Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерство освіти і науки України

Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова

праця на правах рукопису

Ісаєва Карина Олександрівна

УДК 530.182, 533.951, 538.94

ДИСЕРТАЦІЯ

СТІЙКІ КОГЕРЕНТНІ СТРУКТУРИ В БОЗЕ-КОНДЕНСАТАХ АТОМАРНИХ ГАЗІВ

01.04.02 – Теоретична фізика

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання чужих ідей, результатів і текстів мають посилання на відповідне джерело.

____К.О. Ісаєва

Науковий керівник: Якименко Олександр Ілліч, доктор фіз.-мат. наук, доцент

АНОТАЦІЯ

Ісаєва К.О. Стійкі когерентні структури в Бозе-конденсатах атомарних газів. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізикоматематичних наук за спеціальністю 01.04.02 «Теоретична фізика». – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України, Київ, 2017.

Ця дисертаційна робота присвячена теоретичному дослідженню нелінійних структур в Бозе-конденсатах атомарних газів. Була розглянута стабільність таких структур, як просторові солітони та квантові вихори.

Широко відомо, що світлі двовимірні та тривимірні солітони, що описуються рівнянням Гроса-Пітаєвського з притягальною нелінійністю, є нестабільними та можуть колапсувати за скінчену кількість часу. Цей колапс настає, якщо число атомів в конденсаті перевищує певне критичне значення. Як це було показано в попередніх роботах, іншим прикладом нестійких систем є солітон-солітонні пари за відсутності лінійного потенціалу. З іншої точки зору, можна очікувати того, що при додаванні зовнішнього утримуючого потенціалу фундаментальні векторні солітони зможуть бути стабільними. Загальні властивості таких систем були досліджені за допомогою варіаційного аналізу та чисельного моделювання. Були знайдені умови існування та стабільності хвильових солітонів. Розглядалися випадки притягальної та відштовхувальної взаємодії між атомами різних типів. Було показано, що у випадку притягальної міжкомпонентної взаємодії векторні солітони завжди є стійкими. Для відштовхувальної міжкомпонентної взаємодії було виявлено декілька механізмів втрати стабільності солітон-солітонних пар: радіально-симетричний колапс, просторовий розділ компонент та філаментація кільцеподібної компоненти. Було

визначено, що наявність колапсу компоненти визначається числом атомів у ній: якщо число частинок більше за критичне, відбувається колапс. Розділення фаз в двокомпонентному Бозе-конденсаті та розпад кільцеподібного солітону зв'язані з азимутальною нестабільністю та були досліджені за допомогою лінійного аналізу Боголюбова. Були визначені області стабільності солітон-солітонних пар. Таким чином, було доведено, що додавання утримуючого гармонічного потенціалу стабілізує векторні солітони в Бозе-Ейнштейнівських конденсатах.

Надплинні потоки, або «потоки без тертя» є проявом надплинності та вивчалися в рідкому гелії протягом кількох десятиліть. Такі потоки можуть також виникати в Бозе-Ейнштейнівських конденсатах. Наприклад, задача про багатозарядні надплинні потоки була реалізована експериментально для газів, утворених з ⁸⁷Rb в різних спінових станах, у тороїдальних пастках. Було знайдено, що існує критичне співвідношення між числом частинок у компонентах, вище якого багатозарядний надплинний потік може залишатися стійким протягом кількох хвилин. Нижче цього відношення надплинний потік руйнується протягом кількох секунд. Для того, щоб описати цей експеримент, надплинний потік атомарного спінорного Бозе-конденсату, що був поміщений в оптичну пастку кільцеподібної геометрії, був досліджений з використанням підходу середнього поля із додаванням дисипації. Двокомпонентний конденсат був змодельований в умовах, наближених до експериментальних. В рамках цього підходу була досягнена якісна відповідність результатам експерименту. Зокрема, у випадку значення дисбалансу між числом атомів, вищого за критичне, спостерігався стабільний надплинний потік. Нижче цієї границі мультизарядні надплинні потоки руйнуються дискретними кроками, коли ядра вихорів виходять з центру кільця крізь динамічно утворені «слабкі ланки» у кільці конденсату. Ці регіони зниженої густини однієї спінової компоненти наповнюються атомами іншої компоненти Таким чином, вихори можуть покидати кільцеподібний регіон високої густини, та, врешті, розпадатися на елементарні збурення. Для порівняння отриманого результату з іншим набором спінових проекцій було представлено дослідження двокомпонентної системи зі спіновими проекціями $m_f = \pm 1$. Було показано, що на відміну від результатів для спінових проекцій $m_f = 0,1$, такі системи є дуже нестабільними по відношенню до малих азимутальних збурень навіть за відсутності дисипації, що призводить до швидкого утворення слабких ланок в кільці конденсату. Ця особливість призводить до надзвичайної нестійкості надплинних потоків в даних системах.

Утворення квантових вихорів та їхня динаміка щільно пов'язана з руйнуванням надплинних потоків та турбулентністю в квантових рідинах та Бозе-Ейнштейнівських атомарних конденсатах. Налплинний потік В тороїдальній пастці може бути утворений шляхом передачі дискретного моменту імпульсу від оптичного поля або шляхом перемішування відштовхуючим лазерним пучком. Друга можливість була реалізована в експерименті з вихорами в тороїдальній пастці, що збуджувалися за допомогою малого (з діаметром, меншим за ширину кільця) потенціальним бар'єром зі змінною висотою з швидкістю обертання, що лежала в межах між нулем та швидкістю звуку в конденсаті. Умови генерації надплинного потоку були визначені експериментально, проте експеримент не здатний описати мікроскопічний механізм процесу. Для того, щоб зробити це, був досліджений мікроскопічний механізм збудження вихорів та формування надплинного потоку В кільцеподібному Бозе-Ейнштейнівському конденсаті, що перемішувався відштовхуючим оптичним пучком. Дисипативна динаміка конденсату з параметрами, що відображають реалістичні експериментальні умови, була досліджена в рамках двовимірної моделі середнього поля. Пари вихор-антивихор виникають біля центру перемішувача в речовині конденсату для повільної швидкості обертання перемішуючого пучка. Коли кутова швидкість бар'єру перевищує певне критичне значення, розвивається зовнішня поверхнева мода, яка згодом розпадається на вихори, що входять до кільця конденсату. Були визначені умови створення вихрових збуджень в тороїдальному конденсаті, що

перемішується. Результати якісно узгоджуються з експериментальними спостереженнями.

Наявність надплинного потоку в надплинній рідині пов'язана з існуванням стійкого квантового вихору, що є локалізованою сингулярністю фази з цілим числом намотки. Оскільки наявність вихору всередині речовини Бозеконденсату коштує енергії, в тороїдальній геометрії кільце конденсату перешкоджає вихори від виходу з центрального регіону системи, що стабілізує навіть мультизарядні надплинні потоки. Таким чином, стани з ненульовим надплинним потоком є метастабільними станами. Локальні енергетичні мінімуми можуть бути досить легко знайдені – це метастабільні стани з різними топологічними зарядами. Однак, значення енергетичного бар'єру, що розділяє ці метастабільні стани, в загальному невідоме.

Представлено метод для оцінки енергетичного бар'єру між різними надплинними станами. Головна ідея методу полягає в параметризації хвильової функції конденсату лише двома параметрами, в якості яких були обрані координати вихору та антивихору. Рух цих топологічних дефектів був наближено представлений прямою лінією, що йде через цент ями, утвореної слабкою ланкою. Пробні хвильові функції були утворені за допомогою вдруковування вихорів у різні позиції в хвильову функцію-підкладку, після чого еволюціонували в уявному часі. В той час як анзац із вдрукованими вихорами відображає далекодіючу поведінку Бозе-Ейнштейнівського конденсату, він не може достатньо добре описати короткодіючі варіації фази та густини. Було знайдено, що значення, що метод дає для критичної частоти обертання, добре узгоджується зі значеннями, отриманими за допомогою безпосереднього моделювання динаміки та еволюції в уявному часі. Представлений аналіз також дозволяє знайти оптимальну траєкторію між стаціонарними станами. Ці траєкторії, разом із узагальненим виразом типу Арреніуса для швидкості стохастичних проковзувань фази, що був виведений з рівняння Фокера-Планка та деяких наближень, були використані для знаходження часу переходу. Було показано, що додавання теплового шуму знижує границю між переходами. Однак, кількісний внесок стохастичних проковзувань фази виявився надто малим, щоб пояснити суттєву різницю між теоретичними та експериментальними результатами.

Ключові слова: Бозе-конденсат, спінорний Бозе-конденсат, солітон, векторні солітони, надплинні системи, квантовий вихор, надплинний потік, проковзування фази.

Список публікацій:

- Yakimenko A. I. Stable bright solitons in two-component bose-einstein condensates / A. I. Yakimenko, K. O. Shchebetovska, S. I. Vilchinskii, M. Weyrauch // Physical Review A — 2012. — Vol. 85, No. 5. — P. 1–8.
- 2. *Yakimenko A. I.* Stability of persistent currents in spinor bose-einstein condensates / A. I. Yakimenko, K. O. Isaieva, S. I. Vilchinskii, M. Weyrauch // Physical Review A 2013. Vol. 88, No. 5. P. 1–5.
- 3. Vilchynskyy, S. I. The nature of superfluidity and Bose-Einstein condensation: From liquid ⁴He to dilute ultracold atomic gases (Review Article) / S. I. Vilchynskyy, A. I.Yakimenko, K. O.Isaieva, A. V.Chumachenko // Физика низких температур. – 2013. – Т. 39, № 9. – С. 724–740.
- Yakimenko A. I. Vortex excitation in a stirred toroidal bose-einstein condensate / A. I. Yakimenko, K. O. Isaieva, S. I. Vilchinskii, E. A. Ostrovskaya // Physical Review A — 2015. — Vol. 91, No. 2. — P. 1–7.
- 5. *Yakimenko A. I.* Generation and decay of persistent currents in a toroidal boseeinstein condensate / A. I. Yakimenko, S. I. Vilchinskii, Y. M. Bidasyuk[et al.] // Romanian Reports in Physics. — 2015. — Vol. 67, No. 1. — P. 249–272.
- 6. *Snizhko K*. Stochastic phase slips in toroidal bose-einstein condensates / K. Snizhko, K. Isaieva, Y. Kuriatnikov[et al.] // Physical Review A. 2016. Vol. 94, No. 6. P. 63642.
- Shchebetovska K. O. Bright solitons in two-component bose-einstein condensates / K. O. Shchebetovska, A. I. Yakimenko, S. I. Vilchynskii, M. Weyrauch // Book of abstracts III Conference of Young Scientists Modern Problems of Theoretical Physics. — 21-23 December 2011. — P. 106.
- Щебетовська К. О. Стійкі нелінійні структури в двокомпонентних бозеконденсатах / К. О. Щебетовська, О. І. Якименко, С. Й. Вільчинський, М. Weyrauch // 12-та Всеукраїнська школа-семінар та конкурс молодих вчених, збірка тез. — 30 травня – 1 червня 2012. — Р. 43.
- 9. Isaieva K. O. Two-dimensional solitons in binary mixtures of bose-condensates /

K. O. Isaieva, A. I. Yakimenko, S. I. Vilchynskii, M. Weyrauch // Book of abstracts International Conference on Problems of Theoretical Physics. — 8-11 October 2012. — P. 86.

- Isaieva K. O. Nonlinear structures in two-dimensional multicomponent trapped bec / K. O. Isaieva, A. I. Yakimenko, S. I. Vilchynskii, M. Weyrauch // Book of abstracts IV Conference of Young Scientists Modern Problems of Theoretical Physics. — 23-26 October 2012. — P. 99.
- Isaieva K. O. Persistent currents in toroidal spinor bose-einstein condensates / K. O. Isaieva, A. I. Yakimenko, S.I.Vilchinckii, M. Weyrauch // Book of abstracts V Conference of Young Scientists Problems of Theoretical Physics. 24-27 December 2013. P. 38

SUMMARY

Isaieva K.O. Stable coherent structures in Bose-condensates of atomic gases. – Qualifying scientic work with the rights of manuscript.

Thesis for the Doctor of Philosophy degree (Candidate of science in Physics and Mathematics) in a speciality 01.04.02 "Theoretical physics". – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the NAS of Ukraine, Kyiv, 2017.

This thesis is devoted to the theoretical study of nonlinear structures in Bose-Einstein condensates of atomic gases. Stability of such structures as spatial solitions and quantum vortices was investigated.

As it is well known, bright two-dimensional and three-dimensional solitons, described by a Gross-Pitaevskii equation with attractive nonlinearity, are unstable and may collapse in a finite amount of time. This collapse appears in the case when number of atoms in the condensate exceeds some critical value. As it was found in previous works, another example of unstable system is soliton-soliton pairs without linear potential. From another hand, it is reasonable to expect that a stabilization of fundamental vector solitons could occur in an additional external trapping potential. General properties of the steady states of such systems were investigated by means of a variational analysis and numerical simulations. The conditions for the existence and stability of matter wave vector solitons are revealed. Both attractive and repulsive interactions between atoms of different types are considered. It was shown that in case of attractive intercomponent interaction vector solitons are always stable. For repulsive cross-interaction, it was found that there are several mechanisms of losing stability of the vector solitons: radially-symmetric collapse, space separation of the components and filamentation of the ring-shaped component. It was demonstrated that stability of the component is determined by number of atoms in it: if the particle number is greater than the critical one, collapse occurs. Phase separation in two-component Bose-Einstein condensates and break of the ring-shaped soliton are related to azimuthal

instability and were investigated with Bogoliubov linear analysis. The stability regions of the soliton-soliton pairs are determined. Thus, it was proved that the addition of harmonic external trap stabilizes vector solitions in Bose-Einstein condensates.

Persistent currents, or "flows without friction," as a hallmark of superfluidity have been studied in liquid helium for several decades. Such atomic flows can also appear in Bose-Einstein condensate. For instance, problem of multicharged persistent currents has been addressed experimentally for a toroidally trapped gas of ⁸⁷Rb atoms in two different spin states. It was found that there is a critical ratio between atoms number in the components, above which multicharged supercurrent can persist for several minutes. Persistent current breaks in few seconds below this ratio. In order to describe this experiment, the superflow of atomic spinor Bose-Einstein condensates optically trapped in a ring-shaped geometry was investigated with the use of a dissipative mean-field approach. Two-component condensate was simulated in conditions adapted to the experimental ones. In the framework of this approach, a good agreement with the experiment was obtained. In particular, stable superflow if the spinpopulation imbalance is above some well-defined threshold value was observed. Below the stability threshold the persistent currents with higher-order circulation decay in quantized steps, and the vortex lines escape from the center of the ring through dynamically created "weak links" in the condensate annulus. These regions with reduced density of one spin component are filled by atoms of the other component. The vortices then leave the ring-shaped high-density region of the condensate and finally decay into elementary excitations. For comparison of obtained results with another set of spin projections, investigations of two-component system with spin-projections $m_f = \pm 1$ were presented. It was shown that in contrast with results for spin projections $m_f = 0,1$, such systems are strongly unstable with respect to small azimuthal perturbations even without dissipation, that leads to rapid creation of weak links in condensate ring. This feature makes existence of persistent current extremely fragile in this system.

Nucleation of quantized vortices and their dynamics are closely associated with superflow decay and turbulence in quantum fluids and atomic Bose-Einstein condensates. A persistent flow in a toroidal trap can be created by transferring a quantized angular momentum from optical fields or by stirring with rotating blue-detuned laser beam. The second possibility was implemented in experiment with vortices in a toroidal trap which were excited using a small (diameter less than the width of the annulus) variable-height potential barrier with an angular velocity ranging from zero up to the speed of sound in the condensate. Conditions of the supercurrent generation were determined experimentally, however an experiment fails to describe the microscopic mechanism of the process. In order to do this, the microscopic mechanism for excitation of vortices and formation of a persistent current in an annular Bose-Einstein condensate stirred by a narrow blue-detuned optical beam was investigated. The dissipative dynamics of the condensate with parameters that reflect the realistic experimental conditions were studied in the framework of a two-dimensional mean field model. Vortex-antivortex pairs appear near the center of the stirrer in the bulk of the condensate for slow motion of the stirring beam. When the barrier angular velocity is above some critical value, an outer edge surface mode develops and breaks into the vortices entering the condensate annulus. Conditions for creation of the vortex excitations in the stirred toroidal condensate were determined. Results are in qualitative agreement with the experimental observations.

The existence of a persistent current in a superfluid is related to a stable quantized vortex, which is a localized phase singularity with integer winding number. Since having a vortex inside the Bose-Einstein condensate bulk costs energy, in toroidal geometry the condensate ring prevents vortices from exiting the system central region, which stabilizes even multicharged persistent currents. Thus, the states with nonzero persistent current are metastable states. It is easy to find the local energy minima— the metastable states with different topological vortex charges. However, the value of the energy barrier that separates these metastable states is not generally known.

A method to estimate the energy barrier separating different superflow states is presented. The main idea of the method is to parameterize the condensate wavefunction by only two parameters, which are chosen to be coordinates of the vortex and anti-vortex cores. Motion of these topological defects is approximated by the straight line, going through the center of the well, formed by a weak-link. Trial wave functions were created by imprinting vortices and antivortices at different positions into a background wave function and then were evolved in imaginary time. While the imprinted vortices' ansatz captures the long-range behavior of Bose-Einstein condensate phase, it does not describe well enough short-range variations of Bose-Einstein condensate phase and density. It was found that the value that method gives for the critical frequency of barrier rotation that is in good agreement with ones given by direct dynamical simulations and imaginary time propagation method. Presented energy analysis also allows finding the optimal trajectory of transition between stationary states. Together with generalized Arrhenius-like expression for the rate of stochastic phase slips, that was developed using the Fokker-Planck equation and some approximations, the optimal trajectories were used for calculation of transition time. It was shown that adding thermal noise lowers the phase-slip threshold. However, the quantitative impact of the stochastic phase slips turns out to be too small to explain the significant discrepancy between theoretical and the experimental results.

Key words: Bose-condensate, spinor Bose-condensate, soliton, vector solitons, superfluid systems, quantum vortex, persistent current, phase-slip.

List of publications:

- Yakimenko A. I. Stable bright solitons in two-component bose-einstein condensates / A. I. Yakimenko, K. O. Shchebetovska, S. I. Vilchinskii, M. Weyrauch // Physical Review A — 2012. — Vol. 85, No. 5. — P. 1–8.
- 2. *Yakimenko A. I.* Stability of persistent currents in spinor bose-einstein condensates / A. I. Yakimenko, K. O. Isaieva, S. I. Vilchinskii, M. Weyrauch // Physical Review A 2013. Vol. 88, No. 5. P. 1–5.
- Vilchynskyy, S. I. The nature of superfluidity and Bose-Einstein condensation: From liquid ⁴He to dilute ultracold atomic gases (Review Article) / S. I. Vilchynskyy, A. I.Yakimenko, K. O.Isaieva, A. V.Chumachenko // Физика

низких температур. – 2013. – Т. 39, № 9. – С. 724–740.

- Yakimenko A. I. Vortex excitation in a stirred toroidal bose-einstein condensate / A. I. Yakimenko, K. O. Isaieva, S. I. Vilchinskii, E. A. Ostrovskaya // Physical Review A — 2015. — Vol. 91, No. 2. — P. 1–7.
- Yakimenko A. I. Generation and decay of persistent currents in a toroidal boseeinstein condensate / A. I. Yakimenko, S. I. Vilchinskii, Y. M. Bidasyuk[et al.] // Romanian Reports in Physics. — 2015. — Vol. 67, No. 1. — P. 249–272.
- 6. *Snizhko K*. Stochastic phase slips in toroidal bose-einstein condensates / K. Snizhko, K. Isaieva, Y. Kuriatnikov[et al.] // Physical Review A. 2016. Vol. 94, No. 6. P. 63642.
- Shchebetovska K. O. Bright solitons in two-component bose-einstein condensates / K. O. Shchebetovska, A. I. Yakimenko, S. I. Vilchynskii, M. Weyrauch // Book of abstracts III Conference of Young Scientists Modern Problems of Theoretical Physics. — 21-23 December 2011. — P. 106.
- Щебетовська К. О. Стійкі нелінійні структури в двокомпонентних бозеконденсатах / К. О. Щебетовська, О. І. Якименко, С. Й. Вільчинський, М. Weyrauch // 12-та Всеукраїнська школа-семінар та конкурс молодих вчених, збірка тез. — 30 травня – 1 червня 2012. — Р. 43.
- Isaieva K. O. Two-dimensional solitons in binary mixtures of bose-condensates / K. O. Isaieva, A. I. Yakimenko, S. I. Vilchynskii, M. Weyrauch // Book of abstracts International Conference on Problems of Theoretical Physics. — 8-11 October 2012. — P. 86.
- Isaieva K. O. Nonlinear structures in two-dimensional multicomponent trapped bec / K. O. Isaieva, A. I. Yakimenko, S. I. Vilchynskii, M. Weyrauch // Book of abstracts IV Conference of Young Scientists Modern Problems of Theoretical Physics. — 23-26 October 2012. — P. 99.
- Isaieva K. O. Persistent currents in toroidal spinor bose-einstein condensates / K. O. Isaieva, A. I. Yakimenko, S.I.Vilchinckii, M. Weyrauch // Book of abstracts V Conference of Young Scientists Problems of Theoretical Physics. 24-27 December 2013. P. 38

Перелік с	скорочень1	8
Вступ		9
Розділ 1	Бозе-конденсація розріджених атомарних газів2	4
1.1 Я	Івище Бозе-конденсації та напрями його застосування24	4
1.1.1	Бозе-конденсати та методи їхнього експериментальног	0
отримання	24	
1.1.2	Надплинність у Бозе-конденсатах2	5
1.1.3	Практичне застосування Бозе-конденсатів2	6
1.2 C	Основні теоретичні відомості про Бозе-конденсати2	7
1.2.1	Рівняння Гроса-Пітаєвського2	7
1.2.2	БЕК у пастках	1
1.3 B	Відомості про спінорні Бозе-конденсати	2
1.4 N	Лодель дисипації	6
1.5 H	Іаближені методи дослідження БЕКЗ	9
1.5.1	Наближення Томаса-Фермі	9
1.5.2	Варіаційний аналіз4	0
1.5.3	Лінійний аналіз Боголюбова - де Жена4	0
1.6 Ч	Іисельні методи4	1
1.6.1	Методи інтегрування стаціонарної задачі4	1
1.6.2	Split-step метод моделювання динаміки4	6
1.7 B	висновки	9
Розділ 2	Стійкі світлі солітони в двокпонентних Бозе-конденсатах 5	0
2.1 N	Иодель	3

2.2	Стаціонарні розв'язки	5
2.2.	1 Притягальна міжкомпонентна взаємодія ($\boldsymbol{\sigma} > 0$) 56	5
2.2	2 Відштовхувальна міжкомпонентна взаємодія ($\sigma < 0$) 60)
2.3	Аналіз стійкості 64	1
2.3	1 Варіаційний аналіз 64	1
2.3	 Лінійний аналіз	5
2.3	3 Моделювання динаміки системи 67	7
2.4	Висновки)
Розді	л 3 Стабільність надплинних потоків в спінорних Бозе-	
	конденсатах 71	
3.1	Модель	3
3.1	1 Рівняння для спінорних Бозе-конденсатів	3
3.1	2 Початкові розподіли 80)
3.2	Результати моделювання динаміки	L
3.2	1 Процес проковзування фази (phase slip) 82	2
3.2	 Режими стійкості	5
3.2	3 Порівняння з експериментом 89)
3.3	Динаміка спінорних конденсатів з іншим набором спінових	ζ
проекцій	90	
3.4	Висновки	<u>)</u>
Розділ	4 Збудження вихорів у тороїдальному Бозе-конденсаті, що	
	перемішується 93	
4.1	Модель	ł
4.2	Основний стан: стаціонарні розв'язки та спектр збуджень 97	7

15

4.3 Д	Цисипативна динаміка тороїдального конденсату, п	Ю					
перемішується101							
4.4 B	Зисновки)8					
Розділ 5	Енергетичний аналіз квантових переходів у тороїдальни	X					
Бозе-конденсатах 109							
5.1 N	Иодель11	10					
5.2 Д	Цинамічний та енергетичний аналіз детерміністични	1X					
проковзувань фази114							
5.2.1	Динаміка детерміністичних проковзувань фази11	14					
5.2.2	Наближений енергетичний аналіз проковзувань фази1	16					
5.2.3	Еволюція в уявному часі та проковзування фази 12	20					
5.2.4	Покращений аналіз енергетичної поверхні12	21					
5.3 B	Зплив шуму на проковзування фази12	22					
5.3.1	Рівняння Фокера-Планка для БЕК з шумом12	24					
5.3.2	Одновимірне наближення рівняння Фокера-Планка та ча	ac					
переходу	125						
5.3.3	Алгоритм розрахунку часу переходу та ймовірнос	тi					
проковзува	ання фази12	29					
5.3.4	Результати для розрахунку часів переходів та ймовірнос	тi					
переходів д	для викликаних температурою проковзувань фази13	30					
5.3.5	Аналіз отриманих результатів та шляхи їхнього покращени	RF					
	132						
5.4 B	Зисновки	34					
Висновки	и13	36					

Список використаних джерел.....138

Додаток А. Список публікацій за темою дисертації та відомості про			
апробацію результатів дисертації			
А.1 Список публікацій			
А.2 Апробація результатів дисертації			

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

- БЕК Бозе-Ейнштейнівський конденсат
- РГП рівняння Гроса-Пітаєвського
- НУШ нелінійне рівняння Шрьодінгера
- РФП рівняння Фокера-Планка

ВСТУП

Актуальність теми. Бозе-конденсація є унікальним явищем, здатним демонструвати квантові ефекти на макроскопічному рівні. Серед таких проявів можна виділити атомну інтерференцію, надплинність, тунелювання речовини Бозе-Ейнштейнівсього конденсату (БЕК) крізь потенціальний бар'єр. Окрім безперечного фундаментального інтересу до макроскопічних квантових систем, всі ці властивості дозволяють створювати надчутливі вимірювальні прилади на основі Бозе-конденсатів, включаючи атомарний аналог надпровідних інтерферометрів (SQUID) та атомні «рівні», що дозволяють вимірювати прискорення з надзвичайною точністю.

В останні часи все більш доступними стають експерименти з Бозе-Ейнштейнівськими конденсатами, таким чином виникає все більша потреба в їхньому теоретичному описі. Зокрема, корисним є теоретичне дослідження стійкості таких нелінійних структур, як просторові солітони та вихори. Прості теоретичні моделі дають добре узгодження з експериментальними даними і відкривають можливості для дослідження явищ, просторово-часові масштаби яких лежать далеко за межами роздільної здатності сучасних експериментальних приладів. Зокрема, в дисертаційній роботі проведений аналіз стійкості солітонсолітонних пар, досліджені умови існування квантових вихорів, в тому числі багатокомпонентних конденсатах.

Завдяки тому, що в наближенні середнього поля Бозе-конденсат можна описати за допомогою рівняння Гроса-Пітаєвського, що є узагальненням відомого нелінійного рівняння Шрьодінгера, результати дисертаційної роботи можуть бути використані в інших областях нелінійної науки, при дослідженні таких середовищ, як нелінійні оптичні середовища або плазма. Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалася згідно з науково-дослідними темами фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка: тема №16БФ051-05 "Дослідження фундаментальних проблем фізики ядра, елементарних частинок та космомікрофізики"; тема ДФФД Ф39.2 "Стійкі локалізовані структури в мультикомпонентних нелінійних системах" (№ держ. реєстрації 0111U008990).

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є встановлення фізичних закономірностей формування стійких нелінійних структур у Бозе-Ейнштейнівських конденсатах атомарних газів, встановлення впливу параметрів конденсату та конфігурації зовнішніх електромагнітних полів на їхню стійкість.

Для досягнення поставленої мети необхідно було вирішити такі задачі:

- Дослідити солітонні розв'язки двовимірної системи рівнянь Гроса-Пітаєвського з аксіально-симетричною гармонійною пасткою в якості утримуючого потенціалу у випадку притягальної взаємодії між частинками одного сорту та різними варіантами міжкомпонентної взаємодії.
- Проаналізувати умови існування надплинного потоку, утвореного двокомпонентним спінорним Бозе-конденсатом у тороїдальній оптичній пастці для різних значень співвідношення населеностей для випадку різних наборів спінових проекцій компонент.
- Знайти умови, за яких відбувається утворення надплинних потоків у тороїдальних Бозе-конденсатах атомарних газів.
- Провести кількісний аналіз величини енергетичного бар'єру, необхідної для переходів між метастабільними станами в системі тороїдального конденсату

Об'єктом дослідження є нелінійні хвильові структури в Бозе-Ейштейнівських конденсатах атомарних газів. **Предметом** дослідження є динамічні властивості когерентних структур в Бозе-конденсатах та їхня стійкість.

Методи дослідження: варіаційний метод наближеного знаходження стаціонарних розв'язків, лінійний аналіз Боголюбова-де Жена, чисельні методи розв'язків стаціонарних крайових задач (метод Петвіашвілі та метод Ньютона-Рафсона), чисельний метод інтрегрування нелінійних диференційних рівнянь в частинних похідних з розщепленням кроком (так званий split-step Fourier transform).

Наукова новизна одержаних результатів:

- Вперше було встановлено, що гармонійний утримуючий потенціал стабілізує солітон-солітонні пари в Бозе-конденсаті з притягальною міжкомпонентною взаємодією та знайдено область існування таких пар в просторі хімічних потенціалів.
- Знайдено критичне значення співвідношення населеностей компонент у спінорних Бозе-конденсатах, за якої відбувається руйнування надплинного потоку речовини
- Показано, що характер та тривалість еволюції двокомпонентних спінорних Бозе-конденсатів залежать від значення спінових проекцій компонент.
- Встановлено, що швидкість руху перемішуючого пучка визначає механізм утворення надплинного потоку речовини у тороїдальних Бозе-Ейнштейнівських конденсатах.
- Вперше визначено залежність висоти потенціального бар'єру між нерухомим та обертальним станами тороїдального Бозе-конденсату від частоти обертання широкого оптичного перемішуючого пучка
- Розраховано час стохастичного переходу між нерухомим та обертальним станом тороїдального Бозе-конденсату при різних температурах.

Практичне значення одержаних результатів. Отримані в роботі результати сприяють більш широкому розумінню процесів формування та еволюції стійких нелінійних структур в Бозе-конденсатах атомарних газів. Використана теоретична модель дозволила пояснити результати експериментів з Бозе-конденсатах. потоками В тороїдальних Теоретичні надплинними областей стійкості солітон-солітонних передбачення пар можуть бути використані для створення надчутливих вимірювальних приладів, таких як «атомний рівень».

Особистий внесок здобувача. Усі викладені в дисертації оригінальні результати отримані автором дисертації особисто. Дисертантка проводила аналітичні та чисельні розрахунки, давала інтерпретацію результатів. Автор аналітично та чисельно досліджувала стійкість солінтон-солітонних пар та розраховувала область стійкості в просторі хімічних потенціалів у роботі [1], приймала участь у виборі моделі та робила чисельні розрахунки для знаходження критичного значення співвідношення населеностей компонент у спінорних Бозеконденсатах, давала якісну інтерпретацію механізмів руйнування надплинного потоку для різних наборів спінових компонент у роботах [2, 3], чисельно досліджувала умови генерації вихорів за допомогою вузького лазерного пучка в роботах [4, 5]. У роботі [6] здобувач приймала участь у розробці алгоритмів для аналізу енергетичної поверхні та здійснювала відповідні розрахунки, обчислювала час переходу між станами.

