НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ ім. М. М. БОГОЛЮБОВА

ЛАШКІН ВОЛОДИМИР МИХАЙЛОВИЧ

УДК 533.9, 535.8, 539.18

СТІЙКІ НЕЛІНІЙНІ КОГЕРЕНТНІ СТРУКТУРИ В ДИСПЕРГУЮЧИХ СЕРЕДОВИЩАХ

01.04.02 – теоретична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ – 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі теорії плазми Інституту ядерних досліджень Національної Академії наук України.

Офіційні опоненти: член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор **Іванов Борис Олексійович**, Інститут магнетизму НАН України та МОН України, завідувач лабораторії магнітних матеріалів

доктор фізико-математичних наук, професор **Черемних Олег Костянтинович**, Інститут космічних досліджень НАН України та ДКА України, заступник директора з наукової роботи

доктор фізико-математичних наук, старший дослідник **Золотарюк Ярослав Олександрович**, Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України, провідний науковий співробітник лабораторії сильнокорельованих низьковимірних систем

Захист відбудеться 1 листопада 2018 р. о 11^{00} годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.191.01 в Інституті теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України за адресою: вул. Метрологічна 14-б, м. Київ, 03143, Україна.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України за адресою: вул. Метрологічна 14-б, м. Київ, 03143, Україна.

Автореферат розісланий 18 вересня 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 26.191.01,
доктор фізико-математичних наук В. Є. Кузьмичев

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дослідження поширення нелінійних хвиль великої амплітуди в нелінійних диспергуючих середовищах почало інтенсивно розвиватися наприкінці XX і початку XXI століття. Це, насамперед, пов'язано з теоретичним передбаченням, а потім й експериментальним виявленням стійких нелінійних структур хвильової природи, які зберігають свою форму протягом тривалого часу навіть під впливом зовнішніх збурень. Еволюція початкового збурення у нелінійному диспергуючому середовищі відбувається під двома конкуруючими факторами - нелінійності та дисперсії. Нелінійність, тобто залежність поведінки хвильового пакета від його амплітуди, приводить до генерації гармонік з великими хвильовими числами, що завершується перекиданням хвилі або колапсом. З іншого боку, дисперсія, тобто залежність групової швидкості від хвильового числа, веде до розпливанню хвильового пакета через перемішування фаз утворюючих його гармонік. Між нелінійними та дисперсійними ефектами може встановлюватися рівновага, що й приводить до виникнення локалізованих нелінійних структур – солітонів, вихорів та ін. При цьому, фізичні механізми, відповідальні за дисперсію (дифракцію) і нелінійні ефекти можуть бути дуже різними. Актуальність теми дисертації обумовлена тим, що розглянуті в ній математичні моделі, засновані на балансі дисперсії (розпливання) і нелінійності (укручення), мають досить загальний характер і застосовні до різних областей природознавства: протягом більш ніж 40 років концепція солітонів була суттєво розширена, і проникнула в найрізноманітніші галузі природознавства, від фізики, чистої й прикладної математики до хімії і біології.

Повністю інтегровні моделі з пружною взаємодією солітонів є, як правило, одновимірними. У багатовимірному випадку відокремлені нелінійні структури втрачають (за рідкісним винятком) властивість пружної взаємодії, і, більш того, часто виявляються нестійкими: за рахунок порушення балансу між дисперсією й нелінійністю вони або розпливаються, або колапсують. Збільшення розмірності простору сприяє нестійкості й колапсу. Тому актуальним є дослідження фізичних моделей, в яких можливі стійки багатовимірні нелінійні структури, та знаходження умов при яких багатовимірні солітони стають стійкими, або нестійкість значно послаблена.

Солітони на різних плазмових гілках коливань експериментально виявлені як у лабораторній, так і в космічній плазмі. Тому актуальним є теоретичне дослідження та знаходження нелінійних структур і дослідження їх стійкості поблизу верхньогібридного, іонно-циклотронного й альфвенівського резонансів в плазмі, а також в плазмі з електронним пучком, тобто додатковим фактором нерівноважності.

Солітони в оптичних середовищах вже знаходять практичне застосування, представляючи собою біти інформації в проектованих надшвидкісних солітонних лініях зв'язку. Актуальним тому є дослідження зовнішніх ефектів, перед усім шумового впливу на поширення солітонного імпульсу, наявність зовнішнього накачування, дисипації та ін., на оптичні солітони.

З моменту перших експериментальних і теоретичних робіт, пов'язаних з Бозе-Ейнштейнівськими конденсатами (БЕК), стало зрозумілим, що саме нелінійні відокремлені структури визначають поведінку конденсатів в утримуючих магнітних пастках. Тому актуальним є теоретичне дослідження солітонних структур в БЕК, реалізованих у різних умовах - форми утримуючого потенціалу, наявності нелокальної взаємодії та присутності декількох сортів атомів у конденсаті.

Особливо актуальним є також пошук і теоретичне дослідження нелінійних когерентних структур, відмінних від тих, що раніше розумілися під солітонами - так званих азимутонних солітонів (принципово багатовимірних), що є проміжними станами між мультисолітонами та вихоровими солітонами. Відповідні нелінійні моделі, містять у собі плазму, оптичні середовища та БЕК.

Таким чином, актуальність теми дисертації обумовлена настійним вивченням нелінійних ефектів, пов'язаних з виникненням нелінійних когерентних структур, що утворюються в нелінійних середовищах с дисперсією - плазмі, оптичних волокнах та БЕК.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у відділі теорії плазми Інституту ядерних досліджень НАН України, як частина науково-дослідних робіт з держбюджетних тем "Турбулентність та процеси самоорганізації плазми" (№ держреєстрації 01.9.10.033642), "Когерентні та стохастичні процеси в інтенсивних полях у плазмі" (№ держреєстрації 0197U016412), "Колективні процеси в плазмі при розповсюдженні, розсіянні та поглинанні електромагнітних хвиль" (№ держреєстрації 0201U001584), "Динамічні та турбулентні процеси в магнітоактивній плазмі, стимульовані електромагнітними полями" (№ держреєстрації 0104U003880), "Дослідження нелінійних явищ у відкритих плазмових системах під дією високочастотних електромагнітних полів" (№ держреєстрації 0102U005197), "Нелінійні та стохастичні процеси взаємодії хвиль і частинок у нерівноважних відкритих плазмових системах" (№ держреєстрації 0106U012078), "Дослідження нелінійних динамічних процесів і стаціонарних структур у плазмі " (№ держреєстрації 0112U000931). Здобувач був відповідальним виконавцем цих тем. Частина результатів, що ввійшли в дисертацію, отримана при виконанні держбюджетної теми "Теоретичне та експериментальне моделювання в густій плазмі індукційних розрядів фізичних процесів, що призводять до утворення транспортних бар'єрів та L-H переходів у плазмі термоядерних пристроїв" (№ держреєстрації 0107U005719) і держбюджетної теми "Моделювання низькочастотної хвильової активності та зональних течій в високотемпературній плазмі " (№ держреєстрації 0112U002742) керівником яких був здобувач.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є дослідження стійких локалізованих структур у нелінійних середовищах з дисперсією, таких як плазма, БЕК, оптичні волокна. У дисертації вирішуються наступні задачі, пов'язані з досягненням мети:

- Побудувати теорію збурень для темних солітонів, що грунтується на методі зворотньої задачі розсіювання, яка дозволяє врахувати ефекти, пов'язані з випромінюванням та викривленням форми солітонів.
- Дослідити вплив дисипації (кінцевої провідності плазми, нелінійного загасання Ландау) на альфвенівські солітони в плазмі.
- Знайти точні N-солітонні розв'язки у моделі деривативного нелінійного рівняння Шредингера (НРШ), що описує розповсюдження нелінійних альфвенівських хвиль під кутом до зовнішнього магнітного поля.
- Побудувати двовимірну модель взаємодії верхньогібридних плазмових хвиль з низькочастотними магнітозвуковими хвилями та знайти нелінійні структури з аналізом їх стійкості.
- Дослідити нелінійні короткохвильові структури у плазмі поблизу іонно-циклотронного резонансу.
- Теоретично пояснити виникнення нелінійних періодичних хвиль у плазмі з електронним пучком.
- Дослідити взаємодію двовимірних плазмових дипольних вихорових солітонів з дрейфовими хвилями та електромагнітною хвилею.
- Побудувати тривимірну модель нелінійних дрейфових хвиль та знайти тривимірні модонні структури.
- Дослідити можливісті генерації зональних течій у плазмі при наявності середніх течій та градієнтів температур.
- Дослідити ефекти нелокальної нелінійності у фізичних моделях, що описують частково іонізовану плазму та БЕК.
- Знайти нелінійні структури, які є проміжними станами між мульти-солітонами й радіально симетричними вихоровими солітонами.
- Дослідити двокомпонентні векторні нелінійні структури в БЕК з декількома сортами атомів.

Об'єктом дослідження є нелінійні когерентні структури, що виникають у нелінійних диспергуючих середовищах з балансом дисперсії й нелінійності - плазма, Бозе-Ейнштейнівські конденсати, світловодні волокна в нелінійній оптиці.

Предметом дослідження є аналітичне й чисельне з'ясування балансу між дисперсією та нелінійністю у середовищах з різними видами нелінійності.

Методи дослідження використовують відомі аналітичні й чисельні методи: метод зворотньої задачі розсіювання, методи усереднення для стохастичних рівнянь, чисельні методи лінійної алгебри.

Наукова новизна отриманих результатів.

1. Вперше розроблена теорія збурень для темних солітонів дефокусуючого НРШ, заснована на методі зворотньої задачі розсіювання, що дозволяє врахувати радіаційні ефекти.
2. Вперше передбачено ефект безпорогового виникнення темних солітонів під дією зовнішніх збурень.
3. Вперше знайдено N-солітонні розв'язки деривативного нелінійного рівняння Шредингера з неспадаючими граничними умовами, які описують нелінійні альфвенівські хвилі, що поширюються під кутом до зовнішнього магнітного поля та показана можливість одночасної генерації брізерних, темних та світлих солітонів.
4. Вперше розроблено двовимірну теорію нелінійної взаємодії верхньогібридних плазмових хвиль із кінетичними магнітозвуковими хвилями. Строго доведено відсутність колапсу в даній моделі й знайдено двовимірні розв'язки у вигляді солітонів і вихорів.
5. Вперше запропоновано еволюційне нелінійне рівняння, що описує динаміку нелінійних короткохвильових іонно-циклотронних хвиль в плазмі із зворотньою залежністю частоти від хвильового числа та знайдено аналітичні розв'язки у вигляді солітонів та нелінійних періодичних хвиль.
6. Вперше у плазмі з електронним пучком аналітично знайдено нелінійні періодичні структури та встановлена їх відповідність з результатами експериментів.
7. Вперше досліджено взаємодію двовимірних дрейфових солітонів в плазмі з дрейфовими хвилями та з електромагнітною хвилею та передбачено захоплення дрейфових хвиль вихором.
8. Вперше побудовано тривимірну модель взаємодіючих дрейфових та іонно-звукових хвиль та знадено аналітичні тривимірні модонні розв'язки.
9. Вперше показано стабілізуючий вплив середньої течії й просторової неоднорідності течії на генерацію зональних течій.
10. Вперше виявлено умови стабілізації нестійкості дрейфових хвиль при наявності стохастичної зональної течії.
11. Вперше знайдено двовимірні необертові дипольні, трипольні й квадрупольні солітони та обертові мультипольні структури в моделі частковоіонізованій плазмі із зіткненнями та проаналізована їхня стійкість.

12. Вперше знайдено двовимірні мультисолітонні й вихорові структури в моделі Бозе-Ейнштейнівського конденсату з нелокальною нелінійністю та виявлено умови їх стійкості.
13. Вперше чисельно відкрито двовимірні та тривимірні нелінійні структури – азимутони, які є проміжними між мультисолітонами і радіально симетричними вихорами.
14. Вперше знайдено векторні стани солітон-азимутон, азимутон-азимутон у двокомпонентних Бозе-Ейнштейнівських конденсатах і показана можливість їх стійкості в певному діапазоні параметрів.

Практичне значення отриманих результатів. Отримані в дисертації результати можуть бути теоретичною основою для практичного пояснення експериментально виявлених нелінійних хвиль великої амплітуди на альфвенівських, верхньогібридних й іонно-циклотронних гілках коливань плазми в іоносфері, магнітосфері, плазми сонячного вітру та плазмово-пучкових системах, пояснення аномального переносу тепла на дрейфових гілках коливань в пристроях з магнітним утриманням плазми, солітонних структур в БЕК, а також для практичних завдань, що визначають параметри відокремленого лазерного імпульсу в оптичних середовищах.

