Національна академія наук України
Інститут ядерних досліджень

Національна академія наук України
Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова

Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису

Лашкін Володимир Михайлович

УДК 533.9; 535.8; 539.18

ДИСЕРТАЦІЯ

СТІЙКІ НЕЛІНІЙНІ КОГЕРЕНТНІ СТРУКТУРИ В ДИСПЕРГУЮЧИХ СЕРЕДОВИЩАХ

01.04.02 – теоретична фізика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

______________ В. М. Лашкін

Київ - 2018

АНОТАЦІЯ

Лашкін В. М. Стійкі нелінійні когерентні структури в диспергуючих середовищах. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика. Інститут ядерних досліджень НАН України. — Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України, Київ, 2018.

В розділі 1 розроблено теорію збурень для солітонів, що грунтується на методі зворотньої задачі розсіювання в моделях дефокусуючого нелінійного рівняння Шредингера (НРШ), деривативного НРШ із спадаючими та неспадаючими граничними умовами та модіфікованого НРШ.

На основі розробленої теорії досліджені темний односолітонний імпульс НРШ із випадковим початковим збуренням в оптичному волоконному світловоді, та просторовий солітон (пучок оптичного випромінювання) з лінійним накачуванням й нелінійним поглинанням. Теоретично виявлено ефект безпорогового народження темних солітонів.

В моделі деривативного НРШ досліджено ефекти випромінювання альфвенівських солітонів, що розповсюджуються в плазмі як уздовж (спадаючі граничні умови) так й під кутом до зовнішнього магнітного поля. Знайдені спектральний розподіл випромінюваної енергії й магнітної спіральності для випадків урахування кінцевої провідності плазми, ефекту резонансних частинок та флуктуацій густини плазми.

Розроблено метод знаходження точних N-солітонних розв'язків деривативного НРШ із неспадаючими граничними умовами. Метод дає можливість одержати явні розв'язки, що описують зіткнення між бризерними солітонами й темними та/або світлими солітонами. Досліджено еволюцію обмеженого в просторі початкового розподілу збурення магнітного поля, що призводить до генерації альфвенівських солітонів. При цьому виникають солітони трьох типів: бризери, темні та світлі солітони. Запропоновано

узагальнення на випадок декількох розділених у просторі початкових збурень магнітного поля.

В моделі модифікованого НРШ, що відповідає розповсюдженню ультракороткого односолітонного імпульсу в оптичному світловоді, досліджено вплив мультиплікативного шуму, що відповідає неоднорідної випадкової частини показника заломлення та знайдено середні спектральні потужності випромінювання для різних форм корелятора випадкового поля.

В розділі 2 досліджено взаємодію верхньогібридних плазмових хвиль із кінетичними магнітозвуковими хвилями, що призводить до нелокального характеру нелінійності. Показано, що наслідком цього є відсутність колапсу в даній моделі. Досліджена стійкість чисельно знайдених розв'язків у вигляді двовимірних солітонів та радіально симетричних вихорів. Чисельно продемонстровано виникнення двовимірного солітона з майже однорідного початкового розподілу поля, який, співіснуючи з турбулентним оточенням, є досить стійким та не колапсує.

Запропоновано еволюційне нелінійне рівняння, що описує динаміку короткохвильових нелінійних іонно-циклотронних хвиль, що поширюються в плазмі поперек зовнішнього магнітного поля, коли лінійна дисперсія відповідає зворотній залежності частоти від хвильового числа. Отримана модель враховує нелінійне низькочастотне збурення магнітного поля. Аналітично знайдено розв'язки у вигляді солітонів та нелінійних періодичних хвиль.

Досліджено нелінійну стадію пучкової нестійкості електронного пучка в плазмі. Знайдено аналітичні розв'язки у вигляді нелінійних періодичних кноідальних хвиль та показана відповідність із експериментальними результатами по виявленню солітонів в плазмово-пучкових системах.

В розділі 3 досліджені дрейфові вихорові солітони та зональні течії в плазмі.

У моделі нелінійного рівняння Хасегави-Міми аналітично обчислені амплітуди та повні перерізи розсіювання дрейфових плазмових хвиль на двовимірному дрейфовому солітоні (модоні) для випадків борнівського та еконального наближень, а також для випадку розсіювання електромагнітної хвилі на модоні. Показано, що двовимірний дрейфовий солітон може захоплювати квазілінійні дрейфові хвилі. Аналітично знайдено власні частоти захоплених мод та їх просторову структуру.

Досліджена нелінійна взаємодія дрейфових та іонно-звукових хвиль в плазмі з урахуванням тривимірної геометрії. Отримано узагальнення рівняння Хасегави-Міми на тривимірний випадок. Знайдено точні аналітичні розв'язки цього рівняння у вигляді тривимірного дрейфового вихорового солітона (тривимірного модона). Чисельно досліджено зіткнення модонів та показано, що тривимірні модони без радіально симетричної та/або z-антисиметричної частин повністю відтворюють свою початкову форму після як лобового так й проникаючого зіткнення (абсолютно пружне солітонне зіткнення), не залишаючи ніякого випромінювання.

Показано, що середня течія достатньо малої амплітуди збільшує інкремент модуляційної нестійкості дрейфових плазмових хвиль, сприяючи, тим самим, генерації зональної течії. Наявність середньої течії досить великої амплітуди виявляє стабілізуючий вплив на генерацію зональної течії.

Досліджено модуляційну нестійкість дрейфових хвиль, обумовлених градієнтом електронної температури (ETG), та показано, що при перевищенні амплітуди дрейфової хвилі граничного значення можлива генерація зональної течії. При перевищенні середньоквадратичної амплітуди зональної течії критичного значення, лінійна нестійкість зникає для всіх полоідальних хвильових чисел дрейфової хвилі.

В розділі 4 досліджена динаміка багатовимірних мультисолітонів та вихорів в середовищах з нелокальною нелінійністю.

Знайдено стійкі двовимірні дипольні солітони у вигляді зв'язаного стану двох фундаментальних солітонів із протилежною фазою в моделі НРШ з нелокальним гауссовським відгуком. Показано, що дипольні солітони виявляються стійкими, якщо енергія солітона перевищує деяке критичне значення, навіть у присутності досить сильного початкового шумового збурення. Нижче критичного значення солітон швидко руйнується й без початкового збурення. При подальшому зменшенні енергії, якщо енергія солітона менше деякого нового критичного значення, дипольний солітон розпадається на два монопольних солітона, які рухаються в протилежні напрямки без зміни форми.

У моделі частково іонізованій плазми з нелокальною нелінійністю теплового типу знайдено двовимірні необертові дипольні, трипольні й квадрупольні солітони, а також обертові дипольні й квадрупольні солітони. Необертові дипольні солітони стійкі, якщо енергія солітона лежить в інтервалі, обмеженому нижнім та верхнім критичним значенням. Якщо енергія солітона менше нижнього критичного значення він розпадається на два фундаментальні солітона, а якщо енергія більше верхнього критичного значення – швидко руйнується.

У моделі рівняння Гросса-Пітаєвського, який описує Бозе-Ейнштейнівський конденсат (БЕК) з нелокальною взаємодією між атомами, знайдено двовимірні локалізовані розв'язки у вигляді фундаментального солітона, дипольного й квадрупольного солітона, вихорового солітона, азимутонів із двома й чотирма піками інтенсивності (обертових диполів та квадруполів). Нелінійність відповідає диполь-дипольній взаємодії, що виникає в газах БЕК з аномально більшими магнітними моментами. Досліджена стійкість знайдених структур.

Чисельно знайдено розв'язки у вигляді тривимірних вихорових солітонів в моделі рівняння Гросса-Пітаєвського з диполь-дипольною нелокальною взаємодією. Досліджено лінійний аналіз стійкості цих структур. Показано, що нелокальність має стабілізуючий ефект.

В розділі 5 у моделі нелінійного рівняння Шредингера із зовнішнім параболічним потенціалом чисельно знайдені двовимірні та тривимірні відокремлені нелінійні структури, що є проміжними між мультисолітонами та радіально симетричними вихоровими солітонами – азимутони. Знайдені азимутонні солітони характеризуються (крім швидкості) чотирма незалежними параметрами: хімічним потенціалом або, еквівалентно, амплітудою, частотою обертання, топологічним зарядом й числом піків. Чисельно досліджено стійкість азимутонів. Продемонстрована можливість генерації азимутонних солітонів з фундаментального солітона та одночасного накладення розривних фаз на фундаментальний солітон.

В розділі 6 чисельно знайдено двовимірні векторні стани, що описують векторні пари солітон-вихор і вихор-вихор у двовимірних двокомпонентних БЕК з гармонічною пасткою з магнітним утриманням для випадку притягування між атомами одного сорту та притягування або відштовхування між атомами різних сортів. Проведено лінійний аналіз стійкості знайдених векторних станів та показано, що вони можуть бути стійкими в певному диапазоні параметрів.

Уведена концепція двовимірних векторних пар солітон-азимутон та азимутон-азимутон в двокомпонентних БЕК та чисельно знайдено відповідні розв'язки. Показано, що азимутонна радіально несиметрична компонента приводить до деформації солітонної компоненти, яка стає радіально несиметричною. Досліджено стійкість солітон-азимутонних та азимутон-азимутонних векторних станів.

Ключові слова: нелінійність, метод зворотньої задачі розсіювання, солітон, мультисолітон, вихор, плазма, азимутон, зональна течія, нестійкість.

Список публікацій здобувача

1*. Lashkin V. M. Stable three-dimensional modon soliton in plasmas / V. M. Lashkin // Phys. Rev. E. — 2017. — Vol. 96, no. 3. — P. 032211.

2*. Lashkin V. M. Influence of the mean flow on zonal flow generation / V. M. Lashkin // Phys. Plasmas. — 2008. — Vol. 15, no. 1. — P. 124502.

3*. Lashkin V. M. Stable three-dimensional spatially modulated vortex solitons in Bose-Einstein condensates / V. M. Lashkin // Phys. Rev. A. — 2008. — Vol. 78, no. 3. — P. 033603.

4*. Lashkin V. M. Two-dimensional multisolitons and azimuthons in Bose-Einstein condensates / V. M. Lashkin // Phys. Rev. A. — 2008. — Vol. 77, no. 2. — P. 025602.

5*. Lashkin V. M. Two-dimensional vortex ring-like and multisoliton nonlinear structures at the upper-hybrid resonance / V. M. Lashkin // Phys.

Plasmas. — 2007. — Vol. 14, no. 10. — P. 102311.

6*. Lashkin V. M. N-soliton solutions and perturbation theory for the derivative nonlinear Schrödinger equation with nonvanishing boundary conditions / V. M. Lashkin // J. Phys. A: Math. and Theor. — 2007. — Vol. 40, no. 10. — P. 6119-6132.

7*. Lashkin V. M. Two-dimensional nonlocal vortices, multipole solitons and rotating multisolitons in dipolar Bose-Einstein condensates / V. M. Lashkin // Phys. Rev. A. — 2007. — Vol. 75, no. 4. — P. 043607.

8*. Lashkin V. M. Alfven soliton and emitted radiation in the presence of perturbations / V. M. Lashkin // Phys. Rev. E. — 2006. — Vol. 74, no. 1. — P. 016603.

9*. Lashkin V. M. Generation of solitons by a boxlike pulse in the derivative nonlinear Schrödinger equation with nonvanishing boundary conditions / V. M. Lashkin // Phys. Rev. E. — 2005. — Vol. 71, no. 6. — P. 066613.

10*. Lashkin V. M. Perturbation theory for dark solitons: Inverse scattering transform approach and radiative effects / V. M. Lashkin // Phys. Rev. A. — 2004. — Vol. 70, no. 6. — P. 066620.

11*. Lashkin V. M. Soliton of modified nonlinear Schrodinger equation with random perturbations / V. M. Lashkin // Phys. Rev. E. — 2004. — Vol. 69, no. 1. — P. 016611.

12*. Lashkin V. M. Azimuthal vortex clusters in Bose-Einstein condensates / V. M. Lashkin, E. A. Ostrovskaya, A. S. Desyatnikov, Yu. S. Kivshar // Phys. Rev. A. — 2012. — Vol. 85, no. 1. — P. 013620.

13*. Lashkin V. M. Vector azimuthons in two-component Bose-Einstein condensates / V. M. Lashkin, E. A. Ostrovskaya, A. S. Desyatnikov, Yu. S. Kivshar // Phys. Rev. A. — 2009. — Vol. 80, no. 1. — P. 013615.

14*. Lashkin V. M. Influence of zonal flows on unstable drift modes in ETG turbulence / V. M. Lashkin, Yu. A. Zaliznyak, A. I. Yakimenko // Plasma Phys. and Contr. Fusion. — 2009. — Vol. 51, no. 1. — P. 015008.

15*. Давыдова Т. А. Рассеяние электромагнитной волны на дрейфово-потенциальном вихре / Т. А. Давыдова, В. М. Лашкин // Физика плазмы. — 1993. — Т. 19, № 2. — С. 228-232.

16*. Давыдова Т. А. Коротковолновый ионно-циклотронный солитон / Т. А. Давыдова, В. М. Лашкин // Физика плазмы. — 1991. — Т. 17, № 8. — С. 976-979.

17*. Lashkin V. M. Stable three-dimensional vortex solitons in Bose-Einstein condensates with nonlocal dipole-dipole interaction / V. M. Lashkin, A. I. Yakimenko, Yu. A. Zaliznyak // Physica Scripta. — 2009. — Vol. 79, no. 3. — P. 035305.

18*. Zaliznyak Yu. A. Excitation of zonal flow by the modulational instability in electron temperature gradient driven turbulence / Yu. A. Zaliznyak, A. I. Yakimenko, V. M. Lashkin // J. Plasma Phys. — 2008. — Vol. 74, no. 3. — P. 381-389.

19*. Davydova T. A. Scattering of drift waves by drift vortices / T. A. Davydova, V. M. Lashkin // J. Plasma Phys. — 1997. — Vol. 58, no. 1. — P. 1-10.

20*. Davydova T. A. Drift-wave trapping by drift vortices / T. A. Davydova, V. M. Lashkin // J. Plasma Phys. — 1997. — Vol. 58, no. 1. — P. 11-18.

21*. Davydova T. A. Short-wavelength ion Bernstein nonlinear waves and solitons / T. A. Davydova, A. I. Fishchuk, V. M. Lashkin // J. Plasma Phys. — 1994. — Vol. 52, no. 3. — P. 353-364.

22*. Yakimenko A. I. Two-dimensional nonlinear vector states in Bose-Einstein condensates / A. I. Yakimenko, Yu. A. Zaliznyak, V. M. Lashkin // Phys. Rev. A. — 2009. — Vol.79, no. 4. — P. 043629.

23*. Lashkin V. M. Two-dimensional nonlocal multipole solitons / V. M. Lashkin, A. I. Yakimenko, O. O. Prikhodko // Phys. Lett. A. — 2007. — Vol. 366, no. 2. — P. 422-427.

24*. Yakimenko A. I. Dynamics of two-dimensional coherent structures in nonlocal nonlinear media / A. I. Yakimenko, V. M. Lashkin, O.O. Prikhodko // Phys. Rev. E. — 2006. — Vol. 73, no. 6. — P. 066605.

25*. Давыдова Т. А. Коротковолновые ионные бернстейновские нелинейные структуры / Т. А. Давыдова, В. М. Лашкин, Г. И. Фищук // УФЖ. — 1998. — Т. 45, № 5. — С. 540-545.

26*. Давыдова Т. А. Образование солитонов в неравновесной плазме при развитии пучковой неустойчивости / Т. А. Давыдова, В. М. Лашкин // УФЖ. — 1992. — Т. 37, № 12. — С. 1833-1838.

27*. Давыдова Т. А. Параметрическая ион-ионная неустойчивость пучкового типа в неоднородном ВЧ поле / Т. А. Давыдова, В. М. Лашкин // УФЖ. — 1992. — Т. 37, № 4. — С. 570-577.

28*. Lashkin V. M. Zonal flows and soliton generation in drift wave turbulence / V. M. Lashkin // IX International Conference "Electronics and Applied Physics", october 23-26, 2013, Kyiv, Ukraine .— Kyiv, 2013. — P. 111-112.

29*. Лашкін В. М. Двовимірні нелінійні локалізовані структури – азимутони / В. М. Лашкін, О. А. Островська, А. С. Десятніков, Ю. А. Ківшар // Українська конференція з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу, 25-26 жовтня, 2011, Київ, Україна: анотації доп.— Київ, 2011 — С. 46.

30*. Лашкін В. М. Вплив зональних течій на нестійкі дрейфові моди зумовлені градієнтом електронної температури / В. М. Лашкін, Ю. О. Залізняк, О. І. Якименко // Українська конференція з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу , 27-28 жовтня, 2009, Київ, Україна: анотації доп.— Київ, 2009 — С. 38.

31*. Lashkin V. M. Influence of zonal flows on unstable drift modes in ETG turbulence / V. M. Lashkin, Yu. A. Zaliznyak, A. I. Yakimenko // IV International Conference "Electronics and Applied Physics" , october 23-25, 2008, Kyiv, Ukraine .— Kyiv, 2008. — P. 143-144.

32*. Lashkin V. M. Excitation of zonal flow by the modulational instability in electron temperature gradient driven turbulence / V. M. Lashkin, Yu. A. Zaliznyak, A. I. Yakimenko // III International Conference "Electronics and Applied Physics", october 25-27, 2007, Kyiv, Ukraine .— Kyiv, 2007. — P. 134-135.

33*. Lashkin V. M. Stable two-dimensional soliton and vortex structures at the upper-hybrid resonance / V. M. Lashkin // 13 International Congress on Plasma Physics, may 22-26, 2006, Kiev, Ukraine.— Kiev: ICCP 2006. — P. 44.

34*. Yakimenko A. I. Stable multisolitary structures in plasmas with nonlocal nonlinearities / A. I. Yakimenko, V. M. Lashkin, O. O. Prikhodko // 13 International Congress on Plasma Physics, may 22-26, 2006, Kiev, Ukraine.— Kiev: ICCP 2006. — P. 66.

35*. Lashkin V. M. Stable two-dimensional soliton and vortex structures at the upper-hybrid resonance / V. M. Lashkin // International Workshop "Nonlinear Physics and Mathematics", may 25-27, 2006, Kiev, Ukraine. — Kiev: ICCP 2006. — P. 21.

36*. Lashkin V. M. Alfven solitons in a plasma with fluctuating density / V. M. Lashkin // International Conference on Physics of Low Temperature Plasma , may 11-15, 2003, Kiev, Ukraine .— Kiev, 2003. — P. 11-18-97r.

37*. Davydova T. A. Scattering of drift waves by drift vortices / T. A. Davydova, V. M. Lashkin // International Conference "Physics in Ukraine" ,june 22-27, 1993: Contributed papers "Plasma Physics".— Kiev, 1993. — P. 73-76.

38*. Davydova T. A. Scattering of electromagnetic wave by drift vortices / T. A. Davydova, V. M. Lashkin // International Workshop on turbulence and nonlinear processes in plasmas, april 13-29, 1992, Kiev, Ukraine .— Kiev, 1992. — P. 31-34.

ABSTRACT

Lashkin V. M. Stable nonlinear coherent structures in dispersive media. — Manuscript.

Thesis for a scientific degree of Doctor of physical and mathematical sciences by the speciality 01.04.02 – theoretical physics. Institute for Nuclear Research of National Academy of Sciences of Ukraine. — Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of National Academy of Sciences of Ukraine , Kyiv, 2018.

In chapter 1, the soliton perturbation theory using inverse scattering transform was developed for the models of defocusing nonlinear Schrodinger equation (NLS), derivative NLS with vanishing and nonvanishing boundary conditions, and modified NLS.

Based on the developed theory, dark single NLS soliton with random initial perturbation in an optical fiber and spatial soliton were investigated for the cases of linear pump and nonlinear absorption. The effect of nonthreshold generation of dark solitons was discovered.

The radiative effects for alfven solitons DNLS in a plasma for the cases of propagation both along (vanising boundary conditions) and at an angle the external magnetic field were investigated. The spectral distribution of radiated energy and magnetic helicity were found for the cases of finite plasma conductivity, influence of resonance particles and plasma density fluctuations.

The method for obtaining of exact N-soliton solutions of the DNLS with nonvanishing boundary conditions was developed. The solutions describe collisions between breather solitons and dark and/or light solitons. Evolution of the initial perturbation of magnetic field was investigated. This results in generation of alfven solitons. Under this, three kinds of solitons can be generated: the breathers, dark and light solitons. Generalization to the case of several spatially distributed initial perturbations of magnetic field was developed.

Influence of the multiplicative noise that corresponds to random part of the refractive index of the waveguide was investigated in the model of the

modified NLS for the ultrashort soliton pulses. . The average spectral radiated power distribution was found for different forms of correlator of the random field.

In chapter 2 interaction upper-hybrid plasma waves with kinetic magnetosound was studied. This results in nonlocal type of nonlinearity and the absence of collapse. The growth rate of the modulational instability was found. Numerical solutions of the form of two-dimensional solitons and vortices were found , and the stability of these structures were investigated. Generation of two-dimensional soliton from almost homogeneous field distribution was demonstrated by numerical modeling. That soliton was stable and, coexisting with turbulent environment, did not collapse.

Nonlinear evolution equation governing the dynamics of shortwavelength ion-cyclotron plasma waves propagating across the external magnetic field when the linear dispersion corresponds to inverse dependence of the frequency on the wave number. The derived equation takes into account the nonlinear low frequency pertubation of magnetic field. Exact solutions of the form soliton and nonlinear periodic waves were found.

Nonlinear stage of the electron beam instability in a plasma was invesigated. Analytical solutions of the form of nonlinear cnoidal waves were found in agreement to experimental results on solitons in plasma-beam systems.

In chapter 3, the drift vortex solitons and zonal flows in a plasma were investigated.

Nonlinear equations describing the interaction drift waves and ion acoustic waves in a plasma assuming electron adiabaticity and negligible ion pressure and taking into account the three-dimensional geometry. Exact analytical solutions in the form of three-dimensional solitary vortex nonlinear drift wave (three-dimensional modon) were found. The simulations showed that the modons can preserve their shape after collisions (fully elastic soliton collisions), and there was no emitted radiation. This is true for both head-on and overtaking collisions.

The scattering amplitudes and full scattering sections for the cases of scattering drift waves and electromagnetic waves on the dipole vortex in the

Hasegawa-Mima model both the born and eikonal approximation. It was shown that the drift vortex can trap quasilinear drift waves. Eigenfrequencies of trapped modes and the spatial field distribution were determined.

The growth rate of modulational instability of drift plasma waves increases in the presence of the mean flow with sufficiently small amplitude, and this results in the zonal flow generation. The mean flow with sufficiently large amplitude has stabilizing effect.

The modualtional instability of drift waves caused by electron temperature gradient (ETG modes) was investigated. The zonal flow generation was possible when the amplitude of the drift wave exceeds the threshold value. If the mean-square amplitude of zonal flow with the stochastic profile exceeds the threshold then the linear instability of ETG modes vanishes for all poloidal wave numbers of drift wave.

In chapter 4, dynamics of multidimensional multisolitons and vortices in media with nonlocal nonlinearity was investigated.

Stable two-dimensional dipole solitons in the form of the bounded state of two fundamental solitons with opposite phases were found in the model of the NLS with nonlocal gaussian response. It was shown that the dipole solitons turn out to be stable if the soliton energy exceeds the threshold value even in the presence of a sufficiently strong initial noise perturbation. Below the threshold the dipole immediately destroys without an initial perturbation. Further decreasing of the soliton energy, if the energy less than the new critical value the destroying stops and the dipole decays into two stable monopole solitons which propagate in the opposite directions without distortion of their form.

In the model of partially ionized plasma the nonrotating dipole, tripole, quadrupole solitons and rotating dipole and quadrupole solitons were numerically found. The nonlinearity has essentially nonlocal character and is connected to heating of plasma. Nonrotating dipole solitons are stable if the soliton energy bounded between the two critical values, otherwise, if the energy less than bottom critical value, the soliton decays into two fundamental solitons, but if the energy exceeds upper critical value then the soliton fastly destroys.

Two-dimensional localized solutions in the form of the fundamental soliton, nonrotating dipole and quadrupole solitons, vortex solitons and azimuthons with two and four number of intensity peaks (rotating dipole and quadrupole solitons) were found in the model of Gross-Pitaevski equation with nonlocal nonlinear interaction. Nonlinearity corresponds to dipole-dipole interaction in the ultracold gases with anomalously large magnetic moments. The stability of the found structures was investigated.

Solutions in the form of three-dimensional vortex solitons were found numerically in the model of Gross-Pitaevski equation with dipole-dipole nonlocal interaction. The linear stability analysis of these structures was studied. The results of the done linear stability analysis were confirmed by direct numerical modelling of three-dimensional vortex dynamics. It was shown that the nonlocal nonlinearity has stabilizing effect.

In chapter 5, two-dimensional and three-dimensional solitary azimuthon nonlinear structures were numerically discovered in the model of the nonlinear Schrodinger equation with external parabolic potential. These structures represent the intermediate states between nonrotating multisolitons and radially symmetric vortex solitons – azimuthons. The found azimuthon soliton can be characterized (apart from the velocity) by four independent parameters: nonlinear frequency shift (or equivalently by the chemical potential in Bose-Einstein condensate or the amplitude), the rotating frequency, the topological charge and the numbers of peaks. The stability of the azimuthons was studied by numerical simulations. Possibility of generation of azimuthon soliton from fundamental soliton by phase imprinting method was demonstrated.

In chapter 6, two-dimensional vector states of the form soliton-vortex and vortex-vortex in two-component Bose-Einstein condensates were found by numerical simulations for the case of attraction between atoms of the same sort and for attraction or repulsion between atoms of the different sorts. The linear stability analysis the found vector states was done. It was shown that these two-component structures can be stable for the wide region of parameters.

A novel class of vector states in the form soliton-azimuthon and azimuthon-azimuthon pairs was suggested for two-component Bose-Einstein condensates with harmonic trapз and magnetic confinement. The corresponding numerical solutions were found. It was shown that radially nonsymmetric azimuthon part results in defomation of the soliton part which becomes radially nonsymmetric. The stability of the soliton-azimuthon and azimuthon-azimuthon vector states was invesigated.

Key words: nonlinearity, inverse scattering transform approach, soliton, multisoliton, vortex, plasma, azimuthon, zonal flow, instability.

List of publications of applicant

1*. Lashkin V. M. Stable three-dimensional modon soliton in plasmas / V. M. Lashkin // Phys. Rev. E. — 2017. — Vol. 96, no. 3. — P. 032211.

2*. Lashkin V. M. Influence of the mean flow on zonal flow generation / V. M. Lashkin // Phys. Plasmas. — 2008. — Vol. 15, no. 1. — P. 124502.

3*. Lashkin V. M. Stable three-dimensional spatially modulated vortex solitons in Bose-Einstein condensates / V. M. Lashkin // Phys. Rev. A. — 2008. — Vol. 78, no. 3. — P. 033603.

4*. Lashkin V. M. Two-dimensional multisolitons and azimuthons in Bose-Einstein condensates / V. M. Lashkin // Phys. Rev. A. — 2008. — Vol. 77, no. 2. — P. 025602.

5*. Lashkin V. M. Two-dimensional vortex ring-like and multisoliton nonlinear structures at the upper-hybrid resonance / V. M. Lashkin // Phys. Plasmas. — 2007. — Vol. 14, no. 10. — P. 102311.

6*. Lashkin V. M. N-soliton solutions and perturbation theory for the derivative nonlinear Schrödinger equation with nonvanishing boundary conditions / V. M. Lashkin // J. Phys. A: Math. and Theor. — 2007. — Vol. 40, no. 10. — P. 6119-6132.

7*. Lashkin V. M. Two-dimensional nonlocal vortices, multipole solitons and rotating multisolitons in dipolar Bose-Einstein condensates / V. M. Lashkin // Phys. Rev. A. — 2007. — Vol. 75, no. 4. — P. 043607.

8*. Lashkin V. M. Alfven soliton and emitted radiation in the presence of perturbations / V. M. Lashkin // Phys. Rev. E. — 2006. — Vol. 74, no. 1. — P. 016603.

9*. Lashkin V. M. Generation of solitons by a boxlike pulse in the derivative nonlinear Schrödinger equation with nonvanishing boundary conditions / V. M. Lashkin // Phys. Rev. E. — 2005. — Vol. 71, no. 6. — P. 066613.

10*. Lashkin V. M. Perturbation theory for dark solitons: Inverse scattering transform approach and radiative effects / V. M. Lashkin // Phys. Rev. A. — 2004. — Vol. 70, no. 6. — P. 066620.

11*. Lashkin V. M. Soliton of modified nonlinear Schrodinger equation with random perturbations / V. M. Lashkin // Phys. Rev. E. — 2004. — Vol. 69, no. 1. — P. 016611.

12*. Lashkin V. M. Azimuthal vortex clusters in Bose-Einstein condensates / V. M. Lashkin, E. A. Ostrovskaya, A. S. Desyatnikov, Yu. S. Kivshar // Phys. Rev. A. — 2012. — Vol. 85, no. 1. — P. 013620.

13*. Lashkin V. M. Vector azimuthons in two-component Bose-Einstein condensates / V. M. Lashkin, E. A. Ostrovskaya, A. S. Desyatnikov, Yu. S. Kivshar // Phys. Rev. A. — 2009. — Vol. 80, no. 1. — P. 013615.

14*. Lashkin V. M. Influence of zonal flows on unstable drift modes in ETG turbulence / V. M. Lashkin, Yu. A. Zaliznyak, A. I. Yakimenko // Plasma Phys. and Contr. Fusion. — 2009. — Vol. 51, no. 1. — P. 015008.

15*. Давыдова Т. А. Рассеяние электромагнитной волны на дрейфово-потенциальном вихре / Т. А. Давыдова, В. М. Лашкин // Физика плазмы. — 1993. — Т. 19, № 2. — С. 228-232.

16*. Давыдова Т. А. Коротковолновый ионно-циклотронный солитон / Т. А. Давыдова, В. М. Лашкин // Физика плазмы. — 1991. — Т. 17, № 8. — С. 976-979.

17*. Lashkin V. M. Stable three-dimensional vortex solitons in Bose-Einstein condensates with nonlocal dipole-dipole interaction / V. M. Lashkin, A. I. Yakimenko, Yu. A. Zaliznyak // Physica Scripta. — 2009. — Vol. 79, no. 3. — P. 035305.

18*. Zaliznyak Yu. A. Excitation of zonal flow by the modulational instability in electron temperature gradient driven turbulence / Yu. A. Zaliznyak, A. I. Yakimenko, V. M. Lashkin // J. Plasma Phys. — 2008. — Vol. 74, no. 3. — P. 381-389.

19*. Davydova T. A. Scattering of drift waves by drift vortices / T. A. Davydova, V. M. Lashkin // J. Plasma Phys. — 1997. — Vol. 58, no. 1. — P. 1-10.

20*. Davydova T. A. Drift-wave trapping by drift vortices / T. A. Davydova, V. M. Lashkin // J. Plasma Phys. — 1997. — Vol. 58, no. 1. — P. 11-18.

21*. Davydova T. A. Short-wavelength ion Bernstein nonlinear waves and solitons / T. A. Davydova, A. I. Fishchuk, V. M. Lashkin // J. Plasma Phys. — 1994. — Vol. 52, no. 3. — P. 353-364.

22*. Yakimenko A. I. Two-dimensional nonlinear vector states in Bose-Einstein condensates / A. I. Yakimenko, Yu. A. Zaliznyak, V. M. Lashkin // Phys. Rev. A. — 2009. — Vol.79, no. 4. — P. 043629.

23*. Lashkin V. M. Two-dimensional nonlocal multipole solitons / V. M. Lashkin, A. I. Yakimenko, O. O. Prikhodko // Phys. Lett. A. — 2007. — Vol. 366, no. 2. — P. 422-427.

24*. Yakimenko A. I. Dynamics of two-dimensional coherent structures in nonlocal nonlinear media / A. I. Yakimenko, V. M. Lashkin, O.O. Prikhodko // Phys. Rev. E. — 2006. — Vol. 73, no. 6. — P. 066605.

25*. Давыдова Т. А. Коротковолновые ионные бернстейновские нелинейные структуры / Т. А. Давыдова, В. М. Лашкин, Г. И. Фищук // УФЖ. — 1998. — Т. 45, № 5. — С. 540-545.

26*. Давыдова Т. А. Образование солитонов в неравновесной плазме при развитии пучковой неустойчивости / Т. А. Давыдова, В. М. Лашкин // УФЖ. — 1992. — Т. 37, № 12. — С. 1833-1838.

27*. Давыдова Т. А. Параметрическая ион-ионная неустойчивость пучкового типа в неоднородном ВЧ поле / Т. А. Давыдова, В. М. Лашкин // УФЖ. — 1992. — Т. 37, № 4. — С. 570-577.

28*. Lashkin V. M. Zonal flows and soliton generation in drift wave turbulence / V. M. Lashkin // IX International Conference "Electronics and Applied Physics", october 23-26, 2013, Kyiv, Ukraine .— Kyiv, 2013. — P. 111-112.

29*. Лашкін В. М. Двовимірні нелінійні локалізовані структури – азимутони / В. М. Лашкін, О. А. Островська, А. С. Десятніков, Ю. А. Ківшар // Українська конференція з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу, 25-26 жовтня, 2011, Київ, Україна: анотації доп.— Київ, 2011 — С. 46.

30*. Лашкін В. М. Вплив зональних течій на нестійкі дрейфові моди зумовлені градієнтом електронної температури / В. М. Лашкін, Ю. О. Залізняк, О. І. Якименко // Українська конференція з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу , 27-28 жовтня, 2009, Київ, Україна: анотації доп.— Київ, 2009 — С. 38.

31*. Lashkin V. M. Influence of zonal flows on unstable drift modes in ETG turbulence / V. M. Lashkin, Yu. A. Zaliznyak, A. I. Yakimenko // IV International Conference "Electronics and Applied Physics" , october 23-25, 2008, Kyiv, Ukraine .— Kyiv, 2008. — P. 143-144.

32*. Lashkin V. M. Excitation of zonal flow by the modulational instability in electron temperature gradient driven turbulence / V. M. Lashkin, Yu. A. Zaliznyak, A. I. Yakimenko // III International Conference "Electronics and Applied Physics", october 25-27, 2007, Kyiv, Ukraine .— Kyiv, 2007. — P. 134-135.

33*. Lashkin V. M. Stable two-dimensional soliton and vortex structures at the upper-hybrid resonance / V. M. Lashkin // 13 International Congress on Plasma Physics, may 22-26, 2006, Kiev, Ukraine.— Kiev: ICCP 2006. — P. 44.

34*. Yakimenko A. I. Stable multisolitary structures in plasmas with nonlocal nonlinearities / A. I. Yakimenko, V. M. Lashkin, O. O. Prikhodko // 13 International Congress on Plasma Physics, may 22-26, 2006, Kiev, Ukraine.— Kiev: ICCP 2006. — P. 66.

35*. Lashkin V. M. Stable two-dimensional soliton and vortex structures at the upper-hybrid resonance / V. M. Lashkin // International Workshop "Nonlinear Physics and Mathematics", may 25-27, 2006, Kiev, Ukraine. — Kiev: ICCP 2006. — P. 21.

36*. Lashkin V. M. Alfven solitons in a plasma with fluctuating density / V. M. Lashkin // International Conference on Physics of Low Temperature Plasma , may 11-15, 2003, Kiev, Ukraine .— Kiev, 2003. — P. 11-18-97r.

37*. Davydova T. A. Scattering of drift waves by drift vortices / T. A. Davydova, V. M. Lashkin // International Conference "Physics in Ukraine" ,june 22-27, 1993: Contributed papers "Plasma Physics".— Kiev, 1993. — P. 73-76.

38*. Davydova T. A. Scattering of electromagnetic wave by drift vortices / T. A. Davydova, V. M. Lashkin // International Workshop on turbulence and nonlinear processes in plasmas, april 13-29, 1992, Kiev, Ukraine .— Kiev, 1992. — P. 31-34.

Зміст

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

НРШ — нелінійне рівняння Шредингера

ДНРШ — деривативне нелінійне рівняння Шредингера

МЗЗР — метод зворотньої задачі розсіювання

БЕК — Бозе-Ейнштейнівський конденсат

ВСТУП

Актуальність теми. Дослідження поширення нелінійних хвиль великої амплітуди в нелінійних диспергуючих середовищах почало інтенсивно розвиватися наприкінці XX і початку XXI століття. Це, насамперед, зв'язане, з теоретичним передбаченням, а потім й експериментальним виявленням стійких нелінійних структур хвильової природи, які зберігають свою форму протягом тривалого часу навіть при впливі зовнішніх збурень. Еволюція початкового збурення у нелінійному диспергуючому середовищі відбувається під двома конкуруючими факторами – нелінійності та дисперсії. Нелінійність, тобто залежність поведінки хвильового пакета від його амплітуди, приводить до генерації гармонік з великими хвильовими числами, що завершується перекиданням хвилі або колапсом. З іншого боку, дисперсія, тобто залежність групової швидкості від хвильового числа, веде до розпливанню хвильового пакета через перемішування фаз утворюючих його гармонік. Між нелінійними й дисперсійними ефектами може встановлюватися рівновага, що й приводить до виникнення локалізованих нелінійних структур – солітонів. При цьому, фізичні механізми, відповідальні за дисперсію (дифракцію) і нелінійні ефекти можуть бути дуже різними. Актуальність теми дисертації обумовлена тим, що розглянуті в ній математичні моделі, засновані на балансі дисперсії (розпливання) і нелінійності (укручення), мають досить загальний характер і застосовні до різних областей природознавства: протягом більш ніж 40 років концепція солітонів була суттєво розширена, і проникнула в найрізноманітніші галузі науки, від фізики, чистої й прикладної математики до хімії і біології. Під терміном солітон (у загальному значенні, нелінійна локалізована структура) далі ми будемо розуміти локалізовані в просторі нелінійні утвори, не обов'язково одновимірні, як прийнято в математичній фізиці.

Уперше термін 'солітон' був уведений Забускі та Крускалом в 1965 році. При цьому, солітоном (відокремленою хвилею) було названо чисельно знайдений локалізований розв'язок нелінійного рівняння Кортевега - де Фриза, яке описує збудження з кінцевою енергією, та має рядом характерних властивостей: при поширенні нелінійної відокремленої хвилі вона зберігає свою форму; при взаємодії декількох солітонів відбувається їхнє пружне розсіювання, так що зберігаються як їхнє число, так і форма солітонів. Потім для знаходження відокремлених хвиль із такими властивостями був запропонований аналітичний метод, що одержав назву 'метод зворотньої задачі розсіювання', що й став потім одним з найголовніших досягнень математичної фізики другої половини XX століття. Моделі із пружною взаємодією солітонів є повністю інтегровними (у сенсі класичної кінцевомірної гамільтонової динаміки) гамільтоновими системами, узагальненими на випадок нескінченного числа змінних, що допускають нескінченне число інтегралів руху, що зберігаються та перебувають в інволюції (гамільтонова скобка Пуассона між ними дорівнює нулю). Серед найбільш важливих інтегровних моделей, що описують реальні фізичні системи, та допускають солітонні розв'язки із пружною взаємодією, можна відзначити, крім рівняння Кортевега - де Фриза, нелінійне рівняння Шредингера, рівняння sine-Gordon, Ландау-Ліфшица, Кадомцева-Петвіашвілі та інші. Специфічні риси еволюції довільного початкового збурення в рамках відповідних моделей зв'язані, насамперед, з їхньою повною интегровністю. Интегровність, однак, порушується при включенні додаткових фізичних ефектів, вплив яких може бути враховано за допомогою теорії збурень для систем, близьких до інтегровних. Тому актуальним є дослідження впливу збурень у моделях, що допускають повну інтегровність. Особливо актуальним, при цьому, стає знаходження еволюційних рівнянь, що описують динаміку даних розсіювання (інакше, спектральних даних). Зокрема, це стосується розвитку теорії збурень для темних солітонів (провалу на однорідному фоні), і дослідження впливу на солітони несолітонних (випромінювальних) ступенів свободи.

Інтегровні моделі із пружною взаємодією солітонів є, як правило, одновимірними. У неодномірному випадку відокремлені нелінійні структури втрачають (за рідкісним винятком) властивість пружної взаємодії, і, більше того, часто виявляються нестійкими: за рахунок порушення балансу між дисперсією й нелінійністю вони або розпливаються, або колапсують.

Збільшення розмірності простору сприяє нестійкості й колапсу. Тому актуальним є дослідження фізичних моделей, в яких можливі стійки неодновимірні нелінійні структури, та знаходження умов при яких неодновимірні солітони стають стійкими, або нестійкість значно послаблена.

Істотним стимулом для розвитку теорії солітонів послужило експериментальне спостереження й вивчення нелінійних структур в плазмі, нелінійних оптичних середовищах та Бозе-Ейнштейнівських конденсатах.

Солітони на різних плазмових гілках коливань експериментально виявлені як у лабораторній, так і космічній плазмі. Тому актуальним є теоретичне дослідження та знаходження нелінійних структур і дослідження їх стійкості поблизу верхньогібридного, іонно-циклотронного й альфвенівського резонансів в плазмі, а також в плазмі з електронним пучком (тобто додатковим фактором нерівноважності), що, з однієї сторони дозволяє визначити вплив нелінійних структур на плазму з магнітним утриманням у проблемі керованого термоядерного синтезу, а з іншого боку, пояснювати експериментальні результати, отримані для космічної плазми іоносфери, магнітосфери й плазми сонячного вітру.

Солітони в оптичних волокнах вже знаходять практичне застосування, представляючи собою біти інформації в проектованих надшвидкісних солітонних лініях зв'язку. Актуальним тому є дослідження зовнішніх ефектів (перед усім шумового впливу на поширення солітонного імпульсу, наявність зовнішнього накачування, дисипації та ін.) на оптичні солітони.

З моменту перших експериментальних і теоретичних робіт, пов'язаних з Бозе-Ейнштейнівськими конденсатами, стало зрозумілим, що саме нелінійні відокремлені структури визначають поведінку конденсатів в утримуючих магнітних пастках. Тому актуальним є теоретичне дослідження солітонних структур в Бозе-Ейнштейнівських конденсатах, реалізованих у різних умовах – форми утримуючого потенціалу, наявності нелокальної диполь-дипольної взаємодії та присутності декількох сортів атомів у конденсаті.

Особливо актуальним є також пошук і теоретичне дослідження нелінійних когерентних структур, відмінних від тих, що раніше розумілися під солітонами - так званих азимутонних солітонів (принципово неодновимірних), що несуть ненульовий кутовий момент, і таким чином нагадують вихорові солітони. Відповідні нелінійні моделі, містять у собі плазму, нелінійні оптичні середовища (де нещодавно вже експериментально виявлено існування таких нелінійних структур) та Бозе-Ейнштейнівські конденсати.

Таким чином, актуальність теми дисертації обумовлена настійним вивченням нелінійних ефектів, пов'язаних з виникненням нелінійних когерентних структур, що утворюються в нелінійних середовищах с дисперсією – повністю або частково іонизованій плазмі, оптичних волокнах та Бозе-Ейнштейнівських конденсатах.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у відділі теорії плазми Інституту ядерних досліджень НАН України, як частина науково-дослідних робіт з держбюджетних тем "Турбулентність та процеси самоорганізації плазми"(№ держреєстрації 01.9.10.033642), "Когерентні та стохастичні процеси в інтенсивних полях у плазмі"(№ держреєстрації 0197U016412), "Колективні процеси в плазмі при розповсюдженні, розсіянні та поглинанні електромагнітних хвиль"(№ держреєстрації 0201U001584), "Динамічні та турбулентні процеси в магнітоактивній плазмі, стимульовані електромагнітними полями"(№ держреєстрації 0104U003880), "Дослідження нелінійних явищ у відкритих плазмових системах під дією високочастотних електромагнітних полів"(№ держреєстрації 0102U005197), "Нелінійні та стохастичні процеси взаємодії хвиль і частинок у нерівноважних відкритих плазмових системах"(№ держреєстрації 0106U012078), "Дослідження нелінійних динамічних процесів і стаціонарних структур у плазмі "(№ держреєстрації 0112U000931). Здобувач був відповідальним виконавцем цих тем. Частина результатів, що ввійшли в дисертацію, отримана при виконанні держбюджетної теми "Теоретичне та експериментальне моделювання в густій плазмі індукційних розрядів фізичних процесів, що призводять до утворення транспортних бар'єрів та L-H переходів у плазмі термоядерних пристроїв"(№ держреєстрації 0107U005719) і держбюджетної теми "Моделювання низькочастотної хвильової активності та зональних течій в високотемпературній плазмі "(№ держреєстрації 0112U002742) керівником яких був здобувач.

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є дослідження стійких локалізованих структур у нелінійних середовищах з дисперсією, таких як повністю або частково іонизована плазма, Бозе-Ейнштейнівські конденсати, оптичні волокна. У дисертації вирішуються наступні задачі, пов'язані з досягненням цілі:

- Побудувати теорію збурень для темних солітонів, що грунтується на методі зворотньої задачі розсіювання, яка дозволяє врахувати ефекти, пов'язані з випромінюванням і викривленням форми солітонів.
- Дослідити вплив дисипації (кінцевої провідності плазми, нелінійного загасання Ландау) на альфвенівські солітони в плазмі.
- Знайти точні N-солітонні розв'язки у моделі деривативного нелінійного рівняння Шредингера, що описує розповсюдження нелінійних альфвенівських хвиль під кутом до зовнішнього магнітного поля.
- Побудувати двовимірну модель взаємодії верхньогібридних плазмових хвиль з низькочастотними магнітозвуковими хвилями та знайти нелінійні структури з аналізом їх стійкості.
- Дослідити нелінійні короткохвильові структури у плазмі поблизу іонно-циклотронного резонансу.
- Теоретично пояснити виникнення нелінійних періодичних хвиль у плазмі з електронним пучком.
- Дослідити взаємодію двовимірних плазмових дипольних вихорових солітонів з дрейфовими хвилями та електромагнітною хвилею.
- Побудувати тривимірну модель нелінійних дрейфових хвиль та знайти тривимірні модонні структури.

- Дослідити можливість генерації зональних течій у плазмі при наявності середніх течій та градієнтів температур.

- Дослідити ефекти нелокальної нелінійності у фізичних моделях, що описують частково іонізовану плазму та Бозе-Ейнштейнівські конденсати.

- Знайти нелінійні структури, які є проміжними станами між мультисолітонами й радіально симетричними вихоровими солітонами.

- Дослідити двокомпонентні векторні нелінійні структури в Бозе-Ейнштейнівських конденсатах з декількома сортами атомів.

Об'єктом дослідження є нелінійні когерентні структури, що виникають у нелінійних диспергуючих середовищах з балансом дисперсії й нелінійності – плазма, Бозе-Ейнштейнівські конденсати,світловодні волокна в нелінійній оптиці.

Предметом дослідження є аналітичне й чисельне з'ясування балансу між дисперсією та нелінійністю у середовищах з різними видами нелінійності.

Методи дослідження використовують відомі аналітичні й чисельні методи: метод зворотньої задачі розсіювання, методи усереднення для стохастичних рівнянь, чисельні методи лінійної алгебри.

Наукова новизна отриманих результатів.

1. Вперше розроблена теорія збурень для темних солітонів дефокусуючого нелінійного рівняння Шредингера, заснована на методі зворотньої задачі розсіювання, що дозволяє врахувати радіаційні ефекти.

2. Вперше передбачено ефект безпорогового виникнення темних солітонів під дією зовнішніх збурень.

3. Вперше знайдено N-солітонні розв'язки деривативного нелінійного рівняння Шредингера з неспадаючими граничними умовами, які описують нелінійні альфвенівські хвилі, що поширюються під кутом до

зовнішнього магнітного поля та показана можливість одночасної генерації брізерних, темних та світлих солітонів.

4. Вперше розроблено двовимірну теорію нелінійної взаємодії верхньогібридних плазмових хвиль із кінетичними магнітозвуковими хвилями. Строго доведено відсутність колапсу в даній моделі й знайдено двовимірні розв'язки у вигляді солітонів і вихорів.

5. Вперше запропоновано еволюційне нелінійне рівняння, що описує динаміку нелінійних короткохвильових іонно-циклотронних хвиль в плазмі із зворотньою залежністю частоти від хвильового числа та знайдено аналітичні розв'язки у вигляді солітонів та нелінійних періодичних хвиль.

6. Вперше у плазмі з електронним пучком аналітично знайдено нелінійні періодичні структури та встановлена їх відповідність з результатами експериментів.

7. Вперше досліджено взаємодію двовимірних дрейфових солітонів в плазмі з дрейфовими хвилями та з електромагнітною хвилею та передбачено захоплення дрейфових хвиль вихором.

8. Вперше побудовано тривимірну модель взаємодіючих дрейфових та іонно-звукових хвиль та знадено аналітичні тривимірні модонні розв'язки.

9. Вперше показано стабілізуючий вплив середньої течії й просторової неоднорідності течії на генерацію зональних течій.

10. Вперше виявлено умови стабілізації нестійкості дрейфових хвиль при наявності стохастичної зональної течії.

11. Вперше знайдено двовимірні необертові дипольні, трипольні й квадрупольні солітони та обертові мультипольні структури в моделі частково іонізованій плазмі із зіткненнями та проаналізована їхня стійкість.

12. Вперше знайдено двовимірні мультисолітонні й вихорові структури в моделі Бозе-Ейнштейнівського конденсату з нелокальною нелінійністю та виявлено умови їх стійкості.

13. Вперше чисельно відкрито двовимірні та тривимірні нелінійні структури – азимутони, які є проміжними між мультисолітонами і радіально симетричними вихорами.

14. Вперше знайдено векторні стани солітон-азимутон, азимутон-азимутон у двокомпонентних Бозе-Ейнштейнівських конденсатах і показана можливість їх стійкості в певному діапазоні параметрів.

Практичне значення отриманих результатів. Отримані в дисертації результати можуть бути теоретичною основою для практичного пояснення експериментально виявлених нелінійних хвиль великої амплітуди на альфвенівських, верхньогібридних й іонно-циклотронних гілках коливань плазми в іоносфері, магнітосфері, плазми сонячного вітру та плазмово-пучкових системах, пояснення аномального переносу тепла на дрейфових гілках коливань в пристроях з магнітним утриманням плазми, солітонних структур в БЕК, а також для практичних завдань, що визначають параметри відокремленого лазерного імпульсу в оптичних середовищах.

Особистий внесок здобувача. Усі викладені в дисертації оригінальні результати отримані автором дисертації особисто. Роботи [1–11] виконані здобувачем без співавторів. В роботах [12, 13] автору дисертації належить постановка задач, введення концепції $(-k, l)$ азимутонної структури та векторних азимутонних станів, проведення варіаційного аналізу, розробка алгоритмів та всі чисельні розрахунки. В роботах [14–16] автору належить постановка задач, отримання нелінійних рівнянь для іонно-циклотронних хвиль та аналітичні результати для світлих солітонів. В роботі [17] автору належить постановка задачі, отримання основних рівнянь та всі аналітичні результати з застосуванням наближення Бурре для відповідного стохастичного рівняння. В роботі [18] автору належить постановка задачі, формулювання моделі та отримання рівнянь, що описують взаємодію дрейфової хвилі з зональною течією. В роботах [19–21] автору належить постановка задач, отримання перерізів розсіяння в борновському наближення, знаходження поля захоплених дрейфових мод. В роботах [22, 23] автору належить участь в постановки задач, отримання виразів для кноїдальних хвиль, аналіз резонансного випадку. В роботах [24, 25] автору належить участь в постановки задач, проведення частини варіаційного аналізу. В роботах [26, 27] автор розробив чисельні алгорітми та отримав чисельні результати для еволюції мультисолітонів.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися на наступних наукових конференціях: XX International Conference on Phenomena in Ionized Gases (Pisa, Italy, 1991); 6 Всесоюзна конференція по взаємодії електромагнітних випромінювань із плазмою (Душанбе, СРСР, 1991); International Workshop on turbulence and nonlinear processes in plasmas (Kiev, Ukraine, 1992); International Conference "Physics in Ukraine"(Kiev, Ukraine, 1993); 22 European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics (United Kingdom, 1995); 23 European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics (Kiev, Ukraine, 1996); International Conference on Physics of Low Temperature Plasma (Kiev, Ukraine, 2003); 13 International Congress on Plasma Physics (Kiev, Ukraine, 2006); International Workshop "Nonlinear Physics and Mathematics"(Kiev, Ukraine, 2006); III International Conference "Electronics and Applied Physics"(Kyiv, Ukraine, 2007); IV International Conference "Electronics and Applied Physics"(Kyiv, Ukraine, 2008); IX International Conference "Electronics and Applied Physics"(Kyiv, Ukraine, 2013) Українська конференція з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу (Київ, Україна, 2009), Українська конференція з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу (Київ, Україна, 2011), а також на щорічних наукових конференціях Інституту ядерних досліджень НАНУ України, і семінарах Національного університету Північної Кароліни (NSCU, Raleigh, USA, 2000), Центру нелінійної фізики Австралійського національного університету (ANU, Canberra, Australia, 2009, 2010).

Публікації. Основні результати дисертації представлені в 27 статтях опублікованих у провідних фахових журналах [1-27], а також в трудах конференцій [28–38].

Структура дисертації. Дисертація складається із аннотації, переліку умовних позначень, вступу, шести розділів основної частини з 92 рисунками, висновків, переліку посилань з 305 найменувань та додатків. Кожний розділ основної частини закінчується висновками, у яких сформульовані основні результати, отримані в цьому розділі. Повний об'єм дисертації становить 356 сторінок, перелік посилань займає 32 сторінки.

РОЗДІЛ 1

Використання методу зворотньої задачі розсіювання в солітонній теорії збурень

Зміст цього розділу відображено в роботах [6, 8–11, 36].

Одним з найбільш значних досягнень математичної фізики в кінці 20 століття була розробка методу зворотньої задачі розсіювання (далі МЗЗР), за допомогою якого задача з початковими та граничними умовами для деяких нелінійних рівнянь у частинних похідних (з яких найбільш відомі своїми фізичними застосуваннями рівняння Кортевега-де Фриза, нелінійне рівняння Шредингера, рівняння sine-Gordon) можна розв'язати точно, послідовно застосовуючи тільки лінійні операції [39–47]. Самі рівняння прийнято називати повністю інтегровними. Як правило, повністю інтегровні рівняння є одновимірними, тобто, крім часу, містять тільки одну просторову координату, хоча відомі й двовимірні інтегровні моделі. У зв'язку з тим підкреслемо, що МЗЗР дозволяє вирішувати відповідні рівняння саме при довільній початковій умові, тоді як окремі часткові розв'язки (наприклад N-солітонні) повністю інтегровних рівнянь можуть бути знайдені, взагалі кажучи, за допомогою інших методів (метод Хіроти, алгеброгеометричний метод).

Формально схема розв'язку інтегровних рівнянь методом зворотньої задачі розсіювання може бути представлена в такий спосіб

1. *Пряма задача.* По відомій початковій умові $u(x, 0)$ знайти спектральні дані ("дані розсіювання") у початковий момент часу: безперервні $a(k, 0)$, $b(k, 0)$, де k пробігає всю дійсну вісь і дискретні $k_j(0)$, $\gamma_j(0)$, що представляють собою кінцевий набір комплексних чисел.

2. *Часова еволюція.* Знайти часову еволюцію знайдених спектральних даних, тобто $a(k, t)$, $b(k, t)$, $k_j(t)$, $\gamma_j(t)$, яка, як правило, виявляється дуже простою.

3. *Зворотня задача.* Знаючи спектральні дані як функції часу, побуду-

вати розв'язок $u(x,t)$.

Це перетворення абсолютно аналогічно перетворенню Фур'є в лінійних задачах. Дійсно, якщо на першому кроці залишити одну безперервну функцію (скажемо, $a(k)$), а два наступні кроки залишити без змін, то вся схема дослівно відтворює метод розв'язку лінійних рівнянь перетворенням Фур'є, де $a(k) \equiv a(k,0)$ є фур'є-образ початкової умови $u(x,0)$. Із цієї причини МЗЗР іноді називають нелінійним перетворенням Фур'є. МЗЗР відрізняється від перетворення Фур'є двома найбільш істотними особливостями. По-перше, базис не фіксований (подібно $\exp(\pm ikx)$), а змінюється залежно від шуканого розв'язку. По-друге, пряма задача зводиться до знаходження власних значень деякого лінійного оператора, асоційованого з даним нелінійним рівнянням, що й містить початкову умову $u(x,0)$. При цьому, спектр оператора може містити як неперервну (дійсні k), так і дискретну частини (кінцеве число ізольованих комплексних значень k_j).

Кожне дискретне власне значення пов'язане з локалізованим розв'язком, що відповідають солітону. Солітони зберігають форму, тому що власні значення не залежать від часу. Більше того, інваріантність власних значень приводить до важливої властивості: два або більше число солітонів зберігають форму навіть після зіткнень. Крім того, при використанні даних розсіювання можна розкласти поле будь-якого початкового розподілу на набір нелінійних мод, аналогічних лінійним модам Фур'є. У такому розкладанні при певних початкових умовах домінують солітонні моди (хоча можуть і зовсім відсутні) і асимптотично початковий розподіл перетвориться в набір солітонів, пов'язаних з дискретними власними значеннями, тоді як перехід частини (або всієї в відсутність солітонів) енергії відбувається у випромінювальні моди пов'язані з безперервним спектром власних значень.

Наявність додаткових членів в інтегрованих рівняннях порушує повну інтегровність. При цьому пряма задача все ще може бути вирішена лінійним способом, однак стає неможливим визначення часової еволюції спектральних даних, що робить безглуздим і розв'язок зворотньої задачі. У фізичних застосуваннях додаткові доданки часто можуть розглядатися як мале збурення. Використання методу зворотньої задачі в теорії збурень становить предмет даного розділу.

1.1 Теорія збурень для темних солітонів

Одна із класичних математичних моделей, що описують розповсюдження солітонів у нелінійних середовищах з дисперсією, заснована на нелінійному рівнянні Шредингера (НРШ) [41, 42, 44–47]

$$i\partial_t u + \alpha\partial_x^2 u + \beta|u|^2 u = 0. \tag{1.1}$$

Як добре відомо, НРШ є повністю інтегровним за допомогою методу зворотньої задачі розсіювання (МЗЗР) як для спадаючих $|u| \to 0$ на нескінченності $|x| \to \infty$, так і для неспадаючих $|u| \to \rho$ граничних умов. В обох випадках відомі явні N–солітонні розв'язки [48]. Темні солітони відповідають неспадаючим граничним умовам і позитивному $\alpha > 0$ (негативному $\alpha < 0$) знаку дисперсійного доданка з негативним $\beta < 0$ (позитивним $\beta > 0$) знаком нелінійності. Вони проявляються як провали інтенсивності стосовно постійного ненульового фону [49]. Для визначеності далі вважаємо $\alpha = 1$ і $\beta = -2$, а граничні умови записуємо у вигляді

$$u(x,0) = \begin{cases} \rho_0, & \text{при} \quad x \to -\infty \\ \rho_0 e^{i\theta}, & \text{при} \quad x \to +\infty \end{cases} \tag{1.2}$$

Рівняння (1.1) має розв'язок у вигляді плоскої монохроматичної хвилі

$$u = \rho_0 \exp(-2i\rho_0^2 t), \tag{1.3}$$

яка є стійкою стосовно слабкої модуляції. Темний солітон можна розглядати як локалізоване нелінійне збурення на фоні цієї хвилі. Відповідний розв'язок має вигляд

$$u = \rho_0 \frac{1 + \exp[i\theta + \nu(x - vt - x_0)]}{1 + \exp[\nu(x - vt - x_0)]} e^{-2i\rho_0^2 t}, \tag{1.4}$$

де $\nu = 2\rho_0 \sin(\theta/2)$ має сенс характерної зворотньої ширини солітона, і

$v = -2\rho_0 \cos(\theta/2)$ - швидкість солітона.

У фізичних додатках НРШ часто містить додаткові доданки, відповідні до зовнішніх збурень. Ці доданки порушують інтегровність, але, часто будучи малими, можуть ураховуватися за допомогою теорії збурень. Найбільш повний метод урахування збурень, що повністю використовує поділ дискретних та неперервних (тобто солітонних і радіаційних) ступенів свободи незбуреного НРШ, базується на МЗЗР. У той час як заснована на МЗЗР теорія збурень для світлих солітонів НРШ була розвинена досить давно [50–52], і динаміка солітонів, індукована збуренням, що включає радіаційні й нетривіальні багатосолітонні ефекти, добре зрозуміла [53–56], аналогічна теорія для темних солітонів була відсутня. Це пояснюється тем фактом, що формалізм методу зворотньої задачі для незбуреного НРШ із неспадаючими граничними умовами виявляється набагато більш складним. Замість цього, для розв'язку окремих завдань для темних солітонів зі збуреннями застосовувався простий метод, заснований на інтегралах руху [57, 58], що й дозволяє одержати еволюційне адіабатичне рівняння для солітонного параметра (амплітуди або швидкості). Цей метод, однак, може бути застосовано тільки для одного солітона і тільки в нижчему порядку теорії збурень і припускає незмінну форму солітона з повільно змінюючимося параметрами. Він не може описати дію збурення на N–солітонний розв'язок або врахувати ефекти вищих порядків – виникнення випромінювання, що випускається солітоном під дією збурення й викривлення форми солітона. Відзначимо, що спроба розвити теорію збурень для темних солітонів за допомогою МЗЗР була почата в [59]. Автори [59] використовували так званий 'прямий' варіант теорії збурень із МЗЗР і ґрунтувалися на припущенні, що фаза темного солітона в присутності збурень фіксована граничними умовами й не змінюється. Як було відзначено в роботі [49], це припущення, загалом кажучи, помилково. В результаті, рівняння, отримані в [59] мають надзвичайно вузьку область застосовності. Зокрема, теорія представлена в [59], не може відтворити адіабатичні рівняння, отримані раніше [57, 58] простим, але надійним методом, заснованим на інтегралах руху. Крім того в [59] зовсім не враховується поле випромінювання, що випускається солітоном.

У даному підрозділі на основі МЗЗР розвинена теорія збурень для опису поширення темних солітонів у присутності зовнішніх збурень. Для визначеності будемо розглядати оптичні темні солітони (просторові та часові) [60], хоча всі результати можуть бути перенесені на будь-яку фізичну модель, описувану НРШ із неспадаючими граничними умовами та різними знаками дисперсійного доданка й нелінійності.

Часовий оптичний солітон формується усередині волоконного світловода внаслідок балансу між дисперсією групової швидкості й нелінійністю і являє собою імпульс кінцевої тривалості. У цьому випадку в рівнянні (1.1) u огинаюча імпульсу на несучої частоти, x означає час у системі відліку, пов'язаної з імпульсом, що рухається, а t відповідає довжині поширення уздовж світловода (на відміну від традиційних x, t позначень). Перехід до відповідних фізичних змінних здійснюється заміною

$$u \to u\sqrt{\omega_0 n_2 t_0 / c}, \quad x \to (x - t/v_g')/x_0, \quad t \to t/t_0, \tag{1.5}$$

де ω_0 частота-носій, n_2 індекс Керра, v_g групова швидкість, пов'язана з імпульсом, x_0 часовий масштаб (часто обираний рівним тривалості вхідного імпульсу), $t_0 = x_0^2 v_g''$ дисперсійна довжина. При поширенні імпульсу у світловоді робоча довжина хвилі звичайно вибирається поблизу довжини хвилі нульової дисперсії (близько 1.5 Мкм). У результаті абсолютна величина дисперсії групової швидкості настільки мала, що може бути скомпенсована слабкою нелінійністю, викликаної ефектом Керра. Тому нелінійні ефекти у світловодах завжди слабкі й поширення імпульсу дуже добре описується кубічним НРШ (1.1). Експериментально часові темні солітони були знайдені в 1987 р. [61] (світлі в 1980 р. [62]) і з того часу швидкий прогрес перетворив їх у реальні кандидати для конструювання солітонних оптичних ліній зв'язку. В 2002 р. в Австралії була запущена перша комерційна солітонна лінія зв'язку довжиною 3875 км. У режимі з 160 частотними каналами швидкість передачі інформації в кожному з каналів становила 10 Гбіт/с, так що загальна швидкість передачі досягала 1,6 Тбіт/с.

Просторовий оптичний солітон являє собою пучок безперервного випромінювання й формується в результаті балансу між дифракцією й нелінійною зміною показника заломлення. У цьому випадку в рівнянні (1.1) t означає довжину поширення уздовж світловода, а x відповідає поперечної координаті. Експериментально просторові темні солітони уперше спостерігалися в 1990 р. [63].

Розповсюдження темних солітонів у присутності зовнішніх збурень описується збуреним НРШ

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u - 2|u|^2 u + p[u, u^*] = 0 \tag{1.6}$$

де збуренню відповідає доданок $p[u, u^*]$, і використовуються відповідні безрозмірні змінні . Як вказувалося в [58], необхідно розрізняти випадки спадаючих та неспадаючих при $|x| \to \infty$ збурень. Ці випадки відповідають постійному й змінному (по t) фону. У першому випадку, тобто коли $p[u, u^*] \to 0$ при $|x| \to \infty$, збурення не змінює фон. Тоді $\rho_0 = \mathrm{Const}$ (постійний фон) і вводячи нову функцію $\psi(x, t)$ співвідношенням

$$u(x, t) = e^{-2i\rho_0^2 t}\psi(x, t), \tag{1.7}$$

можна перетворити рівняння (1.6) в

$$i\partial_t \psi + \partial_x^2 \psi - 2(|\psi|^2 - \rho_0^2)\psi + p[\psi, \psi^*] = 0 \tag{1.8}$$

с граничними умовами

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} \rho_0, & \text{при} \quad x \to -\infty \\ \rho_0 e^{i\theta}, & \text{при} \quad x \to +\infty \end{cases} \tag{1.9}$$

У другому випадку збурення p не зникає при $|x| \to \infty$ та впливає на фон. Амплітуда фона ρ_0 більше не є константою. Тоді підстановка $u(x, t) = \psi(x, t) \exp(-2i \int_0^t \rho_0(\tau))\, d\tau$ трансформує (1.6) у рівняння (1.8) з ρ_0 залежним від t. Однак, як відзначалося в [58], у багатьох практично важливих випадках змінного фона, рівняння (1.6) може бути перетворене в (1.8) після підходящої заміни змінних і якимось ефективним $\rho_0 = \mathrm{Const}$.

1.1.1 Пряма й зворотня задача розсіювання для дефокусуючого нелінійного рівняння Шредингера

У цьому підрозділі дамо огляд теорії зворотнього розсіювання для спектральної задачі Захарова-Шабата (маючи на увазі фіксацію позначень та термінології), що відповідає дефокусуючому НРШ із неспадаючими граничними умовами (1.9) слідуючи [45]. При відсутності збурень рівняння (1.8) з $p[\psi,\psi^*]=0$ може бути представлено як умова сумісності

$$\partial_t \mathbf{U} - \partial_x \mathbf{V} + [\mathbf{U},\mathbf{V}] = 0, \tag{1.10}$$

двох лінійних матричних рівнянь [48] (система Захарова-Шабата):

$$\partial_x \mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{M}, \tag{1.11}$$

$$\partial_t \mathbf{M} = \mathbf{V}\mathbf{M}, \tag{1.12}$$

де λ спектральний (загалом кажучи, комплексний) параметр та $\mathbf{V} = -\lambda\mathbf{U} + i\mathbf{L}$,

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -i\lambda/2 & \psi^* \\ \psi & i\lambda/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} |\psi|^2 - \rho_0^2 & -\partial_x\psi^* \\ \partial_x\psi & \rho_0^2 - |\psi|^2 \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Для матриці $\mathbf{U}$ граничні умови (1.9) можуть бути записані у вигляді $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \mathbf{U}(x,\lambda) = \mathbf{U}_\pm(\lambda)$, де

$$\mathbf{U}_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i\lambda & a \\ a & i\lambda \end{pmatrix}, \mathbf{U}_+ = e^{-i\theta\sigma_3/2}\mathbf{U}_- e^{i\theta\sigma_3/2}, \tag{1.14}$$

і введене позначення $a = 2\rho_0$. Тут і далі σ_1, σ_2, σ_3 означають матриці Паулі

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Неперервний спектр $\mathbb{R}_a$ спектральної задачі (1.11) складається з дійсних λ задовольняючих умові $\lambda^2 \geq a^2$. Для $\lambda \in \mathbb{R}_a$ позначимо $\mathbf{M}^\pm(x,\lambda)$ 2×2 матричні розв'язки задачі (1.11), що задовольняють граничним умовам

$\mathbf{M}^{\pm} \to \mathbf{E}^{\pm}(x,\lambda)$ при $x \to \pm\infty$ (функції Йоста) . З (1.11) випливає, що

$$\partial_x \mathbf{E}^{\pm} = \mathbf{U}_{\pm}\mathbf{E}^{\pm}. \tag{1.15}$$

Матриця $\mathbf{E}^{-}(x,\lambda)$ береться у вигляді

$$\mathbf{E}^{-}(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & i(k-\lambda)/a \\ i(\lambda-k)/a & 1 \end{pmatrix} e^{-ikx\sigma_3/2}, \tag{1.16}$$

де $k(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - a^2}$ з $\operatorname{sign} k(\lambda) = \operatorname{sign}\lambda$ і $\mathbf{E}^{+} = \exp(-i\theta\sigma_3/2)\mathbf{E}^{-}$. Аналітичні властивості функцій Йоста формулюються на рімановій поверхні спектрального параметра λ, обумовленої функцією $k(\lambda)$. Рiманова поверхня $\mathcal{S}$ складає із двох листів $\mathcal{S}^{+}$ і $\mathcal{S}^{-}$ комплексної λ-площини з розрізами на дійсній осі від $-\infty$ до a і від a до ∞. Зручно ввести заміну змінних

$$\lambda(\zeta) = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{a^2}{\zeta}\right), \quad k(\zeta) = \frac{1}{2}\left(\zeta - \frac{a^2}{\zeta}\right), \tag{1.17}$$

яка переводить листи $\mathcal{S}^{\pm}$ в $\operatorname{Im}\zeta > 0$ і $\operatorname{Im}\zeta < 0$ відповідно, а неперервний спектр $\mathbb{R}_a$ у дійсну вісь $\mathbb{R}$ комплексної ζ-площини. При цьому

$$\mathbf{E}^{-}(x,\zeta) = \begin{pmatrix} 1 & -ia/\zeta \\ ia/\zeta & 1 \end{pmatrix} e^{-ik(\zeta)\sigma_3 x/2} \tag{1.18}$$

Матричні розв'язки $\mathbf{M}^{\pm}(x,\zeta)$ можна представити в інтегральній формі

$$\mathbf{M}^{\pm}(x,\zeta) = \mathbf{E}^{\pm}(x,\zeta) \pm \int_x^{\pm\infty} \mathbf{\Gamma}^{\pm}(x,y)\mathbf{E}^{\pm}(y,\zeta)\,dy. \tag{1.19}$$

Потенціал $\psi(x)$ виражається через компонент ядра $\mathbf{\Gamma}^{-}$ як

$$\psi(x) = \rho_0 + 2\Gamma^{-}_{21}(x,x). \tag{1.20}$$

Фундаметальні розв'язки $\mathbf{M}^{+}(x,\zeta)$ і $\mathbf{M}^{-}(x,\zeta)$ з дійсними ζ лінійно залежні і зв'язані один з одним за допомогою матриці розсіювання $\mathbf{S}(\zeta)$

$$\mathbf{M}^{-}(x,\zeta) = \mathbf{M}^{+}(x,\zeta)\mathbf{S}(\zeta) \tag{1.21}$$

із властивостями симетрії

$$S_{11}(\zeta) = S_{22}^*(\zeta), \quad S_{12}(\zeta) = S_{21}^*(\zeta), \tag{1.22}$$

$$M_{11}^{\pm}(\zeta) = M_{22}^{\pm *}(\zeta), \quad M_{12}^{\pm}(\zeta) = M_{21}^{\pm *}(\zeta). \tag{1.23}$$

і умовою нормування $|S_{11}|^2 - |S_{21}|^2 = 1$. Крім того, оскільки задача (1.11) має симетрію по відношенню до інверсії $\zeta \to a^2/\zeta$, мають місце наступні важливі співвідношення:

$$\mathbf{M}^{\pm}(x, a^2/\zeta) = (\zeta/a)\mathbf{M}^{\pm}(x, \zeta)\sigma_2, \tag{1.24}$$

$$\mathbf{S}(a^2/\zeta) = \sigma_2 \mathbf{S}(\zeta)\sigma_2. \tag{1.25}$$

З рівняння (1.21) випливає, що

$$S_{11}(\zeta) = \Delta^{-1}(\zeta) \det(M_1^-(x, \zeta), M_2^+(x, \zeta)), \tag{1.26}$$

де $M_j^{\pm}$ позначає j-ий стовпець $\mathbf{M}^{\pm}$, і уведене позначення $\Delta(\zeta) = 1 - a^2/\zeta^2$. Стовпці $M_1^-(x, \zeta)$ і $M_2^+(x, \zeta)$ допускають аналітичне продовження у верхню півплощину $\operatorname{Im} \zeta > 0$, а стовпці M_2^-, M_1^+ в нижню півплощину $\operatorname{Im} \zeta < 0$. Тоді коефіцієнт $S_{11}(\zeta)$ може бути аналітично продовжений в $\operatorname{Im} \zeta > 0$ за винятком точок $\zeta = \pm a$. Крім $\zeta = 0$, аналітична функція $S_{11}(\zeta)$ може мати нулі $\zeta_1, \ldots, \zeta_N$ в області своєї аналітичності $\operatorname{Im} \zeta > 0$. З рівняння (1.26) тоді випливає, що стовпці M_2^+ і M_1^- є лінійно залежними й існують комплексні числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ такі, що

$$M_1^-(x, \zeta_j) = -i\gamma_j M_2^+(x, \zeta_j). \tag{1.27}$$

Уведемо позначення $r(\zeta) = S_{21}(\zeta)/S_{11}(\zeta)$ (коефіцієнт відбиття) і $S_{11}'(\zeta_j) = \partial_\zeta S_{11}(\zeta)|_{\zeta=\zeta_j}$. Можна показати [45] наступне:

(i) Нулі функції $S_{11}(\zeta)$ є простими й лежать на колі $|\zeta| = a$ в області $\operatorname{Im} \zeta > 0$ (останнє випливає з (1.25)). Крім того, величини $m_j = -i\gamma_j/(S_{11}'(\zeta_j)\zeta_j)$ дійсні й негативні.

(ii) Функція $r(\zeta)$ має наступні властивості

$$r(0) = 0, \tag{1.28}$$

$$|r(\zeta)| \leq 1, \tag{1.29}$$

$$r(a^2/\zeta) = -r^*(\zeta), \tag{1.30}$$

Властивість (1.28) справедлива також для всіх похідних $r(\zeta)$. Рівність в (1.29) досягається тільки при $\zeta = \pm a$ з $r(\pm a) = \mp i$.

(iii) У випадку відбивних (тобто несолітонних) потенціалів, коефіцієнти $S_{21}(\zeta)$ і $S_{11}(\zeta)$ сингулярні поблизу $\zeta = \pm a$ так що

$$S_{11}(\zeta) \sim \frac{s_\pm}{\zeta^2 - a^2} \text{ і } S_{21}(\zeta) = \mp i S_{11}(\zeta) \tag{1.31}$$

при $\zeta \to \pm a$.

(iv) Має місце рівність рівність

$$e^{i\theta} = \prod_{j=1}^{N} \frac{\zeta_j^*}{\zeta_j} \exp\left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |r(\zeta)|^2)}{\zeta} d\zeta \right\}. \tag{1.32}$$

(v) Коефіцієнт $S_{11}(\zeta)$ може бути виражений через свої нулі й функцію $|r(\zeta)|$ на дійсній осі

$$S_{11}(\zeta) = e^{i\theta/2} \prod_{j=1}^{N} \frac{\zeta - \zeta_j}{\zeta - \zeta_j^*} \exp\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |r(\mu)|^2)}{\zeta - \mu + i0} d\mu \right\}. \tag{1.33}$$

Матрична функція $\mathbf{\Gamma}^-(x, y)$ задовольняє рівнянню Гельфанда-Левітана-Марченко

$$\mathbf{\Gamma}^-(x, y) + \mathbf{F}(x + y) + \int_{-\infty}^{x} \mathbf{\Gamma}^-(x, y')\mathbf{F}(y' + y)\, dy' = 0, \tag{1.34}$$

де $y \leq x$, і матричне ядро $\mathbf{F}(x)$ має вигляд

$$\mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} A^*(x) & B(x) \\ B^*(x) & A(x) \end{pmatrix} \tag{1.35}$$

з

$$A = \frac{ia}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{r}(\zeta)}{\zeta}e^{-ik(\zeta)x/2}d\zeta + \frac{a}{4}\sum_{j=1}^{N}\frac{\tilde{c}_j}{\zeta_j}e^{-ik(\zeta_j)x/2}, \tag{1.36}$$

$$B = \frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{r}(\zeta)e^{-ik(\zeta)x/2}d\zeta + \frac{1}{4i}\sum_{j=1}^{N}\tilde{c}_j e^{-ik(\zeta_j)x/2}, \tag{1.37}$$

де введені позначення $\tilde{r}(\zeta) = -S_{12}(\zeta)/S_{11}(\zeta)$ і $\tilde{c}_j = i/(\gamma_j S'_{11}(\zeta_j))$. На відміну від випадку з спадаючими граничними умовами, матриця $\mathbf{F}$ містить як діагональні, так і антидіагональні елементи. Помітимо, що интегранд в (1.36) регулярний в $\zeta = 0$ завдяки умові (1.28). Після розв'язку (1.34), потенціал $\psi(x)$ може бути знайдений з (1.20).

Відзначимо також, що елементи $M_{ij}(x,t,\lambda)$ матриці $\mathbf{M}$, де $\mathbf{M}$ довільний розв'язок, (1.11) потенціал, що відповідає $\psi(x,t)$, задовольняють важливим співвідношенням

$$\psi M_{11}M_{12} + \psi^* M_{21}M_{22} = \partial_x(M_{12}M_{21}), \tag{1.38}$$

$$\psi M_{11}^2 + \psi^* M_{21}^2 = \partial_x(M_{11}M_{21}), \tag{1.39}$$

які будемо використовувати нижче.

Важливий окремий випадок представляють безвідбивні (солітонні) потенціали $\psi(x)$ коли $S_{21}(t,\zeta) \equiv 0$ як функція ζ для деякого фіксованого t. З (1.33) тоді випливає, що

$$S_{11}(\zeta) = e^{i\theta/2}\prod_{j=1}^{N}\frac{\zeta-\zeta_j}{\zeta-\zeta_j^*}. \tag{1.40}$$

Ядро $\mathbf{\Gamma}^-(x,y)$ у цьому випадку [45]

$$\mathbf{\Gamma}^-(x,y) = \sum_{j=1}^{N} f_j(x)g_j^T e^{\nu_j y/2}, \tag{1.41}$$

де $\nu_j = \operatorname{Im}\zeta_j$ і g_j^T означає транспонований стовпець g_j. Стовпці $f_j(x)$ визначаються із системи N лінійних рівнянь

$$f_j(x) + \sum_{p=1}^{N} B_{jp}(x) f_p(x) = -h_j e^{\nu_j x/2}, \tag{1.42}$$

де стовпці g_j і h_j

$$g_j = \frac{\sqrt{c_j}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \zeta_j/ia \end{pmatrix}, \quad h_j = \frac{\sqrt{c_j}}{2}\begin{pmatrix} a \\ i\zeta_j^* \end{pmatrix}, \tag{1.43}$$

а матриця $B_{jp}(x)$ має вигляд

$$B_{jp}(x) = \frac{ia\sqrt{b_j b_p}}{\zeta_j - \zeta_p^*} e^{(\nu_j+\nu_p)x/2}, \tag{1.44}$$

з $b_j = i/(\zeta_j S_{11}'(\zeta_j)\gamma_j)$. N-солітонний потенціал $\psi(x)$ дається рівнянням (1.20). Підстановка (1.41) в (1.19) дає N-солітонні матричні функції Йоста $\mathbf{M}^-$

$$\mathbf{M}^-(x,\zeta) = \mathbf{E}^-(x,\zeta) + 2\sum_{j=1}^{N} \frac{f_j(x) g_j^T \sigma_3 \mathbf{E}^-(x,\zeta) e^{\nu_j x/2}}{(\nu_j - ik(\zeta))}. \tag{1.45}$$

Матрична функція $\mathbf{M}^+$ може бути знайдена з (1.21).

Безвідбивні дані розсіювання з одним ($N = 1$) нулем $\zeta_1 = v + i\nu$ функції $S_{11}(\zeta)$ в (1.33) відповідають односолітонному розв'язку. Односолітонне ядро $\mathbf{\Gamma}^-(x,y)$ має вигляд

$$\mathbf{\Gamma}_s^-(x,y) = \frac{i\nu e^{\nu(x+y)/2}}{2a\,(\gamma_1 + e^{\nu x})}\begin{pmatrix} ia & \zeta_1 \\ -\zeta_1^* & ia \end{pmatrix}, \tag{1.46}$$

с $\zeta_1 = -ae^{-i\theta/2}$ і $\nu = a\sin(\theta/2)$. Тоді з (1.20) випливає, що односолітонний потенціал

$$\psi_s = \rho_0 \frac{1 + \exp[i\theta + \nu(x-z)]}{1 + \exp[\nu(x-z)]}, \tag{1.47}$$

де введене позначення $z = \ln(\gamma_1)/\nu$. Нижче приводяться односолітонні функції Йоста й відповідні дані розсіювання.

$$S_{11}(\zeta) = e^{i\theta/2}\frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \zeta_1^*}, \quad \zeta_1 \equiv v + i\nu = -ae^{-i\theta/2}, \tag{1.48}$$

$$S_{12}(\zeta, t) = 0 \qquad (\zeta \text{ дійсне}), \tag{1.49}$$

$$\gamma_1(t) = \gamma_1(0)\exp(-2\rho_0^2 t\sin\theta) \quad (\gamma_1 \text{ дійсне}). \tag{1.50}$$

Односолітонні функції Йоста обчислюються з (1.42)-(1.45). Вони мають вигляд (t-залежність опускається)

$$M_{11}^-(x,\zeta) = e^{-ik(\zeta)x/2}\left\{1 - \frac{(1+\zeta_1/\zeta)}{[\nu - ik(\zeta)]}w(x)\right\}, \tag{1.51}$$

$$M_{21}^-(x,\zeta) = \frac{iae^{-ik(\zeta)x/2}}{\zeta}\left\{1 - \frac{(1+\zeta/\zeta_1)}{[\nu - ik(\zeta)]}w(x)\right\}, \tag{1.52}$$

$$\begin{pmatrix} M_{11}^+(x,\zeta) \\ M_{21}^+(x,\zeta) \end{pmatrix} = e^{-i\theta/2}\frac{(\zeta - \zeta_1^*)}{(\zeta - \zeta_1)}\begin{pmatrix} M_{11}^-(x,\zeta) \\ M_{21}^-(x,\zeta) \end{pmatrix}, \tag{1.53}$$

$$M_{22}^{\pm} = (M_{11}^{\pm})^*, \quad M_{12}^{\pm} = (M_{21}^{\pm})^*, \tag{1.54}$$

де $\operatorname{Im}\zeta = 0$, $k(\zeta)$ визначене в (1.17), і введене позначення

$$w(x) = \frac{\nu}{1 + e^{\nu(z-x)}} = \frac{\nu e^{\nu x}}{\gamma_1 + e^{\nu x}}. \tag{1.55}$$

Оскільки $k(\zeta_1) = i\nu$, маємо також

$$M_{11}^-(x,\zeta_1) = \frac{e^{\nu x/2}}{1 + e^{\nu(x-z)}}, \tag{1.56}$$

$$M_{21}^-(x,\zeta_1) = \frac{ia}{\zeta_1}M_{11}^-(x,\zeta_1). \tag{1.57}$$

Крім того з (1.27) випливає, що

$$M_2^+(x,\zeta_1) = (i/\gamma_1)M_1^-(x,\zeta_1). \tag{1.58}$$

1.1.2 Динаміка спектральних даних розсіювання в N-солітонному випадку в присутності збурень: солітонна та радіаційна компоненти

При наявності збурень $p \neq 0$ представимо рівняння (1.8) у матричній формі

$$\partial_t \mathbf{U} - \partial_x \mathbf{V} + [\mathbf{U}, \mathbf{V}] + \mathbf{P} = 0, \tag{1.59}$$

де

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & ip^* \\ -ip & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.60}$$

Скориставшись (1.59) і тим, що $\mathbf{M}^{\pm}$ задовольняє рівнянню (1.11), можна одержати

$$(\partial_x - \mathbf{U})(\partial_t - \mathbf{V})\mathbf{M}^{\pm} + \mathbf{P}\mathbf{M}^{\pm} = 0. \tag{1.61}$$

Уводячи функцію $\mathbf{J}^{\pm}(x, t, \zeta)$ співвідношенням

$$(\partial_t - \mathbf{V})\mathbf{M}^{\pm} = \mathbf{M}^{\pm}\mathbf{J}^{\pm}, \tag{1.62}$$

одержимо, що $\mathbf{J}^{\pm}$ задовольняє $\partial_x \mathbf{J}^{\pm} = -\mathbf{M}^{\pm\,-1}\mathbf{P}\mathbf{M}^{\pm}$, і, отже $\mathbf{J}^{\pm} = \mathbf{C}^{\pm} + \int_x^{\pm\infty} \mathbf{M}^{\pm\,-1}\mathbf{P}\mathbf{M}^{\pm} dx'$, де постійні матриці $\mathbf{C}^{\pm}$ визначаються із граничних умов при $x \to \pm\infty$. Оскільки $\mathbf{V} = -\lambda \mathbf{U}_-$ і $\mathbf{M}^- = \mathbf{E}^-$ якщо $x \to -\infty$, рівняння (1.62) для $\mathbf{M}^-$ при $x \to -\infty$ має вигляд $\lambda \mathbf{U}_- \mathbf{E}^- = \mathbf{E}^- \mathbf{J}^-$ або, враховуючи (1.15), $\mathbf{J}^- = \lambda (\mathbf{E}^-)^{-1} \partial_x \mathbf{E}^-$. Використовуючи (1.18), одержимо $\mathbf{C}^- = \mathbf{J}^-(-\infty) = -i\Omega(\zeta)\sigma_3/2$, де

$$\Omega(\zeta) = \frac{1}{4}\left(\zeta^2 - \frac{a^4}{\zeta^2}\right). \tag{1.63}$$

Аналогічним чином можна показати, що $\mathbf{C}^+ = \mathbf{C}^-$. Тоді маємо

$$\mathbf{J}^{\pm} = -\frac{i}{2}\Omega(\zeta)\sigma_3 + \int_x^{\pm\infty} \mathbf{M}^{\pm\,-1}\mathbf{P}\mathbf{M}^{\pm} dx' \tag{1.64}$$

і, отже еволюційне рівняння для матриці $\mathbf{M}^{\pm}$ є

$$(\partial_t - \mathbf{V})\mathbf{M}^{\pm} = \mathbf{M}^{\pm}\left[-\frac{i}{2}\Omega(\zeta)\sigma_3 + \int_x^{\pm\infty} \mathbf{M}^{\pm\,-1}\mathbf{P}\mathbf{M}^{\pm}dx'\right]. \tag{1.65}$$

Рівняння (1.65) справедливе тільки для $\operatorname{Im}\zeta = 0$. Уводячи матрицю $\mathbf{M}(x,t,\lambda) = (M_1^-, M_2^+)$, стовпці якої допускають аналітичне продовження у верхню півплощину $\operatorname{Im}\zeta > 0$, і, як раніше, визначаючи нову невідому матрицю $\mathbf{J}(x,t,\lambda) = (J_1, J_2)$ співвідношенням $(\partial_t - \mathbf{V})\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{J}$, одержуємо

$$J_1 = \begin{pmatrix} -i\Omega(\zeta)/2 \\ 0 \end{pmatrix} - \int_{-\infty}^{x} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}M_1^- dx', \tag{1.66}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i\Omega(\zeta)/2 \end{pmatrix} + \int_x^{\infty} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}M_2^+ dx'. \tag{1.67}$$

Таким чином, маємо еволюційне рівняння

$$(\partial_t - \mathbf{V})M_1^- = \mathbf{M}J_1, \tag{1.68}$$

$$(\partial_t - \mathbf{V})M_2^+ = \mathbf{M}J_2, \tag{1.69}$$

слушні для $\operatorname{Im}\zeta > 0$ за винятком ζ_j і $\zeta = \pm a$, де матриця $\mathbf{M}$ не має зворотньої. Роблячи припущення, що нулі $\zeta = \zeta_j$ прості, можна показати (дивися нижче), що відповідні сингулярності переборні, оскільки $\det \mathbf{M} = S_{11}\Delta$, де $\Delta = 1 - a^2/\zeta^2$.

Отримані рівняння для $\mathbf{M}^{\pm}$ і $\mathbf{M}$ визначають еволюцію даних розсіювання. Диференціювання (1.21) по t, та використання (1.65) дає еволюційне рівняння для матриці розсіювання $\mathbf{S}(t,\zeta)$

$$\partial_t\mathbf{S}(t,\zeta) - \frac{i}{2}\Omega(\zeta)[\sigma_3, \mathbf{S}(t,\zeta)] = -\int_{-\infty}^{\infty}(\mathbf{M}^+)^{-1}(x,t,\zeta)\mathbf{P}\mathbf{M}^-(x,t,\zeta)dx. \tag{1.70}$$

Рівняння руху для коефіцієнтів $S_{11}(t,\zeta)$ і $S_{21}(t,\zeta)$ містяться в (1.70). Враховуючи, що $\det \mathbf{M}^{\pm} = \Delta$, маємо

$$\partial_t S_{11} = -i\Delta^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}(pm_{12}^+ M_{11}^- + p^* M_{22}^+ M_{21}^-)dx, \tag{1.71}$$

$$\partial_t S_{21} + i\Omega(\zeta) S_{21} = i\Delta^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (p m_{11}^{+} M_{11}^{-} + p^* M_{21}^{+} M_{21}^{-}) dx. \tag{1.72}$$

Виразом, що визначає нулі коефіцієнта $S_{11}(t, \zeta)$ є $S_{11}(t, \zeta_j(t)) = 0$. Диференціювання по t дає

$$\partial_t S_{11}(t, \zeta_j(t)) + \frac{\partial \zeta_j}{\partial t} S'_{11}(\zeta_j) = 0. \tag{1.73}$$

Використовуючи (1.27) і (1.71), знаходимо еволюційне рівняння для солітонних власних значень ζ_j у присутності збурень

$$\frac{\partial \zeta_j}{\partial t} = \frac{\zeta_j^2}{(a^2 - \zeta_j^2) S'_{11}(\zeta_j) \gamma_j} \int_{-\infty}^{\infty} \left[p\, (M_{11}^{-})^2 + p^* (M_{21}^{-})^2 \right] dx, \tag{1.74}$$

де интегранд визначається при x, t і $\zeta = \zeta_j$. Для одержання еволюційних рівнянь для γ_j, диференціюємо (1.27) по t, використовуємо рівняння (1.68), (1.69) і беремо границю $\zeta \to \zeta_j$. В результаті одержуємо

$$\begin{gathered}\frac{1}{\gamma_j} \frac{\partial \gamma_j}{\partial t} M_1^{-}(x, \zeta_j) + i\Omega(\zeta_j) M_1^{-}(x, \zeta_j) \\ = - \lim_{\zeta \to \zeta_j} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{M}(x, \zeta) \mathbf{M}^{-1}(x', \zeta) \mathbf{P}(x') M_1^{-}(x', \zeta_j)\, dx'. \end{gathered} \tag{1.75}$$

Припускаючи, що сингулярності в $\zeta = \zeta_j$ матриці $\mathbf{M}^{-1}(x, \zeta)$ є простими полюсами, множачи відповідні матриці й використовуючи правило Лопіталя, приходимо до

$$\begin{aligned}\frac{\partial \gamma_j}{\partial t} + i\Omega(\zeta_j)\gamma_j = \frac{\zeta_j^2}{(a^2 - \zeta_j^2) S'_{11}(\zeta_j)} \int_{-\infty}^{\infty} \{ & p m_{11}^{-} \partial_\zeta (i\gamma_j M_{12}^{+} + M_{11}^{-}) \\ & + p^* M_{21}^{-} \partial_\zeta (i\gamma_j M_{22}^{+} + M_{21}^{-}) \} dx, \end{aligned} \tag{1.76}$$

з $\zeta = \zeta_j$. Рівняння (1.72), (1.74), і (1.76) описують еволюцію спектральних даних розсіювання при $p \neq 0$. Можна також негайно написати рівняння для варіацій спектральних даних при зміні потенціалів $\delta\psi(x, t)$, $\delta\psi^*(x, t)$ при фіксованому t. Скористаємося формулою

$$\delta \mathbf{S}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{M}^{+})^{-1}(x, \zeta)\, \delta \mathbf{Q}(x) \mathbf{M}^{-}(x, \zeta) dx, \tag{1.77}$$

де

$$\delta\mathbf{Q}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \delta\psi^* \\ \delta\psi & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.78}$$

Порівнюючи ці вирази з (1.70), одержуємо

$$\delta S_{11}(\zeta) = \frac{i}{\Delta}\int_{-\infty}^{\infty}(\delta\psi M_{12}^{+}M_{11}^{-} + \delta\psi^* M_{22}^{+}M_{21}^{-})dx, \tag{1.79}$$

$$\delta S_{21}(\zeta) = \frac{1}{i\Delta}\int_{-\infty}^{\infty}(\delta\psi M_{11}^{+}M_{11}^{-} + \delta\psi^* M_{21}^{+}M_{21}^{-})dx. \tag{1.80}$$

Необхідно підкреслити, що дотепер ми не робили ніяких припущень про доданок $\mathbf{P}$ і отримані рівняння слушні для довільного (не обов'язково малого) збурення $p[\psi, \psi^*]$ в (1.8). Однак, рівняння (1.72), (1.74) та (1.76) зачеплені з рівняннями для невідомих $\mathbf{M}$ і $\mathbf{M}^{\pm}$ і, у цьому змісті, практично безкорисні. Зачеплення зникає під час відсутності збурення, тобто якщо $\mathbf{P} = 0$ і у цьому випадку динаміка даних розсіювання виявляється тривіальною

$$S_{21}(t) = S_{21}(0)\exp(-i\Omega(\zeta)t), \tag{1.81}$$

$$\zeta_j(t) = \zeta_j(0), \tag{1.82}$$

$$\gamma_j(t) = \gamma_j(0)\exp(-i\Omega(\zeta_j)t). \tag{1.83}$$

Зокрема, підстановка (1.82) і (1.83) з $j = 1$ в (1.47) дає односолітонний розв'язок (1.4) з $\nu x_0 = \ln(\gamma_1(0))$.

Якщо $p[u, u^*]$ є малим збуренням, можна підставити незбурені N-солітонні розв'язки ψ, ψ^* обумовлені (1.20), (1.41) і незбурені N-солітонні функції Йоста $\mathbf{M}^{\pm}$ обумовлені (1.45) у праву частину рівнянь (1.72), (1.74) і (1.76) (або рівнянь (1.79), (1.80) для малих варіацій потенціалу). Це дає еволюційні рівняння для даних розсіювання в нижчему порядку теорії збурень. Шляхом повторних ітерацій можна одержати відповідні рівняння в будь-якому порядку теорії збурень. Виникаюча ієрархія рівнянь (1.72), (1.74), і (1.76) застосовна, починаючи з нижчего порядку, до довільної кількості солітонів і, зокрема, описує багатосолітонні ефекти в присутності зовнішніх збурень.

Дотепер ми вважали параметр a константою. Як відзначалося вище, це відповідає збуренню, що убуває на нескінченності. Неважко, однак, одержати узагальнення на випадок, коли p не зникає при $|x| \to \infty$. Оскільки a входить в отримані выраженя тільки як параметр, можна формально покласти $a = a(t)$ у рівняннях (1.72), (1.74) і (1.76). Якщо $p = 0$, з (1.74) негайно випливає (тому що $|\zeta_j| = a$) та $\partial a/\partial t = 0$. Беручи границю $|x| \to \infty$ у рівнянні (1.8), одержуємо еволюційне рівняння для поля на нескінченності (фона) ψ_b

$$i\frac{\partial \psi_b}{\partial t} + p[\psi_b, \psi_b^*] = 0. \tag{1.84}$$

Оскільки $\psi_b = (a/2)\exp(i\alpha)$, з (1.84) одержуємо рівняння для параметра a і фази θ

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -2(\cos\theta \operatorname{Re} p + \sin\theta \operatorname{Im} p), \tag{1.85}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{2}{a}(\sin\theta \operatorname{Re} p - \cos\theta \operatorname{Im} p), \tag{1.86}$$

де $p[\psi, \psi^*]$ обчислюється на ψ_b. Рівняння (1.85) і (1.86) доповнюють основну систему рівнянь (1.72), (1.74), (1.76) на випадок незникаючих на нескінченності збурень і змінного фона.

1.1.3 Теорія збурень в односолітонному випадку й радіаційні ефекти

Розглянемо найпростіший, але важливий випадок односолітонного початкового імпульсу. Для $N = 1$ у рівнянні (1.74) маємо

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{2i}{a}\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{4\sin(\theta/2)}{(e^{i\theta} - 1)\gamma_1}\int_{-\infty}^{\infty}\left[p(M_{11}^-)^2 + p^*(M_{21}^-)^2\right]\, dx, \tag{1.87}$$

де M_{11}^- і M_{21}^- визначені в (1.56), (1.57). Далі розглядаємо випадок постійного параметра a. Можна перевірити, що

$$(M_{11}^-(\zeta_1))^2 = \frac{4\gamma_1}{a^3\sin\theta(e^{i\theta} - 1)}\frac{\partial \psi_s}{\partial t}. \tag{1.88}$$

Зауважуючи також, що $\partial\psi_s/\partial t = -\exp(i\theta)(\partial\psi_s^*/\partial t)$ and $(M_{21}^-(\zeta_1))^2 = -\exp(i\theta)(M_{11}^-(\zeta_1))^2$, з (1.87) одержуємо наступне рівняння для θ

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{4}{a^3\cos(\theta/2)\sin^2(\theta/2)}\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} p\frac{\partial\psi_s^*}{\partial t}\,dx. \tag{1.89}$$

Рівняння для другого солітонного параметра γ_1 випливає з (1.76) і має вигляд

$$\frac{\partial\gamma_1}{\partial t}+i\Omega(\zeta_1)\gamma_1 = \frac{ia}{4\nu^2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} p\,e^{\nu x}\frac{(\nu-w)^2}{w}\left\{1-\frac{we^{-i\theta}}{\nu-w}-xw\left(1+e^{-i\theta}\right)\right\}dx, \tag{1.90}$$

де w визначене в (1.55). Рівняння для коефіцієнтів матриці розсіювання $S_{11}(\zeta)$ і $S_{21}(\zeta)$ випливають із (1.71) і (1.72):

$$\frac{\partial S_{11}}{\partial t} = \frac{e^{i\theta/2}}{i\Delta(\zeta)}\frac{(\zeta-\zeta_1)}{(\zeta-\zeta_1^*)}\int_{-\infty}^{\infty}\{pM_{11}^-M_{12}^- + p^*M_{21}^-M_{22}^-\}dx, \tag{1.91}$$

$$\frac{\partial S_{21}}{\partial t} + i\Omega(\zeta)S_{21} = \frac{ie^{-i\theta/2}}{\Delta(\zeta)}\frac{(\zeta-\zeta_1^*)}{(\zeta-\zeta_1)}\int_{-\infty}^{\infty}\{p(M_{11}^-)^2 + p^*(M_{21}^-)^2\}dx, \tag{1.92}$$

де функції $M_{ij}^-(x,\zeta)$ визначені в (1.51)–(1.54). Рівняння (1.91),(1.92) доповнюються початковими умовами $S_{11}(0,\zeta) = S_{11}(\zeta)$ і $S_{21}(0,\zeta) = 0$, де $S_{11}(\zeta)$ визначене в (1.48). Помітимо, що завдяки властивості (1.31) коефіцієнти $S_{11}(\zeta)$, $S_{21}(\zeta)$ сингулярні в точках $\zeta = \pm a$ та $t > 0$, так що сингулярний множник $1/(\zeta^2 - a^2)$ не з'являється в якості параметра розкладання.

Якщо збурення має вигляд $p[\psi,\psi^*] = f(|\psi|^2)\psi$, де f довільна дійсна функція, то рівняння (1.91), (1.92) можуть бути спрощені за допомогою (1.38) і (1.39).

Дія зовнішнього збурення на солітон приводить до генерації поля випромінювання ψ_c, так що загальне поле має вигляд

$$\psi(x,t) = \psi_s(x,t) + \psi_c(x,t) \tag{1.93}$$

з $\psi_c(x,0) = 0$. Коефіцієнт відбиття $\tilde r(\zeta) = -S_{12}/S_{11}$ є мірою присутності поля випромінювання в солітонному імпульсі; для чистого солітона маємо

$\tilde{r}(\zeta) = 0$. Збурення змінює коефіцієнти $S_{11}(\zeta)$, $S_{12}(\zeta) = S_{21}^*(\zeta)$ в відповідності з рівняннями (1.91), (1.92). Для визначення поля випромінювання ψ_c представимо матричні функції $\mathbf{\Gamma}^-$ і $\mathbf{F}$ у рівнянні (1.34) у вигляді $\mathbf{\Gamma}^- = \mathbf{\Gamma}_s^- + \delta\mathbf{\Gamma}^-$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_s + \delta\mathbf{F}$, де $\mathbf{\Gamma}_s^-$ і $\mathbf{F}_s$ відповідають солітонному розв'язку, а $\delta\mathbf{\Gamma}^-$ і $\delta\mathbf{F}$ внеску випромінювання. Функція $\mathbf{\Gamma}_s^-$ дається (1.46), а з рівнянь (1.35)-(1.37) маємо

$$\mathbf{F}_s = \frac{\nu e^{\nu x/2}}{2\gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & -i\zeta_1/a \\ i\zeta_1^*/a & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.94}$$

$$\delta\mathbf{F}(x) = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}^-(x,\zeta) \begin{pmatrix} 0 & \tilde{r}(\zeta) \\ \tilde{r}^*(\zeta) & 0 \end{pmatrix} d\zeta \tag{1.95}$$

Підставляючи ці вирази в (1.34), і припускаючи несолітонный внесок малим $\delta\mathbf{\Gamma}^- \ll \mathbf{\Gamma}_s^-$, $\delta\mathbf{F} \ll \mathbf{F}_s$, можна одержати інтегральне рівняння для $\delta\mathbf{\Gamma}^-(x,y)$

$$\delta\mathbf{\Gamma}^-(x,y) + \int_{-\infty}^{x} \delta\mathbf{\Gamma}^-(x,y')\mathbf{F}_s(y+y')\,dy' = \mathbf{\Phi}, \tag{1.96}$$

де

$$\mathbf{\Phi}(x,y) = -\delta\mathbf{F}(x+y) - \int_{-\infty}^{x} \mathbf{\Gamma}_s^-(x,y')\delta\mathbf{F}(y+y')\,dy'. \tag{1.97}$$

Рівняння (1.96) є інтегральним рівнянням з виродженим ядром $\mathbf{F}_s(y+y')$ і може бути легко вирішене. Фактично, нам необхідно тільки $\delta\Gamma_{21}^-(x,x,t)$. У результаті можна одержати

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{21}^-(x,x,t) = -\frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bigg\{ & \frac{\tilde{r}(\zeta)}{(1+\zeta_1/\zeta)} (M_{21}^-)^2(x,t,\zeta) \\ & + \frac{\tilde{r}^*(\zeta)}{(1+\zeta_1^*/\zeta)} (M_{22}^-)^2(x,t,\zeta) \bigg\}\, d\zeta, \end{aligned} \tag{1.98}$$

де функції $M_{11}^-(x,t,\zeta)$, $M_{21}^-(x,t,\zeta)$ визначені в (1.51), (1.52), (1.54). Тоді, як випливає из (1.20), поле випромінювання ψ_c дається виразом

$$\psi_c(x,t) = 2\delta\Gamma_{21}^-(x,x,t). \tag{1.99}$$

Еволюційне рівняння для солітонного параметра θ (1.89) втрачає свою застосовність якщо $\theta \to 0$, тобто коли амплітуда солітона прямує до нуля.

Це можна пояснити в такий спосіб. Відомо, що присутність збурень у початковому темному солітонному імпульсі може призводити до безпорогового виникнення нових солітонів з малими амплітудами й великими швидкостями [64, 65]. Це пов'язано з тем фактом, що неперервний спектр лінійної задачі (1.11) має границі в точках розрізу $\lambda = \pm a$, які відповідають так званим віртуальним рівням. Аналогічна ситуація має місце й для зовнішніх збурень. Дійсно, формальний точний розв'язок рівняння (1.91) може бути представлено у вигляді

$$S_{11}(\zeta, t) = S_{11}(\zeta, 0) + \frac{i\zeta^2}{a^2 - \zeta^2}\epsilon G(\zeta, t), \tag{1.100}$$

де $\epsilon \ll 1$, комплексна функція $G(\zeta, t)$ регулярна в околиці $\zeta = \pm a$ і $S_{11}(\zeta, 0)$ та визначається рівнянням (1.48). Як випливає з (1.100), рівняння, що визначає нулі коефіцієнта $S_{11}(\zeta, t)$, має вигляд

$$\zeta^2 = \frac{a^2}{1 + i\epsilon G(\zeta, t)\exp[-i\varphi(\zeta)]}, \tag{1.101}$$

де $\varphi(\zeta) = \arg(\theta/2 + 2\zeta - 2\zeta_1)$. Тоді, оскільки $\epsilon \ll 1$, можна показати, що завжди існують принаймні два власні значення з $\operatorname{Im}\zeta > 0$:

$$\operatorname{Im}\zeta_{\pm} = \frac{a}{2}\epsilon|\operatorname{Re}G(a)|, \tag{1.102}$$

$$\operatorname{Re}\zeta_{\pm} = \pm a\left\{1 - \operatorname{sign}(\operatorname{Re}G)\frac{\epsilon}{2}\operatorname{Im}G(a)\right\}, \tag{1.103}$$

відповідні двом темним солітонам з малими рівними амплітудами $\operatorname{Im}\zeta_{\pm}$ і протилежними швидкостями. Якщо $G(\zeta) \neq G(-\zeta)$, інша така пара солітонів може бути отримана заміною $G(a) \to G(-a)$. Таким чином, якщо амплітуда $\operatorname{Im}\zeta_1$ первісного солітона досить мала, так що $\operatorname{Im}\zeta_1 \leq \operatorname{Im}\zeta_{\pm}$, тобто менше або порівнянна з амплітудами спонтанно виникаючих під дією збурення солітонів, то односолітонна теорія збурень втрачає застосовність. Тепер необхідно підставляти відповідні багатосолітонні функції Йоста в праву частину рівняння (1.89). Критерій застосовності односолітонної теорії збурень може бути записаний у вигляді

$$\sin\theta \gg \epsilon|\mathrm{Re}\, G(a)|. \tag{1.104}$$

Підкреслимо, що виявлений ефект спонтанного безпорогового народження солітонів під дією зовнішнього збурення на початковий солітон характерно саме для темних солітонів НРШ.

