Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

Воронов Володимир Геннадійович

УДК 535.41, 539.182

Кореляції і шуми в заплутаних станах квантових систем

Спеціальність 01.04.02 – “теоретична фізика”

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Науковий керівник:
Доценко І. С.,
доктор фіз.-мат. наук,
професор

Київ – 2011

ЗМІСТ

ВСТУП

У багатьох задачах квантової теорії поля, квантовій оптиці, в теорії квантових обчислень виникає необхідність представлення складних експоненціальних некомутуючих операторів у вигляді добутку більш елементарних і зручних для застосування операторів. Таку задачу прийнято називати розплутуванням.

Математично метод розплутування можна звести до розв'язування системи лінійних диференціальних рівнянь [1]. Базова ідея була представлена у 1950-х Фейнманом [2] та Глаубером [3], і потім розвинута у різні напрямки багатьма авторами [1,4]. Метод розплутування був нещодавно представлений в огляді Попова [5].

Для окремих випадків існують декілька методів, що вирішують проблему розплутування аналітично та точно. Найвідоміші з них: диференціювання по параметру [3, 4], матричне представлення алгебри Лі [6], метод, що використовує перетворення подібності [4, 7].

І по сьогоднішній день задача створення зручних методів розплутування, які б дозволяли ефективно вирішувати задачу розплутування для довільних наборів некомутуючих операторів, залишається актуальною. Комп'ютерна реалізація таких методів значно б полегшила вирішення відповідних обчислювальних задач.

У другому розділі даної дисертації розглядається метод розплутування, створений на основі формули Бейкера-Кемпбелла-Хаусдорфа (БКХ) [8–10], та його комп'ютерна реалізація. Зокрема, даний метод розплутування буде використано у третьому розділі даної дисертаціної роботи.

Однією з фундаментальних задач фізики є пошук гравітаційних хвиль. Згідно загальній теорії відносності (ЗТВ), гравітаційні хвилі викликають надзвичайно малі періодичні зміни відстані між пробними частинками, як наслідок коливання самого простору.

Для реєстрування гравітаційних хвиль широко застосовуються детектори, що мають назву інтерферометричних гравітаційних детекторів [11], в основі яких лежить модифікований інтерферометр Майкельсона [11]. Ідею використати лазерні інтерферометри для пошуку гравітаційних хвиль було висловлено ще в 1960-х [12] та експериментально досліджено у 1970-х [13, 14]. Реальний перший експеримент, в якому була досягнута велика (на той час) чутливість до зсуву тестових мас, був проведений Форвардом [15] у 1978 році. На сьогоднішній день найбільш масштабними працюючими інтерферометричними детекторами є проекти VIRGO (3 км), TAMA-300 (300 м), GEO600 (600 м) та LIGO (2 км і 4 км). У дужках вказано довжину рукова детектора.

Головною проблемою на шляху до пошуку гравітаційних хвиль є недостатня чутливість усіх існуючих на сьогоднішній день детекторів. Найголовнішим викликом в побудові гравітаційного детектора є досягнення якомога кращої чутливості детектування.

Для сучасних детекторів чутливість в основному обмежується квантово-механічним шумом (надалі квантовий шум) [16]. Квантовий шум відповідає класу шумів, що виникають через квантову природу джерела світла в процесі детектування фотонів у інтерферометрах [17].

У інтерферометричному детекторі гравітаційних хвиль, побудованому на основі інтерферометра Майкельноса, присутні два основні джерела квантового шуму [16]: (і) фотонний шум [18] (shot noise), що виникає з невизначеності у числі фотонів на виході інтерферометра через квантово-механічні флуктуації; (іі) шум радіаційного тиску (radiation-pressure noise), який виникає з невизначеності у положенні дзеркал через квантові флуктуації внутрішніх полів, що викликають флуктуації радіаційного тиску, який і рухає дзеркала.

На початку 1980-х Кейвз [19] запропонував використати стиснене світло у інтерферометричних детекторах гравітаційних хвиль з метою зменшення квантового шуму. В наступні роки вийшла значна кількість робіт [20–23], в яких "метод стиснених станів" досліджувався та розвивався далі.

Покази детектора безпосередньо пов'язані з фотонним шумом на виході інтерферометра. Основною задачею робіт [20–23] був теоретичний опис статистики фотонів на виході інтерферометра, моделювання того, як використання стисненого світла впливає на величину квантового шуму у вихідному сигналі, а також встановлення зв'язку між квантовим шумом та точністю виміру позиції дзеркал в інтерферометрі.

Центральним елементом інтерферометра Майкельсона є світлодільник [23]. Більшість попередніх робіт обмежувалась аналізом статистики фотонів при 50/50 світлодільнику (дільник розщіплює пучок на два з однаковою інтенсивністю) і знаходженням середнього очікуваного значення та дисперсії числа фотонів на виході світлодільника інтерферометра. У нещодавній роботі Барака та Бен-Ар'єна [23] було запропоновано метод, що в принципі дає можливість провести аналіз статистики на виході світлодільника інтерферометра Майкельсона при усіх можливих коефіцієнтах розщеплення світлодільника, а також обчислити розподіл ймовірностей числа фотонів у відповідному вихідному стані. Однак, через застосовані в роботі Барака наближення, аналіз обмежився лише двома випадками для коефіцієнту розщеплення світлодільника, а саме 50/50 розщепленням, та так званим випадком темного порту, коли майже всі фотони вхідного когерентного поля прямують до першого вихідного порту, і лише мала частина до другого, темного, порту.

Для випадку темного порту отриманий у [23] результат стверджує, що використання стиснених станів не тільки зменшує квантовий шум, а й одночасно підсилює сигнал на виході. Таке передбачення виглядає контрінтуітивно.

У третьому розділі даної дисертаційної роботи представлено результати досліджень квантового шуму у вихідному сигналі світлодільника інтерферометра, проведений розширений аналіз статистики фотонів на виході для усіх можливих значень коефіцієнта розщеплення світлодільника, а також перевірено вірність передбачення роботи [23] для випадку темного порту інтерферометра Майкельсона.

Отже, питання дослідження квантового шуму у інтерферометричних детекторах на сьогоднішній день є досить актуальним. За останні роки з'являються нові роботи, присвячені цьому питанню [23–25]. Добре розуміння квантових шумів у інтерферометричних детекторах гравітаційних хвиль дає змогу суттєво підвищити точність виміру зсуву тестових мас в детекторі, і тим самим, внести вагомий внесок у вирішення задачі пошуку гравітаційних хвиль.

Ще однією широкою областю фізики, де вивченню і врахуванню шумів приділяють велику увагу, є теорія квантової інформації. Після появи відомої роботи Ейнштейна, Розена, Подольського (ЕПР) [26], в якій висловлена концепція про неповноту квантового опису фізичної реальності, були здійснені численні спроби побудови більш досконалих теорій, які б не порушували принципу причинності в класичному тлумаченні.

У 1964 р. Белл [27], беручи до уваги ЕПР, як робочу гіпотезу, сформулював її в термінах моделей з локальними прихованими параметрами (Local Hidden Variable Models (LHVM)), і показав, що дані моделі накладають обмеження на статистичні кореляції в експериментах над системами. Такі обмеження були сформульовані у формі тепер вже добре відомих нерівностей Белла. Белл показав далі, що відповідні кореляції, які обчислюються за правилами квантової механіки, порушують вказані нерівності для деяких квантово-механічних станів, що називаються заплутаними (сплутаними). Отже, заплутаність є такою особливістю квантового формалізму, що породжує специфічні, виключно квантові, кореляції, що не можуть відтворюватись будь-якою класичною моделлю. В подальшому нерівності Белла були переформульовані у такий спосіб, який би дозволив експериментально підтвердити або спростувати порушення нерівностей.

У 1982 р. групою Аспекта [28] був поставлений експеримент по перевірці можливого порушення нерівностей Белла. З ймовірністю, що відповідає п'яти стандартним відхиленням, експериментальні дані порушували нерівність Белла. Численні наступні експерименти показали [29–31], що їх результати також узгоджуються з квантово-механічним описом фізичної реальності.

Отже, специфічна квантова кореляція набула статусу реальності, а заплутані стани, що породжують таку кореляцію, стали об'єктом інтенсивних досліджень. Стало зрозуміло, що заплутаність є ресурсом для вирішення некласичних задач. З'явилися такі наукові напрямки, як квантова криптографія [32,33], квантова комунікація, квантові обчислення [34–37], квантова телепортація [38–40]. Всі ці напрямки об'єднала нова міждисциплінарна область – теорія квантової інформації [41–44]. Методи створення, накопичення, збереження, розподілення та передачі на відстань заплутаності [45–48] стали предметом інтенсивних досліджень у наш час.

Одним з основних питань в теорії квантової заплутаності є питання: чи даний квантово-механічний стан є заплутаним? Для відповіді на це питання було розроблено різні критерії сепарабельності як для чистих, так і мішаних станів.

Найбільш вивченою в теорії заплутаності є двочастинкова заплутаність. На сьогоднішній день широко розповсюдженим джерелом заплутаності є поляризаційно заплутані пари фотонів, утворені в процесі параметричної вниз-конверсії типу II (parametric down-conversion process type II) [49].

Відомий факт, що в експериментах по генерації заплутаних станів через присутність шумів чисті заплутані стани стають зашумленими, тобто мішаними. Четвертий розділ даної дисертації присвячено дослідженню поляризаційно заплутаних станів пари фотонів, утворених в процесі параметричної вниз-конверсії типу II, за наявності шуму у стані. Знаходились умови виявлення заплутаності в таких станах в залежності від типу шуму та його вмісту у стані.

Дослідження поляризаційно заплутаних станів пари фотонів, утворених в процесі параметричної вниз-конверсії типу II є важливим для подальшого розвитку теорії заплутаності в цілому, оскільки саме такі фотони є найпоширенішим на сьогоднішній день експериментальним джерелом заплутаності.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась в рамках досліджень, які проводяться на кафедрі квантової теорії поля фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка по темі № 11БФ051-01 (номер держреєстрації 0106U006394).

Мета і задачі дослідження. ***Мета*** дослідження полягає у розробці методу розплутування експоненціальних некомутуючих операторів на основі формули Бейкера-Кемпбелла-Хаусдорфа та комп'ютерній реалізації даного методу; вивченні та аналізі статистики фотонів на виході світлодільника інтерферометра Майкельсона з метою покращення чутливості інтерферометра; у дослідженні та аналізі поляризаційно заплутаних станів пари фотонів, утворених в процесі параметричної вниз-конверсії типу II при наявності кольорового і білого шумів.

Задачі дослідження полягають у:

• розробці на основі формули Бейкера-Кембелла-Хаусдорфа методу розплутування експоненціальних некомутуючих операторів, що належать скінчено-вимірній алгебрі Лі та створенні комп'ютерної реалізації даного методу;

• вивченні квантового шуму у інтерферометрі Майкельсона; знаходженні розподілу ймовірностей числа фотонів на виході світлодільника інтерферометра Майкельсона для різних випадків розщеплення вхідного світла світлодільником;

• дослідженні залежності величини сигналу (середнього значення числа фотонів) та шуму (дисперсії) на виході світлодільника від параметру стиснення вхідного стисненого вакуумного стану;

• вивченні випадку темного порту: перевірці можливості одночасного підсилення сигналу та зменшення шуму;

• побудові та дослідженні матриці густини поляризаційного стану пари фотонів, утворених в процесі параметричної вниз-конверсії типу II в залежності від вмісту шуму у стані;

• знаходженні, використовуючи критерії сепарабельності та нерівність Белла, умов наявності заплутаності в двофотонному поляризаційному стані в залежності від вмісту шуму у стані.

Об'єктами дослідження є експоненціальні некомутуючі оператори, стани фотонів на виході світлодільника інтерферометра Майкельсона та поляризаційно заплутані пари фотонів, утворені в процесі параметричної вниз-конверсії типу II.

Предметом дослідження є методи розплутування експоненціальних некомутуючих операторів; статистика та квантові шуми фотонних станів на виході світлодільника інтерферометра Майкельсона і квантові кореляції та шуми у станах фотонів, утворених в процесі параметричної вниз конверсії типу II, критерії сепарабельності поляризаційних станів пари фотонів та умови наявності заплутаності в таких станах.

Методами дослідження є методи квантової оптики, формалізм когерентних та стиснених станів для опису станів фотонів у інтерферометрі Майкельсона, аналітичні методи квантової механіки, зокрема формалізм хвильової функції та матриці густини для опису станів фотонів, утворених в процесі параметричної вниз-конверсії типу II. Застосовуються критерій Переса-Городецького та критерій мажорування для аналізу на сепарабельність двофотонних станів. Для аналізу отриманих аналітичних виразів використовуються методи комп'ютерного числового дослідження.

Наукова новизна одержаних результатів.

• На основі формули Бейкера-Кемпбелла-Хаусдорфа розроблено метод, що дозволяє проводити розплутування експоненціальних некомутуючих операторів для довільних скінчено-вимірних алгебр Лі; створено відповідну комп'ютерну реалізацію.

• Вперше отримано аналітичну формулу для обчислення розподілу ймовірностей числа фотонів на виході світлодільника інтерферометра Майкельсона для всіх можливих значень коефіцієнту розщеплення світлодільника і параметру вхідного когерентного стану та параметру стиснення вхідного стисненого вакуумного стану; на основі отриманої формули проведено аналіз статистики фотонів на виході світлодільника інтерферометра Майкельсона.

• Вперше детально досліджено випадок темного порту інтерферометра. Виявлено, що для випадку темного порту інтерферометра стиснення не впливає істотно на середнє значення числа фотонів розподілу на виході темного порту інтерферометра Майкельсона, тобто підсилення сигналу немає. Підсилення сигналу можна досягти тільки при збільшенні інтенсивності вхідного когерентного стану. Показано, як стиснення дозволяє зменшити шум: для достатньо великого значення фактору стиснення зменшення фотонного шуму фотонів маємо більше ніж на 50%.

• Вперше розроблено модель опису поляризаційного стану пари фотонів, утворених в процесі параметричної вниз-конверсії типу II при наявності одночасно домішку кольорового і білого шуму до чистого заплутаного стану; отримано умови сепарабельності станів в такій моделі та досліджено стійкість порушення нерівностей Белла станами щодо двох типів шумів.

Практичне значення одержаних результатів. Проведене дослідження є корисним для розвитку загальної теорії заплутаності та квантової оптики. Практичне значення отриманих результатів полягає в тому, що вони можуть бути безпосередньо використані у відповідних областях: програма для знаходження коефіцієнтів розплутування має пряме практичне застосування у задачах, що виникають в квантовій механіці, квантовій теорії поля та квантовій оптиці. Результати для випадку темного порту інтерферометра можуть бути безпосередньо використані для зменшення квантового шуму у вихідному сигналі інтерферометра, та власне в експериментах по детектуванню гравітаційних хвиль. Узагальнена модель шуму, критерії сепарабельності та умови стійкості порушення нерівностей Белла можуть бути використані для виявлення заплутаності в реальних станах пари фотонів, утворених в процесі параметричної вниз-конверсії типу II. Відповідно, стани, в яких виявлено заплутаність, можна використовувати для вирішення некласичних задач, наприклад у квантовій комунікації.

Особистий внесок здобувача.

У роботі [50] здобувач самостійно провів апробацію запропонованого в дисертації методу розплутування експоненціальних некомутуючих операторів на п'яти чисельних прикладах.

У роботі [51] здобувач отримав аналітично формулу для розподілу ймовірностей числа фотонів на виході світлодільника інтерферометра Майкельсона, а також формули для середнього значення та дисперсії числа фотонів на виході. Чисельно провів аналіз статистики фотонів у вихідному темному порті світлодільника інтерферометра для випадку темного порту інтерферометра.

У роботі [52] здобувач використав нерівності Белла та отримав умови експериментального виявлення заплутаності в поляризаційних заплутаних станах пари фотонів, утворених в процесі параметричної вниз-конверсії типу II при наявності одночасно домішку кольорового і білого шуму до чистого заплутаного стану.

У роботі [53] здобувач використав критерій сепарабельності Переса-Городецького та критерій мажорування і отримав умови наявності заплутаності для поляризаційних станів фотонів, утворених в процесі параметричної вниз-конверсії типу II при наявності одночасно домішку кольорового і білого шуму до чистого заплутаного стану.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались на 10-ій міжнародній конференції “Optics and High Technology Material Science” (Київ, 22-24 жовтня 2009 р.); 13-тій міжнародній конференції “Quantum Optics and Quantum Information” (Київ, 28 травня - 1 червня, 2010 р.); 11-ій міжнародній конференції “Optics and High Technology Material Science” (Київ, 21-24 жовтня 2010 р.); робота також обговорювалася на наукових семінарах теоретичного відділу Physicalish-Thechische Bundesanstalt (PTB) (Брауншвайг, Німеччина), на семінарах кафедри квантової теорії поля Київського національного університету імені Тараса Шевченка та на семінарі Інституту теоретичної фізики НАН України імені М.М.Боголюбова.

Публікації. Основні результати дисертації представлено у 8 публікаціях, із них 4 статті [50–53] у наукових фахових журналах, що входять до переліку затверджених ВАК України і 4 тези міжнародних конференцій [54–57].

РОЗДІЛ 1

Огляд літератури

1.1. Методи розплутування експоненціальних некомутуючих операторів

Розплутування експоненціальних некомутуючих операторів є корисним інструментом в квантовій механіці, квантовій теорії поля, оптиці, квантовій хімії тощо. Математично його можна звести до розв'язування системи лінійних диференціальних рівнянь [1]. Базова ідея була представлена у 1950-х Фейнманом [2] та Глаубером [3], і розвинулась далі у різні напрямки багатьма авторами [1,4]. Метод розплутування був нещодавно представлений в огляді Попова [5].

Формулювання проблеми розплутування є наступним: оператори, які треба розплутати, є членами скінчено-вимірної алгебри Лі з генераторами $\{A_1, \ldots, A_m\}$. Тоді, за певних умов [1] виконується:

$$\exp(\xi_1 A_1 + \cdots + \xi_m A_m) = \exp(\sigma_1 A_1) \ldots \exp(\sigma_m A_m), \tag{1.1}$$

де $\xi_1, \ldots, \xi_m$ в загальному випадку є комплексними числами. Деякі з ξ_i можуть бути рівними нулю. Задача розплутування полягає у знаходженні коефіцієнтів розплутування $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ (також комплексні) для даної алгебри Лі $\{A_1, \ldots, A_m\}$ (комутатори алгебри Лі вважаються відомими $[A_i, A_j] = c_{ij}^k A_k$, де c_{ij}^k – структурні константи алгебри Лі).

Зокрема, задача розплутування може виникати під час моделювання динаміки квантових систем на квантовому комп'ютері [42, 43]. Квантову динаміку системи можна представити у вигляді перетворення хвильової функції стану системи $|\Psi(x,0)\rangle$ оператором квантової еволюції:

$$|\Psi(x,t)\rangle = \exp(-iHt)|\Psi(x,0)\rangle. \tag{1.2}$$

Задача розплутування виникає у випадку, коли гамільтоніан H містить некомутуючі частини: $H = \sum_{i=1}^{n} H_i$, де n - деяке скінчене число та $[H_j, H_k] \neq 0$. Наприклад, у випадку одновимірного руху частинки маємо:

$$H = H_0 + H_1, \quad H_0 = \frac{p^2}{2m}, \quad H_1 = V(x), \tag{1.3}$$

оператори кінетичної і потенційної енергії частинки не комутують [43].

Зазвичай для моделювання квантових алгоритмів використовують формулу Троттера [42, 58]:

$$\exp\left(i(A+B)t\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\exp\left(i\frac{At}{n}\right)\exp\left(i\frac{Bt}{n}\right)\right)^n, \tag{1.4}$$

де A і B не комутують. Найпростішими наближеннями є:

$$\exp\left(i(A+B)\Delta t\right) = \exp(iA\Delta t)\exp(iB\Delta t) + O(\Delta t^2), \tag{1.5}$$

$$\exp\left(i(A+B)\Delta t\right) = \exp(iA\Delta t)\exp(iB\Delta t)\exp\left(-\frac{1}{2}[A,B]\Delta t^2\right) + O(\Delta t^3). \tag{1.6}$$

Для окремих випадків існують різні методи, що вирішують проблему розплутування (1.1) аналітично та точно. Найбільш відомі з них: диференціювання по параметру [3, 4], матричне представлення алгебри Лі [6], та метод, що використовує перетворення подібності [4, 7].

Метод диференціювання по параметру вперше використав Глаубер [3], і пізніше в деталях був розвинутий Вілкоксом [4]. У даному методі до рівняння (1.1) вводиться параметр t

$$\exp(t(\xi_1 A_1 + \cdots + \xi_m A_m)) = \exp(\sigma_1(t)A_1)\ldots\exp(\sigma_m(t)A_m), \qquad (1.7)$$

після чого це рівняння диференціюється по t. Використовуючи відоме співвідношення

$$\exp(A)\cdot B\cdot\exp(-A) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\{A,B\}_k \qquad (1.8)$$

з вкладеними комутаторами $\{A,B\}_k = [A,\{A,B\}_{k-1}]$ та $\{A,B\}_0 = B$ і структуру алгебри Лі, можна обчислити вкладені комутатори і в результаті отримати систему звичайних диференціальних рівнянь. Якщо її можна розв'язати аналітично, то, відповідно, можна знайти розв'язки для $\sigma_1,\ldots,\sigma_m$. Приклади розглянуто Вілкоксом [4].

Чисто алгебраїчний метод, заснований на матричному представленні алгебри Лі, є зручним у використанні, коли таке представлення можна знайти без проблем. Після обчислення показникової функції даних матриць отримується система нелінійних рівнянь, розв'язки якої дають коефіцієнти $\sigma_1,\ldots,\sigma_m$. Приклади з квантової оптики можна знайти у роботах [6, 23].

Метод, запропонований Вілкоксом [4] та досліджений більш детально ДасГуптою [7], має назву методу перетворень подібності. Обрахунки широко використовують рівняння (1.8) та призводять до системи нелінійних рівнянь з невідомими $\sigma_1,\ldots,\sigma_m$. Якщо одиничний оператор є генератором алгебри Лі, метод перетворень подібності не може обчислити відповідний коефіцієнт розплутування.

Метод, запропонований у даній дисертаційній роботі, використовує теорему Бейкера-Кемпбелла-Хаусдорфа (БКХ) [8–10] для роботи з правою частиною рівняння (1.1). БКХ теорема стверджує, що добуток показникових (експоненціальних) функцій від двох некомутуючих змінних A та B можна представити як експоненціальну функцію нескінченої суми

$$\exp(A) \cdot \exp(B) = \exp\left(A + B + \sum_{n=2}^{\infty} Z_n\right), \tag{1.9}$$

де БКХ член Z_n виражається як лінійна комбінація вкладених комутаторів некомутуючих операторів A та B. Якщо обрізати суму у (1.9) на $n = p$, отримується БКХ наближення порядку p добутку двох експоненціальних операторів. Формулу Бейкера-Кемпбелла-Хаусдорфа було використано для вирішення задачі розплутування, наприклад, у роботі [59], присвяченій методам моделювання квантових комп'ютерів, для перетворення виразу $\exp(-i(H_1 + H_2 + ...)\Delta t)$ у добуток $\exp(-iH_1\Delta t)\exp(-iH_2\Delta t)\ldots$. Задачу було вирішено для специфічного вигляду гамільтоніанів та малих порядків наближення. Також БКХ формулу було використано для розплутування вихідного стану фотонів у світлодільнику інтерферометра Майкельсона у роботі [23]. Формула БКХ використовувалась і в інших задачах по розплутуванню екпоненціальних виразів [60, 61].

Однак, у цих роботах знаходились розв'язки лише для малих порядків БКХ наближення та для специфічних операторів у виразі під експонентою (конкретних алгебр Лі). Результат, представлений у другому розділі даної дисертаційної роботи, є узагальненням наближеного розплутування за допомогою формули Бейкера-Кемпбелла-Хаусдорфа. Використовуючи комп'ютерну програму, створений метод дає можливість розплутати експоненційний вираз з великими p - порядками БКХ наближення, і для довільних скінчено-вимірних алгебр Лі, в які входять оператори під експонентою. Даний результат дисертації може бути використаний для вирішення багатьох обчислювальних задач. Зокрема, його буде використано для обрахунків у третьому розділі даної дисертаційної роботи.

1.2. Квантовий шум в інтерферометричних гравітаційних детекторах

Детектором гравітаційних хвиль називається прилад, призначений для реєстрації гравітаційних хвиль. Детектування гравітаційних хвиль від таких джерел, як взаємодіючі чорні діри, об'єднані компактні бінарні системи (coalescing compact binary systems), колапси зірок та пульсари може суттєво розришити розуміння природи Всесвіту.

Згідно загальній теорії відносності, гравітаційні хвилі викликають надзвичайно малі періодичні зміни відстані між пробними частинками, як наслідок коливання самого простору, що і будуть реєструвати детектори.

Найбільш поширеними є два типи детекторів гравітаційних хвиль. Історично першим став тип детекторів, заснований на технології гравітаційної антени [62] – масивного металевого тіла, охолодженого до низької температури (для максимального зменшення теплових коливань). При падінні на антену гравітаційної хвилі розміри тіла періодично змінюються, і якщо частота хвилі співпадає з резонансною частотою антени, амплітуда коливань антени може збільшитись до такої величини, що її можна задетектувати.

Перший, працюючий на принципі гравітаційної антени, детектор був побудований Вебером у 1967 році [62]. У 1969 році Вебер повідомив [63] про детектування гравітаційних хвиль у своєму експерименті, однак інші незалежні експерименти не підтвердили цей результат. Побудовані в наступні роки детектори (з працюючих зараз ALLEGRO, AURIGA, EXPLORER и NAUTILUS), засновані на принципі гравітаційної антени, також не змогли зареєструвати гравітаційних хвиль (на вересень 2011).