Особистий внесок здобувача. Усі викладені в дисертації оригінальні результати отримані автором дисертації особисто або за його безпосередньої участі. Роботи [1, 7-9, 11-13, 16-19] виконані здобувачем без співавторів. В роботах [2, 3] автору дисертації належить постановка задач, введення концепції $(-k, l)$ азимутонної структури та векторних азимутонних станів, проведення варіаційного аналізу, розробка алгоритмів та всі чисельні розрахунки. В роботах [20, 23, 27] автору належить постановка задач, отримання нелінійних рівнянь для іонно-циклотронних хвиль та аналітичні результати для світлих солітонів. В роботі [5] автору належить постановка задачі, отримання основних рівнянь та всі аналітичні результати з застосуванням наближення Бурре для відповідного стохастичного рівняння. В роботі [10] автору належить постановка задачі, формулювання моделі та отримання рівнянь, описуючих взаємодію дрейфової хвилі з зональною течією. В роботах [21, 22, 24] автору належить постановка задач, отримання перерізів розсіяння в борновському наближення, знаходження поля захоплених дрейфових мод. В роботах [25, 26] автору належить участь в постановці задач, отримання виразів для кноїдальних хвиль, аналіз резонансного випадку. В роботах [4, 6] автору належить участь в постановці задач, проведення частини варіаційного аналізу. В роботах [14, 15] автор розробив чисельні алгорітми та отримав чисельні результати для еволюції мультисолітонів.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися на наукових конференціях: XX International Conference on

Phenomena in Ionized Gases (Pisa, Italy, 1991); 6 Всесоюзна конференція по взаємодії електромагнітних випромінювань із плазмою (Душанбе, СРСР, 1991); International Workshop on turbulence and nonlinear processes in plasmas (Kiev, Ukraine, 1992); International Conference "Physics in Ukraine" (Kiev, Ukraine, 1993); 22 European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics (United Kingdom, 1995); 23 European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics (Kiev, Ukraine, 1996); International Conference on Physics of Low Temperature Plasma (Kiev, Ukraine, 2003); 13 International Congress on Plasma Physics (Kiev, Ukraine, 2006); International Workshop "Nonlinear Physics and Mathematics" (Kiev, Ukraine, 2006); III International Conference "Electronics and Applied Physics" (Kyiv, Ukraine, 2007); IV International Conference "Electronics and Applied Physics" (Kyiv, Ukraine, 2008); IX International Conference "Electronics and Applied Physics" (Kyiv, Ukraine, 2013) Українська конференція з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу (Київ, Україна, 2009), Українська конференція з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу (Київ, Україна, 2011), а також на щорічних наукових конференціях Інституту ядерних досліджень НАНУ України, і семінарах Національного університету Північної Кароліни (NSCU, Raleigh, USA, 2000), Центру нелінійної фізики Австралійського національного університету (ANU, Canberra, Australia, 2009, 2010).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 27 статтях [1-27] у провідних фахових журналах, а також в трудах конференцій [28-38].

Структура дисертації. Дисертація складається із аннотації, вступу, шести розділів основної частини, висновків, переліку посилань з 305 найменувань та додатків. Кожний розділ основної частини закінчується висновками, у яких сформульовані основні результати, отримані в цьому розділі. Повний об'єм дисертації становить 356 сторінок з 92 рисунками.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, показано зв’язок цих досліджень з науковими програмами та темами, сформульовано мету і задачі досліджень, розкрито наукову новизну одержаних результатів та оцінено їх практичне значення, визначено особистий внесок здобувача в наукових працях, опублікованих з співавторами, наведено відомості про апробацію результатів та публікаціях за темою дисертації.

Перший розділ присвячено застосуванню метода зворотньої задачі розсіювання (МЗЗР) в солітонній теорії збурень для фізичних задач, які приводять до повністю інтегровних дефокусуючого НРШ, деривативного НРШ та модифікованого НРШ.

В підрозділі 1.1 для темних солітонів збуреного дефокусуючого НРШ

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-(|\psi|^2-\rho_0^2)\psi=p[\psi,\psi^*], \quad (1)$$

де p зовнішне збурення, розроблена теорія збурень, що грунтується на МЗЗР. Дефокусуючому НРШ (1) відповідають неспадаючі граничні умови $|\psi|\to\rho_0$ при $x\to\pm\infty$ та темні N-солітонні розв'язки. Раніше теорія збурень для темних солітонів була відома тільки в адіабатичному наближенні без МЗЗР, тобто для одного солітона без урахування викривлення його форми й випромінювання. Розроблений в дисертації підхід дозволяє повністю використовувати поділ дискретних й безперервних ступенів свободи в повністю інтегровному незбуреному НРШ. Отримано рівняння, що описують еволюцію дискретних (N-солітонних) та неперервних (випромінювальних) спектральних даних у присутності зовнішніх збурень

$$\partial_t\mathbf{S}+\mathbf{\Omega}(\zeta)\mathbf{S}=F[\mathbf{P},\mathbf{M}^+,\mathbf{M}^-] , \quad (2)$$

де $\mathbf{S}(\zeta,t)$ матриця розсіювання, $\mathbf{\Omega}(\zeta)$ відома матриця комплексного спектрального параметру ζ, $\boldsymbol{F}$ деякий функціонал, який залежить від зовнішнього збурення $\mathbf{P}$ та матричних функцій Йоста $\mathbf{M}^{\pm}(x,t,\zeta)$ обчислених на незбуреному N-солітонному розв'язку $\psi_s(x,t)$. Діагональні елементи $\mathbf{S}(\zeta,t)$ в (2) відповідають еволюції N-солітонних параметрів, антидіагональні відповідають випромінюванню. Теоретично виявлено ефект безпорогового народження темних солітонів під дією зовнішнього збуренняна на відміну від звичайних солітонів в фокусуючому НРШ. Показано, що при цьому завжди виникають, принаймні два темні солітона з малими рівними амплітудами й швидкостями, спрямованими в протилежні сторони. У якості додатків запропонованої теорії розглянуті просторовий солітон (пучок безперервного оптичного випромінювання) з лінійним накачуванням й нелінійним поглинанням, що відповідає збуренню у вигляді $p=i\alpha\psi-i\beta|\psi|^2\psi$, а також часовий односолітонний імпульс з випадковим початковим $(p=0)$ збуренням в оптичному волоконному світловоді у вигляді

$$\psi(x,0)=\psi_s(x,0)[1+\varepsilon(x)], \quad (3)$$

де $\varepsilon(x)$ випадковий однорідний гауссівський процес з нульовим середнім та кореляційною функцією $\langle\varepsilon(x)\varepsilon(x')\rangle=D(x-x')$, $D\ll 1$. В обох випадках аналітично отримано спектральний розподіл випромінювання, що випускається солітоном та часову еволюцію солітонних параметрів. Зокрема, в першому випадку спектральна густина потужності випромінюваної енергії $W_E(\zeta)$ має вигляд

$$W_E(\zeta)=\frac{\zeta^2}{8\pi}\left(1+\frac{4\rho_0^2}{\zeta^2}\right)\left(1-\frac{4\rho_0^2}{\zeta^2}\right)^2\frac{1}{(1+|S_{21}(\zeta)|^2)}\mathrm{Re}\left(S_{21}^*\frac{dS_{21}}{dt}\right), \quad (4)$$

де спектральний параметр ζ пов'язано з хвильовим числом випромінюваних хвиль q співвідношенням

$$q^2 = \frac{1}{4}\left(\zeta^2 - \frac{16\rho_0^4}{\zeta^2}\right), \tag{5}$$

а S_{21} - антидіагональний елемент матриці розсіювання, який визначається з (2). Для випадку накачування та поглинання знайдено також просторовий розподіл випромінюваного поля. У другому випадку визначено дисперсію швидкості темного солітона для різних форм корелятора шуму.

В підрозділі 1.2 розроблено теорію збурень, що грунтується на МЗЗР, для деривативного НРШ (спектральна задача Каупа-Ньюелла) з спадаючими граничними умовами $|u| \to 0$ при $x \to \pm\infty$

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial}{\partial x}(|u|^2 u) = p[u, u^*], \tag{6}$$

що відповідає розповсюдженню альфвенівських солітонів в плазмі уздовж зовнішнього магнітного поля $B_0\mathbf{x}$, де $u(x,t)$ збурення поперечного магнітного поля $u = B_y + iB_z$, всі змінні нормовані відповідним чином. Отримано еволюційне рівняння для дискретних та неперервних спектральних даних у присутності збурень, яке формально співпадає з (2) з визначеними для цього випадку $\mathbf{\Omega}(\zeta)$, $\boldsymbol{F}$, $\mathbf{M}^{\pm}(x,t,\zeta)$. Знайдено спектральний розподіл випромінюваної енергії і магнітної спіральності для випадків урахування кінцевої провідності плазми – збурення у вигляді $p = iD\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, ефекту резонансних частинок (нелінійного загасання Ландау)

$$p = i\frac{C}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(u\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|u(x',t)|^2}{x-x'}dx'\right),\ C \ll 1, \tag{7}$$

і флуктуацій густини плазми n

$$p = i\frac{\partial}{\partial x}(nu), \tag{8}$$

де n гауссівське випадкове поле з нульовим середнім та корелятором $\langle n(x,t)n(x_,,t_,)\rangle = B(x-x_,)G(t-t_,)$ з різними формами функцій $B(x)$ та $G(t)$. У випадку врахування кінцевої провідності плазми також знайдене поле випромінювання, що приводить до викривлення форми альфвенівського солітона.

В підрозділі 1.3 розроблено метод знаходження точних N-солітонних розв'язків деривативного НРШ з неспадаючими граничними умовами $u \to \rho\exp(\pm 2i\theta)$ при $x \to \pm\infty$, $\rho = \sqrt{B_{0y}^2 + B_{0z}^2}$, $\mathrm{tg}(2\theta) = \frac{B_{0z}^2}{B_{0y}^2}$, B_{0y} та B_{0z} поперечні компоненти зовнішнього магнітного поля, що відповідає розповсюдженню альфвенівських солітонів у плазмі під кутом θ до зовнішнього магнітного поля. Раніше були відомі тільки модулі N-солітонних розвязків та явний вираз тільки 1-солітонних розвязків - світлого $|u| > \rho$, темного $|u| < \rho$ та бризерного (осцілюючого) солітонів. В дисертації вводиться концепція $K + M$-солітонного розв'язку, відповідного K бризерним та M світлим та/або темним солітонам в асимптотиці. Бризери відповідають K нулів діагонального елементу $S_{11}(\zeta)$, які лежать поза колом $\zeta = \rho$ на комплексній площині спектрального параметру ζ утвореної з римановій поверхні спектрального параметру λ (специфіка неспадаючих граничних умов) деяким конформним перетворенням. Світлим та/або темним солітонам відповідають M нулів на колі $\zeta = \rho$. В загальному випадку нулі параметризуються співвідношенням $\zeta_j = \rho \exp(\gamma_j + i\beta_j)$ з $\gamma_j \geq 0, 0 < \beta_j < \pi/2$. Розроблений метод дає можливість одержати явні розв'язки, що описують зіткнення між бризерами й темними та/або світлими солітонами. Знайдено рівняння, що описують еволюцію спектральних даних у присутності збурень. Показано, що в окремому випадку збурення дифузійного типу темний альфвенівський солітон виявляється набагато більш стійким, ніж світлий солітон при тих ж швидкостях та амплітудах.

В підрозділі 1.4 у моделі деривативного НРШ з неспадаючими граничними умовами розглянута еволюція обмеженого в просторі початкового розподілу збурення магнітного поля, що приводить до виникнення альфвенівських солітонів. При цьому виникають солітони трьох типів: бризери, темні та світлі солітони. Знайдено диференційні рівняння для функцій Йоста та вирази, що визначають солітонні власні значення $\eta_j = \gamma_j + i\beta_j$ (які визначають солітонні амплітуди, швидкості, періоди осциляцій для бризерів) для обмеженого в просторі початкового профілю довільної форми

$$u(x,0) = \begin{cases} \rho\exp(-2i\theta), & -\infty < x < 0 \\ u_0(x), & 0 \leq x \leq l \\ \rho\exp(2i\theta), & l < x < +\infty \end{cases} \tag{9}$$

Для випадку початкового "прямокутного" тангенціального розриву збурень магнитного поля у вигляді $u_0(x) = u_0 \exp(iq)$ явне трансцендентне рівняння, яке визначає солітонні параметри , має вигляд

$$\frac{\operatorname{tg} A}{A} = \frac{i\,\operatorname{ch}(2i\theta - \eta)}{r\,\operatorname{sh}\eta[r\,\operatorname{sh}\eta\,\operatorname{sh}(2i\theta-\eta) - s\cos q]}\ , \tag{10}$$

де $\eta \equiv \eta_j$, $A = r\,\operatorname{sh}\eta\sqrt{r^2\operatorname{sh}^2\eta + s^2}$, $r = \rho\sqrt{l}$, $s = u_0\sqrt{l}$. При цьому можливе одночасне виникнення бризерних, темних та світлих солітонів. Для деяких ρ, θ, u_0, q виникають тільки бризери або тільки темні або світлі солітони. Бризери не виникають, якщо $\cos q > 0$. Якщо $u_0 = 0$ виникають тільки темні солітони. В окремих випадках отримано явні вирази для числа виникаючих солітонів та їх параметрів. Запропоновано узагальнення розробленого методу на випадок декількох розділених в просторі початкових збурень. Аналітичні результати підтверджуються прямим чисельним моделюванням еволюції тангенціального розриву в моделі деривативного НРШ з неспадаючими граничними умовами.

