Національна академія наук України
Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова

Безвершенко Юлія Василівна

УДК 530.145, 517.938, 537.9

Інтегровні моделі квантових систем в зовнішніх полях

01.04.02 – теоретична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2015

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Інституті теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України.

Наукові керівники:

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник,
Голод Петро Іванович,

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник,
Іоргов Микола Зіновійович,
Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, завідувач лабораторії теорії інтегровних систем відділу математичних методів в теоретичній фізиці

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник,
Енольський Віктор Зелікович,
Центр прикладних космічних технологій та мікрогравітації Університету м. Бремен, Німеччина, запрошений професор

член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор,
Іванов Борис Олексійович,
Інститут магнетизму НАН України та МОН України, завідувач лабораторії магнітних матеріалів відділу теоретичної фізики

Захист відбудеться «_____»_____________ 2015 р. о _______ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.191.01 Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова Національної Академії Наук України за адресою: вул. Метрологічна 14-б, м. Київ, 03680, Україна.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова Національної Академії Наук України за адресою: вул. Метрологічна 14-б, м. Київ, 03680, Україна.

Автореферат розісланий «______»_______________ 2015 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 26.191.01,
доктор фіз.-мат. наук В. Є. Кузьмичев

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми

Бурхливий розвиток експериментальних можливостей щодо керування квантовими об'єктами ставить нові задачі перед теоретичною та математичною фізикою. У 2012 році Нобелівську премію з фізики було присуджено «за інноваційні експериментальні методи, які дозволили вимірювання та маніпулювання окремими квантовими системами». Також вже понад 20 років дуже динамічним є напрямок виготовлення квантових обчислювальних приладів. Таким чином, з одного боку, експеримент створює запит на знаходження все більш детальної інформації про квантові системи, а з іншого боку, існує інтерес до конструювання керованої динаміки таких систем із тими чи іншими наперед заданими характерними рисами. Останнє передбачає деякий зовнішній вплив, що можна здійснити за допомогою зовнішнього поля із достатньою кількістю параметрів, якими можна маніпулювати. У зв'язку з цим модельні задачі, в тому числі і особливо – інтегровні, та дослідження їхньої динаміки у зовнішніх полях є предметом особливої уваги, а вже відпрацьовані для їх аналізу потужні математичні методи дозволяють отримувати конкретні результати. Крім того, інтегровні моделі, які є найпростішими відповідниками реальних квантових систем, дозволяють виявляти універсальність поставлених задач, що відповідають різним фізичним об'єктам, та застосовувати до них однакові математичні методи. Так, наприклад, модель центрального спіну, де виділений спін взаємодіє з постійним магнітним полем та колективом невзаємодіючих між собою спінів, та модель Джейнса-Каммінгса-Дікке, яка описує взаємодію колективу невзаємодіючих між собою дворівневих атомів з одномодовим електромагнітним полем, що вивчались в дисертаційній роботі, належать до одного класу інтегровних моделей Годена. Так само будь-який результат, отриманий для модельної дворівневої системи в зовнішньому полі, яке залежить від часу, може бути однаково застосовним і до магнетиків, і до квантових точок, і до атомів у резонаторі. В свою чергу кожен новий приклад зовнішнього поля, в якому задача динаміки квантової системи є точнорозв'язною, поповнює дуже невеликий перелік таких прикладів і є вкрай важливим. Тому задачі розширення набору полів, для яких відома точна динаміка квантової системи, вивчення можливостей теорії класичних інтегровних систем у зв'язку з їх квантуванням та адаптація математичних методів до фізичних задач, які виникають під час пошуку відповідей на всі ці питання, є актуальними та великою мірою універсальними.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Результати, що увійшли в дисертаційну роботу, були отримані в рамках планової наукової тематики відділу математичних методів в теоретичній фізиці Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України «Методи теорії симетрій та проблеми нелінійної динаміки в сучасній теорії поля та теорії елементарних частинок» 2007-2011 рр. (шифр 1.4.7, № держ. реєстрації 0106U007885) та «Нелінійні квантові осцилятори, інтегровні моделі та квантово-польові системи: симетрії та застосування» 2012-2016 рр. (№ держ. реєстрації 0112U000052).

Метою і задачею дослідження є вивчення динаміки спінових та квантово-оптичних систем, дослідження структури станів моделі центрального спіну (моделі Годена), вивчення переваг введення рівноправних змінних розділення в моделях класу Годена, дослідження динаміки солітоноподібного збудження у одновимірному бозе-конденсаті при раптовій зміні параметрів системи. Для її досягнення було поставлено наступні задачі:

1. Дослідити динаміку спіну 1/2 та довільного спіну в магнітному полі, яке є суперпозицією поперечного обертового поля та поля, що осцилює на фоні сталого магнітного поля.
2. Дослідити динаміку спіну 1/2 в полі, яке апроксимує лінійно поляризоване гармонічне поле і дає можливість вийти за межі наближення «хвилі, що обертається», та встановити умови резонансу в ньому.
3. Побудувати представлення спінових операторів моделі Годена в термінах змінних розділення та дослідити структуру спінових станів квантової моделі Годена.
4. Дослідити динаміку класичної моделі Джейнса-Каммінгса та побудувати змінні розділення у моделі Дікке, в термінах яких можливе застосування методу інтегрування на узагальненому якобіані.
5. Дослідити динаміку солітоноподібного збудження в одновимірному бозе-конденсаті при раптовій зміні зовнішнього поля.

Об'єктами дослідження є дворівневі системи в зовнішніх змінних полях, інтегровні моделі центрального спіну, Джейнса-Каммінгса-Дікке та Годена, конденсат Бозе-Ейнштейна.

Предметом дослідження є динаміка спінових систем в магнітних полях, що залежать від часу, структура станів в магнетику Годена, динаміка спостережуваних величин, що описують атом і поле в моделі Джейнса-Каммінгса-Дікке, розпад солітоноподібного збудження в одновимірному бозе-конденсаті при раптовій зміні параметрів системи.

В роботі було застосовано наступні **методи дослідження**: методи теорії диференційних рівнянь класу Фукса, методи теорії еліптичних функцій, метод розділення змінних в інтегровних моделях, метод оберненої задачі розсіювання.

Наукова новизна одержаних результатів.

В дисертаційній роботі вперше:

1. Запропоновано ідею динамічної стабілізації спінової системи керуючим полем, яке є суперпозицією поперечного обертового поля та осцилюючого поля на фоні сталого магнітного поля.
2. Запропоновано нелінійну модифікацію поля Рабі для виходу за межі наближення «хвилі, що обертається» в задачі динаміки модельного спіну 1/2. Сконструйовано схему побудови точних розв’язків цієї задачі та досліджено умови резонансу для різних режимів.

3. Отримано замкнений вираз для зсуву Блоха-Зігерта.
4. Побудовано представлення спінових станів моделі Годена (моделі центрального спіну) в термінах узагальнених поліномів Лягерра від рівноправних змінних розділення.
5. Отримано вирази, що описують динаміку дипольного моменту атома, зокрема, його нелінійну фазу, в моделі Джейнса-Каммінгса.
6. Введено змінні розділення для моделі Дікке, в термінах яких можливе інтегрування на узагальненому якобіані.
7. Досліджено динаміку розпаду односолітонного збудження в одновимірному бозе-конденсаті внаслідок різкої зміни параметру взаємодії.

