

Національна академія наук України
Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова

На правах рукопису

Безвершенко Юлія Василівна

УДК 530.145, 517.938, 537.9

ІНТЕГРОВНІ МОДЕЛІ КВАНТОВИХ СИСТЕМ В ЗОВНІШНІХ ПОЛЯХ

01.04.02 — теоретична фізика

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Наукові керівники

Голод Петро Іванович

доктор фіз.-мат. наук

Іоргов Микола Зіновійович

доктор фіз.-мат. наук

Київ – 2015

ЗМІСТ

ВСТУП	6
РОЗДІЛ 1 Огляд: квантові системи в зовнішніх полях	17
1.1 Дворівневі системи в зовнішніх полях, що залежать від часу . .	17
1.1.1 Базові рівняння динаміки	18
1.1.2 Представлення результатів	20
1.1.3 Точно розв’язні випадки	21
1.1.4 Задача реконструкції	25
1.2 Квантові системи із взаємодією: інтегровні моделі Годена	26
1.2.1 Загальні твердження про класичну інтегровність	26
1.2.2 Інтегровна модель Годена	28
1.2.3 Фізичні моделі, що належать до класу моделей Годена .	31
1.3 Динаміка квантових систем після різкої зміни параметру систе- ми (квенчу)	32
1.3.1 Ідея квенчу	32
1.3.2 Квенчі в бозе-конденсатах	33
РОЗДІЛ 2 Динаміка спіну в зовнішньому залежному від часу магнітному полі	35
2.1 Спін в обертовому та слабкому осцилюючому полях	36
2.1.1 Постановка задачі	36
2.1.2 Елементи матриці еволюції за теорією збурень	38

2.1.3	Динамічна стабілізація спіну $1/2$	39
2.1.4	Побудова матриці еволюції для довільного спіну j	41
2.1.5	Динамічна стабілізація спіну j	43
2.1.6	Висновки	43
2.2	Спін $1/2$ в залежному від часу магнітному полі: вихід за межі наближення хвилі, що обертається	45
2.2.1	Вибір поля: нелінійна модифікація поля Рабі	45
2.2.2	Формулювання задачі	47
2.2.3	Схема конструювання розв'язків	47
2.2.4	Умови резонансу	51
2.2.5	Аналіз динаміки в лінійно поляризованому полі	53
2.2.6	Висновки	56

РОЗДІЛ 3 Модель центрального спіну (модель Годена) в термі- нах змінних розділення 58

3.1	Класична модель центрального спіну	59
3.1.1	Раціональна $sl(2)$ модель Годена як модель центрально- го спіну	59
3.1.2	Розділення змінних	60
3.2	Простір станів квантової моделі Годена	62
3.2.1	Канонічне квантування класичної моделі Годена	62
3.2.2	Функціональний анзац Бете	64
3.3	Базис спінових станів у термінах поліномів Лягерра	67
3.3.1	Вирази для станів при $N = 1$	67

3.3.2	Опис простору станів для довільного N	68
3.3.3	Тензорна структура простору спінових станів у термінах поліномів Лягерра	72
3.4	Стани Бете в термінах змінних розділення	73
3.5	Висновки	75

РОЗДІЛ 4 Класична динаміка дворівневих атомів та електро- магнітного поля в рамках моделі Джейнса-Каммінгса-Дікке 76

4.1	Модель Джейнса-Каммінгса-Дікке	77
4.1.1	Формулювання моделі	77
4.1.2	Встановлення інтегровності моделі	81
4.2	Класичне інтегрування моделі Джейнса-Каммінгса та аналіз динамічних режимів	85
4.2.1	Гамільтонові рівняння моделі	85
4.2.2	Динаміка інверсної заселеності атома	89
4.2.3	Динаміка дипольного моменту атома	94
4.3	Рівноправні змінні розділення у моделі Дікке та можливості її інтегрування	106
4.3.1	Розділення змінних в моделі Дікке	106
4.3.2	Рівняння на класичні змінні λ_i	109
4.3.3	Ідея інтегрування на узагальненому яacobіані	109
4.4	Висновки	112

РОЗДІЛ 5 Динаміка солітоноподібного збудження в одновимір- ному бозе-конденсаті при різкій зміні параметра взаємодії 114

5.1	Опис одновимірного бозе-конденсату	114
5.1.1	Формулювання моделі	114
5.1.2	Односолітонне збудження	116
5.1.3	Постановка задачі	118
5.2	Розпад солітонного збудження внаслідок квенчу	118
5.2.1	Метод оберненої задачі розсіювання	118
5.2.2	Аналіз односолітонного випадку	121
5.2.3	Випадок цілого η	122
5.2.4	Випадок довільного η	123
5.3	Висновки	125

ВИСНОВКИ	126
-----------------	------------

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	128
-----------------------------------	------------

ВСТУП

Найпростіші моделі, що описують квантові системи в найбільш ідеалізованому вигляді, тим не менш дозволяють отримувати ряд нетривіальних передбачень, які, якщо й не реалізуються безпосередньо, то слугують якісним нульовим наближенням для подальших досліджень. Ряд найбільш відомих моделей квантовооптичних, спінових, атомних та багатьох інших систем об'єднує властивість інтегровності, яка в залежності від контексту може означати як принципову можливість розв'язати задачу, так і давати конкретні результати. Більш того, часто виявляється, що заміною змінних, або деяким переформулюванням моделі, можна показати еквівалентність різних фізичних моделей, а отже, й застосувати математичні методи, розвинені для однієї з них. Крім того, цікавим є використання можливостей класичної інтегровності для квантових задач, а також вивчення порушення інтегровності при врахуванні тих чи інших факторів, що проявляються, наприклад, в експерименті.

Серед нетривіальних фізичних задач, які виникають у зв'язку з квантовими системами, є дослідження їхньої динаміки, спричиненої дією зовнішніх полів. Особливо цікавим випадком є ситуація, коли поле залежить від часу. Така постановка задачі виникла практично з перших років існування квантової теорії і згодом еволюціонувала разом з розвитком експериментальних методів. Значно пізніше, коли з'явилась ідея квантових обчислень та почала йти мова про її фізичну реалізацію, такого типу задачі отримали новий імпульс. Адже саме зовнішнє поле є тим керованим впливом, за допомогою якого ми

можемо робити ті чи інші маніпуляції з квантовою системою, переводити її з одного стану в інший тощо. Звісно, серед цих задач особливо затребуваними є точно розв'язні, тобто такі, для яких розв'язки можна отримати явно та в термінах відомих функцій. Так само, як й інтегровних моделей, прикладів таких задач є не дуже багато, тому кожен новий є важливим.

Слід також зазначити, що такі моделі та задачі часто допускають поступове ускладнення. Наприклад, можна дослідити найпростішу систему, яка до того ж є інтегровою, далі розглянути її узагальнення, яке включає взаємодію з оточенням, зовнішнім полем тощо. При цьому можна сподіватись, що навіть якщо задача не залишиться інтегровою, або точно розв'язною, вона все одно матиме деякі спеціальні властивості.

Також суттєвим є те, що математичні методи, які використовуються і можуть бути використані для аналізу інтегровних моделей квантових систем та точно розв'язних задач динаміки квантових систем у зовнішніх полях, є дуже нетривіальними. До того ж фізична мотивація спричинює поступове залучення тих методів, що раніше не використовувались, до реальних фізичних задач, та й самі ці задачі стимулюють розвиток потрібних математичних методів та створення нових. Це є особливо цінним в час активної експансії чисельних методів.

В дисертаційній роботі вивчається ряд інтегровних моделей квантових систем, що належать до класу Годена і відповідають квантовооптичним та спіновим системами. Крім того, розв'язуються задачі знаходження еволюції модельних дворівневих систем та ультрахолодних газів, спричиненої їх взаємодією із зовнішніми полями, що залежать від часу.

Актуальність теми.

Бурхливий розвиток експериментальних можливостей щодо керування квантовими об'єктами ставить нові задачі перед теоретичною та математичною фізикою. У 2012 році Нобелівську премію з фізики було присуджено “за інноваційні експериментальні методи, які дозволили вимірювання та маніпулювання окремими квантовими системами”. Також вже понад 20 років дуже динамічним є напрямок виготовлення квантових обчислювальних приладів.

Таким чином, з одного боку, експеримент створює запит на знаходження все більш детальної інформації про квантові системи, а з іншого боку, існує інтерес до конструювання керованої динаміки таких систем із тими чи іншими наперед заданими характерними рисами. Останнє передбачає деякий зовнішній вплив, що можна здійснити за допомогою зовнішнього поля із достатньою кількістю параметрів, якими можна маніпулювати. У зв'язку з цим модельні задачі, в тому числі і особливо – інтегровні, та дослідження їхньої динаміки у зовнішніх полях є предметом особливої уваги, а вже відпрацьовані для їх аналізу потужні математичні методи дозволяють отримувати конкретні результати. Крім того, інтегровні моделі, які є найпростішими відповідниками реальних квантових систем, дозволяють виявляти універсальність поставлених задач, що відповідають різним фізичним об'єктам, та застосовувати до них однакові математичні методи. Так, наприклад, модель центрального спіну, де виділений спін взаємодіє з постійним магнітним полем та колективом невзаємодіючих між собою спінів, та модель Джейнса-Каммінгса-Дікке, яка описує взаємодію колективу невза-

ємодіючих між собою дворівневих атомів з одномодовим електромагнітним полем, що вивчались в дисертаційній роботі, належать до одного класу інтегровних моделей Годена. Так само будь-який результат, отриманий для модельної дворівневої системи в зовнішньому полі, яке залежить від часу, може бути однаково застосовним і до магнетиків, і до квантових точок, і до атомів у резонаторі. В свою чергу кожен новий приклад зовнішнього поля, в якому задача динаміки квантової системи є точно розв'язною, поповнює дуже невеликий перелік таких прикладів і є вкрай важливим. Тому задачі розширення набору полів, для яких відома точна динаміка квантової системи, вивчення можливостей теорії класичних інтегровних систем у зв'язку з їх квантуванням та адаптація математичних методів до фізичних задач, які виникають під час пошуку відповідей на всі ці питання, є актуальними та великою мірою універсальними.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Результати, що увійшли в дисертаційну роботу, були отримані в рамках планової наукової тематики відділу математичних методів в теоретичній фізиці Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України «Методи теорії симетрій та проблеми нелінійної динаміки в сучасній теорії поля та теорії елементарних частинок» 2007-2011 рр. (шифр 1.4.7, № держ. реєстрації 0106U007885) та «Нелінійні квантові осцилятори, інтегровні моделі та квантово-польові системи: симетрії та застосування» 2012-2016 рр. (№ держ. реєстрації 0112U000052).

Мета і задачі дослідження.

Метою даної роботи було дослідити динаміку спінових та квантово-оптичних систем, встановити структуру станів моделі центрального спіну (моделі Годена), вивчити переваги введення рівноправних змінних розділення в моделях класу Годена, дослідити динаміку солітоноподібного збудження у одновимірному бозе-конденсаті при раптовій зміні параметрів системи.

Для її досягнення було поставлено наступні задачі:

- Дослідити динаміку спіну $1/2$ та довільного спіну в магнітному полі, яке є суперпозицією поперечного обертового поля та поля, що осцилює на фоні сталого магнітного поля.
- Дослідити динаміку спіну $1/2$ в полі, яке апроксимує лінійно поляризоване гармонічне поле і дає можливість вийти за межі наближення «хвилі, що обертається», та встановити умови резонансу в ньому.
- Побудувати представлення спінових операторів моделі Годена в термінах змінних розділення та дослідити структуру спінових станів квантової моделі Годена.
- Дослідити динаміку класичної моделі Джейнса-Каммінгса та побудувати змінні розділення у моделі Дікке, в термінах яких можливе застосування методу інтегрування на узагальненому яacobіані.
- Дослідити динаміку солітоноподібного збудження в одновимірному бозе-конденсаті при раптовій зміні зовнішнього поля.

Об'єктами дослідження є дворівневі системи в зовнішніх змінних полях, інтегровні моделі центрального спіну, Джейнса-Каммінгса-Дікке та Годена, конденсат Бозе-Ейнштейна.

Предметом дослідження є динаміка спінових систем в магнітних полях, що залежать від часу, структура станів в магнетику Годена, динаміка спостережуваних величин, що описують атом і поле в моделі Джейнса-Каммінгса-Дікке, розпад солітоноподібного збудження в одновимірному бозе-конденсаті при раптовій зміні параметрів системи.

В роботі було застосовано наступні **методи дослідження**: методи теорії диференціальних рівнянь класу Фукса, методи теорії еліптичних функцій, метод розділення змінних в інтегровних моделях, метод оберненої задачі розсіювання.

Наукова новизна одержаних результатів.

В дисертаційній роботі вперше:

1. Запропоновано ідею динамічної стабілізації спінової системи керуючим полем, яке є суперпозицією поперечного обертового поля та осцилюючого поля на фоні сталого магнітного поля.
 2. Запропоновано нелінійну модифікацію поля Рабі для виходу за межі наближення «хвилі, що обертається» в задачі динаміки модельного спіну $1/2$.
- Сконструйовано схему побудови точних розв'язків цієї задачі та досліджено умови резонансу для різних режимів.

3. Отримано замкнений вираз для зсуву Блоха-Зігерта.
4. Побудовано представлення спінових станів моделі Годена (моделі центрального спіну) в термінах узагальнених поліномів Лягерра від рівноправних змінних розділення.
5. Отримано вирази, що описують динаміку дипольного моменту атома, зокрема, його нелінійну фазу, в моделі Джейнса-Каммінгса.
6. Введено змінні розділення для моделі Дікке, в термінах яких можливе інтегрування на узагальненому яacobіані.
7. Досліджено динаміку розпаду односолітонного збудження в одновимірному бозе-конденсаті внаслідок різкої зміни параметру взаємодії.

Практичне значення одержаних результатів.

Робота має теоретичний характер. Отримані результати є внеском у теоретичний опис динаміки спінових та квантово-оптичних систем у зовнішніх полях та до теорії магнітного резонансу. Результати дисертаційної роботи та математичні методи, розвинені у ній, можна використати для розв'язання інших задач теорії конденсованого середовища, зокрема, магнетиків та надпровідних систем.

Особистий внесок здобувача.

Результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. У роботах, опублікованих у співавторстві, автор брала участь у формулюванні

задач і виконувала аналітичні та чисельні розрахунки.

В роботі [1] автором вираховано фазу дипольного моменту атома, що взаємодіє з класичним електромагнітним полем, та проаналізовано поведінку змінної, пов'язаної з вихідними динамічними змінними задачі, на рімановій поверхні.

В роботі [2] автором вираховано елементи матриці еволюції спіну $1/2$, що перебуває у комбінації поля Рабі та слабого осцилюючого поля, отримано вирази, що описують динаміку довільного спіну та зроблено чисельні розрахунки для спіну $1/2$ і довільного спіну.

В роботі [3] автором обраховано лінійні комбінації, що задовольняють обраним початковим умовам для $N = 1$ (деякий параметр поля), отримано вирази для $N = 2$ та приведено їх у відповідність до обраних початкових умов; отримано вираз для третьої компоненти вектору Блоха та проведено чисельні обрахунки, які підтвердили правильність знайдених умов резонансу.

В роботі [4] автором отримано явні вирази для спінових змінних моделі Годена в термінах змінних розділення, досліджено структуру спінових станів для випадку одного спіну та отримано явні вирази для векторів Бете.

В роботі [5] автору дисертації належить проведення аналізу трансфер-матриці для односолітонного випадку та побудова динаміки солітона у випадку зростання вдвічі швидкості звуку в системі.

Апробація роботи.

Результати дисертаційної роботи обговорювались на семінарах відділу математичних методів в теоретичній фізиці Інституту теоретичної фізики ім.

М.М. Боголюбова НАН України (Київ, 2008-2014), відділу теоретичної фізики Інституту магнетизму НАН України та МОН України (Київ, 2008), кафедри фізико-математичних наук Національного університету «Києво-Могилянська академія» (Київ, 2007-2013), факультету фізики та астрономії Університету Палермо (Італія, вересень 2008), на об'єднаному семінарі Центру прикладних космічних досліджень та мікрогравітації Університету Бремена та Університету Ольденбурга (Німеччина, серпень 2012) та на American Physical Society March Meeting (Сан Антоніо, США, березень 2015).

Матеріали дисертації пройшли апробацію на ряді наукових конференцій. Зокрема, автором особисто було зроблено наукові доповіді по матеріалам дисертації на всеукраїнських конференціях:

- 11-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 1-3 червня 2011;
- IV Young scientists conference “Modern Problems of Theoretical Physics”, Kyiv, October 23-26, 2012;

та на міжнародних конференціях:

- 7th International Conferences “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics”, Kyiv, June 24-30, 2007;
- 8th International Conferences “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics”, Kyiv, June 21-27, 2009;

- Bogolyubov Kyiv Conference “Modern Problems of Theoretical and Mathematical Physics”, Kyiv, September 15-18, 2009;
- International Conference of Young Scientists and Post-graduates, IEP-2009, Uzhgorod, Ukraine, May 25-28, 2009;
- International Conference of Quantum Optics and Quantum Information '2010, Kyiv, 28 May - 1 June, 2010;
- IX Winter School on Theoretical Physics “Nonlinear Phenomena in Condensed Matter”, Dubna, Russia, January 30 - February 6, 2010;
- 2nd International Conference for Young Scientists “Low Temperature Physics-2011”, Kharkiv, Ukraine, June 6-10, 2011;
- Franco-Ukrainian Workshop “Recent trends in classical and quantum integrable systems”, LMPT, Tours University, France, May 29-31, 2012;
- Heraeus-Seminar “Algebro-geometric methods in fundamental physics”, Bad Honnef, Germany, September 3-7, 2012;
- Russian-Japan Conference “Synthesis of integrabilities in the context of duality between the string theory and gauge theories”, Moscow, Russia, September 17-21, 2012;
- International Conference “Quantum Groups and Quantum Integrable Systems'2013”, June 2013, Kyiv, Ukraine;
- International Workshop “Algebraic Curves with Symmetries, their Jacobians and Integrable Systems”, July 2014, Kyiv, Ukraine.

Публікації.

За матеріалами дисертації опубліковано 12 робіт, з них 5 статей [1, 2, 3, 4, 5] із них складають статті в наукових журналах, а 7 [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12] опубліковані як тези конференцій.

Структура та обсяг дисертації.

Дисертаційна робота складається зі вступу, 5 розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 112 найменувань. Робота написана на 142 сторінках машинописного тексту, містить 15 рисунків.

РОЗДІЛ 1

Огляд: квантові системи в зовнішніх полях

1.1 Дворівневі системи в зовнішніх полях, що залежать від часу

Модельна дворівнева система є одним із базових об'єктів квантової механіки – найпростішим, з одного боку, та дуже багатим на фізично нетривіальні передбачення, з іншого. Фізично вона може відповідати як квантовій системі, що має два енергетичні рівні, наприклад, спіну $1/2$, так і реально багаторівневій системі, яка ефективно є дворівневою. Прикладом останньої є атоми у резонаторах, що взаємодіють з одномодовим полем, частота якого відповідає частоті переходу між парою їхніх рівнів, достатньо віддалених від інших. Попри фізичну різноманітність описуваних систем (це і надпровідні системи, і ультрахолодні гази, і квантові точки в напівпровідникових структурах тощо), їх математичний опис є великою мірою універсальним.

У випадку дворівневих систем вихідні динамічні змінні системи можуть бути однозначно представлені за допомогою спінових або псевдоспінових операторів (в матричному вигляді – матриць Паулі). Перехід від фізичних динамічних змінних системи до більш універсального опису в термінах таких операторів часто дозволяє проводити паралелі між фізично дуже різними моделями та використовувати одні й ті ж математичні методи.

Задача знаходження еволюції квантової системи у зовнішніх полях цікавила дослідників із моменту появи квантової механіки. Спочатку мотивацією

досліджень було, наприклад, дослідження явищ магнітного та оптичного резонансу, згодом – із розвитком експериментальних можливостей – більш тонка структура динаміки, ще пізніше – ідея квантових обчислень. Саме дією зовнішнього поля можна переводити систему у наперед задані суперпозиції станів, тобто виконувати квантові операції [13]. Звісно, що реальна керована динаміка відбувається в умовах взаємодії з оточенням, квантових флуктуацій тощо, тобто того, що спричиняє явище декогеренції. Тим не менш, ряд дослідників фокусується саме на вивченні ідеалізованих ізольованих систем, що взаємодіють із зовнішніми полями, намагаючись побудувати нові точно розв’язні приклади, зокрема, й тому, що вони слугують чудовим нульовим наближенням до реальних експериментальних ситуацій.

1.1.1 Базові рівняння динаміки

Гамільтоніан задачі взаємодії дворівневої системи із зовнішнім полем має вигляд:

$$\hat{\mathcal{H}}(t) = (\vec{B}(t), \vec{\sigma}), \quad (1.1.1)$$

де $\vec{\sigma} = \{\hat{\sigma}_i\}$ – матриці Паулі, які задовольняють стандартним комутаційним співвідношенням: $[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2i\varepsilon_{ijk} \hat{\sigma}_k$, $\vec{B}(t)$ – зовнішнє поле.

Нехай $|\pm\rangle$ є власними станами $\hat{\sigma}_3$ з власними значеннями ± 1 , відповідно. Еволюція стану дворівневої системи $|\Psi(t)\rangle = C_+(t)|+\rangle + C_-(t)|-\rangle$, де $|C_+(t)|^2 + |C_-(t)|^2 = 1$, визначається рівнянням Шредінгера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{H}}(t) |\Psi(t)\rangle. \quad (1.1.2)$$

Надалі покладатимемо $\hbar = 1$.

Це матричне рівняння можна переписати у вигляді системи рівнянь на

амплітуди станів, або на матрицю еволюції. У першому випадку динаміка системи описується системою рівнянь

$$\imath \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} C_+(t) \\ C_-(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_3(t) & B_1(t) - \imath B_2(t) \\ B_1(t) + \imath B_2(t) & -B_3(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_+(t) \\ C_-(t) \end{bmatrix}. \quad (1.1.3)$$

Знаходження амплітуд стану $C_{\pm}(t)$ є еквівалентним до знаходження матриці еволюційного оператора $\hat{u}(t)$, яка реалізує лінійне відображення:

$$\hat{C}(t) = \hat{u}(t) \hat{C}(0), \quad (1.1.4)$$

де $\hat{u}(t) = \begin{bmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ -\beta^*(t) & \alpha^*(t) \end{bmatrix} \in \text{SU}(2)$ and $\hat{C}(0)$ є вектором початкової умови $\hat{C}^T(0) = [C_+(0), C_-(0)]$. Відповідне рівняння, яке отримується з (1.1.2), має вигляд

$$\imath \frac{d}{dt} \hat{u}(t) = \hat{\mathcal{H}}(t) \hat{u}(t), \quad (1.1.5)$$

з початковою умовою $\hat{u}(0) = \hat{1}$. Якщо матрицю еволюції знайдено, ми можемо реконструювати амплітуди стану $C_{\pm}(t)$ відповідно до (1.1.4).

Якщо вибрати поле вздовж третьої осі $B_3 \equiv \Omega_3$ сталим, то систему рівнянь (1.1.3) для знаходження амплітуд $C_{\pm}$ можна звести до двох незалежних диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами:

$$\frac{d^2 C_{\pm}}{dt^2} - \frac{d\Omega_{\mp}}{dt} \frac{1}{\Omega_{\mp}} \frac{dC_{\pm}}{dt} + \left(\Omega_3^2 + |\Omega_-|^2 - \imath \Omega_3 \frac{d\Omega_-}{dt} \frac{1}{\Omega_-} \right) = 0, \quad (1.1.6)$$

де введено позначення $B_1(t) \pm \imath B_2(t) \equiv \Omega_{\pm}(t)$.

У випадку довільного поля $\Omega_-(t)$ рівняння (1.1.6) є рівнянням загального положення. Вибір того чи іншого потенціалу повністю визначає наші можливості щодо знаходження його розв'язків. Нижче в цьому Розділі ми розглянемо відомі в літературі поля, для яких дана задача є точно розв'язною, а

у Розділі 2.2 запропонуємо нове поле, яке призводить до точно розв'язної задачі.

1.1.2 Представлення результатів

Отримані вирази для амплітуд стану, або елементів матриці еволюції найзручніше інтерпретувати у термінах очікуваних значень від проекцій спінового (або псевдоспінового) моменту. Останні можна виразити як

$$S_i(t) = \langle \Psi(t) | \hat{\sigma}_i | \Psi(t) \rangle = \langle \Psi(0) | \hat{u}^{-1}(t) \hat{\sigma}_i \hat{u}(t) | \Psi(0) \rangle. \quad (1.1.7)$$

Вираз (1.1.7) визначає дійсний вектор $\mathbf{S}(t)$, який називається *вектором Блоха*. Його еволюція відбувається на сфері

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1,$$

яка називається *сферою Блоха*. Його еволюція визначається ортогональною матрицею, так що $S_i(t) = R_{ij}(t) S_j(0)$, де $\hat{R}(t) \in \text{SO}(3)$. Зв'язок між матрицями $\hat{R}$ та $\hat{u}$ реалізує відомий гомоморфізм з групи $\text{SU}(2)$ в $\text{SO}(3)$, тому $\hat{R} = \hat{R}(\hat{u})$.

Найбільше нас буде цікавити динаміка третьої компоненти вектора Блоха, оскільки вона є дуже наочною, а тому корисною для подальшої фізичної інтерпретації. Якщо задача (1.1.2), або (1.1.5) розв'язана, $S_3(t)$ можна знайти у термінах амплітуд стану:

$$S_3(t) = (|C_+|^2 - |C_-|^2) S_3(0), \quad (1.1.8)$$

або у термінах елементів матриці еволюції згідно з виразом

$$S_3(t) = (\alpha\beta^* + \alpha^*\beta) S_1(0) + i(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta) S_2(0) + (|\alpha|^2 - |\beta|^2) S_3(0), \quad (1.1.9)$$

де $S_i(0)$ – початкова умова для вектора Блоха.

1.1.3 Точно розв'язні випадки

1.1.3.1 Задача Рабі

Однією з перших задач динаміки дворівневої системи в зовнішньому полі, що залежить від часу, була саме задача Рабі [14, 15, 16]. Вона є класичним прикладом і базою для багатьох подальших узагальнень.

Отже, розглянемо задачу динаміки спіну $1/2$ в залежному від часу магнітному полі виду

$$\vec{B}_R(t) = (a \cos \nu t, a \sin \nu t, \omega_0), \quad (1.1.10)$$

яке називається полем Рабі.

Беручи до уваги гамільтоніан системи (1.1.1) для даного вибору поля, отримуємо систему рівнянь на амплітуди $C_{\pm}(t)$:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} C_+(t) \\ C_-(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0 & ae^{-\nu t} \\ ae^{\nu t} & -\omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_+(t) \\ C_-(t) \end{bmatrix}. \quad (1.1.11)$$

Задача динаміки спіну $1/2$ під дією комбінації обертового поля в площині $X - Y$ і сталого поля вздовж третьої осі була розв'язана Гютінгером [15] і пізніше узагальнена Рабі [14] на випадок поля, що обертається навколо осі Z . У термінах матриці еволюції розв'язок задачі (1.1.11) має вигляд:

$$\alpha_R(t) = \frac{1}{2\Omega_R} [(\Omega_R + \Delta)e^{\frac{i}{2}(\Omega_R - \Delta)t} + (\Omega_R - \Delta)e^{-\frac{i}{2}(\Omega_R + \Delta)t}],$$

$$\beta_R(t) = \frac{a}{2\Omega_R} (e^{-\frac{i}{2}(\Omega_R + \Delta)t} - e^{\frac{i}{2}(\Omega_R - \Delta)t}), \quad (1.1.12)$$

де $\Omega_R = \sqrt{\Delta^2 + 4a^2}$ – частота Рабі, $\Delta = \nu - \omega_0$.

Третя компонента вектора Блоха здійснює осциляції, які називаються *осциляціями Рабі* (див. Рис. 1.1) та є добре відомими в теоріях магнітного і

оптичного резонансу:

$$S_3^{(R)}(t) = \frac{1}{\Omega_R^2} [\Delta^2 + 4a^2 \cos \Omega_R t] S_3(0), \quad (1.1.13)$$

де $S_3(0) = \pm 1$, якщо система починає еволюціонувати з власного стану. Ця ситуація відповідає нутації повного вектора Блоха на сфері Блоха.

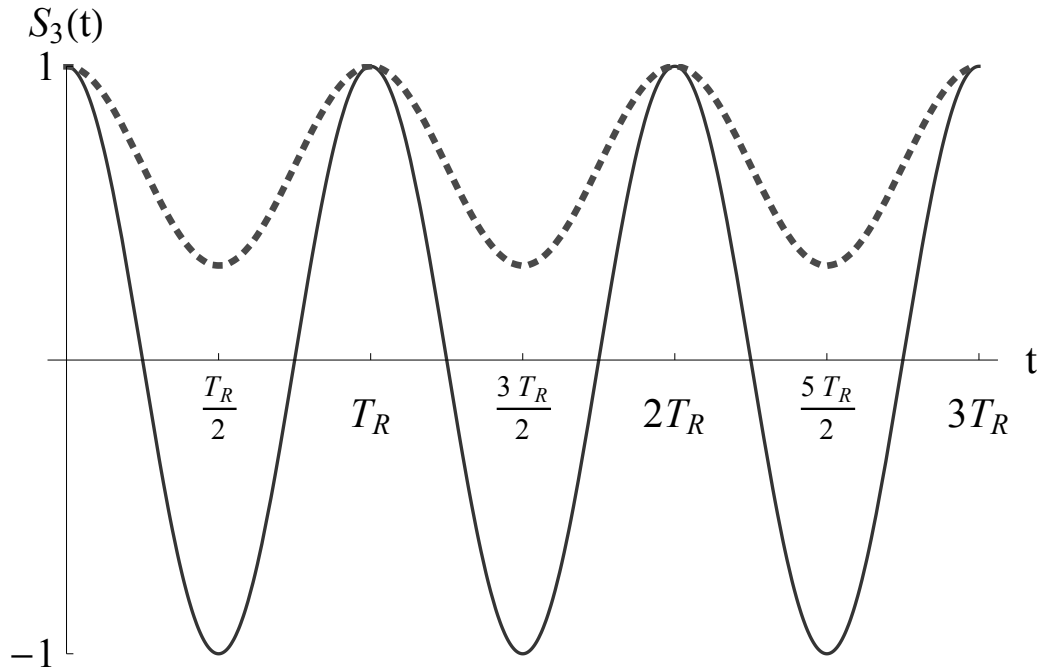


Рис. 1.1 Осциляції Рабі. Неперервна крива відповідає ситуації резонансу, тобто повного перевороту третьої компоненти вектора Блоха ($\Delta = 0$). Пунктирна крива відповідає $\Delta = 0.812$.

Як видно з Рис. 1.1, резонанс в такій системі відбувається, коли $\Delta = 0$. В реальній експериментальній ситуації поле є не обертовим, а лінійно поляризованим. Попри це, при достатньо малих значеннях амплітуди обертового поля, в так званому наближенні “хвилі, що обертається”, задача Рабі дає досить точний опис реальної ситуації. При цьому умова резонансу змінюється,

що називається зсувом Блоха-Зігерта [17].

1.1.3.2 Солітонні та інші імпульси

Іншою областю досліджень є вивчення взаємодії когерентних оптичних імпульсів з квантовими системами. Лазери здатні продукувати контрольовані інтенсивні ультра-короткі оптичні імпульси, а спеціалізовані технології дозволяють створювати різні форми цих імпульсів.

Першим точно розв'язним прикладом знаходження еволюції дворівневих систем при дії на них імпульсів був солітонний імпульс Розена-Зінера [18]:

$$\vec{B}(t) = (\operatorname{sech} \nu t \cos \omega t, \operatorname{sech} \nu t \sin \omega t, 0).$$

Загальний розв'язок для амплітуд в цьому випадку отримується в термінах гіпергеометричної функції (відповідну динаміку зображено на Рис. 1.2). Ця задача має важливий фізичний наслідок – явище самоіндукованої прозорості [19]. Згодом її було узагальнено на клас несиметричних імпульсів [20], частковим випадком якого є симетричний імпульс Розена-Зінера. Тоді рівняння теж зводиться до гіпергеометричного і тому може бути розв'язаним явно. Обидві ці задачі є граничними випадками задачі, розв'язаної пізніше в [21], де поле є таким, що призводить до рівняння Гойна [22, 23]. Також в літературі детально вивчалися імпульси з лінійною частотною модуляцією (chirped pulses) [24, 25, 26].

Цікаво зазначити, що в усіх цих прикладах поле не обиралось незалежно, а підбиралось так, щоб диференціальне рівняння на амплітуди стану після деякої заміни змінної співпадало з тим чим іншим рівнянням, розв'язки якого відомі (гіпергеометричне, або Гойна).