В підрозділі 1.5 досліджено вплив випадкових збурень на солітон модифікованого НРШ (спектральна задача Коно-Ішикави), що поєднує в собі фокусуюче НРШ і деривативне НРШ з спадаючими граничними умовами

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \alpha|\psi|^2\psi + i\beta\frac{\partial}{\partial x}(|\psi|^2\psi) = p[\psi,\psi^*], \qquad (11)$$

що описує розповсюдження ультракоротких електромагнітних імпульсів в оптичних волоконних світловодах. Визначені дисперсія ширини й швидкості солітона та спектральний розподіл випромінювання при наявності малої початкової шумової добавки до солітонного імпульса ψ_s у вигляді (3). Для випадку зовнішнього збурення у вигляді мультиплікативного шуму $p = \varepsilon(x,t)\psi$, де $\varepsilon(x,t)$ випадкове гауссівське поле з коррелятором $\langle\varepsilon(x,t)\varepsilon(x',t')\rangle = D(x-x')B(t-t')$, знайдено середні спектральні потужності випромінювання для різних форм корелятора випадкового поля.

Другий розділ присвячено нелінійним структурам на верхньогібридному та іонно-циклотронному плазмових резонансах, і в плазмі з електронним пучком.

В підрозділі 2.1 отримано двовимірні нелінійні рівняння для огинаючої електростатичного потенціалу φ на частоті верхньогібридного резонансу $\omega_{UH} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2}$ (ω_{pe} , ω_{ce} - плазмова електронна та електронно-циклотронна частоти відповідно), та НЧ збурень магнітного поля δB і густини плазми n, що описують взаємодію верхньогібридних плазмових хвиль з магнітозвуковими хвилями. Отримані рівняння включають як скалярну, так і векторну нелінійність, що зникає в одновимірному випадку. В диссертації враховується також кінетичний характер магнітозвукової хвилі. Знайдено інкременти та пороги модуляційної нестійкості для різних співвідношень між хвильовим вектором збурення $\boldsymbol{k}$ та хвильовим вектором верхньогібридної хвилі $\boldsymbol{k}_0$. Зокрема, у випадку $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{k}_0$, $k_0 \ll k$ внесок скалярної нелінійності зникає. Дисперсія кінетичної магнітозвукової хвилі

$$\omega_{\boldsymbol{k}}^2 = k_\perp^2 v_s^2 + \frac{k_\perp^2 v_A^2}{1 + k_\perp^2 c^2/\omega_{pe}^2} , \qquad (12)$$

де v_s іонно-звукова та v_A альфвенівська швидкості відповідно, приводить до нелокального характеру нелінійності. Наслідком цього є відсутність колапсу в даній моделі, що строго доводиться знаходженням нижньої оцінки для гамільтоніана H при фіксованої енергії N

$$H \geq -\frac{C^2N^3}{4} - \frac{N^2}{2}\ , \ \ C = \max_z\left[zK_0(z\sqrt{\beta+1})/2\pi\right] = \text{Const} > 0, \quad (13)$$

де K_0 модифікована функція Бесселя другого роду нульового порядку, β деяка константа.

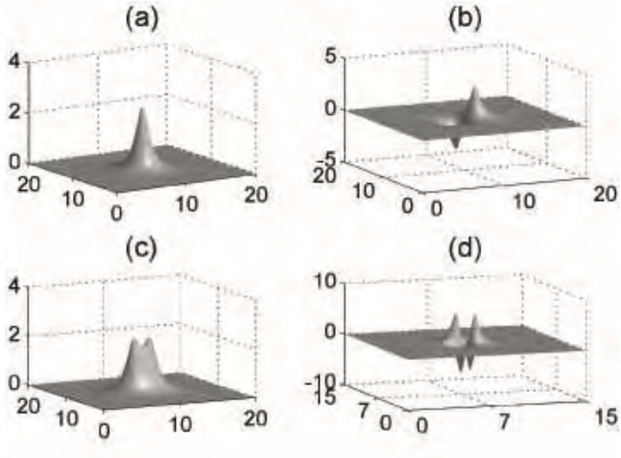

Рис. 1 Приклади двовимірних мультисолітонних структур: (a) фундаментальний солітон з $\lambda = 0.5$; (b) дипольний солітон з $\lambda = 0.5$; (c) двугорбий солітон з $\lambda = 0.5$; (d) квадрупольний солітон з $\lambda = 2$.

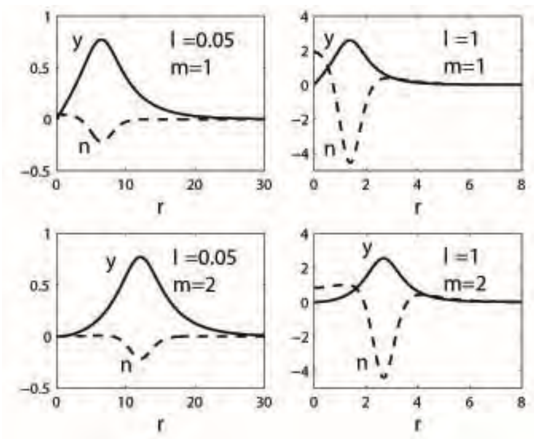

Рис. 2 Приклади радіально симетричних вихорових солітонів з $m = 1$ та $m = 2$ для $\lambda = 0.05$ (лівий рядок) та $\lambda = 1$ (правий рядок): показані радіальні профілі амплітуди поля $|\Psi|$ (суцільна крива) та збурення густини плазми n (пунктирна крива).

Чисельно знайдено стаціонарні розв'язки $\varphi(x, y, t) = \Psi(x, y)\exp(i\lambda t)$ у вигляді двовимірних мультисолітонів (дійсні Ψ) – рис.1, та радіально симетричних вихорів з $\Psi(x, y) = \Phi(r)\exp(im\theta)$, де m – ціле (топологічний заряд) – рис.2 й досліджена їхня стійкість. Фундаментальні солітони є стійкими й не колапсують навіть при негативному початковому гамільтоніані. Для мультисолітонів стійка еволюція не спостерігалася, але не спостерігався й колапс. Якщо нелінійний зсув частоти не занадто великий, мультисолітони розпадаються на кілька фундаментальних солітонів, але можуть не змінювати своєї форми досить тривалий час. Чисельно продемонстровано виникнення двовимірного солітона з майже однорідного початкового поля при перевищенні порога модуляційної нестійкості, який, співіснуючи з турбулентним оточенням, є стійким та не колапсує. Приклад такої еволюції представлено на рис. 3. В залежності від амплітуди й хвильового вектора початкової хвилі спостерігалося формування двох і більш фундаментальних солітонів, а в деяких випадках виникнення (одночасно із солітонами) структур, які нагадували вихори. В той же час не спостерігалося формування будь яких локалізованих структур у всіх випадках, коли початкова амплітуда поля була досить малою і не було перевищено поріг модуляційної нестійкості.

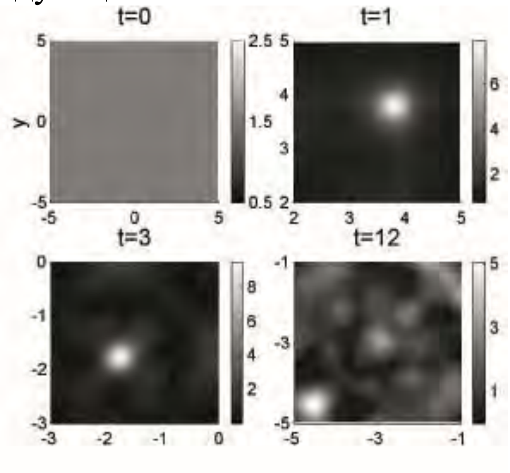

Рис. 3 Амплітуда поля $|\Psi|$ в (x, y) – площині на часі $t = 0, t = 1, t = 3$ та $t = 12$. Модуляційна нестійкість початкового поля при перевищенні порога приводить до виникнення локалізованної структури – солітона. Колапс відсутній.

В підрозділі 2.2 запропоновано еволюційне нелінійне рівняння, що описує динаміку короткохвильових (довжина хвилі менше іонного ларморівського радіуса ρ_i) нелінійних іонно-циклотронних хвиль з частотою $\sim\omega_{ci}$, що поширюються в плазмі поперек зовнішнього магнітного поля, з лінійною дисперсією

$$\omega_{\boldsymbol{k}} = \omega_{ci}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(1 + T_{i,\perp}/T_{e,||}\right)k_\perp \rho_i}\right], \tag{14}$$

де $T_{i,\perp}$, $T_{e,||}$ поперечна іонна та повздовжня електронна температури відповідно. Нелінійності відповідає низькочастотне збурення магнітного поля під дією поля іонно-циклотронної хвилі. В одновимірному випадку отримане рівняння зводиться до

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} - \psi = i|\psi|^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{15}$$

де ψ повільна огинаюча електростатичного потенціалу $\varphi = \psi \exp(i\omega_{ci} t)$ на іонно-циклотронній частоті ω_{ci}. На відміну від раніше відомих еволюційних нелінійних рівнянь, його лінійна дисперсія відповідає зворотній залежності частоти $\omega \sim \frac{1}{k_x}$ від хвильового числа. Знайдено поріг та інкремент модуляційної нестійкості плоскої монохроматичної хвилі кінцевої амплітуди. Аналітично знайдені розв'язки у вигляді світлих та темних солітонів, ударних хвиль та нелінійних періодичних хвиль.

В підрозділі 2.3 отримано систему нелінійних рівнянь, яка описує нелінійну стадію пучкової нестійкості електронного пучка в плазмі. У відмінність від раніше запропонованих моделей, дана система рівнянь відповідає нелінійному НЧ збуренню густини плазми у вигляді горба, а не ями. Це дає можливість знайти аналітичні розв'язки у вигляді нелінійних періодичних кноідальних хвиль (ланцюжка солітонів), що рухаються із швидкістю $\sim 2v_0/3$, де v_0 швидкість пучка, тобто близькою до групової швидкості лінійної хвилі просторового заряду пучка. Виникнення стаціонарної нелінійної хвилі при цьому відповідає автостабілізації лінійної пучкової нестійкості. Раніш відомі теорії пояснювали виникнення тільки "повільних" солітонів з швидкостями менше або $\sim v_s$ швидкості іонного звуку. Отримані в дисертації теоретичні результати пояснюють виникнення в експерименті (Yamagiwa та ін. 1990) "швидких" солітонів з швидкістю $\sim 2v_0/3$.

У третьому розділі досліджуються дрейфові вихорі та зональні течії які виникають у плазмі, що перебуває в зовнішньому магнітному полі, при врахуванні градієнтів рівноважної густини плазми й/або електронної температури.

В підрозділах 3.1, 3.3 в борновському та ейкональному наближенні аналітично обчислені амплітуди та повні перерізи розсіювання дрейфових плазмових хвиль та електромагнітних хвиль на двовимірному дрейфовому дипольному вихорі (модоні - аналітичний точний розвязок, Ларічев-Резнік 1976) в моделі нелінійного рівняння Хасегави-Міми

$$\frac{\partial}{\partial t}(1-\Delta_\perp)\Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Delta_\perp \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Delta_\perp \Phi}{\partial x} \tag{16}$$

та Φ безрозмірний електростатичний потенціал. У випадку, коли довжина дрейфової хвилі більше радіуса модона залежність амплітуди розсіювання від кута розсіювання немонотонна й суттєво залежить від кута падіння хвилі, але у всіх випадках відсутнє розсіювання вперед. В залежності від параметрів модона та хвильових векторів падаючої дрейфової або електромагнітної хвилі модон може бути майже "прозорим" для хвилі (переріз розсіювання багато менше радіуса модона) або досить сильно взаємодіє з хвилею (переріз порядку модонного радіуса). У випадку, коли довжина хвилі багато менше радіуса модона застосовне ейкональне наближення і при цьому розсіювання йде переважно на малі кути, а повний переріз близький до подвоєного характерного діаметру модона.

