

Національна академія наук України  
Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова

**Побережнюк Роман Володимирович**

УДК 531.311; 530.199

**Фазові перетворення та критична точка  
сильновзаємодіючої матерії в ядро-ядерних зіткненнях**

01.04.02 — теоретична фізика

Автореферат  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в відділі високих густин енергії Інституту теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України.

Науковий керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор  
**Горенштейн Марк Ісакович,**  
Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН  
України, головний науковий співробітник відділу фізики  
високих густин енергії.

Офіційні опоненти: доктор фіз.-мат. наук, професор  
**Єжов Станіслав Миколаєвич,**  
Київський Національний Університет ім. Тараса Шевченка,  
професор кафедри фізики металів;

доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник  
**Дзюблик Олексій Ярославович,**  
Інститут ядерних досліджень НАН України, провідний  
науковий співробітник відділу теоретичної фізики.

Захист відбудеться «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 р. об \_\_\_ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.191.01 Інституту теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України за адресою: вул. Метрологічна 14-б, м. Київ, 03143, Україна.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України за адресою: вул. Метрологічна 14-б, м. Київ, 03143, Україна.

Автореферат розісланий «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2017 р.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради Д 26.191.01  
доктор фіз.-мат. наук

В. Є. Кузьмичев

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Ключовою проблемою вивчення фазових переходів та критичної точки сильновзаємодіючої матерії є виявлення експериментальних сигналів їх наявності. Зокрема, становлять інтерес теоретичні передбачення впливу можливого фазового переходу деконфайнмента на утворення дивності в непружних протон-протонних ( $p+p$ ) взаємодіях, відкритої чарівності в зіткненнях ядер свинець-свинець ( $Pb+Pb$ ) та на флуктуації числа частинок.

Також очікується, що флуктуації є чутливими до критичної точки ядерної матерії. Відома феноменологія нуклон-нуклонного потенціалу свідчить про взаємодії відштовхування на малих відстанях та про взаємодії притягання на середніх відстанях. Найпростішою моделлю що враховує взаємодії притягання та відштовхування, а також містить фазовий перехід першого роду та критичну точку, є модель ван дер Ваальса. Класичне рівняння стану ван дер Ваальса (vdW) нещодавно було узагальнене таким чином, щоб включати ефекти квантової статистики, і застосоване до опису симетричної ядерної матерії. В рамках цієї моделі можливе отримання теоретичних передбачень щодо флуктуацій числа нуклонів в околі фазового переходу та критичної точки ядерної матерії.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконана у відповідності з державною науково-дослідною програмою, що виконувалися в Інституті теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України: “Дослідження сильновзаємодіючої матерії та структури адронів в релятивістських зіткненнях адронів та ядер” 2013 – 2017 рр. (номер державної реєстрації в УкрІНТЕІ – 0113U001092, шифр 1. 4. 1).

**Мета і задачі дослідження.** Метою досліджень, проведених у дисертації, є теоретичний опис можливих сигналів фазових переходів та критичної точки сильно-взаємодіючої матерії в ядро-ядерних зіткненнях. Для її досягнення було визначено наступні задачі:

1. дослідити вплив можливого фазового переходу деконфайнмента на залежність від енергії зіткнення наступних спостережуваних величин: числа дивних адронів в непружних  $p+p$  взаємодіях, числа чарівних адронів в зіткненнях  $Pb+Pb$ , флуктуацій від зіткнення до зіткнення числа адронів;
2. обчислити термодинамічні функції газу взаємодіючих  $\pi$ -мезонів;
3. одержати вирази для флуктуацій числа нуклонів та дослідити характеристики критичної поведінки в околі критичної точки ядерної матерії.

**Методи дослідження.** У дисертації для знаходження характеристик утворення адронів в релятивістських ядро-ядерних та протон-протонних зіткненнях застосовувалась статистична модель ранньої стадії (Statistical Model of the Early Stage, SMES), що містить фазовий перехід деконфайнмента. Для опису систем взаємодіючих піонів та нуклонів було застосовано квантову модель ван дер Ваальса (Quantum van der Waals, QvdW), зі статистикою Бозе та Фермі, відповідно. Для чисельних розрахунків в рамках цих моделей використовувалися методи програмування.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Серед нових наукових результатів, отриманих у роботі, можна відзначити наступні:

1. Поширено якісні теоретичні оцінки моделі SMES залежності відношення числа  $K^+$  мезонів до  $\pi^+$  мезонів від енергії зіткнення на зіткнення протонів та малих ядер.
2. Зроблено якісну оцінку можливого впливу фазового переходу деконфайнмента на поведінку множинності чарівних мезонів як функції енергії зіткнення до зіткнень ядер свинець-свинець.
3. Запропоновано нові можливі сигнали деконфайнменту, що засновані на вимірюванні сильноінтенсивних мір флуктуацій від зіткнення до зіткнення вимірюваних множинностей адронів.
4. Знайдено обмеження в застосуванні рівноважної статистичної моделі QvdW до опису системи взаємодіючих  $\pi$ -мезонів, що проявляється у наявності найбільшої можливої температури системи в рамках такої моделі.
5. Одержано вирази для флуктуацій, зокрема коефіцієнта асиметрії та куртозиса розподілу числа взаємодіючих нуклонів, в області критичної точки фазового переходу рідина-газ нескінченної ядерної матерії в наближенні середнього поля. Проаналізовано сингулярну поведінку флуктуацій в околі критичної точки. У випадку класичного газу ван дер Ваальса в великому канонічному ансамблі знайдено аналітичні вирази для коефіцієнта асиметрії та куртозиса розподілу числа частинок.
6. Обчислено критичні індекси критичної точки моделі ядерної матерії в рамках моделі QvdW.

**Практичне значення одержаних результатів.** Результати дисертаційної роботи можуть бути корисними для пошуку сигналів фазового переходу деконфайнмента та для уточнення положення критичної точки ядерної матерії. Також робота вносять вклад в розуміння критичної поведінки флуктуацій в околі критичної точки, зокрема критичної точки ядерної матерії.

#### **Особистий внесок здобувача.**

В роботі [1] модель SMES релятивістських ядро-ядерних зіткнень була переформульована з врахуванням точного закону збереження дивності. Знайдено вплив точного закону збереження дивності на термодинамічні функції та положення фазового переходу. Обчислено залежність відношення дивності до ентропії у зіткненнях в області енергій SPS від енергії зіткнення та від розміру ядер учасників.

В роботі [2] в рамках моделі QvdW ядерної матерії одержано вирази для коефіцієнта асиметрії та куртозиса розподілу числа нуклонів як функцій температури та баріонного хімічного потенціалу. Досліджено сингулярну поведінку цих величин в околі критичної точки ядерної матерії.

В роботі [3] одержано вирази для коефіцієнта асиметрії та куртозиса розподілу числа частинок як функцій приведеної температури та приведеної густини частинок в газі ван дер Ваальса у великому канонічному ансамблі.

В роботі [4] виявлено явище граничної температури в моделі QvdW газу взаємодіючих  $\pi$ -мезонів. Знайдено залежність граничної температури від параметрів моделі та виявлено властивості поведінки фізичних величин в околі граничної температури. Обчислено значення параметрів моделі Хагедорна адронної матерії, при

яких поведінка фізичних величин в цій моделі адронної матерії є найбільш близькою до результатів моделі QvdW.

В роботі [5] в рамках моделі SMES релятивістських ядро-ядерних зіткнень обчислено сильноінтенсивні міри флуктуацій числа частинок. Показано залежність цих величин від флуктуацій повної енергії системи.

В роботі [6] в рамках моделі SMES релятивістських ядро-ядерних зіткнень обчислено залежність повного числа чарівних та анти-чарівних частинок від енергії зіткнення з врахуванням точного закону збереження чарівності.

В роботі [7] з використанням одних і тих же припущень про властивості ядерної матерії при нульовій температурі одержано значення параметрів моделей QvdW, Валечки та гібридної моделі ядерної матерії. Знайдено та порівняно положення критичної точки в цих моделях при даних значеннях параметрів. Обчислено критичні індекси критичної точки газу ван дер Ваальса зі статистикою Фермі.

В роботі [8] обчислено сильноінтенсивні міри флуктуацій числа нуклонів та енергії в області критичної точки ядерної матерії з рівнянням стану ван дер Ваальса.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертаційної роботи доповідались на конференціях: Zim'anyi Winter School on Heavy Ion Physics, Будапешт, Угорщина, 5-9 грудня 2016 р. (доповідь), Конференція Молодих Вчених Сучасні Проблеми Теоретичної Фізики, Київ, Україна, 13-15 грудня 2016 р. (доповідь), Zim'anyi Winter School on Heavy Ion Physics, Будапешт, Угорщина, 5-9 грудня 2017 р. (доповідь), Конференція Молодих Вчених Сучасні Проблеми Теоретичної Фізики, Київ, Україна, 12-14 грудня 2017 р. (доповідь). Результати також обговорювалися на семінарах відділу фізики високих густин енергії Інституту теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова.

**Публікації.** Результати дисертації опубліковані у 8 журнальних статтях [1–8] та матеріалах конференцій [9–12].

**Структура дисертації.** Робота складається зі вступу, чотирьох розділів основної частини, загальних висновків, додатка. Обсяг дисертації 120 сторінок, список використаних джерел (127 найменувань) зі списком публікацій автора (10 найменувань) займають 12 сторінок.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

**Перший розділ** присвячено статистичній моделі ранньої стадії (Statistical Model of the Early Stage, SMES), що є моделлю деконфайнмента в релятивістських ядро-ядерних зіткненнях. Тут одержуються передбачення моделі для енергетичних залежностей дивності (в  $p+p$  взаємодіях), чарівності та сильноінтенсивних мір флуктуацій числа частинок (в  $Pb+Pb$  зіткненнях) в області енергій зіткнень прискорювача SPS.

Моделю SMES (M. Gazdzicki, M. I. Gorenstein, Acta Phys. Polon. B 30, 1999) заснована на наступних припущеннях: нуклони сповільнюються і втрачають частку  $\eta < 1$  їхньої початкової енергії в центральних ядро-ядерних зіткненнях. Вони пролітають далі уносячи їхні баріонні та електричні заряди. Таким чином, розглядається нова народжена матерія. Всі заряди цієї матерії дорівнюють нулю. Припускається, що ця

матерія утворюється статистичним чином та знаходиться в рівновазі. Її властивості повністю визначаються доступною енергією та об'ємом, в якому відбувається статистичне створення нових частинок.

Об'єм обирається як лоренцівськи-скорочений в продовжному напрямку об'єм, що займають нуклони учасники від одного ядра:  $V = \frac{8}{3}\pi r_0^3 A_p m_N / \sqrt{s_{NN}}$ , де  $m_N$  – це маса нуклона,  $\sqrt{s_{NN}}$  – це енергія нуклонної пари в системі центра мас,  $A_p$  – це кількість нуклонів учасників від одного ядра. Значення параметра  $r_0$  обране  $1.30 \text{ fm}$  з умови, що значення середньої баріонної густини в ядрі,  $\rho_0 = 0.11 \text{ fm}^{-3}$ . Вивільнена при зіткненні (непружна) енергія записується як:  $E = \eta (\sqrt{s_{NN}} - 2m_N) A_p$ , де припускається, що параметр  $\eta$  не залежить від енергії зіткнення та розміру системи. Для чисельних розрахунків використовується значення  $\eta = 0.67$ . Густина енергії на ранній стадії дорівнює  $\varepsilon \equiv E/V$ . Припускається, що ентропія створена на ранній стадії зіткнення, приблизно зберігається підчас розширення народженої речовини.