Рівняння (1.101) є трансцендентним рівнянням і, взагалі кажучи, має нескінченну (або велику) кількість близьколежачих коренів із малими $\mathrm{Im}\,\zeta$ і $\mathrm{Re}\,\zeta \sim a$. Як відомо [45], у випадку фокусуючого НРШ із спадаючими граничними умовами (світлих солітонів), згущення великої кількості нулів діагонального коефіцієнта S_{11} матриці розсіювання еквівалентно виникненню поля випромінювання (тобто у границі точно відтворюється неперервний спектр). Це, однак, не має місця для дефокусуючого НРШ з неспадаючими граничними умовами (темних солітонів). У цьому випадку нелінійні дисперсійні співвідношення (рівняння, які зв'язують енергію E з імпульсом P) для неперервної та солітонної частини спектра суттєво різні [45] (для солітонної навіть не може бути виписане в явному вигляді) і неперервний спектр не може бути відтворений із солітонної (дискретної) частини спектра таким згущенням нулів (або якимось іншим способом).

1.1.4 Темний солітонний імпульс з випадковим початковим збуренням

У цьому підрозділі розглядаємо часові темні солітони (тобто солітони, що поширюються у волоконних світловодах). Нагадаємо, що в цьому випадку x означає час у системі відліку, зв'язаної с імпульсом, що рухається, а t відповідає довжині поширення уздовж світловода. Уважаємо, що зовнішнє збурення відсутнє, так що $p = 0$, але початкова форма солітона випадковим образом збурена, так що у світловод входить імпульс $\psi(x) = \psi_s(x) + \delta\psi(x)$. З фізичної точки зору $\delta\psi(x)$ представляє флуктуацію, викликану спонтанною емісією фотонів в оптичних підсилювачах. Ці флуктуації прийнято називати флуктуаціями Гордона-Хауса й вони приводять до вкрай небажаного ефекту флуктуації часу приходу солітона в приймач (через флуктуацію швидкості солітона). Теорія ефекту Гордона-Хауса для темних солітонів в адіабатичному наближенні й без врахування випромінювання була розвинена в [66, 67], де шум $\delta\psi(x)$ передбачався однорідним δ-корельованим за часом гауссовськім випадковим процесом (білим шумом). При розгляді впливу шуму на локалізовану структуру (солітон над фоном) та обчисленні адіабатичної зміни солітонних параметрів, наближення однорідного δ-корельованого шуму цілком виправдане, якщо спектр шуму $\Delta\omega \gg \nu$, де ν характерна довжина локалізації поля (ширина солітона) . При розгляді ж нелокалізованого поля (випромінювання), наближення δ-корельованого шуму несправедливо, оскільки (як буде показане нижче) веде до нескінченної енергії випромінювання, що випускається солітоном. Більше того, однорідний випадковий щум (тобто з коррелятором, що залежить тільки від різниці $x-x'$), приводить до нескінченної спектральної густини випромінювання. Таким чином, робимо природнє припущення, що шум є неоднорідним, зосереджений в області займаної солітоном і має вигляд $\delta\psi(x) = f(x)\varepsilon(x)$, де $f(x)$ дійсна детерміністична функція, що досить швидко убуває на нескінченності, а $\varepsilon(x)$ випадковий однорідний гауссівський процес [68] із нульовим середнім і кореляційною функцією

$$\langle \varepsilon(x)\varepsilon^*(x') \rangle = D(x-x'), \tag{1.105}$$

де $\langle \ldots \rangle$ означають статистичне усереднення. Шум $\delta\psi$ є неоднорідним випадковим процесом і його кореляційна функція залежить не тільки від різниці $x-x'$, але також і від точки спостереження x. Природнім вибором для $f(x)$ є $f(x) = \mathrm{sech}(\nu x/2)$ (тобто огинаюча шуму відслідковує форму солітона), хоча, як буде видне нижче, остаточні результати слабко чутливі до конкретного вибору $f(x)$ (при умові досить швидкого убування при $x \to \pm\infty$). Уважаємо також, що інтенсивність шуму досить мала, так що $\langle \delta\psi^2 \rangle \ll \nu^2$.

Наявність збурення $\delta\psi(x)$ буде випадковим образом змінювати солітонний параметр ζ_1, і, крім того, приводити до виникнення додаткової компоненти $\delta\psi_c$ (випромінювання). Відповідна варіація $\delta\zeta_1$ власного параметра може бути записана у вигляді

$$\delta\zeta_1 = \left(\left. \frac{\partial S_{11}(\zeta)}{\partial\zeta} \right|_{\zeta=\zeta_1} \right)^{-1} \delta S_{11}(\zeta_1), \tag{1.106}$$

де δS_{11} варіація коефіцієнта проходження $S_{11}(\zeta)$, індукована даною реалізацією $\delta\psi$. З рівнянь (1.79) і (1.58) випливає, що

$$\delta S_{11}(\zeta_1) = \frac{\zeta_1^2}{a^2 - \zeta_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta\psi - \frac{a^2}{\zeta_1^2} \delta\psi^* \right) (M_{11}^-)^2 dx, \tag{1.107}$$

де функція M_{11}^- визначена в (1.56). Використовуючи (1.105)-(1.107) і виконуючи усереднення, можна одержати

$$\langle |\delta\zeta_1|^2 \rangle = a^2 I(\nu), \quad \langle \delta\zeta_1^2 \rangle = -a^2 e^{-i\theta} I(\nu), \tag{1.108}$$

де введена функція

$$I(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(x - x') f(x) f(x') dx\, dx'}{8 \operatorname{ch}^2(\nu x/2) \operatorname{ch}^2(\nu x'/2)}, \tag{1.109}$$

яка залежить від конкретного виду кореляційної функції шуму. Тоді з (1.108) випливає, що дисперсія швидкості солітона

$$\langle \delta v^2 \rangle = a^2 I(\nu) \sin^2(\theta/2). \tag{1.110}$$

Якщо шум є δ-корельованим у часі (нульовий час кореляції), так що $D(x) = D_0 \delta(x)$ і $f(x) = 1$ (однорідний шум), з (1.109) і (1.110) можна одержати $\langle \delta v^2 \rangle = (a/3) \sin(\theta/2)$, що збігається з результатом, отриманим у роботі [66] в адіабатичному наближенні. Вибираючи $f(x)$ у вигляді, запропонованому вище, для дисперсії швидкості солітона маємо $\langle \delta v^2 \rangle = (4a/15) \sin(\theta/2)$.

Уводячи фур'є-образ корелятора $D(x)$ у вигляді $D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) \exp(-i\omega x)\, d\omega$ і виконуючи інтегрування по x в (1.109), маємо

$$I(\nu) = \frac{\pi^2}{8\nu^6} \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) \frac{(\nu^2 + 4\omega^2)^2}{\operatorname{ch}^2(\pi\omega/\nu)}\, d\omega. \tag{1.111}$$

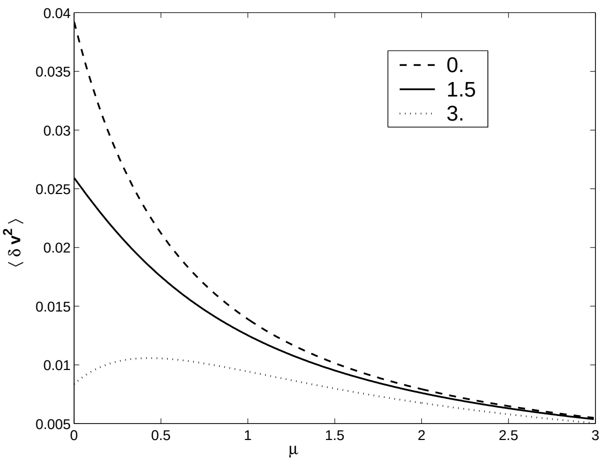

Рис. 1.1 Залежність дисперсії швидкості солітона v від параметра μ для різних ξ_0.

Рівняння (1.110) і (1.111) визначають дисперсію швидкості солітона для довільного виду корелятора шуму $C(\omega)$. Розглянемо випадок, коли випадкова функція $\varepsilon(x)$ має вигляд $\varepsilon(x) = \varepsilon_0 \exp(i\omega_0 x + i\varphi)$, де випадкова амплітуда ε_0 є випадковою гауссовською величиною з нульовим середнім і дисперсією σ^2, і випадкова фаза φ однорідним випадковим образом розподілена між 0 і 2π. Кореляційна функція такого процесу в спектральному представленні має вигляд

$$C(\omega) = (\sigma^2/2)\delta(\omega - \omega_0). \tag{1.112}$$

У цьому випадку шум має нескінченний час кореляції й зосереджений на частоті ω_0. Дисперсія швидкості солітона при цьому має вигляд

$$\langle \delta v^2 \rangle = \frac{\pi^2\sigma^2(\nu^2 + 4\omega_0^2)^2}{16\nu^4 \operatorname{ch}^2(\pi\omega_0/\nu)}. \tag{1.113}$$

Щоб врахувати кінцевий час кореляції, розглянемо важливий окремий випадок, коли спектр шуму ε має лоренцівську форму

$$C(\omega) = \frac{D_0}{\pi\tau_c[(\omega - \omega_0)^2 + (1/\tau_c)^2]}, \tag{1.114}$$

де D_0 має сенс інтенсивності шуму. В x-представленні (1.114) відповідає кореляційній функції $D(x) = D_0 \exp(-|x|/\tau_c)\cos(\omega_0 x)$, де τ_c час кореляції.

З (1.110) та (1.111) випливає, що

$$\langle \delta v^2 \rangle = \frac{D_0 \mu}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\pi^2 + 4\xi^2)^2 \, d\xi}{[\mu^2 + (\xi - \xi_0)^2] \operatorname{ch}^2 \xi}, \tag{1.115}$$

де $\mu = \pi/(\nu\tau_c)$, $\xi_0 = \pi\omega_0/(\nu)$. На рис. 1.1 показана залежність дисперсії $\langle \delta v^2 \rangle$ швидкості солітона від параметра μ для різних ξ_0 при $D_0 = 0.1$ і $\nu = 1$.

Розглянемо тепер внесок випромінювання. Рівняння (1.8) з $p = 0$ зберігає імпульс P і енергію E

$$P = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \psi^* - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi \right) dx - \rho_0^2 \theta, \tag{1.116}$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 + (|\psi|^2 - \rho_0^2)^2 \right\} dx. \tag{1.117}$$

Ці величини записані в регуляризованій формі, так, щоб відняти внесок фона [45, 58]. При цьому інтеграли в (1.116), (1.117) кінцеві на солітонному розв'язку (1.47). Інтеграли руху (1.116), (1.117) можуть бути явно виражені [45] через безперервні й дискретні (солітонні) дані розсіювання

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} P_{rad}(\zeta) \, d\zeta + 2i \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\lambda_j k_j}{4} - \rho_0^2 \arccos \frac{\lambda_j}{a} \right), \tag{1.118}$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} E_{rad}(\zeta) \, d\zeta + \frac{i}{3} \sum_{j=1}^{N} k_j^3, \tag{1.119}$$

де $\lambda_j = \lambda(\zeta_j)$, $k_j = k(\zeta_j)$ (функції $\lambda(\zeta)$ і $k(\zeta)$ визначені в (1.17)), і спектральні густини імпульсу й енергії мають вигляд

$$P_{rad}(\zeta) = \frac{\zeta}{8\pi} \left(1 - \frac{a^2}{\zeta^2} \right)^2 \ln(1 + |S_{21}(\zeta)|^2), \tag{1.120}$$

$$E_{rad}(\zeta) = \frac{\zeta}{2} \left(1 + \frac{a^2}{\zeta^2} \right) P_{rad}(\zeta). \tag{1.121}$$

У рівняннях (1.118), (1.119) N-солітонний внесок (другий доданок) явне відділений від внеску радіаційної компоненти ($\int d\zeta$), відповідної до безперервного спектра. Дисперсійне співвідношення (беручи $\sim \exp(iqx - ikt)$), що відповідає лінійної частини рівняння (1.8) має вигляд $K(q) = q^2/2$, що означає t-залежність виду $\sim \exp(-iq^2t/2)$. З іншого боку, як випливає

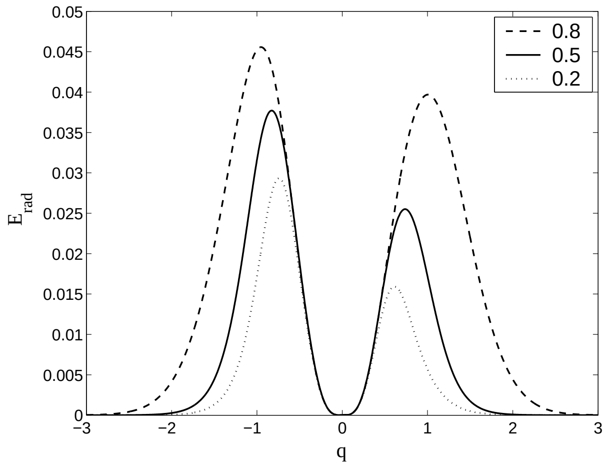

Рис. 1.2 Частотний розподіл випромінювання, що випускається солітоном, для різних значень параметра ω_c .

з (1.81), у нелінійному випадку t-залежність для даних безперервного спектра має вигляд $\sim \exp(-i\Omega(\zeta)t)$. Тоді, розглядаючи радіаційну компоненту (випромінювання) як суперпозицію хвиль, описуваних лінійним рівнянням, можна укласти, що спектральний параметр ζ пов'язаний із частотою q випромінюваних квазілінійних хвиль співвідношенням

$$q^2 = \frac{1}{4}\left(\zeta^2 - \frac{a^4}{\zeta^2}\right). \tag{1.122}$$

Помітимо, що $q^2 > 0$, тому що $\operatorname{sign} k(\lambda) = \operatorname{sign} \lambda(\zeta)$. Функції $P_{rad}(q)$, $E_{rad}(q)$ представляють собою спектральні густини (у частотному представленні) імпульсу та енергії відповідних до випромінювання.

Тепер коефіцієнт $S_{21}(\zeta)$ не дорівнює нулю, і для даної реалізації $\varepsilon(x)$, з (1.80) і (1.51)-(1.53) маємо

$$S_{21}(\zeta) = \frac{e^{-i\theta/2}}{i\Delta(\zeta)} \frac{(\zeta - \zeta_1^*)}{(\zeta - \zeta_1)} \int_{-\infty}^{\infty} \{\delta\psi(M_{11}^-)^2 + \delta\psi^*(M_{21}^-)^2\} dx.$$

Помітимо, що $\langle S_{21}(\zeta) \rangle = 0$. Виписуючи вирази для $|S_{21}(\zeta)|^2$, виконуючи усереднення по $\varepsilon(x)$, уводячи корелятор шуму $C(\omega)$ у частотному представленні, та обчислюючи відповідні інтеграли по x та x', можна одержати

$$\langle |S_{21}(\zeta)|^2 \rangle = \frac{\pi^2}{\nu^2 \Delta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(\omega)\{|I_1(\omega)|^2 + |I_2(\omega)|^2\}}{\mathrm{ch}^2(\pi\eta/2)} \, d\omega, \tag{1.123}$$

де

$$I_1(\omega) = 2 - 2c_1(1 - i\eta) + \frac{c_1^2}{4}(3 - \eta^2 - 4i\eta), \tag{1.124}$$

$$I_2(\omega) = -\frac{a^2}{\zeta^2}[2 - 2c_2(1 - i\eta) + \frac{c_2^2}{4}(3 - \eta^2 - 4i\eta)], \tag{1.125}$$

з

$$\eta = \frac{2(\omega + k(\zeta))}{\nu}, \quad c_1 = \frac{\nu(1 + \zeta_1/\zeta)}{\nu - ik(\zeta)}, \quad c_2 = c_1 \frac{\zeta}{\zeta_1}. \tag{1.126}$$

У відповідність із властивістю (1.31), функція $\langle |S_{21}(\zeta)|^2 \rangle$ має сингулярності при $\zeta = \pm a$. Однак, як можна бачити з (1.120) і (1.121), спектральні густини імпульсу й енергії кінцеві й, більше того, дорівнюють нулю при $\zeta = \pm a$, тобто на частоті $q = 0$. У випадку, коли корелятор шуму має гауссівську форму

$$C(\omega) = (D_0/\omega_c) \exp(-\omega^2/\omega_c^2), \tag{1.127}$$

де $\omega_c = 1/\tau_c$ зворотний кореляційний час, частотний розподіл енергії випромінювання показано на рис. 1.2 для різних значень параметра ω_c при $D_0 = 0.1$, $\nu = 1$. Спектр випромінювання має два асиметричні піка й експоненціально спадаючі "хвости".

1.1.5 Вплив лінійного накачування й нелінійного поглинання на динаміку темного солітона

У цьому підрозділі розглядаємо просторові темні солітони. Поширення просторових оптичних солітонів звичайно пов'язане із двохфотонним поглинанням – явищем, що проявляється в залежності поглинання світла від інтенсивності [60]. В деяких випадках присутнє і посилення [49, 60]. Одночасний вплив поглинання й посилення на темний солітон описується рівнянням

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u - 2|u|^2 u = i\alpha u - i\beta |u|^2 u, \tag{1.128}$$

де перший доданок у правій частині представляє внесок накачування, а другий відповідає поглинанню. Під час відсутності солітонів фон може бути стабілізований одночасною дією накачування й поглинання [58]. Видно, що рівняння (1.128) допускає стаціонарний розв'язок у вигляді стійкого фона $u(t) = \rho_0 \exp(-2i\rho_0^2 t)$ з амплітудою

$$\rho_0 = \sqrt{\alpha/\beta}. \tag{1.129}$$

Після підстановки $u = \psi \exp(-2i\rho_0^2 t)$, де ρ_0 визначене в (1.129), одержуємо рівняння (1.8) зі збуренням виду

$$p = i\beta(|\psi|^2 - \rho_0^2)\psi. \tag{1.130}$$

Підставляючи (1.130) в (1.89), маємо адіабатичне рівняння для повільно змінюючогося параметра θ

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\alpha}{3} \sin\theta. \tag{1.131}$$

Рівняння (1.131) має розв'язок

$$\theta(t) = 2 \operatorname{arctg}\left[e^{-\alpha t/3} \operatorname{tg}(\theta_0/2)\right], \tag{1.132}$$

де $\theta_0 = \theta(0)$ початкова фаза солітона.

Розглянемо ефекти, пов'язані з випромінюванням, які описуються антидіагональним доданком S_{21} матриці розсіювання $\mathbf{S}$. Ці ефекти включають, зокрема, випромінювання, що випускається солітоном, та викривлення форми солітона. Як випливає з (1.120), спектральна густина випромінювання в одиницю часу для імпульсу $W_P(\zeta) \equiv dP_{rad}/dt$ має вигляд

$$W_P(\zeta) = \frac{\zeta}{4\pi}\left(1 - \frac{a^2}{\zeta^2}\right)^2 \frac{1}{(1 + |S_{21}(\zeta)|^2)} \mathrm{Re}\left\{S_{21}^* \frac{dS_{21}}{dt}\right\}. \tag{1.133}$$

Спектральна густина випромінювання в одиницю часу для енергії $W_E(\zeta) \equiv dE_{rad}/dt$ is

$$W_E(\zeta) = \frac{\zeta}{2}\left(1 + \frac{a^2}{\zeta^2}\right) W_P(\zeta). \tag{1.134}$$

Підставляючи збурення (1.130) в еволюційне рівняння (1.92) для коефіцієнта $S_{21}(\zeta, t)$ і обчислюючи відповідні інтеграли, для $s(\zeta, t) = S_{21}(\zeta, t)\exp[i\Omega(\zeta)t]$ можна одержати

$$\frac{ds(\zeta)}{dt} = \frac{e^{-i\theta/2}(\zeta - \zeta_1^*)}{\Delta(\zeta)(\zeta - \zeta_1)} A(\zeta) e^{i(\Omega - kv)t - ikx_0}, \tag{1.135}$$

де функція $A(\zeta)$ визначається в явному вигляді. Будемо розглядати солітон з $\theta = \pi$, тобто нерухливий солітон

$$\psi_s = -\rho_0 \mathrm{th}\,(\rho_0 x). \tag{1.136}$$

У цьому випадку функція $A(\zeta)$ має вигляд

$$A(\zeta) = \frac{2\pi\alpha k(\zeta)[ik(\zeta) + \nu]a(\zeta^2 + a^2)}{3\nu^3\zeta^2\,\mathrm{sh}[\pi k(\zeta)/\nu]}. \tag{1.137}$$

Проінтегруємо рівняння (1.135) із правою частиною, помноженої на $\exp(\epsilon t)$ з нескінченно малим $\epsilon > 0$. Це відповідає адіабатичному включенню збурення, відсутнього при $t = -\infty$. У результаті для s^* одержимо

$$s^* = \frac{ie^{i\theta/2}(\zeta - \zeta_1)A^*}{\Delta(\Omega - kv + i\epsilon)(\zeta - \zeta_1^*)} e^{-i(\Omega - kv)t + ikx_0}. \tag{1.138}$$

Скориставшись співвідношенням $\lim_{\epsilon \to 0}(y - i\epsilon)^{-1} = P(1/y) + i\pi\delta(y)$, де P символ головного значення, можна знайти

$$|S_{21}(\zeta)|^2 = \frac{|A(\zeta)|^2}{(\Omega - kv)\Delta^2(\zeta)} \tag{1.139}$$

і

$$\mathrm{Re}\left\{S_{21}^* \frac{ds_{21}}{dt}\right\} = \frac{\pi|a(\zeta)|^2}{\Delta^2(\zeta)}\delta(\Omega - kv) \tag{1.140}$$

Рівняння (1.133) і (1.134) разом з (1.139) і (1.140) дають спектральний розподіл темпів випромінювання імпульсу й енергії в термінах спектрального параметра ζ. Хвильове число q випромінюваних хвиль пов'язане з ζ співвідношенням (1.122).

Поле випромінювання у фізичному просторі визначається з рівнянь

(1.98) і (1.99). З (1.91) і (1.92) випливає, що в першому порядку теорії збурень коефіцієнт відбиття $\tilde{r} = -S_{12}/S_{11}$ має вигляд

$$\tilde{r}(\zeta) = -\frac{ia^*(\zeta)e^{ik(\zeta)x_0}}{\Delta(\zeta)[\Omega(\zeta) - k(\zeta)v]}\left(e^{ik(\zeta)vt} - e^{i\Omega(\zeta)t}\right). \tag{1.141}$$

Підставляємо (1.141) та відповідні односолітонні функції Йоста в (1.98) і (1.99). Головний внесок у виникаючих інтегралах дають околиці точок $\zeta = \pm a$. Функція $A(\zeta)$ не містить сингулярностей і $A(a) = A(-a)$. Для $A(\zeta)$, обумовленої (1.36), одержуємо $A(a) = 2\alpha a/3\nu$. Далі маємо

$$\tilde{r}(\zeta) \sim \frac{iaa(a)[e^{iv(\zeta-a)t} - e^{ia(\zeta-a)t}]}{2(\zeta-a)^2(v-a)}, \tag{1.142}$$

$$(M_{21}^-)^2(\zeta, x, t) \sim -e^{-i(\zeta-a)x}\left\{1 - \frac{(1+a/\zeta_1)}{\nu}w(x,t)\right\}^2, \tag{1.143}$$

і подібні вирази для $\zeta \to -a$. Функція $w(x,t)$ визначена в (1.55). Повільно змінні частини интеграндів оцінюються при $\zeta = \pm a$ і виносяться з під знака інтегралів в (1.98). Швидко змінні частини інтегруються з використанням формули

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos p\xi - \cos q\xi}{\xi^2} d\xi = \pi(|q| - |p|). \tag{1.144}$$

У результаті для поля випромінювання, що випускається солітоном, можна одержати

$$\psi_c(x,t) = -\frac{iaA(a)}{8}\left\{\left[1 + \frac{\exp(i\theta/2)}{1+\exp(-\eta)}\right]^2 \frac{p_1}{a-v} + \left[1 + \frac{\exp(-i\theta/2)}{1+\exp(-\eta)}\right]^2 \frac{p_2}{a+v}\right\}, \tag{1.145}$$

де $\eta = \nu(x - x_0 - vt)$ і $p_1 = |\eta + (v-a)t| - |\eta|$, $p_2 = |\eta + (v+a)t| - |\eta|$.

1.2 Альфвенівські солітони в плазмі

Альфвенівські хвилі в плазмі являють собою непотенціальні магнітогідродинамічні хвилі з частотою ω меншої іонно-циклотронної ω_{ci} і, при поширенні уздовж зовнішнього магнітного поля $B_0 \parallel \hat{\mathbf{z}}$, дисперсією

$$\omega = k_z v_A (1 - k_z r_A), \tag{1.146}$$

де k_z поздовжнє хвильове число, $v_A = B_0/\sqrt{4\pi n_0 M}$ альфенівська швидкість, n_0 густина плазми, M маса іонів, $r_A = v_A/\omega_{ci}$, $\omega_{ci} = eB_0/Mc$ іонноциклотронна частота.

Еволюція нелінійних альфвенівських хвиль, що поширюються уздовж або під кутом до зовнішнього магнітного поля (далі скрізь вважаємо поле B_0 спрямованим уздовж осі x), описується деривативним нелінійним рівнянням Шредингера (ДНРШ)

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + is\frac{\partial}{\partial x}(|u|^2 u) = 0, \tag{1.147}$$

де $u(x,t)$ нормоване збурення поперечного магнітного поля $u = (B_y + iB_z)/(2\sqrt{|1-\beta|}B_0)$. Поля $u(x,t)$ і $u^*(x,t)$ відповідають право- та лівополяризованим хвилям. Час t і поздовжня просторова координата x нормовані на $1/\omega_{ci}$ і r_A відповідно. Параметр $\beta = v_s^2/v_A^2$ дорівнює відношенню кінетичного й магнітного тисків, $v_s = \sqrt{T_e/M}$ швидкість іонного звуку, T_e електронна температура. Знак параметра $s = \pm 1$ при нелінійності в (1.147) відповідає $s = \mathrm{sign}(1-\beta)$. Рівняння (1.147) доповнюється граничними умовами – спадаючими або постійними на нескінченності. Поширенню строго уздовж магнітного поля відповідають спадаючі на нескінченності граничні умови.

Спочатку ДНРШ було виведено Роджистером [69] з кінетичного рівняння Власова (точніше містилося у вигляді часткового випадку в більш загальному рівнянні, що містить інші додаткові доданки, зокрема, внесок резонансних частинок), а потім незалежно отримане для холодної плазми в [70, 71]. Пізніше ці результати були узагальнені для плазми з кінцевим відношенням кінетичного й магнітного тисків β [72, 73] та довільного по відношенню до зовнішнього магнітного поля кута поширення [74, 75].

Кауп і Ньюелл показали [76], що ДНРШ (1.147) з спадаючими на нескінченності граничними умовами $|u| \to 0$ є повністю інтегрованим методом зворотньої задачі розсіювання й допускає N-солітонні розв'язки. В [77] ДНРШ розглядалося в якості повністю інтегрованої гамільтонової системи й були явно знайдені відповідні змінні "дія-кут". В [78–80] було показано, що ДНРШ належить до класу повністю інтегрованих рівнянь і для неспадаючих граничних умов $|u| \to \rho$.

У реальності в рівнянні (1.147) часто присутні додаткові доданки. Вони можуть включати ефекти дисипації, неоднорідності густини плазми, турбулентності й ін. [75, 81–84]. Часто на фоні солітонного розв'язку з великою амплітудою ці доданки виявляються малими та можуть ураховуватися по теорії збурень. Збурене ДНРШ будемо записувати у вигляді

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + is\frac{\partial}{\partial x}(|u|^2 u) = p[u, u^*], \tag{1.148}$$

де збурення представлені доданком $p[u, u^*]$.

Як відзначалося в попередньому підрозділі, найбільш повний метод врахування збурень, що повністю використовує поділ дискретних і безперервних (тобто солітонних і радіаційних) ступенів свободи незбурених повністю інтегрованих рівнянь, базується на методі зворотньої задачі розсіювання (МЗЗР). Для деривативного НРШ теорія збурень, що використовує МЗЗР, була розвинена в [82]. З її допомогою вивчався вплив дисипації (кінцевої провідності плазми [82] і нелінійного загасання Ландау [83, 85]) на одиночний альфвенівський солітон. При цьому, автори [82, 83] використовували нижчий порядок теорії збурень, еквівалентний так званому адіабатичному наближенню, коли враховуються повільні зміни параметрів солітона (ширини й швидкості) при незмінної функціональній формі солітона. Відповідні рівняння описують часову еволюцію тільки дискретних спектральних даних. Відзначимо, що адіабатичні рівняння для солітонних параметрів можна одержати, загалом кажучи, і без допомоги МЗЗР, використовуючи інтеграли руху. З іншого боку, тільки МЗЗР дозволяє врахувати випромінювання, що випускається солітоном під дією збурень, і викривлення його форми.

У цьому підрозділі за допомогою теорії збурень, заснованої на МЗЗР, досліджуються радіаційні ефекти, що виникають під дією зовнішніх збурень на альфвенівський солітон. Аналітично отримані спектральні розподіли випромінюваної енергії й магнітної спіральності при врахуванні кінцевої провідності плазми й нелінійного загасання Ландау.

1.2.1 Лінійна спектральна задача для деривативного нелінійного рівняння Шредингера

Тут дамо огляд МЗЗР для деривативного НРШ слідуючи (з невеликими змінами) [76, 77]. Рівняння (1.147) може бути записане як умова спільності

$$\partial_t U - \partial_x V + [U, V] = 0, \tag{1.149}$$

двох лінійних матричних рівнянь (пари Каупа-Ньюелла) [76]:

$$\partial_x M(x, t, \lambda) = UM(x, t, \lambda), \tag{1.150}$$

$$\partial_t M(x, t, \lambda) = VM(x, t, \lambda), \tag{1.151}$$

де λ спектральний параметр, і

$$U = -i\lambda^2\sigma_3 + \lambda Q, \quad \text{з} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & u \\ -u^* & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.152}$$

$$V = -2i\lambda^4\sigma_3 + 2\lambda^3 Q - i\lambda^2 Q^2\sigma_3 + \lambda Q^3 - i\lambda Q_x\sigma_3, \tag{1.153}$$

де σ_3 матриця Паулі. Матричні розв'язки Йоста $M^{\pm}(x, \lambda)$ рівняння (1.150) для дійсного λ^2 і для деякого фіксованого t визначаються граничними умовами

$$M^{\pm}(x, \lambda) = \exp(-i\lambda^2\sigma_3 x) + o(1), \quad \text{при } x \to \pm\infty. \tag{1.154}$$

і можуть бути представлені у вигляді $M^- = (\varphi, -\bar{\varphi})$ і $M^+ = (\bar{\psi}, \psi)$, де φ і ψ незалежні векторні стовпці. Матриця розсіювання $S(\lambda)$ зв'язує M^- і M^+:

$$M^-(x, \lambda) = M^+(x, \lambda) S(\lambda). \tag{1.155}$$

Коефіцієнти розсіювання a та b визначаються співвідношеннями

$$\varphi = a\bar{\psi} + b\psi, \tag{1.156}$$

$$\bar{\varphi} = -\bar{a}\psi + \bar{b}\bar{\psi}, \tag{1.157}$$

так що матриця розсіювання має вигляд

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & -\bar{b}(\lambda) \\ b(\lambda) & \bar{a}(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{1.158}$$

де $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$. Векторні функції $\varphi(x, \lambda)$, $\psi(x, \lambda)$ і коефіцієнт $a(\lambda)$ допускають аналітичне продовження в півплощину $\operatorname{Im}\lambda^2 > 0$. Як випливає з (1.150), справедливі наступні умови симетрії

$$\bar{\varphi}(\lambda) = -i\sigma_2\varphi^*(\lambda^*), \quad \bar{\psi}(\lambda) = i\sigma_2\psi^*(\lambda^*). \tag{1.159}$$

Нулі $\lambda_j^2 = \xi_j + i\eta_j$ $(j = 1\dots N)$ функції $a(\lambda)$ в області її аналітичності $\operatorname{Im}\lambda^2 > 0$ визначають дискретний спектр лінійної задачі (1.150) і відповідають солітонам. При цьому функції $\varphi(x, \lambda_j)$ і $\psi(x, \lambda_j)$ виявляються лінійно залежними

$$\varphi(x, \lambda_j) = b_j\psi(x, \lambda_j), \quad \bar{\varphi}(x, \lambda_j^*) = -b_j^*\bar{\psi}(x, \lambda_j^*). \tag{1.160}$$

Коефіцієнти $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ з дійсним λ^2 представляють дані розсіювання безперервного спектра, а набір комплексних чисел λ_j and b_j відповідає даним розсіювання дискретного спектра. Часова еволюція даних розсіювання виявляється тривіальною

$$a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)\exp(4i\lambda^4 t), \tag{1.161}$$

$$\lambda_j(t) = \lambda_j(0), \quad b_j(t) = b_j(0)\exp(4i\lambda^4 t). \tag{1.162}$$

Несолітонная (радіаційна) частина поля повністю визначається безперервним спектром, а саме коефіцієнтом відбиття $r(\lambda) = b(\lambda)/a(\lambda)$ з $\operatorname{Im}\lambda^2 = 0$. Загальне поле $u(x, t)$ виражається через дані розсіювання та розв'язки Йоста (1.150) у такий спосіб [77]

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma (r\psi_1^2 + \bar{r}\bar{\psi}_1^2)\,d\lambda + \frac{4}{i}\sum_{j=1}^{N}(c_j\psi_{1,j}^2 + c_j^*\bar{\psi}_{1,j}^2), \tag{1.163}$$

де $\bar{r}(\lambda) \equiv \bar{b}(\lambda)/\bar{a}(\lambda) = r^*(\lambda^*)$, $c_j = b_j/a_j'$ з $a_j' = da/d\lambda|_{\lambda=\lambda_j}$. Контур Γ складається з ділянок, що простягаються від $i\infty$ до 0, від $-i\infty$ до 0, від 0 до ∞, і від 0 до $-\infty$. Перший доданок в (1.163) представляє випромінювання, тоді як другий відповідає солітонам. Якщо коефіцієнт відбиття $r(\lambda)$ тотожно дорівнює нулю, тоді $u(x,t)$ є точним N-солітонним розв'язком ДНРШ. Безвідбивні дані розсіювання з одним ($N=1$) нулем $\lambda_1^2 = \xi + i\eta$ функції $a(\lambda)$ відповідають односолітонному розв'язку (одиночному альфенівському солітону)

$$u_s(x,t) = \frac{2\eta}{|\lambda_1|}\frac{\mathrm{ch}(k_0y - i\theta)}{\mathrm{ch}^2(k_0y + i\theta)}e^{i\phi}, \tag{1.164}$$

де введені позначення

$$y = x - vt - x_0, \quad \phi = \phi_0 + 8\eta^2 t - 2\xi y, \tag{1.165}$$

$$k_0 = 2\eta, \quad v = -4\xi, \quad \theta = \arg(\lambda_1). \tag{1.166}$$

Параметри x_0 і ϕ_0 визначають початкові положення й фазу солітона. Параметри η і ξ є, з точністю до постійних множників, зворотньою шириною k_0 і швидкістю v солітона. Солітонний розв'язок (1.164) (у трохи інший формі) уперше було отримано в [70], а потім перевідкрите в [76] за допомогою методу зворотньої задачі розсіювання. Односолітонні дані розсіювання мають вигляд

$$a(\lambda) = \frac{\lambda_1^{*2}(\lambda^2 - \lambda_1^2)}{\lambda_1^2(\lambda^2 - \lambda_1^{*2})}, \quad b(\lambda) = 0, \quad \lambda_1^2 = \xi + i\eta. \tag{1.167}$$

Односолітонні розв'язку Йоста можуть бути представлені у вигляді

$$\bar{\psi}_{1,s} = \frac{\lambda_1 e^{-i\lambda^2 z - 2i\lambda^4 t}}{\lambda_1^*(\lambda^2 - \lambda_1^2)}\left[\lambda^2 A_2^*(z,t) - |\lambda_1|^2\right], \tag{1.168}$$

$$\bar{\psi}_{2,s} = -\frac{\lambda_1\lambda\, e^{-i\lambda^2 z - 2i\lambda^4 t}}{\lambda_1^*(\lambda^2 - \lambda_1^2)}A_1^*(x,t), \tag{1.169}$$

де

$$A_1(x,t) = \frac{i\eta}{|\lambda_1|}\,\frac{\exp(i\phi)}{\mathrm{ch}(k_0 y + i\theta)}, \tag{1.170}$$

$$A_2(x,t) = \frac{\mathrm{ch}(k_0 y + i\theta)}{\mathrm{ch}(k_0 y - i\theta)}. \tag{1.171}$$

Розв'язки Йоста φ_s, $\bar{\varphi}_s$ і ψ_s можуть бути отримані з (1.168) і (1.169) з використанням (1.156), (1.157) і (1.159).

1.2.2 Інтеграли руху

Оскільки деривативне НРШ є повністю інтегрованим, воно має нескінченний набір інтегралів руху. Ми будемо розглядати тільки три з них: енергію

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2\, dx, \tag{1.172}$$

гамільтоніан

$$H = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ i\left(u^* \frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial u^*}{\partial x}\right) - |u|^4 \right\} dx, \tag{1.173}$$

і магнітну спіральність, яка у фізичних змінних може бути записана як

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\, dx, \tag{1.174}$$

де векторний потенціал $\mathbf{A}$ пов'язаний з магнітним полем $\mathbf{B}$ співвідношенням $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Відзначимо, що спіральність K належить до набору нелокальних інтегралів руху [77, 86]. У термінах поля u спіральність має вигляд

$$K = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(u \int_{\infty}^{x} u^*(x')\, dx' - u^* \int_{\infty}^{x} u(x')\, dx' \right) dx, \tag{1.175}$$

Інтеграли руху можуть бути явно виражені через безперервні й дискретні (солітонні) дані розсіювання. Зокрема, маємо [77]

$$E = -2i \sum_{j=1}^{N} \ln \frac{\lambda_j^2}{\lambda_j^{*2}} + \int_\Gamma \mathcal{E}(\lambda)\, d\lambda, \tag{1.176}$$

$$H = 4i \sum_{j=1}^{N} (\lambda_j^2 - \lambda_j^{*2}) + \int_\Gamma \mathcal{H}(\lambda)\, d\lambda, \tag{1.177}$$

$$K = -i \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{\lambda_j^2} - \frac{1}{\lambda_j^{*2}} \right) + \int_\Gamma \mathcal{K}(\lambda)\, d\lambda, \tag{1.178}$$

де

$$\mathcal{E}(\lambda) = \frac{\ln[1 + r(\lambda)\bar{r}(\lambda)]}{\pi\lambda}, \tag{1.179}$$

$$\mathcal{H}(\lambda) = -2\lambda^2 \mathcal{E}(\lambda), \quad \mathcal{K}(\lambda) = -\frac{1}{2\lambda^2}\mathcal{E}(\lambda). \tag{1.180}$$

В (1.176)-(1.178) солітонний внесок ($\sum_{j=1}^{N}$) явно відділений від радіаційної компоненти ($\int d\lambda$), описуваної безперервними даними розсіювання. Дисперсійне співвідношення (беручи $\sim \exp(-ikx + i\omega t)$), відповідне до лінійної частини (1.148) з $p = 0$ має вигляд $\omega(k) = -k^2$, що означає t-залежність виду $\sim \exp(-ik^2 t)$. З іншого боку, як випливає з (1.161) та (1.162), в нелінійному випадку t-залежність безперервних спектральних даних має вигляд $\sim \exp(4i\lambda^4 t)$. Більше того, можна показати, що в лінійній границі маємо $\psi_1^2 \to 0$, у той час як $\bar{\psi}_1^2$ зводиться до $\exp(-2i\lambda^2 x - 4i\lambda^4 t)$, і коефіцієнт відбиття r^*/λ^* відповідає звичайному перетворенню Фур'є функції $u(x,t)$. Тоді, розглядаючи радіаційну компоненту як суперпозицію вільних хвиль, описуваних лінійним рівнянням Шредингера, можна укласти, що спектральний параметр λ пов'язаний із хвильовим числом k випромінюваних квазілінійних хвиль співвідношенням

$$k = 2\lambda^2, \tag{1.181}$$

де λ^2 дійсне (неперервний спектр). Інтеграл по контуру Γ в (1.163) і (1.176)-(1.178) перетвориться в інтеграл по дійсної осі k. Якщо в загальному полі є тільки один солітон (тобто $N = 1$ і $\lambda_1^2 = \xi + i\eta$), маємо

$$E = 8\theta + \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_{rad}(k)\, dk, \tag{1.182}$$

$$H = -8\eta + \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_{rad}(k)\, dk, \tag{1.183}$$

$$K = -\frac{2\eta}{\xi^2 + \eta^2} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}_{rad}(k)\, dk, \tag{1.184}$$

де

$$\mathcal{E}_{rad}(k) = \frac{\ln(1 + \operatorname{sgn} k |r(k)|^2)}{\pi k}, \tag{1.185}$$

$$\mathcal{H}_{rad}(k) = -2k\mathcal{E}_{rad}(k), \quad \mathcal{K}_{rad}(k) = -\frac{1}{2k}\mathcal{E}_{rad}(k). \tag{1.186}$$

Функції $\mathcal{E}_{rad}(k)$, $\mathcal{H}_{rad}(k)$ і $\mathcal{K}_{rad}(k)$ являють собою спектральні густини енергії, гамільтоніана й магнітної спіральності, що відповідають випромінюванню. Помітимо, що, як випливає з (1.182)-(1.184), для "чистого"солітона ($r \equiv 0$) справедливо наступне цікаве співвідношення між енергією, гамильтонианом і магнітною спіральністю

$$KH = 16 \sin^2(E/8). \tag{1.187}$$

Вираження (1.163) для загального поля тепер має вигляд

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (R\psi_1^2 + R^* \bar{\psi}_1^2)\, dk + \frac{4}{i} \sum_{j=1}^{N} (c_j \psi_{1,j}^2 + c_j^* \bar{\psi}_{1,j}^2), \tag{1.188}$$

де введена функція $R(k) = r/\lambda$.

1.2.3 Еволюція спектральних даних у присутності збурень

У присутності збурень $p \neq 0$ рівняння (1.148) можна представити в матричній формі (1.59) де

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & i\lambda p \\ -i\lambda p^* & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.189}$$

Методом, повністю аналогічним розвиненому в підрозділі 1.1, можна одержати еволюційне рівняння для матриці розсіювання $S(t,\lambda)$

$$\partial_t S(t,\lambda) + 2i\lambda^4[\sigma_3, S(t,\lambda)] = -\int_{-\infty}^{\infty} (M^+)^{-1}(x,t,\lambda) P M^-(x,t,\lambda) dx. \quad (1.190)$$

Еволюційні рівняння для коефіцієнтів $a(t,\lambda)$ та $b(t,\lambda)$ містяться в (1.190):

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} (p\psi_2\varphi_2 + p^*\psi_1\varphi_1)\, dx, \quad (1.191)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} - 4i\lambda^4 b = i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} (p\bar{\psi}_2\varphi_2 + p^*\bar{\psi}_1\varphi_1)\, dx. \quad (1.192)$$

Рівняння, що визначає нулі $\lambda_j(t)$ функції $a(t,\lambda)$ має вигляд $a(t,\lambda_j(t)) = 0$. Диференціювання по t дає

$$\partial_t a(t,\lambda_j(t)) + \frac{\partial \lambda_j}{\partial t}\, a'_j = 0, \quad (1.193)$$

де $a'_j = da/d\lambda|_{\lambda=\lambda_j}$. Використовуючи (1.191) та (1.193) одержуємо рівняння для солітонних власних значень

$$\frac{\partial \lambda_j^2}{\partial t} = \frac{2i\lambda_j^2}{a'_j} \int_{-\infty}^{\infty} (p\psi_{2,j}\varphi_{2,j} + p^*\psi_{1,j}\varphi_{1,j})\, dx, \quad (1.194)$$

де $\psi_{2,j}$, $\varphi_{2,j}$, $\psi_{1,j}$, і $\varphi_{1,j}$ відповідні розв'язки Йоста, обчислені при $\lambda = \lambda_j$. Рівняння для b_j має вигляд

$$\frac{\partial b_j}{\partial t} - 4i\lambda^4 b_j = \frac{i\lambda_j}{a'_j} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ p\,\varphi_2 \frac{\partial}{\partial\lambda}(\varphi_2 - b_j\psi_2) + p^*\,\varphi_1 \frac{\partial}{\partial\lambda}(\varphi_1 - b_j\psi_1) \right\} dx, \quad (1.195)$$

де підінтегральні вирази обчислюються при $\lambda = \lambda_j$. Рівняння (1.191), (1.192), (1.194) і (1.195) описують еволюцію спектральних даних у присутності збурень. Якщо ж $p = 0$, з (1.191), (1.192), (1.194) і (1.195) відтворюється тривіальна тимчасова динаміка (1.161), (1.162).

1.2.4 Вплив кінцевої провідності плазми та нелінійного загасання Ландау на альфвенівські солітони

Досліджуємо радіаційні ефекти, які виникають при дії дисипативних збурень на альфвенівський солітон. Будемо розглядати два різні випадки: плазми із зіткненнями, коли враховується кінцева провідність плазми (та/або іонна в'язкість), та випадок нелінійного загасання Ландау (без зіткнень). В першому випадку доданок p, відповідний до збурення в рівнянні (1.148) має дифузійну форму

$$p = iD\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.196}$$

з коефіцієнтом дифузії [87]

$$D = \frac{1}{2}\left(\frac{\eta_1}{\rho_0} + \frac{c^2}{4\pi}\eta_2\right)\frac{\omega_{ci}}{v_A^2}, \tag{1.197}$$

де η_1 коефіцієнт іонної в'язкості й η_2 питомий опір. Вираження для η_1 та η_2 у деяких граничних випадках наведені в [87]. Умови, при яких дифузійний доданок (1.196) може розглядатися як мале збурення мають вигляд [87]

$$\omega \ll \nu_i \ll \omega_{ci}, \tag{1.198}$$

при $v_i \sim v_A$, де v_i і v_A відповідно теплова іонна й альфенівська швидкості, або

$$\omega_{ci} \ll \nu_i \ll \omega_{ci}\sqrt{M/m}, \tag{1.199}$$

де ν_i частота іонних зіткнень. У випадку з нелінійним загасанням Ландау збурення має вигляд [87, 88]

$$p = i\frac{C}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(u\,P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|u(x',t)|^2}{x'-x}dx'\right), \tag{1.200}$$

де P символ головного значення. Облік цього кінетичного доданка особливо важливий у випадку $\beta \sim 1$ і $T_e/T_i \sim 1$, де β відношення газокинетичного тиску до магнітного, T_e і T_i відповідно електронна й іонна температури (зокрема у плазмі сонячного вітру), коли альфвенівські хвилі взаємодіють із сильно загасаючими іонно-звуковими хвилями [84, 89]. Коефіцієнт C в (1.200) залежить від функцій розподілу частинок по швидкостям. Як вказувалося в [83, 88], у плазмі з ізотропним максвеловським розподілом електронів та іонів, ефект резонансних частинок, що відповідає (1.200), малий і може розглядатися як збурення (тобто $C \ll 1$) якщо альфенівська швидкість v_A багато більше швидкості іонного звуку v_s. При цьому

$$C = \sqrt{\frac{m}{2\pi M}} \frac{v_s}{v_A} \exp\left(-\frac{v_A^2}{2v_e^2}\right), \quad v_A \gg v_s, \tag{1.201}$$

де v_e теплова швидкість електронів. Адіабатичні рівняння, що описують повільну еволюцію солітонних параметрів (ширини й швидкості), тобто дискретних даних розсіювання, під дією збурень виду (1.196) або (1.200) були отримані й проаналізовані в [82, 83]. Адіабатичне наближення відповідає $r(\lambda) = 0$ і має на увазі незмінну форму солітона та відсутність випромінювання. Ми розглядаємо ефекти випромінювання, яким відповідає неперервний спектр даних розсіювання й ненульовий коефіцієнт відбиття $r(\lambda)$.

У присутність збурення (тобто $p \neq 0$ в (1.148)), коефіцієнт відбиття $r(\lambda)$ більше не дорівнює нулю, але для малих p маємо $|r(\lambda)| \ll 1$. Тоді з (1.185) випливає, що спектральна густина енергії випромінювання має вигляд

$$\mathcal{E}_{rad}(k) = \frac{|r(k)|^2}{\pi|k|}. \tag{1.202}$$

Інтенсивність випромінювання характеризується його потужністю, тобто енергією випромінювання в одиниці часу. Спектральна густина потужності випромінювання $W(k) \equiv d\mathcal{E}_{rad}/dt$

$$W(k) = \frac{2}{\pi|k|} \mathrm{Re}\{r^*(k)\, dr(k)/dt\}. \tag{1.203}$$

Таким чином, необхідно визначити коефіцієнт відбиття $r(k)$. Враховуючи, що в нульовому наближенні маємо $\partial a/\partial t = 0$ та $\varphi_s = a\bar{\psi}_s$, з рівнянь (1.191) і (1.192) одержуємо рівняння, що описують часову еволюцію $r(k)$

$$\frac{\partial r}{\partial t} - 4i\lambda^4 r = i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} (p\bar{\psi}_{2,s}^2 + p^*\bar{\psi}_{1,s}^2)\, dx, \tag{1.204}$$

де $\bar{\psi}_{1,s}$ та $\bar{\psi}_{2,s}$ односолітонні розв'язки Йоста, обумовлені відповідно (1.168) і (1.169) .

Розглянемо спочатку випадок із зіткненнями, коли збурення p в (1.205) має вигляд (1.196). Якщо $p = 0$ то часова еволюція коефіцієнта відбиття r визначається з (1.161) і (1.162). Права частина рівняння (1.205) описує вплив збурення на r в присутність солітона. Як відзначалося вище, у лінійній границі (зникаюча нелінійність і відсутність солітонів) r/λ є фур'є образом $u^*(x,t)$. Щоб урахувати лінійне загасання, підставимо дифузійний доданок $\Gamma = Dk^2$ у ліву частину (1.205) . Тоді рівняння (1.205) має вигляд

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \Gamma(\lambda) r - 4i\lambda^4 r = e^{-i\Omega(\lambda)t + 4i\lambda^4 t} F(\lambda), \tag{1.205}$$

де $\Omega(\lambda) = 8(\lambda^4 + \eta^2)$, $\Gamma(\lambda) = 4D\lambda^4$, і функція $F(\lambda)$ може бути виписана в явному вигляді після обчислення інтегралів в (1.205). У загальному випадку вирази для $F(\lambda)$ виявляється занадто громіздкими, і ми розглянемо випадок $\xi = 0$ (нерухливий солітон у системі координат, що рухається з альфенівською швидкістю v_A). Тоді для F можна одержати

$$F(\lambda) = 4\pi D\lambda\eta^{3/2} \frac{\mu(1+\mu^2)\left(e^{\pi\mu/4} - \mu e^{-\pi\mu/4}\right)}{(\mu - i)^2 \operatorname{ch}(\pi\mu/2)}, \tag{1.206}$$

де $\mu = \lambda^2/\eta$. Якщо $r(\lambda, 0) = 0$ у початковий момент часу $t = 0$ (тобто один чистий солітон), то розв'язок рівняння (1.205) має вигляд

$$r(\lambda, t) = \frac{F(\lambda)}{\Gamma(\lambda) - i\Omega(\lambda)} e^{4i\lambda^4 t} (e^{-i\Omega(\lambda)t} - e^{-\Gamma(\lambda)t}). \tag{1.207}$$

У квазістаціонарному режимі для коефіцієнта відбиття одержуємо

$$r(\lambda, t) = \frac{F(\lambda) e^{-i\Omega(\lambda)t + 4i\lambda^4 t}}{\Gamma(\lambda) - i\Omega(\lambda)}, \tag{1.208}$$

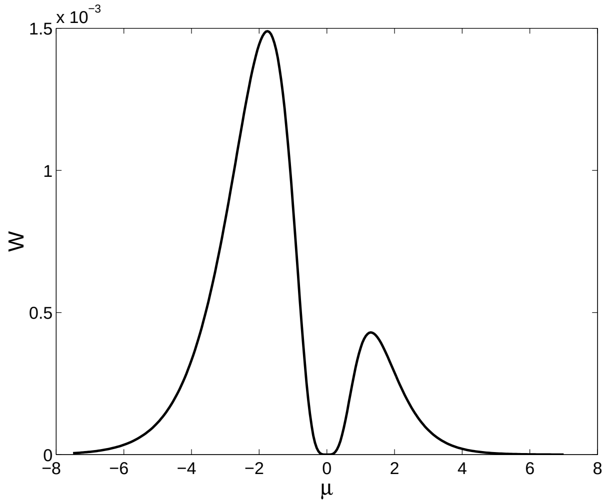

Рис. 1.3 Спектральна густина потужності, випромінюваної альфенівским солітоном для $D = 0.1$, $k_0 = 2$.

і, отже

$$\mathrm{Re}\left(r^* \frac{dr}{dt}\right) = \frac{\Gamma |F|^2}{\Gamma^2 + \Omega^2}. \tag{1.209}$$

Використовуючи (1.203), (1.206) та (1.209), знаходимо вирази для спектральної густини потужності, випромінюваної солітоном у присутність дисипативного збурення виду (1.196)

$$W(k) = \frac{2\pi D^3 k_0 \mu^4 \left(\mu e^{-\pi\mu/4} - e^{\pi\mu/4}\right)^2}{\left[D^2\mu^4 + 4(1+\mu^2)^2\right] \mathrm{ch}^2(\pi\mu/2)}, \tag{1.210}$$

де параметр $\mu = k/k_0$ (нормоване хвильове число) являє собою відношення ширини солітона до довжини хвилі випромінювання. Спектральний розподіл $Q(k) = d\mathcal{K}_{rad}(k)/dt$ темпу випромінюваної магнітної спіральності, як випливає из (1.186), має вигляд

$$Q(k) = -\frac{W(k)}{2k_0\mu}. \tag{1.211}$$

Спектральний розподіл $W(k)$ випромінюваної потужності представлене на рис. 1.3 для $D = 0.1$ і $k_0 = 2$. Розподіл має два асиметричні піки й експоненціально спадаючі хвости. Лівий пік вище правого, але дана картина слушна тільки для правополяризованого солітона й для $s > 0$ (тобто для плазми з $\beta < 1$ – газокинетичний тиск більше магнітного) у рівнянні (1.148). Так як випадок $s < 0$ може бути отриманий з $s > 0$ заміною $x \to -x$, можна бачити, що в плазмі з $\beta > 1$ (газокинетичний тиск більше магнітного), або для солітона с лівою поляризацією, правий пік на рис. 1.3 вище лівого.

Визначивши коефіцієнт відбиття r, можна знайти поле випромінювання $u_c(z,t)$ у фізичному просторі, підставляючи односолітонні розв'язки Йоста $\psi_{1,s}$ і $\bar{\psi}_{1,s}$ у перший доданок (1.188). Роблячи заміну змінних $k = k_0\mu$ в інтегралі в (1.188), можна написати

$$u_c(x,t) = \frac{k_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(R\psi_{1,s}^2 + R^*\bar{\psi}_{1,s}^2)\, d\mu \tag{1.212}$$

де, як випливає из (1.208), функція R має вигляд

$$R = \frac{\sqrt{2}\pi D\mu(\mu+i)\left(e^{\pi\mu/4} - \mu e^{-\pi\mu/4}\right)e^{-i(2+\mu^2)k_0^2 t}}{\sqrt{k_0}[D\mu^2 - 2i(1+\mu^2)](\mu - i)\,\mathrm{ch}(\pi\mu/2)}. \tag{1.213}$$

Інтеграл в (1.212) можна оцінити за допомогою теорії відрахувань. Функція $R\psi_{1,s}^2$ у верхній півплощині комплексної змінної μ (це відповідає області $x > 0$) має полюси при $\mu = i$ і $\mu = -1 + id/4$ (враховуючи, що $D \ll 1$). Крім того, вона має нескінченний набір полюсів $\mu_n = i + 2ni$ (де $n = 0, 1, 2\ldots$), що виникають через функцію $\mathrm{ch}(\pi\mu/2)$ в знаменнику (1.213). Обчислюючи відрахування, можна бачити, що для області не занадто близької до $|x| = 0$ (більш точно, повинна виконуватися нерівність $|x| > 1/k_0$), головний внесок в (1.212) дають полюси з найменшими уявними частинами. Внесок полюсів з досить великими уявними частинами швидко зникає при $|x| > 1/k_0$. Тоді, оскільки $D \ll 1$, можна ураховувати тільки полюси, що містять в уявній частині доданку D . Виконуючи обчислення знайдемо, що поле випромінювання, що випускається солітоном, в області $|x| > 1/k_0$ на часах $\sim 1/D$ має вид

$$u \sim \frac{\sqrt{2k_0}\pi D}{2\,\mathrm{ch}(\pi/2)}e^{-ik_0|x| - k_0 D|x|/4}\left\{\frac{A}{\mathrm{ch}^2(k_0x + i\pi/4)} + B\left[\frac{\mathrm{ch}(k_0x + i\pi/4)}{\mathrm{ch}(k_0x - i\pi/4)} - 1\right]^2\right\}, \tag{1.214}$$

де $A = -\,\mathrm{ch}(\pi/4)$, $B = -\,\mathrm{sh}(\pi/4)$ для $x > 0$ і $A = \mathrm{sh}(\pi/4)$, $B = -\,\mathrm{ch}(\pi/4)$ для $x < 0$.

Для випадку збурення у вигляді нелінійного загасання Ландау (1.200) точне обчислення інтегралів в (1.205) для загального односолітонного розв'язку неможливо, тому обмежимося випадком так званого алгебраїчного солітона [76]. Алгебраїчний солітон знаходиться із загального односолітонного розв'язку (1.164) в границі $\eta \to 0$ (тобто нуль λ_1^2 наближається до дійсної осі) за умови $\xi < 0$:

$$u_s = |u_s| e^{i\phi} \left(\frac{1 - ivy}{1 + ivy} \right)^{3/2}, \tag{1.215}$$

$$|u_s| = 4 \sqrt{\frac{\xi}{1 + 16\xi^2 y^2}}, \tag{1.216}$$

$$y = x - vt - x_0, \quad \phi = \phi_0 - 2\xi y, \quad v = -4\xi. \tag{1.217}$$

Цей солітон має алгебраїчно спадаючі хвости й, як випливає з (1.182), найбільшу енергію $E_s = 4\pi$. Існування таких алгебраїчних солітонів – специфічна властивість дериватившого нелінійного рівняння Шредингера. Алгебраїчні односолітонні функції Йоста можуть бути визначені з (1.168)-(1.171) узяттям відповідної границі і мають вигляд

$$\bar{\psi}_{1,s} = -\frac{e^{-i\lambda^2 x - 2i\lambda^4 t}}{(\lambda^2 - \xi)} \left[\lambda^2 A_2^*(x,t) - |\xi| \right], \tag{1.218}$$

$$\bar{\psi}_{2,s} = \frac{\lambda\, e^{-i\lambda^2 x - 2i\lambda^4 t}}{(\lambda^2 - \xi)} A_1^*(x,t), \tag{1.219}$$

де

$$A_1(x,t) = \frac{2i\sqrt{-\xi}\, \exp(i\phi)}{(1 - 4i\xi y)}, \quad A_2(x,t) = \frac{(1 - 4i\xi y)}{(1 + 4i\xi y)}. \tag{1.220}$$

Підставляючи (1.200), (1.215), (1.218) та (1.219) в (1.205), одержуємо рівняння (1.205) з $\Omega(\lambda) = 8\lambda^2(\lambda^2 + |\xi|)$ і

$$F(\lambda) = -28\pi C \lambda^3 |\xi|^{1/2} e^{-|\alpha|/2} [1 + |\alpha| h(-\alpha)], \tag{1.221}$$

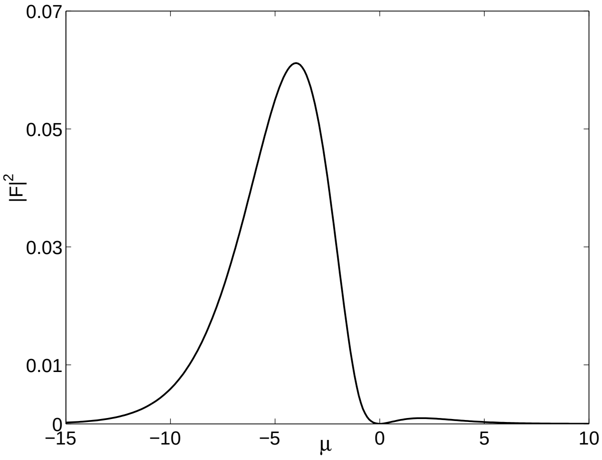

Рис. 1.4 Функція $|F(\mu)|^2$ в (1.224) для $C = 0.1$, $k_0 = 2$.

де $\alpha = 1 + \lambda^2/|\xi|$ і $H(x)$ - східчаста функція Хевисайда

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geqslant 0. \end{cases} \tag{1.222}$$

Приспускаючи лінійне загасання малим, уважаємося $\Gamma \to 0$. Позначаючи $\mu = k/k_0$ з $k_0 = 2|\xi|$, маємо

$$|F(\mu)|^2 = \frac{49}{16}\pi^2 C^2 |v|^4 |\mu|^3 e^{-|\alpha|}[1 + |\alpha| h(-\alpha)]^2, \tag{1.223}$$

де $\alpha = 1 + \mu$. Оскільки $\Gamma/[\Gamma^2 + \Omega^2] \to \pi\delta(\Omega)$ при $\Gamma \to 0$, для спектральної густини випромінюваної потужності знаходимо

$$W(k) = \frac{2|F(\mu)|^2}{|k|}\delta(2k^2 + 2kk_0). \tag{1.224}$$

Видно, що випромінювання зосереджене у двох точках спектра: $k = 0$ і $k = -k_0$. Функція $|F(\mu)|^2$ представлена на рис. 1.4.

1.2.5 Вплив флуктуацій густини плазми

Тут розглянемо вплив флуктуацій густини плазми на альфвенівський солітон.

У більш загальній формі нелінійний доданок у рівнянні (1.148) можна написати у вигляді $i\partial_x(nu)$, де n збурення густини плазми. У такій формі рівняння (1.148) справедливо, наприклад, для випадку, коли альфвенівські хвилі сильно взаємодіють із магнітозвуковими та є незалежне еволюційне рівняння для збурення n [81, 90]. Статичний випадок $n = -|u|^2$ відповідає деривативному НРШ (1.148). У присутність флуктуацій представимо густину плазми у вигляді $n \to n+f$, де f відповідає випадковим флуктуаціям густини плазми. При цьому, доданок, що відповідає збуренню в (1.148), має вигляд

$$p = i\frac{\partial}{\partial x}(fu), \tag{1.225}$$

де $f(x,t)$ випадкове гауссівське поле з нульовим середнім і $\langle f \rangle = 0$ та корρелятором

$$\langle f(x,t)f(x',t')\rangle = D(x-x')B(t-t'). \tag{1.226}$$

Підставляючи (1.225) в (1.205), і використовуючи (1.150) для функції $\rho(\lambda) = r(\lambda)\exp(-4i\lambda^4 t)$ можна одержати рівняння

$$\frac{d\rho}{dt} = -2i\lambda e^{-4i\lambda^4 t}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)G(\lambda,x,t)\,dx, \tag{1.227}$$

де

$$G(\lambda,x,t) = \lambda^2(u_s\bar{\psi}_{2,s}^2 + u_s^*\bar{\psi}_{1,s}^2) + 2i\lambda|u_s|^2\bar{\psi}_{1,s}\bar{\psi}_{2,s}. \tag{1.228}$$

Множачи праву частину (1.227) на $\exp(\epsilon t)$ з нескінченно малим $\epsilon > 0$ (як звичайно, це має на увазі адіабатичне включення на нескінченності, відсутнє при $t = -\infty$) і інтегруючи, одержуємо

$$\rho = -2i\lambda\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4i\lambda^4\tau+\epsilon\tau} f(x,\tau)G(\lambda,x,\tau)\,d\tau dx. \tag{1.229}$$

Множачи (1.227) на комплексно-сполучене(1.229) і виконуючи усереднення

$$\left\langle r^*\frac{dr}{dt}\right\rangle = 4|\lambda|^2\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{4i\lambda^4(\tau-t)+\epsilon\tau}B(t-\tau) \times D(x-x')G(\lambda,x,t)G^*(\lambda,x',\tau)\,d\tau dx dx'. \tag{1.230}$$

Після фур'є перетворень по просторі й часу, $B(t)$ і $D(x)$

$$B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{B}(\omega) \exp(-i\omega t)\, d\omega, \tag{1.231}$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{D}(q) \exp(-iqx)\, dq, \tag{1.232}$$

а потім, обчислення інтегралів по x і x' в (1.230), можна виконати інтегрування по τ в (1.230, і після громіздких але безпосередніх обчислень одержати

$$\left\langle r^* \frac{dr}{dt} \right\rangle = \frac{16\pi^2\eta^2|\mu|\mu^2}{[1+(\mu+\nu)^2]^2\sqrt{1+\nu^2}}$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\tilde{B}(\omega)\tilde{D}(q)I^2(q)}{(h-\omega-qv+i\epsilon)\operatorname{ch}^2(\pi\alpha/2)}\, d\omega\, dq, \tag{1.233}$$

де введені позначення

$$h = -2k_0^2(1+\mu^2) - \mu k_0 v, \tag{1.234}$$

$$\nu = -\xi/\eta, \quad \alpha = \mu + \nu + q/k_0, \tag{1.235}$$

$$I(q) = \sqrt{1+\nu^2}(5q/k_0 - 8\nu - 2\mu)e^{\theta\alpha}$$
$$-[3\mu q/k_0 + 2\mu^2 + 4(1+\nu^2)]e^{-\theta\alpha}. \tag{1.236}$$

Потім, скориставшись співвідношенням $\lim_{\epsilon\to 0}(y-i\epsilon)^{-1} = P(1/y) + i\pi\delta(y)$, де P символ головного значення, знайдемо

$$\operatorname{Re}\left\langle r^* \frac{dr}{dt} \right\rangle = \frac{16\pi^3\eta^2|\mu|\mu^2}{[1+(\mu+\nu)^2]^2\sqrt{1+\nu^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{B}(h-qv)\tilde{D}(q)I^2(q)}{\operatorname{ch}^2(\pi\alpha/2)}\, dq. \tag{1.237}$$

Підстановка (1.237) в (1.203) дає середню спектральну потужність випромінювання $\langle W(k)\rangle$, що випускається солітоном.

Розглянемо спочатку випадок, коли $f(x,t)$ випадкова функція тільки x (просторові неоднорідності), так що $\tilde{B}(\omega) = \delta(\omega)$. У цьому випадку спектр потужності , випромінюваної солітоном, має вигляд

$$\langle W(k)\rangle = \frac{8\pi^2 k_0 \mu^2 \tilde{D}(h/v) I^2(h/v)}{[1+(\mu+\nu)^2]^2\sqrt{1+\nu^2}\operatorname{ch}^2[\pi(\nu^2-\mu^2-1)/2\nu]}, \tag{1.238}$$

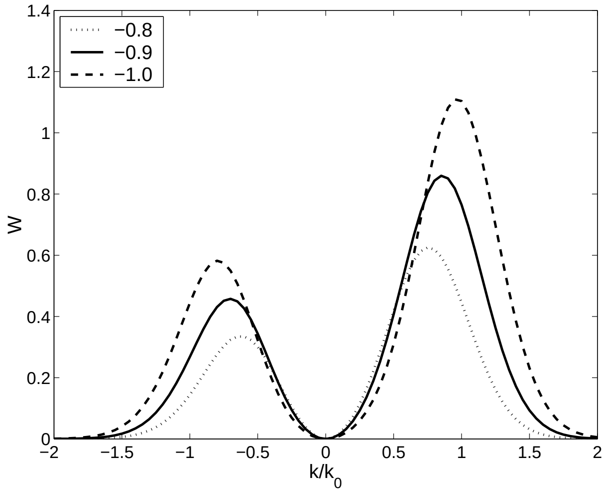

Рис. 1.5 Спектральна густина випромінювання для різних ν і $D_0 = 0.01$, $k_0 = 1$, $q_c = 5$.

і може бути явно виражений через довільний вид корелятора шуму $\tilde{D}(q)$. Зокрема, у випадку лоренцівської форми корелятора маємо

$$\tilde{D}(q) = \frac{D_0 q_c}{\pi[(q - q_0)^2 + q_c^2]}, \tag{1.239}$$

де D_0 інтегральна інтенсивність шуму. Спектральний розподіл випромінюваної потужності показано на рис. 1.5 для різних значень $\nu = -\eta/\xi$ (з $q_c = 5$, $k_0 = 1$, $D_0 = 0.01$).

Тепер розглянемо випадок, коли просторова частина $\varepsilon(x)$ випадкової функції $f(x,t)$ має вигляд

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0 \cos(q_0 x + \vartheta), \tag{1.240}$$

де випадкова амплітуда ε_0 нормально розподілена величина з нульовим середнім і дисперсією σ^2, а випадкова фаза ϑ однорідним образом розподілена між 0 та 2π. Кореляційна функція такого процесу має вигляд $D(x) = (\sigma^2/2)\cos(q_0 x)$, або у просторі хвильових чисел

$$\tilde{D}(q) = \frac{\sigma^2}{4}[\delta(q - q_0) + \delta(q + q_0)]. \tag{1.241}$$

У цьому випадку просторові флуктуації зосереджені в області масштабів

$1/q_0$. Тоді спектральна густина випромінювання має вигляд

$$\langle W(k)\rangle = \frac{4\pi^3\eta^2|\mu|\mu^2\sigma^2}{[1+(\mu+\nu)^2]^2\sqrt{1+\nu^2}}\left\{\frac{\tilde{B}(h-q_0v)I^2(q_0)}{\mathrm{ch}^2(\pi\alpha_+/2)}+\frac{\tilde{B}(h+q_0v)I^2(-q_0)}{\mathrm{ch}^2(\pi\alpha_-/2)}\right\}, \tag{1.242}$$

де $\alpha_\pm = \mu+\nu\pm q_0/k_0$, і може бути виписана в явній формі для довільного частотного корелятора $\tilde{B}(\omega)$. Як випливає із (1.242), у випадку, коли домінують просторові флуктуації, випромінювання зосереджене в чотирьох точках спектра

$$k_{1,2} = [-v\pm\sqrt{v^2-8(2k_0^2+q_0v)}]/4, \tag{1.243}$$

і

$$k_{3,4} = [-v\pm\sqrt{v^2-8(2k_0^2-q_0v)}]/4. \tag{1.244}$$

Видно, що в точках $k_{1,2}$ випромінювання можливо, якщо швидкість солітона задовольняє умовам $v > 4(q_0+\sqrt{q_0^2+k_0^2})$ або $v < 4(q_0-\sqrt{q_0^2+k_0^2})$. Для хвильових чисел $k_{3,4}$ відповідні умови мають той же вид зі зворотнім знаком q_0 .

1.3 N-солітонні розв'язки та теорія збурень для деривативного нелінійного рівняння Шредингера з неспадаючими граничними умовами

У випадку поширення альфвенівських хвиль під кутом θ до зовнішнього магнітного поля, для деривативного нелінійного рівняння Шредингера (1.147) формулюються неспадаючі граничні умови [88]

$$u\to\rho\exp(\pm 2i\theta), \quad \text{при} \quad x\to\pm\infty, \tag{1.245}$$

де $\rho = \sqrt{B_{0y}^2+B_{0z}^2}$, $\mathrm{tg}\,2\theta = B_{0z}^2/B_{0y}^2$, B_{0y} та B_{0z} поперечні компоненти зовнішнього магнітного поля.

Формалізм методу зворотньої задачі для деривативного НРШ із неспадаючими граничними умовами набагато більш складний, ніж у випадку спадаючих на нескінченності умов. Аналітичні властивості розв'язків Йоста формулюються на римановій поверхні спектрального параметра [78–80] і відповідні пряма і зворотна задача виявляються досить складними. У роботі [91] було запропоновано конформне перетворення, що дозволяє уникнути конструювання листів римановій поверхні. Обидва підхода, однак, стикаються із труднощами при знаходженні явних точних N-солітонних розв'язків. Причина полягає в тому, що одержувані розв'язки u містять фазовий множник $\exp(i\eta^+)$, де η^+ якийсь певний інтеграл від $|u|^2$. Таким чином, розв'язки виписуються в неявній формі й явно може бути знайдений тільки модуль розв'язку $|u|$, але не фаза. Хоча для найпростішого однопараметричного солітонного розв'язку фаза η^+ може бути обчислена безпосереднім інтегруванням, ця процедура незастосовна для N-солітонних розв'язків (інтегрування в явному виді неможливо вже для 2-солітонного розв'язку). Явні вирази були знайдені за допомогою досить штучних перетворень тільки в деяких окремих випадках: для двохпараметричного односолітонного бризерного розв'язку [91], і для N-солітонного розв'язку із чисто уявними дискретними спектральними даними [92, 93]. Відзначимо, що існують методи знаходження N-солітонних розв'язків інтегрованих рівнянь відмінні від методу зворотньої задачі, однак метод Хіроти [94] не здатний працювати з неспадаючими граничними умовами, а метод [95, 96] взагалі не може бути застосовано до деривативного НРШ.

У цьому підрозділі ми представляємо метод знаходження точних багатосолітонних розв'язків деривативного НРШ із неспадаючими граничними умовами, який фактично використовує тільки пряму задачу розсіювання та алгебраічне конструювання у спектральному просторі. Уводиться концепція $N+M$-солітонного розв'язку, відповідного N бризерам (осцілюючим солітонам) та M "звичайним"світлим та/або темним солітонам в асимптотиці. Виводяться також рівняння для спектральних даних у присутності збурень і досліджується вплив збурення дифузійного типу на одиночний темний та світлий солітон.

1.3.1 Пряма задача розсіювання для деривативного нелінійного рівняння Шредингера з неспадаючими граничними умовами

Розглянемо лінійну спектральну задачу (1.150) для деякого фіксованого t. У термінах матриці U, визначеної в (1.152), граничні умови (1.245) можна представити у вигляді $\lim\limits_{x\to\pm\infty} U(x,\lambda) = U^{\pm}(\lambda)$, де

$$U^{\pm} = \begin{pmatrix} -i\lambda^2 & \rho\lambda e^{\pm 2i\theta} \\ -\rho\lambda e^{\mp 2i\theta} & i\lambda^2 \end{pmatrix}. \tag{1.246}$$

Асимптотичний (при $|x| \to \pm\infty$) розв'язок $E^{\pm}$ рівняння (1.150) задовольняє рівнянню

$$\partial_x E^{\pm} = U^{\pm} E^{\pm}. \tag{1.247}$$

Матриці $E^{\pm}$ містять функцію $K(\lambda) = \lambda\sqrt{\lambda^2+\rho^2}$, і аналітичні властивості розв'язків задачі (1.150) формулюються на рімановій поверхні, обумовленою функцією $K(\lambda)$. Ріманова поверхня $\mathcal{S}$ складається із двох листів $\mathcal{S}^+$ та $\mathcal{S}^-$ комплексної λ-площини з розрізами уздовж уявної осі від $-\infty$ до $-i\rho$ і від $i\rho$ до ∞. Конформне перетворення [91]

$$\lambda(\zeta) = \frac{1}{2}\left(\zeta - \frac{\rho^2}{\zeta}\right) \tag{1.248}$$

переводить листи $\mathcal{S}^{\pm}$ відповідно в $\operatorname{Im}\zeta > 0$ і $\operatorname{Im}\zeta < 0$ півплощини й дійсну вісь на комплексній λ-площині в дійсну вісь на ζ-площині. При цьому

$$E^{\pm}(x,\zeta) = e^{\pm i\theta\sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & -i\rho/\zeta \\ -i\rho/\zeta & 1 \end{pmatrix} e^{-ik(\zeta)\sigma_3 x}, \tag{1.249}$$

де функція $k(\zeta)$ визначається співвідношенням

$$k(\zeta) = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{\rho^2}{\zeta}\right)\lambda(\zeta). \tag{1.250}$$

Для $\operatorname{Im}\zeta = 0$ позначимо $M^{\pm}(x,\zeta)$ матричні розв'язки Йоста спектральної задачі (1.150), що задовольняють граничним умовам

$$M^{\pm} \to E^{\pm}(x,\zeta), \qquad \text{при } x \to \pm\infty. \tag{1.251}$$

Інтегральне рівняння для $M^{\pm}(x,\zeta)$ може бути отримане з (1.150) і (1.251)

$$M^{\pm}(x,\lambda) = E^{\pm}(x,\lambda) \mp i\lambda \int_x^{\pm\infty} E^{\pm}(x-y,\lambda)Q(y)M^{\pm}(y,\lambda)\,dy. \tag{1.252}$$

Матричні розв'язки Йоста $M^{\pm}(x,\zeta)$ представляються у вигляді $M^- = (\varphi,\bar{\varphi})$ і $M^+ = (\bar{\psi},\psi)$, де φ і ψ незалежні векторні стовпці. Матриця розсіювання $S(\zeta)$ зв'язує два фундаментальні розв'язки M^- і M^+:

$$M^-(x,\zeta) = M^+(x,\zeta)S(\zeta). \tag{1.253}$$

Коефіцієнти Йоста визначаються співвідношеннями

$$\varphi = a\bar{\psi} + b\psi, \tag{1.254}$$

$$\bar{\varphi} = -\bar{a}\psi + \bar{b}\bar{\psi}, \tag{1.255}$$

так що матриця розсіювання має вигляд

$$S(\zeta) = \begin{pmatrix} a(\zeta) & -\bar{b}(\zeta) \\ b(\zeta) & \bar{a}(\zeta) \end{pmatrix}, \tag{1.256}$$

де $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$. Матриці $M^{\pm}$ і S мають наступні властивості симетрії

$$S(\zeta) = \sigma_3 S(-\zeta)\sigma_3, \qquad M^{\pm}(\zeta) = \sigma_3 M^{\pm}(-\zeta)\sigma_3, \tag{1.257}$$

$$S(\zeta) = \sigma_2 S^*(\zeta^*)\sigma_2, \qquad M^{\pm}(\zeta) = \sigma_2 M^{\pm *}(\zeta^*)\sigma_2, \tag{1.258}$$

так що $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Крім того

$$M^{\pm}(x,\rho^2/\zeta) = (\zeta/\rho)\sigma_3 M^{\pm}(x,\zeta)\sigma_2, \tag{1.259}$$

$$S(\rho^2/\zeta) = \sigma_2 S(\zeta)\sigma_2 = S^*(\zeta^*) \tag{1.260}$$

З (1.253) випливає, що

$$a(\zeta) = \Delta^{-1}(\zeta)\det(\varphi, \psi), \tag{1.261}$$

де введена функція

$$\Delta(\zeta) \equiv \det \mathbf{M}^{\pm} = 1 + \rho^2/\zeta^2. \tag{1.262}$$

Стовпці $\varphi(x,\zeta)$ і $\psi(x,\zeta)$ допускають аналітичне продовження в $\operatorname{Im} k(\zeta) > 0$ (тобто в перший і третій квадранти комплексної ζ-площини), а $\bar{\varphi}$ та $\bar{\psi}$ аналітичні в $\operatorname{Im} k(\zeta) < 0$ (тобто в другому й четвертому квадрантах) [78, 91]. Тоді коефіцієнт $a(\zeta)$ аналітичен в $\operatorname{Im} k(\zeta) > 0$. Функція $a(\zeta)$ може мати нулі $\zeta_1, \dots, \zeta_J$ в області своєї аналітичності . З (1.261) тоді випливає, що стовпці ψ і φ є лінійно залежними й існують комплексні числа $b_1, \dots, b_J$ такі що

$$\varphi(x, \zeta_j) = b_j \psi(x, \zeta_j), \tag{1.263}$$

і, аналогічно

$$\bar{\varphi}(x, \zeta_j^*) = -b_j^* \bar{\psi}(x, \zeta_j^*). \tag{1.264}$$

З рівняння (1.252) маємо асимптотики при $|\zeta| \to \infty$

$$\psi(x,\zeta)e^{-ik(\zeta)x} \to \begin{pmatrix} -iu/\zeta \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(\eta^+ - \theta)} + O(1/|\zeta|^2), \tag{1.265}$$

$$\varphi(x,\zeta)e^{ik(\zeta)x} \to \begin{pmatrix} 1 \\ -iu^*/\zeta \end{pmatrix} e^{i(\eta^- - \theta)} + O(1/|\zeta|^2), \tag{1.266}$$

де

$$\eta^{\pm} = \pm\frac{1}{2}\int_x^{\pm\infty} (\rho^2 - |u|^2)\, dx. \tag{1.267}$$

При $|\zeta| \to 0$ маємо

$$\psi(x,\zeta)e^{-ik(\zeta)x} \to \begin{pmatrix} -i\rho/\zeta \\ u^*/\rho \end{pmatrix} e^{-i(\eta^+ - \theta)} + O(1), \tag{1.268}$$

$$\varphi(x,\zeta)e^{ik(\zeta)x} \to \begin{pmatrix} u/\rho \\ -i\rho/\zeta \end{pmatrix} e^{-i(\eta^- - \theta)} + O(1), \tag{1.269}$$

тоді з (1.261) випливає, що асимптотики $a(\zeta)$ мають вигляд

$$a(\zeta) \to \exp(i\eta - 2i\theta), \qquad \text{при } |\zeta| \to \infty \tag{1.270}$$

$$a(\zeta) \to \exp(-i\eta + 2i\theta), \qquad \text{при } |\zeta| \to 0, \tag{1.271}$$

де

$$\eta = \eta^+ + \eta^- = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (\rho^2 - |u|^2)\, dx. \tag{1.272}$$

Нулі функції $a(\zeta)$ в області її аналітичності (тобто в першому і третьому квадрантах комплексної ζ-площини) не є незалежними через властивості симетрії (1.257), (1.258) і (1.260) [91]. Якщо ζ_j є простим нулем $a(\zeta)$ у першому квадранті, поза ρ-колом, тоді $-\zeta_j$ (у третьому квадранті поза ρ-колом), ρ^2/ζ_j^* (у першому квадранті й усередині ρ-кола) і $-\rho^2/\zeta_j^*$ (у третьому квадранті й усередині ρ-кола) також є простими нулями функції $a(\zeta)$. Якщо ζ_j лежить на ρ-колі, для кожного j є два нулі: ζ_j та $-\zeta_j$. Таким чином, будемо розглядати нулі ζ_j функції $a(\zeta)$, які лежать тільки у першому квадранті поза та/або ρ-колом. Ці нулі можна параметризувати співвідношенням $\zeta_j = \rho \exp(\gamma_j + i\beta_j)$, де $\gamma_j \geqslant 0$ і $0 < \beta_j < \pi/2$. Надалі уважаємо, що в першому квадранті M нулів лежать на ρ-колі й N нулів лежать поза ρ-колом, так що $j = 1 \ldots M + N$. Як буде показано далі, M нулів на ρ-колі відповідають однопараметричним солітонам, а N нулів поза ρ-колом – двохпараметричним солітонам (бризерам). Використовуючи асимптотики (1.270), (1.271) і метод перетворення Гільберта [45] спільно з властивостями (1.257), (1.258) та (1.260), можна виразити функцію $a(\zeta)$ через її нулі ζ_j, які лежать в першому квадранті поза та/або ρ-колі, та через модуль $|b(\zeta)|$ на контурі $\Gamma = [0, -\infty] \cup [0, \infty] \cup [i\infty, 0] \cup [-i\infty, 0]$

$$a(\zeta) = e^{i(\eta - 2\theta)} \prod_{j=1}^{N} \frac{(\zeta^2 - \zeta_j^2)}{(\zeta^2 - \zeta_j^{*2})} \frac{(\zeta^2 - \rho^4/\zeta_j^{*2})}{(\zeta^2 - \rho^4/\zeta_j^2)} \prod_{k=1}^{M} \frac{(\zeta^2 - \zeta_k^2)}{(\zeta^2 - \zeta_k^{*2})} \times \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\ln(1 - |b(\mu)|^2)}{\mu - \zeta} d\mu\right\}. \tag{1.273}$$

Уважаючись $\zeta = 0$ в (1.273) і порівнюючи з (1.268), для η одержимо

$$\eta = 2\theta - 2\sum_{k=1}^{M} \arg\zeta_k - 4\sum_{j=1}^{N} \arg\zeta_j + \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma} \frac{\ln(|a(\mu)|^2)}{\mu} d\mu. \tag{1.274}$$

У загальному випадку потенціал має вигляд

$$u(x) = \rho e^{-2i(\eta^+ - \theta)} - 2\rho e^{-i(\eta^+ - \theta)} \Bigg\{ \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{c_j}{\zeta_j}\psi_1(x,\zeta_j)e^{ik_jx} + i\frac{c_j^*}{\rho}\psi_2^*(x,\zeta_j)e^{-ik_j^*x} \right] + \sum_{k=1}^{M} \frac{c_j}{\zeta_j}\psi_1(x,\zeta_j)e^{ik_jx} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{r(\zeta)\psi_1(x,\zeta)}{\zeta}\, e^{ik(\zeta)x}\, d\zeta \Bigg\}, \tag{1.275}$$

де $c_j = b_j/a_j'$ з $a_j' = da/d\zeta|_{\zeta=\zeta_j}$. Для спільності з рівнянням (1.151), розв'язки Йоста, отримані з (1.150), повинні бути помножені на множник $h(\zeta,t) = \exp[-i\Omega(\zeta)t]$, де $\Omega(\zeta) = [2\lambda^2(\zeta) - \rho^2]k(\zeta)$ [91] :

$$\bar{\psi}(x,\zeta,t) = h(\zeta,t)\bar{\psi}(x,\zeta), \qquad \psi(x,\zeta,t) = h^{-1}(\zeta,t)\psi(x,\zeta), \tag{1.276}$$

$$\varphi(x,\zeta,t) = h(\zeta,t)\varphi(x,\zeta), \qquad \bar{\varphi}(x,\zeta,t) = h^{-1}(\zeta,t)\bar{\varphi}(x,\zeta). \tag{1.277}$$

Часова залежність даних розсіювання має вигляд

$$a(\zeta,t) = 0, \tag{1.278}$$

$$b(\zeta,t) = b(\zeta,0)\exp[2i\Omega(\zeta)t], \tag{1.279}$$

$$b_j(t) = b_j(0)\exp[2i\Omega(\zeta_j)t],. \tag{1.280}$$

1.3.2 N-солітонні розв'язки й функції Йоста

Розглянемо випадок безвідбивних (солітонних) потенціалів $u(x)$, коли $b(t,\zeta) \equiv 0$. З (1.273) та (1.274) випливає, що

$$a(\zeta) = \prod_{k=1}^{M} \frac{\zeta_k^*(\zeta^2 - \zeta_k^2)}{\zeta_k(\zeta^2 - \zeta_k^{*\,2})} \prod_{j=1}^{N} \frac{\zeta_j^{*\,2}(\zeta^2 - \zeta_j^2)}{\zeta_j^2(\zeta^2 - \zeta_j^{*\,2})} \frac{(\zeta^2 - \rho^4/\zeta_j^{*\,2})}{(\zeta^2 - \rho^4/\zeta_j^2)}. \tag{1.281}$$

Видно також, що $\bar{a}(t,\zeta) = 1/a(t,\zeta)$. Оскільки в цьому випадку матриця $S(t,\zeta)$ є диагональною, вона може бути факторизована $S^-(\zeta) = S^+(\zeta)S(\zeta)$

таким чином, що матричні розв'язки Йоста $M^\pm$ виражаються через загальну матрицю $A(x,\zeta)$

$$M^\pm(x,\zeta) = A(x,\zeta)S^\pm(\zeta), \tag{1.282}$$

де

$$S^+ = \begin{pmatrix} S_{11}^+ & 0 \\ 0 & S_{11}^{+\,*} \end{pmatrix} \tag{1.283}$$

з

$$S_{11}^+ = \prod_{k=1}^{M} \frac{\zeta_k}{(\zeta^2-\zeta_k^2)} \prod_{j=1}^{N} \frac{\zeta_j}{\zeta_j^*(\zeta^2-\zeta_j^2)(\zeta^2-\rho^4/\zeta_j^{*\,2})}, \tag{1.284}$$

та

$$S^- = \sigma_1 S^+ \sigma_1, \tag{1.285}$$

де σ_1 матриця Паулі. З (1.283) та (1.285) можна бачити, що $S^+(\rho) = S^-(\rho)$ якщо M парне, і $S^+(\rho) = -S^-(\rho)$ якщо M непарне. Тоді з (1.282) одержуємо

$$M^+(x,\rho) = (-1)^M M^-(x,\rho). \tag{1.286}$$

З іншого боку, тому що $\lambda = 0$ відповідає $\zeta = \pm\rho$, з (1.249) та (1.252) маємо

$$M^\pm(x,\rho) = E^\pm(x,\rho) = e^{\pm i\theta\sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.287}$$

Тоді з (1.286) і (1.287) негайно випливає, що $\theta = 0 \pm \pi n$ якщо M парне, і $\theta = \pm\pi/2 \pm \pi n$ якщо M непарне (n - ціле). Таким чином, загальний зсув фази 4θ в N-солітонному розв'язку дорівнює нулю (або кратний 2π). Відмітимо, що автори [91] показали, що $\theta = 0$ тільки для часткового випадку $N = 1$, $M = 0$, розглядаючи явний вираз для односолітонного бризерного розв'язку. З (1.282)-(1.284) та (1.287) можна також одержати

$$A(x,\rho) = \rho^{2N}(-\sigma_1)^M \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \prod_{k=1}^{M}(\zeta_k^* - \zeta_k) \prod_{j=1}^{N} \frac{[\rho^2(\zeta_j^{*\,2}+\zeta_j^2) - \rho^4 - |\zeta_j|^4]}{|\zeta_j|^2}. \tag{1.288}$$

З (1.259), (1.263) та (1.264) випливає, що стовпці $A(x,\zeta)$ задовольняють співвідношенням

$$A_1(x,\zeta_j) = b_j A_2(x,\zeta_j), \tag{1.289}$$

$$A_2(x,\zeta_j^*) = -b_j^* A_1(x,\zeta_j^*), \tag{1.290}$$

$$A_1(x,\rho^2/\zeta_j^*) = b_j^* A_2(x,\rho^2/\zeta_j^*), \tag{1.291}$$

$$A_2(x,\rho^2/\zeta_j) = -b_j A_1(x,\rho^2/\zeta_j), \tag{1.292}$$

для всіх $j = 1,\ldots,M+N$. Для M нулів, що лежать на ρ-колі, рівняння (1.289)-(1.292) мають вигляд

$$A_1(x,\zeta_j) = b_j A_2(x,\zeta_j), \tag{1.293}$$

$$A_2(x,\zeta_j^*) = -b_j A_1(x,\zeta_j^*), \tag{1.294}$$

де коефіцієнти b_j дійсні. З (1.268) і (1.282) випливає, що $A(\zeta)$ аналітична на всієї ζ площині, за винятком точки $\zeta = 0$, де антидіагональні елементи $A(\zeta)\exp[ik(\zeta)x\sigma_3]$ мають простий полюс. Тоді матриця $\zeta A(\zeta)\exp[ik(\zeta)x\sigma_3]$ аналітична на всієї ζ площині. З (1.265) та (1.282) випливає, що діагональні й антидіагональні елементи $\zeta A(\zeta)\exp[ik(\zeta)x\sigma_3]$ є поліномами по ζ ступені $4N+2M+1$ і $4N+2M$ відповідно. Крім того, з (1.257) і (1.282) можна бачити, що діагональні елементи A парні по ζ, а антидіагональні – непарні. Це означає , що можна написати

$$A(x,\zeta)e^{ik(\zeta)x\sigma_3} = \begin{pmatrix} A_{11}^{(0)} & A_{12}^{(0)}\zeta^{-1} \\ A_{21}^{(0)}\zeta^{-1} & A_{22}^{(0)} \end{pmatrix} + \sum_{p=1}^{L} \zeta^{2p-1} \begin{pmatrix} \zeta A_{11}^{(p)} & A_{12}^{(p)} \\ A_{21}^{(p)} & \zeta A_{22}^{(p)} \end{pmatrix}, \tag{1.295}$$

де $L = 2N+M$ та $A_{mn}^{(p)}$ деякі, поки невідомі, функції x. Уважаючись $\zeta = \rho$ в (1.295) і порівнюючи з (1.288), маємо

$$\begin{pmatrix} A_{11}^{(0)} & A_{12}^{(0)}\rho^{-1} \\ A_{21}^{(0)}\rho^{-1} & A_{22}^{(0)} \end{pmatrix} + \sum_{p=1}^{L} \rho^{2p-1} \begin{pmatrix} \rho A_{11}^{(p)} & A_{12}^{(p)} \\ A_{21}^{(p)} & \rho A_{22}^{(p)} \end{pmatrix} = \rho^{2N}(-\sigma_1)^M$$
$$\times \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \prod_{k=1}^{M}(\zeta_k^* - \zeta_k) \prod_{j=1}^{N} \frac{[\rho^2(\zeta_j^{*\,2} + \zeta_j^2) - \rho^4 - |\zeta_j|^4]}{|\zeta_j|^2}. \tag{1.296}$$

Невідомі функції $A_{mn}^{(p)}(x,t)$ з $p=0,\ldots,L$ однозначним чином визначаються з (1.289)-(1.292) та (1.296). Дійсно, перший рядок цих рівнянь є лінійною алгебраїчною системою $2L+2$ рівнянь із $2L+2$ невідомими $A_{12}^{(p)}$ та $A_{11}^{(p)}$ з $p=0,\ldots,L$. Аналогічно, другий рядок (1.289)-(1.292) та (1.296) є лінійною системою, яка визначає $A_{21}^{(p)}$ та $A_{22}^{(p)}$ з $p=0,\ldots,L$. Прямою підстановкою можна показати, що (1.295) разом з (1.150) та (1.282) є сумісними якщо й тільки якщо

$$u(x,t)=\frac{i\,A_{12}^{(L)}(x,t)}{A_{22}^{(L)}(x,t)}. \tag{1.297}$$

Формула (1.297) визначає поле $u(x,t)$ за дискретними даними розсіювання $\{\zeta_j(t)\}$, $\{b_j(t)\}$ у безвідбивному випадку $b(t,\zeta)\equiv 0$ та представляє собою точний $N+M$-солітонний розв'язок деривативного НРШ (1.147) з неспадаючими граничними умовами (1.245). Вирази (1.282) та (1.295) визначають $N+M$-солітонні функції Йоста.

У якості першого прикладу, розглянемо найпростіший випадок, коли функція $a(\zeta)$ має один простий нуль ζ_1, що лежить на ρ-колі в першому квадранті комплексної ζ-площини (тобто $M=1$, $N=0$), так що $\zeta_1=\rho\exp(i\beta_1)$ з $0<\beta_1<\pi/2$. Враховуючи (1.280), маємо $b_1\exp(2ik_1x)=\epsilon\exp(-z)$, де $z=k_0(x-vt-x_0)$ з

$$k_0=\rho^2\sin(2\beta_1), \qquad v=2\rho^2-\rho^2\cos(2\beta_1), \tag{1.298}$$

і без втрати спільності можна покласти $\epsilon=\pm1$. Визначаючи $A_{12}^{(0)}$ і $A_{11}^{(0)}$ з (1.296), і вирішуючи систему двох лінійних рівнянь для $A_{12}^{(1)}$ і $A_{11}^{(1)}$, з (1.293), (1.294) можна одержати

$$A_{12}^{(1)}=e^{-i\beta_1}\frac{(e^{3i\beta_1}-i\epsilon e^{-z})}{(e^{i\beta_1}+i\epsilon e^{-z})}, \qquad A_{11}^{(1)}=\frac{(i+\epsilon e^{i\beta_1-z})}{\rho(e^{i\beta_1}+i\epsilon e^{-z})} \tag{1.299}$$

Згідно (1.297) односолітонний розв'язок має вигляд $u(x,t)=ia_{12}^{(1)}/A_{22}^{(1)}$, і враховуючи властивість $A_{22}^{(j)}=A_{11}^{(j)\,*}$, маємо

$$u(x,t)=\rho\left[1-\frac{2i\cos^2\beta_1}{\epsilon\,\mathrm{sh}(z+i\beta_1)+i}\right]. \tag{1.300}$$

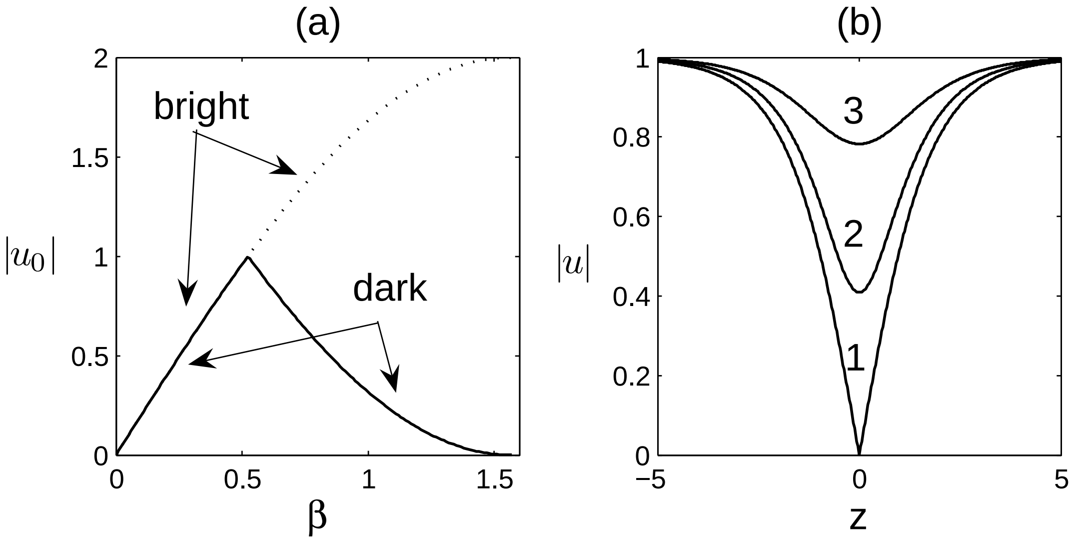

Рис. 1.6 (a) Залежність амплітуд світлого й темного солітонів від параметра β для $\rho = 1$. Пунктирна лінія й суцільна лінія до точки біфуркації відповідають світлому солітону. Суцільна лінія відповідає темному солітону. Точки біфуркації відповідають $\beta_{cr} = \pi/6$ та $|u_0| = \rho$. (b) Профіль темного солітона для різних β і $\rho = 1$. Криві 1 ("чорний"солітон), 2 і 3 відповідають параметрам $\beta_{cr} = \pi/6$, $\beta = 0.3$, і $\beta = 1.1$.

Випадок $\epsilon = -1(1)$ відповідає світлому (темному) солітону. Параметри k_0 та v в (1.298) є відповідно зворотною шириною й швидкістю солітона. Фактично, є тільки один параметр β_1, що характеризує солітон, і розв'язок (1.300) звичайно називають однопараметричним солітоном [97]. Амплітуди (стосовно фона) світлого й темного солітона відповідно мають вигляд $A_b = 2\rho\sin\beta_1$ і $A_d = \rho - \rho|1 - 2\sin\beta_1|$. Залежність амплітуд від параметра β показана на рис. 1.6(a). Помітимо, що амплітуда темного солітона є немонотонною функцією параметра β і має максимум при $\beta_{cr} = \pi/6$. Профілі $|u(z)|$ темних солітонів для різних β і $\rho = 1$ представлені на рис. 1.6(b). Темний солітон $\beta = \beta_{cr}$ (крива 1 на рис. 1.6(b)) може бути названий чорним солітоном: інтенсивність у центрі солітона падає до нуля. Відповідні односолітонні розв'язки Йоста випливають із (1.277), (1.282), (1.295) і мають вигляд

$$\bar{\psi}_1(x,\zeta,t) = \frac{e^{-ik(\zeta)x}\zeta_1}{(\zeta^2 - \zeta_1^2)}[2\rho\sin\beta_1 + (\zeta^2 - \rho^2)A_{11}^{(1)}]h(\zeta,t), \tag{1.301}$$

$$\psi_1(x,\zeta,t) = \frac{e^{ik(\zeta)x}\zeta_1^*}{\zeta(\zeta^2-\zeta_1^{*\,2})}[2i\rho^2\sin\beta_1 + (\zeta^2-\rho^2)A_{12}^{(1)}]h^{-1}(\zeta,t), \qquad (1.302)$$

$$\varphi_1(x,\zeta,t) = \frac{e^{-ik(\zeta)x}\zeta_1^*}{(\zeta^2-\zeta_1^{*\,2})}[2\rho\sin\beta_1 + (\zeta^2-\rho^2)A_{11}^{(1)}]h(\zeta,t), \qquad (1.303)$$

$$\bar\varphi_1(x,\zeta,t) = \frac{e^{ik(\zeta)x}\zeta_1}{\zeta(\zeta^2-\zeta_1^2)}[2i\rho^2\sin\beta_1 + (\zeta^2-\rho^2)A_{12}^{(1)}]h^{-1}(\zeta,t). \qquad (1.304)$$

Інші розв'язки Йоста можуть бути знайдені за допомогою властивостей симетрії (1.257), (1.258) і (1.259)

$$\psi_2 = \bar\psi_1^*, \qquad \bar\psi_2 = -\psi_1^*, \qquad \bar\varphi_2 = \varphi_1^*, \qquad \varphi_2 = -\bar\varphi_1^*. \qquad (1.305)$$

Далі розглянемо більш складні випадки: випадок, коли функція $a(\zeta)$ має два прості нулі в першому квадранті на ρ-колі (тобто $M = 2$, $N = 0$) так що

$$\zeta_1 = \rho\exp(i\beta_1), \qquad \zeta_2 = \rho\exp(i\beta_2), \qquad (1.306)$$

і випадок, коли $a(\zeta)$ має один простий нуль у першому квадранті поза ρ-колом (тобто $M = 0$, $N = 1$)

$$\zeta_1 = \rho\exp(\gamma_1 + i\beta_1), \qquad \gamma_1 > 0. \qquad (1.307)$$

На відміну від односолітонного однопараметричного розв'язку (1.300), випадок (1.306) відповідає двухсолітонному розв'язку для однопараметричних солітонів, а випадок (1.307) – односолітонному двуопараметричному розв'язку. В обох випадках з (1.289)-(1.292) і (1.296) випливає система чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь. При цьому детермінанти можуть бути факторизовані й остаточний вираз для u має вигляд

$$u = \rho\frac{BD}{D^{*\,2}}, \qquad (1.308)$$

де у випадку (1.306) маємо

$$B = 1 - i\epsilon_1 e^{-3i\beta_1 - z_1} - i\epsilon_2 e^{-3i\beta_2 - z_2} - \epsilon_1\epsilon_2\frac{\sin^2(\beta_1-\beta_2)}{\sin^2(\beta_1+\beta_2)}e^{-3i(\beta_1+\beta_2)}e^{-z_1-z_2}, \quad (1.309)$$

$$D = 1 - i\epsilon_1 e^{i\beta_1 - z_1} - i\epsilon_2 e^{i\beta_2 - z_2} - \epsilon_1\epsilon_2 \frac{\sin^2(\beta_1 - \beta_2)}{\sin^2(\beta_1 + \beta_2)} e^{i(\beta_1+\beta_2)} e^{-z_1 - z_2}, \qquad (1.310)$$

де $z = k_{0,j}(x - v_j t - x_{0,j})$ $(j = 1, 2)$ з

$$k_{0,j} = \rho^2 \sin(2\beta_j), \qquad v_j = 2\rho^2 - \rho^2 \cos(2\beta_j), \qquad (1.311)$$

і, як і раніше, $\epsilon_j = -1(1)$ відповідає світлому (темному) солітону. Розв'язок (1.308), (1.309) та (1.310) описує зіткнення між світлими й світлими, темними й темними, світлими й темними солітонами.

У випадку (1.307) для B та D одержуємо

$$B = \operatorname{sh} 2\gamma_1 \operatorname{ch}(z + 2\gamma_1 + 3i\beta_1 - \ln \operatorname{sh} 2\gamma_1) + \sin 2\beta_1 \operatorname{sh}(3\gamma_1 - i\varphi), \quad (1.312)$$

$$D = \operatorname{sh} 2\gamma_1 \operatorname{ch}(z + 2\gamma_1 - i\beta_1 - \ln \operatorname{sh} 2\gamma_1) - \sin 2\beta_1 \operatorname{sh}(\gamma_1 + i\varphi), \quad (1.313)$$

з

$$z = k_0(x - vt - x_0), \qquad \varphi = \mu(x - wt) + \varphi_0, \qquad (1.314)$$

$$k_0 = \rho^2 \operatorname{ch} 2\gamma_1 \sin 2\beta_1, \qquad \mu = \rho^2 \operatorname{sh} 2\gamma_1 \cos 2\beta_1, \qquad (1.315)$$

$$v = 2\rho^2 - \rho^2 \cos 2\beta_1 \frac{\operatorname{ch} 4\gamma_1}{\operatorname{ch} 2\gamma_1}, \qquad w = 2\rho^2 - \rho^2 \operatorname{ch} 2\gamma_1 \frac{\cos 4\beta_1}{\cos 2\beta_1}. \qquad (1.316)$$

Двохпараметричний солітон, описуваний (1.308), (1.312) та (1.313) з параметрами γ_1 і β_1 уявляє собою бризер (осцілюючий солітон) з періодом осцілляцій

$$T = \frac{2\pi}{\rho^2 \operatorname{th}(2\gamma_1)[\operatorname{ch}^2(2\gamma_1) + \cos^2(2\beta_1)]}, \qquad (1.317)$$

і швидкістю v, що дається (1.316). Якщо $\gamma_1 \to 0$ та $\varphi_0 \neq n\pi$ (n ціле), маємо $T \to \infty$ і бризерний розв'язок зводиться до однопараметричного солітона (світлого або темного, в залежності від φ_0), обумовленим (1.300). Випадки, коли є більше двох нулів як на ρ-колі, ($M \geqslant 2$ – однопараметричні світлі або темні солітони), так і поза її ($N \geqslant 2$ – бризери) відповідають $M + N$-солітонному розв'язку й описують зіткнення бризерів між собою, темних і світлих солітонів між собою, і зіткнення бризерів з темними й світлими солітонами.