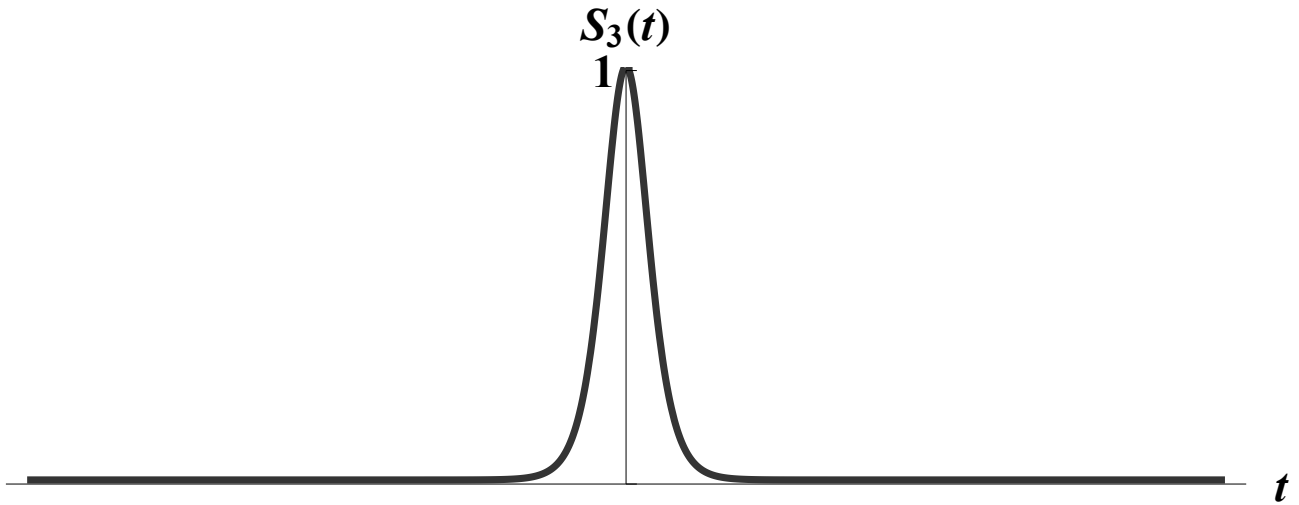


Рис. 1.2 Еволюція системи під дією солітонного імпульса.

1.1.3.3 Більш загальні конфігурації поля

Рядом авторів [27, 28] також було розглянуто поля, що призводять до розв'язків у термінах функцій Гойна [22, 23]. Варто зауважити, що хоча ці функції відомі давно, їх активне використання в даному контексті почалось відносно недавно.

Так, в роботі [27] було продемонстровано, що у полі виду

$$\vec{B}(t) = (\nu, 0, f_0 + f_1 \sin \omega t)$$

задача динаміки дворівневої системи є точно розв'язною. Після вдалої заміни змінних рівняння на амплітуду стану в такому полі зводиться до рівняння Гойна [23]. В цій роботі, на відміну від попередніх, поле постулюється відразу, після чого автори знаходять дуже нетривіальні заміни змінних, що зводять вихідне рівняння до конфлюентного та подвійно конфлюентного рівнянь Гойна. Варто зазначити, що такого типу конфігурації поля довгий час вважались

такими, з якими рівняння можуть бути розв’язані лише наближено, зокрема, за методом Флоке та його модифікаціями.

В роботі [28] розглядається задача з полем виду

$$\vec{B}(t) = (U(t) \cos \delta(t), U(t) \sin \delta(t), 0),$$

де функцію $U(t)$ автори називають амплітудною модуляцією, $\delta(t)$ – модуляцією фази. Після деякої заміни змінних вихідне рівняння зводиться до такого вигляду, коли його можна проаналізувати з точки зору подальшого розв’язання. Автори отримують 35 п’ятипараметричних класів задач (і, відповідно, конфігурацій полів), в яких розв’язки можна виписати у термінах функцій Гойна, гіпергеометричних функцій тощо.

1.1.4 Задача реконструкції

Оскільки пошук нових конфігурацій поля, для яких задача не лише буде точно розв’язною, а й даватиме ту чи іншу цікаву динаміку системи, є дуже складним, згодом з’явився альтернативний напрямок досліджень. Було запропоновано подивитись на рівняння на амплітуди, коефіцієнтами в яких є компоненти змінного поля, яке ми вважаємо наперед заданим, як на рівняння на знаходження поля при наперед заданих амплітудах [29, 30, 31]. Задачу відновлення поля, яке індукує динаміку системи, по відомим амплітудах стану називають “зворотньою інженерією” або реконструкцією.

При всіх перевагах цього методу з точки зору побудови великої колекції точно розв’язних прикладів, слід розуміти, що, по-перше, задача класифікації отримуваних полів в даному випадку є досить непростю, по-друге, не завжди ми здатні запропонувати дійсно нетривіальний розв’язок задачі, який

би мав цікаві властивості, по-третє, іноді саме пошук поля і те, що саме воно призводить до задачі, яку можна розв'язати точно, дозволяє отримувати неочікувані результати.

1.2 Квантові системи із взаємодією: інтегровні моделі Годена

1.2.1 Загальні твердження про класичну інтегровність

Скінченномірні інтегровні моделі мають скінченномірний фазовий простір. До них є застосовною теорема Ліувілля: *якщо гамільтонова система з $2n$ -мірним фазовим простором має n незалежних інтегралів руху в інволюції, то її траєкторії лежать на **інваріантному торі** — сумісній поверхні рівня інтегралів руху. В кутових змінних на цьому торі рух системи лінеаризується, а зв'язок кутових змінних з початковими динамічними змінними виражається інтегралами.* Але ця теорема не дає ні ідеї про те, як шукати інтеграли руху, ні про те, як будувати змінні “дія-кут”.

Серед інтегровних за Ліувіллем гамільтонових систем є системи, для яких тор Ліувілля є дійсною частиною деякого абелевого многовиду — алгебраїчного комплексного тору. Такі системи називаються *алгебраїчно інтегровними*. Вони, зокрема, мають представлення Лакса, в якому виникає генеруюча функція для інтегралів руху, однозначно пов'язана з деякою алгебраїчною кривою роду N . Крім того, для них розвинена послідовна теорія інтегрування.

Коротко опишемо основні кроки в інтегруванні алгебраїчно інтегровних систем. Отже, головна ідея полягає в тому, що замість тора Ліувілля ми маємо побудувати деякий комплексний тор $T^N \rightarrow T_{\mathbb{C}}^N$, де

$$T_{\mathbb{C}}^N = \text{Symm}(\underbrace{\mathcal{R} \times \mathcal{R} \dots \times \mathcal{R}}_N) = \text{Jac}(\mathcal{R}),$$

$\mathcal{R}$ – ріманова поверхня, що відповідає алгебраїчній кривій роду N , $\text{Jac}(\mathcal{R}) = \mathbb{C}^g / (\mathbb{Z}^g + B\mathbb{Z}^g)$ – якобіан ріманової поверхні $\mathcal{R}$ з матрицею Рімана B , $\text{Re}B > 0$, побудований по b -періодам $\mathcal{R}$.

Для цього на кривій, що відповідає даній моделі, вводиться N змінних λ_i (або по одній змінній на кожній копії $\mathcal{R}$) та N канонічно до них спряжених $\mu_i = \mu(\lambda_i)$. Далі ставиться задача обернення Якобі: треба обернути відображення

$$A : S^g \mathcal{R} \rightarrow \text{Jac}(\mathcal{R}),$$

або, еквівалентно, для даної точки $\vec{z} = (z_1, \dots, z_g) \in \text{Jac}(\mathcal{R})$ знайти g точок $P_1, \dots, P_g$ ріманової поверхні $\mathcal{R}$ таких, що:

$$\sum_{k=1}^N \int_{P_0}^{P_k} \omega_j = z_j, \quad i = 1 \dots, g.$$

Це можна зробити, використовуючи тета-функції, що відповідають даній рімановій поверхні [32]:

$$\theta(\mathbf{z}; B) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^g} \exp \{ \mathbf{m}^T B \mathbf{m} + 2i\pi \mathbf{m} \mathbf{z} \},$$

де B , $\text{Re}B > 0$, – матриця Рімана.

Відома наступна теорема [33, 34, 35]. Нехай $\vec{z} = (z_1, \dots, z_g)$ – такий вектор, що функція $\mathcal{F}(P) = \theta(A(P) - \vec{z} - \vec{K})$, яка називається тета-функцією Рімана,

не перетворюється тотожно в нуль на $\mathcal{R}$. Тоді функція $\mathcal{F}(P)$ має на поверхні $\mathcal{R}$ g нулів $P_1, \dots, P_g$, які дають розв'язок задачі обернення Якобі:

$$A_j(P_1) + \dots + A_j(P_g) = \sum_{k=1}^N \int_{P_0}^{P_k} \omega_j = z_j, \quad i = 1 \dots, g$$

(точки $P_1, \dots, P_g$, визначаються з цієї системи з точністю до перестановки).

Далі з тета-функцій Рімана необхідно побудувати такі комбінації, через які можна виразити потрібні симетричні функції від змінних розділення. Після цього залишається непроста задача ефективізації отриманих виразів, а саме проблема дійсності (тор Ліувілля є дійсною частиною якобіану) [36, 33]. В певному сенсі еквівалентною до неї є задача пошуку фізично обґрунтованих початкових умов та їхнього перекладу на мову комплексних змінних на рімановій поверхні. Цікавим та змістовним також є пошук спеціальних режимів динаміки системи, зокрема, солітонних.

1.2.2 Інтегровна модель Годена

Модель Годена добре відома у різних математичних контекстах та фізичних застосуваннях [37, 38, 39, 40, 41, 42, 43]. Вона має комутативний набір інтегралів руху виду:

$$\mathcal{H}_i = 2gS_i^z + \sum_{k=1, k \neq i}^N f(\varepsilon_i - \varepsilon_k)(\vec{S}_i, \vec{S}_k),$$

де ε_i , $i = 1, 2, \dots, N$, є деякими комплексними параметрами. Залежність від них може бути раціональною $1/(\varepsilon_i - \varepsilon_k)$, тригонометричною $1/\sin(\varepsilon_i - \varepsilon_k)$ або еліптичною $1/\operatorname{sn}(\varepsilon_i - \varepsilon_k)$ (sn є еліптичною функцією Якобі [44]).

Якщо обрати $f(\varepsilon_i - \varepsilon_k) = 1/(\varepsilon_i - \varepsilon_k)$, відповідна модель з гамільтоніанами

$$\mathcal{H}_i = 2gS_i^z + \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{(\vec{S}_i, \vec{S}_k)}{\varepsilon_i - \varepsilon_k} \quad (1.2.14)$$

називається раціональною моделлю Годена.

Класична модель Годена є гамільтоною системою з інтегралами руху, що задаються виразами (1.2.14) і неканонічною дужкою Пуасона

$$\{S_i^a, S_k^b\} = \delta_{ik} \varepsilon^{abc} S_i^c, \quad (1.2.15)$$

де a, b, c позначають спінові проекції. Динамічні змінні тоді задовольняють наступним рівнянням руху:

$$\frac{d}{dt_k} S_i^a = \{S_i^a, \mathcal{H}_k\}.$$

Оскільки у системі є в'язі $S_i^2 = \text{const}$, $i = 1, \dots, N$, фазовий простір є добутком N сфер $\mathcal{M}^{2N} = S^2 \times \dots \times S^2$, які називаються сферами Блоха. Тому розмірність фазового простору моделі Годена дорівнює $2N$.

Легко перевірити, що гамільтоніани (1.2.14) знаходяться в інволюції відносно означеної дужки Пуасона (1.2.15), тобто

$$\{\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_k\} = 0.$$

Тому класична модель Годена є інтегрованою відповідно до теореми Ліувілля, наведеної в попередньому підрозділі.

Разом з тим, в зв'язку з подальшим квантуванням моделі більш важливим є те, що модель Годена є алгебраїчно інтегрованою. Зокрема, це передбачає можливість побудови матриці Лакса, яка їй відповідає:

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} \alpha(\lambda) & \beta(\lambda) \\ \gamma(\lambda) & -\alpha(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g + \sum_{i=1}^N \frac{S_i^z}{\lambda - \varepsilon_i} & \sum_{i=1}^N \frac{S_i^-}{\lambda - \varepsilon_i} \\ \sum_{i=1}^N \frac{S_i^+}{\lambda - \varepsilon_i} & -g - \sum_{i=1}^N \frac{S_i^z}{\lambda - \varepsilon_i} \end{bmatrix}, \quad (1.2.16)$$

де λ називається спектральним параметром.

Динаміка оператора Лакса є ізоспектральною, тому величини типу $Tr(L^n)$ зберігаються. Оскільки $L(\lambda)$ має нульовий слід, $Tr(L^2)$ є першою нетривіальною комбінацією такого виду. Очевидно, вона є генеруючою функцією інтегралів руху

$$\begin{aligned}\mu^2(\lambda) &\equiv \frac{1}{2}Tr(L^2) = \alpha^2(\lambda) + \beta(\lambda)\gamma(\lambda) = \\ &= g^2 + \sum_{k=1}^N \frac{S_k^2}{(\lambda - \varepsilon_k)^2} + \sum_{k=1}^N \frac{\mathcal{H}_k}{(\lambda - \varepsilon_k)},\end{aligned}\quad (1.2.17)$$

а величини

$$\mathcal{H}_k = 2gS_k^z + \sum_{i=1, i \neq k}^N \frac{2S_k^z S_i^z + S_k^+ S_i^- + S_k^- S_i^+}{\varepsilon_k - \varepsilon_i}$$

співпадають з гамільтоніанами Годена (1.2.14).

Домножимо обидві сторони (1.2.17) на $\prod_k (\lambda - \varepsilon_k)^2$ і введемо функцію $\tilde{\mu}^2(\lambda) \equiv \prod_k (\lambda - \varepsilon_k)^2 \mu^2(\lambda)$. Тоді права сторона (1.2.17) стане поліномом по λ степені $2N$, який ми позначимо $P_{2N}(\lambda)$. В результаті отримується рівняння

$$\tilde{\mu}^2(\lambda) - P_{2N}(\lambda) = 0. \quad (1.2.18)$$

Воно задає алгебраїчну криву, яка є гіпереліптичною рімановою поверхнею роду $N - 1$.

Алгебраїчна інтегровність моделі передбачає існування деякої комплексифікації її тору Ліувілля $T^N \rightarrow T_{\mathbb{C}}^N$, так що $T_{\mathbb{C}}^N$ є яacobіаном ріманової поверхні, яка відповідає алгебраїчній кривій (1.2.18). Відповідно до загальної теорії скінченнозонного інтегрування нелінійних інтегровних рівнянь є можливість обрати набір змінних на алгебраїчній кривій (змінних розділення) та сформулювати задачу обернення Якобі [33, 36]. В цих термінах існує конструктивна

процедура, яка дозволяє розв'язати цю задачу і побудувати явні вирази, що описують динаміку змінних S_i^a , згенеровану гамільтоніаном $\mathcal{H}_k$. Для класичної моделі Годена, що описує N спінів, розв'язки задаються в термінах тета-функцій роду $N - 1$ [32], або σ - та ζ -функцій Клейна такого ж роду [41].

1.2.3 Фізичні моделі, що належать до класу моделей Годена

Моделі, які можна віднести до класу моделей Годена, описують ряд фізичних систем з різних областей фізики.

- *Модель центрального спіну* описує відокремлений спін, який взаємодіє з постійним магнітним полем та колективом спінів, що не взаємодіють між собою. Їй відповідає гамільтоніан виду:

$$\mathcal{H}_1 = -BS_1^z - \sum_{k=2}^N \gamma_k(\vec{S}_1, \vec{S}_k),$$

де B – магнітне поле, S_1^a – набір спінових операторів, що відповідають виділеному спіну, S_k^a – решті спінів. До фізичних систем, які вона описує, належать електронні спіни в квантових точках, які взаємодіють з оточуючими ядерними спінами [45, 46].

- *Модель Джейнса-Каммінга-Дікке* описує взаємодію ансамблю модельних дворівневих атомів з одномодовим електромагнітним полем [39, 47]:

$$\mathcal{H}_{Dicke} = \sum_{i=1}^N \hbar \Omega S_i^3 + \hbar \omega a^+ a + \sum_{i=1}^N \hbar g (S_i^+ a + S_i^- a^+),$$

де оператор S_i^3 описує інверсну заселеність i -го атома, $S_i^\pm$ – його дипольний момент, оператори a , a^+ відмовідають електромагнітному полю. Більш широко ця модель описує спін-бозонні системи, де підсистема,

що є спіновою, або може бути описана псевдоспіном, взаємодіє з бозонною модою. Це відповідає, наприклад, і атомно-молекулярним взаємоперетворенням у холодних атомних газах, і взаємодії квантових точок з фононними модами у резонаторі тощо.

- *Модель Бардіна — Купера — Шріффера (БКШ) у наближенні середнього поля*, що описує надпровідні системи. Застосовуючи псевдоспінове представлення Андерсона, гамільтоніан моделі БКШ можна записати у наступному вигляді [40, 41]:

$$\mathcal{H}_{BCS} = \sum_{j=0}^{n-1} 2\varepsilon_j K_j^z - g \sum_{j \neq i} K_j^+ K_j^-,$$

де псевдоспінові оператори K_j^a пов'язані з ферміонними операторами народження та знищення.

1.3 Динаміка квантових систем після різкої зміни параметру системи (квенчу)

1.3.1 Ідея квенчу

В підрозділі 1.1 обговорювалась задача знаходження динаміки квантових систем у зовнішніх полях, що залежать від часу. При цьому у всіх розглянутих випадках поле є гладкою функцією часу. Але існує також і потужний напрямок досліджень, який вивчає наслідки різкої зміни поля, що діє на систему.

Постановка задачі є наступною. Нехай квантова система знаходиться в

основному стані, що є власним станом гамільтоніану $\mathcal{H}_0$. В деякий момент часу гамільтоніан миттєво змінюється $\mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_1$, наприклад, за рахунок зміни константи взаємодії, або іншого параметра системи під дією зовнішнього впливу. Така різка зміна називається в англomовній літературі квенчем (quench) [48]. Зміна гамільтоніану виводить систему зі стану рівноваги, а її еволюція після цього і є предметом вивчення.

1.3.2 Квенчі в бозе-конденсатах

В літературі широко вивчається нерівноважна динаміка систем ультрахолодних атомів, які є цікавими об'єктами для дослідження нелінійних явищ [49]. В такого роду системах солітони – одні з основних об'єктів нелінійної динаміки, які є топологічно захищеними усамітненими хвильовими пакетами [50], – спостерігались експериментально в бозе-ейнштейнівських конденсатах [51]. При цьому було підтверджено їхню частинкову природу, а також детально вивчались їхні зіткнення [52, 53, 54]. Однією з великих переваг ультрахолодних газових систем є велика міра варіабельності їхніх параметрів. Зокрема, багато експериментів було присвячено процесам, які є наслідком різкої зміни одного або декількох параметрів системи – квенчів [55, 56, 57, 58, 59, 60]. Квенч в даній фізичній системі можна забезпечити маніпуляцією або поперечною частотою втримування, або величиною довжини розсіювання за допомогою зовнішнього магнітного поля [61]. Ці експерименти спричинили численні теоретичні дослідження нерівноважної динаміки системи після квенчу, її релаксації та властивості відповідного стійкого стану [62, 63, 48, 64, 65, 66]. Квенчі зі станів, які мають нетривіальні топологічні властивості, залишаються великою мірою недослідженою областю. Важливість топологічних хара-

ктеристик стану для результату різкої зміни параметрів системи обговорювались в літературі [63, 67, 68]. Зокрема, було помічено, що розпад початкового стану в стан, що характеризується іншим набором топологічних квантових чисел, неможливий – явище, що називається топологічним блокуванням [68].

РОЗДІЛ 2

Динаміка спіну в зовнішньому залежному від часу магнітному полі

Маючи на меті керовану динаміку квантових систем, важливо розширити клас полів, для яких можна точно розв'язати задачу і які можуть забезпечити потрібні динамічні режими системи. Для цього, з одного боку, можна скористатись вже відомими прикладами полів, в яких задача є точно розв'язною (зокрема, тими, що наведені в Розділі 1), та пропонувати деякі їх модифікації з метою отримання тієї чи іншої поведінки системи. З іншого боку, можна намагатись шукати нові конфігурації поля, що мали б достатню кількість параметрів, якими можна керувати, і призводили б до задач, для яких розв'язки можна знайти точно.

Метою даного Розділу є розглянути задачу взаємодії модельного спіну $1/2$ із зовнішніми магнітними полями, що залежать від часу. Зокрема, в підрозділі 2.1 ми розглянемо модифіковану задачу Рабі, коли, крім обертового магнітного поля, на спін вздовж третьої осі діє слабке осцилююче поле, та обговоримо можливість динамічної стабілізації системи. В підрозділі 2.2 розглядається динаміка спіну $1/2$ в полі, що є нелінійною модифікацією поля Рабі, зокрема, вивчаються умови резонансу в ньому.

2.1 Спін в обертовому та слабкому осцилюючому полях

В цьому підрозділі ми розглянемо можливість модифікації добре вивченої динаміки задачі Рабі [14] слабким осцилюючим полем вздовж осі Z . Як було зазначено в Розділі 1, спінова система під дією комбінації обертового поля в поперечній площині і сильного сталого поля вздовж осі Z здійснює осциляції Рабі. Ідея модифікації базується на аналогії із задачею про стабілізацію перевернутого маятника за допомогою залежної від часу сили, прикладеної до точки підвісу. Тому було запропоновано стабілізувати спінову нутацію, спричинену полем Рабі, додаванням додаткового змінного поля.

У запропонованому полі ми отримаємо розв'язок для спіну $1/2$ за теорією збурень і покажемо, що спін має тенденцію до перебування в деякій спеціальній суперпозиції станів протягом скінченного періоду часу. Така поведінка інтерпретується як ефект динамічної стабілізації спінової системи. Виконане чисельне інтегрування вихідних рівнянь підтверджує існування такого режиму за отриманого співвідношення між параметрами полів. Результати, отримані для спіну $1/2$, було узагальнено на систему з довільним спіном j .

2.1.1 Постановка задачі

Розглянемо задачу динаміки спіну $1/2$ в магнітному полі вигляду

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_R(t) + \mathbf{B}_{St}(t), \quad (2.1.1)$$

де $\mathbf{B}_R(t) = \hbar/\mu (a \cos \nu t, a \sin \nu t, \omega_0)$ – обертове поле задачі Рабі, $\mathbf{B}_{St}(t) = \hbar/\mu (0, 0, f_0 \cos \omega t)$ – додаткове поле вздовж осі Z і $\mu = q\hbar/2mc$ – магнітний

момент частинки із зарядом q . Оскільки додаткове поле було введено з метою стабілізації на фоні “базової” динаміки, спричиненої полем $\mathbf{B}_R(t)$, воно не повинно руйнувати осциляції Рабі. Тому будемо вважати, що амплітуда f_0 осцилюючого поля вздовж осі Z є малою порівняно з величинами a та ω_0 , що відповідають базовому полю.

Гамільтоніан даної задачі має вигляд:

$$\hat{\mathcal{H}} = \mu/2 (\mathbf{B}(t), \hat{\sigma}), \quad (2.1.2)$$

де $\hat{\sigma} = \{\hat{\sigma}_i\}$ – матриці Паулі, які задовольняють стандартним комутаційним співвідношенням: $[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2i\varepsilon_{ijk} \hat{\sigma}_k$. Беручи до уваги вибір полів, зручно розбити гамільтоніан на два доданки:

$$\hat{\mathcal{H}}(t) = \hat{\mathcal{H}}_R(t) + f_0 \hat{\mathcal{H}}_1(t), \quad (2.1.3)$$

де $\hat{\mathcal{H}}_R(t) = \mu(\mathbf{B}_R(t), \hat{\sigma})$ – гамільтоніан задачі Рабі і $f_0 \hat{\mathcal{H}}_1(t) = f_0 \hbar \cos \omega t \hat{\sigma}_3$ – гамільтоніан, пов’язаний зі стабілізуючим полем $\mathbf{B}_{St}(t)$.

Нагадаємо, що у випадку поля (2.1.1) динаміку системи можна знайти, розв’язавши рівняння на амплітуди станів (1.1.11), або відповідну матрицю еволюції (1.1.5). Слід зауважити, що ці рівняння дозволяють широку групу калібрувальних перетворень, зокрема, заміну змінних $\mathcal{C}'(t) = \hat{u}_R(t) \mathcal{C}(t)$, яка еквівалентна переходу до картини взаємодії. Очевидно, у термінах еволюційних матриць це перетворення має вигляд

$$\hat{u}'(t) = \hat{u}_R^{-1}(t) \hat{u}(t), \quad (2.1.4)$$

тому відповідне рівняння на матрицю еволюції може бути записане як

$$i \frac{d}{dt} \hat{u}'(t) = f_0 \hat{\mathcal{H}}'(t) \hat{u}'(t), \quad (2.1.5)$$

де $\hat{\mathcal{H}}' = \hbar^{-1} \hat{u}_R^{-1} \hat{\mathcal{H}}_1 \hat{u}_R$.

2.1.2 Елементи матриці еволюції за теорією збурень

Оскільки f_0 є малою величиною, для розв'язання (2.1.5) скористаємось теорією збурень. Будемо шукати розв'язок рівняння (2.1.5) у формі ряду

$$\hat{u}'(t) = \hat{1} + \hat{u}'_1(t) + \hat{u}'_2(t) + \dots \quad (2.1.6)$$

Підстановка анзацу (2.1.6) у рівняння (2.1.5) приводить до таких виразів

$$\hat{u}'_1(t) = -\imath f_0 \int_0^t \hat{\mathcal{H}}'(\tau) d\tau, \quad (2.1.7)$$

$$\hat{u}'_2(t) = (-\imath f_0)^2 \int_0^t \hat{\mathcal{H}}'(\tau_1) \int_0^{\tau_1} \hat{\mathcal{H}}'(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \dots \quad (2.1.8)$$

У більш загальному вигляді ми отримуємо наступну структуру матриць $\hat{u}'_m(t)$:

$$\hat{u}'_{2k}(t) = (-\imath f_0)^{2k} \begin{bmatrix} a'_{2k}(t) & b'_{2k}(t) \\ -b'^*_{2k}(t) & a'^*_{2k}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.1.9)$$

$$\hat{u}'_{2k+1}(t) = (-\imath f_0)^{2k+1} \begin{bmatrix} a'_{2k+1}(t) & b'_{2k+1}(t) \\ b'^*_{2k+1}(t) & -a'^*_{2k+1}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.1.10)$$

Порівнюючи вирази (2.1.9) та (2.1.10) із виразом (2.1.7) та використовуючи унітарність матриці $\hat{u}'(t)$, можна виразити елементи $\alpha'(t)$ і $\beta'(t)$ матриці $\hat{u}'(t)$, заданої виразом (2.1.4), у термінах елементів $a'_r(t)$, $b'_r(t)$ ($r = 1, 2, \dots$) матриць $\hat{u}'_r(t)$:

$$\alpha'(t) = 1 - \imath f_0 a'_1(t) - f_0^2 a'_2(t) + \dots,$$

$$\beta'(t) = -\imath f_0 b'_1(t) - f_0^2 b'_2(t) + \dots \quad (2.1.11)$$

В результаті ми можемо отримати або амплітуди $C_{\pm}(t)$, еволюція яких, відповідно до (1.1.4), задається виразами

$$C_+(t) = (\alpha_R \alpha' - \beta_R \beta'^*) C_+(0) + (\alpha_R \beta' + \beta_R \alpha'^*) C_-(0), \quad (2.1.12)$$

$$C_-(t) = -[(\alpha_R \beta' + \beta_R \alpha'^*)]^* C_+(0) + [(\alpha_R \alpha' - \beta_R \beta'^*)]^* C_-(0), \quad (2.1.13)$$

або еволюцію в часі вектора Блоха, який ми можемо подати у вигляді

$$S_3(t) = S_3^{(R)}(t) (|\alpha'|^2 - |\beta'|^2) - 4\text{Re}(\alpha_R \beta_R \alpha' \beta') S_3(0), \quad (2.1.14)$$

де $S_3(0) = \pm 1$, $\alpha_R(t)$, $\beta_R(t)$ та $S_3^{(R)}(t)$ визначені виразами (1.1.12) та (1.1.13), відповідно.

Зокрема, з точністю до поправок першого порядку, $S_3(t)$ має вигляд:

$$S_3(t) = S_3^{(R)}(t) + f_0 S_3^{(1)}(t), \quad (2.1.15)$$

де

$$S_3^{(1)}(t) = -\frac{8a^2\Delta}{\Omega_R^2(\omega^2 - \Omega_R^2)} \left(1 + \cos \omega t - \cos \Omega_R t - \frac{1}{2\omega} \{ (\omega - \Omega_R) \cos(\omega + \Omega_R)t + (\omega + \Omega_R) \cos(\omega - \Omega_R)t \} \right).$$

2.1.3 Динамічна стабілізація спіну 1/2

Оскільки ми зацікавлені у слабкій модифікації динаміки Рабі, оберемо режим, коли новий розв'язок є періодичним з періодом осциляцій Рабі, тобто $T_R = 2\pi/\Omega_R$. Ця вимога задовольняється, якщо $\omega = n\Omega_R$, де $n = 2, 3, \dots$. Покладемо $\omega = 2\Omega_R$, тоді, як видно з Рис. 2.1 (неперервна лінія), третя компонента вектора Блоха в околі точки $T_R/2$ має тенденцію до незначної зміни своєї величини. Цей факт можна інтерпретувати як втримування системи в

деякій суперпозиції станів. Таку поведінку можна вважати *короткочасовою динамічною стабілізацією* системи в деякій локально стійкій суперпозиції станів, розуміючи її при цьому як повторюване повернення до деякого проміжного стану, де система втримується протягом деякого скінченного проміжку часу. Надалі ми будемо називати це явище динамічною стабілізацією спінової системи.

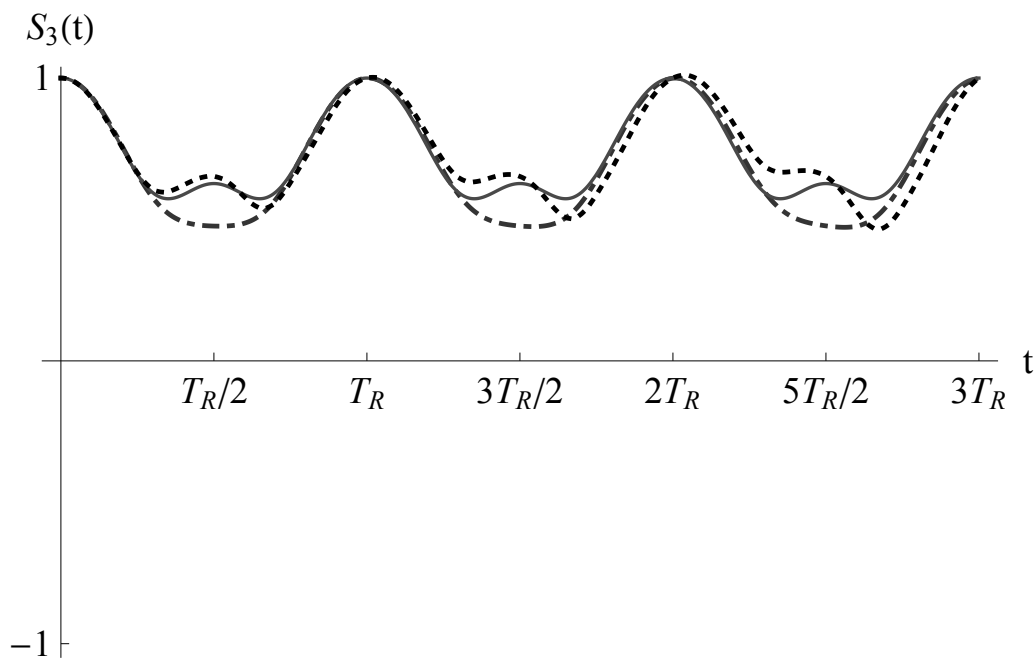


Рис. 2.1 Порівняння пертурбативних розв'язків у першому (неперервна крива) та другому порядках (пунктирна пряма) з результатами чисельного інтегрування (-.-.-) для спіну $1/2$ ($\Delta = 0.812$, $f_0 = 0.418$).

Щоб оцінити внесок поправок вищих порядків та їх вплив на ефект динамічної стабілізації, знайдений у першому порядку, порівнюємо розв'язок в другому порядку за теорією збурень із результатами чисельного інтегрування точної системи (2.1.5). Вираз для третьої компоненти вектора Блоха в

цьому випадку має наступну форму:

$$S_3(t) = S_3^{(R)}(t) + f_0 S_3^{(1)}(t) + f_0^2 S_3^{(2)}(t), \quad (2.1.16)$$

де

$$S_3^{(2)}(t) = (a'_1 - |b'_1|^2 - 2\text{Re}a'_2)S_3^{(R)}(t) - \frac{2a}{\Omega_R^2} [\Delta(1 - \cos \Omega_R t) \{\text{Re}b'_2 + a'_1 \text{Re}b'_1\} - \Omega_R \sin \Omega_R t \{\text{Im}b'_2 + a'_1 \text{Im}b'_1\}].$$

Останній вираз містить доданки, що залежать від часу як $X(t)t$, де $X(t)$ – обмежена періодична функція, але оскільки вони є пропорційними до f_0^2 , то призводять до значного зростання амплітуди коливань лише після багатьох періодів Рабі. Порівняння картини динаміки, заданої виразом (2.1.16) та чисельним інтегруванням протягом декількох періодів Рабі, підтверджує, що розв’язок (2.1.15) у першому порядку за теорією збурень адекватно описує поведінку системи, тобто поправки вищих порядків не руйнують ефект динамічної стабілізації в наведеному вище сенсі (Рис. 2.1). Разом з тим, слід відмітити, що така стабілізація є нетривалою.

2.1.4 Побудова матриці еволюції для довільного спіну j

Якщо відома матриця еволюції для системи зі спіном $1/2$, її елементи можуть бути використані для побудови відповідного оператора для спіну j . Така схема, добре відома в теорії представлень компактних груп Лі [69], використовувалась і для спінових систем [15, 16]. З метою узагальнення отриманого результату для спіну $1/2$ на задачу динаміки спіну j побудуємо унітарний оператор у просторі станів $|j, m\rangle$, $m = -j, \dots, j$, як оператор представлення $\hat{u} \rightarrow \hat{U}^{[j]}$. Представлення ваги j можна отримати, побудувавши тензорний до-

буток $2j$ об'єктів двовимірних представлень з $s = 1/2$, де воно буде основною (симетричною) компонентою.