Практичне значення одержаних результатів

Робота має теоретичний характер. Отримані результати є внеском у теоретичний опис динаміки спінових та квантово-оптичних систем у зовнішніх полях та до теорії магнітного резонансу. Результати дисертаційної роботи та математичні методи, розвинені у ній, можна використати для розв’язання інших задач теорії конденсованого середовища, зокрема, магнетиків та надпровідних систем.

Особистий внесок здобувача

Результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. У роботах, опублікованих у співавторстві, автор брала участь у формулюванні задач і виконувала аналітичні та чисельні розрахунки.

В роботі [1] автором вирахувано фазу дипольного моменту атома, що взаємодіє з класичним електромагнітним полем, та проаналізовано поведінку змінної, пов’язаної з вихідними динамічними змінними задачі, на рімановій поверхні.

В роботі [2] автором вирахувано елементи матриці еволюції спіну 1/2, що перебуває у комбінації поля Рабі та слабкого осцилюючого поля, отримано вирази, що описують динаміку довільного спіну та зроблено чисельні розрахунки для спіну 1/2 і довільного спіну.

В роботі [3] автором обраховано лінійні комбінації, що задовольняють обраним початковим умовам для $N=1$ (деякий параметр поля), отримано вирази для $N=2$ та приведено їх у відповідність до обраних початкових умов; отримано вираз для третьої компоненти вектору Блоха та проведено чисельні обрахунки, які підтвердили правильність знайдених умов резонансу.

В роботі [4] автором отримано явні вирази для спінових змінних моделі Годена в термінах змінних розділення, досліджено структуру спінових станів для випадку одного спіну та отримано явні вирази для векторів Бете.

В роботі [5] автором проведено аналіз трансфер-матриці для односолітонного випадку та побудовано динаміку солітону у випадку зростання вдвічі швидкості звуку в системі.

Апробація роботи

Матеріали дисертації пройшли апробацію на таких конференціях: International Workshop “Algebraic Curves with Symmetries, their Jacobians and

Integrable Systems” (Kyiv, Ukraine, July 30 – August 1, 2014); International Conference “Quantum Groups and Quantum Integrable Systems’2013” (Kyiv, Ukraine, June 18-21, 2013); Russian-Japan Conference “Synthesis of integrabilities in the context of duality between the string theory and gauge theories” (Moscow, Russia, September 17-21, 2012); Heraeus-Seminar “Algebro-geometric methods in fundamental physics” (Bad Honnef, Germany, September 2-7, 2012); Franco-Ukrainian Workshop “Recent trends in classical and quantum integrable systems”, (Tours University, France, May 29-31, 2012); Young scientists conference “Modern Problems of Theoretical Physics” (Kyiv, Ukraine, October 23-26, 2012); XI Всеукраїнська школа-семінар зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, Україна, 1-3 червня, 2011); IX Winter School on Theoretical Physics “Nonlinear Phenomena in Condensed matter” (Dubna, Russia, January 30 - February 6, 2011); 2-га Міжнародна конференція молодих вчених «Фізика низьких температур-2011» (Харків, Україна, 6-10 червня, 2011); International Conference of Quantum Optics and Quantum Information’2010 (Kyiv, Ukraine, May 28 – June 1, 2010); International Bogolyubov Conference (Kyiv, Ukraine, September 15-18, 2009); International Conference of Young Scientists and Post-graduates IEP-2009 (Uzhgorod, Ukraine, May 25-28, 2009); 8th and 7th International Conferences “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics” (Kyiv, Ukraine, June 21-27, 2009 and June 24-30, 2007). Основні результати дослідження також обговорювалися на семінарах відділу математичних методів в теоретичній фізиці Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України (Київ, 2008-2014), відділу теоретичної фізики Інституту магнетизму НАН України та МОН України (Київ, 2008), кафедри фізико-математичних наук Національного університету «Києво-Могилянська академія» (Київ, 2007-2013), факультету фізики та астрономії Університету Палермо (Італія, вересень 2008), на об’єднаному семінарі Центру прикладних космічних досліджень та мікрогравітації Університету Бремена та Університету Ольденбурга (Німеччина, серпень 2012) та на American Physical Society March Meeting (Сан Антоніо, США, березень 2015).

Публікації

За матеріалами дисертації опубліковано 12 робіт, 5 із них складають статті в наукових журналах [1,2,3,4,5], а 7 робіт були опубліковані як тези конференцій [6,7,8, 9, 10, 11, 12].

Структура дисертаційної роботи

Дисертаційна робота складається зі вступу, 5 розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 112 найменувань. Робота написана на 142 сторінках машинописного тексту, містить 15 рисунків.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ

У вступі обґрунтовано актуальність обраної теми, сформульовано мету та задачі дослідження, показано наукову та практичну цінність отриманих результатів і коротко викладено зміст розділів дисертації.

У першому розділі зроблено огляд точнорозв'язних задач знаходження динаміки дворівневих квантових систем у зовнішніх змінних полях та прослідковано еволюцію постановки таких задач у зв'язку із розвитком експериментальних можливостей. Описано відомі в літературі дані про інтегровні системи центрального спіну та Джейнса-Каммінгса-Дікке, а також їхню приналежність до класу моделей Годена. Проаналізовано можливості щодо використання методів теорії класичних інтегровних систем для вивчення їх квантових відповідників. Описано деякі способи експериментального дослідження динаміки квантових систем у зовнішніх полях та керування нею.

У другому розділі розглянуто задачу взаємодії модельного спіну 1/2 із зовнішніми магнітними полями, що залежать від часу. Зокрема, було розглянуто динаміку спіну 1/2 в полі, що є суперпозицією обертового поля Рабі $\boldsymbol{B}_R(t) = \hbar/\mu\,(a\cos\nu t, a\sin\nu t, \omega_0)$ та осцилюючого поля $\boldsymbol{B}_{St}(t) = \hbar/\mu\,(0,0,f_0\cos\omega t)$, де $\mu = q\hbar/2mc$ – магнітний момент частинки із зарядом q (надалі $\mu = \hbar = 1$), а $f_0 \ll a, f_0 \ll \omega_0$. Вибір такої конфігурації магнітного поля зумовлений ідеєю слабкої модифікації регулярної динаміки, індукованої полем Рабі $\boldsymbol{B}_R(t)$, – осциляцій Рабі, слабким змінним полем. Метою є досягнення короткочасової динамічної стабілізації квантової системи в деякій локально стійкій суперпозиції станів, тобто повторюваного повернення до деякого проміжного стану, де система втримується протягом скінченного проміжку часу.