Сильновзаємодіючі елементарні частинки - це кварки ( $u, d, s, c, b$  та  $t$ ), відповідні антикварки та глюони. Вкладом  $c, b$  та  $t$  кварків в термодинамічні функції можна знехтувати через їхню велику масу. В моделі вважається, що маси глюонів та  $u$  і  $d$  (анти-) кварків дорівнюють нулю. У випадку кварків та глюонів використовується рівняння стану моделі мішків, тобто рівняння стану ідеального газу з поправкою у вигляді мішкової константи  $B$ :  $p_Q(T) = p_Q^{\text{id}}(T) - B$ ,  $\varepsilon_Q(T) = \varepsilon_Q^{\text{id}}(T) + B$ , де  $p_Q^{\text{id}}$  та  $\varepsilon_Q^{\text{id}}$  це, відповідно, тиск та густина енергії ідеального мультикомпонентного газу кварків та глюонів в великому канонічному ансамблі (GCE). Для адронного стану обертається рівняння стану ідеального газу:  $p_Q(T) = p_Q^{\text{id}}(T)$ ,  $\varepsilon_Q(T) = \varepsilon_Q^{\text{id}}(T)$ .

Модель припускає, що на ранній стадії ядро-ядерних зіткнень завжди реалізується стан з максимальною ентропією. Умова максимальної ентропії еквівалентна припущенню фазового перетворення першого роду з критерієм Гіббса для змішаної фази. При даній температурі  $T$  система знаходиться в чистій адронній (white, W) або кварковій (quark, Q) фазі в залежності від того, тиск якої фази є більшим. Змішана фаза реалізується якщо обидва тиски рівні між собою,  $p_W(T) = p_Q(T)$ . Значення мішкової константи  $B = 570 \text{ MeV/fm}^3$  фіксується з припущення значення температури перетворення між W та Q фазами  $T_c = 200 \text{ MeV}$ .

В дисертаційній роботі припущення та параметри моделі SMES збережені, наскільки це можливо, без змін, що дозволяє пряме порівняння результатів роботи з результатами опублікованими раніше.

В  $p+p$  взаємодіях на енергіях SPS середні множинності утворених дивних та анти-дивних частинок менші за одиницю. Таким чином, в цьому випадку, повинно бути враховане точне збереження дивності. В статистичних моделях це досягається в рамках формалізму канонічного ансамблю (CE). Статистична сума дивних частинок в CE враховує, що в кожному мікроскопічному стані системи кількість дивних та анти-дивних зарядів рівна,  $N_s = N_{\bar{s}}$ . Для чистих фаз вона має простий вигляд:

$$Z_{ce}(T, V, \lambda) = \sum_{N_s=0}^{\infty} \sum_{N_{\bar{s}}=0}^{\infty} \frac{z^{N_s}}{N_s!} \frac{z^{N_{\bar{s}}}}{N_{\bar{s}}!} \delta(N_s - N_{\bar{s}}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \exp \left[ z (e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \right] = I_0(2z),$$

де  $z = z_{W,Q} = \lambda \frac{1}{2} V n_{W,Q}^s(T)$ ;  $I$  – це модифікована функція Бесселя першого роду. Допоміжний параметр  $\lambda$  введено для обчислення повної густини дивності в СЕ:

$$n_{W,Q}^{s(CE)}(T, V) = \frac{1}{V} \left[ \frac{\partial \ln Z_{ce}}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=1} = n_{W,Q}^s(T) \frac{I_1 [V n_{W,Q}^s(T)]}{I_0 [V n_{W,Q}^s(T)]}. \quad (1)$$

Відношення функцій Бесселя  $I_1$  та  $I_0$  в рівнянні (1) відображає канонічне пригнічення дивності (порівняно з її значенням в GCE при тих же значеннях об'єму та густини енергії) як результат накладання закону збереження повної дивності в кожному мікроскопічному стані в СЕ. Враховуючи те, що умова нульової повної дивності має виконуватись усією системою, а не окремо її фазами, в змішаній фазі рівняння (1) має бути замінене на наступне:

$$n_{W,Q}^{s,\text{mix}}(T, V, \xi) = n_{W,Q}^s(T) \frac{I_1[X]}{I_0[X]}, \quad \text{де } X = X(T, V, \xi) = \xi V n_Q^s + (1 - \xi) V n_W^s \quad (2)$$

це повне число дивних та анти-дивних частинок (адронів та кварків разом) в змішаній фазі в GCE. Для того, щоб обчислити термодинамічні величини системи з врахуванням точного закону збереження дивності, вклади дивних частинок в ці величини були представлені як функції густини дивних частинок.

В змішаній фазі, температура системи  $T$  та параметр  $\xi$  одержуються як розв'язок рівнянь:

$$\xi \varepsilon_Q^{\text{mix}}[T, X] + (1 - \xi) \varepsilon_W^{\text{mix}}[T, X] = \varepsilon(\sqrt{s_{NN}}), \quad p_Q^{\text{mix}}[T, X] = p_W^{\text{mix}}[T, X], \quad (3)$$

де вклади дивних частинок в  $\varepsilon_{W,Q}^{\text{mix}}$  та  $p_{W,Q}^{\text{mix}}$  є пропорційними до густини частинок в змішаній фазі,  $n_{W,Q}^{s,\text{mix}}$ .

Енергія зіткнення  $\sqrt{s_{NN,1}}$  та температура  $T_1$ , на початку змішаної фази, а також  $\sqrt{s_{NN,2}}$  та  $T_2$ , в кінці змішаної фази, отримуються як розв'язок рівнянь (3) при  $\xi = 0$  та  $\xi = 1$ , відповідно. Знаходимо:

$$T_1 = 203.4 \text{ MeV}, \quad \sqrt{s_{NN,1}} = 7.20 \text{ GeV}, \quad T_2 = 202.9 \text{ MeV}, \quad \sqrt{s_{NN,2}} = 10.75 \text{ GeV}.$$

Розгляд дивних частинок в рамках СЕ призводить до того, що температури на початку та в кінці змішаної фази є різними. Проте, ця різниця не є великою. Загалом, обчислення показують лише маленькі зміни температури, тиску та густини енергії системи. Таким чином, дивність є суттєво пригніченою в малих системах.

Відношення дивності до ентропії обчислене для центральних Pb+Pb зіткнень (GCE результат) та для непружних p+r взаємодій (СЕ результат з  $A_p = 1$ ) представлено на Рис. 1 ліворуч як функція енергії зіткнення, що продовжена аж до діапазону енергій ЛНС. На вкладці на цьому рисунку показане відношення  $r \equiv [n^s/s]_{\text{CE}}/[n^s/s]_{\text{GCE}}$  як функція  $A_p$  при трьох енергіях зіткнення в області фазового переходу. Видно, що канонічне пригнічення відношення дивності до ентропії сильно залежить від кількості учасників  $2A_p$ . Зі зростанням  $A_p$  канонічне

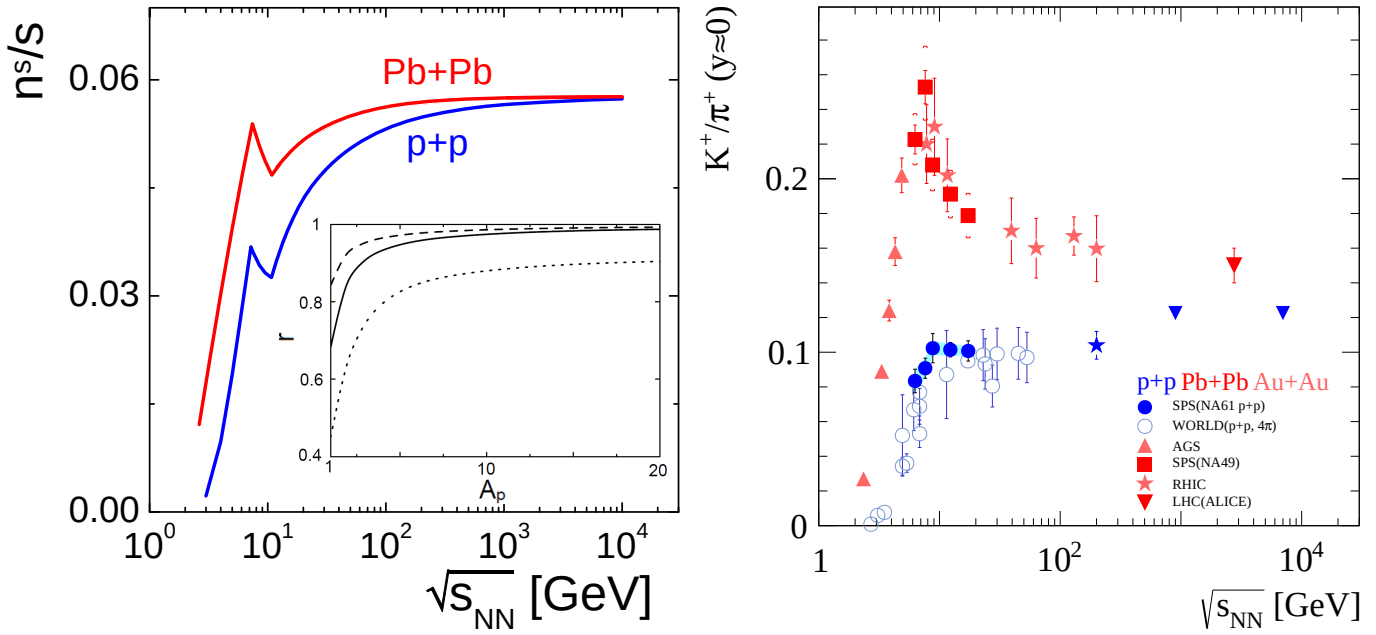


Рис. 1: Ліворуч: Залежність відношення дивності до ентропії від енергії зіткнення обчислена в рамках моделі SMES для центральних зіткнень Pb+Pb та для непружних p+p взаємодій. Праворуч: Експериментально одержані залежності від енергії зіткнення відношення числа  $K^+$ -мезонів до  $\pi^+$ -мезонів.

пригнічення спадає. Якщо  $\sqrt{s_{NN}} > 10$  GeV параметр пригнічення  $r$  є близьким до одиниці вже при  $A_p > 10$ .

Обчислена залежність від енергії зіткнення відношення дивності до ентропії в p+p взаємодіях якісно подібна до вимірної колаборацією NA61/SHINE для відношення  $K^+$  до  $\pi^+$  (Рис. 1 праворуч). Очевидно, що SMES, найпростіша модель деконфайнмента, має бути суттєво видозмінена для того, щоб досягнути кількісної згоди з даними.

Також в розділі 1 в рамках SMES була обчислена залежність від енергії зіткнення середнього числа  $c\bar{c}$ -пар в центральних Pb+Pb зіткненнях. Чарівні ступені вільності були введені в модель з припущенням, що середня множинність носіїв чарівності мала ( $\lesssim 1$ ). Це припущення має два наслідки: (i) можна знехтувати вкладом чарівних ступенів вільності в густину енергії та тиск системи (таким чином, положення фазового переходу лишається без змін); (ii) необхідно розглядати чарівні частинки в канонічному ансамблі навіть для Pb+Pb зіткнень. Аналогічно випадку дивності, СЕ формулювання для чарівності призводить до пригнічення продукції чарівності порівняно з продукцією в GCE відповідно до фактору, що дорівнює відношенню функцій Бесселя  $I_1$  та  $I_0$ . Одержану для центральних Pb+Pb зіткнень енергетичну залежність середньої множинності  $c\bar{c}$ -пар,  $\langle N_{c\bar{c}} \rangle$ , з припущенням маси чарівного кварку 1.3 GeV, представлено на Рис. 2

Середня множинність чарівності та її відношення до ентропії демонструє швидке зростання як функція енергії зіткнення в розглянутій області енергій. Обчислення показують, що в той час як поведінка відношення дивності до ентропії проявляє “рогоподібну” структуру (див. Рис. 1), відношення чарівності до ентропії є монотонною функцією енергії зіткнення. Проте, ця структура появляється при припущенні



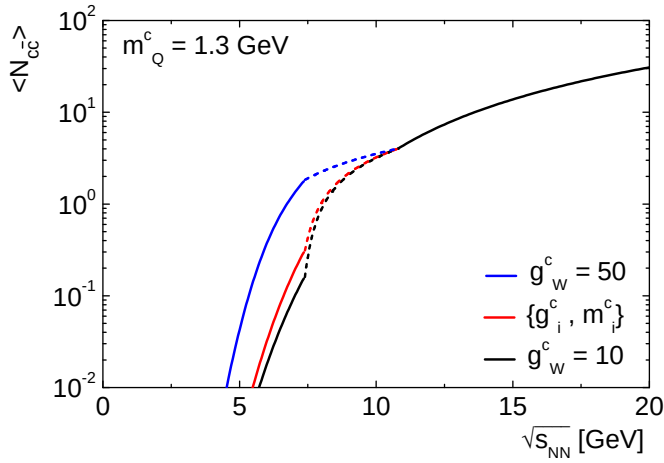


Рис. 2: Залежність від енергії зіткнення середньої множинності  $c\bar{c}$ -пар для центральних Pb+Pb зіткнень. Нижня та верхня лінії відповідають припущенням маси  $D$ -мезона  $m_W^c = 1.9 \text{ GeV}$  та ефективного фактору виродження  $g_W^c = 10$  та  $g_W^c = 50$ , відповідно. Середня лінія отримана з врахуванням вкладів від усіх невидимих  $D$ -мезонів з відповідними масами та факторами виродження  $\{m_i^c, g_i^c\}$ . Пунктирними ділянками позначена область фазового переходу.

