Національна академія наук України
Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова

На правах рукопису

ЄРШОВ Костянтин Васильович

УДК 537.611, 537.622.4

МАГНІТІ ВЛАСТИВОСТІ ВИКРИВЛЕНИХ НИЗЬКОВИМІРНИХ СИСТЕМ

01.04.02 – теоретична фізика

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:
Кравчук Володимир Петрович
кандидат фіз.-мат. наук
старший науковий співробітник

Київ — 2017

ЗМІСТ

ВСТУП

Феромагнітні частинки субмікрометрових масштабів є сьогодні предметом активного дослідження, як з точки зору фундаментальних досліджень, так і прикладних. Частинки цих розмірів знаходяться в області між однодоменним та багатодоменним станами і мінімуму енергії, в цьому випадку, може відповідати топологічно нетривіальний розподіл намагніченості. Геометрія частинки може мати вирішальне значення на динамічні та статичні властивості намагніченості.

Завдяки розвитку нанотехнологій, в останні роки стало можливим виготовлення викривлених магнітних наночастинок різної форми [1–6], радіус кривини яких є співвимірним із характерними просторовими масштабами магнітних взаємодій у феромагнетику (~ 10 нм). Вплив викривленої геометрії на топологічно нетривіальні розподіли намагніченості (магнітні доменні стінки, вихори, скірміони і т.д.) супроводжується зростаючим інтересом у наукової спільноти. Доменні стінки та магнітні вихори є топологічно стійкими структурами, які можна спостерігати при кімнатних температурах. Тому їх розглядають як ключові елементи у виготовленні запам'ятовуючих пристроїв [7–12] та приладів спінтроніки [13–17]. Зокрема, у магнітній трековій пам'яті [7, 8] інформація кодується послідовністю доменів, які розділяються доменними стінками типу *head-to-head* та *tail-to-tail* (у англомовній літературі). Магнітні вихори, які характеризуються двома бінарними характеристиками: полярність $\mathfrak{p} = \pm 1$ (напрямок намагніченості ядра вихору) і хіральність $\mathfrak{C} = \pm 1$ (напрямок циркуляції намагніченості в площині зразка), є ключовими елементами в створенні магнітної оперативної пам'яті (MRAM — англ. magnetic random-access memory) [9–12] з можливістю запису двох бітів інформації. У той же час, вплив викривленої геометрії має вирішальне значення у виготовленні елементів пам'яті: магнітну трекову пам'ять запропоновано виготовляти з вертикальних ∪-подібних нанодротів [7], що ставить питання про вплив викривлених сегментів на динаміку доменних стінок; півсферичні магнітні оболонки у вихровому стані збільшать щільність запису інформації [1, 18] у магнітній оперативній пам'яті. Однак, виникає питання про вплив кривини на процес контрольованої зміни хіральності та полярності магнітного вихору.

У дисертаційній роботі досліджено вплив кривини та кручення магнітних нанодротів на статичні та динамічні властивості намагніченості та доменних стінок, динаміку намагніченості у півсферичній оболонці з вихровим розподілом.

Актуальність теми. Дослідження неоднорідних розподілів намагніченості у тривимірних викривлених структурах із складною геометрією має як фундаментальну, так і прикладну цінність. Фундаментальним є питання впливу кривини на динамічні та статичні властивості намагніченості у викривлених структурах. Наявність нетривіальної геометрії може призвести до нових ефектів, які не спостерігаються у плоских структурах.

Практична цінність даних досліджень пов'язана з можливістю використання магнітних доменних стінок та вихорів для виготовлення енергонезалежних елементів пам'яті та інших приладів спінтроніки.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалася у відділі теорії нелінійних процесів в конденсованих середовищах Інституту теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова. Дослідження проводилися в рамках наступних наукових тем:

1. дослідження за держбюджетною темою «Ефективне керування динамікою нелінійних збуджень в макромолекулярних та магнітних наносистеамах», державний реєстраційний номер 0110U07540, термін виконання 2011—2015 роки;

2. дослідження за держбюджетною темою «Мікроскопічні та феноменологічні моделі фундаментальних фізичних процесів у мікро- та макросвіті» державний реєстраційний номер 0112U000056, термін виконання 2011—2016 роки;

3. дослідження за держбюджетною темою «Особливості механічних, електронних та магнітних процесів у низьковимірних системах на наномасштабах» державний реєстраційний номер 0116U003192, термін виконання 2016—2020 роки

4. науковий проект «Dynamics of topologically nontrivial magnetic textures in 3D shaped nanowires» за підтримки DAAD (Deutsche Akademische Austauschdienst Dienst, DAAD), реєстраційний номер 91618879, термін виконання 2016 рік; індивідуальний проект.

Мета і завдання дослідження. Метою даної дисертаційної роботи є аналітичне та чисельне дослідження:

- статичних та динамічних властивостей поперечної доменної стінки у плоскому феромагнітному нанодроті з локалізованою кривиною;

- впливу кривини та кручення на динаміку спінових хвиль у тривимірній спіралі, а також на динаміку поперечної доменної стінки під впливом спін-поляризованого струму та ефективного поля Рашби;

- ролі кривини у процесі контрольованого перемикання хіральності магнітного вихору на півсферичній оболонці.

Об'єктом дослідження є статичні та динамічні явища в феромагнітних системах.

Предметом дослідження є неоднорідні розподіли намагніченості в одно- та двовимірних магнетиках: доменні стінки, магнітні вихори.

Методи дослідження. Усі розрахунки виконані в рамках феноменологічної моделі Ландау—Ліфшиця—Гільберта. Під час досліджень використовувалися методи колективних змінних (для аналізу статичних та динамічних властивостей доменної стінки), варіаційний метод, метод швидких змінних. Усі аналітичні розрахунки перевірялися за допомогою комп'ютерних моделювань на обчислювальному кластері Інституту теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова. Моделювання проводились у загальнодоступному пакеті для мікромагнітних моделювань Nmag та власноруч розробленому симуляторі, який чисельно розв'язував систему рівнянь Ландау—Ліфшиця—Гільберта для ланцюжка магнітних моментів.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у встановленні характеру динаміки доменної стінки на локальному згині магнітного нанодроту, рівноважних розподілів намагніченості у тривимірній феромагнітній спіралі, впливу геометричних параметрів на динаміку магнонів та доменних стінок у тривимірній спіралі, впливу кривини на процес перемикання хіральності магнітного вихору під дією просторово однорідного магнітного імпульсу. Оригінальні результати є наступними:

1. Встановлено, що локальний згин магнітного дроту виступає в якості притягаючого потенціалу для доменної стінки; отримано вирази для частоти власних коливань та ефективного коефіцієнта релаксації для доменної стінки. Показано, що напрямок поперечної намагніченості доменної стінки визначається її топологічним зарядом.

2. Знайдено можливі рівноважні стани намагніченості феромагнітного нанодроту у формі тривимірної спіралі для різних орієнтацій осі легкого намагнічування: у тангенціальному, нормальному та бінормальному напрямках. Встановлено, що кривина та кручення суттєво змінюють дисперсійну залежність магнонів у тривимірній спіралі з легко-

тангенціальною анізотропією: кривина призводить до зменшення щілини в спектрі, а кручення — до лінійного зсуву по хвильовому вектору.

3. Описано динаміку поперечної доменної стінки у тривимірній спіралі під дією спін-поляризованого струму та ефективного поля Рашби. Встановлено, що наявність кривини призводить до появи Уокерівської границі, кручення призводить до зсуву матеріального параметра неадіабатичності, що у свою чергу може призвести до від'ємної рухливості. В широкому діапазоні параметрів напрямок руху доменної стінки визначається знаком добутку топологічного заряду доменної стінки на геометричну хіральність спіралі. Запропоновано механізм для визначення матеріального параметра неадіабатичності.

4. Запропоновано метод контрольованого перемикання хіральності магнітного вихору на півсферичній оболонці. Встановлено, що при поступовому випрямленні оболонки до форми диску (збільшення радіуса кривини) поле, необхідне для перемикання хіральності магнітного вихору, зростає. Розраховано діаграми перемикання та описано два можливі механізми перемикання хіральності магнітного вихору.

Практичне значення одержаних результатів. Отримані результати є внеском у дослідження впливу криволінійних ефектів на статичні та динамічні властивості просторово-неоднорідних розподілів намагніченості у магнітних структурах. Результати дисертаційної роботи можуть бути використані для створення запам'ятовуючих пристроїв інформації [7–12], які базуються на використанні доменних стінок і магнітних вихорів; приладів спінтроніки [13–17].

Особистий внесок здобувача. Автор безпосередньо приймав участь у постановці задачі, розробці прийомів та методів розв'язку, проведенні розрахунків та написанні статей. Основні результати, які складають зміст дисертаційної роботи, були отримані особисто здобувачем:

1. Передбачено закріплення доменної стінки на локальному згині магнітного нанодроту. Отримано вирази для частоти власних коливань та ефективного коефіцієнта релаксації доменної стінки від кривини та її похідних у точці згину. Опубліковано в [19].

2. Шляхом мікромагнітних моделювань побудовано діаграми рівноважних станів намагніченості у тривимірній спіралі з різними напрямками легкої осі анізотропії. Отримано закони дисперсії для магнонів. Опубліковано в [20].

3. Виконано чисельне дослідження впливу геометричних параметрів тривимірної спіралі на рух доменної стінки під дією спін-поляризованого струму. Передбачено можливість від'ємної рухливості доменної стінки, ефект зумовлено крученням дроту. Опубліковано в [21].

4. Передбачено рух доменної стінки у тривимірній спіралі під дією ефективного поля Рашби. За допомогою мікромагнітних моделювань отримано залежність рухливості доменної стінки від параметрів кривини та кручення. Опубліковано в [22].

5. Запропоновано метод контрольованого перемикання хіральності магнітного вихору на півсферичній оболонці під дією просторово однорідного магнітного імпульсу. За допомогою мікромагнітних моделювань побудовано діаграму перемикання та виявлено два механізми перемикання хіральності вихору. Опубліковано в [23].

Усі результати чисельних розрахунків були також отримані особисто автором.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації обговорювались на семінарах відділу теорії нелінійних процесів в конденсованих середовищах Інституту теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова (Київ); кафедри математики та теоретичної радіофізики факультету радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка (Київ); кафедри фізико-математичних наук Національного Університету "Києво-Могилянська академія" (Київ), Інституту інтегровних нанонаук (Institute for Integrative Nanoscienses, Leibniz Instite for Solid State and Materials Research, Дрезден, Німеччина), Школи математики Бристольського університету (School of Mathematics, University of Bristol, Бристоль, Великобританія), Центр нелінійних досліджень (Center for Nonlinear Studies, Los Alamos National Laboratory, Лос Аламос, США).

Матеріали дисертації пройшли апробацію на ряді міжнародних та всеукраїнських конференцій:

1. X International Conference "Electronics and Applied Physics" (Київ, Україна, жовтень 22–25, 2014).
2. VI Young Scientists Conference "Problems of Theoretical Physics" (Київ, Україна, листопад 25–27, 2014).
3. International Conference on Magnetism (Барселона, Іспанія, липень 5–10, 2015).
4. International Young Scientists Forum on Applied Physics (Дніпропетровськ, Україна, вересень 29 — жовтень 2, 2015).
5. Bogolyubov Conference "Problems of Theoretical Physics" (Київ, Україна, травень 24–26, 2016).
6. VII International Conference for Young Scientists "Low Temperature Physics" (Харків, Україна, Червень 06–10, 2016).
7. Topological Patterns and Dynamics in Magnetic Elements and in Condensed Matter (TopMag) (Дрезден, Німеччина, червень 27 — липень 8, 2016)

8. International School & Conference on Nanoscience and Quantum Transport (Київ, Україна, жовтень 8–14, 2016).
9. VII Young Scientists Conference “Problems of Theoretical Physics” (Київ, Україна, грудень 13–15, 2016).

Публікації. Матеріали, представлені в даній дисертаційній роботі, опубліковано в 15 роботах. Серед них 5 статей у провідних зарубіжних рецензованих наукових журналах [19–23], та 10 матеріалів і тез доповідей на міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях [24–33].

Структура та об’єм дисертації. Робота складається з вступу, чотирьох основних розділів, висновків, додатків і списку використаних джерел, який містить 154 найменування. Робота викладена на 124 сторінках машинописного тексту, враховуючи 29 рисунків.

Розділ 1

ВРАХУВАННЯ ЕФЕКТІВ КРИВИНИ У ФЕНОМЕНОЛОГІЧНІЙ МОДЕЛІ ФЕРОМАГНЕТИКА

> Даний розділ присвячений огляду літератури. Розглянуто фундаментальні магнітні взаємодії, що характерні для феромагнетиків, і описано рівняння руху для намагніченості. Також, у цьому розділі розглянуто вплив кривини на намагніченість магнетиків різної форми і описано основні ефекти до яких може призвести кривина.

У пункті 1.1 розглянуто основні взаємодії, які є у феромагнетиках та рівняння руху для намагніченості. Пункт 1.2 присвячений огляду впливу викривленої геометрії магнетика на статичні та динамічні властивості магнітної підґратки. В останньому пункті 1.3 викладено основні результати розділу.

1.1 Феноменологічна модель феромагнетика

1.1.1 Магнітні взаємодії у феромагнетиках

Статичні та динамічні властивості магнітних структур можна пояснювати конкуренцією між різними типами взаємодій, які входять в енергію магнетика: *обмінна взаємодія*, *взаємодія Дзялошинського—Морії*, *магнітна анізотропія*, *взаємодія із зовнішнім магнітним полем* і *магнітостатична взаємодія.*

1.1.1.1 Обмінна взаємодія

Обмінна взаємодія за своєю природою є суто квантовим явищем, і виникає між двома взаємодіючими ідентичними частинками зі спіном. При розрахунку взаємодії ідентичних часток вираз для енергії містить додаткові поправки, які зумовлені поведінкою хвильових функцій при перестановці, тобто обміні електронів відповідно до принципу Паулі. Ці поправки до енергії називають обмінною взаємодією й описуються гамільтоніаном Гайзенберга [34–36]

$$\mathscr{H}_{\text{ex}} = -\sum_{i \neq j} J_{ij} \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j, \tag{1.1}$$

де $\boldsymbol{S}_i$ та $\boldsymbol{S}_j$ — класичний вектор спіну у i-му та j-му вузлах, відповідно. Величину J_{ij} називають обмінним інтегралом, який визначається ступенем перекриття хвильових функцій атомів у i-му та j-му вузлах. Обмінний інтеграл є локалізованою функцією, яка експоненційно спадає зі збільшенням відстані між атомами. Внаслідок локалізації обмінного інтеграла, підсумовування в гамільтоніані (1.1) відбувається лише по сусіднім атомам

$$\mathscr{H}_{\text{ex}} = -J \sum_{i, i_0} \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_{i+i_0}, \tag{1.2}$$

де i_0 нумерує найближчих сусідів будь-якого вузла i у кристалі. Варто відмітити, що в залежності від знаку обмінного інтегралу розрізняють два основні типи магнітного впорядкування: додатному знаку J $(J > 0)$ відповідає феромагнітне впорядкування, коли спіни сусідніх атомів паралельні, від'ємному знаку J $(J < 0)$ відповідає антиферомагнітне впорядкування, коли спіни сусідніх атомів антипаралельні.

У рамках феноменологічного мікромагінтного підходу можна розглядати континуальну характеристику — одиничний вектор намагніченості, тобто нормоване усереднене значення магнітного моменту $\boldsymbol{m} = \dfrac{g\mu_{\text{B}}}{\mathfrak{a}^3 M_s}\langle \boldsymbol{S} \rangle$, де g — фактор Ланде, μ_{B} – магнетон Бора, M_s — намагніченість насичення, $\mathfrak{a}$ — стала ґратки. При цьому вважається, що намагніченість зберігається за абсолютним значенням $|\boldsymbol{m}| = 1$, що справедливо для низьких температур. У цьому випадку приріст густини *обмінної енергії*, що виникає за рахунок відхилення намагніченість від однорідного стану, записується як [35, 37–39]:

$$E_{\text{ex}} = A \int_V \left[(\nabla m_x)^2 + (\nabla m_y)^2 + (\nabla m_z)^2 \right] \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{1.3}$$

де $A = \dfrac{M_s^2 \mathfrak{a}^5}{g^2 \mu_\mathrm{B}^2} J$ — константа обмінної взаємодії. Вираз для обмінної енергії можна переписати в кутових змінних, записавши одиничний вектор намагніченості, як $\boldsymbol{m} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$:

$$E_\mathrm{ex} = A \int\limits_V \left[(\nabla\theta)^2 + \sin^2\theta\, (\nabla\phi)^2 \right] \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

Основною властивістю обмінної взаємодії є ізотропність. Якщо розглядати спіни, як класичні вектори, то з рівняння (1.2) видно, що обмінна енергія не зміниться, якщо всі спіни повернути на один і той самий кут. Внаслідок ізотропії обмінна взаємодія не задає напрямок намагніченості, а тільки визначає її величину. Напрямок намагніченості визначається більш слабкими взаємодіями.

1.1.1.2 Взаємодія Дзялошинського—Морії

Магнетики з кристалічною ґраткою, в якій порушується симетрія інверсії, характеризуються асиметричною обмінною взаємодією — взаємодією Дзялошинського—Морії [40–42]

$$\mathscr{H}_\mathrm{DMI} = -\sum_{i \neq j} \boldsymbol{D}_{ij} \cdot \left[\boldsymbol{S}_i \times \boldsymbol{S}_j \right],$$

де $\boldsymbol{D}_{ij}$ — вектор взаємодії Дзялошинського—Морії, який антисиметричний стосовно перестановки індексів $\boldsymbol{D}_{ij} = -\boldsymbol{D}_{ji}$. Взаємодія Дзялошинського—Морії відповідає за підкрутку вектора намагніченості у площині, яка перпендикулярна до вектора $\boldsymbol{D}$. Варто також відмітити, що у випадку об'ємноцентрованої ґратки, в якої наявна симетрія інверсії, можливе виникнення взаємодії Дзялошинського—Морії внаслідок порушення симетрії на інтерфейсі двох матеріалів. Цей ефект малопомітний для об'ємних зразків, але спостерігається для ультратонких плівок [43].

В рамках феноменологічного мікромагінтного підходу *енергія взаємодії*

Дзялошинського—Морії може бути описана як [44, 45]

$$E_{\text{DMI}} = \int\limits_V D_{\text{DMI}} \left(\mathscr{L}_{ij}^{(k)} - \mathscr{L}_{kj}^{(i)} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \quad \mathscr{L}_{ij}^{(k)} = m_i \frac{\partial m_j}{\partial k} - m_j \frac{\partial m_i}{\partial k}, \tag{1.4}$$

де D_{DMI} — стала взаємодії Дзялошинського—Морії. В записі (1.4) використано правило підсумовування Ейнштейна, $i,j,k = x,y,z$. Математична конструкція $\mathscr{L}_{ij}^{(k)}$ в літературі відома, як інваріант Ліфшиця [46].

1.1.1.3 Магнітна анізотропія

Внаслідок спін-орбітальної взаємодії в анізотропній кристалічній структурі матеріалу виникає вибраний напрямок намагніченості. Відхилення від цього напрямку призводить до зростання енергії спін-орбітальної взаємодії, яку в даному контексті називають *енергією анізотропії*. Для найпростішого випадку одновісних матеріалів, вираз для енергії анізотропії записується як [34, 47]

$$E_{\text{an}} = -K \int\limits_V \left(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{e}_{\text{A}} \right)^2 \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{1.5}$$

де $\boldsymbol{e}_{\text{A}}$ — одиничний вектор напрямку анізотропії, а K — коефіцієнт анізотропії. Коли $K > 0$ ми маємо легкоосьовий магнетик, в якому намагніченість намагається бути паралельною до вектора анізотропії $\boldsymbol{e}_{\text{A}}$. У випадку $K < 0$ ми маємо магнетик з жорсткою віссю, в якому намагніченість намагається бути перпендикулярною до вектора $\boldsymbol{e}_{\text{A}}$. Варто також відмітити, що до чинників, які можуть призвести до появи магнітної анізотропії можна віднести анізотропний обмін [39] та магнітостатичну взаємодію [48, 49].

1.1.1.4 Взаємодія із зовнішнім магнітним полем

Перебуваючи у зовнішньому магнітному полі феромагнетик намагається впорядкувати намагніченість вздовж цього поля, щоб мінімізувати енергію. Енергія взаємодії феромагнетика із зовнішнім магнітним полем називається

Зеєманівською енергією [34, 50]

$$E_{\text{ext}} = -M_s \int\limits_V \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}_{\text{ext}} \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

де $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$ — вектор індукції зовнішнього магнітного поля.

1.1.1.5 Магнітостатична взаємодія

Окрім взаємодії із зовнішнім магнітним полем, кожен атом кристалу, що має магнітний момент, взаємодіє також із полем, створюваним усією сукупністю інших магнітних моментів. Взаємодія з цим полем називається магнітодипольною і описується гамільтоніаном [34, 47, 51]

$$\mathscr{H}_{\text{ms}} = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{3\left(\boldsymbol{S}_j \cdot \boldsymbol{r}_{ij}\right)\left(\boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{r}_{ij}\right) - r_{ij}^2 \left(\boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j\right)}{r_{ij}^5}, \tag{1.6}$$

де $\boldsymbol{r}_{ij}$ — радіус-вектор, який з'єднує i-й та j-й вузли кристалічної ґратки.

В рамках феноменологічного мікромагінтного підходу, з точністю до константи та анізотропного доданку (може бути включеним до енергії магнітної анізотропії), гамільтоніану (1.6) можна поставити у відповідність макроскопічну *енергію магнітостатичної взаємодії* [34, 47, 51]

$$E_{\text{ms}} = -\frac{M_s}{2} \int\limits_V \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{H}_{\text{ms}} \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{1.7}$$

де $\boldsymbol{H}_{ms}$ — ефективне макроскопічне поле, яке шукають, як розв'язок рівнянь магнітостатики

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{H}_{\text{ms}} = 0 \\ \nabla \cdot \left(\boldsymbol{H}_{\text{ms}} + 4\pi M_s \boldsymbol{m}\right) = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

із межовими умовами на межі кристалу

$$\left(\boldsymbol{H}_{\text{ms}}^{\text{out}} - \boldsymbol{H}_{\text{ms}}^{\text{in}}\right)_{\text{T}} = 0, \quad \left(\boldsymbol{H}_{\text{ms}}^{\text{out}} - \boldsymbol{H}_{\text{ms}}^{\text{in}}\right)_{\text{N}} = 4\pi M_s \boldsymbol{m}_{\text{N}}, \tag{1.9}$$

де індекси N та T визначають нормальні і тангенціальні складові векторів на поверхні магнетика [34]. Розв'язок системи рівнянь (1.8) із межовими умовами (1.9) зручно записати у вигляді

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{ms}} = -\nabla\varphi\left(\boldsymbol{r}\right), \tag{1.10}$$

де $\varphi\left(\boldsymbol{r}\right)$ — магнітостатичний потенціал, який визначається формулою:

$$\varphi\left(\boldsymbol{r}\right) = -M_s\left(\int\limits_{V'}\frac{\rho\left(\boldsymbol{r}'\right)}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}\mathrm{d}\boldsymbol{r}' - \int\limits_{S'}\frac{\sigma\left(\boldsymbol{r}'\right)}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}\mathrm{d}S'\right),$$

де перший інтеграл береться по об'єму магнетика, а другий — по поверхні. Величини $\rho\left(\boldsymbol{r}\right) = -\nabla\cdot\boldsymbol{m}\left(\boldsymbol{r}\right)$ та $\sigma\left(\boldsymbol{r}\right) = \boldsymbol{m}\left(\boldsymbol{r}\right)\cdot\boldsymbol{e}_{\mathrm{N}}\left(\boldsymbol{r}\right)$ мають зміст об'ємної та поверхневої густини фіктивного магнітного заряду, відповідно [51, 52]. Підставивши тепер вираз (1.10) у (1.7) та провівши інтегрування частинами, отримуємо остаточний вираз для магнітостатичної енергії:

$$E_{\mathrm{ms}} = \frac{M_s}{2}\left(\int\limits_{V}\rho\left(\boldsymbol{r}\right)\varphi\left(\boldsymbol{r}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int\limits_{S}\sigma\left(\boldsymbol{r}\right)\varphi\left(\boldsymbol{r}\right)\mathrm{d}S\right).$$

Важливою особливістю магнітостатичної взаємодії є те, що для тонкої плівки магнітостатичну взаємодію можна звести до ефективної легкоплощинної анізотропії з коефіцієнтом $K_{\mathrm{ms}}^{\mathrm{eff}} = -2\pi M_s^2$ [48, 53]. У випадку тонкого магнітного дроту магнітостатична взаємодія також зводиться до ефективної легкоосьової анізотропії з коефіцієнтом анізотропії $K_{\mathrm{ms}}^{\mathrm{eff}} = \pi M_s^2$ [49]. Отже магнітостатика може привести до перевизначення константи одноосьової анізотропії, а саме:

$$K \to K + K_{\mathrm{ms}}^{\mathrm{eff}}. \tag{1.11}$$

Конкуренція вищеописаних взаємодій призводить до появи, так званої, магнітної довжини ℓ. Якщо впливом природної анізотропії можна знехтувати, то характерні розміри визначаються обмінною довжиною ℓ_{ex}, а, якщо анізотропія домінує — магнітною ℓ_m [47]:

$$\ell_{\mathrm{ex}} = \sqrt{\frac{A}{4\pi M_s^2}}, \qquad \ell_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{A}{K}}. \tag{1.12}$$

1.1.2 Рівняння руху для намагніченості

Еволюція вектора намагніченості $\boldsymbol{m}$ відбувається внаслідок впливу ефективного поля $\boldsymbol{H}_{\mathrm{eff}}$. Це поле визначається як варіаційна похідна загальної енергії по намагніченості [37]

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{eff}} = -\frac{1}{M_s}\frac{\delta E}{\delta \boldsymbol{m}}.$$

У випадку, коли відомі $\boldsymbol{m}$ та $\boldsymbol{H}_{\mathrm{eff}}$, енергія магнетика визначається як

$$E = -M_s \int\limits_V \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{H}_{\mathrm{eff}}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

Енергія магнетика мінімізується у випадку, коли магнітні моменти спрямованні вздовж ефективного поля $\boldsymbol{H}_{\mathrm{eff}}$.

Динаміка магнітного моменту в ефективному полі $\boldsymbol{H}_{\mathrm{eff}}$ описується феноменологічним рівнянням Ландау—Ліфшиця [37, 54]

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t} = -\gamma'\, \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{H}_{\mathrm{eff}} - \alpha\gamma'\, \boldsymbol{m} \times \left[\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{H}_{\mathrm{eff}}\right], \tag{1.13}$$

де α — це безрозмірний коефіцієнт релаксації (коефіцієнт Гільберта), $\gamma' = \gamma_0 / \left(1 + \alpha^2\right)$ в якому γ_0 є гіромагнітним співвідношенням. Це рівняння математично еквівалентне рівнянню Ландау—Лівшиця—Гільберта [52, 55]

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t} = -\gamma_0\, \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{H}_{\mathrm{eff}} + \alpha\, \boldsymbol{m} \times \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t}. \tag{1.14}$$

Вибір між описом релаксації Гільберта чи Ландау і Ліфшиця у випадку малих втрат не є принциповим, оскільки вони математично еквівалентні й призводять до однакових фізичних висновків [47, 52].

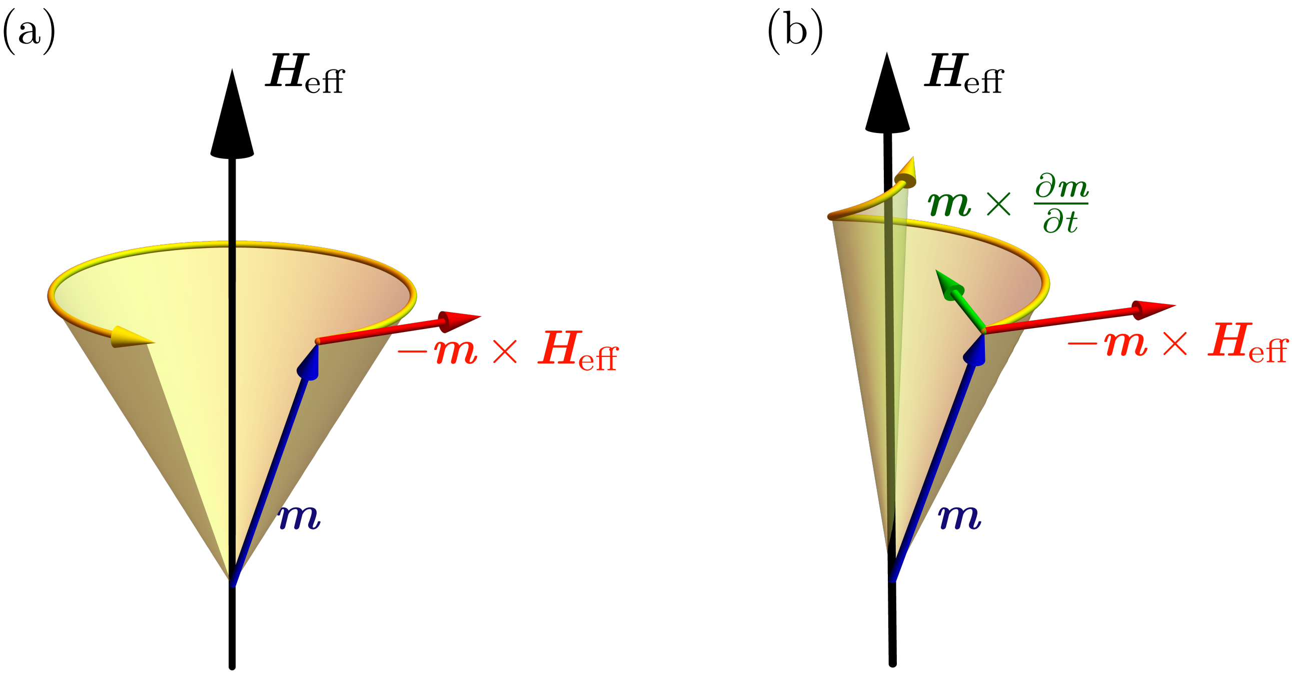


Рис. 1.1: Схематичне зображення прецесійного (a) та релаксаційного (b) доданків у рівнянні Ландау—Ліфшиця—Гільберта (1.14).

Запис рівняння руху у формі Гільберта дозволяє розглянути два внески у похідну намагніченості за часом $\partial\boldsymbol{m}/\partial t$. Перший доданок відповідає за прецесію намагніченості навколо напрямку ефективного поля $\boldsymbol{H}_{\text{eff}}$. Цей доданок зберігає кут між напрямком вектора намагніченості $\boldsymbol{m}$ та ефективного поля $\boldsymbol{H}_{\text{eff}}$, а отже і зберігається енергія системи. Частота прецесії вектора намагніченості пропорційна величині ефективного поля H_{eff}, з коефіцієнтом пропорційності γ_0, див. Рис. 1.1.

Другий доданок у рівнянні Ландау—Ліфшиця—Гільберта (1.14) відповідає за затухання, які відбуваються внаслідок спін-ґраткової взаємодії, вихрових струмів, тощо. Безрозмірний коефіцієнт релаксації визначає наскільки швидко намагніченість вирівняється в напрямку дії ефективного поля $\boldsymbol{H}_{\text{eff}}$ (коефіцієнт релаксації зазвичай $\alpha \ll 1$). Цей доданок також призводить до зменшення частоти прецесії намагніченості, аналогічно до того, як зменшується ефективний коефіцієнт гіромагнітного співвідношення $\gamma' = \gamma_0/\left(1+\alpha^2\right)$.

Для зручності записів та аналітичних розрахунків надалі будемо користуватись, аналогічним до (1.14), рівнянням, записаним для нормованих величин

$$\dot{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{m} \times \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \boldsymbol{m}} + \alpha\, \boldsymbol{m} \times \dot{\boldsymbol{m}}, \tag{1.15}$$

де $\mathcal{E} = E/K$ — нормована енергія магнетика, а крапки над векторами намагніченості визначають диференціювання за нормованим часом $t \to t\Omega_0$, де $\Omega_0 = \gamma_0 K/M_s$. Векторне рівняння (1.15) можна переписати у кутових змінних, використовуючи кутову перaметризацію вектора намагніченості $\boldsymbol{m} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$:

$$\begin{aligned} \sin\theta\dot{\phi} &= \frac{\delta\mathcal{E}}{\delta\theta} + \alpha\dot{\theta}, \\ -\sin\theta\dot{\theta} &= \frac{\delta\mathcal{E}}{\delta\phi} + \alpha\sin^2\theta\dot{\phi}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Рівняння Ландау—Ліфшиця—Гільберта (1.16) можна переписати в термінах Лагранжевого формалізму

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta X_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{X}_i} = \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\dot{X}_i}, \quad X_i = \{\theta{,}\phi\}, \tag{1.17}$$

з відповідною функцією Лагранжа [56]

$$\mathcal{L} = -\int\limits_V \cos\theta\dot{\phi}\mathrm{d}\boldsymbol{r} - \mathcal{E}, \tag{1.18}$$

та дисипативною функцією [55, 57]

$$\mathcal{F} = \frac{\alpha}{2}\int\limits_V \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2\right)\mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{1.19}$$

1.2 Вплив кривини на магнітні властивості низьковимірних систем

Розглядаючи викривлений магнетик, в енергії якого враховано лише обмін та анізотропію, а магнітостатика зводиться до ефективної анізотропії, можна побачити, що напрямок вектора анізотропії стає координатно-залежним. У цьому випадку найлегше ввести криволінійну систему координат, яка буде зв'язана з геометрією магнетика, в якій вираз для енергії анізотропії (1.5) буде мати найпростіший вигляд. Переходячи з декартової системи координат в криволінійну, ми повинні також переписати і вираз для енергії обмінної взаємодії (1.3).

Нещодавно, Гайдідей та ін. [58, 59] розробили теорію, яка дозволяє записати енергію обмінною взаємодії для довільно-викривлених магнітних оболонок [58] та дротів [59]. Запропонований запис дозволяє відтворити попередньо-отримані вирази для циліндричних [60, 61], тороїдальних [62, 63], конусоподібних [64, 65], сферичних [66] поверхонь і досліджувати нові [67, 68].

У криволінійній системі координат енергія обмінної взаємодії розбивається на три доданки [59]

$$\mathcal{E}_{\mathrm{ex}} = \ell_{\mathrm{m}}^2 \int\limits_V \mathscr{E}_{\mathrm{ex}} \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \quad \mathscr{E}_{\mathrm{ex}} = \mathscr{E}_{\mathrm{ex}}^0 + \mathscr{E}_{\mathrm{ex}}^{\mathrm{A}} + \mathscr{E}_{\mathrm{ex}}^{\mathrm{DMI}} \tag{1.20}$$

Перший доданок в густині енергії (1.20) описує ізотропну частину енергії обмінної взаємодії, в криволінійній системі координат

$$\mathscr{E}_{\mathrm{ex}}^0 = \boldsymbol{\nabla} m_\mu \cdot \boldsymbol{\nabla} m_\mu.$$

Грецькі індекси $\mu, \nu, \iota = 1,2,3$ нумерують криволінійні компоненти вектора $\boldsymbol{m}$ та криволінійні координати. Оператор $\boldsymbol{\nabla}$ є двовимірним оператором градієнта в криволінійній системі координат. Два інші доданки відповідають індукованим кривиною та крученням ефективним анізотропії та взаємодії Дзялошинського—Морії [58, 59].

Другий доданок квадратичний по намагніченості

$$\mathscr{E}_{\mathrm{ex}}^{\mathrm{A}} = \mathscr{K}_{\mu\nu} m_\mu m_\nu,$$

внаслідок чого його називають ефективною анізотропією. Компоненти ефективного коефіцієнта анізотропії $\mathscr{K}_{\mu\nu}$ квадратичні відносно кривини та кручення у одновимірних системах [59]. У випадку двовимірних систем компоненти $\mathscr{K}_{\mu\nu}$ квадратичні відносно другої фундаментальної форми та спінової зв'язності [58, 59]. Варто відмітити, що ефективна анізотропія виступає джерелом скалярних потенціалів, подібних до тих, які виникають в задачах квантової механіки про частинку жорстко зв'язану з поверхнею [69–72].

Останній доданок у густині енергії (1.20) відповідає комбінаціям інваріантів Ліфшиця

$$\mathscr{E}_{\text{ex}}^{\text{DMI}} = \mathscr{D}_{\mu\nu\iota}\left(m_\nu \nabla_\iota m_\mu - m_\mu \nabla_\iota m_\nu\right), \tag{1.21}$$

тому його можна інтерпретувати як взаємодію Дзялошинського—Морії [40–42]. Компоненти ефективного коефіцієнта взаємодії Дзялошинського—Морії $\mathscr{D}_{\mu\nu\iota}$ антисиметричні відносно перестановки коефіцієнтів μ та ν. На відміну від ефективного коефіцієнта анізотропії $\mathscr{K}_{\mu\nu}$, ефективний коефіцієнт взаємодії Дзялошинського—Морії лінійний відносно кривини та кручення в одновимірних системах [59], і лінійний відносно другої фундаментальної форми та спінової зв'язності для двовимірних систем [58, 59]. Цю взаємодію можна трактувати, як певний векторний потенціал джерелом якого виступає кручення тривимірних кривих. Аналогічні потенціали виникають в задачах квантової механіки з врахуванням спін-орбітальної взаємодії [73–75]. Індукована геометрією взаємодія Дзялошинського—Морії (1.21) може бути джерелом можливого порушення хіральної симетрії. В основному хіральні ефекти асоціюють з геометричною фазою Бері [76]. У магнетизмі ці ефекти відносять до магнітохіральних ефектів [77, 78].