Відповідне рівняння Шредінгера на елементи матриці еволюції можна розв'язати за теорією збурень і обрахувати вирази для зручних для подальшого аналізу спостережуваних величин – середніх значень спінового моменту (вектору Блоха $\mathbf{S}(t)$). Зокрема, третя проекція спінового моменту $S_3(t)$ з точністю до поправок першого порядку має вигляд $S_3(t) = S_3^{(R)}(t) + f_0 S_3^{(1)}(t)$, де $S_3^{(R)}(t) = \frac{1}{\Omega_R^2}(\Delta^2 + 4a^2\cos\Omega_R t)S_3(0)$ описує осциляції Рабі з частотою $\Omega_R = \sqrt{\Delta^2 + 4a^2}$,

$$S_3^{(1)}(t) = \frac{-8a^2\Delta}{\Omega_R^2(\omega^2 - \Omega_R^2)}\Big(1 + \cos\omega t - \cos\Omega_R t - \frac{(\omega - \Omega_R)}{2\omega}\cos(\omega + \Omega_R)t - \frac{(\omega + \Omega_R)}{2\omega}\cos(\omega - \Omega_R)t\Big),$$

$S_3(0) = \pm 1$, якщо система починає еволюціонувати з власного стану, $\Delta = \nu - \omega_0$ – різниця між частотами обертового і сталого полів. Отриманий розв'язок є періодичним з періодом осциляцій Рабі $T_R = 2\pi/\Omega_R$, якщо $\omega = n\Omega_R$, де $n = 2,3,\ldots$. Наприклад, якщо $\omega = 2\Omega_R$, третя компонента вектора Блоха в околі точки $T_R/2$ має тенденцію до незначної зміни своєї величини (Рис. 1), що можна інтерпретувати як короткочасове втримування системи в деякій суперпозиції станів, тобто її динамічну стабілізацію. Проведене порівняння розв'язку в другому порядку за теорією збурень із результатами чисельного інтегрування вихідного рівняння протягом декількох періодів Рабі підтвердило, що розв'язок у першому порядку за теорією збурень адекватно описує поведінку системи, тобто поправки вищих порядків не руйнують знайдену тенденцію (Рис. 1).

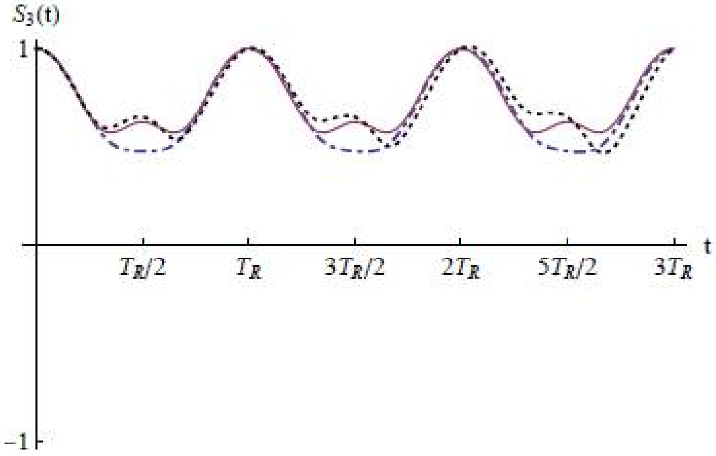

Рис.1
Порівняння пертурбативних розв'язків у першому (неперервна крива) та другому порядках (пунктирна пряма) з результатами чисельного інтегрування (-.-.-) для спіну 1/2 ($\Delta = 0.812$, $f_0 = 0.418$).

З відомих елементів матриці еволюції спіну 1/2 можна побудувати відповідний оператор для спіну *j*. Таким чином, результат, наведений вище, було узагальнено на довільний спін. Зокрема, було побудовано явні вирази для третьої проекції вектора Блоха та показано, що тенденція до динамічної стабілізації в такій системі зберігається.

Також у цьому розділі було розглянуто задачу розширення класу полів, для яких задача динаміки спіну є точнорозв’язною. Було запропоновано дослідити динаміку спіну 1/2 в полі виду $\boldsymbol{B}_{NR} = (Nk\nu\ \mathrm{cn}(\nu t,k)\cos\omega t, Nk\nu\ \mathrm{cn}(\nu t,k)\sin\omega t, \omega_0)$, де $N \in \mathbb{Z}, \mathrm{cn}(\nu t,k)$ означає еліптичну функцію Якобі – кноїд з модулем $k, 0 \le k \le 1$. Таку конфігурацію магнітного поля при довільних параметрах можна вважати нелінійною модифікацією поля Рабі зі змінною амплітудою $a(t) = Nk\nu\mathrm{cn}(\nu t,k)$. У спеціальному випадку $k=1$ вона вироджується в гіперболічну функцію $a(t,k=1) = N\nu\mathrm{sech}(\nu t)$, тому поле стає обертовим з *N*-солітонною огинаючою. Третя ситуація має місце коли $\omega = 0$: тоді поле має вигляд $\boldsymbol{B}_{LP}(t) = \{2a(t), 0, \omega_0\}$. Тоді в границі $N \to \infty, k \to 0$ (при цьому $Nk = const$), воно є лінійно поляризованою гармонічною хвилею. Тому знаходження динаміки у вихідному полі з подальшим покладанням $\omega = 0$ і розглядом достатньо малих k дає також розв'язок задачі про динаміку спіну в полі виду $\{\cos\Omega t, 0, \omega_0\}$, де $\Omega = \pi\nu / 2K(k)$, $K(k)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду.

За умови вибору такого поля, рівняння Шредінгера на амплітуди стану спіну 1/2 зводиться до двох незалежних звичайних диференційних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, які після обезрозмірювання (шляхом переходу до $\tau = \nu t$) та заміни змінних $s = \mathrm{sn}(\tau, k)$ мають вигляд:

$$\frac{d^2C_\pm}{ds^2} - \left(\frac{k^2 s}{1-k^2s^2} \pm \frac{\imath\Delta}{\sqrt{w^2}}\right)\frac{dC_\pm}{ds} + \frac{N^2k^2}{1-k^2s^2}C_\pm = 0,$$

де $\Delta = (\omega_0 - \omega)/\nu$ – безрозмірна різниця частот (детюнінг). Їх можна класифікувати як рівняння типу Фукса на рімановій поверхні, яка відповідає алгебраїчній кривій $w^2 = (1-s^2)(1-k^2s^2)$.

Два очевидні граничні випадки мають фізичний сенс та приводять до спрощення початкової задачі до рівнянь гіпергеометричного типу. У випадку

$\Delta=0$, який означає резонанс між частотами постійного та осцилюючого поля, розв'язки мають вигляд: $C_+=T_N(-ks)$, та $C_-=-\imath\sqrt{1-k^2s^2}U_{N-1}(-ks)$, де $T_N(x)$ та $U_N(x)$ – поліноми Чебишева першого та другого роду, відповідно. Іншу ситуацію можна отримати, покладаючи $k=1$, так що початкове поле редукується до обертового поля з N-солітонною огинаючою $a(t,k=1)$. В цьому випадку розв'язком є $C_+=P_N^{(a,b)}(s)$, де $P_N^{(a,b)}(x)$ – поліном Якобі з параметрами $a=-(1-\imath\Delta)/2$, $b=-(1+\imath\Delta)/2$.

