{ (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}}) + (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}}) \right\} \end{aligned}$$

Для зручності ми поділили оператор антисиметризації  $\hat{\mathcal{A}}$  системи  $3\alpha$ -частинок на шість операторів  $\hat{\mathcal{A}}_i$ , кожен з яких відповідає певній групі перестановки нуклонів<sup>1</sup>. Шість доданків  $I_{3\alpha}^{(i)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$  ядра нормування  $I_{3\alpha}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$ , які відповідають складникам  $\hat{\mathcal{A}}_i$  оператора антисиметризації  $\hat{\mathcal{A}}$ , в явному вигляді наведено нижче.

$$I_{3\alpha}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}) = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{3!} I_{3\alpha}^{(i)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}),$$

---

**Примітка 1.** Ми позначили оператор антисиметризації системи каліграфічним  $\hat{\mathcal{A}}$ , щоб відрізняти його від оператора антисиметризації  $\hat{A}$  системи  $3d'$

де

$$\begin{aligned}
 I_{3\alpha}^{(1)} &= \frac{1}{3!}(x_1 + y_1 + z_1 + x_2 + y_2 + z_2)^2, \quad I_{3\alpha}^{(2)} = \frac{1}{3!}(\bar{x}_1 + \bar{y}_1 + \bar{z}_1 + \bar{x}_2 + \bar{y}_2 + \bar{z}_2)^2 \\
 I_{3\alpha}^{(3)} &= \frac{1}{3!}2(x_1 + y_1 + z_1 + x_2 + y_2 + z_2)(\bar{x}_1 + \bar{y}_1 + \bar{z}_1 + \bar{x}_2 + \bar{y}_2 + \bar{z}_2) \\
 I_{3\alpha}^{(4)} &= -\frac{1}{3!}4(x_1 + y_1 + z_1 + x_2 + y_2 + z_2)(x_3 + y_3 + z_3)(x_4 + y_4 + z_4) \\
 I_{3\alpha}^{(5)} &= -\frac{1}{3!}4(\bar{x}_1 + \bar{y}_1 + \bar{z}_1 + \bar{x}_2 + \bar{y}_2 + \bar{z}_2)(x_3 + y_3 + z_3)(x_4 + y_4 + z_4) \\
 I_{3\alpha}^{(6)} &= \frac{1}{3!}4(x_3 + y_3 + z_3)^2(x_4 + y_4 + z_4)^2.
 \end{aligned}$$

Використано наступні позначення:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \exp \left\{ \frac{(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}})}{2} + \frac{(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}})}{2} \right\}; \quad x_2 = \exp \left\{ \frac{(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}})}{2} + \frac{(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}})}{2} \right\}; \\
 y_1 &= \exp \left\{ e^{i\frac{2\pi}{3}} \frac{(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}})}{2} + e^{-i\frac{2\pi}{3}} \frac{(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}})}{2} \right\}, \quad y_2 = \exp \left\{ e^{i\frac{2\pi}{3}} \frac{(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}})}{2} + e^{-i\frac{2\pi}{3}} \frac{(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}})}{2} \right\} \\
 z_1 &= \exp \left\{ e^{-i\frac{2\pi}{3}} \frac{(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}})}{2} + e^{i\frac{2\pi}{3}} \frac{(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}})}{2} \right\} \quad z_2 = \exp \left\{ e^{-i\frac{2\pi}{3}} \frac{(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}})}{2} + e^{i\frac{2\pi}{3}} \frac{(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}})}{2} \right\} \\
 \bar{x}_1 &= 2 \exp \left\{ -\frac{(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}})}{4} - \frac{(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}})}{4} \right\}; \quad \bar{x}_2 = 2 \exp \left\{ -\frac{(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}})}{4} - \frac{(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}})}{4} \right\} \\
 \bar{y}_1 &= 2 \exp \left\{ -e^{i\frac{2\pi}{3}} \frac{(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}})}{4} - e^{-i\frac{2\pi}{3}} \frac{(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}})}{4} \right\}, \quad \bar{y}_2 = 2 \exp \left\{ -e^{i\frac{2\pi}{3}} \frac{(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}})}{4} - e^{-i\frac{2\pi}{3}} \frac{(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}})}{4} \right\} \\
 \bar{z}_1 &= 2 \exp \left\{ -e^{-i\frac{2\pi}{3}} \frac{(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}})}{4} - e^{i\frac{2\pi}{3}} \frac{(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}})}{4} \right\}, \quad \bar{z}_2 = 2 \exp \left\{ -e^{-i\frac{2\pi}{3}} \frac{(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}})}{4} - e^{i\frac{2\pi}{3}} \frac{(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}})}{4} \right\} \\
 x_3 &= \exp \left\{ \frac{(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}})}{4} + \frac{(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}})}{4} \right\}; \quad x_4 = \exp \left\{ \frac{(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}})}{4} + \frac{(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}})}{4} \right\}; \\
 y_3 &= \exp \left\{ e^{i\frac{2\pi}{3}} \frac{(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}})}{4} + e^{-i\frac{2\pi}{3}} \frac{(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}})}{4} \right\}, \quad y_4 = \exp \left\{ e^{i\frac{2\pi}{3}} \frac{(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}})}{4} + e^{-i\frac{2\pi}{3}} \frac{(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}})}{4} \right\} \\
 z_3 &= \exp \left\{ e^{-i\frac{2\pi}{3}} \frac{(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}})}{4} + e^{i\frac{2\pi}{3}} \frac{(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}})}{4} \right\} \quad z_4 = \exp \left\{ e^{-i\frac{2\pi}{3}} \frac{(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}})}{4} + e^{i\frac{2\pi}{3}} \frac{(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}})}{4} \right\}
 \end{aligned}$$

В цьому пункті ми розглядаємо стани додатньої парності і з нульовим орбітальним моментом. Отже, всі дозволені принципом Паулі стани відно-

сяться до представлення  $(2\nu - 4\mu, 2\mu)$  групи  $SU(3)$ , як і у випадку системи  $3d'$ . Отже, визначаючи оператори  $\hat{\mathcal{A}}_i$ , ми врахували симетрію, властиву базисним функціям  $\psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3q-2\mu}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , на які ці оператори діють. Нижче ми пояснимо це твердження детальніше.

Приклад системи  $3d'$  ілюструє, що будь-яка перестановка нуклонів, що відносяться до різних кластерів, може бути зведена до наступної математичної операції:

$$f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \rightarrow \text{const} \cdot f(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}, \beta^*\mathbf{A} + \alpha^*\mathbf{B}), \quad (3.33)$$

де  $\alpha, \beta$  – деякі комплексні числа. Отже, завдяки вищезгаданій перестановці відбувається деяка перебудова кластерів. Тоді циклічні перестановки таких перебудованих кластерів можна записати таким чином:

$$f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \rightarrow \text{const} \cdot f\left(e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}), e^{\mp i\frac{2\pi}{3}}(\beta^*\mathbf{A} + \alpha^*\mathbf{B})\right).$$

Очевидно, останні циклічні перестановки мають давати такий самий результат, як і початкова перестановка (3.33):

$$\begin{aligned} & \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3q-2\mu}(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}, \beta^*\mathbf{A} + \alpha^*\mathbf{B}) + \\ & + \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3q-2\mu}\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}), e^{-i\frac{2\pi}{3}}(\beta^*\mathbf{A} + \alpha^*\mathbf{B})\right) + \\ & + \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3q-2\mu}\left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}), e^{i\frac{2\pi}{3}}(\beta^*\mathbf{A} + \alpha^*\mathbf{B})\right) = \\ & = 3\psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3q-2\mu}(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}, \beta^*\mathbf{A} + \alpha^*\mathbf{B}). \end{aligned}$$

Крім того, функції  $\psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3q-2\mu}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  симетричні відносно заміни вектора  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{B}$ .<sup>1</sup> З цієї причини справедлива наступна рівність:

$$\psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3q-2\mu}(\beta^*\mathbf{A} + \alpha^*\mathbf{B}, \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3q-2\mu}(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}, \beta^*\mathbf{A} + \alpha^*\mathbf{B}).$$

Пам'ятаючи все викладене вище, визначимо оператори  $\hat{\mathcal{A}}_i$ . Перша частина  $\hat{\mathcal{A}}_1$  оператора антисиметризації  $\hat{\mathcal{A}}$  для трьох  $\alpha$ -частинок дуже схожа на оператор антисиметризації  $\hat{A}$  системи трьох дінейтронів:

$$\hat{\mathcal{A}}_1 = 6\hat{\mathcal{A}}_{11} + 6\hat{\mathcal{A}}_{12} + 3\left(\hat{\mathcal{A}}_{13}^0 + \hat{\mathcal{A}}_{13}^+ + \hat{\mathcal{A}}_{13}^-\right),$$

---

**Примітка 1.** Така заміна відповідає перестановці двох бозонних кластерів.

$$\hat{\mathcal{A}}_{11}f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = f(\mathbf{A}, \mathbf{B}), \quad \hat{\mathcal{A}}_{12}f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 2f\left(-\frac{\mathbf{A}}{2}, -\frac{\mathbf{B}}{2}\right),$$

$$\hat{\mathcal{A}}_{13}^0f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 2f\left(\frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{2}, \frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{2}\right).$$

Оператори  $\hat{A}_{ij}^\pm$  визначені наступним чином:

$$\hat{\mathcal{A}}_{ij}^\pm f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \left[ \hat{\mathcal{A}}_{ij}^0 f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \right]_{\mathbf{A} \rightarrow \exp(\pm i \frac{2\pi}{3})\mathbf{A}, \mathbf{B} \rightarrow \exp(\mp i \frac{2\pi}{3})\mathbf{B}}.$$

Перестановки, що відносяться до цієї групи, відрізняються від перестановок в системі трьох дінейтронів лише у одному відношенні: остання відноситься до ферміонів, тоді як перша відноситься до бозонів. Розглядаючи дінейтрони та діпротони як бозони, ми приходимо до висновку, що  $\hat{A}_{11}$  відповідає перестановці  $\alpha$ -кластерів,  $\hat{A}_{12}$  можна співставити обміну дінейтронами та діпротонами між всіма  $\alpha$ -частинками, в той час як  $\hat{A}_{13}^0$  і  $\hat{A}_{13}^\pm$  асоціюються з перестановками дінейтронів та діпротонів між двома  $\alpha$ -кластерами з третім кластером в ролі спостерігача.

Друга частина  $\hat{\mathcal{A}}_2$  оператора антисиметризації системи  $3\alpha$

$$\hat{\mathcal{A}}_2 = 6\hat{\mathcal{A}}_{21} + 6\hat{\mathcal{A}}_{22} + 3(\hat{\mathcal{A}}_{23}^0 + \hat{\mathcal{A}}_{23}^+ + \hat{\mathcal{A}}_{23}^-)$$

об'єднує перестановки дейtronних кластерів:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_{21}f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= 4f\left(-\frac{\mathbf{A}}{2}, -\frac{\mathbf{B}}{2}\right), \quad \hat{\mathcal{A}}_{22}f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 8f\left(\frac{\mathbf{A}}{4}, \frac{\mathbf{B}}{4}\right), \\ \hat{\mathcal{A}}_{23}^0f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= 8f\left(-\frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{4}, -\frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{4}\right); \end{aligned}$$

$\hat{\mathcal{A}}_{21}$  включає перестановки дейtronних кластерів з одиничною проекцією спіну;  $\hat{\mathcal{A}}_{22}$  можна співставити обміну нуклонами між трьома дейtronами, в той час як інші три дейtronи (що характеризуються нульовою проекцією спіна) є спостерігачами;  $\hat{\mathcal{A}}_{23}^0, \hat{\mathcal{A}}_{23}^\pm$  об'єднують перестановки, що призводять до руйнування одного з  $\alpha$ -кластерів з подальшим розподілом двох складових дейtronів з одиничною проекцією спіну між двома іншими  $\alpha$ -кластерами і утворенням кластера з двох інших дейtronів з нульовими проекціями спіну.

Оператор  $\hat{\mathcal{A}}_3$

$$\hat{\mathcal{A}}_3 = 6 \left( \hat{\mathcal{A}}_{31} + \hat{\mathcal{A}}_{32} + \hat{\mathcal{A}}_{33} + \hat{\mathcal{A}}_{34}^0 + \hat{\mathcal{A}}_{34}^+ + \hat{\mathcal{A}}_{34}^- \right)$$

включає перестановки протонів, тоді як дінейтрони залишаються осторонь:

$$\hat{\mathcal{A}}_{31}f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 4f \left( \frac{\mathbf{A}}{4}, \frac{\mathbf{B}}{4} \right); \quad \hat{\mathcal{A}}_{32}f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 4f \left( \frac{5+i\sqrt{3}}{8}\mathbf{A}, \frac{5-i\sqrt{3}}{8}\mathbf{B} \right);$$

$$\hat{\mathcal{A}}_{33}f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 4f \left( \frac{5-i\sqrt{3}}{8}\mathbf{A}, \frac{5+i\sqrt{3}}{8}\mathbf{B} \right);$$

$$\hat{\mathcal{A}}_{34}^0f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 4f \left( \frac{2\mathbf{A}-\mathbf{B}}{4}, -\frac{\mathbf{A}-2\mathbf{B}}{4} \right).$$

$\hat{\mathcal{A}}_{31}$  об'єднує одночасні циклічні перестановки протонів зі спіном вгору і вниз;  $\hat{\mathcal{A}}_{32}$  і  $\hat{\mathcal{A}}_{33}$  містять циклічні перестановки протонів зі спінами вгору і вниз, відповідно;  $\hat{\mathcal{A}}_{34}^0, \hat{\mathcal{A}}_{34}^\pm$  відповідальні за однопротонний обмін між першим кластером і одним з інших двох кластерів.

Наступна частина оператора антисиметризації  $\hat{\mathcal{A}}$  відноситься до обміну протонів зі спіном вгору між двома кластерами, що супроводжується ідентичною або циклічною перестановкою дінейтронів.

$$\hat{\mathcal{A}}_4 = 6(\hat{\mathcal{A}}_{41}^0 + \hat{\mathcal{A}}_{41}^+ + \hat{\mathcal{A}}_{41}^- + \hat{\mathcal{A}}_{42}^0 + \hat{\mathcal{A}}_{42}^+ + \hat{\mathcal{A}}_{42}^- + \hat{\mathcal{A}}_{43}^0 + \hat{\mathcal{A}}_{43}^+ + \hat{\mathcal{A}}_{43}^-)$$

В цьому випадку дінейтрони і один з діпротонів не перебудовуються.

$$\hat{\mathcal{A}}_{41}^0f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = -4f \left( \frac{3\mathbf{A}+\mathbf{B}}{4}, \frac{\mathbf{A}+3\mathbf{B}}{4} \right),$$

$$\hat{\mathcal{A}}_{42}^0f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = -4f \left( \frac{i\sqrt{3}\mathbf{A}+\mathbf{B}}{4}, \frac{\mathbf{A}-i\sqrt{3}\mathbf{B}}{4} \right),$$

$$\hat{\mathcal{A}}_{43}^0f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = -4f \left( \frac{-i\sqrt{3}\mathbf{A}+\mathbf{B}}{4}, \frac{\mathbf{A}+i\sqrt{3}\mathbf{B}}{4} \right).$$

$\hat{\mathcal{A}}_{41}$ ,  $\hat{\mathcal{A}}_{42}$  і  $\hat{\mathcal{A}}_{43}$  асоціюються з ідентичною перестановкою дінейтронів та їх циклічними перестановками за годинникою стрілкою та проти, відповідно.

Оператор  $\hat{\mathcal{A}}_5$  характеризується непарним числом парних перестановок нуклонів:

$$\hat{\mathcal{A}}_5 = 6(3\hat{\mathcal{A}}_{51} + \hat{\mathcal{A}}_{52}^0 + \hat{\mathcal{A}}_{52}^+ + \hat{\mathcal{A}}_{52}^- + \hat{\mathcal{A}}_{53}^0 + \hat{\mathcal{A}}_{53}^+ + \hat{\mathcal{A}}_{53}^-).$$

В цьому випадку один діпротон залишається спостерігачем.

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{A}}_{51}f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= -8f\left(\frac{\mathbf{A}}{4}, \frac{\mathbf{B}}{4}\right), \\ \hat{\mathcal{A}}_{52}^0f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= -8f\left(\frac{1}{4}\mathbf{A} + \frac{i\sqrt{3}}{4}e^{-i2\pi/3}\mathbf{B}, -\frac{i\sqrt{3}}{4}e^{i2\pi/3}\mathbf{A} + \frac{1}{4}\mathbf{B}\right), \\ \hat{\mathcal{A}}_{53}^0f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= -8f\left(\frac{1}{4}\mathbf{A} - \frac{i\sqrt{3}}{4}e^{i2\pi/3}\mathbf{B}, \frac{i\sqrt{3}}{4}e^{-i2\pi/3}\mathbf{A} + \frac{1}{4}\mathbf{B}\right).\end{aligned}$$

$\hat{\mathcal{A}}_{51}$  поєднує перестановки, що призводять до двохнуклонного обміну між всіма кластерами;  $\hat{\mathcal{A}}_{52}^0$ ,  $\hat{\mathcal{A}}_{52}^\pm$  і  $\hat{\mathcal{A}}_{53}^0$ ,  $\hat{\mathcal{A}}_{53}^\pm$  відповідають однонуклонному обміну між двома кластерами, що супроводжується обміном дейtronами з одиничною і нульовою проекціями спіна, відповідно.

Остання частина  $\hat{\mathcal{A}}_6$  оператора антисиметризації виглядає як

$$\hat{\mathcal{A}}_6 = 3(\hat{\mathcal{A}}_{61}^0 + \hat{\mathcal{A}}_{61}^+ + \hat{\mathcal{A}}_{61}^- + \hat{\mathcal{A}}_{62}^0 + \hat{\mathcal{A}}_{62}^+ + \hat{\mathcal{A}}_{62}^-) + 6(\hat{\mathcal{A}}_{63}^0 + \hat{\mathcal{A}}_{63}^+ + \hat{\mathcal{A}}_{63}^-).$$

Всі складові частини оператора  $\hat{\mathcal{A}}_6$  можна виразити через попередньо означені оператори перестановок:

$$\hat{\mathcal{A}}_{61}^0 = 2\hat{\mathcal{A}}_{13}^0, \quad \hat{\mathcal{A}}_{62}^0 = 2\hat{\mathcal{A}}_{23}^0, \quad \hat{\mathcal{A}}_{63}^0 = 2\hat{\mathcal{A}}_{34}^0.$$

Враховуючи, що  $\hat{\mathcal{A}}_{21} = 2\hat{\mathcal{A}}_{12}$  і  $\hat{\mathcal{A}}_{22} = 2\hat{\mathcal{A}}_{31}$ , ми приходимо до остаточного виразу для оператора антисиметризації системи  $3\alpha$ :

$$\hat{\mathcal{A}} = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{3!} \hat{\mathcal{A}}_i = \hat{\mathcal{A}}_{11} + 3\hat{\mathcal{A}}_{12} + 3\hat{\mathcal{A}}_{31} + \hat{\mathcal{A}}_{32} + \hat{\mathcal{A}}_{33} + 3\hat{\mathcal{A}}_{51} + \frac{3}{2}(\hat{\mathcal{A}}_{13}^0 + \hat{\mathcal{A}}_{13}^+ + \hat{\mathcal{A}}_{13}^-) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{2}(\hat{\mathcal{A}}_{23}^0 + \hat{\mathcal{A}}_{23}^+ + \hat{\mathcal{A}}_{23}^-) + 3(\hat{\mathcal{A}}_{34}^0 + \hat{\mathcal{A}}_{34}^+ + \hat{\mathcal{A}}_{34}^-) + \\
& + \hat{\mathcal{A}}_{41}^0 + \hat{\mathcal{A}}_{41}^+ + \hat{\mathcal{A}}_{41}^- + \hat{\mathcal{A}}_{42}^0 + \hat{\mathcal{A}}_{42}^+ + \hat{\mathcal{A}}_{42}^- + \\
& + \hat{\mathcal{A}}_{43}^0 + \hat{\mathcal{A}}_{43}^+ + \hat{\mathcal{A}}_{43}^- + \hat{\mathcal{A}}_{52}^0 + \hat{\mathcal{A}}_{52}^+ + \hat{\mathcal{A}}_{52}^- + \hat{\mathcal{A}}_{53}^0 + \hat{\mathcal{A}}_{53}^+ + \hat{\mathcal{A}}_{53}^-.
\end{aligned}$$

Застосовуючи оператор  $\hat{\mathcal{A}}$  до базисних функцій  $\psi_{(2\nu-4\mu, 2\mu)}^{\nu-3q-2\mu}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , приходимо до наступного розкладу парціального ядра нормування  $i_{(2\nu-4\mu, 2\mu)}^{3\alpha}$  для системи  $3\alpha$ :

$$\begin{aligned}
i_{(2\nu-4\mu, 2\mu)}^{3\alpha} &= \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{\nu-2\mu}{3} \rfloor} \sum_{\tilde{q}=0}^{\lfloor \frac{\nu-2\mu}{3} \rfloor - q} \langle 2\nu, \nu - 3q - 2\mu | 2\nu, \nu - 3q - 3\tilde{q} - 2\mu \rangle_{3\alpha} \times \\
&\quad \times \left( \psi_{(2\nu-4\mu, 2\mu)}^{\nu-3q-2\mu} \tilde{\psi}_{(2\nu-4\mu, 2\mu)}^{\nu-3q-3\tilde{q}-2\mu} + \psi_{(2\nu-4\mu, 2\mu)}^{\nu-3q-3\tilde{q}-2\mu} \tilde{\psi}_{(2\nu-4\mu, 2\mu)}^{\nu-3q-2\mu} \right). \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Наведений вище розклад відрізняється від схожого виразу (3.30) для системи трьох дінейtronів лише явним виглядом матричних елементів секундального рівняння:

$$\begin{aligned}
& \langle 2\nu, \nu - 3q - 2\mu | 2\nu, \nu - 3q - 3\tilde{q} - 2\mu \rangle_{3\alpha} = \\
& = \left( 1 + \frac{6}{4^\nu} \left( 1 - \frac{2}{4^\nu} \right) + \frac{1}{8^{6q-1}} \left( \frac{7}{16} \right)^{\nu-3q} \sum_{m=0}^{3q} \binom{6q}{2m} (-1)^m 5^{6q-2m} 3^m \right) \delta_{\tilde{q}, 0} + \\
& + \frac{9}{4^{2\nu-1}} \sqrt{\frac{(\nu + 3q + 3\tilde{q} - 2\mu)! (\nu - 3q - 3\tilde{q} - 2\mu)!}{(\nu + 3q - 2\mu)! (\nu - 3q - 2\mu)! (1 + \delta_{q, 0}) (1 + \delta_{\tilde{q}, -q})}} \times \\
& \times \binom{\nu + 3q - 2\mu}{\nu - 3q - 3\tilde{q} - 2\mu} \times \\
& \times \left\{ 3^{2\mu} (-1)^{\tilde{q}} \left[ 2^{6q+3\tilde{q}} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; 4) + 2^{2\nu-6q-3\tilde{q}-4\mu} {}_2F_1 \left( \alpha, \beta; \gamma; \frac{1}{4} \right) \right] - \right. \\
& - \frac{1}{3} 8^{2\mu} \left[ 3^{6q+3\tilde{q}} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; 9) + 3^{2\nu-6q-3\tilde{q}-4\mu} {}_2F_1 \left( \alpha, \beta; \gamma; \frac{1}{9} \right) \right] - \\
& \left. \times \left[ (i\sqrt{3})^{6q+3\tilde{q}} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; 3) + 3^{\nu-2\mu} (-1)^q (i\sqrt{3})^{-6q-3\tilde{q}} {}_2F_1 \left( \alpha, \beta; \gamma; \frac{1}{3} \right) \right] \right\},
\end{aligned}$$

де індекси гіпергеометричної функції визначені наступним чином:

$$\alpha = -\nu + 3q + 2\mu, \quad \beta = -\nu + 3q + 3\tilde{q} + 2\mu, \quad \gamma = 6q + 3\tilde{q} + 1.$$

Власні функції  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}$  оператора антисиметризації системи  $\hat{A}$   $3\alpha$  виражаються через ортогональні поліноми дискретної змінної, як у випадку системи  $3d'$  (див. (3.29)). Кількість різних станів, що мають  $SU(3)$ -симетрію  $(2\nu - 4\mu, 2\mu)$ , тобто кратність  $SU(3)$ -виродження, однакова для системи трьох бозонів, системи  $3d'$  і системи трьох  $3\alpha$ -частинок і дорівнює  $[\frac{\nu-2\mu}{3}] + 1$ . Проте деякі з цих функцій відповідають нульовим власним значенням і, отже, є забороненими принципом Паулі. Кількість останніх функцій залежить від системи, що розглядається, і збільшується із збільшенням кількості нуклонів в кожному кластері. Наприклад, в системі трьох бозонів всі стани, що належать до представлення  $(2\nu - 4\mu, 2\mu)$ , дозволені принципом Паулі, в той час як в системі трьох дінейтронів при заданому числі осциляторних квантів  $\nu$  є два заборонених принципом Паулі стан  $\Psi_{(2\nu,0)k=0}$ . В системі  $3\alpha$  при  $\nu \geq 3$  є два заборонених принципом Паулі стани, що відносяться до  $SU(3)$ -представлення  $(2\nu, 0)$ , і один заборонений принципом Паулі стан, що характеризується індексами  $SU(3)$ -симетрії  $(2\nu - 4, 2)$ . Всі дозволені принципом Паулі стани системи  $3\alpha$  мають різні власні значення, які прагнуть до власних значень підсистеми  $2\alpha$  із збільшенням числа осциляторних квантів  $\nu$  (див. Таб. 15):

$$\lim_{\nu-2\mu \rightarrow \infty} \Lambda_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{^{12}\text{C}=3\alpha} \rightarrow \lambda_{2k}^{^8\text{Be}=2\alpha} = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} + 3\delta_{k,0}.$$

Власні функції  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}$  також стають більш складними із збільшенням кількості нуклонів. У випадку системи  $3\alpha$  кожна власна функція оператора антисиметризації є суперпозицією функцій  $\psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-3q-2\mu}$  з усіма відмінними від нуля коефіцієнтами розкладу  $D_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{\nu-3q-2\mu}$ . Проте коли власні значення  $\Lambda_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}$  ядра нормування системи  $3\alpha$  наближаються до граничних значень  $\lambda_{2k}^{^8\text{Be}}$ , відповідні власні вектори  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}$  набувають простої аналітичної форми  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{\text{as}}$  (див. (3.35)), як можна побачити в Таб. 16. Відповідно, в границі  $\nu \gg k$  коефіцієнти розкладу можна ідентифікувати

Табл. 15: Власні значення  $\Lambda_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}$ , що відносяться до перших двох сімей дозволених принципом Паулі станів системи  $3\alpha$

$\nu$	2k = 4			2k = 6			
	$\mu = 2$	$\mu = 1$	$\mu = 0$	$\mu = 3$	$\mu = 2$	$\mu = 1$	$\mu = 0$
4	0.5933						
5	0.6748	0.4894					
6	0.7161	0.5647	0.6497	0.8714			
7	0.7366	0.6333	0.6269	0.9081	0.8657		
8	0.7450	0.6859	0.6457	0.9246	0.8852	0.9073	
9	0.7482	0.7196	0.6773	0.9324	0.9042	0.8959	0.9478
10	0.7493	0.7372	0.7071	0.9356	0.9191	0.9000	0.9193
11	0.7497	0.7449	0.7283	0.9368	0.9287	0.9106	0.9084
12	0.7499	0.7480	0.7404	0.9372	0.9338	0.9212	0.9093
13	0.7500	0.7492	0.7461	0.9374	0.9360	0.9290	0.9159
14	0.7500	0.7497	0.7485	0.9375	0.9369	0.9336	0.9236
15	0.7500	0.7499	0.7494	0.9375	0.9373	0.9358	0.9298
16	0.7500	0.7499	0.7498	0.9375	0.9374	0.9368	0.9337
17	0.7500	0.7500	0.7499	0.9375	0.9375	0.9372	0.9358
18	0.7500	0.7500	0.7500	0.9375	0.9375	0.9374	0.9368
19	0.7500	0.7500	0.7500	0.9375	0.9375	0.9375	0.9372
20	0.7500	0.7500	0.7500	0.9375	0.9375	0.9375	0.9374

з поліномами Кравчука  $D_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{\nu-3q-2\mu}$  дискретної змінної:

$$D_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{\nu-3q-2\mu} \rightarrow \sqrt{\frac{6}{1 + \delta_{q,0}}} \bar{\mathcal{K}}_{2k}^{1/2}(\nu - 3q - 2\mu),$$

де явний вигляд поліномів Кравчука  $\bar{\mathcal{K}}_{2k}^{1/2}(\nu - 3q - 2\mu)$  дається рівнянням (3.32).