Другим найпоширенішим типом детекторів гравітаційних хвиль є інтерферометричні детектори [11]. У експериментах з інтерферометричними детекторами вимірюється відстань між двома пробними масами за допомогою лазерного інтерферометра Майкельсона. Схему стандартного інтре-

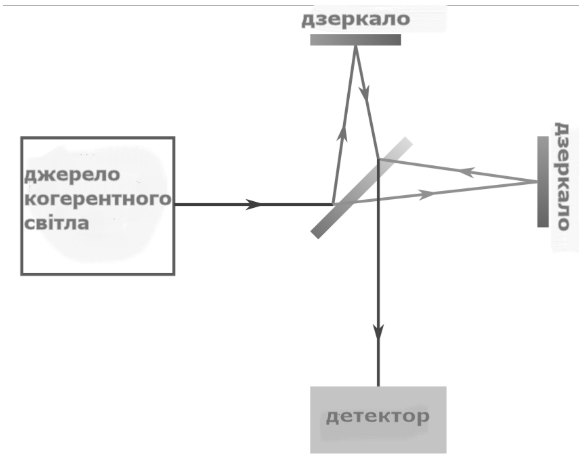

Рис. 1.1. Схема інтерферометра Майкельсона. У двох перпендикулярних вакуумних камерах підвішуються дзеркала. Лазерний промінь розщеплюється у світлодільнику, прямує по обох рукавах, відбивається від дзеркал та повертається, об'єднуючись знову та створюючи інтерферометричну картину. Мікроскопічна зміна положення будь-якого з дзеркал викличе зміну інтерферометричної картини, що і зареєструє детектор.

ферометра Майкельсона зображено на Рис.1.1. У двох перпендикулярних довгих (кілька метрів у перших створених детекторах та кілька кілометрів у сучасних) вакуумних камерах підвішуються дзеркала. Лазерний промінь розщеплюється у світлодільнику, прямує по обох рукавах (камерах), відбивається від дзеркал та повертається, об'єднуючись знов та створюючи інтерферометричну картину. Мікроскопічна зміна положення будь-якого з дзеркал викличе зміну інтерферометричної картини, що і зареєструє детектор.

Ідея використати лазерні інтерферометри для пошуку гравітаційних хвиль було висловлено ще в 1960-х [12] та експериментально досліджено у 1970-х [13, 14]. Але реальний перший експеримент, в якому була досягнута велика (на той час) чутливість до зсуву тестових мас був проведений Форвардом у 1978 [15].

На сьогоднішній день працюючими інтерферометричними детекторами є проекти VIRGO (3 км), TAMA-300 (300 м), GEO600 (600 м) та LIGO (2 км і 4 км). У дужках вказано довжини камер детекторів.

Всі ці детектори є наземними, та в найближчі роки планується побудова космічних лазерних інтерферометрів. Зокрема, розроблюється експеримент LISA, в якому лазерний інтерферометер буде знаходитись у космосі з довжиною рукова 5 млн. кілометрів.

Основною проблемою у розв'язанні задачі експериментального детектування гравітаційних хвиль є недостатня чутливість усіх існуючих на сьогоднішній день детекторів. Тому головним викликом в побудові гравітаційного детектора є досягнення якомога кращої чутливості детектування.

Типи шумів в детекторах. Загалом, для наземних інтерферометричних детекторів основні обмеження на чутливість виникають через сейсмічний та інші земні механічні шуми, тепловий шум, пов'язаний із пробними масами та їх підвісами, та фотонний шум (shot noise) [18] через флуктуації числа фотонів в лазерному пучку. Ці типи шумів були основними обмежувачами чутливості для перших побудованих детекторів [64, 65].

Квантовий шум. Однак, для сучасних детекторів, чутливість вже в основному обмежується квантово-механічним шумом (далі квантовий шум) [16]. Квантовий шум відповідає класу шумів, що виникають з квантової природи джерела світла і в процесі детектування фотонів у інтерферометрах [17].

Для розуміння ідеї квантового шуму світла зручно скористатися аналогією з класичної фізики, а саме аналогією з класичним гармонічним осцилятором. Для такого осцилятора рух точкової маси вперед-назад вздовж вісі x у гармонічному потенціалі в будь-який момент часу математично описується синосуїдальною хвилею $x(t)$. А стан точкової маси повністю характеризується точкою у фазовому просторі (просторі координати та імпульсу). При переносі цієї концепції до квантового світла потрібно взяти до уваги ймовірнісну природу всіх величин на квантовому рівні. Через свою квантову природу електричне поле світла містить внутрішньо присутній квантовий шум. Це положення можна зрозуміти за допомогою принципа невизначеностей Гайзенберга. Аналогом операторів координати та імпульсу для світла будуть оператори амплітуди та фази. Тобто, оператори квадратури фази та амплітуди не комутують, як координата та імпульс. Як для частинки ми не можемо виміряти одночасно координату та імпульс з довільною точністю, так і для фази і амплітуди світлової хвилі: чим точніше вимірюється фаза хвилі світла, тим менш визначеною стає амплітуда і навпаки. Добуток невизначеності (дисперсії) по фазі на відповідну дисперсію по амплітуді має фіксовану нижню границю. Стани фотонного поля з мінімально можливим загальним квантовим шумом називаються станами з мінімальною невизначеністю (minimum uncertainty states). Як приклад, такими станами є когерентні стани.

Когерентне світло. Теоретичний опис когерентного світла був представлений Глаубером [66] ще у 1963 році. З того часу когерентне світло набуло надзвичайно масштабного використання в оптиці. Когерентий стан математично описується дією оператора зсуву на вакуумний стан:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})|0\rangle, \tag{1.10}$$

де $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$ є параметром когерентного стану. Як було сказано, характерною особливістю когерентного світла є постійні, мінімально можливі та однакові значення дисперсій квадратур амплітуди та фази: $\Delta Q = \Delta P = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (для квадратур амплітуди $\hat{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right)$ і фази $\hat{P} = \frac{1}{i\sqrt{2}}\left(\hat{a} - \hat{a}^\dagger\right)$). Коливання амплітуди на фазовій площині для когерентного стану буде описуватись синусоідальною хвилею з постійною шириною, тобто опис когерентного стану відповідає коливанням квантового гармонічного осцилятора. Середнє значення та дисперсія числа фотонів у когерентному стані даються як $\langle n\rangle = |\alpha|^2$ та $(\Delta n)^2 = |\alpha|^2$. Розподіл ймовірностей сильного (вважаємо когерентрий стан сильним при великих значеннях $|\alpha|$, порядку 10^3 і більше) когерентного стану буде гаусовим розподілом. Саме когерентне світло використовується в оптичній інтерферометрії завдяки особливості містити мінімальний квантовий шум.

У 1982 році Кейвз [19] запропонував використати так звані стиснені стани в оптичній інтерферометрії для детектування гравітаційних хвиль.

Стиснене світло. Стиснений когерентний стан отримується дією оператора стиснення [67] на когерентний стан:

$$|\alpha, \zeta\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(\zeta)|0\rangle, \tag{1.11}$$

де

$$\hat{S}(\zeta) = \exp\left(\frac{1}{2}(\zeta^*\hat{b}^2 - \zeta(\hat{b}^\dagger)^2)\right) \tag{1.12}$$

є оператором стиснення з параметром стиснення $\zeta = re^{i\theta}$. Характерною особливістю стиснених станів є зменшення (стиснення) дисперсії однієї квадратури за рахунок збільшення дисперсії другої:

$$\Delta\tilde{Q} = \frac{e^{-r}}{\sqrt{2}}, \quad \Delta\tilde{P} = \frac{e^{r}}{\sqrt{2}}. \tag{1.13}$$

Окремо виділяють особливий стан електро-магнітного поля, що отримав назву стисненого вакуума. При дії оператора стиснення на вакуумний стан отримується стиснений вакуумний стан:

$$|0, \zeta\rangle = \hat{S}(\zeta)|0\rangle. \tag{1.14}$$

Експериментальна реалізація. Перші експерименти по генерації стистених станів були проведені у 1980-х [68, 69]. Спостерігався поступовий прогрес [70] у реалізації станів із все більшою величиною параметру стиснення. На сьогоднішній день найбільше експериментально реалізоване стиснення світла відповідає приблизно $r = 1.3$ [25, 71]. Використання світла з такою величиною стиснення дає можливість істотно зменшувати квантовий шум у вихідному сигналі інтерферометра.

Квантовий шум у інтерферометрі. Дія принципу невизначеностей Гейзенберга накладає обмеження на точність виміру у вигляді стандартної квантової межі (standard quantum limit). Стандартна квантова межа для інтерферометричних детекторів, в яких фотони використовуються для виміру положення тестових мас (дзеркал), отримується, коли невизначеність у положенні дзеркал через флуктуації радіаційного тиску рівна невизначеності у вимірі положення через флуктуації кількості фотонів, тобто фотонному шуму [72].

У інтерферометричному детекторі гравітаційних хвиль, побудованому на основі інтерферометра Майкельноса, присутні два основні джерела квантового шуму [16]: (i) фотонний шум (shot noise) [18], що виникає з невизначеності у числі фотонів на виході інтерферометра через квантово-механічні флуктуації; (ii) шум радіаційного тиску (radiation-pressure noise), який виникає з невизначеності у положенні дзеркал через квантові флуктуації внутрішніх полів, що викликають флуктуації радіаційного тиску, який і рухає дзеркала.

Ідея Кейвза полягає у поданні додатково стисненого вакуумного стану до вхідного порту інтерферометра, що зазвичай не використовується. Як було сказано, стиснені стани зменшують шум (дисперсію) в одній з квадратур за рахунок додаткового шуму (збільшення дисперсії) в канонічно спряженій квадратурі. Вакуумні флуктуації, що входять до другого порту світлодільника, – порту, що зазвичай не використовується, негативно впливають (дають внесок у шум) на точність виміру положення дзеркал; квадратура фази вакууму відповідає за фотонний шум, та квадратура амплітуди відповідає за радіаційний шум. Тоді подача стисненого вакуумного стану з відповідним стисненням до порту, що зазвичай не використовується, дає можливість зменшити фотонний шум за рахунок відповідного збільшення радіаційного шуму, або навпаки.

Ідею використати стиснене світло у інтерферометричних детекторах гравітаційних хвиль з метою зменшення квантового шуму Кейвз запропонував на початку 1980-х [19]. В наступні роки вийшла значна кількість робіт [20–23], в яких "метод стиснених станів" досліджувався та розвивався далі.

Основною задачею цих робіт був теоретичний опис статистики фотонів на виході інтерферометра, моделювання того, як використання стисненого світла впливає на величину квантового шуму, а також встановлення зв'язку між квантовим шумом та точністю виміру позиції дзеркал в інтерферометрі.

Більшість робіт обмежувалась аналізом статистики фотонів при 50/50 світлодільнику (дільник розщіплює пучок на два з однаковою інтенсивністю) і знаходженням середнього очікуваного значення та дисперсії числа фотонів на виході інтерферометра.

У нещодавній роботі Барака та Бен-Ар'єна [23] було запропоновано метод, що в принципі дає можливість провести аналіз статистики на виході при усіх можливих коефіцієнтах розщеплення світлодільника, а також обчислити розподіл ймовірностей числа фотонів у відповідному вихідному стані. Однак, через застосовані в роботі Барака наближення, аналіз обмежився лише двома випадками для коефіцієнту розщеплення світлодільника, а саме 50/50 розщепленням, та так званим випадком темного порту, коли майже всі фотони вхідного когерентного поля прямують до одного вихідного порта, і лише мала частина до іншого, темного, порту.

Для випадку темного порту отриманий у [23] результат стверджує, що використання стиснених станів не тільки зменшує квантовий шум, а і одночасно підсилює сигнал на виході. Таке передбачення виглядає контрінтуїтивним.

Отже, вивчення квантових шумів у інтерферометричних детекторах гравітаційних хвиль почалося з кінця 1970-х з робіт Кейвза [19, 73], Унру [74], Торна [75], в яких було представлено концептуальний і математичний формалізм проблеми обмежень, що накладають квантові шуми на макроскопічні виміри, та було розглянуто можливість обійти їх шляхом застосування спеціальних методів, як наприклад, використання стисненого світла. Рівень розвитку техніки на той час не дозволяв впровадити ці методи експериментально. Однак за останні роки досягнення у експериментальній генерації некласичного світла [71] та використання такого світла у інтерферометричних вимірах з метою подолання квантового обмеження [25, 76, 77] привели до поновлення інтересу до цієї тематики.

Тому питання дослідження квантового шуму у інтерферометричних детекторах на сьогоднішній день є актуальним. За останні роки з'являються нові публікації, присвячені цьому питанню [23–25]. Добре розуміння квантових шумів у інтерферометричних детекторах гравітаційних хвиль дає змогу суттєво підвищити точність виміру зсуву тестових мас в детекторі, і тим самим наблизити до розв'язку задачі пошуку гравітаційних хвиль.

В третьому розділі даної дисертації представлено результати розширеного аналізу статистики фотонів на виході світлодільника інтерферометра Майкельсона для усіх можливих значень коефіцієнта розщеплення світлодільника, а також перевірка передбачення роботи [23] для випадку темного порту інтерферометра.

1.3. Квантові кореляції двофотонних поляризаційних станів, утворених в процесі параметричної вниз-конверсії

Після появи відомої роботи Ейнштейна, Розена, Подольського (ЕПР) [26], в якій висловлена концепція про неповноту квантового опису фізичної реальності, були здійснені численні спроби побудови більш досконалих теорій, які б не порушували принципу причинності в класичному тлумаченні.

У 1964 році Белл [27], беручи до уваги ЕПР, як робочу гіпотезу, сформулював її в детерміністичному дусі в термінах моделей з локальними прихованими параметрами (Local Hidden Variable Models (LHVM)), що базується на таких основних принципах: (i) результати вимірювання однозначно визначаються властивостями частинок, які (властивості) притаманні частинкам незалежно від того, виконується вимірювання чи ні (реалізм); (ii) результати вимірювання в даному місці не залежать від будь-яких дій, що виконують в інших місцях, віддалених від даного просторовоподібними інтервалами (локальність); (iii) локальні прилади не залежать від прихованих параметрів, що характеризують стан частинок і які визначають локальні результати вимірювань [44].

Белл показав, що зазначені принципи приводять до деяких обмежень статистичних кореляцій в експериментах над системами, що складаються з двох підсистем; такі обмеження були сформульовані у формі тепер вже добре відомих нерівностей Белла. Белл показав далі, що відповідні кореляції, які обчислюються за правилами квантової механіки, порушують вказані нерівності для деяких квантово-механічних станів, що називаються заплутаними (сплутаними). Отже, заплутаність є такою особливістю квантового формалізму, що породжує специфічні, виключно квантові, кореляції, що не можуть відтворюватись будь-якою класичною моделлю. В подальшому нерівності Белла були переформульовані у такий спосіб, який би дозволив експериментально підтвердити або спростувати порушення нерівностей.

У 1982 році групою Аспекта [28] був поставлений експеримент по перевірці можливого порушення нерівностей Белла у формі Клаузера-Хорна-Шимоні-Холта (Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH)) [78], в якому вимірювалась кореляція поляризаційних станів пари фотонів. Результати вимірювань чудово узгоджуються з передбаченнями квантової теорії. З ймовірністю, що відповідає п'яти стандартним відхиленням, експериментальні дані порушували нерівність Белла. Численні наступні експерименти [29–31] показали, що їх результати також узгоджуються з квантово-механічним описом фізичної реальності.

Отже, специфічна квантова кореляція набула статусу реальності, а заплутані стани, що породжують таку кореляцію, стали об'єктом інтенсивних досліджень.

Роботи з квантової криптографії [32], квантового щільного кодування [79], квантової телепортації [38–40] та квантових обчислень [34–37] стали базисом для нової міждисциплінарної області фізики – теорії квантової інформації [41–44].

З'ясувалось, що заплутаність може відігравати роль принципово нового ресурсу в квантовій криптографії, квантовій телепортації, квантовій комунікації, квантових обчисленнях тощо. Це стало стимулом досліджень методів створення, накопичення, збереження, розподілення та передачі на відстань цього ресурсу [45–48].

Квантова заплутаність є властивістю квантово-механічних станів систем, що складаються з двох або більше підсистем, і де підсистеми пов'язані таким чином, що квантовий стан будь-якої підсистеми не можна повністю описати без володіння інформації про інші підсистеми, навіть якщо вони просторово розділені.

Математичне означення заплутаності є дуже простим для чистих станів: чистий стан системи $|\Psi\rangle$ буде сепарабельним (незаплутаним) тоді і тільки тоді, коли може бути записаний як добуток станів підсистем: $|\Psi_{AB}\rangle = |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle$, в іншому випадку стан є заплутаним [80]. Це означення неважко узагальнити для систем з більшою кількістю підсистем. Прикладом чистого незаплутаного (сепарабельного) стану є стан $|\Psi\rangle = |00\rangle$ (або $|0\rangle \otimes |0\rangle$), де $|0\rangle$ - один з базисних станів однієї з двох підсистем. Прикладами чистих заплутаних станів є стани Белла:

$$
\begin{aligned}
|\Phi^{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle), \\
|\Psi^{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle).
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

Математичне означення заплутаності для мішаних станів [80]: мішаний стан ρ є сепарабельним тоді і тільки тоді, коли його можна представити у вигляді

$$
\rho = \sum_i p_i |a_i\rangle\langle a_i| \otimes |b_i\rangle\langle b_i|,
\tag{1.16}
$$

в іншому випадку він є заплутаним. Коефіцієнти p_i є ймовірностями, тобто $0 \leq p_i \leq 1$ і $\sum_i p_i = 1$; в загальному випадку стани підсистем не є ортогональними $\langle a_i|a_j\rangle \neq \delta_{ij}$ та $\langle b_i|b_j\rangle \neq \delta_{ij}$. І такий розклад може бути не єдиний.

Прикладом мішаного сепарабельного стану, що містить класичні кореляції, але не містить квантових кореляцій, є стан $\rho = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)$. Прикладом мішаного заплутаного стану є стан Вернера, суміш стану Белла та одиничного оператора: $\rho_W = p|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + (1-p)\frac{1}{4}I$, де I – одинична матриця 4×4. Стан є заплутаним для $1/3 < p \leq 1$. Нижня межа для значень p отримується за допомогою критеріїв сепарабельності, що будуть обговорені далі.

Одним з основних питань в теорії квантової заплутаності є питання: чи даний квантово-механічний стан є заплутаним? Математичні означення сепарабельності для чистих і мішаних станів не є зручними для оцінки станів на заплутаність. Для відповіді на питання про наявність заплутаності було розроблено різноманітні критерії сепарабельності (незаплутаності) як для чистих, так і мішаних станів, як для двочастинкових так і для багаточастинкових систем [44, 80]. Найбільш вивченою в теорії заплутаності є двочастинкова заплутаність. Оскільки в дисертаційній роботі досліджувалась саме двочастинкові системи (пари фотонів), то обмежимось розглядом критеріїв сепарабельності лише двочастинкових систем.

Нехай стан системи $\rho \in H_A \otimes H_B$, де H_A і H_B – гільбертові простори першої та другої підсистеми, та розмірності підсистем рівні відповідно $dim\ H_A = M$ і $dim\ H_B = N \geq M$.

Для чистих станів існує простий необхідний і достатній критерій сепарабельності - розклад Шмідта [80]. Чистий стан має ранг Шмідта $r \leq M$, якщо може бути розкладений як бі-ортогональна сума:

$$|\Psi^r\rangle = \sum_{i=1}^{r} a_i |e_i\rangle |f_i\rangle, \tag{1.17}$$

де $a_i > 0$ і $\sum_i^r a_i^2 = 1$, та $\langle e_i|e_j\rangle = \langle f_i|f_j\rangle = \delta_{ij}$. Коефіцієнти a_i^2 є власними значеннями приведених матриць густини. Даний чистий стан $|\Psi\rangle$ є сепарабельним тоді і тільки тоді, коли $r = 1$.

Для мішаних станів критерії є більш складними. Існують різні критерії для мішаних станів, як наприклад, критерій Переса-Городецького [81, 82], критерій редукції [80], критерій мажорування [83], позитивні відображення [82] та оператори свідчення [82]. Вони мають різну силу, тобто можливість виявити заплутаність у заплутаному стані. У даній дисертаційній роботі використовувалися критерій Переса-Городецького та критерій мажорування, що для систем розмірності 2×2 є необхідною і достатньою умовою виявлення заплутаності у заплутаному стані [80]. Дані критерії дозволяють перевірити стан на заплутаність при завчасно відомій матриці густини стану.

Однак, в реальних експериметнах експериментатори не завжди володіють повною інформацією про стан. В такому випадку базовим інструментом виявлення заплутаності у експериментально приготованому стані є порушення нерівностей Белла даним станом, оскільки відомий факт, що заплутані стани (у випадку розмірності $M \times N \leq 6$) порушують нерівності Белла. Саме цей критерій використовувався у четвертому розділі дисертації. Найбільш розповсюдженим джерелом заплутаності на сьогоднішній день є поляризаційно заплутані пари фотонів, утворені в процесі параметричної вниз-конверсії типу II [49]. Саме такі фотони досліджувались у даній дисертаційній роботі.

Відомий факт [84], що в експериментах по генерації заплутаних станів через присутність шумів чисті заплутані стани стають зашумленими, тобто мішаними. Тобто, під шумом розуміють домішок деякого стану до чистого заплутаного стану. Четвертий розділ даної дисертаційнії роботи присвячено дослідженню поляризаційно заплутаних станів пари фотонів, утворених в процесі параметричної вниз-конверсії типу II, за наявності шуму у стані. Використовувались критерії сепарабельності для таких станів та знаходились умови виявлення заплутаності в залежності від типу шуму та його вмісту у стані фотонів.

У 2005 році у роботі [84] Кабелло було представлено модель білого та модель кольорового шуму для опису станів пари фотонів, утворених в процесі параметричної вниз-конверсії типу II. А у 2006 Бовіно [85] провів експеримент по порушенню нерівностей Белла і перевірці кольорової моделі шуму. У четвертому розділі даної дисертаційнійної роботи представлено узагальнення існуючих моделей шуму та продовження вивчення поляризаційно заплутаних станів фотонів, утворених в процесі параметричної вниз-конверсії типу II. Дослідження утворених у цьому процесі заплутаних станів пари фотонів є важливим для подальшого розвитку теорії заплутаності в цілому, оскільки саме такі фотони є найпоширенішим на сьогоднішній день експериментальним джерелом заплутаності. Зокрема, саме такі стани фотонів використовуються в різноманітних експериментах по квантовій комунікації.

РОЗДІЛ 2

Розплутування експоненціальних некомутуючих операторів

2.1. Передмова

Розплутування експоненціальних некомутуючих операторів є корисним інструментом в квантовій механіці, квантовій теорії поля, оптиці, квантовій хімії тощо.

Результат, представлений у даному розділі дисертаційної роботи, є узагальненням наближеного розплутування за допомогою формули Бейкера-Кемпбелла-Хаусдорфа (БКХ) [8–10]. У попередніх роботах на цю тематику, наприклад у [23, 59], для розплутування знаходились розв'язки лише для малих порядків БКХ наближення та для специфічних операторів у виразі під експонентою (конкретних алгебр Лі). Представлена у даному розділі комп'ютерна реалізація методу розплутування дає можливість розплутати експоненціальний вираз з великими значеннями p – порядками БКХ наближення, і для довільних скінчено-вимірних алгебр Лі, в які входять оператори під експонентою. Отриманий результат може бути використаний для вирішення багатьох обчислювальних задач. Зокрема, його буде використано для обрахунків у третьому розділі даної дисертаційної роботи.

Отже, задачею даного розділу дисертації є:

• розробка на основі формули Бейкера-Кемпбелла-Хаусдорфа методу, що дозволяє проводити розплутування експоненціальних некомутуючих операторів для довільних скінчено-вимірних алгебр Лі та створення комп'ютерної реалізації даного методу.

2.2. Наближення Бейкера-Кембелла-Хаусдорфа

Формулювання проблеми розплутування є наступним: оператори, які треба розплутати, є членами скінчено-вимірної алгебри Лі з генераторами $\{A_1, \dots, A_m\}$. Тоді, за певних умов [1] виконується:

$$\exp(\xi_1 A_1 + \dots + \xi_m A_m) = \exp(\sigma_1 A_1) \dots \exp(\sigma_m A_m), \tag{2.1}$$

де $\xi_1, \dots, \xi_m$ в загальному випадку є комплексними числами. Деякі з ξ_i можуть бути рівні нулю. Задача розплутування полягає у знаходженні коефіцієнтів розплутування $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ (також комплексні) для заданої алгебри Лі $\{A_1, \dots, A_m\}$ (комутатори алгебри Лі вважаються відомими).

Метод, запропонований у даній дисертаційній роботі, використовує теорему Бейкера-Кемпбелла-Хаусдорфа [8–10]. БКХ теорема стверджує, що добуток показникових (експоненціальних) функцій від двох некомутуючих змінних A та B можна представити як експоненціальну функцію нескінченої суми

$$\exp(A) \cdot \exp(B) = \exp\left(A + B + \sum_{n=2}^{\infty} Z_n\right), \tag{2.2}$$

де БКХ член Z_n виражається як лінійна комбінація вкладених комутаторів некомутуючих операторів A та B. Якщо обрізати суму у (2.2) на $n = p$, отримується БКХ наближення порядку p добутку двох експоненціальних некомутуючих операторів.

Нехай ми маємо алгебру Лі з генераторами $A_1, A_2, \dots, A_m$, що задовольняють комутаційні співвідношення

$$[A_i, A_j] = a_1^{ij} \cdot A_1 + \dots + a_m^{ij} \cdot A_m = \{a_1^{ij}, \dots, a_m^{ij}\} \tag{2.3}$$

із структурними константами $a_k^{ij} \in \mathbb{C}$ при $k = 1, \ldots, m$ та $1 \leq i < j \leq m$. Компонентне позначення Лі елементу введено після другого знаку рівності у (2.3). Наша задача полягає у знаходженні наближення для коефіцієнтів $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ для розплутування експоненти з Лі елементом $\zeta = \{\zeta_1, \ldots, \zeta_m\}$:

$$\exp(\zeta_1 A_1 + \cdots + \zeta_m A_m) = \exp(\sigma_1 A_1) \cdot \cdots \cdot \exp(\sigma_m A_m). \tag{2.4}$$

Наближення отримується наступним чином. Використовуємо БКХ наближення порядку p багатократно, об'єднуємо експоненти у правій частині (2.4). Потім, використовуючи структуру алгебли Лі (2.3), обраховуємо вкладені комутатори у результуючій експоненті. Тоді праву частину рівності (2.4) можна записати у формі

$$\exp(\sigma_1 A_1) \cdot \cdots \cdot \exp(\sigma_m A_m) \approx \exp(f_1^p(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \cdot A_1 + \cdots + f_m^p(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \cdot A_m), \tag{2.5}$$

де $f_1^p, \ldots, f_m^p : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ є функціями, що залежать від порядку p БКХ наближення.