Базуючись на граничних випадках, було запропоновано анзац для розв'язку рівняння на C_+:

$$f_+=\exp\left[\int_0^s\left(\mathcal{R}_0(s')+\imath\frac{\mathcal{R}_1(s')}{\sqrt{w^2}}\right)ds'\right],$$

де $\mathcal{R}_0(s)$ та $\mathcal{R}_1(s)$ є раціональними функціями від s, рівняння на які отримуються підстановкою цього анзацу у вихідне рівняння. Крім того, оскільки розв'язки в обох граничних випадках дають, що $|C_+|$ є поліномом, f_+ шукалось у формі

$$|f_+|^2=\mathcal{P}_{2N}(s,e_i)=\prod_{i=1}^{N}(s^2-e_i^2),$$

де $\mathcal{P}_{2N}$ є поліномом $2N$-го порядку з коренями e_i. Тоді $\mathcal{R}_0(s)$ можна легко обрахувати, а $\mathcal{R}_1(s)$ визначається виразом

$$\mathcal{R}_1(s)=\Delta\int_0^s\exp(-\int_y^s\left[2\mathcal{R}_0(x)-\frac{x}{x^2-1}\right]dx)\mathcal{R}_0(y)\mathrm{d}y.$$

Корені e_i визначаються як умова сумісності рівнянь на ці дві функції. З відомими $\mathcal{R}_0(s)$ та $\mathcal{R}_1(s)$ можна отримати вираз для f_+ відповідно до анзацу. Аналогічно можна знайти розв'язок f_-, який відповідає другій амплітуді. Після цього необхідно вибрати два лінійно незалежних розв'язки вихідних рівнянь і підібрати такі їх лінійні комбінації, які будуть задовольняти обраним початковим умовам.

Використовуючи побудовану схему, було знайдено розв'язки для $N=1$:

$$C_+=\varepsilon_1\sqrt{s^2+e_1^2}\,\mathrm{e}^{-\imath\varphi_1}+\varepsilon_2\sqrt{-s^2-e_2^2}\,\mathrm{e}^{-\imath\varphi_2},\ C_-=-\imath\varepsilon_2\sqrt{s^2+e_1^2}\,\mathrm{e}^{\imath\varphi_1}+\imath\varepsilon_1\sqrt{-s^2-e_2^2}\,\mathrm{e}^{\imath\varphi_2},$$

де $s=\mathrm{sn}(\tau,k)$, $e_{1,2}^2=\left(\left(\Delta^2-1\right)\pm\sqrt{\left(\Delta^2-1\right)^2+4k^2\Delta^2}\right)/(2k^2)$, $\varepsilon_i=\sqrt{(-1)^{i+1}e_i^2/(e_1^2-e_2^2)}, i=1,2.$

Залежна від часу фаза $\varphi_i=\Delta\left[\tau-(1+e_i^2)(e_i^2)^{-1}\Pi\left(-(e_i^2)^{-1};\mathrm{am}(\tau,k),k\right)\right]$ визначається в термінах неповного еліптичного інтегралу третього роду

$$\Pi(n;\mathrm{am}(\tau,k),k)=\int_0^s((1-nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)})^{-1}\mathrm{d}x,$$

де $\mathrm{am}(\tau,k)$ – амплітудна функція Якобі. Зростання N, яке відповідає зростанню амплітуди поля, призводить до ускладнення виразів для амплітуд стану (збільшується степінь поліному тощо), але не змінює їх структури. У дисертаційній роботі отримано і наведено також явні розв'язки при $N=2$, що задовольняють обраним початковим умовам. Явні вирази для амплітуд станів $C_\pm$

було використано для обрахунку третьої компоненти вектору Блоха, зручної для фізичної інтерпретації.

Термін «резонанс» в задачах спінової динаміки застосовується до ситуації, коли за наявності спеціальних співвідношень між характерними частотами задачі система еволюціонує від стану $|+\rangle$ до стану $|-\rangle$, тобто випадку, коли $S_3(\tau=\tau_0)=1$.

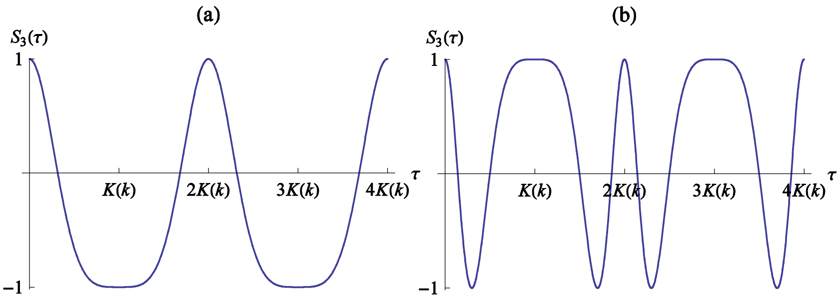

Рис. 2 Резонанс в нелінійній модифікації поля Рабі $\boldsymbol{B}_{NR}(t)$.
(a) $N=2, k_{res}=0.7$,
(b) $N=3, k_{res}=0.89$.

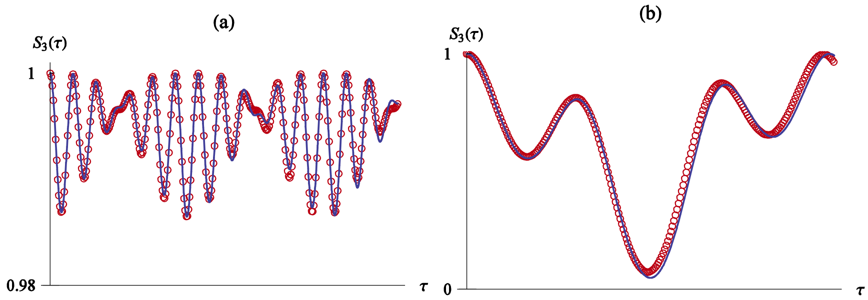

Рис. 3 Порівняння точного результату при $N=2$ (неперервна лінія) у полі $\mathbf{B}_{LP}(\tau)$ з чисельним інтегруванням (кола) задачі з лінійно поляризованим гармонічним полем $\{2a\cos\tau, 0, \omega_0\}$, $a=2k$. Тут $k=0.25, a=0.5$. (a) $\Delta=0.4$, (b) $\Delta=12$.

В полі Рабі $\boldsymbol{B}_R(t)$ єдиною умовою резонансу є $\omega=\omega_0$, тоді система здійснює осциляції між станами з періодом $T_R=\pi/a$. Ситуацію, коли характерним періодом динаміки є T_R, називають «резонансом Рабі». Було показано, що в полі $\boldsymbol{B}_{NR}(t)$, яке є нелінійною модифікацією поля Рабі, крім умови $\omega=\omega_0$, додатковою умовою резонансу є $\mathrm{T}_N(-k_{res})^2=0$ (Рис. 2). Для випадку N-солітонного імпульсу $(k=1)$ єдиною умовою резонансу є $\nu=\omega_0$. У разі вибору поля $\boldsymbol{B}_{LP}(t)=\{2a(t),0,\omega_0\}$ вираз для $S_3(t)$ можна обрахувати при $N=1,2$, беручи відповідні границі від явних виразів для амплітуд, наведених вище (Рис. 3). Оскільки поле $\boldsymbol{B}_{LP}(t)$ має дві характерні частоти: ω_0 та Ω, умовою резонансу є $\omega_0=\pi\nu/2K(k)$. При малих k останній вираз можна розкласти в ряд $\omega_0=\nu(1-k^2/4-5k^4/64-...)$. Оскільки при $N=1$ модулярний параметр k відіграє роль постійної амплітуди a у відповідному полі $\boldsymbol{B}_R(t)$, отриманий розклад співпадає з виразом для зсуву Блоха-Зігерта, відомим в літературі.

