Національна академія наук України
Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова

Міщенко Юрій Анатолійович

УДК 530.145, 539.1, 539.1.01, 539.12.01

Реалізація композитних квазибозонів деформованими осциляторами

01.04.02 — теоретична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2013

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі математичних методів в теоретичній фізиці Інституту теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук
Гаврилик Олександр Михайлович,
Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України, в.о. завідувача відділу математичних методів в теоретичній фізиці.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
член-кореспондент НАН України, професор
Нікітін Анатолій Глібович,
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу прикладних досліджень;

доктор фізико-математичних наук, професор
Доценко Іван Сергійович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, професор кафедри квантової теорії поля.

Захист відбудеться «___» ____________ 2013 р. о ___ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.191.01 в Інституті теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України за адресою: вул. Метрологічна, 14-б, м. Київ, 03680, Україна.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України за адресою: вул. Метрологічна, 14-б, м. Київ, 03680, Україна.

Автореферат розісланий «___» ____________ 2013 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
доктор фізико-математичних наук В.Є. Кузьмичев

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Концепція складених (композитних) бозонів чи *квазибозонів*, до яких належать частинки або квазичастинки, утворені з двох чи більше структурних елементів, є дуже важливою в сучасній квантовій теорії. Наприклад, мезони, екситони, куперони, позитроній, деякі ядра, атоми та молекули є складеними бозонами. Складені бозони не є звичайними бозонами (тому – термін "квазибозони"), оскільки комутаційні співвідношення їх операторів народження та знищення відрізняються від бозонних, тому кількісний опис відповідних систем є досить складним. Як один із методів наближеного чи ефективного опису систем таких квазибозонів можна використати реалізацію квазибозонних операторів народження, знищення та кількості частинок відповідними операторами деформованих осциляторів. Останні, як відомо, належать до квантових (деформованих) алгебр.

Відмітимо, що з відкриттям квантових груп і квантових алгебр в середині 80-х років з'явились нові можливості для опису різних систем (як правило із нелінійностями) в ядерній фізиці, квантовій теорії поля, теорії конденсованого стану, статистичній фізиці. Із квантовими алгебрами пов'язані деформовані алгебри бозонних/ферміонних операторів, різноманітні варіанти яких мають широкий спектр застосування. Квантова q-деформована бозонна алгебра у версії Аріка-Куна була використана Аванчіні та Крейном (1995) при квантовому описі систем бозе-частинок для врахування нетривіальної внутрішньої структури (і власного об'єму) цих частинок і побудови відповідної однопараметрично деформованої моделі Бозе-газу. З іншого боку, в роботі Скарфоне та Нараяна Свамі (2008) деформована квантова алгебра була використана для еквівалентного опису системи взаємодіючих бозе-частинок в термінах невзаємодіючих, але модифікованих частинок, яким відповідають деформовані комутаційні співвідношення.

Використання для реалізації квазибозонів тих чи інших деформованих осциляторів (деформованих бозонів) є дуже бажаним, оскільки воно приводить до значного спрощення відповідних обчислень, коли алгебра, що описує вихідну систему композитних частинок, зводиться до алгебри деякого деформованого осцилятора. В цьому сенсі інформацію про внутрішню структуру частинок вже несуть у собі один чи декілька параметрів деформації.

До цього часу вже були спроби описувати системи частинок із внутрішньою структурою за допомогою q-деформованих та інших деформацій алгебр/осциляторів, але залишались невідомими умови точного представлення алгебри складених частинок деформованими алгебрами, а також ступінь наближення до ідеальних бозонів при такому ефективному описі. Дисертація присвячена встановленню та явній побудові точного алгебраїчного представлення алгебри операторів народження, знищення та кількості частинок складених бозонів відповідними операторами деформованих алгебр, а також деяким їх застосуванням.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Результати, що увійшли в дисертаційну роботу, були отримані в рамках планової наукової тематики відділу матем. методів в теоретичній фізиці Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України (тема "Методи теорії симетрій і проблеми нелінійної динаміки в сучасній теорії поля та теорії елементарних частинок", 2007–2011рр., шифр 1.4.7, № держ. реєстрації 0106U007885 і тема "Нелінійні квантові осцилятори, інтегровні моделі та квантово-польові системи: симетрії і застосування", 2012–2016рр., шифр 1.4.1, № держ. реєстрації 0112U000052).

Мета і задачі дослідження. Метою дослідження є побудова всіх можливих реалізацій (представлень) алгебри операторів двочастинкових складених бозонів в термінах алгебри деформованих осциляторів чи деформованих бозонів. Виділимо наступні задачі дослідження:

- Побудувати представлення (реалізацію) композитних квазибозонів, складених із звичайних двох ферміонів чи двох бозонів, за допомогою деформованих бозонів. Отримати умови на хвильові функції компонент складеного бозона, при яких можлива реалізація, а також знайти можливі типи деформації алгебри деформованих бозонів. Розв'язати отримані умови.
- Побудувати представлення (реалізацію) композитних квазибозонів, складених із двох q-ферміонів. Отримати умови на хвильові функції компонент, на структурну функцію деформації, та розв'язати їх.
- Застосувати побудовану реалізацію до заплутаних станів складених бозонів: (i) обчислити міри заплутаності станів (ранг Шмідта, число Шмідта, ентропію заплутаності, конкурентність), виразивши їх через параметр деформації; (ii) знайти залежність ентропії заплутаності квазибозонних станів від їх енергії.
- Як застосування деформованих осциляторів до статистичних систем – знайти точні вирази для інтерсептів r-частинкових кореляційних функцій в моделі μ-Бозе газу.

Об'єктом дослідження є система квазибозонів у формалізмі вторинного квантування, а *предметом дослідження* – побудова алгебраїчного представлення чи реалізації.

Методи дослідження. В роботі використовувались:

- методи квантової механіки і статистичної фізики: складені квазибозони та їх компоненти розглянуто в рамках формалізму вторинного квантування, тобто через оператори народження/знищення/числа частинок;
- деякі факти і твердження з теорії представлень – при виведенні умов реалізації складених квазибозонів;
- методи теорії лінійних операторів і відображень – при розв'язанні умов реалізації;
- методи квантової теорії інформації – при визначенні мір заплутаності квазибозонних станів;
- елементи теорії спеціальних функцій.

Наукова новизна одержаних результатів. В роботі вперше отримано умови та набір хвильових функцій складених квазибозонів, які забезпечують алгебраїчну реалізацію двоферміонних чи двобозонних квазибозонів деформованими осциляторами. Доведено, що єдино можливим типом деформації для реалізації деформованими осциляторами є деформація із квадратичною структурною функцією. Результати узагальнюються на випадок q-деформованих складових.

Вперше вдалось пов'язати параметр деформації та міри заплутаності в квазибозонних станах і знайти для цих станів залежність ентропії заплутаності від енергії.

Отримано точні вирази (також вперше, як уточнення і узагальнення вже існуючих результатів) для інтерсептів r-частинкових кореляційних функцій в моделі деформованого μ-Бозе газу.

Практичне значення одержаних результатів. Отримані результати мають теоретичний характер. Вони можуть бути застосовані при поясненні експериментів із системами складених бозонів чи їх заплутаними станами (останнє стосується квантової теорії інформації). Реалізація складених бозонів деформованими осциляторами, можливо із деякими видозмінами, може бути застосована до опису характеристик системи екситонів, зокрема їх спектрів, а також і мезонів.

Результати щодо застосування отриманої реалізації до заплутаних станів квазибозонів (обчислення мір заплутаності тощо) можуть бути використані в експериментах в контексті квантової інформації із двочастинковими заплутаними станами (на які можна дивитися як на стани квазибозонів). Це може стосуватися, наприклад, напрямків: квантової комунікації, квантової криптографії, квантового щільного кодування, квантової телепортації, обміну заплутаністю, та ін. Залежність ентропії заплутаності та чистоти від енергії може знайти практичне значення в експериментах з виробництва, підсилення або створення заплутаності, додаванням/вилученням частинок, квантових процесів дисоціації. Модель деформованого μ-Бозе газу застосовується для опису кореляцій π-мезонів при ядерних зіткненнях.

