

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

Руденок Ігор Валентинович

УДК 530.145, 538.9

**НАРОДЖЕННЯ ЧАСТИНОК, ГЕНЕРАЦІЯ ЛЕПТОННОЇ АСИМЕТРІЇ
ТА ЕВОЛЮЦІЯ МАГНІТНИХ ПОЛІВ У РАННЬОМУ ВСЕСВІТІ**

01.04.02 – теоретична фізика

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико - математичних наук

Науковий керівник
Вільчинський Станіслав Йосипович
доктор фіз.-мат. наук
професор

Київ — 2017

ЗМІСТ

Перелік умовних скорочень	4
Вступ	5
Розділ 1 НАРОДЖЕННЯ ЧАСТИНОК У ПІСЛЯІНФЛЯЦІЙНОМУ ВСЕ-СВІТІ	15
1.1 Вступ	15
1.2 Проблеми теорії Великого вибуху	17
1.3 Модель Старобінського	22
1.4 Попередній розігрів Всесвіту	25
1.4.1 Загальні питання теорії попереднього розігріву	25
1.4.2 Параметричний резонанс: загальна теорія	28
1.4.3 Параметричний резонанс для моделі Старобінського	31
1.4.4 Народження бозонів	37
1.4.5 Народження ферміонів	46
1.4.6 Народження інфлатону	49
1.5 Висновки	51
Розділ 2 ГЕНЕРАЦІЯ ЛЕПТОННОЇ АСИМЕТРІЇ У МОДЕЛІ ЗІ СТЕ-РИЛЬНИМИ НЕЙТРИНО	53
2.1 Мотивація до створення моделі νMSM	53
2.2 Модель νMSM . Загальні властивості моделі та лептонна асиметрія в ра- ках моделі	56
2.2.1 Лагранжіан νMSM . Нові параметри моделі	56
2.2.2 Генерація мас нейтрино у моделі νMSM	57
2.2.3 Параметризація лагранжіану моделі через експериментально спо- стережувані величини	61
2.2.4 Ефективний лагранжіан взаємодії стерильних нейтрино.	66
2.2.5 Обрахунок лептонної асиметрії	70
2.3 Обмеження на параметри моделі νMSM	82
2.4 Висновки	89
Розділ 3 ЕВОЛЮЦІЯ МАГНІТНИХ ПОЛІВ У ПЕРВИННІЙ ПЛАЗМІ	93
3.1 Вступ	93

3.2	Кіральна кінетична теорія	99
3.3	Кіральна плазма в дрейфовому стані	105
3.4	Аномальні рівняння Максвелла для плазми без дрейфу	111
3.4.1	Функція розподілу в другому порядку по електромагнітному полю та його похідним	112
3.4.2	Рівняння для хімічного потенціалу	114
3.4.3	Електричний та кіральний струм у високотемпературному наближенні	116
3.4.4	Точні вирази для струмів	117
3.4.5	Нові вклади в електричний струм	119
3.4.6	Нові внески до аксіального струму	120
3.5	Еволюція магнітних полів і хімічних потенціалів в первинній плазмі: однорідний випадок	121
3.6	Еволюція магнітних полів і хімічних потенціалів в первинній плазмі: неоднорідний випадок	123
3.7	Чисельне моделювання еволюції системи	126
3.8	Висновки	132
	Висновки	136
	Список використаних джерел	138

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

СМ	Стандартна Модель,
ТМ	Темна матерія,
ТЕ	Темна енергія,
БА	баріонна асиметрія,
ЛА	лептонна асиметрія,
СМВ	Космічне мікрохвильове випромінювання,
ν MSM	мінімальна нейтринна модифікація Стандартної моделі,
КЕД	квантова електродинаміка,
КХД	квантова хромодинаміка,
КТП	квантова теорія поля,
БГК	Батнагар-Грос-Крук.

ВСТУП

Виникнення сучасної космології пов'язано з розвитком загальної теорії відносності та фізики елементарних частинок на початку XX століття. З часу появи перших розв'язків рівняння Ейнштейна та експериментального відкриття Хабблом розширення Всесвіту, космологія є одним з найбільш динамічних розділів фізики. Нерозривно розвиток космології йшов поруч з успіхами фізики фундаментальних взаємодій.

Накопичення протягом століття теоретичних та експериментальних знань в цих областях призвело до формулювання теорій, які вважаються найбільш коректними та повними – модель Λ CDM у космології [1, 2, 3, 4] та Стандартна Модель (СМ) у фізиці елементарних частинок [5, 6].

Модель Λ CDM також називають *concordance model* (concordance – з англ. "узгодження"). Ця модель базується на загальній теорії відносності Ейнштейна з Λ -членом та холодною темною матерією (*Cold Dark Matter*). Λ -член асоціюється з темною енергією (ТЕ), яка в цій моделі дає 73%-ий внесок в густину енергії Всесвіту і рівномірно розмита в ньому, на відміну від темної матерії (ТМ), яка здатна кластеризуватися і складає 23% в балансі енергії Всесвіту [7, 8]. Термін «холодна» ТМ означає, що її частинки виходять з термодинамічної рівноваги з речовиною (відщеплюються) при температурі меншій за масу цих частинок (тобто вони є нерелятивістськими на момент *freeze-out*). В рамках цієї моделі вдається успішно пояснити наявність та структуру реліктового фонового випромінювання та великомасштабну структуру розподілу галактик. Також вона дає самоузгоджену теорію первинного нуклеосинтезу та пояснює спостережуване прискорене розширення Всесвіту.

Стандартна модель фізики елементарних частинок є квантовою релятивістською теорією поля, яка описує сильні, слабкі та електромагнітні взаємодії, оперуючи мінімально можливою кількістю елементарних частинок.

До них відносять [6]:

- калібрувальні бозони — фотон, глюон, $W^\pm$, Z -бозони
- кварки — u , d , s , c , b , t
- лептони — електрон e , мюон μ , таон τ та відповідні нейтрино — ν_e , ν_μ , ν_τ
- бозон Хіггса h

СМ в змозі пояснити майже всі відомі експериментальні феномени фізики елементарних частинок.

Актуальність теми. Попри свої успіхи, ні Λ CDM, ні СМ не є досконалими теоріями та мають свої недоліки. Основні проблеми першої носять спеціальну назву — *проблеми початкових умов* [3], та адресуються до планківської епохи еволюції Всесвіту. Їх резюме наступне: неможливо узгодити фізично вірні початкові умови в планківську епоху, з спостережуваними в наш час даними, залишаючись в рамках еволюції Λ CDM. Для того, щоб уникнути цих проблем достатньо зробити припущення, що існувала стадія дуже швидкого експоненційного прискореного розширення Всесвіту, що дістала назву *стадії інфляції* [2, 3, 9, 10]. Для того, щоб зберегти в силі гарні передбачення Λ CDM, епоха інфляції має відбуватись дуже рано, від планківських часів. Найчастіше інфляційний режим реалізовується за рахунок наповнення Всесвіту енергією класичного скалярного поля — *інфлатона*. Одночасно, наявність в теорії поля інфлатона дає гарний перехід від інфляції до звичайної еволюції Λ CDM. По кінцю інфляційної стадії поле інфлатона починає осцилювати біля мінімуму свого потенціалу, при цьому відбувається народження частинок полів, які присутні в теорії (в рамках СМ та поза нею). Ця стадія еволюції Всесвіту називається *післяінфляційним розігрівом* або рехітингом [11] (з англ. reheating — "розігрів"). Згодом, ці частинки приходять в стан термодинамічної рівноваги, і тоді

починається стадія Великого Вибуху (ВВ). Процеси народження частинок на стадії після інфляції керуються складною фізикою квантових ефектів у зовнішньому полі інфлатона. Дуже часто в цих процесах ключову роль грає явище параметричного резонансу, як у випадку народження бозонів, так і у випадку народження ферміонів [11, 12, 13, 14]. Однією з найбільш успішних моделей інфляції є теорія з квадратичним за кривизною R доданком в лагранжіані гравітації, так звана модель Старобінського [15]. При дослідженні розігріву в рамках моделі Старобінського в наукових роботах користуються звичайними формулами борнівського наближення для темпів народження частинок (див., наприклад, [13]), навіть у випадку врахування розширення Всесвіту. Це не виглядає правомірним, оскільки параметричний резонанс гратиме суттєву роль в розігріві Всесвіту в моделі Старобінського навіть у просторі Мінковського. Саме тому, детальне дослідження процесу народження частинок у зовнішньому полі у Всесвіту, що розширюється, є актуальною проблемою космології.

В свою чергу також існує декілька фізичних феноменів, які не можна пояснити в рамках СМ. В першу чергу, СМ має надати кандидатів на роль частинок ТМ і ТЕ моделі Λ CDM. На даний момент запропоновано ряд кандидатів, проте всі вони виходять за рамки СМ. Важливим недоліком даної теорії також є відсутність маси у нейтрино. Ряд експериментів останніх 20-ти років достаменно підтвердили факт зміни аромату нейтрино під час їх поширення у просторі — *осциляції нейтрино* [16, 17, 18]. Порушення аромату в нейтринному секторі СМ неможливе через відсутність маси у даних частинок. Однією з важливих проблем теоретичної фізики, яка безпосередньо пов'язана з процесами фізики елементарних частинок в ранньому Всесвіті є також *баріонна асиметрія* (БА) [1]. Теорія ВВ та СМ ведуть до висновку, що у Всесвіті мала би бути створена рівна кількість речовини і антиматерії, але сам факт існування світу говорить про те, що чомусь речовини було утворено в надлишку. Однією з найбільш багато-

обіцяючих модифікацій, яка дозволяє виправити згадані проблеми СМ, є нейтринна мінімальна модифікація, або модель ν MSM [19, 20]. Вона розширює СМ трьома частинками – нейтрино з правою кіральністю (стерильні нейтрино). В рамках такої модифікації нейтрино СМ (лівокіральні) набувають масу, а одна з нових частинок є гарним кандидатом на роль ТМ [21]. При цьому за рахунок розпадів двох інших правих ферміонів може бути утворена *лептонна асиметрія* (ЛА), тобто надлишок лептонів над антилептонами [22]. При температурі Всесвіту порядку температури електрослабкого переходу T_{EW} ЛА може бути трансформована в БА, таким чином вирішуючи проблему БА Всесвіту. При нижчих температурах ЛА продовжуватиме накопичуватись, при цьому, на момент початку народження частинок ТМ (має місце при температурі Всесвіту ~ 0.1 Гев) має існувати суттєва ЛА для успішної генерації ТМ [23]. Актуальним залишається питання про область значень параметрів даної моделі у контексті обмежень, які накладаються на ЛА Всесвіту.

В останні роки також було виявлено, що майже у всіх частинах спостережуваного Всесвіту, включаючи галактики, скупчення галактик та міжгалактичний простір, існують ненульові магнітні поля. Проте, походження таких магнітних полів залишається неясним [24, 25, 26, 27, 28]. Спостережувані магнітні поля в галактиках і скупченнях галактик, які мають порядок величини мікрогаус, можуть бути пояснені шляхом застосування добре вивчених астрофізичних механізмів, які супроводжують формування структур (ударно-хвильові процеси під час гравітаційного колапсу), до існуючих вже слабких зародкових магнітних полів. Що ж до зародкових полів, то вони мають бути згенеровані іншим механізмом. Нещодавнє відкриття магнітних полів у міжгалактичному просторі величиною порядку $B \sim 10^{-15}$ Гс [29, 30, 31, 32, 33, 34], які навряд чи були утворені будь-яким з відомих астрофізичних механізмів, свідчить на користь ідеї первинної природи цих магнітних полів [35, 36] і, ймовірно, вказує на космологічні ма-

гнітні поля, як необхідні зародки для генерації спостережуваних магнітних полів. Нещодавно в роботах [37, 38, 39, 40] було продемонстровано механізм *інверсного каскаду* (перекачування енергії з короткохвильових мод магнітного поля до довгохвильових, які менш схильні до дисипації) в намагніченій кіральній плазмі, який кардинально змінює еволюцію магнітних полів у ранньому Всесвіті. Незважаючи на те, що в роботі [37] розглядались моди магнітного поля з ненульовими хвильовими векторами, використовувалось просторово-усереднене рівняння для кіральної аномалії та однорідний хімічний потенціал; при цьому було отримано інверсний каскад. Але, беручи до уваги, що спіральні магнітні поля в первинній плазмі обов'язково просторово неоднорідні, природньо очікувати, що в кіральній асиметрії також мають виникати неоднорідності під час інверсного каскаду. Тому еволюція магнітних полів в первинній неоднорідній плазмі з кіральною аномалією потребує детального вивчення.

З огляду на сказане і впливає актуальність досліджуваних у роботі фізичних процесів у ранньому Всесвіті: народження частинок на стадії розігріву, генерація лептонної асиметрії та еволюція космологічних магнітних полів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалася згідно з науково-дослідними темами фізичного факультету Київського національного університету ім. Тараса Шевченка: тема № 06БФ05106 «Дослідження в фізиці і астрофізиці високих енергій, фізиці елементарних частинок та конденсованого стану». Науковий керівник – д.ф.-м.н., проф. Вільчинський Станіслав Йосипович.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертації є дослідження фізичних процесів у ранньому Всесвіті: народження частинок на стадії післяінфляційного розігріву в рамках моделі зі слабкою константою зв'язку інфлатона, генерація лептонної асиметрії в моделі зі стерильними нейтрино та еволюція магнітних полів в первинній плазмі з кіральною асиметрією.

Для досягнення поставленої мети, в роботі розв'язуються наступні задачі:

1. З'ясувати механізм народження частинок під час розігріву Всесвіту в інфляційній моделі Старобінського. Визначити, чи реалізується механізм резонансного народження частинок в такій моделі;
2. Враховуючи космологічне розширення Всесвіту отримати аналітичні вирази для швидкостей розпаду інфлатонного поля у випадку слабкої константи зв'язку цього поля з полями матерії. Зробити розрахунки для випадків народження бозонів та ферміонів внаслідок розпаду інфлатонного поля, а також для випадку саморозпаду інфлатона;
3. Вивести аналітичне співвідношення, яке описує процес генерації лептонної асиметрії Всесвіту в рамках розширення Стандартної Моделі елементарних частинок за рахунок введення в неї правокіральних нейтрино (моделі ν MSM);
4. На основі обмежень, накладених з умови успішної генерації Темної матерії в ранньому Всесвіті на значення величини Δ лептонної асиметрії $10^{-3} < \Delta < 2/11$, отримати обмеження на параметри моделі ν MSM, зокрема на значення мас нейтрино та на кути змішування стерильних нейтрино з активними нейтрино;
5. Вивести систему рівнянь, яка описує динамічні властивості кірально-асиметричної неоднорідної космологічної релятивістської плазми, в якій генеруються зародкові магнітні поля. Отримати густини електричного та аксіального струмів, а також рівняння для звичайного та кірального хімічних потенціалів;
6. За допомогою отриманих рівнянь дослідити вплив неоднорідності плазми на еволюцію спіральних зародкових магнітних полів та на кіральну асиметрію в ранньому Всесвіті.

Об'єктами дослідження є: народження частинок на стадії післяінфляційного розігріву, лептонна асиметрія та магнітні поля в ранньому Всесвіті.

Предметом дослідження є: ширини розпаду інфлатона на частинки полів матерії та інфлатону в моделях зі слабкою константою зв'язку, зокрема в моделі Старобінського; параметри моделі ν MSM, зокрема, маси та кути змішування стерильних нейтрино з активними нейтрино; рівняння Максвелла для кіральної плазми, еволюція магнітних полів і кіральної асиметрії в неоднорідній кіральній первинній плазмі, інверсний каскад магнітного поля.

Методи дослідження. Для отримання ширин розпаду інфлатона використовувався метод коефіцієнтів Боголюбова. При обрахунку лептонної асиметрії використовувалась наближена теорія Фермі точкової взаємодії для визначення темпів розпаду стерильних нейтрино. Для отримання густин струмів і зарядів, що входять в аномальні рівняння Максвелла використовувалась кіральна кінетична теорія, а саме кіральне рівняння Больцмана, для одночастинкової функції розподілу. Отримані рівняння розв'язувались за допомогою чисельних методів інтегрування жорстких систем диференціальних рівнянь, зокрема формул зворотнього диференціювання. Окрім того, було використано різні математичні методи.

Наукова новизна одержаних результатів. Основними науковими результатами, які виносяться на захист є такі:

1. В рамках інфляційної моделі Старобінського з'ясовано механізм народження бозонів та ферміонів на етапі післяінфляційного розігріву Всесвіту за рахунок розпаду інфлатонного поля, слабо зв'язаного з полями матерії. Встановлено, що резонансний механізм народження частинок не реалізується внаслідок розширення Всесвіту та нестационарності ширин резонансних зон. Показано, що в такій моделі народження частинок описується теорією збурень в рамках борнівського наближення;

2. Пораховано ефективні ширини розпаду інфлантоного поля в моделі зі слабким зв'язком з врахуванням розширення Всесвіту. Показано, що темпи народження бозонів і ферміонів з інфлатонного поля не залежать від специфіки розширення Всесвіту, оскільки густина чисел заповнення народжених частинок оберненопропорційна параметру Хаббла, а темп заповнення нових мод прямопропорційний йому;
3. Знайдено аналітичний вираз для лептонної асиметрії в рамках розширення Стандартної Моделі елементарних частинок за рахунок введення в неї правокіральних нейтрино (моделі ν MSM);
4. Отримано обмеження на значення параметрів моделі ν MSM: на кути змішування та на маси стерильних нейтрино у випадках прямої та оберненої ієрархії мас нейтрино Стандартної моделі (лівих нейтрино). Показано, що у випадку прямої ієрархії існує область параметрів, при яких можлива генерація лептонної асиметрії в кількості, достатній для утворення спостережуваної Темної матерії. У випадку оберненої ієрархії така область відсутня;
5. Використовуючи кіральну кінетичну теорію вперше отримано вирази для густин кірального та електричного струмів у релятивістській неоднорідній космологічній плазмі з кіральною асиметрією, в якій генеруються зародкові спіральні космологічні магнітні поля. Доведено існування нових типів струмів у такій плазмі, обумовлених її неоднорідністю;
6. Отримано рівняння, які описують динамічні властивості звичайних і кіральних хімічних потенціалів, які доповнюють систему рівнянь Максвелла, яка описує кіральну плазму;
7. На основі чисельних розрахунків отриманої системи рівнянь досліджено еволюцію спіральних магнітних полів та кірального хімічного по-

тенціалу в ранньому Всесвіті з урахуванням неоднорідностей плазми. Показано, що неоднорідності призводять до розтягування в часі механізму інверсного каскаду перерозподілу енергій в спектрі спіральних магнітних полів;

8. З'ясовано вплив дифузії на еволюцію інверсного каскаду. Встановлено, що дифузія розмиває неоднорідності, і в ранньому Всесвіті інверсний каскад розвивається так само, як і в однорідному випадку.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані результати є корисними для розуміння фізики багатьох процесів, що мали місце в ранньому Всесвіті. Дослідження народження частинок на стадії післяінфляційного розігріву дає можливість для побудови узгодженої теорії еволюції Всесвіту, шляхом розрахунку значень температури та ентропії Всесвіту на момент початку стадії ВВ. Проведені аналітичні розрахунки темпів народження частинок обґрунтовують валідність формул борнівського наближення теорії збурень у Всесвіті, що розширюється, що має цінність для теоретичної космології. Визначені обмеження на параметри моделі зі стерильними нейтрино можуть бути корисними для експериментів з пошуку важких нейтрино з правою кіральністю на прискорювачах. Отримані самоузгоджені рівняння електродинаміки для релятивістської неоднорідної плазми з кіральною аномалією відкривають можливість для подальших чисельних досліджень первинної плазми у ранньому Всесвіті. Відкриті нові внески у електричний та аксіальний струми мають важливу теоретичну і практичну цінність. Досліджене за допомогою чисельних методів явище інверсного каскаду, підтверджує дієвість цього механізму в неоднорідному випадку, що дає можливість інтерпретувати первинні магнітні поля в якості гарного кандидату на роль зародків для експериментально спостережуваних галактичних та позагалактичних магнітних полів. Отримані результати щодо інверсного каскаду можуть бути перевірені в настільних експериментах з діраківськими та вейлівськими

металами.

Особистий внесок здобувача. Результати, включені до дисертації на основі робіт публікацій із співавторами, одержані автором самостійно, включаючи аналітичні та чисельні розрахунки. У роботах по дослідженню розігріву Всесвіту після інфляційної стадії [41, 42], автору належать аналітичні вирази для темпів народження частинок. При дослідженні параметрів моделі зі стерильними нейтрино [43] автором було отримано вираз для лептонної асиметрії та обчислено обмеження на маси стерильних нейтрино та їх кути змішування. У роботі [44] автором було отримано розклади у ряд за степенями полів та похідних для струмів та густин частинок, отримано самоузгоджені аномальні рівняння Максвелла. У роботі [45] здобувачем було отримано чисельні розв'язки рівнянь для електромагнітного поля та кірального хімічного потенціалу.

Апробація результатів дисертації. Матеріали дисертації було апробовано на наступних міжнародних конференціях:

- 5th Gamow International Conference “Astrophysics and Cosmology after Gamow: Progress and perspectives”; Одеса, 2015, Україна,
- Xth Iberian Cosmology Meeting “IberiCOS 2015”; Мадрид, 2015, Іспанія,
- International Conference “Astronomy and Space Physics”; Київ, 2014, Україна,
- "Наука XXI століття: сучасні проблеми фізики"; Київ, 2013, Україна.

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано 7 робіт в провідних наукових журналах та працях конференцій. А саме: 5 робіт у фізичних журналах [41, 42, 43, 44, 45] та 2 роботи у працях конференцій [46, 47].

Структура та об'єм дисертації. Дисертація складається із вступу, трьох розділів, висновків, бібліографії, яка містить 137 посилань. Дисертація включає 18 рисунків. Загальний об'єм — 153 сторінки друкованого тексту.

РОЗДІЛ 1

НАРОДЖЕННЯ ЧАСТИНОК У ПІСЛЯІНФЛЯЦІЙНОМУ ВСЕСВІТІ

1.1 Вступ

Згідно з даними астрономічних спостережень Всесвіт з великою ступінню точності є однорідним та ізотропним. Так, розподіл космічного мікрохвильового випромінювання (СМВ) дає нам «фотографію» Всесвіту, яка вказує, що на момент рекомбінації він був дуже однорідним та ізотропним, з точністю $\sim 10^{-4}$ [1, 7]. Залишаючись в рамках стандартної теорії ВВ, неможливо пояснити, чому Всесвіт не тільки такий однорідний та ізотропний, але й чому Всесвіт такий великий, просторово-плоский і теплий. Іншою проблемою є природа виникнення початкових неоднорідностей густини, що призвели до утворення структур у сучасному Всесвіті. Відповідь на ці питання можна отримати тільки в рамках задовільного пояснення даних властивостей інфляційної теорії [9].

Відповідно до теорії інфляції, стадії ВВ передувала стадія прискореного розширення Всесвіту [2, 3, 4], коли він розширювався майже експоненціальним чином, стаючи однорідним на великих масштабах і, з високою точністю, просторово-плоским. Необхідному для існування стадії інфляції рівнянню стану може задовільняти класичне скалярне поле, яке називають інфлатоном.

Існує досить багато моделей інфляції. Багато з них пропонує також і механізм передачі вакуумоподібної енергії інфлатона в кінетичну енергію народжених частинок. Ця стадія еволюції Всесвіту називається післяінфляційним розігрівом. Саме вона є предметом розгляду даного розділу. Лише після закінчення стадії розігріву починається стадія ВВ.

Розігрів є одним із найважливіших етапів еволюції Всесвіту, що з'єднує стадію інфляції з наступною еволюцією в рамках теорії ВВ. Майже

вся матерія, з якої складається Всесвіт на стадії домінування випромінювання, була народжена під час стадії розігріву. В більшості інфляційних моделей, що базуються на скалярному полі, Всесвіт розігрівається шляхом народження частинок в зовнішньому осцилюючому полі інфлатона. Ці процеси є ключовими на стадії попереднього розігріву («preheating»). Народжені таким чином частинки згодом термалізуються і Всесвіт стає гарячим. Початково до розгляду процесів народження частинок на стадії попереднього розігріву застосовували теорію збурень, а точніше використовували наближення Борна для розрахунку темпу розпаду інфлатона (див. [10]). Пізніше стало зрозуміло [12, 11, 13], що народження бозонів можна також розглядати непертурбативно, через ефект параметричного резонансу, і, що народження ферміонів також відбувається непертурбативно [14]. Особливо це стосується випадку суттєво сильної константи взаємодії між інфлатоном та іншими полями, коли резонанс є широким у просторі частот [11].

Коли константа взаємодії між інфлатоном та іншими полями достатньо слабка, в деяких типових випадках вважається правомірним повертатись до борнівської теорії при обрахунку темпів народження частинок у Всесвіті, що розширюється (див, наприклад, [13]). Це виглядає дещо неприродним, особливо, якщо взяти до уваги, що ефекти параметричного резонансу для бозонів, а також непертурбативна еволюція чисел заповнення ферміонів, будуть неодмінно виникати у зовнішньому осцилюючому класичному полі в просторі Мінковського, якою б малою не була б константа взаємодії. В цьому випадку, відповідно, формула Борна не буде працювати. Чому ж тоді вона є застосовною для випадку Всесвіту, що розширюється? Нами буде роз'яснене це питання. Буде продемонстровано, як умови Всесвіту, що розширюється, а саме червоне зміщення частот польових мод, впливають на процес народження частинок у випадку слабкої взаємодії.

В даному розділі буде розглянуто основи теорії інфляції і післяінфля-

ційного народження частинок. Буде описано народження частинок через механізм параметричний резонансу у просторі Мінковського. Також розглянемо модифікації на випадок Всесвіту, що розширюється і пораховано темпи народження бозонів, ферміонів, а також розглянуто процес саморозпаду інфатона.

1.2 Проблеми теорії Великого вибуху

В даному підрозділі ми звертаємось до початкових умов теорії ВВ [2]. На даний час квантова теорії гравітації не розвинена достатньо, щоб впевнено передбачити початкові умови в сценарії гарячого ВВ. Прийнято вважати, що ефекти непертурбативної квантової гравітації не грають ролі на масштабах, менших за планківські, а стають суттєвими, коли просторова кривизна досягає планківських значень M_{Pl}^{-2} . Тому питання про початкові умови загально прийнято адресувати до часів $t_i = t_{Pl} \sim 10^{-43}$ с після Великого вибуху. Природньо очікувати, що в цей момент розмір причинно-зв'язаної області у Всесвіті також має планківський масштаб $l_c \sim l_{Pl}$, відповідно, дві області, що знаходяться на відстані $l > l_{Pl}$ одна від одної, повинні сильно відрізнатись за рахунок квантових флуктуацій. Далі, використовуючи рівняння Ейнштейна та приймаючи гіпотезу адіобатичності розширення Всесвіту, можна прослідкувати еволюцію Всесвіту назад, та порівняти початкові умови, які ми отримаємо на планківських масштабах часу з очікуваними. При цьому, не звертаючись до інфляційної теорії, отримуємо ряд проблем.

Проблема горизонту

Розмір видимого в сучасну епоху Всесвіту (який є однорідним та ізотропним) становить [1]:

$$l_{H,0}(t_0) \approx 10^{28} \text{ см} \quad (1.1)$$

У планківську епоху він був рівен:

$$l_{H,0}(t_{Pl}) = \frac{a(t_{Pl})}{a(t_0)} l_{H,0}(t_0) \quad (1.2)$$

де $a(t_0)$ —масштабний фактор в сучасну епоху.

Порівняємо його з розміром причинно-зв'язаної області в планківську епоху ($l_c = ct_{Pl}$):

$$\frac{l_{H,0}(t_{Pl})}{l_c} = \frac{a(t_{Pl})}{a(t_0)} \frac{t_0}{t_{Pl}} \sim \frac{T_0}{T_{Pl}} \frac{t_0}{t_{Pl}}, \quad (1.3)$$

де було знехтувано зміною ефективного числа релятивістських ступенів вільності. Температура Всесвіту в планківську епоху грубо оцінюється як $T_{Pl} \sim 10^{28}$ К. Тоді чисельно матимемо:

$$\frac{l_{H,0}(t_{Pl})}{l_c} \sim \frac{10^{17}}{10^{-43}} 10^{-32} \sim 10^{28} \quad (1.4)$$

Отже, за планківських часів розмір Всесвіту перевищує розмір причинно-зв'язаної області в ті часи майже на 28 порядків. Це означає, що в 10^{84} причинно не з'язаних областях густина енергії була однорідно розподілена, з точністю $\sim 10^{-4}$. Оскільки жоден сигнал не може поширюватись швидше світла, не існує жодного фізичного процесу, котрий міг би бути відповідальним за такий однорідний розподіл. Зауваживши, що масштабний фактор поводить ся з часом, як певний степінь часу, ми можемо використати наближення $a/t \sim \dot{a}$. Тоді:

$$\frac{l_{H,0}(t_{Pl})}{l_c} \sim \frac{\dot{a}(t_{Pl})}{\dot{a}(t_0)} \quad (1.5)$$

що означає, що розмір Всесвіту початково був більший ніж причинно-зв'язана область, як відношення відповідних темпів розширення Всесвіту. Враховуючи, що гравітація завжди діяла, як притягуюча сила, а отже уповільнювала темп розширення, приходимо до висновку, що однорідна область завжди була більшою за причинно-зв'язану область. Дана проблема називається проблемою горизонту, вона полягає в тому, що розширення Всесвіту відбувається занадто повільно, в порівнянні зі збільшенням горизонту, і в

полі зору спостерігача постійно з'являються нові області, які ніколи не були причинно-пов'язані. Попри це, Всесвіт являється однорідним на дуже великих масштабах.

Проблему горизонту також можна сформулювати, не звертаючись до планківської епохи. Космологічний горизонт $l_H(t)$ визначається, як відстань, яку проходить сигнал, що поширюється зі швидкістю світла, починаючи з моменту ВВ. Ця відстань визначає розмір причинно-зв'язаної області на момент часу t . В певний момент часу t_1 горизонт рівний:

$$l_{H,1}(t_1) = a(t_1) \int_{t_{Pl}}^{t_1} \frac{dt}{a(t)} \quad (1.6)$$

В наш час цей розмір збільшився за рахунок розширення Всесвіту:

$$l_{H,1}(t_0) = a(t_0) \int_{t_{Pl}}^{t_1} \frac{dt}{a(t)} \quad (1.7)$$

На радіаційно-домінуючій та на пиловидно-домінуючій стадіях розширення Всесвіту, які, в рамках теорії ВВ передували сучасній стадії прискореного розширення, масштабний фактор змінювався за законом $a(t) \sim t^\alpha$, де $\alpha = 1/2$ для радіаційно-домінуючої епохи та $\alpha = 2/3$ для пиловидної стадії, тобто завжди було $\alpha < 1$. Це означає, що інтеграл набирає свого основного значення на верхній межі, відповідно сучасний горизонт $l_{H,0}(t_0)$ значно більший за розмір $l_{H,1}(t_0)$. Спробуємо оцінити їх відношення:

$$\frac{l_{H,0}(t_0)}{l_{H,1}(t_0)} = \frac{a(t_0) \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)}}{a(t_0) \int_0^{t_1} \frac{dt}{a(t)}} = \left| dt = \frac{da}{H(a)a} \right| = \frac{\int_0^{a_0} \frac{da}{Ha^2}}{\int_0^{a_1} \frac{da}{Ha^2}} \simeq \frac{a(t_1)H(t_1)}{a(t_0)H(t_0)} \quad (1.8)$$

Для пиловидної стадії $a \sim t^{2/3}$, тому $H \sim t^{-1}$, звідки $aH \sim t^{-1/3} \sim a^{-1/2}$.

Тоді матимемо:

$$\frac{l_{H,0}(t_0)}{l_{H,1}(t_0)} \simeq \sqrt{\frac{a_0}{a_1}} = \left| a_1 = \frac{a_0}{1 + z_1} \right| = \sqrt{1 + z_1} \quad (1.9)$$

Оберемо за момент t_1 момент рекомбінації ($z \approx 1060$). Тоді матимемо, що кут, під яким сьогодні видно горизонт на момент рекомбінації рівен:

$$\Delta\theta_r = \frac{l_{H,0}}{l_{H,r}} \sim 35, \quad (1.10)$$

а отже сфера останнього розсіяння фотонів, яка спостерігається при дослідженні анізотропії реліктового випромінювання (СМВ) складається з

$$\left(\frac{l_{H,0}}{l_{H,r}}\right)^2 \sim 1000 \quad (1.11)$$

областей, які не були причинно-зв'язані на момент випускання реліктового випромінювання. В теорії ВВ немає жодного фізичного пояснення, чому температури фотонів, які були випущені з цих різних причинно-незв'язаних областей, мають бути хоча б приблизно близькими. Проте результати спостереження за СМВ говорять, що вони близькі з точністю, більше ніж 10^{-4} .

Таке формулювання проблеми горизонту не залежить від фізики планківських масштабів; важливо лише припущення, що темп розширення Всесвіту диктується речовиною (спочатку релятивістською, потім пиловидною) починаючи з найранніших стадій своєї класичної еволюції.

Проблема плоскості

Перевіримо тепер, чи буде виконуватись припущення про те, що на планківських масштабах вклад просторової кривини в рівняння Фрідмана є одного порядку з іншими вкладками. Для цього запишемо рівняння Фрідмана в термінах безрозмірного параметру густини $\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_{cr}(t)}$ (в нього врахуємо одразу і вклад матерії, і вклад Λ -члену, $\Omega_{curv} = 1 - \Omega$ — вклад просторової кривини):

$$\Omega(t) - 1 = \frac{k}{(Ha)^2} \quad (1.12)$$

Відповідно до цього, можемо записати:

$$\Omega(t_{Pl}) - 1 = (\Omega(t_0) - 1) \frac{(Ha)_0^2}{(Ha)_{Pl}^2} = (\Omega(t_0) - 1) \left(\frac{\dot{a}(t_0)}{\dot{a}(t_{Pl})} \right)^2 \leq 10^{-56} \quad (1.13)$$

тобто ми бачимо, що для того, щоб модель гарячого Великого вибуху дійсно відтворювала спостережуване сьогодні просторову плоскостність Всесвіту, в неї в якості початкової умови необхідно закласти вимогу:

$$|\Omega_{curv}| \leq 10^{-56} \quad (1.14)$$

тобто на початку еволюції просторова кривина має бути на 56 порядків менше очікуваної (ми очікуємо, що вона буде також порядку, як інші вклади, тобто ~ 1 , в наш час вклад кривини оцінюється, як < 0.02). Таке величезне розходження між початковими даними, які необхідно закласти в модель гарячого Всесвіту і розмірністю оцінкою називають проблемою плоскостності.

Проблема ентропії Ентропія видимої частини Всесвіту оцінюється гігантським числом [1]:

$$S_0 = 10^{88} \quad (1.15)$$

В теорії ВВ розширення Всесвіту з великою точністю відбувається адіабатично. Це означає, що це велитенське число має бути закладене в теорію в якості початкової умови. Природньо ж було б очікувати, що в планківську епоху ентропія Всесвіту, народженого, наприклад, квантовим чином, рівна кількості різних типів частинок (тобто порядку сотні для СМ)

Ця проблема пов'язана з проблемою горизонту. Оскільки розмір сучасного горизонту в планківську епоху перевищує планківський масштаб на 28 порядків, то і, відповідно ентропія перевищує очікувану на $28 \cdot 3$ порядків.

Інтенсивне народження частинок на стадії післяінфляційного розігріву розв'язує проблему ентропії.

Проблема первинних неоднорідностей

Ще однією проблемою, що потребує пояснення, є природа первинних неоднорідностей густини, які необхідні для пояснення великомасштабної структури Всесвіту. Початкова їх амплітуда має бути на рівні $\delta\rho/\rho \sim 5 \cdot 10^{-5}$.

В теорії гарячого ВВ механізму утворення цих неоднорідностей не існує, їх доводиться закладати "руками" в якості початкового даного космологічної еволюції.

Отже, в Λ CDM немає відповідей на запитання, чому Всесвіт такий однорідний, ізотропний і просторово-плоский. В рамках цієї теорії також не вдається пояснити природу первинних неоднорідностей. Початкові умови, які призводять до спостережуваного нами сьогодні Всесвіту в теорії ВВ виглядають неприродньо.

1.3 Модель Старобінського

Історично однією з перших моделей інфляції була модель, запропонована А. А. Старобінським [15]. Початково в моделі немає скалярних полів. Вона являє собою модифікацію теорії гравітації, коли гравітаційна частина дії містить у собі не лише лінійний, але й квадратичний по кривині доданок. Розглянемо модель Старобінського з присутніми в ній також скалярними та ферміонними полями матерії, що буде використовуватись в подальшому розгляді. Будемо діяти відповідно до формалізму роботи [48]. В якості початкової дії обирається:

$$S^J = S_{gravity}^{JF} + S_{matter}^{JF} \quad (1.16)$$

Перший доданок описує модифіковану дію гравітаційного поля

$$S_{gravity}^J = -\frac{M_P^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R - \frac{R^2}{6\mu^2} \right), \quad (1.17)$$

де $M_P = M_{Pl}/\sqrt{8\pi} = 2.4 \times 10^{18}$ ГеВ. Інфляція призводить до первинних скалярних неоднорідностей, амплітуда яких пояснює спостережувану анізотропію СМВ і великомасштабну структуру, якщо μ береться рівним [49]:

$$\mu = 1.3 \times 10^{-5} M_P, \quad (1.18)$$

Другий доданок описує дію полів матерії СМ (можливо, деякі інші нові поля), а також калібрувальних полів. Зокрема, дія для вільних (без враху-

вання гравітаційної взаємодії) нейтрального скалярного поля (φ) та ферміонного поля (ψ) має вигляд

$$S_\varphi^J = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} m_\varphi^2 \varphi^2 \right), \quad (1.19)$$

$$S_\psi^J = \int d^4x \sqrt{-g} (i \bar{\psi} \mathcal{D} \psi - m_\psi \bar{\psi} \psi). \quad (1.20)$$

Літера J — означає дію Жордана, $\mathcal{D} = \gamma^\mu D_\mu$, де D_μ — коваріантна похідна.

За допомогою конформного перетворення

$$g_{\mu\nu} = \chi^{-1} \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad \chi = \exp(\sqrt{2/3} \phi / M_P), \quad (1.21)$$

отримаємо, що гравітаційна дія стане дією Ейнштейна-Гільберта (ЕН) з появою нового скалярного поля (інфлатона або скалярона) ϕ :

$$S_{gravity}^J = /(1.21)/ = S^{EH} = -\frac{M_P^2}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R} + \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (1.22)$$

де потенціал інфлатонного поля є

$$V(\phi) = \frac{3\mu^2 M_P^2}{4} (1 - \chi^{-1}(\phi))^2. \quad (1.23)$$

Дія вільного скалярного поля запишеться як

$$S_\varphi^J = /(1.21)/ = S_\varphi^{EH} = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left(\frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \frac{\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi}{\chi} - \frac{m_\varphi^2}{2} \chi^{-2} \varphi^2 \right). \quad (1.24)$$

Щоб призвести кінетичний доданок до стандартного вигляду потрібно зробити заміну

$$\varphi = \chi^{1/2} \tilde{\varphi}. \quad (1.25)$$

В результаті, у лагранжіані вільного скалярного поля з'явиться взаємодія з інфлантонним полем

$$S_\varphi^{EH} = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left(\frac{\tilde{g}^{\mu\nu}}{2} \partial_\mu \tilde{\varphi} \partial_\nu \tilde{\varphi} - \frac{m_\varphi^2 \chi^{-1}}{2} \tilde{\varphi}^2 + \frac{\tilde{g}^{\mu\nu}}{\sqrt{6} M_P} \tilde{\varphi} \partial_\mu \tilde{\varphi} \partial_\nu \phi + \frac{\tilde{g}^{\mu\nu}}{12 M_P^2} \tilde{\varphi}^2 \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right). \quad (1.26)$$

Відмітимо тут, що ця взаємодія є малою, оскільки вона подавлена величиною гравітаційного масштабу M_{Pl} . В подальшому, будемо вважати, що дії (1.22) та (1.26) відповідають опису фізичної реальності, і саме з ними будемо працювати. Тому, для скорочення записів, в подальшому тільки про- ставляти не будемо. Що стосується ферміонного поля, то його дія також приводиться до кананічного вигляду, за допомогою аналогічних перетво- рень, використовуючи заміну $\psi = \chi^{3/4}\tilde{\psi}$ та $\mathcal{D} = \chi^{1/2}\tilde{\mathcal{D}}$.

Отже, маємо (в наступних формулах знаки тількида опущені):

$$S_{grav+infl} = -\frac{M_P^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (1.27)$$

$$S_\varphi = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{g^{\mu\nu}}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{m_\varphi^2 \chi^{-1}}{2} \varphi^2 + \frac{g^{\mu\nu}}{\sqrt{6} M_P} \varphi \partial_\mu \varphi \partial_\nu \phi + \frac{g^{\mu\nu}}{12 M_P^2} \varphi^2 \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right\}, \quad (1.28)$$

$$S_\psi = \int d^4x \sqrt{-g} \left(i \bar{\psi} \mathcal{D} \psi - \frac{m_\psi}{\sqrt{\chi}} \bar{\psi} \psi \right). \quad (1.29)$$

Перевіримо тепер потенціал (1.23) на виконання так званих умов по- вільного скочування, які є критеріями можливості реалізації інфляційного режиму на потенціал поля інфлатона:

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2V} = \frac{M_{Pl}^2}{48\pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1 \quad (1.30)$$

$$\frac{M_{Pl}^2}{24\pi} \frac{V''}{V} \ll 1 \quad (1.31)$$

Врахуємо, що:

$$V'(\phi) = \frac{3\mu^2 M_P^2}{2} \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_P}} \right) \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{M_P} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_P}} \quad (1.32)$$

$$V''(\phi) = \mu^2 e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_P}} - \mu^2 \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_P}} \right) e^{-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_P}} \quad (1.33)$$

тоді, при досить великих значеннях поля інфлатона матимемо:

$$\frac{M_{Pl}^2}{48\pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_P}}}{\left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_P}} \right)^2} \ll 1 \quad (1.34)$$

$$\frac{M_{Pl}^2}{24\pi} \left(\frac{V''}{V} \right) = \frac{4}{9} \cdot \frac{e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_P}}}{\left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_P}}\right)^2} - \frac{4}{9} \cdot \frac{e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_P}}}{\left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_P}}\right)} \ll 1 \quad (1.35)$$

Отже, ми побачили, що модель Старобінського є еквівалентна моделі хаотичної інфляції з одним інфлатонним полем ϕ та потенціалом виду (1.23).

1.4 Попередній розігрів Всесвіту

1.4.1 Загальні питання теорії попереднього розігріву

Як було обговорено в попередніх підрозділах даного розділу, для того, щоб пояснити проблеми початкових умов в теорії ВВ, пропонується ввести додаткову стадію еволюції Всесвіту — інфляційне розширення. Однією з моделей інфляції є модель Старобінського, дія якої має вигляд (1.27)-(1.29), де ϕ — поле інфлатона, з потенціалом $V(\phi)$ (1.23), φ, ψ — поля матерії. В цій моделі Всесвіт буде майже експоненційним чином розширюватись доти, доки потенціал задовольнятиме умовам повільного скочування (1.30) і (1.31). Після цього поле інфлатона починає осцилювати навколо мінімуму свого потенціалу. Механізм відкачки енергії від мод коливання поля інфлатона, і відповідно, затухання його осциляцій, полягає у народженні частинок, за рахунок взаємодії з швидкозмінним полем інфлатона. Народжені частинки з часом приходять в стан термодинамічної рівноваги; цей процес дуже складний і розглядатися тут не буде. Після цього настає стадія Великого вибуху. Моментом, коли у Всесвіті починає домінувати релятивістська речовина t_{reh} ми вважатимемо момент, коли густина енергії, що зосереджена в модах коливання інфлатонного поля ρ_ϕ , стає рівною густині енергії народжених частинок матерії ρ_φ (якщо вважати, що народжуються лише частинки одного типу, наприклад скалярні частинки φ):

$$\rho_\phi(t_{reh}) \approx \rho_\varphi(t_{reh}) \quad (1.36)$$

Еволюція густини енергії бозонів описується рівнянням [13]:

$$\dot{\rho}_\varphi = \Gamma_\varphi \rho_\varphi - 4H\rho_\varphi \quad (1.37)$$

де Γ_φ — темп народження частинок поля φ . В рівнянні враховано, що вклад народжених ультрарелятивістських частинок в густину енергії спадає з часом за рахунок розширення Всесвіту. Щойно народжені частинки матерії будуть перерозсіюватись одна на одній. Темп цього процесу характеризуватиметься величиною:

$$\Gamma_{scatt} = \sigma \frac{\rho_\varphi}{\varepsilon_\varphi} \quad (1.38)$$

де σ — повний переріз розсіяння частинок ρ_φ , ε — їх середня енергія. Позначимо момент, коли темп народження частинок стає рівний темпу їх розсіяння, як t_{dec} . Якщо матимемо, що:

$$t_{reh} > t_{dec} \quad (1.39)$$

тобто момент, коли процеси перерозсіяння стали домінувати за темпом над процесами народження частинок, настав раніше, ніж момент, коли у Всесвіті почали домінувати частинки матерії, це означатиме, що в такій моделі Всесвіт так і не розігріється. Таку просту схему можна використати для оцінки тієї чи іншої моделі на успішність розігріву у ній.