Отже, після того, як отримано матрицю еволюції для спіну $1/2$ (тобто, отримано матричні елементи $\hat{u}(t) \in \text{SU}(2)$), розв'язок для довільного спіну j можна записати, користуючись формулою для матричних елементів незвідних представлень групи $\text{SU}(2)$ [69]:

$$U_{nm}^{[j]}(\hat{u}(t)) = \alpha^{j-m}(\alpha^*)^{j+m}(-\beta^*)^{m-n} \times \\ \times \sum_{l=M}^N \frac{\sqrt{(j-m)!(j-n)!(j+m)!(j+n)!}}{l!(j-m-l)!(j+n-l)!(m-n+l)!} \left(-\frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} \right)^l, \quad (2.1.17)$$

де $M = \max(0, n-m)$, $N = \min(j-m, j+m)$, $j = 0, 1/2, 1, \dots, n, m = -j, \dots, j$.

Означимо вектор Блоха довільного спіну j . В цьому випадку по аналогії до визначення (1.1.7), його компоненти будуть мати вигляд:

$$S_i^{[j]}(t) = \langle \Psi(0) | \hat{U}^{-1}(t) \hat{S}_i^{[j]} \hat{U}(t) | \Psi(0) \rangle, \quad (2.1.18)$$

де $\hat{S}_i^{[j]}$ – оператор спіну j . Фіксуємо початкову умову $|\Psi(0)\rangle = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$, отримуємо вираз для третьої компоненти вектора Блоха довільного спіну j :

$$S_3^{[j]}(t) = \sum_{m=-j}^j m |U_{mj}^{[j]}|^2, \quad (2.1.19)$$

де $U_{mj}^{[j]} \equiv U_{mj}^{[j]}(\hat{u}(t))$.

Таким чином, нетривіальним в загальному випадку є лише знаходження динаміки спіну $1/2$, тоді як матриця еволюції для довільного спіну може бути знайдена за наведеною вище регулярною процедурою.

2.1.5 Динамічна стабілізація спіну j

Повернемось тепер до задачі знаходження динаміки у комбінації поля Рабі та слабкого осцилюючого поля вздовж осі Z . Відповідно до викладеного вище, знайдений для спіну $1/2$ результат можна узагальнити на систему з довільним спіном j і дослідити наявність ефекту динамічної стабілізації.

Для того, щоб проілюструвати динаміку спіну j під дією поля (2.1.1) і оцінити наявність ефекту динамічної стабілізації, знайденого нами для спіну $1/2$, випишемо вирази для третьої компоненти вектора Блоха для декількох значень j . В першому порядку за теорією збурень маємо:

$$\begin{aligned} S_3^{[1]}(t) &= S_3^{[1/2]}(t), \\ S_3^{[3/2]}(t) &= S_3^{[1/2]}(t) \left[1 - \left(1 - 1/\sqrt{3} \right) \eta(t) \right], \\ S_3^{[2]}(t) &= S_3^{[1/2]}(t) [1 - \eta(t)], \\ S_3^{[5/2]}(t) &= S_3^{[1/2]}(t) \left[1 - 3 \left(1 - 1/\sqrt{5} \right) \eta(t) - \left(2 - \sqrt{2} \right) \eta^2(t) \right], \dots, \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

де $\eta(t) = |\alpha_R|^2 |\beta_R|^2 + 1/2 \left[S_3^{[1/2]}(t) - S_3^{(R)}(t) \right] S_3^{(R)}(t)$, $S_3^{[1/2]}(t) \equiv S_3(t)$ визначена у (2.1.15). Зауважимо, що тут ми знехтували доданками порядку малості $O(f_0^2)$. Всі вектори у (2.1.20) нормовані на одиницю, тобто $S_3^{[j]}(t)$ замінено на визначену в (2.1.19) величину $S_3^{[j]}(t)/j$, щоб зробити порівняння спінової динаміки більш очевидним. Результат цих обчислень представлено на Рис. 2.2. Можемо констатувати факт, що динамічна стабілізація (у сенсі, визначеному вище) має місце й у поведінці системи з довільним спіном j .

2.1.6 Висновки

В даному підрозділі було досліджено задачу взаємодії дворівневої системи (спіну $1/2$) з полем, що є комбінацією полів Рабі та додаткового слабкого

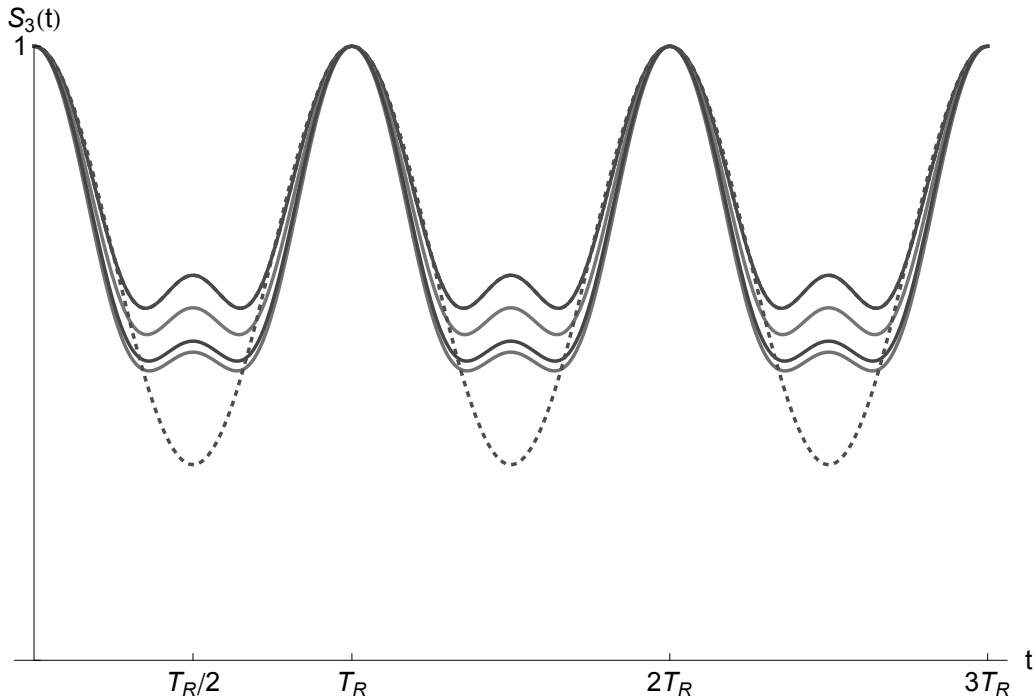


Рис. 2.2 Розв'язок для спіну j в першому порядку за теорією збурень. Пунктирна крива показує осциляції Рабі для будь-якого j ($\Delta = 0.812$, $f_0 = 0.418$). Неперервні криві з амплітудами від найменшої до найбільшої зображують динаміку спінів $1/2$, 1 , $3/2$, 2 , $5/2$ відповідно; амплітуда $S_3(t)$ спіну $1/2$ співпадає тут з амплітудою спіну 1 .

поля вздовж третьої осі. Метою такої модифікації була спроба досягти динамічної стабілізації системи за аналогією з перевернутим маятником, до точки підвісу якого прикладається змінна сила. Методами теорії збурень було отримано аналітичні розв'язки в першому та другому порядку за малим параметром, яким є амплітуда додаткового поля. Було показано, що в такому полі спостерігається тенденція до повторюваного повернення та короткочасового втримування системи в деякій суперпозиції станів. Згідно з відомою схемою отримані результати було узагальнено на довільний спін j та встановлено

аналогічну тенденцію в такій системі. Загалом, видається більш ефективним задачі такого роду, тобто підбору поля, яке компенсуватиме конкретну динаміку наперед визначеним чином, розв'язувати чисельно. Натомість потрібно шукати нові конфігурації поля, з якими задача була б точно розв'язною.

2.2 Спін $1/2$ в залежному від часу магнітному полі: вихід за межі наближення хвилі, що обертається

В цьому підрозділі ми вивчаємо динаміку спіну $1/2$ в полі, що є нелінійним узагальненням поля Рабі. При різних значеннях параметрів воно відповідає декільком фізично важливим ситуаціям: нелінійно модульованій модифікації поля Рабі, N -солітонному імпульсу та лінійно поляризованому полю, яке апроксимує гармонічне.

2.2.1 Вибір поля: нелінійна модифікація поля Рабі

Розглянемо задачу динаміки дворівневої системи в зовнішньому полі виду

$$\mathbf{B} = (Nk\nu \operatorname{cn}(\nu t, k) \cos \omega t, Nk\nu \operatorname{cn}(\nu t, k) \sin \omega t, \omega_0), \quad (2.2.21)$$

де $N \in \mathbb{Z}$, а $\operatorname{cn}(\nu t, k)$ означає еліптичну функцію Якобі – кноїд – з модулем k , $0 \leq k \leq 1$ [44, 70].

Оскільки це поле має цілий ряд параметрів, воно забезпечує наступний набір фізичних ситуацій.

1. При довільних параметрах його можна вважати нелінійною модифікацією поля Рабі, якщо розуміти під цим наявність нелінійної фун-

кції $a(t) = Nk\nu \operatorname{cn}(\nu t, k)$ замість постійної амплітуди a в полі Рабі $\mathbf{B}_R(t) = \{2a \cos \omega t, 2a \sin \omega t, \omega_0\}$.

2. У випадку $k = 1$ амплітуда вироджується в гіперболічну функцію $a(t, k = 1) = N\nu \operatorname{sech} \nu t$, тому поле стає обертовим з N -солітонною огинаючою [20].
3. Третя ситуація реалізується при $\omega = 0$: тоді поле має вигляд $\mathbf{B}_{LP}(t) = \{2a(t), 0, \omega_0\}$. Якщо взяти границю $N \rightarrow \infty$, $k \rightarrow 0$ (при цьому $Nk = \text{const}$), це поле є в точності лінійно поляризованою гармонічною хвилею. Також існує наближена границя, застосовна при достатньо малих значеннях модулярного параметра k , коли $\operatorname{cn}(\nu t, k) \approx \cos(\frac{\pi}{2K(k)}\nu t)$, де $K(k)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду. Оскільки період функції cn дорівнює $4K(k)$, то згідно з визначенням частоти ми отримаємо $\Omega = \nu\pi/[2K(k)]$ як “ефективну частоту” кноїдального поля. З вище зазначеного випливає, що якщо після знаходження динаміки в полі (2.2.21) покласти $\omega = 0$ і розглянути діапазон достатньо малих k , то ми отримаємо із загального розв’язку також і розв’язок задачі динаміки у лінійно поляризованому гармонічному полі $\{\cos \Omega t, 0, \omega_0\}$.

Якщо ми обрали поле (2.2.21), $\Omega_-(t) \equiv B_1(t) - \imath B_2(t)$ (один із коефіцієнтів динамічного рівняння на амплітуди стану дворівневої системи (1.1.6)) має вигляд

$$\Omega_-(t) = Nk\nu \operatorname{cn}(\nu t, k)e^{\imath\omega t}. \quad (2.2.22)$$

Особливістю обраного поля є те, що така комбінація його проекцій при $N = 1$

є розв'язком “стаціонарного” нелінійного рівняння Шредінгера (НРШ)

$$\Omega''_- + 2i\Omega'_- + 2|\Omega|^2\Omega_- - [\omega^2 + \nu^2(2k^2 - 1)]\Omega_- = 0,$$

а при $N \pm 2$ – вищих його аналогів. Оскільки звичайне рівняння Шредінгера є лінійною задачею для НРШ, то із загальних міркувань відомо, що поставлена нами задача повинна мати точні розв'язки.

2.2.2 Формулювання задачі

Згідно з викладеним в підрозділі 1.1.1 та беручи до уваги вигляд гамільтоніану (1.1.1) для даного вибору полів, маємо систему рівнянь на амплітуди $\tilde{C}_\pm(t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \tilde{C}_+(t) \\ \tilde{C}_-(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} \omega_0 & a(t)e^{-i\omega t} \\ a(t)e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C}_+(t) \\ \tilde{C}_-(t) \end{bmatrix}. \quad (2.2.23)$$

Виберемо початкові умови наступним чином:

$$\tilde{C}_+(0) = 1, \quad \tilde{C}_-(0) = 0, \quad (2.2.24)$$

що відповідає ситуації, коли еволюція системи починається з її власного стану $|+\rangle$.

2.2.3 Схема конструювання розв'язків

Після введення нових змінних $C_\pm(t) = e^{\pm i\omega_0 t/2} \tilde{C}_\pm(t)$ систему рівнянь (2.2.23) можна звести до двох незалежних диференціальних рівнянь другого порядку. В термінах безрозмірених змінних вони набувають наступного вигляду

$$\frac{d^2 C_\pm}{d\tau^2} + \left[\frac{\operatorname{sn}\tau \operatorname{dn}\tau}{\operatorname{cn}\tau} \pm i\Delta \right] \frac{dC_\pm}{d\tau} + N^2 k^2 \operatorname{cn}^2 \tau C_\pm = 0, \quad (2.2.25)$$

де $\operatorname{sn}\tau$, $\operatorname{cn}\tau$, $\operatorname{dn}\tau$ – еліптичні функції Якобі з модулем k , $\tau = \nu t$ та $\Delta = (\omega_0 - \omega)/\nu$ – безрозмірна різниця частот (детюнінг). Після заміни змінних $s = \operatorname{sn}(\tau, k)$ рівняння (2.2.25) набувають вигляду

$$\frac{d^2 C_{\pm}}{ds^2} - \left[\frac{k^2 s}{1 - k^2 s^2} \pm \frac{i\Delta}{\sqrt{w^2}} \right] \frac{dC_{\pm}}{ds} + \frac{N^2 k^2}{1 - k^2 s^2} C_{\pm} = 0, \quad (2.2.26)$$

тому їх можна класифікувати як рівняння типу Фукса [71] на рімановій поверхні, яка відповідає алгебраїчній кривій $w^2 = (1 - s^2)(1 - k^2 s^2)$ [44].

Розглянемо два очевидні граничні випадки: $\Delta = 0$ і $k = 1$, які мають фізичний сенс та приводять до спрощення рівнянь (2.2.26) до рівнянь гіпергеометричного типу, що можна легко розв'язати.

У випадку $\Delta = 0$, рівняння (2.2.26) спрощується до рівняння гіпергеометричного типу, розв'язки якого мають вигляд:

$$C_+ = T_N(-ks), \quad C_- = -i\sqrt{1 - k^2 s^2} U_{N-1}(-ks) \quad (2.2.27)$$

де $T_N(x)$ та $U_N(x)$ – поліноми Чебишева першого та другого роду, відповідно. Амплітуди задовольняють потрібні початкові умови автоматично.

Іншу ситуацію можна отримати, покладаючи $k = 1$, так що початкове поле редукується до обертового поля з N -солітонною огинаючою $a(t, k = 1)$. Рівняння в цьому випадку теж стають гіпергеометричного типу і розв'язками є

$$C_+ = P_N^{(a,b)}(s), \quad (2.2.28)$$

де $P_N^{(a,b)}$ – поліном Якобі з комплексними параметрами $a = -(1 - i\Delta)/2$, $b = -(1 + i\Delta)/2$. Тут важливо зауважити, що початкову умову треба замінити на $C_+(-\infty) = 1$, $C_-(-\infty) = 0$, оскільки в цій границі поле є неперіодичним і його дія починається при $t = -\infty$.

Будемо шукати розв'язок рівняння (2.2.26) для амплітуди C_+ у вигляді

$$f_+ = \exp \left[\int_0^s \left(\mathcal{R}_0(s') + i \frac{\mathcal{R}_1(s')}{\sqrt{w^2}} \right) ds' \right], \quad (2.2.29)$$

де $\mathcal{R}_0(s)$ та $\mathcal{R}_1(s)$ є раціональними функціями від s . В результаті початкове рівняння (2.2.26) переходить у систему рівнянь типу Рікатті

$$\mathcal{R}'_0 + \mathcal{R}_0^2 - \frac{k^2 s}{1-k^2 s^2} \mathcal{R}_0 + \frac{(\Delta \mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_1^2)}{w^2} + \frac{N^2 k^2}{1-k^2 s^2} = 0, \quad (2.2.30a)$$

$$\mathcal{R}'_1 + \mathcal{R}_1(2\mathcal{R}_0 - \frac{s}{s^2-1}) - \Delta \mathcal{R}_0 = 0. \quad (2.2.30b)$$

Очевидно, що $\mathcal{R}_0(s)$ в термінах модуля амплітуди має вигляд

$$\mathcal{R}_0(s) = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \ln |f_+|^2. \quad (2.2.31)$$

Оскільки розв'язки в обох граничних випадках дають, що $|C_+|$ є поліномом, спробуємо шукати f_+ у формі

$$|f_+|^2 = \mathcal{P}_{2N}(s, e_i) = \prod_{i=1}^N (s^2 - e_i^2),$$

де $\mathcal{P}_{2N}$ є поліномом $2N$ -го порядку з коренями e_i . Тоді відповідно до (2.2.31) $\mathcal{R}_0(s)$ можна легко обрахувати. Розв'язок для (2.2.30b) при відомому $\mathcal{R}_0(s)$ отримується із виразу

$$\mathcal{R}_1(s) = \Delta \int_0^s e^{-\int_y^s [2\mathcal{R}_0(x) - \frac{x}{x^2-1}] dx} \mathcal{R}_0(y) dy.$$

Рівняння (2.2.30a) служить умовою сумісності і визначає корені e_i . За відомими $\mathcal{R}_0(s)$ та $\mathcal{R}_1(s)$ можна отримати вираз для f_+ відповідно до анзацу (2.2.29). Аналогічно можна знайти розв'язок f_- , який відповідає амплітуді C_- у рівняннях (2.2.26). Після цього необхідно вибрати два лінійно незалежних розв'язки рівнянь (2.2.26) і сформувати такі їх лінійні комбінації, які будуть задовольняти обраним початковим умовам та (2.2.24).

Використовуючи цю схему, ми можемо знайти розв'язки для $N = 1$:

$$C_+ = \varepsilon_1 \sqrt{s^2 + e_1^2} e^{-i\varphi_1} + \varepsilon_2 \sqrt{-s^2 - e_2^2} e^{-i\varphi_2}, \quad (2.2.32a)$$

$$C_- = -i\varepsilon_2 \sqrt{s^2 + e_1^2} e^{i\varphi_1} + i\varepsilon_1 \sqrt{-s^2 - e_2^2} e^{i\varphi_2}, \quad (2.2.32b)$$

$$\text{де } e_{1,2}^2 = \left[(\Delta^2 - 1) \pm \sqrt{(\Delta^2 - 1)^2 + 4k^2 \Delta^2} \right] / (2k^2),$$

$$\varepsilon_i = \sqrt{(-1)^{i+1} e_i^2} / (e_1^2 - e_2^2), \quad i = 1, 2.$$

Залежна від часу фаза

$$\varphi_i = \Delta \left[\tau - (1 + e_i^2)(e_i^2)^{-1} \Pi \left(-(e_i^2)^{-1}; \text{am}(\tau, k), k \right) \right]$$

визначається в термінах неповного еліптичного інтегралу третього роду

$$\Pi(n; \text{am}(\tau, k), k) = \int_0^\tau [(1 - nx^2) \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}]^{-1} dx,$$

де $\text{am}(\tau, k)$ – амплітудна функція Якобі [44].

Зростання N , яке фізично відповідає зростанню амплітуди поля, призводить до ускладнення розрахунків та самих виразів для амплітуд стану, але не змінює їх структури.

Наприклад, явні розв'язки при $N = 2$ мають наступний вигляд:

$$C_+(\tau) = \varepsilon_a \sqrt{(-s^2 + e_1)(s^2 - e_2)} e^{i\varphi(e_1, e_2)} + \varepsilon_b \sqrt{(-s^2 + e_3)(-s^2 + e_4)} e^{i\varphi(e_3, e_4)}, \quad (2.2.33a)$$

$$C_-(\tau) = i\varepsilon_b \sqrt{(-s^2 + e_1)(s^2 - e_2)} e^{-i\varphi(e_1, e_2)} - i\varepsilon_a \sqrt{(-s^2 + e_3)(-s^2 + e_4)} e^{-i\varphi(e_3, e_4)}, \quad (2.2.33b)$$

де

$$e_i = \left[-4(\Delta^2 - 9) + (-1)^{i+1} \sqrt{2} A_\pm \right] / (36k^2), \quad i = \overline{1, 4},$$

$$\varepsilon_a = \frac{\sqrt{-e_1 e_2}}{(e_3 e_4 - e_1 e_2)}, \quad \varepsilon_b = \frac{\sqrt{e_3 e_4}}{(e_3 e_4 - e_1 e_2)},$$

$$A_{\pm} = \left[9 \left(9 \pm \sqrt{d} \right) + 54 (1 - 2k^2) \Delta^2 - 7\Delta^4 \right]^{1/2},$$

знак “плюс” відповідає кореням $e_{1,2}$ і знак “мінус” – $e_{3,4}$,

$$d = [(\Delta^2 - 9)(\Delta^2 - 1) + 12(\Delta k)^2]^2 + (\Delta^2 - 9 + 48k^2)^2 (4\Delta k)^2$$

та фаза

$$\varphi(e_l, e_n) = \Delta [2\tau/3 - \gamma_l \Pi_l + \gamma_n \Pi_n],$$

$\gamma_{l(n)} = (e_{l(n)} - 1)(-4 + e_{l(n)} + 3e_{n(l)}) / [3e_{l(n)}(e_1 - e_2)]$, де (l, n) відповідає парам $(1, 2)$ і $(3, 4)$, та $\Pi_l = \Pi(e_l^{-1}; \text{am}(\tau), k)$.

2.2.4 Умови резонансу

Якщо амплітуди станів $C_{\pm}$ відомі, то можна легко порахувати очікувані значення проекцій спінового моменту (див. (1.1.7)). Вони відповідають вектору Блоха $\mathbf{S}(t)$, третю компоненту якого – $S_3(t)$, корисну для фізичної інтерпретації, можна знайти, знаючи амплітуди станів, користуючись виразом

$$S_3(t) = |\tilde{C}_+(t)|^2 - |\tilde{C}_-(t)|^2, \quad (2.2.34)$$

де враховано початкові умови (2.2.24).

Термін “*резонанс*” ми будемо застосовувати до ситуації, коли за наявності спеціальних співвідношень між характерними частотами задачі, система еволюціонує від стану $|+\rangle$ до стану $|-\rangle$, тобто випадку, коли $S_3(\tau = \tau_0)$ дорівнює -1 , де τ_0 – деякий момент часу.

Нагадаємо, що задача динаміки дворівневої системи в полі Рабі $\mathbf{B}_R$, яке є наближенням до реального лінійно поляризованого гармонічного поля, коли

амплітуда останнього є малою і частоти є близькими до резонансу (тобто застосовним є наближення хвилі, що обертається), може бути легко розв’язана (див. підрозділ 1.1.3). Третя компонента вектора Блоха осцилює відповідно до виразу (1.1.13) з характерною частотою $\Omega_R = \sqrt{\tilde{\Delta}^2 + 4a^2}$, яка називається частотою Рабі. Відхилення від резонансу характеризується параметром $\tilde{\Delta} = \omega - \omega_0$. Такі осциляції мають назву осциляцій Рабі. Отже, *полі Рабі* $\mathbf{B}_R$ єдиною умовою резонансу є $\omega = \omega_0$, тоді система здійснює осциляції між станами з періодом $T_R = \pi/a$. Ситуацію, коли характерним періодом динаміки є T_R , ми будемо називати *резонансом Рабі*.

В *нелінійно модульованому полі Рабі*

$$\mathbf{B} = (Nk\nu \operatorname{cn}(\nu t, k) \cos \omega t, Nk\nu \operatorname{cn}(\nu t, k) \sin \omega t, \omega_0)$$

однієї лише умови

$$\omega = \omega_0$$

недостатньо для виконання $S_3(\tau_0) = -1$. Використовуючи явні вирази для амплітуд (2.2.27), ми отримуємо

$$S_3(\tau) = 2T_N(-k \operatorname{sn} \tau)^2 - 1.$$

Тому

$$T_N(-k_{res})^2 = 0$$

є додатковою умовою резонансу в такому полі (див. Рис. 2.3).

У випадку *N-солітонного імпульсу*

$$\mathbf{B} = (N\nu \operatorname{sech} \nu t \cos \omega t, N\nu \operatorname{sech} \nu t \sin \omega t, \omega_0)$$

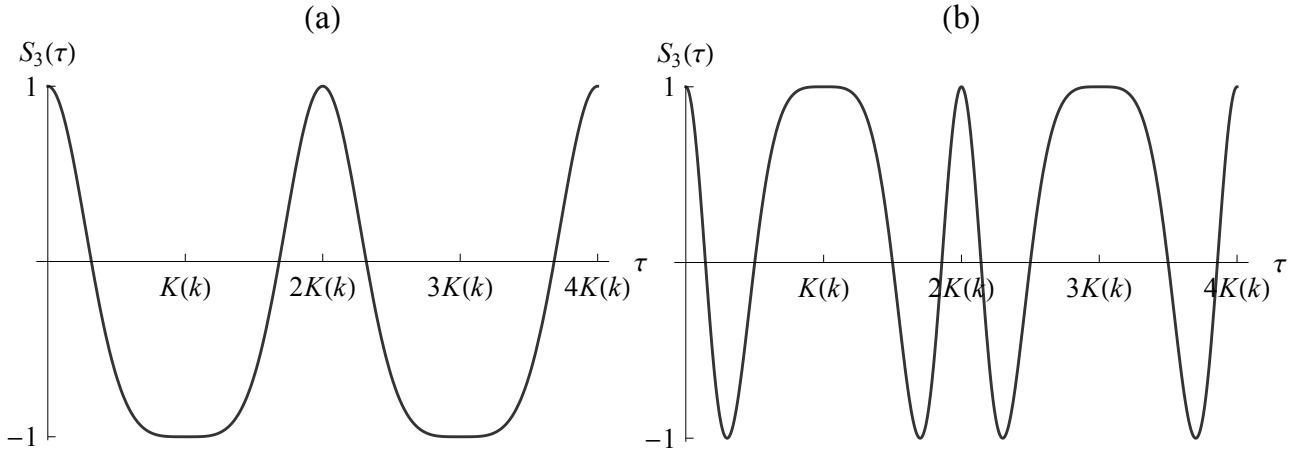


Рис. 2.3 Резонанс в нелінійно модульованому полі Рабі. (a) $N = 2$, $k_{res} = 0.7$, (b) $N = 3$, $k_{res} = 0.89$.

єдиною умовою резонансу є

$$\nu = \omega_0.$$

2.2.5 Аналіз динаміки в лінійно поляризованому полі

У випадку дворівневої системи, яка знаходиться під дією поля $\mathbf{B}_{LP}(\tau)$, $S_3(\tau)$ можна обрахувати при $N = 1, 2$, використовуючи явні вирази (2.2.32)-(2.2.33). Наші аналітичні результати чудово узгоджуються з чисельними обрахунками для лінійно поляризованої гармонічної хвилі в широкому діапазоні параметрів (див. Рис. 2.4). Оскільки поле $\mathbf{B}_{LP}(\tau)$ має дві характерні частоти: ω_0 та Ω , очікуваною умовою резонансу є

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2K(k)}\nu. \quad (2.2.35)$$

Для малих k останній вираз можна розкласти в ряд

$$\omega_0 = \nu\left(1 - \frac{k^2}{4} - \frac{5k^4}{64} - \dots\right). \quad (2.2.36)$$

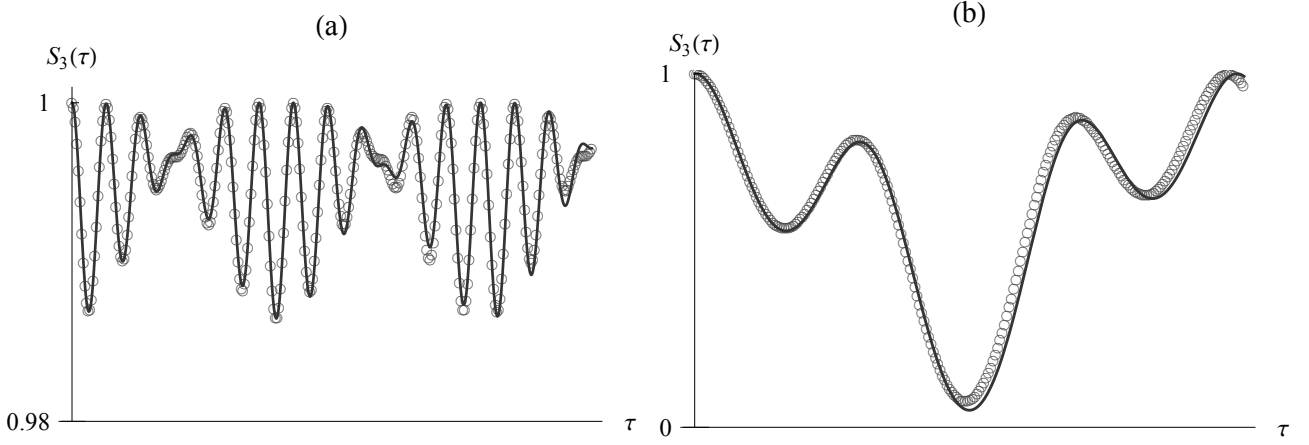


Рис. 2.4 Порівняння точного результату при $N = 2$ (неперервна лінія) у полі $\mathbf{B}_{LP}(\tau)$ з чисельним інтегруванням (кола) задачі з лінійно поляризованим гармонічним полем $\{2a \cos \tau, 0, \omega_0\}$, $a = 2k$. Тут $k = 0.25$, $a = 0.5$, (a) $\Delta = 0.4$, (b) $\Delta = 12$.

При $N = 1$ параметр k відіграє роль постійної амплітуди a у відповідному полі $\mathbf{B}_R$, тому (2.2.36) співпадає з виразом для зсуву Блоха-Зігерта [17, 72].

Можна очікувати, що наші результати узгоджуються з теорією Рабі також і у діапазоні, в якому працює наближення хвилі, що обертається. В термінах, використаних вище, це відповідає умові приблизного резонансу $\nu = \omega_0$ (або $\Delta = 1$). При $N = 1$ за наявності цієї умови вираз для $S_3(\tau)$ можна спростити

$$S_3(\tau) = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^4 \tau} \cos \left[k\tau + \frac{i}{2} \ln \left(\frac{\text{dn}\tau - i k \text{sn}\tau \text{cn}\tau}{\text{dn}\tau + i k \text{sn}\tau \text{cn}\tau} \right) \right].$$

У відповідному полі Рабі $\mathbf{B}_R$ динаміка третьої компоненти вектора Блоха задається виразом $S_3(\tau) = \cos k\tau$, оскільки $a = k$. Звідси випливає, що одночасне виконання двох умов: $\text{sn}(\tau_0, k) = 0$ та $\cos(k\tau_0) = 1$ ($\tau_0 = 2mK(k)$, $m \in \mathbb{Z}$ та $\tau_0 = \pi(2n + 1)/k$, $n \in \mathbb{Z}$, відповідно) дасть значення k , які відповідають

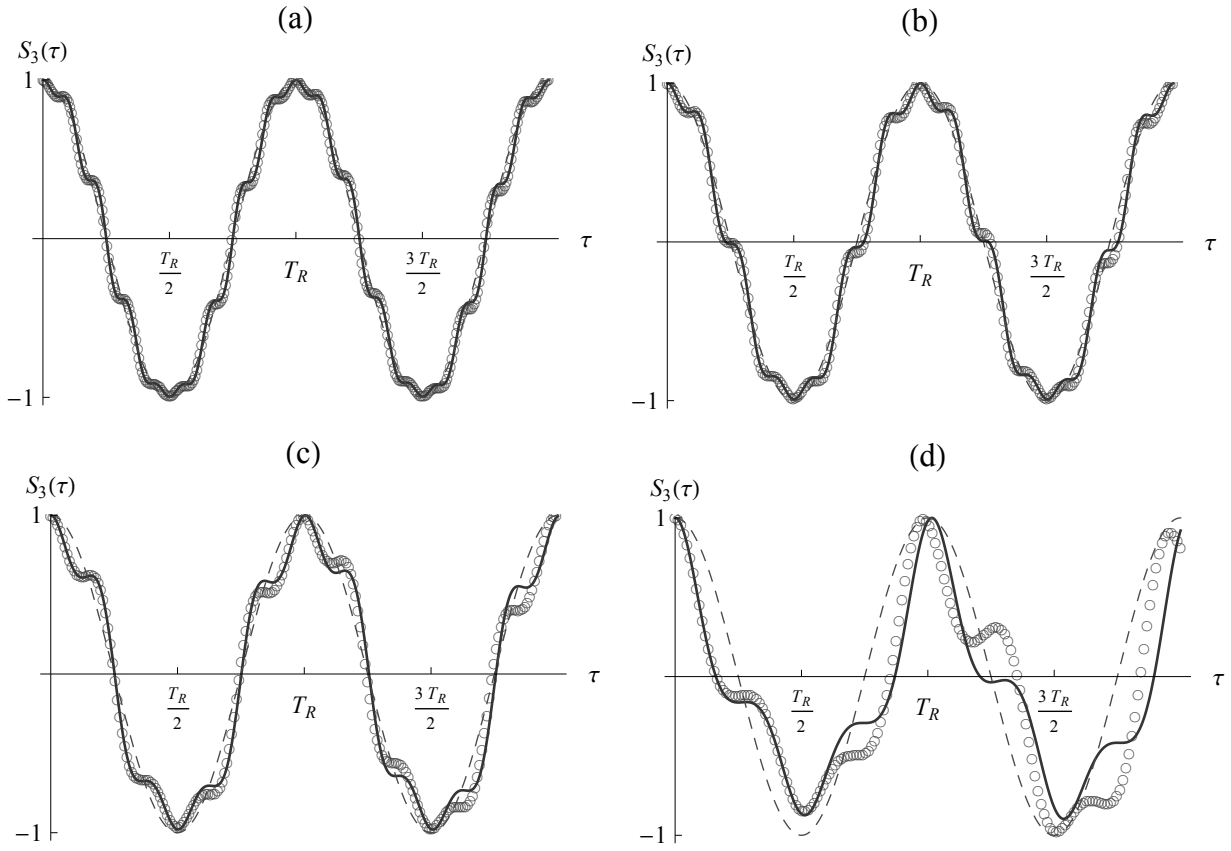


Рис. 2.5 Порівняння точного результату при $N = 2$ (неперервна лінія) у полі $\mathbf{V}_{LP}(\tau)$ з чисельним інтегруванням (кола) задачі з лінійно поляризованим полем $\{2a \cos \tau, 0, \omega_0\}$, $a = 2k$, $\nu = \omega_0$, $k \in$ розв'язками (2.2.37) і осциляціями Рабі (штрихована лінія) з періодом $T_R = 2\pi/a$.