Будучи повністю інтегрованим, деривативне НРШ із неспадаючими граничними умовами має нескінченний набір інтегралів руху. Покажемо як їх можна одержати і явно виразити через випромінювальні й солітонні спектральні дані. Крім φ_2 з (1.150), і підставляючи

$$\varphi_1 = \exp\{-i\theta - ik(\zeta)x + i\eta^-(x) + q(x,\zeta)\}, \tag{1.318}$$

у рівняння, що виходить, для φ_1, маємо рівняння Рікатті для функції $f = i(\rho^2 - |u|^2)/2 + \partial_x q$

$$\partial_x f + (f - ik)^2 - \frac{u'}{u}(f - ik) + \lambda^2\left(|u|^2 - i\frac{u'}{u} + \lambda^2\right) = 0, \tag{1.319}$$

де $u' \equiv \partial_x u$. Представляючи

$$f(x,\zeta) = \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(x)}{\zeta^{2n}}, \tag{1.320}$$

і підставляючи (1.320) в (1.319), можна послідовно визначити коефіцієнти $f_n(x)$. Перші з них мають вигляд

$$f_0 = \frac{1}{2}(|u|^2 - \rho^2), \tag{1.321}$$

$$f_1 = -iu\partial_x u^* - \frac{1}{2}(|u|^4 - \rho^4), \tag{1.322}$$

$$f_2 = 2i(|u|^2 - \rho^2)u\partial_x u^* + i|u|^2 u^*\partial_x u - 2u\partial_x^2 u^* + |u|^4(|u|^2 - \rho^2). \tag{1.323}$$

З рівнянь (1.249) та (1.251) маємо

$$\varphi_1 \to e^{-i\theta - ikx}, \qquad \text{при } x \to -\infty \tag{1.324}$$

$$\varphi_1 \to ae^{i\theta - ikx} - \frac{i\rho}{\zeta}be^{i\theta + ikx}, \qquad \text{при } x \to \infty. \tag{1.325}$$

З $\eta^-(-\infty) = 0$ та рівняння (1.318) випливає, що $q(-\infty,\zeta) = 0$. Оскільки $\eta^-(\infty) = \eta$, з (1.318) та (1.325) маємо $q(\infty,\zeta) = \ln a(\zeta) + 2i\theta - i\eta$ при $x \to \infty$ і $|\zeta| \to \infty$. З іншого боку, із визначення функції $f(x,\zeta)$ випливає

$$q(\infty,\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,\zeta)\,dx - i\eta. \tag{1.326}$$

Враховуючи (1.320), одержуємо

$$\ln a(\zeta) = -2i\theta - i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{I_n}{\zeta^{2n}}, \tag{1.327}$$

де

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx \tag{1.328}$$

є інтегралами руху, тому що $a(\zeta)$ не залежить від часу. Розкладаючи (1.273) у ряд по $1/\zeta$ і використовуючи (1.327), одержимо явне представлення інтегралів руху через дискретні (солітонні) та безперервні дані розсіювання. Зокрема для енергії солітона I_0 маємо (1.274), а для гамільтоніана I_1 одержуємо

$$I_1 = i\sum_{j=1}^{N}\left[\rho^4\left(\frac{1}{\zeta_j^2} - \frac{1}{\zeta_j^{*\,2}}\right) + (\zeta_j^{*\,2} - \zeta_j^2)\right] + i\sum_{k=1}^{M}(\zeta_k^{*\,2} - \zeta_k^2)$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\mu\ln(1 - |b(\mu)|^2)\,d\mu. \tag{1.329}$$

1.3.3 Вплив дисипативних збурень на темні й світлі альфвенівські солітони

При наявності збурень $p \neq 0$ у правій частині деривативного НРШ, еволюційне рівняння для матриці розсіювання у випадку неспадаючих граничних умов має вигляд аналогічний (1.190)

$$\partial_t S(t,\zeta) + i\Omega(\zeta)[\sigma_3, S(t,\zeta)] = -\int_{-\infty}^{\infty}(M^+)^{-1}(x,t,\zeta)PM^-(x,t,\zeta)dx, \tag{1.330}$$

з тою відмінністю, що тепер

$$\Omega(\zeta) = [2\lambda^2(\zeta) - \rho^2]k(\zeta). \tag{1.331}$$

Еволюційні рівняння для коефіцієнтів $a(t,\zeta)$ та $b(t,\zeta)$ містяться в (1.330). Враховуючи, що $\det M^{\pm} = 1 + \rho^2/\zeta^2$ і (1.248), з (1.330) маємо

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{i\zeta(\rho^2 - \zeta^2)}{(\rho^2 + \zeta^2)} \int_{-\infty}^{\infty} (p\psi_2\varphi_2 + p^*\psi_1\varphi_1)\, dx, \tag{1.332}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} - 2i\Omega(\zeta)b = -\frac{i\zeta(\rho^2 - \zeta^2)}{(\rho^2 + \zeta^2)} \int_{-\infty}^{\infty} (p\bar{\psi}_2\varphi_2 + p^*\bar{\psi}_1\varphi_1)\, dx. \tag{1.333}$$

Рівняння для нулів, що "рухаються $\zeta_j(t)$ та коефіцієнтів $b_j(t)$ мають вигляд

$$\frac{\partial \zeta_j}{\partial t} = -\frac{i\zeta_j(\rho^2 - \zeta_j^2)b_j}{(\rho^2 + \zeta_j^2)a_j'} \int_{-\infty}^{\infty} (p\psi_{2,j}^2 + p^*\psi_{1,j}^2)\, dx, \tag{1.334}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial b_j}{\partial t} - 2i\Omega(\zeta_j)b_j = -\frac{i\zeta_j(\rho^2 - \zeta_j^2)}{(\rho^2 + \zeta_j^2)a_j'} \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{ & p\,\varphi_2 \frac{\partial}{\partial \zeta}(\varphi_2 - b_j\psi_2) \\ & + p^*\,\varphi_1 \frac{\partial}{\partial \zeta}(\varphi_1 - b_j\psi_1) \Big\}\, dx',\end{aligned} \tag{1.335}$$

де $\psi_{2,j}$, $\varphi_{2,j}$, $\psi_{1,j}$, і $\varphi_{1,j}$ відповідні розв'язки Йоста, що обчислюються при $\zeta = \zeta_j$. Рівняння (1.332)-(1.335) описують еволюцію даних розсіювання (безперервного й дискретного спектра) у присутності збурень. Якщо збурення мале, у праві частини цих рівнянь можна підставити незбурені розв'язки Йоста. В односолітонному однопараметричному випадку з $\zeta_1 = \rho\exp(i\beta_1)$ вони даються виразами (1.302)-(1.305). Використовуючи співвідношення між солітонним розв'язком (1.300) та функціями Йоста, обчисленими при β_1, з (1.334) можна одержати рівняння для β_1, що визначає еволюцію швидкості й ширини солітона

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial t} = \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} (p^* u_s - p u_s^*)\, dx, \tag{1.336}$$

де u_s однопараметричний солітонний розв'язок (1.300).

Як приклад розглянемо випадок, коли збурення в (1.148) має дифузійний вигляд

$$p = iD\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.337}$$

Як вказувалося вище, такий вид збурення відповідає врахуванню кінцевої провідності (та/або іонної в'язкості) плазми. Розглянемо дію збурення на однопараметричний солітон (1.300) в адіабатичному наближенні. У цьому наближенні параметр β у солітонному розв'язку (1.300) повільно змінюється з часом, а загальна функціональна форма солітона залишається незмінною. Підставляючи (1.337) в (1.336) і обчислюючи відповідні інтеграли з u_s обумовленим (1.300), можна одержати

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} = -4D\rho^2 \sin\beta[\epsilon \sin\beta(\cos^2\beta - 3)(\pi - 2\epsilon\beta) + 2\cos\beta(3 - 2\cos^2\beta)] \quad (1.338)$$

Чисельно знайдені розв'язки рівняння (1.338) для різних початкових β

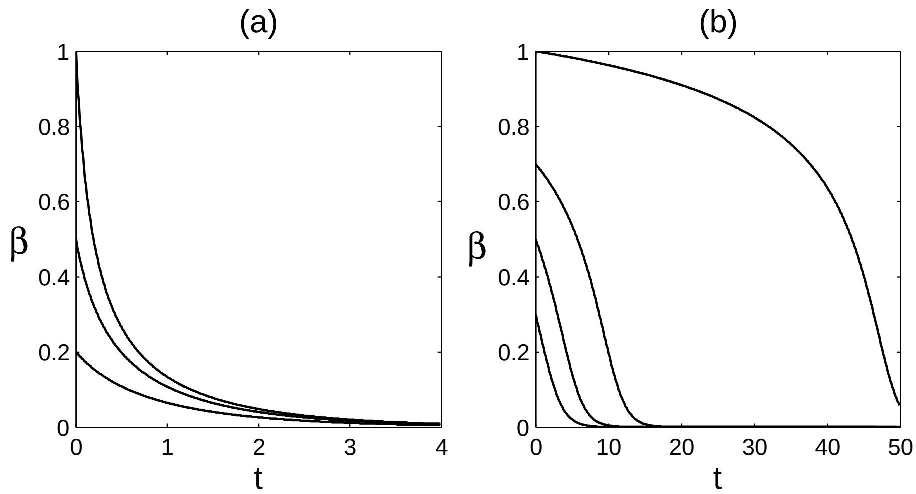

Рис. 1.7 Залежність солітонного параметра $\beta(t)$ від часу для різних початкових $\beta(0)$ для (a) світлих і (б) темних солітонів у присутності дисипації дифузійного типу.

показані на рис. 1.7(a) та 1.7(b) відповідно для світлих ($\epsilon = -1$) і темних ($\epsilon = 1$) солітонів. Для досить малих початкових $\beta(0) \ll 1$, як для світлих так і для темних солітонів з (1.338) випливає проста оцінка $\beta(t) = \beta(0)\exp(-8D\rho^2 t)$, так що амплітуди й швидкості солітонів убувають у часі. Картина, однак, різко змінюється, якщо $\beta(0)$ не занадто мало. При цьому, поведінка світлих і темних солітонів суттєво різна. Насамперед, темний альфвенівський солітон при наявності дисипації дифузійного типу виявляється набагато більш стійким, ніж світлий солітон. Як видно з рис. 1.7, для початкового $\beta(0) \sim 1$ параметри темного солітона на часі, наприклад, $t \sim 4$ майже зовсім не змінюються, тоді як амплітуда світлого солітона падає до нуля. По друге, якщо початкове β перевершує критичне значення $\beta_{cr} = \pi/6$ (див. рис. 1.6 і немонотонну залежність амплітуди темного солітона від β), амплітуда темного солітона при наявності дисипації спочатку зростає згодом, досягає максимуму при $\beta_{cr} = \pi/6$ і потім починає зменшуватися.

1.4 Генерація альфвенівських солітонів

У цьому підрозділі розглядається генерація солітонів обмеженим прямокутним початковим профілем магнітного поля у рамках деривативного нелінійного рівняння Шредингера (1.147) з неспадаючими граничними умовами (1.245), тобто при розповсюдженні хвиль під кутом θ до зовнішнього магнітного поля. Це задача є однією з тих, для яких відповідна задача Коші допускає точний аналітичний розгляд. Хоча аналогічна проблема для звичайного нелінійного рівняння Шредингера (НРШ), як фокусуючого, так і дефокусуючого, була вирішена досить давно [98–102], ми показуємо, що еволюція початкового прямокутного імпульсу в моделі саме деривативного НРШ із неспадаючими граничними умовами виявляється украй нетривіальною й суттєво відмінною від усіх раніше відомих результатів. Зокрема, три типи солітонів – бризери, темні й світлі можуть збуджуватися одночасно.

1.4.1 Основні рівняння

У відповідність із (1.150) пряма спектральне задача для деривативного НРШ може бути записана у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} &= -i\lambda^2 \varphi_1 + \lambda u \varphi_2, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} &= -\lambda u^* \varphi_1 + i\lambda^2 \varphi_2. \end{aligned} \tag{1.339}$$

Асимптотики розв'язків (1.339) з неспадаючими граничними умовами (1.245) випливають із рівнянь (1.249) і (1.251)

$$\Phi \to e^{-i\theta\sigma_3} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{i\rho}{\zeta} \end{pmatrix} e^{-ik(\zeta)x} \quad \text{при} \quad x \to -\infty, \tag{1.340}$$

$$\Phi \to e^{i\theta\sigma_3} \begin{pmatrix} a(\zeta)e^{-ikx} - b(\zeta)\frac{i\rho}{\zeta}e^{ikx} \\ b(\zeta)e^{ikx} - a(\zeta)\frac{i\rho}{\zeta}e^{-ikx} \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad x \to \infty, \tag{1.341}$$

де функція $k(\zeta)$ визначена в (1.248), (1.250). В (1.340) і (1.341), $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)^{\mathrm{T}}$, та $a(\zeta)$ і $b(\zeta)$, як і раніше, коефіцієнти розсіювання.

Довільний початковий просторовий розподіл збурення магнітного поля у деривативному НРШ буде розпадатися на набір із N солітонів та безперервне випромінювання (квазілінійні моди). Останні диспергують і загасають на нескінченності, у той час як солітони поширюються як когерентні стійкі структури. Солітони відповідають дискретному спектру лінійної задачі на власні значення (1.339). При цьому, кількість виникаючих солітонів N дорівнює числу нулів $\zeta_n = \rho \exp(\gamma_n + i\beta_n)$ коефіцієнта $a(\zeta)$ із $\gamma_n \geqslant 0$, $0 < \beta_n < \pi/2$, де $n = 1, 2 \ldots$. Параметри γ_n та β_n представляють параметри n-го солітона. Відповідний односолітонний розв'язок дається виразом (1.308). У загальному випадку, коли $\gamma_n \neq 0$, розв'язок залежить від двох параметрів (які визначають ширину, швидкість і період осциляцій бризерного солітона) і відповідає осцилюючому солітону (бризеру). Якщо $\gamma_n \to 0$ є тільки один параметр β_n, що характеризує солітон (і який визначає ширину й швидкість) . Однопараметричний солітон дається виразом (1.300). Як вказувалося раніше, існують два типи однопараметричних солітонів – світлі (з $|u| > \rho$) і темні (з $|u| < \rho$).

Розглянемо випадок, коли початковий профіль u відмінний від фона в деякої кінцевої області простору, так що при $t = 0$ маємо

$$u(x,0) = \begin{cases} \rho e^{-2i\theta}, & -\infty < x < 0 \\ u_0(x), & 0 \le x \le l \\ \rho e^{2i\theta}, & l < x < \infty\,. \end{cases} \tag{1.342}$$

З фізичної точки зору такий початковий профіль відповідає кінцевому часу введення оптичних імпульсів (див. підрозділ 1.1 дисертації для оптичних солітонів НРШ). Для нелінійних альфвенівських хвиль у замагніченої плазмі, профіль (1.342) представляє собою початковий тангенціальний розрив збурень магнітного поля – досить типовий випадок у нелінійній магнітній гідродинаміці [103]. У космічній плазмі збурення магнітного поля, обмежені тангенціальними розривами спостерігалися експериментально [104].

Умови безперервності функції $\Phi(x)$ при $x = 0$ і $x = l$ дають відповідно

$$\Phi(0,\zeta) = e^{-i\theta\sigma_3}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{i\rho}{\zeta} \end{pmatrix}, \tag{1.343}$$

$$\Phi(l,\zeta) = e^{i\theta\sigma_3}\begin{pmatrix} ae^{-ikl} - b\frac{i\rho}{\zeta}e^{ikl} \\ be^{ikl} - a\frac{i\rho}{\zeta}e^{-ikl} \end{pmatrix}. \tag{1.344}$$

Тепер коефіцієнти розсіювання залежать від параметра l. З (1.339) можна одержати

$$\frac{d^2\varphi_1}{dl^2} - \frac{u_0'}{u_0}\frac{d\varphi_1}{dl} + \lambda^2\left(|u_0|^2 - i\frac{u_0'}{u_0} + \lambda^2\right)\varphi_1 = 0, \tag{1.345}$$

де $u_0 = u_0(l)$, $u_0' = du_0/dl$. Рівняння (1.345) доповнюється "початковими"(при $l = 0$, тобто у просторі) умовами

$$\varphi_1(l = 0,\zeta) = e^{-i\theta}, \tag{1.346}$$

$$\left.\frac{d\varphi_1(l,\zeta)}{dl}\right|_{l=0} = -i\lambda^2 e^{-i\theta} - i\lambda u_0\frac{\rho}{\zeta}e^{i\theta}, \tag{1.347}$$

які випливають із (1.339) та (1.343). Рівняння для $\varphi_2(l)$ одержується комплексним сполученням (1.345). Відповідні початкові умови мають вигляд

$$\varphi_2(l = 0,\zeta) = -\frac{i\rho}{\zeta}e^{i\theta}, \tag{1.348}$$

$$\left.\frac{d\varphi_2(l,\zeta)}{dl}\right|_{l=0} = -\lambda u_0^* e^{-i\theta} + \lambda^2\frac{\rho}{\zeta}e^{i\theta}. \tag{1.349}$$

З (1.344) випливає, що коефіцієнт $a(\zeta)$ пов'язаний з $\varphi_1(l,\zeta)$ та $\varphi_2(l,\zeta)$ співвідношенням

$$a(\zeta)\left(1+\frac{\rho^2}{\zeta^2}\right)e^{-ik(\zeta)l}=\varphi_1(l,\zeta)e^{-i\theta}+\frac{i\rho}{\zeta}\varphi_2(l,\zeta)e^{i\theta}. \tag{1.350}$$

Визначивши $\varphi_1(l,\zeta)$ та $\varphi_2(l,\zeta)$ з (1.345)-(1.349), можна одержати рівняння для нулів функції $a(\zeta)$ (тобто солітонні власні значення).

1.4.2 Прямокутний початковий імпульс

Аналітичний розв'язок рівнянь (1.345)-(1.349) можливий в деяких окремих випадках. Тут розглянемо випадок прямокутного початкового профілю

$$u_0(x)=u_0\exp(iq), \tag{1.351}$$

де u_0 постійна дійсна амплітуда й q постійна фаза. Тоді відповідні розв'язки рівнянь φ_1 і φ_2 мають вигляд

$$\varphi_1(l,\zeta)=e^{-i\theta}\cos(Bl)-i\lambda\left(\lambda e^{-i\theta}+u_0\frac{\rho}{\zeta}e^{i\theta+iq}\right)\frac{\sin(Bl)}{B}, \tag{1.352}$$

$$\varphi_2(l,\zeta)=-\frac{i\rho}{\zeta}e^{i\theta}\cos(Bl)+\lambda\left(\lambda\frac{\rho}{\zeta}e^{i\theta}-u_0e^{-i\theta-iq}\right)\frac{\sin(Bl)}{B}, \tag{1.353}$$

де $B=\lambda\sqrt{u_0^2+\lambda^2}$. З (1.350) випливає, що нулі коефіцієнта $a(\zeta)$ визначаються з рівняння

$$\frac{\lambda[\lambda(\rho^2e^{2i\theta}-\zeta^2e^{-2i\theta})-2u_0\rho\zeta\cos q]}{i(\rho^2e^{2i\theta}+\zeta^2e^{-2i\theta})}\operatorname{tg}(Bl)=B. \tag{1.354}$$

Солітони відповідають кореням $\zeta_n=\rho\exp(\gamma_n+i\beta_n)$ з $\gamma_n\geqslant 0$, $0<\beta_n<\pi/2$. Позначаючи $\eta=\gamma+i\beta$ і вводячи змінні $r=\rho l^{1/2}$, $s=u_0l^{1/2}$, можна переписати рівняння (1.354) у вигляді

$$\frac{\operatorname{tg}D}{D}=\frac{i\operatorname{ch}(2i\theta-\eta)}{r\operatorname{sh}\eta[r\operatorname{sh}\eta\ \operatorname{sh}(2i\theta-\eta)-s\cos q]}, \tag{1.355}$$

де

$$D=r\operatorname{sh}\eta\sqrt{r^2\operatorname{sh}^2\eta+s^2}. \tag{1.356}$$

У асимптотиці $t \to \infty$ поле $u(x,t)$ буде являти собою набір солітонів з параметрами (γ_n, β_n). У загальному випадку, коли $\gamma_n \neq 0$, солітон є бризером (осцілюючим солітоном) з періодом, обумовленим (1.317) та швидкістю (1.316).

1.4.3 Еволюція початкового фазового розриву

У якості найпростішого прикладу розглянемо випадок $l = 0$, тобто в початковий момент часу поле є фазовим розривом на постійному фоні

$$u(x,0) = \begin{cases} \rho e^{-2i\theta}, & -\infty < x < 0 \\ \rho e^{2i\theta}, & 0 < x < \infty\,. \end{cases} \tag{1.357}$$

Тоді, як випливає з (1.354), рівняння, що визначає нулі $a(\zeta)$ має вигляд

$$\rho^2 e^{2i\theta} + \zeta^2 e^{-2i\theta} = 0. \tag{1.358}$$

Розв'язавши (1.358), одержимо, що в асимптотиці є тільки один солітон з параметрами

$$\gamma_1 = 0, \quad \beta_1 = 2\theta + \pi/2 \tag{1.359}$$

за умови, що $2\theta < 0$. Швидкість солітона дається виразом

$$v_1 = 2\rho^2 + \rho^2 \cos(4\theta). \tag{1.360}$$

Видно, що солітон не виникає, якщо $2\theta > 0$.

Солітон з параметрами (1.359) є однопараметричним солітоном (світлим або темним), описуваним (1.300). Однак, виникає питання: який тип солітона, світлий або темний (тобто підвищення або провал фона), виникає в нашому випадку фазового розриву на постіному фоні? Ця проблема досить нетривіальна, оскільки $|u(x,0)|^2 - \rho^2 = 0$. У відповідність із (1.300), необхідно визначити $\epsilon = \mathrm{sign}(\sin\varphi_0)$. Випадок $\epsilon = -1(1)$ відповідає світлому (темному) солітону. Параметри x_0 і φ_0, відповідні n-му солітону (у нашому випадку $n = 1$) можна знайти з коефіцієнта

$$c_n(0) = \frac{b_n(0)}{\dot{a}(\zeta_n)} \tag{1.361}$$

де $\dot{a}(\zeta) = \partial a/\partial\zeta$, і $b_n(0)$ коефіцієнт пропорційності між двома фундаментальними розв'язками рівняння (1.339) при $\zeta = \zeta_n$ та $t = 0$

$$\Phi(x, \zeta_n, 0) = b_n(0)\Psi(x, \zeta_n, 0), \tag{1.362}$$

де $\Phi(x, \zeta)$ розв'язок Йоста з асимптотиками (1.340) та (1.341), а другий фундаментальний розв'язок $\Psi(x, \zeta) = (\psi_1, \psi_2)^T$ має асимптотики [91]

$$\Psi \to e^{i\theta\sigma_3} \begin{pmatrix} -\frac{i\rho}{\zeta} \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik(\zeta)x} \quad \text{as } x \to \infty, \tag{1.363}$$

$$\Psi \to e^{-i\theta\sigma_3} \begin{pmatrix} -b^*(\zeta)e^{-ikx} - a(\zeta)\frac{i\rho}{\zeta}e^{ikx} \\ a(\zeta)e^{ikx} + b^*(\zeta)\frac{i\rho}{\zeta}e^{-ikx} \end{pmatrix} \quad \text{as } x \to -\infty. \tag{1.364}$$

Коефіцієнт $c_1(0)$ пов'язаний з x_0 і φ_0 співвідношенням

$$c_1(0) = \frac{2k(\zeta_1)}{i\zeta_1^*} \sin(2\beta_1) e^{\nu x_0 + i\varphi_0}. \tag{1.365}$$

З (1.340), (1.341), (1.357), (1.363) і (1.364) випливає, що розв'язок Йоста й коефіцієнт $a(\zeta)$ мають вигляд

$$\Phi = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} \\ -\frac{i\rho}{\zeta}e^{i\theta} \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} -\frac{i\rho}{\zeta}e^{i\theta} \\ e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \tag{1.366}$$

та

$$a(\zeta) = \frac{e^{-2i\theta} + (\rho^2/\zeta^2)e^{2i\theta}}{1 + \rho^2/\zeta^2}. \tag{1.367}$$

З (1.361), (1.362) і (1.367) маємо $b_1(0) = -1$ і $c_1(0) = i\rho(1 - \cos 4\theta)$. Порівнюючи останній вираз з (1.365) можна одержати $\varphi_0 = -2\theta$, де $-\pi/2 < 2\theta < 0$ та, отже $\epsilon = \mathrm{sign}(\sin\varphi_0) = 1$. Таким чином, у нашому випадку виникає темний солітон з параметрами (1.359).

Для підтвердження аналітичних результатів, було проведено пряме чисельне моделювання деривативного НРШ (1.147) з неспадаючими гра-

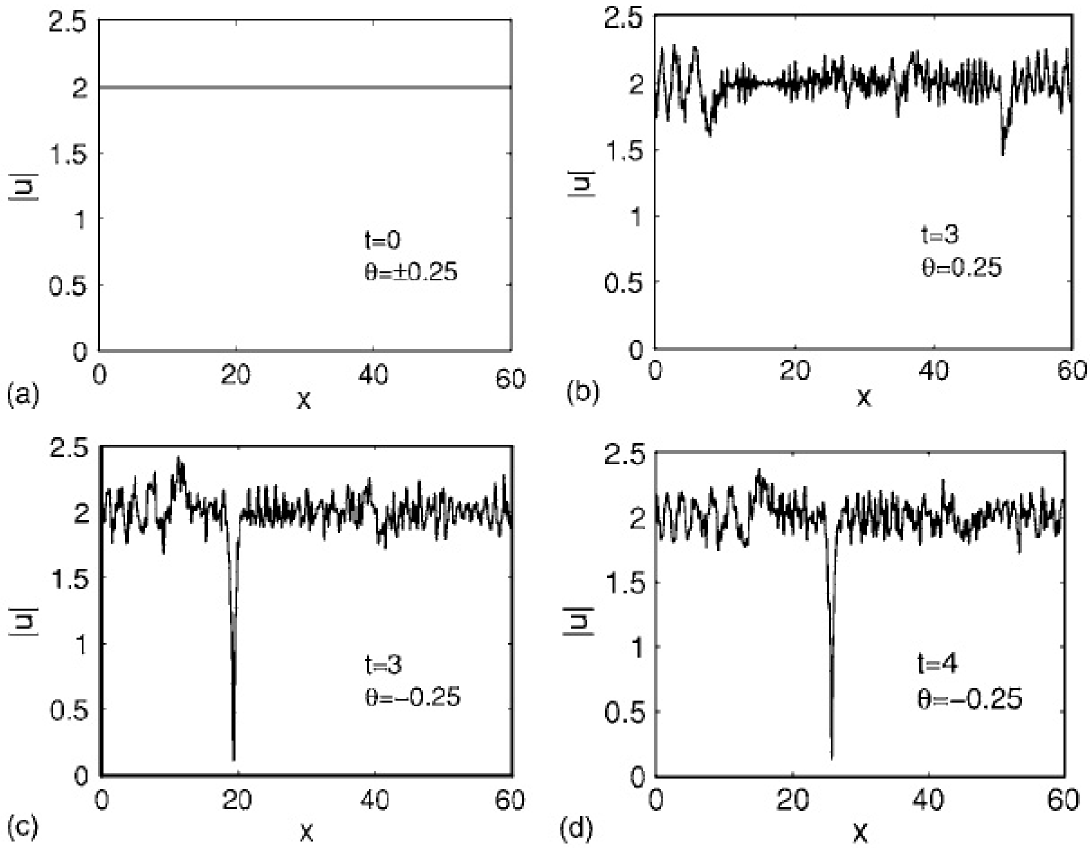

Рис. 1.8 Чисельний розв'язок рівняння (1.147) із граничними умовами (1.245) для початкового профілю (1.357) при $\rho = 2$ та $\theta = \pm 0.25$. (a) Початковий стан у момент часу $t = 0$. (b) Розв'язок в момент $t = 3$ для позитивної фази $\theta = 0.25$. Генерація солітона відсутня. (c) і (d) Темний солітон при $t = 3$ та $t = 4$. Фаза негативна: $\theta = -0.25$.

ничними умовами (1.245) і початковою умовою (1.357) з $\rho = 2$, $\theta = \pm 0.25$. Чисельний розрахунок виконувався на сітці довжиною $L = 60$ з дозволом 1024 точки. Функція $U = u \exp(-4i\theta x/L)$ періодична на цьому відрізку й на U накладалися періодичні граничні умови. Просторова дискретизація ґрунтувалася на псевдоспектральному методі [105]. Часова дискретизація включала неявну схему Кранка-Никольсона. Результати представлені на рис. 1.8. Виднщ, що у повній відповідності із теоретичним аналізом, даним вище, солітони не виникають, якщо фаза θ позитивна. З іншого боку , виникає єдиний темний солітон, якщо $\theta < 0$. Швидкість солітона, оцінювана з рис. 1.8 (c) (d), перебуває в повній згоді з аналітичним передбаченням (1.360).

1.4.4 Одночасна генерація бризерів, темних та світлих солітонів

Тут розглянемо випадок, коли початкове поле відсутнє в деякої просторовій області довжини l, тобто $u_0 = 0$ ("чорний ящик"). Тоді рівняння (1.355) має вигляд

$$\operatorname{tg}(r^2 \operatorname{sh}^2 \eta) \operatorname{tg}(2i\theta - \eta) = i. \tag{1.368}$$

Відокремлюючи уявну й дійсну частини в (1.368), можна показати, що $\gamma = 0$, а параметр β визначається з

$$\pi(n + 1/2) + 2\theta = \beta_n + r^2 \sin^2 \beta_n, \tag{1.369}$$

де $n = 0, 1, 2 \ldots$. Таким чином, генеруються тільки однопараметричні солітони. Ці солітони є темними оскільки $|u(x,0)|^2 - \rho^2 < 0$. Параметр β_n визначає амплітуду n-го солітона. З (1.369) випливає, що солітони можуть виникати, тільки якщо

$$-\pi/2 < \pi n + 2\theta < r^2. \tag{1.370}$$

З (1.369) можна знайти число N виникаючих солітонів

$$N = \left[\frac{r^2 - 2\theta}{\pi}\right] + 1, \tag{1.371}$$

де [..] означає целу частину. Видно, що завжди виникає принаймні один солітон, якщо $r^2 > 2\theta$. Якщо виконана умова

$$r^2 \gg \pi(n + 1/2) + 2\theta \tag{1.372}$$

для параметра β_n можна одержати аналітичну оцінку

$$\beta_n = \frac{\sqrt{1 + 4r^2[\pi(n + 1/2) + 2\theta]} - 1}{2r^2}. \tag{1.373}$$

Умова (1.372) означає, що (1.373) справедливо для нижчих власних значень із $n \ll N$. При цьому $\beta_n \ll 1$. Тепер розглянемо прямокутний початковий

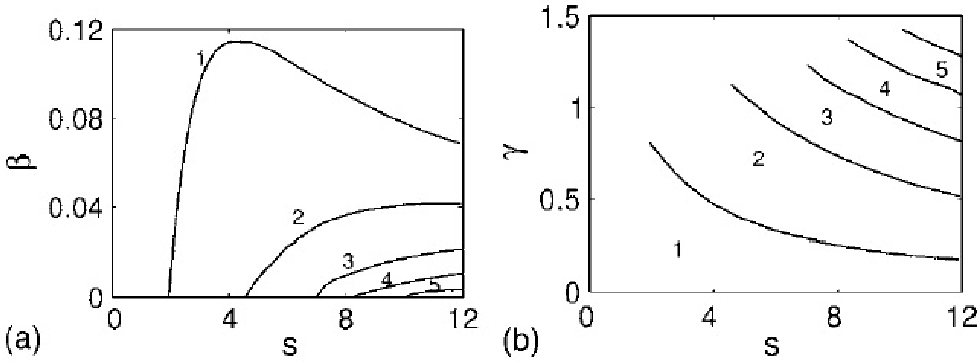

Рис. 1.9 Залежність солітонних власних значень $\eta_n = \gamma_n + i\beta_n$ від s для $r = 0.7$, $\theta = \pi/8$, $q = 2$. Показані перші п'ять коренів $n = 1 \ldots 5$. (a) – представлений параметр β_n ; (b) – відповідний параметр γ_n .

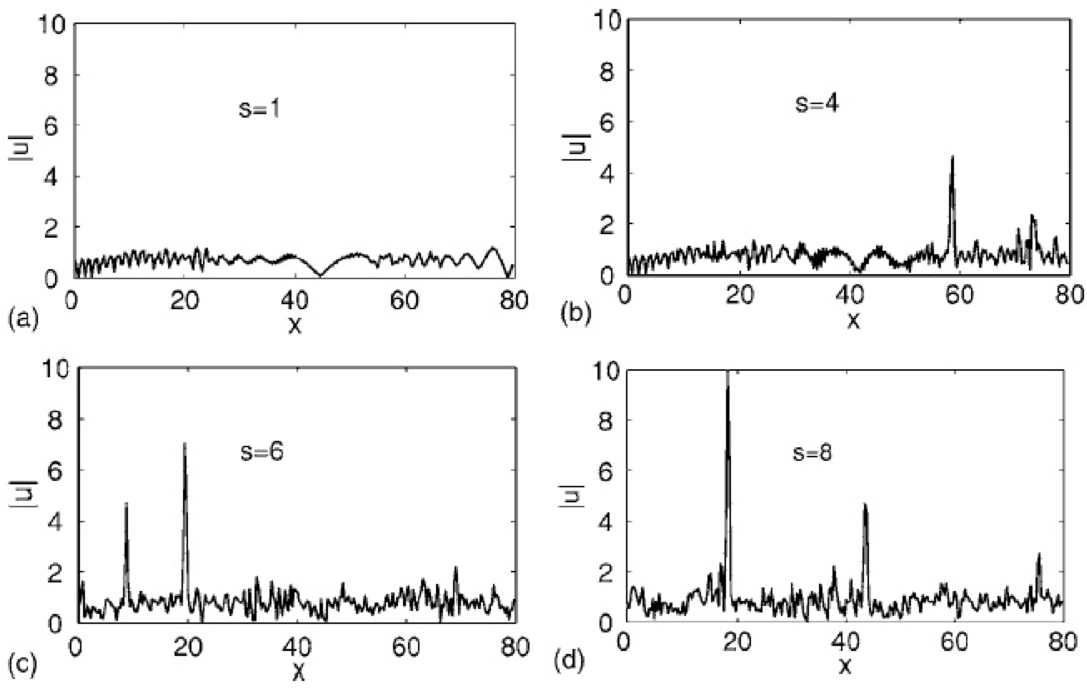

Рис. 1.10 Чисельний розв'язок рівняння (1.147) на часі $t = 4$ для прямокутного початкового імпульсу з параметрами $r = 0.7$, $\theta = \pi/8$, $q = 2$ (такими ж, як на рис. 1.9) із різними s. (a) Солітони не виникають. (b) Один солітон. (c) Два солітона. (d) Три солітона.

профіль (1.351). Параметр β визначає амплітуду солітона, і вважаючись $\beta = 0$ у рівнянні (1.355), для граничного значення γ (уважаючи $\gamma \neq 0$) одержимо

$$\gamma_{th} = \operatorname{arcsinh}\left(-\frac{s}{r}\cos 2\theta \cos q\right)^{1/2}. \tag{1.374}$$

Це означає, зокрема, що генерація двохпараметричних солітонів можлива тільки якщо $\cos q < 0$. Залежність солітонних власних значень $\eta_n = \gamma_n + i\beta_n$, отриманих чисельним розв'язком рівняння (1.354), від s для $r = 0.7$, $\theta = \pi/8$ (помітимо, що $\cos 2\theta > 0$), $q = 2$ представлена на рис. 1.9. Показані перші п'ять коренів $n = 1 \ldots 5$. Результати прямого чисельного моделювання рівняння (1.147) з початковою умовою (1.351) і такими ж як на рис. 1.9 r, θ, q, для декількох різних s показані на рис. 1.10. Чисельні розв'язки показані для часу $t = 4$. Видно, що число виникаючих солітонів перебуває в повній згоді з результатами, представленими на рис. 1.9. Наприклад, солітони не виникають, якщо $s = 1$ (рис. 1.10 (a)), і генеруються два солітона (рис. 1.10 (c)) якщо $s = 6$ (ці солітони відповідають кореням, відзначеним 1 та 2 на рис. 1.9).

Оскільки (1.355) є трансцендентним рівнянням з комплексними коефіцієнтами природньо очікувати, що, як правило, його корені малють ненульову дійсну частину. Це відповідає генерації двохпараметричних солітонів. Покажемо, що однопараметричні солітони також можуть виникати в широкому діапазоні параметрів. Уважаючись $\gamma = 0$ в (1.355) й уводячи позначення $z = \sin\beta$, можна написати (за умови, що $\sin\beta \neq 0$) рівняння, яке визначає параметр β для однопараметричних солітонів у вигляді

$$F(z) = G(z), \tag{1.375}$$

де введені функції

$$F(z) = \frac{\operatorname{tg}(rz\sqrt{s^2 - r^2z^2})}{\sqrt{s^2 - r^2z^2}(z\sin 2\theta + \cos 2\theta\sqrt{1 - z^2})}, \tag{1.376}$$

та

$$G(z) = -\frac{1}{rz(\sin 2\theta\sqrt{1 - z^2} - z\cos 2\theta) + s\cos q} \tag{1.377}$$

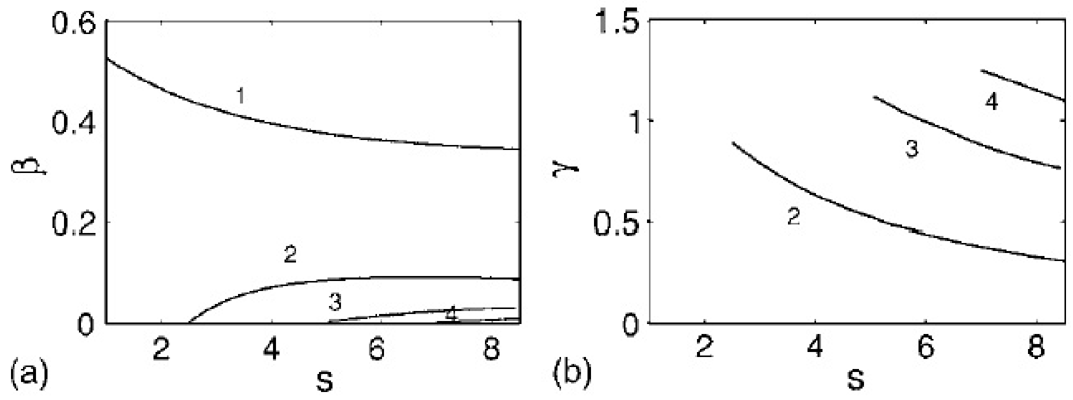

Рис. 1.11 Залежність солітонних власних значень $\eta_n = \gamma_n + i\beta_n$ від s для $r = 0.7$, $\theta = -\pi/8$, $q = 2$. Показані перші чотири корені $n = 1 \ldots 4$. (a) – представлений параметр β_n ; (b) – представлений відповідний параметр γ_n ; корінь під номером 1 має $\gamma = 0$ (і відповідає однопараметричному солітону).

з $0 < z < 1$. Розглянемо деякі випадки окремо.

Випадок I:

$$s^2 > r^2, \quad \sin 2\theta < 0. \tag{1.378}$$

Спочатку припустимо

$$r^2 \sin^2 2\theta + 2rs \cos q \cos 2\theta < 4r^2 s^2 \cos^2 q, \tag{1.379}$$

так що функція $G(z)$ не має сингулярностей на $[0; 1]$. Можна показати, що в цьому випадку $G(z)$ має один мінімум при $z_{min} = \cos\theta$. При цьому

$$G(0) = -\frac{1}{s\cos q}, \quad G(1) = -\frac{1}{(s\cos q - r\cos 2\theta)}. \tag{1.380}$$

З іншого боку, функція $F(z)$ монотонно зростає від $z = 0$ до $z_s = \cos 2\theta$, має сингулярність при $z = z_s$ і потім монотонно зростає від $z = z_s$ до $z = 1$. При цьому

$$F(0) = 0, \quad F(1) = \frac{\operatorname{tg}(r\sqrt{s^2 - r^2})}{\sin 2\theta\sqrt{s^2 - r^2}} < 0. \tag{1.381}$$

Враховуючи, що $z_{min} > z_s$, і порівнюючи графіки функцій $F(z)$ і $G(z)$, можна укласти, що якщо $\cos q < 0$ рівняння (1.375) має один корінь β_1. При цьому $\beta_1 < 2\theta$. Якщо ж $\cos q > 0$, є один корінь $\beta_1 > 2\theta$ якщо $F(1) \geqslant G(1)$,

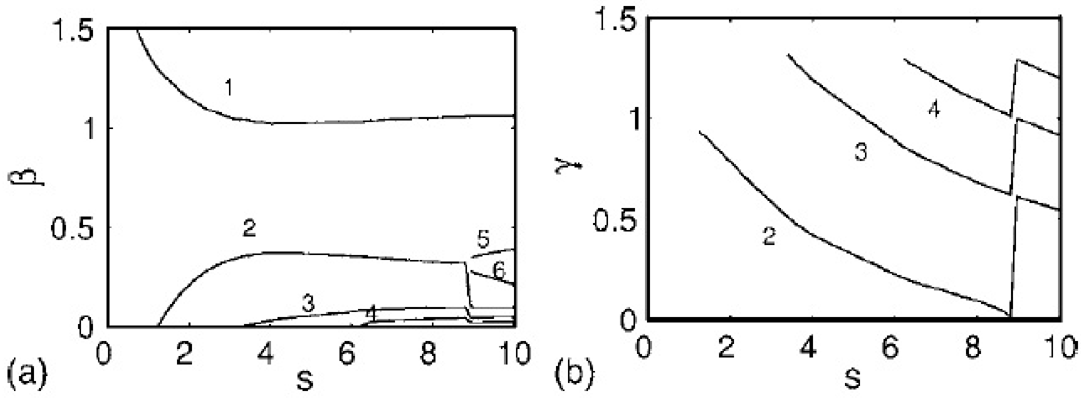

Рис. 1.12 Залежність солітонних власних значень $\eta_n = \gamma_n + i\beta_n$ від s для $r = 0.7$, $\theta = \pi/8$, $q = 2.8$. Показані перші шість коренів $n = 1 \ldots 6$. (a) – представлений параметр β_n ; (b) – представлений відповідний параметр γ_n ; корені під номерами 1, 5 й 6 мають $\gamma = 0$ (та відповідають однопараметричним солітонам).

і два корені β_1 і β_2 якщо $F(1) < G(1)$. Якщо нерівність (1.379) порушується, функція $G(z)$ має сингулярність. Аналіз показує, що в цьому випадку рівняння (1.375) має єдиний корінь як для $\cos q < 0$, так і для $\cos q > 0$. Як вказувалося вище, двохпараметричні солітони можливі тільки якщо $\cos q < 0$. Таким чином, якщо виконана умова (1.378) та $\cos q > 0$, генеруються один або два світлі (тому що $s > r$) однопараметричних солітона. Якщо ж $\cos q < 0$, тоді, взагалі кажучи, крім одного світлого солітона, який виникає завжди, можуть генеруватися бризерні солітони. Число виникаючих бризерів (можливо, нульове) та відповідні власні значення, що визначають швидкість і період осціляцій бризера, залежать від s, r, θ та q й можуть бути знайдені з (1.355) тільки чисельно. Залежність солітонних власних значень $\eta_n = \gamma_n + i\beta_n$ від s для $r = 0.7$, $\theta = -\pi/8$, $q = 2$ представлена на рис. 1.11. Показані перші чотири корені $n = 1 \ldots 4$. Корінь, відзначений 1, відповідає однопараметричному світлому солітону. Інші корені відповідають бризерам. Число виникаючих бризерів зростає зі збільшенням параметра s (амплітуди або ширини початкового імпульсу).

Випадок II:

$$s^2 > r^2, \quad \sin 2\theta > 0. \tag{1.382}$$

як і у випадку I спочатку припустимо, що виконана умова (1.379) . Тоді

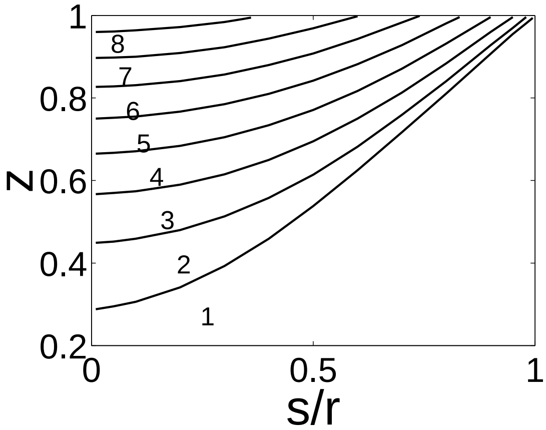

Рис. 1.13 Залежність солітонних власних значень $z_n = \sin\beta_n$ (n=1…8) від s/r для $r = 5$, $\theta = \pi/8$, $q = 1$. Генеруються тільки однопараметричні солітони.

функція $G(z)$ має один максимум при $z_{max} = \sin\theta$ і

$$G(z_{max}) = -\frac{1}{r\sin^2\theta + s\cos q}. \tag{1.383}$$

Значення $G(z)$ на границях даються рівнянням (1.380). Функція $F(z)$ не має сингулярностей і $F(z) > 0$. Тоді можна укласти, що якщо $G(z_{max}) < 0$ та виконана умова (1.379), є дві можливості: якщо $\cos q < 0$ генеруються тільки бризери, і солітонів не виникає, якщо $\cos q > 0$. Громіздкий, але прямий аналіз показує, що функція $F(z)$ може мати не більш двох екстремумів на $[0; 1]$. Отже, в випадку виконання умови (1.382) виникає не більш трьох однопараметричних солітонів. Цей результат не змінюється, якщо порушена умова (1.379) і функція $G(z)$ містить сингулярність. Відповідний випадок представлено на рис. 1.12, де показана залежність солітонних власних значень $\eta_n = \gamma_n + i\beta_n$ від s для $r = 0.7$, $\theta = \pi/8$ і $q = 2.8$. Показані перші шість коренів $n = 1\ldots6$. Корені відзначені 1, 5 і 6 відповідають однопараметричним світлим ($s^2 > r^2$) солітонам. Інші корені відповідають бризерам.

Випадок III:

$$s^2 < r^2. \tag{1.384}$$

Поведінка функції $G(z)$ для $\sin 2\theta < 0$ та $\sin 2\theta > 0$ така ж, як і у випадках *I* та *II* відповідно. Функція $F(z)$ має tg-подібні сингулярності. Як можна бачити з (1.376), кількість n_{sing} сингулярностей

$$n_{sing} = \left[\frac{r^2\sqrt{1 - s^2/r^2} - \pi/2}{\pi}\right], \tag{1.385}$$

де [..] означає цілу частину. Оскільки функція $G(z)$ на $[0; 1]$ має або один екстремум, або одну сингулярність, число коренів N рівняння (1.375) не менше n_{sing}. З іншого боку, аналіз, подібний зробленому вище, показує, що $N \leqslant n_{sing} + 3$. Таким чином, число N виникаючих однопараметричних темних (оскільки $s < r$) солітонів задовольняє нерівності

$$n_{sing} \leqslant N \leqslant n_{sing} + 3. \tag{1.386}$$

Помітимо, що рівняння (1.386) з $s = 0$ перебуває в згоді з (1.371). Якщо $\cos q < 0$ одночасно з темними солітонами можуть виникати бризери. На відміну від випадків I та II, якщо перевищено відповідний поріг, може генеруватися довільне число однопараметричних солітонів. Залежність $z_n = \sin\beta_n$ від параметра s/r для $r = 5$, $\theta = \pi/8$ і $q = 1$ показана на рис. 1.13. Оскільки $\cos q > 0$, виникають тільки однопараметричні солітони. Для даного набору параметрів можлива генерація не більш восьми солітонів. Число солітонів для даного s/r перебуває в згоді з (1.386) й може бути оцінене як $n_{sing} + 1$.

Опишемо як одержати рівняння, що визначає солітонні власні значення у випадку, коли початковий профіль складається з декількох, наприклад M, окремо розташованих прямокутників. Нехай кожний прямокутник характеризується амплітудою $u_{0,j}$, фазою q_j і парою (x_{2j-1}, x_{2j}), де x_{2j-1} і x_{2j} координати лівої й правої сторони j-го прямокутника ($j = 1 \dots M$), так що $l_j = x_{2j} - x_{2j-1}$ його ширина, й нехай $x_1 < x_2 < x_3 \cdots < x_{2M}$. Необхідно визначити коефіцієнти $a_j(\zeta)$ і $b_j(\zeta)$ матриці розсіювання

$$S_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j^* \\ b_j & a_j^* \end{pmatrix} \tag{1.387}$$

окремо для кожного прямокутника. Рівняння для $b_j(\zeta)$ може бути отримане з (1.344) . При цьому "початкові"умови (1.346)-(1.349) трохи модифікуються, і коефіцієнти $a_j(\zeta)$ і $b_j(\zeta)$ залежать від x_{2j-1} та x_{2j} (раніше було $x_1 = 0$, $x_2 = l$). Загальна матриця розсіювання (для всіх прямокутників), з якої може бути отриманий необхідний коефіцієнт $a(\zeta)$, є впорядкованим добутком окремих матриць розсіювання:

$$S = \prod_{j=1}^{M} S_j. \tag{1.388}$$

Тоді солітонні власні значення можуть бути отримані з рівняння $a(\zeta) = 0$.

1.5 Солітони модифікованого нелінійного рівняння Шредингера в присутності випадкових збурень

У підрозділі 1.1 вказувалося, що НРШ добре описує поширення оптичних імпульсів у світловодах у пікосекундному режимі. НРШ, однак, стає непридатним якщо вхідні імпульси коротше за ~ 1 пс. Спектральна ширина імпульсу стає порівнянною з несучою частотою й необхідне врахування додаткових ефектів: залежності групової швидкості від інтенсивності (ефект самозагострення фронту імпульсу), дисперсії третього порядку та ін. Врахування залежності групової швидкості від інтенсивності приводить до модифікованого НРШ [60]

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x^2 u + i\alpha\partial_x(|u|^2 u) + \beta|u|^2 u = 0. \tag{1.389}$$

Далі розглядаємо спадаючі на нескінченності граничні умови: $|u| \to 0$ при $x \to \pm\infty$. Рівняння (1.389), як і НРШ, також виявляється інтегрованим за допомогою МЗЗР, хоча відповідна спектральна задача Коно-Ішикави [106] відрізняється від спектральної задачі Захарова-Шабата (1.11), (1.12) для НРШ. N-солітонні розв'язки вперше були знайдені алгеброгеометричними методами (перетворенням Беклунда та прямим методом Хіроти) в [107–110], а потім методом зворотньої задачі у формулюванні Рімана-Гільберта в

[111]. Алгебраїчні методи не містять спектрального параметра й, у принципі не можуть використовуватися для опису несолітонної (випромінювальної) компоненти розв'язку. У даному підрозділі запропоновано метод знаходження N-солітонних розв'язків модифікованого НРШ, заснований на ідеї методу, розробленого в підрозділі 1.4 даної дисертації для деривативного НРШ із неспадаючими граничними умовами. При цьому, фактично вирішується тільки пряме задача розсіювання з наступним використанням асимптотик і аналітичних властивостей відповідних функцій Йоста.

Теорія збурень для модифікованого НРШ без використання МЗЗР розглядалася в [112]. Варіант теорії збурень, заснований на МЗЗР у формулюванні Рімана-Гільберта, був запропонований в [113], але рівняння для безперервних спектральних даних, відповідних до випромінювання, отримані не були. На основі результатів [113] у роботі [114] вивчався вплив зовнішнього δ-корельованого гауссовського шуму на одиночний солітон модифікованого НРШ. У даному підрозділі формулюється теорія збурень для модифікованого НРШ на основі класичного варіанта МЗЗР та виводяться рівняння, що описують еволюцію як дискретних (солітонних), так і безперервних (відповідних до випромінювання) спектральних даних в присутності збурень. Розвинутий формалізм застосовується для дослідження впливу малої шумової добавки у вхідному солітонному імпульсі та флуктуацій показника заломлення середовища.

1.5.1 Пряма задача розсіювання для модифікованого нелінійного рівняння Шредингера

Рівняння (1.389) уявляє собою умова спільності

$$\mathbf{U}_t - \mathbf{V}_x + [\mathbf{U}, \mathbf{V}] = 0, \tag{1.390}$$

двох лінійних матричних рівнянь (спектральна задача Коно-Ішикави) [106]

$$\partial_x \mathbf{M} = \Lambda(\lambda)\sigma_3 \mathbf{M} + 2i\lambda \mathbf{Q}\mathbf{M} \equiv \mathbf{U}\mathbf{M}, \tag{1.391}$$

$$\partial_t \mathbf{M} = \Omega(\lambda)\sigma_3\mathbf{M} + \lambda(2i\lambda\sigma_3\mathbf{Q}^2 -$$
$$2\Lambda(\lambda)\mathbf{Q} - 2i\alpha\mathbf{Q}^3 + \sigma_3\partial_x\mathbf{Q})\mathbf{M} \equiv \mathbf{VM}, \tag{1.392}$$

де λ спектральний параметр, $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & u \\ u^* & 0 \end{pmatrix}$, і

$$\Lambda(\lambda) = -(2i/\alpha)(\lambda^2 - \beta/4), \tag{1.393}$$
$$\Omega(\lambda) = -(4i/\alpha^2)(\lambda^2 - \beta/4)^2. \tag{1.394}$$

Далі передбачаються спадаючі граничні умови, тобто $|u(x)| \to 0$ для фіксованого t при $x \to \pm\infty$. Для $\operatorname{Im}\lambda^2 = 0$ позначимо $\mathbf{M}^{\pm}(x,t,\lambda)$ матричні 2×2 розв'язку рівняння (1.391), що задовольняють граничним умовам

$$\mathbf{M}^{\pm} \to \mathbf{E}(x,\lambda) \equiv \exp(\Lambda(\lambda)\sigma_3 x) \tag{1.395}$$

при $x \to \pm\infty$ (функції Йоста). Властивості симетрії $\mathbf{M}^{\pm}$ випливають із (1.391)

$$\mathbf{M}^{\pm *}(x,t,\lambda) = \sigma_2\mathbf{M}^{\pm}(x,t,\lambda)\,\sigma_2, \tag{1.396}$$
$$\mathbf{M}^{\pm}(x,t,\lambda) = \sigma_3\mathbf{M}^{\pm}(x,t,-\lambda)\,\sigma_3. \tag{1.397}$$

Для кожного фіксованого λ^2 існують тільки два лінійно незалежних стовпця $\mathbf{M}^{\pm}(x,t,\lambda)$. Отже, існує матриця $\mathbf{S}(t,\lambda)$ з $\operatorname{Im}\lambda^2 = 0$ (матриця розсіювання), така що

$$\mathbf{M}^{-}(x,t,\lambda) = \mathbf{M}^{+}(x,t,\lambda)\mathbf{S}(t,\lambda) \tag{1.398}$$

із властивостями симетрії

$$\mathbf{S}^*(t,\lambda) = \sigma_2\mathbf{S}(t,\lambda)\,\sigma_2, \tag{1.399}$$
$$\mathbf{S}(t,\lambda) = \sigma_3\mathbf{S}(t,-\lambda)\,\sigma_3. \tag{1.400}$$

З (1.398) випливає, що коефіцієнти S_{11} і S_{12} мають вигляд

$$S_{11}(t,\lambda) = \det(M_1^-(x,t,\lambda), M_2^+(x,t,\lambda)), \tag{1.401a}$$

$$S_{12}(t,\lambda) = \det(M_2^-(x,t,\lambda), M_2^+(x,t,\lambda)), \tag{1.401b}$$

де $M_j^{\pm}$ означає j-ий стовпець матриці $\mathbf{M}^{\pm}$. Інтегральні рівняння для $\mathbf{M}^{\pm}$ випливають із (1.391), (1.395)

$$\mathbf{M}^{\pm}(x,t,\lambda) = \mathbf{E}(x,\lambda) \mp 2i\lambda \int_x^{\pm\infty} \mathbf{E}(x-y,\lambda)\mathbf{Q}(y,t)\mathbf{M}^{\pm}(y,t,\lambda)\,dy. \quad (1.402)$$

Стандартний аналіз [45] цих рівнянь дає вирази для функцій Йоста при $\lambda = 0$

$$\mathbf{M}^{+}(x,t,0) = \mathbf{M}^{-}(x,t,0) = \mathbf{E}(x,0), \quad (1.403)$$

та наступні асимптотики при $\lambda \to \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{\pm}(x,t,\lambda) = {} & \mathbf{E}(x,\lambda)\exp\left\{\mp i\sigma_3\theta^{\pm}(x,t)\right\} \\ & \times \left[\mathbf{I} + \frac{1}{4\lambda}\mathbf{Q}(x,t)\right]\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right], \end{aligned} \quad (1.404)$$

де введені позначення

$$\theta^{+}(x,t) = \alpha \int_x^{\infty} |u(y,t)|^2\,dy, \quad (1.405)$$

$$\theta^{-}(x,t) = \alpha \int_{-\infty}^{x} |u(y,t)|^2\,dy. \quad (1.406)$$

Вектор-Функції $M_1^{-}(x,t,\lambda)$, $M_2^{+}(x,t,\lambda)$ допускають аналітичне продовження в область $\operatorname{sign}\alpha\operatorname{Im}\lambda^2 > 0$, тоді як M_2^{-}, M_1^{+}, може бути аналітично продовжені в $\operatorname{sign}\alpha\operatorname{Im}\lambda^2 < 0$. Тоді з (1.401a) випливає, що коефіцієнт $S_{11}(\lambda)$ аналитичен в області $\operatorname{sign}\alpha\operatorname{Im}\lambda^2 > 0$ з асимптотикою $\lambda \to \infty$

$$S_{11} = \exp(-i\theta_0)\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right], \quad (1.407)$$

де $\theta_0 = \theta^{-} + \theta^{+}$. Аналогічно, коефіцієнт $S_{22}(\lambda)$ аналитичен в області $\operatorname{sign}\alpha\operatorname{Im}\lambda^2 < 0$. З (1.399), (1.400) випливає, що

$$S_{22}(\lambda) = S_{11}^{*}(\lambda^{*}), \quad S_{21}(\lambda) = -S_{12}^{*}(\lambda^{*}) \quad (1.408)$$

та

$$S_{11}(\lambda) = S_{11}(-\lambda), \quad S_{12}(\lambda) = -S_{12}(-\lambda). \quad (1.409)$$

Для $\operatorname{Im}\lambda^2 = 0$ умова нормування $\det\mathbf{S} = 1$ має на увазі $|S_{11}(\lambda)|^2 + \operatorname{sign}\lambda^2|S_{12}(\lambda)|^2 = 1$. Аналітична функція $S_{11}(t,\lambda)$ може мати нулі $\lambda_1(t),\ldots,\lambda_N(t)$ в області своєї аналітичності $\operatorname{sign}\alpha\operatorname{Im}\lambda^2 > 0$. Тоді з (1.401a) випливає, що стовпці M_2^+ та M_1^- є лінійно залежними й існують комплексні числа $\gamma_1(t),\ldots,\gamma_N(t)$ такі, що

$$M_2^+(x,t,\lambda_k(t)) = \gamma_k(t)M_1^-(x,t,\lambda_k(t)), \tag{1.410}$$

для $k = 1,\ldots,N$. У комплексно сполучених точках $\lambda_k^*(t)$ маємо

$$M_1^+(x,t,\lambda_k^*(t)) = -\gamma_k^*(t)M_2^-(x,t,\lambda_k^*(t)). \tag{1.411}$$

Оскільки $S_{11}\exp(i\theta_0) \to 1$ при $\lambda \to \infty$ з $\operatorname{sign}\alpha\operatorname{Im}\lambda^2 > 0$ та $S_{11}(\lambda) = S_{11}(-\lambda)$, за допомогою стандартних методів перетворень Гільберта [45] і з використанням умови нормування можна виразити аналітичну функцію $S_{11}(t,\lambda)$ в області $\operatorname{sign}\alpha\operatorname{Im}\lambda^2 > 0$ через її нулі й значення модуля $|S_{12}(t,\lambda)|$ на контурі $\Gamma = \{\lambda;\ \operatorname{Im}(\lambda^2) = 0\}$

$$S_{11}(t,\lambda) = \prod_{k=1}^{N}\frac{\lambda^2-\lambda_k^2(t)}{\lambda^2-\lambda_k^{*2}(t)}\exp\left\{-i\theta_0 + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\mu\ln(1-\operatorname{sign}(\mu^2)|\,S_{12}(t,\mu)|^2)}{\mu^2-\lambda^2}\,d\mu\right\}. \tag{1.412}$$

З (1.403) і (1.401a) маємо $S_{11}(t,0) = 1$ й тоді, уважаючись $\lambda = 0$ в (1.412), можна знайти $\theta_0 = \alpha\int_{-\infty}^{\infty}|u(x,t)|^2\,dx$ в термінах даних розсіювання

$$\theta_0 = 4\sum_{k=1}^{N}\arg(\lambda_k) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\ln(1-\operatorname{sign}(\lambda^2)|\,S_{12}(\lambda)|^2)}{\lambda}d\lambda, \tag{1.413}$$

де $0 < \arg(\lambda_k) < \pi/2$ if $\alpha > 0$, і $-\pi/2 < \arg(\lambda_k) < 0$ якщо $\alpha < 0$.

Із другого (часового) спектрального рівняння (1.392) випливає, що динаміка даних розсіювання виявляється тривіальною

$$S_{12}(t) = S_{12}(0)\exp(2\Omega(\lambda)t), \tag{1.414}$$

$$\lambda_k(t) = \lambda_k(0), \tag{1.415}$$

$$\gamma_k(t) = \gamma_k(0)\exp(2\Omega(\lambda_k)t). \tag{1.416}$$

1.5.2 N-солітонні розв'язки

Важливим окремим випадком є $S_{12}(t,\lambda) \equiv 0$ λ для деякого фіксованого t. Тоді з (1.412) випливає, що

$$S_{11}(t,\lambda) = \prod_{k=1}^{N} \frac{\lambda_k^{*2}(\lambda^2 - \lambda_k^2)}{\lambda_k^2(\lambda^2 - \lambda_k^{*2})}. \tag{1.417}$$

Видно, що при цьому $S_{22}(t,\lambda) = 1/S_{11}(t,\lambda)$ й $S_{21}(t,\lambda) \equiv 0$. Оскільки матриця $\mathbf{S}(t,\lambda)$ у цьому випадку диагональна, її можна факторизовати таким чином $\mathbf{S}^-(t,\lambda) = \mathbf{S}^+(t,\lambda)\mathbf{S}(t,\lambda)$, що матричні розв'язки Йоста $\mathbf{M}^\pm$ виражаються через загальну матрицю $\mathbf{A}(x,t,\lambda)$

$$\mathbf{M}^\pm(x,t,\lambda) = \mathbf{A}(x,t,\lambda)\mathbf{S}^\pm(t,\lambda), \tag{1.418}$$

де

$$\mathbf{S}^+ = \operatorname{diag}\left(\prod_{k=1}^{N} \frac{\lambda_k}{\lambda_k^*(\lambda^2 - \lambda_k^2)}, \prod_{k=1}^{N} \frac{\lambda_k^*}{\lambda_k(\lambda^2 - \lambda_k^{*2})}\right) \tag{1.419}$$

та

$$\mathbf{S}^- = \sigma_1 \mathbf{S}^+ \sigma_1. \tag{1.420}$$

З (1.410) й (1.410) випливає, що стовпці матриці $\mathbf{A}(x,t,\lambda)$ з необхідністю задовольняють співвідношенням

$$A_2(x,t,\lambda_k(t)) = \gamma_k(t) A_1(x,t,\lambda_k(t)), \tag{1.421a}$$

$$A_1(x,t,\lambda_k^*(t)) = -\gamma_k^*(t) A_2(x,t,\lambda_k^*(t)) \tag{1.421b}$$

для всіх $k = 1,\ldots,N$. Оскільки $\mathbf{A}(\lambda)$ аналітична в λ-площині, з (1.404) та (1.418) випливає , що діагональні й антидіагональні елементи матриці $\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{E}^{-1}(\lambda)$ є поліномами по λ ступені $2N$ і $2N-1$ відповідно. Крім того, із властивості симетрії (1.397) й (1.418) можна бачити, що діагональні елементи парні по λ, а антидіагональні – непарні. Це означає, що можна написати

$$\mathbf{A}(x,t,\lambda)\mathbf{E}^{-1}(x,\lambda) = \begin{pmatrix} A_{11}^{(0)} & 0 \\ 0 & A_{22}^{(0)} \end{pmatrix} + \sum_{p=1}^{N} \lambda^{2p-1} \begin{pmatrix} \lambda A_{11}^{(p)} & A_{12}^{(p)} \\ A_{21}^{(p)} & \lambda A_{22}^{(p)} \end{pmatrix}. \qquad (1.422)$$

Уважаючись тут $\lambda = 0$, з (1.403) та (1.418)-(1.420) одержуємо вирази для функцій $A_{11}^{(0)}(x,t)$ й $A_{22}^{(0)}(x,t)$

$$A_{11}^{(0)} = A_{22}^{(0)} = -\prod_{k=1}^{N} |\lambda_k(t)|^2. \qquad (1.423)$$

Невідомі функції $\mathbf{A}^{(p)}(x,t)$ з $p = 1, \ldots, N$ безпосереднім чином визначаються з (1.421). Дійсно, перші рядки рівнянь (1.421) являють собою лінійну алгебраїчну систему $2N$ рівнянь із $2N$ невідомими коефіцієнтами $A_{12}^{(p)}$ й $A_{11}^{(p)}$ з $p = 1, \ldots, N$. Аналогічно, другі рядки представляють систему, що визначає (1.421) $A_{21}^{(p)}$ й $A_{22}^{(p)}$ з $p = 1, \ldots, N$. Прямою підстановкою можна показати, що (1.422) разом з (1.391) та (1.418) сумісні якщо й тільки якщо

$$u(x,t) = \frac{2\, A_{12}^{(N)}(x,t)}{\alpha\, A_{22}^{(N)}(x,t)}. \qquad (1.424)$$

Ця формула відтворює розв'язок $u(x,t)$ по дискретним (солітонним) спектральним даним $\{\lambda_k(t)\}$, $\{\gamma_k(t)\}$ у випадку $S_{12}(t,\lambda) \equiv 0$ та дає N-солітонний розв'язок рівняння (1.389). Явний вираз безпосередньо виписується через детермінанти відповідних матриць. Вираження (1.418), (1.422) визначають N-солітонні функції Йоста.

З $\partial_x \mathbf{A} = \mathbf{UA}$ можна одержати, що елементи $A_{ij}(x,t,\lambda)$ матриці $\mathbf{A}$ й розв'язок $u(x,t)$ задовольняють важливим співвідношенням

$$2i\lambda(ua_{21}A_{22} + u^* A_{11}A_{12}) = \partial_x(A_{12}A_{21}), \qquad (1.425)$$

$$2i\lambda(ua_{22}^2 + u^* A_{12}^2) = \partial_x(A_{12}A_{22}), \qquad (1.426)$$

які будемо використовувати нижче.

Варіації δS_{12} та δS_{11} при варіаціях $\delta u(x,t)$, $\delta u^*(x,t)$ для фіксованого

t мають вигляд

$$\delta S_{11}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\delta S_{11}}{\delta u}\delta u(x) + \frac{\delta S_{11}}{\delta u^*}\delta u^*(x) \right\} dx, \qquad (1.427)$$

$$\delta S_{12}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\delta S_{12}}{\delta u}\delta u(x) + \frac{\delta S_{12}}{\delta u^*}\delta u^*(x) \right\} dx. \qquad (1.428)$$

З (1.401) маємо

$$\frac{\delta S_{11}}{\delta u} = \frac{\delta}{\delta u}(M_{11}^- M_{22}^+ - M_{12}^+ M_{21}^-), \qquad (1.429)$$

$$\frac{\delta S_{12}}{\delta u} = \frac{\delta}{\delta u}(M_{12}^- M_{22}^+ - M_{12}^+ M_{22}^-), \qquad (1.430)$$

й подібні вирази для $\delta S_{11}/\delta u^*$, $\delta S_{12}/\delta u^*$. Варіаційні похідні в правих частинах (1.429), (1.430) можуть бути знайдені з інтегральних рівнянь (1.402). У результаті одержуємо (для стислості опускається λ-залежність в $\mathbf{M}^{\pm}$)

$$\delta S_{11}(\lambda) = 2i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ M_{22}^+(x) M_{21}^-(x)\delta u(x) + M_{12}^+(x) M_{11}^-(x)\delta u^*(x) \right\} dx, \qquad (1.431)$$

$$\delta S_{12}(\lambda) = 2i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ M_{22}^+(x) M_{22}^-(x)\delta u(x) + M_{12}^+(x) M_{12}^-(x,\lambda)\delta u^*(x) \right\} dx. \qquad (1.432)$$

1.5.3 Солітон з випадковим малим початковим збуренням

В "безвідбивному"$S_{12}(\lambda) = 0$ випадку єдиний $(N = 1)$ нуль $\lambda_1^2 \equiv \varkappa = \xi + i\eta$ функції $S_{11}(\lambda)$ відповідає односолітонному розв'язку. З (1.421)-(1.424) можна одержати

$$u_s(x,t) = \frac{ik_0}{|\lambda_1|} \frac{\operatorname{ch}(k_0 z - i\varphi)}{\operatorname{ch}^2(k_0 z + i\varphi)} e^{i\psi}, \qquad (1.433)$$

де введені позначення

$$z = x_0 - x + vt, \quad \psi = \psi_0 + vx + \frac{1}{2}(k_0^2 - v^2)t, \qquad (1.434)$$

$$k_0 = \frac{4\eta}{\alpha}, \quad v = \frac{\beta - 4\xi}{\alpha}, \quad \varphi = \arg(\lambda_1) = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\eta/\xi). \qquad (1.435)$$

Параметр $\eta = \operatorname{Im}\lambda_1^2$ визначає характерну зворотну ширину солітона k_0 (при цьому $\eta/\alpha > 0$), а $\xi = \operatorname{Re}\lambda_1^2$ швидкість солітона v. Параметри $x_0 = k_0^{-1}\mathrm{Re}\,\ln\gamma_1(0)$ й $\psi_0 = \mathrm{Im}\,\ln\gamma_1(0)$ відповідають початковому положенню й початковій фазі солітона. Явний вираз для u_s через амплітуду й фазу солітона має вигляд

$$u_s = \frac{ik_0}{|\lambda_1|}\frac{\exp\{i\psi - 3i\,\mathrm{arctg}[\mathrm{tg}(k_0 z)\,\mathrm{tg}\,\varphi]\}}{\sqrt{\mathrm{ch}^2(k_0 z) - \sin^2\varphi}}. \tag{1.436}$$

Односолітонні функції Йоста даються виразами (1.418) з

$$A_{11}(x,t,\lambda) = e^{\Lambda(\lambda)x}(\lambda^2 A_{11}^{(1)} - |\lambda_1|^2), \tag{1.437}$$

$$A_{12}(x,t,\lambda) = e^{-\Lambda(\lambda)x}\lambda A_{12}^{(1)}, \tag{1.438}$$

$$A_{21}(x,t,\lambda) = e^{\Lambda(\lambda)x}\lambda A_{21}^{(1)}, \tag{1.439}$$

$$A_{22}(x,t,\lambda) = e^{-\Lambda(\lambda)x}(\lambda^2 A_{22}^{(1)} - |\lambda_1|^2), \tag{1.440}$$

де

$$A_{12}^{(1)}(x,t) = -\frac{2i\eta}{|\lambda_1|}\frac{\exp(i\psi)}{\mathrm{ch}(k_0 z + i\varphi)}, \quad A_{22}^{(1)}(x,t) = \frac{\mathrm{ch}(k_0 z + i\varphi)}{\mathrm{ch}(k_0 z - i\varphi)}, \tag{1.441}$$

$$A_{11}^{(1)} = A_{22}^{(1)*}, \quad A_{21}^{(1)} = -A_{12}^{(1)*}. \tag{1.442}$$

Властивості солітона модифікованого НРШ відрізняються від солітонів НРШ. По перше, солітон модифікованого НРШ має ненульову різницю фаз у межах

$$\arg(u_s(x\to\infty)) - \arg(u_s(x\to-\infty)) = 6\varphi. \tag{1.443}$$

По друге, енергія солітона

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty}|u_s(x,t)|^2\,dx = 4\alpha\varphi, \quad 0 < \varphi\,\mathrm{sign}\,\alpha < \frac{\pi}{2}, \tag{1.444}$$

має верхню границю $2\pi/|\alpha|$.

Розглянемо випадок, коли початковий солітонний імпульс містить шумову складову й має вигляд $u(x) = u_s(x)[1 + \varepsilon(x)]$, де $\varepsilon(x)$ випадковий гауссівський процес із нульовим середнім і кореляційною функцією

$$\langle \varepsilon(x)\varepsilon(x') \rangle = D(x - x'), \tag{1.445}$$

де $\langle \ldots \rangle$ означає статистичне усереднення. Уважаємо також, що інтенсивність шуму мала, $D(x) \ll 1$. Наявність $\varepsilon(x)$ буде випадковим чином змінювати солітонний параметр λ_1, та, крім того, приводити до виникнення додаткової компоненти δu_c (випромінювання).

Варіація параметра $\varkappa$ може бути записана у вигляді

$$\delta\varkappa = \left(\left. \frac{\partial S_{11}(\lambda^2)}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=\lambda_1} \right)^{-1} \delta S_{11}(\lambda_1), \tag{1.446}$$

де δS_{11}, обумовлене (1.431), є варіацією коефіцієнта проходження $S_{11}(\lambda)$, індукованою даною реалізацією $\varepsilon(x)$. Підставляючи постійний (незбурений) солітонний параметр λ_1 і незбурені односолітонні функції Йоста в праву частину (1.446), маємо

$$\delta\varkappa = \frac{2i\lambda_1}{\varkappa - \varkappa^*} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x) \left(u_s A_{21} A_{22} + u_s^* A_{11} A_{12} \right) dx, \tag{1.447}$$

де A_{11}, A_{12}, A_{21} й A_{22} визначені в (1.437)-(1.440) і обчислюються при $\lambda = \lambda_1$. Видно, що $\delta\varkappa$ є гауссовською випадковою величиною з нульовим середнім $\langle \delta\varkappa \rangle = 0$, тобто середня швидкість солітона $\langle v \rangle$ і зворотна ширина $\langle k_0 \rangle$ у цьому наближенні не змінюються. Використовуючи співвідношення (1.425), можна спростити (1.447). Після цього, виписуючи вирази для $|\delta\varkappa|^2$, виконуючи усереднення по $\varepsilon(x)$ за допомогою (1.445), й уводячи фур'є образ $D(x)$ у вигляді $D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{D}(q) \exp(-iqx)\, dq$, одержуємо

$$\langle |\delta\varkappa|^2 \rangle = \frac{1}{4\eta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{D}(q) |I(q)|^2 \, dq, \tag{1.448}$$

де $I(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iqx) \partial_x (A_{12} A_{21})\, dx$. Інтегрування дає для середнього $|\delta\varkappa|^2$

$$\langle |\delta\varkappa|^2 \rangle = \pi^2 \alpha^2 \left(1 + 1/\mu^2 \right) k_0^2 G(\xi, \eta), \tag{1.449}$$

де $\mu = \eta/\xi$ й введена функція

$$G(\xi, \eta) = k_0 \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \tilde{D}(k_0 y) \frac{\mathrm{sh}^2(\mathrm{arctg}(\mu) y/2)}{\mathrm{sh}^2(\pi y/2)}\, dy, \tag{1.450}$$

яка залежить від конкретного виду кореляційної функції шуму. Аналогічно для $\langle \delta\varkappa \delta\varkappa \rangle$ можна одержати

$$\langle \delta\varkappa \delta\varkappa \rangle = \pi^2 \alpha^2 \left(1/\mu^2 - 1 - 2i/\mu\right) k_0^2 G(\xi, \eta). \tag{1.451}$$

Розщеплюючи дійсну й уявну частини, одержуємо вирази для дисперсії швидкості солітона ξ і зворотньої ширини η

$$\langle \delta\xi^2 \rangle = (1/\mu^2) \langle \delta\eta^2 \rangle, \quad \langle \delta\eta^2 \rangle = \pi^2 \alpha^2 k_0^2 G(\xi, \eta), \tag{1.452}$$

а також перехресну кореляцію

$$\langle \delta\xi\, \delta\eta \rangle = \langle \delta\eta^2 \rangle / \mu. \tag{1.453}$$

Функція $G(\xi, \eta)$ може бути явно обчислена у двох граничних випадках – нульового й нескінченного часу кореляції шуму. Якщо шум δ-коррелировано за часом (нульовий час кореляції), тобто $D(x) = D_0 \delta(x)$, функція G має вигляд

$$G(\xi, \eta) = \frac{8\pi^2 D_0 k_0 \mu^2}{1 + \mu^2} F(\varphi), \tag{1.454}$$

де

$$F(\varphi) = \frac{2 \sin\phi \cos^2\phi (\cos\phi - 2) - \cos\phi (5 \sin\phi - 12\phi) - 8 \sin\phi + 3\phi}{24 \sin^5\phi (\cos\phi - 1)} \tag{1.455}$$

й введене позначення $\phi = 2\varphi$. Функція $F(\varphi)$ монотонно зростає зі збільшенням φ і $F(0) = 1/35$.

Тепер розглянь випадок, коли випадкова функція $\varepsilon(x)$ має вигляд $\varepsilon(x) = \varepsilon_0 \cos(\omega_0 x + \vartheta)$, де випадкова амплітуда ε_0 є випадковою гауссовською величиною з нульовим середнім та дисперсією σ^2, а випадкова фаза ϑ однорідним випадковим чином розподілена між 0 і 2π. Кореляційна функція такого процесу має вигляд $D(x) = (\sigma^2/2) \cos(\omega_0 x)$ та в спектральному

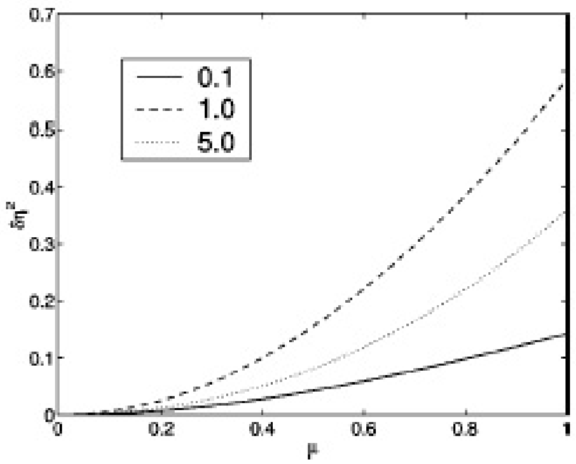

Рис. 1.14 Залежність дисперсії зворотньої ширини солітона η від параметра $\mu = \eta/\xi$ для різних a.

представленні дається виразом (1.112). В цьому випадку шум має нескінченний час кореляції й зосереджений на частоті ω_0. Для G можна одержати

$$G(\xi, \eta) = \frac{\sigma^2 b^2 \operatorname{sh}^2(\operatorname{arctg}(\mu) b/2)}{2 \operatorname{sh}^2(\pi b/2)}, \tag{1.456}$$

де $b = \omega_0/k_0$.

Щоб врахувати кінцевий час кореляції, розглянемо випадок, коли спектр шуму має лоренцівську форму

$$\tilde{D}(\omega) = \frac{D_0}{\pi \tau_c [\omega^2 + (1/\tau_c)^2]}. \tag{1.457}$$

В x-просторі це відповідає кореляційній функції $D(x) = D_0 \exp(-|x|/\tau_c)$, де τ_c кореляційний час. Функція $G(\xi, \eta)$ має вигляд

$$G(\xi, \eta, a) = \frac{D_0 a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2 \operatorname{sh}^2(\operatorname{arctg}(\mu) y/2)}{(y^2 + a^2) \operatorname{sh}^2(\pi y/2)} \, dy, \tag{1.458}$$

де параметр $a = 1/(k_0 \tau_c)$ - відношення ширини солітона (нагадаємо, що в розглянутій фізичній моделі вона має розмірність часу) до часу кореляції. На рис. 1.14 показана залежність дисперсії зворотньої ширини солітона η від параметра μ для різних значень a при $D_0 = 0.025$. Залежність дисперсії η від a при різних μ показана на рис. 1.15. Видно, що вплив шуму (при його фіксованої інтегральної інтенсивності) на солітонні параметри є найбільш

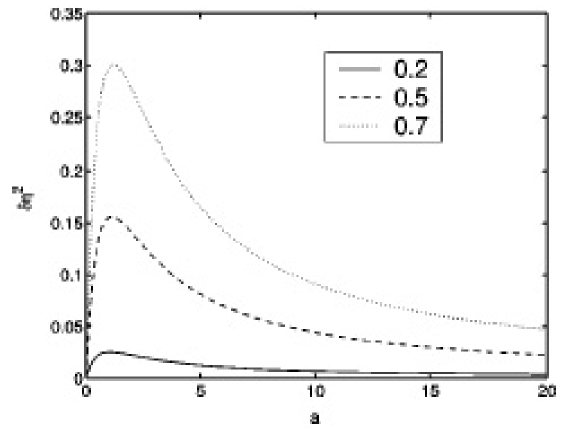

Рис. 1.15 Залежність дисперсії зворотньої ширини солітона η від a (відношення ширини солітона до часу кореляції шуму) для різних μ.

сильним якщо $a \sim 1$, тобто коли ширина солітона (характерна тривалість солітонного імпульсу) порівнянна з часом кореляції.

Тепер розглянемо внесок випромінювання. Рівняння (1.389) зберігає енергію

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)|^2 \, dx, \tag{1.459}$$

яка, як випливає з (1.413), та може бути явно виражена через безперервні ($\operatorname{Im} \lambda^2 = 0$) і дискретні дані розсіювання

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}_{rad}(\lambda^2) \, d\lambda^2 + \frac{4}{\alpha}\varphi, \tag{1.460}$$

де

$$\mathcal{N}_{rad}(\lambda^2) = -\frac{\ln(1 - \operatorname{sign}(\lambda^2)|S_{12}(\lambda)|^2)}{2\pi|\alpha|\lambda^2}. \tag{1.461}$$

У виразі для енергії (1.460) солітонний внесок явно відділений від радіаційної компоненти ($\int \, d\lambda^2$), описуваної даними розсіювання безперервного спектра. Дисперсійне співвідношення, що відповідає лінеаризованному рівнянню (1.389) має вигляд $p = -q^2/2$ (для $u \sim \exp(ipt - iqx)$). Якщо розглядати радіаційну компоненту як суперпозицію хвиль, описуваних лінійним рівнянням Шредингера, то спектральний параметр λ^2, як випливає з (1.394), (1.414), пов'язаний із частотою випромінюваних лінійних хвиль

q як

$$q = \frac{4}{\alpha}(\lambda^2 - \frac{\beta}{4}). \tag{1.462}$$

Величина $\mathcal{N}_{rad}(\lambda^2)$ являє собою спектральну густину енергії, пов'язаною з випромінюванням.

Коефіцієнт відбиття більше не дорівнює нулю, та для даної реалізації $\varepsilon(x)$ маємо $|S_{12}(\lambda)| = |\delta S_{12}(\lambda)| \ll 1$. З (1.461) тоді випливає, що середня спектральна густина випромінювання $n_{rad}(\lambda) = \langle \mathcal{N}_{rad}(\lambda) \rangle$ має вигляд

$$n_{rad}(\lambda) = \frac{\left\langle |\delta S_{12}(\lambda)|^2 \right\rangle}{2\pi|\alpha\lambda^2|}. \tag{1.463}$$

Підставляючи незобурену односолітонну функцію Йоста в (1.432), одержуємо

$$\delta S_{12}(\lambda) = \frac{2i\lambda}{(\lambda^2 - \varkappa)(\lambda^2 - \varkappa^*)} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x) \left[u_s A_{22}^2(\lambda) + u_s^* A_{12}^2(\lambda)\right] dx. \tag{1.464}$$

Виписуючи вирази для $|\delta S_{12}(\lambda)|^2$, виконуючи усереднення по $\varepsilon(x)$, обчислюючи відповідні інтеграли за допомогою (1.426), і підставляючи результат в (1.463), для спектральної густини випромінювання знайдемо

$$n_{rad}(\lambda) = \frac{8\pi\eta^3}{\alpha^2|\lambda_1|^2[(\lambda^2 - \xi)^2 + \eta^2]^2} R(\lambda), \tag{1.465}$$

де введена функція

$$R(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} [y + c(\lambda)]^2 \, \tilde{D}(k_0 y + k_0 c(\lambda)) \frac{\left(\lambda^2 e^{-\varphi y} - |\lambda_1|^2 e^{\varphi y}\right)^2}{\operatorname{ch}^2(\pi y/2)} \, dy, \tag{1.466}$$

з позначенням $c(\lambda) = v/k_0 + (\lambda^2 - \beta/4)/\eta$. Для лоренцевскьої кореляційної функції (1.457) маємо

$$R(\lambda) = \frac{D_0 a}{\pi k_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y + c)^2 \left(\lambda^2 e^{-\varphi y} - |\lambda_1|^2 e^{\varphi y}\right)^2}{[a^2 + (y + c)^2] \operatorname{ch}^2(\pi y/2)} \, dy. \tag{1.467}$$

Спектральний розподіл випромінювання для різних значень параметра a у цьому випадку показано на рис. 1.16. Розподіл має один пік і експоненціально спадаючі хвости. Зі збільшенням відношення ширини солітона до

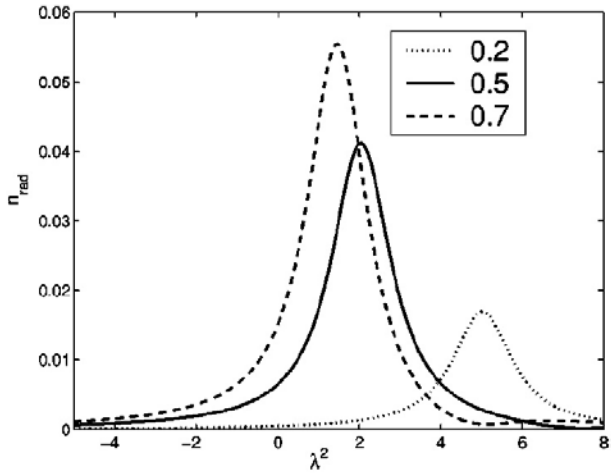

Рис. 1.16 Спектральний розподіл випромінювання, що випускається солітоном, для різних значень параметра a (відношення ширини солітона до часу кореляції шуму).

кореляційного часу, максимум розподілу зсувається до вищих частот.

Якщо $\varepsilon(x)$ є δ-корельованим гауссовськім шумом, то можна знайти явний вираз для $\langle|s_{12}(\lambda)|^2\rangle$ і спектральна густина випромінювання має вигляд

$$n_{rad}(\lambda) = \frac{16D_0\eta^3[(\lambda^4+\xi^2+\eta^2)F_1-\lambda^2|\lambda_1|^2F_2]}{\pi\alpha^2|\lambda_1|^2[(\lambda^2-\xi)^2+\eta^2]^2}, \tag{1.468}$$

де

$$F_1(\varphi) = \frac{\phi-\sin(2\phi)+\phi\cos^2(\phi)}{\sin^3(\phi)}, \quad F_2(\varphi) = \frac{\cos(2\phi)}{6}. \tag{1.469}$$

У цьому випадку спектральна густина спадає алгебраїчно ($\sim 1/\lambda^4$) зі збільшенням $|\lambda^2|$. Таке повільне спадання пов'язане з тим, що спектр δ-корельованого шуму містить фур'є гармоніки всіх частот з рівними амплітудами.

1.5.4 Рівняння для спектральних даних у присутності збурень

У присутності у правій частині рівняння (1.389) доданка $p[u,u^*]$, відповідного до збурення, умова спільності (1.390) записується у вигляді (1.59),

де

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 2\lambda p \\ -2\lambda p^* & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.470}$$

Методом, розвиненим у підрозділі 1.1 для темних солітонів НРШ, можна одержати аналогічне (1.70) еволюційне рівняння для матриці розсіювання $\mathbf{S}(t,\lambda)$ при $\operatorname{Im}\lambda^2 = 0$, у якому містяться еволюційні рівняння для дискретних і безперервних спектральних даних

$$\partial_t \mathbf{S}(t,\lambda) - \Omega(\lambda)[\sigma_3, \mathbf{S}(t,\lambda)] = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{M}^+(x',t,\lambda)^{-1}\mathbf{P}\mathbf{M}^-(x',t,\lambda)dx', \tag{1.471}$$

де $\Omega(\lambda)$ визначене в (1.393). У повній аналогії з підрозділом 1.1, з еволюційного рівняння (1.471) можна одержати систему еволюційних рівнянь для солітонних власних значень λ_k^2

$$\frac{d\lambda_k^2}{dt} = \frac{2\lambda_k}{\partial_{\lambda^2} S_{11}(\lambda_k,t)} \int_{-\infty}^{\infty} (pM_{22}^+M_{21}^- + p^*M_{12}^+M_{11}^-)dx', \tag{1.472}$$

де $k = 1\ldots N$ та інтегранди оцінюються при x', t, й $\lambda = \lambda_k(t)$, і еволюційне рівняння для коефіцієнта $S_{12}(\lambda,t)$, що описує безперервну частину спектра

$$\partial_t S_{12} - 2\Omega(\lambda)S_{12} = -2\lambda \int_{-\infty}^{\infty} (pM_{22}^+M_{22}^- + p^*M_{12}^+M_{12}^-)dx'. \tag{1.473}$$

Як і в попередніх підрозділах, розглядаючи $p[u,u^*]$ як мале збурення, можна підставити незбурені N-солітонні розв'язки u, u^* й N-солітонні функції Йоста $\mathbf{M}^\pm$, обумовлені (1.418) й (1.422), у праву частину еволюційних рівнянь для даних дискретного та безперервного спектра (1.473) й (1.472). Це дає рівняння в нижчему порядку теорії збурень. Наступні порядки теорії збурень можна одержати подальшими ітераціями.

В односолітонному випадку $N = 1$ еволюційне рівняння для солітонного власного значення $\varkappa \equiv \lambda^2 = \xi + i\eta$ випливає з (1.472) при підстановці односолітонних функцій Йоста. У результаті можна одержати

$$\frac{d\varkappa}{dt} = \frac{2\lambda_1}{(\varkappa - \varkappa^*)} \int_{-\infty}^{\infty} (pA_{21}A_{22} + p^*A_{11}A_{12})\, dx \tag{1.474}$$

де A_{11}, A_{12}, A_{21} й A_{22} визначені в (1.437)-(1.440) і збурення p, p^* оцінюються на солітонному розв'язку (1.433). Аналогічно, для коефіцієнта відбиття $S_{12}(\lambda, t)$, що описує випромінювання, з (1.473) маємо

$$\frac{ds_{12}(\lambda)}{dt} + ik(\lambda)S_{12}(\lambda) = \frac{2\lambda}{(\lambda^2 - \varkappa)(\varkappa^* - \lambda^2)} \int_{-\infty}^{\infty} (pA_{22}^2(\lambda) + p^* A_{12}^2(\lambda))\, dx, \tag{1.475}$$

де введене позначення $k(\lambda) = (8/\alpha^2)(\lambda^2 - \beta/4)^2$.

1.5.5 Вплив мультиплікативного шуму на солітон

Тут розглянемо модифіковане НРШ із зовнішнім мультиплікативним шумом. Збурювання вибираємо у вигляді

$$p = \varepsilon(x, t)u, \tag{1.476}$$

де $\varepsilon(x, t)$ випадкове гауссівське поле з нульовим середнім і кореляційною функцією

$$\langle \varepsilon(x, t)\varepsilon(x', t')\rangle = D(x - x')B(t - t'). \tag{1.477}$$

Такий вид збурення відповідає випадковій частині показника заломлення середовища.

Підставляючи збурення (1.476) у рівняння (1.474), можна знайти наступні еволюційні рівняння для солітонних параметрів

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \tag{1.478}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = 8\eta \sin(2\varphi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(x, t)\,\mathrm{sh}(2y)\, dy}{[\mathrm{ch}(2y) + \cos(2\varphi)]^2}, \tag{1.479}$$

де $x = x_0(t) + v(t)t - y/k_0$. З (1.478) випливає, що в першому наближенні випадковий доданок не впливає на величину φ. Це легко пояснити за допомогою інтеграла руху (1.460). Збурювання виду (1.476) все ще точно зберігає енергію (1.459), яка, у зневазі радіаційною складовою, пропорційна φ. Таким чином, $\varphi(t) = \varphi(0) \equiv \varphi_0$ детерміністична константа, обумовлена детерміністичними початковими умовами. Помітимо, що якщо ε залежить тільки від t (випадкові просторові неоднорідності показника заломлення), то $d\langle\eta\rangle/dt = 0$, тобто середня швидкість солітона в цьому випадку не змінюється з часом.

У відповідність із (1.461), спектральна густина випромінюваної енергії має вигляд

$$\mathcal{N}_{rad}(\lambda^2) = \frac{|S_{12}(\lambda)|^2}{2\pi|\alpha\lambda^2|} + O(|S_{12}(\lambda)|^4), \tag{1.480}$$

за умови $|S_{12}(\lambda)|^2 \ll 1$. Інтенсивність випромінювання характеризується потужністю, тобто енергією, випромінюваної в одиницю часу $\mathcal{N}_{rad}/dt$

$$w(\lambda) = \frac{1}{\pi|\alpha\lambda^2|}\mathrm{Re}\left\{S_{12}^*\frac{ds_{12}}{dt}\right\}. \tag{1.481}$$

Підставляючи збурення (1.476) у рівняння для коефіцієнта $S_{12}(\lambda, t)$ (1.475), для $s(\lambda, t) = S_{12}(\lambda, t)\exp[ik(\lambda)t]$ одержимо

$$\frac{ds(\lambda)}{dt} = \frac{2\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(x,t)[u_s A_{22}^2(\lambda) + u_s^* A_{12}^2(\lambda)]dx}{(\lambda^2 - \varkappa)(\varkappa^* - \lambda^2)}\, e^{ik(\lambda)t}, \tag{1.482}$$

Проінтегруємо рівняння (1.482), попередньо помноживши праву частину на $\exp(\nu t)$ з нескінченно малим $\nu > 0$. Як звичайно, це має на увазі адіабатично повільне включення збурення, відсутнього при $t = -\infty$. Таким чином, одержуємо

$$s(\lambda, t) = \frac{\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(x,\tau)F(x,\tau,\lambda)e^{ik(\lambda)\tau+\nu\tau}d\tau\,dx}{i(\lambda^2 - \varkappa)(\varkappa^* - \lambda^2)}, \tag{1.483}$$

де

$$F(x,\tau,\lambda) = \partial_x(A_{12}(x,\tau,\lambda)A_{22}(x,\tau,\lambda)), \tag{1.484}$$

і використане співвідношення (1.426). Множення (1.482) на комплексно сполучений вираз (1.483) після усереднення дає

$$\left\langle s^*\frac{ds}{dt}\right\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}B(t-\tau)D(x-x')F(x,t)F^*(x',\tau)e^{ik(\lambda)(t-\tau)+\nu\tau}d\tau dx dx'}{[(\lambda^2-\xi)^2+\eta^2]^2}. \tag{1.485}$$

Уводячи фур'є-образи $B(t)$ й $D(x)$ виразами $B(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{B}(p)\exp(-ipt)\,dp$, $D(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{D}(q)\exp(-iqx)\,dq$, роблячи заміну змінних $y = k_0(vt - x)$,

$y' = k_0(v\tau - x')$ та обчислюючи інтеграли по y, y', можна потім виконати інтегрування по $t - \tau$ й одержати

$$\left\langle s^*(\lambda)\frac{ds(\lambda)}{dt}\right\rangle = \frac{1}{[(\lambda^2-\xi)^2+\eta^2]^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\tilde{B}(p)\tilde{D}(q)q^2I(\lambda,q)\,dp\,dq}{i\nu+K(\lambda)-p-qv}, \tag{1.486}$$

де $K(\lambda) = k(\lambda) + \omega(\lambda)v + (k_0^2 + v^2)/2$, $\omega(\lambda) = (4\lambda^2 - \beta)/\alpha$ та

$$I(\lambda,q) = \frac{\pi^2\alpha^2\lambda^2\left[\lambda^2e^{-\varphi h(\lambda)} - |\lambda_1|^2e^{\varphi h(\lambda)}\right]^2}{4|\lambda_1|^2\operatorname{ch}^2[\pi h(\lambda)/2]} \tag{1.487}$$

с $h(\lambda) = (q - \omega(\lambda) - v)/k_0$. Користуючись співвідношенням $\lim_{\nu\to 0}(y - i\nu)^{-1} = P(1/y) + i\pi\delta(y)$, де P символ головного значення, знаходимо

$$\left\langle \mathrm{Re}\left\{s^*\frac{ds}{dt}\right\}\right\rangle = \frac{\pi\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{B}(K(\lambda)-qv)\tilde{D}(q)q^2I(\lambda)\,dq}{[(\lambda^2-\xi)^2+\eta^2]^2}. \tag{1.488}$$

Підстановка (1.488) в (1.481) дає середню спектральну густину потужності $\langle w(\lambda)\rangle$ випромінювану солітоном.

Спочатку розглянемо випадок, коли ε є функцією тільки часу, так що для просторового корелятора маємо $\tilde{B}(p) = \delta(p)$. Тоді середня спектральна потужність випромінювання

$$\langle w(\lambda)\rangle = \frac{K^2(\lambda)\tilde{D}(K(\lambda)/v)I(\lambda,K(\lambda)/v)}{\alpha\lambda^2[(\lambda^2-\xi)^2+\eta^2]^2v^2}. \tag{1.489}$$

і може бути явно виписана для довільного виду частотного корелятора $\tilde{D}(q)$. Зокрема, у випадку спектра шуму лоренцевської форми підставляємо (1.457) в (1.489). Спектральна густина випромінюваної потужності показана на рис. 1.17 для різних значень η/ξ (з $\alpha = 0.2$, $\beta = 1.$, $D_0 = 0.1$, $a = 0.2$, $\xi = 1.$). Густина випромінювання експоненціально спадає зі збільшенням частоти. Для солітонів малої амплітуди ($\eta/\xi \ll 1$) розподіл має два максимума при чому лівий з них (для $\alpha > 0$) зникає зі збільшенням параметра η/ξ, тобто зі збільшенням амплітуди солітона або зі зменшенням його швидкості.

Потім розглянемо випадок, коли шум зосереджений на частоті ω_0, так що частотний корелятор шуму має форму (1.112). Тоді спектральна

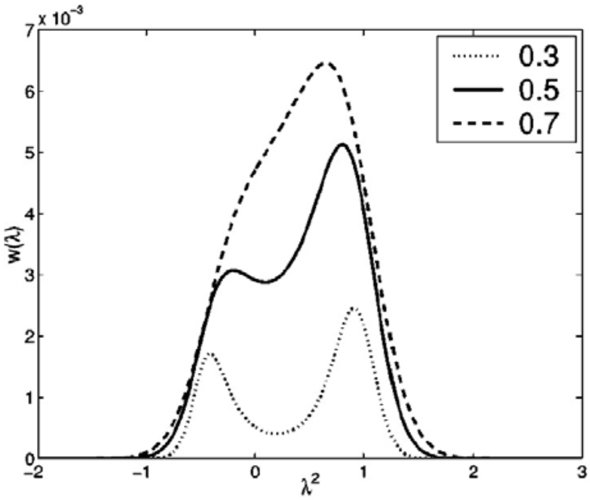

Рис. 1.17 Спектральна густина випромінювання, що випускається солітоном для різних значень η/ξ (відношення амплітуди солітона до його швидкості).

густина випромінюваної потужності

$$\langle w(\lambda)\rangle = \frac{\sigma^2 q_0^2}{4\alpha\lambda^2[(\lambda^2-\xi)^2+\eta^2]^2}\left\{\tilde{B}(K-q_0v)I(\lambda,q_0)+\tilde{B}(K+q_0v)I(\lambda,-q_0)\right\}. \tag{1.490}$$

і може бути виписана в явній формі для довільного просторового корелятора $\tilde{B}(p)$. Зокрема, якщо ε залежить тільки від x, з (1.490) маємо

$$\langle w(\lambda)\rangle = \frac{\sigma^2 q_0^2\,\delta(K(\lambda)-q_0v)I(\lambda,q_0)}{4\alpha\lambda^2[(\lambda^2-\xi)^2+\eta^2]^2}. \tag{1.491}$$

Випромінювання зосереджене в двох точках спектру

$$\lambda_\pm^2 = [\beta+\alpha(\pm\sqrt{2q_0v-k_0^2})]/4 \tag{1.492}$$

і має місце, якщо швидкість солітона задовольняє умові $v > k_0^2/2q_0$. Загальний темп випромінювання енергії

$$W \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\langle w(\lambda)\rangle\,d\lambda^2 = W_+ + W_-, \tag{1.493}$$

де

$$W_\pm = \frac{\sigma^2 q_0^2 I(\lambda_\pm,q_0)}{16\lambda_\pm^2[(\lambda_\pm^2-\xi)^2+\eta^2]^2\sqrt{2q_0v-k_0^2}}. \tag{1.494}$$

Оскільки загальна енергія $E = E_{rad}+E_s$ в (1.460) зберігається, темп втрати енергії солітоном за рахунок випромінювання $de_s/dt = -W$. З (1.460) випливає, що відношення η/ξ (відношення амплітуди до швидкості солітона) зменшується з часом.

На закінчення цього підрозділу відзначимо, що в границі $\alpha \to 0$ і $\beta \to 0$ лінійна спектральна задача модифікованого НРШ (1.391), (1.392) повинна переходити в систему Захарова-Шабата (1.11), (1.12) для НРШ та систему Каупа-Ньюелла (1.150), (1.151) для деривативного НРШ відповідно. Для $\beta \to 0$ граничний перехід тривіальний. Границя ж $\alpha \to 0$ має на увазі, що спектральний параметр λ залежить від α та дає наступний рецепт: $2(\lambda_{MNLS}^2 - \beta/4)/\alpha \to -\lambda_{NLS}$ при $\alpha \to 0$ або

$$\xi = \beta/4 - \alpha\xi_0/2, \quad \eta = \alpha\eta_0/2, \tag{1.495}$$

де $\lambda_{MNLS}^2 = \xi + i\eta$ й $\lambda_{NLS} = \xi_0 + i\eta_0$. Ці формули трансформують солітон модифікованого НРШ (1.433) у світлий солітон НРШ $u_s = (2i\eta_0/\sqrt{\beta})\,\mathrm{sech}(z)\exp(i\psi)$, де $z = x_0 - 2\eta_0(x - 2\xi_0 t)$, $\psi = \psi_0 + 2\xi_0 x - 2(\xi_0^2 - \eta_0^2)t$.

1.6 Результати до розділу 1

1. Для темних солітонів дефокусуючого нелінійного рівняння Шредингера розроблено теорію збурень, що грунтується на методі зворотньої задачі розсіювання. Цей підхід дозволяє повністю використовувати поділ дискретних й безперервних ступенів свободи в повністю інтегрованому незбуреному НРШ. Отримано рівняння, що описують еволюцію дискретних (N-солітонних) та безперервних (випромінювальних) спектральних даних у присутніості зовнішніх збурень. Теоретично виявлено ефект безпорогового народження темних солітонів під дією зовнішнього збурення. При цьому завжди виникають, принаймні два темні солітона з малими рівними амплітудами й швидкостями, спрямованими в протилежні сторони. У якості додатків запропонованої теорії розглянуті часовий односолітонний імпульс із випадковим початковим збуренням в оптичному волоконному світловоді, і просторовий солітон

(пучок безперервного оптичного випромінювання) з лінійним накачуванням й нелінійним поглинанням. В обох випадках аналітично отримано спектральний розподіл випромінювання, що випускається солітоном. Для випадку накачування та поглинання знайдено також просторовий розподіл випромінюваного поля. Розроблений підхід може бути застосованим й до інших фізичних моделей, що використовують дефокусуюче НРШ із неспадаючими граничними умовами.

2. Застосування теорії збурень, що грунтується на МЗЗР, до ДНРШ з спадаючими граничними умовами дає можливість досліджувати ефекти випромінювання альфвенівських солітонів, що поширюються в плазмі уздовж зовнішнього магнітного поля. Аналітично знайдено спектральний розподіл випромінюваної енергії й магнітної спіральності для випадків урахування кінцевої провідності плазми, ефекту резонансних частинок (нелінійного загасання Ландау) та флуктуацій густини плазми. У випадку врахування кінцевої провідності плазми також знайдено поле випромінювання, що приводить до викривлення форми солітона.

3. Розроблено метод знаходження точних N-солітонних розв'язків ДНРШ з неспадаючими граничними умовами, що відповідає розповсюдженню альфвенівських солітонів у плазмі під кутом до зовнішнього магнітного поля. Метод дає можливість одержати явні розв'язки, що описують зіткнення між бризерами (осцілюючими двохпараметричними солітонами) й темними та/або світлими однопараметричними солітонами. Знайдено рівняння, що описують еволюцію спектральних даних у присутності збурень. Показано, що в окремому випадку збурення дифузійного типу темний альфвенівський солітон виявляється набагато більш стійким, чим світлий солітон.

4. У моделі ДНРШ розглянута еволюція обмеженого в просторі початкового розподілу збурення магнітного поля, що призводить до генерації альфвенівських солітонів. При цьому виникають солітони трьох типів: бризери, темні та світлі солітони. Знайдені рівняння для функцій Йо-

ста та вирази, що визначають солітонні власні значення (амплітуди, швидкості, періоди осціляцій для бризерів) для обмеженого в просторі початкового профілю довільної форми. Знайдено трансцендентне рівняння, що визначає число народжених солітонів та їх параметри у випадку прямокутного довільного початкового розподілу з накладеною фазою. Генерація солітонів, загалом кажучи, носить безпороговий характер стосовно енергії початкового розподілу поля. Навіть постійний фон з фазовим розривом призводить до народження єдиного темного солітона за умови негативного стрибка фази (а якщо ні, то солітон не виникає). При цьому енергія солітона дорівнює енергії супровідного його випромінювання. У загальному випадку можливо одночасне виникнення бризерних, темних та світлих солітонів. Для деяких початкових параметрів виникають тільки бризери або тільки однопараметричні солітони (темні або світлі). Бризери не виникають, якщо фаза q початкового прямокутного профілю задовольняє умові $\cos q > 0$. У випадку відсутності на постійному фоні початкового поля в деякої кінцевої області, можлива генерація тільки темних солітонів та, в залежності від параметрів фона, визначено число виникаючих солітонів. Динаміка народження солітонів сильно залежить від параметрів початкового профілю й фази, а також фона, та виявляється досить нетривіальною: у кожному разі можливе народження не більш трьох світлих солітонів (можливо, одночасно з бризерами), у той час як темні солітони можуть генеруватися в будь якій кількості. Запропоновано узагальнення розробленого методу на випадок декількох початкових імпульсів.

