

Національна академія наук України
Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова

На правах рукопису

Стародуб Іван Олексійович

УДК 530.182, 538.945

ДИНАМІКА СОЛІТОНІВ У ПРОСТОРОВО-НЕОДНОРІДНИХ
ДЖОЗЕФСОНІВСЬКИХ ПЕРЕХОДАХ

01.04.02 — теоретична фізика

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Золотарюк Ярослав Олександрович
доктор фіз.-мат. наук

Київ – 2015

ЗМІСТ

ВСТУП	5
РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ	12
1.1 Динаміка солітона в довгому джозефсонівському переході	12
1.2 Взаємодія солітона з просторовими неоднорідностями	16
1.3 Вплив дискретності середовища на динаміку солітона	18
РОЗДІЛ 2 ВИПРОМІНЮВАННЯ ПРИ РОЗСІЯННІ ДЖОЗЕ- ФСОНІВСЬКОГО ВИХОРУ НА НЕОДНОРІДНОСТІ	22
2.1 Вступ	22
2.2 Модель	23
2.3 Випромінювання	25
2.3.1 Загальні положення	25
2.3.2 Прямокутна неоднорідність	28
2.3.3 Стрічкоподібна неоднорідність	43
2.3.4 Ромбічна неоднорідність	46
2.4 Висновки	56
РОЗДІЛ 3 ПОРОГОВИЙ СТРУМ ЗАКРІПЛЕННЯ	59
3.1 Вступ	59
3.2 Модель	60
3.3 Проходження флюксона через неоднорідність	62
3.3.1 Чисельне моделювання	62
3.3.2 Розрахунок порогового струму закріплення	66
3.4 Вольт-амперні характеристики	76

3.4.1	Стрічкоподібна неоднорідність	78
3.4.2	Прямокутна неоднорідність	79
3.4.3	Ромбічна неоднорідність	81
3.5	Висновки	82

РОЗДІЛ 4 РУХ СОЛІТОНА В АСИМЕТРИЧНОМУ МАСИВІ ТОЧКОВИХ ДЖОЗЕФСОНІВСЬКИХ КОНТАКТІВ 84

4.1	Вступ	84
4.2	Модель	85
4.3	Гамільтонівська границя	88
4.3.1	Континуальна границя	89
4.3.2	Безвипромінювальний рух дискретних солітонів. Прозорі швидкості	90
4.4	Вольт-амперні характеристики	94
4.4.1	Континуальне наближення	94
4.4.2	Чисельні результати	95
4.5	Висновки	106

ВИСНОВКИ 108

ДОДАТКИ 111

Додаток А.	Розрахунок порогового струму закріплення	111
Додаток Б.	Псевдоспектральний метод	117

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 120

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

СГ – рівняння синус-Гордона

ДК – джозефсонівський контакт

1Д – одновимірний

2Д – двовимірний

К1Д – квазіодновимірний

ВАХ – вольт-амперна характеристика

НКВІН – надпровідний квантовий інтерферометр

потенціал ПН – потенціал Пайерлса-Набарро

ДПСГ – дискретне подвійне рівняння синус-Гордона

НІН – недопустимий інтервал напруги

НПЛ – найбільший показник Ляпунова

ВСТУП

Солітон – стійка усамітнена хвиля, що розповсюджується з постійною швидкістю та формою в нелінійному середовищі. Однією з характерних особливостей таких хвиль є те, що при взаємодії одна з одною або іншими збудженнями вони зберігають свою форму та структуру. Вперше солітони спостерігалися британським дослідником Джоном Скоттом Расселом в 1834 році як усамітнені хвилі на поверхні води, що розповсюджуються на далекі відстані. Пізніше, внаслідок багатьох досліджень було виявлено існування солітонів в різноманітних структурах: в кристалічній ґратці твердого тіла (модель Френкеля-Конторової), бозе-ейнштейнівських конденсатах газів, магнітних матеріалах, в оптичних хвиляводах, атмосфері Землі, надпровідниках, в плазмі (іонозвукові та магнітозвукові солітони) [1]. З математичної точки зору солітон є точним розв'язком низки диференціальних рівнянь, найвідоміші з яких: рівняння Кортевега-де Фріза, нелінійне рівняння Шредінгера, ізотропне рівняння Ландау-Ліфшиця, ланцюжок Тоди та рівняння синус-Гордона. Дана дисертаційна робота присвячена динаміці солітонів, які утворюються в джозефсонівських переходах (контактах).

Актуальність теми. Динаміка солітонів, які мають фізичний зміст кванту магнітного потоку, що рухається вздовж діелектричного прошарку в довгому джозефсонівському переході є предметом значної кількості теоретичних та експериментальних досліджень [2, 3]. Солітони в джозефсонівському контакті також називають джозефсонівськими вихорами або флюксонами (від *англ.* flux – потік). Науковий інтерес до даної тематики підживлюється можливістю використання джозефсонівських вихорів як носіїв інформації та їх подальшого застосування для побудови різноманітних інформаційно-цифрових пристроїв [4]. В реальності джозефсонівські переходи не можуть бути просторово однорідни-

ми, неоднорідність у них може виникати як дефект в процесі виготовлення або створюватися з метою отримання контакту з певними властивостями. Значна кількість відомих на цей час робіт у даній області спрямована на дослідження динаміки солітона в одновимірному довгому джозефсонівському переході та його взаємодії з домішкою точкового розміру [5, 6]. Розглядалися також одновимірні контакти з домішкою типу сходинок нескінченного розміру, що моделює границю розподілу двох контактів [7], а також сходинок скінченної довжини [8, 9]. Випромінювання, що відбувається в процесі взаємодії флюксона з однією домішкою [6], періодичним масивом домішок [10] та випадковим чином розташованими домішками [11] теоретично досліджувалося та вимірювалося експериментально. Проте всі реальні джозефсонівські контакти є двовимірними, тобто мають скінченну ширину в напрямку, перпендикулярному напрямку руху солітона. Розглядалися переходи з різною геометрією, для якої є можливість більш строгого опису в рамках одновимірної моделі, це кільцеві контакти [12] та контакти з перекриттям (overlap) [13, 14]. Для достатньо вузьких контактів одновимірне наближення ще можливе, проте поперечна ступінь вільності грає суттєву роль. Тому важливим є дослідження поведінки джозефсонівського вихору в двовимірному контакті з просторовими неоднорідностями скінченного розміру, теоретичний опис його динаміки та ефектів, що виникають в процесі його руху вздовж контакту.

Масиви джозефсонівських переходів також інтенсивно вивчалися протягом останніх кількох десятиліть завдяки їх можливому застосуванню в квантовому обчисленні та створенні метаматеріалів [3, 15]. Тому не менш важливою задачею є проблема існування та рухливості солітонів в дискретних середовищах. Пристрої на основі масивів джозефсонівських переходів мають низку застосувань, але основні дослідження в цій області стосуються одновимірних симетричних

масивів та динаміки солітонів в них [16, 17, 18]. Проте цікавими для практичних цілей є також асиметричні масиви, що проявляють дещо інші властивості. Тому природнім є бажання дослідити динаміку солітонів в такого роду пристроях та вплив дискретності середовища на неї.

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами. Результати, що увійшли в дисертаційну роботу, були отримані в рамках планової наукової тематики відділу нелінійної фізики конденсованого стану Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України (тема «Нелінійні механізми передачі енергії, заряду та інформації в наноструктурах та біомолекулах», 2007-2011 рр., шифр 1.4.7.2, номер державної реєстрації в УкрІНТЕІ РК 0106U007886, тема «Транспортні властивості та можливості керування ними за допомогою зовнішніх полів в наноструктурах», 2012-2016 рр., номер державної реєстрації в УкрІНТЕІ 0112U000053, тема «Мікроскопічні та феноменологічні моделі фундаментальних фізичних процесів у мікро- та макросвіті» 2012-2016 рр., шифр 1.4.1-1.4.9, номер державної реєстрації в УкрІНТЕІ 0112U000056, тема гранту докторам наук від президента України «Динаміка нелінійних когерентних збуджень під впливом зовнішніх періодичних полів» №Ф35/544-2011, 2011 р.)

Мета і задачі дослідження. Метою роботи було дослідження явищ, що виникають в процесі взаємодії солітона з неоднорідністю в джозефсонівському переході та їхнього впливу на його вольт-амперні характеристики. Для її досягнення було поставлено наступні задачі:

- 1) Знайти пороговий струм закріплення солітона (мінімальний струм, необхідний для подолання солітоном перешкоди) на домішках різної форми та розміру, побудувати залежності порогового струму від ширини контакту.
- 2) Провести чисельне моделювання поведінки солітона в довгому двовимірному джозефсонівському переході та проаналізувати вплив двовимірності на

його динаміку.

3) Знайти спектральну густину енергії та повну енергію випромінювання, що виникає внаслідок взаємодії флюксона з дефектами в контакті.

4) Проаналізувати вплив форми та розміру дефекту на енергію випромінювання.

5) Побудувати вольт-амперні характеристики контактів з неоднорідностями, співставити аналітичні та чисельні результати.

6) Дослідити вплив дискретності на динаміку солітона в асиметричному масиві точкових контактів та побудувати ВАХ такого контакту.

Об'єктом дослідження є довгий джозефсонівський контакт, масив контактів, солітон в довгому джозефсонівському переході або в масиві точкових переходів, а також лінійні та нелінійні збудження в цих структурах.

Предмет дослідження – динамічні ефекти, що виникають при взаємодії солітона з просторовою неоднорідністю або дискретністю середовища.

Методи дослідження. В роботі застосовувалися аналітичні та чисельні методи дослідження, зокрема, для аналітичних розрахунків використовувалися методи теорії диференціальних рівнянь та математичної фізики, методи солітонної теорії збурень, елементи теорії спеціальних функцій. Чисельні розрахунки проводилися за допомогою методу Рунге-Кутта четвертого порядку, широко використовувались псевдо-спектральний метод розв'язку диференціальних рівнянь (метод Гальоркіна), метод Бенетіна для розрахунку показників Ляпунова та методи комп'ютерного моделювання.

Наукова новизна одержаних результатів. В роботі отримані наступні важливі наукові результати:

1) Знайдено пороговий струм закріплення солітона на домішці та його залежність від ширини контакту і геометричних параметрів домішки.

2) Аналітично отримано густину випроміненої енергії, що виникає при розсіянні джозефсонівського вихору на неоднорідностях різної геометричної форми та скінченного розміру.

3) Отримано залежність випроміненої енергії від швидкості солітона, яка має один або декілька локальних максимумів, присутність яких пояснена явищем інтерференції випромінених хвиль, а їх кількість та величина залежать від параметрів домішки.

4) Показано існування щілини у ВАХ асиметричного масиву точкових контактів типу НКВІН, величина якої залежить від параметру асиметрії потенціалу та дисипації в середовищі.

5) Продемонстровано існування «вкладених» солітонів, що рухаються без випромінювання на певних швидкостях в асиметричному масиві точкових контактів.

Практичне значення одержаних результатів. Отримані результати є внеском у дослідження поведінки джозефсонівських вихорів в довгих контактах зі штучними або випадковими дефектами та їхнього впливу на характеристики такого контакту. Результати дисертаційної роботи можуть бути використані при аналізі експериментальних даних та як основа для побудови послідовного теоретичного опису різноманітних ефектів, що виникають в джозефсонівських переходах. Практичну цінність отримані результати мають при побудові квантових комп'ютерів, де керування динамікою солітонів в джозефсонівських контактах дає можливість створення кубітів – бітів квантової інформації [19]. В роботах [20, 21] також було показано, що солітонний фронт можна деформувати та надавати йому потрібної форми, внаслідок чого збуджуються різноманітні коливні моди вздовж нього. Дана робота також підтверджує це твердження, а отримані результати можуть бути використані при побудові різноманітних інформаційно-

цифрових пристроїв. Результати останнього розділу роботи, який стосується масиву точкових контактів, також можуть бути використані при дослідженні динаміки солітонів у масиві надпровідник-феромагнетик-надпровідник (SFS) та надпровідник-феромагнетик-діелектрик-надпровідник (SFIS) контактів.

Особистий внесок здобувача. Дисертація є результатом наукових досліджень, виконаних та опублікованих в ряді наукових робіт. В усіх роботах дисертант приймав особисту участь в постановці задачі, розробці методів її дослідження, обговоренні, аналізі та інтерпретації одержаних результатів, формулюванні висновків та підготовці статей до публікації.

В роботі [22] здобувачем проведено аналітичні та чисельні розрахунки порогового струму закріплення флюксона на домішках, змодельовано динаміку солітона в квазіодновимірному довгому контакті Джозефсона.

У роботах [23], [24] автор приймав активну участь в постановці задачі, аналітично розраховував густину енергії електромагнітного випромінювання, що виникає в результаті взаємодії флюксона з домішками різних форми та скінченного розміру в довгому двовимірному джозефсонівському переході. Аналітично та чисельно побудував вольт-амперні характеристики контактів.

В роботі [25] дисертант розраховував енергію, випромінєну в процесі розсіяння солітона на домішці, з урахуванням локальної зміни магнітного поля та ємності контакту в області знаходження домішки.

В роботі [26] здобувач аналітично та чисельно побудував вольт-амперні характеристики для асиметричного масиву точкових джозефсонівських контактів, знайшов солітонний розв'язок в континуальному наближенні.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювалися на таких конференціях: Міжнародна конференція молодих вчених «Фізика низьких температур», (14-18 травня 2012, Харків);

Міжнародна конференція «Проблеми теоретичної фізики», (8-11 жовтня 2013, Київ); Конференція молодих вчених «Сучасні проблеми теоретичної фізики», (23-26 жовтня 2013, Київ); Міжнародна конференція молодих вчених і аспірантів «ІЕФ-2013», (20-23 травня 2013, Ужгород); Международная научная конференция молодых ученых и специалистов «ОМУС-2014», (24-28 лютого 2014, м. Дубна, Московська область).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 9 роботах, із них 5 статей у наукових фахових журналах [22, 23, 24, 25, 26] та 4 тез доповідей [27, 28, 29, 30], зроблених на 5 наукових конференціях.

Структура дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 106 найменувань. Обсяг дисертації становить 132 сторінки машинописного тексту, враховуючи 36 рисунків, 1 таблицю та список використаних джерел.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1 Динаміка солітона в довгому джозефсонівському переході

Найпростіший джозефсонівський перехід представляє собою два надпровідника, розділених діелектричним прошарком. В контактах такого типу виникають стаціонарний та нестаціонарний ефекти Джозефсона. Це було теоретично передбачено Б. Джозефсоном в 1962 році [31], та експериментально підтверджено роком пізніше [32]. Отже, Джозефсон сформулював наступні твердження: через контакт може протікати надпровідний струм (*стаціонарний ефект Джозефсона*), якщо струм перевищує деяке критичне значення, то в контакті виникає ненульове падіння напруги і генерується високочастотне електромагнітне випромінювання (*нестационарний ефект Джозефсона*).

Дуже часто, як в теорії, так і на практиці, розглядають довгі контакти, тобто такі, де довжина значно перевищує його ширину. Динаміка поширення магнітного потоку в довгому Джозефсонівському контакті (ДК) (Рис. 1.1) була і продовжує бути предметом сильного теоретичного і практичного інтересу протягом останніх трьох десятиліть [2, 3, 33]. Основною динамічною змінною в контакті є різниця фаз $\theta_2(x, y; t) - \theta_1(x, y; t) = \phi(x, y; t)$ макроскопічних хвильових функцій надпровідних шарів. Ця змінна називається джозефсонівською фазою і характеризує розподіл магнітного поля всередині діелектричного прошарку та в його околі. Отже, для будь-якого джозефсонівського переходу задовольняються рівняння Джозефсона:

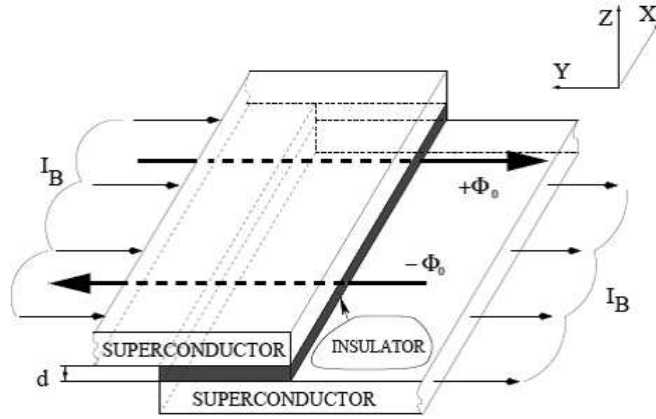


Рис. 1.1 Схематичне зображення довгого джозефсонівського контакту. I_B - зовнішній струм, Φ_0 - квант магнітного потоку, d - товщина діелектричного прошарку між надпровідниками.

$$I = I_c \sin \phi, \quad V = \frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (1.1.1)$$

Ці рівняння описують ефекти Джозефсона, тут I - надпровідний струм в контакті, I_c - критичний струм Джозефсона, який залежить від властивостей контакту, V - падіння напруги на контакті, e - заряд електрона, $\hbar$ - стала Планка. Розподіл магнітного поля в контакті, зображеному на Рис. 1.1:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2e\mu_0 l}{\hbar} H_y, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{2e\mu_0 l}{\hbar} H_x, \quad (1.1.2)$$

де μ_0 - магнітна проникність, $l = \lambda_{L1} + \lambda_{L2} + d$ - товщина шару, куди проникає магнітне поле (є сумою товщини ізолюючого прошарку та лондонівських глибин проникнення в надпровідники, надалі розглядатимуться однакові надпровідники $\lambda_{L1} = \lambda_{L2}$), H_x і H_y є відповідними компонентами вектору напруженості магнітного поля. Підставимо рівняння (1.1.2) та (1.1.1) в рівняння Максвела:

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j_z + \frac{\partial D_z}{\partial t}, \\ j_z &= I_c \sin \phi / d, \quad D_z = \epsilon \epsilon_0 E_z = \epsilon \epsilon_0 V / d = CV / d. \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Тут $\mathbf{H}$ - напруженість магнітного поля, $\mathbf{D}$ - електрична індукція, $\mathbf{j}$ - густина струму, d_1 - товщина контакту в напрямку y , ϵ - відносна діелектрична проникливість, ϵ_0 - діелектрична проникність вакууму, також було введено $C = \epsilon\epsilon_0 d_1/d$ та $L = \mu_0 l/d_1$ - ємність та індуктивність на одиницю довжини.

Отримаємо рівняння динаміки джозефсонівської фази:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda_J^2} \sin \phi, \quad (1.1.4)$$

де $\lambda_J = \sqrt{\frac{\hbar}{2e\mu_0 l I_c}} = \sqrt{\frac{\Phi_0}{2\pi L I_c}}$ є джозефсонівською глибиною проникнення (просторовий масштаб глибини, на яку магнітне поле проникає в напрямку x , $\lambda_L \sim 5 \times 10^{-6}$ м, $\lambda_J \sim 0.1$ мм), $\Phi_0 = \frac{\pi \hbar}{e} = 2.064 \cdot 10^{-15}$ Вб - квант магнітного потоку, $\omega_J = \bar{c}/\lambda_J = \sqrt{\frac{2e I_c}{\hbar C}}$ є джозефсонівська плазмова частота (мінімальна частота електромагнітних хвиль в контакті, які задовольняють закону дисперсії для плазмонів $\omega^2 = \omega_J^2 + k^2 \bar{c}^2$), $\bar{c}$ - швидкість Свіхарта або максимальна швидкість електромагнітних хвиль в контакті (є порядку 2-5% швидкості світла). Одержане рівняння є *двовимірним рівнянням синус-Гордона*, воно добре відоме в літературі [34], повністю інтегровне та має точні аналітичні розв'язки лише в одновимірному випадку. Одним з розв'язків є солітон (+) або антисолітон (-): $\phi_0(x, t) = 4 \arctan \left(\pm \exp \frac{x-vt}{\lambda_J \sqrt{1-(v/\bar{c})^2}} \right)$. Таким чином, зовнішнє магнітне поле при перевищенні певного критичного значення проникає і розповсюджується в контакті у вигляді джозефсонівських вихорів, що є *солітонами*, тобто усамітненими хвилями, які рухаються з постійною швидкістю і формою під дією зовнішнього струму, переносячи при цьому один квант магнітного потоку (кожен), від чого і походить їх назва *флюксони*.

Реальні ДК завжди двовимірні (2Д) у тому сенсі, що вони мають скінченну ширину в напрямку, перпендикулярному до напрямку розповсюдження флюксона. Контакт також може бути квазіодновимірним (К1Д), якщо його довжина

значно більша за ширину, або ж взагалі одновимірним (1Д), коли його шириною нехтується. Досі динаміка флюксона в К1Д переході досліджена слабо в порівнянні з простим 1Д випадком. Найбільше уваги було зосереджено на різних ізотропних 2Д структурах, як осцилони і кільцеві солітони [12, 35, 36]. Слід зазначити також випадок «віконних переходів» [37, 38], який можна назвати зворотнім, адже вивчаються точкові або прямокутні переходи, вбудовані в більший двовимірний надпровідний зразок. Квазіодновимірні солітони, або, іншими словами, солітонні фронти в нескінченних (в обидвох x і y напрямках) зразках були детально вивчені Маломедом [39]. Отримано ряд цікавих результатів за відсутності дисипації, включаючи хвилі в К1Д рівнянні синус-Гордона, які рухаються вздовж солітонного фронту [40] і скіріміони, що розсіюються на домішках [41]. Тим не менше, для реального контакту Джозефсона необхідно також врахувати ефекти дисипації, яка спричинена рухом електронів поперек контакту та сторонніх струмів. Легко показати, що з урахуванням дисипації та зовнішнього струму, однорідно розподіленого в просторі, а також, використовуючи безрозмірні змінні $x \rightarrow x/\lambda_J$, $y \rightarrow y/\lambda_J$, $t \rightarrow t\omega_J$, отримаємо *безрозмірне збурене рівняння синус-Гордона*:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sin \phi + \gamma = 0, \quad (1.1.5)$$

де $\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{2eI_c R^2 C}}$ - коефіцієнт дисипації, $\gamma = \frac{I_B}{I_c}$ - зовнішній струм, нормований на критичний джозефсонівський струм.

1.2 Взаємодія солітона з просторовими неоднорідностями

Просторові неоднорідності в джозефсонівському переході можуть виникати як внаслідок природних дефектів при виготовленні, так і створюватися штучно для отримання контакту з необхідними властивостями. Зручний спосіб створити контакт з потрібними властивостями – встановити в нього різні неоднорідності. В загальному випадку такими неоднорідностями є мікрозакоротки або мікрорезистори, що представляють собою область локальної різкої зміни критичного джозефсонівського струму. На практиці такі неоднорідності виникають внаслідок локальної зміни товщини діелектричного прошарку. Дотепер значна кількість теоретичних робіт була присвячена вивченню руху флюксона в одновимірному ДК з точковими [5, 6, 10], просторово-протяжними нескінченного [7] та скінченного розміру [8, 9, 42] неоднорідностями. Експериментальні результати з розсіювання флюксона на домішках наведені в [10, 43, 44, 45]. Просторово-неоднорідні джозефсонівські системи з захопленими флюксонами обговорювалися як перспективні застосування в основі інформаційно-цифрових пристроїв [4, 19].

Взаємодія з точковими дефектами в 1Д контакті, а також закріплення флюксона на них вперше було розглянуто в роботі [5], де використаний енергетичний підхід, заснований на можливості розгляду флюксона як частинки, що рухається в потенціалі, створеному неоднорідністю. В цій роботі побудована теорія збурень та отримано рівняння динаміки центру мас солітона. Просторові неоднорідності, що відповідають місцям сильного джозефсонівського струму враховувалися шляхом додавання у рівняння (1.1.5) члена $\sum_{n=1}^N \mu_n \delta(x - a_n)$, що відповідає N неоднорідностям, розташованим у точках a_n , а μ_n є ампліту-

дою домішки, яка $\mu_n > 0$ для мікрозакоротки та $\mu_n < 0$ для мікрорезистора. Таким чином, для опису ДК з дисипацією, зовнішнім струмом та просторовими неоднорідностями використовують збурене рівняння СГ:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \sin \phi = \epsilon f, \quad 0 \leq \epsilon \ll 1, \quad (1.2.6)$$

де збурення може мати вигляд (за умови точкової неоднорідності):

$$\epsilon f = -\alpha \frac{\partial \phi}{\partial t} - \gamma + \sum_n \mu_n \delta(x - a_n) \sin \phi. \quad (1.2.7)$$

Збурене рівняння СГ (1.2.6) точно не розв'язується. Методом аналітичного розгляду цього рівняння є теорія збурень МакЛафліна-Скота [5], де вважається, що збурення є слабким і не змінює форми солітона та повільним, щоб зміну параметрів солітону можна було вважати адіабатичною.

Існує два характерних значення зовнішнього струму: критичний струм γ_c і пороговий струм закріплення γ_{thr} . Критичному струму відповідає значення, при якому закріплення на домішці неможливо, тобто флюксон завжди подолає перешкоду. Вираз для цього струму через амплітуду домішки був отриманий в [5] та має наступний вигляд $\gamma_c = 4\mu/\pi 3\sqrt{3}$. Пороговий струм закріплення, в свою чергу, є мінімальний струм, який необхідний для подолання солітоном неоднорідності, тобто при струмах $\gamma < \gamma_{thr}$ поширення флюксона вздовж контакту неможливе. Його значення можна легко одержати з методу балансу енергії, прирівнявши висоту потенціального бар'єру, створеного дефектом, до кінетичної енергії солітона, що налітає на мікрозакоротку, отримавши при цьому: $\gamma_{thr} = \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{8\mu + \mu^2}$.

На основі піонерських результатів, отриманих теоретично [5] та експериментально [46] було зроблено наступні висновки:

Якщо початкова швидкість флюксона є досить великою (сильний зовнішній струм), то кінетична енергія є достатньою для проходження неоднорідності.

Флюксон сповільнюється біля мікрозакоротки, але не зупиняється.

При $x \rightarrow +\infty$ солітон відновлює свою рівноважну швидкість $v_\infty = \pm[1 + (\frac{4\alpha}{\pi\gamma})^2]^{-1/2}$. Це рівноважне значення швидкості, якого флюксон набуває як наслідок балансу впливів дисипації та зовнішнього струму. При зменшенні дисипації флюксон наближається до неоднорідності швидше, а γ_{thr} зменшується.

1.3 Вплив дискретності середовища на динаміку солітона

Проблема існування та рухливості солітонів в дискретних середовищах викликає значний інтерес у зв'язку з широким застосуванням масивів джозефсонівських контактів або масивів надпровідних квантових інтерферометрів (НКВІН). Такі пристрої мають низку застосувань, включаючи височастотні джерела живлення, комірки пам'яті, чутливі детектори магнітних полів, параметричні підсилювачі і високошвидкісні перемикачі [3]. Основні дослідження в цій області стосуються одновимірних симетричних масивів джозефсонівських переходів та динаміці солітонів в них. Також, як було показано в [47], [48] за допомогою 1Д масиву джозефсонівських переходів можна змоделювати ДК з періодичним масивом неоднорідностей. Досліджувалося випромінювання, що виникає в процесі руху флюксона в одновимірному масиві [18]. Рух флюксона в такому масиві, природньо, створює падіння напруги і спричиняє зміни у вольт-амперній характеристиці пристрою. Це питання розглянуто в книзі [3], а також в роботі [17], де побудована ВАХ одновимірного кільцевого масиву з десяти точкових контактів. ВАХ має чітку гістерезисну структуру і складається з набору гілок, величина яких характеризується цілою кількістю довжин хвиль, продюгованих флюксоном в процесі його руху вздовж НКВІН.

В роботі [16] досліджується кільцева система з восьми точкових джозефсонівських переходів, з'єднаних між собою. На Рис. 1.2 зображено симетричний масив джозефсонівських переходів, що розглядався в [16]. Одиничний перехід добре описується резистивно-ємнісною зашунтованою моделлю, в якій контакт складається з ємкісної, резистивної та надпровідної гілок, з'єднаних паралельно. Припускається, що всі переходи однакові. Застосовуючи рівняння Кірхгофа до верхнього та нижнього вузлів j -переходу, отримаємо

$$C \frac{dV_j}{dt} + V_j/R + I_c \sin \phi_j = I_j^{in} - I_j^{top} + I_{j-1}^{top} = I_j^{out} - I_j^{bot} + I_{j-1}^{bot}. \quad (1.3.1)$$

Згідно з рівняннями Джозефсона (1.1.1) тут $V_j = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{d\phi_j}{dt}$ - падіння напруги в j -переході, C - ємність контакту, R - опір контакту, I_j^{in} - зовнішній струм, I_j^{top} , I_j^{out} - струми, що протікають по верхньому та нижньому вузлах схеми відповідно, I_j^{bot} - зовнішній струм на виході з контакту, I_c - критичний струм. Припускається, що всі контакти масиву є однаковими, тому C , R , I_c не залежать від j .

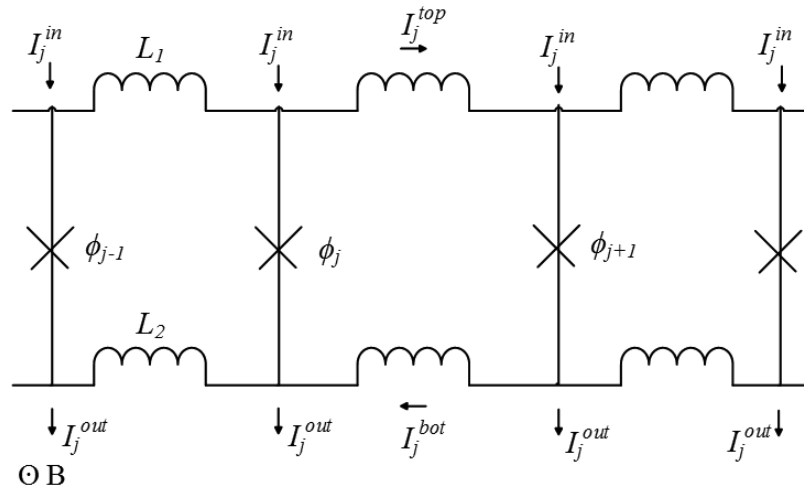


Рис. 1.2 Схематичне зображення трьох комірок симетричного масиву джозефсонівських переходів.

Наступне співвідношення випливає з того, що інтеграл від різниці фаз по

замкненому контуру в надпровіднику повинен дорівнювати магнітному потоку, оточеному контуром, тобто $\phi_{j+1} - \phi_j = 2\pi\Phi_j/\Phi_0$, де Φ_j є повний магнітний потік, що проникає в комірку j . Перпендикулярно до масиву прикладене однорідне зовнішнє магнітне поле. Тоді магнітний потік, що проходить через комірку можна представити як $\Phi_j = \Phi^{ext} - (L_1 I_j^{top} + L_2 I_j^{bot})$, де L_1 і L_2 є верхня і нижня індуктивності. Надалі припускається, що зовнішні струми заходять і виходять з контакту рівномірно, тому I_j незалежить від j . Підставляючи сюди вирази для струмів (1.3.1) та падіння напруги отримаємо *дискретне збурене рівняння синус-Гордона*:

$$\frac{d^2\phi_j}{dt^2} + \alpha \frac{d\phi_j}{dt} + \sin \phi_j = \frac{I}{I_c} + \kappa \hat{\Delta}\phi_j, \quad j = 1, N, \quad (1.3.2)$$

де крапка позначає похідну по часу, $\hat{\Delta}\phi_j = \phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}$ - дискретний лапласіан, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}RC\omega_J}$ - коефіцієнт дисипації, $\omega_J = \sqrt{2eI_c/\hbar C}$ - джозефсонівська плазмова частота, $\kappa = \frac{\Phi_0}{2\pi LI_c}$ - константа зв'язку (є мірою дискретності системи), $I = (L_1 I_j^{in} + L_2 I_j^{out})/(L_1 + L_2)$ - зовнішній струм, що заходить і виходить з контакту, тут час нормований на ω_J^{-1} . Це є рівняння динаміки солітона в симетричному масиві джозефсонівських контактів. На відміну від континуального рівняння СГ дискретне рівняння синус-Гордона (ДСГ) є неінтегровним. Це рівняння широко використовується, адже воно описує значну кількість фізичних моделей та процесів. Механічною моделлю, що описується цим рівнянням є ланцюжок однакових маятників, які взаємодіють між найближчими сусідами і збуджуються постійною зовнішньою силою, що спричиняє крутий момент [49]. Дане рівняння лежить в основі відомої моделі Френкеля-Конторової [50, 51]. Найвідомішими застосуваннями моделі Френкеля-Конторової [52] були опис динаміки дислокації в кристалі, динаміки атомів, адсорбованих на поверхні кристалу, хвиль густини заряду, опис магнітних доменних стінок. Також було теоретично передбачено [53] та експериментально підтверджено [54]

можливість існування солітонних розв'язків рівняння ДСГ, які при утворенні зв'язаного стану двох або декількох солітонів можуть рухатися без випромінювання за певних швидкостей, в той час як при інших швидкостях виникає високочастотне випромінювання малоамплітудних хвиль і відбувається втрата солітоном енергії.

РОЗДІЛ 2

ВИПРОМІНЮВАННЯ ПРИ РОЗСІЯННІ ДЖОЗЕФСОНІВСЬКОГО ВИХОРУ НА НЕОДНОРІДНОСТІ

2.1 Вступ

Проблема взаємодії флюксона з просторовою неоднорідністю (мікрозакоротка, мікрорезистор, вихор Абрикосова і т.д.) має важливе значення для розуміння особливостей процесу його динаміки [5, 48, 55, 56, 57, 58]. У результаті взаємодії флюксона з домішкою випромінюються малоамплітудні лінійні хвилі (джозефсонівські плазмони) [5, 59]. Питання про випромінюванням лінійних хвиль у зв'язку із зіткненням флюксона з просторовою неоднорідністю було детально досліджено на прикладі одновимірного випадку. Більшість з цих досліджень (як теоретичних, так і експериментальних) були зосереджені на вивченні розсіяння на точковій неоднорідності (мікрозакоротка або мікрорезистор) [5, 6, 10, 60], або магнітній домішці [61]. Протяжна неоднорідність була досліджена в [8], також в якості неоднорідності розглядався інтерфейс розподілу між двома різними переходами [62].

Важливо відзначити, що одновимірний контакт Джозефсона є лише 1Д наближення двовимірного 2Д ДК скінченної ширини. Таким чином, виникає природне бажання враховувати поперечний напрямок і вивчати розсіювання флюксона на домішках в цій ситуації. Крім того, динаміка флюксона у переходах великої площі є цікавою і важливою проблемою. Це вивчалось в різних контекстах, таких як динамічні властивості [13, 14], закріплення на домішках [22] і застосування [21, 63]. Тим не менш, до цих пір випромінювання через розсі-

ювання флюксону на неоднорідностях у двовимірному випадку було детально вивчено тільки для точкової домішки, що описується дельта-функцією Дірака [39]. Отже, метою даного розділу є вивчення властивостей малоамплітудних хвиль, що виникають в результаті розповсюдження солітона через неоднорідності загальної форми та розміру. Наступною метою є також дослідження впливу знайденого випромінювання на вольт-амперні характеристики контакту.

2.2 Модель

Розглядаємо динаміку флюксона в 2Д ДК з просторовими неоднорідностями. Як вже зазначалося, основною динамічною змінною є різниця фаз $\theta_2(x, y; t) - \theta_1(x, y; t) \doteq \phi(x, y; t)$ макроскопічних хвильових функцій надпровідних прошарків контакту. Всередині контакту ця змінна задовольняє [2, 3, 5] рівнянню:

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = I_c[1 + f_I(x, y)] \sin \phi + \frac{\hbar C(x, y)}{2e} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad (2.2.1)$$

де функція $f_I(x, y)$ описує зміну критичного струму через присутність просторової неоднорідності, компоненти магнітного поля $H_{x,y}$ співвідносяться з Джоузефсонівською фазою як

$$H_x = -\frac{\hbar}{2e\mu_0 l(x, y)} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad H_y = \frac{\hbar}{2e\mu_0 l(x, y)} \frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (2.2.2)$$

Ємність контакту $C(x, y)$ є просторово неоднорідною через домішку. Серед інших параметрів I_c є критична густина струму поза межами домішки. Значення $l(x, y)$ описує товщину прошарку, куди проникає магнітне поле. Воно змінюється в просторі через присутність домішки і може бути записано як $l(x, y) = 2\lambda_L + d_i(x, y)$, де λ_L є надпровідною лондонівською глибиною проникнення (два ідентичних надпровідних прошарка) і $d_i(x, y)$ - товщина діелектричного прошарку. Поза межами домішки $d_i(x, y) = d_0 = \text{const}$ в той час

$d_i(x, y) = d_0 + d_1 = \text{const}$ всередині домішки. Для домішки загальної форми, що покриває конкретний сегмент $\Omega \in \mathbb{R}^2$ контакту можна записати:

$$f_I(x, y) = \begin{cases} \mu_I & \text{якщо } (x, y) \in \Omega, \\ 0 & \text{якщо } (x, y) \notin \Omega. \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Таким же чином можна врахувати просторові зміни ємності і магнітного поля, які задаватимемо функціями f_C і f_H відповідно:

$$l(x, y) = \begin{cases} d_0 + 2\lambda_L + d_1 & \text{якщо } (x, y) \in \Omega, \\ l_0 = d_0 + 2\lambda_L & \text{якщо } (x, y) \notin \Omega. \end{cases} \quad (2.2.4)$$

і

$$C(x, y) = C_0 \frac{d_0}{d_i(x, y)} = C_0 [1 + f_C(x, y)],$$

$$f_C(x, y) = \begin{cases} \mu_C = -\frac{d_1}{d_1 + d_0} & \text{якщо } (x, y) \in \Omega, \\ 0 & \text{якщо } (x, y) \notin \Omega. \end{cases} \quad (2.2.5)$$

де C_0 є ємність контакту на одиницю площі поза домішкою. Для зручності може бути введена наступна функція

$$\frac{l_0}{l(x, y)} = 1 + f_H(x, y) = 1 + \begin{cases} 0 & \text{якщо } (x, y) \notin \Omega \\ \mu_H & \text{якщо } (x, y) \in \Omega \end{cases},$$

$$\mu_H = \frac{l_0}{l_0 + d_1} - 1 = -\frac{d_1}{d_0 + d_1 + 2\lambda_L}. \quad (2.2.6)$$

Рівняння (2.2.1) можна переписати в безрозмірному вигляді, якщо нормувати просторові змінні x та y на джозефсонівську глибину проникнення λ_J , а час t на обернену джозефсонівську плазмову частоту ω_J^{-1} . Як результат, двовимірне збурене рівняння синус-Гордона (СГ) запишеться у вигляді:

$$\left\{ -\frac{\partial}{\partial x} [1 + f_H(x, y)] \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} [1 + f_H(x, y)] \frac{\partial}{\partial y} + \right. \quad (2.2.7)$$

$$\left. + [1 + f_C(x, y)] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \phi + [1 + f_I(x, y)] \sin \phi = 0.$$

За деталями можна звертатися до книжок [2, 3]. Домішка є мікрозакороткою, якщо $\mu_I > 0$, $d_1 < 0$ та мікрорезистором, якщо $\mu_I < 0$, $d_1 > 0$. Отже, $\mu_H/\mu_I > 0$ і $\mu_C/\mu_I > 0$ як для мікрозакороток, так і для мікрорезисторів.

