

**Національна академія наук України
Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова**

Челноков Володимир Олексійович

УДК 539.121.7, 539.128

**Фазові переходи нескінченного роду
в абелевих моделях на ґратці**

01.04.02 – теоретична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2014

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Інституті теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова Національної академії наук України, м. Київ

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Борисенко Олег Анатолійович,
Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова
НАН України, провідний науковий співробітник
відділу фізики високих густин енергії

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Козловський Михайло Павлович,
Інститут фізики конденсованих систем
НАН України, завідуючий відділом статистичної теорії
конденсованих систем;

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Горбар Едуард Володимирович,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
професор кафедри квантової теорії поля,
фізичний факультет.

Захист відбудеться «_____» _____ 2014 р. о _____ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.191.01 Інституту теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова Національної академії наук України за адресою: 03680 м. Київ, вул. Метрологічна 14-б.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці Інституту теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова Національної Академії Наук України за адресою: 03680 м. Київ, вул. Метрологічна 14-б.

Автореферат розісланий «___» _____ 2014 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 26.191.01,
доктор фіз.-мат. наук

В. Є. Кузьмичев

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дослідження властивостей фазових переходів в дво- та три-вимірних $Z(N)$ та $U(1)$ моделях є актуальним з кількох причин. Дослідження даних моделей дозволяє глибше зрозуміти природу переходів нескінченного роду. Також дані моделі виникають в різних областях фізики твердого тіла. Насамкінець, з огляду на те що $Z(N)$ є центральною підгрупою $SU(N)$ групи, досліджувані переходи мають спільні універсальні властивості з переходами деконфайнменту в тривимірних калібрувальних $SU(N)$ моделях. Дослідження ґраткових калібрувальних теорій (ГКТ), в яких відбувається фазовий перехід типу Березінського-Костерліца-Таулеса (БКТ) також є актуальним для побудови нетривіальних квантових теорій поля. Розглянуті в даній роботі методи можуть бути використані для дослідження ряду інших ґраткових теорій.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота була виконана у відділі фізики високих густин енергії Інституту теоретичної фізики ім. М.М.Боголюбова Національної академії наук України. Ця робота є складовою частиною загальних досліджень фізики сильних взаємодій в екстремальних умовах (високі температури та густини), що проводились у відділі згідно державних програм. Результати, що увійшли в дисертаційну роботу були отримані в рамках наукових досліджень за темами:

2009-2012: Дослідження сильно взаємодіючої матерії в зіткненнях частинок і ядер при високих енергіях. Номер державної реєстрації – 0107U006889, шифр 1.4.7.

2013: Дослідження сильновзаємодіючої матерії та структури адронів в релятивістських зіткненнях адронів та ядер. Номер державної реєстрації – 0113U001092, шифр 1.4.1.

Метою і задачею дослідження є розвиток аналітичних та чисельних методів дослідження ГКТ. В цьому контексті задачами дослідження є:

1. З'ясування фазової структури двовимірних спінових та тривимірних калібрувальних теорій, в яких спостерігається фазовий перехід БКТ типу, а саме: двовимірної $Z(N)$ спінової моделі та тривимірних $Z(N)$ та $U(1)$ ГКТ при скінченній температурі. Визначення критичних індексів, перевірка гіпотези універсальності.
2. Дослідження фазової структури тривимірної $Z(N)$ ГКТ при нульовій температурі. Визначення критичних індексів та встановлення класу універсальності переходу деконфайнменту
3. Вдосконалення методу феноменологічної ренормалізаційної групи та його застосування для вивчення фазової структури дво- і тривимірних моделей.

Об'єктом дослідження є фазова структура абелевих калібрувальних теорій на ґратці, універсальні властивості фазових переходів деконфайнменту та поведінка спостережуваних в околі точки фазового переходу.

Предметом дослідження є фазові переходи БКТ типу в тривимірних калібрувальних абелевих теоріях на ґратці, їх критичні індекси та зв'язок з фазовими переходами в спінових моделях.

Методи дослідження. Для розв'язку наведених вище проблем я використовую метод ренормалізаційної групи та чисельні Монте-Карло симуляції на ґратці.

Використовується як стандартний метод отримання ренормалізаційних рівнянь з перенормування ефективної константи взаємодії при неперервній зміні кроку ґратки, так і вдосконалений нами метод феноменологічної ренормалізаційної групи, що для багатьох моделей дозволяє отримати якісно та кількісно правильну критичну поведінку із значно простіших обчислень.

Для зведення ґраткових калібрувальних теорій до спінових моделей активно застосовується метод дуальних перетворень.

Для симуляцій методом Монте-Карло застосовується модифікація кластерного алгоритму Вольфа для спінових моделей, який є значно менш чутливим до експоненціального сповільнення в критичній області. Для калібрувальних моделей використовується алгоритм "теплової бані" для плакетного формулювання ГКТ. Використання плакетного формулювання дозволяє спростити алгоритм оновлення ґраткових змінних та вирази для калібрувально інваріантних спостережуваних величин на ґратці.

Наукова новизна отриманих результатів. Внаслідок застосування методу ренормалізаційної групи та чисельних симуляцій методом Монте-Карло до досліджень фазових переходів в $Z(N)$ та $U(1)$ моделях було отримано наступні результати:

1. Для двовимірних $Z(N)$ ($N > 4$) спінових моделей вперше отримано чисельні та наближені аналітичні розв'язки ренормалізаційних рівнянь. З отриманих розв'язків рівнянь знайдено значення критичних індексів та критичних констант взаємодії. З наближених аналітичних розв'язків виведено залежність критичних констант взаємодії двовимірної $Z(N)$ спінової моделі від N . Отриманий вид залежності підтверджується результатами чисельних симуляцій.
2. Для тривимірних $Z(N)$ ($N > 4$) ГКТ при скінченній температурі на ізотропних та анізотропних ґратках знайдено критичні константи взаємодії та критичні індекси. Вперше чисельно підтверджено належність моделі до класу універсальності двовимірної $Z(N)$ моделі. Чисельними симуляціями ГКТ та дуальної спінової моделі підтверджено співпадіння критичних індексів η для кореляцій петель Полякова в ГКТ, та кореляцій спінів в дуальній спіновій моделі.