Отже, індекс  $k$ , який має сенс числа осциляторних квантів, що припадає на підсистему  ${}^8\text{Be}$ , служить додатковим квантовим числом для  $SU(3)$ -вироджених станів. Слід зауважити, що завдяки неспівпадінню власних значень  $\Lambda_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{12\text{C}=3\alpha}$ , власні функції  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}$  визначаються однозначним чином. Будь-яке унітарне перетворення, застосоване до останніх  $SU(3)$ -базисних функцій порушило б діагональну форму ядра нормування системи  $3\alpha$  і, отже, не може бути застосоване в цьому випадку.

Вартий уваги винятково простий вигляд власних функцій  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_{k=\mu}}$  у випадку  $\nu - 2\mu < 3$ :

$$\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_{k=\mu}} = \psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)}^{\nu-2\mu}, \quad \left[ \frac{\nu-2\mu}{3} \right] = 0.$$

Саме тому інтеграли перекривання  $\int \Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_{k=\mu}} \Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_{k=\mu}}^{\text{as}} d\mu_B$  дорівнюють одиниці, коли  $\nu - 2\mu < 3$ .

В свою чергу, власні значення  $\Lambda_{(2\nu-4\mu,2\mu)_{k=\mu}}$  визначаються наступним аналітичним виразом за умови, що  $\nu - 2\mu < 3$ :

$$\begin{aligned} \Lambda_{(2\nu-4\mu,2\mu)_{k=\mu}} &= 1 + \frac{6}{4^\nu} \left( 1 - \frac{2}{4^\nu} \right) + 8 \left( \frac{7}{16} \right)^\nu + \frac{18}{4^{2\nu}} \times \\ &\times \left\{ 3^{2\mu} \left[ {}_2F_1(-\nu+2\mu, -\nu+2\mu; 1; 4) + 4^{\nu-2\mu} {}_2F_1 \left( -\nu+2\mu, -\nu+2\mu; 1; \frac{1}{4} \right) \right] - \right. \\ &- \frac{1}{3} 8^{2\mu} \left[ {}_2F_1(-\nu+2\mu, -\nu+2\mu; 1; 9) + 9^{\nu-2\mu} {}_2F_1 \left( -\nu+2\mu, -\nu+2\mu; 1; \frac{1}{9} \right) \right] - \\ &\left. - 2^{2\mu+1} \left[ {}_2F_1(-\nu+2\mu, -\nu+2\mu; 1; 3) + 3^{\nu-2\mu} {}_2F_1 \left( -\nu+2\mu, -\nu+2\mu; 1; \frac{1}{3} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

З Таблиць 15 і 16 можна зробити висновок, що дозволені принципом Паулі базисні стани  $\Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}$  можна об'єднати в гілки і сім'ї так, що всі стани певної гілки мають спільний індекс SU(3)-симетрії  $\mu$  і сильно перекриваються з відповідною асимптотичною функцією (3.35), але відрізняються першим індексом  $\bar{\lambda}$  SU(3)-симетрії. Власні значення, що відносяться до певної гілки, прагнуть до одного і того ж граничного значення  $\lambda_{2k}^{8\text{Be}}$  із зростанням числа квантів. Гілки, що мають спільні граничні значення, об'єднуються в сім'ї власних станів, які повністю визначаються ступенем  $k$  відповідного полінома Кравчука.

Варто відзначити, що стани, наведені в Таблицях 15 і 16, вичерпують всі можливі базисні функції, дозволені принципом Паулі, поки  $\nu \leq 9$ . Із збільшенням  $\nu$ , нові сім'ї станів, що характеризуються  $2k > 8$ , також з'являються. Проте власні функції та власні значення, що належать до таких

Табл. 16: Інтеграли перекриття  $\int \Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k} \Psi_{(2\nu-4\mu,2\mu)_k}^{\text{as}} d\mu_B$  в залежності від числа квантів  $\nu$  для перших двох сімей дозволених принципом Паулі станів системи З $\alpha$

$\nu$	2k = 4			2k = 6			
	$\mu = 2$	$\mu = 1$	$\mu = 0$	$\mu = 3$	$\mu = 2$	$\mu = 1$	$\mu = 0$
4	1.0000						
5	1.0000	0.9670					
6	1.0000	0.9957	0.8688	1.0000			
7	0.9988	0.9994	0.9661	1.0000	0.9535		
8	0.9996	0.9944	0.9919	1.0000	0.9929	0.8127	
9	0.9999	0.9940	0.9960	0.9977	0.9990	0.9321	0.7255
10	1.0000	0.9973	0.9949	0.9993	0.9932	0.9800	0.8677
11	1.0000	0.9993	0.9958	0.9998	0.9923	0.9920	0.9421
12	1.0000	0.9998	0.9981	1.0000	0.9965	0.9912	0.9790
13	1.0000	1.0000	0.9994	1.0000	0.9990	0.9924	0.9908
14	1.0000	1.0000	0.9998	1.0000	0.9998	0.9962	0.9925
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9988	0.9942
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9970
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9988
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

сімей, підлягають тим самим законам, як і стани, наведені в Таблицях 15, 16. Стан  $\Psi_{(0,4)_{k=2}}$ , що характеризується мінімальним числом квантів  $\nu = 4$  і належить до гілки  $\mu = 2$  і сім'ї  $k = k_{\min} = 2$  дозволених принципом Паулі станів, ідентичний стану лідируючого SU(3)-представлення осциляторної трансляційно-інваріантної моделі оболонок схеми Елліотта. Інші стани, що відносяться до гілки  $\mu = 2$  забезпечують головні поправки до станів моделі Елліотта, які є наслідком  $\alpha$ -кластеризації ядра  $^{12}\text{C}$  і його розпаду по каналу  $^{12}\text{C} \rightarrow ^8\text{Be} + \alpha$ . Гілки станів, що належать до сімей, які характеризуються  $k > k_{\min}$  відтворюють збудження  $^8\text{Be}$ , які супроводжуються збільшенням числа квантів, що припадає на цю підсистему.

Існування власних значень  $\lambda_{2k}^{^8\text{Be}}$  відображає можливість двох  $\alpha$ -кластерів бути близько один до одного і далеко від третього  $\alpha$ -кластера. Завдяки цьо-

му унітарне перетворення від  $SU(3)$ -базису до іншого можливе лише в рамках певної сім'ї дозволених принципом Паулі станів. Переход до трикластерних гіперсферичних гармонік, натомість, включає стани, що належать до різних сімей. Гіpermомент не може бути хорошим квантовим числом дозволених базисних функцій, оскільки принцип Паулі змішує стани з різними гіpermоментами. Отже, обмеження на максимальне значення гіpermому  $K$  в розрахунках  $K \leq K_{max}$  приводить до псування дозволених принципом Паулі функцій, що відповідають числу осциляторних квантів  $\nu > K_{max}$ , і цей ефект підсилюється із зростанням  $\nu$ . Натомість можна використовувати біосциляторний базис в області  $\nu \gg k$ , де всі власні значення  $\Lambda_{(2\nu-4\mu, 2\mu)_k}$ , що відносяться до сім'ї  $k_{th}$  співпадають з граничними власними значеннями  $\lambda_{2k}^{^8\text{Be}}$ . Базисні функції останнього базису класифікуються числом квантів, орбітальним моментом підсистеми  ${}^8\text{Be}$ , що співпадає з орбітальним моментом відносного руху цієї підсистеми і третім  $\alpha$ -кластером<sup>1</sup>. Переход до цього базису здійснюється в рамках певної сім'ї дозволених принципом Паулі станів і, отже, не призводить до порушення принципу Паулі. В той же час, біосциляторний базис дозволяє встановити асимптотичні граничні умови для коефіцієнтів розкладу трикластерної хвильової функції в неперервному спектрі. Це питання детально обговорювалось в роботі [15] для системи  ${}^3\text{H} + n + n$ .

З цієї дискусії очевидно, що асимптотично кожна сім'я дозволених принципом Паулі станів системи  $3\alpha$  відповідає певному бінарному каналу розпаду останньої системи на підсистему  $2\alpha$ , що знаходиться в основному чи збудженному стані гармонічного осцилятора, і  $\alpha$ -частинку. Отже, збуджені стани ядра  ${}^{12}\text{C}$  повинні розпадатись радше послідовним чином  ${}^{12}\text{C} \rightarrow {}^8\text{Be} + \alpha \rightarrow \alpha + \alpha + \alpha$ , ніж демократичним чином  ${}^{12}\text{C} \rightarrow \alpha + \alpha + \alpha$ , який зазвичай асоціюється з гіперсферичними гармоніками. Останній базис може, імовірно, забезпечити адекватний опис основного стану ядра  ${}^{12}\text{C}$ , але він не непридатний для вивчення неперервних станів.

---

**Примітка 1.** Нагадаємо, що лише стани з повним орбітальним моментом  $L = 0$  розглядаються в цій статті.

Насамкінець, давайте порівняємо поведінку власних значень та власних функцій системи  $3\alpha$  з власними значеннями та власними функціями системи  ${}^5H = {}^3H + n + n$ , які детельно обговорювались в роботі [15]. Перш за все, при даному числу квантів  $\nu$  кількість дозволених принципом Паулі станів системи  $3\alpha$  значно менша за кількість станів в системі  ${}^5H$ . В системі  $3\alpha$  лише сім'ї станів, які відповідають парному числу квантів  $k$ , узгоджуються з вимогами принципу Паулі, тоді як модельний простір дозволених станів системи  ${}^3H + n + n$  включає сім'ї, що характеризуються і парним, і непарним числами квантів  $k$ . Кількість заборонених принципом Паулі станів в системі  $3\alpha$  також більша, ніж в ядрі  ${}^5H$ . В системі  ${}^5H$  лише одна гілка відноситься до категорії заборонених принципом Паулі станів. Вона характеризується  $k = 0$  і відповідає тому, що один з валентних нейтронів займає місце в  $s$ -оболонці підсистеми  ${}^4H$ . Система  $3\alpha$  має три гілки дозволених принципом Паулі станів: гілка, що належить сім'ї  $k = 0$  і дві гілки, що відносяться до сім'ї  $2k = 2$ . Ці дві сім'ї відповідають двом забороненим станам підсистеми  $2\alpha$ . Більше того, тоді як у випадку ядра  ${}^5H$  всі гілки, що належать одній сім'ї, з'являються при одному і тому ж числі квантів, гілки, що об'єднуються в певну сім'ю системи  $3\alpha$  починаються з кроком в один квант. Нова сім'я дозволених принципом Паулі станів в системі  ${}^5H$  виникає із збільшенням числа квантів на один, в той час як сім'ї таких станів в системі  $3\alpha$  з'являються з інтервалом в три кванти. Це призводить до зменшення модельного простору дозволених принципом Паулі станів у внутрішній області малих відстаней між кластерами в системі  $3\alpha$  порівняно з системою  ${}^5H$ .

Всі ці відмінності, обговорені вище, виникають завдяки високій симетрії системи  $3\alpha$ , яка складається з трьох ідентичних кластерів, в той час як система  ${}^3H + n + n$  має лише два ідентичних кластери. Крім того, в системі  $3\alpha$  кожна сім'я починається з гілки, що має максимально можливий індекс  $SU(3)$ -симетрії  $\mu = k$ . Цей факт дає підстави очікувати, що гілки, які характеризуються  $\mu = k$  є більш бажані, ніж гілки з  $\mu = 0$ , на відміну від

випадку ядра  $^5\text{H}$ . Звичайно, як для системи  $3\alpha$ , так і для системи  $^3\text{H}+n+n$  сім'ї дозволених станів, які відповідають поліномам Кравчука найнижчого порядку, повинні домінувати.

Власні значення оператора антисиметризації системи  $3\alpha$  прагнуть до граничних значень знизу, що призводить до ефективного відштовхування між  $\alpha$ -кластерами завдяки зміні кінетичної енергії відносного руху під впливом принципу Паулі (див. подробиці в [8, 15]). Отже, врахувавши всі обмінні ефекти в системі  $3\alpha$ , можна сподіватись подолати проблему перез'язування ядра  $^{12}\text{C}$  без введення додаткового трикластерного відштовхування.

**3.2.6 Висновки** В рамках мікрокопічної моделі, основаної на АВМРГ, досліджувалась роль принципу Паулі в структурі хвильової функції ядерних систем, що складаються з трьох ідентичних  $s$ -кластерів. Головна увага приділялась обмінними ефектам, що містяться в трикластерному ядрі нормування, тобто врахуванню власних значень дозволених принципом Паулі станів.

Ядра нормування системи трьох ідентичних ферміонів та системи трьох ідентичних бозонів було побудовано в просторі Фока-Баргманна. Було показано, що перше ядро служить головним конструктивним елементом для ядер нормування ядерних систем, що складаються з трьох ідентичних кластерів, тоді як останнє генерує базисні функції, які потрібні для опису ядерних систем, що складаються з трьох ідентичних бозонних кластерів (таких як  $^6n = ^2n + ^2n + ^2n$  і  $^{12}\text{C} = \alpha + \alpha + \alpha$ ). Простий аналітичний метод побудови ядра нормування систем  $3d'$  і  $3\alpha$  в просторі Фока-Баргманна запропоновано і реалізовано.

Образ оператора антисиметризації в просторі Фока-Баргманна було знайдено для систем трьох ферміонів, трьох дінейтронів та трьох альфа-частинок. Дано класифікацію різних частин оператора антисиметризації за допомогою віднесення до певної групи перестановок. Ретельний аналіз структури власних функцій та поведінки власних значень оператора антиси-

метризації було проведено для вищезгаданих трикластерних систем. Було продемонстровано, що дозволені принципом Паулі стани трикластерної системи, утвореної з ідентичних бозонних кластерів, можна представити у вигляді суперпозиції власних функцій ядра нормування системи трьох бозонів, а коефіцієнти розкладу при цьому є ортогональними поліномами дискретної змінної.

Дозволені стани для систем  $3\alpha$  і  $3d'$  в явному вигляді було наведено та їх асимптотична поведінка встановлена. Було показано, що власні значення трикластерних систем прагнуть до власних значень двокластерних підсистем із збільшенням числа осциляторних квантів  $\nu$ . В той же час, відповідні власні вектори набувають простого аналітичного вигляду, а коефіцієнти розкладу стають поліномами Кравчука із зростанням числа осциляторних квантів. Ми пропонуємо шлях усунення  $SU(3)$ -виродження дозволених принципом Паулі станів. Порядок поліномів Кравчука служить додатковим квантовим числом, за допомогою якого класифікують стани, що відносяться до одного і того ж  $SU(3)$ -незвідного представлення.

Вперше запропоновано класифікацію власних функцій і власних значень ядра нормування ядра  $^{12}\text{C}$  за допомогою власних значень підсистеми  $^8\text{Be} = \alpha + \alpha$ . Ми продемонстрували, що для системи  $3\alpha$  така класифікація є унікальною і такою, що задовольняє вимоги принципу Паулі як в області малих міжкластерних відстаней, так і в асимптотичній області, де формуються елементи матриці розсіяння. Завдяки неспівпадінню власних значень оператора антисиметризації системи  $3\alpha$ , відповідні власні функції визначаються однозначно. Будь-яке унітарне перетворення, застосоване до останніх  $SU(3)$ -базисних функцій, зруйнувало б діагональний вигляд ядра нормування для системи  $3\alpha$ , і отже, було б неприйнятне в цьому випадку. І навпаки, власні функції систем трьох нейтронів чи трьох бозонів визначені лише до унітарного перетворення, тому що всі дозволені принципом Паулі стани мають одиничні власні значення. Отже, у випадку  $SU(3)$ - класифікації є лише один можливий варіант. Система  $3d'$  є пограничною

системою, оскільки власні значення ядра нормування рівні і прагнуть до одиниці для всіх дозволених принципом Паулі станів. Отже, будь-яке перетворення, яке здійснюється лише над дозволеними принципом Паулі станами і залишає у спокої заборонені принципом Паулі стани, не руйнує діагональний вигляд ядра нормування.

У підсумку, дозволені принципом Паулі стани системи  $3\alpha$  можна розподілити по гілках і сім'ях. Власні значення, що належать до певної гілки, прагнуть до одних і тих самих граничних значень  $\lambda_{2k}^{8\text{Be}}$  підсистеми  $2\alpha$  із зростанням числа квантів. Гілки, що мають однакові граничні значення, об'єднуються в сім'ї власних станів, які асимптотично відповідають певному бінарному каналу розпаду системи  $3\alpha$  на підсистему  $2\alpha$ , що знаходиться в певному стані гармонічного осцилятора, і  $\alpha$ -частинку. Отже, збуджені стани ядра  $^{12}\text{C}$  повинні розпадатись радше по каналу  $^{12}\text{C} \rightarrow ^8\text{Be} + \alpha \rightarrow \alpha + \alpha + \alpha$ , ніж відразу на три кластери  $^{12}\text{C} \rightarrow \alpha + \alpha + \alpha$ , як припускається в методі гіперсферичних функцій.

Належне обрідання модельного простору дозволених принципом Паулі базисних функцій полягає в нехтуванні сім'ями станів з великим значенням додаткового квантового числа  $k$  і використанні біосциляторного базису в області  $\nu \gg k$  щоб задати граничні умови для трикластерної хвильової функції в неперервному спектрі.

Спектр ядра нормування системи  $^{12}\text{C}$  було порівняно з ядром нормування системи  $^5\text{H}$ . Було показано, що модельний простір дозволених принципом Паулі функцій у внутрішній області малих відстаней між кластерами в системі  $3\alpha$  суттєво менший за модельний простір системи  $^5\text{H}$  завдяки високій симетрії системи  $3\alpha$ , яка складається з трьох ідентичних кластерів.

Ми вважаємо, що результати, отримані в цьому підрозділі, можуть допомогти в розв'язанні проблеми надмірного зв'язку основного стану  $^{12}\text{C}$ . Більш того, запропонований тут підхід дозволяє встановити правильні граничні умови для трикластерної хвильової функції в неперервному спектрі і, отже, забезпечити адекватний опис неперервного спектра ядра  $^{12}\text{C}$ . Зокре-

ма, наші результати могли б бути корисними для опису структури  $0_2^+$  і  $0_3^+$  резонансних станів, що мають малу енергію над порогом  $3\alpha$ -розпаду ядра  $^{12}\text{C}$ .

### 3.3 Структура ядра ${}^8\text{Li}$ в рамках мікроскопічної трикластерної моделі $\alpha + t + n$

В цьому підрозділі ми аналізуємо роль принципу Паулі в утворенні хвильової функції неперервного спектра системи  $\alpha + t + n$  в рамках мікроскопічної моделі, основаної на алгебраїчній версії методу резонуючих груп. Головна увага при цьому зосереджена на вивченні обмінних ефектів, що містяться в трикластерному ядрі нормування, тобто власних значеннях дозволених принципом Паулі станів.

Поблизу ліній нейtronної і протонної стабільності спостерігаються нові властивості ядер, такі як кластерний розпад, двопротонна радіоактивність, зникнення магічних чисел. Тому дослідження структури і розпаду ядер з надлишком нейtronів та протонів важливе для розуміння властивостей ядерної матерії в екстремальних умовах.

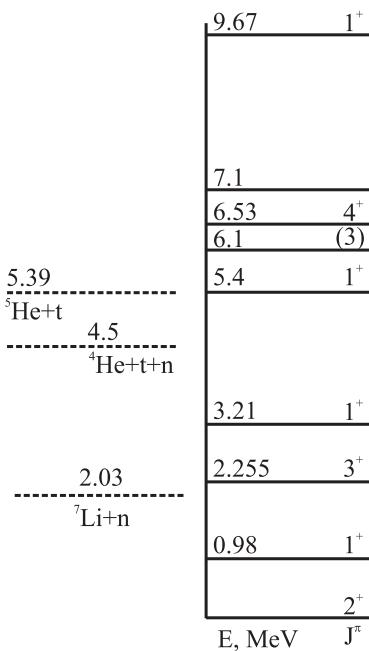


Рис. 3.9 Експериментальні рівні енергії ядра  ${}^8\text{Li}$  [90]

Більшість станів в ядрах з надлишком нейtronів незв'язані. Наприклад, ядро  ${}^8\text{Li}$  має лише два стани нижче порогу розвалу  ${}^8\text{Li} \rightarrow {}^7\text{Li} + n$  (див. рис.3.9). З огляду на близькість цього порогу до основного стану ядра

${}^8\text{Li}$ , дане ядро можна розглядати як двокластерну систему  ${}^7\text{Li}+n$  в станах, енергія яких знаходитьться в діапазоні  $E_{g.s.} < E < 4.5 \text{ MeV}$ . При енергії  $E = 4.5 \text{ MeV}$  над основним станом  ${}^8\text{Li}$  стає можливим розпад  ${}^8\text{Li} \rightarrow \alpha + t + n$  і, отже, всі стани ядра  ${}^8\text{Li}$ , розташовані над цим порогом, мають трикластерну структуру.

Ядро  ${}^8\text{Li}$  є прикладом трикластерної системи, що складається з трьох різних кластерів. Ми показали, що власні значення бінарних підсистем трикластерної системи відіграють ключову роль у класифікації власних значень трикластерного ядра нормування і визначенні домінуючих каналів розпаду трикластерної системи. Грунтуючись на результатах, отриманих в [15], [16] ми можемо зробити висновок, що у випадку, коли бінарна підсистема трикластерної системи характеризується одиничними власними значеннями оператора антисиметризації, відповідний бінарний канал розпаду трикластерної системи на вищезгадану підсистему і третій кластер не реалізується. В ядрі  ${}^8\text{Li}$  всі можливі бінарні канали розпаду можуть бути реалізовані, оскільки власні значення оператора антисиметризації у всіх двокластерних підсистемах відрізняються від одиниці.

Ми обмежимо наш розгляд станами з одиничним орбітальним моментом  $L = 1$  і додатною парністю. Отже, число осциляторних квантів має бути парним і дорівнювати  $2\nu$ , другий індекс  $SU(3)$ -симетрії має бути непарним і рівним  $2\mu + 1$ , квантові числа  $L$  і  $M$  будемо опускати.

**3.3.1 Власні значення і власні функції ядра нормування системи  ${}^8\text{Li} = \alpha + t + n$ .** За визначенням, стани  $\Psi_n(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  є власними функціями оператора антисиметризації  $\hat{A}$ :

$$\hat{A}\Psi_{(2\nu-4\mu-2,2\mu+1)_k} = \Lambda_{(2\nu-4\mu-2,2\mu+1)_k} \Psi_{(2\nu-4\mu-2,2\mu+1)_k}.$$

В просторі Фока-Баргманна останні функції є суперпозиціями власних функцій оператора Казиміра другого порядку:

$$\Psi_{(2\nu-4\mu-2,2\mu+1)_k}(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i) = \sum_{m=2\mu+1}^{2\nu-2\mu-1} D_{(2\nu-4\mu-2,2\mu+1)_k}^{m-2\mu-1} \psi_{(2\nu-4\mu-2,2\mu+1)}^{m-2\mu-1}(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i);$$

Тут індекс  $1 \leq i \leq 3$  перераховує різні дерева Якобі. Власні значення ядра нормування не залежать від вибору дерева Якобі, в той час як структура власних функцій залежить. Дозволені принципом Паулі стани системи  ${}^8\text{Li} = \alpha + t + n$  набувають найпростішого вигляду в дереві  $(\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3)$ , де  $\mathbf{b}_3$  – вектор відносної відстані між  $\alpha$ -кластером і тритієм, в той час як вектор  $\mathbf{a}_3$  позначає відстань між валентним нейтроном і центром мас підсистеми  $\alpha + t$ :

$$\Psi_{(2\nu-2,1)_k}(\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3) = \sum_{m=3}^{2\nu-1} D_{(2\nu-2,1)_k}^{m-1} \psi_{(2\nu-2,1)}^{m-1}(\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3).$$

Дозволена принципом Паулі базисна функція, що належить до лідеруючого  $SU(3)$ -представлення  $(2\nu - 2, 1)$  містить на два доданки в дереві Якобі  $(\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3)$ , ніж в інших деревах Якобі, оскільки мінімально можливе число квантів вздовж вектора  $\mathbf{b}_3$  дорівнює трьом, тоді як мінімально допустиме число квантів вздовж векторів  $\mathbf{b}_1$  і  $\mathbf{b}_2$  дорівнює одному. Отже, саме дерево  $(\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3)$  найкраще пристосоване для побудови і аналізу цих станів.