великих (нефізичних) значень ефективного фактору виродження чарівних адронів  $g_W^c = 50$  та маси чарівного кварка  $m_Q^c = 1.5 \text{ GeV}$ .

В центральних Pb+Pb зіткненнях при  $\sqrt{s_{NN}} = 17.3 \text{ GeV}$ ,  $\langle N_{c\bar{c}} \rangle \cong 20$  для  $m_Q^c = 1.3 \text{ GeV}$  та  $\langle N_{c\bar{c}} \rangle \cong 8$  для  $m_Q^c = 1.5 \text{ GeV}$ . Ці значення є суттєво більшими ніж експериментальне обмеження,  $\langle N_{c\bar{c}} \rangle \cong 3.6$ . Передбачення моделі SMES є чутливими до припущених значень маси зачарованого кварку та фактору виродження чарівних частинок в адронній фазі. Але навіть для екстремальних значень цих параметрів передбачення SMES не узгоджуються з експериментальними даними. Таким чином, кількісний опис продукції чарівності в рамках SMES вимагає перегляду параметрів та/або припущень моделі.

Також в розділі 1 одержуються передбачення моделі SMES щодо флуктуацій спостережуваних величин в ядро-ядерних (A+A) зіткненнях. Припустимо, що енергія фаєрбола  $E$  та об'єм  $V$  змінюються від зіткнення до зіткнення відповідно до функції розподілу ймовірності  $P(E, V)$ . Таким чином, густина енергії,  $\varepsilon = E/V$ , також може змінюватися від зіткнення до зіткнення, що призводить до змін в інших властивостях матерії. Ці зміни залежать від рівняння стану даної матерії. Для цілей роботи достатньо охарактеризувати розподіл  $P(E, V)$  за допомогою його пяти параметрів, що включають перші та другі моменти:

$$\langle \varepsilon \rangle, \quad \langle V \rangle, \quad \frac{\sqrt{\langle (\delta \varepsilon)^2 \rangle}}{\langle \varepsilon \rangle}, \quad \frac{\sqrt{\langle (\delta V)^2 \rangle}}{\langle V \rangle}, \quad \frac{\langle \varepsilon V \rangle - \langle \varepsilon \rangle \langle V \rangle}{\sqrt{\langle (\Delta \varepsilon)^2 \rangle \langle (\Delta V)^2 \rangle}}, \quad (4)$$

останні три з яких, дві нормовані дисперсії та коефіцієнт кореляції – безрозмірні.

Оскільки флуктуації об'єму, що відбуваються від події-до-події не можуть бути усунені в експериментальних дослідженнях A+A зіткнень, важливо мінімізувати їх ефект. Це може бути досягнуто з використанням спеціальних мір флуктуацій. В рамках моделі незалежних джерел було показано (М. I. Gorenstein, М. Gazdzicki, Phys. Rev. C 84, 2011) можливість побудови мір флуктуацій з перших та других моментів двох екстенсивних величин події,  $A$  та  $B$ , які незалежні від розподілу числа джерел. Це, так звані, *сильноінтенсивні величини*. Можна побудувати дві сім'ї

сильноінтенсивних величин:

$$\Delta[A, B] = \frac{1}{C_\Delta} \left[ \langle B \rangle \omega[A] - \langle A \rangle \omega[B] \right], \quad (5)$$

$$\Sigma[A, B] = \frac{1}{C_\Sigma} \left[ \langle B \rangle \omega[A] + \langle A \rangle \omega[B] - 2(\langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle) \right], \quad (6)$$

де  $\omega[X] \equiv (\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2) / \langle X \rangle$ . Нормуючі множники  $C_\Delta$  та  $C_\Sigma$  повинні бути пропорційні першим моментам будь-якої екстенсивної величини. Сильноінтенсивні міри флуктуацій було обчислено для шести пар величин події:

$$[E, V], [N, V], [N_S, V], [N, E], [N_S, E], [N_S, N], \quad (7)$$

де  $N$  та  $N_S$  позначають множинності всіх частинок та дивних частинок, відповідно. В декількох розглянутих випадках залежність від енергії зіткнення значно модифікується в області фазового переходу. Це надає підстави для експериментального вимірювання сильноінтенсивних мір флуктуацій в ядро-ядерних зіткненнях з метою пошуку передбачених сигналів деконфайнмента. Найбільш сильна модифікація проявляється для  $\Delta[N_S, N]$  (див. Рис. 3). В цьому випадку використовується нормування  $C_\Delta = \langle N \rangle - \langle N_S \rangle$ , що призводить до  $\Delta[N, N_S] = 1$  при  $\sqrt{\langle (\delta V)^2 \rangle} / \langle V \rangle = \sqrt{\langle (\delta \varepsilon)^2 \rangle} / \langle \varepsilon \rangle = 0$ .

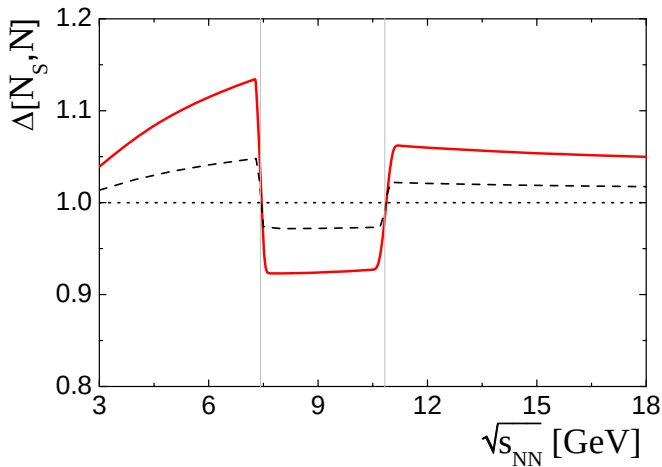


Рис. 3:  $\Delta[N_S, N]$  як функція енергії зіткнення для центральних Pb+Pb зіткнень в області енергій CERN SPS. Використовуються нормуючий множник  $C_\Delta = \langle N \rangle - \langle N_S \rangle$ . Суцільна, пунктирна, і точкована лінії відповідають  $\sqrt{\langle (\delta \varepsilon)^2 \rangle} / \langle \varepsilon \rangle$  рівному 0.17, 0.13, та 0, відповідно. Вертикальні лінії позначають початок та кінець області змішаної фази.

В роботі припускається, що нормована дисперсія флуктуацій об'єму  $\sqrt{\langle (\delta V)^2 \rangle} / \langle V \rangle = 0$ , що є хорошим наближенням для центральних Pb+Pb зіткнень. Використовується три значення нормованої дисперсії флуктуацій густини енергії  $\sqrt{\langle (\delta \varepsilon)^2 \rangle} / \langle \varepsilon \rangle$ : 0.17 (суцільна лінія), 0.13 (пунктирна лінія), та 0 (точкована лінія). Значення  $\sqrt{\langle (\delta \varepsilon)^2 \rangle} / \langle \varepsilon \rangle = 0.17$  розглядається як верхня границя, що ґрунтується на результатах UrQMD та HSD симуляцій. Кореляція між  $E$  та  $V$  прирівнюється нулю. Припускається, що флуктуації  $N$  та  $N_S$  при  $\sqrt{\langle (\delta V)^2 \rangle} / \langle V \rangle = \sqrt{\langle (\delta \varepsilon)^2 \rangle} / \langle \varepsilon \rangle = 0$  являються незалежними та пуассонівськими.

На додаток, в роботі запропоновано новий формалізм моделювання флуктуацій в зіткненнях високих енергій, який може знадобитися в майбутніх дослідженнях. А саме, запропоновано міру флуктуацій  $\Omega[A, B] \equiv \omega[A] - (\langle A B \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle) / \langle B \rangle$ ,

що є лінійною комбінацією  $\Delta$  та  $\Sigma$ . Тут  $A$  та  $B$  – це будь-які дві екстенсивні величини системи. Розглянемо модель ідеального больцманівського газу в великому канонічному ансамблі. Припустимо, що  $A$  та  $B$  є незалежними при сталому об’ємі системи. Нехай  $\omega^*[A]$  та  $\omega^*[B]$  – це нормовані варіації розподілів величин  $A$  та  $B$  при сталому об’ємі. Тоді, можна показати, що  $\omega^*[A] = \Omega[A, B]$ ,  $\omega^*[B] = \Omega[B, A]$  при будь-яких гаусівських флуктуаціях об’єму. Передбачення моделі SMES для  $\Omega$ -міри флуктуацій пар величин (7) також одержано в роботі.

**Другий розділ** присвячено моделі ван дер Ваальса в рамках формалізму великого канонічного ансамбля (V. Vovchenko, D. V. Anchishkin and M. I. Gorenstein, J. Phys. A 48, no. 30, 2015). Тут одержуються вирази для флуктуацій числа частинок в області критичної точки цієї моделі.

Рівняння стану ван дер Ваальса (vdW) – це проста аналітична модель функції тиску  $p$  для рівноважних систем частинок зі взаємодіями, як притягання, так і відштовхування. В канонічному ансамблі вона має вигляд,

$$p(T, n) = \frac{NT}{V - bN} - a \frac{N^2}{V^2} \equiv \frac{nT}{1 - bn} - an^2, \quad (8)$$

де  $n \equiv N/V$  – це густина числа частинок, тоді як vdW параметри  $a > 0$  та  $b > 0$  описують, відповідно, взаємодію притягання та відштовхування. Для того, щоб застосувати рівняння стану vdW до опису систем зі змінним числом частинок та обчислити флуктуації числа частинок необхідне формулювання моделі у великому канонічному ансамблі.

Таке формулювання можна одержати у вигляді трансцендентного рівняння для густини числа частинок  $n \equiv n(T, \mu)$  як функції  $T$  та  $\mu$ :

$$n(T, \mu) = \frac{n^{\text{id}}(T, \mu^*)}{1 + bn^{\text{id}}(T, \mu^*)}, \quad \mu^* = \mu - T \frac{bn}{1 - bn} + 2an, \quad (9)$$

де  $n^{\text{id}}$  – це густина числа частинок в ідеальному больцманівському газі. Тоді тиск vdW в великому канонічному ансамблі  $p(T, \mu)$  одержується підстановкою  $n(T, \mu)$  з (9) в рівняння (8).

В даному розділі цей результат використовуються як відправна точка для обчислення нормованої варіації, коефіцієнта асиметрії та куртозиса розподілу числа частинок, а також сильноінтенсивних мір флуктуацій числа частинок та енергії.