3. Для тривимірних $Z(N)$ ($N > 4$) ГКТ при нульовій температурі вперше детально досліджено фазовий перехід. Вперше отримані значення критичних індексів та визначено клас універсальності переходу.
4. Запропоновано удосконалення методу феноменологічної ренормалізаційної групи, шляхом розгляду даного методу як різновиду методу розбиття на кластери. Це дозволило виразити з ренормалізаційних рівнянь критичні константи взаємодії, критичні індекси та вільну енергію системи. З використанням даного методу отримано фазову структуру, критичні значення констант зв'язку та критичний індекс ν для загальних дво- та три-вимірних $Z(N)$ моделей.
5. Для тривимірної $U(1)$ ГКТ при скінченній температурі вперше отримано аналітичний вираз для статистичної суми та вільної енергії при нетривіальних граничних умовах (вільна енергія твіста), що дало можливість побудувати рівняння ренормалізаційної групи. З чисельних розв'язків рівнянь отримано значення критичних констант взаємодії та критичних індексів теорії. Підтверджено належність теорії до класу універсальності двовимірної XY моделі.

Практичне значення отриманих результатів. Отримані результати пояснюють фазову структуру тривимірних калібрувальних теорій. Методи чисельного дослідження використані в даній дисертації можуть бути застосовані до широкого класу спінових та калібрувальних теорій на ґратці. Чисельне дослідження дуальних до ГКТ спінових теорій здатне значно прискорити вивчення фазової структури ГКТ за рахунок наявності більш ефективних алгоритмів для спінових моделей. Для випадку симуляцій калібрувальної теорії значного прискорення можна досягти використовуючи плакетне формулювання. Побудоване удосконалення методу феноменологічної ренормалізаційної групи може бути застосоване для якісного і кількісного дослідження фазової структури ряду дво- та трьохвимірних теорій. Результати отримані в дисертації підтверджують припущення Светітського-Яффе стосовно тривимірних $Z(N)$ та $U(1)$ ГКТ. Методи дослідження використані в роботі можуть бути застосовані до широкого ряду фізичних систем, в яких спостерігаються фазові переходи БКТ типу.

Особистий внесок здобувача. Наступні результати отримано здобувачем особисто:

1. Для двовимірних спінових $Z(N)$ моделей отримано розв'язки рівнянь ренормалізаційної групи та знайдено з них значення критичних констант взаємодії та критичних індексів [1].
2. Для чисельного дослідження методом Монте-Карло тривимірних калібрувальних $Z(N)$ моделей реалізовано алгоритми симуляції та

обробки отриманих даних, отримано значення критичних індексів [2, 3, 4].

3. При розробці методу побудови ренормалізаційних рівнянь шляхом розбиття на смуги знайдено спосіб зменшення розмірності трансформатриці, що уможливило розгляд ширших смуг та, зокрема, використання даного методу для дослідження тривимірних моделей [4].
4. При дослідженні фазових переходів в тривимірних $U(1)$ калібрувальних моделях при скінченній температурі з використанням методу ренормалізації в неперервному просторі отримано і чисельно розв'язано рівняння ренормалізаційної групи. З отриманих розв'язків знайдено значення критичних констант взаємодії та критичних індексів [5].

Апробація результатів дисертації. Усі результати дисертації доповідались на семінарах в Інституті теоретичної фізики ім. М.М.Боголюбова Національної академії наук України. Вони були представлені як доповіді на багатьох міжнародних конференціях по ґратковій калібрувальній теорії та близьким темам, зокрема:

- Міжнародні конференції-семінари NPQCD-2009, NPQCD-2011, NPQCD-2013 (Дніпропетровськ, 2009, 2011, 2013, Україна).
- Конференції молодих вчених "Сучасні Проблеми Теоретичної Фізики" (Київ, 2009, 2010, 2011, 2012, Україна)
- Міжнародна школа по теоретичній фізиці DIAS Summer 2011 (Дубна, 2011, Росія).
- Міжнародні симпозиуми з теорії поля на ґратці Lattice 2012, Lattice 2013 (Кернс, 2012, Австралія; Майнц, 2013, Німеччина).

Публікації. Результати дисертації представлені в 13 роботах. Вони опубліковані у провідних фізичних журналах та у працях міжнародних конференцій. А саме, 5 з них видані в журналах [1, 2, 3, 4, 5] та 8 — у працях конференцій [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]

Структура та об'єм дисертації. Дисертація складається із вступу, шести розділів, висновків та бібліографії, яка містить 76 посилань. Дисертація включає 25 рисунків та 34 таблиці. Загальний об'єм дисертації – 123 сторінки друкованого тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У *вступі* обґрунтована актуальність обраної теми, сформульовані мета та задачі дослідження, показана наукова та практична цінність отриманих результатів і коротко викладено зміст розділів дисертації.

У *першому розділі* подано огляд літератури, де стисло описано спосіб побудови калібрувальних теорій на ґратці та властивості фаз конфайнменту та деконфайнменту в цих теоріях. Наведено наявні відомості про фазову структуру $Z(N)$ та $U(1)$ теорій, зокрема гіпотезу універсальності Светітського-Яффе. Описано перехід Березінського-Костерліца-Таулуса, вказані критичні індекси переходів БКТ типу для двовимірних XU та $Z(N)$ спінових моделей. Дано опис методу ренормалізаційної групи та чисельних методів Монте-Карло для симуляцій на ґратці.