Спочатку, на прикладі бозонів розглянемо народження частинок за рахунок ефекту параметричного резонансу в моделі Старобінського в стаціонарному випадку. Для цього спершу потрібно виписати вихідні рівняння. За допомогою дії (1.28) випишемо окремо лагранжіан для поля інфлатона та поля матерії:

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{3\mu^2 M_P^2}{4} [1 - \chi^{-1}(\phi)]^2 \approx \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 \quad (1.40)$$

$$\mathcal{L}_\varphi = \frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2} \chi^{-1}(\phi) m_\varphi^2 \varphi^2 + \frac{(\partial\phi)^2}{12M_P^2} \varphi^2 + \frac{\partial^\mu \phi}{\sqrt{6}M_P} \varphi \partial_\mu \varphi, \quad (1.41)$$

В рівнянні (1.40) було враховано що на стадії попереднього розігріву виконується умова:

$$\left| \frac{\phi}{M_P} \right| \ll 1 \quad (1.42)$$

і було здійснено розклад експоненти. Не враховуючи зворотню реакцію поля матерії на еволюцію поля інфлатона, рівняння для ϕ отримаємо з (1.40):

$$\square\phi + \mu^2\phi = 0. \quad (1.43)$$

Розв'язком даного рівняння буде:

$$\phi(t) = \phi_0 \cos \mu t \quad (1.44)$$

Амплітуда поля ϕ_0 також буде змінюватись з часом за рахунок розширення Всесвіту. Отримати цю залежність можна наступним чином. Усереднена по періоду коливань густина енергії осцилюючого інфлатонного поля рівна:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\mu^2\phi_0^2 \quad (1.45)$$

Ця густина зменшується з часом за рахунок розширення Всесвіту як:

$$\rho_\phi \sim \frac{1}{a^3} \quad (1.46)$$

а отже матимемо:

$$\phi_0(t) \sim \frac{1}{a^{3/2}(t)} \quad (1.47)$$

Рівняння руху для поля φ буде наступним:

$$\square\varphi + \left[\chi^{-1}(\phi) m_\varphi^2 + \frac{\square\phi}{\sqrt{6}M_P} - \frac{(\partial\phi)^2}{6M_P^2} \right] \varphi = 0, \quad (1.48)$$

або, використовуючи (1.43),

$$\square\varphi + \left[\chi^{-1}(\phi) m_\varphi^2 - \mu^2 \frac{\phi}{\sqrt{6}M_P} - \frac{(\partial\phi)^2}{6M_P^2} \right] \varphi = 0. \quad (1.49)$$

Враховуючи, що параметр μ поля інфлатона є також частотою його осциляцій на стадії розігріву, матимемо, що останній член в рівнянні (1.49) є подавленим фактором M_P . Беручи також до уваги (1.42), рівняння (1.49) спроститься до вигляду:

$$\square\varphi + \left[m_\varphi^2 - \mu^2 \frac{\phi}{\sqrt{6}M_P} \right] \varphi = 0. \quad (1.50)$$

Або, в k -представленні:

$$\ddot{\varphi}_k + 3H\dot{\varphi}_k + \left(\omega_k^2 - \mu^2 \frac{\phi(t)}{\sqrt{6}M_{Pl}} \right) \varphi_k = 0, \quad (1.51)$$

де

$$\omega_k^2 = k^2 + m_\varphi^2 \quad (1.52)$$

На стадії попереднього розігріву другим доданком можемо знехтувати, в порівнянні з іншими. Враховуючи, що частинки матерії народжуються з дуже великими імпульсами $\sim \mu$, будемо вважати, що $\omega_k \simeq k$. Ця енергія народжених частинок також залежить від часу за рахунок космологічного розширення:

$$\omega_k(t) \sim \frac{1}{a(t)} \quad (1.53)$$

Тепер можна сформулювати задачу про народження частинок поля φ в зовнішньому полі інфлатона за допомогою наступного рівняння:

$$\ddot{\varphi}_k + \left(\omega_k^2(t) - \mu^2 \frac{\phi(t)}{\sqrt{6}M_{Pl}} \right) \varphi_k = 0, \quad (1.54)$$

$$\frac{\phi}{M_{Pl}} \ll 1, \quad \phi = \phi_0(t) \cos \mu t, \quad (1.55)$$

яке, за допомогою додаткових позначень

$$\frac{\mu^2 \phi_0(t) \cos \mu t}{\sqrt{6}M_{Pl}} = g_0(t) \cos \mu t, \quad \Omega_k(t)^2 = \omega_k^2(t) - g_0(t) \cos \mu t, \quad (1.56)$$

записується у спрощеному вигляді, як:

$$\ddot{\varphi}_k + \Omega_k^2(t) \varphi_k = 0. \quad (1.57)$$

Далі буде розглянемо процес народження бозонів, у так званому резонансному випадку.

1.4.2 Параметричний резонанс: загальна теорія

В даному пункті розглядається математичний апарат параметричного резонансу, для його подальшого застосування до задачі народження частинок [13]. Маємо деяку функцію $Y(t)$, яка задовільняє рівнянню:

$$\ddot{Y} + (\omega_0^2 + \epsilon g(\omega t)) Y = 0 \quad (1.58)$$

де ω_0 та ω — константи, ϵ — малий параметр, який також не залежить від часу, $g(x)$ — 2π -періодична функція. Для знаходження наближеного розв'язку цього рівняння будемо використовувати наближений метод усереднення Боголюбова [50].

Зробимо позначення:

$$\omega_0^2 = \left(\frac{p}{q}\omega\right)^2 + \epsilon\Delta, \quad (1.59)$$

де p і q — натуральні числа. Тоді рівняння (1.58) запишеться у вигляді:

$$\ddot{Y} + \left(\frac{p}{q}\omega\right)^2 Y = -\epsilon(g(\omega t) + \Delta)Y \quad (1.60)$$

Метод усереднення Боголюбова полягає у знаходженні наближеного розв'язку рівняння (1.60) у вигляді:

$$Y = a \cos \psi + \sum_{s=1}^{\infty} \epsilon^s u^{(s)}(a, \theta, \frac{\omega}{q}t), \quad (1.61)$$

де функції $u^{(s)}$ є 2π -періодичними по 2-му і 3-му аргументах, $\psi = \frac{p}{q}\omega t + \theta$, а параметри a і θ залежать від часу. У випадку $\epsilon = 0$ розв'язок (1.61) задовольняє рівнянню (1.60). Нас буде цікавити розв'язок в рамках першого порядку теорії збурення по ϵ . В методі Боголюбова похідні по часу від функцій a і θ розкладаються за степенями малого параметру ϵ :

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \epsilon A(a, \theta) + O(\epsilon^2) \\ \dot{\theta} &= \epsilon B(a, \theta) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (1.62)$$

Підставляючи (1.61) в (1.60) та використовуючи (1.62), отримаємо, в першому порядку по малому параметру ϵ :

$$\ddot{u}^{(1)} + \left(\frac{p}{q}\omega\right)^2 u^{(1)} = -(g + \Delta)a \cos \psi + 2\frac{p}{q}\omega A \sin \psi + 2\frac{p}{q}\omega B a \cos \psi \quad (1.63)$$

Використовуючи періодичність збурюючої функції $g(x)$ розкладемо її в ряд Фур'є:

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n e^{inx} \quad (1.64)$$

де $g_n^* = g_{-n}$, та зробимо позначення:

$$g_n = |g_n| e^{i\alpha_n} \quad (1.65)$$

Те саме зробимо з функцією $u^{(1)}$:

$$u^{(1)}(a, \theta, \frac{\omega t}{q}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(a, \theta) e^{\frac{in\omega t}{q}} \quad (1.66)$$

Тоді, з розкладу в ряд отримаємо (1.64), що в лівій частині рівності (1.64) стоятиме:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{p}{q} \right)^2 - \left(\frac{n}{q} \right)^2 \right] \omega^2 u_n e^{\frac{in\omega t}{q}}, \quad (1.67)$$

Цей вираз обертається в нуль при $n = q$. Відповідно, при $n = q$ в нуль має обратись також права частина (1.64). Це дає можливість визначити функції A і B . Позначивши $s = \frac{2p}{q}$, матимемо [13]:

$$\begin{aligned} A(a, \theta) &= \frac{a|g_s|}{s\omega} \sin(2\theta - \alpha_s) \\ B(a, \theta) &= \frac{1}{s\omega} (\Delta + |g_s| \cos(2\theta - \alpha_s)) \end{aligned} \quad (1.68)$$

з натуральним числом s . Зробимо заміну змінних:

$$\begin{aligned} x &= a \cos\left(\theta - \frac{\alpha_s}{2}\right) \\ y &= a \sin\left(\theta - \frac{\alpha_s}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.69)$$

В нових змінних система (1.62) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\epsilon}{s\omega} (|g_s| - \Delta) y + O(\epsilon^2) \\ \dot{y} &= \frac{\epsilon}{s\omega} (|g_s| + \Delta) x + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (1.70)$$

Власні значення системи (1.70):

$$\mu_{\pm} = \pm \frac{\epsilon}{s\omega} \sqrt{|g_s|^2 - \Delta^2} \quad (1.71)$$

$\mu_{\pm}$ є дійсною величиною, якщо:

$$\Delta < |g_s| \quad (1.72)$$

Отже, для кожного натурального значення s існують розв'язки, які експоненційно ростуть або падають $Y \sim e^{\mu_{\pm} t}$ в межах першої резонансної зони, яка визначена (1.59) і (1.72).

1.4.3 Параметричний резонанс для моделі Старобінського

Повернемось тепер до нашої задачі про народження частинок у зовнішньому змінному полі. Як і в попередньому пункті, слідуватимемо логіці роботи [13]. Рівняння для поля народжуваних бозе-частинок в імпульсному просторі має вигляд:

$$\ddot{\varphi}_k + \Omega_k^2(t)\varphi_k = 0 \quad (1.73)$$

де $\Omega_k^2 = \omega_k^2 + \epsilon g(\omega t)$ — поки ми не розглядатимемо залежність від часу енергії народжуваних частинок та амплітуди збурення $g(\omega t)$. Для подальших цілей розглянемо зараз теорію гармонічного осцилятора зі змінною в часі частотою $\Omega(t)$. Нехай Q — координата осцилятора, P — спряжений до неї імпульс. Тоді гамільтоніан системи має вигляд:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} [P^2 + \Omega^2(t)Q^2], \quad (1.74)$$

Для квантового гармонічного осцилятора Q і P є ермітовими операторами з комутаційним співвідношенням ($\hbar = 1$):

$$[Q, P] = i. \quad (1.75)$$

В шредінгєрівському представленні ці оператори не залежать від часу. Ми хочемо перейти до зручного залежного від часу базису в гільберторовому просторі, в якому в кожний момент часу гамільтоніан осцилятора є діагональним. Це можна зробити за допомогою залежних від часу операторів:

$$\begin{aligned} a &= \frac{e^{i \int \Omega dt}}{\sqrt{2\Omega}} (\Omega Q + iP) \\ a^\dagger &= \frac{e^{-i \int \Omega dt}}{\sqrt{2\Omega}} (\Omega Q - iP) \end{aligned} \quad (1.76)$$

Легко показати, що для цих операторів виконуються такі ж комутаційні співвідношення, що і для звичайних операторів народження та знищення:

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (1.77)$$

Розглянемо добуток $aa^\dagger$:

$$a^\dagger a = \frac{1}{2\Omega}(\Omega Q - iP)(\Omega Q + iP) = \frac{1}{2\Omega}(\Omega^2 Q^2 + P^2 + i\Omega) = \frac{1}{2\Omega}(\Omega^2 Q^2 - \Omega + P^2) \quad (1.78)$$

Бачимо, що гамільтоніан можна записати у вигляді:

$$\mathcal{H} = \Omega \left(\frac{1}{2} + a^\dagger a \right) \quad (1.79)$$

Оператори a та $a^\dagger$ підпорядковуються рівнянню Гайзенберга:

$$\frac{d\hat{A}_H}{dt} = -\frac{1}{i}[\hat{\mathcal{H}}, \hat{A}_H] + \frac{\partial \hat{A}_H}{\partial t} \quad (1.80)$$

Знайдемо, як вони комутують з гамільтоніаном:

$$\mathcal{H} \cdot a = \Omega \left(\frac{1}{2} + a^\dagger a \right) a = \Omega \left(\frac{a}{2} - aa^\dagger a - a \right) = a\mathcal{H} - \Omega a \quad (1.81)$$

$$\mathcal{H} \cdot a^\dagger = \Omega \left(\frac{1}{2} + a^\dagger a \right) a^\dagger = \Omega \left(\frac{a^\dagger}{2} - a^\dagger a^\dagger a + a^\dagger \right) = a^\dagger \mathcal{H} + \Omega a^\dagger \quad (1.82)$$

Отже:

$$[\mathcal{H}, a] = -\Omega a, \quad [\mathcal{H}, a^\dagger] = \Omega a^\dagger \quad (1.83)$$

Використовуючи дані комутаційні співвідношення, можна отримати рівняння для операторів a та $a^\dagger$:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{1}{i}\Omega a + \frac{i\Omega e^{i\int \Omega dt}}{\sqrt{2\Omega}}(\Omega Q + iP) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\dot{\Omega} e^{i\int \Omega dt}}{\sqrt{2\Omega}\Omega}(\Omega Q + iP) + \frac{e^{i\int \Omega dt}}{\sqrt{2\Omega}}\dot{\Omega}Q \\ &= -i\Omega a + i\Omega a + \frac{1}{2} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \frac{e^{i\int \Omega dt}}{2\sqrt{2\Omega}}(\Omega Q - iP) \\ &= \frac{\dot{\Omega}}{2\Omega} e^{2i\int \Omega dt} a^\dagger \end{aligned} \quad (1.84)$$

Аналогічні дії можна виконати для $a^\dagger$. Тоді:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{\dot{\Omega}}{2\Omega} e^{2i\int \Omega dt} a^\dagger, \\ \dot{a}^\dagger &= \frac{\dot{\Omega}}{2\Omega} e^{-2i\int \Omega dt} a \end{aligned} \quad (1.85)$$

Розв'язок системи (1.85) може бути записаний через оператори народження та знищення, які не залежать від часу:

$$\begin{aligned} a(t) &= \alpha(t)a_0 + \beta^*(t)a_0^\dagger \\ a^\dagger(t) &= \beta(t)a_0 + \alpha^*(t)a_0^\dagger \end{aligned} \quad (1.86)$$

Перетворення типу (1.86) називаються перетвореннями Боголюбова. Вони являються перетвореннями між двома наборами операторів народження-знищення. Коефіцієнти $\alpha(t)$ та $\beta(t)$ називають коефіцієнтами Боголюбова.

Якщо осцилятор початково знаходиться у вакуумному стані, то його стан $|0_0\rangle$ анігілюється оператором a_0 . Це дає можливість визначити початкові умови для коефіцієнтів Боголюбова:

$$|\alpha(0)| = 1, \quad \beta(0) = 0. \quad (1.87)$$

На момент часу t середнє число збуджених рівнів осцилятора визначатиметься коефіцієнтом Боголюбова β . Покажемо, що це так:

$$\begin{aligned} n(t) &= \langle 0_0 | a^\dagger(t) a(t) | 0_0 \rangle \\ &= \langle 0_0 | (\beta(t)a_0 + \alpha^*(t)a_0^\dagger) \cdot (\alpha(t)a_0 + \beta^*(t)a_0^\dagger) | 0_0 \rangle \\ &= \langle 0_0 | a_0^2 | 0_0 \rangle \alpha(t)\beta(t) + \langle 0_0 | (a_0^\dagger)^2 | 0_0 \rangle \alpha^*(t)\beta^*(t) \\ &\quad + \langle 0_0 | a_0^\dagger a_0 | 0_0 \rangle |\alpha(t)|^2 + \langle 0_0 | a_0 a_0^\dagger | 0_0 \rangle |\beta(t)|^2 \\ &= \langle 0_0 | (1 - a_0^\dagger a_0) | 0_0 \rangle |\beta(t)|^2 = |\beta(t)|^2 \end{aligned} \quad (1.88)$$

Таким чином, наша основна задача зводиться до пошуку коефіцієнта β . Використовуючи систему рівнянь (1.85) можемо отримати рівняння на знаходження коефіцієнтів Боголюбова, зокрема:

$$\dot{a} = \dot{\alpha}(t)a_0 + \dot{\beta}^*(t)a_0^\dagger = \frac{\dot{\Omega}}{2\Omega} e^{2i \int \Omega dt} (\beta(t)a_0 + \alpha^*(t)a_0^\dagger), \quad (1.89)$$

прирівнюючи член при a_0 , отримаємо:

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{\dot{\Omega}}{2\Omega} e^{2i \int \Omega dt} \beta. \quad (1.90)$$

Аналогічно для $\dot{\beta}(t)$. Отже матимемо систему рівнянь для коефіцієнтів Боголюбова:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(t) &= \frac{\dot{\Omega}}{2\Omega} e^{2i \int \Omega dt} \beta, \\ \dot{\beta}(t) &= \frac{\dot{\Omega}}{2\Omega} e^{-2i \int \Omega dt} \alpha,\end{aligned}\tag{1.91}$$

з початковими умовами (1.87).

В представленні Гайзенберга рівняння для оператора Q має вигляд:

$$\ddot{Q} + \Omega^2 Q = 0.\tag{1.92}$$

Його розв'язок у вигляді комбінації додатньо- та від'ємно-частотних розв'язків виражається через оператори народження-знищення a_0 та $a_0^\dagger$:

$$Q(t) = Q^{(-)}(t)a_0 + Q^{(+)}(t)a_0^\dagger\tag{1.93}$$

За допомогою рівнянь (1.76) та (1.86) можемо виразити коефіцієнт $\beta(t)$ в термінах розв'язку $Q^{(-)}(t)$ в моменти часу, коли Ω рівна нулю [13]:

$$\beta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} e^{-i \int \Omega dt} (\Omega Q^{(-)} - i \dot{Q}^{(-)})\tag{1.94}$$

Описаний формалізм квантового осцилятора з залежною від часу частотою може бути використаний для нашої задачі про народження частинок в системі, що описується рівнянням (1.73). Нам потрібно знайти від'ємно-частотний розв'язок цього рівняння:

$$\ddot{Q}_k^{(-)} + (\omega_k^2 + \epsilon g(\omega t)) Q_k^{(-)}\tag{1.95}$$

Для цього нами можуть бути використані результати пункту 1.4.2, адже рівняння (1.95) є повністю аналогічним рівнянню (1.58). Початкові умови для $Q_k^{(-)}$ слідують з (1.87):

$$|Q_k^{(-)}(0)| = \frac{1}{2\Omega_k(0)}, \quad (\Omega_k Q_k^{(-)} - i \dot{Q}_k^{(-)})_{t=0} = 0\tag{1.96}$$

Введемо, як і в пункті 1.4.2 позначення:

$$\omega_k^2 = \left(\frac{s}{2}\omega\right)^2 + \epsilon\Delta\tag{1.97}$$

Тоді розв'язок для $Q_k^{(-)}$ буде задаватись комбінацією розв'язків типу (1.61), а саме:

$$Q_k^{(-)} = \frac{1}{2\omega_k}(a_1 \cos \psi_1 + ia_2 \cos \psi_2) + O(\epsilon), \quad (1.98)$$

де

$$\psi_{1,2} = \frac{s}{2}\omega t + \theta_{1,2}. \quad (1.99)$$

З (1.96) впливають початкові умови для $a_{1,2}$ і $\theta_{1,2}$:

$$a_1 = a_2 = 1, \quad \theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2}. \quad (1.100)$$

Аналогічно до (1.69) перейдемо до нових змінних:

$$x_1 = a_1 \cos \theta_1, \quad x_2 = a_2 \cos \theta_2, \quad (1.101)$$

$$y_1 = a_1 \sin \theta_1, \quad y_2 = a_2 \sin \theta_2, \quad (1.102)$$

Початкові умови для нових змінних впливають з (1.100):

$$x_1(0) = y_2(0), \quad x_2(0) = -y_1(0), \quad (1.103)$$

$$|x_1|^2 + |y_1|^2 = |x_2|^2 + |y_2|^2 = 1 \quad (1.104)$$

В найнижчому по ϵ порядку вираз для β_k дається [13]:

$$\beta_k = \frac{1}{2}(x_1 + ix_2 + i(y_1 + iy_2)) \quad (1.105)$$

що задовільняє рівнянню:

$$\ddot{\beta}_k = \mu_+^2 \beta_k \quad (1.106)$$

де μ дається виразом (1.71). Початкові умови для β_k слідують з (1.103) та (1.104):

$$\beta_k(0) = 0, \quad |\dot{\beta}_k(0)| = \mu_+|_{\Delta=0} \quad (1.107)$$

Отримавши розв'язок рівняння (1.106) матимемо остаточну відповідь:

$$n_k \equiv |\beta_k|^2 = \frac{1}{1 - \Delta^2/|g_s|^2} \sinh^2(\mu_+ t) \quad (1.108)$$

Даний розв'язок може бути використаним не лише, коли μ_+ є константою, але й коли цей показник змінюється адіабатично повільно, тобто [13]:

$$|\dot{\mu}_+| \ll \mu_+^2 \quad (1.109)$$

В цьому випадку середня кількість народжених частинок може бути оцінена, як:

$$n_k \simeq \sinh^2 \left(\int \mu_+ dt \right) \quad (1.110)$$

Адаптуємо отриманий результат до задачі про народження бозонів у зовнішньому осцилюючому полі інфлатона в моделі Старобінського, заданої рівнянням (1.54). В цьому випадку:

$$g_1 = \frac{\mu^2 \phi_0}{2\sqrt{6}M_P}, \quad (1.111)$$

Вираз (1.97) запишеться, як:

$$\omega_k^2 = \left(\frac{\mu}{2} \right)^2 + \Delta, \quad (1.112)$$

тобто резонансне народження частинок спостерігатиметься на половині власної частоти осциляцій інфлатона μ . Показник резонансної експоненти (1.71) матиме вигляд:

$$\mu_+ = \frac{1}{\mu} \sqrt{|g_1|^2 - \Delta^2} \quad (1.113)$$

Оцінимо спочатку ширину резонансної зони використовуючи (1.112) та умову (1.72):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\omega_k}{\mu} &= \frac{\omega_k - \omega_{res}}{\mu} = \frac{\omega_k - \mu}{\mu/2} = \\ &= \frac{(\omega_k - \mu/2)(\omega_k + \mu/2)}{\mu(\omega_k + \mu/2)} \simeq \frac{\omega_k^2 - (\mu/2)^2}{\mu^2} \\ &= \frac{\Delta}{\mu^2} \lesssim \frac{|g_1|}{\mu^2} = \frac{\phi_0}{2\sqrt{6}M_P} \ll 1 \end{aligned} \quad (1.114)$$

В літературі такий випадок називають вузьким резонансом. Тепер перевіримо виконання умови адіабатичності (1.109) в центрі резонансної зони ($\Delta\omega_k = 0$). Перепишемо вираз (1.113):

$$\mu_+ = \frac{1}{\mu} \sqrt{|g_1|^2 - \Delta\omega_k^2 (2\omega_{res})^2} \quad (1.115)$$

Тоді:

$$\frac{|\dot{\mu}_+|}{\mu_+^2} = \frac{\mu^5 \phi_0 \dot{\phi}_0}{24 M_P^2 |g_1|^3} = \frac{2\sqrt{6} M_P \dot{\phi}_0}{\mu \phi_0^2} \quad (1.116)$$

Використовуючи (1.47), бачимо, що:

$$\dot{\phi}_0 = -\frac{3\dot{a}}{2a} \cdot \frac{Const}{a^{3/2}} = -\frac{3}{2} H \phi_0 \quad (1.117)$$

Тоді:

$$\frac{|\dot{\mu}_+|}{\mu_+^2} = \frac{3\sqrt{6} M_P}{\mu \phi_0} H \quad (1.118)$$

Для оцінки значення цього виразу, використаємо рівняння Фрідмана

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_P^2} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right), \quad (1.119)$$

з якого випливає наступне:

$$H^2 \lesssim \frac{8\pi}{3M_{Pl}^2} V(\phi) = \frac{1}{3M_P^2} \left(\frac{3\mu^2 M_P^2}{4} \right) \cdot \frac{2\phi_0^2}{3M_P^2} = \frac{\mu^2 \phi_0^2}{6M_P^2} \Rightarrow H \lesssim \frac{\mu \phi_0}{\sqrt{6} M_P} \quad (1.120)$$

Отже, отримуємо:

$$\frac{|\dot{\mu}_+|}{\mu_+^2} \lesssim 3 \quad (1.121)$$

Це означає, що в нашому випадку умова адіабатичності не виконується (1.109), і розглянутий у цьому розділі випадок резонансного народження частинок не працює для моделі Старобінського.

1.4.4 Народження бозонів

В кінці попереднього пункту було зроблено висновок, що в рамках моделі Старобінського порушується умова адіабатичності, яка має виконуватись для резонансного народження частинок, тому теорія параметричного резонансу є незастосовною для цієї моделі. В цьому пункті розв'язується задача про народження бозонів на стадії попереднього розігріву в рамках моделі Старобінського, не застосовуючи механізм параметричного резонансу.

Залишимо ще раз початкову умову задачі:

$$\ddot{\varphi}_k + \left(\omega_k^2(t) - \mu^2 \frac{\phi(t)}{\sqrt{6} M_P} \right) \varphi_k = 0 \quad (1.122)$$

$$\frac{\phi}{M_P} \ll 1, \quad \phi = \phi_0(t) \cos \mu t \quad (1.123)$$

роблячи перепозначення :

$$\frac{\mu^2 \phi_0(t) \cos \mu t}{\sqrt{6} M_P} = 2g_0(t) \cos \mu t, \quad \Omega_k(t)^2 = \omega_k^2(t) - 2g_0(t) \cos \mu t, \quad \frac{|\dot{g}_0|}{|g_0|} \ll \omega_k, \mu \quad (1.124)$$

матимемо рівняння для φ_k у формі:

$$\ddot{\varphi}_k + \Omega_k^2(t) \varphi_k = 0 \quad (1.125)$$

Оцінка $\frac{|\dot{g}_0|}{|g_0|} \ll \omega_k, \mu$ отримана з урахуванням $g_0 \sim 1/a^{3/2}$, а також, використовуючи (1.120):

$$\frac{|\dot{g}_0|}{|g_0|} = \frac{3}{2} H \lesssim \frac{3}{2} \frac{\mu \phi_0}{\sqrt{6} M_P} \ll \mu \omega_k \quad (1.126)$$

Дане співвідношення є умовою адіабатичності для параметру g_0 , яке слід відрізнити від умови адіабатичності для показника резонансної експоненти (1.109)

На відміну від попереднього розгляду ми будемо розв'язувати більш точну задачу, адже враховуватимемо залежність від часу $\omega_k(t)$, і амплітуди поля інфлатона $\phi_0(t)$.

Основна задача полягає у визначенні коефіцієнта Боголюбова β_k , який, згідно з результатами попереднього пункту, знаходиться з системи рівнянь:

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{\Omega}}{2\Omega} e^{2i \int \Omega dt} \beta, \quad \dot{\beta} = \frac{\dot{\Omega}}{2\Omega} e^{-2i \int \Omega dt} \alpha \quad (1.127)$$

з початковими умовами:

$$|\alpha(t_0)| = 1, \quad \beta(t_0) = 0. \quad (1.128)$$

Для зручності виконаємо наступне перетворення:

$$\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = \frac{1}{2} \frac{(\Omega^2)'_t}{\Omega^2} \quad (1.129)$$

Тепер потрібно продиференціювати по часу Ω_k^2 . Використовуючи, що $\omega_k \sim \frac{k}{a}$, отримаємо:

$$\frac{d}{dt}(\omega_k^2) = -2H\omega_k^2 \quad (1.130)$$

Вище було показано, що

$$\frac{d}{dt}(g_0) = -\frac{3}{2}Hg_0 \quad (1.131)$$

Тоді матимемо:

$$\frac{d}{dt}(\Omega_k^2) = -2H\omega_k^2 + 2g_0\mu \sin \mu t - 3Hg_0 \cos \mu t \quad (1.132)$$

Враховуючи, що $H \ll \mu$, можемо знехтувати останнім членом в даному виразі. Тоді матимемо:

$$\frac{\dot{\Omega}}{2\Omega} = \frac{(\Omega^2)'_t}{4\Omega^2} = -\frac{H\omega_k^2 - g_0\mu \sin \mu t}{2(\omega_k^2 - 2g_0 \cos \mu t)} \quad (1.133)$$

Систему рівнянь (1.127) для коефіцієнтів Боголюбова розв'язуватимемо, використовуючи теорію збурення. Роль малого параметру розкладу грає g_0 . Виконаємо розклад виразу (1.133). Будемо обмежуватись першим порядком по g_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\Omega}}{2\Omega} &\simeq -\frac{H\omega_k^2 - g_0\mu \sin \mu t}{2\omega_k^2} \cdot \left(1 + \frac{2g_0}{\omega_k^2} \cos \mu t\right) \\ &\simeq -\frac{H}{2} + g_0 \left(\frac{\mu \sin \mu t}{2\omega_k^2} - \frac{H}{\omega_k^2} \cos \mu t\right) \end{aligned} \quad (1.134)$$

Використовуючи знову $\mu \gg H$, матимемо:

$$\frac{\dot{\Omega}}{2\Omega} = -\frac{H}{2} + g_0 \frac{\mu \sin \mu t}{2\omega_k^2} \quad (1.135)$$

Тоді наша система (1.127) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \dot{\beta} = \left(-\frac{H}{2} + \frac{\mu g_0 \sin \mu t}{2\omega_k^2}\right) e^{-2i \int \omega_k dt} e^{\frac{2ig_0 \sin \mu t}{\omega_k \mu}} \alpha \\ \dot{\alpha} = \left(-\frac{H}{2} + \frac{\mu g_0 \sin \mu t}{2\omega_k^2}\right) e^{2i \int \omega_k dt} e^{-\frac{2ig_0 \sin \mu t}{\omega_k \mu}} \beta \end{cases} \quad (1.136)$$

де було виконано інтегрування в експоненті, використовуючи малість g_0 , а також умову адіабатичності для нього:

$$\begin{aligned} &\int \sqrt{\omega_k^2 + 2g_0 \cos \mu t} dt \\ &= \int \omega_k \sqrt{1 + \frac{2g_0}{\omega_k^2} \cos \mu t} dt \approx \int \left(\omega_k + \frac{g_0}{\omega_k} \cos \mu t\right) dt \\ &\simeq \int \omega_k dt + \frac{g_0 \sin \mu t}{\mu \omega_k} \end{aligned} \quad (1.137)$$

В нульовому наближенні теорії збурень, розв'язками системи (1.127) вважатимемо $\beta = 0$ та $\alpha = 1$. Підставляючи їх в систему, отримаємо рівняння для β в наступному наближенні:

$$\beta_k(t) = \int \left(-\frac{H}{2} + \frac{\mu g_0 \sin \mu t}{2\omega_k^2} \right) e^{-2i \int \omega_k dt'} e^{\frac{2ig_0 \sin \mu t}{\omega_k \mu}} dt \quad (1.138)$$

Використовуючи малість величини $\frac{g_0}{\omega_k \mu}$, виконаємо розклад експоненти у виразі (1.138):

$$\begin{aligned} \beta_k(t) &= \int \left(-\frac{H}{2} + \frac{\mu g_0 \sin \mu t}{2\omega_k^2} \right) \left(1 + \frac{2ig_0}{\mu\omega_k} \sin \mu t \right) e^{-2i \int \omega_k dt'} dt \\ &= \int \left(-\frac{H}{2} - \frac{ig_0 H}{\mu\omega_k} \sin \mu t + \frac{\mu g_0}{2\omega_k^2} \sin \mu t + \frac{ig_0^2}{\omega_k^3} \sin^2 \mu t \right) e^{-2i \int \omega_k dt'} dt \end{aligned} \quad (1.139)$$

Останній член можна відкинути, оскільки ми працюємо в першому порядку теорії збурення. Тоді, розкладаючи $\sin \mu t$, матимемо:

$$\beta_k(t) = \int \left(-\frac{H}{2} + \left(\mu - \frac{iH\omega_k}{\mu} \right) \frac{g_0}{4i\omega_k^2} (e^{i\mu t} - e^{-i\mu t}) \right) e^{-2i \int \omega_k dt'} dt \quad (1.140)$$

Розпишемо останній вираз (покладемо тут нижню межу при інтегруванні в експоненті рівною нулю):

$$\begin{aligned} \beta_k(t) &= \int dt \left[-\frac{H}{2} e^{-2i \int \omega_k dt'} + \frac{\mu g_0}{4i\omega_k^2} \left(e^{i \int_0^t (\mu - 2\omega_k) dt'} - e^{-i \int_0^t (\mu + 2\omega_k) dt'} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{Hg_0}{4\mu\omega_k} \left(e^{i \int_0^t (\mu - 2\omega_k) dt'} - e^{-i \int_0^t (\mu + 2\omega_k) dt'} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.141)$$

Використовуючи $\mu \gg H$ можемо знехтувати членом при $\frac{Hg_0}{4\mu\omega_k}$. Якщо інтегрувати отриманий вираз по-частинам, використовуючи адіабатичність зміни g_0 з часом за наступною схемою:

$$\begin{aligned} \int_0^t dt f(t) e^{i \int_0^t \omega(t') dt'} &= \int_0^t f(t) d \left[\frac{e^{i \int_0^t \omega(t') dt'}}{i\omega(t)} \right] \\ &= f(t) \frac{e^{i \int_0^t \omega(t') dt'}}{i\omega(t)} \Big|_0^t - \int_0^t dt f'(t) \frac{e^{i \int_0^t \omega(t') dt'}}{i\omega(t)}, \end{aligned} \quad (1.142)$$

побачимо, що виникатимуть члени виду $\sim \frac{1}{\omega_k - \mu/2}$, $\sim \frac{1}{\omega_k + \mu/2}$, $\sim \frac{1}{\omega_k}$. Очевидно, що найбільший вклад даватимуть перші з них в околі резонансної частоти

$\mu/2$ (слід відрізняти даний резонанс від параметричного резонансу, який розглядався у попередньому розділі). Тому члени пропорційні $e^{-2i \int \omega_k dt'}$ та $e^{-i \int_0^t (\mu + 2\omega_k) dt'}$ в (1.141) ми відкидаємо. В результаті отримаємо наступний вираз для $\beta_k(t)$:

$$\beta_k(t) = \int dt \frac{\mu g_0}{4i\omega_k^2} e^{-2i \int_{t_0}^t \omega_k dt'} e^{i\mu t} \quad (1.143)$$

Виконаємо інтегрування $\int_{t_0}^t \omega_k dt$. Протягом розігріву, до моменту t_{reh} у Всесвіті домінує нерелятивістська речовина, тому масштабний фактор залежить від часу за законом

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3}, \quad a_0 = a(t_0). \quad (1.144)$$

Початком еволюції вважатимемо момент початку стадії післяінфляційного розігріву t_0 , коли перестали виконуватись умови повільного скочування. Тоді матимемо наступну залежність від часу ω_k :

$$\omega_k = \frac{k}{a} = \frac{k}{a_0} \left(\frac{t_0}{t} \right)^{2/3} \quad (1.145)$$

Тепер можемо виконати інтегрування:

$$\int_{t_0}^t \omega_k(t') dt' = \int_{t_0}^t \frac{t_0 k}{a_0} \left(\frac{t_0}{t'} \right)^{2/3} d \left(\frac{t'}{t_0} \right) = \int_1^{t/t_0} \frac{t_0 k}{a_0} x^{-2/3} dx = \frac{3t_0 k}{a_0} \left(\left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/3} - 1 \right) \quad (1.146)$$

Для взяття зовнішнього інтегралу в (1.143) потрібно врахувати залежність від часу g_0 :

$$g_0(t) = \frac{\mu^2 \phi_0(t)}{2\sqrt{6}M_P}, \quad \phi_0(t) = \phi_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3/2} \Rightarrow g_0(t) = g_0 \frac{t_0}{t} \quad (1.147)$$

В подальших записах g_0 і ϕ_0 буде використовуватись для позначення амплітуди цих величин в момент часу t_0 . Тоді (1.143) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \int_1^{t/t_0} d \left(\frac{t'}{t_0} \right) t_0 \frac{\mu g_0 t_0 a_0^2 (t')^{4/3}}{4i t' k^2 (t_0)^{4/3}} e^{it_0 \mu \frac{t'}{t_0} - \frac{6it_0 k}{a_0} \left(\left(\frac{t'}{t_0} \right)^{1/3} - 1 \right)} \\ = \int_1^{t/t_0} dx \frac{\mu g_0}{4i} t_0 \frac{a_0^2}{k^2} x^{1/3} e^{it_0 \mu x - \frac{6it_0 k}{a_0} (x^{1/3} - 1)} \end{aligned} \quad (1.148)$$

Отже, нам тепер потрібно оцінити значення інтеграла виду:

$$I = \int_1^{t/t_0} dx x^{1/3} e^{t_0 \mu \omega_k(t_0) \left[\frac{ix}{\omega_k} - \frac{6i}{\mu} (x^{1/3} - 1) \right]} \quad (1.149)$$

Як ми очікуємо, своє основне значення інтеграл набиратиме в околі резонансної частоти, тому ми можемо розширити межі інтегрування до $[-\infty, +\infty]$. Також виконаємо аналітичне продовження підінтегральної функції в комплексну площину z .

Для того, щоб оцінити значення інтегралу виду:

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z) e^{\lambda f(z)} dz \quad (1.150)$$

де $f(z)$ — деяка комплексна функція, а λ — велике дійсне число, будемо використовувати метод перевалу [51]. Для цього потрібно порахувати першу та другу похідні від функції $f(z)$. В нашому випадку:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{iz}{\omega_k(t_0)} - \frac{6i}{\mu} (z^{1/3} - 1); \\ f'(z) &= \frac{i}{\omega_k(t_0)} - \frac{2i}{\mu} z^{-2/3}; \\ f''(z) &= \frac{4i}{3\mu} z^{-5/3}; \end{aligned} \quad (1.151)$$

Екстремальне значення функції $f(z)$ досягається в точці:

$$z = z_0 = \left(\frac{2\omega_k(t_0)}{\mu} \right)^{3/2}, \quad (1.152)$$

де друга похідна від $f(z)$:

$$f(z_0) = \frac{4i}{3\mu} \left(\frac{\mu}{2\omega_k(t_0)} \right)^{5/2} \neq 0; \quad (1.153)$$

Тоді згідно з методом перевалу:

$$F = e^{\lambda f(z_0)} \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |f''(z_0)|}} \varphi(z_0) e^{i\phi_m} \right\} \quad (1.154)$$

де ϕ_m деяка фаза, яка не буде нас цікавити, оскільки в кінцевому рахунку нам буде потрібна величина $|\beta_k|^2$. В нашому випадку:

$$I = \sqrt{\frac{2\pi 3\mu}{t_0 \mu \omega_k(t_0) 4} \left(\frac{2\omega_k(t_0)}{\mu} \right)^{5/2}} \cdot \sqrt{\frac{2\omega_k(t_0)}{\mu}} e^{i\lambda \alpha} e^{i\phi_m} \quad (1.155)$$

де ми використали, що $f(z_0) = i\alpha$, де α дійсна величина. Отже, опускаючи несуттєві фазові множники, матимемо наступний вираз для коефіцієнту Боголюбова:

$$\beta_k = \frac{\mu^3 \phi_0 \sqrt{\pi}}{16i M_P \omega_k^2(t_0)} t_0 \frac{1}{\sqrt{\omega_k(t_0) t_0}} \left(\frac{2\omega_k(t_0)}{\mu} \right)^{7/4} \quad (1.156)$$

Бачимо, що коефіцієнт Боголюбова не залежить від часу. Але густина станів народжених частинок звичайно буде залежати від часу. В k -просторі у станів з різним початковим значенням імпульсу k за рахунок червоного зміщення буде зменшуватись частота ω_k . Деякі з них при цьому перетинатимуть окіл резонансної частоти $\omega_k^{res} = \frac{1}{2}\mu$. При цьому відбуватиметься народження частинок, і густина станів в k -ій моді ставатиме рівною $|\beta_k|^2$. Деякі стани початково мають частоту меншу за резонансну. Народження частинок в таких станах не відбуватиметься. В термінах фізичного імпульсу $k_p = \frac{k}{a}$ це можна записати наступним чином:

$$n_k = \begin{cases} 0, & k > \frac{\mu a(t)}{2} \quad (k\text{-мода ще не пройшла через резонанс}), \\ |\beta_k|^2, & k_{\min} < k < \frac{\mu a(t)}{2} \quad (k\text{-мода пройшла резонанс}), \\ 0, & k < k_{\min} \quad (k\text{-мода ніколи не пройде резонанс}). \end{cases} \quad (1.157)$$

де $k_p^{min} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0}{a} \right)$. Одним виразом це можна записати, використовуючи функції Хевісайда:

$$n_k = \theta \left(k - \frac{1}{2} \mu a_0 \right) \theta \left(\frac{1}{2} \mu a(t) - k \right) |\beta_k|^2 \quad (1.158)$$

Тепер ми можемо визначити густину енергії народжених частинок матерії:

$$\rho(t) = \int \omega_{k_p} n_{k_p} \frac{d^3 k_p}{(2\pi)^3} \quad (1.159)$$

В супутній системі відліку матимемо:

$$\rho(t) = \int \frac{k}{a^4} \theta(k - \frac{1}{2} \mu a_0) \theta(\frac{1}{2} \mu a(t) - k) |\beta_k|^2 \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \quad (1.160)$$

Знайдемо похідну від $\rho(t)$ по часу:

$$\dot{\rho}(t) = -4H\rho + \int \frac{d^3k|\beta_k|^2k}{(2\pi^3)a^4} \theta(k - \frac{1}{2}\mu a_0) \frac{\mu\dot{a}}{2} \delta(\frac{1}{2}\mu a - k) \quad (1.161)$$

Порівнюючи отриманий вираз з рівнянням еволюції густини енергії релятивістських частинок у Всесвіті, що розширюється (1.37) ($\rho = \rho_\varphi$), отримуємо, що:

$$\Gamma_\varphi \rho_\phi = \int \frac{d^3k|\beta_k|^2k}{(2\pi^3)a^4} \theta(k - \frac{1}{2}\mu a_0) \frac{\mu\dot{a}}{2} \delta(\frac{1}{2}\mu a - k) \quad (1.162)$$

Після інтегрування (1.162) в k -просторі матимемо:

$$\Gamma_\varphi \rho_\phi = \frac{\mu^5 a_0^2 \phi_0^2 \dot{a} t_0}{256 \pi a^6 M_{Pl}^2} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{7/2} \quad (1.163)$$

Врахуємо, що:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \mu^2 \phi_0^2(t) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi_0^2 \frac{a_0^3}{a^3} \quad (1.164)$$

Тоді матимемо:

$$\Gamma_\varphi = \frac{\mu^2}{128 \pi M_P^2} \cdot \frac{a_0^2 \dot{a} t_0}{a^3} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{7/2} \quad (1.165)$$

Борнівська теорія збурень дає наступний вираз для ширини розпаду інфлатона в моделі Старобінського [13, 48]:

$$\Gamma_0 = \frac{\mu^3}{192 \pi M_P^2} \quad (1.166)$$

Для порівняння виразимо Γ через Γ_0 :

$$\Gamma_\varphi = \frac{3}{2} \Gamma_0 \left(\frac{a_0^2 \dot{a} t_0}{a^3} \right) \cdot \left(\frac{a}{a_0} \right)^{7/2} \quad (1.167)$$

Знову таки, використовуючи $a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3}$, отримаємо, що:

$$\Gamma_\varphi = \Gamma_0 \quad (1.168)$$

Тобто незалежний розрахунок темпу народження частинок з урахуванням розширення Всесвіту дав такий самий результат, що і борнівське наближення.

Важливо сказати, що отримані в даному пункті результати носять універсальний характер і можуть бути застосовані не лише для випадку моделі Старобінського, а і для будь-якої теорії народження бозонів у зовнішньому осцилюючому скалярному полі інфлатона, у випадку слабкої взаємодії. Дійсно, розглянемо дію загального вигляду:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\zeta\phi\varphi^2, \quad (1.169)$$

при достатньо малому значенні константи ζ :

$$\zeta\phi_0 \ll M^2, \quad (1.170)$$

де M — маса скалярного поля ϕ . Саме для дій такого типу, коли взаємодія лінійна за полем інфлатона, ми можемо інтерпретувати процес народження частинок, як розпад інфлатона.