Апробація результатів дисертації. Основні результати роботи були представлені на конференціях та семінарах Conference of Young Scientists Modern Problems of Theoretical Physics, 21-23 грудня 2011 р., Київ, Conference on Problems of Theoretical Physics, 8-11 жовтня 2012 р., Київ, IV Conference of Young Scientists Modern Problems of Theoretical Physics, 23-26 жовтня 2012 р., Київ, VI Young Scientists Conference Problems of Theoretical Physics, 24-27 грудня 2013 р., Київ та на міжнародній школі Summer School on Quantum Many-Body Physics of Ultra-

Cold Atoms and Molecules, 2-13 липня 2012 р., Trieste, Italy. Результати також були представлені на семінарі відділу теорії нелінійних процесів у конденсованих середовищах Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України 19 червня 2017 року.

Публікації. Основні результати дисертації було опубліковано в 6 статтях у провідних фахових журналах [1–6]. Отримані результати також висвітлено в опублікованих матеріалах наукових конференцій [7–11].

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, п'яти розділів, списку використаних джерел, що містить 79 найменування. Робота написана на 147 сторінках тексту, включає 39 рисунків.

1.1 Явище Бозе-конденсації та напрями його застосування

1.1.1 Бозе-конденсати та методи їхнього експериментального отримання

Бозе-конденсація — це явище, що виникає за наднизьких температур (порядку кількох нанокельвінів). Унікальною властивістю таких систем є можливість спостерігати квантові явища на макроскопічних масштабах. Поки довжина хвилі де-Бройля $\lambda_{dB} = \hbar/(2Mk_BT)^{1/2}$ мала порівняно з відстанню між атомами, рух може бути описаний за допомогою класичних траєкторій. При зниженні температур ця величина поступово зростає. Квантове виродження відбувається, коли довжина хвилі де-Бройля стає одного порядку з відстанню між атомами. При цьому хвильові пакети атомів перетинаються та весь конденсат можна описувати за допомогою єдиної хвильової функції (параметру порядку) [12].

Для досягнення таких наднизьких температур використовується техніка, що складається з трьох основних етапів:

- Лазерне охолодження, яке дозволяє охолодити атоми за допомогою застосування ефекту Доплера
- Магнітне та оптичне захоплювання, що дозволяє ізолювати атоми та робити з ними певні маніпуляції
- Випаровування найшвидших атомів, що реалізується за допомогою підібраних належним чином параметрів пастки. Завдяки третьому етапу охолодження досягаються вже потрібні температури, проте велика кількість атомів при цьому втрачається.

За розвинення досліджень, пов'язаних з експериментальним отриманням БЕК, було оголошено дві Нобелівських премії: у 1997 році ("За розвинення методів охолодження та захоплення атомів за допомогою лазерного світла") та у 2001 ("За отримання Бозе-конденсату в розріджених газах лужних атомів, за ранні фундаментальні дослідження властивостей конденсатів"). На сьогоднішній день область науки, пов'язана з експериментальною реалізацією цього явища, добре розвинена. Це відкриває цікаві перспективи для проведення теоретичних досліджень Бозе-конденсації [13].

1.1.2 Надплинність у Бозе-конденсатах

Добре відомо, що надплинні рідини відрізняються від звичайних своєю властивістю рухатися без дисипації. Велика кількість явищ, що вже багато років досліджуються в рідкому ⁴Не, знайшли своє відображення в надхолодних атомарних газах.

Надплинні потоки тісно пов'язані з наявністю квантових вихорів, що є локалізованими фазовими сингулярностями з цілим топологічним зарядом. Надплинний вихор – це приклад топологічного дефекту, що є добре відомим у рідкому гелії та надпровідниках. Після численних спроб такі квантові вихори, а також ланцюжки вихорів, були отримані в атомарних конденсатах [14–16]. Перший звук [17, 18], ножичні моди [19] або критична швидкість [20], вище якої надплинний потік руйнується, є прикладами прояву цього визначного макроскопічного квантового явища в ультрахолодних атомних системах.

Відомо, що для ⁴Не розмір вихрових ядер складає порядку кількох Å, що є набагато меншим довжини хвилі видимого діапазону, тому їх неможливо побачити за допомогою оптичних приладів. Для Бозе-конденсатів характерні розміри вихрових ядер є набагато більшими ($\sim 0.3 \mu m$). Але все одно такі розміри знаходяться на межі роздільної здатності оптичних приладів. Тому для експериментального визначення моменту імпульсу системи використовується техніка time-of-flight (часопрольотна техніка). Вона полягає в тому, що конденсат «відпускається» з пастки, після чого (через декілька мікросекунд) просвічується. Значення густини визначається із розподілу тіні. Розподіли густини допомагають

визначити величину заряду вихору: чим більший центральний отвір у кільці, тим більший заряд, причому розмір цього отвору може приймати лише дискретні значення, що підтверджує квантову природу надплинних потоків[21]. Конденсати, що не обертаються, мають максимум у центрі на time-of-flight зображеннях.

1.1.3 Практичне застосування Бозе-конденсатів

Практична користь Бозе-конденсації атомарних газів є подвійною: з одного боку, БЕК може бути застосований для створення атомних лазерів, надчутливих вимірювальних приладів та квантових комп'ютерів; для пояснення таких явищ, як надплинність та надпровідність [13]. З іншого боку, БЕК являє собою нелінійну систему, яку можна описати за допомогою нелінійного рівняння Шрьодінгера (НРШ). Це рівняння є достатньо універсальним, таким чином дослідження Бозе-конденсатів може дати відповідь на запитання, пов'язані з нелінійною оптикою, дослідженнями плазми, тощо [22].

Багатокомпонентні Бозе-конденсати можуть бути отримані з атомів різного сорту (⁴¹K-⁸⁵Rb, ³⁹K-⁸⁵Rb, ⁸⁵Rb-⁸⁷Rb) [23], або ж атомів одного сорту у різних спінових станах (спінорні конденсати) [24]. Цікавими є практичне застосування таких конденсатів. Експериментальна реалізація БЕК 3 розділеними в просторі компонентами передбачає можливість створення "атомного рівня". Цей прилад міг би визначати прискорення з точністю 5 · 10⁻⁹ м/с² та базується на вимірюванні положення одної компоненти конденсату відносно іншої. Це відкриває перспективи для надточного визначення напруженості магнітних полів, для перевірки ефекту Казиміра, для вивчення міжатомних сил [25]. Ще одне явище, що спостерігається у двокомпонентних БЕК - це інтерференція. Оскільки довжина хвиль де-Бройля для Бозе-конденсату дуже велика, спостереження за інтерференційною картиною в умовах вільного

падіння може бути використано для надзвичайно точної перевірки загальної теорії відносності [26].

Дуже плідним з точки зору створення надчутливих вимірювальних приладів є надплинні Бозе-конденсати. Одним із таких приладів є атомарний SQUID (superconductive quantum interference device, або надпровідний квантовий інтерференційний прилад). На відміну від надпровідних SQUID, що дозволяють вимірювати магнітні поля з дуже високою точністю, атомарний SQUID дозволяє вимірювати кутову швидкість надплинного Бозе-конденсату [27].

1.2 Основні теоретичні відомості про Бозе-конденсати

1.2.1 Рівняння Гроса-Пітаєвського

З теоретичної точки зору, Бозе-Ейнштейнівський конденсат (БЕК) може бути представлений як система бозонів. Гамільтоніан такої системи у формалізмі вторинного квантування записується наступним чином [28]:

$$\begin{aligned} \widehat{H} &= \int d\vec{r} \widehat{\Psi}^{+}(r) \left[-\frac{\hbar^{2}}{2m} \overrightarrow{\nabla}^{2} + V_{ext}(\vec{r}) \right] \widehat{\Psi}(r) + \\ &+ \frac{1}{2} \int d\vec{r} d\vec{r'} \widehat{\Psi}^{+}(\vec{r}) \widehat{\Psi}^{+}(\vec{r'}) V(\vec{r} - \vec{r'}) \widehat{\Psi}(\vec{r}) \widehat{\Psi}(\vec{r'}) \end{aligned}$$
(1.1)

де $\hat{\Psi}(\vec{r})$ та $\hat{\Psi}^+(\vec{r})$ оператори бозонних полів, що знищують та народжують частинку в точці \vec{r} , відповідно, та $V(\vec{r} - \vec{r'})$ – потенціал парної взаємодії. Відомо, що можна записати оператори народження та знищення сукупності частинок у вигляді розкладу по одночастинковим операторам народження та знищення: $\hat{\Psi}(\vec{r}) = \sum_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\vec{r}) \hat{a}_{\alpha}$. При цьому, оператори народження та знищення визначені наступним чином:

$$\hat{a}_{\alpha}^{+}|n_{0}, n_{1}, \dots, n_{\alpha}, \dots \rangle = \sqrt{n_{\alpha} + 1}|n_{0}, n_{1}, \dots, n_{\alpha} + 1, \dots \rangle,$$
(1.2)

$$\hat{a}_{\alpha}|n_{0},n_{1},\ldots,n_{\alpha},\ldots\rangle = \sqrt{n_{\alpha}}|n_{0},n_{1},\ldots,n_{\alpha}-1,\ldots\rangle,$$
 (1.3)

та відповідають комутаційним співвідношенням для бозонів:

$$\begin{bmatrix} a_{\alpha}(\vec{r}), a_{\beta}^{+}(\vec{r'}) \end{bmatrix} = \delta_{\alpha,\beta} \delta(\vec{r} - \vec{r'}), \ \begin{bmatrix} a_{\alpha}(\vec{r}), a_{\beta}(\vec{r'}) \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} a_{\alpha}^{+}(\vec{r}), a_{\beta}^{+}(\vec{r'}) \end{bmatrix} = 0,$$
(1.4)

Оскільки бозони не підкоряються принципу заборони Паулі, при прямуванні температури до абсолютного нуля більшість частинок потрапляє у найнижчий квантовий стан. Кількість атомів на основному енергетичному рівні описується співвідношенням $N_0 = N[1 - (T/T_{cr})^{3/2}], T < T_{cr}$. Таким чином, за досить низьких температур, коли частка конденсату є порівняно великою, замість розв'язання громіздкої задачі багатьох частинок, можна виділити у хвильовій функції конденсату член, який дорівнює середньому від польового оператору конденсату $\Psi(\vec{r},t) = \langle \hat{\Psi}(\vec{r},t) \rangle$, та мале збурення:

$$\widehat{\Psi}(\vec{r},t) = \Psi(\vec{r},t) + \widehat{\Psi}'(\vec{r},t).$$
(1.5)

Такий розклад називається анзацом Боголюбова, а комплексна функція $\Psi(\vec{r},t)$ називається середнім полем конденсату.

Густину конденсату, тоді, можна визначити, як $n_0(\vec{r},t) = |\Psi(\vec{r},t)|^2$. Також, вважатимемо конденсат достатньо розрідженим, таким, що у ньому переважають двохчастинкові зіткнення, та що атоми взаємодіють тільки під час зіткнень. Тоді потенціал парної взаємодії має вигляд $V(\vec{r} - \vec{r'}) = g\delta(\vec{r} - \vec{r'})$, де g – константа зв'язку, що виражається через довжину розсіяння в S-стані, як g = $4\pi\hbar^2 a/m$. Коефіцієнт зв'язку визначає силу та характер міжчастинкової взаємодії Бозе-конденсату. Додатне значення відповідає відштовхуванню (рубідій, натрій), в той час як від'ємне означає притягання (літій). Така техніка, як резонанс Фешбаха, дозволяє змінювати силу та навіть знак міжатомної взаємодії. [23]

Запишемо рівняння Гайзенберга для багаточастинкового Гамільтоніану:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \widehat{\Psi}(\vec{r},t) = [\widehat{\Psi}(\vec{r},t),\widehat{H}] =$$

$$= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V_{ext}(\vec{r}) + \int d\vec{r'} \widehat{\Psi}^+(\vec{r'},t) V(\vec{r}-\vec{r'}) \widehat{\Psi}(\vec{r'},t)\right] \widehat{\Psi}(\vec{r},t).$$
(1.6)

Після підстановки анзацу Боголюбова та врахування комутаційних співвідношень між операторами народження та знищення отримуємо рівняння Гроса-Пітаєвського:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t) = \left[\widehat{\Psi}(\vec{r},t),\widehat{H}\right] = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V_{ext}(\vec{r}) + g|\Psi(\vec{r},t)|^2\right]\Psi(\vec{r},t) \quad (1.7)$$

Рівняння (1.7) має наступні інтеграли руху:

(i) число частинок

$$N = \int |\Psi|^2 d\vec{r},\tag{1.8}$$

(іі) функціонал енергії

$$E = \int \left\{ |\nabla \Psi|^2 - V(\vec{r}) |\Psi|^2 - \frac{1}{2} |\Psi|^4 \right\} d\vec{r}, \qquad (1.9)$$

та (ііі) момент імпульсу

$$\vec{L} = -\frac{i}{2} \int (\Psi^*[\vec{r}, \vec{\nabla}\Psi] - \Psi[\vec{r}, \vec{\nabla}\Psi^*]) d\vec{r}.$$
(1.10)

Для того, щоб записати стаціонарне рівняння, параметр порядку має бути представлений у вигляді $\Psi(\vec{r},t) = e^{\frac{i}{\hbar}\mu t}\psi(\vec{r})$, де $\mu = E(N) - E(N-1) \approx \partial E / \partial N$ – хімічний потенціал конденсату. Стаціонарне рівняння має вигляд:

$$\mu\psi(\vec{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V_{ext}(\vec{r}) + g|\psi(\vec{r})|^2\right]\psi(\vec{r}),\tag{1.11}$$

Найнижчим за енергією розв'язком цього рівняння є солітон – поодинока хвиля. Детальніше ця нелінійна структура буде описана у розділі Розділ 2.

У випадку аксіально-симетричного потенціалу одним із стаціонарних розв'язків рівняння (1.11) є вихори: $\Psi(r) = |\Psi(r)|e^{iq\varphi+i\mu t/\hbar}$, де φ – полярний кут, μ – хімічний потенціал. Величину q називають топологічним зарядом вихору. Просто показати, що, якщо хвильова функція конденсату представлена стаціонарним вихровим станом, то *z*-проекція кутового моменту \vec{L} є дискретною величиною:

$$L_z = -i\hbar \int \Psi^* \left[\vec{r} \times \vec{\nabla} \right]_z \Psi d^3 r = \hbar q N, \qquad (1.12)$$

де $N = \int |\Psi|^2 d\vec{r}$ - число частинок у конденсаті.

У випадку наявності кількох компонент, рівняння (1.7) перетворюється на систему рівнянь Гроса-Пітаєвського, що враховує також міжкомпонентну взаємодію:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m_1} \vec{\nabla}^2 + V_1(\vec{r}) + g_{11} |\Psi_1|^2 + g_{12} |\Psi_2|^2 \right] \Psi_1, \qquad (1.13)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m_2} \vec{\nabla}^2 + V_2(\vec{r}) + g_{21} |\Psi_1|^2 + g_{22} |\Psi_2|^2 \right] \Psi_2.$$
(1.14)

1.2.2 БЕК у пастках

Перші експерименти дозволили отримувати БЕК в магнітних пастках, проте згодом стало можливим захоплювати їх у чисто оптичні паски, використовуючи електричну дипольну взаємодію між атомами та оптичним полем. Оптичні пастки дозволили більш гнучко контролювати геометрію пастки, що призвело до розширення цікавих ефектів, що спостерігається в БЕК [23].

Окремо слід виділити Лагер-Гаусові пастки, які, окрім утримуючої функції, дозволяють створювати надплинні потоки, передаючи кутовий момент від пучка до атомів конденсату. Вперше використання таких пучків для утримання Бозе-конденсатів було запропоновано в роботі [29]. Було також приведене чисельне моделювання БЕК в тороїдальних пастках з використанням реалістичних експериментальних параметрів.

В залежності від геометрії пастки $V_{ext}(\vec{r})$ можна виділити квазі-двовимірні та квазі-одновимірні Бозе-конденсати. Випадки застосовності такого наближення можна продемонструвати на прикладі гармонійного аксіальносиметричного потенціалу $V_{ext} = m\omega_{\perp}^2 r^2/2 + m\omega_z^2 z^2/2$. У випадку $\omega_{\perp} \approx \omega_z$ потенціал є майже ізотропним та конденсат буде тривимірним. Проте, якщо $\omega_{\perp} \ll \omega_z$, то конденсат буде утримуватися в площині XY, таким чином, система матиме майже двовимірну геометрію. Аналогічно, у випадку $\omega_{\perp} \gg \omega_z$ матимемо одновимірний конденсат.

З точки зору теоретичних досліджень, редукцію до меншої кількості вимірів можна зробити використовуючи розділення змінних у рівнянні Гроса-Пітаєвського (1.7). Для одновимірного випадку (сигароподібний БЕК) таке розділення буле виглядати як: $\Psi(\vec{r},t) = \psi(z,t)\Phi(r)\exp(-i\gamma t)$. Після підстановки у рівняння (1.7), для поперечного множника ми отримаємо відоме рівняння для гармонійного осцилятора:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\perp}^2\Phi - \frac{1}{2}m\omega_r^2r^2\Phi + \gamma\Phi = 0, \qquad (1.15)$$

де $\nabla_{\perp}^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$. Основним станом для цього рівняння є функція Гауса $\Phi_0 = A \exp(-(x^2 + y^2)/l_r^2)$, де $l_r = \sqrt{\hbar/(M\omega_{\perp})}$ – осциляторна довжина в поперечному напрямку [23]. Нормуючий множник A зазвичай підбирається таким чином, щоб повне число частинок у конденсаті було рівним бажаному значенню N. Аналогічно, у випадку наближеної до двовимірної геометрії задачі $(\omega_{\perp} \ll \omega_z)$, доцільно зменшити розмірність рівнянь до двох шляхом заміни $\Psi(\vec{r},t) = \psi(x,y,t)\Phi(z)\exp(-i\gamma t)$. В даній роботі більшість досліджуваних систем є квазі-двовимірними, тому більш детально це наближення буле розглянуте в розділах Розділ 2, Розділ 3 та Розділ 4.

Очевидним недоліком вищеописаних підходів є те, що така факторизація не відтворює справжню форму конденсату, а лише наближено її описує. Таким чином, у випадку підбору нормуючого множника так, щоб зберігалося повне число частинок, густина у площині z = 0 стає переоціненою в порівнянні з справжнім експериментальним значенням для того самого числа атомів. І, навпаки, підбор множника у відповідності до максимуму густини у даній площині робить число атомів меншим за потрібне. Очевидно, що у випадку моделювання генерації та руйнування вихорів більше значення має саме значення густини в площині, таким чином, починаючи з розділу Розділ 4, ми використовуємо саме цей підхід.

1.3 Відомості про спінорні Бозе-конденсати

Спінорними Бозе-конденсатами називаються БЕК, що мають додаткову, спінову ступінь вільності. Спінорні Бозе-конденсати у розріджених газах добре описується системою рівнянь Гроса-Пітаєвського. Для того, щоб отримати їх, розглянемо систему багатьох бозонів, кожен з яких має повний спін F = 1.

Потенціал взаємодії між двома атомами в такій системі можна записати у вигляді [30]:

$$V_{\rm int}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \frac{4\pi\hbar^2}{m} \sum_{f=0,2} a_f \,\hat{P}_f, \qquad (1.16)$$

де a_f – довжина розсіяння і \hat{P}_f – оператор проектування на стан із повним спіном рівним f. Ідентичні бозони із спіном F = 1 можуть утворювати лише стани із повним кутовим моментом f = 0 або f = 2, оскільки повна хвильова функція має бути симетричною при перестановці двох бозонів. Тому цей вираз можна переписати у вигляді лінійної комбінації одиничного оператора і добутку спінових операторів:

$$V_{\rm int}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)(g_n + g_s \hat{F}_1 \cdot \hat{F}_2), \qquad (1.17)$$

де *F*_i – аналоги спінових матриць для спін-1 бозонів:

$$\hat{F}_{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{F}_{y} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{F}_{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Повний спін дорівнює векторній сумі спінів двох частинок, тоді $\mathbf{F}^2 = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)^2$. Таким чином, знаючи значення повного спіну та значення спінів двох частинок, з рівності $f(f+1) = F_1(F_1+1) + F_2(F_2+1) + 2\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2$ отримуємо, що може існувати лише два власних значення оператору скалярного добутку $(\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2)|f\rangle = \gamma_f|f\rangle$: $\gamma_0 = -2$, $\gamma_2 = 1$. Тоді можна записати вирази для операторів проектування на спінові стани із f = 0 та f = 2:

$$\hat{P}_0 = \frac{1}{3} (1 - \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2), \qquad (1.19)$$

$$\hat{P}_2 = \frac{1}{3}(2 + \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2). \tag{1.20}$$

Порівнюючи вирази (1.19) та (1.20) з виразами (1.16) та (1.17), отримуємо густинну та спінову константи зв'язку:

$$g_n = \frac{4\pi\hbar^2}{m} \frac{a_0 + 2a_2}{3} \tag{1.21}$$

$$g_s = \frac{4\pi\hbar^2}{m} \frac{a_2 - a_0}{3} \tag{1.22}$$

Гамільтоніан у формалізмі вторинного квантування для такої системи можна записати у вигляді $\widehat{H} = \widehat{H}^{(1)} + \widehat{H}^{(2)}_n + \widehat{H}^{(2)}_s$, де

$$\widehat{H}^{(1)} = \int d\vec{r} \left\{ \sum_{i} \widehat{\Psi}_{i}^{\dagger}(\vec{r}) \widehat{h}_{i} \widehat{\Psi}_{i}(\vec{r}) \right\}$$
(1.23)

$$\widehat{H}_{n}^{(2)} = \frac{g_{n}}{2} \int d\vec{r} \left\{ \sum_{i,j} \widehat{\Psi}_{i}^{\dagger}(\vec{r}) \widehat{\Psi}_{j}^{\dagger}(\vec{r}) \widehat{\Psi}_{j}(\vec{r}) \widehat{\Psi}_{i}(\vec{r}) \right\}$$
(1.24)

$$\widehat{H}_{s}^{(2)} = \frac{g_{s}}{2} \int d\vec{r} \left\{ \sum_{\alpha} \sum_{i,j,k,l} \widehat{\Psi}_{i}^{\dagger}(\vec{r}) \widehat{\Psi}_{j}^{\dagger}(\vec{r}) (\widehat{F}_{\alpha})_{i,k} (\widehat{F}_{\alpha})_{j,l} \widehat{\Psi}_{j}(\vec{r}) \widehat{\Psi}_{l}(\vec{r}) \right\}, \qquad (1.25)$$

де $\hat{h}_i = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\vec{r})$ – одночастинковий Гамільтоніан, $V(\vec{r})$ – утримуючий потенціал, $i, j = 0, \pm 1$ – спінові індекси.

Як можна бачити, Гамільтоніан складається з трьох частин:

• одночастинкової взаємодії (1.23),

- двохчастинкової взаємодії, що не залежить від спіну та описує взаємодію між густинами (1.24) та
- двохчастинкову частину, що характеризує спінову взаємодію (1.25).

Рівняння руху можна отримати використовуючи рівняння Гейзенберга $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \widehat{\Psi}_i = [\widehat{H}, \widehat{\Psi}_i]$ та наближення середнього поля, по аналогії з однокомпонентними системами [28]:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{\pm} = \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{ext}(\vec{r}) + g_n n + g_s(n-2n_{\mp})\right\}\Psi_{\pm} + g_s\Psi_0^2\Psi_{\mp}^* \qquad (1.26)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{0} = \left\{-\frac{\hbar^{2}}{2m}\Delta + V_{ext}(\vec{r}) + g_{n}n + g_{s}(n-n_{0})\right\}\Psi_{0} + 2g_{s}\Psi_{+}\Psi_{-}\Psi_{0}^{*}, \quad (1.27)$$

де $n_{\pm,0} = |\Psi_{\pm,0}|^2$, $n = n_+ + n_- + n_0$.

На відміну від симетричних рівнянь Гроса-Пітаєвського, в наслідок існування несиметричних членів у рівняннях такі величини, як число частинок у кожній компоненті, їхня енергія, момент імпульсу, тощо перестають бути інтегралами руху рівнянь. Інтегралами руху рівнянь (1.26), (1.27) є повне число частинок

$$N = N_+ + N_- + N_0 = \int n \cdot d\vec{r},$$

сумарна намангіченість

$$M = N_{+} - N_{-} = \int (n_{+} - n_{-}) d\vec{r}$$

та повна енергія

$$E = E_+ + E_- + E_0 = \int \mathcal{H} d\vec{r},$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{\hbar^2}{2m} \left| \vec{\nabla} \Psi_+ \right|^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \left| \vec{\nabla} \Psi_- \right|^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \left| \vec{\nabla} \Psi_0 \right|^2 + V_{ext}(\vec{r})n + \frac{g_s}{2}n^2 \\ &+ g_a [\Psi_0^2 \Psi_+^* \Psi_-^* + (\Psi_0^2)^* \Psi_+ \Psi_-] + \frac{g_s}{2}(n_+^2 + n_-^2 + 2n_+n_0 + 2n_-n_0 \\ &- 2n_+n_-) \end{aligned}$$

1.4 Модель дисипації

36

Нерівноважні дисипативні ефекти відіграють дуже важливу роль у формуванні та розвиненні нестійкості вихорів. Для того, щоб змоделювати дисипативні ефекти, ми використовували феноменологічну модель, аналогічну тій, що була описана в роботах [31, 32]. В атомарних Бозе-конденсатах основа дисипації полягає у взаємодії атомів в стані БЕК та атомів у невиродженому стані. Припускається, що система описується хвильовою функцією ψ таким чином, що вона може обмінюватися енергією та частинками з тепловим резервуаром так, що хімічні потенціали системи та резервуари є майже рівними між собою.

Взаємодія з тепловим резервуаром забезпечується уявною частиною в рівнянні Гроса-Пітаєвського у вигляді феноменологічного доданку γ . У випадку однокомпонентного Бозе-конденсату рівняння має наступний вигляд:

$$(i-\gamma)\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{ext} + g|\psi|^2 - \mu\right)\psi, \qquad (1.28)$$

що є широко відомим як комплексне рівняння Гінзбурга-Ландау або нелінійне рівняння Шрьодінгера.

Для того, щоб протестувати цю модель, ми вирішили розв'язати задачу, що була представлена в [33], де була запропонована більш складна модель взаємодії із температурною хмарою – формалізм Заремби, Нікуні та Гріффіна (Zaremba, Nikuni, and Griffin (ZNG) formalism). В рамках цієї моделі рівняння для
конденсату доповнюються кінетичним рівнянням Больцмана для частинок з теплової хмари. Предметом обговорення статті є однокомпонентний БЕК в гармонійній пастці. Вивчалася динаміка вихорів. Було знайдено, що вихрове ядро прецесує в напрямку границі конденсату. Темп дисипації γ_{ZNG} , що визначається за допомогою виразу $r(t) = r_0 \exp(-\gamma_{ZNG} t)$, зростає із температурою та залежить від початкової координати вихору r_0 . Частота прецесії також залежить від початкової радіальної координати.



Рис. 1.1 Динаміка вихору в гармонійній пастці. Верхній рядок є ілюстрацією траєкторій вихрового ядра в площині XY для різних температур. Нижній рядок демонструє поведінку радіальної координати ядра (суцільна пряма) та її експоненційну апроксимацію $r(t) = r_0 \exp(\gamma_{ZNG} t)$ (пунктирні лінії) для відповідних значень параметрів.

Наші результати демонструють якісне узгодження з ZNG-формалізмом. Рис. 1.1 демонструє траєкторію ядра з початковою позицією $r_0 = 0.4R_{TF}$ з роботи [33] (а) та наші результати (b). Радіальна координата ядра показує експоненційну поведінку з темпом $\gamma_{ZNG} = 0.023$ (Рис. 1.1 (b)).

У випадку спінорних Бозе-конденсатів, феноменологічний множник (*i* – *γ*) з'являється в кожному рівнянні системи:

$$(i-\gamma)\hbar\frac{\partial\psi_{\pm}}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}}_{\pm}\psi_{\pm} + g_s n_0 \psi_{\mp}^*, \qquad (1.29)$$

$$(i-\gamma)\hbar\frac{\partial\psi_0}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}}_0\psi_0 + 2g_s\psi_+\psi_-\psi_0^*, \qquad (1.30)$$

де

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\pm} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\perp} - \mu_{\pm} + V(r) + g_n n + g_s (n_0 + n_{\pm} - n_{\mp}),$$

$$\widehat{\mathcal{H}}_{0} = -\frac{\hbar^{2}}{2m} \Delta_{\perp} - \mu_{0} + V(r) - \delta E + g_{n}n + g_{s}(n_{+} + n_{-}).$$

Параметр γ може бути порахований за допомогою квантової кінетичної теорії [34] для однорідних БЕК. В подальшому ми нехтуємо можливою просторовою та часовою залежністю γ та покладаємо $\gamma = 0.08$. Для перевірки цього значення ми промоделювали інший експеримент [35], порівнявши час, за який вихор виходить з конденсату у гармонійній пастці. Проте, було помічено, що якісно результати моделювання для спінорних БЕК у тороїдальних пастках не залежать від значення $\gamma \ll 1$.

В загальному випадку, у рівняннях (1.29) та (1.30) з $\gamma > 0$ число частинок не зберігається і прямує до числа частинок, що визначається заданим хімічним потенціалом. Однак, у чисельних експериментах ми можемо контролювати часову залежність числа частинок, змінюючи хімічний потенціал за певним правилом. Для того, щоб зробити закон зменшення числа частинок конденсату близьким до експериментальної поведінки $N(\tau) = N_0 exp(-\tau/\tau_0)$, ми використали наступне правило:

38

$$\mu(\tau) = \mu(\tau - \Delta \tau) + (\tilde{\Gamma} - 1/\tau_0) \frac{1 + \gamma^2}{2\gamma},$$
(1.31)

де $\Delta \tau$ – крок по часу, $\tilde{\Gamma}$ – поточний темп зменшення:

$$\tilde{\Gamma} = -\frac{1}{\Delta \tau} \ln \frac{N(\tau)}{N(\tau - \Delta \tau)}.$$
(1.32)

1.5 Наближені методи дослідження БЕК

1.5.1 Наближення Томаса-Фермі

Завдяки надзвичайно низьким температурам, кінетичний член у рівнянні Гроса-Пітаєвського є несуттєво малим порівняно із іншими доданками. Вплив атомарного руху буде проявлятися тільки на поверхні конденсату. Використовуючи це, ми можемо оцінити форму конденсату, за допомогою розв'язку простого алгебраїчного рівняння[36]:

$$n(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu - U_{ext}(\vec{r})}{g}, & \mu - U_{ext}(\vec{r}) > 0\\ 0, & в протилежному випадку. \end{cases}$$
(1.33)

Наближення Томаса-Фермі може бути застосоване для достатньо точної оцінки різноманітних параметрів Бозе-конденсату, таких як кількість числа частинок, ширина, максимальна густина, тощо. Наближення працює тим краще, чим більша кількість частинок у хмарі конденсату, оскільки це робить кінетичний член нехтовно малим. Приклади застосування наближення Томаса-Фермі показані на Рис. 4.1 (с) та (d).

1.5.2 Варіаційний аналіз

Варіаційний аналіз є одним із класичних методів розв'язку квантовомеханічних задач, які складно або неможливо розв'язати точно. Його ідея полягає у використанні деякої пробної функції з одним або кількома параметрами, що може описати шукану функцію з прийнятною точністю.

$$\psi(x) = A \exp\left(-\frac{x^2}{l^2}\right)$$

Сама процедура полягає у мінімізації функціоналу енергії, записаного для даної пробної функції, та пошуку найкращого набору параметрів. Велика перевага аналітичного аналізу порівняно із чисельними методами – це можливість отримати аналітичну криву, що описує залежність важливих характеристик конденсату (число частинок, енергія, тощо) від параметрів. Так, наприклад, знаючи вигляд кривої $N(\mu)$, можна отримати регіон стабільних розв'язків за відомим в нелінійній оптиці критерієм Вахітова-Колоколова $dN/d\mu < 0$ [37, 38].