Оригінальні результати подано в розділах 2 – 6.

У *другому розділі* проводиться аналітичне та чисельне дослідження властивостей фазових переходів в двовимірній $Z(N)$ спіновій моделі, для якої при $(N > 4)$ наявні два фазові переходи БКТ типу, що розділяють низькотемпературну впорядковану фазу, проміжну квазивпорядковану фазу з відновленою неперервною симетрією та високотемпературну неупорядковану фазу. Для ренормалізаційних рівнянь моделі в формулюванні Віллана отримано чисельні розв'язки, з яких знайдено положення критичних точок, та значення критичного індексу $\nu = 1/2$. Також побудовано наближені аналітичні розв'язки у вигляді поправок до розв'язків ренормалізаційних рівнянь двовимірної XU моделі. Врахування поправок першого порядку призводить до наступного вигляду залежності критичних констант взаємодії $\beta_c^{(1)}$ та $\beta_c^{(2)}$ від параметру групи симетрій N :

$$\beta_c^{(1)} = \beta_c^{XY} - A_1 N^2 \exp\left[-\frac{N^2}{C_1}\right], \quad \beta_c^{(2)} = N^2 K - A_2 N^2 \exp\left[-\frac{N^2}{C_2}\right].$$

Для отримання критичного індексу ν розглянуто розв'язки ренормалізаційних рівнянь при кроці ґратки α , що прямує до нескінченності. З поведінки аналітичних розв'язків видно, що основна сингулярність має такий самий вигляд як в XU моделі, отже для досить великих N $\nu = 1/2$. Для малих значень N було розглянуто чисельні розв'язки ренормалізаційних рівнянь та проведено фіт для $\tau = \ln \alpha$ до залежності

$$\tau = A + \frac{B}{(\beta - \beta_c)^\nu},$$

з проведених фітів отримано $\nu = 1/2$ для обох переходів при $N = 5 - 9$.

Також були проведені чисельні симуляції двовимірної $Z(N)$ спінової моделі з використанням кластерного алгоритму. Значення критичних констант взаємодії $\beta_c^{(1)}$ та $\beta_c^{(2)}$ були визначені виходячи з універсальної поведінки кумулянтів Біндера $U_L^{(M)}$ та $B_4^{(M_R)}$, а також нормалізованої повернутої намагніченості m_ν – в околі відповідних критичних точок (першої критичної точки для $U_L^{(M)}$ та другої критичної точки для $B_4^{(M_R)}$ та m_ν) від залежності універсальних спостережуваних від масштабованої константи взаємодії $(\beta - \beta_c) \ln L^{1/\nu}$ не залежить від розміру ґратки L .

Критичний індекс η було знайдено з поведінки модуля намагніченості $|M_L|$ та його сприйнятливості χ_{M_L} для першого переходу та повернутої намагніченості M_R та її сприйнятливості χ_{M_R} для другого переходу до скейлінгу

$$|M_L| = A_1 L^{-\beta/\nu}, \quad \chi_{M_L} = A_2 L^{\gamma/\nu},$$

При цьому виконується співвідношення гіперскейлінгу $d = 2\beta/\nu + \gamma/\nu$ з $d = 2$, а критичний індекс η знаходиться з $\eta = 2 - \gamma/\nu$. Отримані значення критичного індексу η співпадають з $\eta^{(1)} = 0.25$, $\eta^{(2)} = 4/N^2$ передбаченими аналітично в [Elitzur, 1979].

Результати даного розділу опубліковані в роботах [1, 10].

В *третьому розділі* розглянуто властивості фазових переходів в тривимірних $Z(N)$ ГКТ при скінченній температурі, як в границі сильної взаємодії ($\beta_s = 0$) так і для ізотропної константи взаємодії ($\beta_s = \beta_t$)

Для дослідження фазової структури тривимірної $Z(N)$ ГКТ в границі сильної взаємодії було використано відповідність теорії з узагальненою двовимірною $Z(N)$ спіновою моделлю з дією

$$S = \sum_x \sum_{n=1}^2 \sum_{k=1}^{N-1} \beta_k \cos\left(\frac{2\pi k}{N} (s(x) - s(x + e_n))\right), \quad \beta_k = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \ln(Q_p) \cos\left(\frac{2\pi p k}{N}\right),$$

$$Q_k = \sum_{p=0}^{N-1} \left(\frac{B_p}{B_0}\right)^{N_i} \cos\left(\frac{2\pi p k}{N}\right), \quad B_k = \sum_{p=0}^{N-1} \exp\left(\beta \cos\left(\frac{2\pi p}{N}\right)\right) \cos\left(\frac{2\pi p k}{N}\right).$$

Дана відповідність дозволяє застосувати аналітичні результати отримані для двовимірної $Z(N)$ спінової моделі до тривимірної $Z(N)$ калібрувальної теорії в наближенні сильної взаємодії.

Було проведено чисельні симуляції отриманої ефективної моделі з використанням кластерного алгоритму. Чітка вказівка на наявність трьох фаз в моделі видна при розгляді графіків розподілу комплексної намагніченості M_L для різних значень β : при переході від низьких значень β до високих, ми бачимо перехід від невпорядкованої фази (однорідний розподіл навколо нуля) через проміжну фазу (розподіл у вигляді кільця) до впорядкованої фази (N ізольованих точок). Для визначення критичних констант взаємодії було використано описаний в другому розділі метод накладання універсальних кривих. Для знайдених критичних індексів та критичних констант взаємодії було визначено критичний індекс η та перевірено гіперскейлінгове співвідношення. Отримані значення є близькими до очікуваних з припущення належності фазових переходів до класу універсальності двовимірної XY моделі. проте в ряді випадків відрізнялись від очікуваних більше ніж на визначену статистичну похибку.