Особистий внесок здобувача. Здобувачем отримані наступні результати, представлені в дисертації та відповідних публікаціях. В задачі з реалізації складених квазибозонів деформованими осциляторами [1, 2] умови такої реалізації отримано з аналізу дії алгебраїчних співвідношень для операторів деформованих осциляторів на станах квазибозонів. Умови реалізації розв'язано та знайдено структурну функцію деформованих осциляторів і хвильові функції квазибозонів, які забезпечують реалізацію. Також знайдені можливі визначення оператора числа деформованих осциляторів через оператори народження та знищення.

Для заплутаного стану одного квазибозона [3] обраховано міри двокомпонентної заплутаності: число Шмідта, ранг Шмідта, чистоту (purity), ентропію заплутаності та конкурентність. Проведено узагальнення визначення двокомпонентної заплутаності на випадок мультиквазибозонних станів та отримано загальні вирази для числа Шмідта і ентропії заплутаності. Для різних випадків фоківських та когерентного мультиквазибозонних станів знайдено число Шмідта та ентропію заплутаності як функції параметра деформації [3]. Окремо знайдено залежність ентропії заплутаності від енергії для вищезгаданих станів [4].

В моделі деформованого μ-Бозе газу [5] обчислено точні вирази для інтерсептів r-частинкових ($r \geqslant 2$) імпульсних кореляційних функцій.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались на семінарі відділу матем. методів в теоретичній фізиці в ІТФ ім. М.М. Боголюбова та на конференціях: The IV International Symposium "High Energy Physics, Cosmology and Gravity", October 18-23, 2010, Kyiv, Ukraine; Наукова конференція "Боголюбівські читання", 13-15 грудня 2010 р., м. Київ; Міжнародна конференція молодих вчених "Сучасні проблеми теоретичної фізики", 22-24 грудня 2010 р., м. Київ; II Міжнародна наукова конференція молодих вчених "Фізика низьких температур", 6-10 червня 2011 р., м. Харків; Міжнародна конференція молодих вчених "Сучасні проблеми теоретичної фізики", 21-23 грудня 2011 р., м. Київ; III Міжнародна наукова конференція молодих вчених "Фізика низьких температур", 14-18 травня 2012 р., м. Харків; Міжнародна конференція молодих вчених "Сучасні проблеми теоретичної фізики", 23-26 жовтня 2012 р., м. Київ; Міжнародна конференція молодих учених і аспірантів ІЕФ-2013, 20-23 травня 2013 р., м. Ужгород; XIII Всеукраїнська школа-семінар і Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, 5-7 червня 2013 р., м. Львів.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 12 роботах, із них 5 журнальних публікацій [1–5] та 7 тез доповідей, зроблених на наукових конференціях [6–12].

Структура дисертації. Робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 125 найменувань, та додатків. Обсяг дисертації становить 109 сторінок машинописного тексту із врахуванням 18 рисунків.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовується актуальність обраної теми дисертаційного дослідження, сформульовані мета і задачі та вказані методи дослідження, зазначається наукова новизна і практичне значення одержаних результатів. Крім того, вказується особистий внесок здобувача, перелічено семінари та конференції, де доповідались результати дисертації. Відмічено наукові програми та теми, в рамках яких виконувалось дисертаційне дослідження.

У **першому розділі** подано огляд літератури з тематики дисертації і коротко описано напрямки, суміжні з дисертаційною роботою: концепція складених (квази)частинок, заплутаність у застосуванні до квазибозонів, деформовані осцилятори та їх застосування.

Складеними/композитними називаються (квази)частинки, побудовані з двох чи більше компонент, наприклад, мезони, баріони, атоми та молекули, екситони, куперони тощо. Серед відомих теоретичних підходів до аналізу систем складених (квази)частинок є метод перетворення Фока-Тані [Girardeau-1979, Hadjimichef-1998], формалізм М. Комбеску [Combescot-2008] та інші. Найпростішим типом складених (квази)частинок є двочастинковий складений (квази)бозон із операторами народження та знищення

$$A_\alpha^\dagger = \sum\nolimits_{\mu\nu} \Phi_\alpha^{\mu\nu} a_\mu^\dagger b_\nu^\dagger, \quad A_\alpha = \sum\nolimits_{\mu\nu} \overline{\Phi_\alpha^{\mu\nu}} b_\nu a_\mu, \tag{1}$$

білінійними щодо операторів структурних елементів ($a_\mu^\dagger$, $b_\nu^\dagger$ та a_μ, b_ν). Зазначимо, що складені квазибозони розглядають в контексті теорії заплутаних систем (станів) або в контексті використання ефективного опису на основі деформованих осциляторів.

В **другому розділі** формулюється та розв'язується задача про реалізацію (моделювання, представлення) алгебри складених квазибозонів, утворених із двох ферміонів чи двох бозонів чи двох q-деформованих ферміонів, в термінах деформованих осциляторів (деформованих бозонів). Розгляд ведеться у формалізмі вторинного квантування – квазибозони описуємо їх операторами народження $A_\alpha^\dagger$, знищення A_α та числа частинок N_α.

Підрозділ 2.1 присвячено алгебраїчній реалізації (чи представленню) багатомодової системи складених квазибозонів, утворених із двох ферміонів чи двох бозонів, в термінах деформованих осциляторів. Як розв'язок умов реалізовності квазибозонів деформованими осциляторами знайдено хвильові функції компонент квазибозонів, а також структурні функції деформованих осциляторів, які забезпечують реалізацію квазибозонів деформованими осциляторами.

Алгебра операторів складених (квази)бозонів породжена операторами народження та знищення $A_\alpha^\dagger$, A_α (для α-ої моди; де α пробігає весь набір квантових чисел квазибозона), що задаються згідно (1), та оператором числа частинок N_α. Оператори для складових ферміонів задовольняють стандартні антикомутаційні співвідношеннями, і кожен із операторів $a_\mu^\dagger$, a_μ антикомутує з кожним із $b_\nu^\dagger$, b_ν. *Умова ортонормованості* станів в термінах матриць Φ_α має вигляд $\sum \Phi_\alpha^{\mu\nu} \overline{\Phi}_\beta^{\mu\nu} \equiv \mathrm{Tr}\, \Phi_\alpha \Phi_\beta^\dagger = \delta_{\alpha\beta}$. Комутатор операторів A_α та $A_\alpha^\dagger$ набуває вигляду $[A_\alpha, A_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta}$, де величина $\Delta_{\alpha\beta} = \sum\nolimits_{\mu\mu'} (\Phi_\beta \Phi_\alpha^\dagger)^{\mu'\mu} a_{\mu'}^\dagger a_\mu + \sum\nolimits_{\nu\nu'} (\Phi_\alpha^\dagger \Phi_\beta)^{\nu\nu'} b_{\nu'}^\dagger b_\nu$ дає міру відхилення від чисто бозонних канонічних комутаційних співвідношень.

Для набору незалежних q-осциляторів Аріка-Куна (як найбільш відомого і простого типу деформованого осцилятора), заданого співвідношеннями $a_\alpha a_\beta^\dagger - q^{\delta_{\alpha\beta}} a_\beta^\dagger a_\alpha = \delta_{\alpha\beta}$, $a_\alpha^\dagger a_\alpha = \frac{q^{N_\alpha}-1}{q-1} \equiv [N_\alpha]_q$, показано, що він не може дати реалізацію квазибозонів. Подальший аналіз проведено в більш широкому класі деформованих осциляторів загального вигляду, заданих структурною функцією $\phi(N)$.