Нехай  $\mathcal{P}(N)$  – це нормований розподіл числа частинок. Тоді  $k$ -тий момент  $\langle N^k \rangle = \sum_N N^k \mathcal{P}(N)$ . Розглянемо варіацію,  $\sigma^2 = \langle (\Delta N)^2 \rangle$ , де  $\Delta N \equiv N - \langle N \rangle$ . Нормована варіація,  $\omega[N] \equiv \sigma^2 / \langle N \rangle$ , характеризує ширину розподілу  $\mathcal{P}(N)$ . Коефіцієнт асиметрії (Skewness)  $S\sigma = \langle (\Delta N)^3 \rangle / \sigma^2$  розподілу визначає степінь асиметрії розподілу  $\mathcal{P}(N)$  навколо його середнього значення  $\langle N \rangle$ . Куртозис (Kurtosis) розподілу  $\kappa\sigma^2 = [\langle (\Delta N)^4 \rangle - 3\langle (\Delta N)^2 \rangle^2] / \sigma^2$  є мірою “піковості” розподілу ймовірності  $\mathcal{P}(N)$ .

У великому канонічному ансамблі флуктуації числа частинок можуть бути охарактеризовані безрозмірними кумулянтами (сприйнятливостями),  $k_n$ , які пов’язані

Рис. 4: Нормована варіація  $\omega[N]$  на  $(\tilde{n}, \tilde{T})$  фазовій діаграмі як для стабільних, так і для метастабільних чистих фаз. Показані декілька ліній сталих значень  $\omega[N]$ . Сіра зона відображає область, де чиста фаза являється нестабільною.

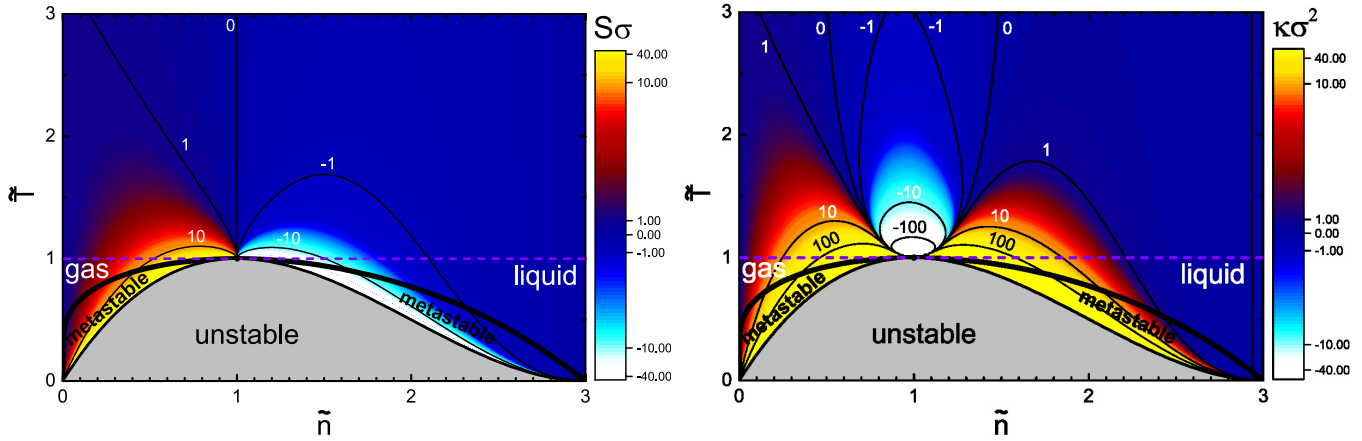
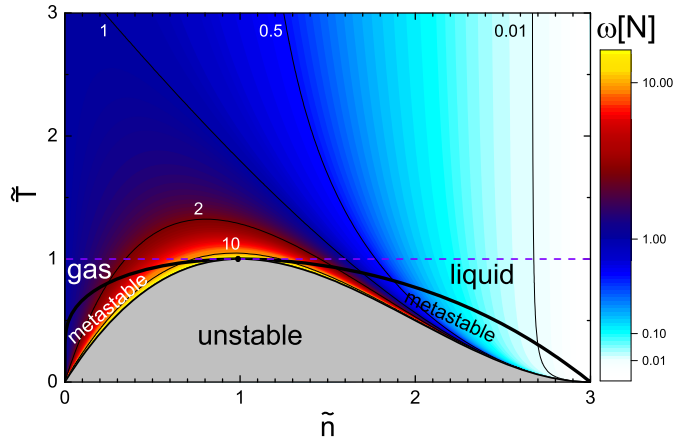


Рис. 5: Те саме, що й на Рис. 4, але для коефіцієнта асиметрії  $S\sigma$  (ліворуч) та куртозиса  $\kappa\sigma^2$  (праворуч).

з моментами розподілу числа частинок. Це дозволяє отримати наступні аналітичні вирази:

$$\omega[N] = \frac{k_2}{k_1} = \frac{T}{n} \left( \frac{\partial n}{\partial \mu} \right)_T = \left[ \frac{1}{(1 - bn)^2} - \frac{2an}{T} \right]^{-1}, \quad (10)$$

$$S\sigma = \frac{k_3}{k_2} = \omega[N] + \frac{T}{\omega[N]} \left( \frac{\partial \omega[N]}{\partial \mu} \right)_T, \quad (11)$$

$$\kappa\sigma^2 = \frac{k_4}{k_2} = (S\sigma)^2 + T \left( \frac{\partial [S\sigma]}{\partial \mu} \right)_T. \quad (12)$$

В термінах приведених змінних,  $\tilde{T} \equiv T/T_c$  та  $\tilde{n} \equiv n/n_c$ , рівняння (10)-(12) приймають вигляд

$$\omega[N] = \frac{1}{9} \left[ \frac{1}{(3 - \tilde{n})^2} - \frac{\tilde{n}}{4\tilde{T}} \right]^{-1}, \quad S\sigma = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{(3 - \tilde{n})^2} - \frac{\tilde{n}}{4\tilde{T}} \right]^{-2} \left[ \frac{1 - \tilde{n}}{(3 - \tilde{n})^3} \right], \quad (13)$$

$$\kappa\sigma^2 = 3(S\sigma)^2 - 2\omega[N]S\sigma - 54(\omega[N])^3 \frac{\tilde{n}^2}{(3 - \tilde{n})^4}. \quad (14)$$

Флуктуації (13)-(14) як функції  $\tilde{T}$  та  $\tilde{n}$ , показані на Рис. 4 та 5.

Нормована варіація, коефіцієнт асиметрії  $S\sigma$  та куртозис  $\kappa\sigma^2$  розподілу числа частинок є розбіжними в критичній точці. Вводячи величини  $\rho = \tilde{n} - 1$  та  $\tau = \tilde{T} - 1$  знаходимо при  $\tau \ll 1$  та  $\rho \ll 1$ :  $\omega[N] \cong \frac{4}{9} [\tau + \frac{3}{4}\rho^2 + \tau\rho]^{-1}$ , та  $S\sigma \cong -\frac{2}{3}\rho [\tau + \frac{3}{4}\rho^2 + \tau\rho]^{-2}$ . При  $\tau = 0$  та  $\rho \ll 1$ :  $\kappa\sigma^2 \propto \rho^{-6}$ . При критичній густині  $\tilde{n} = 1$  та температурах трохи вище критичної,  $\tilde{T} > 1$ :  $\kappa\sigma^2 \propto -\tau^{-3}$ .

Область *кросоверу* фазової діаграми (область де має місце швидкий, проте плавний перехід між газоподібною та рідинною фазами) характеризується великим значенням нормованої варіації, майже нульовим коефіцієнтом асиметрії і суттєво від'ємним куртозисом. Нетривіальна структура коефіцієнта асиметрії та куртозиса спостерігається в великій області навколо критичної точки на фазовій діаграмі; зокрема, обидві ці міри можуть приймати великі додатні та від'ємні значення. Газоподібна фаза характеризується додатними значеннями коефіцієнта асиметрії, тоді як рідинна фаза – від'ємними.

Нормальний розподіл Гауса відповідає нульовим значенням коефіцієнта асиметрії та куртозиса. Таким чином, (сильні) відхилення  $S\sigma$  та/або  $\kappa\sigma^2$  від нуля є сигналами (сильно) не-гаусівської форми розподілу числа частинок  $\mathcal{P}(N)$ .

Больцманівське наближення, що було застосовано в другому розділі, дало можливість одержати аналітичні вирази (13)-(14). Зазначимо також, що ці результати є універсальними, тобто, вони є незалежними від конкретних чисельних значень vdW параметрів  $a$  та  $b$ . Таким чином, ці результати можуть бути застосовані для дуже різних фізичних систем. Універсальність одержаних результатів губиться, якщо врахувати ефекти квантової статистики.

Нещодавно було запропоновано (V. Vovchenko, D. V. Anchishkin and M. I. Gorenstein, Phys. Rev. C 91, no. 6, 2015) узагальнення рівняння стану ван дер Ваальса в GCE, що враховує ефекти квантової статистики (квантова модель ван дер Ваальса, QvdW). Це узагальнення являє собою систему трьох трансцендентних рівнянь для тиску, густини частинок та ефективного хімічного потенціалу:

$$p(T, \mu) = p^{\text{id}}(T, \mu^*) - a n^2, \quad n(T, \mu) = \frac{n^{\text{id}}(T, \mu^*)}{1 + b n^{\text{id}}(T, \mu^*)}, \quad (15)$$

$$\mu^* = \mu - b p(T, \mu) - a b n^2 + 2 a n, \quad (16)$$

де  $p^{\text{id}}$  та  $n^{\text{id}}$  це, відповідно, тиск та густина частинок ідеального *квантового* газу.

Дані рівняння мають розв'язок для всіх можливих значень температури,  $T \geq 0$ , та хімічного потенціалу,  $-\infty < \mu < \infty$ . Квантове узагальнення рівняння vdW задовольняє всім основним вимогам, а саме зводиться до рівняння ідеального Фермі або Бозе газу при  $a = 0$  та  $b = 0$ , до класичного рівняння ван дер Ваальса в больцманівській границі. Також на відміну від класичного рівняння vdW задовільняє третій закон термодинаміки, тобто ентропія  $s \rightarrow 0$  при  $T \rightarrow 0$ .