Для того, щоб пересвідчитись в сумісності очікуваних значень η з результатами чисельних симуляцій було побудовано універсальні криві

кореляції $\chi_L^{M_R} L^{\eta-2}$ та $B_4^{M_R}$ і $M_R L^{\eta/2}$ та m_ψ . В обох випадках підстановка замість η очікуваних значень ($1/4$ для першого переходу та $4/N^2$ для другого переходу) призводить до співпадіння кривих для різних розмірів ґратки L в околі критичної точки.

Для тривимірної $Z(N)$ ГКТ при скінченній температурі в випадку ізотропної константи взаємодії ($\beta_s = \beta_t$) можна побудувати еквівалентну тривимірну спінову $Z(N)$ модель. При чисельних симуляціях ми досліджували критичну поведінку використовуючи спостережувані, побудовані для дуальних $Z(N)$ спінів. Асимптотична поведінка кореляцій дуальних спінів в околі критичних точок співпадає з поведінкою кореляцій петель Полякова з точністю до заміни місцями індексів η (індекс $\eta^{(1)} = 1/4$ визначає асимптотичну поведінку кореляції дуальних спінів в околі другої критичної точки, а $\eta^{(2)} = 4/N^2$ – в околі першої критичної точки). В границі $N_t \rightarrow \infty$ маємо єдиний фазовий перехід від фази конфайнменту до фази деконфайнменту. При фіксованому N_t та зростаючому N , $\beta_c^{(2)}$ розходиться як N^2 , а $\beta_c^{(1)}$ експоненційно прямує до критичної точки скінченнотемпературної $U(1)$ ГКТ.

Пряме доведення цих властивостей вимагає побудови РР, що описують поведінку системи поблизу фазових переходів. Проте можна навести наступні якісні підтвердження цих властивостей: зміна місцями критичних індексів спостерігається у випадку двовимірної $Z(N)$ спінової моделі – двоточкові кореляційні функції дуальних спінів записуються у такій самій формі, що і кореляційні функції спінів в вихідному формулюванні. Для Вілланівського формулювання, при якому модель є самодуальною повторивши дії [Elitzur, 1979] для дуальної кореляційної функції отримаємо заміну місцями індексів η . Аналіз спин-хвильового наближення для тривимірної $Z(N)$ ГКТ шляхом розкладу тривимірної функції Гріна в суму двовимірних безмасової та масивних функцій Гріна, та нехтування вкладом масивних функцій Гріна (що є експоненційно подавленим з масою) також приводить до заміни місцями індексів η .

Ми провели симуляції дуальної моделі використовуючи кластерний алгоритм аналогічний використаному для двовимірної спінової моделі. Для прямої перевірки гіпотези про те що критичні індекси дуальної моделі співпадають з критичними індексами калібрувальної теорії з точністю до перестановки, також було досліджено $Z(5)$ калібрувальну модель при $N_t = 2, 4$ з використанням алгоритму термостата. Оцінки похибок при даних симуляціях є більшими, ніж у випадку симуляції дуальної моделі, проте з отриманих результатів можна зробити висновок, що (і) критичний індекс η узгоджується з своїм значенням для двовимірної моделі та (ii) значення критичних індексів двох переходів дійсно міняються місцями.

Визначення положення критичних точок та критичних індексів здійснювалось аналогічно до випадку границі сильної взаємодії. В більшості

випадків отримані з симуляцій значення η та d близькі до передбачуваних з гіпотези універсальності. Розбіжності між отриманими значеннями можуть бути спричинені асимптотично зникаючими частинами скейлінгу, які не брались до уваги, проте можуть бути істотними для невеликих розмірів ґраток. Зокрема, для першого переходу очікуване значення β/ν є дуже малим ($2/N^2$), тому поправки наступних порядків можуть мати значний вплив на результат для ґраток скінченних розмірів. Це ускладнює визначення цього індексу з симуляцій на ґратках досяжного розміру та пояснює відмінність отриманого значення d від 2.

Результати даного розділу опубліковано в роботах [2, 3, 6, 8, 9, 13].

В *четвертому розділі* наведено оригінальне удосконалення методу феноменологічної ренормалізаційної групи, та проведено дослідження ряду спінових та калібрувальних моделей за допомогою цього методу.

Запропоноване удосконалення методу феноменологічної ренормалізаційної групи (ФРГ), вперше запропонованого в [Nightingale, 1976] полягає в розгляді ренормалізаційних рівнянь (РР), як рівнянь наближення розбиття на кластери, для випадку кластерів що мають нескінченний розмір в одному з вимірів.

Зі збереження характеру експоненційного спадання кореляційної функції при ренормалізації отримаємо рівняння на ренормалізовані константи взаємодії $\{t_k^{(1)}\}$

$$(\lambda_r(M, \{t_k\})/\lambda_0(M, \{t_k\}))^p = \lambda_r(M/b, \{t_k\})/\lambda_0(M/b, \{t_k\})$$

Тут λ_r – найбільші власні значення відповідних трансфер-матриць. Дана система з $N-1$ рівняння визначає нові константи взаємодії $t_k^{(1)}$ на смугі $(M/b, L/b)$. Ми використовуємо ці точні співвідношення для наближення статистичної суми та кореляційних функцій на ґратці $\Lambda_0 = L \times L$. В такому вигляді ФРГ стає більш потужним інструментом так, як може тепер розглядатись як ітеративна процедура. Це є важливим для систем в яких наявні декілька констант взаємодії – як в випадку коли це початкові константи взаємодії, так і якщо нові константи взаємодії генеруються при ітераціях. Наступною важливою перевагою є можливість обчислення не лише критичних характеристик, а й ряду термодинамічних функцій в широкій області значень початкових констант взаємодії. Також замість збереження масової щільності можна обрати довільну величину, скейлінг для якої відомий. Наприклад можна використовувати другий момент кореляційної довжини, що є зручнішим для проведення Монте-Карло симуляцій.