У третьому розділі розглянуто модель центрального спіну, яка описує систему спінів $\boldsymbol{S}_i, i=2..N$, які не взаємодіють один з одним, але кожен з яких взаємодіє з виділеним спіном $\boldsymbol{S}_1$. Якщо на цей «центральний» спін діє зовнішнє статичне магнітне поле B, то гамільтоніан моделі має наступний вигляд: $\mathcal{H}_1=-BS_1^z-\sum_{k=2}^{N}\gamma_k(\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_k)$, де γ_k є константами, які характеризують взаємодію виділеного спіну $\boldsymbol{S}_1$ з деяким спіном $\boldsymbol{S}_k$. Дана модель є представником класу моделей Годена, які задаються комутативним набором інтегралів руху виду $\mathcal{H}_i = 2gS_i^z + \sum_{k=1,k\neq i}^{N} f(\varepsilon_i - \varepsilon_k)(\boldsymbol{S}_i, \boldsymbol{S}_k)$, де $\varepsilon_i, i = 1,2,\ldots,N$, є деякими комплексними параметрами. Якщо $f(\varepsilon_i - \varepsilon_k) = 1/(\varepsilon_i - \varepsilon_k)$, відповідна модель називається раціональною. Вона є інтегровною за Ліувіллем та алгебраїчно інтегровною. Останнє, зокрема, передбачає можливість побудови матриці Лакса даної моделі:

$$L(\lambda = \begin{bmatrix} \alpha(\lambda) & \beta(\lambda) \\ \gamma(\lambda) & -\alpha(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g + \sum_{i=1}^{N} S_i^z / (\lambda - \varepsilon_i) & \sum_{i=1}^{N} S_i^- / (\lambda - \varepsilon_i) \\ \sum_{i=1}^{N} S_i^+ / (\lambda - \varepsilon_i) & -g - \sum_{i=1}^{N} S_i^z / (\lambda - \varepsilon_i) \end{bmatrix},$$

де $S_i^\pm = S_i^x \pm iS_i^y$, а λ називається спектральним параметром. Динаміка оператора Лакса є ізоспектральною, тому величини типу $Tr(L^n)$ зберігаються. Функція $\mu^2(\lambda) \equiv Tr(L^2)/2 = (g^2 + \sum_{k=1}^{N} \mathcal{H}_k / (\lambda - \varepsilon_k) + \sum_{k=1}^{N} S_k^2 / (\lambda - \varepsilon_k)^2)$ є генеруючою функцією інтегралів руху задачі, а також безпосередньо пов'язана з виразом, що задає алгебраїчну криву $\tilde{\mu}^2(\lambda) - P_{2N}(\lambda) = 0$, де $P_{2N}(\lambda) = \prod_k (\lambda - \varepsilon_k)^2 \mu^2(\lambda)$, яка є гіпереліптичною рімановою поверхнею роду $N-1$. Алгебраїчна інтегровність моделі передбачає існування деякої комплексифікації її тору Ліувілля $T^N \to T_{\mathbb{C}}^N$, так що $T_{\mathbb{C}}^N$ є якобіаном рімановоі поверхні, яка відповідає цій алгебраїчні кривій. Згідно із загальною теорією скінченнозонного інтегрування нелінійних інтегровних рівнянь є можливість обрати набір змінних на алгебраїчній кривій (змінних розділення). Нами було введено набір таких змінних згідно з процедурою Превіато: на відміну від стандартних змінних розділення, які вводяться як нулі раціональної функції $\gamma(\lambda)$, ми скористались перетвореною матрицею Лакса, де відповідний елемент має вигляд $c(\lambda) = (\gamma - \beta)/2 - \alpha$. Тоді узагальнені координати можуть бути введені як нулі раціональної функції $c(\lambda_i) = 0 : \sum_k (\imath S_k^y - S_k^z)/(\lambda_i - \varepsilon_k) = g$. Відповідні квазіканонічно спряжені змінні визначаються з рівняння алгебраїчної кривої $\mu_i^2 \equiv \tilde{\mu}^2(\lambda_i)$. В термінах змінних розділення можна записати всі динамічні змінні задачі (їх лінійні комбінації), зокрема, гамільтоніани моделі набувають вигляду:

$$\mathcal{H}_i = -\frac{\prod_k (\varepsilon_i - \lambda_k)}{\prod_{k\neq i} (\varepsilon_i - \varepsilon_k)} \sum_j \frac{\prod_{k\neq i} (\lambda_j - \varepsilon_k)}{\prod_{k\neq j} (\lambda_j - \lambda_k)} M_j,$$

де $M_j = \mu_j^2 - g^2 - \sum_k j_k (j_k + 1)/(\lambda_j - \varepsilon_k)^2$.

В термінах цих канонічно спряжених змінних модель було проквантовано із використанням схеми канонічного квантування: $\{\lambda_i, -\imath\mu_j\} = \delta_{ij} \to [\hat{\lambda}_i, -\imath\hat{\mu}_j] = \imath\hbar\delta_{ij}\hat{1}$, надалі $\hbar = 1$. Нами було обрано наступну реалізацію: $\hat{\lambda}_i \Psi(\{\lambda_j\}) = \lambda_i \Psi(\{\lambda_j\})$,

$\hat{\mu}_i \Psi(\{\lambda_j\}) = \dfrac{\partial}{\partial \lambda_i} \Psi(\{\lambda_j\})$, тобто картину Шредінгера. В результаті було побудовано представлення спінових операторів в термінах змінних розділення (відповідні вирази наведено в дисертаційній роботі). Крім того, було показано, що базис спінових станів у підпросторі зі старшою вагою j формується векторами вигляду:

$$\Phi^{[j]}_{j-m} = \mathcal{L}^{(\alpha)}_m (2X) \Psi^{[j]}_0 (X),$$

де $\Psi^{[j]}_0 = C_1 \prod_i e^{-X_i} X_i^{-j_i}$ – вакуумний стан, $X = \sum_i X_i = -g \sum_i (\lambda_i - \varepsilon_i)$, а $\mathcal{L}^{(\alpha)}_m (2X)$ – узагальнені поліноми Лягерра, $\alpha = -(2j+1)$. Аналогічно можна вирахувати сингулярні вектори, що є старшими векторами в інших незвідних компонентах тензорного добутку, яким є простір N-спінової системи. Було показано, що стани Бете (власні стани гамільтоніанів моделі, побудовані за допомогою анзацу Бете) мають вигляд: $\Psi(\{\eta_\alpha\}) = \prod_{\alpha=1}^{M} \left(\sum_{k=1}^{N} \dfrac{\mathcal{L}^{-(2j_k+1)}_{j_k - m_k} (2X_k)}{\eta_\alpha - \varepsilon_k} \right) \Psi^{[j]}_0$, де η_α є коренями рівнянь Бете.