$(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)$  і  $(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)$  – вектори Якобі двох альтернативних дерев, де вектор  $\mathbf{b}_1$  ( $\mathbf{b}_2$ ) вказує на відносну відстань між валентним нейтроном і тритієм ( $\alpha$ -кластером). Відповідно, вектор  $\mathbf{a}_1$  ( $\mathbf{a}_2$ ) визначає положення третього кластера відносно центру мас підсистеми  ${}^4\text{H}$  ( ${}^5\text{He}$ ). Вектори Якобі всіх дерев Якобі пов’язані унітарним перетворенням:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_3 &= \cos \alpha_{1,2} \mathbf{a}_{1,2} + \sin \alpha_{1,2} \mathbf{b}_{1,2}; \\ \mathbf{b}_3 &= \mp \sin \alpha_{1,2} \mathbf{a}_{1,2} \pm \cos \alpha_{1,2} \mathbf{b}_{1,2}. \end{aligned}$$

В роботі [106] було показано, що власні функції оператора Казиміра, що характеризуються фікованими степенями векторів  $\mathbf{a}$  і  $\mathbf{b}$ , виражуються через гіпергеометричні функції  ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; Z)$  змінної

$$Z = \frac{[\mathbf{ab}]^2}{\mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2}.$$

А саме,

$$\begin{aligned} \psi_{(2\nu-4\mu-2,2\mu+1)}^{2m-2\mu}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= N_{(2\nu-4\mu-2,2\mu+1)}^{2m-2\mu} \mathbf{a}^{2\nu-2m-2\mu-2} \mathbf{b}^{2m-2\mu} [\mathbf{ab}]^{2\mu+1} \times \\ &\quad \times {}_2F_1 \left( -\nu + m + \mu + 1, -m + \mu; -\nu + 2\mu + \frac{3}{2}; Z \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{(2\nu-4\mu-2,2\mu+1)}^{2m-2\mu-1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= N_{(2\nu-4\mu-2,2\mu+1)}^{2m-2\mu-1} \mathbf{a}^{2\nu-2m-2\mu-2} \mathbf{b}^{2m-2\mu-2} (\mathbf{ab}) [\mathbf{ab}]^{2\mu+1} \times \\ &\quad \times {}_2F_1 \left( -\nu + m + \mu + 1, -m + \mu + 1; -\nu + 2\mu + \frac{3}{2}; Z \right). \end{aligned}$$

В двокластерних системах власні значення оператора антисиметризації прагнуть до одиниці при  $\nu \rightarrow \infty$  і відхилення від одиниці зобов'язані своїм походженням принципу Паулі. На відміну від них, власні значення трикластерних систем прагнуть до власних значень двокластерних підсистем із збільшенням числа осциляторних квантів  $\nu$ :

$$\lim_{\nu-2\mu \rightarrow \infty} \Lambda_{(2\nu-4\mu-2,2\mu+1)k_1}^{\text{Li}=\alpha+t+n} \rightarrow \lambda_{k_1}^{\text{H}=t+n} = 1 - \left( -\frac{1}{3} \right)^{k_1}$$

$$\lim_{\nu-2\mu \rightarrow \infty} \Lambda_{(2\nu-4\mu-2,2\mu+1)k_2}^{\text{Li}=\alpha+t+n} \rightarrow \lambda_{k_2}^{\text{He}=\alpha+n} = 1 - \left( -\frac{1}{4} \right)^{k_2}$$

$$\lim_{\nu-2\mu \rightarrow \infty} \Lambda_{(2\nu-4\mu-2,2\mu+1)k_3}^{\text{Li}=\alpha+t+n} \rightarrow \lambda_{k_3}^{\text{Li}=\alpha+t} =$$

$$= 1 - \left( -\frac{3}{4} \right)^{k_3} - 3 \left( \frac{5}{12} \right)^{k_3} + 3 \left( -\frac{1}{6} \right)^{k_3}, \quad k_3 \geq 3$$

Тут, як і в трикластерних системах  ${}^5\text{H}$  і  ${}^{12}\text{C}$ , число квантів  $k_i$  в бінарних підсистемах служить додатковим квантовим числом SU(3)-вироджених трикластерних станів  ${}^8\text{Li}$  з єдиною різницею, що замість одного числа  $k$  ми маємо три різні  $k_i$  по числу можливих каналів бінарних підсистем.

По мірі того, як власні значення  $\Lambda_{(2\nu-4\mu-2,2\mu+1)k_i}^{\text{Li}=\alpha+t+n}$  ядра нормування наближаються до граничних значень бінарних підсистем, відповідні власні вектори  $\Psi_{(2\nu-4\mu-2,2\mu+1)k_i}$  набувають простого аналітичного вигляду:

$$\Psi_{(2\nu-4\mu-2,2\mu+1)k_i}(\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3) \rightarrow \psi_{(2\nu-4\mu-2,2\mu+1)}^{k_i-2\mu-1}(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i), \quad (3.35)$$

Така асимптотична поведінка має місце за умови, що  $\nu \gg k_i$ .

Важлива властивість асимптотичних співвідношень (3.35) полягає в тому, що в границі  $\nu \gg k_{1,2}$  коефіцієнти розкладу  $D_{(2\nu-4\mu-2,2\mu+1)_{k_{1,2}}}^{m-2\mu-1}$  можна ідентифікувати з поліномами Кравчука дискретної змінної [152]:

$$D_{(2\nu-4\mu-2,2\mu+1)_{k_{1,2}}}^{m-2\mu-1} \rightarrow \mathcal{K}_{k_{1,2}-2\mu-1}^{(p_{1,2})}(m-2\mu-1) \frac{\sqrt{\rho_{m-2\mu-1}}}{d_{k_{1,2}-2\mu-1}}, \quad p_{1,2} = \sin^2 \alpha_{1,2}, \quad q = 1-p.$$

Поліноми Кравчука  $\mathcal{K}_k^{(p)}(m)$  дискретної змінної  $m$  визначені на інтервалі  $0 \leq m \leq 2\nu$  і ортогональні з ваговою функцією  $\rho_m$  і нормою  $d_k$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_k^{(p)}(m) \cdot \frac{\sqrt{\rho_m}}{d_k} &= (-1)^k \frac{(2\nu)!}{\sqrt{(2\nu-k)!(2\nu-m)!m!k!}} \times \\ &\times \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{m+k}{2}} q^\nu {}_2F_1\left(-k, -m; -2\nu; \frac{1}{p}\right) \end{aligned}$$

Зауважимо, що  $\nu$ ,  $m$  і  $k$  – натуральні цілі числа,  $0 \leq k \leq 2\nu$ . Поліноми Кравчука є дискретним аналогом поліномів Ерміта.

Що ж до асимптотичної поведінки коефіцієнтів розкладу  $D_{(2\nu-4\mu-2,2\mu+1)_{k_3}}^{m-2\mu-1}$ , вони мають винятково простий вигляд:

$$D_{(2\nu-4\mu-2,2\mu+1)_{k_3}}^{m-2\mu-1} \rightarrow \delta_{k_3, m-2\mu-1}.$$

Така асимптотична поведінка вказує на те, що задача розпаду трикластерної системи  ${}^8\text{Li}$  на  $\alpha$ -частинку, тритій і нейtron зводиться до багатоканальної задачі розпаду  ${}^8\text{Li}$  по трьох різних каналах:  ${}^8\text{Li} \rightarrow {}^7\text{Li} + n$ ,  ${}^8\text{Li} \rightarrow {}^4\text{H} + \alpha$  і  ${}^8\text{Li} \rightarrow {}^5\text{He} + t$ . Кожна з трьох бінарних систем знаходиться в локалізованому стані, визначеному максимальним числом квантів відносного руху двох кластерів, що утворюють бінарну підсистему. Це число виявляється рівним максимальній кількості  $k_i^{\max}$  врахованих сімейств.

### 3.3.2 Бінарні кластерні конфігурації ядра ${}^8\text{Li}$

Стан, що відповідає функції трансляційно-інваріантної моделі оболонок, спроектованій на

повністю антисиметричну хвильову функцію кластерної системи, є найпростішим серед дозволених базисних станів, які забезпечують опис відносного руху кластерів, чиї внутрішні хвильові функції фіксовані. У тому випадку, коли число осциляторних квантів мінімальне, та сама дозволена власна функція в координатному представленні (тобто функція моделі оболонок для компаунд-ядра в основному стані) відповідає всім кластерним конфігураціям. Проте в представленні дискретного базису методу резонуючих груп власні функції різних конфігурацій виражаються через вектори Якобі, що належать до різних дерев.

В цьому пункті розглядаються три основні бінарні кластерні конфігурації ядра  ${}^8\text{Li}$ :  ${}^8\text{Li}={}^7\text{Li}+n$ ,  ${}^8\text{Li}={}^5\text{He}+t$  і  ${}^8\text{Li}={}^4\text{H}+\alpha$ . Всі ці конфігурації відповідають розпаду  ${}^8\text{Li}$  на бінарну підсистему в найнижчому стані моделі оболонок і третій кластер. Ці сімейства з'являються першими і дозволяють зрозуміти асимптотичну поведінку найпростіших сімейств дозволених принципом Паулі станів трикластерної системи  $\alpha + t + n$ .

**3.3.3  ${}^8\text{Li}={}^7\text{Li}+n$**  Трансляційно-інваріантне ядро нормування двокластерної системи  ${}^7\text{Li}+n$  набуває вигляду:

$$I_{{}^7\text{Li}+n} = \frac{(\mathbf{b}_3 \tilde{\mathbf{b}}_3)^3}{3!} \left\{ \exp(\mathbf{a}_3 \tilde{\mathbf{a}}_3) - \left( 1 + \frac{8}{7} (\mathbf{a}_3 \tilde{\mathbf{a}}_3) \right) \exp\left(-\frac{1}{7} (\mathbf{a}_3 \tilde{\mathbf{a}}_3)\right) \right\} + \\ + \frac{8}{7} \frac{(\mathbf{b}_3 \tilde{\mathbf{b}}_3)^2 ([\mathbf{a}_3 \mathbf{b}_3] [\tilde{\mathbf{a}}_3 \tilde{\mathbf{b}}_3])}{3!} \exp\left(-\frac{1}{7} (\mathbf{a}_3 \tilde{\mathbf{a}}_3)\right)$$

Третій степінь вектора  $\mathbf{b}_3$  вказує на той факт, що кластер  ${}^7\text{Li}$  має один протон і три нейтрони в  $p$ -оболонці.

Обмежуючись станами додатної парності і  $L = 1$ , після проектування на стани з певною  $SU(3)$ -симетрією, отримаємо:

$$I_{{}^7\text{Li}+n} = \sum_{\nu=2} \lambda_{(2\nu-2,1)} \langle (2\nu-2,1) | (2\nu-2,1) \rangle + \sum_{\nu=3} \lambda_{(2\nu-6,3)} \langle (2\nu-6,3) | (2\nu-6,3) \rangle.$$

При фіксованому числі осциляторних квантів є два дозволених принципом Паулі станів, що належать до SU(3)-представлень  $(2\nu - 2, 1)$  і  $(2\nu - 6, 3)$ :

$$\lambda_{(2\nu-2,1)} = 1 + \frac{75 - 32\nu}{3} \left(\frac{1}{7}\right)^{2\nu-3}, \quad \lambda_{(2\nu-6,3)} = 1 + 9 \left(\frac{1}{7}\right)^{2\nu-3}.$$

Власні значення  $\lambda_{(2\nu-2,1)}$  прагнуть до одиниці згори, що вказує на притягання між нейtronом і кластером  ${}^7\text{Li}$ . Власні значення  $\lambda_{(2\nu-6,3)}$  наближаються до одиниці знизу, відповідаючи відштовхуванню між нейtronом і кластером  ${}^7\text{Li}$ .

При мінімальному числі квантів ядро нормування системи  ${}^7\text{Li}+n$  зводиться до лідеруючого SU(3)-представлення  $(2, 1)$ :

$$I_{{}^7\text{Li}+n} = \frac{32}{21} \cdot \frac{1}{8} (\mathbf{b}_3 \tilde{\mathbf{b}}_3)^2 ([\mathbf{a}_3 \mathbf{b}_3] [\tilde{\mathbf{a}}_3 \tilde{\mathbf{b}}_3]) + \dots$$

Це ядро нормування містить стани з повним орбітальним моментом  $L = 1, 2, 3$  ядра  ${}^8\text{Li}$ . Власне значення, що відповідає найнижчій дозволеній принципом Паулі базисній функції для конфігурації  ${}^7\text{Li}+n$  дорівнює  $32/21$ .

### 3.3.4 ${}^8\text{Li}={}^5\text{He}+t$ Ядро нормування конфігурації ${}^5\text{He}+t$ виглядає так:

$$I_{{}^5\text{He}+t} = \exp\left(-\frac{3}{5}(\mathbf{a}_2 \tilde{\mathbf{a}}_2)\right) \left(\exp\left(\frac{8}{15}(\mathbf{a}_2 \tilde{\mathbf{a}}_2)\right) - 1\right)^2 \times \\ \times \left\{ (\mathbf{b}_2 \tilde{\mathbf{b}}_2) \left(\exp\left(\frac{8}{15}(\mathbf{a}_2 \tilde{\mathbf{a}}_2)\right) - 1 - \frac{8}{15}(\mathbf{a}_2 \tilde{\mathbf{a}}_2)\right) + \frac{8}{15}(\mathbf{a}_2 \tilde{\mathbf{a}}_2)([\mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2] [\tilde{\mathbf{a}}_2 \tilde{\mathbf{b}}_2]) \right\}.$$

Це ядро нормування містить перший степінь вектора  $\mathbf{b}_2$ , оскільки кластер  ${}^5\text{He}$  має один нейtron в  $p$ -оболонці.

Оскільки ми обмежуємося розглядом станів додатної парності і одиничного орбітального момента, ми приходимо до такого виразу для SU(3)-спроектованого ядра нормування кластерної системи  ${}^5\text{He}+t$ :

$$I_{{}^5\text{He}+t} = \sum_{\nu=2} \lambda_{(2\nu-2,1)} \langle (2\nu - 2, 1) | (2\nu - 2, 1) \rangle$$

де власні значення

$$\lambda_{(2\nu-2,1)} = 1 - \frac{13}{7} \left(\frac{7}{15}\right)^{2\nu-3} - 19 \left(\frac{1}{15}\right)^{2\nu-3} + \frac{17}{9} \left(\frac{3}{5}\right)^{2\nu-3}$$

також наближаються до одиниці згори. Така поведінка власних значень є доказом того, що  ${}^5\text{He}$  і  $\alpha$ -кластер відчувають ефективне притягання через обмінні ефекти.

При мінімальному числі квантів ми також приходимо до того ж самого лідируючого  $SU(3)$ -представлення  $(2, 1)$ :

$$I_{{}^5\text{He}+{}^3\text{H}} = \left(\frac{16}{15}\right)^3 \cdot \frac{1}{8} (\mathbf{a}_2 \tilde{\mathbf{a}}_2)^2 ([\mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2] [\tilde{\mathbf{a}}_2 \tilde{\mathbf{b}}_2]) + \dots,$$

але з іншим найнижчим власним значенням, яке в цьому випадку дорівнює  $16/15$ .

**3.3.5     ${}^8\text{Li}={}^4\text{H}+\alpha$**  Вектор  $\mathbf{b}_1$  входить у вираз для ядра нормування конфігурації  ${}^4\text{H}+\alpha$  ядра  ${}^8\text{Li}$  лише в першому степені, оскільки кластер  ${}^4\text{H}$  також має один нейтрон в  $p$ -оболонці:

$$I_{{}^4\text{H}+\alpha} = \exp\left(-\frac{(\mathbf{a}_1 \tilde{\mathbf{a}}_1)}{2}\right) \left(\exp\left(\frac{(\mathbf{a}_1 \tilde{\mathbf{a}}_1)}{2}\right) - 1\right)^2 \times \\ \times \left\{ (\mathbf{b}_1 \tilde{\mathbf{b}}_1) \left(\exp\left(\frac{(\mathbf{a}_1 \tilde{\mathbf{a}}_1)}{2}\right) - 1 - \frac{(\mathbf{a}_1 \tilde{\mathbf{a}}_1)}{2}\right) + \frac{1}{2} ([\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1] [\tilde{\mathbf{a}}_1 \tilde{\mathbf{b}}_1]) \right\}$$

Дозволені принципом Паулі стани додатної парності і однічного моменту породжуються ядром нормування, що має  $SU(3)$ -симетрію  $(2\nu - 2, 1)$ :

$$I_{{}^4\text{H}+\alpha} = \sum_{\nu=2} \lambda_{(2\nu-2,1)} \langle (2\nu - 2, 1) | (2\nu - 2, 1) \rangle$$

з власними значеннями

$$\lambda_{(2\nu-1,1)} = 1 + \frac{1 - 2\nu}{4^{\nu-1}},$$

які наближаються до одиниці знизу. Це вказує на ефективне відштовхування між  $\alpha$ -кластером і кластером  ${}^4\text{H}$  завдяки принципу Паулі.

Нарешті, ядро нормування, що породжує найнижчу функцію моделі оболонок для конфігурації  $^4H + \alpha$  ядра  $^8\text{Li}$ , виглядає так:

$$I_{^4H+\alpha} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} (\mathbf{a}_1 \tilde{\mathbf{a}}_1)^2 ([\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1] [\tilde{\mathbf{a}}_1 \tilde{\mathbf{b}}_1]) + \dots$$

Власне значення ядра нормування системи  $^4H + \alpha$ , що має мінімальне число квантів, набуває найнижчого значення  $1/4$ .

**3.3.6 Дозволені принципом Паулі стани системи  $\alpha+t+n$**  Ядро нормування системи  $\alpha + t + n$  при мінімально допустимому числу квантів має вигляд:

$$I_{\alpha+t+n} = \frac{49}{27} \cdot \frac{1}{8} (\mathbf{b}_3 \tilde{\mathbf{b}}_3)^2 ([\mathbf{a}_3 \mathbf{b}_3] [\tilde{\mathbf{a}}_3 \tilde{\mathbf{b}}_3]).$$

Це ядро нормування дуже подібне до ядра нормування двокластерної конфігурації  $^7\text{Li}+n$ . Різниця полягає лише у власному значенні, яке для цієї трикластерної моделі дорівнює  $49/27$ .

Отже, припускаючи будь-яку з двокластерних конфігурацій  $^8\text{Li}$ , ми приходимо до концептуально ідентичних виразів для ядра нормування при мінімально можливому числі квантів. Лише власні значення відрізняються. В роботі [10] ми показали, що імовірність реалізації тієї чи іншої кластерної конфігурації в хвильовій функції бінарної кластерної системи пропорційна власному значенню ізольованої конфігурації.

Отже, ми могли б порівняти нашу трикластерну модель ядра  $^8\text{Li}$  з наближенням трьох зв'язаних кластерних конфігурацій цього ядра:  $^7\text{Li}+n$ ,  $^4H + \alpha$  і  $^5\text{He}+t$ . Завдяки тому факту, що конфігурація  $^7\text{Li}+n$  характеризується найбільшим власним значенням, внесок саме цієї кластерної конфігурації в хвильову функцію системи  $^8\text{Li}$  буде домінуючим.

Звичайно, трикластерна модель не може бути зведена до двокластерної моделі обрізанням трикластерного модельного простору. Але можна провести паралель між трикластерною між трикластерною моделлю і наближенням зв'язаних бінарних конфігурацій.

Дозволені принципом Паулі стани системи  $\alpha + t + n$ , як і інших трикластерних систем, можна об'єднати в гілки і сімейства. Власні значення, які

належать до однієї гілки, прагнуть до одного і того ж власного значення  $\lambda_{k_i}$  бінарних підсистем  $\alpha + t$ ,  $\alpha + n$  чи  $t + n$  із зростанням числа квантів. Гілки, які мають спільні граничні значення, об'єднуються в сімейства власних станів. Кожне сімейство дозволених власних станів асимптотично відповідає певному бінарному каналу розпаду  ${}^8\text{Li}$  на двокластерну підсистему в основному чи збудженному стані гармонічного осцилятора і третій кластер. Така асимптотична поведінка вказує на можливі канали розпаду трикластерного ядра  ${}^8\text{Li}$  і дозволяє визначити найбільш імовірні з них.

Табл. 17: Власні значення  $\Lambda_{(2\nu-4\mu-2,2\mu+1)_{k_3}}$  ядра нормування для системи  $\alpha + t + n$

$\nu$	$k_3 = 3$		$k_3 = 4$		$k_3 = 5$			$k_3 = 6$		
	$\mu = 0$	$\mu = 1$	$\mu = 0$	$\mu = 1$	$\mu = 0$	$\mu = 1$	$\mu = 2$	$\mu = 0$	$\mu = 1$	$\mu = 2$
2	1.8148									
3	1.0388	1.2223	0.6473							
4	1.1986	1.1911	0.5968	0.5942	1.0484	1.2466		0.9406		
5	1.1927	1.1910	0.5950	0.5955	1.2091	1.2052	1.2037	0.7849	0.8165	
6	1.1919	1.1910	0.5954	0.5955	1.2038	1.1996	1.1993	0.8024	0.8062	0.8064
7	1.1909	1.1910	0.5955	0.5955	1.1982	1.1993	1.1992	0.8057	0.8063	0.8064
8	1.1910	1.1910	0.5955	0.5955	1.1992	1.1992	1.1992	0.8063	0.8064	0.8064
9	1.1910	1.1910	0.5955	0.5955	1.1992	1.1992	1.1992	0.8064	0.8064	0.8064
10	1.1910	1.1910	0.5955	0.5955	1.1992	1.1992	1.1992	0.8064	0.8064	0.8064

Табл. 18: Власні значення  $\Lambda_{(2\nu-2,1)_{k_i}}$  ядра нормування системи  $\alpha + t + n$ ,  $i=1,2$ .

$\nu$	$k_1 = 1$	$k_1 = 2$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$
3	1.7131			
4	1.5826			
5	1.4797		1.1144	0.9726
6	1.4116		1.1764	0.9547
7	1.3714	0.8680	1.2185	0.9461
8	1.3501	0.8784	1.2360	0.9388
9	1.3402	0.8850	1.2445	0.9365
10	1.3360	0.8876	1.2479	0.9364

Власні значення, що належать першим чотирьом сімействам і відповідають каналу розпаду  ${}^8\text{Li} \rightarrow {}^7\text{Li} + n$ , наведені в Таблиці 17. Власні значення, що відносяться до перших чотирьох сімейств та відповідають каналам розпаду  ${}^8\text{Li} \rightarrow {}^4\text{H} + \alpha$  і  ${}^8\text{Li} \rightarrow {}^5\text{He} + t$ , дані в Таблиці 18.

Як легко можна помітити з Таблиць 17 і 18, власні значення ядра нормування  ${}^8\text{Li}$ , що належать  $k_3$  сімейству, прагнуть до власних значень двокластерної підсистеми  ${}^7\text{Li}$  із збільшенням числа осциляторних квантів  $\nu$ , тоді як власні значення ядра нормування  ${}^8\text{Li}$ , що належать сімействам  $k_1$  і  $k_2$ , прагнуть до власних значень підсистем  ${}^4\text{H}$  і  ${}^5\text{He}$ , відповідно. Очевидно, індекс  $k_i$  має сенс числа осциляторних квантів, що припадають на одну з трьох бінарних підсистем. Особливої уваги вартий той факт, що  $\lambda_{k_i=2\tilde{k}_i+1} > 1$ , тоді як  $\lambda_{k_i=2\tilde{k}_i} < 1$ . Це вказує на притягання між кластерами, які формують бінарну підсистему, у станах з непарним числом квантів  $k_i = 2\tilde{k}_i + 1$  і відштовхування у станах з парним числом квантів  $k_i = 2\tilde{k}_i$ . Більш того, власні значення  $\Lambda_{(2\nu-4\mu-2,2\mu+1)_{2\tilde{k}_i+1}}$  прямують до граничних значень  $\lambda_{2\tilde{k}_i+1}$  переважно згори. Як було зауважено в роботі [15], є всі підстави вважати, що сімейства тих станів, що характеризуються непарним занченням квантового числа  $k_i$ , домінують у хвильовій функції системи  ${}^8\text{Li}$ .

З Таблиці 17 очевидно, що більшість дозволених принципом Паулі станів системи  $\alpha + t + n$  відповідають розпаду  ${}^8\text{Li} \rightarrow {}^7\text{Li} + n$ . Цей висновок узгоджується з тим фактом, що найбільше власне значення належить бінарній конфігурації  ${}^7\text{Li} + n$  ядра  ${}^8\text{Li}$ . Наближення трьох зв'язаних конфігурацій ядра  ${}^8\text{Li}$  в загальних рисах відповідало б такому обрізанню модельного простору  $\alpha + t + n$ , коли лише перші три сімейства дозволених принципом Паулі станів враховуються, а саме, сімейства  $k_3 = 3$ , і  $k_1 = k_2 = 1$ . Ці три сімейства повинні домінувати у хвильовій функції системи  ${}^8\text{Li}$ .

### 3.3.7 Висновки

В рамках мікроскопічної моделі на основі АВМРГ досліджено роль принципу Паулі в формуванні хвильової функції неперевного спектра системи  $\alpha + t + n$ . Головну увагу було зосереджено на вивченні обмінних ефектів, які містяться в трикластерному ядрі нормування, тобто на врахуванні власних значень дозволених принципом Паулі станів.

В просторі Фока-Баргмана побудовано ядро нормування трикластерної системи  $\alpha + t + n$ . Вперше проведено детальний аналіз структури власних

функцій і поведінки власних значень ядра нормування  $\alpha + t + n$ . Показано, що власні значення оператора антисиметризації трикластерного ядра  ${}^8\text{Li} = \alpha + t + n$  прямують до власних значень бінарних підсистем  ${}^7\text{Li} = \alpha + t$ ,  ${}^5\text{He} = \alpha + n$  and  ${}^4\text{H} = t + n$  із зростанням числа осциляторних квантів. В той же час відповідні власні вектори набувають простого аналітичного вигляду. Запропоновано шлях розв'язку проблеми SU(3)-виродження дозволених принципом Паулі станів.

Дано повну класифікацію власних функцій та власних значень ядра нормування  ${}^8\text{Li}$  за допомогою власних значень бінарних підсистем  ${}^7\text{Li} = \alpha + t$ ,  ${}^5\text{He} = \alpha + n$  і  ${}^4\text{H} = t + n$ . Продемонстровано, що для системи  $\alpha + t + n$  така класифікація є унікальною і вона узгоджується з вимогами принципу Паулі як в області малих міжкластерних відстаней, так і в асимптотичній області. Завдяки нетотожності власних значень оператора антисиметризації системи  $\alpha + t + n$  відповідні власні функції визначаються однозначним чином. Будь-яке унітарне перетворення, застосоване до SU(3)-базисних функцій зруйнувало б діагональну форму ядра нормування  ${}^8\text{Li}$  і, отже, було б непідходящим в даному випадку.

Дозволені принципом Паулі стани системи  $\alpha + t + n$ , як і інших трикластерних систем, можна об'єднати в сімейства станів. Кожне сімейство дозволених власних станів асимптотично відповідає певному бінарному каналу розпаду  ${}^8\text{Li}$  на двокластерну підсистему в основному чи збудженному стані гармонічного осцилятора і третій кластер. Така асимптотична поведінка вказує на можливі канали розпаду трикластерного ядра  ${}^8\text{Li}$  і дозволяє визначити найбільш імовірні з них. Зокрема, більшість дозволених принципом Паулі станів системи  $\alpha + t + n$  відповідають розпаду  ${}^8\text{Li} \rightarrow {}^7\text{Li} + n$ .

## 3.4 Вплив кластерної поляризації на спектр ядра $^{10}\text{Be}$

**3.4.1 Вступ** Метою цього підрозділу є дослідження пружного та непружного розсіяння альфа-частинки на ядрі  $^6\text{He}$ . Добре відомо, що це ядро слабко зв'язане, оскільки енергія його основного стану 0.973 МeВ. Можна очікувати, що це ядро може змінювати свій розмір і форму при взаємодії з іншим ядром або, інакше кажучи, може поляризуватись. Ми збираємося дослідити вплив поляризації  $^6\text{He}$  на параметри  $\alpha + ^6\text{He}$  розсіяння. Оскільки поляризація більш виражена при відносно малих енергіях, ми обмежимося областю енергій  $0 \leq E \leq 10$  МeВ.

Щоб дослідити спектр зв'язаних і резонансних станів ядра  $^{10}Be$ , скористаємося трикластерною мікрокопічною моделлю. Це ядро розглядається як трикластерна конфігурація  $^{10}Be = \alpha + \alpha + ^2 n$ , яка дозволяє взяти до уваги два бінарних канали  $^{10}\text{Be} \Rightarrow ^6\text{He} + \alpha$  і  $^{10}\text{Be} \Rightarrow ^8\text{Be} + ^2 n$ . В нашій моделі ядро  $^6\text{He}$  розглядається як двокластерна система  $\alpha + ^2 n$ . Аналогічно,  $^8\text{Be}$  природно представляється у вигляді системи двох альфа-частинок.