Для обчислення масової щільності на широких смугах було побудовано трансфер матриці для еволюції незалежних констант взаємодії в дуальному формулюванні моделі. Цей підхід автоматично враховує всі симетрії ґратки і значно зменшує розмір матриці.

В якості застосування цього методу вивчався ряд двовимірних $Z(N)$ спінових моделей та тривимірних $Z(N)$ ГКТ. РР, отримані навіть для смуг малої

ширини дають коректні наближення до точних, або чисельних результатів для критичних констант взаємодії та критичного індекса ν .

Результати даного розділу опубліковано в роботах [4, 11].

В *п'ятому розділі* розглянуто тривимірну $Z(N)$ ГКТ при нульовій температурі.

З дослідження моделі методом феноменологічної ренормалізаційної групи для переходів від смуг розміром $2 \times 2 \times L$ до смуг розміром $1 \times 1 \times L$ отримано наближені значення критичних констант взаємодії та критичних індексів для стандартної моделі Поттса та тривимірної векторної моделі. Порівняння отриманих результатів для стандартної моделі Поттса з результатами чисельних симуляцій [Bazavov, 2008] показують що наша ренормалізаційна група навіть для найменших розмірів ґратки дає гарні наближення до точних результатів.

Чисельні симуляції дуального формулювання моделі проводились на симетричних ґратках $\Lambda = L^3$ з періодичними граничними умовами, розміром L від 8 до 96, з використанням кластерного алгоритму. Розглядалися ті ж спостережувані, що й у попередніх розділах. Для більш точного визначення положення критичних точок, разом зі спостережуваними обчислювались їх похідні за β до третьої включно.

Критичну точку було знайдено з використанням методу перетину кумулянтів Біндера, описаного в [Campostrini, 2001]. З даних для кумулянту Біндера $U_L^{(M)}$ та його похідних за β визначалася залежність $U_L^{(M)}(\beta)$ поблизу фазового переходу. Далі знаходилося значення точки перетину кривих $U_L^{(M)}(\beta)$ для різних розмірів ґратки. Для визначення β_c використовувались значення L від 16 до 96. Критичний індекс ν було визначено з залежності $dU_L^{(M)}(\beta)/d\beta$ від розміру ґратки L . Похідна $dU_L^{(M)}(x)/dx$ залежності кумулянту Біндера $U_L^{(M)}$ від масштабованої взаємодії $x = (\beta - \beta_c)L^{1/\nu}$ може бути визначена, як $dU_L^{(M)}(x)/dx = L^{1/\nu} dU_L^{(M)}(\beta)/d\beta$. З універсальності цієї похідної можна визначити значення ν .

Оцінки критичних індексів β/ν та γ/ν було отримано з аналізу скінченнорозмірного скейлінгу намагніченості $|M_L|$ та її сприйнятливості $\chi_L^{(M)}$. Критичний індекс η визначається, як $2 - \gamma/\nu$, а співвідношення гіперскейлінгу $d = 2\beta/\nu + \gamma/\nu$ має задовольнятися для $d = 3$.

Критичний індекс α , отриманий з співвідношення $\alpha = 2 - d\nu$, має від'ємні значення для $N \geq 5$, що означає що порядок переходу є вищим ніж два. Проте графіки теплоємності показують, що теплоємність розходить поблизу критичної точки. Значення ν , отримане з аналізу скінченнорозмірного скейлінгу для теплоємності при $N > 4$ близьке до $\nu \approx 0.63$ – критичного індексу моделі Ізінга. Різниця між індексами ν , отриманими з поведінки кумулянтів Біндера та теплоємності приводить до висновку, що наявні два види сингулярності, залежно від того чи ми підходимо до критичної точки згори

(сингулярність типу тривимірної ХУ моделі) чи знизу (сингулярність типу тривимірної моделі Ізінга), при $N > 4$.

Результати даного розділу опубліковано в роботах [2, 10, 11, 12].

В *шостому розділі* наведена ренормалізаційна група для тривимірної $U(1)$ ГКТ при скінченній температурі в наближенні $\beta_t \ll \beta_s \ll 0$ (що є справедливим при наближенні до континуальної границі), отримана з поведінки вільної енергії твіста.

Статистична сума теорії в дуальному представленні має вигляд

$$Z(\theta_n) = \sum_{h_n=-\infty}^{\infty} e^{i \sum_{n=1}^2 h_n \theta_n} \prod_x \prod_{n=0}^2 I_{r(x)-r(x+e_n)+\eta_n(x)h_n}(\beta_n),$$

де $\eta_n(x)$ дорівнює 1 для лінків дуальних до плакет зі стопки, на якій задано твіст, та 0 для всіх інших лінків. Замінивши функції Бесселя асимптотичним наближенням отримаємо теорію в Віланівському представленні. Після обчислення суми за змінними $r(x)$ статистична сума розкладається на добуток вкладу дуальних безмасових фотонів та вкладу монопольних конфігурацій

$$Z_{ph} = \exp\left[-\frac{N_t}{2\beta_t}(h_1^2 + h_2^2)\right],$$

$$Z_m = \sum_{\{m_x\}} \exp\left[-\pi^2 \sum_{x,x'} m_x G_{xx'} m_{x'} - 2\pi i m_x (h_1 x_1 + h_2 x_2)\right].$$

$G_{xx'}$ – тривимірна функція Гріна на анізотропній ґратці, яку зручно представити у вигляді суми двовимірних масивних і безмасових функцій Гріна.