Рівняння руху для поля φ буде:

$$\square\varphi + (m_\varphi^2 + 2\zeta\phi)\varphi = 0. \quad (1.171)$$

Переходячи до компонент мод φ_k отримаємо:

$$\ddot{\varphi}_k + 3H\dot{\varphi}_k + \left(\frac{k^2}{a^2} + m_\varphi^2 + 2\zeta\phi\right)\varphi = 0 \quad (1.172)$$

Бачимо, що воно є еквівалентним рівнянню (1.122), на стадії рехітінгу, коли другим доданком можна знехтувати, з точністю до перепозначення $\zeta = \frac{\mu^2}{2\sqrt{6}M_P}$. Рівняння для знаходження коефіцієнту Боголюбова матиме вигляд:

$$\dot{\beta}_k = \left(\frac{\dot{\omega}_k}{2\omega_k} + \frac{\zeta M\phi_0}{2\omega_k^2} \sin Mt\right) e^{2i \int_{t_0}^t \omega_k(t') dt'}. \quad (1.173)$$

Розписуючи $\sin Mt$, як суму експонент, матимемо:

$$\dot{\beta}_k = \frac{\dot{\omega}_k}{2\omega_k} e^{2i \int_{t_0}^t \omega_k(t') dt'} + \frac{\zeta M\phi_0}{4i\omega_k^2} e^{2i \int_{t_0}^t \omega_k(t') dt' + iMt} + \frac{\zeta M\phi_0}{4i\omega_k^2} e^{2i \int_{t_0}^t \omega_k(t') dt' - iMt}. \quad (1.174)$$

Знову, залишаючи лише лідуєчий резонансний доданок, матимемо наближений розв'язок для коефіцієнту β_k :

$$\beta_k = \frac{i\zeta M}{4} \int_{t_0}^t \frac{\phi_0(t')}{\omega_k^2(t')} e^{2i \int_{t_0}^{t'} \omega_k(t'') dt'' - iMt'} dt'. \quad (1.175)$$

Як і раніше, для оцінки інтегралу використовується метод перевалу, що дає:

$$\beta_k = \frac{\zeta M \phi_0(t_k)}{4\omega_k^2(t_k)} \sqrt{\frac{\pi}{|\dot{\omega}_k(t_k)|}} = \frac{\zeta \phi_0(t_k)}{M} \sqrt{\frac{\pi}{|\dot{\omega}_k(t_k)|}} = \frac{\zeta \phi_0(t_k)}{M^{3/2}} \sqrt{\frac{2\pi}{H(t_k)}}, \quad (1.176)$$

де момент часу t_k визначається методом перевалу $\omega_k(t_k) = M/2$, і є моментом проходження резонансної зони k -ю модою.

Використовуючи вже застосований вище підхід, для загального виразу для темпу народження бозонів матимемо:

$$\Gamma_\varphi = \frac{\zeta^2}{8\pi M}. \quad (1.177)$$

1.4.5 Народження ферміонів

Тепер розглянемо процес народження ферміонів. У викривленому просторі-часі потрібно користуватись коваріантно-узагальненим рівнянням Дірака:

$$[i\gamma^\mu(x)\mathcal{D}_\mu - m]\psi(x) = 0. \quad (1.178)$$

Тут, $\gamma^\mu(x) = h_{(a)}^\mu(x)\gamma^a$, де γ^a – звичайні матриці Дірака, а тетрадні вектори $h_{(a)}^\mu(x)$ нормовані наступним чином:

$$h_{(a)}^\mu h_{(b)\mu} = \eta_{ab}, \quad (1.179)$$

де η_{ab} – метрика плоского простору-часу.

Коваріантна похідна $\mathcal{D}_\mu$ поля Дірака в (1.178) визначена, як:

$$\mathcal{D}_\mu \psi = \left[\partial_\mu + \frac{1}{4} C_{abc} h_{\mu}^{(c)} \gamma^b \gamma^a \right] \psi. \quad (1.180)$$

Тут, C_{abc} – коефіцієнти Річчі, що пов'язані з тетрадними векторами співвідношенням:

$$C_{abc} = \left(\partial_\nu h_{(a)}^\mu \right) h_{(b)\mu} h_{(c)}^\nu. \quad (1.181)$$

Ми розглядаємо тут стандартний випадок, коли спінорне поле ψ взаємодіє з полем інфлатона ϕ через юкавівську константу взаємодії:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \Upsilon \phi \bar{\psi} \psi. \quad (1.182)$$

Модель Старобінського (1.29) є частинним випадком такої взаємодії при $\Upsilon = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{m_\psi}{M_P}$ і за умови $\phi \ll M_P$. В результаті, в рівнянні (1.178) з'являється ефективна маса, що залежить від часу:

$$m(t) = m_\psi - \Upsilon \phi(t). \quad (1.183)$$

Зручно перейти до конформного часу $\eta = \int a^{-1}(t)dt$, в термінах якого, метрика є конформно плоскою:

$$ds^2 = a^2(\eta) (d\eta^2 - dl^2). \quad (1.184)$$

В космологічній постановці задачі, тетрадні вектори у сферичній системі координат можуть бути обрані наступним чином:

$$\begin{aligned} h_{(0)0} &= -h_{(1)1} = a(\eta), & h_{(2)2} &= -a(\eta)f(r), \\ h_{(3)3} &= -a(\eta)f(r)\sin\theta, & h_{(a)i} &= 0, \quad a \neq i. \end{aligned} \quad (1.185)$$

Рівняння Дірака (1.178) тоді перепишеться, як: [53]

$$\frac{i}{a} \left[\gamma^0 \frac{\partial}{\partial \eta} + \gamma^1 \frac{\partial}{\partial \chi} + \gamma^2 \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial \theta} + \gamma^3 \frac{1}{f \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{3a'}{2a} \gamma^0 + \frac{f'}{f} \gamma^1 + \frac{\cot \theta}{2f} \gamma^2 \right] \psi - m\psi = 0, \quad (1.186)$$

де апострофом позначено похідно відносно по конформному часу η .

Розглянемо псевдо-евклідов простір з $f = \chi$. В цьому випадку зручно використовувати декартові координати. Тоді рівняння (1.186) набуде вигляду:

$$\left[\frac{i}{a} \gamma^\mu \partial_\mu + \frac{3i}{2a} \frac{a'}{a} \gamma^0 - m(\eta) \right] \psi = 0. \quad (1.187)$$

Для того, щоб розділити змінні в цьому рівнянні, шукатимемо розв'язок у вигляді:

$$\psi_j^{(\pm)} = \frac{1}{(2\pi a)^{3/2}} u_{k\sigma}^{(\pm)}(\eta) e^{\pm i k_\alpha x^\alpha} \quad (1.188)$$

Тут маємо квантове число $j = \{k, \sigma\}$, в яке входять $k = \{k_1, k_2, k_3\}$, $\sigma = \pm 1$;

$$u_{\sigma k}^+ = \begin{pmatrix} \sigma f_{k+}(\eta) \varphi_\sigma(k) \\ -f_{k-}(\eta) \varphi_\sigma(k) \end{pmatrix}, \quad u_{\sigma k}^- = \begin{pmatrix} f_{k+}(\eta) \varphi_\sigma(k) \\ \sigma f_{k-}(\eta) \varphi_\sigma(k) \end{pmatrix}. \quad (1.189)$$

Спінори φ_σ є власними функціями оператора кіральності:

$$(\vec{\sigma}\vec{n})\varphi_\sigma = \sigma\varphi_\sigma, \quad (1.190)$$

де $\vec{n} = \vec{k}/|\vec{k}|$, і $\vec{\sigma}$ – матриці Паулі. Тоді, для першої компоненти рівняння (1.187), отримаємо:

$$\frac{i}{a}(\vec{\sigma}\vec{n})\frac{ik}{(2\pi a)^{3/2}}f_{k-}\varphi_\sigma + \left(\frac{i}{a}\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{3i}{2a}\frac{a'}{a} - m\right)\left(\frac{\sigma}{(2\pi a)^{3/2}}f_{k+}\varphi_\sigma\right) = 0, \quad (1.191)$$

маючи, при цьому, для функцій, залежних від часу,

$$f'_{k+} + ikf_{k-} + ima f_{k+} = 0, \quad (1.192)$$

і

$$f'_{k-} + ikf_{k+} - ima f_{k-} = 0. \quad (1.193)$$

Як і у випадку з скалярним полем, можемо виразити загальний розв'язок системи рівнянь у термінах коефіцієнтів Боголюбова α_k і β_k наступним чином:

$$f_{k\pm}(\eta) = \pm N_{\mp}(\eta)\alpha_k(\eta)e^{i\int_{\eta_0}^{\eta}\Omega_k(\eta')a(\eta')d\eta'} - N_{\pm}(\eta)\beta_k(\eta)e^{-i\int_{\eta_0}^{\eta}\Omega_k(\eta')a(\eta')d\eta'}, \quad (1.194)$$

з

$$N_{\pm} = \sqrt{\frac{\Omega_k \pm m}{\Omega_k}}, \quad \Omega_k^2 = \frac{k^2}{a^2} + m^2. \quad (1.195)$$

Коефіцієнти Боголюбова задовільняють наступній системі рівнянь:

$$\beta'_k = \frac{2ma' + m'a}{2k}e^{2i\int_{\eta_0}^{\eta}\Omega_k(\eta')a(\eta')d\eta'}\alpha_k, \quad (1.196)$$

$$\alpha'_k = \frac{2ma' - m'a}{2k}e^{-2i\int_{\eta_0}^{\eta}\Omega_k(\eta')a(\eta')d\eta'}\beta_k. \quad (1.197)$$

Переходячи до звичайного космологічного часу t , можемо повторити викладки та аргументи з попереднього розділу з $\phi(t)$ в (1.183), що задається рівнянням (1.44). Зрештою, ми отримаємо розв'язок в першому порядку теорії збурень для коефіцієнта β_k у формі:

$$\beta_k = \frac{\Upsilon M}{4i} \int_{t_0}^t \frac{\phi_0(t')}{\omega_k(t')} e^{2i\int_{t_0}^{t'}\omega_k(t'')dt'' - iMt'} dt', \quad (1.198)$$

де

$$\omega_k = \sqrt{m_\psi^2 + \frac{k^2}{a^2}} \approx \frac{k}{a}. \quad (1.199)$$

Поправки більш високого порядку до цього розв'язку є малими, згідно з умовою [13]

$$\frac{\Upsilon\phi_0}{M} \ll 1, \quad (1.200)$$

яка виконується в нашому випадку.

Використовуючи метод градієнтного спуску, отримаємо, подібно до (1.176),

$$\beta_k = -\frac{\Upsilon M\phi_0(t_k)}{4\omega(t_k)} \sqrt{\frac{\pi}{|\dot{\omega}_k(t_k)|}} = -\frac{1}{2}\Upsilon\phi_0(t_k) \sqrt{\frac{\pi}{|\dot{\omega}_k(t_k)|}} = -\frac{1}{2}\Upsilon\phi_0(t_k) \sqrt{\frac{2\pi}{MH(t_k)}}. \quad (1.201)$$

Далі, діючи аналогічно пункту 1.4.4, і беручи до уваги чотири можливі поляризації народжених частинок/античастинок, отримаємо остаточно темп народження ферміонів Γ_ψ в загальному випадку та конкретно для моделі Старобінського:

$$\Gamma_\psi = \frac{\Upsilon^2 M}{8\pi} = \frac{\mu m_\psi^2}{12\pi M_{\text{P}}^2}. \quad (1.202)$$

1.4.6 Народження інфлатону

На етапі попереднього розігріву поле інфлатону з нелінійним потенціалом може породжувати збудження самого себе. Для того, щоб розглянути такий процес самозбурення, розділимо поле інфлатона $\phi(\mathbf{x}, t)$ на фонову частину та збурення:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi(t) + \delta\phi(\mathbf{x}, t). \quad (1.203)$$

Підставляючи поле інфлатону в такому вигляді в рівняння руху,

$$\ddot{\phi} - \nabla^2\phi + V'_\phi = 0, \quad (1.204)$$

отримаємо рівняння для фонові частини і для збурення:

$$\ddot{\phi}(t) + V'_\phi(t) = 0, \quad (1.205)$$

$$\delta\ddot{\phi}_k(\mathbf{x}, t) + k^2\delta\phi_k(\mathbf{x}, t) + V''_{\phi\phi}\delta\phi_k(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.206)$$

Для цього було використано розклад

$$V'(\phi + \delta\phi) = V'(\phi) + V''(\phi)\delta\phi \quad (1.207)$$

і виконано перехід до Фур'є-компонент.

В моделі Старобінського на стадії рехітингу, для $\phi/M_P \ll 1$, маємо

$$V'' = \mu^2 \left(1 - \sqrt{6} \frac{\phi}{M_P} - \frac{4}{3} \left(\frac{\phi}{M_P} \right)^2 \right). \quad (1.208)$$

Далі, обмежуючись першим порядком малості по ϕ/M_P , отримаємо

$$\delta\ddot{\phi}_k + \left(\frac{k^2}{a^2} + \mu^2 - \sqrt{6}\mu^2 \frac{\phi}{M_P} \right) \delta\phi_k = 0. \quad (1.209)$$

Це рівняння подібне до (1.122) з фоновою частиною поля, яка поводить, як (1.124). Тому, ми можемо розв'язувати рівняння (1.209), так само, як і в пункті 1.4.4. Зокрема, для коефіцієнту Боголюбова матимемо рівняння:

$$\dot{\beta}_k = \frac{\dot{\Omega}_k}{2\Omega_k} e^{2i \int_{t_0}^t \Omega_k(t') dt'}, \quad (1.210)$$

з

$$\Omega_k^2 = \omega_k^2(t) - \sqrt{6}\mu^2 \frac{\phi_0(t)}{M_P} \cos \mu t, \quad (1.211)$$

$$\omega_k^2 = \mu^2 + \frac{k^2}{a^2}. \quad (1.212)$$

В наближенні $\phi_0/M_P \ll 1$, матимемо

$$\frac{\dot{\Omega}_k}{2\Omega_k} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \frac{\mu^3 \phi_0}{\omega_k^2 M_P} \sin \mu t \quad (1.213)$$

і

$$\dot{\beta}_k = \frac{i\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \frac{\mu^3}{\omega_k^2} \frac{\phi_0}{M_P} \left(e^{2i \int_{t_0}^t \Omega_k(t') dt' - i\mu t} - e^{2i \int_{t_0}^t \Omega_k(t') dt' + i\mu t} \right) \quad (1.214)$$

Специфічною особливістю цього рівняння є те, що система не проходить через резонансну область. Припускаючи, що передекспонентний множник

в (1.214) змінюється в часі повільніше, ніж експонента, можемо оцінити значення β_k і отримати

$$|\beta_k|^2 \simeq \frac{3}{32} \frac{\phi_0^2}{M_P^2} \frac{\mu^4}{\omega_k^4}. \quad (1.215)$$

Для скалярних частинок, використовуючи (1.176) та $\zeta = \frac{\mu^2}{2\sqrt{6}M_P}$, матимемо

$$|\beta_k|^2 = \frac{\pi\mu\phi_0^2}{12M_P^2 H}. \quad (1.216)$$

Відношення між темпом народження скалярних частинок матерії та темпом народження інфлатону становить μ/H , і, оскільки $H \ll \mu$, народженням інфлатону можна знехтувати. Однак, він може бути одного масштабу з темпом народження ферміонів з малою масою [див. рівняння (1.201) з урахуванням $\Upsilon = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{m_\psi}{M_P}$]:

$$|\beta_k|^2 = \frac{\pi}{3} \frac{m_\psi^2}{M_P^2} \frac{\phi_0^2}{\mu H}. \quad (1.217)$$

1.5 Висновки

В даному розділі було розглянуто народження частинок в ранньому Всесвіті після стадії інфляції. Ці процеси є ключовими на стадії попереднього розігріву Всесвіту. З початку 1990х років [11, 12, 13], відомо, що часто ці процеси не можуть розглядатися, використовуючи темпи народження частинок, пораховані в рамках теорії збурень. Так, у просторі Мінковського буде домінувати параметричний резонанс в першій резонансній зоні, якою б малою не була константа взаємодії поля інфлатона з бозонним полем матерії. Густина енергії в цьому випадку росте експоненційно з часом, на відміну від величин, отриманих в рамках теорії збурень. Процес народження ферміонів також є непертурбативним [14].

Специфічні особливості розширення Всесвіту, на диво, відновлюють справедливність звичайних формул борнівського наближення у випадку досить малої константи зв'язку. Причина в тому, що кожна окрема мода поля, що

народжується, проводить лише певний обмежений проміжок часу в резонансі, призводячи до малих чисел заповнення народжених частинок. Обраховуючи темпи народження частинок в наближенні методу перевалу, ми отримали стандартні формули для темпів передачі енергії від поля інфлатона полям скалярних та спінових частинок. Вони характеризуються звичайними темпами народження (1.177) і (1.202), відповідно, і не залежать від деталей розширення Всесвіту. Причину цієї дивної властивості можна побачити в формулах (1.176) і (1.201). Середні числа заповнення для частинок $N_k = |\beta_k|^2 \propto 1/H(t_k)$, обернено пропорційні параметру Хабла в той час, коли мода з хвильовим вектором k проходить резонансну область і збурюється. З іншого боку, темп вивільнення енергії пропорційний темпу заповнення мод, який керується частотним червоним зміщенням і прямо пропорційний параметру Хабла. Ці дві тенденції компенсують одна одну, призводячи до сталих значень величин Γ_φ і Γ_ψ .

Також важливо те, що константи зв'язку (1.169) і (1.182) лінійні по полю інфлатона ϕ , дякуючи чому, ми також маємо $N_k = |\beta_k|^2 \propto \phi_0^2 \propto \rho_\phi$. Це якраз є тими типами зв'язків, відповідальних за розпад ϕ -частинок, що дозволяють ефективну інтерпретацію величин (1.177) і (1.202), як темпів розпаду інфлатона.

Також у даному розділі було розглянуто питання самозбурення інфлатона на етапі попереднього розігріву. Виявилось, що інтенсивністю таких процесів можна знехтувати у порівнянні з процесами народження бозонів, хоча вони і можуть бути порівняні з темпом народження ферміонів.

Потрібно зазначити, що всі результати також було отримано та застосовано на прикладі однієї з найбільш успішних моделей інфляції — моделі Старобінського. Результати даного розділу опубліковано в роботах [41, 42]

РОЗДІЛ 2

ГЕНЕРАЦІЯ ЛЕПТОННОЇ АСИМЕТРІЇ У МОДЕЛІ ЗІ СТЕРИЛЬНИМИ НЕЙТРИНО

2.1 Мотивація до створення моделі νMSM .

Стандартна модель (СМ) — мінімальна релятивістська теорія поля, що може пояснити майже всі експериментальні дані в області фізики елементарних частинок з великою точністю. СМ успішно описує взаємодію між собою частинок, які на сьогодні вважаються елементарними. Попри те, як згадувалось у Вступі, існує декілька спостережуваних явищ, які не вдається пояснити в рамках СМ, зокрема:

- нейтринні осциляції,
- баріонна асиметрія,
- ТМ, ТЕ та ін.

Історично першим експериментом, що призвів до появи ідеї про нейтринні осциляції, був експеримент на шахті Хоумстейк (Південна Дакота, США) в кінці 1960-х років [54]. Експеримент дозволяв вимірювати інтегральний потік електронних сонячних нейтрино. Виміряний потік (Φ^{obs}) виявився суттєво меншим за передбачуваний Стандартною моделлю Сонця (Φ^{SSM}), справедливості якої підтверджується при цьому вимірюваннями потоку фотонів від Сонця і даними геліосейсмології,

$$\frac{\Phi^{obs}}{\Phi^{SSM}} = 0.34 \pm 0.03 \quad (2.1)$$

Такі результати вказували на те, що електронні нейтрино на своєму шляху зазнають перетворення в інші типи нейтрино, які не детектуються на експерименті.

В подальшому якісно аналогічні результати були отримані іншими експериментами по детектуванню електронних сонячних нейтрино [1]:

- Super-K (шахта Каміока, Японія, 1996–нині діючий),
- SNO (Садбері, Канада, 1999–2006),
- Gallex / Gallium Experiment (Лабораторія Гран-Сассо, Італія 1991–1997),

а також на експерименті KamLAND (Японія, 2002–нині діючий) з детектування реакторних електронних нейтрино. На експерименті K2K (Японія, 1999-2004) з детектування атмосферних нейтрино мюонного типу було виявлено зменшення їх потоку від детектора до детектора.

Отримані на цих експериментах результати достовірно вказують на переходи (осциляції) нейтрино різних поколінь між собою. Проте такі процеси є забороненими в рамках СМ, оскільки в ній аромат (номер покоління) лептонів зберігається. Це, в свою чергу, пов'язано з безмасовістю нейтрино в підході СМ. Вираз для ймовірності $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}$ того, що нейтрино з аромативного стану α проосцилює в стан β має форму [55]:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \sum_{j>i} A_{ij\alpha\beta} \sin^2\left(\frac{\Delta m_{ij}^2}{4E}L\right), \quad (2.2)$$

де $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ – різниця квадратів мас нейтрних станів i та j , $A_{ij\alpha\beta}$ – дійсний коефіцієнт, E – енергія нейтрино, L – відстань між точками детектування. З виразу видно, що осциляції неможливі для безмасових частинок, а отже неможливі в СМ без модифікації.

Другою з перелічених проблем СМ є БА. В сучасному Всесвіті спостерігається надлишок баріонів (протони, нейтрони) над відповідними античастинками. При температурах порядку кількох сотен МеВ та вище активно відбувалися процеси народження та анігіляції кварк–антикваркових пар. В процесі охолодження Всесвіту пари анігілюватимуть і сучасна баріонна речовина не мала б існувати. Проблему БА в рамках СМ не вдається розв'язати. Умови, за яких на певному етапі еволюції Всесвіту може згенеруватись БА були сформовані А. Д. Сахаровим. Згідно з цими умовами, для успішного баріогенезису має мати місце [56]:

1. Незбереження баріонного числа,
2. Порушення C – і CP – симетрії
3. Порушення термодинамічної рівноваги

Ефективним механізмом генерації БА є лептогенезис при температурах $T > T_{EW}$. За таких високих температур баріонне число B саме по собі не зберігається, а зберігається його комбінація з лептонним числом $(B - L)$, де $L = L_e + L_\mu + L_\tau$ – повне лептонне число. Утворена в процесах поза СМ ЛА частково перекидується за рахунок електрослабких процесів СМ в БА. Отже, для успішної генерації БА необхідно мати модель, здатну описати утворення ЛА за високих температур Всесвіту.

Нарешті, розглянемо третю з озвучених проблем — проблему ТМ. Сучасний Всесвіт лише на 4% складається з відомих частинок СМ і на 96% невідомо з чого [7]. Ці 96% поділяються на дві фракції, одна з яких (23%) здатна кластеризуватися (збиратись у згущення), а інша (73%) — ні. Першу називають «темною матерією», а другу — «темною енергією». Жодна з частинок СМ не може бути частинкою ТМ. Ці частинки мають бути стабільними (період розпаду рівен вікові Всесвіту), мають не взаємодіяти (або взаємодіяти дуже слабо) з частинками СМ.

Описані проблеми спонукають до пошуку модифікацій або розширень СМ. Модель νMSM (мінімальна нейтринна модифікація СМ) — це розширення СМ трьома масивними нейтрино з правою кіральністю (які несуть назву стерильні нейтрино), запропонована М. Шапошніковим та Т. Асакою [19]-[20]. У νMSM не вводиться новий енергетичний масштаб, оскільки стерильні нейтрино мають масу, меншу за електрослабкий масштаб. В рамках цієї моделі вдається одночасно пояснити масивність активних нейтрино, ЛА, а також у ній найлегший стерильний нейтрино грає роль частинки ТМ.

В рамках моделі νMSM необхідна величина ЛА [21] може бути згенеро-

вана за рахунок розпадів двох важчих стерильних нейтрино. Ці частинки народжуються за температур $T > T_{EW}$ з очікуваними масами в межах $m_\pi < M_I < T_{EW}$, де m_π – маса піона, а M_I – маса I -го стерильного нейтрино. ЛА за температур сфалеронного переходу ($T \sim T_{EW}$) пов'язана з баріонною асиметрією Всесвіту. При температурі $T < T_{EW}$ ЛА, сформована в результаті розпаду важких стерильних нейтрино, не може бути трансформована в БА, натомість вона накопичується. Як було показано в [57, 22], у Всесвіті має існувати ЛА $\Delta = \Delta L/L = (n_L - n_{\bar{L}})/(n_L + n_{\bar{L}})$ порядку:

$$10^{-3} < \Delta < 2/11 \quad (2.3)$$

на момент початку народження частинок ТМ (має місце при температурі порядку 0.1 GeV).

В наступних підрозділах даного розділу буде подано математичний апарат моделі νMSM , а також описано процес лептогенезису в рамках моделі.

2.2 Модель νMSM . Загальні властивості моделі та лептонна асиметрія в рамках моделі

2.2.1 Лагранжіан νMSM . Нові параметри моделі

Лагранжіан моделі νMSM має наступний вигляд [19, 20]:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM} + i\bar{\nu}_{IR}\partial_\mu\gamma^\mu\nu_{IR} - F_{\alpha I}\bar{L}_\alpha\tilde{\Phi}\nu_{IR} - \frac{M_{IJ}}{2}\bar{\nu}_{IR}^c\nu_{JR} + h.c., \quad (2.4)$$

$\mathcal{L}_{SM}$ — лагранжіан Стандартної моделі, ν_{IR} — ферміонні функції правокіральної стерильних нейтрино ($I = 1, 2, 3$), що є синглетами по відношенню до $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ перетворень, M_{IJ} — майоранівські маси стерильних нейтрино. $\nu_{IR}^c = \hat{C}\bar{\nu}_{IR}^T$, $\hat{C} = i\gamma^2\gamma^0$ — оператор зарядового спряження. $\tilde{\Phi} = i\sigma_2\Phi^*$, де Φ — хігсівський дублет, σ_2 — друга з матриць Паулі. $L_\alpha = \begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ e_\alpha \end{pmatrix}$ — лептонний дублет ($\alpha = e, \mu, \tau$), $F_{\alpha I}$ — матриця юкавівських констант взаємодії, $h.r.$ — означає ермітове спряження. Фактично,

дана модифікація додає правокіральні нейтрино, відсутні у СМ, і робить лептонний сектор електрослабкої теорії аналогічним до кваркового.

Подивимось, які нові параметри тоді з'являються в теорії. Маємо $N = 3$ майоранівські маси стерильних нейтрино M_I , а також $3 \times 3 \times 2$ параметри у юкавівській матриці (оскільки вона є комплексною 3×3 матрицею). Не всі з цих параметрів є фізичними і можна позбутися трьох з них переозначивши поля, а саме, змінивши фази у лептонних дублетів. Тоді отримаємо 18 нових параметрів, 3 з яких — майоранівські маси, а 15 знаходяться у юкавівській матриці: 3 діагональні юкавівські константи, 6 кутів змішування та 6 CP-порушуючих фаз [19].

2.2.2 Генерація мас нейтрино у моделі νMSM .

Після спонтанного порушення симетрії хігсівський дублет у так званій унітарній калібровці набуває вигляду $\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $v=247$ GeV — мінімум потенціалу хігсівського поля. Масова частина нейтринного сектору лагранжіану (2.4) тоді запишеться так [58]:

$$\mathcal{L}^{DM} = -\frac{v}{\sqrt{2}} F_{\alpha I} \bar{\nu}_\alpha \nu_{IR} - \frac{M_{IJ}}{2} \bar{\nu}_{IR}^c \nu_{JR} + h.c., \quad (2.5)$$

де ν_α — лівокіральні нейтрино СМ. Вираз (2.5) можна переписати у зручній формі:

$$\mathcal{L}^{DM} = -\left(\overline{(N_L)^c} \frac{M^{DM}}{2} N_L + h.c. \right), \quad (2.6)$$

де

$$N_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix}; \quad N_L^c = \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix}; \quad M^{DM} = \begin{pmatrix} M_L & M_D^T \\ M_D & M_R \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

та

$$M_L = 0, \quad M_D = F^+ \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad M_R = M^*, \quad (2.8)$$

де M, F квадратні матриці третього порядку за елементами $F_{\alpha I}$ та M_{IJ} .

В нульовому наближенні лагранжіан νMSM є інваріантним по відношенню до $U(1)_e \times U(1)_\mu \times U(1)_\tau$ перетворень, що забезпечує збереження

лептонних чисел e, μ, τ по-окремі. Також припускається, що перші два важчі нейтрино взаємодіють з активними нейтрино, а третє (найлегше) не взаємодіє. Саме тому третє стерильне нейтрино є кандидатом на роль частинки темної матерії. Таке припущення може бути реалізоване за допомогою наступного вибору матриці M^{DM} [59]:

$$M_R^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M \\ 0 & M & 0 \end{pmatrix}, \quad M_D^{(0)+} = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & h_{12} & 0 \\ 0 & h_{22} & 0 \\ 0 & h_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad M_L^{(0)} = 0 \quad (2.9)$$

В такому наближенні ми маємо два стерильних нейтрино з рівними масами M , третє нейтрино безмасове, а всі активні нейтрино мають нульову масу. Це протирічить спостережуваним даним [6, 60]. Щоб виправити це, наступні малі поправки додаються до матриці M^{DM} [59]:

$$M_R^{(1)} = \Delta M = \begin{pmatrix} m_{11}e^{-i\alpha} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22}e^{-i\beta} & 0 \\ m_{13} & 0 & m_{33}e^{-i\gamma} \end{pmatrix}, \quad M_D^{(1)+} = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} h_{11} & 0 & h_{13} \\ h_{21} & 0 & h_{23} \\ h_{31} & 0 & h_{33} \end{pmatrix}, \quad M_L^{(1)} = 0 \quad (2.10)$$

Ці поправки порушують початкову $U(1)_e \times U(1)_\mu \times$ симетрію, призводять до появи маси у третього стерильного нейтрино, а також знімають виродження по масі у двох важчих нейтрино. Це також призводить до генерації надмалих мас у активних нейтрино і ненульових кутів змішування між ними.

У термінах введених поправок лагранжіан (2.4) має вигляд

$$\mathcal{L}^{ad} = -h_{\alpha I} \bar{L}_\alpha \tilde{N}_I \tilde{\Phi} - M \tilde{N}_2^c \tilde{N}_3 - \frac{\Delta M_{IJ}}{2} \tilde{N}_I^c \tilde{N}_J + h.c., \quad (2.11)$$

де $\tilde{N}_I$ — правокиральні нейтрино в калібрувальному базисі.

Механізм, яким маса активних нейтрино вводиться в моделі νMSM називається дірак-майоранівським [55]. Розглянемо його детальніше. Для того, щоб знайти масову матрицю активних нейтрино необхідно привести M^{DM} до діагонального вигляду. Діагоналізацію проводять у два етапи. На першому етапі M^{DM} приводять до блочно-діагонального вигляду за допомогою унітарного перетворення в рамках так званого «see-saw» підходу:

$$M_{block} = W^T M^{DM} W = \begin{pmatrix} -(M_D)^T (M_R)^{-1} M_D & 0 \\ 0 & M_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{light} & 0 \\ 0 & M_{heavy} \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

де

$$W = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^+ \varepsilon & \varepsilon^+ \\ -\varepsilon & 1 - \frac{1}{2}\varepsilon \varepsilon^+ \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = M_R^{-1} M_D \ll 1, \quad (2.13)$$

а

$$(M_{light})_{\alpha\beta} = - \sum_{I=1}^3 \frac{(M_D)_{\alpha I} (M_D)_{\beta I}}{M_R} \quad (2.14)$$

— відома «see-saw» формула, що дає визначення масовій матриці активних нейтрино. $M_{heavy} = M_R$ — масова матриця стерильних нейтрино. Зазначимо, що матриця W є унітарною з точністю до доданків, пропорційних ε^4 . Тепер кожен блок матриці M^{DM} може бути діагоналізовано незалежно за допомогою матриці

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Масові матриці активних та стерильних нейтрино діагоналізуються за допомогою матриць $U_{1(2)}$:

$$U_1^T M_{light} U_1 = \text{diag}(m_1, m_2, m_3), \quad U_2^T M_{heavy} U_2 = \text{diag}(M_1, M_2, M_3). \quad (2.16)$$

центральне значення	99% довірчий інтервал
$\Delta m_{21}^2 = (7.58 \pm 0.21) \cdot 10^{-5} eB^2$	$(7.1 - 8.1) \cdot 10^{-5} eB^2$
$ \Delta m_{23}^2 = (2.40 \pm 0.15) \cdot 10^{-3} eB^2$	$(2.1 - 2.8) 10^{-3} eB^2$
$\tan^2 \theta_{12} = 0.484 \pm 0.048$	$31^0 < \theta_{12} < 39^0$
$\sin^2 2\theta_{23} = 1.02 \pm 0.04$	$37^0 < \theta_{23} < 53^0$
* $\sin^2 2\theta_{13} = 0.11$ ($\theta_{13} = 10^0$)	

Табл. 1: Експериментальні обмеження на параметри активних нейтрино [60], * — результат Т2К колаборації [61]: $0.03 < \sin^2 2\theta_{13} < 0.28$ у випадку нормальної (прямої) ієрархії та $0.04 < \sin^2 2\theta_{13} < 0.34$ у випадку інверсної (оберненої) ієрархії.

Існує стандартна параметризація [6] для $U_{1(2)}$:

$$U_{1(2)} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & c_{13}s_{12} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

де $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ — три кути змішування; δ — діраківська фаза, and α_1, α_2 — майоранівські фази. Значення кутів θ_{ij} можуть бути в області $0 \leq \theta_{ij} \leq \pi/2$, фази $\delta, \alpha_1, \alpha_2$ змінюватись від 0 до 2π . Кожна з матриць U_1 і U_2 містить свої власні незалежні кути та фази.

Тоді елементи матриці M_{light} можуть бути визначені через маси та елементи матриці змішування U активних нейтрино:

$$[M_{light}]_{\alpha\beta} = m_1 U_{\alpha 1}^* U_{\beta 1}^* + m_2 U_{\alpha 2}^* U_{\beta 2}^* + m_3 U_{\alpha 3}^* U_{\beta 3}^*. \quad (2.18)$$

Дані з експериментів по нейтринним осциляціям подані у Таб. 1:

Як видно з Таб. 1, експериментально вимірюються не самі маси активних нейтрино, а величини $\Delta m_{ij} = m_i^2 - m_j^2$. Відповідно, існує деяка невизначеність в означенні мас активних нейтрино. На практиці використовують

два варіанти — пряма та обернена ієрархії. У випадку прямої ієрархії маємо $m_1 = 0$, $m_2 = \sqrt{\Delta m_{21}^2} = 0.009 \text{ eV}$, $m_3 = \sqrt{|\Delta m_{23}^2| + \Delta m_{21}^2} = 0.05 \text{ eV}$. У випадку оберненої ієрархії маємо $m_1 = \sqrt{|\Delta m_{23}^2| - \Delta m_{21}^2} = 0.048 \text{ eV}$, $m_2 = \sqrt{|\Delta m_{23}^2|} = 0.049 \text{ eV}$, $m_3 = 0$.

2.2.3 Параметризація лагранжіану моделі через експериментально спостережувані величини

Для подальшого практичного використання лагранжіан моделі νMSM (2.4) необхідно виразити через спостережувані експериментально величини, тобто ті, що наведені в Таб. 1. Стерильний нейтрино, відповідальний за темну матерію, має дуже малу юкавівську константу взаємодії і діраківську масу. Отже, його внеском в масову матрицю активних нейтрино можна знехтувати. Згідно «see-saw» формулі (2.14) дана матриця має вигляд:

$$M_{light} = M_D(M_I)^{-1}M_D^T \quad (2.19)$$

Розпишемо через унітарне перетворення U :

$$M_{light} = -v^2 h U^\dagger (U^* \tilde{M} U^\dagger)^{-1} U^* h^T = -v^2 h U^\dagger U \tilde{M}^{-1} U^T U^* h^T = -v^2 h \tilde{U}^{-1} h^T. \quad (2.20)$$

$$(M_{light})_{\alpha\beta} = -h_{\alpha I} h_{\beta J} \left(\frac{v^2}{\tilde{M}} \right)_{IJ} \quad (2.21)$$

Оскільки внеском темного стерильного нейтрино в масову матрицю активних нейтрино можна знехтувати, будемо розглядати 2×2 матрицю $\tilde{M}_{IJ}$. Знайдемо обернену матрицю $\frac{1}{\tilde{M}}$:

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \Delta M_{22} & M \\ M & \Delta M_{33} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} (\tilde{M})^{-1} &= \frac{1}{\Delta M_{22} \Delta M_{33} - M^2} \begin{pmatrix} \Delta M_{33} & -M \\ -M & \Delta M_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{M} \\ \frac{1}{M} & 0 \end{pmatrix} (I + O\left(\frac{\Delta M_{22}}{M}, \frac{\Delta M_{33}}{M}\right)) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Членами порядку $(\frac{\Delta M_{22}}{M}, \frac{\Delta M_{33}}{M})$ знехтуємо. Тоді масова матриця активних нейтрино матиме вигляд:

$$[M_{light}]_{\alpha\beta} = -\frac{v^2}{M}(h_{\alpha 2}h_{\beta 3} + h_{\alpha 3}h_{\beta 2}) \quad (2.24)$$

Власні значення матриці (2.24):

$$m_a = 0, \quad m_{\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}} = \frac{v^2(F_2F_3 \mp |h^+h|_{23})}{2M}, \quad (2.25)$$

де $F_I^2 = (h^+h)_{II}$, m_c – маса найважчого активного нейтрино. Сума мас нейтрино дає:

$$\frac{v^2F_2F_3}{M} = \sum_{i=1}^3 m_i. \quad (2.26)$$

Система рівнянь (2.24) має нескінченну кількість розв'язків. Справді, заміна $h_{\alpha 2} \rightarrow zh_{\alpha 2}$, $h_{\alpha 3} \rightarrow h_{\alpha 3}/z$ (z – довільне комплексне число) не змінює системи. Тоді можна визначити дійсне число ε

$$\varepsilon = F_3/F_2, \quad \varepsilon = |z|, \quad (2.27)$$

яке гратиме роль незалежного параметра моделі.

В роботі [62] було показано, що система рівнянь (2.24) має гарний розв'язок для відношення елементів другої колонки матриці Юкава:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{12} = \frac{M_{12}}{M_{22}} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{M_{11}M_{22}}{M_{12}^2}} \right) \\ A_{13} = \frac{M_{13}}{M_{33}} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{M_{11}M_{33}}{M_{13}^2}} \right) \\ A_{23} = \frac{M_{23}}{M_{33}} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{M_{22}M_{33}}{M_{23}^2}} \right) \end{array} \right. \quad (2.28)$$

де $A_{12} = h_{12}/h_{22}$, $A_{13} = h_{12}/h_{32}$, $A_{23} = h_{22}/h_{32}$ і M_{IJ} – це елементи матриці M_{light} . Відношення елементів третьої колонки юкавівської матриці виражаються через елементи матриці A_{ij} :

$$\frac{h_{23}}{h_{13}} = A_{12} \frac{M_{22}}{M_{11}}; \quad \frac{h_{33}}{h_{13}} = A_{13} \frac{M_{33}}{M_{11}}. \quad (2.29)$$

Незважаючи на те, що існує вісім різних варіантів розв'язків системи (2.28), лише чотири з них є незалежними. Наприклад, якщо зафіксувати знак перед квадратним коренем у виразі для A_{12} і A_{13} , тоді A_{23} однозначно виражатиметься виразом

$$A_{23} = A_{13}/A_{12}. \quad (2.30)$$

Розв'язок (2.28) дозволяє знайти відношення елементів юкавівської матриці [62]:

$$\frac{(h_{12}; h_{22}; h_{32})}{F_2} = \frac{e^{i \arg(h_{12})}}{\sqrt{1 + |A_{12}|^{-2} + |A_{13}|^{-2}}} (1; A_{12}^{-1}; A_{13}^{-1}) \quad (2.31)$$

$$\frac{(h_{13}; h_{23}; h_{33})}{F_3} = \frac{e^{i \arg(h_{13})}}{\sqrt{1 + |A_{12} \frac{M_{22}}{M_{11}}|^2 + |A_{13} \frac{M_{33}}{M_{11}}|^2}} \left(1; A_{12} \frac{M_{22}}{M_{11}}; A_{13} \frac{M_{33}}{M_{11}} \right), \quad (2.32)$$

де фази елементів h_{12} , h_{13} пов'язані співвідношенням:

$$\arg(h_{12}) + \arg(h_{13}) = \arg(M_{11}). \quad (2.33)$$

Це є точним розв'язком системи рівнянь (2.24), що однозначно виражає відношення елементів матриці юкавських констант взаємодії через параметри масової матриці активних нейтрино. Для фіксованих значень параметрів активних нейтрино існує лише два можливих способи розстановки знаків у виразах для A_{12} , A_{13} , A_{23} (2.28), які не протирічать умові (2.30). Ці два варіанти відрізняються один від одного одночасною заміною знаків перед квадратними коренями у виразах для A_{12} , A_{13} , A_{23} . Можна показати, що така заміна знаків призводить до заміни місцями і комплексного спряження відношення елементів другої та третьої колонок матриці юкавівських констант взаємодії, тобто $h_{22}/h_{12} \leftrightarrow h_{23}^*/h_{13}^*$, $h_{32}/h_{12} \leftrightarrow h_{33}^*/h_{13}^*$ [62].

Оскільки найлегший стерильний нейтрино практично не взаємодіє з іншими частинками, роль у генерації лептонної асиметрії гратимуть лише два важчі стерильні нейтрино. Тому ми виключимо третій нейтрино із розгляду, тож надалі індекси I, J матимуть значення 2 або 3, що відповідатиме важким стерильним нейтрино. В цьому випадку матимемо 11 нових параметрів моделі νMSM в порівнянні з СМ. Сім з них ідентифікуватимемо

з елементами масової матриці активних нейтрино $(m_2, m_3, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}, \delta, \alpha_2)$. Інші 4 визначаються наступним чином: усереднена маса двох важчих стерильних нейтрино $M = \frac{M_2+M_3}{2}$, їх масове розщеплення $\Delta M = \frac{M_3-M_2}{2}$, параметр ε та фаза $\xi = \arg(h_{12})$.

Таким чином, ми можемо параметризувати лагранжіан (2.11) наступним чином:

$$\mathcal{L} = \left(\frac{M \sum m_{\nu_i}}{v^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{F_2 \sqrt{\varepsilon}} h_{\alpha 2} \bar{L}_\alpha \tilde{N}_\alpha + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{F_3} h_{\alpha 3} \bar{L}_\alpha \tilde{N}_3 \right] \tilde{\Phi} - M \tilde{N}_2^c \tilde{N}_3 - \frac{1}{2} \Delta M \left(\tilde{N}_2^c \tilde{N}_2 + \tilde{N}_3^c \tilde{N}_3 \right) + h.c., \quad (2.34)$$

де $a_{\alpha I} = h_{\alpha I}/F_I$ визначається рівняннями (2.31) та (2.32).

Лагранжіан (2.4) може бути переписаний в іншому базисі, а саме, коли масова матриця стерильних нейтрино є діагональною. У цьому випадку лагранжіан має вигляд:

$$\mathcal{L}^{ad} = -g_{\alpha I} \bar{L}_\alpha N'_I \tilde{\Phi} - \frac{M_I}{2} \bar{N}'^c_I N'_I + h.c., \quad (2.35)$$

де N'_I – правокіральні нейтрино і $g_{\alpha I}$ – елементи юкавівської матриці у цьому базисі.

Перехід між представленнями лагранжіану (2.4) в калібрувальному і масовому базисах можна виконати за допомогою унітарного перетворення, яке приводить масову матрицю правих нейтрино до діагонального вигляду [59]:

$$V^* \begin{pmatrix} \Delta M & M \\ M & \Delta M \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} M - \Delta M & 0 \\ 0 & M + \Delta M \end{pmatrix}; \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Отож перехід може бути виконаним шляхом перетворення:

$$\tilde{N}_I = V_{IJ} N'_J, \quad g_{\alpha I} = h_{\alpha J} V_{JI}. \quad (2.37)$$

За допомогою цих співвідношень буде корисним виразити лагранжіан (2.34)

в термінах правокіральних нейтринних функцій з лагранжіану (2.35)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{ad} = & - \left(\frac{M \sum m_{\nu_i}}{2v^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{ia_{\alpha 2}}{\sqrt{\varepsilon}} - i\sqrt{\varepsilon}a_{\alpha 3} \right) \bar{L}_\alpha N'_2 + \left(\frac{a_{\alpha 2}}{\sqrt{\varepsilon}} + \sqrt{\varepsilon}a_{\alpha 3} \right) \bar{L}_\alpha N'_3 \right] \tilde{\Phi} - \\ & - \frac{1}{2} (M - \Delta M) \bar{N}'_2 N'_2 - \frac{1}{2} (M + \Delta M) \bar{N}'_3 N'_3. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Шляхом порівняння (2.38) і (2.35) можемо виразити юкавівські константи зв'язку в різних представленнях:

$$g_{\alpha 2} = \left(\frac{M \sum_i m_{\nu_i}}{2v^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{ia_{\alpha 2}}{\sqrt{\varepsilon}} - i\sqrt{\varepsilon}a_{\alpha 3} \right), \quad (2.39)$$

$$g_{\alpha 3} = \left(\frac{M \sum_i m_{\nu_i}}{2v^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a_{\alpha 2}}{\sqrt{\varepsilon}} + \sqrt{\varepsilon}a_{\alpha 3} \right). \quad (2.40)$$

Масові власні стани нейтрино з масовою матрицею M^{DM} (2.7) можуть бути легко виражені через стани нейтрино лагранжіану (2.35), зокрема:

$$N^c = \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon^+ \right) N'^c + \varepsilon \nu_L \simeq N'^c + \varepsilon \nu_L, \quad (2.41)$$

де N – власні стани стерильного нейтрино в масовому базисі в яких вони народжуються та розпадаються, ν_L – активні нейтрино СМ в ароматовому базисі,

$$\varepsilon_{\alpha I} \equiv \Theta_{\alpha I} = \frac{v}{\sqrt{2}} \frac{g_{\alpha I}}{M_I} \quad (2.42)$$

– кути змішування між активними та стерильними нейтрино. ($\varepsilon_{\alpha I} \ll 1$).