резонансу Рабі. Відношення $m/(2n + 1)$ має бути цілим, надалі ми покладемо $n = 0$ для скорочення виразів. Використовуючи відомі співвідношення між неповними еліптичними інтегралами першого роду $K(k)$ та гіпергеометричною функцією [44], умову резонансу у випадку $N = 1$ ми можемо записати в наступному вигляді: $k {}_2F_1(1/2, 1/2; 1; k^2) = 1/m$. Її можна узагальнити на довільні значення N , що значить, що *резонанс Рабі* у по-

лі $\mathbf{B} = (Nk\nu \operatorname{cn}(\nu t, k) \cos \omega t, Nk\nu \operatorname{cn}(\nu t, k) \sin \omega t, \omega_0)$ має місце при виконанні наступного співвідношення між параметрами поля

$$k {}_2F_1(1/2, 1/2; 1; k^2) = \frac{1}{mN}. \quad (2.2.37)$$

Отримані нами розв'язки з урахуванням умов резонансу $\nu = \omega_0$ та співвідношення (2.2.37) узгоджуються з результатами чисельного інтегрування задачі лінійно поляризованої гармонічної хвилі такої ж амплітуди та частоти. Також з Рис. 2.5 очевидно, що ці вирази значно краще відтворюють динаміку системи у такому полі, ніж ті, що отримуються при використанні наближення хвилі, що обертається.

Для того, щоб вивчати динаміку дворівневої системи, індуковану лінійно поляризованим гармонічним полем в розширеному діапазоні амплітуд поля, що залежить від часу, необхідно згідно викладеної вище схеми вирахувати розв'язки з вищими N . Оскільки амплітуда дорівнює Nk , збільшення N також дозволяє зменшити k , що робить наближення лінійно поляризованого гармонічного поля полем, запропонованим нами, ще кращим.

Якщо під дворівневою системою розуміти спіні $1/2$, результати, отримані нами, можна легко узагальнити на систему зі спіном j (або, що те саме, на систему $2j + 1$ невзаємодіючих спінів $1/2$). Амплітуди $C_{\pm}(t)$ з врахуванням початкових умов (2.2.24) формують матрицю еволюції $\hat{u}(t) \in \mathrm{SU}(2)$ з елементами $\alpha = C_+$, $\beta = -C_-^*$. За відомою $\hat{u}(t)$ можна легко вирахувати еволюцію системи зі спіном j , відповідно до процедури, описаної в підрозділі 2.1.4.

2.2.6 Висновки

В цьому підрозділі ми розглянули задачу знаходження динаміки дворівне-

вої системи, індукованої зовнішнім, залежним від часу магнітним полем, що є нелінійною модифікацією поля Рабі і виражається в термінах еліптичних функцій Якобі. При різних значеннях параметрів це поле описує ряд фізично цікавих режимів. По-перше, це нелінійно модульована модифікація поля Рабі, по-друге, при $k = 1$ воно відповідає N -солітонному імпульсу, по-третє, при $\omega = 0$ і достатньо малих k воно відтворює лінійно поляризовану гармонічну хвилю. Нами запропоновано схему побудови точних розв'язків для амплітуд стану в такому полі при довільних значеннях його параметрів (крім N , яке за умовою задачі є цілим) та застосовано її для побудови явних виразів при $N = 1, 2$. Для всіх зазначених вище польових конфігурацій ми навели умови резонансу. Зокрема, у випадку лінійно поляризованого поля умова резонансу в аналітичному вигляді відтворює при малих амплітудах зсув Блоха-Зігерта. Показано, що картина динаміки, отримана нами при $N = 1, 2$, після покладання $\omega = 0$ співпадає при малих амплітудах поля та біля резонансу з передбаченнями, які отримуються в наближенні хвилі, що обертається, та чудово узгоджуються з чисельними обрахунками у великому діапазоні параметрів поза межами цього наближення.

РОЗДІЛ 3

Модель центрального спіну (модель Годена)

в термінах змінних розділення

В даному Розділі ми розглянемо модель Годена, одним із фізичних відповідей якої є модель центрального спіну. З точки зору даної дисертаційної роботи вивчення такої моделі є важливим тому, що дозволяє зрозуміти структуру станів та можливі підходи до спінової моделі із взаємодією. В моделі центрального спіну виділений спін взаємодіє з колективом спінів, які не взаємодіють між собою. Така постановка є цілком фізичною і, зокрема, відповідає ситуації, яка реалізується в квантових точках [73, 74].

В підрозділі 3.1 ми сформулюємо класичну модель центрального спіну та побудуємо рівноправні змінні розділення для неї. Це важливо з точки зору квантування, адже можна сподіватися, що відсутність виділеної змінної, яка неминуче виникає в стандартному підході, дозволить спростити функціональну реалізацію простору представлення. В підрозділі 3.2 ми проквантуємо модель Годена, записану в термінах введених змінних розділення, та сформулюємо функціональний анзац Бете. В підрозділі 3.3 ми побудуємо представлення спінових операторів та спінових станів в термінах змінних розділення. В підрозділі 3.4, використовуючи алгебраїчний анзац Бете та знайдену нами реалізацію спінових станів, ми отримаємо явні вирази для векторів Бете.

3.1 Класична модель центрального спіну

3.1.1 Раціональна $sl(2)$ модель Годена як модель центрального спіну

Однією з фізичних моделей, що належать до класу Годена (див. Розділ 1), є модель центрального спіну [41]. Остання описує систему спінів $\vec{S}_i$, $i = 2, 3, \dots, N$, які не взаємодіють один з одним, але кожен з яких взаємодіє з виділеним спіном $\vec{S}_1$. Якщо на цей “центральный” спін діє зовнішнє статичне магнітне поле B , то гамільтоніан моделі має наступний вигляд:

$$\mathcal{H}_1 = -BS_1^z - \sum_{k=2}^N \gamma_k(\vec{S}_1, \vec{S}_k), \quad (3.1.1)$$

де γ_k є константами, які характеризують взаємодію виділеного спіну $\vec{S}_1$ з деяким спіном $\vec{S}_k$. Цю модель можна вивчати і як класичну, і як квантову [75, 76, 77, 45, 46, 78].

Порівнюючи гамільтоніани (1.2.14) та (3.1.1), можна надати фізичну інтерпретацію параметрам гамільтоніанів Годена: g відповідає постійному магнітному полю вздовж осі z , а $\{\varepsilon_i\}$ є константами взаємодії між виділеним спіном та кожним спіном з його оточення.

Той факт, що модель центрального спіну є представником класу моделей Годена, дає можливість використати математичні методи, розвинені для алгебраїчно інтегровних систем. Зокрема, нам відразу відомо, що модель є інтегровною і в класичному, і в квантовому випадках. Ми розпочнемо з класичної моделі центрального спіну та введемо змінні розділення, якими можна скористатись і для класичного інтегрування моделі, і для її подальшого кван-

тування. Крім того, в квантовому випадку виявляється, є переваги в роботі одночасно з усіма гамільтоніанами моделі Годена, порівняно з одним гамільтоніаном моделі центрального спіну.

3.1.2 Розділення змінних

Відповідно до стандартної процедури [79, 47, 80, 81] можна отримати $N - 1$ змінну як нулі полінома $\gamma(\lambda)$ (або, еквівалентно, $\beta(\lambda)$). Канонічно спряжені змінні вираховуються як значення $\tilde{\mu} \equiv \sqrt{\tilde{\mu}^2(\lambda)}$ в цих точках. В результаті матимемо $2N - 2$ нові змінні. Але оскільки вихідна задача має $2N$ динамічних змінних, ми втратимо однозначну відповідність між цими двома наборами. В теорії класичного інтегрування це має наслідком необхідність додаткового інтегрування, адже залишкова змінна (і спряжена до неї) задовільняє окреме рівняння, що містить всі інші змінні [41]. Детальніше про це йтиметься в Розділі 4. При квантуванні це спричинює те, що ця залишкова змінна стає виділеною і представлення не є симетричним по всім змінним [79].

Натомість ми скористаємося модифікованою схемою введення змінних розділення, вперше використаною Е. Превіато [82], в результаті застосування якої число нових змінних співпадає з числом початкових динамічних змінних. З цією метою зробимо калібрувальне перетворення матриці Лакса (1.2.16), яке не змінює її інваріанти, але збільшує порядок позадіагональних поліномів:

$$\tilde{L}(\lambda) = \begin{bmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & -a(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta+\gamma}{2} & \frac{\beta-\gamma}{2} - \alpha \\ \frac{\gamma-\beta}{2} - \alpha & -\frac{\beta+\gamma}{2} \end{bmatrix}.$$

Тепер якщо ми виберемо λ_i як нулі раціональної функції $c(\lambda)$, їхня кіль-

кість буде рівною N :

$$c(\lambda_i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^N \frac{\imath S_k^y - S_k^z}{\lambda_i - \varepsilon_k} = g. \quad (3.1.2)$$

Спряжені змінні μ_i визначаються з першого ненульового інваріанту матриці Лакса, що з точністю до поліноміального множника співпадає з рівнянням алгебраїчної кривої:

$$\mu_i^2 = \mu^2(\lambda_i) = g^2 + \sum_{k=1}^N \frac{S_k^2}{(\lambda_i - \varepsilon_k)^2} + \sum_{k=1}^N \frac{\mathcal{H}_k}{(\lambda_i - \varepsilon_k)}. \quad (3.1.3)$$

Можна показати, що дужка Пуасона між введеними змінними є квазіканонічною

$$\{\lambda_j, \mu_k\} = \imath \delta_{jk}. \quad (3.1.4)$$

Рівняння (3.1.2) можна розглядати як лінійну систему рівнянь, яка пов'язує λ_i з комбінацією початкових змінних. Розв'язуючи її, отримуємо:

$$(S_i^z - \imath S_i^y) = -g \frac{\prod_k (\varepsilon_i - \lambda_k)}{\prod_{k \neq i} (\varepsilon_i - \varepsilon_k)}. \quad (3.1.5)$$

Використовуючи рівняння $\mu_i = a(\lambda_i)$, ми отримуємо вираз для змінної S_i^x :

$$S_i^x = -\frac{\prod_k (\varepsilon_i - \lambda_k)}{\prod_{k \neq i} (\varepsilon_i - \varepsilon_k)} \sum_j \frac{\prod_{k \neq i} (\lambda_j - \varepsilon_k)}{\prod_{k \neq j} (\lambda_j - \lambda_k)} \mu_j. \quad (3.1.6)$$

Оскільки є в'язь $S_i^2 = \text{const}$, то лише дві з трьох змінних (для кожного спіну) є незалежними.

Гамільтоніани можна виразити в термінах змінних розділення, розв'язуючи (3.1.3) відносно $\mathcal{H}_k$:

$$\mathcal{H}_i = -\frac{\prod_k (\varepsilon_i - \lambda_k)}{\prod_{k \neq i} (\varepsilon_i - \varepsilon_k)} \sum_j \frac{\prod_{k \neq i} (\lambda_j - \varepsilon_k)}{\prod_{k \neq j} (\lambda_j - \lambda_k)} M_j, \quad (3.1.7)$$

де $M_j = \mu_j^2 - g^2 - \sum_{k=1}^N \frac{S_k^2}{(\lambda_j - \varepsilon_k)^2}$.

Маючи вирази для всіх динамічних змінних та гамільтоніанів у термінах змінних розділення, ми можемо проквантувати центрального спіну (модель Годена).

3.2 Простір станів квантової моделі Годена

3.2.1 Канонічне квантування класичної моделі Годена

Оскільки ми маємо набір канонічно спряжених змінних (3.1.4) зручно використати для квантування моделі Годена схему канонічного квантування. Вона передбачає наступний рецепт переходу від класичної до квантової картини:

$$\{\lambda_i, -\imath\mu_j\} = \delta_{ij} \quad \rightarrow \quad [\hat{\lambda}_i, -\imath\hat{\mu}_j] = \imath\hbar\delta_{ij}\hat{1}.$$

В подальшому покладаємо $\hbar = 1$.

Одним із можливих шляхів реалізації цієї умови є вибір одного з операторів як оператора множення. Як наслідок, простір представлення стає простором функцій, що залежать від відповідної змінної. Тоді “спряжений” (відносно комутаційного співвідношення) оператор повинен бути похідною по цій змінній (з точністю до постійного множника):

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_i \Psi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) &= \lambda_i \Psi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N), \\ \hat{\mu}_i \Psi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) &= \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \Psi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N). \end{aligned}$$

Такий вибір називається картиною Шредінгера.

Це квантування відповідає представленню алгебри групи симетрій фазового простору на лагранжевому підмноговиді. Це N -вимірний диференційовний підмноговид фазового простору, такий, що зовнішня форма, яка визначає симплектичну структуру, зануляється на ньому [83]. В термінах обговореного вище набору канонічних координат підмноговид, який параметризується половиною з них (зокрема, $\{\lambda_i\}$), є лагранжевим підмноговидом.

В результаті ми можемо побудувати представлення спінових операторів в термінах змінних розділення. Правила впорядкування встановлюються на основі принципу відповідності між дужкою Пуасона (1.2.15) та комутаторами між елементами локальних $sl(2)$ алгебр. Відповідно до вищезазначеної реалізації операторів $\hat{\lambda}_i$, $\hat{\mu}_i$ і беручи до уваги вирази (3.1.5)-(3.1.6), ми отримуємо, що оператор

$$\left(\hat{S}_i^z - \imath \hat{S}_i^y\right) = -g \frac{\prod_k (\varepsilon_i - \lambda_k)}{\prod_{k \neq i} (\varepsilon_i - \varepsilon_k)} \quad (3.2.8)$$

є оператором множення, а

$$\hat{S}_i^x = -\frac{\prod_k (\varepsilon_i - \lambda_k)}{\prod_{k \neq i} (\varepsilon_i - \varepsilon_k)} \sum_j \frac{\prod_{k \neq i} (\lambda_j - \varepsilon_k)}{\prod_{k \neq j} (\lambda_j - \lambda_k)} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \quad (3.2.9)$$

є диференційним оператором першого порядку. Оскільки вираз для оператора $\left(\hat{S}_i^z + \imath \hat{S}_i^y\right)$ отримується із використанням квадратичної в'язі $\hat{S}_i^2 = j_i(j_i + 1)\hat{1}$, він виявляється диференційним оператором другого порядку.

Побудоване представлення має дві визначальні властивості: по-перше, всі змінні входять до операторів симетрично, по-друге, кожен оператор залежить від повного набору змінних розділення.

Можна переписати ці оператори в більш простій та звичній формі. Якщо

ми введемо наступний оператор множення

$$\begin{aligned}\hat{X}_i \Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_N) &= -g \frac{\prod_k (\varepsilon_i - \lambda_k)}{\prod_{k \neq i} (\varepsilon_i - \varepsilon_k)} \Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \\ &\equiv X_i \Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_N),\end{aligned}\tag{3.2.10}$$

спінові оператори будуть мати вигляд

$$\left(\hat{S}_i^z - \imath \hat{S}_i^y \right) = X_i, \tag{3.2.11}$$

$$\left(\hat{S}_i^z + \imath \hat{S}_i^y \right) = \frac{1}{X_i} \left[X_i^2 \frac{\partial^2}{\partial X_i^2} - j_i(j_i + 1) \right], \tag{3.2.12}$$

$$\hat{S}_i^x = X_i \frac{\partial}{\partial X_i}. \tag{3.2.13}$$

Оператори, задані виразами (3.2.11)-(3.2.13), формують представлення $sl(2)$ -трійки для i -го спіну.

Гамільтоніани Годена в термінах змінних розділення виражаються наступним чином

$$\hat{\mathcal{H}}_i = - \frac{\prod_k (\varepsilon_i - \lambda_k)}{\prod_{k \neq i} (\varepsilon_i - \varepsilon_k)} \sum_j \frac{\prod_{k \neq i} (\lambda_j - \varepsilon_k)}{\prod_{k \neq j} (\lambda_j - \lambda_k)} \hat{M}_j,$$

де $\hat{M}_j = \left[\frac{\partial^2}{\partial \lambda_j^2} - g^2 - \sum_{k=1}^N \frac{\hat{S}_k^2}{(\lambda_j - \varepsilon_k)^2} \right]$ або, еквівалентно, в термінах операторів X_i ,

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}_i &= \frac{g}{X_i} \left[-X_i^2 + X_i^2 \frac{\partial^2}{\partial X_i^2} - j_i(j_i + 1) \right] + \\ &+ \sum_k \frac{X_i X_k}{\varepsilon_i - \varepsilon_k} \left[\frac{\partial^2}{\partial X_i^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_k} + \frac{\partial^2}{\partial X_k^2} - \frac{j_i(j_i + 1)}{X_i^2} - \frac{j_k(j_k + 1)}{X_k^2} \right].\end{aligned}\tag{3.2.14}$$

3.2.2 Функціональний анзац Бете

Тепер ми можемо сформулювати спектральну задачу, яка передбачає розв'язання стаціонарного рівняння Шредінгера

$$\hat{\mathcal{H}}_i \Psi_{\{h_1, h_2, \dots, h_N\}}(\{\lambda_k\}) = h_i \Psi_{\{h_1, h_2, \dots, h_N\}}(\{\lambda_k\}),$$

тобто знаходження хвильової функції та дозволених значень енергії h_i . Очевидно, що ця задача еквівалентна задачі на власні значення для генеруючої функції $\hat{\mu}$, розв'язання якої означає одночасне знаходження власних значень та власних функцій усіх гамільтоніанів:

$$\hat{\mu}_i^2 \Psi(\{\lambda_k\}) = \left[g^2 + \sum_{k=1}^N \frac{S_k^2}{(\lambda_i - \varepsilon_k)^2} + \sum_{k=1}^N \frac{\hat{\mathcal{H}}_k}{(\lambda_i - \varepsilon_k)} \right] \Psi(\{\lambda_k\}). \quad (3.2.15)$$

Як це впливає з останньої формули змінні дійсно розділяються і ми можемо представити хвильову функцію системи як добуток “одночастинкових” хвильових функцій:

$$\Psi_{\{h_1, h_2, \dots, h_N\}}(\{\lambda_k\}) = \prod_{k=1}^N \varphi(\lambda_k).$$

Тоді “одночастинкове” рівняння (індекс опускаємо)

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} - g^2 - \sum_k \frac{j_k(j_k + 1)}{(\lambda - \varepsilon_k)^2} \right] \varphi(\lambda) = \sum_k \frac{h_k}{(\lambda - \varepsilon_k)} \varphi(\lambda) \quad (3.2.16)$$

є рівнянням типу Фукса. Аналіз поведінки в околі сингулярних точок рівняння дозволяє представити розв'язок у наступному вигляді

$$\varphi(\lambda) = C \prod_l (\lambda - \varepsilon_l)^{-j_l} e^{-g\lambda} F(\lambda), \quad (3.2.17)$$

де $F(\lambda)$ є голоморфною функцією, C – константа. Підстановка анзацу (3.2.17) в (3.2.16) дає рівняння на невідому функцію:

$$F'' - \left[2g + \sum_k \frac{2j_k}{(\lambda - \varepsilon_k)} \right] F' - \sum_k \frac{a_k}{(\lambda - \varepsilon_k)} F = 0,$$

де $a_k = h_k - 2gj_k - 2 \sum_{k \neq m} j_k j_m / (\varepsilon_k - \varepsilon_m)$. Легко перевірити, що це рівняння має поліноміальний розв'язок

$$F(\lambda) = \prod_{\alpha=1}^M (\lambda - \eta_\alpha),$$

якщо корені цього поліному задовольняють системі алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=1}^N \frac{j_k}{(\eta_\alpha - \varepsilon_k)} - \sum_{\beta=1}^M \frac{1}{\eta_\alpha - \eta_\beta} + g = 0. \quad (3.2.18)$$

Їх називають рівняннями Бете. Навіть у випадку $M = 1$, коли система рівнянь (3.2.18) вироджується в одне алгебраїчне рівняння N -ої степені, яке досить складно складно розв'язати [32]. Тому аналітичні вирази для коренів Бете можна знайти лише в деяких дуже спеціальних випадках [84, 85], тоді як у більшості робіт ця задача розв'язується чисельно [86, 87].

Якщо розв'язки рівнянь (3.2.18) – корені Бете – знайдено, спектр виражається як

$$h_k = 2gj_k + 2j_k \sum_{m=1, m \neq k}^N \left[\frac{j_m}{\varepsilon_k - \varepsilon_m} - \sum_{\alpha=1}^M \frac{1}{\eta_\alpha - \varepsilon_k} \right],$$

де число M інтерпретується як кількість збуджень. Якщо $M = 0$ спінова система знаходиться в основному (“вакуумному”) стані з максимальним значенням енергії, тоді як випадок $M \geq 1$ відповідає спіновим конфігураціям з нижчою енергією.

Цей підхід до моделі Годена, який називається *функціональним анзацом Бете*, був вперше запропонований Є. Скляніним у роботі [79].

3.3 Базис спінових станів у термінах поліномів Лягерра

3.3.1 Вирази для станів при $N = 1$

Почнемо з виродженого випадку одного спіну ($N = 1$). Тоді взаємодія відсутня і гамільтоніан системи пропорційний $\hat{S}_1^z$

$$\hat{\mathcal{H}}_1 = 2g\hat{S}_1^z.$$

Тому задача на власні значення гамільтоніану Годена у випадку, коли $N = 1$, зводиться до розв'язання рівняння

$$\hat{\mathcal{H}}_1 \Psi_m^{[j_1]} = 2g(j_1 - m) \Psi_m^{[j_1]}. \quad (3.3.19)$$

Із співвідношень (3.2.11) та (3.2.12) легко бачити, що оператор $\hat{S}_i^z$ є диференціальним оператором другого порядку

$$\hat{S}_i^z = \frac{1}{2} \left[X_i \frac{\partial^2}{\partial X_i^2} - X_i - \frac{j_i(j_i + 1)}{X_i} \right].$$

У випадку $N = 1$ є лише одна змінна розділення, тому $X_1 = g(\lambda_1 - \varepsilon_1)$. Рівняння (3.3.19) є конфлюентним гіпергеометричним рівнянням, яке можна розв'язати у термінах функцій Уіттекера [44].

Відповідно до (3.3.19) вакуумний стан, який відповідає $m = 0$, має вигляд

$$\Psi_0^{[j_1]}(X_1) = e^{-X_1} (2X_1)^{-j_1}.$$

Цей вираз узгоджується з (3.2.17), оскільки $M = 0$.

Із врахуванням того, що j_1 є напівцілим (або цілим), довільний стан системи з $N = 1$ задається наступним виразом

$$\Psi_m^{[j_1]}(X_1) = (-1)^{j_1-m} \mathcal{L}_m^{(\alpha)}(2X_1) \Psi_0^{[j_1]}(X_1),$$

де $\mathcal{L}_m^{(\alpha)}(2X_1)$ є узагальненим поліномом Лягерра [88], $\alpha = -(2j_1 + 1)$. Ми використаємо цей результат як гіпотезу про структуру станів N -спінової системи.

3.3.2 Опис простору станів для довільного N

Вакуумний стан (власний стан гамільтоніану Годена, який має максимальну енергію) для довільної кількості спінів є добутком “одночастинкових” вакуумних станів:

$$\Psi_0^{[j]} = C_1 \exp \left[-g \sum_{i=1}^N (\lambda_i - \varepsilon_i) \right] \prod_{i,k} (\lambda_i - \varepsilon_k)^{-j_k} = C_1 \prod_{i=1}^N e^{-X_i} X_i^{-j_i}. \quad (3.3.20)$$

Очевидно, цей стан є власним вектором оператора $\hat{S}^z = \sum_i \hat{S}_i^z$ і старшим вектором цього простору (вектором з максимальним власним значенням оператора $\hat{S}^z$):

$$\begin{aligned} \hat{S}^z \Psi_0^{[j]} &= \left(\sum_k j_k \right) \Psi_0^{[j]}, \\ \hat{S}^+ \Psi_0^{[j]} &= 0. \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

Нашою метою є побудова явних виразів для векторів, які задовольняють умові

$$\hat{S}^z \Psi_m^{[j]} = (j - m) \Psi_m^{[j]}, \quad (3.3.22)$$

в термінах змінних розділення. Для подальшого аналізу важливим є те, що ці стани також можна отримати як результат m -кратної дії “понижуючого” оператора

$$\Psi_m^{[j]} = (\hat{S}^-)^m \Psi_0^{[j]},$$

де $S^- = \sum_i S_i^-$. Оскільки оператор $\hat{S}^-$ можна представити у наступному

вигляді

$$S^- \equiv -2(i\hat{S}^x - \hat{S}^z) - 2\hat{S}^z + \hat{S}^+, \quad (3.3.23)$$

то власні стани оператора $\hat{S}_z$ можна подати в такій формі

$$\Psi_m^{[j]} = \left[-2(iS^x - S^z) - 2\hat{S}_3 + \hat{S}^+ \right]^m \Psi_0^{[j]}. \quad (3.3.24)$$

Вираз для першого збудженого стану $\Psi_1^{[j]}$ ($m = 1$) з врахуванням (3.3.21) є пропорційним узагальненому поліному Лягерра $\mathcal{L}_1^{-(2j+1)}(2X)$. На основі цього та аналізу задачі з $N = 1$ сформулюємо гіпотезу, що власні стани оператора $\hat{S}_z$, які можна обрахувати, користуючись означенням (3.3.24), в термінах змінних розділення мають вигляд:

$$\Psi_m^{[j]} = \mathcal{L}_m^{(\alpha)}(2X) \Psi_0^{[j]}(X), \quad (3.3.25)$$

де $X = g \sum_i (\lambda_i - \varepsilon_i)$, $\alpha = -(2j + 1)$, $\Psi_0^{[j]}$ визначено у (3.3.20).

Це твердження можна довести по індукції. Основою доведення є операторна тотожність (3.3.23) і правило “нормального впорядкування”, тобто такого розташування операторів, коли $X = 2(iS^y - S^z)$ (оператор множення на змінну X) розташовується зліва, за ним оператор S^- , далі оператор S^z і справа – оператор S^+ . Доданки з оператором S^+ справа будемо опускати, оскільки їхня дія на вакуумний стан дає нуль.

Відомо, що для узагальнених поліномів Лягерра має місце рекурентна формула

$$\mathcal{L}_{n+1}^{(\alpha)}(X) = \mathcal{L}_n^{(\alpha)}(X) \mathcal{L}_1^{(\alpha)}(X) + 2n \mathcal{L}_n^{(\alpha)}(X) - n(\alpha + n) \mathcal{L}_{n-1}^{(\alpha)}(X). \quad (3.3.26)$$

Тут і надалі поліноми Лягерра нормовані фіксацією старшого коефіцієнта,

тобто $L_n^\alpha(X) = (-1)^n X^n + \dots$. Тоді, наприклад, $L_0^\alpha(X) = 1$, $L_1^\alpha(X) = -X + \alpha + 1$ тощо.

Формулу (3.3.25) доведемо за індукцією, спираючись на формулу (3.3.26). Для доведення необхідно також обрахувати такі комутаційні співвідношення:

$$\begin{aligned} [S^+, X] &= 2(S^+ - S^z); & [S^-, X] &= -2(S^- + S^z); & [S^z, X] &= (S^+ + S^-); \\ [S^+, X^2] &= 4XS^+ - 4XS^z - 4S^z - 2S^- + 2S^+; \\ [S^-, X^2] &= -4XS^- - 4XS^z + 4S^z + 2S^- - 2S^+; \\ [S^z, X^2] &= 2XS^- + 2XS^+ - 4S^z - 2S^- + 2S^+. \end{aligned}$$

За індукцією з використанням формули (3.3.26) знайдемо, що

$$N([S^z, L_n^\alpha]) \Psi_0^{[j]} = -nL_n^\alpha \Psi_0^{[j]}. \quad (3.3.27)$$

Отже, почнемо обрахунок:

$$\Psi_{n+1}^{[j]} = S^- L_n^\alpha \Psi_0^{[j]} = (L_n^\alpha S^- + [S^-, L_n^\alpha]) \Psi_0^{[j]} = (L_n^\alpha L_1^\alpha + [S^-, L_n^\alpha]) \Psi_0^{[j]}. \quad (3.3.28)$$

Покажемо, що

$$[S^-, L_n^\alpha] \Psi_0^{[j]} \equiv N([S^-, L_n^\alpha]) \Psi_0^{[j]} = (2nL_n^\alpha - n(\alpha + n)L_{n-1}^\alpha) \Psi_0^{[j]}. \quad (3.3.29)$$

Цю формулу доведемо також за індукцією. При $n = 1$ маємо:

$$\begin{aligned} [S^-, L_1^\alpha] &= -[S^-, X] = 2(S^- + S^z), \\ N([S^-, L_1^\alpha]) \Psi_0^{[j]} &= (2L_1^\alpha - (\alpha + 1)) \Psi_0^{[j]}, \end{aligned}$$

тобто формула (3.3.29) справедлива при $n = 0$ і $n = 1$. Припустимо, що вона справджується при довільному n . Тоді

$$\begin{aligned} [S^-, L_{n+1}^\alpha] &= [S^-, (L_n^\alpha L_1^\alpha + 2nL_n^\alpha - n(\alpha + n)L_{n-1}^\alpha)] = \\ &= [S^-, L_1^\alpha] L_n^\alpha + L_1^\alpha [S^-, L_n^\alpha] + 2n[S^-, L_n^\alpha] - n(\alpha + n)[S^-, L_{n-1}^\alpha]. \end{aligned}$$

Нормальна форма останнього виразу має вигляд:

$$\begin{aligned}
& N([S^-, L_{n+1}^\alpha]) = \\
& = L_1^\alpha (2nL_n^\alpha - n(\alpha + n)L_{n-1}^\alpha) + 2n(2nL_n^\alpha - n(\alpha + n)L_{n-1}^\alpha) - \\
& \quad - n(\alpha + n)(2(n-1)L_{n-1}^\alpha - (n-1)(\alpha + n-1)L_{n-2}^\alpha) + 2N(S^- + S^z)L_n^\alpha = \\
& = 2N([S^-, L_n^\alpha]) + 2N([S^z, L_n^\alpha]) + L_1^\alpha (2nL_n^\alpha - n(\alpha + n)L_{n-1}^\alpha) - \\
& \quad - n(\alpha + n)(2(n-1)L_{n-1}^\alpha - (n-1)(\alpha + n-1)L_{n-2}^\alpha) + 2L_n^\alpha S^- + 2L_n^\alpha S^z.
\end{aligned}$$

Підставимо в отриману формулу вираз (3.3.27) і вилучимо поліном L_{n-2}^α , послуговуючись формулою (3.3.25):

$$(n-1)(n+\alpha-1)L_{n-2}^\alpha = L_{n-1}^\alpha L_1^\alpha + 2(n-1)L_{n-1}^\alpha - L_n^\alpha.$$

Матимемо

$$\begin{aligned}
& N([S^-, L_{n+1}^\alpha]) = \\
& = 2(n+1)(L_{n-1}^\alpha L_1^\alpha - n(\alpha + n)L_{n-1}^\alpha) + (4n^2 + 2n - n(\alpha + n) - (\alpha + 1))L_n^\alpha = \\
& = 2(n+1)(L_{n-1}^\alpha L_1^\alpha - n(\alpha + n)L_{n-1}^\alpha + 2nL_n^\alpha) - (n+1)(\alpha + n + 1)L_n^\alpha = \\
& = 2(n+1)L_{n+1}^\alpha - (n+1)(\alpha + n + 1)L_n^\alpha.
\end{aligned}$$

Ми отримали співвідношення (3.3.29) при $n \rightarrow n+1$. Отже, припущення індукції справджується при довільному n .

Підставивши співвідношення (3.3.29) у формулу (3.3.28), отримаємо бажаний результат:

$$\Psi_{n+1} = S^- L_n^\alpha \Psi_0^{[j]} = (L_n^\alpha L_1^\alpha + 2nL_n^\alpha - n(\alpha + n)L_{n-1}^\alpha) \Psi_0^{[j]} = L_{n+1}^\alpha \Psi_0^{[j]}$$

Таким чином, ми довели, що довільний власний стан оператора $\hat{S}^z$ задається виразом:

$$\Psi_m^{[j]}(X) = \mathcal{L}_m^{(\alpha)}(2X)\Psi_0^{[j]},$$

де

$$X = \sum_k X_k = g \sum_k (\lambda_k - \varepsilon_k), \quad \alpha = -(2J + 1).$$

А множина таких станів утворює незвідне представлення ($sl(2)$ модуль Верма) з вагою $j = \sum j_k$.

Нормувати ці вектори можна за допомогою форми Шаповалова

$$\langle \Psi_n^{[j]}, \Psi_m^{[j]} \rangle = \delta_{nm} \frac{(2j)!n!}{(2j-n)!}.$$

Крім того, що ми побудували базис спінових станів у зручній формі, ми маємо розширений простір станів, з якого можна будувати вектори моделі Годена. Отриманий модуль Верма необмежений знизу і є розширеним у сенсі, що кожен стан описується повним набором N змінних розділення.

3.3.3 Тензорна структура простору спінових станів у термінах поліномів Лягерра

Простір станів N -спінової системи є простором N -кратного тензорного добутку представлень $sl(2)$. Його можна розкласти в пряму суму незвідних компонент.

Щоб відновити тензорну структуру простору станів, ми повинні ввести так звані сингулярні вектори, які є старшими векторами у відповідних незвідних компонентах:

$$S^+ \Psi_0^{[j-l]} = 0,$$

де $l = 1, \dots, j$.