У четвертому розділі розглянуто задачу взаємодії модельних дворівневих атомів з однією модою електромагнітного поля, що описується моделлю Джейнса-Каммінгса-Дікке. Її гамільтоніан в «наближенні хвилі, що обертається» має вигляд: $\mathcal{H}_{JCD} = \hbar\Omega \sum_{i=1}^{N} S_i^3 + \hbar\omega a^+ a + \hbar g \sum_{i=1}^{N} (S_i^+ a + S_i^- a^+)$, де N – кількість атомів. В дисертаційній роботі вивчалась динаміка спостережуваних цієї моделі. Відомо, що ця модель є алгебраїчно інтегровною і належить до класу моделей Годена.

Для моделі Джейнса-Каммінгса (один атом) було введено стандартні змінні розділення та проведено її інтегрування, включно з додатковим, що дозволило отримати вираз для нелінійної фази дипольного моменту атома у термінах сігма-функцій Клейна (відповідний вираз наведено в дисертаційній роботі). Проведено аналіз можливих початкових умов та встановлено фізичні режими динаміки атома, зокрема нелінійних осциляцій Рабі інверсної заселеності його рівнів та «переключення» під дією слабкого збудження (Рис. 4).

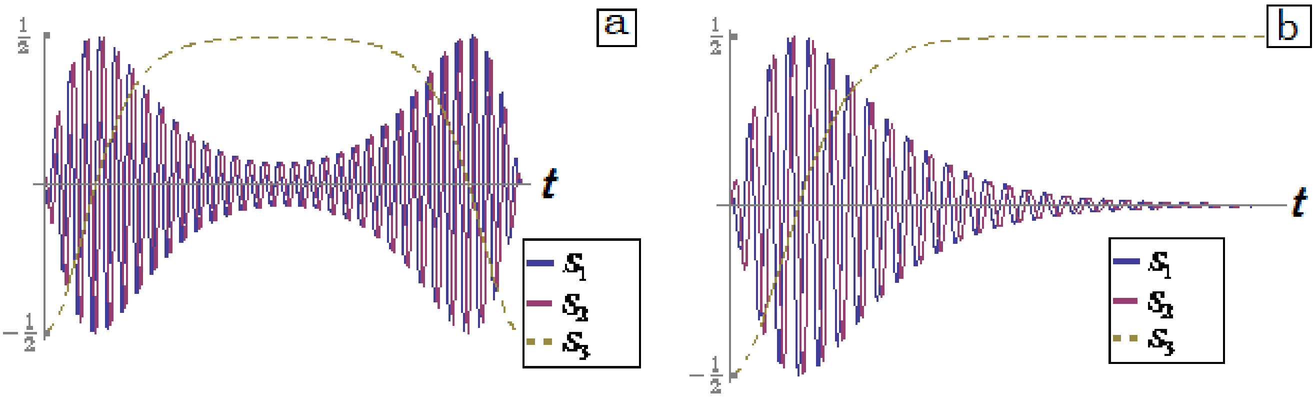

Рис. 4 Режими динаміки атома в моделі Джейнса-Каммінгса: (a) нелінійні осциляції Рабі, (b) збудження атома слабким електромагнітним полем. Зображено динаміку компонент дипольного моменту $S_{1,2}$ та інверсної заселеності атома S_3.

За аналогією до схеми, що була використана для моделі Годена у розділі 3, було введено рівноправні змінні розділення для моделі Дікке. В їхніх термінах було отримано вирази для динамічних змінних задачі та гамільтоніану, а також сформульовано динамічні рівняння (отримані вирази наведено в дисертаційній роботі). В роботі показано, що інтегрування рівнянь руху передбачає обернення розширеного відображення Абеля, оскільки задача обернення Якобі в даному випадку, крім голоморфних диференціалів, містить також один диференціал третього роду. Це можна зробити в термінах узагальнених тета-функцій. При цьому, на відміну від ситуації із стандартними змінними розділення, можна знайти відразу всі змінні без додаткових інтегрувань.

У п'ятому розділі досліджено динаміку одновимірного бозе-конденсату (квазіконденсату) у випадку різкої зміни параметра взаємодії за допомогою зовнішнього поля. В боголюбівській границі конденсат можна описати класичною польовою моделлю хвильової функції конденсату $\Psi(x,t)$, яка задовольняє нелінійному рівнянню Шредінгера (НРШ). Основним характерним параметром системи є швидкість звуку c_s, через яку виражаються одиниці довжини та часу: довжина відтворення $\xi = 1/c_s$ та кореляційний час $\tau = \xi / c_s = 1/c_s^2$. Односолітонний розв'язок НРШ (сірий солітон) має наступний вигляд: $\Psi(x,t) = \left(1 + e^{i\theta} \exp(\frac{x - x_0 - v(\theta)t}{W(\theta)})\right)\left(1 + \exp(\frac{x - x_0 - v(\theta)t}{W(\theta)})\right)^{-1}$, де $W(\theta) = \xi / \sin(\theta/2)$ є шириною солітону, $v(\theta) = -c_s \cos(\theta/2)$ – його швидкістю, x_0 – початкова позиція його дна (далі $x_0 = 0$). Спеціальний випадок, коли $\theta = \pi$, називається темним солітоном. Він відповідає найглибшому солітону, який не рухається.

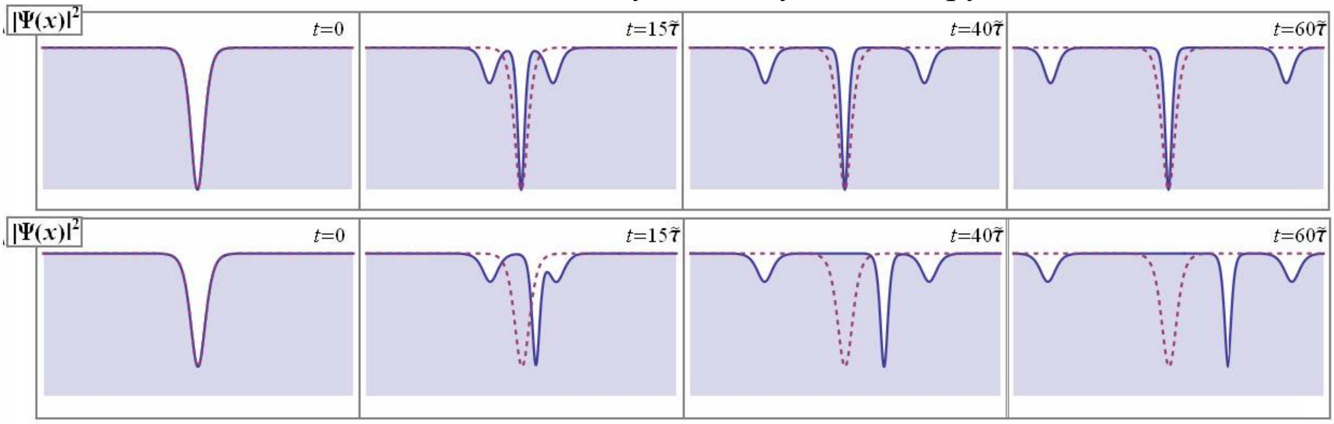

Рис. 5 Динаміка односолітонного збудження після квенчу $c_s \to 2c_s$. Початковий розподіл показано штрихованою лінією, еволюцію після квенчу – суцільною. Час вимірюється в одиницях кореляційного часу $\tilde{\tau} = \tilde{\xi} / \tilde{c}_s$ в квазіконденсаті після квенчу. Верхня панель показує розпад темного солітону, нижня панель – сірого.