Підсумуємо висновки щодо параметрів моделі, зроблені вище. Модель νMSM додає до СМ три частинки — стерильні нейтрино. Найлегший з них M_1 має масу порядку кількох КеВ і грає роль частинки ТМ. Два інші стерильні нейтрино N_2 і N_3 мають маси принаймні менші за електрослабкий масштаб (маси калібрувальних W , Z - бозонів). В роботі [19] показано, що ці дві частинки мають бути майже виродженими по масі, щоб створити суттєву лептонну асиметрію. Ми будемо розглядати нейтрино з масами в проміжку $m_\pi < M_{2,3} < 2$ ГеВ, де $m_\pi = 140$ МеВ — маса π -мезона. Як показано у [63], наявність у нейтрино маси меншої маси піона не узгоджується з експериментами. Верхня межа 2 обрана для зручності, тому, що не існує ніяких експериментальних даних для $M_I > 2$ ГеВ [63].

2.2.4 Ефективний лагранжіан взаємодії стерильних нейтрино.

У цьому пункті буде отримано ефективний лагранжіан для двох важких стерильних нейтрино N_2 і N_3 . За температур $T \ll T_{EW}$ взаємодією стерильних нейтрино з частинками СМ посередництвом нейтрального бозону Хігса можна знехтувати. Єдиною можливістю для стерильних нейтрино взаємодіяти з речовиною є змішування з активними нейтрино. Реакції $N_{2,3} \rightarrow N_1$ майже не відбуваються, за рахунок малості юкавівської константи взаємодії для N_1 . Для масштабу мас стерильних нейтрино, якими ми цікавимось ($m_\pi < M_I < 2 \text{ GeV}$) можливими є наступні канали розпаду стерильних нейтрино в двочастинковий кінцевий стан:

$$N_I \rightarrow \pi^0 \nu_\alpha, \pi^+ e_\alpha^-, \pi^- e_\alpha^+, K^+ e_\alpha^-, K^- e_\alpha^+, \eta \nu_\alpha, \eta' \nu_\alpha, \rho^0 \nu_\alpha, \rho^+ e_\alpha^-, \rho^- e_\alpha^+ \quad (2.43)$$

Розпад стерильних нейтрино в стан K^0 заборонений тому, що композиція цього мезону $d\bar{s}$ не може бути отримана з розпаду Z -бозону. Як показано у роботі [63], розпади в кінцевий трьохчастинковий (і більше частинковий) стан є малоімовірними. Ці канали розпаду дають менше ніж 10%-ий внесок в кінцевий результат для $M_I < 2 \text{ GeV}$. Для $m_\pi < M_I < 2 \text{ GeV}$ розпадом з утворенням D -мезону також можна знехтувати тому, що його маса не набагато менша 2 GeV .

Розглянемо, як саме відбувається процес розпаду правокіральних нейтрино у моделі νMSM . Стерильний нейтрино осцилює в активний нейтрино, який далі розпадається на проміжний Z^0 -бозон та активне нейтрино, (або розпадається на заряджений лептон та $W^\pm$ -бозон) згідно СМ. Z -бозон (або $W^\pm$ -бозон) розпадається на пару кварк-антикварк (Рис. 2.1). Так як кінетична енергія цих кварків є достатньо малою, вони формують зв'язаний стан. Оскільки $M_I < 2 \text{ GeV} \ll M_{Z(W)}$, ми можемо скоротити їх пропагатор у ефективну вершину і тоді розглядати мезон, як кінцевий продукт реакції (Рис. 2.2).

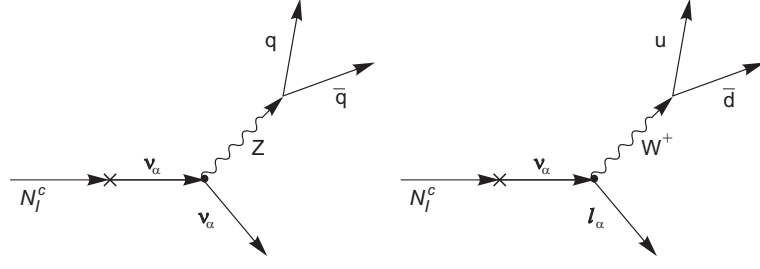


Рис. 2.1: Розпад стерильного нейтрино через Z - і W^+ - бозони (хрестом позначено осциляцію стерильного нейтрино в активне) на активне нейтрино та кварк-антикваркову пару.

Тепер отримаємо ефективний лагранжіан, який описуватиме взаємодію стерильних нейтрино з адронними станами. При низьких енергіях, якими ми цікавимось працює теорія Фермі точкової взаємодії струмів. Лагранжіан взаємодії має вигляд:

$$\mathcal{L}_C = \frac{G_F}{\sqrt{2}} (j_\nu^{CC})^+ j^{\nu CC}, \quad (2.44)$$

де $j_\nu^{CC} = j_\nu^{lCC} + j_\nu^{hCC}$ – заряджений струм лептонів і адронів, G_F – стала Фермі,

$$j_\nu^{lCC} = \sum_\alpha \bar{e}_\alpha \gamma_\nu (1 - \gamma^5) \nu_\alpha, \quad j_\nu^{hCC} = \sum_{n,m} V_{n,m}^* \bar{d}_m \gamma_\nu (1 - \gamma^5) u_n. \quad (2.45)$$

Індекси m, n пробігають номери поколінь кварків, $\alpha = e, \mu, \tau$, а V – матриця Каббібо-Кобаяші-Маскава (ККМ). π -мезон має структуру $u\bar{d}$, тому в адронному струмі нас цікавитиме лише член $V_{ud}^* \bar{d} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u$. Стерильні нейтрино змішуються з активними нейтрино з кутом змішування $\Theta_{\alpha I}$, визначені в Рів. (2.42). Тоді лагранжіан взаємодії набуде вигляду:

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{ud} \Theta_{\alpha I} \bar{e}_\alpha \gamma_\mu (1 - \gamma_5) N_I \bar{u} (1 + \gamma_5) \gamma^\mu d + h.c. \quad (2.46)$$

Далі, маючи лагранжіан, випишемо елемент S-матриці для розглядуваного нами процесу в першому порядку теорії збурень:

$$M_{N_I \rightarrow \pi^+ e_\alpha^-} = -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{ud} \Theta_{\alpha I} \langle \pi^+ e_\alpha^- | \hat{u} (1 + \gamma_5) \gamma_\mu \hat{d} \cdot \hat{e}_\alpha \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \hat{N}_I | N_I \rangle \quad (2.47)$$

Або ж, використовуючи оператори народження-знищення частинок:

$$M_{N_I \rightarrow \pi^+ e_\alpha^-} = -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{ud} \Theta_{\alpha I} \langle 0 | (\hat{a}_{\pi^+} \hat{u} (1 + \gamma_5) \gamma_\mu \hat{d}) \cdot (\hat{a}_{e_\alpha^-} \hat{e}_\alpha \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \hat{N}_I \hat{a}_{N_I}^\dagger) | 0 \rangle \quad (2.48)$$

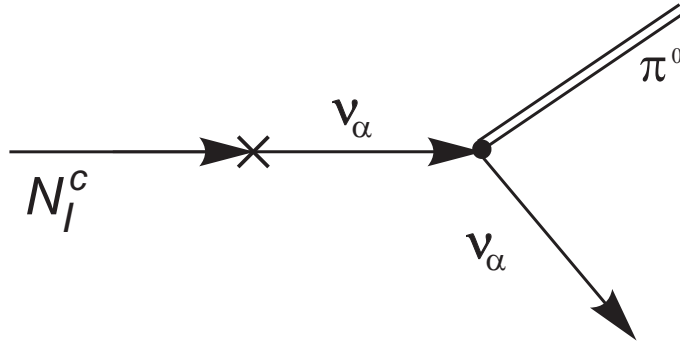


Рис. 2.2: Ефективний низькоенергетичний розпад стерильного нейтрино на активне нейтрино покоління α та π^0 мезон.

В останньому виразі перша дужка включає лише сильну взаємодію, в той час, як друга — лише слабку. Вставимо між ними одиничний оператор $\sum_\lambda |\lambda\rangle\langle\lambda| = 1$. Якщо в стані λ існує хоча б один стан, що містить лептон або стерильний нейтрино, то усереднення від частини, відповідальної за сильну взаємодію даватиме нуль, оскільки оператори народження та знищення, що входять до неї не змінять цього стану, а зліва на нього діятиме відповідний вакуумний стан. Аналогічно для другої частини, якщо стан λ включає в себе хоча б один кварковий стан, то усереднення від частини, відповідальної за слабку взаємодію даватиме нуль. Отже, виживе лише доданок $|0\rangle\langle 0|$. Тоді елемент S-матриці перепишеться так:

$$M_{N_I \rightarrow \pi^+ e^-} = -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{ud} \Theta_{\alpha I} \langle \pi^+ | \hat{u}(1 + \gamma_5) \gamma_\mu \hat{d} | 0 \rangle \cdot \langle e^- | \hat{e}_\alpha \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \hat{N}_I | N_I \rangle \quad (2.49)$$

Другий матричний елемент у (2.49) може бути порахований, використовуючи теорему Віка. Перший же розраховується в рамках квантової хромодинаміки і не може бути порахований за теорією збурень, а може лише параметризуватися обмеженим числом сталих, що визначаються експериментально. Нами буде використовуватись наступна параметризація:

$$\langle \pi^+ | \hat{u}(1 + \gamma_5) \gamma_\mu \hat{d} | 0 \rangle = -f_\pi (k_\pi)_\mu, \quad (2.50)$$

де $(k_\pi)_\mu$ — 4-імпульс π -мезона, а його форм-фактор $f_\pi = 0.13$ Гев. Тепер

запишемо матричний елемент переходу матричний, враховуючи (2.50):

$$M_{N_I \rightarrow \pi^+ e^-} = i \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi V_{ud} \Theta_{\alpha I} (k_\pi)_\mu \bar{u}(q_{e_\alpha}) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p_{N_I}), \quad (2.51)$$

де $u(p)$ — звичайний діраківський чотирикомпонентний спіно́р, який задовільняє рівнянню Дірака: $(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0$. Врахуємо також закон збереження 4-імпульса: $p_{N_I} = k_\pi + q_{e_\alpha}$. Матимемо:

$$\begin{aligned} (k_\pi)_\mu \bar{u}(q_{e_\alpha}) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p_{N_I}) &= \\ &= (p_{N_I})_\mu \bar{u}(q_{e_\alpha}) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p_{N_I}) - (q_{e_\alpha})_\mu \bar{u}(q_{e_\alpha}) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p_{N_I}) = \\ &= \bar{u}(q_{e_\alpha}) (1 + \gamma^5) \not{p}_{N_I} u(p_{N_I}) - \bar{u}(q_{e_\alpha}) \not{q}_{e_\alpha} (1 - \gamma^5) u(p_{N_I}) = \\ &= \bar{u}(q_{e_\alpha}) (1 + \gamma^5) M_I u(p_{N_I}) - \bar{u}(q_{e_\alpha}) m_\alpha (1 - \gamma^5) u(p_{N_I}) = \\ &= M_I \bar{u}(q_{e_\alpha}) \left((1 + \gamma^5) - \frac{m_\alpha}{M_I} (1 - \gamma^5) \right) u(p_{N_I}) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Зрештою, наш матричний елемент набуває вигляду:

$$M_{N_I \rightarrow \pi^+ e^-} = i \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi V_{ud} \Theta_{\alpha I} M_I \bar{u}(q_{e_\alpha}) \left((1 + \gamma^5) - \frac{m_\alpha}{M_I} (1 - \gamma^5) \right) u(p_{N_I}), \quad (2.53)$$

де m_α — маса лептона, M_I — маса стерильного нейтрино. Отриманому нами матричному елементу (2.53) відповідає лагранжіан взаємодії:

$$\mathcal{L}_{eff} = i \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi V_{ud} \Theta_{\alpha I} M_I \bar{e}_\alpha \left((1 + \gamma^5) - \frac{m_\alpha}{M_I} (1 - \gamma^5) \right) N_I \pi^- + h.c. \quad (2.54)$$

Це і є ефективний низькоенергетичний лагранжіан, який ми хотіли отримати, і яким будемо користуватися для обрахунку процесів за участю стерильних нейтрино.

Наводимо отримані експериментально чисельні значення параметрів, що входять до нього:

$$\begin{aligned} f_\pi &= 0.131 \text{ GeV} \\ |V_{ud}| &= 0.97 \\ G_F &= 1.166 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Аналогічно отримуються лагранжіани взаємодії стерильних нейтрино з іншими мезонами. Будуть змінюватись лише елементи матриці ККМ та форм-фактори f .

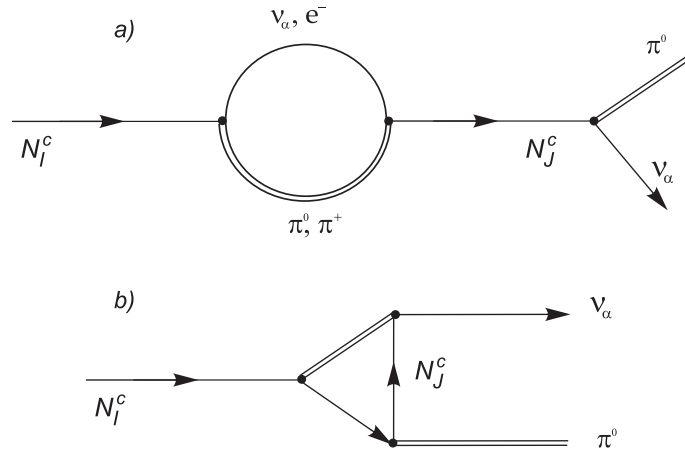


Рис. 2.3: Приклад однопетльової діаграми розпаду $N_I \rightarrow \nu_\alpha \pi^0$.

2.2.5 Обрахунок лептонної асиметрії

Лептонна асиметрія ϵ може бути визначена наступним чином:

$$\epsilon = \frac{\Gamma_{N \rightarrow l} - \Gamma_{N \rightarrow \bar{l}}}{\Gamma_{N \rightarrow l} + \Gamma_{N \rightarrow \bar{l}}}, \quad (2.56)$$

де $\Gamma_{N \rightarrow l}$ – повна ширина розпаду стерильних нейтрино на лептони, а $\Gamma_{N \rightarrow \bar{l}}$ – повна ширина розпаду стерильних нейтрино на антилептони.

На скелетному рівні ширини розпаду стерильних нейтрино на лептони та антилептони рівні. Тому ми маємо обчислювати однопетльові діаграми, див. Рис. 3. У випадку, коли стерильні нейтрино майже вироджені по масі внеском діаграми, зображеної на Рис. 2.3b) можна знехтувати в порівнянні з внеском діаграми на Рис. 2.3a). Справді, пропагатор стерильного нейтрино на діаграмі типу a) пропорційний $1/\Delta M$ у системі центру мас. Основний внесок до лептонної асиметрії надходить від інтерференції між однопетльовими діаграм [64]. У цьому випадку $\Gamma_{N \rightarrow l} - \Gamma_{N \rightarrow \bar{l}} \sim \Theta^4$ і $\Gamma_{N \rightarrow l} + \Gamma_{N \rightarrow \bar{l}} \sim \Theta^2$, лептонна асиметрія подавлюється.

В нашому випадку, коли масове розщеплення між двома важчими стерильними нейтрино дуже мале і воно такого ж порядку, як їх ширини розпаду (ми побачимо це пізніше), осциляції між N_I і N_J є дуже важливими, див. Рис. 2.4. Тому відповідними масовими станами тепер є не стани N_I , а їх суміш, а саме ψ_I [65]. Саме це є фізичні стани нейтрино, які еволюціонують в часі з визначеною частотою. Наступний розпад цих полів згенерує

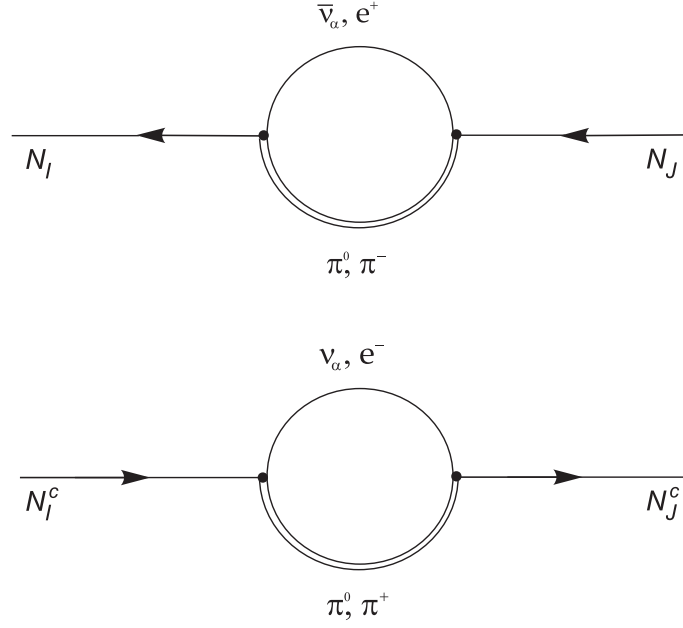


Рис. 2.4: Внески до ефективного гамільтоніану.

бажану лептонну асиметрію:

$$\Delta = \frac{\Gamma_{\psi \rightarrow l} - \Gamma_{\psi \rightarrow \bar{l}}}{\Gamma_{\psi \rightarrow l} + \Gamma_{\psi \rightarrow \bar{l}}}, \quad (2.57)$$

де $\Gamma_{\psi \rightarrow l}$ і $\Gamma_{\psi \rightarrow \bar{l}}$ повні ширини розпаду масових власних станів ψ_I стерильних нейтрино на лептони та антилептони відповідно. В цьому випадку лідоющий вклад в лептонну асиметрію надходитиме від діаграм скелетного рівня.

У найбільш загальному випадку коректний опис процесів в системі може бути зроблено у формалізмі матриці густини, що підпорядковується рівнянню [19]:

$$i \frac{d\rho}{dt} = [H, \rho] - \frac{i}{2} \{\Gamma, \rho\} + \frac{i}{2} \{\Gamma^p, 1 - \rho\}, \quad (2.58)$$

де Γ , Γ^p ширини розпаду та народження стерильних нейтрино відповідно. В цьому рівнянні матриця густини ρ має розміри 12×12 . Розв'язок даного рівняння та подальше знаходження лептонної асиметрії пов'язаний з складними розрахунками, і може бути знайдений лише чисельно. Проте, ми будемо працювати в спрощеній моделі. Вважається, що два важчих стерильні нейтрино вже утворені і, починаючи від температур електрослабкого переходу ($T_{EW} \sim 100$ Гев), розпадаються, з утворенням лептонів та

антилептонів. Фактично, еволюцію даної системи можна знайти, розв'язавши рівняння (2.58), поклавши у ньому $\Gamma^p = 0$. Сама матриця ρ в такому випадку буде мати розміри 2×2 .

Ми не будемо прямо розв'язувати таке рівняння. Натомість, ми зосередимось на розгляді неермітового гамільтоніану нашої системи:

$$H = H_0 + \Delta H, \quad (2.59)$$

де H_0 – діагональний гамільтоніан в базисі $\{N_2, N_3\}$:

$$H_0 = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

Поправка ΔH до нього включає в себе масове розщеплення, та поправки від однопетльових діаграм. На скелетному рівні діаграм Фейнмана ширини розпаду стерильних нейтрино на лептони та антилептони рівні. Саме тому необхідно враховувати поправки від однопетльових діаграм Рис. 2.4. Тоді поправка ΔH має вигляд:

$$\Delta H = \begin{pmatrix} -\Delta M - \frac{i}{2}\Gamma_2 & -\frac{i}{2}\Gamma_{23} \\ -\frac{i}{2}\Gamma_{23} & \Delta M - \frac{i}{2}\Gamma_3 \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

Дійсна частина цих діаграм може бути поглинута масовою ренормалізацією полів [65], що призводить до появи масового розщеплення ΔM . Уявна частина петель в діаграмах визначатимемо повні ширини розпаду стерильних нейтрино Γ_I , а також темп осциляцій між нейтрино Γ_{23} .

Амплітуда верхньої діаграми на Рис. 2.4 відповідно до вигляду ефективного лагранжіану (2.54) має вигляд:

$$\begin{aligned} \Sigma_{IJ} &= A_{\alpha I} A_{\alpha J}^* \left(1 + \gamma^5 - \frac{m_\alpha}{M_I} (1 - \gamma^5) \right) \times \\ &\times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k + m_\alpha}{k^2 - m_\alpha^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p - k)^2 - m_\pi^2 + i\varepsilon} \left(1 - \gamma^5 - \frac{m_\alpha}{M_J} (1 + \gamma_5) \right) \end{aligned} \quad (2.62)$$

де $A_{\alpha I} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi M_I \theta_{\alpha I} V_{ud}$ (ми розглядаємо випадок, коли в петлі знаходяться заряджені частинки, випадок з активним нейтрино та π^0 -мезоном розглядається аналогічно). p – 4-імпульс стерильного нейтрино на вході, k –

4-імпульс зарядженого лептона. Дана амплітуда рівна уявній частині петлі, яка знаходиться, використовуючи правила Каткоського:

$$\begin{aligned} Im \left(\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k + m_\alpha}{k^2 - m_\alpha^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p - k)^2 - m_\pi^2 + i\varepsilon} \right) = \\ = \frac{(2\pi i)^2}{2(2\pi)^4} \int d^4 k (k + m_\alpha) \delta(k^2 - m_\alpha^2) \delta((p - k)^2 - m_\pi^2) \end{aligned} \quad (2.63)$$

Інтегрування в виразі (2.63) в системі центру мас стерильного нейтрино дає наступний результат:

$$Im(...) = -\frac{1}{32\pi} S(M_I, m_\alpha, m_\pi) M_I \left(\left(1 + \frac{m_\alpha^2 - m_\pi^2}{M_I^2}\right) \gamma^0 + 2 \frac{m_\alpha}{M_I} \right) \quad (2.64)$$

де $S(M_I, m_\alpha, m_\pi) = \sqrt{\left(1 - \frac{m_\pi^2 - m_\alpha^2}{M_I^2}\right) \left(1 - \frac{m_\pi^2 + m_\alpha^2}{M_I^2}\right)}$. Тоді:

$$\begin{aligned} \Sigma_{IJ} = i A_{\alpha I} A_{\alpha J}^* M \left(1 + \gamma^5 - \frac{m_\alpha}{M} (1 - \gamma^5)\right) \times \\ \times Im(...) \left(1 - \gamma^5 - \frac{m_\alpha}{M} (1 + \gamma^5)\right) \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \gamma^5 - \frac{m_\alpha}{M_I} (1 - \gamma^5)\right) \left(\left(1 + \frac{m_\alpha^2 - m_\pi^2}{M_I^2}\right) \gamma^0 + 2 \frac{m_\alpha}{M_I} \right) \times \\ \times \left(1 + \gamma^5 - \frac{m_\alpha}{M_I} (1 - \gamma^5)\right) = \\ = \left(1 + \frac{m_\alpha^2 - m_\pi^2}{M^2}\right) \gamma^0 \left[(1 - \gamma^5) - \frac{m_\alpha}{M} (1 + \gamma^5) \right]^2 + \\ + \frac{2m_\alpha}{M} \left[(1 + \gamma^5) - \frac{m_\alpha}{M} (1 - \gamma^5) \right] \left[(1 - \gamma^5) - \frac{m_\alpha}{M} (1 + \gamma^5) \right] = \\ = 2 \left(1 + \frac{m_\alpha^2 - m_\pi^2}{M^2}\right) \gamma^0 \left(1 - \gamma^5 + \frac{m_\alpha^2}{M^2} (1 + \gamma^5)\right) - \frac{8m_\alpha^2}{M^2} \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{IJ} = -i \frac{A_{\alpha I} A_{\alpha J}^*}{16\pi} M S(M, m_\alpha, m_\pi) \times \\ \times \left(\left(1 + \frac{m_\alpha^2 - m_\pi^2}{M^2}\right) \gamma^0 \left(1 - \gamma^5 + \frac{m_\alpha^2}{M^2} (1 + \gamma^5)\right) - \frac{4m_\alpha^2}{M^2} \right) \end{aligned} \quad (2.67)$$

Аналогічно запишеться амплітуда нижньої діаграми на Рис. 2.4:

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_{IJ} = -i \frac{A_{\alpha I}^* A_{\alpha J}}{16\pi} M S(M, m_\alpha, m_\pi) \times \\ \times \left(\left(1 + \frac{m_\alpha^2 - m_\pi^2}{M^2}\right) \gamma^0 \left(1 + \gamma^5 + \frac{m_\alpha^2}{M^2} (1 - \gamma^5)\right) - \frac{4m_\alpha^2}{M^2} \right) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Так як стерильні нейтрино є майоранівськими частинками, амплітуда має бути симетричною, по відношенню до перестановки індексів $I \leftrightarrow J$. Повна амплітуда тоді запишеться:

$$\begin{aligned} \Pi_{IJ} &= \Sigma_{IJ} + \bar{\Sigma}_{IJ} = \frac{1}{2}(\Sigma_{IJ} + \bar{\Sigma}_{IJ} + \Sigma_{JI} + \bar{\Sigma}_{JI}) = \\ &= -i \frac{\text{Re}(A_{\alpha I} A_{\alpha J}^*)}{8\pi} MS(M, m_\alpha, m_\pi) \times \\ &\quad \times \left(\left(1 + \frac{m_\alpha^2 - m_\pi^2}{M^2} \right) \gamma^0 \left(1 + \frac{m_\alpha^2}{M^2} \right) - \frac{4m_\alpha^2}{M^2} \right) \end{aligned} \quad (2.69)$$

В системі спокою стерильного нейтрино рівняння Дірака має вигляд: $(\not{p} - M_I)N_I = (M_I\gamma^0 - M_I)N_I = 0$, тому γ^0 можемо замінити одиницею. Остаточно матимемо:

$$\begin{aligned} \Pi_{IJ} &= -i \frac{\text{Re}(A_{\alpha I} A_{\alpha J}^*)}{8\pi} MS(M, m_\alpha, m_\pi) \times \\ &\quad \times \left[\left(1 - \frac{m_\alpha^2}{M^2} \right)^2 - \frac{m_\pi^2}{M^2} \left(1 + \frac{m_\alpha^2}{M^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.70)$$

При $I = J$ амплітуда рівна половині повної ширини розпаду стерильних нейтрино на лептони та антілептони:

$$\begin{aligned} \Pi_{II} &= -i \frac{|A_{\alpha I}|^2}{8\pi} MS(M, m_\alpha, m_\pi) \times \\ &\quad \times \left[\left(1 - \frac{m_\alpha^2}{M^2} \right)^2 - \frac{m_\pi^2}{M^2} \left(1 + \frac{m_\alpha^2}{M^2} \right) \right] = -\frac{i}{2} \Gamma_I \end{aligned} \quad (2.71)$$

Величина Π_{IJ} симетрична по відношенню до перестановки індексів $I \leftrightarrow J$. Ширину осциляцій між стерильними нейтрино визначаємо наступним чином:

$$\Pi_{IJ} = \Pi_{JI} = -\frac{i}{2} \Gamma_{23} \quad (2.72)$$

Остаточно, повні ширини розпаду стерильного нейтрино I -го сорту на заряджені мезони та лептони покоління α задаються виразами:

$$\begin{aligned} \Gamma_I^{\alpha\pi^\pm} &= \Gamma(N_I \rightarrow \pi^\pm + l_\alpha^\mp) = \\ &= \frac{G_F^2 f_\pi^2 |V_{ud}|^2 M^3}{8\pi} |\Theta_{\alpha I}|^2 S(M, m_\alpha, m_\pi) \left[\left(1 - \frac{m_\alpha^2}{M^2} \right)^2 - \frac{m_\pi^2}{M^2} \left(1 + \frac{m_\alpha^2}{M^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_I^{\alpha K} &= \Gamma(N_I \rightarrow K^\pm + l_\alpha^\mp) = \\
&= \frac{G_F^2 f_K^2 |V_{us}|^2 M^3}{8\pi} |\Theta_{\alpha I}|^2 S(M, m_\alpha, m_K) \left[\left(1 - \frac{m_\alpha^2}{M^2}\right)^2 - \frac{m_K^2}{M^2} \left(1 + \frac{m_\alpha^2}{M^2}\right) \right],
\end{aligned} \tag{2.74}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_I^{\alpha \rho^\pm} &= \Gamma(N_I \rightarrow \rho^\pm + l_\alpha^\mp) = \\
&= \frac{G_F^2 g_\rho^2 |V_{ud}|^2 M^3}{4\pi m_\rho^2} |\Theta_{\alpha I}|^2 S(M, m_\alpha, m_\rho) \left[\left(1 - \frac{m_\alpha^2}{M^2}\right)^2 + \frac{m_\rho^2}{M^2} \left(1 + \frac{m_\alpha^2 - 2m_\rho^2}{M^2}\right) \right],
\end{aligned} \tag{2.75}$$

де

$$S(M_I, m_\alpha, m) = \sqrt{\left(1 - \frac{(m - m_\alpha)^2}{M_I^2}\right) \left(1 - \frac{(m + m_\alpha)^2}{M_I^2}\right)}, \tag{2.76}$$

а значення форм-факторів та елементів матриці ККМ взяті з in [6]: $f_\pi = 0.131$ ГеВ, $f_K = 0.16$ ГеВ, $g_\rho = 0.102$ ГеВ², $|V_{ud}| = 0.97$, $|V_{us}| = 0.23$.

Повні ширини розпаду стерильних нейтрино I -го сорту на нейтральні мезони та активні нейтрино задаються виразами:

$$\Gamma_I^{\alpha \pi^0} = \Gamma(N_I \rightarrow \pi^0 + \nu_\alpha) = \frac{G_F^2 f_\pi^2 M^3}{16\pi} |\Theta_{\alpha I}|^2 \left(1 - \frac{m_\pi^2}{M^2}\right)^2, \tag{2.77}$$

$$\Gamma_I^{\alpha \rho^0} = \Gamma(N_I \rightarrow \rho^0 + \nu_\alpha) = \frac{G_F^2 g_\rho^2 M^3}{8\pi m_\rho^2} |\Theta_{\alpha I}|^2 \left(1 + 2\frac{m_\rho^2}{M^2}\right) \left(1 - \frac{m_\rho^2}{M^2}\right)^2, \tag{2.78}$$

$$\Gamma_I^{\alpha \eta} = \Gamma(N_I \rightarrow \eta + \nu_\alpha) = \frac{G_F^2 f_\eta^2 M^3}{16\pi} |\Theta_{\alpha I}|^2 \left(1 - \frac{m_\eta^2}{M^2}\right)^2, \tag{2.79}$$

$$\Gamma_I^{\alpha \eta'} = \Gamma(N_I \rightarrow \eta' + \nu_\alpha) = \frac{G_F^2 f_{\eta'}^2 M^3}{16\pi} |\Theta_{\alpha I}|^2 \left(1 - \frac{m_{\eta'}^2}{M^2}\right)^2, \tag{2.80}$$

де $f_\eta = 0.156$ ГеВ, $f_{\eta'} = -0.058$ ГеВ [6].

Як видно, ширина розпаду на $\rho^\pm, \rho^0$ відрізняється від інших. Причина в тому, що – це векторні мезони. Наведені ширини розпаду (2.77) – (2.80) було отримано в [66, 63]. Повна ширина розпаду стерильних нейтрино на

лептони і мезони є сумою ширин розпаду частинок по всім каналам Λ (2.43) та всім поколінням лептонів:

$$\Gamma_I = \sum_{\alpha, \Lambda} \Gamma_I^{\alpha\Lambda} \Theta(y_{\alpha\Lambda}), \quad (2.81)$$

де y_Λ – це різниця маси стерильного нейтрино I -го сорту і сумарної маси усіх продуктів розпаду в каналі Λ ; $\Theta(x)$ – сходинова функція Хевісайда. Темп осциляцій між нейтрино I та J сортів (Γ_{IJ}) можна виразити через ширини розпаду:

$$\Gamma_{IJ} = \sum_{\alpha, \Lambda} \frac{\text{Re}(\Theta_{\alpha I} \Theta_{\alpha J}^*)}{|\Theta_{\alpha I}|^2} \Gamma_I^{\alpha\Lambda} \Theta(y_{\alpha\Lambda}). \quad (2.82)$$

Тепер знайдемо власні значення та відповідні власні стани неермітового гамільтоніану (2.59). Назвемо їх ψ_1 та ψ_2 . Розв'язуємо задачу на знаходження власних значень та власних функцій:

$$H\psi = \omega\psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

$$\begin{pmatrix} M - \Delta M - \frac{i}{2}\Gamma_2 & -\frac{i}{2}\Gamma_{23} \\ -\frac{i}{2}\Gamma_{23} & M + \Delta M - \frac{i}{2}\Gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad (2.84)$$

$$\begin{cases} q_1(\omega - M + \Delta M + \frac{i}{2}\Gamma_2) + \frac{i}{2}\Gamma_{23}q_2 = 0 \\ q_1(\frac{i}{2}\Gamma_{23}) + (\omega - M - \Delta M + \frac{i}{2}\Gamma_3)q_2 = 0 \end{cases} \quad (2.85)$$

З умови рівності нулю визначника системи знаходимо власні значення:

$$\omega_2 = M - \frac{i}{4}(\Gamma_2 + \Gamma_3) - \frac{1}{4}c, \quad \omega_3 = M - \frac{i}{4}(\Gamma_2 + \Gamma_3) + \frac{1}{4}c, \quad (2.86)$$

де $c = \sqrt{(4\Delta M - i(\Gamma_3 - \Gamma_2))^2 - 4(\Gamma_{23})^2}$.

Тепер можемо знайти власні стани, відповідні цим власним значенням.

У перше рівняння системи (2.85) підставляємо $\omega = \omega_3$ та $q_1 = 1$. Тоді:

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2}q_2\Gamma_{23} &= \omega_3 - M + \Delta M + \frac{i}{2}\Gamma_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow q_2 &= \frac{4i\Delta M + (\Gamma_3 - \Gamma_2) + ic}{2\Gamma_{23}} = -B \end{aligned} \quad (2.87)$$

Аналогічно, для знаходження другого власного стану в другому рівнянні системи (2.85) кладемо $\omega = \omega_2$ та $q_2 = 1$:

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2}q_1\Gamma_{23} &= \omega_2 - M - \Delta M + \frac{i}{2}\Gamma_3 \Rightarrow \\ \Rightarrow q_1 &= \frac{4i\Delta M + (\Gamma_3 - \Gamma_2) + ic}{2\Gamma_{23}} = B \end{aligned} \quad (2.88)$$

Отже отримуємо власні стани збуреного неермітового гамільтоніану (2.59):

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} B \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \psi_3 = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 \\ -B \end{pmatrix}, \quad (2.89)$$

де N — нормувальний множник. Їм відповідають власні значення (2.86). Власними станами незбуреного гамільтоніану H_0 з точністю до константи нормування є стовбці $N_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $N_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Саме в цих станах, а не станах ψ_2 та ψ_3 , стерильні нейтрино знаходяться в початковий момент. Стерильні нейтрино знаходились в термодинамічній рівновазі перед тим, як почали вільно еволюціонувати. Рівновага підтримувалась за рахунок слабких взаємодій сіж стерильними нейтрино та частинками бекгранду. Власними станами слабкої взаємодії є саме стани N_2 та N_3 , тому на початку стерильні нейтрино знаходяться в станах N_2 або N_3 .

В початковий момент часу стан системи нейтрино є суперпозицією станів N_2 та N_3 (змішаний стан) і описується матрицею густини:

$$\hat{\rho}_{ini} = \sum_{I=2,3} \alpha_I |N_I\rangle \langle N_I| \quad (2.90)$$

Вагові множники α_I задовільняють умові $\alpha_2 + \alpha_3 = 1$ і, фактично визначають концентрацію стерильних нейтрино N_2 та N_3 в початковий момент часу: $\alpha_I = \frac{n_I}{n_1 + n_2}$.

Для того, щоб знайти лептонну асиметрію необхідно знати еволюцію матриці густини в часі. Без урахування радіаційних поправок стани N_2 та N_3 еволюціонують в часі як вільні частинки, $|N_I(t)\rangle = |N_I(0)\rangle e^{-iM_I t}$. Для того, щоб урахувати радіаційні попраки розглянемо закон зміни в часі

станів ψ_I :

$$|\psi_I(t)\rangle = e^{-i\omega_I t} |\psi_I(0)\rangle. \quad (2.91)$$

де ω_2, ω_3 — власні значення неермітового гамільтоніану (2.86)

Також легко бачити, як стани N_2 та N_3 пов'язані з станами ψ_2, ψ_3 :

$$|\psi_I\rangle = U_{IJ} |N_J\rangle, \quad (2.92)$$

де матриця перетворення U має вигляд:

$$U = \begin{pmatrix} B & 1 \\ 1 & -B \end{pmatrix} \quad (2.93)$$

Тоді знаходимо закон еволюції в часі станів N_2 та N_3 з урахуванням радіаційних поправок:

$$|N_I(t)\rangle = U_{IK}^{-1} e^{-i\omega_K t} U_{KJ} |N_J(0)\rangle = R_{IJ} |N_J(0)\rangle \quad (2.94)$$

У випадку $\alpha_2 = 1/2$ та $\alpha_3 = 1/2$, еволюція матриці густини, що в початковий момент мала вигляд (2.90), буде:

$$\hat{\rho}(t) = \frac{1}{2} \sum_{IJK} R_{IK}(t)^* R_{IJ}(t) |N_J(0)\rangle \langle N_K(0)| = \frac{1}{2} \sum_{JK} (R^\dagger R)_{KJ} |N_J(0)\rangle \langle N_K(0)| \quad (2.95)$$

Усереднений по часу темп народження лептонів в процесі розпаду стерильних нейтрино матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_0^\infty dt \int d\Pi_2 \sum_l Tr [|l\rangle \langle l| \hat{\rho}(t)] = \frac{1}{2} \int_0^\infty dt \int d\Pi_2 Tr \left[\sum_{l,K,J} (R^\dagger R)_{KJ} \langle l| N_J(0) \rangle \langle N_K(0) | l \rangle \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dt \int d\Pi_2 \sum_{l,J,K} (R^\dagger R)_{KJ} A_{Jl} A_{Kl}^*, \quad (2.96) \end{aligned}$$

де A_{Jl} — інваріантна амплітуда переходу для процесу розпаду стерильного нейтрино на лептон у скелетному наближенні (без урахування радіаційних поправок), $d\Pi_2$ — диференціальний двочастинковий фазовий об'єм. Він має вигляд

$$d\Pi_2 = \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2E_q} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2E_k} (2\pi)^4 \delta^4(p - q - k),$$

де p, q, k – 4-імпульси початкових та кінцевих частинок в реакції розпаду.

Аналогічно, темп утворення антилептонів має вигляд:

$$\bar{\Gamma} = \frac{1}{2} \int_0^\infty dt \int d\Pi_2 \sum_{l,J,K} (R^\dagger R)_{KJ} A_{Jl}^* A_{KJ}. \quad (2.97)$$

Тепер можна шукати лептонну асиметрію:

$$\Delta_{CP} = \frac{\Gamma - \bar{\Gamma}}{\Gamma + \bar{\Gamma}} \quad (2.98)$$

В чисельник цього виразу входить комбінація, яка розпишеться як:

$$\begin{aligned} \sum_{KJ} (R^\dagger R)_{KJ} (A_{Jl} A_{Kl}^* - A_{Jl}^* A_{Kl}) &= \\ &= (R^\dagger R)_{32} (A_{2l} A_{3l}^* - A_{2l}^* A_{3l}) + (R^\dagger R)_{23} (A_{3l} A_{2l}^* - A_{3l}^* A_{2l}) = \\ &= 2i \operatorname{Im}(A_{2l}^* A_{3l}) ((R^\dagger R)_{23} - (R^\dagger R)_{32}) = \\ &= -2i \operatorname{Im}(A_{2l}^* A_{3l}) 2i \operatorname{Im}((R^\dagger R)_{32}) = 4 \operatorname{Im}((R^\dagger R)_{32}) \operatorname{Im}(A_{2l}^* A_{3l}) \end{aligned} \quad (2.99)$$

Аналогічно вчиняємо і з знаменником. Тоді матимемо наступний вираз для асиметрії:

$$\Delta_{CP} = \frac{\int dt \int d\Pi_2 \operatorname{Im}((R^\dagger R)_{32}) \operatorname{Im}(A_{2l}^* A_{3l})}{\int dt \int d\Pi_2 ((R^\dagger R)_{22} |A_{2l}|^2 + (R^\dagger R)_{33} |A_{3l}|^2 + 2 \operatorname{Re}(A_{2l}^* A_{3l}) \operatorname{Re}(R^\dagger R)_{23})} \quad (2.100)$$

Треба проінтегрувати по $d\Pi_2$. Величини A_{Il} визначаються безпосередньо з отриманого нами ефективного лагранжіану (2.54):

$$A_{Il} = i A_{\alpha I} \bar{u}(q) \left(1 + \gamma_5 - \frac{m_\alpha}{M_I} (1 - \gamma_5) \right) u(p), \quad (2.101)$$

де $A_{\alpha I} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \Theta_{\alpha I} M_I V_{ud}$, p – 4-імпульс стерильного нейтрино, q – 4-імпульс одного з продуктів розпаду. Тут іде підсумовування по α , де $\alpha = e, \mu, \tau$.

Тоді:

$$\begin{aligned} A_{Il}^* A_{Jl} &= A_{\alpha I}^* A_{\alpha J} \left[\bar{u}(q) \left(1 + \gamma_5 - \frac{m_\alpha}{M_I} (1 - \gamma_5) \right) u(p) \right] \times \\ &\times \left[\bar{u}(q) \left(1 + \gamma_5 - \frac{m_\alpha}{M_I} (1 - \gamma_5) \right) u(p) \right]^\dagger = \\ &= A_{\alpha I}^* A_{\alpha J} \operatorname{Tr} \left[\left[\bar{u}(q) \left(1 + \gamma_5 - \frac{m_\alpha}{M_I} (1 - \gamma_5) \right) u(p) \right] \times \right. \\ &\times \left. \left[\bar{u}(p) \left(1 - \gamma_5 - \frac{m_\alpha}{M_I} (1 - \gamma_5) \right) u(q) \right] \right] \end{aligned} \quad (2.102)$$

У виразі (2.102) виконуємо циклічну перестановку під знаком трейсу, проводимо підсумовування по спіральностям кінцевих лептонів та усереднення по спіральностям стерильного нейтрино. Використовуємо формули:

$$\sum_{hel.} u(p)\bar{u}(p) = \gamma^\mu p_\mu + M, \quad \sum_{hel.} u(q)\bar{u}(q) = \gamma^\mu q_\mu + m_\alpha. \quad (2.103)$$

Тоді:

$$A_{Il}^* A_{Jl} = \frac{1}{2} A_{\alpha I}^* A_{\alpha J} Tr \left[(1 + \gamma_5 - \frac{m_\alpha}{M_I} (1 - \gamma_5)) \times \right. \\ \left. \times (\gamma^\mu p_\mu + M_I) (1 - \gamma_5 - \frac{m_\alpha}{M_I} (1 - \gamma_5)) (\gamma^\nu q_\nu + m_\alpha) \right] \quad (2.104)$$

Далі перемножуємо матриці під знаком трейсу, використовуючи наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} (1 \pm \gamma_5) \gamma^\mu (1 \mp \gamma_5) &= 2\gamma^\mu (1 \mp \gamma_5) \\ (1 \pm \gamma_5) (1 \mp \gamma_5) &= 0 \\ (1 \pm \gamma_5)^2 &= 2(1 \pm \gamma_5) \end{aligned} \quad (2.105)$$

Матимемо:

$$A_{Il}^* A_{Jl} = A_{\alpha I}^* A_{\alpha J} Tr \left[(\gamma^\nu q_\nu + m_\alpha) (\gamma^\mu p_\mu (1 - \gamma_5 + \frac{m_\alpha^2}{M_I^2} (1 + \gamma_5)) - 2m_\alpha) \right] \quad (2.106)$$

Далі врахуємо наступні співвідношення для взяття трейсу:

$$\begin{aligned} Tr [\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{2n+1}] &= 0; \\ Tr [\gamma_5 \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{2n+1}] &= 0; \\ Tr [\gamma_5] &= Tr [\gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\mu] = 0; \\ Tr [\gamma_\mu \gamma_\nu] &= 4g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.107)$$

З урахуванням (2.107) рівність (2.106) перепишеться:

$$A_{Il}^* A_{Jl} = A_{\alpha I}^* A_{\alpha J} \left[4(pq) (1 + \frac{m_\alpha^2}{M_I^2}) - 8m_\alpha^2 \right] \quad (2.108)$$

Ми працюватимемо в системі центру мас стерильного нейтрино: $p = (M_I, 0)$. Тоді:

$$A_{Il}^* A_{Jl} = A_{\alpha I}^* A_{\alpha J} \left[4M_I q_0 (1 + \frac{m_\alpha^2}{M_I^2}) - 8m_\alpha^2 \right] \quad (2.109)$$

Тепер можна інтегрувати:

$$\begin{aligned}
\int d\Pi_2 A_{Il}^* A_{Jl} &= \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{d^3 q}{2E_q} \frac{d^3 k}{2E_k} A_{\alpha I} A_{\alpha J}^* \left[4q_0 M_I \left(1 + \frac{m_\alpha^2}{M_I^2} \right) - 8m_\alpha^2 \right] \delta^4(p - q - k) = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{d^3 q}{E_q} \frac{d^3 k}{E_k} A_{\alpha I} A_{\alpha J}^* \left[q_0 M_I \left(1 + \frac{m_\alpha^2}{M_I^2} \right) - 2m_\alpha^2 \right] \delta^4(p - q - k)
\end{aligned} \tag{2.110}$$

Інтегрування зводиться до інтегрування чотирьохмірної δ -функції. Має місце рівність [67]:

$$\frac{1}{4\pi^2} \int \frac{d^3 p_1}{E_1} \frac{d^3 p_2}{E_2} \delta^4(P - p_1 - p_2) = \frac{1}{2\pi} S(M, m_1, m_2), \tag{2.111}$$

де $S(M, m_1, m_2) = \sqrt{(1 - \frac{(m_1+m_2)^2}{M^2})(1 - \frac{(m_1-m_2)^2}{M^2})}$. В нашому випадку $m_1 = m_\pi$, $m_2 = m_\alpha$, M — маса стерильного нейтрино. Використаємо також закон збереження чотириімпульсу:

$$k = p - q \tag{2.112}$$

Піднесемо рівність (2.112) до квадрату, врахуємо, що $p = (M_I, 0)$ в системі центру мас стерильного нейтрино:

$$m_\pi^2 = M_I^2 + m_\alpha^2 - 2q_0 M_I \Rightarrow q_0 = \frac{M_I}{2} \left(1 + \frac{m_\alpha^2 - m_\pi^2}{M_I^2} \right). \tag{2.113}$$

Тоді інтеграл (2.110) прийме вигляд:

$$\begin{aligned}
\int d\Pi_2 A_{Il}^* A_{Jl} &= \frac{1}{2\pi} A_{\alpha I} A_{\alpha J}^* \left[\frac{M_I^2}{2} \left(1 + \frac{m_\alpha^2 - m_\pi^2}{M_I^2} \right) \left(1 + \frac{m_\alpha^2}{M_I^2} \right) - 2m_\alpha^2 \right] S(M, m_\pi, m_\alpha) = \\
&= \frac{1}{4\pi} M_I^2 A_{\alpha I} A_{\alpha J}^* \left[\left(1 - \frac{m_\alpha^2}{M_I^2} \right)^2 - \frac{m_\pi^2}{M_I^2} \left(1 + \frac{m_\alpha^2}{M_I^2} \right) \right] S(M, m_\pi, m_\alpha) = \\
&= \frac{1}{8\pi} M_I^4 G_F^2 f_\pi^2 |V_{ud}|^2 \Theta_{\alpha I} \Theta_{\alpha J}^* \left[\left(1 - \frac{m_\alpha^2}{M_I^2} \right)^2 - \frac{m_\pi^2}{M_I^2} \left(1 + \frac{m_\alpha^2}{M_I^2} \right) \right] S(M, m_\pi, m_\alpha)
\end{aligned} \tag{2.114}$$

Нагадаємо, що тут ми розглядали розпад на піон та заряджений лептон. Інші процеси можна узагальнити з формули (2.114). Так для процесу $N_I \rightarrow \pi_0, \nu_\alpha$ матимемо:

$$\int d\Pi_2 A_{Il}^* A_{Jl} = \frac{1}{16\pi} M_I^4 G_F^2 f_\pi^2 \Theta_{\alpha I} \Theta_{\alpha J}^* \left[1 - \frac{m_\pi^2}{M_I^2} \right]^2. \tag{2.115}$$

Маси активних нейтрино вважаються нульовими.