**В третьому розділі** модель QvdW застосовується до опису системи взаємодіючих піонів. У випадку газу піонів необхідно використовувати Бозе-статистику. Розглядається система піонів з нульовим значенням повного електричного заряду, таким чином,  $\pi^+$ ,  $\pi^-$ , та  $\pi^0$  всі мають нульові хімічні потенціали. Тобто  $\mu = 0$  в

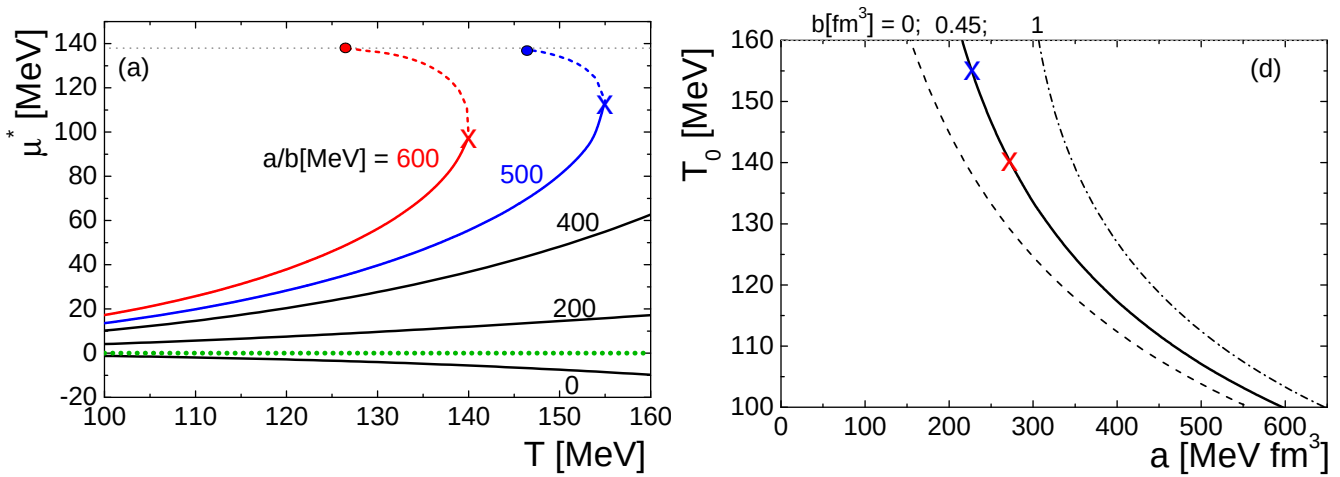


Рис. 6: (a) Ефективний хімічний потенціал,  $\mu^*$ , піонного газу з рівнянням стану ван дер Ваальса як функція температури. Значення параметру виключеного об'єму зафіксоване як  $b = 0.45 \text{ fm}^3$ . Суцільні лінії відповідають розв'язкам з  $a/b = 0, 200, 400, 500, 600 \text{ MeV}$  (знизу догори). Точковані лінії показують поведінку ідеального газу, тобто для  $a = 0$  та  $b = 0$ . Точки граничної температури зображені символами  $\times$ , нестабільні розв'язки зображені пунктирними сегментами ліній, що закінчуються в точках  $T = T'$ , зображених суцільними кругами. (d) Залежність граничної температури  $T_0$  від параметра  $a$  для  $b = 0$  (пунктирна лінія),  $b = 0.45 \text{ fm}^3$  (суцільна лінія) та  $b = 1 \text{ fm}^3$  (пунктирно-точкована лінія).

рівнянні (16). В результаті,  $p$  та  $n$  в рівняннях (15) стають функціями однієї змінної, температури. Береться  $g = 3$  в якості фактора виродження піонів та  $m_\pi \cong 138 \text{ MeV}$  в якості маси піонів. Приймається значення  $b \cong 0.45 \text{ fm}^3$ , що відповідає оцінці радіусу твердого кора піонів  $r \cong 0.3 \text{ fm}^{-3}$ . Значення  $a$  розглядається як вільний параметр моделі.

Було обчислено температурні залежності термодинамічних величин  $\mu^*$ ,  $p$ ,  $n$  та  $\varepsilon$  піонного газу. Зокрема, результат для  $\mu^*$  як функції  $T$  представлені на Рис. 6 (a) суцільними лініями для різних значень параметра  $a$ . Точковані лінії відповідають ідеальному газу (тобто при  $a = 0$  та  $b = 0$ ). В області температури  $T \leq 100 \text{ MeV}$  (не показаний на Рис. 6 (a)) ефекти взаємодії для даних значень  $a$  та  $b$  є малими, тобто всі термодинамічні функції є дуже близькими до відповідних результатів ідеального газу.

Було розглянуто роль взаємодій відштовхування та притягання, що описуються vdW параметрами  $b$  та  $a$ , відповідно. Було знайдено що для  $b \cong 0.45 \text{ fm}^3$  та  $a/b \cong 200 \text{ MeV}$  рівняння стану ван дер Ваальса для піонів виявляється близьким до відповідного рівняння ідеального піонного газу, тобто взаємодії притягання та відштовхування приблизно взаємо-скомпінсують одна одну.

При великих значеннях параметра  $a$  має місце нове явище: виникає гранична температура  $T_0$ , тобто система рівнянь (15)-(16) не має стабільних розв'язків при  $T > T_0$ . На Рис. 6 (b) показана залежність  $T_0$  від параметра  $a$  для різних значень параметра  $b$ . Видно, що для кожного значення параметра відштовхування  $b$  існує мінімальне значення параметра притягання  $a = a_b$  таке, що гранична температура

$T = T_0 \leq 160 \text{ MeV}$  виникає при всіх  $a \geq a_b$  та  $T_0$  спадає зі зростанням  $a$ .

В той же час, в інтервалі температур  $T' \leq T \leq T_0$  виникають нестабільні розв'язки. Тут  $T'$  – це початкова температура конденсації Бозе-Ейнштейна, тобто  $\mu^*(T') = m_\pi$ . Стабільні розв'язки відповідають критерію Гіббса, тобто їх тиск більше, ніж тиск нестабільних розв'язків при тій же температурі.

В роботі показано, що вираз для нормованої варіації розподілу числа частинок,  $\omega[N]$ , в квантовій моделі ван дер Ваальса має більш складний вигляд, ніж відповідний вираз (10) в класичній моделі. А саме,

$$\omega[N] = \omega_{\text{id}}(T, \mu^*) \left[ \frac{1}{(1 - bn)^2} - \frac{2an(T, \mu^*)}{T} \omega_{\text{id}}(T, \mu^*) \right]^{-1}, \quad (17)$$

де  $\omega_{\text{id}}(T, \mu)$  – це нормована варіація числа частинок ідеального квантового газу,  $\mu^*$  визначається рівнянням (16).

Для того, щоб прояснити фізичне походження граничної температури  $T_0$  для піонного газу з рівнянням стану ван дер Ваальса, були обчислені теплоємність,  $C = d\varepsilon/dT$ , квадрат швидкості звуку,  $c_s^2 = dp/d\varepsilon$ , та нормована варіація розподілу числа піонів,  $\omega[N]$ . Виявлено, що  $c_s^2 \rightarrow 0$ , тоді як обидві величини  $C \rightarrow \infty$  та  $\omega[N] \rightarrow \infty$  при  $T \rightarrow T_0$ . Степенева поведінка при  $T \rightarrow T_0$  цих величин наступна: обидва  $C$  та  $\omega[N]$  пропорційні до  $(T_0 - T)^{-1/2}$ , а  $c_s^2 \propto (T_0 - T)^{1/2}$ . Поведінка флуктуацій повної енергії  $E$  є схожою до поведінки флуктуацій числа піонів  $N$ . Таким чином, гранична температура відповідає найм'якшій точці рівняння стану (швидкість звуку дорівнює нулю) та нескінченно великим флуктуаціям і теплоємності.

Концепція граничної температури в адронному газі було введено в фізику Хагедорном. Тиск в найпростішій версії моделі Хагедорна визначається як

$$p_{\text{H}}(T) = p_{\text{id}}^\pi(T) + \frac{T^2}{2\pi^2} \int_{M_0}^{\infty} dm \rho(m) m^2 K_2(m/T), \quad (18)$$

де  $p_{\text{id}}^\pi$  – це тиск ідеального Бозе газу піонів,  $\rho(m) \cong cm^{-\alpha} \exp(m/T_0) \theta(m - M_0)$  це експоненційно зростаючий масовий спектр  $\rho(m)$  для збуджених адронних станів (“фаєрболів”, що розглядаються як точкові невзаємодіючі частинки),  $c$ ,  $M_0$ ,  $T_0$  та  $\alpha$  – це параметри моделі.  $K_2$  – це модифікована функція Бесселя другого роду. Другий доданок в правій частині рівняння (18) відповідає вкладу всіх збуджених станів в больцманівському наближенні. Гранична температура,  $T_0$ , виникає в зв'язку з експоненційно зростаючим масовим спектром  $\rho(m)$  для збуджених адронних станів при великій масі  $m$ .

Не дивлячись на те, що реалізація механізму притягання між частинками в моделі Хагедорна (за допомогою резонансів) відрізняється від відповідного механізму в моделі QvdW (через середнє поле), було знайдено, що однакова поведінка фізичних величин в околі граничної температури реалізується в обох моделях. Це має місце для спеціального вибору степеневих показників, а саме  $m^{-4}$ , в пре-експоненційному множителю масового спектру  $\rho(m)$  моделі Хагедорна. Більш того, спеціальним підбором значень параметрів в моделі Хагедорна можна одержати дуже схожу термо-



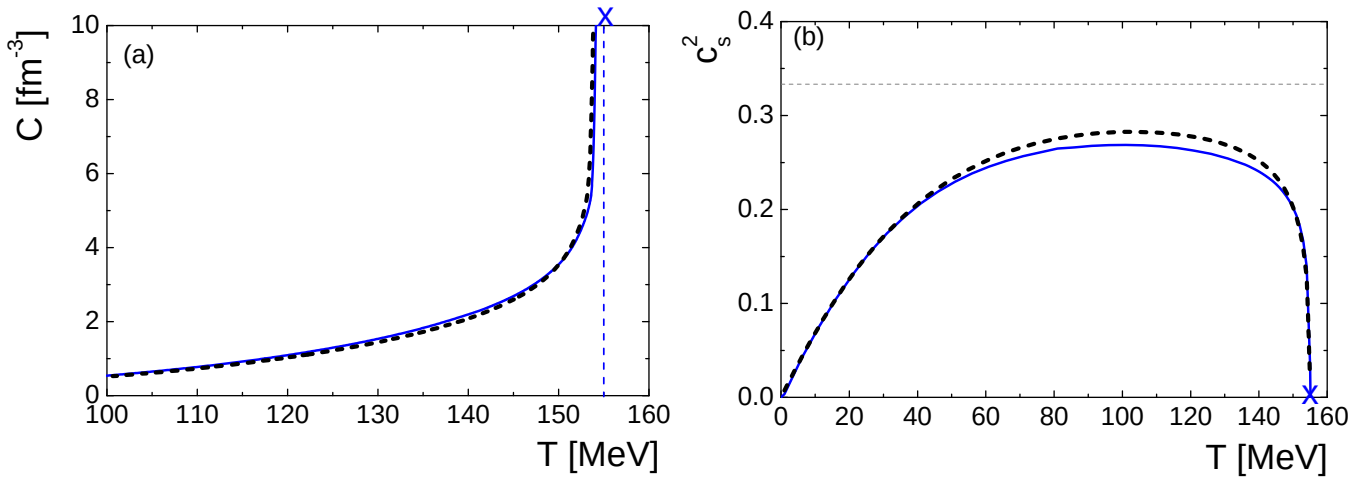


Рис. 7: Теплоємність (а) та квадрат швидкості звуку (б) як функції температури. Суцільні лінії відповідають рівнянню стану ван дер Ваальса з  $b = 0.45 \text{ fm}^3$  та  $a/b = 500 \text{ MeV}$ . Пунктирні лінії відповідають моделі Хагедорна (18) з  $T_0 = 155 \text{ MeV}$ ,  $\alpha = 4$ ,  $c = 3.57 \text{ fm}^{-3}$  та  $M_0 = 507 \text{ MeV}$ .

динамічну поведінку в обох моделях на всьому діапазоні температур (див. Рис. 7).

Виявлена наявність граничної температури  $T_0$  в моделі QvdW піонного газу, без сумніву, є свідченням обмеження в застосуванні цієї моделі при високих густинах енергії. Подібно до моделі Хагедорна, гранична температура в піонному газі ван дер Ваальса повинна бути перетворена в температуру переходу деконфайнмента після введення фундаментальних кварк-глюонних ступенів вільності, що може бути зроблено в наступних роботах.

Ще одним з можливих застосувань квантової моделі ван дер Ваальса є застосування до опису нескінченної системи взаємодіючих нуклонів, ядерної матерії. В **четвертому розділі** передбачення моделі QvdW порівнюються з передбаченнями моделі Валечки ядерної матерії. Також тут в рамках моделі QvdW обчислюються флуктуації числа нуклонів в області критичної точки фазового переходу рідина-газ ядерної матерії.