Активне дослідження магнітних нанотрубок підтверджує структурну форму густини обмінної енергії (1.20) з ефективною віссю анізотропії вздовж нанотрубки [60, 79–83]. Індуковані геометрією ефективні взаємодії призводять до збільшення величини щілини у спектрі магнонів для магнітної нанаотрубки [82]. А також до появи Уокерівської границі в динаміці вихрових доменних стінок уздовж трубок [60].

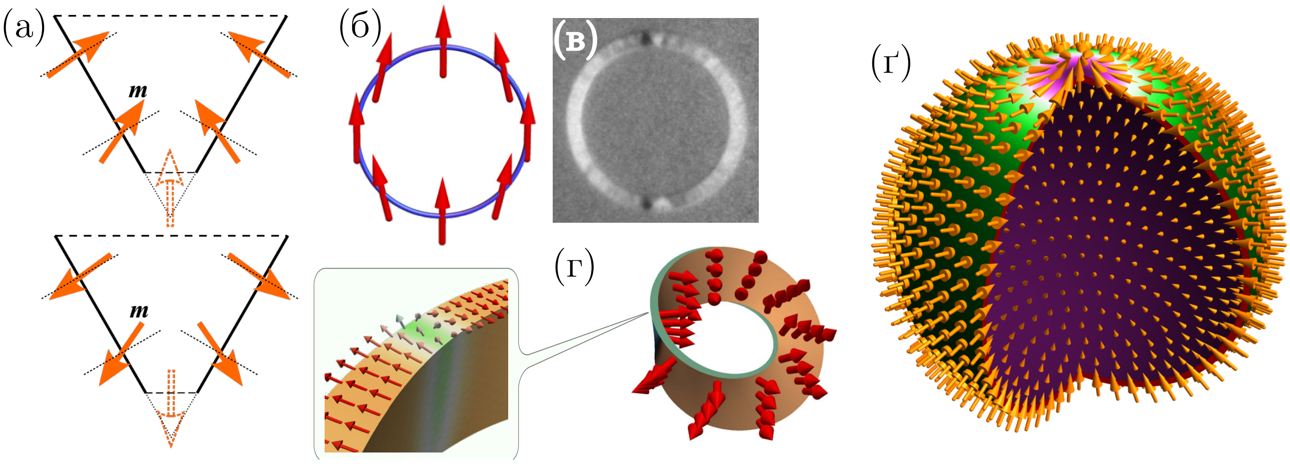


Рис. 1.2: (а) Схематичне зображення рівноважного розподілу намагніченості у конусоподібній структурі з сильною легко-нормальною анізотропією [58]. (б)-(в) Магнітом'які кільця у *onion* стані: вставку (б) взято з [59]; вставку (в) взято з [84]. (г) Індуковані кривиною топологічно-стійкі доменні стінки, відповідають рівноважним станам, у кільці Мебіуса з сильною легко-нормальною анізотропією [67]. (ґ) Топологічно-стійкий скірміон на сферичній оболонці з сильною легко-нормальною анізотропією [85].

Яскравий прояв впливу геометрії на магнітну підґратку можна побачити розглянувши рівноважний розподіл намагніченості у конусоподібній структурі із сильною легко-нормальною анізотропією. Намагніченість у такій структурі відхиляється від нормального напрямку до площини конуса внаслідок дії деякого ефективного поля, яке породжує геометрія [58]. Кут, на який відхиляється намагніченість від напрямку анізотропія, пропорційний кореню квадратному від середньої кривини і залежить від просторової координати, див. Рис. 1.2(а).

Геометрія магнітних наночастинок може призвести до утворення топологічно-стійких структур. Так у магнітному кільці, яке характеризується сталою кривиною та нульовим крученням, із легко-тангенціальною анізотропією, окрім вихрового розподілу [47, 86], можливий ще *onion* стан [59, 84], див. Рис. 1.2(б-в).

У магнітом'яких сферичних оболонках спостерігаються подібні розподіли. В залежності від геометричних параметрів у сферичній оболонці можливе утворення різних основних станів: два вихори на полюсах оболонки [66, 87] і *onion* стан [87]. Варто відмітити, що перехід від вихрового до *onion* стану відбувається неперервно і відповідає фазовому переходу другого роду [87]. Якщо ж розглядати магнітом'які сферичні оболонки, основний стан яких відповідає двом вихорам, то індукована геометрією взаємодія Дзялошинського—Морії призводить до відхилення намагніченості від азимутального напрямку. Напрямок відхилення визначається знаком добутку магнітної хіральності та полярності: $\mathfrak{C}\mathfrak{p} = +1$ намагніченість відхиляється назовні від полюсу, а у випадку $\mathfrak{C}\mathfrak{p} = -1$ — всередину [66]. Розглядаючи сферичні оболонки із сильною легко-нормальною анізотропією, можна побачити, що в таких системах можлива стабілізації скірмінона [85], навіть, за відсутності природної взаємодії Дзялошинського—Морії.

У більш складних геометричних об'єктах, наприклад, кільці Мебіуса з сильною легко-нормальною анізотропією, геометрія самого магнетика призводять до утворення топологічно-стійких доменних стінок [67, 88]. Розташування доменної стінки у такому кільці визначається ефективною анізотропією — доменна стінка розташовується у вертикальній частині кільця, див. Рис. 1.2(г). Утворенні внаслідок наявності викривленої геометрії доменні стінки відповідають основному стану.

Розглядаючи викривлені магнітом'які наночастинки, основний стан яких відповідає доменній структурі Ландау, можна побачити, що під дією зовнішнього магнітного поля відбувається спіралеподібне закручення доменної структури [89]. Напрямок зовнішнього поля визначає напрямок закручення доменної структури. На Рис. 1.3 продемонстровано вплив кривини на процес закручення доменної структури Ландау в залежності від напрямку зовнішнього магнітного поля у викривленій магнітній частинці. Аналогічне пору-

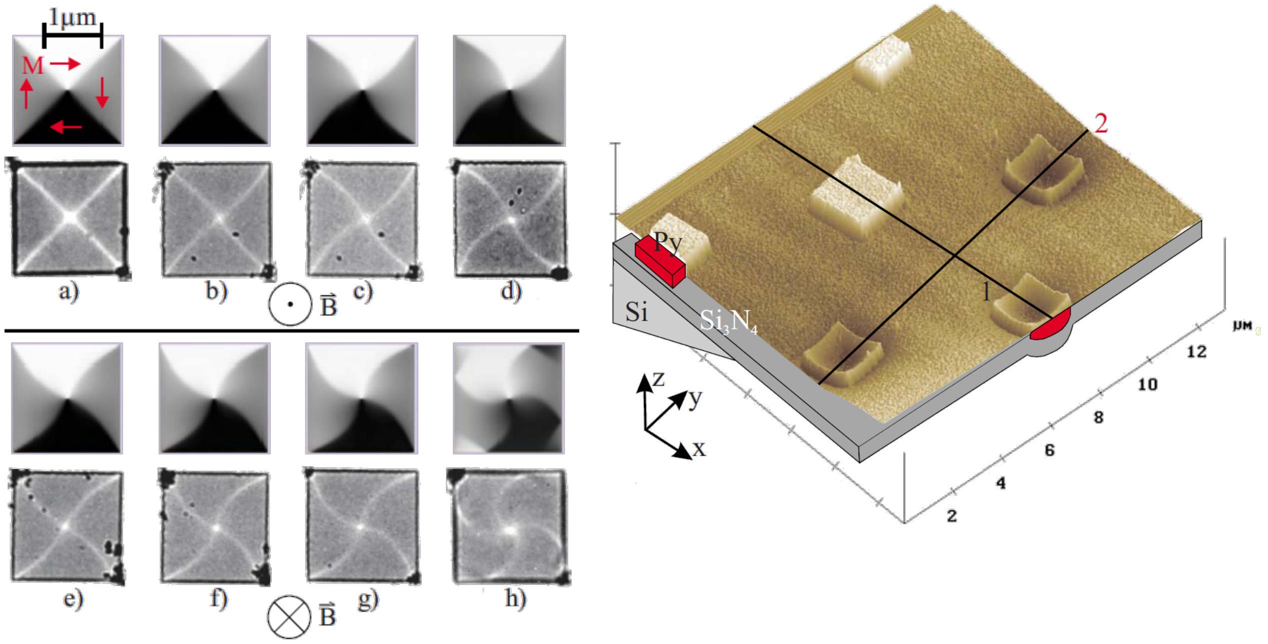


Рис. 1.3: Ліва панель: спіралеподібне закручення доменної структури Ландау у викривленому магнітом'якому прямокутнику під дією зовнішнього магнітного поля. Перший та третій рядок відповідають моделюванням, а другий та четвертий — експерименту. Права панель: експериментально-отримане зображення магнітом'яких прямокутників на підкладці з Si_3N_4. Рисунок взято з [89].

шення симетрії у магнітних вихорах також спостерігалося при перемиканні полярності вихору [90].

Магнітний вихор може бути основним станом для півсферичних магнітом'яких оболонок [5, 91]. У такій структурі виникає взаємозв'язок між магнітною хіральністю, полярністю та викривленою геометрією, внаслідок чого виникає порушення симетрії в перемиканні полярності магнітного вихору: магнітний вихор з хіральністю $\mathfrak{C} = -1$ потребує менших амплітуд магнітних імпульсів для перемикання полярності, ніж вихор з хіральністю $\mathfrak{C} = +1$ [90].

Окрім індукованих кривиною ефектів у статиці та динаміці магнітних вихорів у викривлених системах, існують ще ефекти пов'язані з вихровими та поперечними доменними стінками. Експериментально показано, що у викрив-

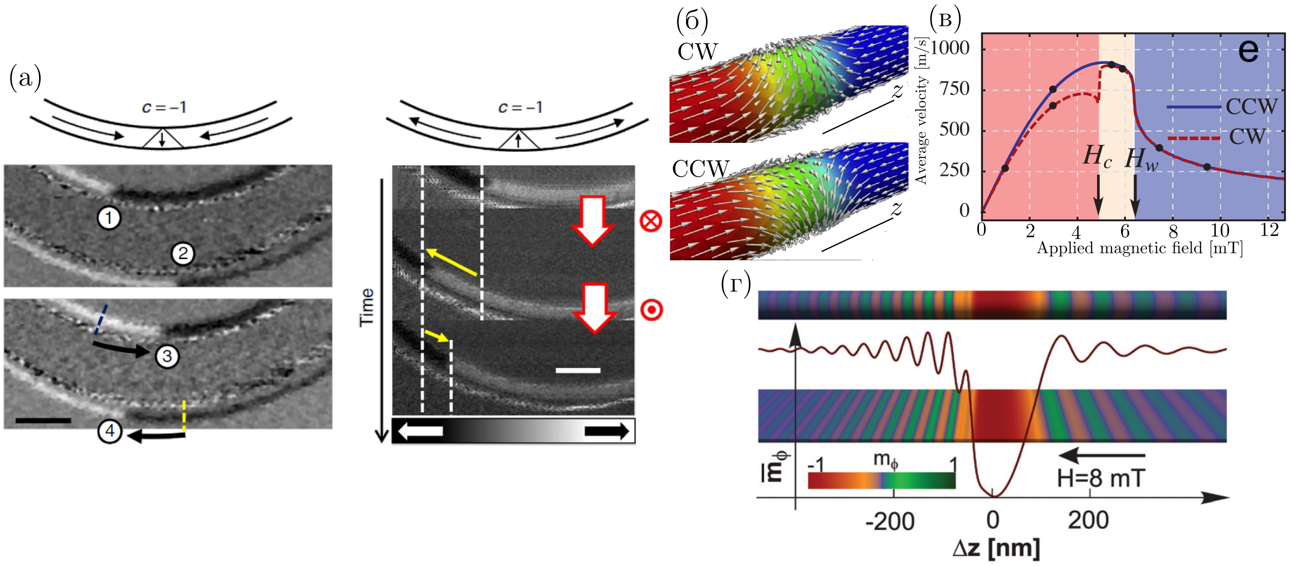


Рис. 1.4: (а) Переміщення поперечної доменної стінки у викривленому магнітом'якому дроті. Права панель відповідає експериментально отриманому зображенню доменної стінки типу *head-to-head*, а ліва — типу *tai-to-tail* [92].(б-в) Залежність середньої швидкості руху вихрових доменних стінок з різними хіральностями у нанотрубці від зовнішнього поля [93]. (г) Випромінювання спінових хвиль з різною груповою швидкістю у магнітній нанотрубці під час руху вихрової доменної стінки [94].

лених магнітом'яких дротах спостерігається чітка орієнтація поперечної доменної стінки на згині [92]: доменна стінка типу *head-to-head* орієнтується назовні від згину, а доменна стінка типу *tail-to-tail* — всередину, див. Рис. 1.4(а). Варто відмітити, що у прямому одноосьовому дроті відсутня чітка орієнтація поперечної доменної стінки: доменні стінки з різними фазами енергетично еквівалентні.

У випадку вихрових доменних стінок на магнітних нанотрубках, було показано, що швидкість руху вихрової доменної стінки визначається радіусом трубки [60] та хіральністю доменної стінки [60, 95, 96], див. Рис. 1.4(б-в). Вплив хіральності на динаміку вихрових доменних стінок у магнітних нанотрубках активно досліджується аналітично [60, 93, 96, 97] і за допомогою мікромагнітних моделювань [93–96, 98, 99]. Зокрема, було встановлено, що під час руху вихрових доменних стінок, стінка з меншою швидкістю при певному критичному значенні поля змінює свою хіральність на ту, яка відповідає більшій швидкості [93, 96], див. Рис. 1.4(в). Зміна хіральності, під час руху, відбувається однорідно для магнітних нанотрубок з малим радіусом [60, 93, 96] і неоднорідно, з утворенням вихор-антивихрової пари, для нанотрубок з великим радіусом [99]. Збільшення радіусу нанотрубок до великих значень ($\geqslant 10\ell_{\text{ex}}$) дозволяє уникнути Уокерівську границю [100], внаслідок чого спостерігається випромінювання Вавілова—Черенкова для швидких доменних стінок [94, 101], див. Рис. 1.4(г).

Як відомо, наявність природної взаємодії Дзялошинського—Морії призводить до порушення симетрії в законі дисперсії для магнонів [102–104]. Аналогічний ефект спостерігається при поширенні магнонів у нанотрубці з вихровим розподілом намагніченості: довжина хвилі магнонів при заданій частоті різна для протилежних напрямків поширення, внаслідок чого відбувається розбиття магнонів за хіральними станами на право- та ліво-закручені [77, 105]. Ступінь асиметрії в поширенні магнонів залежить від радіуса магнітної нанотрубки [105].

1.3 Висновки до розділу

Нетривіальна геометрія магнетика має суттєвий вплив на статичні та динамічні властивості розподілу намагніченості. Геометрія зразка призводить до появи ефективних взаємодій в обмінній енергії магнетика: анізотропії та взаємодії Дзялошинського—Морії. Індуковані геометрією взаємодії призводять до нових фізичних ефектів. Особливо цікавими в цьому контексті є нові властивості топологічно нетривіальних розв'язків — доменних стінок, магнітних вихорів, скірміонів, тощо.

Розділ 2

ВПЛИВ КРИВИНИ НА ДИНАМІКУ ДОМЕННОЇ СТІНКИ В ПЛОСКИХ ВИКРИВЛЕНИХ ДРОТАХ

> У даному розділі розв'язується задача про статичні та динамічні властивості поперечної доменної стінки у викривленому магнітному нанодроті, кривина якого змінюється уздовж дроту і представляє собою локалізовану функцію натурального параметру. Знайдено статичний розв'язок для доменної стінки. Виявлено, що, на відміну від прямолінійних дротів, у викривлених нанодротах, орієнтація поперечної компоненти намагніченості доменної стінки напрямлена за чи проти вектора нормалі в залежності від топологічного заряду стінки. При цьому локальний згин дроту виступає в якості притягаючого потенціалу. Аналітично знайдено вирази для частоти власних коливань та ефективного коефіцієнта релаксації для доменної стінки на локальному згині нанодроту. Аналітичні розрахунки підтверджено за допомогою мікромагнітних моделювань. Результати, представлені в даному розділі, опубліковано в роботі [19].

У пункті 2.1 розглянуто рівноважний стан доменної стінки на локальному згині магнітного дроту. Пункт 2.2 присвячений дослідженню лінійної динаміки поперечної доменної стінки на локальному згині магнітного дроту. У пункті 2.3 наведено результати чисельного експерименту з динаміки доменної стінки на локальному згині. В останньому пункті 2.4 викладено основні результати розділу.

Аналітично отриманні результати, які представленні в розділі, перевірялися за допомогою повномасштабних мікромагнітних моделювань та чисельного розв'язку векторного рівняння Ландау—Ліфшиця—Гільберта (1.14) системи класичних спінів.

2.1 Випадок локалізованої кривини: рівноважний стан доменної стінки

Ми зосередили нашу увагу на викривленому одновимірному магнітному нанодроті $\boldsymbol{\gamma}(s)$, який вміщено у тривимірний простір $\mathbb{R}^3$, для якого s відповідає натуральному параметру (координата вздовж дроту). У цьому випадку зручно ввести локальний криволінійний базис Френе—Серре з базисними векторами $\boldsymbol{e}_\mu$:

$$\boldsymbol{e}_{\text{T}} = \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial s}, \quad \boldsymbol{e}_{\text{N}} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_{\text{T}}}{\partial s} \Big/ \left| \frac{\partial \boldsymbol{e}_{\text{T}}}{\partial s} \right|, \quad \boldsymbol{e}_{\text{B}} = \boldsymbol{e}_{\text{T}} \times \boldsymbol{e}_{\text{N}}, \tag{2.1}$$

де вектор $\boldsymbol{e}_{\text{T}}$ — тангенціальний вектор, $\boldsymbol{e}_{\text{N}}$ — вектор нормалі, а $\boldsymbol{e}_{\text{B}}$ — вектор бінормалі до кривої $\boldsymbol{\gamma}$. Співвідношення, яке визначає зв'язок між векторами криволінійного базису (2.1) та їх похідними можна записати через формули Френе—Серре [106–108]

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\mu}{\partial s} = \mathscr{F}_{\mu\nu} \boldsymbol{e}_\nu, \quad \|\mathscr{F}_{\mu\nu}\| = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Параметри κ і τ називаються кривиною та крученням магнітного нанодроту, відповідно.

У цьому розділі ми розглядаємо феромагнітний нанодріт з круглим поперечним перерізом, який можна параметризувати наступним чином

$$\boldsymbol{r}(s,\chi,\rho) = \boldsymbol{\gamma}(s) + \rho \cos\chi \boldsymbol{e}_{\text{N}}(s) + \rho \sin\chi \boldsymbol{e}_{\text{B}}(s), \tag{2.3}$$

де $\boldsymbol{r}$ — тривимірний вектор який описує область яку займає магнетик (див. Рис. 2.1(a)), $\boldsymbol{\gamma}(s) = \gamma_x \boldsymbol{e}_x + \gamma_y \boldsymbol{e}_y$ — центральна лінія у площині xy навколо якої знаходиться магнетик, $\rho \in [0,R]$ та $\chi \in [0,2\pi)$ — полярні координати на перерізі зразка.

Для аналітичних розрахунків ми використовуємо описану в попередньому розділі феноменологічну модель феромагнетика. У виразі для енергії врахо-

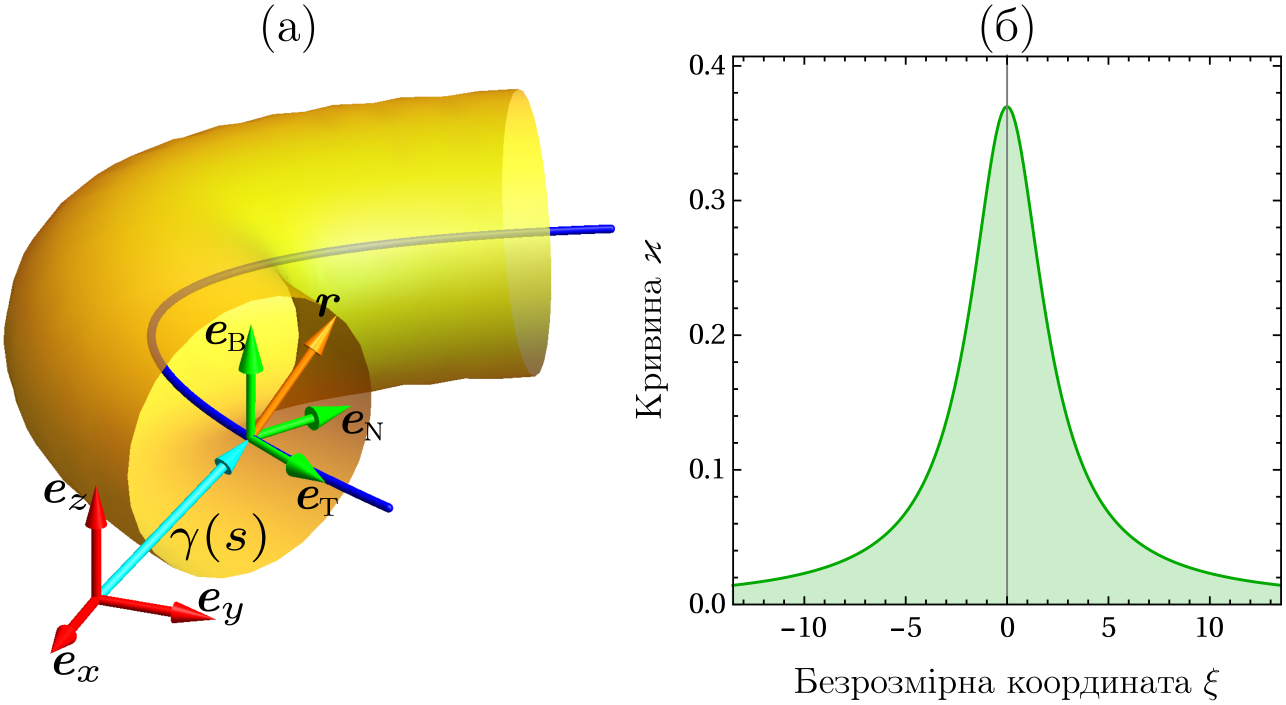


Рис. 2.1: (а) Схематичне зображення пераметризації магнітного нанодруту радіуса R. (б) Розподіл кривини в магнітному нанодроті зігнутого у формі параболи.

вано лише обмінну взаємодію та легкоосьову анізотропію з віссю анізотропії спрямованою по дотичній до магнетика та коефіцієнтом анізотропії K, у якому враховано ефективний вклад від магнітостатики (1.11) [49]

$$\mathcal{E}=\mathcal{S}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\ell_m^2\mathscr{E}_{\text{ex}}-(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{e}_{\text{T}})^2\right]\mathrm{d}s. \tag{2.4}$$

Величина $\mathcal{S}$ є площею поперечного перерізу, $\mathcal{E}=E/K$ — нормована енергія. Конкуренція між обмінною взаємодією та анізотропією призводить до появи характерного просторового масштабу ℓ_{m} — магнітної довжини (1.12). У виразі для енергії (2.4) ми обмежуємо себе випадками, коли $\ell_m \gtrsim R$. Внаслідок цього ми вважаємо, що намагніченість змінюється лише вздовж координати s і залишається сталою в площині перерізу, тобто $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{m}(s,t)$.

Як зазначено в Розділі 1, у викривлених системах енергію обмінної взаємодії можна розписати на три доданки (1.20) [59]

$$\begin{gathered}\mathscr{E}_{\text{ex}} = \mathscr{E}_{\text{ex}}^{0} + \mathscr{E}_{\text{ex}}^{\text{DMI}} + \mathscr{E}_{\text{ex}}^{\text{A}},\\ \mathscr{E}_{\text{ex}}^{0} = \left|\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial s}\right|^2, \quad \mathscr{E}_{\text{ex}}^{\text{DMI}} = \mathscr{F}_{\mu\nu}\left(m_\mu \frac{\partial m_\nu}{\partial s} - \frac{\partial m_\mu}{\partial s} m_\nu\right), \quad \mathscr{E}_{\text{ex}}^{\text{A}} = \mathscr{K}_{\mu\nu} m_\mu m_\nu,\end{gathered} \tag{2.5}$$

де матриця $\mathscr{K}_{\mu\nu} = \mathscr{F}_{\mu\iota}\mathscr{F}_{\iota\nu}$ квадратична по параметрах кривини та кручення, перший доданок $\mathscr{E}_{\text{ex}}^{0}$ відповідає ізотропному обміну в криволінійній системі координат, другий доданок $\mathscr{E}_{\text{ex}}^{\text{DMI}}$ — індукована кривиною та крученням взаємодія Дзялошинського—Морії, останній доданок $\mathscr{E}_{\text{ex}}^{\text{A}}$ — індукована кривиною та крученням анізотропія. Важливою характеристикою індукованих кривиною та крученням взаємодій є те, що ефективна взаємодія Дзялошинського—Морії лінійна по параметрах кривини та кручення, а ефективна анізотропія — квадратична.

Використавши криволінійний базис Френе—Серре (2.1), ми можемо параметризувати одиничний вектор намагніченості наступним чином[1]

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{e}_{\text{T}} \cos\theta + \boldsymbol{e}_{\text{N}} \sin\theta\cos\phi + \boldsymbol{e}_{\text{B}} \sin\theta \sin\phi, \tag{2.6}$$

де кути θ та ϕ є неперервними функціями координат та часу. В даній параметризації кут θ відраховують від тангенціального напрямку, а кут ϕ відраховують від вектора нормалі в нормальній площині.

У термінах кутової параметризації намагніченості (2.6) вираз для густини обмінної енергії (2.5), для плоского нанодроту, набуває вигляду [59]

$$\mathscr{E}_{\text{ex}} = \left(\frac{\partial\theta}{\partial s} + \kappa(s)\cos\phi\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial s}\sin\theta - \kappa(s)\cos\theta\sin\phi\right)^2. \tag{2.7}$$

У виразі (2.7) враховано, що параметр кручення для плоского нанодроту дорівнює нулю.

---

[1] Запропонована пераметризація буде використана в розділі 2 та пункті 3.3.

Розглянемо стаціонарний випадок рівнянь (1.16)

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{E}}{\delta\phi} &= \phi'' + 2\theta'\left(\phi'\text{ctg}\theta + \kappa\sin\phi\right) + \varkappa^2\sin\phi\cos\phi - \varkappa'\text{ctg}\theta\sin\phi = 0,\\ \frac{\delta\mathcal{E}}{\delta\theta} &= \theta'' - \sin\theta\cos\theta\left(\phi'^2 - \varkappa\sin^2\phi + 1\right) - 2\phi'\kappa\sin^2\theta + \varkappa'\cos\phi = 0.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Для зручності у рівняннях (2.8), і в подальшому, штрих відповідає похідній по безрозмірній координаті $\xi = s/\ell_\text{m}$, величина $\varkappa = \kappa\ell_\text{m}$ — безрозмірна кривина. Система рівнянь (2.8) має розв'язок $\phi = \phi_0 = 0, \pi$, який вказує на те, що вектор намагніченості лежить у площині магнетика. Розв'язок для θ можна знайти, підставивши $\phi = \phi_0$ в друге рівняння системи (2.8)

$$\theta'' - \sin\theta\cos\theta = -\varkappa'\cos\phi_0. \tag{2.9}$$

У випадку коли $\varkappa' \equiv 0$ (випадок прямого дроту або частини кола) рівняння (2.9) має розв'язок у вигляді доменної стінки

$$\cos\theta = -p\ \text{th}\frac{\xi - q}{\delta}$$

типу *head-to-head* ($p = +1$) або *tail-to-tail* ($p = -1$), де q та δ визначають положення та ширину доменної стінки, відповідно. У випадку, коли $\varkappa' \not\equiv 0$, у рівнянні (2.9) кривина виступає в якості зовнішньої сили, яка буде спричиняти рух доменної стінки. Тому ми будемо розглядати випадок локалізованої кривини магнітного нанодроту: $\varkappa(\pm\infty) = 0$ та $\varkappa'(\pm\infty) = 0$, див. Рис. 2.1(б). У випадку локалізованої кривини можна отримати межові умови $\cos\theta(\pm\infty) = \mp p$, які відповідають межовим умовам для прямого нанодроту. В подальшому, ми розглядаємо лише випадки для, яких $\varkappa' \ll 1$, вважаючи, що доменна стінка зберігає свою форму, а кривина призводить до слабкої зміни ширини доменної стінки δ. Тому для аналізу властивостей доменної стінки ми будемо використовувати метод колективних змінних [109, 110], який базується на $q - \Phi$ моделі Слончевського [111, 112]

$$\cos\theta = -p\ \text{th}\frac{\xi - q(t)}{\delta}, \quad \phi = \Phi(t), \tag{2.10}$$

і активно застосовується для аналізу динаміки доменних стінок [60, 93, 96, 113–118]. Положення доменної стінки $q(t)$ та її фаза $\Phi(t)$ є канонічно спряженими змінними.

Підставивши вирази для нашої моделі (2.10) в вираз для енергії (2.4), і, провівши інтегрування (вважаючи, що $\varkappa\delta \ll 1$), отримаємо енергію поперечної доменної стінки, з точністю до констант

$$\frac{\mathcal{E}^{\text{DW}}}{2\mathcal{S}\ell_m} \approx \left(\frac{1}{\delta} + \delta\right) + \pi p \varkappa(q) \cos\Phi - \delta\varkappa^2(q)\sin^2\Phi. \tag{2.11}$$

Перший доданок у (2.11) відповідає за конкуренцію між обмінною взаємодією та анізотропією й визначає ширину доменної стінки в прямому дроті. Другий та третій доданки виникають з індукованої кривиною взаємодії Дзялошинського—Морії та анізотропії, відповідно. Вираз для енергії доменної стінки (2.11) мінімізується при наступних значеннях положення та фази доменної стінки

$$\varkappa'(q_0) = 0, \quad \cos\Phi_0 = -p. \tag{2.12}$$

Величини (q_0, Φ_0) можна вважати рівноважними параметрами доменної стінки. З рівнянь (2.12) можна зробити висновок, що доменна стінка пінінгується в точці максимуму кривини магнітного дроту, а фаза доменної стінки вибирає конкретний напрямок, на відміну від прямого дроту: стінка типу *head-to-head* завжди намагнічена проти напрямку вектора нормалі, а стінка типу *tail-to-tail* — в напрямку вектора нормалі, див. Рис. 2.2. Явище вибору певної орієнтації поперечної намагніченості доменної стінки у викривлених дротах спостерігалося раніше на експерименті [92]. Якісно цей ефект можна пояснити тим, що вибір фази Φ_0, який визначається рівнянням (2.12), робить розподіл намагніченості більш однорідним, див. Рис. 2.2, що, в свою чергу, зменшує величину обмінної енергії.

З виразу для енергії доменної стінки (2.11) випливає, що рівноважне значення для ширини нерухомої доменної стінки $\delta_0 = 1$ відповідає ширині домен-

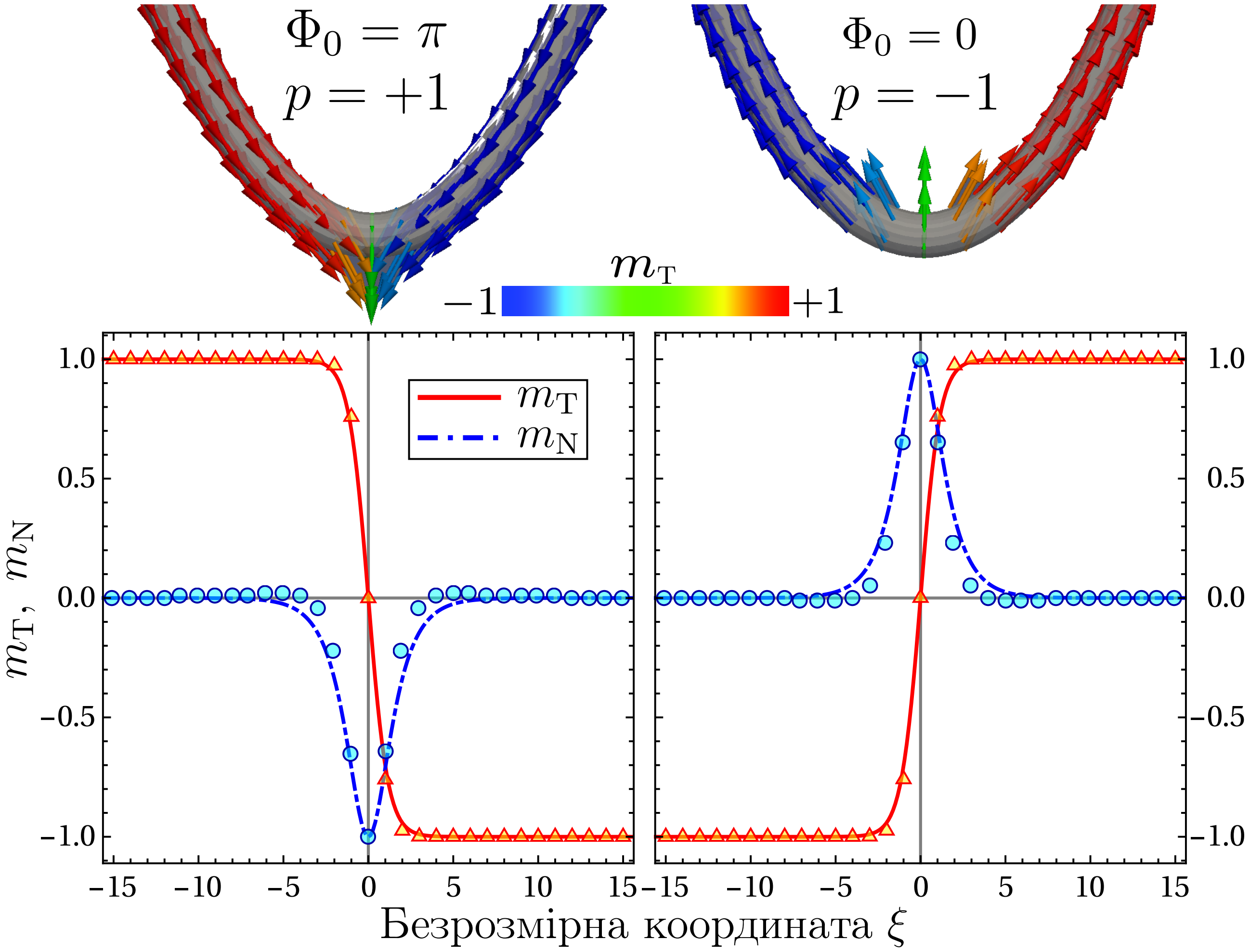


Рис. 2.2: Рівноважний стан поперечної доменної стінки на локалізованому згині магнітного нанодроту. Верхній ряд відповідає розподілу намагніченості, який було отримано за допомогою мікромагнітних моделювань для параболічно зігнутого дроту з радіусом поперечного перерізу $R = 5$ нм, загальною довжиною $L = 1$ мкм та безрозмірним параметром кривини в точці згину $\varkappa_0 = 0.375$ (показано лише область згину дроту). Нижній ряд демонструє порівняння тангенціальної $m_\text{T} = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{e}_\text{T}$ та нормальної $m_\text{N} = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{e}_\text{N}$ компонент намагніченості, які було отримано з мікромагнітних моделювань (маркери) та моделі (2.10) (лінії).

ної стінки у прямому дроті. Однак, якщо на доменну стінку подіяти збуренням, і величини $(q,\, \Phi)$ будуть відрізнятися від рівноважних значень (2.12), то ширина доменної стінки зміниться і буде визначатися через фазу Φ та положення q наступним чином $\delta\left(q{,}\Phi\right)=\left(1-\varkappa^{2}(q)\sin^{2}\Phi\right)^{-1/2}$, де $\varkappa^{2}(q)$ відіграє роль коефіцієнта ефективної легко-бінормальної анізотропії.

2.2 Випадок локалізованої кривини: осциляції доменної стінки на згині дроту

Динаміка доменної стінки описується рівняннями Ландау—Ліфшиця—Гільберта (1.16), які, в свою чергу, можна отримати з рівнянь Ейлера—Лагранжа—Релея (1.17). Підставивши модель (2.10) у функцію Лагранжа (1.18) та дисипативну функцію (1.19), отримаємо

$$\mathcal{L}^{\text{DW}}=2\mathcal{S}\ell_{\text{m}}\Phi\dot{q}-\mathcal{E},\quad \mathcal{F}^{\text{DW}}=\alpha\mathcal{S}\ell_{\text{m}}\left[\frac{\dot{q}^{2}}{\delta}+\delta\dot{\Phi}^{2}\right]. \tag{2.13}$$

Отриманні ефективні функція Лагранжа та дисипативна функція (2.13) продукують наступні рівняння руху для доменної стінки в термінах колективних змінних $(q,\,\Phi)$:

$$\begin{aligned}\dot{q}&=\frac{1}{2\mathcal{S}\ell_{\text{m}}}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\Phi}+\alpha\delta\dot{\Phi},\\ \dot{\Phi}&=-\frac{1}{2\mathcal{S}\ell_{\text{m}}}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\Phi}-\frac{\alpha}{\delta}\dot{q}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Крапки відповідають похідним по безрозмірному часу $\tilde{t}=t\gamma_{0}K/M_{s}$.