Враховуючи проведені розрахунки, отримаємо наступний вираз для лептонної асиметрії:

$$\Delta_{CP} = \frac{\int dt \text{Im}((R^\dagger R)_{32}) \sum_\alpha \text{Im}(\Theta_{\alpha 2}^* \Theta_{\alpha 3}) V_\alpha}{\int dt \sum_\alpha ((R^\dagger R)_{22} |\Theta_{\alpha 2}|^2 + (R^\dagger R)_{33} |\Theta_{\alpha 3}|^2 + 2 \text{Re}(\Theta_{\alpha 2}^* \Theta_{\alpha 3}) \text{Re}(R^\dagger R)_{23}) V_\alpha} \quad (2.116)$$

в якому величина V_α визначена через суму усіх можливих каналів розпаду стерильних нейтрино в результаті яких утворюються лептони покоління α

$$V_\alpha = \sum_\Lambda \frac{\Gamma_I^{\alpha\Lambda}}{|\Theta_{\alpha I}|^2} \Theta(y_{\alpha\Lambda}). \quad (2.117)$$

2.3 Обмеження на параметри моделі νMSM

Як було зазначено в підрозділі 2.1, ЛА Всесвіту має бути обмежена умовою (2.3) на момент початку народження частинок ТМ. Це дозволяє обмежити область значень параметрів моделі νMSM . Щоб зробити це, можемо задати лептонну асиметрію (2.116), як функцію лише трьох параметрів моделі νMSM : M , ΔM , ε .

Робитимемо це наступним чином. Функція ЛА (2.116) максимізується по відношенню до фаз δ , α_2 , ξ (і α_1 у випадку інверсної ієрархії), а далі в неї підставляються центральні значення масової матриці активних нейтрино¹, див. Таб. 1. Ця функція містить у собі відношення елементів матриці Юкава в кутах змішування $\Theta_{\alpha I}$ (2.42), які можуть бути виражені через розв'язки (2.28) з двома можливими виборами знаку, що узгоджуються з умовою (2.30). Оскільки вираз для ЛА (2.116) не має симетрії по відношенню до перестановки та комплексного спряження відношень елементів другої та третьої колонки матриці Юкава, маємо розглянути два варіанти розв'язків. Для фіксованих значень кутів мішування та фаз будемо позначати дозволений розв'язок (2.28) з 2 або більше знаками (+), як розв'язок

¹У випадку нормальної ієрархії маємо $m_1 = 0$, $m_2 = \sqrt{\Delta m_{21}^2} = 0.009$, $m_3 = \sqrt{|\Delta m_{23}^2| + \Delta m_{21}^2} = 0.05$. У випадку інверсної ієрархії $m_1 = \sqrt{|\Delta m_{23}^2| - \Delta m_{21}^2} = 0.048$, $m_2 = \sqrt{|\Delta m_{23}^2|} = 0.049$, $m_3 = 0$.

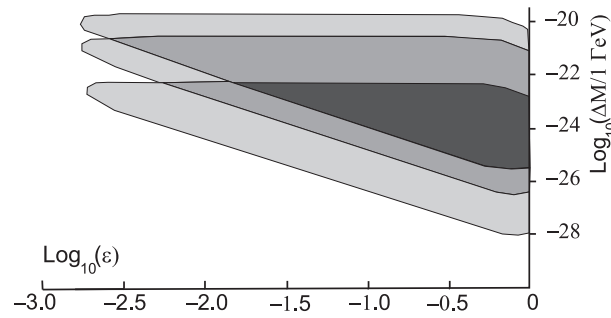


Рис. 2.5: Область дозовлених параметрів. Сіримй областямй зображено регіонй параметрів, де $\Delta > 10^{-3}$ для випадку нормальній ієрархії. Области відповідають значенням $M = 0.3$ ГеВ (нижня область), $M = 1$ ГеВ (середня область), $M = 2$ ГеВ (верхня область).

типу А, і, навпаки, розв'язок з 2 або більше знаками (–) ми будемо позначати, як розв'язок типу В. Потрібно зазначити, що результати (2.31), (2.32) для розв'язків типу В співпадають з результатами роботи [68], де відношення елементів було отримано для частинного випадку $\theta_{13} \rightarrow 0$, $\theta_{23} \rightarrow \pi/4$. Тут буде окремо розглянуто випадок $\theta_{13} = 0$ і випадок $\theta_{13} = 10^\circ$.

Таким чином, будемо будувати дозовлені області ($\Delta > 10^{-3}$) в площині параметрів ΔM і ϵ при фіксованому значенні M .

У випадку нормальній ієрархії різниця між випадком з $\theta_{13} = 0$ або $\theta_{13} = 10^\circ$ і випадками з розв'язками типів А або В несуттєва, тому дозовлені області проілюстровано лише за допомогою Рис. 2.5. Для випадку оберненої ієрархії різниця між випадками розв'язків типів А та В є несуттєвою, але випадки $\theta_{13} = 0$ і $\theta_{13} = 10^\circ$ є суттєво відмінними. Тому проілюструємо дозовлені області за допомогою двох панелей на Рис. 2.6.

Варто зазначити, що форму дозовленої області було отримано не лише для центрального значення кута θ_{13} , а й для області, даної даними джерела [61]. Було зроблено висновок, що у випадку прямої ієрархії форма області дозовлених значень майже нечутливі до значення кута θ_{13} в межах $0 < \theta_{13} < 16^\circ$. У випадку оберненої ієрархії це вірно для регіонів на Рис. 2.6 b) і $\theta_{13} < 18^\circ$, але для $\theta_{13} = 0$ дозовлені області суттєво відрізняються.

Також проілюструємо області де максимум Δ може бути більшим за

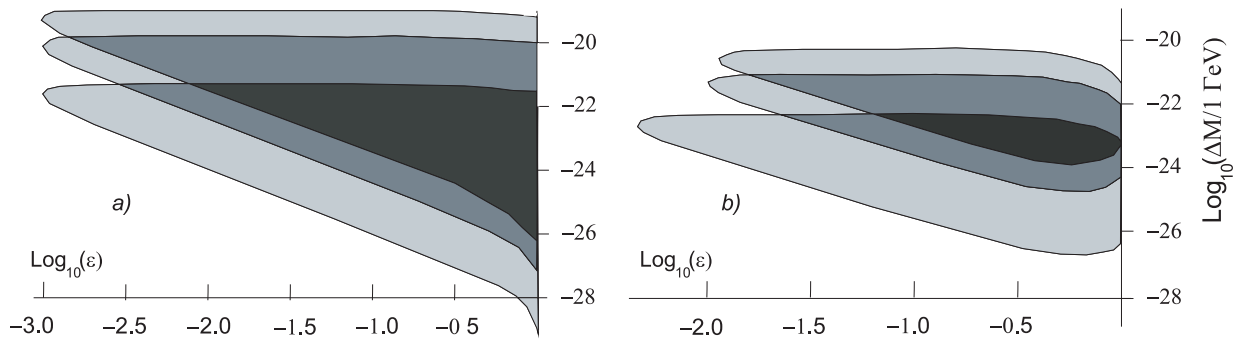


Рис. 2.6: Область дозовлених параметрів. Сіримй областямй зображено регіонй параметрів, де $\Delta > 10^{-3}$ для випадку інверсної ієрархії. Области відповідають значенням $M = 0.3$ ГеВ (нижня область), $M = 1$ ГеВ (середня область), $M = 2$ ГеВ (верхня область). Панелі $a)$ та $b)$ відповідають випадкам $\theta_{13} = 0^\circ$ і 10° відповідно.

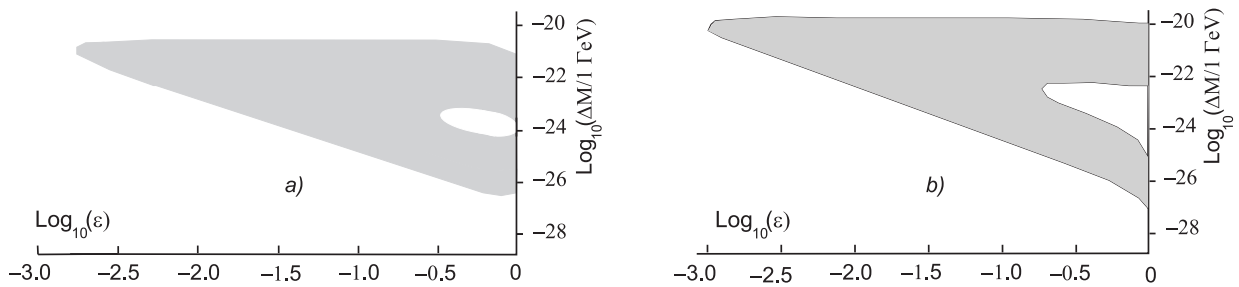


Рис. 2.7: Область дозовлених параметрів. Сіримй областямй зображено регіонй параметрів, де $10^{-3} < \Delta < 2/11$ для $M = 1$ ГеВ у випадку нормальній (а) та оберненої (b) ієрархій.

$2/11$ на Рис. 2.7 (білі внутрішні області) для випадків обох ієрархій. Це робитися лише для маси $M = 1$ ГеВ тому, що ці регіонй знаходяться в області малих значень ϵ . Більше того, при деяких значеннях фаз ЛА в цих регіонах може бути менша $2/11$ і тому їх не можна виключати в кінцевому рахунку.

У якості прикладу, наводимо можливі значення ширин розпаду I -го стерильного нейтрино Γ_I (2.81) і темп осциляцій міжнейтрино I -го та J -го сорту Γ_{IJ} (2.82) для $M = 1$ ГеВ і $\theta_{13} = 10^\circ$ на Рис. 2.8. Як можна побачити значення Γ_I , Γ_{IJ} дійсно того ж порядку, що і ΔM . Це підтверджує зроблене припущення про необхідність врахування осциляцій між стерильними нейтрино.

Для того, щоб згенерувати ЛА стерильні нейтрино мають бути поза

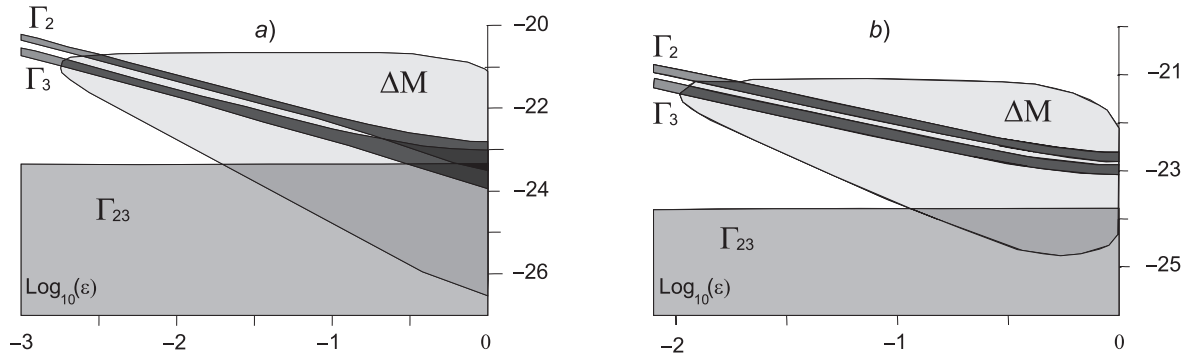


Рис. 2.8: Ширини розпаду стерильних нейтрино. Значення ширин $\text{Log}_{10}(\Gamma_I/1\text{GeV})$, $\text{Log}_{10}(\Gamma_{23}/1\text{GeV})$ і $\text{Log}_{10}(\Delta M/1\text{GeV})$ для лептонної асиметрії $\Delta > 10^{-3}$ у випадку $M = 1$ GeV і $\theta_{13} = 10^\circ$ відкладено по осі ординат: а) випадок нормальної ієрархії (тип розв'язку А), б) випадок інверсної ієрархії (тип розв'язку В).

термодинамічною рівновагою. Це значить, що

$$\Gamma_2 \lesssim H, \quad (2.118)$$

де H – параметр Хаббла. На стадії радіаційного домінування він задається наступним чином:

$$H = \frac{T^2}{M_{PL}^*} \quad (2.119)$$

де $M_{PL}^* = \sqrt{\frac{90}{8\pi^3 g^*(T)}} M_{PL}$, $M_{PL} = 1.22 \cdot 10^{19}$ GeV – маса Планка, $g^*(T)$ – кількість внутрішніх ступенів вільності [69]. За температури $T \sim 1$ GeV можна вважати $g^* \simeq 65$.

Тому, отримуємо умову

$$\sqrt{M_{PL}^* \Gamma_2} \lesssim T. \quad (2.120)$$

Умова термодинамічної нерівноваги в даному випадку означає, що стерильні нейтрино мають розпастися за температури, меншій, ніж їх маса ($T \lesssim M$). Також, звичайно, вони мають розпастися до початку народження частинок ТМ. ТМ утворюється при температурі $T \sim 0.1$ GeV. Тому,

$$0.1 \lesssim \frac{\sqrt{M_{PL}^* \Gamma_2}}{1\text{GeV}} \lesssim \frac{M}{1\text{GeV}}. \quad (2.121)$$

На Рис. 2.9 наведено область значень M і ϵ , де виконано умову (2.121) у випадку нормальної ієрархії. У масштабі параметрів, зображених на Рис. 2.9

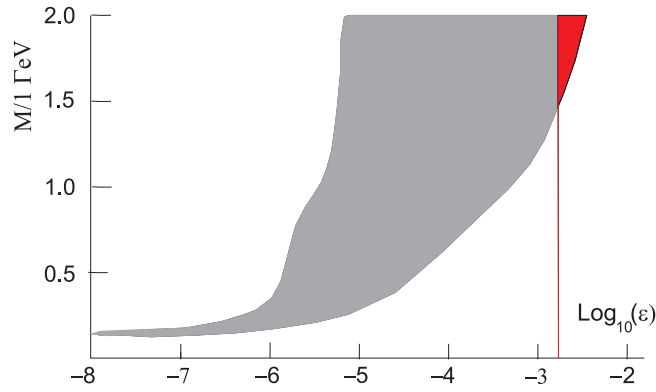


Рис. 2.9: Випадок нормальної ієрархії. Області, позначені сірим та червоним кольорами, задовольняють умові (2.121). Область справа від червоної лінії також задовольняє умові (2.3).

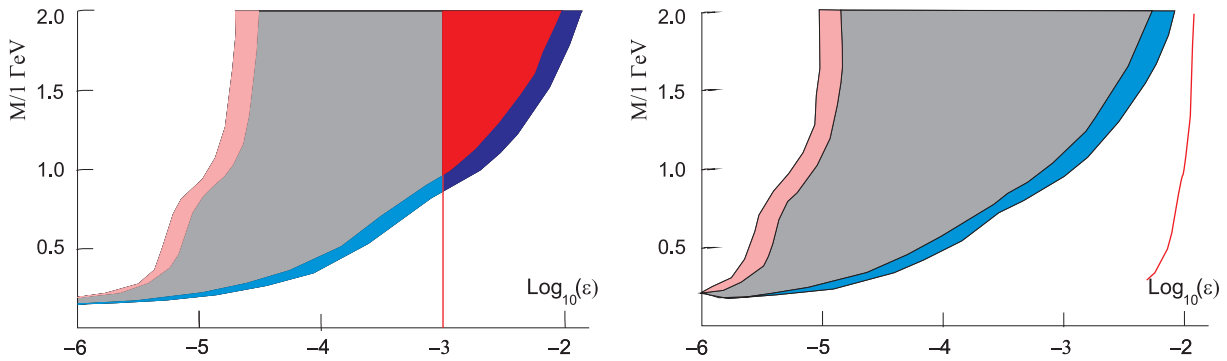


Рис. 2.10: Випадок інверсної ієрархії: а) $\theta_{13} = 0$, б) $\theta_{13} = 10^\circ$. Області, позначені рожевим, сірим та червоним кольорами, відповідають розв'язкам типу А. Області, позначені сірим, червоним та блакитними кольорами, відповідають розв'язкам типу В. Точки всередині цих областей задовольняють умові (2.121). Область справа від червоної лінії також задовольняє умові (2.3).

різниця між випадками $\theta_{13} = 0$ і $\theta_{13} = 10^\circ$, а також між випадками розв'язків А та В типів мала, тому зображено лише одну фігуру для всіх випадків. Але у випадку інверсної ієрархії ситуація інша, див. Рис. 2.10.

Потрібно зазначити, що область на Рис. 2.9 є фактично не чутливою до значення кута θ_{13} в межах $0 < \theta_{13} < 16^\circ$. У випадку інверсної ієрархії це також справедливо для областей, зображених Рис. 2.10 б) і для $\theta_{13} < 18^\circ$, але для випадку $\theta_{13} = 0$ області суттєво відрізняються.

Як можна бачити, існують області на Рис. 2.9 (червона) і на Рис. 2.10 а) (червона і синя), де умови (2.3) і (2.121) задовольняються одночасно.

Це області значень параметрів, які узгоджуються з умовами народження частинок ТМ в νMSM . У випадку інверсної ієрархії і ненульового значення кута θ_{13} не існує області параметрів, сумісної з цими умовами. Отже, в моделі νMSM для фізичного значення кута θ_{13} і маси важких стерильних нейтрино у межах $m_\pi < M < 2$ GeV народження частинок ТМ є можливим лише у випадку нормальної ієрархії мас активних нейтрино.

Область параметрів, придатна для генерації ТМ (випадок нормальної ієрархії та ненульового кута θ_{13}) можна використати, щоб отримати обмеження на розщеплення мас стерильних нейтрино. Фіксуючи маси стерильних нейтрино, отримуємо можливі значення параметру ε (див. Рис. 2.9) і, використовуючи Рис. 2.5 отримуємо можливі значення розщеплення мас стерильних нейтрино з масою M . Якщо маса стерильного нейтрино знаходиться на нижній межі області дозволених мас ($M \simeq 1.4$ GeV), тоді значення ΔM відоме точно ($\Delta M \approx 5 \cdot 10^{-21}$ GeV). Якщо ж маса стерильного нейтрино на верхній межі дозволеної області ($M = 2$ GeV), тоді ΔM може приймати значення у межах $10^{-21} \lesssim \Delta M/1\text{GeV} \lesssim 10^{-20}$.

Деякі існуючі експериментальні дані накладають обмеження на параметри νMSM . Для $M < 0.45$ GeV обмеження приходять від експерименту CERN PS191. Для $0.45 < M < 2$ GeV обмеження надходять від експериментів NuTeV, CHARM і BEBC. Область параметрів, узгоджена з цими експериментами, проаналізовано в роботі [70]. Цими параметрами є кут змішування $(\Theta^+ \Theta)_{22}$ (він визначає масштаб реакцій за участю з стерильними нейтрино) і маса важких стерильних нейтрино M .

Для того, щоб порівняти отримані нами обмеження на параметри моделі νMSM (див. Рис. 2.9 та Рис. 2.10) з обмеженнями, проаналізованими в [70] потрібно перебудувати дозвалені області параметрів у термінах M та $\theta_{\nu N_2}^2 = (\Theta^+ \Theta)_{22}$.

У загальному випадку співвідношення між $(\Theta^+ \Theta)_{22}$ і ε є досить скла-

дним. Дійсно, відповідно до (2.37) і (2.42) маємо:

$$(\Theta^+ \Theta)_{22} = \frac{\nu^2}{2M^2} (V^+ h^+ h V)_{22} = \frac{\nu^2}{2M^2} (F_2^2 + F_3^2 - 2|h^+ h|_{23} \sin \chi), \quad (2.122)$$

де $\chi = \arg[(h^+ h)_{23}]$. Використовуючи (2.25) – (2.27), отримаємо

$$F_2^2 = \frac{M}{\nu^2 \varepsilon} (m_c + m_b), \quad F_3 = \varepsilon F_2, \quad |h^+ h|_{23} = \frac{M}{\nu^2} (m_c - m_b) \quad (2.123)$$

і

$$(\Theta^+ \Theta)_{22} = \frac{m_c + m_b}{2M\varepsilon} \left(1 + \varepsilon^2 - 2 \frac{m_c - m_b}{m_c + m_b} \varepsilon \sin \chi \right). \quad (2.124)$$

Основна складність полягає у параметрі χ , який є складною функцією багатьох параметрів. Але у нашому випадку (див. Рис. 2.5 і Рис. 2.6, $\varepsilon < 0.16$) ми можемо використовувати наближене співвідношення:

$$(\Theta^+ \Theta)_{22} = \frac{m_c + m_b}{2M\varepsilon}. \quad (2.125)$$

Суперпозиція отриманих нами обмежень, зображених на Рис. 2.5 і Рис. 2.6 для ненульового значення кута θ_{13} і узагальнених обмежень з роботи [70] представлена на Рис. 2.11. Вище лінії, що позначена «BAU», баріогенезис не можливий: в цій області стерильні нейтрино приходять до стану термодинамічної рівноваги за температури, вищої T_{EW} . Нижче лінії, позначеної «See-saw», данні по масам та кутам змішування нейтрино не можуть бути пояснені в рамках «see-saw», механізму. Область, позначена, як «BBN» не задовільняє критеріям нуклеосинтезу теорії Великого Вибуху. Регіон, позначений, як «Experiment», зображує частину області параметрів, яка виключається експериментами з пошуку синглетних нейтрино. Регіони, позначені, як «Cos», « Δ » і «DM» були отримані нами. Регіони «Cos», зображені сірим та синім кольорами, показують область параметрів, дозволених космологічними обмеженнями (2.121) (сіра область відповідає розв'язкам типів А та В, синя область відповідає розв'язку типу В), заштрихована область, позначена, як « Δ », демонструє значення параметрів, дозвалені обмеженням (2.3), червона область, позначена, як «DM», зображує регіон

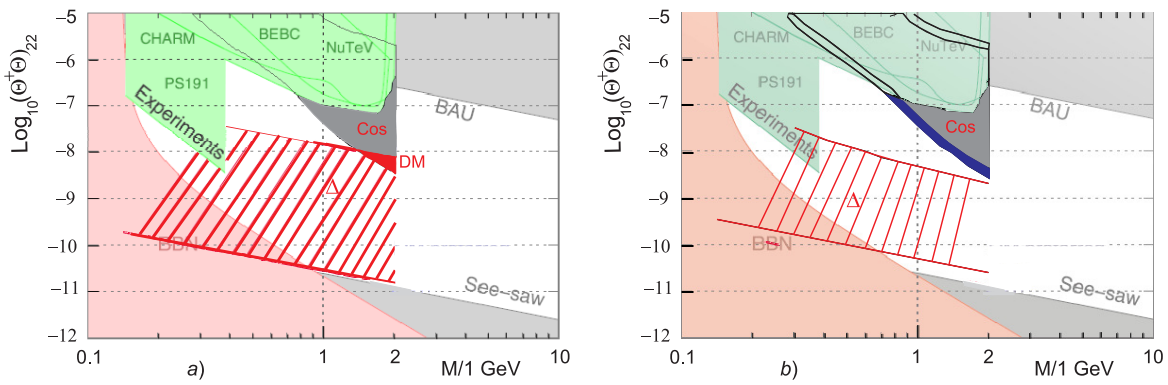


Рис. 2.11: Суперпозиція отриманих обмежень і обмежень з роботи [70]: *a)* випадок нормальної ієрархії, *b)* випадок інверсної ієрархії.

параметрів, де обмеження (2.3) і (2.121) не суперечать одне одному. Остання область є сприятливою для народження частинок ТМ, згідно наших розрахунків.

Червона область, позначена, як «DM», зображено на Рис. 2.12 у збільшеному масштабі. На ньому демонструється різниця між випадками $\theta_{13} = 0^0$ і $\theta_{13} = 10^0$, а також випадками розв'язків типу А та В. Як можна бачити, вибір між типами розв'язків А та В більше впливає на область допустимих параметрів, аніж вибір між $\theta_{13} = 0^0$ і $\theta_{13} = 10^0$.

2.4 Висновки

В даному розділі було розглянуто генерацію ЛА в ранньому Всесвіті за температур $T \ll T_{EW}$, коли маси двох важких стерильних нейтрино знаходяться у межах між m_π і 2 ГеВ.

Було зроблено висновок, що осциляції та розпад важких стерильних нейтрино можуть призвести до утворення ЛА такого значення, щоб підсилити народження частинок ТМ достатньо для пояснення спостережуваної ТМ Всесвіту, але лише у випадку нормальної (прямої) ієрархії мас активних нейтрино. Область дозволених параметрів вузька і представлена на Рис. 2.11 і Рис. 2.12. Потрібно зазначити, що область дозволених

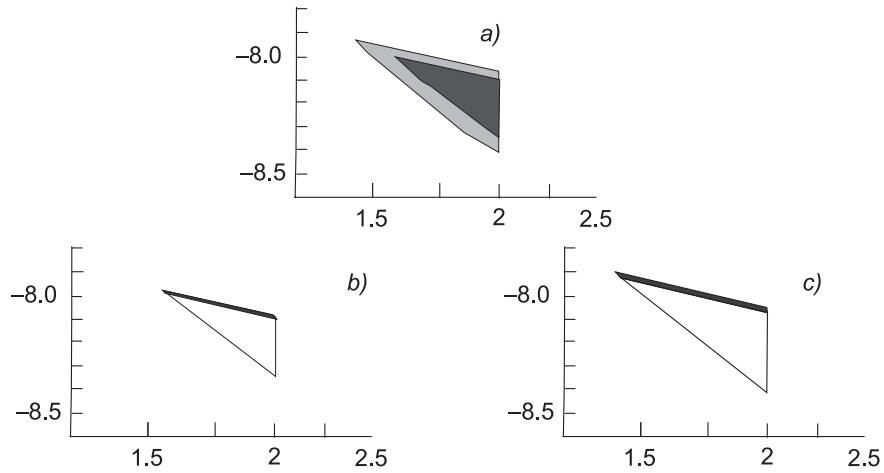


Рис. 2.12: Червона область "DM" з Рис. 2.11 у збільшеному масштабі: *a)* $\theta_{13} = 0^\circ$ тип А (темна область) і тип В (світла область); *b)* тип А: $\theta_{13} = 0^\circ$ (біла область) і $\theta_{13} = 10^\circ$ (чорна область); *c)* тип В: $\theta_{13} = 0^\circ$ (біла область) і $\theta_{13} = 10^\circ$ (чорна область). Змінна $M/1 \text{ GeV}$ по осі абсцисс та змінна $\text{Log}_{10}(\Theta^+\Theta)_{22}$ по осі ординат.

значень важких стерильних нейтрино є $1.42(1.55) \lesssim M < 2 \text{ GeV}$ для В (А) типів розв'язків відповідно, а кут змішування між активними та стерильними нейтрино – $-7.91(-7.98) \lesssim \text{Log}_{10}(\Theta^+\Theta)_{22} \lesssim -8.41(-8.35)$ для В (А) типів розв'язків відповідно. Якщо маса стерильного нейтрино на нижній межі області дозволених мас, то значення ΔM точно відоме ($\Delta M \approx 5 \cdot 10^{-21} \text{ GeV}$). Якщо маса стерильного нейтрино знаходиться на верхній межі дозволеної області, тоді ΔM може приймати значення з інтервалу $10^{-21} \lesssim \Delta M/1\text{GeV} \lesssim 10^{-20}$. У випадку оберненої ієрархії не існує області значень параметрів моделі, за яких би відбувалось утворення ТМ.

Значна область параметрів νMSM не є виключеною існуючими експериментами, див. Рис. 2.11. Комбінація цієї області з отриманими обмеженнями (червона область «DM», на Рис. 2.11) веде до висновку, що удосконалення минулих експериментів, таких, як NuTeV або CHARM, на один або два порядки величини, може допомогти закрити модель νMSM з $M < 2 \text{ GeV}$ або задетектувати праві стерильні нейтрино.

Варто зазначити, що отримані обмеження є досить грубими і можуть бути використані лише в якості оцінки. Дійсно, форма червоної області «DM» є дуже чутливою до космологічних обмежень. Застосована нами умо-

ва $0.1 < \sqrt{M_{PL} \Gamma_2} < M$ є досить наближеною. Коректний опис процесу може бути виконано в рамках формалізму матриці густини або рівняння Больцмана. Наші обчислення не можуть бути використані для $M > 2$ ГеВ. Проте, екстраполяція отриманих результатів (див. Рис. 2.11) говорить, що область дозволених параметрів для випадку нормальної ієрархії розширюється для мас більше 2 ГеВ. Можемо очікувати, що для мас важких стерильних нейтрино більше 2 ГеВ народження частинок Темної матерії може відбуватися і у випадку оберненої ієрархії також.

При обрахунках було використано два типи розв'язків (А та В) рівняння (2.28). Причина полягає у тому, що відношення елементів матриці Юкава (що входять у вирази для кутів змішування $\Theta_{\alpha I}$) можуть бути виражені через розв'язки (2.28) з двома можливими варіантами вибору знаку, сумісними з умовами (2.30). Це тісно пов'язано із симетрією системи (2.24) відносно перестановки елементів третьої колонки матриці Юкава з елементами другої колонки. Ці два варіанти є рівноправними.

Розрахунок ЛА в застосованій простій моделі дозволяє робити певні висновки, які видаються коректними і у випадку більш точного розгляду. Дійсно, початковий стан право-кіральних нейтрино у формі (2.90) не є важливим для генерації ЛА (кінцевий результат не є чутливим до значення констант α_I). Для випадку нормальної ієрархії відхилення кута змішування θ_{13} від нульового значення (аж до значення 16°) майже не змінює області параметрів, прийнятної для утворення темної матерії. У випадку інверсної ієрархії результати відрізняються для $\theta_{13} = 0$ і $\theta_{13} \neq 0$. Розрахунки вказують, що у випадку $\theta_{13} = 0$ існує область, яка підходить для успішного утворення ТМ, але при ненульовому значенні θ_{13} такої області не існує. Значення кута θ_{13} в межах $\theta_{13} < 18^\circ$ ($\theta_{13} \neq 0$) майже не змінює області сприятливої для утворення ТМ.

Суттєво зазначити, що під час обрахунків проводилась максимізація функцій відносно відомих параметрів моделі (фази $\delta, \xi, \alpha_2, \alpha_1$). Якщо не

проводити процедури оптимізації, фінальні функції будуть чутливими щодо значень згаданих фаз. Тому отримані результати є дуже оптимістичними. Але, якщо запропонована на Рис. 2.11 область параметрів, позначена, як «DM» буде заборонена експериментальними даними, це буде означати, що стерильні нейтрино мають бути важчими за 2 GeV.

Суттєве припущення, яке було зроблено, полягає у нехтуванні ефектами середовища. Обґрунтування того, що ефектами бекграунду можна знехтувати в термальній ванні Всесвіту, не проводилось. Також, для простоти розрахунки проводились у наближенні нульової температури. Результати даного розділу було опубліковано в роботі [43].

РОЗДІЛ 3

ЕВОЛЮЦІЯ МАГНІТНИХ ПОЛІВ У ПЕРВИННІЙ ПЛАЗМІ

3.1 Вступ

Магнітні поля присутні у всіх частинах спостережуваного Всесвіту, включаючи галактики, скупчення галактик та міжгалактичний простір. Основними експериментальними джерелами спостереження галактичних та позагалактичних магнітних полів є [72]: зєєманівське розщеплення спектральних ліній, інтенсивність та поляризація синхротронного випромінювання вільних релятивістських електронів, вимірювання фарадєєвського обертання площини поляризації електромагнітного випромінювання, при проходженні крізь іонізоване середовище.

Використовуючи декілька методів, було виміряно параметри магнітних полів у міжзоряному просторі нашої галактики [73] — середня амплітуда поля становить 3-4 мкГс, поле зберігає свою орієнтацію на масштабі порядку кількох Кпк, що порівняно з розмірами самої галактики. Магнітні поля схожої інтенсивності спостерігали також і в інших галактиках, таких, як Магелланові Хмари, M82, M33 та ін. Спостереження дають також інформацію про магнітні поля у скупченнях галактик. Типове значення для амплітуди поля в центрах досліджених скупчень галактик становить $\sim 10\text{-}30$ мкГс, а максимальне ~ 70 мкГс [74], довжина когерентності перевищує 100 Кпк [75]. Різні джерела також дають оцінку на значення великомасштабних магнітних полів в позагалактичному просторі (у войдах) щонайменше на рівні $\sim 10^{-15}$ Гс [29, 30, 31, 32, 33, 34].

Для пояснення природи спостережуваних полів у галактиках застосовують так званий динамо-механізм [76], що забезпечує перетворення кінетичної енергії електрично-провідного середовища у енергію магнітного поля. Для цього у системі має існувати ненульове початкове поле. Як було

сказано вище, магнітні поля порядку ~ 10 мкГс в внутрішньому просторі скупчень галактик є порівнюваними за силою з галактичними магнітними полями, незважаючи на те, що густина матерії міжгалактичного простору в кластерах менша за густину матерії міжзоряного простору галактик. Природу сильних магнітних полів у міжгалактичному просторі кластерів не можна задовільно пояснити простим розповсюдженням галактичних полів за межі галактик. Більш популярним в останні роки є підхід, в якому магнітні поля в галактиках та у міжгалактичному просторі скупчень галактик утворюються напряду з первинного (зародкового) поля, яке зазнає адіабатичного стискання під час колапсу протогалактичної хмари. За рахунок високої провідності міжгалактичного простору магнітний потік зберігається, що означає, що магнітне поле має зростати як квадрат розміру системи l . Величини первинного поля $B_{prim,0}$ і галактичного поля B_{gal} співвідносяться при цьому, як [72]:

$$B_{prim,0} = B_{gal} \left(\frac{\rho_{cosmic}}{\rho_{gal}} \right)^{2/3} \quad (3.1)$$

Оскільки співвідношення між густиною позагалактичного простору та густиною міжзоряного середовища у галактиках становить $\rho_{cosmic}/\rho_{gal} \simeq 10^{-6}$, а $B_{gal} \sim 10^{-6}$ Гс, можемо отримати наступну (одну із можливих) оцінку на значення космічних магнітних полів, які мають існувати у епоху формування структур ($z \sim 5$), адіабатично масштабовані на наш час:

$$B_{prim,0} \simeq 10^{-10} \text{ Гс} \quad (3.2)$$

Первинні магнітні поля не обов'язково генеруються у ранньому Всесвіті (до епохи рекомбінації). Існують також астрофізичні механізми генерації зародкових полів. Один з них заснований на ефекті батареї Бірмана [77] і може згенерувати зародкове поле, яке за допомогою динамо-механізму може бути підсилено до масштабу галактичних полів. Проте, цим механізмом на-вряд чи можна пояснити магнітні поля в галактичних скупченнях. Таким

чином виникає неприродня ситуація, коли схожі за характеристиками поля в галактиках та скупченнях галактик мають бути згенеровані різними механізмами. Існують також пропозиції генерації первинних полів іншими джерелами — від зоряних спалахів або радіогалактик [72]. Проте для таких механізмів все-рівно виявляється необхідним існування магнітних полів, утворених до рекомбінації. Це вказує на те, що природу первинних магнітних полів слід шукати у ранньому Всесвіті.

Різні сценарії магнетогенезису під час інфляції, розігріву, електрослабкого та сильного фазового переходів були запропоновані та вивчені в літературі [25, 26, 28, 35, 36]. Основна проблема магнетогенезису в ранньому Всесвіті полягає в тому, що відповідні магнітні поля швидко розмиваються в процесі розширення Всесвіту. В результаті, вони навряд чи виживають та можуть слугувати в якості зародків галактичних магнітних полів. Таке обґрунтування засноване на стандартному підході до еволюції магнітних полів в магнетогідродинаміці релятивістської плазми скінченного опору [108, 109, 110, 111, 112, 113]. В той час, як короткохвильові моди швидко зникають за рахунок магнітної дифузії, спричиненої скінченною провідністю плазми, в'язкість грає домінуючу роль в дисипації на більших масштабах [110, 111]. Також, добре відомим є факт, що магнітні поля, які виникають після інфляції (згенеровані за електрослабкої епохи), швидко стають короткохвильовими (глибоко під горизонтом) завдяки космологічному розширенню Всесвіту [114, 115, 116]. Однак, для магнітних полів з ненульовою спіральністю (*helical magnetic fields*), з урахуванням турбулентних ефектів, частина їх енергії може бути передана від коротко- до довгохвильових мод («інверсний каскад») і, отже, може уникнути дисипації за рахунок ефектів опору та в'язкості плазми [111, 114, 95, 117].

Як зазначалось у Вступі, в ряді нещодавніх досліджень [37, 38, 39, 40] було продемонстровано інший механізм інверсного каскаду в намагніченій кіральній плазмі, який кардинально змінює еволюцію магнітних полів у

ранньому Всесвіті. Механізм засновано на ідеї, що нестабільність, яка компенсує дисипацію магнітних полів, розвивається в результаті абелевої кіральної аномалії [83, 89, 90], що виникає у первинній плазмі з дисбалансом в чисельній густині між право- та ліво-кіральними частинками (напівстроого описуванім кіральним хімічним потенціалом μ_5), яка призводить до генерації гіперзарядових магнітних полів, що в результаті генерують звичайні магнітні поля за рахунок електрослабкого змішування.

Взагалі, на сьогодні в науковому світі існує підвищений інтерес до релятивістської плазми з кіральною асиметрією. Він викликаний досягнутим в останні роки прогресом у розумінні основних властивостей різних релятивістських та псевдо-релятивістських систем, починаючи від діраківських та вейлівських напівметалів в фізиці конденсованого середовища [78], низькоенергетичні квазічастинкові збудження в яких описуються рівняннями Дірака і Вейля, закінчуючи сильнозв'язаною кварк-глюонною плазмою, створеною експериментально в зіткненнях важких йонів [79, 80, 81], і первинною релятивістською плазмою в ранньому Всесвіті [25, 26], яка безпосередньо цікава в рамках даної роботи. Одна з найбільш незвичних властивостей кіральної релятивістської плазми, що відсутня в звичайній нерелятивістській, це можливість макроскопічної реалізації відомих квантових аномалій [82]. Так, в кірально-асиметричній плазмі в магнітному полі $\mathbf{B}$, кіральна аномалія породжує новий тип внеску в електричний струм: $e\mathbf{j} = e^2\mu_5\mathbf{B}/(2\pi^2c)$ [83, 84, 85, 86]. Останнє відомо в літературі, як *кіральний магнітний ефект* [87, 88]. Рівняння Максвелла, поправлені такими внесками до електричного струму, стають *аномальними рівняннями Максвелла* [89, 90, 91, 92, 37, 38, 93, 39, 94, 40].

Включення аномальних струмів радикально змінює самоузгоджену еволюцію густин кірального заряду і спіральних магнітних полів [89, 37, 38, 39, 94, 40]. Більше того, нелінійна взаємодія посередництвом аномальних процесів індукує ефективний механізм перекачки енергії з магнітних мод з

короткими довжинами хвиль (які сильно піддаються дисипації) до мод з довшими довжинами хвиль (і довшим часом життя) — феномен, схожий на інверсний каскад у звичайній магнетогідродинаміці [95], але не пов'язаний із турбулентними ефектами, а спричинений аномальними транспортними властивостями кіральної плазми. В залежності від обраних початкових умов, було виявлено, що спіральність може перекачуватись з ферміонів до магнітних полів і навпаки. Ці результати узгоджуються з пропозицією, зробленою в роботі [96], що усі ступені вільності з ненульовим аксіальним зарядом є рівнозбудженими у стані рівноваги.

Кіральна аномалія у релятивістському середовищі проявляє себе не лише через кіральний магнітний ефект. Навіть якщо кіральна асиметрія відсутня, ненульове магнітне поле може породити аксіальний струм $e\mathbf{j}_5 = e^2\mu\mathbf{B}/(2\pi^2c)$ у плазмі з ненульовим електричним хімічним потенціалом. Це явище відоме, як *ефект кірального розділення* [97]. Інше передбачення кіральних рівнянь Максвелла у релятивістській плазмі, яке засноване на використанні поєднання ефекту кірального розділення та кірального магнітного ефекту — це новий тип колективних збуджень, відомих, як *кіральні магнітні хвилі* [98]. Подальший розвиток цих ідей полягає у аномальній гідродинаміці, в якій присутні нові внески за рахунок кіральної аномалії [99, 100, 101, 102, 103, 104, 94].

Раніше вважалося, що ці процеси в первинній плазмі обмежені температурами $T \gtrsim 80$ TeV, так як при нижчих температурах реакції, що призводять до розмивання кіральної асиметрії (*chirality flipping reactions*) змішують ліво- та правокіральні частинки. В роботі [37] було показано, що нелінійна взаємодія між кіральною асиметрією та спіральними магнітними полями може суттєво подовжити еволюцію, аж до часів, коли температура Всесвіту спадає до кількох MeV, незважаючи на присутність магнітної дифузії та реакцій, що розмивають кіральну асиметрію. Механізм, запропонований в роботі [37] пов'язує еволюцію магнітної спіральності з ферміонним

кіральним струмом та кіральним магнітним ефектом [87, 88]. Незважаючи на те, що в роботі [37] розглядались моди магнітного поля з ненульовими хвильовими векторами, використовувалось просторово-усереднене рівняння для кіральної аномалії та однорідний кіральний хімічний потенціал, при цьому було отримано інверсний каскад. Але, беручи до уваги, що електромагнітні поля в первинній плазмі обов'язково просторово-неоднорідні, природньо очікувати, що в кіральній асиметрії також мають виникати неоднорідності під час еволюції. Тому еволюція магнітних полів в первинній неоднорідній плазмі з кіральною аномалією потребує детального вивчення. В рамках гідродинаміки, просторові неоднорідності кірального хімічного потенціалу було розглянуто в роботах [94, 118], де було показано, що інверсний каскад розвивається в просторово-неоднорідному випадку. Такого ж висновку досягнуто вивчаючи динаміку кірального дисбалансу в реальному часі, використовуючи підхід статистичної теорії поля [119].

Далі будемо зосереджуватись на вивченні ролі неоднорідностей в еволюції кіральної плазми. Важливе питання полягає у тому, чи будуть присутні нові додаткові струми у неоднорідному випадку. В роботі [90] постулюється відсутність таких струмів, в той же час інших набір рівнянь було запропоновано в роботі [94]. Ми отримаємо ці нові струми в неоднорідному випадку у систематичний спосіб. В аналізі стартовою точкою буде кіральна кінетина теорія [105, 106, 107]. Також даному розділі буде вивчено еволюцію інверсного каскаду в кіральній плазмі з неоднорідностями, використовуючи модель, що включає основні властивості системи аномальних рівнянь Максвелла. Для спрощення, буде знехтувано ефектами розмивання кіральності, як це було зроблено в роботі [37] тому, що кіральна асиметрія і спіральні магнітні поля мають виживати в первинній плазмі на набагато довших часових масштабах, ніж часи дифузії чи розмивання кіральності (аж до температур 10 – 100 MeV).