Як було показано (див., наприклад, [162]) спостерігається сильна просторова кореляція двох нейтронів в основному стані ядра  $^6\text{He}$ . Отже, природно апроксимувати  $^6\text{He}$  двокластерною системою, що складається з альфа-частинки та двонейтронної системи (дінейtron). Дінейtron розглядається як псевдозв'язаний стан. Таке наближення для системи двох нейтронів успішно застосувалось, наприклад, в теоретичному аналізі реакції  $t(t, \alpha) nn$  в роботі [163] та для вивчення зв'язаного стану  $^8\text{He}$  в роботі [164] в рамках трикластерної моделі  $^8\text{He} = \alpha + ^2 n + ^2 n$ . Ми вважаємо таке наближення для системи двох нейтронів достатньо достовірним і таким, що дозволяє досліджувати таку складну систему як  $^{10}\text{Be}$  простим способом.

Добре відомо [90], що це ядро має п'ять зв'язаних станів і велику кількість резонансних станів. Спектр резонансних станів досить густий і більшість з них дуже вузькі. Ширина цих резонансних станів не перевищує 300 кeВ, незважаючи на той факт, що відкриті два двочастинкові та один чоти-

ричастинковий канал. Отже, актуальним є питання вивчення властивостей ядра  $^{10}\text{Be}$  і з'ясування природи спостережуваних резонансних станів.

Є вагомі підстави вважати, що  $^{10}\text{Be}$  є деформованим неаксіальним ядром. Навіть в простому наближенні SU(3)-моделі, яке описує  $^{10}\text{Be}$  як мультиплет в моделі Елліотта ( $\lambda\mu$ ) = (22), це ядро виявляється деформованим з двома ротаційними смугами  $K = 0$  та  $K = 2$ , де  $K$  – проекція повного орбітального моменту на внутрішню вісь. Деформацію  $^{10}\text{Be}$  досліджували в рамках антисиметризованої молекулярної динаміки (АМД) в роботі [165]. В цій статті параметри деформації вводились за допомогою інтегрального перетворення, що заливало цілий ряд кластерних параметрів. Структура ротаційних смуг була об'єктом численних теоретичних досліджень. Добре сформовані ротаційні смуги було відкрито в  $^{10}\text{Be}$ . Проте в багатьох випадках ротаційні збудження розглядались як дискретні стани, хоча більшість з них лежить в дво- чи трикластерному континуумі. Наприклад, Дескумонт в роботі [132] дослідив спектр збуджених станів  $^{10}\text{Be}$  до 50 МeВ над зв'язаним станом в рамках багатокластерної моделі. Значна частина збуджених станів належить до неперервного спектру. Існування двох нових ротаційних смуг було передбачено в роботі [132]. В роботі [166] в рамках АМД Кобаяші та Канада-Еньо здійснили детальні дослідження  $0^+$  збуджень в ядрі  $^{10}\text{Be}$  та дінейтронних кореляцій в хвильових функціях цих станів.

Чотирикластерна модель з конфігурацією  $\alpha + \alpha + n + n$ , що базується на використанні молекулярних орбіталей, застосувалась Ітагакі та Окабе [167] для вивчення основного та ротаційних збуджених станів в ядрі  $^{10}\text{Be}$ . Велика імовірність  $E2$  переходу між станами дозволила авторами вибрати такі стани, які належать до певної ротаційної смуги. В роботі [168] Ітагакі та ін. вдосконалили модель, яка була реалізована в [167], врахувавши кластерну конфігурацію  $\alpha + t + t$ . Було показано, що остання конфігурація впливає на збуджені стани з енергією близько 15 МeВ, і ефект від цієї конфігурації малий для низько розташованих станів  $^{10}\text{Be}$ .

Як можна помітити, всі вищезгадані дослідження здійснювались в рам-

ках різних версій однієї таєї ж кластерної моделі, а саме, в рамках МРГ. Як неодноразово демонструвалось, МРГ є потужним інструментом для адекватного опису легких ядер. В цьому розділі ми також використовуємо певну реалізацію МРГ для вивчення структури основного і збудженого станів в ядрі  $^{10}\text{Be}$ . Збуджені стани, які лежать над найнижчим двокластерним порогом, в рамках техніки, яку розроблено для визначення енергії та ширини резонансного стану. Ця техніка реалізує такий спосіб розрахунку параметрів резонансних станів, який близький до того, що використовують експериментатори з цією метою. Він складається з двох етапів. На першому етапі слід розрахувати фазові зсуви або  $S$ -матрицю як функцію енергії, на другому етапі положення резонансу визначається за допомогою формули Брейта-Вігнера для фази розсіяння або елементів  $S$ -матриці.

В цьому підрозділі ми приділяємо основну увагу впливу кластерної поляризації і зв'язку каналів на параметри і природу резонансних станів  $^{10}\text{Be}$ . Ці ефекти досліджуються за допомогою трьох різних варіантів нуклон-нуклонних потенціалів. Ми також певним чином візуалізуємо ефекти кластерної поляризації.

Цей підрозділ організований таким чином. В пункті 3.4.2 сформульовано головні наближення і припущення застосованого методу. В пункті 3.4.3 ми пояснююмо, як ми вибрали параметри нуклон-нуклонні потенціали. В пункті 3.4.4 ми аналізуємо як спектр зв'язаних та резонансних станів ядра  $^{10}\text{Be}$  залежить від форми використаного нулон-нуклонного потенціалу. Пункт 3.4.5 присвячено вивченю впливу кластерної поляризації на спектр  $^{10}\text{Be}$ . В пункті 3.4.6 ми підсумовуємо отримані результати.

**3.4.2 Метод** В цьому розділі ми вивчаємо спектр зв'язаних та неперевних станів ядра  $^{10}\text{Be}$  в рамках моделі АМГОБ, сформульованій в роботах [169] (див. також [170, 171]). Це по суті одне з формулувань МРГ, яке використовує квадратично-інтегровані базисні функції. Такий тип формулувань є традиційним способом розв'язку багатокластерних задач в рамках МРГ. Модель АМГОБ залучає гаусівський і осциляторний базиси. Га-

усівський базис дозволяє суттєво зменшити час розрахунку на комп'ютері, тоді як осциляторний базис забезпечує коректне врахування граничних умов.

Будь-який мікрокопічний метод базується на двох ключових елементах: гамільтоніані та хвильовій функції. Ми використовуємо багаточастинковий гамільтоніан, який включає оператор кінетичної енергії та суму парних напіvreалістичних потенціалів. Гамільтоніан також містить кулонівську взаємодію між протонами. Власна функція гамільтоніана, яка описує зв'язані стани та стани неперервного спектра, представлена наступним виразом:

$$\Psi_L = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\lambda_\alpha, l_\alpha} \widehat{\mathcal{A}} \left\{ \Phi_1 ({}^4He) \Phi_2 ({}^4He) \Phi_3 ({}^2n) f_{\lambda_\alpha, l_\alpha; L}^{(\alpha)} (x_\alpha, y_\alpha) \times \right. \\ \left. \times \{Y_{\lambda_\alpha} (\widehat{\mathbf{x}}_\alpha) Y_{l_\alpha} (\widehat{\mathbf{y}}_\alpha)\}_{LM} \right\}. \quad (3.36)$$

Ми залучаємо тут дві амплітуди  $f_{\lambda_\alpha, l_\alpha; L}^{(\alpha)} (x_\alpha, y_\alpha)$ , які представляють динаміку в бінарних каналах  ${}^6He + \alpha$  ( $\alpha=1$ ) і  ${}^8Be + nn$  ( $\alpha=2$ ). Таким чином, вектор Якобі  $\mathbf{x}_1 = x_1 \cdot \widehat{\mathbf{x}}_1$  визначає відстань між альфа-частинкою та дінейtron, вектор Якобі  $\mathbf{y}_1 = y_1 \cdot \widehat{\mathbf{y}}_1$  вказує відносне положення другої альфа-частинки і  ${}^6He$ . Друге дерево координат Якобі включає вектор  $\mathbf{x}_2$ , який описує відносну відстань між двома альфа-частинками, і вектор  $\mathbf{y}_2$ , який визначає положення дінейтрона щодо  ${}^8Be$ . Парціальний орбіタルний момент  $\lambda_\alpha$  позначає внутрішній орбіタルний момент  ${}^6He$  ( $\alpha=1$ ) або  ${}^8Be$  ( $\alpha=2$ ), тоді як орбіタルний момент  $l_\alpha$  описує обертання альфа-частинки навколо  ${}^6He$  ( $\alpha=1$ ) або обертання дінейтрона навколо  ${}^8Be$  ( $\alpha=2$ ). Повний орбіタルний момент  $L$  є векторною сумою парціальних орбіタルних моментів:  $\vec{L} = \vec{\lambda}_\alpha + \vec{l}_\alpha$ . Це накладає добре відомі обмеження на парціальні орбіタルні моменти  $\lambda_\alpha, l_\alpha$  при даному значенні повного орбіタルного момента  $L$ . Крім того, в рамках цієї моделі парність компаунд-системи визначається як  $\pi = (-1)^{\lambda_\alpha + l_\alpha}$ . Ця умова накладає додаткові обмеження на  $\lambda_\alpha$  і  $l_\alpha$  для певної парності. Актуальні обмеження на значення парціальних орбіタルних моментів будуть розглянуті в кінці цього підрозділу.

Було показано (див., наприклад, [38, 80]), що для визначення енергії зв'язані

заного стану і його хвильової функції або елементів матриці розсіяння і відповідних хвильових функцій станів неперервного спектра треба розв'язати нескінченну систему інтегро-диференційних рівнянь

$$\begin{aligned} & \left[ \widehat{T}_{x_\alpha, \lambda_\alpha} + \widehat{T}_{y_\alpha, l_\alpha} - E \right] f_{\lambda_\alpha, l_\alpha; L}^{(\alpha)}(x_\alpha, y_\alpha) + \\ & + \sum_{\beta=1}^2 \sum_{\lambda_\beta, l_\beta} \int_0^\infty \int_0^\infty d\tilde{x}_\beta \tilde{x}_\beta^2 d\tilde{y}_\beta \tilde{y}_\beta^2 \mathcal{V}_{\lambda_\alpha, l_\alpha; \lambda_\beta, l_\beta}^{(L)}(x_\alpha, y_\alpha; \tilde{x}_\beta, \tilde{y}_\beta) \cdot f_{\lambda_\beta, l_\beta; L}^{(\beta)}(\tilde{x}_\beta, \tilde{y}_\beta) = \\ & = E \sum_{\beta=1}^2 \sum_{\lambda_\beta, l_\beta} \int_0^\infty \int_0^\infty d\tilde{x}_\beta \tilde{x}_\beta^2 d\tilde{y}_\beta \tilde{y}_\beta^2 \mathcal{N}_{\lambda_\alpha, l_\alpha; \lambda_\beta, l_\beta}^{(L)}(x_\alpha, y_\alpha; \tilde{x}_\beta, \tilde{y}_\beta) \cdot f_{\lambda_\beta, l_\beta; L}^{(\beta)}(\tilde{x}_\beta, \tilde{y}_\beta), \end{aligned} \quad (3.37)$$

де

$$\widehat{T}_{z, l} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{d}{dz} - \frac{l(l+1)}{z^2} \right]$$

– оператор кінетичної енергії, що асоціюється з вектором Якобі  $\mathbf{z} = \mathbf{x}_\alpha$  або  $\mathbf{z} = \mathbf{y}_\alpha$ .

Легко отримати з двокластерного рівняння Шредінгера інтегро-диференційне рівняння, яке описує взаємодію двох вибраних кластерів

$$\begin{aligned} & \left[ \widehat{T}_{x_\alpha, \lambda_\alpha} - E \right] g_{\lambda_\alpha}^{(\alpha)}(x_\alpha) + \int_0^\infty d\tilde{x}_\alpha \tilde{x}_\alpha^2 \cdot \mathcal{V}^{(\lambda_\alpha)}(x_\alpha; \tilde{x}_\alpha) \cdot g_{\lambda_\alpha}^{(\alpha)}(\tilde{x}_\alpha) = \\ & = E \int_0^\infty d\tilde{x}_\alpha \tilde{x}_\alpha^2 \cdot \mathcal{N}^{(\lambda_\alpha)}(x_\alpha; \tilde{x}_\alpha) \cdot g_{\lambda_\alpha}^{(\alpha)}(\tilde{x}_\alpha). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Рівняння (3.37) and (3.38) можна отримати з рівняння Шредінгера для три- та двокластерних систем, відповідно, за допомогою операторів проектування

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{\lambda_\alpha, l_\alpha}^{(L)}(x_\alpha, y_\alpha) &= \widehat{\mathcal{A}} \left\{ \Phi_1(^4He) \Phi_2(^4He) \Phi_3(^2n) \delta(x_\alpha - x_\alpha) \delta(y_\alpha - y_\alpha) \times \right. \\ &\times \left. \{Y_{\lambda_\alpha}(\widehat{\mathbf{x}}_\alpha) Y_{l_\alpha}(\widehat{\mathbf{y}}_\alpha)\}_{LM} \right\} \end{aligned} \quad (3.39)$$

для трикластерної системи і

$$\widehat{P}_{\lambda_\alpha}(x_\alpha) = \widehat{\mathcal{A}} \left\{ \Phi_\beta(A_\beta) \Phi_\gamma(A_\beta) \delta(x_\alpha - x_\alpha) Y_{\lambda_\alpha \mu_\alpha}(\widehat{\mathbf{x}}_\alpha) \right\} \quad (3.40)$$

для двокластерної системи. Зауважимо, що в рівнянні (3.40) і далі індекси  $\alpha, \beta$  і  $\gamma$  формують циклічну перестановку 1, 2, 3, а  $A_\alpha, A_\beta, A_\gamma$  позначають кількість нуклонів в кожному кластері. Ліва сторона рівнянь (3.37) і (3.38)

визначається матричним елементом трикластерного ( $\widehat{H}^{(3)}$ ) і двокластерного ( $\widehat{H}_\alpha^{(2)}$ ) гамільтоніана між відповідними операторами проектування

$$\widehat{\mathcal{H}}(x_\alpha, y_\alpha; \tilde{x}_\beta, \tilde{y}_\beta) = \left\langle \widehat{P}_{\lambda_\alpha, l_\alpha}^{(L)}(x_\alpha, y_\alpha) \middle| \widehat{H}^{(3)} \middle| \widehat{P}_{\lambda_\beta, l_\beta}^{(L)}(\tilde{x}_\beta, \tilde{y}_\beta) \right\rangle, \quad (3.41)$$

$$\widehat{\mathcal{H}}(x_\alpha, ; \tilde{x}_\alpha) = \left\langle \widehat{P}_{\lambda_\alpha}(x_\alpha) \middle| \widehat{H}_\alpha^{(2)} \middle| \widehat{P}_{\lambda_\alpha}(\tilde{x}_\alpha) \right\rangle, \quad (3.42)$$

тоді як права частина цих рівнянь стосується ядра нормування

$$\widehat{\mathcal{N}}(x_\alpha, y_\alpha; \tilde{x}_\beta, \tilde{y}_\beta) = \left\langle \widehat{P}_{\lambda_\alpha, l_\alpha}^{(L)}(x_\alpha, y_\alpha) \middle| \widehat{P}_{\lambda_\beta, l_\beta}^{(L)}(\tilde{x}_\beta, \tilde{y}_\beta) \right\rangle, \quad (3.43)$$

$$\widehat{\mathcal{N}}(x_\alpha, ; \tilde{x}_\alpha) = \left\langle \widehat{P}_{\lambda_\alpha}(x_\alpha) \middle| \widehat{P}_{\lambda_\alpha}(\tilde{x}_\alpha) \right\rangle. \quad (3.44)$$

Інтегрування в рівняннях (3.41), (3.42), (3.43) і (3.44) проводиться по всіх одночастинкових координатах багаточастинкових трикластерних і двокластерних систем. Оператори  $\widehat{H}_\alpha^{(2)}$  і  $\widehat{H}^{(3)}$ , що з'являються в рівняннях (3.41) і (3.42), визначаються наступним чином

$$\widehat{H}^{(\nu)} = \sum_{i=1}^{N_\nu-1} \widehat{T}_i + \sum_{j>i=1}^{N_\nu} \widehat{V}(ij),$$

де  $\nu = 2$  або  $\nu = 3$ ,  $N_\nu$  – кількість нуклонів в системі ( $N_2 = A_\beta + A_\gamma = A - A_\alpha$ ,  $N_3 = A$ ), а  $\widehat{T}_i$  – оператор кінетичної енергії, що асоціюється з  $i$ -м вектором Якобі.

Отже, трикластерна задача може бути зведена до тричастинкової задачі з ефективною нелокальною та залежною від енергії взаємодією, що походить з оператора антисиметризації. Оператор потенціальної енергії трикластерної системи можна представити у вигляді суми шести компонент. Вони включають взаємодію нуклонів з одним з кластерів (три компоненти) і взаємодію нуклонів, що належать різним кластерам (також три компоненти).

Припустимо, що ми розв'язали всі двокластерні рівняння (3.38) і отримали повний набір власних функцій двокластерного гамільтоніана для зв'язаних станів  $g_{\mathcal{E}_\sigma \lambda_\alpha}^{(\alpha)}(x_\alpha)$  ( $\sigma = 0, 1, \dots$ ) і для станів неперервного спектра  $g_{\mathcal{E} \lambda_\alpha}^{(\alpha)}(x_\alpha)$ . Ці функції задовольняють умову повноти. Ми використовуємо

цей факт, щоб розкласти хвильову функцію трикластерної системи. Це можна зробити наступним чином:

$$f_{\lambda_\alpha, l_\alpha; L}^{(\alpha)}(x_\alpha, y_\alpha) = \sum_{\sigma} g_{\mathcal{E}_\sigma \lambda_\alpha}^{(\alpha)}(x_\alpha) \cdot \phi_{E_\sigma l_\alpha}(y_\alpha) + \int d\mathcal{E} g_{\mathcal{E} \lambda_\alpha}^{(\alpha)}(x_\alpha) \phi_{E - \mathcal{E}, l_\alpha}(y_\alpha). \quad (3.45)$$

Нові хвильові функції  $\phi_{E_\sigma l_\alpha}(y_\alpha)$  і  $\phi_{E - \mathcal{E}, l_\alpha}(y_\alpha)$ , які треба знайти, мають простий фізичний зміст. Функція  $\phi_{E_\sigma l_\alpha}(y_\alpha)$  описує розсіяння третього кластера на зв'язаному стані двокластерної підсистеми  $\mathcal{E}_\sigma$ , за умови, що енергія  $E_\sigma = E - \mathcal{E}_\sigma$ . Функція  $\phi_{E - \mathcal{E}, l_\alpha}(y_\alpha)$  представляє собою розсіяння третього кластера на стані неперервного спектра двокластерної підсистеми. Якщо двокластерна підсистема не має зв'язаних станів, тоді хвильова функція  $f_{\lambda_\alpha, l_\alpha; L}^{(\alpha)}(x_\alpha, y_\alpha)$  буде представлена лише інтегральною частиною в рівнянні (3.45). Саме такий випадок має місце для підсистеми  ${}^8Be = {}^4He + {}^4He$ , чий основний стан є резонансом.

Підставляючи функцію  $f_{\lambda_\alpha, l_\alpha; L}^{(\alpha)}(x_\alpha, y_\alpha)$ , визначену виразом (3.45) в систему рівнянь (3.37)i враховуючи те, що функції  $g_{\mathcal{E}_\sigma \lambda_\alpha}^{(\alpha)}(x_\alpha)$  і  $g_{\mathcal{E} \lambda_\alpha}^{(\alpha)}(x_\alpha)$  є власними функціями двокластерного гамільтоніана (3.38), ми можемо отримати систему рівнянь для хвильових функцій  $\phi_{E_\sigma l_\alpha}(y_\alpha)$  і  $\phi_{E - \mathcal{E}, l_\alpha}(y_\alpha)$ . Ми не представляємо цю систему рівнянь в явному вигляді, оскільки вона досить громіздка. Слід зазначити, що інтегральна частина в розкладі (3.45) створює деякі числові проблеми, оскільки треба побудувати та використати хвильові функції  $g_{\mathcal{E} \lambda_\alpha}^{(\alpha)}(x_\alpha)$  для напівнескінченого інтервалу енергій  $0 \leq \mathcal{E} < \infty$ . Крім того, вона також містить нескінченну кількість функцій  $\phi_{E - \mathcal{E}, l_\alpha}(y_\alpha)$  як з додатніми, так і з від'ємними енергіями  $E - \mathcal{E}$  третього кластера. Ці проблеми можна подолати, замінивши інтегрування сумою по скінченній кількості дискретних точок

$$f_{\lambda_\alpha, l_\alpha; L}^{(\alpha)}(x_\alpha, y_\alpha) \approx \sum_{\sigma} g_{\mathcal{E}_\sigma \lambda_\alpha}^{(\alpha)}(x_\alpha) \cdot \phi_{E_\sigma l_\alpha}(y_\alpha) + \sum_{\tau=1}^{N_a} g_{\mathcal{E}_\tau \lambda_\alpha}^{(\alpha)}(x_\alpha) \cdot \phi_{E - \mathcal{E}_\tau, l_\alpha}(y_\alpha), \quad (3.46)$$

де хвильові функції  $g_{\mathcal{E}_\tau \lambda_\alpha}^{(\alpha)}(x_\alpha)$  з  $\tau = 1, 2, \dots, N_a$  належать до двокластерного континуума. Якщо кількість зв'язаних станів  $N_b$ , тоді ми маємо  $N_b + N_a$

дискретних доданків в рівнянні (3.46). Це також означає, що ми маємо принаймі  $N_b + N_a$  каналів розсіяння третього кластера на двокластерній підсистемі з поділом  $\alpha$  та орбітальним моментом "мішенні"  $\lambda_\alpha$ .

Важливо підкреслити, що інтеграл в рівнянні (3.45) або в другій сумі в рівнянні (3.46) безпосереднім чином стосується того, що ми називаємо "кластерною поляризацією". Нехтуючи цією сумаю, ми розглядаємо розсіяння третього кластера на жорсткій двокластерній підсистемі. Інтеграл по двокластерному континууму або сума по дискретизованим неперервним станам враховує віртуальні переходи двокластерної підсистеми в її неперервний спектр, і двокластерна підсистема може, таким чином, змінювати форму і/або розмір в результаті взаємодії з третім кластером. Це ключовий елемент кластерної поляризації.

Виникає проблема, як вибрати дискретні стани в двокластерному континуумі. В роботі [169], був запропонований самоузгоджений підхід до вибору таких станів. Було запропоновано використовувати скінченну кількість квадратично-інтегровних гаусівських функцій для розкладу хвильової функції  $g_{\mathcal{E}\lambda_\alpha}^{(\alpha)}(x_\alpha)$  відносного руху двох кластерів:

$$g_{\mathcal{E}\lambda_\alpha}^{(\alpha)}(x_\alpha) = \sum_{\nu=1}^{N_G} D_\nu^{(\mathcal{E}\lambda_\alpha)} G_{\lambda_\alpha}(x_\alpha, b_\nu), \quad (3.47)$$

де

$$G_\lambda(\mathbf{x}, b_\nu) = \frac{1}{b_\nu^{3/2}} \sqrt{\frac{2}{\Gamma(\lambda_\alpha + 3/2)}} \rho^{\lambda_\alpha} \exp\left\{-\frac{1}{2}\rho^2\right\}, \quad \left(\rho = \frac{x}{b_\nu}\right), \quad (3.48)$$

— гаусівська функція. Використовуючи  $N_G$  гаусівських функцій ( $N_G > N_b$ ) для розкладу функції  $g_{\mathcal{E}\lambda_\alpha}^{(\alpha)}(x_\alpha)$ , ми отримаємо систему  $N_G$  лінійних рівнянь для коефіцієнтів розкладу  $D_\nu^{(\mathcal{E}\lambda_\alpha)}$ . Розв'язуючи цю систему рівнянь, ми отримаємо  $N_b$  двокластерних зв'язаних станів і  $N_a = N_G - N_b$  дискретних або псевдозв'язаних станів, що належать до двокластерного континууму. Хвильові функції  $\{g_{\mathcal{E}\sigma\lambda_\alpha}^{(\alpha)}(x_\alpha)\}$  ( $\sigma = 1, 2, \dots, N_G$ ) дискретного і неперервного спектру ортонормовані. Формально всі ці хвильові функції мають одну й ту ж природу, оскільки вони отримані в результаті діагоналізації матриці гамільтоніану. Проте якщо ми розглянемо їх асимптотику

в координатному просторі, ми побачимо, що хвильові функції зв'язаних станів спадають експоненційно, як і очікувалось. В той же час, хвильові функції псевдозв'язаних станів осцилюють, що типово для хвильових функцій неперервного спектра. Хвильові функції зв'язаних та псевдозв'язаних станів мають вузол у віддаленій точці координатого простору. Положення цієї точки визначається кількістю гаусівських функцій.

Ми розглядаємо це метод як самоузгоджений і контролюваний спосіб опису зв'язаних станів двокластерної підсистеми і вибору псевдозв'язаних станів в двокластерному континуумі.

Розрахувавши спектр зв'язаних та псевдозв'язаних станів для всіх двокластерних підсистем, ми можемо визначити хвильові функції  $\phi_{E_\sigma l_\alpha}(y_\alpha)$  третього кластера, що взаємодіє з двокластерною підсистемою, позначеної індексом  $\alpha$  ( $\alpha=1,2$ ). Щоб знайти ці функції, ми також використовуємо дискретну схему, розкладаючи функції  $\phi_{E_\sigma l_\alpha}(y_\alpha)$  по осциляторному базису

$$\phi_{E_\sigma l_\alpha}(y_\alpha) = \sum_{n_\alpha=0}^{N_0} C_{n_\alpha}^{(E_\sigma l_\alpha)} \psi_{n_\alpha, l_\alpha}(y_\alpha, b), \quad (3.49)$$

де

$$\begin{aligned} \psi_{n_\alpha, l_\alpha}(y_\alpha, b) &= (-1)^{n_\alpha} \mathcal{N}_{n_\alpha l_\alpha} b^{-3/2} \rho^{l_\alpha} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} L_{n_\alpha}^{l_\alpha+1/2}(\rho^2), \\ \rho &= \frac{y_\alpha}{b}, \quad \mathcal{N}_{n_\alpha l_\alpha} = \sqrt{\frac{2\Gamma(n_\alpha + 1)}{\Gamma(n_\alpha + l_\alpha + 3/2)}}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

– осциляторна функція, а  $b$  – осциляторна довжина. В рівнянні (3.49) фігурує скінчена кількість осциляторних функцій. Але фактично цей розклад залишає нескінченну кількість функцій, оскільки відома асимптотика хвильової функції  $\phi_{E_\sigma l_\alpha}(y_\alpha)$  в координатному просторі  $C_{n_\alpha}^{(E_\sigma l_\alpha)}$  і в осциляторному просторі.