5. Досліджено вплив випадкових збурень на солітон модифікованого НРШ, що поєднує в собі НРШ та ДНРШ, що описує розповсюдження ультракоротких електромагнітних імпульсів в оптичних волоконних світловодах. Запропоновано новий простий метод знаходження N-солітонних розв'язків модифікованого НРШ, що дозволяє одночасно знаходити й N-солітонні функції Йоста. Отримано еволюційні рівнян-

ня для спектральних даних в присутності зовнішніх збурень. Аналітично визначені дисперсія ширини й швидкості солітона та спектральний розподіл випромінювання, супроводженого солітоном, при наявності малої початкової шумової добавки до солітонного імпульса, що входить в світловод. Для випадку збурення у вигляді мультиплікативного шуму, що відповідає неоднорідної випадкової частини показника заломлення світловода, аналітично знайдені середні спектральні потужності випромінювання для різних форм корелятора випадкового поля.

РОЗДІЛ 2

Когерентні структури на верхньогібридному та іонно-циклотронному плазмових резонансах, і в плазмі з електронним пучком

Зміст цього розділу відображено в роботах [5, 14–16, 22, 23, 33, 35].

2.1 Динаміка модуляційної нестійкості на верхньогібридному резонансі

Верхньогібридні (ВГ) хвилі часто спостерігаються в лабораторній і космічній плазмі. Вони можуть збуджуватися пучковими нестійкостями, у результаті лінійної конверсії незвичайної електромагнітної хвилі в області верхнього гібридного резонансу та ін. [115, 116]. Одновимірна теорія нелінійних ВГ хвиль, взаємодіючих з низькочастотними рухами магнітозвукового типу була розвинена в [117–122]. Зокрема, для низькочастотних магнітогідродинамічних збурень і для від'ємної дисперсії ВГ хвиль, Кауфман і Стенфло [117] показали можливість існування одновимірних ВГ солітонів у надмагнітозвуковому режимі. Взаємодія одновимірних високочастотних ВГ хвиль із кінетичними магнітозвуковими вперше розглядалася в [123], і потім більш детально, включаючи чисельне моделювання, в [122].

У підрозділі 2.1 розвинена двовимірна теорія взаємодіючих ВГ та кінетичних магнітозвукових хвиль. Відповідні нелінійні рівняння містять додаткову нелінійність, так звану векторну нелінійність, яка не має аналогів в одновимірному випадку. Чисельно знайдені розв'язки представляють нелінійні двовимірні структури у вигляді радіально симетричних вихорів, мультисолітонів які не обертаються (диполів і квадруполів), та обертових мультисолітонів.

Дисперсія кінетичної магнітозвукової хвилі приводить до нелокальної нелінійної взаємодії, тобто нелінійний відгук залежить від інтенсивності хвильового пакета в деякої протяжної просторової області. Нелокальна нелінійність природнім образом виникає в багатьох областях нелінійної фізики й відіграє важливу роль у динаміку когерентних нелінійних структур. У те час, як колапс є звичайним явищем у багатовимірних моделях, подібних моделі Захарова з локальним низькочастотним відгуком [124], нелокальні нелінійності можуть зупиняти колапс і приводити до стійких багатовимірних локалізованих структур. У роботі [125] було доведене відсутність колапсу для трьох різних форм нелокального нелінійного відгуку в багатовимірному узагальненому нелінійному рівнянні Шредингера. У підрозділі 2.1 дається строгий доказ відсутності колапсу у двовимірній моделі, що описує нелінійну взаємодію верхньогібридних та кінетичних магнітозвукових хвиль.

2.1.1 Нелінійні рівняння для взаємодіючих верхньогібридних і магнітозвукових хвиль

Будемо розглядати плазму в однорідному зовнішньому магнітному полі $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{\mathbf{z}}$, де $\hat{\mathbf{z}}$ одиничний вектор уздовж z осі. У лінійному наближенні ВГ хвилі характеризуються дисперсійним рівнянням

$$\omega = \omega_{UH}\left(1 + \frac{1}{2}k_\perp^2 R^2\alpha\right), \tag{2.1}$$

де $k_\perp$ поперечне хвильове число, $\omega_{UH} = (\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2)^{1/2}$ частота ВГ резонансу, ω_{pe} плазмова ленгмюрівська частота, ω_{ce} електронно-циклотронна частота, $v_{te} = (T_e/m)^{1/2}$ теплова швидкість електронів, $\alpha = \omega_{pe}^2/(\omega_{pe}^2 - 3\omega_{ce}^2)$, і $R^2 = 3v_{te}^2/\omega_{UH}^2$. Помітимо, що дисперсія ВГ хвиль від'ємна, якщо $\omega_{pe}^2 < 3\omega_{ce}^2$ (дуже розріджена плазма або досить сильні магнітні поля). Далі вважаємо дисперсію позитивною.

Рівняння для повільно змінної комплексної амплітуди φ потенціалу ВЧ електростатичного поля

$$\mathbf{E}^H = -\frac{1}{2}[\nabla\varphi\exp(-i\omega_{UH}t) + \text{c.c.}] \tag{2.2}$$

верхньогібридної хвилі можна одержати з рівняння Пуассона

$$\nabla \cdot (\hat{\varepsilon} \nabla \varphi) = 0 \tag{2.3}$$

з

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_\perp & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{||} \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

де діелектричний тензор $\hat{\varepsilon}$ розглядається як диференціальний оператор з $\omega \to \omega_{UH} + i\partial/\partial t$ (припускаємо $\omega_{UH} \gg \partial/\partial t$ внаслідок часовій повільності огинаючої φ) і $\mathbf{k} \to -i\nabla$. При цьому, у компонентах $\varepsilon_\perp$, $\varepsilon_{||}$ і g враховуються нелінійні збурення густини плазми δn і магнітного поля δB, так що підстановки $n_0 \to n_0 + \delta n$ і $B_0 \to B_0 + \delta B$ приводять до рівняння

$$\nabla_\perp \cdot (\varepsilon_\perp \nabla_\perp \varphi) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon_{||}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) + i\hat{\mathbf{z}} \times \nabla g \cdot \nabla \varphi = 0. \tag{2.5}$$

Враховуючи явні вирази для $\varepsilon_\perp$, $\varepsilon_{||}$ і g [103], у результаті одержуємо нелінійне рівняння

$$\begin{aligned} \Delta\left(2i\omega_{UH}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + 3v_{te}^2\alpha\Delta\varphi\right) + \frac{\omega_{pe}^2\omega_{ce}^2}{\omega_{UH}^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \nabla \cdot \Bigg\{ \left(\omega_{pe}^2\frac{\delta n}{n_0} + 2\omega_{ce}^2\frac{\delta B}{B_0}\right)\nabla\varphi \\ -i\frac{\omega_{ce}}{\omega_{UH}}\left[\omega_{pe}^2\frac{\delta n}{n_0} + (\omega_{pe}^2 + 2\omega_{ce}^2)\frac{\delta B}{B_0}\right]\nabla\varphi \times \hat{\mathbf{z}} \Bigg\}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Другий доданок у дужці $\{\dots\}$ у рівнянні (2.6) виникає з останнього (гіротропного) доданку в (2.5) і відповідає векторній нелінійності. Цей доданок тотожньо зникає в одновимірному випадку й для полів з аксіальною симетрією. Векторною нелінійністю можна також нехтувати, якщо $\omega_{ce}/\omega_{pe} \ll 1$.

Верхньогібридні хвилі мають хвильові вектори майже перпендикулярні зовнішньому магнітному полю ($k_z \ll k_\perp$) і далі ми будемо розглядати двовимірний випадок з $k_z = 0$ так що $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ і $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$.

Низькочастотні рухи плазми описуються рівняннями руху й безперервності для іонів і електронів. Уважаючи виконаною умову квазинейтральності $\delta n_i = \delta n_e \equiv \delta n$, де δn_i та δn_e відповідно збурення густини іонів і електронів, маємо

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_i = 0, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = \frac{e}{M}\mathbf{E} - \frac{\gamma_i T_i}{n_0 M}\nabla \delta n + \omega_{ci}[\mathbf{v}_i \times \hat{\mathbf{z}}], \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_e + \nabla \cdot \mathbf{F}_2 = 0, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + \mathbf{F}_1 = -\frac{e}{m}\mathbf{E} - \frac{\gamma_e T_e}{n_0 m}\nabla \delta n - \omega_{ce}[\mathbf{v}_e \times \hat{\mathbf{z}}], \tag{2.10}$$

де γ_i (γ_e) іонний (електронний) показник адіабати, $\mathbf{v}_i$ ($\mathbf{v}_e$) іонна (електронна) швидкість, n_0 рівноважна густина плазми, і

$$\mathbf{F}_1 = \langle (\mathbf{v}^H \cdot \nabla)\mathbf{v}^H \rangle + \left\langle \frac{e}{mc}[\mathbf{v}^H \times \mathbf{B}^H] \right\rangle, \quad \mathbf{F}_2 = \langle n^H \mathbf{v}^H \rangle \tag{2.11}$$

відповідають нелінійним доданкам в електронних рівняннях, кутові дужки означають усереднення по високочастотним осціляціям, а індекс H відповідає величинам для високочастотних полів. Множачи (2.10) на m/M і складаючи з (2.8), одержимо

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{v}_i + \frac{m}{M}\mathbf{v}_e\right) = -\frac{m}{M}\mathbf{F}_1 - \frac{v_s^2}{n_0}\nabla \delta n - \omega_{ci}[(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) \times \hat{\mathbf{z}}], \tag{2.12}$$

де введена ефективна швидкість іонного звуку $v_s = \sqrt{(\gamma_i T_i + \gamma_e T_e)/M}$. Беручи операцію div від рівняння (2.12), одержуємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \mathbf{v}_i + \frac{m}{M}\nabla \cdot \mathbf{v}_e\right) = -\frac{m}{M}\nabla \cdot \mathbf{F}_1 - \frac{v_s^2}{n_0}\Delta \delta n - \omega_{ci}\hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla \times (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i). \tag{2.13}$$

Використовуючи (2.7) і (2.9), та крім того $\nabla \times (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i)$ за допомогою рівняння Максвелла (для низькочастотних рухів ми зневажаємо струмом зсуву)

$$\nabla \times \delta \mathbf{B} = \frac{4\pi e n_0}{c}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e), \tag{2.14}$$

можна одержати

$$\frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} - v_s^2 \Delta \delta n - \frac{n_0}{B_0} v_A^2 \Delta \delta B = \frac{m n_0}{M} \nabla \cdot \mathbf{F}_1 - \frac{m}{M} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial t},$$

де $v_A = B_0/\sqrt{4\pi n_0 M}$ альфенівська швидкість. Другий доданок у правій частині (2.15) малий у порівнянні з першим на множник $\sim \omega/\omega_{UH}$ і їм можна нехтувати. Для одержання рівняння для низькочастотного збурення магнітного поля δB ми віднімемо (2.10) з (2.8) і потім подіємо оператором rot

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) = \frac{e}{m} \nabla \times \mathbf{E} - \omega_{ci} \hat{\mathbf{z}}\, \nabla \cdot \mathbf{v}_i - \omega_{ce} \hat{\mathbf{z}}\, \nabla \cdot \mathbf{v}_e + \nabla \times \mathbf{F}_1. \quad (2.15)$$

Використовуючи (2.7),(2.9), (2.14) і рівняння Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \delta \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.16)$$

одержуємо

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(1 - \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \Delta \right) \delta B - \frac{B_0}{n_0} \frac{\partial \delta n}{\partial t} = \frac{4\pi c}{\omega_{pe}^2} (\nabla \times \mathbf{F}_1)_z. \quad (2.17)$$

Представляючи

$$\mathbf{v}_e^H = \frac{1}{2} [\mathbf{v} \exp(-i \omega_{UH} t) + \text{c.c.}], \quad (2.18)$$

з високочастотного рівняння руху для електронів маємо

$$\mathbf{v} = \frac{e}{m} \frac{[i \omega_{UH} \nabla \varphi + \omega_{ce} (\nabla \varphi \times \hat{\mathbf{z}})]}{(\omega_{UH}^2 - \omega_{ce}^2)}. \quad (2.19)$$

За допомогою рівняння Максвелла для $\partial \mathbf{B}^H/\partial t$, два доданка у виразі для $\mathbf{F}_1$ можуть бути скомбіновані в такий спосіб

$$\mathbf{F}_1 = \langle (\mathbf{v}_e^H \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v}_e^H + [\mathbf{v}_e^H \times [\nabla \times \mathbf{v}_e^H]] \rangle = \frac{1}{2} \langle \nabla \, (\mathbf{v}_e^H \cdot \mathbf{v}_e^H) \rangle. \quad (2.20)$$

Використовуючи (2.15), (2.17)–(2.20), остаточно одержуємо наступні рівняння для низькочастотних збурень густини плазми δn та магнітного поля

δB

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_s^2\Delta\right)\frac{\delta n}{n_0} - v_A^2\Delta\frac{\delta B}{B_0} = \frac{1}{16\pi n_0 M}\Delta\left\{\left(1 + 2\frac{\omega_{ce}^2}{\omega_{pe}^2}\right)|\nabla\varphi|^2 + 2i\left(1 + \frac{\omega_{ce}^2}{\omega_{pe}^2}\right)\frac{\omega_{ce}}{\omega_{UH}}[\nabla\varphi\times\nabla\varphi^*]_z\right\}, \tag{2.21}$$

$$\left(1 - \frac{c^2}{\omega_{pe}^2}\Delta\right)\frac{\delta B}{B_0} = \frac{\delta n}{n_0}. \tag{2.22}$$

У лінійному наближенні рівняння (2.21) і (2.22) дають дисперсійне співвідношення для кінетичної швидкої магнітозвукової хвилі

$$\Omega_k^2 = k_\perp^2 v_s^2 + \frac{k_\perp^2 v_A^2}{1 + k_\perp^2 c^2/\omega_{pe}^2}. \tag{2.23}$$

Надалі будемо опускати індекс $\perp$ в $k_\perp$. Рівняння (2.6), (2.21) та (2.22) утворюють замкнену нелінійну систему, що описує взаємодію верхньогібридних і кінетичних магнітозвукових хвиль. В одновимірному випадку, коли, зокрема, зникає векторна нелінійність, ці рівняння збігаються з отриманими в [122].

2.1.2 Лінійна стадія модуляційної нестійкості

У цьому підрозділі розглянемо лінійну теорію модуляційної нестійкості хвилі накачування із частотою близької до верхньогібридної. Низькочастотні збурення представимо у вигляді

$$\frac{\delta n}{n_0} = \hat{n}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\Omega t) + \text{c.c.}, \tag{2.24}$$

$$\frac{\delta B}{B_0} = \hat{b}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\Omega t) + \text{c.c.}, \tag{2.25}$$

а верхньогібридну хвилю предствимо у вигляді суперпозиції хвилі накачування й двох сателітів

$$\varphi = \varphi_0 e^{i(\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r} - \delta_0 t)} + \varphi_+ e^{i[(\mathbf{k}_0+\mathbf{k})\cdot\mathbf{r} - (\delta_0+\Omega)t]} + \varphi_- e^{i[(\mathbf{k}_0-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r} - (\delta_0-\Omega)t]} + \text{c.c.}, \tag{2.26}$$

де $\delta_0 = \omega_{UH} k_0^2 R^2/2$. Амплітуди сателітів обчислюються з (2.6). Маємо

$$D_+ \varphi_+ = \alpha_+ \hat{n} \varphi_0, \tag{2.27}$$

$$D_- \varphi_-^* = \alpha_- \hat{n} \varphi_0^*, \tag{2.28}$$

де

$$\alpha_\pm = -(k_0^2 \pm \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_0)\left(\omega_{pe}^2 + \frac{2\omega_{ce}^2}{1+k^2\lambda_e^2}\right) + i(\mathbf{k}\times\mathbf{k}_0)_z \frac{\omega_{ce}}{\omega_{UH}}\left(\omega_{pe}^2 + \frac{\omega_{pe}^2 + 2\omega_{ce}^2}{1+k^2\lambda_e^2}\right), \tag{2.29}$$

і функції

$$D_\pm = 2\omega_{UH}(\mathbf{k}_0 \pm \mathbf{k})^2(\delta_\pm \mp \Omega) \tag{2.30}$$

є фур'є-перетвореннями лінійного оператора в лівій частині (2.6) узятими при $\mathbf{k}_0 \pm \mathbf{k}$, а $\delta_\pm = \omega_{UH} R^2[(\mathbf{k}_0 \pm \mathbf{k})^2 - k_0^2]/2$ відхилення між частотами сателітів і частотою хвилі накачування. Амплітуди низькочастотних збурень випливають із (2.21) і (2.22):

$$(\Omega^2 - \Omega_k^2)\hat{n} = \frac{k^2(\beta_+\varphi_+\varphi_0^* + \beta_-\varphi_-^*\varphi_0)}{16\pi n_0 M}, \tag{2.31}$$

$$(1 + k^2c^2/\omega_{pe}^2)\hat{b} = \hat{n}, \tag{2.32}$$

де

$$\beta_\pm = \left(1 + 2\frac{\omega_{ce}^2}{\omega_{pe}^2}\right)(k_0^2 \pm \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_0) + 2i\left(1 + \frac{\omega_{ce}^2}{\omega_{pe}^2}\right)(\mathbf{k}\times\mathbf{k}_0)_z \tag{2.33}$$

і Ω_k^2 визначається рівнянням (2.23). Комбінуючи (2.27), (2.28) і (2.31) одержуємо нелінійне дисперсійне співвідношення

$$\Omega^2 - \Omega_k^2 = \frac{k^2|\varphi_0|^2}{16\pi n_0 M}\left(\frac{\alpha_+\beta_+}{D_+} + \frac{\alpha_-\beta_-}{D_-}\right). \tag{2.34}$$

Рівняння (2.34) узагальнює нелінійне дисперсійне співвідношення отримане Еліассоном і Шуклой [122] на двовимірний випадок і включенням векторної нелінійності. Помітимо, що у випадку копланарных (у площині перпендикулярній магнітному полю) хвильових векторів $\mathbf{k} \parallel \mathbf{k}_0$, параметрична взаємодія хвиль, обумовлена векторної нелінійністю, відсутня. У протилежному випадку, тобто $\mathbf{k} \perp \mathbf{k}_0$, векторна нелінійність домінує, а взаємодія, обумовлена скалярної нелінійністю найменш ефективна (і повністю відсутня якщо $k_0 \ll k$). У загальному випадку $\mathbf{k} \nparallel \mathbf{k}_0$ і $\omega_{pe} \sim \omega_{ce}$ обидва типу нелінійності дають порівнянний внесок і це приводить до досить складної картини параметричної нестійкості. Далі ми розглянемо випадок слабко замагніченої плазми з $\omega_{ce}^2/\omega_{pe}^2 \ll 1$.

У випадку $\omega_{ce} \ll \omega_{pe}$, можна нехтувати векторною нелінійністю й (2.34) приймає вигляд

$$\Omega_k^2 - \Omega^2 = \frac{|E_0|^2 k^2 \omega_{pe}}{32\pi n_0 M} \left[\frac{\cos^2 \mu_+}{(\delta_+ - \Omega)} + \frac{\cos^2 \mu_-}{(\delta_- + \Omega)} \right], \tag{2.35}$$

де

$$|E_0|^2 = k_0^2 |\varphi_0|^2, \quad \cos \mu_\pm = \frac{\mathbf{k}_0 \cdot (\mathbf{k}_0 \pm \mathbf{k})}{k_0 |\mathbf{k}_0 \pm \mathbf{k}|}. \tag{2.36}$$

Коли обидва ВЧ сателіта резонансні, а низькочастотні збурення нерезонансні, можна розглянути граничний випадок $\mathbf{k}_0 \gg \mathbf{k}$ і $\Omega_k \gg \Omega$. Тоді дисперсійне рівняння (2.35) приймає вигляд

$$(\Omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_g)^2 = \frac{\omega_{pe}^2 k^4 R^4}{4} \left[1 - \frac{|E_0|^2}{8\pi n_0 M R^2 \Omega_k^2} \right], \tag{2.37}$$

де $\mathbf{v}_g$ групова швидкість верхньогібридної хвилі. Рівняння (2.37) передбачає нестійкість, якщо $|E_0|^2 > 8\pi n_0 M R^2 \Omega_k^2$. У протилежному випадку довгохвильового накачування $\mathbf{k} \gg \mathbf{k}_0$ рівняння (2.35) зводиться до

$$\Omega^2 = \frac{1}{2} \left\{ \delta^2 + \Omega_k^2 \pm \sqrt{(\delta^2 - \Omega_k^2)^2 + \frac{|E_0|^2 \omega_{pe} k^2 \delta}{4\pi n_0 M}} \right\}, \tag{2.38}$$

де $\delta = \omega_{UH} k^2 R^2/2$ і, таким чином, для досить великої амплітуди накачування E_0 виникає аперіодична нестійкість.

2.1.3 Відсутність колапсу

Далі розглядаємо випадок $\omega_{ce}^2/\omega_{pe}^2 \ll 1$, так що векторною нелінійністю в (2.6), (2.21) можна нехтувати. Уводячи безрозмірні величини

$$t \to \omega_{LH} t, \quad \mathbf{r} \to \mathbf{r}\,\omega_{LH}/v_s, \tag{2.39}$$

$$\varphi \to \varphi \frac{\omega_{pi}}{4v_s\sqrt{\pi n_0 T_e}}, \quad b \to \frac{\delta B}{B_0}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2 \beta}, \tag{2.40}$$

$$\mu = \frac{2\omega_{UH} m}{3\omega_{LH} M}, \quad \beta = \frac{v_s^2}{v_A^2}, \tag{2.41}$$

і крім $\delta n/n_0$, перепишемо нелінійні рівняння (2.6), (2.21) та (2.22) у вигляді

$$\Delta\left(i\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \Delta\varphi\right) = \nabla\cdot[(\beta b - \Delta b)\nabla\varphi], \tag{2.42}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)(\beta - \Delta)b - \Delta b = \Delta|\nabla\varphi|^2, \tag{2.43}$$

Рівняння (2.42) і (2.43) зберігають енергію

$$N = \int |\nabla\varphi|^2\, d\mathbf{r}, \tag{2.44}$$

і гамільтоніан

$$H = \int \left(|\Delta\varphi|^2 + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2(\beta - \Delta)b\right) d\mathbf{r}, \tag{2.45}$$

та можуть бути записані в гамільтоновой формі

$$-i\mu\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\varphi^*}. \tag{2.46}$$

У цьому підрозділі ми представимо строгий доказ відсутності колапсу стаціонарних двовимірних розв'язків вигляду $\varphi(x,y,t) = \psi(x,y)\exp(i\Lambda t)$ у нелінійній моделі, описуваної (2.42) і (2.43). Ми використовуємо ідеї [126], засновані на теорії стійкості Ляпунова. Нагадаємо коротко сутність методу Ляпунова. Для того, щоб інваріантна множина динамічної системи (зокрема, множина стаціонарних розв'язків $\{u_s\}$) була стійкою, досить, щоб існував функціонал $L[u]$ з наступними властивостями: a) L позитивно визначений функціонал на обурених станах $\{u\}$, тобто $L[u] \geqslant 0$; b) L досягає мінімуму на множині $\{u_s\}$, $L[u_s] = 0$; c) L незростаюча функція часу t, тобто $dl/dt \leqslant 0$. Для гамільтонових систем ці умови еквівалентні вимозі, щоб гамільтоніан був обмежений знизу при фіксованої величині N, що зберігається (і тоді можна вибрати $L = H - H_{min}$). Тоді стаціонарні локалізовані розв'язки, що відповідають глобальному мінімуму H (фундаментальні солітони), стійкі в змісті Ляпунова.

Для стаціонарних розв'язків, рівняння (2.42) і (2.43) можуть бути переписані в наступному вигляды

$$\Delta(-\Lambda\mu + \Delta)\psi = \nabla \cdot [(\beta - \Delta)b\nabla\psi], \tag{2.47}$$

с

$$b(\mathbf{r}) = -\int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|\nabla\varphi(\mathbf{r}')|^2\, d\mathbf{r}', \tag{2.48}$$

де $G(\mathbf{r}) = K_0(\sqrt{\beta + 1}|\mathbf{r}|)/2\pi$ функція Гріна, що задовольняє рівнянню $(\beta + 1 - \Delta)G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$, і $K_0(z)$ модифікована функція Бесселя другого роду нульового порядку. Видне, що нелінійність в (2.47) має суттєво нелокальний характер. Представимо гамільтоніан (2.45) у вигляді

$$H = A + \frac{1}{2}P, \tag{2.49}$$

де $A = \int |\Delta\psi|^2\, d\mathbf{r}$ і нелінійний доданок P може бути записаний у вигляді

$$P = -\int |\nabla\varphi(\mathbf{r})|^2|\nabla\varphi(\mathbf{r}')|^2(\beta - \Delta)G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{r}' = -\int |\nabla\varphi(\mathbf{r})|^4\, d\mathbf{r} + C, \tag{2.50}$$

де

$$C = \int |\nabla\varphi(\mathbf{r})|^2|\nabla\varphi(\mathbf{r}')|^2 G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{r}' > 0. \tag{2.51}$$

Для одержання оцінки для C використовуємо нерівність [125]

$$\int \frac{f^2(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, d\mathbf{r} \leqslant 2\left(\int f^2\, d\mathbf{r}\right)^{1/2}\left(\int (\nabla f)^2\, d\mathbf{r}\right)^{1/2}, \tag{2.52}$$

де $f(\mathbf{r})$ довільна досить гладка функція, і інтегрування в (2.52) виконується по всьому двовимірному простору. Маємо

$$\begin{aligned} C = \int |\nabla\varphi(\mathbf{r})|^2 \frac{|\nabla\varphi(\mathbf{r}')|^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{r}' \\ \leqslant M \int |\nabla\varphi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} \int \frac{|\nabla\varphi(\mathbf{r}')|^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \\ \leqslant 2M \left(\int |\nabla\varphi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}\right)^{3/2} \left(\int |\Delta\varphi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}\right)^{1/2} = 2MN^{3/2}A^{1/2}, \end{aligned} \tag{2.53}$$

де $M = \max_z [zK_0(z\sqrt{\beta+1})/2\pi] > 0$ і ми скористалися (2.52). Потім використовуємо нерівність

$$\int |\nabla\varphi(\mathbf{r})|^4 \, d\mathbf{r} \leqslant N^2. \tag{2.54}$$

У результаті, можна записати наступний ланцюжок нерівностей:

$$P \geqslant -N^2 + C \geqslant -N^2 - C \geqslant -N^2 - 2MN^{3/2}A^{1/2}. \tag{2.55}$$

Підставляючи цю оцінку у вирази для гамільтоніана (2.49), одержимо

$$H \geqslant A - \frac{1}{2}N^2 - MN^{3/2}A^{1/2}. \tag{2.56}$$

При фіксованому N права частина нерівності (2.56) досягає мінімуму при $A = M^2N^3/4$, так що

$$H \geqslant -M^2N^3/4 - N^2/2. \tag{2.57}$$

Таким чином, ми показали, що при фіксованій величині N гамільтоніан обмежений знизу. У відповідність зі стандартною теорією Ляпунова, це представляє строгий доказ того, що колапс, при якому амплітуда хвилі локально прямує до нескінченності, неможливий для стаціонарних розв'язків у моделі, описуваної нелінійними рівняннями (2.42) та (2.43).

2.1.4 Локалізовані нелінійні структури й генерація солітонів

Розглядаємо випадок, коли довжина верхньогібридної хвилі багато менше типового масштабу локалізації й представимо (в відповідних безрозмірних змінних)

$$\varphi = \Phi \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}). \tag{2.58}$$

Припускаємо, що $k_0 L \gg 1$, де L типовий масштаб низькочастотних збурень. Тоді система рівнянь (2.42), (2.43) приймає вигляд

$$i\mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Delta \Phi = (\beta - \Delta) b \Phi, \tag{2.59}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) (\beta - \Delta) b - \Delta b = \Delta |\Phi|^2, \tag{2.60}$$

де Φ перенормоване, так що $\Phi \to k_0 \Phi$. Доказ відсутності колапсу для стаціонарних розв'язків системи (2.59), (2.60) аналогічно представленому вище.

Стаціонарні розв'язки рівнянь (2.59),(2.60) шукаються в формі $\Phi(x, y, t) = \Psi(x, y) \exp(i\lambda t/\mu)$, де λ/μ нелінійний зсув частоти, так що Ψ підкоряється рівнянню

$$-\lambda \Psi + \Delta \Psi = (\beta - \Delta) b \Psi, \tag{2.61}$$

$$(\beta + 1 - \Delta) b = -|\Psi|^2. \tag{2.62}$$

Для чисельного розв'язку рівнянь (2.61), (2.62) накладалися періодичні граничні умови на двовимірній сітці в декартовій системі координат та використовувалася релаксаційна техніка [127]. Вибираючи підходяще початкове наближення, з високою точністю (норма нев'язання менше 10^{-9}) можна знайти два різних типу двовимірних просторово локалізованих розв'язків - (мульти)солітони та радіально симетричні вихори.

Приклади (мульти)солітонів, а саме, фундаментальний солітон (монополь), дипольний солітон, двогорбий солітон, і квадрупольний солітон

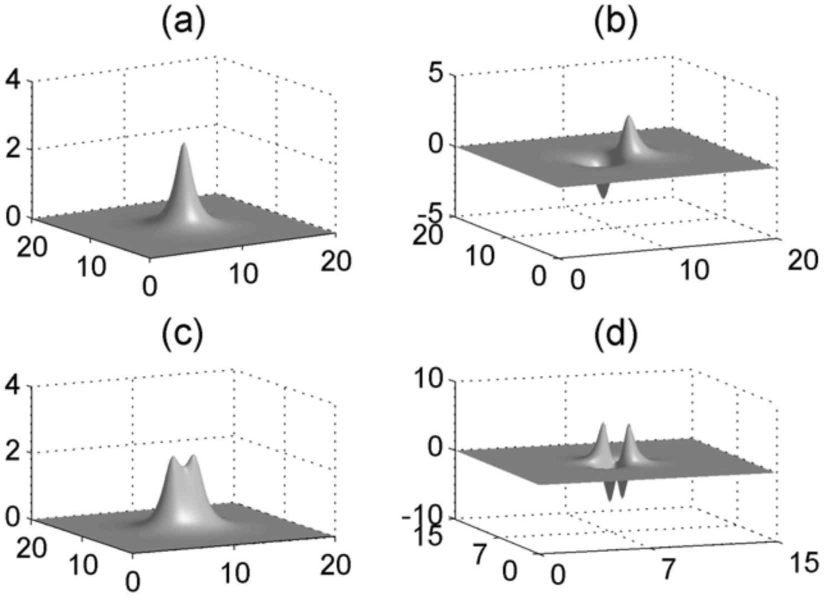

Рис. 2.1 Чисельно знайдені стаціонарні локалізовані розв'язки рівнянь (2.59) і (2.60) для $\beta = 0.1$: (a) фундаментальний солітон з $\lambda = 0.5$; (b) дипольний солітон з $\lambda = 0.5$; (c) двогорбий солітон з $\lambda = 0.5$; (d) квадрупольний солітон з $\lambda = 2$. Показана дійсна частина поля Ψ.

представлені на рис. 2.1(a)- 2.1(d) для випадку $\beta = 0.1$. Диполі й квадруполі складаються з декількох фундаментальних солітонів із протилежними фазами.

Другий клас розв'язків, вихорові солітони, мають радіально симетричну амплітуду $|\Psi(x, y)|$ рівну нулю в центрі вихору й фазу у вигляді лінійної функції полярного кута θ, тобто $\arg \Psi = m\theta$, де m ціле число (топологічний заряд). Важливим інтегралом руху, асоційованим із цим типом двовимірних нелінійних структур є z-компонента кутового моменту

$$M_z = \mathrm{Im} \int \left[\Phi^* (\mathbf{r} \times \nabla_\perp \Phi)\right]_z d\mathbf{r}, \tag{2.63}$$

який може бути виражений через амплітуду солітона U і фазу ϕ,

$$M_z = \int \frac{\partial \phi}{\partial \theta} U^2 d\mathbf{r}, \tag{2.64}$$

і для вихорових солітонів маємо $M_z = mN$. Приклади радіально симетричних вихорів із зарядами $m = 1, 2$ для різних нелінійних зсувів частоти

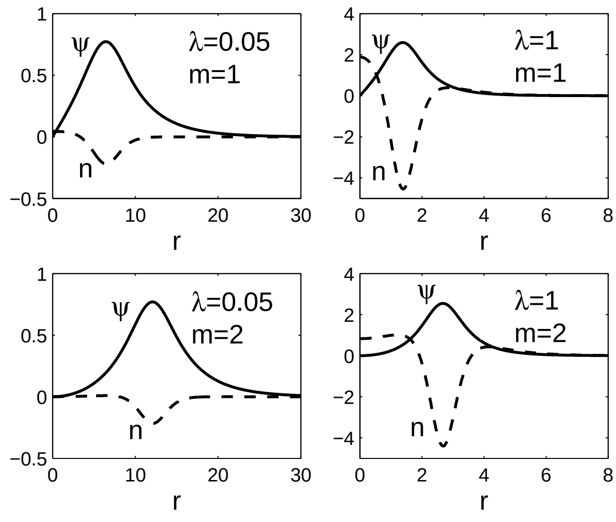

Рис. 2.2 Приклади радіально симетричних вихорових солітонів з топологічними зарядами $m = 1, 2$ для нелінійних зсувів частоти $\lambda = 0.05$ (лівий рядок) і $\lambda = 1$ (правий рядок): показані радіальні профілі амплітуди поля $|\Psi|$ (суцільна крива) і густини плазми n (пунктирна крива) для $\beta = 0.25$.

показані на рис. 2.2.

Стійкість знайдених локалізованих розв'язків досліджувалася прямим чисельним моделюванням вихідних динамічних рівнянь (2.59) і (2.60) у присутності слабкого початкового шуму. Початкова умова бралася у вигляді $\Psi(x, y)[1 + \varepsilon f(x, y)]$, де $\Psi(x, y)$ чисельно знайдений розв'язок, і $f(x, y)$ білий гауссівський шум з дисперсією $\sigma^2 = 1$ і параметр збурення $\varepsilon = 0.005 \div 0.01$. Крім того, для вихорів додавалося азимутальне збурення у вигляді $i\varepsilon \sin\theta$. При чисельному моделюванні просторова дискретизація ґрунтувалася на псевдоспектральному методі [105]. Часова t-дискретизація включала схему пошагового розщеплення.

Чисельне моделювання переконливе показує, що фундаментальні солітони є стійкими й не колапсують навіть при негативному початковому гамільтоніані. Стійка динаміка монопольного солітона з $\lambda = 1$ показана на рис. 2.3(a). Для мультисолітонів стійка еволюція не спостерігалася, але не спостерігався й колапс. Якщо нелінійний зсув частоти не занадто великий, мультисолітони розпадаються на кілька фундаментальних солітонів, але можуть не змінювати своєї форми досить тривалий час. Розпад дипольного солітона на два монополих, які рухаються в протилежних напрямках без

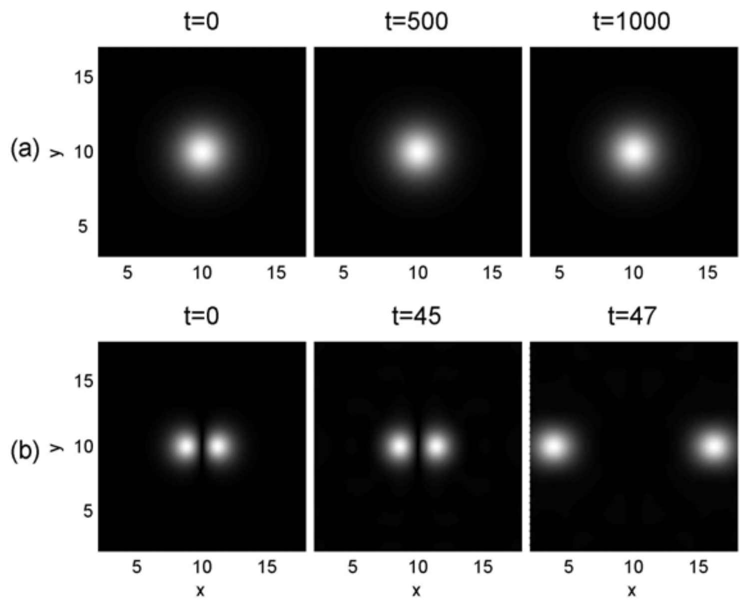

Рис. 2.3 (a) Стійка динаміка солітона з $\lambda = 1$; (b) розпад дипольного солітона з $\lambda = 2$ на два фундаментальних солітона.

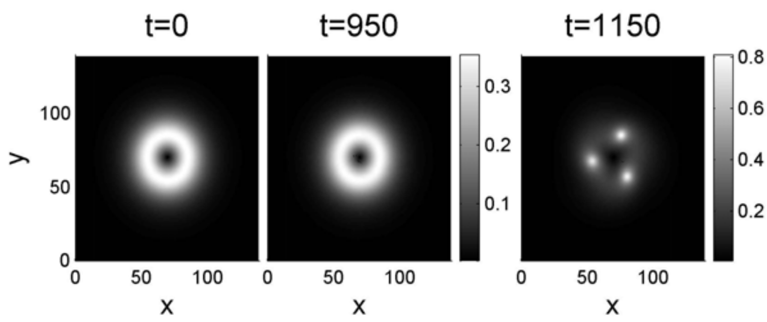

Рис. 2.4 Еволюція вихору із топологічним зарядом $m = 1$ і $\lambda = 0.01$ для $\beta = 0.25$.

зміни своєї форми показано на рис. 2.3(б). Рис. 2.4 представляє приклад розпаду вихору на три фундаментальних солітона. Оскільки загальний кутовий момент (2.63) зберігається (це контролювалося в процесі чисельного моделювання), монопольні солітони розходяться по тангенціальним стосовно первинного вихорового кільця траєкторіям.

Солітонні структури можуть виникати в результаті модуляційної нестійкості початкової монохроматичної верхньогібридної хвилі. Еволюція довгохвильової монохроматичної хвилі досліджувалася чисельно в рамках рівнянь (2.59), (2.60). Наприклад, для випадку, коли початкова хвиля має форму

$$\Phi(x, y) = 1.5 \exp(0.07ix + 0.07iy) \tag{2.65}$$

на сітці розміром 10×10 вона являє собою майже однорідне початкове поле. Часова еволюція показана на рис. 2.5. Добре видно формування одного фундаментального солітона, який рухається в деякому напрямку майже без зміни своєї форми, а потім співіснує з турбулентним оточенням. В залежності від амплітуди й хвильового вектора початкової хвилі, а також від довжини сітки, спостерігалося формування двох і більш фундаментальних солітонів, а в деяких випадках виникнення (одночасно із солітонами) структур, які нагадували вихори. В той же час не спостерігалося формування будь яких локалізованих структур у всіх випадках, коли початкова амплітуда була досить мала (наприклад, менше 0.8 у розглянутому вище випадку), так що не був перевищений поріг модуляційної нестійкості. Важливо відзначити, що у всіх випадках у процесі чисельного моделювання еволюції різних початкових полів не спостерігалося ніякого свідчення колапсу.

2.2 Нелінійні структури на іонно-циклотронному резонансі

Іонно-циклотронні хвилі, тобто хвилі із частотою близької до іонно-циклотронної частоти $\omega_{ci} = eB_0/Mc$, де B_0 зовнішнє магнітне поле, M маса іонів, мають велике значення як ефективне джерело нагрівання плазми

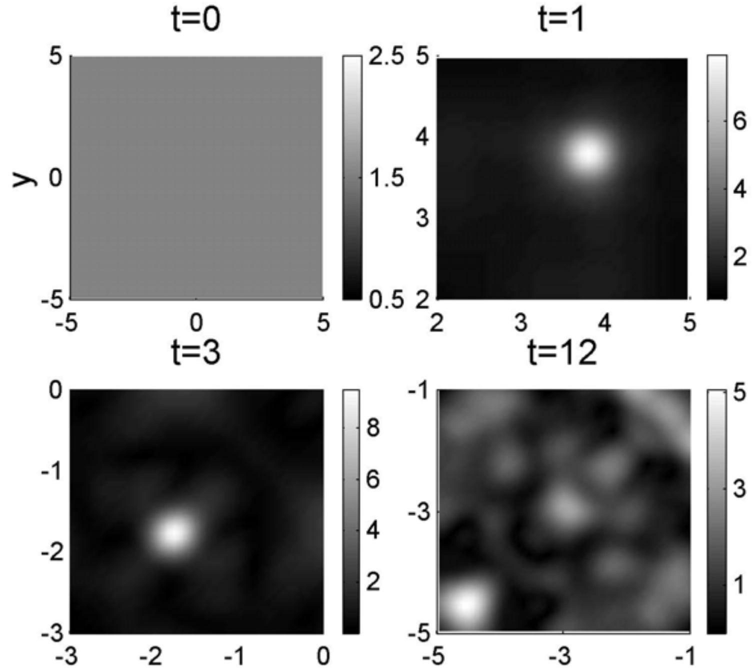

Рис. 2.5 Еволюція майже однорідного початкового поля (2.65) у моделі (2.59), (2.60). Показані амплітуди поля $|\Phi|$ на (x, y) площині на часі $t = 0$, $t = 1$, $t = 3$ і $t = 12$. Модуляційна нестійкість початкового поля приводить до формування локалізованої структури (солітона).

[128]. Велика потужність випромінювання, що вводиться в плазму, приводить до появи нелінійних ефектів, що впливають на поширення й поглинання іонно-циклотронних хвиль. Збуджуватися в плазмі електростатичні іонно-циклотронні хвилі можуть із ряду причин, наприклад пучками частинок уздовж магнітного поля, параметричними нестійкостями та ін. Експериментальні спостереження іонно-циклотронних коливань засвідчують про їхню важливу роль у поведінці плазми в лабораторних умовах [129, 130]. Широко поширені іонно-циклотронні хвилі й у космічній плазмі. Інтенсивне випромінювання в діапазоні іонних циклотронних частот спостерігалося в авроральній області магнітосфери Землі (на висотах 3000-8000 км і вище) [131–134] і в недавніх спостереженнях у плазмі сонячного вітру (станцією Voyager) [135] і міжпланетного простору [136]. При цьому іонно-циклотронні хвилі мають великі амплітуди та локалізовані в просторі, що свідчить на користь їх нелінійної природи.

У ленгмюрівських хвилях в плазмі без магнітного поля внаслідок визначальної залежності ленгмюрівської частоти від густини плазми, основним нелінійним ефектом є формування ям густини в області локалізації хвильового пакета, теоретично передбаченим в класичній роботі Захарова [124], і потім багаторазово засвідченим експериментально [137, 138]. На відміну від ленгмюрівських хвиль, частота циклотронних хвиль залежить в основному від зовнішнього магнітного поля, тому, як було показано в [139–141], основним нелінійним механізмом, що визначають поведінку циклотронних хвиль, є виникнення ям магнітного поля в області локалізації циклотронних хвиль. Цей ефект був названий в [139] ВЧ діамагнетизмом. Довгохвильові нелінійні іонно-циклотронні хвилі, що поширюються уздовж зовнішнього магнітного поля, розглядалися в роботах [142–144] у рамках нелінійного рівняння Шредингера, або зведенню до рівняння для так званого "псевдопотенціала"Сагдєєва [145, 146]. Короткохвильовий випадок $k_\perp \rho_i \gg 1$, де $k_\perp$ поперечне (стосовно зовнішнього магнітного поля) хвильове число, ρ_i іонний ларморовский радіус, вивчався в [147]. При цьому розглядалася еволюція хвильового пакета не тільки для часової огинаючої електричного поля на іонно-циклотронній частоті ω_{ci}, але й для просторової, що обгинає на характерному масштабі $k_{0,\perp}^{-1}$, що приводило знову таки до нелінійного рівняння Шредингера. У даному підрозділі виводиться суттєво нове нелінійне еволюційне рівняння, що описує динаміку нелінійних короткохвильових іонно-циклотронних хвиль. При цьому не передбачається усереднення по масштабах $k_{0,\perp}^{-1}$ і лінійна частина відповідає дисперсії циклотронних хвиль у вигляді зворотньої залежності частоти від хвильового числа.

2.2.1 Модельне рівняння

Ми розглядаємо іонно-циклотронні хвилі із частотою ω, що поширюються поперек зовнішнього магнітного поля $B_0 \,||\, \widehat{\mathbf{z}}$, при умовах

$$|\omega - \omega_{ci}| \gg k_z v_{Ti,\perp}, \quad k_\perp \gg k_z, \quad k_\perp \rho_e \ll 1, \quad \omega \ll k_z v_{Te,\parallel}, \tag{2.66}$$

де $k_\perp$, k_z поперечне й поздовжнє хвильове число, $\rho_i = v_{Ti,\perp}/\omega_{ci}$ і $\rho_e = v_{Te,\perp}/\omega_{ce}$ іонний і електронний ларморовскі радіуси, $v_{Ti,\perp}$ і $v_{Te,\perp}$ поперечні теплові швидкості іонів і електронів, $v_{Te,||}$ поздовжня теплова швидкість електронів. У цьому випадку діелектрична проникність потенціальних іонно-циклотронних хвиль має вигляд [103]

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{k_\perp v_{Ti,\perp}} \left[\frac{T_{i,\perp}}{T_{e,\|}} + 1 - I_0(\beta)\exp(-\beta) - I_n(\beta)\exp(-\beta)\frac{\omega}{\omega - n\omega_{ci}} \right], \tag{2.67}$$

де $I_n(\beta)$ функція Бесселя уявного аргументу n-порядку, n номер гармоніки, $\beta = k_\perp^2 \rho_i^2$, ω_{pi} іонна плазмова частота, $T_{i,\perp}$ і $T_{e,\|}$ поперечна іонна й поздовжня електронна температури відповідно. Далі обмежимося випадком першої гармоніки $n = 1$. Для короткохвильових $k_\perp \rho_i \gg 1$ іонно-циклотронних хвиль із довжиною хвилі багато меншої ларморовського радіуса іонів з (2.67) випливає дисперсійне рівняння

$$\omega = \omega_{ci} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1 + T_{i,\perp}/T_{e,\|})k_\perp \rho_i} \right] \equiv \omega_{ci}[1 + R(k_\perp)], \tag{2.68}$$

де $R(k_\perp) \ll 1$.

Рівняння для повільно змінної ($\omega_{ci} \gg \partial/\partial t$) комплексної амплітуди $\psi(\mathbf{r}, t)$ потенціалу φ ВЧ електростатичного поля

$$\varphi = \frac{1}{2}[\psi(\mathbf{r}, t)\exp(-i\omega_{ci}t) + \text{k.c.}] \tag{2.69}$$

іонно-циклотронної хвилі одержимо з рівняння Пуассона

$$\nabla_\perp \cdot (\varepsilon \nabla_\perp \varphi) = 0, \tag{2.70}$$

де діелектрична проникність ε розглядається як диференціальний оператор з $\omega \to \omega_{ci} + i\partial/\partial t$ і $\mathbf{k} \to -i\nabla_\perp$, $\nabla_\perp = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$. У лінійному однорідному випадку рівняння $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 0$ дає дисперсійне співвідношення (2.68). Нелінійний доданок виникає з нелінійного виправлення до циклотронної частоти $\omega_{ci} \to \omega_{ci}(1 + \delta B/B_0)$ у вирази для ε, де δB збурення магнітного поля. У результаті, можна одержати

$$\nabla_\perp^2 \left(\frac{i}{\omega_{ci}} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \hat{R}\psi \right) = \nabla_\perp \cdot (h \nabla_\perp \psi), \tag{2.71}$$

де дія оператора $\hat{R}$ визначається виразом

$$\hat{R}\psi = \int R(k_\perp)\psi(k_\perp) \exp(i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp) d\mathbf{k}_\perp, \tag{2.72}$$

і $h = \delta B / B_0$ відносне збурення магнітного поля.

При умовах (2.66) збурення магнітного поля, що виникає через нелінійні виправлення другого порядку до електронної функції розподілу, має вигляд [140]

$$h_e = -\frac{\omega_{pe}^2 m_e T_{e,\perp} |\psi^2|}{4 B_0^2 T_{e,\parallel}} \tag{2.73}$$

Відповідний іонний внесок

$$h_i = -\frac{\pi \omega_{ci}^2 \omega_{pi}^2 |\psi|^2}{2 B_0^2 v_{Ti,\perp}^4 k_\perp^2}, \tag{2.74}$$

де $k_\perp$ ефективне поперечне хвильове число. При $k_\perp^2 \rho_i^2 T_{e,\perp} T_{i,\perp} / T_{e,\parallel}^2 \gg 1$ нелінійне збурення магнітного поля визначається збуренням електронної функції розподілу, що й передбачається в подальшому, так що $h = h_e$ в (2.71).

В одновимірному випадку $\nabla_\perp = (\partial/\partial x, 0)$ з (2.71), (2.73) випливає нелінійне рівняння

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} - \psi = i |\psi|^2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \tag{2.75}$$

де введені безрозмірні змінні

$$\tau = \omega_{ci} t, \quad \xi = x \left[\sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{T_{i,\perp}}{T_{e,\perp}} \right) \rho_i \right]^{-1}, \quad \psi \to \frac{\psi \omega_{pe} \sqrt{m_e T_{e,\perp}}}{2 B_0 T_{e,\parallel}}. \tag{2.76}$$

Дисперсійне співвідношення лінійної частини рівняння (2.75) (беручи $\psi \sim \exp(i\omega\tau - iq\xi)$) має вигляд зворотньої залежності $\omega = 1/q$ частоти від хвильового числа, що відрізняє (2.75) від відомих раніше нелінійних еволюційних рівнянь. Виключенням можна вважати тільки рівняння sine-Gordon у так названих конусних змінних $\psi_{\xi\tau} = \sin \psi$, яке однак підходящою заміною змінних зводиться до класичного виду $\psi_{\tau\tau}-\psi_{\xi\xi} = \sin\psi$ з дисперсійним співвідношенням $\omega^2 = q^2$ (що неможливо для (2.75) через наявність похідної в нелінійній частині).

2.2.2 Модуляційна нестійкість

Рівняння (2.75) допускає розв'язок у вигляді нелінійної монохроматичної плоскої хвилі з постійною амплітудою

$$\psi = \psi_0 \exp(i\kappa_0\xi + i\Delta\tau) \tag{2.77}$$

частота Δ якої залежить від амплітуди ψ_0 та визначається співвідношенням

$$\Delta = |\psi_0|^2 - 1/\kappa_0, \tag{2.78}$$

а групова швидкість дорівнює $u_0 = 1/\kappa_0^2$ і спрямована убік, протилежну напрямку поширення лінійних хвиль (2.68). Розглянемо питання про стійкість такої хвилі. Уважаючись $\psi = (\psi_0 + \delta\psi)\exp(i\kappa_0\xi + i\Delta\tau)$, де $\delta\psi(\xi,\tau)$ мале збурення, і лінеаризуя рівняння (2.75) по $\delta\psi$, з урахуванням нелінійного дисперсійного співвідношення (2.78) одержимо

$$\frac{\partial^2\delta\psi}{\partial\tau\partial\xi} + i\Delta\frac{\partial\delta\psi}{\partial\xi} + i\kappa_0\frac{\partial\delta\psi}{\partial\tau} = i|\psi_0|^2\frac{\partial\delta\psi}{\partial\xi} - \kappa_0\psi_0(\psi_0\delta\psi^* + \psi_0^*\delta\psi). \tag{2.79}$$

Уважаючись далі $\delta\psi = \psi_1\exp(i\kappa\xi + i\Omega\tau) + \psi_2\exp(-i\kappa\xi - i\Omega\tau)$, з (2.79) одержимо дисперсійне рівняння, що описує малі коливання поблизу рівноважного стану (2.77)

$$\Omega^2\kappa^2 - 2|\psi_0|^2\Omega\kappa\kappa_0 = \left(\frac{\kappa}{\kappa_0} - \Omega\kappa_0\right)^2, \tag{2.80}$$

де відкинуті малі, що містять $\sim |\psi_0|^4$. Нестійкості відповідають комплексні Ω. Аналіз (2.80) показує, що нестійкими є модуляції із хвильовими числами $\kappa < \kappa_0$ при виконанні граничних умов

$$\kappa_0 - \sqrt{\kappa_0^2 - \kappa^2} < \kappa_0^2|\psi_0|^2 < \kappa_0 + \sqrt{\kappa_0^2 - \kappa^2}. \tag{2.81}$$

Інкремент $\gamma = \operatorname{Im}\Omega$ наростаючих збурень

$$\gamma = \frac{\kappa}{\kappa_0^2 - \kappa^2}\sqrt{\kappa_0|\psi_0|^2(2-\kappa_0|\psi_0|^2) - \frac{\kappa^2}{\kappa_0^2}}. \tag{2.82}$$

Максимальним інкрементом $\gamma_{max} = \kappa_0|\psi_0|^2$ мають збурення з $\kappa = \kappa_0^{3/2}|\psi_0|$.

2.2.3 Короткохвильові іонно-циклотронні солітони та нелінійні періодичні хвилі

Будемо шукати розв'язки рівняння (2.75) у вигляді

$$\psi = a(y)\exp[i\alpha(\xi,\tau)], \tag{2.83}$$

де $\alpha(\xi,\tau) = \eta(y) + \theta\tau + p\xi$, $y = \xi + v\tau$, θ, p, v постійні параметри. З (2.75) і (2.83) можна одержати наступне співвідношення між a та $d\eta/dy$

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{a^2}{4v} + B, \tag{2.84}$$

де A константа й $B = (p+\theta/v)/2$. Зручно ввести нові змінні $\Omega = Bv + \theta$, $q = p + B$ такі що $\Omega + qv = 0$. Тоді з (2.84) маємо

$$\alpha(\xi,\tau) = \int_{y_0}^{y}\frac{a^2}{4v}dy + q(\xi - v\tau). \tag{2.85}$$

Підставляючи (2.83) і (2.85) в (2.75), одержимо рівняння для $a(y)$

$$\frac{d^2a}{dy^2} + \frac{3}{16v^2}a^5 + \frac{q}{v}a^3 - \left(\frac{1}{v} - q^2\right)a = 0, \tag{2.86}$$

інтегрування якого дає

$$\left(\frac{da}{dy}\right)^2 + V(a) = C, \tag{2.87}$$

де "потенціал" $V(a)$ має вигляд

$$V(a) = \frac{a^2}{16v^2}[(a^2+4vq)^2 - 16v] \tag{2.88}$$

і C довільна константа інтегрування, що задовольняє умові $C \geqslant V(a)$. Інтегруючи (2.87) маємо

$$y - y_0 = \int \frac{da}{\sqrt{C - V(a)}}, \tag{2.89}$$

де y_0 довільна константа й надалі вважаємося $y_0 = 0$. Залежно від числа дійсних коренів рівняння $V(a) = 0$ будемо розрізняти три якісно різні випадки.

Спочатку розглянемо випадок, коли $v > 0$ та $q > 1/\sqrt{v}$ або $v < 0$ і $q < 0$. Тоді потенціал $V(a)$ має єдиний мінімум у точці $a = 0$, а рівняння $V(a) = C > 0$ має єдиний позитивний корінь. При $a^2 \ll |8vq|$ в (2.88) можна нехтувати доданком з a^6 і з (2.89) одержати розв'язок у вигляді нелінійної періодичної хвилі

$$a = a_0 \operatorname{cn}(\sqrt{(a_0^2 + a_1^2)q/2v}\, y, k_0), \tag{2.90}$$

де cn еліптична функція Якобі з модулем $k_0 = a_0/\sqrt{a_0^2 + a_1^2}$ і

$$a_0^2 = -\frac{q^2 v - 1}{q} + \sqrt{\frac{(q^2 v - 1)^2}{q^2} + \frac{2Cv}{q}}, \tag{2.91}$$

$$a_1^2 = \sqrt{\frac{(q^2 v - 1)^2}{q^2} + \frac{2Cv}{q}}. \tag{2.92}$$

У межі $C \ll (q^2 v - 1)^2/2qv$, тобто модуль функції Якобі $k_0 \to 0$ з (2.90) маємо

$$a \approx= \sqrt{\frac{C}{q^2 - 1/v}} \cos(\sqrt{q^2 - 1/v} y). \tag{2.93}$$

Другий випадок відповідає $v > 0$ і $|q| < 1/\sqrt{v}$. При цьому потенціал $V(a)$ має максимум в $a = 0$ і два мінімуми в точках $a_m = \pm 2\sqrt{v/3}\left[\sqrt{q^2 + 3/v} - 2q\right]$. При $C = 0$ з (2.85), (2.89) можна одержати локалізований солітонний розв'язок у вигляді

$$\psi = a(y) \exp\{i[\eta(y) + q(\xi - v\tau)]\} \tag{2.94}$$

де

$$a(y) = \frac{2q_0 v^{3/4}}{\sqrt{q\sqrt{v} + \operatorname{ch}(2q_0 y)}}, \quad \eta(y) = \frac{1}{2}\arcsin\left[\frac{1 + q\sqrt{v}\operatorname{ch}(2q_0 y)}{q\sqrt{v} + \operatorname{ch}(2q_0 y)}\right], \tag{2.95}$$

і $q_0 = \sqrt{1/v - q^2}$. Розв'язок (2.94), (2.95) залежить від двох довільних параметрів v і q (за умови $q^2 < 1/v$), або, еквівалентно, амплітуди солітона a_{max} і характерної ширини q_0^{-1} . Необхідною умовою є $v > 0$. При $q \to -1/\sqrt{v}$ форма солітона прямує до $1/\operatorname{ch}(q_0 y)$, а амплітуда $a_{max} \to 0$. У межі ж $q \to -1/\sqrt{v}$, тобто при збігу швидкості солітона з груповою швидкістю лінійних іонно-циклотронних хвиль (2.68) одержуємо солітон з алгебраїчно повільно спадаючими на нескінченності хвостами

$$\psi = \sqrt{\frac{8\sqrt{v}}{1 + 4y^2/v}}\exp\{i[\operatorname{arctg}(2y/\sqrt{v}) - (\xi - vt)/\sqrt{v}]\} \tag{2.96}$$

З (2.95) випливає співвідношення між амплітудою a_{max} та швидкістю v

$$a_{max} = 2\sqrt{v(1 - q\sqrt{v})}. \tag{2.97}$$

У такий спосіб $a_{max} = 0$, якщо $v = 0$, тобто солітон (2.94), (2.95), подібно солітонам рівняння Кортевега-де Фриза й на відміну від солітонів нелінійного рівняння Шредингера, не може бути нерухливим. Залежність амплітуди від швидкості немонотонна. Для $q > 0$ амплітуда солітона $a_{max}(v)$ досягає максимуму при швидкості $v = 1/4q^2$ і $a_{max} = 1/\sqrt{q} = \sqrt{2}v^{1/4}$, для $q < 0$ амплітуда максимальна при $q = -1/\sqrt{v}$ і $a_{max} = 2\sqrt{2}v^{1/4}$.

Якщо $V(a_m) < C < 0$ рівняння $C = V(a^2)$ має два позитивні кореня a_1^2 і a_2^2. В окремому випадку $C = 4q(4vq^2 - 1) < 0$ з (2.85), (2.89) випливає розв'язок у вигляді нелінійної періодичної хвилі

$$a = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cn}^2(\kappa y, k_0)/a_1 + \operatorname{sn}^2(\kappa y, k_0)/a_2}}, \tag{2.98}$$

де cn й sn еліптичні функції Якобі й

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{vq\sqrt{4v - 7v^2q^2} + 3vq}}, \quad a_1 = 2\left(\sqrt{4v - 7v^2q^2} - 3vq\right), \tag{2.99}$$

$$a_2 = 4vq, \quad k_0 = \sqrt{\frac{(a_2 - a_1)d}{a_2(a_1 + d)}}, \quad d = 2\left(\sqrt{4v - 7v^2q^2} + 3vq\right). \tag{2.100}$$

При $C > V(0)$ рівняння $C = V(a^2)$ має тільки один позитивний корінь. Для $C = 8q(1 - vq^2)$ розв'язок у вигляді нелінійної періодичної хвилі має вигляд

$$a = \frac{2\sqrt{q_0 v}\,\mathrm{sn}^2(2\sqrt{q_0 q}y, k_0)}{1 + \mathrm{cn}^2(2\sqrt{q_0 q}y, k_0)}, \tag{2.101}$$

де $k_0 = \sqrt{1 - q_0/2q}$.

У третьому випадку $v > 0$ та $q < -1/\sqrt{v}$ потенціал $V(a)$ має три локальні мінімуми й два максимуми. Якщо $C = V(a_0)$, де

$$a_0^2 = \frac{4(q^2v - 1)}{2|q| + \sqrt{q^2 + 3/v}} \tag{2.102}$$

відповідає точкам $\pm a_0$ локального максимуму потенціалу $V(a)$, з (2.85), (2.89) можна одержати

$$a_\pm^2 = a_0^2 + \frac{2a_0^2b_0^2\left[b_0^2 - a_0^2 \pm (b_0^2 + a_0^2)\,\mathrm{ch}(2\kappa y)\right]}{(b_0^2 + a_0^2)^2\,\mathrm{ch}^2(2\kappa y) - (b_0^2 - a_0^2)^2}, \tag{2.103}$$

де

$$b_0^2 = 4v\sqrt{q^2 + 3/v}, \quad \kappa = a_0^2b_0^2/4v. \tag{2.104}$$

Розв'язок зі знаком "$-$"спрощується до

$$a_- = a_0\sqrt{\frac{a_0^2 + b_0^2}{a_0^2\mathrm{th}^2(\kappa y) + b_0^2}}\mathrm{th}(\kappa y) \tag{2.105}$$

і має характерну форму кінкового солітона (ударної хвилі). Амплітуда звертається в нуль при $q = 1/\sqrt{v}$. Для $q < -1/\sqrt{v}$ і $|q| \gg 1/\sqrt{v}$ маємо $a_0 = 2\sqrt{|q|v/3} \gg v^{1/4}$, тобто амплітуда кінкового солітона може набагато перевищувати амплітуду солітона (2.94), (2.95) $a < 2\sqrt{2}v^{1/4}$. Розв'язок зі знаком "+"в (2.103) має вигляд

$$a_+ = \sqrt{a_0^2 + \frac{a_0^2b_0^2}{(b_0^2 + a_0^2)\,\mathrm{ch}^2(\kappa y) - b_0^2}} \tag{2.106}$$

і являє собою солітон, локалізований на постійному фоні.

Дотепер ми розглядали розв'язки в області параметрів, для яких $a_{max} \lesssim 4qv$. У випадку ж $C \gg |q|^3 v$ розв'язки взагалі перестають залежати від q. В (2.87) можна зберегти тільки доданок з a^6 і одержати нелінійну періодичну хвилю вигляду

$$a = \frac{(4v)^{1/3} C^{1/6}}{\sqrt{2}} [1 - \mathrm{cn}(\sqrt[3]{4v/C}\, y, \sqrt{2-\sqrt{3}}/2]. \tag{2.107}$$

Виникненням іонно-циклотронних солітонів та нелінійних хвиль можна пояснити спостережуваний в авроральній області магнітосфери Землі [132–134] і плазмі сонячного вітру [135] різко неоднорідний розподіл циклотронних коливань у просторі.

2.3 Нелінійні періодичні хвилі в плазмі з електронним пучком

Тут покажемо можливість виникнення сильнонелінійних структур - солітонів і цугів солітонів (нелінійних періодичних хвиль) на нелінійної стадії класичної пучкової нестійкості, тобто нестійкості моноенергетичного електронного пучка малої густини $n_b \ll n_0$ (n_b і n_0 - густини пучка й плазми відповідно, v_0 - швидкість пучка, v_{Te}, v_{Tb} теплові швидкості плазми й пучка, причому $v_0 \gg v_{Te} \gg v_{Tb}$), що поширюється в однорідній плазмі без зовнішнього магнітного поля [148, 149].

Залежно від умов збудження коливань та геометрії плазмово-пучкової системи еволюція пучкової нестійкості має різний характер. Експериментально спостерігалося виникнення нерухливих солітонів [150, 151] або солітонів, що рухаються зі швидкістю меншої швидкості іонного звуку [152], а також сильнонелінійних структур швидкість яких порядку швидкості пучка [153].

Якщо розмір системи в напрямку руху пучка багато менше поперечного (звичайно реалізована на практиці ситуація), то взаємодія пучка із плазмою є переважно одновимірною. Нижче розглядаємо саме такий випадок, тобто будемо вважати, що всі збуджувані хвилі поширюються тільки в одному напрямку - уздовж пучка (осі x).

Для пояснення результатів експериментальних досліджень нелінійної взаємодії хвиль у плазмово-пучкових системах, як показано в [154–156], суттєво враховувати пондеромоторну силу (ВЧ тиск) збуджуваних пучком коливань і вихідну нерівноважність системи. Пондеромоторна сила створює яму густини плазми, у яку захоплюються коливання, що підсилює електричне поле та виштовхує електрони. Вище певного порога по інтенсивності електричного поля збуджується модуляційна нестійкість, на нелінійній стадії якої в одновимірному випадку утворюються солітони.

Іншим механізмом стабілізації нестійкості моноенергетичного пучка є захоплення електронів пучка потенціалом хвилі [103]. Однак, як показано в [155], впливом останнього механізму можна нехтувати, якщо $(n_b/n_0)^{3/2} \gg v_{Te}/v_0$. При цьому основний механізм насичення - порушення резонансної взаємодії коливань із пучком, яка пов'язана з дією пондеромоторної сили (сили ВЧ тиску ленгмюрівських коливань). Нелінійна система рівнянь, що описує як пучкову нестійкість, так і її стабілізацію при взаємодії ВЧ та повільних НЧ збурень, що поширюються зі швидкістю меншої швидкості іонного звуку $c_s = \sqrt{T_e/M}$, отримана в [154, 155]. При отриманні цієї системи рівнянь істотним є урахування руху іонів плазми під дією пондеромоторної сили. На основі моделі, запропонованої в [155] можна, зокрема, пояснити виникнення 'повільних' солітонів, що рухаються з груповою швидкістю ленгмюрівських хвиль $v_L = kv_{Te}^2/\omega_{pe} = v_{Te}^2/v_0 \ll v_0$ $(k = \omega_{pe}/v_0)$. Розглянемо можливість виникнення 'швидких' солітонів (або ланцюжка солітонів), що рухаються з швидкістю, близької до групової швидкості нестійких коливань $v_g = 2v_0/3$, які спостерігалися на експерименті [153].

2.3.1 Модельні рівняння

Лінійна стадія нестійкості моноенергетичного електронного пучка описується дисперсійним рівнянням [148, 149]

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - 3k^2 v_{Te}^2} - \frac{\alpha\omega_{pe}^2}{(\omega - kv_0)^2} = 0, \qquad (2.108)$$

де $\alpha = n_b/n_0 \ll 1$. Удалині від резонансу, тобто коли kv_0 не близька до ω_{pe}, два із чотирьох коренів (2.108) відповідають звичайним ленгмюрівським хвилям $\omega(k) = \pm\omega_{pe}(1 + 3k^2 r_{De}^2/2)$, а два інших відповідають так званим хвилям просторового заряду пучка

$$\omega(k) = kv_0 \pm \frac{\omega_{pe}\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1 - (\omega_{pe}/kv_0)^2}}, \qquad (2.109)$$

причому при $kv_0 < \omega_{pe}$ один з коренів відповідає нестійкості (нерезонансна пучкова нестійкість) з інкрементом

$$\gamma_{nonres} = \frac{\omega_{pe}\sqrt{\alpha}}{\sqrt{(\omega_{pe}/kv_0)^2 - 1}}. \qquad (2.110)$$

Випадку ж $\omega_{pe} \approx kv_0$ відповідає резонансна пучкова нестійкість з інкрементом

$$\gamma_{res} = \frac{\sqrt{3}\omega_{pe}\alpha^{1/3}}{2^{4/3}}. \qquad (2.111)$$

Вираз (2.111) визначає максимальний інкремент коливань, збуджуваних у плазмі пучком малої густини. Помітимо, що навіть при малому відношенні густин пучка й плазми наростання коливань може бути значним, оскільки $\gamma_{res} \sim \alpha^{1/3}$.

Рівняння (2.108) допускає збудження широкого спектру нестійких коливань із $k \leqslant \omega_{pe}/v_0$. Це було підтверджено в експерименті [153], де вимірялися частоти й інкремент коливань для різних хвильових чисел k і було показано, що вони добре лягають на криві $\operatorname{Re}\omega(k)$,$\operatorname{Im}\omega(k)$ обумовлені з (2.108). Найбільш нестійкі коливання з $k = \omega_{pe}/v_0$ (резонансна нестійкість) узгоджуються з інкрементом (2.111) і поширюються із груповою швидкістю $\sim v_g = 2v_0/3$. При цьому також було показано, що на нелінійній стадії нестійкості формується хвильова структура із симетричним просторовим розподілом щодо максимуму амплітуди електричного поля E в $x = x_0$. Поблизу максимуму залежність амплітуди хвильового пакета близька до $E(x) \sim 1/\cosh[K(x - x_0)]$, де $K = \gamma_{res}/v_0$ - просторовий лінійний інкремент (коефіцієнт підсилення резонансної нестійкості). Максимум рухається зі швидкістю близької до v_g, і в міру збільшення відстані хвильовий пакет розділяється на два, один з яких рухається зі швидкістю більшої v_g, а іншої - меншої v_g. Для пояснення результатів своїх експериментів автори роботи безуспішно намагалися залучити теорію, розвинену в [155]. У рамках цієї теорії експериментальні результати не можуть знайти задовільного пояснення, оскільки еволюція повільної огинаючої електричного поля, хоча і може вважатися повільною в просторі й часу в порівнянні с періодом ВЧ поля, але все-таки значно швидше характерних часів для НЧ рухів за участю іонів [154, 155] . При цьому швидкість спостережуваних солітонів набагато вище швидкості іонного звуку (оскільки $v_g \gg c_s$), на відміну від швидкості повільних солітонів (меншої c_s) у теорії [155].

Ми розглядаємо іони як нерухливий фон (у відмінність роботи [155]), але враховуємо дію пондеромоторної сили ВЧ коливань на електрони плазми й пучка. Тоді формальною заміною $\omega_{pe} \to \omega_{pe}(1 + \delta n_e/n_0)$, $\alpha \to \alpha(1+\delta n_b/n_0)$, де δn_e, δn_b нелінійні НЧ збурення густини електронів плазми й пучка під дією ВЧ електричного поля, і $\omega \to i\partial/\partial t$, $k \to -i\partial/\partial x$ з (2.108) можна одержати

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 3v_{Te}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega_{pe}^2\left(1 + \frac{\delta n_e}{n_0}\right)\right]\tilde{E} = -\alpha\omega_{pe}^4\left(1 + \frac{\delta n_b}{n_b}\right)\tilde{E} \tag{2.112}$$

де $\tilde{E}$ електричне поле ВЧ коливань, а δn_e та δn_b НЧ збурення густини електронів плазми й пучка, задовольняють рівнянням

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \delta n_b = \frac{e^2 n_b}{m^2\omega_{pe}^2}\frac{\partial^2|\tilde{E}|^2}{\partial x^2} \tag{2.113}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 3v_{Te}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\delta n_e = \frac{e^2 n_0}{m^2\omega_{pe}^2}\frac{\partial^2|\tilde{E}|^2}{\partial x^2} \tag{2.114}$$

Система рівнянь (3.91)-(2.114) відрізняється від отриманої в [155] останнім рівнянням для збурення електронної густини.

2.3.2 Автостабілізація пучкової нестійкості та виникнення солітонів

Будемо вважати, що в початковий момент створюється хвильовий пакет кінцевої амплітуди на частоті $\omega_0 \sim \omega_{pe}$ і досліджувати можливість посилення цього пакета й установлення стаціонарної хвильової структури, що рухається з постійної швидкістю. За умови $|\omega_0 - \omega_{pe}| > \omega_{pe}\sqrt{\alpha}$ можна нехтувати збуренням густини електронів пучка. Тоді після заміни

$$\tilde{E} = E(x,t)\exp\left(i\tilde{\omega}_p t - i\frac{\tilde{\omega}_p}{v_0 x}\right), \tag{2.115}$$

де $\tilde{\omega}_p = \omega_{pe}/(1 - v_{Te}^2/v_0^2) \approx \omega_{pe}$ та усереднення по періоду швидких ВЧ осцілляцій $\tilde{\omega}_p^{-1}$ з (2.114) одержуємо рівняння для огинаючої E

$$\left[2i\omega_{pe}\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_L\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - \alpha\omega_{pe}^4\right]E = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\omega_{pe}^2\frac{\delta n_e}{n_0}E, \tag{2.116}$$

де $v_L = v_{Te}^2/v_0$. Будемо шукати розв'язок системи (2.114), (2.116) у вигляді стаціонарної хвилі, що рухається зі швидкістю u, а ω вільний параметр (нелінійний зсув частоти)

$$E = \mathcal{E}(x - ut)e^{i\omega t},\ \ \delta n_e = \delta n_e(x - ut) \tag{2.117}$$

Уводячи позначення $\Gamma = \omega_{pe}\alpha^{1/3}$ і безрозмірні змінні

$$\beta = \frac{u}{v_0},\ \xi = (x - ut)\Gamma/v_0,\ \Omega = \frac{\omega}{\Gamma},\ \Psi = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{8\pi n_0 m v_0^2}}\sqrt{\frac{\omega_{pe}}{\Gamma}} \tag{2.118}$$

з (2.114), (2.116) маємо рівняння

$$i\left[1-\Omega^3+\Omega(1-\beta)(1-3\beta)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right]\Psi-\Omega^2(2-3\beta)\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}-\beta(1-\beta)^2\frac{\partial^3\Psi}{\partial\xi^3}=$$
$$=\left\{i\left[(1-\beta)^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\Omega^2\right]-2\Omega(1-\beta)\frac{\partial}{\partial\xi}\right\}\Psi^3 \quad (2.119)$$

Збурення густини електронів при цьому має вигляд

$$\delta n_e=\frac{\Psi^2}{4\pi m u^2}, \quad (2.120)$$

звідки випливає, що максимуму інтенсивності поля відповідає горб, а не яма густини (на відміну від повільних солітонів [155], а також від звичайних легмюрівських солітонів у плазмі без пучка [138]).

Розв'язок рівняння (2.119) шукаємо у вигляді

$$\Psi=\sum_i c_i\,\mathrm{cn}^{2i+1}(\mu\xi,q), \quad (2.121)$$

де $\mathrm{cn}(\mu\xi,q)$ еліптична функція Якобі, $|q|\leqslant 1$. Якщо $q<1$, той розв'язок являє собою нелінійну періодичну хвилю (ланцюжок солітонів). При $q=1$ розв'язок має вигляд відокремленої хвилі - солітона. Можна показати, що $\Psi=h\,\mathrm{cn}(\mu\xi,q)$ є точним розв'язком незначно збуреного рівняння (2.119), а саме

$$i\left[1-\Omega^3+\Omega(1-\beta)(1-3\beta)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right]\Psi-\Omega^2(2-3\beta)\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}-\beta(1-\beta)^2\frac{\partial^3\Psi}{\partial\xi^3}=$$
$$=\left\{i\left[12(1-\beta)^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\Omega^2\right]-2\Omega(1-\beta)\frac{\partial}{\partial\xi}\right\}\Psi^3+i(1-\beta)^2\frac{\partial^2\Psi^3}{\partial\xi^2} \quad (2.122)$$

$\langle\Psi^2\rangle=(1/q)\int_0^q\Psi^2(x,q)dq$. При цьому параметри h,μ,q,Ω,β задовольняють алгебраїчної системі рівнянь

$$\mu^2(1-q^2)=\frac{\Omega^2(2-3\beta)}{\beta(1-\beta)^2}, \quad (2.123)$$

$$q^2\mu^2\beta(1-\beta)=-\Omega h^2, \quad (2.124)$$

$$1-\Omega^3-\Omega\mu^2(1-2q^2)(1-\beta)(1-3\beta)=6(1-\beta)^2(1-q^2)\mu^2h^2, \quad (2.125)$$

$$2\Omega q^2\mu^2(1-\beta)(1-3\beta) = [\Omega^2 + 3(1-\beta)^2\mu^2(3-6q^2+4Aq^2)]h^2, \qquad (2.126)$$

де $A(q) = \langle\Psi^2\rangle \approx \frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{8}q^2\right) < \frac{1}{2}$. Використовуючи (2.123),(2.124), з (2.125) можна одержати

$$2(3\beta-1) = \beta + \frac{3(3-6q^2+4Aq^2)(2-3\beta)}{(1-2q^2)}, \qquad (2.127)$$

звідки, зокрема, випливає, що $\beta < 1$ при будь-якому A. З (2.124) тоді маємо $\Omega < 0$, тобто частота модуляції нелінійного хвильового пакета (нелінійний зсув частоти) лежить в нестійкої області, як і передбачалося. При цьому будемо вважати Ω заданим (він визначається умовами збудження, наприклад, зовнішнім джерелом). З (2.123)-(2.125) можна одержати

$$\beta(1-\beta)(1-2q^2)^2 = 2\Omega^3[(1-2\beta)^2(1-2q^2)^2 - 3q^2(1-q^2)(2-3\beta)^2] \quad (2.128)$$

Оскільки $\Omega < 0$, то з (2.127),(2.128) випливає нерівність

$$4(1-2q^2+3Aq^2/2)^2 < 3q^2(1-q^2) \qquad (2.129)$$

Зокрема, з (2.129) видно, що розв'язок з $q^2 = 1$ неможливий, тобто чисто відокремлена хвиля не є розв'язком рівняння (2.122). З (2.129) випливає наступне обмеження на q, саме $q_1^2 < q^2 < q_2^2$, де $q_{1,2}^2$ корені рівняння $37q^4 - 52q^2 + 16 = 0$ і при цьому $q_1^2 \approx 15/37$, $q_2^2 \approx 35/37$. Зв'язок між Ω і q, що випливає з (2.127),(2.128), має вигляд

$$\Omega^3 = -\frac{3(5-7q^2)(2-3q^2)}{37(q^2-q_1^2)(q_2^2-q^2)}, \qquad (2.130)$$

звідки $q^2 < 2/3$. Таким чином, припустимі значення q^2 лежать в інтервалі $(q_1^2, 2/3)$. Функція $-\Omega^3(q^2)$ має єдиний мінімум у цьому інтервалі, причому для відповідного значення q_{min}^2 маємо $q_1^2 < q_{min}^2 < (q_1^2+q_2^2)/2$. При $q^2 \neq q_{min}^2$ одному значенню Ω відповідають два значення q^2 з інтервалу $(q_1^2, 2/3)$. Далі з (2.123) можна визначити параметр μ

$$\mu^2 = \frac{2^{1/3}(16-23q^2)^2}{37^{2/3}(10-14q^2)^{1/3}(6-9q^2)^{4/3}[(q^2-q_1^2)(q_2^2-q^2)]^{2/3}} \qquad (2.131)$$

Мінімальне значення μ досягається при $q^2 \approx 1/2$ і дорівнює $\mu_{min} = 2^{1/3}/3$. У розмірних величинах маємо $\mu\xi = \mu(x - ut)\Gamma/v_0$. Величина $\mu\Gamma/v_0$ відповідає просторовому інкременту посилення коливань на ділянці росту функції $\mathrm{cn}(\mu\xi, q)$. Мінімальне значення $\mu\Gamma/v_0$ менше лінійного просторового інкремента $\sqrt{3}\Gamma/2^{4/3}v_0$. Позначимо через L півперіод функції $\mathrm{cn}(\mu\xi, q)$. Тоді для L, яке має сенс характерної ширини солітона, можна написати $\mu L\Gamma/v_0 = \pi(1 - 3q^2/8)$. Отже, умова виникнення стаціонарної нелінійної структури має вигляд

$$\frac{L\Gamma}{v_0} = \frac{\pi(1 - 3q^2/8)}{\mu} < \frac{\pi}{3} \tag{2.132}$$

Для параметра h (амплітуди), враховуючи (2.126), одержимо

$$h^2 = \frac{2q^2\mu(5 - 7q^2)^{1/2}}{16 - 23q^2} \tag{2.133}$$

Для швидкості поширення нелінійної хвилі з (2.127) одержуємо

$$u = \frac{2v_0}{3}\left[1 - \frac{(1 - 2q^2)}{(16 - 23q^2)}\right], \tag{2.134}$$

тобто при $q^2 < 1/2$ маємо $u < 2v_0/3$, і солітон рухається зі швидкістю, меншої групової швидкості найбільш нестійкої моди, а при $q > 1/2$ швидкість солітона більше $2v_0/3$. Загалом кажучи, при заданому Ω ми маємо два можливі значення q^2, а отже, і два різних значення μ, h^2, u відповідних цим q згідно (2.131), (2.133), (2.134). Це повністю перебуває в узгодженні з експериментальними даними роботи [153], де хвильовий пакет у процесі нелінійної еволюції розділявся на два, що рухаються з трохи різними швидкостями (але близькими до $2v_0/3$).

При $q^2 \approx 1/2$ для μ маємо мінімальне значення, або максимально можливе L, згідно (2.132). Значенням $q^2 < 1/2$ відповідають 'повільні' солітони меншої амплітуди h і 'коефіцієнт підсилення' $\mu\Gamma/v_0$ порядку лінійного. Для цих солітонів цікаво відзначити відповідність із лінійною теорією пучкової нестійкості, у якій швидкість пучка можна вважати слабко неоднорідною $v(x) = v_0(1 - x^2/\Delta^2)$ з $x \ll \Delta$. При цьому на початковому (лінійному) етапі еволюції можна показати, що групова швидкість найбільш нестійкої моди залежить від параметра $v_0/\Delta\Gamma$, де Δ - масштаб неоднорідності швидкості пучка. При зміні $v_0/\Delta\Gamma$ від нуля до нескінченності швидкість зносу нестійких коливань монотонно зменшується від $2v_0/3$ до $v_0/2$. При цьому інкремент нестійкості монотонно спадає від максимального можливого значення $\sqrt{3}\Gamma/2^{4/3}$ (2.111) до нуля. При $\Delta\Gamma/v_0 < 1$ відбувається значне зменшення інкремента й перехід нестійкості від резонансного типу до нерезонансної. Таким чином, видно, що на стадії насичення нестійкості з неоднорідною швидкістю пучка можуть утворюватися нелінійні структури, які автоматично задовольняють умові стабілізації резонансної пучкової нестійкості (2.132) . Таким чином, виникнення солітонів може розглядатися як процес автостабілізації нестійкості. Відзначимо також, що повільні солітони рухаються з тим меншою швидкістю, чим менше їх характерна ширина, так само, як і хвильовий пакет на лінійній стадії нестійкості з неоднорідною швидкістю пучка.

2.4 Результати до розділу 2

1. Отримано двовимірні нелінійні рівняння, що описують взаємодію верхньогібридних плазмових хвиль із кінетичними магнітозвуковими хвилями. Отримані рівняння включають як скалярну, так і векторну нелінійність, що зникає в одновимірному випадку. Аналітично знайдені інкремент та пороги модуляційної нестійкості. Дисперсія магнітозвукової хвилі приводить до нелокального характеру нелінійності. Наслідком цього є відсутність колапсу в даній моделі, що строго доводиться знаходженням нижньої оцінки для гамільтоніана при фіксованої енергії. Чисельно знайдено розв'язки у вигляді двовимірних солітонів та радіально симетричних вихорів й досліджена їхня стійкість. Чисельно продемонстровано виникнення двовимірного солітона з майже однорідного початкового розподілу поля, який, співіснуючи з турбулентним оточенням, є досить стійким та не колапсує.

2. Запропоновано еволюційне нелінійне рівняння, що описує динаміку короткохвильових нелінійних іонно-циклотронних хвиль, що поширюються в плазмі поперек зовнішнього магнітного поля. На відміну від раніше відомих еволюційних нелінійних рівнянь, його лінійна дисперсія відповідає зворотній залежності частоти від хвильового числа. Знайдені поріг та інкремент модуляційної нестійкості плоскої хвилі. Аналітично знайдені розв'язки у вигляді солітонів та нелінійних періодичних хвиль.

3. Отримана система нелінійних рівнянь, яка описує нелінійну стадію пучкової нестійкості електронного пучка в плазмі. У відмінність від раніше запропонованих моделей, дана система рівнянь враховує нелінійні низькочастотні збурення густини електронів. Знайдено аналітичні розв'язки у вигляді нелінійних періодичних кноідальних хвиль і отримана відповідність з експериментальними результатами по виявленню солітонів в плазмово-пучкових системах. Виникнення стаціонарної нелінійної хвилі відповідає автостабілізації лінійної пучкової нестійкості.

РОЗДІЛ 3

Дрейфові вихори та зональні течії в плазмі

Зміст цього розділу відображено в роботах [1, 2, 17–21, 28, 30–32, 37, 38].

Дрейфові хвилі виникають у плазмі, що перебуває в зовнішньому магнітному полі при врахуванні градієнтів рівноважної густини плазми й/або іонної або електронної температури (у загальному випадку, градієнтів тиску іонів і електронів). Збуджуватися дрейфові хвилі можуть за рахунок різних механізмів: врахування дисипації (іон-електронних зіткнень), великого градієнта іонних і електронних температур, у плазмі токамака дрейфові нестійкості розгойдуються на периферії за рахунок переходів захоплених електронів в пролітні й назад (дрейфова мода на захоплених електронах) та ін. Характерні частоти дрейфових мод багато менше циклотронної частоти іонів, а характерні масштаби багато менше масштабу неоднорідності плазми.

У найпростішому випадку, при наявності тільки градієнта густини плазми уздовж осі x, дисперсія потенціальних дрейфових хвиль має вигляд (передбачається, що зовнішнє магнітне поле B_0 направлено уздовж осі z)

$$\omega_{\mathbf{k}} = \frac{k_y v_d}{1 + k_\perp^2 \rho_s^2}, \tag{3.1}$$

де $v_d = cT_e/eB_0L_n$ дрейфова швидкість, T_e температура електронів, L_n характерний масштаб неоднорідності густини плазми, $\rho_s = c_s/\omega_{ci}$ ларморовський радіус іонів, обчислений по електронній температурі, $c_s = \sqrt{T_e/M}$ швидкість іонного звуку, M маса іонів, $\omega_{ci} = eB_0/Mc$ іонно-циклотронна частота. При цьому передбачаються виконаними умови

$$k_\perp \gg L_n^{-1}, \quad \rho_s \ll L_n, \quad \omega \ll \omega_{ci}, \quad c_s \ll \omega/k_z \ll v_{Te} \tag{3.2}$$

де k_z паралельне хвильове число й v_{Te} теплова швидкість електронів.

Лінійна теорія дрейфових хвиль розроблена досить докладно [157], у той час як нелінійні ефекти продовжують залишатися об'єктом пильної уваги. Нелінійність на дрейфових гілках коливань є одною з головних перешкод на шляху до здійснення керованого термоядерного синтезу в установках з магнітним утриманням плазми. Дрейфова турбулентність приводить до аномально великого переносу частинок і тепла поперек магнітного поля, перешкоджаючи утриманню плазми [158].

Основною нелінійністю в рухах дрейфового типу є конвективна нелінійність, зв'язана зі швидкістю руху $\mathbf{v}_E = c[\mathbf{E} \times \mathbf{B}_0]/B_0^2$ в схрещених електричному й магнітному полях. Баланс між дисперсійними ефектами й нелінійністю приводить до можливості існування нелінійної двовимірної локалізованої структури – двовимірного дрейфового солітона у вигляді дипольного вихору (модона).

3.1 Розсіювання дрейфових хвиль дрейфовими вихорами

3.1.1 Модельні рівняння

Врахування нелінійних ефектів на дрейфовій гілках коливань (3.1), обумовленої тільки градієнтом густини плазми, приводить до нелінійного рівняння [159]

$$\frac{\partial}{\partial t}(1-\Delta)\Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \{\Phi, \Delta_\perp \Phi\}, \tag{3.3}$$

де $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ і для просторових координат (x, y), часу t і електростатичного потенціалу Φ введені безрозмірні змінні $(x, y) \to (x/\rho_s, y/\rho_s)$, $t \to c_s t/L_n$,$\Phi \to (e\Phi/T_e)(L_n/\rho_s)$. Нелінійність у вигляді дужки Пуассона в правій частині (3.3) визначена як

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}. \tag{3.4}$$

У фізиці плазми це рівняння прийнято називати рівнянням Хасегавы-Міми по імені авторів роботи [159], хоча на самій справі воно було отримано

Чарні набагато раніше, ще в 1948 р. [160] для опису квазигеострофічних вихорових рухів "дрібної"атмосфери.

В 1976 р. Ларічев і Резнік знайшли точний розв'язок нелінійного рівняння (3.3) (розглядаючи саме рівняння Чарні) у вигляді відокремленого дипольного вихору (модона), що рухається зі швидкістю u в y-напрямку (тобто в напрямку, перпендикулярному напрямку неоднорідності) [159, 161–165]

$$\Phi_v = au\cos\theta \begin{cases} \left(1 + \dfrac{\beta^2}{\gamma^2}\dfrac{r}{a} - \dfrac{\beta^2}{\gamma^2}\dfrac{J_1(\gamma r/a)}{J_1(\gamma)}\right), & \text{при} \quad r \leqslant a \\ \dfrac{K_1(\beta r/a)}{K_1(\beta)}, & \text{при} \quad r \geqslant a \end{cases}, \tag{3.5}$$

де $x = r\cos\theta$, $y - ut = r\sin\theta$,

$$\beta^2 = a^2\left(1 - \frac{1}{u}\right), \tag{3.6}$$

і γ визначається з рівняння

$$\frac{K_2(\beta)}{\beta K_1(\beta)} = -\frac{J_2(\gamma)}{\gamma J_1(\gamma)} \equiv \delta, \tag{3.7}$$

де J_n і K_n відповідно функції Бесселя й Макдональда порядку n. Величини u і a є вільними параметрами. Рівняння (3.7) має нескінченний набір коренів γ_n, $n = 1, 2, \ldots$, причому при $\beta \to 0$ корінь γ_n прямує до n-го нуля функції $J_1(\gamma_n)$, а при $\beta \to \infty$ – до n-го нуля функції $J_2(\gamma_n)$. Далі скрізь мається на увазі випадок нижайшего кореня й $\gamma = \gamma_1(\beta)$. Поле Φ, його градієнт $\nabla_\perp\Phi$, що визначає іонну швидкість $\mathbf{v}_\perp = \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_\perp\Phi$, і величина $\Delta\Phi$, що визначає завихоренність $(\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_\perp)_z = \Delta\Phi$, є неперервними при $r = a$. З (3.6) випливає, що для модонів з $u > 0$ існує обмеження на абсолютну величину швидкості $|u| < 1$ (у розмірних величинах це означає, що швидкість таких модонів повинна бути менше дрейфової швидкості v_d), тоді як модони з $u < 0$ можуть мати, загалом кажучи, будь-яке значення модуля швидкості $|u|$. Форма модонного розв'язку показана на рис. 3.1.

Унікальною властивістю двовимірних дипольних вихорів (модонів) рівняння (3.3) є їхня сильна стійкість. Аналітичне дослідження стійкості в

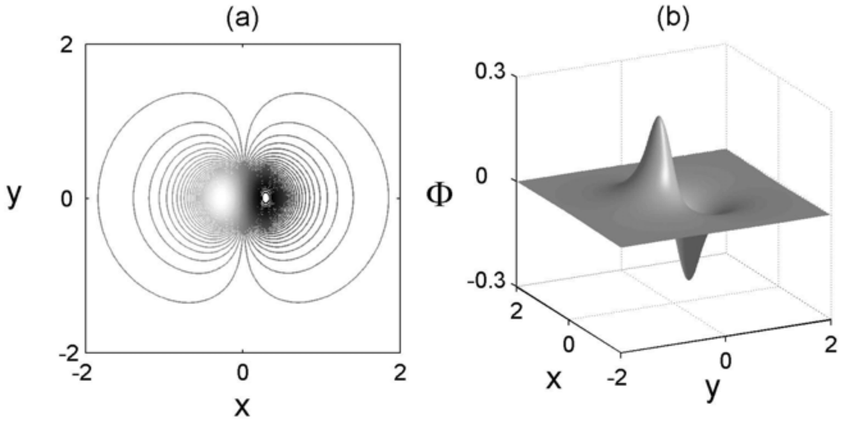

Рис. 3.1 Модонний розв'язок рівняння (3.3) с $a = 0.5$, $u = -0.3$: (a) лінії рівня (b) електростатичний потенціал Φ.

сенсі Ляпунова проводилося в [166, 167]. Чисельні експерименти [168] показують, що модон виживає навіть при накладенні дуже сильних початкових шумових збурень із середньоквадратичною дисперсією порядку $10 - 20\%$ від початкової амплітуди модона. Ще більш дивним виявляється пружний характер зіткнень модонів [169, 170]. При лобових зіткненнях, або у випадку, коли один модон доганяє інший, модони (у тому числі з різними амплітудами, швидкостями й характерними радіусами) проходять друг крізь друга, абсолютно відновлюючи форму, подібно одновимірним солітонам інтегрованих моделей типу Кортевега-де Фриза, нелінійного Шредингера або sine-Gordon. Це наводить на думку про повну интегровність й можливості існування N-модонних розв'язків, однак, це припущення, здається, спростовується результатами отриманими в [171].

Рух модонів у полоідальному напрямку (тобто вздовж осі y), не може, взагалі кажучи, приводити до аномального транспорту в радіальному напрямку (вздовж осі x), однак чисельні розрахунки показують, що зіткнення модонів з ненульовим прицільним параметром (не в чоло) приводять до різкої зміни напрямку руху модонів, після чого вони починають рухатися уздовж осі x, спотворюючи свою форму й руйнуючись за рахунок випромінювання дрейфових хвиль [163, 165]. Це веде, тим самим, до аномально великому переносу частинок плазми поперек зовнішнього магнітного поля.

Лінійна частина (3.3) відповідає вільним дрейфовим хвилям з дисперсією (3.1). У нелінійному стані поле містить як сильнонелінійну (модонну), так і квазілінійну (вільні дрейфові хвилі) компоненту. Щоб описати взаємодію вихору із дрейфовою хвилею, представимо електростатичний потенціал у вигляді

$$\Phi = \Phi_v(x - x_0, y - y_0 - ut) + \Phi_w, \tag{3.8}$$

де поле вихору визначається виразом (3.5), а Φ_w відповідає вільним дрейфовим хвилям і передбачається $\Phi_w \ll \Phi_v$.

$$\frac{\partial}{\partial t}(1 - \Delta)\Phi_w + v_d \frac{\partial \Phi_w}{\partial y} = \{\Phi_v, \Delta\Phi_w\} + \{\Phi_w, \Delta\Phi_v\} \tag{3.9}$$

3.1.2 Розсіювання довгохвильових хвиль

Перепишемо (3.9) у системі координат, що рухається зі швидкістю вихору u в y-напрямку й зробимо підстановку $\Phi_w = \varphi \exp(-i\omega t)$. Для φ маємо рівняння

$$-i\omega(1 - \Delta)\varphi + (v_d - u - u\Delta)\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \{\Phi_v, \Delta\varphi\} + \{\varphi, \Delta\Phi_v\} \tag{3.10}$$

Розглядаємо випадок довгохвильових дрейфовых хвиль, так що виконана умова

$$|(v_d - u)/u| \gg k^2 \tag{3.11}$$

(або, в еквівалентній формі $\beta^2 \gg k^2 a^2$), де k характерне хвильове число збурень дрейфового типу, і вводячи функцію Ψ співвідношенням $\varphi = \Psi \exp(iqy)$, де $Q = (v_d - u)/2\omega$, з рівняння (3.10) можна одержати

$$\Delta\Psi + \kappa^2\Psi = \hat{L}\Psi, \tag{3.12}$$

де $\kappa^2 = Q^2 - 1$ і оператор $\hat{L}$ має вигляд

$$\begin{aligned}\hat{L} = -\frac{i}{\omega}\Bigg\{&\left[\frac{\partial \Phi_v}{\partial x}\left(iq + \frac{\partial}{\partial y}\right) - \frac{\partial \Phi_v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\left(iq + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] \\ &+ \frac{\partial(\Delta\Phi_v)}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial(\Delta\Phi_v)}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial(\Delta\Phi_v)}{\partial x}\left(iq + \frac{\partial}{\partial y}\right)\Bigg\}\end{aligned} \tag{3.13}$$

Рівняння (3.1.2) може бути представлено в інтегральній формі

$$\Psi(\mathbf{r}) = w(\mathbf{r}) + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\hat{L}\Psi(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \tag{3.14}$$

де $w(\mathbf{r})$ загальний розв'язок і $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ функція Гріна рівняння

$$\Delta\Psi + \kappa^2\Psi = 0. \tag{3.15}$$

Розглядаємо граничні умови, що відповідають падаючої та розсіяної хвилі. Тоді $w = \exp(i\mathbf{q}_0\cdot\mathbf{r})$, $q_0^2 = \kappa^2$ і функція Гріна має вигляд

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{1}{4}ih_0^{(1)}(q_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|), \tag{3.16}$$

де $H_0^{1)}$ функція Ханкеля першого роду нульового порядку. Тоді з (3.14) одержимо

$$\Psi(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{q}_0\cdot\mathbf{r}) - \frac{i}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(q_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\hat{L}\Psi(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \tag{3.17}$$

Останній доданок у правій частині (3.17) описує розсіювання дрейфової хвилі на вихорі. У борнівском наближенні маємо

$$\Psi(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{q}_0\cdot\mathbf{r}) - \frac{i}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(q_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\exp(i\mathbf{q}_0\cdot\mathbf{r}')U(\mathbf{r}')d\mathbf{r}', \tag{3.18}$$

де

$$U(\mathbf{r}) = \frac{\hat{L}\exp(i\mathbf{q}_0\cdot\mathbf{r})}{\exp(i\mathbf{q}_0\cdot\mathbf{r})} \tag{3.19}$$

У такій формі (3.18) подібно рівнянню, що описує розсіювання квантово-механічній частинки з імпульсом $\mathbf{q}_0$ розсіючим двовимірним потенціалом $U(\mathbf{r})$ [172]. Враховуючи, що вихоровий розв'язок (3.5) задовольняє наступним співвідношенням

$$\Delta\Phi_v = \begin{cases} \dfrac{(\beta^2+\gamma^2)u}{a^2}x - \dfrac{\gamma^2}{a^2}\Phi_v, & \text{при} \quad r \leqslant a \\ \dfrac{\beta^2}{a^2}\Phi_v, & \text{при} \quad r \geqslant a \end{cases}, \tag{3.20}$$

з (3.1.2) і (3.19) можна одержати

$$U(r,\theta)=\frac{1}{\omega}\begin{cases}\left(q_x\dfrac{\partial\Phi_v}{\partial y}-k_0\dfrac{\partial\Phi_v}{\partial x}\right)(k_0^2+q_x^2) & \\ -q_x\dfrac{\gamma^2}{a^2}\dfrac{\partial\Phi_v}{\partial y}-k_0\left[\dfrac{(\beta^2+\gamma^2)u}{a^2}-\dfrac{\gamma^2}{a^2}\dfrac{\partial\Phi_v}{\partial x}\right], & \text{при} \quad r\leqslant a\\ \left(q_x\dfrac{\partial\Phi_v}{\partial y}-k_0\dfrac{\partial\Phi_v}{\partial x}\right)(k_0^2+q_x^2) & \\ +q_x\dfrac{\beta^2}{a^2}\dfrac{\partial\Phi_v}{\partial y}-k_0\dfrac{\beta^2}{a^2}\dfrac{\partial\Phi_v}{\partial x}, & \text{при} \quad r\geqslant a\end{cases} \tag{3.21}$$

де $k_0=Q+q_y$, $\mathbf{q}_0=(q_x,q_y)$ і

$$\frac{\partial\Phi_v}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial r}\cos^2\theta+\frac{F}{r}\sin^2\theta,\quad \frac{\partial\Phi_v}{\partial y}=\left(\frac{\partial F}{\partial r}-\frac{F}{r}\right)\sin\theta\cos\theta \tag{3.22}$$

де $F(r)$ радіальна частина вихорового розв'язку Φ_v, тобто $\Phi_v=F(r)\cos\theta$. З (3.5) і (3.21) можна бачити, що $U(\mathbf{r})$ експоненціально убуває при $r\to\infty$ і ефективний радіус потенціалу $U(\mathbf{r})$ порядку радіуса вихору a. На більших відстанях від центру вихору $r\gg r'$ можна написати $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\approx r-\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n}'$, $\mathbf{n}'=\mathbf{r}/r$. Використовуючи асимптотичний вираз $H_0^{(1)}(z)\sim\sqrt{2/\pi z}\exp(iz-i\pi/4)$ для функції Ханкеля при $z\to\infty$, з (3.18) одержимо, що на великих відстанях від центру вихору загальне поле є суперпозицією падаючої й розсіюваної хвиль

$$\Psi\sim e^{i\mathbf{q}_0\cdot\mathbf{r}}+\frac{f(\mathbf{n}_0,\mathbf{n}')}{\sqrt{r}}e^{iq_0r}, \tag{3.23}$$

де $\mathbf{n}_0=\mathbf{q}_0/q_0$ і амплітуда розсіювання має вигляд

$$f(\mathbf{n}_0,\mathbf{n}')=-\frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi q_0}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'}U(\mathbf{r}')d\mathbf{r}', \tag{3.24}$$

з $\mathbf{q}=\mathbf{q}'-\mathbf{q}_0$, $\mathbf{q}'=q_0\mathbf{n}'$ і $q=2q_0\sin(\alpha/2)$, де α кут розсіювання.

Для застосовності борнівського наближення необхідно, щоб другий доданок у правій частині (3.18) був малий у порівнянні з першим. Ми розглядаємо випадок, коли довжина дрейфової хвилі більше радіуса вихору $q_0a<1$. Враховуючи, що потенціал $U(\mathbf{r})$ убуває експоненціально при $r>a$ та головний внесок в інтеграл дає область $r<a$ і використовуючи асим-

птотику $H_0^{(1)}(z) \sim \ln(1/z)$ при $z \to 0$, оцінка інтеграла в (3.18) приводить до умови

$$a^2|U_m|\ln(1/q_0a) \ll 1, \tag{3.25}$$

де U_m максимальне значення $U(\mathbf{r})$. Виявляється, однак, що при інтегруванні по куту в (3.24) перші два доданки в розкладанні експоненти по параметру q_0a дають нуль і оцінка (3.25) повинна бути скоректована на множник $q_0^2a^2$. Для U_m з (3.5) (3.21) випливає оцінка $|U_m| \sim (q_0/\omega a)(q_0^2+\beta^2/a^2)\Phi_{v,max}$, і враховуючи (3.11), приходимо до наступної умови застосовності борнівського наближення

$$\ln\left(\frac{1}{q_0a}\right) q_0^2a^2\beta^2 \ll \frac{c}{v_0} \lesssim 1, \tag{3.26}$$

де $c \approx \omega/q_0$ фазова швидкість лінійної дрейфової хвилі й $v_0 \approx \Phi_{v,max}/a$ максимальна швидкість частинок у вихорі.

Вибираючи ψ кут так, що $\psi = 0$ відповідає падінню хвилі уздовж осі y ($q_x = q_0 \sin\psi$, $q_y = q_0\cos\psi$), з (3.24) маємо

$$f = -\frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi q_0}}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} U(r,\theta)\exp[-2iq_0r\sin(\alpha/2)\cos(\theta+\alpha/2+\psi)]rdrd\theta, \tag{3.27}$$

де $U(r,\theta)$ визначене в (3.21). Припускаючи $q_0a \ll 1$ і розкладаючи експоненту в (3.27) до членів порядку $q_0^2a^2 \ll 1$ включно, для амплітуди розсіювання одержимо

$$f(\alpha) = \frac{\pi e^{i\pi/4}(k_0^2+q_x^2)}{4\omega\sqrt{2\pi q_0}}\left(1+\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)(4\delta+1)q_0^2a^4u \tag{3.28}$$

$$\times\sin^2(\alpha/2)[2k_0\cos^2(\alpha/2+\psi) - q_x\sin(\alpha+2\psi)]. \tag{3.29}$$

Можна бачити, що, у загальному випадку, кутова залежність амплітуди розсіювання немонотонна й суттєво залежить від кута падіння хвилі ψ, але у всіх випадках відсутнє розсіювання вперед. При ψ, тобто падінні уздовж осі y, вираз для $|f(\alpha)|$ має вигляд

$$|f(\alpha)| = \frac{\sqrt{\pi}(Q+q_0)^2}{2^{5/2}\omega}\left(1+\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)(4\delta+1)q_0^{3/2}a^4u\sin^2\alpha. \tag{3.30}$$

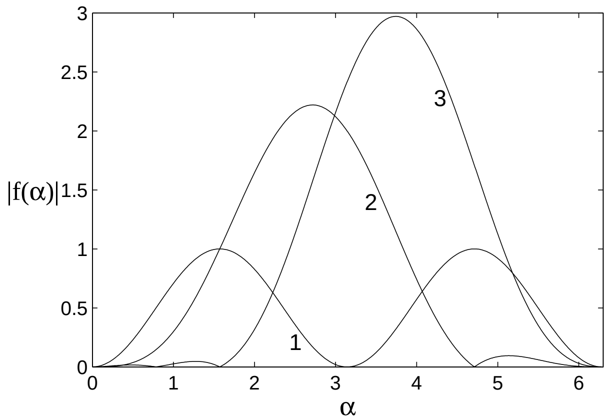

Рис. 3.2 Залежність амплітуди розсіювання $|f(\alpha)|$ від кута розсіювання α для для різних кутів падіння ψ: крива 1 – $\psi = 0$, крива 2 – $\psi = \pi/2$, крива 3 – $\psi = \pi/4$

У цьому випадку відсутнє також розсіювання назад ($\alpha = \pi$), а розсіювання в напрямку, перпендикулярному напрямку падіння хвилі ($\alpha = \pi/2$), максимально. При цьому розсіювання симетрично стосовно x і y осям, що є наслідком симетрії ефективного потенціалу $U(r, \theta)$ в випадку $q_x = 0$. Функція $|f(\alpha)|$ у цьому випадку показана на рис. 3.2 кривій 1. При падінні дрейфової хвилі в x-напрямку ($\psi = \pi/2$), маємо

$$|f(\alpha)| = \frac{\sqrt{\pi}(Q^2 + q_0^2)}{2^{5/2}\omega} \left(1 + \frac{\beta^2}{\gamma^2}\right) (4\delta + 1) q_0^{3/2} a^4 u \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left[2Q \sin^2 \frac{\alpha}{2} + q_0 \sin \alpha\right]. \tag{3.31}$$

Розсіювання відсутнє в напрямках $\alpha = 0$ і α_{cr}, обумовленим співвідношенням $2Q\sin^2(\alpha/2) + q_0 \sin \alpha = 0$. Відзначимо, що в цьому випадку (і для інших $\psi \neq 0$) розсіювання асиметричне по відношенню до напрямку падіння. Наприклад, з (3.31) випливає, що розсіювання на кут $\alpha < \pi$ більш інтенсивно, ніж на кут $\alpha + \pi$. Функція $|f(\alpha)|$ у цьому випадку показана на рис. 3.2 кривій 2.

