Національна академія наук України
Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова

На правах рукопису

СЕМЕНОВ ІГОР ЛЬВОВИЧ

УДК 533.9, 533.7

ВПЛИВ ЗІТКНЕНЬ НА ЕКРАНУВАННЯ МАКРОЧАСТИНОК В СЛАБКОІОНІЗОВАНІЙ ПЛАЗМІ

01.04.02 – теоретична фізика

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Загородній Анатолій Глібович
доктор фіз.-мат. наук,
академік НАН України, професор

Київ – 2013

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми

Вивчення процесів взаємодії плазми з макрочастинками є однією із важливих проблем сучасної фізики плазми. В останні роки цій проблемі приділяється значна увага у зв'язку зі стрімким розвитком експериментальних та теоретичних досліджень запорошеної (комплексної) плазми – іонізованого газу, якій містить заряджені частинки конденсованої дисперсної фази. Фізика запорошеної плазми є відносно новою галуззю науки, розвиток якої має як фундаментальне, так і прикладне значення [1, 2, 3].

Дослідження властивостей запорошеної плазми є важливими для пояснення багатьох астрофізичних і атмосферних явищ. Наприклад, плазмово-пилові структури присутні в хмарах міжзоряного газу, хвостах комет, планетарних кільцях та в навколоземній іоносфері [4, 5, 6]. Велике значення має вирішення технологічних проблем, які пов'язані із утворенням частинок конденсованої фази в установках керованого термоядерного синтезу [7, 8] та при лазерно-дуговому зварюванні металів [9, 10, 11]. Ще одним важливим напрямом є дослідження взаємодії плазми з макрочастинками в процесах плазмової обробки матеріалів [12, 13, 14]. Такі дослідження мають велике значення для розвитку сучасних плазмових технологій, які активно використовуються в мікроелектроніці, при виробництві наночастинок та нанесенні покриттів. Окремий інтерес викликають дослідження упорядкованих структур (плазмово-пилових кристалів) в запорошеній плазмі [15, 16, 17, 18]. Відносна простота візуалізації таких структур дозволяє вивчати фазові переходи та розповсюдження низькочастотних коливань в кристалічних структурах на макроскопічному рівні. На даний час основними напрямами досліджень у цій області є вивчення поведінки плазмово-пилових структур в умовах мікрогравітації [19] та при наявності зовнішнього магнітного поля [20].

У зв'язку із активним розвитком лабораторних досліджень запорошеної плазми, особлива увага приділяється вивченню процесів заряджання та екранування макрочастинок у слабкоіонізованій плазмі. Для пояснення багатьох властивостей запорошеної плазми важливим є теоретичне визначення таких параметрів, як електричний заряд та потенціал макрочастинок в плазмі, а також сила опору, що діє на частинку при її обтіканні плазмою. Відомо, що одним із найбільш важливих чинників, які впливають на характеристики процесів заряджання та екранування макрочастинок в слабкоіонізованій плазмі, є зіткнення іонів та електронів з нейтральною компонентою плазми (зокрема, особливу роль відіграють зіткнення іон-нейтрал) [21]. При цьому більшість існуючих моделей описує процеси заряджання та екранування макрочастинок лише у двох граничних випадках: коли довжини вільного пробігу іонів та електронів в плазмі є набагато більшими та набагато меншими за довжину Дебая. Особливості цих процесів у проміжному режимі зіткнень, коли довжина вільного пробігу для зіткнень іон-нейтрал є одного порядку із довжиною Дебая, на даний час вивчено недостатньо. Зокрема залишаються не до кінця з’ясованими питання про залежність заряду частинки та сили опору з боку плазми від частоти зіткнень іон-нейтрал, а також питання про асимптотичну поведінку потенціалу частинок в проміжному режимі зіткнень. Окрім цього, недостатньо вивченим є вплив зіткнень на процеси взаємодії макрочастинок із плазмою у випадку, коли розмір частинок є одного порядку із довжиною Дебая.

Таким чином, актуальність проблеми, яку було розглянуто у даній дисертаційній роботі, визначається необхідністю більш детальних досліджень впливу зіткнень на основні характеристики процесів заряджання та екранування макрочастинок в слабкоіонізованій плазмі.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Результати, які увійшли до дисертаційної роботи, були отримані в рамках планової наукової тематики відділу теорії та моделювання плазмових процесів Інституту теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України (проект за конкурсом НАН України – РФФД «Формування нелінійних структур і розповсюдження хвиль в запорошеній плазмі» 2007 – 2011 рр., шифр 1.4.8.1, номер державної реєстрації в УкрІНТЕІ РК 0110U000987; тема «Транспортні процеси та формування структур у плазмових системах» 2008 – 2012 рр., шифр 1.4.8.1, номер державної реєстрації в УкрІНТЕІ РК 0107U007871; проект за конкурсом НАН України – РФФД «Дослідження рівноважних і кінетичних властивостей мікроскопічної кулонівської моделі речовини» 2012 – 2013 рр., шифр 1.4.8.1, номер державної реєстрації в УкрІНТЕІ РК 0112U003479; тема «Мікроскопічні та феноменологічні моделі фундаментальних фізичних процесів у мікро- та макросвіті» 2012 – 2016 рр., шифри 1.4.1, 1.4.2, 1.4.5, 1.4.7, 1.4.8, 1.4.9, номер державної реєстрації в УкрІНТЕІ РК 0112U000056).

Мета і задачі дослідження

Метою досліджень є аналіз впливу зіткнень між компонентами слабкоіонізованої плазми на процеси заряджання та екранування макрочастинок. Для досягнення поставленої мети треба вирішити такі *задачі*:

- проаналізувати та вдосконалити існуючі моделі для опису зіткнень між компонентами частково іонізованої плазми; розробити метод чисельного розв’язку самоузгодженої системи модельних кінетичних рівнянь для компонент плазми у випадках сферичної та аксіальної симетрії та створити програмне забезпечення для комп’ютерної реалізації даного методу на багатопроцесорних обчислювальних системах;
- дослідити процеси заряджання та екранування макрочастинки в слабкоіонізованій плазмі на основі чисельного розв’язку системи модельних кінетичних рівнянь; для випадків термічної та неізотермічної плазми визначити залежність заряду частинки від довжини вільного пробігу для зіткнень іон-нейтрал та отримати розподіли електричного потенціалу і макроскопічних параметрів плазми навколо частинки в широкому діапазоні режимів зіткнень;
- провести чисельне дослідження процесу динамічного екранування макрочастинки в слабкоіонізованій плазмі; вивчити вплив зіткнень іон-нейтрал на силу опору з боку іонів (іонна сила опору); проаналізувати залежність іонної сили опору від швидкості потоку плазми для різних режимів зіткнень; визначити відношення сили опору з боку іонів до сили опору з боку нейтральної компоненти плазми в сильнозіткневому (гідродинамічному) режимі.

Об'єктом дослідження є процеси заряджання та екранування макрочастинок в слабкоіонізованій плазмі.

Предметом дослідження є заряд макрочастинок, розподіли електричного потенціалу та макроскопічних параметрів плазми навколо макрочастинок, сили опору, які діють на макрочастинки з боку різних компонент плазми.

Методами дослідження є методи кінетичної теорії плазми, методи теорії розріджених газів, методи чисельного розв'язку систем гіперболічних рівнянь, методи теорії паралельних обчислень.

Наукова новизна одержаних результатів

- Запропоновано новий підхід до моделювання процесів взаємодії плазми з макрочастинками, який базується на прямому чисельному розв'язку самоузгодженої системи модельних кінетичних рівнянь. Розроблено новий тип модельних інтегралів зіткнень для опису зіткнень в частково іонізованій плазмі. Створено метод чисельного розв'язку кінетичних рівнянь у випадку сферичної та аксіальної симетрії.
- Вперше визначено залежність заряду макрочастинок від довжини вільного пробігу для зіткнень іон-нейтрал у випадку, коли розмір частинок є одного порядку із довжиною Дебая в плазмі.
- Вперше проведено чисельний аналіз розподілів електричного потенціалу та макроскопічних параметрів плазми навколо макрочастинки у випадку, коли довжина вільного пробігу для зіткнень іон-нейтрал та розмір частинки є одного порядку із довжиною Дебая в плазмі.
- Запропоновано модифікацію відомого аналітичного підходу до обчислення іонної силу опору в беззіткневій плазмі (теорія парних зіткнень), яка дозволяє визначити іонну силу опору у випадку, коли розмір макрочастинки є одного порядку із довжиною Дебая в плазмі.
- Вперше проведено аналіз залежності сили опору з боку іонів від довжини вільного пробігу для зіткнень іон-нейтрал.
- Проведено аналіз залежності іонної сили опору від швидкості потоку плазми в сильнозіткневому режимі. Отримано нові дані щодо співвідношення між

силою опору з боку іонів та силою опору з боку нейтральної компоненти плазми в гідродинамічному режимі.

Практичне значення одержаних результатів

Результати, отримані в дисертаційній роботі, є внеском у теоретичний опис процесів взаємодії слабкоіонізованої плазми з макрочастинками. Вони можуть бути використані для пояснення властивостей плазмово-пилових структур в запорошеній плазмі та вирішення ряду технологічних проблем. Зокрема отримані результати можуть бути застосовані для розробки методів усунення пилових частинок та частинок конденсованої фази, які мають негативний вплив на технологічні характеристики процесів плазмової обробки матеріалів та лазерно-дугового зварювання металів.

Крім цього, розроблені методи чисельного розв’язку самоузгодженої системи кінетичних рівнянь та створене програмне забезпечення для їх комп’ютерної реалізації на багатопроцесорних обчислювальних системах можуть бути застосовані для моделювання широкого кола нерівноважних процесів в плазмі. Зокрема цей підхід може бути використаний для моделювання взаємодії пилових частинок із плазмою в установках керованого термоядерного синтезу, моделювання взаємодії плазми із електродами в газовому розряді та моделювання теплової взаємодії плазми з частинками в процесах плазмового напилення.

Особистий внесок здобувача

В роботі [22] автором розроблено метод чисельного розв’язку самоузгодженої системи кінетичних рівнянь у випадку сферичної симетрії, запропоновано алгоритм застосування цього методу на багатопроцесорних обчислювальних системах та проведено чисельне дослідження процесу екранування макрочастинок в термічній плазмі аргону.

В роботі [23] автором запропоновано нову модель для опису зіткнень в частково іонізованій плазмі та проведено чисельне дослідження кінетики заряджання макрочастинок в термічній плазмі аргону.

В роботі [24] автором проведено чисельне дослідження процесів заряджання та екранування макрочастинок в неізотермічній плазмі аргону.

В роботі [25] автором розроблено метод чисельного розв'язку самоузгодженої системи кінетичних рівнянь у випадку аксіальної симетрії, запропоновано алгоритм застосування цього методу на багатопроцесорних обчислювальних системах та проведено чисельне дослідження динамічного екранування макрочастинки в плазмі аргону.

Робота [26] виконана автором одноосібно. В ній проведено чисельне дослідження залежності іонної сили опору від швидкості руху плазми в беззіткневому режимі та запропоновано модифікацію відомого аналітичного підходу (теорія парних зіткнень), яка дозволяє обчислювати іонну силу опору у випадку, коли розмір частинок є одного порядку із довжиною Дебая в плазмі.

Апробація результатів дисертації

Матеріали дисертації доповідались на таких конференціях: III International Conference "Dusty Plasmas in Applications", 25-29 серпня 2010 р., Одеса, Україна; 39th European Physical Society Conference on Plasma Physics/16th International Congress on Plasma Physics, 2-6 July 2012, Stockholm, Sweden; International Conference «Problems of Theoretical Physics» dedicated to Alexander Davydov 100th birthday, 8-11 October 2012, Kyiv, Ukraine. Робота також обговорювалася на наукових семінарах відділу теорії та моделювання плазмових процесів Інституту теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України.

Публікації

За матеріалами дисертації опубліковано 5 статей у провідних наукових фахових виданнях [22, 23, 24, 25, 26]. Основні результати дисертації додатково висвітлено у матеріалах конференцій [27, 28, 29].

Структура дисертаційної роботи

Дисертаційна робота складається із вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, який містить 133 найменування. Робота написана на 126 сторінках машинописного тексту, містить 30 рисунків.

РОЗДІЛ 1
ІСНУЮЧІ ПІДХОДИ ТА МОДЕЛІ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ ВЗАЄМОДІЇ СЛАБКОІОНІЗОВАНОЇ ПЛАЗМИ З МАКРОЧАСТИНКАМИ

У цьому розділі наведено огляд існуючих підходів та моделей, що використовуються для теоретичного опису процесів взаємодії слабкоіонізованої плазми з макрочастинками. Останнім часом у зв'язку із розвитком експериментальних досліджень в галузі запорошеної (комплексної) плазми значна увага приділяється опису таких процесів, як заряджання та екранування макрочастинок в плазмі, а також передача імпульсу від компонент плазми до макрочастинок. Розглянемо стисло основні властивості цих процесів. При цьому будемо вважати, що частинки є ідеальними провідниками та мають сферичну форму із радіусом a. Зазначимо також, що характерні розміри частинок в запорошеній плазмі, як правило, не перевищують довжину Дебая в плазмі (r_D).

Відомо, що за типових експериментальних умов макрочастинки набувають електричного заряду в основному за рахунок поглинання іонів та електронів з довколишньої плазми. Поглинання іонів та електронів є наслідком їхньої рекомбінації на поверхні частинок. Як результат того, що характерна швидкість руху електронів у плазмі вища, ніж характерна швидкість руху іонів, частинки у більшості випадків заряджаються від'ємно. У стаціонарній ситуації повний потік електронів через поверхню частинки дорівнює повному потоку іонів, а потенціал поверхні частинки (плаваючий потенціал) $\varphi_a < 0$ визначається температурою електронів у навколишній плазмі T_{e0}, тобто $e|\varphi_a| \sim kT_{e0}$. Взаємодія зарядженої частинки із плазмою призводить до екранування електричного поля довкола неї. При цьому одним з головних факторів, які впливають на розподіл електричного потенціалу довкола частинки, є наявність плазмових струмів поблизу її поверхні. Відзначимо також, що у випадку, коли $a \ll r_D$, повний заряд частинки q пов'язаний із потенціалом поверхні простим лінійним співвідношенням $q = \varphi_a a$, тоді як для великих частинок, $a \sim r_D$, залежність заряду від потенціалу поверхні стає нелінійною і може бути визначена лише шляхом розв'язання задачі про екранування частинки у плазмі.

За наявності відносного руху між частинкою та компонентами плазми слід також враховувати процес передачі імпульсу від плазми до частинки. Сили опору, що діють на частинку з боку різних компонент плазми, багато в чому визначають динаміку частинки за експериментальних умов. При цьому з огляду на значну різницю між масою електрона та масами важких компонент плазми (іони та атоми) силою опору з боку електронів у більшості випадків можна знехтувати. Для обчислення сили опору з боку атомів використовують, як правило, відомі результати з галузі газової динаміки [30, 31, 32, 33, 34]. Обчислення сили опору з боку іонів є більш складною проблемою, оскільки потребує врахування ефектів, пов'язаних із розсіюванням іонів у полі зарядженої частинки. З огляду на те, що заряд частинок у плазмі може бути достатньо значним, вплив процесу розсіювання іонів на величину повної сили опору з боку плазми є суттєвим. Крім того, на величину сили опору значною мірою впливає поглинання іонів та електронів на поверхні частинки.

Як було відзначено у вступі, однією із головних проблем, що виникають при розгляді описаних вище процесів, є урахування впливу зіткнень між компонентами плазми на характеристики її взаємодії з макрочастинками. При цьому можна знехтувати впливом зіткнень між зарядженими компонентами плазми, адже відповідні довжини вільного пробігу для цих зіткнень значно перевищують довжину Дебая в плазмі. Зіткнення електронів з атомами також практично не впливають на взаємодію плазми з макрочастинками. Це пояснюється тим, що електрони, які відштовхуються частинкою, перебувають, як правило, у стані, близькому до стану термодинамічної рівноваги. З іншого боку, зіткнення іонів з атомами мають значний вплив на характеристики взаємодії плазми з макрочастинками [21]. Виходячи з цього, існуючі підходи та моделі найчастіше класифікують в залежності від співвідношення між довжиною Дебая в плазмі та довжиною вільного пробігу для іон-атомних зіткнень (l_{ia}). Виділяють такі три випадки: беззіткневий режим ($l_{\text{ia}} \gg r_D$), гідродинамічний режим ($l_{\text{ia}} \ll r_D$), та слабкозіткневий (перехідний) режим ($l_{\text{ia}} \sim r_D$). Зазначимо також, що в типовій запорошеній плазмі, як правило, виконується співвідношення $l_{\text{ea}} \gg l_{\text{ia}}$, де l_{ea} це довжина вільного пробігу для зіткнень електрон-атом. Нижче, в розділах 1.1 – 1.3 наведено опис підходів та моделей, що застосовуються для дослідження взаємодії плазми з макрочастинками в різних режимах зіткнень.

1.1 Процеси взаємодії плазми з макрочастинками в беззіткневому наближенні

1.1.1 Теорія обмеженого орбітального руху

Процеси заряджання та екранування макрочастинок в беззіткневому режимі найчастіше розглядають на основі теорії обмеженого орбітального руху (orbit motion limited theory) [35, 36, 37]. Даний підхід, що базується на дослідженні руху іонів та електронів в полі зарядженої частинки, дозволяє отримати аналітичні вирази для плазмових струмів та густини електричного заряду навколо частинки, виходячи тільки із законів збереження моменту імпульсу та енергії. За допомогою цих виразів можна визначити основні характеристики процесів заряджання та екранування частинки в плазмі. Так, значення електричного потенціалу на поверхні частинки (плаваючий потенціал) може бути знайдено із балансу електронного та іонного струмів, а розподіл потенціалу навколо частинки отримується шляхом розв'язку нелінійного рівняння Пуассона.

Головним недоліком теорії обмеженого орбітального руху є те, що вона не враховує можливість існування потенційних бар'єрів для руху іонів в полі частинки. Зокрема, у роботі [38] було доведено, що ця теорія може бути застосована лише у випадку, коли розподіл електричного потенціалу φ навколо частинки задовольняє умові $\varphi \geq \varphi_a a^2/r^2$, де r це відстань від центру частинки. У роботі [39] було показано, що ця умова завжди виконується, коли $a/r_D \to 0$. Проте у випадку, коли $a \sim r_D$, теорія обмеженого орбітального руху, як правило, не може бути застосована і необхідно використовувати більш складні моделі процесу екранування, що базуються на дослідженні траєкторій руху іонів та електронів в полі частинки [40, 41, 42, 43, 44].

Окрім цього, теорія обмеженого орбітального руху не враховує вплив іонів, що рухаються по замкненим орбітам навколо частинки (зв'язані іони). Вперше цю проблему було розглянуто в роботі [40], де утворення зв'язаних іонних станів пояснювалося наявністю слабких іон-атомних зіткнень в плазмі. Ця ідея була пізніше використана в роботах [45, 46] для дослідження впливу зв'язаних іонів на процеси заряджання та екранування частинки. Найбільш повне дослідження впливу зв'язаних іонних станів на процес екранування було здійснено в роботі [44] на основі точних аналітичних розв'язків стаціонарного рівняння Власова. У цій роботі було показано, що зв'язані іонні стани виникають тільки у вузькому шарі поблизу поверхні частинки і, отже, практично не впливають на розподіл електричного потенціалу навколо неї. Проте повна концентрація зв'язаних іонів поблизу поверхні не може бути знайдена на основі моделі, запропонованої в роботі [44]. Загалом, стаціонарний розподіл концентрації зв'язаних іонів можна визначити тільки досліджуючи перебіг процесів заряджання та екранування частинки у часі.

1.1.2 Модифікована теорія парних кулонівських зіткнень

Для опису передачі імпульсу від електронів та іонів до заряджених макрочастинок в беззіткневому режимі використовують, як правило, теорію парних зіткнень (binary collision approach) [47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54]. Ця теорія є модифікацією класичної теорії кулонівських зіткнень в плазмі, що додатково враховує процес поглинання електронів та іонів на поверхні частинки, а також ефекти, зумовлені скінченним розміром частинок. Застосування теорії парних зіткнень дозволяє розрахувати силу опору, яка діє на частинку з боку іонів та електронів в плазмі. Найчастіше, внаслідок великої різниці між масами іону та електрону, повна сила опору з боку заряджених компонент плазми визначається силою опору з боку іонів. Проте, як було показано в роботі [52], урахування електронної сили опору може бути важливим в деяких ситуаціях, коли плазма знаходиться під дією зовнішнього електричного поля.

Відповідно до теорії парних зіткнень, силу опору обчислюють як суму двох складових: сили, що виникає внаслідок прямої механічної взаємодії між частинкою та компонентами плазми (механічна складова), та сили, що виникає внаслідок передачі імпульсу під час пружного розсіювання компонент плазми в полі зарядженої частинки (електрична складова). Механічна складова, як правило, обчислюється за допомогою теорії обмеженого орбітального руху, а електрична складова визначається шляхом застосування модифікованої теорії кулонівських зіткнень. Для обчислення електричного потенціалу φ навколо частинки найчастіше використовують потенціал Юкави $\varphi = (q/r)\exp\left(-r/\lambda\right)$, де q це величина заряду макрочастинки, r це відстань від її центру; а λ це характерна довжина екранування заряду макрочастинки в плазмі. При цьому, щоб врахувати ефекти, пов'язані із впливом спрямованого руху плазми на розподіл потенціалу (зокрема його анізотропію), беруть до уваги залежність довжини екранування λ від швидкості руху компонент плазми [54].

Процес розсіювання компонент плазми в полі частинки характеризують параметром розсіювання $\beta = eq/m\upsilon^2\lambda$, де m та υ це маса та характерна швидкість компоненти плазми. Випадок, коли $\beta \ll 1$, відповідає розсіюванню на малі кути в межах дебаєвської сфери та називається режимом лінійного розсіювання. Для обчислення сили опору в цьому режимі може бути застосована класична теорія кулонівських зіткнень [47, 48]. У роботі [49] теорію кулонівських зіткнень було узагальнено на випадок розсіювання в слабконелінійному режимі, $\beta \sim 1$. Підхід, запропонований в цій роботі, дозволяє обчислювати силу опору для значень параметру розсіювання в діапазоні $\beta \le 5$. Обчислення сили опору у випадку розсіювання в сильнонелінійному режимі, $\beta \gg 1$, потребує суттєво іншого підходу, який було запропоновано в роботі [50]. Відзначимо, що існуючи моделі можуть бути застосовані лише у випадку, коли виконується умова $a \ll r_D$. Таким чином, досить залишається відкритою проблема обчислення сили опору з боку заряджених компонент плазми у випадку, коли радіус частинки є одного порядку із довжиною Дебая в плазмі ($a \sim r_D$).

1.1.3 Статистичне моделювання взаємодії плазми з частинками

Окрім аналітичних підходів, про які йшла мова в розділах 1.1.1 та 1.1.2, для дослідження процесів взаємодії беззіткневої плазми з макрочастинками застосовують також метод прямого статистичного моделювання (Particle-in-Cell Method). Так, у роботах [55, 56, 57, 58, 59, 60] моделювалися процеси заряджання та екранування частинок у потоку іонів. Зокрема, у роботі [55] було проаналізовано залежність потенціалу поверхні частинки від швидкості іонів, а також розглянуто питання про вплив потоку іонів на розподіл потенціалу довкола частинки. Більше детально розподіл потенціалу довкола зарядженої частинки у потоку іонів було досліджено в роботі [60]. У роботах [57, 58] було проаналізовано розподіл щільності потоку іонів по поверхні частинки. У роботі [56] процеси заряджання та екранування розглядалися для випадку, коли радіус частинки набагато більший за довжину Дебая у плазмі (квазінейтральний режим). Крім того, у роботах [58, 59] було досліджено залежність іонної сили опору від швидкості потоку іонів для різних значень радіуса частинки і різних параметрів навколишньої плазми. Зокрема, у роботі [59] було проведено детальний критичний аналіз різних існуючих моделей для розрахунку іонної сили опору. Окремо варто виділити роботу [61], у якій розглядалося питання про вплив зв'язаних іонних станів на величину заряду частинки і величину іонної сили опору. Як було показано у цій роботі, концентрація зв'язаних іонів поблизу поверхні частинки може бути достатньо високою, внаслідок чого зв'язані іонні стани можуть значно впливати на процеси заряджання та екранування частинок у потоку іонів.

Головною перевагою метода прямого статистичного моделювання є те, що він дає змогу враховувати ефекти, пов'язані із самоузгодженістю процесів взаємодії між плазмою та макрочастинками. При цьому результати, отримані шляхом чисельного моделювання, можуть бути використані для визначення меж застосування існуючих аналітичних моделей. Крім того, даний підхід дозволяє дослідити кінетику процесу заряджання частинок у часі. В межах цього підходу, наприклад, можна оцінити концентрацію зв'язаних іонів, яка не може бути обчислена за допомогою стаціонарних моделей. У свою чергу, основним недоліком такого методу є те, що чисельні похибки, які виникають у процесі статистичного усереднення, можуть бути досить значними. Зокрема, метод статистичного моделювання призводить до суттєвих похибок при його застосуванні для дослідження процесу взаємодії макрочастинки із дозвуковими потоками плазми.

1.2 Опис процесів взаємодії плазми з макрочастинками на основі дрейфово-дифузійних та гідродинамічних моделей

1.2.1 Процеси заряджання та екранування частинки в плазмі

У гідродинамічному режимі процеси заряджання та екранування частинок розглядають, як правило, на основі дрейфово-дифузійних моделей [62, 63, 64, 65, 66]. Відзначимо, що умови застосування цих моделей включають як умову $l_{\mathrm{ia}} \ll r_D$, так і умову $l_{\mathrm{ea}} \ll r_D$. У рамках дрейфово-дифузійного підходу розподіл густини електричного заряду поблизу частинки знаходять шляхом розв’язку рівнянь неперервності для іонів та електронів. При цьому припускають, що внаслідок поглинання іонів та електронів частинкою їхні концентрації на поверхні частинки дорівнюють нулю. Розподіл електричного потенціалу довкола частинки знаходять шляхом розв’язання рівняння Пуассона.

У роботах [64, 65, 66] на основі дрейфово-дифузійного підходу було проведено детальний аналіз процесів заряджання та екранування частинок у гідродинамічному режимі. Зокрема було показано, що електричний потенціал на великих відстанях від частинки завжди має асимптотичну поведінку кулонівського типу, тобто $\varphi \propto r^{-1}$, де r це відстань від центру частинки. Цей результат можна пояснити таким чином. У стаціонарному стані електронний та іонний струми $j_{\mathrm{e,i}}$ довкола частинки залежать від відстані як r^{-2}. За умови $l_{\mathrm{ia}}, l_{\mathrm{ea}} \ll r_D$, на великих відстанях від частинки виконується закон Ома, тобто $j_{\mathrm{e,i}} \propto E$, де E це самоузгоджене електричне поле. Відповідно, у гідродинамічному режимі асимптотична поведінка електричного поля має вигляд $E \propto r^{-2}$. При цьому потенціал залежить від відстані як r^{-1}. Варто відзначити, що при виконанні умови $l_{\mathrm{ia}}, l_{\mathrm{ea}} \gg r_D$ асимптотична поведінка потенціалу має вигляд $\varphi \propto r^{-2}$ [38], тобто у беззіткневому режимі потенціал на великих відстанях спадає швидше, ніж у гідродинамічному режимі. Таким чином, можна бачити, що зіткнення іонів та електронів з атомами суттєво впливають на розподіл електричного поля довкола частинки. Як було відзначено у роботі [66], вираз для асимптоти потенціалу у гідродинамічному режимі може бути записаний у вигляді $\varphi = q_{\mathrm{eff}}/r$, де q_{eff} це ефективний заряд частинки. Часто також вводять поняття відносного ефективного заряду $\hat{q}_{\mathrm{eff}} = q_{\mathrm{eff}}/q$, де q це повний заряд частинки. Величина $\hat{q}_{\mathrm{eff}}$ залежить від співвідношення між радіусом частинки (a) і довжиною Дебая (r_D) у плазмі, а також від співвідношення між температурами іонів (T_{i0}) та електронів (T_{e0}) у плазмі. Залежність відносного ефективного заряду від безрозмірного радіусу частинки a/r_D була отримана у роботах [64, 65] для випадку ізотермічної плазми, $T_{\mathrm{i0}} = T_{\mathrm{e0}}$. Зокрема було показано, що у випадку, коли $a/r_D \to 0$, відносний ефективний заряд прямує до значення $\hat{q}_{\mathrm{eff}} \approx 0.5$. Крім того, у роботі [66] було показано, що для малих частинок $a \ll r_D$ величина відносного ефективного заряду приблизно дорівнює $\left(1 + T_{\mathrm{i0}}/T_{\mathrm{e0}}\right)^{-1}$. Таким чином, у випадку $T_{\mathrm{e0}}/T_{\mathrm{i0}} \gg 1$ має місце співвідношення $q_{\mathrm{eff}} \approx q$, тобто практично відсутнє екранування заряду частинки плазмою.

1.2.2 Обчислення сили опору з боку іонів при наявності відносного руху між плазмою та частинкою

Питання, пов’язані із обчисленням іонної сили опору у гідродинамічному режимі, розглядалися як на основі дрейфово-дифузійних моделей [67, 68, 69], так і в рамках гідродинамічного підходу [70, 71, 72, 73, 74, 75]. При цьому в усіх роботах припускалося, що виконується умова $a \ll r_D$. У роботах [67, 68, 69] розглядався процес динамічного екранування зарядженої частинки, яка рухається з постійною швидкістю у плазмі. Зокрема, в роботі [67] було отримано інтегральний вираз для сили опору, яка діє на частинку з боку самоузгодженого електричного поля. Даний вираз містить відносний ефективний заряд частинки q_{eff} як вільний параметр. Результати розрахунків, отримані на основі цього виразу, демонструють, що при характерних значеннях відносного ефективного заряду ($q_{\mathrm{eff}} \approx 0.5$ при $a \ll r_D$) іонна сила опору змінює знак, тобто стає спрямованою уздовж швидкості руху частинки. Як відзначалося у роботі [67], цей ефект є наслідком взаємодії заряду частинки з анізотропією електричного поля поблизу неї і тісно пов'язаний із поглинанням іонів та електронів на поверхні частинки. На основі інтегрального виразу для іонної сили опору, отриманого в роботі [67], у роботах [68, 69] було виведено більш простий аналітичний вираз, який може бути використано за умови $u/\upsilon_{\mathrm{i0}} \ll l_{\mathrm{ia}}/r_D$, де u це швидкість частинки, а υ_{i0} це теплова швидкість руху іонів. У роботах [68, 69] також було показано, що іонна сила опору, яка діє на поглинаючу частинку, може бути спрямована уздовж швидкості її руху. Крім того, у цих роботах було показано, що за деяких умов ($T_{\mathrm{e0}} \gg T_{\mathrm{i0}}$) абсолютна величина іонної сили опору є одного порядку із силою опору з боку атомів, яка завжди спрямована проти швидкості руху частинки. Слід відзначити, що в цьому випадку повна сила опору, яка діє на частинку, може зменшуватися практично до нуля.

Схожі результати було отримано і в роботах [70, 71, 72, 73, 74, 75], де розглядалася задача про взаємодію частинки з потоками іонів та електронів за наявності зовнішнього електричного поля. При цьому для опису динаміки компонент плазми у зовнішньому полі використовувалася стаціонарна система рівнянь гідродинаміки з рівнянням Пуассона для розрахунку самоузгодженого електричного потенціалу. У роботах [70, 71, 72, 73, 74, 75] на основі описаного вище гідродинамічного підходу було виведено вирази для іонної сили опору, яка діє на частинку у різних експериментальних ситуаціях. Умова застосування цих виразів формулюється як $u/\upsilon_{\mathrm{i0}} \ll l_{\mathrm{ia}}/r_D$, де u це швидкість іонів на значній відстані від частинки. У цих роботах було показано, що у більшості випадків іонна сила опору спрямована проти потоку іонів, так само як і в процесі руху частинки в плазмі. Від'ємні значення іонної сили опору були також отримані в роботі [76] на основі аналізу ліній току навколо частинки. Слід відзначити, що модель, запропонована у цій роботі, є спрощеною, оскільки вона ґрунтується на припущенні про рівність нулю концентрації іонів у кільватерній зоні за частинкою. Зокрема, вираз для іонної сили опору, отриманий у даній роботі, не залежить від швидкості частинки при $u/\upsilon_{i0} \to 0$.

Як відзначалося вище, внаслідок того, що іонна сила опору в гідродинамічному режимі спрямована проти швидкості потоку іонів, існує можливість руху частинки в надплинному режимі без опору. Це питання детально обговорювалося в роботі [77] на основі виразу для іонної сили опору, отриманого в роботі [75]. Зокрема, було продемонстровано, що існує вузький діапазон параметрів плазми, у якому іонна сила опору може дорівнювати за абсолютною величиною силі опору з боку атомів. Як відзначалося у роботах [70, 72, 74, 77], одним з найважливіших факторів, які призводять до зміни знака іонної сили опору, є поглинання іонів та електронів на поверхні частинки. Так, у роботах [70, 74] було показано, що іонна сила опору, яка діє на непоглинаючу частинку, завжди є додатною, тобто завжди буде спрямована вздовж швидкості потоку іонів. Одним з можливих експериментальних підтверджень зниження повної сили опору за рахунок виникнення від'ємної сили тертя з боку іонів є аномальне нагрівання макрочастинок у експериментах з дослідження властивостей запорошеної плазми [78, 79, 80, 81].

Слід однак відзначити, що вирази для іонної сили опору, представлені в роботах [67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75], були отримані в рамках простих лінійних моделей і мають ряд недоліків. Зокрема, з цих виразів випливає, що іонна сила опору прагне до нескінченності, коли $l_{ia}/r_D \to 0$. Крім того, у вказаних роботах відсутнє якісне пояснення механізму, який призводить до зміни знаку іонної сили опору. У загальному випадку, для якісного пояснення цього ефекту необхідно проаналізувати розподіл густини зарядку довкола частинки. Також становить інтерес обчислення іонної сили опору у випадку, коли радіус частинки є одного порядку з довжиною Дебая в плазмі ($a \sim r_D$). Таким чином, можна зробити висновок, що проблема обчислення іонної сили опору в гідродинамічному режимі потребує додаткового вивчення на основі більш точних підходів, які дадуть змогу врахувати нелінійні ефекти, що виникають при взаємодії плазми з поглинаючою частинкою.

1.3 Процеси взаємодії плазми з макрочастинками в слабкозіткневому (перехідному) режимі

Найбільша увага в останній час приділяється опису процесів взаємодії плазми з макрочастинками в слабкозіткневому (перехідному) режимі. Це пов'язано з тим, що більшість експериментів в галузі запорошеної плазми проводиться за умов, коли довжина вільного пробігу для іон-атомних зіткнень є одного порядку з довжиною Дебая у плазмі ($l_{\mathrm{ia}} \sim r_D$). Тому значний інтерес становить дослідження залежності основних характеристик взаємодії плазми з макрочастинками від співвідношення між l_{ia} и r_D. Як було відзначено вище, до таких характеристик належать заряд частинки, розподіл електричного потенціалу довкола неї, а також іонна сила опору, що діє на частинку в плазмі. Розглянемо послідовно існуючі моделі та підходи, які використовуються для опису поведінки цих характеристик у перехідному режимі зіткнень.

1.3.1 Залежність заряду частинки від частоти іон-атомних зіткнень

У випадку, коли радіус частинки набагато менший за довжину Дебая в плазмі ($a \ll r_D$), залежність заряду частинки від співвідношення l_{ia}/r_D може бути отримана на основі моделей, запропонованих в роботах [82, 83, 84, 85]. У рамках цих моделей заряд частинки q обчислюється за допомогою співвідношення $q = a\varphi_a$, де φ_a це потенціал поверхні частинки. Значення потенціалу поверхні визначається з балансу іонного та електронного струмів. Основною проблемою в даному випадку є обчислення іонного струму на поверхні частинки, оскільки електронний струм найчастіше обчислюють за допомогою виразу, отриманого в рамках теорії обмеженого орбітального руху. У роботах [82, 83, 84, 85] було виведено різні аналітичні вирази для густини іонного струму на поверхні частинки. Так, у роботі [60] вираз для густини струму був отриманий на основі результатів чисельного моделювання заряджання частинки в зіткневій плазмі. Інший вираз було отримано в роботі [83] на основі модифікованої дрейфово-дифузійної моделі, яка додатково враховує наявність беззіткневого шару для іонів та електронів поблизу частинки. У роботі [84] вираз для іонного струму був виведений безпосередньо з аналітичного розв’язку модельного кінетичного рівняння для іонів. Крім того, інтерполяційна формула для обчислення густини іонного току в перехідному режимі була представлена в роботі [85].

Слід ще раз підкреслити, що моделі, запропоновані в роботах [82, 83, 84, 85], дають змогу розрахувати заряд частинки тільки для випадку, коли $a \ll r_D$. Питання про те, як залежить заряд частинки від співвідношення l_{ia}/r_D у випадку, коли радіус частинки стає одного порядку з довжиною Дебая в плазмі, залишається на даний момент відкритим. Як відзначалося раніше, у цьому випадку лінійний зв’язок між зарядом та потенціалом поверхні не виконується і для визначення заряду необхідно враховувати ефекти, пов’язані із нелінійним екрануванням частинки у плазмі.

1.3.2 Вплив іон-атомних зіткнень на розподіл електричного потенціалу навколо частинки

Розглянемо далі питання про вплив іон-атомних зіткнень на розподіл потенціалу довкола зарядженої частинки в слабкозіткневому режимі. Для випадків малих частинок ($a \ll r_D$) ця проблема досліджувалася в роботах [86, 87, 88] на основі лінійної кінетичної моделі із точковим стоком. У цих роботах було отримано аналітичні вирази для електричного потенціалу довкола частинки, які можуть бути використані за різних значень співвідношення l_{ia}/r_D. У роботі [87] вираз для потенціалу було виведено на основі припущення про те, що переріз поглинання іонів частинкою не залежить від швидкості. При цьому також припускалося, що виконана умова $l_{\mathrm{ia}} \gg r_D$. Однак, як було показано в роботі [87], отриманий вираз для потенціалу дає правильні результати і у протилежному випадку, коли $l_{\mathrm{ia}} \ll r_D$. Таким чином, вираз для потенціалу, отриманий в роботі [87], може бути використано (щонайменше формально) в усьому діапазоні значень l_{ia}/r_D. У роботах [86, 88] було виведено більш точні вирази для потенціалу довкола частинки, які враховують залежність перерізу поглинання іонів від швидкості. Ці вирази було отримано для двох граничних випадків $l_{\text{ia}} \ll r_D$ и $l_{\text{ia}} \gg r_D$, але, як відзначалося в роботі [88], вони також можуть бути використані для обчислення потенціалу в перехідному режимі. Таким чином, велике значення має визначення меж застосування виразів для потенціалу довкола частинки, отриманих в роботах [86, 87, 88]. Крім того, слід відзначити, що питання про вплив іон-атомних зіткнень на розподіл потенціалу довкола великих частинок ($a \sim r_D$) досі не розглядалося. Як було відзначено раніше, цю проблему має бути розглянуто на основі підходів, що дають змогу врахувати нелінійні ефекти, які виникають при екрануванні заряду частинки у плазмі.