Наприклад, для $N = 2$ такий вектор має наступний вигляд

$$\Psi_{j-M}^{[j-M]} = \sum_{m_k, m_p} C_{m_k; m_p} (S_k^-)^{j_k - m_k} (S_p^-)^{j_p - m_p} \Psi_0^{[j]},$$

де $C_{m_k; m_p} = C_{j_k, m_k; j_p, m_p}^{j, j}$ є коефіцієнтами Клебша-Гордана.

Аналогічно до наведених в попередньому підпункті міркувань ми можемо вирахувати

$$(S_k^-)^n \Psi_0^{[j]} = \mathcal{L}_n^{-(2j_k+1)} (2X_k) \Psi_0^{[j]}, \quad (3.3.30)$$

використовуючи також той факт, що повний вакуумний стан є добутком односпінових вакуумних станів (3.3.20).

Тому сингулярні вектори для $N = 2$ мають таку форму:

$$\Psi_{j-M}^{[j-M]} = \sum_{m_k, m_p} C_{m_k; m_p} \mathcal{L}_{m_k}^{-(2j_k+1)} (2X_k) \mathcal{L}_{m_p}^{-(2j_p+1)} (2X_p) \Psi_0^{[j]}. \quad (3.3.31)$$

Конструювання сингулярних векторів для довільного N є теоретико-груповою задачею, яка може бути ефективно розв'язана (конкретні формули наведено, наприклад, у роботі [89]). Відповідні вирази складаються з векторів типу $(S_k^-)^l \Psi_0^{[j]}$, які ми вираховували явно (3.3.30) в термінах змінних розділення.

3.4 Стани Бете в термінах змінних розділення

Вище ми побудували базис спінових станів, які є власними станами оператора $\hat{S}^z = \sum_i \hat{S}_i^z$. Було показано, що їх можна виразити в термінах узагальнених поліномів Лягерра, які залежать від симетричних комбінацій змінних

розділення. Тепер можна застосувати цей результат до задачі на власні значення та власні вектори гамільтоніанів Годена.

Скористаємося для цього тією версією анзацу Бете, яка називається алгебраїчним анзацом Бете. Згідно до нього, власний стан гамільтоніану Годена можна представити у наступній формі

$$|\Psi(\eta_1, \dots, \eta_M)\rangle = \hat{B}(\eta_1) \dots \hat{B}(\eta_M)|0\rangle,$$

де $|0\rangle$ є вакуумним станом, а оператор $B(\eta_\alpha)$ конструюється з “понижуючих” спінових операторів кожного спіну

$$\hat{B}(\eta_\alpha) = \sum_{k=1}^N \frac{\hat{S}_k^-}{\eta_\alpha - \varepsilon_k},$$

де параметри η_α визначаються з рівнянь Бете (3.2.18).

Оскільки нам вдалось виразити явно вакуумний стан (3.3.20) і обрахувати результат дії на нього оператора $\hat{S}_k^-$ (3.3.30), ми можемо сформулювати алгебраїчний анзац Бете в термінах поліномів Лягерра. Це значить, що маючи корені Бете η_α , можна побудувати явно власні стани гамільтоніанів Годена:

$$\Psi(\{\eta_\alpha\}) = \prod_{\alpha=1}^M \left(\sum_{k=1}^N \frac{\mathcal{L}_{j_k-m_k}^{-(2j_k+1)}(2X_k)}{\eta_\alpha - \varepsilon_k} \right) \Psi_0^{[j]}.$$

Це представлення є зручним для подальшого вивчення векторів Бете та встановлення деяких особливостей їхньої залежності від параметрів η_α . Зокрема, в літературі відомо про деякі цікаві зв'язки рівнянь Бете з рівняннями Книжника-Замолодчикова [90, 91, 92]. Отриманий вигляд векторів Бете дозволяє рухатися в цьому напрямку.

3.5 Висновки

В даному Розділі ми дослідили класичну модель центрального спіну. Використавши той факт, що вона належить до класу моделей Годена і є алгебраїчно інтегрованою, ми побудували змінні розділення. На відміну від тих змінних, якими широко користуються в літературі по моделі Годена, де одна змінна є виділеною, нами введено такі змінні розділення, які є рівноправними. Це виявилось важливим з точки зору квантування, оскільки відсутність виділеної змінної, яка неминуче виникає в стандартному підході, дійсно дозволила спростити функціональну реалізацію простору представлення. Ми проквантували модель Годена, записану в термінах введених змінних розділення, та сформулювали функціональний анзац Бете. Побудоване представлення спінових операторів та спінових станів в термінах змінних розділення дозволило виявити, що в цьому випадку довільний спіновий стан системи Годена можна представити в термінах узагальнених поліномів Лягерра від симетричних функцій від змінних розділення. Наостанок, використовуючи алгебраїчний анзац Бете та знайдену нами реалізацію спінових станів, ми отримали явні вирази для векторів Бете, зручні для подальшого аналізу.

РОЗДІЛ 4

Класична динаміка дворівневих атомів та електромагнітного поля в рамках моделі

Джейнса-Каммінгса-Дікке

В даному Розділі ми розглянемо задачу взаємодії дворівневих атомів з однією модою поля. Модель Джейнса-Каммінгса-Дікке, яка відповідає цій задачі, є відомою моделлю квантової оптики. Вона описує N (у випадку моделі Джейнса-Каммінгса, один) невзаємодіючих дворівневих атомів, які взаємодіють з одномодовим електромагнітним полем, з врахуванням деяких наближень.

Ми вивчаємо класичну версію цієї моделі, тобто динаміку середніх від квантових операторів, що її описують. Відомо, що ця модель належить до класу моделей Годена та є алгебраїчно інтегрованою. Зокрема, це значить, що вона має представлення Лакса [39]. Звичайна схема введення змінних розділення дає $2N$ змінних, тоді як кількість незалежних початкових динамічних змінних дорівнює $2(N + 1)$. Тому необхідна гамільтонова редукція, що зменшує розмірність тора Ліувілля на два і відповідає фіксації двох вихідних динамічних змінних. В результаті необхідно виконувати додаткове інтегрування для відновлення цих змінних [41, 12], що є нетривіальним навіть у випадку роду 1, тоді як для вищих родів взагалі не може бути виконаним явно. В підрозділі 4.1 ми вивчаємо модель Джейнса-Каммінгса та інтегруємо її саме таким чином, а також проводимо додаткове інтегрування, яке дозволило відновити нелінійну фазу дипольного моменту атома в термінах сігма-функцій

Клейна. Існує й інший підхід до такого інтегрування, коли задача обернення Якобі розв'язується у термінах гіпереліптичних ζ -функцій [93].

В підрозділі 4.3 на прикладі моделі Дікке вивчається альтернативний підхід до алгебраїчно інтегровних моделей. По аналогії до застосованої в Розділі 3 модифікованої схеми, ми вводимо змінні розділення так, щоб їхня кількість (разом з канонічно спряженими) дорівнювала кількості вихідних динамічних змінних. Тоді інтегрування без редукції передбачає розв'язання задачі обернення Якобі на комплексному інваріантному торі моделі Дікке, який є узагальненим яacobіаном. В цьому випадку необхідно обертати розширене відображення Абеля, оскільки задача обернення Якобі, крім голоморфних диференціалів, містить також один диференціал третього роду [94]. Ця задача може бути розв'язана в термінах узагальнених тета-функцій, тобто можна знайти явні вирази для динамічних змінних, причому для довільної кількості атомів. Перевагою введеного набору змінних є одночасне знаходження всіх динамічних змінних без необхідності додаткового інтегрування.

4.1 Модель Джейнса-Каммінгса-Дікке

4.1.1 Формулювання моделі

Модель Джейнса-Каммінгса-Дікке є базовою моделлю квантової оптики, коли йдеться про взаємодію атомів з електромагнітним полем у резонаторі [95, 96, 97]. Вона формулюється із використанням трьох наближень. По-перше, атоми вважаються дворівневими, по-друге, взаємодія між атомом та

полем розглядається в дипольному наближенні, і, по-третє, використовується наближення хвилі, що обертається.

4.1.1.1 “Дворівневий” атом

Якщо електромагнітне поле близьке до монохроматичного з частотою ω , то в процесі взаємодії з атомом братимуть участь лише ті атомні стани, енергії яких резонують з полем, тобто частота атомного переходу близька до частоти поля:

$$\Omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \simeq \omega \quad (4.1.1)$$

З огляду на це багаторівневий атом можна наближено замінити дворівневою системою. Дана модель розглядає взаємодію системи таких ефективно дворівневих атомів (невзаємодіючих) з одномодовим електромагнітним полем.

Позначимо через $|1\rangle$ і $|2\rangle$ стани атома, що відповідають енергіям E_1 і E_2 , $E_2 > E_1$. Гамільтоніан атома на цих станах, очевидно, має вигляд діагональної матриці:

$$\hat{\mathcal{H}}_A = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} = (E_2 - E_1)\hat{S}_3 + \frac{1}{2}(E_1 + E_2)\hat{\mathbf{1}}_2, \quad (4.1.2)$$

де $\hat{S}_3 = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_3$, $\hat{\sigma}_3$ є матрицею Паулі, $\hat{\mathbf{1}}_2$ є одиничною матрицею 2×2 .

Оператор дипольного моменту можна представити у вигляді антидіагональної матриці:

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{p}_{21} \\ \mathbf{p}_{12} & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{p}_{21}\hat{S}_+ + \mathbf{p}_{12}\hat{S}_-,$$

де $\mathbf{p}_{21} = e\langle 2 | \hat{\mathbf{r}} | 1 \rangle = \mathbf{p}_{12}^*$,

$$\hat{S}_+ = \hat{S}_-^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.1.1.2 Дипольне наближення

При незначних амплітудах електромагнітного поля і довжинах хвиль, набагато більших за характерні розміри атома, процеси поглинання та випромінювання описують в дипольному наближенні. Якщо вважати атом нерухомим (таку ситуацію можна реалізувати у випадку стоячої хвилі в резонаторі), гамільтоніан взаємодії має вигляд

$$\hat{\mathcal{H}}_{int} = -e\hat{\mathbf{r}}(t)\hat{\mathbf{E}}(t) \quad (4.1.3)$$

де $\hat{\mathbf{r}}(t)$ – оператор координати електрона в атомі, $\hat{\mathbf{E}}(t)$ – квантоване електромагнітне поле.

Електромагнітне поле розглядається в гамільтоновій калібровці, тобто

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

де $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ – векторний потенціал, $div \mathbf{A} = 0$. Одномодове квантоване поле у фіксованій точці $\mathbf{x}_0$ будемо описувати гейзенбергівським оператором:

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}_0, t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}}\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)[\hat{a}(t) - \hat{a}^+(t)], \quad (4.1.4)$$

де V – об’єм резонатора, $\mathbf{u}$ – вектор поляризації, пропорційний амплітуді поля, $\hat{a}$, $\hat{a}^+$ – оператори народження і знищення квантових станів поля, для яких виконується комутаційне співвідношення

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1.$$

Тоді оператор дипольної взаємодії “атом-поле” буде мати вигляд:

$$\hat{\mathcal{H}}_{Int} = -i\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}[(\mathbf{u}, \mathbf{p}_{21})\hat{S}_+ + (\mathbf{u}, \mathbf{p}_{12})\hat{S}_-](\hat{a} - \hat{a}^+). \quad (4.1.5)$$

Внаслідок поперечності електромагнітного поля у взаємодії беруть участь лише поперечні (відносно осі квантування Z) компоненти дипольного моменту. Покладаючи $(\mathbf{u}, \mathbf{p}_{21}) = i|\mathbf{u}||\mathbf{p}_{21}|$, отримуємо гамільтоніан взаємодії:

$$\hat{\mathcal{H}}_{Int} = \hbar g(\hat{S}^+ - \hat{S}^-)(\hat{a} - \hat{a}^+),$$

де введено позначення $g = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar\varepsilon_0 V}}|\mathbf{u}||\mathbf{p}_{21}|$, яку ми надалі будемо називати константою взаємодії.

Повний гамільтоніан системи “атом-поле” з точністю до неістотних сталих доданків буде мати вигляд [97]:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\Omega\hat{S}_3 + \hbar\omega\hat{a}^+\hat{a} + \hbar g(\hat{S}^+ - \hat{S}^-)(\hat{a} - \hat{a}^+). \quad (4.1.6)$$

Ця модель називається моделлю Рабі.

Цікаво, що через десятиліття після її появи, виявилось, що хоча класична версія цієї моделі не є інтегрованою, квантова модель, яка теж не є інтегрованою, є точнорозв’язною: було проаналізовано її спектр та отримано вирази для власних функцій гамільтоніану [98, 99, 100, 101].

4.1.1.3 Наближення хвилі, що обертається

Зауважимо, що гамільтоніан взаємодії (4.1.6) містить доданки $\hat{S}^+\hat{a} + \hat{S}^-\hat{a}^+$ та $-(\hat{S}^+\hat{a}^+ + \hat{S}^-\hat{a})$, які мають різну частоту осциляцій. Якщо взаємодія відсутня, то $\hat{S}_\pm(t) = \hat{S}_\pm(0)e^{\pm i\Omega t}$, $\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{i\omega t}$, тому перший доданок осцилює з частотою $\Delta = \Omega - \omega$, а другий – з частотою $\Omega + \omega$. Усереднюючи гамільтоніан взаємодії по швидких осциляціях [83], ми, окрім доданку $\hbar g(\hat{S}^+\hat{a} + \hat{S}^-\hat{a}^+)$, отримаємо усереднений доданок $\frac{\hbar g}{\Omega + \omega}(\hat{S}^+\hat{a} + \hat{S}^-\hat{a}^+)$, який вважатимемо малою поправкою (це зумовлено великою частотою $\Omega + \omega$ в знаменнику). В подальшому цією поправкою нехтуватимемо.

Просумуємо тепер по всім атомам і надалі розглядатимемо гамільтоніан

$$\hat{\mathcal{H}}_{Dicke} = \sum_{i=1}^N \hbar \Omega \hat{S}_i^3 + \hbar \omega \hat{a}^+ \hat{a} + \sum_{i=1}^N \hbar g (\hat{S}_i^+ \hat{a} + \hat{S}_i^- \hat{a}^+), \quad (4.1.7)$$

який відповідає моделі Джейнса-Каммінгса-Дікке в “наближенні хвилі, що обертається” (в англomовній літературі – rotating wave approximation, RWA) [97, 102, 103].

Ми будемо вивчати класичну версію моделі (4.1.7), тобто динаміку середніх значень відповідних операторів. В фізичній літературі таку модель називають “напівкласичною”, маючи на увазі, що поле є цілком класичною величиною, тоді як атом має дискретні рівні, на відміну від цілком класичної теорії взаємодії речовини з електромагнітним полем.

4.1.2 Встановлення інтегровності моделі

Обрахуємо розмірність фазового простору моделі Дікке. Атомній підсистемі, яка містить N атомів, кожен з яких описується набором $\{S_j^x, S_j^y, S_j^z\}$ та в’яззю $(S_j^x)^2 + (S_j^y)^2 + (S_j^z)^2 = \text{const}$, відповідає $2N$ незалежних змінних. Ще дві змінні описують електромагнітне поле. Таким чином, задача має $2N + 2$ незалежних змінних, що відповідає розмірності фазового простору, яка дорівнює $2N + 2$. Фазовий простір моделі $\mathcal{M}^{2N+2} = \underbrace{S^2 \times S^2 \dots \times S^2}_N \times \mathbb{R}^2$ є добутком N сфер Блоха і двовимірної площини.

Згідно теореми Ліувілля, викладеної в підрозділі 1.2, для інтегровності в даному випадку потрібно, щоб система мала $N + 1$ інтеграл руху в інволюції. Але в цій моделі є тільки один “очевидний” інтеграл:

$$\mathcal{H}_{N+1} = \sum_{j=1}^N S_j^z + b^+ b.$$

Як ми вже зазначали в Розділі 1, з точки зору отримання явних виразів, що описують динаміку системи, ключовим є встановлення її алгебраїчної інтегровності та побудова відповідного представлення Лакса:

$$\frac{dL(\lambda)}{dt} = [L(\lambda), A(\lambda)]. \quad (4.1.8)$$

У випадку моделі Дікке оператор Лакса має наступний вигляд:

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{2}{g}\lambda - \frac{\omega}{g^2} + \sum_j \frac{S_j^z}{\lambda - \varepsilon_j} & \frac{2}{g}b + \sum_j \frac{S_j^-}{\lambda - \varepsilon_i} \\ \frac{2}{g}b^+ + \sum_j \frac{S_j^+}{\lambda - \varepsilon_i} & -\left(\frac{2}{g}\lambda - \frac{\omega}{g^2} + \sum_j \frac{S_j^z}{\lambda - \varepsilon_j}\right) \end{bmatrix} \quad (4.1.9)$$

Оскільки така еволюція є ізоспектральною, то спектр оператора Лакса зберігається, а отже, зберігаються величини, які входять до інваріантної функції $\det [L(\lambda) - \mu \mathbf{1}] = 0$. Цю функцію можна розглядати як генеруючу функцію для інтегралів руху:

$$\begin{aligned} \mu^2(\lambda) &= \alpha^2(\lambda) + \beta(\lambda)\gamma(\lambda) = \\ &= \frac{1}{g^4}(2\lambda - \omega)^2 + \frac{4}{g}\mathcal{H}_{N+1} + \frac{2}{g^2} \sum_{k=1}^N \frac{\mathcal{H}_k}{(\lambda - \varepsilon_k)} + \sum_{k=1}^N \frac{s_k^2}{(\lambda - \varepsilon_k)^2}, \end{aligned}$$

де величини

$$\mathcal{H}_k = \Delta_k S_k^z + g(b^+ S_k^- + b S_k^+) + \sum_{i \neq k} \frac{g^2}{\varepsilon_k - \varepsilon_i} \left[S_k^z S_i^z + \frac{1}{4}(S_k^+ S_i^- + S_k^- S_i^+) \right],$$

які вираховуються як лишки при полюсах $\lambda = \varepsilon_i$, та

$$\mathcal{H}_{N+1} = \sum_{j=1}^N S_j^z + b^+ b$$

складають набір інтегралів руху моделі Дікке, $\Delta_k = (2\varepsilon_k - \omega)$ – параметр, який характеризує різницю між частотами переходу в атомі та частотою електромагнітного поля.

Варто зауважити, що гамільтоніан моделі є лінійною комбінацією знайдених інтегралів руху

$$\mathcal{H}_{Dicke} = \omega \mathcal{H}_{N+1} + \sum \mathcal{H}_j.$$

Тепер ми можемо встановити чи є модель Дікке інтегрованою за Ліувіллем. Оскільки кількість знайдених інтегралів руху становить $N + 1$ і можна перевірити, що вони перебувають в попарній інволюції, тобто $\{\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_k\} = 0$, та розмірність фазового простору становить $2N + 2$, то твердження теореми Ліувілля виконується. Сумісною поверхнею рівня інтегралів руху $\{\mathcal{H}_i = h_i = \text{const}\} \simeq T^{N+1} = \underbrace{S^1 \times S^1 \dots \times S^1}_{N+1}$ є тор Ліувілля.

Як зазначалося вище, ефективним шляхом до інтегрування задачі є використання її алгебраїчної інтегровності. В стандартному випадку це, зокрема, значить, що існує відображення з тору Ліувілля, який відповідає даній системі в деякий абелевий тор, який є якобіаном ріманової поверхні, заданої спектральною кривою. При цьому комплексна розмірність якобіану дорівнює, з одного боку, роду відповідної поверхні, а з іншого боку – розмірності тора Ліувілля. В даному випадку ситуація відрізняється від стандартної, оскільки розмірність тора Ліувілля (за рахунок розмірності вихідного фазового простору) на одиницю більша за рід кривої:

$$T^{N+1} \rightarrow T_{\mathbb{C}}^N.$$

Зазвичай цю проблему вирішують наступним чином. Для того, щоб отримати стандартну задачу обернення, необхідно зафіксувати одну кутову змінну, тобто дві змінні у фазовому просторі (зробити гамільтонову редукцію). Але після знаходження тета-функціонального розв'язку для N змінних, необхідно

проводити додаткове інтегрування. Саме так ми інтегруємо модель Джейнса-Каммінгса в Підрозділі 4.2, оскільки в цьому випадку рід дорівнює одиниці й інтегрування в термінах еліптичних функцій можна провести явно. Альтернативним варіантом у вищих родах є інтегрування в термінах гіпереліптичних ζ - and σ -функцій, здійсненим в роботі [41].

Ми пропонуємо працювати з узагальненим якобіаном, що дозволить будувати відображення

$$T^{N+1} \rightarrow \tilde{T}_{\mathbb{C}}^{N+1}.$$

При цьому змінні розділення вводяться так, щоб їх кількість дорівнювала кількості вихідних динамічних змінних. З точки зору відображення Абеля це означає його узагальнення:

$$\text{Sym}(\underbrace{\mathcal{R} \times \mathcal{R} \dots \times \mathcal{R}}_{N+1}) \rightarrow T_{\mathbb{C}}^{N+1} = G\text{Jac}(\mathcal{R}),$$

де $\mathcal{R}$ – ріманова поверхня, що відповідає алгебраїчній кривій

$$\mu^2(\lambda) = \frac{1}{g^4}(2\lambda - \omega)^2 + \frac{4}{g}\mathcal{H}_{N+1} + \frac{2}{g^2} \sum_{k=1}^N \frac{\mathcal{H}_k}{(\lambda - \varepsilon_k)} + \sum_{k=1}^N \frac{s_k^2}{(\lambda - \varepsilon_k)^2} \rightarrow (4.1.10)$$

$$w^2(\lambda) \equiv \mu^2(\lambda) \prod_{i=1}^N (\lambda - \epsilon_i)^2 = Q_{2N+2}(\lambda), \quad (4.1.11)$$

$G\text{Jac}(\mathcal{R})$ – узагальнений якобіан. Зауважимо, що w^2 є парною алгебраїчною (гіпереліптичною) кривою роду N .

В Підрозділі 4.3 ми введемо $N + 1$ змінну розділення (і $N + 1$ спряжених), використовуючи наведені вище дані, та побудуємо узагальнене відображення Якобі.

4.2 Класичне інтегрування моделі Джейнса-Каммінгса та аналіз динамічних режимів

4.2.1 Гамільтонові рівняння моделі

Почнемо з квантового гамільтоніану моделі Дікке (4.1.7), де покладемо $N = 1$,

$$\hat{H} = \hbar\Omega\hat{S}_3 + \hbar\omega\hat{a}^+\hat{a} + \hbar g(\hat{S}^+\hat{a} + \hat{S}^-\hat{a}^+). \quad (4.2.12)$$

Він відповідає моделі Джейнса-Каммінгса в “наближенні хвилі, що обертається” [102], [97].

Цей гамільтоніан (4.2.12) разом з усіма динамічними змінними визначений у гільбертовому просторі, який є тензорним добутком двовимірного простору атомних станів та нескінченновимірного простору станів електромагнітного поля. За базисні стани поля виберемо фотонні стани $|n\rangle$, для яких

$$\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle, \quad (4.2.13)$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (4.2.14)$$

Довільний нормований квантовий стан системи “атом-поле” будемо записувати у вигляді

$$|\Psi\rangle = \sum_n \left(c_1(n)|1, n\rangle + c_2(n)|2, n\rangle \right), \quad (4.2.15)$$

$$\sum_n \left(|c_1(n)|^2 + |c_2(n)|^2 \right) = 1.$$

Очевидно, стани ортогональні та задовольняють умові повноти.

Ми усереднимо по станах (4.2.15) праву та ліву частини рівнянь Гейзенберга. “Напівкласичність” такого усереднення буде полягати в тому, що ми

знехтуємо квантовими кореляціями між змінними поля та атомними операторами і покладемо

$$\langle \Psi | \hat{a}^+ \hat{S}_3 | \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{a}^+ | \Psi \rangle \langle \Psi | \hat{S}_3 | \Psi \rangle$$

Тоді для середніх значень $S_{\pm} = \langle \Psi | \hat{S}_{\pm} | \Psi \rangle$, $a^+ = \langle \Psi | \hat{a}^+ | \Psi \rangle$, $a^- = \langle \Psi | \hat{a} | \Psi \rangle$ шляхом усереднення відповідних рівнянь Гейзенберга отримаємо систему рівнянь:

$$i \frac{dS_+}{dt} = -\Omega S_+ + 2ga_+ S_3, \quad (4.2.16a)$$

$$i \frac{dS_-}{dt} = \Omega S_- - 2ga S_3, \quad (4.2.16б)$$

$$i \frac{dS_3}{dt} = g(S_+ a - S_- a^+), \quad (4.2.16в)$$

$$i \frac{da}{dt} = \omega a + gS_-, \quad (4.2.16г)$$

$$i \frac{da^+}{dt} = -\omega a^+ - gS_+. \quad (4.2.16д)$$

Перейдемо від комплекснозначних функцій $S_{\pm}$, $a^{\pm}$ до дійсних величин

$$S_1 = \frac{1}{2}(S_+ + S_-), \quad S_2 = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-),$$

$$a_1 = \frac{1}{2}(a + a^+), \quad a_2 = \frac{1}{2i}(a - a^+)$$

та зафіксуємо класичний гамільтоніан

$$\mathcal{H} = \Omega S_3 + \omega(a_1^2 + a_2^2) + g(a_1 S_1 + a_2 S_2).$$

Тоді у п'ятивимірному просторі змінних $\{S_1, S_2, S_3, a_1, a_2\}$ матимемо систему гамільтонових рівнянь

$$\frac{dS_i}{dt} = \{S_i, H\} \quad \frac{da_{\nu}}{dt} = \{a_{\nu}, H\}. \quad (4.2.17)$$

Дужка Пуассона цієї системи є неканонічною (виродженою) і має вигляд:

$$\{f_1, f_2\} = \sum_{ij} W_{ij} \frac{\partial f_1}{\partial S_i} \frac{\partial f_2}{\partial S_j} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f_1}{\partial a_1} \frac{\partial f_2}{\partial a_2} - \frac{\partial f_2}{\partial a_1} \frac{\partial f_1}{\partial a_2} \right],$$

де $W_{ij} = \varepsilon_{ijk} S_k$, $\det[W_{ij}] = 0$. Система (4.2.17) буде основним об'єктом наших досліджень.

Система гамільтонових рівнянь (4.2.17) завдяки наявності двох комутуючих інтегралів руху

$$h_0 = S_3 + a^+ a^-, \quad (4.2.18a)$$

$$h_{-1} = \lambda_0 S_3 + S_+ a^+ + S_- a^-, \quad (4.2.18b)$$

де $g\lambda_0 = \Delta$, та в'язі

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S_+ S_- + S_3^2 = \frac{1}{4} \quad (4.2.19)$$

є інтегрованою в сенсі теореми Ліувілля [83]. Гамільтоніан системи в термінах цих інтегралів руху має вигляд:

$$\mathcal{H} = \omega h_0 + g h_{-1},$$

при цьому, згідно введених вище позначень: $\omega + g\lambda_0 = \Omega$. Фазовий простір цієї системи – чотиривимірний многовид, що є прямим добутком сфери на двовимірний плоский простір $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{M} \simeq S^2 \times \mathbb{R}^2.$$

Змінні на сфері – це проекції дипольного моменту S_1 і S_2 та інверсна заселеність рівнів S_3 , пов'язані співвідношенням (4.2.19). Відповідно до теореми Ліувілля сумісна поверхня рівня інтегралів руху $h_0 = \text{const}$, $h_{-1} = \text{const}$,

дифеоморфна двовимірному тору T^2 (цей об'єкт будемо називати *тором Ліувілля*). Систему рівнянь можна (4.2.17) подати у формі Лакса:

$$\imath \frac{d\hat{L}}{dt} = [\nabla h, \hat{L}], \quad (4.2.20)$$

де оператор Лакса має вигляд:

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \hat{S}_3 & \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \hat{S}_+ + a^* \\ \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \hat{S}_- + a & -(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \hat{S}_3) \end{pmatrix},$$

а ∇h - матричний градієнт від функції

$$h = g(S_3^2 + S_+ S_-) + \omega(a^+ S_- + a S^+ + a_3 S_3),$$

який обраховується за формулою

$$\begin{aligned} \nabla h = (\lambda - \lambda_0)^{-1} & \left(\frac{\partial h}{\partial S_+} \hat{S}_- - \frac{\partial h}{\partial S_-} \hat{S}_+ \right) + \\ & + (\lambda - \lambda_0)^{-2} \left(\frac{\partial h}{\partial a_+} \hat{S}_- + \frac{\partial h}{\partial a} \hat{S}_+ + \frac{\partial h}{\partial a_3} \hat{S}_3 \right), \quad a_3 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Як зазначалось вище, наявність представлення Лакса дозволяє при дослідженні системи (4.2.17) застосовувати методи теорії скінченнозонного інтегрування нелінійних рівнянь солітонного типу [104]. На основі представлення (4.2.20) можна зробити деякі загальні твердження про систему (4.2.17), зокрема можна стверджувати, що вона є алгебраїчно інтегрованою. Це означає, що фазовий простір системи можна розширити на комплексні динамічні змінні і комплексний час $z = t + \imath \tau$. При цьому тор Ліувілля T^2 розширяється до комплексного абелевого тору $T_{\mathbb{C}}^2$, який, відповідно до відображення Абеля та формул обернення Якобі, ототожнюється з прямим симетризованим добутком двох екземплярів ріманової поверхні:

$$T_{\mathbb{C}}^2 \rightleftharpoons (\mathfrak{R} \times \mathfrak{R})_{symm}.$$

Поверхня $\mathfrak{R}$ визначається як алгебраїчна крива алгебраїчним рівнянням:

$$\mathfrak{R} : \det[\hat{L}(\lambda) - \mu] = 0$$

або

$$\begin{aligned} w^2 = & \lambda^4 - 2\lambda^3\lambda_0 + (4h_0 + \lambda_0^2)\lambda^2 + \\ & + 4(h_{-1} - 2\lambda_0 h_0)\lambda + 4(h_{-2} + \lambda_0^2 h_0 - \lambda h_{-1}), \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

де $w = 2\mu(\lambda - \lambda_0)$. Рід поверхні $\mathfrak{R}$ рівний одиниці. Відносно неї тор $T_{\mathbb{C}}^2$ буде узагальненим якобіаном, тому відображення Абеля задаватиметься інтегралом не тільки першого, але й третього роду.

Більш детально ми це будемо обговорювати в наступному підрозділі, аналізуючи можливості інтегрування моделі Дікке. Але спочатку проінтегруємо систему (4.2.17) більш простим способом, виокремивши дві змінні, для кожної з яких можна отримати замкнені рівняння. Такими змінними будуть $S_3(t)$ та деяка нова змінна

$$\xi(t) = -\frac{S_-(t)}{a^-(t)}.$$

4.2.2 Динаміка інверсної заселеності атома

4.2.2.1 Замкнені рівняння на змінну S_3 та його розв'язки

Особливістю даної задачі є те, що для однієї змінної ($S_3(t)$) можна отримати окреме замкнене диференціальне рівняння, беручи другу похідну від відповідного динамічного рівняння першого порядку:

$$\frac{d^2 S_3}{d(gt)^2} = 6S_3^2 - (4h_0 + \lambda_0^2)S_3 - \left(\frac{1}{2} - \lambda_0 h_{-1}\right). \quad (4.2.22)$$

Його можна інтерпретувати як рівняння Ньютона для частинки масою $m = 1$ в потенціальному полі

$$U(S_3) = -2S_3^3 + \frac{4h_0 + \lambda_0^2}{2}S_3^2 + \left(\frac{1}{2} - \lambda_0 h_{-1}\right)S_3.$$

Для такої системи виконується закон збереження енергії

$$\left[\frac{dS_3}{d(gt)}\right]^2 = 2[E - U(S_3)]. \quad (4.2.23)$$

З іншого боку, підносячи до квадрату рівняння (4.2.16в) та використовуючи решту рівнянь (4.2.16), маємо:

$$\begin{aligned} \left[\frac{dS_3}{d(gt)}\right]^2 &= -[(S_+ a_-)^2 + (S_- a_+)^2] + 2a_+ a_- S_+ S_- = \\ &= -(h_{-1}^2 + \lambda_0^2 S_3^2 - 2\lambda_0 h_{-1} S_3) + 2(h_0 - S_3)\left(\frac{1}{4} - S_3^2\right). \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

Тоді, співставляючи (4.2.23) та (4.2.24), знаходимо, що: $E = \frac{1}{2}(h_0 - h_{-1}^2)$.

Остаточно маємо:

$$\left[\frac{dS_3}{d(gt)}\right]^2 = P_3(S_3), \quad (4.2.25)$$

де $P_3(S_3) = -(h_{-1}^2 + \lambda_0^2 S_3^2 - 2\lambda_0 h_{-1} S_3) + 2(h_0 - S_3)\left(\frac{1}{4} - S_3^2\right)$ – поліном третьої степені. Його можна представити у вигляді

$$P_3(S_3) = \prod_{i=1}^3 (S_3 - e_i),$$

де e_1, e_2, e_3 – нулі цього полінома, які можна виразити через його коефіцієнти очевидними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 &= h_0 + \left(\frac{\lambda_0^2}{4}\right), \\ e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_1 e_3 &= \frac{\lambda_0}{2} h_{-1} - \frac{1}{4}, \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

$$e_1 e_2 e_3 = \frac{1}{4}(h_{-1}^2 - h_0).$$

Нехай виконується $e_1 \geq e_2 \geq e_3$. Тоді для функції $S(gt)$ маємо розв'язок:

$$S(gt) = \wp(gt + u_2) + \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3),$$

де $\wp(u)$ - еліптична функція Веєрштраса, яка визначається параметрами

$$E_i = e_i - \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3), \quad E_1 + E_2 + E_3 = 0.$$

Перейдемо від функції Веєрштраса до еліптичної функції Якобі за формулою

$$\wp(u) = E_3 + \frac{E_1 - E_3}{\operatorname{sn}^2(\sqrt{E_1 - E_3}u, k)},$$

де $k = \sqrt{\frac{E_2 - E_3}{E_1 - E_3}} = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}}$, $u = u_1 + iu_2$. Вибравши уявну частину фази функції $\operatorname{sn}(z, k)$ з умови

$$\sqrt{e_1 - e_3} u_2 = K',$$

де K' - чверть уявного періоду еліптичної функції і скориставшись формулою

$$\operatorname{sn}(u + iK') = \frac{1}{k \operatorname{sn}(u)},$$

остаточно отримаємо:

$$S_3(gt) = e_3 + (e_2 - e_3) \operatorname{sn}^2(\sqrt{e_1 - e_3}gt, k), \quad (4.2.27)$$

яка при $\lambda_0 = 0$ з точністю до вибору e_1, e_2, e_3 та фази збігається з відповідною формулою роботи [102].