Оскільки ми цікавимось зв'язаними станами і реакціями з двома кластерами у вхідному та вихідному каналах, нам треба досліжити асимпточний вигляд хвильової функції. Для стану неперервного спектру ми

можемо написати, за умови, що  $x_\alpha \ll y_\alpha$ ,

$$f_{\lambda_\alpha, l_\alpha; L}^{(\alpha)}(x_\alpha, y_\alpha) \approx g_{\mathcal{E}\lambda_\alpha}^{(\alpha)}(x_\alpha) \left[ \delta_{c_0, c} \psi_{l_\alpha}^{(-)}(k_\alpha y_\alpha; \eta_\alpha) - S_{c_0, c} \psi_{l_\alpha}^{(+)}(k_\alpha y_\alpha; \eta_\alpha) \right], \quad (3.51)$$

де index  $c$  нумерує поточний канал  $c = \{\mathcal{E}_\alpha \lambda_\alpha l_\alpha\}$ , а  $c_0$  позначає вхідний канал,  $\psi_{l_\alpha}^{(-)}(k_\alpha y_\alpha; \eta_\alpha)$  ( $\psi_{l_\alpha}^{(+)}(k_\alpha y_\alpha; \eta_\alpha)$ ) – добре відомі збіжна (роздільна) кулонівські хвилі, а  $\eta_\alpha$  – параметр Зоммерфельда. Визначення збіжної і розбіжної кулонівських хвильових функцій можна знайти, наприклад, в роботі [172], а параметри  $k_\alpha$  and  $\eta_\alpha$  в нашому випадку визначені як

$$k_\alpha = \sqrt{\frac{2m(E - \mathcal{E})}{\hbar^2}}, \quad \eta_\alpha = \frac{Z_\alpha(Z_\beta + Z_\gamma)e^2}{\sqrt{2(E - \mathcal{E})}} \sqrt{\frac{m}{\hbar^2} \frac{A_\alpha(A_\beta + A_\gamma)}{A}},$$

де  $Z_\alpha$ ,  $Z_\beta$  і  $Z_\gamma$  – заряди окремих кластерів,  $E$  повна енергія трикластерних систем ( $E > \mathcal{E}$ ) і  $m$  – маса нуклона.

В рамках цієї моделі, повний спін  $S$  ядра  ${}^{10}\text{Be}$  і спін кожного з кластерів дорівнює нулю, отже спін-орбітальні компоненти нуклон-нуклонної взаємодії не беруть участь в наших розрахунках. Щоб описати внутрішню структуру  ${}^6\text{He}$ , ми враховуємо два значення орбітального моменту  ${}^6\text{He}$ :  $\lambda_1 = 0$  і  $\lambda_1 = 2$ . Таке наближення відображає експериментальну ситуацію в  ${}^6\text{He}$ . Перше значення орбітального момента представляє основний стан, а друге відноситься до збудженого стану  $2^+$ , який розглядається як псевдозв'язаний стан в наших розрахунках. Усталених станів від'ємної парності в  ${}^6\text{He}$  немає. Дві альфа-частинки, що утворюють  ${}^8\text{Be}$ , можуть мати лише парні значення орбітального момента. Ми враховуємо  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_2 = 2$  і  $\lambda_2 = 4$ . Це також відображає основні властивості  ${}^8\text{Be}$ . В нашій моделі всі ці стани розглядаються як псевдозв'язані.

Оскільки парціальні орбітальні моменти  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  набувають лише парних значень, повна парність  $\pi$  ядра  ${}^{10}\text{Be}$  визначається значеннями парціального орбітального моменту  $l_1$  або  $l_2$ . Цікаво відзначити, що для станів аномальної парності (тобто коли  $\pi = (-1)^{L+1}$ ) основний стан  $0^+$  ядер  ${}^6\text{He}$  і  ${}^8\text{Be}$  не беруть участь в розсіянні  ${}^6\text{He} + \alpha$  і  ${}^8\text{Be} + nn$ . Наприклад, стан  $J^\pi = 1^+$  ядра  ${}^{10}\text{Be}$  можна отримати комбінацією внутрішнього орбітального моменту  ${}^6\text{He}$

$\lambda_1 = 2$  і орбітального момента альфа-частинки  $l_1 = 2$ . Це єдина можлива комбінація парціальних орбітальних моментів для кластеризації  ${}^6He + \alpha$ . Для іншої кластеризації  ${}^8Be + nn$ , ми маємо дві можливі комбінації  $\lambda_2$  і  $l_2$ , а саме,  $\lambda_2=l_2 = 2$  і  $\lambda_2=l_2 = 4$ , які беруть участь в утворенні  $J^\pi = 1^+$  стану. Подібна ситуація спостерігається для  $2^-$  станів в  ${}^{10}\text{Be}$ . Обмеження на можливі значення парціальних кутових моментів мають дуже цікаві фізичні наслідки. Оскільки канал  ${}^6He(0^+) + \alpha$  не бере участь в розсіянні  ${}^6He + \alpha$  для станів аномальної парності, в цьому випадку неперервний спектр починається з порогу  ${}^6He(2^+) + \alpha$  і стани, які лежать під цим порогом, але над  ${}^6He(0^+) + \alpha$ , є зв'язаними.

Підсумовуючи цей підрозділ, наведемо головні наближення і припущення нашої моделі.

1. Слідуючи МРГ, ми представляємо трикластерну хвильову функцію у вигляді антисиметризованого добутку внутрішніх хвильових функцій кластерів і хвильової функції їх відносного руху. Внутрішні хвильові функції кластерів вибираються у вигляді найпростіших функцій трансляційно-інваріантної багаточастинкової моделі оболонок.
2. Ця модель забезпечує точне врахування принципу Паулі для кожного кластера, для всіх двокластерних підсистем і для трикластерної системи в цілому.
3. Рух центру мас повністю виключено, що приводить до відсутності зайвих розв'язків рівняння Шредінгера.
4. Трикластерне рівняння Шредінгера зводиться до двочастинкової багатоканальної задачі коли двокластерна підсистема знаходиться у зв'язаному або псевдо-зв'язаному стані.
5. Наша мікроскопічна модель використовує гаусівський базис для опису двокластерної підсистеми і осциляторний базис для опису відносного руху бінарної підсистеми і третього кластера.

6. Врахування не лише основного стану двокластерної підсистеми, але й ії збуджених станів приводить до врахування поляризації двокластерної підсистеми при наближенні третього кластера.
7. Нарешті, ми отримуємо спектр і хвильові функції трикластерної системи, а також матричні елементи матриці розсіяння.

**3.4.3 Вибір вхідних параметрів моделі** Щоб розрахувати спектр зв'язаних і резонансних станів ядра  $^{10}\text{Be}$ , ми використовуємо потенціал Міннесоти (ПМ) [87] з IV версією спін-орбітальної взаємодії [88], модифікований потенціал Хасегави-Нагати (МПХН) [173,174] і потенціал Волкова N2 (ПВ) [175]. Осциляторний радіус  $b$  вибраний так, щоб мінімізувати енергію трикластерного порога  $\alpha + \alpha + 2n$ .

По-перше, слід почати наші розрахунки з визначення двокластерних зв'язаних та псевдозв'язаних станів. Для опису внутрішньої структури  $^6\text{He}$  і  $^8\text{Be}$  ми використовуємо чотири гаусівських функції. Як і в роботі [169], осциляторна довжина  $b_\nu$  ( $\nu = 1, 2, 3, 4$ ) гаусівських функцій визначається як  $b_\nu = b_0 q^{\nu-1}$ . Для  $^6\text{He}$  ми вибрали  $b_0 = 0.8$  fm,  $q = 1.9$ , а для  $^8\text{Be}$  ми взяли  $b_0 = 0.9$  fm,  $q = 1.8$ . Параметри  $b_0$  і  $q$  було вибрано таким чином, щоб отримати мінімальну енергію для основного стану  $0^+$  в ядрах  $^6\text{He}$  і  $^8\text{Be}$ .

В Таблиці 19 ми розглядаємо основні параметри основного стану  $^6\text{He}$ , розрахованого в рамках двокластерної моделі.

Табл. 19: Енергія та середньоквадратичні протонні, нейtronні та масові радіуси основного стану ядра  $^6\text{He}$ , отримані з різними нуклон-нуклонними потенціалами (ННП). Оптимальні значення параметрів  $b$  та  $m(u)$  також вказані.

ННП	$b$ , Фм	$m(u)$	$E$ , MeВ	$R_p$ , Фм	$R_n$ , Фм	$R_m$ , Фм
ПМ	1.356	0.9570	-1.747	1.961	2.591	2.399
МПХН	1.359	0.4132	-2.362	1.871	2.433	2.261
ПВ	1.421	0.5705	-2.518	1.990	2.597	2.412

Можна помітити, що з вибраними параметрами нуклон-нуклонних потенціалів основний стан  $^6\text{He}$  перезв'язаний. Пізніше ми обговоримо, чому

ми вибрали такі параметри. Зауважимо, що Таблиця 19 показує, що є нейтронне гало в основному стані  ${}^6\text{He}$ , оскільки середньоквадратичний нейтронний радіус (rms)  $R_n$  перевищує протонний радіус  $R_p$ .

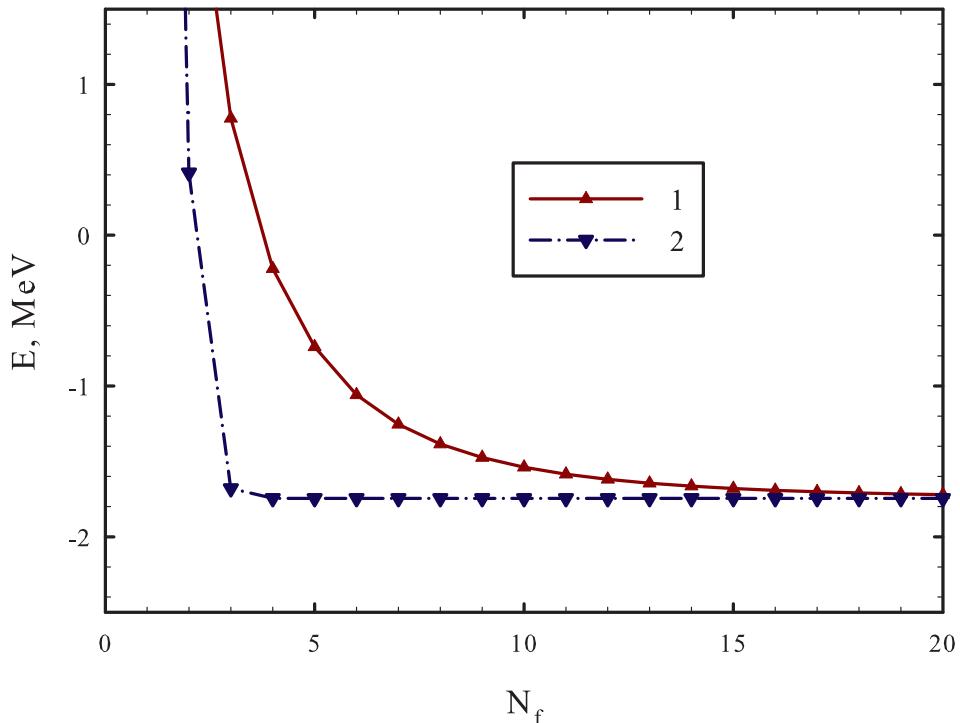


Рис. 3.10 Енергія основного стану  ${}^6\text{He}$  як функція кількості гаусівських (1) і осциляторних функцій (2). Результати отримано з ПМ. Енергія відраховується від двокластерного порогу  ${}^4\text{He} + {}^2\text{n}$ .

Результати, представлені на рис. 3.10, де показана енергія основного стану  ${}^6\text{He}$  як функція кількості гаусівських та осциляторних функцій, демонструють, що чотири гаусівські функції (i) забезпечують збіжність енергії основного стану  ${}^6\text{He}$  і (ii) дають таку саму енергію основного стану  ${}^6\text{He}$ , як більш, ніж 25 осциляторних функцій. Це означає, що ми використовуємо такий базис гаусівських функцій, який дає нам правильне значення енергії основного стану. Крім того, гаусівський базис зменшує розмірність матриці дво- та трикластерного гамільтоніанів в 6 разів і приводить до 36-кратного зменшення обчислювального часу. Ось чому ми надаємо перевагу викори-

станню гаусівського базису замість осциляторного для опису двокластерних підсистем. Важливо відзначити, що хвильова функція основного стану  ${}^6\text{He}$ , отримана за допомогою чотирьох гаусівських функцій, дуже близька до хвильової функції, побудованої за допомогою 50 осциляторних функцій. На користь цього твердження служить той факт, що середньоквадратичні протонні, нейtronні та масові радіуси, розраховані в гаусівському та осциляторному базисах, ідентичні.

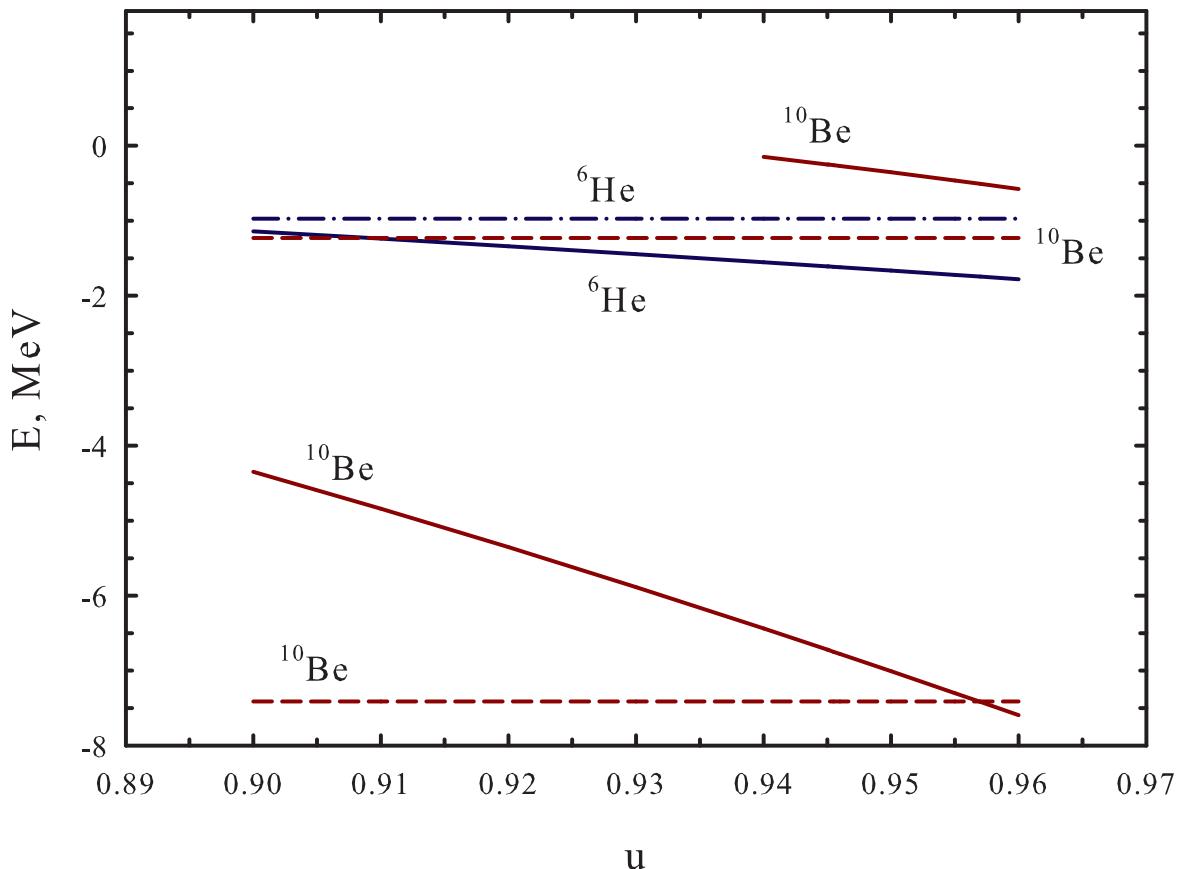


Рис. 3.11 Енергія основного та збудженого  $0^+$  станів в  ${}^{10}\text{Be}$  і основного стану  ${}^6\text{He}$  як функція обмінного параметра  $u$  ПМ. Штрихованими лініями позначені експериментальні значення енергії  $0^+$  зв'язаних станів в  ${}^{10}\text{Be}$  і енергію основного стану в  ${}^6\text{He}$ .

Природно вибрати параметри нуклон-нуклонного потенціалу так, щоб відтворити енергію основного стану  ${}^6\text{He}$ , який є єдиним зв'язаним станом

у всіх двокластерних підсистемах. Проте, як показано на рис. 3.11, в цьому випадку неможливо отримати правильну енергію зв'язаних станів в  $^{10}\text{Be}$ . На рис. 3.11 демонструється енергія основного і першого збудженого  $0^+$  станів ядра  $^{10}\text{Be}$  як функція параметра  $u$  потенціалу Міннесоти. Всі енергії на рис. 3.11 відраховуються від порогу  $^6\text{He} + \alpha$ . На цьому рисунку також показана залежність від енергії стану ядра  $^6\text{He}$  від параметра  $u$ . Як видно на рис. 3.11, потенціал Міннесоти відтворює основний стан  $^6\text{He}$  та  $^{10}\text{Be}$  при різних значеннях параметра  $u$ . Оптимальне значення  $u$  ( $u < 0.90$ ) для основного стану  $^6\text{He}$  суттєво недозв'язує основний стан ядра  $^{10}\text{Be}$ . Крім того, не існує збудженого  $0^+$  стану в  $^{10}\text{Be}$  для такого значення  $u$ . Оптимальне значення  $u$  для основного стану  $^{10}\text{Be}$  ( $u = 0.957$ ) дозволяє отримати збуджений  $0^+$  стан зв'язаним. Для такого значення  $u$ , енергія основного стану  $^6\text{He}$  трохи переззв'язана.

Як видно на рис. 3.11, спектр  $0^+$  зв'язаних станів в  $^{10}\text{Be}$ , розрахований з параметром  $u \leq 0.9$ , сильно деформований. Те ж саме спостерігається для інших зв'язаних станів, наприклад, для  $2^+$ . Отже, ми вирішили використовувати обмінний параметр  $u=0.957$ , який дозволяє відтворити положення основного стану в  $^{10}\text{Be}$  по відношенню до порогу  $^6\text{He} + \alpha$ . Подібний критерій вибору оптимальних параметрів для модифікованого потенціалу Хасегави-Нагати і потенціалу Волкова приводить до  $m = 0.4132$  і  $u = 0.5705$ , відповідно.

#### 3.4.4 Вплив форми нуклон-нуклонного потенціалу на спектр $^{10}\text{Be}$

**Зв'язані стани** Звернемось до спектру зв'язаних станів. В Таблиці 20 показано спектр зв'язаних станів в  $^{10}\text{Be}$  та вхідні параметри розрахунків. Нагадаємо, що майоранівський параметр  $m$  МПХН і ПВ, а також параметр  $u$  ПМ вибраний так, щоб відтворити енергію основного стану  $^{10}\text{Be}$  по відношенню до бінарного порогу  $^6\text{He} + \alpha$ .

Табл. 20: Спектр зв'язаних станів в  $^{10}\text{Be}$ , розрахований в рамках трикластерної моделі з потенціалом Міннесоти (ПМ), модифікованим потенціалом Хасегави-Нагати (МПХН) і потенціалом Волкова N2 (ПВ).

	Exp	ΠΜ	ΜΠΧΗ	ΠΒ
$b$ , fm		1.356	1.359	1.421
$m(u)$		0.9570	0.4132	0.5705
$J^\pi$	$E$ , MeB	$E$ , MeB	$E$ , MeB	$E$ , MeB
$0^+$	-7.4104	-7.4261	-7.3760	-7.4072
$2^+$	-4.0424	-6.1208	-5.6554	-4.7408
$2^+$	-1.4520	-4.5435	-4.6142	-3.5127
$1^-$	-1.4505	-0.4757	-0.0860	-
$0^+$	-1.2311	-0.5224	-0.3127	-0.7060
$2^-$	-1.1471	1.52115	1.0880	0.6108

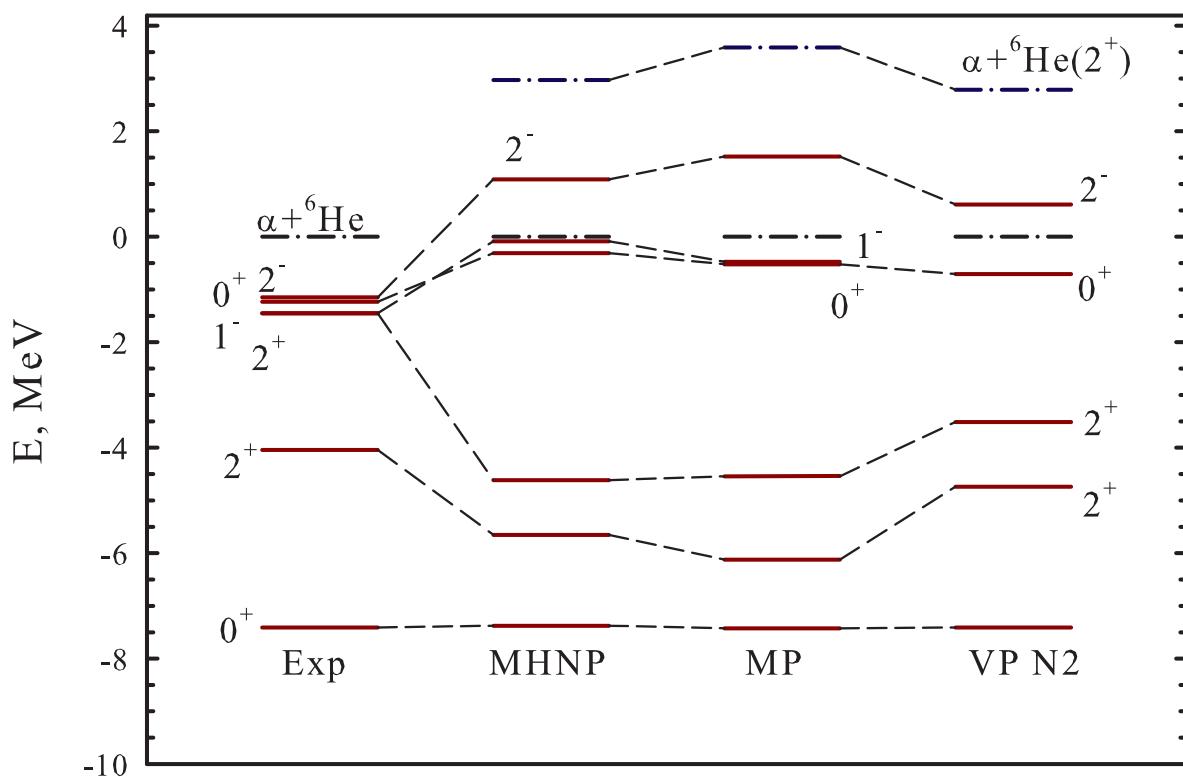


Рис. 3.12 Експериментальний і теоретичний спектр зв'язаних станів ядра  $^{10}\text{Be}$ .

Як свідчать дані Таблиці 20, всі ці потенціали пропонують обернений порядок  $0^+$  та  $1^-$  станів. А потенціал Волкова не генерує зв'язаного  $1^-$  стану.

На рис. 3.12 ми порівнюємо розрахований спектр ядра  $^{10}\text{Be}$  з експериментальним [90]. Виявляється, що в рамках даної моделі кластери  $^6\text{He}$  і  $^8\text{Be}$  досить розосереджені, оскільки відстань між  $\alpha$  і  $^2n$  та між двома альфа-частинками становить 3.9 і 4.2 Фм, відповідно. Ці відстані визначаються основним  $0^+$  станом ядра  $^6\text{He}$  і  $^8\text{Be}$  з МПХН. Середні відстані між взаємодіючими  $\alpha + ^2n$  і  $\alpha + \alpha$  кластерами в збуджених і псевдозв'язаних станах підсистем  $^6\text{He}$  та  $^8\text{Be}$  набагато більше 4 Фм. В результаті потрібен великий базис осциляторних функцій ( $N_O = 250$ ), щоб досягнути асимптотичної області, де взаємодія між  $^6\text{He}$  та альфа-частинкою та між  $^8\text{Be}$  і  $^2n$  дуже мала, і отримати збіжні результати для параметрів розсіяння, енергії та ширини резонансних станів. Для більш компактних систем, таких як  $^7Li$  і  $^7Be$ ,  $N_O = 130$  осциляторних функцій забезпечують збіжні результати з необхідною точністю (див. [169–171], де  $^7Li$  розглядався як система  $^6Li + n$  плюс  $^4He + ^3H$  зв'язаних конфігурацій, тоді як  $^7Be$  розглядався як  $^6Li + p$  плюс  $^4He + ^3He$ ).

Табл. 21: Протонний, нейtronний і масовий середньоквадратичні радіуси основного стану  $^{10}\text{Be}$ .

Метод	$R_p$ , Фм	$R_n$ , Фм	$R_m$ , Фм
АМГОБ ПМ	2.21	2.33	2.28
АМГОБ МПХН	2.17	2.28	2.24
АМГОБ ПВ N2	2.39	2.54	2.48
АМД [176]	2.32	2.48	2.41
МГК ПМ, [132]	2.14	-	2.26
МГК ПВ N2, [132]	2.29	-	2.40
ФМД [177]	2.38		
МОБК [178]	2.34(9)		
ФГМК [179, 180]	2.354		
Exp [177, 181, 182]	2.355(17)		
Exp [63, 65]	2.24±0.02		2.30±0.02

В Таблиці 21 ми демонструємо протонний, нейtronний і масовий точкові середньоквадратичні радіуси основного стану  $^{10}\text{Be}$ , отриманого з різними потенціалами та різними методами. Можна помітити, що ПМ та МПХН генерують досить компактний основний стан, тоді як ПВ дає диспергований стан. Зарядовий радіус, розрахований з потенціалом Волкова, дуже близький до експериментального значення і до теоретичних результатів, отриманих в рамках методу генераторної координати (МГК) [132], АМД [176], ферміонної молекулярної динаміки (ФМД [177]), моделі оболонок без кору (МОБК) [178] і методу Монте-Карло функцій Гріна (ФГМК) [179, 180]. Цікаво зауважити, що  $^{10}\text{Be}$  не має нейтронного гало, оскільки різниця між протонним і нейтронним середньоквадратичними радіусами не перевищує 0.15  $\text{\AA}_\text{M}$ .

**Резонансні стани** В цьому пункті ми розглянемо спектр і властивості резонансних станів в  $^{10}\text{Be}$ .

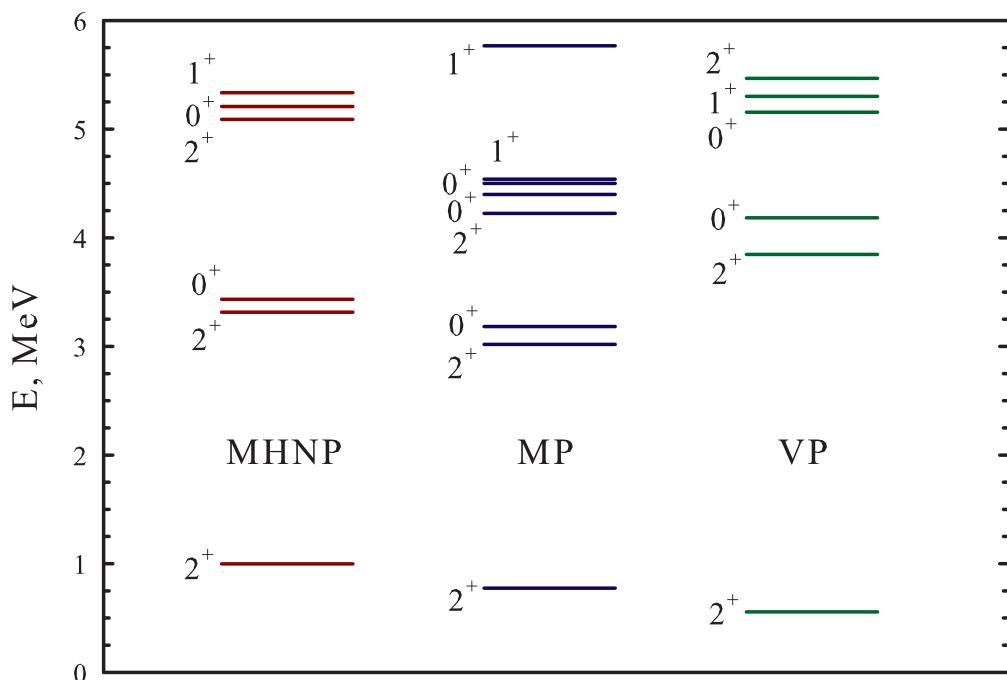


Рис. 3.13 Спектр резонансних станів додатної парності в  $^{10}\text{Be}$ , розрахований з різними нуклон-нуклонними потенціалами.