2.3 Випромінювання

Взаємодія флюксона з просторовою неоднорідністю зазвичай супроводжується випромінюванням малоамплітудних електромагнітних хвиль [5] (джозефсонівські плазмони). Нижче представлена загальна схема для розрахунку випромінювання, створеного взаємодією флюксона з домішкою, яка основана на методі, розробленому у [39] або ж для відповідної 1Д проблеми [6, 64].

2.3.1 Загальні положення

Обидві сторони рівняння (2.2.7) можна розділити на $[1 + f_C(x, y)]$, і в результаті переписати у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi + [1 + \bar{f}_I(x, y)] \sin \phi = \bar{f}_H(x, y) \Delta \phi + \\ + \frac{1}{1 + f_C(x, y)} \left[\frac{\partial f_H(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial f_H(x, y)}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right], \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ і

$$\begin{aligned} \bar{f}_I(x, y) &= \frac{1 + f_I(x, y)}{1 + f_C(x, y)} - 1 = \begin{cases} 0 & \text{якщо } (x, y) \notin \Omega \\ \bar{\mu}_I & \text{якщо } (x, y) \in \Omega \end{cases}, \\ \bar{f}_H(x, y) &= \begin{cases} 0 & \text{якщо } (x, y) \notin \Omega \\ \bar{\mu}_H & \text{якщо } (x, y) \in \Omega \end{cases}, \\ \bar{\mu}_{I,H} &= \frac{\mu_{I,H} - \mu_C}{1 + \mu_C}. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Представимо розв'язок рівняння СГ (2.2.7) як суперпозицію точного солітонного розв'язку незбуреної частини рівняння та плазмонного випромінювання

навколо: $\phi(x, y, t) = \phi_0(x, t) + \psi(x, y, t)$. Просторова неоднорідність вважається малим збуренням ($|\mu_{I,H,C}| \ll 1$). Тут $\phi_0(x, t) = 4 \arctan \left[\exp \left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}} \right) \right]$ є точним солітонним розв'язком незбуреного одновимірного рівняння СГ, а $\psi(x, y, t)$ - радіаційна поправка, $|\psi| \ll \phi_0$. Зручніше буде працювати в системі координат, що рухається зі швидкістю флюксона v : $\xi = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}$, $\tau = \frac{t-vx}{\sqrt{1-v^2}}$. В цих нових змінних маємо $\phi_0(x, t) = \phi_0(\xi) = 4 \arctan(\exp \xi)$. В системі рухомих координат рівняння, що описує випромінювання, набуває вигляду:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \cos[\phi_0(\xi)] \right\} \psi = R(\xi, y; \tau), \quad (2.3.10)$$

де права частина рівняння (2.3.10) повністю визначається домішкою:

$$\begin{aligned} R(\xi, y; \tau) = & 2 \left[\left(1 - \frac{1}{1-v^2} \frac{\bar{\mu}_H}{\bar{\mu}_I} \right) \frac{\tanh \xi}{\cosh \xi} \times \right. \\ & \times \bar{f}_I \left(\frac{\xi + v\tau}{\sqrt{1-v^2}}, y \right) + \left. \frac{h_H \left(\frac{\xi + v\tau}{\sqrt{1-v^2}}, y \right)}{\sqrt{1-v^2} \cosh \xi} \right], \\ h_H(x, y) = & \frac{\partial}{\partial x} f_H(x, y). \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

В цьому виразі було взято до уваги, що $\sin[\phi_0(\xi)] = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \phi_0(\xi) = -2 \tanh \xi / \cosh \xi$. Також, для будь-яких двох функцій типу $f_\alpha(x, y)$ або $\bar{f}_\alpha(x, y)$ ($\alpha = I, C, H$) справедливе наступне рівняння: $f_\alpha(x, y) = \mu_\alpha f_\beta(x, y) / \mu_\beta$. Тут останній член $R(\xi, y; \tau)$, що містить функцію $h_H(x, y)$ асоціюється із взаємодією флюксона з границями домішки, тому що $h_H(x, y) \neq 0$ лише там, тобто якщо $(x, y) \notin \partial\Omega$. Перший доданок відповідає випромінюванню, що виникає після проходження флюксоном області домішки. Розв'язок рівняння (2.3.10) може бути представлений у вигляді:

$$\psi(\xi, y, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a(q_\xi, q_y; \tau) \varphi(\xi, y; q_\xi, q_y) dq_\xi dq_y, \quad (2.3.12)$$

де $\varphi(\xi, y; q_\xi, q_y)$ є власна функція [34, 65] однорідної частини цього рівняння:

$$\varphi(\xi, y; q_\xi, q_y) = \frac{e^{i(q_\xi \xi + q_y y)}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{q_\xi + i \tanh \xi}{(1 + q_\xi^2)^{1/2}}, \quad (2.3.13)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(\xi, y; q_\xi, q_y) \varphi(\xi, y; q'_\xi, q'_y) d\xi dy = \frac{1}{2\pi} \delta(q_\xi - q'_\xi) \delta(q_y - q'_y). \quad (2.3.14)$$

Тут δ - дельта-функція Дірака, q_ξ і q_y - компоненти хвильового вектора плазмона в рухливій системі координат, і

$$\bar{\omega} = \sqrt{1 + q_\xi^2 + q_y^2}, \quad (2.3.15)$$

закон дисперсії плазмонів в цій системі. Функція $a(q_\xi, q_y)$ є амплітудою випромінювання. Для зручності введемо іншу функцію: $b(q_\xi, q_y; \tau) \doteq (a_\tau - i\bar{\omega}a) \exp(i\bar{\omega}\tau)$.

Як результат, задовольняється наступна рівність:

$$\frac{\partial b}{\partial \tau} = e^{i\bar{\omega}\tau} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial \tau^2} + \bar{\omega}^2 a \right). \quad (2.3.16)$$

Домножаючи обидві частини рівняння (2.3.10) на $\varphi^*(\xi, y; q'_\xi, q'_y)$ та інтегруючи по $y \in \mathbb{R}$ та $\xi \in \mathbb{R}$ отримуємо $\delta(q_\xi - q'_\xi)$ і $\delta(q_y - q'_y)$ в лівій частині [використана умова ортогональності (2.3.14)] рівняння (2.3.10). Після здійснення інтегрування по q_ξ та q_y приходимо до наступного виразу:

$$\frac{\partial b}{\partial \tau} = 2\pi e^{i\bar{\omega}\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\xi, y; \tau) \varphi^*(\xi, y; q_\xi, q_y) d\xi dy. \quad (2.3.17)$$

Загальна випромінена за весь час енергія визначається функцією:

$$B(q_\xi, q_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial b(q_\xi, q_y; \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (2.3.18)$$

Отже, парою рівнянь (2.3.17) і (2.3.18) визначається загальна формула для розрахунку енергії випромінювання. З цього моменту можна почати вивчення випромінювання для конкретних форм Ω . Повернення в лабораторну систему відліку відбувається за допомогою наступних перетворень Лоренца:

$$q_x = \frac{q_\xi + v\bar{\omega}}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad \omega = \frac{vq_\xi + \bar{\omega}}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad (2.3.19)$$

$$q_\xi = \frac{q_x - v\omega}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega - vq_x}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (2.3.20)$$

Компонента q_y залишається незмінною. Беручи до уваги, що густина випроміненої енергії дорівнює [39]: $\mathcal{E}(q_x, q_y) \simeq |B(q_x, q_y)|^2 / (4\pi)$, повна енергія визначається інтегралом:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(q_x, q_y) dq_x dq_y . \quad (2.3.21)$$

Наступні спрощення можуть бути зроблені, якщо Ω має визначені нижче властивості. Припустимо домішка покриває площу, обмежену лініями $x = x_1$ та $x = x_2$ вздовж осі y і неперервною та точно визначеною функцією $y = g_{\pm}(x)$ вздовж осі x , як показано на Рис. 2.1. В цьому випадку:

$$\begin{aligned} f_{I,H,C}(x, y) &= \mu_{I,H,C} [\theta(x - x_1) - \theta(x - x_2)] \times \\ &\times \{ \theta[y - g_-(x)] - \theta[y - g_+(x)] \} , \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

і інтеграл по y завжди можна взяти. Як результат, розрахунок функції випромінювання b значно спрощується. Тут $\theta(x)$ - це функція Хевісайда. Нижче

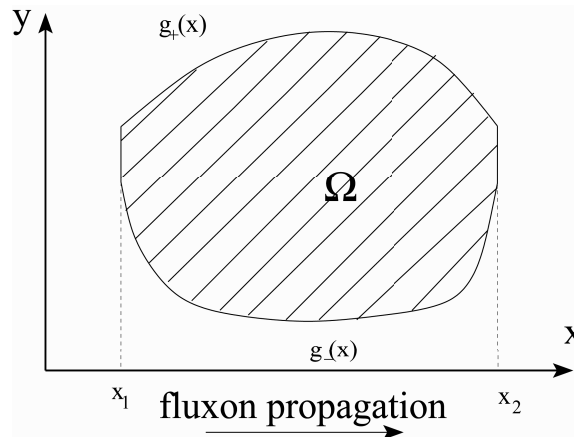


Рис. 2.1 Схематичний вид згори площі неоднорідності Ω .

розглянемо конкретні приклади, коли площа домішки Ω обмежена кусочними функціями.

2.3.2 Прямокутна неоднорідність

Змодельюємо прямокутну домішку скінченного розміру в обох x і y напрям-

ках:

$$f_{I,H,C}(x, y) = \mu_{I,H,C} \left[\theta \left(x + \frac{d_x}{2} \right) - \theta \left(x - \frac{d_x}{2} \right) \right] \times \\ \times \left[\theta \left(y + \frac{d_y}{2} \right) - \theta \left(y - \frac{d_y}{2} \right) \right], \quad (2.3.23)$$

$$h_H(x, y) = \mu_H \left[\delta \left(x + \frac{d_x}{2} \right) - \delta \left(x - \frac{d_x}{2} \right) \right] \times \\ \times \left[\theta \left(y + \frac{d_y}{2} \right) - \theta \left(y - \frac{d_y}{2} \right) \right], \quad (2.3.24)$$

Параметри d_x та d_y є довжиною та шириною неоднорідності відповідно.

2.3.2.1 Спектральна густина випромінених хвиль

Тепер ми можемо підставити точні вирази (2.3.23) і (2.3.24), що відповідають прямокутній домішці, в рівняння (2.3.17) і (2.3.18). Тоді функція випромінювання (2.3.18) в рухливій системі відліку після інтегрування по y , τ , та ξ змінним набуває вигляду:

$$B(q_\xi, q_y) = \frac{2i\sqrt{2\pi}\mu_I \sin\left(\frac{q_y d_y}{2}\right)}{q_y^2 \sqrt{1 + q_\xi^2(1 - v^2)^{1/2} v^3}} \sin\left(\frac{\bar{\omega}\sqrt{1 - v^2}}{2v} d_x\right) \operatorname{sech}\left[\frac{\pi}{2v}(q_\xi v + \bar{\omega})\right] \times \\ \times \left\{ \left(1 - v^2 - \frac{\mu_H}{\mu_I} + v^2 \frac{\mu_C}{\mu_I}\right) \frac{[\bar{\omega}^2 - (1 + q_\xi^2)v^2]}{1 + \mu_C} + 2\frac{\mu_H}{\mu_I}(1 - v^2)\bar{\omega}^2 \right\}. \quad (2.3.25)$$

Перший доданок у фігурних дужках у формулі (2.3.25) виникає через перший доданок в R [див. (2.3.11)] і може розглядатися як результат взаємодії флюксона з основною масою домішки. Другий доданок у фігурних дужках з'являється через другий член, пов'язаний з функцією h_H в рівнянні (2.3.11) і може вважатися випромінюванням, яке виникає через взаємодію з границями домішки. Після повернення до лабораторної системи відліку за допомогою рівнянь (2.3.19)

- (2.3.20) остаточна формула для спектральної густини запишеться так:

$$\mathcal{E}(q_x, q_y) = \frac{2\mu_I^2}{v^4} \left[\frac{\sin(q_y d_y/2)}{q_y} \right]^2 \left\{ \frac{\sin[d_x(\omega - vq_x)/2v]}{\omega - q_x v} \right\}^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\pi\omega}{2v} \sqrt{1-v^2} \right) \times$$

$$\times \frac{\left\{ \frac{1-v^2 - \frac{\mu_H}{\mu_I} + v^2 \frac{\mu_C}{\mu_I}}{1+\mu_C} [(\omega - q_x v)^2 + q_y^2 v^2] + 2 \frac{\mu_H}{\mu_I} (\omega - vq_x)^2 \right\}^2}{(\omega - q_x v)^2 + (v^2 - 1)q_y^2}, \quad (2.3.26)$$

$$\omega = \sqrt{1 + q_x^2 + q_y^2}. \quad (2.3.27)$$

Ця функція симетрична по відношенню до дзеркальної симетрії $q_y \rightarrow -q_y$ і до перетворень $q_x \rightarrow -q_x$, $v \rightarrow -v$. Таким чином, досить обмежити графіки $E(v)$ для інтервалу $0 \leq v \leq 1$. Для того, щоб обчислити повну енергію випромінювання $E(v)$ [Див. (2.3.21)] треба використовувати чисельні методи, тому що неможливо взяти відповідний подвійний інтеграл явно.

2.3.2.2 Одновимірна границя

Перш ніж приступити до дослідження двовимірної проблеми розглянемо відповідний одновимірний випадок розсіювання флюксона на домішці довжини d_x . Формально ця межа може бути досягнута, якщо $d_y \rightarrow \infty$. Густина енергії в цьому випадку вже відома з попередніх робіт [8]:

$$\mathcal{E}(q) = \frac{\pi\mu_I^2}{v^4} \left(\frac{1 - v^2 - \frac{\mu_H}{\mu_I} + v^2 \frac{\mu_C}{\mu_I}}{1 + \mu_C} + 2 \frac{\mu_H}{\mu_I} \right)^2 \frac{\sin^2 \left[\frac{d_x}{2v} \left(\sqrt{1 + q^2} - qv \right) \right]}{\cosh^2 \left(\frac{\pi\sqrt{1-v^2}}{2v} \sqrt{1 + q^2} \right)}. \quad (2.3.28)$$

Тим не менш, у статті, згаданій вище, просторову неоднорідність ємності не було прийнято до уваги. Відзначимо, що рівняння. (2.3.28) можуть бути отримані в межі $q_y \rightarrow 0$ в рівнянні (2.3.26) (μ_I слід перенормувати як $\mu_I d_y \rightarrow \mu_I$). Це означає, що ширина домішки d_y прямує до нескінченності, і, як результат, розсіювання не створює жодного випромінювання в напрямку y , повністю залишаючи проблему інваріантною в цьому напрямку, тобто, одновимірною. Типові залежності спектральної густини $\mathcal{E} = \mathcal{E}(q)$ для різних значень швидкості флюксона наведені на Рис. 2.2. Легко бачити, що густина енергії $\mathcal{E}(q)$ [рівняння

(2.3.28)] має безліч глобальних мінімумів, для яких $\mathcal{E}(q_{min}) = 0$. Вони є коренями рівняння:

$$\frac{d_x(\sqrt{1+q_{min}^2} - q_{min}v)}{2v} = \pi n, \quad n = n_0, n_0 + 1, \dots, \\ n_0 = \lceil d_x(1-v^2)^{1/2}/(2v\pi) \rceil > 0, \quad (2.3.29)$$

де $\lceil x \rceil$ є ціла частина (стеля) [66] по x . Так само існують максимуми, що розташовані між мінімумами в значеннях q , що є коренями рівнянь:

$$\frac{d_x(\sqrt{1+q_{max}^2} - q_{max}v)}{2v} \approx \frac{\pi(2n-1)}{2}, \quad (2.3.30) \\ n = n_0, n_0 + 1, \dots$$

Мінімуми і максимуми енергії, пов'язані з інтерференцією плазмонів, випромінюваних в моменти, коли флюксон входить і виходить з домішки. В залежності від довжини домішки і швидкості флюксона випромінювання плазмонів може скасувати один одного, якщо їх фази відрізняються на $\pm\pi$, або може доповнювати один одного, якщо їх фази збігаються. Випромінювання складається з прямого ($q > 0$) і зворотнього ($q < 0$) напрямку поширення плазмонів, і енергія цих плазмонів також поширюється неоднорідно по відношенню до q . Перш за все, велика частина енергії зосереджена в довгохвильових модах через наявність $\text{sech}^2(\dots)$ доданка в (2.3.28). По-друге, як можна бачити з Рис. 2.2, розподіл випромінювання назад визначається екстремумами (2.3.29) і (2.3.30), які лежать на негативній півосі ($q < 0$). Ці екстремуми розподілені майже рівномірним чином з кроком $2\pi v/[d_x(1+v)]$, таким чином, невелика зміна v призведе до невеликої зміни площі під кривою $\mathcal{E}(q)$. Навпаки, випромінювання вперед сильно залежить від v , особливо якщо v не мале ($v < 1$, але не $v \ll 1$). Тільки при великих q екстремуми розподілені з майже постійним кроком $2\pi v/[d_x(1-v)]$.

Мінімуми $\mathcal{E}(q)$, визначені формулою (2.3.29), ідуть парами, що нумеруються індексом n . Ці пари розміщені по різні сторони від значення $q = v/\sqrt{1-v^2}$,

що є мінімумом лівої частини рівнянь (2.3.29) і (2.3.30). Пара з $n = n_0$ є парою мінімумів, які є найближчими один до одного. Між цими мінімумами завжди повинен бути максимум. Якщо вищезгадані мінімуми знаходяться дуже близько один до одного ($2\pi n_0 v/d_x \gtrsim \sqrt{1-v^2}$), то максимум між ними не може бути пов'язаний з рівнянням (2.3.30), як показано на Рис. 2.2 (а) та 2.2 (с); Таким чином, відповідне значення $\mathcal{E}$ лежить не на $\text{sech}^2(\dots)$ огибаючій функції, а значно нижче неї. В результаті, для цих значень v випромінювання вперед мо-

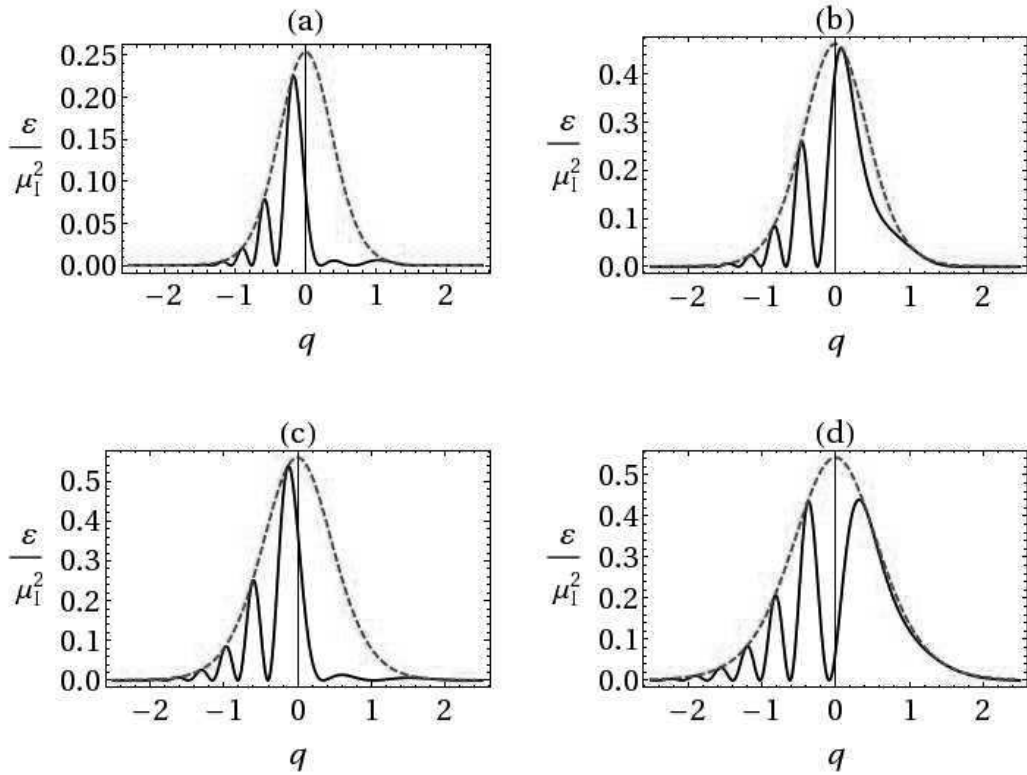


Рис. 2.2 Густина енергії [див. рівняння(2.3.28)] для 1Д контакту з $d_x = 8$, $\mu_H = \mu_C = 0$ при швидкостях $v = 0.398$ (а), $v = 0.488$ (b), $v = 0.552$ (с) і $v = 0.676$ (d). Червона пунктирна лінія позначає sech^2 «огибаючий» член в рівнянні (2.3.28).

же бути незначним, що видно з площі під кривою $\mathcal{E}(q)$ при $q > 0$. В іншому

випадку, пара мінімумів, що відповідає n_0 є значно розділеною, а максимум між ними належить набору (2.3.30). Це знову перший максимум в позитивному напрямку осі і він досягає значення $\mathcal{E}$, яке є досить великим у порівнянні з попереднім випадком, як можна бачити на Рис. 2.2 (b) і 2.2 (d). Пунктирні лінії 6 і 7 на Рис. 2.3 показують залежність загальної випроміненої енергії від швидкості флюксона (суцільні лінії відповідають 2Д випадку, який буде обговорюватися пізніше). Значення v , які відповідають мінімумам $E(v)$ на кривій 6 на Рис. 2.3, мають мінімум випромінювання вперед, і відповідні спектральні розподіли енергії наведено на Рис. 2.2 (a), 2.2 (c). Значення v , що є максимумами $E(v)$ відповідають максимальному випромінюванню вперед і відповідні спектральні розподіли наведені на Рис. 2.2 (b) і 2.2 (d). Таким чином, максимуми повної енергії збігаються з максимальним випромінюванням вперед, в той час мінімуми $E(v)$ відповідають мінімальному випромінюванню вперед. Слід зазначити, що мінімуми [рівняння (2.3.29)] і максимуми [(2.3.30)] густини енергії розподіляються приблизно на однаковій відстані для короткохвильових мод ($|q| \gg 1$), але з різним кроком для $q > 0$ і $q < 0$. У межі $|v| \ll 1$ цей крок стає приблизно однаковим, він дорівнює $2\pi v/d_x$. Отже, в границі $|v| \rightarrow 0$ не варто очікувати різко вираженого екстремуму в залежності $E(v)$, що можна побачити на вставці.

Нарешті відзначимо, що в релятивістській границі $v \rightarrow 1$ повна енергія $E(v) \rightarrow 0$, якщо $\mu_H = \mu_C = 0$ і $E(v) \rightarrow \infty$, якщо $\mu_{H,C} \neq 0$. Детальніше ця границя буде обговорюватися далі разом з двовимірним випадком.

2.3.2.3 Повна випромінена енергія в двовимірному випадку

Перш за все, обговоримо залежність повної енергії випромінювання $E(v)$ від параметрів домішки μ_I , μ_H і μ_C . Нагадаємо, що μ_I пов'язаний зі зміною критичного струму, у той час як μ_C [див. (2.2.5)] і μ_H [див. (2.2.6)] з'являються

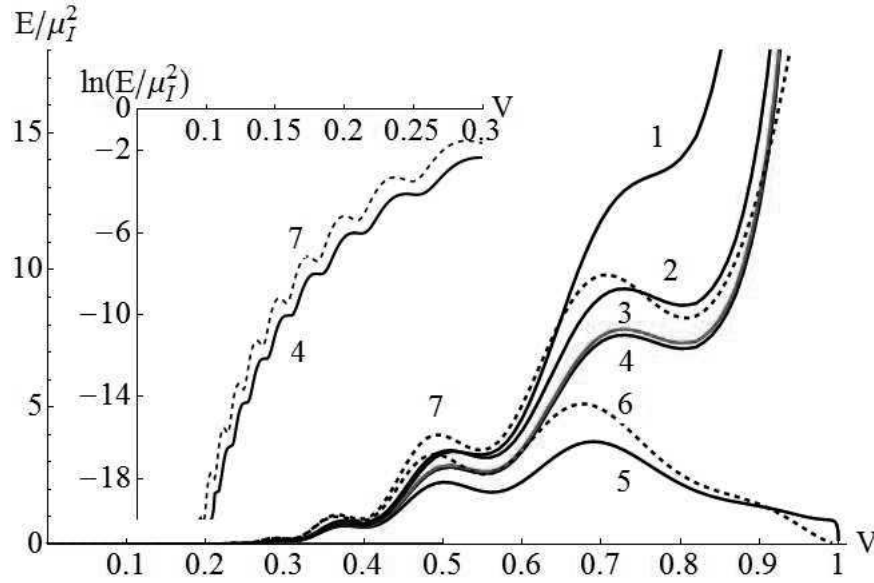


Рис. 2.3 Повна випромінена енергія (нормована на μ_I^2) як функція швидкості солітону для прямокутної домішки з $d_x = 8$, $d_y = 8$ і $\mu_H = 0$, $\mu_C = 0.1$, $\mu_C/\mu_I = 1$ (крива 1), $\mu_H = 0$, $\mu_C = -0.05$, $\mu_C/\mu_I = 0.5$ (крива 2), $\mu_H/\mu_I = 0.01$, $\mu_C = 0.05$, $\mu_C/\mu_I = 0.5$ (крива 3, червона), $\mu_H = 0$, $\mu_C = 0.05$, $\mu_C/\mu_I = 0.5$ (крива 4), і $\mu_H = \mu_C = 0$ (крива 5). Пунктирні криві 6 і 7 відповідають 1Д проблемі [див. (2.3.28)] з $d_x = 8$ і $\mu_H = \mu_C = 0$ (крива 6) і $\mu_H = 0$, $\mu_C/\mu_I = 0.5$, $\mu_C = 0.05$ (крива 6). Ці залежності домножені на фактор 10 для кращої візуалізації. Вставка показує деталі кривих 4 і 7.

через звуження або розширення діелектричного прошарку в області домішки. Якщо $\mu_H = \mu_C = 0$ домішка відповідає тільки за локальну зміну критичного струму без будь-яких змін в товщині ізолюючого шару. Загальна випромінювана енергія для різних значень μ_H і μ_C приведена на Рис. 2.3. Відзначимо, головну різницю в поведінці $E(v)$ функції в границі $v \rightarrow 1$ якщо $\mu_{C,H} \neq 0$ в порівнянні з випадком $\mu_C = \mu_H = 0$. В останньому випадку $E(v)$ прямує до нуля, а в першому випадку розходиться: $E(v)_{v \rightarrow 1} \rightarrow +\infty$. Те ж саме спостерігається в 1Д випадку (показано пунктирними лініями). Цілком очевидно з ліній 1 і 4, що для

великих значень μ_C значення випромінюваної енергії більше. Якщо взяти два протилежні значення μ_C , випадок мікрорезистора ($\mu_C < 0$, лінія 2) продукує трохи більше викидів енергії в порівнянні з випадком мікрозакоротки ($\mu_C > 0$, крива 4) у зв'язку з наявністю коефіцієнту $(1 + \mu_C)^{-1}$ в густині енергії (2.3.26). Ефект просторової зміни магнітного поля, що визначається коефіцієнтом μ_H , незначний, що можна побачити з порівняння кривих 3 і 4. Таким чином, ми будемо вважати, $\mu_H = 0$ надалі протягом всієї роботи.

Розбіжність при $v \rightarrow 1$ виникає через наявність розбіжних членів в правій частині рівняння (2.3.10). Ці члени [див. (2.3.11)] пропорційні $(1 - v^2)^{-1}$ і $(1 - v^2)^{-1/2}$. У першому доданку функція $\bar{f}_I$ містить обидва параметри μ_C і μ_H та завжди скінченна, а розбіжність з'являється тільки через знаменник. В останньому доданку, крім того, є функція h_H , яка не дорівнює нулю тільки на краях неоднорідності, де вона пропорційна δ -функції Дірака. Цей термін спричиняє різке зростання випромінювання, коли флюксон взаємодіє з краями домішки. У 1Д випадку це зумовлює таке зростання тільки на вході ($x = -d_x/2$) і виході ($x = d_x/2$) домішки.

Хотілося б відзначити, що розбіжність в границі $v \rightarrow 1$, здається не фізичною. Перш за все, наявність розбіжного члену у рівнянні (2.3.10) означає, що перший порядок теорії збурень не застосовний більше в цій межі і має бути змінений якимось чином. По-друге, в рамках нинішньої моделі дисипативними ефектами було знехтувано. Якщо вони будуть враховані, то випромінена енергія завжди буде скінченною.

Інші особливості залежності $E(v)$ такі як присутність декількох екстремумів будуть обговорюватися далі. На даний момент лише зазначимо, що при зменшенні μ_C положення екстремумів суттєво не змінюється, але абсолютні значення E на екстремумах зменшуються. Це відбувається тому, що внесок у

випромінювання через звуження/розширення ізолюючого шару зменшується. В залежності від значення μ_C деякі екстремуми можуть зникнути через зростання $E(v)$ при $v \rightarrow 1$ (див лінію 1 на Рис. 2.3). Границя $v \rightarrow 0$ показана на вставці Рис. 2.3. Можна помітити, що екстремуми повної енергії зберігаються у цій границі як в 1Д, так і в 2Д випадках, хоча вони можуть бути виявлені тільки на логарифмічній шкалі. На Рис. 2.4 загальна випромінювана енергія зображена при фіксованому значенні довжини домішки $d_x = 8$, а її ширина d_y змінюється. Результати одновимірною випадку для такої ж довжини зображені пунктирною лінією для порівняння. Природньо, що значення випромінюваної енергії зменшується при зменшенні d_y . Цікаво, що екстремуми стають менш вираженими, і, нарешті, непомітними на кривій 4, що відповідає випадку $d_y = 2$. У разі $\mu_H = \mu_C = 0$ отримуємо ту ж картину: порівняти криву 5 на Рис. 2.3 ($d_y = 8$), криву 5 Рис. 2.4 ($d_y = 6$) і криву 6 на Рис. 2.4 ($d_y = 2$). Максимуми стають все менш чіткими і поступово зникають.

Можна зробити наступну інтерпретацію отриманих результатів. Форма розподілу густини енергії наведена на Рис. 2.5. Абсолютний мінімум густини енергії задовольняє $\mathcal{E}(q_x, q_y) = 0$ і ці мінімальні значення досягаються для наступної системи в площині (q_x, q_y) :

$$q_y = \frac{2\pi n}{d_y}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{для будь-якого } q_x, \quad (2.3.31)$$

$$(1 - v^2)q_x^2 + q_y^2 = \left(\frac{2\pi m v}{d_x}\right)^2 - 1 + \frac{4\pi m v^2}{d_x} q_x, \quad (2.3.32)$$

$$m = n_0, n_0 + 1, \dots,$$

де n_0 задається рівнянням (2.3.29). Таким чином, мінімум знаходиться на множині паралельних кривих (2.3.31), так само як і на множині вкладених еліпсів, що задаються рівнянням (2.3.32). Вершини максимумів $\mathcal{E}$ лежать між кривими, які визначаються коренями рівняння (2.3.31). Для великих d_y ці вершини стро-

го локалізовані в напрямку q_y [див. Рис. 2.5 (а) і 2.5 (b)], в той час як зменшення d_y робить їх концентричними і вигнутими, як показано на Рис. 2.5 (с) і 2.5 (d).

Для великих значень d_y проблема може розглядатися як майже одновимір-на, бо більша частина випроміненої енергії розповсюджується вздовж напрямку x , в той час як y -компонента випромінювання залишається незмінною. Це мо-

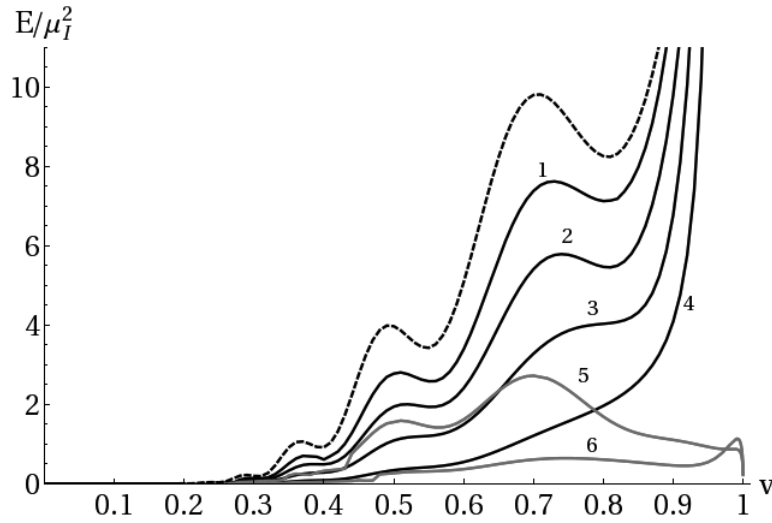


Рис. 2.4 Повна випромінена енергія (нормована на μ_I^2) як функція швидкості флюксону для $\mu_H = 0$, $\mu_C/\mu_I = 0.5$, $\mu_C = 0.05$, $d_x = 8$ і $d_y = 8$ (крива 1), $d_y = 6$ (крива 2), $d_y = 4$ (крива 3), і $d_y = 2$ (крива 4). Випадок $\mu_H = \mu_C = 0$ представлений червоними кривими 5 ($d_y = 6$) і 6 ($d_y = 2$). Пунктирна крива відповідає 1Д випадку з $d_x = 8$ (для кращої візуалізації домножена на 10).

жна чітко спостерігати на Рис. 2.5 (а) і 2.5 (b), де спектральна густина $\mathcal{E}(q_x, q_y)$ (2.3.26) побудована для значень швидкості, близької до мінімуму (а) і максимуму (b) енергії випромінювання на кривій 1 Рис. 2.4. Так як спадання функції $[\sin(q_y d_y/2)/q_y]^2$ зі зростанням q_y є досить швидким для великих значень d_y , функція густини енергії залишається сильно локалізована вздовж осі q_x в околиці $q_y = 0$. Ця поведінка по осі q_x нагадує відповідну 1Д проблему (див. (2.3.28) і Рис. 2.2). Справді, мінімум повної випроміненої енергії відповідає мі-

німальному випромінюванню вперед. Це може легко спостерігатися на Рис. 2.5 (а), де глобальний максимум знаходиться на осі q_x в $q_x < 0$, в той час як перший локальний максимум в $q_x > 0$ досить малий. На Рис. 2.5 (b) можна бачити, що глобальний максимум розміщений на позитивній півосі осі q_x , і це відбувається на рівні $v = 0,73$, що досить близько до максимуму функції $E(v)$ (крива 1) на Рис. 2.4. Подальше зменшення d_y змазує максимуми в залежності

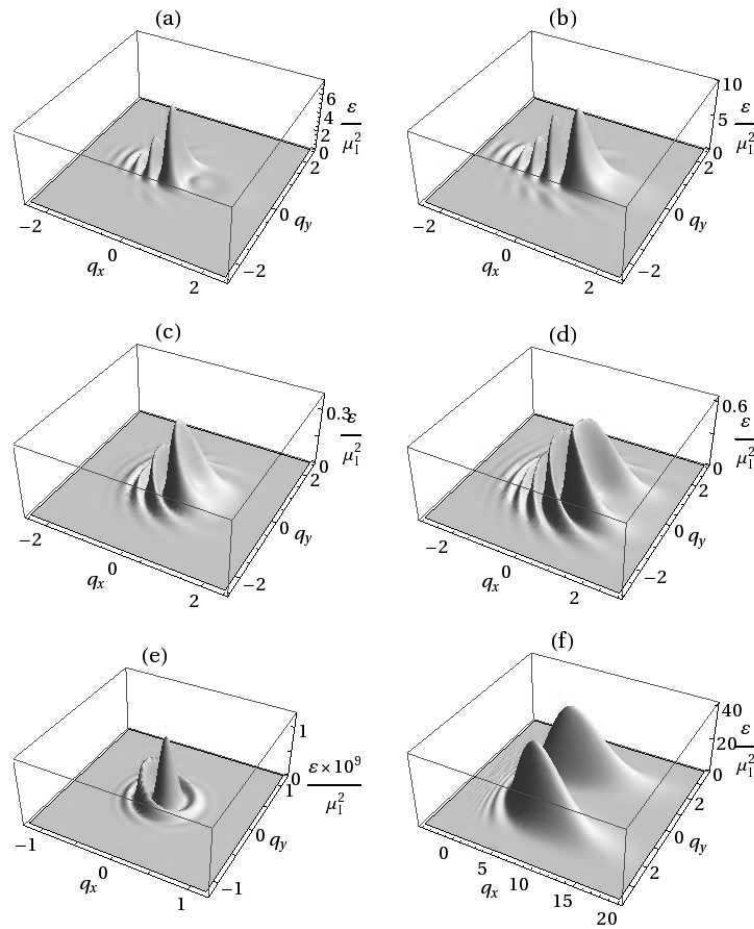


Рис. 2.5 Густина енергії випромінювання $\mathcal{E}$ для прямокутної домішки з параметрами на Рис. 2.4, крива 1 при $v = 0.55$ (а) і $v = 0.73$ (b); крива 6 при $v = 0.5$ (c), $v = 0.75$ (d), $v = 0.1$ (e) і $v = 0.99$ (f).