В підрозділі 3.2 показано, що двовимірний модон може захоплювати квазілінійні дрейфові хвилі і при цьому сформульовано задачу на власні значення

$$\hat{L}\Psi + V(x,y)\Psi = f(\lambda)\Psi \tag{17}$$

де $\hat{L}$ деякий лінійний оператор, Ψ відповідає дрейфовій хвилі, а потенціал $V(x,y)$ залежить від поля модона, так що $\Phi = \Phi_{mod} + \Psi$. В залежності від швидкості та радіуса модона захоплення здійснюється в центрі або на периферії вихору, приводячи до викривлення його форми. Знайдено власні частоти λ_{mn} захоплених мод та їх просторову структуру Ψ_{mn}.

В підрозділі 3.4 отримано тривимірні нелінійні рівняння, які описують взаємодіючі дрейфові та іонно-звукові хвилі. Показано, що знайдені рівняння у окремому випадку зводяться до анізотропного узагальнення рівняння Хасегави-Міми на тривимірний випадок. Знайдено точні аналітичні розв'язки цього рівняння у вигляді тривимірного дрейфового вихорового солітона (тривимірного модона), який містить x-антисиметричну, z-антисиметричну та радіально симетричну частини. Модон характеризується 4 вільними параметрами – швидкістю, "радіусом", амплітудою z-антисиметричної частини, амплітудою радіально симетричної частини. Чисельно досліджено зіткнення модонів. Чисельне моделювання показує зокрема, що тривимірні модони без радіально симетричної та/або z -антисиметричної частин повністю відтворюють свою початкову форму після зіткнення (абсолютно пружне солітонне зіткнення), не залишаючи ніякого випромінювання. Це справедливо як лобових зіткнень, приклад якого представлено на рис. 4, так і для проникаючих зіткнень (в початковий момент більш швидкий модон доганяє повільний) – рис. 5. Ця поведінка нагадує пружні зіткнення солітонів в одновимірних повністю інтегровних моделях типу НРШ, ДНРШ та ін.

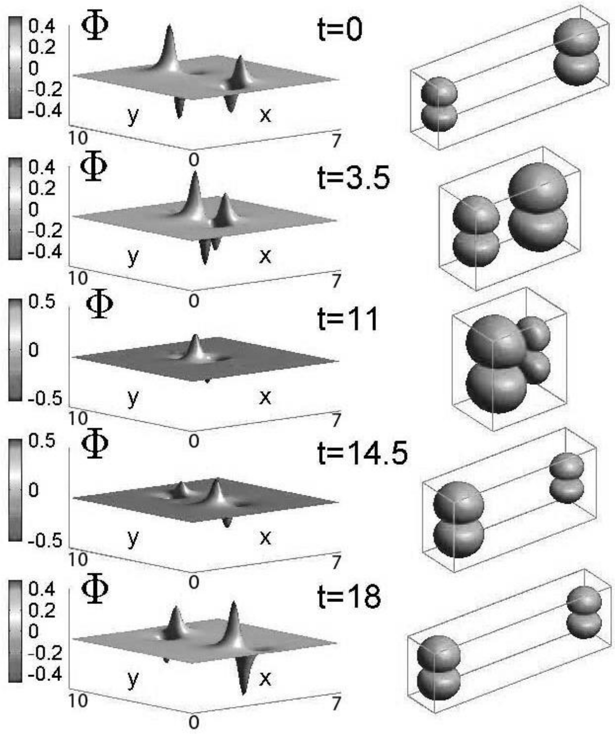

Рис. 4 Пружне лобове зіткнення між модонами. Лівий стовпчик: електростатичний потенціал Φ в $x{-}y$ площині (переріз тривимірного простору). Правий стовпчик: изоповерхні $\Phi(x, y, z)$ в тривимірному просторі.

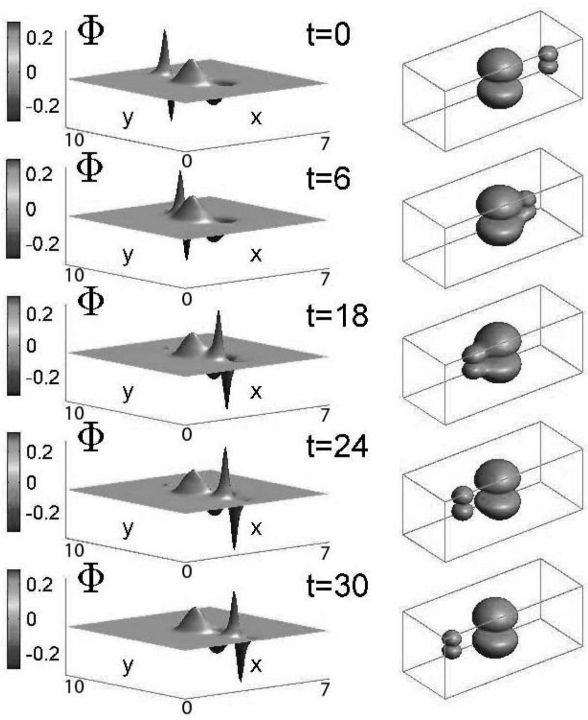

Рис. 5 Пружне проникаюче зіткнення між модонами. Лівий стовпчик: електростатичний потенціал Φ в $x{-}y$ площині (переріз тривимірного простору). Правий стовпчик: изоповерхні $\Phi(x, y, z)$ в тривимірному просторі.

Зіткнення модонів з радіально симетричною та/або z-антисиметричною частинами виявляються непружними та модони руйнуються в процесі зіткнення, залишаючи випромінювання. Зіткнення з ненульовим прицільним параметром виявляються непружними для усіх видів знайдених тривимірних модонів.

В підрозділі 3.5 показано, що середня течія достатньо малої амплітуди збільшує інкремент модуляційної нестійкості дрейфових хвиль, сприяючи генерації зональної течії (залежність потенціалу Φ тільки від x). Наявність середньої течії досить великої амплітуди виявляє стабілізуючий вплив на генерацію зональної течії. Показано також, що модуляційна нестійкість дрейфових хвиль, обумовлених градієнтом електронної температури, при перевищенні амплітуди дрейфової хвилі граничного значення приводить до генерації зональної течії з деяким оптимальним просторовим масштабом. Наявність зональної течії як когерентної, так й шумової природи значно послаблює лінійну нестійкість дрейфових мод. При перевищенні середньоквадратичної амплітуди зональної течії деякого критичного значення, лінійна нестійкість зникає для всіх хвильових чисел k_x дрейфової хвилі.

Четвертий розділ присвячено знаходженню двовимірних нелінійних структур в середовищах з нелокальною нелінійністю та з'ясуванню умов стійкості цих структур.

В підрозділах 4.1, 4.2 чисельно знайдено стійкі двовимірні дипольні солітони в моделі НРШ з нелокальним гауссовськім відгуком, а також двовимірні необертові дипольні, трипольні й квадрупольні солітони, обертові дипольні й квадрупольні солітони в моделі слабкоіонізованої плазмі з нелокальною тепловою нелінійністю. Показано, що необертові дипольні, обертові дипольні й квадрупольні солітони можуть бути стійкими в певному діапазоні параметрів. Необертові трипольні й квадрупольні солітони виявляються завжди нестійкими, однак у певному інтервалі енергій нестійкість слабка й солітони еволюціонують без зміни форми протягом десятків дифракційних довжин.

В підрозділі 4.3 вивчаються нелінійні структури у двовимірній моделі рівняння Гросса-Пітаєвського, який описує БЕК з локальною та нелокальною взаємодією між атомами (млиноподібна конфігурація БЕК - Pedri, Santos 2005)

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\Delta_{\perp}\psi=g\psi\{|\psi|^2+\beta\int R(\mathbf{r}-\mathbf{r}')|\psi(\mathbf{r}')|^2 d\mathbf{r}'\}\,, \qquad (18)$$

де спектр ядра визначається як $\hat{R}(\mathbf{k})=2-3\sqrt{\pi}ke^{k^2}\mathrm{erfc}(k)$. Нелокальна нелінійність відповідає диполь-дипольній взаємодії, що виникає в газах БЕК з аномально великими магнітними моментами. В дисертації аналітично знайдено інкременти γ модуляційної нестійкості плоскої монохроматичної хвилі кінцевої амплітуди. У випадку з притягуванням між атомами ($g = -1$) $\gamma = 0$ для хвильових чисел $0 \le k \le k_{cr}$, де k_{cr} деяке критичне значення, що залежить від β (відношення інтенсивностей нелокальної та локальної взаємодій), якщо $\beta < 0.5$ (зокрема, для всіх негативних β), так що довгохвильові моди є стійкими. Оптимальне, тобто що відповідає максимальному інкременту, хвильове число k_{opt} зменшується зі збільшенням β. Для випадку з відштовхуванням ($g = 1$) інкремент $\gamma = 0$ для $\beta > -0.4$. Для випадку з притягуванням чисельно знайдено двовимірні локалізовані розв'язки $\psi(x, y, t) = \Psi(x, y)\exp(-i\mu t)$, де μ хімічний потенціал, у вигляді фундаментального солітона, дипольного й квадрупольного солітона, вихорового солітона, азимутонних солітонів (азимутонів) з двома й чотирма піками інтенсивності (обертових диполів та квадруполів, для яких введено додатковий параметр $p = \max|\mathrm{Im}\,\Psi|/\max|\mathrm{Re}\,\Psi|$ – глибину модуляції фази та які стаціонарні в системі відліку, що обертається з частотою ω). Стійкі структури можливі тільки в певному діапазоні деякого критичного значення відношення нелокальної та локальної взаємодій β. Фундаментальні солітони стійки при $0 < \beta < \beta_{cr} \sim 2.1$, для всіх $\mu < 0$. Дипольні солітони стійкі тільки усередині обмеженої області по числу атомів, а квадрупольні солітони нестійкі завжди. Вихорові солітони з одиничним топологічним зарядом стійкі при перевищенні числа атомів деякого критичного значення. Азимутони з двома піками інтенсивності можуть бути стійкими, якщо глибина модуляції p не занадто мала та число частинок досить велике.

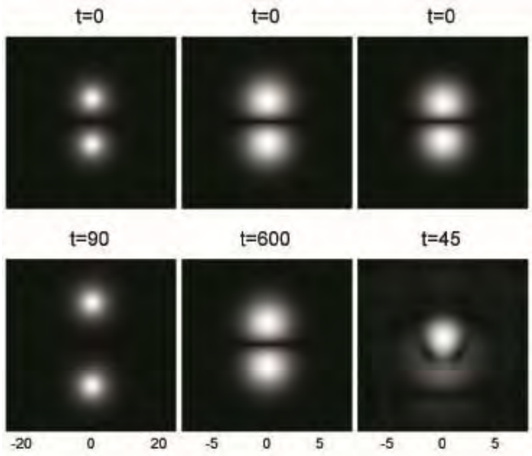

Рис. 6 <u>Лівий стовпчик</u>: Розпад дипольного солітона з $\mu = -0.2$ на два фундаментальних солітона;
<u>середній стовпчик</u>: стійка динаміка з $\mu = -3$;
<u>правий стовпчик</u>: руйнування нестійкого дипольного солітона з $\mu = -4$.

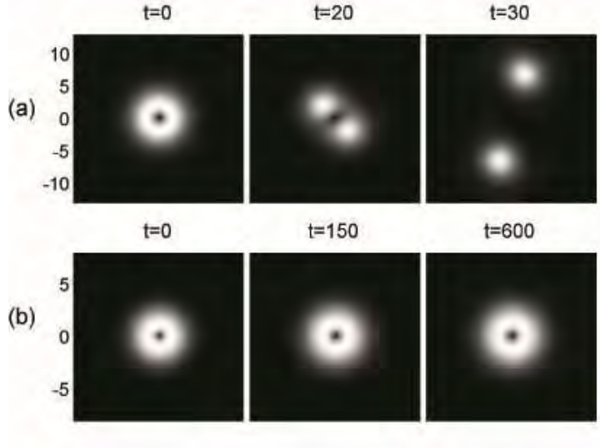

Рис. 7 (a) Розпад вихоря з $\mu = -1$ на два фундаментальних солітона;
(b) Стійка еволюція вихоря з $\mu = -5$.