Модель Валечки ядерної матерії основана на лоренц-інваріантному лагранжіані, в якому включені зв'язки нуклонного поля зі скалярним полем  $\sigma$  мезонів та векторним полем  $\omega$  мезонів, і само-взаємодіями скалярного поля знехтувано. В наближенні середнього поля мезонні поля та ядерний струм замінюються їхніми середніми значеннями. Це надає можливість одержати вираз для функції тиску в наступному вигляді:

$$p(T, \mu) = p^{\text{id}}(T, \mu^*; m^*) + \frac{c_v^2}{2} n(T, \mu) - \frac{(m - m^*)^2}{2c_s^2}, \quad (19)$$

де  $\mu^*$  та  $m^*$  це, відповідно, ефективний хімічний потенціал та ефективна маса нуклонів. Параметри моделі  $c_v^2$  та  $c_s^2$  визначають силу взаємодій відштовхування та притягання, відповідно.

Величини  $\mu^*$  та  $m^*$  визначаються умовою екстремуму термодинамічного потен-



| Walecka                         | Hybrid                          | QvdW                           |
|---------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|
| $c_v^2 \cong 11.0 \text{ fm}^2$ | $b \cong 3.12 \text{ fm}^3$     | $b \cong 3.42 \text{ fm}^3$    |
| $c_s^2 \cong 14.6 \text{ fm}^2$ | $c_s^2 \cong 3.46 \text{ fm}^2$ | $a \cong 329 \text{ MeV fm}^3$ |

Табл. 1: Значення параметрів моделей, що одержані з властивостей основного стану ядерної матерії.

ціалу (тобто максимуму тиску). Для тиску (19) це породжує:

$$\mu^* = \mu - c_v^2 n(T, \mu), \quad \frac{m}{m^*} = 1 + c_s^2 \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk \frac{f_k(T, \mu^*; m^*)}{\sqrt{m^{*2} + k^2}}, \quad (20)$$

де  $f_k$  – це середнє число заповнення, що відповідає імпульсу  $k$ . З використанням стандартних термодинамічних співвідношень можна одержати функції густини нуклонів та енергії в моделі Валечки:

$$n(T, \mu) = n^{\text{id}}(T, \mu^*; m^*), \quad (21)$$

$$\varepsilon(T, \mu) = \varepsilon^{\text{id}}(T, \mu^*; m^*) + \frac{(\mu - \mu^*)^2}{2 c_v^2} + \frac{(m - m^*)^2}{2 c_s^2}. \quad (22)$$

Додатково введемо *гібридну модель*, в якій взаємодії притягання реалізуються завдяки обміну скалярними  $\sigma$  мезонами, як в моделі Валечки, а взаємодії відштовхування відповідають поправці виключеного об'єму, як в моделі QvdW.

Зафіксуємо параметри притягання та відштовхування для кожної з трьох моделей так, щоб відтворювалися відомі властивості основного стану ядерної матерії:

$$T = 0, \quad p = 0, \quad \varepsilon/n \cong m + E_B \cong 922 \text{ MeV}, \quad n_0 \cong 0.16 \text{ fm}^{-3}. \quad (23)$$

Одержані значення приведено в таблиці 1. Зазначимо, що одержані значення параметрів  $c_s^2$  та  $c_v^2$  трохи відрізняються від значень одержаних в інших роботах. Це спричинено іншим припущеним значенням ядерної густини в основному стані.

Положення критичної точки та значення нестисливості,  $K_0 = 9(dp/dn)_{T=0}$ , для кожної моделі, а також експериментальні оцінки цих величин представлені в таблиці 2. Всі три моделі, що розглядаються, суттєво перебільшують значення ядерної нестисливості  $K_0$ . Більш складні моделі, такі як модель Богута-Бодмера (Boguta-Bodmer), або модель реального газу Клаузуса (Clausius), можуть розглядатися для вирішення цієї проблеми. Проте очікується, що ці модефікації якісно не вплинуть на передбачення, щодо поведінки ядерної матерії в області критичної точки.

Так як всі результати гібридної моделі є проміжними між результатами моделей Валечки та QvdW, вони не представлені на рисунках.

Криві співіснування та критичні ізотерми в приведених змінних для моделей QvdW та Валечки представлені на Рис. 8 (a) та (b), відповідно. Спостерігається лише невелика різниця між двома моделями, переважно в області високої густини.

|                         | Walecka | Hybrid | QvdW  | Experiment      |
|-------------------------|---------|--------|-------|-----------------|
| $T_c$ [MeV]             | 18.9    | 19.2   | 19.7  | $17.9 \pm 0.4$  |
| $n_c$ [fm $^{-3}$ ]     | 0.070   | 0.071  | 0.072 | $0.06 \pm 0.01$ |
| $p_c$ [MeV fm $^{-3}$ ] | 0.48    | 0.50   | 0.52  | $0.31 \pm 0.07$ |
| $K_0$ [MeV]             | 553     | 674    | 763   | 250 - 315       |

Табл. 2: Положення критичної точки та значення нестисливості при нульовій температурі,  $K_0$ , в рамках моделей Валечки, QvdW та гібридної моделі, разом з їхніми експериментальними оцінками.

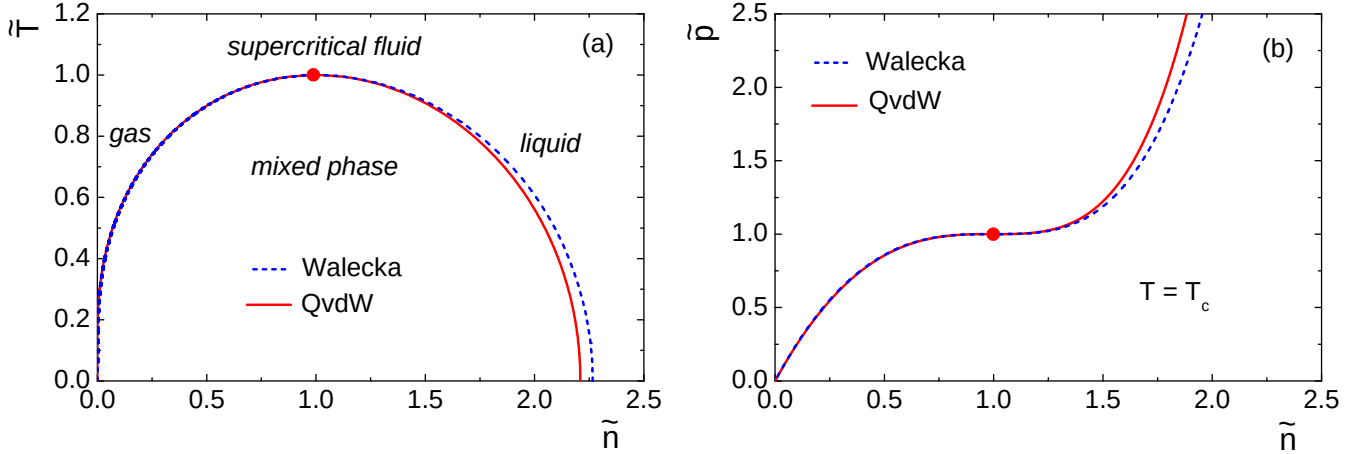


Рис. 8: Криві співіснування (a) та критичні ізотерми (b) в приведених змінних обчислені для моделей Валечки (пунктирні сині лінії) та QvdW (суцільні червоні лінії). Круги відповідають критичній точці.

*Критичні індекси* характеризують критичну поведінку термодинамічних величин в околі критичної точки в термінах степеневих виразів. Так звані термодинамічні критичні індекси – це  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  та  $\delta$ . Їхні означення представлені в перших двох колонках Табл. 3.

Критична поведінка в моделі Валечки вивчалася раніше. Одержані значення критичних індексів наступні:  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1/2$ ,  $\gamma = 1$  та  $\delta = 3$ . Ці значення індексів відповідають класу універсальності моделей *середнього поля*. Численні моделі належать до цього класу, включаючи, наприклад, класичну модель ван дер Ваальса.

Значення критичних індексів моделі ван дер Ваальса з Фермі статистикою можна одержати аналітично (розкладаючи відповідні фізичні величини в ряд Тейлора в околі критичної точки) або чисельно. Всі значення критичних індексів, одержані для моделі QvdW, також співпадають зі значеннями класу універсальності моделей середнього поля. Зокрема, функції  $\gamma(\tau)$  та  $\delta(\tilde{n})$  показані на Рис. 9 (a) та (b), відповідно. Бачимо, що при досить малому відхиленні від критичної точки ( $\tau$  або  $\tilde{n} \lesssim 0.01$ ),  $\gamma(\tau)$  та  $\delta(\tilde{n})$  вже важко відрізнити від значень критичних індексів  $\gamma = 1$  та  $\delta = 3$ .

Проте зазначимо, що значення відповідних критичних амплітуд (коефіцієнтів пропорційності)  $A$ ,  $B$ ,  $G$  та  $D$  не є універсальними і лишаються різними в різних моделях. Зокрема, обчислені в роботі значення критичних амплітуд  $G \cong 0.257$  та  $D \cong 1.4$  для квантової моделі ван дер Ваальса ядерної матерії відрізняються від

|          | 1                                                                    | 2                                     | 3             | 4         |
|----------|----------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|---------------|-----------|
| індекс   | скейлинг                                                             | шлях                                  | ТСП           | емпіричні |
| $\alpha$ | $c_v = A \tau^{-\alpha}$                                             | $\tau \rightarrow 0^+, \tilde{n} = 1$ | 0             | 0.11      |
| $\beta$  | $\frac{\tilde{n}_l - \tilde{n}_g}{2} = B (-\tau)^\beta$              | $\tau \rightarrow 0^-$                | $\frac{1}{2}$ | 0.33      |
| $\gamma$ | $\kappa_T = p_c^{-1} G \tau^{-\gamma}$                               | $\tau \rightarrow 0^+, \tilde{n} = 1$ | 1             | 1.24      |
| $\delta$ | $\tilde{p} - 1 = D  \tilde{n} - 1 ^\delta \text{sgn}(\tilde{n} - 1)$ | $n \rightarrow 1^\pm, \tau = 0$       | 3             | 4.79      |

Табл. 3: Термодинамічні критичні індекси. Колонки (1): Скейлингові співвідношення. Тут  $\tau = \tilde{T} - 1$ ,  $c_v$  – це теплоємність при сталій густині. Параметр порядку  $(\tilde{n}_l - \tilde{n}_g)$  – це ширина області змішаної фази при даній  $\tilde{T}$ .  $\kappa_T = n^{-1}[\partial n / \partial p]_T$  – це ізотермічна стисливість. (2): Термодинамічний шлях підходу до критичної точки. (3): Значення критичних індексів в класі універсальності теорій середнього поля. (4): Емпіричні значення критичних індексів для реальних газів.

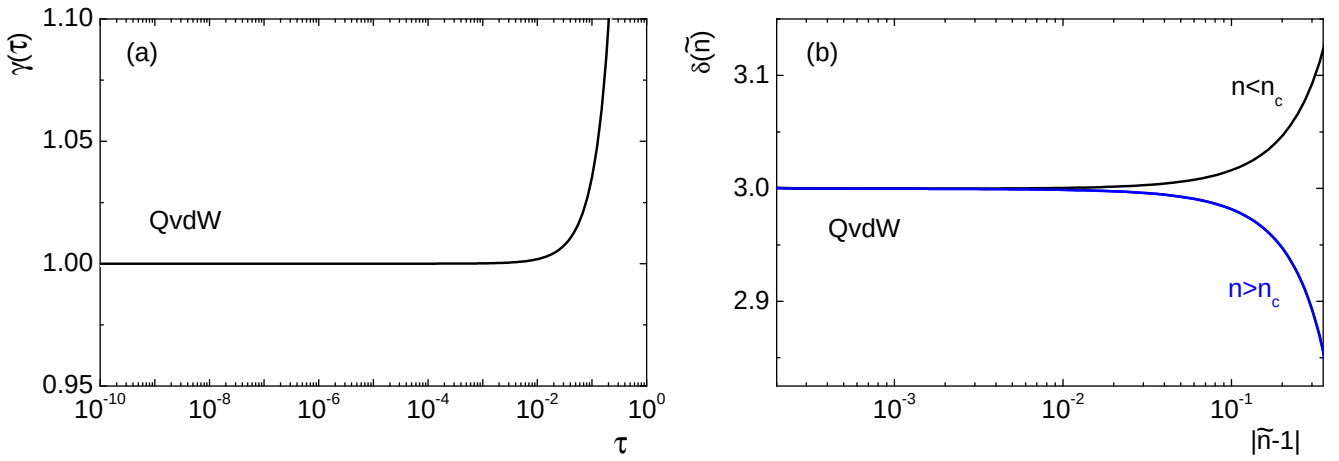


Рис. 9: Залежність  $\gamma(\tau)$  (a) та  $\delta(\tilde{n})$  (b) індексів як функцій приближення до критичної точки.