Задача про реалізацію квазибозонів деформованими осциляторами формулюється так, щоб із A_α, $A_\alpha^\dagger$, N_α можна було працювати як з відповідними операторами $\mathcal{A}_\alpha$, $\mathcal{A}_\alpha^\dagger$, $\mathcal{N}_\alpha$ деформованих осциляторів, ігноруючи внутрішню структуру квазибозонів. Деформований осцилятор зі структурною функцією $\phi(\mathcal{N}_\alpha)$, визначеною через $\phi(\mathcal{N}_\alpha) = \mathcal{A}_\alpha^\dagger \mathcal{A}_\alpha$, задовольняє співвідношення

$$[\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\alpha^\dagger] = \phi(\mathcal{N}_\alpha+1) - \phi(\mathcal{N}_\alpha), \quad [\mathcal{N}_\alpha, \mathcal{A}_\alpha^\dagger] = \mathcal{A}_\alpha^\dagger, \quad [\mathcal{N}_\alpha, \mathcal{A}_\alpha] = -\mathcal{A}_\alpha. \tag{2}$$

Сюди слід додати вирази для комутаторів $[\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\beta^\dagger]$, $\alpha \neq \beta$, оскільки вони входять у визначення осциляторної алгебри. Дія співвідношень (2) на фоківські стани квазибозонів дозволяє знайти бажану реалізацію, а також встановити зв'язок між матрицями $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$ у визначенні операторів $A_\alpha^\dagger$ та структурною функцією $\phi(N_\alpha)$.

Умова незалежності мод разом з (2) приводить до співвідношень на матриці Φ:

$$\Phi_\beta\Phi^\dagger_\alpha\Phi_\gamma+\Phi_\gamma\Phi^\dagger_\alpha\Phi_\beta=0,\ \alpha\neq\beta;\quad \Phi_\alpha\Phi^\dagger_\alpha\Phi_\alpha=(f/2)\Phi_\alpha,\ f/2=\mathrm{Tr}(\Phi^\dagger_\alpha\Phi_\alpha)^2, \tag{3}$$

де параметр f, $f\equiv 2-\phi(2)$, має зміст параметра деформації. Розгляд першої умови в (2) на n-квазибозонних станах веде до рекурентного співвідношення

$$\phi(n+1)=\sum\nolimits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C^k_{n+1}\phi(k),\quad n\geqslant 2. \tag{4}$$

Загальний розв'язок (4) дається структурною функцією

$$\phi(n)=(1+f/2)n-(f/2)n^2. \tag{5}$$

Знайдено умови на оператор числа квазибозонів N_α, реалізований через $\mathcal{N}_\alpha$.

Отримано загальний розв'язок для матриць Φ_α серед тих $d_a\times d_b$ матриць, які задовольняють $\mathrm{Tr}(\Phi_\alpha\Phi^\dagger_\beta)=\delta_{\alpha\beta}$, а також рівняння (3). Параметр деформації f є дискретним: $f=\frac{2}{m}$, $m\in\mathbb{N}$. Множина розв'язків різна для двох випадків: при $\sum_\alpha m\leqslant\min(d_a,d_b)$ загальним розв'язком системи (3) є

$$\Phi_\alpha=U_1(d_a)\,\mathrm{diag}\left\{0,\sqrt{f/2}U_\alpha(m),0\right\}U^\dagger_2(d_b), \tag{6}$$

в іншому випадку множина розв'язків є пустою. У формулі (6) $U_1(d_a)$, $U_2(d_b)$, $U_\alpha(m)$ – унітарні матриці, а для кожної із матриць Φ_α, блок $\sqrt{f/2}U_\alpha(m)$ знаходиться на його α-ому місці, і не перетинається з відповідним блоком будь-якої іншої матриці Φ_β із $\beta\neq\alpha$. Таким чином, отримано усі можливі квазибозонні оператори, задані через (1) та (6), які реалізуються алгеброю деформованих осциляторів.

Аналогічний розгляд проведено і для квазибозонів, утворених із двох бозонів.

В *підрозділі 2.2* дано q-деформоване узагальнення моделі, розглянутої вище, на випадок квазибозонів, складених з двох q-ферміонів. Прийнято *нетривіальну* q-деформацію для складових, але інші припущення залишено такими як і вище.

Набір q-ферміонів, незалежних у ферміонному сенсі, задовольняє

$$a_\mu a^\dagger_{\mu'}+q^{\delta_{\mu\mu'}}a^\dagger_{\mu'}a_\mu=\delta_{\mu\mu'},\qquad a_\mu a_{\mu'}+a_{\mu'}a_\mu=0,\quad \mu\neq\mu', \tag{7}$$

і аналогічно для операторів b_ν, $b^\dagger_\nu$. При $0<q<1$ оператори $a^\dagger_\mu$ та $b^\dagger_\nu$ не є нільпотентними (жодного порядку): $(a^\dagger_\mu)^k\neq 0$, $(b^\dagger_\nu)^k\neq 0$, $k\geqslant 2$.

Оператори народження та знищення складених квазибозонів визначаються згідно (1) але із q-ферміонними операторами (7). Умови самоузгодженості реалізації (деформованими бозонами) залишаються такими як раніше, див. (2). Умова незалежності мод та (2) веде до співвідношень, полілінійних відносно структурних матриць Φ_α з анзацу (1), з коефіцієнтами, що залежать від q та від шуканої структурної функції деформації $\phi(n)$.

Аналіз цих умов приводить до важливої формули (що пов'язує Φ та $\phi(n)$):

$$\phi(n)=n-\left(n-\tfrac{1-(-1)^n}{2}\right)p_1+\left([n]_{-q}-\tfrac{1-(-1)^n}{2}\right)^2p_2+\tfrac{1-(-1)^n}{2}\left([n]_{-q}-1\right)p_3.$$

Тут p_1, p_2, p_3 – числові параметри, визначені елементами матриць:

$$(\Phi_\alpha\Phi^\dagger_\alpha\Phi_\alpha)^{\mu_1\nu_1}/\Phi^{\mu_1\nu_1}_\alpha=p_1,\ |\Phi^{\mu_1\nu_1}_\alpha|^2=p_2,\ (\Phi^\dagger_\alpha\Phi_\alpha)^{\nu_1\nu_1}+(\Phi_\alpha\Phi^\dagger_\alpha)^{\mu_1\mu_1}=p_3. \tag{8}$$

Подальший розгляд показує, що матриця Φ_α не може містити двох ненульових елементів а також, що $p_1=p_2=1$, $p_3=2$. Як наслідок, отримано структурну функцію деформації

$$\phi(n)=\left([n]_{-q}\right)^2. \tag{9}$$

Знайдено наступний розв'язок для Φ_α при $0 < q < 1$:

$$\Phi_\alpha^{\mu\nu} = \Phi_\alpha^{\mu_0(\alpha)\nu_0(\alpha)}\delta_{\mu\mu_0(\alpha)}\delta_{\nu\nu_0(\alpha)}, \qquad |\Phi_\alpha^{\mu_0(\alpha)\nu_0(\alpha)}| = 1. \tag{10}$$

Також проаналізовано стрибкоподібний перехід від (9) до (5) в границі $q \to 1$. Знайдено умови на оператор числа квазибозонів N_α.

В **третьому розділі** досліджується роль концепції заплутаності, важливої в квантовій теорії інформації, для класу *двочастинкових* квазибозонів, складених із двох ферміонів (двох бозонів), які задовольняють реалізацію операторами народження/знищення деформованих бозонів. Розглянуто, для різних станів квазибозонів, зв'язок мір заплутаності з параметром деформації та енергією.

В *підрозділі 3.1* встановлено прямий зв'язок таких мір заплутаності складових квазибозона як число/ранг Шмідта, чистота (purity), ентропія заплутаності та конкурентність, і параметром деформації. Міри двочастинної заплутаності обчислено також для мультиквазибозонних станів, зокрема фоківських станів та когерентного стану, і виражено їх через параметр деформації.