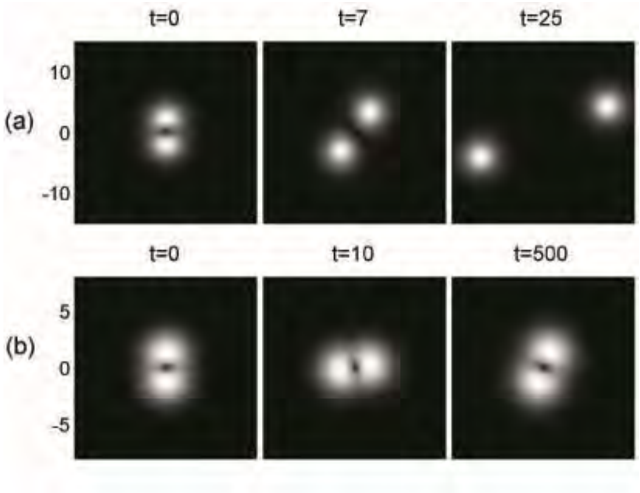

Рис. 8 Розпад азимутона с 2 піками інтенсивності з $\mu = -1$, p = 0.4 (глибина модуляции) на два фундаментальних солітона;
(b) Стійка еволюція (обертання) азимутона з двома піками інтенсивності з $\mu = -5$, $p = 0.6$.

Критичні значення по числу атомів, які визначаються значенням μ, залежать від β. Приклади різних сценарієв еволюції знайдених структур представлено на рис. 6-8.

У п'ятому розділі вводиться концепція азимутонних солітонних структур (азимутонів).

В підрозділі 5.1 в якості моделі розглядається двовимірний (“млиноподібна” конфігурація) БЕК в аксиально симетричній гармонічній пастці. Динаміка конденсату описується нормованим рівнянням Гросса-Пітаєвського для хвильової функції ψ з локальною взаємодією та утримуючим зовнішнім потенціалом

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \Delta_\perp\psi - (x^2 + y^2)\psi + \sigma|\psi|^2\psi = 0, \qquad (19)$$

для випадку відштовхування між атомами, так що $\sigma = -1$. Стаціонарні локалізовані розвязки $\psi\,(r,\varphi,t) = \Phi\,(r,\varphi - \omega t)\exp(-i\mu\, t)$, де ω має сенс частоти обертання структури, задовольняють рівнянню

$$\mu\Phi + \Delta_\perp\Phi - (x^2 + y^2)\Phi - i\omega\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi - |\Phi|^2\Phi = 0\,. \qquad (20)$$

Азимутони являють собою проміжний стан між радіально симетричними вихорами й необертовими мультисолітонами. На відміну від вихорових солітонів, фаза азимутонних солітонів є нелінійною функцією полярного кута, а амплітуда не має радіальну симетрію. Азимутони, як і радіально симетричні вихори, несуть ненульовий кутовий момент. З іншого боку, азимутони нагадують необертові мультисолітони з більш ніж одним піком в амплітуді. Знайдені азимутонні солітони, на відміну від раніше відомих мультисолітонів й вихорових солітонів, характеризуються (крім швидкості) чотирма незалежними параметрами: хімічним потенціалом μ, частотою обертання ω, топологічним зарядом m_{tot} та числом піків *N*. Структура $(-k, l)$, де k та l позитивні цілі, має $k + l$ піків та $k + l + 1$ особих точок в фазі - з них одна особа точка в центрі з зарядом $m_c = -k$ та $k + l$ особих точок на периферії з зарядом +1 (загальний топологічний заряд $m_{tot} = l$, й $N = k + l$ піків). Особа точка (дислокація) – нуль амплітуди поля з набігом фази $2\pi m$, де m ціле. Приклади структур показано на рис. 9 - 11. Азимутони з однаковим числом піків можуть суттєво відрізнятися своєю фазовою структурою. Варіаційне наближення (вихідне наближення для чисельного аналізу) має вигляд

$$\Phi(r,\theta) = Ae^{-r^2/2a^2}\left[(r/a)^k e^{-ik\theta} + s(r/a)^l e^{il\theta}\right], \qquad (21)$$

де A, a та s визначаються з умови мінімізації функціонала дії

$$S(A,a,s) = H - \mu N - \omega M_z, \qquad (22)$$

де гамільтоніан H, число частинок N, z-проекція кутового моменту M_z - інтеграли руху. Області існування на площині (μ,ω) представлені на рис. 12. Кутові (біфуркаційні) точки рис. 12 можна одержати строго аналітично без варіаційного та чисельного аналізу:

$$\mu_{lin} = 2(N - m_{tot} + 1) + \frac{2(N - m_{tot})(2m_{tot} - N)}{N},$$

$$\omega_{lin} = \frac{2(2m_{tot} - N)}{N}.$$

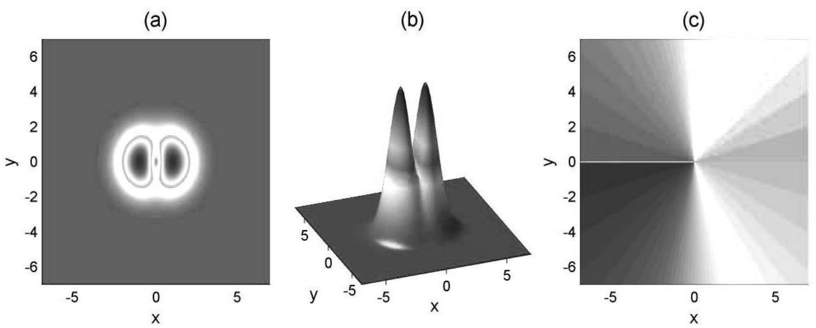

Рис. 9 2-піковий азимутон (-1,1) з $\mu = 5$ та частотою обертання $\omega = 0.2$. Одна особа точка в центрі з зарядом $m_c = -1$.

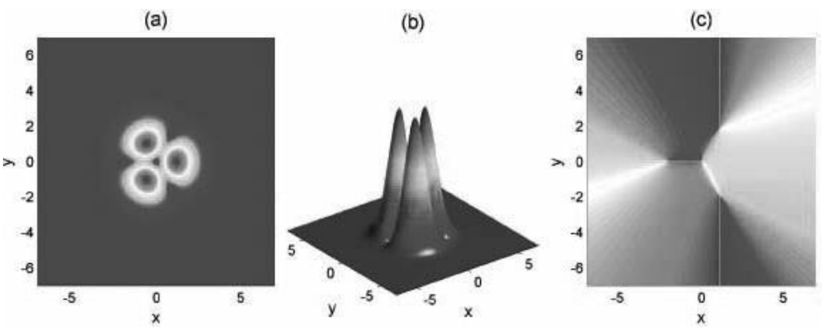

Рис. 10 3-піковий азимутон (-1,2) з $\mu = 5, \omega = 0.7$. 4 особих точок: 3 на периферії з зарядом $m = 1$ та 1 особа точка в центрі з зарядом $m_c = -1$. Загальний заряд $m_{tot} = 3 - 1 = 2$.

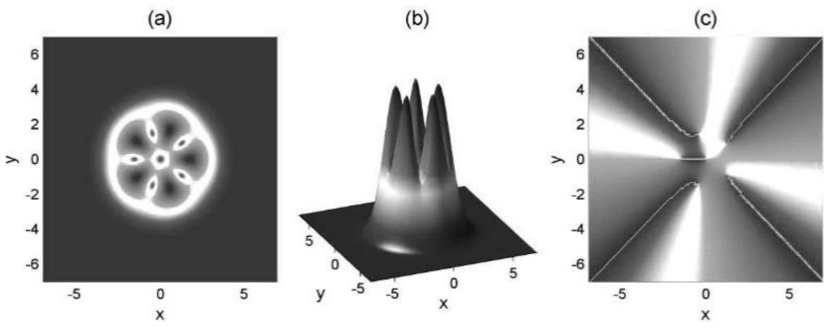

Рис. 11 5-піковий азимутон (-1,4) з $\mu = 7, \omega = 1.1$. 6 особих точок: 5 на периферії з зарядом $m = 1$ та 1 особа точка в центрі з зарядом $m_c = -1$. Загальний заряд $m_{tot} = 5 - 1 = 4$.

Для одержання чисельних розвязків з такою досить складною топологією в дисертації розроблено багаторівневий (з переключенням в процесі розрахунку) алгорітм: варіаційний аналіз→релаксаційний метод Петвіашвілі→метод Лакоби-Янга→метод Ньютона-Канторовича.

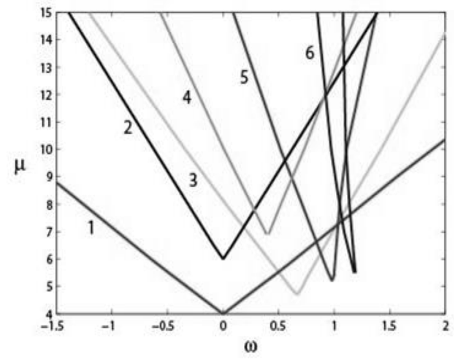

Рис. 12 Області існування азимутонних структур на площині (μ, ω) (всередині ліній): **1**: 2 піка (-1,1). **2**: 4 піка (-2,2). **3**: 3 піка (-1,2). **4**: 5 піків (-2,3). **5**: 4 піка (-1,3). **6**: 5 піків (-1,4).

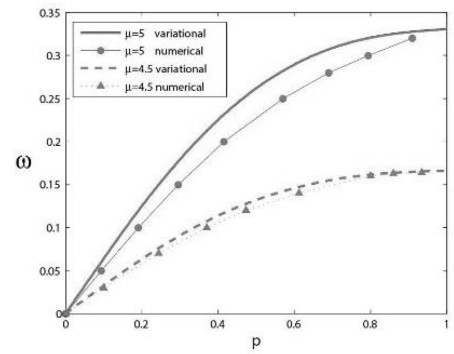

Рис. 13 Частота обертання ω 2-пікового азимутона (-1,1) від глибини модуляції p для двох значень μ.
Варіаційний (кола й трикутники) та чисельний аналіз (суцільна й пунктирна лінії) аналіз.

Частота обертання ω однозначно визначається глибиною модуляції p введеної в підрозділі *4.3*. Залежність ω від p для 2-пікового азимутона показано на рис. 13. По суті, мультисолітони та вихори є окремим випадком азимутонів з парним числом піків $k + l$, що відповідають нульовій та одиничній глибині модуляції азимутона відповідно і при цьому відповідно $m_c = 0$ та $m_c = -l$. Зокрема, варіаційний анзац (21) з $s = 1$, $k = l$ відповідає мультисолітонам з k піками, а $s = 0$, $l = 0$ вихорям з топологічним зарядом k. На рис. 14 показано область стійкості двовимірного азимутона з двома піками на площині параметрів хімічний потенціал-частота обертання

(μ, ω). Показано, що двовимірні азимутони з трьома й більш піками інтенсивності можуть десятки періодів обертання еволюціонувати без

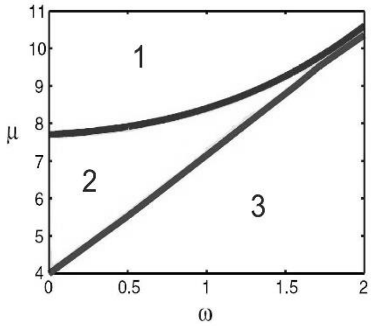

Рис. 14 Область 2 відповідає стійкості 2-пікового азимутона (-1,1) на площині (μ, ω) - хімічний потенціал (нормоване число атомів у конденсаті), частота обертання. В області 1 азимутон нестійкий, в області 3 розв'язок не існує.

помітної зміни форми, при умові, що хімічний потенціал μ досить малий (або, еквівалентно, число атомів в азимутонному солітоні досить мало). Приклад такої стійкої еволюції азимутонної структури (-1,4) показано на рис. 15.

В підрозділі 5.1.2 чисельно продемонстровано можливість генерації азимутонних солітонів з фундаментального солітона, легко реалізованого в експериментальних умовах, та одночасного накладення розривних фаз на

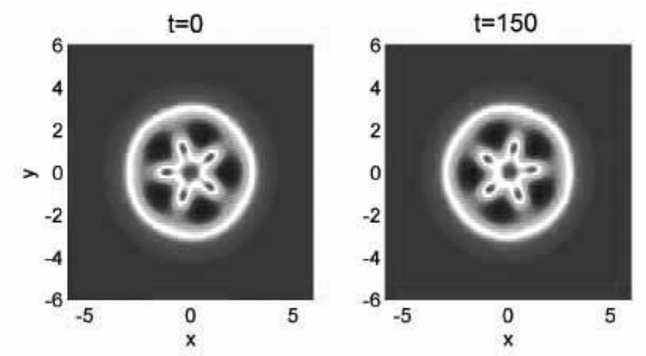

Рис. 15 Стійка динаміка 5 пікового азимутона (-1,4) з $\mu = 5.5$ та частотою обертання $\omega = 1.2$.