відповідних значень  $G = 1/6$  та  $D = 3/2$  класичної моделі ван дер Ваальса, що є ефектом статистики Фермі.

Густина числа нуклонів  $n(T, \mu)$  (15) для ядерної матерії в  $(T, \mu)$ -координатах представлена на Рис. (10) (a). Використовуючи одержаний вираз для нормованої варіації розподілу числа частинок (17) з  $\omega^{\text{id}}(T, \mu^*)$ , що відповідає нормованій варіації ідеального газу з Фермі статистикою та знайденими значеннями параметрів  $a$  та  $b$  можна обчислити нормовану варіацію розподілу числа нуклонів в області критичної точки ядерної матерії з рівнянням стану ван дер Ваальса. Цей результат представлено на Рис. (10) (b). Коефіцієнт асиметрії (11) та куртозис (12) розподілу числа нуклонів представлено на Рис. (11) (a) та (b), відповідно.

Ці результати для флуктуацій числа нуклонів є якісно подібними до відповідних результатів одержаних в рамках класичної моделі ван дер Ваальса у розділі 2. Проте, врахування ефектів квантової статистики призводить до того, що закон відповідних станів не виконується і таким чином, представлення результатів у приведених змінних не є доречним.

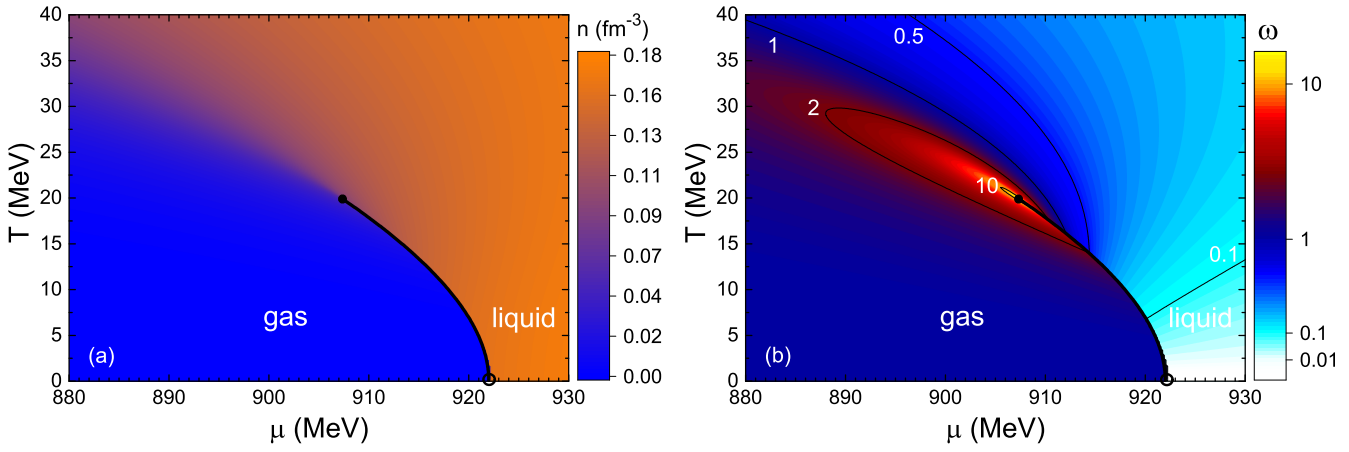


Рис. 10: (a) Густина числа нуклонів  $n(T, \mu)$  (15) та (b) нормована варіація  $\omega[N]$  (17) обчислені для ядерної матерії в  $(T, \mu)$ -координатах в рамках кантової моделі ван дер Ваальса для ферміонів. Кільцем при  $T = 0$  позначено основний стан ядерної матерії, точка при  $T = T_c$  відповідає критичній точці, а крива фазового переходу  $\mu = \mu_{\text{mix}}(T)$  представлена суцільною лінією.

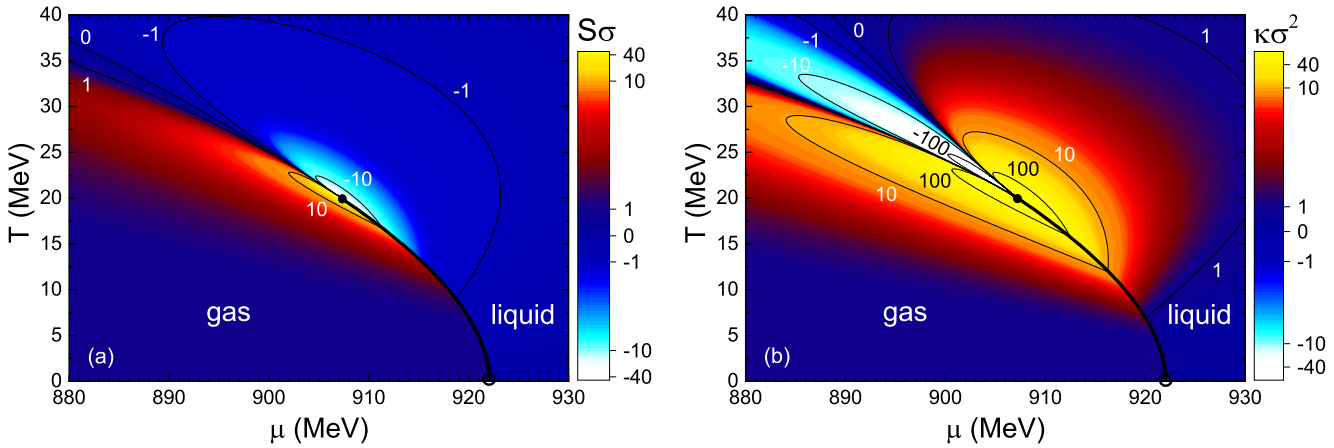


Рис. 11: Те саме, що на Рис.(10) але (a) для коефіцієнта асиметрії  $S\sigma$  (11) та (b) куртозиса  $\kappa\sigma^2$  (12).

Знайдені закономірності в флуктуаціях поблизу критичної точки якісно знаходяться у згоді з результатами заснованими на ефективних моделях КХД або на універсальних твердженнях стосовно критичної поведінки в околі критичної точки КХД.

## ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена теоретичному вивченню флуктуацій та середніх чисел частинок в околі можливого фазового переходу деконфайнмента і в околі критичної точки ядрої матерії в ядро-ядерних зіткненнях в рамках статистичних моделей.

**В першому розділі** введено точні закони збереження дивності та чарівності в статистичну модель ранньої стадії релятивістських ядро-ядерних зіткнень. Основні результати розділу наступні:

1. Знайдено вплив точного закону збереження дивності на термодинамічні функції системи адронів та на температури початку та кінця змішаної фази в статистичній моделі ранньої стадії ядро-ядерних зіткнень.
2. З врахуванням точного закону збереження дивності обчислено залежність від енергії зіткнення відношення дивності до ентропії для зіткнень протонів та малих ядер при енергіях CERN SPS.
3. З врахуванням точного закону збереження чарму обчислена залежність від енергії зіткнення середнього числа  $c\bar{c}$ -пар в центральних Pb+Pb зіткненнях.
4. Обчислено залежності сильноінтенсивних мір флуктуацій числа адронів від енергії зіткнення в центральних Pb+Pb зіткненнях. На основі нерегулярностей в знайдених залежностях зроблено передбачення для можливих експериментальних сигналів фазового переходу деконфайнмента.

**Другий розділ** присвячено флуктуаціям числа взаємодіючих частинок з бозманівською статистикою в околі критичної точки. В розділі використовується модель ван дер Ваальса в, нещодавно запропонованому, формулюванні великого канонічного ансамблю. Результати:

1. Знайдено універсальні (незалежні від параметрів сили притягання та відштовхування), аналітичні вирази для флуктуації числа частинок аж до четвертого моменту, а саме нормованої варіації, коефіцієнта асиметрії та куртозиса розподілу числа частинок в моделі ван дер Ваальса. Також знайдено вирази для сильноінтенсивних мір флуктуацій числа частинок та повної енергії.
2. Знайдено відмінність в поведінці флуктуацій числа частинок в області газоподібної фази, рідинної фази та кросоверу на фазовій діаграмі. Кожну з цих областей охарактеризовано відповідною поведінкою флуктуацій.
3. Досліджено сингулярну критичну поведінку флуктуацій в моделі ван дер Ваальса. Одержано розклад вищезгаданих виразів в околі критичної точки.

В наступних двох розділах використовується, нещодавно запропоноване, розширення моделі ван дер Ваальса в великому канонічному ансамблі, що враховує ефекти квантової статистики (квантова модель ван дер Ваальса, QvdW). Зокрема, в **третьому розділі** дана модель з Бозе статистикою застосовується до опису адронної матерії у вигляді системи взаємодіючих  $\pi$ -мезонів. Основними результатами розділу є:

1. Виявлено явище граничної температури в газі  $\pi$ -мезонів з рівнянням стану ван дер Ваальса. Це явище полягає в тому, що при кожному значенні параметрів

моделі,  $b \geq 0$  та  $a > 0$ , існує гранична температура  $T_0$ , вище якої рівновага в системі неможлива. Знайдено залежність граничної температури від параметрів моделі.

2. Досліджено поведінку термодинамічних функцій в околі граничної температури. Знайдено, що ефективний хімічний потенціал, тиск, густина  $\pi$ -мезонів, густина енергії та швидкість звуку в системі залишаються скінченними в точці  $T_0$ , тоді як теплоємність та флуктуації числа  $\pi$ -мезонів прямують до нескінченності при підході до граничної температури зі степеневим показником  $1/2$ .
3. Знайдено відповідність в поведінці термодинамічних функцій газу  $\pi$ -мезонів з рівнянням стану ван дер Ваальса та адронної матерії з рівнянням стану Хагедорна.

Насамкінець, **четвертий розділ** присвячено дослідженню флуктуацій числа нуклонів в околі критичної точки фазового переходу рідина-газ ядерної матерії. В даному розділі для опису ядерної матерії використовується квантова модель ван дер Ваальса з Фермі статистикою. Результати розділу наступні:

1. Знайдено вирази для нормованої варіації, коефіцієнта асиметрії та куртозиса розподілу числа нуклонів в ядерній матерії в моделі QvdW. Досліджена сингулярна критична поведінка цих величин в околі критичної точки ядерної матерії. Одержано можливі сигнали газоподібної/рідинної фаз ядерної матерії та кросоверу на основі визначення флуктуацій числа нуклонів.
2. Обчислено критичні індекси в моделі ван дер Ваальса зі статистикою Фермі. Визначено клас універсальності моделі. Знайдено вплив квантової статистики на критичні амплітуди критичних індексів  $\gamma$  та  $\delta$ .
3. На основі єдиної граничної умови стану ядерної матерії при нульовій температурі знайдено параметри притягання і відштовхування моделей QvdW та Валечки ядерної матерії. Це надало можливість порівняти ці дві моделі. Зокрема, для моделей QvdW та Валечки при даних значеннях параметрів знайдено і порівняно наступні характеристики: поведінку термодинамічних функцій ядерної матерії, ядерну нестисливість при нульовій температурі,  $K_0$ , положення критичної точки, критичну поведінку системи в околі критичної точки.
4. Розглянуто гібридну модель, що є компромісом між моделями QvdW та Валечки ядерної матерії. Вищезгадані характеристики обчислено для гібридної моделі та порівняно з їх відповідними значеннями в моделях QvdW та Валечки.