Для знаходження наближених значень σ_i необхідно розв'язати систему нелінійних рівнянь:

$$F^p(\tau_1, \ldots, \tau_m) = \begin{pmatrix} f_1^p(\tau_1, \ldots, \tau_m) \\ \vdots \\ f_m^p(\tau_1, \ldots, \tau_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_m \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Нехай $(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ будуть розв'язками системи. Вони і є наближеннями для $\sigma_k \approx \tau_k$, де $k = 1, \ldots, m$. Зауважимо, що функції $f_k^p(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ для $k = 1, \ldots, m$ є поліномами степені $p - 1$.

В той час, як наведена вище схема знаходження коефіцієнтів розплутування, виглядає послідовною і простою, її практична реалізація потребує деяких інструментів. Спочатку потрібно знайти спосіб визначення БКХ членів до потрібного порядку. Поліноміальне представлення БКХ членів

Z_n, визначених у (2.2), дається ваговою сумою (weighted sum) 2^n "слів" довжини n, що можуть бути записані двома літерами A і B:

$$Z_n = \sum_{s=1}^{2^n} \Lambda_n^s \cdot X_1^s \cdots X_n^s, \tag{2.7}$$

де у кожному слові $X_1^s \cdots X_n^s$, X_i^s стоїть A або B. Практичні методи обчислення коефіцієнтів Λ_n^s розглянуто та розвинуто у роботі [86]. Виявляється, що $\Lambda_1^1 = \Lambda_2^1 = 1$ та $\Lambda_n^s \in \mathbb{Q}$ для всіх $s = 1, \ldots, 2^n$. Наприклад, для Z_3 маємо

$$Z_3 = \frac{1}{12}AAB - \frac{1}{6}ABA + \frac{1}{12}ABB + \frac{1}{12}BAA - \frac{1}{6}BAB + \frac{1}{12}BBA. \tag{2.8}$$

Для того, щоб використати структуру алгебри Лі, обговорену вище, поліноміальне представлення БКХ членів має бути перетворене у представлення в термінах вкладених комутаторів. Відомо, що таке представлення існує, але воно не є єдиним. Зручне відображення Ψ від поліномів до вкладених комутаторів вперше було представлено Динкіним [87, 88]:

$$\Psi(Z_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{s=1}^{2^n} \Lambda_n^s \cdot [[\ldots[[[X_1^s, X_2^s], X_3^s], \ldots], X_n^s]. \tag{2.9}$$

Пізніше Отео [89] передбачив існування відображення Φ, що дає меншу кількість доданків, ніж відображення Динкіна. Нещодавно було доведено [86], що таке відображення є коректним. Відображення Φ визначається як

$$\Phi(Z_n) = \sum_{s=1}^{2^n} \frac{\Lambda_n^s}{N(X_1^s, \ldots, X_n^s)} \cdot [[\ldots[[[A, B], X_3^s], X_4^s], \ldots], X_n^s]. \tag{2.10}$$

Тут $X_1^s = A, X_2^s = B$; $N(X_1^s, \ldots, X_2^s)$ є числом символів A у слові $X_1^s \cdots X_n^s$, наприклад, $N(ABAAB) = 3$. У роботі [86] було доведено наступну теорему:

Для всіх $n \geq 2$ виконується, що $\Phi(Z_n) = Z_n$. Наприклад, для Z_3 маємо

$$\begin{aligned} Z_3 &= \frac{1}{12}AAB - \frac{1}{6}ABA + \frac{1}{12}ABB + \frac{1}{12}BAA - \frac{1}{6}BAB + \frac{1}{12}BBA = \\ &= -\frac{1}{12}[[A,B],A] + \frac{1}{12}[[A,B],B] = \Phi(Z_3). \end{aligned} \tag{2.11}$$

В той час як для відображення Динкіна Ψ отримуємо

$$Z_3 = -\frac{1}{18}[[A,B],A] + \frac{1}{36}[[A,B],B] + \frac{1}{36}[[B,A],A] - \frac{1}{18}[[B,A],B] = \Psi(Z_3), \tag{2.12}$$

що, однозначно, є менш зручним для практичних обчислень.

Використовуючи відображення Φ за допомогою комп'ютера можна легко обчислити функцію F^p у (2.6) із бажаним порядком p. Виберемо тепер зручний метод для розв'язування системи нелінійних рівнянь, поданих у (2.6). Загалом, є декілька розв'язків такої поліноміальної системи, з яких маємо вибрати тільки правильні. Процедура для вибору правильних розв'язків заснована на наступному спостереженні: кожний розв'язок $\tau = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m\}$ набору рівнянь, звичайно, залежить від параметрів $\zeta = \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m\}$. Однак, для $\zeta = e_1 = \{1, 0, \ldots, 0\}$ розв'язок має бути $\tau_1 = \zeta_1, \tau_2 = 0, \ldots, \tau_m = 0$ згідно (2.4). Тобто, як функція від ζ, розв'язок $\tau(\zeta)$ має задовільняти граничну умову $\tau(e_1) = \{\zeta_1, 0, \ldots, 0\}$. Процедура будує функцію $\tau(\zeta)$, починаючи з цієї границі, наприклад, із тривіального розв'язку для $\zeta = e_1$ та потім вирішуючи декілька допоміжних задач

$$F^p(\tau) = t \cdot \zeta + (1-t) \cdot e_1 \quad \text{для} \quad t = \frac{1}{M}, \frac{2}{M}, \ldots, \frac{M-1}{M}, 1, \tag{2.13}$$

де параметр t контролює "відстань" допоміжної задачі до задачі, яку хочемо вирішити ($t = 1$). Параметр M визначає число допоміжних задач, що розглядються.

Для кожного кроку цієї процедури нелінійна система (2.6) розв'язується, використовуючи ітераційний метод Ньютона

$$\tau^{k+1} = \tau^k - (DF(\tau^k))^{-1} \cdot (F(\tau^k) - \zeta), \tag{2.14}$$

де $DF^p(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ позначає якобіан для $F^p(\tau_1, \ldots, \tau_m)$. В якості початкового вектора τ^0 для кожної ітерації використовуємо розв'язок попереднього кроку, починаючи з $\tau^0 = e_1$ для $t = 1/M$. Підсумовуючи вище сказане, пропонується наступний підхід до знаходження розв'язку:

На вході. Абсолютна точність $\varepsilon > 0$ та число допоміжних задач $M \in \mathbb{N}$.

1. Встановити $\tau := e_1$, $\hat{\tau} = e_1$, $k := 0$ та $t := 0$.
2. Якщо $k = M$, стоп. Інакше означити $k = k + 1$ і $t = k/M$.
3. Встановити $\tau = \hat{\tau}$ і $\hat{\tau} = \tau - (DF(\tau))^{-1} \cdot (F(\tau) - (t \cdot \zeta + (1 - t) \cdot e_1))$.
4. Якщо $||\tau - \hat{\tau}|| < \varepsilon$, повернутися до Кроку 2. Інакше перейти до Кроку 3.

На виході. Наближення $\hat{\tau}$.

В усіх прикладах, приведених далі, використовувався даний підхід при $\varepsilon = 10^{-10}$ та $M = 10$.

2.3. Комп'ютерна реалізація

Обговорений вище метод знаходження наближених коефіцієнтів розплутування $\tau_1, \ldots, \tau_m$ за допомогою формули Бейкера-Кемпбелла-Хаусдорфа було реалізовано у пакеті `MATHEMATICA7` [90]. Звичайно, аналогічні комп'ютерні реалізації можливо створити використовуючи й інші мови програмування.

У реалізації комутаційні співвідношення алгебри Лі задаються як

```
K[i,j]={a_1 ^{ij},...,a_m ^{ij}}
```

для всіх $1 \leq i < j \leq m$. Наприклад, для $SU(1,1)$ алгебри з генераторами $\{K_+, K_0, K_-\}$, яка визначається комутаційними співвідношеннями

$$[K_+, K_0] = -K_+, \quad [K_0, K^-] = -2K_0, \quad [K_0, K_-] = -K_-, \tag{2.15}$$

потрібно ввести наступні твердження до програми MATHEMATICA:

```
K[1,2] = {-1,0,0}; K[1,3] = {0,-2,0}; K[2,3] = {0,0,-1};
```

Комутатор двох Лі елементів `a` і `b` обчислюється наступною функцією:

```
cm[a_List,b_List]:=Module[{range,vor,com}],
range =Range[Length[a]];
vor = Times @@@ Flatten[Outer[List,a,b], 1];
com = K @@@ Flatten[Outer[List,range,range], 1]; vor.com];
```

Використовуючи знову SU(1,1) алгебру як приклад, Лі елемент $2K_0+K_-$ описуєтся кодом як `{0,2,1}` та Лі елемент $K_+ + K_-$ описується як `{1,0,1}`. Тоді, наприклад, `cm[{0,2,1},{1,0,1}]` на вході дає

```
2*K[2,1]+2*K[2,3]+K[3,1]+K[3,3],
```

і спрощується до `{2,2,-2}`.

Вкладені комутатори обраховуються кодом

```
nestcm[a_List,b_List]:=Module[{oplist},
oplist = Flatten[Table @@@
Partition[Riffle[Raptition[a,1],b,{1,-2,2}],2],1];
Fold[cm, First[oplist], Rest[oplist]] ];
```

У даній реалізації БКХ члени до порядку наближення p обчислюються, використовуючи метод Голдберга [91]. Дещо інший варіант наступного коду обговорено детально у роботі [86].

```
G[1] = 1; G[s_]:= G[s] =Expand[1/s*D[t*(t-1)*G[s-1],t]];

GC[W_List] := GC[W] =Module[{m,m1,m2,k}, m = Length[W];
m1 = Floor[m/2]; m2 = Floor[(m.1)/2];
Integrate[t^m1*(t-1)^m2*Product[G[W[[k]]],{k, m}], {t,0,1}]];
```

```
Goldberg[n_,l_List] :=Module[{L},
L = Select[Flatten[Permutations /@ IntegerPartitions[n], 1],
First[#] == 1 &];
Plus @@ ((GC[Sort[#]]/(Plus @@ First /@ Partition[#,2,2,1,{}])
*nestcm @@ {#,l}) & /@ L)];

BCH[n_Integer] := BCH[n] = Plus @@ {f,g}+
Sum[Goldberg[k, {f,g}], {k,2,n}];
```

`BCH[p]` повертає всі БКХ члени до порядку p у представленні комутаторів для некомутуючих змінних `f` та `g`. Тут було використано відображення Φ, означене вище.

Система нелінійних рівнянь (2.6) задається та розв'язується, використовуючи команду `sigmas`. Некомутуючі змінні `f` та `g` у БКХ членах замінюються відповідними Лі елементами:

```
sigmas[n_Integer,xi_List,eps_Rational,M_Integer]:=
Module[{sm,m,s,F,DF,k,tau,tau1,tau2,t},
sm = DiagonalMatrix[Table[s[i], {i,m=Length[xi]}]];
tau = tau1 = UnitVector[m,1];
K[x_Integer, y_Integer] := -K[y, x] /; x > y;
K[x_Integer, y_Integer] := Table[0, {m}] /; (x == y);
F = Expand[Fold[BCH[n] /. {f -> #1, g -> #2} &,
sm[[1]], Rest[sm]]]; DF = Table[D[F[[i]],s[j]], {i,m}, {j,m}];
For[k = 1, k <=M, k++, t = N[k/M];
tau2 = NestWhile[# - Inverse [DF /. s[j_]
:> #[[j]]].((F /. s[j_] :> #[[j]])
- (t*xi+(1-t)*tau1)) &, tau, Norm[#1-#2] >= eps &, 2]]; tau2];
```

Змінна `F` відповідає функції $F^p(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$, а решта коду впроваджує ітераційний метод Ньютона. Отже, функція `sigmas[p,xi,epsilon,M]` повертає шукане наближення для коефіцієнтів $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$. Тут `p` є порядком

БКХ наближення, `xi` є вектор $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_m)$, та `epsilon` і `M` є параметрами ε та M, які контролюють ітераційний метод Ньютона.

2.4. Апробація методу на прикладах

Для апробації практичності впровадженого БКХ наближення для розплутування експоненціальних операторів приведемо декілька чисельних прикладів. Для всіх прикладів відомі точні аналітичні розв'язки для порівняння. Наша програма була використана на стандартному персональному комп'ютері з 1.8 GHz та 1024 Mbytes пам'яті. Час обчислення у приведених далі таблицях розділу відповідає саме цій обчислювальній машині. Для порівняння точних і наближених значень коефіцієнтів розплутування ми використовуємо величину $\frac{||\tau_i - \sigma_i||}{||\sigma_i||}$, яка показує відносну розбіжність між точним та наближеним значенням коефіцієнту розплутування.

2.4.1. Двовимірна алгебра Лі. Розглянемо алгебру Лі $\{A, B\}$ з комутатором $[A, B] = \lambda B$, де $\lambda \in \mathbb{C}$. Шукатимемо σ_1, σ_2 такі, що задовільняють

$$\exp(\alpha A + \beta B) \approx \exp(\sigma_1 A) \exp(\sigma_2 B). \tag{2.16}$$

Як показано у роботі [7], використовуючи метод перетворень подібності, можна знайти, що

$$\sigma_1 = \alpha \quad \text{та} \quad \sigma_2 = \frac{\beta}{\lambda\alpha} \cdot (1 - e^{-\lambda\alpha}). \tag{2.17}$$

Використовуючи БКХ наближення порядку $p = 4$, отримуємо

$$\begin{aligned} \exp(\sigma_1 A) \cdot \exp(\sigma_2 B) &\approx \exp(\sigma_1 A + \sigma_2 B + \frac{1}{2}\sigma_1\sigma_2\lambda B + \frac{1}{12}\sigma_1^2\sigma_2^2\lambda^2 B) = \\ &= \exp(\sigma_1 \cdot A + \sigma_2(1 + \frac{1}{2}\sigma_1\lambda + \frac{1}{12}\sigma_1^2\lambda^2) \cdot B). \end{aligned} \tag{2.18}$$

p	$\{\alpha,\beta,\lambda\}$	$\{\frac{\|\|\tau_1-\sigma_1\|\|}{\|\|\sigma_1\|\|}, \frac{\|\|\tau_2-\sigma_2\|\|}{\|\|\sigma_2\|\|}\}$	час обчислення (с)
4	$\{1,1,1\}$	$\{0, 8.56\times10^{-4}\}$	<0.1
8	$\{1,1,1\}$	$\{0, 5.09\times10^{-7}\}$	<0.1
12	$\{1,1,1\}$	$\{0, 3.26\times10^{-10}\}$	1.0
4	$\{1+i,1-i,1\}$	$\{0, 3.38\times10^{-3}\}$	<0.1
8	$\{1+i,1-i,1\}$	$\{0, 8.02\times10^{-6}\}$	<0.1
12	$\{1+i,1-i,1\}$	$\{0, 2.05\times10^{-8}\}$	1.0
4	$\{\frac{1}{2},1-i,2\}$	$\{0, 8.56\times10^{-4}\}$	<0.1
8	$\{\frac{1}{2},1-i,2\}$	$\{0, 5.10\times10^{-7}\}$	<0.1
12	$\{\frac{1}{2},1-i,2\}$	$\{0, 3.26\times10^{-10}\}$	1.0

Таблиця 2.1. Порівняння точних та наближених значень коефіцієнтів розплутування для Лі алгебри $\{A,B\}$ з $[A,B]=\lambda B$.

Отже, ми отримуємо

$$F^4(\tau_1,\tau_2) = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2(1+\frac{1}{2}\tau_1\lambda + \frac{1}{12}\tau_1^2\lambda^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \tag{2.19}$$

і розв'язком цієї системи є

$$\tau_1 = \alpha \qquad \tau_2 = \frac{\beta}{1+\frac{1}{2}\alpha\lambda+\frac{1}{12}\alpha^2\lambda^2}. \tag{2.20}$$

У таблиці 2.1 представлено чисельні результати для різних порядків наближення p та вибраних значень для α, β та λ.

Для даного прикладу можна навіть розглянути питання збіжності. Порівнюючи точний вираз для σ_2 у (2.17) із БКХ наближенням τ_2 у (2.20), можна стверджувати, що знаменник у (2.20) виникає з розкладу

$$\frac{x}{1-\exp(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(-x)^n}{n!} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + \dots, \tag{2.21}$$

що є співвідношенням, відомим з одного можливого визначення чисел Бернуллі B_n. Відомо, що ці послідовності сходяться для $0<|x|<2\pi$, і в цьому випадку це визначає радіус збіжності, в якому працює наш метод. Більш точно, має задовільнятись $0 < |\alpha\lambda| < 2\pi$. На Рис. 2.1 представлено чисельні результати для $\alpha = \beta = 1,\ \ 0 \leq \lambda \leq 10$. Точний розв'язок для $\sigma_2 = \sigma_2(\lambda)$ відповідає тонкій кривій, та БКХ наближення порядку $p = 4$, $p = 9$, $p = 12$ зображено точковою, пунктирною і жирною кривими, відповідно. Видно, що не можна очікувати збіжності для значень $\lambda \geq 2\pi$.

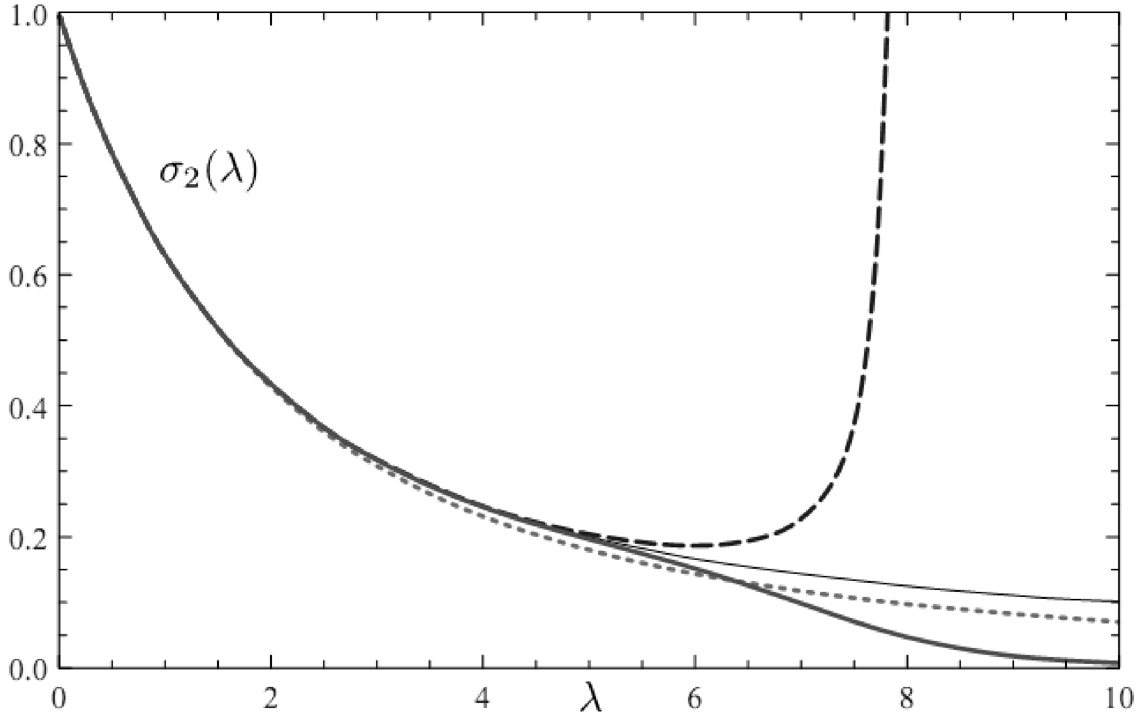

Рис. 2.1. Порівняння точного та наближених значень коефіцієнту розплутування σ_2 для двовимірної алгебри Лі $\{A, B\}$ для $0 \leq \lambda \leq 10$. Точний розв'язок (тонка лінія), наближення порядку $p = 4$ (точкова крива), наближення порядку $p = 9$ (пунктирна крива), та наближення порядку $p = 12$ (жирна крива).

2.4.2. Чотиривимірна алгебра Лі. У другому прикладі розглядається алгебра Лі $\{A, B, D, I\}$ з комутаційними співвідношеннями

$$\begin{aligned} &[A, B] = -\lambda D, \quad [A, D] = -\mu B, \quad [A, I] = 0, \\ &[B, D] = -\alpha I, \quad [B, I] = 0, \quad [D, I] = 0 \end{aligned} \tag{2.22}$$

p	$\{\lambda,\mu,\alpha\}$	$\{\frac{\lVert\tau_1-\sigma_1\rVert}{\lVert\sigma_1\rVert},\dots,\frac{\lVert\tau_4-\sigma_4\rVert}{\lVert\sigma_4\rVert}\}$	час обчислення (с)
4	$\{1,1,1\}$	$\{0, 1.93\times10^{-3}, 3.19\times10^{-3}, 2.45\times10^{-3}\}$	<0.1
8	$\{1,1,1\}$	$\{0, 1.15\times10^{-6}, 1.9\times10^{-6}, 5.75\times10^{-6}\}$	0.3
12	$\{1,1,1\}$	$\{0, 7.35\times10^{-10}, 1.21\times10^{-9}, 6.44\times10^{-10}\}$	7.2
4	$\{1+i,1-i,1\}$	$\{0, 3.09\times10^{-3}, 4.99\times10^{-3}, 7.25\times10^{-3}\}$	<0.1
8	$\{1+i,1-i,1\}$	$\{0, 2.87\times10^{-6}, 4.64\times10^{-6}, 1.35\times10^{-5}\}$	0.3
12	$\{1+i,1-i,1\}$	$\{0, 2.86\times10^{-9}, 4.63\times10^{-9}, 2.14\times10^{-8}\}$	7.8
4	$\{\frac{1}{2},1-i,2\}$	$\{0, 1.49\times10^{-3}, 2.8\times10^{-3}, 1.04\times10^{-2}\}$	<0.1
8	$\{\frac{1}{2},1-i,2\}$	$\{0, 8.88\times10^{-7}, 1.66\times10^{-6}, 1.1\times10^{-5}\}$	0.3
12	$\{\frac{1}{2},1-i,2\}$	$\{0, 5.68\times10^{-10}, 1.06\times10^{-9}, 1.01\times10^{-8}\}$	7.6

Таблиця 2.2 Порівняння точних та наближених значень коефіцієнтів розплутування для чотиривимірної Лі алгебри.

при $\lambda,\mu,\alpha\in\mathbb{C}$. Наша задача полягає у знаходженні наближених значень для коефіцієнтів $\sigma_1,\dots,\sigma_4\in\mathbb{C}$, таких що

$$\exp(A+B)\approx\exp(\sigma_1 A)\cdot\exp(\sigma_2 B)\cdot\exp(\sigma_3 D)\cdot\exp(\sigma_4 I). \tag{2.23}$$

Зауважимо, що різний порядок експонент у розплутаному виразі даватиме різні коефіцієнти σ_i.

Точні розв'язки подано, наприклад, у роботі [92]:

$$\sigma_1=1,\ \sigma_2=\frac{\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda\mu})}{\sqrt{\lambda\mu}},\ \sigma_3=\frac{\mathrm{ch}(\sqrt{\lambda\mu})-1}{\mu},\ \sigma_4=\frac{\alpha}{4\mu}\cdot\left(\frac{\mathrm{sh}(2\sqrt{\lambda\mu})}{\sqrt{\lambda\mu}}-2\right). \tag{2.24}$$

БКХ наближення порядку $p=4$ дає систему рівнянь:

$$F^4(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4)=\begin{pmatrix}\tau_1\\ \tau_2-\frac{1}{2}\tau_1\tau_3\mu+\frac{1}{12}\tau_1^2\tau_2\lambda\mu\\ \tau_3-\frac{1}{2}\tau_1\tau_3\lambda+\frac{1}{12}\tau_1\tau_3\mu\lambda\\ \tau_4-\frac{1}{2}\tau_2\tau_3\alpha-\frac{1}{12}\tau_1\tau_2^2\lambda\alpha+\frac{1}{12}\tau_1\tau_3^2\mu\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

Чисельне порівняння між точними розв'язками та БКХ наближенням наведено у таблиці 2.2.

p	α	$\{\frac{\|\|\tau_1-\sigma_1\|\|}{\|\|\sigma_1\|\|},\ldots,\frac{\|\|\tau_3-\sigma_3\|\|}{\|\|\sigma_3\|\|}\}$	час обчислення (с)
4	1	$\{1.68\times10^{-2},4.29\times10^{-2},8.8\times10^{-3}\}$	0.1
8	1	$\{6.42\times10^{-4},1.61\times10^{-3},3.69\times10^{-4}\}$	0.7
12	1	$\{2.88\times10^{-5},7.27\times10^{-5},1.69\times10^{-5}\}$	5.6
4	$1+\frac{i}{2}$	$\{2.37\times10^{-2},6.3\times10^{-2},9.16\times10^{-3}\}$	0.1
8	$1+\frac{i}{2}$	$\{1.33\times10^{-3},3.46\times10^{-3},6.15\times10^{-4}\}$	0.8
12	$1+\frac{i}{2}$	$\{8.96\times10^{-5},2.36\times10^{-4},4.31\times10^{-5}\}$	6.4
4	$\frac{1}{2}+i$	$\{2.37\times10^{-2},6.3\times10^{-2},9.16\times10^{-3}\}$	0.1
8	$\frac{1}{2}+i$	$\{1.33\times10^{-3},3.46\times10^{-3},6.15\times10^{-4}\}$	0.9
12	$\frac{1}{2}+i$	$\{8.96\times10^{-5},2.36\times10^{-4},4.31\times10^{-5}\}$	6.4

Таблиця 2.3 Порівняння точних та наближених значень коефіцієнтів розплутування для $SU(1,1)$ Лі алгебри.