Для того, щоб дослідити лінійну динаміку доменної стінки на згині магнітного нанодроту в околі положення рівноваги, ми врахуємо малі відхилення від рівноважних значень положення доменної стінки та фази наступним чином:

$$\begin{aligned}q\left(t\right)&=q_{0}+\widetilde{q}\left(t\right),\\ \Phi\left(t\right)&=\Phi_{0}+\widetilde{\Phi}\left(t\right).\end{aligned} \tag{2.15}$$

У випадку, коли ширина доменної стінки набагато менша за радіус кривини дроту ($\varkappa\delta\to 0$), рівняння руху (2.14), лінеаризовані відносно малих відхилень, в околі положення рівноваги (2.15) набувають вигляду

$$\begin{aligned}\left(1+\alpha^2\right)\dot{\widetilde{q}} =&\pi\varkappa\left(q_0\right)\widetilde{\Phi},\\ \left(1+\alpha^2\right)\dot{\widetilde{\Phi}} =&\pi\varkappa''\left(q_0\right)\widetilde{q}-\alpha\pi\frac{\varkappa\left(q_0\right)}{\delta_0}\widetilde{\Phi}.\end{aligned} \tag{2.16}$$

Лінійні рівняння (2.16) для малих параметрів α мають розв'язок у вигляді затухаючих коливань, див. Рис. 2.3,

$$\begin{aligned}\widetilde{q}&\propto\sin\left(\Omega t+\varphi_0\right)e^{-\eta t},\\ \widetilde{\Phi}&\propto\cos\left(\Omega t+\varphi_0\right)e^{-\eta t},\end{aligned} \tag{2.17}$$

де частота коливань має вигляд

$$\Omega\approx\pi\sqrt{\left|\varkappa\left(q_0\right)\varkappa''\left(q_0\right)\right|}, \tag{2.18}$$

а ефективний коефіцієнт релаксації

$$\eta\approx\alpha\frac{\pi}{2}\frac{\varkappa\left(q_0\right)}{\delta_0}. \tag{2.19}$$

Фаза φ_0 у (2.17) визначається з початкових умов. У виразі для частоти коливань (2.18) та ефективного коефіцієнта релаксації (2.19) використано припущення, що $\varkappa\left(q_0\right)>0$ та $\varkappa''\left(q_0\right)<0$ в точці згину дроту.

У загальному випадку, коли відношення ширини доменної стінки до радіуса кривини знаходиться в межах $\varkappa\delta_0\in(0{,}1)$, використання моделі (2.10) дає наступні вирази для частоти коливань доменної стінки та ефективного коефіцієнта релаксації:

$$\begin{gathered}\Omega=\frac{\sqrt{|\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2|}}{\delta_0^2},\quad \eta=\frac{\alpha}{2}\frac{|\mathcal{I}_1|+\mathcal{I}_2}{\delta_0^2}\\ \mathcal{I}_1=\delta_0^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varkappa''(\xi)}{\operatorname{ch}\dfrac{\xi-q_0}{\delta_0}}\mathrm{d}\xi,\quad \mathcal{I}_2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\varkappa(\xi)}{\operatorname{ch}\dfrac{\xi-q_0}{\delta_0}}-\delta_0\frac{\varkappa^2(\xi)}{\operatorname{ch}^2\dfrac{\xi-q_0}{\delta_0}}\right)\mathrm{d}\xi.\end{gathered} \tag{2.20}$$

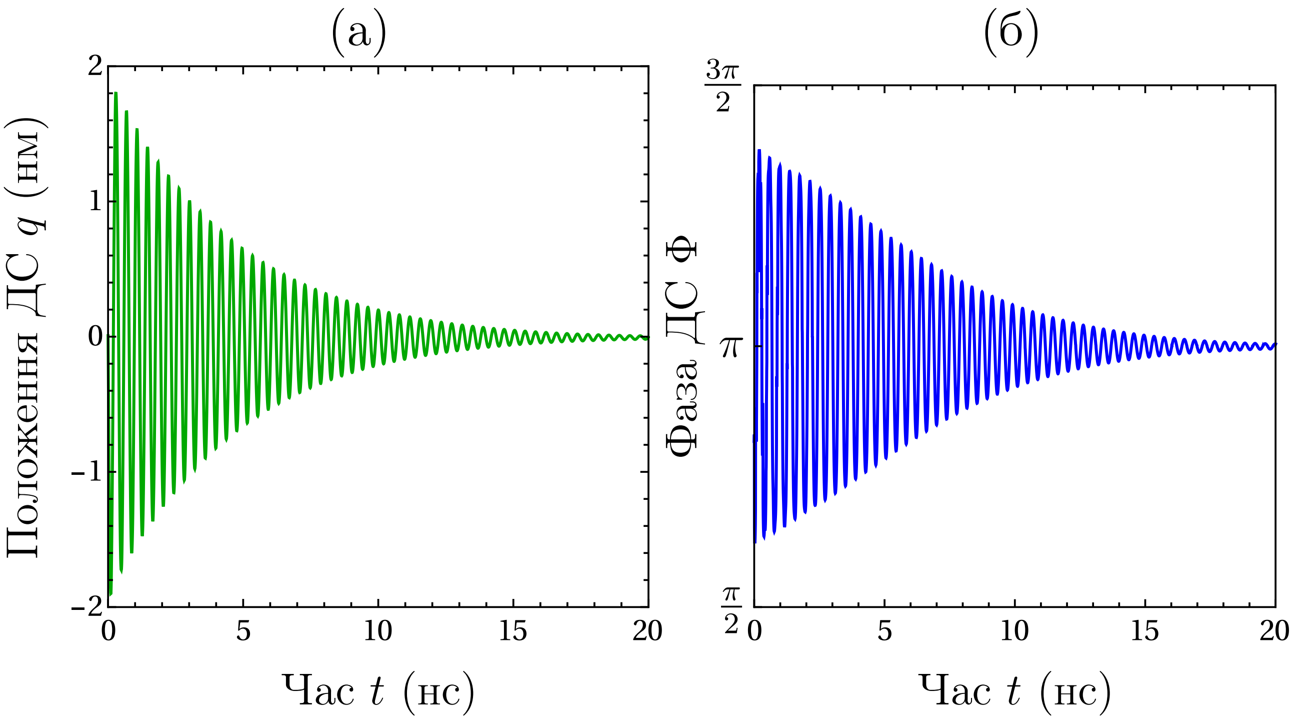


Рис. 2.3: (а), (б) Залежність від часу положення q та фази Φ доменної стінки, відповідно. Дані отримано з мікромагнітних моделювань для магнітного дроту у формі параболи з кривиною в точці згину $\varkappa_0 = 0.375$ та радіусом поперечного перерізу $R = 5$ нм.

У цьому випадку значення рівноважного положення q_0 доменної стінки визначається з рівняння:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varkappa'(\xi)}{\operatorname{ch}\dfrac{\xi - q_0}{\delta_0}} \mathrm{d}\xi = 0,$$

а рівноважне значення фази Φ_0 доменної стінки визначається аналогічним чином, як і в рівнянні (2.12).

На Рис. 2.4 представлено залежність частоти власних коливань та ефективного коефіцієнта релаксації від параметра кривини в точці згину. Зі збільшенням кривини частота коливань і ефективний коефіцієнт релаксації зростають.

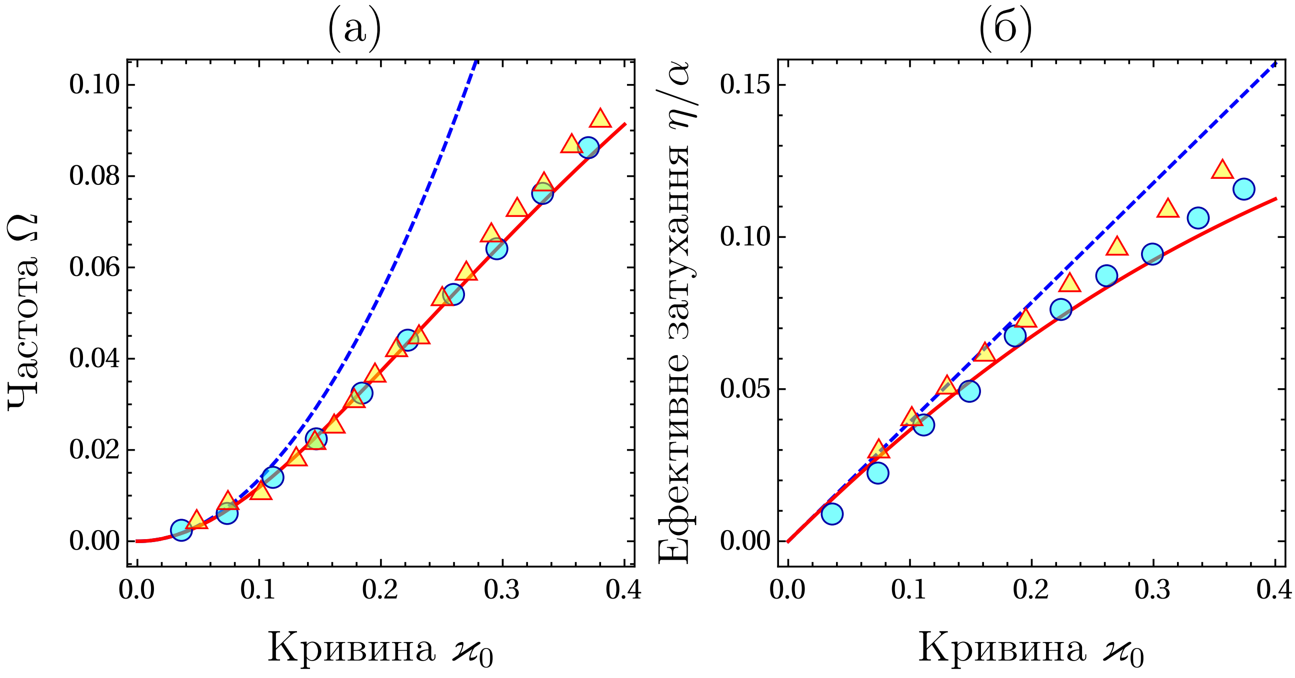


Рис. 2.4: Частота власних коливань (а) та ефективний коефіцієнт затухання (б) доменної стінки, як функція кривини в точці згину магнітного нанодроту. Суцільна та штрихована ліня відповідають теоретично передбаченим результатам (2.20) та (2.22), відповідно. Маркери відображають результати моделювань для магнітного нанодроту (диски) та ланцюжка дискретних магнітних моментів (трикутники).

2.3 Чисельні моделювання динаміки доменної стінки на локальному згині

Для перевірки аналітично отриманих результатів (2.18)-(2.20) було проведено серію чисельних моделювань з використанням пакету для мікромагнітних моделювань `Nmag` [119], для магнітом'якого матеріалу, та власноруч написаного симулятора для ланцюжка дискретних магнітних моментів, який чисельно розв'язував рівняння Ландау—Лійшиця—Гільберта. В усіх чисельних моделюваннях враховувалися лише три взаємодії: обмінна взаємодія, магнітостатична взаємодія (у випадку ланцюжка дискретних магнітних моментів — диполь-дипольна взаємодія) та взаємодія із зовнішнім магнітним полем.

В якості зразка для чисельних моделювань було вибрано нанодріт, зігнутий у формі параболи, з центральною лінією $\boldsymbol{\gamma}$

$$\boldsymbol{\gamma} = x\boldsymbol{e}_x + \varkappa_0 \frac{x^2}{2}\boldsymbol{e}_y, \tag{2.21}$$

де $\varkappa_0 \equiv \varkappa(q_0)$ — кривина в точці згину. Профіль кривини нанодроту з центральною лінією (2.21) представлено на Рис. 2.1(б).

У випадку, коли ширина доменної стінки набагато менша за радіус кривини нанодроту ($\varkappa\delta \to 0$), частота власних коливань (2.18) та ефективний коефіцієнт релаксації (2.19) визначаються, як

$$\Omega \approx \pi\varkappa_0^2\sqrt{3}, \quad \eta \approx \alpha\varkappa_0\frac{\pi}{4}. \tag{2.22}$$

У моделюваннях ми розглядали дроти з кривиною в точці згину $\varkappa_0 \in [0.0375, 0.375]$. Кривина змінювалася з кроком $\Delta\varkappa_0 = 0.0375$.

2.3.1 Неперервні системи

Повномасштабні мікромагнітні моделювання виконувалися з використанням пакету Nmag [119]. Для мікромагнітних моделювань використовувались матеріальні параметри магнітом'якого матеріалу — пермалою [120]. Ми зосередили увагу на дротах з радіусом поперечного перерізу $R = 5$ нм та довжиною $L = 1$ мкм. Температурні ефекти та анізотропія не враховувалися. Весь об'єм зразка було розбито на тетраедри з довжиною ребра 1.75 нм.

Усі чисельні моделювання проходили у три етапи:

(ii) релаксація доменної стінки з високим коефіцієнтом релаксації ($\alpha = 0.1$) для визначення рівноважних значень положення та фази доменної стінки;

(ii) відхилення фази Φ доменної стінки від положення рівноваги, за допомогою зовнішнього магнітного поля $\boldsymbol{B} = B_0\boldsymbol{e}_z$, перпендикулярного до площини нанодроту, з амплітудою $B_0 = 25$ мТ;

(iii) вільна динаміка доменної стінки з природним коефіцієнтом релаксації ($\alpha = 0.01$).

Оскільки q та Φ канонічно спряженні змінні, див. рівняння (2.14), то відхилення фази Φ від рівноважного значення призводить до зміни положення доменної стінки q, тобто доменна стінка починає рухатися. Характерна динаміка положення та фази доменної стінки представлена на Рис. 2.3, де чітко видно гармонічні згасаючі коливання.

Визначення положення доменної стінки та її фази відбувалося у два етапи:

(i) знаходження компонент намагніченості в базисі Френе—Серре $m_{\mathrm{T}} = \boldsymbol{e}_{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{m}$, $m_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{e}_{\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{m}$ і $m_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{e}_{\mathrm{B}} \cdot \boldsymbol{m}$ з результатів моделювань. На Рис. 2.2 представлено порівняння результатів моделювань та моделі (2.10). Рівноважні стани на Рис. 2.2 відповідають аналітично отриманим (2.12);

(ii) аналіз отриманих компонент намагніченості за допомогою моделі (2.10). Положення та ширина доменної стінки визначались як параметри функції $m_{\mathrm{T}}(\xi) = -p\mathrm{th}\dfrac{\xi - q}{\delta}$, а фаза визначалася з рівняння $\mathrm{tg}\Phi = \dfrac{m_{\mathrm{B}}(q)}{m_{\mathrm{N}}(q)}$. На Рис. 2.3 представлено зміну положення та фази доменної стінки з часом.

Для визначення частоти власних коливань та ефективного коефіцієнта релаксації виконувався аналіз $q(t)$ та $\Phi(t)$, отриманих з моделювань, за допомогою функцій (2.17), де Ω, η та φ_0 виступали в якості параметрів. На Рис. 2.4 представлено порівняння результатів мікромагнітних моделювань (диски) та аналітично отриманих результатів.

2.3.2 Дискретні системи

Динаміку намагніченості у дискретному ланцюжку магнітних моментів, які розташованні у вузлах кривої (2.21), досліджували за допомогою чисельного розв'язку рівняння Ландау—Ліфшиця (1.13) для дискретних магнітних моментів $\boldsymbol{m}_i$

$$\frac{1}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{m}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{m_i} \times \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \boldsymbol{m_i}} + \alpha\, \boldsymbol{m}_i \times \left[\boldsymbol{m}_i \times \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \boldsymbol{m}_i}\right], \quad i = \overline{1,N} \tag{2.23}$$

де $\omega_0 = 4\pi\gamma_0 M_s$, α — релаксаційний коефіцієнт, $\mathcal{E} = E/\left(4\pi M_s^2 \Delta s^3\right)$ — нормована енергія, Δs — крок дискретизації вздовж натурального параметра s, а індекс $i = \overline{1,N}$ нумерує магнітні моменти. Під час чисельних розрахунків в енергії магнетика ми враховували чотири взаємодії:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^{\mathrm{ex}} + \mathcal{E}^{\mathrm{an}} + \mathcal{E}^{\mathrm{f}} + \mathcal{E}^{\mathrm{d}}. \tag{2.24}$$

Перший доданок в (2.24) відповідає енергії обмінної взаємодії

$$\mathcal{E}^{\mathrm{ex}} = -2\frac{\ell_{\mathrm{ex}}^2}{\Delta s^2}\sum_{i=1}^{N-1} \boldsymbol{m}_i \cdot \boldsymbol{m}_{i+1}$$

де $\ell_{\mathrm{ex}} = \sqrt{\dfrac{A}{4\pi M_s^2}}$ — обмінна довжина. Другий доданок визначає вклад одноосьової анізотропії[2]

$$\mathcal{E}^{\mathrm{an}} = -k\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{m}_i \cdot \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{an}})^2,$$

де $\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{an}}$ — кординатно-залежний одиничний вектор анізотропії. $k = \dfrac{K}{4\pi M_s^2}$ — нормований коефіцієнт одноосьової анізотропії. Третій доданок визначає взаємодію із зовнішнім магнітним полем $\boldsymbol{b}$

$$\mathcal{E}^{\mathrm{f}} = -\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{m}_i,$$

де $\boldsymbol{b}_i$ безрозмірне зовнішнє поле, нормоване на $4\pi M_s$. Останній доданок в енергії (2.24) відповідає диполь-дипольній взаємодії

$$\mathcal{E}^{\mathrm{d}} = \frac{(\Delta s)^3}{8\pi}{\sum_{i,j=1}^{N}}' \frac{\boldsymbol{m}_i \cdot \boldsymbol{m}_j}{|\boldsymbol{r}_{ij}|^3} - 3\frac{(\boldsymbol{m}_i \cdot \boldsymbol{r}_{ij})\,(\boldsymbol{m}_j \cdot \boldsymbol{r}_{ij})}{|\boldsymbol{r}_{ij}|^5}.$$

---

[2] В цьому розділі, для динаміки доменної стінки на локалізованому згині, анізотропію не враховували. У пунктах 3.1 та 3.2 анізотропія враховувалася для дослідження рівноважних станів та спектру магнонів.

де $\boldsymbol{r}_{ij} \equiv \boldsymbol{\gamma}_i - \boldsymbol{\gamma}_j$.

Динаміка системи описувалася системою $3N$ однорідних диференціальних рівнянь (2.23) відносно $3N$ невідомих функцій $m_i^{\mathrm{x}}(t)$, $m_i^{\mathrm{Y}}(t)$, $m_i^{\mathrm{z}}(t)$. Система рівнянь (2.23) розв'язувалася чисельно для заданих початкових умов. Під час інтегрування модуль вектора намагніченості залишався сталим $|\boldsymbol{m}_i(t)| = 1$.

Для чисельних розрахунків ми досліджували ланцюжки довжиною $76\Delta s$ і обмінною довжиною $\ell_{\mathrm{ex}} = 3\Delta s$. Під час дискретизації виконувалася вимога на те, щоб радіус кривини в точці згину був набагато більший за крок дискретизації натурального параметра ($\kappa_0 \Delta s \ll 1$).

Динаміку доменної стінки досліджували за допомогою аналогічного методу, як у випадку неперервної системи. Результати чисельних розрахунків для дискретних систем представлено на Рис. 2.4 (трикутники).

2.4 Висновки до розділу

У даному розділі чисельно й аналітично досліджено статичні та динамічні властивості поперечної доменної стінки на локальному згині магнітного нанодроту.

Виявлено, що локальний згин дроту виступає в якості потенціалу притягання для доменної стінки. Внаслідок наявності цього потенціалу відбувається закріплення доменної стінки на локальному згині. Виявлено, що потенціал притягання виникає внаслідок наявності індукованої кривиною взаємодії Дзялошинського—Морії. Встановлено зв'язок між топологічним зарядом та орієнтацією поперечної намагніченості доменної стінки у викривленому нанодроті, що узгоджується з експериментальними результатами [92]. Вибір певної орієнтації доменної стінки пояснюється індукованою кривиною взаємодією Дзялошинського—Морії.

Усі аналітичні результати в цьому розділі отримано з урахуванням обмінної взаємодії та легко-тангенціальної анізотропії в енергії магнетика. Магнітостатична взаємодія враховувалася як ефективна легко-тангенціальна анізотропія, що призводить до зсуву коефіцієнта легкоосьової анізотропії (1.11). В той же час, усі чисельні розрахунки проводилися для магнітом'яких матеріалів, в енергії яких враховувалися лише обмінна та магнітостатична взаємодії, а анізотропією нехтували. Гарне узгодження чисельних та аналітичних розрахунків говорить, в тому числі, і про те, що магнітостатику в одновимірних системах можна ефективно звести до легкоосьової анізотропії з коефіцієнтом $K_{\text{ms}}^{\text{eff}} = \pi M_s^2$.

Оригінальні результати розділу:

1. доменна стінка закріплюється в точках екстремуму кривини магнітного дроту ($\varkappa'(q_0) = 0$, $\varkappa''(q_0)\varkappa(q_0) < 0$);

2. топологічний заряд доменної стінки визначає її фазу у викривлених дротах ($\cos\Phi_0 = -p$);

3. частота лінійних коливань доменної стінки в околі положення рівноваги пропорційна кореню з добутку кривини на її другу похідну в точці екстремуму ($\Omega \propto \sqrt{|\varkappa(q_0)\varkappa''(q_0)|}$);

4. ефективний коефіцієнт релаксації доменної стінки пропорційний добутку кривини в точці екстремуму на коефіцієнт релаксації Гільберта ($\eta \propto \alpha\varkappa(q_0)$).

Всі аналітичні результати, що були отримані у даному розділі, добре узгоджуються з результатами моделювань.

Розділ 3

ВПЛИВ КРУЧЕННЯ НА ДИНАМІКУ НАМАГНІЧЕНОСТІ В ТРИВИМІРНИХ ВИКРИВЛЕНИХ ДРОТАХ

> У даному розділі розв'язується задача про вплив кривини та кручення на статичні та динамічні властивості намагніченості у тривимірній спіралі. Аналітично знайдено рівноважні розподіли намагніченості та спектри магнонів для різних типів анізотропії. Встановлено, що для магнетика з легко-тангенціальною анізотропією неможливий строго тангенціальний розподіл, а спектр магнонів зазнає лінійного зсуву внаслідок наявності кручення. В рамках цього розділу також досліджено вплив кривини та кручення на динаміку поперечної доменної стінки під дією спін-поляризованого струму та ефективного поля Рашби. Аналітично знайдено вирази для рівномірного руху доменної стінки. Встановлено, що знак рухливості доменної стінки залежить від знаку добутку топологічного заряду доменної стінки на геометричну хіральність спіралі. Аналітичні розрахунки підтверджено за допомогою чисельних моделювань. Результати, представлені в даному розділі, опубліковано в роботах [20–22].

У пункті 3.1 досліджено вплив геометричних параметрів магнітного дроту на основний стан намагніченості з різними типами анізотропії: підпункт 3.1.1 присвячений випадку з легко-тангенціальною анізотропією, а підпункт 3.1.2 — випадку з поперечною анізотропією. У пункті 3.2 досліджено вплив геометричних параметрів на магноні спектри в магнітній спіралі. Пункт 3.3 присвячений дослідженню динаміки поперечної доменної стінки на магнітній спіралі під впливом спін-поляризованого струму та ефективного поля Рашби. В останньому пункті 3.4 викладено основні результати розділу.

Аналітично отриманні результати, які представленні в розділі, перевірялися за допомогою повномасштабних мікромагнітних моделювань та чисельного розв'язку векторного рівняння Ландау—Ліфшиця—Гільберта (1.14) системи класичних спінів.

3.1 Рівноважні розподіли намагніченості у тривимірній магнітній спіралі

У попередньому розділі ми розглядали плоский магнітний дріт, для якого коефіцієнт кручення дорівнював нулю. В цьому ж розділі ми розглянемо магнітні нанодроти з ненульовим крученням. Найпростішою системою, в якій наявні кривина і кручення, є тривимірна спіраль

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = \mathcal{R}\left[\boldsymbol{e}_x \cos\frac{2\pi s}{s_0} + \boldsymbol{e}_y \sin\frac{2\pi s}{s_0}\right] + \boldsymbol{e}_z \mathcal{C}\mathcal{P}\frac{s}{s_0}, \tag{3.1}$$

де s — натуральний параметр (координата вздовж дроту), $\mathcal{R}$ та $\mathcal{P}$ — геометричні параметри, які визначають радіус та крок спіралі, див. Рис. 3.1, відповідно, величина $\mathcal{C} = \pm 1$ визначає геометричну хіральність спіралі: $\mathcal{C} = +1$ — право-закручена спіраль, $\mathcal{C} = -1$ — ліво-закручена спіраль, $s_0 = \sqrt{\mathcal{P}^2 + 4\pi^2\mathcal{R}^2}$ — довжину одного витка спіралі. Використовуючи геометричні параметри спіралі, можна записати вирази для кривини та кручення тривимірної спіралі

$$\kappa = \frac{4\pi^2\mathcal{R}}{\mathcal{P}^2 + 4\pi^2\mathcal{R}^2}, \quad \tau = \frac{2\pi\mathcal{P}\mathcal{C}}{\mathcal{P}^2 + 4\pi^2\mathcal{R}^2}. \tag{3.2}$$

Варто відмітити, що у тривимірній спіралі кривина та кручення є сталими величинами, які не залежать від координати. Параметр кручення τ визначається через геометричну хіральність спіралі $\mathcal{C}$, отже, може набувати від'ємних значень.

Для подальшого аналізу, зручніше переписати вираз для параметризації спіралі (3.1) через параметри кривини та кручення (3.2)

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2}\left[\boldsymbol{e}_x \cos s\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} + \boldsymbol{e}_y \sin s\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}\right] + \boldsymbol{e}_z \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} s. \tag{3.3}$$

Як і в попередньому розділі, ми зосередимо нашу увагу на магнетику

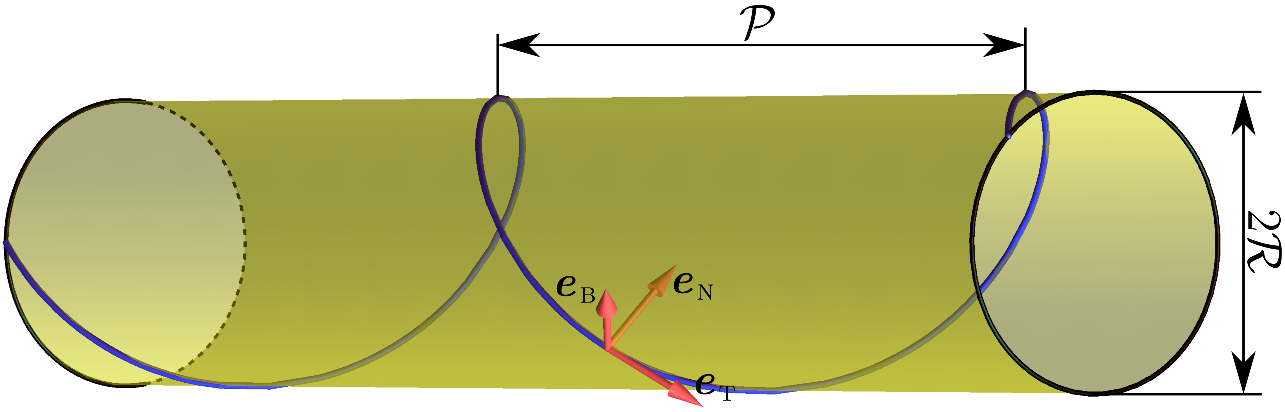


Рис. 3.1: Схематичне зображення тривимірної спіралі радіуса $\mathcal{R}$ та кроком між витками $\mathcal{P}$.

енергія якого складається з двох доданків:

$$\mathcal{E} = \mathcal{S} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\ell_{\mathrm{m}}^2 \mathscr{E}_{ex} + \mathscr{E}_{\mathrm{A}}\right) ds. \tag{3.4}$$

Перший доданок у (3.4) відповідає енергії обмінної взаємодії, другий доданок відповідає енергії легкоосьової анізотропії і може бути записаний як $\mathscr{E}_{\mathrm{A}} = -\left(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{e}_{\mathrm{A}}\right)^2$, де вектор $\boldsymbol{e}_{\mathrm{A}}$ визначає напрямок осі анізотропії. Магнітостатику враховували як наведену ефективну анізотропію лише у випадку з легко-тангенціальною анізотропією, а у випадках із легко-нормальною та -бінормальною анізотропіями ми її не враховували і розглядали системи як жорсткі магнетики.

Використавши криволінійний базис Френе—Серре (2.1), ми можемо параметризувати одиничний вектор намагніченості наступним чином[1]

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{e}_{\mathrm{T}} \sin\Theta \cos\Phi + \boldsymbol{e}_{\mathrm{N}} \sin\Theta \sin\Phi + \boldsymbol{e}_{\mathrm{B}} \cos\Theta, \tag{3.5}$$

де кути Θ та Φ є неперервними функціями координат та часу. В даній параметризації кут Θ відраховують від вектора бінормалі, а кут Φ відраховують від

---

[1] Запропонована пераметризація буде використана лише в пунктах 3.1 та 3.2.

тангенціального напрямку в дотичній площині. Використавши параметризацію (3.5), густина енергії (3.4) може бути записана [59]

$$\begin{aligned} &\mathscr{E}_{\text{ex}} = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial s} - \tau\sin\Phi\right)^2 + \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s} + \kappa\right)\sin\Theta - \tau\cos\Theta\cos\Phi\right]^2, \\ &\mathscr{E}_{\text{A}}^{\text{T}} = -\sin^2\Theta\cos^2\Phi, \quad \mathscr{E}_{\text{A}}^{\text{N}} = -\sin^2\Theta\sin^2\Phi, \quad \mathscr{E}_{\text{A}}^{\text{B}} = -\cos^2\Theta, \end{aligned} \tag{3.6}$$

де враховано наявність кручення, а $\mathscr{E}_{\text{A}}^{\text{T}}$, $\mathscr{E}_{\text{A}}^{\text{N}}$ та $\mathscr{E}_{\text{A}}^{\text{B}}$ визначають енергію анізотропії для легко-тангенціального, легко-нормального та легко-бінормального напрямків осі анізотропії, відповідно.

Рівноважні стани намагніченості можна знайти зі стаціонарного розв'язку рівняння Ландау—Ліфшиця—Гільберта (1.16)

$$\begin{aligned} &\sigma\cos\Phi\left(\varkappa\cos2\Theta - 2\Phi'\sin^2\Theta\right) + \Theta''- \\ &\qquad - \sin\Theta\cos\Theta\left[(\varkappa + \Phi') - \sigma^2\cos^2\Phi\right] - \frac{1}{2}\frac{\partial\mathscr{E}_{\text{A}}}{\partial\Theta} = 0, \\ &\sin\Theta\cos\Theta\left[2\Theta'(\varkappa + \Phi') - \varkappa\sigma\sin\Phi\right] + \\ &\qquad + \sin^2\Theta\left[\Phi'' + 2\sigma\Theta'\cos\Phi - \sigma^2\sin\Phi\cos\Phi\right] - \frac{1}{2}\frac{\partial\mathscr{E}_{\text{A}}}{\partial\Phi} = 0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

де $\mathscr{E}_{\text{A}}$ відповідає густині енергії анізотропії (3.6), $\varkappa = \kappa\ell_m$ — безрозмірна кривина, $\sigma = \tau\ell_m$ — безрозмірне кручення, штрих відповідає похідній по безрозмірній координаті $\xi = s/\ell_{\text{m}}$.

3.1.1 Випадок легко-тангенціальної анізотропії

У даному підпункті ми зосередимо увагу на випадку з лекгко-тангенціальною анізотропією $\mathscr{E}_{\text{A}}^{\text{T}} = -\sin^2\Theta\cos^2\Phi$. З даним виразом для густини енергії анізотропії стаціонарні рівняння (3.7) можна переписати

$$\begin{aligned} &\sigma\cos\Phi\left(\varkappa\cos2\Theta - 2\Phi'\sin^2\Theta\right) + \Theta'' + \cos\Theta\sin\Theta\cos^2\Phi- \\ &\qquad - \sin\Theta\cos\Theta\left[(\varkappa + \Phi') - \sigma^2\cos^2\Phi\right] = 0, \\ &\sin\Theta\cos\Theta\left[2\Theta'(\varkappa + \Phi') - \varkappa\sigma\sin\Phi\right] - \sin^2\Theta\sin\Phi\cos\Phi+ \\ &\qquad + \sin^2\Theta\left[\Phi'' + 2\sigma\Theta'\cos\Phi - \sigma^2\sin\Phi\cos\Phi\right] = 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

У граничному випадку з нульовим крученням (випадок кільця) з системи рівнянь (3.8) можна отримати два рівноважні стани [59]: вихровий та onion стани. Вихровий стан, однорідний в криволінійній системі координат, реалізується для відносно невеликих параметрів кривини ($\varkappa < \varkappa_0 \approx 0.657$):

$$\Theta^{\text{vor}} = \frac{\pi}{2}, \quad \Phi^{\text{vor}} = 0{,}\pi.$$

У випадку для великих параметрів кривини ($\varkappa > \varkappa_0$) в кільці реалізується onion стан, який є періодичним в криволінійній системі координат:

$$\Theta^{\text{on}} = \frac{\pi}{2}, \quad \Phi^{\text{on}} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{am}(x{,}k), \quad x = \frac{2\xi\varkappa}{\pi}\mathrm{K}(k), \tag{3.9}$$

де $\operatorname{am}(x{,}k)$ — амплітуда функції Якобі [121], $\mathrm{K}(k)$ — еліптичний інтеграл першого роду [121], а параметр k визначається з рівняння $2\varkappa k\mathrm{K}(k) = \pi$.

У випадку тривимірної спіралі для малих значень кривини систему рівнянь (3.8) можна розв'язати, використавши позначення $\Theta(s) = \Theta^t$ та $\Phi(s) = \Phi^t$:

$$\operatorname{tg} 2\Theta^t = -\frac{2\mathscr{C}\sigma\varkappa}{1-\varkappa^2+\sigma^2}, \quad \Phi^t = 0{,}\pi,$$

де $\mathscr{C} = \cos\Phi^t = \pm 1$. Магнітні кути можна записати наступним чином[2]

$$\begin{aligned} &\Theta^t = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{2\mathscr{C}\sigma\varkappa}{V_0}, \quad \Phi^t = 0{,}\pi, \\ &V_0 = 1-\varkappa^2+\sigma^2+V_1, \quad V_1 = \sqrt{\left(1-\varkappa^2+\sigma^2\right)^2 + 4\varkappa^2\sigma^2}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Наявність кривини та кручення призводить до відхилення вектора намагніченості від строго тангенціального напрямку. Залежність величини кута Θ^t від параметрів кривини $\varkappa$ та кручення σ зображена на Рис. 3.2(а).

У граничному випадку малих параметрів кривини та кручення ($\varkappa$, $|\sigma| \ll 1$) розподіл намагніченості відповідає майже тангенціальному розподілу, див. Рис. 3.2(а-б):

$$\Theta^t \approx \frac{\pi}{2} - \mathscr{C}\varkappa\sigma, \quad \varkappa,\ |\sigma| \ll 1. \tag{3.11}$$

---

[2] Для параметризації намангніченості у вигляді (2.6) магнітний кут $\theta^t = \operatorname{arctg}\frac{2\mathscr{C}\sigma\varkappa}{V_0}$

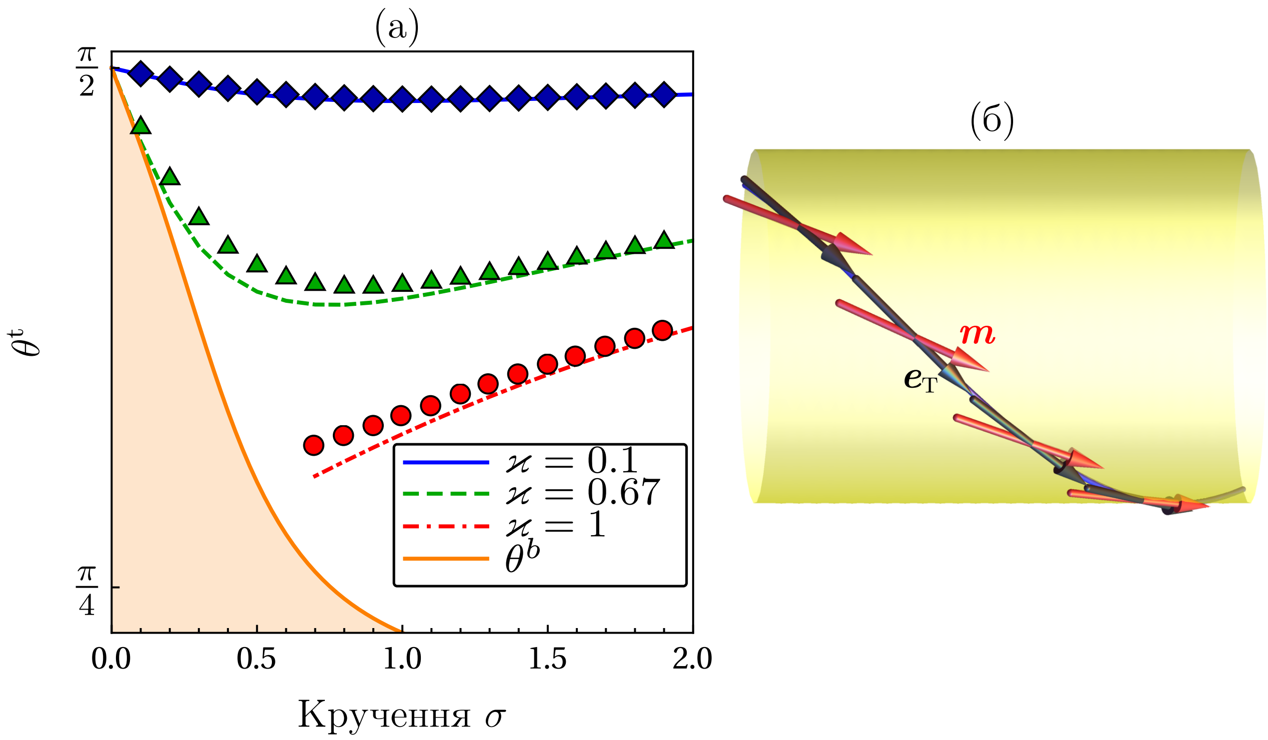


Рис. 3.2: (а) Однорідний розподіл намагніченості у квазітангенційному стані для спіралі з хіральністю $\mathcal{C} = +1$. Лінії відповідають аналітично отриманій формулі (3.10). Маркери відповідають результатам моделювання. Товста суцільна лінія відповідає границі між двома станами. (б) Відхилення вектора намагніченості $\boldsymbol{m}$ (червоні стрілки) від тангенціального напрямку $\boldsymbol{e}_\mathrm{T}$ (чорні стрілки).