$E(v)$ (порівняйте криві 1 - 4 на Рис. 2.5) до того моменту, коли залишається

лише один локальний максимум. Задача розсіювання не може більше розглядатися як квазіодновимірна. Розподіл випромінювання суттєво змінюється, як показано на Рис. 2.5 (с) і 2.5 (d). Максимуми $\mathcal{E}(q_x, q_y)$ досі лежать на осі q_x , але криві (2.3.32), які визначають мінімальні значення стають чітко дугоподібними, y -компонента випромінювання – більш делокалізованою. Аналогія з 1Д випадком більше не працює. Цікаво відзначити як форма функції густини енергії змінюється в крайніх межах значення швидкості: $v \rightarrow 0$ і $v \rightarrow 1$. В границі малої швидкості $|v| \ll 1$ еліпси (2.3.32), що відповідають мінімумам $\mathcal{E}$ є майже колами, функція густини є майже радіально симетричною, див. Рис. 2.5 (е). Збільшення v робить еліпси (2.3.32) більш витягнутими в x напрямку, як це було продемонстровано раніше [Рис. 2.5 (а)-(d)]. Цікава ситуація виникає в протилежній границі, а саме, якщо $1 - |v| \ll 1$. Глобальний максимум, який був встановлений на q_x , розбивається на два максимуми, що в даний час знаходяться поза q_x віссю симетрично по відношенню один до одного, як показано на Рис. 2.5 (f). Фізично це означає наступне. Повільний флюксон «відчуває» домішку як стіну і вихідне випромінювання рухається в основному вздовж напрямку поширення флюксона. Швидкий (релятивістський) флюксон взаємодіє з домішкою таким чином, що домішка виступає як голка (хвилеріз) і випромінювання розбивається на дві половини, що мають обидві x і y компоненти. Водночас x компонента випромінювання стає незначною. Кількість локальних екстремумів $E(v)$ залежить від довжини домішки d_x . Це продемонстровано на Рис. 2.7, де кількість максимумів зменшується зі зменшенням d_x . Цей результат схожий з тією ж ситуацією в одновимірній моделі [8].

На Рис. 2.6 зображено густину енергії випромінювання при різних значеннях швидкості флюксона та розмірах домішки для випадку з $\mu_H = \mu_C = 0$. Простімо основні відмінності в цій функції, яка виникає за умови, що домішка

створює лише локальну зміну критичного струму. Графіки (а-с) відповідають неоднорідності, витягнутій вздовж осі x , і, як видно, зі збільшенням швидкості функція густини енергії, основний пік якої є майже ізотропним та локалізованим в центрі, розпливається, розтягується вздовж осі q_x і стискається вздовж q_y . Максимум функції рухається в напрямку від'ємних значень q_x . На великих швидкостях відчувається вплив множників з $\sin$, функція стає осцилюючою та згасає зі збільшенням значень хвильових векторів. На серіях графіків (d-f) та (g-i) зображено густину енергії випромінювання при розсіянні флюксона на домішці, витягнутій вздовж осі x та квадратній домішці відповідно. В цьому випадку коливання вздовж q_x стають помітними і зростають зі збільшенням швидкості флюксона, при цьому функція і її максимум залишаються локалізованими і майже не зміщуються з початкового положення. Видно, що саме довжина неоднорідності d_x відіграє суттєву роль на вигляд функції спектральної густини, в той час як ширина d_y вносить лише кількісні зміни, модифікуючи функцію без суттєвої зміни її форми на невеликих швидкостях. При швидкостях, близьких до максимальних, коливання вздовж q_y стають суттєвими і переважають над поздовжніми коливаннями, виникає декілька рівновеликих максимумів, кількість яких прямо пропорційно залежить від розмірів домішки.

2.3.2.4 Граничні випадки

Цікаво перевірити граничні випадки, коли в одному з напрямків (x або y) домішка стає нескінченно вузькою. Межа $d_x \rightarrow 0$, поки $\mu_* = \mu_I d_x$ залишається постійною відповідає ситуації, коли домішка стає нескінченно тонкою в x напрямку. У виразах (2.3.23) і (2.3.24) різниця θ -функцій, які утворюють перший фактор у функції $f_{I,H,C}(x,y)$ (2.3.23), стає δ -функцією Дірака, в той час як $h_H \equiv 0$. Цей випадок з $\mu_C = \mu_H = 0$ був вивчений раніше [23]. Ще одна цікава межа може бути розглянута, якщо $d_y \rightarrow 0$, $\mu_* = \mu_I d_y$. Іншими словами,

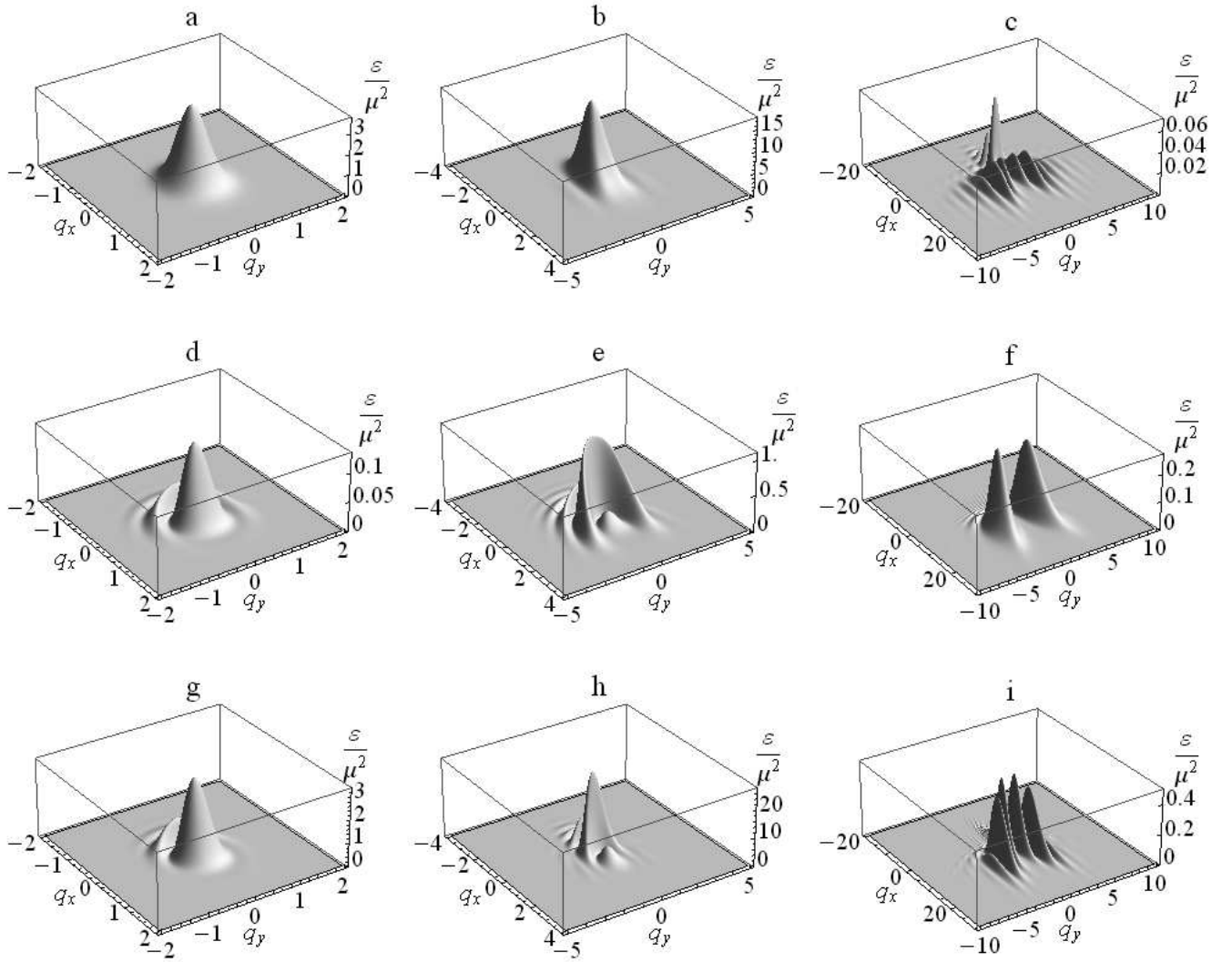


Рис. 2.6 Спектральна густина енергії випромінювання для прямокутної неоднорідності при $\mu_H = \mu_C = 0$. Графіки (а), (b), (с) відповідають домішці $d_x = 1$, $d_y = 5$ та швидкостям флюксона $v = 0.3$ (а); $v = 0.7$ (b); $v = 0.99$ (с). Графіки (d), (e), (f) – $d_x = 5$, $d_y = 1$ при $v = 0.3$; 0.7 ; 0.99 відповідно. На (g), (h), (i) зображено випадок з $d_x = 5$, $d_y = 5$ та вищевказаних швидкостях.

домішка залишається витягнутою в напрямку x , але стає нескінченно тонкою в напрямку y .

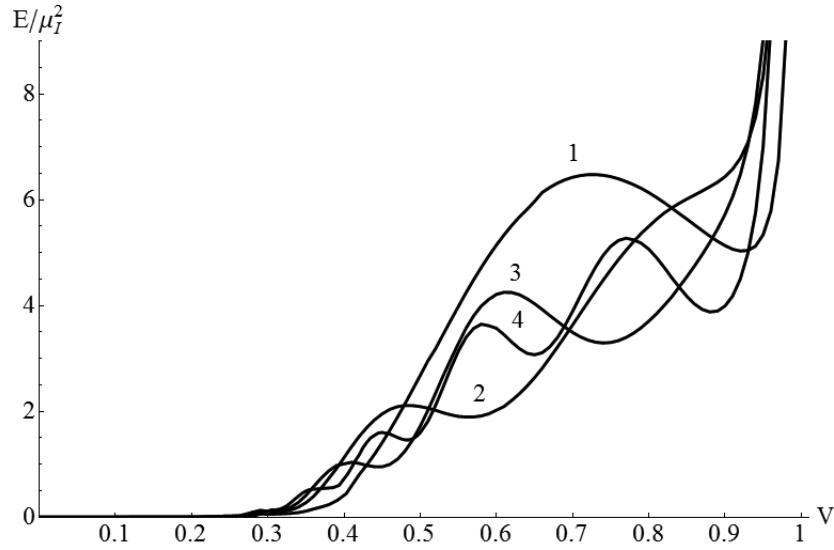


Рис. 2.7 Загальна випромінена енергія (нормована на μ_I^2) як функція швидкості флюксона $\mu_H = 0$, $\mu_C/\mu_I = 0.2$, $\mu_C = 0.02$, $d_y = 8$ і $d_x = 2$ (крива 1), $d_x = 4$ (крива 2), $d_x = 6$ (крива 3), and $d_x = 10$ (крива 4).

Густина випромінюваних плазмонів в зазначених випадках має вигляд:

$$\frac{\mathcal{E}(q_x, q_y)}{\mu_*^2} \rightarrow \frac{\left\{ \frac{1-v^2 - \frac{\mu_H}{\mu_I} + v^2 \frac{\mu_C}{\mu_I}}{1+\mu_C} [(\omega - q_x v)^2 + q_y^2 v^2] + 2 \frac{\mu_H}{\mu_I} (\omega - v q_x)^2 \right\}^2}{(\omega - q_x v)^2 + (v^2 - 1) q_y^2} \times (2.3.33)$$

$$\times \frac{1}{2v^6 q_y^2} \sin^2 \left(\frac{q_y d_y}{2} \right) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\pi \omega \sqrt{1-v^2}}{2v} \right), \quad \text{якщо } d_x \rightarrow 0,$$

$$\frac{\mathcal{E}(q_x, q_y)}{\mu_*^2} \rightarrow \frac{\left\{ \frac{1-v^2 - \frac{\mu_H}{\mu_I} + v^2 \frac{\mu_C}{\mu_I}}{1+\mu_C} [(\omega - q_x v)^2 + q_y^2 v^2] + 2 \frac{\mu_H}{\mu_I} (\omega - v q_x)^2 \right\}^2}{(\omega - q_x v)^2 + (v^2 - 1) q_y^2} \times (2.3.34)$$

$$\times \frac{1}{2v^4} \left[\frac{\sin[d_x(\omega - q_x v)/2v]}{\omega - q_x v} \right]^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\pi \omega \sqrt{1-v^2}}{2v} \right), \quad \text{якщо } d_y \rightarrow 0.$$

У цих межах модуляції в q -просторі, викликані інтерференцією, зникають в q_x напрямку в формулі (2.3.33), тому що довжина домішки стає нескінченно малою. По тій же причині немає ніяких перешкод по q_y , коли $d_y \rightarrow 0$ у другій формулі (2.3.34). Якщо який-небудь з цих лімітів наближається, то кілька

максимумів в залежності $E(v)$ зникають, залишаючи тільки один локальний максимум. Межа точкової домішки $[f_I(x, y) = \mu_I \delta(x) \delta(y)]$ [39] може бути легко досягнута від прямокутної, спрямовуючи у формулах (2.3.33) і (2.3.34) $\mu_{C,H} \rightarrow 0$ і $d_x \rightarrow 0$ або $d_y \rightarrow 0$, де це доцільно. Коли домішка стискається в точку, локальна зміна товщини ізолюючого шару ігнорується, таким чином, $\mu_C = \mu_H = 0$. Отримана формула збігається з попереднім результатом [39].

2.3.3 Стрічкоподібна неоднорідність

Зупинимося детальніше на випадку стрічкоподібної неоднорідності, витягнутої в напрямку y , для порівняння його з прямокутною домішкою та демонстрації впливу параметрів μ_C і μ_H , якими знехтуємо на цей раз ($\mu_C = \mu_H = 0$), на залежність випроміненої енергії від швидкості флюксона. Для домішки у вигляді стрічки, витягнутої вздовж y маємо:

$$f(x, y) = \mu_I \delta(x) \left[\theta \left(y + \frac{d}{2} \right) + \theta \left(\frac{d}{2} - y \right) \right]. \quad (2.3.35)$$

Для знаходження густини випроміненої енергії використаємо метод, описаний в параграфі 2.3.1. Таким чином, по аналогії з випадком прямокутної домішки знаходимо вираз для густини випроміненої енергії в лабораторній системі координат:

$$\mathcal{E}(q_x, q_y) = \frac{\mu_I^2}{2q_y^2 v^6} \frac{(1 - v^2)^2 \sin^2 \left(\frac{q_y d}{2} \right)}{\cosh^2 \left[\frac{\pi \omega}{2v} (1 - v^2)^{1/2} \right]} \frac{\left[(\omega - vq_x)^2 + (vq_y)^2 \right]^2}{(\omega - vq_x)^2 - (1 - v^2)q_y^2}. \quad (2.3.36)$$

Її форма для різних значень швидкості флюксона зображена на Рис. 2.8. Відзначимо, що ця залежність немає жодних сингулярностей для всіх $-\infty < q_{x,y} < +\infty$, тому що її знаменник завжди додатний, що можна бачити з рівняння (2.3.36). Основний пік залежності $\mathcal{E}(q_x, q_y)$ лежить на осі $q_y = 0$ В границі $v \rightarrow 0$ залежність стає майже ізотропною і строго локалізованою навколо основного піку, який рухається до початку координат при зменшенні v . Зростання v викликає стискання піку в напрямку q_y і його розтягування вздовж q_x . Максимум

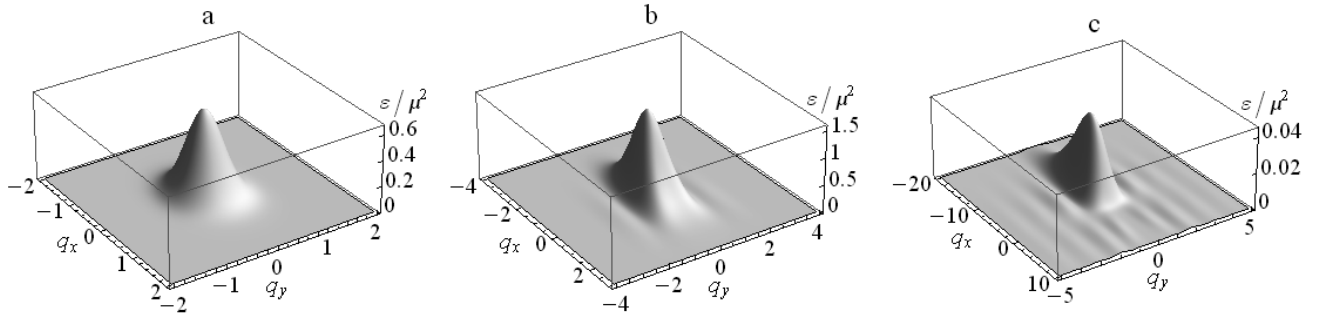


Рис. 2.8 Профіль густини енергії $\mathcal{E}(q_x, q_y)$ [див рівняння (2.3.36)] для $d = 5$ і $v = 0.3$ (a), $v = 0.7$ (b), $v = 0.99$ (c).

$\mathcal{E}(q_x, q_y)$ рухається в напрямку від'ємних значень q_x . Другорядні піки, що існують через присутність члену $\sin$ в рівнянні (2.3.36), стають помітними, коли $v \rightarrow 1$ [див. Рис. 2.8 (c)]. Функціональна залежність функції густини енергії для домішки-стрічки відрізняється від тієї ж залежності для точкової домішки $f(x, y) = \mu_* \delta(x) \delta(y)$, вивченої в [39], лише присутністю члену $\sin^2(q_y d/2)/q_y^2$. Проте, цей член суттєво змінює властивості розподілу енергії. Наприклад, в границі $v \rightarrow 1$ ($1 - v^2 \ll 1$) густина енергії для точкової домішки стає майже ізотропною, окрім вузького «провалу» $\sim (1 - v^2)^{1/2}$ вздовж q_x . В той же час, в цій границі функція густини енергії для стрічкоподібної неоднорідності стає строго анізотропною. Ще різкіше анізотропія функції густини енергії впливає на повну енергію випромінювання, залежність якої від швидкості флюксона показана на Рис. 2.9. На графіку (a) показана залежність нормованої випроміненої енергії E/μ_I^2 від товщини неоднорідності d . Залежність має добре визначений максимум і прямує до нуля в граничних випадках $v \rightarrow 0$ і $v \rightarrow 1$. У відповідному одновимірному випадку з δ -подібною точковою домішкою крива $E(v)$ є якісно такою ж [6]. Більш того, густина енергії для одновимірного випадку

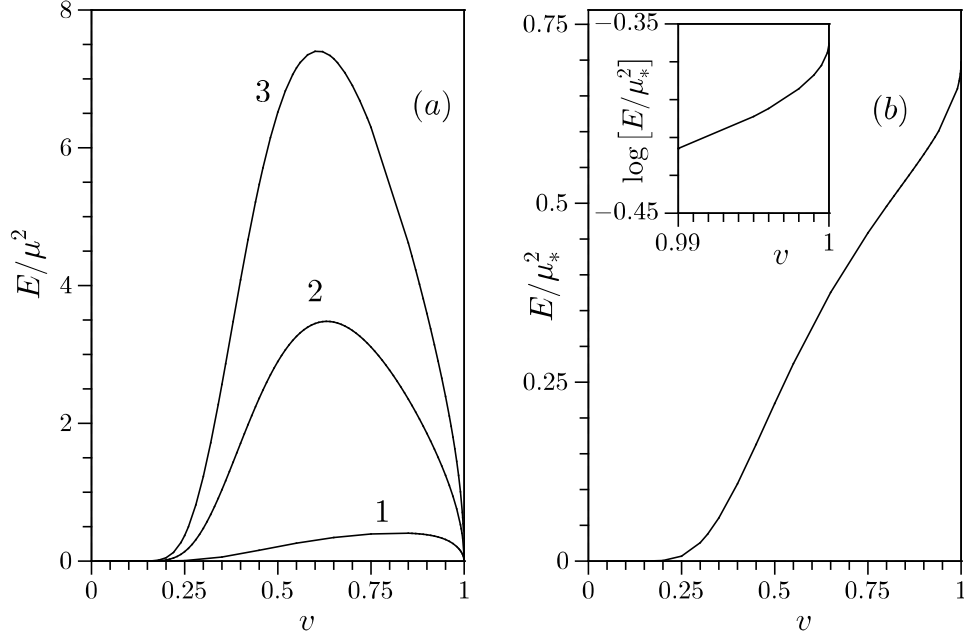


Рис. 2.9 Залежність нормованої випроміненої енергії від швидкості флюксона. Графік (а) відповідає стрічкоподібній неоднорідності з $d = 1$ (крива 1), $d = 5$ (крива 2) і $d = 10$ (крива 3). Графік (б) - точковій домішці $f(x, y) = \mu_* \delta(x) \delta(y)$. Вставка показує деталі границі $v \rightarrow 1$.

[6] легко відновлюється, якщо формально покласти $q_y = 0$ в (2.3.36). У межі нульової швидкості флюксон наближається до домішки з нескінченно малою кінетичною енергією, таким чином, випромінювана енергія повинна бути нескінченно малою. Можна легко показати, що в $0 < v \ll 1$ границі енергія росте як $E(v) \sim \exp(-\pi/v)$. В іншому випадку, при $v \rightarrow 1$ ширина флюксона прямує до нуля, тому час взаємодії буде прямувати до нуля також. В результаті, випромінювана енергія прямує до нуля. Таким чином, повинна існувати швидкість для якого енергія випромінювання досягає максимального значення. Положення максимуму зменшується зі збільшенням ширини домішки. Це можна пояснити тим, що зіткнення з широкою домішкою викликає більше енергії, що

випромінюється. Таким чином, менша кінетична енергія, і, отже, менша швидкість необхідна для того, щоб досягти максимального випромінювання. У межі $d \rightarrow 0$ максимум кривої $E(v)$ стає менш вираженим, рухається до значення $v = 1$ (і в кінцевому підсумку зникає, коли $d = 0$), а загальна випромінювана енергія прямує до нуля. Це природно, тому що домішка стає нескінченно вузькою, а її амплітуда залишається скінченною. Енергія солітона, однак, пропорційна ширині переходу і нескінченно велика для нескінченного зразка.

Для того, щоб відновити випадок точкової домішки, амплітуда домішки має перепозначитися як $\mu_* = d\mu$. Як результат, границя $d \rightarrow 0$ функції (2.3.35) поводить як $f(x, y) \rightarrow \mu_* \delta(x) \delta(y)$ і функція густини енергії (2.3.36) перетворюється в рівняння (2.16) з [39]. Повна випромінена енергія у разі точкової неоднорідності в залежності від швидкості флюксона показана на Рис. 2.9 (b). $E(v)$ залежність є монотонно зростаючою функцією, яка прямує до скінченного значення, $v \rightarrow 1$ (вставка). Таким чином, отримано граничний випадок, коли домішка-стрічка стає домішкою-точкою, максимум енергетичної залежності зміщується в бік $v = 1$ і, в кінцевому підсумку, зникає ($d = 0$).

2.3.4 Ромбічна неоднорідність

Тепер розглянемо домішку ромбічної форми з d_x і d_y , що є її довжиною і шириною відповідно :

$$\Omega : \quad |x| \leq d_x/2 \cap |y| \leq g(x) = d_y(1/2 - |x|/d_x) . \quad (2.3.37)$$

Якщо вістря ромбу перпендикулярне до лінії флюксона, то:

$$\begin{aligned} h_H(x, y) = \mu_H \{ & [\delta(x + d_x/2) - \delta(x - d_x/2)] [\theta(y + g(x)) - \theta(y - g(x))] + \\ & + [\theta(x + d_x/2) - \theta(x - d_x/2)] \{ \delta[y - g(x)] + \delta[y + g(x)] \} g'(x), \end{aligned} \quad (2.3.38)$$

$$g'(x) = -\frac{d_y}{d_x} \text{sign}(x) = -\frac{d_y}{d_x} \text{sign}(\xi + v\tau) . \quad (2.3.39)$$

Підставляючи формули (2.3.38) і (2.3.39) в рівняння (2.3.17) і (2.3.18) отримаємо функцію випромінювання в рухливій системі координат:

$$B(q_\xi, q_y) = i \left\{ \left(1 - v^2 - \frac{\mu_H}{\mu_I} + v^2 \frac{\mu_C}{\mu_I} \right) \frac{[\bar{\omega}^2 - (1 + q_\xi^2)v^2]}{1 + \mu_C} + 2 \frac{\mu_H}{\mu_I} (1 - v^2) \bar{\omega}^2 \right\} \times \\ \times \frac{2\sqrt{2\pi}\mu_I d_x}{q_y^2 v^3} \frac{d_x}{d_y} \frac{\cos\left(\frac{q_y d_y}{2}\right) \cos\left(\frac{\bar{\omega}\sqrt{1-v^2}}{2v} d_x\right)}{\sqrt{1 + q_\xi^2(1 - v^2)^{1/2} \left(\left(\frac{d_x}{d_y} \bar{\omega}\right)^2 \frac{1-v^2}{q_y^2 v^2} - 1 \right)}} \operatorname{sech} \left[\frac{\pi}{2v} (q_\xi v + \bar{\omega}) \right], \quad (2.3.40)$$

де закон дисперсії: $\bar{\omega} = \bar{\omega}(q_\xi, q_y)$ в рухливій системі задається рівнянням (2.3.15).
Перехід в лабораторну систему здійснюється стандартним шляхом і, як результат, спектральна густина енергії в лабораторній системі відліку виражається формулою:

$$\mathcal{E}(q_x, q_y) = \frac{2\mu_I^2}{v^2} \left\{ \frac{\cos(q_y d_y/2) - \cos[d_x(\omega - q_x v)/2v]}{\left(\frac{d_x}{d_y}\right)^2 (\omega - q_x v)^2 - v^2 q_y^2} \operatorname{sech} \left(\frac{\pi\omega}{2v} \sqrt{1 - v^2} \right) \right\}^2 \times \\ \times \left(\frac{d_x}{d_y} \right)^2 \frac{\left[\frac{1-v^2 - \frac{\mu_H}{\mu_I} + v^2 \frac{\mu_C}{\mu_I}}{(1+\mu_C)} ((\omega - q_x v)^2 + q_y^2 v^2) + 2 \frac{\mu_H}{\mu_I} (\omega - v q_x)^2 \right]^2}{(\omega - q_x v)^2 + (v^2 - 1) q_y^2}, \quad (2.3.41)$$

де закон дисперсії $\omega = \omega(q_x, q_y)$ в лабораторній системі відліку задається (2.3.27). Може здаватися, що ця залежність має сингулярність, коли задовольняється рівняння $\left(\frac{d_x}{d_y}\right)^2 (\omega - q_x v)^2 = v^2 q_y^2$. Однак, за допомогою тригонометричної формули: $\cos a - \cos b = 2 \sin[(a+b)/2] \sin[(b-a)/2]$ легко строго показати, що відповідна розбіжність зникає. Повна енергія випромінювання в залежності від швидкості флюксона показана на Рис. 2.10-2.12. Перший графік (Рис. 2.10) фокусується на ситуації, коли відношення d_y/d_x є фіксованим, а площа, покрита неоднорідністю, змінюється. Основний графік відповідає неоднорідності, що повернута вузьким кінцем до напрямку руху флюксона ($d_x/d_y = 4$). Вставка (а) описує протилежну ситуацію: $d_y/d_x = 4$. В цілому, залежність $E(v)$ зростає з v в границі $v \ll 1$ і розходиться на $v \rightarrow 1$ через присутність параметрів μ_C

і μ_H (в іншому випадку, якщо $\mu_C = \mu_H = 0$, то $E(v)_{v \rightarrow 1} \rightarrow 0$). Така поведінка дуже схожа на випадок прямокутної домішки, що вивчалася в параграфі 2.3.2. Спочатку розглянемо ромб, витягнутий в напрямку поширення флюксо-

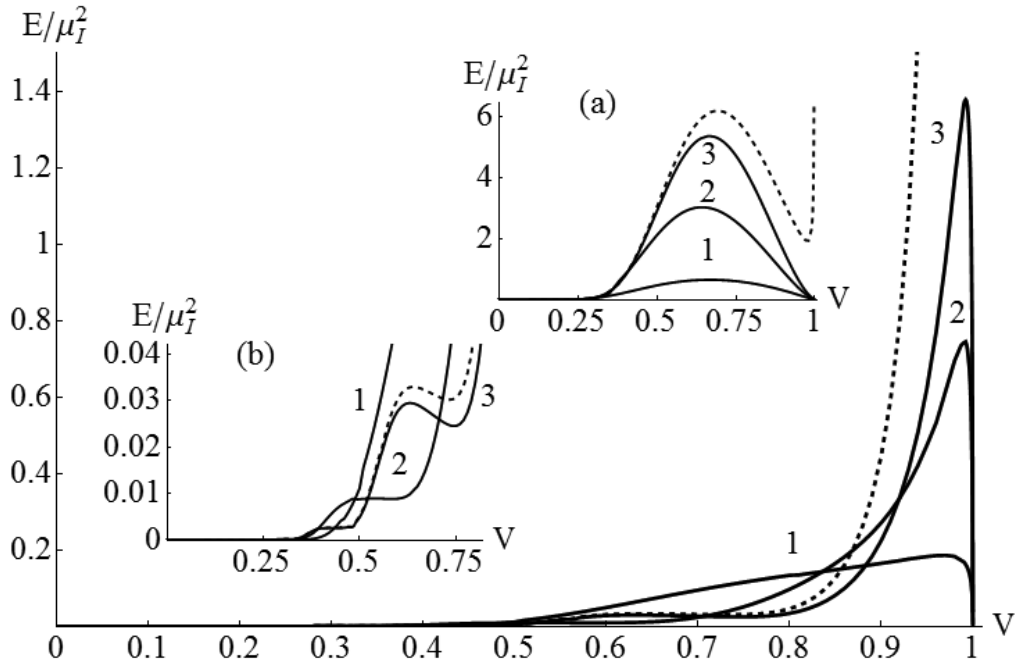


Рис. 2.10 Повна випромінена енергія (нормована на μ_I^2) як функція швидкості флюксона для ромбічної домішки з фіксованим співвідношенням $d_x/d_y = 4$. Суцільні лінії відповідають $\mu_C = \mu_H = 0$, $d_x = 4$ (крива 1), $d_x = 8$ (крива 2) і $d_x = 12$ (крива 3). Пунктирною лінією позначений випадок $d_x = 12$ і $\mu_C = 0.01$ і $\mu_C/\mu_I = 0.1$, $\mu_C = 0.01$, $\mu_H = 0$. Вставка (а): випадок $d_x/d_y = 1/4$, $\mu_C = \mu_H = 0$ $d_x = 1$ (крива 1), $d_x = 2$ (крива 2) і $d_x = 3$ (крива 3) і $\mu_C/\mu_I = 0.1$, $\mu_H = 0$, $d_x = 3$ (пунктирна крива). Вставка (б) показує деталі основного графіку.

на (основна частина Рис. 2.10). Зауважимо, що в разі $\mu_C = \mu_H = 0$ є один чітко встановлений максимум залежності $E(v)$, який розташований дуже близько до значення $v = 1$. Коли область домішки збільшується, пік енергетичної залежності стає більш різким, в той час як положення максимуму зсувається до точки

$v = 1$. Якщо $\mu_C \neq 0$, головний максимум зникає через необмежене зростання енергетичної залежності. Є й інші максимуми $E(v)$, однак вони дуже слабкі і помітні тільки якщо відповідний інтервал буде перемасштабовано [див. вставку (b)]. Коли площа домішки зменшується, деякі з цих максимумів зникають [порівняйте криві 3 і 2 на вставці (b)].

Вставка (а) на Рис. 2.10 відповідає ситуації, коли домішка витягнута в напрямку y з фіксованим відношенням $d_x/d_y = 1/4$. У цьому випадку є тільки один локальний максимум, що зменшується, в той час сусідній локальний мінімум стає також меншим, коли площа $d_x d_y/2$ зменшується. Цей випадок якісно близький до границі стрічкоподібної неоднорідності [23], але границя (2.3.33) не відновлюється математично. Можливо також врахувати граничні випадки нескінченно вузьких стрічок: $d_x \rightarrow 0$ і $d_y \rightarrow 0$. Якщо амплітуда домішки перепозначена як $\mu_* = \mu_I d_x$ (або $\mu_* = \mu_I d_y$), то спектральна густина в цій границі виглядатиме:

$$\frac{\mathcal{E}(q_x, q_y)}{\mu_*^2} \rightarrow \frac{8}{v^6 d_y^2 q_y^4} \frac{\left\{ \frac{1-v^2 - \frac{\mu_H}{\mu_I} + v^2 \frac{\mu_C}{\mu_I}}{1+\mu_C} [(\omega - q_x v)^2 + q_y^2 v^2] + 2 \frac{\mu_H}{\mu_I} (\omega - v q_x)^2 \right\}^2}{(\omega - q_x v)^2 + (v^2 - 1) q_y^2} \times$$

$$\times \sin^4 \left(\frac{q_y d_y}{4} \right) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\pi \omega \sqrt{1-v^2}}{2v} \right), \text{ якщо } d_x \rightarrow 0, \quad (2.3.42)$$

$$\frac{\mathcal{E}(q_x, q_y)}{\mu_*^2} \rightarrow \frac{8}{d_x^2 v^2} \frac{\left\{ \frac{1-v^2 - \frac{\mu_H}{\mu_I} + v^2 \frac{\mu_C}{\mu_I}}{1+\mu_C} [(\omega - q_x v)^2 + q_y^2 v^2] + 2 \frac{\mu_H}{\mu_I} (\omega - v q_x)^2 \right\}^2}{(\omega - q_x v)^2 + (v^2 - 1) q_y^2} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\sin[d_x(\omega - q_x v)/4v]}{\omega - q_x v} \right\}^4 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\pi \omega \sqrt{1-v^2}}{2v} \right) \text{ якщо } d_y \rightarrow 0. \quad (2.3.43)$$

Ці граничні випадки $\mathcal{E}$ є дуже схожими на аналогічні границі для прямокутної домішки (2.3.33), (2.3.34). Єдина принципова відмінність - це інтерференційні члени, що відповідають за осциляції в напрямках q_x або q_y , вони мають степінь 4, а не 2, як в рівнянні (2.3.33).

Далі зосередимо увагу на ситуації, коли ширина неоднорідності d_y фіксована, а її довжина d_x змінюється. На Рис. 2.11 (а) побудована залежність локального максимуму (визначеного в інтервалі $0 \leq v < 1$) випроміненої енергії як функція кута ромба $\arctan(d_y/d_x)$. Якщо $\mu_C = \mu_H = 0$, то залежність $\max_{v \in [0,1]} E(v)$ від кута ромбу є спадаючою функцією майже всюди в інтервалі $[0, \pi/2]$. В границі $d_x \rightarrow \infty$ максимум $E(v)$ зростає зі зростанням загальної кількості випроміненої енергії. Тільки в околі кута $\pi/3$ існує слабо виражений локальний максимум. Якщо $\mu_C \neq 0$, то така залежність не може бути визначена для всього інтервалу $[0, \pi/2]$ і починається з деякого критичного значення кута (дивитися залежності, відзначені квадратами і перевернутими трикутниками) і триває до значення $\pi/2$. Нижче цього критичного кута немає локального максимуму $E(v)$, тому що залежність стає строго монотонна. Якщо d_y зменшується, то залежність стає строго спадаючою функцією (зображено (о) на Рис. 2.11), що охоплює весь інтервал $[0, \pi/2]$, навіть якщо $\mu_C \neq 0$. На Рис. 2.11 (b) залежність $E(v)$ показана в границі дуже вузької ромбічної домішки. Якщо $\mu_C > 0$, то максимуму немає і функція $E(v)$ є монотонно зростаючою. Якщо $\mu_C = 0$, існує гострий максимум дуже близько до $v = 1$ і скрізь функція поводить себе дуже подібно до випадку $\mu_C > 0$. Можна помітити тонку структуру декількох точок перегину. Ці точки є залишками локальних максимумів, які чітко видно на вставці (b) Рис.2.10. Кількість цих точок перегину зростає зі збільшенням довжини ромба d_x . Тут спостерігаємо зв'язок з випадком прямокутної неоднорідності, розглянутому в параграфі 2.3.2. У цьому випадку відзначалося збільшення числа максимумів $E(v)$ при збільшенні d_x . Для ромба бачимо як максимуми вироджуються в точки перегину. Межа $d_x \rightarrow \infty$ означає, що домішка виступає як дуже вузька голка, яка не викликає особливого випромінювання на малих і середніх швидкостях. Значне зростання випромінювання виявляється тільки в

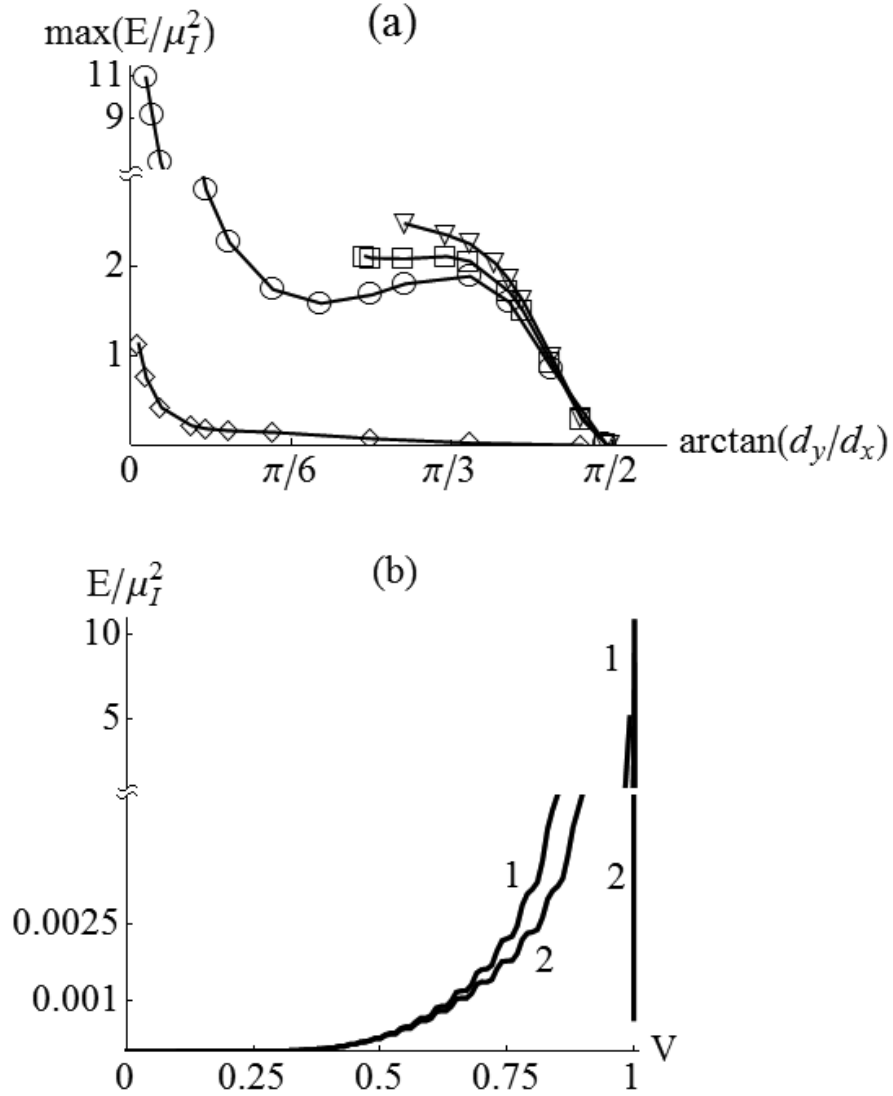


Рис. 2.11 (а) Значення локального максимуму $\max_{v \in [0,1]} E(v)$ випроміненої енергії як функція кута $\arctan(d_y/d_x)$ для параметрів $d_y = 5$, $\mu_C = 0.01$, $\mu_C/\mu_I = 0.1$ (∇), $\mu_C = 0.005$, $\mu_C/\mu_I = 0.05$ ($\square$), $\mu_C = 0$ ($\circ$) і $d_y = 1$, $\mu_C = 0$ ($\diamond$). (б) Залежність випроміненої енергії як функція швидкості флюксона для $d_x = 100$, $d_y = 5$, $\mu_C = 0.01$, $\mu_C/\mu_I = 0.1$ (крива 1) і $\mu_C = 0$ (крива 2), $\mu_H = 0$ скрізь.