2.4.3. SU(1,1) алгебра. У цьому та наступних прикладах точні аналітичні розв'язки взято в роботах [6, 7]. $SU(1,1)$ Лі алгебра $\{K_+, K_0, K_-\}$ задовольняє комутаційні співвідношення

$$[K_+, K_0] = -K_+, \quad [K_+, K_-] = -2K_0, \quad [K_0, K_-] = -K_-. \tag{2.26}$$

Для комплексного параметру α позначення α^* відповідає комплексному спряженню α. Наша ціль – знайти наближені значення для коефіцієнтів розплутування $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ для задачі

$$\exp(\alpha K_+ - \alpha^* K_-) = \exp(\sigma_1 K_+)\cdot\exp(\sigma_2 K_0)\cdot\exp(\sigma_3 K_-). \tag{2.27}$$

Беручи $\alpha = \lambda e^{i\theta}$ з $\lambda \geq 0$ та $0 \leq \theta \leq 2\pi$, точні розв'язки виглядають наступним чином [6]:

$$\sigma_1 = e^{i\theta}\mathrm{th}\ (\lambda), \quad \sigma_2 = -2\ln(\mathrm{ch}(\lambda)), \quad \sigma_3 = -e^{i\theta}\mathrm{th}\ (\lambda). \tag{2.28}$$

У таблиці 2.3 подано чисельні результати для коефіцієнтів розплутування, отриманих використовуючи БКХ наближення.

p	α	$\{\frac{\vert\vert\tau_1-\sigma_1\vert\vert}{\vert\vert\sigma_1\vert\vert},\ldots,\frac{\vert\vert\tau_3-\sigma_3\vert\vert}{\vert\vert\sigma_3\vert\vert}\}$	час обчислення (с)
4	1	$\{3.3\times10^{-2},7.42\times10^{-2},6.13\times10^{-2}\}$	0.1
8	1	$\{7.64\times10^{-3},9.99\times10^{-3},9.7\times10^{-3}\}$	0.4
12	1	$\{4.74\times10^{-4},6.12\times10^{-4},5.92\times10^{-4}\}$	4.9
4	$1+\frac{i}{2}$	$\{4.14\times10^{-1},4.99\times10^{-1},5.69\times10^{-1}\}$	0.1
8	$1+\frac{i}{2}$	$\{3.89\times10^{-2},4.31\times10^{-2},5.01\times10^{-2}\}$	0.5
12	$1+\frac{i}{2}$	$\{3.47\times10^{-3},3.85\times10^{-3},4.4\times10^{-3}\}$	5.4
4	$\frac{1}{2}+i$	$\{4.15\times10^{-1},4.99\times10^{-1},5.69\times10^{-1}\}$	0.1
8	$\frac{1}{2}+i$	$\{3.89\times10^{-2},4.31\times10^{-2},5.01\times10^{-2}\}$	0.5
12	$\frac{1}{2}+i$	$\{3.47\times10^{-3},3.85\times10^{-3},4.4\times10^{-3}\}$	5.2

Таблиця 2.4 Порівняння точних та наближених значень коефіцієнтів розплутування для $SU(2)$ Лі алгебри.

2.4.4. SU(2) алгебра. Три генератори $\{J_+, J_0, J_-\}$ алгебри Лі $SU(2)$ задовільняють комутаційні співвідношення

$$[J_+, J_0] = -J_-, \quad [J_+, J_-] = 2J_0, \quad [J_0, J_-] = -J_-. \tag{2.29}$$

В цьому прикладі шукаємо коефіцієнти для розплутування

$$\exp(\alpha J_+ - \alpha^* J_-) = \exp(\sigma_1 J_+)\cdot\exp(\sigma_2 J_0)\cdot\exp(\sigma_3 J_-). \tag{2.30}$$

Беручи знову $\alpha = \lambda e^{i\theta}$, точні розв'язки, виведені у роботах [6, 7], виглядають як

$$\sigma_1 = e^{i\theta}\text{th }(\lambda), \quad \sigma_2 = 2\ln(\sec(\lambda)), \quad \sigma_3 = -e^{-i\theta}\text{th }(\lambda). \tag{2.31}$$

Чисельні результати наведено у таблиці 2.4.

Крім того, на Рис. 2.2 зображено деякі результати для $\alpha\in\mathbb{R}$ та $0\le\alpha\le 1.5$. Точні розв'язки $\sigma_i=\sigma_i(\lambda)$ відповідають тонким лініям та БКХ наближення порядку $p=4$, $p=7$ та $p=11$ зображено точковою, пунктирною та жирною кривими, відповідно.

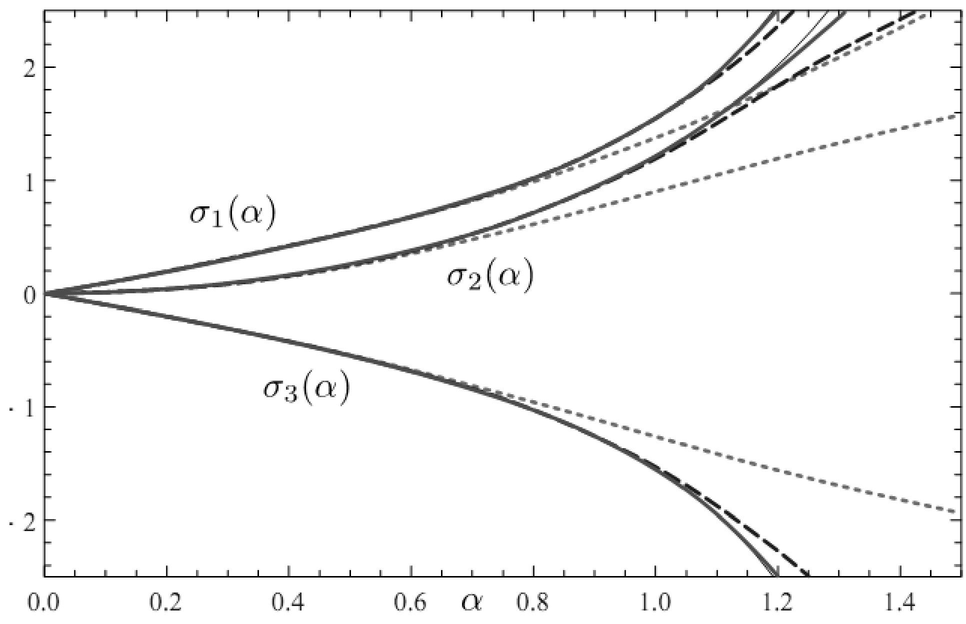

Рис. 2.2. Порівняння точних та наближених значень коефіцієнтів розплутування для $SU(2)$ алгебри для $0 \leq \alpha \leq 1.5$. Точні розв'язки (тонкі лінії), наближення порядку $p = 3$ (точкові криві), наближення порядку $p = 7$ (пунктирні криві), та наближення порядку $p = 11$ (жирні криві).

2.4.5. Шестивимірна алгебра пари фотонів. У нашому останньому прикладі розглянемо алгебру пари фотонів [7] $\{K_+, A^+, K_0, I, K_-, A\}$, яка задається наступними комутаційними співвідношеннями:

$$
\begin{aligned}
&[K_+, A^+] = 0, \quad [K_+, K_0] = -K^+, \quad [K_=, I] = 0,\\
&[K_+, K_-] = -2K_0, \quad [K_+, A = -A^+], \quad [A^+, K_0] = -\frac{1}{2}A^+,\\
&[A^+, I] = 0, \quad [A^+, K_-] = -A, \quad [A^+, A] = -I,\\
&[K_0, I] = 0, \quad [K_0, K_-] = -K_-, \quad [K_0, A] = -\frac{1}{2}A,\\
&[I, K_-] = 0, \quad [I, A] = 0, \quad [K_-, A] = 0.
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

Вважаючи $\alpha = \lambda \cdot e^{i\theta}$ та $\zeta = \mu \cdot e^{i\phi}$, шукаємо коефіцієнти для розплутування

$$
\begin{aligned}
&\exp(\alpha K_+ + \zeta A^+ - \alpha^* K_- - \zeta^* A) =\\
&= \exp(\sigma_1 K_+) \cdot \exp(\sigma_2 A^+) \cdot \exp(\sigma_3 K_0) \cdot \exp(\sigma_4 I) \cdot \exp(\sigma_5 K_-) \cdot \exp(\sigma_6 A).
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

Точні значення коефіцієнтів розплутування дані у роботі [7]:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_1 = e^{i\theta}\text{th }(\lambda),\\
&\sigma_2 = -\frac{\mu}{\lambda\ \text{ch}(\lambda)} \cdot ((\text{ch}(\lambda) - 1) \cdot e^{i(\theta-\phi)} - \text{sh}(\lambda) \cdot e^{i\phi}),\\
&\sigma_3 = -2\ln(\text{ch}(\lambda)),\\
&\sigma_4 = -\frac{\mu^2}{\lambda^2\ \text{ch}(\lambda)} \cdot ((\text{ch}(\lambda) - 1) + i\sin(\theta - 2\phi) \cdot (\text{sh}(\lambda) - \lambda\ \text{ch}(\lambda))),\\
&\sigma_5 = -e^{-i\theta}\text{th }(\lambda),\\
&\sigma_6 = -\frac{\mu}{\lambda\ \text{ch}(\lambda)} \cdot ((\text{ch}(\lambda) - 1) \cdot e^{-i(\theta-\phi)} + \text{sh}(\lambda) \cdot e^{-i\phi}).
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

Вважаємо, що результат для σ_6 у [7] має помилку у знаку перед доданком з sh. Нарешті, чисельні результати, отримані за допомогою БКХ наближення, приведено у таблиці 2.5.

p	$\{\alpha, \zeta\}$	$\{\frac{\|\|\tau_1-\sigma_1\|\|}{\|\|\sigma_1\|\|}, \dots, \frac{\|\|\tau_6-\sigma_6\|\|}{\|\|\sigma_6\|\|}\}$	час(с)
4	$\{1, 1\}$	$1.68 \times 10^{-2}, 1.67 \times 10^{-2}, 4.29 \times 10^{-2}, 5.28 \times 10^{-3}, 8.81 \times 10^{-3}, 6.29 \times 10^{-3}$	0.2
8	$\{1, 1\}$	$6.42 \times 10^{-4}, 5.96 \times 10^{-4}, 1.61 \times 10^{-3}, 1.72 \times 10^{-4}, 3.69 \times 10^{-4}, 2.55 \times 10^{-4}$	43.8
12	$\{1, 1\}$	$2.88 \times 10^{-5}, 2.71 \times 10^{-5}, 7.27 \times 10^{-5}, 8.3 \times 10^{-6}, 1.69 \times 10^{-5}, 1.12 \times 10^{-5}$	6349.3
4	$\{1 + \frac{i}{2}, \frac{1}{2} + i\}$	$1.59 \times 10^{-2}, 2.1 \times 10^{-2}, 6.3 \times 10^{-2}, 2.8 \times 10^{-2}, 9.16 \times 10^{-3}, 3.63 \times 10^{-2}$	0.3
8	$\{1 + \frac{i}{2}, \frac{1}{2} + i\}$	$8.91 \times 10^{-4}, 1.2 \times 10^{-3}, 3.46 \times 10^{-3}, 1.33 \times 10^{-3}, 6.15 \times 10^{-4}, 1.84 \times 10^{-3}$	51.8
12	$\{1 + \frac{i}{2}, \frac{1}{2} + i\}$	$6.02 \times 10^{-5}, 8.19 \times 10^{-5}, 2.34 \times 10^{-4}, 9.04 \times 10^{-5}, 4.31 \times 10^{-5}, 1.22 \times 10^{-4}$	6581.2
4	$\{\frac{1}{2} + \frac{3i}{7}, -\frac{1}{2} + \frac{2i}{3}\}$	$7.26 \times 10^{-3}, 4.98 \times 10^{-3}, 2.96 \times 10^{-2}, 5.23 \times 10^{-3}, 1.07 \times 10^{-2}, 7.71 \times 10^{-3}$	0.2
8	$\{\frac{1}{2} + \frac{3i}{7}, -\frac{1}{2} + \frac{2i}{3}\}$	$5.92 \times 10^{-5}, 4.15 \times 10^{-5}, 2.43 \times 10^{-4}, 4.38 \times 10^{-5}, 8.88 \times 10^{-5}, 5.75 \times 10^{-5}$	44.8
12	$\{\frac{1}{2} + \frac{3i}{7}, -\frac{1}{2} + \frac{2i}{3}\}$	$5.46 \times 10^{-7}, 3.83 \times 10^{-7}, 2.23 \times 10^{-6}, 4.05 \times 10^{-7}, 8.21 \times 10^{-7}, 5.17 \times 10^{-7}$	6366.3

Таблиця 2.5 Порівняння точних та наближених значень коефіцієнтів розплутування для шестивимірної Лі алгебри.

2.5. Висновки розділу

У даному розділі представлено загальний метод для наближеного розплутування експоненціальних некомутуючих операторів, що належать скінчено-вимірній алгебрі Лі. Впроваджено комп'ютерну реалізацію даного методу, яка визначає коефіцієнти розплутування σ, означені у (2.4), в принципі, для довільних алгебр Лі.

Проведена комп'ютерна реалізація є базовою демонстрацією методу, оптимізованою для простоти використання, але не для зменшення часу обчислень.

П'ять чисельних прикладів з відомими точними аналітичними розв'язками демонструють, що метод дає добре наближення для різних наборів параметрів. Наприклад, для чотиривимірної алгебри Лі добре наближення досягається вже для порядку наближення $p = 4$. Для тривимірної $SU(2)$ алгебри така ж точність досягається для порядку $p \geq 14$.

Як видно з чисельних результатів, час обчислення та доступні порядки наближення залежать від вимірності заданої алгебри Лі. Для чотиривимірної алгебри, наближення порядку 12 можна отримати за лічені секунди. В той час, як для алгебр з вищою вимірністю, час обчислення зростає швидко, що можна побачити у таблиці 2.5. Однак, для специфічних алгебр можуть бути реалізовані набагато ефективніші впровадження даного методу.

Як було сказано, нам потрібно вибирати з набору розв'язків системи нелінійних рівнянь такий, що задовольняє певні граничні умови. Кількість додаткових задач, що розглядаються, контролюється параметром M, який задається у нашій програмі. Не зважаючи на те, що ми використовували $M = 10$ у всіх чисельних прикладах, можуть бути задачі, для яких наш метод вибирає правильний розв'язок тільки для деяких більших значень M. Цей вибір має контролюватися відповідними перевірками.

Отже, у даному розділі було представлено метод розплутування експоненціальних некомутуючих операторів, заснований на формулі Бейкера-Кемпбелла-Хаусдорфа та комп'ютерна реалізація даного методу. Метод може бути застосований для довільних скінчено-вимірних алгебр Лі. Метод було апропобовано на п'яти чисельних прикладах, для яких відомі точні аналітичні розв'язки. Порівняння точних та наближених значень коефіцієнтів розплутування показало високу точність та збіжність методу.

РОЗДІЛ 3

Квантовий шум в оптичних інтерферометрах

3.1. Передмова

Оптичні інтерферометри, що використовуються в експериментах по пошуку гравітаційних хвиль, потребують надзвичайно точного контролю різних типів шумів в екпериментальних установках. Для сучасних детекторів чутливість в основному обмежується квантово-механічним шумом (далі квантовий шум) [16]. Квантовий шум відповідає класу шумів, що виникають з квантової природи джерела світла і в процесі детектування фотонів у інтерферометрах [17]. У інтерферометричному детекторі гравітаційних хвиль, побудованому на основі інтерферометра Майкельноса, присутні два основні джерела квантового шуму [16]: (i) фотонний шум (shot noise) [18], що виникає з невизначеності у числі фотонів на виході інтерферометра через квантово-механічні флуктуації; (ii) шум радіаційного тиску (radiation-pressure noise), який виникає з невизначеності у положенні дзеркал через квантові флуктуації внутрішніх полів, що викликають флуктуації радіаційного тиску. З метою зменшення квантово-механічного шуму в таких інтерферометрах, Кейвз запропонував техніку стиснених станів (squeezed state technique) [19]: у вхідний порт інтерферометра, що зазвичай не використовується, подається так званий стиснений вакуум (squeezed vacuum state). Деталі цієї техніки були проаналізовані у багатьох експериментальних і теоретичних дослідженнях [22, 93].

Центральним елементом інтерферометру є світлодільник (beam splitter). Схему стандартного світлодільника зображено на Рис.3.1. Виявляється, що фотонний стан на вході світлодільника, який є добутком станів кожного вхідного порта, на виході світлодільника вже не є добутком станів фотонів кожного вихідного порту світлодільника. Навпаки, два вихідних стани заплутано. Темою нещодавної роботи Барака та Бен-Ар'є [23] було дослідження наслідків такої заплутаності для статистики фотонів у оптичному інтерферометрі.

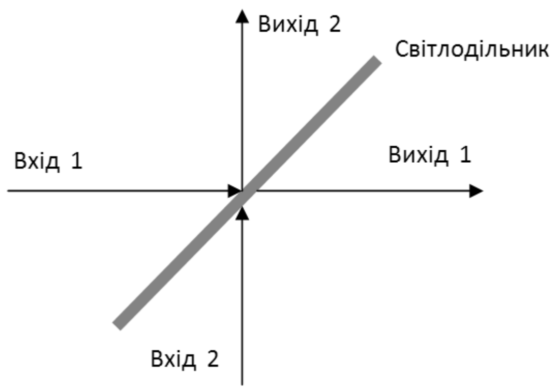

Рис. 3.1. Схема стандартного світлодільника.

У роботі Барака та Бен-Ар'єна [23] було запропоновано метод, що в принципі дає можливість провести аналіз статистики на виході світлодільника при усіх можливих коефіцієнтах розщеплення, а також обчислити розподіл ймовірностей числа фотонів у відповідному вихідному стані. Однак, через застосовані в роботі [23] наближення, аналіз обмежився лише двома випадками для коефіцієнту розщеплення світлодільника, а саме 50/50 розщепленням, та так званим випадком темного порту, коли майже всі фотони вхідного когерентного поля йдуть до одного вихідного порта, і лише мала частина до іншого, темного, порту. Зокрема, було передбачено, що для випадку темного порту сигнал гравітаційної хвилі можна посилити істотно без відповідного збільшення фотонного шуму. Цей ефект трактувався як наслідок заплутаності, а також стиснення. Таке передбачення виглядає контрінтуїтивним.

У даному розділі дисертації представлено результати розширеного аналізу статистики фотонів на виході світлодільника інтерферометра Майкельсона для усіх можливих значень коефіцієнту розщеплення світлодільника, а також глибоке дослідження випадку темного порту інтерферометра та перевірка передбачення роботи [23].

З метою дослідження ефектів заплутаності треба вміти розплутувати експоненціальні оператори, для чого використовується результат, представлений у другому розділі даної дисертаційної роботи. Приведено повний графічний аналіз коефіцієнтів розплутування як функцій параметру стиснення та коефіцієнту розщеплення світлодільника.

Отже, задачами даного розділу дисертації є:

• вивчення квантового шуму у вихідному сигналі світлодільника інтерферометра Майкельсона;

• знаходження розподілу ймовірностей числа фотонів на виході світлодільника для різних випадків розщеплення вхідного світла світлодільником;

• дослідження залежності сигналу (середнього значення числа фотонів) та шуму (дисперсії числа фотонів) на виході світлодільника інтерферометра від значення параметру стиснення вхідного стану;

• вивчення випадку темного порту: перевірка можливості одночасного підсилення сигналу та зменшення шуму.

3.2. Стан фотонів на вході та виході інтреферометра

Стан фотонів на вході світлодільника інтерферометра Майкельсона описується наступним чином: до вхідного порту 1 подається когерентний стан та до порту 2 вводиться стиснений вакуумний стан:

$$|\psi_{\text{in}}(\alpha,\zeta)\rangle = \hat{S}_2(\zeta)\hat{D}_1(\alpha)|0,0\rangle, \tag{3.1}$$

де

$$\hat{D}_1(\alpha) = \exp\left(\alpha\hat{a}_1^\dagger - \alpha^*\hat{a}_1\right), \quad \hat{S}_2(\zeta) = \exp\left(\frac{\zeta^*}{2}\hat{a}_2^2 - \frac{\zeta}{2}\hat{a}_2^{\dagger 2}\right). \tag{3.2}$$

Оператор $\hat{D}(\alpha)$ є оператором зсуву з параметром когерентного стану $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$, оператор $\hat{S}(\zeta)$ є оператором стиснення з параметром стиснення $\zeta = re^{i\theta}$. Параметри α і ζ є комплексними числами. Надалі для нас важливими будуть два параметри: фактор когерентного стану $|\alpha|$, що відповідає за інтенсивність вхідного променя у порті 1 світлодільника та фактор стиснення r, що відповідає за степінь стискування вхідного вакуумного стану у порті 2. Залежність статистики від значення фаз ϕ і θ також буде розглянуто окремо.

Оператори фотонного поля $\hat{a}_i$ та $\hat{a}_j^\dagger$ задовільняють бозонне комутаційне співвідношення $[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{i,j}$.

Центральним елементом інтерферометра Майкельсона є світлодільник. Після проходження світлодільника фотонне поле описується "оберненими" (від слова обертати) польовими операторами $\hat{b}_i$ та $\hat{b}_i^\dagger$ з комутаційним співвідношенням $[\hat{b}_i, \hat{b}_j^\dagger] = \delta_{i,j}$ [94]. Формула для унітарного перетворення бозонних операторів у світлодільнику має наступний вигляд:

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Параметр γ є коефіцієнтом розщеплення світла світлодільником і відповідає за степінь розщеплення світлодільником вхідних пучків по відношенню до вхідного променя у порт 1.

Тепер, виражаючи вхідні $\hat{a}$ оператори через вихідні $\hat{b}$ оператори можна записати стан фотонів на виході світлодільника:

$$|\psi_{\text{out}}(\alpha,\zeta,\gamma)\rangle = \exp(|\zeta|\hat{A})\hat{D}_1(\alpha\cos\gamma)\hat{D}_2(\alpha\sin\gamma)|0,0\rangle, \qquad (3.4)$$

де

$$\hat{A} = \hat{s}_1\sin^2\gamma + \hat{s}_2\cos^2\gamma + \hat{s}_{12}\sin\gamma\cos\gamma \qquad (3.5)$$

та

$$\hat{s}_i = \frac{1}{2|\zeta|}(\zeta^*\hat{b}_i^2 - \zeta\hat{b}_i^{\dagger 2}), \quad i=\overline{1,2}, \quad \hat{s}_{12} = \frac{1}{|\zeta|}(\zeta\hat{b}_1^\dagger\hat{b}_2^\dagger - \zeta^*\hat{b}_1\hat{b}_2). \qquad (3.6)$$

За відсутності оператора $\hat{s}_{12}$ вихідний стан просто був би двома стисненими когерентними станами у кожному з вихідних портів. Однак, ці стани заплутані через $\hat{s}_{12}$ і вихідний стан не можна факторизувати. Цей факт істотно ускладнює обчислення статистики фотонів у вихідному стані.

Виявляється, що можна обчислити середнє значення числа фотонів та дисперсію сигналу на виході світлодільника інтерферометра, маючи справу тільки з вхідним станом. Однак, для знаходження розподілу ймовірностей числа фотонів на виході світлодільника цей метод не спрацьовує. Для знаходження розподілу ймовірностей числа фотонів у вихідному стані буде застосовано математичний метод розплутування, представлений у другому розділі даної дисертації.

3.3. Середнє значення та дисперсія числа фотонів на виході світлодільника методом усереднення по вхідному стану

Найпростіший спосіб для аналізу статистики розподілу фотонів на виході світлодільника застосував Кейвз у роботі [19]. Цей метод дає можливість знайти середнє значення числа фотонів та дисперсію (шум) розподілу фотонів на виході інтерферометра, працюючи тільки з вхідним станом.

Почнемо із знаходження середнього значення розподілу фотонів на виході світлодільника інтерферометра у порті 1: $\langle \hat{n}_1^{out} \rangle$. Для цього використаємо обернене перетворення бозонних операторів у світлодільнику, тобто від $\hat{b}_i$ до $\hat{a}_i$ і виразимо оператор числа фотонів $\hat{n}_1^{out} = \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1$ через вхідні оператори:

$$\begin{aligned} \hat{n}_1^{out} = \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 = (\hat{a}_1^\dagger \cos\gamma - \hat{a}_2^\dagger \sin\gamma)(\hat{a}_1 \cos\gamma - \hat{a}_2 \sin\gamma) = \\ = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \cos^2\gamma + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \sin^2\gamma - \cos\gamma \sin\gamma (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Тепер, використувуючи усереднення по вхідному стану $|\Psi_{in}\rangle$, неважко знайти середнє зачення $\langle n_1^{out} \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_1^{out} \rangle = \langle \Psi_{in} | \hat{n}_1^{out}(\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_1, \hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_2) | \Psi_{in} \rangle = \\ = \langle 00 | \hat{D}_1^\dagger(\alpha) \hat{S}_2^\dagger(\zeta) \hat{n}_1^{out} \hat{S}_2(\zeta) \hat{D}_1(\alpha) | 00 \rangle. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Використовуючи відомі формули [95] дії $\hat{S}$ та $\hat{D}$ операторів на оператори народження та знищення, в результаті отримуємо середнє значення розподілу фотонів у вихідному порті 1 світлодільника інтерферометра:

$$\langle \hat{n}_1^{out} \rangle = |\alpha|^2 \cos^2\gamma + \mathrm{sh}^2\, r \sin^2\gamma. \tag{3.9}$$

Аналогічно отримується середнє значення для другого вихідного порту світлодільника інтерферометра:

$$\langle \hat{n}_2^{out} \rangle = |\alpha|^2 \sin^2\gamma + \mathrm{sh}^2\, r \cos^2\gamma. \tag{3.10}$$

З рівнянь (3.9) та (3.10) видно, що сума середніх значень дорівнює $|\alpha|^2 + \mathrm{sh}^2\, r$. Цей вираз дорівнює сумі очікуваних середніх значень двох станів на вході світлодільника, а саме $\langle \hat{n}_1^{in} \rangle = \langle 0 | \hat{D}_1^\dagger(\alpha) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{D}_1(\alpha) | 0 \rangle = |\alpha|^2$

– середнього вхідного когерентного стану та $\langle \hat{n}_2^{in} \rangle = \langle 0|\hat{S}_2^\dagger(\zeta)\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\hat{S}_2(\zeta)|0\rangle = \operatorname{sh}^2 r$ – середнього значеня для вакуумних флуктуацій стисненого вакуумного стану.

Цей факт підтверджує, що середні для розподілів вихідних станів було обраховано вірно та запропонований Кейвзом метод є коректним.

Бачимо також, що середні значення числа фотонів вихідних станів залежать лише від абсолютних значень вхідних параметрів α та ζ (факторів $|\alpha|$ та r), і не залежать від фаз ϕ і θ.