Враховуючи вищенаведений результат, отриманий стан ми називаємо *квазітангенціальним*, див. Рис. 3.3.

Навіть у випадку жорсткого магнетика (магнетик з великим коефіцієнтом анізотропії) з рівняння (3.11) випливає, що намагніченість все-одно відхиляється від тангенціального напрямку: величина кута, на який відхиляється намагніченість, залежить від добутку $\mathscr{C}\sigma$. Як було зазначено вище, знак параметра кручення виступає як хіральність спіралі $\mathcal{C}$ (у випадку $\sigma > 0$ ми маємо право-закручену спіраль — $\mathcal{C} = +1$, для $\sigma < 0$ ми маємо ліво-закручену спіраль — $\mathcal{C} = -1$); величину $\mathscr{C}$ можна розглядати, як магнітохіральність. У цьому випадку ми можемо бачити взаємозв'язок між двома різними хіральностями.

Густина енергії магнетика (3.6) для *квазітангенціального* стану може бути записана наступним чином

$$\mathscr{E}^{\mathrm{T}} = -\frac{1-\varkappa^2-\sigma^2+V_1}{2}. \tag{3.12}$$

Аналогічно до випадку з нульовим крученням [59], у магнітних спіралі з великими значеннями кривини та кручення, рівноважний стан повинен бути періодичним в криволінійній системі

$$\Theta^{on} = \frac{\pi}{2}+\vartheta(\chi), \quad \Phi^{on} = -\chi+\varphi(\chi), \quad \chi = \xi\sqrt{\varkappa^2+\sigma^2}, \tag{3.13}$$

де $\vartheta(\chi)$ та $\varphi(\chi)$ — періодичні функції з періодом 2π, χ — азимутальний кут у циліндричній системі координат з віссю $\boldsymbol{e}_{\mathrm{z}}$, спрямованою вздовж спіралі. Розподіл намагніченості, який визначається (3.13) ми будемо називати *onion* станом, як і у випадку з кільцем (3.9).

У випадку відносно великих параметрів кривини ($\varkappa > \varkappa_0$), за допомогою чисельних методів, можна знайти *onion* стан для великого діапазону параметра кручення: див. Рис. 3.3. Для цього в стаціонарне рівняння Ландау—Ліфшиця—Гільберта (3.8), яке можна записати наступним чином

$$\mathfrak{F}(\Theta,\Phi)=0, \quad \mathfrak{H}(\Theta,\Phi)=0 \tag{3.14}$$

з операторами $\mathfrak{F}$ та $\mathfrak{H}$, які визначаються наступним чином

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(\Theta,\Phi) = -\frac{\partial^2\Theta}{\partial\chi^2} - \sigma\cos\Phi\left(\varkappa\cos2\Theta - 2\frac{\partial\Phi}{\partial\chi}\sin^2\Theta\right)+\\ +\sin\Theta\cos\Theta\left[\left(\varkappa+\frac{\partial\Phi}{\partial\chi}\right)^2-(1+\sigma^2)\cos^2\Phi\right],\\ \mathfrak{H}(\Theta,\Phi) = \sin^2\Theta\left[-\frac{\partial^2\Phi}{\partial\chi^2}+(1+\sigma^2)\sin\Phi\cos\Phi-\right.\\ \left.-2\sigma\frac{\partial\Theta}{\partial\chi}\cos\Phi\right]+\sin\Theta\cos\Theta\left[\varkappa\sigma\sin\Phi-2\frac{\partial\Theta}{\partial\chi}\left(\varkappa+\frac{\partial\Phi}{\partial\chi}\right)\right],\end{aligned}$$

підставляємо вирази для *onion* стану (3.13), попередньо розклавши в ряд Фур'є періодичні функції $\vartheta(\chi)$ та $\varphi(\chi)$

$$\begin{aligned} \Theta^{\text{on}} &= \frac{\pi}{2} + \varepsilon \sum_{n=1}^{N} \vartheta_n \cos(2n-1)\chi, \\ \Phi^{\text{on}} &= -\chi + \varepsilon \sum_{n=1}^{N} \varphi_n \sin 2n\chi. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Отриманий результат, розкладений в ряд по малому параметру ε до N-го доданку, дозволяє записати ряд Фур'є для операторів $\mathfrak{F}$ та $\mathfrak{H}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\left(\Theta,\Phi\right) &= \sum_{n=1}^{N} \mathfrak{F}_n\left(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_n;\varphi_1,\ldots,\varphi_n\right) \cos(2n-1)\chi, \\ \mathfrak{H}\left(\Theta,\Phi\right) &= \sum_{n=1}^{N} \mathfrak{H}_n\left(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_n;\varphi_1,\ldots,\varphi_n\right) \sin 2n\chi. \end{aligned} \tag{3.16}$$

У рівняннях (3.16) функції $\mathfrak{F}_n$ та $\mathfrak{H}_n$ — поліноми N-го порядку від величин ϑ_k та φ_k. Остаточно рівняння Ландау—Ліфшиця—Гільберта (3.14) можна записати у вигляді системи нелінійних рівнянь

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_n\left(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_n;\varphi_1,\ldots,\varphi_n\right) &= 0, \\ \mathfrak{H}_n\left(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_n;\varphi_1,\ldots,\varphi_n\right) &= 0, \end{aligned} \qquad n = \overline{1,N},$$

які можна розв'язати чисельно на величини ϑ_k та φ_k.

Для обрахунку енергії *onion* стану в вираз для енергії (3.6) підставляємо магнітні кути у вигляді (3.15) та розкладаємо в ряд по малому параметру ε до $2N$-го доданку та усереднюємо результат по періоду тривимірної спіралі

$$\mathscr{E}^{\text{on}}(\sigma,\varkappa) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \mathscr{E}\mathrm{d}\chi, \quad \mathscr{E} = \mathscr{E}_{\text{ex}} + \mathscr{E}_{\text{an}}^{\text{T}} = \mathscr{E}\left(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_n;\varphi_1,\ldots,\varphi_n\right). \tag{3.17}$$

З порівняння енергій *квазітангенціального* та *onion* станів можна знайти області енергетично вигідних станів для різних параметрів кривини та кручення. На Рис. 3.3 представлено діаграму рівноважних станів, з якої слідує, що в магнітній спіралі реалізуються лише два стани:

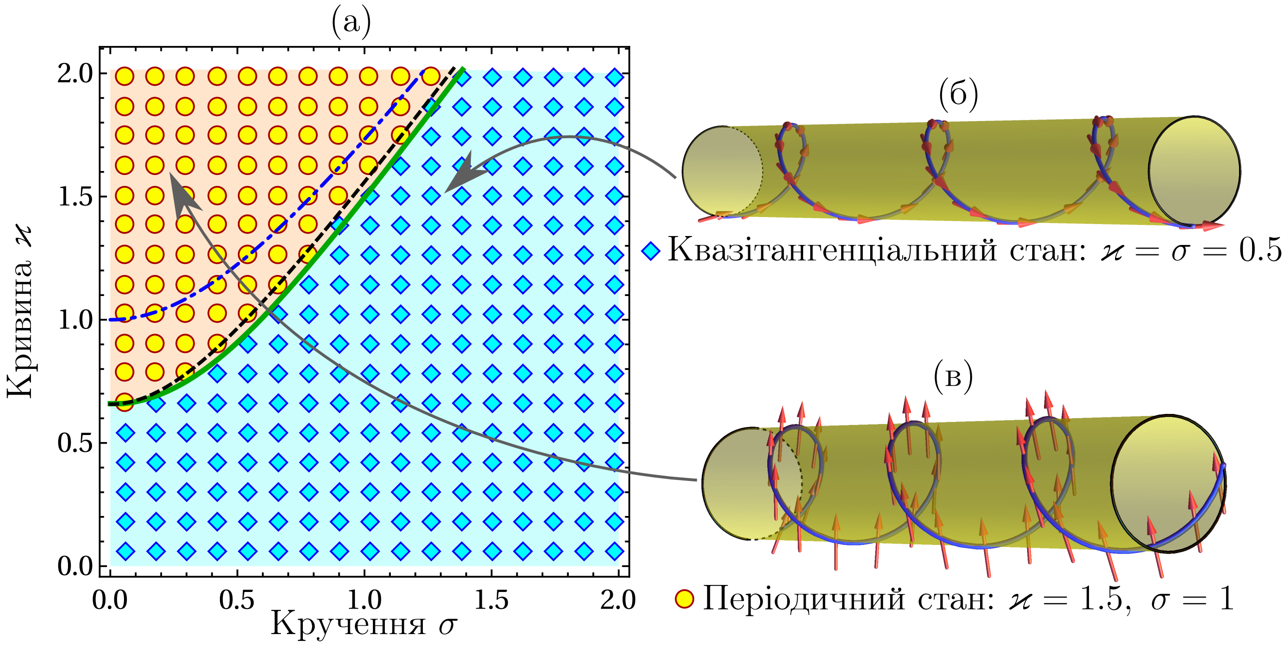


Рис. 3.3: (а) Фазова діаграма рівноважних станів намагніченості у тривимірній спіралі у випадку з легко-тангенціальною анізотропією. Маркери відповідають даним, отриманим з моделювань: ромби відповідаю *квазітангенціальному* стану; диски відповідають *onion* стану. Суцільна зелена лінія відповідає границі між двома станами і побудована з чисельного розв'язку (3.18), чорна штрихована крива відповідає (3.19). Синя штрих-пунктирна лінія визначає границю лінійної нестабільності квазітангенціального стану (3.35). В області між синьою та зеленою кривими *квазітангенціальний* стан метастабільний. (б) та (в) демонструють розподіл намагніченості для *квазітангенціального* та *onion* станів, відповідно.

(i) *квазітангенціальний* стан — енергетично вигідний для малих параметрів кривини $\varkappa < \varkappa_\mathrm{b}(\sigma)$. Однорідний у криволінійній системі координат (розподіл намагніченості близький до тангенціального напрямку $\boldsymbol{e}_\mathrm{T}$, див. Рис. 3.2 та Рис. 3.3(б));

(ii) *onion* стан — енергетично вигідний для великих параметрів кривини $\varkappa > \varkappa_\mathrm{b}(\sigma)$. Періодичний у криволінійній системі координат, див. Рис. 3.3(в).

Границю розмежування двох станів шукаємо з рівності енергій двох різних станів, а саме енергії *квазітангенціального* стану (3.12) та *onion* стану (3.17)

$$\mathscr{E}^{\text{on}}(\sigma,\varkappa) = \mathscr{E}^{\text{T}}(\sigma,\varkappa). \tag{3.18}$$

На Рис. 3.3(а) побудовано криву розмежування рівноважних станів у тривимірній спіралі для $N = 3$.

Для наближеного опису границі станів можна використовувати функцію

$$\varkappa_b^{\text{T}} = \sqrt{\varkappa_0^2 + 2\sigma^2}. \tag{3.19}$$

3.1.2 Випадок поперечної анізотропії

У цьому підпункті ми зосередимо нашу увагу на двох інших напрямках анізотропії: легко-нормальний та легко-бінормальний напрямки анізотропії.

3.1.2.1 Легко-нормальна анізотропія

У випадку з легко-нормальною анізотропією, енергія якої має вигляд $\mathscr{E}_{\text{A}}^{\text{N}} = -\sin^2\Theta\sin^2\Phi$, стаціонарні рівняння (3.7) можна переписати

$$\begin{gathered}
\sigma\cos\Phi\left(\varkappa\cos 2\Theta - 2\Phi'\sin^2\Theta\right) + \Theta'' + \cos\Theta\sin\Theta\sin^2\Phi - \\
- \sin\Theta\cos\Theta\left[(\varkappa + \Phi') - \sigma^2\cos^2\Phi\right] = 0, \\
\sin\Theta\cos\Theta\left[2\Theta'(\varkappa + \Phi') - \varkappa\sigma\sin\Phi\right] + \sin^2\Theta\sin\Phi\cos\Phi + \\
+ \sin^2\Theta\left[\Phi'' + 2\sigma\Theta'\cos\Phi - \sigma^2\sin\Phi\cos\Phi\right] = 0.
\end{gathered} \tag{3.20}$$

Для тривимірної магнітної спіралі стаціонарні рівняння (3.20) мають розв'язок, який відповідає радіальному розподілу намагніченості

$$\Theta^n = \frac{\pi}{2}, \quad \Phi^n = \mathscr{C}\frac{\pi}{2},$$

де $\mathscr{C} = \pm 1$. Намагніченість у цьому стані спрямована вздовж осі анізотропії, див. Рис. 3.4(б), що добре узгоджується з експериментальними результатами [4]. Отриманий стан будемо називати *радіальним* (однорідний у криволінійній системі координат). Варто відмітити, що цей стан енергетично вигідний для малих параметрів кривини та кручення. Енергія магнетика у *радіальному* стані має вигляд

$$\mathscr{E}^{\mathrm{N}} = -1 + \varkappa^2 + \sigma^2.$$

У випадку великих параметрів кривини та кручення, енергетично вигідним станом стає періодичний *onion* стан (у криволінійній системі координат). *Onion* стан, як і у випадку з легко-тангенціальною анізотропією, має структуру, яка описується (3.13), див. Рис. 3.4(в). Для обрахунку *onion* стану ми використовували аналогічний метод, як і у випадку з легко-тангенціальною анізотропією. На Рис. 3.4(а) побудована крива розмежування рівноважних станів у тривимірній спіралі для $N = 3$ з рівняння

$$\mathscr{E}^{\mathrm{on}}(\sigma,\varkappa) = \mathscr{E}^{\mathrm{N}}(\sigma,\varkappa). \tag{3.21}$$

Для наближеного опису границі станів, можна використовувати функцію

$$\varkappa_b^{\mathrm{N}} = \varkappa_0\sqrt{1-\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^2}, \quad \sigma_0 = 0.67. \tag{3.22}$$

3.1.2.2 Легко-бінормальна анізотропія

У випадку з легко-бінормальною анізотропією, енергія якої має вигляд $\mathscr{E}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} = -\cos^2\Theta$, стаціонарні рівняння (3.7) можна переписати

$$\begin{aligned}
&\sigma\cos\Phi\left(\varkappa\cos 2\Theta - 2\Phi'\sin^2\Theta\right) + \Theta'' - \cos\Theta\sin\Theta - \\
&\qquad\qquad - \sin\Theta\cos\Theta\left[(\varkappa+\Phi') - \sigma^2\cos^2\Phi\right] = 0, \\
&\sin\Theta\cos\Theta\left[2\Theta'(\varkappa+\Phi') - \varkappa\sigma\sin\Phi\right] + \\
&\qquad\qquad + \sin^2\Theta\left[\Phi'' + 2\sigma\Theta'\cos\Phi - \sigma^2\sin\Phi\cos\Phi\right] = 0.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Розв'язуючи систему стаціонарних рівнянь (3.23), можна виписати вирази для магнітних кутів, які будуть відповідати однорідному розподілу в криво-

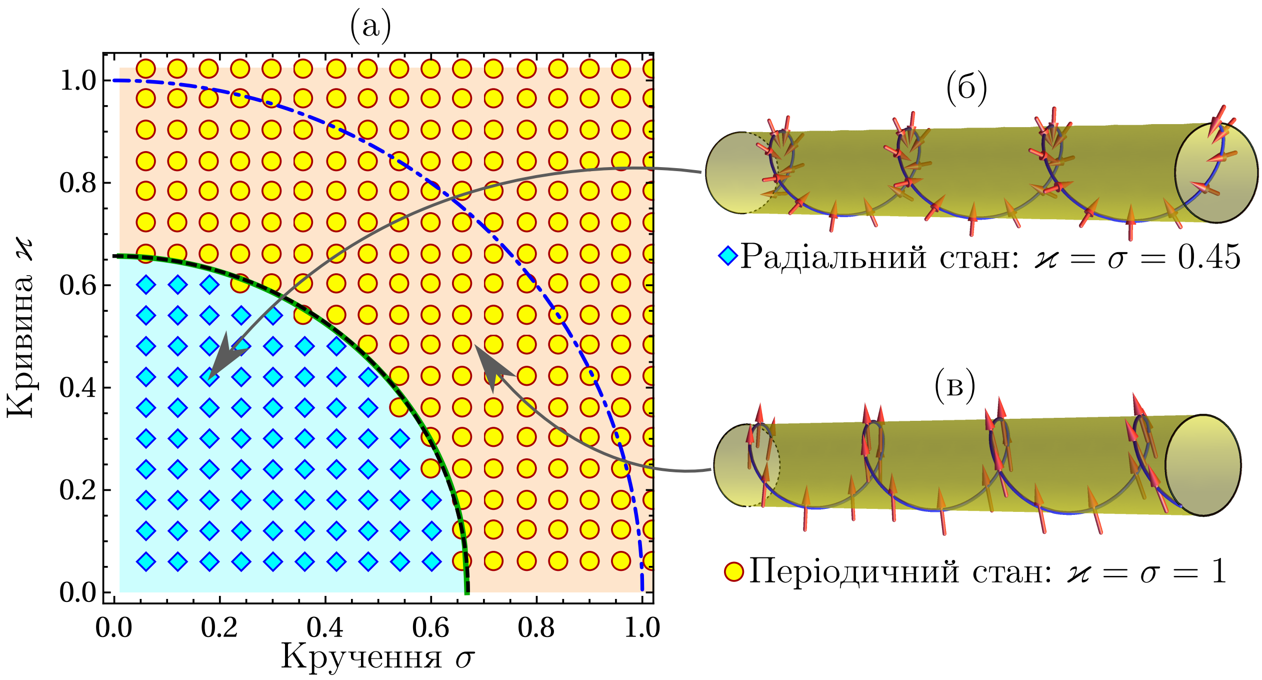


Рис. 3.4: (а) Фазова діаграма рівноважних станів намагніченості у тривимірній спіралі у випадку з легко-нормальною анізотропією. Маркери відповідають даним, отриманим з моделювань: ромби відповідаю *радіальному* стану; диски відповідають *onion* стану. Суцільна зелена лінія відповідає границі між двома станами і побудована з чисельного розв'язку (3.21), чорна штрихована крива відповідає (3.22). Синя штрих-пунктирна лінія визначає границю лінійної нестабільності радіального стану (3.39). В області між синьою та зеленою кривими *радіальний* стан метастабільний. (б) та (в) демонструють розподіл намагніченості для *радіального* та *onion* станів, відповідно.

лінійній системі координат

$$\begin{aligned} &\Theta^b = \frac{\pi}{2}\left[1 + \operatorname{sign}\left(\mathscr{C}\sigma\right)\right] - \operatorname{arctg}\frac{2\mathscr{C}\varkappa\sigma}{V_0^b}, \quad \cos\Phi^b = \mathscr{C} = \pm 1, \\ &V_0^b = 1 + \varkappa^2 - \sigma^2 + V_1^b, \quad V_1^b = \sqrt{\left(1 + \varkappa^2 - \sigma^2\right)^2 + 4\varkappa^2\sigma^2}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

У граничному випадку малих параметрів кривини та кручення ($\varkappa$, $|\sigma| \ll 1$) розподіл намагніченості (3.24) відповідає майже бінормальному розподілу

$$\Theta^b \approx \frac{\pi}{2}\left[1 + \operatorname{sign}\left(\mathscr{C}\sigma\right)\right] - \mathscr{C}\varkappa\sigma, \quad \varkappa,\ |\sigma| \ll 1. \tag{3.25}$$

Розподіл намагніченості у цьому стані близький до напрямку вектора бінормалі, див. Рис. 3.5(б), тому цей стан будемо називати *квазібінормальним* станом.

Враховуючи (3.25), можна стверджувати, що у тривимірній спіралі намагніченість завжди буде відхилятися від бінормального напрямку, навіть, у випадку жорсткого магнетика. Отриманий результат є подібним до квазітангенціального стану (3.11). У квазібінормальному стані (3.25) також можна побачити взаємозв'язок між геометричною хіральністю спіралі $\mathcal{C}$ (знак кручення σ) та магнітною хіральністю $\mathscr{C}$.

Густина енергії магнетика (3.6) для *квазібінормального* стану може бути записана наступним чином

$$\mathscr{E}^{\text{B}} = -\frac{1-\varkappa^2-\sigma^2+V_1^b}{2}.$$

Варто відмітити, що енергію для квазібінормального стану можна отримати з енергії квазітангенціального стану, зробивши заміну кривини на кручення $\varkappa \leftrightarrow \sigma$.

Аналогічно до магнетика з легко-тангенціальною та легко-нормальною анізотропією, у магнетика з легко-бінормальною анізотропією також існує періодичний, у криволінійній системі координат, *onion* стан, розподіл якого визначається виразом (3.13). На Рис. 3.5(в) представлено розподіл намагніченості, який відповідає *onion* стану.

Границю між двома станами шукаємо з порівняння енергій у цих двох станах

$$\mathscr{E}^{\text{on}}(\sigma,\varkappa) = \mathscr{E}^{\text{B}}(\sigma,\varkappa). \tag{3.26}$$

Для наближеного опису границі станів можна використовувати функцію

$$\varkappa_b^{\text{B}} = \sqrt{\frac{\sigma^2-\sigma_0^2}{2}}, \quad \sigma_0 = 0.67. \tag{3.27}$$

На Рис. 3.5(а) представлено фазову діаграму енергетично вигідних рівноважних станів.

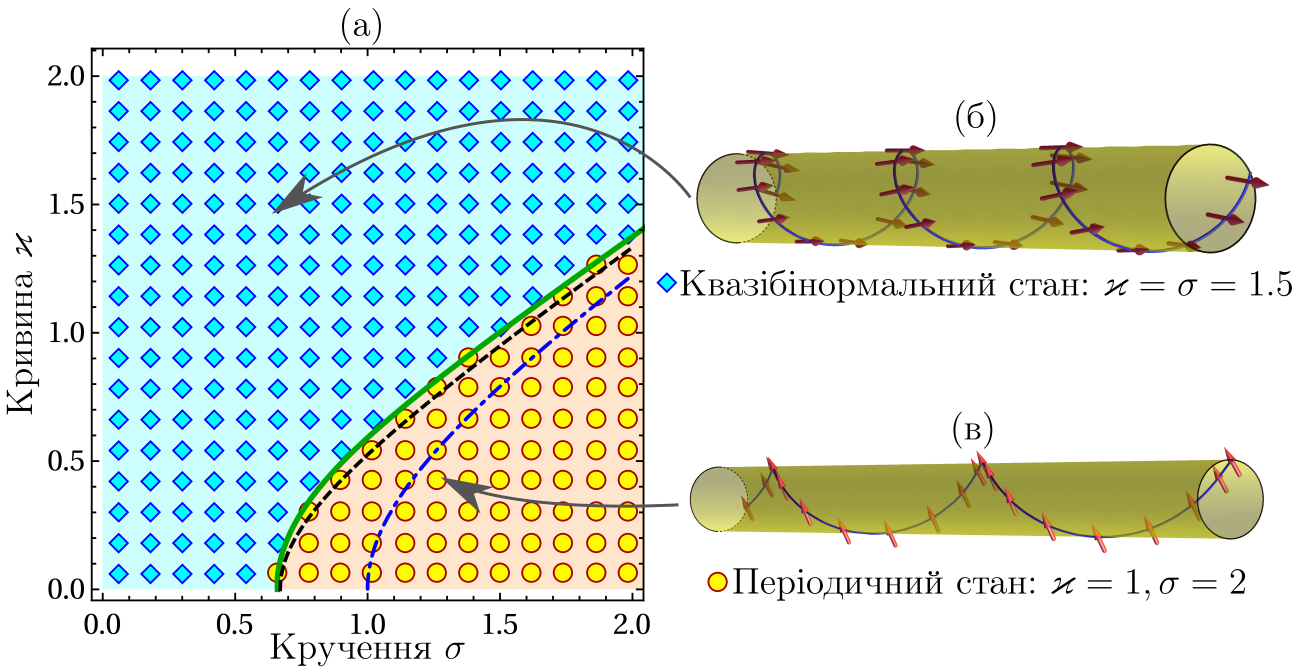


Рис. 3.5: (а) Фазова діаграма рівноважних станів намагніченості у тривимірній спіралі у випадку з легко-бінормальною анізотропією. Маркери відповідають даним, отриманим з моделювань: ромби відповідаю *квазібінормальному* стану; диски відповідають *onion* стану. Суцільна зелена лінія відповідає границі між двома станами і побудована з чисельного розв'язку (3.26), чорна штрихована крива відповідає (3.27). Синя штрих-пунктирна лінія визначає границю лінійної нестабільності *квазібінормального* стану (3.35). В області між синьою та зеленою кривими *квазібінормальний* стан метастабільний. (б) та (в) демонструють розподіл намагніченості для *квазібінормального* та *onion* станів, відповідно.

3.2 Динаміка спінових хвиль у магнітній спіралі

У цьому пункті будемо досліджувати лінійну динаміку намагніченості на фоні однорідного, в криволінійній системі координат, розподілу намагніченості: *квангенціального*, *радіального* та *квазібінормального* розподілу. Для цього ми будемо розглядати рівняння Ландау—Ліфшиця—Гільберта (1.16) за відсутності релаксаційного доданку ($\alpha = 0$).

3.2.1 Порушення симетрії в магнонному спектрі, зумовлене крученням. Роль хіральності

3.2.1.1 Випадок легко-тангенціальної анізотропії

Лінеаризуємо рівняння (1.16) на фоні квазітангенціального стану (3.10), використовуючи підстановку [122]

$$\Theta\left(\xi,t\right)=\Theta^{t}+\vartheta\left(\xi,t\right),\quad \Phi\left(\xi,t\right)=\Phi^{t}+\frac{\varphi\left(\xi,t\right)}{\sin\Theta^{t}},$$

де ϑ та φ малі відхилення від квазітангенціального стану. Виконавши лінеаризацію, ми отримаємо систему рівняння на ϑ та φ

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}&=-\vartheta''+V_1\vartheta-2\mathcal{A}\varphi',\\ -\dot{\vartheta}&=-\varphi''+V_2\varphi+2\mathcal{A}\vartheta'.\end{aligned}\tag{3.28}$$

В рівнянні (3.28) параметр V_1 визначається з (3.10), а V_2 та $\mathcal{A}$ визначаються наступним чином

$$V_2=\frac{1+\sigma^2+\varkappa^2+V_1}{2},\quad \mathcal{A}=-\varkappa\cos\Theta^{t}+\mathscr{C}\sigma\sin\Theta^{t}=-\mathscr{C}\sigma V_2\sqrt{\frac{2}{V_0V_1}}.\tag{3.29}$$

Лінеаризовану систему рівнянь (3.28), для зручності, можна звести до одного рівняння, ввівши комплексну функцію $\varPsi=\vartheta+i\varphi$

$$-i\dot{\varPsi}=\mathcal{H}\varPsi+\mathcal{W}\varPsi^{*}.\tag{3.30}$$

Отримане рівняння (3.30) має форму узагальненого рівняння Шредінґера, яке було запропоноване для обрахунку спектру магнонів на фоні магнітного вихору [123]. Величини $\mathcal{H}$ та $\mathcal{W}$ визначаються через V_1, V_2 та $\mathcal{A}$

$$\mathcal{H}=\left(-i\frac{\partial}{\partial\xi}-\mathcal{A}\right)^2+\mathcal{U},\quad \mathcal{W}=\frac{V_1-V_2}{2},\quad \mathcal{U}=\frac{V_1+V_2}{2}-\mathcal{A}^2.\tag{3.31}$$

З визначення $\mathcal{H}$ та $\mathcal{W}$ у рівняннях (3.31) можна зробити висновок, що параметри V_0, V_1, V_2 відіграють роль скалярних потенціалів, індукованих кривиною та крученням, а параметр $\mathcal{A}$ відіграє роль векторного потенціалу, який спрямований вздовж тангенціального напрямку $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \mathcal{A}\boldsymbol{e}_{\mathrm{T}}$.

Спектри магнонів, які збуджуються у магнітній спіралі, будемо шукати з розв'язків лінійного рівняння (3.30) у формі

$$\Psi = ue^{i\psi} + ve^{-i\psi}, \quad \psi\left(\xi,t\right) = q\xi - \Omega t, \tag{3.32}$$

де $q = k\ell_m$ — нормоване хвильове число, $\Omega = \omega/\Omega_0$ — нормована частота, $\{u,v\} \in \mathbb{R}$ — сталі амплітуди. Хвильовий вектор $\boldsymbol{q}$ спрямований вздовж тангенціального напрямку $\boldsymbol{e}_{\mathrm{T}}$, тобто $\boldsymbol{q}||\boldsymbol{e}_{\mathrm{T}}$. Підставляючи розв'язок (3.32) у лінійне рівняння (3.30), ми отримаємо спектр магнонів

$$\Omega\left(q\right) = 2\mathcal{A}q + \sqrt{\left(q^2 + V_1\right)\left(q^2 + V_2\right)}. \tag{3.33}$$

Отриманий спектр (3.33) відрізняється від спектру магнонів у прямому дроті $\Omega_{\mathrm{str}}(q) = 1 + q^2$, який симетричний відносно осі ординат ($\Omega_{\mathrm{str}}(q) = \Omega_{\mathrm{str}}(-q)$) і має щілину ($\Omega_{\mathrm{str}}(0) \neq 0$), яка пропорційна коефіцієнту анізотропії $\Omega_{\mathrm{str}}^{\mathrm{gap}} \propto \Omega_0 \propto K$. Спектр магнонів у магнітній спіралі асиметричний відносно осі ординат ($\Omega(q) \neq \Omega(-q)$) і має щілину при певному значенні хвильового числа q_0, див. Рис. 3.6. Величина щілини $\Omega(q_0)$ визначається кривиною, крученням та коефіцієнтом анізотропії. Асиметрію у спектрі (3.33) можна пояснити наявністю індукованої кривиною та крученням взаємодії Дялошинського—Морії $\mathscr{E}_{\mathrm{ex}}^{\mathrm{DMI}}$ в енергії обмінної взаємодії (2.5). Аналогічний зсув спектру магнонів спостерігається в системах з природною взаємодією Дялошинського—Морії [102–104].

У граничному випадку малих параметрів кривини та кручення ($\varkappa$, $|\sigma| \ll 1$) спектр магнонів набуває вигляду

$$\Omega \approx \Omega^{\mathrm{gap}} + \left(q - \mathscr{C}\sigma\right)^2, \quad \Omega^{\mathrm{gap}} \approx 1 - \frac{\varkappa^2}{2}. \tag{3.34}$$

З рівняння (3.34) можна побачити, що кривина змінює величину щілини, а кручення визначає ступінь асиметрії спектру, і мінімум частоти знаходиться

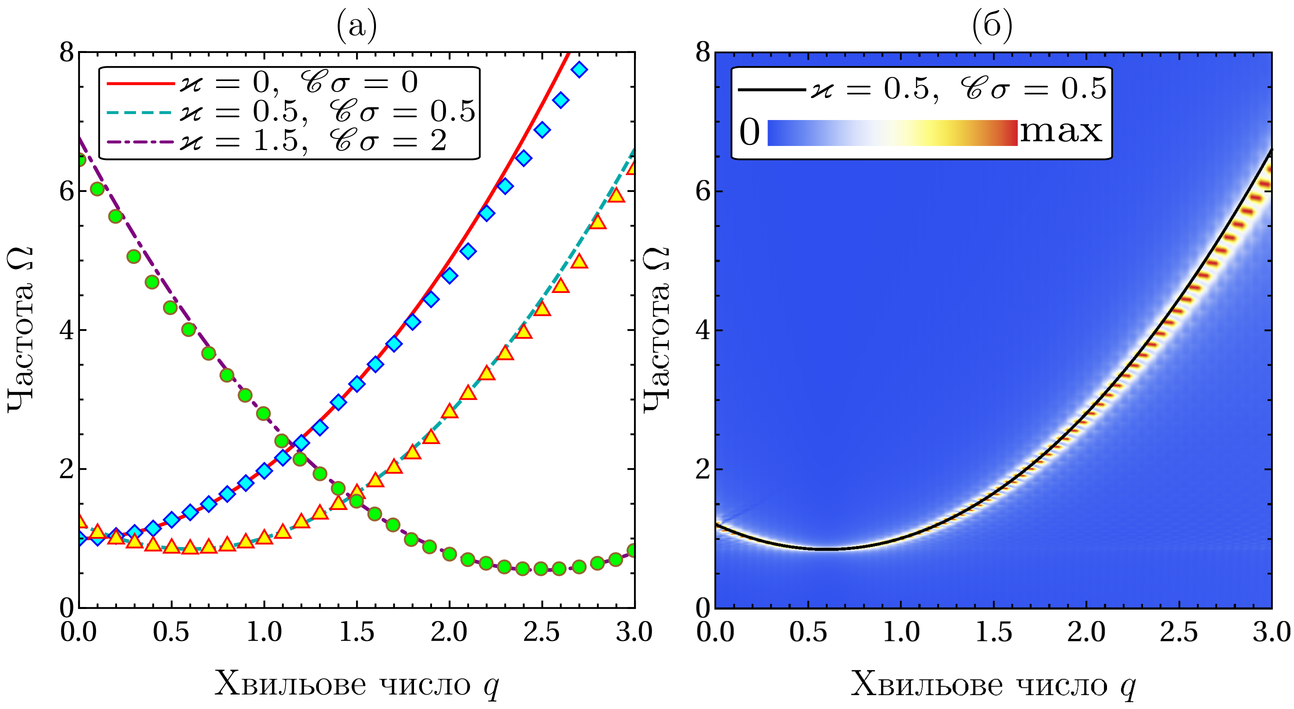


Рис. 3.6: (а) Спектр магнонів у магнітній спіралі з легко-тангенціальною анізотропією. Лінії відповідають аналітично отриманим результатам (3.33), а маркери чисельним розрахункам. (б) Мапа спектру магнонів у магнітній спіралі з кривиною $\varkappa = 0.5$ та крученням $\mathscr{C}\sigma = 0.5$. Лінію побудовано з аналітично отриманого результату (3.33), а кольорова схема побудована з результатів чисельного розрахунку.

в точці $q_0 = \mathscr{C}\sigma$, знак якої визначається добутком геометричної та магнітної хіральностей.

Збільшення кривини та кручення призводить до зменшення щілини у спектрі магнонів, а отже існує гранична крива $\varkappa_c^{\mathrm{T}} = \varkappa_c^{\mathrm{T}}(\sigma)$, при якій щілина зникає $\Omega(q_c) = 0$. Величина хвильового числа, при якій зникає щілина у спектрі можна знайти з виразу

$$q_c = \mathscr{C}\sqrt{\mathcal{A}^2 - \mathcal{U}},$$

а граничну криву $\varkappa_c^{\mathrm{T}} = \varkappa_c^{\mathrm{T}}(\sigma)$ можна знайти як розв'язок рівняння

$$4\mathcal{A}^2\mathcal{U} = \mathcal{W}^2. \tag{3.35}$$

На Рис. 3.3(а) побудовано граничну криву $\varkappa_c^{\text{т}}$, як чисельний розв'язок рівняння (3.35) (штрих-пунктирна крива). В області між кривими розділення фаз $\varkappa_b^{\text{т}}$ та кривою нестабільності $\varkappa_c^{\text{т}}$ квазітангенціальний стан стає метастабільним. Для наближеного опису межі нестабільності квазітангенціального стану можна використовувати функцію

$$\varkappa_c^{\text{т}} = \sqrt{1+2\sigma^2}.$$

3.2.1.2 Випадок легко-нормальної анізотропії

У випадку легко-нормальної анізотропії, спектри магнонів будемо досліджувати на фоні радіального стану. У цьому випадку, лінеаризуємо рівняння (1.16), використовуючи підстановку

$$\Theta\left(\xi,t\right) = \Theta^n + \vartheta\left(\xi,t\right), \quad \Phi\left(\xi,t\right) = \Phi^n + \varphi\left(\xi,t\right),$$

де $\vartheta\left(\xi,t\right)$ та $\varphi\left(\xi,t\right)$ малі відхилення від радіального стану. Як і у випадку з легко-тангенціальною анізотропією можна записати лінеаризоване рівняння на комплекснозначну функцію $\varPsi = \vartheta + i\varphi$

$$-i\dot{\varPsi} = \left(-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \mathcal{U}^n\right)\varPsi + \mathcal{W}^n\varPsi^* \tag{3.36}$$

з потенціалами

$$\mathcal{U}^n = 1 - \frac{\varkappa^2+\sigma^2}{2}, \quad \mathcal{W}^n = \frac{1}{2}\left(\mathscr{C}\sigma - i\varkappa\right)^2.$$

Порівнюючи узагальнене рівняння Шредінґера (3.36) з аналогічним рівнянням (3.30), можна побачити пару відмінностей: по-перше, відсутність ефективного векторного потенціалу $\boldsymbol{\mathcal{A}}$; по-друге, потенціал $\mathcal{W}^n$ став комплекснозначним.