1.3.3 Вплив іон-атомних зіткнень на силу опору з боку іонів

На завершення розглянемо також питання про вплив іон-атомних зіткнень на величину сили опору з боку іонів. Ця проблема досліджувалася у роботах [89, 90, 91] на основі лінійної кінетичної моделі. У цих роботах було виведено залежність іонної сили опору від швидкості потоку іонів u для двох граничних випадків $u/\upsilon_{\text{i0}} \to 0$ и $u/\upsilon_{\text{i0}} \to \infty$. У відповідності до результатів, отриманих у роботах [89, 90, 91], іонна сила опору має зростати при зменшенні відношення l_{ia}/r_D. Це суперечить результатам статистичного моделювання, які було отримано в роботі [92] для випадку, коли частинка знаходиться у плазмі під дією зовнішнього електричного поля. У цій роботі було показано, що іонна сила опору зменшується при зменшенні відношення l_{ia}/r_D. Зокрема, коли значення l_{ia}/r_D стають достатньо малими ($l_{\text{ia}}/r_D \le 0.1$), іонна сила опору змінює знак і стає від'ємною, тобто спрямованою проти потоку іонів. Це відповідає результатам, які були отримані в роботах [67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75] для випадку $l_{\text{ia}}/r_D \to 0$. Як було відзначено в роботі [75], суттєвим недоліком моделі, запропонованої в роботах [89, 90, 91], є той факт, що вона не враховує процес поглинання іонів та електронів частинкою. Таким чином, у роботі [92] було ще раз підтверджено, що поглинання іонів та електронів суттєво впливає на величину іонної сили опору. Зокрема, цей процес є однією з основних причин того, що іонна сила опору змінює знак при переході до гідродинамічного режиму. Слід відзначити, що результатів, представлених у роботі [92], недостатньо для повного аналізу впливу зіткнень на величину сили опору з боку іонів. Відкритим залишається питання про залежність іонної сили опору від частоти зіткнень у випадку, коли частинка рухається у плазмі. Крім того, в існуючих роботах не подано якісне пояснення механізму, який призводить до зменшення іонної сили опору зі зростанням частоти зіткнень. Таким чином, проблема взаємодії зарядженої макрочастинки з потоком плазми потребує більш детального вивчення в широкому діапазоні значень l_{ia}/r_D.

1.4 Висновки

Виходячи з наведеного в цьому розділі огляду сучасних робіт можна зробити такі висновки. Процеси взаємодії слабкоіонізованої плазми з макрочастинками досить добре вивчено у двох граничних випадках: беззіткневому режимі ($l_{\mathrm{ia}} \gg r_D$) та гідродинамічному режимі ($l_{\mathrm{ia}} \ll r_D$). Проте невирішеною залишається проблема обчислення іонної сили опору для великих частинок, розмір яких є одного порядку із довжиною Дебая в плазмі ($a \sim r_D$). В слабкозіткневому (перехідному) режимі ($l_{\mathrm{ia}} \sim r_D$) процеси взаємодії плазми з макрочастинками потребують більш детальних досліджень. Так, на даний час відсутні роботи, які б були присвячені розгляду процесів заряджання та екранування великих частинок ($a \sim r_D$) в слабкозіткневому режимі. Окрім цього, важливим є встановлення меж застосування існуючих кінетичних моделей, які було запропоновано для обчислення електричного потенціалу навколо малих частинок ($a \ll r_D$) при довільних значеннях відношення l_{ia}/r_D. Також залишається відкритим питання про залежність іонної сили опору, що діє на частинку під час її руху в плазмі, від частоти іон-атомних зіткнень. Зокрема, вимагає пояснення механізм, який призводить до зниження іонної сили опору в слабкозіткневому та гідродинамічному режимах.

РОЗДІЛ 2
ЗАСТОСУВАННЯ МОДЕЛЬНИХ КІНЕТИЧНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ОПИСУ ПРОЦЕСІВ ВЗАЄМОДІЇ СЛАБКОІОНІЗОВАНОЇ ПЛАЗМИ З МАКРОЧАСТИНКАМИ

Найбільш повне дослідження процесів взаємодії слабкоіонізованої плазми з макрочастинками може бути здійснено на основі самоузгодженої системи кінетичних рівнянь для функцій розподілу компонент плазми за швидкостями. В беззіткневому наближенні поведінку плазми найчастіше описують за допомогою відомої системи кінетичних рівнянь Власова [93], яку можна отримати безпосередньо із ланцюжка рівнянь Боголюбова-Борна-Гріна-Кірквуда-Івона [94]. При наявності зіткнень між компонентами плазми, систему рівнянь Власова доповнюють інтегралами парних зіткнень больцманівського типу [95]. Модифіковану таким чином систему рівнянь Власова називають рівняннями Власова-Больцмана. При цьому для опису зіткнень за участю нейтральних компонент плазми використовують класичні інтеграли зіткнень Больцмана [96], а для опису зіткнень між зарядженими компонентами плазми використовують інтеграл зіткнень Ландау [97] чи Балеску-Ленарда [98, 99]. Слід зазначити, що вказані інтеграли зіткнень мають досить складну структуру, що значно обмежує їхнє застосування для розв'язку задач, важливих з практичної точки зору. У зв'язку із цим широкого застосування набули кінетичні рівняння із модельними інтегралами зіткнень (модельні кінетичні рівняння) [23, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107]. Модельні інтеграли зіткнень мають, як правило, просту релаксаційну форму та описують наближення функції розподілу до єдиного рівноважного стану системи. Вперше ідея використання модельних інтегралів зіткнень була запропонована Батнагаром, Гроссом та Круком в роботі [100] для опису зіткнень в однокомпонентному газі. Модельні інтеграли зіткнень для опису зіткнень у багатокомпонентних газових та плазмових сумішах були побудовані в роботах [23, 101, 102, 103, 104, 105, 106]. На даний час найбільш точними є моделі, які було запропоновано в роботах [106] та [23]. Хоча модельні інтеграли, розроблені в даних роботах, відрізняються за формою, але обидва вони задовольняють усім основним властивостям повних інтегралів зіткнень больцманівського типу. Нещодавно в роботах [107, 108] було також розроблено релаксаційні моделі для непружних зіткнень в газових сумішах при наявності бімолекулярних хімічних реакцій. Відзначимо, що модель, запропонована в роботі [108], може бути легко узагальнена для опису процесів іонізації та рекомбінації в плазмі. Завдяки відносній простоті модельних інтегралів зіткнень останнім часом стрімкого розвитку набув підхід, якій базується на безпосередньому чисельному розв’язку модельних кінетичних рівнянь. На даний час досить добре розроблені методи чисельного розв’язку модельних кінетичних рівнянь, що описують газодинамічні процеси в нейтральних газах [109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118]. З іншого боку, досі детально не розглядалася проблема розробки чисельного методу для розв’язку системи рівнянь Власова із модельними інтегралами зіткнень, яку можна умовно назвати рівняннями Власова-Батнагара-Гросса-Крука (Власова-БГК).

В цьому розділі описано метод чисельного розв’язку системи кінетичних рівнянь Власова-БГК, який використовується в даній роботі для дослідження процесів заряджання та екранування макрочастинки у плазмі, а також процесу обтікання частинки плазмою. У зв’язку із цим особлива увага приділяється чисельному розв’язку цих рівнянь для проблем із сферичною та аксіальною симетрією. Слід зазначити, що запропонований чисельний метод може бути застосовано не лише для дослідження зазначених вище процесів, а й для розгляду більш широкого кола проблем, що виникають у різних галузях фізики плазми.

Структура цього розділу така. У підрозділі 2.1 надано опис самоузгодженої системи кінетичних рівнянь Власова-Больцмана та наведено основні властивості повних інтегралів зіткнень між компонентами плазми. В підрозділі 2.2 проведено порівняльний аналіз існуючих релаксаційних моделей, які використовуються для опису зіткнень в багатокомпонентних сумішах, та запропоновано нову форму модельних інтегралів зіткнень між компонентами плазми. В підрозділі 2.3 описано метод чисельного розв'язку рівнянь Власова-БГК у випадку сферичної та аксіальної симетрії. Розділ написаний на основі робіт [22 – 25].

2.1 Самоузгоджена система кінетичних рівнянь для компонент плазми

Розглянемо самоузгоджену систему кінетичних рівнянь Власова-Больцмана для компонент частково іонізованої плазми, яка містить електрони (e), однозарядні іони (i) та атоми (a). Функції розподілу компонент плазми за швидкостями позначимо, як f_α, а маси компонент позначимо, як m_α, де $\alpha = \mathrm{e, i, a}$. В загальному випадку функції розподілу залежать від часу $t > 0$, вектору положення в фізичному просторі $\vec{r}$ та вектору молекулярної швидкості $\vec{\xi}$. Система кінетичних рівнянь Власова-Больцмана має вигляд

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\xi} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{E} e}{m_\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} \right\} f_\mathrm{i} = J_\mathrm{i} , \tag{2.1}$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\xi} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} - \frac{\vec{E} e}{m_\mathrm{e}} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} \right\} f_\mathrm{e} = J_\mathrm{e} , \tag{2.2}$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\xi} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right\} f_\mathrm{a} = J_\mathrm{a} , \tag{2.3}$$

де $\vec{E}$ це вектор самоузгодженого електричного поля, e це елементарний електричний заряд, а J_i, J_e та J_a це повні інтеграли зіткнень для іонів, електронів та атомів, відповідно. Повні інтеграли зіткнень є сумою інтегралів зіткнень між різними компонентами плазми

$$J_\alpha = \sum_{\beta = \mathrm{e,i,a}} J_{\alpha\beta} , \tag{2.4}$$

де $\alpha = \mathrm{e, i, a}$; $J_{\alpha\alpha}$ це інтеграли зіткнень між частинками типу α, а $J_{\alpha\beta}$ це перехресні інтеграли зіткнень між компонентами типу α та β. В загальному випадку повні інтеграли зіткнень є функціоналами від функцій розподілення усіх компонент плазми, тобто $J_\alpha = J_\alpha \left(f_\mathrm{i}, f_\mathrm{e}, f_\mathrm{a} \right)$. Як відмічалося раніше, інтеграли зіткнень за участю атомів записують у вигляді класичних інтегралів Больцмана, а інтеграли зіткнень між зарядженими частинками записують у вигляді інтегралів Ландау чи Балеску-Ленарда. Конкретні вирази для цих інтегралів зіткнень можна знайти у роботах [96, 97, 98].

Система кінетичних рівнянь (2.1) – (2.3) доповнюється рівнянням Пуассона для знаходження потенціалу φ самоузгодженого електричного поля

$$\Delta\varphi = -4\pi e\left(n_{\mathrm{i}} - n_{\mathrm{e}}\right), \tag{2.5}$$

де n_{i} та n_{e} це концентрації іонів та електронів, відповідно. Основні макроскопічні параметри компонент плазми, такі як концентрації n_α, швидкості $\vec{u}_\alpha$ та температури T_α знаходяться шляхом обчислення моментів функцій розподілу

$$n_\alpha = \langle f_\alpha \rangle, \tag{2.6}$$

$$\vec{u}_\alpha = n_\alpha^{-1}\left\langle \vec{\xi} f_\alpha \right\rangle, \tag{2.7}$$

$$T_\alpha = (3kn_\alpha)^{-1}\left\langle m_\alpha \vec{c}_\alpha f_\alpha \right\rangle, \tag{2.8}$$

де k це постійна Больцмана, $\vec{c}_\alpha = \vec{\xi} - \vec{u}_\alpha$ це вектор відносної швидкості, а оператор інтегрування в просторі швидкостей має вигляд

$$\langle \bullet \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \bullet \; d\vec{\xi}\,. \tag{2.9}$$

Розглянемо далі основні властивості інтегралів зіткнень між компонентами плазми. По-перше, повинні виконуватися закони збереження маси, імпульсу та енергії, які мають місце при пружних зіткненнях компонент плазми. Для інтегралів зіткнень $J_{\alpha\alpha}$ між частинками одного типу закони збереження записуються таким чином:

$$\left\langle J_{\alpha\alpha} \right\rangle = 0, \tag{2.10}$$

$$\left\langle m\vec{\xi}_\alpha J_{\alpha\alpha} \right\rangle = 0, \tag{2.11}$$

$$\left\langle m_\alpha \vec{\xi}^{\,2} J_{\alpha\alpha} \right\rangle = 0. \tag{2.12}$$

Для перехресних інтегралів зіткнень $J_{\alpha\beta}$ закони збереження мають вигляд

$$\left\langle J_{\alpha\beta} \right\rangle = 0\,, \tag{2.13}$$

$$\left\langle m_\alpha \vec{\xi}\, J_{\alpha\beta} \right\rangle + \left\langle m_\beta \vec{\xi}\, J_{\beta\alpha} \right\rangle = 0\,, \tag{2.14}$$

$$\left\langle m_\alpha \vec{\xi}^{\,2} J_{\alpha\beta} \right\rangle + \left\langle m_\beta \vec{\xi}^{\,2} J_{\beta\alpha} \right\rangle = 0\,. \tag{2.15}$$

Використовуючи рівності (2.10) – (2.15) можна також отримати закони збереження для повних інтегралів зіткнень

$$\left\langle J_\alpha \right\rangle = 0\,, \tag{2.16}$$

$$\sum_\alpha \left\langle m_\alpha \vec{\xi}\, J_\alpha \right\rangle = 0\,, \tag{2.17}$$

$$\sum_\alpha \left\langle m_\alpha \vec{\xi}^{\,2} J_\alpha \right\rangle = 0\,, \tag{2.18}$$

де $\alpha = \mathrm{e, i, a}$. За рахунок зіткнень плазма прямує до стану термодинамічної рівноваги, в якому усі компоненти плазми мають розподіл Максвелла за швидкостями з деякою загальною швидкістю та температурою

$$M_{\alpha 0} = n_{\alpha 0} \left(\frac{m_\alpha}{2\pi k T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_\alpha \vec{c}_0^{\,2}}{2kT_0} \right), \tag{2.19}$$

де $\alpha = \mathrm{e, i, a}$; $n_{\alpha 0}$ це концентрації компонент плазми в стані рівноваги; $\vec{c}_0 = \vec{\xi} - \vec{u}_0$ це відносна швидкість в стані рівноваги; $\vec{u}_0$ та T_0 це загальні швидкість та температура плазми. Слід зазначити, що функції розподілення (2.19) є розв'язком системи рівнянь $J_\alpha\left(M_{\mathrm{i}0}, M_{\mathrm{e}0}, M_{\mathrm{a}0}\right) = 0$, де $\alpha = \mathrm{e, i, a}$. Із симетричних властивостей інтегралів зіткнень також випливають нерівності

$$\left\langle J_{\alpha\alpha} \ln f_\alpha \right\rangle \le 0\,, \tag{2.20}$$

$$\left\langle J_{\alpha\beta} \ln f_\alpha \right\rangle + \left\langle J_{\beta\alpha} \ln f_\beta \right\rangle \le 0\,, \tag{2.21}$$

які мають назву нерівностей Больцмана. При цьому рівність в (2.20) та (2.21) досягається тільки тоді, коли функції розподілу компонент плазми за швидкостями мають вигляд (2.19). Виконання нерівностей (2.20) та (2.21) гарантує виконання H-теореми Больцмана, яка записується таким чином

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial \vec{h}}{\partial \vec{r}}\leq 0\,, \tag{2.22}$$

де $H=\sum\limits_{\alpha=\mathrm{e,i,a}}\left\langle f_\alpha \ln f_\alpha\right\rangle$, а $\vec{h}=\sum\limits_{\alpha=\mathrm{e,i,a}}\left\langle\vec{\xi}\, f_\alpha \ln f_\alpha\right\rangle$. Використовуючи нерівність (2.22), можна показати, що стан рівноваги (2.19) є стійким.

Слід також відзначити, що у деяких випадках вдається отримати аналітичні вирази для перших моментів перехресних інтегралів зіткнень. Зокрема такі вирази може бути отримано коли потенціал взаємодії між частинками спадає як r_d^{-5}, де r_d це відстань між ними (випадок максвеллівських частинок). Ці вирази, які можна знайти в роботах [96, 104], мають такий вигляд

$$\dot{P}_{\alpha\beta}=\left\langle m_\alpha\vec{\xi}\,J_{\alpha\beta}\right\rangle=A\mu_{\alpha\beta}\left(\vec{u}_\beta-\vec{u}_\alpha\right) \tag{2.23}$$

$$\dot{E}_{\alpha\beta}=\left\langle\frac{m_\alpha\vec{\xi}^{\,2}}{2}J_{\alpha\beta}\right\rangle=\vec{u}_{\alpha\beta}\dot{P}_{\alpha\beta}+\frac{2}{m_\alpha+m_\beta}A\mu_{\alpha\beta}\left(\frac{3}{2}kT_\beta-\frac{3}{2}kT_\alpha\right), \tag{2.24}$$

де

$$\mu_{\alpha\beta}=\frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha+m_\beta},\qquad \vec{u}_{\alpha\beta}=\frac{m_\alpha\vec{u}_\alpha+m_\beta\vec{u}_\beta}{m_\alpha+m_\beta},\qquad A=\nu_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta,$$

а коефіцієнт $\nu_{\alpha\beta}$ залежить тільки від зведеної маси частинок $\mu_{\alpha\beta}$ та параметрів їх взаємодії. Слід відзначити, що для максвелівських частинок вирази (2.23) та (2.24) є точними. Якщо виконується умова

$$\left(\vec{u}_\alpha-\vec{u}_\beta\right)^2\Big/\left(2kT_\alpha/m_\alpha+2kT_\beta/m_\beta\right)\ll 1,$$

то вирази (2.23) та (2.24) можна отримати також для довільного степеневого потенціалу взаємодії між частинками, але в даному випадку ці вирази будуть наближеними, а коефіцієнт $\nu_{\alpha\beta}$ буде залежати також від температур T_α та T_β. Конкретний вигляд коефіцієнту $\nu_{\alpha\beta}$ для різних потенціалів взаємодії можна знайти у роботах [96, 104]. Як було показано в книзі [95], вирази (2.23) та (2.24) можна також застосовувати для опису процесів обміну імпульсом та енергією в частково іонізованій плазмі.

Як було зазначено вище, з точки зору подальшого застосування рівнянь Власова-Больцмана для дослідження процесів взаємодії плазми з макрочастинками, найбільш важливим є розв’язок цих рівнянь для проблем, що мають сферичну та аксіальну симетрію. Розглянемо як виглядає система кінетичних рівнянь у цих двох випадках. Спочатку розглянемо сферично симетричну форму рівнянь Власова-Больцмана. Для цього введемо сферичну систему координат (r, φ, θ), де r це відстань від центру координат, а φ, θ це азимутальний та зенітний кути, відповідно. Для проблем, що мають сферичну симетрію, функції розподілу компонент плазми залежать від часу t, відстані r, радіальної швидкості ξ_r та модуля поперечної швидкості $\xi_\perp = \sqrt{\xi_\varphi^2 + \xi_\theta^2}$, де ξ_φ, ξ_θ це компоненти молекулярної швидкості вздовж азимутальної та зенітної координатних ліній, відповідно. У цьому випадку оператор конвективного переносу функції розподілу має вигляд

$$\vec{\xi}\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \frac{\xi_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}r + \frac{\xi_\perp^2}{r}\frac{\partial}{\partial \xi_r} - \frac{\xi_r}{r}\frac{\partial}{\partial \xi_\perp}\xi_\perp, \tag{2.25}$$

а оператор переносу функції розподілу під дією електричного поля має вигляд

$$\vec{E}\frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} = E_r \frac{\partial}{\partial \xi_r}, \tag{2.26}$$

де E_r це проекція вектору електричного поля на вісь r. При цьому дві інші проекції вектору $\vec{E}$ на кутові координатні лінії дорівнюють нулю. Оператор Лапласа в рівнянні Пуассона має вигляд

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left\{r^2 \frac{d}{dr}\right\}. \tag{2.27}$$

Оператор інтегрування в просторі швидкостей (2.9) набуває вигляду

$$\langle \bullet \rangle = 2\pi \int_0^\infty \int_0^\pi \bullet\, \xi^2 \sin\omega\, d\omega\, d\xi\,. \tag{2.28}$$

При цьому вектори макроскопічної швидкості мають лише одну відмінну від нуля компоненту, тобто $\vec{u}_\alpha = (u_\alpha, 0, 0)$, а макроскопічні параметри n_α, T_α та u_α залежать тільки від координати r.

Як відзначалося в роботах [114, 119], для подальшого чисельного розв'язку кінетичних рівнянь більш придатним є використання полярних координат в просторі швидкостей. Введемо в площині $(\xi_r, \xi_\perp)$ полярні координати (ξ, ω), що визначаються як $\xi_r = \xi \cos\omega$, $\xi_\perp = \xi \sin\omega$. Тоді оператор конвективного переносу функції розподілу буде мати вигляд

$$\vec{\xi}\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \frac{\xi_r}{r}\frac{\partial}{\partial r} r - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \omega}\xi_\perp, \tag{2.29}$$

а оператор переносу функції розподілу під дією електричного поля буде

$$\vec{E}\frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} = \frac{E_r}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\xi_r - \frac{E_r}{\xi}\frac{\partial}{\partial \omega}\sin\omega. \tag{2.30}$$

Розглянемо далі вісесиметричну форму рівнянь Власова-Больцмана. Введемо циліндричну систему координат (x, r, θ), де x це вісь симетрії, а (r, θ) це полярні координати в площині, яка перпендикулярна вісі симетрії. Для проблем, що мають аксіальну симетрію, функції розподілу компонент плазми залежать від часу t, координати x, відстані r, та відповідних компонент молекулярної швидкості $(\xi_x, \xi_r, \xi_\theta)$. Як і у випадку сферичної симетрії, для подальшого чисельного розв'язку вісесиметричних кінетичних рівнянь більш придатним є використання полярних координат в просторі швидкостей. Введемо в площині (ξ_r, ξ_θ) полярні координати (ξ, ω), що визначаються як $\xi_r = \xi \cos\omega$, $\xi_\theta = \xi \sin\omega$. Тоді оператор конвективного переносу функції розподілу буде мати вигляд

$$\vec{\xi}\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \xi_x \frac{\partial}{\partial x} + \xi_r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\xi \sin\omega}{r}\frac{\partial}{\partial \omega}, \tag{2.31}$$

а оператор переносу функції розподілу під дією електричного поля буде

$$\vec{E}\frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} = E_x \frac{\partial}{\partial \xi_x} + E_r \cos\omega \frac{\partial}{\partial \xi} - E_r \frac{\sin\omega}{\xi}\frac{\partial}{\partial \omega}, \tag{2.32}$$

де E_x та E_r це проекції електричного поля на вісі x та r, відповідно. При цьому азимутальна проекція електричного поля E_θ дорівнює нулю. Оператор Лапласа в рівнянні Пуассона має вигляд

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right). \tag{2.33}$$

Оператор інтегрування в просторі швидкостей приймає вигляд

$$\langle \bullet \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{0}^{2\pi} \bullet\, \xi\, d\xi_x\, d\xi\, d\omega. \tag{2.34}$$

При цьому азимутальна проекція векторів макроскопічної швидкості дорівнює нулю, тобто $\vec{u}_\alpha = \left(u_\alpha^x, u_\alpha^r, 0\right)$, а макроскопічні параметри n_α, T_α, u_α^x та u_α^r залежать від координат x, r і не залежать від азимутального кута θ.

2.2 Порівняльний аналіз модельних інтегралів зіткнень

Як було відмічено на початку цього розділу, у зв'язку із тим, що повні інтеграли зіткнень в кінетичних рівняннях (2.1) – (2.3) мають досить складну структуру, широкого застосування набули кінетичні рівняння із модельними інтегралами зіткнень. Вперше ідея побудови модельних інтегралів зіткнень для суміші газів була запропонована Гроссом та Круком у роботі [101]. Проте в цій роботі не було отримано виразів для перехресних інтегралів зіткнень у завершеному вигляді. Розвиваючи ідею, запропоновану в роботі [101], Морзе та Хамел розробили релаксаційну модель для опису зіткнень в багатокомпонентній суміші газів у роботах [102, 103]. Зокрема вони отримали вирази для перехресних модельних інтегралів зіткнень, які задовольняють закони збереження (2.13) – (2.15) та дозволяють отримати вирази (2.23) – (2.24) для швидкості зміни імпульсу та енергії. Суттєвим недоліком моделі Морзе та Хамеля є те, що для цієї моделі можуть порушуватися нерівності Больцмана, а отже і Н-теорема. Пізніше в роботі [105] було відмічено, що модель Морзе та Хамеля не задовольняє також принцип нерозрізнюваності частинок, згідно з яким кінетичні рівняння для суміші газів повинні переходити в кінетичне рівняння для однокомпонентного газу у випадку, коли розглядаються механічно еквівалентні частинки. В роботі [105] було запропоновано іншу релаксаційну модель, яка задовольняє принцип нерозрізнюваності. Але при цьому внутрішня енергія компонент плазми в даній моделі може набувати від'ємних значень. Як правило, це трапляється, коли ця модель застосовується для опису зіткнень в суміші, де маса однієї із компонент набагато менша за маси інших компонент (наприклад електрони в частково іонізованій плазмі).

Нещодавно в роботі [106] було розроблено ще один варіант релаксаційної моделі для опису зіткнень в багатокомпонентній суміші газів. Для модельних інтегралів зіткнень, запропонованих у цій роботі, виконуються усі основні властивості повних інтегралів зіткнень больцманівського типу, включаючи H-теорему та принцип нерозрізнюваності частинок. Окрім цього, можна довести, що для даної моделі температури компонент суміші завжди є додатними. Розглянемо стисло основні положення цієї моделі. Відповідно до роботи [106] модельні інтеграли зіткнень для компонент плазми можуть бути записані таким чином

$$J_\alpha = \omega_\alpha \left(\hat{M}_\alpha - f_\alpha \right), \tag{2.35}$$

де $\alpha = \mathrm{e}, \mathrm{i}, \mathrm{a}$; ω_α це повна частота зіткнень частинок сорту α з іншими компонентами плазми, а функція $\hat{M}_\alpha$ має вигляд

$$\hat{M}_\alpha = n_\alpha \left(\frac{m_\alpha}{2\pi k \hat{T}_\alpha} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{m_\alpha \left(\vec{\xi} - \hat{\vec{u}}_\alpha \right)^2}{2k\hat{T}_\alpha} \right]. \tag{2.36}$$

Функція (2.36) містить деяку ефективну температуру $\hat{T}_\alpha$ та ефективну швидкість $\hat{\vec{u}}_\alpha$, які в загальному випадку відрізняються від істинних значень температури T_α та швидкості $\vec{u}_\alpha$. Модельний інтеграл зіткнень (2.35) описує релаксацію функції розподілення f_α до стану рівноваги. При цьому в кожний момент часу температура $\hat{T}_\alpha$ та швидкість $\hat{\vec{u}}_\alpha$ є тими макроскопічними параметрами, до яких іде релаксація температури та швидкості частинок сорту α. Ефективні макроскопічні параметри $\hat{T}_\alpha$ та $\hat{\vec{u}}_\alpha$ визначаються із умови, щоб перші моменти інтегралу зіткнень (2.36) дорівнювали відомим виразам (2.23) – (2.24) для швидкості зміни імпульсу та енергії за рахунок зіткнень:

$$\omega_\alpha n_\alpha m_\alpha \left(\hat{\vec{u}}_\alpha - \vec{u}_\alpha\right) = A\mu_{\alpha\beta}\left(\vec{u}_\beta - \vec{u}_\alpha\right), \tag{2.37}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\omega_\alpha n_\alpha\left(3k\hat{T}_a + m_\alpha \hat{\vec{u}}_\alpha^2 - kT_a - m_\alpha \vec{u}_\alpha^2\right) = A\mu_{\alpha\beta}\vec{u}_{\alpha\beta}\left(\vec{u}_\beta - \vec{u}_\alpha\right) + \\ + \frac{2}{m_\alpha + m_\beta} A\mu_{\alpha\beta}\left(\frac{3}{2}kT_\beta - \frac{3}{2}kT_\alpha\right),\end{gathered} \tag{2.38}$$

де $A = \nu_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta$, а коефіцієнт $\nu_{\alpha\beta}$ є вільним параметром моделі, який визначає частоту зіткнень між компонентами плазми. Тобто частота зіткнень $\omega_{\alpha\beta}$ між компонентами α та β дорівнює $\omega_{\alpha\beta} = \nu_{\alpha\beta} n_\beta$, а частота зіткнень $\omega_{\beta\alpha}$ між компонентами β та α дорівнює $\omega_{\beta\alpha} = \nu_{\alpha\beta} n_\alpha$. В роботі [106] було доведено, що ефективні макроскопічні параметри $\hat{T}_a$ та $\hat{\vec{u}}_\alpha$ завжди є додатними, якщо повна частота зіткнень для кожної компоненти задовольняє умові $\omega_\alpha \geq \sum_{\beta=\mathrm{e,i,a}} \omega_{\alpha\beta}$. При цьому для визначення ω_α найчастіше використовують умову $\omega_\alpha = \sum_{\beta=\mathrm{e,i,a}} \omega_{\alpha\beta}$. Також можна показати, що для модельних інтегралів зіткнень (2.35) виконуються закони збереження маси, імпульсу та енергії (2.16) – (2.18), а система модельних кінетичних рівнянь із інтегралами зіткнень (2.35) описує процес релаксації плазми до стану термодинамічної рівноваги, який визначається функціями розподілення (2.19). Із виразів (2.37) – (2.38) видно, що для модельних інтегралів зіткнень (2.35) виконуються співвідношення (2.23) та (2.24). Окрім цього, в роботі [106] було показано, що для релаксаційної моделі із інтегралами зіткнень (2.35) завжди виконується H-теорема (2.22) та принцип нерозрізнюваності частинок. Таким чином, для цієї моделі виконуються усі основні властивості повних інтегралів зіткнень больцманівського типу.

Відзначимо, проте, що описана вище релаксаційна модель побудована лише для повних інтегралів зіткнень J_α, тобто в ній не розглядаються інтеграли зіткнень типу $J_{\alpha\alpha}$ та перехресні інтеграли зіткнень $J_{\alpha\beta}$. У результаті цього дана модель не враховує вплив взаємодії окремих компонент плазми на процес її релаксації. Щоб позбавитися цього недоліку, було б бажано отримати вирази окремо для модельних інтегралів типу $J_{\alpha\alpha}$ та перехресних модельних інтегралів $J_{\alpha\beta}$. Слід зазначити, що в роботах Морзе та Хамеля [102, 103] такі вирази було отримано, але, як відзначалося вище, для їхньої моделі не виконуються нерівності Больцмана та Н-теорема. У роботі [23] автором було розроблено більш точну релаксаційну модель, яка схожа на модель Морзе та Хамеля, але для якої вдається провести доказ нерівностей Больцмана та Н-теореми. Перехресні інтеграли зіткнень в цій моделі мають вигляд

$$J_{\alpha\beta} = \nu_1 n_\beta \left(M_\alpha^1 - f_\alpha \right) + \nu_2 n_\beta \left(M_\alpha^2 - f_\alpha \right), \tag{2.39}$$

де $\nu_2 = 4\nu_1 \mu_{\alpha\beta} \big/ \left(m_\alpha + m_\beta \right)$, а функції M_α^1 та M_α^2 мають вигляд

$$M_\alpha^1 = n_\alpha \left(\frac{m_\alpha}{2\pi k \widehat{T}_\alpha} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{m_\alpha \left(\vec{\xi} - \vec{u}_{\alpha\beta} \right)^2}{2k\widehat{T}_\alpha} \right], \tag{2.40}$$

$$M_\alpha^2 = n_\alpha \left(\frac{m_\alpha}{2\pi k T_{\alpha\beta}} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{m_\alpha \left(\vec{\xi} - \vec{u}_\alpha \right)^2}{2k T_{\alpha\beta}} \right]. \tag{2.41}$$

Ефективні температури $\widehat{T}_\alpha$ та $T_{\alpha\beta}$ визначаються як

$$3k\widehat{T}_\alpha = 3kT_\alpha + m_\alpha \left(\vec{u}_{\alpha\beta} - \vec{u}_\alpha \right)^2, \tag{2.42}$$

$$T_{\alpha\beta} = \frac{T_\alpha + T_\beta}{2}. \tag{2.43}$$

Коефіцієнт ν_1 визначає частоту зіткнень $\omega_{\alpha\beta}$ між частинками сорту α та β, тобто $\omega_{\alpha\beta} = \nu_1 n_\beta$. Можна показати, що для інтегралів (2.39) виконується співвідношення (2.23) та (2.24), і отже виконуються закони збереження маси, імпульсу та енергії (2.13) – (2.15). Окрім цього із виразів (2.42) та (2.43) видно, що ефективні температури $\widehat{T}_\alpha$ та $T_{\alpha\beta}$ зажди є додатними. Так як ці параметри визначають процес релаксації істинної температури T_α, то можна зробити висновок, що ця температура також завжди є додатною.

Для інтегралів зіткнень між частинками сорту α використовується відомий вираз, який було запропоновано в роботі [100] для опису зіткнень в однокомпонентному газі:

$$J_{\alpha\alpha} = \nu_\alpha n_\alpha \left(M_\alpha - f_\alpha \right), \tag{2.44}$$

де $\nu_\alpha n_\alpha$ це частота зіткнень між частинками сорту α, а M_α це локально рівноважна функція Максвелла:

$$M_\alpha = n_\alpha \left(\frac{m_\alpha}{2\pi k T_\alpha} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{m_\alpha \left(\vec{\xi} - \vec{u}_\alpha \right)^2}{2kT_\alpha} \right]. \tag{2.45}$$

В роботі [100] було показано, що для модельних інтегралів (2.44) виконуються закони збереження (2.10) – (2.12). Таким чином, можна зробити висновок, що для описаної вище релаксаційної моделі виконуються також закони збереження (2.16) – (2.18).

Зупинимося більш детально на доказі нерівностей Больцмана для цієї моделі. Розглянемо спочатку доказ нерівностей (2.21). Введемо такі позначення

$$J_{\alpha\beta}^1 = \nu_1 n_\beta \left(M_\alpha^1 - f_\alpha \right), \qquad J_{\alpha\beta}^2 = \nu_2 n_\beta \left(M_\alpha^2 - f_\alpha \right),$$

$$J_{\beta\alpha}^1 = \nu_1 n_\alpha \left(M_\beta^1 - f_\beta \right), \qquad J_{\beta\alpha}^2 = \nu_2 n_\alpha \left(M_\beta^2 - f_\beta \right),$$

де функції M_β^1 та M_β^2 визначаються аналогічно функціям (2.40) та (2.41). Можна показати, що для інтегралів $J_{\alpha\beta}^1$ та $J_{\alpha\beta}^2$ виконуються такі рівності:

$$\left\langle J_{\alpha\beta}^1 \right\rangle = 0, \tag{2.46}$$

$$\left\langle J_{\alpha\beta}^2 \right\rangle = 0, \tag{2.47}$$

$$\left\langle m_\alpha \vec{\xi} J^1_{\alpha\beta} \right\rangle = \dot{P}^1_{\alpha\beta}, \tag{2.48}$$

$$\left\langle m_\alpha \vec{\xi} J^2_{\alpha\beta} \right\rangle = 0, \tag{2.49}$$

$$\left\langle \frac{m_\alpha \vec{\xi}^2}{2} J^1_{\alpha\beta} \right\rangle = \vec{u}_{\alpha\beta} \dot{P}^1_{\alpha\beta}, \tag{2.50}$$

$$\left\langle \frac{m_\alpha \vec{\xi}^2}{2} J^2_{\alpha\beta} \right\rangle = \frac{2}{m_\alpha + m_\beta} A\mu_{\alpha\beta} \left(\frac{3kT_\beta}{2} - \frac{3kT_\alpha}{2} \right), \tag{2.51}$$

де $\dot{P}^1_{\alpha\beta} = \nu_1 n_\alpha n_\beta \left(\vec{u}_\beta - \vec{u}_\alpha \right)$. Аналогічні вирази можна також отримати для інтегралів $J^1_{\beta\alpha}$ та $J^2_{\beta\alpha}$.

Приймаючи до уваги введені позначення, запишемо нерівність (2.21) у вигляді

$$\left\langle J^1_{\alpha\beta} \ln f_\alpha \right\rangle + \left\langle J^2_{\alpha\beta} \ln f_\alpha \right\rangle + \left\langle J^1_{\beta\alpha} \ln f_\beta \right\rangle + \left\langle J^2_{\beta\alpha} \ln f_\beta \right\rangle \le 0. \tag{2.52}$$

Розглянемо окремо кожний доданок в нерівності (2.52). Для доданку $\left\langle J^1_{\alpha\beta} \ln f_\alpha \right\rangle$ можна записати

$$\left\langle J^1_{\alpha\beta} \ln f_\alpha \right\rangle = -\nu_1 n_\beta \left\langle M^1_\alpha \left(f_\alpha / M^1_\alpha - 1 \right) \ln f_\alpha / M^1_\alpha \right\rangle + \left\langle J^1_{\alpha\beta} \ln M^1_\alpha \right\rangle, \tag{2.53}$$

Відомо, що для першого доданку в (2.53) виконується умова

$$-\nu_1 n_\beta \left\langle M^1_\alpha \left(f_\alpha / M^1_\alpha - 1 \right) \ln f_\alpha / M^1_\alpha \right\rangle \le 0. \tag{2.54}$$

При цьому рівність досягається тільки тоді, коли $f_\alpha = M^1_\alpha$. Доказ цього факту можна знайти, наприклад, у книзі [120]. Використовуючи рівняння (2.46), (2.48) та (2.50), для другого доданку в (2.53) можна записати

$$\left\langle J^1_{\alpha\beta} \ln M^1_\alpha \right\rangle = C^1_\alpha \left\langle J^1_{\alpha\beta} \right\rangle + \frac{1}{2k\widehat{T}_\alpha} \left\langle m_\alpha \vec{\xi}^2 J^1_{\alpha\beta} \right\rangle - \frac{\vec{u}_{\alpha\beta}}{k\widehat{T}_\alpha} \left\langle m_\alpha \vec{\xi} J^1_{\alpha\beta} \right\rangle = 0, \tag{2.55}$$

де C^1_α це деякий коефіцієнт, який не залежить від молекулярної швидкості $\vec{\xi}$. Аналогічно для доданку $\left\langle J^1_{\beta\alpha} \ln f_\beta \right\rangle$ можна отримати

$$\left\langle J_{\beta\alpha}^{1} \ln f_{\beta} \right\rangle = -\nu_{1} n_{\alpha} \left\langle M_{\beta}^{1} \left(f_{\beta} / M_{\beta}^{1} - 1 \right) \ln f_{\beta} / M_{\beta}^{1} \right\rangle + \left\langle J_{\beta\alpha}^{1} \ln M_{\beta}^{1} \right\rangle, \qquad (2.56)$$

де

$$-\nu_{1} n_{\alpha} \left\langle M_{\beta}^{1} \left(f_{\beta} / M_{\beta}^{1} - 1 \right) \ln f_{\beta} / M_{\beta}^{1} \right\rangle \le 0, \qquad (2.57)$$

$$\left\langle J_{\beta\alpha}^{1} \ln M_{\beta}^{1} \right\rangle = 0. \qquad (2.58)$$

При цьому рівність в (2.57) досягається тільки тоді, коли $f_{\beta} = M_{\beta}^{1}$.