1.5.3 Лінійний аналіз Боголюбова - де Жена

Варіаційний аналіз здатний прогнозувати стабільність відносно радіальносиметричного колапсу. Однак, він неспроможний передбачити, чи буде наростати із часом мале радіально-несиметричне збурення. Такі дослідження також є дуже важливими, оскільки реальні системи рідко бувають повністю симетричними. Стабільність стаціонарних розв'язків по відношенню до збурень, що порушують аксіальну симетрію, може бути досліджена за допомогою лінійного аналізу Боголюбова. Параметр порядку двокомпонентного БЕК можна представити у вигляді $\tilde{\Psi}_j(r,t) = (\psi_j(r) + \varepsilon_j(r,t))e^{-\mu_j t}$, де мале збурення $\varepsilon_j(r,t)$ має форму $\varepsilon_j(r,t) = u_j(r)e^{i\omega t+iL\varphi} + v_j^*(r)e^{-i\omega^*t-iL\varphi}$. Після підстановки даної комбінації в рівняння Гроса-Пітаєвського та їхньої лінеаризії по відношенню до *ε* може бути отримана задача на власні значення *ω*. Цілі числа *L* характеризують азимутальні моди збурення. З вигляду збурення можна помітити, що якщо *ω* має уявну частину, то малі збурення починають експоненційно зростати із часом, що призводить до нестійкості. [28]

Значення Боголюбівського спектру можуть стати у нагоді при дослідженні наплинності. Підставляючи у добре відомий критерій надпровідності Ландау $v_c = \min\{E(p)/p\}$ кінетичну енергію $E(p) = \hbar\omega$ та імпульс $p = L_z/R = \hbar l_z/R$ елементарного збурення, отримуємо

$$\Omega_c = \frac{v_c}{R} = \min\left\{\frac{\omega}{l_z}\right\},\tag{1.34}$$

де *ω* – власна частота елементарного збурення, *l_z* – безрозмірний момент імпульсу цього збудження.

1.6 Чисельні методи

1.6.1 Методи інтегрування стаціонарної задачі

Найпростішим з точки зору знаходження стаціонарних розв'язків є випадок, коли розмірність задачі не вище d = 2, а потенціал $V(\vec{r})$ є симетричним відносно початку координат. Тоді задача може бути зведена до одновимірної відносно відстані від початку координат r. Наприклад, після врахування симетрії двовимірна задача в такому випадку матиме вигляд

$$\mu \psi_r(r) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \; \frac{\partial \psi_r(r)}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{r^2} \right) + V_{ext}(r)$$

$$+ g |\psi_r(r)|^2 \right] \psi_r(r),$$

$$\psi(\vec{r}) = \psi_r(r) \exp(im\varphi),$$
(1.36)

де ціле число m – топологічний заряд розвязку. Очевидно, що у випадку $m \neq 0$ радіальна функція $\psi_r(r)$ має задовільняти граничній умові $\psi_r(0) = 0$, оскільки в протилежному випадку рівняння (1.36) буде мати невизначеність в цій точці. Основним станом для таких систем є солітон (m = 0), що, на відміну від вихорів ($m \neq 0$), у якості граничної умови в нулі має нульову похідну. Іншим обмеженням, що накладається на розв'язки рівняння (1.35), є обмеженість хвильової функції. Таким чином, на нескінченості (а у випадку чисельних схем – на границі чисельної сітки) радіальна функція має занулятися, тобто $\psi_r(L_{grid}) \approx \psi_r(\infty) = 0$.

Отже, для двовимірного аксіально-симетричного рівняння Гроса-Пітаєвського була сформульована крайова задача. Для того, щоб розв'язати її, в даній дисертаційній роботі всюди був використаний стабілізований метод релаксації, який більш детально описано в [39]. Метод представляє собою кінцево-різницеву схему, для застосування якої область, де розв'язок імовірно є суттєво відмінним від нуля, була розбита на рівні інтервали довжиною *h*. Рівняння (1.35) було представлене у вигляді

$$\hat{L}(r)\psi(r) = g(\psi(r))^3,$$
 (1.37)

де лінійний оператор

$$\hat{L}(r) = \mu + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{r^2} \right) - V(r).$$
(1.38)

Лінійні оператори $\hat{L}(r)$ були подані у формі тридіагональної матриці з урахуванням граничних умов. У явному вигляді така матриця може бути представлена наступним чином:

$$\begin{pmatrix} L_0^0 & L_1^0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_0^1 & L_1^1 & L_2^1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & L_{n-2}^{n-1} & L_{n-1}^{n-1} & L_n^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & L_{n-1}^n & L_n^n \end{pmatrix},$$

де для $i \neq 0, i \neq n$

$$\begin{split} L_{i-1}^{i} &= D\left(\frac{1}{h^{2}} - \frac{1}{2r_{i}h}\right),\\ L_{i}^{i} &= \mu - D\left(\frac{2}{h^{2}} + \frac{m^{2}}{r_{i}^{2}}\right) - V_{i},\\ L_{i+1}^{i} &= D\left(\frac{1}{h^{2}} + \frac{1}{2r_{i}h}\right), \end{split}$$

де $D = \hbar^2/2m$ – множник перед оператором Лапласа, r_i , V_i – значення радіусвектору та потенціалу в *i*-тому вузлі решітки.

Для i = 0 та i = n вирази для матричних елементів мають враховувати граничні умови для солітонів та вихорів, тому мають дещо інший вигляд:

$$L_0^0 = \begin{cases} \mu - D\left(\frac{2}{3h^2} + \frac{2}{3r_0h}\right) - V_0, & m = 0\\ \mu - D\left(\frac{2}{h^2} + \frac{m^2}{r_0^2}\right) - V_0, & m \neq 0, \end{cases}$$
$$L_1^0 = \begin{cases} D\left(\frac{2}{3h^2} + \frac{2}{3r_0h}\right), & m = 0, \\ D\left(-\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2r_0h}\right), & m \neq 0, \end{cases}$$
$$L_{n-1}^n = D\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2r_nh}\right), \qquad m \neq 0, \end{cases}$$
$$L_n^n = \mu - D\left(\frac{2}{h^2} + \frac{m^2}{r_n^2}\right) - V_n.$$

Система рівнянь (1.37) розв'язується методом послідовних наступним чином. За нульове наближення обиралися функції $\psi_{var}(r)$, які були отримані за допомогою варіаційного аналізу. $\psi_{var}(r)$ були підставлені в праву частину системи (1.37), після чого отримана система алгебраїчних рівнянь розв'язується методом прогонки. Після кожної ітерації шукані функції ψ множиться на стабілізаційний множник $s = (N_{i-1}/N_i)^{\alpha}$, де N_i – кількість числа частинок, отримана з останньої ітерації, N_{i-1} – кількість числа частинок, отримана з попередньої ітерації, а $\alpha = 0.75$ обиралося виходячи з оптимізації розрахунків. Після процедури стабілізації нова функція знов підставлялася до правої частини рівнянь (1.37), та далі ітерації продовжувалися до досягнення заданої точності.

Перевагою, та, одночасно, недоліком методу є слабка чутливість до початкових умов. Зокрема, проблеми виникають при дослідженні багатокомпонентних Бозе-конденсатів. Наприклад, якщо при однакових параметрах μ_1, μ_2, g_{inter} одночасно існує декілька розв'язків, то за допомогою даного методу знаходяться лише ті, що мають мінімальне значення енергії.

Для знаходження інших розв'язків може бути використаний дуже чутливий до початкових умов метод Ньютона-Рафсона (див. [40]), узагальнений на випадок систем нелінійних алгебраїчних рівнянь. Як відомо, метод базується на теоремі Тейлора: розклад будь-якої функції поблизу точки x_0 може бути записаний як

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + O((x - x_0)^2),$$

таким чином, ітеративна схема

$$x_{i+1} = x_i + f(x_i)/f'(x_i)$$

має в решті решт збігатися до нуля функції f(x).

У випадку системи рівнянь, узагальнення методу виглядає наступним чином:

$$J_f(x_i)(x_{i+1} - x_i) = f(x_i),$$

де $J_f(x_i)$ – матиця Якобі для функції f, таким чином, знаходження нулів векторфункції f полягає в розв'язку даної системи рівнянь.

Для рівняння (1.35) функція $f(\psi_i)$ матиме вигляд

$$\vec{f} = \left(\hat{L}(\vec{\psi}) - g \cdot diag\left(\overline{|\psi|^2}\right)\right)\vec{\psi} =$$

$$\begin{pmatrix} L_0^0 - g |\psi_0|^2 & L_1^0 & \cdots & 0 & 0 \\ L_0^1 & L_1^1 - g |\psi_1|^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_{n-1}^{n-1} - g |\psi_{n-1}|^2 & L_n^{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & L_{n-1}^n & L_n^n - g |\psi_n|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_{n-1} \\ \psi_n \end{pmatrix},$$

а матриця Якобі цієї функції

$$\begin{split} J_f(\vec{\psi}) &= \\ &= \begin{pmatrix} L_0^0 - 3g |\psi_0|^2 & L_1^0 & \cdots & 0 & 0 \\ L_0^1 & L_1^1 - 3g |\psi_1|^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_{n-1}^{n-1} - 3g |\psi_{n-1}|^2 & L_n^{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & L_{n-1}^n & L_n^n - 3g |\psi_n|^2 \end{pmatrix}. \end{split}$$

У загальному випадку, тобто коли рівняння не можна звести до одновимірного, стаціонарні розв'язки треба знаходити іншими методами. Для цього розглянемо процедуру мінімізації функціоналу енергії (1.9) з метою знаходження стаціонарних станів. На відміну від розглянутого вище варіаційного методу, розв'язки рівняння (1.7), як правило, не можуть бути представлені в аналітичному вигляді. Таким чином, для мінімізації енергії треба застосовувати чисельні методи. Найпоширенішим методом знаходження локальних мінімумів є добре відомий метод градієнтного спуску:

$$\psi_{i+1} = \psi_i - \alpha \frac{\partial E}{\partial \psi_i}$$
 , $\alpha > 0$

Запишемо цю процедуру для рівняння (1.7) з урахуванням того, що число частинок, задане нормою хвильової функції, повинно зберігатися від кроку до кроку [41], та перепозначимо $\alpha = \Delta t/2$:

$$\frac{\partial \Psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial \Psi} = \left(\frac{1}{2}\Delta - V(\vec{r}) - g|\Psi|^2\right) \Psi(\vec{r},t),$$

$$t_n \le t < t_{n+1},$$
(1.39)

$$\Psi(\vec{r}, t_{n+1}) := \Psi(\vec{r}, t_{n+1}^+) = \frac{\Psi(\vec{r}, t_{n+1}^-)}{\|\Psi(\vec{r}, t_{n+1}^-)\|'}$$
(1.40)

$$\Psi(\vec{r},0) = \Psi_0(\vec{r}), \tag{1.41}$$

У якості початкового розподілу $\Psi_0(\vec{r})$ у більшості випадків гарним вибором є наближення Томаса-Фермі (див. розділ 1.5.1). Легко помітити, що рівняння (1.39) збігається із рівнянням (1.7) після заміни $t \rightarrow it$, тобто після переходу від дійсного часу до уявного. Тому відповідний метод називають нормалізованим градієнтним потоком або методом розповсюдження в уявному часі. В наших розрахунках крок (1.39) був реалізований за допомогою схеми split-step (див. розділ 1.6.2).

1.6.2 Split-step метод моделювання динаміки

Для розв'язку динамічного рівняння Гроса-Пітаєвського використовувався симетричний метод з розщепленним кроком інтегрування (split-step Fourier transform або SSFT). Метод описано в [42].

Рівняння (1.7) може бути записане у вигляді

$$\frac{\partial \Psi(\vec{r},t)}{\partial t} = \left(\widehat{D} + \widehat{N}\right) \Psi(\vec{r},t), \qquad (1.42)$$

$$\widehat{D} = -\frac{i\hbar}{2m}\Delta,\tag{1.43}$$

$$\widehat{N} = -\frac{i}{\hbar} (g |\Psi(\vec{r}, t)|^2 + V(\vec{r})).$$
(1.44)

Взагалі кажучи, оператори \hat{D} та \hat{N} діють одночасно. Проте, у деякому наближенні можна вважати, що еволюція відбувається наступним чином: спочатку протягом половини часового кроку h діє дисперсійний оператор, потім протягом повного кроку h діє нелінійний, після чого знов протягом h/2 діє дисперсійний оператор. Така симетрична форма дозволяє зменшити похибку до третього порядку малості по h (кроку по часу). Тоді часову еволюцію для такої системи можна записати наступним чином:

$$\Psi(\vec{r},t+h) = \exp\left[\frac{h}{2}\widehat{D}\right] \exp\left[\int_{t}^{t+h} \widehat{N}(t')dt'\right] \exp\left[\frac{h}{2}\widehat{D}\right] \Psi(\vec{r},t)$$
(1.45)

Можна побачити, що, оскільки оператор \widehat{D} не залежить від часу, то доцільно об'єднати дію дисперсійних операторів двох послідовних кроків:

$$\Psi(\vec{r}, t+2h) =$$

$$= \exp\left[\frac{h}{2}\widehat{D}\right] \exp\left[\int_{t}^{t+h} \widehat{N}(t')dt'\right] \exp[h\widehat{D}] \cdot$$

$$\cdot \exp\left[\int_{t}^{t+h} \widehat{N}(t')dt'\right] \exp\left[\frac{h}{2}\widehat{D}\right] \Psi(\vec{r}, t)$$
(1.46)

Для оптимізації алгоритму, еволюція системи моделювалася саме таким чином.

Для того, щоб виконати дію оператора \widehat{D} , був здійснений перехід у Фур'єпростір:

$$\exp\left[\frac{h}{2}\widehat{D}\right]\Psi(\vec{r},t) = \widehat{F}^{-1}\exp\left[\frac{h}{2}D(\vec{k})\right]\widehat{F}\Psi(\vec{r},t),\tag{1.47}$$

де \hat{F} – оператор Фур'є-перетворення, а образ оператору $D(\vec{k})$ можна отримати з виразу (1.43), замінивши оператор Лапласа на $-|\vec{k}|^2$.

Рівняння для багатокомпонентних Бозе-конденсатів можна розв'язати за допомогою методу split-step, додаючи до нелінійної частини відповідні нелінійні доданки, що описують міжкомпонентну взаємодію, утворені з хвильових функцій на попередньому кроці.

Для чисельного розв'язку рівнянь (1.26), (1.27), що описують спінорні Бозе-конденсати, зручно записати їх в наступному вигляді:

$$\frac{i\partial\psi_{\pm}}{\partial t} = \hat{A}_{\pm}\psi_{\pm} + \nu_a\psi_0^2\psi_{\mp}^* = \hat{A}_{\pm}\psi_{\pm} + f_{\pm},$$
$$\frac{i\partial\psi_0}{\partial t} = \hat{A}_0\psi_0 + 2\nu_a\psi_0^*\psi_+\psi_- = \hat{A}_0\psi_0 + f_0,$$

де $\hat{A}_{\pm} = \hat{L} + \nu_a (n - 2|\psi_{\mp}|^2)$, $\hat{A}_0 = \hat{L} + \nu_a (n - |\psi_0|^2)$. Це робить можливим розв'язати рівняння з використанням split-step методу в комбінації зі схемою типу Кранка-Ніколсон. Оскільки split-step метод полягає в наближенні неодночасної дії операторів, ми можемо також розділити дію операторів \hat{A} та $f_{\pm,0}$.

Еволюція, спричинена \hat{A} (симетричний крок) може бути змодельована за допомогою симетричної split-step схеми (див. пункт 1.6.2). Додавання схеми типу Кранка-Ніколсон дозволяє змоделювати іншу частину еволюції, спричинену $f_{\pm,0}$ (несиметричний крок). Для цього запишемо різницю хвильових функцій до здійснення несиметричного кроку ($\psi_{\pm,0}^i$) та після нього ($\psi_{\pm,0}^{i+1}$):

$$\frac{\psi_{\pm,0}^{i+1} - \psi_{\pm,0}^{i}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(f_{\pm,0}^{i+1} - f_{\pm,0}^{i} \right).$$

Тут ми врахували послідовність дії операторів \hat{A} та $f_{\pm,0}$. Після застосування напівнеявної схеми отримуємо наступні вирази:

$$\psi_{\pm}^{i+1} = \psi_{\pm}^{i} - \frac{i}{2} \nu_{a} \Delta t \left(\left(\psi_{0}^{i+1} \right)^{2} \left(\psi_{\mp}^{i+1} \right)^{*} + \left(\psi_{0}^{i} \right)^{*} \left(\psi_{\mp}^{i} \right)^{*} \right)$$
$$\psi_{0}^{i+1} = \psi_{0}^{i} - i \nu_{a} \Delta t \left(\psi_{\mp}^{i+1} \psi_{-}^{i+1} \left(\psi_{0}^{i+1} \right)^{*} + \psi_{\mp}^{i} \psi_{-}^{i} \left(\psi_{0}^{i} \right)^{*} \right),$$

що використовуються у циклі послідовних наближень.

1.7 Висновки

В даному розділі розглянутий сучасний стан досліджень, присвячених теорії Бозе-Ейнштейнівських конденсатів та методам їхнього вивчення. Описана модель середнього поля, що було використано в даній дисертації для дослідження нелінійних когерентних структур, описані чисельні та наближені методи їхнього аналізу.

Показано, що використана в дисертаційній роботі проста модель дисипації здатна адекватно описувати експерименти та представлені результати порівняння розрахунків за допомогою даної моделі з експериментальними даними.

Таким чином, представлений використаний в дисертаційній роботі набір моделей та інструментів, що дозволяють теоретично досліджувати нелінійні структури в Бозе-Ейнштейнівських конденсатах атомарних газів.

РОЗДІЛ 2 СТІЙКІ СВІТЛІ СОЛІТОНИ В ДВОКПОНЕНТНИХ БОЗЕ-КОНДЕНСАТАХ

Цікавою властивістю нелінійних систем є існування в них усамітнених хвиль – солітонів, що є найнижчими за енергією розв'язками рівняння (1.11). Цей нелінійний об'єкт утворюється внаслідок компенсації лінійного розтікання (що зумовлено наявністю кінетичного члену) та нелінійного стискування (що виникає внаслідок самодії). Прикладом таких хвиль можуть бути цунамі в океані або усамітнені пульси у волокнах скла, що є інструментами ЛЛЯ високошвидкісних комунікацій. Ознакою солітонів є можливість рухатися та взаємодіяти між собою без зміни форми та розсіяння. Істинні солітони (тобто такі, що задовільняють цим ознакам) можуть існувати тільки в одновимірних Бозе-конденсатах за відсутності зовнішнього поля. Тоді рівняння Гроса-Пітаєвського стає точно інтегрованим та можна отримати розв'язок в аналітичному вигляді. Форма солітону залежить від знаку міжатомної взаємодії. Для притягальної взаємодії утворюються так звані світлі солітони, що представляють собою області з більш високою густиною. Відповідно, для відштовхуючої міжатомної взаємодії (яка реалізується для більшості Бозеконденсатів) можливе існування темних солітонів:

$$\psi_k(x) = \sqrt{n_0} \left(i \frac{v_k^2}{c_s^2} + \sqrt{1 - \frac{v_k^2}{c_s^2}} \tanh\left[\frac{x - x_k}{l_0} \sqrt{1 - \frac{v_k^2}{c_s^2}}\right] \right).$$
(2.1)

Тут x_k та v_k – відповідно, положення та швидкість темного солітону, l_0 – довжина когерентності, а c_s – швидкість звуку. Якщо мінімум густини такого солітону досягає нуля, то він називається чорним солітоном, якщо ні – то сірим солітоном [36].

За межами одновимірної вільної моделі рівняння Гроса-Пітаєвського перестає бути аналітично розв'язуваним. Перший чисельний розв'язок

двовимірного рівняння був отриманий у роботі [43] для оптичного нелінійного середовища – задача про стаціонарне самофокусування в параксіальному наближенні. Після розділення змінних та відповідного скейлінгу рівняння для такої системи набуває вигляду:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} + \psi^3(\vec{r}) - \psi(\vec{r}) = 0,$$
(2.2)

Рівняння було розв'язано чисельно, а його розв'язок прийнято називати Тоунесівським солітоном. Профіль цього розв'язку зображений на Рис. 2.1(а). Як виявилося, число частинок N_{cr} у цьому солітоні є визначальним для стійкості подібних систем: якщо двовимірний солітон має кількість частинок, більшу за N_{cr} , то він швидко колапсує, якщо меншу, то, навпаки, розтікається. Таким чином, з'ясувалося, що стійких солітонів в двовимірній геометрії без пастки не існує [38].

Додавання утримуючого потенціалу робить систему неінваріантною відносно зміни її хімічного потенціалу, додаючи різноманіття форм розв'язкам. Завдяки цьому можна очікувати стабілізації розв'язків з кількістю частинок, меншею за N_{cr} , оскільки потенціальна пастка затримуватиме розтікання таких солітонів. Задача з аксіально-симетричним затримуючим потенціалом $V_{ext} = m\omega_{\perp}^2 r^2/2$ була розглянута більш детально у роботі [38]. Обезрозмірене рівняння Гроса-Пітаєвського для даної системи має вигляд:

$$\mu\psi(\vec{r}) + \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} - r^2 + \sigma\psi^3(\vec{r}) = 0, \qquad (2.3)$$

де $\sigma = \pm 1$ – обезрозмірена константа звязку ($\sigma = 1$ у випадку притягання та σ – 1 у випадку відштовхування). Якісні міркування підтверджуються розрахунками: насправді, ті солітони, що мали $N < N_{cr}$ виявилися стійкими. Для того, щоб визначити область стабільності, було побудовано графік $N(\mu)$ (Рис. 2.1(b)). Як видно, для від'ємних хімічних потенціалів кількість числа частинок асимптототично наближається до критичної. Для додатніх μ залежність має якісно ішний вигляд: кількість числа частинок швидко зростає та стає вище критичної. Солітони, параметри яких належали до області ($-\infty$, 2] для притягання та (2, μ_{cr}] ($\mu_{cr} \approx 3.4$) для відштовхування, є стійкими.



Рис. 2.1 (а) Профіль двовимірного солітону без пастки (Тоунесівський солітон). (б) Графік залежності кількості числа чатинок від хімічного потенціалу *µ*. Пунктирною лінією позначена кількість числа частинок у Тоунесівському солітоні.

Особливо цікавою з практичної точки зору є дослідження солітонсолітонних пар. Зокрема, солітони, розділені у просторі, можуть бути використані для надточного вимірювання магнітних полів, міжатомних сил тощо, використовуючи прилад, аналогічний описаному в роботі [25]. В роботі [44] була досліджена система солітон-солітонних пар без зовнішнього потенціалу. Для цього був обраний двокомпонентний конденсат з притягальною взаємодією всередені компонент та відштовхувальною міжкомпонентнрою взаємодією. Якісні міркування, що слугували мотивацією роботи, були наступними. Відштовхувальна міжкомпонентна взаємодія сприяє утворенню пар, розділених у просторі: одна з компонент утворює кільцеподібну пастку, а інша лишається всередині. Очікувалося, що таким чином, внутрішня компонента утримується зовнішньою та не розтікається, а кільцеподібна, в свою чергу, не стискується. Проте, з'ясувалося, що кільцеподібний бар'єр не є достатньо надійним, та внутрішня компонента просочується крізь нього. Таким чином, солітонні розв'язки, знайдені у роботі [44], виявилися довгоіснуючими, але не стійкими.

Додавання гармонійного потенціалу могло б стабілізувати таку систему, аналогічно тому, як така пастка стабілізувала пари, що складається з солітону та вихору для слабкої внутрішньокомпонентної взаємодії [45]. Таким чином, однією з проблем, досліджених в даній дисертаційний роботі, є аналіз солітонсолітонних пар у БЕК в гармонійному утримуючому потенціалі.

2.1 Модель

В даній роботі розглянута суміш двох БЕК у гармонічному утримуючому потенціалі. В границі $T \rightarrow 0$ в наближенні середнього поля така система може бути описана за допомогою рівнянь Гроса-Пітаєвського:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_1(\vec{r},t)}{\partial t} = \left[\hat{H}_1 + g_{11} |\Psi_1(\vec{r},t)|^2 + g_{12} |\Psi_2(\vec{r},t)|^2\right] \Psi_1(\vec{r},t),$$
(2.4)

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_2(\vec{r},t)}{\partial t} = \left[\hat{H}_2 + g_{21}|\Psi_1(\vec{r},t)|^2 + g_{22}|\Psi_2(\vec{r},t)|^2\right]\Psi_2(\vec{r},t),$$
(2.5)

де $\hat{H}_j = -\hbar^2/(2m_j) \cdot \nabla^2 + V_j(\vec{r}), m_j$ маса атомів у *j*-ій компоненті, $V_j(\vec{r}) = m_j \omega_{\perp}^2 (x^2 + y^2)/2 + m_j \omega_z^2 z^2/2$ аксіально-симетричний гармонічний зовнішній затримуючий потенціал. Взаємодія між атомами одного сорту характеризується коефіцієнтом зв'язку $g_{jj} = 4\pi\hbar^2 a_{jj}/m_j$, де a_{jj} – довжина розсіяння *s*-хвилі для двочастинкових міжатомних зіткнень. Коефіцієнт зв'язку міжкомпонентної взаємодії $g_{12} = g_{21} = 2\pi\hbar^2 a_{12}/m_*$, де $m_* = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ зведена маса.

Вважатимемо, що $\omega_z \gg \omega_{\perp}$ та нелінійна взаємодія є слабкою порівняно з обмеженням в повздовжному (вздовж вісі *z*) напрямку. Тоді БЕК є

дископодібним (двовимірним). Можемо розділити змінні, фіксуючи повздовжній рух конденсату: $\Psi_j(\vec{r},t) = \widetilde{\Psi}_j(x,y,t)\Phi_j(z,t)$, де $\Phi_j(z,t) = (l_{zj}\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}\exp(-\frac{i}{2}\omega_z t - z^2/(2l_{zj}^2))$ хвильова функція основного стану повздовжного гармонічного затримуючого потенціалу, $l_{zj} = \sqrt{\hbar/(M_j\omega_z)}$. Після виключення повздовжних координат рівняння Гроса-Пітаєвського набувають двовимірної форми:

$$i\frac{\partial \tilde{\Psi}_1}{\partial t} + \left(\Delta_{\perp} - r^2 + \left|\tilde{\Psi}_1\right|^2 + b_{12}\left|\tilde{\Psi}_2\right|^2\right)\tilde{\Psi}_1 = 0, \qquad (2.6)$$

$$i\frac{\partial\widetilde{\Psi}_{2}}{\partial t} + \left(\Delta_{\perp} - \frac{r^{2}}{\kappa} + b_{21}\left|\widetilde{\Psi}_{1}\right|^{2} + \left|\widetilde{\Psi}_{2}\right|^{2}\right)\widetilde{\Psi}_{2} = 0, \qquad (2.7)$$

де $\kappa = M_1/M_2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\Delta_{\perp} = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ двовимірний оператор Лапласа. Безрозмірні змінні, що було впроваджено у рівняннях, наступні: $(x, y) \rightarrow (x, y)/l_{\perp 1}, t \rightarrow t/\tau, \tilde{\Psi}_j \rightarrow \tilde{\Psi}_j/\sqrt{C_j}$, де $l_{\perp 1} = \sqrt{\hbar/(M_1\omega_{\perp})}, \tau = 2/\omega_{\perp}, C_j = \hbar\omega_{\perp}\sqrt{\pi(l_{z1}^2 + l_{z2}^2)}/(2|g_{jj}|)$. Безрозмірні параметри звязку визначені наступним чином: $b_{12} = -g_{12}/|g_{11}|\sqrt{2/(1+\kappa)}, b_{12} = -g_{21}/|g_{22}|\sqrt{2\kappa/(1+\kappa)}$. В даній роботі був розглянутий випадок, коли взаємодія між частинками одного сорту притягальна (світлі солітони), а взаємодія між частинками різного сорту може бути як притягальною, так і відштовхувальною.

Рівняння (2.6) та (2.7) мають наступні інтеграли руху:

(ііі) число частинок у кожній компоненті

$$N_j = \int |\widetilde{\Psi}_j|^2 d^2 r, \qquad (2.8)$$

(iv) функціонал енергії

$$E = E_1 + E_2 - b_{12} \int |\tilde{\Psi}_1|^2 |\tilde{\Psi}_2|^2 d^2 r, \qquad (2.9)$$

$$E_{j} = \int \left\{ |\Delta_{\perp} \widetilde{\Psi}_{j}|^{2} + r^{2} |\widetilde{\Psi}_{j}|^{2} - \frac{1}{2} |\widetilde{\Psi}_{j}|^{4} \right\} d^{2}r, \qquad (2.10)$$

(v) імпульс

$$\vec{P}_j = -\frac{i}{2} \int (\tilde{\Psi} \vec{\nabla}_\perp \tilde{\Psi}_j - \tilde{\Psi}_j \vec{\nabla}_\perp \tilde{\Psi}_j^*) d^2 r, \qquad (2.11)$$

та (iv) момент імпульсу

$$\vec{M}_{j} = -\frac{i}{2} \int \left(\tilde{\Psi}_{j}^{*}[\vec{r}, \vec{\nabla}_{\perp} \tilde{\Psi}_{j}] - \tilde{\Psi}_{j}[\vec{r}, \vec{\nabla}_{\perp} \tilde{\Psi}_{j}^{*}] \right) d^{2}r.$$
(2.12)

Для спрощення ми розглядаємо симетричний випадок $g_{11} = g_{22}$ та $M_1 = M_2$.

2.2 Стаціонарні розв'язки

Стаціонарні солітонні розв'язки бралися в наступному вигляді:

$$\widetilde{\Psi}_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \psi_j(r) e^{-i\mu_j t}, \qquad (2.13)$$

де $j = 1,2, r = \sqrt{x^2 + y^2}, \mu_j$ хімічні потенціали, а дійсні функції $\psi_j(r)$ задовільніють системі рівнянь:

$$\mu_j \psi_j + \psi''_j + \frac{1}{r} \psi'_j - r^2 \psi_j + [\psi_j^2 + \sigma \psi_{3-j}^2] \psi_j = 0, \qquad (2.14)$$

де $\sigma = b_{12} = b_{21}$. Для фіксованої сили крос-взаємодії σ ми отримаємо двопараметричну сім'ю (з параметрами μ_1 та μ_2) векторних солітонних роз'вязків.

Рівняння (2.14) були розв'язані чисельно за допомогою стабілізованого методу релаксації (див. розділ 1.6.1). Для того, щоб отримати більш повне

уявлення про властивості векторних солітонів, нами проведений також варіаційний аналіз. Варіаційні результати є не тільки початковими умовами для чисельного моделювання. Вони також демонструють достатньо добре узгодження з чисельними результатами, як можна побачити на Рис. 2.2, та дозволяють отримати аналітичні вирази для деяких залежностей від параметрів.

Знайдені векторні розв'язки поділяються на два типи. Перший, який складається з двох гаусоїдальних розв'язків, прийнято називати *дзвоноподібним* (bell-shaped). Інший тип складається з двох різних по формі розв'язків. Один з них є гаусоїдальним, інший має мінімум у центрі. Оскільки максимуми густин таких розв'язків лежать в різних точках простору, такі розв'язки називають *розв'язками з відокремленими фазами* (phase-separated). Очевидно, що солітонні пари з відокремленими фазами можуть існувати тільки за наявності відштовхуючої взаємодії між компонентами. В той самий час, дзвоноподібні пари можуть існувати як для притягальної, так і відштовхувальної кросваємодії.