Результати даного розділу опубліковано у роботах [44, 45]

3.2 Кіральна кінетична теорія

Кіральна кінетична теорія описує еволюцію одночастинкової функції розподілу $f_\lambda(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ для право- ($\lambda = +$) і ліво-кіральних ($\lambda = -$) ферміонів. Нещодавно було запропоновано [120, 121, 105], що релятивістські ферміони у зовнішньому електромагнітному полі описуються *кіральною кінетичною теорією*, яка задається кінетичним рівнянням [105, 106]:

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial t} + \frac{1}{1 + \frac{e}{c} \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\lambda} \left[\left(e \mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{e^2}{c} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \boldsymbol{\Omega}_\lambda \right) \cdot \frac{\partial f_\lambda}{\partial \mathbf{p}} + \left(\mathbf{v} + e \mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega}_\lambda + \frac{e}{c} (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\lambda) \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial f_\lambda}{\partial \mathbf{x}} \right] = I_{\text{coll}}, \quad (3.3)$$

де фактор $(1 + e \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\lambda / c)^{-1}$ додано для коректного визначення фазового об'єму [120, 121], $\boldsymbol{\Omega}_\lambda = \lambda \mathbf{p} / (2|\mathbf{p}|^3)$ — *кривина Беррі* [122]. Кривина Беррі є важливою складовою кіральної кінетичної теорії, що дозволяє враховувати ферміонну природу частинок [105, 106, 107]. Групова швидкість визначається з енергії частинок наступним чином: $\mathbf{v} \equiv \partial \epsilon_{\mathbf{p}} / \partial \mathbf{p}$. Виходячи з обмежень лоренц-інваріантності, в роботі [105] було показано, що дисперсійне співвідношення для кіральних ферміонів в магнітному полі $\mathbf{B}$ потрібно обирати у вигляді $\epsilon_{\mathbf{p}} = c|\mathbf{p}| - \lambda e \mathbf{p} \cdot \mathbf{B} / |\mathbf{p}|^2$, що справедливо у лінійному порядку по полю, коли $|e \mathbf{B}| / (c p^2) \ll 1$. Проте, варто зазначити, що таке співвідношення для $\epsilon_{\mathbf{p}}$ може бути проблематичним, оскільки результуюче значення групової швидкості $v = c \sqrt{1 + 2e (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\lambda) / c + O(\mathbf{B}^2)}$, виявляється більшим за швидкість світла, коли $(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\lambda) > 0$. В нашому розгляді ми використовуватимемо дисперсійне співвідношення $\epsilon_{\mathbf{p}} = c|\mathbf{p}|$, для якого групова швидкість рівна швидкості світла c .

Рів. (3.3) є кінетичним рівнянням для функції розподілу f_λ^i частинок ($i = p$). Окреме рівняння може бути записано для античастинок ($i = a$). Відповідне рівняння можна просто отримати шляхом заміни $e \rightarrow -e$ і $\lambda \rightarrow -\lambda$ в (3.3). Далі в тексті, якщо це не викликатиме неоднозначностей, індекс i опускатиметься і вважатиметься, що вираз записано для частинок.

В остаточних результатах для густин зарядів та струмів буде враховано внески як від частинок, так і від античастинок.

Доданок у правій частині кінетичного рівняння (3.3) є інтегралом зіткнень. У найпростішому наближенні, можна покласти $I_{\text{coll}} = 0$. Це відповідає так званому беззіткненному випадку, який є корисним, коли колективна динаміка частинок керована, головним чином, електромагнітними полями. Одним із найпростіших наближень, в якому інтеграл зіткнень відмінний від нуля, є наближення часу релаксації з $I_{\text{coll}} = -(f_\lambda - f_\lambda^{(\text{eq})})/\tau$ [123, 124], де $\tau \sim 1/[e^4 T \ln(1/|e|)]$ [125] — час релаксації і $f_\lambda^{(\text{eq})}$ — локальна рівноважна функція розподілу. За відсутності електромагнітних полів, остання є звичайною фермі-діраківською функцією розподілу:

$$f_\lambda^{(\text{eq})}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{e^{[\epsilon_{\mathbf{p}} - \mu_\lambda(t, \mathbf{x})]/T} + 1}, \quad (3.4)$$

де $\epsilon_{\mathbf{p}} = c|\mathbf{p}|$. Відповідні рівноважні функції розподілу для античастинок отримуються шляхом заміни $\mu_\lambda \rightarrow -\mu_\lambda$. Тут використовується позначення для хімічних потенціалів правих та лівих ферміонів, $\mu_\lambda(t, \mathbf{x}) = \mu(t, \mathbf{x}) + \lambda\mu_5(t, \mathbf{x})$. Потрібно зазначити, що у випадку локальної рівноваги, температура T в функції розподілу також може залежати від просторово-часових координат, $T(t, \mathbf{x})$. Проте, для того, щоб спростити наступний аналіз, такою залежністю буде знехтувано. В присутності електромагнітного поля вибір функції $f_\lambda^{(\text{eq})}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ є делікатною проблемою, тому обговоримо її в деталях нижче.

В загальному випадку, локальні рівноважні хімічні потенціали μ_λ еволюціонують з часом. Тому, одним з центральних та найважливіших елементів аналізу є еволюція рівнянь для μ_λ , які отримуються з кінетичного рівняння. Інтегрування лівої частини кінетичного рівняння (3.3) по імпульсам дає рівняння неперервності для електричного та кірального струмів, включаючи доданок з кіральною аномалією. Для того, щоб густина частинок зберігалася, необхідно, щоб інтеграл по імпульсам від інтегралу зіткнень був рівен нулю. Ця вимога буде мати дуже важливе значення в подальшому

аналізі.

Інтеграл зіткнень $I_{\text{coll}}^{\text{BGK}} = -(f_\lambda - \frac{n_\lambda}{n_\lambda^{(0)}} f_\lambda^{(0)})/\tau$ типу Батнагара-Гроса-Крука (БГК) [126] використовувався в роботі [39]. Тут n_λ – локальна чисельна густина ферміонів, $f_\lambda^{(0)}$ – дана функція розподілу (наприклад, в аналізі динаміки нерелятивістських частинок в роботі [126], використовувалась функція Максвелла розподілу за швидкостями), і $n_\lambda^{(0)}$ визначається функцією розподілу $f_\lambda^{(0)}$. Ясно, що такий інтеграл зіткнень автоматично зберігає число частинок і узгоджується з співвідношенням кіральної аномалії. В ході дослідження було виявлено, що при вивченні еволюції електромагнітних полів і кіральної асиметрії в присутності сильних магнітних полів, де кіральний хімічний потенціал еволюціонує з часом, критичним є використання локальної рівноважної функції $f_\lambda^{(\text{eq})}$, а не фіксованої $f_\lambda^{(0)}$, інакше, кінетичне рівняння не є повністю узгодженим. Було перевірено, проте, що результати, отримані для інтегралу зіткнення типу БГК з $f_\lambda^{(\text{eq})}$ замість $f_\lambda^{(0)}$ не дуже відрізняються від результатів, отриманих в наближенні часу релаксації, як описано вище. Так як наближення часу релаксації $I_{\text{coll}} = -(f_\lambda - f_\lambda^{(\text{eq})})/\tau$ набагато простіше, в послідуєчому аналізі буде використовуватись саме воно.

Еволюція електричних і магнітних полів визначається рівняннями Максвелла:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi en, \quad (3.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} e\mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.8)$$

За означенням, густина електричного заряду задається $en(\mathbf{x}) = \sum_i \sum_{\lambda=\pm} e_i n_\lambda^i(\mathbf{x})$, де сума по i включає внески частинок ($i = p$) і античастинок ($p = a$).

Відмітимо, що останні входять з протилежним знаком. Чисельна густина

частинок заданої кіральності λ задається виразом

$$n_\lambda(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(1 + \frac{e}{c} \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\lambda\right) f_\lambda(\mathbf{p}, \mathbf{x}). \quad (3.9)$$

Тут, фактор $1 + e\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\lambda/c$ в інтегралі вводиться для правильного фазового об'єму. Після домноження кінетичного рівняння (3.3) на фактор $1 + e\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\lambda/c$, інтегрування по імпульсам $\mathbf{p}$ і використання рівнянь Максвелла, отримаємо наступне співвідношення:

$$\partial_t n_\lambda + \nabla \cdot \mathbf{j}_\lambda = -\frac{e^2}{c} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\boldsymbol{\Omega}_\lambda \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_\lambda\right) \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \frac{\lambda e^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} f_\lambda(\mathbf{p} = 0)}{4\pi^2 c}, \quad (3.10)$$

де було проінтегровано частинами в останньому виразі і використано наступну тотожність для кривини Беррі: $\nabla_{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\lambda = 2\pi\lambda\delta^3(\mathbf{p})$. Електричний струм задається виразом $e\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \sum_i \sum_{\lambda=\pm} e_i \mathbf{j}_\lambda^i(\mathbf{x})$, де внески від частинок заданої кіральності мають наступний вигляд [123, 105, 106]:

$$\mathbf{j}_\lambda = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\mathbf{v} + e\mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega}_\lambda + \frac{e}{c} \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\lambda)\right) f_\lambda + \mathbf{j}_\lambda^{(\text{curl})}. \quad (3.11)$$

Потрібно зазначити, що визначення струму в [123] відрізняється від даного в [105]. Останній має додатковий доданок $\mathbf{j}_\lambda^{(\text{curl})}$, точна форма якого може бути отримана шляхом інтегрування струму, визначеного в [105] частинами,

$$\mathbf{j}_\lambda^{(\text{curl})} = \nabla \times \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_\lambda \epsilon_{\mathbf{p}} \boldsymbol{\Omega}_\lambda. \quad (3.12)$$

Як видно, цей доданок є ротором певного вектора і тому не дає внеску в рівняння неперервності. Попри те, такий струм впливатиме на рівняння Максвелла (3.8). З огляду на структуру відповідного рівняння впливає, що інтеграл в правій частині (3.12) грає роль намагніченості. Тоді, струм можна сприймати, як струм «намагнічування».

Важливо підкреслити, що у випадку релятивістської плазми суттєво, що повні вирази для електричної/кіральної густини заряду, а також відповідні струми містять внески від частинок та античастинок. Це відрізняється від випадку щільної релятивістської плазми при низьких температурах, $T \ll |\mu_\lambda|$, коли внески античастинок є експоненційно подавленими і, тому,

їми можна легко знехтувати. У високотемпературному режимі, $T \gg |\mu_\lambda|$, який займає основне місце в космології, густина античастинок задається тими ж виразами, що і в рівнянні (3.9), але у термінах функції розподілу античастинок f_λ^a . Беручи до уваги протилежний знак заряду античастинок, знайдемо, що, як і очікувалось, високотемпературна плазма виявиться майже нейтральною. Більш важливо те, що античастинки даватимуть майже такий самий внесок в струм, що і частинки, таким чином ефективно подвоюючи результат.

Врахування внеску античастинок також є критичним для отримання правильного співвідношення кіральної аномалії з рівняння (3.10). Права частина даного рівняння для частинок пропорційна локальній рівноважній функції розподілу $f_\lambda^{p(\text{eq})}(\mathbf{p} = 0)$, що залежить від μ_λ і температури. Це здається природнім з огляду на топологічну природу даного співвідношення. Те саме справедливо і для античастинок. Попри те, з точки зору рівності $\sum_i f_\lambda^i(\mathbf{p} = 0) = 1$, повний кіральний струм $\mathbf{j}_5 = \sum_i \sum_{\lambda=\pm} \lambda \mathbf{j}_\lambda^i$ задовільняє звичайному рівнянню неперервності з правильним $e^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} / (2\pi^2 c)$. В низькотемпературному режимі правильний результат отримується з урахуванням тільки вкладів частинок. (Легко перевірити, що електричний струм $e\mathbf{j} = \sum_i \sum_{\lambda=\pm} e_i \mathbf{j}_\lambda^i$ задовільняє звичайному неаномальному рівнянню неперервності.)

Повний набір рівнянь Максвелла (3.5) - (3.8), кінетичне рівняння (3.3) в наближенні часу релаксації, а також вирази для густин частинок (3.9) і струмів (3.11) утворюють самоузгоджену систему рівнянь для одночастинкової функції розподілу ліво- та право-кіральних ферміонів і електромагнітних полів. Тому, для того, щоб, наприклад, вивчати еволюцію магнітних полів і кіральної асиметрії в намагніченій плазмі, потрібно розв'язати відповідну систему рівнянь. Для того, щоб спростити цю надскладну задачу буде отримано систему рівнянь, у наближенні слабких електромагнітних полів.

Перед тим, як перейти до отримання повного набору рівнянь, що описують еволюцію неоднорідної кіральної плазми і електромагнітних полів, корисно визначити загальні класи такої плазми, в залежності від її складу і динаміки. Зокрема, як це стане зрозуміло згодом, важливу роль в аналізі грає можлива присутність додаткових нейтральних частинок і їх взаємодії з зарядженими носіями у плазмі.

Для того, щоб краще зрозуміти роль нейтральних частинок, пригадаємо особливу властивість плазми, що не містить таких частинок. Коли до такої плазми прикладається конфігурація перпендикулярних електричних і магнітних полів, $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ (вважаючи, що $E < B$), вона починає дрейфувати як ціле з швидкістю, перпендикулярною до електричного та магнітного полів: [127]

$$\bar{\mathbf{v}} = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad (3.13)$$

див. також підрозділ 3.3 далі. Важливо те, що дрейфова швидкість $\bar{\mathbf{v}}$ не залежить від специфічних значень зарядів (і мас, якщо такі є) частинок. Дійсно, не зважаючи на дрейф, плазма знаходить в стані ідеальної рівноваги.

Зрозуміло, що описаний дрейфовий стан плазми дуже вразливий до присутності бекграунду, що чинить опір системі. У твердому тілі, наприклад, він може виникати від йонної ґратки або домішок. В інших плазмах бекграундом можуть слугувати нейтральні частинки, на які прямо не діє електромагнітне поле. В останньому випадку, звичайно, вважається, що часовий масштаб нейтральної компоненти, який потрібен їй, щоб досягти власного дрейфу (шляхом взаємодії з зарядженими частинками) набагато більший за характерний масштаб для еволюції електромагнітних полів і неоднорідностей.

Далі ми обговоримо обидва випадки з дрейфом та без дрейфу плазми, як цілого. Мабуть, найбільш реалістичним прикладом плазми з дрейфом є електрон-позитронна плазма в КЕД. Прикладом плазми, де дрейф може

не розвинутих повністю за рахунок бекграунду нейтральних частинок є кварк-глюонна плазма при достатньо високих температурах. Електрично нейтральні частинки в цьому випадку – це глюони. У випадку кіральної плазми в Діраківських/Вейлівських напівметалах, бекграунд існує за рахунок ґратки йонів та домішок, що не дає розвинутих дрейфу взагалі.

3.3 Кіральна плазма в дрейфовому стані

В цьому підрозділі буде отримано рівняння, що описує еволюцію слабо-неоднорідної кіральної плазми і електромагнітних полів без будь-яких додаткових компонент (таких, як нейтральні частинки, домішки або йонна ґратка), що можуть чинити суттєвий опір зарядженим частинкам. Якщо ж додаткові компоненти присутні, вважатимемо, що їх взаємодією з зарядженими частинками можна знехтувати. Будемо використовувати кінетичне рівняння (3.3) в наближенні часу релаксації. Функції розподілу для заряджених частинок ($i = p$) та їх античастинок ($i = a$) задовольняють наступним рівнянням:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{e_i}{c} \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\lambda^i\right) \frac{\partial f_\lambda^i}{\partial t} + \left(e_i \mathbf{E} + \frac{e_i}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{e_i^2}{c} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \boldsymbol{\Omega}_\lambda^i\right) \cdot \frac{\partial f_\lambda^i}{\partial \mathbf{p}} \\ & + \left(\mathbf{v} + e_i \mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega}_\lambda^i + \frac{e_i}{c} (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\lambda^i) \mathbf{B}\right) \cdot \frac{\partial f_\lambda^i}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{1}{\tau} \left(1 + \frac{e_i}{c} \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\lambda^i\right) \left(f_\lambda^i - f_\lambda^{i(\text{eq})}\right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

де $e_i = e$, $\Omega_\lambda^i = \Omega_\lambda$ для частинок і $e_i = -e$, $\Omega_\lambda^i = -\Omega_\lambda$ для античастинок.

У випадку плазми, що складається лише з заряджених частинок, стандартна функція розподілу Фермі-Дірака (3.4) не є найкращим вибором для нульового наближення рівноважної функції розподілу. В ідеалі, потрібно описати дрейф плазми, як цілого, шляхом модифікації функції розподілу.

Перед тим, як розглянути загальну конфігурацію електромагнітних полів, пригадаємо, що польова конфігурація з постійними $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ (and $E < B$) не чинить дисипативного ефекту на плазму (звісно, це зміниться після появи паралельної компоненти поля $\mathbf{E}_\parallel$). Система, як ціле, дрейфує з швидкі-

стю $\bar{\mathbf{v}}$ [127], див. рівняння (3.13). Звичайно, це пов'язано з тим фактом, що, у системі відліку K' , що рухається з дрейфовою швидкістю $\bar{\mathbf{v}}$ відносно лабораторної системи відліку K , електричне поле відсутнє [128]. У відсутності електричного поля в системі K' , рівноважний стан природньо описується звичайною фермі-діраківською функцією розподілу [129] (для спрощення тут опущено індекси частинок i)

$$f_{\lambda}'^{(\text{eq})} = \frac{1}{\exp\left(\frac{p'^{\nu}u'_{\nu}-\mu'_{\lambda}}{T'}\right) + 1} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon_{\mathbf{p}'}-\mu'_{\lambda}}{T'}\right) + 1}, \quad (3.15)$$

де $p'^{\nu} = (\epsilon_{\mathbf{p}'}/c, \mathbf{p}')$, а $u'^{\nu} \equiv (u'^0, \mathbf{u}') = (c, 0, 0, 0)$ – це власна швидкість. Підкреслимо, що це справедливо лише у випадку відсутності нейтральних частинок, або, коли їх взаємодія надто слабка, щоб змінити еволюцію електромагнітних полів в плазмі на часових масштабах порядку τ .

Проводячи обернене перетворення Лоренца в рівнянні (3.15), легко знаходимо рівноважну функцію розподілу в лабораторній системі відліку,

$$f_{\lambda}^{(\text{eq})} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon_{\mathbf{p}}-\mathbf{p}\cdot\bar{\mathbf{v}}-\mu_{\lambda}}{T}\right) + 1}, \quad (3.16)$$

де $u^{\nu} \equiv (u^0, \mathbf{u}) = \left(c/\sqrt{1-(\bar{v}/c)^2}, \bar{\mathbf{v}}/\sqrt{1-(\bar{v}/c)^2}\right)$, $T = T'\sqrt{1-(\bar{v}/c)^2}$, and $\mu_{\lambda} = \mu'\sqrt{1-(\bar{v}/c)^2}$. Неважко перевірити, що функція розподілу (3.16) є насправді стаціонарним розв'язком кінетичного рівняння (3.14) для постійних взаємноперпендикулярних електричних і магнітних полів.

Швидкість $\bar{\mathbf{v}} = c\mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$ відома у фізиці плазми, як дрейфова швидкість [127] тому, що рух заряджених частинок в перпендикулярних магнітних і електричних полях являє собою суперпозицію кругового руху навколо точки, що називається направляючим центром та дрейфу цієї точки зі швидкістю $\bar{\mathbf{v}}$. Критично важливо, що ця швидкість не залежить від зарядів та мас частинок. Це також вірно і у випадку нерелятивістської плазми.

Варто підкреслити, що дрейф плазми, як цілого, гарно визначений лише у випадку $E_{\perp} < B$. В цьому випадку дрейфова швидкість $\bar{v} = cE_{\perp}/B$ є меншою за швидкість світла c . В протилежному випадку, $E_{\perp} > B$, не існує

системи вигляду K' , в якій перпендикулярна складова електричного поля зникає.

Використовуючи функцію (3.16) в якості початкового наближення функції розподілу, перейдемо до розгляду загального випадку, коли паралельна компонента електричного поля $\mathbf{E}_{\parallel}$ також присутня і виводить систему з рівноваги. Шукатимемо розв'язок для f_{λ} у вигляді розкладу, тобто,

$$f_{\lambda} = f_{\lambda}^{(\text{eq})} + \delta f_{\lambda}^{(1)} + \dots, \quad (3.17)$$

де $\delta f_{\lambda}^{(1)}$ означає відхилення від рівноважного стану в першому порядку по компоненті електричного поля $\mathbf{E}_{\parallel}$, магнітного поля $\mathbf{B}$, і перших похідних від електромагнітних полів та хімічних потенціалів.

Підставляючи розклад (3.17) в кінетичне рівняння (3.14) і зберігаючи доданки тільки до лінійних, отримаємо:

$$\frac{\bar{D}_{\lambda}}{T} \frac{\partial(\mu_{\lambda} + \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{v}})}{\partial t} - \frac{\bar{D}_{\lambda}}{T} e \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})}{B^2} + \frac{\bar{D}_{\lambda}}{T} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial(\mu_{\lambda} + \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{v}})}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\delta f_{\lambda}^{(1)}}{\tau} = 0, \quad (3.18)$$

де використано позначення

$$\bar{D}_{\lambda}(\mu_{\lambda}) \equiv f_{\lambda}^{(\text{eq})} \left(1 - f_{\lambda}^{(\text{eq})}\right) = e^{(cp - \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{v}} - \mu_{\lambda})/T} / (e^{(cp - \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{v}} - \mu_{\lambda})/T} + 1)^2.$$

Зазначимо, що дрейфова швидкість $\bar{\mathbf{v}}$ визначена в термінах електромагнітних полів і тому може залежати від просторово-часових координат.

Розв'язуючи це рівняння, отримаємо:

$$\delta f_{\lambda}^{(1)} = \frac{\tau \bar{D}_{\lambda}}{T} \left(e \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})}{B^2} - \mathbf{v} \cdot \frac{\partial(\mu_{\lambda} + \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{v}})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial(\mu_{\lambda} + \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{v}})}{\partial t} \right). \quad (3.19)$$

Використовуючи поправки першого порядку до функції розподілу $f_{\lambda}^{i(\text{eq})}$, можемо тепер порахувати густини заряду і густини струмів такого ж порядку.

Результат першого порядку для густини кірального заряду має вигляд:

$$\begin{aligned}
 n_\lambda &= \sum_i \text{sign}(e_i) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(f_\lambda^{i(\text{eq})} + \delta f_\lambda^{i,(1)} + \frac{e_i}{c} (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\lambda^i) f_\lambda^{i(\text{eq})} \right) \\
 &= n_\lambda^{(0)} - \tau \frac{\partial n_\lambda^{(0)}}{\partial \mu_\lambda} \left(\bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \mu_\lambda}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mu_\lambda}{\partial t} \right) \\
 &\quad - \tau n_\lambda^{(0)} \left[(\boldsymbol{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{v}}) + \frac{4\bar{v}}{(c^2 - \bar{v}^2)} \left(\bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right) \right], \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

де, за означенням,

$$n_\lambda^{(0)} = \frac{\mu_\lambda^3 + \pi^2 T^2 \mu_\lambda}{6\pi^2 c^3 [1 - (\bar{v}/c)^2]^2}. \quad (3.21)$$

Виводячи рівняння (3.20), було взято до уваги, що $(\mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{v}}) = 0$.

В тому ж першому порядку, густини струмів мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{j}_\lambda &= \sum_i \text{sign}(e_i) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\left(\mathbf{v} + e_i \mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega}_\lambda^i + \frac{e_i}{c} \mathbf{B} (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\lambda^i) \right) f_\lambda^{i(\text{eq})} \right. \\
 &\quad \left. + \boldsymbol{\nabla} \times \left(\epsilon_{\mathbf{p}} \boldsymbol{\Omega}_\lambda f_\lambda^{i(\text{eq})} \right) + \mathbf{v} \delta f_\lambda^{i,(1)} \right] = \mathbf{j}_\lambda^{(\text{Hall})} + \mathbf{j}_\lambda^{(1)} + \mathbf{j}_\lambda^{(2)} + \mathbf{j}_\lambda^{(\text{curl})} + \mathbf{j}_\lambda^{(3)}, \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

де внески першого порядку не залежать від часу релаксації, в той час, як останній, $\mathbf{j}_\lambda^{(3)}$, лінійний по τ . Струм Холла має стандартну форму:

$$\mathbf{j}_\lambda^{(\text{Hall})} = \sum_i \text{sign}(e_i) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathbf{v} f_\lambda^{i(\text{eq})} = c n_\lambda^{(0)} \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (3.23)$$

Точні вирази для двох інших недисипативних доданків мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{j}_\lambda^{(1)} &= \sum_i \text{sign}(e_i) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e_i (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega}_\lambda^i) f_\lambda^{i(\text{eq})} \\
 &= \frac{\lambda e \mu_\lambda}{4\pi^2 \bar{v}^3} (\mathbf{E} \times \bar{\mathbf{v}}) \left(\frac{c}{2} \ln \frac{c + \bar{v}}{c - \bar{v}} - \bar{v} \right), \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{j}_\lambda^{(2)} = \sum_i \text{sign}(e_i) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e_i}{c} \mathbf{B} (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\lambda^i) f_\lambda^{i(\text{eq})} = \frac{\lambda e \mu_\lambda}{8\pi^2 \bar{v}} \mathbf{B} \ln \frac{c + \bar{v}}{c - \bar{v}}. \quad (3.25)$$

Використовуючи означення для дрейфової швидкості, легко перевірити, що, в додачу до перпендикулярної компоненти, перший струм, $\mathbf{j}_\lambda^{(1)}$, також

містить внески, паралельні до магнітного поля. Комбінуючи відповідну паралельну компоненту з іншим струмом, $\mathbf{j}_\lambda^{(2)}$, отримуємо звичайні струми для кірального магнітного ефекту та ефекту кірального розділення:

$$\mathbf{j}_\lambda^{(\text{CME})} = \frac{\lambda e \mu_\lambda}{4\pi^2 c} \mathbf{B}. \quad (3.26)$$

Внески, що залишились, перпендикулярні до магнітного поля. Їх точна форма:

$$\mathbf{j}_\lambda^{(\perp)} = \mathbf{j}_\lambda^{(1)} + \mathbf{j}_\lambda^{(2)} - \mathbf{j}_\lambda^{(\text{CME})} = \frac{\lambda e \mu_\lambda}{4\pi^2 c} \mathbf{E}_\perp \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})}{E_\perp^2} \left(\frac{c}{2\bar{v}} \ln \frac{c + \bar{v}}{c - \bar{v}} - 1 \right). \quad (3.27)$$

Це новий топологічний внесок, асоційований з дрейфом плазми. Він індукується у випадку присутності паралельної та перпендикулярної складової електричного поля. Він тісно зв'язаний з кіральним магнітним ефектом, але не виникає лише як результат, його лоренцевого бусту.

В першому порядку по електромагнітному полю та похідним струм намагніченості має вигляд:

$$\mathbf{j}_\lambda^{(\text{curl})} = \frac{\lambda c}{24\pi^2} \nabla \times \left[\frac{\bar{\mathbf{v}}}{\bar{v}^3} (3\mu_\lambda^2 + \pi^2 T^2) \left(\frac{c\bar{v}}{c^2 - \bar{v}^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{c + \bar{v}}{c - \bar{v}} \right) \right]. \quad (3.28)$$

Цікавим наслідком цього результату є те, що дрейф може індукувати ненульову намагніченість в кірально-асиметричній плазмі.

Нарешті, останній (дисипативний) доданок в повному виразі для струму (3.22) має вигляд:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_\lambda^{(3)} &= \sum_i \text{sign}(e_i) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{v} \delta f_\lambda^{i,(1)} \\ &= \frac{c^2 \tau (3\mu_\lambda^2 + \pi^2 T^2)}{12\pi^2} \left(e \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}}{B^2} - \frac{\partial \mu_\lambda}{\partial \mathbf{x}} \right) g_0 \\ &\quad - \frac{c \tau (\mu_\lambda^3 + \pi^2 T^2 \mu_\lambda)}{4\pi^2} \left[\frac{\bar{\mathbf{v}} (\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}) + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}} + \bar{v} \nabla \bar{v}}{\bar{v}} g_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{\mathbf{v}} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{v})}{\bar{v}^2} g_2 + \frac{2}{3(c^2 - \bar{v}^2)^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{8\bar{v}\bar{\mathbf{v}}}{3(c^2 - \bar{v}^2)^3} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right], \end{aligned} \quad (3.29)$$

де використано скорочені позначення для функцій аргументу $\bar{v}/c$:

$$g_0 \equiv \frac{c^3}{2} \int_{-1}^1 \frac{(1 - \xi^2) d\xi}{(c - \bar{v}\xi)^3} = \frac{c^3}{\bar{v}^3} \left(\frac{c\bar{v}}{c^2 - \bar{v}^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{c + \bar{v}}{c - \bar{v}} \right), \quad (3.30)$$

$$g_1 \equiv \frac{c^4}{2} \int_{-1}^1 \frac{\xi(1-\xi^2)d\xi}{(c-\bar{v}\xi)^4} = \frac{c^4}{3\bar{v}^4} \left(\frac{c\bar{v}(5\bar{v}^2-3c^2)}{(c^2-\bar{v}^2)^2} + \frac{3}{2} \ln \frac{c+\bar{v}}{c-\bar{v}} \right), \quad (3.31)$$

$$g_2 \equiv \frac{c^4}{2} \int_{-1}^1 \frac{\xi(5\xi^2-3)d\xi}{(c-\bar{v}\xi)^4} = \frac{c^4}{3\bar{v}^4} \left(\frac{c\bar{v}(15c^4-40c^2\bar{v}^2+33\bar{v}^4)}{(c^2-\bar{v}^2)^3} + \frac{15}{2} \ln \frac{c+\bar{v}}{c-\bar{v}} \right). \quad (3.32)$$

Зазначимо, що, в границі малих дрейфових швидкостей $\bar{v}/c \rightarrow 0$, ці функції несингулярні: $g_0 \simeq 2/3 + O(\bar{v}^2/c^2)$, $g_1 \simeq O(\bar{v}/c)$, and $g_2 \simeq O(\bar{v}^3/c^3)$.

Результат в рівнянні (3.26) дає струми кірального магнітного ефекту та ефекту кірального розділення. Також рівняння (3.23) дає наступні струми ефекту Холла і його узагальнення для аксіального струму:

$$\mathbf{j} = cn^{(0)} \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{\mu(\mu^2 + 3\mu_5^2 + \pi^2 T^2)}{3\pi^2 c^2 [1 - (\bar{v}/c)^2]^2} \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad (3.33)$$

$$\mathbf{j}_5 = cn_5^{(0)} \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{\mu_5(\mu_5^2 + 3\mu^2 + \pi^2 T^2)}{3\pi^2 c^2 [1 - (\bar{v}/c)^2]^2} \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (3.34)$$

Вони мають очіковувану структуру. Більш неочікуваними є нові внески в густини струму в рівнянні (3.27). Відповідні струми мають топологічну природу. Дійсно, вони виникають за рахунок кривини Беррі в рівнянні (3.11) і не залежать від температури або часу релаксації τ . Вони дають наступні вирази для густин електричного та кірального струмів:

$$\mathbf{j} = \frac{e\mu_5}{2\pi^2 c} \mathbf{E}_\perp \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})}{E_\perp^2} \left(\frac{c}{2\bar{v}} \ln \frac{c+\bar{v}}{c-\bar{v}} - 1 \right) \xrightarrow{E_\perp \rightarrow 0} \frac{e\mu_5}{6\pi^2 c} \mathbf{E}_\perp \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})}{B^2}, \quad (3.35)$$

$$\mathbf{j}_5 = \frac{e\mu}{2\pi^2 c} \mathbf{E}_\perp \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})}{E_\perp^2} \left(\frac{c}{2\bar{v}} \ln \frac{c+\bar{v}}{c-\bar{v}} - 1 \right) \xrightarrow{E_\perp \rightarrow 0} \frac{e\mu}{6\pi^2 c} \mathbf{E}_\perp \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})}{B^2}. \quad (3.36)$$

Ці струми схожі на струми кірального магнітного ефекту та ефекту кірального розділення, але є перпендикулярними до магнітного поля. Вони є недисипативними. Факт, що вони пропорційні до $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ натякає на їх можливий зв'язок з кіральною аномалією. Також бачимо, що струми (3.35) і (3.36) глибоко пов'язані з дрейфом плазми. Вони існують лише тоді, коли присутня як паралельна, так і перпендикулярна складові електричного поля. Останнє говорить про те, що нові топологічні струми не можуть бути усунені шляхом простих бустових перетворень.

Струм Ома в рівнянні (3.29) має тільки повздовжню проекцію по відношенню до магнітного поля. Це пов'язано з тим, що перепендикулярна компонента магнітного поля повністю врахована в дрейфовій швидкості. На додачу до стандартних струму Ома та дифузного струму, що даються першими двома доданками в рівнянні (3.29), існують також інші дисипативні доданки в $\mathbf{j}_\lambda^{(3)}$, які асоційовані з неоднорідністю дрейфового потоку. Далі буде показано, що це пов'язано з ненульовою в'язкістю кіральної плазми.

У лінійному порядку по електромагнітному полю та похідним рівняння неперервності має вигляд:

$$\frac{\partial n_\lambda^{(0)}}{\partial \mu_\lambda} \left(\frac{\partial \mu_\lambda}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \mu_\lambda}{\partial \mathbf{x}} \right) + \frac{\partial n_\lambda^{(0)}}{\partial \bar{v}} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \mathbf{x}} \right) + n_\lambda^{(0)} \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0 \quad (3.37)$$

або, еквівалентно:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3(\mu^2 + \mu_5^2)}{\pi^2 T^2} + 1 \right) \left(\frac{\partial \mu}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} \right) + \frac{6\mu\mu_5}{\pi^2 T^2} \left(\frac{\partial \mu_5}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \mu_5}{\partial \mathbf{x}} \right) \\ & + \mu \left(\frac{\mu^2 + 3\mu_5^2}{\pi^2 T^2} + 1 \right) \left[\frac{4\bar{v}}{c^2 - \bar{v}^2} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3(\mu^2 + \mu_5^2)}{\pi^2 T^2} + 1 \right) \left(\frac{\partial \mu_5}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \mu_5}{\partial \mathbf{x}} \right) + \frac{6\mu\mu_5}{\pi^2 T^2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} \right) \\ & + \mu_5 \left(\frac{\mu_5^2 + 3\mu^2}{\pi^2 T^2} + 1 \right) \left[\frac{4\bar{v}}{c^2 - \bar{v}^2} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

В повному наборі аномальних рівнянь Максвелла, ці два співвідношення визначають, як локальні рівноважні електричні та кіральні хімічні потенціали самоузгоджено еволюціонують в кіральній плазмі.

3.4 Аномальні рівняння Максвелла для плазми без дрейфу

В попередньому підрозділі було розглянуто кіральну плазму в дрейфовому стані. Було точно враховано дрейф плазми в нульовому наближенні функції розподілу. В цьому підрозділі буде розглянуто ситуацію, коли нейтральні частинки чинять суттєвий опір на плазму, і тому можна використовувати фермі-діраківську функцію (3.4) в якості рівноважної функції

розподілу. Будемо вважати і електричне і магнітне поле збуреннями. З фізичної точки зору, це відповідає режиму з великим перерізом зіткнень [127, 130]. В цьому випадку, розклад за степенями електромагнітного поля є виправданим. Так як в цьому випадку розрахунки значно простіші, ніж аналогічні з попереднього підрозділу, отримаємо вирази для густин і струмів до другого порядку по електромагнітному полю і похідним.

3.4.1 Функція розподілу в другому порядку по електромагнітному полю та його похідним

Шукаємо розв'язок рівняння (3.14) у формі розкладу за степенями електромагнітного поля, тобто,

$$f_\lambda = f_\lambda^{(\text{eq})} + \delta f_\lambda^{(1)} + \delta f_\lambda^{(2)} + \dots \quad (3.40)$$

і розглядаємо кожну просторово-часову похідну, як додаткову степінь електромагнітного поля. Підставляючи даний анзац до рівняння (3.14) і залишаючи лінійні по електромагнітним полям доданки, отримаємо:

$$\frac{D_\lambda}{T} \frac{\partial \mu_\lambda}{\partial t} - \frac{D_\lambda}{T} e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) + \frac{D_\lambda}{T} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mu_\lambda}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\delta f_\lambda^{(1)}}{\tau} = 0, \quad (3.41)$$

де використано позначення $D_\lambda(\mu_\lambda) = e^{(cp - \mu_\lambda)/T} / (e^{(cp - \mu_\lambda)/T} + 1)^2$. Дане рівняння задовільняється, коли

$$\delta f_\lambda^{(1)} = \frac{\tau D_\lambda}{T} \left(e(\mathbf{E}_\lambda \cdot \mathbf{v}) - \frac{\partial \mu_\lambda}{\partial t} \right). \quad (3.42)$$

Тут, за означенням, $\mathbf{E}_\lambda \equiv \mathbf{E} - e^{-1} \partial \mu_\lambda / \partial \mathbf{x}$. Використовуючи даний результат, отримаємо наступні формальні результати для густин та струмів:

$$\begin{aligned} n_\lambda &= \sum_i \text{sign}(e_i) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(f_\lambda^{i(\text{eq})} + \delta f_\lambda^{i(1)} + \frac{e_i}{c} (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\lambda^i) f_\lambda^{i(\text{eq})} \right) \\ &= \frac{\mu_\lambda (\mu_\lambda^2 + \pi^2 T^2)}{6\pi^2 c^3} - \frac{\tau (3\mu_\lambda^2 + \pi^2 T^2)}{6\pi^2 c^3} \frac{\partial \mu_\lambda}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_\lambda &= \sum_i \text{sign}(e_i) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\left(\mathbf{v} + e_i \mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega}_\lambda^i + \frac{e_i}{c} \mathbf{B} (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\lambda^i) \right) f_\lambda^{i(\text{eq})} + \mathbf{v} \delta f_\lambda^{i(1)} \right] \\ &= \frac{\lambda e \mathbf{B} \mu_\lambda}{4\pi^2 c} + \frac{\tau e \mathbf{E}_\lambda (3\mu_\lambda^2 + \pi^2 T^2)}{18\pi^2 c}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

де $\text{sign}(e_i)$ було включено для того, щоб коректно врахувати внесок античастинок. В цьому порядку струм намагніченості (3.12) не дає внеску. Далі, використовуючи рівняння неперервності, в межах лінійного порядку по полям та похідним, матимемо

$$\frac{3\mu_\lambda^2 + \pi^2 T^2}{6\pi^2 c^3} \frac{\partial \mu_\lambda}{\partial t} = 0. \quad (3.45)$$

Даний результат означає, що похідна за часом від μ_λ , навідміну від випадку дрейфового стану, що розглядався в попередньому підрозділі, зникає в лінійному порядку. Дійсно, як буде видно нижче, він другого порядку за похідними. Беручи це до уваги, лідуюча поправка до функції розподілу має форму:

$$\delta f_\lambda^{(1)} = \frac{ec\tau D_\lambda}{T} (\mathbf{E}_\lambda \cdot \hat{\mathbf{p}}), \quad \hat{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{p}, \quad (3.46)$$

де також було враховано, що $\mathbf{v} = c\hat{\mathbf{p}}$.

Перед тим, як перейти до отримання квадратичних поправок до функції розподілу, відмітимо наступні результати:

$$\frac{\partial \delta f_\lambda^{(1)}}{\partial t} = \frac{ec\tau D_\lambda}{T} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}_\lambda \cdot \hat{\mathbf{p}}), \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial \delta f_\lambda^{(1)}}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{ec^2\tau D_\lambda}{T^2} \left(1 - 2f_\lambda^{(\text{eq})}\right) \hat{\mathbf{p}} (\mathbf{E}_\lambda \cdot \hat{\mathbf{p}}) + \frac{\tau D_\lambda ec}{T} \frac{ec}{p} [\mathbf{E}_\lambda - \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{E}_\lambda \cdot \hat{\mathbf{p}})], \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial \delta f_\lambda^{(1)}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{ec\tau D_\lambda}{T^2} \left(1 - 2f_\lambda^{(\text{eq})}\right) (\mathbf{E}_\lambda \cdot \hat{\mathbf{p}}) \frac{\partial \mu_\lambda}{\partial \mathbf{x}} + \frac{ec\tau D_\lambda}{T} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{E}_\lambda \cdot \hat{\mathbf{p}}). \quad (3.49)$$

Розв'язок $\delta f_\lambda^{(2)}$ кінетичного рівняння з точністю до поправок другого порядку мають вигляд:

$$\begin{aligned} \delta f_\lambda^{(2)} = & -\frac{\tau D_\lambda}{T} \frac{\partial \mu_\lambda}{\partial t} + \frac{e^2 c^2 \tau^2 D_\lambda}{T^2} \left(1 - 2f_\lambda^{(\text{eq})}\right) (\mathbf{E}_\lambda \cdot \hat{\mathbf{p}})^2 \\ & - \frac{ec\tau^2 D_\lambda}{T} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\hat{\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) (\mathbf{E}_\lambda \cdot \hat{\mathbf{p}}) \\ & + \frac{e^2 \tau D_\lambda}{T} (\mathbf{E}_\lambda \cdot \mathbf{B})(\boldsymbol{\Omega}_\lambda \cdot \hat{\mathbf{p}}) - \frac{e^2 c \tau^2 D_\lambda}{pT} \hat{\mathbf{p}} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}_\lambda) - \frac{e^2 c \tau^2 D_\lambda}{pT} [(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_\lambda) - (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{p}})(\mathbf{E}_\lambda \cdot \hat{\mathbf{p}})] \\ & - \frac{e^2 \tau D_\lambda}{T} (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\lambda) (\mathbf{E}_\lambda \cdot \hat{\mathbf{p}}) - \frac{e\tau D_\lambda}{T} (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega}_\lambda) \cdot \frac{\partial \mu_\lambda}{\partial \mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Маючи визначені поправки до локальної рівноважної функції розподілу з точністю до другого порядку по електромагнітним полям та похідним, не складно знайти відповідні густини зарядів та струмів.

3.4.2 Рівняння для хімічного потенціалу

Маємо наступні результати для густин зарядів та струмів:

$$\begin{aligned}
 n_\lambda = \sum_i \text{sign}(e_i) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} & \left(f_\lambda^{i(\text{eq})} + \delta f_\lambda^{i,(1)} \right. \\
 & \left. + \frac{e_i}{c} (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\lambda^i) f_\lambda^{i(\text{eq})} + \frac{e_i}{c} (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\lambda^i) \delta f_\lambda^{i,(1)} + \delta f_\lambda^{i,(2)} \right) \\
 & = \frac{\mu_\lambda (\mu_\lambda^2 + \pi^2 T^2)}{6\pi^2 c^3} - \frac{\tau (3\mu_\lambda^2 + \pi^2 T^2)}{6\pi^2 c^3} \frac{\partial \mu_\lambda}{\partial t} \\
 & - \frac{e\tau^2 (3\mu_\lambda^2 + \pi^2 T^2)}{18\pi^2 c} \nabla \cdot \mathbf{E}_\lambda + \frac{\lambda e^2 \tau (\mathbf{E}_\lambda \cdot \mathbf{B})}{4\pi^2 c} - \frac{e\tau^2 \mu_\lambda}{3\pi^2 c} \left(\mathbf{E}_\lambda \cdot \frac{\partial \mu_\lambda}{\partial \mathbf{x}} \right), \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{j}_\lambda = \sum_i \text{sign}(e_i) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} & \left[\left(\mathbf{v} + e_i \mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega}_\lambda^i + \frac{e_i}{c} \mathbf{B} (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\lambda^i) \right) f_\lambda^{i(\text{eq})} \right. \\
 & \left. + (\mathbf{v} + e_i \mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega}_\lambda^i) \delta f_\lambda^{i,(1)} + \mathbf{v} \delta f_\lambda^{i,(2)} \right] + \mathbf{j}_\lambda^{(\text{curl})} \\
 & = \frac{\lambda e \mathbf{B} \mu_\lambda}{4\pi^2 c} + \frac{\tau e \mathbf{E}_\lambda (3\mu_\lambda^2 + \pi^2 T^2)}{18\pi^2 c} \\
 & - \frac{e\tau^2 (3\mu_\lambda^2 + \pi^2 T^2)}{18\pi^2 c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{e^2 \tau^2 \mu_\lambda}{6\pi^2} (\mathbf{B} \times \mathbf{E}_\lambda) + \frac{\lambda e \tau}{12\pi^2} \nabla \times (\mu_\lambda \mathbf{E}). \quad (3.52)
 \end{aligned}$$

В цьому квадратичному порядку, потрібно також врахувати струм намагніченості в рівнянні (3.12). Відповідним додатковим внеском є останній доданок в рівнянні (3.52). Його можна переписати в еквівалентній формі наступним чином:

$$\mathbf{j}_\lambda^{(\text{curl})} = \frac{\lambda e \tau}{12\pi^2} \mu_\lambda \nabla \times \mathbf{E} - \frac{\lambda e \tau}{12\pi^2} \mathbf{E} \times \frac{\partial \mu_\lambda}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\lambda e \tau \mu_\lambda}{12\pi^2 c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\lambda e \tau}{12\pi^2} \mathbf{E} \times \frac{\partial \mu_\lambda}{\partial \mathbf{x}}, \quad (3.53)$$

де використано рівняння Максвелла (3.6). В рівнянні неперервності, звичайно, такий струм не грає ролі. Підставляючи результати з рівнянь (3.51) і (3.52) в рівняння неперервності, отримуємо шукане рівняння для хімічних

потенціалів

$$\frac{3\mu_\lambda^2 + \pi^2 T^2}{6\pi^2 c^3} \frac{\partial \mu_\lambda}{\partial t} + \frac{\tau e (3\mu_\lambda^2 + \pi^2 T^2)}{18\pi^2 c} \nabla \cdot \mathbf{E}_\lambda + \frac{\tau e \mu_\lambda}{3\pi^2 c} \left(\mathbf{E}_\lambda \cdot \frac{\partial \mu_\lambda}{\partial \mathbf{x}} \right) = \frac{\lambda e^2 \mathbf{E}_\lambda \cdot \mathbf{B}}{4\pi^2 c}. \quad (3.54)$$

Ці рівняння еквівалентні наступним рівнянням для електричного та кірального хімічних потенціалів:

$$\begin{aligned} (3\mu^2 + 3\mu_5^2 + \pi^2 T^2) \left[\frac{\partial \mu}{\partial t} - \frac{\tau c^2}{3} \nabla^2 \mu + \frac{\tau e c^2}{3} \nabla \cdot \mathbf{E} \right] + 6\mu\mu_5 \left[\frac{\partial \mu_5}{\partial t} - \frac{\tau c^2}{3} \nabla^2 \mu_5 \right] \\ + \frac{3}{2} e c^2 \left(\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mu_5}{\partial \mathbf{x}} \right) + 2\tau\mu c^2 \left[e\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} - \left(\frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 - \left(\frac{\partial \mu_5}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 \right] \\ + 2\tau\mu_5 c^2 \left[e\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mu_5}{\partial \mathbf{x}} - 2\frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mu_5}{\partial \mathbf{x}} \right] = 0, \\ (3\mu^2 + 3\mu_5^2 + \pi^2 T^2) \left[\frac{\partial \mu_5}{\partial t} - \frac{\tau c^2}{3} \nabla^2 \mu_5 \right] + 6\mu\mu_5 \left[\frac{\partial \mu}{\partial t} - \frac{\tau c^2}{3} \nabla^2 \mu + \frac{\tau e c^2}{3} \nabla \cdot \mathbf{E} \right] \\ + \frac{3}{2} e c^2 \left(\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} \right) + 2\tau\mu_5 c^2 \left[e\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} - \left(\frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 - \left(\frac{\partial \mu_5}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 \right] \\ + 2\tau\mu c^2 \left[e\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mu_5}{\partial \mathbf{x}} - 2\frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mu_5}{\partial \mathbf{x}} \right] = 0. \quad (3.55) \end{aligned}$$

Ці рівняння визначають, як локальні рівноважні електричний та кіральний хімічні потенціали еволюціонують в часі в неоднорідній, кірально-асиметричній плазмі. Для того, щоб завершити виведення аномальних рівнянь Максвелла в неоднорідній кірально-асиметричній плазмі, маємо знайти точні вирази для струмів в другому порядку по електромагнітним полям та похідним.