Для другого доданку в нерівності (2.52) можна записати

$$\left\langle J_{\alpha\beta}^{2} \ln f_{\alpha} \right\rangle = -\nu_{2} n_{\beta} \left\langle M_{\alpha}^{2} \left(f_{\alpha} / M_{\alpha}^{2} - 1 \right) \ln f_{\alpha} / M_{\alpha}^{2} \right\rangle + \left\langle J_{\alpha\beta}^{2} \ln M_{\alpha}^{2} \right\rangle, \qquad (2.59)$$

де

$$-\nu_{2} n_{\beta} \left\langle M_{\alpha}^{2} \left(f_{\alpha} / M_{\alpha}^{2} - 1 \right) \ln f_{\alpha} / M_{\alpha}^{2} \right\rangle \le 0, \qquad (2.60)$$

а рівність в (2.60) досягається тільки у випадку коли $f_{\alpha} = M_{\alpha}^{2}$. Використовуючи рівняння (2.47), (2.49) та (2.51), для другого доданку в (2.59) можна отримати

$$\left\langle J_{\alpha\beta}^{2} \ln M_{\alpha}^{2} \right\rangle = C_{\alpha}^{2} \left\langle J_{\alpha\beta}^{2} \right\rangle + \frac{\left\langle m_{\alpha} \vec{\xi}^{2} J_{\alpha\beta}^{2} \right\rangle}{2kT_{\alpha\beta}} - \frac{\vec{u}_{\alpha} \left\langle m_{\alpha} \vec{\xi} J_{\alpha\beta}^{2} \right\rangle}{kT_{\alpha\beta}} = \frac{\left\langle m_{\alpha} \vec{\xi}^{2} J_{\alpha\beta}^{2} \right\rangle}{2kT_{\alpha\beta}}, \qquad (2.61)$$

де C_{α}^{2} це деякий коефіцієнт, який не залежить від молекулярної швидкості $\vec{\xi}$. Аналогічно для останнього доданку в нерівності (2.52) можна отримати

$$\left\langle J_{\beta\alpha}^{2} \ln f_{\beta} \right\rangle = -\nu_{2} n_{\alpha} \left\langle M_{\beta}^{2} \left(f_{\beta} / M_{\beta}^{2} - 1 \right) \ln f_{\beta} / M_{\beta}^{2} \right\rangle + \left\langle J_{\beta\alpha}^{2} \ln M_{\beta}^{2} \right\rangle, \qquad (2.62)$$

де

$$-\nu_{2} n_{\alpha} \left\langle M_{\beta}^{2} \left(f_{\beta} / M_{\beta}^{2} - 1 \right) \ln f_{\beta} / M_{\beta}^{2} \right\rangle \le 0, \qquad (2.63)$$

$$\left\langle J_{\beta\alpha}^{2} \ln M_{\beta}^{2} \right\rangle = \left\langle m_{\beta} \vec{\xi}^{2} J_{\beta\alpha}^{2} \right\rangle \Big/ 2kT_{\alpha\beta}. \qquad (2.64)$$

При цьому рівність в (2.63) досягається тільки коли $f_{\beta} = M_{\beta}^{2}$.

Використовуючи вирази (2.53), (2.55), (2.56), (2.58), (2.59), (2.61), можна отримати

$$\left\langle J^1_{\alpha\beta}\ln f_\alpha\right\rangle+\left\langle J^2_{\alpha\beta}\ln f_\alpha\right\rangle+\left\langle J^1_{\beta\alpha}\ln f_\beta\right\rangle+\left\langle J^2_{\beta\alpha}\ln f_\beta\right\rangle=C_0+ \\ +\frac{1}{2kT_{\alpha\beta}}\left[\left\langle m_\alpha\vec{\xi}^{\,2}J^2_{\alpha\beta}\right\rangle+\left\langle m_\beta\vec{\xi}^{\,2}J^2_{\beta\alpha}\right\rangle\right], \qquad (2.65)$$

де

$$C_0=-\nu_1 n_\beta\left\langle M^1_\alpha\left(f_\alpha/M^1_\alpha-1\right)\ln f_\alpha/M^1_\alpha\right\rangle-\nu_1 n_\alpha\left\langle M^1_\beta\left(f_\beta/M^1_\beta-1\right)\ln f_\beta/M^1_\beta\right\rangle- \\ -\nu_2 n_\beta\left\langle M^2_\alpha\left(f_\alpha/M^2_\alpha-1\right)\ln f_\alpha/M^2_\alpha\right\rangle-\nu_2 n_\beta\left\langle M^2_\alpha\left(f_\alpha/M^2_\alpha-1\right)\ln f_\alpha/M^2_\alpha\right\rangle\le 0.$$

Приймаючи до уваги рівність (2.51), можна бачити, що останній доданок в правій частині рівності (2.65) обертається в нуль. Тоді із рівності (2.65) витікає нерівність Больцмана (2.52). При цьому знак рівності в (2.52) досягається тільки тоді, коли функції розподілення компонент плазми мають вигляд (2.19), і система знаходиться у стані термодинамічної рівноваги. Інша нерівність Больцмана (2.20) може бути доведена по аналогії. Детальний доказ цієї нерівності можна знайти наприклад в книзі [120]. Таким чином нерівності Больцмана для релаксаційної моделі із роботи [23] доведено. Слід зазначити, що виконання нерівностей Больцмана для даної моделі гарантує також виконання і Н-теореми (2.22).

У підсумку відзначимо, що на даний час релаксаційні моделі, запропоновані в роботах [23, 106] є найбільш точними із існуючих моделей. Зокрема для них виконуються усі основні властивості повних інтегралів зіткнення больцманівського типу. Обидві ці моделі можуть бути використано для опису зіткнень в багатокомпонентній частково іонізованій плазмі. При цьому модель, запропонована автором в роботі [23], дозволяє також врахувати вплив взаємодії окремих компонент плазми на процес її релаксації.

2.3 Методи чисельного розв’язку модельних кінетичних рівнянь

Розглянемо далі методи чисельного розв’язку системи модельних кінетичних рівнянь, яка була описана в підрозділах 2.1 та 2.2. Відзначимо, по-перше, що при заданому розподілі електричного поля права частина рівнянь (2.1) –

(2.3) містить лінійні оператори переносу гіперболічного типу. Таким чином для чисельної апроксимації цих операторів можна використовувати відомі методи чисельного розв'язку лінійних гіперболічних рівнянь, такі як TVD та WENO схеми високого порядку точності [121, 122]. Для апроксимації зіткневих членів в кінетичних рівняннях можна використовувати методи, розроблені в галузі обчислювальної динаміки розрідженого газу [109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118]. Слід зазначити, що при дослідженнях процесів взаємодії плазми з макрочастинками основна увага приділяється пошуку стаціонарних розв'язків системи кінетичних рівнянь. Як правило, стаціонарні розв'язки кінетичних рівнянь шукають за допомогою нестаціонарної системи рівнянь (2.1) – (2.3), досліджуючи перебіг процесів взаємодії плазми з макрочастинками у часі. Основною проблемою в даному випадку є велика різниця між характерними тепловими швидкостями електронів та важких компонент плазми. Значення дискретного кроку у часі Δt, якій необхідно використовувати для розв'язку системи нестаціонарних кінетичних рівнянь, визначається із умов стійкості обчислювального процесу. Для кожного із рівнянь (2.1) – (2.3) ці умови, як правило, мають вигляд $\Delta t_\alpha \le C_\alpha \Delta L / \upsilon_\alpha$, де $\alpha = \mathrm{e,i,a}$, ΔL це характерний розмір дискретного кроку в фізичному просторі, υ_α це характерна теплова швидкість компоненти плазми, а C_α це деяка постійна для якої виконується $C_\alpha < 1$. Дискретний крок у часі для всієї системи кінетичних рівнянь визначається як $\Delta t = \min\left(\Delta t_\mathrm{e}, \Delta t_\mathrm{i}, \Delta t_\mathrm{a}\right)$. Так як для типової плазми завжди виконується нерівність $\upsilon_\mathrm{e} \gg \upsilon_\mathrm{i,a}$, то для кроків у часі виконується нерівність $\Delta t_\mathrm{e} \ll \Delta t_\mathrm{i,a}$. Таким чином крок у часі Δt для всієї системи рівнянь завжди дорівнює кроку у часі для електронів, тобто $\Delta t = \Delta t_\mathrm{e}$. Враховуючи той факт, що стаціонарні розв'язки кінетичних рівнянь досягаються, як правило, за час $t \sim L / \upsilon_\mathrm{i,a}$, де L це характерний розмір задачі, можна бачити, що обмеження $\Delta t = \Delta t_\mathrm{e}$ є дуже жорстким. При цьому обчислювальний час, який необхідно затратити для пошуку стаціонарного розв'язку, може бути досить великим. В роботі [22] автором було запропоновано підхід, який дозволяє вирішити описану вище проблему. Відповідно до цього підходу замість кінетичного рівняння для електронів (2.2) використовується модифіковане рівняння

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t_{\text{e}}} + \vec{\xi}\,\frac{\partial}{\partial \vec{r}} - \frac{\vec{E}e}{m_{\text{e}}}\frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} \right\} f_{\text{e}} = J_{\text{e}}\,, \tag{2.66}$$

де $t_{\text{e}} = t\,\upsilon_i / \upsilon_e$ це модифікований час для електронів. Слід зазначити, що система нестаціонарних рівнянь (2.1), (2.3), (2.66) не описує реально існуючий фізичний процес, але має ті ж самі стаціонарні розв’язки, що і система (2.1) – (2.3). Як було показано в роботах [22, 24] такий підхід дозволяє значно зменшити обчислювальний час, який необхідно затратити для пошуку стаціонарного розв’язку системи кінетичних рівнянь.

Як відзначалося вище, для дослідження процесів взаємодії плазми з макрочастинками важливою проблемою є розробка методів чисельного розв’язку кінетичних рівнянь для компонент плазми у випадках сферичної та аксіальної симетрії. Розглянемо методи чисельного розв’язку кінетичних рівнянь, які було розроблено автором для цих випадків у роботах [22, 24, 25].

2.3.1 Чисельний розв’язок модельних кінетичних рівнянь у випадку сферичної симетрії

У роботах [22, 24] автором було запропоновано чисельний метод високого порядку точності для розв’язку кінетичних рівнянь у випадку сферичної симетрії. Відповідно до цього методу для розв’язку нестаціонарної системи кінетичних рівнянь (2.1), (2.3), (2.66) застосовується метод розщеплення за фізичними процесами. Розглянемо цей метод більш детально на прикладі кінетичного рівняння для іонів. На першому етапі методу розщеплення будемо шукати розв’язок кінетичного рівняння, яке не містить членів, що описують переніс функції розподілення в просторі швидкостей за рахунок дії електричного поля. При цьому для того, щоб мати можливість побудувати нерівномірну обчислювальну сітку в фізичному просторі зробимо гладке відображення координат $r(x)$ із Якобіаном $D = \partial r / \partial x$. Тоді на першому етапі методу розщеплення кінетичне рівняння має вигляд

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{rD}\frac{\partial}{\partial x}B_x + \frac{\partial}{\partial \omega}B_\omega \right\} f_{\mathrm{i}} = J_{\mathrm{i}}, \tag{2.67}$$

де $B_r = \xi_r r$, $B_\omega = -\xi_\perp / r$. На другому етапі методу розщеплення розглянемо перенiс функції розподілення в просторі швидкостей за рахунок дії електричного поля

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}C_\xi + \frac{\partial}{\partial \omega}C_\omega \right\} f_{\mathrm{i}} = 0, \tag{2.68}$$

де $C_\xi = \xi_r eE/m_{\mathrm{i}}$, $C_\omega = -(eE/m_{\mathrm{i}})\sin\omega/\xi$.

Для того, щоб провести дискретизацію рівнянь (2.67) та (2.68) введемо рівномірну скінчено-об'ємну сітку в просторі (x, ξ, ω) із кроками Δx, $\Delta\xi$ та $\Delta\omega$, відповідно. Позначимо через γ номер вузла скінчено-об'ємної сітки (x_i, ξ_k, ω_l), де i, k, l це індекси, що нумерують точки сітки вздовж напрямків x, ξ, ω, відповідно. Для чисельного розв'язку рівняння (2.67) будемо використовувати явну скінчено-об'ємну схему другого порядку точності:

$$\left(f_{\mathrm{i}}\right)_\gamma^{n+1} - \left(f_{\mathrm{i}}\right)_\gamma^{n} + \mathrm{C}_x\left[\left(F_x\right)_{i+1/2}^{n} - \left(F_x\right)_{i-1/2}^{n}\right] + \mathrm{C}_\omega\left[\left(F_\omega\right)_{l+1/2}^{n} - \left(F_\omega\right)_{l-1/2}^{n}\right] = \Delta t\left(J_{\mathrm{i}}\right)_\gamma^{n}, \tag{2.69}$$

де індекси n та $n+1$ позначають два послідовних моменти часу, відстань між якими дорівнює Δt; $\left(J_{\mathrm{i}}\right)_\gamma^{n}$ це чисельна апроксимація модельного інтегралу зіткнень; $\left(F_x\right)_{i\pm1/2}^{n}$ та $\left(F_\omega\right)_{l\pm1/2}^{n}$ це потоки функції розподілення на границях обчислювальних комірок, а коефіцієнти C_x та C_ω мають вигляд

$$\mathrm{C}_x = \Delta t / \left(\Delta x D_i r_i\right), \qquad \mathrm{C}_\omega = \Delta t / \left(2\sin\Delta\omega/2\right). \tag{2.70}$$

Потоки функції розподілення на границях обчислювальних комірок можуть бути розраховані за допомогою виразів, які були отримані в книзі [121]. Наприклад для потоків $\left(F_x\right)_{i\pm1/2}^{n}$ можна записати

$$\left(F_x\right)_{i\pm1/2}^{n} = \lambda^+\left(f_{\mathrm{i}}\right)_{i,k,l}^{n} + \lambda^-\left(f_{\mathrm{i}}\right)_{i+1,k,l}^{n} + \frac{1}{2}|\lambda|\left(1-|c_\lambda|\right)L_{i+1/2}^{n}, \tag{2.71}$$

де $\lambda = \left(\xi_r\right)_{k,l} r_{i+1/2}$, $c_\lambda = \lambda \Delta t / \Delta x D_{i+1/2}$, $\lambda^+ = \max(\lambda, 0)$, $\lambda^- = \min(\lambda, 0)$, а $L^n_{i+1/2}$ це обмежений градієнт функції розподілу, який має вигляд

$$L^n_{i+1/2} = L\left(\Delta\left(f_{\mathrm{i}}\right)^{LW}_{i+1/2}, \Delta\left(f_{\mathrm{i}}\right)^{BW}_{i+1/2}\right), \tag{2.72}$$

де L це функція обмежувач, а

$$\Delta\left(f_{\mathrm{i}}\right)^{LW}_{i+1/2} = \left(f_{\mathrm{i}}\right)^n_{i+1,k,l} - \left(f_{\mathrm{i}}\right)^n_{i,k,l}, \tag{2.73}$$

$$\Delta\left(f_{\mathrm{i}}\right)^{BW}_{i+1/2} = \begin{cases} \left(f_{\mathrm{i}}\right)^n_{i,k,l} - \left(f_{\mathrm{i}}\right)^n_{i-1,k,l} & \lambda \geq 0 \\ \left(f_{\mathrm{i}}\right)^n_{i+2,k,l} - \left(f_{\mathrm{i}}\right)^n_{i+1,k,l} & \lambda < 0 \end{cases}, \tag{2.74}$$

це стрибки функції розподілу, які відповідають схемам Лакса-Вендрофа та Біма-Вормінга, відповідно. Існує багато варіантів вибору функції обмежувача L. Детальний огляд цього питання можна знайти наприклад в книзі [122]. В даній роботі використовується, як правило, функція обмежувач SuperBee. Модельний інтеграл зіткнень в схемі (2.69) може бути взятий як у формі, яка була запропонована в роботі [23], так і у формі, яка була запропонована в роботі [106]. З обчислювальної точки зору модель із роботи [106] є більш економічною, ніж модель із роботи [23]. Таким чином будемо використовувати модельний інтеграл зіткнень (2.35). Чисельна апроксимація цього інтегралу зіткнень має вигляд

$$\left(J_{\mathrm{i}}\right)^n_\gamma = \left(\omega_{\mathrm{i}}\right)^n_i \left[\left(\hat{M}^*_{\mathrm{i}}\right)^n_\gamma - \left(f_{\mathrm{i}}\right)^n_\gamma\right], \tag{2.75}$$

де $\left(\hat{M}^*_{\mathrm{i}}\right)^n_\gamma$ це апроксимація рівноважної функції розподілу. Для інтегралу зіткнень (2.75) повинні виконуватися дискретні аналоги законів збереження маси, імпульсу та енергії. Як було показано в роботах [109, 110, 113, 116], щоб забезпечити виконання дискретних законів збереження необхідно проводити корекцію рівноважної функції розподілення в інтегралі (2.75). При цьому найбільш економічним з обчислювальної точки зору є метод корекції який було запропоновано в роботі [111].

Макроскопічні параметри в кожній точці сітки x_i обчислюються за допомогою формул (2.6) – (2.8) та (2.28). При цьому оператор чисельного інтегрування записується у вигляді

$$\langle \bullet \rangle = 2\pi \sum_k \sum_l \bullet (\xi)_k^2 \sin \omega_l A_{k,l} \Delta\xi \Delta\omega, \tag{2.76}$$

де $A_{k,l}$ це вагові коефіцієнти обраного методу інтегрування. У внутрішніх точках обчислювальної області використовується, як правило, комбінована квадратура Сімпсона четвертого порядку точності [123]. Для точок, які знаходяться біля границь обчислювальної області, автор запропонував використовувати квадратурну формулу гаусівського типу, яка для інтервалу [0, 1] може бути записана у вигляді

$$\int_0^1 g\, dy = g(y_1) d_1 + g(y_2) d_2, \tag{2.77}$$

де $d_1 = 3/4$, $d_2 = 1/4$ та $y_1 = 1/3$, $y_1 = 1$. Можна перевірити, що квадратурне правило (2.77) є точним для поліномів до другого ступеня включно. Використання цього квадратурного методу дозволяє зберегти високий порядок точності чисельного інтегрування поблизу границь обчислювальної області.

Розглянемо далі чисельний метод для розв'язку рівняння (2.68). Це рівняння також є гіперболічним рівнянням із змінними коефіцієнтами. Тому для чисельного розв'язку цього рівняння можна використовувати той самий скінчено-об'ємний метод, який було застосовано для розв'язку рівняння (2.67). Чисельна схема для цього методу має вигляд аналогічний схемі (2.69). Однією із проблем, що виникають при чисельному розв'язку рівняння (2.68), є визначення умов, яким повинна задовольняти функція розподілу на поверхні $\xi_\perp = 0$. Проблема полягає в тому, що характеристичні криві рівняння (2.68) є паралельними до вісі ξ_r, тому на поверхні $\xi_\perp = 0$ необхідно використовувати граничні умови симетрії. Для того, щоб задати ці умови для дискретної функції розподілу, можна використовувати фіктивні точки сітки, які лежать за межами обчислювальної області. Розглянемо спочатку, як задавати граничні умови симетрії вздовж напрямку радіальної швидкості ξ в точці $\xi = 0$. Нехай перші три точки скінчено-об'ємної сітки мають номери 1, 2 та 3, тобто $\xi_1 = \Delta\xi/2$, $\xi_2 = 3\Delta\xi/2$ та $\xi_3 = 5\Delta\xi/2$. Тоді фіктивні точки мають номери 0, –1, –2 та координати $\xi_0 = -\xi_1$, $\xi_{-1} = -\xi_2$, $\xi_{-2} = -\xi_3$. Граничні умови симетрії в точці $\xi = 0$ мають вигляд

$$\left(f_{\text{i}} \right)_{i,k,l}^{n} = \left(f_{\text{i}} \right)_{i,1-k,l^*}^{n}, \tag{2.78}$$

де $k = 0,-1,-2$ та $\omega_{l^*} = \pi - \omega_l$. Граничні умови симетрії вздовж напрямку кута ω в точках $\omega = 0$ та $\omega = \pi$ можна задавати аналогічним чином:

$$\left(f_{\text{i}} \right)_{i,k,l}^{n} = \left(f_{\text{i}} \right)_{i,k,1-l}^{n}, \qquad \left(f_{\text{i}} \right)_{i,k,N_l+1-l}^{n} = \left(f_{\text{i}} \right)_{i,k,N_l+l}^{n}, \tag{2.79}$$

де $l = 0,-1,-2$, а N_l це номер першої точки скінчено-об'ємної сітки біля $\omega = \pi$.

Слід зазначити, що інтегруючи рівняння (2.68) за швидкостями, можна отримати такі рівняння для концентрації, температури та швидкості

$$\frac{\partial n_{\text{i}}}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial T_{\text{i}}}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial u_{\text{i}}}{\partial t} = F_{\text{i}}, \tag{2.80}$$

де $F_{\text{i}} = eE/m_{\text{i}}$. Дискретні аналоги цих рівнянь є

$$\left(n_{\text{i}} \right)_i^{n+1} = \left(n_{\text{i}} \right)_i^{n}, \tag{2.81}$$

$$\left(T_{\text{i}} \right)_i^{n+1} = \left(T_{\text{i}} \right)_i^{n}, \tag{2.82}$$

$$\left(u_{\text{i}} \right)_i^{n+1} = \left(u_{\text{i}} \right)_i^{n} + \Delta t \left(F_{\text{i}} \right)_i^{n}. \tag{2.83}$$

Чисельний метод для розв'язку рівняння (2.68), який задовольняє дискретним умовам (2.81) – (2.83) називається консервативним. Для того, щоб зробити метод для розв'язку рівняння (2.68) консервативним, автор запропонував метод корекції функції розподілу в просторі швидкостей. Цей метод базується на методі поліноміальної корекції, який було запропоновано в роботі [111] для того, щоб забезпечити виконання дискретних законів збереження для чисельної апроксимації модельного інтегралу зіткнень (2.75).

Ще однією важливою проблемою, яка постає при чисельному розв'язку кінетичних рівнянь у випадку сферичної симетрії, є урахування обмежень на дискретний крок у часі, що виникають внаслідок присутності у кінетичному рівнянні сингулярного члену $-\xi_{\perp}/r$. Ці обмеження призводять до значного збільшення обчислювального часу, який необхідно витратити для моделювання процесів взаємодії макрочастинок з плазмою у випадку, коли розмір макрочастинок набагато менший за довжину Дебая в плазмі. Для того, щоб послабити обмеження на крок у часі, автор запропоновував використовувати модифіковані кінетичні рівняння, які мають ті ж самі стаціонарні розв'язки, що і звичайні кінетичні рівняння, але не містять сингулярних членів типу r^{-1}. Наприклад для іонів, модифіковане кінетичне рівняння можна записати у вигляді

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{r_D}\frac{\partial}{\partial r}A_r+\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}A_\xi+\frac{\partial}{\partial \omega}A_\omega\right\}f_{\mathrm{i}}=\hat{r}\,J_{\mathrm{i}}, \tag{2.84}$$

де $A_r = r\xi_r$, $A_\xi = \xi_r F_{\mathrm{i}}/m_{\mathrm{i}}$, $A_\omega = -\xi_\perp/r_D - (F_{\mathrm{i}}/m_{\mathrm{i}})\sin\omega/\xi$, $F_{\mathrm{i}} = eE$, $\hat{r} = r/r_D$, а r_D це довжина Дебая у плазмі. Рівняння (2.84) може бути отримано шляхом помноження стаціонарної частини звичайного кінетичного рівняння на нормований радіус $\hat{r}$. Таким чином, рівняння (2.84) має такі ж стаціонарні розв'язки, що і звичайне кінетичне рівняння, але не містить сингулярного члену $-\xi_{\perp}/r$. Як було вдмічено у роботі [24], використання модифікованих кінетичних рівнянь дозволяє значно зменшити необхідний обчислювальний час.

Для знаходження самоузгодженого електричного поля у випадку сферичної симетрії можна використовувати інтегральну форму рівняння Пуассона із оператором (2.27). Тобто значення електричного поля у точках обчислювальної сітки можуть бути знайдені за допомогою відомої теореми Гаусса. Зокрема, значення поля на границях обчислювальних комірок можна отримати шляхом чисельного інтегрування розподілу густини електричного заряду, використовуючи метод інтегрування із центральною точкою. Після цього значення електричного поля в центрах обчислювальних комірок можна знайти шляхом осереднення значень поля на границях комірок.

Для підвищення ефективності обчислювального процесу, автором було запропоновано паралельний варіант розробленого методу. Паралельні обчислення для даного методу проводяться таким чином. Сітка в фізичному просторі (вздовж радіусу r) поділяється на області рівного розміру, які обробляються окремими обчислювальними процесами. На першому кроці методу розщеплення (див. рівняння (2.67)) паралельні обчислювальні процеси обмінюються граничними умовами (значеннями функції розподілу), після чого кінетичні рівняння розв'язуються окремо в кожній області. На другому етапі методу розщеплення (див. рівняння (2.68)), паралельні обчислювальні процеси розв'язують кінетичні рівняння в кожній області без взаємодії між собою. Рівняння для самоузгодженого електричного поля розв'язується лише одним головним обчислювальним процесом у повній обчислювальній області в фізичному просторі. При цьому для визначення густини заряду у всій області використовується групова взаємодія обчислювальних процесів, тобто усі процеси одночасно пересилають розподіл густини заряду до головного обчислювального процесу. Взаємодія між паралельними обчислювальними процесами реалізується за допомогою методу розпаралелювання із розділеною пам'яттю (distributed memory technique) із використанням бібліотеки MPI (message passing interface).

2.3.2 Чисельний розв'язок модельних кінетичних рівнянь у випадку аксіальної симетрії

У роботах [25, 26] автором було запропоновано чисельний метод високого порядку точності для розв'язку кінетичних рівнянь у випадку аксіальної симетрії. Розглянемо основні положення цього методу на прикладі кінетичного рівняння для іонів. Для цього запишемо кінетичне рівняння для іонів у такому вигляді

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + L_c + L_i + \frac{e}{m_{\text{i}}} L_f\right\} f_{\text{i}} = J_{\text{i}}, \tag{2.85}$$

де

$$L_c = \xi_x \frac{\partial}{\partial x} + \xi \cos\omega \frac{\partial}{\partial r}, \qquad L_i = -\frac{\xi \sin\omega}{r}\frac{\partial}{\partial \omega}, \quad L_f = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi_x} - \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \xi_r}, \tag{2.86}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_r} = \cos\omega \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\sin\omega}{\xi} \frac{\partial}{\partial \omega}. \tag{2.87}$$

Оператори L_c, L_i та L_f мають назву конвективний, інерційний та силовий члени, відповідно. Для дискретизації рівняння (2.85) у фізичному просторі будемо використовувати неструктуровану трикутникові сітку, яка можна побудувати за допомогою методу який був запропонований в роботі [124]. В просторі швидкостей будемо використовувати рівномірну скінчено-об'ємну сітку.

Чисельний метод розв'язку рівняння (2.85) базується на методі розщеплення за фізичними процесами. На першому етапі методу розщеплення розглядається беззіткневий рух іонів. Відзначимо, що оператор L_c в кінетичному рівнянні містить тільки похідні по змінним x та r, а інерційний та силовий члени містять похідні по швидкостям. Враховуючи цей факт, на першому кроці методу розщеплення розглядається дія оператору L_c для кожного дискретного вузла $\left(\xi_x^{(l)}, \xi^{(l)}, \omega^{(l)}\right)$ в просторі швидкостей, де l це номер вузла. Відповідне рівняння має вигляд

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + L_c^{(l)}\right\} f_{\mathrm{i}}^{(l)} = 0, \tag{2.88}$$

де $f_{\mathrm{i}}^{(l)}$ це значення дискретної функції розподілу в точці із номером l, а оператор $L_c^{(l)}$ має вигляд

$$L_c^{(l)} = \xi_x^{(l)} \frac{\partial}{\partial x} + \xi^{(l)} \cos\left(\omega^{(l)}\right) \frac{\partial}{\partial r}. \tag{2.89}$$

Рівняння (2.88) може бути розв'язано чисельно за допомогою методу, який було запропоновано в роботі [125]. Чисельна схема для розв'язку рівняння (2.88) має вигляд

$$\left(f_{\mathrm{i}}\right)_i^{n+1} = \left(f_{\mathrm{i}}\right)_i^n - \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{k=1}^{3} \vec{F}_k \vec{n}_k\,, \tag{2.90}$$

де індекси n та $n+1$ позначають два послідовних моменти часу, відстань між якими дорівнює Δt; індекс i це номер трикутника; $\left(f_{\mathrm{i}}\right)_i^n$ та $\left(f_{\mathrm{i}}\right)_i^{n+1}$ це значення функції розподілу в центрі трикутника в різні моменти часу; k це номер сторони трикутника, $\vec{n}_k$ це одинична нормаль до сторони трикутника із номером k, а $\vec{F}_k$ це потік функції розподілу крізь сторону трикутника із номером k. Будемо вважати, що нумерація сторін трикутника іде поти часової стрілки. Тоді потік функції розподілу через сторону із номером k можна записати у вигляді

$$\vec{F}_k = \begin{cases} \left(f_{\mathrm{i}}\right)_L^n \vec{\lambda} & \vec{\lambda}\vec{n}_k \geq 0 \\ \left(f_{\mathrm{i}}\right)_R^n \vec{\lambda} & \vec{\lambda}\vec{n}_k \leq 0 \end{cases}, \tag{2.91}$$

де $\vec{\lambda} = \left(\xi_x^{(l)}, \xi^{(l)}\cos\left(\omega^{(l)}\right)\right)$, $\left(f_{\mathrm{i}}\right)_L^n$ це значення функції розподілу зліва від сторони трикутника, а $\left(f_{\mathrm{i}}\right)_R^n$ це значення функції розподілу справа від сторони трикутника. Слід зазначити також, що значення $\left(f_{\mathrm{i}}\right)_L^n$ та $\left(f_{\mathrm{i}}\right)_R^n$ обчислюються в середині сторони трикутника. Формула (2.91) для потоку функції розподілу дає розв'язок так званої задачі Рімана із початковими умовами $\left(f_{\mathrm{i}}\right)_L^n$ та $\left(f_{\mathrm{i}}\right)_R^n$. Для того, щоб визначити ці початкові умови, використовують різні методи реконструкції функції розподілу всередині трикутників по відомими значенням $\left(f_{\mathrm{i}}\right)_i^n$. Найбільш поширеним є метод реконструкції, який базується на припущенні, що функція розподілу всередині трикутників є лінійною. При цьому для визначення градієнту функції всередині трикутника необхідно застосовувати процедуру обмеження, яка дозволяє зробити обчислювальну схему монотонною. Огляд сучасних методів обчислення градієнту функції всередині трикутника можна знайти в роботах [126, 127].

На другому кроці методу розщеплення розглядається дія інерційного та силового членів в кожній дискретній точці фізичного простору $(x^{(j)}, r^{(j)})$, де j це номер трикутника, а точка $(x^{(j)}, r^{(j)})$ це вузол скінчено-об'ємної сітки, який співпадає із центром трикутника. Відповідне рівняння має вигляд

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + L_i^{(j)} + L_f^{(j)} \right\} f_{\rm i}^{(j)} = 0, \qquad (2.92)$$

де $f_{\rm i}^{(j)}$ це функція розподілу в точці $(x^{(j)}, r^{(j)})$, а оператори $L_i^{(j)}$ та $L_f^{(j)}$ мають вигляд

$$L_i^{(j)} = -\frac{\xi \sin\omega}{r^{(j)}} \frac{\partial}{\partial \omega}, \qquad L_f^{(j)} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^{(j)} \frac{\partial}{\partial \xi_x} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^{(j)} \frac{\partial}{\partial \xi_r}. \qquad (2.93)$$

Похідні самоузгодженого електричного потенціалу в центрі трикутника обчислюються із розв'язку рівняння Пуассона. При цьому, для розв'язку рівняння Пуассона використовується метод скінчених елементів із квадратичними Лагранжевими елементами [128]. Рівняння (2.92) є лінійним гіперболічним рівнянням із змінними коефіцієнтами. Для його чисельного розв'язку можна використовувати той самий чисельний метод, який був запропонований для розв'язку рівнянь (2.67) та (2.68) (див. чисельну схему (2.69)). Також для розв'язку рівняння (2.92) можна використовувати біль економічну скінчено-об'ємну схему MUSCL із обмежувачем SuperBee [122].

На другому етапі методу розщеплення за фізичними процесами розглядається процес просторово однорідної зіткневої релаксації в кожній дискретній точці фізичного простору. Відповідне релаксаційне рівняння є

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{\rm i}^{(j)} = J_{\rm i}^{(j)}, \qquad (2.94)$$

де j це номер трикутника в фізичному просторі, $f_{\rm i}^{(j)}$ це функція розподілу в точці $(x^{(j)}, r^{(j)})$, а $J_{\rm i}^{(j)}$ це чисельна апроксимація інтегралу зіткнень:

$$J_{\rm i}^{(j)} = \nu_{\rm i}^{(j)} \left(M_{\rm i}^{(j)} - f_{\rm i}^{(j)} \right). \qquad (2.95)$$

Частота зіткнень $\nu_{\rm i}^{(j)}$ та функція розподілу $M_{\rm i}^{(j)}$ обчислюються за допомогою значень макроскопічних параметрів в точці j. При цьому макроскопічні параметри обчислюються на основі формул (2.6) – (2.8) та (2.28) за допомогою методу чисельного інтегрування із середньою точкою. Релаксаційне рівняння (2.94) розв'язується чисельно явним або явно-неявним методом Ейлера. Вибір чисельної схеми для розв'язку рівняння (2.94) залежить від жорсткості повного кінетичного рівняння. Для сільнозіткневого режиму використовують, як правило, явно-неявний метод Ейлера

$$f_{\mathrm{i}}^{(j,n+1)} = f_{\mathrm{i}}^{(j,n)} + \Delta t\, \nu_{\mathrm{i}}^{(j,n)} \left(M_{\mathrm{i}}^{(j,n)} - f_{\mathrm{i}}^{(j,n+1)} \right), \tag{2.96}$$

де індекси n та $n+1$ позначають два послідовних моменти часу, відстань між якими дорівнює Δt. Схема (2.96) є стійкою для широкого діапазону значень Δt. Зокрема вона дозволяє проводити розрахунки при $\Delta t \gg \max_j \left(\nu_{\mathrm{i}}^{(j)} \right)$. Для слабкозіткневого режиму можна використовувати явний метод Ейлера

$$f_{\mathrm{i}}^{(j,n+1)} = f_{\mathrm{i}}^{(j,n)} + \Delta t\, \nu_{\mathrm{i}}^{(j,n)} \left(M_{\mathrm{i}}^{(j,n)} - f_{\mathrm{i}}^{(j,n)} \right). \tag{2.97}$$

Цей метод є стійким за умови $\Delta t \le \max_j \left(\nu_{\mathrm{i}}^{(j)} \right)$. Для того, щоб забезпечити виконання дискретних аналогів законів збереження маси, імпульсу та енергії на етапі просторо-однорідної релаксації необхідно застосовувати метод корекції функції розподілу. Як було відмічено вище, найбільш економічним з обчислювальної точки зору є поліноміальний метод корекції функції розподілу, який було запропоновано в роботі [111].

Кінетичні рівняння для електронів та атомів у випадку аксіальної симетрії можуть бути розв'язані за допомогою того ж самого методу, який був описаний вище для іонів. Слід зазначити, що цей метод добре пристосований для використання на багатопроцесорних обчислювальних системах. Зокрема для того, щоб підвищити ефективність обчислювального процесу, автором було запропоновано паралельний варіант чисельного методу для розв'язку кінетичних рівнянь у випадку аксіальної симетрії. Паралельні обчислення для цього методу проводяться таким чином. На першому кроці методу розщеплення за фізичними процесами (див. рівняння (2.88)), паралельні обчислювальні процеси опрацьовують різні підобласті у просторі швидкостей. На протязі другого та третього кроків методу розщеплення (див. рівняння (2.92) та (2.94)) паралельні обчислювальні процеси опрацьовують різні набори трикутників у фізичному просторі. Така схема паралельних обчислень є досить ефективною, тому що при цьому обчислювальний процес розпаралелюється як в фізичному просторі, так і в просторі швидкостей. Окрім цього, для впровадження даної схеми можна використовувати метод розпаралелювання із спільною пам’яттю (shared memory technique).

2.4 Висновки

В цьому розділі запропоновано новий підхід до моделювання процесів взаємодії слабкоіонізованої плазми з макрочастинками, який базується на прямому чисельному розв’язку самоузгодженої системи кінетичних рівнянь Власова із модельними інтегралами зіткнень. Проведено порівняльний аналіз існуючих релаксаційних моделей для опису зіткнень в багатокомпонентних газових та плазмових сумішах. На даний час найбільш точною із існуючих моделей є модель, запропонована в роботі [106]. Для цієї моделі виконуються основні властивості повних інтегралів зіткнень больцманівського типу: закони збереження, нерівність Больцмана, співвідношення для швидкості зміни імпульсу та енергії компонент за рахунок зіткнень. Запропоновано нову модель для опису зіткнень в багатокомпонентній плазмі, яка дозволяє більш детально урахувати вплив перехресних зіткнень на процес релаксації функцій розподілу. Показано, що для цієї моделі також виконуються основні властивості повних інтегралів зіткнень.

Розроблено метод чисельного розв’язку самоузгодженої системи модельних кінетичних рівнянь у випадку сферичної та аксіальної симетрії. Чисельний метод базується на методі розщеплення за фізичними процесами та відомих чисельних схемах для розв’язку лінійних гіперболічних рівнянь із змінними коефіцієнтами. Розроблений метод є консервативним, тобто для нього виконуються дискретні аналоги законів збереження маси, імпульсу та енергії. Описано спосіб застосування даного чисельного методу на багатопроцесорних обчислювальних системах.

РОЗДІЛ 3
ЗАРЯДЖАННЯ ТА ЕКРАНУВАННЯ МАКРОЧАСТИНОК В СЛАБКОІОНІЗОВАНІЙ ПЛАЗМІ

Даний розділ присвячений дослідженню процесів заряджання та екранування макрочастинок в слабкоіонізованій плазмі. Вказані процеси досліджуються на основні прямого чисельного розв’язку самоузгодженої системи модельних кінетичних рівнянь для компонент плазми. Розглядається процес заряджання та екранування сферичної макрочастинки, яка занурена у слабкоіонізовану плазму аргону. Особлива увага приділяється дослідженню процесів заряджання та екранування макрочастинки у випадку, коли радіус частинки є одного порядку із довжиною Дебая в плазмі. Чисельні розрахунки проведено в широкому діапазоні значень тиску зовнішньої плазми. На основі отриманих результатів проведено аналіз впливу зіткнень (зокрема іон-атомних зіткнень) на такі характеристики процесів заряджання та екранування, як заряд частинки та розподіл електричного потенціалу і макроскопічних параметрів навколо частинки. Окрім цього, досліджено межі застосування існуючих кінетичних моделей, які було запропоновано для обчислення електричного потенціалу навколо частинки у випадку, коли радіус частинки набагато менший за довжину Дебая в плазмі. Розділ написаний на основі робіт [22, 23, 24].