$$G_{x,t;x',t'} = \frac{\beta_t}{N_t} \left(G_{x,x'}^{2d} + \sum_{k=1}^{N_t-1} e^{\frac{2\pi i k(t-t')}{N_t}} G_{x,x'}^{2d}(M_k) \right),$$

$$M_k^2 = \beta_t / \beta_s (1 - \cos 2\pi k / N_t).$$

Масивні функції Гріна експоненційно подавлені при $x \neq x'$, як $\exp(-M_k R)$, тому зберігаємо в сумі за часовим імпульсом k лише доданки з найменшим значенням M_k , що відповідає $k=1, N_t-1$. Введемо позначення $m_x = \sum_{t=0}^{N_t-1} m_{x,t}$,

$r_x^k = \sum_{t=0}^{N_t-1} m_{x,t} \exp \frac{2\pi i k t}{N_t}$. Для значень $m_{x,t}$ на кожній фіксованій просторовій

координаті x залишимо лише конфігурації, що дають основний вклад в статистичну суму (ненульові значення m_x подавлені безмасовими двовимірними функціями Гріна, ненульові значення r_x^k – масивними функціями Гріна)

В результаті отримаємо

$$Z_m \approx \exp\left[L^2 \sum_{z \neq 0} \exp\left[-\frac{\pi^2 \beta_t}{N_t} D(z) + \frac{2\pi i}{N_t} (h_1 z_1 + h_2 z_2)\right] F(z) \right].$$

$D(z) = G_0^{2d} - G_z^{2d}$ – скінченна в інфрачервоній границі функція Гріна.

При $F(z)=1$, статистична сума співпадає з статистичною сумою для ХУ моделі в присутності твіста. Для скінченно-температурної $U(1)$ ГКТ $F(z)$ має вигляд.

$$F(z) = C_1 + C_2 \left(G_z^{2d}(M_1) \right)^2,$$

що містить два нові вклади: константний вклад, що ренормалізує активність монополів, і вклад що дає додаткову ренормалізацію монополь-антимонопольної логарифмічної взаємодії при високих температурах. Так, як $D(z)$ та $F(z)$ залежать лише від модуля відстані між монополями можна виокремити кутову залежність твіста. Проінтегрувавши за полярним кутом, замінивши суму за r поблизу континуальної границі на інтеграл та обчисливши суму за h_n знайдемо термодинамічну границю статистичної суми в присутності твіста

$$Z(\theta) = \sum_{n_i=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\beta_{eff}}{2} \sum_{i=1,2} (\theta_i - 2\pi n_i)^2\right).$$

Введена тут ренормалізована константа взаємодії β_{eff} дорівнює

$$\frac{1}{\beta_{eff}} = \frac{N_t}{\beta_t} + 2\pi^3 y^2 \int_1^{+\infty} r^{3-2\pi \frac{\beta_t}{N_t}} \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \left(G_r^{2d}(M_1)\right)^2\right) dr.$$

Перший доданок визначає вклад безмасових фотонів, а другий виникає внаслідок взаємодії монополів. Активність монополів y задається через

$$y = 2 C_1^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \pi^2 \frac{\beta_t}{N_t}\right).$$

Вираз для кореляції петель Полякова може бути отриманий аналогічним чином.

Збільшуючи крок ґратки a , що до цього неявно був взятий рівним 1 на невелике значення запишемо ефективну теорію на новій ґратці. Ввівши змінну $t = \ln a$ можна записати рівняння на ренормалізовані константи у звичному вигляді

$$\frac{d\beta_t}{dt} = -2\pi^3 y^2 \frac{\beta_t^2}{N_t} \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \left(G_1^{2d}(M_1)\right)^2\right),$$

$$\frac{dy}{dt} = y\left(2 - \pi \frac{\beta_t}{N_t}\right), \quad \frac{dM}{dt} = M.$$

Фіксованою точкою цих рівнянь є $\beta_t = 2N_t/\pi$, $y = 0$. M_1 експоненційно зростає з t . В границі $M_1 \rightarrow \infty$ маємо РР $2d$ ХУ моделі.

Підставивши фіксовану точку в поведінку кореляції петель Полякова отримаємо критичний індекс $\eta = 1/4$. Для отримання значень критичної константи зв'язку та критичного індексу ν будемо чисельний розв'язок рівнянь, аналогічно до розв'язку РР двовимірної $Z(N)$ моделі отриманого у другому розділі. Отримаємо $\nu = 1/2$, що підтверджує належність фазового переходу деконфайнменту в тривимірній $U(1)$ скінченнотемпературній ГКТ до класу універсальності двовимірної ХУ моделі

Результати даного розділу опубліковано в роботах [5, 7].

ВИСНОВКИ

1. Для двовимірних $Z(N)$ спінових моделей та тривимірних $Z(N)$ ГКТ при скінченній температурі ($N > 4$) з розв'язків ренормалізаційних рівнянь та Монте-Карло симуляцій отримано критичні константи взаємодії та критичні індекси. Підтверджено належність цих моделей до одного класу універсальності. Чисельними симуляціями ГКТ та дуальної спінової моделі підтверджено співпадіння критичних індексів η для кореляцій петель Полякова в ГКТ, та кореляцій спінів в дуальній спіновій моделі. Отримано залежність критичних констант взаємодії від N .
2. Для тривимірних $Z(N)$ ($N > 4$) ГКТ при нульовій температурі вперше детально досліджено фазовий перехід. З чисельних симуляцій та рівнянь феноменологічної ренормалізаційної групи знайдено критичні константи взаємодії та критичні індекси. Встановлено належність переходу в тривимірних $Z(N)$ ($N > 4$) ГКТ при нульовій температурі до класу універсальності тривимірної XY моделі. Показано неспівпадіння критичних індексів α при наближенні до точки фазового переходу знизу і згори. Вказано на наявність в моделі симетричної фази, принаймні для скінченних розмірів ґраток.
3. Запропоновано удосконалення методу феноменологічної ренормалізаційної групи, шляхом розгляду даного методу як різновиду методу розбиття на кластери. З використанням даного методу отримано фазову структуру, критичні значення констант зв'язку та критичний індекс ν для загальних дво- та три-вимірних $Z(N)$ моделей.
4. Для тривимірної $U(1)$ ГКТ при скінченних температурах з аналітичного виразу для вільної енергії твіста побудовано рівняння ренормалізаційної групи в наближенні $\beta_t \ll \beta_s \ll 0$. З чисельних розв'язків рівнянь отримано значення критичних констант взаємодії та критичних індексів теорії. Підтверджено належність теорії до класу універсальності двовимірної XY моделі.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Borisenko O. The phase transitions in 2D $Z(N)$ vector models for $N > 4$ / O. Borisenko, V. Chelnokov et al. // Phys.Rev. E. — 2012. — Vol.85. — 021114. — 9 p.