На рис. 3.13 і 3.14 зображеній спектр резонансних станів додатної і від'ємної парності, відповідно.

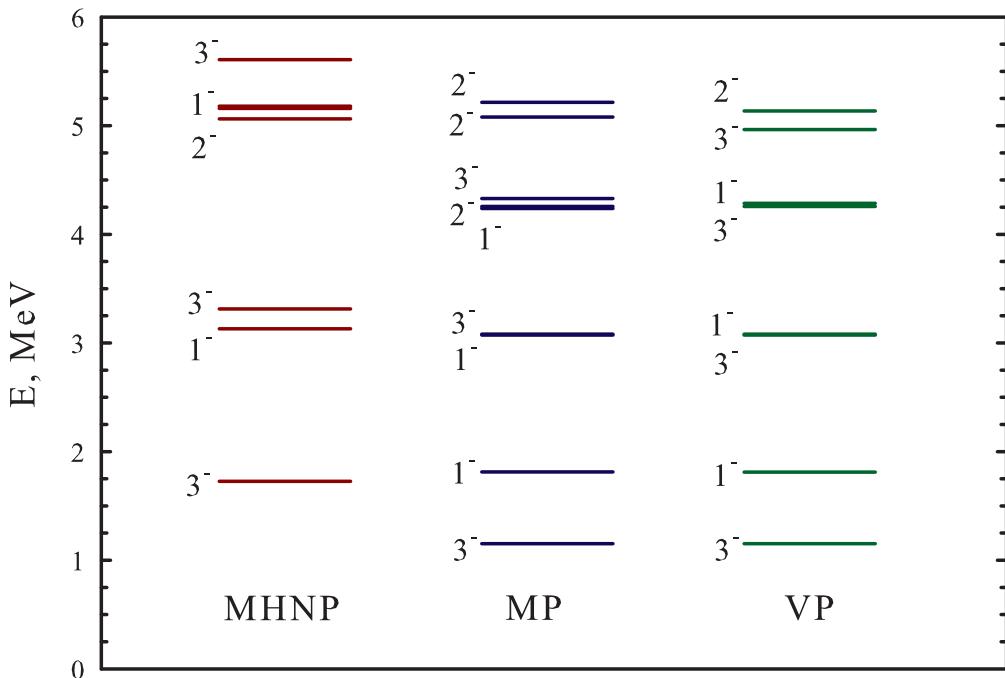


Рис. 3.14 Спектр резонансних станів від'ємної парності в  $^{10}\text{Be}$ .

Враховані дві кластерні конфігурації та поляризація кластерів. Ці рисунки демонструють, як енергія резонансних станів ядра  $^{10}\text{Be}$  залежить від форми нуклон-нуклонних потенціалів. Ширини цих резонансів дано в Таблицях 22 і 23.

Енергії та ширини резонансних станів сильно залежать від форми нуклон-нуклонного потенціалу. Нагадаємо, що ми підігнали обмінний параметр (параметр Майорана) всіх нуклон-нуклонних потенціалів, щоб відтворити положення основного  $0^+$  стану ядра  $^{10}\text{Be}$  по відношенню до двокластерного порогу  $^6\text{He} + \alpha$ . Це означає, що взаємодія між кластерами близька до "реальності" для повного кутового моменту  $J^\pi = 0^+$ . Але це не так для інших значень  $J$  і  $\pi$ .

На завершення цього підрозділу порівняємо наші результати з результатами розрахунків в рамках інших мікроскопічних моделей. З цією метою

Табл. 22: Спектр станів додатної парності в ядрі  $^{10}\text{Be}$ . Енергії наведено в MeВ, ширини в кеВ.

$J^\pi$	ПМ		МПХН		ПВ N2	
	$E$	$\Gamma$	$E$	$\Gamma$	$E$	$\Gamma$
$0^+$	-7.426		-7.376		-7.407	
	-0.522		-0.313		-1.116	
	3.183	2353.6	3.434	2969.90	-0.696	
	4.398	1304.8	5.209	145.11	4.184	2235.85
	4.501	238.1			5.155	292.04
$1^+$	4.540	792.6	5.335	222.96	5.301	26.66
	5.767	1232.2	6.817	111.84	7.210	15.19
$2^+$	-6.121		-5.655		-4.741	
	-4.544		-4.614		-3.513	
	0.776	60.0	0.998	144.39	0.557	21.45
	3.019	2126.4	3.315	2301.55	3.846	1998.14
	3.170	3160.8	5.090	43.40	5.468	240.23
	4.225	24.4				

Табл. 23: Спектр станів від'ємної парності в ядрі  $^{10}\text{Be}$ . Енергії наведено в MeВ, ширини в кеВ.

$J^\pi$	ПМ		МПХН		ПВ N2	
	$E$	$\Gamma$	$E$	$\Gamma$	$E$	$\Gamma$
$1^-$	-0.476		-0.086		0.252	46.51
	1.812	921.9	3.131	191.09	1.771	241.95
	3.073	2905.2	5.159	110.78	3.890	232.41
	4.237	629.2				
$2^-$	4.329	95.6	5.063	18.71	3.633	752.20
	5.088	1019.6	5.608	358.63	4.753	211.49
	5.215	879.7			5.345	229.88
$3^-$	1.152	3.09	1.726	16.50	0.874	2.05
	3.082	2930.80	3.314	3333.08	4.305	2161.37
	4.256	654.56	5.180	96.68	5.378	264.62

ми вибрали роботу [183], де використовувалась чотирикластерна модель для опису структури  $^{10}\text{Be}$ . В рамках цієї моделі, яка називається мікроскопічним методом R-матриці (ММР), ядро  $^{10}\text{Be}$  розглядалось як чотирикластерна система  $\alpha + \alpha + n + n$ . Чотирикластерна конфігурація проектувалась на двочастинковий канал  $^6\text{He} + \alpha$ , де  $^6\text{He}$  представлявся набором з одного зв'язаного та 14 псевдозв'язаних станів. Ядро  $^6\text{He}$  вважалось трикластерною конфігурацією. Всі збуджені стани  $^{10}\text{Be}$ , які лежать вище порогу  $^6\text{He} + \alpha$ , розглядалися як резонансні стани в двокластерному континуумі. Таким чином, існує значна схожість цієї моделі з нашою моделлю. Крім того, потенціал Міннесоти використовувався в [183]. В Таблиці 24 наведені енергії та ширини резонансних станів в ядрі  $^{10}\text{Be}$ , отримані Фуджіварою та ін. [183] з ПМ ( $u=0.95$ ) і осциляторним радіусом  $b=1.387$  Фм. Щоб зробити порівняння більш адекватним, ми використали такі ж вхідні параметри, а саме,  $u=0.95$  і  $b=1.387$  Фм. Ці результати також представлені в Таблиці 24 в колонці "АМГОБ". В розрахунках ММР основний стан та всі псевдозв'язані стани  $^6\text{He}$  включені в розгляд. Слід нагадати, що енергія зв'язаних та резонансних станів відраховується від порогу  $^6\text{He} + \alpha$ . Є певна узгодженість та схожість між ММР та АМГОБ розрахунками. Наприклад, обидва методи вказують на існування вузького  $0^+$  резонансного стану. Проте є також деякі відмінності між цими моделями. Модель АМГОБ, враховуючи дві кластерні конфігурації і кластерну поляризацію  $^6\text{He}$  і  $^8\text{Be}$ , породжують більше резонансних станів. АМГОБ також дає зв'язаний  $1^-$  стан і другий  $0^+$  та  $2^+$  зв'язані стани.

### 3.4.5 Поляризація

Щоб показати вплив кластерної поляризації на спектр зв'язаних та резонансних станів в ядрі  $^{10}\text{Be}$ , ми здійснили шість видів розрахунків. Спершу ми обговоримо структуру ядра  $^{10}\text{Be}$  в наближенні ізольованих кластерних конфігурацій  $^4\text{He} + ^6\text{He}$  і  $^2\text{n} + ^8\text{Be}$ , а також коли ці конфігурації зв'язані. По-друге, кожен з цих трьох типів розрахунків було зроблено з урахуванням та без урахування поляризації двокластерних підсистем. Таким чином ми досліджуємо як вплив поляризації двокластерних

Табл. 24: Спектр зв'язаних та резонансних станів в ядрі  $^{10}\text{Be}$ , розрахований в рамках різних мікроскопічних методів. Енергію та ширину наведено в МeВ.

$J^\pi$	ММР		АМГОБ	
	$E$	$\Gamma$	$E$	$\Gamma$
$0^+$	-6.12		-6.836	
	0.75	0.41	-0.285	
	4.66	$3.2 \cdot 10^{-3}$	3.173	0.096
$1^-$	0.47	0.01	-0.121	
			2.480	0.720
$2^+$	-2.46		-5.494	
	6.88	$1.0 \cdot 10^{-3}$	-3.996	
			1.037	0.209
			4.887	0.074
$3^-$	3.70	0.70	1.587	0.013
			4.302	0.328

підсистем, так і вплив зв'язку різних кластерних конфігурацій на спектр ядра  $^{10}\text{Be}$ .

Розрахунки з поляризацією ми будемо позначати літерою " $R$ " тобто "жорсткі" кластери, а результати, отримані з урахуванням кластерної поляризації будемо позначати літерою " $S$ " що означає "м'які" кластери. Таким чином, ми маємо три розрахунки  $1CR$ ,  $2CR$  і  $CCR$  без поляризації і три інші  $1CS$ ,  $2CS$  і  $CCS$  з урахуванням кластерної поляризації. Всі результати, що обговорюються в цьому підрозділі, отримано з нуклон-нуклонним потенціалом Міннесоти.

Рисунок 3.15 представляє спектр зв'язаних станів ядра  $^{10}\text{Be}$ , розрахованих в шести вищезгаданих наближеннях. Рис. 3.15 демонструє, що кластерна поляризація має значний вплив на енергію зв'язаних станів. Врахування двох зв'язаних кластерних конфігурацій без врахування поляризації двокластерних підсистем має приблизно такий самий вплив на спектр ядра  $^{10}\text{Be}$ , як і врахування кластерної поляризації в рамках ізольованої кластерної конфігурації. З отриманих результатів можна зробити висновок, що врахування кластерної поляризації приводить до ефективного притяга-

ння кластерів. В результаті ми спостерігаємо зниження енергій зв'язаних станів в розрахунках, що враховують кластерну поляризацію.

У всіх розрахунках основним станом  $^{10}\text{Be}$  є  $0^+$  стан.  $1^+$  стан є незв'язаним, тоді як  $1^-$  та  $2^-$  стани стають зв'язаними за умови, що враховується кластерна поляризація. Слід зауважити, що незважаючи на те, що  $2^-$  стан знаходиться над найнижчим  $^4\text{He} + ^6\text{He}(0^+)$  порогом розвалу ядра  $^{10}\text{Be}$ , він зв'язаний відносно порогу  $^4\text{He} + ^6\text{He}(2^+)$ . Варто відзначити, що другий  $0^+$  стан і  $1^-$  стан майже вироджені.

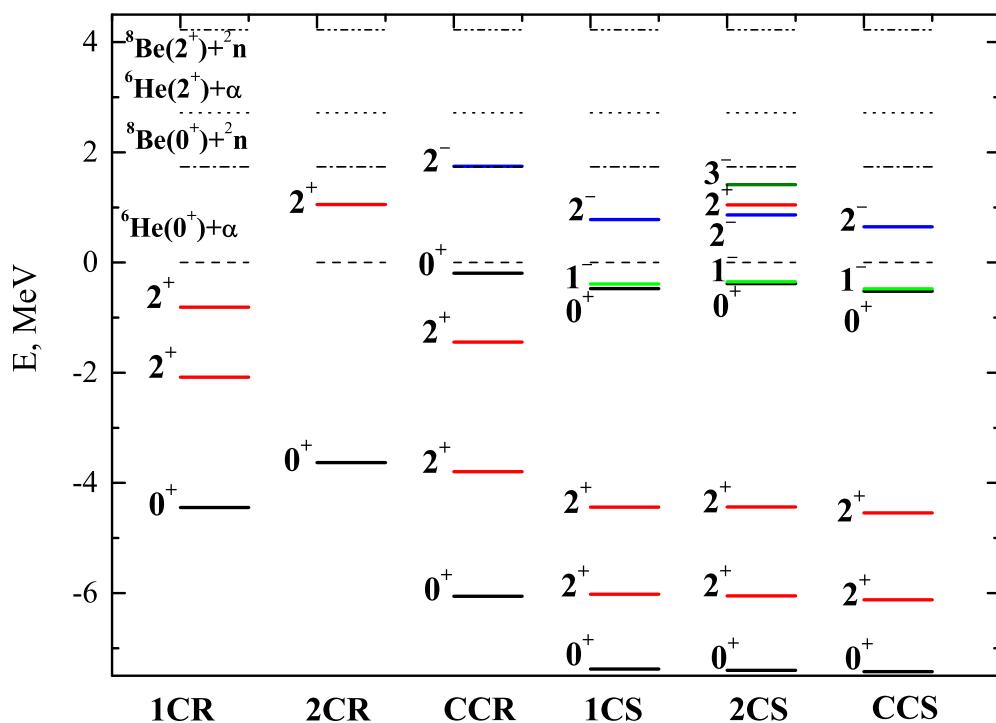


Рис. 3.15 Спектр зв'язаних станів  $^{10}\text{Be}$ , розрахований з нуклон-нуклонним потенціалом Міннесоти.

Спектр резонансних станів ядра  $^{10}\text{Be}$  представлений на рисунках 3.16 і 3.17. Як видно з рис. 3.16 і 3.17, врахування поляризації двокластерних підсистем сильно впливає на енергію та ширину резонансних станів. Розрахунки в наближенні двох зв'язаних кластерних конфігурацій з урахуванням поляризації двокластерних підсистем дають набір близько розташованих резонансних станів  $^{10}\text{Be}$ , причому більшість з них дуже вузькі. Більшість вузьких резонансів з дуже близькими енергіями лежать якраз над енергією

порогу  ${}^2\text{n} + {}^8\text{Be}(2^+)$  розпаду ядра  ${}^{10}\text{Be}$ . В цій області енергії багато каналів відкриті і резонанси мають багатоканальну природу.

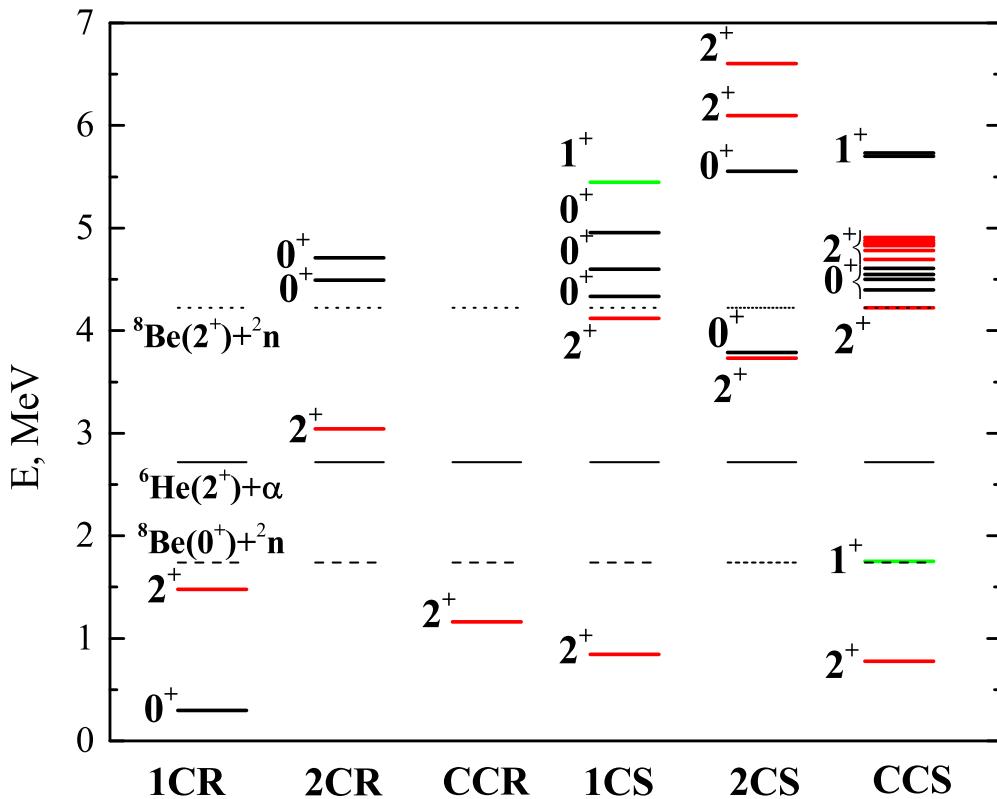


Рис. 3.16 Спектр станів додатної парності ядра  ${}^{10}\text{Be}$ , отриманих з нуклон-нуклонним потенціалом Міннесоти.

На рис. 3.18 дано фази розсіяння для багатоканального пружного розсіяння  ${}^4\text{He} + {}^6\text{He}$  і  ${}^2\text{n} + {}^8\text{Be}$  в стані  $L^\pi = 0^+$  і відповідні коефіцієнти непружності як функція енергії. Поведінка коефіцієнтів непружності і фази розсіяння узгоджуються з припущенням про те, що є чимало вузьких резонансів при низьких енергіях над порогом розвалу  ${}^{12}\text{Be}$  на  ${}^8\text{Be}$  в стані  $2^+$  і дінейtron.

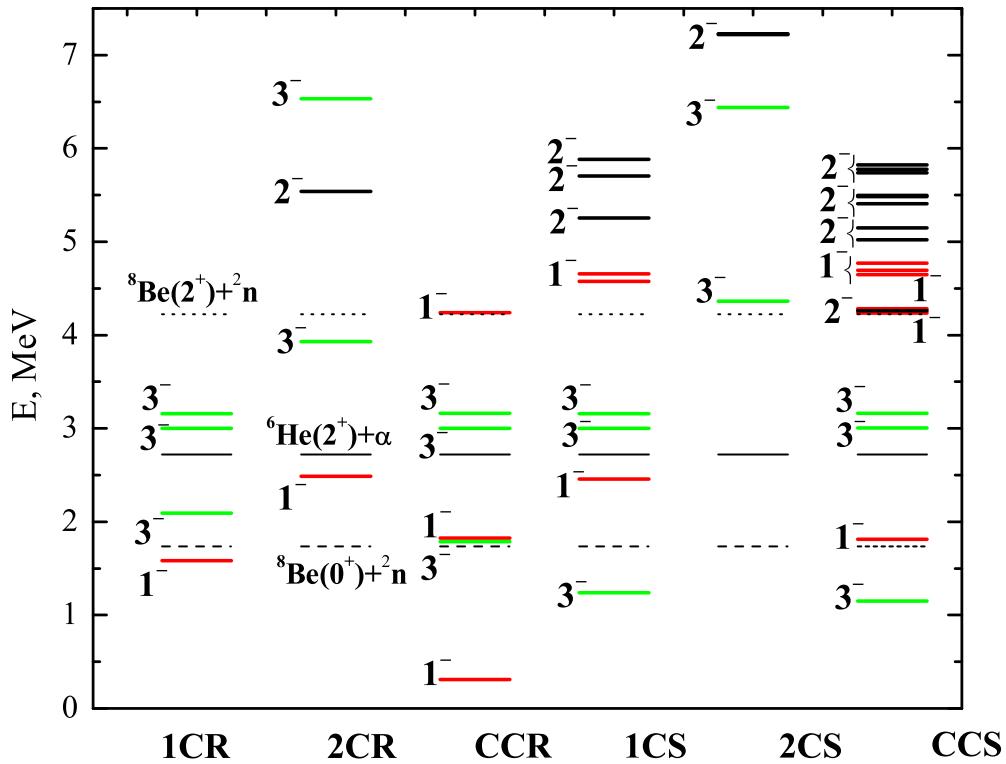


Рис. 3.17 Спектр резонансних станів від'ємної парності ядра  $^{10}\text{Be}$ , отриманих з нуклон-нуклонним потенціалом Міннесоти.

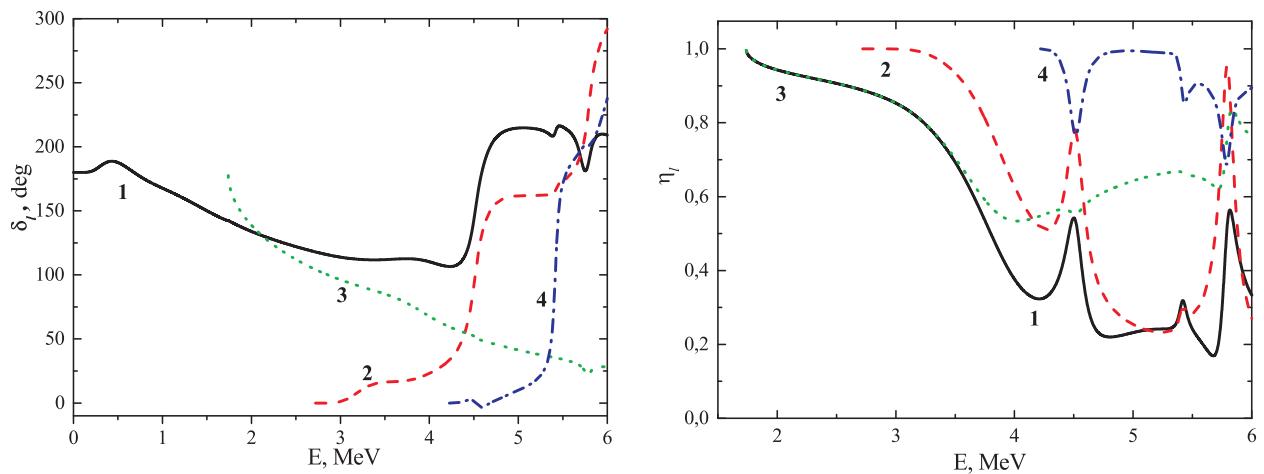


Рис. 3.18 Фазові зсуви пружного багатоканального розсіяння (ліва панель) і коефіцієнти непружності (права панель) в залежності від енергії в 1)  $^4\text{He} + ^6\text{He}(0^+)$ ,  $l = 0$ ; 2)  $^4\text{He} + ^6\text{He}(2^+)$ ,  $l = 2$ ; 3)  $^2\text{n} + ^8\text{Be}(0^+)$ ,  $l = 0$ ; 4)  $^2\text{n} + ^8\text{Be}(2^+)$ ,  $l = 2$  каналах. Вхідним каналом є  $^4\text{He} + ^6\text{He}(0^+)$ ,  $l = 0$ . Всі дані отримані з урахуванням поляризації двокластерних підсистем.

Табл. 25: Повні і парціальні ширини  $0^+$  резонансів в ядрі  $^{10}\text{Be}$  в інтервалі енергій від 4.4 МeВ до 4.6 МeВ над порогом  $^4\text{He} + ^6\text{He}(0^+)$  в наближенні двох зв'язаних кластерних конфігурацій з урахуванням поляризації двокластерних підсистем.

Канал	$E$ , МeВ	4.398	4.501	4.546	4.608
	$\Gamma$ , кeВ	1304.8	238.05	368.9	1812.3
$^6\text{He}(0^+) + ^4\text{He}$	$\Gamma_1$ , keV	1.14	7.33	220.16	407.49
$^6\text{He}(2^+) + ^4\text{He}$	$\Gamma_2$ , keV	634.63	200.83	9.99	466
$^8\text{Be}(0^+) + ^2 n$	$\Gamma_3$ , keV	642.37	12.06	51.24	162.42
$^8\text{Be}(2^+) + ^2 n$	$\Gamma_4$ , keV	26.72	17.83	87.52	776.42

Багатоканальна природа цих резонансів підтверджується парціальними ширинами  $0^+$  резонансів, представлених в Таблиці 25. Як свідчать дані Таблиці 25,  $0^+$  резонанси, розташовані в області енергій від 4.4 МeВ до 4.6 МeВ над найнижчим порогом розпаду  $^{10}\text{Be}$  найбільш імовірно розпадається по різних каналах, навіть якщо вони мають дуже близькі енергії. Цікаво відзначити, що два резонансних стани з енергією  $E=4.501$  МeВ і  $E=4.546$  МeВ мають лише один домінантний канал розпаду, тоді як два інші резонансні стани мають два або три домінуючі канали розпаду.

Зауважимо, що в цьому розділі ми вивчаємо поведінку параметрів розсіяння (фазових зсувів та коефіцієнтів непруженості) як функцію енергії. Розв'язуючи динамічні рівняння для станів неперервного спектра, ми отримуємо  $N_c \times N_c$  матрицю розсіяння  $\|S_{c,\tilde{c}}\|$ , яка описує пружні та непружені процеси в системі з  $N_c$  відкритими каналами. Щоб здобути важливу фізичну інформацію, ми аналізуємо діагональні матричні елементи S-матриці, які ми представляємо наступним чином

$$S_{c,c} = \eta_c \exp \{2i\delta_c\}$$

де  $\delta_c$  – фазовий зсув в каналі  $c$  і  $\eta_c$  – коефіцієнт непруженості в цьому каналі. Щоб розрахувати повні та парціальні ширини, ми використовуємо інше представлення  $S$ -матриці, яке називається представленням власних або незв'язаних каналів. Подробиці такого представлення та формули для розрахунку повної та парціальних ширин можна знайти в роботі [142].

Нарешті, в рамках нашого підходу ми можемо візуалізувати вплив кла-

стерної поляризації, а не лише оцінити його. З цією метою, на рис. 3.19 показано, як середня відстань  $r$  між альфа-частинкою і дінейтроном, що утворюють двокластерну систему  ${}^6\text{He}$ , залежить від відстані  $R$  між  ${}^6\text{He}$  та другою альфа-частинкою. Деталі таких розрахунків можна знайти в роботі [169]. Як ясно з рис. 3.19, середня відстань  $r$  сильно змінюється, коли альфа-частинка наближається до  ${}^6\text{He}$ .

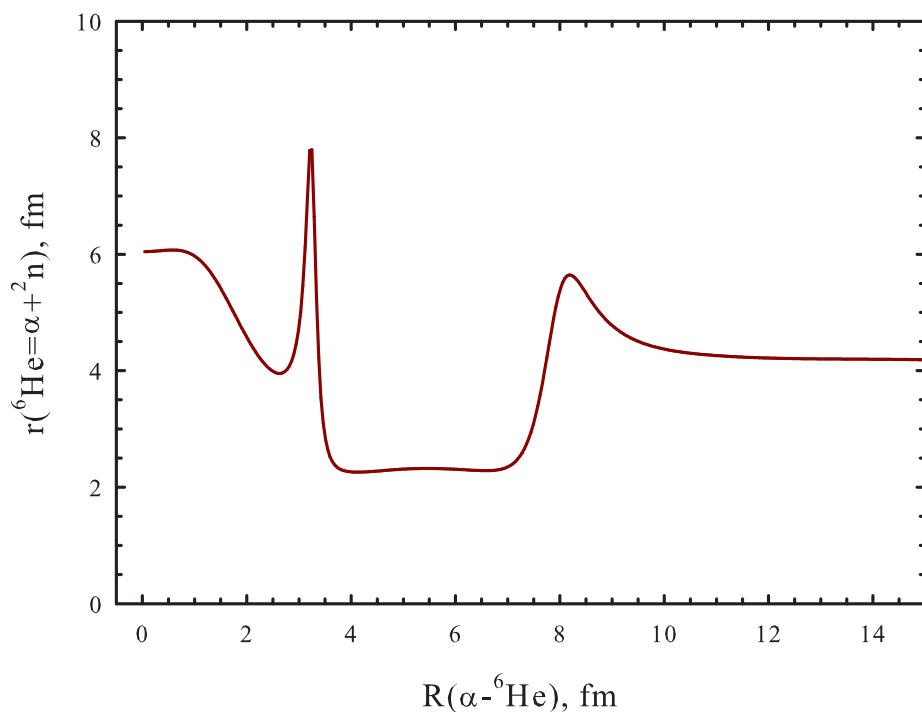


Рис. 3.19 Середня відстань  $\alpha - {}^2 n$  як функція відстані між альфа-частинкою і  ${}^6\text{He}$ . Результати отримані для основного  $0^+$  стану ядра  ${}^{10}\text{Be}$  з ПМ.