2.2.1 Притягальна міжкомпонентна взаємодія ($\sigma > 0$)

Завдяки тому, що для притягальної міжкомпонентної взаємодії обидві солітонні компоненти є дзвоноподібними, така проста пробна функція, як

$$\psi_j(r) = \sqrt{\frac{N_j}{\pi a_j^2}} e^{-\frac{1r^2}{2a_j^2}},$$
(2.15)

дає достатньо добре наближення (a_j ефективна ширина *j*-ої компоненти). Пробна функція є нормованою на число частинок: $\langle \psi_j | \psi_j \rangle = N_j$. Підставляючи пробну функцію (2.15) у рівняння (2.9), ми отримуємо функціонал енергії *E*

$$E = E_1 + E_2 - \sigma E_{12}, \tag{2.16}$$

$$E_j = N_j \left(\frac{1}{a_j^2} + a_j^2 - \frac{N_j}{4\pi a_j^2} \right), E_{12} = \frac{N_1 N_2}{\pi (a_1^2 + a_2^2)}.$$
 (2.17)



Рис. 2.2 Область існування солітонів на площині (μ_1, μ_2) для $\sigma = 0.5$ та $\sigma = 2.0$. Вставки ілюструють приклади радіально-симетричних профілів $\psi_1(r)$ (пунктирна лінія) та $\psi_2(r)$ (суцільна лінія) і точках А, В, та С на площині (μ_1, μ_2): A = (-6, -4), B = (-5, -5), C = (-2, -8). (b) - (d), (f) - (h) Число атомів N_1 (пунктирна лінія для чисельних, точкова лінія для варіаційних результатів) та N_2 (суцільна лінія для чисельних результатів, точково-пунктирна лінія для варіаційних результатів). Число атомів побудовано як функція $\mu_- = \mu_1 - \mu_2$ для фіксованої суми хімічних потенціалів $\mu_+ = \mu_1 + \mu_2$. Точкові прямі лінії на (a) та (е) відповідають сумі хімічних потенціалів, поданих на (b) -(d) та (f)-(g), відповідно.

Солітонні роз'вязки відповідають стаціонарним точкам функціоналу енергії для фіксованого числа частинок в обох компонентах: $(\partial E / \partial a_1)_{N_1,N_2} = 0, (\partial E / \partial a_2)_{N_1,N_2} = 0.$ Очевидно, що двопараметрична сім'я векторних солітонів

де

є симетричною відносно одночасної перестановки $\mu_1 \rightarrow \mu_2$ та $\psi_1 \rightarrow \psi_2$, тому в площині хімічних потенціалів (μ_1, μ_2) роз'вязки є симетричними відносно лінії $\mu_1 = \mu_2$. Для того, щоб максимально використати цю симетрію, число частинок для кожної компоненти представлено як функція від різниці між хімічними потенціалами $\mu_- = \mu_1 - \mu_2$ за фіксованої суми хімічних потенціалів $\mu_+ = \mu_1 + \mu_2$. Типові діаграми наведені на Рис. 2.2 (b) - (d) та (f) - (h). Слід відмітити, що область існування векторних солітон-солітонних пар є обмеженою, та поза її межами можуть існувати тільки однокомпонентні (скалярні) солітони. Діаграми, що наведені на Рис. 2.2 (b) - (d) та (f) - (h) відповідають зрізам $\mu_+ = const$, відміченим точковими блакитними лініями на Рис. 2.2 (a) та (e). Для побудови всієї області існування нами було знайдено відповідні діаграми для різних фіксованих значень μ_+ . Із зростанням сили крос-взаємодії σ область існування поступово звужується, поки для $\sigma = 1$ лінії не зливаються.

Насправді, при $\sigma = 1$ можуть існувати тільки однакові солітони. Коли параметр σ починає перевищувати одницю (міжкомпонентна взаємодія починає домінувати над внутрішньокомпонентною), область існування векторних солітонів починає зростати. Слід відмітити, що лінії, які обмежуть область існування для $\sigma > 1$, міняються місцями по відношенню до випадку $0 < \sigma < 1$ [див. Рис. 2.2 (а) та (е)].

В точці $\mu_1 = \mu_2 = 2$ обидві солітонні компоненти зникають, як це і має бути, завдяки домінуванню тут лінійних ефектів. Легко також показати, що розв'язки з однаковими числом частинок (лінія $\mu_- = 0$) мають ту саму структуру, що і розв'язки однокомпонентного рівняння Гроса-Пітаєвського з ефективною константою взаємодії $\tilde{\sigma} = 1 + \sigma$, таким чином, число атомів на лінії $\mu_- = 0$ зростатиме від нуля в точці $\mu_1 = \mu_2 = 2$ і буде насичуватись на значенні $N_{max} =$



 $N_{cr}/(1+\sigma)$ у випадку $\mu_1 = \mu_2 \to -\infty$ (див. розділ 1.3).

Рис. 2.3 Варіаційні результати для $\sigma = -0.5$ [(a)- (c)] та $\sigma = -2.0$ [(d)-(f)]. Зображено число атомів N_1 (пунктирні лінії для розв'язків з $\delta = 0$, криві з відкритими кружечками для розв'язків з $\delta > 0$) та N_2 (суцільні криві для розв'язків з $\delta = 0$ та криві з заповненими кружечками для розв'язків з $\delta > 0$) як функції $\mu_- = \mu_1 - \mu_2$ для різних значень сумарного хімічного потенціалу $\mu_+ = \mu_1 + \mu_2$. Зелені пунктирні лінії: $N = N_{cr} = 4\pi$.

Максимальне значення числа частинок збільшується із зменшенням μ_+ . Для $0 < \sigma < 1$ та $\sigma > 1$ ці залежності мають дещо різний характер (Рис. 2.2 (d) та (h)). Для слабкої міжкомпонентної взаємодії ($0 < \sigma < 1$) сумарна кількість частинок може були більше за N_{cr} , проте для будь-якого $\sigma > 0$ число частинок у кожній з компонент ніколи не перевищує цієї величини.





Рис. 2.4 Варіаційний параметр δ як функція $\mu_{-} = \mu_{1} - \mu_{2}$ для різних значень сумарного хімічного потенціалу $\mu_{+} = \mu_{1} + \mu_{2}$.

Варіаційний аналіз з простою гаусоїдальною пробною функцією дає гарне наближення для стаціонарних розв'язків для притягальної взаємодії між частинками різного сорту. Проте, він неспроможний описати стани векторних солітонів з просторово відокремленими компонентами, які виникають у випадку відштовхувальної крос-взаємодії. Найпростіша нормована пробна функція, що включає в себе можливість модифікації форми солітону, є наступною:

$$\psi_j(r) = A_j \left(1 + \delta_j \frac{r^2}{a_j^2} \right) e^{-\frac{1r^2}{2a_j^2}},$$
(2.18)

де *a_i* ефективна ширина *j*-ї компоненти солітон-солітонної пари,

$$A_j = \sqrt{N_j / (\pi a_j^2 (1 + 2\delta_j (1 + \delta_j)))}.$$
 (2.19)



Рис. 2.5 Приклади радіальних профілів ψ_1 (пунктирна лінія) та ψ_2 (суцільна лінія) для $\sigma = -0.5$ та $\sigma = -2.0$, що були знайдені чисельно.

Параметр $\delta_j \ge 0$ дозволяє вносити зміни до гаусоїдальної форми солітона. Якщо $\delta_j > 1/2$, розподіл густини має локальний мінімум у цетрі солітону. Очевидно, тільки одна компонента одночасно може бути виштовхнута силою взаємодії, тому один з параметрів, скажімо δ_2 , обирається рівним нулю, при цьому загальність обраних пробних функцій не втрачається. Як результат, ми маємо тільки три варіаційні параметри: як a_1 , a_2 та $\delta = \delta_1$. Використовуючи описану вище варіаційну процедуру, ми отримали наближені стаціонарні розв'язки.

Визначною особливістю БЕК з відштовхувальною крос-взаємодією є можливість співіснування різних типів стаціонарних розв'язків з однаковими хімічними потенціалами. У рамках варіаційного підходу просто показати, що для однакових значень хімічних потенціалів μ_1 та μ_2 розв'язки з $\delta > 0$ можуть співіснувати з дзвоноподібними векторними солітонами, що мають $\delta = 0$. На Рис. 2.3 можна бачити, що розв'язки з $\delta = 0$ (суцільні криві) та з $\delta > 0$ (пунктирні криві) розрізнимі в деяких областях. Слід відмітити, що для

розв'язків з близькими значеннями хімічних потенціалів (коли $\mu_{-} = \mu_{1} - \mu_{2} \approx$ 0) ці дві солітонні гілки можуть об'єднуватися, як на Рис. 2.3 для $\mu_{+} = 2.0$ та $\mu_{+} = 0.5$. Варіаційний параметр δ характеризує відмінність від гаусоїдального профіля. З Рис. 2.4 видно, що, дійсно, для певного значення μ_{-} для пар з відокремленими фазами δ досягає нуля, там чином, гілки зливаються.



Рис. 2.6 Зліва: Області стабільності на (μ_1, μ_2) -площині (зафарбовані), що були отримані за допомогою чисельного моделювання: (а) $\sigma = -0.5$, (b) $\sigma = -2.0$. Справа: Число атомів N_1 (пунктирні лінії) та N_2 (суцільні лінії) як функції від різниці хімічних потенціалів $\mu_- = \mu + 1 - \mu_2$ за фіксованої суми хімічних потенціалів $\mu_+ = \mu_1 + \mu_2$ що були отримані чисельно: (c), (d), (e) $\sigma = -0.5$, (f), (g), (h) $\sigma = -2.0$. Точкові прямі лінії на (а) та (e) відковідають μ_+ , що позначено на графіках для числа частинок (b) -(d) та (f)-(g), відповідно.

У розділі 1.3 розглядалися розв'язки у однокомпонентному БЕК з відштовхувальною міжатомною взаємодією. Оскільки для випадку однакових хімічних потенціалів $\mu_1 = \mu_2$ стаціонарні рівняння (2.14) співпадають одне з одним, як результат ми отримуємо одне однокомпонентне нелінійне рівняння Шрьодінгера із ефективною силою крос-взаємодії, що дорівнює $1 + \sigma$. Криві $N_1(\mu_-)$ та $N_2(\mu_-)$ перетинаються в точці $\mu_- = 0$ та розв'язки мають однакові дзвоноподібні профілі, що співпадають із відповідним скалярним солітоном. Це пояснює області існування таких профілів: для слабкої відштовхувальної кросвзаємодії ($-1 < \sigma < 0$) такі розв'язки зустрічаються для $\mu_+ < 4$, а для сильної кросвзаємодії ($\sigma < -1$), навпаки, починаючи із $\mu_+ = 4$ та для більших значень (див. Рис. 2.1). Це дозволяє також краще зрозуміти складний вигляд залежностей кількості числа частинок для сильної міжкомпонентної взаємодії.

У випадку сильних нелінійних ефектів (далеко від точки $\mu_1 = \mu_2 = 2$), модулі похідних $|\partial N_j / \partial \mu_j|$ швидко зростають у околі точки, де лінії $N_1(\mu_-)$ та $N_2(\mu_-)$ перехрещуються (див. Рис. 2.3). Слід відмітити, що на кривій $N_j(\mu_-)$ з'являється складка, якщо $N_j(0) > 16\pi/(3 + \sigma)$ та константа зв'язку $-1 < \sigma < -1/3$. В цьому випадку на прямій $\mu_1 = \mu_2$ спостерігаються дві додаткові точки перехрещення. Складка на діаграмах $N_j(\mu_-)$ виникає за умови $\mu_+ < -4(3 + 5\sigma)/\sqrt{(3 + \sigma)(-1 - 3\sigma)}$ для розв'язків з $\delta = 0$: існує *три* стаціонарні розв'язки у околі точки $\mu_- = 0$. Як це і має бути, діаграми симетричні по відношенню до перестановки $\mu_1 \rightarrow \mu_2$ та $\psi_1 \rightarrow \psi_2$. Типові приклади діаграм з "мультистабільністю" наведені на Рис. 2.3(с).

особливістю БЕК Цікавою відштовхувальною 3 сильною міжкомпонентною взаємодією є відмінність поведінок кривих $N(\mu_{-})$, отриманих аналітично та чисельно, для великих відємних µ₊. Варіаційні результати показують, що крива, яка на Рис. 2.3(f) відповідає N₂, продовжується нескінчено довго, проте чисельні розрахунки показують, що крива загинається (Рис. 2.6(h)). Така відмінність пов'язана з складною формою одного з солітонів: він має два максимуми (типовий приклад на Рис. 2.5(f)). Очевидно, що обрана нами пробна функція не спроможна описати такий тип розв'язків. Фізично таку форму можна пояснити наступним чином: кільцеподібна компонента стає настільки масивною, що починає виштовхувати "хвіст" дзвоноподібної компоненти назовні. У літературі описані подібні структури, що можуть мати 2 та більше максимумів.

2.3 Аналіз стійкості

Стабільність отриманих стаціонарних розв'язків була досліджена за допомогою трьох методів: деякі загальні висновки щодо стабільності випливають з варіаційного аналізу; аналіз стійкості відносно різних азимутальних мод збурень проводився за допомогою лінійного аналізу; пряма перевірка результатів попередніх двох методів проводилася за допомогою безпосереднього моделювання динаміки системи.

2.3.1 Варіаційний аналіз

Умови стійкості, отримані за допомогою варіаційного аналізу, є дещо різними у випадках дзвоноподібних розв'язків та розв'язків з відокремленими фазами. Для двоноподібних пар ($\delta = 0$) аналіз показує, що якщо кожна солітонна компонента задовольняє умові $N_j < N_{cr} = 4\pi$, тоді стаціонарна точка Гамільнотіана (який знайдено з умов $(\partial E / \partial a_j)_{N_1,N_2} = 0$, $(\partial E / \partial \delta)_{N_1,N_2} = 0$) відповідає мінімуму Гамільтоніана. Проте, якщо кількість числа частинок $N_j > N_{cr}$, то екстремум перетворюється у сідлову точку. Таким чином, число частинок у Тоунесівському солітоні (див. розділ 1.3) відповідає граничному числу частинок, яке визначає чи буде розвиватися радіально-симетричний колапс компоненти. Ці спостереження передбачають повну стабільність по відношенню до радіально-симетричного колапсу солітон-солітонних пар для притягальної взаємодії між частинками різного сорту, оскільки в цьому випадку обидві компоненти завжди мають кількість частинок меншу за критичну (див Рис. 2.2 (b) - (d) та (f) - (h)).

Для компонент з відокремленими фазами ($\delta > 0$) варіаційний аналіз показує, що пара є стійкою і у випадку, коли кількість числа частинок у кільцеподібній компонентні перевищує критичну, за умови, що внутрішня компонента має кількість числа частинок меншу за критичну. Як вже було показано, для відштовхувальної крос-взаємодії існують обидва типи розв'язків. Таким чином, для відштовхувальної взаємодії умова стійкості задовільняється тільки у околі границі області існування.

2.3.2 Лінійний аналіз

Варіаційний аналіз здатний прогнозувати стабільність відносно радіальносиметричного колапсу. Однак, він неспроможний передбачити, чи буде наростати із часом мале радіально-несиметричне збурення. Такі дослідження також є дуже важливими, оскільки реальні системи рідко бувають повністю симетричними. Стабільність стаціонарних розв'язків по відношенню до збурень, що порушують аксіальну симетрію, була досліджена за допомогою лінійного аналізу. Параметр порядку двокомпонентного БЕК було взято у вигляді $\Psi_j(r,t) = (\psi_j(r) + \varepsilon_j(r,t))e^{-\mu_j t}$, де мале збурення $\varepsilon_j(r,t)$ має форму $\varepsilon_j(r,t) =$ $u_j(r)e^{i\omega t+iL\varphi} + v_j^*(r)e^{-i\omega^*t-iL\varphi}$. Після підстановки даної комбінації в рівняння (2.7) та їхньої лінеаризії по відношенню до ε отримана задача на власні значення ω :

$$\begin{pmatrix} \hat{L}_{12} & \psi_1^2 & \sigma\psi_1\psi_2 & \sigma\psi_1\psi_2 \\ -\psi_1^2 & -\hat{L}_{12} & -\sigma\psi_1\psi_2 & -\sigma\psi_1\psi_2 \\ \sigma\psi_1\psi_2 & \sigma\psi_1\psi_2 & \hat{L}_{21} & \psi_2^2 \\ -\sigma\psi_1\psi_2 & -\sigma\psi_1\psi_2 & -\psi_1^2 & -\hat{L}_{21} \end{pmatrix} \vec{\varepsilon} = \omega\vec{\varepsilon},$$
 (2.20)

де $\hat{L}_{ij} = \mu_i + d^2/dr^2 + (1/r)d/dr + L^2/r^2.$

Цілі числа L характеризують азимутальні моди збурення. З вигляду збурення очевидно, що якщо ω має уявну частину, то малі збурення починають експоненційно зростати із часом, що призводить до нестійкості. Оскільки задача розв'язувалася числельно (тобто, власні значення утворюють масив), вона зводилася до пошуку максимальних уявних частин масиву власних значень ω .



Рис. 2.7 Максимальні інкременти як функції μ_1 за фіксованого μ_2 . Слід відмітити, що всі інкременти зникають після деякого граничного μ_1 .

Було визначено, що для притягальної міжкомпонентної взаємодії інкременти збурень $\gamma_L = Im(\omega)=0$, що дозволяє вважати, що стаціонарні стани для такого випадку є стійкими. Проте, для відштовхувальної взаємодії азимутальні моди збурень L = 1 та L = 2 можуть створювати нестабільність. Приклади діаграм з максимальним темпом наростання, як функцією від хімічного потенціалу μ_2 за фіксованого μ_1 , представлені на Рис. 2.7. Слід відмітити, що при деякому граничному значенні μ_2 всі інкременти зануляються. Важливо також зазначити, що область нестабільності відносно моди L = 1ширша та інкременти для моди L = 1 завжди більші, ніж для моди L = 2. Тому мода L = 1 є найбільш небезпечною для стабільності таких солітонів. Остаточні результати лінійного аналізу представлені на Рис. 2.6, де зелена область виділяє повністю стабільні солітони.

Для слабкої відштовхувальної міжкомпонентної взаємодії область стабільності розташована по краях області існування та звужується із збільшенням сили крос-взаємодії (Рис. 2.6 (а)). Проте, для домінуючої відштовхувальної крос-взаємодії ($\sigma < -1$), як видно з Рис. 2.6 (b) область

існування дещо змінює свій вигляд та починає виходити за межі $\mu_+ \leq 4$. Виявилося, що в області $\mu_+ > 4$ також існують стійкі солітон-солітонні пари.

2.3.3 Моделювання динаміки системи

Результати, що були отримані попередніми двома методами, були перевірені за допомогою прямих чисельних експериментів нелінійної динаміки збурених векторних солітонів. Для моделювання використовувався метод splitstep Fourier transform (розділ 1.6.2). Беспосереді чисельні експерименти дозволяють остаточно довести нестійкість, проте, за допомогою цього методу неможливо довести повну стійкість солітон-солітонної пари.



Рис. 2.8 Часова еволюція густини розподілів $|\tilde{\Psi}_1|^2$ (верхні ряди) та $|\tilde{\Psi}_2|^2$ (нижні ряди) для векторних солітонів для $\sigma = -0.5$, $\mu_1 = -0.5$, $\mu_2 = 1$. Один з солітонів швидко стискується – відбувається колапс.

Нами було підтверджено, що для притягальгої взаємодії між частинками одного сорту всі векторні солітони є стабільними як для випадку слабкої ($0 < \sigma < 1$), так і сильної ($\sigma > 1$) притягальної крос-взаємодії. Для відштовхувальної

крос-взаємодії було підтверджено існування солітонних пар, нестійких по відношенню до мод збурень L = 1 та L = 2. Типові приклади нестабільної еволюції наведені на Рис. 2.8, Рис. 2.9 та Рис. 2.10.



Рис. 2.9 Еволюція $|\tilde{\Psi}_1|^2$ (верхні ряди) та $|\tilde{\Psi}_2|^2$ (нижні ряди) для збурених векторних солітонів для $\sigma = -0.5$, $\mu_1 = -1.5$, $\mu_2 = 2$. Відбувається просторове розділення компонент.

Результати варіаційного аналізу дещо не збігаються з чисельними експериментами. Для всіх типів солітон-солітонних пар виявилося, що якщо хоча б одна компонента пари має більше, ніж N_{cr} частинок (де $N_{cr} = 11.68$ - число частинок у Тоунесівському солітоні) більша компонента є нестійкою по відношенню до колапсу. Відповідні зображення густини $|\tilde{\Psi}_1|^2$ та $|\tilde{\Psi}_2|^2$ у різні моменти часу представлені на Рис. 2.8. В цьому випадку $N_1 = 11.18$ та $N_2 =$ 14.01. Як можна бачити, внутрішня компонента витікає крізь зовнішню компоненту. Притягальні сили внутрішньокомпонентної взаємодії стискують солітон, що спочатку мав кільцеподібну форму, та, в кінці кінців, він колапсує при $t \approx 1.7$ При певних умовах може наростати мода $L = 1 - відбувається просторове розділення компонент. Рухаючись один відносно одного, у певні моменти часу розв'язки стають дуже високими та вузькими – відбувається квазіколапс (Рис. 2.9 t=20.0). Такі коливання можуть тривати дуже довго. Проте, ці нестабільні стаціонарні стани не зберігають своєї початкової форми. Якщо число частинок хоча б у одній компоненті більше за <math>N_{cr}$, такі коливання тривають лише декілька циклів, після чого настає колапс більш масивної компоненти.



Рис. 2.10 Еволюція $|\tilde{\Psi}_1|^2$ (верхні ряди) та $|\tilde{\Psi}_2|^2$ (нижні ряди) для збурених векторних солітонів для $\sigma = -0.8$, $\mu_1 = -5$, $\mu_2 = -5$. Відбувається філаментація кільцеподібної компоненти.

Зростання моди L = 2 призводить до розпаду зовнішньої солітонної компоненти на два філаменти. Спочатку в цільці виникають два горба та дві дірки, та внутрішня компонента швидко протікає крізь ці отвори у кільцеподібній "потенціальній ямі". Відштовхувальна взаємодія між кільцеподібним солітоном витікаючою внутрішньою та компонентою призводить до збільшення отворів, та, в кінці кінців кільце розвалюється на дві

частини. Нами було визначено, що колапс обох філаментів настає за умови, якщо кількість частинок у кільцеподібній компоненті більша за $2N_{cr}$. У випадку $N_{cr} < N < 2N_{cr}$ векторні солітони осцилюють протягом довгого часу. Ілюстрація такої еволюції наведена на Рис. 2.10.

Таким чином, область повної стабільності, що була знайдена за допомогою лінійного аналізу, була підтверджена безпосереднім моделюванням динаміки системи. Наявність стійких структур у досліджуваній системі робить можливим спостереження двовимірних солітон-солітонних пар у БЕК.

2.4 Висновки

У даному розділі досліджені солітонні розв'язки двовимірної системи рівнянь Гроса-Пітаєвського з аксіально-симетричною гармонійною пасткою в якості утримуючого потенціалу. Розглядався випадок притягальної взаємодії між частинками одного сорту та різні варіанти міжкомпонентної взаємодії: як притягальна, так і відштовхувальна.

Були знайдені стаціонарні двовимірні солітон-солітонні пари. Чисельні результати, доповнені варіаційним аналізом, дозволили детально проаналізувати структуру стаціонарних розв'язків, а також визначити області існування векторних солітонів для даної системи.

За допомогою трьох методів (варіаційного та лінійного аналізу, а також прямих чисельних експериментів) досліджена стійкість розв'язків відносно колапсу та різних мод збурень. Знайдені області стабільності для різних варіантів міжкомпонентної взаємодії. Визначено, що для двокомпонентного Бозеконденсату існують стійкі двовимірні векторні солітони, таким чином доведено, що гармонійна пастка стабілізує солітон-солітонні пари в квазі-двовимірному двокомпонентному Бозе-конденсаті.

За результатами розділу опублікована стаття [1] та тези конференцій [7-9].

РОЗДІЛ З СТАБІЛЬНІСТЬ НАДПЛИННИХ ПОТОКІВ В СПІНОРНИХ БОЗЕ-КОНДЕНСАТАХ

Останнім часом все збільшується кількість експериментальних робіт, що досліджують стійкі потоки в Бозе-Ейнштейнівських конденсатах. Таким чином, виникає потреба досліджувати надплинність у БЕК та її стійкість теоретично. Такі дослідження мають як фундаментальне, так і прикладне значення. Відомо, що Бозе-конденсати мають велику довжину хвилі де-Бройля, тому є дуже перспективними з точки зору створення надчутливих вимірювальних приладів. Одним із таких приладів є атомарний SQUID (superconductive quantum interference device, або надпровідний квантовий інтерференційний прилад). На відміну від надпровідних SQUID, що дозволяють вимірювати магнітні поля з дуже високою точністю, атомарний SQUID дозволяє вимірювати циркуляцію надплинного Бозе-конденсату [27]. Інший прилад, в якому відбувається інтерференція надплинних потоків у кільцевій пастці, є атомарним аналогом інтерферометра Саньяка [46], що може слугувати для надточного вимірювання міжатомних сил.

Перші експерименти з вихорами в Бозе-конденсатах показали, що надплинні потоки є досить нестійкими та руйнуються протягом кількох секунд. Однією із перших робіт, проілюструвавших можливість існування стійких надплинних потоків, є дослідження [21]. В роботі було запропоновано використовувати тороїдальну пастку з метою збільшення стійкості потоку, адже вихрове ядро мало б витратити забагато енергії для того, щоб подолати потенційний бар'єр у вигляді горба з великою густиною, що розташовується в мінімумі утримуючого потенціалу. Цей пучок відштовхує атоми від центру пастки, роблячи її, таким чином, багатозв'язною. Обертання в системі було створено шляхом застосування Лагер-Гаусового пучка. Атоми в пастці утримувалися протягом кількох секунд, після чого пастка швидко прибиралася. В результаті було отримано time-of-flight зображення конденсату, по якому можна легко визначити чи існував в системі потік. Було показано, що такі системи можуть бути стійкими навіть для частки Бозе-конденсатів 20%, в той час як в однозв'язній пастці навіть мала частка збурених атомів призводила до швидкого руйнування потоку. Також, спостерігався розпад вихорів з зарядом більше 1 на декілька елементарних вихорів за умови вимкнення центрального пучка.

В роботі [47] була вперше створена система з Бозе-конденсату, що надплинно рухається вздовж кільцеподібної пастки, та поперечного бар'єру. Досліджувалися залежності ймовірності існування надплинного потоку від хімічного потенціалу за фіксованих значень перешкоджаючого бар'єру. Було показано, що для малих значень хімічних потенціалів (а, значить, для малих кількостей частинок) бар'єр перешкоджає рух надплинного потоку, проте із збільшенням хімічного потенціалу він зростає як сігмоїда, поки не досягне одиниці. При цьому залежність таких критичних значень хімічних потенціалів, за яких сігмоїда має перегин, від висоти бар'єру має майже лінійний характер. Для теоретичного аналізу цих залежностей був зроблений розрахунок швидкості звуку з урахуванням геометрії пастки. Цей критерій дозволяє з'ясувати поріг для породження фононних збурень. Проте виявилося, що завжди швидкість звуку була вища, за експериментальний поріг. Тому була також зроблена оцінка за критерієм Фейнмана, яка дозволяє знайти поріг утворення пар вихор-антивихор. Всі експериментальні дані виявилися в межах, які дає оцінка Фейнмана, в результаті чого був зроблений висновок, що в таких системах надплинний потік руйнується саме в наслідок цього механізму.

У роботі [35] було показано, що трьохзарядні вихорі у однозв'язній пастці швидко розпадаються на три окремих вихри, що є ще одним аргументом на користь використання тороїдальних пасток. Інший цікавий результат – парадоксальна залежність часу життя надплинного потоку від глибини пастки. Для неглибокої пастки вихори демонстрували значно вищий час існування. Це
було пояснене тим, що в реальному експерименті глибока потенціальна яма має недосконалості на поверхні, таким чином приводячи до зменшення локального хімічного потенціалу на неоднорідностях. Зменшення хімічного потенціалу призводить до зменшення швидкості звуку, і, як наслідок, до виникнення збуджень.



Рис. 3.1 Схематичне зображення утримуючого потенціалу: "sheet-beam" позначений червоним кольором, "tube-beam" позначений оранжевим кольором. Зелене кільце – результуючий потенціал.

Особливо цікавим з практичної точки зору є дослідження двох- та багатокомпонентних Бозе-конденсатів, оскільки саме інтерференція двох компонент лежить в основі надчутливих вимірювальних приладів. Одним із шляхів створення багато-компонентного конденсату є використання спінорних конденсатів (див. розділ 1.3) з частинок із повним спіном F = 1. Такі частинки мають три спінових проекції, проте одна з компонент може бути усунена з пастки за умови присутності зовнішнього магнітного поля.

Експериментально надплинні потоки у спінорних Бозе-конденсатах були досліджені у роботі [48]. Атоми ⁸⁷Rb трималася в майже двовимірній

тороїдальній пастці (Рис. 3.1). Така пастка була отримана шляхом взаємодії двох оптичних пучків: так званого «sheet beam», що утримує атоми в площині, та Лагер-Гаусового пучка.

Для зручності була запропонована величина спін-поляризації $P_z = (N_+ - N_0)/(N_+ + N_0)$, яка характеризує співвідношення між кількістю числа частинок у компонентах: чим більше P_z , тим більша різниця між компонентами. У результаті експерименту було показано, що існує критичне значення P_z , більше якого потоки демонструють стійкість протягом довгого часу, а нижче якого – досить швидко руйнуються (Рис. 3.2).



Рис. 3.2 Результати експерименту [48]: стабільність надплинного потоку у частково спін-поляризованому газі. Статистично усереднене значення топологічного заряду більшої компоненти показано як функція P_z та часу еволюції t. Контурний графік базується на 1600 вимірах $\langle q \rangle$ та P_z . Перехід між стійкими та нестійкими потоками відбувається приблизно при 0.6 $\langle P_z \langle 0.7. \rangle$ стійкому режимі надплинний потік руйнується внаслідок зменшення числа атомів у конденсаті.

Для дослідження залежності заряду вихорів від часу експериментально використовувався метод time-of-fligh. Проте, ця методика не дозволяє розкрити

механізм руйнування надплинності, оскільки проміжок часу, за який відбувається проковзування фази (phase slip), дуже короткий та ймовірність у момент усунення пастки потрапити на цей проміжок дуже низька.

Як приклад стійкої та нестійкої еволюції в роботі наведені time-of-flight зображення двох крайніх станів: однокомпонентного стану ($P_z = 1$) та стану з однаковим числом частинок у компонентах ($P_z = 0$) (Рис. 3.3).

Отже, експериментальна робота [48] ставить перед теоретиками актуальну та цікаву задачу дослідження спінорних конденсатів у тороїдальній пастці. Слід зазначити, що схожі системи вже досліджувалися теоретично.



Рис. 3.3 Результати експерименту [48]: одно- та двохкомпонентний надплинні потоки. (а) Чистий стан (P_z =1): надплинний потік існує протягом більш, ніж двох хвилин, при чому перші 90 секунд не відбувається проковзувань фази. (b) Для P_z =0 перше проковзування фази відбувається через 5 секунд, а через 20 секунд надплинний потік повністю зупиняється. (c) Повне число частинок для P_z =1

(червоні порожні кружечки) та *P*_z=0 (сині заповнені кружечки). Пунктирні лінії – експоненційна апроксимація даних.