4.2.2.2 Режими динаміки інверсної заселеності атома

Виділення тих чи інших режимів динаміки інверсної заселеності атома передбачає аналіз фізичних початкових умов та їх переформулювання у термінах значень інтегралів руху h_0, h_{-1} і параметру λ_0 . Останні однозначно пов'язані з нулями e_1, e_2, e_3 , які є параметрами розв'язку. В результаті такого

аналізу та формули (4.2.27) можна описати три характерні режими поведінки дворівневого атома в моделі Джейнса-Каммінгса: збудження атома слабким електромагнітним полем (“однофотонне” збудження), спонтанне випромінювання та осциляції Рабі інверсної заселеності енергетичних рівнів.

1. Збудження атома слабким електромагнітним полем. Нехай у початковий момент $S_3(0) = -\frac{1}{2}$, а при $t \rightarrow \infty$, $S_3 \rightarrow \frac{1}{2}$. Тоді слід покласти

$$e_3 = -\frac{1}{2}, \quad e_2 = \frac{1}{2}, \quad e_1 \geq e_2.$$

Із співвідношень (4.2.26) випливає, що

$$e_1 = h_0 + \frac{\lambda_0^2}{4}, \quad h_0 \geq \frac{1}{2}, \quad h_0 = -\frac{1}{2} + n,$$

де $n = a^+ a^-$ – квадрат амплітуди електромагнітного поля або “число фотонів” у квантовій теорії.

Покладемо $\lambda_0 = 0$, що відповідає нульовій ширині рівня атома, $n = 1$ – мінімальна з точки зору квантової теорії величина електромагнітного поля, $h_0 = \frac{1}{2}$. У цьому випадку $k = 1$, $e_1 - e_3 = 1$ і вираз для інверсної заселеності рівнів набуває вигляду

$$S_3(gt) = -\frac{1}{2} + \tanh^2(gt), \quad (4.2.28)$$

вироджуючись із еліптичної функції в гіперболічну.

Поведінка функції $S_3(gt)$ зображена кривою (а) на Рис. 4.1. Якщо дворівневий атом вважати строго резонансним (з нульовою шириною збудженого рівня), то у відповідності із співвідношенням невизначеностей, перехід відбуватиметься за нескінченно довгий час.

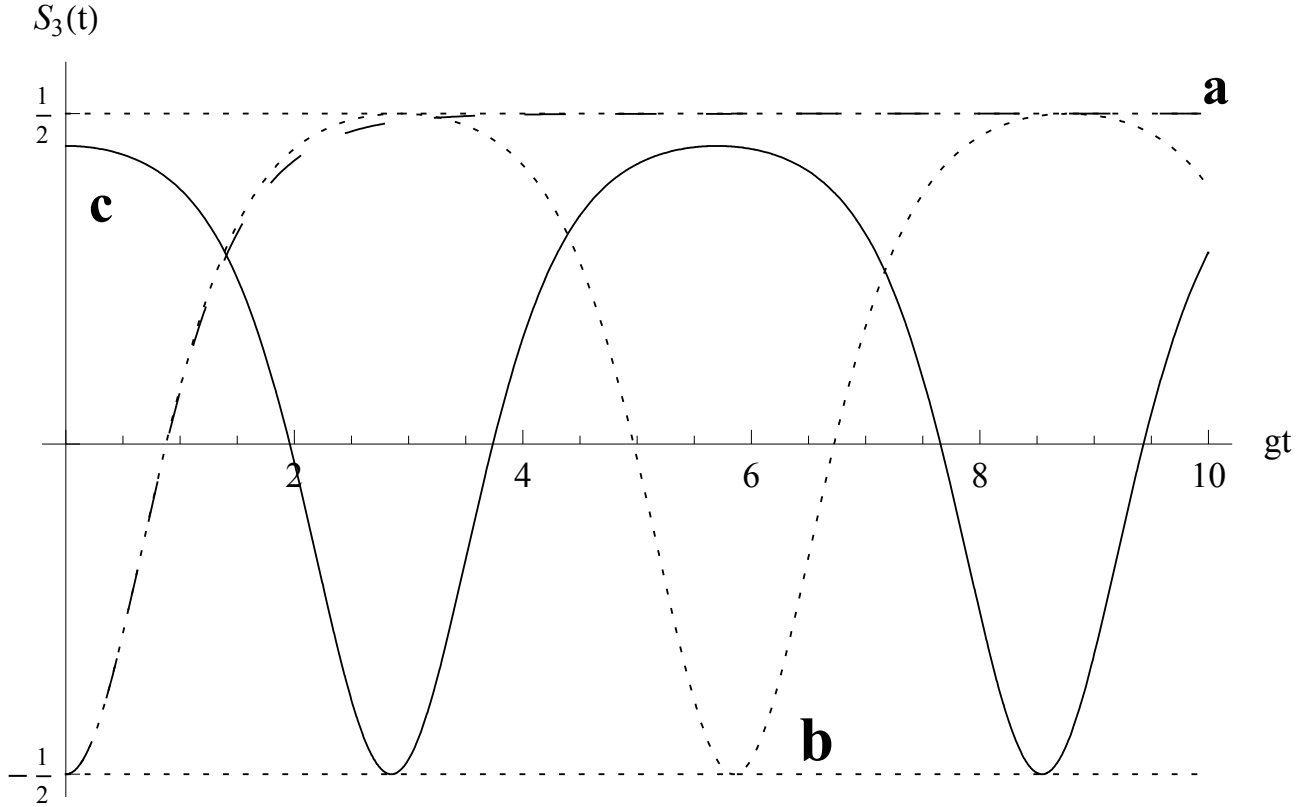


Рис. 4.1 Динаміка інверсної заселеності атома $S_3(gt)$ для різних початкових умов. (а) Збудження атома слабким електромагнітним полем. (б) Нелінійні осциляції Рабі (с) Спонтанне випромінювання. Параметри наведено у тексті.

2. Нелінійні осциляції Рабі. Якщо збудженому стану $|2\rangle$ приписати скінченну (як завгодно малу) ширину ΔE , то згідно зі співвідношенням невизначеностей час переходу повинен бути скінченним. Параметр $\hbar\lambda_0 g$ за означенням ефективно грає роль ширини рівня. Тому при $\lambda_0 \neq 0$, $n = 1$ ми отримуємо нелінійні осциляції інверсної заселеності рівнів

$$S_3(gt) = -\frac{1}{2} + \text{sn}^2\left(\sqrt{1 + \frac{\lambda_0^2}{4}}gt, k\right). \quad (4.2.29)$$

з періодом осциляцій $\tau = 4K / \left[g\sqrt{1 + \frac{\lambda_0^2}{4}}\right]$, де $4K$ – дійсний період еліптичної

функції. Відповідну динаміку зображено кривою (b) на Рис. 4.1.

3. Спонтанне випромінювання. Якщо у початковий момент часу атом знаходиться у збудженому стані, тобто $S_3(0) = \frac{1}{2}$, а поля немає ($n = 0$), то $h_0 = S_3(0)$. Оскільки h_0 є інтегралом руху, атом перебуватиме у збудженому стані як завгодно довго. Якщо ж $\lambda_0 \neq 0$, то формула (4.2.29) описує також процеси випромінювання. При цьому необхідно початковий момент часу змістити на половину періоду, тобто на величину $t_1 = \frac{\tau}{2}$. Це еквівалентно рухові з початковою умовою

$$S_3(0) = \frac{1}{2} - \frac{\lambda_0}{2},$$

тобто з початково збудженого стану з ненульовою шириною рівня. Ця ж початкова умова відповідає ситуації, коли атом перебуває у збудженому стані і присутнє поле з квадратом амплітуди $\langle a^+ a \rangle = \frac{\lambda_0}{2}$. Відповідну динаміку зображено кривою (c) на Рис. 4.1.

4.2.3 Динаміка дипольного моменту атома

4.2.3.1 Знаходження динаміки дипольного моменту атома

Перейдемо тепер до знаходження динаміки дипольного моменту атома. Оператори $\hat{S}_+$ та $\hat{S}_-$ безпосередньо пов'язані з поперечними компонентами дипольного моменту атома. Для знаходження явних формул, які описують відповідні середні значення $S_+(t)$, $S_-(t)$, введемо нову змінну розділення

$$\xi(t) = -\frac{S_-(t)}{a^-(t)}. \quad (4.2.30)$$

Безпосереднє диференціювання відповідно до рівнянь (4.2.16) дає:

$$i \frac{d\xi}{d(gt)} = \xi^2 + \lambda_0 \xi + 2S_3, \quad (4.2.31)$$

де $\lambda_0 = \frac{\Omega - \omega}{g}$. Піднесемо праву і ліву частину рівняння (4.2.31) до квадрату, тоді використовуючи інтеграли руху (4.2.18) та в'язь (4.2.19) отримаємо:

$$\left[i \frac{d\xi}{d(gt)} \right]^2 = \xi^4 + 2\lambda_0 \xi^3 + (4h_0 + \lambda_0^2) \xi^2 + 4h_{-1} \xi + 1. \quad (4.2.32)$$

Легко помітити, що підстановкою $\xi = \lambda - \lambda_0$ поліном у правій частині (4.2.32) зводиться до поліному (4.2.21), який визначає криву $\mathfrak{R}$. Отже, динамічна змінна $\xi(t)$ еволюціонує на рімановій поверхні $\mathfrak{R}$.

Рівняння (4.2.32) можна переписати у вигляді

$$i \frac{d\xi(t)}{d(gt)} = \pm \sqrt{(\xi - \varepsilon_1)(\xi - \varepsilon_2)(\xi - \varepsilon_1^*)(\xi - \varepsilon_2^*)},$$

де $\varepsilon_1 = R_1 e^{i\varphi_1}$, $\varepsilon_2 = R_1 e^{i\varphi_2}$, ε_1^* , ε_2^* – корені полінома у правій частині (4.2.32).

При цьому виконуються рівності

$$\begin{aligned} R_1 \cos \varphi_1 + R_2 \cos \varphi_2 &= -\lambda_0 \\ R_1^2 + R_2^2 + 4R_1 R_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 &= 4h_0 + \lambda_0^2 \\ R_1 R_2 (R_1 \cos \varphi_2 + R_2 \cos \varphi_1) &= -2h_{-1} \\ R_1^2 R_2^2 &= 1 + \lambda_0 (h_0 - h_{-1}^2). \end{aligned} \quad (4.2.33)$$

Чотири попарно спряжені корені розташовуються на колі радіусом R і з центром в точці C :

$$\begin{aligned} C &= \frac{R_1^2 - R_2^2}{2(R_1 \cos \varphi_1 - R_2 \cos \varphi_2)}, \\ R^2 &= R_1^2 + C^2 - 2CR_1 \cos \varphi_1 = R_2^2 + C^2 - 2CR_2 \cos \varphi_2. \end{aligned}$$

Відобразимо дробово-лінійним перетворенням це коло на дійсну вісь, задавши відображення формулою:

$$\xi = \frac{\alpha z + \gamma}{z + \delta}.$$

При цьому будемо вимагати, щоб відбувався перехід коренів у відповідні точки:

$$\varepsilon_1 \rightarrow -\frac{1}{k}, \quad \varepsilon_2 \rightarrow -1, \quad \varepsilon_2^* \rightarrow 1, \quad \varepsilon_1^* \rightarrow \frac{1}{k}.$$

Тоді

$$\alpha = C + R, \quad \delta = i \frac{(C + R) - R_2 \cos \varphi_2}{R - C + R_2 \cos \varphi_2}, \quad \gamma = (C - R)\delta,$$

$$k^2 = \frac{(C + R - R_1 \cos \varphi_1)(C - R - R_2 \cos \varphi_2)}{(C - R - R_1 \cos \varphi_1)(C + R - R_2 \cos \varphi_2)}.$$

На комплексній площині комплексної змінної z проведемо розрізи, як показано на Рис. 4.2.

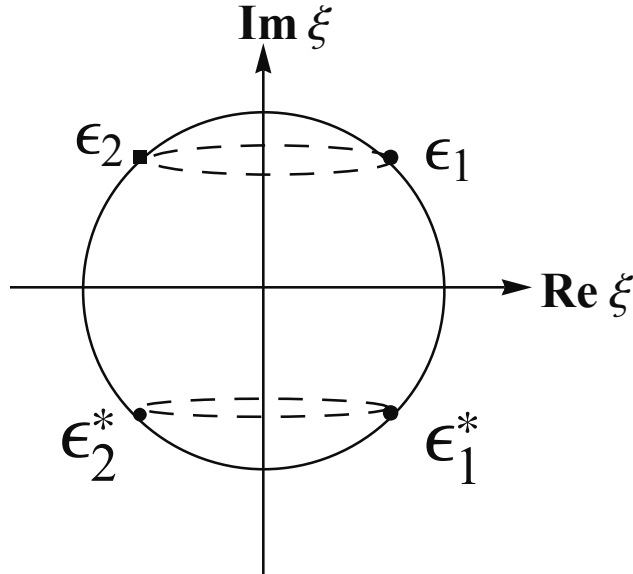


Рис. 4.2 Комплексна площина змінної z .

Склеївши по цих розрізах два екземпляри сфери Рімана, отримаємо ріма-

нову поверхню роду 1, еквівалентну алгебраїчній кривій

$$w^2 = (1 - z^2)(1 - k^2 z^2).$$

Як відомо [44], цю криву уніформізує еліптична функція Якобі та її похідна:

$$z = \operatorname{sn}(u, k), \quad w = \frac{d}{du} \operatorname{sn}(u, k).$$

Тоді для розв'язок рівняння (4.2.32) має вигляд:

$$\xi(gt) = \frac{(C + R)\operatorname{sn}(u, k) + (C - R)\delta}{\operatorname{sn}(u, k) + \delta}, \quad (4.2.34)$$

де $u(gt) = agt + u_2$, $a = \sqrt{(R + C - R_2 \cos \varphi_2)(R - C + R_1 \cos \varphi_1)}$, а вибір параметра u_2 пов'язаний з вибором початкових умов.

Для знаходження явного вигляду функцій $S_{\pm}(t)$ скористаємось безпосередньо рівняннями (4.2.16). Поділивши обидві сторони рівняння (4.2.16б) на S_- і використавши означення змінної ξ у термінах вихідних динамічних змінних, отримаємо

$$i \frac{d}{dt} \ln S_- = \Omega + 2g\xi^{-1} S_3.$$

Будемо шукати розв'язки у вигляді

$$S_{\pm} = |S_{\pm}| e^{\pm i \varphi_S}.$$

Тоді модуль та фаза дипольного моменту визначаються рівняннями:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_S}{dt} &= -\Omega + 2S_3 \operatorname{Re}(\xi^{-1}), \\ \frac{d}{dt} \ln |S_{\pm}| &= 2gS_3 \operatorname{Im}(\xi^{-1}). \end{aligned}$$

З іншого боку, модуль функцій $S_{\pm}(t)$ легко знайти з алгебраїчного співвідношення (4.2.19):

$$|S_{-}| = \sqrt{\frac{1}{4} - S_3^2}.$$

Крім того, можна показати, що фаза дипольного моменту і фаза електромагнітного поля пов'язані між собою через один з інтегралів руху (4.2.18):

$$h_{-1} = 2|a_{\pm}||S_{\pm}| \cos(\phi_S - \phi_a). \quad (4.2.35)$$

Фаза електромагнітного поля виражається через інтеграл від дійсної частини ξ :

$$\phi_a = \omega t - g \int \operatorname{Re} \xi \, dt, \quad (4.2.36)$$

а його модуль можна знайти через h_0 (4.2.18):

$$|a_{\pm}| = \sqrt{h_0 - S_3}.$$

Для того, щоб знайти фазу електромагнітного поля (а через неї – і фазу дипольного моменту відповідно до (4.2.35)) необхідно обрахувати інтеграл в (4.2.36). Для цього перейдемо від еліптичної функції Якобі до функції Веєрштраса [70]:

$$\phi_a = \omega t - \frac{h_{-1}}{2} \int \frac{\alpha \wp(u) + \beta}{\gamma \wp(u) + \delta} du,$$

де $\alpha = 1$, $\beta = -E_3$, $\gamma = e_1$, $\delta = e_3(E_1 - E_3) - e_1 E_3$, $u = gt$. Цей інтеграл можна взяти явно [105], і в результаті фаза електромагнітного поля має вигляд:

$$\phi_a = \omega t + h_{-1} \left[C_1 gt + C_2 \ln \frac{\sigma(gt + v)}{\sigma(gt - v)} \right], \quad (4.2.37)$$

де $\sigma(u)$ – сігма-функція Клейна,

$$C_1 = \frac{1}{2e_1} - \zeta(v)C, \quad C_2 = \frac{C}{2}, \quad C = \frac{(E_1 - E_3)e_3}{\delta},$$

а параметр v визначається із співвідношення $\wp'(v) = -\frac{\delta}{\gamma}$.

Тоді, згідно із виразом (4.2.35), фаза дипольного моменту має вигляд

$$\phi_S = \arccos \frac{h_{-1}}{2\sqrt{(\frac{1}{4} - S_3^2)(h_0 - S_3)}} + \phi_a, \quad (4.2.38)$$

де ϕ_a визначено виразом (4.2.37), а загальний вираз для S_3 – (4.2.27).

4.2.3.2 Режими динаміки дипольного моменту атома

Як і у випадку аналізу динамічних режимів інверсної заселеності рівнів атома, необхідно фізичні початкові умови перевести у вибір значень коренів ε_i . Нижче ми проаналізуємо два особливі випадки розташування коренів.

1. Вироджений випадок розташування коренів. Режим збудження атома слабким електромагнітним полем. Якщо ми виберемо корені на уявній осі наступним чином:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \imath,$$

це відповідатиме затисканню розрізів на рімановій поверхні та виродженню еліптичних функцій до гіперболічних.

Дійсно, для змінної ξ маємо вираз:

$$\xi(gt) = \imath \frac{\text{sh}(gt)}{\text{ch}(gt)},$$

а інверсна населеність $S_3(gt)$ описується формулою (4.2.28).

Отриманий розв'язок відповідає процесу збудження атома слабким електромагнітним полем (за умови, що $\lambda_0 = 0$), про що йшлося у попередньому пункті. У цьому випадку динаміка компонент дипольного моменту описується формулами:

$$S_{\pm} = \frac{\text{sh}(gt)}{\text{ch}^2(gt)} e^{\pm \imath \Omega t},$$

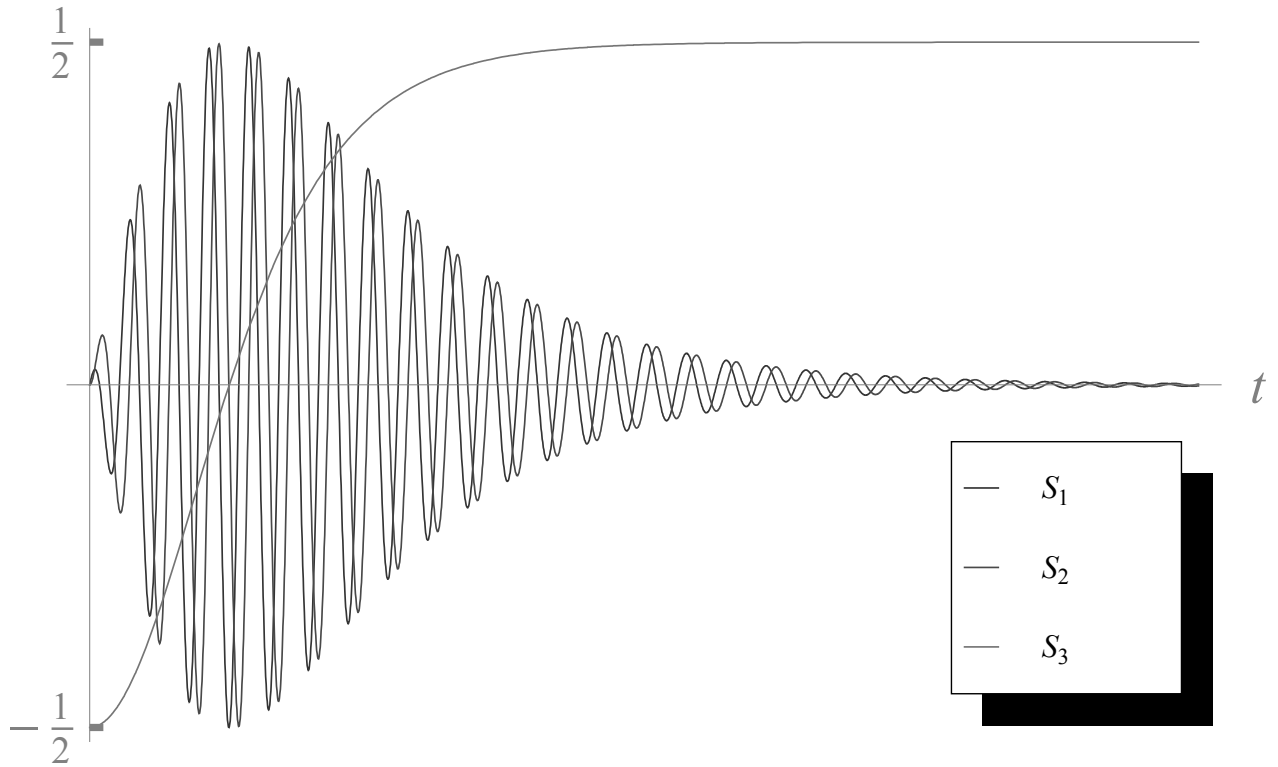


Рис. 4.3 Динаміка компонент дипольного моменту та інверсної заселеності рівнів атома у випадку $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \imath$ ($\lambda_0 = 0$, $h_1 = 0$).

а для компонент електромагнітного поля маємо:

$$a_{\pm} = -\imath \frac{1}{\text{ch}(gt)} e^{\pm i\omega t}.$$

Відповідну динаміку компонент дипольного моменту та інверсної заселеності рівнів зображено на Рис. 4.3.

2. Симетричне розташування коренів. Режим нелінійних осциляцій Рабі. Ця ситуація відповідає початковій умові, коли атом знаходиться в основному стані. Нехай $h_1 = 0$, тоді на корені матимемо наступні обмеження: $R_1 = R_2 = 1$, $\cos \varphi_1 = -\cos \varphi_2$. З урахуванням того, що зсув уявної частини

фази $u_2 = -\frac{K'}{2}$, маємо:

$$\xi = \frac{2(1+k)[1+k \operatorname{sn}^2(u, k)] \operatorname{sn}(u, k)}{(1+k)^2 \operatorname{sn}^2(u, k) + [1+k \operatorname{sn}^2(u, k) + |\operatorname{cn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k)|]^2},$$

а інверсна населеність $S_3(gt)$ описується формулою (4.2.29).

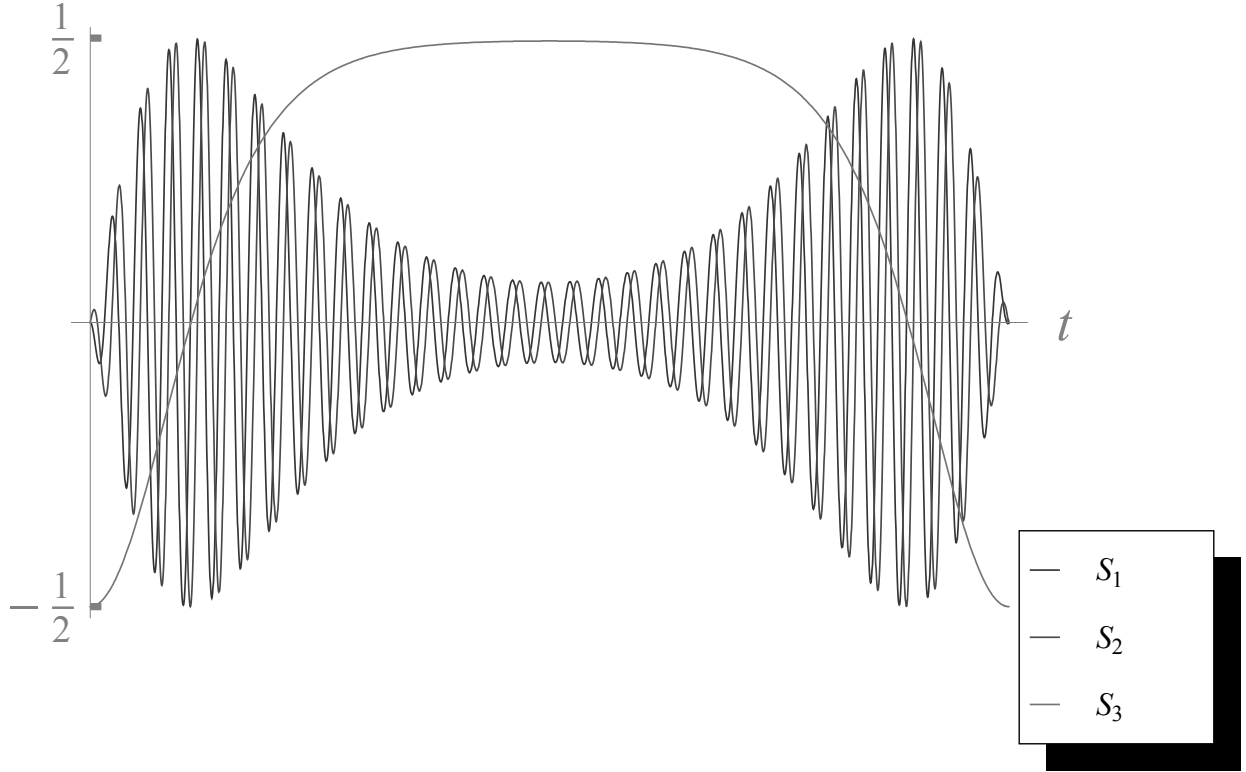


Рис. 4.4 Динаміка компонент дипольного моменту та інверсної заселеності рівнів атома у випадку симетричного розташування коренів ε_i ($h_1 = 0$, $\lambda_0 \neq 0$).

Таке розташування нулів фізично відповідає процесу поглинання атомом світла, за умови, що є ненульовий розлад частот ($\lambda_0 \neq 0$). Динаміка компонент дипольного моменту та інверсної заселеності рівнів у цьому режимі зображена на Рис. 4.4. Динаміка повного вектора Блоха зображена на Рис. 4.5.

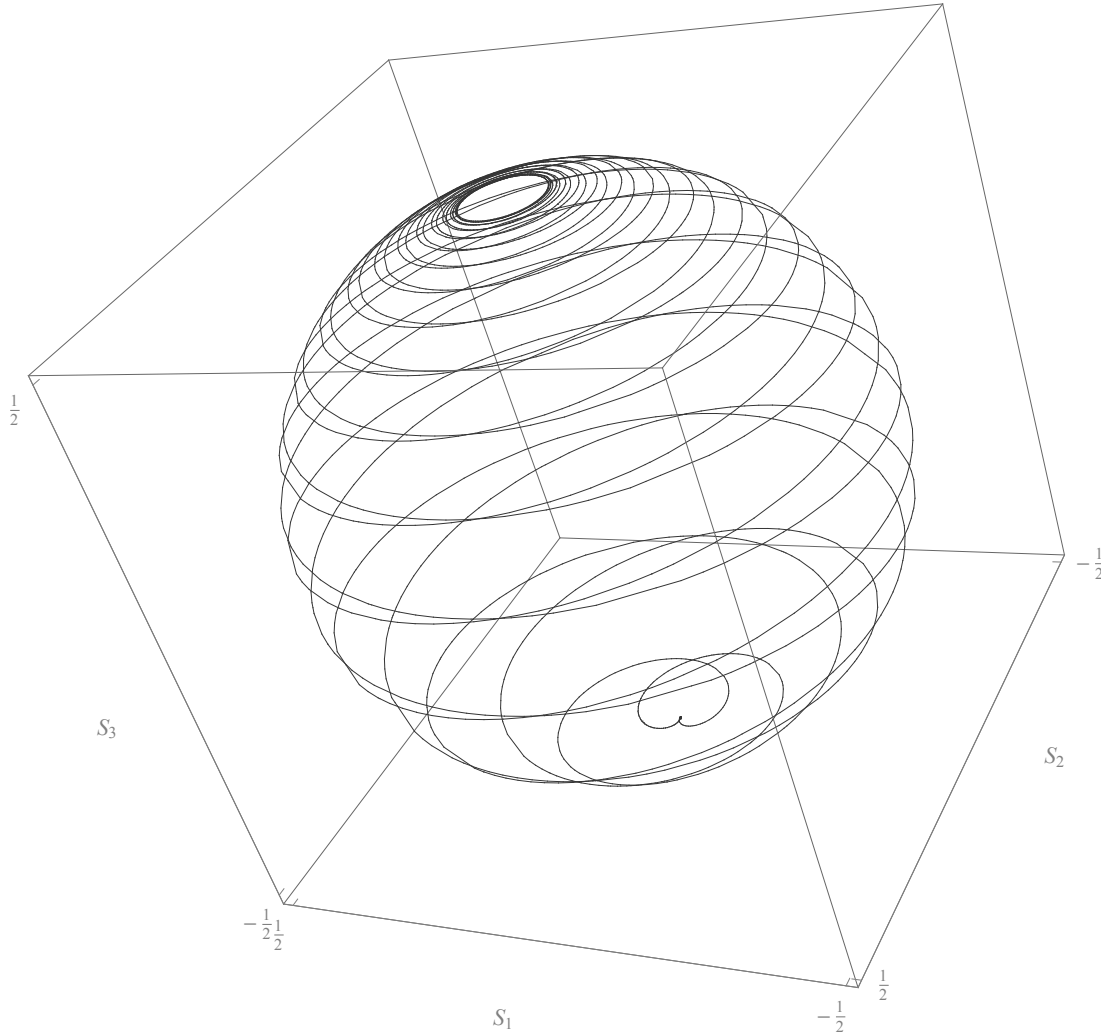


Рис. 4.5 Динаміка вектора Блоха на сфері Блоха ($h_1 = 0$, $\lambda_0 \neq 0$).

Зауважимо також, що у системі, що розглядається, є дві характерні частоти: частота $\Omega_{Atom} \sim g$, з якою відбуваються атомні переходи між основним та збудженим станами, і частота процесів взаємодії атома з полем (тобто частоти дипольного моменту та електромагнітного поля) – $\omega_{int} \approx \omega$. Можна переко-
натися, що процеси зміни населеності рівнів набагато повільніші, ніж процеси

обміну енергією між дипольним моментом атома та електромагнітним полем:

$$\Omega_{Atom} \ll \omega_{int}.$$

4.2.3.3 Порівняльний аналіз динаміки квантової та напівкласичної версій моделі Джейнса-Каммінгса

Важливим результатом квантової моделі Джейнса-Каммінгса є явище колапсу та відродження атомної інверсії [96], яке пов'язують з дискретністю фотонних збуджень і вважають одним з прямих підтверджень квантової природи випромінювання.

Розв'язки для напівкласичної версії моделі Джейнса-Каммінгса, отримані у нашій роботі, є періодичними функціями і таких явищ не передбачають. З іншого боку, доречною є постановка оберненої задачі: встановити чи реалізується періодична поведінка інверсної населеності рівнів у квантовому випадку. А з неї випливає питання про стани електромагнітного поля, які можуть забезпечити таку поведінку.

Наведемо основні формули квантової теорії Джейнса-Каммінгса [97]. Вектор стану системи будемо записувати у вигляді (4.2.15), маючи на увазі, що $|\alpha, n\rangle \equiv |\alpha\rangle \otimes |n\rangle$, $\alpha = 1, 2$, $|\alpha\rangle$ – стан атома, $|n\rangle$ – n -фотонний стан електромагнітного поля (4.2.13), (4.2.14).