релятивістському режимі ($1 - v^2 \ll 1$). Важливо відзначити, що немає чіткої одновимірної границі для ромбічної неоднорідності, у той час як, наприклад, ця границя може бути досягнута для прямокутної домішки при $d_y \rightarrow \infty$. В границі $d_x \rightarrow 0$ випромінювана енергія значно зменшується, так як отримуємо нескінченно тонку неоднорідність в напрямку x . Чим ближче до цієї границі, тим меншим і слабшим стає локальний максимум в залежності $E(v)$. Густина енергії пропорційна d_x^2 , таким чином, немає нічого дивного в тому, що повна енергія прямує до нуля в цій границі. Перенормування амплітуди домішки $\mu_* = \mu_I d_x$ і $d_x \rightarrow 0$ приводить до формули (2.3.43).

Коли ромб стає квадратом ($d_x = d_y$), локальний максимум випромінювання стає більш вираженим, якщо площа домішки зростає, як показано на Рис. 2.12. Крім того, зменшення площі домішки впризводить, природньо, до зворотнього випадку, коли локальний максимум стає менш вираженим. Головний максимум є домінуючим, хоча існують і вторинні локальні максимуми ліворуч від основного, але вони дуже малі. Положення головного максимуму зміщується вліво, коли розмір домішки зменшується, однак це зміщення незначне, навіть якщо площа $d_x d_y / 2$ зменшується на порядок (порівняйте криві 4 і 6 на Рис. 2.12). Зміна розміру неоднорідності в обох напрямках ($d_x, d_y \rightarrow 0$, і $\mu_{C,H} \rightarrow 0$) приводить функцію густини енергії (2.3.41) до вже відомої границі точкової домішки [39]. Така ж границя може бути отримана з будь-якого з рівнянь (2.3.4) або (2.3.4) встановленням $d_y \rightarrow 0$, $\mu_{C,H} \rightarrow 0$ у першому рівнянні або $d_x \rightarrow 0$, $\mu_{C,H} \rightarrow 0$ в другому. Амплітуда домішки має бути перевизначена як $\mu_* = \mu_I d_y$ або $\mu_* = \mu_I d_x$, відповідно. Профілі густини енергії $\mathcal{E}(q_x, q_y)$, які відповідають ромбічній домішці представлені на Рис. 2.13. Як частковий приклад розглянемо неоднорідність, що відповідає кривій 3 на Рис. 2.10, тобто, $d_x = 12$, $d_y = 3$. Цей розподіл густини енергії якісно схожий з функцією густини енергії для пря-

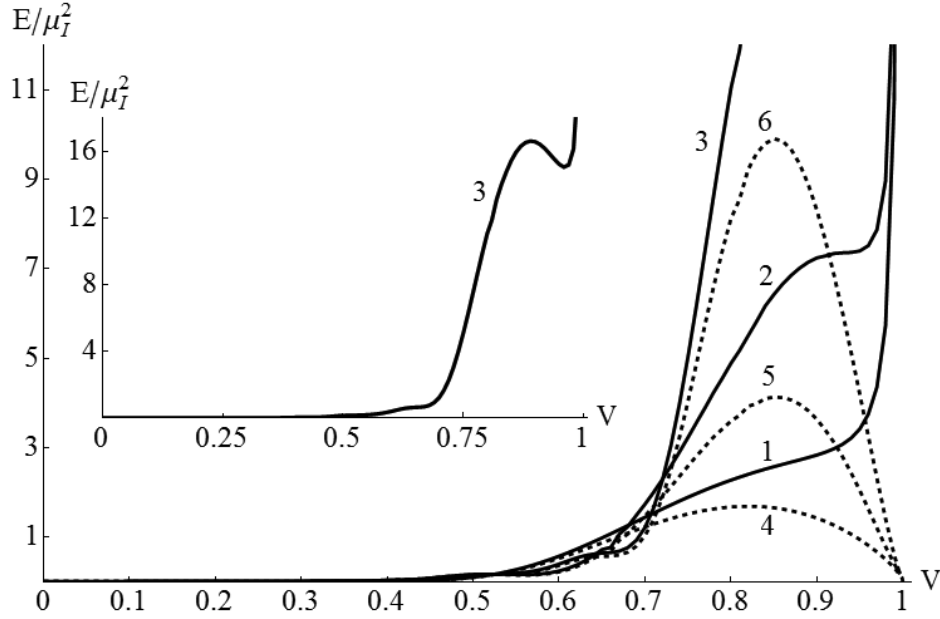


Рис. 2.12 Повна випромінена енергія (нормована на μ_I^2) як функція швидкості флюксона для квадратної ромбічної домішки ($d_x = d_y$) при $\mu_H = 0$, $\mu_C = 0.01$, $\mu_C/\mu_I = 0.1$, $d_x = d_y = 5$ (крива 1), $d_x = d_y = 10$ (крива 2), $d_x = d_y = 20$ (крива 3). Пунктирні криві: випадок $\mu_H = \mu_C = 0$ і $d_x = d_y = 5$ (крива 4), $d_x = d_y = 10$ (крива 5), $d_x = d_y = 20$ (крива 6). Вставка показує деталі кривої 3.

могутньої домішки, показаній на Рис. 2.5. Глобальний мінімум густини енергії задовольняє умову $\mathcal{E}(q_x, q_y) = 0$ і задається системою рівнянь:

$$d_x \left(\frac{\sqrt{1 + q_x^2 + q_y^2}}{v} - q_x \right) \pm q_y d_y = 4\pi n_{\mp} . \quad (2.3.44)$$

Ця система рівнянь описує послідовність пар еліпсів, що нумеруються цілими числами $n_{\pm}$,

$$n_{\mp} = n_0, n_0 + 1, \dots, \quad n_0 = \left\lceil \frac{d_x}{4\pi} \sqrt{\frac{1}{v^2} - \frac{d_x^2 + d_y^2}{d_x^2}} \right\rceil , \quad (2.3.45)$$

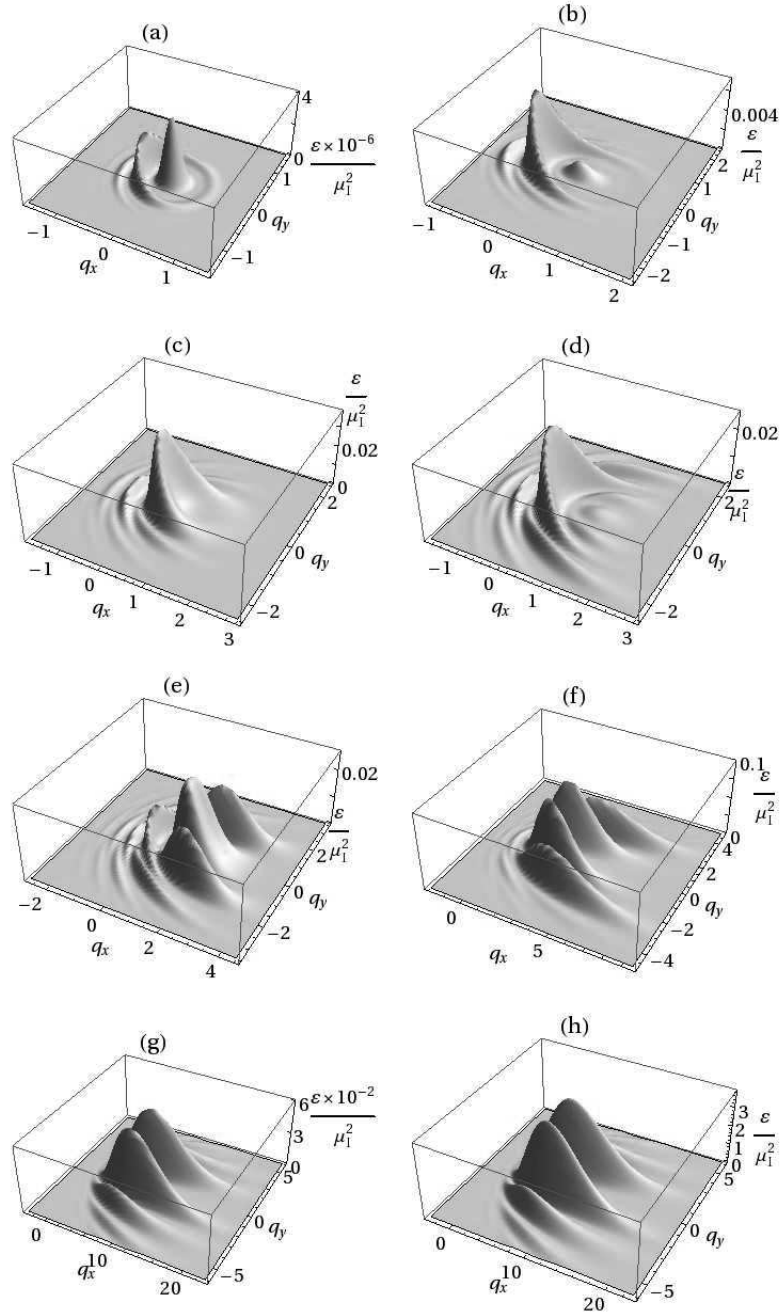


Рис. 2.13 Густина випроміненої енергії $\mathcal{E}$ для ромбічної домішки з $d_x = 12$, $d_y = 3$, $\mu_C = \mu_H = 0$ (крива 3 на Рис. 2.10) при $v = 0.2$ (a), $v = 0.47$ (b), $v = 0.63$ (c), $v = 0.75$ (d), $v = 0.85$ (e), $v = 0.95$ (f), і $v = 0.993$ (g). Графік (h) відповідає $v = 0.993$ і $\mu_C = 0.01$, $\mu_C/\mu_I = 0.1$.

якщо:

$$|v| < \frac{d_x}{\sqrt{d_x^2 + d_y^2}} . \quad (2.3.46)$$

В іншому випадку, рівняння (2.3.44) дають набір гіпербол, які пронумеровані як $n_{\pm} = \pm 1, \pm 2, \dots$. Дві криві (еліпси або гіперболи) визначаються рівнянням (2.3.44), що відповідає протилежним знакам, але з $n_+ = n_-$, які переходять один в одного з дзеркальній симетрії щодо q_x осі. Якщо ми розглянемо набір кривих з таким же знаком, скажімо $+$, вони вписані одна в одну і розширюються зі зростанням індексу n_+ . Між цими кривими лежать хребти функції $\mathcal{E}(q_x, q_y)$, а локальні максимуми густини енергії лежать на цих хребтах. Ознаки цих кривих можна помітити на всіх частинах Рис. 2.13.

Для малих і середніх значень швидкості флюксона випромінювання локалізується переважно в одному піку в q -просторі, як показано на Рис. 2.13 (a-d). Цей пік лежить на осі q_x , таким чином, більша частина випромінювання не поширюється в перпендикулярному напрямку. На вставці (a) можна спостерігати розподіл для порівняно невеликої швидкості флюксона ($v = 0.2$), цей розподіл близький до радіального. На таких малих швидкостях пара еліпсів (2.3.44) з $n_- = n_+$ дуже близькі до кіл і практично збігаються один з одним. Для більших значень v ці пари починають відокремлюватися, як показано на Рис. 2.13 (b-e). Частина (b) відповідає локальному мінімуму $E(v)$ (крива 3 Рис. 2.10) при $v = 0.47$, а (c)- локальному максимуму при $v = 0.63$. Структура обох цих функцій аналогічна і єдиною різницею є те, що максимальний пік на графіку (b) знаходиться в області випромінювання назад ($q_x \approx -0.25$), у той час як на графіку (c) основний пік лежить на додатній півосі осі q_x на $q_x \approx 0.3$. Таким чином, для проміжних швидкостей ситуація аналогічна випадку прямокутної домішки, де мінімум $E(v)$ відповідає мінімальному випромінюванню вперед. Графік (d) відповідає наступному локальному мінімуму $E(v)$ кривої при $v = 0.75$, і тут

спостерігається збільшення частки перпендикулярного випромінювання в загальній випроміненій енергії. Подальше збільшення v призводить до появи пари еквівалентних локальних максимумів поза $q_y = 0$ віссю [графік (e)]. Ці максимуми стають глобальними коли v наближається до значення $v = 1$ [див. (f) і (g)]. Таким чином, ми спостерігаємо збільшення перпендикулярного випромінювання, яке досягає свого апогею в нерелятивістській межі $v \rightarrow 1$. Панель (f) відповідає максимуму функції $E(v)$ (кривої з Рис. 2.10) при $v = 0.993$. Відповідно до формули (2.3.46) мінімуми густини енергії лежать на гіперболах, а максимуми - між цими гіперболами і поза q_x віссю. Вони сильно локалізуються в q_y напрямі, а їх локалізація в q_x є значно слабшою. В цій границі час взаємодії з кінцем ромба занадто малий, щоб спровокувати значне поздовжнє випромінювання і форма перешкод «ламає» флюксон як гілку і генерує переважно поперечне випромінювання. Нарешті, відзначимо залежність випроміненої енергії від параметра μ_C . Графік (h) відповідає тим самим параметрам моделі, що і графік (g), але з $\mu_C > 0$. Порівнюючи графіки (g) і (h) ми бачимо, що структура цих функцій дуже схожа, в той час як абсолютні значення $\mathcal{E}$ значно менші у випадку $\mu_C = 0$. Якщо $\mu_C = 0$, значення максимумів насправді зменшуються з v . Таким чином, загальна випромінена енергія прямує до нуля, так само як показано пунктирними лініями на Рис. 2.12. Це було підтверджено для значень v навіть близьких до одиниці, а також для різних значень $d_{x,y}$.

2.4 Висновки

Основний результат розділу полягає в побудові залежності загальної випроміненої енергії від швидкості флюксона $E(v)$. Виявляється, ці залежності мають локальні максимуми, що в значній мірі залежать від геометричних властивостей

неоднорідності. Існує деяка оптимальна швидкість, при якій випромінювання максимальне. В той же час, випромінена енергія прямує до нуля, коли $v \rightarrow 0$ та до деякого сталого значення при $v \rightarrow 1$. Ці локальні максимуми відсутні, якщо домішка розглядається як точка [39]. Контролюючи форму дефекту можна змістити екстремуми або ж зробити їх більш помітними.

Межа одновимірної задачі [8] з неоднорідністю скінченного розміру може бути відновлена. Одновимірний випадок виявився граничним для двовимірної прямокутної домішки, коли $d_y \rightarrow \infty$. Під час руху від одновимірної границі шляхом зменшення d_y спостерігається поступове зниження і зникнення екстремумів залежності $E(v)$. Для ромбічної домішки показано, що залежність випроміненої енергії від швидкості флюксона достатньо відрізняється від прямокутного випадку і не відтворює одновимірну границю. В принципі, будь-які геометричні форми можуть бути прийняті до уваги, однак, явне інтегрування не завжди можливе. Проте, якщо площу неоднорідності можна представити за допомогою кусочно-лінійних функцій, то інтегрування може бути зроблене.

У цьому розділі також враховується зміна товщини переходу внаслідок присутності неоднорідності. Її роль вимірюється параметрами μ_H і μ_C [(2.2.5) і (2.2.6)]. Параметр μ_C відповідає за зміну ємності і відіграє домінуючу роль. У деяких статтях [57] ці параметри ігноруються (вони завжди ігноруються, якщо розглядається точкова домішка), і, загалом, вважаються слабкими [8]. Тим не менш, зміна товщини переходу значно впливає на асимптотичну поведінку повної випроміненої енергії в «релятивістській» ($v \rightarrow 1$) границі швидкості флюксона. Якщо зміна товщини ігнорується, то загальна випромінювана енергія прямує до нуля, в той час як вона необмежено зростає, коли така зміна товщини враховується. Це справедливо як для 1Д, так і 2Д переходів. Випромінена енергія була обчислена у припущенні, що це мале збурення на фоні флюксону.

Розгляд поправок вищого порядку може блокувати нескінченне зростання випромінювання. Крім того, дисипативні ефекти, які були проігноровані, повинні сприяти зниженню випромінюваної енергії.

Хоча реальні великі джозефсонівські переходи мають скінченні розміри, в цьому розділі розглядалися переходи нескінченного розміру. Цього наближення достатньо, якщо фізичні розміри ДК на порядок перевищують джозефсонівську глибину проникнення λ , отже, довжину флюксону в x напрямку. Граничні умови також важливі, однак, якщо ширина переходу досить велика, спотворення флюксону від лінійної форми є незначним [13, 67].

Нарешті, обговоримо можливі застосування отриманих результатів. Останнім часом багато робіт були зосереджені на різному застосуванні динаміки флюксона в 2Д ДК, наприклад, розщеплення флюксона на Т-подібних переходах [68], збудження різноманітних мод, які переміщуються вздовж фронту флюксона [20, 21] і флюксонні логічні вентиля [63], де відбувається взаємодія з просторовою неоднорідністю. Якщо швидкість флюксона досить велика, то випромінювання стає достатнім, щоб впливати на рух флюксона. Зокрема, немонотонність $E(v)$ може породжувати гілки гістерезису [8] на вольт-амперних характеристиках контакту.

РОЗДІЛ 3

ПОРОГОВИЙ СТРУМ ЗАКРІПЛЕННЯ

3.1 Вступ

Окрім самого процесу взаємодії флюксона з просторовими неоднорідностями та процесів, що виникають внаслідок такої взаємодії значний інтерес представляє дослідження динаміки самого флюксона в 2Д ДК в присутності просторових неоднорідностей, коли ширина переходу скінченна і значно менша за його довжину, але, в той же час, не менша за λ_J . Очікується, що розповсюдження флюксона тут буде значно складнішим в порівнянні з чистим одновимірним випадком. Наприклад, у раніше вивченій задачі взаємодії решітки акустичних солітонів із масовими домішками [69] було показано, що солітон може проходити через точкову домішку в той час як одновимірна решітка солітонів відбивається від неї. Крім того, солітон може подолати навіть домішку нескінченної маси. Наскільки відомо, взаємодія флюксона з просторовими неоднорідностями не вивчена, за винятком [39], проте тут розглядається тільки зразок нескінченної ширини. Таким чином, даний розділ присвячений взаємодії флюксона з домішками різної форми та розміру в квазіодновимірному (К1Д) переході з точки зору впливу на динаміку (проходження, закріплення, сповільнення) солітона і показує як ця взаємодія залежить від ширини переходу та інших параметрів системи. Зокрема, планується знайти як струм закріплення (мінімальний зовнішній струм, для якого поширення флюксона ще можливе) залежить від ширини переходу. Значення порогового струму закріплення відіграє важливу роль при побудові вольт-амперних характеристик таких переходів, адже падіння напруги в контакті можливе лише для значень струмів, що перевищують пороговий струм закріплення.

3.2 Модель

Розглянемо К1Д довгий перехід Джозефсона, до якого прикладений зовнішній незалежний від часу струм. Як вже зазначалося, основною динамічною змінною є різниця фаз $\theta_2(x, y; t) - \theta_1(x, y; t) = \phi(x, y; t)$ макроскопічних хвильових функцій надпровідних шарів, еволюція в часі якої описується збуреним рівнянням синус-Гордона виду:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi + [1 + f(x, y)] \sin \phi = -\alpha \frac{\partial \phi}{\partial t} - \gamma, \quad (3.2.1)$$

де $\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$. Зовнішній струм γ нормований на критичний джозефсо-нівський струм контакту і α є безрозмірним параметром дисипації. Функція $f(x, y)$, як зазначалося в попередньому розділі, описує просторову неоднорідність. У цьому розділі розглядається вплив неоднорідності лише на локальну зміну критичного струму, а зміна магнітного поля та ємності не беруться до уваги, тому надалі при розрахунку порогового струму закріплення покладемо $\mu_H = \mu_C = 0$. Лише мікрозакоротки ($\mu_I > 0$), тобто вузькі регіони з локальним посиленням критичної густини тунельного надпровідного струму будуть розглядатися надалі. В першу чергу розглянемо найпростіший випадок точкової неоднорідності, яка в загальному вигляді може бути описана функцією:

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^N \mu_I \delta(x - a_n) \delta(y - b_n). \quad (3.2.2)$$

Тут врахована можливість присутності N точкових домішок в контакті, розташованих в точках $x = a_n$, $y = b_n$, $n = 1, 2, \dots, N$. Тим не менш, розмір неоднорідності в експериментальних зразках скінченний [43, 44, 45], тому також розглядаємо випадок стрічки шириною d_y , протягнутої в напрямку y :

$$f(x, y) = \mu_I \delta\left(x - \frac{L}{2}\right) \left[\theta\left(y - \frac{w - d_y}{2}\right) - \theta\left(y - \frac{w + d_y}{2}\right) \right], \quad (3.2.3)$$

де L - довжина контакту та w - його ширина. І нарешті, буде розглянута прямокутна домішка, скінченна в обох x та y напрямках.

$$f(x, y) = \mu_I \left[\theta \left(x - \frac{L - d_x}{2} \right) - \theta \left(x - \frac{L + d_x}{2} \right) \right] \times \\ \times \left[\theta \left(y - \frac{w - d_y}{2} \right) - \theta \left(y - \frac{w + d_y}{2} \right) \right] \quad (3.2.4)$$

Зауважимо, що амплітуда домішки μ_I має різне значення в усіх цих випадках (3.2.2)-(3.2.4). Якщо для точкової домішки (3.2.2) покласти $w = 0$, то це не задовольнить 1Д випадок, що розглядався раніше [5, 6, 10]. Цей випадок відтворюється для домішки типу стрічки, якщо $d_y = w$. Одновимірна неоднорідність скінченного розміру [8, 9, 42] відтворюється таким самим чином.

Обираємо граничні умови вздовж напрямку y типу фон Неймана:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \left(x, -\frac{w}{2}, t \right) = \frac{\partial \phi}{\partial y} \left(x, \frac{w}{2}, t \right) = 0. \quad (3.2.5)$$

Такі граничні умови означають відсутність x -компоненти зовнішнього магнітного поля. Граничні умови вздовж осі x періодичні:

$$\phi(x + L, y; t) = \phi(x, y; t) + 2\pi, \quad (3.2.6)$$

де L - довжина контакту, $L > w \gg 1$. Використання таких граничних умов є елементом зручності при розрахунках, вони описують кільцевий контакт, хоча так само можна розглядати і лінійні контакти (граничні умови типу фон Неймана). Даний підхід є справедливим, коли радіус контакту є досить великим.

Варто зазначити, що на практиці часто застосовуються контакти типу *overlap*, тобто такі, де два надпровідника накладаються один на одного, формуючи перекриття [13, 14, 45, 67]. Широке застосування контактів з такою геометрією пов'язане з можливістю їхнього виготовлення таким чином, що ширина переходу w може бути значно меншою за джозефсонівську глибину проникнення λ_J , а отже весь контакт добре описується широкодослідженою одновимірною

моделлю довгого джозефсонівського контакту, результати якої добре узгоджуються з експериментальними даними для цих контактів. В той же час зовнішній струм тут може протікати лише по поверхні вздовж діелектричного прошарку. Таким чином, граничні умови для таких контактів виглядають наступним чином:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \left(\pm \frac{L}{2}, y, t \right) \approx 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} \left(x, \pm \frac{w}{2}, t \right) = \pm \gamma \frac{w}{2}. \quad (3.2.7)$$

А сам контакт з такою геометрією описується відповідним збуреним рівнянням синус-Гордон: $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \sin \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial \phi}{\partial t}$. Проте, легко помітити, що якщо представити використану в даній роботі джозефсонівську фазу у вигляді $\phi(x, y, t) = \phi_1(x, y, t) + \phi_2(y)$, $\phi_2(y) \ll 1$, де $\phi_2(y) = \frac{\gamma y^2}{2}$, то при підстановці у вищенаведене рівняння отримаємо рівняння (3.2.1) на функцію $\phi_1(x, y, t)$. Тому використана модель застосовна також до джозефсонівських переходів з геометрією перекриття.

3.3 Проходження флюксона через неоднорідність

3.3.1 Чисельне моделювання

Для того, щоб мати уявлення про характер динаміки флюксона було проведено чисельне інтегрування квазіодновимірною рівняння СГ (3.2.1). Джозефсонівська фаза і її похідні дискретизуються наступним чином: $\phi(x, y; t) \rightarrow \phi(mh, nh; t) \equiv \phi_{mn}(t)$, $\Delta \phi \simeq h^{-2} (\phi_{m+1,n} + \phi_{m,n+1} + \phi_{m-1,n} + \phi_{m,n-1} - 4\phi_{mn})$. Отримана система однорідних диференціальних рівнянь з зазначеними граничними умовами інтегрувалася за допомогою методу Рунге-Кутта 4-го порядку. Важливо відзначити, що дисипація в рівнянні (3.2.1) має вирішальне значення і взаємодія солітонів з домішками відрізняється від бездисипативного випадку, комплексна резонансна поведінка відбувається або за рахунок δ -подібної

[70] або перешкоди скінченного розміру [71]. Далеко від неоднорідності флюксон існує лише як один аттрактор в системі, який рухається зі швидкістю, що залежить від параметрів дисипації і зовнішнього струму. Таким чином, на відміну від бездисипативного випадку, розповсюдження складається тільки з двох можливих сценаріїв: захоплення і проходження. Без втрати загальності топологічний заряд припускається $Q = 1$ (солітон) протягом всієї роботи. Початкові умови беруться у вигляді приблизного (інваріантні в y напрямку) солітонного розв'язку, розташованого на початку контакту з рівноважною швидкістю.

Детальна інформація про поширення флюксона через дві однакові точкові неоднорідності (3.2.2), розташовані уздовж осі y в $a_1 = a_2 = 0$ і $b_1 = -b_2 = 2$ наведена на Рис. 3.1. Задля кращої візуалізації похідна $\partial\phi/\partial t$ нанесена на xy площину для різних моментів часу і трьох різних значень параметру дисипації: $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.05$ і $\alpha = 0.01$. Процес закріплення флюксона на двох точкових домішках зображено на Рис. 3.2-3.3. Контурний графік динаміки флюксона наведений на Рис. 3.2. Тут можна чітко бачити, що солітонний фронт зберігає свою лінійну форму вздовж напрямку y протягом процесу взаємодії. Деякий перерозподіл джозефсонівської фази помітний на графіках (с) і (d). Однак, ці деформації зникають з часом, коли флюксон віддаляється від домішки. Невеликі хвости випромінювання, що виникають в місці розташування неоднорідності також зникають з часом, що видно на графіках Рис. 3.2 (e)-3.2 (f). Додаткове доведення лінійності форми флюксона наведено на Рис. 3.3, де показана часова залежність центру мас флюксона $X(y, t) = 2\pi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{\partial\phi}{\partial x}(x, y, t) dx$ в точках $y = 5$ і $y = 2$, а дві відповідні криві майже повністю перекриваються.

Деталі взаємодії флюксона зі стрічкоподібною перешкодою наведені на Рис. 3.4. Як видно, тут перерозподіл джозефсонівської фази стає суттєвішим і помітнішим. Солітонний фронт деформується та вигинається при наближенні та

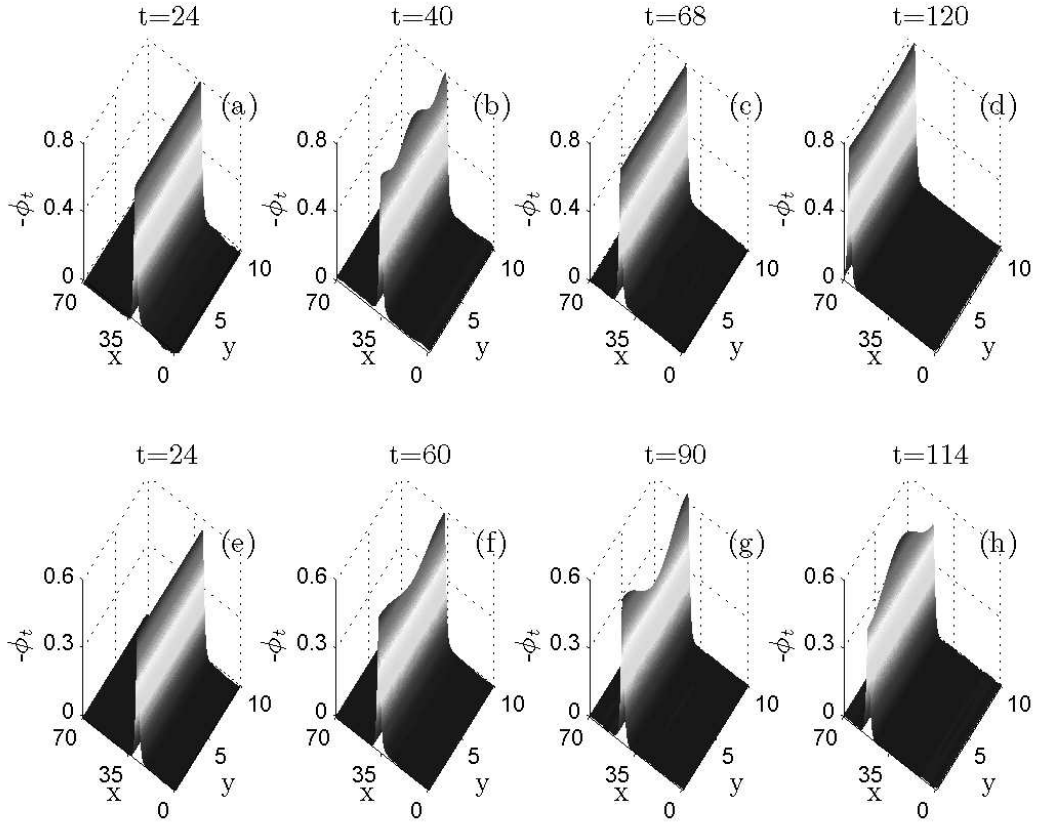


Рис. 3.1 Часова еволюція похідної джозефсонівської фази (ϕ_t) в контакті $L = 70 \times w = 10$ з $N = 2$ точковими неоднорідностями, розташованими на відстані $a_y = 4$ між ними, $\mu_I = 0.5$ і $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.03$ [(a)-(d)], $\alpha = 0.05$, $\gamma = 0.02$ [(e)-(h)], $\alpha = 0.01$, $\gamma = 0.0035$ [(i)-(l)].

проходженні флюксона крізь домішку, а вздовж фронту виникають додаткові осциляції, які швидко згасають зі збільшенням дисипації.

Взаємодія флюксона з прямокутною домішкою представлена на Рис.3.5 для $\alpha = 0.1$ і $\alpha = 0.01$. В цьому випадку, контурний графік для функції $-\frac{\partial \phi}{\partial t}$ зображений на площині xy . Струм закріплення флюксона також обчислювався чисельно, результати показують його стабільне зменшення зі збільшенням ширини контакту. Ці результати будуть обговорюватися пізніше.

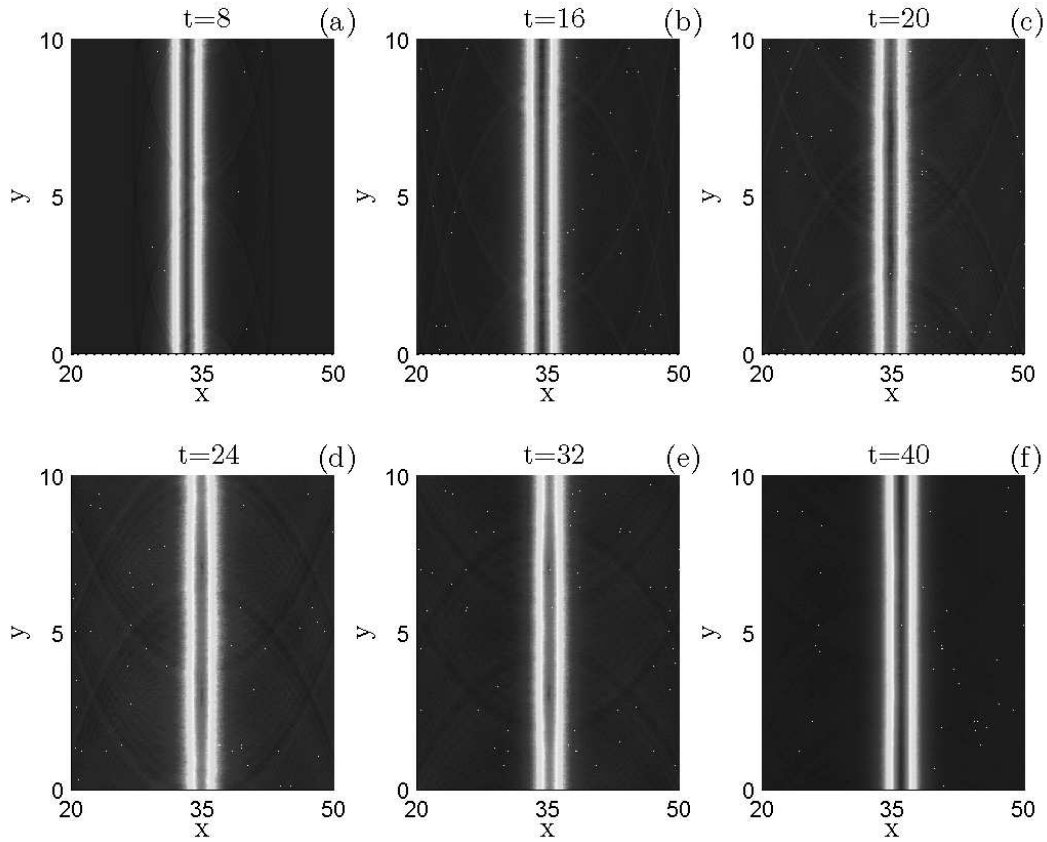


Рис. 3.2 Контурний графік часової еволюції похідної джозефсонівської фази в контакті $L = 70 \times w = 10$ з $N = 2$ точковими неоднорідностями відстанню $a_y = 4$ між ними та $\mu_I = 0.5$, $\alpha = 0.01$, $\gamma = 0.00193$ [(a)-(f)].

З отриманих результатів можна зробити наступні висновки. Форма флюксона відчуває певні зміни після проходження домішок, а саме перерозподіл фази Джозефсона уздовж лінії флюксона в y напрямку, а також невелике згинання форми в тому ж напрямку. Ці спотворення в кінцевому підсумку затухають після деякого часу, для $\alpha = 0.05$ і $\alpha = 0.1$ це відбувається досить скоро після проходження дефекту. Для невеликих дисипацій [$\alpha = 0.01$, як показано на Рис.3.1 (i-l)] коливання джозефсонівської фази уздовж напрямку y , здається, виживає протягом набагато більш тривалого часу, порівнянно з часом

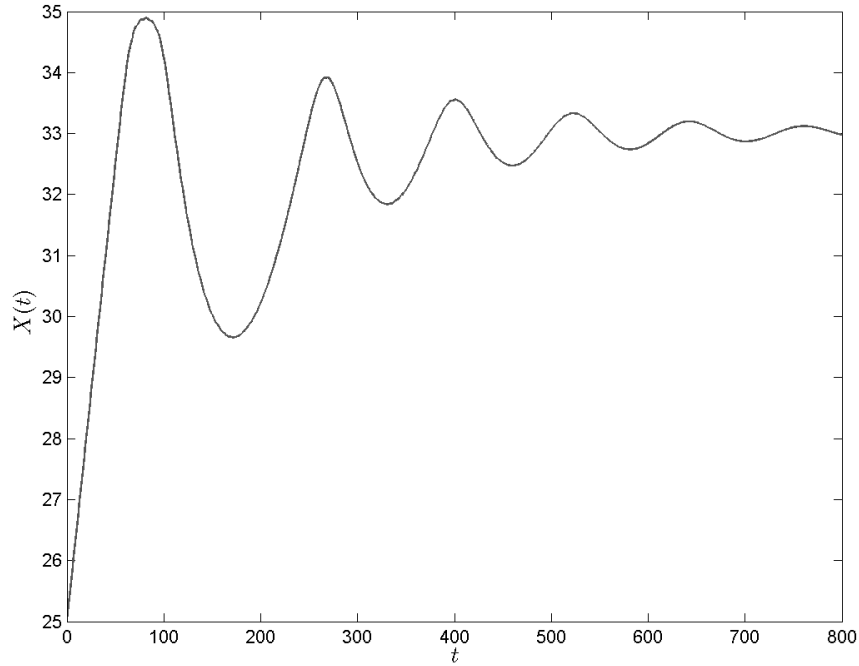


Рис. 3.3 Часова динаміка центру мас флюксона, описаного на Рис.3.2 [$y = 5$ (зелена крива) і $y = 2$ (синя крива)].

поширення флюксон уздовж контакту. Чисельне моделювання для тонких переходів, $w < 10$ (не показане в роботі) продемонструвало, що ці деформації форми досить слабкі і ледь помітні. Таким чином, при вивченні взаємодії флюксона з домішками можна припустити з високим ступенем достовірності, що флюксон є майже твердий стрижень, принаймні, якщо $w \sim \mathcal{O}(1)$. Через обмеженість контакту в y напрямку і граничних умов (3.2.5), прямий солітонний фронт найбільш енергетично вигідний і, таким чином, неможливо спостерігати дугові солітони, продемонстровані в роботі [39].