Двочастинковий квазибозон розглянуто як заплутану систему стосовно його компонент. Стан квазибозона в α-й моді дається загальним виразом

$$|\Psi_\alpha\rangle = \sum\nolimits_{\mu\nu} \Phi_\alpha^{\mu\nu}|a_\mu\rangle \otimes |b_\nu\rangle, \quad |a_\mu\rangle \equiv a_\mu^\dagger|0\rangle, \; |b_\nu\rangle \equiv b_\nu^\dagger|0\rangle \tag{11}$$

з операторами народження $a_\mu^\dagger$, $b_\nu^\dagger$ складових та комплексною $d_a \times d_b$ матрицею $\|\Phi_\alpha^{\mu\nu}\|$. Для таких станів розклад Шмідта набуває вигляду:

$$|\Psi_\alpha\rangle = \sum\nolimits_{k=1}^{\min(d_a,d_b)} \lambda_k^\alpha |v_k^\alpha\rangle \otimes |w_k^\alpha\rangle, \tag{12}$$

де $\sum_k(\lambda_k^\alpha)^2 = 1$. Завдяки факту реалізації квазибозонів деформованими осциляторами знайдено коефіцієнти Шмідта $\lambda_k^\alpha = \lambda = \sqrt{f/2} = 1/\sqrt{m}$ та стани $|v_k^\alpha\rangle = U_1^{\mu k}|a_\mu\rangle$, $|w_k^\alpha\rangle = \tilde{U}_2^{k\nu}|b_\nu\rangle$. Саме параметр деформації m ($f = 2/m$) визначає коефіцієнти розкладу Шмідта λ_k^α. Показано, що ступінь заплутаності характеризується такими величинами:

- Ранг Шмідта – 'число ненульових коефіцієнтів Шмідта λ_k^α' $= m$;
- Число Шмідта (та чистота P підсистеми): $K = \left[\sum_k(\lambda_k^\alpha)^4\right]^{-1} = 1/P = m$;
- Ентропія заплутаності: $S_{\text{entang}} = -\sum_k(\lambda_k^\alpha)^2\ln(\lambda_k^\alpha)^2 = \ln(m)$;
- Конкурентність: $C = \left[\frac{m}{m-1}\Big(1 - \sum_k(\lambda_k^\alpha)^4\Big)\right]^{1/2} = 1$.

Як видно, сильно заплутаний квазибозон наближається до звичайного бозона для достатньо малих квантових чисел N, тобто $\phi(N) \approx \phi_{boson}(N) \equiv N$, $N \ll m$, $m \gg 1$.

На основі розкладу Шмідта вираз для оператора народження квазибозона та для відхилення (від бозона) $\Delta_{\alpha\alpha}$ можна дати в термінах v_k^α, w_k^α замість a_μ, b_ν:

$$A_\alpha^\dagger = \sum\nolimits_{k=1}^{m} \lambda_k^\alpha v_k^{\alpha\dagger} w_k^{\alpha\dagger}, \; \Delta_{\alpha\alpha} = \sum\nolimits_{k=1}^{m} (\lambda_k^\alpha)^2 (v_k^{\alpha\dagger} v_k^\alpha + w_k^{\alpha\dagger} w_k^\alpha), \; v_k^{\alpha\dagger} \equiv U_1^{\mu k} a_\mu^\dagger, \; w_k^{\alpha\dagger} \equiv \tilde{U}_2^{k\nu} b_\nu^\dagger.$$

Деякі з тверджень сформульовано також у формалізмі матриці густини.

Міри заплутаності узагальнено на випадок мультиквазибозонних станів, в т.ч. когерентних. Показано як ввести (природнім чином) двочастинну заплутаність для *мультиквазибозонних* станів, використовуючи тензорні добутки елементарних підсистем. Загальний вигляд мультиквазибозонного стану такий:

$$|\Psi\rangle = \sum\nolimits_{\{m_\gamma\}} \Psi\big(\{m_\gamma\}\big)(A^\dagger_{\gamma_1})^{m_{\gamma_1}} \cdot ... \cdot (A^\dagger_{\gamma_D})^{m_{\gamma_D}}|0\rangle \ , \tag{13}$$

де $\{m_\gamma\}$ – це набір чисел заповнення всіх квазибозонних мод $\gamma \in \{\gamma_1,...,\gamma_D\}$; $\Psi\big(\{m_\gamma\}\big) \equiv \Psi(m_{\gamma_1}, ..., m_{\gamma_D})$ – хвильова функція стану у представленні вторинного квантування. Сумування в (13) пробігає всі можливі набори чисел заповнення $\{m_\gamma\}$ для квазибозонів. Стани (13) двочастинно заплутані по відношенню до a- і b-підсистем, які містять ферміони типів a та b відповідно, і записуються як розширений розклад Шмідта з коефіцієнтами $\Lambda(\{m_\gamma\}) = \Psi\big(\{m_\gamma\}\big)\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{D} m_{\gamma_j}} \prod_{j=1}^{D} m_{\gamma_j}!$. Звідси обчислюємо характеристики двочастинної заплутаності (C_m^n – біноміальний коефіцієнт):

- число Шмідта $K = \left[\sum_{\{m_\gamma\}} \big|\Lambda(\{m_\gamma\})\big|^4 \prod_{j=1}^{D} C_m^{m_{\gamma_j}}\right]^{-1}$;
- ентропія заплутаності $S_{\rm entang} = -\sum_{\{m_\gamma\}} |\Lambda(\{m_\gamma\})|^2 \ln|\Lambda(\{m_\gamma\})|^2 \prod_{j=1}^{D} C_m^{m_{\gamma_j}}$.

Зокрема, знайдені характеристики заплутаності для мультиквазибозонного фоківського стану $[\phi(m_\alpha)!]^{-1/2}\ (A^\dagger_\alpha)^{m_\alpha}|0\rangle$ (фіксована мода α) мають вигляд:

$$K = C_m^{m_\alpha}; \quad S_{\rm entang}| = \ln C_m^{m_\alpha}. \tag{14}$$

Аналогічно розглянуто n-квазибозонний фоківський стан із квазибозонами з різних мод: $|\Psi\rangle = A^\dagger_{\gamma_1} \cdot ... \cdot A^\dagger_{\gamma_n}|0\rangle$, $\gamma_i \neq \gamma_j$, $i \neq j$. Для нього отримуємо

$$K = m^n; \quad S_{\rm entang} = n \ln(m). \tag{15}$$

Для фоківських станів ступінь заплутаності тим більше, чим більше значення m.

Знайдено також міри заплутаності для *квазибозонного когерентного стану* $|\Psi_\alpha\rangle = \tilde{C}(\mathcal{A}; m)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{A}^n}{\phi(n)!}(A^\dagger_\alpha)^n|0\rangle$, де $A_\alpha|\Psi_\alpha\rangle = \mathcal{A}|\Psi_\alpha\rangle$, який визначений лише тоді, коли квазибозон складається із двох бозонів, як, наприклад, біфотон:

$$K = \tilde{C}^{-4}/{}_0F_3(m,m,m;|\mathcal{A}|^4 m^2) = \mathrm{e}^{2|\mathcal{A}|^2}\left[1 - 2|\mathcal{A}|^4/m + ...\right], \tag{16}$$

де ${}_0F_3$ – гіпергеометрична функція, а $S_{\rm entang}(\mathcal{A})$ представлено у вигляді ряду.

В *підрозділі 3.2* аналізується взаємозв'язок між енергією системи (стану) і ентропією заплутаності $S_{\rm entang}$ при тих же умовах, що і в підрозділі 3.1: для системи квазибозонів, які можна реалізувати в термінах (незалежних мод) деформованих осциляторів з квадратичною структурною функцією (5). Відповідний аналіз проведено для прикладів станів, розглянутих вище. При цьому ефективний гамільтоніан (деформованого осцилятора) взято у вигляді

$$H = \sum\nolimits_\alpha \hbar\omega_\alpha\big(\varphi(N_\alpha) + \varphi(N_\alpha + 1)\big)/2. \tag{17}$$

Отримані залежності $S_{\rm entang}(E)$ ентропії заплутаності від енергії зображено графічно для різних значень параметра деформації f.

Для ентропії заплутаності компонент *одного* квазибозона знайдено

$$S_{\rm entang} = -\ln\left(3/2 - E/\hbar\omega\right),\ 1/2 \leqslant E/\hbar\omega \leqslant 3/2.$$

Відповідний графік дано на Рис.1. Ентропія $S_{\rm entang}$ прямує до нескінченності при енергії $E = \frac{3}{2}\hbar\omega$, що означає максимальну заплутаність між складовими. При цьому складові в квазибозоні стають найбільш сильно зв'язаними, а квазибозон найбільш близький до звичайного бозона. Напроти, для $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$ ентропія заплутаності $S_{\text{entang}} = 0$, тобто складові незаплутані. З фізичної точки зору в цьому випадку складові фактично є незв'язаними.