Спектри спінових хвиль будемо досліджувати підстановкою, подібною до (3.32)

$$\varPsi = \varPsi_1 e^{i\psi} + \varPsi_2 e^{-i\psi}, \quad \psi\left(\xi,t\right) = q\xi - \Omega t, \tag{3.37}$$

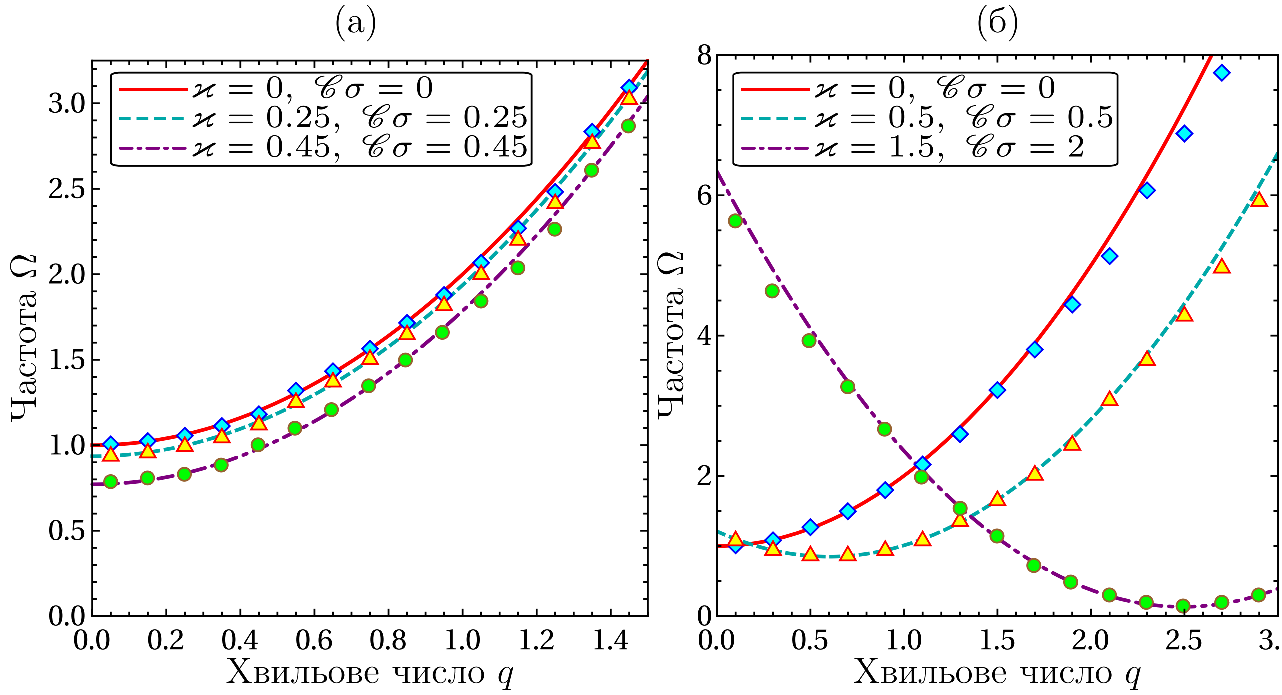


Рис. 3.7: (а),(б) Спектр магнонів у магнітній спіралі з легко-нормальною та легко-бінормальною анізотропією, відповідно. Лінії відповідають аналітично отриманим результатам (3.38), (3.33). Маркери відповідають чисельним розрахункам.

де $\{\Psi_1,\Psi_2\} \in \mathbb{C}$ — сталі комплексні амплітуди. Підставивши розв'язок (3.37) в узагальнене рівняння Шредінґера, можна отримати спектр магнонів для спіралі з легко-нормальною анізотропією

$$\Omega\left(q\right) = \sqrt{\left(1+q^2\right)\left(1+q^2-\varkappa^2-\sigma^2\right)}. \tag{3.38}$$

Отриманий вираз для спектру магнонів (3.38) симетричний відносно осі ординат (див. Рис. 3.7(а)), на відміну від спектру магнонів для спіралі з легко-тангенціальною анізотропією. Симетричність спектру магнонів пов'язана з відсутністю векторного потенціалу $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, який генерує ефективне магнітне поле. Відсутність векторного потенціалу $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, зумовлено тим, що намагніченість з радіальним розподілом не відхиляється від напрямку анізотропії, навідміну від випадків з квазітангенціальним та квазібінормальним розподілами.

Гранична крива $\varkappa_c^{\mathrm{N}}(\sigma)$, за якої зникає щілина у спектрі магнонів на фоні радіального стану, обраховується за виразом

$$\varkappa_c^{\mathrm{N}} = \sqrt{1-\sigma^2}. \tag{3.39}$$

3.2.1.3 Випадок легко-бінормальної анізотропії

Як і у випадку з легко-нормальною та легко-бінормальною анізотропією, спектри магнонів будемо досліджувати на фоні стану, який пов'язаний з напрямком анізотропії — квазібінормального стану (3.24).

Лінеаризовані рівняння руху на фоні квазібінормального стану зводяться до узагальненого рівняння Шредінґера (3.30), із відповідними ефективним скалярним та векторним потенціалами

$$V_2^b = \frac{1+\varkappa^2+\sigma^2+V_1^b}{2}, \quad \mathcal{A}^b = -\varkappa\mathscr{C}V_2^b\sqrt{\frac{V_0^bV_1^b}{2}}.$$

Визначення потенціалів V_1^b та V_2^b наведено у (3.24).

Вираз для спектру магнонів у спіралі на фоні квазібінормального стану структурно ідентичний спектру (3.33), але з векторним потенціалом $\mathcal{A}^b$ та скалярними потенціалами V_0^b, V_1^b, V_2^b. На Рис. 3.7(б) зображено спектри магнонів у магнітній спіралі з різними геометричними параметрами. Грачина крива $\varkappa_c^{\mathrm{B}}(\sigma)$, за якої зникає щілина у спектрі магнонів на фоні квазібінормального стану, знаходиться з рівняння (3.35), але з потенціалами V_0^b, V_1^b, V_2^b та $\mathcal{A}^b$. Для наближеного опису граничної кривої можна використовувати функції

$$\varkappa_c^{\mathrm{B}} = \sqrt{\frac{\sigma^2-1}{2}}.$$

3.2.2 Чисельні моделювання динаміки спінових хвиль

Для перевірки аналітично отриманих результатів у підпункті 3.2 ми чисельними методами моделювали динаміку намагніченості ланцюжка магнітних моментів $\boldsymbol{m}_i$. Геометрія ланцюжка, на якому розташовувались магнітні моменти, визначалася виразом (3.3). Динаміка намагніченості у системі визначалася рівнянням Ландау—Ліфшиця (2.23) для дискретних магнітних моментів. В енергії магнетика ми враховували обмінну взаємодію, анізотропію і взаємодію із зовнішнім магнітним полем. Диполь-дипольна взаємодія враховувалася лише у випадку легко-тангенціальної анізотропії. Врахування диполь-дипольної взаємодії призводить до зсуву константи легко-тангенціальної анізотропії (1.11). Деталі роботи симулятора для дискретних систем описано в пункті 2.3.2.

Для чисельних розрахунків ми досліджували спіралі довжиною $500\Delta s$ і обмінною довжиною $\ell_{\text{ex}} = 3\Delta s$. Під час дискретизації виконувалася вимога на те, щоб довжина одного витка спіралі була довшою за крок дискретизації натурального параметра ($\Delta s \ll 2\pi/\sqrt{\kappa^2+\tau^2}$).

Обрахунок спектру магнонів для кожного типу анізотропії відбувався у два етапи:

(i) На першому етапі магнітна спіраль зрелаксована у просторово-неоднорідному магнітному полі

$$\boldsymbol{b}_i^j = b_0 \boldsymbol{e}_i^{\text{d}} \cos s_i k^j \tag{3.40}$$

з великим коефіцієнтом релаксації ($\alpha = 0.1$) та хвильовим числом $k^j = j/(300\Delta s)$, в якому індекс j пробігає значення $j = \overline{0{,}300}$. Величина $b_0 \ll 1$ у рівнянні (3.40) відповідає амплітуді зовнішнього магнітного поля, $s_i = (i-1)\Delta s$ визначає положення вектора намагніченості $\boldsymbol{m}_i$. Координатно-залежний вектор $\boldsymbol{e}_i^{\text{d}}$ визначає напрямок магнітного поля: $\boldsymbol{e}_i^{\text{d}} = \boldsymbol{e}_{\text{N}}$ для квазітангенціального стану та $\boldsymbol{e}_i^{\text{d}} = \boldsymbol{e}_{\text{T}}$ для радіального та квазібінормального стану.

(ii) На другому етапі ми вимикаємо зовнішнє магнітне поле та моделюємо довготривалу динаміку з природнім коефіцієнтом релаксації ($\alpha = 0.01$), після чого виконуємо просторово-часове перетворення Фур'є для однієї з компонент намагніченості: нормальна компонента для квазітангенціального стану; тангенціальна компонента для радіального та квазібінормального станів. Частота Ω, яка відповідає максимуму Фур'є сигналу, зображена на Рис. 3.6(а) і 3.7 з відповідним хвильовим числом $q^j = \ell_{\mathrm{m}} k^j$. Відсутність додаткових піків у спектрі представлена на мапі спектру магнонів, яка зображена на Рис. 3.6(б).

3.3 Динаміка доменної стінки у магнітній спіралі

У попередніх двох пунктах 3.1 та 3.2 було досліджено рівноважні стани та лінійну динаміку намагніченості, відповідно, а у Розділі 2 досліджено вплив локалізованої кривини на динаміку поперечної доменної стінки. Цей пункт присвячений дослідженню впливу, одночасно, кривини та кручення на динаміку поперечної доменної стінки у магнітній спіралі (3.3).

Динаміку поперечних доменних стінок ми будемо досліджувати у магнетику (3.4) з легко-тангенціальною анізотропією. Для зручності, ми будемо використовувати пераметризацію одиничного вектора намагніченості (2.6), запропоновану у Розділі 2, в якій магнітний кут θ відраховують від тангенціального напрямку, а кут ϕ відраховують від вектора нормалі в нормальній площині. У цій пераметризації густина енергії обмінної взаємодії та анізотропії записується наступним чином

$$\mathscr{E}_{\text{ex}} = \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} + \kappa \cos\phi\right)^2 + \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial s} + \tau\right)\sin\theta - \kappa\cos\theta\sin\phi\right]^2, \quad \mathscr{E}_{\text{A}} = -\cos^2\theta. \tag{3.41}$$

Для опису статичних та динамічних властивостей поперечної доменної стінки у тривимірній спіралі $q - \Phi$ модель Слончевського [111, 112] не підходить. У спіралі магнітний кут ϕ стає координатно-залежним в силу появи індукованої кривиною взаємодії Дзялошинського—Морії. В цьому випадку ми будемо використовувати узагальнену $q-\Phi$ модель [124]

$$\cos\theta = -p\operatorname{th}\frac{\xi-q}{\delta}, \quad \phi = \Phi + a\frac{\xi-q}{\delta}. \tag{3.42}$$

В моделі (3.42) пари змінних $\{q(t),\Phi(t)\}$ і $\{a(t),\delta(t)\}$ є канонічно спряженими величинами. Параметри q і Φ визначають положення та фазу доменної стінки, відповідно; a і δ — визначають асиметрію фази та ширину доменної стінки, відповідно. Як і у випадку моделі Слончевського (2.10), топологічний заряд $p=\pm1$ у моделі (3.42) визначає тип доменної стінки.

У пункті 3.1 було показано, що намагніченість у магнетику з легко-тангенціальною анізотропією завжди відхиляється від строго тангенціального напрямку (3.11), тому запропонована модель (3.42) не відповідає рівноважному стану на великій відстані від положення доменної стінки $|\xi-q|\gg\delta$. Для того, щоб використати модель (3.42), спершу, необхідно повернути криволінійний базис Френе—Серре (2.1) навколо вектора нормалі $\boldsymbol{e}_{\text{N}}$ на кут (3.10). Виконавши поворот навколо вектора нормалі, отриманні поправки будуть квадратичними по параметрах кривини та кручення. Ми ж зацікавленні в спостереженні ефектів, які будуть лінійними за параметрами кривини та кручення[3]. Тому ми обмежуємося випадками з малими параметрами кривини та кручення $(\varkappa,|\sigma|\ll1)$, щоб зберегти структуру доменної стінки.

Підставивши модель (3.42) в енергію (3.41) та провівши інтегрування з точністю до констант і зберігаючи доданки лінійні по кривині та крученню, ми отримаємо наступний вираз для енергії доменної стінки у тривимірній спіралі

$$\frac{\mathcal{E}^{\text{DW}}}{2\mathcal{S}\ell_m} \approx \frac{1}{\delta}\left(1+a^2\right) + \delta + 2\sigma a + p\pi\varkappa\cos\Phi. \tag{3.43}$$

Перші два доданки в енергії (3.43) відповідають конкуренції ізотропного обміну та анізотропії, а останні два доданки відповідають індукованій кривиною

---

[3] Лінійні ефекти пов'язанні з кривиною та крученням будуть розглянуті в підпунктах 3.3.1 і 3.3.2.1, а ефекти квадратичні за параметрами кривини та кручення будуть розглянуті у підпункті 3.3.2.2.

та крученням взаємодії Дзялошинського—Морії. Доданки пов'язанні з ефективною анізотропією не враховані в силу квадратичності останніх відносно кривини та кручення.

Мінімізуючи енергію доменної стінки за її параметрами, отримаємо наступні вирази для рівноважних значень доменної стінки

$$\delta_0 \approx 1, \quad a_0 = -\sigma\delta_0, \quad \cos\Phi_0 = -p. \tag{3.44}$$

Аналогічно до плоского викривленого дроту (2.12), кривина фіксує орієнтацію доменної стінки вздовж вектора нормалі, а топологічний заряд визначає її напрямок: доменна стінка типу *head-to-head* спрямована на зовні від магнітної спіралі, а стінка типу *tail-to-tail* завжди спрямована у центр спіралі у стаціонарному стані, див. Рис. 3.8. Фіксація фази доменної стінки відбувається внаслідок наявності останнього доданку в енергії (3.43). Однак, на відміну від випадку із плоским магнетиком, у тривимірній спіралі виникає індукований крученням параметр асиметрії фази a_0. Подібна асиметрія фази спостерігалася у прямих системах з природною взаємодією Дзялошинського—Морії [124]. Варто також відмітити, що внаслідок сталих параметрів кривини та кручення, в магнітній спіралі не існує вибраного положення для доменної стінки.

На Рис. 3.8 представлене порівняння результатів мікромагнітних моделювань та моделі (3.42) з рівноважними параметрами доменної стінки (3.44). Ми дослідили чотири можливі комбінації топологічних зарядів доменної стінки $p = \pm 1$ та геометричних хіральностей $\mathcal{C} = \pm 1$. Як видно з Рис. 3.8, профіль тангенціальної $m_\text{T} = \boldsymbol{e}_\text{T} \cdot \boldsymbol{m}$ та нормальної $m_\text{N} = \boldsymbol{e}_\text{N} \cdot \boldsymbol{m}$ компонент намагніченості визначається топологічним зарядом доменної стінки p, а профіль бінормальної компоненти $m_\text{B} = \boldsymbol{e}_\text{B} \cdot \boldsymbol{m}$ визначається знаком добутку топологічного заряду доменної стінки на геометричну хіральність спіралі — $p\mathcal{C}$. Малі параметри кривини та кручення мають нехтовно-малий вплив на профілі тангенціальної та нормальної компонент намагніченості, однак, амплітуда

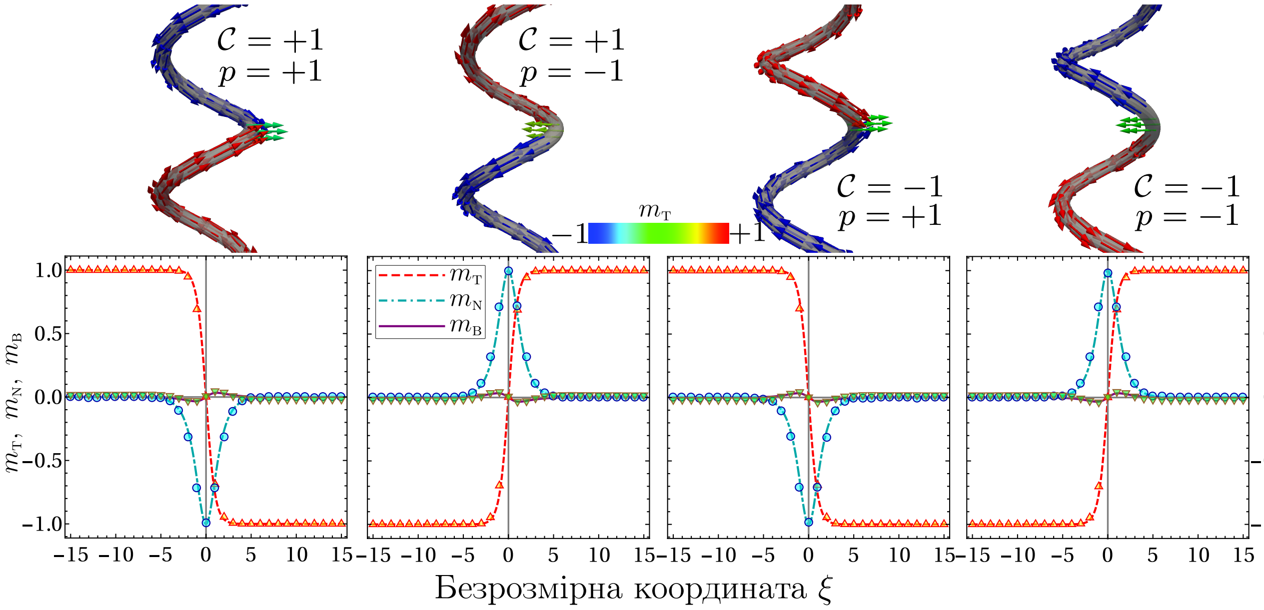


Рис. 3.8: Стаціонарні стани поперечної доменної стінки у магнітній спіралі. Верхній ряд демонструє розподіл намагніченості, отриманий з мікромагнітних моделювань для магнітом'якої спіралі з радіусом поперечного перерізу $R = 5$ нм та довжиною $L = 6$ мкм (на рисунках зображена область з доменною стінкою). В моделюваннях використовувалися спіралі з радіусом $\mathcal{R} = 30$ нм та кроком між витками $\mathcal{P} = 93$ нм, що відповідає кривині $\varkappa = 0.2$ та крученню $|\sigma| = 0.1$. Нижній ряд демонструє порівняння моделі (лінії) та результатів мікромагнітних моделювань (маркери).

бінормальної компоненти лінійна відносно параметра кручення (3.44).

3.3.1 Ефекти кривини та кручення в динаміці доменної стінки під впливом спін-поляризованого струму

Внаслідок нетривіальної геометрії, контрольовано рухати доменні стінки у тривимірній спіралі за допомогою зовнішнього магнітного поля дуже складно. Один з методів маніпулювання положенням доменної стінки у спіралі полягає у використанні спін-орбітальних крутильних моментів [125], які виникають внаслідок ефекту Рашби [126, 127] (цей механізм буде розглянуто в підпункті 3.3.2.2). Інший метод полягає у використанні спін-поляризованого струму, який протікає безпосередньо через магнетик. Випадок з використанням спін-поляризованого струму буде розглянуто в цьому пункті. В системі із спін-поляризованим струмом рівняння Ландау—Ліфшиця—Гільберта (1.15) модифікуються доданками Базалія—Жанга—Лі [128, 129]

$$\dot{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{m} \times \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \boldsymbol{m}} + \alpha\, \boldsymbol{m} \times \dot{\boldsymbol{m}} + \boldsymbol{m} \times \left[\boldsymbol{m} \times (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{m}\right] + \beta\, \boldsymbol{m} \times (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{m}, \quad (3.45)$$

де $\mathcal{E} = E/K$ — нормована енергія, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{j} P g \mu_{\text{B}} / \left(2\Omega_0 |e| M_s\right)$ нормований струм, який спрямований вздовж тангенціального напрямку $\boldsymbol{u} || \boldsymbol{e}_{\text{T}}$, $\boldsymbol{j}$ — густина спін-поляризованого струму, P — ступінь поляризації електронів, g — фактор Ланде, μ_{B} — магнетон Бора, e — заряд електронів, β — параметр неадіабатичності. Крапки відповідають похідним по безрозмірному часу $\tilde{t} = t \gamma_0 K / M_s$.

Найпростіший запис рівняння (3.45) без врахування неадіабатичності вперше було отримано Базалієм та ін. [128]. Доданок із врахуванням неадіабатичності було запропоновано Жангом та Лі. [129].

Доданки в рівнянні (3.45), пов'язані з передачею спінового крутильного моменту, містять просторові похідні. Використовуючи формули Френе—Серре (2.2), просторові похідні в одновимірній системі записуються наступним чином

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{m} = u \boldsymbol{m}' = u \big[&(m_{\text{T}}' - m_{\text{N}} \varkappa)\, \boldsymbol{e}_{\text{T}} + \\ &+ (m_{\text{N}}' + m_{\text{T}} \varkappa - m_{\text{B}} \sigma)\, \boldsymbol{e}_{\text{N}} + (m_{\text{B}}' - m_{\text{N}} \sigma)\, \boldsymbol{e}_{\text{B}} \big]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Використовуючи кутову пераметризацію одиничного вектора намагніченості (2.6) та запис просторової похідної (3.46), рівняння руху намагніченості (3.45) в кутових змінних запишеться

$$
\begin{aligned}
-\sin\theta\left(\dot{\theta}+u\theta'\right) &= \frac{\delta\mathcal{E}}{\delta\phi}+u\varkappa\sin\theta\cos\phi+\alpha\sin^2\theta\dot{\phi}+\\
&\qquad +u\beta\sin\theta\left[(\phi'+\sigma)\sin\theta-\varkappa\cos\theta\sin\phi\right],\\
\sin\theta\left(\dot{\phi}+u\phi'\right) &= \frac{\delta\mathcal{E}}{\delta\theta}+u\left(\varkappa\cos\theta\sin\phi-\sigma\sin\theta\right)+\alpha\dot{\theta}+\\
&\qquad +u\beta\left(\theta'+\varkappa\cos\phi\right).
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

Як було показано у Розділі 1, рівняння Ландау—Ліфшиця—Гільберта (1.16) можна отримати з рівнянь Ейлера—Лагранжа—Релея (1.17). Коли ми маємо модифіковані рівняння (3.47), то функція Лагнранжа набуває наступного вигляду

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\mathcal{S}\ell_m\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi\sin\theta(\dot{\theta}+u\theta')\mathrm{d}\xi-\mathcal{E}-\mathcal{E}^u,\\
\mathcal{E}^u &= u\mathcal{S}\ell_m\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\varkappa\sin\theta\sin\phi+\sigma\cos\theta\right)\mathrm{d}\xi,
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

де в гіротропному доданку функції Лагранжа (3.48) була враховано наявність спін-поляризованого струму [114], а при врахуванні кривини та кручення, виникає додаткова поправка до енергії $\mathcal{E}^u$. А дисипативна функція (1.19) масштабується неадіабатичним доданком $\mathcal{F}\to\mathcal{F}+\mathcal{F}^u$

$$
\mathcal{F}^u = u\beta\mathcal{S}\ell_m\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\dot{\theta}\left(\theta'+\varkappa\cos\phi\right)+\sin\theta\dot{\phi}\left[(\phi'+\sigma)\sin\theta-\varkappa\cos\theta\sin\phi\right]\right]\mathrm{d}\xi,
$$

який пропорційний параметру неадіабатичності.

Використовуючи модель (3.42) та всі поправки у функції Ланранжа та дисипативній функції, можна отримати ефективні вирази відповідних функцій, які можна записати наступним чином

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{L}^{\text{DW}}}{2\mathcal{S}\ell_m} &\approx p\left[\Phi\left(\dot{q}-u\right)+c\dot{\delta}a\right]-\left[\frac{1}{\delta}\left(1+a^2\right)+\delta+2\sigma a+p\pi\varkappa\cos\Phi\right]-\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad-\frac{u}{2}\left(\pi\delta\varkappa\sin\Phi+2p\sigma q\right),\\
\frac{\mathcal{F}^{\text{DW}}}{2\mathcal{S}\ell_m} &\approx \frac{\alpha}{2\delta}\left[\dot{q}^2+\left(\dot{q}a-\dot{\Phi}\delta\right)^2+c\left[\dot{\delta}^2+\left(\dot{a}\delta-a\dot{\delta}\right)^2\right]\right]-\\
&\qquad\qquad-u\beta\left[\frac{\dot{q}}{\delta}-\dot{\Phi}\left(a+\delta\sigma\right)+p\frac{\pi}{2}\varkappa\left(\dot{q}\cos\Phi-\dot{a}\delta\sin\Phi\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Енергія доменної стінки $\mathcal{E}^{\text{DW}}$ у ефективній функції Лагранжа визначається з виразу (3.43), а константа $c=\pi^2/12$.

Ефективні функція Лагранжа та дисипативна функція (3.49) продукують наступні рівняння руху для колективних змінних $\{q,\Phi,a,\delta\}$ (розрахунок проведено В. П. Кравчуком і наводиться в даній роботі з ілюстративною метою):

$$(p+\alpha a)\dot{q}-\alpha\delta\dot{\Phi}=pu\left(1+p\frac{\pi}{2}\varkappa\delta\cos\Phi\right)-p\pi\varkappa\sin\Phi+u\beta(a+\delta\sigma), \tag{3.50a}$$

$$\alpha\frac{\dot{q}}{\delta}+(p-\alpha a)\dot{\Phi}=\frac{u\beta}{\delta}\left(1+p\frac{\pi}{2}\varkappa\delta\cos\Phi\right)-pu\sigma, \tag{3.50b}$$

$$c\left[(p+\alpha a)\frac{\dot{\delta}}{\delta}-\alpha\dot{a}\right]=\frac{2}{\delta^2}\left(a+\delta\sigma\right)+p\frac{\pi}{2}u\beta\varkappa\sin\Phi, \tag{3.50c}$$

$$c\left[\alpha\frac{\dot{\delta}}{\delta}+(p-\alpha a)\dot{a}\right]=\frac{1}{\delta^2}(1+a^2)-1-\frac{\pi}{2}u\varkappa\sin\Phi. \tag{3.50d}$$

За відсутності струму в системі рівнянь (3.50) можна виділити два часові масштаби. Динаміка пари змінних $\{a,\delta\}$ характеризується частотою $\omega=\dfrac{2}{c}$, а динаміка пари змінних $\{q,\Phi\}$ — $\Omega=pu\left(\beta-\beta^\star-\alpha\right)/\delta_0$, де $\beta^\star=p\delta_0\sigma$ — індукований крученням ефективний параметр неадіабатичності, див. Додаток A. Умова на розділення часових масштабів $\omega\gg|\Omega|$ записується наступним чином

$$u|\beta-\beta^\star-\alpha|\ll\frac{2}{c}. \tag{3.51}$$

Вираз (3.51) справедливий в силу малості параметрів релаксації $\alpha \ll 1$, неадіабатичності $\beta \ll 1$ та ефективного параметра неадіабатичності $\beta^\star \ll 1$. У цьому випадку пара змінних $\{a,\delta\}$ називається швидкими, тобто ті, які швидко прямують до рівноважних значень, в порівнянні з повільними $\{q,\Phi\}$. При цьому динаміку пари змінних $\{q,\Phi\}$ можна описати системою двох рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{q} - \alpha p \delta_0 \dot{\Phi} &= u - \pi \varkappa \sin \Phi, \\ \alpha p \dot{q} + \delta_0 \dot{\Phi} &= u p \left(\beta - \beta^\star\right), \end{aligned} \tag{3.52}$$

де використано припущення про те, що параметри релаксації та неадіабатичності малі: $\alpha^2 \ll 1$, $\beta^2 \ll 1$, $\alpha a \ll 1$. Вирази для швидких змінних визначаються через повільні наступним чином:

$$\begin{aligned} \delta\left(t\right) &= \delta\left[\Phi\left(t\right)\right] \approx \frac{1}{\sqrt{1 + u\frac{\pi}{2}\varkappa \sin \Phi\left(t\right)}}, \\ a\left(t\right) &= a\left[\Phi\left(t\right)\right] \approx -\delta\sigma - u\frac{\pi}{4}p\beta\varkappa \sin \Phi\left(t\right). \end{aligned}$$

Система рівняння (3.52) має критичне значення струму u_{W}

$$u_{\mathrm{W}} = \frac{\pi\varkappa}{\alpha - \beta + \beta^\star}, \tag{3.53}$$

яке розділяє два типи руху доменної стінки у тривимірній спіралі. Величина струму u_{W} називається Уокерівською границею [100, 117, 130].

У випадку, коли величина струму менша за Уокерівський струм ($u < |u_{\mathrm{W}}|$), ми маємо рівномірний рух, див. Рис. 3.9, і система рівнянь (3.52) має розв'язок у вигляді біжучої хвилі $q = vt$ та $\Phi = \text{const}$. Швидкість руху доменної стінки та її фаза визначається наступним чином

$$v \approx u\frac{\beta - \beta^\star}{\alpha}, \qquad \sin \Phi = \frac{u}{u_{\mathrm{W}}}.$$

У випадку, коли величина струму більша за Уокерівський струм ($u > |u_{\mathrm{W}}|$), доменна стінка починає рухатися прецесійно, див. Рис. 3.10. Частоту

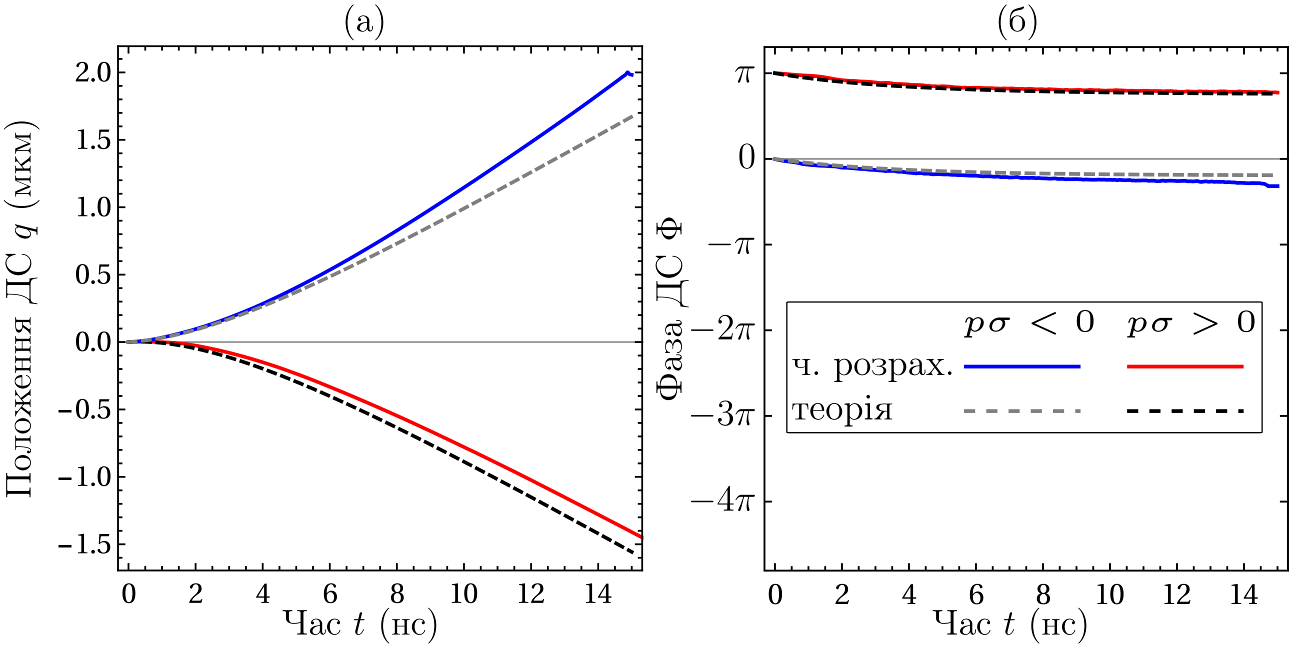


Рис. 3.9: Рівномірний рух доменної стінки у магнітній спіралі. (а),(б) Положення та фаза доменної стінки у магнітній спіралі, відповідно, під дією спін-поляризованого струму $u = 0.01 < |u_{\rm W}|$. Штриховані лінії відповідають аналітично отриманим результатам (3.52), а суцільні лінії відповідають результатам мікромагнітних моделювань. У моделюваннях використовувалися спіралі з кривиною $\varkappa = 0.2$ та крученням $|\sigma| = 0.1$ (відповідає ефективному коефіцієнту неадіабатичності $|\beta^\star| = 0.1$); параметр релаксації Гільберта $\alpha = 0.01$, параметр неадіабатичності ($\beta = 0$).

коливань прецесійного руху можна знайти з рівняння, виключивши $\dot{q}$ з системи рівнянь (3.52)

$$\dot{\Phi} \approx \Omega \left(1 - \frac{u_{\rm W}}{u} \sin\Phi\right), \quad \alpha \ll 1.$$

Проінтегрувавши отримане рівняння, можна отримати період коливань фази доменної стінки Φ

$$T_{\rm prec} = \frac{2\pi}{\Omega} \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{u_{\rm W}^2}{u^2}}},$$

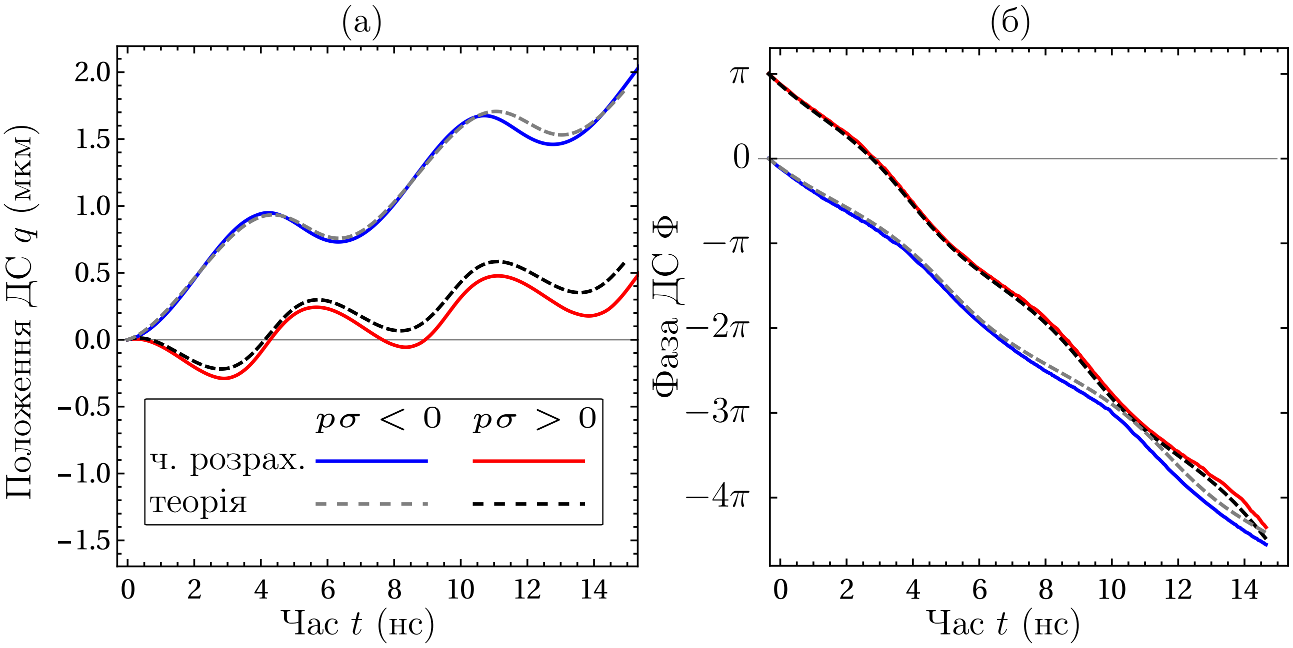


Рис. 3.10: Прецесійний рух доменної стінки у магнітній спіралі. (а),(б) Положення та фаза доменної стінки у магнітній спіралі, відповідно, під дією спін-поляризованого струму $u = 0.045 > |u_\mathrm{w}|$. Штриховані лінії відповідають аналітично отриманим результатам (3.52), а суцільні лінії відповідають результатам мікромагнітних моделювань. У моделюваннях використовувалися спіралі з кривиною $\varkappa = 0.2$ та крученням $|\sigma| = 0.1$ (відповідає ефективному коефіцієнту неадіабатичності $|\beta^\star| = 0.1$); параметр релаксації Гільберта $\alpha = 0.01$, параметр неадіабатичності ($\beta = 0$).