3.3.2 Розрахунок порогового струму закріплення

Аналогічно рухливому флюксону в 1Д ДК [5, 6, 10], повинні існувати два характерні значення струму, γ_c і γ_{thr} , $\gamma_c > \gamma_{thr}$. Крім того, вольт-амперні характеристики ДК з неоднорідностями мають гістерезисну природу [6, 10]. Якщо

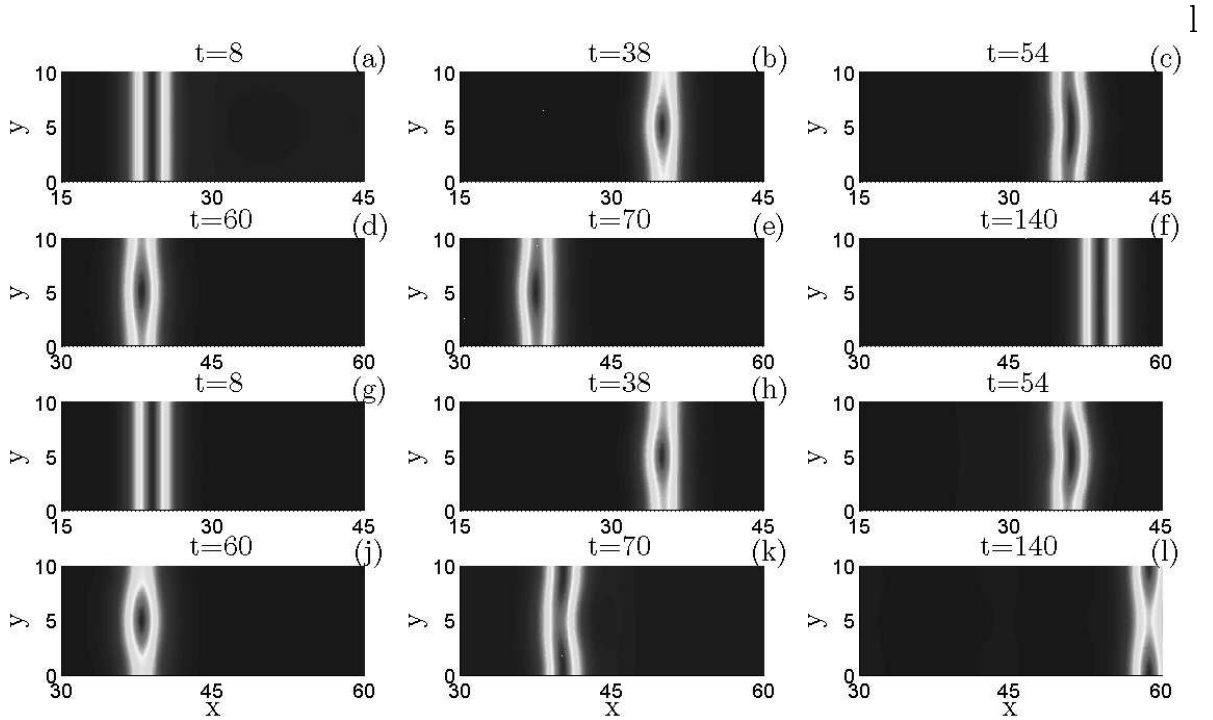


Рис. 3.4 Контурний графік часової еволюції похідної джозефсонівської фази $-\frac{\partial\phi}{\partial t}$ в контактi з $L = 70, w = 10$, зі стрічкоподібною неоднорідністю, витягнутою в напрямку y з $\mu_I = 0.5, d = 3, \alpha = 0.1, \gamma = 0.03$ [(a)-(f)] і $\alpha = 0.01, \gamma = 0.0035$ [(g)-(l)]. Неоднорідність розташована посередині контакту в точці $x = L/2 = 35$.

$\gamma > \gamma_c$, закріплення на домішці неможливо і існує тільки один аттрактор, що відповідає поширенню флюксона. Це відбувається тому, що струм зміщення є занадто сильним для флюксона, щоб він міг захопитися на неоднорідності. В інтервалі $\gamma_{thr} < \gamma < \gamma_c$ принаймні два аттрактори співіснують: один відповідає закріпленому флюксону на домішці (може бути декілька різних флюксонів, що застрягли, якщо домішка має скінченну довжину [42]), інший – флюксону, що рухається. Якщо $\gamma < \gamma_{thr}$ можливий тільки режим піннінга (закріплення) на домішці. Значення γ_c визначається тільки властивостями домішки і може бути отримане безпосередньо з 1Д аналога. Навпаки, для струму за-

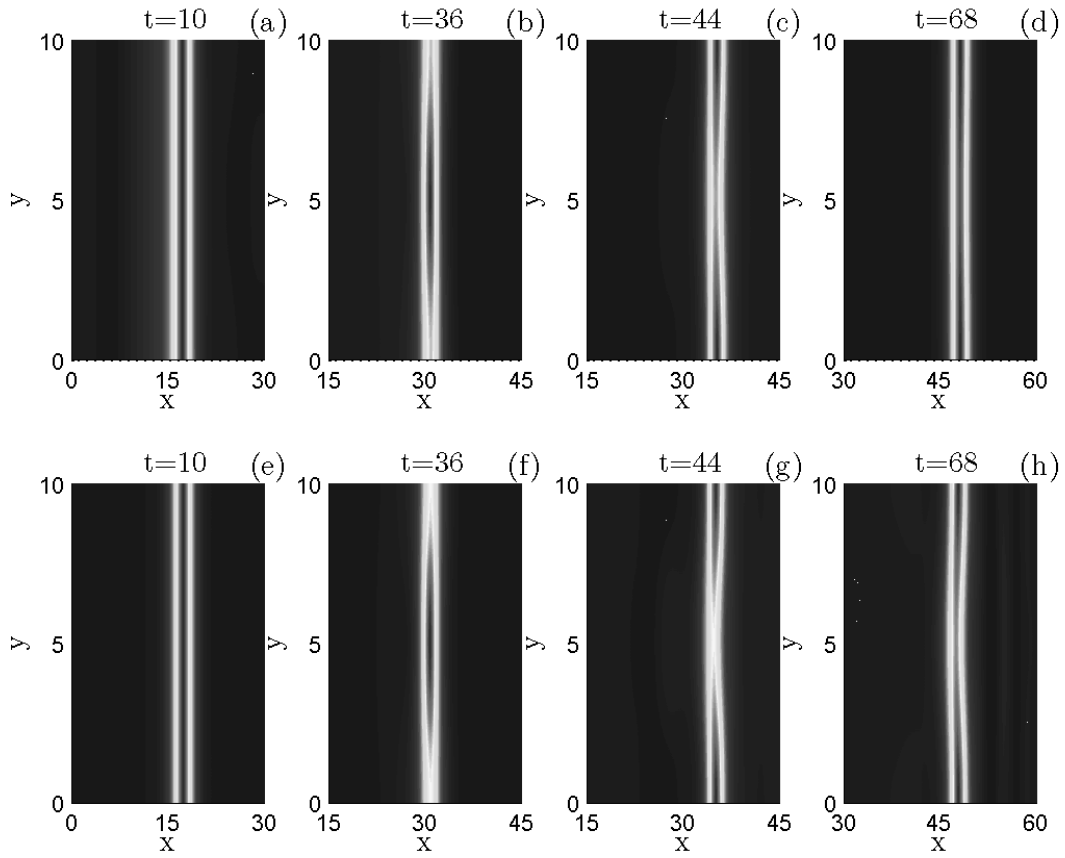


Рис. 3.5 Контурний графік часової еволюції похідної джозефсонівської фази в контактi $L = 60 \times w = 10$ з прямокутною домішкою (3.2.4) з $\mu_I = 0.5$, $d_x = 3$, $d_y = 5$, $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.08$ [(a)-(d)] і $\alpha = 0.01$, $\gamma = 0.008$ [(e)-(h)].

кріплення розмірність контакту і його ширина мають вирішальне значення. Далеко від неоднорідності, кінетична енергія пропорційна ширині контакту і дорівнює: $E_k = 8w[(1 - v_\infty^2)^{-1/2} - 1]$. Тут, $v_\infty = [1 + (4\alpha/(\pi\gamma))^2]^{-1/2}$ є рівноважною швидкістю солітона в просторово-однорідному ДК [5]. В нерелятивістському випадку ($|v_\infty| \ll 1$) маємо: $v_\infty \simeq \pi\gamma/(4\alpha)$. Підставляючи анзац: $\phi(x, y; t) = 4 \arctan \exp\{[x - X(y, t)]/\sqrt{1 - v^2}\}$ в рівняння (3.2.1), де $X(y, t)$ - координата центру мас флюксона, отримаємо ньютонівське рівняння руху центру мас флюксона. Так як розглянуті флюксони є протяжними об'єктами в

напрямку y , рівняння динаміки центру мас, а також потенціал домішки повинні залежати від y . Враховуючи чисельне моделювання в попередньому параграфі, розглянемо флюксон як абсолютно жорсткий стрижень, тобто знехтуємо його деформаціями в напрямку y , адже вони є малими. Відзначимо також, що функція домішки $f(x, y)$ може бути факторизована у випадках (3.2.2)-(3.2.4), тому динаміку її центру мас можна ефективно спроектувати на вісь x і відповідне рівняння руху запишеться у вигляді:

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + m\alpha \frac{dX}{dt} + \frac{\partial U(X)}{\partial X} = 0, \quad U(X) = -2\pi\gamma X + U_0(X), \quad (3.3.8)$$

де координата центру мас X залежить лише від часу. Потенціал домішки $U_0(X)$ тепер може бути розрахований з відповідної одновимірної проблеми простим нехтуванням y -залежної частини в рівняннях (3.2.2)-(3.2.4). Масу флюксона m потрібно перераховувати в залежності від типу домішки. У чистому 1Д випадку $m = 8$ [5].

Це припущення добре працює тільки тоді, коли домішка складається з ліній і/або прямокутників. Якщо ж має більш складну форму, наприклад, як трикутник, то проекція на 1Д проблему стає все складнішою. Деталі методу, використаного для знаходження порогового струму закріплення, наведені в Додатку А, тому далі представлені лише основні кроки розрахунку.

Точкова неоднорідність

У випадку точкової неоднорідності (3.2.2) розглядається лінія з N ідентичних рівновіддалених домішок з $a_n = 0$, $n = 1, 2, \dots, N$, що розташовані симетрично по відношенню до центральної лінії $y = 0$. Кожна домішка створює потенціал $2\mu_I / \cosh^2 X$. Для того, щоб спроектувати проблему на двовимірний випадок необхідно перемасштабувати масу флюксона з $m = 8$ на $m = 8w/N$, таким чином, в кінематичному підході струм закріплення можна знайти як корінь рівняння балансу енергії: $E_k = 2\mu_I$, де $E_k = m[(1 - v_\infty^2)^{-1/2} - 1] \simeq$

$4wv_\infty^2/N + \mathcal{O}(v_\infty^4)$ є кінетична енергія флюксона. В нерелятивістському випадку ($|v_\infty| \ll 1$) отримаємо: $\gamma_{thr} \simeq (\alpha/\pi)\sqrt{8\mu_I N/w}$. Поправки порядку $\mathcal{O}(\alpha^2)$ можуть бути враховані за допомогою методу, розробленого в [6]. Модифікація цього методу на квазіодновимірний випадок є простою, тому тут обговоримо лише основні кроки, детальний розрахунок порогового струму закріплення наведений в Додатку А. Покращене рівняння балансу енергії складається з енергії флюксона при $X = -\infty$ і її втрат через дисипацію ΔE , що повинні бути не менше за максимальну висоту потенціального бар'єру $U(X)$ для існування можливості його подолання:

$$m \left(\frac{\pi\gamma}{2\alpha} \right)^2 + \Delta E = U(X_{max}), \quad (3.3.9)$$

де $X_{min}, X_{max} > X_{min}$ є екстремуми потенціалу $U(X)$, $X_{min} \simeq -\ln(\mu_I/\gamma)/2$, $X_{max} \simeq -\pi\gamma/(2\mu_I)$. Рівняння (3.3.9) універсальне і буде використовуватися для всіх типів домішок. Втрати енергії через дисипацію дорівнюють: $\Delta E = 8\alpha w N^{-1} \int_{-\infty}^{X_{max}} (v_\infty - \dot{X}) dX \approx \frac{4\alpha}{N} \ln 2 \sqrt{2\mu_I w}$. Підставляючи цей корекційний член ΔE в уточнене рівняння балансу енергії і зберігаючи члени порядку $\mathcal{O}(\alpha^2)$, отримаємо остаточний уточнений вираз для струму закріплення:

$$\gamma_{thr} \simeq \frac{\alpha}{\pi} \left(\sqrt{\frac{8\mu_I N}{w}} - 4\alpha \ln 2 \right). \quad (3.3.10)$$

Схоже, що співвідношення $\gamma_{thr}(w)$ отримано простим діленням амплітуди домішки на коефіцієнт w/N , крім того, $\mathcal{O}(\alpha^2)$ поправка не залежить від ширини контакту взагалі. З цього виразу можна ясно бачити, що як тільки термін $\mathcal{O}(\alpha)$ враховується, стум закріплення зникає при $w \rightarrow \infty$, таким чином, в нескінченно широкому контакті флюксон завжди проходить домішку. Другий доданок в рівнянні (3.3.10) не залежить від w і, отже, може привести до неправильного висновку, що γ_{thr} не прямує до нуля при $w \rightarrow \infty$. Тим не менш, слід зазначити, що цей член був отриманий у припущенні, що w скінченна. Чисельне моделювання

підтверджує основне припущення цього розділу: струм закріплення затухає зі зростанням ширини контакту. Наближений вираз (3.3.10) виявляється в хорошому узгодженні з чисельними даними для малих значень w , у той час як для великих w чисельні та аналітичні дані розходяться (проте, узгодження залишається задовільним). Все це представлено на Рис. 3.6, де аналітичні результати подані суцільними лініями, а чисельні дані показані маркерами.

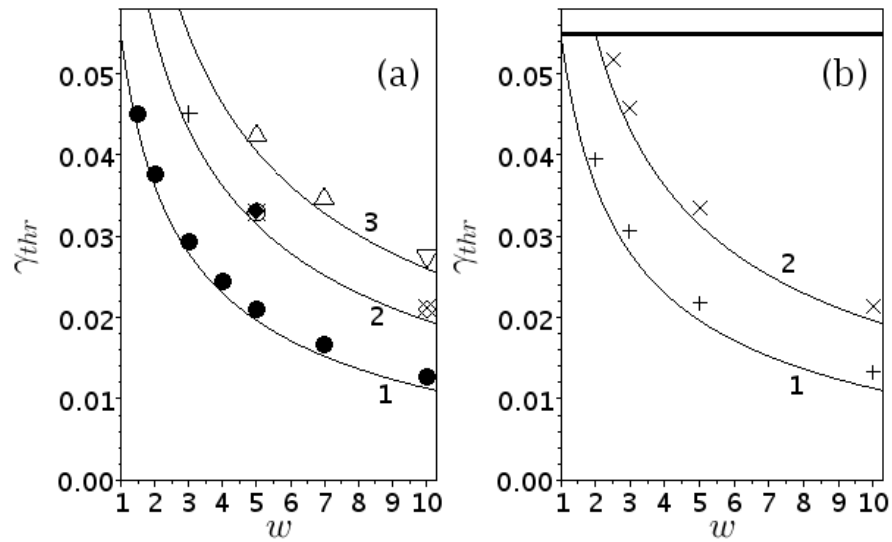


Рис. 3.6 Пороговий струм закріплення як функція ширини контакту w для $\alpha = 0.1$, $\mu_I = 0.5$. Графік (а): випадок точкових домішок (3.2.2), суцільні лінії ілюструють формулу (3.3.10) з $N = 1$ (крива 1), $N = 2$ (крива 2) і $N = 3$ (крива 3); маркери – чисельні розрахунки з $N = 1$ ($\bullet$); $N = 2$ з $a_y = 1$ ($+$), $a_y = 2$ ($\times$), $a_y = 3$ ($\circ$), $a_y = 4$ ($\blacklozenge$) і $a_y = 7$ ($\diamond$); $N = 3$ з $a_y = 1$ (Δ) і $a_y = 2$ (∇). Графік (b): випадок стрічкоподібної домішки (4.3.7) з $d_y = 1$ (1 і $+$) і $d_y = 2$ (2 і $\times$). Горизонтальна лінія відповідає струму закріплення на точковій домішці в одновимірному випадку.

У разі двох і трьох домішок, розташованих уздовж лінії в напрямку y , струм закріплення практично не залежить від відстані a_y між ними. Наприклад, мар-

кери, які відповідають $a_y = 2$ ($\times$), $a_y = 3$ ($\circ$), $a_y = 4$ ($\blacklozenge$) при $N = 2$ і $w = 5$ майже невідрізняються.

Можна розглянути ексцентрично розміщені (тобто, що лежать поза віссю $y = w/2$) неоднорідності. Кінематичне наближення не відрізняє домішки, розміщені в різних позиціях. Чисельні розрахунки показують, що різниця між пороговими струмами в обох випадках є дуже малою. Наприклад, $\gamma_{thr} = 0.03770$ для центрованої домішки, $a_1 = L/2, b_1 = w/2, w = 2$ [інші параметри такі ж, як на Рис. 3.1 (а)] і $\gamma_{thr} = 0.03776$ для неоднорідності при $a_1 = L/2, b_1 = w/4$.

Стрічкоподібна неоднорідність

У випадку перешкоди у вигляді стрічки (3.2.3) зберігається той самий вираз балансу енергії, що і для точкової неоднорідності, але маса флюксона повинна бути перемасштабована: $m = 8w/d_y$. Решта розрахунків для струму закріплення схожа з випадком точкової домішки. Проектуючи динаміку центру мас флюксона на вісь x , так само знаходимо відповідне рівняння руху:

$$m\ddot{X} + m\alpha\dot{X} + \partial_X U(X) = 0, \quad (3.3.11)$$

$$U(X) = -2\pi\gamma X + U_0(X) = -2\pi\gamma X + \frac{2\mu_I}{\cosh^2 X},$$

Потенціал $U(X)$ має мінімум при $X_{min} \simeq -\ln(\mu_I/\gamma)/2$ і максимум $X_{max} > X_{min}$, $X_{max} \simeq -\pi\gamma/(2\mu_I)$. Через зовнішній струм зміщення γ потенціал асиметричний по відношенню до мінімуму і флюксон сповільнюється при наближенні до неоднорідності [див. Рис. 3.4 (b-e)], де він витрачає багато часу поблизу домішки в точці $x = L/2$, але швидко прискорюється назад до рівноважної швидкості, проходячи її. В межах підходу колективних координат флюксон розглядається як абсолютно жорсткий об'єкт, що скочується вниз в потенціалі $U(X)$, який не залежить від ширини неоднорідності d . Однак, лише центральна частина цього стрижня з $-d/2 < y < d/2$ взаємодіє з домішкою, в той час як його «хвости» $d/2 < |y| < w/2$ - ні. Це береться до уваги перемасштабуван-

ням маси: $m = 8w/d$. Коли неоднорідність розтягнута вздовж всього контакту, $d = w$, проблема стає повністю незалежною від координати y і, як наслідок, маса дорівнює $m = 8$. Цей опис є приблизним, тому що тут нехтується вигинами солітона на границях домішки. Отже, в кінематичному наближенні струм закріплення може бути знайденим як корінь рівняння балансу енергії: $E_k = 2\mu_I$, де $E_k = m[(1 - v_\infty^2)^{-1/2} - 1] \simeq 4wv_\infty^2/d + \mathcal{O}(v_\infty^4)$ - кінетична енергія флюксона. В нерелятивістському випадку: $\gamma_{thr} \simeq (\alpha/\pi)\sqrt{8\mu_Id/w}$. Модифіковане рівняння балансу енергії:

$$m \left(\frac{\pi\gamma}{2\alpha} \right)^2 + \Delta E = U(X_{max}) . \quad (3.3.12)$$

В результаті дисипації флюксон втрачає енергію:

$$\Delta E = \frac{8\alpha w}{d} \int_{-\infty}^{X_{max}} (v_\infty - \dot{X}) dX \simeq 4\alpha \ln 2 (2\mu_I w/d)^{1/2} , \quad (3.3.13)$$

де $\dot{X}(t) \simeq -(\mu_Id/2w)^{1/2}(1 + \tanh X)$ є приблизним розв'язком рівняння (3.3.11). Підставляючи цей корекційний член ΔE в модифіковане рівняння балансу енергії і зберігаючи члени порядку $\mathcal{O}(\alpha^2)$ отримуємо остаточний вираз для струму закріплення у випадку домішки-стрічки:

$$\gamma_{thr} = \frac{\alpha}{\pi} \left(\sqrt{\frac{8\mu_Id_y}{w}} - 4\alpha \ln 2 \right) . \quad (3.3.14)$$

З цього виразу видно, що як тільки член порядку $\mathcal{O}(\alpha)$ враховується, то струм закріплення зникає як $w \rightarrow \infty$, отже, в нескінченно широкому контакті флюксон завжди пройде домішку.

Чисельні розрахунки підтверджують зменшення порогового струму закріплення з ростом ширини контакту, як показано на Рис. 3.6 (b). Вираз (3.3.14) добре узгоджується з чисельними даними. Як і для точкової домішки, розбіжність між аналітичними та чисельними результатами зростає для більших значень w . В границі $d/w \rightarrow 1$ 1Д випадок відновлюється, тому що стрічкоподібна неоднорідність розтягується через весь контакт. Отже, пороговий струм

закріплення досягає значення $\gamma_{thr} = \alpha(\sqrt{8\mu_I} - 4\alpha \ln 2)/\pi$ для одновимірного солітону [показано товстою горизонтальною лінією на Рис. 3.6 (b)]. Таким чином, спостерігаємо, що якщо стрічкоподібна неоднорідність досягає, наприклад, близько $1/3$ ширини контакту, струм закріплення приблизно на 40% менший за відповідне одновимірне значення.

Можна сформулювати наступний простий аргумент, що пояснює проходження флюксона через перешкоду ширини d в 2Д ДК. Неоднорідність може бути описана як локалізований потенціальний бар'єр. Тільки центральна частина ($|y| \gtrsim d/2$) однорідного в y напрямку флюксона бере участь у процесі взаємодії, в той час як в граничних районах $d/2 \lesssim |y| \leq w/2$ - ні. Таким чином, якщо енергія в «хвостах» достатня, щоб подолати бар'єр - флюксон пройде. Якщо $w \rightarrow \infty$, енергія невзаємодіючої частини флюксона прямує до нескінченності і, отже, він зможе подолати будь-яку перешкоду.

Прямокутна неоднорідність

Нарешті, розглянемо прямокутну неоднорідність (3.2.4). В точково-частинковому описі флюксон «відчуває» домішку як потенціал $U_0(X) = 2\mu_I[\tanh(X + d_x/2) + \tanh(d_x/2 - X)]$ [8]. В цьому випадку, баланс енергії має вигляд: $8w[(1 - v_\infty^2)^{-1/2} - 1] = 4\mu_I d_y \tanh(d_x/2)$, звідки вираз для струму закріплення може бути легко розрахований. Для великих d_x він може бути доповнений поправкою $\mathcal{O}(\alpha^2)$, отриманою в одновимірному випадку в [8, 9]. Масу флюксона потрібно ренормалізувати як $8 \rightarrow 8w/d_y$. В цій границі враховується, що неоднорідність створює сходинкоподібний потенціал $U_0(X) = 2\mu_I[\tanh X + 1]$, який має мінімум при $X_{min} = -\operatorname{arcsech}\sqrt{\pi\gamma/\mu_I}$ і максимум при $X_{max} = \operatorname{arcsech}\sqrt{\pi\gamma/\mu_I}$. Втрати енергії через дисипацію $\Delta E = 8\alpha w d_y^{-1} \int_{-\infty}^{X_{max}} (v_\infty - \dot{X}) dX \simeq 4\sqrt{\mu_I d_y w^{-1}} \alpha \{\ln[\mu_I/(\pi\gamma)] + \mathcal{O}(1)\}$ потрібно підста-

вити в рівняння балансу енергії (3.3.12). Кінцева апроксимацію виглядає:

$$\gamma_{thr} = \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{d_y}{w}} \left[4 \sqrt{\mu_I \tanh(d_x/2)} - \alpha \ln \left(\frac{\mu_I w}{\alpha^2 d_y} \right) \right]. \quad (3.3.15)$$

Зверніть увагу, що для точкової та стрічкоподібної неоднорідностей друга поправка залежить і від ширини контакту і від ширини самих домішок. В границі 1Д ($d_y/w \rightarrow 1$), формула (3.3.15) зберігає форму, знайдену в [8, 9]. У межі $w \rightarrow \infty$, другий член прямує до нуля, але набагато повільніше, ніж затухання $\mathcal{O}(w^{-1/2})$ першого члену. Варто ще раз зазначити, що другий член є правильним наближенням лише для скінченних значень w . В протилежній границі, $d_x \rightarrow 0$, можна застосувати наступну апроксимацію: $\tanh(X + d_x/2) + \tanh(d_x/2 - X) = \sinh d_x / [\cosh^2 X + \sinh^2(d_x/2)] \simeq d_x \operatorname{sech}^2 X + \mathcal{O}(d_x^2)$. Отже, ефективний потенціал $U(X)$ є майже таким самим, як і для неоднорідності стрічки аж до коефіцієнту $\sinh d_x \simeq d_x$. Тому формула (3.3.14) може бути відповідно модифікована і кінцевий струм закріплення виглядатиме:

$$\gamma_{thr} = \frac{\alpha}{\pi} \left[4 \sqrt{\frac{\mu_I d_y d_x / 2}{w}} - 4 \alpha \ln 2 \right]. \quad (3.3.16)$$

Результати чисельних розрахунків, наведені на Рис. 3.7, демонструють задовільне співпадіння з аналітичним наближенням (3.3.15)-(3.3.16). Відхилення від чисельних результатів виявляються сильнішими, в порівнянні з точковою і стрічкоподібною домішками, головним чином тому, що тут не вдалося забезпечити $\mathcal{O}(\alpha^2)$ поправкою, що однаково добре працює в обох межах $d_x \rightarrow 0$ і $d_x \rightarrow \infty$, а також через високий ступінь деформації флюксона в процесі взаємодії з неоднорідністю великої площі. Слід зазначити, що навіть для $d_x \gtrsim 3$ можна розглядати «довгу» границю по d_x і вона працює досить добре. Дійсно, маркери, які відповідають $d_x = 3$ ($\oplus$), $d_x = 4$ ($\diamond$) і $d_x = 5$ ($\blacklozenge$) майже не відрізняються на Рис. 3.7.

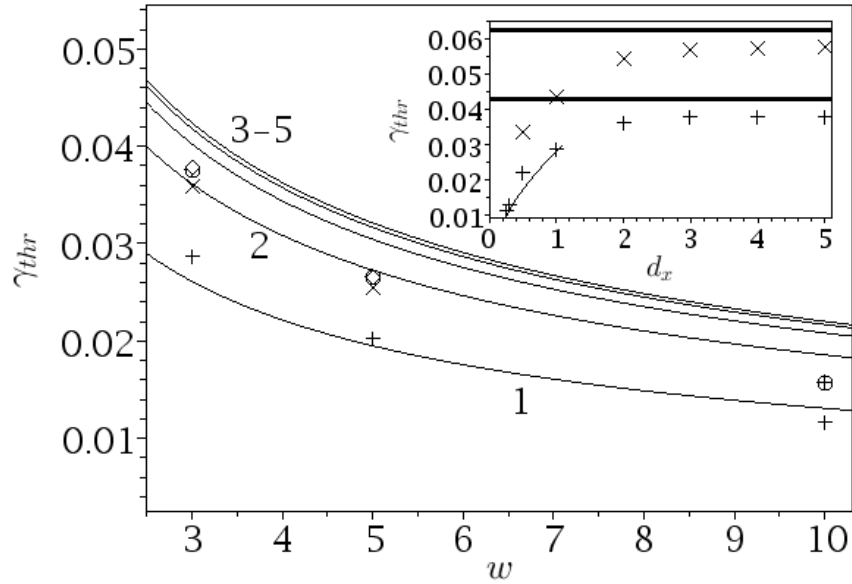


Рис. 3.7 Струм закріплення як функція ширини w контакту для прямокутної домішки (3.2.4) при $\alpha = 0.1$, $\mu_I = 0.5$ і $d_y = 1$. Маркери відповідають випадкам $d_x = 1$ (+), $d_x = 2$ ($\times$), $d_x = 3$ ($\oplus$), $d_x = 4$ ($\diamond$) і $d_x = 5$ ($\blacklozenge$). Суцільні лінії – аналітична апроксимація (3.3.15) для $d_x = 1, 2, \dots, 5$, відповідно. Вставка показує залежність порогового струму закріплення від d_x при $d_y = 1$ (+), $d_y = 2$ ($\times$) і $w = 3$. Дві горизонтальні лінії відповідають аналітичній апроксимації (3.3.15) при $d_x \rightarrow \infty$ для $d_y = 1$ і $d_y = 2$, тонка крива показує наближення (3.3.16) при $d_y = 1$.

3.4 Вольт-амперні характеристики

За допомогою результатів, отриманих в попередніх розділах тепер можна почати побудову вольт-амперних характеристик (ВАХ) джозефсонівських контактів скінченного розміру ($L, w \gg 1$) з одним захопленим флюксоном. Наведені нижче міркування можуть застосовуватися як для кільцевих контактів [72] (потрібно застосувати додаткове обмеження $L \gg w$ для можливості нехтування криволінійними ефектами), так і для лінійних [73]. Для кільцевого контакту

граничні умови є періодичними, що і застосовувалися в попередніх розділах. Для лінійного контакту періодичні граничні умови потрібно замінити умовами фон Неймана $\partial_x \phi(\pm L/2, y, t) = 0$.

Якщо флюксон рухається вздовж ДК, він створює падіння напруги, яке після усереднення протягом великого часу дорівнює $V = 2\pi v/L$, де v - середня швидкість. Загальна потужність (енергія на одиницю часу), продукована зовнішнім струмом $P_{tot} = V\gamma Lw$ повинна дорівнювати дисипативним втратам P_{diss} і втратам на випромінювання P_{rad} : $P_{tot} = P_{diss} + P_{rad}$. Потужність випромінювання була розрахована в [5] для одновимірного контакту, а в 2Д випадку вона має вигляд: $P_{diss} = 8\alpha w v^2 / \sqrt{1 - v^2}$. Втрати на випромінювання на великих часах дорівнюють: $P_{rad} = E(v)/T = E(v)v/L$, де $T = L/v$ є часовий інтервал між двома циклами розсіяння флюксона на домішці, і $E(v)$ - енергія випромінювання, що виникло внаслідок цього розсіяння. Тут зробимо два припущення. Перш за все, випромінена енергія була визначена для нескінченного контакту. Для скінченного переходу континуальний спектр потрібно замінити на дискретний. Однак, якщо контакт достатньо великий, цим можна знехтувати. По-друге, ця енергія була знайдена для бездисипативного випадку ($\alpha = 0$). Тим не менше, більша частина енергії випромінюється протягом скінченного часу взаємодії і якщо $\alpha \ll 1$, то дисипація випромінених хвиль дуже мала. Особливо це справедливо, коли v не мала і час взаємодії є порядку $\mathcal{O}(v^{-1})$. В результаті отримуємо рівняння балансу потужностей:

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{4\alpha LV}{\pi} \left[1 - \left(\frac{LV}{2\pi} \right)^2 \right]^{-1/2} + \frac{E(LV/2\pi)}{Lw} \right\}, \quad (3.4.17)$$

де $V = 2\pi v/L$ середнє падіння напруги в контактї. Цей вираз визначений в інтервалі $\gamma_{thr} < \gamma < \infty$ де γ_{thr} задається формулою (3.3.10). Зазначимо, що в реальних експериментах одна зі змінних γ або V контролюється, а інша вимі-

рюється.

3.4.1 Стрічкоподібна неоднорідність

На Рис. 3.8 зображено ВАХ для контакту зі стрічкоподібною домішкою в ньому. Виявляється, що ці криві строго залежать від параметрів контакту. Тонка неперонумерована лінія позначає просторово-однорідний контакт ($\mu_I = 0$), що описується рівнянням (3.4.17), коли відсутній другий член. В цьому випадку рівноважна швидкість солітона v_∞ просто відновлюється. Випромінювання створює значні відхилення від однорідного випадку у ВАХ. Ці відхилення помітні для середніх значень напруги (швидкості флюксона), але зменшуються в

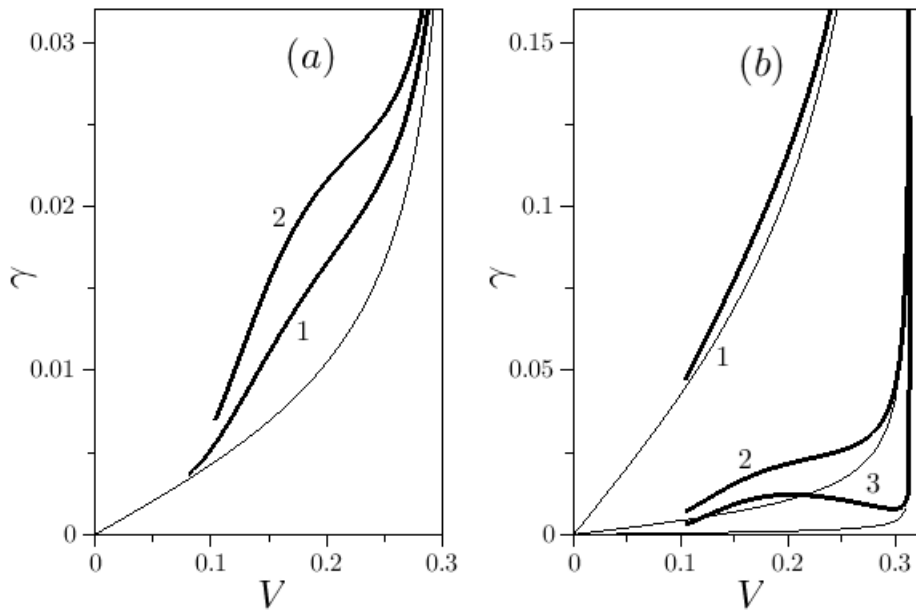


Рис. 3.8 Вольт-амперні характеристики для ДК з $L = 20$, $w = 10$, $\mu_I = 0.5$. Графік (а) відповідає параметрам: $\alpha = 0.01$, $d = 3$ (крива 1) і $d = 5$ (крива 2), графік (b) - параметрам $d = 5$, $\alpha = 0.1$ (крива 1), $\alpha = 0.01$ (крива 2) і $\alpha = 0.001$ (крива 3). Тонкі неперонумеровані криві ілюструють однорідний випадок $\mu = 0$ для відповідних значень α .

границях $V \rightarrow 0$ і $V \rightarrow 2\pi/L$ ($v \rightarrow 1$). Відхилення від однорідного випадку зростають, якщо збільшується ширина неоднорідності d_y , або ж якщо зменшується площа контакту Lw . Вони також можуть збільшитися при зменшенні дисипації [див. Рис. 3.8 (b)]. Для дуже малих значень α вольт-амперна характеристика навіть може мати локальний максимум. Така поведінка ВАХ виникає, тому що в той час як перший член (3.4.17) є монотонно зростаючою функцією V , другий («випромінювальний») член має чіткий максимум, як показано на Рис. 2.9. Відповідний вибір параметрів може призводити до переваги другого члену і виникнення локального максимуму. Варто зазначити, що реальні значення дисипації лежать в інтервалі $\alpha \sim 0.01 - 0.1$, тобто, в реальних експериментах спостереження максимуму є досить сумнівним. Різкий обрив ВАХ відбувається внаслідок того, що для струмів $\gamma < \gamma_{thr}$ флюксон завжди захоплюється домішкою, і, в результаті, продукує нульове падіння напруги. Критичний струм $\gamma_c = 4\mu_I/(\pi 3\sqrt{3}) \simeq 0.1225$ для $\mu_I = 0.5$ відповідає досить великим швидкостям флюксона, близьким до ультрарелятивістської межі $v \rightarrow 1$.

3.4.2 Прямокутна неоднорідність

Розглянемо як процес взаємодії флюксона з неоднорідністю впливає на ВАХ ДК у випадку прямокутної перешкоди. ВАХ контакту з прямокутною домішкою зображені на Рис. 3.9, де, як видно, з'являються суттєві відхилення від однорідності та виникають точки перегину, які пов'язані з існуванням максимумів і мінімумів в залежності $E(v)$, що утворюються внаслідок інтерференції випромінених плазмонів. Як вже зазначалося, довжина домішки відповідає за появу цих точок перегину, а її ширина – за їх абсолютну величину. Як видно з Рис. 3.9, найбільше відхилення відбувається у випадку неоднорідності великої площі (криві 2, 3), а їх кількість росте зі збільшенням площі домішки. Варто зазначити, що параметр μ_C не сильно впливає на ВАХ, лише незначно відхиляючи

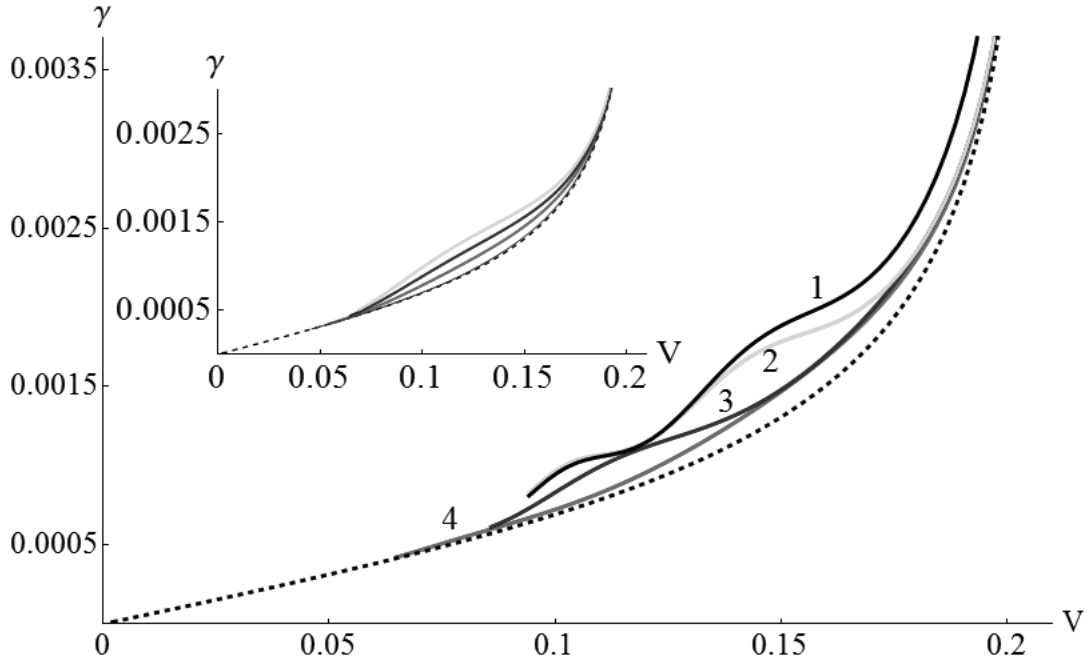


Рис. 3.9 Вольт-амперна характеристика ДК $L = 30$, $w = 10$, $\alpha = 0.001$ та прямокутною неоднорідністю з $\mu_I = 0.5$, $\mu_H = 0$, $\mu_C = 0.1$, $d_x = 8$, $d_y = 8$ (крива 1), $\mu_C = 0$, $d_x = 8$, $d_y = 8$ (крива 2), $\mu_C = 0$, $d_x = 5$, $d_y = 5$ (крива 3), $\mu_C = 0$, $d_x = 3$, $d_y = 3$ (крива 4). Пунктирна лінія позначає однорідний випадок $\mu_I = \mu_C = \mu_H = 0$. Вставка показує ВАХ для домішки з параметрами (від найбільшого значення максимуму до найменшого відповідно) $d_x = 1$, $d_y = 7$; $d_x = 1$, $d_y = 5$; $d_x = 1$, $d_y = 3$; $d_x = 7$, $d_y = 1$.