У випадку *мультиквазибозонних* станів загальна енергія системи (при умові незалежності мод) виражається згідно $E = \sum_\alpha \hbar\omega_\alpha[n_\alpha + 1/2 - (f/2)n_\alpha^2]$. Знайдено ентропію заплутаності як функцію енергії для фоківського стану n_α квазибозонів, $[\phi(n_\alpha)!]^{-1/2}(A_\alpha^\dagger)^{n_\alpha}|0\rangle$, у вигляді двогілкової залежності (Рис. 2)

$$S^{\pm}_{\text{entang}}(E_\alpha) = \ln\Big(C^{2/f}_{[1\pm\sqrt{1+f-2fE_\alpha/\hbar\omega_\alpha}\,]/(2f)}\Big), \tag{18}$$

де $\frac{E}{\hbar\omega} \leqslant \frac{1+f}{2f}$ для S^{+}_{entang}- та S^{-}_{entang}-гілок, $\frac{E}{\hbar\omega} \geqslant \frac{1}{2}$ для S^{-}_{entang}-гілки.

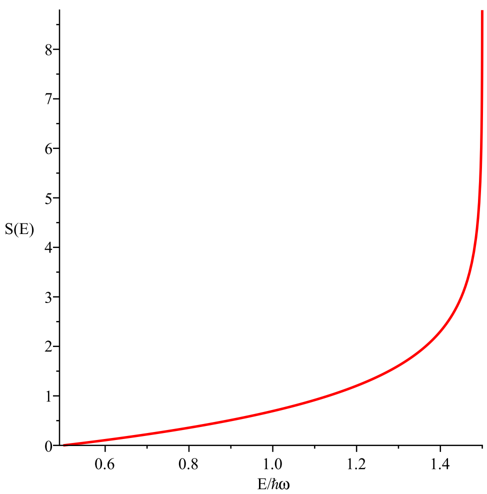

Рис. 1. Залежність ентропії заплутаності S_{entang} від енергії E_α для одного квазибозона, складеного з ферміонних компонент.

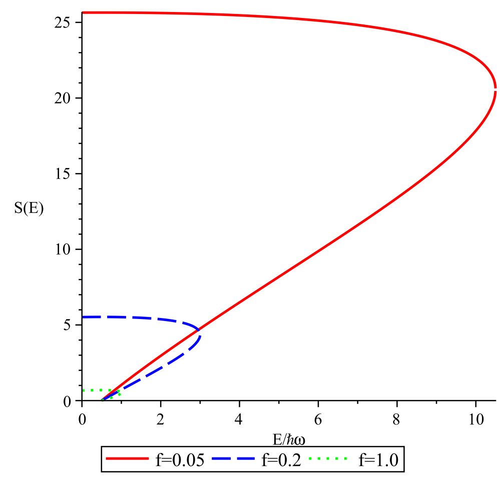

Рис. 2. Залежність ентропії заплутаності S_{entang} від енергії E_α для одномодової мультиквазибозонної системи (ферміонні складові).

Розглянуто також стани з одним квазибозоном на моду. Енергія системи залежить від форми дисперсії ω_{γ_j} як функції 'квазиімпульса' γ_j. Беручи її в лінійному (відносно γ_j) вигляді, $\omega_{\gamma_j} = \omega_0 + (\gamma_j - \gamma_1)\frac{\partial\omega}{\partial\gamma}$, отримано (див. Рис. 3, $\omega = |\omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega|$)

$$S_{\text{entang}}(E) = |\omega/\Delta\omega| \cdot \big[-\text{sign}\,(\omega/\Delta\omega) + \sqrt{1 + 4(3-f)^{-1}E/(\hbar\omega^2/\Delta\omega)}\,\big]\ln(2/f). \tag{19}$$

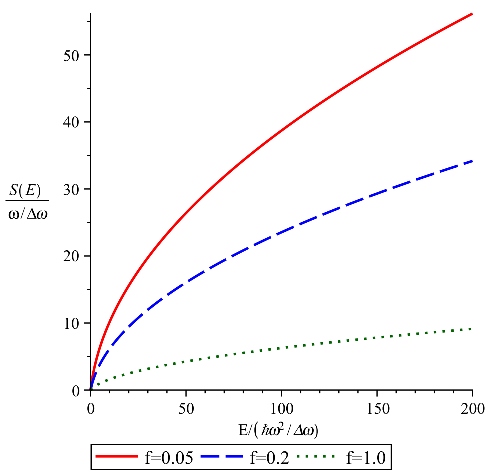

Рис. 3. Залежність ентропії заплутаності S_{entang} від енергії E для стану з одним квазибозоном на моду: ферміонні компоненти.

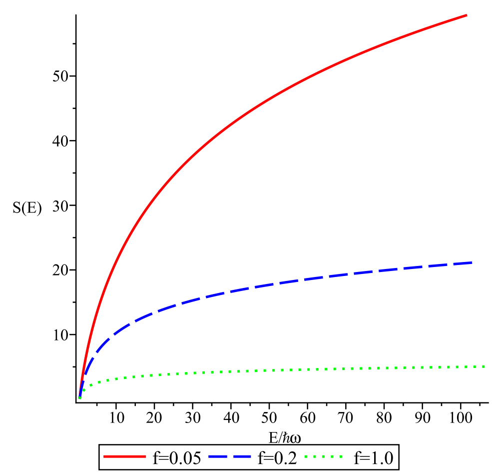

Рис. 4. Залежність ентропії заплутаності S_{entang} від енергії E_α для когерентного стану квазибозонів.

Нарешті, розглянуто когерентний стан системи квазибозонів в α-ій моді. Для середньої енергії системи в цьому стані маємо (позначимо $2\sqrt{m}|\mathcal{A}| \equiv z$):

$$E_\alpha(\mathcal{A}) = \hbar\omega_\alpha(4m)^{-1}\big(z^2 + 2 + z[I_m(z) + I_{m-2}(z)]/I_{m-1}(z)\big).$$

Таким чином маємо залежність $S_{\rm entang}$ від E_α в параметричній формі (див. Рис. 4).

В *підрозділі 3.3* розглянуто залежність чистоти (purity) від енергії.

Для *заплутаної системи, що складається з одного квазибозона*, отримано залежність чистоти від енергії:

$$P = f/2 = (3/2 - E/(\hbar\omega))\,,\ 1/2 \leqslant E/(\hbar\omega) \leqslant 3/2. \tag{20}$$

Аналогічно, для чистоти у *випадку одномодових мультиквазибозонних фоківських станів* на основі [3] отримано

$$P^{\pm}(E_\alpha) = \Big(C_{2/f}^{[1\pm\sqrt{1+f-2fE_\alpha/\hbar\omega_\alpha}\,]/(2f)}\Big)^{-1},$$

див. Рис. 5. Відмітимо особливу форму кривих на Рис. 5 (немонотонність, наявність двох ділянок монотонності).

Також, для *мультиквазибозонних станів із одним квазибозоном на моду*, використовуючи вираз для чистоти, порахований в [3], отримано

$$P(E) = \exp(-S_{\rm entang}(E)).$$

Аналогічний розгляд проведено і для квазибозонів, утворених із двох бозонів.

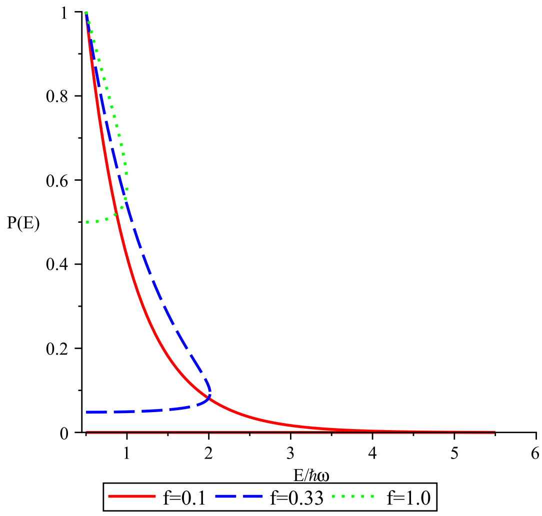

Рис. 5. Залежність чистоти P, від енергії E_α для одномодової мультиквазибозонної системи: випадок ферміонних компонент.