У цьому порядку, густини електричного та аксіального струмів мають вигляд:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} = \frac{e\mathbf{B}\mu_5}{2\pi^2 c} + \sum_\lambda \frac{\tau e \mathbf{E}_\lambda (3\mu_\lambda^2 + \pi^2 T^2)}{18\pi^2 c} - \sum_\lambda \frac{e\tau^2 (3\mu_\lambda^2 + \pi^2 T^2)}{18\pi^2 c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ - \sum_\lambda \frac{e^2 \tau^2 \mu_\lambda}{6\pi^2} (\mathbf{B} \times \mathbf{E}_\lambda) + \sum_\lambda \frac{\lambda e \tau}{12\pi^2} \nabla \times (\mu_\lambda \mathbf{E}), \quad (3.56) \end{aligned}$$

$$\mathbf{j}_5 = \frac{e\mathbf{B}\mu}{2\pi^2c} + \sum_{\lambda} \lambda \frac{\tau e\mathbf{E}_{\lambda} (3\mu_{\lambda}^2 + \pi^2 T^2)}{18\pi^2c} - \sum_{\lambda} \lambda \frac{e\tau^2 (3\mu_{\lambda}^2 + \pi^2 T^2)}{18\pi^2c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \sum_{\lambda} \lambda \frac{e^2 \tau^2 \mu_{\lambda}}{6\pi^2} (\mathbf{B} \times \mathbf{E}_{\lambda}) + \sum_{\lambda} \frac{e\tau}{12\pi^2} \nabla \times (\mu_{\lambda} \mathbf{E}), \quad (3.57)$$

тоді, як густини електричного та аксіального зарядів мають вигляд:

$$n = \sum_{\lambda} \frac{\mu_{\lambda} (\mu_{\lambda}^2 + \pi^2 T^2)}{6\pi^2 c^3} - \sum_{\lambda} \frac{\tau (3\mu_{\lambda}^2 + \pi^2 T^2)}{6\pi^2 c^3} \frac{\partial \mu_{\lambda}}{\partial t} - \sum_{\lambda} \frac{e\tau^2 (3\mu_{\lambda}^2 + \pi^2 T^2)}{18\pi^2 c} \nabla \cdot \mathbf{E}_{\lambda} - \frac{e\tau}{2\pi^2 c} \left(\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mu_5}{\partial \mathbf{x}} \right) - \sum_{\lambda} \frac{e\tau^2 \mu_{\lambda}}{3\pi^2 c} \left(\mathbf{E}_{\lambda} \cdot \frac{\partial \mu_{\lambda}}{\partial \mathbf{x}} \right), \quad (3.58)$$

$$n_5 = \sum_{\lambda} \lambda \frac{\mu_{\lambda} (\mu_{\lambda}^2 + \pi^2 T^2)}{6\pi^2 c^3} - \sum_{\lambda} \lambda \frac{\tau (3\mu_{\lambda}^2 + \pi^2 T^2)}{6\pi^2 c^3} \frac{\partial \mu_{\lambda}}{\partial t} - \sum_{\lambda} \lambda \frac{e\tau^2 (3\mu_{\lambda}^2 + \pi^2 T^2)}{18\pi^2 c} \nabla \cdot \mathbf{E}_{\lambda} + \frac{e\tau}{2\pi^2 c} \left(e\mathbf{E} - \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \mathbf{B} - \sum_{\lambda} \lambda \frac{e\tau^2 \mu_{\lambda}}{3\pi^2 c} \left(\mathbf{E}_{\lambda} \cdot \frac{\partial \mu_{\lambda}}{\partial \mathbf{x}} \right). \quad (3.59)$$

Оскільки електричний та кіральний хімічні потенціали набагато менші за температуру первинної плазми, зручно визначити густини зарядів і струмів у високотемпературному наближенні.

3.4.3 Електричний та кіральний струм у високотемпературному наближенні

У високотемпературному наближенні, густини електричного та аксіального струмів мають вигляд:

$$\mathbf{j} \simeq \frac{e\mathbf{B}\mu_5}{2\pi^2c} + \frac{\tau T^2}{9c} \left(e\mathbf{E} - \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} \right) - \frac{e\tau^2 T^2}{9c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.60)$$

$$\mathbf{j}_5 \simeq \frac{e\mathbf{B}\mu}{2\pi^2c} - \frac{\tau T^2}{9c} \frac{\partial \mu_5}{\partial \mathbf{x}}, \quad (3.61)$$

а електричні та аксіальні густини зарядів відповідно записуються, як:

$$n \simeq \frac{T^2 \mu}{3c^3} - \frac{\tau T^2}{3c^3} \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\tau^2 T^2}{9c} (\nabla^2 \mu - e \nabla \cdot \mathbf{E}) - \frac{e\tau}{2\pi^2 c} \left(\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mu_5}{\partial \mathbf{x}} \right), \quad (3.62)$$

$$n_5 \simeq \frac{T^2 \mu_5}{3c^3} - \frac{\tau T^2}{3c^3} \frac{\partial \mu_5}{\partial t} + \frac{\tau^2 T^2}{9c} \nabla^2 \mu_5 + \frac{e\tau}{2\pi^2 c} \left(e\mathbf{E} - \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \mathbf{B}. \quad (3.63)$$

У високотемпературному наближенні, $|\mu_\lambda| \ll T$, рівняння для кірального хімпотенціалу μ_5 і звичайного хімпотенціалу μ мають вигляд:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} - \frac{3c^2}{2\pi^2 T^2} e \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mu_5}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\tau c^2}{3} (\nabla^2 \mu - e \nabla \cdot \mathbf{E}) = 0, \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial \mu_5}{\partial t} - \frac{3c^2}{2\pi^2 T^2} e \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\tau c^2}{3} \nabla^2 \mu_5 = \frac{3e^2 c^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}}{2\pi^2 T^2}. \quad (3.65)$$

Звернемо увагу на те, що рівняння руху для хімічних потенціалів містять у собі дифузні доданки, пропорційні $\nabla^2 \mu_5/3$ і $\nabla^2 \mu/3$, з сталою дифузії $\tau c^2/3$. Це узгоджується з загальними аргументами з [98]. В даному розгляді не лише встановлено такий доданок, а також дано константу дифузії в термінах часу релаксації. В загальному випадку, в присутності ненульового магнітного поля, очікувано мати два різні дифузні доданки, повздовжній, пропорційний до $\partial_z^2 \mu_\lambda$ та поперечний, пропорційний до $\Delta_T \mu_\lambda$ (див., наприклад, рівняння (9) в [136]). Використовуючи кіральну кінетичну теорію, обидва дифузні доданки можуть бути точно отримані. Можна показати, що повздовжня константа дифузії матиме ненульову поправку порядку B^2 , що виникає з доданку, типу $(\mathbf{B} \cdot \nabla)(\mathbf{B} \cdot \partial \mu_\lambda / \partial \mathbf{x})$.

У випадку постійного магнітного поля і нульового електричного поля, набір рівнянь, наведених вище, має розв'язок у формі (дифузійної) кіральної магнітної хвилі. Справді, підставляючи $\mathbf{E} = 0$ і вважаючи, що магнітне поле $\mathbf{B}$ постійне, знайдемо, що існує розв'язок, який описує дифузійну кіральну магнітну хвилю з наступним дисперсійним співвідношенням:

$$\omega_{\text{CMW}} = \pm \frac{3c^2}{2\pi^2 T^2} (e \mathbf{B} \cdot \mathbf{k}) - \frac{i}{3} \tau c^2 |\mathbf{k}|^2. \quad (3.66)$$

Зазначимо, що швидкість кіральної магнітної хвилі задається виразом:

$$v_{\text{CMW}} = \frac{3c^2 |eB|}{2\pi^2 T^2} \cos \theta_{\mathbf{Bk}}, \quad (3.67)$$

де $\theta_{\mathbf{Bk}}$ – це кут між хвильовим вектором $\mathbf{k}$ та магнітним полем.

3.4.4 Точні вирази для струмів

Важливо обговорити фізичне значення окремих внесків в густини електричного струму (3.56) та аксіального струму (3.57). Почнемо з густини

електричного струму. Після сумування по λ , отримаємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} = & \frac{e\mathbf{B}\mu_5}{2\pi^2c} + \frac{\tau T^2}{9c} \left(1 + \frac{3(\mu^2 + \mu_5^2)}{\pi^2 T^2} \right) \left(e\mathbf{E} - \frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{x}} \right) \\ & + \frac{e^2\tau^2\mu}{3\pi^2} \mathbf{E} \times \mathbf{B} - \frac{2e\tau\mu\mu_5}{3\pi^2c} \frac{\partial\mu_5}{\partial\mathbf{x}} + \frac{e\tau^2\mu}{3\pi^2} \left(\mathbf{B} \times \frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{x}} \right) \\ & + \frac{e\tau^2\mu_5}{3\pi^2} \left(\mathbf{B} \times \frac{\partial\mu_5}{\partial\mathbf{x}} \right) - \frac{e\tau^2 T^2}{9c} \left(1 + \frac{3(\mu^2 + \mu_5^2)}{\pi^2 T^2} \right) \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} - \frac{e\tau\mu_5}{6\pi^2c} \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \frac{e\tau}{6\pi^2} \mathbf{E} \times \frac{\partial\mu_5}{\partial\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Очевидно, перший доданок описує струм кірального магнітного ефекту, який індукується ненульовим кіральним хімічним потенціалом і направлений вздовж магнітного поля. В другому доданку закладено омічний та дифузний струми. Зазначимо, що електрична провідність рівна:

$$\sigma = \frac{e^2 c^2 \tau}{3} \chi^{(0)}, \quad (3.69)$$

де було використано позначення:

$$\chi^{(0)} = \frac{\partial n^{(0)}}{\partial\mu} = \frac{3\mu^2 + 3\mu_5^2 + \pi^2 T^2}{3\pi^2 c^3}, \quad (3.70)$$

$$n^{(0)} = \sum_{\lambda} \frac{\mu_{\lambda} (\mu_{\lambda}^2 + \pi^2 T^2)}{6\pi^2 c^3} = \frac{\mu(\mu^2 + 3\mu_5^2 + \pi^2 T^2)}{3\pi^2 c^3}. \quad (3.71)$$

Для того, щоб застосувати отримані результати до кварк-глюонної плазми в фазі деконфайнменту, потрібно зафіксувати значення параметру часу релаксації, використовуючи результати ґраткових розрахунків [131, 132] для провідності кварк-глюонної плазми (отримані при $T = 1.45T_c$) і рівняння (3.69):

$$\tau \simeq 0.37 \frac{9}{\alpha T} \simeq 375 \text{ fm}/c \left(\frac{240 \text{ MeV}}{T} \right). \quad (3.72)$$

Останні п'ять доданків в рівнянні (3.68) є доданками нових типів, які спричинені залежністю від часу електричних і магнітних полів градієнтами хімічних потенціалів, і які до цього не були описані в літературі. Фізичне значення кожного з них буде обговорено в наступному пункті.

Варто сказати декілька слів про третій доданок в рівнянні (3.68), який є нічим іншим, як відомим струмом Холла. На перший погляд видається

дивним, що даний доданок пропорційний квадрату часу релаксації. Але це є стандартним результатом в наближенні великого перерізу зіткнень (малі τ), див., наприклад, розділ 6.10 в [127]. Більше того, звичайне для експериментів по вимірюванню ефекту Холла налаштування, коли покладається $j_y = 0$, призведе до добре відомого співвідношення між електричним струмом в x напрямку і електричним полем в y напрямку, а саме, $j_x \propto n^2 E_y / (\mu B)$ з точністю до малих поправок, подавлених другим степенем магнітного поля та часу релаксації [130]. Тепер, основний внесок в даному результаті насправді має стандартний вигляд і не залежить від часу релаксації.

Схожим чином, після сумування по λ в виразі для густини аксіального струму в (3.57), отримаємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_5 = & \frac{e\mathbf{B}\mu}{2\pi^2c} - \frac{e\tau T^2}{9c} \left(1 + \frac{3(\mu^2 + \mu_5^2)}{\pi^2 T^2} \right) \frac{\partial \mu_5}{\partial \mathbf{x}} + \frac{2e^2\tau\mu\mu_5}{3\pi^2c} \mathbf{E} - \frac{e\tau^2\mu_5}{3\pi^2} \mathbf{B} \times \left(e\mathbf{E} - \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} \right) \\ & + \frac{e\tau^2\mu}{3\pi^2} \left(\mathbf{B} \times \frac{\partial \mu_5}{\partial \mathbf{x}} \right) - \frac{2e\tau\mu\mu_5}{3\pi^2c} \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} - \frac{2e\tau^2\mu\mu_5}{3\pi^2c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{e\tau\mu}{6\pi^2c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{e\tau}{6\pi^2} \mathbf{E} \times \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Перший доданок в $\mathbf{j}_5$ – це струм ефекту кірального розділення. Другий – дифузний струм. Третій доданок – це аксіальний струм, асоційований з електричним ефектом кірального розділення [133]. Інші доданки нові.

3.4.5 Нові вклади в електричний струм

Обговоримо нові доданки до електричного струму (3.68), які пов'язані з неоднорідностями густин електричного та аксіального зарядів в кіральній плазмі. Перший з трьох доданків нових типів легко асоціюється з кіральною дифузією,

$$\mathbf{j}_{\partial\chi} = -\frac{2e\tau\mu\mu_5}{3\pi^2c} \frac{\partial \mu_5}{\partial \mathbf{x}}. \quad (3.74)$$

Він виникає у плазмі, в якій і звичайний і кіральний хімічний потенціали відмінні від нуля. Напрямок струму співпадає з градієнтом $\partial \mu_5 / \partial \mathbf{x}$. Струм

другого типу перпендикулярний до магнітного поля, так само, як і до градієнту електричного/кірального хімічного потенціалів, а саме:

$$\mathbf{j}_{B \times \partial} = \frac{e\tau^2\mu}{3\pi^2} \left(\mathbf{B} \times \frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{x}} \right) + \frac{e\tau^2\mu_5}{3\pi^2} \left(\mathbf{B} \times \frac{\partial\mu_5}{\partial\mathbf{x}} \right), \quad (3.75)$$

тому називатимемо даний струм *холівською дифузією*. Струми в рівняннях (3.74) і (3.75) виникають і у відсутності електричного поля. Струм третього типу виникає за рахунок залежного від часу електричного поля:

$$\mathbf{j}_{\partial_t E} = -\frac{e\tau^2 T^2}{9c} \left(1 + \frac{3(\mu^2 + \mu_5^2)}{\pi^2 T^2} \right) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.76)$$

Цей струм є аналогом омічного струму зі змінним електричним полем (порів. з другим доданком в рівнянні (3.68)). Врешті, маємо наступний внесок завдяки струму намагнічення:

$$\mathbf{j}^{(\text{curl})} = -\frac{e\tau\mu_5}{6\pi^2 c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{e\tau}{6\pi^2} \mathbf{E} \times \frac{\partial \mu_5}{\partial \mathbf{x}}. \quad (3.77)$$

Другий доданок дуже цікавий. Він описує струм, перпендикулярний до електричного поля і градієнта аксіального хімічного потенціалу. Такий струм схожий на струм аномального ефекту Холла [134], який виникає у відсутності магнітного поля. У нашому випадку кіральної плазми він описує *аномальний кіральний ефект Холла*.

3.4.6 Нові внески до аксіального струму

Перейдемо тепер до нових доданків в аксіальному струмі (3.73). Перший з них, а саме,

$$\mathbf{j}_{5,EB} = \frac{e^2\tau^2\mu_5}{3\pi^2} \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad (3.78)$$

є кіральним аналогом ефекту Холла з аксіальним струмом, індукованим в середовищі з $\mu_5 \neq 0$. Присутність такого доданку є дуже цікавою. Принципово, він дозволяє визначити експериментально знак кірального заряду домінуючих зарядів в кіральній плазмі. Відповідний знак можна визначити з напрямку $\mathbf{j}_5$ в перпендикулярних електричних і магнітних полях.

Струм другого типу виникає за рахунок градієнтів електричних та кіральных хімічних потенціалів і є перпендикулярним до магнітного поля, а саме,

$$\mathbf{j}_{5,B \times \partial} = \frac{e\tau^2\mu_5}{3\pi^2} \left(\mathbf{B} \times \frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{x}} \right) + \frac{e\tau^2\mu}{3\pi^2} \left(\mathbf{B} \times \frac{\partial\mu_5}{\partial\mathbf{x}} \right). \quad (3.79)$$

Очевидно, цей струм є кіральним аналогом струму холлівської дифузії в рівнянні (3.75). Останній внесок в аксіальний струм дається двома доданками:

$$\mathbf{j}_{5,\partial_t E} = -\frac{2e\tau\mu\mu_5}{3\pi^2 c} \frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{x}} - \frac{2e\tau^2\mu\mu_5}{3\pi^2 c} \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.80)$$

Оскільки струм (3.80) зникає у плазмі з μ або μ_5 рівними нулю, цей струм визначає аналоги дифузного струму та струму з залежним від полем електричним полем в струмі електричного ефекту кірального розділення, що дається третім доданком в (3.73) (зазначимо, що відповідні чисельні коефіцієнти в струмах також збігаються). На останок, струм намагніченості дається наступними внесками в густину кірального струму:

$$\mathbf{j}_5^{(\text{curl})} = -\frac{e\tau\mu}{6\pi^2 c} \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \frac{e\tau}{6\pi^2} \mathbf{E} \times \frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{x}}. \quad (3.81)$$

Останній доданок аналогічний струмові аномального аксіального ефекту Холла, даного останніми доданками в рівнянні (3.77). Проте, відповідні внески в аксіальний струм, можливо, є навіть більш цікавими. Вони означають, що в присутності електричного поля, перпендикулярна компонента градієнта хімічного потенціалу призводить до ненульового $\mathbf{j}_5$.

3.5 Еволюція магнітних полів і хімічних потенціалів в первинній плазмі: однорідний випадок

Тепер, як тільки були отримані і детально розглянуті рівняння, що описують електродинаміку в релятивістській плазмі з кіральною аномалією, перейдемо до основного їх застосування у космології раннього Всесвіту – еволюція магнітних полів в первинній плазмі. Перед тим, як перейти до розгляду загального неоднорідного випадку, опишемо, як проходить ця ево-

люція в однорідній системі [37, 38, 39, 40]. Почнемо з звичайних рівнянь Максвелла:

$$\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi e\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.82)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi en, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.83)$$

де електричний струм задано виразом

$$e\mathbf{j} = \frac{\alpha}{2\pi^2}\mu_5\mathbf{B} + \sigma\mathbf{E}, \quad (3.84)$$

а густина заряду en виключається з розгляду, зважаючи на загальну нейтральність плазми. У виразі для струму, перший доданок описує кіральний магнітний ефект [87, 98], а другий описує звичайний омічний струм. Підставляючи струм в рівняння Максвелла, отримаємо наступне рівняння для магнітного поля:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \frac{2\alpha}{\pi}\mu_5[\nabla \times \mathbf{B}] \right). \quad (3.85)$$

Через σ тут позначено електричну провідність, а $\alpha = e^2$ (використовуються одиниці $\hbar = 1$ і $c = 1$) – стала тонкої структури. Еволюція просторово-однорідного хімічного потенціалу описується рівнянням, яке отримується шляхом усереднення по об'єму V співвідношення кіральної аномалії, а саме,

$$\frac{\partial \mu_5}{\partial t} = \frac{3\alpha}{2\pi^2 T^2} \frac{1}{V} \int d^3x \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = -\frac{3\alpha}{4\pi^2 T^2} \frac{d\mathcal{H}}{dt}, \quad (3.86)$$

де T – температура,

$$\mathcal{H}(t) = \frac{1}{V} \int d^3x \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad (3.87)$$

– магнітна спіральність, а $\mathbf{A}$ – векторний потенціал. Для подальшого використання корисно виразити магнітну спіральність через інтеграл в просторі імпульсів:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{V} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathbf{A}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B}_{\mathbf{k}}^* \equiv \int dk \mathcal{H}_k, \quad (3.88)$$

де $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ and $\mathbf{B}_{\mathbf{k}}$ – фур'є -образи векторного потенціалу і магнітного поля відповідно.

Оскільки розглядаються процеси у Всесвіті, що розширюється, використовуючи метрику Фрідмана-Робертсона-Уокера, перепишемо рівняння (3.85) і (3.86) в конформних координатах. Безрозмірний конформний час визначається [37], як $\eta = M^*/T$, де $M^* = \sqrt{\frac{90}{8\pi^3 g^*}} M_{Pl}$, M_{Pl} – маса Планка, g^* – ефективне число релятивістських степенів свободи, а T – температура Всесвіту. Також використовуватимемо співвідношення між масштабним фактором a і температурою, як на стадії домінування випромінювання: $a(t) = 1/T$. Рівняння Максвелла в метриці ФРУ набувають [26, 111, 89] їх стандартної форми, як у метриці Мінковського, після застосування перетворення: $\mu_5 \rightarrow a\mu_5$, $\sigma \rightarrow a\sigma$, $T \rightarrow aT$, $\mathbf{B} \rightarrow a^2\mathbf{B}$, і $\mathbf{E} \rightarrow a^2\mathbf{E}$. Зазначимо, що безрозмірна електрична провідність рівна $\sigma \approx 70$ в первинній плазмі [135].

Як випливає з рівнянь (3.85) і (3.86), Фур'є-компоненти магнітної спіральності, задовільняють наступній системі рівнянь:

$$\frac{\partial \mathcal{H}_k}{\partial \eta} = -\frac{k^2}{2\pi\sigma} \mathcal{H}_k + \frac{\alpha}{\pi^2} \frac{k\mu_5}{\sigma} \mathcal{H}_k, \quad (3.89)$$

$$\frac{\partial \mu_5}{\partial \eta} = -\frac{3\alpha}{4\pi^2} \int dk \frac{\partial \mathcal{H}_k}{\partial \eta}. \quad (3.90)$$

Ці рівняння були досліджені в роботі [37], де було показано, що відбувається перекачка енергії від мод магнітного поля з великими імпульсами k до мод з малими імпульсами k . Як було обговорено у Вступі, цей механізм забезпечує зародки для космологічних магнітних полів.

3.6 Еволюція магнітних полів і хімічних потенціалів в первинній плазмі: неоднорідний випадок

У попередніх підрозділах, використовуючи кіральну кінетичну теорію в наближенні часу релаксації, було отримано замкнену систему рівнянь Максвелла для неоднорідної кіральної плазми. По суті, вони такі ж, як і (3.82), але вирази для густин зарядів та струмів містять ряд нових дисипативних та недисипативних (топологічних) доданків. До другого порядку за похі-

дними, відповідні вирази в високотемпературному наближенні (тобто, коли, $|\mu_\lambda| \ll T$) мають вигляд (3.60), (3.62). Електричний хімічний потенціал μ і кіральний хімічний потенціал μ_5 задовільняють рівнянням (3.64)-(3.65). Як буде показано в чисельних розрахунках, і як це також природньо очікувати, електричні поля за своїми значеннями набагато менші за магнітні поля під час еволюції в кірально-асиметричній плазмі. Тому ми вправі знехтувати всіма просторово-часовими похідними від електричного поля в рівняннях (3.60)-(3.65). Далі, з Рів. (3.64) випливає, що похідна за часом від електричного хімічного потенціалу другого порядку по електромагнітному полю та похідним. До того ж, з огляду на електричну нейтральність плазми, ми покладаємо електричний хімічний потенціал рівним нулю на початку еволюції. Враховуючи, що відповідний хімічний потенціал входить в Рів. (3.60) і (3.65) під знаком градієнту, відповідні доданки в рівняннях мають третій порядок по електромагнітному полю та похідним, і відповідно, ними можемо знехтувати. Тоді, для густини електричного струму матимемо наступний вираз:

$$e\mathbf{j} \simeq \frac{\alpha}{2\pi^2} \mu_5 \mathbf{B} + \sigma \mathbf{E}, \quad (3.91)$$

де було виражено параметр часу релаксації через електричну провідність $\tau = 9\sigma/(e^2 T^2)$. підставляючи струм (3.91) в рівняння Максвелла (3.82), отримаємо наступне рівняння для магнітних полів:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \eta} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\nabla^2 \mathbf{B} + \frac{2\alpha}{\pi} [\nabla \times \mu_5 \mathbf{B}] \right). \quad (3.92)$$

Очевидно, це рівняння узгоджується з Рів. (3.85), отриманим у випадку однорідної кіральної плазми. (Відмітимо, що доданком з другою похідною по часу від магнітного поля можна знехтувати у плазмі з високою провідністю.) В тому ж наближенні, кіральний хімічний потенціал задовільняє наступному рівнянню:

$$\frac{\partial \mu_5}{\partial \eta} - \frac{3\sigma}{\alpha} \nabla^2 \mu_5 = \frac{3\alpha \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}}{2\pi^2 T^2}, \quad (3.93)$$

Дане рівняння відрізняється від відповідному йому Рів. (3.86) для однорідної плазми в двох моментах. Перш за все, права частина Рів. (3.86) представляє собою праву частину Рів. (3.93), усереднену по просторовому об'єму. По-друге, Рів. (3.93) містить додатковий дифузний доданок у лівій частині.

У випадку однорідної кіральної плазми, опис інверсного каскаду виглядає найбільш природньо в імпульсному просторі [37]. Дійсно, найпростіша реалізація каскаду була вже можливою у моделі з відносно малою кількістю мод магнітної спіральності, що характеризуються дискретним набором хвильових векторів. Нижче, буде використано аналогічний підхід у випадку неоднорідної плазми. Так само, як і в однорідній моделі, зручно переписати рівняння (3.92) і (3.93) в імпульсному просторі і використовувати наближення з кінцевим (відносно малим) числом мод з дискретними хвильовими векторами.

Ми розглядаємо систему в обмеженому ящику розміром $L \times L \times L$. Дискретні координати і хвильові вектори задано наступним чином:

$$x = \frac{m_x L}{N}, \quad y = \frac{m_y L}{N}, \quad z = \frac{m_z L}{N}, \quad m_x, m_y, m_z = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.94)$$

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{L}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{L}, \quad n_x, n_y, n_z = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.95)$$

Прямі та обернені перетворення Фур'є для магнітного поля та кірального хімічного потенціалу визначені, як:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \mathbf{B}_{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{B}_{\mathbf{k}} = \frac{V}{N^3} \sum_{\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \mathbf{B}(\mathbf{x}), \quad (3.96)$$

$$\mu_5(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \mu_{5,\mathbf{k}}, \quad \mu_{5,\mathbf{k}} = \frac{V}{N^3} \sum_{\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \mu_5(\mathbf{x}), \quad (3.97)$$

де $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ і $\mathbf{k} = \{k_x, k_y, k_z\}$.

Використовуючи приведені вище дискретне імпульсне представлення, отримаємо наступні безрозмірені рівняння для магнітного поля та кіраль-

ного хімічного потенціалу:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_{\mathbf{k}}}{\partial \eta} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(-k^2 \mathbf{B}_{\mathbf{k}} + \frac{2i\alpha}{\pi} \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}_1} \mu_{5,\mathbf{k}_1} [\mathbf{k} \times \mathbf{B}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}] \right) \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_{5,\mathbf{k}}}{\partial \eta} = \frac{3\alpha}{8\pi^3\sigma V} \left(\sum_{\mathbf{k}_1} i[\mathbf{k}_1 \times \mathbf{B}_{\mathbf{k}_1}] \mathbf{B}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1} - \frac{2\alpha}{\pi} \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}_1} \sum_{\mathbf{k}_2} \mu_{5,\mathbf{k}_1} \mathbf{B}_{\mathbf{k}_2} \mathbf{B}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} \right) \\ - \frac{3\sigma}{\alpha} \mathbf{k}^2 \mu_{5,\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (3.99)$$

де V – це об'єм системи. Електричне поле визначається наступним виразом:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\nabla \times \mathbf{B} - \frac{2\alpha}{\pi} \mu_5 \mathbf{B} \right), \quad (3.100)$$

що є результатом рівнянь (3.82) і (3.84), де знехтувано похідною за часом від електричного поля. Рів. (3.98) і (3.99) утворюють повну систему рівнянь, що описують самоузгоджену взаємодію мод магнітного поля і неоднорідної кіральної асиметрії в первинній плазмі. Зазначимо, що однорідний випадок відтворюється з даних рівнянь лише коли одна мода $\mu_{5,0}$ кірального хімічного потенціалу з $\mathbf{k} = 0$ залишається в аналізі. В наступному підрозділі буде чисельно досліджено ці рівняння.

3.7 Чисельне моделювання еволюції системи

Для того, щоб розв'язати рівняння (3.98)–(3.99) чисельно, будемо розглядати спрощену модель з $k_x = k_y = 0$ і дискретний набір векторів k_z (з $N = 10$ вузлами). Магнітна спіральність визначається, як $\mathcal{H}_k = \frac{1}{V} \frac{k}{2\pi^2} (|B_k^+|^2 - |B_k^-|^2)$, де $B_k^+ = B_{k,x} - iB_{k,y}$ і $B_k^- = B_{k,x} + iB_{k,y}$. Слідуючи підходу робіт [37, 38, 39, 40], початкові значення магнітних полів обрано, щоб задовільнити умові максимальної спіральності, а отже, $|B_k^-| = 0$. Також, як і в [37], в моди з більшим хвильовим вектором $|\mathbf{k}|$ закладаємо більшу частку магнітної спіральності H_k .

Для тестування моделі, розглянемо спочатку однорідний випадок. В цьому випадку, єдина відмінна від нуля компонента кірального хімічного потенціалу – це $\mu_{5,0}$. Чисельні результати для мод магнітної спіральності і

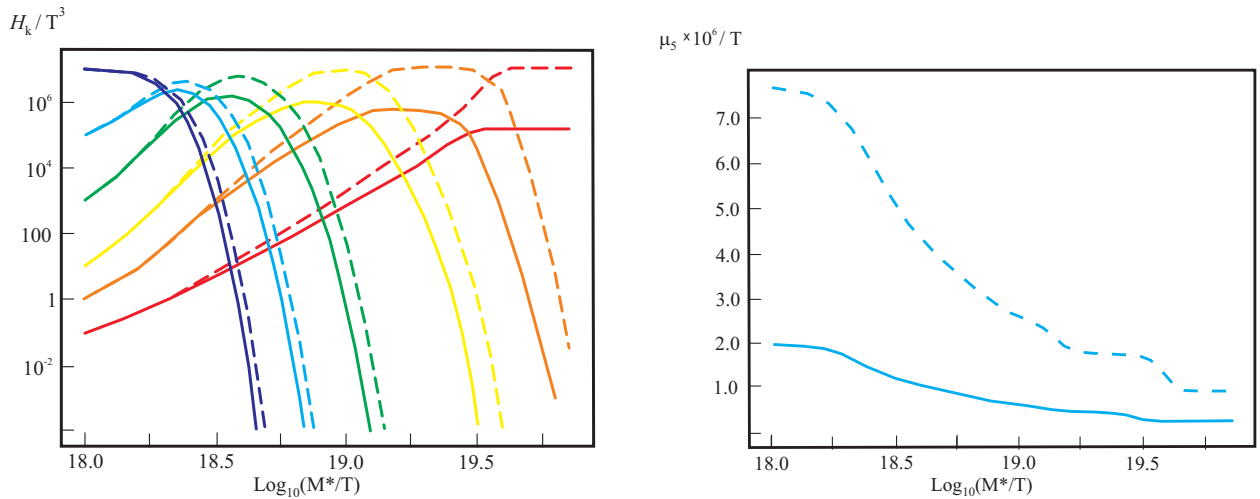


Рис. 3.1: Ліва панель: Фур'є-компоненти магнітної кіральності в однорідній кіральній плазмі, отримані в моделі, описаній рівняннями (3.98)–(3.99) (суцільні лінії) і в моделі, описаній рівняннями (3.89)–(3.90) (пунктирні лінії). Права панель: Кіральний хімічний потенціал, як функція часу в однорідній кіральній плазмі, описаний в тих самих моделях.

кірального хімічного потенціалу, як функцій конформного часу, зображені на Рис. 3.1. Важливо порівняти отриманий результат з результатом, який дають рівняння (3.89) і (3.90). Дана система рівнянь була використана для оригінального аналізу інверсного каскаду в первинній плазмі в роботі [37]. Відповідний результат зображено штрихованими лініями на Рис. 3.1. Легко бачити, що результати в обох підходах мають якісно подібну поведінку. Деяка чисельна різниця легко пояснюється тим, що в цих аналізах використовуються зовсім різні набори базисних хвильових векторів. В підході [37] для розв'язання рівнянь (3.89) і (3.90) використовувався сферичний базис. При чисельному аналізі рівнянь (3.98) і (3.99), з іншого боку, використовується дещо простіший базис плоских хвиль.

Тепер перейдемо до розгляду неоднорідної кіральної плазми. Перед тим, як перейти до загального випадку, розглянемо спочатку іграшкову модель, в якій не враховуються ефекти дифузії. Відповідні ефекти описуються останнім доданком в рівнянні (3.99). Враховуючи, що він пропорційний квадрату хвильового вектора, він має тенденцію пом'якшувати неоднорі-

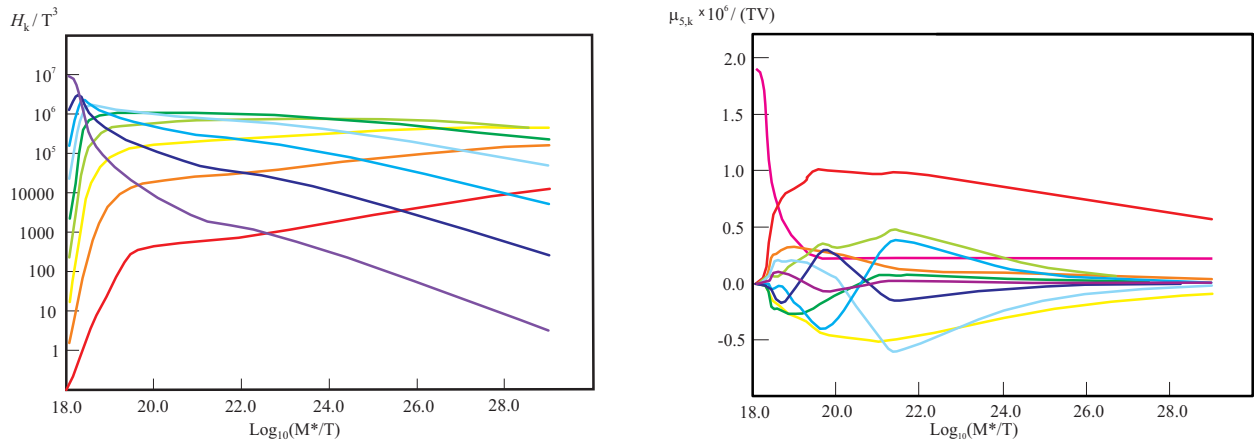


Рис. 3.2: Фур'є-компоненти магнітної спіральності (ліва панель) і Фур'є-компоненти кірального хімічного потенціалу (права панель), як функції конформного часу в неоднорідній кіральній плазмі. Результати отримані в спрощеній моделі, без врахування дифузії, початкова кіральна асиметрія вважається однорідною.

дності. Для того, щоб дослідити роль неоднорідностей кірального хімічного потенціалу μ_5 ми почнемо аналіз, ігноруючи дифузію. Відповідні результати представлено на Рис. 3.2. На лівій панелі зображено еволюцію магнітної спіральності, а на правій Фур'є-компоненти хімічного потенціалу. З огляду на вид співвідношення між кіральним хімпотенціалом в координатному та імпульсному просторах, даним в рівнянні (3.97), зручніше зображувати моди хімічного потенціалу в імпульсному просторі, поділені на об'єм V , аніж просто $\mu_{5,k}$. В якості початкових умов було прийнято, що лише мода $\mu_{5,0}$ відмінна від нуля на початку еволюції, а всі неоднорідні моди μ_{5,k_z} (з $k_z = 2\pi n_z/L$, де $n_z = 1, \dots, N-1$) були обрані рівними нулю при $t = 0$. Як видно з лівої панелі Рис. 3.2, магнітна спіральність передається від мод з більшими хвильовими векторами до мод з меншими хвильовими векторами. Це є нічим іншим, як інверсним каскадом в неоднорідній плазмі. Цікавою особливістю інверсного каскаду в цьому випадку, є нетривіальна поведінка неоднорідних мод магнітної кіральності: спочатку їх величина росте, а потім повільно зменшується.

Також бачимо, що швидкість, з якою розвивається інверсний каскад, суттєво менша у випадку включення неоднорідностей. Це стає очевидним

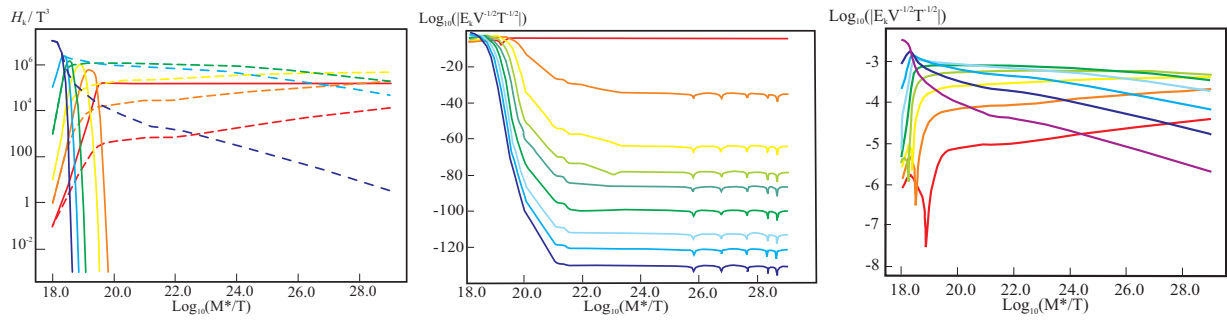


Рис. 3.3: Порівняння еволюції магнітної спіральності в однорідному (суцільні лінії) і неоднорідному (пунктирні лінії) випадках без дифузії (ліва панель), а також еволюція мод електричного поля $|E_k|$ у відповідних випадках (однорідний – центральна панель, неоднорідний – права панель) без дифузії.

після порівняння мод магнітної спіральності в однорідному та неоднорідному випадках, зображених на лівій панелі Рис. 3.3 суцільними та штрихованими лініями відповідно. Як бачимо, інверсний каскад в неоднорідному випадку набагато більш повільніший. Про те саме говорить також еволюція електричного поля, яке є рушійною силою інверсного каскаду. Відповідні результати зображено на Рис. 3.3 для однорідної (середня панель) і неоднорідної (права панель) кіральних плазм. Потрібно звернути увагу на різницю масштабів вертикальної осі на графіках. Електричне поле залишається відмінним від нуля протягом суттєво більшого періоду часу в неоднорідному випадку. Важливо підкреслити, що в цьому аналізі ще не було враховано дифузію.

З чітким розумінням того, яку роль грають неоднорідності в еволюції інверсного каскаду у випадку без дифузії, тепер важливо дослідити, який вплив матиме дифузія. Чисельні результати для мод магнітної кіральності у випадку дифузної динаміки зображено на Рис. 3.4. Для того, щоб глибше зрозуміти фізику процесів, розглядаємо декілька значень параметру часу релаксації ($\tau \rightarrow \tau T$), який визначає величину дифузного доданку: $\tau = 6.8 \times 10^3$, який відповідає безрозмірній провідності кіральної плазми $\sigma \approx 70$ [135], а також два менші значення параметру, $\tau = 6.8$ і

$\tau = 6.8 \times 10^{-3}$. Для суттєво малих значень часу релаксації τ , інверсний каскад сповільнюється, як у випадку відсутності дифузії. Для реалістичного ж значення параметру в первинній плазмі, еволюція магнітної кіральності практично не відрізняється від однорідного випадку. Причиною цього є те, що моди кірального хімічного потенціалу з відмінними від нуля хвильовими векторами сильно подавлені в цьому випадку і не грають суттєвої ролі в еволюції.

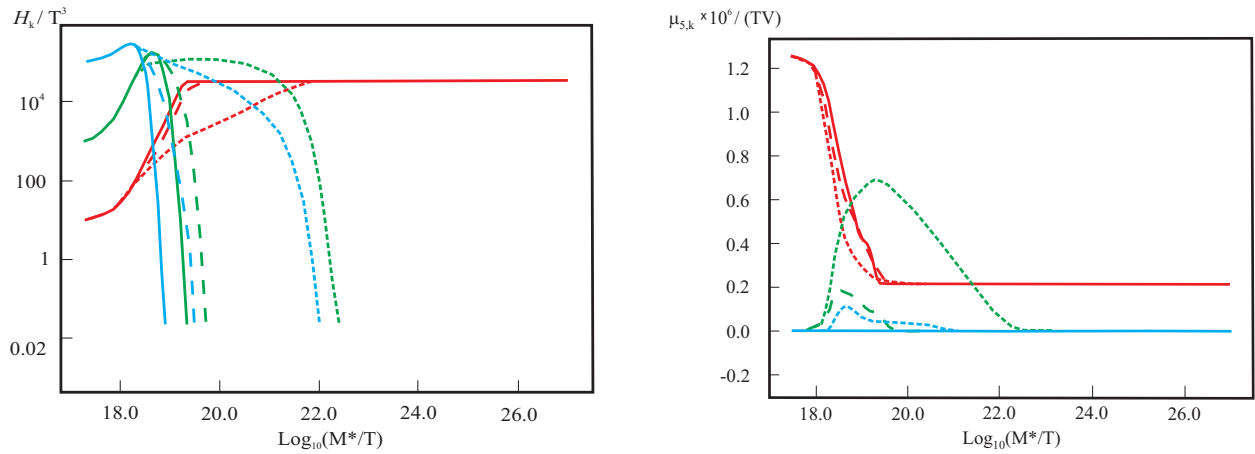


Рис. 3.4: Фур'є-компоненти магнітної кіральності (ліва панель) і Фур'є-компоненти кірального хімічного потенціалу (права панель), як функції конформного часу в неоднорідній кіральній плазмі з урахуванням дифузії. Результати представлено для трьох значень параметру часу релаксації $\tau = 6.8 \times 10^3$ (суцільні лінії), $\tau = 6.8$ (пунктирні лінії), і $\tau = 6.8 \times 10^{-3}$ (точкові лінії). Для кращої роздільної здатності зображено лише три моди.