Так, в роботі [49] теоретично досліджувалася стійкість у одновимірній двохкомпонентній системі у кільцевій пастці, в результаті чого було показано, що будь-які вихорі є стійкими тільки у випадку чистого однокомпонентного стану. Однак, цей результат був підданий критиці Anoshkin та ін. у роботі [50], де було показано, що в одновимірній кільцеподібній пастці існує певне критичне значення для відношення числа частинок у компонентах. У роботі [51] досліджувалася двокомпонентна система з частинок із спінами +1 та -1 та було показано, що для атомів ⁸⁷Rb система є азимутально нестійкою, та домінуючою модою нестабільності є мода з азимутальним числом 3. Слід зазначити, що одновимірні моделі є дещо обмеженими у випадку дослідження руйнування надплинних потоків, оскільки вони не здатні охопити ситуацію, коли вихрове ядро перетинає товщу конденсату (що, насправді, і призводить до зміни заряду потоку).

У роботі [52] за допомогою аналізу стаціонарних розв'язків у наближенні середнього поля та за допомогою точних результатів, отриманих за шляхом діагоналізації Гамільтоніану, було показано, що у двовимірних системах надплинні потоки можуть бути стабільними при певних значеннях коефіцієнту зв'язку, при чому заряд таких вихорів може бути навіть більшим за 1. Іншою роботою, що досліджує двовимірну двокомпонентну систему, є робота [53], препринт якої вийшов вже після відправки нашої роботи в редакцію журналу. В цій роботі було чисельно розв'язане рівняння Гроса-Пітаєвського в уявному часі, в результаті чого була отримана діаграма, аналогічна Рис. 3.2 та показано, що існує критичне значення спін-поляризації $P_z \approx 0.9$.

Проте, всі ці теоретичні роботи досліджували системи з частинок із спіновими проекціями $m_f = \pm 1$. Не зважаючи на те, що спінова взаємодія на два

порядки слабкіша за взаємодію густин, вибір проекцій частинок впливає на знак визначника матриці змішування, яка для системи рівнянь

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_1 = \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{ext}(\vec{r}) + g_{11}n_1 + g_{12}n_2\right\}\Psi_1$$
(3.1)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_2 = \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{ext}(\vec{r}) + g_{21}n_1 + g_{22}n_2\right\}\Psi_2 \tag{3.2}$$

визначається як:

$$\hat{g} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$
(3.3)

Для компонент з $m_f = \pm 1$ матриця (3.3) має вигляд

$$\hat{g}_{\pm} = \begin{bmatrix} g_n + g_s & g_n - g_s \\ g_n - g_s & g_n + g_s \end{bmatrix},$$

а для компонент із проекціями $m_f = 0,1$:

$$g_{1,0} = \begin{bmatrix} g_n + g_s & g_n + g_s \\ g_n + g_s & g_n \end{bmatrix}$$

У випадку ⁸⁷Rb $g_s/g_n = v_a = -4.66 \cdot 10^{-3}$, таким чином det $(\hat{g}_{\pm}) < 0$, що означає домінування відштовхувальної міжкомпонентної взаємодії, а det $(\hat{g}_{0,1}) > 0$, що означає, що домінує внутрішньокомпонентна взаємодія. Таким чином, система з компонент із проекціями $m_f = \pm 1$ має прагнути до просторового розділення фаз, що було відзначено в роботі [51]. Отже, попередні теоретичні дослідження такої задачі не здатне описати систему з експерименту [48].

Прості теоретичні моделі, така як, наприклад, одновимірна гідромеханічна модель, наведена в роботі [54], також не здатні дати відповідь.

Тому ми вирішили дослідити систему із спінорного Бозе-конденсату з початковим розподілом, що містить тільки компоненти із спіновими проекціями $m_f = 0,1$, та відповісти на важливе питання \square як саме протікає проковзування фази в такій системі. Також в цьому розділі буде показано, що для набору компонент з проекціями спіну $m_f = \pm 1$ система, дійсно, прагне до просторового розділення фаз.

3.1 Модель

3.1.1 Рівняння для спінорних Бозе-конденсатів

Оскільки експеримент проводився над атомарними розрідженими Бозеконденсатами, для опису системи ми обрали систему рівнянь Гроса-Пітаєвського (1.26), (1.27), яку в присутності зовнішнього магнітного поля можна записати у вигляді:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{\pm} = \left\{\hat{\mathcal{L}} + g_n n + g_s(n - 2n_{\mp})\right\}\Psi_{\pm} + g_s\Psi_0^2\Psi_{\mp}^*, \qquad (3.4)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_0 = \left\{\hat{\mathcal{L}} - \delta E + g_n n + g_s(n - n_0)\right\}\Psi_0 + 2g_s\Psi_+\Psi_-\Psi_0^*, \qquad (3.5)$$

Тут $\hat{L} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}), \quad n = n_+ + n_0 + n_-, \quad n_j = |\psi_j|^2, \text{ та } \delta E$ параметр, що характеризує квадратичне Зеєманівське зміщення $\delta E \approx \alpha^2 E_{HFS}/16$, де E_{HFS} величина надтонкого розщеплення енергії для нульового магнітного поля, $\alpha = (g_I + g_J)\mu_B B/E_{HFS}, \quad g_I$ та g_J множники Ланде для ядер та електронів та μ_B магнетон Бора. Зовнішній потенціал був змодельований як сума двох

потенціалів, перший з яких наближено моделює «sheet beam» (пучок, що утримує атоми в площині), а другий - радіальний Лагер-Гаусовий потенціал:

$$V(\vec{r}) = \frac{m\omega_z^2 z^2}{2} - V_0 \left(\frac{r}{r_{min}}\right)^{2q} e^{-q(r^2/r_{min}^2 - 1)},$$
(3.6)

де $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, r_{min} радіус пастки (або координата мінімуму), q = 3 вихровий заряд, V_0 глибина пастки. Оскільки гармонійний потенціал щільно утримує конденсат у *z*- напрямку, ми можемо наближено вважати систему двовимірною $(l_z \ll R \text{ де } l_z = \sqrt{\hbar/(M\omega_z)}$ повздовжня осциляторна частота). Тому ми можемо зафіксувати повздовжній рух конденсату у вигляді $\Psi_j(\mathbf{r}, t) = \widetilde{\Psi}_j(r, t) \Upsilon(z, t)$, де $\Upsilon(z, t) = (l_z \sqrt{\pi})^{-1/2} \exp(-\frac{i}{2}\omega_z t - \frac{1}{2}z^2/l_z^2)$. Тоді рівняння набувають наступного вигляду:

$$i\frac{\partial\psi_{\pm}}{\partial t} = \{\hat{L} + \nu_a(n-2|\psi_{\mp}|^2)\}\psi_{\pm} + \nu_a\psi_0^2\psi_{\mp}^*$$
(3.7)

$$i\frac{\partial\psi_{0}}{\partial t} = \{\hat{L} - \delta E + \nu_{a}(n - |\psi_{0}|^{2})\}\psi_{0} + 2\nu_{a}\psi_{+}\psi_{-}\psi_{0}^{*}, \qquad (3.8)$$

де $\hat{L} = -\frac{1}{2}\Delta_{\perp} - V(r), \Delta_{\perp}$ - двовимірний оператор Лапласа. Ми використовуємо безрозмірні просторові та часові координати $r \to r/R, z \to z/l_z, t \to \omega_r t$ де $\omega_r = \hbar/(MR^2) = 4.8$ Нz. Параметри порядку масштабуються наступним чином: $\psi_j e^{-i\mu_j t} = \tilde{\Psi}_j/C$ де $C^2 = \sqrt{2\pi}\hbar\omega_r l_z/g_n$. Також були введені позначення $V(r) = -V_0 r^{2q} \exp(-q(r^2 - 1)), v_s = \operatorname{sgn}(g_n) = +1$, та $v_a = g_s/g_n = -4.66 \cdot 10^{-3}$ для конденсату з атомів ⁸⁷Rb. Загальне число частинок в експерименті [48] $N = 8 \cdot 10^4$, а параметри пастки $\omega_z/2\pi = 350\Gamma$ ц та R = 12 мікрометрів. Безрозмірні параметри в нашій моделі обрані з урахуванням експериментальних значень: глибина потенціалу $V_0/(\hbar\omega_r) = 1574.3$, квадратичне Зеєманівське зміщення $\delta = \delta E/(\hbar\omega_r) = 9070.4$.

Врахування дисипації (див. розділ 1.4) перетворює рівняння (3.7), (3.8) на

$$(i - \gamma)\frac{\partial \psi_{\pm}}{\partial t} = \widehat{\mathcal{H}}_{\pm}\psi_{\pm} + \nu_a n_0 \psi_{\mp}^*, \qquad (3.9)$$

$$(i-\gamma)\frac{\partial\psi_0}{\partial t} = \widehat{\mathcal{H}}_0\psi_0 + 2\nu_a\psi_+\psi_-\psi_0^*, \qquad (3.10)$$

де

$$\begin{split} \widehat{\mathcal{H}}_{\pm} &= -\frac{1}{2} \Delta_{\perp} - \mu_{\pm} + V(r) + \nu_{s} n + \nu_{a} (n_{0} + n_{\pm} - n_{\mp}), \\ \widehat{\mathcal{H}}_{0} &= -\frac{1}{2} \Delta_{\perp} - \mu_{0} + V(r) - \delta E + \nu_{s} n + \nu_{a} (n_{+} + n_{-}), \end{split}$$

де було введено безрозмірний хімічний потенціал спінової компоненти *j*, що набуває вигляду $\mu_j \rightarrow \mu_j/(\hbar\omega_r)$, та покладено $\gamma = 0.08$. Для перевірки цього значення γ ми промоделювали інший експеримент [35], порівнявши час, за який вихор виходить з конденсату у гармонійній пастці. Проте, було помічено, що якісно результати моделювання для спінорних БЕК у тороїдальних пастках не залежать від значення $\gamma \ll 1$. Використовуючи експоненційну апроксимацію кривої зменшення числа частинок з роботи [48] (Рис. 3.3 (с)) ми отримали значення темпу зменшення $t_0 = 39$ сек., що відповідає $\tau_0 = 180$ у безрозмірних одиницях часу для експериментальних параметрів тороїдальної пастки.

3.1.2 Початкові розподіли

У якості початкових умов $\vec{\psi}|_{t=0} = (\psi_+, \psi_0, 0)$ були обрані стаціонарні вихрові стани рівнянь Гроса-Пітаєвського без дисипації (3.7) та (3.8), отримані

за допомогою методу поширення в уявному часі (УЧ). Ми шукали стаціонарні розв'язки у формі $\vec{\psi} = (|\psi_+|e^{i3\varphi+i|\mu_+|t}, |\psi_0|e^{i3\varphi+i|\mu_0|t}, 0).$

У відповідності до методу УЧ (див. [41]) ми замінили $t \rightarrow it$ в рівняннях (3.7) та (3.8), та зафіксували число атомів N_j на кожному кроці в уявному часі. Для еволюції в уявному часі була використана техніка split-step Fourier transform (див. [42]). Ми перевіряли збіжність, спостерігаючи за значенням хім. потенціалу. $\mu_j = -\frac{1}{\Delta \tau} \ln[N_j(\tau + \Delta \tau)/N_j(\tau)]$, де $\Delta \tau \square$ крок в уявному часі. Слід відмітити, що метод УЧ врешті збігається до основного стану, навіть у випадку, коли початковий розподіл мав ненульовий кутовий момент. Це відбувається внаслідок того, що енергія зменшується протягом еволюції в уявному часі до тих пір, поки не досягне свого глобального мінімуму, тобто стану з нульовим кутовим моментом, для даного числа атомів. Оскільки ми зацікавлені в отриманні мультизарядних вихорів, ми чекаємо на момент, коли енергія досягає локального мінімуму, що відповідає стану мультизаряднорго вихору, не чекаючи, поки заряд впаде. Прямою підстановкою ми переконалися, що початкові стани та відповідні хімічні потенціали відповідають стаціонарним станам рівнянь (3.7) та (3.8).

Типовий приклад стаціонарного розподілу густини зображений на вставці Рис. 3.4.

3.2 Результати моделювання динаміки

Динаміка надплинного потоку в тороїдальній пастці була чисельно змодельована за допомогою розв'язку рівнянь (1.29) та (1.30). У відповідності з експериментальними умовами [48], початкове значення ψ_{-} задавалося нульовим, проте ми розв'язували повну систему з трьох рівнянь. Завдяки спін-залежній між компонентній взаємодії, число частинок стану $m_f = -1$ могло зростати 82

протягом еволюції. Виявилося, що, не зважаючи на це, воно завжди залишалося майже нульовим завдяки швидкому загасанню.

3.2.1 Процес проковзування фази (phase slip)



Рис. 3.4 Залежність нормованого кутового моменту від часу. Суцільна лінія – нормований кутовий момент компоненти із спіновою проекцією +1, пунктирна лінія – компоненти із спіновою проекцією 0. Точки 1, 2, 3 вказують моменти часу, для яких зображено розподіли фази та густини на Рис. 3. На вставці зображено початковий розподіл густин у компонентах (суцільна лінія – компонента |1>, пунктирна лінія – компонента |0>.

Хвильова функція надплинного потоку представлена вихором, центр якого знаходиться у центрі симетрії пастки, завдяки чому виконується умова (1.12). Проте, ми виявили, що в певні моменти часу відношення кутового моменту до числа частинок у кожній компоненті перестає бути цілим числом. Це означає, що стан вже не відповідає чистому вихровому розв'язку, таким чином, це є сигналом про порушення симетрії фази або аксіальної симетрії густини. Криву кутового моменту від часу можна побачити на Рис. 3.4, що ілюструє типовий приклад нестійкої динаміки для $m_F = +1$ та $m_F = 0$ спінових компонент параметру порядку.

Було виявлено, що, насправді, протягом проковзування фази розподіл густини в обох спінових компонентах стає суттєво анізотропним (див. Рис. 3.5 (а)). З Рис. 3.5 (b) можна бачити, що ця анізотропія є результатом просторового розділення фаз, оскільки області з більш низькою густиною однієї компоненти заповнюються атомами іншої компоненти, таким чином сумарна густина завжди є аксіально-симетричною.



Рис. 3.5 (**a**) – розподіли густини компоненти із спіновою проекцією +1 у околі переходу від трьохзарядного до двохзарядного вихоря. Білі хрестики позначають положення вихрових ядер. (**b**) Розподіл фази та густини в різні моменти часу: на початку еволюції та в околі першого та другого проковзування фази для компоненти із спіновою проекцією +1. Чорні лінії відповідають ізолініям густини, білі хрестики – положення ядер вихорів.

Кількісний лінійний аналіз стійкості малих збурень може бути проведений за допомогою Боголюбівської схеми. Проте, було виявлено, що без дисипації ($\gamma = 0$) просторового розділення фаз не спостерігається, що ускладнює дослідження такої системи на предмет азимутальної стійкості. Тому темп наростання мод мірявся за допомогою дослідження динаміки збуреної системи. Для цього ми додавали до густини одної компоненти (та віднімали від іншої) мале збурення $\delta \psi \sim \cos(l\varphi)$ та слідкували за зміною відношення різниці максимальної та мінімальної густин до середнього значення густини. Виявилося, що досліджувана система є нестійкою відносно азимутальних мод збурень $1 \le l \le 5$, при чому, як правило, домінуючою (такою, що зростає швидше за інші) є мода l = 3. Завдяки цьому, ми можемо спостерігати три горби на початку формування нестійкості (Рис. 3.5 t = 13.8).

Щілини в кільцевому розподілі густини, динамічно утворені внаслідок просторового розділення компонент, грають ключову роль у руйнуванні потоку: вихрові нитки, що утримувалися всередині внутрішньої дірки тору завдяки наявності потенціального бар'єру, можуть з легкістю дрейфувати крізь утворені «ворота», знижуючи топологічний заряд потоку на одиницю. Ця гіпотеза підтверджується спостереженнями фази параметру порядку та аналізом положень вихрових ниток впродовж проковзування фази. Типові приклади проковзувань фази показані на Рис. 3.5, де білі хрестики вказують координати вихрових ядер.

Для детектування положень ядер вихорів була використана процедура з «розмотуванням фази», аналогічна описаній у [55]. Суть процедури полягає в наступному: кожна точка на гратці перед початком процедури отримує заряд 0. Після цього починається обхід восьми точок-сусідів даної точки, для яких обраховується значення фази. У випадку, якщо у двох сусідніх точок різниця фаз перевищує деяку критичну (для неперервної моделі це було б 2π , а для скінчено-

різницевої схеми ^[2] число, менше за 2*π*), то знак заряду у шуканій точці змінюється на 1 (з урахуванням знаку розриву фази).

3.2.2 Режими стійкості

Для того, щоб скласти більш повну картину про процес руйнування надплинних потоків, були побудовані криві кутових моментів від часу для різних співвідношень між числом частинок у компонентах. При різних значеннях спінполяризації $P_z = (N_+ - N_0)/(N_+ + N_0)$ спостерігалися різні сценарії еволюції досліджуваної двокомпонентної системи.

Для майже однакових чисел частинок (Рис. 3.6) обидва трьохзарядні вихорі після ≈ 15 секунд еволюції зменшують топологічний заряд до 1. Компоненти мають однаковий кутовий момент до ≈ 40 секунд. Після цього компонента із спіновою проекцією $m_f = 0$ втрачає свій заряд та зупиняється, однак компонента з $m_f = 1$ продовжує обертатися.



Рис. 3.6 Кутовий момент для $m_f = +1$ (суцільна лінія) та $m_f = 0$ (пунктирна лінія) як функції часу для спін-поляризації $P_z = 0.01$ (приблизно однакове число частинок).



Рис. 3.7 Розподіли густини $|\psi_+|^2$ (зліва) та $|\psi_0|^2$ (справа) у момент втрати першого заряду для $P_z = 0.01$

Для більших значень *P_z* спостерігається інший варіант еволюції, приклад якої зображений на Рис. 3.4. На відміну від попереднього варіанту, після втрати заряду обома компонентами менша компонента зупиняється.



Рис. 3.8 Кутовий момент $m_f = +1$ (суцільна лінія) та $m_f = 0$ (пунктирна лінія) як функції часу для спін-поляризації $P_z = 0.8$.



Рис. 3.9 Розподіли фази та ізолінії густини для $\psi_+(зліва)$ та ψ_0 (справа) у момент втрати меншою компонентою кутового моменту для $P_z = 0.8$. Фаза позначена кольором, ізолінії густини – чорні лінії.

Для ще більших значень P_z перехід між станом із кутовим моментом 3 до стану з кутовим моментом 1 триває значно довше (Рис. 3.8). Цікавим феноменом, що притаманний великим значенням P_z , є піки на кривій кутового моменту меншої компоненти. Вони пов'язані з тим, що процес проковзування фази триває недовго, а на малих проміжках часу система є майже консервативною, тому має виконуватися локальне збереження сумарного моменту імпульсу. Внаслідок цього, під час зменшення заряду більшої компоненти, частина її кутового моменту передається до ψ_0 , і ця компонента різко набуває великого кутового моменту. Після цього вона його швидко втрачає.



Рис. 3.10 Розподіли фази та ізолінії густини для $\psi_+(зліва)$ та ψ_0 (справа) у момент втрати більшою компонентою першого заряду для $P_z = 0.8$. Фаза позначена кольором, ізолінії густини – чорні лінії.

Нарешті, Рис. 3.11 демонструє приклад стійкої еволюції. Компонента з $m_f = 1$ продовжує обертатися з $L_+/N_+ = 3$ до 120 секунд.



Рис. 3.11 Кутовий момент ψ_+ (суцільна лінія) та ψ_0 (пунктирна лінія) як функції часу для спін-поляризації $P_z = 0.9$.

Таким чином, можна виділити якісно різні режими стійкості досліджуваної системи. Відмінність часу життя надплинного потоку залежить від співвідношення між числом частинок. Якісно можна виділити наступні режими:

- Маленьке значення P_z I в компоненті ψ₀ досить велика кількість частинок і вона є майже рівноправною із більшою компонентою. Це уповільнює процес розвалу меншої компоненти, але і створює кілька мінімумів в компоненті із спіновою проекцією +1, що прискорює її розпад (рис. 3.2, 3.4)
- Середній Р_z I в компоненті із спіновою проекцією 0 досить мало частинок. Після проявлення азимутальної нестабільності, вона розвалюється на три окремі частини з дуже глибокими мінімумами, через кожен з яких вивільняється вихор (рис. 3.6). Водночас, більшій компоненті для втрати заряду недостатньо тих невеликих мінімумів, які виходять через нестійкість щодо азимутальної моди 3, а міжкомпонента відштовхувальна взаємодія призводить до локалізації компоненти з m_f = 0. Тоді в компоненті із

спіновою проекцією +1 з'являється досить великий для розпаду отвір, але всього один (рис. 3.7). Через нього виходить один вихор, а потім розподіл густини стає однорідним, і решта два вихори знаходяться в ній досить довго.

Високий P_z I в компоненті з проекцією 0 зовсім мало частинок, вона дуже швидко розпадається і охоче локалізується. Але навіть цього недостатньо, щоб зробити в більшій компоненті ворота, через які зміг би вийти вихор. Тому в таких системах велика компонента живе довго та починає втрачати заряди лише після того, як число частинок достатньо сильно падає.

3.2.3 Порівняння з експериментом

Для порівняння наших теоретичних розрахунків з експериментом [48] була представлена залежність нормованого кутового моменту більшої компоненти, що припадає на одну частинку, від часу та спін-поляризації P_z . Як можна побачити з Рис. 3.12, як і в експерименті (рис. 1.2), вище деякого критичного значення P_z потік є стійким. Нижче ж, надплинний потік швидко руйнується. Проте, експериментальне критичне значення $P_z \approx 0.64$, що є помітно нижче наших передбачень ($P_z \approx 0.89$).

Інша відмінність від експерименту стосується часу життя останнього, однозарядного вихору. В нашій моделі такі вихорі живуть значно довше.

Слід також відмітити, що, внаслідок асиметрії системи рівнянь (3.7) та (3.8) відносно перестановки $\psi_+ \leftrightarrow \psi_0$, діапазон значень P_z на діаграмі Рис. 3.12 не є повним. В дисертаційній роботі [56] також було показано, область $P_z < 0$ не є симетричним відображенням області $P_z > 0$.

Слід очікувати, що кращого узгодження з експериментом можна досягти, врахувавши наступні особливості досліджуваної системи. По-перше, в [48] було вказано, що в реальному експерименті ніколи не вдається отримати чисті Лагер-Гаусові пучки 0-ї моди, а це зробить дно пастки ширшим. По-друге, реальна пастка завжди є анізотропною, оскільки «sheet-beam» представляє собою не ідеальну площину, а еліптичний пучок з великим, але не нескінченим ексцентриситетом (див. Рис. 3.1). По-третє, суттєвим фактором може бути залежність дисипативного параметру γ від просторових і часових координат. І, нарешті, дуже важливим фактором є двовимірність нашої задачі.



Рис. 3.12 Розподіл нормованого кутового моменту компоненти із спіновою проекцією +1 в залежності від часу (по осі абсцис) та значення спін-поляризації (по осі ординат). Нормований кутовий момент позначений кольором.

3.3 Динаміка спінорних конденсатів з іншим набором спінових проекцій

У роботі [3] ми розглядали динаміку спінорних Бозе-конденсатів, що складаються з компонент з ненульовими спіновими проекціями $m_f = \pm 1$. За умови відсутності компоненти зі спіновою проекцією $m_f = 0$ рівняння (3.7), (3.8) перетворюються на систему з двох рівнянь:

$$i\frac{\partial\psi_{\pm}}{\partial t} = \{\hat{L} + (\nu_s + \nu_a)|\psi_{\pm}|^2 + (\nu_s - \nu_a)|\psi_{\pm}|^2\}\psi_{\pm}, \qquad (3.11)$$

де $\hat{L} = -(\hbar^2/2m) \Delta + V(\vec{r}).$

Ми моделювали динаміку спінорного конденсату зі спіновими проекціями $m_f = \pm 1$ шляхом розв'язку системи рівнянь (3.11). Моменти імпульсу кожної з компонент є інтегралами руху рівнянь (3.11), тому, як і слід було очікувати, моменти імпульсу в системі не змінювалися. Проте, ми з'ясували, що навіть для невеликого значення спін-поляризації P_z для кожної з компонент має місце квадрупольна азимутальна нестабільність (див. Рис. 3.13).



Рис. 3.13 Чисельна симуляція нестійкої еволюції двокомпонентного спінорного конденсату з компонентами зі спіновими проекціями $m_f = \pm 1$ при нульовій температурі. Число атомів в компонентах однакове: $N_+ = N_-$.

Таким чином, можна очікувати, що при введенні в систему дисипації через утворені отвори будуть дрейфувати вихорові ядра, що призведе до втрати системою моменту імпульсу.

Як слід було очікувати, однокомпонентна система в умовах бездисипативної динаміки, так само як і в умовах присутності теплової хмари, виявилася стійкою та не змінювала своїх властивостей протягом, як мінімум, двох хвилин фізичного часу.

3.4 Висновки

В даному розділі було теоретично досліджено надплинний потік, утворений двокомпонентним спінорним БЕК у тороїдальній оптичній пастці для різних значень співвідношення населеності P_z . Були розглянуті два набори спінових проекцій початкового стану: $m_f = 0, 1$ та $m_f = \pm 1$. Було показано, що для набору $m_f = \pm 1$ відбувається швидке просторове розділення компонент, що створює умови для руйнування надплинного потоку.

Для набору $m_f = 0, 1$, було знайдено критичне значення P_z , вище якого спостерігається стабільна еволюція потоку, а нижче цього порогу – швидке руйнування потоку. Було з'ясовано, що проковзування фази (phase slip) відбувається як результат дії двох факторів: 1) За рахунок азимутальної нестійкості кожної з компонент відбувається просторове розділення фаз та утворюються «ворота» для виходу вихорів. 2) Внаслідок наявності дисипації, що була введена в рівняння, вихорі намагаються вийти за межі конденсатної хмари. Таким чином, відбувається квантоване зменшення топологічного заряду надплинного потоку до тих пір, поки він повністю не зупиниться. Отримані результати демонструють якісне узгодження з експериментом, що був представлений у роботі [48].

За результатами досліджень було опубліковано дві статті [2, 3] та тези конференцій [10, 11].

РОЗДІЛ 4 ЗБУДЖЕННЯ ВИХОРІВ У ТОРОЇДАЛЬНОМУ БОЗЕ-КОНДЕНСАТІ, ЩО ПЕРЕМІШУЄТЬСЯ

Народження квантових вихорів та їхня динаміка щільно асоціюється з надплинними потоками в квантових рідинах та атомарних Бозе-Ейнштейнівських конденсатах [57]. В ранніх експериментах для того, щоб визначити умови утворення потоку без дисипації у БЕК, використовувалися однозв'язні пастки. Лазерний пучок рухався крізь конденсат, а дисипація детектувалася шляхом виміру нагрівання конденсату [15, 20, 58–60]. Проблема збудження вихорів за допомогою руху бар'єру була також детально досліджена теоретично [61–64].

Останнім часом набули поширення тороїдальні пастки, які здатні робити надплинні потоки більш стабільними. Одним із способів генерації надплинних вихорів у таких пастках є перемішування атомів оптичним пучком з розстройкою в синій бік (тобто, взаємодія пучка з атомами має відштовхувальний характер), так званим «перемішувачем» [54, 65]. Прикладом такого механізму генерації вихорів є робота [65]. В тороїдальну пастку були завантажені атоми натрію. Протягом експерименту атоми приводилися в рух за допомогою відштовхуючого лазерного пучка, що мав ширину, більшу за ширину конденсатного кільця. В результаті було показано, що із збільшенням швидкості руху захоплюючого пучка збільшується заряд вихору. Проте, після перевищення пучком певної критичної швидкості, центральний вихор починає розпадатися на кілька вихорів з меншим топологічним зарядом. Механізм генерації вихорів був пояснений в роботі [66]: ядро вихору, утворене потоком перемішуючого пучка, проникає крізь потенційну яму: отвір у кільці конденсату.

На відміну від роботи [65], нещодавно [54], вихори в тороїдальній пастці були збуджені з використанням малого (діаметр менший, ніж ширина кільця) потенціального бар'єру зі змінною висотою («перемішувач») з кутовою

швидкістю, що змінюється від нуля до швидкості звуку в конденсаті. Широкий діапазон експериментальних параметрів, використаний в [54] відкриває можливість для теоретичних досліджень надплинного потоку в кільцеподібних конденсатах, що перемішуються, в різних режимах. Проста одновимірна модель, використана в [54], демонструє розумне узгодження з експериментальними вимірюваннями для границі збудження вихорів. Однак, мікроскопічне джерело генерації надплинного потоку, так само як і складна вихрова динаміка, виходять за рамки одновимірного підходу, що базується на аналізі середньої швидкості звуку. В даному розділі розглядається двовимірне спрощення повної тривимірної моделі середнього поля, що підкріплюється геометрією пастки. Представляючи чисельне моделювання для різноманітних комбінацій висоти потенціального бар'єру та кутової частоти, ми визначаємо умови для створення вихорів та пояснюємо механізм утворення вихорів. Результати наших досліджегь було порівняно з експериментальними результатами.

4.1 Модель

В моделюванні нерівноважної поведінки, такої як народження вихорів, дисипативні ефекти мають вирішальне значення, оскільки вони надають механізм для знищення елементарних збуджень в процесі релаксації до рівноважного стану. Дисипація призводить до дрейфу вихрових ліній до зовнішньої границі конденсату (де вихор руйнується) або ж до закріплення вихору в центральному отворі кільцеподібного конденсату. Релаксація положення вихрового ядра до локального мінімуму енергії призводить до формування метастабільного надплинного потоку. Дисипативні ефекти виникають в захопленому конденсаті у зв'язку з взаємодією з температурною хмарою та може бути феноменологічно відтворено за допомогою дисипативного Гроса-Пітаєвського $(P\Gamma\Pi)$ (розділ 1.4). Для системи слабо рівняння взаємодіючих вироджених атомів близько до термодинамічної рівноваги, що підкоряється слабкій дисипації, дисипативне РГП для макроскопічної хвильової функції може бути записане в наступній формі

$$(i-\gamma)\hbar\frac{\partial\widetilde{\Psi}(r,t)}{\partial t} = \left[\widehat{H} + \widetilde{g}|\widetilde{\Psi}(r,t)|^2 - \mu\right]\widetilde{\Psi}(r,t),\tag{4.1}$$

де $\gamma \ll 1$ феноменологічний параметр дисипації, $\hat{H} = -\hbar^2/2M\Delta + V(r)$, Δ – оператор Лапласа, $\tilde{g} = 4\pi\hbar^2 a_s/M$ сила взаємодії, M маса атомів ²³Na, $a_s =$ 2.75 нм довжина розсіяння *s*-хвилі. Введення γ призводить до того, що в ні енергія, ні число частинок більше не є інтегралами руху. Хімічний потенціал положення рівноваги $\mu(t)$ був підігнаний в наших динамічних симуляціях таким чином, що число частинок конденсату повільно зменшується з часом: N(t) = $N(0)e^{-t/t_0}$, де $t_0 = 10$ с відповідає 1/e часу існування БЕК, повідомленому в [54]. Для чисельних симуляцій, що відповідають експериментальному утримуванню конденсату протягом 1 с, зміни числа частинок невеликі. Однак, для деяких довготривалих симуляцій, описаних в цій роботі, спад числа частинок N протягом симуляції може бути суттєвим та має враховуватися.