Підбиваючи підсумки виконаної роботи, можна відзначити, що отримані результати є вкладом у розуміння поведінки флуктуацій в околі фазових переходів та критичної точки сильновзаємодіючої матерії, а також в розробку експериментальних сигналів їх наявності.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

- [1] R. V. Poberezhnyuk, M. Gazdzicki and M. I. Gorenstein, “Statistical Model of the Early Stage of nucleus-nucleus collisions with exact strangeness conservation,” *Acta Phys. Polon. B* **46**, no. 10, 1991 (2015)
- [2] V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, M. I. Gorenstein and R. V. Poberezhnyuk, “Scaled variance, skewness, and kurtosis near the critical point of nuclear matter,” *Phys. Rev. C* **92**, no. 5, 054901 (2015)
- [3] V. Vovchenko, R. V. Poberezhnyuk, D. V. Anchishkin and M. I. Gorenstein, “Non-Gaussian particle number fluctuations in vicinity of the critical point for van der Waals equation of state,” *J. Phys. A* **49**, no. 1, 015003 (2016)
- [4] R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin and M. I. Gorenstein, “Limiting temperature of pion gas with the van der Waals equation of state,” *J. Phys. G* **43**, no. 9, 095105 (2016)
- [5] R. V. Poberezhnyuk, M. I. Gorenstein and M. Gazdzicki, “Fluctuations in the Statistical Model of the Early Stage of nucleus-nucleus collisions,” *Acta Phys. Polon. B* **47**, 2055 (2016)
- [6] R. V. Poberezhnyuk, M. Gazdzicki and M. I. Gorenstein, “Open charm production in central Pb+Pb collisions at the CERN SPS: statistical model estimates,” *Acta Phys. Polon. B* **48**, 1461 (2017)
- [7] R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, “Quantum van der Waals and Walecka models of nuclear matter,” *Int. J. Mod. Phys. E* **26**, no. 10, 1750061 (2017).
- [8] V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, M. I. Gorenstein, R. V. Poberezhnyuk and H. Stoecker, “Critical fluctuations in models with van der Waals interactions,” *Acta Phys. Polon. B* **10**, 753 (2017).
- [9] R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, “Limiting temperature of pion gas with the van der Waals equation of state,” *Presentations of Zim’anyi Winter School on Heavy Ion Physics, Wigner Research Center for Physics, Budapest, Hungary, December 5–9, 2016*, <https://indico.cern.ch/event/592683>
- [10] R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, “Limiting temperature of pion gas with the van der Waals equation of state,” *VII Young Scientists Conference “Problems of Theoretical Physics” Program and Abstracts, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv, Ukraine, December 13–15, 2016*.
- [11] R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, “Critical point of nuclear matter,” *Presentations of Zim’anyi Winter School on Heavy Ion Physics, Wigner Research Center for Physics, Budapest, Hungary, December 5–9, 2017*, <https://indico.cern.ch/event/684046>
- [12] R. V. Poberezhnyuk, V. Vovchenko, D. V. Anchishkin, and M. I. Gorenstein, “Quantum van der Waals model versus Walecka model of nuclear matter,” *VIII Young Scientists Conference “Problems of Theoretical Physics” Program and Abstracts, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv, Ukraine, December 12–14, 2017*.

## АНОТАЦІЯ

**Побережнюк Р. В. Фазові перетворення та критична точка сильновзаємодіючої матерії в ядро-ядерних зіткненнях. - Рукопис.**

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 - "теоретична фізика". - Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України, Київ, 2017.

В дисертації з використанням статистичної моделі ранньої стадії релятивістських ядро-ядерних зіткнень одержано якісні передбачення щодо можливих спостережуваних сигналів фазового переходу деконфайнмента. Зокрема, сигналів, що проявляються у залежності від енергії зіткнення виходу дивних частинок в протон-протонних взаємодіях, чарівних частинок та сильноінтенсивних мір флуктуацій чисел частинок в зіткненнях ядер свинець-свинець.

Також в роботі виявлено явище граничної температури в газі  $\pi$ -мезонів з рівнянням стану ван дер Ваальса. Поведінку системи в околі граничної температури порівняно з відповідною поведінкою адронної матерії з рівнянням стану Хагедорна. Одержано вирази для флуктуацій числа нуклонів в області критичної точки ядерної матерії з рівнянням стану ван дер Ваальса.

**Ключові слова:** деконфайнмент, ядро-ядерні зіткнення, зіткнення важких іонів, протон-протонні зіткнення, дивність, чарівність, флуктуації, критична точка, газ піонів, гранична температура, критичні індекси, ядерна матерія.

## АННОТАЦИЯ

**Побережнюк Р. В. Фазовые превращения и критическая точка сильновзаимодействующей материи в ядро-ядерных столкновениях. - Рукопись.**

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 - "теоретическая физика". - Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины, Киев, 2017.

В диссертации с использованием статистической модели ранней стадии релятивистских ядро-ядерных столкновений получено качественные предсказания возможных наблюдаемых сигналов фазового перехода деконфайнмента. В частности, сигналов, которые проявляются в зависимости от энергии столкновения выхода странных частиц в протон-протонных взаимодействиях, очарованных частиц и сильноинтенсивных мер флуктуаций чисел частиц в столкновениях ядер свинец-свинец.

Также в работе обнаружено явление предельной температуры в газе  $\pi$ -мезонов с уравнением состояния ван дер Ваальса. Поведение системы в окрестности предельной температуры сравнивается с соответствующим поведением адронной материи с уравнением состояния Хагедорна. Полученно выражения для флуктуаций числа нуклонов в области критической точки ядерной материи с уравнением состояния ван дер Ваальса.

**Ключевые слова:** деконфайнмент, ядро-ядерных столкновения, столкновения тяжелых ионов, протон-протонные столкновения, странность, очарование, флуктуации, критическая точка, газ пионов, предельная температура, критические индексы, ядерная материя.



## ABSTRACT

**Poberezhnyuk R. V. Phase transitions and critical point of strongly interacting matter in nucleus-nucleus collisions. - Qualification scientific work on the rights of the manuscript.**

Thesis for a degree of Candidate of Science in Physics and Mathematics in specialty 01.04.02 - “theoretical physics”. - Bogolubov Institute for Theoretical Physics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, 2017.

Thesis is devoted to the theoretical study of fluctuations and mean particle multiplicities in the vicinity of deconfinement phase transition and critical point of nuclear matter in nucleus-nucleus collisions within statistical models.

In thesis Statistical Model of the Early Stage, SMES, is used to describe a transition between confined and deconfined phases of strongly interacting matter created in nucleus-nucleus collisions. Recent results of NA61/SHINE on hadron production in inelastic p+p interactions suggest that the deconfinement may take place in these reactions. However, in this case mean multiplicity of particles with non-zero strange charge is smaller than one. Thus for the modeling of p+p interactions the exact strangeness conservation has to be implemented in the SMES. This extension of the SMES is presented in the thesis. Exact strangeness conservation law affects temperature, pressure and energy density of the system as much as beginning and end points of the mixed phase. Substantial difference is observed for strangeness to entropy ration which is found to be strongly dependent of the systems size.

The SMES is also used in thesis to calculate mean multiplicity of charm particles in central Pb+Pb collisions. A small number of produced charm particles necessitates the use of the exact charm conservation law. The model predicts a rapid increase of mean charm multiplicity as a function of collision energy. The mean multiplicity calculated for central Pb+Pb collisions at the center of mass energy per nucleon pair  $\sqrt{s_{NN}} = 17.3$  GeV exceeds significantly the experimental upper limit. Thus, in order to describe open charm production model parameters and/or assumptions should be revised.

Thesis also contains SMES predictions on fluctuations of hadron production properties in central heavy ion collisions and extends previously published results by considering the strongly intensive measures of fluctuations (this experimental fluctuation measures are applied in view of necessity to exclude noise from the systems size fluctuations in nucleus-nucleus collisions). In several of the considered cases a significant change in collision energy dependence of calculated quantities as a result of the phase transition is predicted. This provides an opportunity to observe new signals of the onset of deconfinement in heavy ion collisions experiments.

Another model applied in thesis is, recently proposed, van der Waals model in canonical ensemble formulation, which includes effects of quantum statistics (quantum van der Waals model, QvdW). In thesis the Bose statistics version of this model is applied to the equilibrium system of interacting pions. If the attractive interaction between pions is large enough, a limiting temperature  $T_0$  emerges, i.e., no thermodynamical equilibrium is possible at  $T > T_0$ . The system pressure  $p$ , particle number density  $n$ , and energy density  $\varepsilon$  remain finite at  $T = T_0$ , whereas for  $T$  near  $T_0$  both the specific heat  $C = d\varepsilon/dT$  and the

scaled variance of particle number fluctuations  $\omega[N]$  are proportional to  $(T_0 - T)^{-1/2}$  and, thus, go to infinity at  $T \rightarrow T_0$ . The limiting temperature also corresponds to the softest point of the equation of state, i.e., the speed of sound squared  $c_s^2 = dp/d\varepsilon$  goes to zero as  $(T_0 - T)^{1/2}$ . Very similar thermodynamical behavior takes place in the Hagedorn model for the special choice of a power, namely  $m^{-4}$ , in the pre-exponential factor of the mass spectrum  $\rho(m)$ .

Another implication of quantum van der Waals model in thesis is implication to a description of nuclear matter. The Fermi statistics version of the model is considered for this case. A comparable study of the quantum van der Waals and Walecka models of nuclear matter is presented. Each model contains two parameters which characterize the repulsive and attractive interactions between nucleons. These parameters are fixed in order to reproduce the known properties of the nuclear ground state. Both models predict a first-order liquid-gas phase transition and a very similar behavior in the vicinity of the critical point. Critical exponents and critical amplitudes of the quantum van der Waals model are studied both analytically and numerically. There are important differences in the behavior of the thermodynamical functions of the considered models at large values of the nucleon number density. At the same time both models fall into the universality class of mean-field theory. A hybrid model, where the attractive interactions are mediated through the scalar meson exchange and where the repulsive interactions are modeled by means of the excluded-volume correction, is considered as well for completeness.

Expression for nucleon multiplicity fluctuations near the critical point of nuclear matter are presented in thesis. The scaled variance, skewness, and kurtosis of nucleons multiplicity distribution diverge at the critical point. It is found that the crossover region of the phase diagram is characterized by the large values of the scaled variance, the almost zero skewness, and the significantly negative kurtosis. The rich structures of the skewness and kurtosis are observed in the phase diagram in the wide region around the critical point; namely, they both may attain large positive or negative values. The strongly intensive measures  $\Delta[E^*, N]$  and  $\Sigma[E^*, N]$  of the particle number and excitation energy fluctuations are also considered, and, similarly, show singular behavior near the critical point. Based on universality argument, similar behavior is expected to occur in the vicinity of the QCD critical point.

Finally, the classical van der Waals (vdW) equation of state in the grand canonical ensemble formulation is used to calculate particle number fluctuations in generic Boltzmann vdW system. Neglecting effects of the quantum statistics provided the analytical expressions particle multiplicity fluctuations, as well as for strongly intensive measures of particle multiplicity and energy fluctuations. These results are qualitatively similar to corresponding results obtained for nuclear matter within QvdW model. However, contrary to the Fermi statistics case, obtained expressions can be presented in reduced variables, in which they have universal form, i.e., they do not depend on particular values of the vdW parameters  $a$  and  $b$ .

**Key words:** Onset of deconfinement, nucleus-nucleus collisions, proton-proton collisions, charm production, fluctuations, critical point, pion gas, limiting temperature, critical exponents, nuclear matter.