Наведений чисельний аналіз було проведено в спрощеній моделі з обмеженим фазовим простором, $k_x = k_y = 0$. Тих фактів, що дана модель гарно відтворює однорідний випадок і, що ефект, який справляють неоднорідності зрозумілий з фізичної точки зору, має бути достатньо для того, щоб вважати результати даного аналізу достовірними. Проте, важливо перевірити, чи залишиться цей результат в силі в більш реалістичному випадку в плазмі з трьохвимірними неоднорідностями кіральної асиметрії. Через значні розрахункові затрати, пов'язані з відповідним трьохвимірним фазовим простором, розглянемо лише невелику ґратку в просторі імпульсів, а саме,

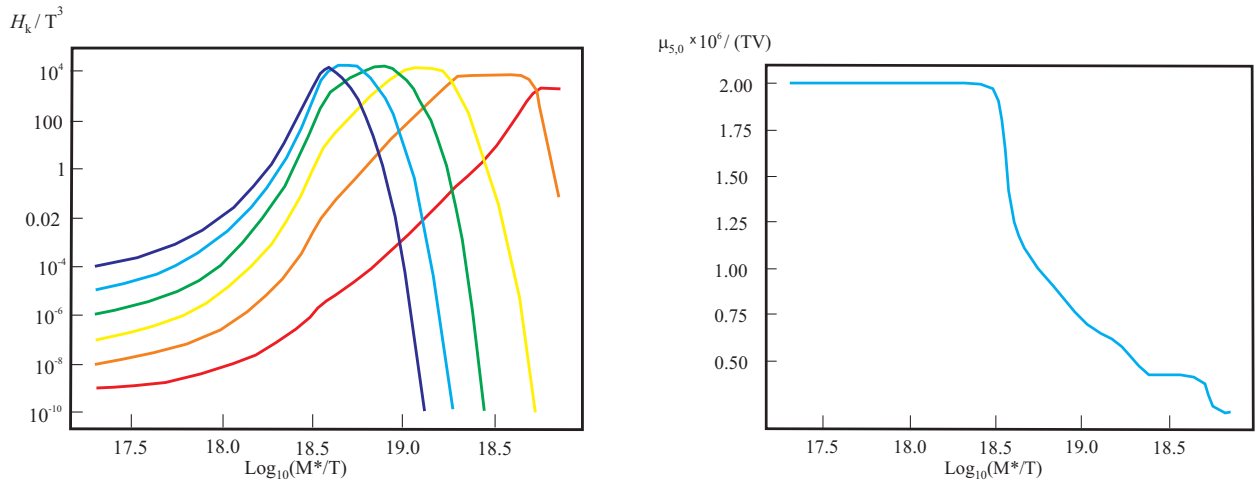


Рис. 3.5: Фур'є-компоненти магнітної кіральності (ліва панель) і Фур'є-компоненти кірального хімічного потенціалу (права панель), як функції конформного часу у випадку дуже малих початкових значень магнітного поля, з врахуванням ефектів дифузії ($\tau = 6.8 \times 10^3$).

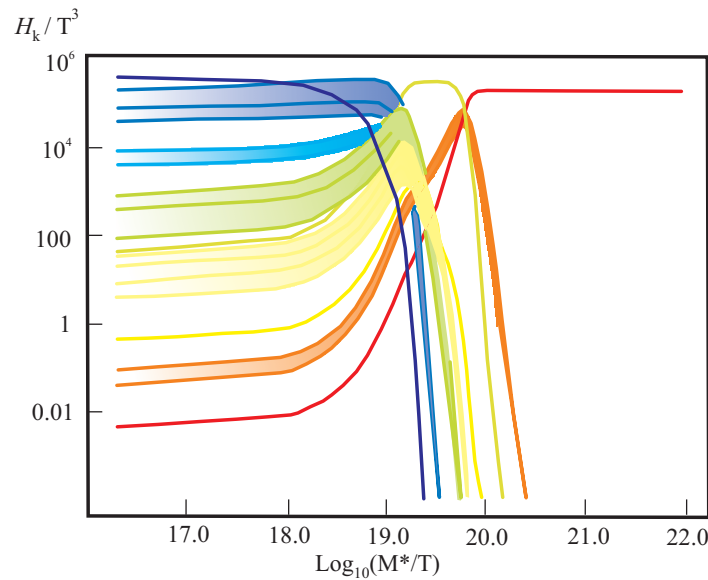


Рис. 3.6: Фур'є-компоненти магнітної кіральності, як функції конформного часу в плазмі з кіральною трьохвимірною-неоднорідною асиметрією ($\tau = 6.8 \times 10^3$). Моді з однаковим $|\mathbf{k}|$ об'єднані в пучки одного кольору.

$3 \times 3 \times 3$. Відповідні чисельні результати зображено на Рис. 3.6, де моди магнітної спіральності з однаковим модулем хвильового вестору $|\mathbf{k}|$, згруповані разом (і зображені пучками одного кольору). Як видно з Рис. 3.6, якісні властивості інверсного каскаду відтворюються в даній моделі, хоча кількість мод в кожній групі різна.

Корисно зазначити, що кіральна плазма може бути реалізована в настільних експериментах. Справді, носіями заряду в діраківських/вейлівських матеріалах є безмасові частинки зі спіном $1/2$ [78]. Отже, відповідна квазічастинкова плазма може імітувати гарячу плазму в ранньому Всесвіті, як і холодну конденсовану матерію в гіпотетичних кваркових зірках. Тому буде цікаво дослідити, чи може бути реалізована еволюція магнітних полів така, як описана вище, в діраківських/вейлівських (напів-)металах. Наївно, це має дійсно бути можливим [40].

Ненульову кіральну асиметрію в діраківських/вейлівських матеріалах можна утворити за допомогою ефекту кірального розділення [83, 97]. Ймовірно, ненульова магнітна кіральність може бути згенерована за допомогою певної конфігурації зовнішніх електричних і магнітних полів, або специфічним типом електромагнітних хвиль. Останнє, щоправда, може бути складнореалізованим в металічному режимі. Тим не менше, інверсний каскад може бути згенеровано створенням ненульової кіральної асиметрії. Це твердження підтверджується чисельними дослідженнями рівнянь (3.98)–(3.99) у випадку дуже малих початкових магнітних полів, але ненульового початкового кірального хімпотенціалу. Відповідні результати зображено на Рис. 3.5. Зазначимо, що через значне значення дифузії ($\tau = 6.8 \times 10^3$), Фур'є-компоненти кірального хімічного потенціалу з хвильовими векторами $\mathbf{k} \neq 0$ залишаються нехтовно малими протягом всього періоду еволюції.

3.8 Висновки

В цьому розділі, використовуючи кіральне кінетичне рівняння було отримано повну систему аномальних рівнянь Максвелла, що можуть використовуватись для дослідження релятивістської неоднорідної плазми з кіральною асиметрією. Проводячи розклад за степенями електромагнітного поля та просторово-часових похідних, було отримано електричний та аксіальний

струми, а також замкнену систему рівнянь для електричного та кірального хімічних потенціалів. Було досліджено два режими плазми, в одному з яких незбурена функція розподілу задається стандартним розподілом Фермі-Дірака, а в іншому – функцією, до якої застосоване перетворення бусту (другий режим реалізує плазму з дрейфом перпендикулярно магнітному і електричному полям). У випадку плазми з дрейфом, розклад проводиться лише по степеням компонент електричного поля, паралельним магнітному полю, а перпендикулярна компонента враховується точно. Поряд із холлівським доданком в електричний струм також знайдено його аксіальний аналог. Струм кірального магнітного ефекту точно відтворюється в дрейфовому стані плазми. Важливим є те, що також було знайдено два додаткові електричні і аксіальні струми, можливо, топологічної природи. Вони схожі на струм кірального магнітного ефекту та струм ефекту кірального розділення, але направлені перпендикулярно магнітному полю, а їх еволюція керується перпендикулярною компонентою електричного поля, а також скалярним добутком електричного і магнітного полів.

Релятивістська електрон-позитронна плазма є чи не найкращим прикладом плазми в дрейфовому стані. В той же час кварк-глюонна плазма при достатньо високих температурах може слугувати прикладом плазми, де дрейф не розвивається, оскільки бекграунд електромагнітно-нейтральних глюонів створює суттєвий опір на заряджені частинки в плазмі. Для такого випадку було проведено розклад і по електричному і по магнітному полям і отримано вирази для густин частинок і струмів у другому порядку по електромагнітному полю та похідним. У випадку відсутності електричного поля, було знайдено розв'язок у вигляді дифузної кіральної магнітної хвилі, що поширюється зі швидкістю $v_{\text{SMW}} \propto |eB|/T^2$, див. Рів. (3.67). Константа дифузії дається виразом $c^2\tau/3$, де $\tau \sim 1/[e^4 T \ln(1/|e|)]$ параметр часу релаксації [125].

Отримані в розділі результати відтворюють кілька уже відомих до цього

ефектів. У випадку електричного струму відтворюються омічний і дифузний струми, а також струм кірального магнітного ефекту. На додачу, було вперше відкрито декілька нових доданків, пов'язаних з неоднорідностями плазми. Серед них доданок кіральної дифузії і два доданки холлівського типу, перпендикулярні магнітному полю. Також є доданок, що індукується змінним електричним полем. Один із найбільш цікавих нових струмів — це струм аномального кірального ефекту Холла, що є перпендикулярним до прикладеного електричного поля в градієнті $\partial\mu_5/\partial\mathbf{x}$. Природа цього струму пов'язана з кривиною Беррі. Також було знайдено його відповідник в аксіальному струмі, який визначається електричним полем та градієнтом електричного хімічного потенціалу. Він є навіть більш дивовижним, оскільки може виникати навіть у кірально-симетричній плазмі.

Для аксіального струму було відтворено добре відомі результати для струмів кірального магнітного ефекту та ефекту кірального розділення. Також отримано очікуваний дифузний струм і декілька нових типів струмів, включаючи кіральний аналог ефекту Холла, що може дозволити експериментально визначити знак кірального заряду домінуючих носіїв в кіральній плазмі. Також було виведено два нові типи дифузних струмів холлівського типу, а також два дифузних і два індукованих змінним електричним полем аналоги електричного ефекту кірального розділення.

Розроблений теоретичний базис є відправною точкою для вивчення сценарію інверсного каскаду. В попередніх дослідженнях інверсного каскаду використовувались моделі в яких вплив аномальної динаміки на еволюцію магнітних полів вводився через усереднене по об'єму співвідношення кіральної аномалії. За визначенням, такі моделі не дозволяють розвиватись неоднорідностям кіральної асиметрії. Це обмеження, звичайно, не відповідає очікуваній фізичній дійсності. Використовуючи спрощену модель, яка, тим не менше, включає в себе основні властивості аномальних рівнянь Максвелла, в розділі було показано, що інверсний каскад зберігається у пла-

змі з динамічними неоднорідностями кіральної асиметрії. Було виявлено чутливість інверсного каскаду до ефектів дифузії. Якщо дифузією у плазмі можна знехтувати, інверсний каскад розвивається набагато повільніше ніж у випадку однорідної плазми. Якщо ж дифузія має достатньо велике значення (як у випадку реалістичного значення дифузії в первинній релятивістській плазмі), тоді неоднорідності кірального хімпотенціалу сильно подавлюються, і інверсний каскад розвивається тотожно до однорідного випадку. Можна зробити висновок, що неоднорідності плазми не грають суттєвої ролі в еволюції первинних магнітних полів у ранньому Всесвіті.

Нарешті, цікаво було б дослідити аномальний інверсний каскад в діраківських та вейлівських матеріалах [78], чії низькоенергетичні збудження описуються рівняннями Дірака та Вейля, відповідно. Як показано в роботі [137], можна згенерувати кіральну асиметрію в таких системах прикладаючи електричне і магнітне поле в одному напрямку. Якщо магнітне поле просторово-неоднорідне, буде згенеровано неоднорідну кіральну асиметрію. Виключаючи потім зовнішні поля, можна вивчити, як кіральна асиметрія і згенеровані нею спіральні магнітні поля будуть еволюціонувати в часі, і чи буде існувати інверсний каскад в результаті.

Результати даного розділу опубліковано в роботах [44, 45].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню проблем фізики раннього Всесвіту, а саме: процеси народження частинок на стадії попереднього розігріву Всесвіту, генерація лептонної асиметрії та еволюція магнітних полів в первинній плазмі. Головні результати роботи полягають у наступному:

1. З'ясовано механізм народження частинок на стадії попереднього розігріву у моделі інфляції Старобінського. Показано, що в такій задачі параметричний резонанс не розвивається внаслідок розширення Всесвіту та нестационарності ширин резонансних зон. Натомість, народження частинок описується теорією збурень в рамках борнівського наближення;
2. Отримано аналітичні формули для ширин розпаду інфлатона на бозони, ферміони, а також ширину саморозпаду інфлатона у випадку слабого зв'язку інфлатонного поля з полями матерії. Встановлено, що специфічні властивості розширення Всесвіту призводять до того, що ефективні ширини розпаду інфлатона не залежать від часу і співпадають з результатами Борнівського наближення. Це відбувається тому, що густина чисел заповнення для народжених частинок оберненопропорційна параметру Хаббла, а темп заповнення нових мод прямопропорційний йому;
3. Знайдено аналітичний вираз для лептонної асиметрії, що генерується в ранньому Всесвіті у результаті розпадів важких стерильних нейтрино моделі νMSM ;
4. Використовуючи вимогу до величини лептонної асиметрії, яка має бути згенерована у Всесвіті на момент народження найлегшого стерильного нейтрино (гіпотетично, частинка Темної матерії), отримано обмеження на параметри моделі νMSM — маси важких стерильних ней-

трино та кути змішування між стерильними та активними нейтрино. Показано, що у випадку оберненої ієрархії мас активних нейтрино, не існує області значень параметрів моделі νMSM , при яких лептонна асиметрія задовільняла би космологічним вимогам, на відміну від випадку прямої ієрархії;

5. Використовуючи кіральну кінетично теорію вперше було отримано вирази для густин електричних і кіральних струмів та зарядів у релятивістській неоднорідній космологічній плазмі з кіральною асиметрією. Було отримано ряд нових доданків в струмах, про які раніше не повідомлялось і які можуть бути використані в експериментах з діраківськими та вейлівськими матеріалами;
6. Отримано рівняння, які описують динамічні властивості звичайних і кіральних хімічних потенціалів, які доповнюють систему рівнянь Максвелла, якою описується кіральна плазма;
7. За допомогою отриманої системи рівнянь було досліджено еволюцію спіральних магнітних полів та кірального хімічного потенціалу в кірально-асиметричній неоднорідній первинній плазмі. Отримано, що, як і в однорідному випадку, магнітна спіральність короткохвильових мод з часом зменшується, в той час як довгохвильових — зростає. Таким чином, було підтверджено існування явища інверсного каскаду магнітного поля в неоднорідній плазмі, що підсилює аргументи на користь такого поля, як зародкового для спостережуваних позагалактичних та галактичних магнітних полів;
8. Також в роботі встановлено вплив дифузних ефектів на еволюцію кіральної намагніченої плазми. Показано, що дифузія розмиває неоднорідності, і, за реалістичних для первинної плазми значень константи дифузії, інверсний каскад розвивається так само, як і у випадку однорідної плазми.

Список використаних джерел

1. Горбунов Д. С. Введение в физику ранней вселенной. Теория горячего большого взрыва / Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков // М: ИЯИ РАН — 2007 — 458.
2. Горбунов Д. С. Введение в физику ранней вселенной. Космологические возмущения. Инфляционная теория / Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков // М: ИЯИ РАН — 2009 — 465.
3. Mukhanov V. Physical Foundations of cosmology / V. Mukhanov // New York: Cambridge University Press — 2005 — 421.
4. Liddle A. An Introduction to Modern Cosmology (2nd ed.) / Andrew Liddle // London: Wiley — 2003 — 172.
5. Weinberg S. S. Weinberg // *Phys. Rev. Lett.* — 1967 — Vol. 19 — P. 1264 ; S. L. Glashow // *Nucl. Phys.* — 1961 — Vol. 22 — P. 579; A. Salam // *Proceedings of The Nobel Symposium Held 1968 At Lerum, Sweden, Stockholm* — 1968 — Pp. 367-377.
6. Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov>
7. Spergel D. N. Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Results: Implications for Cosmology / D. N. Spergel, R. Bean, O. Doré, M. R. Nolta, C. L. Bennett, J. Dunkley, G. Hinshaw, N. Jarosik, E. Komatsu, L. Page, H. V. Peiris, L. Verde, M. Halpern, R. S. Hill, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, N. Odegard, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, and E. L. Wright // *The Astrophysical Journal Supplement Series* — 2007 — Vol. 170 — Pp. 377-408
8. Planck Collaboration Planck intermediate results. XLVII. Planck constraints on reionization history / Planck Collaboration; Adam, R., Aghanim,

- N., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., Ballardini, M., Banday, A. J., Barreiro, R. B. // ArXiv:1605.03507[astro-ph] — 2016 — Pp. 1-19.
9. *Linde A. D.* Chaotic inflation / A. D. Linde // *Phys. Lett. B* — 1983 — Vol. 129 — P. 177.
 10. *Linde A. D.* Particle Physics and Inflationary Cosmology / A. D. Linde // Harwood, Chur, Switzerland — 1990 — P. 270.
 11. *Kofman L.* Reheating after inflation // L. Kofman, A. D. Linde and A. A. Starobinsky / *Phys. Rev. Lett.* — 1994 — Vol. 73 — P. 3195.
Towards the theory of reheating after inflation / L. Kofman, A. D. Linde and A. A. Starobinsky // *Phys. Rev. D* — 1997 — Vol. 56 — P. 3258.
 12. *Traschen J. H.* Particle Production During Out-of-equilibrium Phase Transitions / J. H. Traschen and R. H. Brandenberger // *Phys. Rev. D* — 1990 — Vol. 42 — P. 2491.
 13. *Shtanov Y.* Universe reheating after inflation / Y. Shtanov, J. H. Traschen and R. H. Brandenberger // *Phys. Rev. D* — 1995 — Vol. 51 — P. 5438.
 14. *Greene P. B.* Preheating of fermions P. B. Greene and L. Kofman *Phys. Lett. B* — 1999 — Vol. 448 — Pp. 6-12.
On the theory of fermionic preheating / P. B. Greene and L. Kofman // *Phys. Rev. D* — 2000 — Vol. 62 — P. 123516
 15. *Starobinsky A.A.* A new type of isotropic cosmological models without singularity / A.A. Starobinsky // *Phys. Lett. B* — 1980 — Vol. 91 — Pp. 99-102;
Nonsingular model of the Universe with the quantum-gravitational de Sitter stage and its observational consequences / A.A. Starobinsky // Proc. of the Second Seminar "Quantum Theory of Gravity" (Moscow, 13-15 Oct. 1981), INR Press, Moscow — 1982 — Pp. 58-72 (reprinted in: Quantum

- Gravity, eds. M.A. Markov, P.C. West, Plenum Publ. Co., New York — 1984 — Pp. 103-128)
16. *Ahmad Q. R.* Measurement of the Rate of $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$ Interactions Produced by ^8B Solar Neutrinos at the Sudbury Neutrino Observatory / Q. R. Ahmad et al. (SNO Collaboration) // *Phys. Rev. Lett.* — 2001 — Vol. 87 — P. 071301.
 17. *Fukuda Y.* Evidence for Oscillation of Atmospheric Neutrinos / Y. Fukuda et al. (Super-Kamiokande Collaboration) // *Phys. Rev. Lett.* — 1998 — Vol. 81 — P. 1562.
 18. *Eguchi K.* First Results from KamLAND: Evidence for Reactor Antineutrino Disappearance / K. Eguchi et al. (KamLAND Collaboration) // *Phys. Rev. Lett.* — 2003 — Vol. 90 — P. 021802.
 19. *Asaka T.* The νMSM , Dark Matter and Baryon Asymmetry of the Universe / T. Asaka, M. Shaposhnikov // *Phys. Let. B* — 2005 — Vol. 620 — P. 17
 20. *Asaka T.* The νMSM , dark matter and neutrino masses / T. Asaka, S. Blanchet, M. Shaposhnikov // *Phys. Let. B* — 2005 — Vol. 631 — P. 151.
 21. *Shi X.-d.* New Dark Matter Candidate: Nonthermal Sterile Neutrinos / X.-d. Shi and G. M. Fuller // *Phys. Rev. Lett.* — 1999 — Vol. 82 — P. 2832.
 22. *Laine M.* Sterile neutrino dark matter as a consequence of νMSM -induced lepton asymmetry / M. Laine, M. Shaposhnikov, Sterile neutrino dark matter as a consequence of νMSM -induced lepton asymmetry // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* — 2008 — Vol. 2008 0806:031 — Pp. 1-25.

23. *Boyarsky A.* The Role of Sterile Neutrinos in Cosmology and Astrophysics / A. Boyarsky, O. Ruchayskiy, and M. Shaposhnikov // Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. — 2009 — Vol.59 — P. 191.
24. *Kronberg P. P.* Extragalactic magnetic field / P. P. Kronberg // Rept. Prog. Phys. — 1994 — Vol. 57 — P. 325.
25. *Grasso D.* Magnetic fields in the early universe / D. Grasso and H. R. Rubinstein // Phys. Rept. — Vol. 348 — P.163.
26. *Giovannini M.* The Magnetized universe / M. Giovannini // Int. J. Mod. Phys. D — 2004 — Vol. 13 — P. 391.
27. *Vallee J. P.* Magnetic fields in the galactic Universe, as observed in supershells, galaxies, intergalactic and cosmic realms / J. P. Vallee // New Astron. Rev. — 2011 — Vol. 55 — P. 91.
28. *Durrer R.* Cosmological Magnetic Fields: Their Generation, Evolution and Observation / R. Durrer and A. Neronov // Astron. Astrophys. Rev. — 2013 — Vol. 21 — P. 62.
29. *Neronov A.* Evidence for strong extragalactic magnetic fields from Fermi observations of TeV blazars / A. Neronov and I. Vovk // Science — 2010 — Vol. 328 — P. 73.
30. *Ando S.* Evidence for Gamma-Ray Halos Around Active Galactic Nuclei and the First Measurement of Intergalactic Magnetic Fields / S. Ando and A. Kusenko // Astrophys. J. — 2010 — Vol. 722 — P. 39.
31. *Tavecchio F.* The intergalactic magnetic field constrained by Fermi/LAT observations of the TeV blazar 1ES 0229+200 / F. Tavecchio, G. Ghisellini, L. Foschini, G. Bonnoli, G. Ghirlanda, and P. Coppi // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. — 2010 — Vol. 406 — P. 70.

32. *Dolag K.* Lower limit on the strength and filling factor of extragalactic magnetic fields / K. Dolag, M. Kachelriess, S. Ostapchenko, and R. Tomas // *Astrophys. J.* — 2011 — Vol. 727 — P. 4.
33. *Chen W.* Intergalactic magnetic field spectra from diffuse gamma rays / W. Chen, B. D. Chowdhury, F. Ferrer, H. Tashiro and T. Vachaspati // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* — 2015 — Vol. 450 — P. 3371.
34. *Tashiro H.* Search for CP Violating Signature of Intergalactic Magnetic Helicity in the Gamma Ray Sky / H. Tashiro, W. Chen, F. Ferrer and T. Vachaspati // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* — 2014 — Vol. 445 — P. 41
35. *Kandus A.* Primordial magnetogenesis / A. Kandus, K. E. Kunze, and C. G. Tsagas // *Phys. Rept.* — 2011 — Vol. 505 — P. 1.
36. *Widrow L. M.* The First Magnetic Fields / L. M. Widrow, D. Ryu, D. R. G. Schleicher, K. Subramanian, C. G. Tsagas, and R. A. Treumann // *Space Sci. Rev.* — 2012 — Vol. 166 — P. 37.
37. *Boyarsky A.* Self-consistent evolution of magnetic fields and chiral asymmetry in the early Universe / A. Boyarsky, J. Fröhlich, and O. Ruchayskiy // *Phys. Rev. Lett.* — 2012 — Vol. 108 — P. 031301.
38. *Tashiro H.* Chiral Effects and Cosmic Magnetic Fields / H. Tashiro, T. Vachaspati, and A. Vilenkin // *Phys. Rev. D* — 2012 — Vol. 86 — P. 105033.
39. *Manuel C.* Dynamical evolution of the chiral magnetic effect: Applications to the quark-gluon plasma / C. Manuel and J. M. Torres-Rincon // *Phys. Rev. D* — 2015 — Vol. 92 — P. 074018.
40. *Hirono Y.* Self-similar inverse cascade of magnetic helicity driven by the chiral anomaly / Y. Hirono, D. Kharzeev, and Y. Yin // *Phys. Rev. D* — 2015 — Vol. 92 — P. 125031.

41. *Rudenok I.* Post-inflationary preheating with weak coupling / Igor Rudenok, Yuri Shtanov, Stanislav Vilchinskii // *Physics Letters B.* — 2014 — Vol. 92 — P. 125031.
42. *Rudenok I.* Preheating universe after inflation / Igor Rudenok, Yuri Shtanov, Stanislav Vilchinskii // *Odessa Astronomical Publications* — 2014 — Vol. 27, no.2 — Pp. 11-15.
43. *Gorkavenko V. M.* Leptonic asymmetry of the sterile neutrino hadronic decays in the νMSM / Volodymyr M. Gorkavenko, Igor V. Rudenok, Stanislav I. Vilchynskiy // *Ukr.J.Phys* — 2013 — Vol. 58, no.9 — Pp. 811-826.
44. *Gorbar E. V.* Anomalous Maxwell equations for inhomogeneous chiral plasma / E. V. Gorbar, I. A. Shovkovy, S. Vilchinskii, I. Rudenok, A. Boyarsky, and O. Ruchayskiy // *Physical Review D* — 2016 — Vol. 93, no.10 — P. 105028.
45. *Gorbar E. V.* Anomaly-driven inverse cascade and inhomogeneities in a magnetized chiral plasma in the early Universe / E. V. Gorbar, I. Rudenok, I. A. Shovkovy, S. Vilchinskii // *Physical Review D* — 2016 — Vol. 94, no.10 — P. 103528.
46. *Руденок І.В.* Розрахунок коефіцієнту Боголюбова в R^2 –інфляційній моделі / І.В. Руденок, С.Й. Вільчинський, В.М. Горкавенко // *Тези доповідей наукової конференції молодих вчених "Наука ХХІ століття"* — 2013 — С. 87.
47. *Rudenok I.* Post-iftationary preheating with weak coupling / I. Rudenok, Yu. Shtanov, S. Vilchinskii // *Збірка тез доповідей міжнародної конференції «Астрономія та фізика космосу в Київському університеті»* — 2014 — С. 38.

48. *Gorbunov D.S.* Scalaron the mighty: producing dark matter and baryon asymmetry at reheating / D.S. Gorbunov., A.G. Panin // Physics Letters B — 2011 — Vol. 700 — Pp. 157-162.
49. *Faulkner T.* Constraining $f(R)$ Gravity as a Scalar Tensor Theory / T. Faulkner, M. Tegmark, E. F. Bunn and Y. Mao // Phys. Rev. D — 2007 — Vol. 76 — P. 063505
50. *Боголюбов Н.Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский // М: ГИФМЛ — 1958 — 410.
51. *Свешников А.Г.* Теория функции комплексной переменной /А.Г.Свешников, А.Н.Тихонов Теория функции комплексной переменной // М: Наука — 1967 — 320.
52. *Пескин М.* Введение в квантовую теорию поля / М.Пескин, Д.Шредер Введение в квантовую теорию поля // Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика— 2001 — 784.
53. *Grib A. A.* Vacuum Quantum Effects in Strong Fields / A. A. Grib, S. G. Mamayev, V. M. Mostepanenko // Friedmann Laboratory Publishing St.-Petersburg — 1994 — 361.
54. *Cleveland B. T.* Measurement of the Solar Electron Neutrino Flux with the Homestake Chlorine Detectors / B. T. Cleveland, T. Daily, R. Davis, Jr., J. R. Distel, K. Lande, C. K. Lee, P. S. Wildenhain, and J. Ullman // The Astrophysical Journal — 1998 — Vol. 496 — Pp. 505-526
55. *Вільчинський С. Й.* С. Й. Вільчинський, В. М. Горкавенко / Вступ до фізики масивних нейтрино // 2007 — 281.
56. *Sakharov A. D.* Violation of CP invariance, C asymmetry, and baryon asymmetry of the universe / A. D. Sakharov // Usp.Fiz.Nauk — 1991 — Vol. 161 — Pp. 61-64

57. *Boyarsky A.* The Role of Sterile Neutrinos in Cosmology and Astrophysics / A. Boyarsky, O. Ruchayskiy, and M. Shaposhnikov // Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. — 2009 — Vol.59 — P. 191.
58. *Bilenky S.* Massive neutrinos and neutrino oscillations / S. Bilenky and S. Petcov // Rev. Mod. Phys — 1987 — Vol.59, No. 3, Part 1 — P. 671.
59. *Shaposhnikov M.* A possible symmetry of the νMSM / M. Shaposhnikov // Nuclear Physics B — Vol. 763: Issues 1–2 — Pp. 49–59
60. *Strumia A.* Neutrino masses and mixings and... / A. Strumia and F. Vissani // arXiv:0606054 [hep-ph] — Pp. 1–243.
61. *T2K Collaboration* Indication of Electron Neutrino Appearance from an Accelerator-Produced Off-Axis Muon Neutrino Beam / T2K Collaboration // Phys. Rev. Lett. — 2011 — 107 — P. 041801
62. *Gorkavenko V.* Some constraints on the Yukawa parameters in the neutrino modification of the Standard Model (νMSM) and CP -violation / V. Gorkavenko, S. Vilchynskiy // Eur. Phys. J. C — 2010 — Vol. 70 — P. 1091
63. *Gorbunov D.* How to find neutral leptons of the νMSM ? / D. Gorbunov, M. Shaposhnikov // JHEP — 2007 — Vol. 0710 — P. 015.
64. *Davidson S.* Leptogenesis / S. Davidson, E. Nardi and Y. Nir // Phys. Rept. — 2008 — Vol. 466 — P. 105.
65. *Flanz M.* Baryogenesis through mixing of heavy Majorana neutrinos / M. Flanz, E. Paschos, U. Sarkar and J. Weiss // Phys. Lett. B — 1996 — Vol. 389 — P. 693.
66. *Johnson L. M.* Extending sensitivity for low-mass neutral heavy lepton searches / L. M. Johnson, D. W. McKay and T. Bolton // Phys. Rev. D — 1997 — Vol. 56 — P. 2970.

67. *Horejsi J.* Introduction to electroweak unification / J. Horejsi // World scientific publishing — 1994 — 156.
68. *Shaposhnikov M.* The ν MSM, leptonic asymmetries, and properties of singlet fermions / M. Shaposhnikov // Journal of High Energy Physics — 2007 — Volume 2008 — Pp. 1-56.
69. *Kolb E.W.* The early Universe / E.W. Kolb , M.S. Turner // Addison-Wesley Pub. Company — 1989 — 592.
70. *Shaposhnikov M.* Baryon Asymmetry of the Universe and Neutrinos / M. Shaposhnikov // Prog. Theor. Phys. — 2009 — Vol. 122 — P. 185
71. *Canetti L.* Sterile Neutrinos as the Origin of Dark and Baryonic Matter / L. Canetti, M. Drewes and M. Shaposhnikov // Phys. Rev. Lett. — 2013 — Vol. 110 — P. 061801
72. *Grasso D.* Magnetic Fields in the Early Universe / Dario Grasso and Hector R. Rubinstein // Physics Reports — 2001 — Vol. 348 No. 3 — P. 163-266
73. *Zweibel E.G.* Magnetic fields in galaxies and beyond / E.G. Zweibel and C. Heiles // Nature — 1997 — Vol. 385 — P. 131-136
74. *Eilek J. A.* Magnetic Fields in Clusters: Theory vs. Observations / J. A. Eilek // arXiv:astro-ph/9906485 — 1999 — Pp. 1-6.
75. *Taylor G.B.* Magnetic fields in the Hydra A cluster / G.B. Taylor and R.A. Perley // Astrophys. J. — 1993 — Vol. 416 — Pp. 554-562
76. *Zeldovich Y.B.* Magnetic Fields in Astrophysics / Y.B. Zeldovich, A. A. Ruzmaikin and D. D. Sokoloff // Mc Graw Hill, New York — 1990 — 382.
77. *Kronberg P.P.* Extragalactic magnetic fields / P.P. Kronberg // Reports on Progress in Physics. — 1993 — Vol. 57 No. 4 — P. 325

78. *Vafek O.* Dirac Fermions in Solids: From High-Tc cuprates and Graphene to Topological Insulators and Weyl Semimetals / O. Vafek and A. Vishwanath // Ann. Rev. Condens. Matter Phys. — 2014 — Vol. 5 — P. 83.
79. *Liao J.* Anomalous transport effects and possible environmental symmetry "violation" in heavy-ion collisions / J. Liao // Pramana — 2015 — Vol. 84 — P. 901.
80. *Kharzeev D. E.* Topology, magnetic field, and strongly interacting matter / D. E. Kharzeev // Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. — 2015 — Vol. 65 — P. 0000
81. *Huang X. G.* Electromagnetic fields and anomalous transports in heavy-ion collisions — A pedagogical review / X. G. Huang // Rep. Prog. Phys. — 2016 — Vol. 79 — P. 076302 arXiv:1509.04073 [nucl-th].
82. *Adler S. L.* Axial vector vertex in spinor electrodynamics / S. L. Adler // Phys. Rev. — 1969 — Vol. 177 — P. 2426;
A PCAC puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma$ in the sigma model / J. S. Bell and R. Jackiw // Nuovo Cim. A — 1969 — Vol. 60 — P. 47.
83. *Vilenkin A.* Equilibrium Parity Violating Current In A Magnetic Field / A. Vilenkin // Phys. Rev. D — 1980 — Vol. 22 — P. 3080.
84. *Redlich A. N.* Induced Chern-simons Terms at High Temperatures and Finite Densities / A. N. Redlich and L. C. R. Wijewardhana // Phys. Rev. Lett. — 1985 — Vol. 54 — P. 970.
85. *Tsokos K.* Topological Mass Terms and the High Temperature Limit of Chiral Gauge Theories / K. Tsokos // Phys. Lett. B — 1985 — Vol. 157 — P. 413.
86. *Alekseev A. Y.* Universality of transport properties in equilibrium, Goldstone theorem and chiral anomaly / A. Y. Alekseev, V. V. Cheianov, and J. Fröhlich // Phys. Rev. Lett. — 1998 — Vol. 81 — P.3503.

87. *Fukushima K.* The Chiral Magnetic Effect / K. Fukushima, D. E. Kharzeev, and H. J. Warringa // Phys. Rev. D — 2008 — Vol. 78 — P. 074033.
88. *Kharzeev D. E.* Topologically induced local P and CP violation in QCD x QED / D. E. Kharzeev // Annals Phys. — 2010 — Vol. 325 — P. 205.
89. *Joyce M.* Primordial magnetic fields, right-handed electrons, and the Abelian anomaly / M. Joyce and M. E. Shaposhnikov // Phys. Rev. Lett. — 1997 — Vol. 79 — P. 1193.
90. *Giovannini M.* Primordial hypermagnetic fields and triangle anomaly / M. Giovannini and M. E. Shaposhnikov // Phys. Rev. D — 1998 — Vol. 57 — P. 2186.
91. *Fröhlich J.* New applications of the chiral anomaly / J. Fröhlich and B. Pedrini // in *Mathematical Physics 2000*, edited by A. Fokas, A. Griegoryan, T. Kibble, B. Zegarlinski — World Scientific, Singapore — 2000 — Pp. 9-47.
92. *Fröhlich J.* Axions, quantum mechanical pumping, and primeval magnetic fields / J. Fröhlich and B. Pedrini // arXiv:cond-mat/0201236 — Pp. 1-15.
93. *Giovannini M.* Anomalous Magnetohydrodynamics / M. Giovannini // Phys. Rev. D — 2013 — Vol. 88 — P. 063536.
94. *Boyarsky A.* Magnetohydrodynamics of Chiral Relativistic Fluids / A. Boyarsky, J. Fröhlich, and O. Ruchayskiy // Phys. Rev. D — 2015 — Vol. 92, P. 043004.
95. *Christensson M.* Scaling laws in decaying helical 3-D magnetohydrodynamic turbulence / M. Christensson, M. Hindmarsh, and A. Brandenburg // Astron. Nachr. — 2005 — Vol. 326 — P. 393.

96. *Avdoshkin A.* On consistency of hydrodynamic approximation for chiral media / A. Avdoshkin, V. P. Kirilin, A. V. Sadofyev, and V. I. Zakharov // Phys. Lett. B — 2016 — Vol. 755 — P. 1.
97. *Metlitski M. A.* Anomalous axion interactions and topological currents in dense matter / M. A. Metlitski and A. R. Zhitnitsky // Phys. Rev. D — 2005 — Vol. 72 — P. 045011.
98. *Kharzeev D. E.* Chiral Magnetic Wave / D. E. Kharzeev and H. U. Yee // Phys. Rev. D — 2011 — Vol. 83 — P. 085007.
99. *Son D. T.* Hydrodynamics with Triangle Anomalies / D. T. Son and P. Surowka // Phys. Rev. Lett. — 2009 — Vol. 103 — P. 191601.
100. *Son D. T.* The Chiral MagnetoHydroDynamics of QCD fluid at RHIC and LHC / D. E. Kharzeev // J. Phys. G — 2011 — Vol. 38 — P. 124061.
101. *Kalaydzhyan T.* Fluid/gravity model for the chiral magnetic effect / T. Kalaydzhyan and I. Kirsch // Phys. Rev. Lett. — 2011 — Vol. 106 — P. 211601.
102. *Dubovsky S.* Effective field theory for hydrodynamics: thermodynamics, and the derivative expansion / S. Dubovsky, L. Hui, A. Nicolis, and D. T. Son // Phys. Rev. D — 2012 — Vol. 85 — P. 085029.
103. *Amado I.* Anomalous transport coefficients from Kubo formulas in Holography / I. Amado, K. Landsteiner, and F. Pena-Benitez // Journal of High Energy Physics — 2011 — Vol. 1105 — P. 081.
104. *Neiman Y.* Relativistic Hydrodynamics with General Anomalous Charges / Y. Neiman and Y. Oz // Journal of High Energy Physics — 2011 — Vol. 1103 — P. 023.
105. *Son D. T.* Kinetic theory with Berry curvature from quantum field theories

- / D. T. Son and N. Yamamoto // Phys. Rev. D — 2013 — Vol. 87 — P. 085016.
106. *Stephanov M. A.* Chiral Kinetic Theory / M. A. Stephanov and Y. Yin // Phys. Rev. Lett. — 2012 — Vol. 109 — P. 162001.
 107. *Chen J. Y.* Lorentz Invariance in Chiral Kinetic Theory / J. Y. Chen, D. T. Son, M. A. Stephanov, H. U. Yee, and Y. Yin // Phys. Rev. Lett. — 2014 — Vol. 113 — P. 182302.
 108. *Jedamzik K.* Damping of cosmic magnetic fields / K. Jedamzik, V. Katalinich, and A. V. Olinto // Phys. Rev. D — 1998 — Vol. 57 — P. 3264.
 109. *Subramanian K.* Magnetohydrodynamics in the early Universe and the damping of nonlinear Alfven waves / K. Subramanian and J. D. Barrow // Phys. Rev. D — 1998 — Vol. 58 — P. 083502.
 110. *Banerjee R.* Are cluster magnetic fields primordial? / R. Banerjee and K. Jedamzik // Phys. Rev. Lett. — 2003 — Vol. 91 — P. 251301 [R. Banerjee and K. Jedamzik // Phys. Rev. Lett. — 2004 — Vol. 93 — P. 179901(E)].
 111. *Banerjee R.* The Evolution of cosmic magnetic fields: From the very early Universe, to recombination, to the present / R. Banerjee and K. Jedamzik // Phys. Rev. D — 2004 — Vol. 70 — P. 123003.
 112. *Giovannini M.* The Magnetized Universe / M. Giovannini // Int. J. Mod. Phys. D — 2004 — Vol. 13 — P. 391.
 113. *Kahniashvili T.* Numerical simulations of the decay of primordial magnetic turbulence / T. Kahniashvili, A. Brandenburg, A. G. Tevzadze, and B. Ratra // Phys. Rev. D — 2010 — Vol. 81 — P. 123002.
 114. *Kahniashvili T.* Primordial magnetic fields and causality / R. Durrer and

- C. Caprini // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics — 2003 — Vol. 0311 P. 010.
115. *Caprini C.* Can the observed large scale magnetic fields be seeded by helical primordial fields? / C. Caprini, R. Durrer, and E. Fenu // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics — 2009 — Vol. 0911 — P. 001.
 116. *Saveliev A.* Time Evolution of the Large-Scale Tail of Non-Helical Primordial Magnetic Fields with Back-Reaction of the Turbulent Medium / A. Saveliev, K. Jedamzik, and G. Sigl // Phys. Rev. D — 2012 — Vol. 86 — P. 103010.
 117. *Campanelli L.* Evolution of Magnetic Fields in Freely Decaying Magnetohydrodynamic Turbulence / L. Campanelli // Phys. Rev. Lett. — 2007 — Vol. 98 — P. 251302.
 118. *Yamamoto N.* Scaling laws in chiral hydrodynamic turbulence / N. Yamamoto // Phys. Rev. D — 2016 — Vol. 93 no. 12 — P. 125016.
 119. *Buividovich P. V.* Numerical study of chiral plasma instability within the classical statistical field theory approach / P. V. Buividovich and M. V. Ulybyshev // Phys. Rev. D — 2016 — Vol. 94 — P. 025009.
 120. *Xiao D.* Berry phase correction to electron density of states in solids / D. Xiao, J. R. Shi, and Q. Niu // Phys. Rev. Lett. — 2005 — Vol. 95 — P. 137204.
 121. *Duval C.* Berry phase correction to electron density in solids and 'exotic' dynamics / C. Duval, Z. Horvath, P. A. Horvathy, L. Martina, and P. Stichel // Mod. Phys. Lett. B — 2006 — Vol. 20 — P. 373.
 122. *Berry M. V.* Quantal phase factors accompanying adiabatic changes / M. V. Berry // Proc. Roy. Soc. Lond. A — 1984 — Vol. 392 — P. 45.

123. *Son D. T.* Chiral Anomaly and Classical Negative Magnetoresistance of Weyl Metals / D. T. Son and B. Z. Spivak // Phys. Rev. B — 2013 — Vol. 88 — P. 104412.
124. *Satow D.* Chiral Magnetic Effect at Weak Coupling with Relaxation Dynamics / D. Satow and H. U. Yee // Phys. Rev. D — 2014 — Vol. 90 — P. 014027.
125. *Arnold P. B.* Transport coefficients in high temperature gauge theories. 2. Beyond leading log / P. B. Arnold, G. D. Moore, and L. G. Yaffe // Journal of High Energy Physics — 2003 — Vol. 0305 — P. 051.
126. *Bhatnagar P. L.* A Model for Collision Processes in Gases. 1. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems / P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, and M. Krook // Phys. Rev. — 1954 — Vol. 94 — P. 511.
127. *Krall N. A.* Principles of plasma physics / N. A. Krall and A. W. Trivelpiece // McGraw-Hill, New York — 1973 — 686.
128. *Landau L. D.* The classical theory of fields / L. D. Landau and E. M. Lifshits // Butterworth-Heinemann, Oxford — 1979 — 402.
129. *Cerignani C.* The relativistic Boltzmann equation: theory and applications / C. Cerignani and G. M. Kremer // Birkhauser Verlag, Basel — 2002 — 384.
130. *Abrikosov A. A.* Fundamentals of the theory of metals / A. A. Abrikosov // North-Holland, Amsterdam — 1988 — 630.
131. *Abrikosov A. A.* Spectral functions at small energies and the electrical conductivity in hot, quenched lattice QCD / G. Aarts, C. Allton, J. Foley, S. Hands, and S. Kim // Phys. Rev. Lett. — 2007 — Vol. 99 — P. 022002.

132. *Ding AH.-T.* Thermal dilepton rate and electrical conductivity: An analysis of vector current correlation functions in quenched lattice QCD / H.-T. Ding, A. Francis, O. Kaczmarek, F. Karsch, E. Laermann, and W. Soeldner // Phys. Rev. D — 2011 — Vol. 83 — P. 034504.
133. *Huang X. G.* Axial Current Generation from Electric Field: Chiral Electric Separation Effect / X. G. Huang and J. Liao // Phys. Rev. Lett. — 2013 — Vol. 110 — P. 232302;
Chiral electric separation effect in the quark-gluon plasma / Y. Jiang, X. G. Huang, and J. Liao // Phys. Rev. D — 2015 — Vol. 91 — P. 045001.
134. *Nagaosa N.* Anomalous Hall effect / N. Nagaosa, J. Sinova, S. Onoda, A. H. MacDonald, and N. P. Ong // Rev. Mod. Phys. — 2010 — Vol. 82 — P. 1539.
135. *Baym G.* Electrical conductivity in the early universe / G. Baym and H. Heiselberg // Phys. Rev. D — 1997 — Vol. 56 no. 8 — P. 5254.
136. *Burnier Y.* From the chiral magnetic wave to the charge dependence of elliptic flow / Y. Burnier, D. E. Kharzeev, J. Liao, and H.-U. Yee // arXiv:1208.2537[hep-ph] — Pp. 1-12.
137. *Nielsen H. B.* Adler-bell-jackiw Anomaly And Weyl Fermions In Crystal / H. B. Nielsen and M. Ninomiya // Phys. Lett. B — 1983 — Vol. 130 — P. 389.