3.1 Постановка задачі

Розглянемо сферичну макрочастинку із радіусом a, яка занурена у слабкоіонізовану плазму аргону. Будемо вважати, що плазма містить електрони (e), однозарядні іони (i) та атоми (a). Стан незбуреної плазми на великих відстанях від частинки будемо характеризувати концентраціями $n_{\alpha 0}$ та температурами $T_{\alpha 0}$, де $\alpha = \mathrm{e, i, a}$ позначає тип компоненти. Приймаючи то уваги, що в слабкоіонізованій плазмі зіткнення атомів із електронами та іонами практично не впливають на динаміку атомів, будемо вважати, що газ атомів знаходиться в незбуреному стані із температурою T_{a0} та концентрацією n_{a0}. Динаміка електронів та іонів описується на основі системи модельних кінетичних рівнянь, які у даному випадку можуть бути записані в сферично симетричній формі (дивись підрозділ 2.1). Ці рівняння мають такий вигляд:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}A_r+\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}A_\xi+\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial \omega}A_\omega\right\}f_\alpha=J_\alpha, \tag{3.1}$$

де $\alpha=\mathrm{i,e}$ позначає тип плазмової компоненти; коефіцієнті в рівнянні мають вигляд $A_r=r\xi_r$, $A_\xi=\xi_r F_\alpha/m_\alpha$, $A_\omega=-\xi_\perp/r-\left(F_\alpha/m_\alpha\right)\sin\omega/\xi$; $F_{\mathrm{i,e}}=\pm eE$ це сила, що діє на іони та електрони; m_α це маса плазмової компоненти; E це самоузгоджене електричне поле; а J_α це модельний інтеграл зіткнень. Для опису зіткнень між компонентами плазми можна використовувати як модель із роботи [106], так і модель із роботи [23] (дивись підрозділ 2.3) Як було відмічено раніше, модельні інтеграли зіткнень із роботи [106] є більш економічними з обчислювальної точки зору. Тому в рівнянні (3.1) будемо використовувати модельні інтеграли зіткнень, які було запропоновано в роботі [106].

Крайову задачу для рівнянь (3.1) будемо розглядати на відрізку $\Omega_r=[a,R]$, де вважається, що точка R лежить досить далеко від частинки в області незбуреної плазми. Розглянемо граничні умови для рівнянь (3.1) на кінцях відрізку Ω_r. Нехтуючи процесами емісії іонів та електронів з поверхні частинки, будемо вважати, що на поверхні частинки виконується умова повного поглинання

$$f_\alpha=0, \tag{3.2}$$

для $\xi_r\ge 0$, $r=a$, $\alpha=\mathrm{i,e}$. На правій границі відрізку Ω_r функції розподілу іонів та електронів можуть бути записані у вигляду незбурених функцій розподілу Максвелла:

$$f_\alpha=n_{\alpha 0}\left(\frac{m_\alpha}{2\pi kT_{\alpha 0}}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{m_\alpha\xi^2}{2kT_{\alpha 0}}\right), \tag{3.3}$$

для $\xi_r \le 0$, $r = R$, $\alpha = \mathrm{i,e}$. Початкові умови для рівнянь (3.1) також приймаються у вигляді незбурених функцій розподілу (3.3).

Рівняння для самоузгодженого електричного поля має вигляд

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 E\right) = 4\pi e\left(n_\mathrm{i} - n_\mathrm{e}\right), \qquad (3.4)$$

де $n_\mathrm{i}, n_\mathrm{e}$ це концентрації іонів та електронів, відповідно. Початкова умова для рівняння (3.4) на поверхні частинки має вигляд

$$E = q/a^2, \qquad (3.5)$$

де q це заряд частинки. Частинка заряджається завдяки поглинанню іонів та електронів на її поверхні (див. (3.2)). При цьому заряд частинки може бути знайдено із рівняння заряджання

$$\frac{dq}{dt} = -4\pi a^2 e\left(n_\mathrm{i}u_\mathrm{i} - n_\mathrm{e}u_\mathrm{e}\right)_{r=a}, \qquad (3.6)$$

де u_i та u_e це макроскопічні швидкості іонів та електронів, відповідно. Концентрації n_α, температури T_α та швидкості u_α знаходяться шляхом обчислення відповідних моментів функцій розподілу за допомогою виразів (2.6) – (2.8) із оператором інтегрування (2.28).

Частоти зіткнень між компонентами плазми обчислюються таким чином. Частоти зіткнень між зарядженими компонентами плазми (іони та електрони) обчислюються за формулою (див. [129])

$$\nu_{\alpha\beta} = \frac{16\sqrt{\pi}}{3} n_\beta \left(\frac{\gamma_{\alpha\beta}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\mu_{\alpha\beta}}\right)^2 \ln\Lambda_{\alpha\beta}, \qquad (3.7)$$

де $\alpha,\beta = \mathrm{i,e}$; $\mu_{\alpha\beta} = m_\alpha m_\beta/\left(m_\alpha + m_\beta\right)$; $\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_\alpha\gamma_\beta/\left(\gamma_\alpha + \gamma_\beta\right)$; $\gamma_\alpha = m_\alpha/kT_\alpha$; а $\ln\Lambda_{\alpha\beta}$ це кулонівський логарифм, який має вигляд

$$\ln\Lambda_{\alpha\beta} = \left(12\pi\varepsilon_0/e^2\right)\left(\mu_{\alpha\beta}/\gamma_{\alpha\beta}\right) r_D,$$

де $r_D^{-2} = \sum_\alpha n_\alpha e^2 / \varepsilon_0 k T_\alpha$ це радіус Дебая в плазмі. Частоти зіткнень за участю атомів можна обчислити за формулою (див. [129])

$$\nu_{\alpha\beta} = (4/3) n_{\mathrm{a}} \overline{\upsilon}_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}, \tag{3.8}$$

де $\alpha = \mathrm{i,e}$ та $\beta = \mathrm{a}$; $\overline{\upsilon}_{\alpha\beta} = \sqrt{8/\pi\gamma_{\alpha\beta}}$ це середня відносна швидкість компонент α та β; а $\sigma_{\alpha\beta}$ це ефективний переріз зіткнень із передачею імпульсу. Для електрон-атомних зіткнень переріз можна обчислити а допомогою даних, які приведені в роботі [130]. Переріз зіткнень між іонами та атомами можна обчислити як суму газокінетичного перерізу та перерізу для процесу резонансного перезаряджання [131].

Для розв'язку кінетичних рівнянь (3.1) та рівняння для самоузгодженого електричного поля (3.4) використовувався чисельний метод, який було описано в підрозділі 2.3.1. Слід зауважити, що основний інтерес представляють стаціонарні розв'язки системи рівнянь (3.1), (3.4) та (3.6) з граничними умовами (3.2), (3.3) та (3.5). Тобто нас цікавлять стаціонарні значення заряду частинки та стаціонарні розподіли електричного потенціалу і макроскопічних параметрів навколо неї.

Чисельні розрахунки проводились для двох типових ситуацій, а саме для випадку ізотермічної плазми, яка знаходиться у стані іонізаційної рівноваги, та випадку неізотермічної плазми газового розряду низького тиску. Для випадку, коли $T_{\mathrm{e}0} = T_{\mathrm{i}0} = T_{\mathrm{a}0} = T_0$, температура плазми T_0 змінювалась в діапазоні від 0.4 до 0.5 eV, а повний тиск плазми P_0 змінювалася в широкому діапазоні від 10^{-4} до 5 атм. За цих умов концентрація атомів змінюється від 10^{20} до 10^{25} м$^{-3}$, а концентрація заряджених компонент плазми змінюється від 10^{15} до 10^{19} м$^{-3}$. При цьому довжина Дебая в плазмі становить приблизно $r_D = 5 - 7$ мкм, а відношення довжини вільного пробігу для іон-атомних зіткнень l_{ia} до довжини Дебая змінюється в широкому діапазоні від 10^{-3} до 100.

Для випадку неізотермічної плазми газового розряду низького тиску температура атомів та іонів приймалась рівною $T_{\mathrm{i}0} = T_{\mathrm{a}0} = 0.03\,\mathrm{eV}$, а температура електронів $T_{e0} = 30T_{i0}$. Концентрація заряджених частинок приймалась рівною $n_{e0} = n_{i0} = 10^{14}$ м$^{-3}$, а тиск плазми змінювався в діапазоні від 1 до 200 Па. За таких умов довжина Дебая в плазмі складає приблизно 100 мкм, а відношення l_{ia}/r_D змінюється в діапазоні 10^{-2} до 10.

Враховуючи типові розміри макрочастинок в запорошеній плазмі ($a = 1-10$ мкм), можна зробити висновок, що випадок $a \ll r_D$ реалізується для неізотермічної плазми газового розряду низького тиску, а випадок коли $a \sim r_D$ реалізується для типових умов в ізотермічній плазмі. В чисельних розрахунках розмір обчислювальної області в фізичному просторі змінювався від $50r_D$ до $100r_D$ в залежності від розміру частинки. Кількість обчислювальних вузлів на відрізку Ω_r змінювалася від 200 до 400 точок. При цьому кількість паралельних обчислювальних процесів змінювалась від 32 до 64. В просторі швидкостей обчислювальна область для компонент плазми обмежувалась прямокутниками $\Omega_{\upsilon\alpha} = \{\, 0 \le \xi \le A_\alpha,\, 0 \le \omega \le \pi \}$. Розмір обчислювальної області A_α змінювався від $6\upsilon_{\alpha 0}$ до $15\upsilon_{\alpha 0}$, де $\upsilon_{\alpha 0} = \sqrt{2kT_{\alpha 0}/m_\alpha}$ це середня теплова швидкість компоненти $\alpha = \mathrm{i}, \mathrm{e}$. Оптимальна кількість обчислювальних вузлів в просторі швидкостей складала 35×48. Загальний час, який необхідно було потратити для знаходження стаціонарних розв'язків кінетичних рівнянь складав від 2 до 6 годин, в залежності від того, в якому режимі зіткнень протікає заряджання частинки (тобто від значення l_{ia}/r_D). Нижче в підрозділах 3.2.1 – 3.2.3 буде висвітлено основні результати моделювання процесів заряджання та екранування макрочастинок в слабкоіонізованій плазмі аргону.

3.2 Результати чисельного дослідження характеристик процесу взаємодії макрочастинки з оточуючою плазмою

3.2.1 Залежність заряду частинки від параметрів плазми

В цьому підрозділі буде розглянуто питання про залежність стаціонарного заряду частинки від параметрів оточуючої плазми. При цьому основна увага приділяється залежності заряду від числа Кнудсена для іон-атомних зіткнень l_{ia}/r_D. Розглянемо спочатку випадок, коли радіус частинки набагато менший за довжину Дебая в плазмі. Як було відмічено в підрозділі 1.3.1, у випадку, коли $a \ll r_D$, заряд частинки може бути знайдений на основі моделей, розроблених в роботах [82, 83, 84, 85]. В цих роботах було запропоновано різні апроксимаційні формули для щільності струму іонів j_{i} на поверхні частинки. Щільність іонного струму є функцією від потенціалу поверхні частинки φ_a. При цьому, потенціал поверхні частинки може бути знайдено із балансу іонного та електронного струмів на поверхні частинки. Для обчислення щільності струму електронів j_e використовують, як правило, відомий вираз із теорії обмеженого орбітального руху

$$j_e = (2\pi)^{-1/2} n_{\mathrm{e}0} \upsilon_{\mathrm{e}0} \exp\left(-\varphi_a / kT_{\mathrm{e}0}\right). \tag{3.9}$$

Таким чином, потенціал поверхні частинки знаходять із розв’язку трансцендентного рівняння

$$\varphi_a = kT_{\mathrm{e}0} \ln\left(\sqrt{2\pi}\, j_{\mathrm{i}} / n_{\mathrm{e}0} \upsilon_{\mathrm{e}0}\right). \tag{3.10}$$

Знаючи потенціал поверхні φ_a, заряд частинки q може бути обчислений за допомогою лінійного співвідношення $q = \varphi_a a$. Згідно із загальноприйнятою термінологією модель із роботи [82] називають моделлю Хадчінсона, модель із роботи [83] називають моделлю Д’ячкова, модель із роботи [84] називають моделлю Зобніна, а модель із роботи [85] називають інтерполяцією Храпака-Морфіла (ХМ).

Проведемо порівняння результатів, які було отримано на основі чисельного розв'язку кінетичних рівнянь, із результатами, які було отримано на основі моделей із робіт [82, 83, 84, 85]. Розглянемо залежність нормованого іонного струму $\hat{J}_\mathrm{i} = n_\mathrm{i} u_\mathrm{i} / n_\mathrm{i0} \upsilon_\mathrm{i0}$ на поверхні частинки від числа Кнудсена для іон-атомних зіткнень (l_ia/r_D). На рис. 3.1 дана залежність приведена для випадку $T_\mathrm{e0}/T_\mathrm{i0} = 30$.

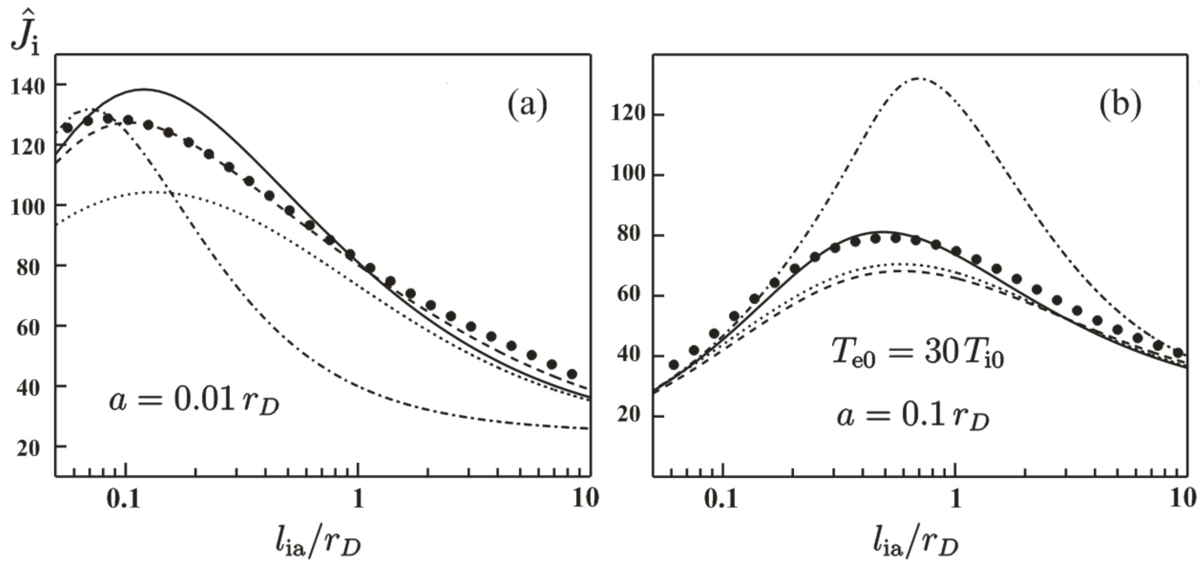

Рис. 3.1 Залежність нормованого іонного струму $\hat{J}_\mathrm{i} = n_\mathrm{i} u_\mathrm{i} / n_\mathrm{i0} \upsilon_\mathrm{i0}$ на поверхні частинки від числа Кнудсена для іон-атомних зіткнень при $T_\mathrm{e0}/T_\mathrm{i0} = 30$. Результати показано для двох значень радіусу частинки: $a = 0.01 r_D$ (а) та $a = 0.1 r_D$ (б). Суцільна крива (——) відповідає інтерполяції Храпака-Морфіла, штрихована крива (− − −) відповідає моделі Хадчінсона, пунктирна крива (····) відповідає моделі Зобніна, штрих-пунктирна крива (− · − · −) відповідає моделі Д'ячкова, символи ● показують результати, отримані на основі чисельного розв'язку модельних кінетичних рівнянь.

Із рис. 3.1 можна бачити, що залежність іонного струму від числа Кнудсена є немонотонною та має максимум при деякому значенні l_ia/r_D. Фізичні причини появи цього максимуму обговорювалися в роботі [85]. В слабкозіткневому режимі іони втрачають орбітальний момент за рахунок зіткнень з атомами, внаслідок чого рух іонів стає переважно радіальним та іонний струм на частинку збільшується. В сильнозіткневому режимі іонний струм зменшується за рахунок інтенсивної релаксації іонної компоненти до стану із нульовою швидкістю, в якому знаходиться газ атомів. Таким чином, положення максимуму іонного струму відповідає перехідному режиму зіткнень. Із рис. 3.1 видно, що іонний струм досягає максимального значення, коли $l_{\text{ia}} \sim a$. Також із рис. 3.1 можна зробити висновок, що результати, отримані на основі чисельного розв'язку кінетичних рівнянь, добре узгоджуються із результатами, які було отримано на основі моделей Хадчінсона та Храпака-Морфіла. Результати, отримані за допомогою моделі Зобніна, добре узгоджуються з іншими результатами у випадку відносно великих частинок, але у випадку малих частинок ця модель дає дещо нижче значення іонного струму в перехідному режимі. Результати, отримані на основі моделі Д'ячкова, сильно відрізняються від інших результатів. Це можна пояснити тим, що модель Д'ячкова виведена за умови $l_{\text{ia}} \ll r_D$, яка не виконується в перехідному режимі зіткнень.

Розглянемо також залежність нормованого заряду частинки $z = e|q|/akT_{\text{e}0}$ від числа Кнудсена l_{ia}/r_D, яку приведено на рис. 3.2 для випадку $T_{\text{e}0}/T_{\text{i}0} = 30$. Можна бачити, що результати, отримані шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь добре узгоджуються із результатами, які було отримано на основі моделей Хадчінсона та Храпака-Морфіла. Видно також, що поведінка нормованого заряду частинки є немонотонною. Заряд набуває мінімуму, коли виконується умова $l_{\text{ia}} \sim a$. Наявність мінімуму в залежності заряду від числа Кнудсена можна пояснити наявністю максимуму в залежності іонного струму від числа Кнудсена. Окрім цього, приймаючи до уваги рівняння (3.10) та результати, представлені на рис.3.1, можна зробити висновок, що електронний струм задовольняє формулі (3.9) в широкому діапазоні значень відношення l_{ia}/r_D.

Розглянемо далі випадок, коли радіус частинки має один порядок із довжиною Дебая в плазмі ($a \sim r_D$). На рис. 3.3 приведено залежність нормованого заряду частинки від числа Кнудсена для іон-атомних зіткнень (l_{ia}/r_D) у випадку ізотермічної плазми. Із рис. 3.3 видно, що при $l_{\text{ia}}/r_D \to \infty$ значення заряду, отримані шляхом розв'язку кінетичних рівнянь, добре узгоджуються із значенними, які було отримано на основі моделі із роботи [44]. Також можна бачити немонотонну залежність заряду частинки від числа Кнудсена. Фізичну причину появи цього мінімуму було обговорено вище. Видно, що мінімум в залежності заряду від числа Кнудсена виникає тоді, коли виконується співвідношення $l_{\mathrm{ia}} \sim a$. Окрім цього із рис. 3.3 можна зробити висновок, що в сильнозіткневому режимі залежність заряду частинки від числа Кнудсена може бути описано лінійною функцією від $\ln\left(l_{\mathrm{ia}}/r_D\right)$.

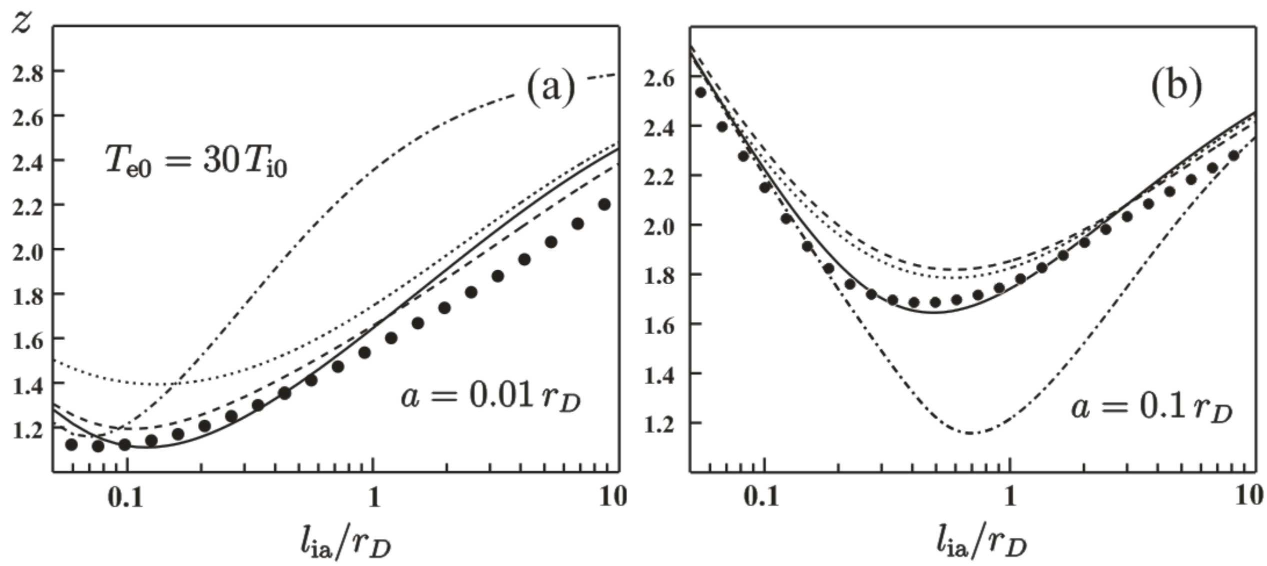

Рис. 3.2 Залежність нормованого заряду частинки $z = e|q|/akT_{\mathrm{e0}}$ від числа Кнудсена для іон-атомних зіткнень при $T_{\mathrm{e0}}/T_{\mathrm{i0}} = 30$. Результати показано для двох значень радіусу частинки: $a = 0.01r_D$ (а) та $a = 0.1r_D$ (б). Суцільна крива (——) відповідає інтерполяції Храпака-Морфіла, штрихована крива (−−−) відповідає моделі Хадчінсона, пунктирна крива (····) відповідає моделі Зобніна, штрих-пунктирна крива (−·−·−) відповідає моделі Д’ячкова, символи • показують результати, отримані на основі чисельного розв’язку модельних кінетичних рівнянь.

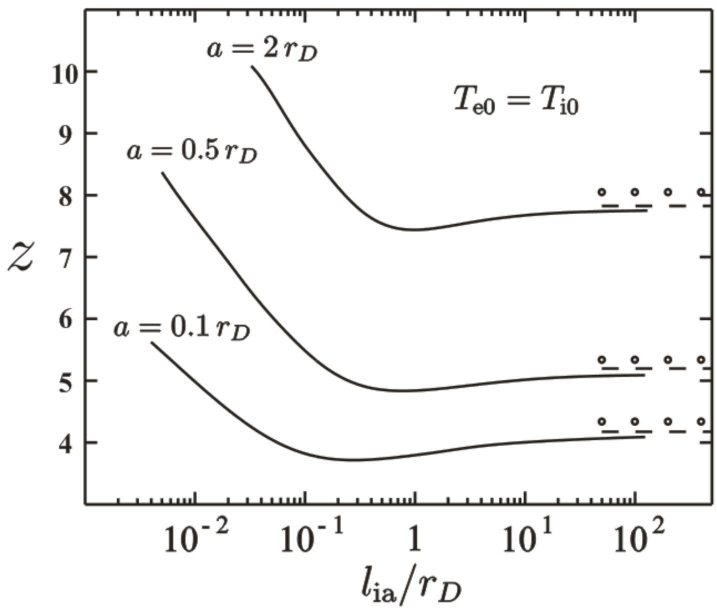

Рис. 3.3 Залежність нормованого заряду частинки $z = e|q|/akT_{e0}$ від числа Кнудсена для іон-атомних зіткнень при $T_{e0} = T_{i0}$. Результати показано для різних значень радіусу частинки: $a = 0.1r_D$, $a = 0.5r_D$, та $a = 2r_D$. Штрихована лінія $(---)$ показує значення заряду в беззіткневій плазмі, а символи ○ показують результати, отримані на основі нелінійної беззіткневої моделі із роботи [44].

Із рис. 3.3 видно, що нормований заряд частинки зростає із зростанням відношення a/r_D. Слід відмітити, що при цьому нормований потенціал поверхні частинки $\hat{\varphi}_a = \varphi_a/kT_{e0}$ практично не залежить від a/r_D. Для малих частинок ($a \ll r_D$) виконуються співвідношення $q = a\varphi_a$ та $z = \hat{\varphi}_a$. Так, наприклад, для частинки $a = 0.1r_D$ нормований заряд в беззіткневому режимі складає приблизно 4. Це значення добре узгоджується із значенням нормованого потенціалу поверхні, який можна отримати на основі теорії обмеженого орбітального руху. Для обчислення нормованого заряду в беззіткневому наближенні у випадку великих частинок ($a \sim r_D$) деякі автори пропонують використовувати вираз $z = \hat{\varphi}_a\left(1 + a/r_D\right)$ [132]. На основі даних, які приведені на рис. 3.3, можна бачити, що ця формула призводить до великої похибки в обчисленні заряду частинки. Так, для частинки $a = 2r_D$ ця формула дає значення $z = 12$. З іншого боку із рис. 3.3 видно, що значення заряду в даному випадку складає лише $z = 8$, тобто похибка складає приблизно 30 %.

Загалом можна зробити висновок, що залежність нормованого заряду частинки від числа Кнудсена у випадку $a \sim r_D$ має такий самий вигляд, як і залежність заряду від числа Кнудсена у випадку $a \ll r_D$. Проте слід зазначити, що для великих частинок ($a \sim r_D$) ця залежність не може бути розрахована на основі моделей, запропонованих в роботах [82, 83, 84, 85]. У випадку $a \sim r_D$ необхідно враховувати нелінійні ефекти, які виникають при екрануванні заряду частинки в плазмі. Зокрема, це можна зробити на основі того підходу, який було описано в розділі 2, тобто на основі прямого чисельного розв'язку модельних кінетичних рівнянь. Відзначимо, що залежність заряду частинки від числа Кнудсена для іон-атомних зіткнень у випадку великих частинок отримано вперше.

Наприкінці цього підрозділу розглянемо також кінетику процесу заряджання макрочастинки у плазмі. Залежність заряду частинки від часу для різних режимів зіткнень було отримано автором у роботі [23]. При цьому для опису динаміки електронів використовувалося повне кінетичне рівняння (2.2), замість модифікованого кінетичного рівняння (2.66). На рис. 3.4 зображено залежність нормованого заряду частинки від нормованого часу для випадку $T_{e0} = T_{i0}$, $r_D = 0.15a$ та двох значень числа Кнудсена $l_{ia}/r_D = 17$ та $l_{ia}/r_D = 0.17$. Із рис. 3.4 видно, що процес заряджання частинки іде у дві стадії. На першій стадії заряд частинки стрімко зростає за рахунок поглинання електронів із плазми та набуває значення, яке практично дорівнює стаціонарному значенню заряду. Тривалість цієї стадії складає приблизно $10 r_D/\upsilon_{e0}$. З фізичної точки зору ця стадія процесу заряджання відповідає встановленню електронного струму на частинку. На другій стадії відбувається встановлення іонного струму, який в даному випадку практично дорівнює електронному струму. Тривалість цієї стадії залежить від інтенсивності іон-атомних зіткнень поблизу частинки, тобто від відношення l_{ia}/r_D. Можна бачити, що протягом другої стадії процесу заряджання відбувається асимптотичне наближення заряду до стаціонарного значення.

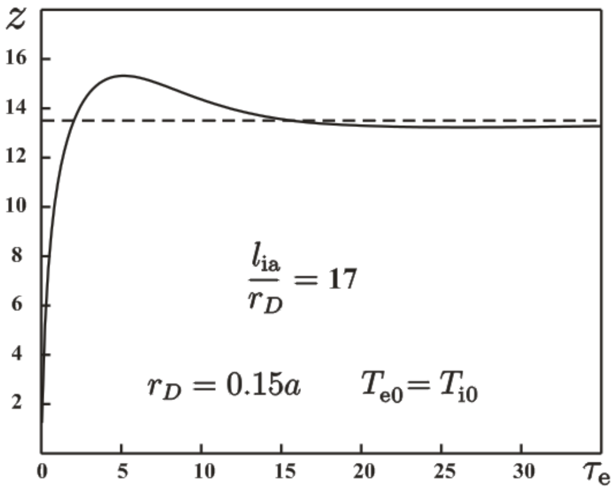

Рис. 3.4 Залежність нормованого заряду $z = e|q|/akT_{e0}$ частинки від нормованого часу $\tau_e = t\,\upsilon_{e0}/r_D$ для випадку $T_{e0} = T_{i0}$, $r_D = 0.15a$ та двох значень числа Кнудсена $l_{ia}/r_D = 17$ та $l_{ia}/r_D = 0.17$. Штрихована лінія показує стаціонарне значення нормованого заряду частинки.

3.2.2 Розподіл електричного потенціалу навколо частинки

Розглянемо далі питання про вплив іон-атомних зіткнень на розподіл електричного потенціалу навколо частинки в слабкоіонізованій плазмі. Розглянемо спочатку випадок, коли розмір частинки набагато менший за довжину Дебая в плазмі. В цьому випадку розподіл електричного потенціалу навколо частинки можна знайти на основі моделей, які було запропоновано в роботах [86, 87, 88]. В роботах [87, 88] представлено аналітичні вирази для розподілу електричного потенціалу на основі лінійної кінетичної моделі із точковим стоком, яку було розроблено в роботі [86]. Формулу для розподілу електричного потенціалу в роботі [87], було отримано для випадку $l_{ia} \gg r_D$. Проте, в цій роботі було показано, що дана формула переходить в правильний вираз для розподілу потенціалу у протилежному випадку $l_{ia} \ll r_D$. Таким чином, формула із роботи [87] може бути використана (принаймні формально) для знаходження розподілу електричного потенціалу навколо частинки при довільних значеннях відношення l_{ia}/r_D. Слід відзначити, що модель із роботи [87] базується на припущенні про незалежність перерізу поглинання іонів частинкою від швидкості іонів. Більш точні вирази для розподілу електричного потенціалу навколо частинки, які враховують вказану вище залежність, було отримано в роботі [88]. Відзначимо також, що для моделей із робіт [87, 88] заряд частинки є вільним параметром, який необхідно визначити на основі інших підходів. Окрім цього, для моделі із роботи [87] вільним параметром є також іонний струм на частинку.

На рис. 3.5 приведено порівняння результатів, які було отримано шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь, та результатів, які було отримано за допомогою виразів для електричного потенціалу із роботи [87]. При цьому, для того щоб визначити заряд частинки та іонний струм в моделі із роботи [87] використовується інтерполяційна формула Храпака-Морфіла [85]. На рис. 3.5 показано розподіл нормованого електричного поля для різних значень числа Кнудсена l_{ia}/r_D у випадку $T_{\text{e}0} = 30T_{\text{i}0}$. Нормоване електричне поле визначається як $\hat{E} = E/E_{\text{e}0}$, де $E_{\text{e}0} = kT_{\text{e}0}/r_D e$. Із рис. 3.5. видно, що результати, отримані шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь, добре узгоджуються із результатами, які отримані за допомогою моделі із роботи [87]. Розбіжності виникають тільки в перехідному режимі зіткнень, ($l_{\text{ia}} \sim r_D$), що можна пояснити наступним чином. Як було відмічено вище, вираз для електричного потенціалу, представлений в роботі [87], отримано на основі припущення $l_{\text{ia}} \gg r_D$. Той факт, що в межах даної моделі можна отримати правильний вираз для електричного потенціалу у сильнозіткневому режимі ($l_{\text{ia}} \ll r_D$), має штучний характер. Таким чином, можна передбачити, що модель із роботи [87] повинна давати менш точні результати в перехідному режимі зіткнень. Тим не менш, на основі результатів, які представлено на рис. 3.5, можна зробити висновок, що модель із роботи [87] має задовільну точність та може бути застосована для знаходження розподілу електричного потенціалу в широкому діапазоні значень чисел Кнудсена для іон-атомних зіткнень.

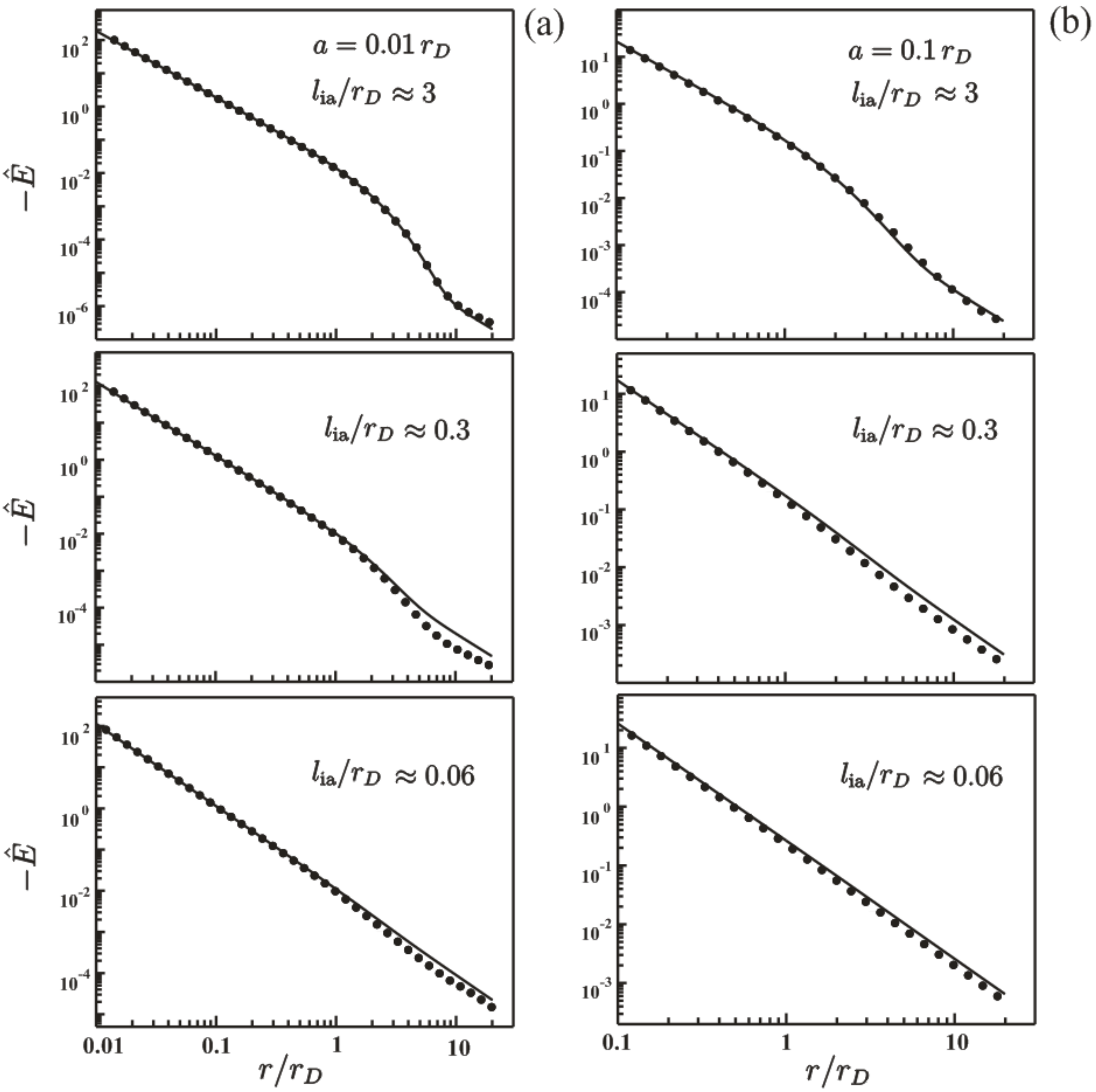

Рис. 3.5 Розподіл нормованого електричного поля поблизу частинки для різних значень числа Кнудсена l_{ia}/r_D у випадку $T_{\mathrm{e}0} = 30T_{\mathrm{i}0}$. Результати показані для двох значень радіусу частинки: $a = 0.01r_D$ (a) та $a = 0.1r_D$ (b). Суцільна крива показує результати, отримані на основі моделі із роботи [87]. Символи ● показують результати, отримані шляхом розв'язку кінетичних рівнянь.

Як було показано в роботі [88] на точність лінійних кінетичних моделей впливає також вибір функціональної форми для перерізу поглинання іонів частинкою. Модель із роботи [87] базується на припущенні, що переріз поглинання іонів частинкою не залежить від швидкості іонів. Це припущення є невірним в беззіткневому режимі. Із теорії обмежено орбітального руху відомо, що в даному випадку переріз поглинання іонів частинкою залежить від швидкості іонів, як ξ^{-2}. В результаті цього, асимптотичне значення потенціалу, отримане в роботі [87] для беззіткневого режиму, відрізняється від відомого результату із теорії плазмових зондів (дивись [133]) в два рази. В роботі [88], було отримано більш точний вираз для розподілу електричного потенціалу навколо частинки в слабкозіткневій плазмі, який враховує залежність перерізу поглинання іонів частинкою від швидкості іонів. При цьому для визначення перерізу поглинання іонів використовувався відомий вираз із теорії обмеженого орбітального руху (дивись рівняння (1) та (16) в роботі [88]). Асимптотичне значення потенціалу, отримане в роботі [88], співпадає із відомим результатом із теорії плазмових зондів. На рис. 3.6. зображено порівняння результатів, які було отримано на основі моделей із робіт [87, 88], та результатів, отриманих шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь. На основі результатів, представлених на рис. 3.6 можна зробити висновок, що модель із роботи [88] дає більш точні результати ніж модель із роботи [87] в слабкозіткневому режимі.

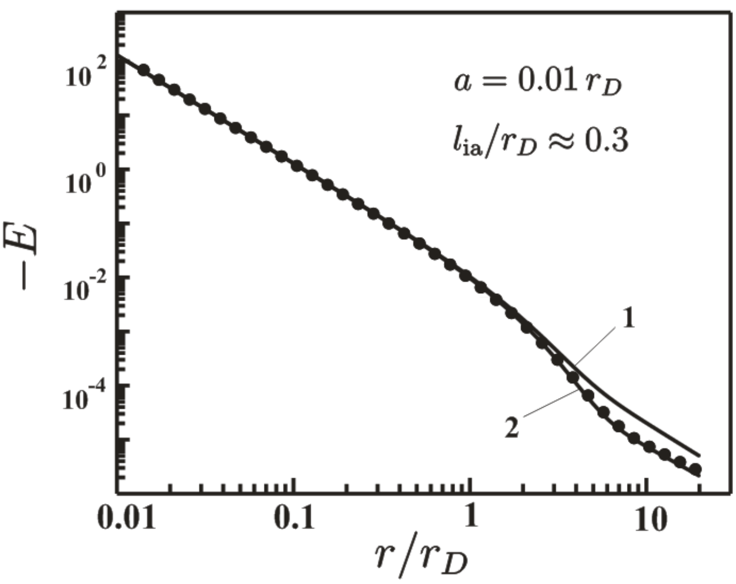

Рис. 3.6 Розподіл нормованого електричного поля поблизу частинки у випадку $a = 0.01 r_D$, $l_{\text{ia}}/r_D \approx 0.3$, $T_{\text{e0}} = 30 T_{\text{i0}}$. Суцільна лінія (1) відповідає моделі із роботи [87], суцільна лінія (2) відповідає моделі із роботи [88], символи • показують результати, отримані шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь.