2. Borisenko O. Phase transitions in strongly coupled 3d $Z(N)$ lattice gauge theories at finite temperature / O. Borisenko, V. Chelnokov et al. // *Phys. Rev. E.* — 2012. — Vol.86. — 051131. — 14 p.
3. Borisenko O. Phase structure of 3D $Z(N)$ lattice gauge theories at finite temperature / O. Borisenko, V. Chelnokov et al. // *Nucl. Phys. B.* — 2013. — Vol.870. — P.159-175.
4. Borisenko O. Critical behavior of 3D $Z(N)$ lattice gauge theories at zero temperature / O. Borisenko, V. Chelnokov et al. // *Nucl.Phys. B.* — 2014. — Vol.879. — P.80-97.
5. Borisenko O. Twist free energy and critical behavior of 3D $U(1)$ LGT at finite temperature / O. Borisenko, V. Chelnokov // *Phys. Lett. B.* — 2014. — Vol.730. — P.226-230.
6. Borisenko O. Monte-Carlo study of finite-temperature phase transitions in $(2 + 1)d$ $Z(5)$ LGT / O. Borisenko, V. Chelnokov, I. Surzhikov // *Proc. of International school-seminar NPQCD-2011.* — 2011. — P.85-88.
7. Borisenko O. Renormalization group approach for 2+1d $U(1)$ lattice gauge theory in finite temperature limit / O. Borisenko, V. Chelnokov // *Proc. of International school-seminar NPQCD-2009.* — 2009. — P.108-110.
8. Borisenko O. BKT phase transition in three-dimensional $Z(N)$ gauge theory / O. Borisenko, V. Chelnokov, I. Surzhikov // *Proc. of International school-seminar NPQCD-2011.* — 2011. — P.89-92.
9. Borisenko O. BKT phase transitions in strongly coupled 3D $Z(N)$ LGT at finite temperature / O. Borisenko, V. Chelnokov et al. // *PoS LATTICE2012.* — 2012. — 270. — 7 p.
10. Borisenko O. Study of the phase structure of $2d$ $Z(N)$ models using approximate renormalization group / O. Borisenko, V. Chelnokov, V. Kushnir // *Proc. of International school-seminar NPQCD-2013.* — 2013. — P.103-106.
11. Borisenko O. On a development of the phenomenological renormalization group / O. Borisenko, V. Chelnokov, V. Kushnir // *PoS LATTICE2013.* — 2013. — 327. — 7 p.
12. Borisenko O. Phase transitions in the three-dimensional $Z(N)$ models / O. Borisenko, V. Chelnokov et al. // *PoS LATTICE2013.* — 2013. — 347. — 7 p.
13. Borisenko O. Critical properties of 3D $Z(N)$ lattice gauge theories at finite temperature / O. Borisenko, V. Chelnokov et al. // *PoS LATTICE2013.* — 2013. — 463. — 7 p.

АНОТАЦІЯ

Челноков В. О. Фазові переходи нескінченного роду в абелевих моделях на ґратці – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика. – Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, Київ, 2014.

Дисертація присвячена дослідженню фазового переходу деконфайнменту в тривимірних абелевих калібрувальних теоріях на ґратці. З розв'язку рівнянь ренормалізаційної групи визначено критичні індекси фазових переходів в двовимірній $Z(N)$ моделі та в тривимірній $U(1)$ калібрувальній теорії. Запропоноване удосконалення методу феноменологічної ренормалізаційної групи, яке використано для оцінки критичних констант взаємодії та критичних індексів ν дво- та тривимірних $Z(N)$ моделей. Для двовимірних спінових $Z(N)$ моделей та тривимірних калібрувальних $Z(N)$ теорій визначено за допомогою чисельних симуляцій критичні константи взаємодії та критичні індекси ν та η фазових переходів.

Ключові слова: калібрувальні теорії на ґратці, перехід Березінського-Костерліца-Таулеса, феноменологічна ренормалізаційна група, $U(1)$, $Z(N)$.

АННОТАЦИЯ

Челноков В. А. Фазовые переходы бесконечного рода в абелевых моделях на решетке. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 – теоретическая физика. – Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины, Киев, 2014.

Диссертация посвящена исследованию фазового перехода деконфайнмента в трехмерных абелевых калибровочных теориях на решетке. Из решения уравнений ренормализационной группы определены критические индексы фазовых переходов в двумерной $Z(N)$ модели и в трехмерной $U(1)$ калибровочной теории. Предложено оригинальное усовершенствование метода феноменологической ренормализационной группы, которое было использовано для оценки критических констант взаимодействия и критических индексов ν дву и трехмерных $Z(N)$ моделей. Для двумерных спиновых $Z(N)$ моделей и трехмерных калибровочных $Z(N)$ теорий определены при помощи численных симуляций критические константы взаимодействия и критические индексы ν и η фазовых переходов.

Ключевые слова: калибровочные теории на решетке, переход Березинского-Костерлица-Таулеса, феноменологическая ренормализационная группа, $U(1)$, $Z(N)$.

ABSTRACT

Chelnokov V. O. Infinite order phase transitions in abelian lattice models. – Manuscript.