На рисунку 3.20 зображена середня відстань  $r$  між двома альфа-частинками, що входять до складу  ${}^8\text{Be}$ , як функція відстані  $R$  між  ${}^8\text{Be}$  і дінейтроном.

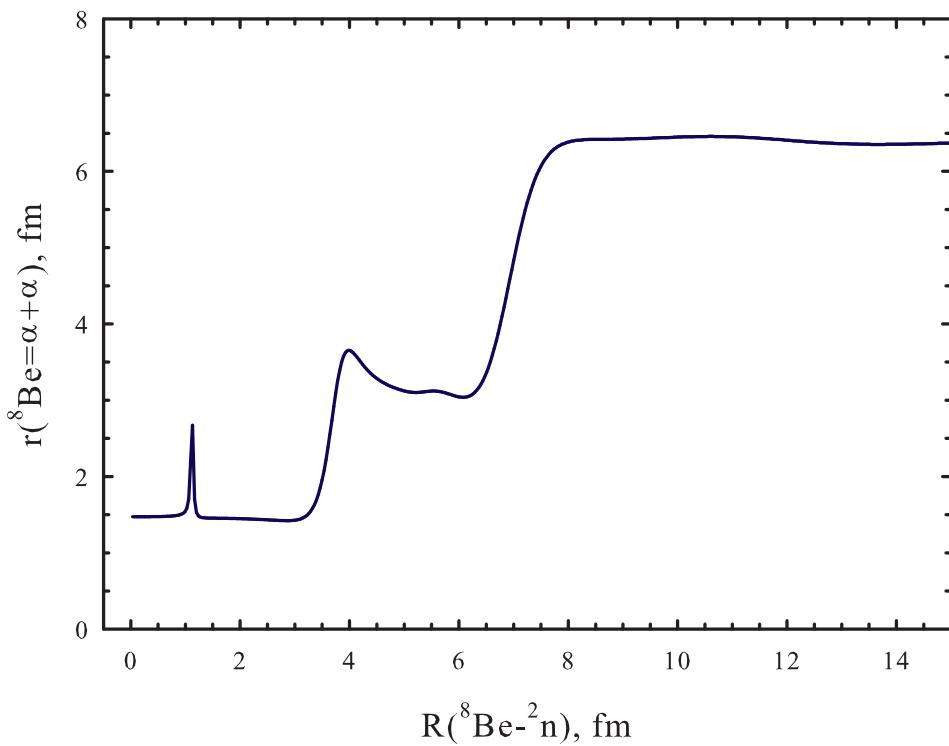


Рис. 3.20 Середня відстань між двома альфа-частинками як функція відстані до налітаючого дінейтрона. Результати отримані для основного  $0^+$  стану ядра  $^{10}\text{Be}$  з ПМ.

**3.4.6 Висновки** Досліджено ядро  $^{10}\text{Be}$  в рамках трикластерної мікроскопічної моделі, яка розглядає ядро як трикластерну систему  $\alpha + \alpha + 2n$ . Використано кілька нуклон-нуклонних потенціалів, щоб встановити, як форма потенціалу впливає на структуру зв'язаних та резонансних станів в  $^{10}\text{Be}$ . Ми дослідили вплив кластерної поляризації  $^6\text{He}$  і  $^8\text{Be}$  на структуру ядра  $^{10}\text{Be}$ . Було продемонстровано, що кластерна поляризація грає важливу роль в формуванні зв'язаних і резонансних станів в  $^{10}\text{Be}$ . Визначено домінуючі канали розпаду для кожного з резонансних станів. Показано, що кластерна поляризація збільшує ефективне притягання між взаємодіючими кластерами, що приводить до суттєвого зменшення енергії зв'язаних та резонансних станів. В багатьох випадках кластерна поляризація зменшує ширину резонансних станів, тобто суттєво збільшує їх час життя.

## ВИСНОВКИ

1. В рамках алгебраїчної версії методу резонуючих груп вивчався вплив принципу Паулі на структуру станів дискретного и неперервного спектра компаунд-систем, що утворюються на проміжній стадії зіткнення легких ядер. Аналіз обумовлених оператором антисиметризації обмінних ефектів на кінетичну енергію відносного руху кластерів проводився на основі дискретного представлення повного базису дозволених станів багаточастинкового гармонічного осцилятора, класифікованих за допомогою індексів  $SU(3)$ -симетрії.

Було показано, що вплив принципу Паулі на процес зіткнення кластерів зводиться до трьох ефектів, які впливають на динаміку кластер-кластерної взаємодії. По-перше, усунення заборонених станів радикальним чином збільшує амплітуду зміни фази розсіяння, що можна було б моделювати потенціалом відштовхування на малих відстанях між кластерами. Інтенсивність цього моделюючого потенціала і його радіус тим більші, чим більша кількість заборонених станів. Радіус такого потенціалу не перевищує половини середньоквадратичного радіусу кластерів. По-друге, поза кором з'являється додатковий ефективний потенціал відштовхування або притягання, здатний суттєво впливати на поведінку фаз розсіяння. Нарешті, в цій же області відбувається зменшення або збільшення інтенсивності відцентрового потенціалу, що приводить до деякого послаблення ефективного потенціала антисиметризації. Відстані між кластерами, на яких вступає в гру принцип Паулі, визначаються розміром тієї області, де власні значення дозволених станів відмінні від одиниці. Ця відстань більш, ніж в два рази, перевищує середньоквадратичний радіус кластерів і помітно перевищує радіус сил взаємодії між кластерами, що породжуються ядерним нуклон-нуклонним потенціалом.

2. Встановлено, що характер взаємодії кластерів, обумовленої впливом принципу Паулі, визначається поведінкою власних значень оператор-

ра антисиметризації. Вони не можуть набувати від'ємного значення, оскільки пропорційні ймовірності реалізації відповідного дозволеного базисного стану і прямають до одиниці із збільшенням відстані між кластерами. В тому випадку, коли власні значення оператора антисиметризації прямають до одиниці знизу, ефективна взаємодія виявляється взаємодією відштовхування. Якщо ж власні значення прямають до одиниці згори, то можна говорити про існування обумовленого принципом Паулі притягання.

Ефективна взаємодія, обумовлена зміною кінетичної енергії відносного руху під дією оператора антисиметризації, виникає лише між такими об'єктами, внутрішня енергія яких може змінюватись в процесі їх зближення. Мова йде про взаємодію ядер, що складаються з нуклонів, або про взаємодію нуклонів, якщо враховується їх кваркова структура. Кінетична енергія відносного руху двох кластерів не є позитивно визначеним оператором, на відміну від повної кінетичної енергії, і тому серед її власних значень можуть бути від'ємні, що відповідає утворенню зв'язаного стану бінарної кластерної системи. Енергія такого стану відраховується від порогу розвалу компаунд-ядра на кластери, з яких воно складається.

3. Самий простий приклад притягання спостерігається в станах системи  ${}^4\text{He}+n$  з повним орбіタルним моментом, що дорівнює одиниці. Це притягання приводить до додатної фази розсіяння нейтрона на  ${}^4\text{He}$  навіть за відсутності потенціалу взаємодії між нейtronом і альфа-частинкою, але як результат послідовного врахування принципу Паулі на оператор кінетичної енергії їх відносного руху. Вперше ж вищезгадане явище було виявлено автором у двох бінарних систем  ${}^6\text{He}+{}^6\text{He}$  і  ${}^4\text{He}+{}^8\text{He}$ . Обидві системи містять кластери з відкритою  $p$ -оболонкою і є двома різними кластерними конфігураціями ядра  ${}^{12}\text{Be}$ . При одночасному врахуванні обох кластерних конфігурацій компаунд-ядра спостерігається суттєве підсилення обмінних ефектів. В результаті зобов'язане

обмінним ефектам притягання виявляється досить сильним, щоб навіть без участі нуклон-нуклонної взаємодії між нуклонами різних кластерів забезпечити появу і зв'язаного стану, і резонансу компаунд-ядра  $^{12}\text{Be}$ .

4. Показано, що власні значення оператора антисиметризації, що перевищують одиницю і до того ж є максимальними для ядер  $p$ -оболонки, з'являються у ядер кінця  $p$ -оболонки, коли валентний нейtron замикає нейtronний магічний остов. В таких системах ефективне притягання кластерів на малих відстанях між ними проявляється найбільш яскраво. Прикладом такої системи є кластерна конфігурація  $^{11}\text{Be}+n$  ядра  $^{12}\text{Be}$ . Ефективне притягання нейтрона і  $^{11}\text{Be}$ , породжуване модифікованим оператором кінетичної енергії, створює зв'язаний стан  $^{12}\text{Be}$  з енергією  $E = -6.3$  МeВ нижче порогу розвалу  $^{12}\text{Be}$  на  $^{11}\text{Be}$  і нейtron. Це дозволяє припустити, що зв'язаний стан ядра  $^{12}\text{Be}$  зобов'язаний своїм походженням впливу обмінних ефектів на оператор кінетичної енергії відносного руху нейтрона і  $^{11}\text{Be}$ .
5. Продемонстровано, що фази, які породжуються лише модифікованим оператором кінетичної енергії, поводять себе у відповідності з узагальненою теоремою Левінсона, і мають той же порядок величини, що і фази, знайдені з урахуванням потенціальної енергії. Справедливість узагальненої теореми Левінсона в представленні дискретного базису забезпечують такі матричні оператори кінетичної і потенціальної енергії, які не містять матричних елементів, що пов'язують дозволені стани з кожним із заборонених, а також різні заборонені стани.
6. Запропоновано отримувати оцінки інтенсивності і радіусу ефективного відштовхування кластерів, обумовленого впливом обмінних ефектів на оператор кінетичної енергії, за допомогою аналізу фазових портретів зіткнення ядер в представленні Фока-Баргманна. Висота відштовхувального кора приблизно дорівнює енергії, при якій з'являю-

ться інфінітні траєкторії, що відповідають проникненню кластерів в класично недосяжну область. Максимальними радіус і інтенсивність вдштовхування будуть для зіткнення тотожних ядер. Остання на порядок більша за інтенсивність кулонівської взаємодії, і тому вплив антисиметризації на фазові портрети, і на хвильові функції стає домінуючим як тільки енергія відносного руху кластерів перевищить висоту кулонівського бар'єру.

7. Досліджено траєкторії двокластерних систем у фазовому просторі у рамках мікроскопічної моделі. Було використано перетворення Баргманна-Сігала для відображення хвильової функції двокластерної системи із координатного простору у простір Фока-Баргманна. Кожне ядро було представлено домінантним його поділом на два кластери. Вхідні параметри моделі та нуклон-нуклонного потенціалу були вибрані так, щоб оптимізувати опис внутрішньої структури кластерів та відтворити положення основного стану ядра по відношенню до двокластерного порогу. Розглянуто широкий інтервал енергій збудження компаунд-системи, але особливу уваги приділено зв'язаним та резонансним станам. Показано, що зв'язані стані та вузькі резонансні стани реалізують себе у дуже компактній ділянці фазового простору. Фазові портрети збуджених станів з великою енергією збудження мають максимум вздовж лінії, яка співпадає з класичною траєкторією.
8. На прикладі системи  ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$  показано, що в просторі Фока-Баргманна власні функції вироджених  $SU(3)$ -представлень визначаються в результаті розв'язку інтегрального рівняння з виродженим ядром. Алгоритм розв'язку цього рівняння зводиться до стандартних алгебраїчних операцій. Проте слід врахувати, що власні значення ядра інтегрального рівняння мають скінченну граничну точку. В цій точці функції ядра можна визначити лише з точністю до унітарного перетворення. Між тим, при всіх скінченних значеннях числа осциляторних квантів власні функції ядра визначаються однозначно. Власні значення ядра

нормування двокластерних систем прагнуть до одиниці із зростанням числа квантів і їх поправки експоненційно малі. Проте врахування цих малих поправок дозволяє однозначно визначити асимптотичні функції ядра нормування в границі нескінченно великого числа квантів.

9. Досліджено структуру дозволених базисних функцій бінарної кластерної системи в наближенні кількох бінарних конфігурацій. Показано, що імовірність присутності кластерної конфігурації в найнижчій базисній функції бінарної кластерної системи пропорційна власному значенню ізольованої конфігурації.
10. Виявлено, що тетранейtron може існувати у вигляді компаунд-системи, де співіснують кластерні конфігурації  $^3n+n$  і  $^2n+^2n$ . Вплив принципу Паулі на кінетичну енергію відносного руху нейтронних кластерів приводить до їх притягання. Інтенсивність такого притягання достатня, щоб забезпечити існування резонансу малої енергії в тетранейtronі за умови, що осциляторна довжина достатньо велика. Збільшення осциляторної довжини призводить, в свою чергу, до пригнічення кластер-кластерного потенціалу. Тому результати не залежать від вибору нуклон-нуклонного потенціалу.
11. На основі дискретного представлення і повного базису дозволених принципом Паулі станів запропоновано новий підхід до проблеми багатоканального неперервного спектра трикластерних систем. Цей підхід дозволяє описати властивості трикластерних систем як у внутрішній області, де вплив принципу Паулі є особливо важливим, так і в зовнішній, де формуються елементи матриці розсіяння. Асимптотичні базисні функції, до яких ми звертаємося, залишаються дозволеними принципом Паулі на будь-яких відстанях між кластерами і можуть бути представлені в простому аналітичному вигляді. Що ж стосується алгебраїчних рівнянь для коефіцієнтів розкладу хвильової функції по базису дозволених станів, то вони в асимптотичній границі переходят в

диференційні рівняння, розв'язок яких відтворює розпад трикластерних систем по різних бінарних каналах.

12. Вперше здійснено детальний аналіз структури власних функцій і поведінки власних значень трикластерного ядра нормування. Продемонстровано, що власні значення трикластерної системи прагнуть до власних значень двокластерних підсистем із збільшенням числа осциляторних квантів. Запропоновано шлях розв'язку проблеми  $SU(3)$  виродження дозволених принципом Паули станів за допомогою власних значень бінарних підсистем. Дозволені принципом Паулі стани трикластерних систем можна об'єднати в гілки і сімейства. Власні значення, що належать до даної гілки, прагнуть до одного і того ж власного значення двокластерної підсистеми. Кожна сімейство дозволених принципом Паулі станів асимптотично відповідає певному бінарному порогу розпаду трикластерної системи на двокластерну підсистему, що знаходиться в основному або збудженному стані гармонічного осцилятора, і третій кластер. Така асимптотична поведінка вказує на можливі канали розпаду трикластерного ядра і дозволяє визначити найбільш важливі канали розпаду ядра, що розглядається.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Yu .A. Lashko, G. F. Filippov, K. Kato, S. V. Korennov, Scissors mode in the SU(3) basis, Progr. Theor. Phys. Suppl. 146 (2002) 585–586.
2. Г. Ф. Филиппов, Ю. А. Лашко, С. В. Кореннов и К. Като, О распаде  $^{12}\text{Be}$  по каналам  $^8\text{He}+\alpha$  и  $^6\text{He}+^6\text{He}$ , Известия РАН, серия физическая 67 (2003) 1539–1546.
3. S. V. Korennov, G. F. Filippov, K. Kato, Yu. A. Lashko, Microscopic Hamiltonian of  $^9\text{Li}$  and  $^{10}\text{Be}$  and the SU(3) basis, Progr. Theor. Phys. Suppl. 146 (2002) 579-580.
4. G. F. Filippov, K. Kato, S. V. Korennov, Yu. A. Lashko, Spectrum of  $^{10}\text{Be}$  in the approximation of the leading irreducible representation of the SU(3) group, Phys. Atom. Nucl. 66 (2003) 632–643.
5. G. F. Filippov, Yu. Lashko, S. Korennov, and K. Kato, Norm kernels and the closeness relation for Pauli-allowed basis functions, Few-body Syst. 33 (2003) 173–198.
6. G. F. Filippov, Yu. A. Lashko, S. V. Korennov, K. Kato,  $^6\text{He}+^6\text{He}$  Clustering of  $^{12}\text{Be}$  in a Microscopic Algebraic Approach, Few-Body Syst. 34 (2004) 209–235.
7. G. F. Filippov, Yu. A. Lashko, S. V. Korennov, K. Kato, Integral Equations in the Fock-Bargmann Space and the Generator-Coordinate Method, Phys. Atom. Nucl. 67 (2004) 1715–1720.
8. Gennady Filippov and Yuliya Lashko, Peculiar properties of the cluster-cluster interaction induced by the Pauli exclusion principle, Phys. Rev. C 70 (2004) 064001.
9. G. Filippov, Y. Lashko, Structure of Light Neutron-Rich Nuclei and Nuclear Reactions Involving These Nuclei, Phys. Part. Nucl. 36 (6) (2005) 714–739.

10. Yu. A. Lashko and G. F. Filippov, Multichannel Neutron Scattering on  $^{11}\text{Be}$  Nucleus, *Phys. Atom. Nucl.* 70 (2007) 1017–1035.
11. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Multi-channel nuclear reactions involving light neutron-rich nuclei: microscopic approach, *Phys. Atom. Nucl.* 70 (2007) 1440–1444.
12. G. F. Filippov and Yu. A. Lashko, Coexistence of different cluster configurations in light neutron-rich nuclei, *Phys. Atom. Nucl.* 70 (2007) 1429–1434.
13. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Cluster structure of a low-energy resonance in tetraneutron, *Phys. Atom. Nucl.* 71 (2008) 209–214.
14. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Decay of  $^5\text{H}$  in a microscopic three-cluster model, *Few-body Systems* 44 (2008) 215–218.
15. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, How the Pauli principle governs the decay of three-cluster systems, *Nucl. Phys. A* 806 (2008) 124–145.
16. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, The role of the Pauli principle in three-cluster systems composed of identical clusters, *Nucl. Phys. A* 826 (2009) 24–48.
17. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Unusual manifestations of the Pauli principle in scattering of atomic nuclei, *УФЖ* 58 (2013) 534–543.
18. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Continuous Spectrum of Three-Cluster Systems, *Phys. Atom. Nucl.* 75 (2012) 420–429.
19. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, L. Canton, Scattering of  $^6\text{He}$  on  $\alpha$ -particle: microscopic guidance for orthogonalizing pseudopotentials, *Ukr. J. Phys.* 60 (2015) 406–415.
20. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, V. S. Vasilevsky, M. D. Soloha-Krymchak, Phase Portraits of Quantum Systems, *Few-body Systems* 55 (2014) 817–820.

21. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, V. S. Vasilevsky, Dynamics of two-cluster systems in phase space, Nucl. Phys. A 941 (2015) 121–144.
22. Y. A. Lashko, G. F. Filippov, V. S. Vasilevsky, Microscopic three-cluster model of  $^{10}\text{Be}$ , Nucl. Phys. A 958 (2017) 78 – 100.
23. S. V. Korennov, G. F. Filippov, K. Kato, Yu. A. Lashko, M1 transition in  $^9\text{Li}$  and  $^{10}\text{Be}$  and the SU(3) basis, Proceedings of International Symposium on Clustering Aspects of Quantum Many-Body Systems, Kyoto, November 12-14, 2001. World Scientific (2002) 241-244.
24. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, K. Kato, S. V. Korennov, Probing the spectrum of  $^{10}\text{Be}$  in the approximation of the SU(3) leading representation, Proc. of International Symposium on Clustering Aspects of Quantum Many-Body Systems, Kyoto, November 12-14, 2001. World Scientific (2002) 237-240.
25. G. F. Filippov, Yu. A. Lashko, Effective interaction generated by the Pauli exclusion principle in collisions of the light neutron-rich nuclei, Proc. of the International Symposium on Exotic Nuclei, Peterhof, July 5-12, 2004. World Scientific (2005) 142-147.
26. L. Canton, Yu. A. Lashko, K. Amos, P. R. Fraser, S. Karatagliidis, J. P. Svenne, D. van der Knijff, Alpha- $^6\text{He}$  scattering and the quest for microscopic guidance for orthogonalizing pseudopotentials, Proc. of the 14th International Conference on Nuclear Reaction Mechanisms, Varenna, June 15 - 19, 2015, CERN, Geneva (2015) 181-188.
27. G. F. Filippov, K. Kato, S. V. Korennov, Yu .A. Lashko, Scissors mode in the SU(3) basis, Abstracts of Yukawa International Seminar "Physics of Unstable Nuclei Kyoto, November 5-10, 2001, p. 112.
28. G. F. Filippov, K. Kato, S. V. Korennov, Yu. A. Lashko, Microscopic Hamiltonian of  $^9\text{Li}$  and  $^{10}\text{Be}$  and the SU(3) basis, Abstracts of Yukawa

- International Seminar "Physics of Unstable Nuclei Kyoto, November 5-10, 2001, p. 110.
29. G. F. Filippov, K. Kato, S. V. Korennov, Yu .A. Lashko, Probing the spectrum of  $^{10}\text{Be}$  in the approximation of the SU(3) leading representation, Abstracts of International Symposium on Clustering Aspects of Quantum Many-Body Systems, Kyoto, November 12-14, 2001, p. 49.
  30. G. F. Filippov, K. Kato, S. V. Korennov, Yu .A. Lashko, M1 transition in  $^9\text{Li}$  and  $^{10}\text{Be}$  and the SU(3) basis, Abstracts of International Symposium on Clustering Aspects of Quantum Many-Body Systems, Kyoto, November 12-14, 2001, p. 48.
  31. S. V. Korennov, Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, K. Kato, Practical calculus for the Fock-Bargmann space, Proceedings of International Symposium on new trends of physics, Sapporo, January 20-24, 2003. Hokkaido University (2003) 135-139.
  32. Yuliya Lashko and Gennady Filippov, Multi-channel nuclear reactions involving light neutron-rich nuclei: microscopic approach, Book of abstracts of the International conference on nuclear structure and related topics, Dubna, Russia, June 13 - 17, 2006, p. 50.
  33. G. F. Filippov, Yu. A. Lashko, Co-existence of different cluster configurations in light neutron-rich nuclei, Book of abstracts of the International conference on nuclear structure and related topics, Dubna, Russia, June 13 - 17, 2006, p. 33.
  34. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, How the Pauli principle governs the decay of three-cluster systems, Book of abstracts of the 2nd International Conference on Current Problems in Nuclear Physics and Atomic Energy, June 9 - 15, 2008, Kyiv, Ukraine, p. 130.
  35. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Can the democratic decay channel be realized in three-cluster systems?, Book of abstracts of the Fifth International

- Conference on Exotic Nuclei and Atomic Masses, September 7 - 13, 2008, Ryn, Poland, p. 81.
36. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Three-cluster structure of the  ${}^8\text{Li}$  nucleus and the Pauli principl), Book of Abstracts of the 4th International Conference on Current Problems in Nuclear Physics and Atomic Energy, September 3-7, 2012, Kyiv, Ukraine, p. 73.
  37. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Unusual manifestations of the Pauli principle in scattering of atomic nuclei, Program and Proceedings of the International Conference "Problems of theoretical physics" dedicated to Alexander Davydov 100th birthday, October 8 - 11, 2012, Kyiv, Ukraine, p. 46.
  38. Вильдермут, К., Тан, Я., *Единая теория ядра*, Москва: Мир, 1980.
  39. Kukulin, V. I. and Krasnopol'sky, V. M., Stochastic variational method for few-body systems, J. Phys. G **3**, 795 (1977).
  40. Varga, K., Suzuki, Y., and Lovas, R. G., Microscopic multicluster description of neutron-halo nuclei with a stochastic variational method, Nucl. Phys. A **371**, 447 (1994).
  41. Baye, D. and Descouvemont, P., Electromagnetic-transitions and radiative-capture in the generator-coordinate method, Nucl. Phys. A **407**, 77 (1983).
  42. Ono, A. and Horiuchi, H., Flow of nucleons and fragments in Ar-40+Al-27 collisions studied with antisymmetrized molecular-dynamics, Phys. Rev. C **51**, 299 (1995).
  43. Базь, А. И., Об эффекте сильного отталкивания составных частиц (ядра, атомы) на малых расстояниях, Письма в ЖЭТФ, **14**, 607 (1971).
  44. Danilin, B. V. *et al.*, Sov. J. Nucl. Phys. **49**, p. 351, (1989); **49**, 359 (1989).

45. S. Saito, Interaction between Clusters and Pauli Principle, *Prog. Theor. Phys.* **41** (3) (1969) 705–722.
46. Кукулин, В. И., Неудачин, В. Г., Смирнов, Ю. Ф., *ЭЧАЯ*, **10**, 1236 (1979).
47. V. Bargmann, Irreducible unitary representations of the Lorentz group, *Ann. Math.* 48 (1947) 568–640.
48. Horiuchi, H., *Suppl. Prog. Theor. Phys.* **62**, 90 (1977).
49. Horiuchi, H. and Suzuki, Y., *Prog. Theor. Phys.* **49**, 1974 (1973).
50. Harvey, M., in *Advances in Nuclear Physics*, **1**, 67, N. Y.: Plenum Press, 1973.
51. Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., *Квантовая механика*, Москва: Наука, 1989.
52. Петровский, И. Г., *Лекции по теории интегральных уравнений*, Москва: МГУ, 1984.
53. Elliott, J. P., *Proc. R. Soc. London, A* **245**, 128 (1958); **245**, 562 (1958).
54. Корн, Г. А и Корн, Т. М., *Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы*, Москва: Наука, 1968.
55. Блохинцев, Л. Д., Борбей, И., Долинский, Э. Д., *ЭЧАЯ* **8**, 1189 (1977).
56. Yamani, H. A. and Fishman, L., *J. Math. Phys.* **16**, 410 (1975).
57. Филиппов, Г. Ф. *et al.*, *ЯФ* **60**, 635 (1997).
58. Baye, D., *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2738 (1987).
59. G. F. Filippov, On taking into account correct asymptotic behavior in oscillator-basis expansions, *Sov. J. Nucl. Phys.* **33** (1981) 488–489.