Розв'язок рівняння Шредінгера з гамільтоніаном (4.2.12) у термінах амплітуд станів має вигляд:

$$c_{1, n+1}(t) = c_{1, n+1}(0) \left[\cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) + \frac{i\Delta}{\Omega_n} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] - \frac{2ig\sqrt{n+1}}{\Omega_n} c_{2, n}(0) \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) e^{i\frac{-\Delta t}{2}}, \quad (4.2.39)$$

та

$$c_{2, n}(t) = c_{2, n}(0) \left[\cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) - \frac{i\Delta}{\Omega_n} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] - \frac{2ig\sqrt{n+1}}{\Omega_n} c_{1, n+1}(0) \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) e^{i\frac{\Delta t}{2}}, \quad (4.2.40)$$

де $\Omega_n^2 = \Delta^2 + 4g^2(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Тоді для середнього значення маємо:

$$\begin{aligned} \langle \Psi(t) | \hat{S}_3 | \Psi(t) \rangle &= \\ &= \sum_n |c_{2, n}(0)|^2 \left[\cos^2\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) + \frac{\Delta^2}{\Omega_n^2} \sin^2\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] + \\ &+ |c_{2, n-1}(0)|^2 \left[\frac{4g^2 n}{\Omega_{n-1}^2} \sin^2\left(\frac{\Omega_{n-1} t}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.2.41)$$

Нехай в початковий момент часу атом перебуває у основному стані $|1, n\rangle$, тоді $c_{2, n}(0) = 0$. З формули (4.2.41) легко отримати вираз для інверсної заселеності рівнів:

$$\tilde{S}_3(t) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} |c_{1, n+1}(0)|^2 \left[\frac{\Delta^2}{\Omega_n^2} + \frac{4g^2(n+1)}{\Omega_n^2} \cos(\Omega_n t) \right]. \quad (4.2.42)$$

В загальному випадку функція (4.2.42) є квазіперіодичною, але можна знайти такі стани поля, які забезпечують її періодичність. Один із них можна побудувати на основі когерентного стану

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle,$$

зануливши у ньому коефіцієнти C_n , для яких не виконується умова періодичності (4.2.42)

$$\sqrt{n+1} = l, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

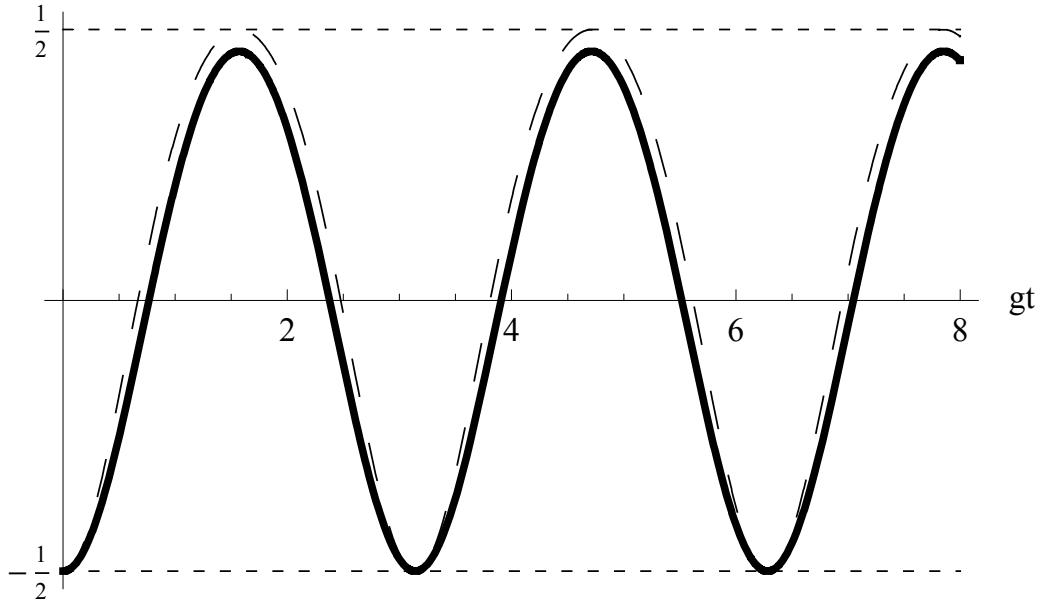


Рис. 4.6 Порівняння квантової (неперервна лінія) та напівкласичної динаміки (пунктирна лінія) атомної інверсії при $\langle n \rangle = 1$.

Тоді коефіцієнти у (4.2.42) визначаються розподілом вигляду:

$$|c_{1, n+1}(0)|^2 = \frac{e^{-\langle n \rangle} \langle n \rangle^{n+1}}{(n+1)!}, \quad n = 0, 3, 8, 15, \dots$$

і, покладаючи $\Delta = 0$, маємо:

$$\tilde{S}_3(t) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\langle n \rangle} \langle n \rangle^{n+1}}{(n+1)!} \cos(2lgt). \quad (4.2.43)$$

З метою порівняння представимо напівкласичний результат для тієї ж початкової умови через функцію Веєрштраса і скористаємося її розкладом у ряд [44]:

$$S_3(t) = -\frac{\eta_1}{\omega_1} + \frac{1}{3}h_0 - \frac{2\pi^2}{\omega_1^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^m}{1-q^{2m}} \cos\left[\frac{\pi m}{\omega_1}gt\right], \quad (4.2.44)$$

де $q = e^{-\pi \frac{\omega_2}{\omega_1}}$, а ω_1, ω_2 – дійсний та уявний періоди функції Веєрштраса, відповідно, $\eta_1 = \zeta(\omega_1)$. З умови рівності періодів функцій (4.2.43) та (4.2.44)

отримаємо обмеження на допустимі значення ω_1 :

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2\alpha},$$

де $\alpha = \frac{l}{m}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, а отже, і обмеження на h_0 та середню кількість фотонів у полі $\langle n \rangle$. Порівняння динаміки при $\langle n \rangle = 1$ зображено на Рис. 4.6.

4.3 Рівноправні змінні розділення у моделі Дікке та можливості її інтегрування

Перехід до моделі Дікке, тобто збільшення кількості атомів, передбачає зростання кількості змінних розділення, збільшення роду відповідної алгебраїчної кривої та, відповідно, перехід до тета-функцій вищих родів. В цьому випадку стандартне розділення змінних є незручним, оскільки додаткове інтегрування (в моделі Джейнса-Каммінгса в попередньому підрозділі так відновлювалась фаза) у вищих родах не може бути виконано явно. В даному підрозділі ми введемо змінні розділення, використовуючи модифіковану схему (як у Розділі 3) та проаналізуємо задачу інтегрування, яка виникає в цьому випадку.

4.3.1 Розділення змінних в моделі Дікке

Стандартні змінні розділення вводяться як нулі раціональної функції $\gamma(\lambda)$, яка є елементом матриці Лакса (4.1.9). Перетворимо матрицю Лакса так, щоб спектральна крива не змінилась

$$L(\lambda) \rightarrow \tilde{L}(\lambda) = \begin{bmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & -a(\lambda) \end{bmatrix},$$

де елементи перетвореної матриці мають вигляд

$$a(\lambda) = \frac{\beta + \gamma}{2}, \quad b(\lambda) = \frac{\beta - \gamma}{2} - \alpha, \quad c(\lambda) = \frac{\gamma - \beta}{2} - \alpha.$$

Тоді на роль **“узагальнених координат”** λ_k виберемо нулі раціональної функції $c(\lambda)$:

$$c(\lambda_k) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b^+ - b}{g} + \frac{\omega}{g^2} \sum_j + \frac{\imath S_j^y - S_j^z}{\lambda_k - \varepsilon_j} - \frac{2}{g} \lambda_k = 0.$$

Таким чином, ми маємо лінійну систему рівнянь, яка пов’язує λ_k з початковими змінними $b^+ - b$ та $\imath S_j^y - S_j^z$.

Спряжені до них величини, які можна назвати **“узагальненими імпульсами”**, μ_k визначаються з рівняння алгебраїчної кривої:

$$\mu_j \equiv \mu(\lambda_j) = \frac{1}{g^4} (2\lambda_j - \omega)^2 + \frac{4}{g} \mathcal{H}_{N+1} + \frac{2}{g^2} \sum_{k=1}^N \frac{\mathcal{H}_k}{(\lambda_j - \varepsilon_k)} + \sum_{k=1}^N \frac{s_k^2}{(\lambda_j - \varepsilon_k)^2},$$

де $s_k^2 = j_k(j_k + 1)$.

В результаті можна виразити вихідні динамічні змінні моделі Дікке у термінах змінних розділення. Зокрема, отримаємо вирази для незалежних спінових змінних

$$(\imath S_i^y - S_i^z) = -\frac{2}{g} \frac{\prod_{k=1}^{N+1} (\varepsilon_i - \lambda_k)}{\prod_{k=1, k \neq i}^N (\varepsilon_i - \varepsilon_k)} \equiv X_i,$$

та

$$\hat{S}_i^x = -\frac{\prod_{k=1}^{N+1} (\varepsilon_i - \lambda_k)}{\prod_{k=1, k \neq i}^N (\varepsilon_i - \varepsilon_k)} \sum_{k=1}^{N+1} \frac{\prod_{l=1, l \neq j}^N (\lambda_k - \varepsilon_l)}{\prod_{i=1, i \neq k}^{N+1} (\lambda_k - \lambda_i)} \mu_k.$$

Використовуючи в'язь, знайдемо також:

$$S_i^z = \frac{1}{2} \left[X_i^2 + \frac{1}{X_i} (s_i^2 - (S_i^x)^2) \right].$$

Лінійні комбінації польових змінних теж можна виразити в термінах симетричних функцій від змінних розділення

$$b^+ - b = 2g \left[\sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j - \sum_{j=1}^N \epsilon_j \right] - \frac{\omega}{g},$$

$$b^+ + b = g \sum_{k=1}^{N+1} \frac{\prod_{l=1}^N (\lambda_k - \epsilon_l)}{\prod_{i=1, i \neq k}^{N+1} (\lambda_k - \lambda_i)} \mu_k.$$

Інтеграли руху моделі також можна виразити через змінні розділення:

$$\mathcal{H}_N = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N+1} \frac{\prod_{j=1}^N (\lambda_k - \epsilon_j)}{\prod_{j=1, j \neq k}^{N+1} (\lambda_k - \lambda_j)} M_k, \quad (4.3.45)$$

$$\mathcal{H}_j = - \frac{\prod_{k=1}^N (\epsilon_j - \lambda_k)}{\prod_{i=1, i \neq j}^{N+1} (\epsilon_j - \epsilon_i)} \sum_{k=1}^{N+1} \frac{\prod_{l=1, l \neq j}^N (\lambda_k - \epsilon_l)}{\prod_{i=1, i \neq k}^{N+1} (\lambda_k - \lambda_i)} M_k, \quad (4.3.46)$$

де

$$M_k = \frac{g^2}{2} \left[\mu_k^2 - \frac{1}{g^4} (2\lambda_k - \omega)^2 - \sum_{j=1}^N \frac{s_j^2}{(\lambda_k - \epsilon_j)^2} \right].$$

4.3.2 Рівняння на класичні змінні λ_i

Гамільтонова еволюція змінних λ_k задається наступним рівнянням:

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial t} = \{\lambda_k, \mathcal{H}\} = i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_k}.$$

Використовуючи явні вирази для гамільтоніанів в термінах змінних розділення (4.3.45), (4.3.46) та вираз для кривої (4.1.10), отримаємо

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial \tau} = \frac{\sum_{j=1, j \neq k}^{N+1} \lambda_j - \tilde{c}(N)}{\prod_{j=1}^{N+1} (\lambda_k - \lambda_j)} \sqrt{Q_{2N+2}(\lambda_k)},$$

де $\tilde{c}(N) = \sum_{j=1}^N \epsilon_j + \frac{g^2 \omega}{4}$, та $\tau = -\frac{4}{g} i t$.

Ці рівняння можна переформулювати наступним чином:

$$\sum_{k=1}^N \frac{\lambda_k^{i-1} d\lambda_k}{\sqrt{Q_{2N}(\lambda_k)}} = dx_i, \quad i = 1 \dots, N+1,$$

де $\vec{x}^\top = (c_1, \dots, c_{N-1}, \tau + c_N, \tau \tilde{c}(N) + c_{N+1})$, або

$$\sum_{k=1}^N \int_{P_0}^{\lambda_k} \frac{\lambda^{i-1} d\lambda}{\sqrt{Q_{2N+2}(\lambda)}} = x_i, \quad i = 1 \dots, N+1.$$

Останній вираз задає узагальнене відображення Абеля, тобто відображення з симетричного добутку $N+1$ копії ріманової поверхні, що відповідає алгебраїчній кривій (4.1.10), заданого набором змінних λ_k , в узагальнений яacobіан, на якому лінійно еволюціонують змінні x_i .

4.3.3 Ідея інтегрування на узагальненому яacobіані

Отже, ми маємо парну гіпереліптичну криву $w^2(\lambda) = Q_{2N+2}(\lambda)$ роду $g = N$, де поліном $Q_{2N}(\lambda)$ не має кратних коренів і його можна представити у

наступному вигляді

$$Q_{2N}(\lambda) = (\lambda - E_1) \cdots (\lambda - E_{2N}),$$

де E_j – точка галуження. Ця крива оснащена базисом гомологій $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N; \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_N)$.

Також ми маємо $N + 1$ рівняння

$$\sum_{j=1}^{N+1} \int_{P_0}^{P_j} \frac{\lambda_j^{i-1} d\lambda_j}{\sqrt{Q_{2N}(\lambda_j)}} = x_i, \quad i = 1 \dots, N + 1 \quad (4.3.47)$$

де $P_j = (\lambda_j, w_j)$ – точка на кривій. Базовою точкою є P_0 і її зручно вибрати в одній з точок галуження, зокрема $P_0 = (E_{2N}, 0)$.

Можна перевірити, що N інтегралів в (4.3.47) містять голоморфні диференціали, тоді як останній містить диференціал третього роду з полюсами в $\pm\infty$ та лишками ± 1 . Тому цю систему рівнянь можна привести до канонічного виду

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \int_{P_0}^{P_j} \omega(P) &= z, \\ \sum_{j=1}^N \int_{P_0}^{P_j} \Omega_{\infty, \infty_-}(P) &= Z, \end{aligned} \quad P = (\lambda, \mu) \quad (4.3.48)$$

де

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_N \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{d\lambda}{\mu} \\ \frac{\lambda d\lambda}{\mu} \\ \vdots \\ \frac{\lambda^{N-2} d\lambda}{\mu} \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix},$$

$$Z = x_N - \sum_{k=1}^N c_k z_k, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \oint_{\mathbf{a}_1} \frac{\lambda^N d\lambda}{\mu} \\ \oint_{\mathbf{a}_2} \frac{\lambda^N d\lambda}{\mu} \\ \vdots \\ \oint_{\mathbf{a}_N} \frac{\lambda^N d\lambda}{\mu} \end{pmatrix},$$

причому ми користуємося нормованими диференціалами $\oint_{\mathbf{a}_j} \omega_i = \delta_{ij}$, $\oint_{\mathbf{b}_j} \omega_i = \tau_{ij}$, $i, j = 1, \dots, N$; матриця періодів $\tau = \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}$. Диференціал третього роду теж можна нормувати, віднявши від нього лінійну комбінацію голоморфних диференціалів

$$\Omega = \frac{\lambda^N d\lambda}{\mu} - \sum_{i=1}^N c_i \omega_i,$$

так, що $\oint_{\mathbf{a}_k} \Omega = 0$, $\oint_{\mathbf{b}_k} \Omega = 2\imath\pi \int_{\infty_-}^{\infty} \omega_k$, $k = 1, \dots, N$.

Ці рівняння можна розв'язати (точніше, отримати явні вирази для симетричних функцій від λ_k та μ_k), використавши концепцію узагальнених тета-функцій [94]. Введемо θ -функцію з напівцілими характеристиками, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_g)^T$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_g)^T$, $\alpha_i, \beta_j = 1/2$ або 0 ,

$$\theta \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}^T \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} (z; \tau) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^g} \exp \{ (\mathbf{m} + \boldsymbol{\alpha})^T \tau (\mathbf{m} + \boldsymbol{\alpha}) + 2\imath\pi (\mathbf{m} + \boldsymbol{\alpha})(z + \boldsymbol{\beta}) \} \quad (4.3.49)$$

Використовуючи цей апарат, можна побудувати вирази для динамічних змінних задачі, що описують атомну та польову підсистеми, в термінах узагальнених тета-функцій. При цьому важливою залишатиметься задача ефективізації отриманих формул, тобто знаходження фізичних початкових умов

та переформулювання їх мовою коренів кривої, пошук спеціальних режимів, зокрема, солітонних або частково вироджених. Попри можливі технічні труднощі, введені нами рівноправні змінні розділення дозволяють проінтегрувати задачу шляхом узагальненого обернення Абеля і відразу побудувати замкнені явні вирази, на відміну від стандартного методу, в якому знаходження однієї зі змінних потребувало б додаткового інтегрування.

4.4 Висновки

В даному розділі було досліджено модель Джейнса-Каммінгса-Дікке. Дана модель є алгебраїчно інтегрованою, що дозволяє ефективно знаходити її динаміку.

Модель Джейнса-Каммінгса, що описує взаємодію одного атома з електромагнітним полем, було проінтегровано стандартним методом. Тобто було введено стандартні змінні розділення, що призвело до необхідності додаткового інтегрування для того, щоб отримати фазу. Оскільки в даному випадку крива, що відповідає задачі, має рід 1, то розв'язки записуються в термінах еліптичних функцій Якобі (та Веєрштраса). Фазу було відновлено у термінах еліптичних сігма-функцій. Аналіз початкових умов дозволив виділити та описати окремі фізичні режими динаміки системи: зокрема, нелінійні осциляції Рабі, що їх здійснює інверсна населеність рівнів атома, режим “переключення” тощо.

Також нами було введено змінні розділення для моделі Джейнса-

Каммінгса-Дікке згідно зі схемою, використаною в попередньому Розділі. Ми сформулювали задачу обернення Якобі, яка в даному випадку є нестандартною. Було показано, що вона містить не лише голоморфні диференціали, а й один диференціал третього роду. Тобто в даній ситуації необхідно обертати узагальнене відображення Якобі, що можна зробити у термінах узагальнених тета-функцій. Перевагою такого методу є відсутність необхідності робити додаткове інтегрування.

РОЗДІЛ 5

Динаміка солітоноподібного збудження в одновимірному бозе-конденсаті при різкій зміні параметра взаємодії

В квазікласичному описі одновимірного (1D) бозе-конденсату глобальною топологічною в'яззю на рух системи є різниця фаз між кінцевими точками пастки. В даному Розділі ми вивчаємо вплив різкої зміни параметрів системи на стан 1D бозе-конденсату з відштовхувальним потенціалом, в якому різницю фаз несе один “сірий солітон”. Квенчем в даній задачі є різка зміна константи взаємодії, яку можна забезпечити маніпуляцією або поперечною частотою втримування, або величиною довжини розсіювання за допомогою зовнішнього магнітного поля [61].

Ефект квенчу виявляється нетривіальним вже у квазікласичній (боголюбівській) границі. Для того, щоб зберегти фазовий зсув, солітон розпадається на численні збурення, які можуть бути або солітонами, або боголюбівськими модами. Результат квенчу можна описати в термінах відношення кінцевого до початкового значень швидкості звуку в конденсаті.

5.1 Опис одновимірного бозе-конденсату

5.1.1 Формулювання моделі

В боголюбівській границі одновимірний бозе-конденсат можна описати класичною польовою моделлю хвильової функції конденсату $\Psi(x, t)$ [106, 107],

навіть при тому, що в строгому сенсі конденсація не відбувається [61, 108, 109], тому надалі ми будемо називати її квазіконденсатом. Хвильова функція задовольняє рівнянню Гросса-Пітаєвського, яке в одновимірному випадку також називається нелінійним рівнянням Шредінгера (НРШ)

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{c_s^2}{2}(|\Psi|^2 - 1)\Psi, \quad (5.1.1)$$

де покладено $\hbar = 2m = 1$. Функція $\Psi(x, t)$ є нормованою так, що в основному стані $\Psi(x, t) = 1$. В цих одиницях параметр нелінійності співпадає зі швидкістю звуку c_s в квазіконденсаті [110].

Рівняння (5.1.1) описує бозе-конденсат з відштовхуванням ($c_s^2 > 0$) при скінченній густині. Нелінійність цього рівняння має наслідком природні одиниці довжини та часу: довжину відтворення $\xi = 1/c_s$ та кореляційний час $\tau = \xi/c_s = 1/c_s^2$. Природній масштаб довжини, L , який визначає межі застосовності вищезгаданого класичного опису, можна визначити з логарифмічної поведінки фазової кореляційної функції [106, 109]

$$L = \xi e^{2\pi\xi\rho_0}, \quad (5.1.2)$$

де ρ_0 є густиною одновимірного бозе-конденсату.

В попередніх розділах ми розглядали еволюцію систем внаслідок дії залежних від часу полів різних конфігурацій. В даному випадку ми хочемо розглянути такий часовий профіль зовнішнього впливу, що відповідає тета-функції Хевісайда, тобто відповідає миттєвій зміні параметрів системи. Така різка зміна параметрів системи в англійській літературі називається квенчем (quench) і для даної задачі означає наступне:

$$c_s \rightarrow \tilde{c}_s = \eta c_s, \quad \xi \rightarrow \tilde{\xi}_s = \xi/\eta. \quad (5.1.3)$$

Це можна забезпечити або варіюванням константи взаємодії системи g , або зміною її густини ρ_0 , оскільки $c_s \sim \sqrt{g\rho_0}$. Ми припускаємо, що перед та після квенчу всі масштаби, важливі для системи, є набагато меншими за L в рівнянні (5.1.2), тому ми можемо безпечно описувати нашу систему рівнянням (5.1.1).

5.1.2 Односолітонне збудження

Оскільки класичний основний стан залишається незмінним після квенчу, ми сфокусуємо увагу на одному солітоні, що є найпростішим топологічно нетривіальним збудженням. Зауважимо, що рівняння є інваріантним щодо глобального калібрувального перетворення $\Psi \rightarrow \Psi e^{i\theta}$. Солітон є доменною стінкою, що розділяє два вакууми з різними значеннями параметра θ :

$$\Psi(x \rightarrow -\infty) \rightarrow 1, \quad \Psi(x \rightarrow +\infty) = e^{i\theta}. \quad (5.1.4)$$

Наведемо загальний вигляд односолітонного розв'язку [111]:

$$\Psi(x, t) = \frac{1 + e^{i\theta} \exp\left(\frac{x-x_0-v(\theta)t}{W(\theta)}\right)}{1 + \exp\left(\frac{x-x_0-v(\theta)t}{W(\theta)}\right)}, \quad (5.1.5)$$

де x_0 є початковою позицією дна солітона та

$$W(\theta) = \frac{\xi}{\sin \theta/2}, \quad v(\theta) = -c_s \cos \frac{\theta}{2} \quad (5.1.6)$$

є шириною і швидкістю солітона, відповідно. Далі, без втрати загальності, ми покладемо $x_0 = 0$. Густина та розподіл фази солітона в момент часу $t = 0$ показано на Рис. 5.1.

Розподіл густини є одиничним заглибленням глибини $\sin^2 \frac{\theta}{2}$ та характерної

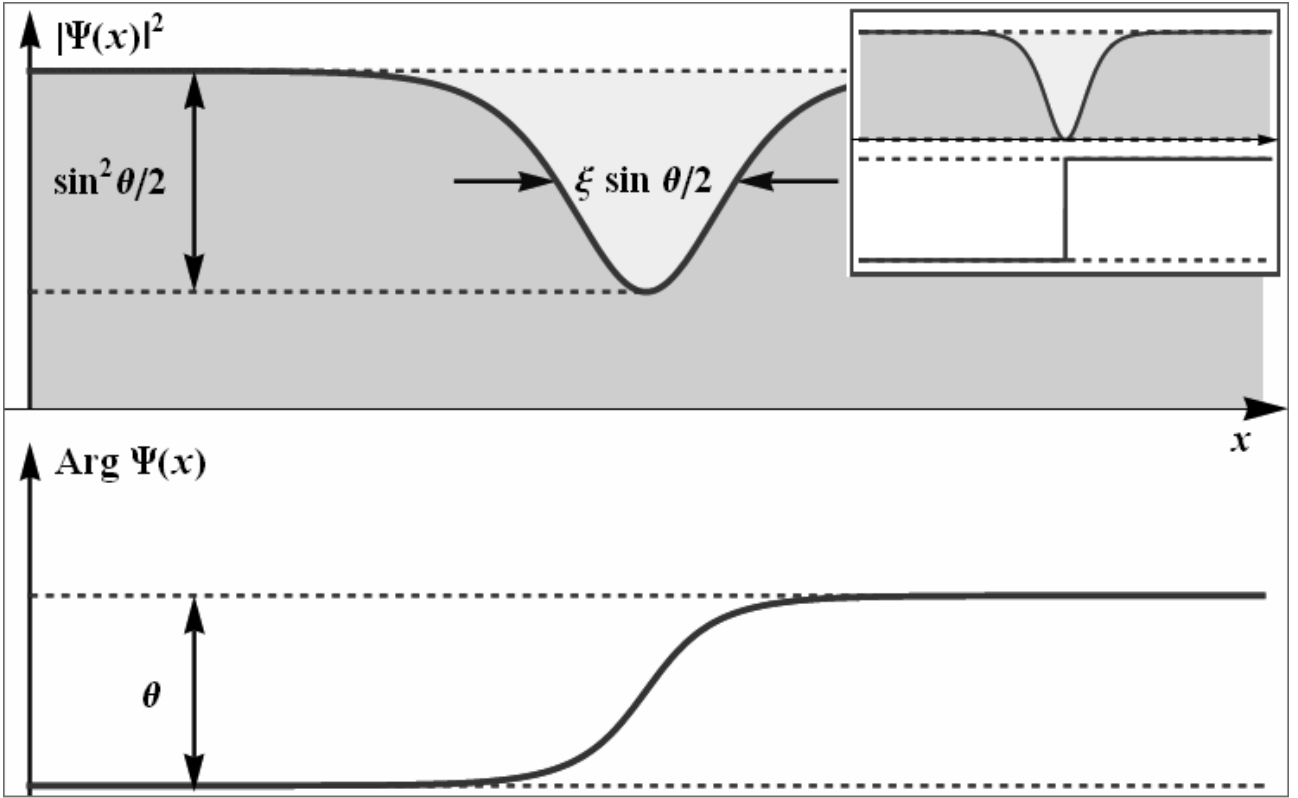


Рис. 5.1 Односолітонний розв'язок. Верхня панель демонструє розподіл густини $|\Psi(x)|^2$, нижня – фазовий зсув $\text{Arg } \Psi(x)$ по довжині солітона. Існує спеціальний випадок $\theta = \pi$, що називається темним солітоном.

ширини $W(\theta)$. Солітон витісняє кількість матерії, яка має “об’єм”:

$$\delta V(\xi, \theta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx (1 - |\Psi(x, t)|^2) = 2\xi \sin \frac{\theta}{2}. \quad (5.1.7)$$

Весь профіль солітонної густини рухається зі швидкістю $v = -c_s \cos \theta/2$. Зауважимо, що профіль та швидкість солітону повністю визначаються єдиним параметром $\theta \in [0, 2\pi)$, який є різницею фаз між асимптотичними областями (5.1.4). Менші значення фази θ , для $\theta < \pi$, відповідають швидшому, мілкішому та ширшому солітону (навпаки для $\theta > \pi$). Максимальною швидкістю

солітону є швидкість звуку, що відповідає $\theta = 0$. Спеціальний випадок, коли $\theta = \pi$, називається темним солітоном. Він відповідає найглибшому солітону, який взагалі не рухається. Його фаза має стрибок в центральній точці солітону.

5.1.3 Постановка задачі

Ми розглядаємо початковий стан квазіконденсату у вигляді одного солітону з фазовим зсувом θ і припускаємо, що квенч (5.1.3) відбувається миттєво. Легко бачити, що хвильова функція, яка описує солітон до квенчу, після нього вже не відповідає одному солітону (тобто не є розв'язком НРШ зі зміненими параметрами). І дійсно, хоча фазовий зсув θ залишився незмінним після квенчу, витіснений об'єм окремого солітону має миттєво змінитись у η разів, як видно із рівняння (5.1.7). Це можливо лише у випадку, коли витіснений об'єм переноситься додатковими збудженнями, які є результатом квенчу. Нашою задачею є вирахувати характеристики цих збуджень.

5.2 Розпад солітонного збудження внаслідок квенчу

5.2.1 Метод оберненої задачі розсіювання

Для розв'язання цієї задачі ми використовуємо метод оберненої задачі розсіювання (МОЗР) [111, 112]. Цей метод також може застосовуватись до багатьох інших нелінійних рівнянь, таких як рівняння Кортевега-де Вріза, Синус-Гордона та інших рівнянь, які мають топологічно нетривіальні розв'язки (див., наприклад, [111, 34] та посилання в них). Метод оберненої задачі роз-

сіювання використовує допоміжну лінійну модель, яка для рівняння (5.1.1) може бути записана в наступному вигляді:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i\lambda & c_s \bar{\Psi}(x, t) \\ c_s \Psi(x, t) & i\lambda \end{pmatrix} F \equiv UF. \quad (5.2.8)$$

Тут $\Psi(x, t)$ є значенням поля в момент часу t та λ називається спектральним параметром. Ідея методу МОЗР полягає в розгляді лінійної задачі (5.2.8) як задачі розсіювання та у вираженні польових змінних $\Psi(x, t)$, $\bar{\Psi}(x, t)$ в термінах даних розсіювання, закладених в трансфер-матрицю

$$T(\lambda) = P \exp \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx U(x, \lambda) \right) \equiv \begin{pmatrix} a(\lambda) & \bar{b}(\lambda) \\ b(\lambda) & \bar{a}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (5.2.9)$$

де P позначає оператор Дайсона впорядкування по траєкторіям. Дані розсіювання – це функції $a(\lambda)$ та $b(\lambda)$ для $\lambda^2 > c_s^2$ і дискретний набір $\lambda_j \in [-c_s, c_s]$, які є нулями аналітично продовженої $a(\lambda)$ разом з набором асоційованих змінних q_j . Виявляється, що динаміка даних розсіювання, яка впливає з рівняння (5.1.1) є тривіальною [111]:

$$a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = e^{-i\lambda\sqrt{\lambda^2 - c_s^2}t} b(\lambda, 0), \quad (5.2.10)$$

$$\lambda_j(t) = \lambda_j(0), \quad q_j(t) = q_j(0) + t\lambda_j\sqrt{c_s^2 - \lambda_j^2}. \quad (5.2.11)$$

Часова залежність розв'язку рівняння (5.1.1) може бути знайдена за допомогою МОЗР з еволюції даних розсіювання (5.2.10), (5.2.11). Метод оберненої задачі розсіювання в загальному випадку передбачає розв'язання лінійного інтегрального рівняння, яке називається рівнянням Гельфанда-Левітана-Марченко. Якщо $b(\lambda) = \bar{b}(\lambda) = 0$, трансфер-матриця називається безвідби-

вальною та описує розв'язок, в якому присутні лише солітони. В цьому випадку рівняння Гельфанда-Левітана-Марченко можна розв'язати в явному вигляді. Щоб описати такий розв'язок ми використовуємо параметризацію $\lambda = c_s \cosh \varphi$ та $\lambda_j = -c_s \cos(\theta_j/2)$, де кожна фаза $\theta_j \in [0, 2\pi]$. Загальний діагональний елемент трансфер-матриці (5.2.9), який відповідає N -солітонному розв'язку, має наступний вигляд:

$$a(\lambda) = e^{\frac{i\theta}{2}} \prod_{j=1}^N \frac{e^\varphi + e^{-i\theta_j/2}}{e^\varphi + e^{-i\theta_j/2}}. \quad (5.2.12)$$

Виконання граничних умов (5.1.4) забезпечується умовою на θ :

$$\theta = \sum_{j=1}^N \theta_j \pmod{2\pi}. \quad (5.2.13)$$

Результат, який дає МОЗР для такої трансфер-матриці, можна записати в наступному вигляді [111]:

$$\Psi(x, t) = \frac{\det(1 + \tilde{A})}{\det(1 + A)}, \quad (5.2.14)$$

де

$$A_{jk} = \frac{2i\sqrt{m_j m_k}}{e^{i\theta_k/2} - e^{-i\theta_j/2}}, \quad \tilde{A}_{jk} = A_{jk} e^{i\frac{\theta_j + \theta_k}{2}} \quad (5.2.15)$$

та

$$m_j = \sin \frac{\theta_j}{2} \prod_{k \neq j} \frac{\sin \frac{\theta_j + \theta_k}{4}}{\left| \sin \frac{\theta_j - \theta_k}{4} \right|} e^{\frac{x}{\xi} \sin \frac{\theta_j}{2} - q_j(t)}. \quad (5.2.16)$$

При $N = 1$ рівняння (5.2.14) вироджується до односолітонного розв'язку (5.1.5). У границі $t \rightarrow \infty$ розв'язок (5.2.14) складається з N відокремлених солітонів, кожен з яких характеризується власним фазовим зсувом θ_j .

5.2.2 Аналіз односолітонного випадку

Тепер перейдемо до аналізу квенчу (5.1.3) для системи, що складається з одного солітону. Ми використовуємо хвильову функцію (5.1.5) як початкову умову для нелінійного рівняння Шредінгера з новою швидкістю звуку, яка є після квенчу. Для цього ми підставимо хвильову функцію (5.1.5) в допоміжну лінійну задачу (5.2.8) і обрахуємо трансфер-матрицю (5.2.9). Вводячи змінну $z = \tanh \frac{\nu(x-x_0)}{2}$ ми можемо представити рівняння (5.2.8) у вигляді

$$\frac{dF}{dz} = \left(\frac{A_-}{1-z} + \frac{A_+}{1+z} \right) F, \quad (5.2.17)$$

де

$$A_- = \frac{\omega}{2\nu} \begin{bmatrix} -i \cosh \varphi & e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & i \cosh \varphi \end{bmatrix}, \quad (5.2.18)$$

$$A_+ = \frac{\omega}{2\nu} \begin{bmatrix} -i \cosh \varphi & 1 \\ 1 & i \cosh \varphi \end{bmatrix}. \quad (5.2.19)$$

Це рівняння є рівнянням гіпергеометричного вигляду і приводить до трансфер-матриці виду

$$T = \frac{\rho}{\eta} \begin{pmatrix} \alpha \gamma^- & -i\gamma \\ -i\gamma & -\bar{\alpha} \gamma^+ \end{pmatrix}, \quad (5.2.20)$$

де

$$\rho = \frac{i\eta \sinh \varphi}{\sin \frac{\theta}{2}}, \quad \alpha = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \left(\frac{\theta}{2} + i\varphi \right)} \quad (5.2.21)$$

та

$$\gamma = \frac{\Gamma(-\rho)\Gamma(\rho)}{\Gamma(-\eta)\Gamma(\eta)}, \quad \gamma^\pm = \frac{\Gamma(\pm\rho)\Gamma(\pm\rho)}{\Gamma(\pm\rho - \eta)\Gamma(\pm\rho + \eta)}. \quad (5.2.22)$$

5.2.3 Випадок цілого η

Розглянемо випадок, коли параметр η є цілим. Тоді можна показати, що внаслідок співвідношення (5.2.22) позадіагональні елементи трансфер-матриці T зануляються, отже, вона є безвідбивальною, тому присутні лише солітонні збудження. В цьому випадку коефіцієнт $a(\lambda)$ набуває виду (5.2.12) з набором фаз, що задаються наступними виразами:

$$\theta_0 = \theta, \quad \theta_k^+ = 2 \arcsin \frac{k}{\eta} \sin \frac{\theta}{2}, \quad \theta_k^- = 2\pi - \theta_k^+ \quad (5.2.23)$$

і початковими значеннями $q_i(0) = 0$ для всіх $(2\eta - 1)$ параметрів.