Candidate's thesis on Physics and Mathematics, speciality 01.04.02 – physics. – Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2014.

The thesis is devoted to the study of deconfinement phase transitions in three-dimensional abelian gauge theories. The Svetitsky-Yaffe conjecture states that the deconfinement phase transition in finite temperature $m+1$ dimensional lattice gauge theory (LGT) is in the same universality class as the order-disorder phase transition in m dimensional spin theory with the symmetry group that is the center group of the gauge group, if the correlation length diverges at transition point. This suggests that the finite temperature deconfinement phase transition in the three-dimensional $U(1)$ and $Z(N)$ ($N > 4$) lattice gauge theories belong to the universality class of Berzinskii-Kosterlitz-Thouless (BKT) transition, that occurs in two-dimensional $U(1)$ and $Z(N)$ spin models.

The renormalization group (RG) equations for the two-dimensional $Z(N)$ spin models are solved numerically and analytically as the corrections to the solutions of XY model RG equations. From these solutions critical points and critical indices for 2d $Z(N)$ Villain model are extracted. The general form of dependence of critical points on N is proposed based on analytical solution of RG equations. Also numerical simulations of the $Z(N)$ model for several values of N are made. The simulations clearly show existence of the three phases in the model – low temperature ordered phase ($\beta > \beta_{\text{crit}}^{(2)}$), intermediate quasi-ordered phase ($\beta_{\text{crit}}^{(1)} < \beta < \beta_{\text{crit}}^{(2)}$), in which correlation functions decay with distance is governed with a power law and continuous symmetry for the total magnetization is restored, and high temperature disordered phase ($\beta < \beta_{\text{crit}}^{(1)}$). For the simulations Wolff cluster update algorithm was used. The critical points are found using Binder cumulant collapse method. The critical index ν is found to be $1/2$ at both transitions and the critical index η is $1/4$ at first transition and $4/N^2$ for the second transition.

For the finite temperature three-dimensional $Z(N)$ LGT in the strong coupling limit, an equivalent two dimensional spin model is built. Simulations of this equivalent model show the same phase structure and the same critical indices for transitions as in the vector spin model. The three-dimensional $Z(N)$ LGT for isotropic coupling is also studied numerically both as a gauge model and as a dual three-dimensional spin model. It is shown that the critical indices η that govern the behavior of the dual spin correlations and the indices that govern the behavior of the Polyakov loop correlations are the same up to the permutation ($\eta_{\text{spin}}^{(1)} = \eta_{\text{gauge}}^{(2)}$, $\eta_{\text{spin}}^{(2)} = \eta_{\text{gauge}}^{(1)}$). The numeric values of the critical couplings and the critical indices are obtained using the dual model. It is shown that the phase transitions finite-temperature 3d $Z(N)$ LGT belong to the same universality class as those in 2d $Z(N)$

spin model.

The original improvement to the phenomenological renormalization group is proposed. One can treat the renormalization group as cluster decimation approximation for a cluster that is infinite in one dimension. Renormalization group equations are obtained from the equation on mass gap on the renormalized lattice remains the same. The mass gap is extracted from largest eigenvalues of corresponding transfer matrices. To simplify the calculations matrices are built for the evolution of independent couplings which automatically takes into account lattice symmetries. Using this renormalization group critical points and critical indices of the $Z(N)$ models can be calculated with high accuracy even using narrow lattice strips.

The three-dimensional zero temperature $Z(N)$ LGT is studied both numerically and using the phenomenological renormalization group. The phenomenological renormalization group is found to predict critical couplings with high accuracy already for smallest possible strip sizes ($2 \times 2 \times L$ to $1 \times 1 \times L$). The critical index ν obtained in this way is larger than $2/3$ for $N > 4$. That means that α index is negative so the transition is of the third order. Numerical simulations of the theory are made on isotropic cubic lattices. To have more precise estimations of the critical couplings the observables are calculated along with their derivatives with respect to β , and the critical coupling is obtained as the intersection point of Binder cumulant functions (approximated by their Taylor expansions around simulation point) for different lattice sizes. Critical indices ν , obtained from the scaling of Binder cumulant derivative with lattice size for $N > 4$, are larger than $2/3$ like the ones obtained from the renormalization group. But the divergence of heat capacity around the transition is governed by ν constant that is close to the three-dimensional Ising one. This leads to conclusion that there are two different critical indices ν – one if the transition point is approached from lower values of β , and another one, when it is approached from higher values of β . Critical index η is obtained from the scaling of magnetization and its susceptibility with lattice size.

For the finite temperature $U(1)$ LGT for $\beta_t \ll \beta_s \ll 0$ a renormalization group is built based on the behavior of the twist free energy. After writing the three dimensional Green function as a sum of two dimensional massless and massive ones, and using the Taylor expansion for the massive Green function on nonzero distance, the twist free energy can be written in terms of the effective two dimensional model, Then the renormalization group equations for coupling β , monopole activity y , and the mass M appearing in massive Green functions can be built. The renormalization equations tend to the renormalization equations of the 2d XY model when the lattice spacing goes to infinity. Numerical solutions of the renormalization equations gives the critical index $\nu = 1/2$ which confirms that the phase transition is of BKT universality class.

Key words: lattice gauge theories, Berzinskii-Kosterlitz-Thouless transition, phenomenological renormalization group, $U(1)$, $Z(N)$.

Челноков Володимир Олексійович

Фазові переходи нескінченного роду в абелевих моделях на ґратці.
(Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук.)

Зам. – 8 Формат 60 x 84/16 Обл.-вид. арк. - 0.93

Підписано до друку 03.07.2014 р. Тираж 100 прим.

Поліграфічна дільниця ІТФ ім. М.М. Боголюбова НАН України,
03680, м. Київ, вул.. Метрологічна, 14-б