Наступним кроком буде знаходження дисперсії розподілів для вихідних станів. Дисперсія знаходиться за формулою: $\sigma^2 = (\Delta\hat{n})^2 = \langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2$.

Після ряду математичних перетворень отримується вираз для дисперсії розподілу числа фотонів у вихідному порті 1 світлодільника інтерферометра:

$$\begin{aligned}(\Delta\hat{n}_1^{out})^2 = |\alpha|^2\cos^4\gamma + 2\operatorname{ch}^2 r\operatorname{sh}^2 r\sin^4\gamma + \sin^2\gamma\cos^2\gamma\operatorname{sh}^2 r + \\ + \sin^2\gamma\cos^2\gamma|\alpha|^2(\operatorname{ch}^2 r + \operatorname{sh}^2 r - 2\operatorname{sh} r\operatorname{ch} r\cos(\theta - 2\phi)).\end{aligned} \tag{3.11}$$

Вираз для дисперсії розподілу фотонів у вихідному порті 2 отримується з (3.11) шляхом заміни $\gamma \to \pi/2 - \gamma$. Як ми бачимо, дисперсія розподілу містить залежність від фаз ϕ і θ, а саме від значення фазового співвідношення $\theta - 2\phi$. З (3.11) ясно видно, що дисперсія буде найменшою при $\cos(\theta - 2\phi) = 1$, тому найзручнішим вибором фазового співвідношення буде $\theta - 2\phi = 0$. Саме таке значення фазового співвідношення буде використано в подальшому.

Отже, маючи справу лише з вхідним станом, можна досить легко знайти аналітичні формули для розрахунку середнього значення та дисперсії розподілу числа фотонів на виході світлодільника інтерферометра Майкельсона. Однак, даний метод не дає можливості обчислити сам розподіл ймовірностей числа фотонів у вихідному сигналі. Для вирішення цієї задачі необхідно розплутати вихідний стан (3.4). Саме розплутування в результаті дає можливість знайти аналітичну формулу для розрахунку розподілу ймовірностей числа фотонів на виході світлодільника інтерферометра Майкельсона.

3.4. Розплутування стану фотонів на виході світлодільника

Для представлення вихідного стану у зручній для подальших обчислень формі застосовано метод розплутування, розглянутий у другому розділі даної дисертаційної роботи. Для успішного розплутування введемо спочатку допоміжний оператор $\hat{t}_{12}$:

$$\hat{t}_{12} = \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger - \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2. \tag{3.12}$$

Оператори $\hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_{12}$, та $\hat{t}_{12}$ утворюють замкнену алгебру Лі з наступними комутаційними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} &[\hat{s}_1, \hat{s}_2] = 0, \quad [\hat{s}_{12}, \hat{t}_{12}] = -2\hat{s}_1 + 2\hat{s}_2, \\ &[\hat{s}_1, \hat{s}_{12}] = \hat{t}_{12}, \quad [\hat{s}_2, \hat{s}_{12}] = -\hat{t}_{12}, \\ &[\hat{s}_1, \hat{t}_{12}] = \hat{s}_{12}, \quad [\hat{s}_2, \hat{t}_{12}] = -\hat{s}_{12}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Як наслідок, стан фотонів на виході світлодільника (3.4) можна записати в наступному вигляді [1, 50]

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = \exp(\sigma_T \hat{t}_{12}) \exp(\sigma_S \hat{s}_{12}) \exp(\sigma_1 \hat{s}_1) \exp(\sigma_2 \hat{s}_2) \hat{D}_1(\alpha \cos\gamma) \hat{D}_2(\alpha \sin\gamma) |0, 0\rangle. \tag{3.14}$$

Вихідний стан тепер виражено як два стиснені когерентні стани, що заплутано через оператори $\exp(\sigma_T \hat{t}_{12})$ та $\exp(\sigma_S \hat{s}_{12})$. Коефіцієнти σ_T, σ_S, σ_1, σ_2 є дійсними функціями вхідних параметрів $r = |\zeta|$ та γ. Коефіцієнти розплутування σ_T, σ_S, σ_1, σ_2 знаходяться чисельно за допомогою комп'ютерної програми. Також для розв'язку задачі розплутування фотонного стану на виході світлодільника ми застосували аналітичний метод розплутування, заснований на матричному представленні алгебри Лі, завдяки якому для окремих випадків вдалося знайти точні аналітичні вирази для коефіцієнтів розплутування.

3.4.1. Розплутування вихідного стану методом матричного представлення алгебри Лі.

Для розв'язку задачі розплутування

$$\exp(r\hat{A}) = \exp(\sigma_T \hat{t}_{12}) \exp(\sigma_S \hat{s}_{12}) \exp(\sigma_1 \hat{s}_1) \exp(\sigma_2 \hat{s}_2), \tag{3.15}$$

де $r = |\zeta|$ та $\hat{A}$ дано у (3.5), ми розглядаємо алгебру Лі $\{\hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_{12}, \hat{t}_{12}\}$ операторів , означених у (3.6) та (3.12) разом з комутаційними співвідношеннями (3.13). Відповідні матричні представлення цих операторів

$$\hat{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{t}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

задовільняють ті самі комутаційні співвідношення.

Тоді матричне представлення оператора $\hat{A}$ у (3.15) отримується як

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \sin^2\gamma & -\cos\gamma\sin\gamma \\ -\cos\gamma\sin\gamma & \cos^2\gamma \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Оскільки $\hat{A}^n = \hat{A}$ для всіх $n \in N$, то для лівої частини (3.15) ми отримуємо

$$\exp(r\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r\hat{A})^n}{n!} = \hat{I} + (\mathrm{e}^r - 1)\hat{A}. \tag{3.18}$$

Матричне представлення правої частини (3.15) також легко обраховується:

$$\exp(\sigma_T T_{12}) \exp(\sigma_S \hat{s}_{12}) \exp(\sigma_1 \hat{s}_1) \exp(\sigma_2 \hat{s}_2) = \tag{3.19}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\sigma_1}(\sin\sigma_T \operatorname{sh}\sigma_S + \cos\sigma_T \operatorname{ch}\sigma_S) & -\mathrm{e}^{\sigma_2}(\sin\sigma_T \operatorname{ch}\sigma_S + \cos\sigma_T \operatorname{sh}\sigma_S) \\ \mathrm{e}^{\sigma_1}(\sin\sigma_T \operatorname{ch}\sigma_S - \cos\sigma_T \operatorname{sh}\sigma_S) & -\mathrm{e}^{\sigma_2}(\sin\sigma_T \operatorname{sh}\sigma_S - \cos\sigma_T \operatorname{ch}\sigma_S) \end{pmatrix}.$$

Прирівнявши (3.18) і (3.19), отримуємо чотири рівняння для чотирьох коефіцієнтів розплутування $\sigma_T, \sigma_S, \sigma_1, \sigma_2$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^r \sin^2\gamma + \cos^2\gamma &= \mathrm{e}^{\sigma_1}(\sin\sigma_T \operatorname{sh}\sigma_S + \cos\sigma_T \operatorname{ch}\sigma_S), \\
(1-\mathrm{e}^r)\cos\gamma\sin\gamma &= -\mathrm{e}^{\sigma_2}(\sin\sigma_T \operatorname{ch}\sigma_S + \cos\sigma_T \operatorname{sh}\sigma_S), \\
(1-\mathrm{e}^r)\cos\gamma\sin\gamma &= \mathrm{e}^{\sigma_1}(\sin\sigma_T \operatorname{ch}\sigma_S - \cos\sigma_T \operatorname{sh}\sigma_S), \\
\mathrm{e}^r \cos^2\gamma + \sin^2\gamma &= -\mathrm{e}^{\sigma_2}(\sin\sigma_T \operatorname{sh}\sigma_S - \cos\sigma_T \operatorname{ch}\sigma_S).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

В загальному випадку цю систему рівнянь можна розв'язати чисельно.

Для $\gamma = \pi/2$ розв'язки (3.20) можна знайти аналітично:

$$\sigma_1 = r, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_S = 0, \quad \sigma_T = 0. \tag{3.21}$$

Для $\gamma = \pi/4$ маємо

$$\sigma_1 = r/2, \quad \sigma_2 = r/2, \quad \sigma_S = r/2, \quad \sigma_T = 0. \tag{3.22}$$

Особливим випадком є $\gamma = \pi/2 - \delta$, де δ – достатньо мале. Цей випадок називається випадком темного порту інтерферометра: практично всі фотони вхідного когерентного стану прямують до вихідного порту 2 світлодільника, і лише мала частка до вихідно порту 1.

Якщо розкласти тригонометричні функції в правій частині (3.20), лишаючи лише лінійні члени у коефіцієнтах розплутування, отримуємо:

$$\gamma = \pi/2 - \delta, \quad \sigma_1 = r, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_S = -\delta \operatorname{sh} r, \quad \sigma_T = \delta(1 - \operatorname{ch} r). \tag{3.23}$$

3.4.2. Середнє значення та дисперсія розподілу фотонів на виході світлодільника методом усереднення по вихідному стану. Аналогічно до знаходження середнього значення та дисперсії розподілу фотонів на виході світлодільника інтерферометра Майкельсона, працюючи з вхідним станом, можна також розрахувати середнє та дисперсію шляхом усереднення по вихідному стану. В якості перевірки еквівалентності обох методів було знайдено середнє значення розподілу фотонів у вихідному порті 1 світлодільника інтерферометра. Дисперсія цим методом не обраховувалась через недоцільність і неефективність в порівнянні з методом усереднення по вхідному стану.

Використовуючи формулу

$$\langle \hat{n}_1^{out} \rangle = \langle \Psi_{out} | \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 | \Psi_{out} \rangle, \tag{3.24}$$

де $|\Psi_{out}\rangle$ вже береться у розплутаній формі, після громіздких перетворень знаходимо:

$$\langle \hat{n}_1^{out} \rangle = m_0 + m_\alpha |\alpha|^2, \tag{3.25}$$

де

$$\begin{aligned} m_0 = (\operatorname{ch} \sigma_S \sin \sigma_T \operatorname{sh} \sigma_2 + \cos \sigma_T \operatorname{ch} \sigma_2 \operatorname{sh} \sigma_S)^2 + \\ + (\cos \sigma_T \operatorname{ch} \sigma_S \operatorname{sh} \sigma_1 + \operatorname{ch} \sigma_1 \sin \sigma_T \operatorname{sh} \sigma_S)^2 \end{aligned} \tag{3.26}$$

та

$$\begin{aligned} m_\alpha = e^{-i(\theta+2\phi)} & \left(-e^{i\theta} \cos\gamma \cos\sigma_T \operatorname{ch}\sigma_S \operatorname{sh}\sigma_1 + e^{i\theta} \operatorname{ch}\sigma_S \sin\gamma \sin\sigma_T \operatorname{sh}\sigma_2 + \right. \\ & + e^{2i\phi} \cos\gamma \sin\sigma_T \operatorname{sh}\sigma_1 \operatorname{sh}\sigma_S - e^{2i\phi} \cos\sigma_T \sin\gamma \operatorname{sh}\sigma_2 \operatorname{sh}\sigma_S + \\ & + \operatorname{ch}\sigma_2 \sin\gamma \left(-e^{2i\phi} \operatorname{ch}\sigma_S \sin\sigma_T + +e^{i\theta} \cos\sigma_T \operatorname{sh}\sigma_S \right) + \\ & \left. + \cos\gamma \operatorname{ch}\sigma_1 \left(e^{2i\phi} \cos\sigma_T \operatorname{ch}\sigma_S - e^{i\theta} \sin\sigma_T \operatorname{sh}\sigma_S \right) \right) \times \\ & \times \left(-e^{2i\phi} \cos\gamma \cos\sigma_T \operatorname{ch}\sigma_S \operatorname{sh}\sigma_1 + e^{2i\phi} \operatorname{ch}\sigma_S \sin\gamma \sin\sigma_T \operatorname{sh}\sigma_2 + \right. \\ & + e^{i\theta} \cos\gamma \sin\sigma_T \operatorname{sh}\sigma_1 \operatorname{sh}\sigma_S - e^{i\theta} \cos\sigma_T \sin\gamma \operatorname{sh}\sigma_2 \operatorname{sh}\sigma_S + \\ & + \operatorname{ch}\sigma_2 \sin\gamma \left(-e^{i\theta} \operatorname{ch}\sigma_S \sin\sigma_T + e^{2i\phi} \cos\sigma_T \operatorname{sh}\sigma_S \right) + \\ & \left. + \cos\gamma \operatorname{ch}\sigma_1 \left(e^{i\theta} \cos\sigma_T \operatorname{ch}\sigma_S - e^{2i\phi} \sin\sigma_T \operatorname{sh}\sigma_S \right) \right). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Як бачимо, коефіцієнт m_α є дуже громіздким. Постає питання, чи вираз для середнього значення числа фотонів (3.25), отриманий шляхом усереднення по вихідному розплутаному стану еквівалентний знайденому середньому (3.9) шляхом усереднення по вхідному стану.

Чисельно було показано, що перший доданок у (3.25) відповідає значенню $\operatorname{sh}^2 r \sin^2\gamma$, та великий другий доданок $m_\alpha|\alpha|^2$ відповідає $|\alpha|^2\cos^2\gamma$.

Зокрема, для особливого випадку $\gamma = \pi/4$, коли коефіцієнти розплутування можна знайти точно аналітично, вираз для середнього спрощується до $\langle n_1^{out}\rangle = \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + \operatorname{sh}^2 r)$.

Ці два факти свідчать про те, що методи усереднення як по вхідному стану так і по вихідному дають однаковий результат, а отже розплутаний стан дійсно описує стан фотонів після перетворення у світлодільнику інтерферометра.

Однак, як ми бачимо, робота з вихідним станом саме через його заплутаність є дуже непрактичною через велику громіздкість обчислень в порівняння з обчисленнями при усереднинні по вхідному стану. Також стає зрозумілим, що обчислення дисперсії таким методом є недоцільним.

3.5. Знаходження формули для розподілу ймовірностей числа фотонів на виході світлодільника інтерферометра

Як було сказано вище, вихідний стан у розплутаній формі являє собою два стиснених когерентних стани, на які діють два оператори сплутування: $\exp(\sigma_T\hat{t}_{12})$ та $\exp(\sigma_S\hat{s}_{12})$.

Для визначення статистики фотонів у вихідному стані (знаходження розподілу ймовірностей числа фотонів) спочатку необхідно переписати вихідний стан у фоківському представленні. Починаємо з фоківського представлення стисненого когерентного стану [95]:

$$\hat{S}(\zeta)\hat{D}(\beta)|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} f_n(\zeta,\beta)|n\rangle, \tag{3.28}$$

де

$$f_n(\zeta,\beta) = \frac{(\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{th}\, r)^{n/2}}{2^{n/2}(\mathrm{ch}\, r)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(|\beta|^2 - \mathrm{e}^{-i\theta}\beta^2 \mathrm{th}\, r)\right) H_n\left(\frac{\beta \mathrm{e}^{-i\theta/2}}{\sqrt{2\,\mathrm{ch}\, r\,\mathrm{sh}\, r}}\right), \tag{3.29}$$

$\zeta = r\mathrm{e}^{i\theta}$, та H_n – поліноми Ерміта.

Отже, вихідний стан фотонів без факторів заплутування виглядає наступним чином:

$$|\Psi_{out}\rangle = \sum_{n1=0}^{\infty}\sum_{n2=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2!}} f_{n_1}(e^{i\theta}\sigma_1, \alpha\cos\gamma) f_{n_2}(e^{i\theta}\sigma_2, \alpha\sin\gamma)|n_1 n_2\rangle. \tag{3.30}$$

Тепер? діючи екпоненціальними операторами $\exp(\sigma_T \hat{t}_{12})$ і $\exp(\sigma_S \hat{S}_{12})$ на (3.30), можна отримати фоківське представлення вихідного стану. Однак, спочатку $\exp(\sigma_T \hat{t}_{12})$ і $\exp(\sigma_S \hat{S}_{12})$ мають бути дещо перетворені для успішної дії ними на стан (3.30).

3.5.1. Дія операторів заплутування. Фактори заплутування $\exp(\sigma_T \hat{t}_{12})$ та $\exp(\sigma_S \hat{s}_{12})$ мають бути перетворені для дії ними на два стиснених когерентних стани. Використовуючи факт, що оператори $\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger$, $\hat{b}_1 \hat{b}_2$, та $\frac{1}{2}(1 + \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2)$ утворюють SU(1,1) алгебру Лі, можна знайти, що

$$\begin{aligned} \exp(\sigma_S \hat{s}_{12}) = \exp\left(\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger \mathrm{e}^{i\theta} \mathrm{th}\,\sigma_S\right) \times \\ \times \exp\left(-\left(1 + \hat{n}_1 + \hat{n}_2\right)\ln(\mathrm{ch}\,\sigma_S)\right) \exp\left(-\hat{b}_1 \hat{b}_2 \mathrm{e}^{-i\theta} \mathrm{th}\,\sigma_S\right). \end{aligned} \tag{3.31}$$

як було доведено, наприклад, у роботі [7]. Аналогічно доводиться, що

$$\begin{aligned} \exp(\sigma_T \hat{t}_{12}) = \exp\left(\hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger \mathrm{e}^{i\theta}\, \mathrm{tg}\,\sigma_T\right) \times \\ \times \exp\left(-\left(\hat{n}_1 - \hat{n}_2\right)\ln(\cos\sigma_T)\right) \exp\left(-\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 \mathrm{e}^{-i\theta}\, \mathrm{tg}\,\sigma_T\right). \end{aligned} \tag{3.32}$$

використовуючи факт, що оператори $\hat{b}_1\hat{b}_2^\dagger$, $\hat{b}_1^\dagger\hat{b}_2$, та $-\frac{1}{2}\left(\hat{b}_1^\dagger\hat{b}_1 - \hat{b}_2^\dagger\hat{b}_2\right)$ формують алгебру Лі SU(2). Вирази (3.31) та (3.32) є розплутуваннями операторів $\exp(\sigma_T\hat{t}_{12})$ та $\exp(\sigma_S\hat{s}_{12})$. Тут наведено точні аналітичні розплутування для операторів. Також ці розплутування можуть бути виконані, використовуючи метод розплутування, представлений у другому розділі даної дисертації.

Розкладання в ряд експонент у вище наведених виразах (3.31) і (3.32) дозволяє успішно діяти операторами $\exp(\sigma_T\hat{t}_{12})$ та $\exp(\sigma_S\hat{s}_{12})$ (вже у розплутаній формі) на фоківські стани (3.30).

Після деяких прямих, але громіздких математичних перетворень можна отримати розподіл фотонів $P_{n_1n_2}$ у двох портах світлодільника інтерферометра

$$P_{n_1n_2}(\alpha,\zeta,\gamma) = \\ = \frac{n_2!}{n_1!}\left|\sum_{m_4=0}^{n_2}\sum_{m_3=0}^{n_1+m_4}\sum_{m_2=0}^{M_2}\sum_{m_1=0}^{\infty} A_{n_1n_2}^{m_1m_2m_3m_4} f_{N_1+m_1}(\mathrm{e}^{i\theta}\sigma_1,\beta_1) f_{N_2+m_1}(\mathrm{e}^{i\theta}\sigma_2,\beta_2)\right|^2, \tag{3.33}$$

де

$$\begin{aligned}
&N_1 = n_1 - m_2 - m_3 + m_4, \quad N_2 = n_2 - m_2 + m_3 - m_4, \\
&M_2 = \min(n_1 - m_3 + m_4, n_2 + m_3 - m_4), \\
&A_{n_1n_2}^{m_1m_2m_3m_4} = \frac{\nu_S^{m_1}\lambda_S^{m_2}\nu_T^{m_3}\lambda_T^{m_4}}{m_1!m_2!m_3!m_4!}\frac{(n_1+m_4)!}{(n_2-m_4)!}\frac{(n_2+m_3-m_4)!}{N_1!N_2!}\times \\
&\qquad \mathrm{e}^{\mu_S(1+n_1+n_2-2m_2)/2}\mathrm{e}^{\mu_T(-n_1+n_2-2m_4)/2}, \\
&\zeta = r\mathrm{e}^{i\theta}, \quad \beta_1 = \alpha\cos\gamma, \quad \beta_2 = \alpha\sin\gamma, \\
&\lambda_S = \mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{th}\,\sigma_S, \quad \mu_S = -2\ln(\mathrm{ch}\,\sigma_S)), \quad \nu_S = \mathrm{e}^{-i\theta}\mathrm{th}\,\sigma_S, \\
&\lambda_T = \mathrm{tg}\,\sigma_T, \quad \mu_T = -2\ln(\cos\sigma_T)), \quad \nu_T = \mathrm{tg}\,\sigma_T.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Сума по m_1 у (3.33) в принципі необмежена. На практиці добра верхня границя має бути вибрана так, щоб ймовірності правильно нормувалися. Надалі більшість чисельних результатів обраховано на основі формули (3.33). Розподіл ймовітностей у будь-якому з вихідних портів отримується шляхом підсумовування по кількості фотонів у другому порті. Наприклад, у порті 1 на виході світлодільника матимемо: $P_{n_1} = \sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1 n_2}$.

3.6. Чисельні результати та їх аналіз

Зауважимо, що ми розглядаємо фактори стиснення в межах до значення $r = 1.5$ у нашому чисельному аналізі, оскільки на сьогоднішній день найбільший фактор стиснення, що було експериментально реалізовано, приблизно рівний $r = 1.3$ [25, 96].

3.6.1. Коефіцієнти розплутування. Чисельні результати для коефіцієнтів розплутування σ_T, σ_S, σ_1, σ_2 зображено на Рис. 3.2.

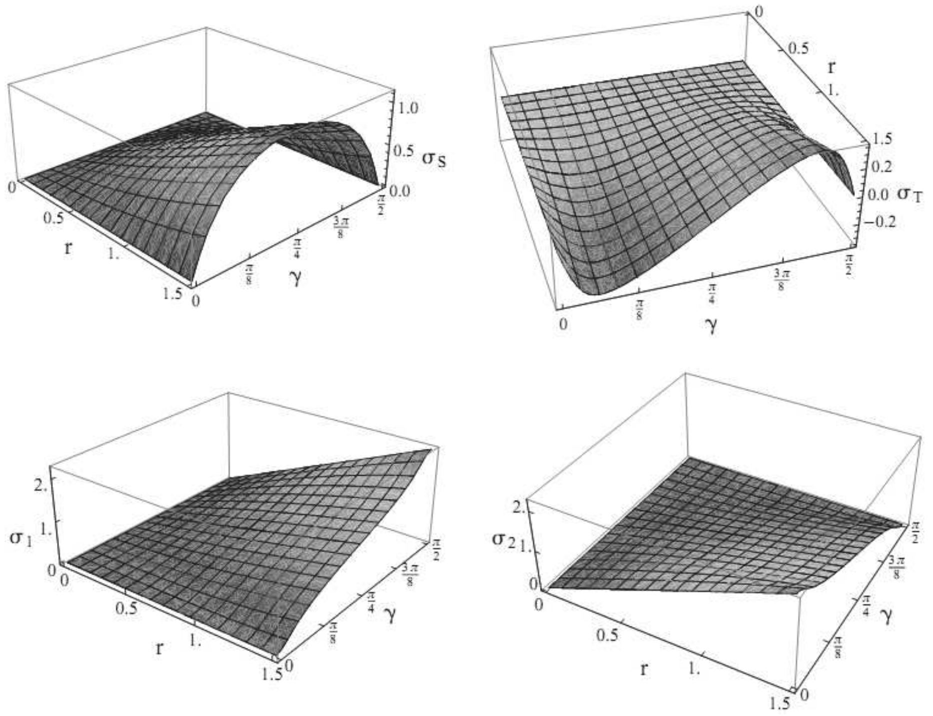

Рис. 3.2. Поверхні значень коефіцієнтів розплутування σ_1, σ_2, σ_S, і σ_T як функцій коефіцієнту розщеплення світлодільника γ та фактору стиснення r.

Рисунки чітко демонструють особливі випадки для значень коефіцієнтів розщеплення світлодільника: $\sigma_1 = r$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_S = 0$, $\sigma_T = 0$ при $\gamma = \pi/2$ та $\sigma_1 = r/2$, $\sigma_2 = r/2$, $\sigma_S = r/2$, $\sigma_T = 0$ при $\gamma = \pi/4$.

3.6.2. Розподіл ймовітностей на виході світлодільника при слабкому когерентному полі на вході світлодільника та коефіцієнтах розщеплення $\gamma = \pi/4$ і $\gamma = \pi/8$. Обчислювальні можливості звичайних комп'ютерів накладають обмеження на використання формули (3.33) для знаходження розподілу ймовірностей числа фотонів на виході світлодільника інтерферометра Майкельсона. Розрахунки було проведено для значення фактору когерентного стану $|\alpha|^2 = 20$, що відповідає слабкому когерентному полю (слабким вважаємо когерентний стан з малими $|\alpha|$, порядку 10-100) у вхідному порті 1 (мале $|\alpha|$) світлодільника інтерферометра.

Однак, аналітичні формули (3.9) та (3.11) дають можливість проаналізувати статистику фотонів для випадків як слабкого, так і сильного (великі $|\alpha|$: $|\alpha|$ порядку 1000 і більше) когерентного вхідного стану інтерферометра.

При використанні формули (3.33) обираємо отримане раніше значення фазового співвідношення $\theta - 2\phi = 0$, що дає мінімально можливу дисперсію (шум).