Було розглянуто динаміку односолітонного початкового стану, спричинену різкою зміною параметрів системи $c_s \to \tilde{c}_s = \eta c_s, \xi \to \tilde{\xi}_s = \xi / \eta,$ яка відбувається миттєво (квенч). В роботі показано, що за умови, що відношення η кінцевого значення швидкості звуку c_s в конденсаті до початкового є цілим, початковий солітон розпадеться на $2\eta - 1$ солітонів. Тоді η солітонів рухатимуться в тому ж напрямку, що і початковий солітон, зі швидкостями $v_k^+ = -\tilde{c}_s \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta/2)/\eta^2}$, $k = 1,2,\ldots\eta,$ а решта $\eta - 1$ солітонів рухатимуться в протилежному напрямку із швидкостями $v_k^- = \tilde{c}_s \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta/2)/\eta^2}$, $k = 1,2,\ldots\eta - 1.$

У випадку розпаду темного солітону, один солітон залишається темним, тобто не рухається, тоді як решта солітонів формують $\eta - 1$ пар, які симетрично втікають від темного солітону. Еволюція після квенчу $\eta = 2$ показана на Рис. 5.

У ***висновках*** підсумовуються основні результати роботи.

ВИСНОВКИ

1. Запропоновано ідею динамічної стабілізації спінової системи керуючим полем, яке є сумою обертового поля Рабі та осцилюючого поля вздовж третьої осі. Показано, що в системі під дією такого поля спостерігається тенденція до короткочасової затримки в деякій суперпозиції станів, параметри якої визначаються параметрами поля керування.

2. Запропоновано нелінійну модифікацію поля Рабі для виходу за межі наближення «хвилі, що обертається». Показано, що задачу динаміки спіну в магнітному полі такої конфігурації можна розв'язати точно, тобто побудувати явні розв'язки для довільних початкових умов. Оскільки поле керування в цьому випадку містить ряд параметрів, досліджено різні режими динаміки системи та умови резонансу в кожному з них.

3. Отримано замкнений вираз для зсуву Блоха-Зігерта, і показано, що у граничному випадку переходу від нелінійної модифікації поля Рабі до лінійно поляризованого гармонічного поля, він співпадає з наближеним розкладом, відомим в літературі.

4. Введено рівноправні змінні розділення для моделі центрального спіну (моделі Годена). Побудовано представлення спінових станів магнетика Годена в термінах узагальнених поліномів Лягерра від цих змінних. Отримано явні вирази для векторів Бете, що залежать від змінних розділення та коренів Бете.

5. Знайдено динаміку дипольного моменту атома, зокрема, його нелінійної фази, та електромагнітного поля в моделі Джейнса-Каммінгса. Показано, що за умови фіксації тих чи інших початкових умов можна виділити різні фізичні режими динаміки системи, серед яких проаналізовано нелінійні осциляції Рабі та режим переключення.

6. Введено рівноправні змінні розділення для моделі Джейнса-Каммінгса-Дікке і показано, що в їхніх термінах можливе інтегрування цієї задачі на узагальненому якобіані, перевагою якого є одночасне знаходження всіх динамічних змінних.

7. Досліджено динаміку солітоноподібного збудження в одновимірному бозе-конденсаті у випадку різкої зміни параметру взаємодії за допомогою зовнішнього поля. Показано, що за умови, що відношення кінцевого значення швидкості звуку в конденсаті до початкового є цілим, початковий солітон розпадеться лише на солітонні збудження, кількість та параметри яких обраховано.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Голод П. І., Нелінійна динаміка дипольного моменту дворівневого атому в напівкласичній моделі Джейнса-Каммінгса / П. І. Голод, Ю.В. Безвершенко // Український фізичний журнал. – 2009. – Том 54. – P. 512-522.
2. Bezvershenko Yu. V., Dynamical stabilization of spin systems in time-dependent magnetic fields / Yu. V. Bezvershenko, P. I. Holod, A. Messina // Physica Scripta T. – 2011. – Vol. 143. – P. 014005.
3. Bezvershenko Yu. V., Resonance in a driven two-level system: analytical results without the rotating wave approximation / Yu. V. Bezvershenko, P. I. Holod // Physics Letters A. – 2011. – Vol. 375 – P.3936-3940.
4. Bezvershenko Yu. V., Extended state space of the rational sl(2) Gaudin model in terms of Laguerre polynomials / Yu. V. Bezvershenko, P. I. Holod // Ukrainian Journal of Physics. – 2013. – Vol. 58 – pp. 1084-1091.
5. Gamayun O., Fate of a gray soliton in a quenched Bose-Einstein condensate / O. Gamayun, Yu. V. Bezvershenko and V. Cheianov // Physial Review A. – 2015. – Vol. 91. – p. 031605(R).
6. Безвершенко Ю.В. Керування та динамічна стабілізація спінової системи змінними магнітними полями / Ю.В. Безвершенко, П.І. Голод // Міжнародна конференція молодих вчених та аспірантів ІЕФ-2009, 25-28 травня 2010. - Україна, Ужгород, 2009. - P. 147.
7. Bezvershenko Yu. V. Dynamical stabilization of spin systems in time-dependent magnetic fields / Yu. V. Bezvershenko, P. I. Holod // Bogolyubov Kyiv Conference "Modern problems of theoretical and mathematical physics", September 15-18, 2009. – Ukraine, Kyiv, 2009.- P. 42.
8. Bezvershenko Yu. V. Control of spin systems by soliton-type magnetic pulses / Yu. V. Bezvershenko, P. I. Holod // International Conference of Quantum Optics and Quantum Information '2010. Programe and Absract book. – Ukraine, Kyiv, 2010.- P. 82.
9. Безвершенко Ю.В. Спінова динаміка в кноїдальному магнітному полі / Ю.В. Безвершенко, П.І. Голод // 11-а Всеукраїнська школа-семінар та конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, 1-3 червня 2011 р: збірка тез. - Україна, Львів, 2011. - С. 34.
10. Bezvershenko Yu. V., Resonance in a driven two-level system: analytical results without the rotating wave approximation / Yu. V. Bezvershenko, P. I. Holod // Low temperature physics: 2nd International Conference for Young Scientists, 6-10 June 2011: conference program and abstract books . - Ukraine, Kharkiv, 2011. - P. 172.
11. Bezvershenko Yu. V., Laguerre polynomials and functional Bethe ansatz for the rational Gaudin model / Yu. V. Bezvershenko, P. I. Holod // 515. WE-Heraeus-Seminar: Algebro-geometric methods in fundamental physics, September 3-7, 2012. – Germany, Bad Honnef, 2012.
12. Bezvershenko Yu. V., Integration of Dicke model on a generalized Jacobian / Yu. V. Bezvershenko // Modern problems of theoretical physics: Young scientists conference, 23-26 October 2012: program and abstracts. - Ukraine, Kyiv, 2010. - P. 88.