60. Filippov, G. F., Okhrimenko, I. P., Sov. J. Nucl. Phys. **32**, 932 (1980).
61. Moshinsky, M. and Smirnov, Yu. F., *The harmonic oscillator in modern physics*, in *Contemporary concepts in physics*, **9**, 1996, Harwood academic publishers.
62. Abramovitz, M. and Stegun, I. A., *Handbook of mathematical functions*, Washington: U.S. GPO, DC, 1964.
63. Ajzenberg-Selove, F., Energy levels of light nuclei  $A = 5\text{--}10$ , Nucl. Phys. A 490 (1988) 1–225.
64. B. Hoop, H. H. Barschall, and H. H. Barschall, Jr., Nucl. Phys. 83, 65 (1966).
65. Tanihata, I. *et al.*, Phys. Lett. B **206**, 592 (1988).
66. Freer, M. *et al.*, Phys. Rev. C **63**, 034301 (2001).
67. K. Takahashi, Wigner and Husimi Functions in Quantum Mechanics, J. Phys. Soc. Jpn. 55 (1986) 762.
68. C. K. Zachos, D. B. Fairlie, and T. L. Curtright, Quantum Mechanics in Phase Space, World Scientific, Singapore, 2005.
69. K. B. Møller, Comment on phase-space representation of quantum state vectors, J. Math. Phys. 40 (1999) 2531–2535.
70. G. Torres-Vega, J. H. Frederick, A quantum mechanical representation in phase space, J. Chem. Phys. 98 (1993) 3103–3120.
71. K. B. Møller, T. G. Jørgensen, G. Torres-Vega, On coherent-state representations of quantum mechanics: Wave mechanics in phase space, J. Chem. Phys. 106 (1997) 7228–7240.
72. G. Torres-Vega, J. H. Frederick, Quantum mechanics in phase space: New approaches to the correspondence principle, J. Chem. Phys. 93 (1990) 8862–8874.

73. V. Fock, Verallgemeinerung und Lösung der Diracschen statistischen Gleichung, *Zeit. Phys.* **49** (1928) 339–357.
74. A. Perelomov, Generalized coherent states and their applications, Berlin, Springer, 1986.
75. Y. Kanada-En'yo, M. Kimura, H. Horiuchi, Antisymmetrized Molecular Dynamics: a new insight into the structure of nuclei, *C. R. Physique* **4** (2003) 497–520.
76. Y. Kanada-En'yo, M. Kimura, A. Ono, Antisymmetrized molecular dynamics and its applications to cluster phenomena, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2012** (1) (2012) 010000.
77. H. Feldmeier, J. Schnack, Molecular dynamics for fermions, *Rev. Mod. Phys.* **72** (2000) 655–688.
78. T. Neff, H. Feldmeier, Cluster structures within Fermionic Molecular Dynamics, *Nucl. Phys. A* **738** (2004) 357–361.
79. J. A. Wheeler, Molecular Viewpoints in Nuclear Structure, *Phys. Rev.* **52** (1937) 1083–1106.
80. Y. C. Tang, M. Lemere, D. R. Thompsom, Resonating-group method for nuclear many-body problems, *Phys. Rep.* **47** (1978) 167–223.
81. T. Fliessbach, H. Walliser, The structure of the resonating group equation, *Nucl. Phys. A* **377** (1982) 84–104.
82. G. F. Filippov, I. P. Okhrimenko, Use of an oscillator basis for solving continuum problems, *Sov. J. Nucl. Phys.* **32** (1981) 480–484.
83. G. F. Filippov, V. S. Vasilevsky, L. L. Chopovsky, Solution of problems in the microscopic theory of the nucleus using the technique of generalized coherent states, *Sov. J. Part. and Nucl.* **16** (1985) 153–177.

84. G. F. Grinyer, D. Bazin, A. Gade, J. A. Tostevin, P. Adrich, M. D. Bowen, B. A. Brown, C. M. Campbell, J. M. Cook, T. Glasmacher, S. McDaniel, P. Navrátil, A. Obertelli, S. Quaglioni, K. Siwek, J. R. Terry, D. Weisshaar, R. B. Wiringa, Knockout Reactions from p-Shell Nuclei: Tests of Ab Initio Structure Models, *Phys. Rev. Lett.* **106** (16) (2011) 162502.
85. R. Roth, S. Binder, K. Vobig, A. Calci, J. Langhammer, P. Navrátil, Medium-Mass Nuclei with Normal-Ordered Chiral NN+3N Interactions, *Phys. Rev. Lett.* **109** (5) (2012) 052501.
86. G. Hupin, S. Quaglioni, P. Navrátil, Unified description of  ${}^6\text{Li}$  structure and deuterium- ${}^4\text{He}$  dynamics with chiral two- and three-nucleon forces, *Phys. Rev. Lett.* **114** (2015) 212502.
87. D. R. Thompson, M. LeMere, Y. C. Tang, Systematic investigation of scattering problems with the resonating-group method, *Nucl. Phys.* **A286** (1) (1977) 53–66.
88. I. Reichstein, Y. C. Tang, Study of  $\text{N} + \alpha$  system with the resonating-group method, *Nucl. Phys. A* **158** (1970) 529–545.
89. D. R. Tilley, C. M. Cheves, J. L. Godwin, G. M. Hale, H. M. Hofmann, J. H. Kelley, C. G. Sheu, H. R. Weller, Energy levels of light nuclei  $A=5, 6, 7$ , *Nucl. Phys. A* **708** (2002) 3–163.
90. D. R. Tilley, J. H. Kelley, J. L. Godwin, D. J. Millener, J. E. Purcell, C. G. Sheu, H. R. Weller, Energy levels of light nuclei  $A=8, 9, 10$ , *Nucl. Phys. A* **745** (2004) 155–362.
91. S. Saito, Theory of Resonating Group Method and Generator Coordinate Method, and Orthogonality Condition Model, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **62** (1977) 11–89.
92. Fujiwara, Y., Horiuchi, H.: *Prog. Theor. Phys.* **63**, 895 (1980); **65**, 1632, 1901 (1981)

93. Horiuchi, H.: Eur. Phys. J. **A13**, 39 (2002)
94. Freer, M., et al.: Phys. Rev. Lett. **82**, 1383 (1999)
95. Saito, A., et al.: Progr. Theor. Phys. Suppl. **146**, 615 (2002)
96. Kanada-En'yo, Y., Progr. Theor. Phys. Suppl. **146**, 190 (2002)
97. Kanada-En'yo, Y., Horiuchi, H.: Phys. Rev. **C68**, 014319 (2003)
98. Ito, M., Sakuragi, Y.: Phys. Rev. **C62**, 064310 (2000)
99. Descouvemont, P., Baye, D.: Phys. Lett. **B505**, 71 (2001)
100. Brink, D. M.: In: Proceeding of International School in Physics "Enrico Fermi Course **36**", p.247 (1966)
101. Hecht, K. T., et al.: Nucl. Phys. **A356**, 146 (1981)
102. Kramer, P., Moshinsky, M., Seligman, T. H.: In: Group Theory and Its Applications, Vol. 3, (Loebl, E. M., ed.). New York: Academic Press 1975
103. Suzuki, Y., Reske, E. J., Hecht, K. T.: Nucl. Phys. **A381**, 77 (1982)
104. Draayer, J. P., Akiyama, Y.: J. Math. Phys. **14**, 1904 (1973); Comput. Phys. Comm. **5**, 405 (1973)
105. Hecht, K. T., Suzuki, Y.: J. Math. Phys. **24**, 785 (1983)
106. Filippov, G. F., et. al: J. Math. Phys. **36**, 4571 (1995)
107. Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M.: Table of Integrals, Series, and Products. New York: Academic 1980
108. Filippov, G. F.: Riv. Nuovo Cim. **9**, 1 (1989)
109. Varshalovich, D. A., Moskalev, A. N., Khersonkii, V. K.: Quantum Theory of Angular Momentum. World Scientific 1988.
110. Bethe, H. A., Morrison, P., Elementary Nuclear Theory. New York: Wiley 1956

111. Baz', A., Sov. Phys. – JETP **6**, 709 (1958); **9**, 1256 (1959)
112. F. Ajzenberg-Selove, Nucl. Phys. A **506**, 4 (1990).
113. Ю. И. Нечаев and Ю. Ф. Смирнов, ЯФ **35**, 1385 (1982).
114. S. D. Pain *et al.*, Phys. Rev. Lett. **96**, 032502 (2006).
115. V. A. Ageev *et al.*, Ukr. Phys. J., **31**, 1771 (1986).
116. F. M. Marqués *et al.*, Phys. Rev. C **65**, 044006 (2002).
117. V. Bouchat *et al.*, Proc. to Int. Symp. Exotic Nuclei, Peterhof, July 5-12, 2004 (World Scientific, 2005), p. 29.
118. E. Rich *et al.*, Proc. to Int. Symp. Exotic Nuclei, Peterhof, July 5-12, 2004 (World Scientific, 2005), p. 36.
119. D. V. Aleksandrov *et al.*, JETP Lett., **81**, 43 (2005).
120. S. C. Pieper, Phys. Rev. Lett. **90**, 252501 (2003).
121. N. K. Timofeyuk, J. Phys. G **29**, L9 (2003).
122. R. Lazauskas, J. Carbonell, Phys. Rev. C **72**, 034003 (2005).
123. I. F. Gutich, A. V. Nesterov and I. P. Okhrimenko, Yad. Fiz. **50**, 19 (1989).
124. F. M. Marqués, Eur. Phys. J. A **25**, s01, 311 (2005).
125. G. Ripka, Thes. Doct. Sci. Fac. Sci. Orsay, Rapp. CEA № 3404 (Univ. Paris, 1968).
126. L. Canton, J.P. Svenne, K. Amos, S. Karataglidis, Phys. Rev. Lett. **96**, 072502 (2006).
127. K. Amos, L. Canton, P.R. Fraser, S. Karataglidis, J.P. Svenne, D. van der Kniff, Nucl. Phys. A **912**, 7 (2013).
128. M. Freer et al., Phys. Rev. Lett. **96**, 042501 (2006).

129. M. Ito, K. Kato, and K. Ikeda, Phys. Lett. B **588**, 43 (2004).
130. D. Suzuki et al., Phys. Rev. C **87**, 054301 (2013).
131. K. Arai, Phys. Rev. C **69**, 014309 (2004).
132. P. Descouvemont, Nucl. Phys. A **699**, 463 (2002).
133. A. A. Korsheninnikov, et al., Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 092501.
134. M. S. Golovkov, et al., Phys. Lett. B **566** (2003) 70.
135. S. V. Stepansov, et al., Nucl. Phys. A **738** (2004) 436.
136. L. V. Chulkov, Nucl. Phys. A **734** (2004) 357.
137. Yu. B. Gurov, et al., Eur. Phys. J. A **24** (2005) 231.
138. N. B. Shul'gina, B. V. Danilin, L. V. Grigorenko, M. V. Zhukov, J. M. Bang, Phys. Rev. C **62** (2000) 014312.
139. P. Descouvemont, A. Kharbach, Phys. Rev. C **63** (2001) 027001.
140. K. Arai, Phys. Rev. C **68** (2003) 034303.
141. R. de Diego, E. Garrido, D. V. Fedorov, A. S. Jensen, Nucl. Phys. A **786** (2007) 71.
142. J. Broeckhove, F. Arickx, P. Hellinckx, V. S. Vasilevsky and A. V. Nesterov, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **34** (2007) 1955.
143. L. V. Grigorenko, Eur. Phys. J. A **20** (2004) 419.
144. D. R. Tilley, H. R. Weller, G. M. Hale, Nucl. Phys. A **541** (1992) 1.
145. D. V. Aleksandrov, et al., JETP Lett. **62** (1995) 18.
146. V. I. Kukulin, V. G. Neudatchin, Yu. F. Smirnov, Fiz. Elem. Chastits At. Yadra **10** (1979) 1236.

147. H. Matsumura, M. Orabi, Y. Suzuki, Y. Fujiwara, Nucl. Phys. A 776 (2006) 1.
148. H. Horiuchi, Prog. Theor. Phys. 51 (1974) 1266.
149. P. Descouvemont, C. Daniel, D. Baye, Phys. Rev. C 67 (2003) 044309.
150. H. Horiuchi, Prog. Theor. Phys. 55 (1976) 1448.
151. K. Katō, H. Bandō, Prog. Theor. Phys. 53 (1975) 692.
152. A. F. Nikiforov, S. K. Suslov, V. B. Uvarov, Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1991).
153. M. Kamimura, Nucl. Phys. A 351 (1981) 456
154. E. Uegaki, S. Okabe, Y. Ae and H. Tanaka, Prog. Theor. Phys. 57 (1977), 1262.
155. Yu. F. Smirnov, I.T. Obukhovsky, Yu. M. Tchuvil'sky, V. G. Neudatchin, Nucl. Phys. A 235 (1974) 289.
156. E.M. Tursunov, D. Baye, P. Descouvemont, Nucl. Phys. A 723 (2003) 365.
157. E.M. Tursunov, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 27 (2001) 1381.
158. Y. Fujiwara et al., Prog. Theor. Phys. Suppl. 68 (1980) 29.
159. Horiuchi H., Prog. Theor. Phys. 53 (1975) 447.
160. Y. Fujiwara et al., Prog. Theor. Phys. 107 (2002) 745.
161. M. Moshinsky, The Harmonic Oscillator in Modern Physics: From Atoms to Quarks, (Gordon and Breach Science Publishers, Inc., New York, 1969).
162. M. V. Zhukov, B. V. Danilin, D. V. Fedorov, J. M. Bang, I. J. Thompson, J. S. Vaagen, Bound state properties of Borromean halo nuclei:  ${}^6\text{He}$  and  ${}^{11}\text{Li}$ , Phys. Rep. 231 (1993) 151–199.

163. V. S. Vasilevsky, I. Y. Rybkin, Astrophysical  $S$  factor of the reactions  $t(t, 2n)\alpha$  and  ${}^3He({}^3He, 2p)\alpha$ , Sov. J. Nucl. Phys. 50 (1989) 411–415.
164. V. S. Vasilevsky, A. V. Nesterov, O. F. Chernov, A neutron halo in  ${}^8He$ , Phys. Atom. Nucl. 64 (2001) 1409–1415.
165. M. Lyu, Z. Ren, B. Zhou, Y. Funaki, H. Horiuchi, G. Röpke, P. Schuck, A. Tohsaki, C. Xu, T. Yamada, Investigation of  ${}^{10}Be$  and its cluster dynamics with the nonlocalized clustering approach, Phys. Rev. C 93 (5) (2016) 054308.
166. F. Kobayashi, Y. Kanada-En'yo, A New Approach to Investigate Di-neutron Correlation and Its Application to  ${}^{10}Be$ , Progr. Theor. Phys. 126 (2011) 457–482.
167. N. Itagaki, S. Okabe, Molecular orbital structures in  ${}^{10}Be$ , Phys. Rev. C 61 (4) (2000) 044306.
168. N. Itagaki, M. Ito, M. Milin, T. Hashimoto, H. Ishiyama, H. Miyatake, Coexistence of  $\alpha+\alpha+n+n$  and  $\alpha+t+t$  cluster structures in  ${}^{10}Be$ , Phys. Rev. C 77 (6) (2008) 067301.
169. V. S. Vasilevsky, F. Arickx, J. Broeckhove, T. P. Kovalenko, A microscopic three-cluster model with nuclear polarization applied to the resonances of  ${}^7Be$  and the reaction  ${}^6Li(p, {}^3He){}^4He$ , Nucl. Phys. A 824 (1-4) (2009) 37–57.
170. A. V. Nesterov, V. S. Vasilevsky, T. P. Kovalenko, Effect of cluster polarization on the spectrum of the  ${}^7Li$  nucleus and on the reaction  ${}^6Li(n, {}^3H){}^4He$ , Phys. Atom. Nucl. 72 (2009) 1450–1464.
171. A. V. Nesterov, V. S. Vasilevsky, T. P. Kovalenko, Microscopic model of the radiative capture reactions with cluster polarizability. Application to  ${}^7Be$  and  ${}^7Li$ , Ukr. J. Phys. 56 (7) (2011) 645–653.

172. R. F. Barrett, B. A. Robson, W. Tobocman, Calculable methods for many-body scattering, *Rev. Mod. Phys.* **55** (1983) 155–243.
173. A. Hasegawa, S. Nagata, Ground state of  ${}^6\text{Li}$ , *Prog. Theor. Phys.* **45** (1971) 1786–1807.
174. F. Tanabe, A. Tohsaki, R. Tamagaki,  $\alpha\alpha$  scattering at intermediate energies, *Prog. Theor. Phys.* **53** (1975) 677–691.
175. A. B. Volkov, Equilibrium deformation calculation of the ground state energies of 1p shell nuclei, *Nucl. Phys.* **74** (1965) 33–58.
176. F. Kobayashi, Y. Kanada-En'yo, Dinucleon correlations in the ground states of  ${}^9\text{Li}$ ,  ${}^{10}\text{Be}$ , and  ${}^{9,10}\text{C}$ , *Phys. Rev. C* **89** (2) (2014) 024315.
177. M. Žáková, Z. Andjelkovic, M. L. Bissell, K. Blaum, G. W. F. Drake, C. Geppert, M. Kowalska, J. Krämer, A. Krieger, M. Lochmann, T. Neff, R. Neugart, W. Nörtershäuser, R. Sánchez, F. Schmidt-Kaler, D. Tiedemann, Z.-C. Yan, D. T. Yordanov, C. Zimmermann, Isotope shift measurements in the  $2s_{1/2} \rightarrow 2p_{3/2}$  transition of  $\text{Be}^+$  and extraction of the nuclear charge radii for  ${}^{7,10,11}\text{Be}$ , *J. Phys. G Nucl. Phys.* **37** (5) (2010) 055107.
178. C. Forssén, E. Caurier, P. Navrátil, Charge radii and electromagnetic moments of Li and Be isotopes from the ab initio no-core shell model, *Phys. Rev. C* **79** (2) (2009) 021303.
179. S. C. Pieper, K. Varga, R. B. Wiringa, Quantum Monte Carlo calculations of  $A=9,10$  nuclei, *Phys. Rev. C* **66** (4) (2002) 044310.
180. S. C. Pieper, R. B. Wiringa, Quantum Monte Carlo Calculations of Light Nuclei, *Annual Review of Nuclear and Particle Science* **51** (2001) 53–90.
181. W. Nörtershäuser, D. Tiedemann, M. Žáková, Z. Andjelkovic, K. Blaum, M. L. Bissell, R. Cazan, G. W. F. Drake, C. Geppert, M. Kowalska, J. Krämer, A. Krieger, R. Neugart, R. Sánchez, F. Schmidt-Kaler, Z.-C.

- Yan, D. T. Yordanov, C. Zimmermann, Nuclear Charge Radii of  $^{7,9,10}Be$  and the One-Neutron Halo Nucleus  $^{11}Be$ , Phys. Rev. Lett. 102 (6) (2009) 062503.
182. M. Puchalski, K. Pachucki, Relativistic, QED, and finite nuclear mass corrections for low-lying states of Li and  $Be^+$ , Phys. Rev. A 78 (5) (2008) 052511.
183. K. Fujimura, D. Baye, P. Descouvemont, Y. Suzuki, K. Varga, Low-energy  $\alpha + ^6He$  elastic scattering with the resonating-group method, Phys. Rev. C 59 (1999) 817–825.

## Додаток А

### Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

Матеріали дисертації опубліковані в 22 наукових статтях в реферованих провідних наукових виданнях [1]- [22], 4 статтях в матеріалах конференцій [23]- [26] та 11 тезах конференцій [27]- [37].

1. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, K. Kato, S. V. Korennov, Scissors mode in the SU(3) basis, Progr. Theor. Phys. Suppl. 146 (2002) 585–586.
2. S. V. Korennov, G. F. Filippov, K. Kato, Yu. A. Lashko, Microscopic Hamiltonian of  ${}^9\text{Li}$  and  ${}^{10}\text{Be}$  and the SU(3) basis, Progr. Theor. Phys. Suppl. 146 (2002) 579-580.
3. Г. Ф. Филиппов, Ю. А. Лашко, С. В. Кореннов и К. Като, О распаде  ${}^{12}\text{Be}$  по каналам  ${}^8\text{He}+\alpha$  и  ${}^6\text{He}+{}^6\text{He}$ , Известия РАН, серия физическая 67 (2003) 1539–1546.
4. G. F. Filippov, K. Kato, S. V. Korennov, Yu. A. Lashko, Spectrum of  ${}^{10}\text{Be}$  in the approximation of the leading irreducible representation of the SU(3) group, Phys. Atom. Nucl. 66 (2003) 632–643.
5. G. F. Filippov, Yu. Lashko, S. Korennov, and K. Kato, Norm kernels and the closeness relation for Pauli-allowed basis functions, Few-body Syst. 33 (2003) 173–198.
6. G. F. Filippov, Yu. A. Lashko, S. V. Korennov, K. Kato,  ${}^6\text{He}+{}^6\text{He}$  Clustering of  ${}^{12}\text{Be}$  in a Microscopic Algebraic Approach, Few-Body Syst. 34 (2004) 209–235.

7. G. F. Filippov, Yu. A. Lashko, S. V. Korennov, K. Kato, Integral Equations in the Fock-Bargmann Space and the Generator-Coordinate Method, *Phys. Atom. Nucl.* 67 (2004) 1715–1720.
8. Gennady Filippov and Yuliya Lashko, Peculiar properties of the cluster-cluster interaction induced by the Pauli exclusion principle, *Phys. Rev. C* 70 (2004) 064001.
9. G. Filippov, Y. Lashko, Structure of Light Neutron-Rich Nuclei and Nuclear Reactions Involving These Nuclei, *Phys. Part. Nucl.* 36 (6) (2005) 714–739.
10. G. F. Filippov and Yu. A. Lashko, Coexistence of different cluster configurations in light neutron-rich nuclei, *Phys. Atom. Nucl.* 70 (2007) 1429–1434.
11. Yu. A. Lashko and G. F. Filippov, Multichannel Neutron Scattering on  $^{11}\text{Be}$  Nucleus, *Phys. Atom. Nucl.* 70 (2007) 1017–1035.
12. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Multi-channel nuclear reactions involving light neutron-rich nuclei: microscopic approach, *Phys. Atom. Nucl.* 70 (2007) 1440–1444.
13. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Cluster structure of a low-energy resonance in tetraneutron, *Phys. Atom. Nucl.* 71 (2008) 209–214.
14. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Decay of  $^5\text{H}$  in a microscopic three-cluster model, *Few-body Systems* 44 (2008) 215–218.
15. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, How the Pauli principle governs the decay of three-cluster systems, *Nucl. Phys. A* 806 (2008) 124–145.
16. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, The role of the Pauli principle in three-cluster systems composed of identical clusters, *Nucl. Phys. A* 826 (2009) 24–48.
17. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Continuous Spectrum of Three-Cluster Systems, *Phys. Atom. Nucl.* 75 (2012) 420–429.

18. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Unusual manifestations of the Pauli principle in scattering of atomic nuclei, *УФЖ* 58 (2013) 534–543.
19. Yu.A. Lashko, G.F. Filippov, L. Canton, Scattering of  ${}^6\text{He}$  on  $\alpha$ -particle: microscopic guidance for orthogonalizing pseudopotentials, *Ukr. J. Phys.* 60 (2015) 406–415.
20. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, V. S. Vasilevsky, M. D. Soloha-Krymchak, Phase Portraits of Quantum Systems, Few-body Systems 55 (2014) 817–820.
21. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, V. S. Vasilevsky, Dynamics of two-cluster systems in phase space, *Nucl. Phys. A* 941 (2015) 121–144.
22. Y. A. Lashko, G. F. Filippov, V. S. Vasilevsky, Microscopic three-cluster model of  ${}^{10}\text{Be}$ , *Nucl. Phys. A* 958 (2017) 78 – 100.
23. S. V. Korennov, G. F. Filippov, K. Kato, Yu. A. Lashko, M1 transition in  ${}^9\text{Li}$  and  ${}^{10}\text{Be}$  and the SU(3) basis, Proceedings of International Symposium on Clustering Aspects of Quantum Many-Body Systems, Kyoto, November 12-14, 2001. World Scientific (2002) 241-244.
24. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, K. Kato, S. V. Korennov, Probing the spectrum of  ${}^{10}\text{Be}$  in the approximation of the SU(3) leading representation, Proc. of International Symposium on Clustering Aspects of Quantum Many-Body Systems, Kyoto, November 12-14, 2001. World Scientific (2002) 237-240.
25. G. F. Filippov, Yu. A. Lashko, Effective interaction generated by the Pauli exclusion principle in collisions of the light neutron-rich nuclei, Proc. of the International Symposium on Exotic Nuclei, Peterhof, July 5-12, 2004. World Scientific (2005) 142-147.
26. L. Canton, Yu. A. Lashko, K. Amos, P. R. Fraser, S. Karataglidis, J. P. Svenne, D. van der Knijff, Alpha- ${}^6\text{He}$  scattering and the quest for microscopic guidance for orthogonalizing pseudopotentials, Proc. of the 14th

International Conference on Nuclear Reaction Mechanisms, Varenna, June 15 - 19, 2015, CERN, Geneva (2015) 181-188.

27. G. F. Filippov, K. Kato, S. V. Korennov, Yu .A. Lashko, Scissors mode in the SU(3) basis, Abstracts of Yukawa International Seminar "Physics of Unstable Nuclei Kyoto, November 5-10, 2001, p. 112.
28. G. F. Filippov, K. Kato, S. V. Korennov, Yu. A. Lashko, Microscopic Hamiltonian of  ${}^9\text{Li}$  and  ${}^{10}\text{Be}$  and the SU(3) basis, Abstracts of Yukawa International Seminar "Physics of Unstable Nuclei Kyoto, November 5-10, 2001, p. 110.
29. G. F. Filippov, K. Kato, S. V. Korennov, Yu .A. Lashko, Probing the spectrum of  ${}^{10}\text{Be}$  in the approximation of the SU(3) leading representation, Abstracts of International Symposium on Clustering Aspects of Quantum Many-Body Systems, Kyoto, November 12-14, 2001, p. 49.
30. G. F. Filippov, K. Kato, S. V. Korennov, Yu .A. Lashko, M1 transition in  ${}^9\text{Li}$  and  ${}^{10}\text{Be}$  and the SU(3) basis, Abstracts of International Symposium on Clustering Aspects of Quantum Many-Body Systems, Kyoto, November 12-14, 2001, p. 48.
31. S. V. Korennov, Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, K. Kato, Practical calculus for the Fock-Bargmann space, Proceedings of International Symposium on new trends of physics, Sapporo, January 20-24, 2003. Hokkaido University (2003) 135-139.
32. Yuliya Lashko and Gennady Filippov, Multi-channel nuclear reactions involving light neutron-rich nuclei: microscopic approach, Book of abstracts of the International conference on nuclear structure and related topics, Dubna, Russia, June 13 - 17, 2006, p. 50.
33. G. F. Filippov, Yu. A. Lashko, Co-existence of different cluster configurations in light neutron-rich nuclei, Book of abstracts of the International

conference on nuclear structure and related topics, Dubna, Russia, June 13 - 17, 2006, p. 33.

34. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, How the Pauli principle governs the decay of three-cluster systems, Book of abstracts of the 2nd International Conference on Current Problems in Nuclear Physics and Atomic Energy, June 9 - 15, 2008, Kyiv, Ukraine, p. 130
35. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Can the democratic decay channel be realized in three-cluster systems? Book of abstracts of the Fifth International Conference on Exotic Nuclei and Atomic Masses, September 7 - 13, 2008, Ryn, Poland, p. 81.
36. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Three-cluster structure of the  ${}^8\text{Li}$  nucleus and the Pauli principle, Book of Abstracts of the 4th International Conference on Current Problems in Nuclear Physics and Atomic Energy, September 3-7, 2012, Kyiv, Ukraine, p. 73.
37. Yu. A. Lashko, G. F. Filippov, Unusual manifestations of the Pauli principle in scattering of atomic nuclei, Program and Proceedings of the International Conference "Problems of theoretical physics" dedicated to Alexander Davydov 100th birthday, October 8 - 11, 2012, Kyiv, Ukraine, p. 46.