який відповідає частоті

$$\Omega_\mathrm{prec} = \Omega\sqrt{1 - \frac{u_\mathrm{w}^2}{u^2}},$$

що характерно для біфуркації типу сідло-вузол. Під час прецесійного руху, доменну стінку можна охарактеризувати усередненою за часом швидкістю $\overline{v}$. На Рис. 3.11 представлено графік залежності середньої швидкості руху доменної стінки від величини спін-поляризованого струму $\overline{v}(u)$. З результатів представлених на Рис. 3.11 можна зробити висновок про те, що доменна стінка завжди рухається в напрямку струму ($\overline{v} > 0$) у випадку $p\sigma < 0$, однак, для систем з $p\sigma > 0$ доменна стінка може рухатися в протилежний бік. В

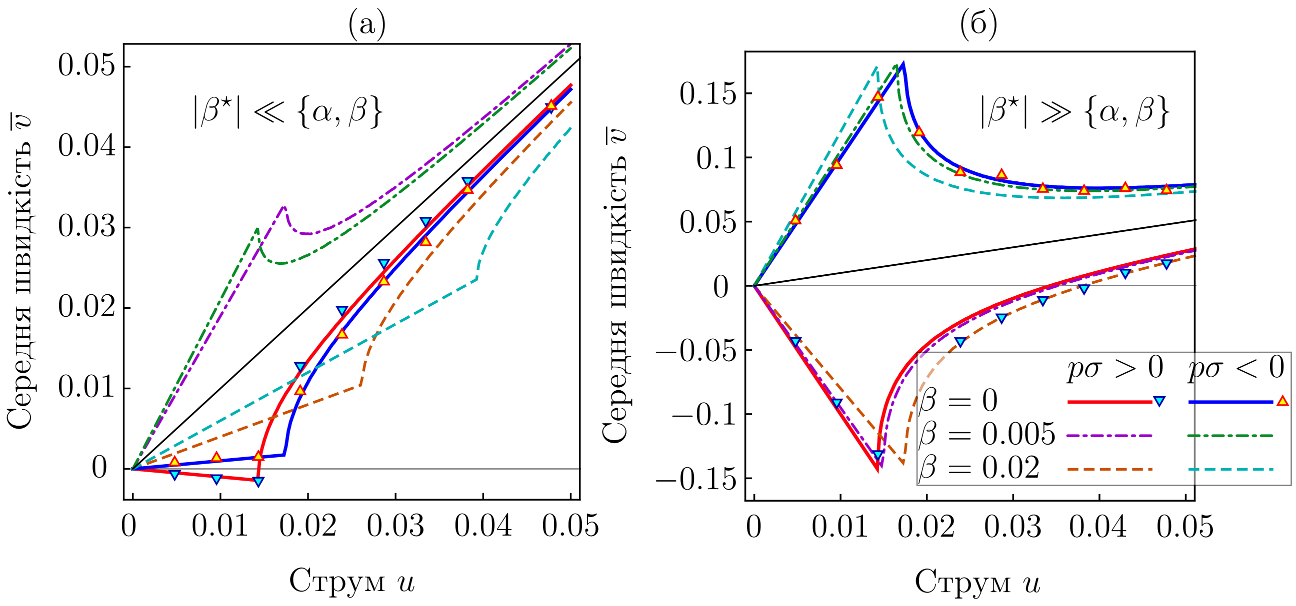


Рис. 3.11: Залежність середньої швидкості руху доменної стінки від величини спін-поляризованого струму. Лінії відповідають аналітично отриманому результату (3.52), а маркери відповідають результатам мікромагнітних моделювань. Параметри моделювань: (а) кривина $\varkappa = 0.02$, кручення $|\sigma| = 0.001$ (відповідає ефективному коефіцієнту неадіабатичності $|\beta^\star| = 0.001$); (б) кривина $\varkappa = 0.2$, кручення $|\sigma| = 0.1$ (відповідає ефективному коефіцієнту неадіабатичності $|\beta^\star| = 0.1$). В усіх моделюваннях релаксаційний параметр Гільберта $\alpha = 0.01$. Суцільна тонка лінія відповідає випадку прямого дроту $\overline{v} \approx u$.

останньому випадку є декілька особливостей:

(i) якщо $\beta \ll |\beta^\star|$, то швидкість рівномірного руху ($u < u_{\text{w}}$) доменної стінки завжди менша нуля $\overline{v} < 0$;

(ii) у випадку прецесійного руху ($u > u_{\text{w}}$) завжди існує значення струму $u_0 > u_{\text{w}}$, за якого середня швидкість руху доменної стінки дорівнює нулю $\overline{v}(u_0) = 0$: доменна стінка осцилює навколо початкового положення.

Варто також виділити ефекти пов'язані з впливом кривини та кручення на рух доменної стінки:

(i) кривина призводить до появи Уокерівсьої границі;

(ii) напрямок руху доменної стінки визначається добутком $p\sigma$;

(iii) кручення призводить до зсуву матеріального параметра неадіабатичності $\beta \to \beta - \beta^{\star}$, що може призвести до від'ємного ефективного параметру неадіабатичності і, як наслідок, до від'ємної рухливості доменної стінки, див. Рис. 3.11(б).

3.3.2 Чисельні моделювання динаміки доменної стінки

Для перевірки аналітично отриманих результатів ми провели серію мікромагнітних моделювань, використовуючи загальнодоступний пакет для мікромагнітних моделювань Nmag [119]. У моделюваннях ми розглядали магнітом'які матеріали. В енергії магнетика ми враховували лише обміну та магнітостатичну взаємодії. Для мікромагнітних моделювань використовувались матеріальні параметри магнітом'якого матеріалу — пермалою [120]. Анізотропія та температурні ефекти не враховувалися.

Геометрія тривимірної спіралі визначалася формулами (2.3) та (3.3). В усіх моделюваннях використовувалися спіралі з радіусом поперечного перерізу $R = 5$ нм та довжиною $L = 6$ мкм. Геометрія зразка розбивался на неперіодичні тетраедри з довжиною ребра 2.75 нм.

3.3.2.1 Механізм Базалія—Жанга—Лі

У випадку руху доменної стінки за механізмом Базалія—Жанга—Лі, ми чисельно моделювали рівняння Ландау—Ліфшиця—Гільберта з доданками Базалія—Жанга—Лі. Чисельний експеримент проходив у два етапи:

(i) релаксація доменних стінок з різними топологічними зарядами на тривимірних спіралях, див. Рис. 3.8, з великим коефіцієнтом релаксації

Гільберта ($\alpha = 0.1$);

(ii) моделювання динаміки доменної стінки під дією спін-поляризованого струму $\boldsymbol{u} = u\boldsymbol{e}_{\mathrm{T}}$ з природнім коефіцієнтом релаксації Гільберта ($\alpha = 0.01$).

Визначення положення доменної стінки та її фази також відбувалося у два етапи:

(i) знаходження компонент намагніченості в базисі Френе—Серре $m_{\mathrm{T}} = \boldsymbol{e}_{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{m}$, $m_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{e}_{\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{m}$ і $m_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{e}_{\mathrm{B}} \cdot \boldsymbol{m}$ з результатів моделювань;

(ii) аналіз отриманих компонент намагніченості за допомогою моделі (3.42). Положення доменної стінки визначалося як параметр функції $m_{\mathrm{T}}(\xi) = -p\mathrm{th}\dfrac{\xi - q}{\delta}$, а фаза визначалася з рівняння $\mathrm{tg}\Phi = \dfrac{m_{\mathrm{B}}(q)}{m_{\mathrm{N}}(q)}$.

Під час прецесійного руху час моделювання підбирався таким чином, щоб бути більшим за три періоди коливань $T_{\mathrm{sim}} > 3T$. У цьому режимі середня швидкість обраховувалася наступним чином

$$\overline{v} = \frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} \dot{q}(t)\mathrm{d}t,$$

де залежність $\dot{q}(t)$ отримано з моделювань, а час $t_0 \approx T$ вибраний таким чином, щоб уникнути небажаних ефектів пов'язаних з ударним механізмом появи струму.

Узагальнені результати по динаміці доменної стінки під дією спін-поляризованого струму представлено на Рис. 3.9, 3.10 та 3.11.

3.3.2.2 Механізм Рашби

У пункті 3.3.1 вже зазначалося, що одним із механізмів руху доменної стінки у тривимірній спіралі може базуватися на використанні спін-орбітальних

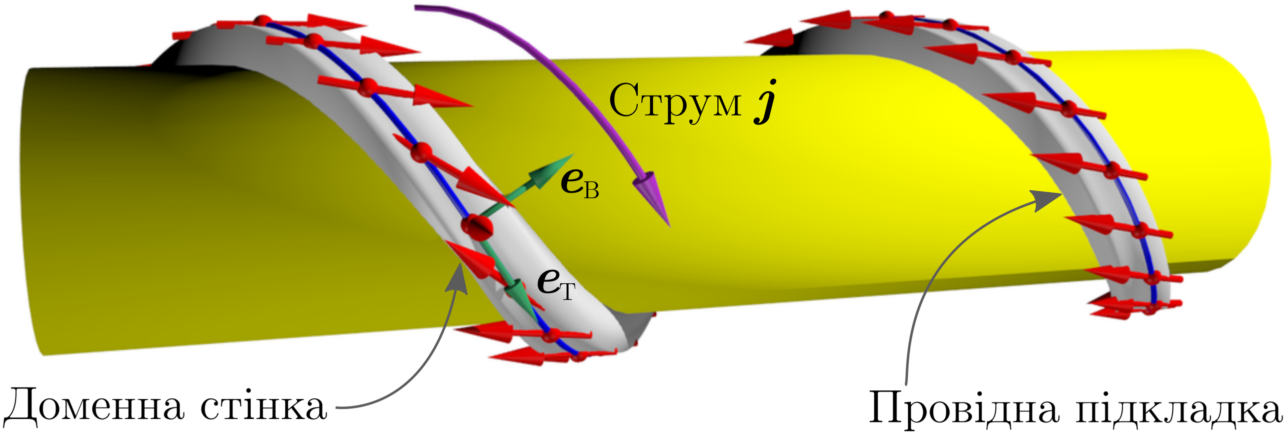


Рис. 3.12: Схематичне зображення динаміки доменної стінки під дією ефективного поля Рашби, яке спрямоване вздовж вектора $\boldsymbol{e}_{\mathrm{B}}$.

крутильних моментів, які виникають внаслідок ефекту Рашби [126, 127]. При цьому магнітний дріт знаходиться на немагнітній провідній підкладці з сильною спін-орбітальною взаємодією, по якій протікає струм. Як відомо, спін-орбітальна взаємодія може бути джерелом двох типів крутильних моментів, які будуть діяти на намагніченість: польовий або Слончевського. У прямих зразках, якщо струм поширюється вздовж плівки, то поперечна доменна стінка типу *head-to-head* або *tail-to-tail* не буде рухатись жодним з можливих крутильних моментів [131].

Ми розглядали систему, яка складається з паралельно-розміщених магнітного дроту та плівки з сильною спін-орбітальною взаємодією, по якій протікає струм $\boldsymbol{j}||\boldsymbol{e}_{\mathrm{T}}$. Ця багатошарова структура намотана на циліндр таким чином, що в кінцевому результаті ми маємо магнітну тривимірну спіраль, див. Рис. 3.12. Струм, який протікає по провідній підкладці, завдяки ефекту Рашби створю ефективне поле Рашби [131]

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{R}} = \frac{\alpha_{\mathrm{R}} P}{\mu_{\mathrm{B}} M_s} \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{e}_{\mathrm{N}}, \tag{3.54}$$

де α_{R} — параметр Рашби, який залежить лише від матеріальних параметрів магнітного дроту та провідної плівки [131, 132], P — ступінь поляризації носіїв у феромагнітному дроті.

З запису для ефективного поля Рашби (3.54) видно, що поле спрямоване вздовж бінормального напрямку. Враховуючи напрямок ефективного поля і те, що намагніченість у тривимірній спіралі відхиляється від строго тангенціального напрямку (3.10), то виникає компонента намагніченості на яку діє ефективне поле. Густину енергії взаємодії з ефективним полем Рашби можна записати у наступному вигляді

$$\mathscr{E}^{\mathrm{R}} = -\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{m}, \quad \boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{H}^{\mathrm{R}}}{K/M_s}, \tag{3.55}$$

де $\boldsymbol{h}$ — нормоване поле.

Використовуючи узагальнену $q-\Phi$ модель [124], можна отримати вираз для рухливості доменної стінки, див. Додаток Б, у тривимірній спіралі під дією ефективного поля Рашби

$$\mu = \frac{v}{h} = \frac{p\delta_0}{\alpha}\frac{\sin\theta^t}{1+a_0^2}. \tag{3.56}$$

У граничному випадку малих параметрів кривини та кручення ($\varkappa$,$|\sigma| \ll 1$), рухливість доменної стінки (3.56) можна записати наступним чином

$$\mu \approx \frac{p\delta_0}{\alpha}\varkappa\sigma. \tag{3.57}$$

З наближеного виразу для рухливості видно, що рух доменної стінки можливий лише за наявності кривини та кручення одночасно, а напрямок руху визначається добутком топологічного заряду доменної стінки на геометричну хіральність спіралі. Варто також відмітити, що ефекти пов’язані з рухом доменної стінки у тривимірній спіралі під дією ефективного поля Рашби є квадратичними по кривині та крученню, на відміну від ефектів, які спостерігаються у випадку зі спін-поляризованим струмом.

Для перевірки аналітично отриманого результату (3.56) було проведено ряд мікромагнітних моделювань, в яких ефективне поле Рашби було врахо-

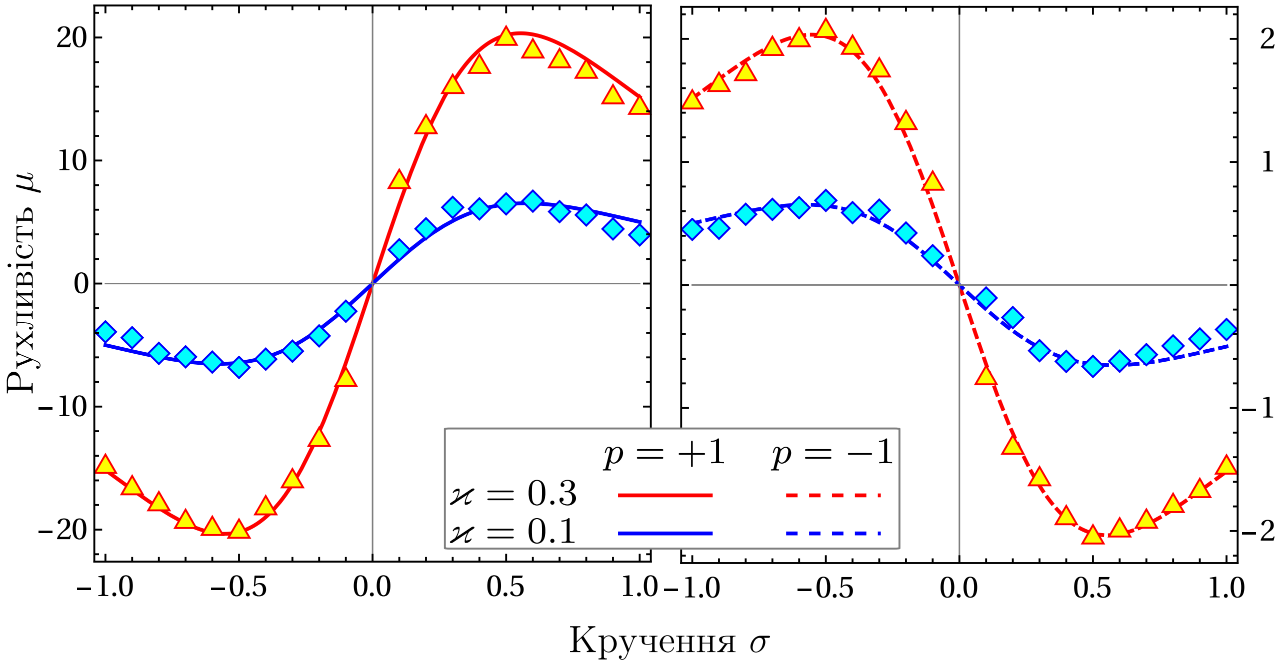


Рис. 3.13: Рухливість доменної стінки типу *head-to-head* (а) та *tail-to-tail* (б) під дією ефективного поля Рашби. Лінії відповідають аналітично отриманим результатам (3.56), а маркери відповідають результатам мікромагнітних моделювань.

ване, як зовнішнє магнітне поле спрямоване вздовж бінормального напрямку $\boldsymbol{h}||\boldsymbol{e}_\text{B}$. Чисельний експеримент проходив у два етапи:

(i) релаксація доменних стінок з різними топологічними зарядами на тривимірних спіралях, див. Рис. 3.8, з великим коефіцієнтом релаксації Гільберта ($\alpha = 0.1$);

(ii) моделювання динаміки доменної стінки під дією ефективного поля Рашби $\boldsymbol{h} = h\boldsymbol{e}_\text{B}$ з природнім коефіцієнтом релаксації Гільберта ($\alpha = 0.01$) і величиною поля $h = 0.02$ ($H = 10.8$ мТ).

Визначення положення доменної стінки та її фази виконувалося таким же самим чином, як у випадку зі спін-поляризованим струмом.

На Рис. 3.13 представлено результати порівняння аналітично отриманого результату і мікромагнітних моделювань.

3.4 Висновки до розділу

У даному розділі чисельно й аналітично досліджено влив кривини та кручення магнітного нанодроту на статичні та динамічні властивості намагніченості.

Проведені чисельні і аналітичні розрахунки показують, що у магнітній спіралі реалізується два рівноважні стани: періодичний (*onion*) і однорідний стани у криволінійній системі координат. Тип однорідного стану визначається типом анізотропії. У випадку легко-тангенціальної анізотропії однорідному стану відповідає квазітангенціальний, який енергетично вигідний для спіралей з відносно малим параметром кривини ($\varkappa \leq \varkappa_0$); *onion* стан реалізується для великих значень кривини ($\varkappa > \varkappa_0$), який мінімізує енергію обмінної взаємодії і робить розподіл квазіоднорідним у фізичному просторі, див. 3.3(в). Аналогічна ситуація спостерігається і для інших типів анізотропії.

Під час детального розгляду квазітангенціального стану встановлено, що намагніченість у цьому стані відхиляється від строго тангенціального стану, навіть, у випадку сильною анізотропії. Величина відхилення намагніченості від строго тангенціального стану визначається добутком кривини та кручення, а напрямок, в який це відхилення відбувається визначається добутком геометричної та магнітної хіральностей (3.11). Відхилення намагніченості можна трактувати як наслідок того, що геометрія спіралі генерує ефективне магнітне поле, відповідний якому векторний потенціал пропорційний крученню (3.29). Ефективний векторний потенціал $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ призводить до лінійного зсуву у спектрі магнонів (3.34). Окрім лінійного зсуву у спектрі, геометрія системи призводить до зменшення щілини внаслідок наявності кривини. Рівняння (3.34) демонструє вплив кривини та кручення на спектр магнонів. Отримана асиметрія у спектрі подібна до систем із природною взаємодією Дзялошинського—Морії [102–104]. Для системи з легко-бінормальною анізотропією спостерігаються ті самі ефекти, що і у випадку з легко-тангенціальною анізотропією внаслідок симетрії $\varkappa \leftrightarrow \sigma$. Варто відмітити, що у випадку легко-нормальної анізотропії намагніченість у радіальному стані спрямована в напрямку вектора нормалі, а спектр магнонів не зазнає лінійного зсуву, що пояснюється відсутністю векторного потенціалу $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ у лінеаризованих рівняннях (3.36).

Наявність кривини та кручення мають суттєвий вплив на статику та динаміку поперечної доменної стінки. Так у тривимірній спіралі фаза доменної стінки стає лінійною функцією координати і в стаціонарному стані виникає ненульова бінормальна компонента в розподілі намагніченості, див. Рис. 3.8. Як і у випадку плоского дроту, орієнтація доменної стінки у тривимірній спіралі визначається топологічним зарядом: стінка типу *head-to-head* орієнтується назовні, стінка типу *tail-to-tail* — всередину спіралі, див. Рис. 3.8.

Під час руху доменної стінки у магнітній спіралі під дією спін-поляризованого струму в системі виникає Уокерівська границя, яка відсутня у прямих одновісних дротах [133]. Величина Уокерівського струму лінійна за кривиною (3.53). В свою чергу кручення призводить до зсуву матеріального параметра неадіабатичності ($\beta \to \beta - \beta^\star$, $\beta^\star \propto \sigma$), що у випадку $\beta \ll \beta^\star$ призводить до від'ємної рухливості доменної стінки, див. Рис. 3.11.

Внаслідок відхилення намагніченості від тангенціального напрямку у тривимірній спіралі рух поперечної доменної стінки стає можливим під дією ефективного поля Рашби. Рухливість доменної стінки у цьому випадку пропорційна добутку кривини на кручення, а напрямок руху визначається знаком добутку топологічного заряду на геометричну хіральність спіралі (3.57). Варто також відмітити, що ефекти пов'язанні з рухом доменної стінки за механізмом Рашби є квадратичні по кривині та крученню, а за механізмом Базалія—Жанга—Лі — лінійні.

Оригінальні результати розділу:

1. у тривимірній спіралі, в залежності від геометричних параметрів, існує

два рівноважні стани: періодичний (*onion*) і однорідний стани у криволінійній системі координат. Однорідний стан визначається типом анізотропії. Побудовано діаграми рівноважних станів намагніченості для різних типів анізотропії, див Рис. 3.3, 3.4, 3.5;

2. у випадку квазітангенціального і квазібінормального станів неможливий розподіл намагніченості строго вздовж тангенціального та бінормального векторів: намагніченість відхиляється від напрямку вектора анізотропії на кут, який пропорційний добутку кривини, кручення та магнітної хіральності намагніченості ($\propto \mathscr{C}\varkappa\sigma$);
3. закон дисперсії для магнонів зазнає асиметрії внаслідок появи кривини та кручення (3.34). У випадку легко-тангенціальної анізотропії кривина призводить до зменшення щілини у спектрі, а кручення до лінійного зсуву спектру вздовж хвильового числа ($\Omega(q) \approx 1 - \frac{\varkappa^2}{2} + (q - \mathscr{C}\sigma)^2$);
4. кривина призводить до появи Уокерівської границі (3.53), навіть у випадку одновісного магнетика ($u_{\text{W}} \propto \varkappa$);
5. під час руху доменної стінки за механізмом Базалія—Жанга—Лі, кручення призводить до зсуву матеріального параметра неадіабатичності ($\beta \to \beta - \beta^\star$), що може призвести до руху доменної стінки проти напрямку спін-поляризованого струму;
6. у тривимірній спіралі можливий рух доменної стінки під дією ефективного поля Рашби. Напрямок руху доменної стінки визначається знаком добутку топологічного заряду доменної стінки на геометричну хіральність спіралі (3.57) ($v \propto p\sigma$).

Всі аналітичні результати, що були отримані у даному розділі, добре узгоджуються з результатами моделювань.

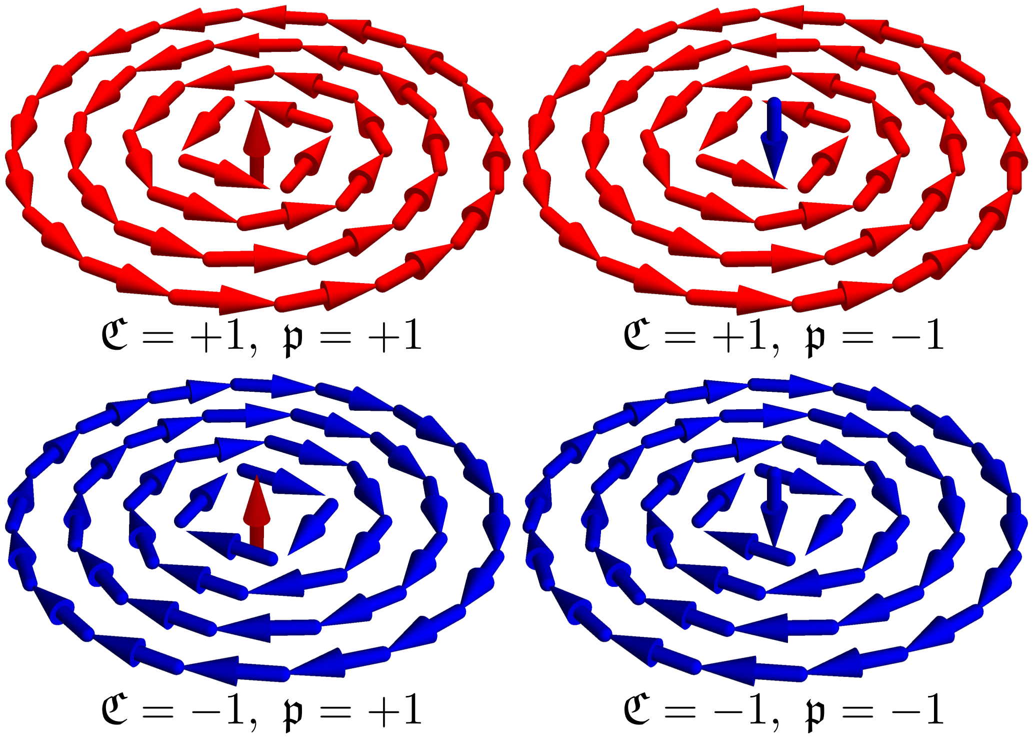
Розділ 4

РОЛЬ КРИВИНИ В ПЕРЕМИКАННІ ХІРАЛЬНОСТІ МАГНІТНОГО ВИХОРУ

> У даному розділі чисельними методами досліджувався вплив кривини на процес перемикання хіральності магнітного вихору у сферичних оболонках з різними кутами зрізу. Для півсферичних оболонок знайдено область контрольованого перемикання хіральності вихору в залежності від амплітуди та ширини магнітного імпульсу. Виявлено, що при збільшенні радіусу кривини магнітної оболонки, область контрольованого перемикання хіральності вихору підіймається в область більших амплітуд. За допомогою мікромагнітних моделювань детально досліджено механізм, за яким відбувається перемикання хіральності магнітного вихору. Результати, представлені в даному розділі, опубліковано в роботі [23].

Магнітом'які феромагнітні наночастинки субмікронного розміру та симетричної форми, зазвичай, основним станом розподілу намагніченості мають вихровий розподіл. Цей розподіл виникає внаслідок конкуренції між сильною короткодіючою обмінною взаємодією та дальнодіючою диполь-дипольною взаємодією [134]. Нещодавно, було показано, як теоретично [5, 18, 91], так і експериментально [5, 18, 135], що вихровий розподіл відповідає основному стану магнітом'якого магнетика півсферичної форми. Магнітний вихор характеризується двома бінарними характеристиками: *хіральність* ($\mathfrak{C} = +1$ — проти годинникової стрілки, $\mathfrak{C} = -1$ — за годинниковою стрілкою) — напрямок циркуляції намагніченості в площині зразка та *полярність* ($\mathfrak{p} = +1$ — вгору, $\mathfrak{p} = -1$ — вниз) — напрямок намагніченості ядра вихору, див. Рис. 4.1.

Магнітні частинки у вихровому стані можуть розглядатись як носії двох бітів інформації. Тому контрольована зміна хіральності і полярності є ключовим фактором у створенні енергонезалежної магнітної оперативної пам'яті (MRAM — англ. magnetic random-access memory) [9–12, 136]. Контрольовано змінювати полярність магнітного вихору можна, використовуючи ма-



$\mathfrak{C} = +1,\ \mathfrak{p} = +1$ $\mathfrak{C} = +1,\ \mathfrak{p} = -1$

$\mathfrak{C} = -1,\ \mathfrak{p} = +1$ $\mathfrak{C} = -1,\ \mathfrak{p} = -1$

Рис. 4.1: Схематичне зображення чотирьох вихрових розподілів намагніченості магнітної наночастинки з $\mathfrak{C} = \pm 1$ і $\mathfrak{p} = \pm 1$.

гнітні поля, або струми [137–143]. В той же час контрольоване перемикання хіральності магнітного вихору супроводжується рядом проблем: необхідність штучно вводити асиметрію в зразок [136, 144–146], прикладати просторово неоднорідне магнітне поле [147], мати можливість високоточного контролю параметрів магнітного поля [148], або струму [149].

В цьому розділі досліджується процес перемикання хіральності магнітного вихору у сферичних оболонках з різними кутами зрізу під дією просторово-однорідного магнітного імпульсу. Ефективно, магнітне поле буде просторово-неоднорідним в криволінійні системі координат, яка зв'язана із геометрією оболонки. У пункті 4.1 шляхом мікромагнітних моделювань отримано діаграму перемикання хіральності магнітного вихору у півсферичній оболонці та досліджено вплив кривини на процес перемикання хіральності. У пункті 4.2 детально досліджено механізми перемикання хіральності магнітного

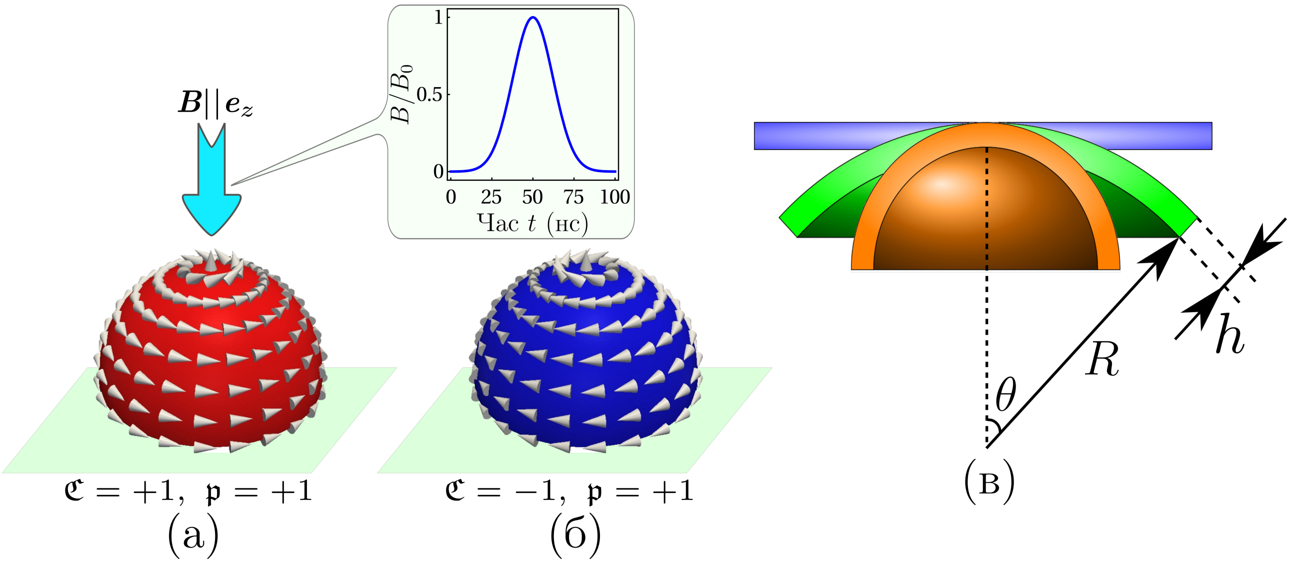


Рис. 4.2: (а),(б)Схематичне зображення процесу перемикання хіральності магнітного вихору на півсферичній поверхні. (а) Початковий вихровий розподіл з $\mathfrak{C} = +1$. (б) Отриманий вихровий розподіл з хіральністю $\mathfrak{C} = -1$. Часовий профіль просторово-однорідного магнітного імпульсу. Конуси на півсферичних поверхнях (а) та (б) відповідають розподілам намагніченості, отриманим з мікромагнітних моделювань. (в) Перехід від півсферичної поверхні до плоского диску.

вихору. В останньому пункті 4.3 викладено основні результати розділу.

4.1 Контроль хіральності вихору, що знаходиться на півсферичній оболонці

Ми моделювали динаміку магнітного вихору в півсферичній оболонці з внутрішнім радіусом $R_0 = 100$ нм та товщиною $h = 10$ нм (вибрані параметри відповідають стану з вихровим розподілом [91]) під дією просторово однорідного магнітного імпульсу, спрямованого вздовж осі симетрії зразка, див. Рис. 4.2(а-б),

$$\boldsymbol{B}(t) = -\boldsymbol{e}_z B_0 \exp\left[-\frac{(t-3\tau)^2}{\tau^2}\right],$$

де B_0 та τ це амплітуда та ширина магнітного імпульсу, відповідно. Для чисельного експерименту використовувався пакет для мікромагнітних моделювань Nmag [119]. Матеріальні параметри відповідали магнітом'якому матеріалу — пермалою [120]. Анізотропія та температурні ефекти не враховувалися. Під час моделювань коефіцієнт релаксації Гільберта відповідав природному значенню ($\alpha = 0.01$). Весь об'єм феромагнетика було розбито на тетраедри з ребром довжиною 2.75 нм.

Динаміка намагніченості, збуджена магнітним імпульсом, суттєво залежить від параметрів магнітного імпульсу. Тому ми класифікували динаміку намагніченості, використовуючи таку інтегральну характеристику як хіральність

$$\mathfrak{C}(t) = \frac{1}{V}\int\limits_V m_\chi\left(\boldsymbol{r},t\right) d\boldsymbol{r}, \tag{4.1}$$

де m_χ — це азимутальна компонента намагніченості в сферичній системі координат $\boldsymbol{m} = (m_\theta, m_\chi, m_r)$, V — об'єм магнетика. У виразі (4.1) інтегрування проводиться по всьому об'єму магнетика.

Для детального дослідження еволюції хіральності магнітного вихору в часі, нами були проведенні моделювання з довготривалою динамікою намагніченості у широкому інтервалі параметрів магнітного імпульсу: амплітуда поля $B_0 \in [50; 300]$ мТ, ширина імпульсу $\tau \in [10; 200]$ пс.

Результати мікромагнітних моделювань для півсферичної поверхні представленні на Рис. 4.3. З результатів моделювань можна виділити дві великі області, де відбувається процес перемикання хіральності (🟩, ▣). Незафарбовані області відповідають моделюванням, в яких перемикання хіральності не відбулося (□). З результатів моделювань також можна побачити, що початкова хіральність не має принципового значення на процес перемикання

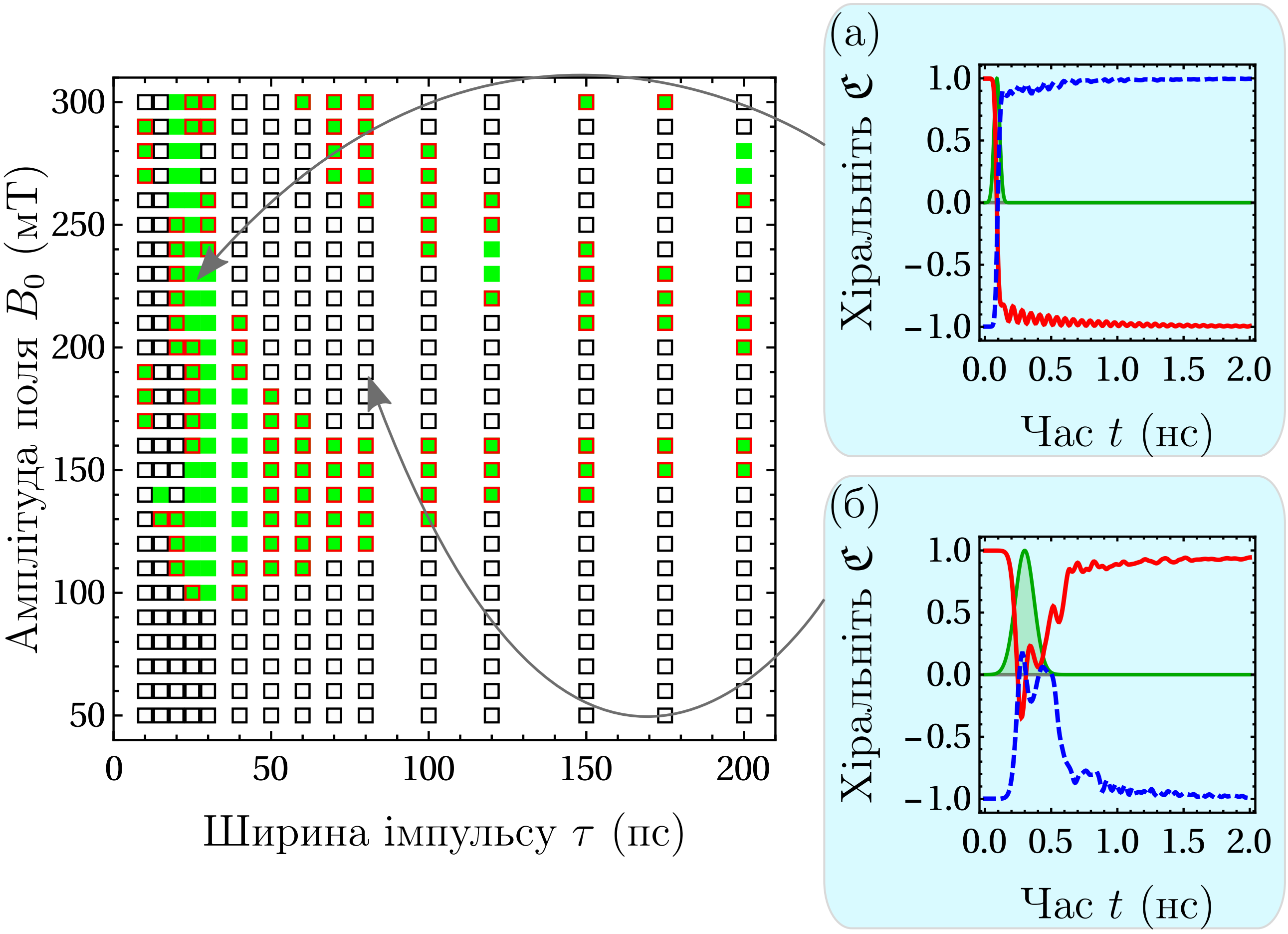


Рис. 4.3: Діаграма перемикання хіральності магнітного вихору на півсферичній поверхні. Зафарбовані та порожні маркери визначають параметри магнітного імпульсу, при яких перемикання магнітного вихору відбувається, або не відбувається, відповідно. (а),(б) Еволюція хіральності магнітного вихору в залежності від часу для двох режимів; заштрихована область відповідає профілю магнітного імпульсу, а суцільна і штрихована лінії відповідають початковим хіральностям $\mathfrak{C} = +1$ та $\mathfrak{C} = -1$, відповідно.