В **четвертому розділі** розглянуто деформовану модель μ-Бозе газу, запропоновану в роботі О. Гаврилика та А. Ребеш (2011), і пов'язану з т.зв. μ-осцилятором Янусіса. В дисертації для інтерсептів r-го порядку в рамках моделі μ-Бозе газу виведено точні аналітичні формули для загального випадку r-частинкового кореляційного інтерсепту. Ці вирази представлено в термінах спеціальної функції Лерха, а деякі з них зображені графічно, в т.ч. для $r = 2,\ 3$.

В *підрозділі 4.1* дано вивід точних виразів для інтерсептів кореляційних функцій в моделі μ-Бозе газу. Визначальні співвідношення в термінах операторів народження/знищення $a^\dagger_{\mathbf{k}}$, $a_{\mathbf{k}}$, та числа частинок $N_{\mathbf{k}}$ для системи незалежних деформованих осциляторів (деформованих бозонів) зі структурною функцією $\phi(N)$, які описують деформований Бозе-газ, мають вигляд

$$a^\dagger_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}} = \phi(N_{\mathbf{k}}),\quad [a_{\mathbf{k}}, a^\dagger_{\mathbf{k}'}] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\big(\phi(N_{\mathbf{k}}+1) - \phi(N_{\mathbf{k}})\big),\quad [N_{\mathbf{k}}, a^\dagger_{\mathbf{k}'}] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}a^\dagger_{\mathbf{k}}.$$

Аналогічно до недеформованого випадку [Wiedemann, 1999] інтерсепти кореляційної функції r-го порядку при імпульсі $\mathbf{k}$ визначені згідно

$$\lambda^{(r)}(\mathbf{k}) = \langle (a^\dagger_{\mathbf{k}})^r (a_{\mathbf{k}})^r\rangle / \langle a^\dagger_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}\rangle^r - 1. \tag{21}$$

Тут $\langle F\rangle = {\rm Tr}\, F\exp(-\beta H)/\,{\rm Tr}\exp(-\beta H)$, де $\beta = (k_B T)^{-1}$, k_B – стала Больцмана.

Оскільки ми розглядаємо μ-деформований аналог моделі Бозе газу, для $\phi(N)$ беремо структурну функцію μ-осцилятора: $\phi_\mu(N) \equiv [N]_\mu = N/(1+\mu N)$, $\mu > 0$. Гамільтоніан взято лінійним по $N_{\mathbf{k}}$ з ізотропним енергетичним спектром:

$$H=\sum_{\mathbf{k}}\hbar\omega_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}},\quad \omega(\mathbf{k})=\omega(|\mathbf{k}|). \tag{22}$$

В результаті отримано вираз для температурного середнього $\langle a_k^\dagger a_k\rangle$,

$$\langle a_k^\dagger a_k\rangle=\mu^{-1}-\mu^{-2}(1-e^{-\beta\hbar\omega})\Phi(e^{-\beta\hbar\omega},1,\mu^{-1}),\ \mu>0;\quad \langle a_k^\dagger a_k\rangle|_{\mu=0}=(e^{\beta\hbar\omega}-1)^{-1},$$

і середніх порядку r (деформов. аналоги r-частинкових імпульсних розподілів)

$$\langle(a_k^\dagger)^r(a_k)^r\rangle=1+\mu^{-1}(1-e^{-\beta\hbar\omega})\sum_{l=0}^{r-1}A_l^{(r)}(\mu)\Phi(e^{-\beta\hbar\omega},1,\mu^{-1}-l),\quad r\geqslant 2, \tag{23}$$

де Φ – спеціальна функція Лерха (Lerch transcendent), $\Phi(z,1,v)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}z^n/(n+v)$, а коефіцієнти $A_l^{(r)}(\mu)$ задовольняють рекурентні співвідношення:

$$A_l^{(r+1)}(\mu)=A_l^{(r)}(\mu)\left(1+[\mu(r-l)]^{-1}\right),\ l=\overline{0,r-1};\ A_r^{(r+1)}(\mu)=-1-\sum_{l=0}^{r-1}A_l^{(r)}(\mu)/[\mu(r-l)].$$

Ці співвідношення дозволяють знайти усі коефіцієнти $A_l^{(r)}$. Зокрема, $A_0^{(1)}(\mu)=-1$, $A_1^{(2)}(\mu)=-1+\frac{1}{\mu}$, $A_0^{(3)}(\mu)=-1-\frac{3}{2\mu}-\frac{1}{2\mu^2}$, $A_1^{(3)}(\mu)=-1+\frac{1}{\mu^2}$, $A_2^{(3)}(\mu)=-1+\frac{3}{2\mu}-\frac{1}{2\mu^2}$. Недеформований ($\mu=0$) випадок для $\langle(a_k^\dagger)^r(a_k)^r\rangle$, див (23), дає

$$\langle(a_k^\dagger)^r(a_k)^r\rangle|_{\mu=0}=r!/(e^{\beta\hbar\omega}-1)^r. \tag{24}$$

Для інтерсепта $\lambda_\mu^{(r)}(k)$ кореляційної функції r-го порядку, $r=2,3,...$, отримано

$$\lambda_\mu^{(r)}(k)=\frac{1+\frac{1}{\mu}(1-e^{-\beta\hbar\omega})\sum_{l=0}^{r-1}A_l^{(r)}(\mu)\Phi(e^{-\beta\hbar\omega},1,\frac{1}{\mu}-l)}{\left(1+\frac{1}{\mu}(1-e^{-\beta\hbar\omega})A_0^{(1)}(\mu)\Phi(e^{-\beta\hbar\omega},1,\frac{1}{\mu})\right)^{-r}}-1,\quad \mu>0, \tag{25}$$

Із формул (21), (24), у границі $\mu\to 0$ (коли деформація зникає) отримуємо $\lambda_\mu^{(r)}(k)|_{\mu=0}=r!-1$ (як і має бути). Отримана формула (25) представляє *точний загальний* вираз для інтерсептів, що розглядаються, причому вона охоплює усі порядки $r\geqslant 2$.

В *підрозділі 4.2* розглянуто часткові випадки $r=2$ та $r=3$ та зроблено порівняння з результатами інших моделей деформованого Бозе-газу. Для цих двох випадків $r=2$ та 3 інтерсепти $\lambda_\mu^{(2)}$ та $\lambda_\mu^{(3)}$ $(0<\mu<\frac{1}{2})$ отримано у вигляді:

$$\lambda_\mu^{(2)}=\frac{(1-z)^{-1}-(\mu^{-1}+\mu^{-2})\Phi(z,1,\mu^{-1})-(\mu^{-1}-\mu^{-2})\Phi(z,1,\mu^{-1}-1)}{(1-z)\big((1-z)^{-1}-\mu^{-1}\Phi(z,1,\mu^{-1})\big)^2}-1,\qquad z=e^{-\beta\hbar\omega},$$

$$\lambda_\mu^{(3)}=\frac{\mu(1-z)^{-1}+A_0^{(3)}(\mu)\Phi(z,1,\mu^{-1})+A_1^{(3)}(\mu)\Phi(z,1,\mu^{-1}-1)+A_2^{(3)}(\mu)\Phi(z,1,\mu^{-1}-2)}{\mu^{-2}(1-z)^2\big(\mu(1-z)^{-1}-\Phi(z,1,\mu^{-1})\big)^3}-1.$$

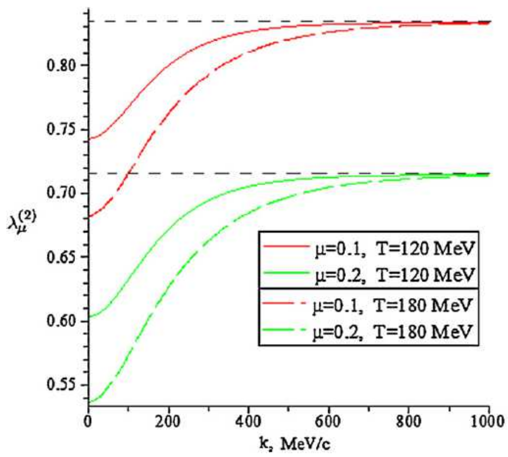

Рис. 6. Залежність інтерсепта $\lambda_\mu^{(2)}(k)$ від імпульсу k для параметра деформації $\mu=0.1,\ 0.2$ та температур $T=120,\ 180\,MeV$.