Утримуючий потенціал

$$V(r) = V_{tr}(r, z) + V_b(x, y, t),$$

складається з аксіально-симетричної незалежної від часу тороїдальної пастки:

$$V_{tr}(r,z) = \frac{1}{2}M\omega_z^2 z^2 + \frac{1}{2}M\omega_r^2(r-R)^2,$$

де $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, та відштовхуючого потенціалу оптичного пучка, з синьою розстройкою:

$$V_b(x, y, t) = f(t)e^{-\frac{1}{2d^2}\left\{[x - x_0(t)]^2 + [y - y_0(t)]^2\right\}},$$

де $\{x_0, y_0\} = \{R\cos(\Omega t), R\sin(\Omega t)\}$ координата центру барєру, що рухається проти годинникової стрілки з постійною кутовою частотою Ω крізь максимум

густини конденсату [див. Рис. 4.1 (а)]. Ефективна ширина пучка $d \in суттєво$ меншою за ширину кільця $\Delta R = 16.23 \,\mu$ м, однак в десять разів більша за довжину загоювання ξ ($d = 3.82 \mu$ m, $\Delta R > d \gg \xi = 1/\sqrt{8\pi n_0 a_s} \approx 0.32 \mu$ м, де $n_0 \approx 1.4 \cdot 10^{14}$ см⁻³ густина піку конденсату). Функція f(t) описує часові зміни висоти бар'єру: f(t) лінійно зростає протягом перших 0.1 с еволюції від нуля до U_b та залишається сталим протягом 0.8 с, після чого в останні 0.1 с спадає назад до нуля. Радіус кільцевої пастки рівний $R = 22.6 \mu$ м. Експериментально виміряні частоти пастки $\omega_r = 2\pi \times 134$ Гц, $\omega_z = 2\pi \times 550$ Гц, що відповідає осциляторним довжинам $l_r = \sqrt{\hbar/(M\omega_r)} = 1.81 \mu$ м та $l_z = \sqrt{\hbar/(M\omega_z)} = 0.90 \mu$ м.

Ми вважаємо, що система щільно утримується в напрямку *z* потенціалом $V_z(z) = M\omega_z^2 z^2/2$ та енергія захоплення набагато вища за інші енергетичні масштаби системи. Відповідно, ми вважаємо що повздовжній рух зафіксований, а хвильову функцію може бути факторизовано наступним чином: $\Psi_j(\mathbf{r}, t) = \widetilde{\Psi}_j(x, y, t)\Upsilon(z, t)$, де $\Upsilon(z, t) = (l_z\sqrt{\pi})^{-1/2}\exp(-\frac{i}{2}\omega_z t - \frac{1}{2}z^2/l_z^2)$ основний стан для потенціалу $V_z(z)$. Норма хвильової функції конденсату $\widetilde{\Psi}(x, y)$ еквівалентна числу атомів: $N = \int |\widetilde{\Psi}|^2 dx dy$. Після позбавлення від повздовжніх координат в тривимірному РГП (1), ми отримуємо дисипативне РГП в двох вимірах:

$$(i-\gamma)\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2}\Delta_{\perp} + V(x,y,t) + g|\psi|^2 - \mu\right]\psi,\tag{4.2}$$

де $V(x, y, t) = \frac{1}{2}(r - R)^2 + V_b(x, y, t)$ та R = 12.47 безрозмірні потенціал та радіус пастки, $g = \sqrt{8\pi}a_s/l_z = 1.54 \times 10^{-2}$ безрозірна двовимірна константа взаємодії, $\psi \to l_r \psi$ безрозмірна хвильова функція. Тут ми використовуємо одиниці гармонійного осцилятору: $t \to \omega_r t$, $(x, y) \to (x/l_r, y/l_r)$, $V_b \to V_b/(\hbar\omega_r)$, $\mu \to \mu/(\hbar\omega_r)$.



4.2 Основний стан: стаціонарні розв'язки та спектр збуджень

Рис. 4.1 (а) Схема двовимірного БЕК в кільцеподібній пастці радіусу *R*. Відштовхуючий перемішувач (заповнені кружки) збуджує вихори, коли він циркулює проти годинникової стрілки з кутовою частотою Ω вздовж максимуму густини конденсату (пунктирна лінія). Стаціонарні основни стани: (b) Число атомів в залежності від хімічного потенціалу. Вставка показує радіальний потенціал *V*(*r*) (точкові лінії) та приклади чисельно знайдених радіальних профілів $\psi(r)$ для трьох значень μ . А: $\mu = 2$, В: $\mu = 10.62$, та С: $\mu = 50$. (с) Суцільна лінія показує відновну ширину Томаса-Фермі кільця $\Delta R/R$ як функцію хімічного потенціалу. Кружки відображають чисельні результати для відносної ширини конденсату $\Delta R/R$ з густиною вище 10^{-3} піку густини. (d) Пік густини max $|\psi|^2$ в залежності від μ . Суцільна лінія представляє результат наближення ТФ, відкриті кружки відповідають чисельним стаціонарним розв'язкам.

Радіально-симетричні стаціонарні стани тороїдального БЕК, що відповідають вихорам з топологічним зарядом *m*, були знайдені чисельно за допомогою інтегрування консервативного стаціонарного РГП:

$$\mu \psi_m(r) = -\frac{1}{2} \Delta_r^{(m)} \psi_m(r) + \frac{1}{2} (r - R)^2 \psi_m(r) + g \psi_m^3(r),$$

де

$$\Delta_r^{(m)} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2}.$$

Основний стан з m = 0 відповідає граничним умовам $\psi'(0) = 0$, $\psi(\infty) = 0$. Чисельні результати для стаціонарних основних станів представлені на Рис. 4.1. Використовуючи наближення Томаса-Фермі (ТФ) (розділ 1.5.1), просто отримати наближений вираз для числа атомів: $N = 4R/(3a_s)(\pi\mu^3\omega_r/\omega_z)^{1/2}$, ширину кільця БЕК: $\Delta R = 2\sqrt{2\mu}$, та піку густини $|\psi|^2 = \mu/g$. Було показано, що ці прості оцінки чудово узгоджуються з чисельними результатами (див. Рис. 4.1). Як можна побачити, радіальні профілі поступово розширяються із ростом хімічного потенціалу, і для $\mu > 60$ центральний отвір заповнюється атомами, таким чином топологічно конденсат стає однозв'язним.

Розглянемо вибір параметрів нашої теоретичної моделі. Як вказано вище, хмара БЕК є суттєво анізотропною в експериментальній установці, таким чином двовимірна модель належним чином описує головні риси вихрової динаміки. Однак, просто переконатися, що при використанні гармонійного осцилятору в якості основного стану в напрямку z, то пік густини n_0 в площині z = 0 стає переоціненим в порівнянні з справжнім експериментальним значенням для того самого числа атомів. Очевидно, що в неоднорідному конденсаті збудження та еволюція вихорів є більш чутливою до структури густини конденсату, ніж до повного числа атомів. Параметри нашої двовимірної моделі задовольняють експериментальне значення піку густини та геометрії експериментальної установки. Відповідне безрозмірне значення хімічного потенціалу $\mu = 10.62$. Стаціонарний розв'язок для параметрів моделі, що були використані для симуляцій, показані на вставці Рис. 4.1 (а) та на Рис. 4.1 (b)-(d) зеленими кружками. Слід відмітити, що для розглянутих параметрів, центральний отвір кільцеподібного конденсату добре виражений, та ширина $\Delta R = 9.22$ набагато більша за ефективну ширину бар'єру d = 2.1.

Аналіз елементарних збурень надає розуміння властивостей конденсату, що перемішується. В тороїдальній геометрії наявність радіальної ступені вільності призводить до таких особливостей збуджень, як внутрішні та зовнішні поверхневі моди, що не можуть бути описані з точки зору середньої швидкості звуку [67, 68]. Як було зазначено в роботі [56], якщо задана геометрія тороїдальної пастки, то природа збуджень визначається числом атомів в конденсаті. Для великих конденсатів домінує зовнішня поверхнева мода, в той час як для слабкого конденсату нестабільність перетворюється на фононну моду, що зосереджена в товщі конденсату. Щоб перевірити до якого типу належать збурення, що домінують в змодельованій нами установці, та щоб отримати відповідних кількісні характеристики власних частот, ΜИ провели Боголюбівський аналіз азимутального спектру для параметрів конденсату, співпадаючих експериментальними [54]. Розкладаючи 3 умовами нестаціонарний розв'язок в ряд поблизу *т*-зарядженого стаціонарного стану $\psi(x, y, t) = [\psi_m(r) + \delta \psi(r, \varphi, t)]e^{-im\varphi}, \text{ ge } \delta \psi = u(r)e^{i\omega t + iL\varphi} + v^*(r)e^{-i\omega^*t - iL\varphi}$ та L цілі номери азимутальних мод, та ліанеризуючи динамічне рівняння (4.2) без дисипації ($\gamma = 0$ and $\mu = \text{const}$) ми отримуємо задачу на власні значення для ω у вигляді:

$$\begin{pmatrix} \hat{Q}_{m+L} & -g\psi_m^2 \\ g\psi_m^{*2} & -\hat{Q}_{m-L} \end{pmatrix} \vec{\varepsilon} = \omega \vec{\varepsilon},$$

$$(4.3)$$

де $\vec{\varepsilon} = (u, v),$

100

$$\hat{Q}_{m\pm L} = \mu + \frac{1}{2}\Delta_r^{(m\pm L)} - \frac{1}{2}(r-R)^2 - 2g|\psi_m(r)|^2$$

Незбурений радіальний профіль $\psi_m(r)$ може розглядатися як дійсна функція без втрати загальності. Для того, щоб спростити диференціальну задачу на власні значення (4.3) до алгебраїчної ми використовуємо процедуру дискретизації, що описана в [56] та розд. 1.5.3. Рис. 4.2 представляє результати наших розрахунків боголюбівського спектру. Слід відмітити, що всі частоти є дійсними.



Рис. 4.2 Спектр збуджень $\omega(L)$ основного стану (m = 0) тороїдального конденсату. Пунктирна пряма лінія відповідає $\omega = L\Omega_c$, де критична кутова частота Ω_c отримана в рамках поверхневої моделі. Слід відмітити, що критична кутова частота $\Omega_c = \min \{\omega(L)/L\}$ отримана з Боголюбівського спектру, передбачує те саме значення: $\Omega_c \approx 2\pi \times 16.1$ Гц. Вставка показує фрагмент кільця із збуреною атомарною густиною для критичної поверхневої моди для зовнішньої поверхні $(L = 30, \text{ розмір зображення } 20 \times 20$ в одиницях l_r). Амплітуда збурення нормалізована до 2% від максимальної густини незбуреного конденсату.

Виявляється, що лінійні власні моди, що відповідають критичній кутовій частоті $\Omega_c = min\{\omega(L)/L\}$, отриманій по аналогії з критерієм Ландау (див. розділ 2.3.2), локалізовані на зовнішній поверхні кільця. Відповідний збурений розподіл густини показано на вставці Рис. 4.2, де збурення $\delta n = 2Re[\psi_m^* \delta \psi]$ нормалізоване таким чином, щоб $\delta n/n_0 \leq 2 \cdot 10^{-2}$, де n_0 пік густини конденсату. Показово, що критична частота $\Omega_c/\omega_r = \sqrt{2}\mu^{1/6}/(R + \Delta R/2)$ отримана в рамках поверхневої моделі (див., наприклад, [68]), де кривиною зовнішньої поверхні знехтувано, дає практично те саме значення $\Omega_c = 2\pi \times 16.1$ Гц.

Оскільки перемішування лазерним пучком супроводжується збуренням та деформацією форми, можна очікували, що достатньо швидкий бар'єр (з $\Omega > \Omega_c$) буде продукувати збуджений стан, що відповідає поверхневій хвилі з енергією $\hbar\omega(L)$ та моментом імпульсу вздовж *z*, рівним $\hbar L$. Після збудження поверхневих мод, вони розпадаються та утворюють вихори, що входять в товщу конденсату із зовнішнього краю кільця. Для повільного бар'єру (з $\Omega < \Omega_c$) зовнішні поверхневі моди не збуджуються, та очікується, що домінуючий механізм утворення вихорів буде полягати в утворенні вихрових пар в товщі конденсату. Безпосередні симуляції дисипативної динаміки конденсату з перемішуючим пучком підтверджують ці передбачення лінійного аналізу стійкості.

4.3 Дисипативна динаміка тороїдального конденсату, що перемішується

В даному розділі ми представляємо результати наших чисельних симуляцій дисипативного РГП (4.2) з використанням split-step методу. Відповідно до експериментальної процедури, в наших розрахунках спочатку нерухомий конденсат перемішувався протягом однієї секунди відштовхуючим потенціалом, що рухався азимутально з фіксованою кутовою частотою. В подальшому, ми нехтуємо можливою залежністю γ від положення чи температури та беремо $\gamma = 1.5 \cdot 10^{-3}$. Слід відмітити, що наші головні результати кількісно не залежать від значення $\gamma \ll 1$. Дисипативний параметр γ визначає час релаксації вихорів: чим більше γ , тим менше часу потрібно вихору

для дрейфу з кільця конденсату з великою густиною до периферії з низькою густиною. Використовуючи значення $\gamma = 1.5 \cdot 10^{-3}$, ми зясували, що товща кільця конденсату очищується від вихорів впродовж трьох секунд, що відповідає експериментально виміряному часу життя вихорів у кільці [65]. Типові приклади дисипативної динаміки надані на Рис. 4.3 для повільного та на Рис. 4.5 для швидкого обертання бар'єру.

Ми спостерігали два режими збуджень вихорів в тороїдальному БЕК. Для низьких кутових частот перемішувача, пари вихор-антивихор народжувалися біля центру бар'єру (див. Рис. 4.3). Після цього пара зазнає розрив, та антивихор рухається по спіралі до зовнішньої границі конденсату, та в кінці кінців розпадається на елементарні збурення, в той час як вихор закріплюється в центральному отворі кільця, додаючи одиницю топологічного заряду надплинному потоку. Прогресуючий дрейф вихорів в напрямку зовнішньої границі конденсату є наслідком дисипації, що призводить до втрати енергії.

Цікаво відмітити суттєвий фазовий градієнт, що рухається в напрямку бар'єру, що обертається, навіть для низької амплітуди бар'єру та повільного обертання, задовго до появи вихрових пар. Фазовий градієнт відповідає полю швидкостей, що означає, що прямий надплинний потік виникає в конденсаті, що помішується, набагато нижче граничної частоти обертання. Ця особливість багатозв'язних надплинних потоків була остаточно встановлена в [69] та може бути просто пояснена наступним чином: область низької густини, що з'являється безпосередньо за перемішувачем, дає створює два надплинних потоки, напрямлені в різні боки. Перший потік напрямлений проти напрямку обертання бар'єру. Цей атомарний потік прагне заповнити регіон низької густини за бар'єром. Внаслідок того, що хвильова функція конденсату має бути однозначною, циркуляція швидкості навколо будь-якого замкненого шляху має бути кратна $2\pi m$, таким чином сумарна циркуляція швидкості зникає для станів з нульовим числом намотки (m = 0). Другий атомарний потік нівелює фазовий градієнт, що відповідає полю швидкостей атомів, що рухаються крізь бар'єр. Ось чому в кільцеподібному БЕК надплинний потік, що рухається в одному напрямку з перемішувачем, виникає на низьких частотах обертання.

Виявляється, що якщо інтенсивність бар'єру U_b лише трохи перевищує граничне значення, то момент імпульсу передається конденсату тільки через утворення пар вихор-антивихор в товщі кільця. Таким чином, в цьому режимі рухомий бар'єр може розглядатися як малий, не зважаючи на суттєвий розмір падіння густини, що відбувається в конденсатному кільці (див. Рис. 4.3). Однак, якщо U_b набагато більше граничного значення, то широка слабка ланка (локалізована область розрідженої надплинної густини) утворюється в кільці та руйнує потенціальний барєр для зовнішніх вихорів. Як результат, вихор ззовні кільця може входити крізь слабку ланку. Цей механізм подібний до перемішування широким бар'єром, що спостерігався [65].

В [70, 71] було виявлено, що анігіляція вихору та антивихору всередині слабкої ланки призводить до проковзування фази та руйнування надплинного потоку. Подібним чином, малий перемішувач з повільною швидкістю обертання та U_b близьким до граничного значення, призводить до проковзування фази шляхом утворення вихрового диполя всередині кільця конденсату.



Рис. 4.3 Збудження пари вихор-антивихор перемішуючим лазером з $\Omega = 2\pi \times 3$ Гц та $U_b/h = 1300$ Гц. Ядро вихору позначено хрестом, антивихор позначений кружком.



Рис. 4.4 Момент імпульсу, число вихорів та антивихорів, розташованих в кільці, для фінального етапу процесу перемішування (t = 1 с) позначені за допомогою кольору як функція кутової частоти Ω та інтенсивності перемішуючого потенціалу U_b : (a) Момент імпульсу на атом L_z/N . Білі ізолінії відповідають $L_z/N = 1$ (пунктирна лінія) та $L_z/N = 0.02$ (точкові криві). Суцільна жовта крива представляє граничне значення, отримане в рамках одновимірної моделі, що обула використана в [65]. (b) Число вихорів, розташованих в кільці v_v . (c) Число антивихорів, розташованих в кільці v_a .

Для більш високих кутових частот перемішувача (з $\Omega > \Omega_c$, де виявлено, що Ω_c близька до передбаченої Боголюбівським аналізом) домінуюче джерело вихорів – нестабільність зовнішніх поверхневих мод. Спочатку на зовнішній поверхні виникає хвилястість (див Рис. 4.5), після чого одночасно утворюються

декілька вихорів. Також, як зазвичай відбувається для вищої інтенсивності бар'єру U_b, вихрові лінії входять в товщу конденсату крізь слабку ланку, що обертається. Подальша складна динаміка вихорів управляється не тільки неоднорідністю конденсату та ефектами дисипації, а також взаємодією між потоками конденсату, що відповідають іншим вихорам. Анігіляція вихору з антивихорем продукує звукові хвилі, що також взаємодіють одна з одною. Більше того, звукові імпульси можуть також руйнуватися на пари вихорантивихор. В той час як бар'єр циркулює вздовж кільця, він періодично проходить свій власний слід з низькою густиною, створюючи нові вихори та взаємодіючі з існуючими. В наших симуляціях число вихорів різко зростає після того, як амплітуда бар'єру U_b зростає, таким чином, що динаміка стає досить непередбачуваною. Слід відмітити, що в центральному отворі та далеко від зовнішньої поверхні конденсату, де густина конденсату зникає, фаза значно флуктуює, та можна бачити нескінченно багато вихорів та антивихорів. Для того, щоб уникнути впливу цих «фантомних вихорів», ми не включаємо внесок v_v та v_a вихорів та антивихорів, що розташовані поза поверхнею Томаса-Фермі. Щоб проілюструвати процес релаксації та формування надплинного потоку на Рис. 4.5, часові рамки чисельного моделювання були дещо розширені в порівнянні з експериментом.

Ми представили ряд чисельних симуляцій тривалістю повного робочого циклу (1 сек) для різних інтенсивностей бар'єру U_b та кутових частот Ω . Для того, щоб узагальнити наші спостереження та порівняти результати чисельного моделювання з експериментом, ми представляємо момент імпульсу на атом L_z/N [див. Рис. 4.4 (a)], число вихорів ν_{v} [див. Рис. 4.4 (b)], та число антивихорів ν_{a} [див Рис. 4.4 (с)] всередині кільця конденсату в кінці циклу, коли бар'єр спадає Час релаксації з нерівноважного турбулентного до нуля. стану до метастабільного стану з надплинним потоком займає суттєвий час (в порівнянні з тривалістю життя вихорів в кільці, що продовжується 3 секунди). Протягом однієї секунди експериментального циклу такий перехід зазвичай не завершується, та число вихорів, розташованих в кільці, суттєво флуктуює, коли вихори перетинають поверхню Томаса-Фермі. Для того, щоб мінімізувати внесок цих випадкових флуктуацій, ми порахували ν_{v} [показано на Рис. 4.4 (b)] та ν_{a} [показано на Рис. 4.4 (с)] шляхом усереднення вихорів та антивихорів, розташованих в кільці, за період 10 мс перед та 10 мс після кінця процесу відмітити, що перемішування. Цікаво число задетектованих вихорів, розташованих в кільці, падає для дуже високих значень U_b. Це відбувається внаслідок того, що високоамплітудний пучок-перемішувач створює слабку ланку та, таким чином, руйнує потенціальний бар'єр для зовнішніх вихорів. В результаті, вихори ззовні кільця входять в центральний отвір швидко, не перетинаючи кільце конденсату.



Рис. 4.5 Часова еволюція тороїдального конденсату зі швидким перемішувачем ($\Omega = 2\pi \times 20 \ \Gamma$ ц, $U_b/h = 300 \ \Gamma$ ц): (а) Момент імпульсу на атом L_z/N (синя крива), число вихорів всередині кільця v_v (чорні точки), та антивихорів v_a (червоні точки). (а), (b) Слайди розподілів густини та фази в площині (x, y) для різних моментів часу (розмір кожного зображення 40 × 40 в одиницях l_r).

Біла пунктирна лінія на Рис. 4.4 (а) представляє екстрапольовану ізолінію, відповідаючу одиничному значенню моменту імпульсу на частинку $L_z/N = 1$. Точкова біла лінія представляє ізолінію з $L_z/N = 0.02$, що відповідає значенню, коли вихор знаходиться на зовнішній поверхні Томаса-Фермі. Вихори, що мають момент імпульсу вище за цей, стають видимими на зображеннях ТОF. Ми звертаємо увагу на те, що наш результат добре погоджується з експериментально виміряним [54] граничним значенням для вихрових збуджень, особливо для $\Omega > \Omega_c \approx 16$ Гц. Для більш низьких кутових частот експериментально виміряне значення висоти бар'єру U_b набагато нижче передбачень нашої двовимірної моделі, так само як і одновимірної, що обула представлена в [54] [показано суцільною жовтою кривою на Рис. 4.4 (а)].

Задача формування надплинного потоку в тороїдальному конденсаті, що перемішується, потребує подальших теоретичних та експериментальних досліджень. Зокрема, вплив проковзувань фази від неминучого в експерименті коливання числа атомів та недосконалостей в розподілі густини має бути проаналізовано більш детально. В наших чисельних симуляціях ми спостерігали, що досить невелике відхилення δR траєкторії центру перемішуючого пучка ($\delta R \approx 2\mu$ м, тобто порядку точності позиціонування перемішуючого пучка, заявленій в [54]) від ідеального кола радіусом $R = 22.6\mu$ м може суттєво знизити граничну висоту барєру U_b для перемішувача, що обертається повільно. Наприклад, в допоміжних матеріалах ми представляємо дві симуляції з траєкторіями перемішуючого пучка, описаними $r = R(1 + \varepsilon \cos \varphi)$. Для неспотвореного кола ($\varepsilon = 0$) проковзування фази не відбувається, в той час як у симуляції з тими самими параметрами, але з $\varepsilon = 0.1$ генерується надплинний потік з топологічним зарядом 2.

Більше того, корисним може бути узагальнення нашої двовимірної теоретичної моделі до реалістичної тривимірної. Як було зазначено вище, в рамках двовимірного спрощення, що фіксує розподіл вздовж осі *z*, складно

відтворити реальну густину конденсату одночасно в площині z = 0 та вздовж z. Більше того, в реальній тривимірній геометрії в центрі барєру, що обертається, висота ТФ конденсату спадає з U_b як $\sqrt{1 - U_b/\mu}$. Оскільки енергія вихору пропорційна довжині вихрової нитки, врахування цього ефекту може суттєво знизити границю народження вихорів. Внесок стохастичних температурних флуктуацій на процес народження вихорів близько до граничної швидкості вивчення. обертання заслуговує окремого Також, цікаво дослідити експериментально та теоретично процес релаксації до метастабільних надплинних потоків, коли конденсат очищується від вихорів, розташованих в кільці, в залежності від положення променя-перемішувача.

4.4 Висновки

В розділі було досліджено Бозе-конденсат, що перемішується вузьким оптичним бар'єром, який рухається азимутально з фіксованою кутовою частотою. Показано, що існує два режими генерації вихорів у тороїдальному Бозе-конденсаті в залежності від швидкості руху перемішуючого пучка. Розкрито механізми генерації великомасштабного надплинного потоку та продемонстровано дрібномасштабну складну динаміку вихорів.

За допомогою чисельного моделювання для різноманітних комбінацій висоти бар'єру та кутової частоти визначено умови для створення вихорів, що добре узгоджуються з експериментальними результатами. Для високих частот обертання бар'єру результати безпосереднього моделювання порівняні з передбаченнями аналізу Боголюбова-де Жена.

Результати розділу опубліковані в двох статтях [4, 5].
РОЗДІЛ 5 ЕНЕРГЕТИЧНИЙ АНАЛІЗ КВАНТОВИХ ПЕРЕХОДІВ У ТОРОЇДАЛЬНИХ БОЗЕ-КОНДЕНСАТАХ

Існування незагасаючого току в надплинній рідині тісно зв'язане з існуванням стабільного квантового вихору, що представляє собою локалізовану сингулярність фази з цілим числом намотки. Оскільки наявність вихору всередині речовини БЕК потребує енергії, в тороїдальній геометрії конденсатне кільце не дає вихорам виходити з центрального регіону системи, що стабілізує навіть мультизарядні незагасаючі токи. Таким чином, стани з ненульовим надплинним потоком є метастабільними станами, а енергетичний ландшафт такої системи виглядає подібно до представленого на Рис. 5.1. Глобальний мінімум визначається моментом імпульсу Лагер-Гаусового пучка або частотою обертання відштовхуючого бар'єру.



Рис. 5.1. Схематичний вигляд енергетичного ландшафту кільцеподібної надплинної рідини. Локальні мінімуми відповідають станам з цілим моментом імпульсу та частинку $L/N = q\hbar$.

Побудова енергетичної карти у просторі хвильових функцій може допомогти визначити ймовірність переходу між такими станами, яка, по суті, є ймовірністю тунелювання крізь потенційний бар'єр. Визначальне значення має висота потенціального бар'єру, тобто різниця між значенням енергії в точці локального мінімуму та точці перевалу між мінімумами (тобто, власне, бар'єру). Знаходження локального енергетичного мінімуму є досить простою задачею – це метастабільні стани з різними топологічними зарядами вихорів. Однак, значення енергетичного бар'єру, що відокремлює ці метастабільні стани, зазвичай невідомо. Перша задача, представлена в розділі – якісно проаналізувати затрати енергії при проковзуванні фази між основним станом та найнижчим метастабільним станом для різних темпів обертання відштовхуючого бар'єру.

Реальний конденсат завжди має ненульову температуру, таким чином температурні флуктуації можуть відігравати визначаючу роль в околі проковзування фази. Нещодавні експерименти [72] явно продемонстрували залежність часу життя надплинного потоку від температури. Друга мета представлених у розділі досліджень – порахувати час життя метастабільного стану під впливом теплового білого шуму.

5.1 Модель

Для подальшого врахування температурних флуктуацій БЕК має бути описано за допомогою стохастичного рівняння Гроса-Пітаєвського (сРГП) [73, 74], що може бути записане в безрозмірній формі наступним чином:

$$(i - \gamma) \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} =$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \Delta + V(\mathbf{r}, t) + g \left| \psi(\mathbf{r}, t) \right|^2 - \mu + \gamma \Omega_{\gamma} \partial_{\varphi} \right] \psi(\mathbf{r}, t)$$

$$+ \eta(\mathbf{r}, t),$$
(5.1)

де $\eta(\mathbf{r}, t)$ випадковий комплексний шум, що підкоряється закону Гауса, з

$$\langle \eta(\mathbf{r},t) \rangle = 0, \tag{5.2}$$

$$\langle \eta(\mathbf{r},t)\eta(\mathbf{r}',t')\rangle = 0,$$
 (5.3)

$$\langle \eta^*(\mathbf{r},t)\eta(\mathbf{r}',t')\rangle = 2\eta_0 \ \delta(t-t') \ \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{5.4}$$

та $\eta_0 \ge 0$ сила шуму (при $\eta_0 = 0$ шум відсутній, а рівняння повністю детерміністичне), Δ оператор Лапласа, $V(\mathbf{r}, t)$ зовнішній потенціал, g стала взаємодії, μ хімічний потенціал БЕК, $\partial_{\varphi} = x \partial_y - y \partial_x = [\mathbf{r} \times \nabla]_z$, дисипація, представлена параметром γ , створюється тепловою хмарою неконденсованих атомів, та нестандартний доданок, пропорційний Ω_{γ} виникає внаслідок припущення, що теплова хмара обертається з кутовою частотою Ω_{γ} .

Зовнішній потенціал має форму:

$$V(\mathbf{r},t) = V_0(r,z) + U(t)W(r,\varphi - \Omega t,z),$$
(5.5)

де r, φ , та z – циліндричні координати. Зовнішній потенціал складається з двох частин: незалежного від часу, інваріантного по відношенню до поворотів потенціалу

$$V_0(r,z) = \frac{1}{2}(r-R)^2 + \frac{1}{2}\kappa z^2,$$
(5.6)

де *R* радіус пастки, та потенціалу з залежною від часу амплітудою, що обертається (перемішує)

$$U(t)W(r,\varphi - \Omega t, z) = U(t)\Theta(\chi)e^{-\frac{1}{2}(\zeta/w)^{2}},$$
(5.7)

$$\chi = r\cos(\varphi - \Omega t), \zeta = r\sin(\varphi - \Omega t).$$
(5.8)

Тут $\Theta(\chi)$ тета-функція Хевісайда.

У подальшому, зручно описувати конденсат в системі, що обертається разом з перемішуючим потенціалом $W(r, \varphi - \Omega t, z)$. Для цього можна розглядати хвильову функцію в системі координат, що обертається

$$\psi_{\rm rot}(r,\varphi,z,t) = \psi(r,\varphi + \Omega t, z, t). \tag{5.9}$$

РГП тоді набуває форми

$$(i - \gamma) \frac{\partial \psi_{\text{rot}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

= $\left[-\frac{1}{2}\Delta + V_0(r, z) + U(t)W(r, \varphi, z) + g|\psi_{\text{rot}}(\mathbf{r}, t)|^2 - \mu \right]$ (5.10)
+ $i\Omega \partial_{\varphi} + \gamma(\Omega_{\gamma} - \Omega) \partial_{\varphi} \psi_{\text{rot}}(\mathbf{r}, t) + \eta(\mathbf{r}, t),$

де змінна амплітуда U(t) є єдиною явною залежністю від часу в рівнянні.

В розділі буде використовуватися оператор проекції момент імпульсу на вісь z $\hat{L}_z = -i \,\partial_{\varphi}$. В лабораторній системі координат він має вигляд

$$L_{z} = -i \int d^{3}\mathbf{r}\psi^{*}(\mathbf{r},t) \,\partial_{\varphi}\psi(\mathbf{r},t) = -i \int d^{3}\mathbf{r}\psi^{*}_{\mathrm{rot}}(\mathbf{r},t) \,\partial_{\varphi}\psi_{\mathrm{rot}}(\mathbf{r},t).$$
(5.11)

Зручно також означити момент імпульсу на частинку $\ell = L_z/N$, де число частинок

$$N = \int d^3 \mathbf{r} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2.$$
 (5.12)

За відсутності дисипації ($\gamma = 0$), шуму ($\eta_0 = 0$) та постійної амплітуди перемішуючого бар'єру $U(t) = U_b$, у рівнянні (5.10) енергія у обертовій системі є сталою величиною.

$$E_{\Omega} = \int d^{3}\mathbf{r} [\frac{1}{2} |\nabla \psi_{\text{rot}}|^{2} + (V_{0}(r,z) + U_{b}W(\mathbf{r}) - \mu)|\psi_{\text{rot}}|^{2} + \frac{g}{2} |\psi_{\text{rot}}|^{4} - \Omega \psi_{\text{rot}}^{*} \hat{L}_{z} \psi_{\text{rot}}].$$
(5.13)

Параметри пастки, конденсату та перемішуючого потенціалу були обрані відповідно до використаним для створення експериментальної установки в роботі [65]: R = 10.4, $\kappa = 4.88$, $g = 1.88 \times 10^{-2}$, w = 1.85. Значення $\gamma = 1.5 \cdot 10^{-3}$ було обране як реалістичне для цієї системи.