Розглянемо далі випадок, коли радіус частинки має один порядок із довжиною Дебая в плазмі ($a \sim r_D$). На рис. 3.7 та 3.8 показано розподіли електричного потенціалу навколо частинок із радіусами $a = 0.5 r_D$ та $a = 2 r_D$, які було отримано шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь для різних значень числа Кнудсена l_{ia}/r_D. Результати представлено для випадку ізотермічної плазми ($T_{\mathrm{e}0} = T_{\mathrm{i}0} = T_0$). На рис. 3.7 та 3.8 зображено також результати, отримані на основі дрейфово-дифузійної моделі із роботи [64] та беззіткневої нелінійної моделі із роботи [44]. Модель із роботи [44] містить в якості вільних параметрів відношення $\tau = T_{\mathrm{i}0}/T_{\mathrm{e}0}$ та відносну концентрацію зв'язаних іонних станів A_b. Відповідні значення цих параметрів приведено в підписах до рисунків на яких зображено результати, отримані на основі моделі із роботи [44]. Для знаходження розподілу електричного потенціалу на основі дрейфово-дифузійної моделі автором було використано підхід, який дещо відрізняється від того підходу, який було запропоновано в роботі [64]. Зокрема, автор використовував стаціонарну систему дрейфово-дифузійних рівнянь для концентрації іонів та електронів поблизу частинки. В даному випадку ці рівняння не містять коефіцієнти дифузії іонів D_{i} та електронів D_{e}, а для того, щоб знайти розв'язок крайової задачі для цих рівнянь, необхідно задати лише значення концентрацій іонів n_{ig} та електронів n_{eg} на поверхні частинки і значення заряду частинки q (або значення нормованого заряду z). При цьому баланс іонного та електронного струмів на поверхні частинки можна задовольнити шляхом підбору вільного параметру $D_{\mathrm{i}}/D_{\mathrm{e}}$. Відзначимо, що в даному випадку відношення $D_{\mathrm{i}}/D_{\mathrm{e}}$ втрачає свій первісний фізичний зміст. Це можна пояснити тим, що баланс струмів, записаний в межах дрейфово-дифузійного наближення, не є коректним з фізичної точки зору оскільки макроскопічні швидкості іонів та електронів біля поверхні частинки можуть бути досить значними. Відповідні значення n_{ig}, n_{eg} та z показано в підписах к рисункам на яких зображено результати, отримані на основі дрейфово-дифузійної моделі із роботи [64].

Із рис. 3.7 – 3.8 видно, що результати, отримані шляхом чисельного розв’язку кінетичних рівнянь, добре узгоджуються із результатами, обчисленими на основі відомих моделей в двох граничних випадках $l_{\text{ia}} \ll r_D$ та $l_{\text{ia}} \gg r_D$. Як було показано в роботі [64], електричний потенціал навколо частинки в сильнозіткневій плазмі завжди має асимптотичну поведінку кулонівського типу, тобто асимптота електричного потенціалу має вигляд q_{eff}/r, де q_{eff} це ефективний (незаекранований) заряд частинки. На основі результатів, представлених на рис. 3.7 – 3.8, можна зробити висновок, що в перехідному режимі зіткнень електричний потенціал частинки також має асимптотичну поведінку кулонівського типу. При цьому ефективний заряд частинки q_{eff} залежить від числа Кнудсена l_{ia}/r_D та нормованого радіусу a/r_D.

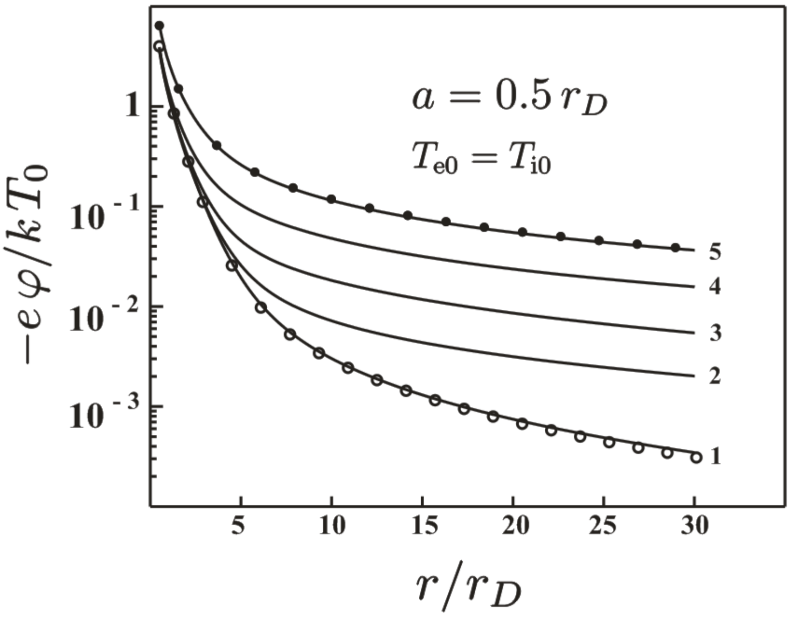

Рис. 3.7 Розподіл нормованого електричного потенціалу навколо частинки із радіусом $a = 0.5 r_D$ у випадку $T_{e0} = T_{i0}$. Суцільні лінії показують результати, отримані шляхом чисельного розв’язку кінетичних рівнянь для різних значень числа Кнудсена l_{ia}/r_D: (1) ∞ (беззіткнева плазма), 3.28 (2), 1.16 (3), 0.38 (4), 0.012 (5). Символи ● показують результати, отримані на основі дрейфово-дифузійної моделі із роботи [64] при $z = 7.4$, $n_{\text{ig}} = 0.2$ та $n_{\text{eg}} = 0$. Символи ○ показують результати, отримані на основі нелінійної беззіткневої моделі із роботи [44] при $\tau = 1$ та $A_b = 1$.

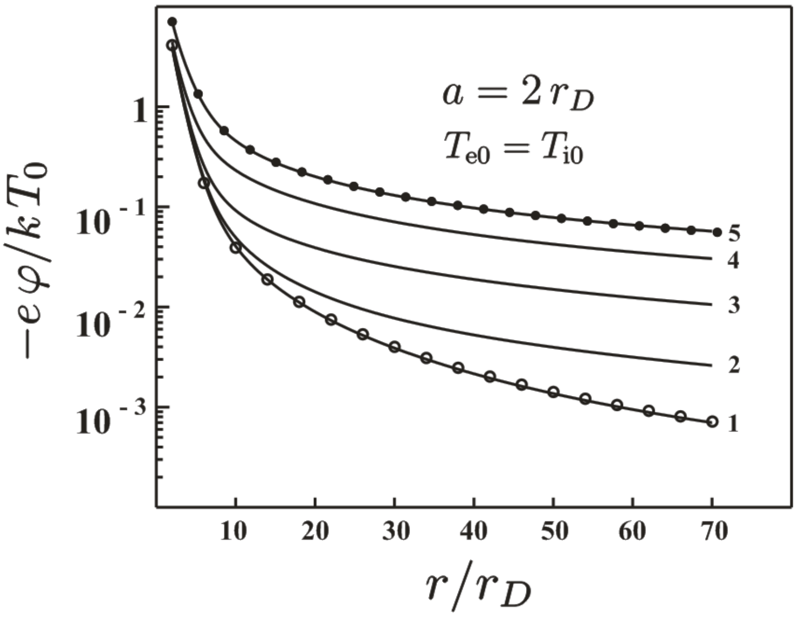

Рис. 3.8 Розподіл нормованого електричного потенціалу навколо частинки із радіусом $a = 2r_D$ у випадку $T_{e0} = T_{i0}$. Суцільні лінії показують результати, отримані шляхом чисельного розв’язку кінетичних рівнянь для різних значень числа Кнудсена l_{ia}/r_D: (1) ∞ (беззіткнева плазма), 12 (2), 3.28 (3), 0.79 (4), 0.03 (5). Символи ● показують результати, отримані на основі дрейфово-дифузійної моделі із роботи [64] при $z = 10$, $n_{ig} = 0.1$ та $n_{eg} = 0$. Символи ○ показують результати, отримані на основі нелінійної беззіткневої моделі із роботи [44] при $\tau = 1.8$ (ці результати практично не залежать від значення параметру A_b).

Одним із можливих шляхів знаходження ефективного заряду є аналіз розподілу повного заряду навколо частинки в плазмі. На рис. 3.9 – 3.10 зображено розподіл нормованого повного заряду Q^* навколо частинок із радіусами $a = 0.5r_D$ та $a = 2r_D$ для різних чисел Кнудсена. Нормований повний заряд визначається як $Q^* = Q_r/q$, де Q_r це повний заряд навколо частинки всередині кулі із радіусом r. Із рис. 3.9 – 3.10 видно, що на великих відстанях від частинки нормований повний заряд Q_r приймає постійне значення. Згідно з теоремою Гаусса, це є підтвердженням того факту, що електричне поле на великих відстанях від частинки має асимптотичну поведінку кулонівського типу. При цьому, асимптотичне значення нормованого повного заряду визначає відносний ефективний заряд частинки в плазмі $\hat{q}_{\text{eff}} = q_{\text{eff}}/q$.

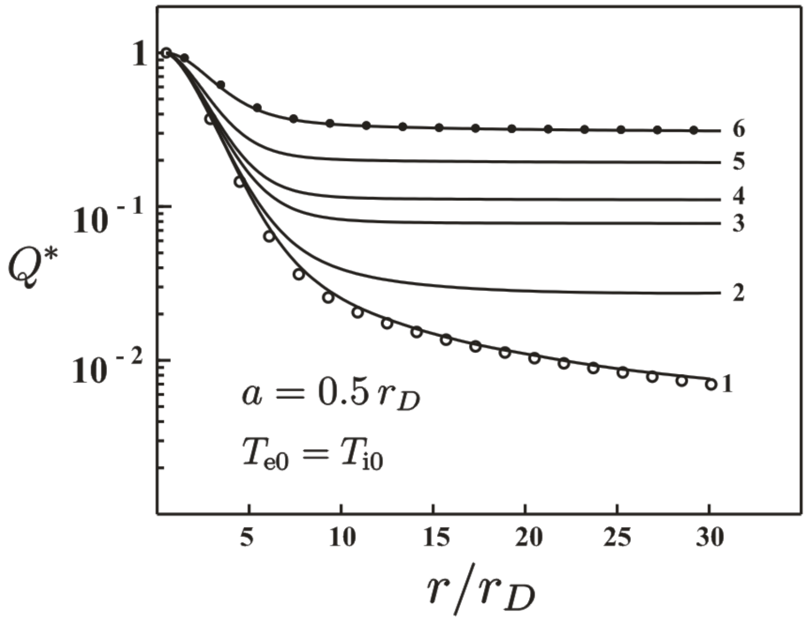

Рис. 3.9 Розподіл нормованого повного заряду навколо частинки в плазмі у випадку $a = 0.5 r_D$, $T_{e0} = T_{i0}$. Суцільні лінії показують результати, отримані шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь для різних значень числа Кнудсена l_{ia}/r_D: (1) ∞ (беззіткнева плазма), 1.16 (2), 0.79 (3), 0.38 (4), 0.03 (5) та 0.01 (6). Символи ● показують результати, отримані на основі дрейфово-дифузійної моделі із роботи [64] при $z = 7.4$, $n_{\text{ig}} = 0.2$ та $n_{\text{eg}} = 0$. Символи ○ показують результати, отримані на основі нелінійної беззіткневої моделі із роботи [44] при $\tau = 1$ та $A_b = 1$.

На рис. 3.11 показано залежність відносного ефективного заряду частинки від числа Кнудсена l_{ia}/r_D для різних значень нормованого радіусу a/r_D. В беззіткневому режимі ($l_{\text{ia}}/r_D \gg 1$) відносний ефективний заряд прямую до нуля, тобто має місце повне екранування частинки в плазмі. В сильнозіткневому режимі відносний ефективний заряд прямує до постійного значення $\hat{q}_{\text{eff}}^h$, яке залежить від нормованого радіусу частинки. Із рис. 3.11 видно, що значення $\hat{q}_{\text{eff}}^h$ зростає із зменшенням a/r_D. Зокрема в роботах [87, 88] було показано, що у випадку $a/r_D \to 0$ граничне значення ефективного відносного заряду складає приблизно $\hat{q}_{\text{eff}}^h \approx 0.5$. Відзначимо, що для випадку малих частинок ($a/r_D \ll 1$) залежність відносного ефективного заряду від числа Кнудсена може бути знайдена на основі моделей із робіт [87, 88]. З іншого боку, залежність відносного ефективного заряду від числа Кнудсена у випадку $a \sim r_D$ отримано вперше.

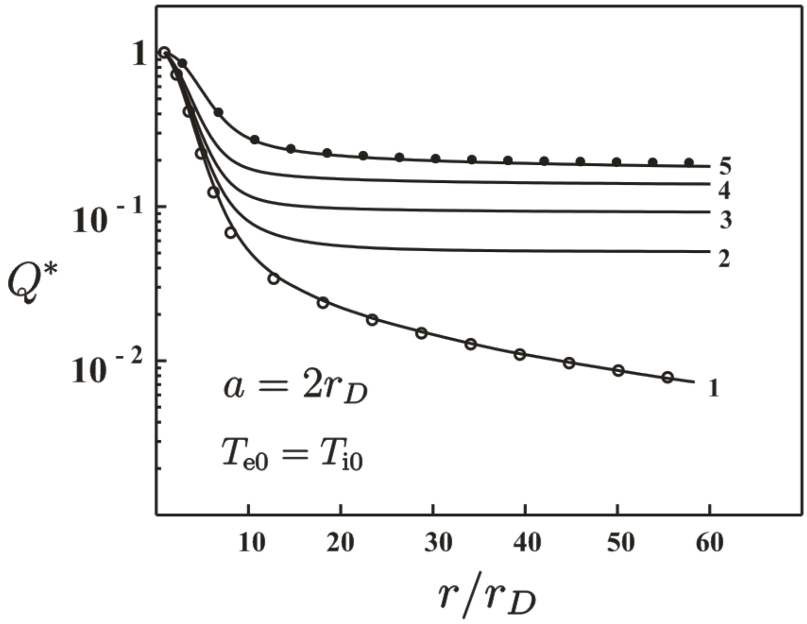

Рис. 3.10 Розподіл нормованого повного заряду навколо частинки в плазмі у випадку $a = 2r_D$, $T_{\text{e0}} = T_{\text{i0}}$. Суцільні лінії показують результати, отримані шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь для різних значень числа Кнудсена l_{ia}/r_D: (1) ∞ (беззіткнева плазма), 3.28 (2), 1.6 (3), 0.79 (4), 0.03 (5). Символи ● показують результати, отримані на основі дрейфово-дифузійної моделі із роботи [64] при $z = 10$, $n_{\text{ig}} = 0.1$ та $n_{\text{eg}} = 0$. Символи ○ показують результати, отримані на основі нелінійної беззіткневої моделі із роботи [44] при $\tau = 1.8$ (ці результати практично не залежать від значення параметру A_b).

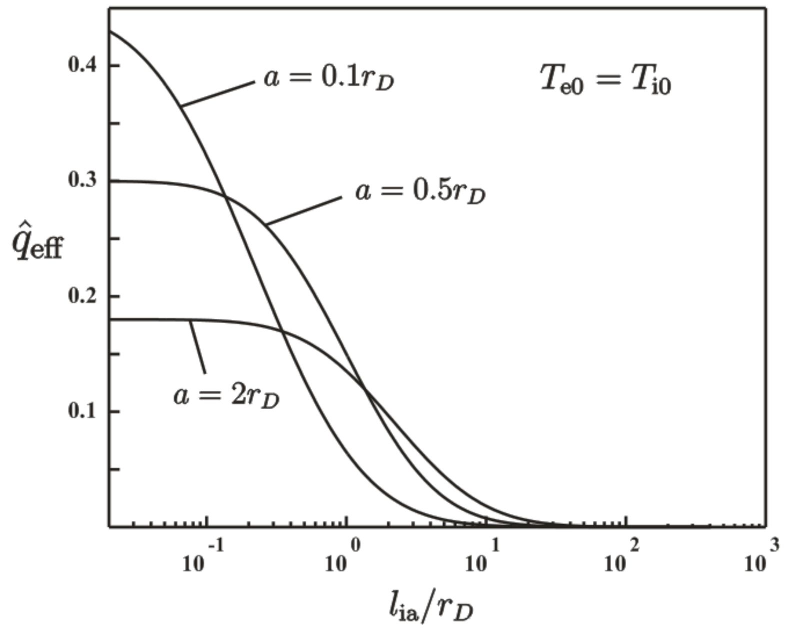

Рис. 3.11 Залежність відносного ефективного заряду $\hat{q}_{\rm eff}$ від числа Кнудсена $l_{\rm ia}/r_D$ для частинок із радіусами $a = 0.1r_D$, $0.5r_D$ та $2r_D$ у випадку $T_{\rm e0} = T_{\rm i0}$.

3.2.3 Розподіл макроскопічних параметрів плазми навколо частинки

Підхід, який базується на прямому чисельному розв'язку кінетичних рівнянь, дає також можливість отримати розподіли макроскопічних параметрів плазми навколо поглинаючої макрочастинки. На рис. 3.12 – 3.14 зображено розподіл нормованої концентрації іонів $\hat{n}_{\rm i} = n_{\rm i}/n_{\rm i0}$ для різних значень числа Кнудсену $l_{\rm ia}/r_D$ та нормованого радіусу a/r_D у випадку ізотермічної плазми $T_{\rm e0} = T_{\rm i0}$. Із рис. 3.12 – 3.14 видно, що в двох граничних випадках $l_{\rm ia}/r_D \ll 1$ та $l_{\rm ia}/r_D \gg 1$ результати, отримані шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь, добре узгоджуються із результатами, які обчислено за допомогою відомих моделей із робіт [64] та [44]. В беззіткневому режимі $l_{\rm ia}/r_D \gg 1$, можна бачити характерну немонотонну поведінку концентрації іонів біля частинки, яка виникає за рахунок орбітального руху іонів в полі частинки та частково пов'язана із утворенням зв'язаних іонних станів. Оскільки зіткнення іонів з атомами руйнують їх орбітальний рух немонотонність іонної концентрації зникає із зменшенням числа Кнудсену. Також можна бачити, що орбітальний рух іонів практично не впливає на розподіл іонної концентрації біля досить великих частинок (дивись рис. 3.14). Із результатів, представлених на рис. 3.12 – 3.14, можна зробити висновок, що у випадку ізотермічної плазми збурення концентрації іонів поблизу частинки є незначним. З іншого боку у випадку неізотермічної плазми нормована концентрація іонів біля поверхні частинки може набувати досить великих значень (дивись рис. 3.15). Як було відмічено у розділі 1, заряд частинки визначається температурою електронів в плазмі, тобто $qe \sim akT_{e0}$. У випадку $T_{e0} \gg T_{i0}$ енергія електричної взаємодії частинки з іонами значно більша за середню теплову енергію руху іонів, внаслідок чого поле частинки вносить значні збурення у розподіл іонної концентрації поблизу поверхні. Відзначимо, що результати, представлені на рис. 3.15 добре узгоджуються із результатами, які було отримано в роботі [82] на основі прямого статистичного чисельного моделювання процесів заряджання та екранування частинки.

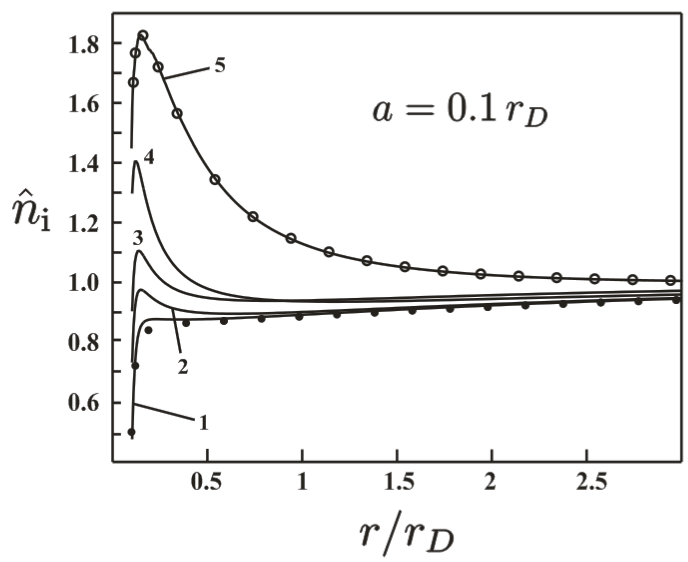

Рис. 3.12 Розподіл нормованої концентрації іонів у випадку $a = 0.1r_D$, $T_{e0} = T_{i0}$. Суцільні лінії показують результати, отримані шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь для різних значень числа Кнудсена l_{ia}/r_D: 0.0055 (1), 0.012 (2), 0.017 (3), 0.032 (4), ∞ (5). Символи ● показують результати, отримані на основі дрейфово-дифузійної моделі із роботи [64] при $z = 5.6$, $n_{ig} = 0.5$ та $n_{eg} = 0$. Символи ○ показують результати, отримані на основі нелінійної моделі із роботи [44] при $\tau = 1.1$ та $A_b = 0.19$.

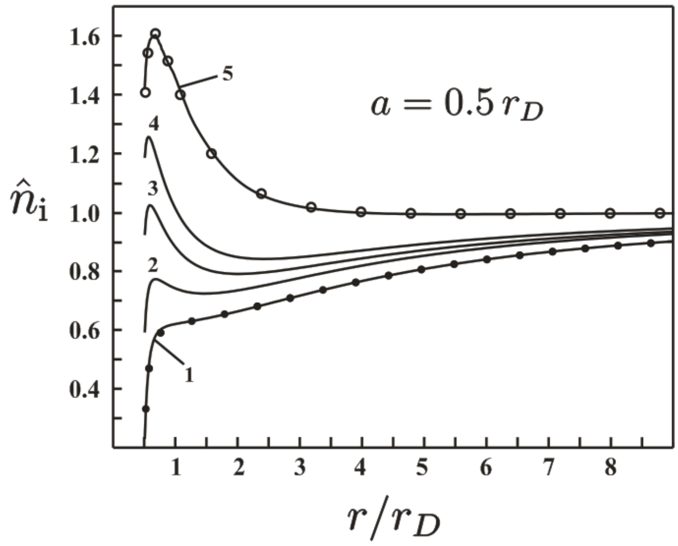

Рис. 3.13 Розподіл нормованої концентрації іонів у випадку $a = 0.5r_D$, $T_{\mathrm{e}0} = T_{\mathrm{i}0}$. Суцільні лінії показують результати, отримані шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь для різних значень числа Кнудсена l_{ia}/r_D: 0.0125 (1), 0.065 (2), 0.14 (3), 0.215 (4), ∞ (5). Символи ● показують результати, отримані на основі дрейфово-дифузійної моделі із роботи [64] при $z = 7.4$, $n_{\mathrm{ig}} = 0.2$ та $n_{\mathrm{eg}} = 0$. Символи ○ показують результати, отримані на основі моделі із роботи [44] при $\tau = 1.35$ та $A_b = 0.3$.

Розподіл концентрації електронів поблизу частинки практично не залежить від розміру частинки та ступеню неізотермічності плазми. В якості прикладу на рис. 3.16 показано розподіл нормованої концентрації електронів $\hat{n}_\mathrm{e} = n_\mathrm{e}/n_{\mathrm{e}0}$ для різних чисел Кнудсена у випадку $a = 0.5r_D$, $T_{\mathrm{e}0} = T_{\mathrm{i}0}$. Із рис. 3.16 видно, що зіткнення заряджених компонент плазми із атомами мають незначний вплив на розподіл концентрації електронів поблизу поверхні. Це можна пояснити тим, що електрони, які знаходяться у затримуючому потенційному полі частинки, перебувають у стані, близькому до стану термодинамічної рівноваги, тобто розподіл електронної концентрації завжди близький до рівноважного розподілу Больцмана: $n_\mathrm{e} = n_{\mathrm{e}0} \exp\left(-\varphi e/kT_{\mathrm{e}0}\right)$.

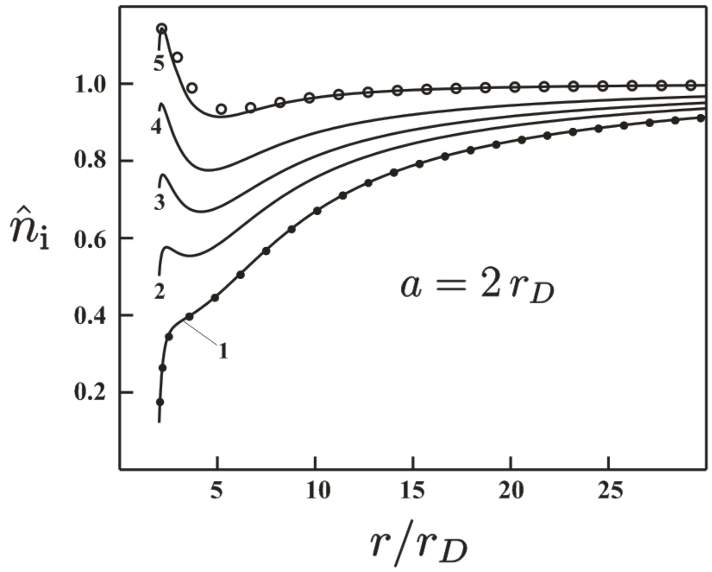

Рис. 3.14 Розподіл нормованої концентрації іонів у випадку $a = 2r_D$, $T_{\mathrm{e}0} = T_{\mathrm{i}0}$. Суцільні лінії показують результати, отримані шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь для різних значень числа Кнудсена l_{ia}/r_D : 0.032 (1), 0.38 (2), 0.78 (3), 1.6 (4), ∞ (5). Символи ● показують результати, отримані на основі дрейфово-дифузійної моделі із роботи [64] при $z = 10$, $n_{\mathrm{ig}} = 0.1$ та $n_{\mathrm{eg}} = 0$. Символи ○ показують результати, отримані на основі моделі із роботи [44] при $\tau = 1.8$ (ці результати практично не залежать від значення A_b).

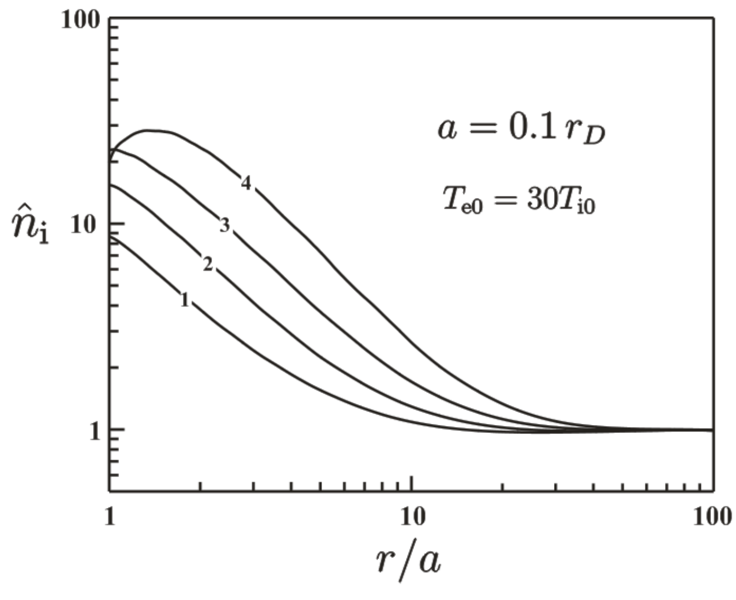

Рис. 3.15 Розподіл нормованої концентрації іонів у випадку $a = 0.1r_D$, $T_{\mathrm{e}0} = 30T_{\mathrm{i}0}$. Результати показано для різних чисел Кнудсена l_{ia}/r_D : 0.06 (1), 0.1 (2), 0.3 (3), 3 (4).

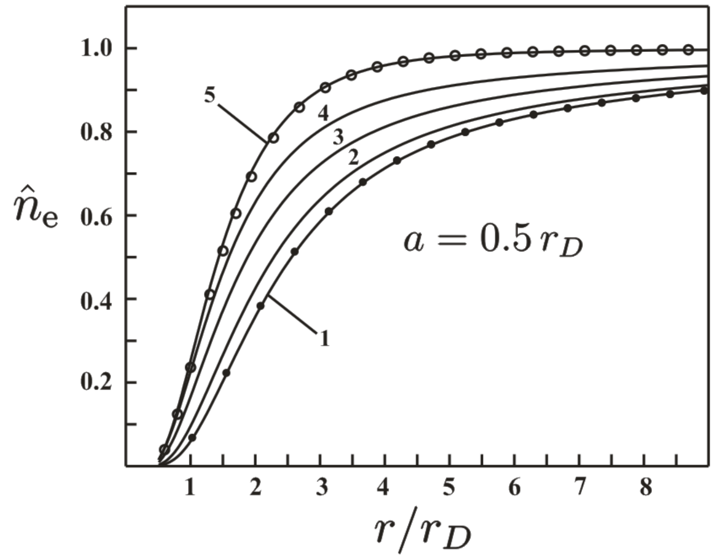

Рис. 3.16 Розподіл нормованої концентрації електронів для різних чисел Кнудсена у випадку $a = 0.5 r_D$, $T_{\mathrm{e}0} = T_{\mathrm{i}0}$. Суцільні лінії показують результати, отримані шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь для різних значень числа Кнудсена l_{ia}/r_D: 0.01225 (1), 0.0315 (2), 0.135 (3), 0.375 (4), ∞ (5). Символи ● показують результати, отримані на основі дрейфово-дифузійної моделі із роботи [64] при $z = 7.4$, $n_{\mathrm{ig}} = 0.2$ та $n_{\mathrm{eg}} = 0$. Символи ○ показують результати, отримані на основі моделі із роботи [44] при $\tau = 1.35$ та $A_b = 0.3$.

Розглянемо далі збурення температури іонів поблизу частинки. На рис. 3.17 зображено розподіл нормованої температури іонів $\hat{T}_{\mathrm{i}} = T_{\mathrm{i}}/T_{\mathrm{i}0}$ для різних чисел Кнудсена у випадку $a = 0.1 r_D$, $T_{\mathrm{e}0} = 30 T_{\mathrm{i}0}$. Можна бачити, що в неізотермічній плазмі температура іонів поблизу частинки може мати один порядок із температурою електронів. Так в слабкозіткневому режимі поблизу поверхні частинки має місце співвідношення $T_i \approx T_{\mathrm{e}0}$, що можна пояснити на основі теорії обмеженого орбітального руху [35, 36, 37]. Значення температури іонів на поверхні частинки, обчислене в межах цієї теорії, складає $T_{\mathrm{i}} \approx z T_{\mathrm{e}0}/2$, де z це нормований заряд частинки. Враховуючи той факт, що в даному випадку нормований заряд частинки складає приблизно $z \approx 2$ (дивись рис. 3.2b), можна отримати співвідношення $T_i \approx T_{\mathrm{e}0}$. Коли частота іон-атомних зіткнень зростає, температура іонів поблизу поверхні зменшується, але її значення залишається все ж таки досить великим у порівнянні із T_{i0}. У випадку ізотермічної плазми взаємодія частинки із іонами вносить незначні збурення в розподіл температури іонів поблизу поверхні (рис. 3.18). Відхилення температури іонів від значення T_{i0} є помітними тільки в беззіткневому режимі. Відзначимо також, взаємодія частинки із електронами практично не збурює температуру електронів, тобто в широкому діапазоні значень a/r_D, l_{ia}/r_D та T_{e0}/T_{i0} виконується $T_e \approx T_{e0}$.

На рис. 3.19 – 3.20 показано також розподіл макроскопічних швидкостей іонів та електронів в беззіткневому та сильнозіткневому режимах у випадку $a = 0.5r_D$, $T_{e0} = T_{i0}$. Із рис. 3.20 видно, що макроскопічна швидкість електронів помітно відрізняється від нуля тільки на невеликих відстанях від частинки. Це є наслідком того, що електрони відштовхуються від'ємно зарядженою частинкою. Тим не менш, якщо прийняти до уваги характерні значення теплової швидкості електронів в плазмі, можна зробити висновок, що поблизу поверхні макроскопічна швидкість електронів набуває досить великих значень. Макроскопічна швидкість іонів також є досить великою. Як видно із рис. 3.19, в беззіткневому режимі швидкість іонів поблизу поверхні частинки досягає іонної швидкості звуку.

Наприкінці цього підрозділу доцільно також продемонструвати вплив іон-атомних зіткнень на функцію розподілу іонів за швидкостями поблизу поверхні частинки. На рис. 3.21 – 3.22 показано нормовану функцію розподілу іонів за швидкостями $\hat{f}_i = f_i \upsilon_{i0}^3 / n_{i0}$ поблизу поверхні частинки для різних чисел Кнудсена у випадку $a = 0.5r_D$, $T_{e0} = T_{i0}$. В беззіткневому режимі вид функції розподілу визначається переважно орбітальним рухом іонів. Видно, що в даному випадку функція розподілу іонів значно відрізняється від рівноважної функції розподілу Максвелла. При зростанні частоти іон-атомних зіткнень орбітальний рух іонів зникає, а функція розподілу іонів релаксує до рівноважної функції розподілу.

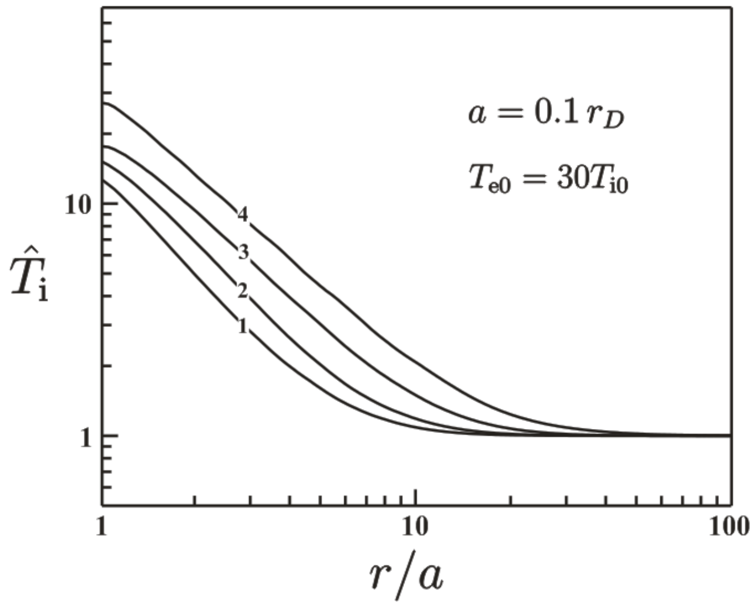

Рис. 3.17 Розподіл нормованої температури іонів у випадку $a = 0.1 r_D$, $T_{e0} = 30T_{i0}$. Результати показано для різних чисел Кнудсена l_{ia}/r_D : 0.06 (1) , 0.1 (2), 0.5 (3), 3 (4).

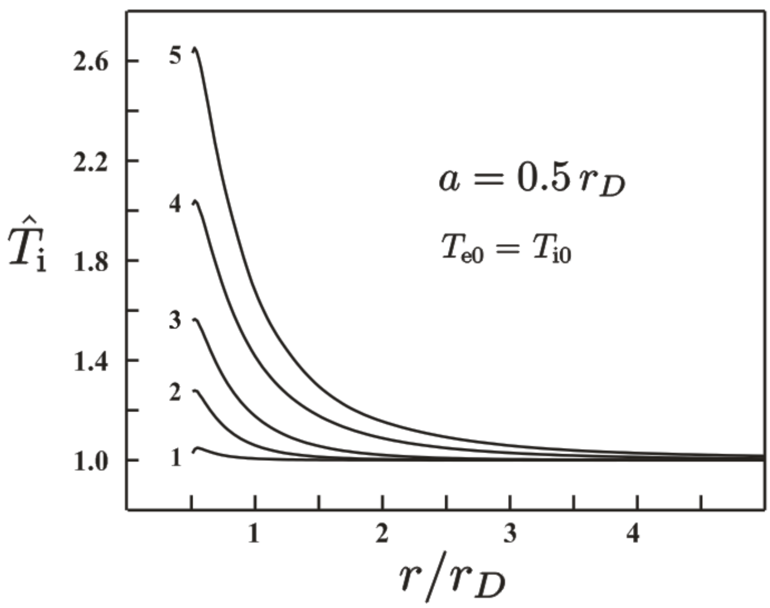

Рис. 3.18 Розподіл нормованої температури іонів у випадку $a = 0.5 r_D$, $T_{e0} = T_{i0}$. Результати показано для різних чисел Кнудсена l_{ia}/r_D : 0.032 (1), 0.14 (2), 0.37 (3), 1.9 (4), ∞ (5).

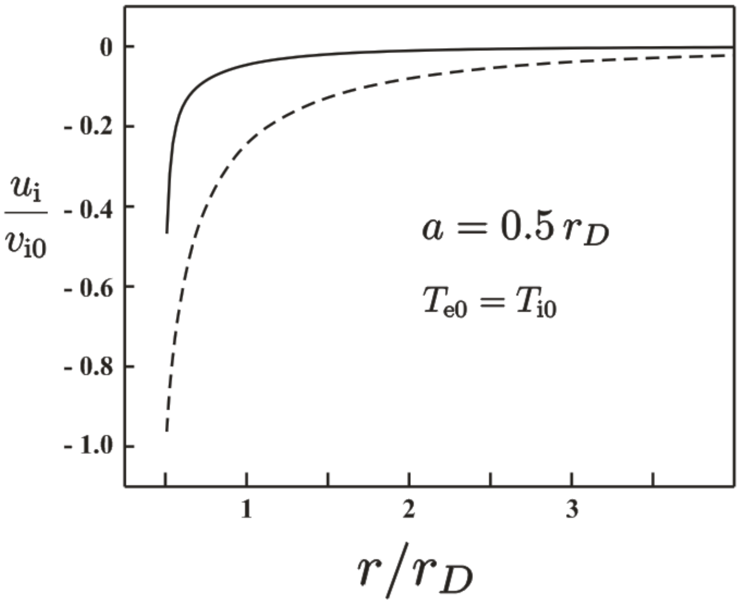

Рис. 3.19 Розподіл швидкості іонів у випадку $a = 0.5 r_D$, $T_{e0} = T_{i0}$. Суцільна крива показує розподіл швидкості в сильнозіткневому режимі ($l_{ia}/r_D = 0.012$), штрихована лінія показує розподіл швидкості в беззіткневому режимі ($l_{ia}/r_D \to \infty$).