криву на великих значеннях струму (порівняйте криву 1 та 2). На вставці показаний випадок неоднорідності з фіксованим значенням $d_x = 1$, що розтягується в напрямку y . Зі збільшенням ширини домішки відхилення від однорідного випадку збільшується прямопропорційно, адже для подолання неоднорідності, що займає значну частину ширини контакту флюксону необхідно надати більший струм. Зворотній випадок з домішкою $d_x = 7$, $d_y = 1$ також представлений на вставці, проте він майже повністю накладається на пунктирну криву, що демонструє однорідний випадок, і мало відрізняється від нього. Це пояснюється

тим, що таку перешкоду флюксон відчуває як тонку голку, площа взаємодії з якою мала, а тому він проходить її без значного випромінювання, яке могло б вплинути на вольт-амперну характеристику.

3.4.3 Ромбічна неоднорідність

Як видно з Рис.3.10 ромбічна форма неоднорідності значно менше впливає на вольт-амперну характеристику контакту, адже відхилення від однорідного випадку досить слабке навіть для домішок великої площі. Це можна пояснити тим, що при взаємодії солітона з ромбічною неоднорідністю випромінювання «розділяється» нею симетрично відносно центру дефекту (як видно з Рис. 2.13) і відбувається в сторони під кутом $\arctan d_y/d_x$, внаслідок чого інтенсивність процесу інтерференції хвиль зменшується, а самі вони швидко затухають.

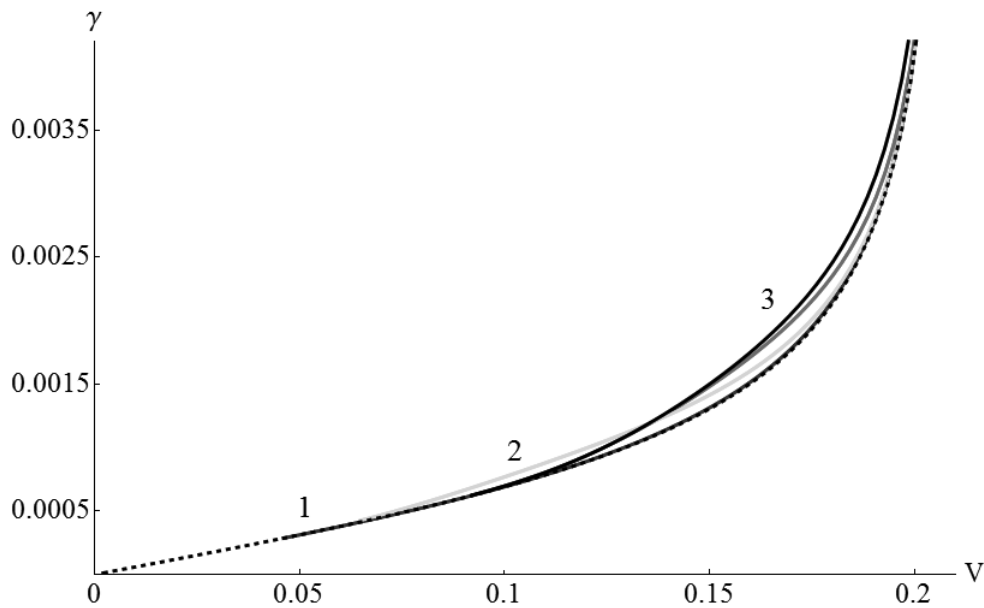


Рис. 3.10 Вольт-амперна характеристика ДК з $L = 30$, $w = 10$, $\alpha = 0.001$ та ромбічною неоднорідністю з $\mu_I = 0.5$, $\mu_H = \mu_C = 0$, $d_x = 5$, $d_y = 1$ (крива 1), $d_x = 1$, $d_y = 5$ (крива 2). Криві 3 відповідають неоднорідності з $d_x = 5$, $d_y = 5$ (нижня) та $d_x = 5$, $d_y = 5$, $\mu_C = 0.05$ (верхня). Пунктирна лінія позначає однорідний випадок $\mu_I = \mu_H = \mu_C = 0$.

3.5 Висновки

Підводячи підсумок, зазначемо, що проходження квазіодновимірного флюксона через мікрозакоротки суттєво відрізняється від суто одновимірного випадку. Пороговий струм закріплення згасає з шириною переходу близькою до $w^{-1/2}$, відповідно до кінематичного підходу. Чисельне моделювання підтримує цю залежність для проміжних (кілька λ_J) значень w . Зі збільшенням w розбіжність між результатами чисельного і кінематичного наближення стає більш чіткою. Причина цієї невідповідності полягає в тому, що для $w \gg 1$ флюксон не може більше розглядатися як повністю жорсткий об'єкт і його деформація в напрямку y має бути прийнята до уваги. Можна сформулювати наступне просте міркування, що пояснює проходження флюксона через перешкоду ширини d_y у випадку К1Д. Перешкода може бути описана як локалізований (в x і y напрямках) потенціальний бар'єр. Тільки центральна частина ($|y| \gtrsim d_y/2$) однорідного в y напрямку флюксона бере участь в процесі взаємодії, в той час як крайні райони $d_y/2 \lesssim |y| \leq w/2$ - ні. Таким чином, якщо енергія в хвостах достатня, щоб подолати бар'єр – флюксон пройде. Якщо $w \rightarrow \infty$, енергія в невзаємодіючій частині флюксона прямує до нескінченності і, отже, він зможе подолати будь-яку перешкоду.

На основі отриманих аналітичних результатів побудовано вольт-амперні характеристики довгих, але скінченних контактів з просторовими неоднорідностями різної геометричної форми та розмірів. Випромінювання створює відхилення від однорідного випадку у ВАХ, які пов'язані з відповідними максимумами залежності $E(v)$. ВАХ стає значною мірою залежною від параметрів домішки, кількість точок перегину та величина відхилення від однорідності росте зі збільшенням площі домішки, а параметри μ_I , μ_C , μ_H вносять лише якісні

зміни, сильніше відхиляючи криву від однорідного випадку при їх збільшенні. При цьому локальна зміна ємності і магнітного поля в області присутності неоднорідності мають значно менший вплив, ніж зміна густини критичного струму. Отримані результати можуть бути легко перевірені експериментально.

РОЗДІЛ 4

РУХ СОЛІТОНА В АСИМЕТРИЧНОМУ МАСИВІ ТОЧКОВИХ ДЖОЗЕФСОНІВСЬКИХ КОНТАКТІВ

4.1 Вступ

Масиви джозефсонівських пристроїв інтенсивно вивчалися протягом останніх кількох десятиліть [16, 33]. Останнім часом інтерес до цих об'єктів був стимульований застосуванням в квантовому обчислюванні [15, 19] або створенні метаматеріалів на основі масивів НКВІН (*англ.* SQUID) (надпровідних квантових інтерферометрів) [74]. Ефект релятивістської затримки часу було запропоновано в масиві асиметричних НКВІН [75]. Ця система описана дискретним подвійним рівнянням синус-Гордона (ДПСГ) [75], що буде предметом даного розділу. З іншого боку, проблема мобільності топологічних солітонів в дискретних середовищах привернула велику увагу в останні роки. Було показано, що усамітнені хвилі в нелінійних решітках можуть поширюватися за постійної форми і швидкості без будь-якого випромінювання [76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85], незважаючи на наявність ненульового потенціалу Пайерлса-Набарро (ПН). Ці розв'язки просторово локалізовані (мають скінченну енергію) і існують для дискретного набору швидкостей, на відміну від неперервних аналогів, де дозволені швидкості, як правило, займають неперервні інтервали, обмежені деякою критичною величиною швидкості. Існування солітонів тут пов'язано з можливістю уникнення резонансів з лінійним спектром системи, вони називаються *вкладені солітони* (*англ.* embedded solitons) [86]. Ці солітони існують в різних системах, у тому числі, в континуальному рівнянні синус-Гордона [87] і подвійному синус-Гордона [88] з дисперсією вищих порядків. У цьому розділі буде показано, що

дискретне подвійне рівняння синус-Гордона, яке моделює асиметричний масив НКВІН також містить дискретні вкладені солітони. Розгляд дисипації і зовнішнього постійного струму важливий, тому це також буде зроблено в даному розділі. Таким чином, мета розділу є двоякою: (1) вивчення динамічних властивостей флюксона в масиві НКВІН і, зокрема, отримання вольт-амперних характеристик (ВАХ) масиву; (2) демонстрація ознак вложеного солітона, який переміщується вздовж масиву без випромінювання.

4.2 Модель

У цьому розділі ми обговоримо динаміку масиву з трьох асиметричних точкових контактів з прикладеним зовнішнім постійним струмом. Кожна елементарна комірка масиву є НКВІН, що складається з трьох джозефсонівських контактів, два однакові вузли розміщені в лівій частині і один - в правій, як показано схематично на Рис. 4.1 і 4.2. В n -тому НКВІН $\phi_n^{(l)}/2$ - джозефсонівська фаза одного з лівих вузлів і $\phi_n^{(r)}$ - джозефсонівська фаза правого переходу. Припускається, що два переходи в лівому плечі є ідентичними, тому $C^{(l1)} = C^{(l2)} \equiv 2C^{(l)}$ - ємність контактів в лівому плечі контуру, $R^{(l1)} = R^{(l2)} \equiv R^{(l)}/2$ - опір контактів лівого плеча, $I_c^{(l1)} = I_c^{(l2)} \equiv I_c^{(l)}$ - критичний струм і $\phi^{(l)} = \phi^{(l1)} + \phi^{(l2)}$ - джозефсонівська фаза в лівому плечі комірки масиву НКВІН.

Запишемо рівняння Кірхгофа для елементарної комірки еквівалентної схеми масиву НКВІН (Рис. 4.1):

$$\begin{aligned} I^{(l)} &= C^{(l)} \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R^{(l)}} + I_c^{(l)} \sin \frac{\phi^{(l)}}{2} = \\ &= I_c^{(l)} \sin \frac{\phi^{(l)}}{2} + \frac{\hbar}{2eR^{(l)}} \frac{d\phi^{(l)}}{dt} + \frac{\hbar C^{(l)}}{2e} \frac{d^2\phi^{(l)}}{dt^2}, \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

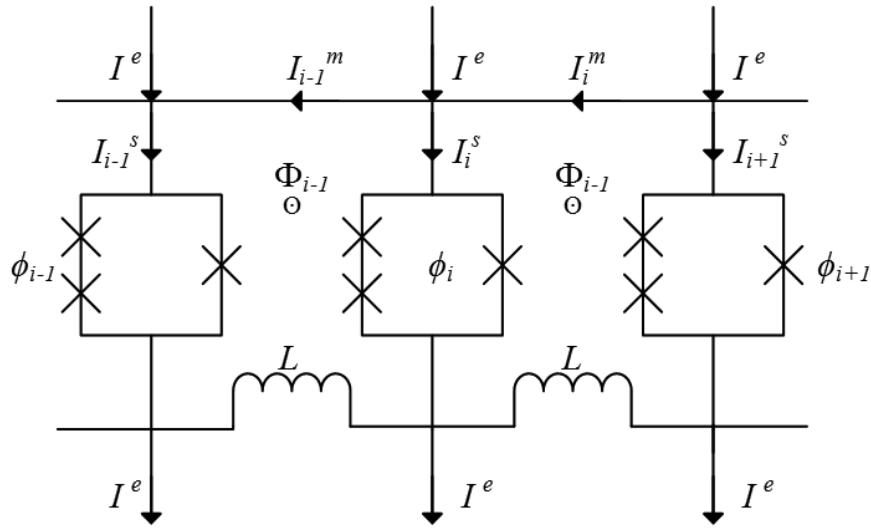


Рис. 4.1 Еквівалентна схема масиву НКВІН, що використовувалася в роботі [75].

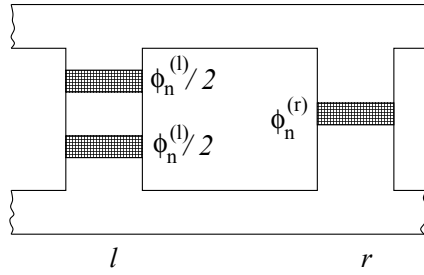


Рис. 4.2 Схематичне зображення елементарної комірки масиву НКВІН.

$$I^{(r)} = I_c^{(r)} \sin \phi^{(r)} + \frac{\hbar}{2eR^{(r)}} \frac{d\phi^{(r)}}{dt} + \frac{\hbar C^{(r)}}{2e} \frac{d^2 \phi^{(r)}}{dt^2}, \quad (4.2.2)$$

$$\phi^{(l)} - \phi^{(r)} = -2\pi \frac{\Phi_{ext}^s}{\Phi_0} - 2\pi n^s, \quad (4.2.3)$$

де $\Phi_0 = \hbar/2e$, Φ_{ext}^s - зовнішній магнітний потік, n^s - завихреність масиву, $I^{(l)}, I^{(r)}$ - струми, що протікають через ліве та праве плече комірки. Під припущенням про малі розміри контуру була введена різниця фаз $\phi_n = \phi_n^{(l)} = \phi_n^{(r)}$ та знехтувано n^s . Тоді умова квантування магнітного потоку для i -тої комірки приймає вигляд: $\phi_i - \phi_{i+1} = -2\pi \frac{\Phi_i}{\Phi_0}$. Підставляючи рівняння Кірхгофа в закон збереження струму:

$$I^e + I_i^m = I_i^s + I_{i-1}^m, I_i^s = I_i^l + I_i^r, \quad (4.2.4)$$

побачимо, що система описується подвійним дискретним рівнянням синус-Гордона з дисипацією та зовнішнім струмом, яке може бути записано в безрозмірному вигляді:

$$\frac{d^2\phi_n}{dt^2} - \kappa \hat{\Delta}\phi_n + \frac{2}{1+2\eta} \left(\eta \sin \phi_n + \sin \frac{\phi_n}{2} \right) + \alpha \frac{d\phi_n}{dt} = \gamma, \quad (4.2.5)$$

$$n = 1, 2, \dots, N,$$

де $\hat{\Delta}\phi_n \doteq \phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}$ є дискретним Лапласіаном. Виведення цього рівняння з законів Кірхгофа і рівнянь Джозефсона було виконане раніше [75]. Інші безрозмірні параметри визначаються наступним чином:

$$\alpha = \frac{1}{RC\omega_J}, \quad \kappa = \frac{\Phi_0}{2\pi LI_c}, \quad \eta = \frac{I_c^{(r)}}{I_c^{(l)}}, \quad (4.2.6)$$

$$C = C^{(l)} + \frac{C^{(r)}}{2}, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R^{(r)}} + \frac{1}{2R^{(l)}}, \quad I_c = I_c^{(r)} + \frac{I_c^{(l)}}{2}.$$

Тут $\omega_J = \sqrt{2eI_c/(C\hbar)}$ є частота Джозефсона в плазмі, а безрозмірний час в рівнянні (4.2.3) нормується в одиницях ω_J^{-1} , α є параметр дисипації, L - це індуктивність комірок, γ - безрозмірний зовнішній струм зміщення, нормований на I_c . Параметр η вимірює асиметрію НКВІН і є відношенням критичних струмів контактів справа і зліва.

Дві межі рівняння (4.2.5) мають важливе значення. Якщо $\eta = 0$, отримуємо дискретний синус-Гордона (ДСГ) з членом $\sin(\phi_n/2)$, а якщо $\eta \rightarrow \infty$, то відновлюється рівняння ДСГ, але з терміном $\sin \phi_n$. Перший випадок фізично означає, що $I_c^{(r)} \rightarrow \infty$, таким чином, ліва сторона НКВІН ефективно зникає. Останній випадок означає, що $I_c^{(l)} \rightarrow \infty$ і те ж саме відбувається в правій стороні. В обох випадках елементарна комірка масиву стає симетричною. Буде розглянутий круговий масив, таким чином, граничні умови $\phi_n = \phi_{n+N} + 4\pi Q$, де Q є повний топологічний заряд, тобто, загальне число флюксонов і антифлюксонов (з урахуванням знаку), захоплених в кільце. Надалі розглядатиметься випадок одного флюксону в масиві, отже, $Q = 1$.

У цій моделі врахована лише самоіндукція, в той час як внутрішньою індуктивністю масиву НКВІН знехтувано, відповідно до результатів роботи [89]. Якщо внутрішні індуктивності враховуються, то динаміка джозефсонівської фази повинна бути описана не рівнянням ДПСГ (4.2.5), а за формулою (1) з [89]. Основна відмінність між цими двома рівняннями лежить в природі парних членів. В той час як у рівнянні (4.2.5) зв'язок є лише між найближчими сусідніми джозефсонівськими фазами, випадок зі взаємною індуктивністю враховує зв'язок всіх джозефсонівських фаз масиву.

4.3 Гамільтонівська границя

Динаміку флюксона в реальному масиві НКВІН можна зрозуміти краще, якщо у першу чергу розглянути гамільтонівську границю ($\alpha = 0$) і також при $\gamma = 0$. В результаті, рівняння (4.2.5) можна розглядати як рівняння руху решітки з функцією Гамільтона:

$$H = \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_n}{dt} \right)^2 + \frac{\kappa}{2} (\phi_{n+1} - \phi_n)^2 + V(\phi_n) \right], \quad (4.3.7)$$

де потенціал $V(\phi)$ виражається як

$$V(\phi) = V_0 \left[\eta(1 - \cos \phi) + 2 \left(1 - \cos \frac{\phi}{2} \right) \right], \quad V_0 = \frac{2}{1 + 2\eta}. \quad (4.3.8)$$

Змінну ϕ_n можна розглядати як координати відповідної частинки решітки. Форма потенціалу (4.3.8) зображена на Рис. 4.3. Добре видно, що параметр η істотно змінює форму потенціалу. Якщо $\eta = 0$, отримаємо потенціал синус-Гордона з просторовим періодом 4π . Для малих значень η потенціальний бар'єр знижується і, якщо $\eta > 1/2$, з'являється новий локальний мінімум при $\phi = 2(2n + 1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. У межі $\eta \rightarrow \infty$ знову отримується потенціал синус-Гордона, однак, тепер

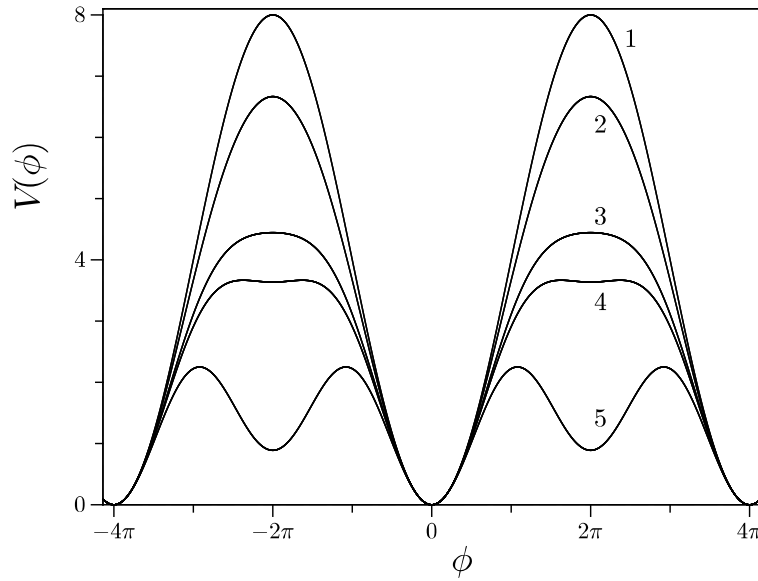


Рис. 4.3 Потенціал (4.3.8) для різних значень параметр анізотропії: $\eta = 0$ (крива 1), $\eta = 0.1$ (крива 2), $\eta = 0.4$ (крива 3), $\eta = 0.6$ (крива 4) і $\eta = 4$ (крива 5).

його період становить 2π . Плоскі хвилі (плазмони Джозефсона) можуть бути отримані за допомогою лінеаризації рівняння руху навколо мінімуму потенціалу (4.3.8). Отримані закони дисперсії мають вигляд:

$$\omega_0(q) = \sqrt{1 + 4\kappa \sin^2 \frac{q}{2}}, \quad (4.3.9)$$

$$\omega_\pi(q) = \sqrt{\frac{2\eta - 1}{2\eta + 1} + 4\kappa \sin^2 \frac{q}{2}}. \quad (4.3.10)$$

Перший закон дисперсії відповідає за малі коливання навколо глобального мінімуму, в той час як другий закон має сенс тільки тоді, коли $\eta > 1/2$ і відповідає за малі коливання навколо метастабільного стану. Через скінченність масиву хвильове число $q \in [0, 2\pi)$ набуває тільки дискретний ряд значень $q_m = 2\pi m/N$, $m = \pm 1, \dots, \pm N$. Закон дисперсії (4.3.9) не залежить від параметру асиметрії η .

4.3.1 Континуальна границя

Якщо $\kappa \gg 1$ неперервна межа може бути застосована і рівняння (4.2.5) зводиться до подвійного синус-Гордона:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{2}{1+2\eta} \left(\eta \sin \phi + \sin \frac{\phi}{2} \right) + \alpha \frac{\partial \phi}{\partial t} = \gamma . \quad (4.3.11)$$

Це рівняння має велику кількість застосувань [90, 91], в тому числі в довгих джозефсонівських контактах з другою гармонікою в струм-фазовій залежності [92]. Рівняння подвійний синус-Гордона має топологічні солітонні розв'язки, які з'єднують два сусідні глобальні мінімуми ($\phi = 0$ і $\phi = 4\pi$) і в гамільтонівській границі ($\alpha = \gamma = 0$) цей розв'язок виглядає [90, 91, 88]:

$$\phi(x, t) = 2\pi + 4 \arctan \left[\frac{1}{\sqrt{1+2\eta}} \sinh \left(\frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}} \right) \right] . \quad (4.3.12)$$

Якщо $\eta = 1/2$ солітонний розв'язок відчуває точку перегину в його центрі і для великих значень η два 2π солітони, які складають розв'язок (4.3.12), стають добре розділеними.

4.3.2 Безвипромінювальний рух дискретних солітонів. Прозорі швидкості

Динаміка топологічних усамітнених хвиль в решітках класу, що описується гамільтоніаном (4.3.7) (часто згадується як нелінійне дискретне рівняння Клейна-Гордона) була добре вивчена (дивитися огляди [51, 52] і посилання в них). Головна різниця в динаміці солітона між неперервною моделлю Клейна-Гордона і її дискретним аналогом полягає в тому, що дискретність значно ускладнює вільне поширення солітона. Якщо шукати розв'язок у вигляді *біжучої хвилі* $\phi_n(t) = \phi(n - vt) \equiv \phi(z)$, що задовольняє нелінійне дискретне рівняння Клейна-Гордона, то рівняння руху набуває вигляду [53]:

$$v^2 \frac{d^2 \phi(z)}{dz^2} - \kappa [\phi(z+1) + \phi(z-1) - 2\phi(z)] - \frac{\partial V[\phi(z)]}{\partial \phi} = 0 . \quad (4.3.13)$$

В результаті знаходимо, як правило солітони, які утворюють зв'язаний стан з малоамплітудною хвилею, який рухається з тією ж швидкістю v . У конти-

нуальних моделях Клейна-Гордона область допустимих швидкостей солітону є інтервал $|v| < 1$. Таким чином, солітони в цих континуальних моделях формують однопараметричне сімейство розв'язків, де швидкість v грає роль параметру. Детальний аналітичний [76, 78, 83, 84, 85] і чисельний [78, 79, 80, 81] аналіз показує, що у випадку дискретної моделі Клейна-Гордона неперервне сімейство солітонів стає дискретним скінченим монотонним набором солітонів, що рухаються зі швидкістю $v = \{v_0 \equiv 0, v_1, v_2 \dots, v_k\}$. Далі, всі швидкості, що задовольняють $v_n \neq 0$ називатимуться *прозорими* швидкостями, так як солітон ковзає по решітці з цими швидкостями без будь-якого випромінювання. Ці розв'язки можна назвати *дискретними вкладеними солітонами*. У рівнянні ДСГ є тільки немобільний ($v_0 = 0$) монотонний солітон і немає прозорих швидкостей. Загалом, подалі від прозорих швидкостей, тобто коли $v \neq v_n$, рухливі солітони немонотонні, мають асимптотичні хвости і часто називаються *наноптерони*. Монотонні ж розв'язки є дуже важливими, оскільки їх енергія скінченна.

Використання так званого *псевдоспектрального* методу, розробленого в [93, 94, 95], дає можливість знайти розв'язки рівняння (4.3.13) з необхідною точністю. В Додатку Б наведено детальний опис використання псевдоспектрального методу для розв'язку диференціальних рівнянь та пошуку солітонних розв'язків в дискретних моделях. Для того, щоб обчислити *монотонну* усамітнену хвилю доводиться контролювати хвіст розв'язку $\phi(z)$ і змінювати швидкості v , доки амплітуда коливання хвоста стане менша, ніж задана точність. Це було зроблено для рівняння ДПСГ і на Рис. 4.4 показано залежність першої прозорої швидкості v_1 від параметра асиметрії η для різних значень параметру дискретності κ . Для цих наборів параметрів спектр прозорих швидкостей складається тільки з однієї швидкості v_1 . Схоже, що навіть для відносно не-

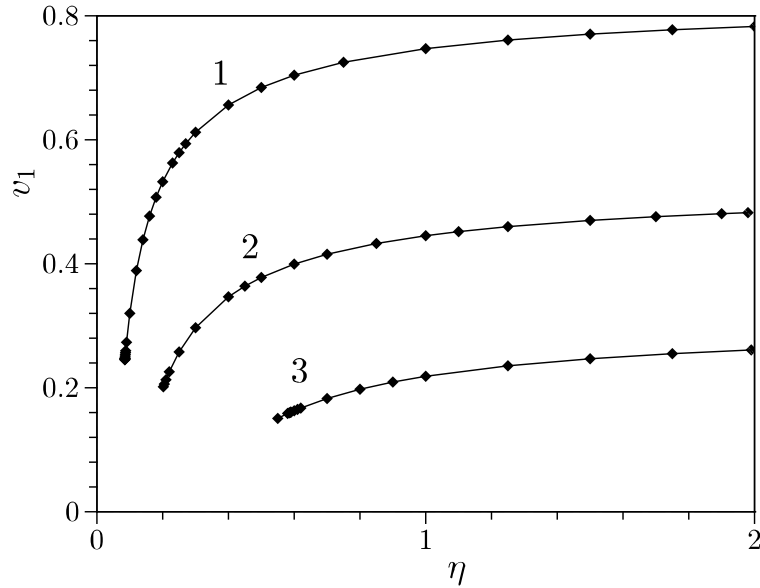


Рис. 4.4 Прозорі швидкості як функція η для $\kappa = 1$ (крива 1), $\kappa = 0.5$ (крива 2) і $\kappa = 0.25$ (крива 3).

великих значень η (навіть $\eta \ll 1$, за умови $\kappa \gtrsim 1$) існує принаймні одна прозора швидкість. Значення цієї швидкості менше для менших значень параметра дискретності і цікаво, що монотонні рухомі солітони можуть існувати навіть у сильно дискретній решітці з $\kappa = 0.25$. Залежність $v_1(\eta)$ починається з деякого критичного значення η , нижче цього значення система не дозволяє існування прозорої швидкості, це узгоджується з загальною теорією [81]. В квазіконтинуальному наближенні рівняння ДСГ [87] або ДПСГ [88], коли в дискретному операторі Лапласа при розкладі в ряд можна зберегти члени вищих порядків, аж до $\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}$, рухливий солітон існує знову тільки для обраного набору прозорих швидкостей, але ці швидкості (залежно від параметрів моделі) можуть бути як завгодно малими. Підстановка розв'язку рівняння (4.3.13) з прозорою швидкістю v_1 в ДПСГ (4.2.5) призводить до поширення солітону з постійною швидкістю v_1 без якого-небудь помітного випромінювання. Наступний чисель-

ний експеримент продемонстрував це. Рухомий солітон, отриманий як розв'язок рівняння (4.3.13) з прозорою швидкістю v_1 , був запущений зі швидкістю v_* , яка може відрізнятися від v_1 . Еволюція центру мас солітона показана на Рис. 4.5, де центр мас визначається наступним чином: $X_c = \frac{1}{4\pi N} \sum_{j=1}^N j(\phi_{j+1} - \phi_j)$, тут j відповідає номеру комірки масиву, а N - їх загальна кількість. Якщо початкова

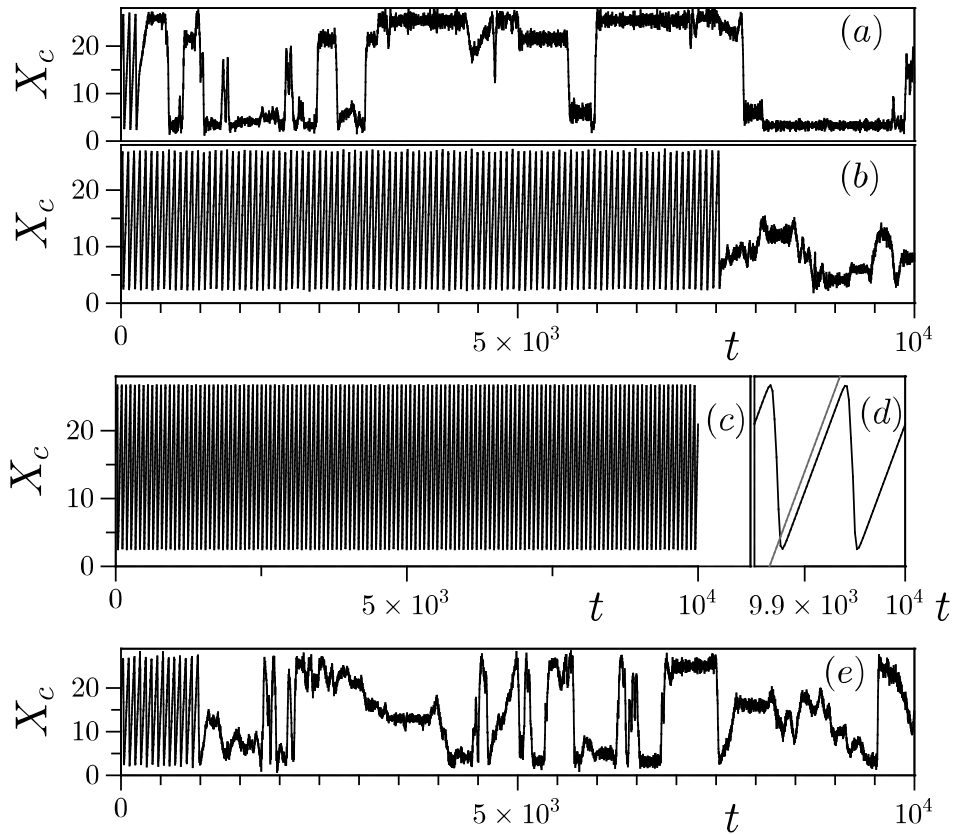


Рис. 4.5 Часова еволюція центру мас в гамільтонівській границі для $\kappa = 0.5$, $\eta = 0.6$, $v_1 = 0.399493$ з початковою швидкістю $v_* = 0.97v_1$ (a), $v_* = 0.99v_1$ (b), $v_* = v_1$ (c,d) і $v_* = 1.25v_1$ (e). Червона лінія на графіку (d) відповідає руху центру мас з прозорою швидкістю $X(t) \sim v_1 t$.

швидкість солітона відрізняється від v_1 не сильно, то солітон може рухатися протягом тривалого часу вздовж решітки [Рис. 4.5 (b)]. В іншому випадку, він закріплюється досить швидко, як показано на Рис. 4.5 (a,e). Якщо $v_* = v_1$,

солітон переміщується без будь-яких значних уповільнень або випромінювання [графіки (c) і (d)].

4.4 Вольт-амперні характеристики

Тепер можна приступити до побудови вольт-амперних характеристик для ненульових значень струму і дисипації.

4.4.1 Континуальне наближення

В континуальному наближенні можна використовувати метод балансу потужностей з [5] і обчислити рівноважну швидкість флюксона. Ідея методу балансу потужностей полягає в тому, що загальна потужність, продукована зовнішнім струмом, повинна дорівнювати дисипативним втратам: $P_{tot} = P_{diss}$. Рівняння балансу потужностей записується у вигляді: $\bar{V}_c \gamma = 4\pi\sqrt{\kappa} v \gamma / N = -P_{diss}$. Тут $\bar{V}_c$ є середнє падіння напруги, що створює флюксон, який рухається зі швидкістю v . Якщо припустити, що збурення, викликане струмом і дисипацією, маленьке і форма флюксону є точним розв'язком незбуреного неперервного рівняння (4.3.11), то можна обчислити потужність дисипативних втрат:

$$P_{diss} = -\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_t^2 dx = -\frac{16\alpha v^2}{\sqrt{1-v^2}} \Phi(\eta) , \quad (4.4.14)$$

$$\Phi(\eta) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2\eta(2\eta+1)}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{2\eta}{1+2\eta}},$$

де розв'язок (4.3.12) був підставлений у вищевказаний інтеграл. З цього рівняння можна знайти рівноважну швидкість флюксона v і середнє падіння напруги:

$$\bar{V}_c = \sqrt{\kappa} \frac{4\pi v_\infty}{N} = \sqrt{\kappa} \frac{4\pi}{N} \left[1 + \Phi^2(\eta) \left(\frac{4\alpha}{\pi\gamma} \right)^2 \right]^{-1/2} . \quad (4.4.15)$$

Функція $\Phi(\eta)$ досягає двох важливих границь: $\lim_{\eta \rightarrow 0} \Phi(\eta) = 2$ і $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \Phi(\eta) = 1$. В обох цих границях відтворюється добре відома формула для рівняння СГ,

отримана в [5]. Так як $\Phi(\eta) > 1$ для будь-якого додатнього η , то нахил ВАХ біля $\gamma \ll 1$ буде все більш і більш гладким зі зростанням η : $\bar{V}_c \simeq \sqrt{\kappa} \pi^2 \gamma / [N \alpha \Phi(\eta)]$.

4.4.2 Чисельні результати

Чисельно розраховані вольт-амперні характеристики наведено на Рис. 4.6-4.7 маркерами, в той час як сині суцільні лінії відповідають аналітичній формулі (4.4.15), отриманій в континуальному наближенні. Це наближення дає неперервну криву $\gamma = \gamma(\bar{V})$ і працює добре тільки для малих значень γ . Як не дивно, але це дає правильний нахил ВАХ поблизу початку координат навіть для сильно дискретного масиву ($\kappa = 0.5$), проте воно працює досить погано для великих значень зовнішнього струму. Чисельно отримане середнє падіння напруги визначається як:

$$\bar{V} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{d\phi_n(t')}{dt'} dt' . \quad (4.4.16)$$

Якщо флюксон поширюється з постійною швидкістю v він викликає падіння напруги $\bar{V} = 4\pi v / N$. Процедура розрахунку ВАХ може бути описана таким чином. Ми починаємо з нульового струму ($\gamma = 0$) та інтегруємо рівняння руху (4.2.5) за допомогою методу Рунге-Кутта 4-го порядку для кожного значення γ за час $t > 10\alpha^{-1}$. Коли середня напруга (4.4.16) досягає бажаної точності, γ збільшується на невелику поправку і процес повторюється знову. Такий же розрахунок був виконаний коли γ зменшується до $\gamma = 0$. Оскільки ВАХ демонструє складну гістерезисну структуру, то кожна гілка була пройдена вгору і вниз між своїми відповідними кінцями. Типова ВАХ складається з каскадів окремих гілок, які з'являються через об'єднання флюксона з модами плазмонів (див. теоретичні [16, 17, 96, 97] і експериментальні [16, 96, 98, 99] статті). При переміщенні вздовж масиву флюксон збуджує плазмонну моду і утворює зв'язаний стан, який поширюється з тією ж швидкістю. Якщо v є швидкістю флюксона, то фазова швидкість плазмона повинна дорівнювати v також. Таким

чином, плазмонне хвильове число визначається коренем такого рівняння:

$$\omega_0(q) - vq = 0, \quad (4.4.17)$$

де $\omega_0(q)$ є плазмонний закон дисперсії (4.3.9). У зв'язку з періодичністю граничних умов фазова синхронізація в масиві може виникати, якщо за час обходу флюксона по масиву відбудеться скінченна кількість коливань джозефсонівської фази. Це означає, що певна кількість довжин хвилі плазмону повинна поміститися в масиві, що легко бачити на вставці Рис. 4.6 (а). Таким чином, різне число коливань, встановлених в масиві, відповідає різним гілкам ВАХ. Ця ситуація була відома в літературі [16, 17] разом з приблизним значенням ступенів напруги, тому не будемо більше на ній зупинятися.

4.4.2.1 Ознаки прозорих швидкостей

Аналіз цих вольт-амперних характеристик показує, що існують якісні і кількісні відмінності між випадками, коли рівняння ДПСГ має принаймні одну прозору швидкість в гамільтонівському наближенні та коли не існує такої швидкості. Ці відмінності можуть бути узагальнені в наступних двох пунктах.