Загальний переріз розсіювання σ може бути отримано з (3.28) інтегруванням $|f(\alpha)|^2$ по куту α. Це дає

$$\sigma = \frac{\pi^2 Q^6}{32\omega^2} \left(1 + \frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)^2 (4\delta + 1)^2 q_0^3 a^8 u^2 B(\psi, \epsilon), \tag{3.32}$$

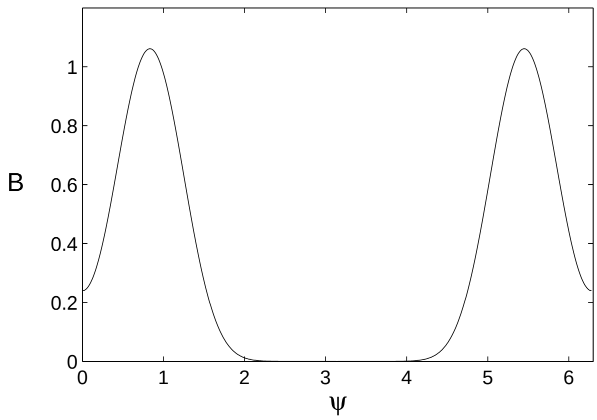

Рис. 3.3 Залежність функції $B(\psi, \epsilon)$ від кута падіння ψ для $\epsilon = 1$.

де

$$B(\psi,\epsilon) = \left(\frac{35}{16} - \frac{5}{2}\cos^2\psi + \frac{1}{2}\cos^4\psi + \frac{55}{8}\epsilon\cos\psi - \frac{17}{2}\epsilon\cos^3\psi \right.$$
$$\left. +2\epsilon\cos^5\psi + \frac{5}{16}\epsilon^2 + \frac{39}{8}\epsilon^2\cos^2\psi - 7\epsilon^2\cos^4\psi + 2\epsilon^2\cos^6\psi\right)$$
$$\times(1 + 2\epsilon\cos\psi + \epsilon^2)^2 \tag{3.33}$$

і $\epsilon = q_0/Q$. Відзначимо, що $B(\psi, \epsilon) > 0$. Залежність функції $B(\psi, \epsilon)$ від кута падіння ψ для $\epsilon = 1$ показана на рис. 3.3. Картина якісно не залежить від значення ϵ. Переріз розсіювання має максимум для кутів ψ близьких до 1 і $2\pi - 1$, і різко зменшується, падаючи практично до нуля, у досить широкої області поблизу $\psi \sim \pi$. В останньому випадку вихор стає майже "прозорим"для падаючої хвилі. Для кутів $\psi \approx 1$ вираз (3.32) приводить до наступної оцінки перерізу розсіювання у випадках $\beta \ll 1$ (модон зі швидкістю u, близької до дрейфової v_d і фіксованим a) і $\beta \gg 1$ (майже нерухливий модон з $u \to 0$, і фіксованим a)

$$\sigma \sim \begin{cases} 2\pi^2(q_0a)^3\left(\dfrac{u}{\omega}\right)^8\left(1 - \dfrac{v_d}{u}\right)^4 a, & (\beta \ll 1) \\ \dfrac{\pi^2}{32}(q_0a)^3\left(\dfrac{av_d}{\omega}\right)^8 a, & (\beta \gg 1) \end{cases}. \tag{3.34}$$

3.1.3 Ейкональне наближення

Тут розглянемо випадок, коли довжина падаючої хвилі багато більше радіуса модона, тобто $q_0 a \gg 1$. У цьому короткохвильовому випадку можна використовувати ейкональне наближення [172]. Вибираючи напрямок падіння хвилі уздовж осі y, і представляючи Ψ у вигляді $\Psi = W(x, y)\exp(iq_0 y)$, де W функція повільно змінюється в порівнянні з $\exp(iq_0 y)$, з (3.12) маємо

$$2iq_0 \frac{\partial W}{\partial y} = U(x, y)W, \tag{3.35}$$

де $U(x, y)$ визначене в (3.19). Рівняння (3.35) має розв'язок

$$W = \exp\left(-\frac{i}{2q_0}\int_{-\infty}^{y} U(x, y)dy\right). \tag{3.36}$$

Використовуючи асимптотичний вираз для $H_0^{(1)}$ на великих відстанях, можна записати другий доданок в (3.17) (розсіювана хвиля) у вигляді

$$\Psi_{sc} = \frac{f}{\sqrt{r}} e^{iq_0 r} \tag{3.37}$$

з амплітудою розсіювання

$$f = -\frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi q_0}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iq_0 \mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}')\hat{L}\Psi(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'. \tag{3.38}$$

Підставляючи Ψ, обумовлене W в (3.35), в (3.38), одержимо

$$f = -\frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi q_0}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(iq_0 y' - iq_0 \mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}')U(x', y')W(x', y')dx'dy'. \tag{3.39}$$

Завдяки тому, що $q_0 a \gg 1$, розсіювання йде усередині малих кутів $\Delta\alpha \approx 1/q_0 a$ (поза цим конусом експонента в (3.39) є швидко осцілюючою функцією й інтеграл малий), так що вектор переданого імпульсу майже перпендикулярний хвильовому вектору падаючої хвилі й можна написати

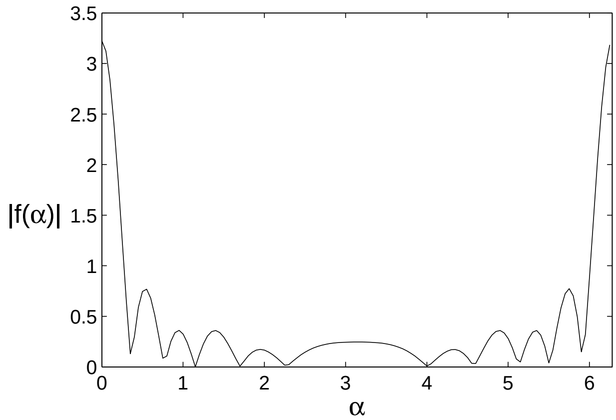

Рис. 3.4 Залежність амплітуди розсіювання $|f(\alpha)|$ від кута розсіювання α в ейкональном наближенні.

$iq_0y' - iq_0\mathbf{n}'\cdot\mathbf{r}' \approx iqx'$. Тоді вираз (3.39) має вигляд

$$f = e^{-i\pi/4}\sqrt{\frac{q_0}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(iqx')\frac{\partial W}{\partial y'}dx'dy', \qquad (3.40)$$

і, після інтегрування по y', для амплітуди розсіювання одержуємо

$$f(\alpha) = e^{-i\pi/4}\sqrt{\frac{q_0}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{\exp[i\mu(x)]-1\}\exp\left(2iq_0x\sin\frac{\alpha}{2}\right)dx, \quad (3.41)$$

де

$$\mu(x) = -\frac{1}{2q_0}\int_{-\infty}^{\infty}U(x,y)dy \qquad (3.42)$$

Через швидко осцілюючий множник $\exp[2iq_0x\sin(\alpha/2)]$ головний внесок в (3.41) дає область $x^2 \ll a^2$ і з урахуванням цього, після прямих обчислень, можна одержати

$$\mu(x) = c - dx^2, \qquad (3.43)$$

де

$$c = \frac{k_0ua}{q_0\omega}\left[k_0^2\left(1+\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right) - \left(k_0^2 - \frac{\gamma^2}{a^2}\right)\frac{\beta^2}{\gamma^2J_1(\gamma)} + \frac{\beta^2}{a^2}\right], \qquad (3.44)$$

$$d = \frac{k_0u}{q_0a\omega}\left[2k_0^2\left(1+\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right) - 2\left(k_0^2 - \frac{\gamma^2}{a^2}\right)\frac{\beta^2}{J_1(\gamma)} + \frac{\beta^2}{a^2}\right]. \qquad (3.45)$$

З (3.41) і (3.43) для амплітуди розсіювання в ейкональному наближенні маємо

$$f(\alpha) = e^{-i\pi/4}\sqrt{\frac{q_0}{2\pi}}\left\{\frac{2\sin[q_0 a\sin(\alpha/2)]}{q_0\sin(\alpha/2)} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{d}}\exp\left[i\left(c + \frac{q_0^2}{4d}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\right]\right\}. \tag{3.46}$$

Залежність модуля амплітуди розсіювання $|f(\alpha)|$ від кута розсіювання α для $q_0 a = 9$ показана на рис. 3.4. Розсіювання сильно анизотропно й, головним чином, зосереджене усередині конуса $\Delta\alpha \approx 1/q_0 a \ll 1$ з максимумом в $\alpha = 0$. Загальний переріз розсіювання σ можна легко знайти, використовуючи оптичну теорему (яка не має місця в борнівском наближенні) [172], яка зв'язує σ с уявною частиною амплітуди розсіювання на нульовий кут $\operatorname{Im} f(0)$. У нашому випадку оптична теорема має вигляд

$$\sigma = \sqrt{\frac{8\pi}{q_0}}\operatorname{Im}\left[e^{-i\pi/4}f(0)\right]. \tag{3.47}$$

З (3.46), (3.47) одержуємо переріз розсіювання в ейкональном наближенні

$$\sigma = 4\left[a - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{d}}\cos c\right]. \tag{3.48}$$

Видно, що переріз розсіювання близький до подвоєного діаметра модона $4a$ (оскільки $d \gg 1$). Це природній результат для ейконального наближення. Дійсно, при $q_0 a \gg 1$ падаюча хвиля може розглядатися як пучок частинок. Майже всі "частинки"із прицільним параметром $\rho < a$ розсіюються, і область, близька до $2a$, може розглядатися як абсолютно поглинаюча. При цьому, у відповідність із принципом Бабіне [172], переріз розсіювання дорівнює подвоєному поглинаючому (геометричному) перерізу.

3.2 Захоплення дрейфових хвиль дрейфовими вихорами

Крім розв'язків, що відповідають розсіяним дрейфовим хвилям, рівняння (3.10) може мати, при деяких значеннях ω, розв'язки локалізовані в просторі. Цей випадок відповідає захопленню дрейфових хвиль вихором. При умовах $|\nabla_\perp \Psi| \ll |Q|$ і $Q^2 a^2 \ll \beta^2$, рівняння (3.12) для функції Ψ можна звести до рівняння Шредингера

$$\Delta\Psi + V(x,y)\Psi = 0, \tag{3.49}$$

з потенціалом

$$\begin{aligned} V(x,y) = Q^2 - 1 + \chi(a-r)\frac{uq}{\omega} \\ \times\left\{Q^2\left(1+\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right) - \frac{\beta^2(Q^2-\gamma^2/a^2)}{\gamma J_1(\gamma)}\left[\frac{dj_1(z)}{dz}\cos^2\theta + \frac{J_1(z)}{z}\sin^2\theta\right]\right\} \\ +\chi(r-a)\frac{uq}{\omega}\left\{\frac{\beta(Q^2-\gamma^2/a^2)}{K_1(\beta)}\left[\frac{dk_1(g)}{dg}\cos^2\theta + \frac{K_1(g)}{g}\sin^2\theta\right]\right\}, \end{aligned} \tag{3.50}$$

де

$$z = \frac{\gamma r}{a}, \quad g = \frac{\beta r}{a}, \quad \chi(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad \xi \geqslant 0 \\ 0, & \text{при} \quad r \geqslant a \end{cases}. \tag{3.51}$$

В області $r < a$ форма потенціалу в (3.49) залежить від знака $Q^2 - \gamma^2/a^2$. Якщо $Q^2 < \gamma^2/a^2$, ефективний потенціал $V(x,y)$ усередині модона має єдиний мінімум у центрі ($x = 0$, $y = 0$), або два локальних мінімуму з боків ($x = \pm x_0$, $y = 0$) якщо $Q^2 > \gamma^2/a^2$.

3.2.1 Захоплення дрейфових мод у центрі вихору

Спочатку розглянемо випадок захоплення дрейфових збурень у центрі модона, припускаючи $Q^2 < \gamma^2/a^2$. Використовуючи розкладання функції Бесселя $J_1(z)$ поблизу центру $z = 0$, з (3.49) і (3.2) можна одержати

$$\Delta\Psi + (E - px^2 - qy^2)\Psi = 0, \tag{3.52}$$

де

$$E = Q^2 - 1 + 2Q^2a^2\left[\frac{Q^2-\gamma^2/a^2}{2\gamma J_1(\gamma)} - Q^2\left(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)\right], \tag{3.53}$$

$$q = \frac{\gamma Q^2(Q^2 - \gamma^2/a^2)}{8J_1(\gamma)}, \quad p = 3q. \tag{3.54}$$

Помітимо, що $J_1(\gamma) < 0$ і необхідні умови існування локалізованих мод (тобто захоплення)

$$E > 0, \quad p, q > 0 \tag{3.55}$$

виконані. Рівняння (3.52) має локалізовані власні функції

$$\Psi_{ln} = H_l(\sqrt{p}x)H_n(\sqrt{q}y), \tag{3.56}$$

де

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2/2}\left(\frac{d^n}{d\xi^n}\right)e^{-\xi^2/2} \tag{3.57}$$

за умови

$$E_{ln} = \sqrt{p}(2l+1) + \sqrt{q}(2n+1) = \sqrt{q}\lambda_{ln}, \tag{3.58}$$

де $\lambda_{ln} = \sqrt{3}(2l+1) + 2n + 1$ і $l, n = 0, 1, 2\ldots$. Рівняння (3.52) визначає дискретний спектр власних значень Q_{ln}. Власні частоти захоплених мод ω_{ln} визначаються з (3.58). З рівнянь (3.53), (3.54) і (3.58) випливає, що

$$\left[\frac{1}{\gamma|J_1(\gamma)|} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)\right]Q^4a^4 - Q^2a^2\left[1 + \frac{\gamma}{|J_1(\gamma)|}\right] + a^2 + \sqrt{q}\lambda_{ln} = 0 \tag{3.59}$$

Розглянемо два граничні випадки. Нехай Q^2 близько до γ^2/a^2, так що $Q^2 = \gamma^2/a^2 - s^2$, де $s^2 \ll \gamma^2/a^2$. Тоді з (3.54), (3.59) маємо

$$\left[\frac{\gamma}{|J_1(\gamma)|} + \frac{\gamma^2}{\beta^2}\right]a^2s^2 - \left[\frac{\gamma^3}{8|J_1(\gamma)|}\right]^{1/2}\lambda_{ln}as + \frac{\gamma^2}{2} - a^2 - \frac{\gamma^4}{2\beta^2} = 0. \tag{3.60}$$

Для $\beta^2 \gg \gamma^2$ (модон зі швидкістю багато меншої дрейфової) одержуємо

$$as = \sqrt{\gamma|J_1(\gamma)|}\left(\frac{\lambda_{ln}}{2\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{\lambda_{ln}^2}{32} - \frac{1}{2} + \frac{a^2}{\gamma^2}}\right). \tag{3.61}$$

Умова $s \ll \gamma/a$ виконане, якщо $\lambda_{ln} \ll \sqrt{8\gamma/|J_1(\gamma)|}$, тобто для декількох нижайших мод. Область локалізації $\delta x \approx \delta y \approx q^{-1/4}$ захоплених мод повинна бути менше $2a/\gamma$. Для власних частот ω_{ln} маємо

$$\omega_{ln} = \frac{u^2\beta^4}{4a^2(\gamma^2 - \gamma|J_1(\gamma)|\lambda_{ln}^2/8)}. \tag{3.62}$$

У межі $Q^2a^2 \ll \gamma^2$ можна зневажити першим доданком в (3.59) і одержати

$$\left(1 + \frac{\gamma}{|J_1(\gamma)|}\right) Q^2a^2 - \gamma\sqrt{\frac{\gamma}{8|J_1(\gamma)|}}\lambda_{ln}Qa - a^2 = 0 \tag{3.63}$$

звідки для власних частот маємо

$$\omega_{ln}^2 = \frac{u\beta^2}{2a\sqrt{\gamma|J_1(\gamma)|/8}(\lambda_{ln}/2 + \sqrt{\lambda_{ln}/4} + 8a^2|J_1(\gamma)|/\gamma^3)} \approx \frac{u\beta^2}{2a\lambda_{ln}\sqrt{\gamma|J_1(\gamma)|}}, \tag{3.64}$$

а просторовий розподіл поля захоплених дрейфових хвиль дається власними функціями (3.56).

3.2.2 Захоплення на периферії вихору

У випадку $Q^2 > \gamma^2/a^2$ ефективний потенціал в (3.49) має локальний максимум у центрі $x = y = 0$ і симетричний відносно x і y осі. В x напрямку в області $x < a$ форма потенціалу визначається функцією $dJ_1(z)/dz$, яка має мінімум (приблизно 0.4) у точці $x_0 = 3.5a/\gamma$. Поведінка потенціалу в y напрямку (для $y \lesssim a$) визначається функцією $J_1(z)/z$, яка має максимум при $z = 0$ і мінімум при $z \approx 5.1$. Цей мінімум лежить, однак поза колом $r \leqslant a$. Таким чином, у випадку $Q^2 > \gamma^2/a^2$ ефективний потенціал має два мінімуми у точках $x = \pm x_0$, $y = 0$, тобто на периферії модона. Поблизу $x = x_0$, $y = 0$ потенціал може бути апроксимовано параболоїдом і тоді рівняння (3.49) має вигляд

$$\Delta\Psi + [W - p_1(x - x_0)^2 - q_1y^2]\Psi = 0, \tag{3.65}$$

де

$$W = Q^2 - 1 - \frac{2Q^2a^2}{\beta^2}\left[Q^2\left(1 + \frac{\beta^2}{\gamma^2}\right) - \frac{0.4\beta^2(Q^2 - \gamma^2/a^2)}{\gamma|J_1(\gamma)|}\right], \tag{3.66}$$

$$p_1 = \frac{0.175\gamma}{|J_1(\gamma)|} Q^2 \left(Q^2 - \frac{\gamma^2}{a^2} \right), \quad q_1 = \frac{p_1}{z_0}. \tag{3.67}$$

Дисперсійне рівняння для власних значень Q_{ln} тепер має вигляд

$$W = \lambda_{ln} \sqrt{p_1}, \tag{3.68}$$

де

$$\lambda_{ln} = (2l + 1) + \frac{(2n + 1)}{\sqrt{z_0}}. \tag{3.69}$$

При розгляді граничного випадку $Q^2 = \gamma^2/a^2 + s^2$ с $s^2 \ll \gamma^2/a^2$, з (3.68) можна одержати

$$sa = \sqrt{\gamma |J_1(\gamma)|} \left(0.42\lambda_{ln} + \sqrt{0.175\lambda_{ln}^2 - 1/2 + a^2/\gamma^2} \right) \tag{3.70}$$

Умова $s \ll \gamma/a$ виконана при $a \lesssim \gamma$ для нижчих мод з $\lambda_{ln} \lesssim 10$ ($\lambda_{00} = 2.77$, $\lambda_{01} = 4.77$, $\lambda_{10} = 6.31$, $\lambda_{11} = 8.33$, $\lambda_{20} = 9.85$, $\ldots$). При цьому також виконується умова $\delta x \approx p_1^{-1/4} < 1.5a/\gamma$ для області локалізації δx захопленої моди.

3.3 Взаємодія вихорів з електромагнітною хвилею

Розглянемо тепер поширення звичайної електромагнітної хвилі майже поперек ($k_\perp \gg k_z$) зовнішнього магнітного поля та поляризовану уздовж z напрямку ($E_z \gg E_\perp$) у присутність вихору. Рівняння для компоненти E_z у системі координат, пов'язаної з вихором, має вигляд

$$\Delta_\perp E_z + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\delta n}{n_0} \right) E_z = 0, \tag{3.71}$$

де $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m_e}$ ленгмюрівська частота, n_0 рівноважна густина плазми, $E_z \sim \exp(i\omega t)$ і $\omega = \omega' - k_y u$ (ω' – частота електромагнітної хвилі в лабораторній системі координат і $\omega \approx \omega'$ через $\omega' \gg k_y u$). Ефект розсіювання на вихорі враховує останній додаток у дужках рівняння (3.71), де збурення густини δn визначається полем дипольного вихору (3.5). У той же час електромагнітна хвиля передбачається досить слабкою, так що вона не збурює сам вихор, тобто

$$\frac{|E_z|^2\omega_{pe}^2}{16\pi n_0 T_e \omega^2} \ll \frac{\delta n}{n_0}, \tag{3.72}$$

і, з іншого боку, несуттєвий ефект самофокусування.

Аналіз, аналогічний проробленому в попередніх підрозділах, показує, що за умови

$$\left|\frac{\delta n}{n_0}\right| \ll \frac{c^2}{\omega_{pe}^2 a^2} k_0 a, \tag{3.73}$$

де k_0 хвильове число падаючої електромагнітної хвилі, застосовне борнівське наближення, у рамках якого амплітуда розсіювання хвилі на вихорі може бути записана у вигляді

$$f(\alpha) = -\frac{\omega_{pe}^2}{2\sqrt{2\pi k_0} c^2} e^{i\pi/4} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\delta n(\mathbf{r})}{n_0} e^{-iqr\sin(\varphi-\psi-\alpha/2)} r\, dr d\varphi, \tag{3.74}$$

де α кут розсіювання, ψ кут між напрямком падіння хвилі й віссю x, φ полярний кут, $q = 2k_0\sin(\alpha/2)$. Інтеграли обчислюються до кінця й амплітуда розсіювання має вигляд

$$f(\alpha) = A\left(1 + \frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)$$
$$\times\left[\frac{J_1(qa)\beta^2\gamma^2\delta - qaj_2(qa)(\gamma^2 - \beta^2 - q^2a^2)}{(\gamma^2 - q^2a^2)(\beta^2 + q^2a^2)} + \frac{J_2(qa)}{qa}\right]\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \psi\right), \tag{3.75}$$

де $A = \omega_{pe}^2 a^3 u \exp(3i\pi/4)\sqrt{\pi/2k_0}/\omega^2 c^2$, J_n функція Бесселя n-порядку. Відзначимо, що при $qa \to \gamma$ вираз (3.75) для $f(\alpha)$ залишається кінцевим (в силу співвідношення (3.7)). Розсіювання під кутом $\alpha = 2\psi$ завжди відсутнє.

Далі розглянемо більш докладно випадок $k_0 a \ll 1$ (довжина падаючої хвилі багато більше розміру модона) та $\psi = \pi/2$ (хвиля падає в напрямку руху модона). Тоді з (3.75) маємо

$$|f(\alpha)|^2 = |A|^2\left(1 + \frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)^2 \beta^4 \left(\delta + \frac{1}{4}\right)^2 \frac{k_0^2 a^2 \sin^2\alpha}{\left(\beta^2 + 4k_0^2 a^2 \sin^2(\alpha/2)\right)^2} \tag{3.76}$$

Розсіювання максимальне при кутах α_m, обумовлених з

$$\cos\alpha_m = \frac{2k_0^2}{1 - v_d/u + 2k_0^2} \tag{3.77}$$

і не залежить від радіуса модона a. Розсіювання "назад"($\alpha = \pi$) і "уперед"($\alpha = 0, 2\pi$) відсутнє.

Далі розглянемо два граничні випадки: $\beta \ll 1$ (великомасшабний модон з повільно спадаючою зовнішньою частиною) та $\beta \gg 1$ (модон, що різко обривається при $r > a$). При $\beta \ll 1$ маємо $\gamma \approx \gamma_n$, де $J_1(\gamma_n) = 0$ і $\delta \approx 2/\beta^2 \gg 1$. Тоді з (3.76) випливає

$$|f(\alpha)|^2 = |A|^2 \frac{k_0^2 a^2 \sin^2\alpha}{\left(\beta^2 + 4k_0^2 a^2 \sin^2(\alpha/2)\right)^2} \tag{3.78}$$

У випадку $(1 - v_d/u) \ll k_0^2$ (тобто $\beta^2 \ll 2k_0^2 a^2 \ll 1$) маємо $\cos\alpha_m = 1 - (1 - v_d/u)/2k_0^2$, тобто розсіювання йде переважно на малі кути. Диференціальний переріз розсіювання у напрямку оптимальних кутів $d\sigma_m = (|A|^2/4\beta^2)d\alpha_m$ зростає з зменшенням β, тобто при наближенні швидкості модона до дрейфової швидкості v_d. Якщо ж $2k_0^2 a^2 \ll \beta^2 \ll 1$б то $\cos\alpha_m = 2k_0^2/(1 - v_d/u) \ll 1$, тобто кут максимального розсіювання близький до $\pi/2$ і розсіювання йде переважно під більшими кутами до напрямку руху модона. При цьому $|f(\alpha_m)|^2 = |A|^2 k_0^2 a^2/\beta^4$.

Для модонів з різко спадаючою зовнішньою частиною ($\beta \gg 1$) маємо $\gamma \approx \gamma_n$, де $J_2(\gamma_n) = 0$ і $\delta = 1/\beta \ll 1$.Тоді з (3.76) випливає

$$|f(\alpha)|^2 = |A|^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)^2 \frac{k_0^2 a^2 \sin\alpha}{64} \tag{3.79}$$

і максимум розсіювання досягається для кутів, близьких до $\pi/2$: $\cos\alpha_m = 2k_0^2 a^2/\beta^2 \ll 1$.

Інтегруванням (3.76) по куту α одержуємо повний переріз розсіювання

$$\sigma = |A|^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)^2 \beta^4 \frac{\pi(\delta + 1/4)^2}{8k_0^2 a^2} \left(\frac{\beta^2 + 2k_0^2 a^2}{\beta\sqrt{\beta^2 + 4k_0^2 a^2}} - 1\right). \tag{3.80}$$

Цей вираз істотне спрощується для перерахованих вище граничних випадків

$$\sigma = |A|^2 \begin{cases} \dfrac{\pi}{8k_0 a\beta}, & \text{при} \quad \beta^2 \ll 2k_0^2a^2 \\ \dfrac{\pi}{4\beta^2}k_0^2a^2, & \text{при} \quad 2k_0^2a^2 \ll \beta^2 \ll 1 \\ \left(1+\dfrac{\beta^2}{\gamma^2}\right)^2 \dfrac{\pi k_0^2 a^2}{32}, & \text{при} \quad \beta \gg 1 \end{cases} . \tag{3.81}$$

Переріз розсіювання росте при $\beta \to 0$ в області $\beta \ll 1$ і при $\beta \to \infty$ в області $\beta \gg 1$. Ріст σ при малих $\beta < k_0 a$ зі зменшенням β пов'язано із збільшенням ефективного радіуса модона, який виявляється значно більше a. У той же час при більших $\beta > 1$ з ростом β більш різко ніж падає ефективний радіус (до розмірів $\sim a$) росте амплітуда модона, що приводить до більш ефективної взаємодії із хвилею. Мінімальне значення перерізу розсіювання лежить в області $\beta \sim a/\sqrt{1 - v_d/u} \sim 1$. У цьому випадку для σ можна одержати наступну оцінку

$$\sigma \sim (k_0 a)^5 \left(\frac{a}{L_n}\right)^2 \left(\frac{u}{v_d}\right)^2 a \ll a, \tag{3.82}$$

тобто переріз розсіювання виявляється багато менше характерного розміру модона й він стає майже "прозорим"для електромагнітної хвилі.

Вище було розглянуто випадок лобового падіння хвилі ($\psi = \pi/2$). Аналогічним чином можна проаналізувати випадок бічного ($\psi = 0$) падіння. При цьому $|f(\pi)| \neq 0$, тобто з'являється розсіювання "назад однак результати, що стосуються інтегрального перерізу розсіювання, змінюються несуттєво. Зокрема, висновок про те, що при $\beta \sim 1$ переріз розсіювання $\sigma \ll a$ залишається в силі.

3.4 Стійкі тривимірні дрейфові вихорі

3.4.1 Модельні рівняння

Розглядаємо плазму з холодними іонами та нехтуємо інерцією електронів (характерна частота рухів плазми набагато менше електронної плазмової частоти). Плазма знаходиться в однорідному зовнішньому магнітному полі $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{\mathbf{z}}$, де $\hat{\mathbf{z}}$ одиничний вектор вздовж z-напрямку. Рухи плазми описуються системою гідродинамічних рівнянь для іонів

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}) = 0 \tag{3.83}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\, \mathbf{v} = -\frac{e}{M}\nabla\varphi + \Omega_i [\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{z}}] \tag{3.84}$$

та рівнянням Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi e(\delta n_e - \delta n_i), \tag{3.85}$$

де $n_i = n_0(x) + \delta n_i$ іонна густина плазми, $n_0(x) = n_0(1 + x/L)$ неоднорідна рівноважна густина плазми, $L^{-1} = (\partial_x \ln n_0(x))^{-1}$ масштаб неоднорідності, $\mathbf{v}$ іонна швидкість, φ електростатичний потенціал, δn_e and δn_i збурення електронної та іонної густини плазми відповідно, M масса іона, $\Omega_i = eB_0/Mc$ іонно-циклотронна частота. Нехтуючи інерцією електронів, припускаємо больцманівський розподіл $n_e = n_0 \exp(e\varphi/T_e)$, з $e\varphi/T_e \ll 1$, та отримаємо $\delta n_e/n_0 = e\varphi/T_e$, де $n_e = n_0 + \delta n_e$, а T_e електронна температура.

Далі вважаємо, що часова залежність збурень повільна у порівнянні з частотою іонних гірацій

$$\frac{\partial/\partial t}{\Omega_i} \sim \frac{(\mathbf{v} \cdot \nabla)}{\Omega_i} \ll 1. \tag{3.86}$$

Використовуючи (3.84), з точністю до першого порядку по малому параметру (3.86) можна написати перпендикулярну іонну швидкість у вигляді

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v}_E - \frac{e}{M\Omega_i^2}\frac{d}{dt}\nabla_\perp\varphi, \tag{3.87}$$

де введено позначення $\mathbf{v}_E$ для так званої дрейфової $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ швидкості

$$\mathbf{v}_E = \frac{e}{M\Omega_i}[\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_\perp\varphi], \tag{3.88}$$

та

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_E \cdot \nabla_\perp) \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{e}{M\Omega_i}\{\varphi, \cdots\}, \tag{3.89}$$

де скобка Пуассона визначена в (3.4). Домінуюча нелінійність в рівняннях (3.83), (3.84) повязана з конвекційним доданком $\mathbf{v}_E$. З (3.83) маємо

$$\frac{\partial \delta n_i}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot (\mathbf{v}_\perp + \hat{\mathbf{z}} v_z) + \mathbf{v}_E \cdot \nabla \delta n_i + \frac{e n_0}{M \Omega_i L} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \tag{3.90}$$

Підставляючи $\mathbf{v}_\perp$ з рівняння (3.87) в (3.90) , та виключаючи δn_i за допомогою (3.85), отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi - \rho_s^2 \Delta_\perp \varphi - R^2 \Delta \varphi\right) + v_d \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{M c_s^2}{e} \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{3.91}$$

$$-\frac{e}{M \Omega_i}\left\{\varphi, \rho_s^2 \Delta_\perp \varphi + R^2 \Delta \varphi\right\} = 0 \tag{3.92}$$

де $c_s = \sqrt{T_e/M}$ іонно-звукова швидкість, $v_d = c_s^2/\Omega_i L$ дрейфова швидкість, $\omega_{pi} = \sqrt{4\pi e^2 n_0/M}$ іонна плазмова частота, $R = c_s/\omega_{pi}$ дебаївський радіус, $\rho_s = c_s/\Omega_i$. Враховуючи, що $\Omega_i/\omega_{pi} \ll 1$, маємо

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi - \rho_s^2 \Delta_\perp \varphi - R^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) + v_d \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{M c_s^2}{e} \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ -\frac{e}{M \Omega_i}\left\{\varphi, \rho_s^2 \Delta_\perp \varphi + R^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right\} = 0.\end{gathered} \tag{3.93}$$

З z-компоненти рівняння (3.84) маємо

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{v}_E \cdot \nabla_\perp) v_z = -\frac{e}{M} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{3.94}$$

В лінійному наближенні, беручи $\varphi \sim \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t)$, рівняння (3.93) та (3.94) дають дисперсійне співвідношення

$$\omega^2 \left(1 + k_\perp^2 \rho_s^2 + k_z^2 R^2\right) - \omega k_y v_d - k_z^2 c_s^2 = 0. \tag{3.95}$$

З (3.95) випливає, що існують дві гілки плазмових коливань: дрейфова хвиля (якщо $\omega k_y v_d \gg k_z^2 c_s^2$)

$$\omega = \frac{k_y v_d}{1 + k_\perp^2 \rho_s^2 + k_z^2 R^2} \tag{3.96}$$

та іонно-звукова хвиля (якщо $\omega k_y v_d \ll k_z^2 c_s^2$)

$$\omega^2 = \frac{k_z^2 c_s^2}{1 + k_\perp^2 \rho_s^2 + k_z^2 R^2} \tag{3.97}$$

Нехтуючи взаємодією з іонним звуком (тобто $k_z c_s \ll \omega \sim k_y v_d$) в рівняннях (3.93),(3.94) (фізично це означає, що можна нехтувати інерцією іонів в напрямку зовнішнього магнітного поля), отримаємо нелінійне рівняння для потенціалу φ

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi - \rho_s^2 \Delta_\perp \varphi - R^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) + v_d \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{e}{M\Omega_i}\left\{\varphi, \rho_s^2 \Delta_\perp \varphi + R^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right\} = 0 \tag{3.98}$$

Далі вводимо безрозмірні змінні

$$\Phi \to e\varphi/T_e,\ \mathbf{r}_\perp \to \mathbf{r}_\perp/\rho_s,\ z \to z/R,\ t \to \Omega_i t,\ v_d \to v_d/c_s. \tag{3.99}$$

Рівняння (3.98) тоді стає

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi - \Delta\Phi) + v_d \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \{\Phi, \Delta\Phi\} = 0 \tag{3.100}$$

і рівняння (3.100) може бути записано у вигляді

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \{\Phi, \Gamma\} = 0, \tag{3.101}$$

де $\Gamma = \Delta\Phi - \Phi + v_d x$ узагальнена завихоренність. Рівняння (3.101) описує конвекцію узагальненої завихоренності з $d\Gamma/dt = 0$ (конвекційна похідна по часу) та має нескінченне число інтегралів руху (інваріанти Казіміра)

$$\int f(\Gamma, z)\, d\mathbf{r}, \tag{3.102}$$

де f довільна функція своїх аргументів. Інші інтеграли руху мають вигляд

$$\int \Phi\Gamma\, d\mathbf{r}\,,\ \int x\Gamma\, d\mathbf{r}\,,\ \int (y - v_d t)\Gamma\, d\mathbf{r}. \tag{3.103}$$

Зокрема, квадратичні інваріанти для енергії E та енстрофії K є

$$E = \int \left[\Phi^2 + (\nabla\Phi)^2\right] d\mathbf{r}, \tag{3.104}$$

$$K = \int \left[(\nabla\Phi)^2 + (\Delta\Phi)^2\right] d\mathbf{r}. \tag{3.105}$$

Існування нескінченого числа інтегралів руху може наводити на думку, що рівняння (3.100) є повністю інтегрованим, але, як показано в [171] для двовимірного рівняння Чарні-Хасегави-Міми така нескінчена кількість інваріантів не гарантує інтегровності, і, зокрема, необхідні додаткові умови на дисперсію лінійної хвилі.

3.4.2 Тривимірні модонні розв'язки

Шукаємо стаціонарні розв'язки рівняння (3.101) у вигляді

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi(x, y', z), \;\; y' = y - ut, \tag{3.106}$$

де u швидкість розповсюдження в y напрямку. Підставляючи (3.106) в (3.101) отримаємо нелінійне рівняння для $\Phi(x, y', z)$ (далі в позначеннях відкидаємо штрих), яке можна записати у вигляді

$$\{\Gamma, \Phi - ux\} = 0. \tag{3.107}$$

Тоді, як видно, функції в скобці Пуассона залежні друг від друга і маємо

$$\Gamma = F(\Phi - ux, z) \tag{3.108}$$

де F довільна функція своїх аргументів. Застосовуючи стандартну процедуру для знаходження двовимірних модонних розв'язків [159, 161–163], розглядаємо дві форми функції F, а саме F_{int} та F_{ext} - для внутрішньої та зовнішньої областей тривимірного простору. Границя між областями містить лінії току (ізолінії функції $\Phi - ux$), які простягаються до нескінченості (зовнішня область) та область де лінії току замкнуті (внутрішня область) і вважаємо цю граничну поверхню сферою $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a$, де параметр a має сенс радіуса модона. Ми шукаємо локалізовані розв'язки, тобто $\Phi \to 0$ при $x, y, z \to \pm\infty$. Обчислюючи $x, y, z \to \pm\infty$ в рівнянні (3.108), можна дійти до висновку, що функція F_{ext} мусить бути лінійною для локалізованих розв'язків, тобто

$$\Delta\Phi - \Phi + v_d x = c_1(\Phi - ux) + c_2 + c_3 z \tag{3.109}$$

з $c_1 = -v_d/u$, $c_2 = 0$,$c_3 = 0$. Видно, що для локалізованих розвязків необхідна умова $1 - v_d/u > 0$, тобто $u < 0$ або $u > v_d$. Таким чином швидкість модона u лежить поза області можливих фазових швидкостей ω/k_y лінійної дрейфової хвилі з дисперсією (3.96).

Для внутрішньої області (замкнуті лінії току), не можна, взагалі кажучи, апріорі постулювати вибір форми функції F_{int}. Напростіший вибір для F_{int} також лінійна функція і маємо

$$\Delta\Phi - \Phi + v_d x = c_4(\Phi - ux) + c_5 + c_6 z \tag{3.110}$$

де c_4, c_5 і c_6 довільні. Вимога скінченості розв'язку в $r = 0$ дає умову $1 + c_4 > 0$. Далі введемо позначення

$$\varkappa = a\sqrt{1 - v_d/u},\ k = a\sqrt{1 + c_4}. \tag{3.111}$$

Рівняння (3.109) має розв'язок

$$\sum_{n,l,m} A_{nlm} \frac{K_{n+1/2}(\varkappa r/a)}{\sqrt{r}} Y_{lm}(\theta, \varphi), \tag{3.112}$$

тоді як розв'язком рівняння (3.110) є

$$\sum_{n,l,m} B_{nlm} \frac{J_{n+1/2}(kr/a)}{\sqrt{r}} Y_{lm}(\theta, \varphi), \tag{3.113}$$

де використовуються сферичні координати (r, θ, φ), n, m, l є цілими, $J_\nu(\xi)$ функція Бесселя першого роду, $K_\nu(\xi)$ модіфікована функція Бесселя другого роду, Y_{lm} функції сферичних гармонік, A_{nlm} і B_{nlm} довільні константи. Далі розглядаємо лише нижчі моди сумісні з доданками $v_d x$ та $c_6 z$, а саме

$n = 0, 1$, $l = 0, 1$, та $m = 0, 1$. Вимагаємо, щоб Φ та $\nabla\Phi$ були неперервні на $r = a$

$$\Phi\,|_{r=a-0} = \Phi\,|_{r=a+0},\;\; \nabla\Phi\,|_{r=a-0} = \nabla\Phi\,|_{r=a+0}, \tag{3.114}$$

та $\Delta\Phi$ (або, еквівалентно, Γ) має постійний стрибок p (включаючи $p = 0$, тобто без стрибка і неперервна) при $r = a$

$$\Delta\Phi\,|_{r=a-0} = \Delta\Phi\,|_{r=a+0} + p. \tag{3.115}$$

Тоді для фіксованого $\varkappa$, величина k визначається із співвідношення

$$(\delta k^2 + 3 - k^2)\tan k = k(\delta k^2 + 3)\,, \tag{3.116}$$

де

$$\delta = \frac{(\varkappa^2 + 3\varkappa + 3)}{\varkappa^2(\varkappa + 1)}. \tag{3.117}$$

Зрештою маємо розв'язок

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \Psi_0(r) + \Psi(r)(\sin\theta\cos\varphi + \mu\cos\theta), \tag{3.118}$$

де

$$\Psi_0(r) = \frac{pa^2}{(\varkappa^2 + k^2)\delta}\begin{cases} \dfrac{a\sin(kr/a)}{r(\sin k - k\cos k)} - \dfrac{3(\varkappa^2 + k^2)}{\varkappa^2 k^2}, & r \leqslant a \\ \dfrac{a}{(1+\varkappa)r}\, e^{-\varkappa(r/a-1)}, & r \geqslant a \end{cases}, \tag{3.119}$$

$$\Psi(r) = ua\begin{cases} \left(1 + \dfrac{\varkappa^2}{k^2}\right)\dfrac{r}{a} - \dfrac{\varkappa^2}{k^2}\dfrac{a^2[\sin(kr/a) - (kr/a)\cos(kr/a)]}{r^2(\sin k - k\cos k)}, & r \leqslant a \\ \dfrac{a^2(1 + \varkappa r/a)}{r^2(1+\varkappa)}\, e^{-\varkappa(r/a-1)}, & r \geqslant a \end{cases}, \tag{3.120}$$

Розв'язок представляє собою три доданки: радіально симетричну частину, антисиметричну по x-напрямку, та антисиметричну по z-напрямку частини. Радіально симетрична частина зникає якщо $p = 0$, тобто $\Delta\Phi$ (а також завихоронність Γ) неперервні на границі $r = a$. Антисиметрична по z частина зникає якщо $\mu = 0$. Таким чином, тривимірний модонний солітон (3.118) має чотири незалежних параметра – швидкість u, радіус a (характерний розмір), амплітуда z-антисиметричної частини μ, та стрибок завихоронності p (або еквівалентно амплітуда радіально симетричної частини). Нагадаймо, що двовимірний модон Ларічева-Резніка (3.5) має два незалежних параметра – швидкість та радіус, одновимірні солітони НРШ та ДНРШ також мають два незалежних параметра – швидкість та характерний розмір, солітон КдФ один незалежний параметр – швидкість (характерний розмір визначається швидкістю).

У внутрішній області $r < a$ (замкнуті лінії току) частинки плазми захоплені та можуть транспортуватися як ціле вздовж y-напрямку. У зовнішньої області $r > a$ розв'язок експоненціально прямує до нуля. В граничному випадку $\varkappa \to 0$, тобто $u \to v_d$ (швидкість модона дорівнює дрейфової швидкості), маємо

$$\Psi_0(r) = \frac{pa^2}{k^2} \begin{cases} \dfrac{a\sin(kr/a)}{r\sin k} - 1, & r \leqslant a \\ 0, & r \geqslant a \end{cases}, \tag{3.121}$$

$$\Psi(r) = v_d a \begin{cases} \dfrac{r}{a} - \dfrac{3a^2[\sin(kr/a) - (kr/a)\cos(kr/a)]}{r^2k^2\sin k}, & r \leqslant a \\ \dfrac{a^2}{r^2}, & r \geqslant a \end{cases}, \tag{3.122}$$

В іншому граничному випадку $\varkappa \to \infty$, тобто $u \to 0$ (нерухливий модон), радіально симетрична частина зникає, $\Psi_0(r) = 0$, та

$$\Psi(r) = \frac{v_d a^3}{k^2} \begin{cases} \dfrac{a^2[\sin(kr/a) - (kr/a)\cos(kr/a)]}{r^2(\sin k - k\cos k)} - \dfrac{r}{a}, & r \leqslant a \\ 0, & r \geqslant a \end{cases}, \tag{3.123}$$

Трансцендентне рівняння (3.116) має нескінченне число коренів k_n, $n = 1, 2\ldots$ для кожного фіксованого $\varkappa$. Тоді (3.118), (3.119) та (3.120) представляє нескінченне число розв'язків з $k = k_n$. Розв'язок з $n = 1$ (основний стан) не має вузлів у радіальному напрямку. Вищі стани мають $n - 1$ вузлів (у внутрішній області). Функції $\Psi_0(r)$ та $\Psi(r)$ для трьох нижчих станів

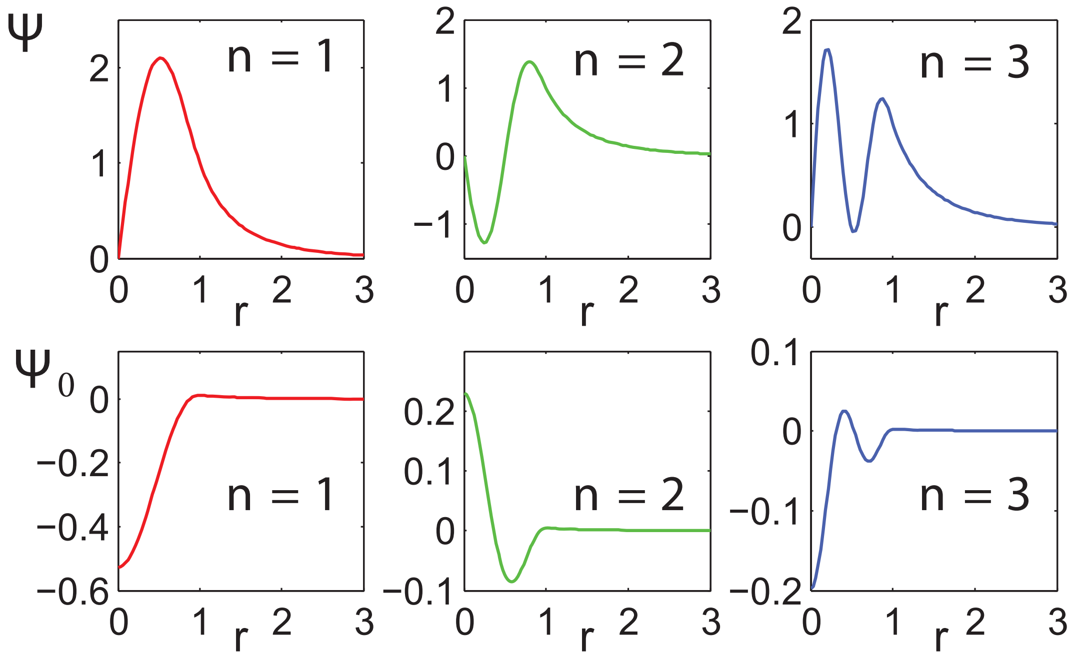

Рис. 3.5 Верхній рядок: функція $\Psi(r)$ від радіальноЇ координати r для трьох нижчих модонних станів $n = 1, 2, 3$. Нижчий рядок: теж саме для функції $\Psi_0(r)$.

$n = 1, 2, 3$ показані на рис. 3.5. Далі розглядаємо тільки основний стан – модон з $k = k_1$.

Енергія E та енстрофія K модона обчислюється прямим чином

$$E = E_0 + E_1,\ \ K = K_0 + K_1, \tag{3.124}$$

де E_0 і K_0 енергія та енстрофія радіально симетричної частини відповідно

$$E_0 = \frac{2\pi p^2 a^5}{\delta^2 \varkappa^2 k^2 (\varkappa^2 + k^2)} \left[\delta^2 \varkappa^2 k^2 + a^2(5\delta + 1)\right], \tag{3.125}$$

$$K_0 = \frac{4\pi p^2 a^3}{\delta^2 (\varkappa^2 + k^2)^2} \left\{ \frac{\delta^2}{2} \left[a^2(k^2 - \varkappa^2) + \varkappa^4 + k^4\right] \right. \tag{3.126}$$
$$\left. +(5\delta + 1)\left(a^2 - \frac{\varkappa^2}{2} - \frac{k^2}{2}\right) + 6\left(1 - \frac{a^2}{\varkappa^2}\right) \right\},$$

та

$$E_1 = \frac{4\pi}{15} u^2 a^5 (1+\mu^2) \left(1+\frac{\varkappa^2}{k^2}\right) \left[\delta^2 \varkappa^2 + (5\delta+1)\left(\frac{7\varkappa^2}{5k^2} + \frac{2}{5} - \frac{v_d}{u}\right)\right], \tag{3.127}$$

$$K_1 = \frac{2\pi}{3} u^2 a^3 (1+\mu^2) \varkappa^2 \left(1+\frac{\varkappa^2}{k^2}\right) \left[\left(\frac{\delta \varkappa k}{a}\right)^2 + 5\delta + 1\right], \tag{3.128}$$

3.4.3 Зіткнення модонів

Тут дослідимо часову еволюцію модонів при їх зіткненні. Нелінійне еволюційне рівняння (3.100) чисельно розв'язувалось з початковою умовою, яка відповідає суперпозиції точних аналітичних модонних розв'язків (3.118), а саме

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_{mod}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t) + \Phi_{mod}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2, t) \tag{3.129}$$

при $t = 0$. Відстань між модонами у початковий момент часу вважалась достатньо великою, так що модони при $t = 0$ не впливають друг на друга. Чисельна схема базувалась на неявному методі Адамса-Моултона зі змінним часовим кроком та змінним порядком методу (який міг адаптивно змінюватися в часі від 4-го до 12-го порядку), а також адаптивним методом контролю помилок. Припускались периодичні граничні умови. Лінійні доданки обчислювались у спектральному просторі. Нелінійність у вигляді скобки Пуассона обчислювалась у фізичному просторі з кінцевими різностями за допомогою схеми Аракави [173]. Збереження загальної енергії та енстрофії контролювалось під час обчислення і у всіх випадках загальна енергія та енстрофія зберігалась з відносною точністю менш чим 5×10^{-4}.

Як перший випадок дослідимо випадок зіткнення, коли модони рухаються у протилежних напрямках (тобто назустріч) вздовж осі y (лобове зіткнення). Розглядаємо зіткнення з нульовим початковим прицільним параметром, тобто $x_1 = x_2$, $z_1 = z_2$. Далі у всіх випадках безрозмірну дрейфову швидкість покладено $v_d = 0.1$. Початкові швидкості першого та другого модонів становлять $u_1 = 0.3$ і $u_2 = -0.5$, радіуси модонів $a_1 = a_2 = 0.5$. Розглядаємо також модони без радіально симетричної та z-антисиметричної частин, тобто $p_1 = p_2 = \mu_1 = \mu_2 = 0$. Часова еволюція зіткнення модонів у цьому випадку представлена на рис. 3.6 Модони наближаються друг до друга ($t = 3.5$), потім зазнають складну взаємодію з сильним перекриттям та спотворенням форми ($t = 11$), зазнаючи, таким чином, сильне взаємне збурення в процесі зіткнення, як видно з рис. 3.6. Потім модони проходять друг скрізь друга та починають віддалятися ($t = 14.5$), та зрештою повністю відтворюють свою початкову форму (з тими ж швидкостями та амплітудами) без будь якого випромінювання ($t = 18$).

Другий випадок — зіткнення модонів (також без радіально симетричної та z-антисиметричної частин) які рухаються в однаковому напрямку вздовж осі y (проникаюче зіткнення). Початкові швидкості модонів $u_1 = -0.3$, $u_2 = -0.01$ суттєво відрізняються, радіуси модонів $a_1 = 0.5$, $a_2 = 2$ також різні. Часова еволюція зіткнення показана на рис. 3.7. Більш швидкий модон доганяє більш повільний ($t = 6$), потім модони сильно перекриваються, повністю спотворюючи свою форму, проходять друг скрізь друга ($t = 18$), починають відокремлюватися ($t = 24$), і нарешті ($t = 30$) повністю відтворюють початкову форму (з тими ж швидкостями та амплітудами) без будь якого випромінювання, як і при лобовому зіткненні. Обчислення проводились в широкому диапазоні параметрів модона, для різних швидкостей та радіусів (підкреслимо ще раз, що все це стосується модонів тільки з двома параметрами – тобто без радіально симетричної та z-антисиметричної частин). Таким чином, зіткнення тривимірних модонів без радіально симетричної та z-антисиметричної частин виявляються абсолютно пружними як при лобовому так й проникаючиму зіткненні (при нульовому прицільному параметру). Така поведінка нагадує зіткнення одновимірних солітонів інтегрованих моделей типу НРШ та КдФ. Зіткнення модонів з ненульовим прицільним параметром виявляються непружними як для лобових так й проникаючих зіткнень. При цьому в процесі зіткнення модони завжди руйнуються, хоча для достатньо малих прицільних параметрів (в порівнянні з радусами модонів) модони проходять друг скрізь друга майже без зміни форми, залишаючи випромінювальний слід і трохи

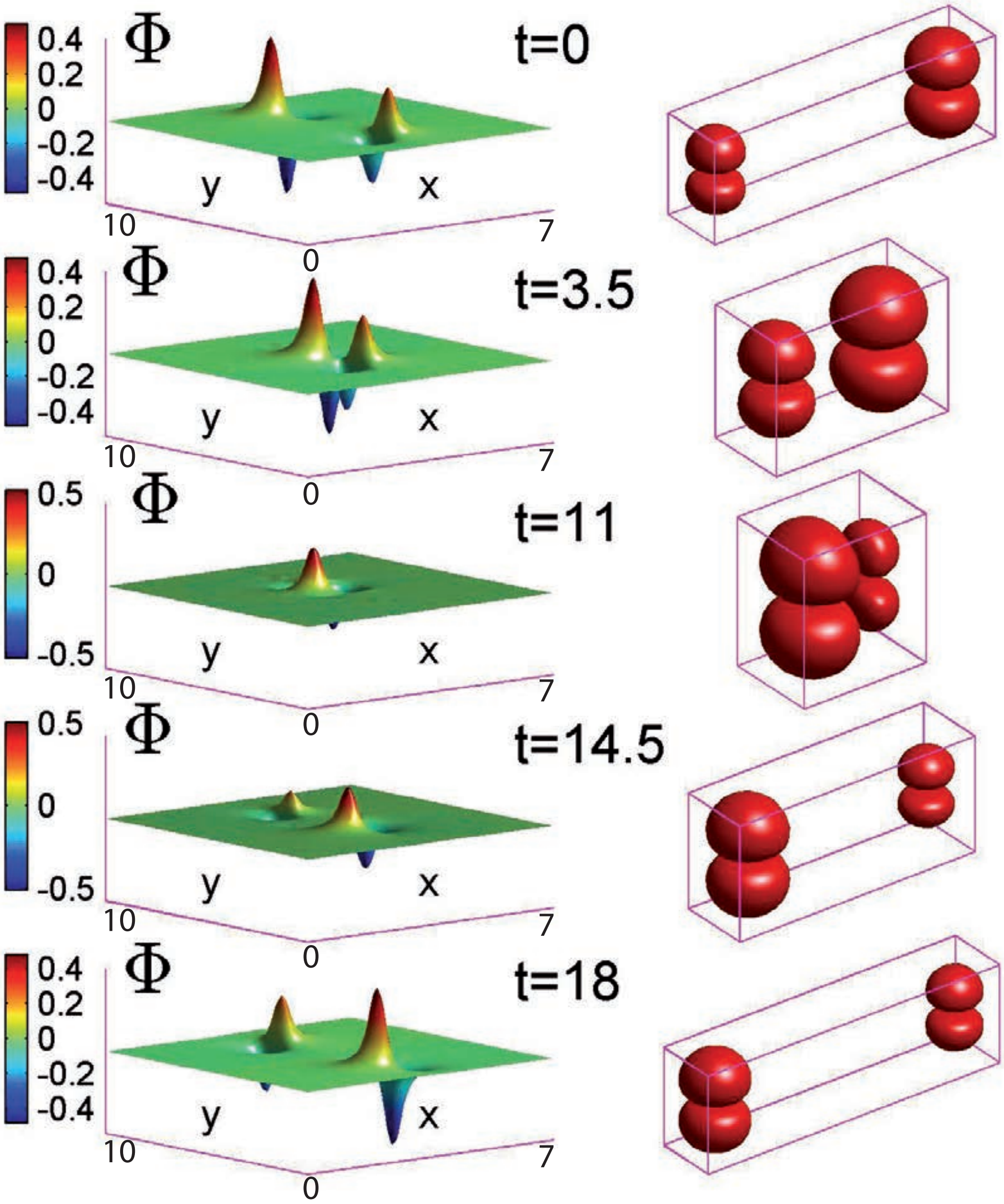

Рис. 3.6 Пружне лобове зіткнення між модонами. Параметри модонів: $v_1 = 0.3$, $v_2 = -0.5$, $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.5$, $p_1 = p_2 = \mu_1 = \mu_2 = 0$. Лівий стовпець: розподіл поля електростатичного потенціалу Φ у $x - y$ площині (переріз тривимірного простору). Правий стовпець: ізоповерхні $\Phi(x, y, z) = 0.15$ у тривимірному просторі.

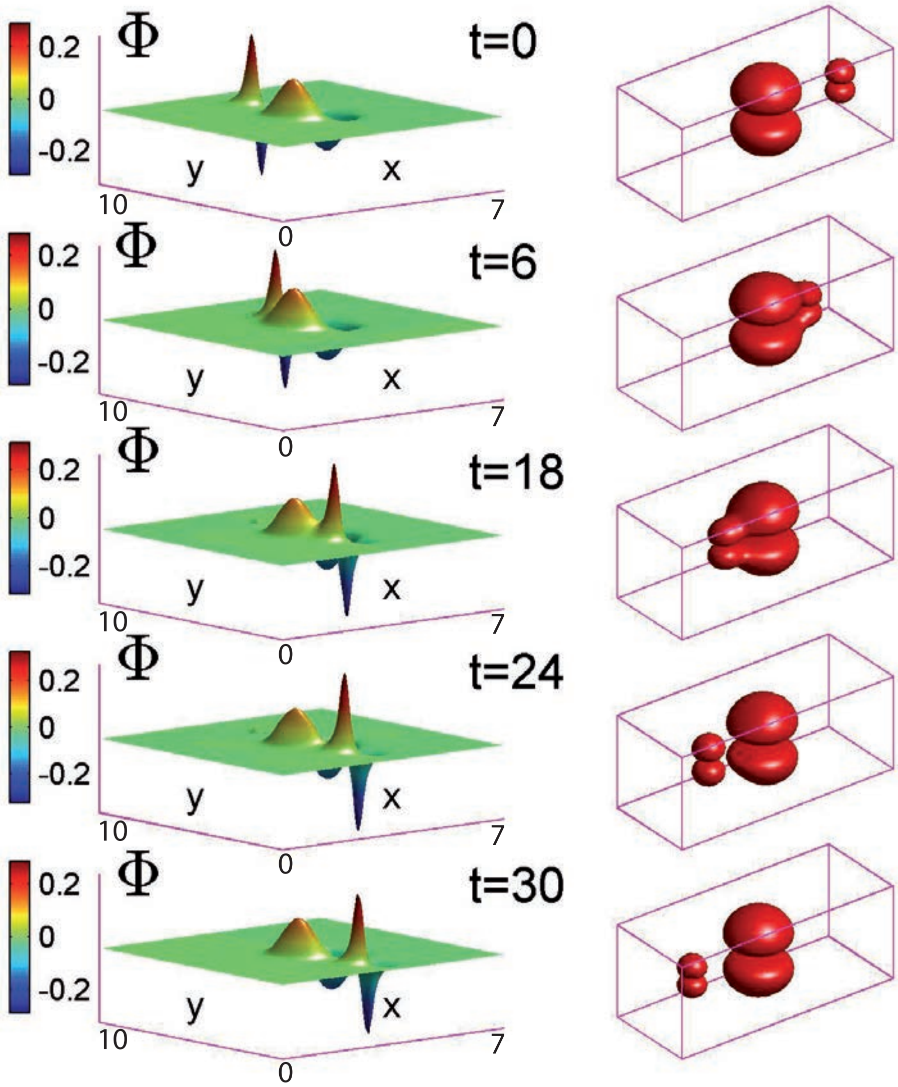

Рис. 3.7 Пружне проникаюче зіткнення між модонами. Параметри модонів: $v_1 = -0.3$, $v_2 = -0.01$, $a_1 = 0.5$, $a_2 = 2$, $p_1 = p_2 = \mu_1 = \mu_2 = 0$. Лівий стовпець: розподіл поля електростатичного потенціалу Φ у $x - y$ площині (переріз тривимірного простору). Правий стовпець: ізоповерхні $\Phi(x, y, z) = 0.08$ у тривимірному просторі.

змінюючи амплітуду, але з часом зрештою руйнуються.

Тепер звернемось до зіткнень модонів з радіально симетричними ($p_1 \neq 0$,$p_2 \neq 0$) або/та z-антисиметричнми ($\mu_1 \neq 0$,$\mu_2 \neq 0$) частинами. У зв'язку з цим необхідно підкреслити, що нелінійність в рівнянні (3.100) тотожньо зникає для довільних розподілів поля які містять тільки радіально симетричну або/та z-антисиметричну частини, тобто без x-антисиметричної частини. Тому доданки з $p \neq 0$ та/або $\mu \neq 0$ у точному розв'язку (3.118) повинні, в деякому сенсі, розглядатися як нелінійні збурення (хоча й абсолютно точні), хоча відповідні амплітуди можуть бути як завгодно великими у порівнянні з амплітудою x-антисиметричної частини. Тоді, наприклад, радіально симетричний доданок великої амплітуди маскує основну частину і модон має вигляд тривимірного монополя (кулі). Також припускаємо нульовий прицільний параметр. Параметри модонів (швидкості і радіуси) вибиралися такими ж як у розглянутому вище випадку лобового зіткнення модонів з тільки x-антисиметричною частиною. Часова еволюція зіткнення модонів з радіально симетричними частинами $p_1 = 2$ та $p_2 = 0.3$ показана на рис. 3.8. Видно, що після наближення друг з другом ($t = 3.5$), а потім перекривання ($t = 11$), модони починають розповсюджуватися у напрямку майже перпендикулярному початковому напрямку руху та руйнуються в процесі зіткнення, ($t = 14.5$) та ($t = 18$).

Непружне зіткнення модонів з z-антисиметричною частиною $\mu_1 = 1$. (тобто з рівними амплітудами x-антисиметричної та z-антисиметричної частин) та $\mu_2 = 0.5$ показано на рис. 3.9. У цьому випадку модони майже відтворюють свою форму після зіткнення, зменшуючись по амплітуді ($t = 16$), але зрештою руйнуються на великому часі (на рисунку не показано) завдяки втраті енергії та енстрофії за рахунок випромінювання. Модони з достатньо великими амплітудами z-антисиметричних частин $\mu_{1,2} \gg 1$ повністю руйнуються майже відразу після зіткнення.

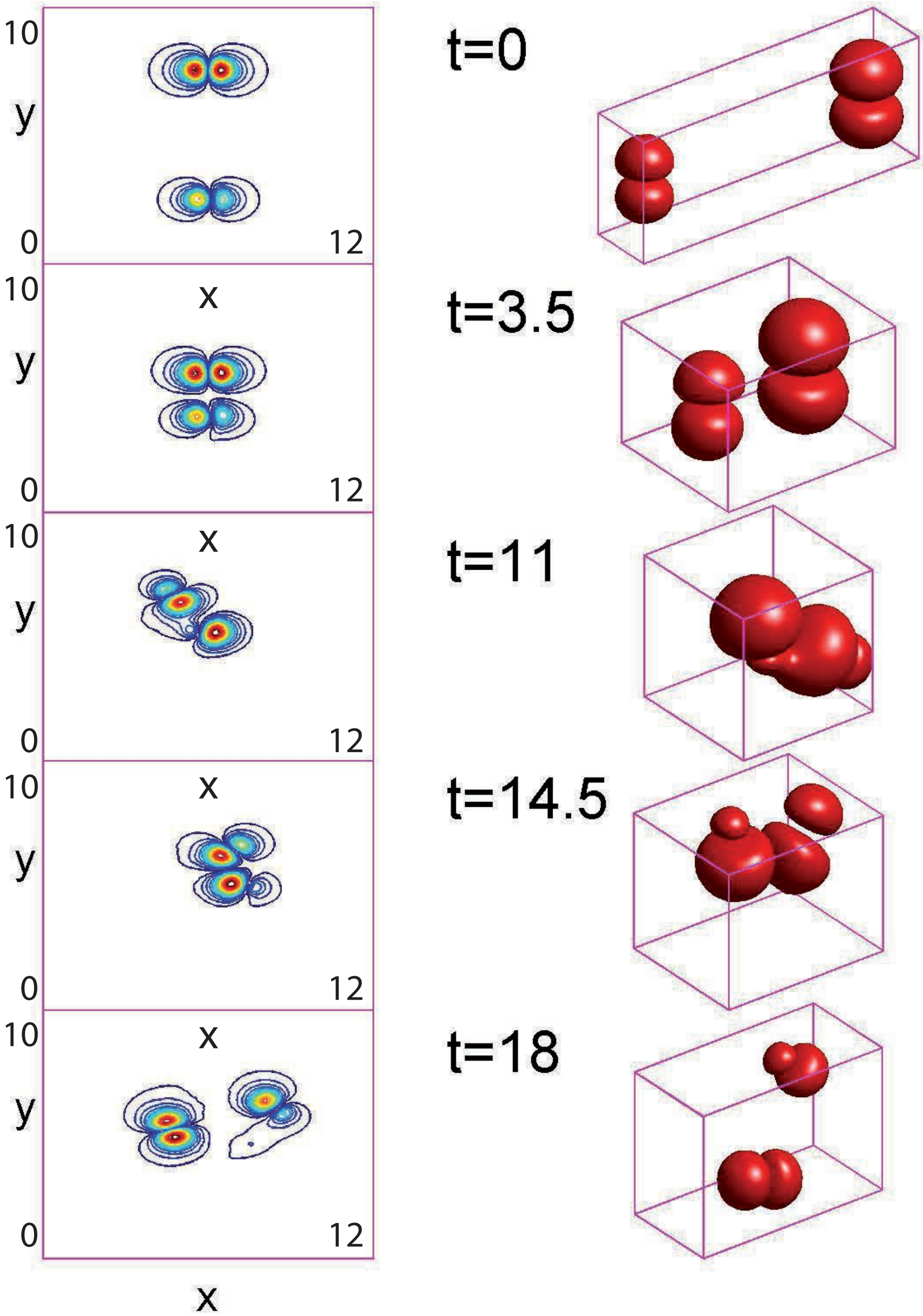

Рис. 3.8 Непружне лобове зіткнення модонів з радіально симетричною частиною. Параметри модонів: $v_1 = 0.3$, $v_2 = -0.5$, $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.5$, $p_1 = 2$, $p_2 = 0.3$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Лівий стовпець: лінії контура електростатичного потенціалу Φ у $x - y$ площині (переріз тривимірного простору). Правий стовпець : ізоповерхні $\Phi(x, y, z) = 0.2$ у тривимірному просторі.

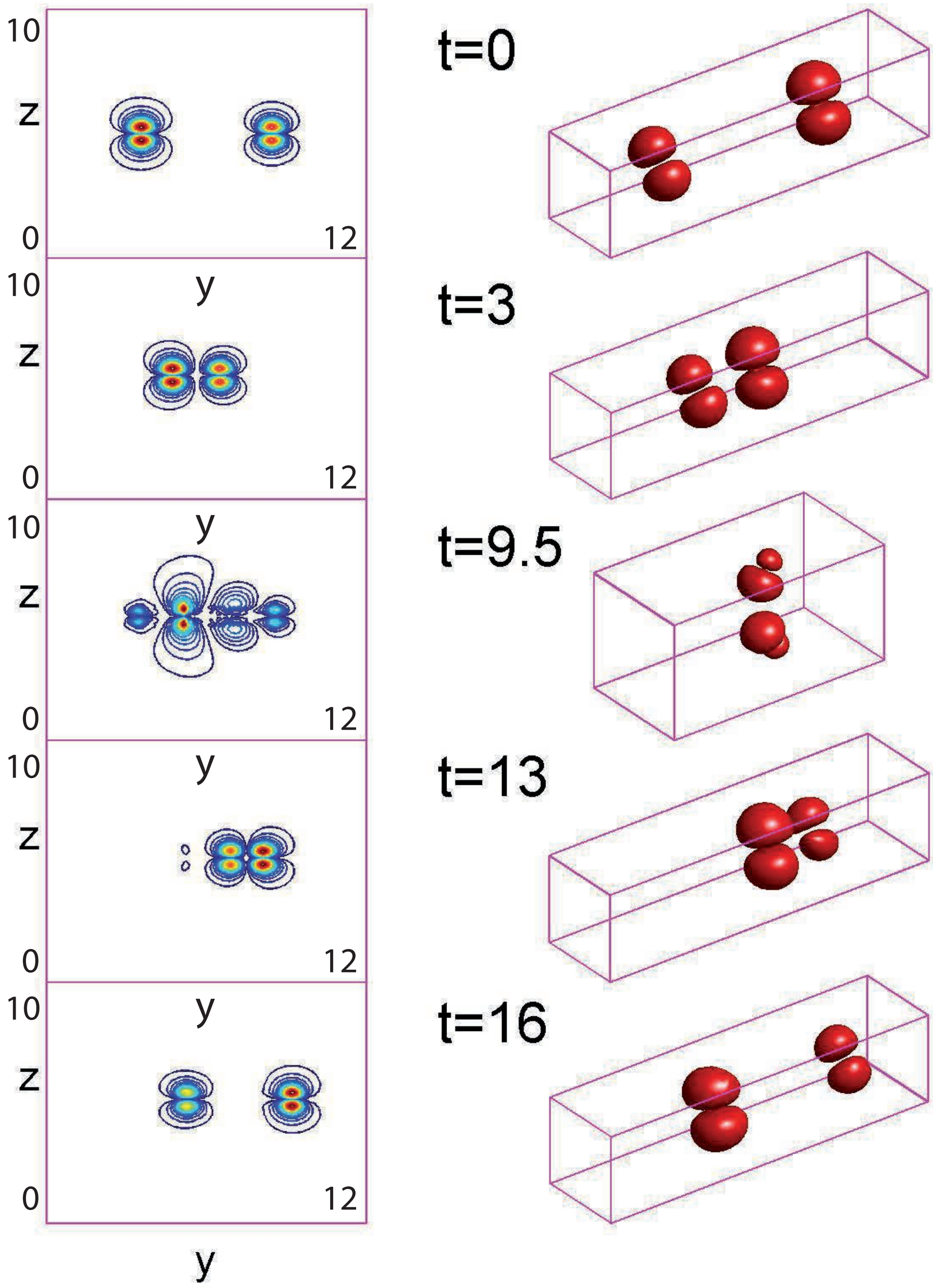

Рис. 3.9 Непружне лобове зіткнення модонів з z-антисиметричною частиною. Амплітуди модонів після зіткнення змінюються завдяки випромінюванню . Параметри модонів: $v_1 = 0.3$, $v_2 = -0.5$, $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.5$, $p_1 = p_2 = 0$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0.5$. Лівий стовпець: лінії контура електростатичного потенціалу Φ у $y - z$ площині (переріз тривимірного простору). Правий стовпець : ізоповерхні $\Phi(x, y, z) = 0.2$ у тривимірному просторі.

3.5 Зональні течії в плазмі з дрейфовою турбулентністю

Турбулентність на дрейфових гілках коливань, що приводить до аномального (турбулентного) переносу частинок і тепла на периферію плазми, є головною перешкодою на шляху до здійснення керованого термоядерного синтезу в пристроях з магнітним утриманням плазми (токамаках і стеллараторах). Негативні тенденції, породжувані дрейфовою турбулентністю, значно послаблені в експериментально виявленому режимі поліпшеного утримання – при перевищенні потужності додаткового нагрівання деякого критичного значення різко зменшується аномальний перенос [158]. У якості можливого механізму режиму поліпшеного утримання була запропонована модель, заснована на уявленні про насичення й падіння рівня дрейфової турбулентності за рахунок виникнення великомасштабних нелінійних когерентних структур із просторовою залежністю тільки від радіальної координати – зональних течій [174, 175]. Генерація зональної течії здійснюється винятково за рахунок дрейфової турбулентності, шляхом нелінійної передачі енергії від дрібномасштабних дрейфових хвиль до великомасштабного течії й, при цьому, рівень турбулентності природньо зменшується [176–180]. У цей час уважається загальновизнаним, що зональні течії відіграють вирішальну роль в регулюванні нелінійної еволюції дрейфових нестійкостей і, таким чином, рівня турбулентного транспорту в токамаках. Зокрема, експериментально показано [181–183], що L-H перехід (перехід до режиму поліпшеного втримання) пов'язано з виникненням зональних течій, які пригнічують турбулентні флуктуації й приводять до виникненню транспортних бар'єрів.

3.5.1 Вплив середньої течії на генерацію зональної течії

Важливо відрізняти зональну течію, від середньої течії, зв'язаної із середнім радіальним електричним полем [184]. Остання може збуджуватися й підтримуватися під час відсутності турбулентності (додатковим нагріванням, інжекцією нейтральних частинок та ін.), тоді як зональна течія збуджується винятково модуляційною нестійкістю дрейфових хвиль [174]. На відміну від статичних середніх течій, зональний течія може мати складну просторову структуру. Відомо, що наявність середньої течії, з одного боку, може вести до нестійкості (нестійкість Кельвіна-Гельмгольца), а, з іншого боку, стабілізувати деякі небезпечні нестійкості дрейфового типу (нестійкість, обумовлену градієнтом іонної температури, резистивну нестійкість та ін.) [174, 185–188]. Тому важливо розглянути вплив середньої течії на можливість генерації зональної течії модуляційною нестійкістю.

Розглядаємо плоску двовимірну модель (x і y відповідно представляють радіальну і полоидальну координати в тороидальній геометрії), подібну моделі Хасегави–Міми (3.3), з тою відмінністю, що для великомасштабних рухів густина плазми не додержується розподілу Больцмана [177, 178, 180, 189]. Представимо електростатичний потенціал у вигляді суми дрібномасштабної флуктуюючої $\tilde{\varphi}$ і середньої $\langle\varphi\rangle$ частин $\varphi = \tilde{\varphi} + \langle\varphi\rangle$, де $\langle\varphi\rangle = \hat{\varphi} + \varphi_0$ і $\hat{\varphi}$ відповідає зональної течії а φ_0 – середньої течії. Рівняння, що описують взаємодію великомасштабних (зональної й середньої течій) і дрібномасштабних (дрейфових хвиль) збурень, випливають із рівнянь, запропонованих в [189], при врахуванні середньої течії у великомасштабних доданків

$$\frac{\partial}{\partial t}(1-\Delta)\tilde{\varphi} + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} - \langle \mathbf{v} \rangle \cdot \nabla \Delta \tilde{\varphi} - \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \Delta (\hat{\varphi} + \varphi_0) = 0, \tag{3.130}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta \hat{\varphi} + \langle \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \Delta \tilde{\varphi} \rangle = 0, \tag{3.131}$$

де $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{z} \times \nabla \tilde{\varphi}$, $\langle \mathbf{v} \rangle = v_0(x)\mathbf{y} + \mathbf{z} \times \nabla \hat{\varphi}$ і $v_0(x)$ профіль середньої течії, $\langle \ldots \rangle$ усереднення по дрібномасштабних флуктуаціях. Просторові змінні нормовані на ρ_s, часова змінна нормована на L_n/c_s, і потенціал на $T_e\rho_s/L_n e$, де T_e електронна температура, $c_s = \sqrt{T_e/m_i}$ іонно-звукова швидкість, $\rho_s = c_s/\Omega_i$ іонно-звуковий ларморовський радіус, і L_n – характерний масштаб неоднорідності густини плазми. В лінійному наближенні й під час відсутності течій, рівняння (3.130) дає дисперсійне співвідношення для дрейфових хвиль (3.1). Член у кутових дужках рівняння (3.131) описує вплив дрібномасштабної дрейфової турбулентності на зональну течію. Передбачається, що характерний масштаб середньої течії L_{MF} багато більше типового масштабу зональної течії L_{ZF}, але в той же час $L_{ZF} \gg k^{-1}$, де k характерне хвильове число дрейфових хвиль.

Електростатичний потенціал дрейфових хвиль $\tilde{\varphi}$ представимо у вигляді суперпозиції хвилі накачування й двох сателітів, $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_d + \tilde{\varphi}_+ + \tilde{\varphi}_-$. Надалі вважаємо, що дрейфові хвилі поширюються в полоідальному напрямку ($k_x = 0$) і представимо

$$\hat{\varphi} = \varphi(x)e^{i(q_y y - \Omega t)} + \varphi^*(x)e^{-i(q_y y - \Omega t)}, \tag{3.132}$$

$$\tilde{\varphi}_d = \Phi_0 e^{i(k_y y - \omega_{\mathbf{k}} t)} + \Phi_0^* e^{-i(k_y y - \omega_{\mathbf{k}} t)}, \tag{3.133}$$

$$\tilde{\varphi}_\pm = \varphi_\pm(x)e^{i(k_\pm y - \omega_\pm t)} + \varphi_\pm^*(x)e^{-i(k_\pm y - \omega_\pm t)}, \tag{3.134}$$

де $\omega_\pm = \omega_{\mathbf{k}} \pm \Omega$ і $k_\pm = k_y \pm q_y$. Підставляючи (3.132)–(3.134) в (3.131), одержимо

$$\Omega\left(\frac{d^2}{dx^2} - q_y^2\right)\varphi = k_y \frac{d}{dx}\left\{\Phi_0\left(\frac{d^2}{dx^2} - q_y^2 + 2k_y q_y\right)\varphi_-^* \right.$$
$$\left. -\Phi_0^*\left(\frac{d^2}{dx^2} - q_y^2 - 2k_y q_y\right)\varphi_+\right\} \tag{3.135}$$

Для амплітуд сателітів з рівняння (3.130) маємо

$$\left\{[\Omega + \omega_{\mathbf{k}} - k_y v_0(x)]\left(1 + k_y^2 + q_y^2 + 2k_y q_y - \frac{d^2}{dx^2}\right)\right.$$
$$\left. -k_y - k_y v_0''\right\}\varphi_+ = -k_y \Phi_0 \frac{d}{dx}\left(k_y^2 - q_y^2 + \frac{d^2}{dx^2}\right)\varphi, \tag{3.136}$$

$$\left\{[\Omega - \omega_{\mathbf{k}} - k_y v_0(x)]\left(1 + k_y^2 + q_y^2 - 2k_y q_y - \frac{d^2}{dx^2}\right)\right.$$
$$\left. +k_y - k_y v_0''\right\}\varphi_-^* = k_y \Phi_0^* \frac{d}{dx}\left(k_y^2 - q_y^2 + \frac{d^2}{dx^2}\right)\varphi, \tag{3.137}$$

де $v_0'' = d^2 v_0(x)/dx^2$. Під час відсутності середньої течії ($v_0 = 0$), після

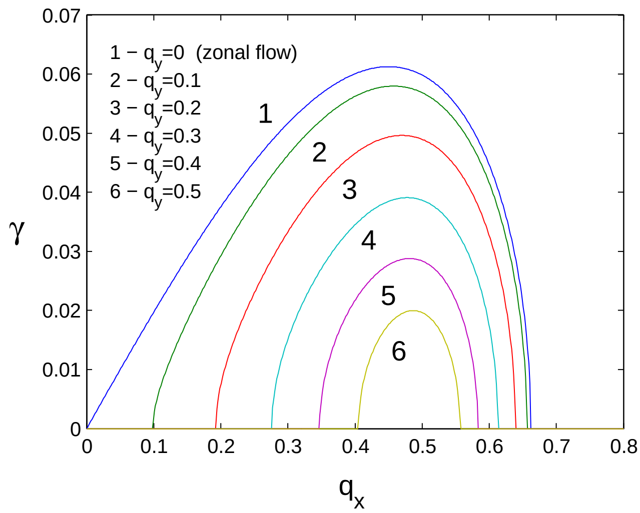

Рис. 3.10 Інкремент нестійкості як функція радіального хвильового числа q_x для амплітуди дрейфової хвилі $|\Phi_0| = 0.2$ і різних полоідальних хвильових чисел q_y. Мода з $q_y = 0$ (зональна течія) має максимальний інкремент.

вистави $\varphi, \varphi_\pm \sim \exp(iq_x x)$, відтворюється дисперсійне рівняння отримане в [190, 191]

$$\Omega q^2 = k_y^2 q_x^2 (q^2 - k_y^2)|\Phi_0|^2 \left\{ \frac{k_+^2 - k^2}{(1 + k_+^2)(\Omega + \delta_+)} + \frac{k_-^2 - k^2}{(1 + k_-^2)(\Omega - \delta_-)} \right\}, \quad (3.138)$$

де $q^2 = q_x^2 + q_y^2$ та $\delta_\pm = \omega_{\mathbf{k}} - k_y/(1 + k_\pm^2)$, що передбачає модуляційну нестійкість ($\gamma = \operatorname{Im}\Omega \neq 0$), якщо амплітуда дрейфової хвилі $|\Phi_0|$ перевищує відповідне граничне значення . Залежність інкремента нестійкості γ від q_x для різних q_y показана на рис. 3.10. Видно, що мода з $q_y = 0$ має максимальный інкремент і це відповідає генерації зональної течії. При $q_x \ll k_y$ максимальний інкремент досягається при $q_{x,opt} = k_y|\Phi_0|(1 + k_y^2)^{3/2}$ та $\gamma_{max} = k_y^3|\Phi_0|^2(1 + k_y^2)$.

У присутності середньої течії ($v_0 \neq 0$) рівняння (3.135)–(3.137) можна переписати у вигляді узагальненої задачі на власні значення

$$\begin{pmatrix} 0 & A_+ & A_- \\ B & C_+ & 0 \\ -B & 0 & C_- \end{pmatrix} \Psi = \Omega \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & E_+ & 0 \\ 0 & 0 & E_- \end{pmatrix} \Psi \quad (3.139)$$

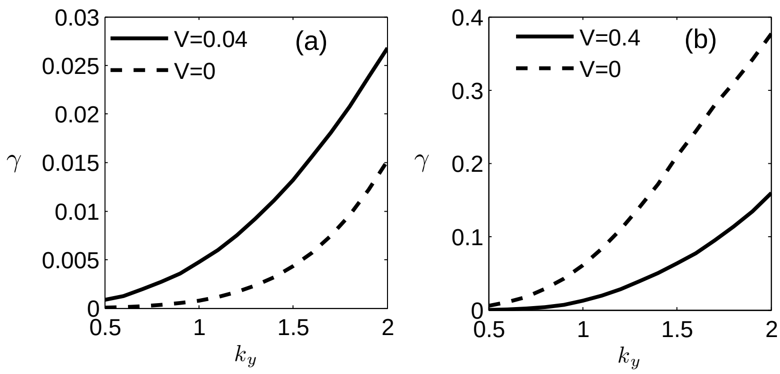

Рис. 3.11 Залежність інкремента нестійкості від полоїдального хвильового числа k_y для $q_0 = 0.05$ і (a) амплітуд середньої течії $V = 0$ і $V = 0.04$, амплітуди дрейфової хвилі накачування $|\Phi_0| = 0.02$; (b) амплітуд середньої течії $V = 0$ і $V = 0.4$, амплітуди дрейфової хвилі накачування $|\Phi_0| = 0.2$.

де $\Psi = (\varphi, \varphi_+, \varphi_-^*)$, і

$$A_\pm = \mp k_y \Phi_0 \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2}{dx^2} - q_y^2 \mp 2k_y q_y\right), \tag{3.140}$$

$$B = -k_y \Phi_0 \frac{d}{dx}\left(k_y^2 - q_y^2 + \frac{d^2}{dx^2}\right), \tag{3.141}$$

$$C_\pm = (k_y v_0 \mp \omega_{\mathbf{k}}) E_\pm, \tag{3.142}$$

$$D = \frac{d^2}{dx^2} - q_y^2, \tag{3.143}$$

$$E_\pm = \left(1 + k_y^2 \pm 2k_y q_y - \frac{d^2}{dx^2}\right) \mp k_y - k_y v_0''. \tag{3.144}$$

Припускаємо, що профіль середньої течії має вигляд $v_0(x) = V \operatorname{th} q_0 x$. Узагальнене задача на власні значення (3.139) вирішувалася чисельно із застосуванням різницевої апроксимації. Нестійкості відповідають власні значення з $\operatorname{Im}\Omega \neq 0$. Результати виявляються слабко чутливими до зміни q_0 за умови, що характерний масштаб середньої течії $L_{MF} \sim q_0^{-1}$ багато більше k_y^{-1}. Мода з $q_y = 0$ має максимальний інкремент (генерація зональної течії). На рис. 3.11(a) та (b) показано інкремент $\gamma = \max|\operatorname{Im}\Omega|$ модуляційної нестійкості як функція полоїдального хвильового числа k_y у присутність середньої течії. Пунктирні лінії відповідають випадку, коли течія відсутня. Видно, що середня течія з малою амплітудою [рис. 3.11(a)] сприяє генерації зональної течії, збільшуючи інкремент, тоді як досить сильна середня

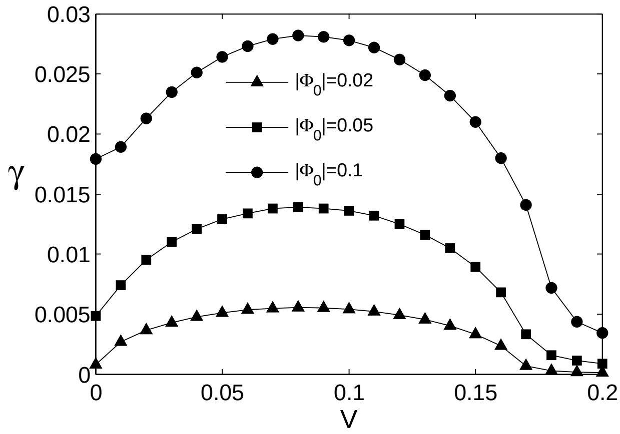

Рис. 3.12 Залежність інкремента нестійкості від амплітуди середньої течії V для трьох різних значень амплітуди дрейфової хвилі : $|\Phi_0| = 0.02, 0.05, 0.1$. Тут $k_y = 1$ і $q_0 = 0.05$.

течія [рис. 3.11(b)] суттєво зменшує інкремент нестійкості. Залежність інкремента від амплітуди середньої течії V для декількох значень амплітуди дрейфової хвилі $|\Phi_0|$ при фіксованому k_y показана на рис. 3.12 . Інкремент γ спочатку зростає зі збільшенням V, і, таким чином, у цьому випадку середня течія виявляє дестабілізуючий ефект. Потім, при деякому V ($V \sim 0.08$ для $k_y = 1$ і всіх $|\Phi_0|$) інкремент γ досягає максимуму. Це відповідає найбільш нестійкому випадку . Потім, з зростанням V інкремент починає зменшуватися, і коли амплітуда середньої течії перевищує деяке критичне значення інкремент нестійкості стає менше, чим у випадку відсутності течії. Подальше збільшення V ще більш зменшує інкремент. Таким чином, наявність середньої течії досить великої амплітуди виявляє стабілізуючий вплив на генерацію зональної течії модуляційною нестійкістю дрейфових хвиль.

3.5.2 Генерація зональних течій та дрейфових солітонів

Як було підкреслено вище, збурення густини плазми для великомасштабних рухів відхиляється від больцманівського розподілу. При цьому нелінійна система рівнянь для огинаючої електростатичного потенціалу Ψ

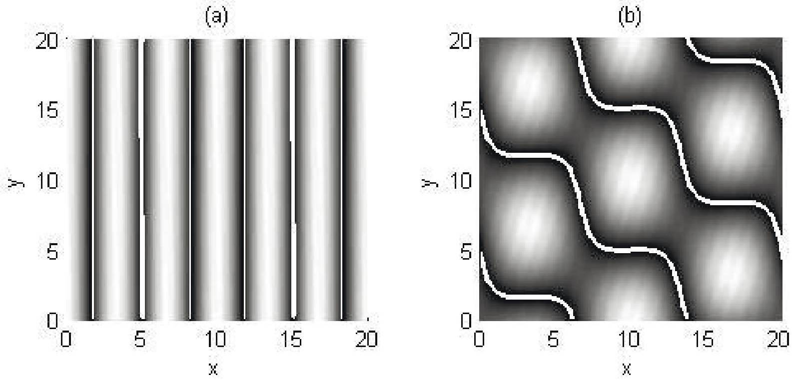

Рис. 3.13 (а) Генерація зональної течії $k_y = 0.13$; (б) генерація солітонів $k_y = 0.18$.

на дрейфовій частоті ω має вигляд [189]

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k_x^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_y^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 \omega}{\partial k_x \partial k_y}\frac{\partial 2}{\partial x \partial y}\right)\Psi + \tag{3.145}$$

$$\mathbf{z}\cdot[\mathbf{k}\times\nabla\varphi]\Psi - \frac{\mathbf{z}\cdot[\mathbf{k}\times\nabla n]}{1+k^2}\Psi = 0, \tag{3.146}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}\cdot\nabla\Delta\varphi - 2\left[k_x k_y\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + (k_x^2 - k_y^2)\frac{\partial 2}{\partial x \partial y}\right]|\Psi|^2 = 0, \tag{3.147}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}\cdot\nabla n - v_d\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \tag{3.148}$$

Зауважимо, що лінійний оператор в (3.146) може бути, взагалі кажучи, як елліптичним так і гіперболічним (в останньому випадку розглядається еволюція в часі). Розглядаємо випадок елліптичного оператора, так що можна сформулювати відповідну граничну задачу. При цьому хвильові числа дрейфової хвилі повинні задовольняти умові

$$\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k_x \partial k_y}\right)^2 - \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_x^2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial k_y^2} < 0 \tag{3.149}$$

Будемо шукати стаціонарні розв'язки рівнянь (3.146)-(3.148) у вигляді $\Psi(x,y,t) = \Phi(x,y)\exp(i\lambda t)$, де λ нелінійний зсув частоти. Накладаючи періодичні граничні умови та застосовуючи релаксаційну чисельну процедуру Петвіашвілі [127], можна знайти різні види розв'язків. В залежності від хвильових чисел дрейфової хвилі k_x, k_y спостерігалася генерація зональних течій (нелінійних структур з просторовою залежністю тільки від радіальної координати), стримерів (просторова залежність тільки від полоїдальної координати), солітонів та проміжних станів. Приклади генерації зональної течії та солітонів показані на рис. 3.13. Дрейфова швидкість фіксована значенням $v_d = 1.$, хвильове число у напрямку неоднорідності плазми (радіальне хвильове число) $k_x = 0.1$. Випадок $k_y = 0.13$ відповідає зональній течії, тоді як при $k_y = 0.18$ генеруються солітони. Часова еволюція знайдених розв'язків знаходилася прямим чисельним моделюванням системи (3.146)-(3.148) з відповідними початковими умовами. При цьому як течії так і солітони виявляються стійкими щонайменше до часів $t \sim 100$.

3.5.3 Генерація зональної течії в плазмі з градієнтом електронної температури

Як вказувалося вище, зональна течія збуджується модуляційною нестійкістю турбулентного спектра електростатичних збурень дрейфового типу [176, 177]. При цьому можна виділити два режими: (а) широкий спектр і інтегрування по хвильовим числам приводить до резонансної нестійкості; (б) спектр дрейфових хвиль вузький і тоді можна розглядати модуляційну нестійкість монохроматичної дрейфової хвилі в рамках чотирихвильової взаємодії [178–180, 190].

Дрейфові моди, обумовлені градієнтом іонної температури плазми (ITG моди) вважаються основними кандидатами для пояснення аномального транспорту, але останнім часом збільшився інтерес до дрейфових мод, породжуваних градієнтом електронної температури (ETG модам) [192–194]. Дослідження взаємодії ETG мод з великомасштабними збурюваннями типу зональних течій або стримерів (радіально витягнутих вихороподібних структур) важливо для розуміння аномального переносу по електронному каналу усередині транспортних бар'єрів в умовах, коли турбулентність ITG мод може бути значно пригнічена $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ середньою течією [186, 195]. У той же час дрібномасштабні ETG флуктуації мають характерний просторовий масштаб порядку електронного гірорадіуса й слабко чутливі до ширу (просторової неоднорідності швидкості іонів), обумовленому середньою течією. Розглянемо можливість генерації зональної течії дрейфовими ETG модами.

У плоскій двовимірній геометрії нелінійні рівняння для дрейфових мод мають вигляд [193]

$$\frac{\partial}{\partial t}(1-\Delta_\perp)\varphi + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi + P) - \{\varphi, \Delta_\perp \varphi\} = 0, \tag{3.150}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P - r\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \{P, \varphi\} = 0, \tag{3.151}$$

де φ і P відповідно нормовані електростатичний потенціал і тиск плазми. У рівняннях (3.150),(3.151) уведені наступні безрозмірні змінні

$$\varphi = \frac{1}{\epsilon_{*i}}\frac{e\phi}{T_i}, \quad P = \frac{\epsilon_B}{\epsilon_{*i}^2}\frac{P}{P_{i0}}, \quad r = \frac{\epsilon_B \epsilon_{*e}}{\epsilon_{*i}^2}, x = \frac{x'}{\rho_s\sqrt{\tau}}, \quad y = \frac{y'}{\rho_s\sqrt{\tau}}, \quad t = \epsilon_{*i}\omega_{Bi}t',$$

x', y' і t' вихідні фізичні змінні (як і раніше, в тороідальній геометрії x' відповідає полоідальній а y' радіальній координаті),

$$\epsilon_{*i} = \frac{\rho_s\sqrt{\tau}}{L_n}, \qquad \epsilon_B = \frac{\rho_s\sqrt{\tau}}{L_B}, \qquad \epsilon_{*e} = \frac{\rho_s\sqrt{\tau}}{L_p},$$

де L_n, L_B і L_p характерні масштаби неоднорідності густини плазми, магнітного поля й тиску, ρ_s іонний гірорадіус при електронній температурі T_e, і $\tau = T_i/T_e$.

У лінійному наближенню рівняння (3.150),(3.151) дають дисперсійне рівняння ETG мод

$$\omega_{1,2} = \frac{k_y}{2(k^2+1)}\left[1 \pm \sqrt{1 - 4r(k^2+1)}\right], \tag{3.152}$$

де знак + відповідає дрейфовим хвилям, а − конвективним гніздам. Умова лінійної стійкості має вигляд

$$1 - 4r\left(k^2+1\right) \geq 0. \tag{3.153}$$

Якщо $r > 1/4$, умова лінійної стійкості не виконується ні при яких хвильових числах k і ETG моди завжди нестійкі . Для $r < 1/4$, стійкі моди відповідають області $k^2 \leq 1/(4r) - 1$. Нижче розглядаємо випадок лінійно стійких ETG дрейфових мод.

Уважаючи, що зональна течія змінюється на часових масштабах значно більших зворотньої частоти дрейфових хвиль, можна використовувати стандартну процедуру розщеплення на швидкі ($\widetilde{...}$, пов'язані із дрейфовими модами) і повільні ($\widehat{...}$, пов'язані із зональною течією) збурення. Збурювання електростатичного потенціалу φ і тиску плазми P представимо у вигляді суми швидкої й повільної частин $\varphi = \widehat{\varphi} + \widetilde{\varphi}$, $P = \widehat{P} + \widetilde{P}$. Усереднюючи по швидкому часі, з (3.150),(3.151) одержимо рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(1-\Delta_\perp\right)\widehat{\varphi} = \left\{\widetilde{\varphi}, \Delta_\perp\widetilde{\varphi}\right\}, \tag{3.154}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(1-\Delta_\perp\right)\widetilde{\varphi} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\widetilde{\varphi} + \widetilde{P}\right) = \left\{\widehat{\varphi}, \Delta_\perp\widetilde{\varphi}\right\} + \left\{\widetilde{\varphi}, \Delta_\perp\widehat{\varphi}\right\}, \tag{3.155}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{P} = \left\{\widetilde{P}, \widetilde{\varphi}\right\}, \tag{3.156}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{P} - r\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial y} = \left\{\widehat{P}, \widetilde{\varphi}\right\} + \left\{\widetilde{P}, \widehat{\varphi}\right\}. \tag{3.157}$$

Взаємодія між ETG модами й зональною течією описуємо в рамках чотирихвильової схеми. Тоді ETG хвиля розглядається як суперпозиція хвилі накачування $(\mathbf{k}, \omega_k)$ і двох сателітів $(\mathbf{k}_\pm, \omega_\pm)$

$$\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}_0 + \widetilde{\varphi}_+ + \widetilde{\varphi}_-, \qquad \widetilde{P} = \widetilde{P}_0 + \widetilde{P}_+ + \widetilde{P}_-, \tag{3.158}$$

де

$$\widetilde{\varphi}_0 = \varphi_0 \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega_k t) + \text{к.с.}, \widetilde{\varphi}_\pm = \varphi_\pm \exp(i\mathbf{k}_\pm\cdot\mathbf{r} - i\omega_\pm t) + \text{к.с.} \tag{3.159}$$

$$\widetilde{P}_0 = P_0 \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega_k t) + \text{к.с.}, \widetilde{P}_\pm = P_\pm \exp(i\mathbf{k}_\pm\cdot\mathbf{r} - i\omega_\pm t) + \text{к.с.} \tag{3.160}$$

Електростатичний потенціал і тиск плазми, асоційовані з зональною течією, представимо у вигляді

$$\widehat{\varphi} = \varphi_q \exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - i\Omega t) + \text{к.с.}, \tag{3.161}$$

$$\widehat{P} = P_q \exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - i\Omega t) + \text{к.с.}, \tag{3.162}$$

де $\mathbf{q} = (q, 0)$, q характерний зворотній масштаб зональної течії, і мають місце резонансні умови $\mathbf{k}_{\pm} = \mathbf{k} \pm \mathbf{q}$ і $\omega_{\pm} = \omega_k \pm \Omega$, де ω_k частота ETG мод, обумовлена рівнянням (3.152) зі знаком $+$.

Підстановка (3.158) - (3.161) у систему (3.154) - (3.157) дає

$$\Omega\varphi_q = -i\frac{(\mathbf{k}\times\mathbf{q})_z}{(q^2+1)}\left\{\left(k_+^2-k^2\right)\varphi_0^*\varphi_+ - \left(k_-^2-k^2\right)\varphi_0\varphi_-^*\right\}, \tag{3.163}$$

$$\varphi_+\left\{\omega_+\left(k_+^2+1\right)-k_{+y}\right\} - k_{+y}P_+ = i\varphi_0\varphi_q q k_y\left(k^2-q^2\right), \tag{3.164}$$

$$\varphi_-^*\left\{\omega_-\left(k_-^2+1\right)-k_{-y}\right\} - k_{-y}P_-^* = i\varphi_0^*\varphi_q q k_y\left(k^2-q^2\right), \tag{3.165}$$

$$\Omega P_q = i(\mathbf{k}\times\mathbf{q})_z\left\{\varphi_0 P_-^* + \varphi_+ P_0^* - \varphi_-^* P_0 - \varphi_0^* P_+\right\}, \tag{3.166}$$

$$\omega_+ P_+ + k_{+y} r\varphi_+ = iqk_y\left[\varphi_q p_0 - \varphi_0 P_q\right], \tag{3.167}$$

$$\omega_- P_-^* + k_{-y} r\varphi_-^* = iqk_y\left[\varphi_q p_0^* - \varphi_0^* P_q\right]. \tag{3.168}$$

З рівнянь (3.163)-(3.168) можна визначити амплітуди верхнього φ_+, P_+ і нижнього φ_-^*, P_-^* сателітів, а потім, виключивши P_0 за допомогою співвідношення $P_0 = -(rk_y/\omega_k)\,\varphi_0$, одержати нелінійне дисперсійне рівняння четвертого порядку по Ω. Нижче представимо аналіз найбільш нестійкого випадку $k_x = 0$, тобто поширення хвилі поперек неоднорідності плазми. Врахування ненульового k_x, якісно не змінюючи ситуації, приводить тільки до деякого зменшення інкремента нестійкості. У випадку $k_x = 0$ нелінійне дисперсійне рівняння зводиться до

$$c_4\Omega^4 + c_2\Omega^2 + c_0 = 0, \tag{3.169}$$

де

$$c_0 = 4k^2q^6\left(k^2-q^2\right)\left(k^2+q^2+1\right)\varphi_0^4 + 2k^2q^4\left[k^2 - 2k\left(1+2k^2\right)\omega_k \right.$$
$$\left. + \left(1+5k^2+4k^4-2\left(q^2+q^4\right)\right)\omega_k^2\right]\varphi_0^2 - q^4\left(1+q^2\right)\omega_k^4,$$

$$c_2 = 2k^2q^2\left(k^2+q^2+1\right)\left(k^2+2\left(q^4+q^2\right)+1\right)\varphi_0^2$$
$$+\left(q^2+1\right)\left[k^2 - 4k\omega_k\left(k^2+q^2+1\right) + 2\left(k^2+q^2+1\right)\left(2\left(k^2+1\right)+q^2\right)\omega_k^2\right],$$

$$c_4 = -\left(q^2+1\right)\left(k^2+q^2+1\right)^2,$$

звідки випливає вираз для інкремента нестійкості γ

$$\gamma = \max \mathrm{Im} \left(\pm\sqrt{\frac{-c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - 4c_0c_4}}{2c_4}} \right). \tag{3.170}$$

Аналіз (3.170) показує, що модуляційна нестійкість збуджується ($\gamma = \mathrm{Im}\,\Omega > 0$) при перевищенні деякого порога по потужності накачування φ_0^2. Цей поріг є функцією хвильових чисел k (ETG хвиля) і q (зональна течія). Мінімальний поріг відповідає $q \to 0$ і дається виразженням

$$\varphi_{th}^2 = \frac{v_{ph}^4}{2\left(1 - 2(1+2k^2)v_{ph} + (1+k^2)(1+4k^2)v_{ph}^2\right)}, \tag{3.171}$$

де $v_{ph} = \omega_k/k$ фазова швидкість ETG хвилі. Коли хвильове число зональної течії q прямує до хвильового числа дрейфової хвилі k, поріг нестійкості необмежено зростає. Даний аналіз обмежено випадком, коли хвиля накачування та обидва сателіта є лінійно стійкими, тобто для кожного значення параметра r усі розглянуті k та q обмежені на (k,q)-площині колом

$$k^2 + q^2 = \frac{1}{4r} - 1. \tag{3.172}$$

Коло стійкості звужується якщо $r \to 1/4$, тобто при збільшенні градієнта електронної температури або при зменшенні градієнта густини плазми. Зі збільшенням параметра r область нестійкості звужується й інкремент нестійкості зменшується . У всіх випадках максимальний інкремент відповідає деякій парі (k,q) - з кола (3.172), так що для фіксованого хвильового числа k існує оптимальний (відповідний максимальному інкременту) масштаб q збуджуваної зональної течії. Зі збільшенням амплітуди накачування, інкремент і область нестійкості збільшуються.

3.5.4 Стабілізація лінійної нестійкості дрейфових мод зональною течією

Відомо, що середня течія може приводити не тільки до нестійкості (нестійкість Кельвіна-Гельмгольца), але й до стабілізації нестійкостей (зокрема, дрейфових ITG мод) [174, 185–188]. До теперешнього часу, стабілізація лінійних нестійкостей розглядалася, головним чином, для середніх течій. Вплив зональної течії на дрейфові моди було розглянуто в [196] у рамках квазілінійної теорії. При цьому профіль течії вважався статичною гладкою функцією. Однак, на відміну від середньої течії, зональна течія є, загалом кажучи, нестаціонарною і має складну просторову структуру [174, 197].

У цьому підрозділі розглядається вплив зональної течії на лінійну нестійкість дрейфових ETG мод у припущенні складної (випадкової) просторової структури зональної течії.

Перепишемо рівняння (3.150), (3.151) у вигляді [193]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v_E} \cdot \nabla\right)(\varphi - \Delta_\perp \varphi) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi + p) + \nu \Delta^2 \varphi = 0, \tag{3.173}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v_E} \cdot \nabla\right) p - r\frac{\partial}{\partial y}\varphi - \chi \Delta p = 0, \tag{3.174}$$

де $\mathbf{v_E} = [\hat{\mathbf{z}} \times \nabla\varphi]$, і останні доданки в (3.173), (3.173) включають ефекти в'язкості й теплової дифузії. Щоб врахувати наявність зональної течії, представимо швидкість $\mathbf{v_E}$ у вигляді

$$\mathbf{v_E} = v(x,t)\hat{\mathbf{y}} + [\hat{\mathbf{z}} \times \nabla\varphi], \tag{3.175}$$

де перший доданок відповідає зональної течії. Розгляд взаємодії дрейфових хвиль із зональною течією у рамках самоузгодженої нелінійної моделі повинно приводити до саморегулювальній поведінці (як у чисто феноменологічних моделях типу хижак–жертва для дрейфової турбулентності–зональної течії) [174, 198]), але ми розглядаємо вплив зональної течії на лінійну нестійкість дрейфових мод і нехтуємо зворотньою реакцією дрейфових мод на зональну течію.