фундаментальний солітон. Початкова умова для динамічного рівняння (19) бралася у вигляді гауссовського розподілу з накладеною фазою

$$\psi(\mathbf{r}, 0) = A \exp[-r^2/a^2 + i\phi(\theta)] , \qquad (23)$$

де

$$\phi(\theta) = \frac{2\pi m_c n}{N} \text{ при } \frac{2\pi n}{N} < \theta < \frac{2\pi(n+1)}{N}, n = 0 \dots N-1, \qquad (24)$$

m_c негативне ціле, $|m_c| \leq N/2$ та амплітуда A і характерна ширина a обчислювалися за допомогою варіаційного аналізу з заданим значенням нормованого числа частинок. При цьому, контролюючи початкову просторову структуру фаз, в процесі еволюції початкового поля можна одержати азимутони з довільним числом піків і довільною фазовою структурою (числом особливих точок та центральним топологічним зарядом m_c). Чисельне моделювання еволюції розподілу (23) з фазою (24) приводить до генерації азимутона з N піками, N+1 особливими точками, центральним топологічним зарядом m_c і повним зарядом (враховуючи N особливих точок на периферії із зарядом +1 кожна) $m_{tot} = N + m_c = N - |m_c|$. Виникаюче випромінювання поглиналося на границі чисельними поглиначами. На рис. 16 показано приклади генерації азимутонів з 4 і 8 піками й різними центральними топологічними зарядами. Таким чином, змінюючи N і m_c, можна одержати азимутон з довільним числом піків і довільною фазовою структурою.

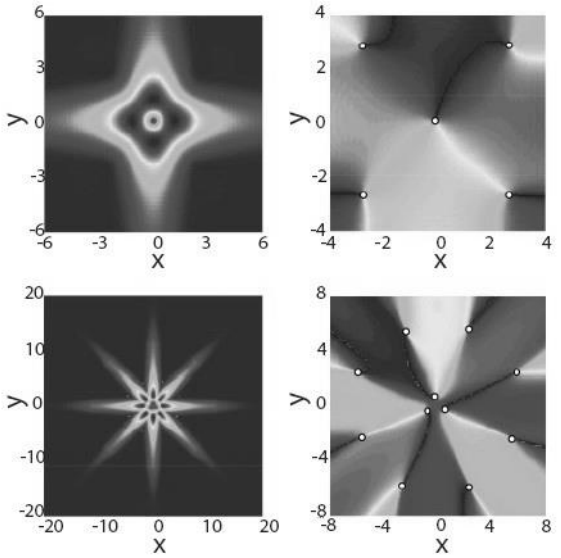

Рис. 16 <u>Верхній рядок</u>: амплітуда та фаза через час $t = 0.8$, що виникли в результаті еволюції початкового $(t = 0)$ розподілу з $N = 4, m_c = -1$.
<u>Нижній рядок</u>: те ж саме для розподілу з $N = 8,\ m_c = -3$.

В підрозділі 5.2 знайдено тривимірні мультисолітони та азимутони в моделі (19) узагальненої на тривимірний випадок та притягування $(\sigma = 1)$ між атомами. У циліндричних координатах стаціонарні розв'язки вигляду $\psi(r, \varphi, z, t) = \Phi(r, z, \theta)\exp(-i\mu t)$, де $\theta = \varphi - \omega t$ задовольняють рівнянню

$$\Delta\Phi - i\omega\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \mu\Phi - (r^2 + \Omega^2 z^2)\Phi + |\Phi|^2\Phi = 0, \qquad (25)$$

де далі вважалося $\Omega = 1$ (сферично-симетрична утримуюча пастка, або перенормування z-координати для квазімлиноподібних $\Omega < 1$ та сигароподібних $\Omega > 1$ конфігурацій). Чисельні розв'язки рівняння (25) знаходилися методом, розробленим в підрозділі *5.1* дисертації. У якості початкового наближення обиралася функція

$$\Phi(r, z, \theta) = Ar^m e^{-\frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}}(\cos m\theta + ip_0 \sin m\theta), \qquad (26)$$

де m ціле, та $0 \le p_0 \le 1$ – аналог глибини модуляції. Анзац (26) не є розв'язком, але описує топологію азимутонів. Випадок p_0=0 відповідає необертовим мультипольним тривимірним солітонам (тобто $m = 1$ – дипольному солітону, $m = 2$ – квадрупольному і т.д.), у той час як протилежний граничний випадок p_0=1 відповідає радіально симетричним тривимірним вихорам з топологічним зарядом m. Випадок $0 < p_0 < 1$ відповідає тривимірним азимутонам. Реальна глибина модуляції p , введеної в підрозділі *5.1*, визначалася під час n–ой ітерації як $p_n = \max|\mathrm{Im}\,\Phi_n| / \max|\mathrm{Re}\,\Phi_n|$. Приклади знайдених структур представлені на рис. 17. Частота обертання ω тривимірної структури однозначно визначається глибиною модуляції p та збільшується зі зростанням p. При фіксованому p частота

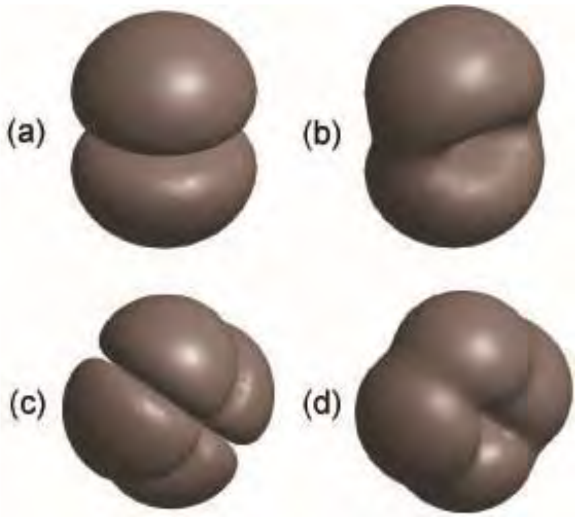

Рис. 17 Приклади тривимірних мультисолітонів та азимутонів з $\mu = 4.5$: (a) - дипольний солітон, $\omega = 0, p = 0$; (b) – азимутон з 2 піками, $\omega = 0.13, p = 0.43$; (c) квадрупольний солітон, $\omega = 0, p = 0$; (d) азимутон з 4 піками, $\omega = 0.3, p = 0.22$.

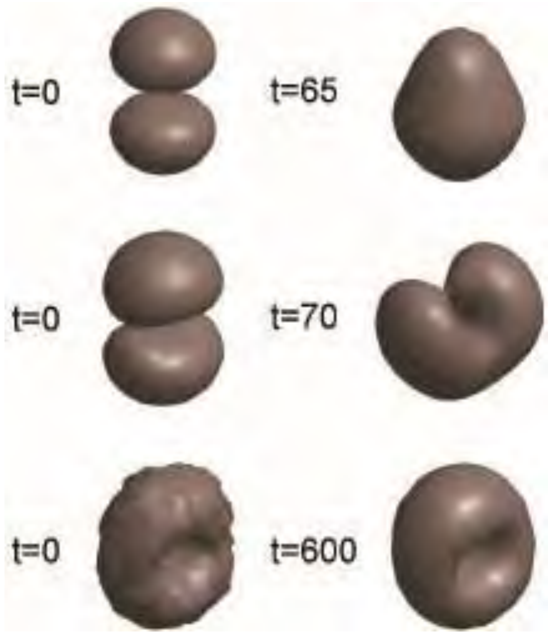

Рис. 18 <u>Верхній рядок</u>: нестійка динаміка дипольного солітона з μ =4.2. Початковий стан незбурено. <u>Середній рядок</u>: нестійка динаміка азимутона з 2 піками та ω = 0.18, p = 0.3, μ = 4.2. Початковий стан азимутона збурено слабким шумом. <u>Нижній рядок</u>: стійка динаміка азимутона з 2 піками та ω = 0.3, p = 0.73, μ = 4.2. Початковий стан збурено сильним шумом.

обертання збільшується зі зменшенням хімічного потенціалу μ. Знайдено умови стійкості тривимірних азимутонів з двома піками шляхом отримання інкременту нестійкості γ з лінеарізованого динамічного рівняння на фоні знайденого розв'язку. Залежність інкремента γ від глибини модуляції p для азимутонів з двома піками й різними значеннями хімічного потенціалу μ. Інкремент нестійкості $\gamma \neq 0$ для розв'язків з $p < p_{cr}$~0.7 та для всіх μ, тобто області стійкості не існує. Зокрема, усі необертові ($\omega = 0$) тривимірні дипольні солітони виявляються нестійкими. Інкремент зменшується зі збільшенням μ і може бути дуже малим, якщо $\mu \sim 5$. Картина, однак, змінюється, коли глибина модуляції перевищує деяке критичне значення $p_{cr} \sim 0.7$. При цьому, інкремент нестійкості падає до нуля $\gamma = 0$, з'являється область стійкості й азимутони з $p > p_{cr}$ є стійкими. При цьому критичне значення p_{cr} слабко міняється зі зміною μ. Усі мультисолітони й азимутони вищих порядків (квадрупольні і т.д.) виявляються нестійкими Приклади еволюції мультисолітонів та азимутонів показано на рис. 18. Стійкість досягається при досить малому числі частинок та перевищенні глибини модуляції p деякого критичного значення. При цьому азимутон виживає й еволюціонує без зміни форми навіть при початковому накладенні на нього досить сильної шумовий добавки. Тривимірні необертові дипольні солітони завжди виявляються нестійкими.

Шостий розділ присвячено нелінійним векторним структурам в двокомпонентних БЕК в моделі зцеплених рівнянь (11) для окремої хвильової функції кожного сорту атомів $\Psi_j,\ j = 1{,}2$.

В підрозділі 6.1 чисельно знайдено двовимірні векторні стани, що описують векторні пари солітон-вихор і вихор-вихор у двовимірних двокомпонентних БЕК з гармонійною пасткою з магнітним утриманням для випадку притягування між атомами одного сорту й притягування або відштовхування між атомами різних сортів. Стани вихор-вихор та солітон-вихор з топологічним зарядом більшим одиниці виявляються нестійкими як при притягуванні, так й при відштовхуванні між компонентами конденсату.

В підрозділі 6.2 введена концепція двовимірних векторних пар солітон-азимутон та азимутон-азимутон в двокомпонентних БЕК. Стаціонарні розвязки $\Psi_j(r,\varphi,t) = \Phi_j(r,\varphi-\omega t)\exp\left(-i\mu_j t\right)$ задовольняють системі рівнянь

$$\mu_1\Phi_1 + \Delta_\perp\Phi_1 - (x^2+y^2)\Phi_1 - i\omega\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi_1 + (|\Phi_1|^2 + g|\Phi_2|^2)\Phi_1 = 0, \tag{27}$$

$$\mu_2\Phi_2 + \Delta_\perp\Phi_2 - (x^2+y^2)\Phi_2 - i\omega\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi_2 + (g|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2)\Phi_2 = 0, \tag{28}$$

де g константа міжкомпонентної взаємодії та розглядається випадок притягування $g>0$ між атомами різних сортів. Відповідні солітон-азимутонні та азимутон-азимутонні розв'язки знайдені чисельним методом розробленим в підрозділі *5.1*. Приклади представлені на рис. 19-21. Кожна компонента характеризується цілим числом l_j (топологічним зарядом) та глибиною модуляції p_j. Для солітона маємо $l_j = 0, p_j = 0$. Азимутонна радіально несиметрична компонента приводить до деформації солітонної компоненти і при цьому солітонна компонента не є радіально симетричною (див. рис. 19), на відміну від розглянутого в підрозділі *6.1* пари солітон-вихор. Залежності нормованого числа атомів $N_j = \int\left|\Psi_j\right|^2 d\mathbf{r}$ у кожній компоненті та повне нормоване число $N = N_1 + N_2$ атомів (інтеграл руху) від хімічного потенціалу μ_1 солітонної компоненти показані на рис. 22. Є деяке критичне значення повного числа атомів, нижче якого існування пари солітон-азимутон неможливо. Це критичне значення зменшується зі зменшенням кутової частоти обертання ω. Прямим чисельним моделюванням вихідних еволюційних рівнянь досліджено стійкість пар солітон-азимутон. При фіксованому числі частинок в солітонній компоненті, загальний солітон-азимутонний стан виявляється стійким при досить великій глибині модуляції азимутона й не занадто великому числі частинок в азимутонній компоненті. Азимутон-азимутон стани з протилежними зарядами тільки однієї з компонент є суттєво різними та мають різні повні кутови моменти.

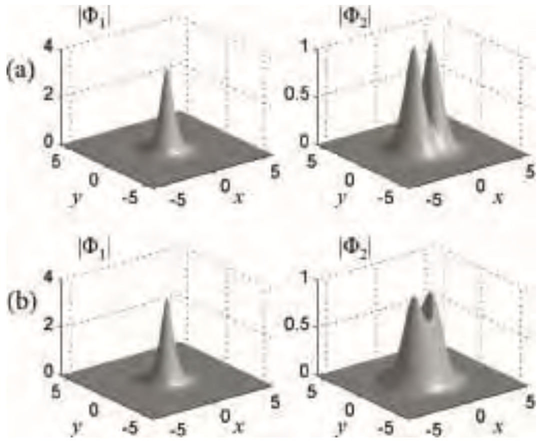

Рис. 19 Векторні стани солітон-азимутон з $l_1 = 0$, $l_2 = 1$. Відмінність між випадками (a) та (b) визначається частотою обертання ω та параметром модуляції p_2.