Наведені вище формули містять безрозмірні величини. Перехід до розмірних можна зробити наступним чином: час вимірюється в одиницях ω_r^{-1} , де $\omega_r = 2\pi \times 123$ Hz, всі енергії вимірюються в одиницях $\hbar\omega_r \approx 6$ нК, момент імпульсу вимірюється в одиницях \hbar , та відстані вимірюються в одиницях $l_r = \sqrt{\hbar/(M\omega_r)} = 1.84$ мкм (M маса атомів ²³Na). Безрозмірна константа зв'язку $g = 4\pi a_s/l_r$, де a_s довжина розсіяння. Розмірна хвильова функція співвідноситься з безрозмірною ψ як $\psi_{\rm dim} = l_r^{-3/2} \psi$.

В даному розділі (за виключенням підрозділу 5.2.1) буде розглядатися система відліку, що обертається з кутовою частотою Ω . Тому індекс у ψ_{rot} всюди буде опущено, а відповідна хвильова функція в подальшому тексті буде позначатися як ψ .

Дуже важливим є питання асоціації дисипації з системою відліку, що обертається з певною кутовою частотою Ω_{γ} . Фізично дисипація в БЕК приходить із неконденсованими атомами. Оскільки механізм створення перемішуючого потенціалу не залежить від того, чи атом входить до БЕК чи ні, хмара неконденсованих атомів так само приводиться до руху за перемішуючим бар'єром. Найбільш природнім було б стверджувати, що вона обертається з тією самою швидкістю Ω , що і БЕК. Таким чином, далі буде покладено $\Omega_{\gamma} = \Omega$.

5.2 Динамічний та енергетичний аналіз детерміністичних проковзувань фази

Використовуючи безпосереднє моделювання динаміки, можна знайти критичну частоту обертання оптичного пучка, вище якої починається генерація надплинного потоку. Еволюція в уявному часі також має дати відповідь на питання критичної частоти, оскільки за допомогою цього методу можна знайти основний стан системи. Однак, ця сама критична частота може бути знайдена з енергетичних міркувань: проковзування фази відбувається, коли енергетичний бар'єр, що відокремлює локальні мінімуми з різними значеннями моменту імпульсу на частинку, зникає.

В цьому підрозділі описано напіваналітичний наближений метод, що використовує пробну функцію з вдрукованими вихорами, для того, щоб оцінити енергію конденсату в різних станах та порівняні результати всіх трьох підходів.

5.2.1 Динаміка детерміністичних проковзувань фази

Для моделювання динаміки шляхом розв'язку динамічного РГП ми змінюємо амплітуду перемішуючого бар'єру U(t) подібно до експерименту [65]: спочатку вона лінійно зростає впродовж 0.5 секунд, залишається сталою впродовж наступних 0.5 секунд, та лінійно спадає впродовж останніх 0.5 секунд. Обране максимальне значення амплітуди дорівнює $U_b = 1.3 \cdot h$ кГц (де h стала Планка).

Обране значення феноменологічного дисипативного параметру γ для наших динамічних симуляцій складає $\gamma = 1.5 \cdot 10^{-3}$. Однак, як ми переконалися, наш основний результат якісно не залежить від конкретного значення $\gamma \ll 1$. У феноменоголічному підході положенням та температурною залежністю цього параметру було знехтувано.

Хімічний потенціал $\mu(t)$ був підігнаний на кожному часовому кроці таким чином, щоб число частинок залишалося рівним $N = 6 \cdot 10^5$.

Детерміністичне рівняння Гроса-Пітаєвського (5.1) з $\eta_0 = 0$ та $\Omega_{\gamma} = 0$ було чисельно розв'язане з використанням split-step методу (розділ 1.6.2),. Початковий стан для моделювання був знайдений з використанням методу розповсюдження в уявному часі (розділ 1.6.1) для конденсату в симетричній пастці, що дозволило нам знайти основний стан БЕК. Ми з'ясували, що для частот, нижчих за критичне значення $\Omega_c/(2\pi) = 2.1803 \pm 10^{-4}$ Гц, проковзування фази не відбувається, та після 1.5 с еволюції БЕК повертається до основного стану з $\ell = 0$. Для частот обертання $\Omega > \Omega_c$ кінцевий стан відповідає $\ell = 1$. Приклади еволюції у часі моментів імпульсу на частинку з частотами вище та нижче критичної представлені на Рис. 5.2.



Рис. 5.2 Часова еволюція моменту імпульсу на частинку $\ell = L_z/N$ в детерміністичних симуляціях БЕК: суцільна лінія відповідає надкритичному значенню частоти обертання бар'єру $\Omega/(2\pi) = 2.2$ Гц. Пунктирна лінія відповідає підкритичному значенню частоти обертання бар'єру $\Omega/(2\pi) = 2.1$ Гц



5.2.2 Наближений енергетичний аналіз проковзувань фази

Рис. 5.3 Залежність енергії конденсату від положень вдрукованих вихорів та антивихорів для $\Omega/(2\pi) = 2\Gamma_{II}$: (а) для моделі з вдрукованими вихорами, (с) для моделі з вдрукованими вихорами з еволюцією в уявному часі. (b) Енергія в залежності від $\ell = L_z/N$ для траєкторій найшвидшого спуску, що починаються з енергетичного бар'єру (тобто сідлової точки) та закінчуються в локальному мінімумі. Блакитні зірочки відповідають траєкторіям, що спускаються до локального мінімуму з $\ell = 0$ в моделі з вдрукованими вихорами, жовті квадрати відповідають траєкторіям, що опускаються до локального мінімуму з $\ell = 1$ в моделі з вдрукованими вихорами, та червоні кружки відповідають траєкторії, що спускається до локального мінімуму з $\ell = 0$ в моделі з вдрукованими вихорами, покращеній еволюцією в уявному часі. Траєкторії позначені тими самими маркерами та відповідних енергетичних поверхнях (а) та (с).

Критична швидкість для проковзувань фази може бути пояснена в термінах залежності енергії БЕК в обертовій системі координат (5.13) від стану системи. Для $U_b = 0$ енергетичний ландшафт демонструє локальний мінімум для цілих значень ℓ . Для $\Omega \neq 0$ та $U_b \neq 0$ наявність слабкої ланки трохи зсуває мінімуми від цілих значень ℓ . Ми зосереджуємо свою увагу на двох локальних мінімумах поблизу $\ell = 0$ та $\ell = 1$ та енергетичному бар'єрі, що їх розділяє. Для достатнью малих значень частоти обертання Ω існують обидва локальні мінімуми. Енергетичний бар'єр між мінімумами перешкоджає детерміністичні переходи між ними. Однак, глибина мінімуму залежить від Ω , та вище певного критичного значення частоти обертання лишається тільки мінімум з $\ell \approx 1$, в той час як мінімум з $\ell \approx 0$ зливається з енергетичним бар'єром. Природнім чином

можна очікувати, що частота обертання, на якій мінімум зникає, має співпадати з динамічною критичною частотою для проковзувань фази.

В наших детерміністичних симуляціях РГП, що були описані вище, проковзування фази при частоті, близькій до критичної, відбувається, коли вихор, що входить із зовнішньої периферії системи (для випадку, коли бар'єр обертається проти годинникової стрілки, тобто $\Omega > 0$) та антивихор, що вийшов з центрального отвору тороїдального конденсату, зливаються в області центральної лінії слабкої ланки. Таким чином, проковзування фази в загальних рисах може бути описане за допомогою тільки двох координат: різноманітних позицій ядер вихорів x_v та антивихорів x_a .

Оскільки ми обговорюємо переходи $\ell = 0 \rightarrow 1$, нам потрібно, щоб початковий стан мав $\ell = 0$ та всередині центрального отвору знаходився антивихор. Щоб досягти цього, ми запровадили додатковий вихор x_v^* всередині центрального отвору. Для даної Ω , ми визначаємо стан з мінімальною енергією як $\ell \approx 0$ використовуючи скінчені x_v^* , x_a та $x_v \rightarrow +\infty$, та коли ми утримуємо x_v^* фіксованим, в той час як x_a та x_v змінюються для побудови енергетичного ландшафту.

Таким чином, наш енергетичний аналіз складається з двох кроків. (i) Побудувати енергетичну поверхню, змінюючи положення додаткового вихору x_v^* та антивихору x_a та знайти енергетичний мінімум для $\ell \approx 0$ коли обидва розташовані всередині кільця. (ii) Побудувати нову енергетичну поверхню шляхом варіації x_a та x_v тримаючи x_v^* фіксованим відповідно до енергетичного мінімуму, знайденого на попередньому кроці. Ця процедура дає нам енергетичну мапу для станів з моментами імпульсу на частинку між $\ell = 0$ та $\ell = 2$. В решті тексту повна процедура буде називатися «модель із вдрукованими вихорами» (MBB). Хвильові функції з вдрукованими вихорами були побудовані наступним чином. Використовуючи еволюцію в уявному часі в обертовій системі координат, ми чисельно знаходимо стаціонарний стан $\Psi_{GS}(r)$ без вихрових ниток для даної висоти бар'єру $U(t) = U_b = \text{const.}$ Далі ми вдруковуємо вихори та антивихори в основний стан та отримуємо анзац хвильової функції конденсату з вдрукованими вихровими нитками.

$$\psi(x, y, z) = A\Psi_{GS}(r) \prod_{i} \left\{ \tanh\{\rho_i/\xi\} \right\}^{|m_i|} e^{im\theta_i}, \qquad (5.14)$$

де A – нормуюча стала, щ обула введена для збереження числа атомів, m_i топологічний заряд *i*-ої вдругованої вихорової нитки ($m_i = +1$ для вихорів та $m_i = -1$ для антивихорів), та ξ довжина загоювання в точці найбільшої густини на центральній лінії слабкої ланки ($\varphi = 0, r > 0$). Ми вважаємо, що вихрова лінія паралельна до осі z, таким чином $\rho_i(x, y) = \sqrt{(x - x_i)^2 + y^2}$ та $\theta_i(x, y) = \arctan[y/(x - x_i)]$ визначають полярні координати з центром в ядрі *i*-го вихору, розташованого в точці ($x_i, y_i = 0$).

Приклад отриманої енергетичної мапи показаний на Рис. 5.3 (а). Слід відмітити, що існує дві сідлових точки, що відповідають переходу $0 \rightarrow 1$: в одному випадку вихор може проникати всередину конденсату (точка зустрічі синьої та жовтої траєкторій), в іншому – антивихор може покидати конденсат. В обох випадках результуючий стан відповідає $\ell \approx 1$. Однак, сідлова точка, що відповідає вихору, що входить всередину конденсату, має нижчу енергію. Таким чином, ми використовуємо цю сідлову точку для оцінки енергетичного бар'єру ΔE .

Залежність висоти бар'єру від частоти обертання показана на Рис. 5.4 червоною пунктирною лінією. Як і очікувалося, значення енергетичного бар'єру спадає із зростанням частоти обертання Ω. Однак, частота зникнення бар'єру суттєво відрізняється від граничного значення, отриманого за допомогою моделювання динаміки та дорівнює $\Omega_c^{\rm IVM}/2\pi \approx 2.58$ Гц.



Рис. 5.4 Висота енергетичного бар'єру як функція частоти обертання Ω . Червоні кружки, з'єднані пунктирною червоною лінією, відповідають даним моделі з вдрукованими вихорами, чорні квадрати, з'єднані суцільною чорною лінією, відповідають даним моделі з вдрукованими вихорами, що обула покращена за допомогою розповсюдження в уявному часі. Точкова синя лінія вказує критичну частоту обертання $\Omega_c/(2\pi) = 2.1803 \pm 10^{-4}$ Гц, отриману з динамічних симуляцій РГП в дійсному часі.

Можна представити дві можливі причини цієї невідповідності. Одна можливість полягає в тому, що ми використовуємо неточний опис вихорів за допомогою анзацу. Інша можливість полягає в тому, що в моделюванні динаміки інтенсивність променю, що обертається, не є постійною: відносно швидке зростання інтенсивності могло б надати системі енергію та призвести до переходу в стан $\ell = 1$ в присутності ненульового енергетичного бар'єру. Для того, щоб показати, що має місце перший варіант, в наступному розділі ми оцінимо критичну частоту, використовуючи метод розповсюдження в уявному часі.

5.2.3 Еволюція в уявному часі та проковзування фази

Головна ідея цього розділу наступна. В якості початкового стану, ми беремо анзац хвильової функції, що відповідає мінімуму енергії поблизу $\ell = 0$, що був знайдений за допомогою MBB, як було описано в попередньому розділі (приклад такого стану показаний на Рис. 5.5). Розповсюдження в уявному часі, по суті, реалізує метод найшвидшого спуску в енергетичному просторі [41]. Таким чином, якщо початковий стан відокремлений від стану з $\ell \approx 1$ енергетичним бар'єром, то під час розповсюдження в уявному часі не відбувається переходу, та система залишається в стані $\ell \approx 0$. Однак, якщо бар'єр відсутній, перехід до стану $\ell \approx 1$ відбудеться через деякий уявний час. Таким чином, можна оцінити критичну частоту зникнення бар'єру без використання форми анзацу для вихорів, крім початкового стану. А початковий стан слабко чутливий до точної форми вихорів, оскільки всі вихорі знаходяться в області низької густини БЕК (всередині або зовні кільця конденсату).



Рис. 5.5 Приклад тороїдального конденсату з вдрукованими вихорами: локальний мінімум $\ell \approx 0$ для MBB при $\Omega/(2\pi) = 2.24$ Гц. Ліва (права) частина показуює цвітовий розподіл у площині z = 0. Хрести позначають ядра вихорів, кола позначають ядра антивихорів. Білий хрес показує положення додаткового зафіксованого ядра вихору, в той час як чорний (лівий рисунок) або червоний (правий рисунок) вказує на рухомий вихор або антивихор.

Якщо бути більш точними, то цей метод дозволяє знайти верхню межу критичної частоти, оскільки уявний час, необхідний для здійснення переходу, розходиться при наближенні до критичної частоти обертання зверху. Таким чином, не можна бути однозначно впевненим: чи перехід не відбувається оскільки бар'єр ненульовий або внаслідок того, що ми чекали недостатньо довго. Ми перевіряли наявність чи відсутність переходу по $t_{\rm im} = \omega_r \cdot it \approx 10^4$ одиниць уявного часу включно.

Приклади еволюції для підкритичних та надкритичних значень частоти обертання показані на Рис. 5.6. Знайдена верхня границя критичної кутової частоти $\Omega_c^{\text{imag}}/(2\pi) = 2.20 \pm 0.015$ Гц достатньо точно відповідає критичній частоті, знайденій з динамічних симуляцій. Таким чином, ми бачимо, що MBB переоцінює значення енергетичного бар'єру та має бути покращена.

5.2.4 Покращений аналіз енергетичної поверхні

Найбільш ймовірна причина того, що MBB переоцінює енергетичний бар'єр, полягає в тому, що форма вихорів не відтворена відповідним чином за допомогою анзацу (5.14). Для того, щоб покращити форму вихору, ми застосували розповсюдження в уявному часі для всіх станів з вдрукованими вихорами, беручи до уваги, що розповсюдження в уявному часі знижує енергію стану [41]. Ми з'ясували, що позиція вихору суттєвим чином не змінюється впродовж $t_{\rm im} = 2$ безрозмірних одиниць уявного часу, в той час як форма густини поблизу вихорів помітно змінюється.

Ми з'ясували, що форма енергетичної поверхні змінюється та висота енергетичного бар'єру $\Delta E = E_{\rm b} - E_{\rm w}$ зменшується з уявним часом, збігаючись до сталого значення (див. Рис. 5.7). Можна побачити, що ΔE насичується для $t_{\rm im} \ge 1$. Таким чином, ми використовували $t_{\rm im} = 1$ для решти наших розрахунків.



Рис. 5.6 Еволюція моменту імпульсу на атом $\ell = L_z/N$ в уявному часі для підкритичної кутової частоти $\Omega/(2\pi) = 2.1857$ Гц (точкова лінія) та для надкритичної кутової частоти $\Omega/(2\pi) = 2.2157$ Гц (суцільна лінія). Уявний час вимірюється в безрозмірних одиницях уявного часу: $t_{\rm im} = it\omega_r$

Приклад результуючої покращеної енергетичної поверхня показано на Рис. 5.3 (с). Покращений енергетичний бар'єр ΔE як функція частоти обертання Ω , показаний на Рис. 5.4 чорною суцільною лінією. Покращена ΔE є суттєво нижчою за енергетичний барєр, отриманий з MBB. Результуюча критична частота $\Omega_c^{\text{impr}}/(2\pi) \approx 2.18$ Гц, демонструє прекрасну згоду із обома іншими підходами: детерміністичними симуляціями та еволюцією в уявному часі.

5.3 Вплив шуму на проковзування фази

В попередньому підрозділі було розглянуто декілька методів для оцінки критичної частоти обертання для проковзування фази в БЕК, що описується детерміністичним РГП. Всі методи збігаються в тому, що отримане значення набагато вище, ніж отримане в експерименті [65]. Оскільки БЕК завжди має скінчену температуру, природньо розглянути вплив стохастичного (теплового) шуму на проковзування фази у якості можливого джерела цієї невідповідності.



Рис. 5.7 Висота енергетичного бар'єру як функція безрозмірного уявного часу для частоти обертання $\Omega/(2\pi) = 2.1$ Гц. Чорні квадрати відповідають розрахованим значенням, суцільна лінія апроксимує дані функцією $a + bexp(-c \cdot t_{im})$ де a, b, та c параметри апроксимації. Пунктирна лінія відповідає асимптоті a апроксимуючої функції.

Представимо, що БЕК, описаний стохастичним РГП (5.10) спочатку знаходиться в метастабільному мінімумі біля $\ell=0$ з енергією E_w . Під дією стохастичного шуму система в решті решт проходить через енергетичний бар'єр $E_{\rm b}$ до нижчого за енергією стану біля $\ell = 1$. Цей процес є ймовірнісним та визначається силою шуму, що залежить від температури системи Т. Процес має характерний часовий масштаб, заданий формулою типу Appeniyca $\tau =$ $A \exp((E_{\rm b} - E_{\rm w})/T)$ таким чином, що ймовірність того, що БЕК все ще знаходиться біля метастабільного мінімуму після часу t дорівнює p = $\exp(-t/\tau)$. Передекспоненційний множник A не є постійним та може залежати від таких параметрів системи, як T або $E_{\rm b}-E_{\rm w}$ (знайдено в попередьому підрозділі). В підрозділі буде описаний цьому метод ДЛЯ оцінки передекспоненційного множника А та оцінка часу та ймовірності переходу.

5.3.1 Рівняння Фокера-Планка для БЕК з шумом

Запишемо сРГП (5.10) в системі відліку, що обертається разом із перемішуючим потенціалом. У випадку, коли $\Omega_{\gamma} = \Omega$, це рівняння може бути переписане для зручності в наступному вигляді:

$$(i - \gamma) \partial_t \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\delta H_{\Omega}[\psi, \psi^*, t]}{\delta \psi^*(\mathbf{r})} + \eta(\mathbf{r}, t), \qquad (5.15)$$

де Гамільтоніан співпадає з енергією в обертовій системі координат:

$$H_{\Omega}[\psi,\psi^{*},t] = \int d^{3}\mathbf{r}[\frac{1}{2}|\nabla\psi|^{2} + (V_{0}(r,z) + U(t)W(\mathbf{r}) - \mu)|\psi|^{2} + \frac{g}{2}|\psi|^{4} + i\Omega\psi^{*}\partial_{\varphi}\psi].$$
(5.16)

Оскільки рівняння, що описує систему, вже не є детерміністичним, а включає випадковість, природньо описувати систему за допомогою густини ймовірності $P[\psi, \psi^*, t]$ хвильової фнукії БЕК $\psi(\mathbf{r})$.

Густина ймовірності, тоді, задовольняє рівнянню Фокера-Планка (РФП)

$$\partial_{t} P[\psi, \psi^{*}, t] = \frac{\gamma - i}{1 + \gamma^{2}} \int d^{3}\mathbf{r} \frac{\delta}{\delta\psi^{*}(\mathbf{r})} \left(\frac{\delta H_{\Omega}[\psi, \psi^{*}, t]}{\delta\psi(\mathbf{r})} P \right) + \frac{\gamma + i}{1 + \gamma^{2}} \int d^{3}\mathbf{r} \frac{\delta}{\delta\psi(\mathbf{r})} \left(\frac{\delta H_{\Omega}[\psi, \psi^{*}, t]}{\delta\psi^{*}(\mathbf{r})} P \right) + \frac{2\eta_{0}}{1 + \gamma^{2}} \int d^{3}\mathbf{r} \frac{\delta^{2} P}{\delta\psi^{*}(\mathbf{r})\delta\psi(\mathbf{r})}.$$
(5.17)

Надалі буде розглядатися випадок незалежного від часу перемішуючого бар'єру U(t) = const, що призводить до незалежного від часу Гамільтоніану $H_{\Omega}[\psi, \psi^*]$.

Для незалежного від часу Гамільтоніану $H_{\Omega}[\psi, \psi^*]$, РФП має розв'язок за теплової рівноваги

$$P_{\rm eq}[\psi,\psi^*] = \mathcal{N}e^{-H_{\Omega}[\psi,\psi^*]/T},\tag{5.18}$$

де \mathcal{N} константа нормалізації та $T = \eta_0 / \gamma$ узгоджується з флуктуаційнодисипатовною теоремою. Ми ототожнюємо температуру рівноважного розв'язку T з виміряною експериментально температурою БЕК.

5.3.2 Одновимірне наближення рівняння Фокера-Планка та час переходу

Рівняння (5.17) записане в нескінченовимірному просторі хвильових функцій, що ускладнює роботу з ним. Однак, в процесі переходу крізь енергетичний бар'єр між двома локальними мінімумами з високою ймовірністю домінує окіл єдиної оптимальної траєкторії, подібної до відміченої на Рис. 5.3 (а). Інші траєкторії будуть експоненційно подавленими у зв'язку з потребою у більшій кількості енергії протягом більш тривалого часу для здійснення переходу.

Якщо це припущення вірне, можна «спроектувати» РФП на цю траєкторію $\psi_{\alpha}(\mathbf{r})$ параметризовану дійсним параметром α . Цей параметр α може певним чином співвідноситись з ℓ або бути будь-яким іншим параметром вздовж траєкторії переходу. Отримане таким чином рівняння для густини ймовірності $P(\alpha)$ для конкретного α виглядає наступним чином:

$$\partial_t P(\alpha, t) = \frac{\gamma}{1 + \gamma^2} \sqrt{C} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sqrt{C} \frac{\partial H_{\Omega}(\alpha)}{\partial \alpha} P \right) + \frac{\gamma T}{1 + \gamma^2} \sqrt{C} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sqrt{C} \frac{\partial}{\partial \alpha} P \right), \quad (5.19)$$

де $H_{\Omega}(\alpha) = H_{\Omega}[\psi_{\alpha}, \psi_{\alpha}^*], T = \eta_0/\gamma$ температура системи, та метричний параметр

$$C(\alpha) = \left(2\int d^{3}\mathbf{r} \left|\frac{\partial\psi_{\alpha}(\mathbf{r})}{\partial\alpha}\right|^{2}\right)^{-1}.$$
(5.20)

Ймовірність знаходження між α_1 та α_2

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\sqrt{C(\alpha)}} P(\alpha).$$
 (5.21)

Після переходу до природнього параметру траєкторії переходу

$$q(\alpha) = \int^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{C(\alpha)}},$$
 (5.22)

можна переписати рівняння (5.19) як

$$\partial_t P(q,t) = \frac{\gamma}{1+\gamma^2} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial H_{\Omega}(q)}{\partial q} P \right) + \frac{\gamma T}{1+\gamma^2} \frac{\partial^2 P}{\partial q^2}, \tag{5.23}$$

Припустимо, $H_{\Omega}(q)$ має форму, зображену на Рис. 5.8 (а). Система, що спочатку знаходиться в метастабільному мінімумі M_1 , в кінці кінців пройде крізь барєр B_1 до нижнього мінімуму M_2 . Для такої системи існує точна відповідь для середнього часу переходу τ :

$$\tau = \frac{1 + \gamma^2}{\gamma T} \int_{q_{M_1}}^{q_{B_1}} dq \ e^{H_{\Omega}(q)/T} \int_{-\infty}^{q} d\tilde{q} e^{-H_{\Omega}(\tilde{q})/T},$$
(5.24)

де q_{M_1} та q_{B_1} є координатами q, що відповідають метастабільному мінімуму та енергетичному бар'єру, відповідно. Важливо, шо це є точним результатом, без жодних припущень щодо співвідношення $\Delta E/T$ енергетичного бар'єру

$$\Delta E = H_{\Omega}(q_{\mathrm{B}_{1}}) - H_{\Omega}(q_{\mathrm{M}_{1}}) \tag{5.25}$$

126

та температури *T*. В цьому випадку $\Delta E/T \gg 1$ можна використати метод перевалу та отримати добре відому формулу типу Арреніуса

$$\tau = \frac{\pi (1 + \gamma^2)}{\gamma \sqrt{H_{\Omega}''(q_{\rm M_1}) | H_{\Omega}''(q_{\rm B_1}) |}} \exp\left(\frac{\Delta E}{T}\right).$$
 (5.26)



Рис. 5.8 Можливі форми $H_{\Omega}(q)$ та його ключові точки. (а) Класична стандартна двоямна форма. Ключові точки: метастабільний мінімум M_1 , стабільний мінімум M_2 , барєр, що розділяє два мінімуми B_1 . (b) Більш реалістичний випадок з додатковим мінімумом зліва. Ключові точки ті самі, плюс додатковий метастабільний мінімум M_0 та барєр B_0 , що розділяє M_0 та M_1 .

Рівняння (5.24) отримане для енергетичної поверхні Рис. 5.8 (а), що має два локальних мінімуми: один метастабільний та один стабільний. В реальності, однак, існує більше, ніж два мінімуми (біля кількох цілих ℓ , як зображено на Рис. 5.1). Таким чином, форма $H_{\Omega}(q)$ краще представлена на Рис. 5.8 (b), де був доданий це один мінімум M₀ зліва від M₁ та, відповідно, бар'єр B₀. В такому випадку рівняння (5.24) більше не працює. Однак, якщо припустити, що $H_{\Omega}(q_{B_0}) - H_{\Omega}(q_{M_1}) \gg \Delta E$, то можна очікувати, що окіл B₀ та лівіше не є важливими, оскільки їхній внесок експоненційно пригнічений. Таким чином, можна можна обрізати нижню межу інтегралу внутрішнього інтегралу до q_{B_0} замість — ∞ в рівнянні (5.24) як гарне наближення. Можна легко помітити, що більш далекі мінімуми зліва від M₀ та справа від M₂ дають ще менший внесок.

На практиці ми надаємо перевагу дещо недооціненому значенню τ шляхом покладання обрізання нижньої межі інтегралу до q_{M_1} :

$$\tau = \frac{1 + \gamma^2}{\gamma T} \int_{q_{M_1}}^{q_{B_1}} dq \ e^{H_{\Omega}(q)/T} \int_{q_{M_1}}^{q} d\tilde{q} e^{-H_{\Omega}(\tilde{q})/T}.$$
 (5.27)

Корисно переписати останню формулу у вигляді

$$\tau = A \exp\left(\frac{\Delta E}{T}\right),\tag{5.28}$$

де передекспонентційний множник

$$A = \frac{1+\gamma^2}{\gamma T} \int_{q_{M_1}}^{q_{B_1}} dq \ e^{-(H_{\Omega}(q_{B_1}) - H_{\Omega}(q))/T} \times \int_{q_{M_1}}^{q} d\tilde{q} e^{-(H_{\Omega}(\tilde{q}) - H_{\Omega}(q_{M_1}))/T}.$$
 (5.29)

Розглянемо питання вибору траєкторії $\psi_{\alpha}(\mathbf{r})$. Найбільш доведеним з теоретичної точки зору шляхом було би вибрати інстантонну траєкторію, що може бути отримана зі стохастичної дії, що відповідає РФП (5.17) [67, Section 4.4]). Однак, знаходження цієї траєкторії з дії не є легкою задачею. Гарним наближенням було б знайти траєкторію, яка дає мінімальний час переходу τ (5.27). Але, знову, це неможливо зробити точно.

У якості наближення ми вирішили знайти траєкторію з найбільш крутим сходженням між метастабільним мінімумом та точкою, шо відповідає енергетичному бар'єру. Для того, щоб зробити це, ми використовували хвильову фунцію-анзац типу описаної в попередньому розділі, будували енергетичну поверхню, що відповідає таким хвильовим функціям, знаходили сідлову точку, що відокремлює два локальних мінімуми, та знаходили траєкторію найшвидшого спуску між сідловою точкою та метастабільним мінімумом (див. Рис. 5.3 (с)). Ми вважали знайдену траєкторію за траєкторією переходу.

5.3.3 Алгоритм розрахунку часу переходу та ймовірності проковзування фази

В загальних рисах, алгоритм знаходження часу переходу *т* виглядав наступним чином.

Як і в попередньому розділі, ми досліджували систему з параметрами, що відповідають експерименту [65]. Параметри представлені в підрозділі 5.1. Для кожної частоти перемішуючого потенціалу Ω ми робили наступне: (i) Будували енергетичну поверхню у відповідності до процедури, описаної в пункті 5.2.4. (ii) Знаходили траєкторію найшвидшого спуску між сідловою точкою та метастабільним мінімумом. Знаходили хвильові функції на траєкторії. (iii) Рахували метричні параметри (5.20) та будували природній параметр вздовж траєкторії (5.22). (iv) Рахували час переходу τ у відповідності до рівняння (5.27). (v) Оцінювали ймовірність переходу протягом експерименту як $p_{\text{trans}} = 1 - \exp(-t_{\text{exp}}/\tau)$, де $t_{\text{exp}} = 1.5$ в

Останній крок потребує пояснення. В експерименті [65] амплітуда перемішуючого бар'єру є залежною від часу. Точна оцінка ймовірності стохастичного переходу має потребувати врахування того, що (а) τ змінюється в залежності від амплітуди перемішуючого бар'єру та, таким чином, залежить від часу та (b) перехід не є миттєвим, таким чином, амплітуда бар'єру змінює динаміку, що відхиляє знамення τ від його значення, порахованого у наближенні сталої амплітуди бар'єру. Ми нехтуємо внеском (b). Щодо (а), ми очікуємо, що τ буде тим більший, чим менший перемішуючий бар'єр Таким чином, використовуючи τ , що відповідає максимальній амплітуді за цілий час експерименту, ми, як правило, переоцінюємо p_{trans} . 5.3.4 Результати для розрахунку часів переходів та ймовірності переходів для викликаних температурою проковзувань фази

Обговоримо результати, отримані за допомогою методу, описаного в пункті 5.3.3.



Рис. 5.9 Час переходу як функція частоти перемішуючого бар'єру для різних температур. Суцільна лінія та квадрати відповідають температурі T = 50 нК, пунктирна лінія та кружки відповідають T = 100 нК, точкова лінія та повернуті вверх трикутники відповідають T = 200 пК. Точково-пунктирна лінія та повернуті вниз трикутники відповідають феноменологічній оцінці $\tau_{\rm ph} = A_{\rm ph} \exp(\Delta E/T)$, де ΔE взято тим самим, що для інших трьох кривих, а $A_{\rm ph} = 7.7 \cdot 10^{-5}$ s. Вертикальна вісь представлена в логарифмічному масштабі, однак її початок відповідає нулю.