Припускаємо, що профіль зональної течії $v(x)$ є випадковою функцією й $v(x)$ однорідний гауссівський процес із нульовим середнім $\langle v(x)\rangle = 0$, і кореляційної функцією

$$\langle v(x)v(x')\rangle = D(x-x'), \tag{3.176}$$

де $\langle \ldots \rangle$ означає статистичне усереднення. Вважаємо також, що інтенсивність шуму мала, $D(x) \ll 1$. Зневажаючи нелінійностями, дисипацією і доданком v^2 після вистави

$$\varphi(x,y,t) = \Phi(x)\exp(ik_y y - i\omega t),$$

рівняння (3.173), (3.174) можна звести до одному рівнянню для Φ

$$\omega^2\left(\frac{d^2}{dx^2} - k_y^2 - 1\right)\Phi + \omega\left\{k_y - 2k_y v\left(\frac{d^2}{dx^2} - k_y^2 - 1\right)\right\}\Phi - k_y^2(v+r)\Phi = 0, \tag{3.177}$$

яке, після фур'є перетворення ($d/dx \to -iq$), можна переписати у вигляді

$$G_0^{-1}(p)\Phi(p) + \int k_y[k_y - 2\omega(q_2^2 + k_y^2 + 1)]v(q_1)\Phi(\omega, q_2, k_y) \\ \times\delta(q - q_1 - q_2)dq_1 dq_2 = 0, \tag{3.178}$$

де $p \equiv (\omega, q, k_y)$ і

$$G_0^{-1}(p) = \omega^2(q^2 + k_y^2 + 1) - \omega k_y + k_y^2 r. \tag{3.179}$$

Щоб уникнути громіздких виразів перепишемо рівняння (3.178) у символічному вигляді

$$G_0^{-1}(p)\Phi(p) + \gamma(p, p_1, p_2)v(p_1)\Phi(p_2) = 0, \tag{3.180}$$

де

$$\gamma(p, p_1, p_2) = \varkappa(p_1, p_2)\delta(p - p_1 - p_2), \tag{3.181}$$

та, як звичайно, мається на увазі інтегрування по повторюваним індексам . Уводячи в праву частину (3.180) джерело $\eta(p)$ та беручи функціональну похідну $\delta/\delta\eta(p')$, маємо

$$G_0^{-1}(p)G(p,p') + \gamma(p,p_1,p_2)v(p_1)G(p_2,p') = \delta(p-p'), \tag{3.182}$$

де $G(p,p') = \delta\Phi(p)/\delta\eta(p')$ функція Гріна, і враховано, що $\delta\eta(p)/\delta\eta(p') = \delta(p-p')$. Функція $G_0(p,p')$ є вільною (тобто під час відсутності зональної течії v) функцією Гріна. Представляючи функцію Гріна у вигляді суми середньої й флуктуючої частин

$$G(p,p') = \langle G(p,p')\rangle + \tilde{G}(p,p'), \tag{3.183}$$

підставляючи в (3.182) і виконуючи усереднення, можна одержати

$$G_0^{-1}(p)\langle G(p,p')\rangle + \gamma(p,p_1,p_2)\langle v(p_1)\tilde{G}(p_2,p')\rangle = \delta(p-p'). \tag{3.184}$$

Віднімаючи (3.184) з (3.182), маємо

$$\begin{aligned} G_0^{-1}(p)\tilde{G}(p,p') + \gamma(p,p_1,p_2)v(p_1)\langle G(p_2,p')\rangle \\ +\gamma(p,p_1,p_2)[v(p_1)\tilde{G}(p_2,p') - \langle v(p_1)\tilde{G}(p_2,p')\rangle] = 0. \end{aligned} \tag{3.185}$$

У наближенні Бурре [68], яке виправдано, якщо інтенсивність флуктуацій досить мала, можна зневажити доданком $v\tilde{G} - \langle v\tilde{G}\rangle$ і для флуктуючої частини функції Гріна одержати

$$\tilde{G}(p,p') = -G_0(p)\gamma(p,p_1,p_2)v(p_1)\langle G(p_2,p')\rangle. \tag{3.186}$$

Підставляючи цей вираз в рівняння (3.184), одержимо

$$G_0^{-1}(p)\langle G(p,p')\rangle - \gamma(p,p_1,p_2)\gamma(p'_1,p'_2,p_2)G_0(p_2)\langle v(p_1)v(p'_1)\rangle\langle G(p'_2,p')\rangle = \delta(p-p'). \tag{3.187}$$

З (3.176) випливає, що в спектральному представленні коррелятор флуктуацій має вигляд $\langle v(p)v(p')\rangle = I(p)\delta(p+p')$. Через однорідність випадкового процесу функція Гріна в рівнянні (3.187) має структуру $\langle G(p,p')\rangle = G(p)\delta(p-p')$. Скориставшись цим та рівнянням (3.181), можна виконати інтегрування в (3.187) та отримати

$$G(p) = \frac{1}{G_0^{-1}(p) - \varkappa(p - p_1, p_1)\varkappa(p_1 - p, p)G_0(p_1)I(p - p_1)}. \tag{3.188}$$

Полюса функції Гріна $G(p)$ визначають спектр елементарних збуджень і відповідне дисперсійне співвідношення має вигляд

$$G_0^{-1}(p) - \varkappa(p - p_1, p_1)\varkappa(p_1 - p, p)G_0(p_1)I(p - p_1) = 0. \tag{3.189}$$

Під час відсутності зональної течії маємо $G_0^{-1}(p) = 0$ і одержуємо лінійне дисперсійне співвідношення (3.152) з $k_x \equiv q$. Далі розглядаємо випадок, коли профіль зональної течії $v(x)$ має форму

$$v(x) = v_0 \cos(q_0 x + \vartheta), \tag{3.190}$$

де v_0 гауссівська величина з нульовим середнім і дисперсією σ^2, а випадкова фаза ϑ однорідним чином розподілена між 0 і 2π. Кореляційна функція (3.176) має вигляд $D(x) = (\sigma^2/2)\cos(q_0 x)$ або, у спектральному просторі

$$I(q) = \frac{\sigma^2}{4}[\delta(q - q_0) + \delta(q + q_0)]. \tag{3.191}$$

У цьому випадку просторові флуктуації зосереджені поблизу хвильового числа q_0 і характерний масштаб зональної течії порядку $\sim q_0^{-1}$. З (3.152) випливає, що під час відсутності зональної течії максимальний інкремент нестійкості для фіксованого хвильового числа k_y досягається при $k_x = 0$. Тому, для спрощення обчислень, будемо розглядати вплив зональної течії на найбільш нестійкі моди й покладемо $q = 0$. Тоді, підставляючи (3.191) в (3.189) одержимо дисперсійне рівняння

$$c_1\omega^4 - c_2\omega^3 + c_3\omega^2 - c_4\omega + c_5 = 0, \tag{3.192}$$

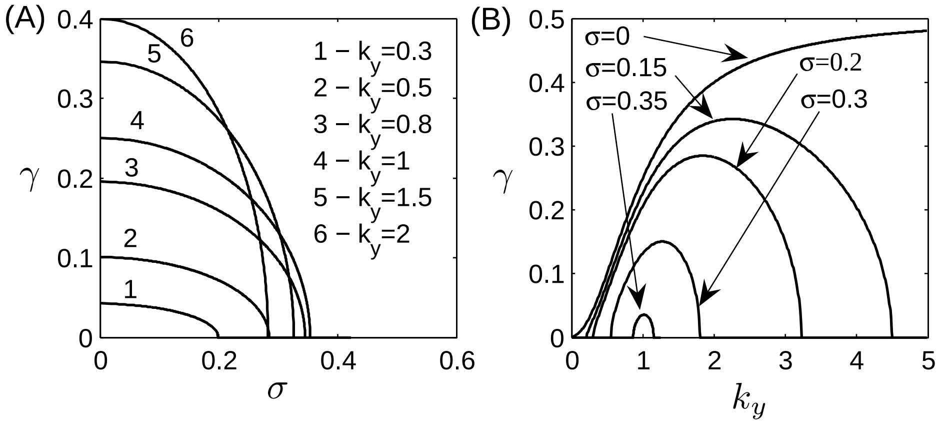

Рис. 3.14 (A) Інкремент нестійкості як функція середньоквадратичної амплітуди зональної течії σ (для різних полоідальних хвильових чисел k_y). (B) Інкремент нестійкості як функція k_y (для різних σ). Інкремент нормовано на $\omega_{Bi}\rho_e\sqrt{\tau}/L_n$, хвильове число k_y на $1/(\rho_e\sqrt{\tau})$, амплітуда σ на $c_s(\rho_e\sqrt{\tau})/L_n$.

де

$$c_1 = (k_y^2 + 1)(q_0^2 + k_y^2 + 1), \qquad (3.193)$$

$$c_2 = k_y(q_0^2 + 2k_y^2 + 2), \qquad (3.194)$$

$$c_3 = k_y^2(q_0^2 + k_y^2 + 1)[r - 2\sigma^2(k_y^2 + 1)] + k_y^2[1 + r(k_y^2 + 1)], \qquad (3.195)$$

$$c_4 = 2k_y^3 r - k_y^3\sigma^2(q_0^2 + 2k_y^2 + 2), \qquad (3.196)$$

$$c_5 = k_y^4\left(r^2 - \frac{\sigma^2}{2}\right). \qquad (3.197)$$

На рис. 3.14(A) показана залежність інкремента γ нестійких ETG мод від середньоквадратичної амплітуди зональної течії σ для різних полоідальних хвильових чисел k_y для $q_0 = 0.1$. Вибиралося $r = 0.25$, так що, як випливає з (3.153), під час відсутності зональної течії була нестійкість при всіх $k_y \neq 0$. Інкремент нестійкості зменшується зі збільшенням амлитуди течії σ і повністю зникає при перевищенні σ деякого критичного значення, що залежить від k_y. Таким чином, зональна течія впливає на нестійкі ETG моди. На рис. 3.14(B) показана залежність інкремента від полоідального хвильового числа k_y для різних середньоквадратичних амплітуд σ. Під час відсутності зональної течії ($\sigma = 0$) інкремент γ зростає зі збільшенням k_y і насичується на рівні $\gamma_{max} = \sqrt{r}$. Наявність течії ($\sigma \neq 0$) радикально змінює ситуацію. Інкремент нестійкості спочатку зростає зі збільшенням k_y від деякого $k_{y,1}$ а потім зменшується, падаючи до нуля при деякому $k_{y,2}$. Для не занадто великих σ, лінійна нестійкість у просторі хвильових чисел обмежена областю $k_{y,1} < k_y < k_{y,2}$. Нижнє $k_{y,1}$ і верхнє $k_{y,2}$ граничні хвильові числа відповідно зростають і зменшуються зі збільшенням амплітуди зональної течії σ (тобто відбувається звуження області нестійкості) і при перевищенні критичного значення $\sigma_{cr} \sim 0.36$ (для $r = 0.25$) нестійкість ETG мод повністю пригнічується для усіх полоідальних хвильових чисел k_y. Оцінку для критичного значення σ_{cr} можна одержати з рівняння (3.192). Інкремент дорівнює нулю при $k_y \to \infty$ (найбільш нестійкі моди) якщо $\sigma = \sigma_{cr}$. З (3.192) випливає, що ω змінюється як k_y^{-1} при $k_y \to \infty$. Тоді можна одержати оцінку $\sigma_{cr} = \sqrt{2}r$. Ця аналітична оцінка залежності критичного значення (необхідного для стабілізації нестійкості ETG мод) середньоквадратичної амплітуди зональної течії від параметра r перебуває в гарній згоді із чисельними результатами.

Помітимо, що флуктуації в сильно нелінійному режимі [198, 199] можуть бути далекі від гауссових. Це пов'язано з виникненням когерентних структур та переміжаємостю турбулентності. У нашому випадку гауссова статистика виправдана припущенням малості середньоквадратичної амплітуди зональної течії (так що, зокрема, для замкнення рівнянь застосовне наближення Бурре) і сильно нелінійними ефектами можна нехтувати.

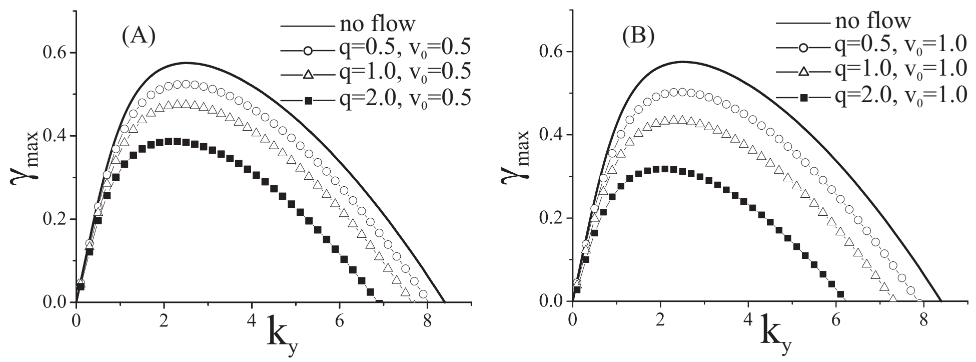

Рис. 3.15 Залежність максимального інкремента нестійкості від хвильового числа k_y для різних масштабів зональної течії q в (3.198) і (А) амплітуди зональної течії $v_0 = 0.5$; (В) амплітуди зональної течії $v_0 = 1$. Нормування величин така ж як на рис. 3.14.

Можна також розглянути випадок, коли профіль зональної течії має детерміністичну форму $v(x) = v_0 \cos(qx)$. Крім того, можна врахувати ефекти в'язкості й теплової дифузії. Тоді після лінеаризації з (3.173), (3.174) та (3.175) можна одержати наступну задачу на власні значення

$$\begin{pmatrix} k_y \hat{A}^{-1}\hat{B} & k_y \hat{A}^{-1} \\ -rk_y \hat{I} & k_y \hat{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ P \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \Phi \\ P \end{pmatrix}, \tag{3.198}$$

де

$$\hat{A} = 1 + k_y^2 - \frac{d^2}{dx^2}, \quad \hat{B} = 1 + v_0 \cos(qx)\hat{A} - i\frac{\nu}{k_y}\hat{D},$$
$$\hat{D} = k_y^4 - 2k_y^2 \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^4}{dx^4}, \quad \hat{C} = v_0 \cos(qx) - i\chi k_y + i\frac{\chi}{k_y}\frac{d^2}{dx^2}.$$

Із застосуванням кінцево-різницевої апроксимації, задача на власні значення (3.198) може бути вирішена чисельно. Для дисипативних коефіцієнтів обиралися значення $\nu = \chi = 0.01$. Інкремент нестійкості показано на рис. 3.15 для двох значень амплітуди зональної течії v_0 і різних значень q (для $r = 0.5$). Видно, що й у цьому випадку зональна течія зменшує інкремент нестійкості, хоча стабілізуючий ефект є набагато меншим, чим при врахуванні флуктуацій амплітуди течії.

3.6 Результати до розділу 3

1. У моделі нелінійного рівняння Хасегави-Міми аналітично обчислені амплітуди та повні перерізи розсіювання дрейфових плазмових хвиль на двовимірному дрейфовому солітоні (модоні). У випадку, коли довжина дрейфової хвилі більше радіуса модона залежність амплітуди розсіювання від кута розсіювання немонотонна й суттєво залежить від кута падіння хвилі, але у всіх випадках відсутнє розсіювання вперед. Повний переріз розсіювання має максимум для кутів падіння близьких до 1 і $2\pi - 1$ й різко зменшується, падаючи майже до нуля, у широкій області кутів поблизу $\sim \pi$. У випадку, коли довжина хвилі багато менше радіуса модона застосовне ейкональне наближення. При цьому

розсіювання йде переважно на малі кути, а повний переріз близький до подвоєного характерного діаметру модона.

2. Двовимірний дрейфовий солітон може захоплювати квазілінійні дрейфові хвилі. Захоплення здійснюється в центрі або на периферії вихору, приводячи до викривлення його форми. Аналітично знайдено власні частоти захоплених мод та їх просторову структуру.

3. Аналітично знайдені амплітуди та повні перерізи розсіювання електромагнітної хвилі в плазмі на двовимірному дрейфовому солітоні.

4. Отримано нелінійні рівняння, які описують нелінійні дрейфові та іонно-звукові хвилі з урахуванням їх взаємодії та тривимірної геометрії. Показано, що отримані рівняння у окремому випадку зводяться до узагальнення рівняння Хасегави-Міми на тривимірний випадок. Це рівняння має нескінченне число інтегралів руху (але, здається, не є повністю інтегрованим). Знайдено точні аналітичні розв'язки цього рівняння у вигляді тривимірного дрейфового вихорового солітона (тривимірного модона), який містить x-антисиметричну (ядро), z-антисиметричну та радіально симетричну частини. Чисельно досліджено зіткнення модонів. Чисельне моделювання показує, що тривимірні модони без радіально симетричної та/або z-антисиметричної частин повністю відтворюють свою початкову форму після зіткнення (абсолютно пружне солітонне зіткнення), не залишаючи ніякого випромінювання. Це справедливо як лобових зіткнень (модони спочатку рухаються назустріч), так і для проникаючих зіткнень (в початковий момент більш швидкий модон доганяє повільний). Це нагадує пружні зіткнення одновимірних солітонів в повністю інтегрованих моделях типу НРШ, ДНРШ та КдФ. Зіткнення модонів з радіально симетричною та/або z-антисиметричною частинами виявляються непружними та модони руйнуються в процесі зіткнення, залишаючи випромінювання. Зіткнення з ненульовим прицільним параметром виявляються непружними для усіх видів знайдених тривимірних модонів.

5. Показано, що середня течія достатньо малої амплітуди збільшує інкремент модуляційної нестійкості дрейфових хвиль, сприяючи, тим самим, генерації зональної течії. При деякому значенні амплітуди інкремент досягає максимуму. З подальшим збільшенням амплітуди середньої течії інкремент нестійкості зменшується, і коли амплітуда середньої течії перевищує деяке критичне значення інкремент стає менше, чим у випадку відсутності течії. Подальше збільшення амплітуди ще більш зменшує інкремент. Таким чином, наявність середньої течії досить великої амплітуди виявляє стабілізуючий вплив на генерацію зональної течії модуляційною нестійкістю дрейфових хвиль.

6. Показано, що в залежності хвильових чисел дрейфової хвилі можлива генерація як зональних течій так і солітонів.

7. Показано, що модуляційна нестійкість дрейфових хвиль, обумовлених градієнтом електронної температури, при перевищенні амплітуди дрейфової хвилі граничного значення приводить до генерації зональної течії з деяким оптимальним просторовим масштабом. Для випадку поширення дрейфової хвилі перпендикулярно напрямку неоднорідності плазми інкремент нестійкості знайдено аналітично. Чисельний аналіз випадку довільного поширення показує, що якісна картина залежності інкремента від амплітуди й хвильового числа дрейфової хвилі не змінюється , приводячи лише до незначного зменшення інкремента нестійкості.

8. Наявність зональної течії як когерентної, так й шумової природи значно послаблює лінійну нестійкість дрейфових мод, обумовлених градієнтом електронної температури (ETG мод) та може призводити до повної стабілізації нестійкості. У наближенні Бурре знайдено нелінійне дисперсійне рівняння, що зв'язує частоту й хвильовий вектор ETG моди із середньою амплітудою зональної течії. При перевищенні середньоквадратичної амплітуди зональної течії деякого критичного значення, лінійна нестійкість ETG мод зникає для всіх полоідальних хвильових чисел дрейфової хвилі.

РОЗДІЛ 4

Динаміка багатовимірних мультисолітонів і вихорів у середовищах з нелокальною нелінійністю

Зміст цього розділу відображено в роботах [7, 25–27, 34].

У середовищах із просторовою нелокальною нелінійністю нелінійний відгук середовища залежить від інтенсивності хвильового пакета не в точці, а в деякій протяжній просторовій області. У більш вузькому змісті під нелокальністю мається на увазі також залежність нелінійного відгуку від кінцевого числа похідних від інтенсивності, узятих в одній точці.

Нелокальна нелінійність природньо присутня і знаходить експериментальне підтвердження в багатьох фізичних системах, таких як плазма [122, 200], пилова плазма [201], Бозе-Ейнштейнівські конденсати [202, 203], оптичні середовища [204, 205], атомні ядра [206], рідкі кристали [207–211] та ін.

Важливою властивістю нелокальних нелінійних середовищ є можливість запобігання колапсу, який звичайно має місце в локальних середовищах для досить інтенсивних двовимірних і тривимірних хвильових пакетів [205, 212, 213]. Строгий доказ відсутності колапсу (обмеженість гамільтоніана при фіксованому "числі частинок") для деяких багатовимірних моделей з нелокальної нелінійністю було дано в [125, 205], а для нелокальності, виникаючої при взаємодії верхньогібридної плазмової хвилі з магнітозвуковою, вище в розділі 3 даної дисертації. В відсутність колапсу баланс між дисперсією й нелінійними ефектами призводить до можливості існування стійких стаціонарних локалізованих нелінійних структур.

У середовищах з локальною кубічною нелінійністю вихорові солітони виявляються нестійкими через розвиток азимутальної нестійкості й можуть бути стабілізовані тільки при врахуванні конкуруючої локальної нелінійності п’ятого порядку, порівнянної по величині з кубічною [214]. Це, однак, погано узгоджується з умовами реальних експериментів. Теоретичні дослідження [215, 216] показали, що нелокальність може значно послабити або повністю придушити азимутальну нестійкість для однозарядних ($m = 1$) та двозарядних ($m = 2$) вихорів. Експеримент [217] підтвердив існування стійких однозарядних вихорів у середовищі з так званою тепловою нелокальною нелінійністю.

Наявність у нелокальному середовищі додаткового нелінійного масштабу, який може значно перевершувати лінійний дисперсійний масштаб, приводить до можливості існування зв'язаних станів, що полягають із декількох фундаментальних солітонів, що перебувають у противофазі [218]. Одновимірні скалярні світлі мультисолітони в середовищі з нелокальною нелінійністю – дипольні, трипольні й квадрупольні – розглядалися в [219], векторні мультисолітони в [220]. При цьому була показана їхня стійкість аж до квадрупольного солітона. Нелокальність може також приводити до притяганню одновимірних темних солітонів, у результаті чого вони утворюють зв'язаний стан [221].

Двовимірні обертові дипольні солітони в нелокальному середовищі теоретично вивчалися в [222, 223], але тільки на основі наближеного варіаційного аналізу.

Двовимірні дипольні, трипольні й квадрупольні солітони були експериментально реалізовані в оптичному середовищі з тепловою нелокальною нелінійністю в [224]. При цьому відзначалося, що одержувані мультисолітони виявлялися, загалом кажучи, нестійкими, однак у великому діапазоні параметрів нестійкість була досить слабка, що уможливлювало експериментальне спостереження двовимірних мультисолітонів.

У даному розділі досліджуються двовимірні вихори, мультисолітони (необертові й обертові) і тривимірні вихори в середовищах з різними типами нелокальної нелінійності – гауссовськім нелокальним відгуком, тепловою нелінійністю в плазмі й диполярною нелінійністю в Бозе-Ейнштейнівських конденсатах. Ми показуємо, що знайдені структури можуть бути стійкими в певному діапазоні параметрів.

4.1 Стійкий двовимірний дипольний солітон у середовищі з гауссовським нелокальним відгуком

Розповсюдження в нелінійному середовищі електромагнітної хвилі в параксіальному наближенні описується хвильовим рівнянням для огинаючої електромагнітного поля $\Psi(x, y, z)$

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial z} + \Delta_\perp\Psi + \Theta\Psi = 0, \tag{4.1}$$

де z напрямок розповсюдження, Θ представляє нелінійний відгук середовища.

Рівняння (4.1) зберігає енергію

$$N = \int |\Psi|^2 \, d\mathbf{r}, \tag{4.2}$$

і гамільтоніан

$$H = \int \left\{ |\nabla_\perp\Psi|^2 - \frac{1}{2}\Theta|\Psi|^2 \right\} d\mathbf{r}$$

Функцію відгуку нелокального нелінійного середовища виберемо у вигляді

$$\Theta(\mathbf{r}) = \int R(\alpha|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|)|\Psi(\mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r}_1. \tag{4.3}$$

Форма ядра $R(\xi)$ визначається типом нелокальної взаємодії в середовищі, однак, можна вказати властивості, слушні для всіх $R(\xi)$. Нелінійний доданок прямує до локальної нелінійності керровського типу $\Theta \to |\Psi|^2$, коли характерний просторовий масштаб розподілу інтенсивності $|\Psi|^2$ багато більше характерної ширини функції $R(\xi)$. В протилежному, сильно нелокальному випадку, функція відгуку може бути апроксимована виразом $\Theta(r) = N\left\{R(0) + \frac{1}{2}\Delta_\perp R(0) r^2\right\}$. Тоді, як вказувалося в [225], для досить гладких ядер $R(r)$ рівняння (4.1) зводиться до рівняння для лінійного гармонічного осцилятора. Тут розглядаємо випадок, коли функція нелокального відгуку має ядро гауссовської форми

$$R(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) = \frac{\alpha^2}{\pi} e^{-\alpha^2|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2}, \tag{4.4}$$

де α параметр нелокальності.

Будемо шукати стаціонарні розв'язки (4.1) у вигляді $\Psi(x,y,z) = \psi(x,y)\exp(i\Lambda z)$, так що $\psi(x,y)$ задовольняє рівнянню

$$-\Lambda\psi + \Delta_\perp\psi + \theta\,\psi = 0, \tag{4.5}$$

де

$$\theta = \frac{\alpha^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]}\psi^2(x_1,y_1)d\mathbf{r}_1, \tag{4.6}$$

і, загалом кажучи, не передбачається радіальна симетрія $\psi(x,y)$. На відміну від звичайного локального нелінійного рівняння Шредингера (НРШ), нелокальне рівняння (4.5) має два характерні просторові масштаби: "внутрішній"масштаб $\Lambda^{1/2}$ (у НРШ цей масштаб визначає характерну ширину солітона) та "зовнішній"масштаб α, що визначає ступінь нелокальності . При цьому, характерна ширина потенційної ями в (4.1) може суттєво відрізнятися від $\Lambda^{-1/2}$ та можливе існування мультисолітонних структур.

Далі в (4.5) використовуємо нормовані змінні $\psi^{'} = \psi/\alpha$, $x' = \alpha x$, $y' = \alpha y$, $\lambda = \Lambda/\alpha^2$. Накладаючи періодичні граничні умови й вибираючи підходящу початкову умову, з використанням релаксаційної чисельної техніки [226], можна чисельно знайти розв'язок у вигляді дипольного солітона, показаний на рис. 4.1. Дипольний солітон складається із двох фундаментальних солітонів із протилежними фазами. Характерна ширина окремого солітона й "відстань"між ними зменшуються зі збільшенням параметра $\lambda = \Lambda/\alpha^2$. Стійкість дипольного солітона вивчалася чисельним аналізом динамічної системи (4.1), (4.3), (4.4) . Чисельне моделювання показує, що дипольні солітони з $\lambda > \lambda_{th}$, де $\lambda_{th} \approx 21$ граничне значення, виявляються стійкими стосовно малих початкових збурень. Стійке поширення дипольного солітона показано на рис. 4.2(a), (b). Дипольні солітони з досить великими (у порівнянні з λ_{th}) значеннями λ поширюються без зміни форми на досить великі відстані (багато тисяч характерних дифракційних довжин) навіть в присутності значних початкових збурень. Початковий стан брався у вигляді $\psi'(x',y')[1+\varepsilon f(x',y')]$, де $\psi'(x',y')$ чисельно знайдений розв'язок у вигляді дипольного солітона, $f(x',y')$ білий гауссівський

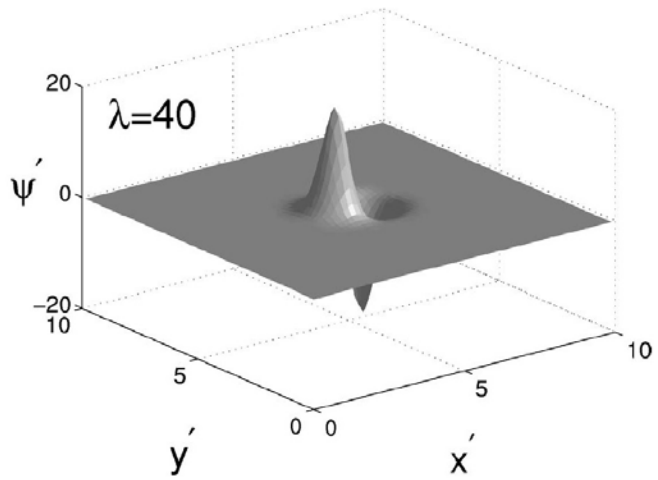

Рис. 4.1 Дипольний солітон з $\lambda = 40$.

шум з дисперсією $\sigma^2 = 1$ й параметр збурення $\varepsilon = 0.1 - 0.3$. На рис. 4.3 показана амплітуда $|\psi'(x', y')|$ на різних z' для випадку $\lambda = 400$ й $\varepsilon = 0.12$. Видно, що дипольний солітон надзвичайно стійкий – при чітко видимому шумовому викривленні початкової форми, солітон скидає шумові брижі (які поглиналася на границях чисельними поглиначами) і навіть на відстані $z' = 2500$ зберігає свою форму. Дипольні солітони, однак, є нестійкими (навіть якщо початкове збурення дуже мале або взагалі відсутнє), якщо $\lambda < \lambda_{th}$. Руйнування дипольного солітона з λ поблизу граничного значення константи поширення λ_{th} показане на рис. 4.2(c), (d). Картина ще раз міняється нижче $\lambda_{cr} \approx 7.6$. При цьому, як показано на рис. 4.2(e), (f), дипольний солітон розпадається на два фундаментальні солітона, які рухаються в протилежних напрямках без зміни своєї форми . На рис. 4.4 показані залежності енергії дипольного солітона N_{dip} та подвоєної енергії $2N_{mon}$, де N_{mon} енергія фундаментального (монопольного) солітона, від константи поширення λ. Видно, що енергія зв'язку $\delta N = N_{dip} - 2N_{mon}$ у дипольному солітоні прямує до нуля, коли λ наближається до $\lambda_{cr} = 7.6$. Це пояснює, чому дипольний солітон з $\lambda \leq \lambda_{cr}$ може бути легко (тобто під дією дуже малого початкового збурення) розщеплений на два фундаментальні солітона.

Результати чисельного моделювання можна проілюструвати варіаційним аналізом. Рівняння (4.5) є рівнянням Ейлера-Лагранжа для лагранжи-

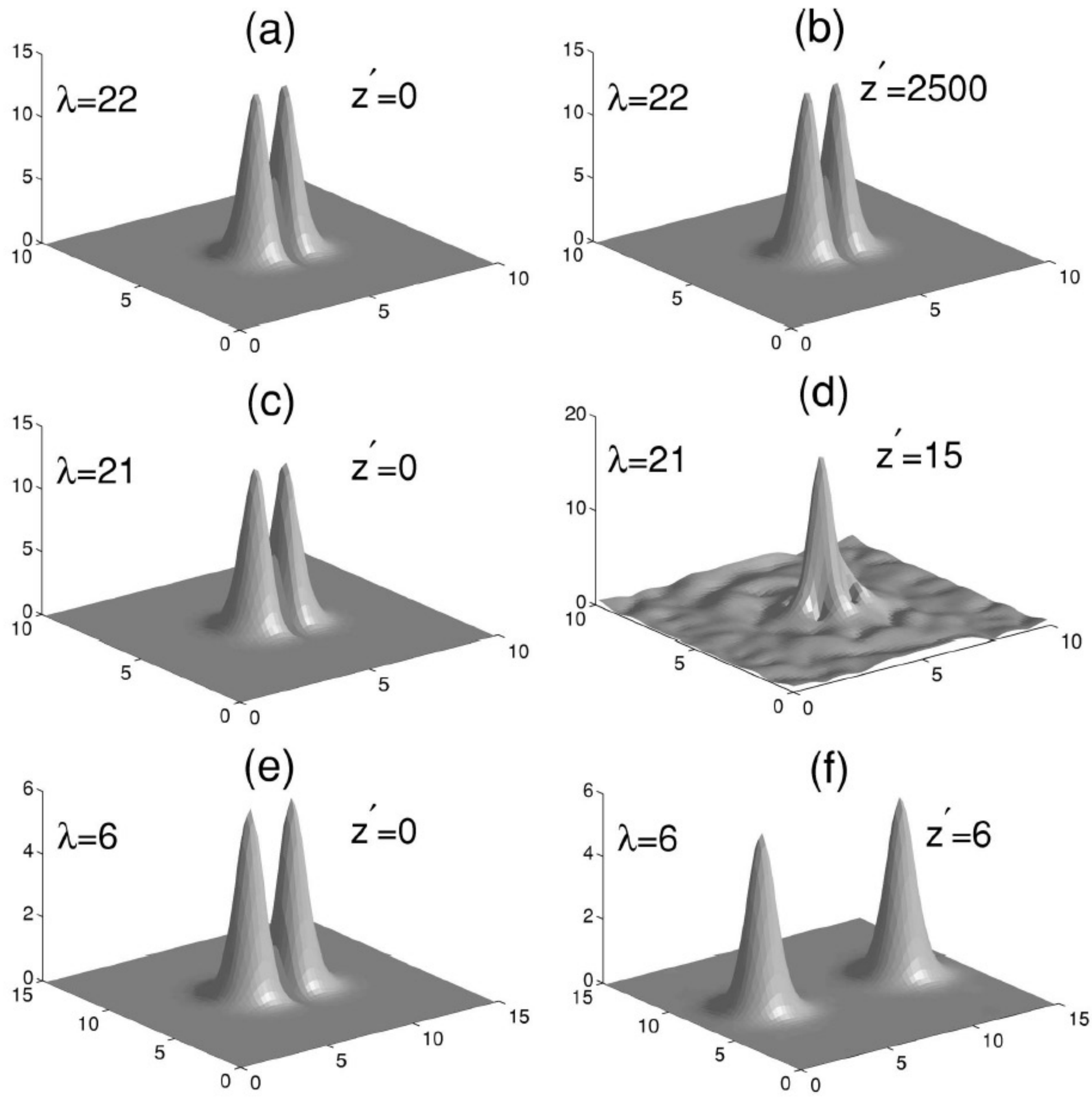

Рис. 4.2 Залежність амплітуди $|\psi'(x', y')|$ дипольного солітона від z для різних λ (при наявності слабкого початкового шумового збурення): (a), (b) - стійке розповсюдження; (c), (d) - руйнування дипольного солітона; (e), (f) - розпад дипольного солітона на два фундаментальні солітона.

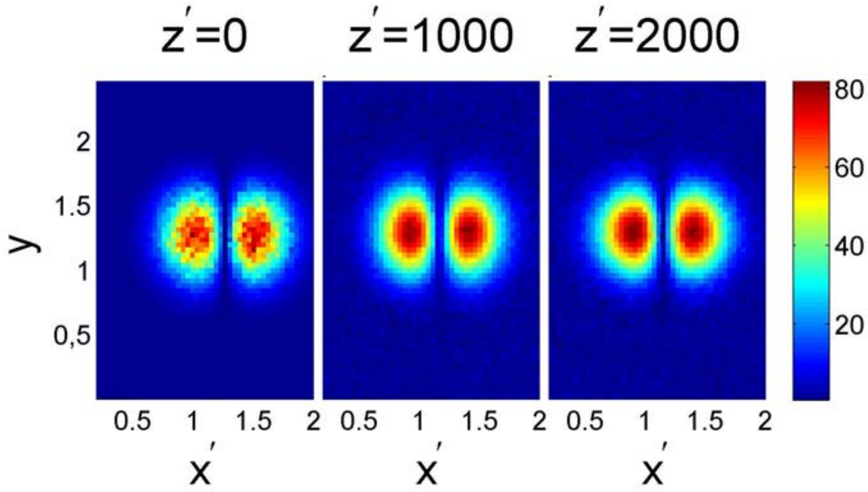

Рис. 4.3 Стійка динаміка дипольного солітона з $\lambda = 400$ у присутності сильного початкового шумового збурення.

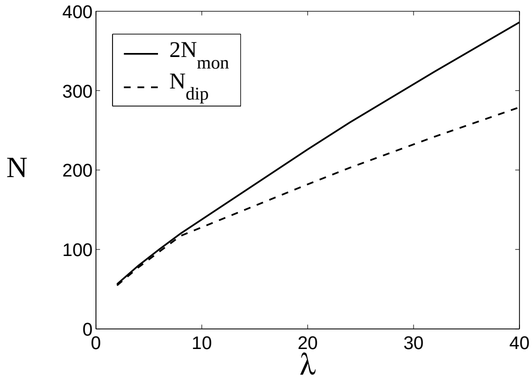

Рис. 4.4 Залежність подвоєної енергії фундаментального солітона (монополя) $2N_{mon}$ (суцільна лінія) і енергії дипольного солітона N_{dip} (пунктирна лінія) від параметра λ.

ана

$$\mathcal{L} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[|\nabla\psi'|^2 - \frac{1}{2}\theta\psi'^2 + \lambda\psi'^2 \right] d\mathbf{r}. \qquad (4.7)$$

Вибираючи пробну функцію у вигляді

$$\psi' = Ae^{-\beta^2[(x'-d/2)^2+y'^2]} - Ae^{-\beta^2[(x'+d/2)^2+y'^2]}, \qquad (4.8)$$

де A, β і d невідомі параметри, та підставляючи її в (4.7), одержуємо

$$\mathcal{L} = \pi A^2 \left(2c_1 - \frac{A^2}{4}c_2 + \lambda c_3 \right), \qquad (4.9)$$

де

$$c_1 = 1 - (1 - \mu^2/2)e^{-\mu^2/2}, \qquad (4.10)$$

$$c_2 = \frac{1}{\beta^2(1+\beta^2)}[1 + 2e^{-\mu^2} + e^{-\mu^2/(1+\beta^2)} - 4e^{-(3+2\beta^2)\mu^2/4(1+\beta^2)}], \qquad (4.11)$$

$$c_3 = \frac{1}{\beta^2}\left(1 - e^{-\mu^2/2}\right), \qquad (4.12)$$

та, замість d, уведений варіаційний параметр $\mu = \beta d$. Оптимальне A задовольняє рівнянню $\partial\mathcal{L}/\partial A = 0$, що дає

$$A^2 = \frac{4c_1 + 2\lambda c_3}{c_2}. \qquad (4.13)$$

Лагранжиан (4.9), де A^2 визначається (4.13), є функцією двох параметрів β й μ . Топографія функції $\mathcal{L}(\beta,\mu)$ залежить від константи поширення λ. Існує єдиний мінімум, якщо $\lambda > \lambda_{cr}$, де λ_{cr} деяке критичне значення. На рис. 4.5 (a) показані лінії рівня функції $\mathcal{L}(\beta,\mu)$ для $\lambda = 40$. У цьому випадку мінімум має місце при $\beta = 1.74$ й $\mu = 1.1$, та відповідає дипольному солітону, показаному на рис. 4.1. Амплітуда A та параметри β й μ перебувають у гарній згоді з відповідними величинами, отриманими із чисельного розв'язку. Порівняння результатів варіаційного аналізу й прямого чисельного моделювання представлено на рис. 4.6 (a). На рис. 4.6 (b) показані залежності характерної ширини монополів β^{-1} у диполі й "відстань"d

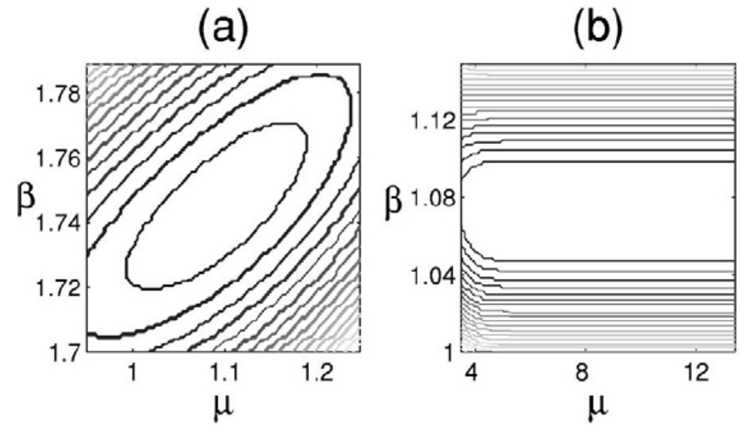

Рис. 4.5 Контурні лінії функції $\mathcal{L}(\beta, \mu)$: (a) $\lambda = 40$; (b) $\lambda = 7.6$

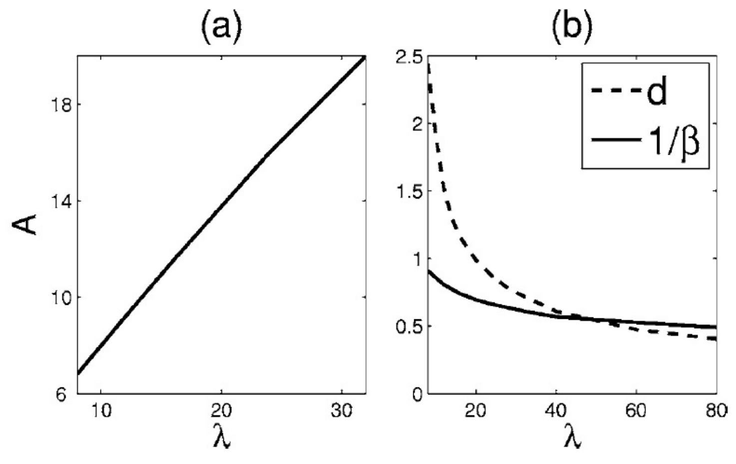

Рис. 4.6 (a) Залежність амплітуди дипольного солітона A від λ: суцільна лінія – варіаційний аналіз; пунктирна лінія – чисельний аналіз. (b) Залежність відстані d та характерної ширини монополя β^{-1} від λ (варіаційний аналіз)

між ними від λ. Топографія функції $\mathcal{L}(\beta, \mu)$ в околиці мінімуму являє собою довгу вузьку долину, нахилену під деяким кутом до μ-осі. При цьому, глибина долини й кут нахилу до μ-осі зменшуються зі зменшенням λ. Подібна ситуація має місце для всіх $\lambda > \lambda_{cr}$ та знайдено критичне значення $\lambda_{cr} \approx 7.6$. Картина різко міняється при $\lambda = \lambda_{cr}$. Локальний мінімум (відповідний дипольному розв'язку) зникає, виникає сідлова точка й це відповідає нестійкому дипольному солітону, що розпадається на два фундаментальні солітона. У цьому випадку лінії рівня функції $\mathcal{L}(\beta, \mu)$ (для $\lambda = 7.6$) показані на рис. 4.5 (b). Знайдене критичне значення $\lambda_{cr} = 7.6$ перебуває в повній згоді з результатами прямого чисельного моделювання (див. рис. 4.4).

4.2 Двовимірні мультипольні солітони в плазмі з тепловою нелінійністю

Самовплив електромагнітних хвиль у плазмі обумовлено в першу чергу зміною густини заряджених частинок в області поля, пов'язаної з ефектами електрострикції (зниженням густини під дією пондеромоторної сили електричного поля), нагрівання та іонізації. У випадку електрострикції, що відіграє основну роль у плазмі без зіткнень, зміна густини виявляється локальною функцією амплітуди поля. У частково іонізованій плазмі при помірних напруженностях поля визначальними є нелінійні ефекти, пов'язані з нагріванням та іонізацією, для яких, загалом кажучи, істотна нелокальність.

Рівняння, що описують розповсюдження в z напрямку огинаючої електричного поля $\Psi(x, y, z)$, взаємодіючого зі збурюваннями електронної температури $\theta(x, y, z)$ в частково іонізованій плазмі із зіткненнями, мають вигляд [200]

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \Delta_\perp \Psi + \theta \Psi = 0, \tag{4.14}$$

$$\alpha^2 \theta - \Delta_\perp \theta = |\Psi|^2, \tag{4.15}$$

де $\Delta_\perp = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ поперечний лапласіан. Перехід до фізичних змінних здійснюється шляхом заміни

$$(x, y) \to \frac{\omega_{pe}}{\omega} k_0(x, y), \; z \to \frac{2\omega_{pe}^2}{\omega^2} k_0 z, \; \theta \to \frac{\delta T_e}{T_e}, \; \Psi \to \frac{E\omega\sqrt{\eta}}{E_p \omega_{pe} k_0 l}, \tag{4.16}$$

$$E_p = \frac{\sqrt{3T_e m\eta(\omega^2 + \nu_e^2)}}{e}, \quad \alpha^2 = \frac{\eta\omega^2}{k_0^2 l^2 \omega_{pe}^2}, \tag{4.17}$$

де δT_e збурення температури електронів, E огинаюча електричного поля на частоті ω, k_0 хвильове число, $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi e^2 n_0/m}$ ленгмюрівська частота, e й m заряд і маса електрона, T_e рівноважна електронна температура, n_0 рівноважна густина плазми, ν_e ефективна частота зіткнень електронів з важкими частинками, η відносна частка енергії, передана електроном важким частинкам при одному зіткненні, l довжина вільного пробігу електрона. Відзначимо, що модель, ідентична (4.14), (4.15), описує також поширення світлових пучків у нематичних рідких кристалах [207].

Параметр α відповідає ступеню нелокальності нелінійного відгуку. У границі $\alpha^2 \gg 1$ рівняння (4.14), (4.15) зводяться до нелінійного рівняння Шредингера. Протилежний випадок $\alpha^2 \ll 1$ відповідає сильно нелокальному режиму. Рівняння (4.14) та (4.15) можна переписати у вигляді одного нелінійного інтегро-диференціального рівняння

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \Delta_\perp \Psi + \Psi \int R(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)|\Psi(\mathbf{r}')|^2 \, d\mathbf{r}' = 0, \tag{4.18}$$

з ядром $R(\xi) = K_0(\alpha\xi)/(2\pi)$, де $K_0(z)$ модифікована функція Бесселя другого роду нульового порядку. Видно, що нелінійність в (4.18) має суттєво нелокальний характер з характерним масштабом нелокальності α^{-1}.

Як і у випадку з гауссовською нелокальною нелінійністю, шукаємо стаціонарні розв'язки системи (4.14), (4.15) у вигляді $\Psi(x, y, z) = \psi(x, y)\exp(i\lambda z)$, так що $\psi(x, y)$ задовольняє рівнянням

$$-\lambda\psi + \Delta_\perp \psi + \theta\psi = 0, \tag{4.19}$$

$$\alpha^2\theta - \Delta_\perp \theta = |\psi|^2. \tag{4.20}$$

Для чисельного моделювання проведемо додаткове нормування $\psi \to \psi/\alpha$,

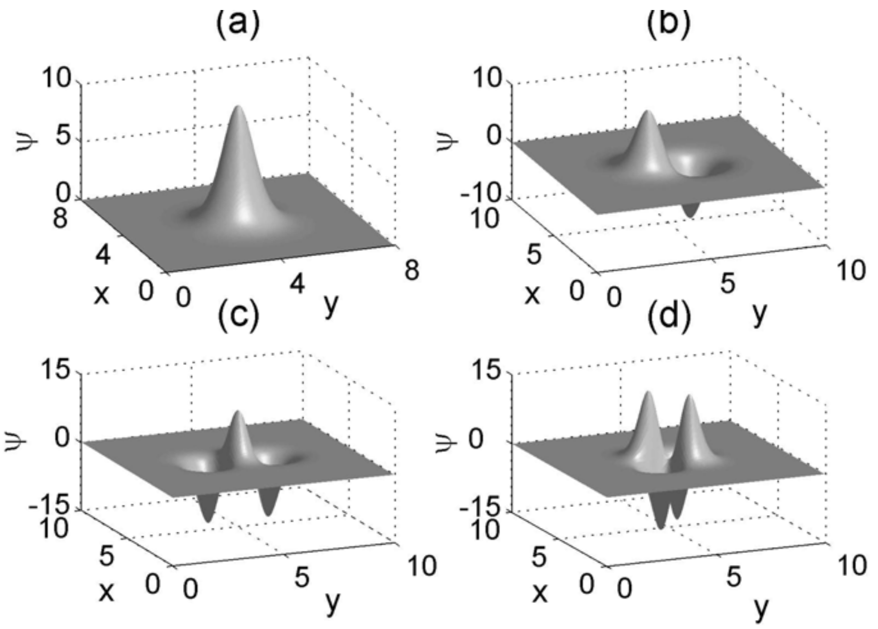

Рис. 4.7 Чисельно знайдені локалізовані необертові розв'язки системи рівнянь (4.19), (4.20): (a) фундаментальний (монопольний) солітон з $\lambda = 10$; (b) дипольний солітон з $\lambda = 10$; (c) трипольний солітон з $\lambda = 15$; (d) квадрупольний солітон з $\lambda = 20$.

$\theta \to \theta/\alpha^2$, $z \to z\alpha^2$, $(x, y) \to (x, y)\alpha$, $\lambda \to \lambda/\alpha^2$, і при цьому в (4.19), (4.20) параметр $\alpha = 1$. Сильно нелокальному режиму ($\alpha \ll 1$) тепер відповідають великі значення константи розповсюдження λ. Накладаючи періодичні граничні умови й використовуючи релаксационную техніку [226], можна чисельно знайти сімейство радіально асиметричних, локалізованих мультипольних розв'язків. Дійсна (або яка відрізняється тільки на постійний комплексний множник) функція $\psi(x, y)$ відповідає необертовим нелінійним локалізованим структурам. Приклади таких необертових мультипольних солітонів наведені на рис. (4.7). Необертові мультисолітони складаються з декількох фундаментальних солітонів із протилежними фазами. Комплексна функція $\psi(x, y)$ із просторово модульованою фазою відповідає обертовим структурам з ненульовим кутовим моментом. Концепція обертових мультисолітонів (азимутонів) уперше була введена емпіричним варіаційним анзацем (як виявилося потім, не цілком коректним) у роботі [227] для звичайного нелінійного рівняння Шредингера. Приклади чисельно знайдених азимутонних розв'язків нелокальної нелінійної системи (4.14), (4.15) показані на рис. (4.8). Більш детальне дослідження азимутонів буде пред-

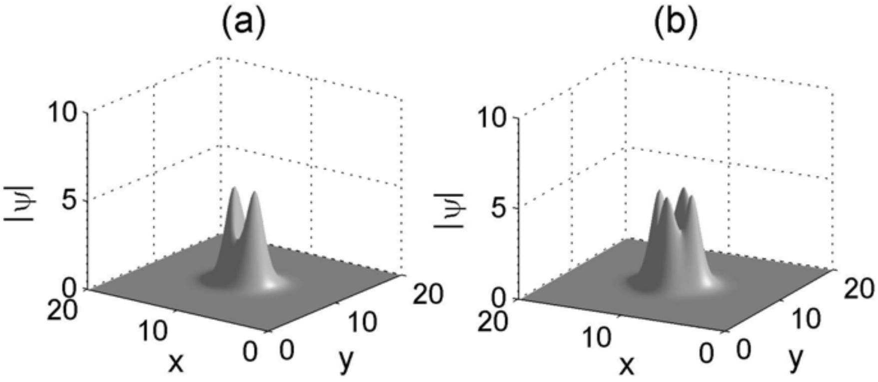

Рис. 4.8 Приклади обертових мультисолітонів (азимутонів) з $\lambda = 4.5$. Показано розподіл інтенсивності $|\psi|$ на (x, y)-площини. a) азимутон із двома піками інтенсивності; b) азимутон із чотирма піками інтенсивності.

ставлено в розділі 5 дисертації.

Для кращого розуміння властивостей необертових мультисолітонів проводився варіаційний аналіз. Стаціонарний необертовий мультисолітон описувався пробною функцією виду

$$\Psi(x, y, z) = hf(x, y)e^{i\lambda z}, \tag{4.21}$$

де форма дипольного солітона апроксимується антисиметричною суперпозицією двох гауссовських функцій

$$f(\xi, \eta) = e^{-\frac{1}{2a^2}\left\{y^2+(x-d/2)^2\right\}} - e^{-\frac{1}{2a^2}\left\{y^2+(x+d/2)^2\right\}},$$

де a й d характерний радіус окремого монополя й "відстань"між ними. Для зв'язаного стану з S ідентичних фундаментальних солітонів із центрами в (x_s, y_s), де $s = 1 \ldots S$, маємо

$$f(\xi, \eta) = \sum_{s=1}^{S} g_s e^{-\frac{1}{2}(\xi-\xi_s)^2 - \frac{1}{2}(\eta-\eta_s)^2},$$

де $(\xi, \eta) = (x, y)/a$, і $g_s = \pm 1$ відповідає фазі s-го фундаментального солітона.

Стаціонарний стан відповідає стаціонарній точці гамільтоніана

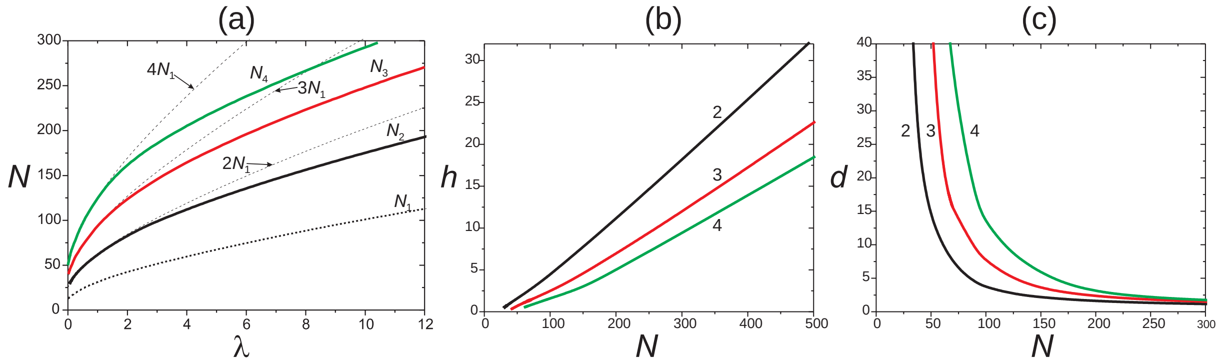

Рис. 4.9 (а) Залежність енергії N від константи розповсюдження λ. Суцільні криві: зв'язані стани з S протифазних солітонів; пунктирні криві: залежності SN_1, де N_1 енергія фундаменьального солітона (варіаційний аналіз). Цілі числа біля кривих відповідають числу солітонів S у зв'язаному мультисолітонному стані.

$$H = \int \left\{ |\nabla_\perp \Psi|^2 - \frac{1}{2}\theta|\Psi|^2 \right\} d^2\mathbf{r} \tag{4.22}$$

при фіксованій енергії N

$$N = \int |\Psi|^2 d^2\mathbf{r}. \tag{4.23}$$

Після підстановки пробної функції, гамільтоніан $H(a, b)$ є функцією двох варіаційних параметрів a й $b = d/a$. Третій параметр, амплітуда h, виключається при використанні умови нормування (4.23).

Результати варіаційного аналізу перебувають у гарній згоді з прямим чисельним моделюванням. На рис. (4.9) (а) показана залежність енергії N від константи розповсюдження λ для фундаментального солітона, дипольного, трипольного й квадрупольного солітонів. Гранична енергія формування зв'язаного мультисолітонного стану з S фундаментальних солітонів дуже близька до енергії S одиночних фундаментальних солітонів. "Енергія зв'язку"$N_S - SN_1$ у мультисолітоні (де N_1 енергія одиночного фундаментального солітона) виявляється дуже малою для $\lambda < 1.9$ і, таким чином, мультисолітон може розпадатися на окремі фундаментальні солітони. Як видно з рис. (4.9) (с), відстань між сусідніми протифазними солітонами d різко зростає при $\lambda < 1.9$, що веде до різкого зменшення інтенсивності взаємодії між складовими солітонами.

Для дослідження стійкості знайдених мультисолітонних розв'язків моделювалася часова еволюція в рамках динамічних рівнянь (4.14),(4.15) . Початкова умова вибиралася у вигляді $\psi(x,y)[1+\varepsilon\Phi(x,y)]$, де $\psi(x,y)$ чисельно знайдений точний розв'язок, $\Phi(x,y)$ гауссівський шум з диспер-

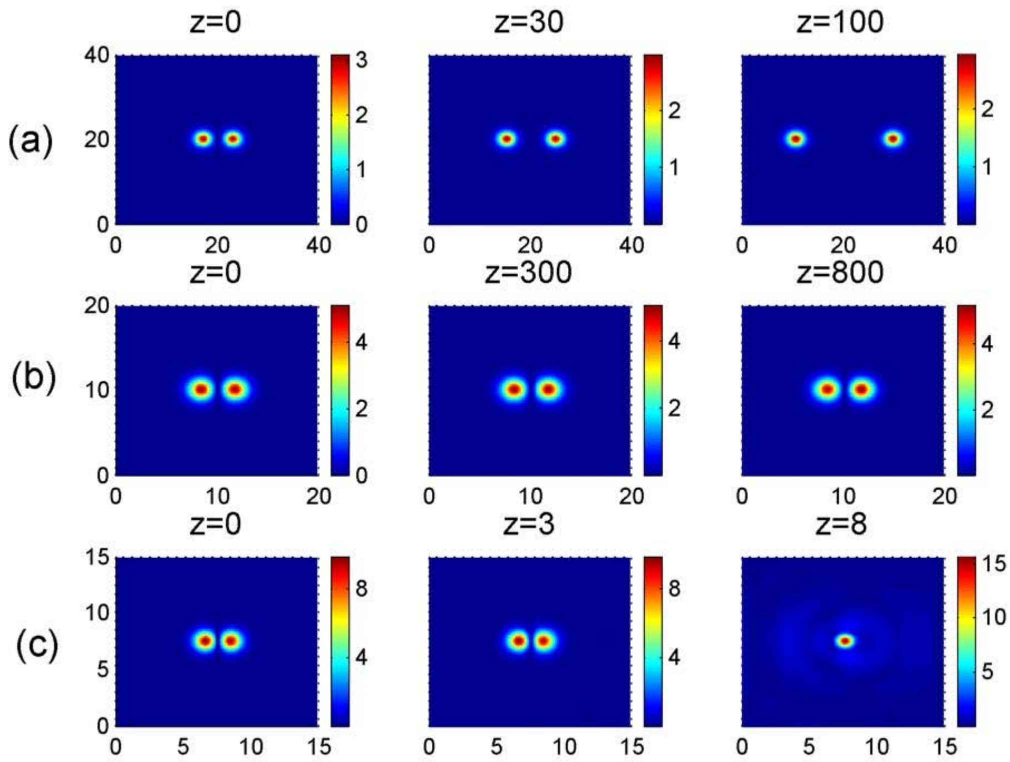

Рис. 4.10 (a) Розпад дипольного солітона з $\lambda = 1.5$ на два фундаментальні солітона; (b) стійке розповсюдження диполя з $\lambda = 3.5$; (c) нестійкий дипольний солітон з $\lambda = 10$.

сією $\sigma^2 = 1$ й параметр збурення $\varepsilon = 0.005 \div 0.1$. Залежно від значення константи розповсюдження λ (або, еквівалентно, енергії N) спостерігалися три різних режиму розповсюдження дипольних солітонів, які представлені на рис. (4.10) (для $\varepsilon = 0.02$). Перший режим відповідає області $\lambda < \lambda_{cr}$, де $\lambda_{cr} \sim 1.9$. Якщо $\lambda < \lambda_{cr}$, початковий дипольний солітон розпадається на два фундаментальні солітона, які рухаються в протилежних напрямках без зміни своєї форми. Цей тип еволюції диполя показано на рис. 4.10(a). Розпад дипольного солітона на два монополі пояснюється фактом, що відзначався вище (див. рис. (4.10)), а саме що енергія зв'язку $\delta N = N_{dip} - 2N_{mon}$ у дипольному солітоне прямує до нуля при наближенні λ до $\lambda_{cr} \sim 1.9$. Подібна ж поведінка, тобто розпад дипольного солітона на два фундамен-

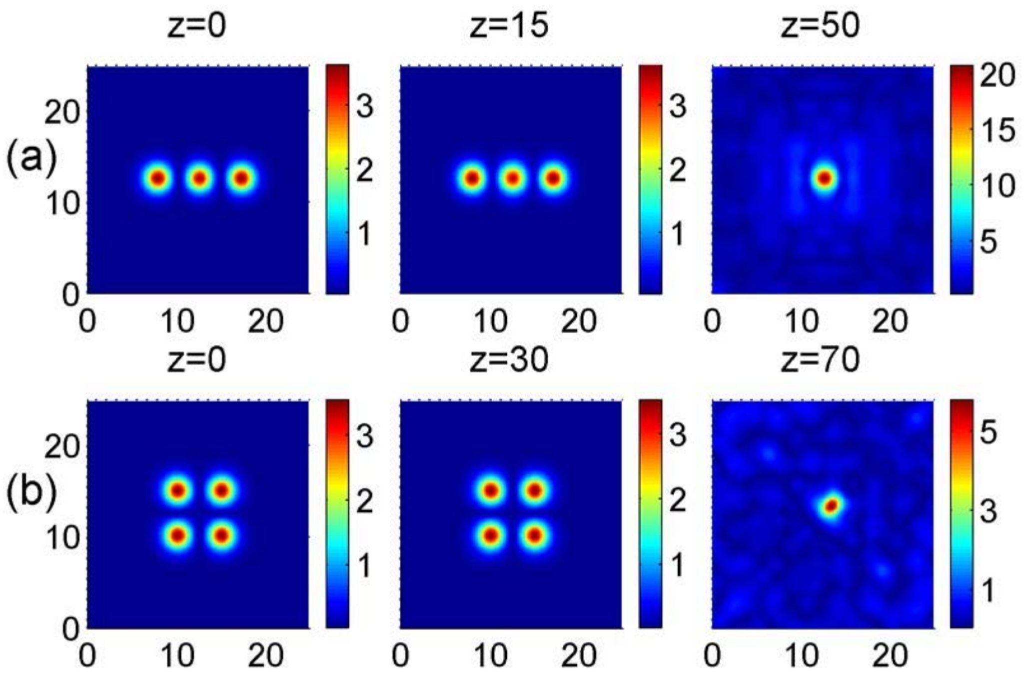

Рис. 4.11 Типова нестійка динаміка ($\lambda = 2$) (a) трипольного солітона; (b) квадрупольного солітона.

тальні солітона нижче деякого критичного значення λ, спостерігалася, як показано в попередньому підрозділі, в моделі з гауссовською нелокальною функцією відгуку $R(\xi)$ в (4.18).

Другий режим відповідає області $\lambda_{cr} < \lambda < \lambda_{th}$, де $\lambda_{th} \sim 4$. Чисельне моделювання показує, що в цій області дипольний солітон є стійким стосовно початкових шумових збурень. Еволюція диполя без зміни форми спостерігалася на відстанях $z > 3000$. Стійке поширення дипольного солітона показане на рис. (4.10)(b) (для $\lambda = 3.5$ й $\varepsilon = 0.02$).

Подальше (вище $\lambda_{th} \sim 4$) збільшення параметра λ різко зменшує довжину розповсюдження диполя, і дипольні солітони з $\lambda > \lambda_{th}$ виявляються нестійкими й швидко руйнуються. Типова нестійка динаміка дипольного солітона з λ вище граничного значення λ_{th} показана на рис. (4.10)(c). Таким чином, стійкі дипольні солітони існують тільки усередині кінцевої, досить вузької області констант розповсюдження λ.

На рис. (4.11) показано розповсюдження трипольного й квадрупольного солітонів для $\lambda = 2$, тобто в області, де дипольний солітон стійкий. Загалом кажучи, трипольні й квадрупольні солітони завжди виявля-

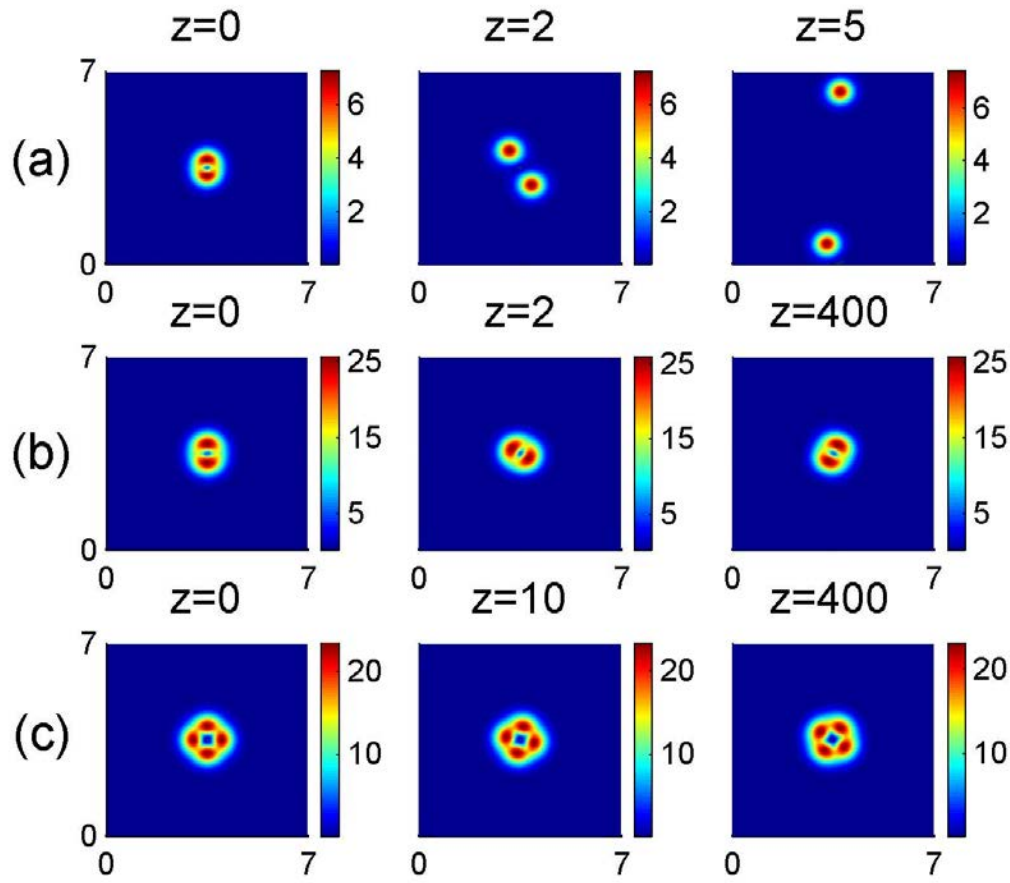

Рис. 4.12 (a) Розщеплення азимутона із двома піками інтенсивності та $\lambda = 10$; (b) стійке розповсюдження азимутона із двома піками інтенсивності та $\lambda = 80$; (c) стійка динаміка азимутона із чотирма піками інтенсивності та $\lambda = 80$.

ються нестійкими, але для констант розповсюдження, що лежать в області $\lambda_{cr} < \lambda < \lambda_{th}$, можуть розповсюджуватися без видимого викривлення форми на досить великі відстані (по порівнянню з характерною дифракційною довжиною) і, таким чином, можуть спостерігатися експериментально, що й підтверджують результати роботи [224]. Тріполі й квадруполі з $\lambda < \lambda_{cr}$ розпадаються на три та чотири фундаментальні солітона відповідно.

Спостерігалося два різні сценарії розповсюдження азимутонів. Для досить малих λ (тобто енергії) ($\lambda < 15$), азимутони виявляються нестійкими й розпадаються на фундаментальні солітони. Приклад розпаду азимутона із двома піками інтенсивності й $\lambda = 10$ представлений на рис. (4.12)(a). Для досить більших λ ($\lambda > 15$) азимутони можуть бути стійкими . Стійке розповсюдження азимутонів із двома й чотирма піками інтенсивності та $\lambda = 80$ показано на рис. (4.12)(b),(c). Чисельно обчислена частота обертання азимутона на рис. 4.12(b) становить $\omega = 1.15$, так що азимутон еволюціонує без зміни форми протягом близько ста періодів обертання. У фізичних змінних еволюційна змінна z відповідає просторовій змінній вздовж осі розповсюдження електромагнітної хвилі, так що обертові азимутони відповідають гвинтовій структурі хвильового пучка.

Динаміка дипольних солітонів у нелокальній моделі, описуваної (4.14) та (4.15) суттєво відмінна від картини розповсюдження диполів у нелокальній моделі з гауссовської функцією відгуку $R(\xi)$ в (4.18), розглянутої в підрозділі 4.1, де диполі виявлялися стійкими для всіх λ, які перевищують деяке критичне значення. В одновимірному випадку сильна залежність умов стійкості від властивостей ядра R у рівнянні (4.18) обговорювалася в [228]. У нашому двовимірному випадку, якісно різна поведінка дипольних солітонів може бути зв'язана із властивостями регулярності ядра $R(\xi)$ в (4.18) – у моделі з тепловою нелокальною нелінійністю, на відміну від гауссовської, функція $R(\xi)$ має сингулярність у нулі.

4.3 Двовимірні нелінійні структури в Бозе-Ейнштейнівському конденсаті з диполярною нелокальною нелінійністю

Явище Бозе-Ейнштейнівської конденсації було передбачене Бозе та Ейнштейном в 1924 р. Було показано, що нижче деякої критичної температури T_c кінцева частка всіх частинок бозе-газу (тобто що підкоряються статистиці Бозе) конденсується в тому самому нижчому квантовому стані з нульовим імпульсом. Число атомів N_0 у цьому стані макроскопично велике й пропорційно повному числу атомів N: $N_0 = N[1 - (T/T_c)^{3/2}]$. Уперше явище конденсації Бозе-Ейнштейна екпериментально спостерігалося в 1995 р. для газів ^{87}Rb [229], ^{23}Na [230] й ^{7}Li [231] поміщених у магнітну пастку та охолоджених до надзвичайно низьких температур $< 10^{-5}$ K (Нобелівська премія за 2001 р.), а потім у парах й інших лужноземельних елементів: атомарного водню H [232], калію ^{40}K [233], метастабільного гелію ^{4}He [234] й цезію ^{133}Cs [235]. Фактично, Бозе-Ейнштейнівський конденсат являє собою унікальний об'єкт, у якому квантові ефекти відіграють вирішальну роль у макроскопічних масштабах (число атомів конденсату може досягати $\sim 10^8$ при густині $10^{13} - 10^{14}$ см$^{-3}$). При таких низьких температурах довжина хвилі де Бройля $\lambda = \hbar/mv$ стає порівняною з міжатомними відстанями, хвильові функції окремих атомів сильно перекриваються і конденсат поводиться як єдиний квантовий об'єкт. Експериментально спостерігалася інтерференція двох конденсатів [236] і явище квантового тунелювання (ефект Джосефсона) між двома конденсатами [237]. Хоча говорити про практичне застосування Бозе-Ейштейнівських конденсатів ще рано, не викликає, здається, сумніву їх можливе використання в сфері нанотехнологій, створенні атомного лазера, квантових комп'ютерів та ін. [238].

У наближенні середнього поля при нульовій температурі динаміка Бозе-Ейнштейнівського конденсату (БЕК) описується рівнянням Гросса-Питаєвського [239, 240]

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\mathbf{r}) + \int V(\mathbf{r}-\mathbf{r}')|\Psi(\mathbf{r}')|^2\,d\mathbf{r}'\right]\Psi, \tag{4.24}$$

де $\Psi(\mathbf{r},t)$ хвильова функція, нормована на загальне число атомів $\mathcal{N}$: $\int|\Psi(\mathbf{r})|^2\,d\mathbf{r} = \mathcal{N}$; m маса атомів, $U(\mathbf{r})$ утримуючий потенціал пастки, $V(\mathbf{r})$ потенціал парної взаємодії між атомами. Це рівняння – класичне по своїй суті – містить у явному виді квантову постійну $\hbar$. Класичним воно є в тому змісті, що функція Ψ не є оператором і визначає не густину імовірності, а реальний розподіл атомів конденсату у просторі. Модуль Ψ та градієнт її фази мають ясний фізичний зміст:

$$\Psi = |\Psi|\exp(i\Phi), \quad n(\mathbf{r},t) = |\Psi|^2, \quad \mathbf{v}(\mathbf{r},t) = \frac{\hbar}{m}\nabla\Phi, \tag{4.25}$$

де n число атомів в одиниці об'єму й $\mathbf{v}$ їх швидкість. Більшість експериментальних результатів показує, що наближення середнього поля досить ефективно й забезпечує як якісний, так і кількісний опис статичних й динамічних властивостей БЕК в пастках. Атоми лужноземельних елементів мають магнітний момент й завдяки цьому їх можна утримувати поблизу мінімуму потенціалу $U(\mathbf{r})$ магнітної пастки. У цьому випадку в умовах експерименту потенціал можна уважати гармонічним

$$U(\mathbf{r}) = \frac{m}{2}\left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2\right). \qquad (4.26)$$

Якщо радіус дії r_0 міжатомного потенціалу взаємодії $V(\mathbf{r})$ багато більше довжини s-розсіювання a атомів між собою, міжатомний потенціал можна замінити ефективним δ-подібним $V(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ з константою взаємодії $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ [241]. Тоді рівняння (4.24) зводиться до нелінійного рівняння Шредингера із зовнішнім потенціалом $U(\mathbf{r})$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\mathbf{r}) + g|\Psi(\mathbf{r})|^2\right]\Psi. \qquad (4.27)$$

Довжину розсіювання a можна безперервно міняти від позитивних до негативних значень, змінюючи зовнішнє магнітне поле поблизу так названого резонансу Фешбаха [242]. При цьому $g > 0$ відповідає взаємодії з відштовхуванням, а $g < 0$ – з притягуванням.

Під час відсутності утримуючого потенціалу $U(\mathbf{r}) = 0$ рівняння (4.27) являє собою нелінійне рівняння Шредингера (НРШ), повністю інтегрованим методом зворотньої задачі в одновимірному випадку. При наявності потенціалу пастки $U(\mathbf{r}) \neq 0$ (далі скрізь мається на увазі гармонічний потенціал (4.26)) локалізовані розв'язки (4.27) навіть в одновимірному випадку можна знайти тільки чисельно [243]. При цьому виявляється, що, в відмінність від НРШ одномірні світлі солітони існують не тільки при взаємодії, що притягає, $g < 0$, але й у випадку взаємодії з відштовхуванням $g > 0$. Одновимірні темні солітони існують тільки при відштовхувальній взаємодії між атомами, їх динаміка вивчалася в [244]. Експериментально квазіодновимірні світлі солітони спостерігалися в газах ^{7}Li [245, 246] й ^{85}Rb [247], а темні солітони в газах ^{23}Na [248, 249] й ^{87}Rb [250, 251]. Квазіодновимірність забезпечувалася сильно витягнутою в одному напрямку (сигароподібною) пасткою з осьовою симетрією, що можливо при $\omega_x^2 \ll \omega_y^2, \omega_z^2$

(для осі уздовж x напрямку). Як під час відсутності, так і при наявності зовнішнього гармонічного потенціалу рівняння (4.27) має також двовимірні й тривимірні фундаментальні солітонні розв'язки [252, 253]. Під час відсутності зовнішнього потенціалу двовимірні фундаментальні солітони виявляються метастабільними та колапсують, якщо як завгодно мале збурення підвищує величину $\mathcal{N}_{sol} = \int |\Psi_{sol}|^2 \, d\mathbf{r}$, де Ψ_{sol} солітонний розв'язок, або розпливаються в протилежному випадку. Для безрозмірного двовимірного НРШ $\mathcal{N}_{sol} \simeq 11.68$ [254, 255]. Тривимірні фундаментальні солітони під час відсутності зовнішнього потенціалу колапсують завжди. Картина міняється якщо є зовнішній утримуючий потенціал $U(\mathbf{r}) \neq 0$. Двовимірні фундаментальні солітони виявляються стійкими при будь яких амплітудах, а для тривимірних фундаментальних солітонів з'являється вікно стійкості, обумовлене нерівністю $\mathcal{N}_{sol} < \mathcal{N}_{cr}$, де $\mathcal{N}_{cr}$ деяке критичне значення, при перевищенні якого тривимірні солітони колапсують . Для безрозмірного тривимірного НРШ із одиничними коефіцієнтами й сферично симетричною гармонічною пасткою $\mathcal{N}_{cr} \simeq 14.45$ [253]. В відмінність від випадку $U(\mathbf{r}) = 0$, при наявності зовнішнього потенціалу фундаментальні солітони можуть мати як завгодно мале значення $\mathcal{N}_{sol}$. Розв'язки рівняння (4.27) у вигляді світлих двовимірних вихорових солітонів, що несуть ненульовий кутовий момент, були чисельно отримані для відштовхувальної взаємодії $g > 0$ в [256], а для взаємодії з притягуванням $g < 0$ в [257, 258]. Тривимірні вихорові солітони рівняння (4.27) вивчалися в [259].

В 2005 р. уперше спостерігався БЕК у газі атомів хрому ^{52}Cr [260–262], який не належить до групи лужноземельних елементів . Атоми ^{52}Cr мають аномально великим магнітним моментом й поряд з локальною взаємодією, необхідно враховувати нелокальну дальнодіючу взаємодію між магнітними моментами різних атомів. Суттєво, що зменшуючи довжину розсіювання a (тобто константу локальної взаємодії g) за допомогою резонансу Фешбаха, можна експериментально реалізувати БЕК з майже чисто нелокальною диполь-дипольною взаємодією [263, 264]. Відзначимо, що є досить оптимістичні перспективи й в створенні БЕК газу полярних молекул (OH, RbCs, NH) [265–268], що мають великим електричним дипольним моментом, у якому завжди нелокальна взаємодія набагато перевищує локальну.

Привабливою рисою диполярного БЕК є можливість своєрідної конкуренції між нелокальною взаємодією, яка через свій анізотропний характер є тільки частково притягувальною (відштовхувальною) та може міняти знак під дією зовнішнього поля, що орієнтує осі диполів [269], та короткодіючою локальною взаємодією. Характер нелокальної взаємодії (притягування або відштовхування), у відмінність від локальної, залежить від форми конденсатної хмари та геометрії пастки. Це дає можливість створення керованих конфігурацій БЕК та одержання стійких відокремлених структур [202, 203, 270–274].

У роботі [203] для двовимірної моделі диполярного БЕК з відштовхувальною локальною взаємодією ($g > 0$) було передбачене існування стійких двовимірних фундаментальних світлих солітонів. Двовимірні вихори в диполярному БЕК для випадку $g > 0$ були отримані в [274]. У даному підрозділі ми розглядаємо диполярный БЕК з притягувальною локальною взаємодією ($g < 0$) та показуємо можливість існування стійких двовимірних фундаментальних солітонів, вихорів, необертових й обертових мультисолітонів.

4.3.1 Модель і основні рівняння

Бозе-Ейнштейнівський конденсат, який складає з $\mathcal{N}$ атомів з дипольним моментом d, орієнтованим уздовж осі z, описується узагальненим нелінійним рівнянням Шредингера, що включають як локальну, так й нелокальну нелінійності

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\mathbf{r}) + g|\Psi|^2 + \int V(\mathbf{r}-\mathbf{r}')|\Psi(\mathbf{r}')|^2\,d\mathbf{r}'\right]\Psi, \qquad (4.28)$$

та ядро $V(\mathbf{r})$ дається виразом

$$V(\mathbf{r}) = g_d(1-3\cos^2\theta)/r^3, \qquad (4.29)$$

де $g_d = \alpha d^2/4\pi$, θ кут між вектором $\mathbf{r}$ та віссю диполя, й параметр $-1/2 \leq \alpha \leq 1$ керується швидкою зміною напрямку зовнішнього магнітного поля [203, 269].

Якщо припустити, що $\omega_z \gg \omega_x, \omega_y$ й нелінійна взаємодія слабка в порівнянні із силою потенціалу пастки в поздовжньому напрямку, то з (4.26), (4.28) випливає, що поперечний розмір конденсату багато більше його довжини й конденсат має млиноподібну форму При цьому хмара конденсату обмежена в поздовжньому напрямку і його поздовжня структура визначається головним чином гармонічним потенціалом пастки в z напрямку. Припускаючи анзатц $\Psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}_\perp)\varphi_0(z)$, де $\varphi_0(z)$ основний стан одномірного гармонічного осцилятора, з наступною підстановкою в (4.28), множенням на $\varphi_0^*(z)$, інтегруванням по z та нормуючи просторові координати, час й хвильову функцію на $l_z/\sqrt{2}$, $1/\omega_z$ і $(\mathcal{N}/l_z^3)^{1/2}$ відповідно, де $l_z = (\hbar/m\omega_z)^{1/2}$), в [203] одержано наступне двовимірне рівняння, що описує двовимірний млиноподібний БЕК з диполь-дипольною взаємодією

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\Delta_\perp\psi + \bar{g}\psi\left\{|\psi|^2 + \beta\int R(\mathbf{r}-\mathbf{r}')|\psi(\mathbf{r}')|^2\,d\mathbf{r}'\right\}, \tag{4.30}$$

де введені безрозмірні параметри

$$\bar{g} = \frac{g}{\sqrt{2\pi}\hbar\omega_z l_z^3} = \frac{2\sqrt{2\pi}a}{l_z}, \quad \beta = \frac{g_d}{g}. \tag{4.31}$$

Фур'є образ ядра $R(\mathbf{r})$ в (4.30) має вигляд

$$\hat{R}(\mathbf{k}) = 2 - 3\sqrt{\pi}ke^{k^2}\operatorname{erfc}(k), \tag{4.32}$$

де $\operatorname{erfc}(k)$ додаткова функція помилок, так що

$$R(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\hat{R}(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}. \tag{4.33}$$

Далі, оскільки (4.30) допускає додаткове нормування, параметр $\bar{g}$ фіксується значенням $\bar{g} = \mp 1$, де $-(+)$ відповідає випадку локальної взаємодії з відштовхуванням (притягуванням). Умова застосовності двовимірного наближення

$$\hbar/(m\omega_r) \gg l_z^2, \tag{4.34}$$

де $\omega_r = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$ може бути переписане у вигляді [258]

$$\mathcal{N} \lesssim \frac{\hbar}{m\omega_r |a| l_z}, \tag{4.35}$$

і, таким чином, для млиноподібної конфігурації існує верхнє обмеження на число атомів $\mathcal{N}$.

Рівняння (4.30) зберігає нормоване число частинок $N = \int |\psi|^2 dxdy$ та енергію

$$E = \int \left\{ \left|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial \psi}{\partial y}\right|^2 + \frac{1}{2}\bar{g}|\psi|^4 + \frac{1}{2}\bar{g}\beta|\psi|^2 \left[\int R(\mathbf{r}-\mathbf{r}')|\psi(\mathbf{r}')|^2\, d\mathbf{r}'\right] \right\} dxdy. \tag{4.36}$$

Величина N пов'язана із числом частинок $\mathcal{N}$ співвідношенням

$$\mathcal{N} = \frac{l_z}{|g|} N. \tag{4.37}$$

4.3.2 Модуляційна нестійкість

Важливою рисою нелокальної диполь-дипольної взаємодії є те, що, внаслідок анізотропного характеру, вона тільки частково є взаємодією із притягуванням. Відповідно, спектр $\hat{R}(k)$ функції відгуку $R(\mathbf{r})$ в (4.30) не є позитивно визначеним. Рівняння (4.30) має розв'язок у вигляді плоскої хвилі

$$\Psi_0 = |\Psi_0| \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \tag{4.38}$$

за умови $\omega = k_0^2 - \bar{g}(1 + \beta \int R(\mathbf{r})d\mathbf{r})|\Psi_0|^2$. Стійкість плоскої хвилі суттєво залежить від знакової визначеності спектра функції відгуку [205, 212]. З іншого боку, модуляційна нестійкість (нестійкість плоскої хвилі із збудженням обох сателітів) часто розглядається як провісник формування солітонів. Розглядаємо обурену плоску хвилю

$$\psi = (|\Psi_0| + \delta\psi)\exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - i\omega t), \tag{4.39}$$

де

$$\delta\psi = \psi_+ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \gamma t} + \psi_- e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \gamma t}, \tag{4.40}$$

та лінеаризуя (4.30) по $\delta\psi$ поблизу Ψ_0, можна одержати інкремент модуляційної нестійкості γ однорідного поля ($k_0 = 0$) у моделі (4.30)

$$\gamma^2 = -2|\Psi_0|^2 k^2 \bar{g}[1 + \beta\hat{R}(k)] - k^4, \tag{4.41}$$

де функція $\hat{R}(k)$ визначена в (4.32). Нестійкості відповідає $\gamma > 0$. На рис. 4.13 показана залежність інкремента модуляційної нестійкості γ від k для випадків локальної взаємодії з притягуванням ($\bar{g} = -1$) та відштовхуванням ($\bar{g} = 1$) . У випадку із притягуванням інкремент дорівнює нулю для хвильових чисел $0 \leqslant k < k_{cr}$, де k_{cr} деяке критичне значення, що залежить від β (відношення інтенсивностей нелокальної та локальної взаємодій), якщо $\beta \lesssim 0.5$ (зокрема, для всіх негативних β), так що довгохвильові моди є стійкими. Оптимальне, тобто відповідне максимальному інкременту, хвильове число k_{opt} зменшується зі збільшенням β. Для випадку з відштовхуванням, $\gamma = 0$ для позитивних β та для $\beta \gtrsim -0.4$. Це узгоджується з результатами роботи [203], де фундаментальні солітони передбачалися (для випадку з відштовхуванням $\bar{g} = 1$) тільки для $\beta < 0$ і $|\beta| > 0.12$.

4.3.3 Динаміка нелінійних структур

Далі розглядаємо випадок локальної взаємодії із притягуванням $\bar{g} = -1$. Шукаємо стаціонарні розв'язки рівняння (4.30) у вигляді $\psi(x, y, t) = \Psi(x, y)\exp(-i\mu t)$, де μ хімічний потенціал, так що Ψ задовольняє рівнянню

$$(\mu + \Delta_\perp)\Psi = -\Psi\left\{|\Psi|^2 + \beta\int R(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|\Psi(\mathbf{r}')|^2\, d\mathbf{r}'\right\}, \tag{4.42}$$

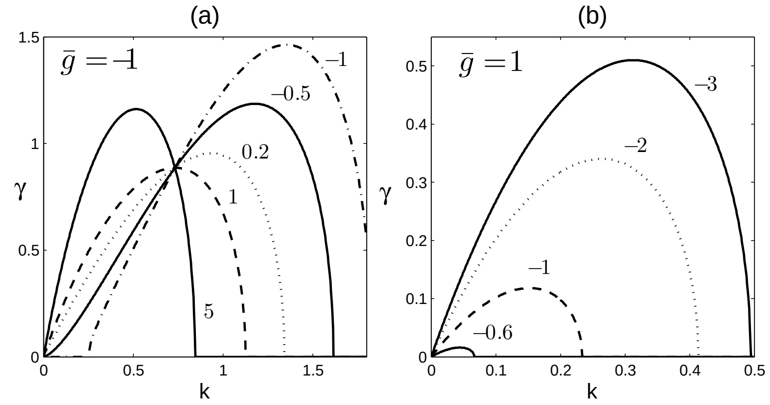

Рис. 4.13 Інкременти модуляційної нестійкості γ для локальної взаємодії (a) із притягуванням між атомами ($\bar{g} = -1$) та (b) з відштовхуванням ($\bar{g} = 1$) . Поблизу кривих показані значення β (відношення інтенсивностей нелокальної (диполярної) та локальної взаємодій) .

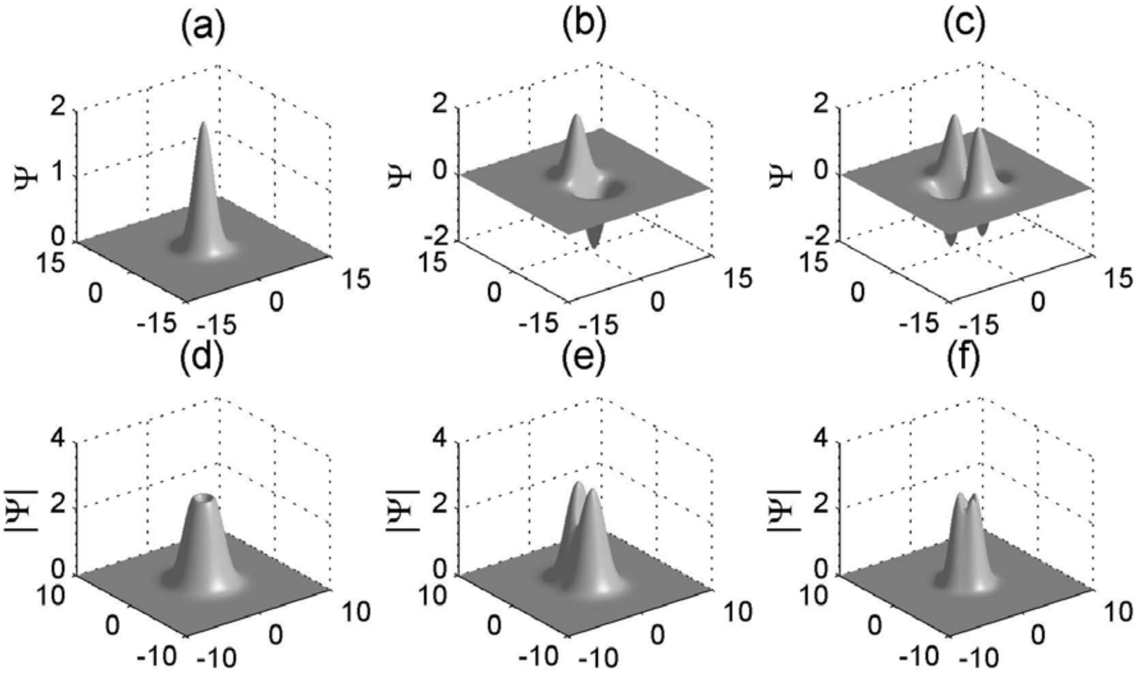

Рис. 4.14 Стаціонарні локалізовані необертові (a-c) та обертові (d-f) розв'язки рівняння (4.42) з $\beta = 2$: (a) фундаментальний солітон з $\mu = -2$; (b) дипольний солітон з $\mu = -2$; (c) квадрупольний солітон з $\mu = -2$; (d) вихор $\mu = -5$; (e) азимутон з $\mu = -5$, $p = 0.6$ та двома піками інтенсивності; (f) азимутон з $\mu = -5$, $p = 0.9$ та чотирма піками інтенсивності.

де $R(\mathbf{r})$ визначається (4.32) й (4.33). Для чисельного розв'язку (4.42) з періодичними граничними умовами використовувалася релаксаційна техніка Петвіашвілі [127]. Локалізованих розв'язків з $\mu > 0$ не існує. Фундаментальні солітони з $\beta < 0$ або $\beta > \beta_{cr}$, де $\beta_{cr} \sim 2.1$, виявляються нестійкими з $\partial N/\partial\mu > 0$, що відповідає критерію Вахітова-Колоколова. Таким чином, розглядаємо область $0 < \beta < \beta_{cr}$ та, для визначеності, уважаємося $\beta = 2$. Вибираючи підходящу топологію початкового наближення, можна з високою точністю (норма нев'язання менше 10^{-9}) знайти три різних типів просторово локалізованих розв'язків рівняння (4.42) – необертові (мульти)солітони, радіально симетричні вихори, обертові мультисолітони (азимутони).

Дійсна (або з постійним комплексним множником) функція $\Psi(x, y)$ відповідає необертовим локалізованим структурам. Приклади необертових (мульти)солітонів, саме, фундаментальний солітон, дипольний солітон та квадрупольний солітон представлені на рис. 4.14(a)- 4.14(c). Необертовий мультисолітон складається з декількох фундаментальних солітонів (монополів) із протилежними фазами.

Другий клас розв'язків, вихорові солітони, відповідають розв'язкам з радіально симетричною амплітудою $|\Psi(x, y)|$, що зникає в центрі, та фазою у вигляді лінійної функції полярного кута $\arg\Psi = m\theta$, де m ціле. Число m (топологічний заряд) відповідає за повний набіг фази $2\pi m$ при обході навколо центру кільця. Важливим інтегралом руху, асоційованим із цими структурами, є кутовий момент, що явно виражається, як відзначалося в розділі 3, через амплітуду й фазу. Чисельно знайдені вихорові розв'язки з $m = 1$ показані на рис. 4.14(d).

Третій клас розв'язків – обертові мультисолітони з просторово модульованою фазою – уперше були введені варіаційним методом у роботі [227] для моделей з локальною нелінійністю, де вони були названі азимутонами. Азимутони являють собою принципово новий нелінійний локалізований об'єкт, що є проміжним між мультисолітонами й радіально симетричними вихорами. Використовуючи варіаційний аналіз, автори роботи [223]

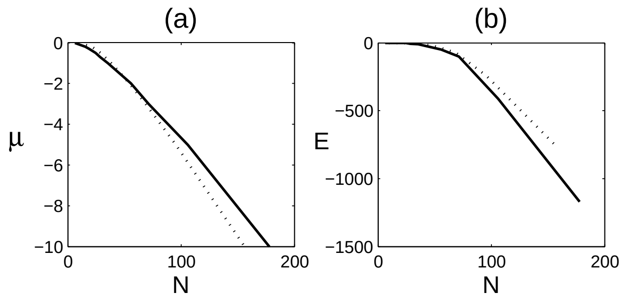

Рис. 4.15 Залежність (a) хімічного потенціалу μ та (b) енергії E від нормованого числа атомів N. Суцільна лінія: необертовий дипольний солітон ($p = 0$). Крапкова лінія: вихор ($p = 1$).

розглядали наступну пробну функцію в полярних координатах (r,θ)

$$\Psi(r, \theta) = r^{|m|}\Phi(r)(\cos m\theta + ip\,\sin m\theta), \tag{4.43}$$

де Φ дійсна функція, що досить швидко убуває на нескінченності, m ціле, й $0 \le p \le 1$. Випадок $p = 0$ відповідає необертовим мультисолітонам ($m = 1$ - дипольному солітону, $m = 2$ - квадрупольному і т.д.), тоді як протилежний випадок $p = 1$ відповідає радіально симетричним вихоровим солітонам з топологічним зарядом m. Проміжний випадок $0 < p < 1$ відповідає азимутонам. У нашому випадку азимутонам відповідає чисельно знайдений комплексний розв'язок $\Psi(x, y)$ з просторово модульованою фазою, де параметр p (глибина модуляції), подібний уведеному в (4.43), визначається у такий спосіб

$$p = \max|\mathrm{Im}\,\Psi|/\max|\mathrm{Re}\,\Psi|. \tag{4.44}$$

Для фіксованого хімічного потенціалу μ існує сімейство азимутонів з різними значеннями p. Подібно радіально симетричним вихорам, азимутони мають ненульовий кутовий момент. На рис. 4.14(e), (f) показано два чисельно знайдених азимутонних розв'язки рівняння (4.42). Докладний аналіз азимутонів, включаючи азимутони з непарним числом піків, буде представлено в розділі 5. Для дипольних солітонів ($p = 0$) та вихорів ($p = 1$) залежність хімічного потенціалу μ та енергії E від нормованого числа атомів N показана на рис. 4.15.

Як і раніше, стійкість знайдених локалізованих розв'язків досліджу-

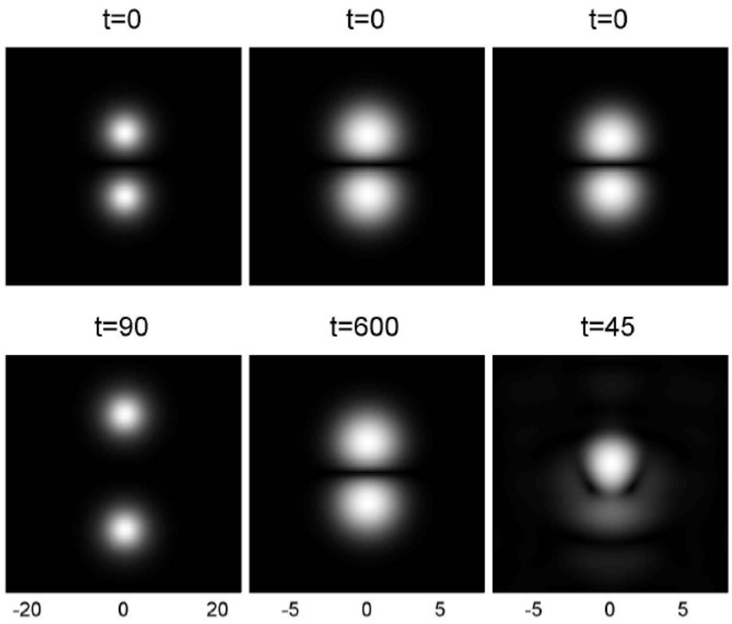

Рис. 4.16 Лівий стовпець: Розпад дипольного солітона з $\mu = -0.2$ на два фундаментальні солітона; середній стовпець: стійка динаміка з $\mu = -3$; правий стовпець: руйнування нестійкого дипольного солітона з $\mu = -4$.

валася прямим чисельним моделюванням динамічного рівняння (4.30) з додаванням до початкової умови гауссовського шуму з одиничною дисперсією й параметром збурення $\varepsilon = 0.005 \div 0.1$. Крім того, для вихорових солітонів та азимутонів додавалося азимутальне збурення $\sim i\varepsilon \sin\theta$.

Фундаментальні солітони виявляються стійкими для всіх $\mu < 0$ й для них виконується нерівність $\partial N/\partial\mu < 0$, що перебуває в угоді із критерієм стійкості Вахитова-Колоколова [275].

Залежно від значення хімічного потенціалу μ, для дипольних солітонів спостерігалися три різні режими еволюції, представлені на рис. 4.16 (для $\varepsilon = 0.01$). Перший режим відповідає області $\mu_{cr} < \mu < 0$, і для $\beta = 2$ маємо $\mu_{cr} \sim -0.2$, що відповідає нормованому числу атомів $N_{cr} \sim 15.5$. При $\mu_{cr} < \mu$ диполь розпадається на два фундаментальні солітона, що рухаються в протилежних напрямках без зміни форми. Цей тип еволюції показаний у лівому стовпці рис. 4.16 і спостерігається й в інших нелокальних нелінійних середовищах, розглянутих в подрозділах 4.1 та 4.2. При цьому, як і раніше, величина $\delta N = N_{dip} - 2N_{mon}$, де N_{dip} та N_{mon} нормоване число частинок у дипольному й фундаментальному солітоні відповідно, прагне до нуля при $\mu \to \mu_{cr}$. Другий режим еволюції відповідає області $\mu_{th} < \mu < \mu_{cr}$, де $\mu_{th} \sim -3.1$. У цьому діапазоні значень μ дипольний солітон стійкий стосовно початкових шумових збурень та еволюціонує без зміни форми. У термінах нормованого числа частинок критерій стійкості може бути записаний у вигляді $N_{cr} < N < N_{th}$, де $N_{cr} \sim 15.5$ й $N_{th} \sim 71$. Приклад стійкої динаміки дипольного солітона показаний у середньому стовпці рис. 4.16 (для $\beta = 2$, $\mu = -3$ й $\varepsilon = 0.01$). Подальше (нижче $\mu_{th} \sim -3.1$) зменшення хімічного потенціалу μ (або, еквівалентно, збільшення нормованого числа атомів N) призводить до нестійкості диполів з $\mu < \mu_{th}$. Руйнування нестійкого дипольного солітона нижче граничного значення μ_{th} показане в правому стовпці рис. 4.16. Таким чином, стійкий дипольний солітон існує тільки в кінцевій, досить вузької області значень нормованого числа атомів N.

Вихори з топологічним зарядом $m = 1$ та $\mu < \mu_{cr}$, де μ_{cr} деяке критичне значення рівне $\mu_{cr} \sim -1.4$ (з відповідним $N_{cr} \sim 45$) для $\beta = 2$ виявляються стійкими стосовно малих початкових азимутальних й шумових збурень. Вихори з $\mu > \mu_{cr}$ (тобто $N < N_{cr}$) розпадаються на два фундаментальні солітона. Ці два типу еволюції показані на рис. 4.17. Таким чином, у відмінність від дипольних солітонів, вихорові солітони з топологічним зарядом $m = 1$ стійкі, якщо нормоване число частинок перевищує критичне значення $N_{cr} \sim 45$.

Азимутони із двома піками інтенсивності (дипольні обертові солітони) можуть бути стійкими, якщо глибина модуляції p не занадто мала й нормоване число частинок N перевищує деяке критичне значення, що залежить від глибини модуляції p. Розпад азимутонів із двома піками з $\mu = -1$, $p = 0.4$, та стійка динаміка азимутона з $\mu = -5$ і $p = 0.6$ представлені на рис. 4.18. Чисельно оцінювана кутова швидкість обертання стійкого азимутона на рис. 4.18(b) $\omega = 0.18$, так що він еволюціонує без викривлення форми протягом десятків періодів обертання.

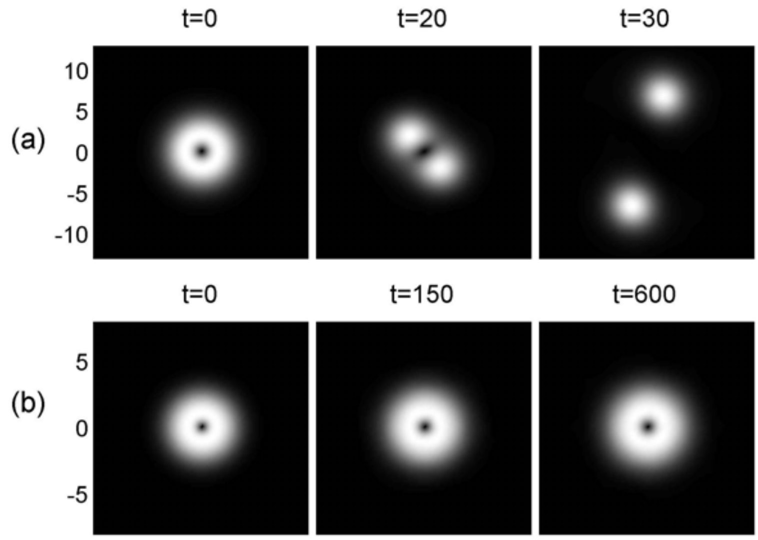

Рис. 4.17 (a) Розпад вихору з $\mu = -1$ на два фундаментальних солітона; (b) стійка еволюція вихору з $\mu = -5$.

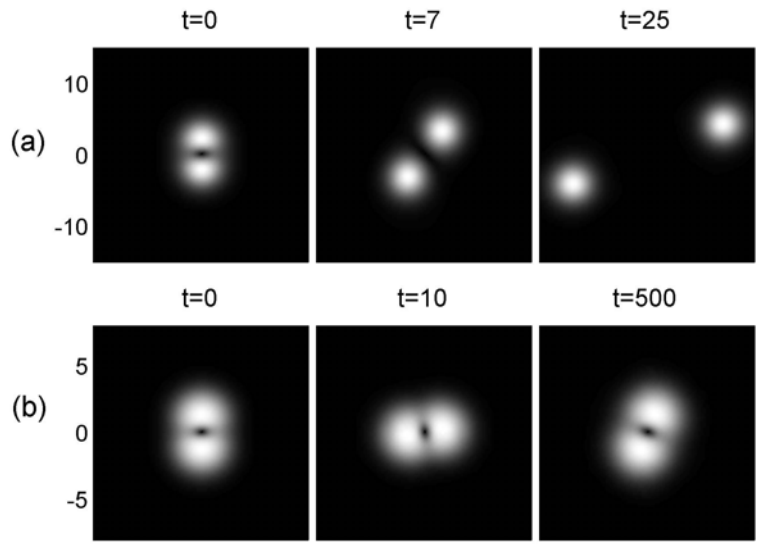

Рис. 4.18 (a) Розпад азимутона із двома піками інтенсивності й $\mu = -1$, $p = 0.4$ на два фундаментальних солітона; (b) стійка еволюція азимутона із двома піками інтенсивності і $\mu = -5$, $p = 0.6$.

4.4 Стійкі тривимірні вихори в диполярному Бозе-Ейнштейнівському конденсаті

При наявності тільки локальної взаємодії із притягуванням тривимірні вихорові солітони в БЕК з гармонічною пасткою вивчалися, включаючи лінійний аналіз стійкості й вплив асиметрії пастки на існування й стійкість вихорів, в роботі [259]. Тривимірні вихори в диполярному БЕК досліджувалися при відштовхувальній локальній взаємодії тільки в наближенні Томаса-Фермі [276]. Відзначимо, у цьому зв'язку, що диполярный БЕК з локальною взаємодією з притягуванням в наближенні Томаса-Фермі (тобто при дуже великій кількості частинок) виявляється нестійким стосовно колапсу.

У даному підрозділі розглядається тривимірний диполярный БЕК з диполь-дипольною нелокальною взаємодією та відштовхувальною локальною взаємодією. Знайдені чисельно тривимірні вихорові солітони з одиничним топологічним зарядом виявляються стійкими за умови, що число частинок конденсату менше деякого критичного значення.

Після введення безрозмірних змінних

$$\mathbf{r} \to \mathbf{r}/a_r, \quad t \to \omega_r t, \quad \psi = \Psi\sqrt{4\pi|a|a_r^2}, \tag{4.45}$$

де $a_r = \sqrt{\hbar/(m\omega_r)}$, рівняння (4.28) можна переписати у вигляді

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\Delta\psi + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + \Omega^2 z^2)\psi + \sigma|\psi|^2\psi + \varepsilon\Theta\psi, \tag{4.46}$$

де $\Omega = \omega_z/\omega_r$, $\sigma \equiv g/|g| = \pm 1$ та знак $+(-)$ відповідає відштовхувальній (притягувальній) локальній взаємодії, параметр $\varepsilon = g_d/|g|$ представляє відношення інтенсивностей нелокальної диполь-дипольної й локальної взаємодій, та

$$\Theta = \hat{F}^{-1}\left\{\tilde{V}(\mathbf{k})\hat{F}\left\{|\psi|^2\right\}\right\}, \tag{4.47}$$

де $\hat{F}\left\{...\right\}$ означає Фур'є перетворення, й $\tilde{V}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi}{3}(3k_z^2/k^2 - 1)$ Фур'є-образ ядра $V(\mathbf{r})$ (4.29).

Рівняння (4.46) зберігає $N = \int|\psi|^2 d\mathbf{r}$ (нормоване число частинок), z-компоненту кутового моменту $M_z = \mathrm{Im}\int\left[\psi^*(\mathbf{r}\times\nabla_\perp\psi)\right]_z d\mathbf{r}$, та енергію

$$E = \int\left\{|\nabla\psi|^2 + (x^2 + y^2 + \Omega^2 z^2)|\psi|^2 + \sigma|\psi|^4 + \varepsilon\Theta|\psi|^2\right\}d\mathbf{r}. \tag{4.48}$$

Нормоване значення N пов'язано із числом атомів $\mathcal{N}$ співвідношенням

$$\mathcal{N} = \frac{a_r}{4\pi|a|}N. \qquad (4.49)$$

Стаціонарні розв'язки рівняння (4.46) шукаємо у вигляді

$$\psi(\mathbf{r}, t) = U(r, z)\exp(-i\mu t + im\varphi), \qquad (4.50)$$

де (r, z, φ) циліндричні координати, μ хімічний потенціал, та m ціле (топологічний заряд). З (4.46) й (4.50) одержуємо

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \left(2\mu - r^2 - \Omega^2 z^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)U + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - 2\sigma U^3 - 2\varepsilon\Theta U = 0, \quad (4.51)$$

де $\Theta = \hat{F}^{-1}\left\{\tilde{V}(\mathbf{k})\hat{F}\left\{U^2\right\}\right\}$. Далі розглядаємо випадок притягувальній локальної взаємодії ($\sigma = -1$).