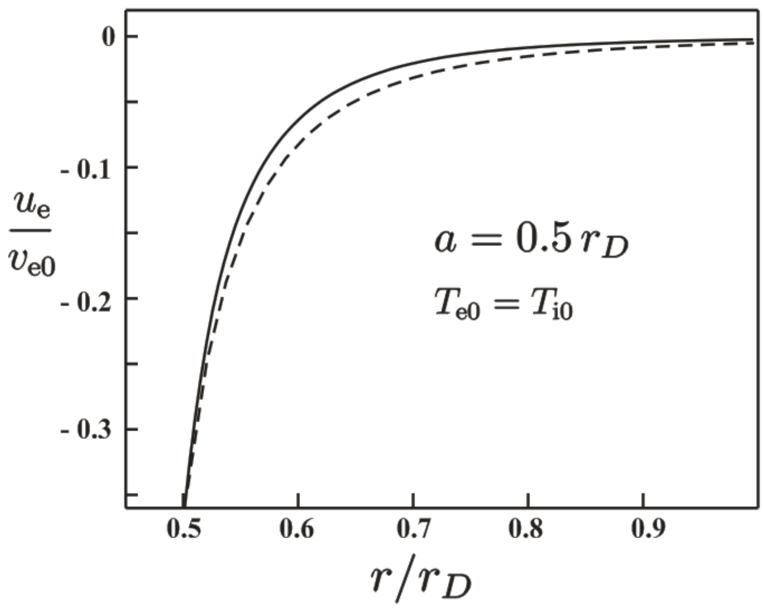

Рис. 3.20 Розподіл швидкості електронів у випадку $a = 0.5 r_D$, $T_{e0} = T_{i0}$. Суцільна крива показує розподіл швидкості в сильнозіткневому режимі ($l_{ia}/r_D = 0.012$), штрихована лінія показує розподіл швидкості в беззіткневому режимі ($l_{ia}/r_D \to \infty$).

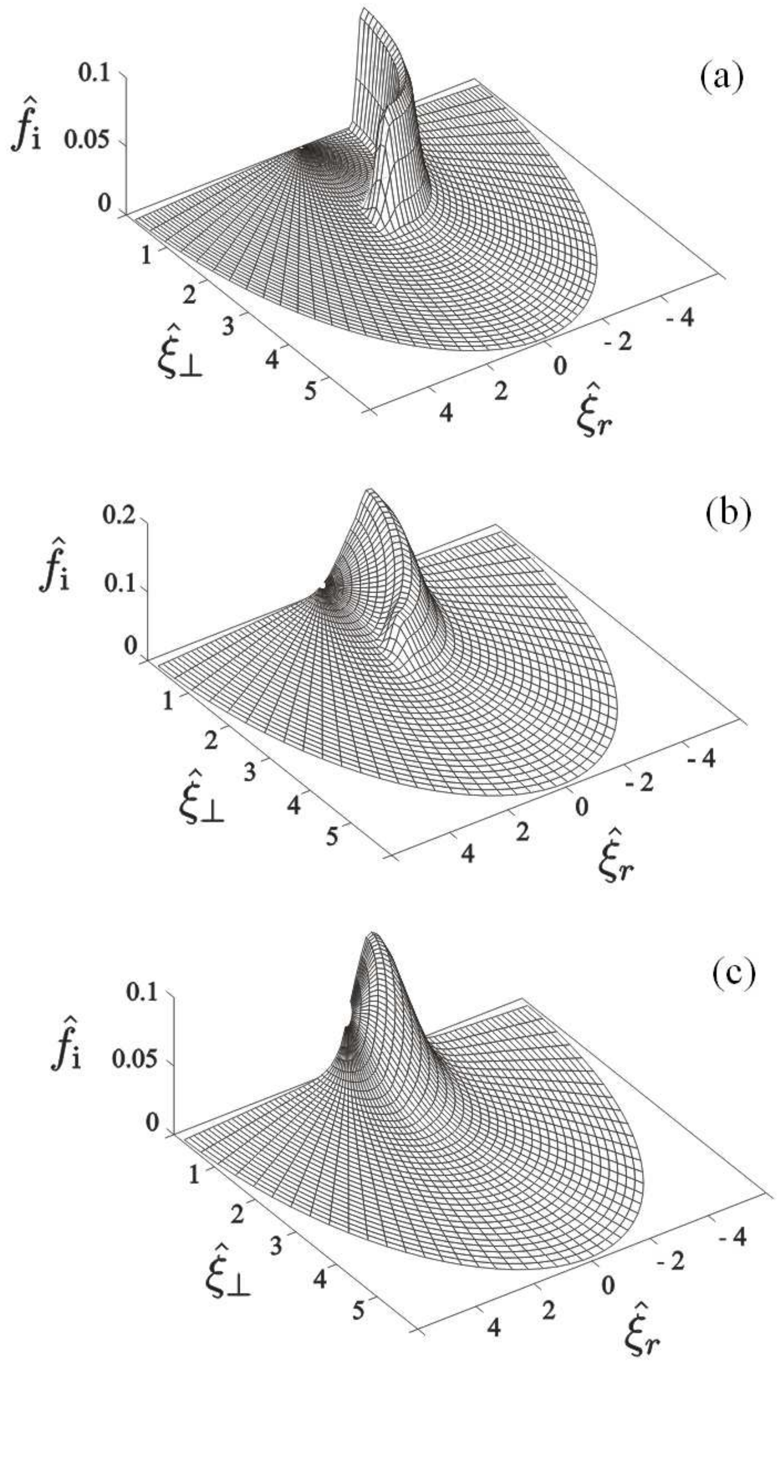

Рис. 3.21 Нормована функція розподілу іонів $\hat{f}_{\mathrm{i}} = f_{\mathrm{i}} \upsilon_{\mathrm{i}0}^{3} / n_{\mathrm{i}0}$ поблизу поверхні частинки у випадку $a = 0.5 r_D$, $T_{\mathrm{e}0} = T_{\mathrm{i}0}$. Результати показано для різних чисел Кнудсена: (a) $l_{\mathrm{ia}} / r_D \to \infty$, (b) 1.58, (c) 0.13. Нормовані координати в просторі швидкостей визначаються як $\hat{\xi}_r = \xi_r / \upsilon_{\mathrm{i}0}$, $\hat{\xi}_{\perp} = \xi_{\perp} / \upsilon_{\mathrm{i}0}$.

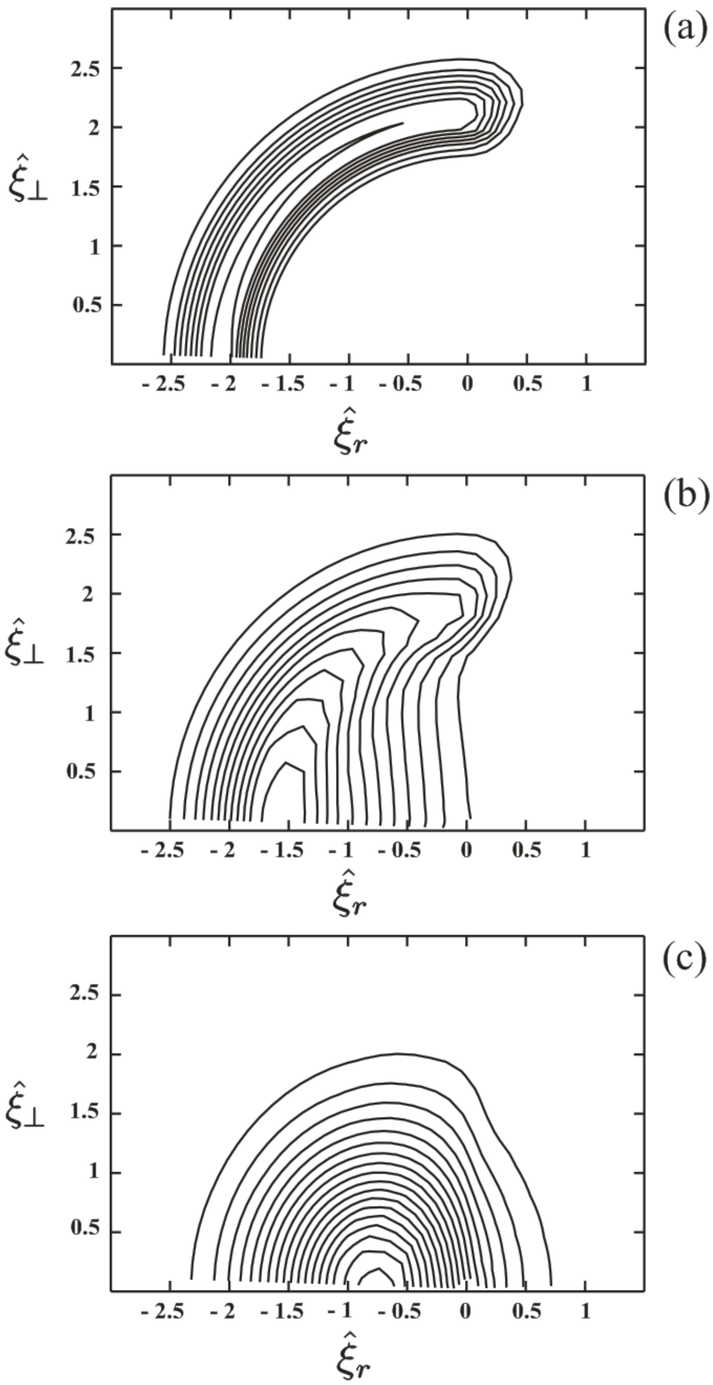

Рис. 3.22 Ізолінії нормованої функції розподілу іонів $\hat{f}_\mathrm{i} = f_\mathrm{i}\upsilon_\mathrm{i0}^3/n_\mathrm{i0}$ поблизу поверхні частинки у випадку $a = 0.5r_D$, $T_\mathrm{e0} = T_\mathrm{i0}$. Результати показано для різних чисел Кнудсена: (a) $l_\mathrm{ia}/r_D \to \infty$, (b) 1.58, (c) 0.13. Показано такі ізолінії функції розподілу: (a) $\hat{f}_\mathrm{i} = 0.01m$, $m = 1,...8$; (b) $\hat{f}_\mathrm{i} = 0.01m$, $m = 1,...12$; (c) $\hat{f}_\mathrm{i} = 0.005m$, $m = 1,...18$. Нормовані координати в просторі швидкостей визначаються як $\hat{\xi}_r = \xi_r/\upsilon_\mathrm{i0}$, $\hat{\xi}_\perp = \xi_\perp/\upsilon_\mathrm{i0}$.

3.3 Висновки

В даному розділі досліджено процеси заряджання та екранування макрочастинок в слабкоіонізованій плазмі аргону на основі чисельного розв'язку самоузгодженої системи кінетичних рівнянь для компонент плазми. Проведено порівняльний аналіз існуючих моделей для обчислення повного заряду частинки у випадку, коли розмір частинки є набагато меншим за довжину Дебая в плазмі. Показано, що найбільш точними із існуючих моделей є інтерполяційні формули, запропоновані в роботах [82] (інтерполяційна формула Хадчінсона) та [85] (інтерполяційна формула Храпака-Морфіла). Досліджено вплив іон-атомних зіткнень на значення повного заряду частинки у випадку, коли розмір частинки є одного порядку із довжиною Дебая в плазмі. Для даного випадку визначено залежність заряду частинки від числа Кнудсена (k_{ia}) для іон-атомних зіткнень (відношення довжини вільного пробігу іонів до довжини Дебая в плазмі). Показано, що в беззіткневому режимі ($k_{\mathrm{ia}} \gg 1$) заряд частинки прямує до постійного значення, яке можна знайти за допомогою нелінійної беззіткневої моделі із роботи [44]. В сильнозіткневому режимі ($k_{\mathrm{ia}} \ll 1$) залежність заряду частинки від числа Кнудсена може бути описано лінійною функцією від $\ln\left(k_{\mathrm{ia}}\right)$. В перехідному режимі ($k_{\mathrm{ia}} \sim 1$) залежність заряду частинки від числа Кнудсена є немонотонною. Показано, що заряд набуває мінімального значення, коли довжина вільного пробігу для іон-атомних зіткнень приблизно дорівнює розміру частинки.

Досліджено вплив іон-атомних зіткнень на розподіл електричного потенціалу навколо макрочастинки. У випадку, коли розмір частинки є набагато меншим за довжину Дебая в плазмі, досліджено межі застосування існуючих кінетичних моделей для обчислення електричного потенціалу, які було запропоновано в роботах [87, 88]. Показано, що результати, отримані на основі моделі із роботи [87], добре узгоджуються із розрахунками, які було проведено шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь в широкому діапазоні значень числа Кнудсена для іон-атомних зіткнень. В слабкозіткневому режимі модель з роботи [88] дає більш точні результати ніж модель з роботи [87]. Це пов'язано із тим, що на відміну від роботи [87], в роботі [88] враховано залежність перерізу поглинання іонів частинкою від швидкості іонів. На основі результатів, отриманих шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь, досліджено вплив іон-атомних зіткнень на розподіл електричного потенціалу у випадку, коли розмір частинки є одного порядку із довжиною Дебая в плазмі. Показано, що в сильнозіткневому та беззіткневому режимах результати, отримані шляхом розв'язку кінетичних рівнянь, добре узгоджуються із результатами, отриманими за допомогою відомих моделей: дрейфово-дифузійної моделі з роботи [64] та нелінійної беззіткневої моделі з роботи [44]. Встановлено, що електричний потенціал навколо частинки має асимптотичну поведінку кулонівського типу в широкому діапазоні значень числа Кнудсена для іон-атомних зіткнень. При цьому асимптота електричного потенціалу пропорційна ефективному (незаекранованному) заряду частинки. Отримано залежність ефективного заряду від числа Кнудсена для різних значень розміру частинки. Показано, що ефективний заряд прямує до нуля при $k_{\mathrm{ia}} \to \infty$ та набуває постійного значення при $k_{\mathrm{ia}} \to 0$. При цьому, граничне значення ефективного заряду частинки в сильнозіткневому режимі зростає із зменшенням її розміру.

Досліджено вплив іон-атомних зіткнень на розподіл макроскопічних параметрів навколо частинки. Отримано розподіли основних макроскопічних параметрів (концентрація, швидкість та температура) навколо частинки для різних значень розміру частинки, температури електронів в плазмі та числа Кнудсена для іон-атомних зіткнень. Показано, що в неізотермічній плазмі температура та концентрація іонів поблизу поверхні частинки може сильно відрізнятися від температури та концентрації іонів в оточуючий плазмі. Також продемонстровано вплив іон-атомних зіткнень на функцію розподілу іонів за швидкостями поблизу поверхні частинки.

РОЗДІЛ 4
ДИНАМІЧНЕ ЕКРАНУВАННЯ МАКРОЧАСТИНКИ, ЩО РУХАЄТЬСЯ В СЛАБКОІОНІЗОВАНІЙ ПЛАЗМІ

В цьому розділі досліджується процес динамічного екранування макрочастинки під час її рівномірного руху в слабкоіонізованій плазмі. Даний процес досліджується на основі прямого чисельного розв'язку самоузгодженої системи модельних кінетичних рівнянь для компонент плазми. Чисельні розрахунки проведено в широкому діапазоні значень тиску зовнішньої плазми. Особлива увага приділяється проблемі обчислення сили опору, яка діє на частинку з боку іонів (іонна сила опору). На основі отриманих результатів досліджено вплив іон-атомних зіткнень на величину і напрям іонної сили опору, а також розглянуто питання про співвідношення між іонною силою опору та силою опору з боку атомів. Обговорено можливість існування надплинного руху макрочастинок в запорошеній плазмі. Окрім цього запропоновано модифіковану теорію парних зіткнень для обчислення іонної сили опору в беззіткневому режимі у випадку, коли розмір частинки має один порядок із довжиною Дебая в плазмі. Розділ написаний на основі робіт [25, 26].

4.1 Постановка задачі

Розглянемо усталену рівномірну течію слабкоіонізованої плазми аргону навколо сферичної макрочастинки із радіусом a. Будемо вважати, що плазма містить електрони (e), однозарядні іони (i) та атоми (a). Течія на великих відстанях від частинки характеризується швидкістю плазми u, повним тиском плазми p_0, температурами $T_{\alpha 0}$ та концентраціями $n_{\alpha 0}$, де $\alpha = \mathrm{e}, \mathrm{i}, \mathrm{a}$ позначає тип компоненти плазми. Будемо вважати, що частинка заряджається за рахунок поглинання іонів та електронів з плазми, а поверхня частинки є ідеально провідною. За таких умов течія плазми навколо частинки є вісесиметричною.

Динаміка компонент плазми може бути описана на основі системи модельних кінетичних рівнянь в вісесиметричній формі (дивись підрозділ 2.1). Направимо вісь x циліндричної системи координат вздовж швидкості руху плазми, а частинку помістимо в початок координат. Тоді кінетичні рівняння для іонів та електронів мають вигляд

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + L_c + L_i + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} L_f \right\} f_\alpha = J_\alpha , \tag{4.1}$$

де $\alpha = \mathrm{e,i}$; f_α це функція розподілу за швидкостями; q_α це заряд компоненти α; m_α це маса компоненти α; J_α це модельний інтеграл зіткнень. Оператори L_c, L_i та L_f визначаються за допомогою виразів (2.86) та (2.87). Рівняння Пуассона для потенціалу φ самоузгодженого електричного поля має вигляд (2.5), а оператор Лапласу визначається за допомогою виразу (2.33). Кінетичне рівняння для атомів має вигляд

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + L_c + L_i \right\} f_\mathrm{a} = J_\mathrm{a} , \tag{4.2}$$

де f_a це функція розподілу атомів, а J_a це модельний інтеграл зіткнень для атомів. Основні макроскопічні параметри плазми можна знайти шляхом обчислення відповідних моментів функцій розподілу за допомогою виразів (2.6) – (2.8) із оператором інтегрування (2.34).

Модельні інтеграли зіткнень в рівняннях (4.1) та (4.2) визначаються за допомогою релаксаційної моделі із роботи [106]. Відзначимо, що в слабкоіонізованій плазмі зіткнення атомів із зарядженими компонентами плазми практично не впливають на динаміку атомів. В цьому випадку для модельного інтегралу зіткнень в рівнянні (4.2) можна використовувати відомий вираз для однокомпонентного газу, який було запропоновано в роботі [100]. Цей вираз має вигляд

$$J_\mathrm{a} = \nu_\mathrm{aa} \left(M_\mathrm{a} - f_\mathrm{a} \right), \tag{4.3}$$

де ν_{aa} це частота зіткнень між атомами, а M_{a} це рівноважна функція розподілу, яка має вигляд

$$M_{\mathrm{a}} = n_{\mathrm{a}} \left(\frac{m_{\mathrm{a}}}{2\pi k T_{\mathrm{a}}} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_{\mathrm{a}} \vec{c}_{\mathrm{a}}^{\,2}}{2kT_{\mathrm{a}}} \right), \tag{4.4}$$

де $\vec{c}_{\mathrm{a}} = \vec{\xi} - \vec{u}_{\mathrm{a}}$ це вектор відносної швидкості. Відзначимо, що оскільки модельний інтеграл зіткнень (4.3) не містить макроскопічних параметрів заряджених компонент плазми, то кінетичне рівняння для атомів може бути розв’язане окремо від кінетичних рівнянь для іонів та електронів. Частоти зіткнень між компонентами плазми обчислюються так само, як було описано в підрозділі 3.1.

Визначимо граничні умови для самоузгодженої системи модельних кінетичних рівнянь (4.1) – (4.2). Розглянемо спочатку граничні умови на поверхні частинки. Будемо вважати, що для атомів виконується умова дифузійного відбиття із повною акомодацією до температури частинки T_g. Ця умова має вигляд

$$f_{\mathrm{a}} = n_{\mathrm{g}} \left(\frac{m_{\mathrm{a}}}{2\pi k T_{\mathrm{g}}} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_{\mathrm{a}} \vec{\xi}^{\,2}}{2kT_{\mathrm{g}}} \right), \tag{4.5}$$

для атомів із швидкостями $\left(\vec{\xi}\vec{n}\right) \geq 0$, де $\vec{n}$ це вектор одиничної нормалі до поверхні частинки. Концентрація відбитих атомів визначається із умови непротікання

$$\left\langle \left(\vec{\xi}\vec{n}\right) f_{\mathrm{a}} \right\rangle = 0 . \tag{4.6}$$

Для іонів та електронів приймемо умову повного поглинання на поверхні частинки

$$f_{\alpha} = 0 , \tag{4.7}$$

де $\alpha = \mathrm{i}, \mathrm{e}$. Умова (4.7) виставляється для іонів та електронів із швидкостями $\left(\vec{\xi}\vec{n}\right) \geq 0$.

Поглинання іонів та електронів призводить до заряджання частинки в плазмі. Заряд частинки q задовольняє рівнянню

$$\frac{dq}{dt} = -\int \left(\vec{j}\vec{n} \right) ds , \tag{4.8}$$

де $\vec{j} = e\left(n_{\mathrm{i}}\vec{u}_{\mathrm{i}} - n_{\mathrm{e}}\vec{u}_{\mathrm{e}}\right)$ це щільність повного струму, а інтегрування в (4.8) відбувається по всій поверхні частинки. Оскільки вважається, що частинка є ідеальним провідником, то її поверхня має бути еквіпотенційною. Тобто гранична умова для електричного потенціалу на поверхні частинки має вигляд

$$\varphi = \varphi_g , \tag{4.9}$$

де φ_g це плаваючий потенціал поверхні. Значення плаваючого потенціалу визначається законом Гауса, який в даному випадку має вигляд

$$4\pi q = -\int \nabla \varphi \vec{n} ds , \tag{4.10}$$

де інтегрування іде по всій поверхні частинки.

Електричний потенціал на великих відстанях від частинки можна прийняти рівним нулю. Відповідна гранична умова має вигляд

$$\varphi \to 0, \; \left(x^2 + r^2\right)^{1/2} \to \infty . \tag{4.11}$$

Функції розподілу компонент плазми за швидкостями на великих відстанях від частинки приймаються у вигляді незбурених рівноважних функцій розподілу Максвелла

$$M_{\alpha 0} = n_{\alpha 0} \left(\frac{m_\alpha}{2\pi k T_{\alpha 0}} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_\alpha \vec{c}_0^{\,2}}{2kT_{\alpha 0}} \right), \tag{4.12}$$

при $\left(x^2 + r^2\right)^{1/2} \to \infty$, де $\alpha = \mathrm{e,i,}$ a позначає тип компоненти; $\vec{c}_0 = \vec{\xi} - \vec{u}_0$ це вектор відносної швидкості; а $\vec{u}_0 = \left(u, 0, 0\right)$ це вектор швидкості плазми.

Гранична умова для потенціалу вздовж вісі симетрії має вигляд

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \tag{4.13}$$

при $r = 0$, $x \leq -a$ та $x \geq a$. Гранична умова для функцій розподілу на вісі симетрії має вигляд

$$f_\alpha(\xi_r) = f_\alpha(-\xi_r), \tag{4.14}$$

для $\xi_r \geq 0$ при $r = 0$, $x \leq -a$ та $x \geq a$, де $\alpha = \mathrm{e,i,a}$ позначає тип компоненти.

Враховуючи той факт, що для вісесиметричних течій функції розподілу є непарними по ω, можна поставити задачу для кінетичних рівнянь тільки в полупросторі $0 \leq \omega \leq \pi$, $(\xi_\theta \geq 0)$. При цьому на поверхні $\xi_\theta = 0$ необхідно задавати граничні умови симетрії

$$f_\alpha(\omega) = f_\alpha(-\omega), \tag{4.15}$$

для $\xi \geq 0$, $-\infty < \xi_x < \infty$, де $\alpha = \mathrm{e,i,a}$ позначає тип компоненти. Окрім цього, необхідно також визначити граничні умови для функцій розподілу іонів та електронів на нескінченості в просторі швидкостей. В даному випадку приймемо загальноприйняте обмеження на вид функції розподілу

$$f_\alpha \to 0, \ \left(\xi_x^2 + \xi^2\right)^{1/2} \to \infty, \tag{4.16}$$

де $\alpha = \mathrm{e,i}$ позначає тип компоненти.

Самоузгоджена система кінетичних рівнянь (4.1) – (4.2) розв'язувалась чисельно за допомогою методу, який було описано в підрозділі 2.3.2. В фізичному просторі кінетичні рівняння та рівняння Пуассона розв'язуються в скінченій області

$$\Omega_p = \left\{ a \leq \left(x^2 + r^2\right)^{1/2} \leq A_R, r \geq 0 \right\}. \tag{4.17}$$

В просторі швидкостей кінетичні рівняння для іонів, електронів та атомів розв'язуються в областях $\Omega_\upsilon^{\mathrm{i}}$, $\Omega_\upsilon^{\mathrm{e}}$, $\Omega_\upsilon^{\mathrm{a}}$, відповідно, де

$$\Omega_{\upsilon}^{\alpha}=\left\{\begin{matrix} -A_{\xi_x}^{\alpha}\le\xi_x\le A_{\xi_x}^{\alpha} \\ 0\le\xi\le A_{\xi}^{\alpha} \\ 0\le\omega\le\pi \end{matrix}\right\}, \tag{4.18}$$

$\alpha=\mathrm{e,i,a}$ позначає тип компоненти. Розміри обчислювальної області в фазовому просторі A_R, $A_{\xi_x}^{\alpha}$, A_{ξ}^{α} обираються досить великими для того, щоб задовольнити асимптотичним граничним умовам (4.11), (4.12), (4.16).

Розрахунки проводились для таких параметрів плазми: $p_0=10^{-5}\div 15$ атм., $n_{\mathrm{e}0}=n_{\mathrm{i}0}=10^{17}$ м$^{-3}$, $T_{\mathrm{a}0}=T_{\mathrm{i}0}=0.1$ эВ, $T_{\mathrm{e}0}/T_{\mathrm{i}0}=1, 3, 5$. Концентрація атомів обчислювалась за допомогою рівняння стану плазми

$$n_{\mathrm{a}0}=\frac{p_0-p_{\mathrm{i}0}-p_{\mathrm{i}0}}{kT_{\mathrm{a}0}}, \tag{4.19}$$

де $p_{\mathrm{i}0}=n_{\mathrm{i}0}kT_{\mathrm{i}0}$ та $p_{\mathrm{i}0}=n_{\mathrm{e}0}kT_{\mathrm{e}0}$. Для обраних параметрів плазми, концентрація атомів змінювалася в діапазоні $n_{\mathrm{a}0}=10^{20}\div 10^{26}$ м$^{-3}$. Швидкість плазми змінювалася в діапазоні від 0 до $0.1\upsilon_{\mathrm{i}0}$. Такі швидкості потоку відповідають руху макрочастинки в плазмі. Температура частинки вважалася рівною температурі важких частинок в плазмі, тобто $T_g=T_{\mathrm{a}0}=T_{\mathrm{i}0}$. Розмір частинки приймався рівним $a=0.2r_D$, $0.5r_D$ та r_D, де

$$r_D^{-2}=4\pi e^2\left(n_{\mathrm{e}0}/kT_{\mathrm{e}0}+n_{\mathrm{i}0}/kT_{\mathrm{i}0}\right), \tag{4.20}$$

це довжина Дебая в плазмі. Для вказаних параметрів плазми довжина Дебая приблизно дорівнює 5 мкм. При цьому іон-атомне число Кнудсена l_{ia}/r_D, де l_{ia} це довжина вільного пробігу для іон-атомних зіткнень, змінюється в широкому діапазоні від 10^{-4} до 10^2.

Для проведення розрахунків розмір обчислювальної області в фізичному просторі обирався рівним приблизно $20r_D$. Кількість трикутників сітки в фізичному просторі змінювалася від 1500 до 2000, а усереднена кількість вузлів сітки вздовж поверхні частинки складала 20. Розміри обчислювальної області в просторі швидкостей A_{ξ}^{α} та $A_{\xi_x}^{\alpha}$ змінювалися в діапазоні від $4\upsilon_{\alpha 0}$ до $6\upsilon_{\alpha 0}$, де $\alpha = \mathrm{e,i,n}$. Відповідні кроки сітки складали $\Delta\xi = \Delta\xi_x = 0.25\upsilon_{\alpha 0}$, а кількість вузлів на інтервалі $0 \le \omega \le \pi$ була 20. Як вже було відмічено в розділі 2.3.2, для розв'язку кінетичних рівнянь використовувався паралельний обчислювальний алгоритм. При цьому кількість паралельних обчислювальних процесів складала 32 та 64. Повний обчислювальний час, необхідний для досягнення стаціонарного розв'язку кінетичних рівнянь, складав від 6 до 15 годин в залежності від зіткневого режиму.

Найбільша увага в даному розділі приділяється обчисленню сили опору, що діє на частинку з боку іонів (іонна сила опору). Згідно з загальноприйнятою термінологією іонна сила опору визначається як

$$\vec{F}_d = \vec{F}_m + \vec{F}_e, \tag{4.21}$$

де $\vec{F}_m$ це механічна складкова, що виникає за рахунок прямої механічної взаємодії іонів із поверхнею частинки, а $\vec{F}_e$ це поляризаційна складова, що виникає внаслідок взаємодії заряду частинки із оточуючою анізотропною плазмою. Механічна складова обчислюється як

$$\vec{F}_m = -\int \widehat{P}_{\mathrm{i}}\, \vec{n}\, ds, \tag{4.22}$$

де $\widehat{P}_i$ це тензор напруги, який має вигляд

$$\widehat{P}_{\mathrm{i}} = m_{\mathrm{i}} \left\langle \vec{\xi} \otimes \vec{\xi}\, f_{\mathrm{i}} \right\rangle. \tag{4.23}$$

Поляризаційна складова іонної сили опору обчислюється як

$$\vec{F}_e = \int \widehat{M}\, \vec{n}\, ds, \tag{4.24}$$

де $\widehat{M}$ це максвелівський тензор напруги, який має вигляд

$$\widehat{M} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \vec{E} \otimes \vec{E} - \frac{1}{2} \vec{E}^2 \right\}, \tag{4.25}$$

де $\vec{E} = -\nabla\varphi$ це вектор самоузгодженого електричного поля. Зауважимо, що оскільки течія навколо частинки є вісесиметричною, то іонна сила опору завжди спрямована вздовж вісі x. Таким чином, далі будемо розглядати тільки не нульову компоненту іонної сили опору та позначимо для стислості $F_d \equiv \left(\vec{F}_d\right)_x$, $F_e \equiv \left(\vec{F}_e\right)_x$, $F_m \equiv \left(\vec{F}_m\right)_x$.

4.2 Результати чисельного дослідження характеристик процесу обтікання макрочастинки плазмою

4.2.1 Сила опору з боку іонів в беззіткневому режимі

Розглянемо спочатку залежність іонної сили опору від швидкості потоку плазми в беззіткневому режимі ($l_{\text{ia}} \gg r_D$). Як було відмічено у підрозділі 1.1.2, у випадку, коли розмір частинки набагато менший за довжину Дебая в плазмі ($a \ll r_D$), іонну силу опору може бути знайдено на основі відомої теорії парних зіткнень (binary collision approach) [47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54]. Згідно із цією теорією іонна сила опору обчислюється як сума двох компонент:

$$F_{bc} = F_{bc}^c + F_{bc}^o, \tag{4.26}$$

де F_{bc}^c це компонента пов’язана із поглинанням іонів частинкою, а F_{bc}^o це компонента, яка відповідає процесу розсіювання іонів в електричному полі частинки. Компонента F_{bc}^o обчислюється за допомогою модифікованої теорії кулонівських зіткнень в плазмі:

$$F_{bc}^o = 8\pi n_{\text{i}0} \frac{q_{\text{i}}^2 \varphi_g^2}{m_{\text{i}} \upsilon_{\text{i}0}^2} a^2 G\left(u/\upsilon_{\text{i}0}\right) \ln\Lambda, \tag{4.27}$$

де

$$G(x) = \left[\sqrt{\pi}\,\text{erf}\left(x\right)/2 - xe^{-x^2}\right] \Big/ \left(\sqrt{\pi}x^2\right), \tag{4.28}$$

це функція Чандрасекара, а $\ln\Lambda$ це модифікований кулонівський логарифм, що визначається як

$$\ln\Lambda = \ln\left[\frac{b_s + \lambda_s}{b_s + a}\right], \tag{4.29}$$

де

$$b_s = ae\left|\varphi_g\right| \Big/ \left(2T_{\mathrm{i}0} + m_{\mathrm{i}}u^2\right), \tag{4.30}$$

$$\lambda_s^2 = r_{D_e}^2 \Big/ \left[1 + T_{\mathrm{e}0} \Big/ \left(T_{\mathrm{i}0} + m_{\mathrm{i}}u^2\right)\right], \tag{4.31}$$

$$r_{D_e}^{-2} = 4\pi e^2 n_{\mathrm{e}0} / kT_{\mathrm{e}0}\,. \tag{4.32}$$

Як було показано в роботі [49], вираз (4.27) може бути застосований, коли параметр розсіювання $\beta_s = b_s/\lambda_s$ не перевищує значення $\beta_s^* \approx 5$. При цьому для модифікованого кулонівського логарифму повинно виконуватись $\ln\Lambda > \ln\Lambda^*$, де $\ln\Lambda^* \approx 0.18$ Компонента F_{bc}^c обчислюється на основі теорії обмеженого орбітального руху

$$\begin{aligned} F_{bc}^c = \sqrt{\pi}a^2 p_{\mathrm{i}0}\hat{u}^{-2}\Big\{&\hat{u}\left(1 + 2\hat{u}^2 + 2\hat{\varphi}_g\right)e^{-\hat{u}^2} + \\ &+\left[4\hat{u}^4 + 4\hat{u}^2 - 1 - 2\left(1 - 2\hat{u}^2\right)\hat{\varphi}_g\right]\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}\left(\hat{u}\right)\Big\}, \end{aligned} \tag{4.33}$$

де $\hat{\varphi}_g = \left|\varphi_g\right| / kT_{\mathrm{i}0}$ це нормований плаваючий потенціал частинки, а $\hat{u} = u/\upsilon_{\mathrm{i}0}$ це нормована швидкість потоку плазми.

На рис. 4.1 зображено залежність іонної сили опору від швидкості потоку плазми для випадку $a = 0.2r_D$, $T_{\mathrm{e}0} = T_{\mathrm{i}0}$. На цьому рисунку показано результати, отримані на основі теорії парних зіткнень, та результати, отримані шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь. Із рис. 4.1 можна бачити, що коли відношення a/r_D є досить малим, ці результати добре узгоджуються між собою, тобто теорія парних зіткнень добре описує залежність іонної сили опору від швидкості потоку плазми. Як було відмічено в підрозділі 1.1.2, теорія парних зіткнень не може бути застосована для обчислення іонної сили опору у випадку, коли розмір частинки є одного порядку із довжиною Дебая в плазмі. Як можна бачити із рис. 4.2 у даному випадку значення іонної сили опору, які отримані за допомогою теорії парних зіткнень значно відрізняються від результатів, отриманих шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь. Це можна пояснити такими двома причинами. По перше, теорія парних зіткнень не враховує вплив розміру частинки на розподіл електричного потенціалу навколо неї. Дана теорія базується на припущені, що розподіл потенціалу навколо частинки має форму потенціалу Юкави. Проте відомо, що у випадку, коли $a \sim r_D$, електричний потенціал навколо частинки спадає повільніше ніж потенціал Юкави [22, 44]. По друге, теорія парних зіткнень не враховує вплив розміру частинки на довжину екранування заряду частинки в плазмі. Проте, як було показано в роботі [41] довжина екранування збільшується із зростанням відношення a/r_D, що може впливати на значення іонної сили опору.

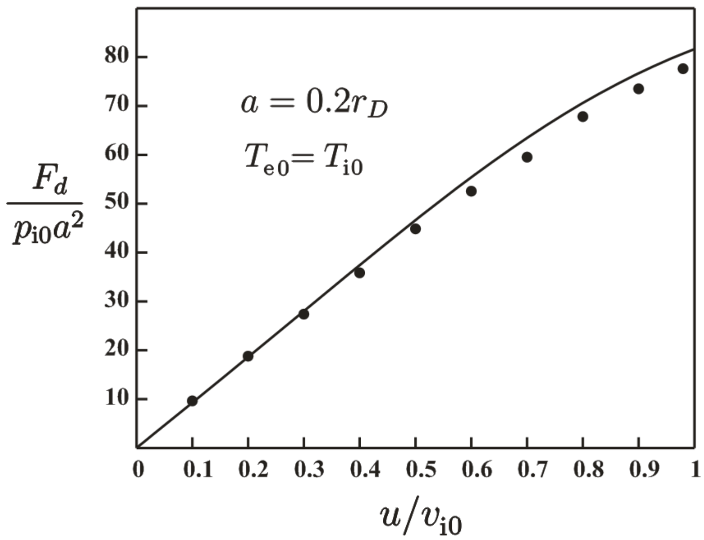

Рис. 4.1 Залежність іонної сили опору від швидкості потоку плазми у випадку $a = 0.2 r_D$, $T_{e0} = T_{i0}$. Символи ● показують результати, отримані шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь. Суцільна лінія показує результати, отримані за допомогою теорії парних зіткнень.

В роботі [26] автором було запропоновано модифікований варіант теорії парних зіткнень, який дає змогу обчислювати іонну силу опору у випадку великих частинок ($a \sim r_D$). Модифікований вираз для іонної сили опору має вигляд

$$F_{bc} = F_{bc}^{c} + \tilde{F}_{bc}^{o}, \tag{4.34}$$

де компонента F_{bc}^{c} визначається за допомогою виразу (4.33), а компонента $\tilde{F}_{bc}^{o}$ визначається як

$$\tilde{F}_{bc}^{o} = 8\pi n_{\mathrm{i}0} \frac{q_{\mathrm{i}}^{2}\tilde{\varphi}_{g}^{2}}{m_{\mathrm{i}}\upsilon_{\mathrm{i}0}^{2}} a^{2} G\left(u/\upsilon_{\mathrm{i}0}\right) \ln\tilde{\Lambda}, \tag{4.35}$$

де $\tilde{\varphi}_g$ це модифіковане (фіктивне) значення потенціалу поверхні частинки, а кулонівський логарифм має вигляд

$$\ln\tilde{\Lambda} = \ln\left[\frac{b_s + \tilde{\lambda}_s}{b_s + a}\right], \tag{4.36}$$

де

$$\tilde{\lambda}_s^2 = a^2 + r_{D_e}^2 \Big/ \left[1 + T_{\mathrm{e}0} \Big/ \left(T_{\mathrm{i}0} + m_{\mathrm{i}} u^2\right)\right]. \tag{4.37}$$

Модифікований потенціал поверхні в (4.35) обирається таким чином, щоб виконувалася рівність $\tilde{\varphi}_g a = q$, де q це заряд частинки. Відзначимо, що лінійна залежність $\varphi_g a = q$, яка виконується у граничному випадку $a/r_D \to 0$, не виконується у випадку великих частинок, тобто коли $a \sim r_D$. Коли відношення a/r_D зростає заряд частинки стає більшим за $\varphi_g a$. В модифікованому виразі (4.35) цей ефект приймається до уваги шляхом використання модифікованого потенціалу поверхні $\tilde{\varphi}_g$. Окрім цього використання модифікованого потенціалу поверхні дозволяє урахувати той факт, що електричний потенціал навколо великих частинок спадає повільніше ніж потенціал Юкави. Значення повного заряду частинки q можна отримати, наприклад, на основі нелінійної беззіткневої моделі із роботи [44]. Для урахування впливу розміру частинки на довжину екранування заряду частинки в плазмі, автор запропонував використовувати модифікований вираз (4.37) для визначення довжини екранування. Цей вираз відрізняється від загальноприйнятого виразу (4.31) наявністю доданку a^2. Таким чином при збільшенні розміру частинки виконується нерівність $\tilde{\lambda}_s \geq \lambda_s$, що узгоджується із висновком, зробленим в роботі [41].