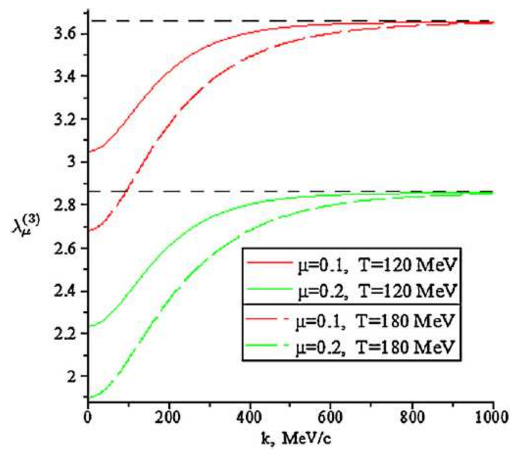

Рис. 7. Залежність інтерсепта $\lambda_\mu^{(3)}(k)$ від імпульсу k для параметра деформації $\mu=0.1,\ 0.2$ та температур $T=120,\ 180\,MeV$.

В застосуванні коли деформовані бозони (що відповідають μ-Бозе газу) використовуються для опису кореляцій релятивістських бозе-частинок, енергія задається формулою $\hbar\omega_k = \sqrt{m^2 + k^2}$. Залежність величин $\lambda_\mu^{(2)}(k,T)$, $\lambda_\mu^{(3)}(k,T)$ від імпульса $k = |\mathbf{k}|$ для значень $\mu = 0.1$, 0.2 параметра деформації та температур $T = 120$, $180\,MeV$ наведена на Рис. 6, 7. Вивчена поведінка відповідних кривих зі зміною параметра деформації μ та температури. Також порівняно кореляційні інтерсепти і їх асимптотики, вказані вище, з відповідними величинами, знайденими раніше (наближено) в рамках моделі μ-Бозе газу та моделі p,q-Бозе газу.

ВИСНОВКИ

В дисертації побудовано точну алгебраїчну реалізацію складених (композитних) квазибозонів, які утворені з двох бозонів чи двох ферміонів, чи навіть двох q-ферміонів, в термінах деформованих осциляторів. Отримана реалізація дозволяє працювати з операторами народження, знищення та числа квазибозонів як з відповідними операторами деформованих осциляторів. Розглянуто застосування отриманої реалізації до знаходження мір заплутаності квазибозонних станів та інші застосування. Більш детально, отримано наступні результати:

- Для двоферміонних чи двобозонних складених квазибозонів доведено існування і знайдено явний вигляд їх реалізації деформованими осциляторами (із квадратичною структурною функцією). Отримано також коефіцієнтні матриці, через які виражено стани квазибозонів в цій реалізації.
- Дано узагальнення такої реалізації на випадок квазибозонів, утворених із двох q-ферміонів. При $q \neq 1$ квазибозони реалізуються деформованими осциляторами із структурною функцією деформації, що є добутком структурних функцій (q-деформованих) компонент. Квазибозонні стани при цьому також відповідним чином факторизовані.
- Обчислено основні кількісні характеристики двочастинної (bipartite) заплутаності: ранг Шмідта, число Шмідта, ентропію заплутаності і чистоту (purity), – для заплутаних станів квазибозонів, реалізованих деформованими осциляторами.
- Отримано явний вигляд залежності ентропії, а також і чистоти (purity), двочастинної заплутаності від енергії для одноквазибозонних, когерентних та мультиквазибозонних станів квазибозонів.
- У застосуванні деформованих осциляторів до моделі деформованого μ-Бозе газу знайдено точні вирази для інтерсептів r-частинкових кореляційних функцій. Проведено порівняння отриманих виразів та їх асимптотик з відомими раніше результатами для μ-Бозе газу та pq-Бозе газу.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Gavrilik A.M. Two-fermion composite quasibosons and deformed oscillators / A.M. Gavrilik, I.I. Kachurik, Yu.A. Mishchenko// Ukr. J. Phys. — 2011. —

Vol. 56. — P. 948-954.

2. Gavrilik A.M. Quasibosons composed of two q-fermions: realization by deformed oscillators / A.M. Gavrilik, I.I. Kachurik, Yu.A. Mishchenko// J. Phys. A: Math. Theor. — 2011. — Vol. 44. — P. 475303.
3. Gavrilik A.M. Entanglement in composite bosons realized by deformed oscillators / A.M. Gavrilik, Yu.A. Mishchenko// Phys. Lett. A. — 2012. — Vol.376, №19. — Pp. 1596-1600.
4. Gavrilik A.M. Energy dependence of the entanglement entropy of composite boson (quasiboson) systems / A.M. Gavrilik, Yu.A. Mishchenko// J. Phys. A: Math. Theor. — 2013. — Vol. 46, №14. — P. 145301.
5. Gavrilik A.M. Exact expressions for the intercepts of r-particle momentum correlation functions in μ-Bose gas model / A.M. Gavrilik, Yu.A. Mishchenko// Phys. Lett. A. — 2012. — Vol. 376, №36. — Pp. 2484-2489.
6. Гаврилик О.М. Квазібозони та деформовані осцилятори / О.М. Гаврилик, Ю.А. Міщенко// Боголюбівські читання, присвячені 45 річчю ІТФ ім. М.М. Боголюбова, 13-15 грудня 2010 р, м. Київ: Тези доповідей – Україна, м. Київ, 2010. — с. 19.
7. Mishchenko Yu.A. Composite Bose particles as deformed bosons / Yu.A. Mishchenko, A.M. Gavrilik// Modern Problems of Theoretical Physics: Young Scientists Conference, 22-24 December 2010: Program and Abstracts. – Ukraine, Kyiv, 2010. — P. 19.
8. Mishchenko Yu.A. Composite Bose-type particles as deformed bosons / Yu.A. Mishchenko, A.M. Gavrilik// Low Temperature Physics: International Conference for Young Scientists, 6-10 June 2011: Conference program and Abstract book. – Ukraine, Kharkiv, 2011. — P. 174.
9. Mishchenko Yu.A. Entanglement in composite bosons realized by deformed oscillators / Yu.A. Mishchenko, A.M. Gavrilik// Modern Problems of Theoretical Physics: III Young Scientists Conference, 21-23 December 2011: Program and Abstracts. — Ukraine, Kyiv, 2011. — P. 25.
10. Mishchenko Yu.A. Entanglement in composite bosons realized by deformed oscillators / Yu.A. Mishchenko, A.M. Gavrilik// Low Temperature Physics: International Conference for Young Scientists, 14-18 May 2012: Conference program and Abstract book. – Ukraine, Kharkiv, 2012. — P. 202.
11. Mishchenko Yu.A. Exact expressions for the intercepts of r-particle momentum correlation functions in μ-Bose gas model / Yu.A. Mishchenko, A.M. Gavrilik // Modern Problems of Theoretical Physics: IV Young Scientists Conference, 23-26 October 2012: Program and Abstracts. – Ukraine, Kyiv, 2012. — P. 43.
12. Mishchenko Yu.A. Dependence of the entanglement entropy of composite bosons (quasibosons) systems on their energy / Yu.A. Mishchenko, A.M. Gavrilik // Modern Problems of Theoretical Physics: IV Young Scientists Conference, 23-26 October 2012: Program and Abstracts. — Ukraine, Kyiv, 2012. — P. 87.

АНОТАЦІЯ

Міщенко Ю. А. Реалізація композитних квазибозонів деформованими осциляторами. — На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 — теоретична фізика. — Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України, Київ, 2013.