- *Недоступний інтервал (щілина) в діапазоні допустимих напруг.*

Схоже, що якщо η занадто мала, то гамільтонівська задача не має прозорої швидкості і ми стикаємося з ситуацією, коли ВАХ складається з гілок, показаних на Рис. 4.6 (а), а інтервал між цими гілками вздовж осі $\bar{V}$ зменшується, коли $\bar{V}$ зменшується. Те ж саме стосується і довжини цих гілок в напрямку γ . Невелика щілина між ступенями напруги може бути помічена в інтервалі $0.06 \lesssim \bar{V} \lesssim 0.07$. Цей інтервал відповідає ситуації, коли число коренів рівняння (4.4.17) змінилося з одного до трьох. Картина, описана на Рис. 4.6 (а), схожа на ту, що спостерігалася в простому рівнянні ДСГ [17]. Тим не менш, виникає інша ситуація, якщо в гамільтонівській границі є принаймні одна прозора швидкість. За результатами глави 4.3.2 для $\kappa = 0.5$ повинна бути прозора швидкість,

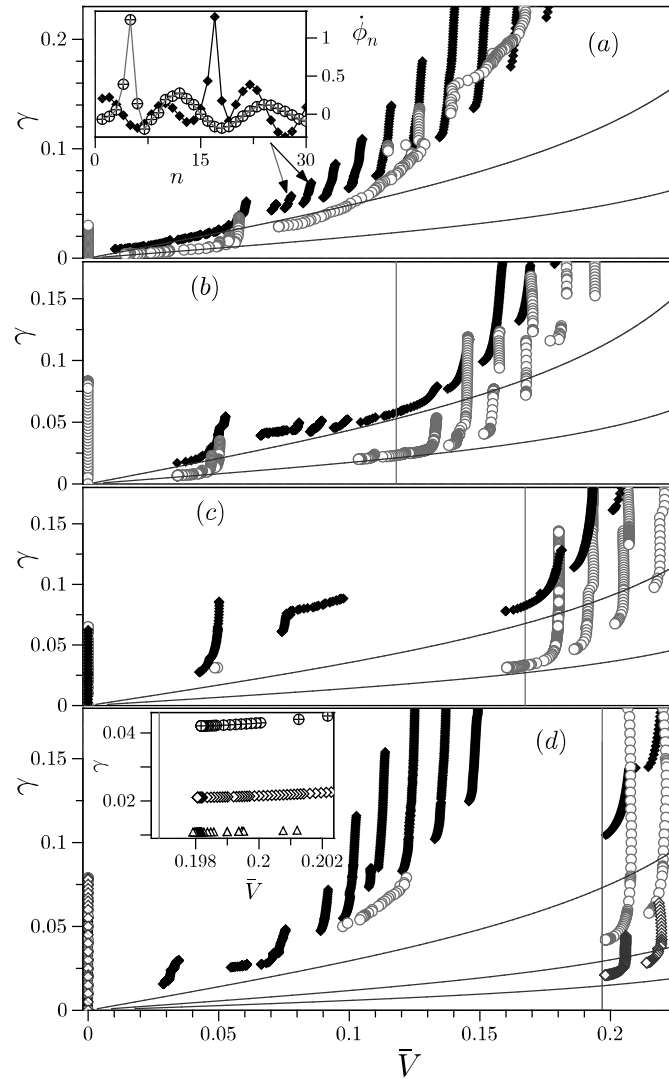


Рис. 4.6 Вольт-амперна характеристика для $\kappa = 0.5$, $N = 30$, $\alpha = 0.05$ (чорний $\blacklozenge$), $\alpha = 0.02$ (червоний $\circ$), $\alpha = 0.01$ (синій $\diamond$) і $\eta = 0.1$ (a), $\eta = 0.3$ (b), $\eta = 0.6$ (c) і $\eta = 1.5$ (d). Суцільні криві відповідають ВАХ в континуальних границях рівняння (4.4.15). Вертикальні лінії (b)-(d) задаються $4\pi v_1/N$, де v_1 - прозора швидкість для відповідного η (Рис. 4.4). Вставка (a) показує розподіл $\dot{\phi}_n$, що відповідає гілкам, позначеним стрілками на $\alpha = 0.05$. Розподіл для правої гілки заданий $\blacklozenge$, для лівої – $\oplus$. Вставка (d) показує околі прозорої швидкості для $\alpha = 0.02$ ($\oplus$), $\alpha = 0.01$ ($\diamond$) і $\alpha = 0.005$ (Δ).

якщо $\eta > 0.202$, таким чином, це випадок ВАХ на графіках (b)-(d). На цих малюнках легко можна визначити значний *недоступний інтервал напруги* (НІН або *англ.* IVI – inaccessible voltage interval) або щілину, тобто існує заборонений інтервал у $\bar{V} \in [V_{IVI}^-, V_{IVI}^+]$, де немає напруги, спричиненої рухом флюксона. Цей інтервал непомітний для $\eta = 0.3$, $\alpha = 0.05$ [див. Рис. 4.6 (b)], але його ясно видно для $\alpha = 0.02$. Тим не менш, НІН сильно зростає при зростанні η [див. Рис.4.6 (c,d)]. Важливо відзначити, що верхній край цього недоступного інтервалу V_{IVI}^+ , наближається ближче до напруги $4\pi v_1/N$, продукуюваної рухом флюксона з прозорою швидкістю v_1 .

- *Недопустимий інтервал напруг зростає, коли параметр дисипації зменшується.*

Інше важливе спостереження полягає в тому, що, якщо дисипація зменшується – ширина НІН зростає. Два набори даних нанесені на Рис.4.6 (b-c), для $\alpha = 0.05$ і $\alpha = 0.02$. Крім того, на Рис.4.6 (d) даються дані для $\alpha = 0.01$. Можна помітити, що НІН стає вельми гострим для $\eta = 0.3$, якщо коефіцієнт дисипації зменшується з $\alpha = 0.05$ до $\alpha = 0.02$. Це видно ще краще на Рис. 4.6 (c,d) , де НІН визначений для $\alpha = 0.05$, а його ширина збільшується зі зростанням η і зі зменшенням α . Зокрема, відзначимо, що існує менше гілок для $\bar{V}$ нижче НІН ($\bar{V} < V_{IVI}^-$), якщо α зменшується. Довжина цих гілок уздовж осі γ зменшується. Порівняємо, наприклад, дані на Рис. 4.6 (d), де тільки одна гілка нижче НІН виживає, якщо параметр дисипації зменшується з $\alpha = 0.05$ до $\alpha = 0.02$. Якщо α в подальшому зменшується до $\alpha = 0.01$, немає ніяких інших гілок ВАХ нижче НІН, тобто $V_{IVI}^- = 0$. Два ВАХ для меншого значення параметру дискретності ($\kappa = 0.25$) для $\eta = 0.3$ (немає прозорої швидкості) і $\eta = 0.6$ (одна прозора швидкість $v_1 = 0.162871$) зображені на Рис. 4.7. Тут НІН чітко видно для $\eta = 0.6$ і поведінка його країв така ж, як на Рис. 4.6: $V_{IVI}^+ \rightarrow 4\pi v_1/N$

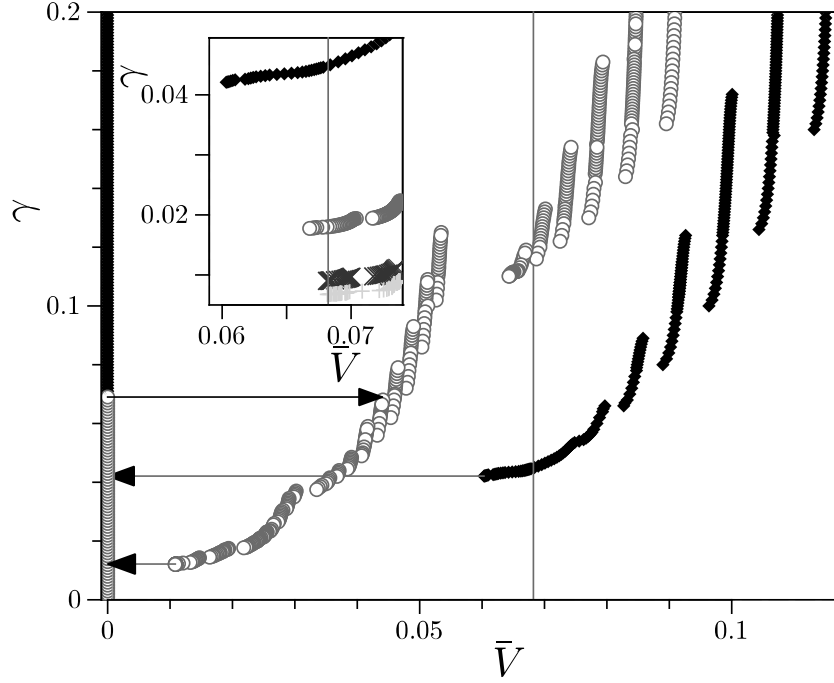


Рис. 4.7 Вольт-амперна характеристика для $\kappa = 0.25$, $\alpha = 0.05$, $\eta = 0.6$ (чорні $\blacklozenge$) і $\eta = 0.3$ (червоні $\circ$). Вставка показує деталі ВАХ поблизу прозорих швидкостей для $\eta = 0.6$, $\alpha = 0.05$ (чорні $\blacklozenge$), $\alpha = 0.02$ (червоні $\circ$) $\alpha = 0.01$ (сині $\times$) і $\alpha = 0.0075$ (зелені $+$). Червона вертикальна швидкість позначає падіння напруги, що відповідає відповідній прозорій швидкості в гамільтонівській границі.

з $\alpha \rightarrow 0$ (див. вставку), поки $V_{IVI}^- = 0$. Верхня межа НІН (V_{IVI}^+) розташована близько до значення $4\pi v_1/N$, де v_1 - відповідна прозора швидкість. Визначаючи параметр детюнінгу:

$$\nu = \left| V_{IVI}^+ - \frac{4\pi}{N} v_1 \right|, \quad (4.4.18)$$

і представляючи його в Таблиці 4.1, демонструємо, що НІН прямо асоціюється з прозорою швидкістю рівняння ДПСГ в гамільтонівській границі.

Дійсно, параметр детюнінгу зменшується, коли η зростає при $\alpha \rightarrow 0$. Ці ре-

$\alpha \backslash \eta$	0.6	1	1.5
0.05	0.0075	0.0017	0.0013
0.02	0.0070	0.0014	0.0013
0.01	0.0050	0.0014	0.0012
0.005	0.0041	0.0010	0.0011

Таблиця 4.1

Параметр детюнінгу ν [див. рівняння (4.4.18)] для $\kappa = 0.5$ як функція α і η .

зультати можуть мати наступну математичну інтерпретацію. Якщо гамільтонова система має прозору швидкість v , то навіть невелике збурення додаванням ненульових α і γ створює аттрактор, що відповідає руху флюксона зі швидкістю, близькою до v ([100]). Таким чином, при малих α ми спостерігаємо, що, коли $\gamma \rightarrow 0$, то флюксон рухається зі швидкістю, близькою до v . Якщо немає прозорості швидкості для тих же значень α і γ флюксон або рухається з дуже малою швидкістю, близькою до 0, або просто утримується дискретністю. Ця ситуація добре видна на Рис. 4.6 (а) та Рис. 4.7, де ВАХ підходить близько до початку координат, але ніколи не досягає його. Таким чином, про існування вкладених солітонів свідчить можливість руху при дуже малих γ зі швидкостями, що не прямують до 0.

4.4.2.2 Хаотичний або регулярний режими руху

Спостереження гілок ВАХ на Рис. 4.6-4.7 показує, що більшість з цих гілок практично вертикальні лінії. Тільки на нижніх кінцях ці гілки нахиляються в бік більш низьких напруг. Гілки поряд з НІН майже горизонтальні з невеликими вертикальними частинами. Тим не менш, є деякі окремі гілки, які випадають зі звичайної картини. Наприклад, на Рис. 4.6 (с) є гілка трохи нижче за НІН зі

слабо похилою верхньою частиною і майже вертикальною нижньою частиною. Крім того, на Рис. 4.6 (d) при $\alpha = 0.02$ існують ізольовані і сильніше нахилені гілки, розташовані трохи нижче НІН. Таким чином, слід зосередити увагу на характері динаміки, якій підкоряється флюксон при проходженні масиву. Для того, щоб вирішити це питання був обчислений найбільший показник Ляпунова (НПЛ) λ (за допомогою алгоритму Бенеттіна [101]) для трьох гілок ВАХ з Рис. 4.6 (c) при $\alpha = 0.05$. Візьмемо найближчі до НІН гілки, одну над ним зі зміною напруги в діапазоні $0.16 \lesssim \bar{V} \lesssim 0.18$, і дві під ним з діапазоном $0.074 \lesssim \bar{V} \lesssim 0.1$ і $0.043 \lesssim \bar{V} \lesssim 0.05$. Відповідні залежності $\lambda(\gamma)$ зображено лініями 1 (чорна), 2 (синя) і 3 (червона) на Рис. 4.8 (а). Зауважимо, що $\lambda = 0$ для лінії 1 (чорна) і ця лінія відповідає гілці ВАХ, що трохи вище НІН. Для необмежених траєкторії в автономній системі завжди є нульовий показник Ляпунова, таким чином, динаміка в цій гілці регулярна. У кривій 2 (синя) значення НПЛ позитивне в інтервалі $0.077 \lesssim \gamma \lesssim 0.088$, що приблизно відповідає верхній частині гілки і прямує до нуля в інтервалі $0.062 \lesssim \gamma \lesssim 0.077$ – нижній частині гілки. З відповідної ВАХ [Рис. 4.6 (c)] можна визначити, що динаміка є хаотичною, коли гілка сильно нахилена і регулярною, коли ВАХ майже вертикальна.

Нарешті, залежність 3 для найнижчої (найближча до початку координат) гілки показує, що динаміка регулярна у верхній частині гілки і хаотична зі зменшенням γ . Також можна спостерігати кілька перемикань з хаотичного стану до регулярного руху і назад. Спектр потужності $d\phi_{N/2}/dt$, визначений і наведений на Рис. 4.9.

$$I(\Omega) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\phi_{N/2}(t)}{dt} e^{-i\Omega t} dt \right|^2, \quad (4.4.19)$$

Він був обчислений для декількох значень γ на гілках ВАХ, розглянутих в попередньому пункті. Спочатку розглянемо гілку вище НІН ($\bar{V} > V_{IVI}^+$), для якої НПЛ завжди дорівнює нулю (лінія 1 на Рис. 4.8). Як можна побачити з Рис.

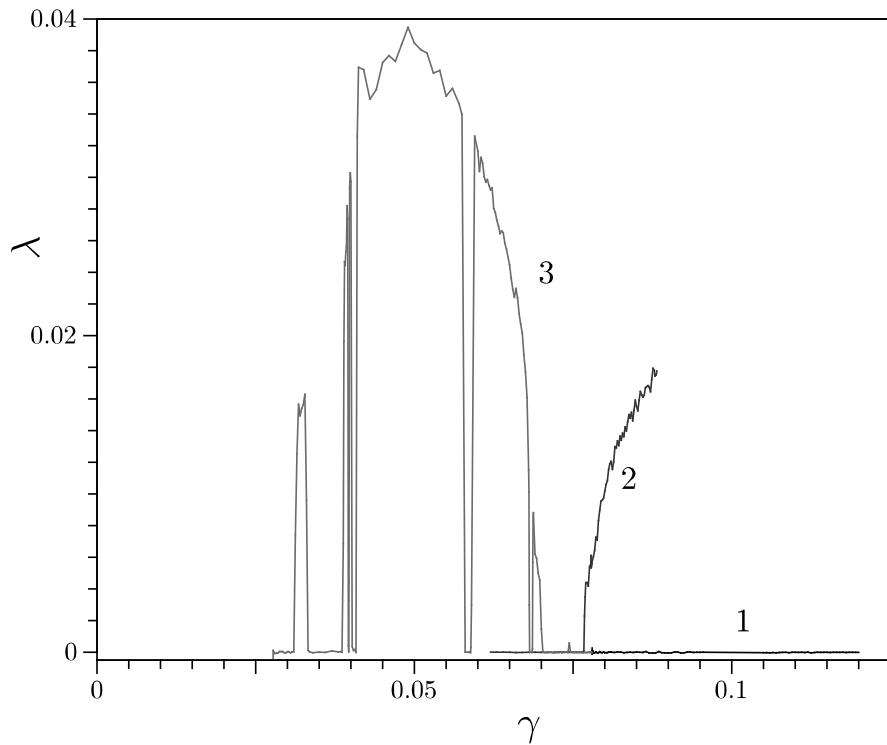


Рис. 4.8 Найбільший показник Ляпунова як функція зовнішнього струму для трьох гілок ВАХ, зображених на Рис .4.6 (с). Параметри: $\kappa = 0.5$, $\alpha = 0.05$ і $\eta = 0.6$. Різні лінії відповідають різним гілкам ВАХ.

4.9 (а), спектр складається з рівновіддалених піків, розташованих на $\Omega = n\bar{V}/2$, $n = 1, 2, \dots$. Таким чином, траєкторія є граничним циклом з частотою $\bar{V}/2$. Це означає, що флюксон відновлює свою форму повністю після проходження навколо масиву два рази. Відповідне положення на ВАХ [див. Рис. 4.6 (с)] має значення $\gamma = 0.11$, $\bar{V} = 0.1789$. Далі звернемо увагу на другу гілку ВАХ, що лежить трохи нижче НІН. На слабопохилій частині гілки ($\gamma = 0.08$) динаміка є хаотичною, як було видно з НПЛ залежності (лінія 2 на Рис. 4.8). Спектр потужності складається з широкої смуги [див. Рис. 4.9 (б)] і кількох піків в $\Omega \sim \bar{V}/2, \bar{V}, 3\bar{V}/2$. Середнє падіння напруги тут $\bar{V} = 0.0825$. Інша точка на цій самій

гілці відповідає її вертикальній частині ($\gamma = 0.075$). Динаміка тут регулярна, піки [див. Рис. 4.9 (с)] на $\Omega = n\bar{V}/2$, $n = 1, 2, \dots$ можуть бути легко виявлені в області низьких частот. Існують і інші піки, пов'язані з деякими частотами, що значно нижчі, ніж $\bar{V}$. Отже, відповідні траєкторії є квазіперіодичними.

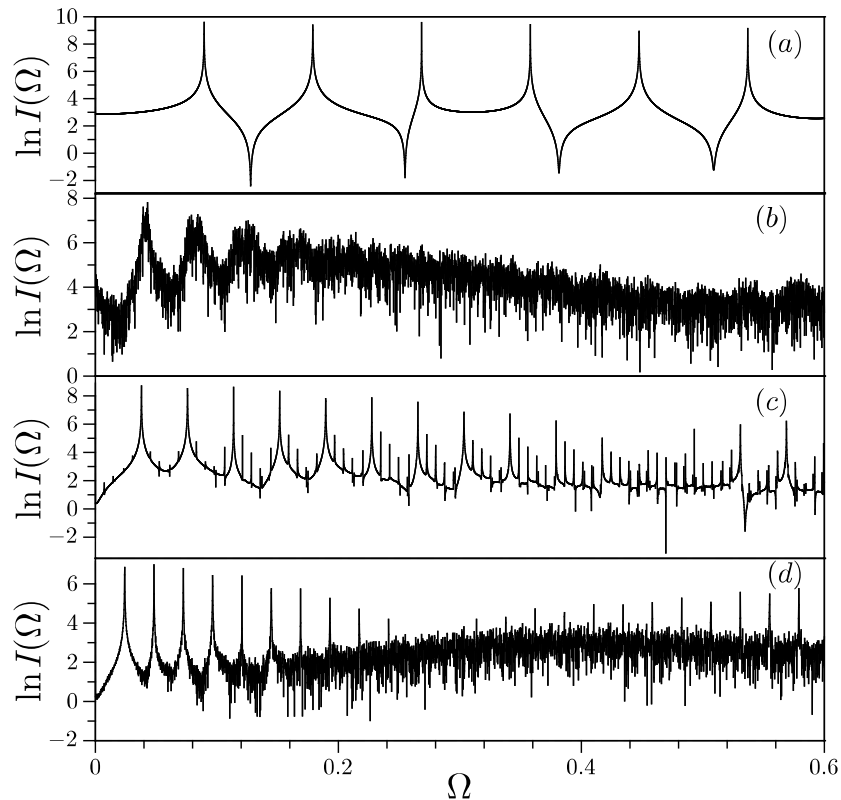


Рис. 4.9 Спектр потужності змінної $d\phi_{N/2}/dt$ для різних значень зовнішнього струму (а) $\gamma = 0.11$, $\bar{V} = 0.1789$; (б) $\gamma = 0.08$, $\bar{V} = 0.08241$; (с) $\gamma = 0.075$, $\bar{V} = 0.07585$; (д) $\gamma = 0.045$, $\bar{V} = 0.04825$.

Нарешті, ближче до першої від початку координат гілки ВАХ на $\gamma = 0.045$ спостерігається хаотична динаміка (див. лінію 3 на Рис. 4.8). Це підтверджується далі спектром потужності, показаним на Рис. 4.9 (д). Тим не менш, піки при $\Omega = n\bar{V}/2$, $n = 1, 2, \dots$ можуть бути виявлені набагато краще в порівнянні з іншим хаотичним випадком, показаним на графіку (б). Також була перевіре-

на динаміка ізольованої гілки, зображеної на Рис. 4.6 (d) при $\alpha = 0.02$. Обидва розрахунки НПЛ і спектральний аналіз показують, що динаміка є хаотичною і спектр потужності аналогічний спектру на Рис. 4.9 (b).

4.4.2.3 Критичний струм відриву

Ретельне дослідження ВАХ демонструє немонотонну залежність критичного струму відриву γ_c від параметра асиметрії η . Критичний струм відриву є мінімальним струмом, який може витримати флюксон, залишаючись в закріпленому стані ($\bar{V} = 0$ на ВАХ). Дійсно, як видно з Рис. 4.7, критичний струм відриву дорівнює $\gamma_c = 0.0695$ для $\eta = 0.3$ і $\gamma_c = 0.267$ для $\eta = 0.6$. На перший погляд це здається дивним і навіть можна припустити, що закріплення флюксона визначається висотою потенціального бар'єру потенціалу подвійного синус-Гордона $V(\phi)$ (4.3.8). Це припущення очевидно не працює, оскільки висота $V(\phi)$ зменшується з ростом η . Крім того, залежність критичного струму γ_c від параметру асиметрії η є немонотонною, як показано на Рис. 4.10. Щоб пояснити таку поведінку було б корисно обчислити ПН потенціал та його бар'єр у вигляді функції η . Концепція потенціалу ПН відома протягом тривалого часу [51] і використовується для опису руху топологічного солітона в дискретних середовищах як інерціальної частинки в полі, створеному просторово-періодичним потенціалом. По суті це є потенціал $V_{PN}(X) = V_{PN}(X + 1)$, де X є центром мас солітону. Отже, ПН бар'єр - це енергетичний бар'єр, який солітон повинен подолати, щоб пройти один вузол решітки. Бар'єр ПН визначається як $\Delta E_{PN} = \max_X[V_{PN}(X)] - \min_X[V_{PN}(X)]$. Якщо $\kappa \gg 1$, потенціал ПН може бути обчислений аналітично [102] і для рівняння ДСГ задовольняє $V_{PN}(X) \propto 1 - \cos X$. У нашому випадку теорія збурень не працює, тому потенціал ПН потрібно обчислювати чисельно. На Рис. 4.10 бар'єр ПН в залежності від параметру асиметрії η показано суцільною чорною лінією. Залежність не є

монотонною і має чіткий мінімум для однієї і тієї ж η , де $\gamma_c(\eta)$ має мінімум.

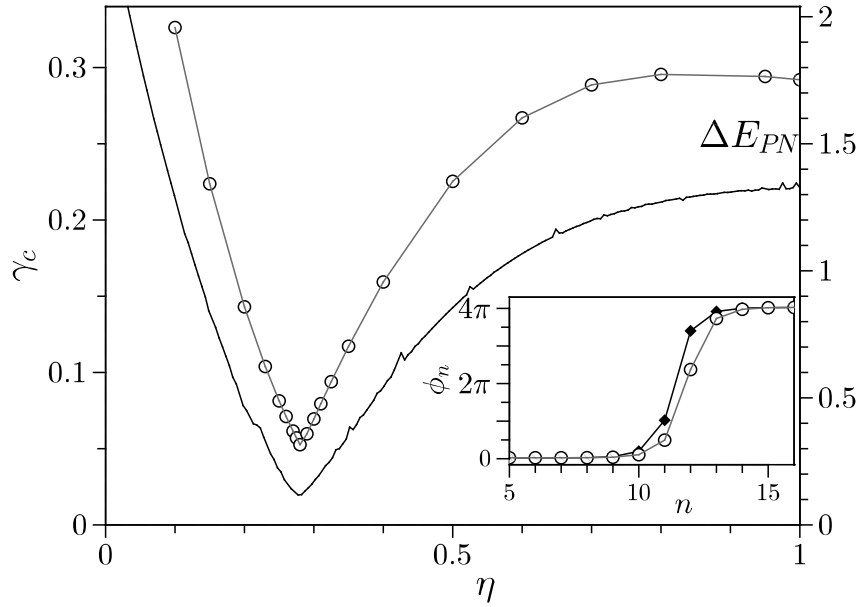


Рис. 4.10 Критичний струм відриву (○) і потенціальний бар'єр ПН (суцільна чорна лінія) як функція параметру асиметрії η для $\kappa = 0.25$. Вставка показує розподіл ϕ_n для закріпленого флюксона при $\eta = 0.26$, $\gamma = 0.07111$ (◆) і $\eta = 0.31$, $\gamma = 0.079$ (○).

Ця немонотонна поведінка бар'єру ПН як функції параметра симетрії (а також константи зв'язку κ) вже відома для інших дискретних систем Клейна-Гордона [103, 79, 80] з потенціалами, які залежать від параметра симетрії. Причина такої залежності полягає в наступному. При певному наборі параметрів ΔE_{PN} обидва, центрований на вузлі і центрований між вузлами, статичні стани солітону є локальними мінімумами повної енергії, в той час як локальний максимум відповідає асиметричній конфігурації, яка є проміжною між центрованим на вузлі та центрованим між вузлами станами. Для цих параметрів функція ΔE_{PN} досягає свого мінімуму. Важливо відзначити, що якщо $\eta = 0$, тобто у випадку звичайного рівняння ДСГ, центрований між вузлами стан завжди є

локальним мінімумом, а центрований на вузлі стан завжди є сідловою точкою. Таким чином, для рівняння ДСГ ΔE_{PN} є просто різниця енергій цих конфігурацій солітону. Вставка на Рис. 4.10 показує закріплений профіль флюксона для $\eta = 0.26$ і $\eta = 0.31$, в той час як залежність $\gamma_c(\eta)$ досягає мінімуму при $\eta \approx 0.28$. В першому випадку центрований між вузлами флюксон є локальним мінімумом енергії, а в останньому випадку - це центрований на вузлі флюксон. Профіль флюксона виглядає трохи асиметрично, тому що відмінний від нуля зсув робить повну потенціальну енергію асиметричною щодо точки $\phi = 0$.

4.5 Висновки

У цьому розділі було показано як особливості руху солітона в дискретних нелінійних моделях Клейна-Гордона можуть проявлятися в реальних системах. Зокрема, розглянута система масиву асиметричних трьохконтактних НКВІН. Цей об'єкт описується дискретним подвійним рівнянням синус-Гордон (ДПСГ). Основний результат можна сформулювати наступним чином. У гамільтоновій границі рівняння ДПСГ дозволяє існування дискретного набору швидкостей солітона (*прозорі швидкості*), з якими можуть поширюватися монотонні солітони. Ці збудження відносяться до сімейства так званих *вкладених* солітонів [86, 87]. Ознаки прозорих швидкостей помітні на ВАХ масиву. Ця ознака - це існування інтервалу напруг, які не може бути отримані внаслідок руху флюксона. Так як падіння напруги пропорційне швидкості флюксона, то можна також говорити про недоступний інтервал швидкостей. Цей інтервал не з'явиться, якщо параметр асиметрії η занадто малий і не існує прозорих швидкостей в гамільтонівській границі. НІН стає більш вираженим, якщо η зростає або якщо коефіцієнт дисипації $\alpha \rightarrow 0$, зокрема, нижній край НІН прямує до ну-

ля поки верхній край прямує до значення $4\pi v/N$, де v – прозора швидкість. Таким чином, продемонстровано існування атрактора, що відповідає солітону, який рухається зі швидкістю, прямуючою до відповідного значення прозорої швидкості (при $\alpha \rightarrow 0$). Рух з даною швидкістю залишається можливим при $\gamma \rightarrow 0$.

Зазначимо, що в попередніх роботах теоретично [53, 79, 81, 104] і експериментально [54] було показано, що в ряді випадків безвипромінювальне ковзання пов’язаної пари з декількох солітонів (4π , 6π , і т.д.) можливе для обраного набору швидкостей. Це явище було досліджене аналітично в квазіконтинуальному наближенні [87, 88], але це також має місце навіть у досить дискретному масиві ($\kappa < 1$). У межах $\eta \rightarrow \infty$ подвійний потенціал синус-Гордона в (4.3.8) стає звичайним потенціалом синус-Гордона з періодом 2π , таким чином, вищевказаний результат зв’язаного стану двох солітонів є особливим випадком рухливості солітону в рівнянні ДПСГ з межами $\eta \rightarrow \infty$.

Ще одним важливим результатом є значне зниження критичного струму закріплення у зв’язку зі зміною η . Пояснення засноване на нетривіальній залежності бар’єру Пайерлса-Набарро (ПН) від параметра асиметрії. Аналогічні результати по зниженню бар’єру для солітонів були отримані раніше для інших дискретних моделей [90, 103, 105].

Варто зазначити, що рівняння ДПСГ (4.2.5) описує також іншу систему – паралельний масив джозефсонівських переходів, що мають бігармонічну струм-фазову залежність $I_c(\phi) = I_{c,1} \sin \phi + I_{c,2} \sin 2\phi$ [106] [тут потрібно виконати заміну $\phi \rightarrow \phi/2$, щоб отримати рівняння (4.2.5)]. Це, зокрема, стосується надпровідник-ферромагнетик-надпровідник (SFS) і надпровідник-ферромагнетик-діелектрик-надпровідник (SFIS) переходів. Природньо, що явища, розглянуті в цьому розділі, застосовуються до масивів SFS і SFIS переходів.

ВИСНОВКИ

В дисертації досліджено вплив просторової неоднорідності та дискретності на динаміку солітону в джозефсонівському переході. Зокрема, розглянуто двовимірний джозефсонівський контакт з просторовими неоднорідностями різної форми та розміру у ньому, а також асиметричний масив точкових контактів.

Сформулюємо основні оригінальні результати, отримані в роботі:

- Отримано функцію спектральної густини випромінювання, яке виникає внаслідок взаємодії флюксона з просторовими неоднорідностями в довгому джозефсонівському переході. При великих швидкостях флюксона ця функція розподіляється на дві симетричні частини, що свідчить про інтенсивне випромінювання в сторони від напрямку руху флюксона. Показано, що отримані результати в граничних випадках відтворюють раніше отримані значення густини енергії.

- Знайдено залежність випроміненої енергії від швидкості флюксона, що може мати локальні максимуми і мінімуми, кількість і величина яких залежать від геометричних параметрів домішки, а їх поява пояснюється інтерференцією випромінених хвиль. Таким чином, довжина домішки, яка створює різницю ходу хвиль, що призводить до виникнення інтерференції, впливає на кількість максимумів енергії випромінювання. Ширина домішки, в свою чергу, змінює ефективну площу взаємодії з солітоном, що призводить до відповідної зміни величини випроміненої енергії.

- За допомогою кінематичних міркувань встановлена залежність струму закріплення флюксона на дефектах від ширини контакту, значення струму закріплення зменшується зі зростанням ширини переходу приблизно як $w^{-1/2}$, де w - ширина контакту. Чисельне моделювання підтримує цю залежність для

проміжних (декілька джозефсонівських глибин проникнення) значень w , при збільшенні ширини контакту використане припущення про відсутність деформації солітону в перпендикулярному напрямку перестане працювати.

- За допомогою чисельного моделювання динаміки флюксона в контакті продемонстровано, що поперечна ступінь вільності слабо впливає на деформацію форми солітона, але суттєво змінює процес випромінювання, яке виникає внаслідок взаємодії з просторовими неоднорідностями. Показано, що при взаємодії з неоднорідністю солітон деформується в поперечному напрямі, а вздовж його фронту виникають додаткові осциляції, які затухають з часом. Цей час залежить від дисипації в системі, при великій дисипації затухання проходить швидко і солітон відновлює свою початкову форму. Величина деформації також залежна від розмірів просторової неоднорідності, які впливають на час і площу взаємодії з солітоном.

- Побудовано вольт-амперні характеристики контактів з просторовими неоднорідностями різної форми, які суттєво змінюються в порівнянні з однорідним випадком. Внаслідок просторової неоднорідності виникає відхилення від ВАХ однорідного контакту. Можуть виникати максимуми і мінімуми падіння напруги, кількість і величина яких так само пов'язана з розмірами та формою домішки, а її амплітуда лише якісно впливає на відхилення кривої від неоднорідності.

- В асиметричному масиві точкових джозефсонівських контактів, який описується дискретним подвійним рівнянням синус-Гордона, можуть існувати «вкладені» солітони, що рухаються без випромінювання для певного дискретного набору «прозорих» швидкостей. Ознаки цих швидкостей помітні на ВАХ масиву, де існує недопустимий інтервал напруг, величина якого залежить від параметру асиметрії потенціалу та дисипації в середовищі. Це також свідчить

про відсутність рухливості флюксона для певних інтервалів швидкостей. Для появи недоступного інтервалу необхідне існування хоча б однієї прозорої швидкості в гамільтонівській границі рівняння ДПСГ. Аналіз підтвердив можливість періодичного руху флюксона навколо масиву на значеннях напруг, які лежать найближче до значення, що відповідає прозорій швидкості в гамільтонівській границі.

- Показано, що критичний струм відриву флюксона в асиметричному масиві точкових джозефсонівських переходів залежить від параметру асиметрії переходу таким же чином, як і потенціал Пайерлса-Набарро, який також використовується для опису руху солітона в дискретному середовищі.

ДОДАТКИ

Додаток А. Розрахунок порогового струму закріплення

Опишемо детальніше процес розрахунку порогового струму закріплення флюксона на неоднорідностях різної геометричної форми. В основі розрахунків лежить метод балансу енергії, використаний і описаний в [6] та [9]. Основна ідея методу полягає в тому, що в найпростішому наближенні для існування мінімальної можливості проходження флюксона через неоднорідність його кінетична енергія повинна бути рівною максимуму потенціального бар'єру, що створює домішка, тобто $E_k = U_{max}$, проте основна мета полягає в знаходженні поправок до цього рівняння та в його покращенні.

Легко бачити, що підставивши в обезрозмірене рівняння СГ наступний анзац: $\phi_0(x, y; t) = 4 \arctan \exp\{[x - X(y, t)] / \sqrt{1 - v^2}\}$, де $X(y, t)$ – координата центру мас флюксона, яка слабо змінюється в напрямку y , отримаємо ньютонівське рівняння руху на координату центру мас, що залежить лише від часу

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + m\alpha \frac{dX}{dt} + \frac{\partial U(X)}{\partial X} = 0, \quad U(X) = -2\pi\gamma X + U_0(X), \quad (\text{A.1})$$

де U_0 є деякий ефективний потенціал, що створює просторова неоднорідність. Таким чином, флюксон можна розглядати як частинку, що рухається в полі деякого потенціалу під дією зовнішнього струму. Домножимо це рівняння на $\frac{dX}{dt}$ та зазначимо, що $m \frac{d^2 X}{dt^2} \frac{dX}{dt} = \frac{dE_k}{dt}$. Проінтегруємо отримане рівняння по всьому інтервалу часу від $t = -\infty$ до зупинки солітону на вершині потенціалу $U(X)$, враховуючи що в початковий момент часу солітон мав рівноважну швидкість. В результаті, переходимо від інтегрування по часу до інтегрування по координаті

центру мас:

$$-m\frac{v_\infty^2}{2} = \int_{-\infty}^{X_{max}} \left(2\pi\gamma - m\alpha \frac{dX}{dt} \right) dX - U_0(X_{max}), \quad (\text{A.2})$$

де $v_\infty = [1 + (4\alpha/(\pi\gamma))^2]^{-1/2}$ є рівноважна швидкість флюксона, якщо $v_\infty \ll 1$, то $v_\infty \approx \frac{\pi\gamma}{4\alpha}$, а $m = 8$ в одновимірному випадку. Варто також зазначити, що далеко від домішки кінетична енергія флюксона є: $E_k = m [(1 - v_\infty^2)^{-1/2} - 1]$.

Тепер можна зробити висновок, що доданок під інтегралом описує зміну енергії внаслідок дисипації і є поправкою до рівняння балансу енергії. Отже, втрата енергії через дисипацію описується загальним виразом:

$$\Delta E = m\alpha \int_{-\infty}^{X_{max}} (v_\infty - \dot{X}) dX, \quad (\text{A.3})$$

Покращене рівняння балансу енергії, яке є основним в цьому розрахунку, запишеться у вигляді:

$$E_k(X = -\infty) + \Delta E = U(X_{max}) \quad (\text{A.4})$$

Потенціал, який створює домішка може бути знайдений за допомогою результатів солітонної теорії збурень, розробленої Маклафлінім і Скотом в [5], де отримані рівняння динаміки солітона.

Тепер перейдемо до безпосереднього розрахунку порогового струму закріплення за допомогою модифікованого рівняння балансу енергії.