На рис. 4.2 показано порівняння результатів, отриманих на основі загальноприйнятої та модифікованої теорій парних зіткнень. Можна бачити, що значення іонної сили опору, отримані за допомогою модифікованої теорії парних зіткнень добре узгоджуються із результатами, які отримані шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь. Таким чином можна зробити висновок, що модифікована теорія парних зіткнень є більш точною ніж загальноприйнята теорія парних зіткнень та дозволяє обчислювати іонну силу опору у випадку, коли розмір частинки є одного порядку із довжиною Дебая в плазмі.

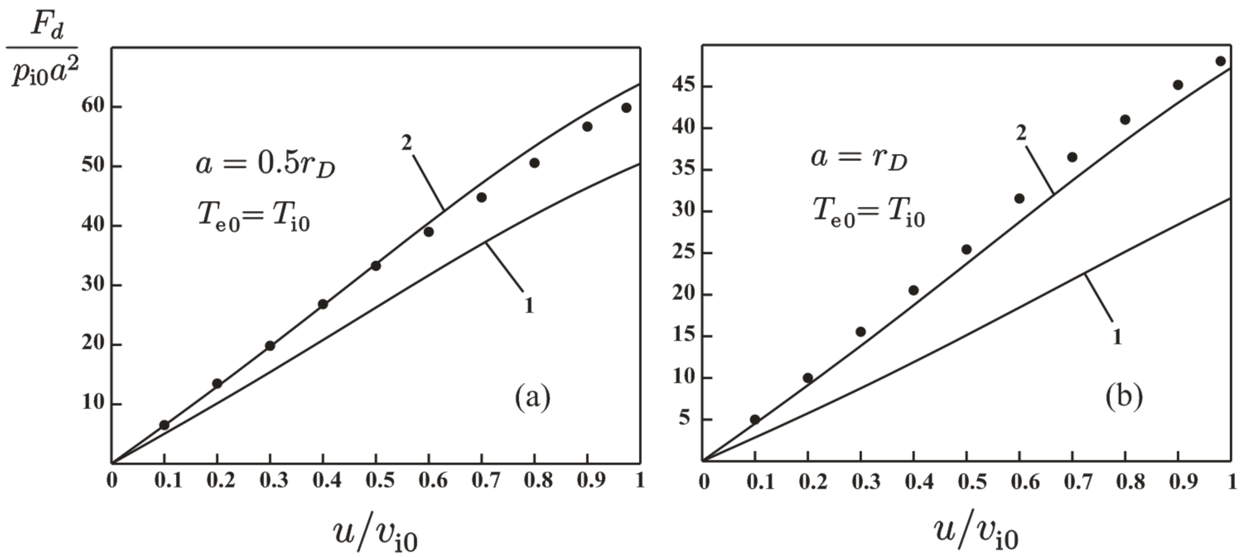

Рис. 4.2 Залежність іонної сили опору від швидкості потоку плазми у випадках $a = 0.5r_D$ (a) та $a = r_D$ (b) при $T_{e0} = T_{i0}$. Символи ● показують результати, отримані шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь. Суцільна лінія (1) показує результати, отримані за допомогою теорії парних зіткнень (рівняння (4.26), (4.27), (4.33)). Суцільна лінія (2) показує результати, отримані за допомогою модифікованої теорії парних зіткнень (рівняння (4.33) – (4.35)).

Із рис. 4.2 видно також, що іонна сила опору зменшується із зростанням розміру частинки. Для того, щоб продемонструвати якісну причину зменшення іонної сили опору на рис. 4.3 показано розподіл нормованої густини заряду вздовж вісі симетрії навколо частинки у випадку $T_{e0} = T_{i0}$, $u = 0.5\upsilon_{i0}$ для різних значень відношення a/r_D. На рис. 4.3 можна бачити анізотропію в розподілі заряду навколо частинки. Зокрема, густина заряду в області за частинкою ($x > a$)

завжди більше ніж густина заряду в області перед частинкою ($x < a$). Поляризаційна сила опору, що виникає в результаті анізотропії розподілу заряду навколо частинки, відповідає силам F_{bc}^{o} та $\tilde{F}_{bc}^{o}$ у виразах (4.26) та (4.34). Приймаючи до уваги той факт, що заряд частинки є від'ємним, можна зробити висновок, що сили опору F_{bc}^{o} та $\tilde{F}_{bc}^{o}$ завжди спрямовані вздовж вісі x, тобто $F_{bc}^{o} > 0$ та $\tilde{F}_{bc}^{o} > 0$. Із рис. 4.3 можна бачити, що анізотропія в розподілі заряду навколо частинки стає менш виразною при збільшені відношення a/r_D. Тобто сили F_{bc}^{o} та $\tilde{F}_{bc}^{o}$ зменшуються при збільшенні розміру частинки. Це пояснює зменшення сумарної сили опору з боку іонів при збільшенні відношення a/r_D.

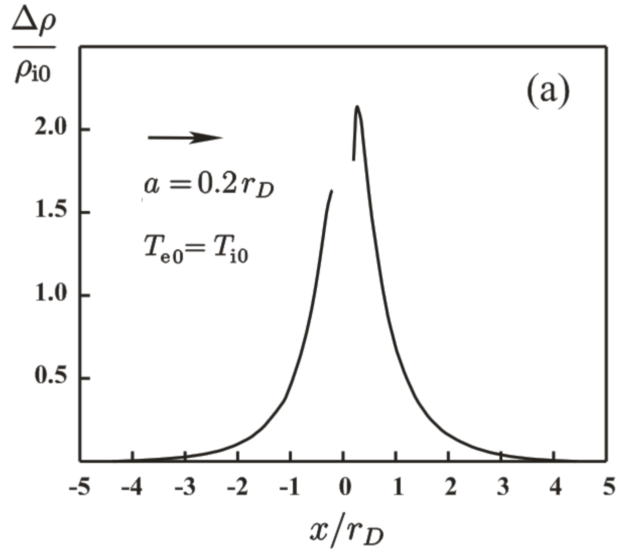

Рис. 4.3 Розподіл нормованої густини заряду навколо частинки вздовж вісі симетрії у випадку $T_{e0} = T_{i0}$, $u = 0.5\upsilon_{i0}$. Результати показано для різних значень відношення $a/r_D = 0.2$ (a), 1 (b). Стрілкою вказано напрям потоку плазми. Нормована густина заряду визначається як $\Delta\rho/\rho_{i0}$, де $\Delta\rho = e(n_i - n_e)$, $\rho_{i0} = n_{i0}e$.

4.2.2 Залежність іонної сили опору від частоти іон-атомних зіткнень

Розглянемо далі вплив іон-атомних зіткнень на величину та напрям іонної сили опору. На рис. 4.4 показано залежність іонної сили опору від числа Кнудсена l_{ia}/r_D у випадку $a = 0.5r_D$, $u = 0.02\upsilon_{i0}$, $T_{i0} = T_{e0}$. Суцільна лінія на цьому рисунку показує значення іонної сили опору, які були отримані шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь. Можна бачити, що іонна сила опору прямує до постійних значень у двох граничних випадках $l_{\text{ia}}/r_D \to 0$ та $l_{\text{ia}}/r_D \to \infty$, та монотонно змінюється в проміжному режимі зіткнень. Відзначимо, що згідно з результатами роботи [92], іонна сила опору може мати локальний максимум коли $l_{\text{ia}} \sim a$. Цей ефект був також виявлений автором при чисельному дослідженні залежності іонної сили опору від частоти іон-атомних зіткнень. Проте, для даного діапазону швидкостей потоку плазми ($u \ll \upsilon_{\text{i}0}$), відхилення від монотонної залежності практично не помітні на рис.4.4. Із рис. 4.4 можна бачити, що іонна сила опору стає від'ємною коли число Кнудсена стає меншим за $l_{\text{ia}}/r_D \approx 0.1$. Від'ємна сила опору спрямована проти швидкості потоку плазми і може прискорювати частинку у напрямку її руху. Відзначимо, що іонна сила опору змінює знак за рахунок поляризаційної складової F_e, оскільки механічна складова іонної сили опору завжди більше нуля, тобто $F_m > 0$. Відзначимо також, що коли число Кнудсена стає досить малим (наприклад $l_{\text{ia}}/r_D < 0.01$), електрична складова іонної сили опору F_e значно перевищує механічну складову F_m, тобто виконується співвідношення $|F_e| \gg |F_m|$. Таким чином можна зробити висновок, що коли число Кнудсена зменшується, повна сила опору визначається поляризаційною складовою F_e та стає від'ємною, тобто $F_d < 0$.

Як було відмічено в підрозділі 1.3.3, від'ємні значення іонної сили опору були отримано також в роботах [67, 68, 69, 72], які присвячені обчисленню іонної сили опору в сильнозіткневому режимі ($l_{\text{ia}}/r_D \to 0$). Наприклад в роботах [67, 68, 69] ця проблема розглядалася на основі дрейфово-дифузійного наближення за допомогою лінійної моделі із точковим стоком. На рис. 4.4 додатково показані результати, отримані за допомогою моделі із роботі [67], в якій було виведено такий вираз для іонної сили опору:

$$F_{dd} = \frac{iq^2}{\pi r_D^2}\int_0^\infty \frac{dz}{\tilde{\upsilon}^2\left(\tilde{\mu}_2 - \tilde{\mu}_1\right)D}\Big\{2i\tilde{\upsilon}A\left(\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2\right) + \\ + \sum_{i=1,2}(-1)^{i+1}\tilde{\mu}_i\left[z\left(\tilde{q}-1\right) + i\tilde{\upsilon}\tilde{\mu}_i A\right]\ln\frac{\tilde{\mu}_i - 1}{\tilde{\mu}_i + 1}\Big\}, \tag{4.38}$$

$$\tilde{\mu}_{1,2} = -\frac{iB \pm \sqrt{4Dz^2\left(1+z^2\right) - B^2}}{2z\tilde{\upsilon}D}, \tag{4.39}$$

$$B = \left[z^2\left(1+D\right) + A\right], \qquad A = \frac{\tilde{\tau} + D}{\tilde{\tau} + 1}, \tag{4.40}$$

$$\tilde{\upsilon} = ur_D / D_{\mathrm{i}}, \qquad D = D_{\mathrm{i}} / D_{\mathrm{e}}, \qquad \tilde{\tau} = T_{\mathrm{i}0} / T_{\mathrm{e}0}, \tag{4.41}$$

де D_{i} та D_{e} це коефіцієнти дифузії для іонів та електронів, $\tilde{q}$ це відносний ефективний заряд частинки, який є вільним параметром моделі. Надамо стисле пояснення цього параметру. Як було показано в багатьох роботах [22, 24, 64, 65, 66, 86, 87, 88], електричний потенціал навколо поглинаючої частинки при наявності зіткнень в плазмі завжди має асимптотичну поведінку кулонівського типу (дивись також розділ 3). Тобто заряд частинки не повністю екранується оточуючою плазмою. При цьому, кулонівська асимптота електричного потенціалу пропорційна ефективному (незаекранованому) заряду частинки q_{eff}. Відношення ефективного заряду до повного заряду частинки q називають, як правило, відносним ефективним зарядом, тобто $\tilde{q} = q_{\mathrm{eff}} / q$. Як було показано в роботах [22] та [64], відносний ефективний заряд залежіть від числа Кнудсена l_{ia} / r_D та відношення a / r_D. Для обчислення значень сили F_{dd}, які представлено на рис. 4.4, вільний параметр $\tilde{q}$ підбирався таким чином, щоб сила F_{dd} співпадала із силою F_d, визначеною шляхом чисельного розв’язку кінетичних рівнянь. Відповідні значення відносного ефективного заряду показано в підписі до рис. 4.4. Відзначимо, що сила F_{dd}, обчислена за допомогою виразу (4.38), досить різко змінюється при навіть незначних змінах параметру $\tilde{q}$ та не виходить на постійне значення в граничному випадку $l_{\mathrm{ia}} / r_D \to 0$. Схожі недоліки мають вирази для іонної сили опору в сильнозіткневому режимі, які було отримано в роботах [68, 69, 72]. Таким чином ці моделі не можуть бути застосовані для обчислення іонної сили опору при малих числах Кнудсена. Проте, значення відносного ефективного заряду представлені в підписі до рис. 4.4, досить близькі до тих значень які було отримано в розділі 3. Тобто результати, представлені в роботах [67, 68, 69, 72], можна використовувати для оцінки іонної сили опору для чисел Кнудсена в діапазоні $l_{\mathrm{ia}}/r_D \approx 10^{-3} \div 10^{-1}$.

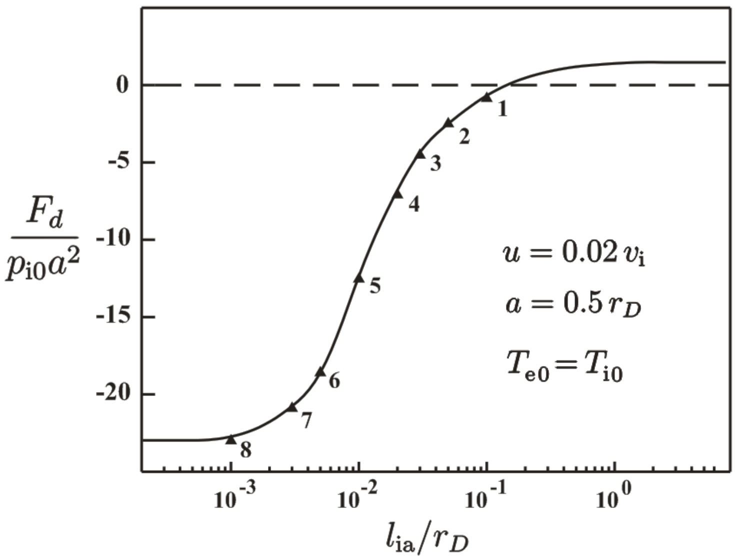

Рис. 4.4 Залежність іонної сили опору від числа Кнудсена l_{ia}/r_D у випадку $a = 0.5 r_D$, $u = 0.02 \upsilon_{\mathrm{i0}}$, $T_{\mathrm{i0}} = T_{\mathrm{e0}}$. Суцільна лінія показує результати, отримані шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь. Символи ▲ показують результати, отримані за допомогою дрейфово-дифузійної моделі із роботи [67] при таких значеннях відносного ефективного заряду: $\tilde{q} = 0.370$ (1), 0.390 (2), 0.405 (3), 0.420 (4), 0.450 (5), 0.478 (6), 0.495 (7), 0.522 (8).

Для того, щоб виявити фізичний механізм, який призводить до зміни знаку іонної сили опору, розглянемо розподіли концентрацій $n_{\mathrm{e,i}}$ та нормованої густини заряду вздовж вісі симетрії для різних режимів зіткнень. На рис. 4.5 ці розподіли показано для випадку $a = 0.5 r_D$, $u = 0.02 \upsilon_{\mathrm{i0}}$, $T_{\mathrm{i0}} = T_{\mathrm{e0}}$ та різних значень числа Кнудсена l_{ia}/r_D. Можна бачити, що розподіл електронної концентрації навколо частинки практично ізотропний. Це пояснюється тим фактом, що відношення швидкості руху плазми до теплової швидкості електронів дуже мале ($u/\upsilon_{\mathrm{e0}} \sim 10^{-5}$). Розподіл іонної концентрації навколо частинки також практично ізотропний, коли зіткнення іонів із атомами не впливають на динаміку іонів, тобто в слабкозіткневому режимі (дивись рис. 4.5 при $l_{\mathrm{ia}}/r_D \approx 1$). В даному випадку іони легко притягуються від'ємно зарядженою частинкою. При цьому можна бачити тільки незначну анізотропію в розподілі іонної концентрації та густини заряду поблизу частинки. Можна також бачити, що густина заряду позаду частинки більше ніж густина заряду попереду частинки. В даному випадку для поляризаційної компоненти сили опору маємо $F_e > 0$.

Фізична картина змінюється в сильнозіткневому режимі, коли зіткнення іонів із атомами починають значно впливати на динаміку іонів поблизу частинки (дивись рис. 4.5 при $l_{\mathrm{ia}}/r_D = 10^{-3}$). Відзначимо, що іони, які притягуються частинкою в області $x < -a$ рухаються в тому ж самому напрямку що і газ атомів, проте, іони, які притягуються частинкою в області $x > a$, рухаються проти потоку плазми. В даному випадку інтенсивні зіткнення іонів із атомами перешкоджають іонам потрапляти в область за частинкою. В результаті виникає помітна анізотропія в розподілі іонної концентрації та густини електричного заряду навколо частинки. Проте на відміну від слабкозіткневого режиму, можна бачити, що густина електричного заряду позаду частинки нижче ніж густина електричного заряду попереду частинки. Таким чином, поляризаційна компонента іонної сили опору спрямована проти потоку плазми, тобто $F_e < 0$. Як було відмічено вище, коли число Кнудсена стає досить малим між абсолютними величинами поляризаційної та механічної компонент іонної сили опору виконується таке співвідношення: $|F_e| \gg |F_m|$. Таким чином можна зробити висновок, що в сильнозіткневому режимі іонна сила опору стає від'ємною за рахунок описаного вище поляризаційного ефекту.

Розглянемо також залежність іонної сили опору від швидкості потоку плазми в сильнозіткневому режимі. На рис. 4.6 цю залежність показано для випадку $a = 0.5r_D$, $T_{\mathrm{e}0} = T_{\mathrm{i}0}$ та двох різних значень числа Кнудсена. Можна бачити, що залежність іонної сили опору від швидкості потоку плазми практично лінійна у випадку $u \to 0$ та стає нелінійною, коли швидкість потоку зростає. Для того, щоб якісно пояснити залежність іонної сили опору від швидкості потоку плазми, на рис. 4.7 показано розподіли концентрацій $n_{e,i}$ вздовж вісі симетрії для двох різних швидкостей потоку у випадку $a = 0.5r_D$, $T_{\mathrm{e}0} = T_{\mathrm{i}0}$, $l_{\mathrm{ia}}/r_D = 10^{-2}$.

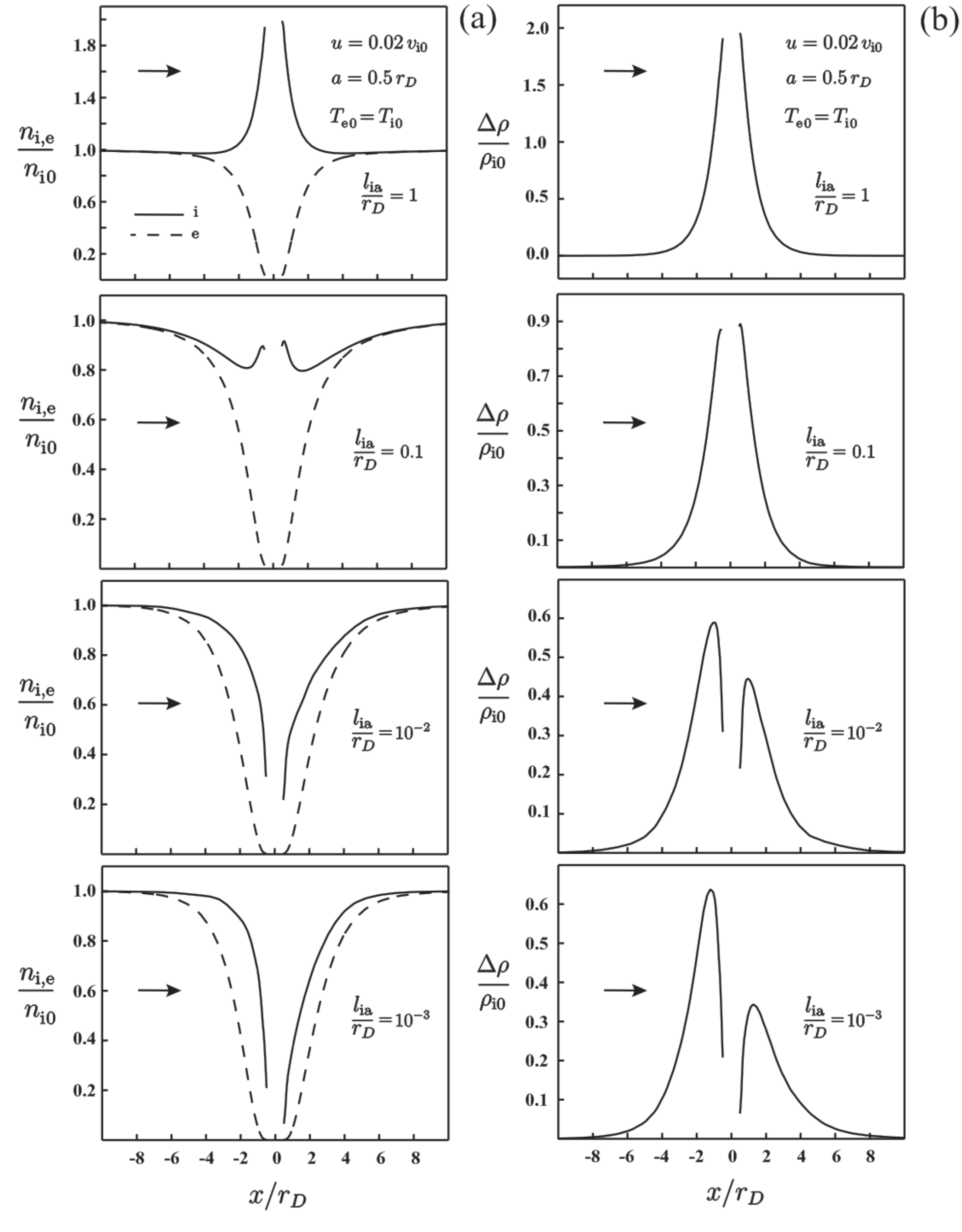

Рис. 4.5 Розподіли концентрацій іонів та електронів $n_{e,i}$ та нормованої густини електричного заряду вздовж вісі симетрії для різних значень числа Кнудсена $l_{\mathrm{ia}}/r_D = 1, 0.1, 10^{-2}, 10^{-3}$ для випадку $u = 0.02 v_{\mathrm{i0}}$, $a = 0.5 r_D$ та $T_{\mathrm{e0}} = T_{\mathrm{i0}}$. Стрілки вказують напрям руху потоку плазми. На рис. 4.5(a) суцільні лінії показують нормовану концентрацію іонів $n_{\mathrm{i}}/n_{\mathrm{i0}}$, а штриховані ланії показують нормовану концентрацію електронів $n_{\mathrm{e}}/n_{\mathrm{e0}}$. На рис. 4.5(b) нормована густина заряду визначається як $\Delta\rho/\rho_{\mathrm{i0}}$, де $\Delta\rho = e(n_{\mathrm{i}} - n_{\mathrm{e}})$ та $\rho = e n_{\mathrm{i0}}$.

Коли швидкість потоку досить мала (див. рис. 4.7(a)), деформація області некомпенсованого електричного заряду поблизу частинки мала, тобто потік плазми призводить до незначних відхилень від ізотропного стану системи (випадок $u = 0$). В даному випадку залежність іонної сили опору від швидкості потоку практично лінійна. Коли швидкість потоку плазми зростає (див. рис. 4.7(b)), область некомпенсованого електричного заряду поблизу частинки стає сильно деформованою в області $x > a$, що пов'язано із утворенням зони розрідження для іонів за частинкою. Наприклад, можна бачити помітне розділення заряду на відстанях в декілька довжин Дебая від частинки в області $x > a$. В даному випадку залежність іонної сили опору від швидкості потоку плазми стає нелінійною, як показано на рис. 4.6.

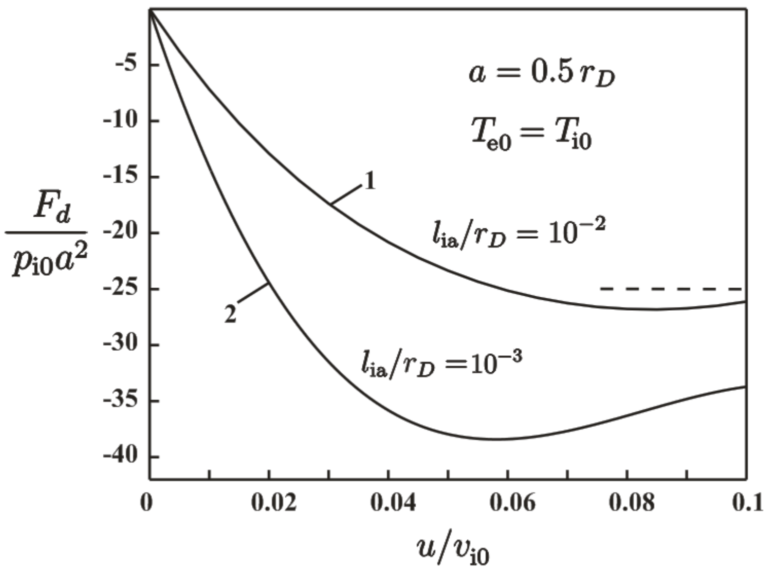

Рис. 4.6 Залежність іонної сили опору від швидкості потоку плазми у випадку $a = 0.5 r_D$, $T_{e0} = T_{i0}$. Суцільні криві показують результати, отримані шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь для двох значень числа Кнудсена: $l_{ia}/r_D = 10^{-2}$ (1) та $l_{ia}/r_D = 10^{-3}$ (2). Штрихована лінія показує значення іонної сили опору, обчислене за допомогою формули із роботи [76].

На рис. 4.6 показано також значення іонної сили опору, отримане за допомогою виразу із роботи [76]:

$$F_d = \pi a^2 p_{i0} M_i^2 \left(1 - \hat{q} M_i^{-2}\right), \tag{4.42}$$

де $\hat{q} = qe/akT_{i0}$ це нормований заряд частинки, а $M_i = u/\upsilon_{i0}$ це іонне число Маха. Коли $u/\upsilon_{i0} \to 0$, вираз (4.42) дає таке значення іонної сили опору:

$$F_d \to -\pi a^2 p_{i0}\hat{q}, \quad M_i \to 0. \tag{4.43}$$

Використовуючи значення нормованого заряду, отримане шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь ($\hat{q} \approx 8$, $l_{ia}/r_D \to 0$), можна обчислити іонну силу опору за допомогою виразу (4.43). Значення іонної сили опору, обчислене таким чином, добре узгоджується із значеннями, які було отримано шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь. Проте слід відзначити, що модель із роботи [76] базується на досить простому припущенні про рівність нулю концентрації іонів в області за частинкою.

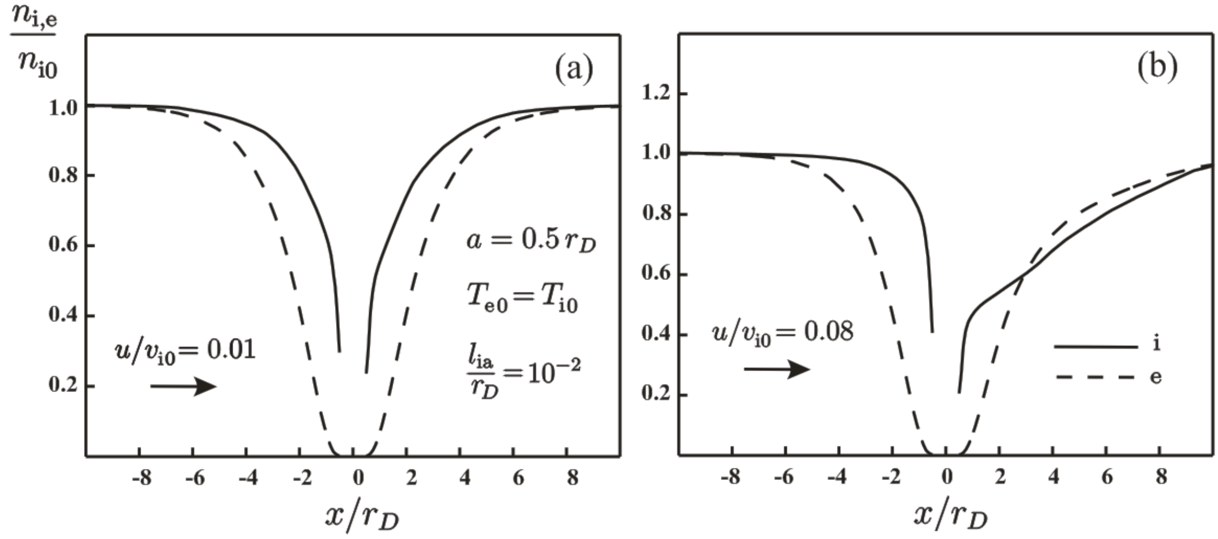

Рис. 4.7 Розподіл концентрацій іонів та електронів вздовж вісі симетрії для різних значень швидкості потоку плазми $u/\upsilon_{i0} = 0.01$(a), 0.08 (b) у випадку $a = 0.5r_D$, $T_{e0} = T_{i0}$, $l_{ia}/r_D = 10^{-2}$. Стрілка вказує напрям потоку. Суцільна лінія показує розподіл концентрації іонів, штрихована лінія показує розподіл концентрації електронів.

4.2.3 Обчислення результуючої сили опору з боку плазми

Наприкінці цього розділу розглянемо також проблему обчислення повної сили опору на макрочастинку, що рівномірно рухається в плазмі. Відзначимо, що силою опору з боку електронів можна знехтувати за рахунок значної різниці між масою електрону та масами важких компонент плазми (іонів та атомів), а також за рахунок того, що швидкість потоку плазми на частинку значно менша за теплову швидкість електронів в плазмі (тобто анізотропією потоку електронів поблизу частинки можна знехтувати). Слід відзначити, проте, що електронна сила опору може мати значення в деяких ситуаціях, коли частинка в плазмі знаходиться під дією зовнішнього електричного поля [52].

В слабкозіткневій плазмі ($l_{\mathrm{ia}} \gg r_D$), іонна та атомна сили опору направлені вздовж напрямку потоку плазми, тобто є додатними. При цьому сумарна сила опору з боку плазми також є додатнею та направлена вздовж швидкості потоку. Як було показано в підрозділі 4.2.1, сила опору з боку іонів в слабкозіткневій плазмі може бути обчислена за допомогою модифікованої теорії парних зіткнень. Атомна сила опору в слабкозіткневій плазмі може бути обчислена за допомого відомих виразів для сили опору на сферичну частинку з боку однокомпонентного нейтрального газу [30, 31, 32, 33, 34].

Як було показано в підрозділі 4.2.3, іонна сила опору в сильнозіткневому режимі ($l_{\mathrm{ia}} \ll r_D$) змінює знак та стає від'ємною, тобто ця сила направлена проти потоку плазми. В даному випадку величина та напрям сумарної сили опору з боку плазми залежить від співвідношення між абсолютними величинами іонної та атомної сил опору. Позначимо через F_s силу опору з боку атомів. В сильнозіткневому режимі, атомна сила опору може бути обчислена за допомогою відомої формули Стокса [34]:

$$F_s = 6\pi a^2 n_{\mathrm{a}0} k T_{\mathrm{a}0} \left(l_{\mathrm{aa}} / a \right) \left(u / \upsilon_{\mathrm{a}0} \right), \tag{4.44}$$

де l_{aa} це середня довжина вільного пробігу для атом-атомних зіткнень. Для того, щоб порівняти абсолютні значення іонної та атомної сил опору, запишемо ці сили в такій нормованій формі:

$$\left| F_d \right| = a^2 n_{\mathrm{i}0} k T_{\mathrm{i}0} \hat{F}_d , \qquad \left| F_s \right| = a^2 n_{\mathrm{a}0} k T_{\mathrm{a}0} \hat{F}_s , \tag{4.45}$$

де $\hat{F}_s = 6\pi\left(l_{aa}/a\right)\left(u/\upsilon_{a0}\right)$ це нормалізована атомна сила опору, а $\hat{F}_d$ це нормалізована сила опору з боку іонів. Розглянемо спочатку випадок ізотермічної плазми. Приймаючи до уваги співвідношення $T_{e0} = T_{i0}$, із (4.45) знаходимо, що

$$\frac{\left|F_d\right|}{\left|F_s\right|} = \frac{n_{i0}}{n_{a0}} \frac{\hat{F}_d}{\hat{F}_s}. \tag{4.46}$$

На рис. 4.8 показано значення $\hat{F}_d/\hat{F}_s$, отримані шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь для випадку $a = 0.5r_D$, $l_{ia}/r_D = 10^{-3}$. За даних умов відношення концентрацій іонів та атомів в плазмі складає $n_{i0}/n_{a0} \sim 10^{-8}$. Використовуючи це значення та результати, представлені на рис. 4.8, можна зробити висновок, що коли плазма є ізотермічною атомна сила опору завжди набагато більша за силу опору з боку іонів. Із рис. 4.8 видно, що при $T_{e0} = T_{i0}$ виконується співвідношення $\hat{F}_d/\hat{F}_s \sim 10^4$. Використовуючи вираз (4.46), отримаємо таке співвідношення між абсолютними величинами іонної та атомної сил опору: $\left|F_d\right|/\left|F_s\right| \sim 10^{-4}$. Таким чином результуюча сила опору на частинку в ізотермічній плазмі визначається силою опору з боку атомів та направлена вздовж швидкості руху плазми.

На думку автора повна сила опору може суттєво зменшуватися та навіть змінювати знак коли відношення T_{e0}/T_{i0} зростає. Використовуючи вирази для іонної сили опору, які було отримано в роботах [68, 69, 72], можна показати, що іонна сила опору пропорційна $\hat{q}_e^2\left(T_{e0}/T_{i0}\right)^2$, де $\hat{q}_e = qe/akT_{e0}$. Відомо, що нормований заряд частинки $\hat{q}_e$ досить слабко залежить від значення T_{i0}/T_{e0}. Приймаючи до уваги результати, показані на рис. 4.8 для випадку $T_{e0} = T_{i0}$, можна передбачити, що при зростанні відношення T_{e0}/T_{i0} може бути реалізована ситуація, коли іонна сила опору має один порядок із атомною силою опору. Оскільки при $T_{e0} = T_{i0}$ виконується співвідношення $\hat{F}_d/\hat{F}_s \sim 10^4$, то при $T_{e0}/T_{i0} \approx 100$ отримаємо $\hat{F}_d/\hat{F}_s \sim 10^8$. Враховуючи той факт, що за даних умов виконується співвідношення $n_{i0}/n_{a0} \sim 10^{-8}$, із (4.46) отримаємо $|F_d| \sim |F_s|$ при $T_{e0}/T_{i0} \approx 100$. В даному випадку повна сила опору на частинку з боку плазми може зменшуватися практично до нуля і навіть змінювати знак, тобто бути направленою проти швидкості потоку плазми. Таким чином можна передбачити, що в неізотермічній плазмі поглинаюча макрочастинка може рухатися у режимі надплинності без тертя. Існування цього ефекту обговорювалося раніше в роботі [77].

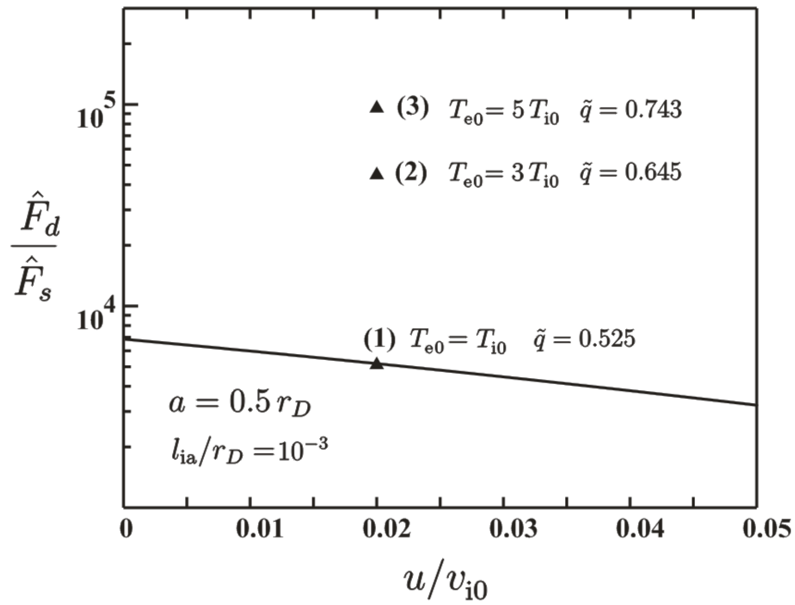

Рис. 4.8 Відношення нормованої сили опору з боку іонів $\hat{F}_d$ до нормованої сили опору з боку атомів $\hat{F}_s$ для $a = 0.5 r_D$, $l_{ia}/r_D = 10^{-3}$. Суцільна лінія показує залежність відношення $\hat{F}_d/\hat{F}_s$ у випадку $T_{e0} = T_{i0}$. Символи ▲ показують значення $\hat{F}_d/\hat{F}_s$ при $u = 0.02 v_{i0}$ для різних значень T_{i0}/T_{e0} : 1 (1), 2 (2), 5 (3).