На Рис. 3.3 подано розподіли фотонів на виході порту 1 світлодільника, обчислені з (3.33) для слабкого когерентного поля ($|\alpha|^2 = 20$), введеного у вхідний порт 1. Коефіцієнт розщеплення світлодільника обрано $\gamma = \pi/4$; розподіли обчислено для різних значень фактору стиснення $r = 0,\ 0.3,\ 0.6,\ 0.9,\ 1.2,\ 1.5$ вхідного вакуумного стану у порті 2 світлодільника. Для $\gamma = \pi/4$ аналітично можна знайти $\sigma_1 = r/2$, $\sigma_2 = r/2$, $\sigma_S = r/2$, та $\sigma_T = 0$, і як наслідок, оператор заплутування $e^{\sigma_T \hat{t}_{12}}$ рівний одиниці. Для цього випадку ми спостерігаємо, що стиснення дещо

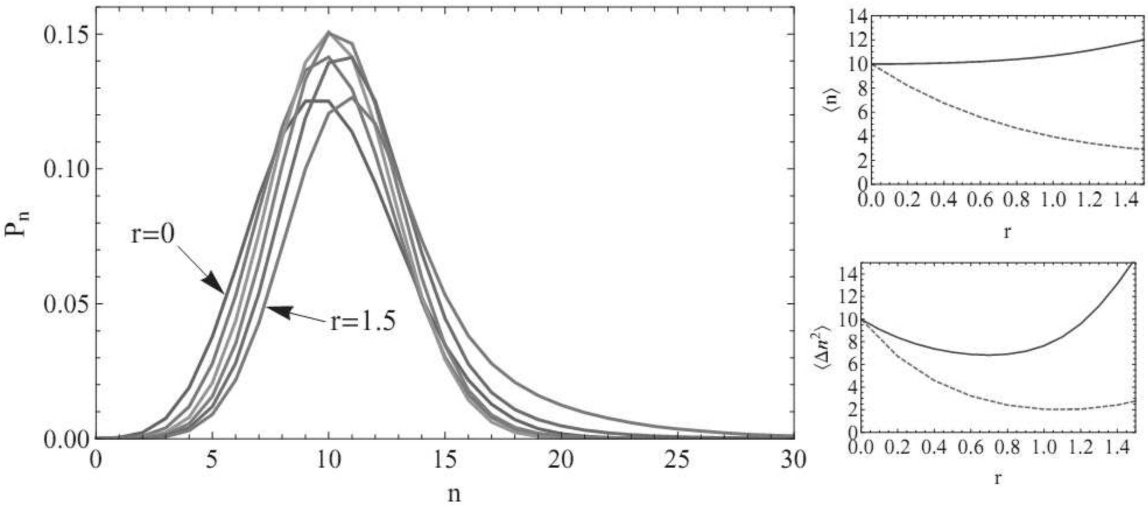

Рис. 3.3. Розподіли ймовірностей числа фотонів на виході світлодільника для $|\alpha|^2 = 20$, $\gamma = \pi/4$, при різних факторах стиснення $r = 0,\ 0.3,\ 0.6,\ 0.9,\ 1.2,\ 1.5$. Справо від рисунку наведено седеднє значення та дисперсію для розподілів як функцій фактору стиснення r (суцільні лінії). Пунктирні лінії відповідають розрахункам без факторів заплутування.

зменшує дисперсію (шум) розподілу на виході світлодільника для значень фактору, близьких до значення $r = 0.7$, та дещо зсуває середнє значення розподілу до значення із більшим числом фотонів. Отже, існує деяке оптимальне значення параметру стиснення, рівне приблизно $r = 0.7$, за якого ми спостерігаємо мале покращення статистики рахування (деяке зменшення дисперсії) шляхом стиснення вхідного вакуумного стану у порті 2 світлодільника.

Результати, наведені на Рис. 3.3 ясно показують, що для визначення статистики фотонів на виході світлодільника факторами заплутування нехтувати не можна. Тобто, для адекватного моделювання статистики фотонів на виході світлодільника інтерферометра ми маємо враховувати ефекти заплутування двох вхідних станів світлодільником.

Рис. 3.4 показує статистику фотонів у вихідному порті 1 світлодільника інтерферометра для випадку коефіцієнта розщеплення світлодільника

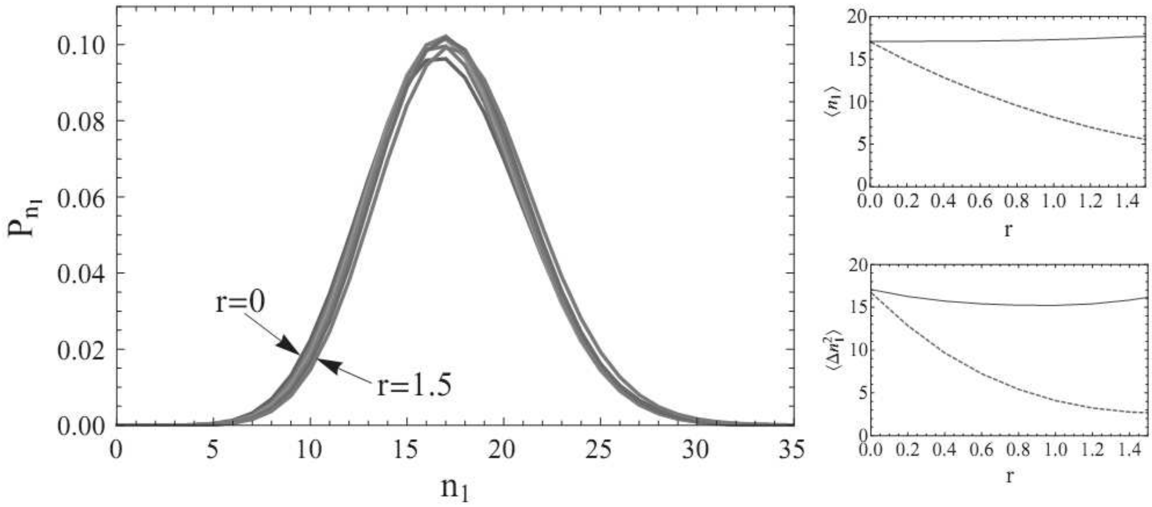

Рис. 3.4. Розподіли фотонів для $|\alpha|^2 = 20$, $\gamma = \pi/8$, при різних факторах стиснення $r = 0,\ 0.3,\ 0.6,\ 0.9,\ 1.2,\ 1.5$. Справа від рисунку наведено середнє значення та дисперсія для розподілів як функцій фактору стиснення r (суцільні лінії). Пунктирні лінії відповідають розрахункам без факторів заплутування.

$\gamma = \pi/8$ та $|\alpha|^2 = 20$ і $r = 0,\ 0.3,\ 0.6,\ 0.9,\ 1.2,\ 1.5$. Для такого значення параметру розщеплення γ нам необхідний повний чисельний розв'язок для коефіцієнтів заплутування, тобто, у цьому випадку обидва оператори заплутування $e^{\sigma_T \hat{t}_{12}}$ та $e^{\sigma_S \hat{s}_{12}}$ дають внесок у вихідну статистику.

З Рис. 3.4 ми бачимо, що стиснення дуже слабко впливає на розподіл. І середнє значення, і дисперсія не змінюються при стисненні. Рис. 3.4 показує, що розрахунки без факторів заплутування дають повністю неправдиве поліпшення статистики фотонів за рахунок введення стисненого вакууму на вході світлодільника.

3.6.3. Сильне когерентне поле на вході світлодільника та довільне γ. У випадку сильного когерентного поля (великі $|\alpha|$) потужність звичайних комп'ютерів є недостатньою для використання формули (3.33) і отримання розподілу ймовірностей числа фотонів. Однак, формули (3.9) для середнього числа фотонів та (3.11) для дисперсії розподілу дають можливість проаналізувати вихідні стани світлодільника у цьому випадку.

Ми приводимо результати для статистики фотонів у вихідному порті 1 світлодільника. Статистика для вихідного порту 2 отримується шляхом заміни $\gamma \to \pi/2 - \gamma$ у формулах для статистики у порті 1.

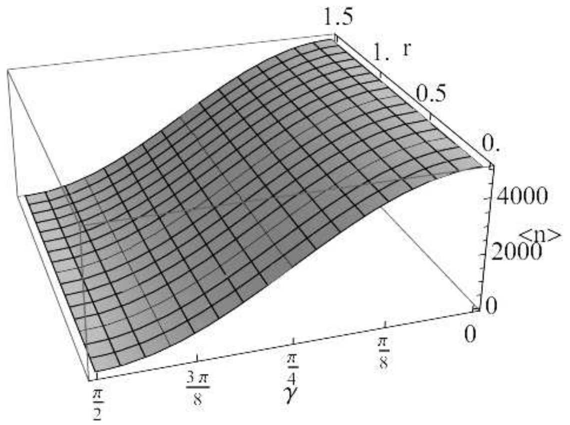

Рис. 3.5. Поверхня значень середнього числа розподілу фотонів $\langle n_1 \rangle$ у вихідному порті 1 світлодільника інтерферометра при сильному вхідному когерентному стані: $|\alpha|^2 = 5000$, $0 \leq r \leq 1.5$, $0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$.

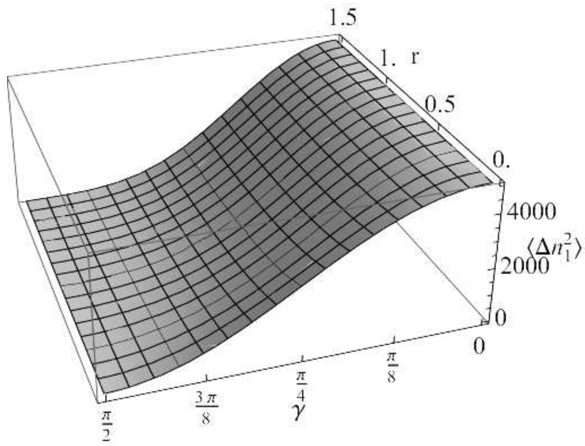

Рис. 3.6. Поверхня значень дисперсії розподілу фотонів $\langle n_1 \rangle$ у вихідному порті 1 світлодільника інтерферометра при сильному вхідному когерентному стані: $|\alpha|^2 = 5000$, $0 \leq r \leq 1.5$, $0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$.

На Рис. 3.5 та Рис. 3.6 зображено залежність середнього значення для розподілу числа фотонів та дисперсії на виході світлодільника інтеферометра для сильного вхідного когерентного поля $|\alpha|^2 = 5000$ та для можливих значень коефіцієнту розщеплення світлодільника $0 < \gamma < \pi/2$ і фактору стиснення $0 \leq r \leq 1.5$. Як бачимо, стиснення практично не впливає на середнє значення розподілу та дещо зменшує дисперсію.

3.6.4. Чисельна оцінка зменшення шуму та підсилення сигналу.

Дамо чисельні оцінки підсилення сигналу (середнього значення числа фотонів) та зменшення шуму (дисперсії) за рахунок стиснення вхідного вакуумного стану для випадку сильного когерентного поля (велике α) у порті 1 на вході світлодільника інтерферометра Майкельсона.

Нагадаємо отримані раніше формули для середнього значення та дисперсії вихідного сигналу у порті 1 світлодільника інтерферометра:

$$\langle \hat{n}_1^{out} \rangle = |\alpha|^2 \cos^2\gamma + \operatorname{sh}^2 r \sin^2\gamma, \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}(\Delta\hat{n}_1^{out})^2 = |\alpha|^2 \cos^4\gamma + 2\operatorname{ch}^2 r \operatorname{sh}^2 r \sin^4\gamma + \sin^2\gamma\cos^2\gamma \operatorname{sh}^2 r + \\ + \sin^2\gamma\cos^2\gamma|\alpha|^2(\operatorname{ch}^2 r + \operatorname{sh}^2 r - 2\operatorname{sh} r \operatorname{ch} r \cos(\theta - 2\phi)).\end{aligned} \tag{3.36}$$

Для мінімізації дисперсії обираємо значення фазового співвідношення: $\theta - 2\phi = 0$. Проаналізуємо випадок світлодільника $\gamma = \pi/4$, тобто світлодільник ділить вхідний пучок на два з однаковою інтенсивністю. При $\gamma = \pi/4$ маємо:

$$\langle \hat{n}_1^{out} \rangle = \frac{1}{2}|\alpha|^2 + \frac{1}{2}\operatorname{sh}^2 r, \tag{3.37}$$

$$(\Delta\hat{n}_1^{out})^2 = \frac{1}{2}|\alpha|^2 \operatorname{ch} r(\operatorname{ch} r - \operatorname{sh} r) + \frac{1}{4}(2 + \operatorname{ch} 2r)\operatorname{sh}^2 r. \tag{3.38}$$

Для випадку сильного когерентного поля (велике $|\alpha|$) другими доданками у правих частинах рівнянь (3.37) та (3.38) можна знехтувати. Середнє значення і дисперсія тоді будуть виглядати наступним чином:

$$\langle \hat{n}_1^{out} \rangle \simeq \frac{1}{2}|\alpha|^2, \tag{3.39}$$

$$(\Delta \hat{n}_1^{out})^2 \simeq \frac{1}{2}|\alpha|^2 \frac{1+e^{-2r}}{2}. \tag{3.40}$$

Як бачимо з (3.39), стиснення не впливає на зміну середнього значення розподілу. На дисперсію ж стиснення впливає наступним чином. Для випадку $r = 0$ (стиснення відсутнє):

$$(\Delta \hat{n}_1^{out})^2 = \frac{1}{2}|\alpha|^2. \tag{3.41}$$

Для достатньо великого стиснення $r = 1$:

$$(\Delta \hat{n}_1^{out})^2 \approx \frac{1}{2}|\alpha|^2 \times 0.57. \tag{3.42}$$

Тепер оцінимо зменшення шуму у відсотках. Під величиною шуму будемо розуміти ширину розподілу ймовірностей, яка в свою чергу визначається середньоквадратичним відхиленням розподілу, пов'язаним із дисперсією: $\sigma = \sqrt{(\Delta \hat{n}_1^{out})^2}$

$$\sigma(r = 0) = |\alpha|\frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{3.43}$$

$$\sigma(r = 1) = |\alpha|\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{0.57}, \tag{3.44}$$

$$\frac{\sigma(r = 1)}{\sigma(r = 0)} \simeq 0.75. \tag{3.45}$$

Тобто, стиснення вхідного вакуумного стану у порті 2 світлодільника із фактором стиснення $r = 1$ зменшує ширину розподілу на виході світлодільника на величину порядку 25%. Це є відомий в літературі [16] результат для 50/50 світлодільника, і розрахунки в нашій моделі підтверджують цей результат.

3.7. Темний порт інтерферометра та сильне вхідне когерентне поле

3.7.1. Аналітичні формули для розподілу ймовірностей, середнього значення та дисперсії числа фотонів. Випадок темного порту інтерферометра відповідає значенню коефіцієнта розщеплення світлодільника $\gamma = \pi/2 - \delta$, де δ – достатньо мале. При такому γ практично всі фотони від вхідного когерентного поля прямують до вихідного порту 2 світлодільника, і лише мала частина, пропорційна δ прямує до вихідного порту 1. Цей порт через малу кількість фотонів в порівнянні з другим, називають темним.

При розплутуванні вихідного стану інтерферометра було знайдено коефіцієнти розплутування шляхом розкладання рівнянь лінійно по δ

$$\sigma_1 = r, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_S = -\delta \operatorname{sh} r, \quad \text{and} \quad \sigma_T = \delta(1 - \operatorname{ch} r). \tag{3.46}$$

Ми розглядаємо випадок сильного когерентного поля у вхідному порті 1 світлодільника інтерферометра. У цьому випадку можна оператори $\hat{b}_2$ та $\hat{b}_2^\dagger$ замінити у факторах заплутування у (3.4) їх очікуваними значеннями α та α^*, відповідно. Вихідний стан тоді можна записати

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = \hat{D}_1(-\alpha\delta(1-\operatorname{ch} r))\hat{D}_1(-\delta\alpha^* e^{i\theta} \operatorname{sh} r)\hat{S}_1(\zeta)\hat{D}_1(-\alpha\delta)\hat{D}_2(\alpha)|0,0\rangle, \tag{3.47}$$

де $\zeta = r e^{i\theta}$. Оператори з індексом 1 можна об'єднати використовуючи співвідношення [23]

$$\begin{aligned} \hat{D}(\alpha_2)\hat{D}(\alpha_1) &= \hat{D}(\alpha_1 + \alpha_2) \exp\left[\frac{1}{2}(\alpha_2\alpha_1^* - \alpha_2^*\alpha_1)\right], \\ \hat{D}(\alpha)\hat{S}(\zeta) &= \hat{S}(\zeta)\hat{D}(\alpha \operatorname{ch} r + \alpha^* e^{i\theta} \operatorname{sh} r). \end{aligned} \tag{3.48}$$

В результаті отримуємо

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = e^{i|\alpha|^2\delta^2\Delta}\hat{S}_1(\zeta)\hat{D}_1(\tilde{\alpha})\hat{D}_2(\alpha)|0,0\rangle, \tag{3.49}$$

де $\alpha = |\alpha|\mathrm{e}^{i\phi}$ та

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= -\alpha\delta \operatorname{ch} r - \alpha^* \delta \mathrm{e}^{i\theta} \operatorname{sh} r, \\ \Delta &= \frac{1}{2} \sin(\theta - 2\phi) \operatorname{sh}(2r). \end{aligned} \tag{3.50}$$

Як видно з рівняння (3.49), на виході світлодільника маємо сильний когерентний стан з параметром когерентного стану α, що виходить через порт 2 світлодільника та слабкий стиснений когерентний стан з параметром когерентного стану $\tilde{\alpha}$ і параметром стиснення ζ виходить через порт 1 світлодільника.

Як і в загальному випадку, для визначення розподілу ймовірностей вихідного стану, ми застосовуємо фоківське представлення:

$$P_{n_1} = \frac{1}{n_1!} \left| f_{n_1}(\zeta, \tilde{\alpha}) \right|^2, \tag{3.51}$$

де коефіцієнти $f_n(\zeta, \tilde{\alpha})$ дано у формулі (3.29).

Середнє значення числа фотонів та дисперсію розподілу можна отримати аналітично [95]:

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_1 \rangle &= |\alpha|^2 \delta^2 + \operatorname{sh}^2 r, \\ (\Delta \hat{n}_1)^2 &= |\alpha|^2 \delta^2 (\operatorname{ch}(2r) - \cos(\theta - 2\phi) \operatorname{sh}(2r)) + 2 \operatorname{sh}^2 r \operatorname{ch}^2 r. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Зауважимо, що середнє значення не залежить від фаз θ та ϕ, але дисперсія залежить.

Зауважимо також, що той самий результат для середнього та дисперсії можна отримати з формул (3.9) і (3.11) шляхом підстановки $\gamma = \pi/2 - \delta$ та потім розкладанням в ряд по δ. Це свідчить про правильність розрахунків та еквівалентність обраних методів знаходження середнього значення та дисперсії розподілу.

3.7.2. Чисельні результати та їх фізична інтерпретація. З формул (3.51) та (3.52) видно, що середнє розподілу фотонів не залежить від фаз θ і ϕ, але дисперсія залежить від фазового співвідношення $\theta - 2\phi$. Очевидно, що вибір $\theta - 2\phi = 0$ є оптимальним для мінімізації фотонного шуму.

Підставляючи $\theta - 2\phi = 0$ до (3.52) отримуємо

$$\begin{aligned} \langle n_1 \rangle &= \delta^2 |\alpha|^2 + \operatorname{sh}^2 r, \\ (\Delta n_1)^2 &= \delta^2 |\alpha|^2 \mathrm{e}^{-2r} + 2 \operatorname{sh}^2 r \operatorname{ch}^2 r. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Для сильного вхідного когерентного стану (велике $|\alpha|$) та для експериментально досяжних значень фактору стиснення (r не перевищує 1.3) другими доданками в обох виразах можна знехтувати. Отже, підсилення сигналу у вихідному порті 1 світлодільника шляхом стиснення вхідного вакуумного стану не є можливим.

Однак, ширина розподілу $\sigma = \sqrt{(\Delta n_1)^2}$ звужується пропорційно e^{-r} із збільшенням фактору стиснення r. Зокрема, при достатньо великому стисненні $r = 1$ маємо:

$$\frac{\sigma(r=1)}{\sigma(r=0)} \simeq 0.37, \tag{3.54}$$

а значить ширина зменшується на величину порядку 60%.

На Рис. 3.7 показано для випадку $\theta - 2\phi = 0$ та $|\delta\alpha|^2 = 500$ розподіл числа фотонів на виході світлодільника, обчислений за допомогою формули (3.51). Додатково ми визначаємо середнє значення та дисперсію цих розподілів з рівнянь (3.53). Зауважимо, що для великих значень параметру стиснення розподіли демонструють характерні осциляції [95].

3.8. Висновки розділу

У даному розділі дисертаційної роботи представлено результати вивчення квантового шуму у вихідному сигналі світлодільника інтерферометра

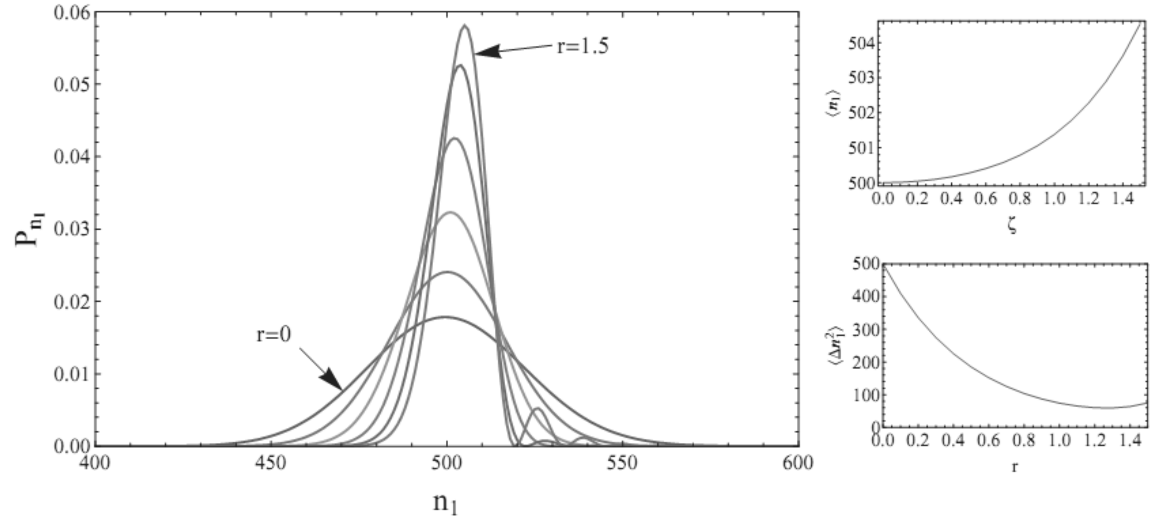

Рис. 3.7. Розподіли фотонів у темному порті інтерферометра для $|\delta\alpha|^2 = 500$, $\theta = 2\phi$, при різних факторах стиснення $r = 0,\ 0.3,\ 0.6,\ 0.9,\ 1.2,\ 1.5$. Справа від рисунку наведено середнє значення та дисперсію для розподілів як функції фактору стиснення r.

Майкельсона. Отримано аналітичну формулу для обчислення розподілу ймовірностей числа фотонів на виході світлодільника, а також формули для середнього значення та дисперсії розподілу. Окремо проведено розширений аналіз випадку темного порту інтерферометра.

Розрахунки показують, що підсилення вихідного сигналу у світлодільнику інтерферометра Майкельсона шляхом стиснення вхідного вакуумного стану призводять до одночасного збільшення квантово-механічного шуму в розподілі числа фотонів. Підсилення вихідного сигналу можна досягти лише за рахунок подачі більш інтенсивного (із більшим $|\alpha|$) когерентного стану на вході світлодільника.

Спостерігається, що для сильного когерентного стану у вхідному порті 1 світлодільника інтерферометра, при подачі стисненого вакуумного стану у вхідний порт 2, статистика рахування фотонів на виході дещо поліпшується в сенсі зменшення дисперсії. Наприклад, для випадку 50/50 світлодільника при прально обрано значенні параметра стиснення можна досягти зменшення ширини вихідного сигналу на величину порядку 25%.

Виявлено, що для випадку темного порту інтерферометра стиснення також не впливає істотно на середнє значення розподілу числа фотонів на виході темного порту світлодільника інтерферометра Майкельсона, тобто підсилення сигналу немає. Підсилення сигналу можна досягти тільки при збільшенні інтенсивності вхідного когерентного стану, тобто при збільшенні $|\alpha|$. Показано, як стиснення дозволяє зменшити шум: для фактору стиснення порядку $r \sim 1$ зменшення фотонного шуму (зменшення ширини розподілу) маємо більше ніж на 50%.

Аналіз показав, що середнє значення розподілу числа фотонів на виході інтерферометра Майкельсона не залежить від фаз θ (фаза параметру стиснення) та ϕ (фаза параметру когерентного стану), але дисперсія розподілу залежить від фазового співвідношення $\theta - 2\phi$. Найкращим вибором для досягнення мінімально можливого фотонного шуму у вихідному сигналі інтерферометра є $\theta - 2\phi = 0$.

Добре розуміння квантових шумів у інтерферометричних детекторах гравітаційних хвиль дає змогу суттєво підвищити точність виміру зсуву тестових мас в детекторі, і тим самим наблизити до розв'язку задачі пошуку гравітаційних хвиль. Результати для випадку темного порту інтерферометра можуть бути безпосередньо використані для зменшення квантового шуму у вихідному сигналі інтерферометра Майкельсона, та власне в експериментах по детектуванню гравітаційних хвиль.

РОЗДІЛ 4

Квантові кореляції двофотонних поляризаційних станів

4.1. Передмова

Одним з основних питань в теорії квантової заплутаності є питання: чи даний квантово-механічний стан є заплутаним? Для теоретичної оцінки станів на наявність заплутаності в станах для відомої хвильової функції (для чистих станів) або матриці густини (для мішаних станів) в теорії заплутаності розроблено серію відповідних критеріїв сепарабельності. Часто буває, що для реального, приготованого в експерименті стану, ми не володіємо повною інформацією про його матрицю густини, однак нас цікавить відповідь на питання, чи присутня заплутаність в даному стані. Оскільки заплутані стани порушують нерівності Белла, то порушення нерівностей Белла можна взяти за базовий інструмент детектування заплутаності в експериментальних квантово-механічних станах.

В реальних системах чисті заплутані стани стають мішаними через наявність різних типів шумів. Під шумами розуміють некогерентні домішки деяких станів (в залежності від типу шуму) до чистого заплутаного стану. Треба дослідити, за якого співвідношення заплутаного стану та шуму в реальному мішаному стані присутність заплутаності все ще можна виявити.

Найбільш вивченою в теорії заплутаності є двочастинкова заплутаність. Даний розділ дисертації присвячено дослідженню двофотонних поляризаційно заплутаних станів (що належать до класу двочастинкової заплутаності), утворених в процесі параметричної вниз-конверсії типу II (PDC type II) [49]. Параметрична вниз-конверсія типу II є нелінійним оптичним процесом, при якому на нелінійний оптичний кристал падає один фотон, і в результаті якого утворюється вже пара фотонів в заплутаному по поляризації стані. Наприклад, заплутаним є стан $|\Psi\rangle = |H\rangle|V\rangle + |V\rangle|H\rangle$, де $|H\rangle$ та $|V\rangle$ – горизонтальна і вертикальна поляризації фотонів. Таке джерело заплутаності набуло широкого використання в експериментах по заплутаності, оскільки такі фотони легко отримати експериментально та зручно застосовувати для подальших задач, наприклад для задач квантової комунікації.