хіральності магнітного вихору, як це відбувається при перемиканні полярності [90].

Як видно з Рис. (4.3), оптимальна ширина магнітного імпульсу для перемикання хіральності магнітного вихори лежить в діапазоні від 25 пс до 70 пс. Варто відмітити, що даний діапазон відповідає ширинам імпульсів необхідних для перемикання полярності магнітного вихору, однак, амплітуда

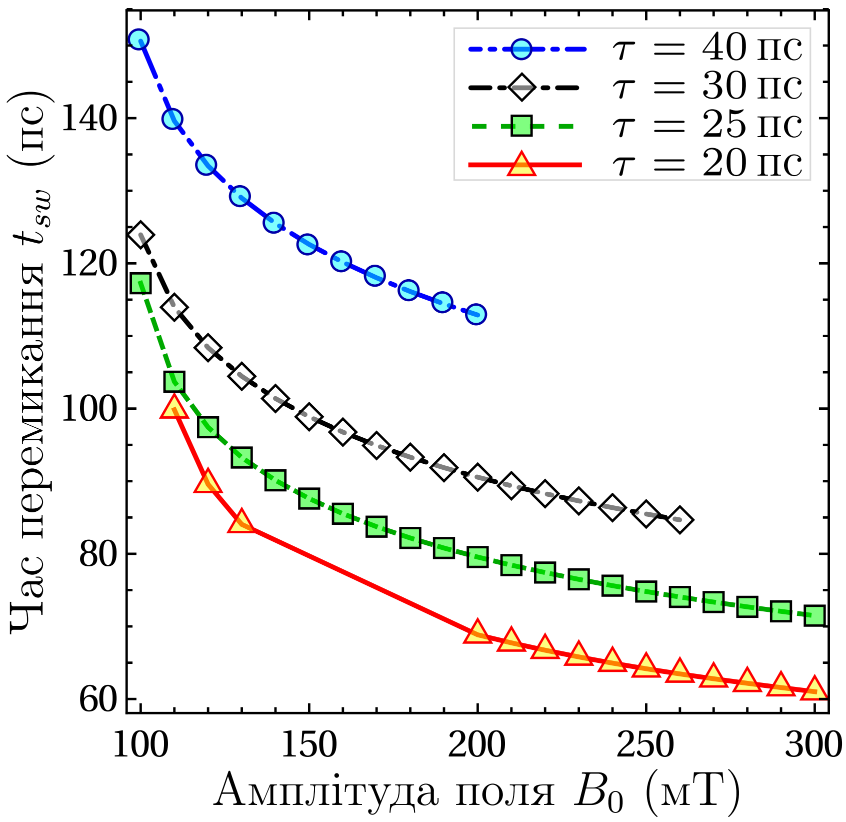


Рис. 4.4: Залежність часу перемикання хіральності магнітного вихору t_{sw} на півсферичній оболонці від амплітуди імпульсу для різних параметрів ширини магнітного імпульсу.

імпульсів більша [138].

Наступною важливою характеристикою, окрім параметрів магнітного імпульсу, є час перемикання хіральності магнітного вихору. Час перемикання визначався як розв'язок рівняння $\mathfrak{C}(t_{sw}) = 0$. Для відповідної ширини магнітного імпульсу τ час перемикання поступово зменшується зі збільшенням амплітуди магнітного імпульсу, див. Рис. 4.4, що відповідає результатам отриманим раніше [150–152].

Для визначення впливу кривини на процес перемикання хіральності магнітного вихору ми дослідити ряд зрізаних сферичних поверхонь з постійним об'ємом та товщиною, див. Рис. 4.2(в). У цьому випадку радіус кривини $R = R_0/\sqrt{1 - \cos\vartheta_c}$ визначається через кут зрізу ϑ_c. Кут зрізу ϑ_c може

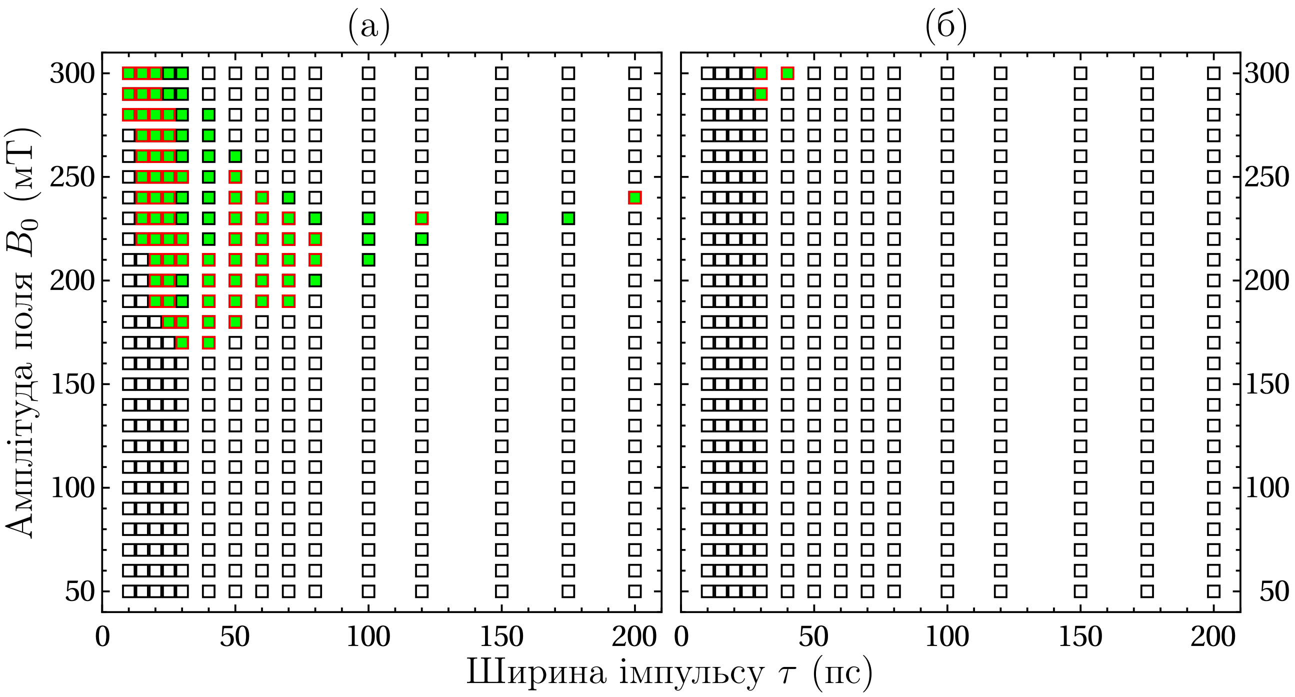


Рис. 4.5: Діаграми перемикання хіральності магнітного вихору: (а) на зрізаній сферичній поверхні з радіусом кривини $R \approx 1.85 R_0$ (відповідає куту зрізу $\vartheta_c = \pi/4$); (б) на диску з радіусом $R_{\text{disk}} = \sqrt{2} R_0$ та радіусом кривини $R \to \infty$. Зафарбовані та порожні маркери визначають параметри магнітного імпульсу при яких перемикання магнітного вихору відбувається, або не відбувається, відповідно.

змінюватися в діапазоні $\pi/2 \geq \vartheta_c > 0$, а радіус кривини $-R_0 \leq R < \infty$, відповідно. Значення кута зрізу $\vartheta_c = 0$ відповідає випадку плоского диску з радіусом кривини $R \to \infty$ і радіусом диску $R_{\text{disk}} \approx \sqrt{2} R_0$ (у випадку, коли $h \ll R_0$). Зміна діаграми перемикання хіральності зі збільшенням радіуса кривини представлена на Рис. 4.5: вставка (а) відповідає сферичній поверхні з кутом зрізу $\vartheta_c = \pi/4$, вставка (б) відповідає плоскому диску з радіусом кривини $R \to \infty$. Як видно з Рис. 4.5, збільшення радіусу кривини призводить до зсуву областей перемикання хіральності в область більших амплітуд та малих ширин магнітного імпульсу, що узгоджується з раніше отриманими результатами по перемиканню хіральності у диску [153].

Щоб пояснити вплив кривини на процес перемикання хіральності магні-

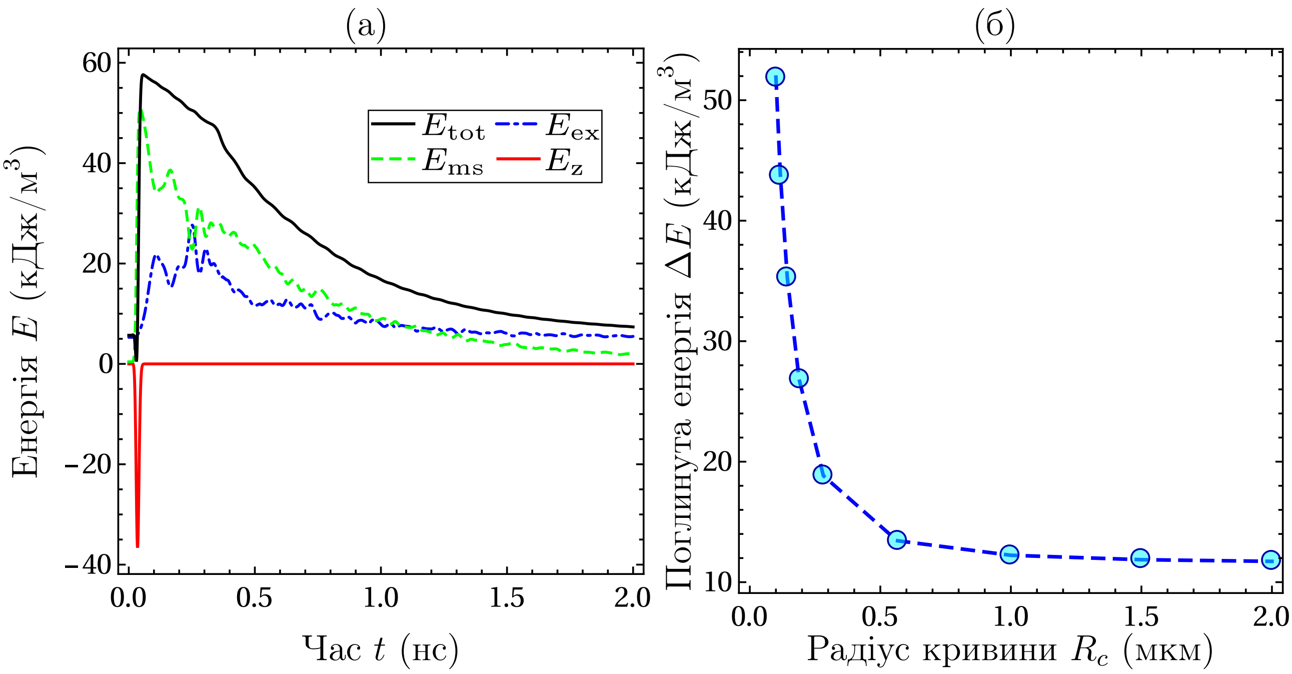


Рис. 4.6: (а) Еволюція різних компонент енергії в часі для випадку півсферичної оболонки. (б) Залежність поглинутої енергії від радіусу кривини оболонки під дією магнітного імпульсу з параметрами $B_0 = 180$ мТ й $\tau = 10$ пс.

тного вихору, було розглянуто поглинання енергії, яку система отримує з прикладеного поля. На Рис. 4.6(а) представлена еволюція різних компонент енергії в часі. Під дією магнітного імпульсу збуджується динаміка намагніченості, яка супроводжується зростанням повної енергії в системі. Після закінчення дії імпульсу, енергія системи зменшується до початкового значення. Від'ємна енергія відповідає за взаємодію із зовнішнім магнітним полем, яке прикладають до зразка. Величину поглинутої енергії можна розрахувати як $\Delta E = E_{max} - E_{in}$, де E_{max} та E_{in} визначають максимальне й початкове значення енергії, відповідно. Графік залежності поглинутої енергії від радіусу кривини представлений на Рис. 4.6(б), з якого видно, що при зростанні радіусу кривини величина поглинутої енергії спадає. Як результат, для півсферичної оболонки необхідна менша амплітуда магнітного імпульсу, щоб подолати енергетичний бар'єр, який розділяє два стани з різними хіральностями, в порівнянні з плоским диском.

4.2 Механізми перемикання магнітного вихору

Процес перемикання хіральності вихору під дією магнітного імпульсу на півсферичній оболонці проходить у три етапи:

- на першому етапі до півсферичної оболонки з вихровим розподілом намагніченості, див. Рис. 4.7(а) та Рис. 4.8(а), прикладають магнітний імпульс, внаслідок чого утворюється 180^0 замкнена доменна стінка, див. Рис. 4.7(б) та Рис. 4.8(б);
- на другому етапі утворена 180^0 замкнена доменна стінка стягується до полюсу півсферичної оболонки і починає там осцилювати, див. Рис. 4.7(б-в) та Рис. 4.8(б-г);
- на останньому етапі 180^0 замкнена доменна стінка анігілює, див. Рис. 4.7(г-ґ) та Рис. 4.8(ґ), внаслідок чого утворюється вихор з протилежною хіральністю, див. Рис. 4.7(д) та Рис. 4.8(д).

В залежності від параметрів магнітного імпульсу, ми виділяємо два механізми анігіляції замкненої доменної стінки:

(i) *Механізм з утворенням вихор-антивихрової пари* — в околі полюсу півсферичної оболонки замкнена доменна стінка стає нестійкою, розпадаючись на вихор-антивихрові пари, див. Рис. 4.7(г). Число утворених вихор-антивихрових пар, які спостерігались, змінювалось від 1 до 4, в залежності від параметрів імпульсу. Один з новоутворених антивихорів анігілює з центральним вихором, див. Рис. 4.7(ґ), після чого інші вихор-антивихрові пари також анігілюють, залишаючи один вихор з хіральністю, протилежною до початкового стану. Аналогічне утворення вихор-антивихрових пар спостерігалося під дією спін-поляризованого струму, перпендикулярного до площини магнетика [154]. Варто відмітити, що цей механізм перемикання хіральності магнітного вихору по-

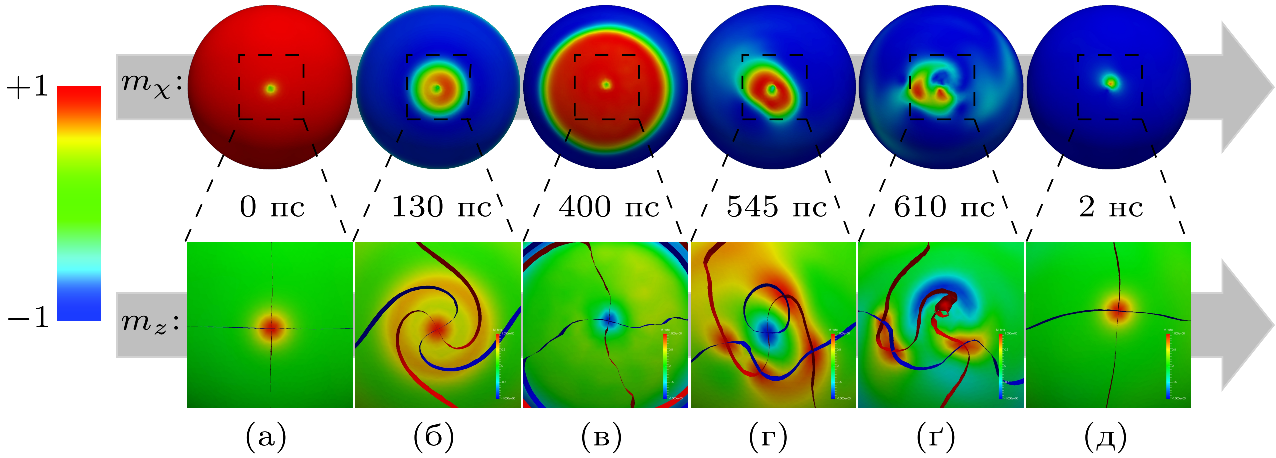
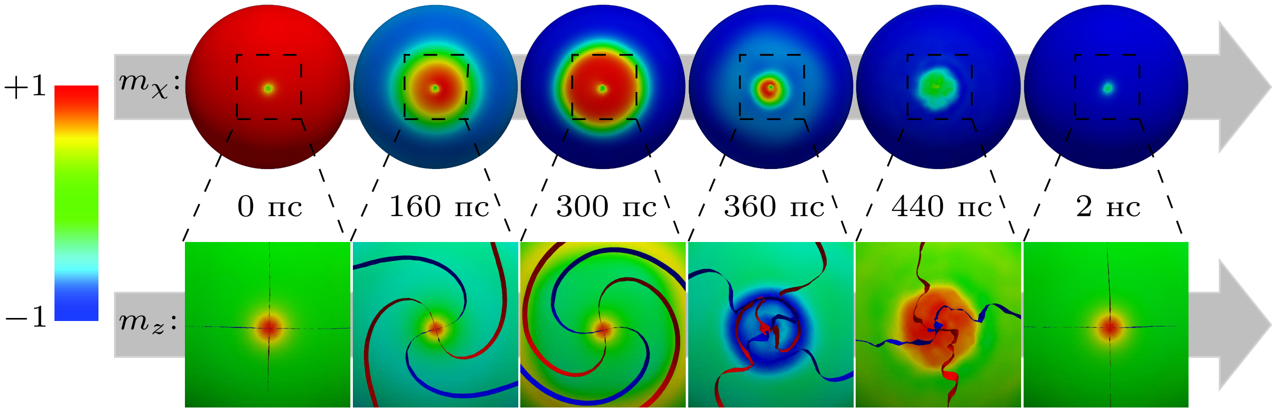


Рис. 4.7: Механізм перемикання хіральності магнітного вихору на півсферичній оболонці внутрішнього радіусу $R_0 = 100$ нм та товщини $h = 10$ нм з утворенням *вихор-антивихрових пар* під дією магнітного імпульсу шириною $\tau = 20$ пс і амплітудою $B_0 = 210$ мТ. Верхній ряд відповідає азимутальній компоненті m_χ вектора намагніченості $\boldsymbol{m}$ в початковий момент часу (а) та динаміці (б-д), збудженої магнітним імпульсом. Нижній ряд відповідає вертикальній компоненті m_z центральної частини зразка. Синя та червона лінії показують положення ізоповерхонь для яких $m_x = 0$ та $m_y = 0$, відповідно; перетини ізоповерхонь визначають положення центрів магнітних вихорів та антивихорів.

дібний до процесу перемикання хіральності вихрової доменної стінки у нанотрубках через утворення вихор-антивихрової пари [95].

(ii) *Однорідний механізм анігіляції замкненої доменної стінки* — замкнена доменна стінка різко стискається до розміру ядра магнітного вихору та анігілює, внаслідок чого утворюється вихор з ядром великого радіусу, див. Рис. 4.8(ґ). Після чого ядро магнітного вихору повертається до початкового розміру, але вже з протилежною хіральністю (Рис. 4.8(д)). Цей механізм перемикання хіральності магнітного вихору аналогічний



(а) (б) (в) (г) (ґ) (д)

Рис. 4.8: *Однорідний* механізм перемикання хіральності магнітного вихору на півсферичній оболонці внутрішнього радіусу $R_0 = 100$ нм та товщини $h = 10$ нм під дією магнітного імпульсу шириною $\tau = 40$ пс і амплітудою $B_0 = 140$ мТ. Верхній ряд відповідає азимутальній компоненті m_χ вектора намагніченості $\boldsymbol{m}$ в початковий момент часу (а) та динаміці (б-д), збудженої магнітним імпульсом. Нижній ряд відповідає вертикальній компоненті m_z центральної частини зразка. Синя та червона лінії показують положення ізоповерхонь, для яких $m_x = 0$ та $m_y = 0$, відповідно; перетин ізоповерхонь визначає положення центру магнітного вихору.

до однорідного механізму перемикання хіральності вихрової доменної стінки у нанотрубках [97].

Анігіляція замкненої доменної стінки з утворенням вихор-антивихрових пар відбувається на межі між областями, де перемикання хіральності магнітного вихору відбувається і не відбувається. Випадки анігіляції доменної стінки з утворенням вихор-антивихрових пар на Рис. 4.3 позначенні зафарбованими маркерами з рамкою 🟩. Однорідний процес анігіляції замкненої доменної стінки відбувається в центральній області. Випадки однорідної анігіляції доменної стінки на Рис. 4.3 позначенні зафарбованими маркерами без рамки 🟩. Варто відмітити, що запропонований механізм перемикання хіральності магнітного вихору не дозволяє контролювати його полярність.

4.3 Висновки до розділу

У даному розділі представлено результати чисельного дослідження процесу перемикання хіральності магнітного вихору на сферичних магнітом'яких оболонках з різними кутами зрізу під дією просторово однорідного магнітного імпульсу, спрямованого вздовж осі симетрії зразка.

Оригінальні результати розділу:

1. на півсферичній оболонці можливе контрольоване перемикання хіральності магнітного вихору;

2. використання викривлених оболонок зменшує амплітуди магнітного поля, необхідні для перемикання хіральності вихору;

3. побудовано діаграми перемикання хіральності магнітного вихору на сферичних оболонках з різними кутами зрізу. Знайдено області параметрів імпульсу магнітного поля, за яких перемикання відбувається контрольованим чином, див. Рис. 4.3, 4.5;

4. знайдено два можливі механізми перемикання хіральності магнітного вихору: з утворенням вихор-антивихрової пари, див. Рис. 4.7; однорідний механізм, див. Рис. 4.8.

ВИСНОВКИ

В даній дисертаційні роботі в рамках феноменологічної моделі Ландау—Ліфшиця—Гільберта проведено теоретичний аналіз впливу криволінійних ефектів на статичні та динамічні властивості магнітної підсистеми в низьковимірних феромагнетиках. В одновимірних системах досліджено вплив кривини та кручення на динаміку спінових хвиль і доменних стінок. У двовимірних системах досліджено вплив кривини на процес перемикання хіральності магнітного вихору. Всі аналітично отримані результати перевірено за допомогою мікромагнітних моделювань.

Використовуючи раніше отриманий запис обмінної енергії магнетика в криволінійній системі координат, передбачено ряд нових ефектів, які відсутні в прямолінійних системах, і можуть трактуватись як результат впливу ефективних індукованих кривиною взаємодій Дзялошинського—Морії та анізотропії.

Достовірність наведених результатів підтверджується узгодженістю аналітичних розрахунків із мікромагнітними моделюваннями. Розрахунок стаціонарного стану поперечної доменної стінки на локальному згині, наведений в підрозділі 2.1, підтверджується на експерименті [92].

Основні оригінальні результати можуть бути коротко сформульовані у наступній формі:

1. Аналітично знайдено рівноважний стан поперечної доменної стінки у магнітному дроті з локальним згином. Встановлено, що за наявності кривини виникає зв’язок між топологічним зарядом стінки та її фазою. Показано, що локальний згин є притягаючим потенціалом для доменної стінки.

2. У тривимірній спіралі, в залежності від геометричних параметрів, існує два рівноважні стани: періодичний ($onion$) і однорідний стани у криволі-

нійній системі координат. Однорідний стан визначається типом анізотропії. Для квазітангенціального і квазібінормального стану неможливий розподіл намагніченості строго вздовж осі анізотропії: намагніченість відхиляється від осі анізотропії на кут, який пропорційний добутку кривини та кручення.

3. Закон дисперсії для магнонів у тривимірній спіралі зазнає асиметрії внаслідок появи кривини та кручення. У випадку легко-тангенціальної анізотропії кривина призводить до зменшення щілини у спектрі, а кручення — до лінійного, по хвильовому вектору, зсуву дисперсійної залежності.

4. Кривина призводить до появи Уокерівської границі, навіть, у випадку одновісного магнетика. Під час руху доменної стінки у тривимірній спіралі за механізмом Базалія—Жанга—Лі, кручення призводить до зсуву матеріального параметра неадіабатичності, що може призвести до руху доменної стінки проти напрямку спін-поляризованого струму. Також, у тривимірній спіралі можливий рух доменної стінки під дією ефективного поля Рашби; напрямок руху доменної стінки визначається знаком добутку топологічного заряду доменної стінки на геометричну хіральність спіралі.

5. Виявлено, що на півсферичній оболонці можливе контрольоване перемикання хіральності магнітного вихору, а використання викривлених магнітних оболонок зменшує амплітуди магнітного поля, необхідні для перемикання хіральності вихору. Знайдено область параметрів, за яких відбувається контрольоване перемикання хіральності магнітного вихору.

Дослідження, які були покладені в основу даної дисертації, проведено у співавторстві з д. ф.-м. н., проф. Ю. Б. Гайдідеєм і к. ф.-м. н., с. н. с.

В. П. Кравчуком (Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України), д. ф.-м. н., проф. Д. Д. Шекою і к. ф.-м. н. О. В. Пилиповським (Київський національний університет імені Тараса Шевченка), докт. Д. Г. Макаровим (Institute of Ion Beam Physics and Materials Research, Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf e. V.).

На завершення хочу висловити подяку Володимиру Петровичу Кравчуку за керівництво науковою роботою.

ДОДАТКИ

А Характерні часові масштаби колективних змінних у тривимірній спіралі

> У даному підрозділі наведено аналіз часових масштабів у тривимірній спіралі для колективних змінних. Опубліковано в роботі[21].

За відсутності спін-поляризованого струму рівняння (3.50c) та (3.50d) формують систему незалежних рівнянь відносно змінних δ та a. Внаслідок чого можна розглядати різні часові масштаби для різних пар колективних змінних.

Спочатку розглянемо лінеаризовані рівняння (3.50c) та (3.50d) за відсутності спін-поляризованого струму на фоні рівноважного стану (3.44) додавши малі відхилення: $\delta(t) = \tilde{\delta}(t) + \delta_0$ і $a(t) = \tilde{a}(t) + a_0$. Лінеаризовані рівняння (3.50c) та (3.50d), в наближенні $\alpha^2 \ll 1$, $a\alpha \ll 1$, на фоні рівноважного стану мають наступний вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\tilde{\delta}}}{\delta_0} &\approx -\frac{2}{c\delta_0^2}\left[(\alpha - \beta^\star)\frac{\tilde{\delta}}{\delta_0} - p\tilde{a}\right], \\ \dot{\tilde{a}} &\approx -\frac{2}{c\delta_0^2}\left[p\frac{\tilde{\delta}}{\delta_0} + (\alpha + \beta^\star)\,\tilde{a}\right], \end{aligned} \tag{A.1}$$

Система рівнянь (A.1) має розв'зок у формі затухаючих коливань $\tilde{\delta} \propto e^{i\omega t - \eta t}$ та $\tilde{a} \propto e^{i\omega t - \eta t}$, в яких величини

$$\omega \approx \frac{2}{c}, \qquad \eta \approx \alpha\omega \tag{A.2}$$

характерна частота та ефективний параметр релаксації, відповідно, які характеризують динаміку пари змінних $\{\delta, a\}$. Для обрахунку характерної частоти змінних $\{q, \Phi\}$, припустимо, що $\Omega \ll \omega$, де Ω — характерна частота, яка характеризує динаміку пари змінних $\{q, \Phi\}$. Будемо вважати, що змінні $\{\delta, a\}$

набагато швидші за $\{q,\Phi\}$; швидкі змінні можна виразити через повільні наступним чином

$$\begin{aligned} \delta\left(t\right) &= \delta\left[\Phi\left(t\right)\right] \approx \frac{1}{\sqrt{1+u\frac{\pi}{2}\varkappa\sin\Phi\left(t\right)}}, \\ a\left(t\right) &= a\left[\Phi\left(t\right)\right] \approx -\delta\sigma - u\frac{\pi}{4}p\beta\varkappa\sin\Phi\left(t\right). \end{aligned} \tag{A.3}$$

Врахувавши запис швидких змінних (A.3) через повільні, ми можемо представити, в наближенні $\alpha^2 \ll 1$, $a\alpha \ll 1$, $\beta^2 \ll 1$, рівняння (3.50a) та (3.50b) у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{q} - \alpha p\delta_0\dot{\Phi} &= u - \pi\varkappa\sin\Phi, \\ \alpha p\dot{q} + \delta_0\dot{\Phi} &= up\left(\beta-\beta^{\star}\right). \end{aligned} \tag{A.4}$$

Характеристичну частоту Ω можна знайти для системи з малою кривиною. У граничному випадку $\varkappa \to 0$ система рівнянь (A.4) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \dot{q} - \alpha p\delta_0\dot{\Phi} &= u, \\ \alpha p\dot{q} + \delta_0\dot{\Phi} &= up\left(\beta-\beta^{\star}\right), \end{aligned} \tag{A.5}$$

яка подібна системі рівнянь для руху доменної стінки під дією спін-поляризованого струму в прямому дроті, отриманою Яном та ін. [133]. Відмінність полягає в наявності ефективного зсуву параметра неадіабатичності $\beta \to \beta - \beta^{\star}$. Система рівнянь (A.5) має розв'язок у вигляді рівномірного руху доменної стінки $q = vt$ та $\Phi = \Omega t$

$$v \approx u, \qquad \Omega \approx p\frac{u}{\delta_0}\left(\beta-\beta^{\star}-\alpha\right). \tag{A.6}$$

Для того, щоб врахувати кривину, ми врахуємо її як мале збудження яке призводить до відхилень положення доменної стінки $q = vt + \tilde{q}(\varkappa,t)$ та її фази $\Phi = \Omega t + \tilde{\Phi}(\varkappa,t)$. Підставляючи ці вирази в рівняння (A.4) та врахувавши (A.6), отримаємо

$$\dot{\tilde{q}} = \pi\varkappa\sqrt{1+\frac{u^2}{4}}\cos\left(\Omega t+\varphi_q\right), \quad \dot{\tilde{\Phi}} = \pi\varkappa\sqrt{\alpha^2+\frac{u^2}{4}(\beta-\alpha)^2}\sin\left(\Omega t+\varphi_\Phi\right),$$
$$\mathrm{tg}\varphi_q = p\frac{2}{u}, \quad \mathrm{tg}\varphi_\Phi = p\frac{u}{2}\frac{\beta-\alpha}{\alpha}. \tag{A.7}$$

З отриманого результату (A.7) видно, що кривина вносить осциляції в частоту Ω та швидкість рівномірного руху доменної стінки v. Представлені результат дозволяють оцінити верхню границю для характерної частоти Ω у випадку великих струмів u.

Припущення про те, що характеристична частота пари змінних $\{\delta,a\}$ набагато більша за частоту пари $\{q,\Phi\}$, під час розділення змінних у системі рівнянь (3.50), враховуючи (A.2) та (A.6), може бути записане наступним чином

$$u|\beta-\beta^\star-\alpha| \ll \frac{2}{c}.$$

Отриманий вираз справедливий в силу малості параметрів релаксації $\alpha \ll 1$, неадіабатичності $\beta \ll 1$ та ефективного параметра неадіабатичності $\beta^\star \ll 1$. Отже, динаміку доменної стінки у магнітній спіралі можна описати системою рівнянь (A.4).

Б Рівняння руху для доменної стінки під дією ефективного поля Рашби

> У даному підрозділі наведено розрахунок динаміки поперечної доменної стінки у тривимірній спіралі під дією ефективного поля Рашби. Опубліковано в роботі[22].

Розглянемо тривимірну магнітну спіраль, форма якої визначається рівняннями (2.3) з центральною лінією (3.3). Динаміку поперечних доменних стінок ми будемо досліджувати у магнетику (3.4) з легко-тангенціальною анізотропією. Щоб уникнути відхилення вектора намагніченості від тангенціального напрямку, ми виконаємо поворот вектора намагніченості в криволінійному базисі (2.1) навколо вектора нормалі на кут (3.10)

$$\boldsymbol{m} = U\widetilde{\boldsymbol{m}}, \quad \widetilde{\boldsymbol{m}} = U^{-1}\boldsymbol{m}, \quad \boldsymbol{m} = \left(m_{\mathrm{T}}, m_{\mathrm{N}}, m_{\mathrm{B}}\right), \quad \widetilde{\boldsymbol{m}} = \left(m_1, m_2, m_3\right)^T$$

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta^t & 0 & -\sin\theta^t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta^t & 0 & \cos\theta^t \end{pmatrix}.$$

Внаслідок повороту коефіцієнт ефективної анізотропії діагоналізуєтьсяя до виду

$$\mathscr{E}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{A}} = \mathscr{E}_{\mathrm{an}} + \mathscr{E}_{\mathrm{ex}}^{\mathrm{A}} = \mathcal{K}_{\alpha\beta}^{\mathrm{eff}} m_\alpha m_\beta, \quad \mathcal{K}_{\alpha\beta}^{\mathrm{eff}} = \begin{pmatrix} V_1 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де потенціали V_1 (3.10) та V_2 (3.29) відіграють ролі ефективних коефіцієнтів легковісної та легкоплощиної анізотропії, відповідно. Напрямок легкої вісі спрямований вздовж вектора $\boldsymbol{e}_1$,а напрямок важкої вісі спрямований вздовж $\boldsymbol{e}_2$:

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_{\mathrm{T}}\cos\theta^t + \boldsymbol{e}_{\mathrm{B}}\sin\theta^t, \quad \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_{\mathrm{T}}\sin\theta^t + \boldsymbol{e}_{\mathrm{B}}\cos\theta^t.$$

У повернутій системі координат енергія ефективної взаємодії Дзялошинського-Морії запишеться

$$\mathscr{E}_{\mathrm{ex}}^{\mathrm{DMI}} = \mathscr{D}_1\left(m_2 m_3' - m_3 m_2'\right) + \mathscr{D}_2\left(m_1 m_2' - m_2 m_1'\right),$$

$$\mathscr{D}_1 = 2\sigma\cos\psi + 2\varkappa\sin\psi = 2\sigma\frac{V_0 + \varkappa^2}{\sqrt{V_0^2 + 4\sigma^2\varkappa^2}},$$

$$\mathscr{D}_2 = 2\varkappa\cos\psi - 2\sigma\sin\psi = 2\varkappa\frac{V_0 - \sigma^2}{\sqrt{V_0^2 + 4\sigma^2\varkappa^2}}.$$

Повна енергія магнетика у повернутій системі координат запишеться

$$\mathscr{E} = \left|\boldsymbol{m}'\right|^2 - V_1 m_1^2 + V_2 m_2^2 + \mathscr{D}_1\left(m_2 m_3' - m_3 m_2'\right) + \mathscr{D}_2\left(m_1 m_2' - m_2 m_1'\right), \quad (\text{Б.1})$$

де перший доданок відповідає ізотропному обміну, другий та третій — ефективні анізотропії, а останні два — ефективна взаємодія Дзялошинського—

Морії. Варто відмітити, що запис енергії (Б.1) відповідає двовісному магнетику, в якому присутні два типи взаємодії Дзялошинського—Морії.

У повернутій системі координат одиничний вектор намагніченості ми параметризуємо наступним чином

$$\boldsymbol{m} = \cos\theta\ \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\cos\phi\ \boldsymbol{e}_2 + \sin\theta\sin\phi\ \boldsymbol{e}_3,$$

що дозволяє переписати енергію (Б.1) в кутових змінних

$$\mathscr{E} = \theta'^2 + \sin^2\theta\phi'^2 - V_1\cos^2\theta + V_2\sin^2\theta\cos^2\phi + \mathscr{D}_1\sin^2\theta\phi' + 2\mathscr{D}_2\sin^2\theta\cos\phi\theta'.$$

Динаміку доменної стінки під дією ефективного поля Рашби (3.54) ми будемо досліджувати, використовуючи узагальнену $q-\Phi$ модель [124] (3.42).