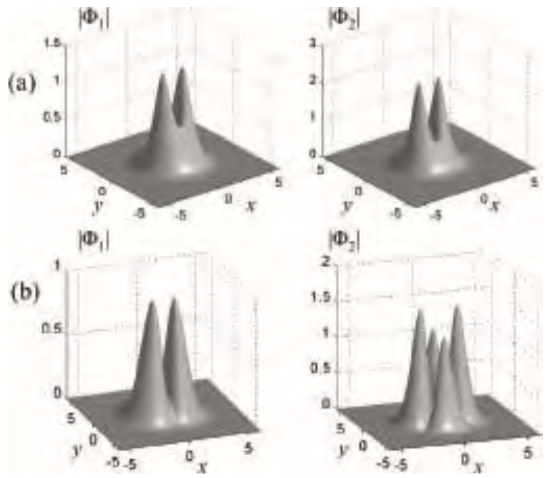

Рис. 20 Азимутон-азимутонні векторні структури: (a) $l_1 = 1,\ l_2 = 1$; (b) $l_1 = 1,\ l_2 = 2$.

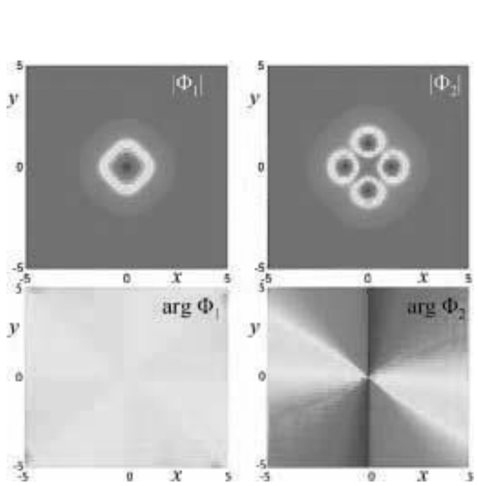

Рис. 21 Верхній рядок: Векторний стан солітон-азимутон ($l_1 = 0,\ \ l_2 = 2$) з $\mu_1 = -2, \mu_2 = 1$, частота обертання $\omega = 0.6$, глибина модуляції $p_2 = 0.24$. Показано амплітуди солітонної $|\Phi_1|$ та азимутонної $|\Phi_2|$ компонент. Нижній рядок: фаза відповідних компонент.

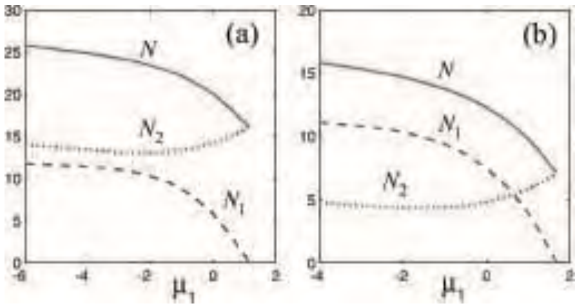

Рис. 22 Для векторної пари солітон-азимутон ($l_1 = 0,\ l_2 = 1$) показано залежності числа атомів $N_{1,2}$ в кожній з компонент та загального числа атомів від хімічного потенціалу μ_1 для (a) $\mu_2 = 1, \omega = 1$; (b) μ_2=3, $\omega = 0.2$.

Азимутон-азимутонні структури виявляються нестійкими, але при досить великих глибинах модуляції інкремент нестійкості малий і азимутон-азимутонна пара може еволюціонувати в часі протягом багатьох періодів обертання. В процесі еволюції кутовий момент кожної з компонентів

$$M_j = \mathrm{Im} \int \left[\Psi_j^* \left(\mathbf{r} \times \nabla_\perp \Psi_j\right)\right]_z d\mathbf{r} \tag{29}$$

не зберігається (при збереженні загального кутового моменту) і це приводить до обміну кутовими моментами між азимутонами в окремих компонентах при точному збереженні (чисельна відносна точність $< 10^{-3}$) повного кутового моменту.

У висновках коротко підсумовуються найважливіші результати дисертації.

ВИСНОВКИ

У дисертації вирішено широке коло проблем стосовно стійких когерентних структур у нелінійних середовищах з дисперсією, таких як плазма, оптичні волокна та Бозе-Ейнштейнівські конденсати.

Найбільш важливими результатами дисертації є:

1. Побудова теорії збурень, що грунтується на методі зворотньої задачі розсіювання, для дефокусуючого НРШ. Запропонований метод дозволяє кількісно описувати радіаційні ефекти, що виникають при розповсюдженні темних солітонів у нелінійних середовищах з дисперсією й дозволяє аналітично визначити спектральний розподіл та просторову структуру випромінювання, що випускається солітоном при наявності зовнішніх збурень.
2. Передбачення безпорогового народження темних солітонів дефокусуючого НРШ при наявності зовнішнього збурення.

3. Аналітичне знаходження спектральних характеристик випромінювання при розповсюдженні альфвенівських солітонів у плазмі при врахуванні дисипативних ефектів, таких як кінцева провідність плазми й нелінійне загасання Ландау.
4. Знаходження точних *N*-солітонних розв'язків у моделі ДНРШ з неспадаючими граничними умовами, що відповідає поширенню нелінійних плазмових альфвенівських хвиль під кутом до зовнішнього магнітного поля. Знаходження в даній моделі еволюційних рівнянь для спектральних даних (відповідних солітонам й випромінюванню) у присутності збурень.
5. Передбачення якісно відмінної поведінки світлих й темних альфвенівських солітонів (зокрема, набагато більшої стійкості темних солітонів) при наявності дисипативного збурення дифузійного типу.
6. Теоретичне передбачення генерації альфвенівських солітонів, що поширюються під кутом до зовнішнього магнітного поля, при еволюції початкового прямокутного імпульсу. Передбачення можливості одночасної генерації світлих, темних й бризерных солітонів. Визначення параметрів виникаючих солітонів – їх числа, амплітуд, швидкостей.
7. Одержання двовимірних нелінійних рівнянь, що описують взаємодію верхньогібридних плазмових хвиль із низькочастотними кінетичними магнітозвуковими хвилями. Аналітичне знаходження інкрементів модуляційної нестійкості. Одержання строгого доказу відсутності колапсу в даній моделі за рахунок нелокального характеру нелінійності. Одержання чисельних розв'язків у вигляді мультисолітонів та вихорових солітонів і дослідження їх стійкості.
8. Одержання нелінійного еволюційного рівняння, що описує самовплив короткохвильових іонно-циклотронних плазмових хвиль з зворотньою залежністю частоти від хвильового числа й знаходження аналітичних розв'язків у вигляді солітонів і нелінійних періодичних хвиль.
9. Побудова моделі,що враховує нелінійні низькочастотні збурення густини електронів плазми з електронним пучком. Знаходження аналітичних розв'язків у вигляді нелінійних періодичних кноідальних хвиль та отримання відповідності з експериментальними результатами по виявленню солітонів в плазмово-пучкових системах.
10. Аналітичне знаходження амплітуд розсіювання й повних перерізів при взаємодії дрейфових плазмових вихорів з вільними дрейфовими хвилями й електромагнітною хвилею. Передбачення захоплення дрейфових хвиль вихорами та аналітичне знаходження просторової структури поля при такої взаємодії.
11. Отримання нелінійних рівняннь, які описують нелінійні дрейфові та іонно-звукові хвилі в плазмі з урахуванням їх взаємодії та тривимірної геометрії. Знаходження точних аналітичних розв'язків у вигляді тривимірного дрейфового вихорового солітона (тривимірного модона). Чисельна демонстрація можливості абсолютно пружних зіткнень між

такими модонами, які відтворюють свою початкову форму після зіткнення не залишаючи ніякого випромінювання, як для лобових так й проникаючих зіткнень.

12. Знаходження умов виникнення зональних течій у плазмі з дрейфовою турбулентністю в присутності середньої течії. Знаходження інкрементів нестійкості в залежності від амплітуд середньої течії та амплітуд дрейфових хвиль.
13. Теоретичне передбачення стабілізації нестійкості дрейфових мод уплазмі із градієнтом електронної температури за рахунок присутності досить інтенсивної зональної течії з випадковою просторовою структурою.
14. Теоретичне передбачення існування стійких двовимірних мультисолітонних нелінійних структур у середовищах із нелокальним нелінійним відгуком – середовищі із гауссовськім нелокальним відгуком, частково іонізованій плазмі із зіткненнями та БЕК з нелокальною диполь-дипольною взаємодією.
15. Знаходження принципово нових двовимірних та тривимірних локалізованих нелінійних структур – азимутонів, що є проміжними між солітонами й вихорами. Знаходження умов стійкості азимутонів.
16. Знаходження векторних станів типу солітон-вихор, солітон-азимутон та азимутон-азимутон у моделі БЕК з двома сортами атомів й одержання умов стійкості.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Lashkin V. M. Stable three-dimensional modon soliton in plasmas / V. M. Lashkin // Phys. Rev. E. - 2017. - Vol. 96, no. 3. - P. 032211.
2. Lashkin V. M. Azimuthal vortex clusters in Bose-Einstein condensates / V. M. Lashkin, E. A. Ostrovskaya, A. S. Desyatnikov, Yu. S. Kivshar // Phys. Rev. A. - 2012. - Vol. 85, no. 1. - P. 013620.
3. Lashkin V. M. Vector azimuthons in two-component Bose-Einstein condensates / V. M. Lashkin, E. A. Ostrovskaya, A. S. Desyatnikov, Yu. S. Kivshar // Phys. Rev. A. - 2009. - Vol. 80, no. 1. - P. 013615.
4. Lashkin V. M. Stable three-dimensional vortex solitons in Bose-Einstein condensates with nonlocal dipole-dipole interaction / V. M. Lashkin, A. I. Yakimenko, Yu. A. Zaliznyak // Physica Scripta. - 2009. - Vol. 79, no. 3. - P. 035305.
5. Lashkin V. M. Influence of zonal flows on unstable drift modes in ETG turbulence / V. M. Lashkin, Yu. A. Zaliznyak, A. I. Yakimenko // Plasma Phys. and Contr. Fusion. - 2009. - Vol. 51, no. 1. - P. 015008.
6. Yakimenko A. I. Two-dimensional nonlinear vector states in Bose-Einstein condensates / A. I. Yakimenko, Yu. A. Zaliznyak, V. M. Lashkin // Phys. Rev. A. - 2009. - Vol.79, no. 4. - P. 043629.
7. Lashkin V. M. Influence of the mean flow on zonal flow generation / V. M. Lashkin // Phys. Plasmas. - 2008. - Vol. 15, no. 1. - P. 124502.