Зрозуміло, що реальні стани, утворені в процесі параметричної вниз-конверсії типу II, не будуть чистими заплутаними станами, а будуть зашумленими, тобто мішаними, через наявність шуму у станах. Постає питання про можливість виявлення заплутаності в реальному стані пари фотонів, утворених у PDC процесі типу II, в залежності від співвідношення чистого заплутаного стану та шуму у суміші. Отже, задачами дослідження четвертого розділу дисертації є:

- проведення аналізу на сепарабельність (незаплутаність) та несепарабельність (заплутаність) станів, утворених в процесі параметричної вниз-конверсії типу II в залежності від вмісту шуму у стані;
- знаходження, використовуючи нерівність Белла, умов експериментального виявлення заплутаності в двофотонних поляризаційних станах в залежності від вмісту шуму у стані.

4.2. Узагальнена модель шуму

Фотони з вертикальною та горизонтальною поляризацією можна розглядати як кубіти (квантові системи з двома означеними базисними станами). У попередніх роботах [84, 85] по дослідженню поляризаційних станів пари фотонів, утворених в процесі параметричної вниз-конверсії типу II, розглядали дві різні моделі опису станів при наявності шуму, а саме модель білого та модель кольорового шуму.

У даній дисертаційній роботі для опису станів пари фотонів, утворених в процесі параметричної вниз-конверсії типу II, пропонується модель, що враховує одночасно присутність цих двох типів шуму у стані. Оператор густини в такій узагальненій моделі можна представити у вигляді:

$$\hat{\rho}_{CW} = p|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + \frac{r}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) + \frac{1-(p+r)}{4}\hat{I}. \qquad (4.1)$$

де $\hat{I}$ – 4×4 одинична матриця, стани $|0\rangle$ і $|1\rangle$ є базисними станами, відповідно горизонтальною та вертикальною поляризацією фотонів. Змінюючи параметр p – параметр чистого заплутаного стану, в межах від 0 до 1, можна змінювати частку чистого заплутаного стану $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ у (4.1), та змінюючи r – параметр кольорового шуму в межах від 0 до $(1-p)$, при фіксованому значенні p, можна керувати частками кольорової та білої складової шуму у стані.

Вираз $\frac{1}{4}\hat{I}$ має назву білого шуму, оскільки в такому стані (домішку) присутні всі базисні стани з однаковими ваговими коефіцієнтами (для двокубітових систем коефіцієнт дорівнює $\frac{1}{4}$). Вираз $\frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)$ має назву кольорового шуму, оскільки в такому стані одні базисні стани мають перевагу (більші вагові коефіцієнти) над іншими базисними станами. Характер, тобто конкретний вигляд кольорового шуму визначається умовами експерименту.

При $r = 1 - p$ ми отримуємо випадок відсутності білого шуму, тобто модель кольорового шуму, що відповідає наступній матриці густини:

$$\hat{\rho}_C = p|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + \frac{1-p}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|). \qquad (4.2)$$

Для $r = 0$ маємо випадок відсутності кольорової складової шуму, або модель білого шуму:

$$\hat{\rho}_W = p|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + \frac{1-p}{4}\hat{I}. \tag{4.3}$$

Ці стани називають станами Вернера [97].

Отже, узагальнена модель шуму містить в собі модель кольорового та модель білого шуму, як частинні випадки.

4.3. Характеристика заплутаності двофотонних поляризаційних станів. Умова сепарабельності

Розглянемо спочатку загальну структуру матриці густини (4.1). У представленні базисних станів $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ матриця густини має вигляд

$$\rho_{CW} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(p+r+1) & 0 & 0 & \frac{1}{2}p \\ 0 & \frac{1}{4}(1-p-r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(1-p-r) & 0 \\ \frac{1}{2}p & 0 & 0 & \frac{1}{4}(p+r+1) \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

в той час як у представленні станів Белла $\{\ |\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle),\quad |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle),\quad |\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle),\quad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)\ \}$ вона є діагональною:

$$\rho_{CW}^{diag} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(1+3p+r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(1-p+r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(1-p-r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}(1-p-r) \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Числа λ_i, що стоять по діагоналі, є власними значеннями матриці густини (4.4).

Отже, (4.1) можна представити мовою проекційних операторів на стани Белла:

$$\begin{aligned}\rho_{CW} = \frac{1}{4}(1+3p+r)|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + \frac{1}{4}(1-p+r)|\Phi^-\rangle\langle\Phi^-| + \\ +\frac{1}{4}(1-p-r)|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| + \frac{1}{4}(1-p-r)|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Для $p = 0$ та $r = 0$ всі базисні стани входять у (4.6) з однаковими ваговими коефіцієнтами $W = \frac{1}{4}$, тобто, оператор густини пропорційний одиничному оператору, та для $p = 1$, $r = 0$: $\rho_{CW} = |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|$ маємо чистий заплутаний стан.

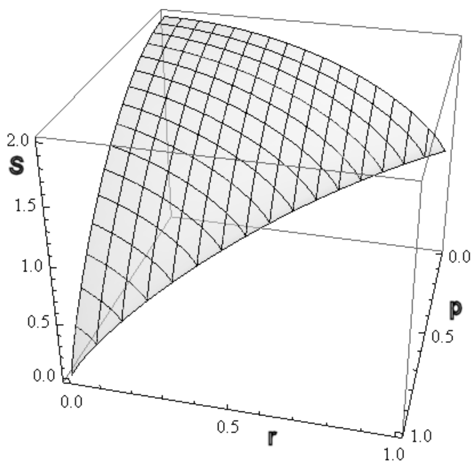

Рис. 4.1. Поверхня значень ентропії фон Неймана для матриці густини (4.1) в залежності від значень параметрів p та r.

Ентропія стану. На Рис. 4.1 представлено залежність ентропії фон Неймана [42] як функції параметрів (p,r): $S(\rho_{CW}) = S(p,r) = -Tr(\rho \log_2 \rho) = -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i$.

Для $p = 1$, $r = 0$ ентропія фон Неймана рівна нулю, та для $p = 0$ (стан чистий, тобто найбільш визначений), $r = 0$ досягає найбільшого значення $S_{max} = 2$ (стан нійбільш невизначений – білий шум).

Критерій Переса-Городецького. Стан $\hat{\rho}_{CW}$ є мішаним станом. Застосуємо відомий критерій сепарабельності Переса-Городецького до стану

$\hat{\rho}_{CW}$.

Згідно критерію Переса-Городецького [81, 82] для систем, що складаються з двох підсистем з розмірностями $m \times n \leq 6$, де m та n – розмірності першої та другої підсистем, відповідно, необхідною і достатньою умовою сепарабельності стану є умова невід'ємності всіх власних значень матриці густини ρ^{T_A}, де ρ^{T_A} є матриця густини, отримана з (4.4) шляхом часткового транспонування матриці по станах першої підсистеми.

Матриця, отримана з (4.4) шляхом часткового транспонування по станах першої підсистеми, виглядає наступним чином:

$$\rho^{T_A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(p+r+1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(1-p-r) & \frac{1}{2}p & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}p & \frac{1}{4}(1-p-r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}(p+r+1) \end{pmatrix}, \qquad (4.7)$$

та після діагоналізації:

$$\rho^{T_A}_{diag} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(p+r+1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(1+p+r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(1+p-r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}(1-3p-r) \end{pmatrix}. \qquad (4.8)$$

Тут власні значення $\lambda_1^T = \frac{1}{4}(1+p+r)$, $\lambda_2^T = \frac{1}{4}(1+p+r)$, $\lambda_3^T = \frac{1}{4}(1+p-r)$, $\lambda_4^T = \frac{1}{4}(1-3p-r)$ подані у такому порядку, що вони задовольняють нерівність:

$$\lambda_1^T \geq \lambda_2^T \geq \lambda_3^T \geq \lambda_4^T. \qquad (4.9)$$

Оскільки ρ_{CW} у (4.1) має сенс лише для $0 \leq p \leq 1$, $0 \leq p+r \leq 1$, то λ_1^T, λ_2^T, λ_3^T є невід'ємними для будь-яких допустимих p та r, однак λ_4^T від'ємне для $3p+r > 1$.

Отже, у випадку, що розглядається в даній роботі, стан (4.1) сепарабельний, і тому незаплутаний, за наступних умов:

$$\begin{cases} 3p + r < 1, \\ 0 < p < 1, \\ 0 < p + r < 1. \end{cases} \tag{4.10}$$

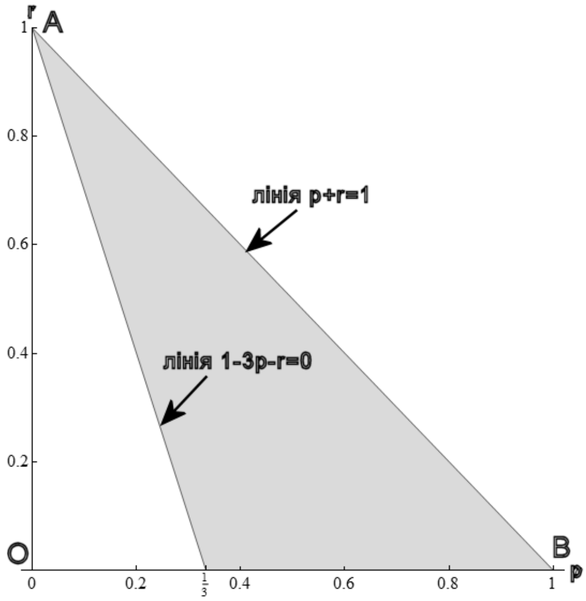

Рис. 4.2. Заштрихована область відповідає множині значень параметрів p та r, для яких стан (4.1) є несепарабельним, тобто заплутаним.

На Рис. 4.2 заштрихована область у трикутнику OAB відповідає несепарабельним (заплутаним) станам. Для фіксованого значення $p < \frac{1}{3}$ сепарабельний стан може стати несепарабельним, якщо збільшувати частку кольорового шуму, в той час як зменшувати частку білого шуму (шляхом збільшення значення параметру r). Для станів Вернера ($r = 0$) маємо добре відомий результат [97]: стан сепарабельний при $p < \frac{1}{3}$.

Для $p + r = 1$ (за відсутності білого шуму) маємо $\lambda_4^T = -\frac{1}{2}p < 0$, що відповідає відомому твердженню [84] , що за присутності деякої частки кольорового шуму та одночасно за відсутності білого шуму стан (4.1) стан лишається заплутаним (несепарабельним).

Приведені (редуковані) матриці густини першої та другої підсистем для стану (4.1) пропорційні одиничній матриці: $\rho^A = \frac{1}{2}\hat{I}$, $\rho^B = \frac{1}{2}\hat{I}$ та не залежать від p і r. Тобто, вимірювання поляризаційного стану окремого фотона у (4.1) у будь-якому ортогональному базисі дає один і той самий результат.

Критерій мажорування. Тепер ми застосуємо критерій мажорування [83] до стану (4.1).

Згідно критерію, якщо матриця густини ρ сепарабельна, то виконується наступна умова:

$$\lambda_\rho^\downarrow \prec \lambda_{\rho_A}^\downarrow \quad \text{і} \quad \lambda_\rho^\downarrow \prec \lambda_{\rho_B}^\downarrow, \tag{4.11}$$

де $\lambda_\rho^\downarrow$ позначає вектор, компоненти якого є власними значеннями матриці ρ, і розташовані у незростаючому порядку, і кажуть, що вектор $x^\downarrow$ мажорований вектором $y^\downarrow$, якщо $\sum_{i=1}^k x_i^\downarrow \leq \sum_{i=1}^k y_i^\downarrow$, $k = 1, 2, 3, \ldots, d$, де d – розмірність Гільбертового простору станів та рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $k = d$.

У нашому випадку

$$x^\downarrow = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}, \qquad y^\downarrow = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

де $\lambda_1 = \frac{1}{4}(1+3p+r)$, $\lambda_2 = \frac{1}{4}(1-p+r)$, $\lambda_3 = \frac{1}{4}(1-p-r)$, $\lambda_4 = \frac{1}{4}(1-p-r)$, і згідно критерію мажорування:

$$\begin{cases} \lambda_1 < \frac{1}{2} \\ \lambda_1 + \lambda_2 < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 + 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3p + r < 1 \\ p + r < 1 \\ p + r < 1 \\ 1 = 1 \end{cases}.$$

Друга та третя нерівності завжди задовольняються, якщо виконується перша. Тому, стан (4.1) сепарабельний, якщо задовольняється нерівність $3p + r < 1$.

Отже, умови сепарабельності стану $\hat{\rho}_{CW}$, отримані за критерієм Переса-Городецького та критерієм мажорування, як і очікувалося, виявилися однаковими: $3p + r < 1$ (для допустимих значень параметрів p та r). Результат зображено графічно на Рис. 4.2. Даний результат дозволяє теоретично передбачити для завчасно відомих значень параметра чистого заплутаного стану p та параметра кольорового шуму r, чи даний поляризаційний стан пари фотонів буде заплутаний, тобто несепарабельний, або даний стан буде сепарабельний, тобто незаплутаний.

4.4. Аналіз стійкості порушення нерівностей Белла

Відомий факт в теорії заплутаності, що заплутані стани порушують нерівності Белла. Тому порушення нерівностей Белла заплутаними станами ми використовуємо в якості інструменту детектування, виявлення заплутаності в квантово-механічних станах. Оскільки розглядаються заплутані стани в присутності шумів, то виникає питання про стійкість порушення нерівностей Белла щодо шумів. Під стійкістю порушення розуміється випадок, коли за великого вмісту шуму у стані нерівність Белла все ще порушується цим станом.

Розглянемо умови виявлення заплутаності у стані (4.1) за допомогою нерівностей Белла. Використовуємо нерівності Белла у формі Клаусера-Хорна-Шимоні-Хольта (CHSH формі) [78], що є зручною для експериментальної перевірки на порушення цих нерівностей заплутаним станом.

Нерівність Белла у CHSH формі:

$$|\beta| \leq 2, \tag{4.12}$$

де

$$\beta = -\langle A_0 B_0 \rangle - \langle A_0 B_1 \rangle - \langle A_1 B_0 \rangle + \langle A_1 B_1 \rangle \tag{4.13}$$

є значенням оператора Белла [44]. Вирази $\langle A_i B_j \rangle$ у (4.13) є середніми значеннями кореляційних функцій від значень вимірюваних величин по стану.

Для аналізу порушення нерівностей Белла (4.12), окремо в станах тільки з білим шумом (4.3) та тільки кольоровим шумом (4.2), у роботі Кабелло [84] були взяті наступні однокубітові спостережувані:

$$\begin{cases} A_0 = \sigma_z, \\ A_1 = \cos(\theta)\sigma_z + \sin(\theta)\sigma_x, \\ B_0 = \cos(\phi)\sigma_z + \sin(\phi)\sigma_x, \\ B_1 = \cos(\phi - \theta)\sigma_z + \sin(\phi - \theta)\sigma_x, \end{cases} \tag{4.14}$$

де параметри θ та ϕ у (4.14) визначаються орієнтацією аналізаторів у експериментальних пристроях, σ_x та σ_z є звичайні матриці Паулі.

Після квантово-механічного усереднення отримується вираз для значення оператору Белла β_{CW}, що відповідає однокубітовим спостережуваним (4.14), він є функцією чотирьох параметрів:

$$\begin{aligned} \beta_{CW}(p, r, \theta, \phi) = \cos(\phi)[(2p + r)(\sin^2(\theta) + \cos(\theta)) + \\ + r\cos(\theta)] - \sin(\phi)(2p + r)[\cos(\theta) - 1]\sin(\theta). \end{aligned} \tag{4.15}$$

За відсутності кольорового шуму ($r = 0$) маємо:

$$\beta_W(p, \theta, \phi) = 2p\{\cos(\phi)[\sin^2(\theta) + \cos(\theta)] - \sin(\phi)[\cos(\theta) - 1]\sin(\theta)\}, \tag{4.16}$$

та за відсутності білого шуму ($r = 1 - p$):

$$\beta_C(p, \theta, \phi) = \cos(\phi)[(1+p)\sin^2(\theta) + 2\cos(\theta)] - \sin(\phi)(1+p)[\cos(\theta) - 1]\sin(\theta). \tag{4.17}$$

Для фіксованих значень параметрів p та r вираз (4.15) є функцією від θ та ϕ. Розв'язуючи задачу на екстремум функції двох змінних, можна знайти як максимальні значення $\beta_{CW}^{max}(p, r)$, так і значення кутів θ і ϕ, що забезпечують максимум $\beta_{CW}(p, r)$.

Розрахунки показали, що для стану Вернера (4.3) (випадок $r = 0$) максимальне значення β як функції параметру p, наступне:

$$\beta_{max}(p) = 2\sqrt{2}p \tag{4.18}$$

та для всіх значень p максимальне значення β отримується при $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\phi = \frac{\pi}{4}$.

Отже, нерівність Белла (4.12) порушується тільки при $p > 1/\sqrt{2} \approx 0.707$. Це підтверджує, що у випадку, коли до заплутаного стану $|\Phi^+\rangle$ додається тільки білий шум, присутність заплутаності можна виявити тільки при частці шуму меншій за $\sim 29\%$.

У присутності тільки кольорового шуму (4.2) (випадок $r = 1 - p$) максимальне значення β для різних значень p досягається при різних значеннях кутів θ і ϕ. Найбільш цікавим фактом є те, що стан (4.2) порушує CHSH-нерівність для всіх значень $0 < p \leq 1$. Отже, порушення нерівностей Белла надзвичайно стійке до кольорової складової шуму.

Результати, отримані для даних частинних випадків, співпадають з результатами, отриманими в попередніх роботах [84], де досліджувались окремо модель білого та модель кольорового шуму.

На Рис. 4.3 заштрихована область графічно зображує множину (поверхню) максимальних значень оператора Белла $\beta_{CW}^{max}(p, r)$ як функцію двох змінних p і r. Для порівняння наведено площину $\beta = 2$, яка відповідає границі нерівності Белла (класичній межі). Частина поверхні, що знаходиться над площиною $\beta = 2$, є областю порушення нерівності Белла, тобто умовою виявлення заплутаності у даному стані.

На Рис. 4.4 зображено множину ізоліній $\beta^{max} = const$ на (p, r)-площині.

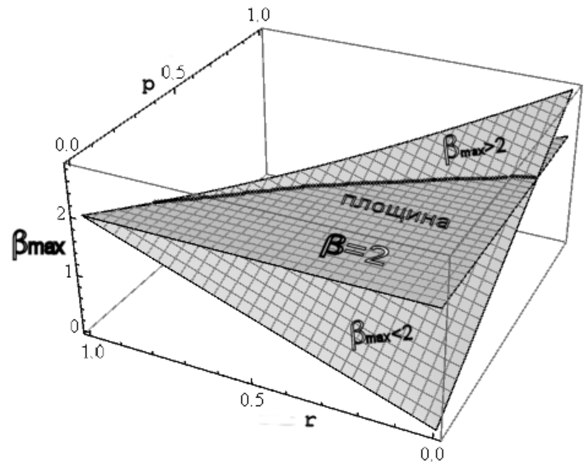

Рис. 4.3. Поверхня максимальних значень оператора Белла, та площина $\beta_{CW} = 2$, що відповідає класичній межі.

З рисунку видно, що пряма лінія $p+r = 1$ (випадок відсутності білої складової шуму) повністю лежить в області $\beta^{max} > 2$, що відповідає тому факту, що порушення нерівностей Белла є дуже стійким до кольорової складової шуму. Для $r = 0$ (випадок відсутності кольорової складової шуму) нерівність Белла порушується тільки при $p > 1/\sqrt{2}$. Для будь-якого фіксованого p (параметр чистого заплутаного стану) значення β_{CW}^{max} зменшується із збільшенням частки білої складової шуму. Отже, як і очікувалося, шляхом зміни співвідношення часток білої складової шуму та кольорової в бік збільшення білої складової можна досягти кращого узгодження теоретично обрахованих значень β^{max} з відповідними експериментальними значеннями. Порушення нерівностей Белла нестійке щодо збільшення частки білої складової шуму для фіксованого загального вмісту шуму.

На Рис. 4.5 зображено залежність $\beta_{CW}^{max}(p, r)$ від значення p для двох граничних випадків: $r + p = 1$ відповідає відсутності білого шуму (верхня крива) та $r = 0$ відповідає відсутності кольорового шуму (нижня штрихована пряма лінія). Залежності β^{max} від p і r для цих граничних випадків співпадають з отриманими в роботі [84].

На Рис. 4.6 зображено значення кутів θ і ϕ, що забезпечують максималь-

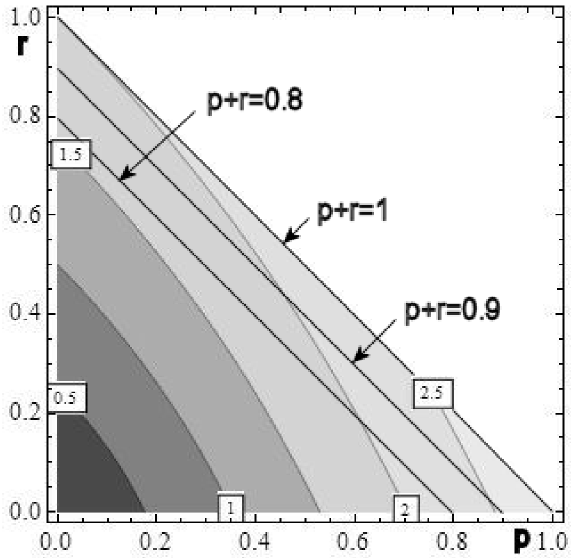

Рис. 4.4. Графік ізоліній $\beta^{max}(p, r) = const$ – максимальних значень оператора Белла на координатній площині (p, r).

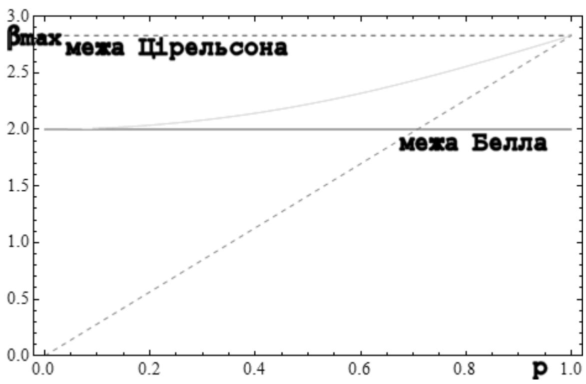

Рис. 4.5. Максимальні значення оператора Белла. Випадок $r = 1 - p$ відповідає відсутності білої складової шуму (верхня крива); випадок $r = 0$ відповідає відсутності кольорової складової шуму (нижня штрихована пряма лінія). Класична межа дорівнює 2. Межа Цірельсона [98] рівна $2\sqrt{2} \simeq 2.83$.

ні значення оператора Белла. Дві суцільні лінії відповідають випадку, коли у двофотонному поляризаційному стані (4.1) біла складова шуму відсутня ($p + r = 1$), та дві штриховані лінії відповідають випадку, коли кольорова і біла складові шуму входять до стану (4.1) з однаковими ваговими коефіцієнтами $r = (1 - p)/2$. Суцільні лінії співпадають з відповідними у роботі [85]. З рисунку видно, що значення кутів θ та ϕ для фіксованої частки чистого заплутаного стану (p - константа) залежать від розподілу вагових коефіцієнтів білої та кольорової складових шуму. Отже, орієнтація аналізаторів для отримання максимальних значень оператора Белла β залежить від співвідношення білої і кольорової складових шуму у стані.

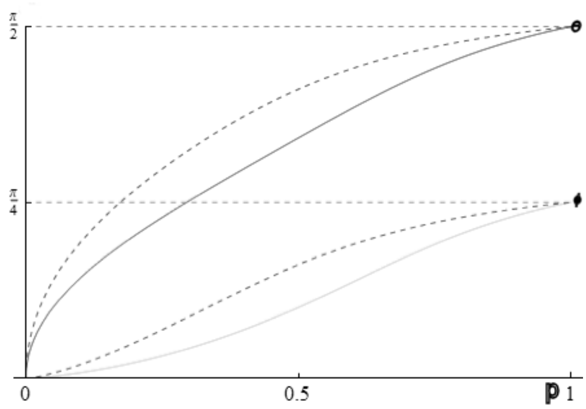

Рис. 4.6. Значення параметрів θ та ϕ, що відповідають максимальним значенням оператора Белла (дві суцільні лінії відповідають випадку $r = 1 - p$ – відсутності білої складової шуму; дві штриховані криві відповідають випадку $r = (1 - p)/2$, коли біла і кольорова складові шуму мають рівні вагові коефіцієнти).

На Рис. 4.7 точки відповідають експериментальним максимальним значенням β з роботи [85]; штрихована крива зображує теоретичне передбачення максимальних значень β на основі однопараметричної моделі кольорового шуму [84]; суцільна крива відповідає теоретичним розрахункам на основі двопараметричної (узагальненої) моделі шуму з величиною білої складової шуму 3.5% від загального вмісту шуму в стані. З рисунку бачимо, що за такого співвідношення складових шуму теоретичні розрахунки

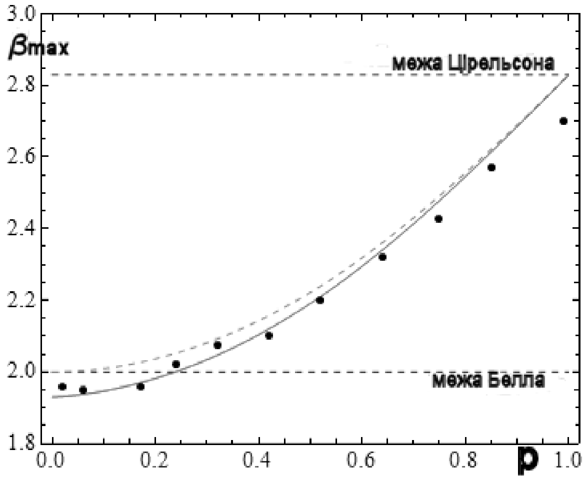

Рис. 4.7. Точки відповідають експериментальним максимальним значенням оператора Белла β (взяті з роботи [85]); штрихована крива є теоретичними передбаченнями для максимальних значень β в однопараметричній моделі кольорового шуму [84]; суцільна лінія показує теоретичні розрахунки на основі двопараметричної (узагальненої) моделі шуму з величиною білої складової шуму 3.5% від загального вмісту шуму у стані.