Спочатку представимо варіаційний аналіз. Стаціонарні розв'язки рівняння (4.51) у вигляді (4.50) відповідають мінімізації $\delta S = 0$ функціонала $S = E - \mu N$. Вибираємо пробну функцію у вигляді

$$U(r, z) = \frac{Ar}{a}e^{-r^2/a^2}e^{-z^2/b^2}e^{i\varphi}, \qquad (4.52)$$

яка відповідає кільцеподібному (в x, y площині) тривимірному вихоровому солітону з топологічним зарядом $m = 1$, де A, a, b невідомі параметри, обумовлені варіаційної процедурою. Для фундаментального тривимірного солітона в наближенні Томаса-Фермі (тобто для $|\mu| \gg 1$) варіаційний аналіз був проведений в [276] . Підставляючи (4.52) в (4.48), маємо для S

$$S(A, b, \kappa) = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 - \mu N, \qquad (4.53)$$

де, замість a, уведений варіаційний параметр $\kappa = a/b$ (ступінь еліптичності). Член E_1 відповідає кінетичної енергії

$$E_1 = \frac{\pi^{3/2}\sqrt{2}}{8}A^2 b(4 + \kappa^2), \qquad (4.54)$$

а

$$E_2 = \frac{\pi^{3/2}\sqrt{2}}{32} A^2 b^5 \kappa^2 (4\kappa^2 + \Omega^2) \qquad (4.55)$$

енергії втримання. Внески від локальної й нелокальної нелінійної взаємодії

$$E_3 = -\frac{\pi^{3/2}}{64} A^4 b^3 \kappa^2, \quad E_4 = \frac{\pi^{5/2}}{48} \varepsilon A^4 b^3 \kappa^2 G(\kappa), \qquad (4.56)$$

відповідно, і число атомів

$$N = \frac{\pi^{3/2}\sqrt{2}}{8} A^2 b^3 \kappa^2. \qquad (4.57)$$

Функція $G(\kappa)$ у рівнянні (4.56) має вигляд

$$G(\kappa) = \frac{3\kappa^2[f(\kappa)\sqrt{\kappa^2-1} - h(\kappa)\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{\kappa^2-1}]}{8(\kappa^2-1)^{7/2}} - 1, \qquad (4.58)$$

де $f(\kappa) = 8\kappa^4 - 15\kappa^2 + 22$ і $h(\kappa) = 7\kappa^4 - 8\kappa^2 + 16$ якщо $\kappa^2 \geqslant 1$, і

$$G(\kappa) = \frac{3\kappa^2[h(\kappa)\sqrt{1-\kappa^2} - f(\kappa)\sqrt{1-\kappa^2}]}{8(1-\kappa^2)^{7/2}} - 1, \qquad (4.59)$$

якщо $\kappa^2 \leqslant 1$. Функція $G(\kappa)$ монотонно зростає зі збільшенням параметра еліптичності κ і $G(0) = -1$, $G(1) = 8/35$, $G(\infty) = 2$. Звідси випливає, що для $\varepsilon > 0$ внесок нелокальної взаємодії негативний для структур, витягнутих ("сигароподібних") у напрямку осі z (притягування) та позитивний (відштовхування) для квазидвовимірних у площині (x, y) ("млиноподібних") структур. Це означає, зокрема, що знак енергії нелокальної диполярної взаємодії можна контролювати за допомогою зміни аспектного відношення пастки Ω. З варіаційних рівнянь $\partial S/\partial A = 0$ і $\partial S/\partial b = 0$ для A та b можна одержати

$$b^2 = \frac{12\kappa\mu + 2\sqrt{36\kappa^2\mu^2 + 7(4\kappa^2+\Omega^2)(4+\kappa^2)}}{7\kappa(4\kappa^2+\Omega^2)}, \qquad (4.60)$$

$$A^2 = \frac{24\sqrt{2}[b^2(4\kappa^2+\Omega^2) - 4\mu]}{(3 - 4\pi\varepsilon G)}. \qquad (4.61)$$

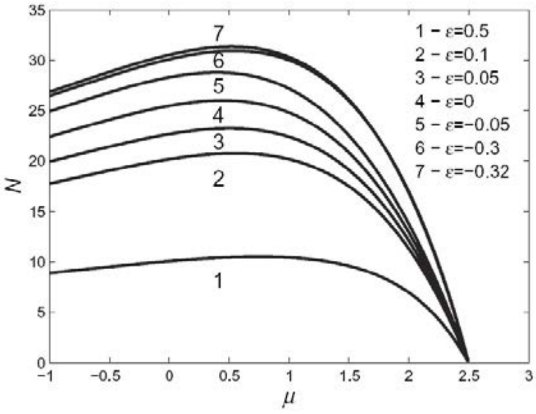

Рис. 4.19 Залежність нормованого числа частинок N у вихорі від хімічного потенціалу μ для різних значень відношення сил нелокальної й локальної взаємодій ε (варіаційний аналіз)

Рівняння $\partial S/\partial\kappa^2 = 0$ дає

$$8(1-2b^2\mu)+2b^4(8\kappa^2+\lambda^2)-\frac{A^2b^2}{\sqrt{2}}\left[1-\frac{4\pi\varepsilon}{3}\frac{\partial(\kappa^2 G)}{\partial\kappa^2}\right]=0, \tag{4.62}$$

і підставляючи (4.61), (4.60) в (4.62) маємо рівняння, що містить єдиний варіаційний параметр κ. Зі співвідношення (4.61) випливає, що існує критичне значення μ_{cr}, при якому число атомів $N = 0$. Комбінуючи (4.61) та (4.60), можна одержати

$$\mu_{cr} = \frac{\sqrt{(4+\kappa_c^2)(4\kappa_c^2+\Omega^2)}}{2\kappa_c}. \tag{4.63}$$

Зі співвідношення $\partial\mu_{cr}/\partial\kappa = 0$ випливає $\kappa_c = \sqrt{\Omega}$, так що $\mu_{cr} = 2 + \Omega/2$. Далі обмежуємося випадком сферично симетричної пастки $\Omega = 1$. Результати варіаційного аналізу для різних значень відношення сил нелокальної й локальної взаємодій ε представлені на рис. 4.19, де показана залежність числа атомів N від хімічного потенціалу μ. Видно, що тривимірні вихори можуть існувати як для позитивних, так і для негативних ε. Однак, значення $\varepsilon_{cr} \sim -0.32$ є критичним і вихори не існують, якщо $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$.

Стаціонарні локалізовані розв'язки рівняння (4.46) у вигляді фундаментального солітона й вихору знаходились чисельно за допомогою комбінації методу Гальоркіна й методу стабілізуючого множника. Приклад три-

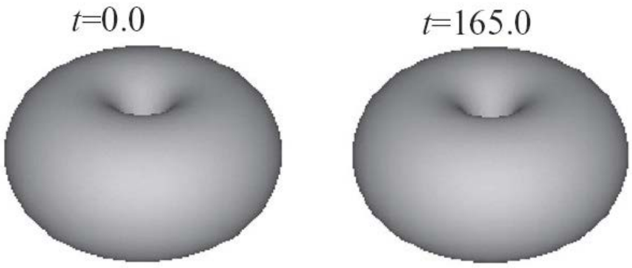

Рис. 4.20 Стійка динаміка тривимірного вихору з $m = 1$, $\mu = 1.9$, $\varepsilon = 0.15$, $\Omega = 1$: на різних часах показані ізоповерхні постійної густини частинок $|\psi|^2$.

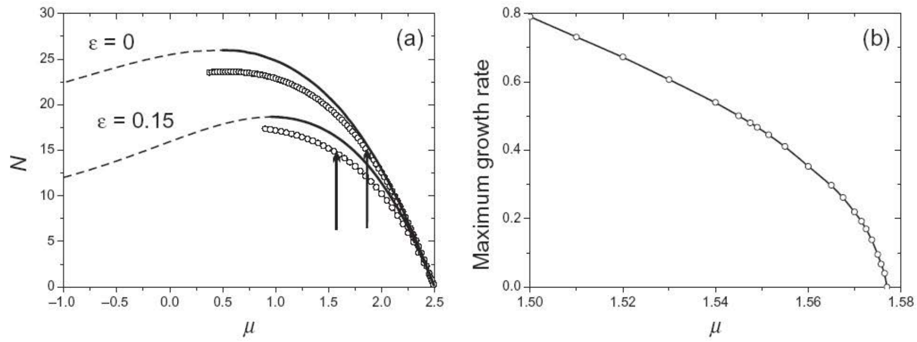

Рис. 4.21 (a) Залежність нормованого числа частинок N від хімічного потенціалу μ для різних ε. Кола відповідають результатам чисельного аналізу. Передбачення варіаційного аналізу показані суцільними й пунктирними лініями. Пунктирні лінії відповідають нестійким, стосовно колапсу, тривимірним вихорям. Стрілки вказують на пороги стійкості. (b) Максимальні інкременти нестійкості γ як функції μ для вихорів з $m = 1$, $\varepsilon = 0.15$

вимірного вихорового солітона показаний на рис. 4.20. Порівняння чисельних результатів та варіаційного аналізу представлено на рис. 4.21(a), де показана залежність нормованого числа частинок N від хімічного потенціалу вихору μ для випадків відсутності ($\varepsilon = 0$) та наявності нелокальної диполярної взаємодії. Інтенсивність нелокальної взаємодії фіксувалася значенням $\varepsilon = 0.15$, що відповідає експериментам з ^{52}Cr [260, 267]. Результати варіаційного аналізу перебувають у гарній згоді із чисельним моделюванням. У відповідність із критерієм Вахитова-Колоколова [275] тривимірні локалізовані структури виявляються нестійкими стосовно колапсу якщо $\partial N/\partial \mu > 0$. Пунктирні лінії на рис. 4.21 (a) відповідають нестійким, а суцільні лінії – стійким стосовно колапсу вихорам.

Чисельний аналіз показує, що локалізовані структури з нульовим топологічним зарядом $m = 0$ (тобто з нульовим кутовим моментом – фундаментальний солітон) є стійкими по відношенню до азимутальних збурень та їх область стійкості збігається з критерієм Вахитова-Колоколова. Саме, фундаментальний солітон виявляється стійким якщо $\partial N/\partial\mu < 0$. Строго кажучи, цей критерій слушний тільки для фундаментальних солітонів . Вихорові солітони ($m \neq 0$) можуть виявлятися нестійкими стосовно азимутальних збурень та їх стійкість повинна бути досліджена окремо. Для вивчення стійкості вихорів представимо хвильову функцію у вигляді

$$\Psi = (\psi + \epsilon)e^{-i\mu t},$$

де ψ стаціонарний розв'язок, а ϵ мале збурення, $|\epsilon(\mathbf{r}, t)| << |\psi|$. Лінеаризуя (4.46) поблизу стаціонарного розв'язку, можна одержати динамічне рівняння, що описує еволюцію малого збурення

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\epsilon}{\partial t} + \mu\epsilon + \frac{1}{2}\Delta\epsilon + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)\epsilon + (2\psi\psi^*\epsilon + \psi\psi\epsilon^*) \\ +\varepsilon(\delta\Theta\,\psi + \Theta\epsilon) = 0, \end{aligned} \tag{4.64}$$

де Θ визначається співвідношенням (4.47) і

$$\delta\Theta = \hat{F}^{-1}\left[\tilde{V}(\mathbf{k})\hat{F}\left\{\psi\epsilon^* + \psi^*\epsilon\right\}\right].$$

Рівняння (4.64) вирішувалося чисельно за допомогою техніки покрокового розщеплення. Інкремент нестійкості можна оцінити у такий спосіб

$$\gamma = \frac{1}{2\Delta t}\ln\left\{\frac{\nu(t + \Delta t)}{\nu(t)}\right\},$$

де Δt крок за часом, та $\nu(t) = \int |\epsilon|^2 d\mathbf{r}$ норма збурення. Остаточні результати нечутливі до конкретного вибору $\epsilon(\mathbf{r}, 0)$. Якщо динаміка виявляється нестійкою, відповідний розв'язок $\epsilon(\mathbf{r}, t)$ експоненціально зростає в часі, $\gamma(t)$ насичується на деякому значенні γ, яке й вибирається за інкремент нестійкості .

На рис. 4.21(b) показана залежність інкремента нестійкості γ від хі-

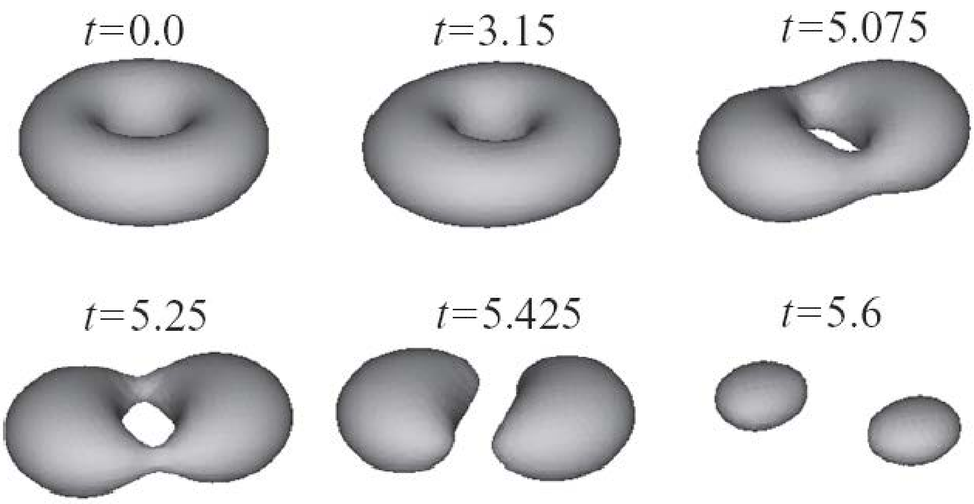

Рис. 4.22 Нестійка еволюція тривимірного вихору з $m = 1$, $\mu = 1.5$, $\varepsilon = 0.15$, $\Omega = 1$: на різних часах показані ізоповерхні постійної густини частинок $|\psi|^2$.

мічного потенціалу μ для вихору з $m = 1$ та $\varepsilon = 0.15$. Лінійний аналіз стійкості показує, що інкремент зменшується зі зростанням μ і падає до нуля $\gamma = 0$ для розв'язків з $\mu \gtrsim 1.58$. Відповідні області стійкості для $\varepsilon = 0$ та $\varepsilon = 0.15$ показані стрілками на рис. 4.21(a) . Видно, що нелокальність виявляє стабілізуючий ефект: область стійкості вихору по параметру μ розширюється в порівнянні з чисто локальним випадком.

Результати лінійного аналізу стійкості перевірялися прямим чисельним розв'язком вихідного нелінійного динамічного рівняння (4.46). Як і передбачалося в лінійному аналізі, азимутальні збурення початкового стану виявляються найнебезпечнішими. Чисельне моделювання показує, що тривимірні вихори з топологічним зарядом $m = 1$ та $\mu \gtrsim 1.58$ є стійкими й не колапсують або розпливаються навіть при досить сильному початковому збурюванні. Стійка динаміка вихорового солітона з $m = 1$ та $\mu = 1.9$ показана на рис. 4.20. З інший сторони, згідно з лінійним аналізом стійкості, вихорові солітони з $m = 1$ і $\mu \lesssim 1.58$ демонструють нестійку динаміку. Залежно від числа захоплених атомів і прикладеного збурення, руйнування вихору в нестійкій області може відбуватися декількома способами. Приклад типової нестійкої еволюції вихорового солітона з $\mu = 1.5$ представлений на рис. 4.22. Вихор розпадається на два фундаментальні солітона.

Через збереження кутового моменту солітони розлітаються по тангенціальним до вихорового кільця траєкторіям. Фундаментальні солітони виявляються стійкими скрізь в області $\partial N/\partial\mu < 0$. Чисельно знайдені пороги стійкості вихорів збігаються з передбаченнями лінійного аналізу стійкості. Усі вихори з топологічним зарядом $m = 2$ виявляються нестійкими (для чисто локальної взаємодії $\varepsilon = 0$ це було показано в [258, 259]).

Ми обмежилися випадком сферично симетричної пастки $\Omega = 1$. При наявності тільки локальної взаємодії ($\varepsilon = 0$) аналіз стійкості тривимірних вихорів для різних значень Ω проводився в [259]. Було показано, що пастка витягнута уздовж осі z з $\Omega \ll 1$, пригнічує нестійкість вихорів, у той час як квазидвовимірна у (x, y)-площині (млиноподібна) пастка $\Omega \gg 1$ сприяє нестійкості. За аналогією з [259], можна чекати таких ж результатів, якщо нелокальна взаємодія слабка в порівнянні з локальною $\varepsilon \ll 1$. Картина міняється у випадку досить сильної нелокальної нелінійності $\varepsilon \gg 1$. Дійсно, як відзначалося вище, з рівнянь (4.56), (4.58) та (4.59) випливає, що внесок нелокальної диполь-дипольної взаємодії в гамільтоніан негативний (тобто притягувальний) для структур, витягнутих уздовж осі z позитивний (відштовхувальний) для квазидвовимірних у площині (x, y) структур. Це означає, зокрема, що досить сильна нелокальна нелінійність сприяє дестабілізації тривимірних вихорів у витягнутій пастці з $\Omega \ll 1$.

4.5 Результати до розділу 4

1. Знайдені стійкі двовимірні дипольні солітони у вигляді зв'язаного стану двох фундаментальних солітонів із протилежною фазою в моделі нелінійного рівняння Шредингера з нелокальним гауссовським відгуком середовища. Нелокальність відіграє вирішальну роль для стійкості солітонів. Показано, що дипольні солітони виявляються стійкими, якщо енергія солітона перевищує деяке критичне значення. Навіть при досить сильному початковому шумовому збурюванні солітони скидають шумові брижі та еволюціонують без помітної зміни форми протягом сотень характерних дифракційних довжин. Нижче критичного

значення солітон швидко руйнується й без початкового збурення. При подальшому зменшенні енергії, якщо енергія солітона менше деякого нового критичного значення, руйнування припиняється й дипольний солітон розпадається на два фундаментальних (монопольних) солітона, які рухаються в протилежні напрмки без зміни форми. Такий розпад пояснюється наближенням енергії дипольного солітона до подвоєної енергії фундаментального солітона, тобто зникненням "енергії зв'язку". Результати чисельного моделювання підтверджуються варіаційним аналізом.

2. У моделі частково іонізованій плазми з зіткненнями з нелокальною нелінійністю теплового типу чисельно знайдені двовимірні необертові дипольні, трипольні й квадрупольні солітони, а також обертові дипольні й квадрупольні солітони, які мають, подібно вихорам, ненульовий кутовий момент (азимутони). Необертові дипольні солітони стійкі, якщо енергія солітона лежить в інтервалі, обмеженому нижнім та верхнім критичним значенням. Якщо енергія солітона менше нижнього критичного значення він розпадається на два фундаментальні солітона, а якщо енергія більше верхнього критичного значення – швидко руйнується. Двовимірні трипольні й квадрупольні солітони виявляються (на відміну від одновимірних) завжди нестійкими, однак у певному інтервалі енергій нестійкість слабка й солітони еволюціонують без зміни форми протягом десятків дифракційних довжин, що теоретично пояснює факт експериментального спостереження таких солітонів у середовищі з тепловою нелокальною нелінійністю. Обертові дипольні й квадрупольні солітони можуть бути стійкими при перевищенні енергії деякого критичного значення.

3. У моделі рівняння Гросса-Пітаєвського, який описує Бозе-Ейнштейнівський конденсат з нелокальною взаємодією між атомами, чисельно знайдені двовимірні локалізовані розв'язки у вигляді фундаментального солітона, дипольного й квадрупольного солітона, вихорового солітона, азимутонів із двома й чотирма піками інтенсивності

(обертових диполів та квадруполів). Нелінійність відповідає диполь-дипольній взаємодії, що виникає в газах БЕК з аномально більшими магнітними моментами. Стійкі структури можливі тільки в діапазоні деякого критичного значення відношення нелокальної та локальної взаємодій. Це критичне значення визначене чисельно. Як і в моделі з тепловою нелокальною нелінійністю, дипольні солітони стійкі тільки усередині обмеженої області по числу атомів, а квадрупольні солітони нестійкі завжди. Вихорові солітони з одиничним топологічним зарядом стійкі при перевищенні числа атомів деякого критичного значення. Азимутони із двома піками інтенсивності можуть бути стійкими, якщо глибина модуляції не занадто мала й число частинок досить велике. Відповідні оцінки знайдені чисельним методом.

4. Чисельно знайдено розв'язки у вигляді тривимірних вихорових солітонів в моделі рівняння Гросса-Пітаєвського з диполь-дипольною нелокальною взаємодією. Лінійний аналіз стійкості показує, що тривимірні вихори з одиничним зарядом стійкі, якщо хімічний потенціал перевищує деяке критичне значення. Передбачування лінійного аналізу стійкості підтверджуються прямим чисельним моделюванням динаміки тривимірних вихорів. Показано, що нелокальність має стабілізуючий ефект: у сферично симетричних пастках область стійкості суттєво розширюється в порівнянні з локальним випадком навіть при досить слабкої нелокальної нелінійності. У витягнутій пастці сильна нелокальна нелінійність сприяє дестабілізації тривимірних вихорів.

РОЗДІЛ 5

Мультисолітони й азимутони в нелінійних середовищах с утримуючим потенціалом

Зміст цього розділу відображено в роботах [3, 4, 12, 29].

5.1 Двовимірні нелінійні структури із просторово модульованою фазою - азимутони

5.1.1 Варіаційний аналіз і чисельні азимутонні розв'язки

У роботі [227] для моделі нелінійного рівняння Шредингера за допомогою варіаційного аналізу були запропоновані нові двовимірні нелінійні локалізовані структури, радикально відмінні від відомих раніше солітонних структур. До цього двовимірні нелінійні структури топологічно являли собою або солітони (мультисолітони), або радіально симетричні вихори з нульовою інтенсивністю в центрі. Азимутони являють собою проміжний стан між радіально симетричними вихорами й необертовими мультисолітонами. На відміну від вихорових солітонів, фаза азимутонних солітонів є нелінійною функцією полярного кута, а амплітуда не має радіальну симетрію. Азимутони, як і радіально симетричні вихори, несуть ненульовий кутовий момент. З іншого боку, азимутони нагадують необертові мультисолітони з більш ніж одним піком в амплітуді. При зміні одного з азимутонних параметрів, так званої глибини модуляції, яку можна визначити як відношення максимуму уявної частини розв'язку до максимуму дійсної і яка однозначно визначається частотою обертання азимутона, азимутонний розв'язок безперервно переходить із мультисолітона з $2m$ піками в радіально симетричний вихоровий солітон із зарядом m. Потім, в [222, 223] вивчалися азимутони в нелінійному середовищі з нелокальним гауссовськім відгуком. У всіх цих роботах, однак, азимутонні солітони знаходили тільки наближеним варіаційним методом, причому без строгого обґрунтування обраної пробної функції. Варіаційний аналіз (при якому, загалом кажучи, може використовуватися довільна пробна функція, і який може вести до непередбачених результатів) справедливо викликав сумнів в реальному існуванні азимутонних солітонів. У цьому розділі демонструється існування азимутонних солітонів, шляхом них точного чисельного знаходження (точного, у тому розумінні, що азимутонні розв'язки можуть бути знайдені з довільною точністю, аж до машинної). При цьому, пробна функція варіаційного аналізу (стартова в чисельному методі) виявляється єдино можливою та вказує на зв'язок нелінійних азимутонних розв'язків з лінійними модами при прямуванні енергії азимутонів до нуля.

У якості моделі ми розглядаємо Бозе-Ейнштейнівський конденсат в аксиально симетричній гармонічній пастці. Динаміка конденсату описується нормованим рівнянням Гросса-Пітаєвського для хвильової функції ψ

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\Delta_\perp\psi + (x^2+y^2)\psi - \sigma|\psi|^2\psi, \qquad (5.1)$$

де введені адекватні безрозмірні змінні, аналогічні уведеним у підрозділі 4.3, і надалі розглядається випадок відштовхування між атомами, так що $\sigma = -1$.

Рівняння (5.1) зберігає норму (нормоване число частинок)

$$\mathcal{N} = \int |\psi|^2 dxdy, \qquad (5.2)$$

z-компоненту кутового моменту

$$M_z = \mathrm{Im}\int \left[\psi^*(\mathbf{r}\times\nabla_\perp\psi)\right]_z dx\,dy, \qquad (5.3)$$

і енергію

$$E = \int\left\{|\nabla_\perp\psi|^2 + (x^2+y^2)|\psi|^2 - \frac{\sigma}{2}|\psi|^4\right\}dxdy. \qquad (5.4)$$

Будемо шукати розв'язки рівняння (5.1), які є стаціонарними в системі координат, що обертаються з кутовий швидкістю ω. У полярних координатах (r, φ), такі розв'язки вигляду

$$\psi(r, \varphi, t) = \Phi(r, \varphi - \omega t) \exp(-i\mu t), \tag{5.5}$$

де μ хімічний потенціал в обертовій системі координат, задовольняють рівнянню

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - i\omega \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \mu\Phi - r^2\Phi - \sigma|\Phi|^2\Phi = 0, \tag{5.6}$$

де $\theta = \varphi - \omega t$. У декартових координатах рівняння (5.6) має вигляд

$$\mu\Phi + \Delta_\perp\Phi + (x^2 + y^2)\Phi - i\omega\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi + \sigma|\Phi|^2\Phi = 0. \tag{5.7}$$

У лінійному випадку $\sigma = 0$ рівняння (5.7) являє собою квантовомеханічне рівняння Шредингера для електронної хвильової функції в однорідному магнітному полі. Відповідні власні функції мають вигляд

$$\mathcal{L}_{n,\pm m}(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^m L_n^m(x^2 + y^2), \tag{5.8}$$

де $L_n^m(\xi)$ узагальнений поліном Лагерра, з відповідними власними значеннями

$$\mu_{n,\pm m} = 4n + 2|m| + 2 \mp m\omega, \tag{5.9}$$

де n і m ненегативні цілі. Надалі обмежимося безвузловим випадком $n = 0$, так що власними функціями й власними значеннями є відповідно

$$\Phi_{\pm m} = \mathcal{L}_{0,\pm m}(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^m, \tag{5.10}$$

і

$$\mu_{\pm m} = 2|m| + 2 \mp m\omega. \tag{5.11}$$

Лінійні розв'язки (5.10) по зовнішньому вигляду нагадують вихори с топологічним зарядом m або (якщо $m = 0$) фундаментальний солітон. Ці розв'язки, звичайно, несправедливі в нелінійному режимі $\sigma \neq 0$, однак, як відомо, при $\mu > \mu_{lin}$, де μ_{lin} визначається (5.11), існують "дійсні"(нелінійні) вихори й фундаментальний солітон, які можуть бути знайдені чисельно.

Точка μ_{lin}, що розділяє лінійні й нелінійні моди, може бути названа точкою біфуркації. Виникає принципове питання: чи існують нелінійні локалізовані розв'язки рівняння (5.7) відмінні по топології від фундаментального солітона й вихорів (нагадаємо, ми розглядаємо безвузловий випадок $n = 0$)? Звернемося спочатку до лінійного випадку. Ясно, що єдиним можливим кандидатом на лінійний розв'язок, відмінний від (5.10) є суперпозиція лінійних мод $\Phi_{\pm m}$ з рівними власними значеннями μ, обумовленими з (5.11). З (5.11) можна бачити, що існує *єдиний* спосіб побудувати такий розв'язок. Він має вигляд

$$\Phi = c_1\Phi_{-k} + c_2\Phi_l \tag{5.12}$$

за умови, що $\mu_{-k} = \mu_l$, де k і l позитивні й коефіцієнти c_1, c_2 довільні. Ця умова дає (для фіксованих k і l) єдине можливе значення частоти ω_{lin} і власного значення μ_{lin}, відповідних до лінійної моди (5.12)

$$\omega_{lin} = \frac{2(l-k)}{l+k}, \tag{5.13}$$

$$\mu_{lin} = 2(k+1) + \frac{2k(l-k)}{l+k}. \tag{5.14}$$

Вирази (5.13) і (5.14) дійсно представляють (як ми далі побачимо) точку біфуркації на (ω, μ) площини, у якій починається "народження"нової, відмінної від солітона й вихору, нелінійної структури – азимутона.

Тепер розглянемо нелінійний випадок. Проведемо спочатку варіаційний аналіз. Стаціонарні розв'язки рівняння (5.6) виду (5.5) відповідають розв'язку варіаційної задачі $\delta S = 0$ для функціонала $S = E - \mu\mathcal{N} - \omega M_z$. Оберемо пробну функцію у вигляді (маючи на увазі лінійний результат (5.12))

$$\Phi = Ae^{-\xi^2/2}\left(\xi^k e^{-ik\theta} + s\xi^l e^{il\theta}\right) \tag{5.15}$$

де $\xi = r/a$, k і l позитивні цілі, A, a, і s невідомі параметри, обумовлені варіаційним аналізом. Підставляючи (5.15) у вирази (5.2),(5.3) і (5.4), для функціонала S одержимо

$$S(A, a, s) = E_1 + E_2 + E_3 - \mu\mathcal{N} - \omega M_z. \tag{5.16}$$

Доданок E_1 відповідає кінетичній енергії

$$E_1 = \pi A^2 [2k^2(k-1)! + 2s^2 l^2 (l-1)! + (k+1)! \\ + s^2 (l+1)! - 2kk! - 2s^2 ll!], \quad (5.17)$$

$$E_2 = \pi A^2 a^4 \left[(k+1)! + s^2 (l+1)! \right] \quad (5.18)$$

представляє енергію, пов'язану з утримуючим потенціалом. Внесок нелінійної взаємодії має вигляд

$$E_3 = \pi A^4 a^2 \left[\frac{(2k)!}{2^{2k+1}} + \frac{s^4 (2l)!}{2^{2l+1}} + \frac{s^2 (k+l)!}{2^{k+l-1}} \right], \quad (5.19)$$

і, відповідно, число частинок і проекція кутового моменту

$$\mathcal{N} = \pi A^2 a^2 \left(k! + s^2 l! \right), \quad (5.20)$$

і

$$M_z = \pi A^2 a^2 \left(s^2 ll! - kk! \right). \quad (5.21)$$

Параметри A, a і s визначаються із системи $\partial S/\partial A = 0$, $\partial S/\partial a = 0$ і $\partial S/\partial s = 0$. Далі, для визначеності, вважаємо $l \geqslant k$. Відзначимо, що пробна функція (5.15) являє собою суперпозицію двох вихорів з топологічними зарядами $-k$ і l відповідно. При зміні параметра s від 0 до нескінченності, перший вихор плавно переходить у другий.

Чисельний метод типу метода стабілізуючого множника, уперше запропонований Петвіашвілі [226] для знаходження солітонних розв'язків нелінійних рівнянь, не може використовуватися тут безпосередньо. Рівняння (5.34) містить в явному вигляді неоднорідний додаток (зовнішній потенціал), так що фур'є-перетворення, використовуване в методі Петвіашвілі й інших його варіантах [277], незастосовне й метод повинен бути модифікований. Рівняння (5.34) переписувалося у вигляді $L\Phi = N(\Phi)$, де $L\Phi$ відповідає лінійній частині й $N(\Phi)$ нелінійність. На кожному n-ом кроці послідовних ітерацій вирішувалася відповідна лінійна задача (тобто фактично знаходився зворотній оператор L^{-1}, що відповідає надзвичайно великій, але дуже розрідженій матриці) і ітераційна процедура мала вигляд

$$\Phi_{n+1} = s^{\lambda} L^{-1} N(\Phi_n), \tag{5.22}$$

зі стабілізуючим множником

$$s = \frac{(\Phi_n^*, \Phi_n)}{(\Phi_n^*, L^{-1}N(\Phi_n))}, \tag{5.23}$$

де $(u, v) \equiv \int uv\, dxdy$, і для кубічної нелінійності $\lambda = 3/2$. Помітимо, що можна також обрати (іноді це дає більш швидку збіжність)

$$s = \frac{(\Phi_n^*, \Phi_n)}{(L^{-1}N(\Phi_n^*), L^{-1}N(\Phi_n))}, \tag{5.24}$$

з $\lambda = 3/4$ в (5.22). Можна бачити, що права частина (5.22) має однорідність нуль стосовно Φ, і у такий спосіб забезпечує збіжність. Збіжність контролюється сходженням до нуля величини $|s-1|$. Цей метод, що сходиться до фундаментального солітону, аж ніяк не гарантує збіжності до інших розв'язків. Тому зазначений метод використовувався поблизу точок біфуркації, що сходяться не обов'язково до фундаментального солітону, але за умови, що початкове наближення достатнє близько до топологічно розшукуваного. У якості стартового брався варіаційний розв'язок (5.15) з обчисленими A, a і s. Потім, після декількох ітерацій (коли ставала очевидної збіжність саме до фундаментального солітону, який ми не розшукуємо) застосовувався метод Лакоби-Янга (знову таки відповідним чином модифікований, що й дозволяє працювати не у фур'є-просторі) [277], що дозволяє знаходити розв'язки, відмінні від фундаментального солітона, за умови, що початкове наближення досить близько до потрібного розв'язку. При досить повільної збіжності ітераційна процедура все-таки наближалася до деякої нетривіальній структури. Потім застосовувався метод Ньютона-Канторовича, узагальнений на випадок нелінійних рівнянь у частинних похідних. Метод Ньютона-Канторовича, що стартує з наближення, послідовно обчисленого двома попередніми методами, дає дуже швидку збіжність і звичайно всього лише через кілька ітерацій розв'язок перебуває з машинною точністю

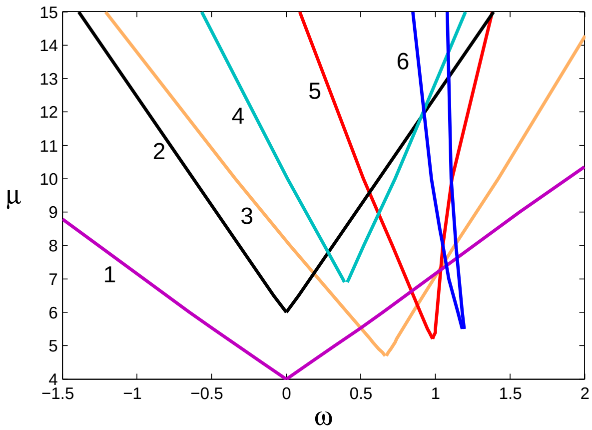

Рис. 5.1 Області існування азимутонів на площини (μ, ω) (усередині відповідних кривих). Крива 1: 2-піковий з (-1,1). Крива 2: 4-піковий з (-2,2). Крива 3: 3-піковий з (-1,2). Крива 4: 5-піковий з (-2,3). Крива 5: 4-піковий з (-1,3). Крива 6: 5-піковий з (-1,4).

(норма нев'язання $\sim 10^{-16}$). Виявилося можливим знайти кілька варіантів розв'язків, відповідних азимутонним солітонам. Далі будемо характеризувати їх (в доповнення до хімічного потенціалу μ і частоті обертання ω) двома позитивними цілими k і l і позначати відповідну структуру $(-k, l)$ (для визначеності вважаємо $l \geqslant k$). Загальним правилом є: азимутонний солітон має $k+l$ піків і $k+l+1$ особливих точок у фазі з $k+l$ особливими точками на периферії із зарядом $m = 1$ і однієї особою точкою в центрі із зарядом $m = -k$, так що повний топологічний заряд $m_{tot} = k + l - k = l$ (інакше, азимутонний солітон може характеризуватися топологічним зарядом $m_{tot} = l$ і числом піків $N = k + l$). Області існування різних $(-k, l)$ азимутонів на площині (μ, ω) показані на рис. 5.1. Приклади відповідних розв'язків (амплітуди $|\Phi|$ і фази $\arg \Phi$) представлені на рис. 5.2–5.7. Точки біфуркації (кутові точки на рис. 5.1) перебувають у повній відповідності з аналітичними пророкуваннями (5.13) і (5.14) які, для числа піків N і топологічного заряду m_{tot} можна переписати у вигляді

$$\omega_{lin} = \frac{2(2m_{tot} - N)}{N}, \tag{5.25}$$

$$\mu_{lin} = 2(N - m_{tot} + 1) + \frac{2(N - m_{tot})(2m_{tot} - N)}{N}. \tag{5.26}$$

У цих точках відповідний азимутонний розв'язок зникає (число частинок дорівнює нулю) і виникає лінійна мода (5.12). Азимутонні солітони з однаковим числом піків можуть суттєво відрізнятися своєю фазовою структурою (див., наприклад, рис. 5.4., 5.5 і рис. 5.6, 5.7). Для азимутонів з $k = l$ (тобто з парним числом піків і $N = 2m_{tot}$), параметр p (глибина модуляції), відповідає параметру у варіаційному кутовому анзаці $\sim \cos m\theta + ip \sin m\theta$, який випливає у цьому випадку з (5.15) (при цьому, $p = (s-1)/(s+1)$ для пробної функції (5.15)), вводиться виразом $p = \max|\mathrm{Im}\,\Phi|/\max|\mathrm{Re}\,\Phi|$, де Φ чисельно знайдений розв'язок. На відміну від азимутонів з непарним числом піків, є тільки одна особлива точка в центрі із зарядом $m_{tot} = l = k$. На рис. 5.8 показана залежність частоти обертання ω від глибини модуляції p для дипольного азимутона з $k = 1$, $l = 1$. Видно, що результати варіаційного аналізу добре узгоджуються з чисельними.

Стійкість азимутонних солітонів досліджувалася прямим чисельним розв'язком динамічного рівняння (5.1) з початковою умовою у вигляді азимутона. Абсолютно стійкими (тобто що не міняють форму на довільно великих часах) виявляються, здається, тільки азимутонні солітони із двома піками $(-1, 1)$. Область стійкості для таких азимутонів на площині (ω, μ) показана на рис. 5.9. Зі збільшенням частоти обертання область стійкості звужується. При досить малих μ (точніше, досить близьких до відповідного μ_{lin} для різних k і l), тобто досить малому числі частинок, азимутони вищих порядків також можуть тривалий час (у порівнянні з періодом обертання $T = 2\pi/\omega$) еволюціонувати без зміни форми. На рис. 5.10 показана еволюція азимутонних солітонів із трьома піками $(-1, 2)$ і п'ятьма піками (рис. 5.11 – структура (-2,3), 5.12 – структура (-1,4)). Видно, що азимутони, обертаючись, еволюціонують без зміни форми протягом декількох десятків періодів обертання.

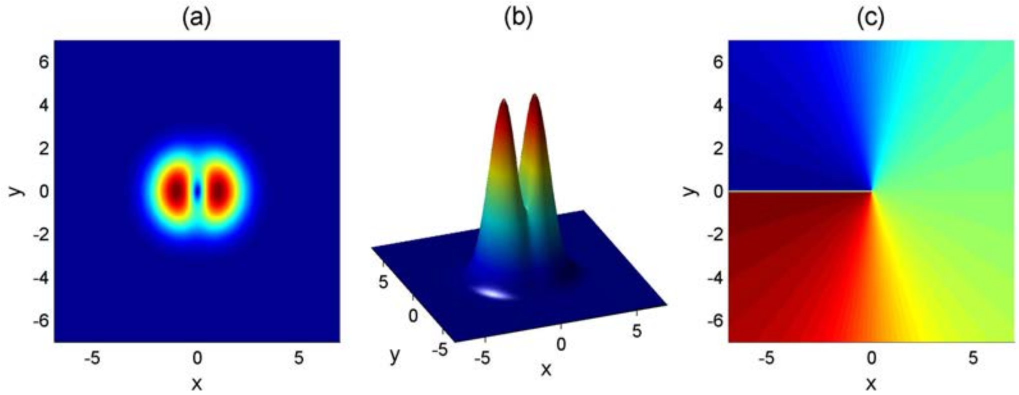

Рис. 5.2 2-піковий (дипольний) азимутонний солітон с (-1,1), $\mu = 5$, $\omega = 0.2$.

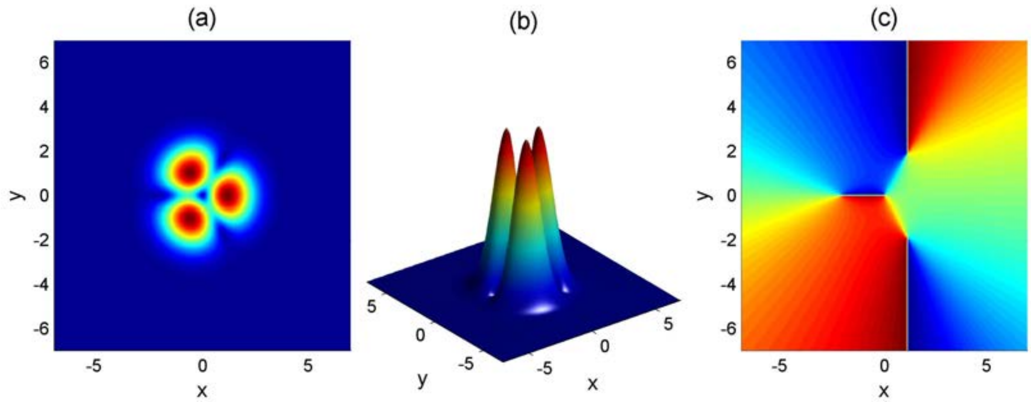

Рис. 5.3 3-піковий азимутон з (-1,2), $\mu = 5.1$, $\omega = 0.68$. Можна бачити 4 особливі точки: 3 на периферії із зарядом $m = 1$ (синє $\rightarrow$ червоне), і 1 особлива точка в центрі з $m = -1$ (червоне $\rightarrow$ синє). Загальний заряд $m_{tot} = 3 \cdot 1 - 1 = 2 = l$.

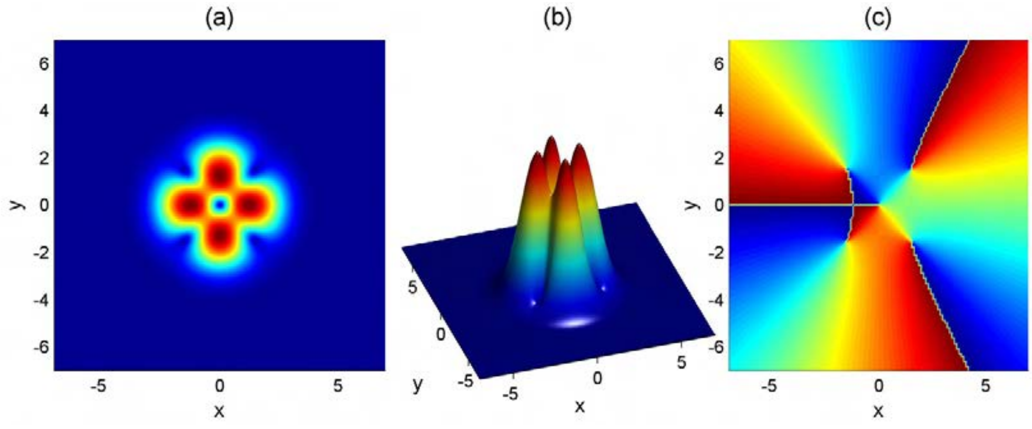

Рис. 5.4 4-піковий азимутон з (-1,3), $\mu = 6$, $\omega = 0.98$. Видно 5 особливих точок: 4 на периферії із зарядом $m = 1$, і 1 особлива точка в центрі з $m = -1$. Загальний заряд $m_{tot} = 4 \cdot 1 - 1 = 3 = l$.

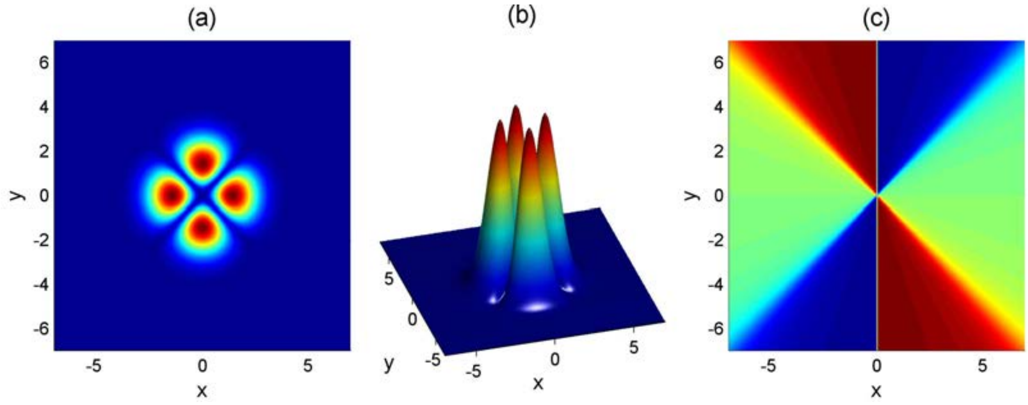

Рис. 5.5 4-піковий азимутон з (-2,2), $\mu = 6.5$, $\omega = 0.01$. Одна особлива точка в центрі з $m = -2$.

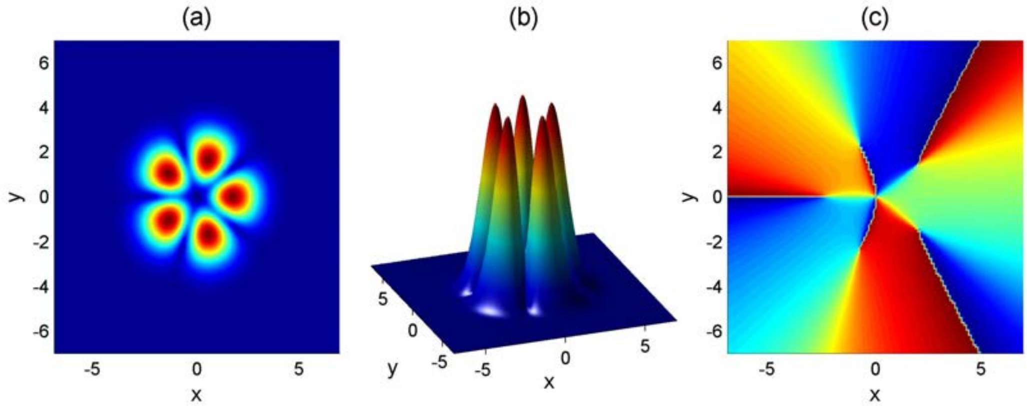

Рис. 5.6 5-піковий азимутон з (-2,3), $\mu = 10$, $\omega = 0.45$. Можна бачити 6 особливих точок: 5 на периферії із зарядом $m = 1$, і 1 особлива точка в центрі з $m = -2$. Загальний заряд $m_{tot} = 5 \cdot 1 - 2 = 3 = l$.

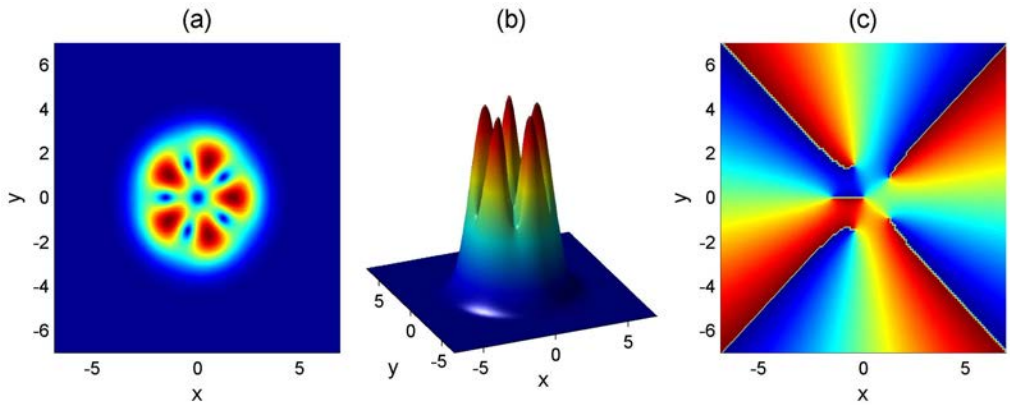

Рис. 5.7 5-піковий азимутон з (-1,4), $\mu = 7$, $\omega = 1.12$. Можна бачити 6 особливих точок: 5 на периферії із зарядом $m = 1$, і 1 особлива точка в центрі з $m = -1$. Загальний заряд $m_{tot} = 5 \cdot 1 - 1 = 4 = l$.

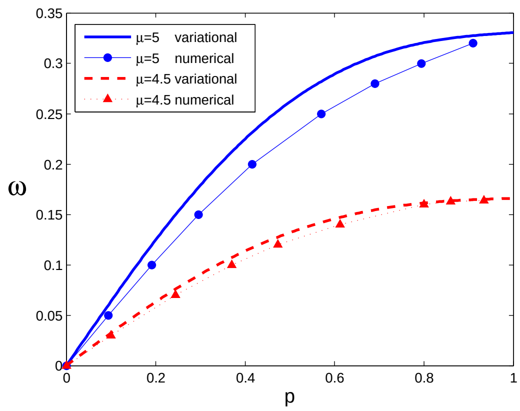

Рис. 5.8 Залежність частоти обертання ω 2-пікового азимутона $(-1,1)$ від глибини модуляції p для двох значень μ. Представлені результати варіаційного (кола й трикутники) і чисельного (суцільна й пунктирна лінії) аналізу.

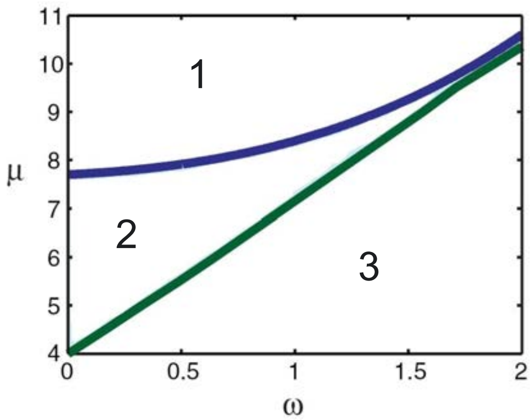

Рис. 5.9 Область 2 відповідає стійкості 2-пікового азимутона $(-1,1)$ на площині μ, ω (нормоване число атомів у конденсаті, частота обертання). В області 1 азимутон нестійкий, в області 3 розв'язок не існує.

5.1.2 Динамічна генерація азимутонів

У той час, як фундаментальні солітони, мультисолітони й вихорові солітони досить давно реалізовані в експериментах з БЕК, відкритим залишається практична реалізація азимутонних солітонів. Тут ми покажемо, як азимутони можуть бути динамічним образом сгенеровані в ході еволюції досить простого початкового розподілу.

Початкова умова для динамічного рівняння (5.1) бралася у вигляді

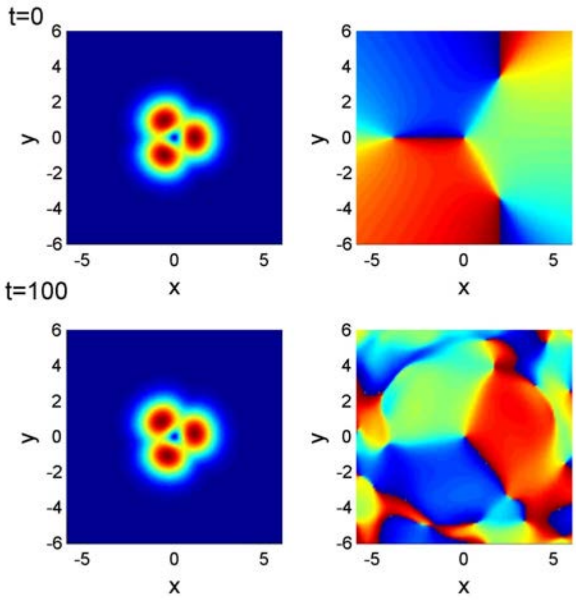

Рис. 5.10 Стійка динаміка 3-пікового азимутона с (-1,2), $\mu = 5$, $\omega = 0.7$ (період обертання $T \sim 9$). Верхній рядок: модуль амплітуди й фаза в початковий момент часу $t = 0$. Нижній рядок: модуль амплітуди й фаза при $t = 100$.

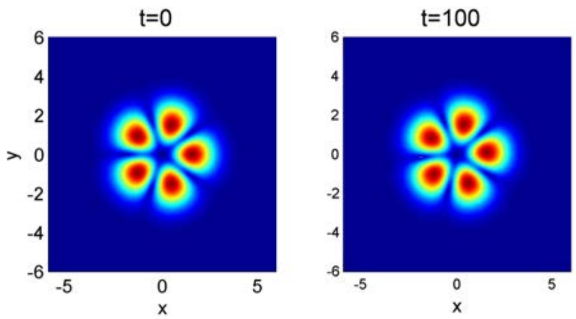

Рис. 5.11 Стійка динаміка 5-пікового азимутона с (-2,3), $\mu = 7$, $\omega = 0.4$ (період обертання $T \sim 16$).

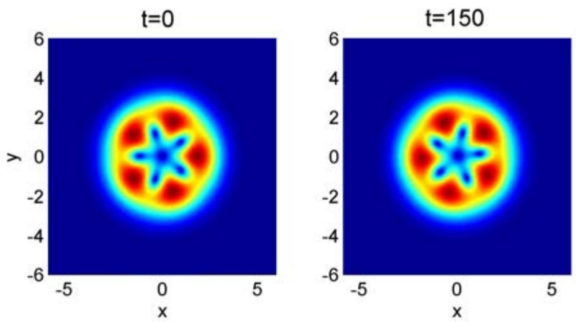

Рис. 5.12 Стійка динаміка 5-пікового азимутона с (-1,4), $\mu = 5.5$, $\omega = 1.19$.

гауссовського розподілу з накладеною фазою $\phi(\theta)$

$$\psi(\mathbf{r},0) = Ae^{-r^2/a^2+i\phi(\theta)}, \tag{5.27}$$

де амплітуда A і характерна ширина a є відповідними варіаційними величинами для фундаментального солітона із заданим значенням нормованого числа частинок $\mathcal{N}$: $A^2 = \mathcal{N}/\pi a^2$, $a^4 = 1 + \mathcal{N}/4\pi$, а фаза має вигляд

$$\phi(\theta) = \frac{2\pi m_c n}{N} \quad \text{при} \quad \frac{2\pi n}{N} < \theta < \frac{2\pi(n+1)}{N}, \tag{5.28}$$

де $n = 0 \dots N-1$, m_c негативне ціле й $|m_c| \leqslant N/2$. Таким чином, на фундаментальний солітон накладає фаза, розділена на N фрагментів, у кожному з яких відбувається стрибок фази на $2\pi m_c/N$. Експериментально така фаза може бути реалізована методом фазового імпринтінгу [278].

Чисельне моделювання еволюції розподілу (5.27) з фазою (5.28) приводить до генерації азимутона з N піками, $N+1$ особливими точками, центральним топологічним зарядом m_c і повним зарядом (враховуючи N особливих точок на периферії із зарядом $+1$ кожна) $m_{tot} = N + m_c = N - |m_c|$. Виникаюче випромінювання (брижі) поглиналося на границі чисельними поглиначами. На рис. 5.13 показані приклади генерації азимутонів з 4 і 8 піками й різними центральними топологічними зарядами. Таким чином, змінюючи N і m_c, можна одержати азимутон з довільним числом піків і довільною фазовою структурою.

5.2 Тривимірні мультисолітони й азимутони

Результати, отримані в попередньому підрозділі для двовимірних азимутонів, можна узагальнити й на тривимірний випадок. Відповідне рівняння Гросса-Пітаєвського тепер має вигляд

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\Delta\psi + (x^2 + y^2 + \Omega^2 z^2)\psi - \sigma|\psi|^2\psi, \tag{5.29}$$

де використані підходящі безрозмірні змінні, аналогічні введеним у підрозділі 4.4 при вивченні тривимірних вихорів, і розглядається випадок притя-

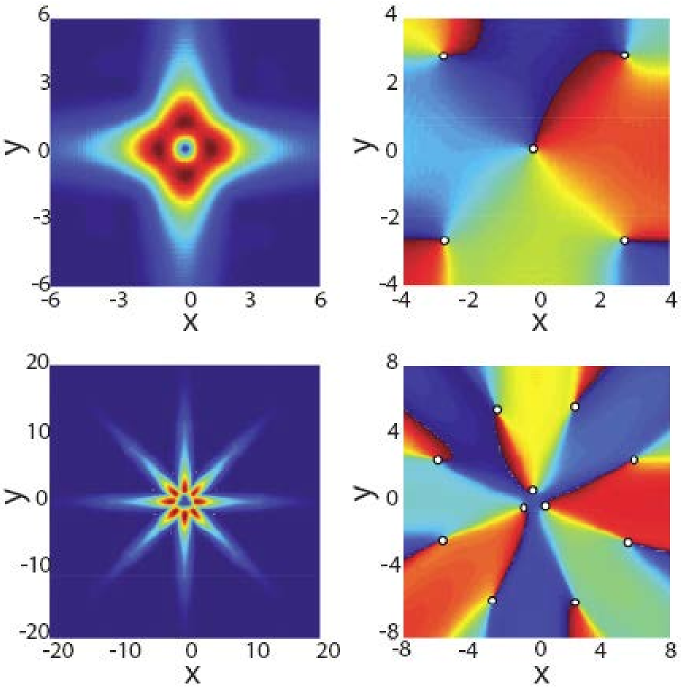

Рис. 5.13 Верхній ряд: амплітуда й фаза через час $t = 0.8$, що виникли в результаті еволюції початкового розподілу (5.27), (5.28) з $N = 4$, $m_c = -1$; нижній ряд: те ж для розподілу з $N = 8$, $m_c = -3$.

гування між атомами $\sigma = 1$.

Рівняння (5.29) зберігає інтеграл (нормоване чмсло частинок) $\mathcal{N} = \int |\psi|^2 d\mathbf{r}$, z-компоненту кутового моменту $M_z = \mathrm{Im} \int [\psi^*(\mathbf{r} \times \nabla_\perp \psi)]_z \, d\mathbf{r}$, і енергію

$$E = \int \left\{ |\nabla\psi|^2 + (x^2 + y^2 + \Omega^2 z^2)|\psi|^2 - \frac{\sigma}{2}|\psi|^4 \right\} d\mathbf{r}. \qquad (5.30)$$

Шукаємо розв'язки рівняння (5.29), які є стаціонарними в системі координат, що обертається з кутовою частотою ω. У циліндричних координатах (r, z, φ), такі розв'язки вигляду

$$\psi(r, z, \varphi, t) = \Phi(r, \varphi - \omega t) \exp(-i\mu t), \qquad (5.31)$$

де μ хімічний потенціал в обертовій системі координат, задовольняють рівнянню

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - i\omega \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \mu\Phi - (r^2 + \Omega^2 z^2)\Phi + \sigma|\Phi|^2\Phi = 0, \qquad (5.32)$$

де $\theta = \varphi - \omega t$. Хімічний потенціал у лабораторній системі координат μ_l

пов'язано з μ співвідношенням

$$\mu_l = \mu - \omega M_z/\mathcal{N}. \tag{5.33}$$

Далі обмежимося випадком сферично симетричної пастки $\Omega = 1$. Рівняння (5.32) можна переписати в декартових координатах

$$\mu\Phi + \Delta\Phi + (x^2 + y^2 + \Omega^2 z^2)\Phi - i\omega\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi + \sigma|\Phi|^2\Phi = 0 \tag{5.34}$$

і вирішувалося чисельно з накладенням нульових граничних умов методом, описаному в попередньому підрозділі. У якості початкової умови обиралася (у декартових координатах) функція

$$\Phi(r, z, \theta) = Ar^m e^{-r^2/a^2 - z^2/b^2}(\cos m\theta + i\, p_0 \sin m\theta), \tag{5.35}$$

де m ціле. Параметр p_0 визначає глибину модуляції інтенсивності азимутона й, без втрати спільності, можна вважати $0 \leqslant |p_0| \leqslant 1$. Анзац (5.35) не є розв'язком, але описує топологію азимутонів. Помітимо, що випадок $p_0 = 0$ відповідає необертовим мультипольним тривимірним солітонам (тобто $m = 1$ – дипольному солітону, $m = 2$ – квадрупольному і т.д.), у той час як протилежний граничний випадок $|p_0| = 1$ відповідає радіально симетричним тривимірним вихорам з топологічним зарядом m. Детальне вивчення, включаючи аналіз стійкості, тривимірних вихорів у моделі НРШ із параболічним потенціалом проводилося в [258, 259]. Розглянутий нами випадок $0 < |p_0| < 1$ відповідає обертовим тривимірним азимутонам. Помітимо, що рівняння (5.34) з $\sigma = 1$ має локалізовані розв'язки тільки якщо $\mu_l < 4 + \Omega$ [259], де μ_l хімічний потенціал в лабораторній системі координат. Фундаментальні солітони рівняння (5.34) з $\sigma = 1$ і $\Omega = 1$ існують тільки якщо $\mu_l < 3$. Більш того, радіально симетричні тривимірні вихори з топологічним зарядом $m = 1$ стійкі, якщо $3.72 < \mu_l < 5$ (для $\Omega = 1$) [259], так що надалі розглядаємо область $3.75 < \mu < 5$. Швидкість збіжності ітераційної процедури не залежить від вибору A, a, і p_0 і завжди вибиралося $A = 1$, $a = b = 1$, і p_0 між 0 і 1. Дійсна глибина модуляції p, яка подібна

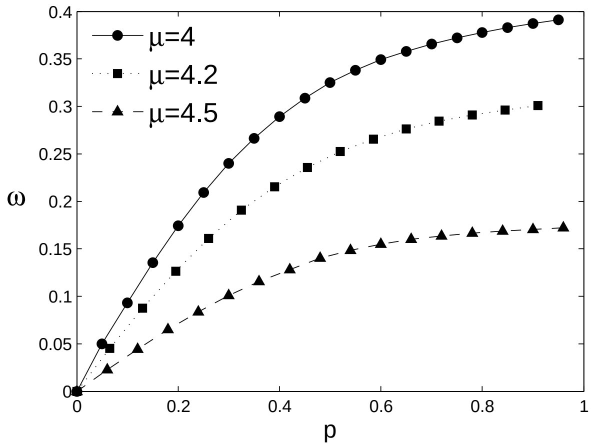

Рис. 5.14 Залежність частоти обертання ω тривимірного дипольного азимутона від глибини модуляції p для різних значень μ.

параметру p_0 в (5.35), визначалася під час n -ой ітерації як

$$p_n = \max|\mathrm{Im}\,\Phi_n|/\max|\mathrm{Re}\,\Phi_n|. \tag{5.36}$$

Спочатку розглядаємо випадок $m = 1$. Ітераційна процедура монотонно

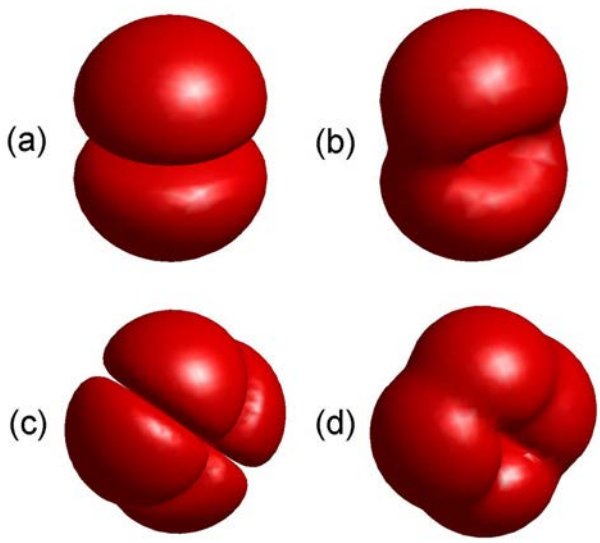

Рис. 5.15 Чисельно знайдені стаціонарні локалізовані (a), (c) необертові ($\omega = 0$) і (b), (d) обертові мультипольні тривимірні розв'язки рівняння (5.34) з $\sigma = 1$, $\Omega = 1$, і $\mu = 4.5$: (a) Дипольний солітон; (b) азимутон з 2 піками інтенсивності й $\omega = 0.13$, $p = 0.43$; (c) квадрупольний солітон; (d) азимутон з 4 піками інтенсивності й $\omega = 0.3$, $p = 0.22$. Показані ізоповерхні амплітуди в тривимірному просторі.

збігалася до розв'язку, що складає із двох дипольно-образних структур у

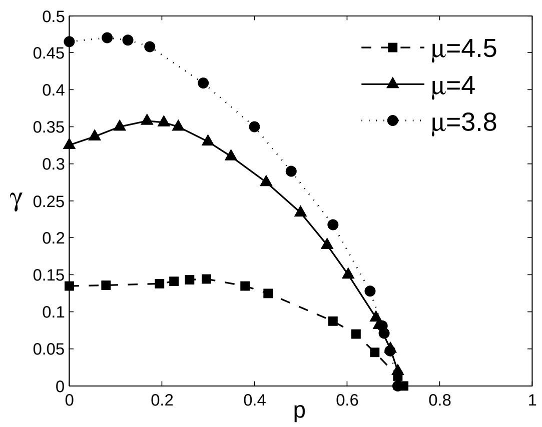

Рис. 5.16 Інкремент нестійкості γ як функція глибини модуляції p для різних μ.

дійсній і уявної частинах Φ (дипольнвй азимутон, або, азимутон із двома піками інтенсивності). Якщо амплітуди цих частин рівні (тобто $p = 1$) ми одержуємо радіально симетричний тривимірний вихор з топологічним зарядом $m = 1$. Якщо амплітуди різні ($0 < p < 1$), виникає обертовий тривимірний азимутон; якщо амплітуда уявної частини дорівнює нулю ($p = 0$), маємо необертовий дипольний солітон. Кінцеве значення p залежить (при фіксованому μ) тільки від частоти обертання ω і не залежить від початкового вибору p_0 (наприклад, початкова умова з $\omega = 0$ і $p_0 = 1$ збігається до необертовому дипольному солітону з $p = 0$). Таким чином, для фіксованого хімічного потенціалу μ, існує безперервне сімейство азимутонів з різними p (або, еквівалентно, ω). При цьому чисельні азимутонні розв'язки можуть бути знайдені з точністю аж до машинної $\sim 3 \cdot 10^{-16}$, хоча звичайно ітераційна процедура зупинялася, коли норма нев'язання падала нижче 10^{-11}. Змінюючи початкову топологію й вибираючи $m = 2$, подібним же чином можна знайти тривимірні квадрупольні (із чотирма піками) мультисолітони й азимутони. Залежність частоти обертання ω дипольного азимутона від глибини модуляції p для різних μ представлена на рис. 5.14. На рис. 5.15 представлені приклади чисельно знайдених розв'язків рівняння (5.34) з $\sigma = 1$ і $\Omega = 1$, $\mu = 4.5$: (a) дипольний солітон з $\omega = 0$, $p = 0$; (b) азимутон з 2 піками інтенсивності й $\omega = 0.13$, $p = 0.43$; (c) квадрупольний солітон з $\omega = 0$, $p = 0$; (d) азимутон з 4 піками інтенсивності й $\omega = 0.3$, $p = 0.22$.

Для аналізу стійкості стаціонарних розв'язків представимо хвильову функцію $\psi(\mathbf{r},t)$ в еволюційному рівнянні (5.29) у вигляді

$$\psi(\mathbf{r},t) = [\varphi_0(\mathbf{r}) + \varepsilon(\mathbf{r},t)]e^{-i\mu t}, \tag{5.37}$$

де стаціонарний розв'язок φ_0 збурене малим ε. Завдяки відсутності радіальної симетрії задача на власні значення для визначення інкремента нестійкості γ (після стандартної лінеаризації й підстановки $\varepsilon(\mathbf{r},t) \sim \nu(\mathbf{r})\exp(\gamma t)$) на $N \times N \times N$ просторовій сітці відповідає знаходженню власних значень комплексної неермітової $2N^3 \times 2N^3$ матриці й для розумних N (наприклад, $N > 100$) являє собою практично нездійсненну задачу. Замість цього, скористаємося методом, подібним описаному в 4.4. Підставимо (5.37) в рівняння (5.29), і будемо вирішувати задачу Коші для лінеаризованого рівняння

$$i\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \mu_l \varepsilon + \Delta\varepsilon - (x^2 + y^2 + \Omega^2 z^2)\varepsilon + 2|\varphi_0|^2\varepsilon + \varphi_0^2\varepsilon^* = 0 \tag{5.38}$$

р якимось малим початковим ε. Остаточні результати виявляються не чутливими до конкретного вибору $\varepsilon(\mathbf{r},0)$. Хімічний потенціал у лабораторній системі координат визначається з (5.33). При нестійкій динаміці, розв'язки $\varepsilon(\mathbf{r},t)$, перетерплюючи, загалом кажучи, осціляції, експоненціально зростають у часі й оцінку інкремента нестійкості γ можна написати у вигляді

$$\gamma = \frac{1}{2\Delta t}\ln\left\{\frac{P(t+\Delta t)}{P(t)}\right\}, \tag{5.39}$$

де $P(t) = \int |\varepsilon|^2 d\mathbf{r}$ і t передбачається досить великим. На рис. 5.16 показана залежність інкремента γ від глибини модуляції p для азимутонів з двома піками інтенсивності й різними значеннями хімічного потенціалу μ (нагадаємо, що ми розглядаємо область $3.75 < \mu < 5$). Інкремент нестійкості для розв'язків з $p \lesssim 0.7$ виявляється відмінним від нуля $\gamma \neq 0$ для всіх μ, і області стійкості не існує. Зокрема, усі необертові тривимірні дипольні солітони виявляються нестійкими. Інкремент зменшується зі збільшенням μ і може бути дуже малим, якщо μ досить близько до 5. Картина, однак,

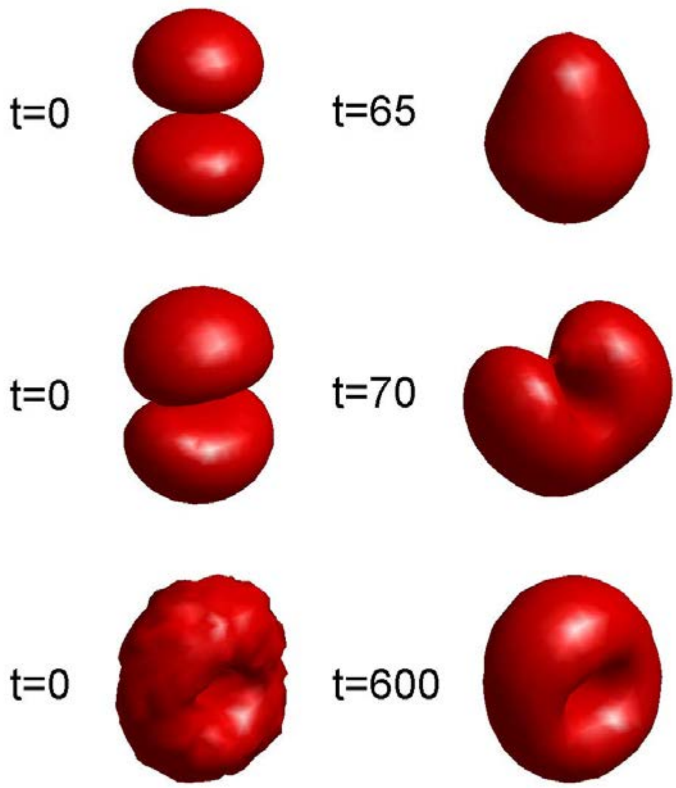

Рис. 5.17 Верхній рядок: нестійка динаміка тривимірного необертового ($\omega = 0$,$p = 0$) дипольного солітона с $\mu = 4.2$. Початковий стан не збурено . Середній рядок: нестійка динаміка тривимірного азимутона з 2 піками й $\omega = 0.18$, $p = 0.3$, $\mu = 4.2$. Початковий стан азимутона збурено білим шумом з параметром $\epsilon = 0.005$. Нижній рядок: стійка динаміка тривимірного азимутона з 2 піками й $\omega = 0.285$, $p = 0.73$, $\mu = 4.2$. Початковий стан збурений білим шумом з параметром $\epsilon = 0.08$.

змінюється, коли глибина модуляції перевищує деяке критичне значення $p_{cr} \sim 0.7$. При цьому, інкремент нестійкості падає до нуля $\gamma = 0$, з'являється область стійкості й азимутони з $p \gtrsim 0.7$ є стійкими. Критичне значення p_{cr} слабко міняється зі зміною μ. Усі мультисолітони й азимутони вищих порядків (квадрупольні і т.д.) виявляються нестійкими (для тривимірних радіально симетричних вихорів $p = 1$ і $m \geq 2$ це було показано в [259]).

Для підтвердження результатів лінійного аналізу стійкості, вихідне нелінійне динамічне рівняння (5.29) чисельно вирішувалося з початковими умовами у вигляді знайдених стаціонарних розв'язків і додаванням гауссовського шуму. Початкове умова бралася у вигляді $\varphi_0[1 + \epsilon\xi(\mathbf{r})]$, де $\varphi_0(\mathbf{r})$ знайдений розв'язок, $\xi(\mathbf{r})$ білий гауссівський шум з дисперсією $\sigma^2 = 1$ і параметр $\epsilon = 0.005 \div 0.1$. Нестійка (згідно з передбаченнями лінійного аналізу) динаміка необертового ($p = 0$) тривимірного дипольного солітона з $\mu = 4.2$ показана у верхньому рядку рис. 5.17. У середньому рядку представлена нестійка еволюція обертового тривимірного азимутона із двома піками інтенсивності й $\mu = 4.2$, $\omega = 0.18$, і $p = 0.3$ (тобто в області нестійкості). При цьому, у початковий момент часу $t = 0$ накладалося слабке шумове збурення з $\epsilon = 0.005$. Азимутон повністю руйнувався після одного періоду обертання . Стійка динаміка тривимірного азимутона з $\mu = 4.2$, $\omega = 0.285$ і глибиною модуляції $p = 0.73$ (тобто перевищуючої критичну, в області стійкості) показана в нижньому рядку рис. 5.17. При цьому початковий стан азимутона обурювалося досить сильним шумом ($\epsilon = 0.08$). Спостережуваний період обертання азимутона повністю узгоджується з теоретичним $T = 2\pi/\omega \sim 22$. Азимутон очищається від шуму (випромінювання, що випускається, поглиналося на границі чисельними поглиначами), відновлюючи первісну незбурену форму, і без зміни форми еволюціонує протягом багатьох десятків періодів обертання.

5.3 Результати до розділу 5

1. У моделі нелінійного рівняння Шредингера із зовнішнім параболічним потенціалом чисельно знайдені двовимірні та тривимірні відокремлені нелінійні структури, що є проміжними між солітонами (мультисолітонами) та радіально симетричними вихоровими солітонами. Знайдені азимутонні солітони, на відміну від раніше відомих мультисолітонів й вихорових солітонів, характеризуються (крім швидкості) чотирма незалежними параметрами: нелінійним зсувом частоти (інакше, хімічним потенціалом в Бозе-Ейнштейнівських конденсатах, або, еквівалентно, амплітудою), частотою обертання, топологічним зарядом і числом піків. По суті, мультисолітони та вихори є окремим випадком азимутонів з парним числом піків, що відповідають нульовій та одиничній глибині модуляції азимутона.

2. Продемонстрована можливість генерації азимутонних солітонів з фундаментального солітона, легко реалізованого в експериментальних умовах, і одночасного накладення розривних фаз на фундаментальний солітон. При цьому, контролюючи просторову структуру фаз, можна одержати азимутони з довільним (заданим наперед) числом піків і довільною фазовою структурою (числом особливих точок та центральним топологічним зарядом).

3. Знайдена область стійкості двовимірного азимутона із двома піками на площині параметрів хімічний потенціал-частота обертання. Чисельний аналіз стійкості показує, що двовимірні азимутони з трьома й більш піками інтенсивності можуть десятки періодів обертання еволюціонувати без помітної зміни форми, при умові, що число атомів в азимутонному солітоні досить мало.

4. Знайдено умови стійкості тривимірних азимутонів із двома піками. Стійкість досягається при досить малому числі частинок та перевищенні глибини модуляції деякого критичного значення. При цьому азимутон виживає й еволюціонує без зміни форми навіть при початковому накладенні на нього досить сильної шумовий добавки. Тривимірні необертові дипольні солітони завжди виявляються нестійкими.

РОЗДІЛ 6

Векторні локалізовані структури в двокомпонентних Бозе-Ейнштейнівських конденсатах

Зміст цього розділу відображено в роботах [13, 24].

6.1 Двовимірні векторні пари солітон-вихор і вихор-вихор

Двокомпонентні Ейнштейнівські-Бозе конденсати (БЕК) в останні роки залучають до себе все зростаючий інтерес через нові можливості, що відкриваються для ряду важливих фізичних застосувань, таких як когерентне зберігання й обробка оптичних полів ("зупинка світла") [279, 280], квантова обробка інформації і квантова интерферометрія [281] та ін. Експериментально двокомпонентний БЕК реалізується одночасним утриманням в пастку атомів різних сортів, наприклад суміші ^{41}K–^{87}Rb [282] або ^{7}Li–^{133}Cs, або атомів того самого ізотопу, наприклад ^{87}Rb [283, 284] або ^{23}Na [285], але в станах з різним повним кутовим моментом (надтонка структура атомних рівнів, що виникає через взаємодію електронів зі спином ядра). Чисто магнітне втримання заморожує спінову динаміку [284, 286], у той час як в пастках з оптичним утриманням можливе створення спінорного конденсату [287]. З теоретичної точки зору, двокомпонентний БЕК у наближенні середнього поля описується двома зв'язаними рівняннями Гросса-Пітаєвського [241] для хвильових функцій окремих компонентів.

Як відзначалося в попередньому розділі, взаємодію між атомами можна контролювати (включаючи плавну зміну від відштовхувальної взаємодії до притягувальної) за допомогою резонансу Фешбаха [242]. При цьому, як показали нещодавні експерименти [288, 289], можна успішно контролювати не тільки взаємодію між атомами усередині кожної з компонентів, але й взаємодію між атомами різних компонентів.

Подібно скалярному випадку, різні типи нелінійних хвиль матерії можуть бути знайдені й для двокомпонентного конденсату. Вони включають як пари одновимірних фундаментальних солітонів [290–292], так і нелінійні структури характерні тільки для двокомпонентного БЕК: експериментально спостерігалися й теоретично вивчалися одномірні векторні солітонні пари темний-світлий солітон [293–295], темний-темний [296], темний-антитемний (провал і горб на постійних фонах), світлий-антитемний (локалізований солітон у першої компоненті й горб на постійному фоні в другий) [295, 297], солітонні доменні стінки [298–300]. Двовимірні й тривимірні векторні солітони розглядалися в роботах [301–303] тільки для випадку відштовхувальної взаємодії між компонентами конденсату. Випадок притягування між компонентами практично не досліджувався й тільки одномірні векторні стани були розглянуті в [304, 305]. Проте, двовимірний і тривимірний випадки вимагають особливої уваги, оскільки в скалярному випадку (одна компонента) притягувальна взаємодія може вести до колапсу.

У даному підрозділі розглядаються двовимірні векторні пари солітон-вихор і вихор-вихор у двокомпонентному БЕК з внутрішнкомпонентною притягувальною взаємодією або відштовхувальною міжкомпонентною взаємодією й показана можлива стійкість таких пар.

6.1.1 Модельні рівняння

Будемо розглядати двокомпонентний конденсат, що містить суміш двох різних спінових станів того самого ізотопу. Припускаємо також, що нелінійна взаємодія слабка по порівнянню із силою утримання в поздовжньому (уздовж осі z) напрямку. У цьому випадку двокомпонентний БЕК описується двовимірними зв'язаними рівняннями Гросса-Пітаевського

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_1}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_\perp + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + g_{11}|\Psi_1|^2 + g_{12}|\Psi_2|^2\right]\Psi_1, \qquad (6.1)$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_2}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_\perp + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + g_{21}|\Psi_1|^2 + g_{22}|\Psi_2|^2\right]\Psi_2, \qquad (6.2)$$

де M маса атомів, $V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = M\omega_\perp^2(x^2 + y^2)/2$ зовнішній утримуючий гармонічний потенціал, і $\Delta_\perp = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ двовимірний лапласіан. Взаємодія між атомами характеризується коефіцієнтами $g_{ij} = 4\pi\hbar^2 a_{ij}/M$, де $a_{ij} = a_{ji}$ довжини s-розсіювання для парної взаємодії між атомами в станах $|i\rangle$ і $|j\rangle$. Помітимо, що $g_{11} = g_{22}$ і $g_{12} = g_{21}$. Уводячи безрозмірні змінні $(x, y) \to (x/l, y/l)$, $t \to \omega_\perp t$, $\Psi_j \to \Psi_j\sqrt{\hbar\omega_\perp/(2|g_{11}|)}$, $g_{12} \to -g_{12}/|g_{11}|$, $g_{11} \to -g_{11}/|g_{11}|$, де $l = \sqrt{\hbar/(M\omega_\perp)}$, перепишемо рівняння (6.1) і (6.2) у вигляді

$$i\frac{\partial\Psi_1}{\partial t} = \left[-\Delta_\perp + x^2 + y^2 - |\Psi_1|^2 - g_{12}|\Psi_2|^2\right]\Psi_1, \tag{6.3}$$

$$i\frac{\partial\Psi_2}{\partial t} = \left[-\Delta_\perp + x^2 + y^2 - g_{12}|\Psi_1|^2 - |\Psi_2|^2\right]\Psi_2. \tag{6.4}$$

Надалі розглядаємо випадок притягування між атомами одного сорту $g_{11} = g_{22} = 1$. В (6.3),(6.4) нехтується спіновою динамікою (передбачається магнітне утримання), так що взаємодія зберігає число частинок N_j $(j = 1, 2)$ кожного компонента

$$N_j = \int |\Psi_j|^2 d^2\mathbf{r}, \tag{6.5}$$

і повну енергію

$$E = E_1 + E_2 - \frac{1}{2}g_{12}\int |\Psi_1|^2|\Psi_2|^2 d^2\mathbf{r}, \tag{6.6}$$

де

$$E_j = \int \left\{|\nabla\Psi_j|^2 - \frac{1}{2}|\Psi_j|^4 + (x^2 + y^2)|\Psi_j|^2\right\} d^2\mathbf{r}. \tag{6.7}$$

У зв'язку із цим помітимо, що в нелінійній оптиці, де аналогічна модель (без зовнішнього потенціалу), описує поширення пучка електромагнітного поля із двома ортогонально поляризованими компонентами [60] і при цьому нелінійні коефіцієнти завжди мають однаковий знак.

6.1.2 Стаціонарні солітон-вихорові пари

Будемо шукати стаціонарні розв'язки системи рівнянь (6.3) , (6.4) у вигляді

$$\Psi_j(\mathbf{r},t) = \psi_j(r)e^{-i\mu_j t + i m_j \varphi} \tag{6.8}$$

де m_j топологічний заряд j-ого компонента, μ_j хімічний потенціал, $r = \sqrt{x^2+y^2}$ і φ полярний кут. Підставляючи (6.8) в (6.3) і (6.4), маємо

$$\mu_1\psi_1 + \Delta_r^{(m_1)}\psi_1 - r^2\psi_1 + (|\psi_1|^2 + g_{12}|\psi_2|^2)\psi_1 = 0, \tag{6.9}$$

$$\mu_2\psi_2 + \Delta_r^{(m_2)}\psi_2 - r^2\psi_2 + (g_{12}|\psi_2|^2 + |\psi_2|^2)\psi_2 = 0, \tag{6.10}$$

де $\Delta_r^{(m)} = d^2/dr^2 + (1/r)(d/dr) - (m^2/r^2)$. Як вказувалося вище, взаємодія між різними компонентами може змінюватися в широких межах, включаючи зміну знака. В більшості експериментів, однак, взаємодія між атомами різних компонентів звичайно слабкіше взаємодії між атомами однієї й тієї ж компоненти. Таким чином, g_{12} можна розглядати в якості вільного параметра, що змінюється в межах $-1 \leq g_{12} \leq 1$. Наступний аналіз показує, що результати якісно не залежать при зміні параметра межкомпонентної взаємодії g_{12} в інтервалах $0 \leq g_{12} \leq 1$ і $-1 \leq g_{12} \leq 0$. Далі для визначеності фіксуємо $g_{12} = \pm 0.5$ для випадків міжкомпонентного притягування та відштовхування відповідно . Розглянемо спочатку випадок взаємодії із притягуванням між компонентами $g_{12} > 0$.

Спочатку представимо результати варіаційного аналізу. Стаціонарні розв'язки рівнянь (6.9) і (6.10) вигляду (6.8) реалізують екстремум функціонала енергії E при фіксованих кількостях частинок N_1 і N_2. Вибираємо наступні пробні функції

$$\psi_j(r) = h_j\left(\frac{r}{a_j}\right)^{|m_j|}\exp\left(-\frac{r^2}{2a_j^2} + i m_j\varphi\right), \tag{6.11}$$

які відповідають локалізованому векторному стану (m_1, m_2) з топологічними зарядами (завихоренностями) m_1 і m_2 для компонентів $|1\rangle$ і $|2\rangle$ відповідно, a_j і h_j невідомі параметри, обумовлені варіаційною процедурою.

Параметри h_1 і h_2 виключаються з використанням умов нормування (6.5), що дає співвідношення $N_j = m_j!\pi h_j^2 a_j^2$. Таким чином, залишаються два варіаційні параметри a_1 і a_2. Підставляючи (6.11) в (6.12), знайдемо для функціонала E вирази

$$E = E_1 + E_2 + E_{12},$$

де

$$E_j = \frac{N_j}{a_j^2}\left(m_j + 1 - \frac{N_j^2(2m_j)!}{4^{1+m_j}\pi(m_j!)^2}\right) + N_j a_j^2(m_j+1),$$

і

$$E_{12} = -\frac{1}{2}g_{12}N_1N_2\frac{a_1^{2|m_1|}a_2^{2|m_2|}}{(a_1^2+a_2^2)^{1+|m_1|+|m_2|}}\frac{(m_1+m_2)!}{\pi m_1! m_2!}.$$

Розв'язуючи варіаційні рівняння $\partial E/\partial a_j = 0$ при фіксованих N_j, можна знайти варіаційні параметри наближених аналітичних розв'язків з різними m_1 і m_2. Далі зосередимо увагу на випадку з $m_1 = 0$ і $m_2 = 1$, який відповідає векторній парі солітон-вихор. Результати варіаційного аналізу для цього випадку й $g_{12} > 0$ (притягування між компонентами) показані на рис. 6.1 і рис. 6.2 пунктирними лініями. Ці результати є стартовою точкою для наступного чисельного аналізу. Рівняння (6.9) і (6.10) чисельно

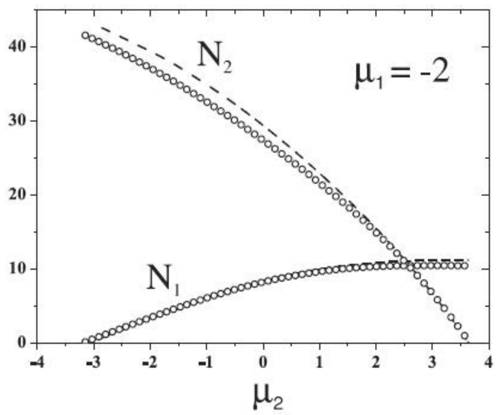

Рис. 6.1 Нормовані числа атомів N_1 і N_2 кожної з компонентів як функції хімічного потенціалу другого компонента μ_2 при фіксованому μ_1 для векторної пари солітон-вихор ($m_1 = 0$, $m_2 = 1$) (випадок притягування між компонентами).

розв'язувались на радіальній сітці ітераційною процедурою, подібної методу стабілізуючого множника Петвіашвілі [127, 226]. Початкове наближення бралося за результатами варіаційного аналізу. Результати чисельного аналізу показані колами на рис. 6.1 та рис. 6.2. Видно, що варіаційні результати перебувають в гарній згоді із чисельними.

Стаціонарні векторні стани утворюють двохпараметричне сімейство з параметрами μ_1 і μ_2. На рис. 6.1 показані залежності числа атомів кожного компонента векторної пари солітон-вихор $(0,1)$ від хімічного потенціалу вихорової компоненти μ_2 при фіксованому значенні хімічного потенціалу солітонної компоненти μ_1. Область існування обмежена кривими, обумовленими умовою $\mu_2|_{N_1=0} \leq \mu_2 \leq \mu_2|_{N_2=0}$. Для кожного значення μ_1, де розв'язок існує, може бути знайдена залежність подібна представленої на рис.6.1 . Це дозволяє знайти область існування векторної пари солітон-вихор $(0,1)$ на $(\mu_1,\,\mu_2)$–площині, яка показана на рис. 6.2. Відомо [258], що для двовимірної скалярної локалізованої структури в БЕК з притягуванням, хімічний потенціал обмежений зверху умовою $\mu < \mu_{\max} = 2(m+1)$, де m топологічний заряд, і $N \to 0$ при $\mu \to \mu_{\max}$. З рис. 6.2 видно, що величина $\mu_{\max}$ зменшується в присутності другого компонента, якщо міжкомпонентна взаємодія є притягувальною ($g_{12} > 0$). Обидві компоненти зникають у точці $(\mu_1,\mu_2) = (2m_1+2, 2m_2+2)$. Приклади радіальних про-

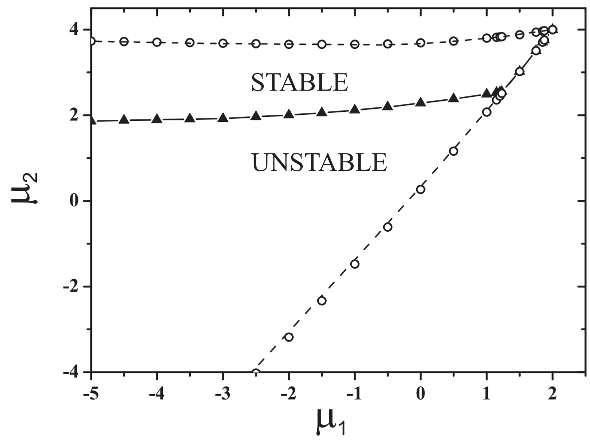

Рис. 6.2 Область існування векторного стану солітон-вихор ($m_1 = 0$, $m_2 = 1$) на (μ_1,μ_2)-площині для випадку міжкомпонентного притягування. Кола відповідають чисельно знайденим границям. Пунктирні криві показують результати варіаційного аналізу. На верхніх і нижніх границях області існування векторні стани вироджуються в чисто скалярний стан з $N_1 = 0$ (вихор) і $N_2 = 0$ (солітон) відповідно. Трикутниками відзначена область стійкості.

філів векторної пари солітон-вихор $(0, 1)$ представлені на рис. 6.3. Цікаво відзначити, що коли амплітуда вихорового компонента досить велика, профіль солітонної компоненти має досить виражене плато. Таке відхилення від гауссоподібної форми веде до помітних відмінностей між чисельними й варіаційними залежностями на рис. 6.1. Подібним чином можуть бути знайдені й інші векторні пари: $(0, 2)$, $(-1, 1)$, $(-2, 2)$ і т.д., однак вони завжди виявляються нестійкими (дивися нижче).

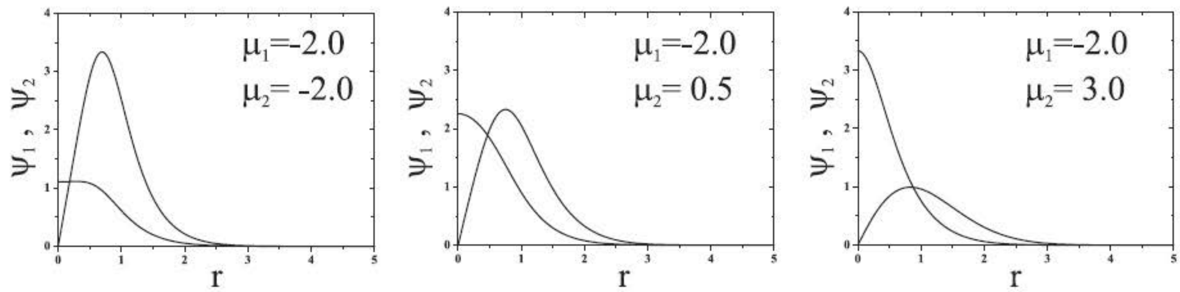

Рис. 6.3 Чисельно знайдені розв'язки у вигляді пари солітон-вихор системи рівнянь (6.9),(6.10) для випадку притягування між компонентами $g_{12} > 0$ при фіксованому $\mu_1 = -2$ для різних μ_2.

6.1.3 Стійкість стаціонарних розв'язків

Для аналізу стійкості векторної пари, представимо хвильову функцію у вигляді

$$\Psi_j(\mathbf{r}, t) = \{\psi_j(r) + \varepsilon_j(\mathbf{r}, t)\}\, e^{-i\mu_j t + i m_j \varphi}, \tag{6.12}$$

де стаціонарний розв'язок $\psi_j(r)$ збурено малим $\varepsilon_j(\mathbf{r}, t)$, і линеаризуємо рівняння (6.3),(6.4) стосовно ε_j. Основна ідея полягає у виставі збурення у вигляді суперпозиції мод з різною азимутальною симетрією. Оскільки збурення передбачаються малими, стійкість кожної лінійної моди може бути проаналізована незалежно. Представляючи збурення у вигляді

$$\varepsilon_j(\mathbf{r}, t) = u_j(r) e^{i\omega t + iL\varphi} + v_j^*(r) e^{-i\omega^* t - iL\varphi},$$

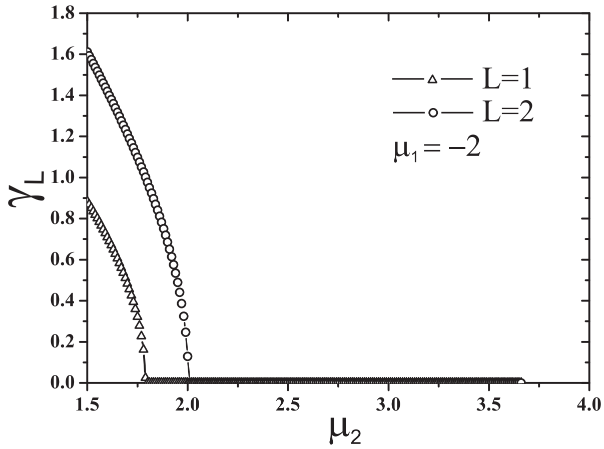

Рис. 6.4 Залежність інкремента нестійкості азимутальних мод $L = 1$ і $L = 2$ від μ_2 при фіксованому $\mu_1 = 2$. Мода $L = 2$ має більш широку область нестійкості.

можна одержати наступну задачу на власні значення

$$\begin{pmatrix} \hat{L}_{12}^{(+)} & \alpha_1 & \beta_{12} & \beta_{12} \\ -\alpha_1 & -\hat{L}_{12}^{(-)} & -\beta_{12} & -\beta_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{12} & \hat{L}_{21}^{(+)} & \alpha_2 \\ -\beta_{12} & -\beta_{12} & \alpha_2 & -\hat{L}_{21}^{(-)} \end{pmatrix} U = \omega U \tag{6.13}$$

де $U = (u_1, v_1, u_2, v_2)$ власний вектор і ω власне значення (загалом кажучи, комплексні), $\alpha_j = \psi_j^2$, $\beta_{12} = g_{12}\psi_1\psi_2$, $\hat{L}_{ij}^{(\pm)} = \mu_i + \Delta_r^{(m_i \pm L)} - r^2 + 2\psi_i^2 + g_{ij}\psi_j^2$. Ціле число L визначає порядок азимутальної моди. Ненульові комплексні частини ω відповідають нестійкості стану $|\psi_1, \psi_2\rangle$ с інкрементом нестійкості $\gamma_L = \max|\mathrm{Im}\,\omega|$.

Задача на власні значення (6.13) вирішувалася чисельно із застосуванням кінцево-різницевої апроксимації. Для пари $(0, 1)$ залежність інкремента нестійкості γ_L азимутальних мод збурення з $L = 1$ і $L = 2$ від μ_2 при фіксованому μ_1 показана на рис. 6.4. Помітимо, що вище деякого критичного μ_2 усі інкременти зникають, тим самим гарантуючи стійкість стану $(0, 1)$ стосовно азимутальних збурень. У випадку притягування між компонентами $g_{12} > 0$ границя стійкості визначається модою $L = 2$. Подібну ж залежність інкремента γ_L від μ_2 можна одержати й для інших значень μ_1. Обчислення інкремента нестійкості γ_L проводилося для значень азимутального числа аж до $L = 5$. У всіх досліджених випадках азимутальна стійкість визначалася зникненням інкремента моди $L = 2$. Відповідна границя стійкості показана трикутниками на рис. 6.2. Помітимо, що у виродженому скалярному випадку $\psi_1 = 0$ поріг стійкості $\mu_2 = 2.552$ для вихору ψ_2 із зарядом $m_2 = 1$ збігається зі значенням, отриманим в [258]. Подальший аналіз показує, що для векторних станів солітон-вихор $(0, 2)$, вихор-вихор $(-1, 1)$, вихор-вихор $(-2, 2)$ областей стійкості не існує, хоча в окремих випадках (як правило, для малих амплітуд) інкременти можуть бути досить малими.

Для перевірки результатів лінійного аналізу, динамічні рівняння (6.3) і (6.4) вирішувалися чисельно з початковими умовами у вигляді чисельно знайдених вище векторних пар. У повній згоді з лінійним аналізом стійкості, векторна пара солітон-вихор $(0, 1)$, обурена азимутальними модами з $L = 1$ або $L = 2$, еволюціонує без зміни форми на дуже більших часах при умові, що відповідні μ_1 і μ_2 належать області стійкості. З іншого боку, рис. 6.5 демонструє розвиток азимутальної нестійкості моди $L = 2$ для стану $(0, 1)$ з $\mu_1 = -2$ і $\mu_2 = 0.5$ (тобто в області нестійкості). Можна бачити два горби, які виникають на спочатку гладкому кільцеподібному розподілі інтенсивності. Далі вихор деформується, а потім і вихор і солітон розщеплюються на два філамента з наступним колапсом. Помітимо, що нестійкий стан $(0, 1)$ у БЕК із внутрішньокомпонентною взаємодією з відштовхуванням [302] (нагадаємо, тут скрізь розглядається випадок внутрішньокомпонентного притягування) не колапсує, а зазнає складну динаміку із захопленням і поглинанням однієї компоненти іншої.

6.1.4 Міжкомпонентна взаємодія з відштовхуванням

Тут представимо результати для випадку взаємодії з відштовхуванням $g_{12} < 0$ між різними компонентами. Область існування, області стійкості й нестійкості на (μ_1, μ_2)-площині для пари солітон-вихор $(0, 1)$ показані на рис. 6.6. Бачимо, що взаємодія з відштовхуванням приводить до збільшення максимального хімічного потенціалу $\mu_{\max}$ (для кожного компонента) у порівнянні з значенням $\mu = 2$ (солітон) або $\mu = 4$ (вихор) для чисто скаляр-

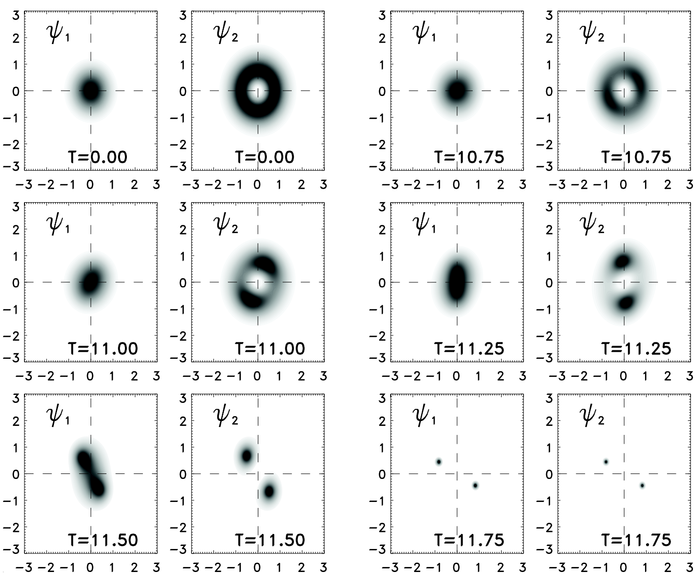

Рис. 6.5 Нестійка динаміка векторної пари солітон-вихор ($m_1 = 0, m_2 = 1$) с $\mu_1 = -2$, $\mu_2 = 0.5$. Показані абсолютні величини $|\psi_1|$ і $|\psi_2|$. Більш темні області відповідають більш високим амплітудам.

них розв'язків. Стійкість векторних станів досліджувалася за допомогою лінійного аналізу, описаного вище. Стани $(0, 2)$, $(-1, 1)$, $(-2, 2)$ виявляються нестійкими. На рис. 6.7 представлені приклади радіальних профілів нестійкої та стійкої векторної пари солітон-вихор $(0, 1)$. На рис. 6.8 показана залежність інкрементів нестійкості γ_L від хімічного потенціалу вихору μ_2 при фіксованому хімічному потенціалі солітона μ_1 для азимутальних збурень із $L = 1$ і $L = 2$. Інкременти зникають, якщо μ_2 перевищує деяке критичне значення. На відміну від випадку міжкомпонентного притягування видно, що границя стійкості визначається азимутальним збуренням з $L = 1$. Приклад нестійкої динаміки пари солітон-вихор $(0, 1)$ наведено на рис. 6.9. Відзначимо, що хоча початковий стан руйнується, колапсу, як у випадку із притягуванням, не відбувається.

6.2 Векторні пари солітон-азимутон і азимутон-азимутон

Аналогічно розглянутим у попередньому підрозділі станам солітон-вихор і вихор-вихор, у двокомпонентних конденсатах можна увести в роз-

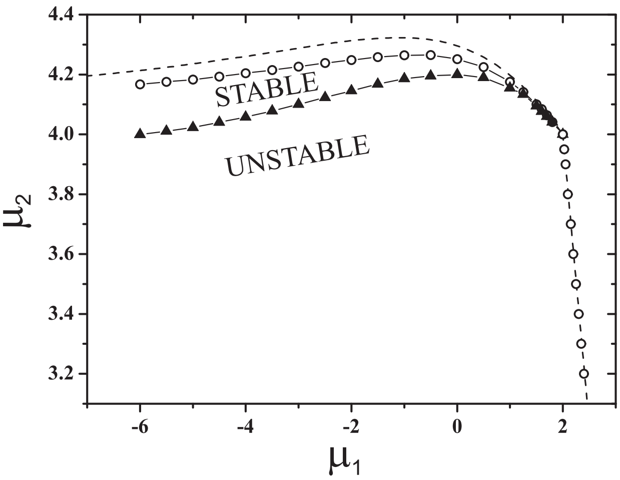

Рис. 6.6 Те ж, що на рис. 6.2 для випадку відштовхування між компонентами.

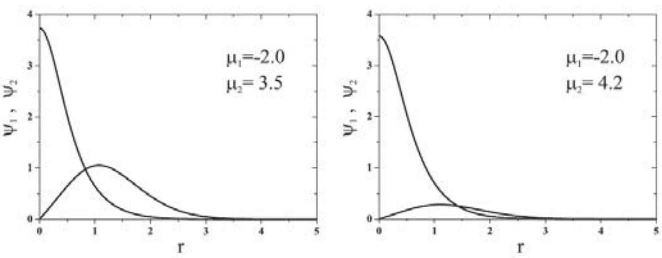

Рис. 6.7 Чисельно знайдені розв'язки системи (6.9), (6.10) у вигляді пари солітон-вихор для випадку відштовхування між компонентами при фіксованому $\mu_1 = -2$ з стійкої (права панель) і нестійкої (ліва панель) областей.

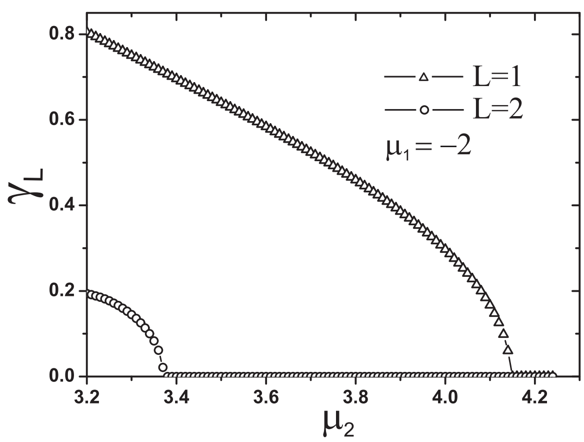

Рис. 6.8 Те ж, що на рис. 6.4 для випадку міжкомпонентного відштовхування $g_{12} < 0$. На відміну від випадку із притягуванням $g_{12} > 0$ поріг стійкості визначається модою $L = 1$.

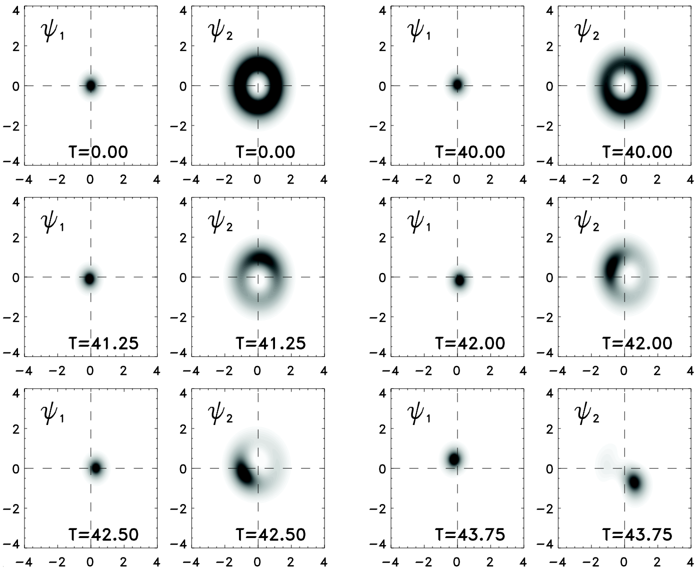

Рис. 6.9 Розвиток нестійкості моди $L = 1$ для векторної пари $m_1 = 0$, $m_2 = 1$ з $\mu_1 = -2$, $\mu_2 = 3.5$. Випадок міжкомпонентного відштовхування. Показані абсолютні величини $|\psi_1|$ і $|\psi_2|$ на різних часах.

гляд векторні пари солітон-азимутон і азимутон-азимутон.

6.2.1 Стаціонарні розв'язки солітон-азимутон і азимутон-азимутон

Шукаємо розв'язки рівнянь (6.3) і (6.4), які є стаціонарними в системі координат, що обертається з кутовий частотою ω. У полярних координатах (r, φ) маємо $(j = 1, 2)$:

$$\Psi_j(r, \varphi, t) = \Phi_j(r, \varphi - \omega t) \exp(-i\mu_j t). \tag{6.14}$$

У декартових координатах рівняння для стаціонарних станів (6.14) мають вигляд

$$\mu_1\Phi_1 + \Delta_\perp\Phi_1 - (x^2 + y^2)\Phi_1 - i\omega\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi_1 + (|\Phi_1|^2 + g_{12}|\Phi_2|^2)\Phi_1 = 0, \tag{6.15}$$

$$\mu_2\Phi_2 + \Delta_\perp\Phi_2 - (x^2 + y^2)\Phi_2 - i\omega\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi_2 + (g_{21}|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2)\Phi_2 = 0. \tag{6.16}$$

Для знаходження нових двокомпонентних розв'язків, відмінних від розглянутих у попередньому підрозділі, використовуємо формалізм, розвитий у розділі 5 дисертації. Саме, припустимо, що кожний компонент характеризується цілим числом (топологічним зарядом) l_j і має просторову структуру $\Phi_j \sim f(r)r^{l_j}(\cos(l_j\theta) + ip_j \sin(l_j\theta))$, де $\theta = \varphi - \omega t$ і $f(r)$ функція, кінцева в нулі й досить швидко спадає на нескінченності (швидше будь-якого зворотньому ступеня r). Випадок $l_j = 0$ відповідає фундаментальному солітону в j-ій компоненті. При $l_j \neq 0$ зміна дійсного параметра $0 \leq p_j \leq 1$, що визначає глибину модуляції густини конденсату в кожній компоненті, переводить відповідний розв'язок від дійсного мультисолітона $\sim \cos(l_j\theta)$ (для $p_j = 0$) у радіально симетричний вихоровий солітон з фазовим множником $\sim \exp(il_j\theta)$ (для $p_j = 1$). Проміжні стани $0 < p_j < 1$ відповідають азимутонному солітону в j-ій компоненті. Відмітимо також, що модуляційний параметр p_j визначає кутовий момент кожної компоненти $M_j = \mathrm{Im} \int \Phi_j^* \partial_\theta \Phi_j \, d^2\mathbf{r} \sim 2\pi l_j p_j N_j$.