Через деякий час після квенчу $(2\eta - 1)$ -розв'язок розпадається на односолітонні, η з яких рухаються в тому ж напрямку, що і початковий солітон, зі швидкостями

$$v_k^+ = -\tilde{c}_s \sqrt{1 - \frac{k^2}{\eta^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \quad k = 1, 2, \dots, \eta \quad (5.2.24)$$

та $\eta - 1$ солітонів, які рухаються в протилежному напрямку, із швидкостями

$$v_k^- = \tilde{c}_s \sqrt{1 - \frac{k^2}{\eta^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \quad k = 1, 2, \dots, \eta - 1. \quad (5.2.25)$$

У випадку розпаду темного солітону, один солітон залишається темним, тобто не рухається, тоді як решта солітонів формують $\eta - 1$ пар, які симетрично втікають від темного солітону.

Випадок $\eta = 2$.

Проаналізуємо еволюцію системи після конкретного квенчу $\eta = 2$. Розпад темного солітону (тобто такого, що фазовий зсув $\theta = \pi$) призводить до симетричного розподілу густини, що складається з одного темного солітону

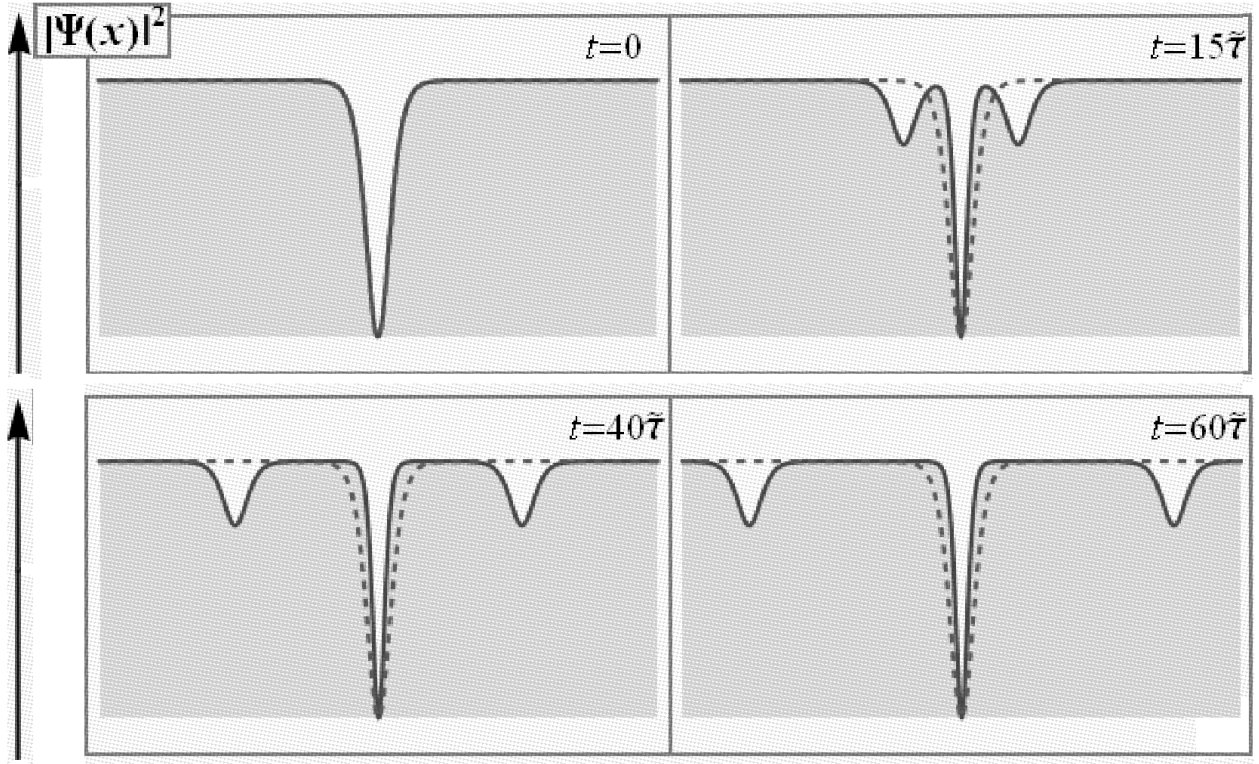


Рис. 5.2 Динаміка темного солітону після квенчу $c_s \rightarrow 2c_s$. Початковий розподіл показано штрихованою лінією. Еволюцію після квенчу показано суцільною лінією. Час вимірюється в одиницях кореляційного часу $\tilde{\tau} = \tilde{\xi}/\tilde{c}_s$ в квазіконденсаті після квенчу.

(нерухомого) та двох сірих солітонів, що рухаються з однаковими швидкостями в протилежних напрямках. Відповідна динаміка зображена на Рис. 5.2.

Сірий солітон після квенчу розпадається на три солітони з різними ненульовими швидкостями, вирази для яких можна обрахувати, користуючись (5.2.24)-(5.2.25). Відповідна динаміка зображена на Рис. 5.3.

5.2.4 Випадок довільного η

У випадку, коли η не є цілим, позадіагональний елемент трансфер-матриці

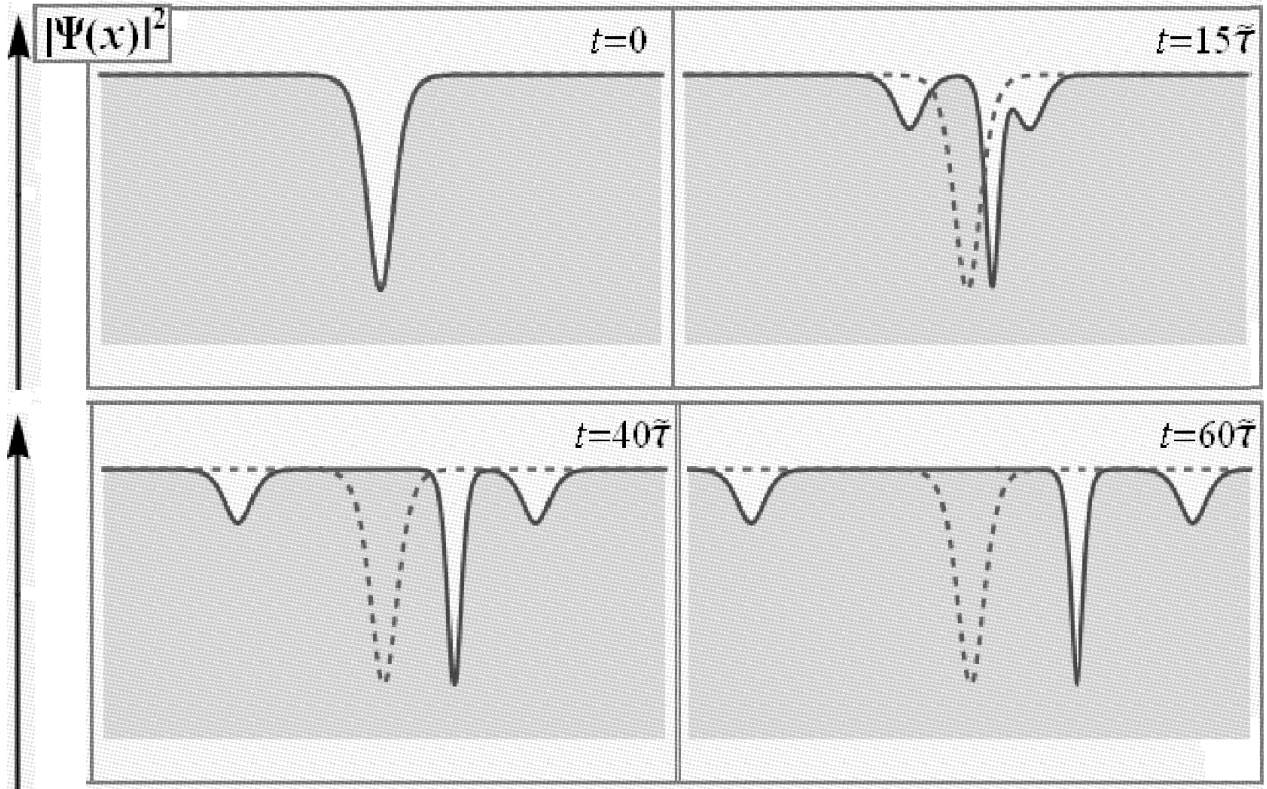


Рис. 5.3 Динаміка сірого солітону після квенчу $c_s \rightarrow 2c_s$. Початковий розподіл показано штрихованою лінією. Еволюцію після квенчу показано суцільною лінією. Час вимірюється в одиницях кореляційного часу $\tilde{\tau} = \tilde{\xi}/\tilde{c}_s$ в квазіконденсаті після квенчу.

$b(\lambda)$ є ненульовим, тому крім солітонів, присутні й інші розв'язки. При малих $b(\lambda)$ вони є лінійними хвилями, що називаються боголюбівськими модами. На жаль, для $b(\lambda)$ загального вигляду рівняння Гельфанда-Левітана-Марченко не мають аналітичного розв'язку, тому очікувано, що $\Psi(x, t)$ не буде мати простий вигляд.

5.3 Висновки

В даному Розділі ми дослідили динаміку сірого солітону у одновимірному бозе-ейнштейнівському конденсаті (квазіконденсаті), спричинену різкою зміною (квенчем) параметру нелінійності – швидкістю звуку в конденсаті, однозначно пов’язану з константою взаємодії.

Було показано, що результат квенчу цілком залежить від значення параметру η , який є відношенням кінцевої швидкості звуку в конденсаті до початкової. Нами встановлено, що коли η – ціле, початковий солітон розпадається лише на $2\eta - 1$ солітонів. Крім того, ми знаходимо параметри солітонів (швидкості, фази тощо) явно. Якщо η не є цілим, то кінцевий стан є більш складним і містить суміш солітонів та боголюбівських мод.

ВИСНОВКИ

На завершення сформулюємо основні результати дисертаційної роботи. В ній вперше:

1. Запропоновано ідею динамічної стабілізації спінової системи керуючим полем, яке є сумою обертового поля Рабі та осцилюючого поля вздовж третьої осі. Показано, що в системі під дією такого поля спостерігається тенденція до короткочасової затримки в деякій суперпозиції станів, параметри якої визначаються параметрами поля керування.
2. Запропоновано нелінійну модифікацію поля Рабі для виходу за межі наближення «хвилі, що обертається». Показано, що задачу динаміки спіну в магнітному полі такої конфігурації можна розв'язати точно, тобто побудувати явні розв'язки для довільних початкових умов. Оскільки поле керування в цьому випадку містить ряд параметрів, досліджено різні режими динаміки системи та умови резонансу в кожному з них.
3. Отримано замкнений вираз для зсуву Блоха-Зігерта, і показано, що у граничному випадку переходу від нелінійної модифікації поля Рабі до лінійно поляризованого гармонічного поля, він співпадає з наближеним розкладом, відомим в літературі.
4. Введено рівноправні змінні розділення для моделі центрального спіну (моделі Годена). Побудовано представлення спінових станів магнетика Годена в термінах узагальнених поліномів Лягерра від цих змінних.

Отримано явні вирази для векторів Бете, що залежать від змінних розділення та коренів Бете.

5. Знайдено динаміку дипольного моменту атома, зокрема, його нелінійної фази, та електромагнітного поля в моделі Джейнса-Каммінгса. Показано, що за умови фіксації тих чи інших початкових умов можна виділити різні фізичні режими динаміки системи, серед яких проаналізовано нелінійні осциляції Рабі та режим переключення.
6. Введено рівноправні змінні розділення для моделі Джейнса-Каммінгса-Дікке і показано, що в їхніх термінах можливе інтегрування цієї задачі на узагальненому яacobіані, перевагою якого є одночасне знаходження всіх динамічних змінних.
7. Досліджено динаміку солітоноподібного збудження в одновимірному бозе-конденсаті у випадку різкої зміни параметру взаємодії за допомогою зовнішнього поля. Показано, що за умови, що відношення кінцевого значення швидкості звуку в конденсаті до початкового є цілим, початковий солітон розпадеться лише на солітонні збудження, кількість та параметри яких обраховано.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Голод П. І. Нелінійна динаміка дипольного моменту дворівневого атому в напівкласичній моделі Джейнса-Каммінгса / П. І. Голод, Ю. В. Безвершенко // Український фізичний журнал. — 2009. — Vol. 54. — P. 512–522.
2. Bezvershenko Y. V. Dynamical stabilization of spin systems in time-dependent magnetic fields / Yu. V. Bezvershenko, P. I. Holod, A. Messina // Physica Scripta. — 2011. — Vol. 2011, no. T143. — P. 014005.
3. Bezvershenko Y. V. Resonance in a driven two-level system: Analytical results without the rotating wave approximation / Yu. V. Bezvershenko, P. I. Holod // Physics Letters A. — 2011. — Vol. 375. — P. 3936 – 3940.
4. Bezvershenko Y. V. Extended state space of the rational $sl(2)$ Gaudin model in terms of Laguerre polynomials / Yu. V. Bezvershenko, P. I. Holod // Ukrainian Journal of Physics. — 2013. — Vol. 58. — P. 1084–1091.
5. Gamayun O. Fate of a gray soliton in a quenched Bose-Einstein condensate / O. Gamayun, Yu.V. Bezvershenko, V. Cheianov // Phys. Rev. A. — 2015. — Mar. — Vol. 91. — P. 031605.
6. Безвершенко Ю. В. Керування та динамічна стабілізація спінової системи змінними магнітними полями / Ю. В. Безвершенко, П. І. Голод // ІЕФ-2009. — 2009. — P. 147.

7. Bezvershenko Y. V. Dynamical stabilization of spin systems in time-dependent magnetic fields / Yu. V. Bezvershenko, P. I. Holod // International Bogolyubov Conference. — 2009. — P. 42.
8. Bezvershenko Y. V. Control of spin systems by soliton-type magnetic pulses / Yu. V. Bezvershenko, P. I. Holod // International Conference of Quantum Optics and Quantum Information '2010. Programme and Abstract book. — 2010. — P. 82.
9. Безвершенко Ю. В. Спінова динаміка в кноїдальному магнітному полі / Ю. В. Безвершенко, П. І. Голод // XI Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини. Збірка тез. — 2011. — P. 34.
10. Bezvershenko, Yu.V. and Holod, P.I. Resonance in a driven two-level system: analytical results without the rotating wave approximation / Bezvershenko, Yu.V. and Holod, P.I. // 2nd International Conference for Young Scientists "Low Temperature Physics - 2011". Conference program and Abstract book. — 2011. — P. 172.
11. Bezvershenko Y. V. Laguerre polynomials and functional Bethe ansatz for the rational Gaudin model / Yu. V. Bezvershenko, P.I. Holod // 515. WE-Heraeus-Seminar: Algebro-geometric methods in fundamental physics. — 2012.
12. Bezvershenko Y. V. Integration of dicke model on a generalized jacobian / Yu. V. Bezvershenko // IV Young Scientists Conference "Modern Problems

- of Theoretical Physics”. Program and Abstracts. — 2012. — P. 19.
13. Nielsen M. A. Quantum Computation and Quantum Information / M. A. Nielsen, I. L. Chuang. — Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1990.
 14. Rabi I. I. Space quantization in a gyrating magnetic field / I. I. Rabi // Phys. Rev. — 1937. — Vol. 51. — P. 652–654.
 15. Guttinger P. Das verhalten von. atomen im magnetischen drehfeld / P. Guttinger // Zeits. f. Physik. — 1931. — Vol. 73. — P. 169–184.
 16. Majorana E. Atomi orientati in campo magnetico variabile / E. Majorana // Nuovo Cimento. — 1932. — Vol. 9. — P. 43–50.
 17. Bloch F. Magnetic resonance for nonrotating fields / F. Bloch, A. Siegert // Phys Rev. — 1940. — Vol. 57. — P. 522.
 18. Rosen N. Double Stern-Gerlach Experiment and Related Collision Phenomena / N. Rosen, C. Zener // Phys. Rev. — 1932. — Vol. 40. — P. 502–507.
 19. McCall S. L. Self-induced transparency / S. L. McCall, E. L. Hahn // Phys. Rev. — 1969. — Vol. 183. — P. 457–485.
 20. Bambini A. Analytic solutions to the two-state problem for a class of coupling potentials / A. Bambini, P. R. Berman // Phys. Rev. A. — 1981. — Vol. 23. — P. 2496–2501.

21. Jha P. K. Coherent excitation of a two-level atom driven by a far-off-resonant classical field: Analytical solutions / Pankaj K. Jha, Yuri V. Rostovtsev // Phys. Rev. A. — 2010. — Vol. 81. — P. 033827.
22. Ronveaux A. Heun's Differential Equations / A. Ronveaux. — Oxford University, Oxford, New York, 1995.
23. Slavyanov S. Y. Special Functions: A Unified Theory Based on Singularities / S. Y. Slavyanov, W. Lay. — Oxford University, Oxford, New York, 2000.
24. Hioe F. T. Solution of Bloch equations involving amplitude and frequency modulations / F. T. Hioe // Phys. Rev. A. — 1984. — Vol. 30. — P. 2100–2103.
25. Hioe F. T. Analytic solutions to the two-state problem for chirped pulses / F. T. Hioe, C. E. Carroll // J. Opt. Soc. Am. B. — 1985. — Vol. 2, no. 3. — P. 497–502.
26. Zakrzewski J. Analytic solutions of the two-state problem for a class of chirped pulses / Jakub Zakrzewski // Phys. Rev. A. — 1985. — Vol. 32. — P. 3748–3751.
27. Xie Q. Analytical results for a monochromatically driven two-level system / Q. Xie, W. Hai // Phys. Rev. A. — 2010. — Vol. 82. — P. 032117.
28. Ishkhanyan A. M. Thirty five classes of solutions of the quantum time-dependent two-state problem in terms of the general Heun functions / Artur M. Ishkhanyan, Tigran A. Shahverdyan, Tigran A. Ishkhanyan // The European Physical Journal D. — 2015. — Vol. 69.

29. Bernatska J. Reconstruction of hamiltonians from given time evolutions / J Bernatska, A Messina // Physica Scripta. — 2012. — Vol. 85, no. 1. — P. 015001.
30. Gangopadhyay A. Exact solution for quantum dynamics of a periodically driven two-level system / Anirban Gangopadhyay, Maxim Dzero, Victor Galitski // Phys. Rev. B. — 2010. — Vol. 82. — P. 024303.
31. Barnes E. Analytically solvable driven time-dependent two-level quantum systems / Edwin Barnes, S. Das Sarma // Phys. Rev. Lett. — 2012. — Vol. 109. — P. 060401.
32. Мамфорд Д. Лекции о тэта-функциях / Д. Мамфорд. — Москва, Мир, 1988.
33. Дубровин Б. А. Интегрируемые системы. I / Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. Пробл. Мат. Фунд. Напр. — 1985. — Vol. 4. — P. 179–277.
34. Babelon O. Introduction to Classical Integrable Systems / Olivier Babelon, Denis Bernard, Michel Talon. — Cambridge University Press, 2003.
35. Зверович Э. И. Краевые задачи теории аналитических функций / Э. И. Зверович // Успехи мат. наук. — 1971. — Vol. 26. — P. 113–179.
36. Дубровин Б. А. Тэта-функции и нелинейные уравнения / Б. А. Дубровин // Успехи мат. наук. — 1981. — Vol. 36. — P. 11–80.
37. Годен М. Волновая функция Бете / М. Годен. — М.: Мир, 1987.

38. Babelon O. On the Bethe Ansatz for the Jaynes-Cummings-Gaudin model / O. Babelon, D. Talalaev // J. Stat. Mech. — 2007. — Vol. 6. — P. 06013.
39. Jurčo, B. On quantum integrable models related to nonlinear quantum optics. An algebraic Bethe ansatz approach / Jurčo, B. // J. Math. Phys. — 1989. — Vol. 30. — P. 1739.
40. Nonequilibrium cooper pairing in the non-adiabatic regime / E. A. Yuzbashyan, B. L. Altshuler, V. B. Kuznetsov, V. Z. Enolskii // Phys Rev B. — 2005. — Vol. 72. — P. 220503.
41. Solution for the dynamics of the bcs and central spin problems / E. A. Yuzbashyan, B. L. Altshuler, V. B. Kuznetsov, V. Z. Enolskii // Journal of Physics A: Math. and Gen. — 2005. — Vol. 38, no. 36. — P. 7831.
42. Feigin B. Gaudin model. bethe ansatz and critical level / B. Feigin, E. Frenkel, N. Reshetikhin // Commun. Math. Phys. — 1994. — Vol. 166. — P. 27.
43. Dukelsky J. Colloquium: Exactly solvable Richardson-Gaudin models for many-body quantum systems / J. Dukelsky, S. Pittel, G. Sierra // Rev. Mod. Phys. — 2004. — Aug. — Vol. 76. — P. 643–662.
44. Уитекер Э. Т. Курс современного анализа. Ч. II. / Э. Т. Уитекер, Дж. Н. Ватсон. — Москва, 1963.
45. Bortz M. Spin and entanglement dynamics in the central-spin model with homogeneous couplings / Michael Bortz, Joachim Stolze // Journal of Stati-

- stical Mechanics: Theory and Experiment. — 2007. — Vol. 2007, no. 06. — P. P06018.
46. Quantum versus classical hyperfine-induced dynamics in a quantum dot / W. A. Coish, Daniel Loss, E. A. Yuzbashyan, B. L. Altshuler // Journal of Applied Physics. — 2007. — Vol. 101, no. 8.
 47. Du D. On the relationship between the classical dicke-jaynes-cummings-gaudin model and the nonlinear schrodinger equation / Dianlou Du, Xue Geng // Journal of Mathematical Physics. — 2013. — Vol. 54.
 48. Colloquium: Nonequilibrium dynamics of closed interacting quantum systems / Anatoli Polkovnikov, Krishnendu Sengupta, Alessandro Silva, Mukund Vengalattore // Rev. Mod. Phys. — 2011. — Vol. 83. — P. 863–883.
 49. Kevrekidis P. G. Emergent Nonlinear Phenomena in Bose-Einstein Condensates / Panayotis G. Kevrekidis, Dimitri J. Frantzeskakis, Riccardo (Eds.) Carretero-González. — Springer, 2008.
 50. Rajaraman R. Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory / R. Rajaraman. — Elsevier Science Ltd, 1982.
 51. Dark solitons in bose-einstein condensates / S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer et al. // Phys. Rev. Lett. — 1999. — Vol. 83. — P. 5198–5201.
 52. Oscillations and interactions of dark and dark-bright solitons in bose-einstein condensates / Christoph Becker, Simon Stellmer, Parvis Soltan-Panahi et al. // Nature. — 2008. — Vol. 4. — P. 496.

53. Experimental observation of oscillating and interacting matter wave dark solitons / A. Weller, J. P. Ronzheimer, C. Gross et al. // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 101. — P. 130401.
54. Collisions of dark solitons in elongated bose-einstein condensates / S. Stellmer, C. Becker, P. Soltan-Panahi et al. // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 101. — P. 120406.
55. Collapse and revival of the matter wave field of a bose-einstein condensate / M. Greiner, O. Mandel, T. W. Hänsch, I. Bloch // Nature (London). — 2002. — Vol. 419. — P. 51.
56. Kinoshita T. A quantum newton's cradle / Toshiya Kinoshita, Trevor Wenger, David S. Weiss // Nature. — 2006. — Vol. 440. — P. 900.
57. Realization of an excited, strongly correlated quantum gas phase / Elmar Haller, Mattias Gustavsson, Manfred J. Mark et al. // Science. — 2009. — Vol. 325. — P. 1224.
58. Relaxation and prethermalization in an isolated quantum system / M. Gring, M. Kuhnert, T. Langen et al. // Science. — 2012. — Vol. 337. — P. 1318.
59. Probing the relaxation towards equilibrium in an isolated strongly correlated one-dimensional bose gas / S. Trotzky, Y-A. Chen, A. Flesch et al. // Nature Physics. — 2012. — Vol. 8. — P. 325.
60. Spontaneous creation of kibble-zurek solitons in a bose-einstein condensate / Giacomo Lamporesi, Simone Donadello, Simone Serafini et al. // Nature Physics. — 2013. — Vol. 9.

- 61. Bloch I. Many-body physics with ultracold gases / Immanuel Bloch, Jean Dalibard, Wilhelm Zwerger // Rev. Mod. Phys. — 2008. — Vol. 80, no. 3. — P. 885.
- 62. Calabrese P. Time dependence of correlation functions following a quantum quench / Pasquale Calabrese, John Cardy // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 96. — P. 136801.
- 63. Dziarmaga J. Dynamics of a quantum phase transition and relaxation to a steady state / J. Dziarmaga // Adv. Phys. — 2010. — Vol. 59. — P. 1063.
- 64. Caux J.-S. Time evolution of local observables after quenching to an integrable model / Jean-Sébastien Caux, Fabian H. L. Essler // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Vol. 110. — P. 257203.
- 65. Frantzeskakis D. J. Dark solitons in atomic bose-einstein condensates: from theory to experiments / D. J. Frantzeskakis // J. Phys. A. — 2010. — Vol. 43. — P. 213001.
- 66. Kevrekidis P. Pattern forming dynamical instabilities of bose-einstein condensates / P.G. Kevrekidis, D.J. Frantzeskakis // Mod. Phys. Lett. — 2004. — Vol. 18. — P. 173.
- 67. del Campo A. Universality of phase transition dynamics: Topological defects from symmetry breaking / Adolfo del Campo, Wojciech H. Zurek // Int. J. Mod. Phys. A. — 2014. — Vol. 29. — P. 1430018.

68. Topological blocking in quantum quench dynamics / G. Kells, D. Sen, J. K. Slingerland, S. Vishveshwara // Phys. Rev. B. — 2014. — Vol. 89. — P. 235130.
69. Голод П. И. Математические основы теории симметрий / П. И. Голод, А. У. Климык. — Ижевск : РХД, 2001.
70. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции: Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М.: Наука, 1967.
71. Ince E. Ordinary Differential Equations / E.L. Ince. — Dover Publications Inc., New York, 1956.
72. Hannaford P. Analytical expressions for the Bloch-Siegert shift / P. Hannaford, D. T. Pegg, G. W. Series // J. Phys. B: At. Mol. Phys. — 1973. — Vol. 6. — P. L222.
73. Latta C. Hyperfine interaction-dominated dynamics of nuclear spins in self-assembled ingaas quantum dots / Christian Latta, Ajit Srivastava, Atac Imamo ğlu // Phys. Rev. Lett. — 2011. — Vol. 107. — P. 167401.
74. Nuclear spin physics in quantum dots: An optical investigation / Bernhard Urbaszek, Xavier Marie, Thierry Amand et al. // Rev. Mod. Phys. — 2013. — Vol. 85. — P. 79–133.
75. Dynamics and decoherence in the central spin model using exact methods / Michael Bortz, Sebastian Eggert, Christian Schneider et al. // Phys. Rev. B. — 2010. — Vol. 82. — P. 161308.

76. Bortz M. Exact dynamics in the inhomogeneous central-spin model / Michael Bortz, Joachim Stolze // Phys. Rev. B. — 2007. — Vol. 76. — P. 014304.
77. Bortz M. Spectrum and screening cloud in the central spin model / Michael Bortz, Sebastian Eggert, Joachim Stolze // Phys. Rev. B. — 2010. — Vol. 81. — P. 035315.
78. Chen G. Semiclassical dynamics and long-time asymptotics of the central-spin problem in a quantum dot / Gang Chen, Doron L. Bergman, Leon Balents // Phys. Rev. B. — 2007. — Vol. 76. — P. 045312.
79. Склянин Е. Разделение переменных в модели Годена / Е.К. Склянин // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1989. — Vol. 164. — P. 151–169.
80. Babelon O. A semi-classical study of the Jaynes–Cummings model / O. Babelon, L. Cantini, B. Doucot // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. — 2009. — Vol. 2009, no. 07. — P. P07011.
81. Babelon O. Classical bethe ansatz and normal forms in an integrable version of the dicke model / O. Babelon, B. Doucot // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2012. — Vol. 241, no. 23–24. — P. 2095 – 2108. — Integrable Systems in Pure and Applied Mathematics.
82. Previato E. Hyperelliptic quasi-periodic and soliton solutions of the nonlinear Schrodinger equation / E. Previato // Duke Math. J. — 1985. — Vol. 52. — P. 329.
83. Арнольд И. В. Математические методы классической механики / И. В. Арнольд. — Москва, 1974.

84. Belokolos E. D. Spectra of gaudin quantum integrable models and a distribution of zeros of polynomials / E. D. Belokolos // Ukr. J. Phys. — 2009. — Vol. 54. — P. 862–872.
85. Belokolos E. D. Integrable superconductivity and richardson equations / E. D. Belokolos // Ukr. Math. J. — 2007. — Vol. 59. — P. 343–360.
86. Gaudin models solver based on the correspondence between bethe ansatz and ordinary differential equations / Alexandre Faribault, Omar El Araby, Christoph Sträter, Vladimir Gritsev // Phys. Rev. B. — 2011. — Vol. 83. — P. 235124.
87. El Araby O. Bethe ansatz and ordinary differential equation correspondence for degenerate gaudin models / Omar El Araby, Vladimir Gritsev, Alexandre Faribault // Phys. Rev. B. — 2012. — Vol. 85. — P. 115130.
88. Szegő G. Orthogonal Polynomials / G. Szegő. — AMS, New York, 1959.
89. Varchenko A. Critical points of the product of powers of linear functions and families of bases of singular vectors / A. Varchenko // Compos. Math. — 1995. — Vol. 97. — P. 385–401.
90. Babujian H. M. Off-shell bethe ansatz equations and n-point correlators in the $su(2)$ wznw theory / H M Babujian // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1993. — Vol. 26, no. 23. — P. 6981.
91. Babujian H. Off-shell bethe ansatz equation for gaudin magnets and solutions of knizhnik-zamolodchikov equations / H.M. Babujian, R. Flume // Modern Physics Letters A. — 1994. — Vol. 09, no. 22. — P. 2029–2039.

92. Fioretto D. Exact out-of-equilibrium central spin dynamics from integrability / Davide Fioretto, Jean-Sebastien Caux, Vladimir Gritsev // New Journal of Physics. — 2014. — Vol. 16, no. 4. — P. 043024.
93. Eilbeck J. C. The hyperelliptic zeta-function and the integrable massive thirring model / J C Eilbeck, V Z Enolskii, H Holden // Proc. R. Soc. Lond. A. — 2003. — Vol. 459. — P. 1581–1610.
94. Fedorov Y. Classical integrable systems and billiards related to generalized jacobians / Yu. Fedorov // Acta Appl Math. — 1999. — Vol. 55. — P. 251.
95. Аллен Л. Оптический резонанс и двухуровневые атомы / Л. Аллен, Дж. Эберли. — Москва: Мир, 1978.
96. Shore B. W. The Jaynes-Cummings Model / B. W. Shore, P. L. Knight // J. Mod. Optics. — 1993. — Vol. 40. — P. 1195–1238.
97. Скалли М. О. Квантовая оптика / М. О. Скалли, М. С. Зубайри. — Физматлит, Москва, 2003.
98. Braak D. Integrability of the rabi model / D. Braak // Phys. Rev. Lett. — 2011. — Vol. 107. — P. 100401.
99. Moroz A. On solvability and integrability of the rabi model / Alexander Moroz // Annals of Physics. — 2013. — Vol. 338. — P. 319 – 340.
100. Analytical eigenstates for the quantum rabi model / Honghua Zhong, Qiongtao Xie, Murray T Batchelor, Chaohong Lee // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2013. — Vol. 46, no. 41. — P. 415302.

101. Exceptional and regular spectra of a generalized rabi model / Michael Tomka, Omar El Araby, Mikhail Pletyukhov, Vladimir Gritsev // Phys. Rev. A. — 2014. — Vol. 90. — P. 063839.
102. Jaynes E. T. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser / E. T. Jaynes, F. W. Cummings // Proc. IEEE. — 1963. — Vol. 51. — P. 89.
103. Dicke R. H. Coherence in spontaneous radiation processes / R. H. Dicke // Phys. Rev. — 1954. — Vol. 93. — P. 99–110.
104. Бернацька Ю. М. Канонічні координати та змінні дія-кут в скінченно-зонних секторах нелінійних інтегровних рівнянь / Ю. М. Бернацька, П. І. Голод // Наукові записки НАУКМА: Фіз.-мат. науки. — 2001. — Vol. 19. — P. 31.
105. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. — М.: Наука, 1963.
106. Pitaevskii L. Bose-Einstein Condensation / Lev Pitaevskii, Sandro Stringari. — Oxford University Press, 2003.
107. Pethick C. J. Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases / C. J. Pethick, H. Smith. — Cambridge University Press, 2008.
108. Petrov D. S. Low-dimensional trapped gases / D. S. Petrov, D. M. Gangardt, G. V. Shlyapnikov // J. Phys. IV. — 2004. — Vol. 116.

- 109. Castin Y. Simple theoretical tools for low dimension bose gases / Y. Castin // J. Phys. IV. — 2004. — Vol. 116.
- 110. Astrakharchik G. E. Motion of a heavy impurity through a bose-einstein condensate / G. E. Astrakharchik, L. P. Pitaevskii // Phys. Rev. A. — 2004. — Vol. 70. — P. 013608.
- 111. Faddeev L. D. Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons / L. D. Faddeev, L. A. Takhtajan. — Springer, 1987.
- 112. Zakharov V. E. Exact Theory of Two-dimensional Self-focusing and One-dimensional Self-modulation of Waves in Nonlinear Media / V. E. Zakharov, A. B. Shabat // Sov. Phys.·JETP. — 1972. — Vol. 34. — P. 62.