краще відповідають експериментальним даним, тобто узагальнена (двопараметрична) модель шуму більш точна за однопараметричну для опису реальних станів. Та і у цьому випадку, як видно з рисунку, деякі експериментальні точки лежать вище або нижче за теоретичну криву. Згідно двопараметричній моделі шуму, це можна пояснити фактом, що при переході від однієї точки до іншої в експерименті змінюється не тільки загальний вміст шуму в системі, а й відносні частки білої та кольорової складових шуму.

Така інтерпретація є цілком логічною, оскільки для кожного виміру експериментальну установку треба налаштовувати знову (зокрема, потрібно змінити орієнтацію аналізаторів в просторі). Лишаючись в рамках теоретичної моделі, що розглядається в даній роботі, та вибираючи відповідне значення параметру r для кожної експериментальної точки (для p – фіксованого) можна досягти повного узгодження теоретичних розрахунків з

№	p	$1-p$	біла,%	кольорова,%	r
1	0.02	0.98	2	98	0.96
2	0.06	0.97	3	97	0.92
3	0.17	0.83	4	96	0.80
4	0.24	0.76	2	98	0.75
5	0.32	0.68	2	98	0.67
6	0.42	0.58	5	95	0.55
7	0.52	0.48	5	95	0.46
8	0.64	0.36	7	93	0.40
9	0.75	0.25	15	85	0.21
10	0.85	0.15	15	85	0.13

Таблиця 4.1. Вміст складових шуму в стані $\hat{\rho}_{CW}$. Відповідає експериментальним точкам з Рис.4.7.

експериментальними даними. Нагадаємо, що вибрані завчасно значення параметрів p і r, згідно нашій моделі, визначають частку чистого заплутаного стану та відносні частки складових шуму. Процентні співвідношення білої і кольорової складових шуму, що дають співпадіння між теоретичними значеннями β_{max} та експериментальними даними, наведено в таблиці 4.1. Експериментальні дані взято з роботи [85].

4.5. Висновки розділу

Для адекватного моделювання двофотонних поляризаційних станів, утворених в процесі параметричної вниз-конверсії типу II (PDC type II), слід одночасно враховувати присутність як кольорової так і білої складової шуму в стані.

Умова сепарабельності для стану ρ_{CW}, отримана за допомогою критерію Переса-Городецького співпадає з умовою, отриманою при використанні критерію мажорування. Стан ρ_{CW} сепарабельний при $3p+r<1$ (для допустимих значень параметрів p та r: $0<p<1$, $0<p+r<1$). Співставлення різних критеріїв використовувалось для контролю розрахунків.

При наявності одночасно кольорового і білого шуму порушення нерівностей Белла є дуже стійким до кольорової складової шуму (нерівність Белла порушуються для всіх значень p), і порушення є нестійким до складової білого шуму. Присутність білого шуму в стані, що визначається ваговим коефіцієнтом лише 0.1 ($p+r = 0.9$), як видно з Рис. 4.4, веде до порушення нерівностей Белла лише при $p \gtrsim 0.5$.

Одночасне враховування як білої, так і кольорової складових шуму, дає можливість узгодити теоретичні розрахунки з експериментальними даними. Шляхом підбору відповідних значень параметрів p і r з експериментальних даних можна визначити частки білої і кольорової складових шуму в стані.

ВИСНОВКИ

1. На основі формули Бейкера-Кемпбелла-Хаусдорфа запропоновано загальний метод розплутування експоненціальних некомутуючих операторів, що належать скінчено-вимірній алгебрі Лі. Представлено комп'ютерну реалізацію даного методу для наближеного розплутування та проведено її апробацію на частинних випадках, для яких відомі точні аналітичні розв'язки. Апробація показала швидку збіжність і високу точність методу. Розроблений метод було використано в наступних дослідженнях по темі дисертації.

2. Досліджено квантовий шум у вихідному сигналі світлодільника інтерферометра Майкельсона. Розрахунки показують, що підсилення вихідного сигналу у світлодільнику інтерферометра Майкельсона шляхом стиснення вхідного вакуумного стану призводять до одночасного збільшення квантово-механічного шуму в розподілі числа фотонів. Підсилення вихідного сигналу можна досягти лише за рахунок подачі більш інтенсивного (із більшим $|\alpha|$) когерентного стану на вході світлодільника.

   Спостерігається, що для сильного когерентного стану у вхідному порті 1 світлодільника інтерферометра, при подачі стисненого вакуумного стану у вхідний порт 2, статистика рахування фотонів на виході дещо поліпшується в сенсі зменшення дисперсії. Наприклад, для випадку 50/50 світлодільника, ширина вихідного сигналу зменшується на величину порядку 25%.

3. Виявлено, що для випадку темного порту інтерферометра стиснення також не впливає істотно на середнє значення розподілу числа фотонів на виході темного порту світлодільника інтерферометра Майкельсона, тобто підсилення сигналу немає. Підсилення сигналу можна досягти

тільки при збільшенні інтенсивності вхідного когерентного стану, тобто при збільшенні $|\alpha|$. Показано, як стиснення дозволяє зменшити шум: для фактору стиснення порядку $r \sim 1$ зменшення шуму (зменшення ширини розподілу) рахування фотонів маємо більше ніж на 50%.

Добре розуміння квантових шумів у інтерферометричних детекторах гравітаційних хвиль дає змогу суттєво підвищити точність виміру зсуву тестових мас в детекторі, і тим самим наблизити до розв'язку задачі пошуку гравітаційних хвиль. Результати для випадку темного порту інтерферометра можуть бути безпосередньо використані для зменшення квантового шуму у вихідному сигналі, та власне в експериментах по детектуванню гравітаційних хвиль.

Для адекватного моделювання двофотонних поляризаційних станів, утворених в процесі параметричної вниз-конверсії типу II (PDC type II), слід одночасно враховувати присутність як кольорової так і білої складової шуму в стані.

4. Для цього випадку знайдено умови наявності заплутаності в досліджуваних поляризаційних станах пари фотонів. Умова сепарабельності (відсутності заплутаності) для стану ρ_{CW}, отримана за допомогою критерію Переса-Городецького співпадає з умовою, отриманою при використанні критерію мажорування. Стан ρ_{CW} є сепарабельним при $3p + r < 1$ (для допустимих значень параметрів p та r в межах: $0 < p < 1$, $0 < p+r < 1$). Співставлення різних критеріїв використовувалось для контролю розрахунків. При інших допустимих значеннях параметрів p та r стан ρ_{CW} є заплутаним.

5. Використано нерівності Белла для знаходження умов експерименталь-

ного виявлення заплутаності у стані ρ_{CW}. При наявності одночасно кольорового і білого шуму порушення нерівностей Белла є дуже стійким до кольорової складової шуму (нерівність Белла порушуються для всіх значень p), і порушення є нестійким до складової білого шуму, що узгоджується з граничними випадками, висвітленими в роботах [84, 85]. Присутність білого шуму в стані, що визначається ваговим коефіцієнтом лише 0.1 ($p + r = 0.9$) призводить до порушення нерівностей Белла лише при $p \gtrsim 0.5$.

6. Одночасне врахування як білої, так і кольорової складових шуму, дає можливість узгодити теоретичні розрахунки з експериментальними даними. Шляхом підбору відповідних значень параметрів p і r з експериментальних даних можна визначити частки білої і кольорової складових шуму в стані.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Wei J. Lie algebraic solution of linear differential equations / J. Wei, E. Norman // J. Math. Phys. — 1963. — Vol. 4. — Pp. 575–581.

2. Feynman R. An operator calculus having applications in quantum electrodynamics / R. Feynman // Phys. Rev. — 1951. — Vol. 84. — Pp. 108–128.

3. Glauber R. Some notes on multiple-Boson processes / R. Glauber // Phys. Rev. — 1951. — Vol. 84. — Pp. 395–400.

4. Wilcox R. Exponential operators and parameter differentiation in quantum physics / R. Wilcox // J. Math. Phys. — 1967. — Vol. 8. — Pp. 962–982.

5. Попов В. С. Фейнмановский метод распутывания операторов и теория представлений групп / В. С. Попов // УФН. — 2007. — Vol. 177. — P. 1319.

6. Mufti A. Finite-dimensional matrix representations as calculational tools in quantum optics / A. Mufti, H. Schmitt, M. S. III // Am. J. Phys. — 1993. — Vol. 61. — Pp. 729–733.

7. DasGupta A. Disentanglement formulas: An alternative derivation and some applications to squeezed coherent states / A. DasGupta // Am. J. Phys. — 1996. — Vol. 64. — Pp. 1422–1427.

8. Hausdorff F. Die symbolische Exponentialformel in der Gruppentheorie / F. Hausdorff // Ber. Verh. Saechs. Akad. Wiss., Leipzig, Math.-Phys. Kl. — 1906. — Vol. 58. — Pp. 19–48.

9. Baker H. Alternants and continuous groups / H. Baker // Proc. London Math. Soc. — 1905. — Vol. s2-3. — Pp. 24–47.

10. Campbell J. On a law of combination of operators / J. Campbell // Proc. London Math. Soc. — 1897. — Vol. s1-29. — Pp. 14–32.

11. Ju L. Detection of gravitational waves / L. Ju, D. G. Blair, C. Zhao // Rep. Prog. Phys. — 2000. — Vol. 63. — P. 1317–1427.

12. Gertsenshtein M. E. On the detection of low frequency gravitational waves / M. E. Gertsenshtein, V. I. Pustovoit // Sov. Phys. - JETP. — 1962. — Vol. 16. — P. 433.

13. Weiss R. Electromagnetically Coupled Broadband Gravitational Antenna / R. Weiss // MIT Res. Lab. Electron. Q. Report. — 1972. — Vol. 105. — P. 54.

14. Moss G. E. Photon-noise-limited laser transducer for gravitational antenna / G. E. Moss, L. R. Miller, R. L. Forward // Appl. Opt. — 1971. — Vol. 10. — P. 2495.

15. Forward R. L. Wide-band laser interferometer gravitational-radiation experiment / R. L. Forward // Phys. Rev. D. — 1978. — Vol. 17. — P. 379.

16. Corbitt T. Quantum noise in gravitational-wave interferometers / T. Corbitt, N. Mavalvala // J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. — 2004. — Vol. 6. — Pp. S675–S683.

17. Haus H. A. From classical to quantum noise / H. A. Haus // J. Opt. Soc. Am. B. — 1995. — Vol. 12. — Pp. 2019–2036.

18. Клышко Д. Н. Фотонный шум: наблюдение, подавление, интерпретация / Д. Н. Клышко, А. В. Масалов // УФН. — 1995. — Т. 165. — С. 1249–1278.

19. Caves C. M. Quantum-mechanical noise in an interferometer / C. M. Caves // Phys. Rev. D. — 1981. — Vol. 23. — Pp. 1693–1708.

20. Pace A. F. Quantum limits in interferometric detection of gravitational radiation / A. F. Pace, M. J. Collett, D. F. Walls // Phys. Rev. A. — 1993. — Vol. 47. — P. 3173.

21. Kimble H. J. Conversion of conventional gravitational-wave interferometers into quantum nondemolition interferometers by modifying their input and/or output optics / H. J. Kimble, Y. Levin, A. B. Matsko [et al.] // Phys. Rev. D. — 2001. — Vol. 65. — P. 022002.

22. Assaf O. Reduction of qunatum noise in the Michelson interferometer by use of squeezed vacuum states / O. Assaf, Y. Ben-Aryeh // J. Opt. Soc. Am. B. — 2002. — Vol. 19. — Pp. 2716–2721.

23. Barak R. Photon statistics and entanglement in coherent-squeezed linear Mach-Zehnder and Michelson interferometers / R. Barak, Y. Ben-Aryeh // J. Opt. Soc. Am. B. — 2008. — Vol. 25. — Pp. 361–372.

24. Ben-Aryeh Y. Reduction of quantum noise and increase of amplification of gravitational waves signals in Michelson interferometer by the use of squeezed states / Y. Ben-Aryeh // arXiv:1005.4790. — 2010.

25. Eberle T. Quantum Enhancement of the Zero-Area Sagnac Interferometer Topology for Gravitational Wave Detection / T. Eberle, S. Steinlechner, J. Bauchrowitz [et al.]. // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Vol. 104. — Pp. 251102.

26. Einstein A. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? / A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen // Phys. Rev. — 1935. — Vol. 47. — Pp. 777–784.

27. Bell J. S. On the Einstein Podolsky Rosen Paradox / J. S. Bell // Physics (Long Island City, N.Y.). — 1964. — Vol. 1. — Pp. 195–200.

28. Aspect A. Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time- Varying Analyzers / A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger // Phys. Rev. Lett. — 1982. — Vol. 49. — P. 1804.

29. Ou Z. Violation of Bell's Inequality and Classical Probability in a Two-Photon Correlation Experiment / Z. Ou, L. Mandel // Phys. Rev. Lett. — 1988. — Vol. 61. — P. 50–53.

30. Weihs G. Violation of Bell's Inequality under Strict Einstein Locality Conditions / G. Weihs, M. Rec, H. Weinfurter, A. Zeilinger // Phys. Rev. Lett. — 1998. — Vol. 81. — P. 5039–5043.

31. Ursin R. Free-Space distribution of entanglement and single photons over 144 km / R. Ursin, F. Tiefenbacher, T. Schmitt-Manderbach, other // Nature Physics. — 2007. — Vol. 3. — Pp. 481 – 486.

32. Bennett C. H. Quantum Cryptography: Public key distribution and coin tossing / C. H. Bennett, G. Brassard // Proceedings of the IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing. — 1984. — Pp. 175–179.

33. Ekert A. K. Quantum cryptography based on Bell's theorem / A. K. Ekert // Phys. Rev. Lett. — 1991. — Vol. 67. — P. 661–663.

34. Deutsch D. Quantum Theory, the Church-Turing Principle and the Universal Quantum Computer / D. Deutsch // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1985. — Vol. 8. — Pp. 97–117.

35. Feynman R. Simulating physics with computers / R. Feynman // Int.J.Theor.Phys. — 1982. — Vol. 21. — P. 467.

36. Shor P. W. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory / P. W. Shor // Phys. Rev. A. — 1995. — Vol. 52. — P. R2493–R2496.

37. Steane A. M. Error Correcting Codes in Quantum Theory / A. M. Steane // Phys. Rev. Lett. — 1996. — Vol. 52. — P. 793–797.

38. Bose S. Multiparticle generalization of entanglement swapping / S. Bose, V. Vedral, P. L. Knight // Phys. Rev. A. — 1998. — Vol. 57. — P. 822–829.

39. Yurke B. Bell's-inequality experiments using independent-particle sources / B. Yurke, D. Stoler // Phys. Rev. A. — 1992. — Vol. 46. — P. 2229–2234.

40. Zukowski M. "Event-ready-detectors" Bell experiment via entanglement swapping / M. Zukowski, A. Zeilinger, M. A. Horne, A. K. Ekert // Phys. Rev. Lett. — 1993. — Vol. 71. — P. 4287–4290.

41. Килин С. Я. Квантовая информация / С. Я. Килин // УФН. — 1999. — Т. 169. — С. 507–527.

42. Nielsen M. A. Quantum Computation and Quantum Information / M. A. Nielsen, I. L. Chuang. — 1st edition. — Cambridge University Press,Cambridge, 2000.

43. Валиев К. А. Квантовые компьютеры и квантовые вычисления / К. А. Валиев // УФН. — 2005. — Т. 175. — С. 3–39.

44. Horodecki R. Quantum entanglement / R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki // Rev. Mod. Phys. — 2009. — Vol. 81. — P. 865–942.

45. Popescu S. Bell's Inequalities and Density Matrices: Revealing "Hidden" Nonlocality / S. Popescu // Phys. Rev. Lett. — 1995. — Vol. 74. — P. 2619–2622.

46. Raimond J. M. Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity / J. M. Raimond, M. Brune, S. Haroche // Rev. Mod. Phys. — 2001. — Vol. 74. — P. 565–582.

47. Buzek V. Broadcasting of entanglement via local copying / V. Buzek, V. Vedral, M. B. Plenio [et al.] // Phys. Rev. A. — 1997. — Vol. 55. — P. 565–582.

48. Mandilara A. Control of multiatom entanglement in a cavity / A. Mandilara, V. M. Akulin, M. Kolar, G. Kurizki // Phys. Rev. A. — 2007. — Vol. 75. — P. 022327.

49. Kwait P. G. New High-Intensity Source of Polarization-Entangled Photon Pairs / P. G. Kwait, K. Mattle, H. Weinfurter [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 1995. — Vol. 75. — P. 4337.

50. Scholz D. Disentangling exponential operators / D. Scholz, V. G. Voronov, M. Weyrauch // J. Math. Phys. — 2010. — Vol. 51. — P. 063513.

51. Voronov V. G. Quantum noise in optical interferometers / V. G. Voronov, M. Weyrauch // Phys. Rev. A. — 2010. — Vol. 81. — P. 053816.

52. Dotsenko I. Robustness of Noise-Present Bell's Inequality Violation by Entangled State / I. Dotsenko, V. Voronov // Ukrainian Journal of Physics. — 2008. — Vol. 53. — Pp. 1006–1011.

53. Dotsenko I. S. Quantum correlations of two-photon polarization states in the parametric down-conversion in the presence of white and colored noise / I. S. Dotsenko, V. G. Voronov // Optics Communications. — 2009. — Vol. 282. — Pp. 2889–2893.

54. Dotsenko I. S. Quantum correlations of two-photon polarization states in the parametric down-conversion process / I. S. Dotsenko, V. G. Voronov // abstr. 10th International Young Scientists Conference Optics and High Technology Material Science, Kyiv, Ukraine. — 2009. — Pp. 153–154.

55. Dotsenko I. S. Quantum correlations of two-photon polarization states in the presence of noise / I. S. Dotsenko, V. G. Voronov // abstr. XIII International Conference on Quantum Optics and Quantum Information, Kyiv, Ukraine. — 2010. — Pp. 57–58.

56. Voronov V. G. Quantum noise in optical interferometers / V. G. Voronov, M. Weyrauch // abstr. XIII International Conference on Quantum Optics and Quantum Information, Kyiv, Ukraine. — 2010. — Pp. 75–76.

57. Voronov V. G. Reduction of quantum noise in optical interferometers / V. G. Voronov, M. Weyrauch // abstr. 11th International Young Scientists Conference Optics and High Technology Material Science, Kyiv, Ukraine. — 2010. — P. 150.

58. Trotter H. F. On the Product of Semi-Groups of Operators / H. F. Trotter // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1959. — Vol. 10. — Pp. 545–551.

59. Sornborger A. T. Higher-order methods for simulations on quantum computers / A. T. Sornborger, E. D. Stewart // Phys. Rev. A. — 1999. — Vol. 60. — P. 1956–1965.

60. Echave J. Baker-Campbell-Hausdorff relations for finite-dimensional lie algebras / J. Echave, F. M. Fernandez // Journal of Mathematical Chemistry. — 1991. — Vol. 9. — Pp. 87–94.

61. Witschel W. On Baker-Campbell-Hausdorff operator disentangling by similarity transformations / W. Witschel // Physics Letters A. — 1985. — Vol. 111. — Pp. 383–388.

62. Weber J. Detection and generation of gravitational waves / J. Weber // Phys. Rev. — 1960. — Vol. 117. — P. 306.

63. Weber J. Evidence for discovery of gravitational radiation / J. Weber // Phys. Rev. Lett. — 1969. — Vol. 22. — P. 1320.

64. Rowan S. Gravitational Wave Detection by Interferometry (Ground and Space) / S. Rowan, J. Hough // Living Rev. Relativity. — 2000. — Vol. 3. — P. 3.

65. Aufmuth P. Gravitational wave detectors / P. Aufmuth, K. Danzmann // New J. Phys. — 2005. — Vol. 7. — P. 202.

66. Glauber R. J. Photon Correlations / R. J. Glauber // Phys. Rev. Lett. — 1963. — Vol. 10. — Pp. 84–86.

67. Stoler D. Equivalence Classes of Minimum Uncertainty Packets / D. Stoler // Phys. Rev. D. — 1970. — Vol. 1. — Pp. 1677–1682.

68. Slusher R. E. Observation of Squeezed States Generated by Four-Wave Mixing in an Optical Cavity / R. E. Slusher, L. W. Hollberg, B. Yurke [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 1985. — Vol. 55. — P. 2409–2412.

69. Wu L.-A. Generation of Squeezed States by Parametric Down Conversion / L.-A. Wu, H. J. Kimble, J. L. Hall, H. Wu // Phys. Rev. Lett. — 1986. — Vol. 57. — P. 2520–2523.

70. Schiller S. Quantum Statistics of the Squeezed Vacuum by Measurement of the Density Matrix in the Number State Representation / S. Schiller, G. Breitenbach, S. F. Pereira [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 1996. — Vol. 77. — P. 2933–2936.

71. Mehmet M. Observation of squeezed states with strong photon-number oscillations / M. Mehmet, H. Vahlbruch1, N. Lastzka [et al.] // Phys. Rev. A. — 2010. — Vol. 81. — P. 013814.

72. Braginsky V. B. Quantum nondemolition measurements: the route from toys to tools / V. B. Braginsky, F. Y. Khalili // Rev. Mod. Phys. — 1996. — Vol. 68. — Pp. 1–11.

73. Caves C. M. Quantum-Mechanical Radiation-Pressure Fluctuations in an Interferometer / C. M. Caves // Phys. Rev. Lett. — 1980. — Vol. 45. — P. 75–79.

74. Unruh W. G. Quantum nondemolition and gravity-wave detection / W. G. Unruh // Phys. Rev. D. — 1979. — Vol. 19. — P. 2888–2896.

75. Thorne K. S. Gravitational-wave research: Current status and future prospects / K. S. Thorne // Rev. Mod. Phys. — 1980. — Vol. 52. — P. 285–297.

76. Xiao M. Precision measurement beyond the shot-noise limit / M. Xiao, L.-A. Wu, H. J. Kimble // Phys. Rev. Lett. — 1987. — Vol. 59. — P. 278–281.

77. McKenzie K. Experimental Demonstration of a Squeezing-Enhanced Power-Recycled Michelson Interferometer for Gravitational Wave Detection / K. McKenzie, D. A. Shaddock, D. E. McClelland [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2002. — Vol. 83. — P. 231102.

78. Clauser J. F. Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories / J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, R. A. Holt // Phys. Rev. Lett. — 1969. — Vol. 23. — P. 880.

79. Bennett C. H. Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states / C. H. Bennett, S. J. Wiesner // Phys. Rev. Lett. — 1992. — Vol. 69. — P. 2881–2884.

80. Bruss D. Characterizing entanglement / D. Bruss // J. Math. Phys. — 2002. — Vol. 43. — P. 4237.

81. Peres A. Separability Criterion for Density Matrices / A. Peres // Phys. Rev. Lett. — 1996. — Vol. 77. — P. 1413–1415.

82. Horodecki M. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions / M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki // Phys. Lett. A. — 1996. — Vol. 223. — Pp. 1–8.

83. Nielsen M. Separable States Are More Disordered Globally than Locally / M. Nielsen, J. Kemple // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 86. — P. 5184–5187.

84. Cabello A. Bell's inequalities with realistic noise for polarization-entangled photons / A. Cabello, A. Feito, A. Lamas-Linares // Phys. Rev. A. — 2005. — Vol. 72. — P. 052112.

85. Bovino F. A. Experimental noise-resistant Bell-inequality violations for polarization-entangled photons / F. A. Bovino, G. Castagnoli, A. Cabello, A. Lamas-Linares // Phys. Rev. A. — 2006. — Vol. 73. — P. 062110.

86. Weyrauch M. Computing the Baker-Campbell-Hausdorff series and the Zassenhaus product / M. Weyrauch, D. Scholz // Comp. Phys. Commun. — 2009. — Vol. 180. — Pp. 1558–1565.

87. Dynkin E. On the representation by means of commutators of the series $\log \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$ for noncommuting x, y / E. Dynkin // MSb25. — 1949. — Vol. 67. — Pp. 155–162. — In Russian.

88. Dynkin E. Calculation of the coefficients in the Campbell-Hausdorff formula / E. Dynkin // Dokl. Akad. Nauk. SSSR. — 1947. — Vol. 57. — Pp. 323–326.

89. Oteo J. The Baker-Campbell-Hausdorff formula and nested commutator identities / J. Oteo // J. Math. Phys. — 1991. — Vol. 32. — Pp. 419–424.

90. Wolfram Research I. Mathematica / I. Wolfram Research. — Version 7.0 edition. — Wolfram Research, Inc., Champaign, Illinois, 2008.

91. Goldberg K. The formal power series for $\log \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$ / K. Goldberg // Duke Math. J. — 1956. — Vol. 23. — Pp. 13–21.

92. Toutounji M. Algebraic approach to electronic spectroscopy and dynamics / M. Toutounji // J. Chem. Phys. — 2008. — Vol. 128. — P. 164103.

93. Yurke B. Squeezed-state enhanced two-frequency interferometry / B. Yurke, P. Grangier, R. Slusher // J. Opt. Soc. Am. B. — 1987. — Vol. 4. — Pp. 1677–1682.

94. Campos R. A. Quantum mechanical lossless beam splitter: SU(2) symmetry and photon statistics / R. A. Campos, B. E. A. Saleh, M. C. Teich // Phys. Rev. A. — 1989. — Vol. 40. — Pp. 1371–1384.

95. Scully M. O. Quantum Optics / M. O. Scully, M. S. Zubairy. — 1st edition. — Cambridge University Press, Cambride, U.K., 1997.

96. Mehmet M. Observation of squeezed states with strong photon number oscillations / M. Mehmet, H. Vahlbruch, N. Lastzka [et al.] // arXiv:0909.5386. — 2009.

97. Werner R. F. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model / R. F. Werner // Phys. Rev. A. — 1989. — Vol. 40. — P. 4277–4281.

98. Cirel'son B. Quantum generalizations of Bell's inequality / B. Cirel'son // Lett. Math. Phys. — 1980. — Vol. 4. — Pp. 93–100.