Просторова структура, зазначена вище, бралася в якості початкового наближення при розв'язку системи (6.15), (6.16) чисельним методом, описаним у розділі 5, при накладенні нульових граничних умов. Модуляційний параметр кожної компоненти визначався із чисельно знайдених розв'язків наступним чином : $p_j = \max |\mathrm{Im}\, \Phi_j| / \max |\mathrm{Re}\, \Phi_j|$.

Розглянемо спочатку випадок, коли густина першої компоненти береться у вигляді фундаментального солітона, характеризуємого зарядом $l_1 = 0$. Друга компонента має ненульовий топологічний заряд $l_2 = 1$. Тоді, для різних значень хімічних потенціалів μ_j, можна знайти стаціонарні розв'язки у вигляді солітон-азимутонних пар. Змінюючи ω можна знайти азимутони з довільними p_j і, отже, існує безперервне сімейство азимутонів, параметризоване значенням p_j. Приклади чисельно знайдених розв'язків у вигляді векторної пари солітон-азимутон представлені на рис. 6.10. Залежності нормованого числа атомів N_j у кожній компоненті й повне нормоване число атомів $N = N_1 + N_2$ від хімічного потенціалу μ_1 солітонної компоненти показані на рис. 6.11. Видно, що є деяке критичне значення повного числа атомів, нижче якого існування пари солітон-азимутон неможливо. Це

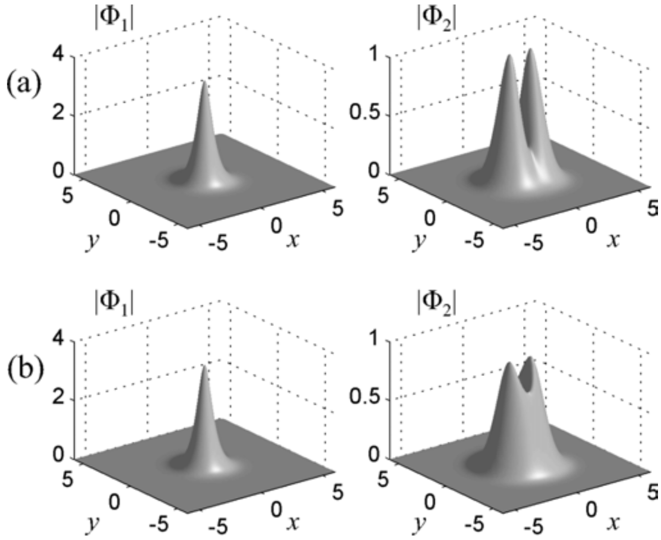

Рис. 6.10 Векторна пара солітон-азимутон з топологічними індексами $l_1 = 0$ і $l_2 = 1$ для $\mu_1 = -2$ ($N_1 = 10.3$) і $\mu_2 = 3$ ($N_2 = 4.3$). Відмінність між випадками (a) та (b) визначається частотою обертання пари ω і параметром модуляції p_2, саме, (a) $\omega = 0.13$, $p_2 = 0.28$, і (b) $\omega = 0.23$, $p_2 = 0.72$.

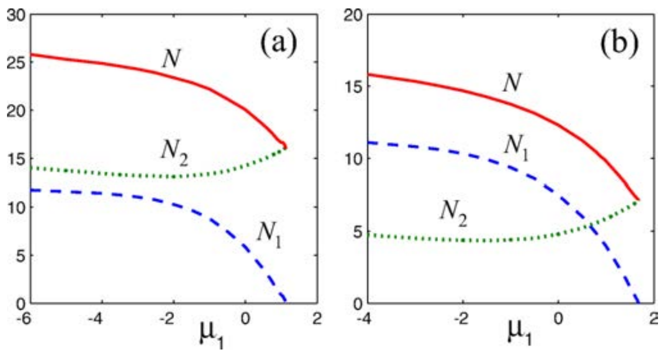

Рис. 6.11 Для векторної пари солітон-азимутон ($l_1 = 0$ і $l_2 = 1$) показані залежності числа частинок $N_{1,2}$ в кожної з компонент і загального числа частинок $N = N_1 + N_2$ від хімічного потенціалу μ_1 для (a) $\mu_2 = 1$ і $\omega = 1$, і (b) $\mu_2 = 3$ та $\omega = 0.2$.

критичне значення зменшується зі зменшенням кутової частоти обертання ω. Чисельно знайдене розв'язок у вигляді пари солітон-азимутон $(0, 2)$ показано на рис. 6.12. Досить цікаво відзначити, що в результаті взаємодії з азимутонною компонентою, у відмінність як від скалярних двовимірних солітонів, так і від розглянутих в розділі 6.1 векторних пар солітон-вихор, амплітуда солітонної компоненти $|\Phi_1|$ не має радіальної симетрії. Фаза квадрупольної азимутонної компоненти $\arg \Phi_2$ на рис. 6.12 вказує на топологічний заряд $l_2 = 2$ з набігом фази 4π навколо центру.

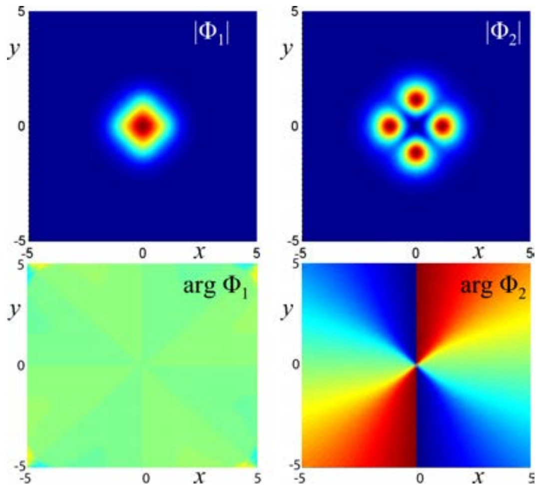

Рис. 6.12 Верхній рядок: Векторний стан солітон-азимутон з $l_1 = 0$ і $l_2 = 2$. Інші параметри: $\mu_1 = -2$ ($N_1 = 12.2$) і $\mu_2 = 1$ ($N_2 = 30.7$), частота обертання $\omega = 0.6$, глибина модуляції $p_2 = 0.24$. Нижній рядок: фазова структура відповідних компонент.

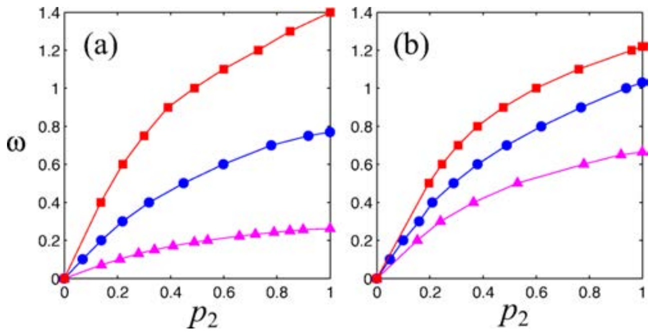

Рис. 6.13 Залежність частоти обертання азимутона ω від модуляційного параметра p_2 для $\mu_1 = -2$ і $\mu_2 = 1$ (квадрати), $\mu_2 = 2$ (кола), $\mu_2 = 3$ (трикутники), для двох пар солітон-азимутон: (a) $(l_1, l_2) = (0, 1)$ і (b) $(l_1, l_2) = (0, 2)$.

Сімейства солітон-азимутонних векторних пар з різними l_2 залежать від кутової швидкості обертання ω або, еквівалентно, від параметра модуляції p_2. Залежність частоти обертання від глибини модуляції фази в другій компоненті, показані для азимутонів із двома й чотирма піками інтенсивності на рис. 6.13 для фіксованого хімічного потенціалу солітонної компоненти $\mu_1 = -2$ і різних значеннях хімічного потенціалу азимутонної компоненти μ_2. При від'ємному топологічному заряді $l_2 < 0$, сімейство розв'язків залишається однаковим при зміні знака кутового моменту, тобто на рис. 6.13 є дзеркальна симетрія $\omega \to -\omega$. Це чисельне спостереження можна зрозуміти, використовуючи анзац $\Phi_j \sim \cos(l_j\theta) + ip_j \sin(l_j\theta)$: помітимо, що єдиним доданком в (6.15), (6.16) чутливим до знака топологічного заряду, є $-i\omega\partial_\theta\Phi_2 \sim -i\omega l_2 \left[-\sin(l_2\theta) + ip_2\cos(l_2\theta)\right]$. Таким чином, розв'язку с $l_1 = 0$ вироджені стосовно перетворень, що залишають інваріантним добуток ωl_2 .

6.2.2 Стійкість солітон-азимутонних станів

У цьому підрозділі досліджується стійкість солітон-азимутонних розв'язків з $l_2 = 1$. Помітимо, що через відсутність радіальної симетрії в азимутонній (і навіть у солітонній) компоненті, чисельний метод лінійного аналізу стійкості, запропонований в підрозділі 6.1 для пари солітон-вихор, безпосередньо незастосовна , а його узагальнення приводить до завдання на власні значення для матриці таких розмірів (для досить прийнятного дозволу на просторовій сітці дискретизації), що ця задача не може бути вирішена на практиці. Замість цього, еволюційна система рівнянь (6.3), (6.4) вирішувалася чисельно з початковими умовами у вигляді знайдених векторних пар солітон-азимутон $(0, 1)$ і додаванням азимутального збурення (для обох компонентів). Саме, початкова умова бралася у вигляді $\Phi(1 + i\varepsilon\sin\theta)$, де $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ чисельно знайдений стаціонарний розв'язок, і параметр збурення $\varepsilon = 0.01$. Надалі, хімічний потенціал солітонної компоненти фіксуємо значенням $\mu_1 = -2$. Спочатку розглянемо випадок більш інтенсивної азимутонної компоненти $N_2 > N_1$. При цьому дипольна деформація наведеного ефективного потенціалу може вести до модуляційної нестійкості й руйнувати векторну пару солітон-азимутон $(0, 1)$, як показано на рис. 6.14(a). Виявляється, однак, що стійкість векторного стану сильно залежить від глибини азимутальної модуляції (параметра p_2), або, еквівалентно, частоти обертання ω. Зберігаючи те ж значення $\mu_2 = 0.5$ як і на рис. 6.14(a), але збільшуючи глибину модуляції до $p_2 = 0.84$ (що, згідно рис. 6.13, приводить до більш швидкому кутовому обертанню), можна одержати, як показано на рис. 6.14(b), стійку солітон-азимутонну пару $(0, 1)$, яка еволюціонує без зміни форми протягом більш ніж сотні періодів обертання.

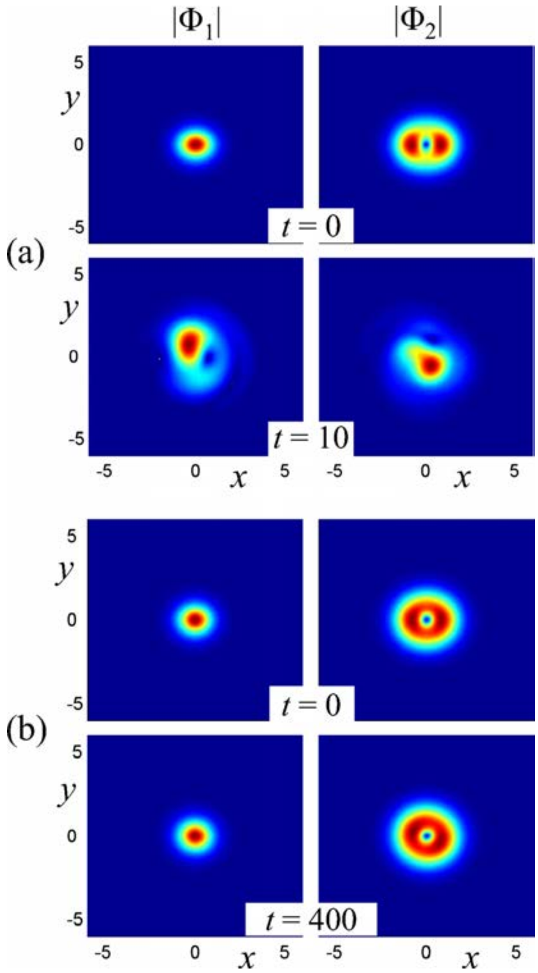

Рис. 6.14 Часова еволюція пари солітон-азимутон з $\mu_1 = -2$ і $\mu_2 = 0.5$. (a) Нестійка динаміка у випадку азимутонного модуляційного параметра $p_2 = 0.6$, частота обертання $\omega = 1.4$, період обертання $T = 2\pi/\omega = 4.5$. (b) Стійке обертання з $p_2 = 0.84$, $\omega = 1.6$, і $T = 3.9$.

З іншого боку, стійкості можна досягтися зменшенням числа атомів в азимутонній компоненті, так щоб $N_1 > N_2$. Цей випадок представлено на рис. 6.15 для $\mu_1 = -2$ і $\mu_2 = 3$. В результаті, ефективний потенціал, що виникає з утримуючого потенціалу пастки й нелінійної взаємодії між компонентами, має добре виражену колоколоподібну форму й підтримує як необертові дипольні солітони, рис. 6.15(a), так і обертові азимутони, рис. 6.15(b). Чисельне моделювання показує, що пари солітон-азимутон з $\mu_2 = 3$ стійкі для $0 \leq p \leq 1$ і всіх відповідних значень ω.

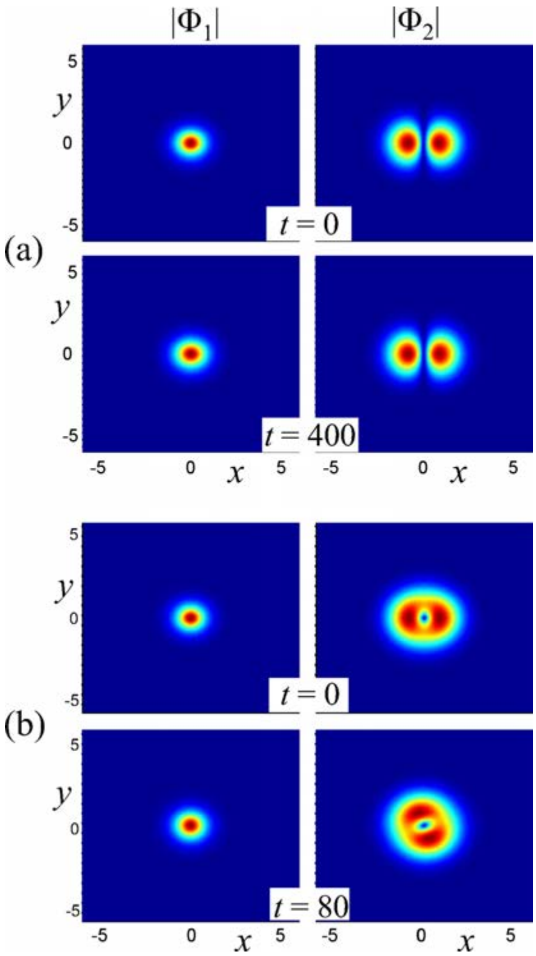

Рис. 6.15 Стійка динаміка пари солітон-азимутон з $\mu_1 = -2$ і $\mu_2 = 3$. (a) $\omega = 0$ і $p_2 = 0$. (b) $\omega = 0.23$ і $p_2 = 0.72$.

6.2.3 Векторні азимутони вищих порядків

Крім векторної пари солітон-азимутон, можна знайти розв'язки рівняння (6.15) у вигляді пар азимутон-азимутон з $l_j \neq 0$ з однаковою частотою обертання ω, але різними μ_j і, отже, різними глибинами модуляції p_j. Два приклади показані на рис. 6.16: (a) дипольний азимутон-дипольний азимутон; (b) дипольний азимутон-квадрупольний азимутон.

Як відзначалося вище для солітон-азимутонної пари з $l_1 = 0$, перетворення $l_{1,2} \to -l_{1,2}$ приводять до виродження $\omega \to -\omega$. Однак, стани із протилежними топологічними зарядами тільки однієї з компонент, наприклад $(1, 1)$ і $(1, -1)$ є суттєво різними, оскільки мають різні повні кутові моменти.

Важливою особливістю векторних азимутон-азимутонних станів є те,

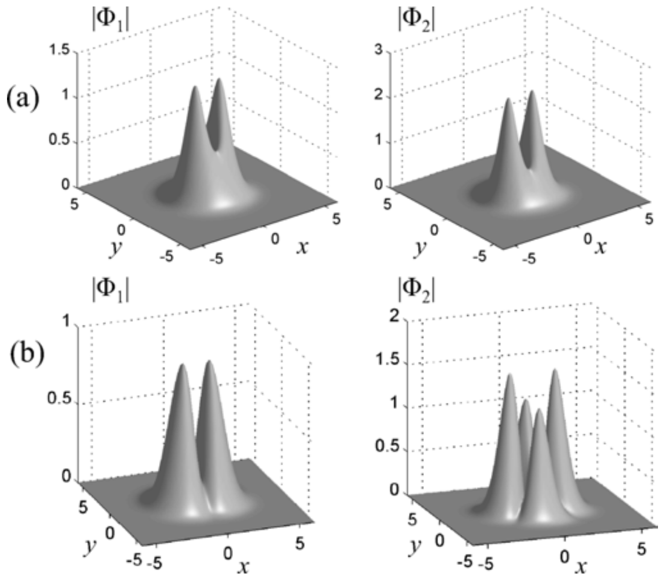

Рис. 6.16 Азимутон-азимутон векторні структури з $(l_1, l_2) = (1, 1)$ в (a) і $(l_1, l_2) = (1, 2)$ в (b). Параметри: (a) частота обертання $\omega = 0.9$ з $\mu_1 = 1.7$, $p_1 = 0.42$ ($N_1 = 5.6$) і $\mu_2 = 1$, $p_2 = 0.3$ ($N_2 = 13.7$); (b) $\omega = 0.055$ з $\mu_1 = 4.8$, $p_1 = 0.18$ ($N_1 = 4.3$) і $\mu_2 = 4.8$, $p_2 = 0.12$ ($N_2 = 10.2$).

що кутовий момент кожної з компонентів M_j, в відмінність від чисел атомів N_j, не зберігається протягом еволюції й інтегралом руху є тільки повний кутовий момент $M = M_1 + M_2$, що веде до важливого наслідку можливості обміну кутовими моментами між азимутонними компонентами.

Чисельне моделювання показує, що азимутон-азимутонні пари $(1, 1)$ і $(1, 2)$ є, загалом кажучи, нестійкими, однак, при достатніх глибинах модуляції в кожній з компонентів, інкремент нестійкості виявляється малим у порівнянні з характерної частотою обертання й азимутон-азимутонні стани можуть певний час еволюціонувати без помітного викривлення форми. При цьому чисельно спостерігався обмін кутовими моментами між різними компонентами при точному збереженні повного кутового моменту.

6.3 Результати до розділу 6

1. Чисельно знайдено двовимірні векторні стани, що описують векторні пари солітон-вихор і вихор-вихор у двовимірних двокомпонентних Бозе-Ейнштейнівських конденсатах з гармонійною пасткою з магнітним утриманням для випадку притягування між атомами одного

сорту й притягування або відштовхування між атомами різних сортів. Лінійний аналіз стійкості показує, що в випадку міжкомпонентного притягування найнебезпечнішим збуренням є азимутальне збурення на другій гармоніці, що визначає границю стійкості. Інкременти нестійкості знайдені чисельно. Векторна пара солітон-вихор виявляється стійкою при фіксованому числі атомів у солітонній компоненті, якщо число атомів у вихоровій компоненті менше деякого критичного значення. Пряме чисельне моделювання вихідних динамічних рівнянь підтверджує результати лінійного аналізу стійкості. В області стійкості пари солітон-вихор еволюціонують без зміни форми. У нестійкій області як вихор так й солітон розщеплюються на два філамента з наступним колапсом. У випадку відштовхувальної міжкомпонентної взаємодії, границя стійкості визначається азимутальним збуренням на першій гармоніці. При цьому стійкість досягається зменшенням числа атомів в вихоровій компоненті. У нестійкій області структура солітон-вихор швидко руйнується, але колапсу не відбувається. Стани вихор-вихор та солітон-вихор з топологічним зарядом більшим одиниці виявляються нестійкими як при притягуванні, так й при відштовхуванні між компонентами конденсату.

2. Введено концепцію двовимірних векторних пар солітон-азимутон в двокомпонентних Бозе-Ейнштейнівських конденсатах. Солітон-азимутонний стан в окремій компоненті відповідає проміжному стану між мультисолітоном, що представляє зв'язаний стан l фундаментальних солітонів, що перебувають в протифазі, та радіально симетричним вихором з топологічним зарядом l. Відповідні солітон-азимутонні розв'язки знайдені чисельним методом. Азимутонна радіально несиметрична компонента приводить до деформації солітонної компоненти. При цьому фундаментальна солітонна компонента не є радіально симетричною.

3. Досліджено стійкість векторних пар солітон-азимутон прямим чисельним моделюванням вихідних еволюційних рівнянь, що описують вза-

ємодію в конденсаті як між атомами одного сорту, так і між атомами різних сортів. При фіксованому числі частинок в солітонній компоненті, загальний солітон-азимутонний стан виявляється стійким при досить великій глибині модуляції азимутона й не занадто великому числі частинок в азимутонній компоненті.

4. Знайдено азимутон-азимутонні векторні пари, що представляють азимутонну компоненту в одному сорті атомів конденсату й іншу компоненту в іншому сорті атомів, при загалом кажучи, різних числах піків інтенсивності (тобто числа частинок та кутового моменту в різних компонентах). Структури виявляються нестійкими, але при досить великих глибинах модуляції інкремент нестійкості малий і азимутон-азимутонна пара може еволюціювати в часі протягом багатьох періодів обертання. В процесі еволюції кутовий момент кожної з компонентів не зберігається (при збереженні загального кутового моменту) й це приводить до обміну кутовими моментами між азимутонами в окремих компонентах.

Висновки

У дисертації вирішено широке коло проблем стосовно стійких когерентних структур у нелінійних середовищах з дисперсією, таких як плазма, оптичні волокна та Бозе-Ейнштейнівські конденсати.

Найбільш важливими результатами дисертації є:

1. Побудова теорії збурень, що грунтується на методі зворотньої задачі розсіювання, для дефокусуючого нелінійного рівняння Шредингера. Запропонований метод дозволяє кількісно описувати радіаційні ефекти, що виникають при розповсюдженні темних солітонів у нелінійних середовищах з дисперсією й дозволяє аналітично визначити спектральний розподіл та просторову структуру випромінювання, що випускається солітоном при наявності зовнішніх збурень.

2. Передбачення безпорогового народження темних солітонів дефокусуючого нелінійного рівняння Шредингера при наявності зовнішнього збурення.

3. Аналітичне знаходження спектральних характеристик випромінювання при розповсюдженні альфвенівських солітонів у плазмі при врахуванні дисипативних ефектів, таких як кінцева провідність плазми й нелінійне загасання Ландау.

4. Знаходження точних N-солітонних розв'язків у моделі деривативного нелінійного рівняння Шредингера з неспадаючими граничними умовами, що відповідає поширенню нелінійних плазмових альфвенівських хвиль під кутом до зовнішнього магнітного поля. Знаходження в даній моделі еволюційних рівнянь для спектральних даних (відповідних солітонам й випромінюванню) у присутності збурень.

5. Передбачення якісно відмінної поведінки світлих й темних альфвенівських солітонів (зокрема, набагато більшої стійкості темних солітонів) при наявності дисипативного збурення дифузійного типу.

6. Теоретичне передбачення генерації альфвенівських солітонів, що поширюються під кутом до зовнішнього магнітного поля, при еволюції початкового прямокутного імпульсу. Передбачення можливості одночасної генерації світлих, темних й бризерных солітонів. Визначення параметрів виникаючих солітонів – їх числа, амплітуд, швидкостей.

7. Одержання двовимірних нелінійних рівнянь, що описують взаємодію верхньогібридних плазмових хвиль із низькочастотними кінетичними магнітозвуковими хвилями. Аналітичне знаходження інкрементів модуляційної нестійкості. Одержання строгого доказу відсутності колапсу в даній моделі за рахунок нелокального характеру нелінійності. Одержання чисельних розв'язків у вигляді мультисолітонів та вихорових солітонів і дослідження їх стійкості.

8. Одержання нелінійного еволюційного рівняння, що описує самовплив короткохвильових іонно-циклотронних плазмових хвиль з зворотньою залежністю частоти від хвильового числа й знаходження аналітичних розв'язків у вигляді солітонів і нелінійних періодичних хвиль.

9. Побудова моделі,що враховує нелінійні низькочастотні збурення густини електронів плазми із електронним пучком. Знаходження аналітичних розв'язків у вигляді нелінійних періодичних кноідальних хвиль та отримання відповідності із експериментальними результатами по виявленню солітонів в плазмово-пучкових системах.

10. Аналітичне знаходження амплітуд розсіювання й повних перерізів при взаємодії дрейфових плазмових вихорів з вільними дрейфовими хвилями й електромагнітною хвилею. Передбачення захоплення дрейфових хвиль вихорами та аналітичне знаходження просторової структури поля при такої взаємодії.

11. Отримання нелінійних рівняннь, які описують нелінійні дрейфові та іонно-звукові хвилі в плазмі з урахуванням їх взаємодії та тривимірної геометрії. Знаходження точних аналітичних розв'язків у вигляді тривимірного дрейфового вихорового солітона (тривимірного модона).

Чисельна демонстрація можливості абсолютно пружних зіткнень між такими модонами, які відтворюють свою початкову форму після зіткнення не залишаючи ніякого випромінювання, як для лобових так й проникаючих зіткнень.

12. Знаходження умов виникнення зональних течій у плазмі з дрейфовою турбулентністю в присутності середньої течії. Знаходження інкрементів нестійкості в залежності від амплітуд середньої течії та амплітуд дрейфових хвиль.

13. Теоретичне передбачення стабілізації нестійкості дрейфових мод у плазмі із градієнтом електронної температури за рахунок присутності досить інтенсивної зональної течії з випадковою просторовою структурою.

14. Теоретичне передбачення існування стійких двовимірних мультисолітонних нелінійних структур у середовищах із нелокальним нелінійним відгуком – середовищі із гауссовськім нелокальним відгуком, частково іонізованій плазмі із зіткненнями та Бозе-Ейнштейнівських конденсатах з нелокальною диполь-дипольною взаємодією.

15. Знаходження принципово нових двовимірних та тривимірних локалізованих нелінійних структур – азимутонів, що є проміжними між солітонами й вихорами. Знаходження умов стійкості азимутонів.

16. Знаходження векторних станів типу солітон-вихор, солітон-азимутон та азимутон-азимутон у моделі Бозе-Ейнштейнівського конденсату із двома сортами атомів й одержання умов стійкості.

Перелік посилань

[1] Lashkin V. M. Stable three-dimensional modon soliton in plasmas / V. M. Lashkin // Phys. Rev. E. — 2017. — Vol. 96, no. 3. — P. 032211.

[2] Lashkin V. M. Influence of the mean flow on zonal flow generation / V. M. Lashkin // Phys. Plasmas. — 2008. — Vol. 15, no. 1. — P. 124502.

[3] Lashkin V. M. Stable three-dimensional spatially modulated vortex solitons in Bose-Einstein condensates / V. M. Lashkin // Phys. Rev. A. — 2008. — Vol. 78, no. 3. — P. 033603.

[4] Lashkin V. M. Two-dimensional multisolitons and azimuthons in Bose-Einstein condensates / V. M. Lashkin // Phys. Rev. A. — 2008. — Vol. 77, no. 2. — P. 025602.

[5] Lashkin V. M. Two-dimensional vortex ring-like and multisoliton nonlinear structures at the upper-hybrid resonance / V. M. Lashkin // Phys. Plasmas. — 2007. — Vol. 14, no. 10. — P. 102311.

[6] Lashkin V. M. N-soliton solutions and perturbation theory for the derivative nonlinear Schrödinger equation with nonvanishing boundary conditions / V. M. Lashkin // J. Phys. A: Math. and Theor. — 2007. — Vol. 40, no. 10. — P. 6119-6132.

[7] Lashkin V. M. Two-dimensional nonlocal vortices, multipole solitons and rotating multisolitons in dipolar Bose-Einstein condensates / V. M. Lashkin // Phys. Rev. A. — 2007. — Vol. 75, no. 4. — P. 043607.

[8] Lashkin V. M. Alfven soliton and emitted radiation in the presence of perturbations / V. M. Lashkin // Phys. Rev. E. — 2006. — Vol. 74, no. 1. — P. 016603.

[9] Lashkin V. M. Generation of solitons by a boxlike pulse in the derivative nonlinear Schrödinger equation with nonvanishing boundary conditions / V. M. Lashkin // Phys. Rev. E. — 2005. — Vol. 71, no. 6. — P. 066613.

[10] Lashkin V. M. Perturbation theory for dark solitons: Inverse scattering transform approach and radiative effects / V. M. Lashkin // Phys. Rev. A. — 2004. — Vol. 70, no. 6. — P. 066620.

[11] Lashkin V. M. Soliton of modified nonlinear Schrödinger equation with random perturbations / V. M. Lashkin // Phys. Rev. E. — 2004. — Vol. 69, no. 1. — P. 016611.

[12] Lashkin V. M. Azimuthal vortex clusters in Bose-Einstein condensates / V. M. Lashkin, E. A. Ostrovskaya, A. S. Desyatnikov, Yu. S. Kivshar // Phys. Rev. A. — 2012. — Vol. 85, no. 1. — P. 013620.

[13] Lashkin V. M. Vector azimuthons in two-component Bose-Einstein condensates / V. M. Lashkin, E. A. Ostrovskaya, A. S. Desyatnikov, Yu. S. Kivshar // Phys. Rev. A. — 2009. — Vol. 80, no. 1. — P. 013615.

[14] Давыдова Т. А. Коротковолновые ионные бернстейновские нелинейные структуры / Т. А. Давыдова, В. М. Лашкин, Г. И. Фищук // УФЖ. — 1998. — Т. 45, № 5. — С. 540-545.

[15] Davydova T. A. Short-wavelength ion Bernstein nonlinear waves and solitons / T. A. Davydova, A. I. Fishchuk, V. M. Lashkin // J. Plasma Phys. — 1994. — Vol. 52, no. 3. — P. 353-364.

[16] Давыдова Т. А. Коротковолновый ионно-циклотронный солитон / Т. А. Давыдова, В. М. Лашкин // Физика плазмы. — 1991. — Т. 17, № 8. — С. 976-979.

[17] Lashkin V. M. Influence of zonal flows on unstable drift modes in ETG turbulence / V. M. Lashkin, Yu. A. Zaliznyak, A. I. Yakimenko // Plasma Phys. and Contr. Fusion. — 2009. — Vol. 51, no. 1. — P. 015008.

[18] Zaliznyak Yu. A. Excitation of zonal flow by the modulational instability in electron temperature gradient driven turbulence / Yu. A. Zaliznyak, A. I. Yakimenko, V. M. Lashkin // J. Plasma Phys. — 2008. — Vol. 74, no. 3. — P. 381-389.

[19] Davydova T. A. Drift-wave trapping by drift vortices / T. A. Davydova, V. M. Lashkin // J. Plasma Phys. — 1997. — Vol. 58, no. 1. — P. 11-18.

[20] Davydova T. A. Scattering of drift waves by drift vortices / T. A. Davydova, V. M. Lashkin // J. Plasma Phys. . — 1997. — Vol. 58, no. 1. — P. 1–10.

[21] Давыдова Т. А. Рассеяние электромагнитной волны на дрейфово-потенциальном вихре / Т. А. Давыдова, В. М. Лашкин // Физика плазмы. — 1993. — Т. 19, № 2. — С. 228-232.

[22] Давыдова Т. А. Образование солитонов в неравновесной плазме при развитии пучковой неустойчивости / Т. А. Давыдова, В. М. Лашкин // УФЖ. — 1992. — Т. 37, № 12. — С. 1833-1838.

[23] Давыдова Т. А. Параметрическая ион-ионная неустойчивость пучкового типа в неоднородном ВЧ поле / Т. А. Давыдова, В. М. Лашкин // УФЖ. — 1992. — Т. 37, № 4. — С. 570-577.

[24] Yakimenko A. I. Two-dimensional nonlinear vector states in Bose-Einstein condensates / A. I. Yakimenko, Yu. A. Zaliznyak, V. M. Lashkin // Phys. Rev. A. — 2009. — Vol.79, no. 4. — P. 043629.

[25] Lashkin V. M. Stable three-dimensional vortex solitons in Bose-Einstein condensates with nonlocal dipole-dipole interaction / V. M. Lashkin, A. I. Yakimenko, Yu. A. Zaliznyak // Physica Scripta. — 2009. — Vol. 79, no. 3. — P. 035305.

[26] Lashkin V. M. Two-dimensional nonlocal multipole solitons / V. M. Lashkin, A. I. Yakimenko, O. O. Prikhodko // Phys. Lett. A. — 2007. — Vol. 366, no. 2. — P. 422-427.

[27] Yakimenko A. I. Dynamics of two-dimensional coherent structures in non-local nonlinear media / A. I. Yakimenko, V. M. Lashkin, O. O. Prikhodko // Phys. Rev. E. — 2006. — Vol. 73, no. 6. — P. 066605.

[28] Lashkin V. M. Zonal flows and soliton generation in drift wave turbulence / V. M. Lashkin // IX International Conference "Electronics and Applied Physics", october 23-26, 2013, Kyiv, Ukraine .— Kyiv, 2013. — P. 111–112.

[29] Лашкін В. М. Двовимірні нелінійні локалізовані структури – азимутони / В. М. Лашкін, О. А. Островська, А. С. Десятніков, Ю. А. Півшар // Українська конференція з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу, 25-26 жовтня, 2011, Київ, Україна: анотації доп.— Київ, 2011 — С. 46.

[30] Лашкін В. М. Вплив зональних течій на нестійкі дрейфові моди зумовлені градієнтом електронної температури / В. М. Лашкін, Ю. О. Залізняк, О. І. Якименко // Українська конференція з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу, 27-28 жовтня, 2009, Київ, Україна: анотації доп.— Київ, 2009 — С. 38.

[31] Lashkin V. M. Influence of zonal flows on unstable drift modes in ETG turbulence / V. M. Lashkin, Yu. A. Zaliznyak, A. I. Yakimenko // IV International Conference "Electronics and Applied Physics" , october 23-25, 2008, Kyiv, Ukraine .— Kyiv, 2008. — P. 143–144.

[32] Lashkin V. M. Excitation of zonal flow by the modulational instability in electron temperature gradient driven turbulence / V. M. Lashkin, Yu. A. Zaliznyak, A. I. Yakimenko // III International Conference "Electronics and Applied Physics" , october 25-27, 2007, Kyiv, Ukraine .— Kyiv, 2007. — P. 134–135.

[33] Lashkin V. M. Stable two-dimensional soliton and vortex structures at the upper-hybrid resonance / V. M. Lashkin // 13 International Congress on Plasma Physics, may 22-26, 2006, Kiev, Ukraine.— Kiev: ICCP 2006. — P. 44.

[34] Yakimenko A. I. Stable multisolitary structures in plasmas with nonlocal nonlinearities / A. I. Yakimenko, V. M. Lashkin, O. O. Prikhodko // 13 International Congress on Plasma Physics, may 22-26, 2006,Kiev, Ukraine.— Kiev: ICCP 2006. — P. 66.

[35] Lashkin V. M. Stable two-dimensional soliton and vortex structures at the upper-hybrid resonance. / V. M. Lashkin // International Workshop "Nonlinear Physics and Mathematics" , may 25-27, 2006, Kiev, Ukraine. — Kiev: ICCP 2006. — P. 21.

[36] Lashkin V. M. Alfven solitons in a plasma with fluctuating density / V. M. Lashkin // International Conference on Physics of Low Temperature Plasma , may 11-15, 2003, Kiev, Ukraine .— Kiev,2003 — P. 11-18-97r.

[37] Davydova T. A. Scattering of drift waves by drift vortices / T. A. Davydova, V. M. Lashkin // International Conference "Physics in Ukraine", june 22-27, 1993: Contributed papers "Plasma Physics".— Kiev, 1993. — P. 73–76.

[38] Davydova T. A. Scattering of electromagnetic wave by drift vortices / T. A. Davydova, V. M. Lashkin // Workshop on turbulence and nonlinear processes in plasmas, april 13-29, 1992, Kiev, Ukraine .— Kiev, 1992 . — P. 31–34.

[39] Gardner C. S. Method for solving the Korteweg-de Vries equation / C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura // Phys. Rev. Lett. — 1967. — Vol. 19, no. 10. — P. 1095–1097.

[40] Lax P. D. . Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves / P. D. Lax // Comm. Pure Appl. Math. — 1968. — Vol. 21, no. 1. — P. 467–490.

[41] Захаров В. Е. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции в нелинейных средах / В. Е. Захаров, А. Б. Шабат // ЖЭТФ. — 1971. — Т. 61, № 1. — С. 118–134.

[42] Захаров В. Е. Уравнение Кортевега-де Фриза – вполне интегрируема гамильтонова система / В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев // Функциональный анализ и его приложения. — 1971. — Т. 5, № 4. — С. 18–27.

[43] Ablowitz M. J. Nonlinear evolution equations of physical significance / M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur // Phys. Rev. Lett. — 1973. — Vol. 31, no. 1. — P. 125–127.

[44] Захаров В. Е. Теория солитонов. Метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. — М. : Наука, 1980. — 319 с.

[45] Тахтаджян Л. А. Гамильтонов подход в теории солитонов / Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев. — М. : Наука, 1986. — 528 с.

[46] Абловиц М. Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. — М. : Мир, 1987. — 479 с.

[47] Додд Р. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гииббон, Х. Моррис. — М. : Мир, 1988. — 694 с.

[48] Захаров В. Е. О взаимодействии солитонов в устойчивой среде / В. Е. Захаров, А. Б. Шабат // ЖЭТФ. — 1973. — Т. 64, № 5. — С. 1627–1639.

[49] Kivshar Yu. S. Dark optical solitons: physics and applications / Yu. S. Kivshar, B. Luther-Davies // Phys. Reports. — 1998. — Vol. 298, no. 2. — P. 81–197.

[50] Kaup D. J. A perturbation expansion for the Zakharov-Shabat inverse scattering transform / D. J. Kaup // SIAM J. Appl. Math. — 1976. — Vol. 31, no. 1. — P. 121–133.

[51] Карпман В. И. Теория возмущений для солитонов / В. И. Карпман, Е. М. Маслов // ЖЭТФ. — 1977. — Т. 73, № 2. — С. 537–559.

[52] Kaup D. J. Theory of nonlinear oscillating dipolar excitations in one-dimensional condensates / D. J. Kaup, A. C. Newell // Phys. Rev. B. — 1978. — Vol. 18, no. 10. — P. 5162–5167.

[53] Kivshar Yu. S. Dynamics of solitons in nearly integrable systems / Yu. S. Kivshar, B. A. Malomed // Rev. Mod. Phys. — 1989. — Vol. 61, no. 4. — P. 763–915.

[54] Elgin J. N. Perturbations of optical solitons / J. N. Elgin // Phys. Rev. A. — 1993. — Vol. 47, no. 5. — P. 4331–4341.

[55] Elgin J. N. Dispersive perturbations of optical solitons / J. N. Elgin, T. P. Horikis // Phys. Rev. E. — 2001. — Vol. 64, no. 4. — P. 047602.

[56] Elgin J. N. Stochastic perturbations of optical solitons / J. N. Elgin // Opt. Lett. — 1993. — Vol. 18, no. 1. — P. 10–12.

[57] Uzunov I. M. Self-frequency shift of dark solitons in optical fibers / I. M. Uzunov, V. S. Gerdjikov // Phys. Rev. A. — 1993. — Vol. 47, no. 2. — P. 1582–1585.

[58] Kivshar Yu. S. Perturbation-induced dynamics of dark solitons / Yu. S. Kivshar, X. Yang // Phys. Rev E. — 1994. — Vol. 49, no. 2. — P. 1657–1670.

[59] Konotop V. V. Direct perturbation theory for dark solitons / V. V. Konotop, V. E. Vekslerchik // Phys. Rev. E. — 1994. — Vol. 49, no. 3. — P. 2397–2407.

[60] Kivshar Yu. S. Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals / Yu. S. Kivshar, G. P. Agraval. — San Diego : Academic Press, 2003.

[61] Emplit P. Picosecond steps and dark pulses through nonlinear single mode fibers / P. Emplit, J. P. Hamaide, F. Reynaud, C. Froehly, A. Barthelemy // Opt. Commun. — 1987. — Vol. 62, no. 6. — P. 374–379.

[62] Mollenauer L.F. Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers / L. F. Mollenauer, R. H. Stolen, J. P. Gordon // Phys. Rev. Lett. — 1980. — Vol. 45, no. 13. — P. 1095–1098.

[63] Andersen D. R. Direct measurement of the transverse velocity of dark spatial solitons / D. R. Andersen, D. E. Hooton, G. A. Swartzlander, A. E. Kaplan // Opt. Lett. — 1990. — Vol. 15, no. 14. — P. 783–785.

[64] Gredeskul S. A. Generation of dark solitons in optical fibers / S. A. Gredeskul, Yu. S. Kivshar // Phys. Rev. Lett. — 1989. — Vol. 62, no. 8. — P. 977–978.

[65] Gredeskul S. A. Dark-soliton generation in optical fibers / S. A. Gredeskul, Yu. S. Kivshar // Opt. Lett. — 1989. — Vol. 14, no. 2. — P. 1281–1283.

[66] Kivshar Yu. S. Gordon-Haus effect on dark solitons / Yu. S. Kivshar, M. Haelterman, P. Emplit, J. Hamaide // Opt. Lett. — 1994. — Vol. 19, no. 1. — P. 19–21.

[67] Panoiu N.-C. Dark-soliton timing jitter caused by fluctuations in initial pulse shape / N.-C. Panoiu, D. Mihalache, D.-M. Baboiu // Phys. Rev. A. — 1995. — Vol. 52, no. 5. — P. 4182–4186.

[68] Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно неоднородных средах / В. И. Кляцкин. — М. : Наука, 1980. — 337 с.

[69] Rogister A. Parallel propagation of nonlinear low-frequency waves in high-β plasma / A. Rogister // Phys. Fluids. — 1971. — Vol. 14, no. 12. — P. 2733–2739.

[70] Mjolhus E. On the modulational instability of hydromagnetic waves parallel to the magnetic field / E. Mjolhus // J. Plasma Phys. — 1976. — Vol. 16, no. 3. — P. 321–334.

[71] Mio K. Modified nonlinear Schrödinger equation for Alfven waves propagating along the magnetic field in cold plasmas / K. Mio, T. Ogino, K. Minami, S. Takeda // J. Phys. Soc. Jpn. — 1976. — Vol. 41, no. 2. — P. 265–273.

[72] Spangler S. R. Properties of Alfven solitons in a finite-beta plasma / S. R. Spangler, J. P. Sheerin // J. Plasma Phys. — 1982. — Vol. 27, no. 2. — P. 193–198.

[73] Sakai J. I., Sonnerup B. U. Modulational instability of finite amplitude dispersive Alfven waves / J. I. Sakai, B. U. Sonnerup // J. Geophys. Res. — 1983. — Vol. 88, no. 11. — P. 9069–9079.

[74] Ruderman M. S. DNLS equation for large-amplitude solitons propagating in an arbitrary direction in a high-β Hall plasma / M. S. Ruderman // J. Plasma Phys. — 2002. — Vol. 67, no. 4. — P. 271–276.

[75] Ruderman M. S. Propagation of solitons of the derivative nonlinear Schrödinger equation in a plasma with fluctuating density / M. S. Ruderman // Phys. Plasmas. — 2002. — Vol. 9, no. 7. — P. 2940–2945.

[76] Kaup D. J., Newell A. C. An exact solution for a derivative nonlinear Schrödinger equation / D. J. Kaup, A. C. Newell // J. Math. Phys. — 1978. — Vol. 19, no. 6. — P. 798–801.

[77] Герджиков В. С. Квадратичный пучок и нелинейные уравнения / В. С. Герджиков, М. И. Иванов, П. П. Кулиш // ТМФ. — 1980. — Т. 44, № 3. — С. 342–357.

[78] Kawata T. Exact solution of the derivative Schrödinger equation under the nonvanishing conditions / T. Kawata, H. Inoue // J. Phys. Soc. Jpn. — 1978. — Vol. 44, no. 6. — P. 1968–1976.

[79] Kawata T. Soliton solutions of the derivative Schrödinger equation / T. Kawata, N. Kobayashi, H. Inoue // J. Phys. Soc. Jpn. — 1979. — Vol. 46, no. 3. — P. 1008–1015.

[80] Kawata T. Inverse method for the mixed nonlinear Schrödinger equation and soliton solutions / T. Kawata, J. Sakai, N. Kobayashi // J. Phys. Soc. Jpn. — 1980. — Vol. 48, no. 4. — P. 1371–1379.

[81] Hada T. Evolution of large amplitude Alfven waves in the solar wind with Beta approximately 1 / T. Hada // Geophys. Res. Lett. — 1993. — Vol. 20, no. 22. — P. 2415–2418.

[82] Wyller J. A perturbation theory for Alfven solitons / J. Wyller, E. Mjolhus // Physica D. — 1984. — Vol. 13, no. 2. — P. 234–246.

[83] Wyller J. The effect of resonant particles on Alfven solitons / J. Wyller, T. Fla, E. Mjolhus // Physica D. — 1989. — Vol. 39, no. 3. — P. 405–422.

[84] Medvedev M. V. Dissipative dynamics of collisionless nonlinear Alfven wave trains / M. V. Medvedev, P. H. Diamond, V. I. Shevchenko, V. L. Galinsky // Phys. Rev. Lett. — 1997. — Vol. 78, no. 26. — P. 4934–4937.

[85] Fla T., Mjolhus E., Wyller J. Nonlinear Landau damping of weakly dispersive circularly polarized MHD waves / T. Fla, E. Mjolhus, J. Wyller // Physica Scripta. — 1989. — Vol. 40, no. 2. — P. 219–226.

[86] Wyller J. Nonlocal conservation laws of the DNLS-equation / J. Wyller // Physica Scripta. — 1989. — Vol. 40, no. 6. — P. 717–720.

[87] Mjolhus E. Nonlinear Alfven waves in a finite-beta plasma / E. Mjolhus, J. Wyller // J. Plasma Phys. — 1988. — Vol. 40, no. 2. — P. 299–318.

[88] Mjolhus E. Alfven solitons / E. Mjolhus, J. Wyller // Physica Sripta. — 1986. — Vol. 33, no. 5. — P. 442–451.

[89] Medvedev M. V. Fluid models for kinetic effects on coherent nonlinear Alfven waves. Fundamental theory / M. V. Medvedev, P. H. Diamond // Phys. Plasmas. — 1996. — Vol. 3, no. 3. — P. 863–873.

[90] Gazol A. Coupling between nonlinear Alfven waves and reduced magnetohydrodynamics for compressible fluids / A. Gazol, T. Passot, P. L. Sulem // Phys. Plasmas. — 1999. — Vol. 6, no. 8. — P. 3114–3122.

[91] Chen X. J. Inverse scattering transform for the derivative nonlinear Schrödinger equation with nonvanishing boundary conditions / X. J. Chen, W. K. Lam // Phys. Rev. E. — 2004. — Vol. 69, no. 6. — P. 066604.

[92] Chen X. J. N-soliton solution for the derivative nonlinear Schrödinger equation with nonvanishing boundary conditions / X. J. Chen , J. Yang , W. K. Lam // J. Phys. A: Math. Gen. — 2006. — Vol. 39, no. 6. — P. 3263–3274.

[93] Chen X. J. . Two-soliton solution for the derivative nonlinear Schrödinger equation with nonvanishing boundary conditions / X. J. Chen // Phys. Lett. A. — 2006. — Vol. 353, no. 2. — P. 185–189.

[94] Хирота Р. Прямые методы в теории солитонов / Р. Хирота // Солитоны: Сб. статей под ред. Р. Буллафа и Ф. Кодри. М.: Мир. — 1980. — С. 175–192.

[95] Дубровин В. А. Точные решения нестационарного уравнения Шредингера с самосогласованными потенциалами / В. А. Дубровин , Т. М. Маланюк , И. М. Кричевер , В. Г. Маханьков // Физика элементарных частиц и атомного ядра. — 1988. — Т. 19, № 3. — С. 579–621.

[96] Маханьков В. Г. Локализованные нетопологические структуры: построение решений и проблемы устойчивости / В. Г. Маханьков , Ю. П. Рыбаков , В. И. Санюк // УФН. — 1994. — Т. 164, № 2. — С. 121–148.

[97] Mjolhus E. Nonlinear alfven waves and the DNLS equation: oblique aspects / E. Mjolhus // Physica Scripta. — 1989. — Vol. 40, no. 2. — P. 227–237.

[98] Манаков С. В. Нелинейная дифракция Фраунгофера / С. В. Манаков // ЖЭТФ. — 1973. — Т. 65, № 10. — С. 1392–1398.

[99] Kaup D. J. Coherent pulse propagation: A comparison of the complete solution with the McCall-Hahn theory and others / D. J. Kaup // Phys. Rev. A. — 1977. — Vol. 16, no. 2. — P. 704–719.

[100] Kivshar Yu. S. On the soliton generation in optical fibres / Yu. S. Kivshar // J. Phys. A: Math. Gen. — 1989. — Vol. 22, no. 8. — P. 337–340.

[101] Gredeskul S. A. Dark-pulse solitons in nonlinear optical fibers / S. A. Gredeskul , Yu. S. Kivshar , M. V. Yanovskaya // Phys. Rev. A. — 1990. — Vol. 41, no. 7. — P. 3994–4008.

[102] Zhao W. Propagation properties of dark solitons / W. Zhao, E. Bourkoff // Opt. Lett. — 1989. — Vol. 14, no. 13. — P. 703–705.

[103] Ахиезер А. И. Электродинамика плазмы / А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин [и др.]. — М. : Наука, 1974. — 720 с.

[104] Verheest F. . Nonlinear structures in solar system plasmas / F. Verheest, G. S. Lakhina // Physica Scripta. — 2002. — Vol. T98, no. 1. — P. 38–42.

[105] Boyd J. P. Chebyshev and Fourier spectral methods / J. P. Boyd. — New York : Dover Publications, 2000.

[106] Wadati M. A generalization of inverse scattering method / M. Wadati, K. Konno, Y.-H. Ichikawa // J. Phys. Soc. Jpn. — 1979. — Vol. 46, no. 6. — P. 1965–1966.

[107] Rangwala A. Backlund transformations, soliton solutions and wave functions of Kaup–Newell and Wadati–Konno–Ichikawa systems / A. Rangwala, J. A. Rao // J. Math. Phys. — 1990. — Vol. 31, no. 5. — P. 1126–1132.

[108] Chen Z. Explicit N-soliton solution of the modified nonlinear Schrödinger equation / Z. Chen, N. Huang // Phys. Rev. A. — 1990. — Vol. 41, no. 7. — P. 4066–4069.

[109] Chen Z. An inverse scattering transformation for the modified nonlinear Schrödinger equation / Z. Chen // Commun. Theor. Phys. — 1991. — Vol. 15, no. 3. — P. 271–276.

[110] Liu S. L., Wang W. Z. Exact N-soliton solution of the modified nonlinear Schrödinger equation / S. L. Liu, W. Z. Wang // Phys. Rev. E. — 1993. — Vol. 48, no. 4. — P. 3054–3059.

[111] Doktorov E. V. Modified nonlinear Schrödinger equation: Spectral transform and N-soliton solution / E. V. Doktorov, V. S. Shchesnovich // J. Math. Phys. — 1995. — Vol. 36, no. 12. — P. 7009–7023.

[112] Chen X. Direct perturbation theory for solitons of the derivative nonlinear Schrödinger equation and the modified nonlinear Schrödinger equation / X. Chen, J. Yang // Phys. Rev. E. — 2002. — Vol. 65, no. 6. — P. 066608.

[113] Shchesnovich V. S. Perturbation theory for the modified nonlinear Schrödinger solitons / V. S. Shchesnovich, E. V. Doktorov // Physica D. — 1999. — Vol. 129, no. 2. — P. 115–129.

[114] Doktorov E. V. Gordon-Haus effect for modified NLS solitons / E. V. Doktorov, I. S. Kuten // Europhys. Lett. — 2001. — Vol. 53, no. 1. — P. 22–28.

[115] Shukla P. K. Nonlinear coupling of electrostatic waves in magnetized plasmas / P. K. Shukla, R. Fedele, U. de Angelis // Phys. Rev. A. — 1985. — Vol. 31, no. 1. — P. 517–519.

[116] Cho T. Observation of an upper-hybrid soliton / T. Cho, S. Tanaka // Phys. Rev. Lett. — 1980. — Vol. 45, no. 17. — P. 1403–1406.

[117] Kaufman, A.N. Upper-hybrid solitons / A.N. Kaufman, L. Stenflo // Physica Scripta. — 1975. — Vol. 11, no. 2. — P. 269–270.

[118] Porkolab M. Upper-hybrid solitons and oscillating-two-stream instabilities / M. Porkolab, M. V. Goldman // Phys. Fluids. — 1976. — Vol. 19, no. 6. — P. 872–881.

[119] Shukla P. K. Existence and propagation of finite amplitude upper hybrid solitary waves / P. K. Shukla, Y. M. Yu, S. G. Tagare [et. al.] // J. Plasma Phys. — 1978. — Vol. 20, no. 3. — P. 569–577.

[120] Sharma R. P. Properties of envelope solitons at the upper-hybrid layer / R. P. Sharma, P. K. Shukla // Phys. Rev. A. — 1983. — Vol. 28, no. 2. — P. 1182–1185.

[121] Sharma R. P. Nonlinear effects at the upper-hybrid layer / R. P. Sharma, P. K. Shukla // Phys. Fluids. — 1983. — Vol. 26, no. 1. — P. 87–99.

[122] Eliasson B. Analytical and simulation studies of nonlinear effects caused by upper-hybrid waves in plasmas / B. Eliasson, P. K. Shukla // Phys. Plasmas. — 2003. — Vol. 10, no. 9. — P. 3539–3544.

[123] Litvak A. G. Dynamics of one-dimensional upper-hybrid turbulence in a magnetized plasma / A. G. Litvak, V. I. Petrukhina, A. M. Sergeev, G. M. Zhislin // Phys. Lett. A. — 1983. — Vol. 94, no. 2. — P. 85–88.

[124] Захаров В. Е. Коллапс ленгмюровских волн / В. Е. Захаров // ЖЭТФ. — 1972. — Т. 62, № 5. — С. 1745–1759.

[125] Турицын С. К. Пространственная дисперсия нелинейности и устойчивости многомерных солитонов / С. К. Турицын // ТМФ. — 1985. — Т. 64, № 2. — С. 226–232.

[126] Захаров В. Е. О трехмерных солитонах / В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов // ЖЭТФ. — 1974. — Т. 66, № 5. — С. 594–600.

[127] Петвиашвили В. И. Об уравнении необыкновенного солитона / В. И. Петвиашвили // Физика Плазмы. — 1976. — Т. 2, № 3. — С. 469–472.

[128] Голант В. Е. Высокочастотные методы нагрева плазмы в тороидальных термоядерных установках / В. Е. Голант, В. И. Федоров. — М. : Энергоатомиздат, 1986. — 200 с.

[129] Yasaka Y. Nonlinear ion Bernstein wave heating experiment in the WT-3 tokamak / Y. Yasaka, H. Takeno, M. Sakka [et. al.] // Plasma Phys. Control. Fusion. — 1993. — Vol. 35, no. 3. — P. 379–388.

[130] Залеский Ю. Г. Экспериментальное наблюдение нелинейных эффектов при возбуждении в плазме циклотронных волн большой амплитуды / Ю. Г. Залеский, В. И. Зинченко, Н. И. Назаров, В. В. Демченко // Письма в ЖЭТФ. — 1982. — Т. 35, № 7. — С. 281–284.

[131] Mozer F. S. Observations of paired electrostatic shocks in the polar magnetosphere / F. S. Mozer, C. W. Carlson, M. K. Hudson // Phys. Rev. Lett. — 1977. — Vol. 38, no. 6. — P. 292–295.

[132] Temerin M. Nonlinear steepening of the electrostatic ion cyclotron wave / M. Temerin, M. Wolderif, F. S. Moser // Phys. Rev. Lett. — 1979. — Vol. 43, no. 26. — P. 1941–1943.

[133] Temerin M. Observation of double layers and solitary waves in the auroral plasma / M. Temerin, K. Cerny, W. Lotko, F. S. Moser // Phys. Rev. Lett. — 1982. — Vol. 48, no. 17. — P. 1175–1178.

[134] Reddy R. V. Spiky parallel electrostatic ion cyclotron and ion acoustic waves / R. V. Reddy, G. S. Lakhina, N. Singh, R. Bharuthram // Nonlinear Processes Geophys. — 2002. — Vol. 9, no. 1. — P. 25–29.

[135] Burrows R. H. Pickup ion dynamics at the heliospheric termination shock observed by Voyager 2 / R. H. Burrows, G. P. Zank, G. M. Webb [et. al.] // Astrophys. J. — 2010. — Vol. 715, no. 2. — P. 1109–1116.

[136] Wilson L. B. Waves in interplanetary shocks: a Wind/Waves study / L. B. Wilson, C. Cattell, P. J. Kellog [et. al.] // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Vol. 99, no. 4. — P. 041101.

[137] Антипов С. В. Квазисолитонные ленгмюровские колебания локализующиеся в ямках плотности замагниченной плазмы / С. В. Антипов, М. В. Незлин, Е. Н. Снежкин, А. С. Трубников // Письма в ЖЭТФ. — 1976. — Т. 23, № 11. — С. 613–616.

[138] Антипов С. В. Ленгмюровские солитоны / С. В. Антипов, М. В. Незлин, Е. Н. Снежкин, А. С. Трубников // ЖЭТФ. — 1978. — Т. 74, № 3. — С. 965–983.

[139] Петвиашвили В. И. ВЧ-диамагнетизм и трехмерные циклотронные солитоны в плазме / В. И. Петвиашвили // Письма в ЖЭТФ. — 1976. — Т. 23, № 12. — С. 682–684.

[140] Некрасов А. К. Диамагнетизм циклотронных волн в плазме / А. К. Некрасов, В. И. Петвиашвили // ЖЭТФ. — 1979. — Т. 77, № 2. — С. 605–612.

[141] Некрасов А. К. Самофокусировка и трехмерная локализация циклотронной волны, бегущей вдоль магнитного поля / А. К. Некрасов, В. И. Петвиашвили // Физика Плазмы. — 1981. — Т. 7, № 5. — С. 1145–1153.

[142] Spatschek K.H. Nonlinear propagation of ion-cyclotron modes / K. H. Spatschek, S. G. Tagare // Phys. Fluids. — 1977. — Vol. 20, no. 9. — P. 1505–1509.

[143] Yu M. Y. Solitary electrostatic ion cyclotron waves / M. Y. Yu // J. Plasma Phys. — 1977. — Vol. 18, no. 1. — P. 139–143.

[144] Myra J. R. Self-modulation of ion Bernstein waves / J. R. Myra, C. S. Liu // Phys. Fluids. — 1980. — Vol. 23, no. 11. — P. 2258–2264.

[145] Bharuthram R. Low frequency nonlinear waves in the auroral plasma / R. Bharuthram, R. V. Reddy, G. S. Lakhina, N. Singh // Physica Scripta. — 2002. — Vol. T98, no. 1. — P. 137–140.

[146] McKenzie J. F. Nonlinear stationary electrostatic ion cyclotron waves: exact solutions for solitons, periodic waves, and wedge shaped waveforms / J. F. McKenzie, T. B. Doyle, S. S. Rajah // Phys. Plasmas. — 2012. — Vol. 19, no. 1. — P. 112115.

[147] Некрасов А. К. Магнитная нелинейность коротковолновых пакетов циклотронных волн / А. К. Некрасов, Ф. З. Фейгин // Физика плазмы. — 1985. — Т. 11, № 8. — С. 971–977.

[148] Bohm D. Theory of plasma oscillations, excitation and damping of oscillations / D. Bohm, E. P. Gross // Phys. Rev. — 1949. — Vol. 75, no. 10. — P. 1864–1877.

[149] Ахиезер А. И. О взаимодействии пучка заряженных частиц с электронной плазмой / А. И. Ахиезер, Я. Б. Файнберг // Докл. АН СССР. — 1949. — Т. 69, № 1. — С. 555–558.

[150] Antipov, S.V. Experimental studies of Langmuir solitons / S.V. Antipov, M.V. Nezlin, A.S. Trubnikov // Physica D. — 1981. — Vol. 3, no. 2. — P. 311–319.

[151] Антипов С. В. Модуляционная неустойчивость ленгмюровских волн, возбуждённых в плазме электронным пучком / С. В. Антипов, М. В. Незлин, Е. Н. Снежкин, А. С. Трубников // Письма в ЖЭТФ. — 1977. — Т. 25, № 3. — С. 158–161.

[152] H. I. Nonlinear evolution of the electron-beam-plasma instability / H. Ikezi, R. P. H. Chang, R. A. Stern // Phys. Rev. Lett. — 1976. — Vol. 36. — P. 1047–1051.

[153] Yamagiwa K. Localized structure of unstable waves in an electron beam plasma / K. Yamagiwa, K. Tokuda, T. Mieno // Journal of Advanced Science. — 1990. — Vol. 2, no. 1. — P. 33–37.

[154] Красовицкий В. Б. Релаксация колебаний в плазме с ультрарелятивистским электронным пучком / В. Б. Красовицкий // ЖЭТФ. — 1982. — Т. 83, № 4. — С. 1324–1335.

[155] Yajima N. Soliton modes in an unstable plasma / N. Yajima, M. Tanaka // Progr. Theor. Phys. Suppl. — 1988. — Vol. 94, no. 1. — P. 138–162.

[156] Дорофеенко В. Г. Неустойчивость ультрарелятивистского электронного пучка в нелинейной плазме / В. Г. Дорофеенко, В. Б. Красовицкий, Г. В. Фомин // ЖЭТФ. — 1990. — Т. 98, № 2. — С. 419–433.

[157] Арцимович Л. А. Физика плазмы для физиков / Л. А. Арцимович, Р. З. Сагдеев. — М. : Атомиздат, 1979. — 313 с.

[158] Connor J. W. A review of theories of the L-H transition / J. W. Connor, H. R. Wilson // Plasma Phys. Control. Fusion. — 2000. — Vol. 42, no. 1. — P. R1–R102.

[159] Hasegava A. Pseudo-three dimensional turbulence in magnetized nonuniform plasma / A. Hasegava, K. Mima // Phys. Fluids. — 1978. — Vol. 21, no. 1. — P. 87–92.

[160] Charney J. G. On the scale of atmospheric motions / J. G. Charney // Geophys. Pub. Norv. — 1948. — Vol. 17, no. 1. — P. 1–17.

[161] Ларичев В. Д. О двумерных уединенных волнах Россби / В. Д. Ларичев, Г. М. Резник // Докл. АН СССР. — 1976. — Т. 231, № 5. — С. 1077–1079.

[162] Meiss J. D. Solitary drift waves in the presence of magnetic shear / J. D. Meiss, W. Horton // Phys. Fluids. — 1983. — Vol. 26, no. 4. — P. 990–997.

[163] Horton W. Drift wave vortices and anomalous transport / W. Horton // Phys. Fluids B. — 1989. — Vol. 1, no. 3. — P. 524–537.

[164] Nycander J. Stationary drift vortices with large amplitude / J. Nycander // Phys. Fluids B. — 1991. — Vol. 3, no. 4. — P. 931–937.

[165] Su X. N. Drift wave vortices in inhomogeneous plasma / X. N. Su, W. Horton, P. J. Morrison // Phys. Fluids B. — 1991. — Vol. 3, no. 4. — P. 921–930.

[166] Гордин В. А. Квазигеострофические вихри устойчивые по Ляпунову / В. А. Гордин, В. И. Петвиашвили // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 285, № 4. — С. 857–861.

[167] Laedke E. W. Two-dimensional drift vortices and their stability / E. W. Laedke, K. H. Spatschek // Phys. Fluids. — 1986. — Vol. 29, no. 1. — P. 133–142.

[168] McWilliams J. C., Zabusky N. J. Interactions of isolated vortices / J. C. McWilliams, N. J. Zabusky // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. — 1982. — Vol. 19, no. 2. — P. 207–227.

[169] Makino M. Dynamics of two-dimensional solitary vortices in a low-β plasma with convective motion / M. Makino, T. Kamimura, T. Taniuti // J. Phys. Soc. Jpn. — 1981. — Vol. 50, no. 3. — P. 980–989.

[170] Ларичев В. Д. Численный эксперимент по расчету столкновения уединенных волн Россби / В. Д. Ларичев, Г. М. Резник // Докл. АН СССР. — 1982. — Т. 264, № 1. — С. 229–233.

[171] Zakharov V. E. On additional motion invariants of classical hamiltonian wave systems / V. E. Zakharov, E. I. Shulman // Physica D. — 1988. — Vol. 29, no. 2. — P. 283–320.

[172] Ландау Л. Д. Квантовая механика. Нерелятивистская теория / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : Наука, 1973. — 750 с.

[173] Arakawa A. Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: Two dimensional incompressible flow / A. Arakawa // J. Comput. Phys. . — 1966. — Vol. 1, no. 1. — P. 119–143.

[174] Diamond P. H., Itoh S.-I., Itoh K., Hahm T. S. Zonal flows in plasma - a review / P. H. Diamond, S.-I. Itoh, K. Itoh, T. S. Hahm // Plasma Phys. Control. Fusion. — 2005. — Vol. 47, no. 1. — P. R35–R161.

[175] Itoh K. Physics of zonal flows / K. Itoh, S.-I. Itoh, P. H. Diamond [et. al.] // Phys. Plasmas. — 2006. — Vol. 13, no. 5. — P. 055502.

[176] Smolyakov A. I. Coherent stucture phenomena in drift wave-zonal flow turbulence / A. I. Smolyakov, P. H. Diamond, M. Malkov // Phys. Rev. Lett. — 2000. — Vol. 84, no. 3. — P. 491–494.

[177] Smolyakov A. I. Zonal flow generation by parametric instability in magnetized plasmas and geostrophic fluids / A. I. Smolyakov, P. H. Diamond, A. I. Shevchenko // Phys. Plasmas. — 2000. — Vol. 7, no. 5. — P. 1349–1351.

[178] Chen L. Excitation of zonal flow by drift waves in toroidal plasmas / L. Chen, Z. Lin, R. White // Phys. Plasmas. — 2000. — Vol. 7, no. 8. — P. 3129–3132.

[179] Zonca F. Nonlinear paradigm for drift wave-zonal flow interplay: coherence, chaos and turbulence / F. Zonca, R. White, L. Chen // Phys. Plasmas. — 2004. — Vol. 11, no. 5. — P. 2488–2496.

[180] Manfredi G. Zonal flow and streamer generation in drift turbulence / G. Manfredi, C. M. Roch, R. O. Dendy // Plasma Phys. Control. Fusion. — 2001. — Vol. 43, no. 6. — P. 825–831.

[181] Burin M. J. On the transition to drift turbulence in a magnetized plasma column / M. J. Burin, G. R. Tynan, G. Y. Antar [et. al.] // Phys. Plasmas. — 2005. — Vol. 12, no. 5. — P. 052320.

[182] Fujisawa A. Intermittent characteristics in coupling between turbulence and zonal flows / A. Fujisawa, A. Shimizu, H. Nakano [et. al.] // Plasma Phys. Control. Fusion. — 2007. — Vol. 49, no. 2. — P. 211–217.

[183] Xu G. S. First evidence of the role of zonal flows for the L-H transition at marginal input power in the EAST tokamak / G. S. Xu, B. N. Wan, H. Q. Wang [et. al.] // Phys. Rev. Lett. — 2011. — Vol. 107, no. 12. — P. 125001.

[184] Burrell K. H. Effect of E×B velocity shear and magnetic shear on turbulence and transport in magnetic confinement devices / K. H. Burrell // Phys. Plasmas. — 1997. — Vol. 4, no. 5. — P. 1499–1518.

[185] Tajima T. Instabilities and vortex dynamics in shear flow of magnetized plasmas / T. Tajima, W. Horton, P. J. Morrison [et. al.] // Phys. Fluids B. — 1991. — Vol. 3, no. 4. — P. 938–954.

[186] Hamaguchi S. Effects of shear flows on ion-temperature-gradient-driven turbulent transport / S. Hamaguchi, W. Horton // Phys. Fluids B. — 1992. — Vol. 4, no. 2. — P. 319–328.

[187] Waltz R. E. Advances in the simulation of toroidal gyro-Landau fluid model turbulence / R. E. Waltz, G. D. Kerbel, J. Milovich, G. W. Hammett // Phys. Plasmas. — 1995. — Vol. 2, no. 6. — P. 2408–2416.

[188] Sugama H. Radial electric field effect on resistive interchange modes / H. Sugama, M. Wakatani // Phys. Fluids B. — 1991. — Vol. 3, no. 4. — P. 1110–1112.

[189] Champeaux S. Streamer and zonal flow generation from envelope modulations in drift wave turbulence / S. Champeaux, P. H. Diamond // Phys. Lett. A. — 2001. — Vol. 288, no. 4. — P. 214–219.

[190] Shukla P. K. Generation of zonal flows by Rossby waves / P. K. Shukla, L. Stenflo // Phys. Lett. A. — 2003. — Vol. 307, no. 3. — P. 154–157.

[191] Kaladze T. D. Drift wave driven zonal flows in plasmas / T. D. Kaladze, D. J. Wu, O. A. Pokhotelov [et. al.] // Phys. Plasmas. — 2005. — Vol. 12, no. 12. — P. 122311.

[192] Holland C. Electromagnetic secondary instabilities in electron temperature gradient turbulence / C. Holland, P. H. Diamond // Phys. Plasmas. — 2002. — Vol. 9, no. 9. — P. 3857–3866.

[193] Gürcan Ö. D. Streamer formation and collapse in electron temperature gradient driven turbulence / Ö. D. Gürcan, P. H. Diamond // Phys. Plasmas. — 2004. — Vol. 11, no. 2. — P. 572–583.

[194] Gürcan Ö. D. Nonlinear elongation of two-dimensional structures in electron temperature gradient driven turbulence / Ö. D. Gürcan, P. H. Diamond // Phys. Plasmas. — 2004. — Vol. 11, no. 11. — P. 4973–4982.

[195] Jenko F. Electron temperature gradient driven turbulence / F. Jenko, W. Dorland, M. Kotschenreuther, B. N. Rogers // Phys. Plasmas. — 2000. — Vol. 7, no. 5. — P. 1904–1910.

[196] Anderson J. Quasilinear analysis of the zonal flow back-reaction on ion-temperature-gradient mode turbulence / J. Anderson, J. Li, Y. Kishimoto, E. Kim // Phys. Lett. A. — 2008. — Vol. 372, no. 38. — P. 5987–5990.

[197] Kim E. Random shearing by zonal flows and transport reduction / E. Kim, P. H. Diamond // Phys. Plasmas. — 2004. — Vol. 11, no. 12. — P. L77–L80.

[198] Kim E. Non-perturbative models of intermittency in drift-wave turbulence: towards a probabilistic theory of anomalous transport / E. Kim, P. H. Diamond, M. Malkov [et. al.] // Nucl. Fusion. — 2003. — Vol. 43, no. 9. — P. 961–968.

[199] Diamond P. H. A simple model of intermittency in drift wave-zonal flow turbulence / P. H. Diamond, M. Malkov // Physica Scripta. — 2002. — Vol. T98, no. 1. — P. 63–67.

[200] Литвак А. Г. Тепловое самовоздействие волновых пучков в плазме с нелокальной нелинейностью / А. Г. Литвак , В. А. Миронов , Г. М. Фрайман , А. Д. Юнаковский // Физика плазмы. — 1975. — Т. 1, № 1. — С. 60–71.

[201] Shukla P. K. Dynamics of nonlinearly coupled upper-hybrid waves and modified Alfven modes in a magnetized dusty plasma / P. K. Shukla , L. Stenflo // Phys. Plasmas. — 2003. — Vol. 10, no. 11. — P. 4572–4574.

[202] Lushnikov P. M. Collapse of Bose-Einstein condensates with dipole-dipole interactions / P. M. Lushnikov // Phys. Rev. A. — 2002. — Vol. 66, no. 5. — P. 051601(R).

[203] Pedri P. Two-dimensional bright solitons in dipolar Bose-Einstein condensates / P. Pedri, L. Santos // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 95, no. 20. — P. 200404.

[204] Mamaev A. V. Bound dipole solitary solutions in anisotropic nonlocal self-focusing media / A. V. Mamaev, A. A. Zozulya , V. K. Mezentsev , D. Z. Anderson , M. Saffman // J. Opt. B. — 1997. — Vol. 56, no. 2. — P. R1110–R1113.

[205] Krolikowski W. Modulational instability, solitons and beam propagation in spatially nonlocal nonlinear media / W. Krolikowski, O. Bang, N. I. Nikolov, D. Neshev , J. Wyller , P. D. Rasmussen, D. Edmundson // J. Opt. B. — 2004. — Vol. 6, no. 2. — P. 288–294.

[206]Именог И. В. Об асимптотике решений стационарного нелинейного уравнения Хартри / И. В. Сименог // ТМФ. — 1977. — Т. 30, № 3. — С. 408–414.

[207] Conti C. Route to nonlocality and observation of accessible solitons / C. Conti , M. Peccianti , G. Assanto // Phys. Rev. Lett. — 2003. — Vol. 91, no. 7. — P. 073901.

[208] Conti C. Observation of optical spatial solitons in highly nonlocal media / C. Conti , M. Peccianti , G. Assanto // Phys. Rev. Lett. — 2004. — Vol. 92, no. 11. — P. 113902.

[209] Peccianti M. Interplay between nonlocality and nonlinearity in nematic liquid crystals / M. Peccianti , C. Conti , G. Assanto // Opt. Lett. — 2005. — Vol. 30, no. 4. — P. 415–417.

[210] Rasmussen P. D. Theory of nonlocal soliton interaction in nematic liquid crystals / P. D. Rasmussen , O. Bang , W. Krolikowski // Phys. Rev. E. — 2005. — Vol. 72, no. 6. — P. 066611.

[211] Conti C. Optical spatial solitons in soft matter / C. Conti , G. Ruocco , S. Trillo // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 95, no. 18. — P. 183902.

[212] Wyller J. Generic features of modulational instability in nonlocal Kerr media / J. Wyller , W. Krolikowski , O. Bang , P. D. Rasmussen // Phys. Rev. E. — 2002. — Vol. 66, no. 6. — P. 066615.

[213] Bang O. Collapse arrest and soliton stabilization in nonlocal nonlinear media / O. Bang , W. Krolikowski , J. Wyller , J. J. Rasmussen // Phys. Rev. E. — 2002. — Vol. 66, no. 4. — P. 046619.

[214] Towers I. Stable localized vortex solitons / I. Towers , A. V. Buryak , R. A. Sammut , B. A. Malomed // Phys. Rev. E. — 2001. — Vol. 63, no. 5. — P. 055601(R).

[215] Yakimenko A. I. Stable vortex solitons in nonlocal self-focusing nonlinear media / A. I. Yakimenko, Y. A. Zaliznyak, Yu. S. Kivshar // Phys. Rev. E. — 2005. — Vol. 71, no. 6. — P. 065603(R).

[216] Briedis D. Ring vortex solitons in nonlocal nonlinear media / D. Briedis , D. E. Petersen , D. Edmundson , W. Krolikowski , O. Bang // Opt. Express. — 2005. — Vol. 13, no. 2. — P. 435–443.

[217] Rotschild C. Solitons in nonlinear media with an infinite range of nonlocality: first observation of coherent elliptic solitons and of vortex-ring solitons / C. Rotschild , O. Cohen , O. Manela , M. Segev , T. Carmon // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 95, no. 21. — P. 213904.

[218] Миронов В. А. О неодномерных связанных солитонах в нелинейных уравнениях поля / В. А. Миронов , А. М. Сергеев , Э. М. Шер // Докл. АН СССР. — 1981. — Т. 260, № 2. — С. 325–327.

[219] Xu Z. Upper threshold for stability of multipole-mode solitons in nonlocal nonlinear media / Z. Xu , Y. V. Kartashov , L. Torner // Opt. Lett. — 2005. — Vol. 30, no. 23. — P. 3171–3173.

[220] Kartashov Y. V. Multipole vector solitons in nonlocal nonlinear media / Y. V. Kartashov , L. Torner , V. A. Vysloukh , D. Mihalache // Opt. Lett. — 2006. — Vol. 31, no. 10. — P. 1483–1485.

[221] Nikolov N. I. Attraction of nonlocal dark optical solitons / N. I. Nikolov , D. Neshev , W. Krolikowsi , O. Bang , J. J. Rasmussen , P. L. Christiansen // Opt. Lett. — 2004. — Vol. 29, no. 3. — P. 286–288.

[222] Lopez-Aguayo S. Azimuthons in nonlocal nonlinear media / S. Lopez-Aguayo, A. S. Desyatnikov , Yu. S. Kivshar // Opt. Express. — 2006. — Vol. 14, no. 17. — P. 7903–7908.

[223] Lopez-Aguayo S. Stable rotating dipole solitons in nonlocal optical media / S. Lopez-Aguayo , A. S. Desyatnikov , Yu. S. Kivshar , S. Skupin , W. Krolikowski , O. Bang // Opt. Lett. — 2006. — Vol. 31, no. 8. — P. 1100–1102.

[224] Rotschild C. Two-dimensional multipole solitons in nonlocal nonlinear media / C. Rotschild , Z. Xu , O. Cohen , Y. V. Kartashov , L. Torner , M. Segev // Opt. Lett. — 2006. — Vol. 31, no. 22. — P. 3312–3314.

[225] Snyder A. Accessible solitons / A. Snyder , J. Mitchell // Science. — 1997. — Vol. 276, no. 5318. — P. 1538–1541.

[226] Петвиашвили В. И. Солитоны и турбулентность / В. И. Петвиашвили, В. В. Яньков // Вопросы теории плазмы: Сб. статей под ред. Б. Б. Кадомцева. М.: Энергоатомиздат. — 1985. — С. 3–55.

[227] S. D. A. Azimuthons: Spatially modulated vortex solitons / A. S. Desyatnikov, A. A. Sukhorukov, Yu. S. Kivshar // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 95, no. 20. — P. 203904.

[228] Skupin S. Stability of two-dimensional spatial solitons in nonlocal nonlinear media / S. Skupin , O. Bang , D. Edmundson , W. Krolikowski // Phys. Rev. E. — 2006. — Vol. 73, no. 6. — P. 066603.

[229] Anderson M. H. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor / M. N. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews [et. al.] // Science. — 1995. — Vol. 269, no. 5221. — P. 198–201.

[230] Davis K. B. Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms / K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews [et. al.] // Phys. Rev. Lett. — 1995. — Vol. 75, no. 22. — P. 3969–3973.

[231] Bradley C. C. Evidence of Bose-Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions / C. C. Bradley, C. A. Sacklett, J. J. Tollett, R. G. Hulet // Phys. Rev. Lett. — 1995. — Vol. 75, no. 9. — P. 1687–1690.

[232] Fried D. G. Bose-Einstein condensation of atomic hydrogen / D. G. Fried, T. C. Killian, L. Willmann [et. al.] // Phys. Rev. Lett. — 1998. — Vol. 81, no. 18. — P. 3811–3814.

[233] Modugno G. Bose-Einstein condensation of potassium atoms by sympathetic cooling / G. Modugno, G. Ferrari, G. Roati [et. al.] // Science. — 2001. — Vol. 294, no. 5545. — P. 1320–1322.

[234] Robert A. A Bose-Einstein condensate of metastable atoms / A. Robert, O. Sirjean, A. Browaeys [et. al.] // Science. — 2001. — Vol. 292, no. 5516. — P. 461–464.

[235] Weber T. Bose-Einstein condensation of cesium / T. Weber, J. Herbig, M. Mark [et. al.] // Science. — 2003. — Vol. 299, no. 5604. — P. 232–235.

[236] Andrews M. R. Observation of interference between two bose condensates / M. R. Andrews, C. G. Townsend, H.-J. Miesner [et. al.] // Science. — 1997. — Vol. 275, no. 5300. — P. 637–641.

[237] Levy S. The a.c. and d.c. Josephson effects in a Bose-Einstein condensate / S. Levy, E. Lahoud, I. Shomroni, J. Steinhauer // Nature. — 2007. — Vol. 449, no. 7162. — P. 579–583.

[238] Питаевский Л. П. Конденсаты Бозе-Эйнштейна в поле лазерного излучения / Л. П. Питаевский // УФН. — 2006. — Т. 176, № 4. — С. 345–364.

[239] Gross E. P. Structure of a quantized vortex in boson systems / E. P. Gross // Nuovo Cimento. — 1961. — Vol. 20, no. 2. — P. 454–466.

[240] Питаевский Л. П. Вихревые нити в неидеальном бозе-газе / Л. П. Питаевский // ЖЭТФ. — 1961. — Т. 40, № 2. — С. 646–658.

[241] Dalfovo F. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases / F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari // Rev. Mod. Phys. — 1999. — Vol. 71, no. 3. — P. 463–512.

[242] Inouye S. Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate / S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, W. Ketterle // Nature. — 1998. — Vol. 392, no. 6672. — P. 151–154.

[243] Kivshar Yu. S. Nonlinear modes of a macroscopic quantum oscillator / Yu. S. Kivshar, T. J. Alexander, S. K. Turitsyn // Phys. Lett. A. — 2001. — Vol. 278, no. 4. — P. 225–228.

[244] Frantzeskakis D. J. Interaction of dark solitons with localized impurities in Bose-Einstein condensates / D. J. Frantzeskakis, G. Theocharis, F. K. Diakonos [et. al.] // Phys. Rev. A. — 2002. — Vol. 66, no. 5. — P. 053608.

[245] Strecker K. E. Formation and propagation of matter-wave soliton trains / K. E. Strecker, G. P. Partridge, A. G. Truscott, R. G. Hulet // Nature. — 2002. — Vol. 417, no. 6885. — P. 150–152.

[246] Khaykovich L. Formation of a matter-wave bright soliton / L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari [et. al.] // Science. — 2002. — Vol. 296, no. 5571. — P. 1290–1293.

[247] Cornish S. L. Formation of bright matter-wave solitons during the collapse of attractive Bose-Einstein condensates / S. L. Cornish, S. T. Thomson, C. E. Wieman // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 96, no. 17. — P. 170401.

[248] Denschlag J. Generating solitons by phase engineering of a Bose-Einstein condensate / J. Denschlag, J. E. Simsarian, D. L. Feder [et. al.] // Science. — 2000. — Vol. 287, no. 5450. — P. 97–101.

[249] Dutton Z. Observation of quantum shock waves created with ultra-compressed slow light pulses in a Bose-Einstein condensate / Z. Dutton, M. Budde, C. Slowe, L. V. Hau // Science. — 2001. — Vol. 293, no. 5530. — P. 663–668.

[250] Burger S. Dark solitons in Bose-Einstein condensates / S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer [et. al.] // Phys. Rev. Lett. — 1999. — Vol. 83, no. 25. — P. 5198–5201.

[251] Anderson B. P. Watching dark solitons decay into vortex rings in a Bose-Einstein condensate / B. P. Anderson, P. C. Haljan, C. A. Regal [et. al.] // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 86, no. 14. — P. 2926–2929.

[252] Alexander T. J. Ground states and vortices of matter-wave condensates and optical guided waves / T. J. Alexander, L. Berge // Phys. Rev. A. — 2002. — Vol. 65, no. 2. — P. 026611.

[253] Berge L. Stability criterion for attractive Bose-Einstein condensates / L. Berge, T. J. Alexander, Y. S. Kivshar // Phys. Rev. A. — 2000. — Vol. 62, no. 2. — P. 023607.

[254] Weinstein M. I. Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates / M. I. Weinstein // Commun. Math. Phys. — 1983. — Vol. 87, no. 4. — P. 567–576.

[255] Kuznetsov E. A. Sharper criteria for the wave collapse / E. A. Kuznetsov, J. J. Rasmussen, K. Rypdal, S. K. Turitsyn // Physica D. — 1995. — Vol. 87, no. 3. — P. 273–284.

[256] Carr L. D. Vortices and ring solitons in Bose-Einstein condensates / L. D. Carr, C. W. Clark // Phys. Rev. A. — 2006. — Vol. 74, no. 4. — P. 043613.

[257] Saito H. Split-merge cycle, fragmented collapse, and vortex desintegration in rotating Bose-Einstein condensates with attractive interactions / H. Saito, M. Ueda // Phys. Rev. A. — 2004. — Vol. 69, no. 1. — P. 013604.

[258] Mihalache D. Vortex stability in nearly-two-dimensional Bose-Einstein condensates with attraction / D. Mihalache, D. Mazilu, B. A. Malomed, F. Lederer // Phys. Rev. A. — 2006. — Vol. 73, no. 4. — P. 043615.

[259] Malomed B. A. On stability of vortices in three-dimensional self-attractive Bose-Einstein condensates / B. A. Malomed, F. Lederer, D. Mazilu, D. Mihalache // Phys. Lett. A. — 2007. — Vol. 361. — P. 336–340.

[260] Griesmaier A. Bose-Einstein condensation of Chromium / A. Griesmaier, J. Werner, S. Hensler, J. Stuhler, T. Pfau // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 94, no. 16. — P. 160401.

[261] Werner J. Observation of Feshbach resonances in an ultracold gas of ^{52}Cr / J. Werner, A. Griesmaier, S. Hensler, J. Stuhler, T. Pfau, A. Simoni, E. Tiesinga // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 94, no. 18. — P. 183201.

[262] Stuhler J. Observation of dipole-dipole interaction in a degenerate quantum gas / J. Stuhler, A. Griesmaier, T. Koch, M. Fattori, T. Pfau, S. Giovanazzi, P. Pedri, L. Santos // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 95, no. 15. — P. 150406.

[263] Griesmaier A. Comparing contact and dipolar interaction in a Bose-Einstein condensate / A. Griesmaier, J. Stuhler, T. Koch, M. Fattori, T. Pfau, S. Giovanazzi // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 97, no. 25. — P. 250402.

[264] Koch T. Stabilization of a purely dipolar quantum gas against collapse / T. Koch, T. Lahaye, J. Metz, B. Frölich, A. Griesmaier, T. Pfau // Nature Phys. — 2008. — Vol. 4, no. 3. — P. 218–222.

[265] Bethlem H. L. Decelaration and trapping of ammonia using time-varying electric fields / H. L. Bethlem, F. M. H. Crompvoets, R. T. Jongma, S. Y. T. van de Meerakker, G. Meijer // Phys. Rev. A. — 2002. — Vol. 65, no. 5. — P. 053416.

[266] Bochinski J. R. Cold free-radical molecules in the laboratory frame / J. R. Bochinski, E. R. Hudson, J. Y. Lewandovski // Phys. Rev. A. — 2004. — Vol. 70, no. 4. — P. 043410.

[267] Sage D. M. Optical production of ultracold polar molecules / D. M. Sage, S. Sainis, T. Bergeman, D. DeMille // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 94, no. 20. — P. 203001.

[268] Carr L. D. Cold and ultracold molecules: science, technology and applications / L. D. Carr, D. DeMille, R. V. Krems, J. Ye // New J. Phys. — 2009. — Vol. 11, no. 5. — P. 055049.

[269] Giovanazzi S. Tuning the dipolar interaction in quantum gases / S. Giovanazzi, A. Görlitz, T. Pfau // Phys. Rev. Lett. — 2002. — Vol. 89, no. 13. — P. 130401.

[270] Goral K. Bose-Einstein condensation with magnetic dipole-dipole forces / K. Goral, K. Rzazewski, T. Pfau // Phys. Rev. A. — 2000. — Vol. 61, no. 5. — P. 051601(R).

[271] Goral K. Ground state and elementary excitations of single and binary Bose-Einstein condensates of trapped dipolar gases / K. Goral, L. Santos // Phys. Rev. A. — 2002. — Vol. 66, no. 2. — P. 023613.

[272] Griesmaier A. Generation of a dipolar Bose-Einstein condensate / A. Griesmaier // J. Phys. B. — 2007. — Vol. 40, no. 1. — P. 91–134.

[273] Bortolotti D. C. E. Scattering length instability in dipolar Bose-Einstein condensates / D. C. E. Bortolotti, S. Ronen, L. J. Bohn, D. Blume // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 97, no. 16. — P. 160402.

[274] Yi S. Vortex structures in dipolar condensates / S. Yi, H. Pu // Phys. Rev. A. — 2006. — Vol. 73, no. 6. — P. 061602(R).

[275] Вахитов Н. Г. Стационарные решения волнового уравнения в среде с насыщающей нелинейностью / Н. Г. Вахитов, А. А. Колоколов // Изв. вузов. Радиофизика. — 1973. — Т. 16, № 10. — С. 1020–1028.

[276] O'Dell D. H. J. Vortex in a trapped Bose-Einstein condensate with dipole-dipole interactions / D. H. J. O'Dell, C. Eberlein // Phys. Rev. A. — 2007. — Vol. 75, no. 1. — P. 013604.

[277] Lakoba T. I. A mode elimination technique to improve convergence of iteration methods for finding solitary waves / T. I. Lakoba, J. Yang // J. Comput. Phys. — 2007. — Vol. 226, no. 9. — P. 1693–1709.

[278] Dobrek L. Optical generation of vortices in trapped Bose-Einstein condensates / L. Dobrek, M. Gajda, M. Lewenstein [et. al.] // Phys. Rev. A. — 1999. — Vol. 60, no. 10. — P. R3381–R3384.

[279] Phillips D. F. Storage of light in atomic vapor / D. F. Phillips, A. Fleischhauer, A. Mair [et. al.] // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 86, no. 5. — P. 783–786.

[280] Dutton Z. Storing and processing optical information with ultraslow light in Bose-Einstein condensates / Z. Dutton, L. V. Hau // Phys. Rev. A. — 2004. — Vol. 70, no. 5. — P. 053831.

[281] Kapale K. T. Vortex phase qubit: Generating arbitrary, counterrotating, coherent superpositions in Bose-Einstein condensates via optical angular momentum beams / K. T. Kapale, J. P. Dowling // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 95, no. 17. — P. 173601.

[282] Modugno G. Two atomic species superfluid / G. Modugno, M. Modugno, F. Riboli [et. al.] // Phys. Rev. Lett. — 2002. — Vol. 89, no. 19. — P. 190404.

[283] Myatt C. J. Production of two overlapping Bose-Einstein condensates by sympathetic cooling / C. J. Myatt, E. A. Burt, R. W. Ghrist [et. al.] // Phys. Rev. Lett. — 1997. — Vol. 78, no. 4. — P. 586–589.

[284] Hall D. S. Dynamics of component separation in a binary mixture of Bose-Einstein condensates / D. S. Hall, M. R. Matthews, J. R. Ensher [et. al.] // Phys. Rev. Lett. — 1998. — Vol. 81, no. 8. — P. 1539–1542.

[285] Stamper-Kurn D. M. Optical confinement of a Bose-Einstein condensate / D. M. Stamper-Kurn, M. R. Andrews, A. P. Chikkatur [et. al.] // Phys. Rev. Lett. — 1998. — Vol. 80, no. 10. — P. 2027–2030.

[286] Maddaloni P. Collective oscillations of two colliding Bose-Einstein condensates / P. Maddaloni, M. Modugno, C. Fort [et. al.] // Phys. Rev. Lett. — 2000. — Vol. 85, no. 12. — P. 2413–2416.

[287] Barrett M. All-optical formation of an atomic Bose-Einstein condensate / M. Barrett, J. Sauer, M. S. Chapman // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 87, no. 1. — P. 010404.

[288] Thalhammer G. Double species Bose-Einstein condensate with tunable interspecies interactions / G. Thalhammer, G. Barontini, L. De Sarlo [et. al.] // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 100, no. 21. — P. 210402.

[289] Papp S. B. Tunable miscibility in a dual-species Bose-Einstein condensate / S. B. Papp, J. M. Pino, C. Wieman // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 101, no. 4. — P. 040402.

[290] Pu H. Properties of two-species Bose condensates / H. Pu, N. P. Bigelow // Phys. Rev. Lett. — 1998. — Vol. 80, no. 6. — P. 1130–1133.

[291] Ho T. L. Binary mixtures of Bose condensates of alkali atoms / T. L. Ho, V. B. Shenoy // Phys. Rev. Lett. — 1996. — Vol. 77, no. 16. — P. 3276–3279.

[292] Esry B. D. Hartry-Fock theory for double condensates / B. D. Esry, C. H. Greene, J. P. Burke, J. L. Bohn // Phys. Rev. Lett. — 1997. — Vol. 78, no. 19. — P. 3594–3597.

[293] Anderson B. P. Watching dark solitons decay into vortex rings in a Bose-Einstein condensate / B. P. Anderson, P. C. Haljan, C. A. Regal [et. al.] // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 86, no. 14. — P. 2926–2929.

[294] Busch Th. Dark-bright solitons in inhomogeneous Bose-Einstein condensates / Th. Busch, J. R. Anglin // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 87, no. 1. — P. 010401.

[295] Pérez-García V. M. Symbiotic solitons in heteronuclear multicomponent Bose-Einstein condensates / V. M. Pérez-García, J. Belmonte-Beitia // Phys. Rev. A. — 2005. — Vol. 72, no. 3. — P. 033620.

[296] Ohberg P. Dark solitons in a two-component Bose-Einstein condensate / P. Ohberg, L. Santos // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 86, no. 14. — P. 2918–2921.

[297] Kevrekidis P. G. Families of matter-waves in two-component Bose-Einstein condensates / P. G. Kevrekidis, H. E. Nistazakis, D. J. Frantzeskakis [et. al.] // Eur. Phys. J. D. — 2004. — Vol. 28, no. 1. — P. 181–185.

[298] Coen S. Domain wall solitons in binary mixtures of Bose-Einstein condensates / S. Coen, M. Haelterman // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 87, no. 14. — P. 140401.

[299] Kasamatsu K. Multiple domain formation induced by modulation instability in two-component Bose-Einstein condensates / K. Kasamatsu, M. Tsubota // Phys. Rev. Lett. — 2004. — Vol. 93, no. 10. — P. 100402.

[300] Kevrekidis P. G. Vector solitons with an embedded domain wall / P. G. Kevrekidis, H. Susanto, R. Carretero-González [et. al.] // Phys. Rev. E. — 2005. — Vol. 72, no. 6. — P. 066604.

[301] Skryabin D. V. Instabilities of vortices in a binary mixture of trapped Bose-Einstein condensates: Role of collective excitations with positive and negative energies / D. V. Skryabin // Phys. Rev. A. — 2000. — Vol. 63, no. 1. — P. 013602.

[302] García-Ripoll J. J. Stable and unstable vortices in multicomponent Bose-Einstein condensates / J. J. García-Ripoll, V. M. Pérez-García // Phys. Rev. Lett. — 2000. — Vol. 84, no. 19. — P. 4264–4267.

[303] García-Ripoll J. J. Two-mode theory of vortex stability in multicomponent Bose-Einstein condensates / J. J. García-Ripoll, V. M. Pérez-García // Phys. Rev. A. — 2000. — Vol. 62, no. 3. — P. 033601.

[304] Dutton Z. Effective one-component description of two-component Bose-Einstein condensate dynamics / Z. Dutton, C. W. Clark // Phys. Rev. E. — 2005. — Vol. 71, no. 6. — P. 063618.

[305] Li L. Exact soliton-on-plane-wave solutions for two-component Bose-Einstein condensates / L. Li, B. A. Malomed, D. Mihalache, W. M. Liu // Phys. Rev. E. — 2006. — Vol. 73, no. 6. — P. 066610.

Додаток А. Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

Матеріали дисертації опубліковані в 27 статтях в реферованих провідних фахових журналах [1* - 27*], а також опубліковані в трудах конференцій [28* - 38*].

А.1 Список опублікованих праць за темою дисертації

1*. Lashkin V. M. Stable three-dimensional modon soliton in plasmas / V. M. Lashkin // Phys. Rev. E. — 2017. — Vol. 96, no. 3. — P. 032211.

2*. Lashkin V. M. Influence of the mean flow on zonal flow generation / V. M. Lashkin // Phys. Plasmas. — 2008. — Vol. 15, no. 1. — P. 124502.

3*. Lashkin V. M. Stable three-dimensional spatially modulated vortex solitons in Bose-Einstein condensates / V. M. Lashkin // Phys. Rev. A. — 2008. — Vol. 78, no. 3. — P. 033603.

4*. Lashkin V. M. Two-dimensional multisolitons and azimuthons in Bose-Einstein condensates / V. M. Lashkin // Phys. Rev. A. — 2008. — Vol. 77, no. 2. — P. 025602.

5*. Lashkin V. M. Two-dimensional vortex ring-like and multisoliton nonlinear structures at the upper-hybrid resonance / V. M. Lashkin // Phys. Plasmas. — 2007. — Vol. 14, no. 10. — P. 102311.

6*. Lashkin V. M. N-soliton solutions and perturbation theory for the derivative nonlinear Schrödinger equation with nonvanishing boundary conditions / V. M. Lashkin // J. Phys. A: Math. and Theor. — 2007. — Vol. 40, no. 10. — P. 6119-6132.

7*. Lashkin V. M. Two-dimensional nonlocal vortices, multipole solitons and rotating multisolitons in dipolar Bose-Einstein condensates / V. M. Lashkin // Phys. Rev. A. — 2007. — Vol. 75, no. 4. — P. 043607.

8*. Lashkin V. M. Alfven soliton and emitted radiation in the presence of perturbations / V. M. Lashkin // Phys. Rev. E. — 2006. — Vol. 74, no. 1. — P. 016603.

9*. Lashkin V. M. Generation of solitons by a boxlike pulse in the derivative nonlinear Schrödinger equation with nonvanishing boundary conditions / V. M. Lashkin // Phys. Rev. E. — 2005. — Vol. 71, no. 6. — P. 066613.

10*. Lashkin V. M. Perturbation theory for dark solitons: Inverse scattering transform approach and radiative effects / V. M. Lashkin // Phys. Rev. A. — 2004. — Vol. 70, no. 6. — P. 066620.

11*. Lashkin V. M. Soliton of modified nonlinear Schrodinger equation with random perturbations / V. M. Lashkin // Phys. Rev. E. — 2004. — Vol. 69, no. 1. — P. 016611.

12*. Lashkin V. M. Azimuthal vortex clusters in Bose-Einstein condensates / V. M. Lashkin, E. A. Ostrovskaya, A. S. Desyatnikov, Yu. S. Kivshar // Phys. Rev. A. — 2012. — Vol. 85, no. 1. — P. 013620.

13*. Lashkin V. M. Vector azimuthons in two-component Bose-Einstein condensates / V. M. Lashkin, E. A. Ostrovskaya, A. S. Desyatnikov, Yu. S. Kivshar // Phys. Rev. A. — 2009. — Vol. 80, no. 1. — P. 013615.

14*. Lashkin V. M. Influence of zonal flows on unstable drift modes in ETG turbulence / V. M. Lashkin, Yu. A. Zaliznyak, A. I. Yakimenko // Plasma Phys. and Contr. Fusion. — 2009. — Vol. 51, no. 1. — P. 015008.

15*. Давыдова Т. А. Рассеяние электромагнитной волны на дрейфово-потенциальном вихре / Т. А. Давыдова, В. М. Лашкин // Физика плазмы. — 1993. — Т. 19, № 2. — С. 228-232.

16*. Давыдова Т. А. Коротковолновый ионно-циклотронный солитон / Т. А. Давыдова, В. М. Лашкин // Физика плазмы. — 1991. — Т. 17, № 8. — С. 976-979.

17*. Lashkin V. M. Stable three-dimensional vortex solitons in Bose-Einstein condensates with nonlocal dipole-dipole interaction / V. M. Lashkin, A. I. Yakimenko, Yu. A. Zaliznyak // Physica Scripta. — 2009. — Vol. 79, no. 3. — P. 035305.

18*. Zaliznyak Yu. A. Excitation of zonal flow by the modulational instability in electron temperature gradient driven turbulence / Yu. A. Zaliznyak, A. I. Yakimenko, V. M. Lashkin // J. Plasma Phys. — 2008. — Vol. 74, no. 3. — P. 381-389.

19*. Davydova T. A. Scattering of drift waves by drift vortices / T. A. Davydova, V. M. Lashkin // J. Plasma Phys. — 1997. — Vol. 58, no. 1. — P. 1-10.

20*. Davydova T. A. Drift-wave trapping by drift vortices / T. A. Davydova, V. M. Lashkin // J. Plasma Phys. — 1997. — Vol. 58, no. 1. — P. 11-18.

21*. Davydova T. A. Short-wavelength ion Bernstein nonlinear waves and solitons / T. A. Davydova, A. I. Fishchuk, V. M. Lashkin // J. Plasma Phys. — 1994. — Vol. 52, no. 3. — P. 353-364.

22*. Yakimenko A. I. Two-dimensional nonlinear vector states in Bose-Einstein condensates / A. I. Yakimenko, Yu. A. Zaliznyak, V. M. Lashkin // Phys. Rev. A. — 2009. — Vol.79, no. 4. — P. 043629.

23*. Lashkin V. M. Two-dimensional nonlocal multipole solitons / V. M. Lashkin, A. I. Yakimenko, O. O. Prikhodko // Phys. Lett. A. — 2007. — Vol. 366, no. 2. — P. 422-427.

24*. Yakimenko A. I. Dynamics of two-dimensional coherent structures in nonlocal nonlinear media / A. I. Yakimenko, V. M. Lashkin, O.O. Prikhodko // Phys. Rev. E. — 2006. — Vol. 73, no. 6. — P. 066605.

25*. Давыдова Т. А. Коротковолновые ионные бернстейновские нелинейные структуры / Т. А. Давыдова, В. М. Лашкин, Г. И. Фищук // УФЖ. — 1998. — Т. 45, № 5. — С. 540-545.

26*. Давыдова Т. А. Образование солитонов в неравновесной плазме при развитии пучковой неустойчивости / Т. А. Давыдова, В. М. Лашкин // УФЖ. — 1992. — Т. 37, № 12. — С. 1833-1838.

27*. Давыдова Т. А. Параметрическая ион-ионная неустойчивость пучкового типа в неоднородном ВЧ поле / Т. А. Давыдова, В. М. Лашкин // УФЖ. — 1992. — Т. 37, № 4. — С. 570-577.

28*. Lashkin V. M. Zonal flows and soliton generation in drift wave turbulence / V. M. Lashkin // IX International Conference "Electronics and Applied Physics", october 23-26, 2013, Kyiv, Ukraine .— Kyiv, 2013. — P. 111-112.

29*. Лашкін В. М. Двовимірні нелінійні локалізовані структури – азимутони / В. М. Лашкін, О. А. Островська, А. С. Десятніков, Ю. А. Ківшар // Українська конференція з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу, 25-26 жовтня, 2011, Київ, Україна: анотації доп.— Київ, 2011 — С. 46.

30*. Лашкін В. М. Вплив зональних течій на нестійкі дрейфові моди зумовлені градієнтом електронної температури / В. М. Лашкін, Ю. О. Залізняк, О. І. Якименко // Українська конференція з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу , 27-28 жовтня, 2009, Київ, Україна: анотації доп.— Київ, 2009 — С. 38.

31*. Lashkin V. M. Influence of zonal flows on unstable drift modes in ETG turbulence / V. M. Lashkin, Yu. A. Zaliznyak, A. I. Yakimenko // IV International Conference "Electronics and Applied Physics" , october 23-25, 2008, Kyiv, Ukraine .— Kyiv, 2008. — P. 143-144.

32*. Lashkin V. M. Excitation of zonal flow by the modulational instability in electron temperature gradient driven turbulence / V. M. Lashkin, Yu. A. Zaliznyak, A. I. Yakimenko // III International Conference "Electronics and Applied Physics", october 25-27, 2007, Kyiv, Ukraine .— Kyiv, 2007. — P. 134-135.

33*. Lashkin V. M. Stable two-dimensional soliton and vortex structures at the upper-hybrid resonance / V. M. Lashkin // 13 International Congress on Plasma Physics, may 22-26, 2006, Kiev, Ukraine.— Kiev: ICCP 2006. — P. 44.

34*. Yakimenko A. I. Stable multisolitary structures in plasmas with nonlocal nonlinearities / A. I. Yakimenko, V. M. Lashkin, O. O. Prikhodko // 13 International Congress on Plasma Physics, may 22-26, 2006, Kiev, Ukraine.— Kiev: ICCP 2006. — P. 66.

35*. Lashkin V. M. Stable two-dimensional soliton and vortex structures at the upper-hybrid resonance / V. M. Lashkin // International Workshop "Nonlinear Physics and Mathematics", may 25-27, 2006, Kiev, Ukraine. — Kiev: ICCP 2006. — P. 21.

36*. Lashkin V. M. Alfven solitons in a plasma with fluctuating density / V. M. Lashkin // International Conference on Physics of Low Temperature Plasma , may 11-15, 2003, Kiev, Ukraine .— Kiev, 2003. — P. 11-18-97r.

37*. Davydova T. A. Scattering of drift waves by drift vortices / T. A. Davydova, V. M. Lashkin // International Conference "Physics in Ukraine" ,june 22-27, 1993: Contributed papers "Plasma Physics".— Kiev, 1993. — P. 73-76.

38*. Davydova T. A. Scattering of electromagnetic wave by drift vortices / T. A. Davydova, V. M. Lashkin // International Workshop on turbulence and nonlinear processes in plasmas, april 13-29, 1992, Kiev, Ukraine .— Kiev, 1992. — P. 31-34.

А.2 Апробація результатів дисертації

1. IX International Conference "Electronics and Applied Physics", 23-26 жовтня 2013 р., Київ, Україна (усна доповідь) .

2. Українська конференція з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу, 25-26 жовтня, 2011, Київ, Україна (усна доповідь).

3. Українська конференція з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу , 27-28 жовтня, 2009, Київ, Україна (усна доповідь).

4. IV International Conference "Electronics and Applied Physics" ,23-25 жовтня, 2008, Київ, Україна (усна доповідь).

5. III International Conference "Electronics and Applied Physics", 25-27 жовтня, 2007, Київ, Україна (усна доповідь).

6. 13 International Congress on Plasma Physics, 22-26 травня, 2006,Київ, Україна (усна та стендова доповіді).

7. International Workshop "Nonlinear Physics and Mathematics", 25-27 травня, 2006,Київ, Україна (стендова доповідь).

8. International Conference on Physics of Low Temperature Plasma , 11-15 травня, 2003, Київ, Україна (усна доповідь).

9. International Conference "Physics in Ukraine" ,22-27 червня, 1993, Київ, Україна (усна доповідь).

10. International Workshop on turbulence and nonlinear processes in plasmas, 13-29 квітня, 1992, Київ, Україна (усна доповідь).

Апробація матеріалів дисертації засвідчена в опублікованих матеріалах конференцій [28* - 38*].