Точкова неоднорідність. Розглянемо N ідентичних точкових неоднорідностей, розташованих вздовж прямої лінії на однаковій відстані одна від одної. Ці домішки описуються функцією $f(x, y) = \sum_{n=1}^N \mu_I \delta(x - a_n) \delta(y - b_n)$, де $a_n = L/2$, $b_n = w/2$, $n = 1, 2, \dots, N$. Працюватимемо лише з коефіцієнтом μ_I , тому надалі індекс I не ставиться для скорочення кількості символів в розрахунках. Кожна окрема неоднорідність створює потенціал вигляду: $U(X) = 2\mu \text{sech}^2 X - 2\pi\gamma X$. Як відомо, в одновимірному випадку маса флюксона $m = 8$, якщо ж ми розглядаємо двовимірний контакт, то масу необхідно

перемасштабувати як $m = 8w/N$. Введемо нові позначення: $\bar{\mu} = \frac{\mu N}{w}$ та $\bar{\gamma} = \frac{\gamma N}{w}$. З урахуванням цього рівняння А.4 набуває вигляду:

$$E_k + \Delta E = 2\bar{\mu}\text{sech}^2 X_{max} - 2\pi\bar{\gamma}X_{max}. \quad (\text{A.5})$$

За умови, що $\gamma \ll \alpha \ll \mu$, кінетична енергія флюксона запишеться як $E_k = 4v_\infty^2 \approx \left(\frac{\pi\gamma}{2\alpha}\right)^2$. В першому наближенні пороговий струм можна визначити прирівнявши кінетичну енергію флюксона до максимальної висоти потенціального бар'єру: $4v_\infty^2 = 2\bar{\mu}$, $\gamma = 2\alpha\sqrt{2\bar{\mu}}/\pi$. З іншого боку, кінетична енергія флюксона після подолання неоднорідності: $4\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 = 4v_\infty^2 - \bar{U}(X)$, звідки, підставляючи явний вигляд потенціалу $\bar{U}(X)$ знаходимо:

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 = \left(\frac{\pi\gamma}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\bar{\mu}}{2}\text{sech}^2 X + \frac{\pi}{2}\bar{\gamma}X \approx \frac{\bar{\mu}}{2}\tanh^2 X \quad (\text{A.6})$$

Використовуючи вираз А.6, отримуємо вигляд поправки, що описує втрати енергії солітона внаслідок дисипації:

$$\begin{aligned} \Delta E &= 8\alpha w N^{-1} \int_{-\infty}^{X_{max}} \left(v_\infty - \frac{dX}{dt}\right) dX \approx \\ &\approx 8\alpha \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{2}} \int_{X_{min}}^{X_{max}} \tanh X dX \approx 4\alpha \ln 2 \sqrt{2\mu N/w}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

де $X_{min} \simeq -\ln(\mu/\gamma)/2$, $X_{max} \simeq -\pi\gamma/(2\mu)$ є відповідно мінімумом і максимумом потенціалу $U(X)$. Тут також використана умова малості параметру γ/μ , внаслідок чого можна розкласти в ряд: $\ln \cosh \frac{\pi\gamma}{2\mu} \approx \ln \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\pi\gamma^2}{2\mu}\right) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\pi\gamma}{2\mu}\right)^2$. Підставляючи (А.7) в (А.5), можемо записати модифіковане рівняння балансу енергії:

$$\left(\frac{\pi\gamma}{2\alpha}\right)^2 + 8\alpha \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{2}} \ln 2 = 2\bar{\mu}\text{sech}^2 \frac{\pi\gamma}{2\mu} + \frac{(\pi\bar{\gamma})^2}{\bar{\mu}}. \quad (\text{A.8})$$

Врахуємо, що $\text{sech}^2\left(\frac{\pi\gamma}{2\mu}\right) \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi\gamma}{2\mu}\right)^2$, введемо наступні позначення:

$$G = \frac{\pi\gamma}{2\mu}, \quad \Gamma = \alpha \sqrt{\frac{2}{\mu}}, \quad \eta = \sqrt{\frac{N}{w}}, \quad (\text{A.9})$$

та залишаючи члени першого порядку малості, рівняння A.8 перепишеться у вигляді:

$$\left(\frac{G}{\Gamma}\right)^2 + 2\eta\Gamma \ln 2 = \eta^2. \quad (\text{A.10})$$

Варто зауважити, що в першому наближенні пороговий струм може бути отриманий нехтуванням другого доданку в (A.10), який виникає внаслідок врахування дисипативних втрат енергії, тоді маємо: $G = \eta\Gamma$. Наша ж задача полягає в знаходженні наступної поправки до коефіцієнту струму, для цього запишемо його як: $G = \eta(\Gamma + \Delta\Gamma)$, $\Delta\Gamma \ll \Gamma$. Підставляючи цей вираз в рівняння (A.10) та нехтуючи членами вищих порядків, одержимо:

$$G = \Gamma - \frac{\Gamma^2}{\eta} \ln 2. \quad (\text{A.11})$$

Записуючи дане рівняння в початкових позначеннях, отримуємо з нього остаточний уточнений вираз для струму закріплення флюксона на N точкових неоднорідностях в довгому двовимірному джозефсонівському переході:

$$\gamma_{thr} = \frac{\alpha}{\pi} \left(\sqrt{\frac{8\mu N}{w}} - 4\alpha \ln 2 \right). \quad (\text{A.12})$$

Стрічкоподібна неоднорідність. Відмінністю випадку стрічкоподібної неоднорідності є необхідність перемасштабування маси, амплітуди домішки та струму наступним чином: $m = 8w/d_y$, $\bar{\mu} = \frac{\mu d_y}{w}$, $\bar{\gamma} = \frac{\gamma d_y}{w}$. Тоді рівняння балансу енергії в цих позначеннях має той самий вигляд, що і у випадку точкової неоднорідності (A.5). У введених раніше позначеннях: $G = \frac{\pi\gamma}{2\mu}$, $\Gamma = \alpha\sqrt{\frac{2}{\mu}}$ рівняння балансу енергії з урахуванням доданків лише першого порядку малості приймає вигляд:

$$\left(\frac{G}{\Gamma}\right)^2 + 2\eta\Gamma \ln 2 = \eta^2, \quad \eta = \sqrt{\frac{d_y}{w}}, \quad \eta \ll 1. \quad (\text{A.13})$$

Враховуючи наступну поправку для струму: $G = \eta(\Gamma + \Delta\Gamma)$, отримаємо вираз для коефіцієнту струму: $G = \eta\Gamma - \Gamma^2 \ln 2$. Тепер легко знайти значення

порогового струму закріплення флюксона на стрічкоподібній неоднорідності:

$$\gamma_{thr} = \frac{\alpha}{\pi} \left(\sqrt{\frac{8\mu d_y}{w}} - 4\alpha \ln 2 \right). \quad (\text{A.14})$$

Прямокутна неоднорідність. Флюксон «відчуває» прямокутну неоднорідність у вигляді потенціалу: $U(X) = 2\mu[\tanh(X + d_x/2) + \tanh(d_x/2 - X)] - 2\pi\gamma X$. В першому наближенні рівняння балансу енергії запишеться у вигляді: $mv_\infty^2/2 = 4\mu \tanh(d_x/2)$. Враховуючи, що маса флюксона у цьому випадку є $m = \frac{8w}{d_y}$, то струм закріплення має вигляд: $\gamma = 4\frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{\mu d_y}{w} \tanh(d_x/2)}$. Знайдемо тепер поправку до цього виразу, врахувавши втрати енергії через дисипацію. Як і в попередніх випадках позначимо: $\bar{\mu} = \frac{\mu d_y}{w}$, $\bar{\gamma} = \frac{\gamma d_y}{w}$.

При великих значеннях d_x домішка створює сходинкоподібний потенціал вигляду $U(X) = 2\bar{\mu}(\tanh X + 1) - 2\pi\bar{\gamma}X$, який має максимум $X_{max} = \text{arcsech} \sqrt{\pi\bar{\gamma}/\bar{\mu}}$ та мінімум $X_{min} = -\text{arcsech} \sqrt{\pi\bar{\gamma}/\bar{\mu}}$. Як і раніше, залишати-мемо лише доданки першого порядку малості, враховуючи: $\gamma \ll \alpha \ll \mu$. Тоді $X_{max} = \ln \left(2\sqrt{\frac{\mu}{\pi\gamma}} \right)$, $\tanh(X_{max}) \approx 1$. Кінетична енергія флюксона після подолання неоднорідності:

$$4\frac{w}{d_y} \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 = 4\frac{w}{d_y} v_\infty^2 - U(X). \quad (\text{A.15})$$

Втрати енергії через дисипацію:

$$\begin{aligned} \Delta E &= 8\alpha \int_{X_{min}}^{X_{max}} \left(v_\infty - \sqrt{v_\infty^2 - \frac{1}{4}U(X)} \right) dX = \\ &\approx 8\alpha\bar{\mu} [2X_{max} - (\text{arcsinh} e^{X_{max}} - \text{arcsinh} e^{-X_{max}})] \approx 4\alpha\sqrt{\bar{\mu}} \ln \left(\frac{\mu}{\pi\gamma} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Введемо позначення: $G = \frac{\pi\gamma}{4\mu}$, $\Gamma = \frac{\alpha}{\sqrt{\mu}}$, $\eta = \sqrt{\frac{d_y}{w}}$ та запишемо рівняння балансу енергії (A.4), яке в даному випадку має вигляд:

$$\left(\frac{G}{\Gamma} \right)^2 - \eta\Gamma \ln 4G - \eta^2 G \ln G = \eta^2. \quad (\text{A.17})$$

Тепер знайдемо наступну поправку до коефіцієнту струму, представивши його у вигляді: $G = \eta(\Gamma + \Delta\Gamma)$ та підставивши в рівняння (A.17) з урахуванням доданків порядку $O(\Gamma)$ отримаємо:

$$2\eta\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma} \approx \Gamma \ln 4 + [(1 + \eta)\Gamma + \eta\Delta\Gamma] \ln \left[\eta\Gamma \left(1 + \frac{\Delta\Gamma}{\Gamma} \right) \right] \quad (\text{A.18})$$

Врахуємо, що $\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma} \ll 1 \ll \ln(\eta\Gamma)$ та розкладемо в ряд $\ln \left(1 + \frac{\Delta\Gamma}{\Gamma} \right) \approx \frac{\Delta\Gamma}{\Gamma}$, тоді маємо:

$$2\Delta\Gamma \approx \Gamma^2(1 + \eta) \ln(\eta\Gamma) + \Gamma \ln 4. \quad (\text{A.19})$$

Також слід зазначити, що $\Gamma\eta \ll \Gamma$ та $\ln(\eta\Gamma) \gg \ln 4$, при цьому остаточно отримаємо $\Delta\Gamma \approx \frac{\Gamma^2}{2} \ln(\eta\Gamma)$. З урахуванням цієї поправки знаходимо вираз для струму закріплення флюксона на прямокутній неоднорідності великої довжини d_x в довгому джозефсонівському переході ширини w :

$$\gamma_{thr} = \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{d_y}{w}} \left[4\sqrt{\mu \tanh d_x/2} - \alpha \ln \left(\frac{\mu w}{d_y \alpha^2} \right) \right]. \quad (\text{A.20})$$

Тепер розглянемо випадок домішки малої довжини ($d_x \rightarrow 0$). В цій границі можна використати наступне наближення:

$$\begin{aligned} U(X) &= 2\mu[\tanh(X + d_x/2) + \tanh(d_x/2 - X)] - 2\pi\gamma X = \\ &= \frac{2\mu \sinh d_x}{(\cosh^2 X + \sinh^2(d_x/2))} - 2\pi\gamma X \approx 2\mu d_x \text{sech}^2 X - 2\pi\gamma X + O(d_x^2). \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Легко бачити, що цей потенціал є аналогічним потенціалу, який створює стрічкоподібна неоднорідність, а єдина відмінність полягає у присутності коефіцієнта d_x перед першим доданком. Тому весь розрахунок порогового струму закріплення можна провести аналогічно. Тут втрати енергії на дисипацію становлять: $\Delta E = 8\alpha \sqrt{\frac{\mu d_x d_y}{2w}} \ln 2$. Рівняння балансу енергії у раніше введених змінних G , Γ та коефіцієнті $\eta = \sqrt{\frac{d_x d_y}{w}}$ записується у вже знайомому вигляді: $(G/\Gamma)^2 + 2\eta\Gamma \ln 2 = \eta^2$. Виконуючи описані вище операції знаходимо пороговий

струм закріплення флюксона на прямокутній неоднорідності малої довжини d_x в довгому джозефсонівському переході ширини w :

$$\gamma_{thr} = \frac{\alpha}{\pi} \left[\sqrt{\frac{8\mu d_x d_y}{w}} - 4\alpha \ln 2 \right]. \quad (\text{A.22})$$

Додаток Б. Псевдоспектральний метод

Існує проблема розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь із затримкою і випередженням типу (Б.1) та знаходження розв'язків у вигляді біжучої хвилі в нелінійній ґратці. На жаль, немає чіткої аналітичної техніки знаходження розв'язків таких рівнянь, тому доводиться використовувати чисельні методи. Один з методів знаходження солітонних розв'язків рівнянь такого вигляду був розроблений в роботах [93], [94], [95] і базується на методі Гальоркіна. Цей метод може використовуватися як для локалізованих солітонів, так і для періодичних хвиль. З його допомогою можна отримати потрібні солітонні розв'язки розглянутого в параграфі 4.3.2 диференціального рівняння вигляду:

$$v^2 \frac{d^2 \phi(z)}{dz^2} - \kappa [\phi(z+1) + \phi(z-1) - 2\phi(z)] - \frac{\partial V[\phi(z)]}{\partial \phi} = 0. \quad (\text{Б.1})$$

Шукаємо солітонний розв'язок, який задовольняє граничним умовам:

$$\phi(-\infty) = a_1, \quad \phi(+\infty) = a_2, \quad (\text{Б.2})$$

де a_1 і a_2 - це значення двох сусідніх локальних мінімумів потенціалу $V(\phi)$. Основна ідея методу полягає в тому, щоб шукати розв'язок рівняння (Б.1) у вигляді ряду Фур'є:

$$\phi(z) \simeq \phi_0(z) + \sum_{p=1}^k c_p \phi_p(z), \quad (\text{Б.3})$$

де $\phi_p(z)$ є базисними функціями, які можуть бути синусами або косинусами в залежності від симетрії розв'язку. Цей розклад записується для деякого достатньо

великого цілого k , а коефіцієнти c_p , $p = 1, \dots, N$ мають визначатися. Тут $\phi_0(z)$ є нульове наближення, яке також дозволяє використати синус-перетворення Фур'є, тому що можна зробити залишок невідомої функції асиметричним.

Надалі просто шукаємо періодичний розв'язок $\phi(z)$ з заданим періодом L на інтервалі $z \in [-L/2, L/2]$, тоді L є довжиною хвилі. У випадку усамітненої хвилі припускається, що ця функція періодична по z з дуже великим періодом L , так що вплив границь буде незначним. Отже, базисні функції $\phi_p(z)$ обираються такими ж, як і в синус-перетворенні Фур'є, тобто, $\phi_p(z) = \sin(2\pi pz/L)$. Початкове наближення $\phi_0(z)$ для загального односолітонного розв'язку представляється у вигляді:

$$\phi_0(z) = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} \tanh(\mu z), \quad (\text{Б.4})$$

де μ є пробним параметром, що описує ширину одного солітона і буде визначатися надалі для кожної окремої ітерації за допомогою використання різноманітних методів мінімізації. Відстань D між двома сусідніми мінімумами потенціалу $V(\phi)$ також можна представити в термінах топологічного заряду Q наступним чином: $D = |(a_2 - a_1)/Q|$.

Підставляємо анзац (Б.3) в початкове диференціальне рівняння і розділимо інтервал $[-L/2, L/2]$ на k точок колокації (зазвичай шукані розв'язки є симетричними, тому можна обмежитися інтервалом $[0, L/2]$):

$$z_i = \frac{iL}{2(k+1)}. \quad (\text{Б.5})$$

Після чого отримуємо систему k нелінійних алгебраїчних рівнянь на невідомі коефіцієнти, які можуть бути розв'язані за допомогою різних модифікацій методу Ньютона. Після знаходження коефіцієнтів c_p відновлюємо форму функції $\phi(z)$. Якщо цікавитись лише монотонними розв'язками, то потрібно відкидати розв'язки, які супроводжуються осцилюючими хвостами. Для цього розрахову-

ється функція:

$$\varepsilon = \int_{L/2-\xi}^{L/2} |\phi(z) - a_1| dz, \quad (\text{Б.6})$$

яка вимірює амплітуду осцилюючого хвоста в правій частині інтервалу ξ . Довжина цього інтервалу була обрана $\xi = L/8$. Для монотонних (безосциляторних) розв'язків функція (Б.1) повинна бути дуже близькою до нуля і в границі $L \rightarrow \infty$ ця функція прямує до нуля. Хвости солітону спадають досить повільно, тому, щоб впевнитися, що функція $\phi(z)$ є достатньо «горизонтальною», обираємо L рівною приблизно $10\phi'(0)|a_1 - a_2|$. Чисельно знайдено, що для безосциляторного солітонного розв'язку ε майже не відрізняється від машинного нуля. Мінімізуючи її для кожного значення параметрів системи, знайдемо необхідне значення швидкості v і відповідний монотонний профіль, в той же час функція (Б.6) досягає мінімуму, який також майже дорівнює нулю.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Филиппов А. Т. Многоликий солитон / А. Т. Филиппов. — Москва: Наука, 1990. — P. 288.
2. Barone A. Physics and Applications of the Josephson Effect / A. Barone, G. Paterno. — New York: Wiley, 1982. — P. 551.
3. Likharev K. K. Dynamics of Josephson Junctions and Circuits / K. K. Likharev. — New York: Gordon and Breach, 1986. — P. 614.
4. Quantum tunneling of semifluxons in a $0 - \pi - 0$ long Josephson junction / E. Goldobin, K. Vogel, O. Crasser et al. // Phys. Rev. B. — 2005. — Vol. 72. — P. 054527.
5. McLaughlin D. W. Perturbation analysis of fluxon dynamics / D. W. McLaughlin, A. C. Scott // Phys. Rev. A. — 1978. — Vol. 18, no. 4. — P. 1652.
6. Kivshar Yu. S. Interaction of fluxon with localized inhomogeneity in a long Josephson junction / Yu. S. Kivshar, B. A. Malomed, A. A. Nepomnyashchy // JETP. — 1988. — Vol. 94. — P. 356–365.
7. Косевич А. М. Рассеяние флаксона на границе раздела двух длинных джозефсоновских контактов / А.М. Косевич, Ю.С. Кившарь, О.А. Чубыкало // Физ. Низ. Темп. — 1987. — Vol. 13. — P. 800–808.
8. Kivshar Y. S. Finite-size effects in fluxon scattering by an inhomogeneity / Y. S. Kivshar, A. M. Kosevich, O. A. Chubykalo // Phys. Lett. A. — 1988. — Vol. 129. — P. 449–452.

9. Kivshar Yu. S. Interaction of a fluxon with an inductance step in a long Josephson junction / Yu. S. Kivshar, B.A. Malomed // J. Appl. Phys. — 1989. — Vol. 65. — P. 879–881.
10. Malomed B. A. Pinning of a fluxon chain in a long Josephson junction with a lattice of inhomogeneities: Theory and experiment / B. A. Malomed, A. V. Ustinov // J. Appl. Phys. — 1990. — Vol. 67. — P. 3791–3797.
11. Mineev M. B. Motion of a Josephson vortex in the field of a random potential / M.B. Mineev, M.V. Feigel'man, V.V. Shmidt // Sov. Phys. JETP. — 1981. — Vol. 54. — P. 155.
12. Christiansen P. L. Numerical study of 2+1 dimensional sine-Gordon solitons / P. L. Christiansen, P. S. Lomdahl // Physica D. — 1981. — Vol. 2. — P. 482.
13. How good are onedimensional Josephson junction models? / P. S. Lomdahl, O. H. Olsen, J. C. Eilbeck, M. R. Samuelsen // J. Appl. Phys. — 1985. — Vol. 57. — P. 997–1000.
14. Soliton dynamics in two-dimensional Josephson tunnel junctions / S. G. Lachenmann, G. Filatrella, T. Doderer et al. // Phys. Rev. B. — 1993. — Vol. 48. — P. 16623 – 16629.
15. Averin D. V. Rapid ballistic readout for flux qubits / D. V. Averin, K. Rabenstein, V. K. Semenov // Phys. Rev. B. — 2006. — Vol. 73. — P. 094504.
16. Dynamics of circular arrays of Josephson junctions and the discrete sine-Gordon equations / S. Watanabe, H. S. J. van der Zant, S. H. Strogatz, T. P. Orlando // Physica D. — 1996. — Vol. 97. — P. 429–470.

17. Ustinov A. V. Fluxon dynamics in one-dimensional Josephson-junction arrays / A. V. Ustinov, M. Cirillo, B. A. Malomed // Phys. Rev. B. — 1993. — Vol. 47. — P. 8357–8360.
18. Ballistic vortices in Josephson-junction arrays / H.S.J. van der Zant, F.C. Fritshy, T.P. Orlando, J.E. Mooji // Europhys. Lett. — 1992. — Vol. 18. — P. 343.
19. Reading out the state of a flux qubit by Josephson transmission line solitons / A. Fedorov, A. Shnirman, G. Schon, A. Kidiyarova-Shevchenko // Phys. Rev. B. — 2007. — Vol. 75, no. 22. — P. 224504.
20. Shape waves in 2d Josephson junctions: Exact solutions and time dilation / D. R. Gulevich, F. V. Kusmartsev, S. Savelév et al. // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 101. — P. 127002(4).
21. Shape and wobbling wave excitations in Josephson junctions: Exact solutions of the (2+1)-dimensional sine-Gordon model / D. R. Gulevich, F. V. Kusmartsev, S. Savelév et al. // Phys. Rev. B. — 2009. — Vol. 80. — P. 094509(13).
22. Starodub I. O. Scattering of quasi-one-dimensional solitons on impurities in large Josephson junctions / I. O. Starodub, Y. Zolotaryuk // Physics Letters A. — 2012. — Vol. 376, no. 45. — P. 3101 – 3107.
23. Starodub I. O. Fluxon scattering on a stripe-like impurity in a two-dimensional Josephson junction / I. O. Starodub, Y. Zolotaryuk // Ukr. J. Phys. — 2013. — Vol. 58, no. 7. — P. 687–696.
24. Стародуб І. О. Випромінювання при взаємодії флюксона з прямокутною домішкою в двовимірному джозефсонівському переході / І. О. Стародуб, Я.О. Золотарюк // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика. — 2014. — Vol. 35. — P. 196.

25. Starodub I. O. Radiation emission due to fluxon scattering on an inhomogeneity in a large two-dimensional Josephson junction / Ivan O. Starodub, Yaroslav Zolotaryuk // Phys. Rev. B. — 2014. — Vol. 90. — P. 224509.
26. Zolotaryuk Y. Fluxon mobility in an array of asymmetric superconducting quantum interference devices / Yaroslav Zolotaryuk, Ivan O. Starodub // Phys. Rev. E. — 2015. — Vol. 91. — P. 013202.
27. Zolotaryuk Ya. O. Fluxon scattering on impurities in a long quasi-one-dimensional Josephson junction / Ya.O. Zolotaryuk, I.O. Starodub // International Conference for Young Scientists: Low Temperature Physics, 14-18 May 2012: Conference program and Abstract book. — Ukraine, Kharkiv, 2012. — P. 72.
28. Starodub I. O. Fluxon dynamics in the long quasi-one-dimensional Josephson junction with impurities / I.O. Starodub, Y. Zolotaryuk // International Conference: Problems of Theoretical Physics, October 8-11: Program and Proceedings. — Ukraine, Kyiv, 2012. — P. 107.
29. Starodub I. O. Josephson vortex behavior in the long quasi-one-dimensional Josephson junction with inhomogeneities / I.O. Starodub, Y. Zolotaryuk // Modern Problems of Theoretical Physics: IV Young Scientists Conference, October 23-26: Program and Abstracts. — Ukraine, Kyiv, 2012. — P. 65.
30. Стародуб І. О. Взаємодія флюксона з прямокутною домішкою в двовимірному джозефсонівському переході / І.О. Стародуб, Я.О. Золотарюк // Міжнародна конференція молодих учених і аспірантів: ІЕФ-2013, 20-23 травня: Програма і тези доповідей. — Україна, Ужгород, 2013. — P. 186.

31. Josephson B. D. Possible new effects in superconductive tunneling / B.D. Josephson // Phys. Lett. — 1962. — Vol. 1, no. 7. — P. 251–253.
32. Anderson P. W. Probable observation of the Josephson superconducting tunnel effect / P.W. Anderson, J.M. Rowell // Phys. Rev. Lett. — 1963. — Vol. 10, no. 6. — P. 230–232.
33. Ustinov A. V. Solitons in Josephson junctions / A. V. Ustinov // Physica D. — 1998. — Vol. 123, no. 1-4. — P. 315–329.
34. Rubinstein J. Sine-Gordon Equation / J. Rubinstein // J. Math. Phys. — 1970. — Vol. 11. — P. 258–266.
35. Geicke J. Cylindrical pulsons in nonlinear relativistic wave equations / J. Geicke // Physica Scripta. — 1984. — Vol. 29. — P. 431.
36. Christiansen P. L. Return effect for rotationally symmetric solitary wave solutions to the sine-Gordon equation / P. L. Christiansen, O. H. Olsen // Phys. Lett. A. — 1978. — Vol. 68. — P. 185.
37. Benabdallah A. The window Josephson junction: a coupled linear nonlinear system / A. Benabdallah, J. G. Caputo, N. Flytzanis // Physica D. — 2002. — Vol. 161. — P. 79.
38. Caputo J. G. Two point Josephson junctions in a superconducting stripline: static case / J. G. Caputo, Y. Gaididei // Physica C. — 2004. — Vol. 402. — P. 160.
39. Malomed B. A. Dynamics of quasi-one-dimensional kinks in the two-dimensional sine-Gordon model / B. A. Malomed // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1991. — Vol. 52. — P. 157 – 170.

40. Shape Waves in 2D Josephson Junctions: Exact Solutions and Time Dilation / D.R. Gulevich, F. V. Kusmartsev, Sergey Savel'ev et al. // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 101. — P. 127002.
41. Piette B. Scattering of topological solitons on holes and barriers / B. Piette, W.J. Zakrzewski, J. Brand // J. Phys. A: Math. Gen. — 2005. — Vol. 38. — P. 10403.
42. Pinned fluxons in a Josephson junction with a finite length inhomogeneity / G. Derks, A. Doelman, C.J.K. Knight, H. Susanto // Eur. J. Appl. Math. — 2012. — Vol. 23. — P. 201–244.
43. Sakai S. Fluxon transfer devices / S. Sakai, H. Akoh, H. Hayakawa // Japan. J. Appl. Phys. — 1985. — Vol. 24. — P. L771.
44. Real time fluxon dynamics in Josephson transmission line / H. Akoh, S. Sakai, A. Yagi, H. Hayakawa // IEEE Trans.Magn. — 1985. — Vol. 21. — P. 737.
45. Serpuchenko I. L. Experimental observation of the fine structure on the current-voltage characteristics of long Josephson junctions with a lattice of inhomogeneities / I.L. Serpuchenko, A.V. Ustinov // Sov. Phys. JETP Lett. — 1987. — Vol. 46. — P. 549.
46. Scott A. C. Magnetic-flux propagation on a Josephson transmission line / A. C. Scott, F. Y. F. Chu, S. A. Reible // Journ. Appl. Phys. — 1976. — Vol. 47. — P. 3272.
47. Malomed B. A. Super-radiant multifluxon dynamics in a system of parallel-coupled Josephson junctions / B.A. Malomed, A.V. Ustinov // Phys. Rev. B. — 1990. — Vol. 41. — P. 254.

48. Fehrenbacher R. Pinning phenomena and critical currents in disordered long Josephson junctions / R. Fehrenbacher, V. B. Geshkenbein, G. Blatter // Phys. Rev. B. — 1992. — Vol. 45. — P. 5450–5467.
49. Cirillo M. Mechanical analog studies of a perturbed sine-Gordon equation / M. Cirillo, R.D. Parmentier, B. Savo // Physica D. — 1981. — Vol. 3. — P. 565–576.
50. Браун О. М. Модель Френкеля-Конторовой. Концепции, методы, приложения / О. М. Браун, Ю. С. Кившарь. — Москва: Физматлит, 2008. — P. 519.
51. Braun O. M. Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model / O. M. Braun, Yu. S. Kivshar // Phys. Rep. — 1998. — Vol. 306, no. 1-2. — P. 2–108.
52. Floria L. M. Dissipative dynamics of the Frenkel-Kontorova model / L.M. Floria, J.J. Mazo // Advances in Physics. — 1996. — Vol. 45, no. 6. — P. 505–598.
53. Peyrard M. Kink dynamics in the highly discrete sine-Gordon system / M. Peyrard, M. D. Kruskal // Physica D. — 1984. — Vol. 14. — P. 88.
54. Observation of soliton fusion in a Josephson array / J. Pfeiffer, M. Schuster, Jr. A. A. Abdumalikov, A. V. Ustinov // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 96. — P. 034103(4).
55. Gal'pern Y. S. Bound states of solitons in inhomogeneous Josephson junctions / Yu. S. Gal'pern, A. T. Filippov // Sov. Phys. JETP. — 1984. — Vol. 86. — P. 1527–1543.

56. Aslamazov L. G. Pinning of solitons by abrikosov vortices in distributed josephson junctions / L. G. Aslamazov, E. V. Gurovich // JETP Lett. — 1984. — Vol. 40. — P. 746–749.
57. Balents L. Commensurability effects in large Josephson junctions / L. Balents, S. H. Simon // Phys. Rev. B. — 1995. — Vol. 51. — P. 6515–6525.
58. Fistul M. V. Abrikosov vortices in long Josephson junctions / M. V. Fistul, G. F. Giuliani // Phys. Rev. B. — 1998. — Vol. 58. — P. 9348 – 9353.
59. Mkrtchyan G. On the radiation from inhomogeneous Josephson junction / G.S. Mkrtchyan, V. V. Shmidt // Solit State Commun. — 1979. — Vol. 30. — P. 791–793.
60. Resonant emission of a chain of Josephson vortices on an array of inhomogeneities / B. A. Malomed, I. L. Serpuchenko, M. I. Tribelsky, A. V. Ustinov // JETP Lett. — 1988. — Vol. 47. — P. 591–593.
61. Kivshar Yu. S. Josephson-junction dynamics in the presence of a localized magnetic inhomogeneity / Yu. S. Kivshar, O. A. Chubykalo // Phys. Rev. B. — 1991. — Vol. 43. — P. 5419–5424.
62. Kivshar Y. S. Fluxon scattering at the interface of two long Josephson junctions / Y. S. Kivshar, A. M. Kosevich, O. A. Chubykalo // Fiz. Nizk. Temp. — 1987. — Vol. 13. — P. 800–808.
63. Nacak H. Superconducting gates with fluxon logics / H. Nacak, F.V. Kusmartsev // Physica C. — 2010. — Vol. 470. — P. 827–831.
64. Kivshar Yu. S. Interaction of a fluxon with a local inhomogeneity in a long Josephson junction / Yu. S. Kivshar, B. A. Malomed // Phys. Lett. A. — 1988. — Vol. 129. — P. 443–448.

65. Salerno M. Phonons and solitons in the "thermal"sine-Gordon system / M. Salerno, E. Joergensen, M.R. Samuelsen // Phys. Rev. B. — 1984. — Vol. 30. — P. 2635–2639.
66. Graham R. L. Concrete Mathematics / R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik. — Reading Ma.: Addison-Wesley, 1994.
67. Comparison between onedimensional and twodimensional models for Josephson junctions of overlap type / J. C. Eilbeck, P. S. Lomdahl, O. H. Olsen, M. R. Samuelsen // J. Appl. Phys. — 1985. — Vol. 57. — P. 861–867.
68. Gulevich D. R. Flux cloning in Josephson transmission lines / D. R. Gulevich, F. V. Kusmartsev // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 97. — P. 017004.
69. Zolotaryuk Y. Solitary plane waves in an isotropic hexagonal lattice / Y. Zolotaryuk, A.V. Savin, P. L. Christiansen // Phys. Rev. B. — 1998. — Vol. 57. — P. 14213(15).
70. Interference effects in soliton scattering by impurities / Yu. S. Kivshar, A. Sanchez, O. Chubykalo et al. // J. Phys. A: Math. Gen. — 1992. — Vol. 25. — P. 5711–5728.
71. Al-Alawi J. H. Scattering of topological solitons on barriers and holes in two ϕ^4 models / J.H. Al-Alawi, W.J. Zakrzewski // J. Phys. A: Math. Theor. — 2007. — Vol. 40. — P. 11319.
72. Experimental investigation of trapped sine-Gordon solitons / A. Davidson, B. Dueholm, B. Kryger, N.E. Pedersen // Phys. Rev. Lett. — 1985. — Vol. 5. — P. 2059–2062.
73. Fulton T. A. Single vortex propagation in Josephson tunnel junctions / T. A. Fulton, R. C. Dynes // Solid State Comm. — 1973. — Vol. 12. — P. 57–61.

74. Lazarides N. Multistability and self-organization in disordered SQUID metamaterials / N. Lazarides, G. P. Tsironis // Superconductor Science Technology. — 2013. — Vol. 26, no. 8. — P. 084006.
75. Bound fluxon pair in one-dimensional squid array / M. Nishida, T. Kanayama, T. Nakajo et al. // Physica C. — 2010. — Vol. 470. — P. 832–834.
76. Schmidt V. H. Exact solution in the discrete case for solitons propagating in a chain of harmonically coupled particles lying in double-minimum potential wells / V. H. Schmidt // Phys. Rev. B. — 1979. — Vol. 20. — P. 4397–4405.
77. Zolotaryuk Y. Bound states of lattice solitons and their bifurcations / Y. Zolotaryuk, J. C. Eilbeck, A. V. Savin // Physica D. — 1997. — Vol. 108. — P. 81.
78. Flach S. Moving lattice kinks and pulses: An inverse method / S. Flach, Y. Zolotaryuk, K. Kladko // Phys. Rev. E. — 1999. — May. — Vol. 59, no. 5. — P. 6105–6115.
79. Savin A. V. Moving kinks and nanopterons in the nonlinear Klein-Gordon lattice / A. V. Savin, Y. Zolotaryuk, J. C. Eilbeck // Physica D. — 2000. — Vol. 138, no. 3-4. — P. 265–279.
80. Discrete kink dynamics in hydrogen-bonded chains: The one-component model / V. M. Karpan, Y. Zolotaryuk, P. L. Christiansen, A. V. Zolotaryuk // Phys. Rev. E. — 2002. — Dec. — Vol. 66, no. 6. — P. 066603.
81. Aigner A. A new barrier to the existence of moving kinks in Frenkel-Kontorova lattices / A.A. Aigner, A.R. Champneys, V.M. Rothos // Physica D. — 2003. — Vol. 186, no. 3-4. — P. 148–170.

82. Barashenkov I. V. Translationally invariant discrete kinks from one-dimensional maps / I. V. Barashenkov, O. F. Oxtoby, D. E. Pelinovsky // Phys. Rev. E. — 2005. — Vol. 72, no. 3. — P. 035602(R).
83. Oxtoby O. F. Travelling kinks in discrete ϕ^4 models / O.F. Oxtoby, D. E. Pelinovsky, I. V. Barashenkov // Nonlinearity. — 2006. — Vol. 19. — P. 217–235.
84. High-speed kinks in a generalized discrete ϕ^4 model / Sergey V. Dmitriev, Avinash Khare, Panayotis G. Kevrekidis et al. // Phys. Rev. E. — 2008. — Vol. 77. — P. 056603.
85. Alfimov G. L. Wave systems with an infinite number of localized traveling waves / G. L. Alfimov, E.V. Medvedeva, D. E. Pelinovsky // Phys. Rev. Lett. — 2014. — Vol. 112. — P. 054103.
86. Embedded solitons: solitary waves in resonance with the linear spectrum / A. Champneys, B.A. Malomed, J. Yang, D.J. Kaup // Physica D. — 2001. — Vol. 152-153. — P. 340–354.
87. Champneys A. Origin of multikinks in dispersive nonlinear systems / A. Champneys, Y. S. Kivshar // Phys. Rev. E. — 2000. — Vol. 61. — P. 2551–2554.
88. Bogdan M. M. Soliton complex dynamics in strongly dispersive medium / M. M. Bogdan, A.M. Kosevich, G. A. Maugin // Wave Motion. — 2001. — Vol. 34. — P. 1–26.
89. Influence of induced magnetic fields on the static properties of one-dimensional parallel Josephson-junction arrays / R.D. Bock, J.R. Phillips, H.S.J. van der Zant, T.P. Orlando // Phys. Rev.B. — 1994. — Vol. 49. — P. 10009.

90. Condat C. A. Double sine-Gordon chain / C. A. Condat, R. A. Guyer, M. D. Miller // Phys. Rev. B. — 1983. — Vol. 27. — P. 474–494.
91. Campbell D. K. Kink-antikink interactions in the double sine-Gordon equation / D. K. Campbell, M. Peyrard, P. Sodano // Physica D. — 1986. — Vol. 19. — P. 165–205.
92. Josephson junctions with second harmonic in the current-phase relation: Properties of ϕ junctions / E. Goldobin, D. Koelle, R. Kleiner, A. Buzdin // Phys. Rev. B. — 2007. — Vol. 76. — P. 224523.
93. Hochstrasser D. An iterative method for the calculation of narrow solitary excitations on atomic chains / D. Hochstrasser, F.G. Mertens, H. Buttner // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1989. — Vol. 35. — P. 259 – 266.
94. Eilbeck J. C. Calculation of families of solitary waves on discrete lattices / J. C. Eilbeck, R. Flesch // Phys. Lett. A. — 1990. — Vol. 149. — P. 200.
95. Solitons on lattices / D.B. Duncan, J.C. Eilbeck, H. Feddersen, J.A.D. Wattis // Physica D. — 1993. — Vol. 68. — P. 1–11.
96. Kink propagation in a highly discrete system: Observation of phase locking to linear waves / Herre S. J. van der Zant, Terry P. Orlando, Shinya Watanabe, Steven H. Strogatz // Phys. Rev. Lett. — 1995. — Vol. 74, no. 1. — P. 174–177.
97. Braun O. Driven kink in the Frenkel-Kontorova model / O. Braun, B. Hu, A. Zeltser // Phys. Rev. E. — 2000. — Vol. 62, no. 3. — P. 4235–4245.
98. On magnetic flux dynamics in 1d arrays of underdamped Josephson junctions / M. Cirillo, Britt H. Larsen, A.V. Ustinov et al. // Phys. Lett. A. — 1993. — Vol. 183. — P. 383.

99. Experimental and numerical study of dynamic regimes in a discrete sine-Gordon lattice / A. V. Ustinov, M. Cirillo, B. H. Larsen et al. // Phys. Rev. B. — 1995. — Vol. 51. — P. 3081–3091.
100. Kevrekidis P. G. Differential-Difference Equations and their Depinning Transitions / P. G. Kevrekidis, Y. Zolotaryuk. New Developments in Soliton Research. — Nova Science Publishers, Inc., 2006. — P. 101–121.
101. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them, part 1: theory / G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J. M. Strelcyn // Meccanica. — 1980. — Vol. 15. — P. 9–20.
102. Ishimori Y. Kink Dynamics in the Discrete Sine-Gordon System. A Perturbational Approach / Y. Ishimori, T. Munakata // J. Phys. Soc. Japan. — 1982. — Vol. 51. — P. 3367.
103. Peyrard M. Solitonlike excitations in a one-dimensional atomic chain with a nonlinear deformable substrate potential / M. Peyrard, M. Remoissenet // Phys. Rev. B. — 1982. — Vol. 26. — P. 2886.
104. Ustinov A. V. Bunched fluxon states in one-dimensional Josephson-junction arrays / A. V. Ustinov, B. A. Malomed, S. Sakai // Phys. Rev. B. — 1998. — Vol. 57. — P. 11 691–11 697.
105. Savin A. V. Dynamics of ionic defects and lattice solitons in a thermalized hydrogen-bonded chain / A. V. Savin, A. V. Zolotaryuk // Phys. Rev. A. — 1991. — Vol. 44, no. 12. — P. 8167–8183.
106. Golubov A. The current-phase relation in josephson junctions / A.A. Golubov, M.Y. Kupriyanov, E. Il'ichev // Rev. Mod. Phys. — 2004. — Vol. 76. — P. 411.