В дисертації досліджується реалізація алгебри операторів складених квазибозонів операторами деформованих осциляторів, її побудова і можливі застосування. Вивчено випадки квазибозонів, що складаються з двох ферміонів, двох бозонів, двох q-ферміонів; знайдено структурну функцію деформації осциляторів для такої реалізації і квазибозонні стани в цьому підході.

Як застосування, отримано основні характеристики двочастинної (bipartite) заплутаності різнотипних квазибозонних станів – ранг/число Шмідта, ентропію заплутаності, чистоту (purity). Усіх їх виражено через параметр деформації. Знайдено явну залежність ентропії заплутаності та чистоти від енергії для одно- і мульти-, а також когерентних квазибозонних станів. Наведено низку графіків.

В моделі μ-Бозе газу, пов'язаній з т.зв. μ-деформованим осцилятором, отримано точні вирази для інтерсептів r-частинкових імпульсних кореляційних функцій.

<u>Ключові слова</u>: складені (квази)бозони, деформовані осцилятори, структурна функція і параметр деформації, заплутаність, ентропія заплутаності, μ-деформація Бозе газу, інтерсепти кореляційних функцій.

АННОТАЦИЯ

Мищенко Ю. А. Реализация составных квазибозонов деформированными осцилляторами. — На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 — теоретическая физика. — Институт теоретической физики НАН Украины, Киев, 2013.

В диссертации исследуется реализация алгебры операторов составных квазибозонов операторами деформированных осцилляторов, ее построение и возможные применения. Изучены случаи квазибозонов, состоящих из двух фермионов, двух бозонов, двух q-фермионов; найдена структурная функция деформации осцилляторов для такой реализации и квазибозонные состояния в этом подходе.

Как применение, получены основные характеристики двухчастичной (bipartite) запутанности разных квазибозонных состояний – ранг/число Шмидта, энтропия запутанности, чистота (purity). Все они выражены через параметр деформации. Найдена явно зависимость энтропии запутанности и чистоты от энергии для одно-, мульти- и когерентных квазибозонных состояний. Приведен ряд графиков.

В модели μ-Бозе газа, связанной с т. н. μ-осциллятором, получены точные выражения для интерсептов r-частичных импульсных корреляционных функций.

<u>Ключевые слова</u>: составные (квази)бозоны, деформированные осцилляторы, структурная функция и параметр деформации, запутанность, энтропия запутанности, μ-деформация Бозе газа, интерсепты корреляционных функций.

ABSTRACT

Mishchenko Yu. A. Realization of composite quasibosons by deformed oscillators. — Manuscript.

Thesis for the Doctor of Philosophy degree (Candidate of science in Physics and Mathematics) in speciality 01.04.02 — theoretical physics. — Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2013.

The thesis is devoted to the investigation of the realization (representation, modelling) of composite (quasi)boson operators algebra by the operators of deformed oscillators: this includes both the detailed construction of realization, and also its possible applications. Composite bosons, also called quasibosons (e.g. mesons, excitons, cooperons, etc), occur in various physical situations. Quasibosons principally differ from usual bosons since their creation and annihilation operators obey nonstandard commutation relations, even in the case of "fermion+fermion" composites. The realization of the operator algebra of quasibosons composed of two fermions or two bosons, or two q-fermions (q-deformed fermions) is performed using the respective operators of deformed oscillators. It should be noted that the latter are widely studied objects. It is important that the obtained realization allows us to treat the creation, annihilation operators along with the number operator for composite quasibosons as the corresponding operators of deformed oscillators. Due to such a possibility, quasibosons can be effectively treated as particles of nonstandard statistics (namely deformed bosons). The complete set of restrictions on quasiboson creation/annihilation operators and on the deformed oscillator (deformed boson) algebra is obtained. Their resolving proves the uniqueness of the family of deformations and gives explicitly the deformation structure function characterizing deformed oscillator which provides the desired realization. Besides, as the solution of the above mentioned conditions, all possible quasiboson states appearing in the framework of the realization are derived. In the case of two fermions or two bosons taken as constituents, the realization is achieved when the deformation structure function is nothing but quadratic polynomial in the number operator which involves discrete valued deformation parameter. The case of two q-fermions, $q \neq 1$, taken as constituents is fundamentally different from the cases of fermionic/bosonic constituents: the reason is that the q-fermionic creation and annihilation operators are not nilpotent (of any order). In this case, the obtained deformation structure function inherits the parameter q and does not converge continuously, when $q \to 1$, to the structure function (quadratic in the number operator) of the first case on non-deformed structural fermions.

The obtained realization of quasibosons by deformed oscillators enables the study of quasiboson states and especially their inter-component entanglement aspects using the well developed formalism of deformed oscillators. It is proven that the internal bipartite entanglement characteristics (or measures) for single two-component quasiboson are determined completely and exactly by the parameter of deformation. Such well known characteristics as Schmidt rank, Schmidt number, entanglement entropy and concurrence are evaluated and expressed explicitly through the deformation parameter. Vice versa, for quasibosonic states for which the realization does hold the

deformation parameter is expressible through the entanglement measures. Due to that, the internal bipartite entanglement of the constituents can be interpreted as the concept revealing/providing physical meaning of the deformation parameter. The characteristics of bipartite entanglement (concerning the two subsystems composed of different kinds of quasibosonic constituents) are generalized to arbitrary multi-quasiboson states. Particular examples of various multi-quasiboson states (Fock states, coherent states etc.) are considered for which the entanglement characteristics are calculated and again explicitly expressed through the deformation parameter.

It is important to know how the change of a system's energy influences the quantum correlation and/or quantum statistics properties of the system under study. For that goal, the dependencies of the entanglement entropy, and likewise the other entanglement characteristic – the purity, as functions of energy of state are found for different states of composite bosons realized by deformed oscillators. That concerns the states of *single* quasiboson and the already mentioned examples of Fock and coherent multi-quasiboson states. Depending on the type of constituents (two fermions or two bosons) and on the concrete state of quasibosons, different character of monotonicity of the energy dependence can be observed: in some cases the entanglement entropy (or purity) increases with energy, and in the other cases the behavior shows its falling. Besides, there exists a special case of more complicated behavior of entropy-energy dependence showing two branches of monotonicity and implying a possibility of bifurcation. Such dependencies can be also interpreted from the viewpoint of the entanglement enhancement or production. Since the found energy dependencies allow one to relate entanglement measures directly with the energy level of excitation, they may be of practical interest e.g. in the experiments on particle addition/subtraction, and also in some dissociation processes. The obtained results on the energy dependence are illustrated graphically and their implications discussed.

The μ-deformed extension of Bose gas model based on so called μ-deformed oscillators was proposed recently. Previously, for that model the intercepts of r-particle momentum correlation functions (correlation functions at coinciding momenta of particles) were treated for $r = 2, 3$, within certain order of approximation in μ. In the thesis, for μ-Bose gas model the *exact* expressions for r-particle momentum correlation function intercepts are derived, for all r, in explicit form and expressed through the special function – Lerch transcendent; moreover the asymptotics of intercepts are found (as functions of μ). For the deformed distribution function $\langle a_k^\dagger a_k \rangle$, as well as for the 2- and 3-particle intercepts, the dependence on particles momentum is studied and presented graphically. Also, the comparison of the obtained results for correlation intercepts as well as their asymptotics with the respective results from p, q-deformed Bose gas model is given.

Keywords: composite (quasi)bosons, deformed oscillators, structure function and parameter of deformation, entanglement, entanglement entropy, μ-deformation of Bose gas, correlation functions intercepts.

Міщенко Юрій Анатолійович

Реалізація композитних квазибозонів деформованими осциляторами
(Автореферат дисертації на здобуття наукового ступня кандидата
фізико-математичних наук)

Зам. – 10	Формат $60 \times 84/16$	Обл.-вид. арк. - 0.93
Підписано до друку 10.10.2013 р.		Тираж 100 прим.

Поліграфічна дільниця ІТФ ім. М.М. Боголюбова НАН України,
03680, м. Київ, вул. Метрологічна 14-б