На рис. 4.8 представлено також значення $\hat{F}_d/\hat{F}_s$, отримані шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь для $T_{e0}/T_{i0} = 3{,}5$ та $u = 0.02 v_{i0}$. Результати, представлені на рис. 4.8, показують, що залежність $\hat{F}_d \sim (T_{e0}/T_{i0})^2$ приблизно виконується. Відхилення значень $\hat{F}_d$ від цієї залежності можна пояснити тим фактом, що іонна сила опору залежить також від відносного ефективного заряду частинки $\tilde{q}$. Відомо, що залежність відносного ефективного заряду від T_{e0}/T_{i0} може бути приблизно описана як $\tilde{q} \sim (1 + T_{i0}/T_{e0})^{-1}$ [66]. Тобто $\tilde{q}$ значно змінюється при помірних значеннях $T_{e0}/T_{i0} \sim 1$ та прямує до одиниці при $T_{e0} \gg T_{i0}$. Таким чином на думку автора, відхилення від залежності $\hat{F}_d \sim (T_{e0}/T_{i0})^2$ при помірних значеннях T_{e0}/T_{i0} можна пояснити зменшенням іонної сили опору за рахунок збільшення відносного ефективного заряду. Для того, щоб продемонструвати це припущення на рис. 4.8 показано відповідні значення відносного ефективного заряду $\tilde{q}$ для випадків $T_{e0}/T_{i0} = 3,5$ та $u = 0.02\upsilon_{i0}$. Ці значення було отримано за допомогою виразу (4.38), в який $\tilde{q}$ входить як вільний параметр. При цьому значення $\tilde{q}$ обиралися таким чином, щоб сила F_{dd}, обчислена за допомогою (4.38), дорівнювала іонній силі опору, яку було обчислено шляхом чисельного розв’язку кінетичних рівнянь. Із рис.4.8 видно, що $\tilde{q}$ дійсно зростає при збільшенні відношення T_{e0}/T_{i0}, що призводить до зменшення іонної сили опору. Відзначимо, що у випадку $T_{e0} \gg T_{i0}$ відносний ефективний заряд не залежить від T_{e0}/T_{i0} і залежність $\hat{F}_d \sim (T_{e0}/T_{i0})^2$ може виконуватись. Слід відзначити, що підхід запропонований автором в цій роботі не може бути застосований для моделювання процесів взаємодії макрочастинок із плазмою у випадку $T_{e0} \gg T_{i0}$. Це пов’язано із особливостями розробленого методу для чисельного розв’язку кінетичних рівнянь. Тим не менш автор вважає, що результати, приведені в даному підрозділі, демонструють тенденцію зменшення повної сили опору при зростанні T_{e0}/T_{i0}. Таким чином можна зробити висновок, що за умов $T_{e0} \gg T_{i0}$ та $l_{ia}/r_D \ll 1$ повна сила опору на частинку з боку плазми може практично дорівнювати нулю. Відзначимо також, що ефект зменшення повної сили опору в сильнозіткневому режимі може розглядатися як механізм аномального нагрівання макрочастинок у типових експериментах з дослідження властивостей запорошеної плазми [78, 79, 80, 81].

4.3 Висновки

В даному розділі досліджено процес динамічного екранування макрочастинки під час її руху в слабкоіонізованій плазмі аргону. Вказаний процес досліджено на основі чисельного розв'язку самоузгодженої системи кінетичних рівнянь для компонент плазми. Розглянуто проблему обчислення сили опору, що діє на частинку з боку іонів (іонна сила опору), в беззіткневому режимі. Показано, що коли розмір частинки є набагато меншим за довжину Дебая в плазмі, іонна сила опору може бути обчислена за допомогою відомої теорії парних зіткнень [47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54]. Запропоновано модифікований варіант теорії парних зіткнень, який дозволяє обчислювати іонну силу опору у випадку, коли розмір частинки є одного порядку із довжиною Дебая в плазмі. Модифікована теорія парних зіткнень враховує вплив розміру частинки на розподіл електричного потенціалу навколо неї, а також на довжину екранування заряду макрочастинки в плазмі. Показано, що значення іонної сили опору, отримані за допомогою модифікованої теорії парних зіткнень, добре узгоджуються із результатами, які було отримано шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь.

Досліджено вплив іон-атомних зіткнень на величину та напрям іонної сили опору. Отримано залежність іонної сили опору від числа Кнудсена (k_{ia}) для іон-атомних зіткнень (відношення довжини вільного пробігу для іон-атомних зіткнень до довжини Дебая в плазмі). Показано, що при переході в сильнозіткневий режим ($k_{\mathrm{ia}} \ll 1$), іонна сила опору зменшується, та навіть змінює знак, тобто стає направленою проти потоку плазми. Надано якісне пояснення цього ефекту на основі аналізу розподілів густини електричного заряду поблизу частинки. Показано, що зміна знаку іонної сили опору пов'язана із зміною поляризації плазми при зменшенні числа Кнудсена.

Досліджено залежність іонної сили опору від швидкості потоку плазми в сильнозіткневому режимі. Показано, що при малих швидкостях потоку залежність іонної сили опору від швидкості потоку є практично лінійною. При збільшенні швидкості потоку плазми залежність іонної сили опору від швидкості стає нелінійною та немонотонною. Це пов’язано із порушенням умови квазінейтральності в області розрідження за частинкою.

Також досліджено співвідношення між силою опору з боку іонів та силою опору з боку атомів в сильнозіткневому режимі. Показано, що в ізотермічній плазмі сила опору з боку атомів, яка направлена вздовж швидкості потоку, на декілька порядків перевищує іонну силу опору. Таким чином в ізотермічній плазмі, повна сила опору на частинку з боку плазми визначається силою опору з боку атомів та направлена вздовж швидкості потоку плазми. Проте показано, що при зростанні температури електронів, різниця між іонною та атомною силою опору зменшується. На основі результатів, представлених в даному розділі, можна передбачити, що в типових експериментах по дослідженню властивостей запорошеної плазми повна сила опору на частинку може зменшуватися практично до нуля. В даному випадку частинка буде рухатися у надплинному режимі без тертя [77]. Це явище, якщо воно існує, може розглядатися як механізм аномального нагрівання макрочастинок в запорошеній плазмі, яке спостерігалося в багатьох експериментальних роботах [78, 79, 80, 81].

ВИСНОВКИ

В даній дисертаційній роботі проведено теоретичний аналіз впливу зіткнень між компонентами слабкоіонізованої плазми на характеристики процесів заряджання та екранування макрочастинок. Запропоновано новий підхід до моделювання вказаних процесів, який базується на прямому чисельному розв'язку самоузгодженої системи модельних кінетичних рівнянь для компонент плазми. Зокрема запропоновано новий тип модельних інтегралів зіткнень для опису зіткнень в багатокомпонентній плазмі, розроблено методи чисельного розв'язку кінетичних рівнянь у випадку сферичної та аксіальної симетрії та створено програмне забезпечення для комп'ютерної реалізації даних методів на багатопроцесорних обчислювальних системах. Проведено чисельне дослідження процесів заряджання та екранування макрочастинок в слабкоіонізованій плазмі аргону. Отримано такі результати:

1. Визначено залежності заряду макрочастинок від довжини вільного пробігу для іон-атомних зіткнень (l_{ia}) при різних значеннях відношення розміру частинки (a) до довжини Дебая в плазмі (r_D). Встановлено, що дані залежності є немонотонними та мають мінімум в проміжному режимі зіткнень, коли довжина вільного пробігу іонів є одного порядку із розміром частинки ($l_{\text{ia}} \sim a$). Показано, що значення заряду малих частинок ($a \ll r_D$), отримані шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь, добре узгоджуються із результатами, які було отримано за допомогою відомих аналітичних моделей.
2. Проведено чисельний аналіз розподілів електричного потенціалу навколо частинок різного розміру в широкому діапазоні режимів зіткнень. Показано, що в беззіткневому ($l_{\text{ia}} \gg r_D$) та сильнозіткневому режимах ($l_{\text{ia}} \ll r_D$) результати, отримані шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь, добре узгоджуються із результатами, які було отримано на основі відомих підходів (нелінійна беззіткнева модель та дрейфово-дифузійна модель). Встановлено, що в зіткневій плазмі для широкого діапазону значень відношення a/r_D має місце

неповне екранування заряду макрочастинки, тобто її електричний потенціал має асимптотичну поведінку кулонівського типу (r^{-1}). Визначено залежність ефективного (незаекранованого) заряду частинок різного розміру від довжини вільного пробігу іонів. Показано, що розподіл електричного потенціалу навколо малих частинок ($a \ll r_D$) добре описується за допомогою існуючих аналітичних моделей (лінійна кінетична модель із точковим стоком).

3. Проаналізовано залежність сили опору, що діє на макрочастинку з боку іонів в потоці плазми, від довжини вільного пробігу для іон-атомних зіткнень. Встановлено, що іонна сила опору може змінювати напрям при зменшенні довжини вільного пробігу іонів. Зокрема в сильнозіткневому режимі, коли довжина вільного пробігу іонів є набагато меншою за довжину Дебая в плазмі, іонна сила опору спрямована проти потоку плазми. Це пов'язано із зміною напряму поляризаційної сили, яка діє на заряджену макрочастинку в плазмі.

4. Отримано нові дані щодо співвідношення між іонною силою опору та силою опору з боку нейтральної компоненти плазми в сильнозіткневому режимі. Ці дані свідчать про те, що в неізотермічній плазмі при певних умовах сила опору з боку іонів може бути одного порядку із силою опору з боку нейтральної компоненти.

5. Запропоновано модифікацію відомого аналітичного підходу (теорія парних зіткнень) до проблеми обчислення іонної сили опору в беззіткневому режимі, яка дозволяє урахувати вплив розміру частинки на процес її динамічного екранування в потоці плазми. Показано, що значення іонної сили опору, отримані на основі даної модифікації, добре узгоджуються із результатами, які були отримані шляхом чисельного розв'язку кінетичних рівнянь.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Vladimirov S. V. Physics and Applications of Complex Plasmas / S. V. Vladimirov, K. Ostrikov, A. A. Samarian. – London: Imperial College Press, 2005. – 439 p.

2. Tsytovich V. N. Elementary Physics of Complex Plasmas / V. N. Tsytovich, G. E. Morfill, S. V. Vladimirov, H. M. Thomas. – Berlin: Springer, 2008. – 370 p.

3. Morfill G. E. Complex plasmas: An interdisciplinary research field / G. E. Morfill, A. V. Ivlev // Rev. Mod. Phys. – 2009. – Vol. 81, № 4. – P. 1353 – 1404.

4. Goertz C. K. Dusty plasmas in the solar system / C. K. Goertz // Reviews of Geophysics. – 1989. – Vol. 27, № 2. – P. 271 – 292.

5. Mendis D. A. Cosmic dusty plasma / D. A. Mendis, M. Rosenberg // Annu. Rev. Astrophys. – 1994. – Vol. 32. – P. 419 – 463.

6. Bliokh P. Dusty and Self-Gravitational Plasmas in Space / P. Bliokh, V. Sinitsin, V. Yaroshenko. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995. – 259 p.

7. Цытович В. Н. Пыль в установках управляемого термоядерного синтеза / В. Н. Цытович, Дж. Винтер // УФН. – 1998. – Т. 168, № 8. – С. 899 – 907.

8. de Angleis U. Dust in fusion devices / U. de Angelis // Phys. Plasmas. – 2006. – Vol. 13, № 1. – P. 0125141-1 – 0125141-10.

9. Туричин Г. Объемная конденсация в плазменном факеле при лазерно-дуговом воздействии на металлы / Г. Туричин, Е. Земляков, Е. Поздеева, Е. Норманн // Фотоника. – 2009. – № 1. – С. 12 – 15.

10. Shcheglov P. Yu. Plume attenuation of laser radiation during high power fiber laser welding / P. Yu. Shcheglov, S.A. Uspenskiy, A.V. Gumenyuk [et al.] // Laser Physics Letters. – 2011. – Vol. 8, № 6. – P. 475 – 480.

11. Shcheglov P. Yu. Vapor–plasma plume investigation during high-power fiber laser welding / P. Yu. Shcheglov, A. V. Gumenyuk, I. B. Gornushkin [et al.] // Laser. Phys. – 2013. – Vol. 23, № 1. – P. 016001-1 – 016001-11.
12. Selwyn G. S. Trapping and behavior of particulates in a radio frequency magnetron plasma etching tool / G. S. Selwyn, K. L. Haller, K. L. Patterson // J. Vac. Sci. Technol. A. – 1993. – Vol. 11, № 4. – P. 1132 – 1135.
13. Kersten H. Micro-Disperse Particles in Plasmas: From Disturbing Side Effects to New Applications / H. Kersten, H. Deutsch, E. Stoffels [et al.] // Contrib. Plasma Phys. – 2001. – Vol. 41, № 6. – P. 598 – 609.
14. Boufendi L. Industrial developments of scientific insights in dusty plasmas / L. Boufendi, A. Bouchoule // Plasma Sources Sci. Technol. – 2002. – Vol. 11, № 3A. – P. 211 – 218.
15. Chu J. H. Direct observation of Coulomb crystals and liquids in strongly coupled rf dusty plasmas / J. H. Chu, I Lin // Phys. Rev. Lett. – 1994. – Vol. 72, № 25. – P. 4009 – 4012.
16. Thomas H. Plasma Crystal: Coulomb Crystallization in a Dusty Plasma / H. Thomas, G. E. Morfill, V. Demmel [et.al.] // Phys. Rev. Letter. – 1994. – Vol. 73, № 5. – P. 652 – 655.
17. Bonitz M. Complex plasmas: a laboratory for strong correlations / M. Bonitz, C. Henning, D. Block // Rep. Prog. Phys. – 2010. – Vol. 73, № 6. – P. 066501-1 – 066501-29.
18. Morfill G. E. Complex (dusty) plasmas – kinetic studies of strong coupling phenomena / G. E. Morfill, A. V. Ivlev, H. M. Thomas // Physics of Plasmas. – 2012. – Vol. 19, № 5. – P. 055402-1 – 055402-14.
19. Fortov V. E. Strongly coupled dusty plasmas on ISS: experimental results and theoretical explanation / V. E. Fortov, G. E. Morfill // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2012. – Vol. 54, № 12. – P. 124040-1 – 124040-5.

20. Thomas E. Magnetized dusty plasmas: the next frontier for complex plasma research / E. Thomas, R. L. Merlino, M. Rosenberg // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2012. – Vol. 54, № 12. – P. 124034-1 – 124034-7.

21. Khrapak S. Basic Processes in Complex (Dusty) Plasmas: Charging, Interactions, and Ion Drag Force / S. Khrapak, G. Morfill // Contrib. Plasma Phys. – 2009. – Vol. 49, № 3. – P. 148 – 168.

22. Semenov I. L. A study of dust grain screening in a weakly ionized plasma based on the numerical solution of the Vlasov-Bhatnagar-Gross-Krook kinetic equations / I. L. Semenov, A. G. Zagorodny, I. V. Krivtsun // Phys. Plasmas. – 2011. – Vol. 18, № 10. – P. 103707-1 – 103707-11.

23. Semenov I. L. Numerical study of grain charging kinetics on the basis of BGK kinetic equation / I. L. Semenov, A. G. Zagorodny, I. V. Krivtsun // Ukr. J. Phys. – 2011. – Vol. 56, № 2. – P. 138 – 143.

24. Semenov I. L. On the effect of ion-neutral collisions on dust grain screening in a low-pressure gas discharge plasma / I. L. Semenov, A. G. Zagorodny, I. V. Krivtsun // Phys. Plasmas. – 2012. – Vol. 19, №4. – P. 043703-1 – 043703-8.

25. Semenov I. L. Ion drag force on a dust grain in weakly ionized collisional plasma / I. L. Semenov, A. G. Zagorodny, I. V. Krivtsun // Phys. Plasmas. – 2013. – Vol. 20, № 1. – P. 013701-1 – 013701-11.

26. Semenov I. L. Ion drag force on a charged macroparticle in collisionless plasma / I. L. Semenov // Ukr. J. Phys. – 2013. – Vol. 58, № 3. – P. 228 – 236.

27. Semenov I. L. Numerical study of grain charging kinetics on the basis of BGK kinetic equation / I. L. Semenov, A. G. Zagorodny, I. V. Krivtsun // Dusty plasmas in applications: 3rd International conference on The Physics of Dusty and Burning Plasmas, 25 – 29 August, 2010: Books of Abstracts. – 2010. – P. 54.

28. Semenov I. L. A kinetic study of dust grain screening based on the numerical solution of the Vlasov-Bhatnagar-Gross-Krook equations / I. L. Semenov, A. G. Zagorodny, I. V. Krivtsun // 39th EPS Conference & 16th Int. Congress on

Plasma Physics, 2-6 July, 2012: Conference Abstracts. – 2012. – Vol. 36F. – URL: http://ocs.ciemat.es/EPSICPP2012PAP/pdf/O4.310.pdf

29. Semenov I. L. Shielding of a moving dust grain in a weakly ionized plasma / I. L. Semenov, A. G. Zagorodny, I. V. Krivtsun // Problems of Theoretical Physics: International Conference dedicated to the 100th anniversary of Alexander Davydov, 8-11 October, 2012: Program & Proceedings. – 2012. – P. 37.

30. Epstein E. P. On the resistance experienced by spheres in their motion through gases / E. P. Epstein // Phys. Rev. – 1924. – Vol. 23, № 6. – P. 710 – 733.

31. Cercignani C. Flow of a rarefied gas past an axisymmetric body. II. Case of a sphere / C. Cercignani, C. D. Pagani, P. Bassanini // Phys. Fluids. – 1968. – Vol. 11, № 7 – P. 1399 – 1403.

32. Phillips W. F. Drag on a small sphere moving through a gas / W. F. Phillips // Phys. Fluids. – 1975. – Vol. 18, № 9. – P. 1089 – 1093.

33. Lea K. C. Motion of a sphere in a rarefied gas / K. C. Lea, S. K. Loyalka // Phys. Fluids. – 1982. – Vol. 25, № 9. – P. 1550 – 1557.

34. Takata S. Numerical analysis of a uniform flow of a rarefied gas past a sphere on the basis of the Boltzmann equation for hard-sphere molecules / S. Takata, Y. Sone, K. Aoki // Phys. Fluids A. – 1993. – Vol. 5, № 3. – P. 716 – 737.

35. Mott-Smith H. M. The theory of collectors in gaseous discharges / H. M. Mott-Smith, I. Langmuir // Phys. Rev. – 1926. – Vol. 28, № 4. – P. 727 – 763.

36. de Angelis U. The physics of dusty plasmas / U. de Angelis // Physica Scripta. – 1992. – Vol. 45, № 5. – P. 465 – 474.

37. Allen J. E. Probe Theory – The Orbital Motion Approach / J. E. Allen // Physica Scripta. – 1992. – Vol. 45, № 5. – P. 497 – 503.

38. Allen J. E. On the orbital motion limited theory for a small body at floating potential in a Maxwellian plasma / J. E. Allen, B. M. Annaratone, U. de Angelis // J. Plasma Physics. – 2000. – Vol. 63, № 4. – P. 299 – 309.

39. Lampe M. Limits of validity for orbital-motion-limited theory for a small floating collector / M. Lampe // J. Plasma Physics. – 2001. – Vol. 65, № 3. – P. 171 – 180.

40. Bernstein I. B. Theory of Electrostatic Probes in a Low – Density Plasma / I. B. Bernstein, I. M. Rabinowitz // Phys. Fluids. – 1959. – Vol. 2, № 2. – P. 112 – 122.

41. Daugherty J. E. Sheath structure around particles in low – pressure discharges / J. E. Daugherty, R. K. Porteous, M. D. Kilgore, D. B. Graves // J. Appl. Phys. – 1992. – Vol. 72, № 9. – P. 3934 – 3942.

42. Kennedy R. V. The floating potential of spherical probes and dust grains. II: Orbital motion theory / R. V. Kennedy, J. E. Allen // J. Plasma Physics. – 2003. – Vol. 69, № 6. – P. 485 – 506.

43. Delzanno G. L. Exact orbital motion theory of the shielding potential around an emitting, spherical body // G. L. Delzanno, A. Bruno, G. Sorasio, G. Lapenta // Phys. Plasmas. – 2005. – Vol. 12, № 6. – P. 062102-1 – 062102-18.

44. Bystrenko T. Effects of bound states in the screening of dust particles in plasmas / T. Bystrenko, A. Zagorodny // Physics Letters A. – 2002. – Vol. 299, № 4. – P. 383 – 391.

45. Lampe M. Effect of Trapped Ions on Shielding of a Charged Spherical Object in a Plasma / M. Lampe, V. Gavrishchaka, G. Ganguli, G. Joyce // Phys. Rev. Letters. – 2001. – Vol. 86, № 23. – P. 5278 – 5281.

46. Lampe M. Trapped ion effect on shielding, current flow, and charging of a small object in a plasma / M. Lampe, R. Goswami, Z. Sternovsky [et al.] // Phys. Plasmas. – 2003. – Vol. 10, № 5. – P. 1500 – 1513.

47. Chandrasekhar S. Dynamical friction. I. General considerations: the coefficient of dynamical friction / S. Chandrasekhar // Astrophysical Journal. – 1943. – Vol. 97. – P. 255 – 262.

48. Barnes M. S. Transport of dust particles in glow-discharge plasmas / M. S. Barnes, J. H. Keller, J. C. Forster [et al.] // Phys. Rev. Letters. – 1992. – Vol. 63, № 3. – P. 313 – 316.

49. Khrapak S. A. Ion drag force in complex plasmas / S. A. Khrapak, A. V. Ivlev, G. E. Morfill, H. M. Thomas // Phys. Rev. E. – 2002. – Vol. 66, № 4. – P. 046414-1 – 046414-4.

50. Khrapak S. A. Scattering in the Attractive Yukawa Potential in the Limit of Strong Interaction / S. A. Khrapak, A. V. Ivlev, G. E. Morfill, S. K. Zhdanov // Phys. Rev. Letters. – 2003. – Vol. 90, № 2. – P. 225002-1 – 22502-4.

51. Khrapak S. A. Scattering in the Attractive Yukawa Potential: Application to the Ion-Drag Force in Complex Plasmas / S. A. Khrapak, A. V. Ivlev, G. E. Morfill [et al.] // IEEE Trans. Plasma. Science. – 2004. – Vol. 32, № 2. – P. 555 – 560.

52. Khrapak S. A. Dusty plasmas in a constant electric field: Role of the electron drag force / S. A. Khrapak, G. E. Morfill // Phys. Rev. E. – 2004. – Vol. 69, № 6. – P. 066411-1 – 066411-5.

53. Khrapak S. A. Momentum transfer in complex plasmas / S. A. Khrapak, A. V. Ivlev, G. E. Morfill // Phys. Rev. E. – 2004. – Vol. 70, №5. – P. 056405-1 – 056405-9.

54. Khrapak S. A. Hybrid approach to the ion drag force / S. A. Khrapak, A. V. Ivlev, S. K. Zhdanov, G. E. Morfill // Phys. Plasmas. – 2005. – Vol. 12, № 4. – P. 042308-1 – 042308-8.

55. Lapenta G. Simulation of charging and shielding of dust particles in drifting plasmas / G. Lapenta // Phys. Plasmas. – 1999. – Vol. 6, № 5. – P. 1442 – 1447.

56. Hutchinson I. H. Ion collection by a sphere in a flowing plasma: 1. Quasineutral / I. H. Hutchinson // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2002. – Vol. 44, № 9. – P. 1953 – 1970.

57. Hutchinson I. H. Ion collection by a sphere in a flowing plasma: 2. non-zero Debye length / I. H. Hutchinson // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2003. – Vol. 45, № 8. – P. 1477 – 1500.

58. Hutchinson I. H. Ion collection by a sphere in a flowing plasma: 3. Floating potential and drag force / I. H. Hutchinson // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2005. – Vol. 47, № 1. – P. 71 – 87.

59. Hutchinson I. H. Collisionless ion drag force on a spherical grain / I. H. Hutchinson // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2006. – Vol. 48, № 1. – P. 185 – 202.

60. Hutchinson I. H. Nonlinear collisionless plasma wakes of small particles / I. H. Hutchinson // Phys. Plasmas. – 2011. – Vol. 18, № 3. – P. 03211-1 – 03211 - 10.

61. Maiorov S. A. Influence of the Trapped Ions on the Screening Effect and Frictional Force in a Dusty Plasma / S. A. Maiorov // Plasma Physics Reports. – 2005. – Vo. 31, № 8. – P. 690 – 699.

62. Su C. H. Continuum Theory of Spherical Electrostatic Probes / C. H. Su, S. H. Lam // Phys. Fluids. – 1963. – Vol. 6, №10. – P. 1479 – 1491.

63. Su C. H. Continuum Theory of Electrostatic Probes / C. H. Su, R. E. Kiel // J. Appl. Phys. – 1965. – Vol. 37, №13. – P. 4907 – 4911.

64. Bystrenko O. Screening of dust grains in a weakly ionized gas: Effects of charging by plasma currents / O. Bystrenko, A. Zagorodny // Phys. Rev. E. – 2003. – Vol. 67, № 6. – P. 066403-1 – 066403-5.

65. Zagorodny A. G. Effective grain potential in a plasma with external sources of ionization / A. G. Zagorodny, A. V. Filippov, A. F. Pal', A. N. Starostin, A. I. Momot // Prob. At. Sci. Technol. – 2006. – Vol. 12, № 6. – P. 99 – 103.

66. Khrapak S. A. Charging properties of a dust grain in collisional plasmas / S. A. Khrapak, G. E. Morfill, A. G. Khrapak, L. G. D'yachkov // Phys. Plasmas. – 2006. – Vol. 13, № 5. – P. 052114-1 – 052114-5.

67. Zagorodny A. G. Macroparticle screening in a weakly ionized plasma / A. G. Zagorodny, A. V. Filippov, A. F. Pal' [et al.] // Journal of Physical Studies. – 2007. – Vol. 11, № 2. – P. 158 – 164.

68. Филиппов А. В. Экранирование движущегося заряда в неравновесной плазме / А. В. Филиппов, А. Г. Загородний, А. И. Момот // Письма в ЖЭТФ. – 2008. – Том 88, № 1. – 27 – 33.

69. Filippov A. V. Screening of a uniformly moving charged macroparticle in a non-equilibrium plasma / A. V. Filippov, A. G. Zagorodny // Plasma Physics Reports. – 2010. – Vol. 36, № 13. – P. 1120 – 1128.

70. Chaudhuri M. Electrostatic potential behind a macroparticle in a drifting collisional plasma: Effect of plasma absorption / M. Chaudhuri, S. A. Khrapak, G. E. Morfill // Phys. Plasmas. – 2007. – Vol. 14, № 2. - P. 022102-1 - 022102-5.

71. Chaudhuri M. Effective charge of a small absorbing body in highly collisional plasma subject to an external electric field / M. Chaudhuri, S. A. Khrapak, G. E. Morfill // Phys. Plasmas. – 2007. – Vol. 14, № 5. - P. 054503-1 - 054503-3.

72. Khrapak S. A. Drag force on an absorbing body in highly collisional plasmas / S. A. Khrapak, S. K. Zhdanov, A. V. Ivlev, G. E. Morfill // J. Appl. Phys. – 2007. – Vol. 101, № 3. – P. 033307-1 – 033307-4.

73. Chaudhuri M. Ion drag force on a small grain in highly collisional weakly anisotropic plasma: Effect of plasma production and loss mechanisms / M. Chaudhuri, S. A. Khrapak, G. E. Morfill // Phys. Plasmas. – 2008. – Vol. 15, № 5. – P. 053703-1 – 053703-7.

74. Chaudhuri M. Importance of plasma absorption to characterize the total force acting on a dust particle in highly collisional plasma subject to a weak external electric field / M. Chaudhuri, S. A. Khrapak, G. E. Morfill // Ukr. J. Phys. – 2008. – Vol. 53, № 11. – P. 1049 – 1052.

75. Khrapak S. A. Ion drag force acting on an absorbing body in highly collisional plasmas / S. A. Khrapak // Ukr. J. Phys. – 2008. – Vol. 53, № 11. – P. 1062 – 1064.

76. Khrapak S. A. Response to “Comment on ‘Ion collection by a sphere in a flowing collisional plasma’” / S. A. Khrapak, B. A. Klumov, G. E. Morfill // Phys. Plasmas. – 2007. – Vol. 14, № 7. – P. 074702-1 - 074702-2.

77. Vladimirov S. V. Superfluidlike Motion of an Absorbing Body in a Collisional Plasma / S. V. Vladimirov, S. A. Khrapak, M. Chaudhuri, G. E. Morfill // Phys. Rev. Lett. – 2008. – Vol. 100, № 5. – P. 055002-1 – 055002-4.

78. Shweigert V. A. Alignment and instability of dust crystals in plasmas / V. A. Shweigert, I. V. Schweigert, A. Melzer, A. Homann, A. Piel // Phys.Rev.E. – 1996. – Vol. 54, № 4. – P. 4155 – 4166.

79. Melzer A. Experimental investigation of the melting transition of the plasma crystal / A. Melzer, A. Homann, A. Piel // Phys. Rev. E. – 1996. – Vol. 53, № 3. – P. 2757–2766.

80. Shweigert V. A. Acceleration and orbits of charged particles beneath a monolayer plasma crystal / V. A. Schweigert, I. V. Schweigert, V. Nosenko, J. Goree // Phys. Plasmas. – 2002. – Vol. 9, № 11. – P. 4465 – 4472.

81. Ivanov Y. Melting dynamics of finite clusters in dusty plasmas / Y. Ivanov, A. Melzer // Phys. Plasmas. – 2005 – Vol. 12, № 7. – P. 072110-1 – 072110-11.

82. Hutchinson I. H. Computation of the effect of neutral collisions on ion current to a floating sphere in a stationary plasma / I. H. Hutchinson, L. Patacchini // Phys. Plasmas. – 2007. – Vol. 14, № 1. – P. 013505-1 – 013505-9.

83. D’yachkov L. G. Model of grain charging in collisional plasmas accounting for collisionless layer / L. G. D’yachkov, A. G. Khrapak, S. A. Khrapak, G.E.Morfill // Phys. Plasmas. – 2007. – Vol. 14, № 4. – P. 042102-1 – 042102-6.

84. Zobnin A. V. Ion current on a small spherical attractive probe in a weakly ionized plasma with ion-neutral collisions (kinetic approach) / A. V. Zobnin,

A. D. Usachev, O. F. Petrov, V. E. Fortov // Phys. Plasmas. – 2008. – Vol. 15, № 4. – P. 043705-1 – 043705-6.

85. Khrapak S. A. An interpolation formula for the ion flux to a small particle in collisional plasmas / S. A. Khrapak, G. E. Morfill // Phys. Plasmas. – 2008. – Vol. 15, № 11. – P. 114503-1 – 114503-4.

86. Filippov A. V. Kinetic description of the screening of the charge of macroparticles in a nonequilibrium plasma / A. V. Filippov, A. G. Zagorodny, A. F. Pal', A. N. Starostin, A. I. Momot // JETP Lett. – 2007. – Vol. 86, № 12. – P. 761 – 766.

87. Khrapak S. A. Electric Potential Around an Absorbing Body in Plasmas: Effect of Ion-Neutral Collisions / S. A. Khrapak, B. A. Klumov, G. E. Morfill // Phys. Rev. Lett. – 2008. – Vol. 100, № 2. – P. 225003-1 – 225003-4.

88. Zagorodny A. G. About the influence of plasma particles collisions on the effective grain potential / A. G. Zagorodny, A. I. Momot, A. V. Filippov, A. F. Pal', A. N. Starostin // Ukr. J. Phys. – 2009. – Vol. 54, № 11. – P. 1089 – 1093.

89. Ivlev A. V. Force on a Charged Test Particle in a Collisional Flowing Plasma / A. V. Ivlev, S. A. Khrapak, S. K. Zhdanov [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2004. – Vol. 92, № 20. – P. 205007-1 – 205007-4.

90. Ivlev A. V. Ion drag force in dusty plasmas / A. V. Ivlev, S. K. Zhdanov, S. A. Khrapak, G. E. Morfill // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2004. – Vol. 46, № 12B. – P. 267 – 279.

91. Ivlev A. V. Kinetic approach for the ion drag force in a collisional plasma / A. V. Ivlev, S. K. Zhdanov, S. A. Khrapak, G. E. Morfill // Phys. Rev. E. – 2005. – Vol. 71, № 1. – P. 016405-1 – 016405-7.

92. Patacchini L. Fully Self-Consistent Ion-Drag-Force Calculations for Dust in Collisional Plasmas with an External Electric Field / L. Patacchini, I. H. Hutchinson // Phys. Rev. Lett. – 2008. – Vol. 101, № 2. – P. 025001-1 – 025001-4.

93. Власов А. А. О вибрационных свойствах электронного газа / А. А. Власов // ЖЭТФ. – 1938. – Т.8, № 3. – С. 291 – 316.

94. Климонтович Ю. Л. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы / Ю. Л. Климонтович. – Москва: Наука, 1975. – 352 с.

95. Голант В. Е. Основы физики плазмы / В. Е. Голант, А. П. Жилиснкий, И. Е. Сахаров. – Москва: Атомиздат, 1977. – 384 с.

96. Чепмен С. Математическая теория неоднородных газов / С. Чепмен, Т. Каулинг. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1960. – 510 с.

97. Ландау Л. Д. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия / Л. Д. Ландау // ЖЭТФ. – 1937. – Т. 7, № 2. – С. 203 – 209.

98. Balescu R. Irreversible processes in ionized gases / R. Balescu // Phys. Fluids – 1960. – Vol. 3, № 1. – P. 52 – 63.

99. Lenard A. On Bogolubovs kinetic equation for a spatially homogeneous plasma / A. Lenard // Ann. Phys. – 1960. – Vol. 10, № 3. – P. 390 – 400.

100. Bhatnagar P. L. A model for collision processes in gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems / P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, K. Krook // Phys. Rev. – 1954. – Vol. 94, № 3. – P. 511 – 524.

101. Gross E. P. for collision processes in gases: Small-amplitude oscillations of charged two-component systems / E. P. Gross, M. Krook // Phys. Rev. – 1956. – Vol. 102, № 3. – P. 593 – 604.

102. Morse T. F. Kinetic Model Equations for a Gas Mixture / T. F. Morse // Phys. Fluids. – 1964. – Vol. 7, № 12. – P. 2012 – 2013.

103. Hamel B. B. Kinetic Model for Binary Gas Mixture / B. B. Hamel // Phys. Fluids. – 1965. – Vol. 8, № 3. – P. 418 – 425.

104. Goldman E. Equations for Gas Mixtures / E. Goldman, L. Sirowich // Phys. Fluids – 1967. – Vol. 10, № 9. – P. 1928 – 1940.

105. Garzo V. A kinetic model for a multicomponent gas / V. Garzo, A. Santos, J. J. Brey // Phys. Fluids. – 1989. – Vol. 1, № 1. – P. 380 – 383.

106. Andries P. A consistent BGK-type model for gas mixtures / P. Andries, K. Aoki, B. Perthame // Journal of Statistical Physics. – 2002. – Vol. 106, № 5. – P. 993 – 1018.

107. Groppi M. A Bhatnagar–Gross–Krook-type approach for chemically reacting gas mixtures / M. Groppi, G.Spiga // Phys. Fluids. – 2004. – Vol. 16, № 12. – P. 4273 – 4284.

108. Bisi M. Kinetic Bhatnagar-Gross-Krook model for fast reactive mixtures and its hydrodynamic limit / M. Bisi, M. Groppi, G. Spiga // Phys. Rev. E. – 2010. – Vol. 81, № 3. – P. 036327-1 – 036327-9.

109. Ларина И. Н. Численный метод второго порядка точности для решения уравнения Больцмана при малых числах Кнудсена / И. Н. Ларина, В. А. Рыков // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2002. – Т. 42, № 4. – С. 559 – 568.

110. Ларина И. Н. Метод расщепления второго порядка точности для решения уравнения Больцмана / И. Н. Ларина, В. А. Рыков // Матем. Моделирование. – 2002. – Т.14, № 8 – С. 96 – 101.

111. Ларина И. Н. Численное решение уравнения Больцмана методом симметричного расщепления / И. Н. Ларина, В. А. Рыков // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2003. – Т. 43, № 4. – С. 601 – 613.

112. Ларина И. Н. Метод численного решения осесимметричных задач для уравнения Больцмана / И. Н. Ларина, В. А. Рыков // Матем. Моделирование .– 2004. – Т.16, № 6 – С. 65 – 68.

113. Mieussens L. Discrete velocity model and implicit scheme for the BGK equation of rarefied gas dynamics / L. Mieussens // Math. Models Methods Appl. Sci. – 2000. – Vol. 10, № 8. – P. 1121 – 1149.

114. Mieussens L. Discrete-Velocity Models and Numerical Schemes for the Boltzmann-BGK Equation in Plane and Axisymmetric Geometries / L. Mieussens // Journal of Computational Physics. – 2000. – Vol. 162, № 2. – P. 429 – 466.

115. Pieraccini S. Implicit–Explicit Schemes for BGK Kinetic Equations / S. Pieraccini, G. Puppo // Journal of Scientific Computing. – 2007. – Vol. 32, № 1. – P. 1 – 28.

116. Titarev V. A. Conservative numerical methods for model kinetic equations / V. A. Titarev // Computers & Fluids. – 2007. – Vol. 36, № 9. – P. 1446 – 1459.

117. Titarev V. A. Implicit numerical method for computing three-dimensional rarefied gas flows on unstructured meshes / V. A. Titarev // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2010. – Vol. 50, № 10. – P. 1719-1733.

118. Titarev V. A. Efficient Deterministic Modelling of Three-Dimensional Rarefied Gas Flows / V. A. Titarev // Commun. Comput. Phys. – 2012. – Vol. 12, № 1. – P. 162 – 192.

119. Sugimoto H. Numerical analysis of steady flows of a gas evaporating from its cylindrical condensed phase on the basis of kinetic theory / H. Sugimoto, Y. Sone // Phys. Fluids A. – 1992. – Vol. 4, № 2. – P. 419 – 441.

120. Черчиньяни К. Математические методы в кинетической теории газов / К. Черчиньяни. – Москва: Мир, 1973. – 245 с.

121. Le Veque R. J. Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems / R. J. Le Veque. – Cambridge: Cambridge University Press, 2002. – 558p.

122. Toro E. F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction. Third Edition / E. F. Toro. – Berlin: Springer, 2009. – 723p.

123. Ueberhuber C. W. Numerical Computation 2: Methods, Software, and Analysis / C. W. Ueberhuber – Berlin: Springer, 1997. – 474p.

124. Persson P. A simple mesh generator in MATLAB / P. Persson, G. Strang // SIAM Review. – 2004. – Vol. 46, № 2. – P. 329–345.

125. Batten P. Positively conservative high resolution convection schemes for unstructured elements / P. Batten, C. Lambert, D. M. Causon // Int. J. for Num. Methods in Eng. – 1996. – Vol. 39, № 11. – P. 1821 – 1838.

126. Hubbard M. Multidimensional Slope Limiters for MUSCL-Type Finite Volume Schemes on Unstructured Grids / M. Hubbard // J. Com. Phys. – 1999. – Vol. 155, № 1. – P. 54 – 74.

127. Buffard T. Monoslope and multislope MUSCL methods for unstructured meshes / T. Buffard, S. Clain // J. Com. Phys. – 2010. – Vol. 229, № 10. – P. 3745 – 3776.

128. Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method: The Basis. Fifth edition / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 689p.

129. Жданов В. М. Явления переноса в многокомпонентной плазме / В. М. Жданов. – Москва: Энергоиздат, 1982. – 176с.

130. Milloy H. B. The Momentum Transfer Cross Section for Electrons in Argon in the Energy Range 0-4 eV / H. B. Milloy, R. W. Crompton, J. A. Rees, A. G. Robertson // Aust. J. Phys. – 1977. – Vol. 60, № 1. – P. 61 – 72.

131. Maiorov S. A. Calculation of resonant charge exchange cross-sections of ions Rubidium, Cesium, Mercury and noble gases / S. A. Maiorov // Proceedings of the 28th International Conference on Phenomena in Ionized Gases, Prague, July 2007, edited by J. Schmidt, M. Simek, S. Pekarek, and V. Prukner. – 2007. – P. 177 – 180.

132. Northrop T. G. Dusty plasmas / T. G. Northrop // Physica Scripta. – 1992. – Vol. 45, № 5. – P. 475 – 490.

133. Al’pert Y. L. Space Physics with Artificial Satellites / Y. L. Al’pert, A. Gurevich, L. P. Pitaevskii. – New York: Consultants Bureau, 1965. – 240p.