Рис. 5.9 представляє оцінку часу переходу $t_{\rm trans} = \tau$, порахованого для різних частот перемішуючого бар'єру та температур системи. Корисно порівняти цей рисунок з суцільною чорною лінією на Рис. 5.4, що представляє залежність енергетичного бар'єру ΔE від Ω . Можна побачити декілька режимів.

Природнім чином, час переходу йде до нуля, коли ΔE зникає. Формально, це відбувається внаслідок того, що бар'єр зникає, коли метастабільний мінімум q_{M_1} та потенціальний бар'єр q_{B_1} зливаються. Таким чином, зовнішній інтеграл в рівнянні (5.29) береться вздовж інтервалу довжиною нуль, та передекспоненційний множник *А* зникає.

В області, де $\Delta E \ll T$, $\exp(\Delta E/T) \approx 1$, але час переходу стрімко зростає зі зменшенням Ω у відповідності до росту передекспоненційного множника A (відстань між q_{M_1} та q_{B_1} зростає, але експоненти майже дорівнюють одиниці). В цьому режимі криві для різних температур майже збігаються.

Для $\Omega/2\pi \ge 2.0$ Нz передекспоненційний множник *A* насичується для всіх трьох кривих. Він може все ще трохи варіюватися, але залежність часу переходу від Ω визначається, в основному, $\exp(\Delta E/T)$.



Рис. 5.10 Ймовірність проковзування фази протягом експерименту. Пунктирна лінія показує детерміністичну ймовірність: 0 нижче Ω_c , 1 вище Ω_c . Суцільна лінія та чорні квадрати показують ймовірність, оцінену у відповідності до $p_{\text{trans}} = 1 - \exp(-t_{\text{exp}}/\tau)$, де тривалість експерименту $t_{\text{exp}} = 1.5$ s, та τ пораховане для T = 200nK, використовуючи рівняння (27).

На Рис. 5.9, ми також побудували феноменологічну формулу, застосовану для аналізу подібного експерименту в [76]. Формула виглядає як $\tau_{\rm ph} = A_{\rm ph} \exp(\Delta E/T)$. У роботі [76] використовується іграшкова модель для $\Delta E(\Omega)$ та оцінюється $A_{\rm ph}$ з міркувань розмірності як $A_{\rm ph} = \xi/c_s$, де ξ довжина загоювання та c_s швидкість звуку. Для нашої системи це призводить до $A_{\rm ph} \approx 7.7 \cdot 10^{-5}$ с. Ми рахуємо $\tau_{\rm ph}$ викорисовуючи цю оцінку для $A_{\rm ph}$ та той самий наш результат для ΔE , що був використаний для інших наших трьох кривих. Використана температура T = 200nK.

Можна побачити дві важливі риси. По-перше, феноменологіний час не йде до нуля, коли бар'єр ΔE зникає. Це відбувається внаслідок того, що для $\Delta E = 0$, $\tau_{\rm ph} = A_{\rm ph}$, що є ненульовою сталою. По-друге, що більш важливо, феноменологічна оцінка на декілька порядків нижча за оцінку з використанням рівняння (5.27) для тієї самої температури. Це означає, що наша оцінка (5.29) для передекспоненційного множника відрізняється на кілька порядків.

I, врешті, ми оцінили ймовірність переходу протягом експерименту як функцію частоти обертання перемішуючого бар'єру Ω . Рис. 5.10 представляє детерміністичну (що представляє собою 0 нижче границі та 1 вище неї) та стохастичну ймовірність. Стохастична ймовірність була оцінена за допомогою $p_{\text{trans}} = 1 - \exp(-t_{\exp}/\tau)$, де тривалість експерименту $t_{\exp} = 1.5$ s. Час переходу τ був взятий для вищевказаних розрахунків для темперутари T =200 нК. Гранична частота (визначена як частота, при якій $p_{\text{trans}} = 0.5$), дійсно, зменшується. Однак, зменшення набагато менше, ніж розбіжність між теоретичною $\Omega_c^{\text{theor}}/(2\pi) \approx 2.2$ Гц та експериментальною граничною частотою [65](Fig. 3) $\Omega_c^{\exp}/(2\pi) < 1$ Hz.

5.3.5 Аналіз отриманих результатів та шляхи їхнього покращення

Було знайдено, що додавання теплового шуму, дійсно, знижує границю для проковзування фази. Однак, ефект є малим в порівнянні з розбіжністю між теорією та експериментом. Це може означати, що тепловий шум не є головним механізмом, відповідаючим за цю розбіжність. Для прояснення природи

проковзувань фази, що спостерігаються експериментально, необхідна подальша теоретична та експериментальна робота.

Існує декілька можливих шляхів покращити нашу модель:

Покращення nidxody до РФП. «Проектування» РФП на одновимірну траєкторію у просторі хвильових функцій містить деяку похибку, що полягає в нехтуванні внеском флуктуацій, перпендикулярних до домінуючої траєкторії в нескінченовимірному просторі хвильових функцій. Належний підхід, що бере до уваги перпендикулярні ступені вільності, міг би бути більш виграшним.

Дослідження системи з дисипацією, асоційованою з системою відліку, що обертається з кутовою швидкістю, відмінною від швидкості перемішуючого потенціалу. Ми вважали, що основним джерелом дисипації є хмара неконденсованих атомів. Природньо очікувати, що в стаціонарному стані хмара обертається разом із перемішуючим бар'єром. Однак, дисипація може визначатися іншим механізмом, наприклад, мати відношення до флуктуацій пастки. Тоді могло б бути природнім асоціювати дисипативний член з лабораторною системою відліку. Це, однак, може мати радикальні фізичні наслідки. Наприклад, стаціонарний стан в обертовій системі відліку більше не буде станом в тепловій рівновазі.

Дослідження просторово модульованої дисипації та шуму. Хмара несконденсованих атомів є головним джерелом дисипації та шуму. Завдяки зовнішньому потенціалу хмара не є однорідною у просторі. Внаслідок в'язкості та кільцевій геометрії, теплова хмара малоймовірно буде обертатися з однорідною кутовою швидкістю разом із перемішуючим бар'єром, навпаки, потік може мати деяку просторову структуру. Це може привести до того, що дисипація буде діяти по-різному на різні просторові області. Неоднорідний потік хмари може призвести до нагріву хмари, що також може бути неоднорідною, призводячи до просторової модуляції шуму, що діє на конденсат. Це може бути взяте до уваги шляхом написання гідродинамічної моделі хмари та феноменологічного ототожнення параметрів хмари з параметрами шуму та дисипації, що діє на БЕК.

Розгляд повної кінетичної моделі нерівноважної динаміки БЕК та неконденсованих атомів. Попередній пункт природнім чином узагальнюється в розгляд повної мікроскопічної моделі взаємодії БЕК та неконденсованої хмари. Така модель була виведена в роботах [77, 78], однак опис проковзувань фази в рамках цієї моделі залишається відкритою задачею.

Ми хотіли б підкреслити, що в той час, як можливі різні підходи для врахування стохастичних ефектів, слід очікувати те, що значення енергетичного бар'єру буде вирішальним фактором. Як ми знайшли, енергетичний бар'єр швидко зростає нижче детерміністичної граничної швидкості обертання. Це означає, що теплові проковзування фази, ймовірно, пригнічені також і в рамках більш складних мікроскопічних підходів.

5.4 Висновки

В даному розділі представлене дослідження утворення незатухаючого потоку в тороїдальному конденсаті при скінченій температурі, утвореного широким оптичним бар'єром, що рухається азимутально з фіксованою кутовою швидкістю Ω . Показано, що подібно до експериментальних спостережень, конденсат залишається в стані з нульовим моментом імпульсу, якщо $\Omega < \Omega_c$, однак, якщо кутова швидкість перевищує критичне значення $\Omega > \Omega_c$, відбувається проковзування фази, індуковане вихровими збудженнями, створеними рухомою слабкою ланкою. При $\Omega \approx \Omega_c$ результат є ймовірнісним. Був також представлений аналіз впливу теплового шуму на процес проковзування фази, зроблений у зв'язку з серйозним неспівпадінням між експериментальними результатами та попередніми теоретичними оцінками критичної кутової швидкості Ω_c . Представлений кількісний аналіз величини енергетичного бар'єру, що розділяє два локальних енергетичних мінімуми з різними моментами імпульсу. Зі знайденої енергетичної карти визначено значення енергетичного бар'єру. Визначено, що енергетичний бар'єр, що розділяє стани з $L_z/N = 0$ та $L_z/N = 1$ зникає при $\Omega > \Omega_c$, що добре узгоджується з результатами наших детерміністичних симуляцій тороїдального конденсату, що перемішується.

За допомогою рівняння Фокера-Планка, ряду наближень та енергетичного аналізу, розраховано ймовірність проковзування фази та час переходу при різних температурах. Показано, що додавання теплового шуму, дійсно, зменшує критичне значення. Проте, кількісний внесок у стохастичні проковзування фази виявляється замалим для того, щоб пояснити суттєву відмінність між теоретичними та експериментальними оцінками Ω_c .

За результатами розділу опублікована стаття [6].

ВИСНОВКИ

В дисертації вивчались нелінійні структури в розріджених атомарних БЕК. Основні результати дисертаційної роботи полягають у наступному:

- На основі теоретичного аналізу стійкості солітон-солітонних пар в двокомпонентному Бозе-конденсаті з притягальною міжкомпонентною взаємодією встановлено, що гармонійний утримуючий потенціал стабілізує солітон-солітонні пари та знайдено область існування таких пар в просторі хімічних потенціалів.
- При дослідженні умов руйнування надплинного потоку в спінорних Бозе-конденсатах, утворених з двох компонент зі спіновими проекціями m_f = 0, 1, знайдено критичне значення співвідношення населеностей компонент, за якої потік починає руйнуватися.
- 3. Порівняно часову еволюцію двокомпонентних конденсатів, що складаються з компонент зі спіновими проекціями $m_f = 0, 1$ та $m_f = \pm 1$. Показано, що вибір спінових проекцій при створенні двокомпонетного спінорного конденсату визначає характер еволюції: довготривала стійкість відносно аксіально-несиметричних збурень у першому випадку та швидке їхнє наростання в другому.
- 4. Знайдено граничні значення параметрів вузького перемішуючого оптичного пучка, за яких відбувається генерація вихорів у тороїдальних Бозе-конденсатах. Продемонстровано, що, в залежності від швидкості руху пучка, в такій системі існує два принципово різних механізми утворення надплинного потоку.
- 5. Шляхом аналізу енергетичних поверхонь у просторі хвильових функцій знайдено залежність висоти потенціального бар'єру між нерухомим та обертальним станом тороїдального Бозе-конденсату від частоти обертання широкого оптичного перемішуючого пучка. За допомогою

моделі на основі рівняння Фокера-Планка визначено час переходу між цими двома станами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- Yakimenko A. I. Stable bright solitons in two-component bose-einstein condensates / A. I. Yakimenko, K. O. Shchebetovska, S. I. Vilchinskii, M. Weyrauch // Physical Review A. — 2012. — Vol. 85, No. 5. — P. 53640.
- Yakimenko A. I. Stability of persistent currents in spinor bose-einstein condensates
 / A. I. Yakimenko, K. O. Isaieva, S. I. Vilchinskii, M. Weyrauch // Physical Review A. — 2013. — Vol. 88, No. 5. — P. 51602.
- 3. Vilchynskyy S. I. The nature of superfluidity and bose-einstein condensation: from liquid 4 he to dilute ultracold atomic gases (review article) / S. I. Vilchynskyy, A. I. Yakimenko, K. O. Isaieva, A. V Chumachenko // Физика низких температур. 2013. Vol. 39, No. 9.
- 4. Yakimenko A. I. Vortex excitation in a stirred toroidal bose-einstein condensate / A.
 I. Yakimenko, K. O. Isaieva, S. I. Vilchinskii, E. A. Ostrovskaya // Physical Review A. 2015. Vol. 91, No. 2. P. 23607.
- Yakimenko A. I. Generation and decay of persistent currents in a toroidal boseeinstein condensate / A. I. Yakimenko, S. I. Vilchinskii, Y. M. Bidasyuk[et al.] // Romanian Reports in Physics. — 2015. — Vol. 67, No. 1. — P. 249–272.
- 6. Snizhko K. Stochastic phase slips in toroidal bose-einstein condensates / K. Snizhko,
 K. Isaieva, Y. Kuriatnikov[et al.] // Physical Review A. 2016. Vol. 94, No.
 6. P. 63642.
- Shchebetovska K. O. Bright solitons in two-component bose-einstein condensates / K. O. Shchebetovska, A. I. Yakimenko, S. I. Vilchynskii, M. Weyrauch // Book of abstracts III Conference of Young Scientists Modern Problems of Theoretical Physics. — 2011. — P. 106.
- 8. Щебетовська К. О. Стійкі нелінійні структури в двокомпонентних бозеконденсатах / К. О. Щебетовська, О. І. Якименко, С. Й. Вільчинський, М.

Weyrauch // 12-та Всеукраїнська школа-семінар та конкурс молодих вчених, збірка тез. — 2012. — Р. 43.

- Isaieva K. O. Two-dimensional solitons in binary mixtures of bose-condensates / K.
 O. Isaieva, A. I. Yakimenko, S. I. Vilchynskii, M. Weyrauch // Book of abstracts International Conference on Problems of Theoretical Physics. — 2012. — P. 86.
- Isaieva K. O. Nonlinear structures in two-dimensional multicomponent trapped bec / K. O. Isaieva, A. I. Yakimenko, S. I. Vilchynskii, M. Weyrauch // Book of abstracts IV Conference of Young Scientists Modern Problems of Theoretical Physics. — 2012. — P. 99.
- 11. Isaieva K. O. Persistent currents in toroidal spinor bose-einstein condensates / K.
 O. Isaieva, A. I. Yakimenko, S.I.Vilchinckii, M. Weyrauch // Book of abstracts V
 Conference of Young Scientists Problems of Theoretical Physics. 2013. P.
 38.
- Anglin J. R. Of atomic gases / J. R. Anglin, W. Ketterle // 2002. Vol. 416, No. March. — P. 211–218.
- Stringari S. Bose–einstein condensation in ultracold atomic gases / S. Stringari // Physics Letters A. — 2005. — Vol. 347, No. 1–3. — P. 150–156.
- 14. Matthews M. R. Vortices in a bose-einstein condensate / M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan[et al.] // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83, No. 13. P. 2498–2501.
- Madison K. W. Vortex formation in a stirred bose-einstein condensate / K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, J. Dalibard // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 84, No. 5. P. 806–809.
- Abo-Shaeer J. R. Observation of vortex lattices in bose-einstein condensates / J. R. Abo-Shaeer, C. Raman, J. M. Vogels, W. Ketterle // Science. 2001. Vol. 292. P. 476–479.

- Jin D. S. Collective excitations of a bose-einstein condensate in a dilute gas / D. S. Jin, J. R. Ensher, M. R. Matthews[et al.] // 1996.
- Mewes M. Collective excitations of a bose-einstein condensate in a magnetic trap / M. Mewes, M. R. Andrews, N. J. Van Druten[et al.] // 1996.
- Maragò O. Temperature dependence of damping and frequency shifts of the scissors mode of a trapped bose-einstein condensate / O. Maragò, G. Hechenblaikner, E. Hodby, C. Foot // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86, No. 18. P. 3938–3941.
- Raman C. Evidence for a critical velocity in a bose-einstein condensed gas / C. Raman, M. Köhl, R. Onofrio[et al.] // 1999.
- 21. Ryu C. Observation of persistent flow of a bose-einstein condensate in a toroidal trap. / C. Ryu, M. F. Andersen, P. Cladé[et al.] // Physical review letters. 2007.
 Vol. 99, No. 26. P. 260401.
- Sulem C. The nonlinear schrödinger equation / C. Sulem, P.-L. Sulem. New York : Springer, 1999. — 350 p.
- 23. Kevrekidis P. G. Emergent nonlinear phenomena in bose-einstein condensates / P.
 G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, R. Carretero-González. 2008. 3-17, 46-49 p.
- 24. Pethick C. J. Bose–einstein condensation in dilute gases. / C. J. Pethick, H. Smith.
 Cambridge University Press, 2002.
- Bhongale S. Phase separated bec for high-sensitivity force measurement / S. Bhongale, E. Timmermans // Physical Review Letters. 2008. Vol. 100, No. 18. P. 185301.
- 26. Nussenzveig P. A drop of quantum matter / P. Nussenzveig, J. C. A. Barata // Science. — 2010. — Vol. 328, No. 5985. — P. 1491–1492.
- 27. Edwards M. Atom squid / M. Edwards // Nature Physics. 2013. Vol. 9, No.

2. — P. 68–69.

- Dalfovo F. Theory of bose-einstein condensation in trapped gases / F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari // Reviews of Modern Physics. 1999. Vol. 71, No. 3. P. 463–512.
- 29. Wright E. Toroidal optical dipole traps for atomic bose-einstein condensates using laguerre-gaussian beams / E. Wright, J. Arlt, K. Dholakia // Physical Review A. 2000. Vol. 63, No. 1. P. 13608.
- 30. Pethick C. J. Bose-einstein condensation in dilute atomic gases. / C. J. Pethick, R.
 P. Smith. 2002. 47-56 p.
- Choi S. Phenomenological damping in trapped atomic bose-einstein condensates /
 S. Choi, S. A. Morgan, K. Burnett // 1998. Vol. 57, No. 5. P. 4057–4060.
- Tsubota M. Quantum hydrodynamics / M. Tsubota, M. Kobayashi, H. Takeuchi // Physics Reports. — 2013. — Vol. 522, No. 3. — P. 191–238.
- 33. Allen A. Observable vortex properties in finite-temperature bose gases / A. Allen,
 E. Zaremba, C. Barenghi, N. Proukakis // Physical Review A. 2013. Vol. 87,
 No. 1. P. 13630.
- 34. Lee M. D. Quantum kinetic theory. vi. the growth of a bose-einstein condensate / M. D. Lee, C. W. Gardiner // 2000. Vol. 62. P. 1–26.
- 35. Moulder S. Quantized supercurrent decay in an annular bose-einstein condensate /
 S. Moulder, S. Beattie, R. Smith[et al.] // Physical Review A. 2012. Vol. 86, No. 1. P. 13629.
- 36. Bongs K. Interactions in ultracold gases: from atoms to molecules / K. Bongs, K. Sengstock // Interactions in Ultracold Gases: From Atoms to Molecules / M. Weidemüller, C. Zimmermann. Wiley, 2003. P. 141–167.
- 37. Vakhitov N. G. Stationary solutions of the wave equation in a medium with nonlinearity saturation / N. G. Vakhitov, A. A. Kolokolov // Radiophysics and

142

Quantum Electronics. — 1973. — Vol. 16, No. 7. — P. 783–789.

- 38. Alexander T. Ground states and vortices of matter-wave condensates and optical guided waves / T. Alexander, L. Bergé // Physical Review E. — 2002. — Vol. 65, No. 2. — P. 26611.
- Petviashvili V. I. Equation of an extraordinary soliton / V. I. Petviashvili // Fizika Plazmy. — 1976. — Vol. 2. — P. 469–472.
- 40. Press W. H. Numerical recipies in c / W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery. New York : Cambridge University Press, 2002.
- 41. Bao W. Efficient and spectrally accurate numerical methods for computing ground and first excited states in bose–einstein condensates / W. Bao, I.-L. Chern, F. Y. Lim // Journal of Computational Physics. 2006. Vol. 219, No. 2. P. 836–854.
- 42. Agrawal G. Nonlinear fiber optics / G. Agrawal. 2000.
- 43. Chiao R. Y. Self-trapping of optical beams / R. Y. Chiao, E. Garmire, C. H. Townes // Physical Review Letters. 1964. Vol. 13, No. 15. P. 479–482.
- 44. Yakimenko A. I. Bright vector solitons in cross-defocusing nonlinear media / A. I. Yakimenko, O. O. Prikhodko, S. I. Vilchynskyi // Physical Review E. 2010. Vol. 82, No. 1. P. 16605.
- 45. Yakimenko A. Two-dimensional nonlinear vector states in bose-einstein condensates / A. Yakimenko, Y. Zaliznyak, V. Lashkin // Physical Review A. — 2009. — Vol. 79, No. 4. — P. 43629.
- 46. Thanvanthri S. Ultra-stable matter-wave gyroscopy with counter-rotating vortex superpositions in bose-einstein condensates / S. Thanvanthri, K. ~T. Kapale, J. ~P. Dowling // Journal of Modern Optics. 2012. Vol. 59. P. 1180–1185.
- 47. Ramanathan A. Superflow in a toroidal bose-einstein condensate: an atom circuit with a tunable weak link. / A. Ramanathan, K. C. Wright, S. R. Muniz[et al.] //

Physical review letters. — 2011. — Vol. 106, No. 13. — P. 130401.

- 48. Beattie S. Persistent currents in spinor condensates / S. Beattie, S. Moulder, R. J. Fletcher, Z. Hadzibabic // Physical Review Letters. 2013. Vol. 110, No. 2. P. 25301.
- 49. Smyrnakis J. Mixtures of bose gases confined in a ring potential. / J. Smyrnakis, S. Bargi, G. M. Kavoulakis[et al.] // Physical review letters. 2009. Vol. 103, No. 10. P. 100404.
- 50. Anoshkin K. Persistent currents in a bosonic mixture in the ring geometry / K. Anoshkin, Z. Wu, E. Zaremba // Physical Review A. 2013. Vol. 88, No. 1. P. 13609.
- 51. Mäkelä H. Excitation spectrum of a toroidal spin-1 bose-einstein condensate / H. Mäkelä, E. Lundh // Physical Review A. 2013. Vol. 88, No. 3. P. 33622.
- 52. Bargi S. Persistent currents in bose gases confined in annular traps / S. Bargi, F. Malet, G. M. Kavoulakis, S. M. Reimann // Physical Review A. 2010. Vol. 82, No. 4. P. 43631.
- 53. Abad M. Persistent currents in two-component condensates in a toroidal trap / M. Abad, A. Sartori, S. Finazzi, A. Recati // Phys. Rev. A. 2014. Vol. 89, No. 5. P. 53602.
- 54. Wright K. C. Threshold for creating excitations in a stirred superfluid ring / K. C. Wright, R. B. Blakestad, C. J. Lobb[et al.] // Phys. Rev. A. 2013. Vol. 88, No. 6. P. 63633.
- Caradoc-Davies B. Vortex dynamics in bose-einstein condensates / B. Caradoc-Davies. — 2000.
- 56. Moulder S. Persistent currents in bose-einstein condensates / S. Moulder // 2013.
- 57. Fetter A. L. Vortices in a trapped dilute bose-einstein condensate / A. L. Fetter, A.
 A. Svidzinsky // Journal of Physics: Condensed Matter. 2001. Vol. 13, No.

12. — P. R135–R194.

- 58. Onofrio R. Observation of superfluid flow in a bose-einstein condensed gas / R. Onofrio, C. Raman, J. M. Vogels[et al.] // Physical Review Letters. 2000. Vol. 85, No. 11. P. 2228–2231.
- 59. Raman C. Vortex nucleation in a stirred bose-einstein condensate / C. Raman, J. R. Abo-Shaeer, J. M. Vogels[et al.] // Physical Review Letters. 2001. Vol. 87, No. 21. P. 210402.
- 60. Neely T. W. Observation of vortex dipoles in an oblate bose-einstein condensate / T. W. Neely, E. C. Samson, A. S. Bradley[et al.] // Physical Review Letters. 2010. Vol. 104, No. 16. P. 160401.
- 61. Jackson B. Dissipation and vortex creation in bose-einstein condensed gases / B. Jackson, J. F. McCann, C. S. Adams // Physical Review A. 2000. Vol. 61, No. 5. P. 51603.
- 62. Jackson B. Vortex formation in dilute inhomogeneous bose-einstein condensates /
 B. Jackson, J. F. McCann, C. S. Adams // Physical Review Letters. 1998. —
 Vol. 80, No. 18. P. 3903–3906.
- 63. Stießberger J. S. Critcal velocity of superfluid flow past large obstacles in boseeinstein condensates / J. S. Stießberger, W. Zwerger // Physical Review A. — 2000. — Vol. 62, No. 6. — P. 61601.
- 64. Aioi T. Controlled generation and manipulation of vortex dipoles in a bose-einstein condensate / T. Aioi, T. Kadokura, T. Kishimoto, H. Saito // Physical Review X. 2011. Vol. 1, No. 2. P. 21003.
- 65. Wright K. C. Driving phase slips in a superfluid atom circuit with a rotating weak link / K. C. Wright, R. B. Blakestad, C. J. Lobb[et al.] // Physical Review Letters. 2013. Vol. 110, No. 2. P. 25302.
- 66. Yakimenko A. I. Vortices in a toroidal bose-einstein condensate with a rotating

144
weak link / A. I. Yakimenko, Y. M. Bidasyuk, M. Weyrauch[et al.] // Physical Review A. — 2015. — Vol. 91, No. 3. — P. 33607.

- 67. Woo S. J. Vortex dynamics in an annular bose-einstein condensate / S. J. Woo, Y.-W. Son // Physical Review A. 2012. Vol. 86, No. 1. P. 11604.
- 68. Dubessy R. Critical rotation of an annular superfluid bose-einstein condensate / R. Dubessy, T. Liennard, P. Pedri, H. Perrin // Physical Review A. 2012. Vol. 86, No. 1. P. 11602.
- 69. Eckel S. Interferometric measurement of the current-phase relationship of a superfluid weak link / S. Eckel, F. Jendrzejewski, A. Kumar[et al.] // Subject Areas: Atomic and Molecular Physics Condensed Matter Physics.
- 70. Piazza F. Critical velocity for a toroidal bose–einstein condensate flowing through a barrier / F. Piazza, L. A. Collins, A. Smerzi // Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics. 2013. Vol. 46, No. 9. P. 95302.
- Piazza F. Vortex-induced phase-slip dissipation in a toroidal bose-einstein condensate flowing through a barrier / F. Piazza, L. A. Collins, A. Smerzi // Physical Review A. 2009. Vol. 80, No. 2. P. 21601.
- 72. Kumar A. Temperature-induced decay of persistent currents in a superfluid ultracold gas / A. Kumar, S. Eckel, F. Jendrzejewski, G. K. Campbell // Physical Review A. — 2017. — Vol. 95, No. 2. — P. 21602.
- 73. Stoof H. T. C. Dynamics of fluctuating bose–einstein condensates / H. T. C. Stoof,
 M. J. Bijlsma // Journal of Low Temperature Physics. Vol. 124, No. 3–4. P. 431–442.
- 74. Cockburn S. P. The stochastic gross–pitaevskii methodology / S. P. Cockburn, N. P. Proukakis // 2013. P. 177–189.
- 75. Kamenev A. Field theory of non-equilibrium systems / A. Kamenev. Cambridge University Press, 2011. — 341 p.

146

- 76. Eckel S. Hysteresis in a quantized superfluid "atomtronic" circuit / S. Eckel, J. G. Lee, F. Jendrzejewski[et al.] // Nature. 2014. Vol. 506, No. 7487. P. 200–203.
- 77. Zaremba E. Dynamics of trapped bose gases at finite temperatures / E. Zaremba,
 T. Nikuni, A. Griffin // Journal of Low Temperature Physics. 1999. Vol. 116, No. 3/4. P. 277–345.
- 78. Nikuni T. Two-fluid dynamics for a bose-einstein condensate out of local equilibrium with the noncondensate / T. Nikuni, E. Zaremba, A. Griffin // Physical Review Letters. 1999. Vol. 83, No. 1. P. 10–13.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

А.1 Список публікацій

148

- Yakimenko A. I. Stable bright solitons in two-component bose-einstein condensates / A. I. Yakimenko, K. O. Shchebetovska, S. I. Vilchinskii, M. Weyrauch // Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics. — 2012. — Vol. 85, No. 5. — P. 1–8.
- Yakimenko A. I. Stability of persistent currents in spinor bose-einstein condensates / A. I. Yakimenko, K. O. Isaieva, S. I. Vilchinskii, M. Weyrauch // Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics. — 2013. — Vol. 88, No. 5. — P. 1– 5.
- 3. Vilchynskyy, S. I. The nature of superfluidity and Bose-Einstein condensation: From liquid ⁴He to dilute ultracold atomic gases (Review Article) / S. I. Vilchynskyy, A. I.Yakimenko, K. O.Isaieva, A. V.Chumachenko // Физика низких температур. – 2013. – Т. 39, № 9. – С. 724–740.
- Yakimenko A. I. Vortex excitation in a stirred toroidal bose-einstein condensate / A. I. Yakimenko, K. O. Isaieva, S. I. Vilchinskii, E. A. Ostrovskaya // Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics. — 2015. — Vol. 91, No. 2. — P. 1–7.
- Yakimenko A. I. Generation and decay of persistent currents in a toroidal boseeinstein condensate / A. I. Yakimenko, S. I. Vilchinskii, Y. M. Bidasyuk[et al.] // Romanian Reports in Physics. — 2015. — Vol. 67, No. 1. — P. 249–272.
- Snizhko K. Stochastic phase slips in toroidal bose-einstein condensates / K. Snizhko, K. Isaieva, Y. Kuriatnikov[et al.] // Physical Review A. 2016. Vol. 94, No. 6. P. 63642.
- Shchebetovska K. O. Bright solitons in two-component bose-einstein condensates / K. O. Shchebetovska, A. I. Yakimenko, S. I. Vilchynskii, M. Weyrauch // Book of abstracts III Conference of Young Scientists Modern Problems of Theoretical Physics. — 21-23 December 2011. — P. 106.
- Щебетовська К. О. Стійкі нелінійні структури в двокомпонентних бозеконденсатах / К. О. Щебетовська, О. І. Якименко, С. Й. Вільчинський, М. Weyrauch // 12-та Всеукраїнська школа-семінар та конкурс молодих вчених, збірка тез. — 30 травня – 1 червня 2012. — Р. 43.
- Isaieva K. O. Two-dimensional solitons in binary mixtures of bose-condensates / K. O. Isaieva, A. I. Yakimenko, S. I. Vilchynskii, M. Weyrauch // Book of abstracts International Conference on Problems of Theoretical Physics. — 8-11 October 2012. — P. 86.
- 10. Isaieva K. O. Nonlinear structures in two-dimensional multicomponent trapped bec / K. O. Isaieva, A. I. Yakimenko, S. I. Vilchynskii, M. Weyrauch // Book of

abstracts IV Conference of Young Scientists Modern Problems of Theoretical Physics. — 23-26 October 2012. — P. 99.

Isaieva K. O. Persistent currents in toroidal spinor bose-einstein condensates / K. O. Isaieva, A. I. Yakimenko, S.I.Vilchinckii, M. Weyrauch // Book of abstracts V Conference of Young Scientists Problems of Theoretical Physics. — 24-27 December 2013. — P. 38

А.2 Апробація результатів дисертації

- Conference of Young Scientists Modern Problems of Theoretical Physics, 21-23 грудня 2011 р., Київ (стендова доповідь)
- 2. Summer School on Quantum Many-Body Physics of Ultra-Cold Atoms and Molecules, 2-13 липня 2012 p., Trieste, Italy стендова доповідь
- 3. Conference on Problems of Theoretical Physics, 8-11 жовтня 2012 р., Київ (стендова доповідь)
- IV Conference of Young Scientists Modern Problems of Theoretical Physics, 23-26 жовтня 2012 р., Київ (стендова доповідь)
- VI Young Scientists Conference Problems of Theoretical Physics, 24-27 грудня 2013 р., Київ (усна доповідь)
- Семінар відділу теорії нелінійних процесів у конденсованих середовищах Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова Національної академії наук України, 19 червня 2017 року, Київ (усна доповідь).