АНОТАЦІЯ

Безвершенко Ю.В. Інтегровні моделі квантових систем в зовнішніх полях – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика. – Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, Київ, 2015.

Дисертація присвячена розгляду інтегровних моделей квантових систем в зовнішніх полях. Досліджено короткотермінову динамічну стабілізацію спінової системи полем, яке є суперпозицією поля задачі Рабі та слабкого осцилюючого поля. Запропоновано нелінійну модифікацію поля Рабі для виходу за межі наближення «хвилі, що обертається» в задачі динаміки модельного спіну 1/2 та сконструйовано схему побудови її точних розв'язків. Отримано умови резонансу для різних режимів та замкнений вираз для зсуву Блоха-Зігерта. Побудовано представлення спінових станів моделі Годена (моделі центрального спіну) в термінах узагальнених поліномів Лягерра від рівноправних змінних розділення. Знайдено динаміку дипольного моменту атома, зокрема, його нелінійну фазу, в моделі Джейнса-Каммінгса та введено рівноправні змінні розділення для моделі Дікке, в термінах яких можливе інтегрування на узагальненому якобіані. Досліджено динаміку солітоноподібного збудження в одновимірному бозе-конденсаті у випадку різкої зміни параметру взаємодії та передбачено його розпад лише на солітонні збудження за умови, що відношення кінцевої швидкості звуку до початкової є цілим.

<u>Ключові слова:</u> динаміка квантових систем, інтегровні моделі, модель Годена, розділення змінних.

АННОТАЦИЯ

Безвершенко Ю.В. Интегрируемые модели квантовых систем во внешних полях - На правах рукописи.

Диссертация на соискание научной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 – теоретическая физика. – Институт теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова НАН Украины, Киев, 2015.

Диссертация посвящена рассмотрению интегрируемых моделей квантовых систем во внешних полях. Исследовано кратковременную динамическую стабилизацию спиновой системы с помощью поля, которое является суперпозицией поля задачи Раби и слабого осциллирующего поля. Предложено нелинейную модификацию поля Раби для выхода за пределы приближения «вращающейся волны» в задаче динамики модельного спина 1/2 и сконструировано схему построения ее точных решений. Получено условия резонанса при разных режимах и замкнутое выражение для сдвига Блоха-Зигерта. Построено представление спиновых состояний модели Годена (модели центрального спина) в терминах обобщенных полиномов Лагерра от равноправных переменных разделения. Найдено динамику дипольного момента атома, в частности, его нелинейную фазу, в модели Джейнса-Каммингса и введено равноправные переменные разделения для модели Дикке, в терминах

которых возможно интегрирование на обобщенном якобиане. Исследовано динамику солитоноподобного возбуждения в одномерном бозе-конденсате в случае резкого изменения параметра взаимодействия и предсказано его распад исключительно на солитонные возбуждения при условии, что отношение конечной скорости звука к начальной является целым.

Ключевые слова: динамика квантовых систем, интегрируемые модели, модель Годена, разделение переменных.

ABSTRACT

Bezvershenko Yu.V. Integrable models of quantum systems in external fields – Manuscript.

Thesis for the Doctor of Philosophy degree (Candidate of science in Physics and Mathematics) in speciality 01.04.02 – theoretical physics. – Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2015.

The thesis is devoted to the investigation of integrable models of quantum systems in external fields.

The problem of model spin 1/2 driven by time-dependent magnetic fields is studied in details for two cases. Firstly, we investigated the short-term dynamical stabilization of spin system induced by field which is a superposition of Rabi field and weak oscillating field along the third axis. It was shown that in such a field configuration the third component of Bloch vector tends to stay in a superposition of states for some period of time. Secondly, we proposed nonlinear modification of Rabi field for the problem of spin-1/2 dynamics in order to go beyond the rotating wave approximation. The problem is shown to be exactly analytically solvable and we propose the scheme for constructing the solutions. The explicit solutions obtained by this scheme were checked against approximate solution in the limits when rotating wave approximation is working and against numerical solutions beyond it. In both cases we have found remarkable agreement. Also the resonance conditions for different dynamical regimes are discussed and the closed expression for Bloch-Siegert shift was obtained.

Further, we consider the generalization of the model with one-spin degree of freedom to the physical models that belong to class of Gaudin integrable models and describe interacting spins or two-level systems. The first one is the central spin model which describes separated one spin that interacts with a constant magnetic field and with a system of non-interacting spins. Using modified scheme we introduced separated variables which we call “equivalent” as they come to the Gaudin Hamiltonians and other initial dynamical variables in a symmetrical manner. After canonical quantization we built Schroedinger picture and represented spin operators in terms of separated variables. It was shown explicitly that spin states can be represented in terms of generalized Laguerre polynomials in equivalent separated variables. The expressions for Bethe states also were constructed. The second physical model of Gaudin class is Jaynes-Cummings-Dicke model. It describes system of non-interacting two-level atoms which interacts with single-mode electromagnetic field. Using standard separated variables method we investigated dynamics of atomic dipole momentum in the case of one atom (Jaynes-Cummings model). In this case additional integration is needed and

we performed it in terms of Klein sigma-functions in order to recover phase of dipole momentum. As for the Dicke model (N atoms) we introduced "equivalent" separated variables (like in central spin model). Explicit expressions for initial variables, Hamiltonians and equations of motion were obtained. We demonstrated that in these terms integration of the model presupposes inversion of the extended Abel-Jacobi map which can be done in terms of generalized theta-functions. Advantage of this approach is in the fact that all variables are found simultaneously without additional integration as for the case of standard separated variables we used in Jaynes-Cummings model.

Finally, we investigated dynamics of a repulsive 1D Bose-Einstein condensate (quasicondensate) induced by a sudden change (quench) of interaction parameter by external field. The initial state is one-soliton solution of nonlinear Schroedinger equation which is called gray soliton in case of arbitrary phase shift. The outcome of the quench is found to depend dramatically on the ratio η of the final and initial values of the speed of sound c_s. We show that in the case η is integer initial soliton splits into exactly $2\eta - 1$ solitons. Then η of these solitons are moving in the same direction as the initial soliton and $\eta - 1$ solitons moving in the opposite direction. In the case of a dark soliton decay, one soliton remains dark (not moving), while other solitons form $\eta - 1$ pairs symmetrically running away from the dark soliton. The parameters of solitons in the out-state are found explicitly.

Keywords: dynamics of quantum systems, integrable models, Gaudin model, separation of variables.

Безвершенко Юлія Василівна

Інтегровні моделі квантових систем в зовнішніх полях. (Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук.)

Зам. – 5 Формат 60 х 84/16 Обл.-вид. арк. - 0.93

Підписано до друку 18.08.2015 р. Тираж 100 прим.

Поліграфічна дільниця ІТФ ім. М.М. Боголюбова НАН України,
03680, м. Київ, вул.. Метрологічна, 14-б