Використовуючи модель (3.42), вирази для функції Лагранжа (1.18) та дисипативної функції (1.19), ми можемо отримати ефективні вирази останніх для доменної стінки на спіралі

$$\frac{\mathcal{L}^{\text{DW}}}{2\mathcal{S}\ell_m} = p\Phi\dot{q} - \frac{\mathcal{E}^{\text{DW}}}{2\mathcal{S}\ell_m}, \qquad \frac{\mathcal{F}^{\text{DW}}}{2\mathcal{S}\ell_m} = \frac{\alpha}{2\delta}\left[\dot{q}^2 + \left(\dot{q}a - \dot{\Phi}\delta\right)^2\right] \tag{Б.2a}$$

$$\frac{\mathcal{E}^{\text{DW}}}{2\mathcal{S}\ell_m} = \frac{1}{\delta} + \delta\left[V_1 + \frac{a^2}{\delta^2} + \frac{V_2}{2}\left(1 + \mathfrak{c}_1\cos 2\Phi\right)\right] + a\mathscr{D}_1 - \frac{p}{2}\pi\mathfrak{c}_2\mathscr{D}_2\cos\Phi - phq\sin\theta^t, \tag{Б.2b}$$

$$\mathfrak{c}_1 = \frac{\pi a}{\text{sh}(\pi a)}, \qquad \mathfrak{c}_2 = \frac{\pi(1+a^2)}{\text{ch}(\pi a/2)}$$

У записі для функції Лагранжа та дисипативної функції (Б.2a) враховано, що змінні $\{a,\delta\}$ — жорсткі зміні, які з часом не змінюються; а у виразі для енергії для доменної стінки (Б.2b) — взаємодію намагніченості з ефективним полем Рашби (3.55).

Рівноважному стану доменної стінки з енергією (Б.2b) відповідають параметри:

$$\delta_0 \approx \frac{1}{\sqrt{V_1 - \mathscr{D}_1/4}}, \quad a_0 \approx -\frac{\mathscr{D}_1}{2}\delta_0, \quad \cos\Phi_0 = -p,$$

які в граничному випадку малих параметрів кривини та кручення ($\varkappa,|\sigma| \ll 1$) відповідають стану (3.44).

Функція Лагранжа та дисипативна функція (Б.2) генерують наступну систему рівнянь для змінних $\{q,\Phi\}$

$$\begin{aligned} &\dot{\Phi}\left(p-\alpha a_0\right)+\frac{\alpha}{\delta_0}\dot{q}\left(1+a_0^2\right)=ph\sin\theta^t,\\ &\alpha\delta_0\dot{\Phi}-\dot{q}\left(p+\alpha a_0\right)=\mathfrak{c}_1V_2\delta_0\sin 2\Phi+\frac{p}{2}\mathfrak{c}_2\mathscr{D}_2\sin\Phi. \end{aligned} \tag{Б.3}$$

Система рівнянь (Б.3) має розв'язок у вигляді біжучої хвилі $q = vt$, $\Phi =$ const, зі швидкістю

$$v=\frac{ph\delta_0}{\alpha}\cdot\frac{\sin\theta^t}{1+a_0^2}.$$

Фазу доменної стінки Φ у цьому випадку можна знайти з рівняння:

$$\mathfrak{c}_1V_2\delta_0\sin 2\Phi+\frac{p}{2}\mathfrak{c}_2\mathscr{D}_2\sin\Phi. = -\frac{ph\delta_0}{\alpha}\cdot\frac{\sin\theta^t}{1+a_0^2}\left(p+\eta a_0\right).$$

У граничному випадку малих параметрів кривини та кручення ($\varkappa, |\sigma| \ll 1$) можна отримати

$$v\approx\frac{ph\delta_0}{\alpha}\varkappa\sigma,\quad \Phi\approx\Phi_0+\frac{h\sigma}{\pi\alpha}.$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Albrecht M.* Magnetic multilayers on nanospheres / M. Albrecht, G. Hu, I. L. Guhr et al. // *Nat Mater.* — 2005. — Vol. 4. — Pp. 203–206.

2. *Ulbrich T. C.* Magnetization Reversal in a Novel Gradient Nanomaterial / T. C. Ulbrich, D. Makarov, G. Hu et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 96. — P. 077202.

3. *Balhorn F.* Spin-Wave Interference in Three-Dimensional Rolled-Up Ferromagnetic Microtubes / F. Balhorn, S. Mansfeld, A. Krohn et al. // *Physical Review Letters.* — 2010. — Vol. 104. — P. 037205.

4. *Smith E. J.* Magnetic Microhelix Coil Structures / E. J. Smith, D. Makarov, S. Sanchez et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Vol. 107. — P. 097204.

5. *Streubel R.* Equilibrium magnetic states in individual hemispherical permalloy caps / R. Streubel, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka et al. // *Appl. Phys. Lett.* — 2012. — Vol. 101. — P. 132419.

6. *Streubel R.* Magnetically Capped Rolled-up Nanomembranes / R. Streubel, D. J. Thurmer, D. Makarov et al. // *Nano Letters.* — 2012. — Vol. 12. — Pp. 3961–3966.

7. *Parkin S. S. P.* Magnetic Domain-Wall Racetrack Memory / S. S. P. Parkin, M. Hayashi, L. Thomas // *Science.* — 2008. — Vol. 320. — Pp. 190–194.

8. *Hayashi M.* Current-Controlled Magnetic Domain-Wall Nanowire Shift Register / M. Hayashi, L. Thomas, R. Moriya et al. // *Science.* — 2008. — Vol. 320. — Pp. 209–211.

9. *Bohlens S.* Current controlled random-access memory based on magnetic

vortex handedness / S. Bohlens, B. Krüger, A. Drews et al. // *Appl. Phys. Lett.* — 2008. — Vol. 93. — P. 142508.

10. *Pigeau B.* A frequency-controlled magnetic vortex memory / B. Pigeau, G. de Loubens, O. Klein et al. // *Appl. Phys. Lett.* — 2010. — Vol. 96. — P. 132506.

11. *Yu Y.-S.* Memory-bit selection and recording by rotating fields in vortex-core cross-point architecture / Y.-S. Yu, H. Jung, K.-S. Lee et al. // *Appl. Phys. Lett.* — 2011. — Vol. 98. — P. 052507.

12. *Nakano K.* All-electrical operation of magnetic vortex core memory cell / K. Nakano, D. Chiba, N. Ohshima et al. // *Appl. Phys. Lett.* — 2011. — Vol. 99. — P. 262505.

13. *Allwood D. A.* Submicrometer ferromagnetic NOT gate and shift register / D. A. Allwood, G. Xiong, M. D. Cooke et al. // *Science.* — 2002. — Vol. 296. — Pp. 2003–2006.

14. *Allwood D. A.* Domain wall diodes in ferromagnetic planar nanowires / D. A. Allwood, G. Xiong, R. P. Cowburn // *Applied Physics Letters.* — 2004. — Vol. 85. — P. 2848.

15. *Allwood D. A.* Magnetic domain–wall logic / D. A. Allwood, G. Xiong, C. C. Faulkner et al. // *Science.* — 2005. — Vol. 309. — Pp. 1688–1692.

16. *Bryan M. T.* Symmetric and asymmetric domain wall diodes in magnetic nanowires / M. T. Bryan, T. Schrefl, D. A. Allwood // *Applied Physics Letters.* — 2007. — Vol. 91. — P. 142502.

17. *Xu Y.* Spin-Transfer Torques in Antiferromagnetic Metals from First Principles / Y. Xu, S. Wang, K. Xia // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 100. — P. 226602.

18. *Streubel R.* Magnetic vortices on closely packed spherically curved surfaces / R. Streubel, D. Makarov, F. Kronast et al. // *Phys. Rev. B.* — 2012. — Vol. 85. — P. 174429.

19. *Yershov K. V.* Curvature-induced domain wall pinning / K. V. Yershov, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, Y. Gaididei // *Phys. Rev. B.* — 2015. — Vol. 92. — P. 104412.

20. *Sheka D. D.* Torsion-induced effects in magnetic nanowires / D. D. Sheka, V. P. Kravchuk, K. V. Yershov, Y. Gaididei // *Phys. Rev. B.* — 2015. — Vol. 92. — P. 054417.

21. *Yershov K. V.* Curvature and torsion effects in spin-current driven domain wall motion / K. V. Yershov, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, Y. Gaididei // *Phys. Rev. B.* — 2016. — Vol. 93. — P. 094418.

22. *Pylypovskyi O. V.* Rashba Torque Driven Domain Wall Motion in Magnetic Helices / O. V. Pylypovskyi, D. D. Sheka, V. P. Kravchuk, K. V. Yershov et al. // *Scientific Reports.* — 2016. — Vol. 6. — P. 23316.

23. *Yershov K. V.* Controllable vortex chirality switching on spherical shells / K. V. Yershov, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, Y. Gaididei // *Journal of Applied Physics.* — 2015. — Vol. 117. — P. 083908.

24. *Yershov K. V.* Curvature Effects in Vortex Chirality Switching / K. V. Yershov, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, Y. Gaididei // Proceedings of the X International Conference «Electronics and Applied Physics». — 2014. — Pp. 40–41.

25. *Yershov K. V.* Control of Chirality of Vortex Magnetization on Hemispherical Nanoshells / K. V. Yershov, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, Y. Gaididei //

Proceedings of the VI Young Scientists Conference «Problems of Theoretical Physics». — 2014. — P. 59.

26. *Yershov K. V.* Domain Wall Dynamics in Parabolic Wire / K. V. Yershov, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka et al. // International Conference on Magnetism. Book of Abstracts. — 2015. — Pp. Mo.K–P23.

27. *Yershov K. V.* Torsion Effects in a Helix Nanowire with Easy-Tangential Anisotropy / K. V. Yershov, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, Y. Gaididei // Proceedings CD of International Young Scientists Forum on Applied Physics. — 2015. — Pp. MMM–5.

28. *Yershov K. V.* Domain Wall Dynamics at the Local Wire Bend / K. V. Yershov, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, Y. Gaididei // Proceedings CD of International Young Scientists Forum on Applied Physics. — 2015. — Pp. MMM–4.

29. *Yershov K. V.* Curvature induced domain wall pinning at a local wire bend / K. V. Yershov, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, Y. Gaididei // Bogolyubov Conference «Problems of Theoretical Physics». Book of Abstracts. — 2016. — P. O.20.

30. *Pylypovskyi O. V.* Structure and Dynamics of Domain Walls in Magnetic Helices Under the Action of the Rashba Torque, / O. V. Pylypovskyi, D. D. Sheka, V. P. Kravchuk, K. V. Yershov et al. // Bogolyubov Conference «Problems of Theoretical Physics». Book of Abstracts. — 2016. — P. O.22.

31. *Pylypovskyi O. V.* Domain Wall Motion in Magnetic Helices Under Actionion of Rashba Torque / O. V. Pylypovskyi, D. D. Sheka, V. P. Kravchuk, K. V. Yershov et al. // VII International Conference for Young Scientists «Low Temperature Physics». Book of Abstarcts. — 2016. — P. 75.

32. *Yershov K. V.* Current Driven Domain Wall Motion in Magnetic Helix / K. V. Yershov, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, Y. Gaididei // VII International Conference for Young Scientists «Low Temperature Physics». Book of Abstarcts. — 2016. — P. 77.

33. *Yershov K. V.* Torsion induced negative domain wall mobility in helix nanowires / K. V. Yershov, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, Y. Gaididei // VII Young Scientists Conference «Problems of Theoretical Physics». Book of Abstracts. — 2016. — P. ?

34. *Ахиезер А. И.* Спиновые волны / А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский. — М.: Наука. — 1967. — 368 с.

35. *Браун У. Ф.* Микромагнетизм / У. Ф. Браун; Под. ред. А. Г. Гуревича. — Москва: Наука. — 1979. — 159 с.

36. *Нагаев Э. Л.* Магнетики со сложными обменными взаимодействиями / Э. Л. Нагаев. — М.: Наука. — 1988. — 232 с.

37. *Landau L. D.* On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies / L. D. Landau, E. M. Lifshitz // *Phys. Zs. Sowjet.; Reproduces in in Ukr. J. Phys. 53 25-35 (2008).* — 1935. — Vol. 8. — Pp. 153–169.

38. *Kittel C.* Physical Theory of Ferromagnetic Domains / C. Kittel // *Rev. Mod. Phys.* — 1949. — Vol. 21. — Pp. 541–583.

39. *Косевич А. М.* Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны / А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев. — Киев: Наук. думка. — 1983. — 192 с.

40. *Dzialoshinskii I. E.* Thermodynamic theory of “weak” ferromagnetism in

antiferromagnetic substances / I. E. Dzialoshinskii // *Sov. Phys. JETP.* — 1957. — Vol. 5. — Pp. 1259–1272.

41. *Dzyaloshinsky I.* A thermodynamic theory of “weak” ferromagnetism of antiferromagnetics / I. Dzyaloshinsky // *Journal of Physics and Chemistry of Solids.* — 1958. — Vol. 4. — Pp. 241 – 255.
42. *Moriya T.* Anisotropic Superexchange Interaction and Weak Ferromagnetism / T. Moriya // *Phys. Rev.* — 1960. — Vol. 120. — Pp. 91–98.
43. *Thiaville A.* Dynamics of Dzyaloshinskii domain walls in ultrathin magnetic films / A. Thiaville, S. Rohart, É. Jué et al. // *EPL (Europhysics Letters).* — 2012. — Vol. 100. — P. 57002.
44. *Bogdanov A.* Chiral Symmetry Breaking in Magnetic Thin Films and Multilayers / A. Bogdanov, U. Rößler // *Physical Review Letters.* — 2001. — Vol. 87. — P. 037203.
45. *Rößler U. K.* Spontaneous skyrmion ground states in magnetic metals / U. K. Rößler, A. N. Bogdanov, C. Pfleiderer // *Nature.* — 2006. — Vol. 442. — Pp. 797–801.
46. *Ландау Л. Д.* Теоретическая физика: Учебное пособие в 10 томах. Т. V. Статистическая физика. Часть I / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц; Под. ред. Л. П. Питаевского. — М.: Наука. — 1976. — 584 с.
47. *Guimarães A. P.* Principles of Nanomagnetism / A. P. Guimarães. NanoScience and Technology. — Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg. — 2009. — 221 pp.
48. *Gioia G.* Micromagnetics of very thin films / G. Gioia, R. D. James // *Proc. R. Soc. Lond. A.* — 1997. — Vol. 453. — Pp. 213–223.

49. *Slastikov V. V.* Reduced models for ferromagnetic nanowires / V. V. Slastikov, C. Sonnenberg // *IMA Journal of Applied Mathematics.* — 2012. — Vol. 77. — Pp. 220–235.

50. *Ландау Л. Д.* Теоретическая физика: Учебное пособие в 10 томах. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц; Под. ред. Л. П. Питаевского. — М.: Наука. — 1982. — 620 с.

51. *Aharoni A.* Introduction to the theory of Ferromagnetism / A. Aharoni. — Oxford University Press. — 1996. — 319 pp.

52. *Hubert A.* Magnetic domains: The analysis of magnetic microstructures / A. Hubert, R. Schäfer. — Berlin: Springer Berlin Heidelberg. — 2009. — 696 pp.

53. *Feldtkeller E.* Struktur und Energie von Blochlinien in dünnen ferromagnetischenSchichten / E. Feldtkeller, H. Thomas // *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter.* — 1965. — Vol. 4. — Pp. 8–14.

54. Handbook of Magnetism and Advanced Magnetic Materials. Vol.2. Micromagnetism / Ed. by H. Kronmüller, S. Parkin. — Wiley-Interscience. — 2007.

55. *Gilbert T.* A phenomenological theory of damping in ferromagnetic materials / T. Gilbert // *IEEE Transactions on Magnetics.* — 2004. — Vol. 40. — Pp. 3443 – 3449.

56. *Döring W.* Über die Trägheit der Wände zwischen Weißchen Bezirken / W. Döring // *Zeitschrift für Naturforschung.* — 1948. — Vol. 3A. — Pp. 373–379.

57. *Thiaville A.* Domain wall dynamics in nanowires / A. Thiaville, J. Garcia, J. Miltat // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials.* — 2002. — Vol. 242-245. — Pp. 1061 – 1063.

58. *Gaididei Y.* Curvature Effects in Thin Magnetic Shells / Y. Gaididei, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka // *Phys. Rev. Lett.* — 2014. — Vol. 112. — P. 257203.

59. *Sheka D. D.* Curvature effects in statics and dynamics of low dimensional magnets / D. D. Sheka, V. P. Kravchuk, Y. Gaididei // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* — 2015. — Vol. 48. — P. 125202.

60. *Landeros P.* Domain wall motion on magnetic nanotubes / P. Landeros, A. S. Núñez // *Journal of Applied Physics.* — 2010. — Vol. 108. — P. 033917.

61. *Saxena A.* Deformable curved magnetic surfaces / A. Saxena, R. Dandoloff, T. Lookman // *Physica A: Statistical and Theoretical Physics.* — 1998. — Vol. 261. — Pp. 13–25.

62. *Carvalho-Santos V. L.* Topological spin excitations on a rigid torus / V. L. Carvalho-Santos, A. R. Moura, W. A. Moura-Melo, A. R. Pereira // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 77. — P. 134450.

63. *Carvalho-Santos V. L.* Miniaturization of vortex-comprising system using ferromagnetic nanotori / V. L. Carvalho-Santos, W. A. Moura-Melo, A. R. Pereira // *J. Appl. Phys.* — 2010. — Vol. 108. — P. 094310.

64. *Freitas W. A.* Heisenberg spins on a cone: an interplay between geometry and magnetism / W. A. Freitas, W. A. Moura-Melo, A. Pereira // *Physics Letters A.* — 2005. — Vol. 336. — Pp. 412–422.

65. *Moura-Melo W.* Geometrical pinning of magnetic vortices induced by a deficit angle on a surface: Anisotropic spins on a conic space background / W. Moura-Melo, A. Pereira, L. Myl, A. Pires // *Physics Letters A.* — 2007. — Vol. 360. — Pp. 472–480.

66. *Kravchuk V. P.* Out-of-surface vortices in spherical shells / V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, R. Streubel et al. // *Phys. Rev. B.* — 2012. — Vol. 85. — P. 144433.

67. *Pylypovskyi O. V.* Coupling of Chiralities in Spin and Physical Spaces: The Möbius Ring as a Case Study / O. V. Pylypovskyi, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2015. — Vol. 114. — P. 197204.

68. *Gaididei Y.* Magnetization in narrow ribbons: curvature effects / Y. Gaididei, A. Goussev, V. P. Kravchuk et al. // *ArXiv e-prints.* — 2017. (`http://arxiv.org/abs/1701.01691`).

69. *Jensen H.* Quantum mechanics with constraints / H. Jensen, H. Koppe // *Annals of Physics.* — 1971. — Vol. 63. — Pp. 586–591.

70. *da Costa R. C. T.* Quantum mechanics of a constrained particle / R. C. T. da Costa // *Physical Review A.* — 1981. — Vol. 23. — Pp. 1982–1987.

71. *Kaplan L.* Quantizing constrained systems / L. Kaplan, N. T. Maitra, E. J. Heller // *Phys. Rev. A.* — 1997. — Vol. 56. — Pp. 2592–2599.

72. *Wang Y.-L.* Quantum particle confined to a thin-layer volume: Non-uniform convergence toward the curved surface / Y.-L. Wang, H.-S. Zong // *Annals of Physics.* — 2016. — Vol. 364. — Pp. 68–78.

73. *Belov V. V.* Asymptotic Solutions of Nonrelativistic Equations of Quantum Mechanics in Curved Nanotubes: I. Reduction to Spatially One-Dimensional Equations / V. V. Belov, S. Y. Dobrokhotov, T. Y. Tudorovskii // *Theoretical and Mathematical Physics.* — 2004. — Vol. 141. — Pp. 1562–1592.

74. *Belov V. V.* A generalized adiabatic principle for electron dynamics in curved nanostructures / V. V. Belov, S. Y. Dobrokhotov, V. P. Maslov, T. Y. Tudorovskiĭ // *Physics-Uspekhi.* — 2005. — Vol. 48. — P. 962.

75. *Belov V. V.* Integrable models of the longitudinal motion of electrons in curved 3D nanotubes / V. V. Belov, S. V. Nikolaev // *Doklady Mathematics.* — 2007. — Vol. 75. — Pp. 147–152.

76. *Berry M. V.* Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes / M. V. Berry // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* — 1984. — Vol. 392. — Pp. 45–57.

77. *Hertel R.* Curvature–induced magnetochirality / R. Hertel // *SPIN.* — 2013. — Vol. 03. — P. 1340009.

78. *Streubel R.* Magnetism in curved geometries / R. Streubel, P. Fischer, F. Kronast et al. // *J. Phys. D: Appl. Phys.* — 2016. — Vol. 49. — P. 363001.

79. *Landeros P.* Reversal modes in magnetic nanotubes / P. Landeros, S. Allende, J. Escrig et al. // *Applied Physics Letters.* — 2007. — Vol. 90. — P. 102501.

80. *Landeros P.* Equilibrium states and vortex domain wall nucleation in ferromagnetic nanotubes / P. Landeros, O. J. Suarez, A. Cuchillo, P. Vargas // *Phys. Rev. B.* — 2009. — Vol. 79. — P. 024404.

81. *Landeros P.* Magnetostatic fields in tubular nanostructures / P. Landeros, P. R. GuzmΓЎn, R. Soto-Garrido, J. Escrig // *Journal of Physics D: Applied Physics.* — 2009. — Vol. 42. — P. 225002.

82. *González A.* Spin wave spectrum of magnetic nanotubes / A. González, P. Landeros, Álvaro S. Núñez // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials.* — 2010. — Vol. 322. — Pp. 530 – 535.

83. *López-López J. A.* Role of anisotropy on the domain wall properties of ferromagnetic nanotubes / J. A. López-López, D. Cortés-Ortuño, P. Lan-

deros // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials.* — 2012. — Vol. 324. — Pp. 2024 – 2029.

84. *Kläui M.* Head-to-head domain walls in magnetic nanostructures / M. Kläui // *Journal of Physics: Condensed Matter.* — 2008. — Vol. 20. — P. 313001.

85. *Kravchuk V. P.* Topologically stable magnetization states on a spherical shell: Curvature-stabilized skyrmions / V. P. Kravchuk, U. K. Rößler, O. M. Volkov et al. // *Phys. Rev. B.* — 2016. — Vol. 94. — P. 144402.

86. *Kläui M.* Vortex formation in narrow ferromagnetic rings / M. Kläui, C. A. F. Vaz, L. Lopez-Diaz, J. A. C. Bland // *Journal of Physics: Condensed Matter.* — 2003. — Vol. 15. — Pp. R985–R1024.

87. *Sloika M. I.* Geometry induced phase transitions in magnetic spherical shell / M. I. Sloika, D. D. Sheka, V. P. Kravchuk et al. // *ArXiv e-prints.* — 2016. (`http://arxiv.org/abs/1609.08555`).

88. *Yoneya M.* Domain-wall structure of a classical Heisenberg ferromagnet on a Möbius strip / M. Yoneya, K. Kuboki, M. Hayashi // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 78. — P. 064419.

89. *Dietrich C.* Influence of perpendicular magnetic fields on the domain structure of permalloy microstructures grown on thin membranes / C. Dietrich, R. Hertel, M. Huber et al. // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 77. — P. 174427.

90. *Sloika M. I.* Curvature induced chirality symmetry breaking in vortex core switching phenomena / M. I. Sloika, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, Y. Gaididei // *Applied Physics Letters.* — 2014. — Vol. 104. — P. 252403.

91. *Sheka D. D.* Equilibrium states of soft magnetic hemispherical shell /

D. D. Sheka, V. P. Kravchuk, M. I. Sloika, Y. Gaididei // *SPIN.* — 2013. — Vol. 3. — P. 1340003.

92. *Kim J.-S.* Synchronous precessional motion of multiple domain walls in a ferromagnetic nanowire by perpendicular field pulses / J.-S. Kim, M.-A. Mawass, A. Bisig et al. // *Nature Communications.* — 2014. — Vol. 5. — P. 3429.

93. *Otálora J.* Breaking of chiral symmetry in vortex domain wall propagation in ferromagnetic nanotubes / J. Otálora, J. López-López, P. Landeros et al. // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials.* — 2013. — Vol. 341. — Pp. 86–92.

94. *Yan M.* Fast domain wall dynamics in magnetic nanotubes: Suppression of Walker breakdown and Cherenkov-like spin wave emission / M. Yan, C. Andreas, A. Kákay et al. // *Applied Physics Letters.* — 2011. — Vol. 99. — P. 122505.

95. *Yan M.* Chiral symmetry breaking and pair-creation mediated Walker breakdown in magnetic nanotubes / M. Yan, C. Andreas, A. Kákay et al. // *Applied Physics Letters.* — 2012. — Vol. 100. — P. 252401.

96. *Otálora J.* Chirality switching and propagation control of a vortex domain wall in ferromagnetic nanotubes / J. Otálora, J. López-López, P. Vargas, P. Landeros // *Applied Physics Letters.* — 2012. — Vol. 100. — P. 072407.

97. *Otálora J.* Domain wall manipulation in magnetic nanotubes induced by electric current pulses / J. Otálora, J. López-López, N. n. A.S., P. Landeros // *Journal of Physics: Condensed Matter.* — 2012. — Vol. 24. — P. 436007.

98. *Yan P.* All-Magnonic Spin-Transfer Torque and Domain Wall Propagation /

P. Yan, X. S. Wang, X. R. Wang // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Vol. 107. — P. 177207.

99. *Yan P.* Magnonic Domain Wall Heat Conductance in Ferromagnetic Wires / P. Yan, G. E. W. Bauer // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — Vol. 109. — P. 087202.

100. *Schryer N. L.* The motion of 180^0 domain walls in uniform dc magnetic fields / N. L. Schryer, L. R. Walker // *Journal of Applied Physics.* — 1974. — Vol. 45. — Pp. 5406–5421.

101. *Yan M.* Spin-Cherenkov effect and magnonic Mach cones / M. Yan, A. Kákay, C. Andreas, R. Hertel // *Phys. Rev. B.* — 2013. — Vol. 88. — P. 220412.

102. *Zakeri K.* Asymmetric Spin-Wave Dispersion on Fe(110): Direct Evidence of the Dzyaloshinskii-Moriya Interaction / K. Zakeri, Y. Zhang, J. Prokop et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Vol. 104. — P. 137203.

103. *Cortes-Ortuno D.* Influence of the Dzyaloshinskii-Moriya interaction on the spin-wave spectra of thin films / D. Cortes-Ortuno, P. Landeros // *Journal of Physics: Condensed Matter.* — 2013. — Vol. 25. — P. 156001.

104. *Zakeri K.* Elementary spin excitations in ultrathin itinerant magnets / K. Zakeri // *Physics Reports.* — 2014. — Vol. 545. — Pp. 47–93.

105. *Otálora J. A.* Curvature-Induced Asymmetric Spin-Wave Dispersion / J. A. Otálora, M. Yan, H. Schultheiss et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2016. — Vol. 117. — P. 227203.

106. *Frenet F.* Sur les courbes à double courbure / F. Frenet // *Journal de mathématiques pures et appliquées.* — 1852. — Vol. 17. — Pp. 437–447.

107. *Serret J. A.* Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure / J. A. Serret // *Journal de mathématiques pures et appliquées.* — 1851. — Vol. 16. — Pp. 193–207.

108. *Дубровин Б. А.* Современная геометрия: методы и приложения / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. — Наука. — 1986. — 760 с.

109. *Slonczewski J. C.* Dynamics of magnetic domain walls / J. C. Slonczewski // *Int. J. Magn.* — 1972. — Vol. 2. — Pp. 85–97.

110. *Thiele A. A.* Steady–state motion of magnetic of magnetic domains / A. A. Thiele // *Phys. Rev. Lett.* — 1973. — Vol. 30. — Pp. 230–233.

111. *Slonczewski J. C.* Theory of domain-wall motion in magnetic films and platelets / J. C. Slonczewski // *Journal of Applied Physics.* — 1973. — Vol. 44. — P. 1759.

112. *Malozemoff A. P.* Magnetic domain walls in bubble materials / A. P. Malozemoff, J. C. Slonzewski. — New York: Academic Press. — 1979.

113. *Thiaville A.* Domain wall motion by spin-polarized current: a micromagnetic study / A. Thiaville, Y. Nakatani, J. Miltat, N. Vernier // *Journal of Applied Physics.* — 2004. — Vol. 95. — Pp. 7049–7051.

114. *Thiaville A.* Micromagnetic understanding of current-driven domain wall motion in patterned nanowires / A. Thiaville, Y. Nakatani, J. Miltat, Y. Suzuki // *Europhysics Letters (EPL).* — 2005. — Vol. 69. — Pp. 990–996.

115. Spin dynamics in confined magnetic structures III / Ed. by B. Hillebrands, A. Thiaville. — Berlin: Springer. — 2006. — Vol. 101 of *Topics in Applied Physics.* — 345 pp.

116. *Thiaville A.* Bloch point mediated vortex switching / A. Thiaville, J.-M. Garcia, J. Miltat // INTERMAG Europe 2002. Digest of Technical Papers. — 2002. — P. GV7.

117. *Mougin A.* Domain wall mobility, stability and Walker breakdown in magnetic nanowires / A. Mougin, M. Cormier, J. P. Adam et al. // *EPL (Europhysics Letters).* — 2007. — Vol. 78. — P. 57007.

118. *Khvalkovskiy A. V.* High Domain Wall Velocities due to Spin Currents Perpendicular to the Plane / A. V. Khvalkovskiy, K. A. Zvezdin, Y. V. Gorbunov et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — Vol. 102. — P. 067206.

119. *Fischbacher T.* A Systematic Approach to Multiphysics Extensions of Finite-Element-Based Micromagnetic Simulations: Nmag / T. Fischbacher, M. Franchin, G. Bordignon, H. Fangohr // *IEEE Trans. Magn.* — 2007. — Vol. 43. — Pp. 2896–2898.

120. Пермалой ($Ni_{81}Fe_{19}$): константа обмінної взаємодії — $A = 13$ пДж/м, намагніченість насичення — $M_s = 860$ кА/м. Наведенні параметри відповідають обмінній довжині $\ell_{\text{ex}} \approx 3.7$ нм.

121. NIST Handbook of Mathematical Functions / Ed. by F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, C. W. Clark. — New York, NY: Cambridge University Press. — 2010.

122. *Ivanov B. A.* Magnon modes and magnon-vortex scattering in two-dimensional easy-plane ferromagnets / B. A. Ivanov, H. J. Schnitzer, F. G. Mertens, G. M. Wysin // *Phys. Rev. B.* — 1998. — Vol. 58. — Pp. 8464–8474.

123. *Sheka D. D.* Amplitudes for magnon scattering by vortices in two–

dimensional weakly easy–plane ferromagnets / D. D. Sheka, I. A. Yastremsky, B. A. Ivanov et al. // *Phys. Rev. B.* — 2004. — Vol. 69. — P. 054429.

124. *Kravchuk V. P.* Influence of Dzialoshinskii–Moriya interaction on static and dynamic properties of a transverse domain wall / V. P. Kravchuk // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials.* — 2014. — Vol. 367. — P. 9.

125. *Obata K.* Current-induced domain wall motion in Rashba spin-orbit system / K. Obata, G. Tatara // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 77. — P. 214429.

126. *Rashba E. I.* Symmetry of energy bands in crystals of wurtzite type: II. Symmetry of bands including spin-orbit interaction / E. I. Rashba, V. I. Sheka // *Fiz. Tverd. Tela: Collected Papers.* — 1959. — Vol. 2. — Pp. 162–76.

127. *Bihlmayer G.* Focus on the Rashba effect / G. Bihlmayer, O. Rader, R. Winkler // *New Journal of Physics.* — 2015. — Vol. 17. — P. 050202.

128. *Bazaliy Y. B.* Modification of the Landau–Lifshitz equation in the presence of a spin–polarized current in colossal- and giant–magnetoresistive materials / Y. B. Bazaliy, B. A. Jones, S.-C. Zhang // *Phys. Rev. B.* — 1998. — Vol. 57. — Pp. R3213–R3216.

129. *Zhang S.* Roles of Nonequilibrium Conduction Electrons on the Magnetization Dynamics of Ferromagnets / S. Zhang, Z. Li // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 93. — P. 127204.

130. *Thiaville A.* Domain-Wall Dynamics in Nanowires and Nanostrips / A. Thiaville, Y. Nakatani // Spin dynamics in confined magnetic structures III / Ed. by B. Hillebrands, A. Thiaville. — Berlin: Springer, 2006. — Vol. 101 of *Topics in Applied Physics.* — Pp. 161–206.

131. *Khvalkovskiy A. V.* Matching domain-wall configuration and spin-orbit

torques for efficient domain-wall motion / A. V. Khvalkovskiy, V. Cros, D. Apalkov et al. // *Phys. Rev. B.* — 2013. — Vol. 87. — P. 020402.

132. *Qaiumzadeh A.* Spin-orbit torques in two-dimensional Rashba ferromagnets / A. Qaiumzadeh, R. A. Duine, M. Titov // *Phys. Rev. B.* — 2015. — Vol. 92. — P. 014402.

133. *Yan M.* Beating the Walker Limit with Massless Domain Walls in Cylindrical Nanowires / M. Yan, A. Kákay, S. Gliga, R. Hertel // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Vol. 104. — P. 057201.

134. *Hubert A.* Magnetic domains: the analysis of magnetic microstructures / A. Hubert, R. Schäfer. — Berlin: Springer–Verlag. — 1998. — 696 pp.

135. *Soares M. M.* Magnetic vortices in tridimensional nanomagnetic caps observed using transmission electron microscopy and magnetic force microscopy / M. M. Soares, E. de Biasi, L. N. Coelho et al. // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 77. — P. 224405.

136. *Hertel R.* Magnetic nanostructures: Vortex states *á la carte* / R. Hertel // *Nat Nano.* — 2013. — Vol. 8. — Pp. 318–320.

137. *Van Waeyenberge B.* Magnetic vortex core reversal by excitation with short bursts of an alternating field / B. Van Waeyenberge, A. Puzic, H. Stoll et al. // *Nature.* — 2006. — Vol. 444. — Pp. 461–464.

138. *Hertel R.* Ultrafast Nanomagnetic Toggle Switching of Vortex Cores / R. Hertel, S. Gliga, M. Fähnle, C. M. Schneider // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 98. — P. 117201.

139. *Kravchuk V. P.* Controlled vortex core switching in a magnetic nanodisk by a rotating field / V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, Y. Gaididei, F. G. Mertens // *J. Appl. Phys.* — 2007. — Vol. 102. — P. 043908.

140. *Caputo J. G.* Vortex polarity switching by a spin-polarized current / J. G. Caputo, Y. Gaididei, F. G. Mertens, D. D. Sheka // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 98. — P. 056604.

141. *Yamada K.* Electrical switching of the vortex core in a magnetic disk / K. Yamada, S. Kasai, Y. Nakatani et al. // *Nat Mater.* — 2007. — Vol. 6. — Pp. 270–273.

142. *Curcic M.* Polarization Selective Magnetic Vortex Dynamics and Core Reversal in Rotating Magnetic Fields / M. Curcic, B. Van Waeyenberge, A. Vansteenkiste et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 101. — P. 197204.

143. *Kammerer M.* Magnetic vortex core reversal by excitation of spin waves / M. Kammerer, M. Weigand, M. Curcic et al. // *Nat Commun.* — 2011. — Vol. 2. — Pp. 279–.

144. *Jaafar M.* Control of the chirality and polarity of magnetic vortices in triangular nanodots / M. Jaafar, R. Yanes, D. Perez de Lara et al. // *Phys. Rev. B.* — 2010. — Vol. 81. — P. 054439.

145. *Uhlíř V.* Dynamic switching of the spin circulation in tapered magnetic nanodisks / V. Uhlíř, M. Urbánek, L. Hladík et al. // *Nat Nano.* — 2013. — Vol. 8. — Pp. 341–346.

146. *Lua S. Y. H.* Chirality control and switching of vortices formed in hexagonal shaped ferromagnetic elements / S. Y. H. Lua, S. S. Kushvaha, Y. H. Wu et al. // *Applied Physics Letters.* — 2008. — Vol. 93. — P. 122504.

147. *Gaididei Y.* Controllable switching of vortex chirality in magnetic nanodisks by a field pulse / Y. Gaididei, D. D. Sheka, F. G. Mertens // *Appl. Phys. Lett.* — 2008. — Vol. 92. — P. 012503.

148. *Antos R.* Simulations of the dynamic switching of vortex chirality in magnetic nanodisks by a uniform field pulse / R. Antos, Y. Otani // *Phys. Rev. B.* — 2009. — Vol. 80. — P. 140404.

149. *Choi Y.-S.* Out-of-plane current controlled switching of the fourfold degenerate state of a magnetic vortex in soft magnetic nanodots / Y.-S. Choi, M.-W. Yoo, K.-S. Lee et al. // *Appl. Phys. Lett.* — 2010. — Vol. 96. — P. 072507.

150. *Kravchuk V. P.* Equilibrium magnetisation structures in ferromagnetic nanorings / V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, Y. B. Gaididei // *J. Magn. Magn. Mater.* — 2007. — Vol. 310. — Pp. 116–125.

151. *Sheka D. D.* Comment on "Magnon wave forms in the presence of a soliton in two-dimensional antiferromagnets with a staggered field" / D. D. Sheka // *Phys. Rev. B.* — 2007. — Vol. 75. — P. 107401.

152. *Lee K.-S.* Oppositely rotating eigenmodes of spin-polarized current-driven vortex gyrotropic motions in elliptical nanodots / K.-S. Lee, Y.-S. Yu, Y.-S. Choi et al. // *Appl. Phys. Lett.* — 2008. — Vol. 92. — P. 192513.

153. *Höllinger R.* Statics and fast dynamics of nanomagnets with vortex structure / R. Höllinger, A. Killinger, U. Krey // *J. Magn. Magn. Mater.* — 2003. — Vol. 261. — Pp. 178–189.

154. *Volkov O. M.* Spin-transfer torque and current-induced vortex superlattices in nanomagnets / O. M. Volkov, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, Y. Gaididei // *Phys. Rev. B.* — 2011. — Vol. 84. — P. 052404.