8. Lashkin V. M. Stable three-dimensional spatially modulated vortex solitons in Bose-Einstein condensates / V. M. Lashkin // Phys. Rev. A. - 2008. - Vol. 78, no. 3. - P. 033603.
9. Lashkin V. M. Two-dimensional multisolitons and azimuthons in Bose-Einstein condensates / V. M. Lashkin // Phys. Rev. A. - 2008. - Vol. 77, no. 2. - P. 025602.
10. Zaliznyak Yu. A. Excitation of zonal flow by the modulational instability in electron temperature gradient driven turbulence / Yu. A. Zaliznyak, A. I. Yakimenko, V. M. Lashkin // J. Plasma Phys. - 2008. - Vol. 74, no. 3. - P. 381-389.
11. Lashkin V. M. Two-dimensional vortex ring-like and multisoliton nonlinear structures at the upper-hybrid resonance / V. M. Lashkin // Phys. Plasmas. - 2007. - Vol. 14, no. 10. - P. 102311.
12. Lashkin V. M. N-soliton solutions and perturbation theory for the derivative nonlinear Schrodinger equation with nonvanishing boundary conditions / V. M. Lashkin // J. Phys. A: Math. and Theor. - 2007. - Vol. 40, no. 10. - P. 6119-6132.
13. Lashkin V. M. Two-dimensional nonlocal vortices, multipole solitons and rotating multisolitons in dipolar Bose-Einstein condensates / V. M. Lashkin // Phys. Rev. A. - 2007. - Vol. 75, no. 4. - P. 043607.
14. Lashkin V. M. Two-dimensional nonlocal multipole solitons /V. M. Lashkin, A. I. Yakimenko, O. O. Prikhodko // Phys. Lett. A. - 2007. - Vol. 366, no. 2. - P. 422-427.
15. Yakimenko A. I. Dynamics of two-dimensional coherent structures in nonlocal nonlinear media / A. I. Yakimenko, V. M. Lashkin, O.O. Prikhodko // Phys. Rev. E. - 2006. - Vol. 73, no. 6. - P. 066605.
16. Lashkin V. M. Alfven soliton and emitted radiation in the presence of perturbations / V. M. Lashkin // Phys. Rev. E. - 2006. - Vol. 74, no. 1. - P. 016603.
17. Lashkin V. M. Generation of solitons by a boxlike pulse in the derivative nonlinear Schrodinger equation with nonvanishing boundary conditions / V. M. Lashkin // Phys. Rev. E. - 2005. - Vol. 71, no. 6. - P. 066613.
18. Lashkin V. M. Perturbation theory for dark solitons: Inverse scattering transform approach and radiative effects / V. M. Lashkin // Phys. Rev. A. - 2004. - Vol. 70, no. 6. - P. 066620.
19. Lashkin V. M. Soliton of modified nonlinear Schrodinger equation with random perturbations / V. M. Lashkin // Phys. Rev. E. - 2004. - Vol. 69, no. 1. - P. 016611.
20. Давыдова Т. А. Коротковолновые ионные бернстейновские нелинейные структуры / Т. А. Давыдова, В. М. Лашкин, Г. И. Фищук // УФЖ. - 1998. - Т. 43, № 5. - С. 540-544.
21. Davydova T. A. Scattering of drift waves by drift vortices / T. A. Davydova, V. M. Lashkin // J. Plasma Phys. - 1997. - Vol. 58, no. 1. - P. 1-10.
22. Davydova T. A. Drift-wave trapping by drift vortices / T. A. Davydova, V. M. Lashkin // J. Plasma Phys. - 1997. - Vol. 58, no. 1. - P. 11-18.
23. Davydova T. A. Short-wavelength ion Bernstein nonlinear waves and solitons / T. A. Davydova, A. I. Fishchuk, V. M. Lashkin // J. Plasma Phys. - 1994. - Vol. 52, no. 3. - P. 353-364.

24. Давыдова Т. А. Рассеяние электромагнитной волны на дрейфово-потенциальном вихре / Т. А. Давыдова, В. М. Лашкин // Физика плазмы. - 1993. - Т. 19, № 2. - С. 228-232.
25. Давыдова Т. А. Образование солитонов в неравновесной плазме при развитии пучковой неустойчивости / Т. А. Давыдова, В. М. Лашкин // УФЖ. - 1992. - Т. 37, № 12. - С. 1833-1838.
26. Давыдова Т. А. Параметрическая ион-ионная неустойчивость пучкового типа в неоднородном ВЧ поле / Т. А. Давыдова, В. М. Лашкин // УФЖ. - 1992. - Т. 37, № 4. - С. 570-577.
27. Давыдова Т. А. Коротковолновый ионно-циклотронный солитон / Т. А. Давыдова, В. М. Лашкин // Физика плазмы. - 1991. - Т. 17, № 8. - С. 976-979.
28. Lashkin V. M. Zonal flows and soliton generation in drift wave turbulence / V. M. Lashkin // IX International Conference "Electronics and Applied Physics", october 23-26, 2013, Kyiv, Ukraine .- Kyiv, 2013. - P. 111-112.
29. Лашкін В. М. Двовимірні нелінійні локалізовані структури - азимутони / В. М. Лашкін, О. А. Островська, А. С. Десятніков, Ю. А. Ківшар // Українська конференція з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу, 25-26 жовтня, 2011, Київ, Україна: анотації доп.- Київ, 2011 - С. 46.
30. Лашкін В. М. Вплив зональних течій на нестійкі дрейфові моди зумовлені градієнтом електронної температури / В. М. Лашкін, Ю. О. Залізняк, О. І. Якименко // Українська конференція з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу , 27-28 жовтня, 2009, Київ, Україна: анотації доп.- Київ, 2009 - С. 38.
31. Lashkin V. M. Influence of zonal flows on unstable drift modes in ETG turbulence / V. M. Lashkin, Yu. A. Zaliznyak, A. I. Yakimenko // IV International Conference "Electronics and Applied Physics" , october 23-25, 2008, Kyiv, Ukraine .- Kyiv, 2008. - P. 143-144.
32. Lashkin V. M. Excitation of zonal flow by the modulational instability in electron temperature gradient driven turbulence / V. M. Lashkin, Yu. A. Zaliznyak, A. I. Yakimenko // III International Conference "Electronics and Applied Physics", october 25-27, 2007, Kyiv, Ukraine .- Kyiv, 2007. - P. 134-135.
33. Lashkin V. M. Stable two-dimensional soliton and vortex structures at the upper-hybrid resonance / V. M. Lashkin // 13 International Congress on Plasma Physics, may 22-26, 2006, Kiev, Ukraine.- Kiev: ICCP 2006. - P. 44.
34. Yakimenko A. I. Stable multisolitary structures in plasmas with nonlocal nonlinearities / A. I. Yakimenko, V. M. Lashkin, O. O. Prikhodko // 13 International Congress on Plasma Physics, may 22-26, 2006, Kiev, Ukraine.- Kiev: ICCP 2006. - P. 66.
35. Lashkin V. M. Stable two-dimensional soliton and vortex structures at the upper-hybrid resonance / V. M. Lashkin // International Workshop "Nonlinear Physics and Mathematics", may 25-27, 2006, Kiev, Ukraine. - Kiev: ICCP 2006. - P. 21.
36. Lashkin V. M. Alfven solitons in a plasma with fluctuating density / V. M. Lashkin // International Conference on Physics of Low Temperature Plasma , may 11-15, 2003, Kiev, Ukraine .- Kiev, 2003. - P. 11-18-97r.

37. Davydova T. A. Scattering of drift waves by drift vortices / T. A. Davydova, V. M. Lashkin // International Conference "Physics in Ukraine" ,june 22-27, 1993: Contributed papers "Plasma Physics".- Kiev, 1993. - P. 73-76.
38. Davydova T. A. Scattering of electromagnetic wave by drift vortices / T. A. Davydova, V. M. Lashkin // International Workshop on turbulence and nonlinear processes in plasmas, april 13-29, 1992, Kiev, Ukraine .- Kiev, 1992. - P. 31-34.

АНОТАЦІЯ

Лашкін В. М. Стійкі нелінійні когерентні структури в диспергуючих середовищах. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика. – Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України, Київ, 2018.

У дисертації теоретично досліджено нелінійні когерентні структури в середовищах з дисперсією та нелінійністю. Розроблено солітонну теорію збурень, що грунтується на методі зворотньої задачі розсіювання, для фізичних задач, які приводять до дефокусуючого нелінійного рівняння Шредингера (НРШ), деривативного НРШ та модифікованого НРШ. Знайдено одновимірні та багатовимірні солітонні та вихорові структури на верхньогібридній, іонно-циклотронній та дрейфових гілках коливань плазми, в плазмі з електронним пучком, в Бозе-Ейнштейнівських конденсатах та знайдено умови стійкості цих структур. Передбачено існування азимутонних структур, які є проміжними між мультисолітонами та вихорами та досліджено їх стійкість. Досліджено векторні стани солітон-азимутон та азимутон-азимутон.

Ключові слова: нелінійність, метод зворотньої задачі розсіювання, солітон, мультисолітон, вихор, плазма, азимутон, зональна течія, нестійкість.

АНОТАЦИЯ

Лашкин В. М. Устойчивые нелинейные когерентные структуры в диспергирующих средах. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 – теоретическая физика. – Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины, Киев, 2018.

В диссертации теоретически исследованы нелинейные когерентные структуры в средах с дисперсией и нелинейностью. Развита солитонная теория возмущений, основанная на методе обратной задачи рассеяния, для физических задач, которые приводят к дефокусирующему нелинейному

уравнению Шредингера (НУШ), деривативного НУШ и модифицированного НУШ. Найдены одномерные и многомерные солитонные и вихревые структуры на верхнегибридной, ионно-циклотронной и дрейфовых ветвях колебаний плазмы, в плазме с электронным пучком, в Бозе-Эйнштейновских конденсатах и найдены условия устойчивости этих структур. Предсказано существование азимутонных структур, которые являются промежуточными между мультисолитонами и вихрями и исследована их устойчивость. Исследованы векторные состояния солитон-азимутон и азимутон-азимутон.

Ключевые слова: нелинейность, метод обратной задачи рассеяния, солитон, мультисолитон, вихрь, плазма, азимутон, зональное течение, неустойчивость.

ABSTRACT

Lashkin V. M. Stable nonlinear coherent structures in dispersive media. – Manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences by speciality 01.04.02 – theoretical physics. – Bogolybov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018.

The thesis is devoted to the theoretical study of nonlinear coherent structures in media with dispersion and nonlinearity.

A soliton perturbation theory based on the inverse scattering transform (IST) approach is developed for the physical tasks in models of the perturbed defocusing nonlinear Schrödinger equation (NLSE), derivative NLSE and modified NLSE. Evolution equations for the scattering data (both solitonic and continuous) in the presence of perturbations are obtained. As applications of the present theory, the perturbed dark optical solitons, ultrashort optical solitons and alfven solitons in a plasma are investigated.

A method for finding an *N*-soliton solution and the corresponding Jost solutions of the derivative NLSE with nonvanishing boundary conditions corresponding oblique alfven solitons is suggested. The creation of solitons from a boxlike initial pulse is considered. An equation for soliton eigenvalues is obtained. It is shown that simultaneous generation of breathers (solitons with internal oscillations) and one-parametric (nonoscillating) bright or dark solitons is possible.

Two-dimensional (2D) equations describing the nonlinear interaction between upper-hybrid and dispersive magnetosonic waves in a plasma are presented. Nonlocal nonlinearity in the equations results in the possibility of the existence of stable 2D nonlinear structures. A rigorous proof of the absence of collapse in the model is given. Different types of nonlinear localized structures such as fundamental solitons, radially symmetric vortices, nonrotating multisolitons (two-hump solitons, dipoles, and quadrupoles), and rotating multisolitons (azimuthons)

have been found numerically. It is shown by direct numerical simulations that 2D fundamental solitons with a negative Hamiltonian are stable and do not collapse.

Short-wavelength coherent structures at the ion-cyclotron plasma resonance are studied on the basis of a nonlinear equation taking into account the effect of high-frequency diamagnetism. Analytical solutions in the form of nonlinear periodic waves and solitons are found.

The nonlinear periodic waves in an unmagnetized plasma with an electron beam are found.

The scattering of drift plasma waves by drift vortices (2D modons) is investigated analytically in the Born and eikonal approximations. Scattering amplitudes and scattering cross-section are found for a wide range of parameters of the vortex and wave. The possibility for a drift dipole vortex to trap free drift waves is demonstrated. Drift perturbations can be trapped near the centre of the vortex or at its sides. The localization domain and eigenfrequencies of trapped modes are obtained.

Nonlinear equations that describe coupled drift waves and ion acoustic waves in a plasma are derived. It is shown that when the coupling to ion acoustic waves is negligible, the reduced nonlinear equation is a generalization of the Hasegawa-Mima equation to the three-dimensional (3D) case. An exact analytical solution of this equation in the form of a 3D soliton drift wave (3D modon) is found. Collisions between the 3D modons are studied numerically and it is shown that the collisions can be fully elastic.

We have performed numerical analysis of the 2D soliton solutions in Bose-Einstein condensates (BEC) with nonlocal dipole-dipole interactions. For the modified 2D Gross-Pitaevski equation with nonlocal and attractive local terms, we have found numerically different types of nonlinear localized structures such as fundamental solitons, radially symmetric vortices, nonrotating multisolitons (dipoles and quadrupoles), and rotating multisolitons (azimuthons). By direct numerical simulations we show that these structures can be made stable.

Azimuthon structures which represent intermediate states between the multisolitons and vortices are found and their stability are analyzed. Soliton-azimuthon and azimuthon-azimuthon vector states are investigated. In contrast to the linear vortex phase, the phase of the azimuthon is a staircaselike nonlinear function of the polar angle. Numerical solutions in the form of spatially localized three-dimensional nonrotating and rotating 2D azimuthon multipole solitons in the BEC confined by a parabolic trap are found. It is shown that 3D azimuthons with a sufficiently large phase modulational depth can be stable. The results are confirmed by direct numerical simulations of the Gross-Pitaevskii equation. Matter-wave vector azimuthons, i.e., spatially localized vortex states with azimuthal modulations of density, in multicomponent BEC are introduced. Nonrotating and rotating two-component azimuthons in the BEC with a negative scattering length confined by a quasi-two-dimensional parabolic trap are found and their stability are studied.

Key words: nonlinearity, inverse scattering transform approach, soliton, multisoliton, vortex, plasma, azimuthon, zonal flow, instability.